



HAL
open science

Fermeture des fonctionnelles de diffusion et de l'élasticité linéaire pour la topologie de la Mosco-convergence

Mohamed Camar-Eddine

► **To cite this version:**

Mohamed Camar-Eddine. Fermeture des fonctionnelles de diffusion et de l'élasticité linéaire pour la topologie de la Mosco-convergence. Mathématiques [math]. Université du Sud Toulon Var, 2002. Français. NNT: . tel-00006576

HAL Id: tel-00006576

<https://theses.hal.science/tel-00006576>

Submitted on 24 Jul 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR
U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES**

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR

Discipline : Mathématiques Appliquées

présentée et soutenue publiquement

par

CAMAR-EDDINE Mohamed

le 11 mars 2002

Titre :

**Fermeture des fonctionnelles de diffusion et de
l'élasticité linéaire pour la topologie de la
Mosco-convergence**

JURY

M. ALIBERT Jean-Jacques, ANAM, Université de Toulon et du Var,	Examineur
M. BOUCHITTE Guy, ANAM, Université de Toulon et du Var ,	Examineur
M. BRIANE Marc, I.N.S.A de Rennes	Rapporteur
M. CHAMBOLLE Antonin, CEREMADE-CNRS, Paris-Dauphine	Examineur
M. DAL MASO Gianni, SISSA, Trieste	Rapporteur
M. SEPPECHER Pierre, ANAM, Université de Toulon et du Var	Directeur de thèse
M. SUQUET Pierre, LMA-CNRS, Marseille	Président

A

mes parents

Mohamed Ahamed Charif & Sitti Chaharizzad Bent Said Djaffar,

mes soeurs

*Sarah Mohamed, Fatimati Zahara Mohamed, Dinarzzad Mohamed &
Aminati Mohamed*

Remerciements

Toute ma gratitude va à Monsieur **SEPPECHER Pierre** qui a dirigé cette thèse avec passion et compétence. Durant toute la durée de ce travail, il a su rester disponible malgré un emploi du temps très chargé. Outre le nombre inestimable d'heures de discussions passionnantes et enrichissantes, à plusieurs reprises lorsque j'arrivais à bout de souffle, il a su trouver les mots pour m'encourager à aller de l'avant. Sa rigueur mathématique et son intuition physique ont été, au plus haut degré, profitables à mes premiers pas dans le monde de la recherche. Merci pour m'en avoir appris les règles.

A Monsieur **ALIBERT Jean-Jacques**, j'adresse ma plus profonde reconnaissance pour ses nombreux conseils. Un grand nombre de discussions que j'ai eues avec lui, sur des thèmes mathématiques très divers, ont été pour moi, une importante source d'inspiration. Il a été le premier lecteur de mon manuscrit. Qu'il en soit chaleureusement remercié.

Je souhaite remercier Monsieur **BOUCHITTE Guy**, d'abord pour m'avoir initié, à travers ses différents cours de second cycle, à l'Analyse Fonctionnelle, et ensuite pour sa disponibilité chaque fois que j'en ai eu besoin tout au long de ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **BRIANE Marc** et Monsieur **DAL MASO Gianni** pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse. C'est pour moi un grand honneur.

Que Monsieur **CHAMBOLLE Antonin** et Monsieur **SUQUET Pierre** trouvent ici l'expression de ma plus profonde reconnaissance pour avoir accepté de participer au jury.

Je remercie tous les membres de l'équipe ANLA pour leur accueil chaleureux dont j'ai bénéficié. Mes remerciements vont également à tous ceux qui ont partagé mon bureau, pour leur soutien.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du département de Mathématiques ainsi que son personnel administratif.

Mille mercis à ma tante et à mon oncle, **Julienne** et **Bacar AHMED**, pour m'avoir donné la chance de faire des études supérieures.

Merci à celle qui, pendant ces trois années de thèse, a été ma muse, ma fiancée **Cathy Toioulou**.

Enfin, j'ai une pensée particulière pour mes soeurs et mes parents à qui je dédie cette thèse.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels et Notations générales	6
1.1 Sur la théorie de la mesure	6
1.2 Sur la notion de capacité	8
1.3 Sur la Gamma-convergence (ou épi-convergence)	11
1.4 Sur la régularisation de Moreau-Yosida	18
1.5 Sur les formes quadratiques	23
1.6 Sur les formes de Dirichlet	27
1.7 Sur la convergence au sens de Mosco	33
2 Un résultat d'homogénéisation	38
2.1 Enoncé du résultat principal	38
2.2 Description du matériau composite	38
2.3 Preuve du théorème d'homogénéisation	41
3 La Mosco-fermeture des fonctionnelles de diffusion	48
3.1 Enoncé des résultats principaux de Mosco-densité	48
3.2 Densité des formes de Dirichlet continues dans l'ensemble de toutes les formes de Dirichlet	49
3.3 Extension du résultat d'homogénéisation aux mesures atomiques	50
3.4 Discrétisation d'une interaction non-locale	51
3.5 Preuve du théorème principal de Mosco-densité	54
3.6 Preuve du théorème de Mosco-densité en présence d'une condition de Dirich- let	54
4 Fonctionnelles objectives des déplacements de l'espace physique	56
4.1 Elasticité linéaire	56
4.2 Sur une notion de convergence adaptée	58
4.3 Stratégie de la preuve du résultat de densité en élasticité	66
5 Un milieu composite élastique présentant des interactions non-locales	67
5.1 Description d'un matériau composite élastique	68
5.2 Un théorème d'homogénéisation en élasticité	69

6	Fermeture des fonctionnelles de l'élasticité linéaire	82
6.1	Interactions à deux points non élémentaires	82
6.2	Interactions non-locales à plusieurs points	86
6.3	Discrétisation d'une interaction non-locale continue	95
6.4	Approximation Moreau-Yosida	97
6.5	Fermeture des fonctionnelles de l'élasticité	97
	Références	99

Introduction

Nombre de situations physiques sont décrites par la minimisation de fonctionnelles de diffusion du type

$$F_\alpha(u) := \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla u(x)|^2 dx, \quad (1)$$

où le coefficient de diffusion du matériau α peut varier d'une zone à l'autre. Ici, Ω représente le domaine occupé par le matériau. Un vaste champ de recherches mathématiques a pour objet l'étude du comportement asymptotique de ces fonctionnelles lorsque le coefficient α dépend d'un paramètre ε qui devient de plus en plus petit. C'est le cas, par exemple, lorsque l'on étudie un processus de diffusion dans un milieu poreux ou composite dans lequel le paramètre ε est caractéristique de l'hétérogénéité. On est alors amené à considérer une famille (F_{α_ε}) dont on détermine la limite F^{hom} . La fonctionnelle F^{hom} ainsi trouvée décrit les propriétés effectives d'un matériau qui tend à se comporter comme un matériau idéal, homogène. Ces propriétés peuvent être décrites par un coefficient de diffusion homogénéisé α^{hom} . Mais, il peut arriver que le nouveau matériau ne soit plus isotrope auquel cas les propriétés effectives du matériau homogénéisé sont décrites par une matrice de diffusion $A(x)$ et la fonctionnelle limite F^{hom} s'écrit :

$$F^{\text{hom}}(u) := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot A(x) \cdot \nabla u(x) dx. \quad (2)$$

Il a été prouvé [39] que, lorsque la suite des coefficients de diffusion (α_ε) ainsi que celle de leurs inverses $(\alpha_\varepsilon^{-1})$ sont bornées, alors la limite F^{hom} des fonctionnelles (1) est de la forme (2). Bien que ce résultat soit encore vrai sous de moindres hypothèses [12], il n'en est pas toujours ainsi : des exemples sont connus (cf. [12], [4], [5] et [36]) où des interactions non-locales apparaissent à la limite. Ces interactions sont représentées par une mesure de Radon μ positive sur $\Omega \times \Omega$, et dans la fonctionnelle limite F^{hom} apparaît alors le *terme non-local* :

$$\int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y))^2 \mu(dx, dy). \quad (3)$$

D'autres exemples sont connus [18] où la fonctionnelle limite F^{hom} contient un terme dit *étrange* de la forme :

$$\int_{\Omega} (u(x))^2 \nu(dx), \quad (4)$$

où ν est une mesure de Radon positive sur Ω .

La question qui se pose naturellement après ces observations est l'identification de toutes les fonctionnelles qui peuvent être obtenues comme limites de suites de fonctionnelles de diffusion. D'après un résultat dû à Umberto MOSCO, la limite d'une suite de fonctionnelles de type (1) est une forme de Dirichlet, c'est-à-dire dans le cas régulier, une somme de termes de type (2), (3) et (4). Dans la première partie de cette thèse (Chapitres **2** et **3**), nous nous intéressons au problème inverse suivant : Est-ce que toute forme de Dirichlet est la limite d'une suite de fonctionnelles de type (1) ? Très récemment, Briane et Tchou [10] ont apporté une réponse partielle à cette question. Ils ont prouvé que toute interaction non-locale de type (3), où la mesure μ a la forme particulière $1_E(x)1_E(y) dx dy$ peut être atteinte. Le résultat principal du chapitre **3** de cette thèse précise davantage les choses : il énonce que toute forme de Dirichlet est limite d'une suite de fonctionnelles de type (1). Autrement dit, la fermeture des fonctionnelles de diffusion coïncide avec l'ensemble de toutes les formes de Dirichlet.

La preuve de ce résultat se fait en plusieurs étapes : on commence (Chapitre **2**) par construire un matériau composite dont les propriétés effectives contiennent un terme non-local du type (3) avec une interaction μ à portée et direction fixes. i.e. la mesure μ est de la forme

$$\mu(dx, dy) := \delta_{x+w}(dy) \mathbf{1}_\Omega(x+w) f(x) dx, \quad (5)$$

où w est un vecteur de \mathbb{R}^3 et f une fonction positive dans $L^\infty(\Omega)$. Dans ce cas particulier, le terme non-local (3) s'écrit

$$\int_{\Omega} (u(x) - u(x+w))^2 \mathbf{1}_\Omega(x+w) f(x) dx. \quad (6)$$

Puis, de proche en proche, on atteint des formes de Dirichlet de plus en plus complexes.

Plus précisément, au chapitre **3**, dans un premier temps, grâce à la régularisation de Moreau-Yosida, nous focalisons notre attention sur les formes de Dirichlet continues ; dans le cas objectif, c'est-à-dire lorsque la fonctionnelle F vérifie

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad F(u+c) = F(u), \quad (7)$$

on montre qu'elle se met alors sous la forme (3). Dans un second temps, nous généralisons le résultat du chapitre **2** au cas où la mesure μ est une combinaison finie de terme de la forme (5). Ensuite, par une discrétisation de la mesure μ (section **3.4**), nous approchons F par une suite de combinaisons finies de termes non-locaux de type (6). La section 3.5 est consacrée à la conclusion de la preuve du résultat de densité dans le cas objectif (Théorème 3.1).

En dernier lieu, dans la section 3.6, on détermine la fermeture des fonctionnelles de diffusion soumises à une condition de Dirichlet sur une partie du bord $\partial\Omega$ (Théorème 3.2). L'idée principale de la preuve de ce dernier résultat est que : un terme étrange peut être vu comme une interaction non-locale entre la partie du bord $\partial\Omega$ où on a imposé la condition de Dirichlet et le reste du domaine. Ceci achève la partie scalaire de ce mémoire.

Dans une seconde partie (Chapitres **4**, **5** et **6**), nous répondons à une question similaire à celle traitée aux chapitres précédents, mais cette fois, en ce qui concerne les fonctionnelles

de l'élasticité linéaire. Quelles sont les fonctionnelles que l'on peut obtenir comme limites de suites de fonctionnelles de l'élasticité linéaire ? Les fonctionnelles que nous considérons sont des formes quadratiques positives sur $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de la forme

$$F(u) := \int_{\Omega} f(x, \nabla u(x)) dx, \quad (8)$$

où Ω est, comme précédemment, le domaine occupé par le matériau. La fonction $f(x, \cdot)$ est une forme quadratique positive sur l'espace des matrices 3×3 . Des considérations physiques (*l'objectivité*) nous conduisent à ne considérer que des fonctionnelles f dont les noyaux contiennent les mouvements rigides. i.e les déplacements du type $u(x) = a + b \wedge x$, où a et b sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 . Il est bien connu [21],[25] que dans ce cas f dépend uniquement du tenseur des déformations linéarisé, i.e. la partie symétrique du gradient de u ($e(u) := (\nabla u + \nabla u^t)/2$).

Le cas particulier des matériaux élastiques isotropes est d'un grand intérêt. En effet, dans ce cas la densité d'énergie f est déterminée par deux constantes α et β appelées coefficients de Lamé du matériau :

$$f(x, \nabla u(x)) = \alpha(x)\|e(u)\|^2 + \beta(x)(\text{Tr}(e(u)))^2, \quad (9)$$

où $\|e(u)\|$ désigne la norme Euclidienne de la matrice $e(u)$ et $\text{Tr}(e(u))$ sa trace.

Nous considérons un ensemble \mathcal{S} de fonctionnelles du types (8)-(9) et nous cherchons l'ensemble de toutes les limites de suites dans \mathcal{S} . Autrement dit, nous cherchons la fermeture séquentielle de cet ensemble. Ce sujet a été intensivement étudié sous des hypothèses qui assurent que la fonctionnelle limite est encore une fonctionnelle de l'élasticité linéaire. Un exemple d'hypothèse qui assure cela est [28] l'existence de deux constantes positives c et C telles que, pour tout F dans \mathcal{S} , la densité d'énergie f vérifie

$$c\|e(u)\|^2 \leq f(x, \nabla u(x)) \leq C\|e(u)\|^2. \quad (10)$$

C'est le cas, par exemple, d'un matériau composite fait de deux autres matériaux isotropes de rigidité comparable. La densité f est alors de la forme (9) avec

$$\alpha = \alpha_1 \mathbf{1}_{\Omega^n} + \alpha_2 \mathbf{1}_{\Omega \setminus \Omega^n} \quad \beta = \beta_1 \mathbf{1}_{\Omega^n} + \beta_2 \mathbf{1}_{\Omega \setminus \Omega^n}, \quad (11)$$

où Ω^n est la zone occupée par l'un des deux constituants. Dans ces cas, la théorie de bornes [26],[45],[40],[44] donne des estimations sur la fonctionnelle limite. Cependant la fermeture de l'ensemble de fonctionnelles considéré n'est pas encore complètement déterminée.

Mais il se trouve que dans beaucoup de matériaux composites, les coefficients de Lamé des constituants peuvent être très différents. Alors des hypothèses du type (10) et (11) ne conviennent plus et l'on doit considérer, par exemple, des suites de fonctionnelles telles que le rapport α_1/α_2 tende vers zéro ou l'infini. Il est connu que dans ce cas, la fonctionnelle limite peut être radicalement différente des fonctionnelles initiales. Des exemples sont connus où la fonctionnelle limite est non-locale [4],[5]. Un autre exemple [41] montre que la fonctionnelle limite peut dépendre du second gradient de u . Alors, de nombreuses questions se posent :

Peut-on obtenir toute fonctionnelle dépendant du second gradient de u ? En particulier, peut-on obtenir la fonctionnelle

$$F(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx, \quad (12)$$

où x_1 et u_1 sont les composantes de x et u dans la même direction? Une telle énergie conduit à un matériau d'un comportement inhabituel (voir [1] pour la description de ce comportement en dimension 1).

Est-ce que la fonctionnelle limite peut dépendre des dérivées d'ordre supérieur de u ? par exemple, peut-on obtenir la fonctionnelle suivante :

$$F(u) = \int_{\Omega} \|\nabla \nabla \nabla(u)\|^2 dx ? \quad (13)$$

Dans un autre genre, est-ce qu'une suite de fonctionnelles du type (8)-(9), avec des coefficients β_n positifs, peut conduire à une fonctionnelle limite du même type mais avec un coefficient limite β négatif? Grâce à la définition du coefficient de Poisson ν en fonction de ceux de Lamé :

$$\nu := \frac{\beta}{2\beta + \alpha}, \quad (14)$$

cette dernière question peut être reformulée d'une manière plus classique : est-ce qu'un matériau avec coefficient de Poisson négatif peut-être la limite de matériaux à coefficients de Poisson positifs? En particulier, peut-on obtenir la fonctionnelle dégénérée (lorsque $\nu = -1$) :

$$F(u) = \int_{\Omega} \alpha(x) \left(\|e(u)\|^2 - \frac{1}{3}(\text{Tr}(e(u)))^2 \right) dx, \quad (15)$$

de cette manière?

Une réponse positive à cette dernière question a été donnée par Milton dans [33] par la construction explicite et assez complexe d'une suite de matériaux composites.

Il est clair que cette liste de questions n'est pas exhaustive et répondre à toutes ces questions par construction explicite de suites semble hors portée.

Dans les chapitres **5** et **6** de cette thèse, nous donnons une réponse positive à chacune des questions ci-dessus. On y montre que toute fonctionnelle quadratique, positive, objective et semi-continue inférieurement (pour la topologie considérée) est limite d'une suite de fonctionnelles de l'élasticité linéaire.

Notez que dans le cas où la densité d'énergie f dépend uniquement de ∇u et non de $e(u)$ de la manière suivante,

$$f(x, \nabla(u)(x)) := \alpha(x) \|\nabla u(x)\|^2, \quad (16)$$

on peut se servir des résultats du cas scalaire pour identifier toutes les limites possibles. En effet, on peut alors écrire $f(x, \nabla u(x))$ comme somme de trois fonctionnelles de diffusion indépendantes

$$f(x, \nabla(u)(x)) := \alpha(x) \|\nabla u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^3 \alpha(x) \|\nabla u_i(x)\|^2 \quad (17)$$

qui opèrent sur les différentes composantes de u . Donc, d'après le résultat du chapitre **3**, toute limite est une somme de trois formes de Dirichlet. Par la formule de représentation de Deny-Beurling toute limite s'écrit donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(x) \eta_{ij}^k(dx) + \int_{\Omega \times \Omega} (u_k(x) - u_k(y))^2 \mu^k(dx, dy) \right. \\ \left. + \int_{\Omega} (u_k(x))^2 \nu^k(dx) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

où, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, ν^k et μ^k sont des mesures de Radon positives, respectivement sur, Ω et $\Omega \times \Omega$, et η^k est une mesure de Radon sur Ω à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques positives. Nous voyons donc qu'avec des densités d'énergie du type (16) on n'obtient qu'une petite partie de la fermeture. Au chapitre **5** nous montrons que la fermeture de l'ensemble des fonctionnelles de l'élasticité est beaucoup plus grande.

La plupart des résultats présentés dans ce mémoire sont publiés ou soumis à publication, voir [13],[14] et [15].

Chapitre 1

Rappels et Notations générales

Sommaire

1.1	Sur la théorie de la mesure	6
1.2	Sur la notion de capacité	8
1.3	Sur la Gamma-convergence (ou épi-convergence)	11
1.3.1	Définition et premières propriétés	11
1.3.2	Comparaison de la Gamma-convergence avec la convergence simple	15
1.4	Sur la régularisation de Moreau-Yosida	18
1.5	Sur les formes quadratiques	23
1.6	Sur les formes de Dirichlet	27
1.7	Sur la convergence au sens de Mosco	33

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. La plupart de ces résultats seront énoncés sans démonstration. Pour les lecteurs désireux de plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

1.1 Sur la théorie de la mesure

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 à frontière régulière. Soit Σ une tribu sur Ω (i.e une collection de parties de Ω contenant le vide, stable par complémentarité et par réunion dénombrable). Une application $\mu : \Sigma \rightarrow [0; +\infty]$ vérifiant les deux propriétés suivantes

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, pour toute famille, au plus dénombrable, d'éléments de Σ deux à deux disjoints,

est appelée une *mesure* sur Ω . On parle, parfois, de mesure positive pour la différentier des mesures vectorielles lorsque μ est à valeurs dans un espace vectoriel E . Si la tribu Σ est la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$ de Ω , μ est alors appelée mesure Borélienne. Si de plus,

μ vérifie $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$, alors la mesure μ est dite de Radon. Dans ce qui suit, toutes les mesures considérées seront des mesures Boréliennes. Lorsque μ est une mesure vectorielle, on définit la variation totale de μ , pour tout Borélien B , par $|\mu|(B) := \sup \left\{ \sum_{j \geq 1} |\mu(B_j)| \right\}$, où le supremum est pris sur l'ensemble des familles $\{B_j\}_{j \geq 1} \subset \Sigma$, au plus dénombrables, de parties de B deux à deux disjointes. Ceci définit une mesure Borélienne positive notée $|\mu|$. On notera $\mathcal{M}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{M}_b(\Omega)$) l'ensemble des mesures de Radon sur Ω (resp. mesures de Radon bornées sur Ω i.e. telles que $\mu(\Omega) < +\infty$). Par $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})$ on désignera l'ensemble des mesures de Radon sur Ω à valeurs matricielles dans $\mathbb{R}^{m \times n}$. L'ensemble $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})$ muni de la norme $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$ est un espace de Banach.

Nous aurons à considérer la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^3 que l'on notera dx et la mesure de Hausdorff de dimension α , notée \mathcal{H}^α . Lorsque μ est une mesure de Radon sur Ω , et g une fonction μ -intégrable, la mesure de densité g par rapport à μ est définie, pour tout Borélien $A \subset \Omega$, par $(g_\mu)(A) := \int_A g(x) \mu(dx)$. Soit $p \in [1, +\infty[$, on notera $L^p(\Omega, \mu)$ l'ensemble des (classes modulo l'égalité μ p.p. des) fonctions u μ -mesurables telles que $(\int_\Omega u^p \mu(dx))^{\frac{1}{p}} < \infty$. On appellera support de μ sur Ω , l'ensemble

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in \Omega ; \mu(\Omega \cap B(x, r)) > 0, \quad \forall r > 0\}.$$

Si ν est une autre mesure de Radon sur Ω , on dira que ν est absolument continue par rapport à μ , et l'on notera $\nu \ll \mu$, si la propriété suivante est satisfaite : $\forall A \in \mathcal{B}(\Omega) \quad [\mu(A) = 0] \implies [\nu(A) = 0]$.

Théorème 1.1 (Approximation par des ouverts et des compacts) *Soit μ une mesure de Radon sur Ω . Alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, on a*

- i) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) ; A \subset U, U \text{ ouvert}\}$.
- ii) $\mu(A) = \sup\{\mu(K) ; A \supset K, K \text{ compact}\}$.

Pour la preuve de ce théorème, voir, par exemple [22].

Dualité entre mesures et fonctions continues

On note $C_c(\Omega)$ (resp. $C_0(\Omega)$) l'ensemble des fonctions continues à support compact dans Ω (la fermeture de $C_c(\Omega)$ vis-à-vis de la topologie de la convergence uniforme). Il est bien connu (cf. [42]) que $\mathcal{M}_b(\Omega)$ s'identifie au dual de $C_0(\Omega)$. Il découle de cette dualité, une notion de topologie faible- \star sur $\mathcal{M}_b(\Omega)$, définie par la convergence, dite faible (ou vague), des suites de mesures dans $\mathcal{M}_b(\Omega)$: on dit qu'une suite $(\mu_n) \subset \mathcal{M}_b(\Omega)$ converge faiblement (ou vaguement) vers $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ si, et seulement si, pour tout $\varphi \in C_0(\Omega)$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega \varphi(x) \mu_n(dx) = \int_\Omega \varphi(x) \mu(dx)$. Lorsque cette égalité est vraie pour des fonctions $\varphi \in C_b(\Omega)$, on parle de convergence étroite.

Espaces fonctionnels

Nous désignerons par $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$, respectivement, l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables, de carré intégrable sur Ω , muni de la norme $\|u\|_{L^2(\Omega)} := (\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx)^{1/2}$, et l'espace de Sobolev usuel muni de la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)} := (\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx)^{1/2}$. Par $H_0^1(\Omega)$, on désignera l'ensemble des fonctions $u \in H^1(\Omega)$ qui s'annulent au bord $\partial\Omega$ de Ω . L'ensemble des fonctions Lebesgue-mesurables essentiellement bornées sur Ω sera noté $L^\infty(\Omega)$. Il est muni de la norme $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{K; |u(x)| \leq K \text{ p.p. } x \in \Omega\}$. Si Ω est le cube unité ouvert de \mathbb{R}^3 , $\Omega :=]0, 1[^3$ et \mathcal{B} sa base inférieure $\mathcal{B} :=]0, 1[^2 \times \{0\}$, alors on notera $H_{\mathcal{B}}^1(\Omega)$ le sous-ensemble de $H^1(\Omega)$ des fonctions qui s'annulent sur la base \mathcal{B} de Ω , soit $H_{\mathcal{B}}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \mathcal{B}\}$. Dans le cas vectoriel, $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ et $H_{\mathcal{B}}^1(\Omega)$ seront remplacés, respectivement, par $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, et $H_{\mathcal{B}}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Enfin, si pour tout Borélien \mathcal{D} de Ω on note $|\mathcal{D}|$ sa mesure de Lebesgue, la valeur moyenne, sur \mathcal{D} , d'une fonction $u \in L^1(\Omega)$ sera parfois notée $f_{\mathcal{D}} u := |\mathcal{D}|^{-1} \int_{\mathcal{D}} u dx$.

1.2 Sur la notion de capacité

Un outil efficace pour étudier les propriétés fines des fonctions de Sobolev est fourni par la notion de capacité. Cette dernière permet de mesurer, dans un certain sens, des ensembles très "petits" et très "complexes". Elle permet donc d'établir, de manière très précise, des énoncés en théorie des équations aux dérivées partielles. Il existe plusieurs types de capacités. Dans nos travaux, nous avons choisi la capacité de Sobolev, appelée également, capacité variationnelle. Pour plus de détails, nous renvoyons, pour ne citer que ceux-là, aux ouvrages [22], [31], [23] et [46].

Définition 1.2 (Capacité)

Soit A un sous-ensemble de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. On appellera capacité de A , la quantité

$$\text{Cap}(A, \Omega) := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx ; \varphi \in H_0^1(\Omega), A \in \text{int}(\{\varphi \geq 1\}) \right\},$$

où $\text{int}(\{\varphi \geq 1\})$ désigne l'intérieur de l'ensemble $\{\varphi \geq 1\}$.

Remarque 1.3 Par régularisation, on montre que, lorsque A est compact, on a :

$$\text{Cap}(A, \Omega) := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx ; \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 1 \text{ sur } A \right\}.$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté à craindre, nous écrirons $\text{Cap}(A)$ au lieu de $\text{Cap}(A, \Omega)$.

Interprétation physique et exemples : Si l'on imagine les bords $\partial\Omega$ et ∂A , respectivement de Ω et de A , comme les armatures d'un condensateur électrique, alors, à une constante multiplicative près, $\text{Cap}(A, \Omega)$ est la charge électrique portée par cette configuration lorsque les armatures ∂A et $\partial\Omega$ sont portées, respectivement, à des potentiels électriques égaux à 1 et 0.

Voici deux exemples élémentaires de calcul explicite de capacité d'un domaine relativement à un autre.

i) Si $\Omega = B(0, R)$ et $A = \overline{B(0, r)}$ avec $r < R$, alors un calcul élémentaire montre que

$$\text{Cap}(A, \Omega) = 4\pi \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)^{-1}.$$

Prenant, par exemple, $r = n^{-2}$ et $R = n^{-1}$, pour n assez grand, la capacité de $\overline{B(0, n^{-2})}$ relativement à $B(0, n^{-1})$ se comporte comme n^{-2} .

ii) Soient $\mathcal{C}_R := B(0, R) \times [0, h]$ et $\mathcal{C}_r := \overline{B(0, r)} \times [0, h]$ deux cylindres dans \mathbb{R}^3 . On calcule, sans difficulté, la capacité de \mathcal{C}_r relativement à \mathcal{C}_R et l'on obtient

$$\text{Cap}(\mathcal{C}_r, \mathcal{C}_R) = 2\pi h \left(\ln(R) - \ln(r) \right)^{-1}.$$

Aussi, en considérant un réseau de $2n^3$ cylindres $\{\mathcal{C}_{R_j}\}_{j=1}^{n^3}$ et $\{\mathcal{C}_{r_j}\}_{j=1}^{n^3}$ tels que $\lim R_j = \lim r_j = 0$ et $r_j \ll R_j$, la somme des capacités $\text{Cap}(\mathcal{C}_{r_j}, \mathcal{C}_{R_j})$ se comporte comme $n^3 |\ln(r_n)|^{-1}$. Par conséquent, si l'on veut que la capacité du réseau de cylindres $(\bigcup_{j=1}^{n^3} \mathcal{C}_{r_j})$, “relativement” à $(\bigcup_{j=1}^{n^3} \mathcal{C}_{R_j})$, tende vers zéro, lorsque n tend vers l'infini, il suffit de choisir la suite de rayons (r_j) de telle sorte que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j^3 |\ln(r_j)|^{-1} = 0. \quad (1.1)$$

Remarque 1.4 *L'application Cap , restreinte à la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$ de Ω , n'est pas une mesure sur Ω , au sens de la définition donnée au début de ce chapitre.*

En effet, elle n'est pas additive : prenant $\Omega = B(0, R)$ et $A = \overline{B(0, r)}$, on a $\text{Cap}(A, \Omega) = \text{Cap}(\partial A, \Omega)$ (la sphère a la même capacité que la boule fermée de même rayon). Si Cap était additive, on aurait $\text{Cap}(B(0, r), \Omega) = 0$ pour tout $r < R$; ce qui n'est pas le cas. Plus simple : sur la droite réelle \mathbb{R} , deux points distincts λ et β de $]0, 1[$, avec $\lambda < \beta$ ont pour capacités, relativement à ce même intervalle, $(\lambda(1 - \lambda))^{-1}$ et $(\beta(1 - \beta))^{-1}$, alors que celle de leur réunion est $(\lambda^{-1} + (1 - \beta)^{-1}) \neq (\lambda(1 - \lambda))^{-1} + (\beta(1 - \beta))^{-1}$.

Néanmoins, Cap est une mesure extérieure sur Ω , en ce sens qu'elle est dénombrablement sous-additive et s'annule pour l'ensemble vide (c.f [22]). Cependant, cette mesure extérieure n'est pas Borélienne, puisque, par exemple, le Borélien $\overline{B(0, r)}$ n'est pas mesurable au sens de Caratheodory [22]

Un autre outil permettant de mesurer des ensembles “petits” de \mathbb{R}^3 étant fourni par les mesures de Hausdorff, il est intéressant de connaître le lien entre la mesure extérieure Cap et les mesures de Hausdorff de dimension 1 et 2 dans \mathbb{R}^3 , soit \mathcal{H}^1 et \mathcal{H}^2 . Ceci est, en partie, expliqué dans la remarque suivante :

Remarque 1.5 *Soit $A \subset \Omega$. Si $\text{Cap}(A) = 0$, alors $\mathcal{H}^2(A) = 0$. Inversement, si $\mathcal{H}^1(A) < \infty$, alors $\text{Cap}(A) = 0$ (voir Martio [32] ou Evans-Gariepy [22]).*

On dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ a lieu *quasi-partout* dans Ω (ou pour *quasi* tout $x \in \Omega$), si elle est vérifiée sur le complémentaire d'un ensemble de capacité nulle. On notera $\mathcal{P}(x)$ q.p. $x \in \Omega$.

Définition 1.6 (Représentant précis)

Soit $u \in L^1(\Omega)$. On appelle représentant précis de u , la fonction u^* définie par

$$u^*(x) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} u \, dy, & \text{si cette limite existe,} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.2)$$

où $|B(x, r)|$ désigne la mesure de Lebesgue de la boule $B(x, r)$.

On voit donc que, deux fonctions qui sont presque-partout égales, ont le même *représentant précis*. Rappelons qu'un point $x_0 \in \mathbb{R}^3$ est appelé un point de Lebesgue d'une fonction u définie sur un voisinage de x_0 si l'on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} |u(y) - u(x_0)| \, dy = 0. \quad (1.3)$$

Il est bien connu (c.f. [22]) que, si la fonction u appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$, alors pour presque tout x dans Ω , x est un point de Lebesgue de u ; par conséquent $u^* = u$ presque-partout. La limite dans la définition de u^* pouvant exister sans que le point x soit un point de Lebesgue, le théorème 1.8 ci-dessous nous dit que le domaine où u^* ne coïncide pas avec u est très petit, en ce sens qu'il est de capacité nulle.

Cette notion de représentant précis nous sera utile pour donner un sens aux fonctionnelles de types

$$\int_{\Omega} (u(x))^2 \nu(dx) \quad \text{ou} \quad \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y))^2 \mu(dx, dy) \quad (1.4)$$

où u appartient à $H^1(\Omega)$ et ν est une mesure de Radon qui ne charge pas les ensembles de capacité nulle. En effet, u^* est définie partout sur Ω ; par ailleurs il appartient à la classe d'équivalence (modulo l'égalité presque partout) de u . Aussi, dans les formules (1.4), on devrait écrire u^* au lieu de u ; mais pour alléger les notations, nous écrirons u à la place de u^* .

Définition 1.7 (Quasi-continuité et représentant quasi-continu)

- i) Une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite quasi-continue sur Ω si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\Theta \subset \Omega$ tel que la restriction de u à Θ^c est continue et $\text{Cap}(\Theta) \leq \varepsilon$.
- ii) On appelle représentant quasi-continu de u , tout élément quasi-continu v de $H^1(\Omega)$ vérifiant $v = u$ p.p. sur Ω .

Le théorème 1.8 ci-dessous affirme, entre autres, qu'un élément de $H^1(\Omega)$ est une fonction quasi-continue sur Ω .

Théorème 1.8 Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors,

- i) il existe un Borélien Θ de capacité nulle tel que $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} u(y) \, dy$ existe pour tout $x \in \Theta^c$.

ii) De plus, on a, pour tout $x \in \Theta^c$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |u(y) - u^*(x)|^6 dy = 0,$$

où u^* est le représentant précis de u .

ii) Le représentant précis u^* de u est quasi-continu sur Ω .

Pour la preuve de ce théorème, voir Evans-Gariepy [22].

Un résultat qui aide à la compréhension de la notion de capacité est donné par la proposition 1.9 ci-dessous. Celle-ci énonce que deux fonctions peuvent différer sur un ensemble de capacité nulle tout en correspondant au même élément de $H^1(\Omega)$. Compte tenu du fait que, dans \mathbb{R}^3 les fonctions de $H^1(\Omega)$ ont une trace sur les sous-variétés de dimension 2, ces dernières ne sont donc pas de capacité nulle. Par un argument similaire, les lignes ne sont pas de capacité nulle dans le plan, comme les points ne le sont pas sur la droite réelle.

Proposition 1.9 *Soit $\mathcal{O} \subseteq \Omega$ un ouvert et $u \in H^1(\Omega)$. Alors $u|_{\mathcal{O}} \in H_0^1(\mathcal{O})$ si, et seulement si, $\tilde{u} = 0$ q.p. sur $\Omega \setminus \mathcal{O}$, où \tilde{u} est un représentant quasi-continu de u .*

Pour la preuve de cette proposition, voir par exemple, [27].

1.3 Sur la Γ -convergence (ou épi-convergence)

Un outil particulièrement adapté à l'étude du comportement asymptotique d'une suite de problèmes de minimisation est fourni par la théorie de Γ -convergence. Cette forme d'analyse introduite, il y a environ 25 ans, par Ennio De Giorgi [20], prend ses racines dans la méthode directe de Tonelli en calcul des variations. Pour une étude détaillée de cette théorie, nous renvoyons aux ouvrages [2] et [19].

1.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.10 (Γ -convergence)

Soit (X, τ) un espace topologique (métrisable). Soient (F_n) une suite de fonctionnelles définies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$ et $F : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$. On dit que la suite (F_n) Γ -converge vers F , si, et seulement si, les deux assertions suivantes sont vérifiées :

i) L'inégalité de la Γ -limite inférieure : pour tout $u \in X$, pour toute suite (u_n) convergeant vers u on a :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F(u). \quad (1.5)$$

ii) L'inégalité de la Γ -limite supérieure : pour tout $u \in X$, il existe une suite (u_n) dans X , dite approximante, telle que

$$u_n \xrightarrow{\tau} u \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \leq F(u). \quad (1.6)$$

Les topologies rencontrées tout au long de ce mémoire étant toutes métrisables $((X, \tau) = L^2(\Omega)$ (resp. $H^1(\Omega)$), muni de la topologie de la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ (resp. $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$)) nous établissons nos résultats de Γ -convergence suivant le schéma ci-dessous : on montre d'une part l'inégalité de la Γ -limite inférieure (1.5) en considérant une suite (u_n) convergeant vers u dans X de telle sorte que $(F_n(u_n))$ soit bornée (sinon, (1.5) est trivialement vérifiée). Du fait que $(F_n(u_n))$ est bornée, on arrive à déduire une relative compacité de la suite (u_n) . Ceci nous permet d'extraire de (u_n) une sous-suite $(u_{n_k})_k$ qui converge vers u dans X , et vérifiant $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(u_{n_k}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n)$. Ainsi, pour établir l'inégalité (1.5), il nous suffit de le faire avec la sous-suite (u_{n_k}) , c'est-à-dire d'établir

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(u_{n_k}) \geq F(u).$$

On établit, d'autre part, l'inégalité de la Γ -limite supérieure (1.6). Pour ce faire, on commence, par étudier le cas où la fonction u est régulière. Puis, par un argument de densité, on étend le résultat au cas général. Bien que ce dernier point soit souvent facile, dans certains cas le passage du cas régulier au cas général ne se fait pas sans difficultés.

L'une des motivations premières de cette notion de convergence de fonctionnelles est que, sous une hypothèse d'équi-coercivité sur (F_n) (*i.e.* pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un compact K_t tel que $\{F_n \leq t\} \subseteq K_t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), lorsqu'une suite $(u_n) \subset X$, vérifiant $F_n(u_n) = \min_X F_n$, pour tout n dans \mathbb{N} , converge vers un élément u , pour une topologie τ , alors la Γ -convergence de la suite (F_n) vers F , pour la topologie τ , assure que

- i) $F(u) = \inf_X F$,
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\min_X F_n) = \min_X F$.

Ceci fait de ce type de convergence, une convergence variationnelle. Nous en énonçons quelques propriétés qui servent dans la suite.

Rappelons qu'une fonctionnelle $L : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est τ -semi-continue inférieurement sur X si, et seulement si, pour tout réel λ , l'ensemble $\{x \in X ; F(x) \leq \lambda\}$ est, fermé pour la topologie τ , dans X . On écrira, en abrégé, L est s.c.i sur X . Par \overline{F} , on désignera la relaxée de F ; c'est-à-dire la plus grande minorante s.c.i de F . On montre (cf. [11] Proposition 1.3.3) que, pour tout $u \in X$, $\overline{F}(u) = \min \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) ; u_n \xrightarrow{\tau} u \right\}$.

Remarque 1.11 (Suite stationnaire) Une conséquence immédiate de la définition 1.10 est qu'une suite constante $F_n = F$ Γ -converge vers la relaxée \overline{F} de F .

En effet, si on note G la Γ -limite de la suite $F_n = F$, on a, par définition d'une Γ -limite, pour tout $u \in X$

$$G(u) = \min \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) ; u_n \xrightarrow{\tau} u \right\} = \min \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) ; u_n \xrightarrow{\tau} u \right\} = \overline{F}(u). \quad (1.7)$$

Par conséquent $G = \overline{F}$. Plus généralement on a la

Proposition 1.12 Soit (F_n) une suite de fonctionnelles qui Γ -converge vers une fonctionnelle F . Alors F est semi-continue inférieurement sur X .

Pour la commodité du lecteur nous rappelons la preuve de cette proposition dans le cas où F_n et F sont à valeurs dans $[0, +\infty]$ et où la topologie τ est métrisable. On notera d la distance qui définit τ .

Preuve : Soit $u \in X$ et (u_n) une suite qui converge vers u dans X . D'après l'inégalité de la Γ -convergence supérieure, pour tout $n \geq 1$, il existe un élément $v_n \in X$ tel que

$$d(u_n, v_n) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad F(u_n) + \frac{1}{n} \geq F_n(v_n).$$

La suite (v_n) converge alors vers u et, par l'inégalité de la Γ -limite inférieure,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(v_n) \geq F(u).$$

La semi-continuité inférieure de F sur X est ainsi établie. □

Remarque 1.13 Une suite de fonctionnelles (F_n) Γ -converge vers F si, et seulement si, la suite des relaxées (\overline{F}_n) Γ -converge vers F .

Preuve : Supposons que (F_n) Γ -converge vers F et montrons que (\overline{F}_n) Γ -converge vers F . Soit $u \in X$ et (u_n) une suite qui converge vers u dans X . Par définition de la relaxée de F_n , pour tout $n \geq 1$, il existe un élément $v_n \in X$ tel que

$$d(u_n, v_n) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \overline{F}_n(u_n) + \frac{1}{n} \geq F_n(v_n).$$

Donc, d'après la Γ -limite supérieure de (F_n) vers F , on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \overline{F}_n(u_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(v_n) \geq F(u).$$

L'inégalité de la Γ -limite supérieure est immédiate puisque $\overline{F}_n \leq F_n$.

Etablissons, à présent, l'implication inverse. Soit $u \in X$. Il existe une suite (u_n) qui converge vers u dans X telle que $\lim \overline{F}_n(u_n) = F(u)$. Pour tout $n \geq 1$, il existe un élément $v_n \in X$ tel que

$$d(u_n, v_n) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \overline{F}_n(u_n) + \frac{1}{n} \geq F_n(v_n).$$

On en déduit que la suite (v_n) converge vers u et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(v_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{F}_n(u_n) = F(u).$$

L'inégalité de la Γ -limite inférieure est immédiate puisque $\overline{F}_n \leq F_n$. □

Il faut noter que la Γ -limite d'une suite de fonctionnelles dépend de la topologie choisie sur X comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.14 On pose $\Omega =]0, 1[$ et $X = L^2(\Omega)$. Soit (a_n) la suite définie par

$$a_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{k}{n} \leq x < \frac{k}{n} + \frac{1}{2n}, \\ 3, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient F_n , F et G les fonctionnelles définies, sur $L^2(\Omega)$, par

$$F_n(u) = \int_{\Omega} a_n(x)(u(x))^2 dx, \quad F(u) = 2 \int_{\Omega} (u(x))^2 dx \quad \text{et} \quad G(u) = \frac{3}{2} \int_{\Omega} (u(x))^2 dx.$$

On montre alors que la suite (F_n) Γ -converge vers F pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$, tandis que sa Γ -limite, pour la topologie faible de $L^2(\Omega)$, est G .

En effet, soit (u_n) une suite convergeant fortement vers un certain u dans $L^2(\Omega)$. Alors la suite (u_n^2) converge fortement vers u^2 dans $L^1(\Omega)$. Comme (a_n) converge \star -faiblement vers 2 dans $L^\infty(\Omega)$, on a $\lim \int_{\Omega} a_n(x)(u_n(x))^2 dx = 2 \int_{\Omega} (u(x))^2 dx = F(u)$, ce qui prouve la Γ -convergence de (F_n) vers F pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$.

Soit, à présent, (u_n) une suite convergeant vers u , faiblement dans $L^2(\Omega)$. Comme la suite (a_n^{-1}) converge \star -faiblement vers $2/3$ dans $L^\infty(\Omega)$, on a, puisque pour tout $n \geq 1$ $a_n(u_n)^2 \geq 3u_n u - 9u^2/4a_n$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a_n(x)(u_n(x))^2 dx \geq \frac{3}{2} \int_{\Omega} (u(x))^2 dx.$$

D'autre part, pour tout $u \in L^2(\Omega)$, la suite (u_n) définie par $u_n(x) = 3u(x)/2a_n(x)$, converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$. Comme, pour tout $n \geq 1$, $a_n u_n^2 = 9u^2/4a_n$, on en déduit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a_n(x)(u_n(x))^2 dx \leq \frac{3}{2} \int_{\Omega} (u(x))^2 dx.$$

Finalement, (F_n) Γ -converge vers G , pour la topologie faible de $L^2(\Omega)$. □

Nous rappelons cette proposition affirmant la stabilité, par perturbation continue, de la Γ -convergence.

Proposition 1.15 Soit $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue. Si (F_n) Γ -converge vers F dans X , alors $(F_n + G)$ Γ -converge vers $F + G$ dans X .

Pour la preuve de cette proposition, voir, par exemple, [2] ou [19].

Une autre curiosité de cette notion de Γ -convergence est le fait que la somme de deux suites qui Γ -convergent ne converge pas nécessairement ; de plus, même dans la situation où cette somme converge, la Γ -limite de la somme n'est pas nécessairement égale à la somme des Γ -limites. Voici quelques exemples :

Exemple 1.16 On prend $X = \mathbb{R}$, $F_n(x) = \sin(nx)$ et $G_n(x) = -\sin(nx)$. Il est clair que la suite $(F_n + G_n)$ Γ -converge vers zéro alors que (F_n) et (G_n) Γ -convergent toutes les deux, clairement, vers -1 . En effet, soit (x_n) une suite qui converge vers un certain x dans \mathbb{R} . On a $\liminf \sin(nx_n) \geq -1$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \rightarrow \sin(nx)$ étant $\frac{2\pi}{n}$ -périodique, il existe une suite (x_n) dans \mathbb{R} qui vérifie $|x_n - x| \leq \frac{2\pi}{n}$ et $\sin(nx_n) = -1$. \square

Exemple 1.17 Sur \mathbb{R} , on pose $F_n(x) = \sin(nx)$ et $G_n(x) = (-1)^n \sin(nx)$. Alors (F_n) et (G_n) Γ -convergent vers -1 . Cependant la suite $(F_n + G_n)$ ne Γ -converge pas, puisque l'on a $\inf\{\liminf(F_n + G_n)(x_n); x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\} = -2$ et $\inf\{\limsup(F_n + G_n)(x_n); x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\} = 0$. Ceci empêche la suite $(F_n + G_n)$ de Γ -converger, bien que (F_n) et (G_n) Γ -convergent séparément.

En général, on a seulement une inégalité comme l'indique la

Proposition 1.18 Soient (F_n) et (G_n) deux suites Γ -convergeant sur X , respectivement, vers F et G . Si la suite $(F_n + G_n)$ Γ -converge vers H , alors

$$F + G \leq H, \quad (1.8)$$

dès que les fonctionnelles $F_n + G_n$ et $F + G$ sont bien définies sur X .

Pour la démonstration de cette proposition, voir Dal Maso [19].

L'exemple 1.16 montre que l'inégalité 1.8 peut être stricte. La proposition 1.21 suivante donne un cadre où la Γ -limite de la somme est égale à la somme des Γ -limites. Avant de l'énoncer, rappelons la définition suivante (c.f. [19]).

Définition 1.19 (convergence continue)

On dit qu'une suite (F_n) est continûment convergente (dans (X, τ)) vers une fonctionnelle $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage V de $F(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, il existe un entier k et un voisinage U de x tels que $F_n(y) \in V$ pour tout $n \geq k$ et tout $y \in U$.

Remarque 1.20 La convergence continue entraîne la convergence simple. Elle entraîne aussi la Γ -convergence puisqu'une suite (F_n) converge continûment vers F si, et seulement si, (F_n) et $(-F_n)$ Γ -convergent, respectivement, vers F et $-F$.

Proposition 1.21 Soient (F_n) et (G_n) deux suites Γ -convergeant, dans (X, τ) , respectivement vers F et G . Si les fonctionnelles G_n et G sont partout finies sur X et si, de plus, la suite (G_n) est continûment convergente vers G , alors la suite $(F_n + G_n)$ Γ -converge vers $F + G$.

1.3.2 Comparaison de la Γ -convergence avec la convergence simple

Une question naturelle qui se pose est : la Γ -convergence d'une suite de fonctionnelles (F_n) vers F entraîne-t-elle la convergence simple de la suite (F_n) vers F et vice versa ? La réponse à cette question est *non*, comme l'indique les exemples ci-après, tirés de l'ouvrage de Dal maso [19].

Exemple 1.22 On se place dans le cas où $X = \mathbb{R}$ et τ est la topologie usuelle de \mathbb{R} . Si (F_n) est la suite de fonctions définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, par $F_n(x) = nxe^{-2n^2x^2}$, on montre facilement que la suite (F_n) Γ -converge vers la fonction qui vaut zéro sur toute la droite réelle à l'exception de l'origine où elle prend la valeur $-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, alors que (F_n) converge simplement vers la fonction identiquement nulle.

Exemple 1.23 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n(x - e^n) \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite (F_n) ainsi définie Γ -converge vers zéro. L'inégalité de la Γ -limite inférieure est évidente. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note φ_n un entier quelconque de l'intervalle $[-1 + n(x - e^n), 1 + n(x - e^n)]$ (un tel entier existe puisque $[-1 + n(x - e^n), 1 + n(x - e^n)]$ est un intervalle de longueur égale à 2). Si l'on pose $x_n := \varphi_n/n + e^n$, on a

$$\begin{cases} |x - x_n| \leq \frac{1}{n} \\ \text{et} \\ n(x_n - e^n) = \varphi_n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On en déduit que la suite (x_n) converge vers x et que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) = 0$.

D'autre part, le réel e étant transcendant sur \mathbb{Q} , pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe au plus un entier n tel que $F_n(x) = 0$ (Sinon, il existerait deux entiers distincts n et m et un rationnel r tels que e soit racine du polynôme $P(X) = X^n - X^m + r = 0$. Ce qui est impossible). Il suit alors que la suite (F_n) converge simplement vers 1, bien qu'elle Γ -converge vers zéro.

Exemple 1.24 On pose $X = \mathbb{R}$. Soit (r_n) une énumération de l'ensemble des rationnels \mathbb{Q} . Soit (F_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = r_j \text{ pour un certain } j \geq n, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite (F_n) converge simplement vers 1 (En effet, si $x \in \mathbb{Q}$, alors pour n assez grand, $F_n(x) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 1$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $F_n(x) = 1$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 1$). Par ailleurs, grâce à la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , la suite (F_n) Γ -converge vers 0.

Ces exemples montrent que, lorsqu'il y a simultanément Γ -convergence et convergence simple d'une suite (F_n) , les limites obtenues par les deux procédures ne coïncident pas nécessairement. Néanmoins, lorsque la suite considérée est monotone, et que chaque F_n est s.c.i, alors les deux notions coïncident. On a les deux propositions suivantes :

Proposition 1.25 Soit (F_n) une suite de fonctionnelles s.c.i sur X à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

i) Si (F_n) est croissante, alors elle Γ -converge vers $\sup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

ii) Si (F_n) est décroissante et converge simplement vers F , alors elle Γ -converge vers \overline{F} .

iii) Si (F_n) converge uniformément, sur X , vers F , alors elle Γ -converge vers F .

Pour la preuve de cette proposition, voir par exemple, [19, 2].

Noter que l'hypothèse de semi-continuité dans la proposition 1.25 n'est pas superflue. Si on la supprime, on obtient les mêmes assertions mais cette fois avec \overline{F} comme Γ -limite au lieu de F (cf. [19]). Ceci, même si la suite est monotone. L'exemple 1.24 en témoigne.

Pour assurer l'égalité des deux limites, on demande à la suite (F_n) d'avoir la propriété d'équi-semicontinuité inférieure, auquel cas, (F_n) Γ -converge vers F si, et seulement si, elle converge simplement vers F (cf. [19] Proposition 5.9).

Les assertions i) et ii) de la proposition 1.25 expliquent le succès de toutes les méthodes d'approximation monotone en optimisation, telle l'approximation de Yosida qui est d'un grand usage dans l'ensemble de notre travail. Nous en rappelons la définition et quelques propriétés dans la section 1.4.

Remarque 1.26 *Noter que la Γ -convergence est aussi appelée l'épi-convergence. Cette autre appellation est justifiée par le fait que la Γ -convergence d'une suite (F_n) vers F est équivalente à la convergence de la suite $\{\text{épi}(F_n)\}$ des épigraphes des fonctionnelles F_n vers $\text{épi}(F)$, au sens de Kuratowski-Painlevé [2, 19].*

Rappelons maintenant, une importante propriété qui justifie l'intérêt de ce type de convergence dans l'étude des problèmes variationnels.

Proposition 1.27 *Soit (F_n) une suite de fonctionnelles définies sur X et vérifiant :*

i) (F_n) Γ -converge vers une fonctionnelle F .

ii) Il existe un compact K (indépendant de n) pour la topologie τ tel que $\inf_X F_n = \inf_K F_n$.

Alors la suite de réels $(\inf_X F_n)$ converge vers $\inf_X F = \inf_K F$. En outre, si $(u_{n_k})_k$ est une suite vérifiant

$$u_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\tau} u \quad \text{et} \quad F_{n_k}(u_{n_k}) = \min_X F_{n_k} ,$$

alors u vérifie $F(u) = \min_X F$.

Pour la preuve de cette proposition, voir [19] ou [2]. Il faut noter que l'hypothèse ii) (qui est moins forte que l'équi-coercivité de la suite (F_n)) est fondamentale. En effet, l'exemple élémentaire suivant, montre que la Γ -convergence de (F_n) vers F , à elle seule, n'entraîne pas la convergence des minima $(\min_X F_n)$ vers $\min_X F$:

Exemple 1.28 Sur la droite réelle \mathbb{R} , on pose $F_n(x) = (1 + x/n)^2$. Il est clair que (F_n) Γ -converge vers la fonction constante égale à 1, puisque toute suite (x_n) convergeant vers un certain x dans \mathbb{R} , est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x_n}{n})^2 = 1$. Par ailleurs chaque F_n admet zéro comme minimum. On n'a donc pas convergence de $\min_X F_n$ vers $\min_X F$.

1.4 Sur la régularisation de Moreau-Yosida

Soient (X, d) un espace métrique et $F : X \rightarrow [0, +\infty]$ une fonctionnelle définie sur X . On suppose qu'il existe au moins un élément $u \in X$ tel que $F(u) < \infty$ (on dit alors que la fonctionnelle F est propre). Pour tout $\lambda > 0$, on appelle approximation de Moreau-Yosida d'ordre λ de F , la fonctionnelle $Y_\lambda(F)$ définie sur X par

$$Y_\lambda(F)(u) = \inf_{v \in X} \{F(v) + \lambda d(u, v)^2\}. \quad (1.9)$$

Dans [34] Moreau introduit la notion de "proximal approximation" d'une fonction numérique F convexe et s.c.i sur un espace de Hilbert H , en posant, pour tout $u \in H$, $\text{Prox}_F(u) = \bar{u}$, où \bar{u} est l'unique élément de H solution du problème variationnel (1.9) lorsque $\lambda = 2$. Par exemple, lorsque F est la fonction indicatrice d'un convexe fermé $K \subset H$, alors $\text{Prox}_F(u)$ n'est rien d'autre que la projection de u sur le convexe K . Il a été prouvé [34] que la dérivée de $Y_\lambda(F)$, au sens de Frechet, coïncide avec la régularisée Yosida d'ordre λ [8],[9] de l'opérateur ∂F (le sous-différentiel de F); d'où la référence à Yosida.

Voici, en bref, quelques propriétés de $Y_\lambda(F)$.

Proposition 1.29 *Soit $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle propre. Pour tout $\lambda > 0$, la fonctionnelle $Y_\lambda(F)$ vérifie :*

i) Pour tout $\lambda > 0$, la fonctionnelle $Y_\lambda(F)$ est localement-Lipschitzienne. Plus précisément, pour tout $u_0 \in X$, et $r_0 > 0$, il existe une constante $c_0 > 0$ telle que

$$\forall u, v \in B(u_0, r_0), \quad |Y_\lambda(F)(u) - Y_\lambda(F)(v)| \leq c_0 d(u, v). \quad (1.10)$$

ii) Pour tout $u \in X$, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} Y_\lambda(F)(u) = \sup_{\lambda > 0} Y_\lambda(F)(u) = \bar{F}(u), \quad (1.11)$$

où \bar{F} désigne la relaxée de F .

Nous en rappelons la preuve.

Preuve : *i)* Soient u, v et u_0 dans X . Soit $\lambda > 0$. Par définition de $Y_\lambda(F)(v)$, on a

$$Y_\lambda(F)(v) \leq F(w) + \lambda d(w, u)^2 + \lambda(d(w, v)^2 - d(w, u)^2), \quad \text{pour tout } w \in X. \quad (1.12)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $w_\varepsilon^u \in X$ tel que

$$F(w_\varepsilon^u) + \lambda d(w_\varepsilon^u, u)^2 \leq Y_\lambda(F)(u) + \varepsilon. \quad (1.13)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} Y_\lambda(F)(v) &\leq Y_\lambda(F)(u) + \varepsilon + \lambda(d(w_\varepsilon^u, u) + d(w_\varepsilon^u, v))d(u, v) \\ &\leq Y_\lambda(F)(u) + \varepsilon + \lambda(2d(w_\varepsilon^u, u) + d(u, v))d(u, v). \end{aligned} \quad (1.14)$$

D'autre part, on a, pour tout z dans X

$$d(w_\varepsilon^u, u)^2 + \frac{1}{\lambda}F(w_\varepsilon^u) \leq \frac{1}{\lambda}[Y_\lambda(F)(u) + \varepsilon] \leq \frac{1}{\lambda}[F(z) + \lambda d(z, u)^2 + \varepsilon]. \quad (1.15)$$

La fonctionnelle F étant propre, il existe un élément z_0 dans X et un réel $M > 0$ tels que $F(z_0) < M < \infty$. L'inégalité (1.15) donne

$$d(w_\varepsilon^u, u)^2 \leq \frac{1}{\lambda}(Y_\lambda(F)(u) + \varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda}(M + 2\lambda(d(z_0, u_0)^2 + d(u_0, u)^2) + \varepsilon). \quad (1.16)$$

Par conséquent

$$d(w_\varepsilon^u, u) \leq \left(\frac{1}{\lambda}(M + 2\lambda(d(z_0, u_0)^2 + d(u_0, u)^2) + \varepsilon) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.17)$$

Si u et v sont dans la boule $B(u_0, r_0)$, alors (1.14) devient

$$Y_\lambda(F)(v) \leq Y_\lambda(F)(u) + \varepsilon + 2\lambda \left(r_0 + \left(\frac{1}{\lambda}(M + 2\lambda(d(z_0, u_0)^2 + d(u_0, u)^2)) \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda}} \right) d(u, v).$$

Cette inégalité étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, par passage à la limite, lorsque ε tend vers zéro, on obtient

$$Y_\lambda(F)(v) - Y_\lambda(F)(u) \leq 2\lambda \left(r_0 + \left(\frac{1}{\lambda}(M + 2\lambda(d(z_0, u_0)^2 + d(u_0, u)^2)) \right)^{\frac{1}{2}} \right) d(u, v).$$

Permutant les rôles de u et v dans cette dernière inégalité, on obtient

$$|Y_\lambda(F)(v) - Y_\lambda(F)(u)| \leq 2\lambda \left(r_0 + \left(\frac{1}{\lambda}(M + 2\lambda(d(z_0, u_0)^2 + d(u_0, u)^2)) \right)^{\frac{1}{2}} \right) d(u, v). \quad (1.18)$$

Posant $c_0 = 2\lambda \left(r_0 + \left(\frac{1}{\lambda}(M + 2\lambda(d(z_0, u_0)^2 + d(u_0, u)^2)) \right)^{\frac{1}{2}} \right)$, l'inégalité (1.18) prouve que $Y_\lambda(F)$ est c_0 -Lipschitzienne sur la boule $B(u_0, r_0)$. L'assertion i) est ainsi prouvée.

ii) Pour tout $\lambda > 0$, par définition de $Y_\lambda(F)$, on a $Y_\lambda(F) \leq F$. D'après i), $Y_\lambda(F)$ est localement-Lipschitzienne et donc continue. Par conséquent, $Y_\lambda(F) \leq \overline{F}$ et donc

$$\sup \{ Y_\lambda(F)(u) : \lambda > 0 \} \leq \overline{F}(u) \quad \text{pour tout } u \in X. \quad (1.19)$$

Nous fixons maintenant $u \in X$ et supposons que $\sup \{ Y_\lambda(F)(u) : \lambda > 0 \} < +\infty$. Soit $u_\lambda \in X$ tel que

$$Y_\lambda(F)(u) + \frac{1}{\lambda} \geq F(u_\lambda) + \lambda d(u, u_\lambda)^2.$$

Il vient donc que la suite (u_λ) converge vers u , lorsque λ tend vers plus l'infini. On en déduit, par définition de la relaxée de F , que

$$\overline{F}(u) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} F(u_\lambda) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} F(u_\lambda) + \lambda d(u, u_\lambda)^2 \leq \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} Y_\lambda(F)(u). \quad (1.20)$$

Regroupant (1.19) et (1.20), on obtient l'assertion *ii*). □

En particulier, si la fonctionnelle F est s.c.i, on a, puisque la suite $(Y_m(F))_m$ est croissante en m , $F(u) = \sup_m Y_m(F)(u)$.

La proposition suivante énonce que, sous certaines hypothèses, la Γ -convergence d'une suite de fonctionnelles (F_n) est équivalente à la convergence simple des approximations Moreau-Yosida $(Y_\lambda(F_n))_n$, pour tout $\lambda > 0$.

Proposition 1.30 *Soit (F_n) une suite de fonctions de (X, d) à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ vérifiant :*

$$\exists r \geq 0, \exists x_0 \in X \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \text{ on a } F_n(x) + r(d^2(x, x_0) + 1) \geq 0. \quad (1.21)$$

Alors (F_n) Γ -converge vers F si, et seulement si,

$$\sup_{\lambda > 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} Y_\lambda(F_n)(x) = \sup_{\lambda > 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} Y_\lambda(F_n)(x) = F(x), \quad \text{pour tout } x \in X. \quad (1.22)$$

Cette proposition découle immédiatement du théorème 2.65 de [2]. Comme conséquence de la proposition 1.30, nous faisons la

Remarque 1.31 *i) Si pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in X$, la suite $(Y_\lambda(F_n)(x))$ converge dans \mathbb{R} , alors la suite (F_n) Γ -converge vers la fonction F définie par*

$$\forall x \in X, \quad F(x) = \sup_{\lambda > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} Y_\lambda(F_n)(x). \quad (1.23)$$

ii) Lorsque (F_n) est une suite de fonctions définies sur $\mathbf{X} = \mathbb{R}^N$, alors sa Γ -convergence vers une fonction F est équivalente à la convergence simple de la suite $(Y_\lambda(F_n))_n$ des régularisées des F_n vers $Y_\lambda(F)$, pour tout $\lambda > 0$. C'est-à-dire

$$(\star) \quad \begin{array}{c} F_n \xrightarrow{\Gamma} F \\ \Updownarrow \\ \forall \lambda > 0, \forall u \in X, \inf_{v \in X} \{F_n(v) + \lambda \|u - v\|^2\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{v \in X} \{F(v) + \lambda \|u - v\|^2\}. \end{array}$$

Ceci signifie qu'en dimension finie, la Γ -convergence peut être caractérisée par la convergence des infima de toute une famille de perturbations quadratiques.

Remarque 1.32 *Noter que, même lorsque X est de dimension infinie, la convergence simple de la suite des approximations Moreau-Yosida $(Y_\lambda(F_n))$, associée à une suite (F_n) , pour tout λ , vers une fonction notée F^λ , entraîne la Γ -convergence de la suite (F_n) vers la fonctionnelle F définie par,*

$$\begin{aligned} \forall u \in X, \quad F(u) &= \sup_{\lambda > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} Y_\lambda(F_n)(u) \\ &= \sup_{\lambda > 0} F^\lambda(u). \quad (\text{cf. remarque 1.31 i}). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Cependant, on n'a pas nécessairement $F^\lambda = Y_\lambda(F)$. Ce phénomène est illustré dans l'exemple 1.33 ci-dessous. Nous voyons donc que le diagramme (\star) au ii) de la remarque 1.31 ci-dessus n'est plus vrai en dimension infinie : la convergence simple des approximations Moreau-Yosida $(Y_\lambda(F_n))$ d'une suite (F_n) vers une famille $(F^\lambda)_{\lambda > 0}$ entraîne toujours la Γ -convergence de la suite (F_n) vers $F := \sup_{\lambda > 0} F^\lambda$; mais la réciproque n'est, en général, pas vraie. Autrement dit, il peut y avoir Γ -convergence de (F_n) vers F sans que, pour tout $\lambda > 0$, la limite simple éventuelle de $(Y_\lambda(F_n))$ soit $(Y_\lambda(F))$.

Exemple 1.33 On pose $\Omega =]0, 1[$, $X = L^2(\Omega)$ muni de sa topologie forte. Soit (a_n) la suite définie par

$$a_n(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s \in I_n, \\ 2, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{avec } I_n = \bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left[\frac{2i}{n}, \frac{2i+1}{n} \right]. \quad (1.25)$$

Ici, $[s]$ désigne la partie entière de s . Pour tout $u \in L^2(\Omega)$, on pose

$$F_n(u) = \int_0^1 a_n(s) u^2(s) ds.$$

Un calcul élémentaire donne

$$Y_\lambda(F_n)(u) = \inf_{v \in L^2(\Omega)} \int_0^1 \{a_n(s)v^2(s) + \lambda(v(s) - u(s))^2\} ds \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{a_n(s)}{1 + \lambda^{-1}a_n(s)} u^2(s) ds \\ &= \int_0^1 b_n^\lambda(s) u^2(s) ds, \end{aligned} \quad (1.27)$$

où

$$b_n^\lambda(s) = \begin{cases} (1 + \lambda^{-1})^{-1}, & \text{si } s \in I_n, \\ 2(1 + 2\lambda^{-1})^{-1}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.28)$$

(En effet, la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème variationnelle (1.26) donne, comme unique point stationnaire de l'intégrand $f(s, v) = a(s)v^2(s) + \lambda(v(s) - u(s))^2$, l'élément $\bar{v} = \lambda u / (a + \lambda)$.)

Or pour tout $\lambda > 0$, la suite (b_n^λ) converge \star -faiblement, dans la dualité $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$, vers $b^\lambda = (3 + 4\lambda^{-1}) (2(1 + \lambda^{-1})(1 + 2\lambda^{-1}))^{-1}$. Donc, pour chaque λ positif fixé, la suite $(Y_\lambda(F_n))$ converge simplement vers la fonctionnelle F^λ définie par

$$F^\lambda(u) = \frac{(3 + 4\lambda^{-1})}{2(1 + \lambda^{-1})(1 + 2\lambda^{-1})} \int_0^1 u^2(s) ds. \quad (1.29)$$

D'autre part, d'après la proposition 1.30, la suite (F_n) Γ -converge vers $F = \sup_{\lambda > 0} F^\lambda$ soit,

$$F(u) = \frac{3}{2} \int_0^1 u^2(s) ds.$$

L'approximation Moreau-Yosida de F se calcule aisément ; on obtient

$$Y_\lambda(F)(u) = \frac{3}{2 + 3\lambda^{-1}} \int_0^1 u^2(s) ds. \quad (1.30)$$

Comparant (1.29) avec (1.30), on voit immédiatement que $Y_\lambda(F) \neq F^\lambda$. Noter le fait que, lorsque l'on fait tendre λ vers $+\infty$, aussi bien dans (1.29) que dans (1.30), on retrouve F . Ceci signifie que la fonctionnelle F^λ , bien que différente de $Y_\lambda(F)$, est une approximation de F .

Remarque 1.34 *Pour finir cette section, nous faisons remarquer que la réciproque de l'assertion i) de la remarque 1.31 est fautive. En d'autres termes, la Γ -convergence d'une suite (F_n) n'entraîne pas nécessairement la convergence simple de la suite $(Y_\lambda(F_n))_n$, pour tout $\lambda > 0$. Ceci est illustré par l'exemple suivant.*

Exemple 1.35 On pose $\Omega =]0, 1[$, $X = L^2(\Omega)$ muni de sa topologie forte. Soient (α_n) et (β_n) deux suites définies comme suit :

$$\beta_n(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{k}{n} \leq s < \frac{k}{n} + \frac{1}{2n}, \\ 3, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\alpha_n(s) = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \beta_n(s), & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose, pour tout $u \in L^2(\Omega)$,

$$F_n(u) = \int_0^1 \alpha_n(s) u^2(s) ds.$$

La suite (β_n) converge \star -faiblement vers 2. Ce qui assure la convergence faible de (α_n) vers 2 et, par suite, la Γ -convergence de la suite (F_n) vers F où $F(u) = 2 \int_0^1 u^2(s) ds$. Comme dans l'exemple 1.33, on a

$$Y_\lambda(F_n)(u) = \int_0^1 \gamma_n^\lambda(s) u^2(s) ds,$$

où

$$\gamma_n^\lambda(s) = \begin{cases} 2(1 + 2\lambda^{-1})^{-1}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \beta_n(s) (1 + \lambda^{-1}\beta_n(s))^{-1}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.31)$$

Si la suite $(\gamma_{2n}^\lambda = \beta_{2n}/(1 + \lambda^{-1}\beta_{2n}))$ convergeait \star -faiblement, dans la dualité $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$, sa limite serait $(2 + 3\lambda^{-1})((1 + \lambda^{-1})(1 + 3\lambda^{-1}))^{-1}$. Or $(2 + 3\lambda^{-1})((1 + \lambda^{-1})(1 + 3\lambda^{-1}))^{-1}$ est différent de $2(1 + 2\lambda^{-1})^{-1}$ qui est la limite de (γ_{2n+1}^λ) . Ceci empêche la convergence simple de la suite $(Y_\lambda(F_n)(u))_n$ des approximations Moreau-Yosida.

1.5 Sur les formes quadratiques

Soit H un espace de Hilbert réel de produit scalaire (\cdot, \cdot) . On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Dans ce mémoire, les espaces de Hilbert considérés seront $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $H^1(\Omega)$, $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $H_B^1(\Omega)$ et $H_B^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Définition 1.36 (Forme quadratique)

On dit qu'une fonctionnelle $F : H \rightarrow [0, +\infty]$ est une forme quadratique (positive), s'il existe un sous-espace vectoriel Y de H et une forme bilinéaire symétrique $B : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$F(u) = \begin{cases} B(u, u), & \text{si } u \in Y, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le sous-espace vectoriel Y , où F prend des valeurs finies, est appelé le domaine de F . On le note $D(F)$. La forme bilinéaire B est appelée forme polaire associée à F .

Il est souvent plus pratique d'utiliser cette caractérisation, purement algébrique, des formes quadratiques (voir Dal Maso [19]) :

Proposition 1.37 Une fonctionnelle $F : H \rightarrow [0, +\infty]$ est une forme quadratique sur H si, et seulement si, F vérifie les trois assertions suivantes :

$$F(0) = 0, \quad (1.32)$$

$$F(tu) \leq t^2 F(u) \text{ pour tout } u \in H \text{ et tout } t > 0, \quad (1.33)$$

$$F(u + v) + F(u - v) \leq 2(F(u) + F(v)), \text{ pour tout } u \text{ et } v \text{ dans } H. \quad (1.34)$$

L'ensemble des formes quadratiques positives est fermé vis-à-vis de la Γ -convergence. Plus précisément, on a (cf. Dal maso [19]) le

Théorème 1.38 (Fermeture de l'ensemble des formes quadratiques positives)
Soit (F_n) une suite de formes quadratiques positives sur H . Si (F_n) Γ -converge vers F , alors F est une forme quadratique positive sur H .

Preuve : La positivité de F découle immédiatement de celle des F_n . Il suffit donc de montrer que F vérifie les assertions (1.32), (1.33) et (1.34) de la proposition 1.37. Si l'on pose $u_n := 0$, l'inégalité de la Γ -limite inférieure entraîne (puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n(0) = 0$) que

$$0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F(0),$$

et $F(0) = 0$.

Soit t un réel positif donné. Pour tout $u \in H$, il existe une suite (u_n) convergeant vers u dans H telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \leq F(u).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n(tu_n) = t^2 F_n(u_n)$. Donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(tu_n) \leq t^2 \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \leq t^2 F(u). \quad (1.35)$$

De plus, la suite (tu_n) converge vers tu dans H . L'inégalité de Γ -limite inférieure entraîne que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(tu_n) \geq F(tu), \quad (1.36)$$

ce qui prouve (1.33) .

Reste à prouver (1.34). Soient u et v dans H . Puisque (F_n) Γ -converge vers F , il existe deux suites (u_n) et (v_n) convergeant, respectivement, vers u et v telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) = F(u) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(v_n) = F(v). \quad (1.37)$$

Donc

$$\begin{aligned} 2(F(u) + F(v)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2(F_n(u_n) + F_n(v_n)) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (F_n(u_n + v_n) + F_n(u_n - v_n)) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n + v_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n - v_n) \\ &\geq F(u + v) + F(u - v). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que F vérifie (1.34). La fonctionnelle F est donc une forme quadratique positive sur H . □

A une forme quadratique F (de forme polaire B) on peut associer le produit scalaire $(u, v)_F := B(u, v) + (u, v)$, la norme $\|u\|_F := \sqrt{F(u) + \|u\|^2}$, et définir :

Définition 1.39 (Formes quadratiques fermées, fermables)

- a) Une forme quadratique $F : H \longrightarrow [0, +\infty]$ est dite *fermée* sur H si, et seulement si, son domaine $D(F)$ muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_F$ est un espace de Hilbert.
- b) F est dite *fermable* dans H si, et seulement si, elle admet une extension fermée dans H .

La proposition suivante permet de caractériser les formes fermées, sur H , en termes de semi-continuité inférieure. En effet, on a

Proposition 1.40 *Une forme quadratique F est fermée sur H si, et seulement si, elle est s.c.i sur $(H, (\cdot, \cdot))$. Elle est fermable sur H si, et seulement si, elle coïncide avec sa relaxée \overline{F} , sur son domaine $D(F)$.*

Preuve : L'implication (F fermée $\implies F$ s.c.i) est une conséquence de la réflexivité du domaine $D(F)$ (le domaine $D(F)$ est réflexif puisqu'il est un espace de Hilbert). En effet, soit (u_n) une suite convergeant fortement vers un certain u dans $(H, (\cdot, \cdot))$ et vérifiant $\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) < +\infty$ (sinon, il n'y a rien à démontrer). Donc (u_n) est bornée pour la norme $\|\cdot\|_F$. Il existe donc une sous-suite, encore notée (u_n) , et un élément $v \in D(F)$ tels que (u_n) converge faiblement vers v dans $(D(F), (\cdot, \cdot)_F)$. Or la sous-suite (u_n) converge aussi faiblement vers u dans $(H, (\cdot, \cdot))$. Il en résulte que (u_n) converge faiblement vers u dans $(D(F), (\cdot, \cdot)_F)$. On a donc $u = v$ et u appartient à $D(F)$. Il en résulte que $\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq F(u)$ et donc, que F est s.c.i sur H .

Montrons, à présent, l'implication inverse. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $(D(F), (\cdot, \cdot)_F)$. La quantité $(F(u_n - u_m) + \|u_n - u_m\|^2)$ tend vers zéro lorsque m et n tendent vers plus l'infini. Il existe donc un élément $u \in H$ tel que (u_n) converge, fortement dans $(H, (\cdot, \cdot))$, vers u . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, par semi-continuité inférieure de F sur H , $\liminf_{m \rightarrow \infty} F(u_n - u_m) \geq F(u_n - u)$. Ainsi,

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} F(u_n - u) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \liminf_{m \rightarrow +\infty} F(u_n - u_m) = 0.$$

Il en découle que $F(u_n - u) < +\infty$ et, par la suite, que $u \in D(F)$. Enfin, de l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u|_F^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(u_n - u) + \|u_n - u\|^2) = 0, \quad (1.38)$$

on déduit la convergence, dans $(D(F), (\cdot, \cdot)_F)$, de (u_n) vers u , et par conséquent, que $(D(F), (\cdot, \cdot)_F)$ est un espace de Hilbert.

Montrons, maintenant, l'équivalence

$$F \text{ est fermable sur } H \iff \forall u \in D(F), \quad F(u) = \overline{F}(u).$$

“ \Leftarrow ” Si l'on suppose que $\forall u \in D(F), \quad F(u) = \overline{F}(u)$, alors \overline{F} est une extension s.c.i de F , puisque $D(F) \subset D(\overline{F})$ ($\forall u \in H, \quad \overline{F}(u) \leq F(u)$). Par définition, F est donc une forme quadratique fermable sur H .

“ \Rightarrow ” Supposons F fermable sur H . Soit \widehat{F} une extension s.c.i de F . On a $D(F) \subset D(\widehat{F})$ et donc $\widehat{F} \leq F$ sur H . Par conséquent, $\widehat{F} \leq \overline{F}$ sur H . Par ailleurs, $\forall u \in D(F), \quad F(u) = \widehat{F}(u)$. Il suit que $\forall u \in D(F), \quad F(u) = \widehat{F}(u) \leq \overline{F}(u) \leq F(u)$. Donc $F(u) = \overline{F}(u)$, pour tout u dans $D(F)$. \square

Exemple 1.41 On considère un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n à frontière régulière et $\mathcal{S} \subset \Omega$ une hypersurface régulière. On définit sur $L^2(\Omega)$, la fonctionnelle quadratique suivante :

$$F(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathcal{S}} |\nabla u|^2 \mathcal{H}^{n-1}(ds), & \text{si } u \in C_c^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.39)$$

Dans [7], Bouchitté, Buttazzo et Seppecher ont montré que la relaxée de F dans $L^2(\Omega)$ est :

$$\bar{F}(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathcal{S}} |\nabla_{\mathcal{S}} u|^2 \mathcal{H}^{n-1}(ds), & \text{si } u \in H_0^1(\Omega) \text{ et } u|_{\mathcal{S}} \in H^1(\mathcal{S}), \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.40)$$

Ici $\nabla_{\mathcal{S}} u$ désigne la projection orthogonale du gradient de u sur la variété \mathcal{S} . Cet exemple montre, qu'en général, $\bar{F}(u) < F(u)$, même lorsque $u \in D(F)$ (ici $C_c^1(\Omega)$). D'après la proposition 1.40, la fonctionnelle F n'est pas fermable sur $L^2(\Omega)$, puisqu'elle ne coïncide pas avec sa relaxée sur son domaine $C_c^1(\Omega)$.

Définition 1.42 (Forme Markovienne)

Une forme quadratique F sur $H = L^2(\Omega)$ sera dite *Markovienne* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\eta_{\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, -\varepsilon \leq \eta_{\varepsilon}(t) \leq 1 + \varepsilon, \forall t \in [0; 1] \eta_{\varepsilon}(t) = t, \forall t < t' \ 0 \leq \eta_{\varepsilon}(t') - \eta_{\varepsilon}(t) \leq t' - t, \quad (1.41)$$

et telle que

$$\forall u \in D(F) \quad \eta_{\varepsilon} \circ u \in D(F) \quad \text{et} \quad F(\eta_{\varepsilon} \circ u) \leq F(u). \quad (1.42)$$

Grâce à la proposition 1.40, on a, pour les formes fermées sur $L^2(\Omega)$, la caractérisation suivante :

Proposition 1.43 (Décroissance par troncature) Une forme fermée F sur $H = L^2(\Omega)$ est *Markovienne* si, et seulement si, la condition suivante est satisfaite :

$$u \in D(F) \implies (u \vee 0) \wedge 1 \in D(F) \quad \text{et} \quad F((u \vee 0) \wedge 1) \leq F(u). \quad (1.43)$$

Preuve : Soit F une forme quadratique s.c.i sur H vérifiant la condition (1.43). Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta_{\varepsilon}(t) = (t \vee 0) \wedge 1$. On vérifie facilement que la famille (η_{ε}) satisfait aux conditions (1.41) et (1.42) et donc, que F est Markovienne.

Inversement, on suppose F Markovienne et s.c.i sur H . Soit (η_{ε}) une famille de fonctions vérifiant (1.41) et (1.42). Donc, pour tout élément $u \in H$, la suite $(\eta_{\varepsilon} \circ u)$ converge presque partout vers $(u \vee 0) \wedge 1$, lorsque ε tend vers zéro. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la suite $(\eta_{\varepsilon} \circ u)$ converge vers $(u \vee 0) \wedge 1$ dans $L^2(\Omega)$. Par semi-continuité inférieure de F sur H et le fait que $F(\eta_{\varepsilon} \circ u) \leq F(u)$, pour tout ε et tout $u \in H$; on

$$F((u \vee 0) \wedge 1) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\eta_{\varepsilon} \circ u) \leq F(u).$$

□

Voici une proposition qui énonce que la classe des formes Markoviennes sur $L^2(\Omega)$ est fermée vis-à-vis de la Γ -convergence.

Proposition 1.44 *Soit (F_n) une suite de formes Markoviennes sur $L^2(\Omega)$ qui Γ -converge vers F . Alors F est Markovienne sur $L^2(\Omega)$.*

Preuve : Par la remarque 1.13, la fonctionnelle F est aussi la Γ -limite de la suite (\overline{F}_n) des relaxées. Nous pouvons donc supposer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est semi-continue inférieurement sur $L^2(\Omega)$. Ainsi, pour tout $u \in L^2(\Omega)$, on a $F_n((u \vee 0) \wedge 1) \leq F_n(u)$. D'autre part, par l'inégalité de la Γ -limite supérieure, pour tout $u \in L^2(\Omega)$, il existe une suite (u_n) dans $L^2(\Omega)$ qui vérifie

$$u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} u \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) = F(u). \quad (1.44)$$

L'application $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow (t \vee 0) \wedge 1$ étant 1-Lipschitzienne, on a

$$\int_{\Omega} |(u_n \vee 0) \wedge 1 - (u \vee 0) \wedge 1|^2 \leq \int_{\Omega} |u_n - u|^2 dx,$$

et la suite $((u_n \vee 0) \wedge 1)_n$ converge vers $(u \vee 0) \wedge 1$ dans $L^2(\Omega)$. Par l'inégalité de la Γ -limite inférieure et par le fait que chaque F_n est Markovienne, on a

$$F((u \vee 0) \wedge 1) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n((u_n \vee 0) \wedge 1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) = F(u), \quad (1.45)$$

ce qui, par la proposition 1.43, puisque F est s.c.i, prouve que F est Markovienne sur $L^2(\Omega)$. □

Pour des exemples de formes quadratiques Markoviennes, on peut consulter, par exemple, l'ouvrage de Fukushima [24].

1.6 Sur les formes de Dirichlet

Les fonctionnelles F que nous considérons dans les chapitres **2** et **3** sont définies sur $L^2(\Omega)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$. Elles sont positives, semi-continues inférieurement, et Markoviennes (c'est-à-dire (cf. proposition 1.43) possèdent la propriété de décroissance par troncature suivante : pour tout $u \in L^2(\Omega)$, on a $F((u \vee 0) \wedge 1) \leq F(u)$, où $(u \vee 0) \wedge 1 := \sup(0, \inf(1, u))$). Elles appartiennent, en fait, à une grande classe de fonctionnelles quadratiques appelées *formes de Dirichlet* [24].

Définition 1.45 (Formes de Dirichlet)

On appelle forme de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$, toute forme quadratique fermée et Markovienne sur $L^2(\Omega)$.

Autrement dit, une forme de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$ est une forme semi-continue inférieurement sur $L^2(\Omega)$, et décroissante par troncature. On notera \mathfrak{D} l'ensemble de toutes les formes de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$. L'intérêt fondamental de ces formes en calcul des variations réside dans leur stabilité dans le passage à la limite, au sens de la Γ -convergence, et donc par relaxation (puisque celle-ci n'est qu'un cas particulier de Γ -convergence).

L'une des propriétés fondamentales dont nous nous servons tout au long de cette thèse est la stabilité de l'ensemble des formes de Dirichlet par Γ -convergence.

Proposition 1.46 *Soit (F_n) une suite de formes de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$ qui Γ -converge vers F . Alors F est une forme de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$.*

Preuve : Par le théorème 1.38, les propositions 1.12 et 1.44, F est une forme quadratique, s.c.i et Markovienne sur $L^2(\Omega)$. C'est donc une forme de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$. \square

En d'autres termes, la proposition 1.46 énonce que l'ensemble des formes de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$ est fermé pour la Γ -convergence.

Remarque 1.47 *Noter, par ailleurs, que l'ensemble des formes de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$ est stable sous l'action de la régularisation Moreau-Yosida :*

$$F \in \mathfrak{D} \implies Y_\lambda(F) \in \mathfrak{D}. \quad (1.46)$$

Quelques classes de formes de Dirichlet

Tout au long de ce mémoire, $L_{++}^\infty(\Omega)$ désignera l'ensemble des coefficients de diffusion à inverse dans $L^\infty(\Omega)$:

$$L_{++}^\infty(\Omega) := \{\varphi \in L^\infty(\Omega), 1/\varphi \in L^\infty(\Omega), \varphi > 0\}.$$

Une classe importante de formes de Dirichlet, est celle des formes de Dirichlet dites régulières.

Formes de Dirichlet régulières : Soit F une forme de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$ de domaine $D(F)$. Soit $C_0^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continûment différentiables sur Ω à support compact dans Ω . S'il existe un sous-ensemble C de $D(F) \cap C_0^1(\Omega)$ qui soit dense, à la fois dans $C_0^1(\Omega)$ pour la norme de la convergence uniforme, et dans $D(F)$ pour la norme $|u|_F = (F(u) + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$ associée à la forme F , alors F est dite *régulière*. Nous noterons \mathfrak{D}_r l'ensemble des formes de Dirichlet régulières. Pour plus de détails à ce sujet, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Fukushima [24].

L'un des nombreux avantages de ces formes régulières réside dans le fait qu'elles admettent, sur $C_0^1(\Omega)$, une représentation intégrale.

Théorème 1.48 (Formule de représentation intégrale de Deny-Beurling) *Toute forme de Dirichlet régulière F sur $L^2(\Omega)$, admet sur $D(F) \cap C_0^1(\Omega)$, une représentation intégrale unique du type*

$$F(u) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_{ij}(dx) + \int_{\Omega} (u(x))^2 \nu(dx) + \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y))^2 \mu(dx, dy), \quad (1.47)$$

où

- ν est une mesure de Radon sur Ω ,
- $(\eta_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ sont des mesures de Radon sur Ω telles que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$, et pour tout compact $K \subset \Omega$, on a

$$\sum_{i,j=1}^3 \xi_i \xi_j \eta_{ij}(K) \geq 0, \quad \eta_{ij}(K) = \eta_{ji}(K), \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (1.48)$$

- μ est une mesure de Radon sur $\Omega \times \Omega$ telle que $\mu(\Delta) = 0$ où Δ désigne la diagonale de $\Omega \times \Omega$.

Pour la preuve du théorème 1.48 voir, par exemple, le livre de Fukushima [24]. Les quantités qui apparaissent dans (1.47) s'appellent, respectivement, terme de diffusion, terme étrange et terme non-local. On peut remarquer que dans la formule (1.47), seule la partie symétrique μ^{sym} de la mesure μ définie par

$$\mu^{sym}(A \times B) = \frac{1}{2} (\mu(A \times B) + \mu(B \times A))$$

joue un rôle. Cependant, nous ne supposons pas la mesure μ symétrique. De plus, la mesure μ peut être prise sur l'ouvert $\Omega \times \Omega$ de telle sorte que $\mu(\Delta) = 0$ (puisque la trace de μ sur Δ n'a aucune contribution dans le terme non-local qui apparaît dans (1.47)). Et enfin, il faut noter qu'une fonctionnelle définie sur $L^2(\Omega)$ par (1.47) n'est pas nécessairement une forme de Dirichlet. En effet, elle peut ne pas être semi-continue inférieurement sur $L^2(\Omega)$. On peut montrer que lorsque ν et μ sont deux mesures de Radon, respectivement, sur Ω et $\Omega \times \Omega$, et α appartient à $L^{\infty}_{++}(\Omega)$ alors la fonctionnelle F définie sur $L^2(\Omega)$ par

$$F_{\alpha, \nu, \mu}(u) := \begin{cases} \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} (u(x))^2 \nu(dx) \\ \quad + \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y))^2 \mu(dx, dy), & \text{si } u \in H^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.49)$$

est semi-continue inférieurement sur $L^2(\Omega)$ si, et seulement si, ν et la marginale $\mu^{sym}(dx, \Omega)$ de μ^{sym} ne chargent pas les ensembles de capacité nulle.

Formes de Dirichlet continues : On notera \mathfrak{D}_c l'ensembles des formes de Dirichlet continues pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$. Comme nous le verrons tout au long de ce travail, ces formes jouent un rôle capital dans nos preuves. Elles sont régulières. De plus, les mesures η_{ij} qui apparaissent dans leurs représentations intégrales de Deny-Beurling (1.47) sont nulles, pendant que $\nu(dx)$ et $\mu^{sym}(dx, \Omega)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue dx avec des densités dans $L^{\infty}(\Omega)$. Ceci est l'objet des trois prochains lemmes.

Lemme 1.49 *Soit (η_{ij}) comme dans le théorème 1.48. Soit $F : L^2(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ quadratique et continue pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$. Si F admet sur $D(F) \cap C_0^1(\Omega)$ la représentation intégrale*

$$F(u) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_{ij}(dx),$$

alors,

$$\eta_{ij} = 0, \quad \forall 1 \leq i, j \leq 3.$$

Preuve : Comme F est quadratique et continue, il existe une constante positive C telle que, pour tout u dans $L^2(\Omega)$,

$$F(u) \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 . \quad (1.50)$$

Donc, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, on a, pour tout $u \in C^1(\Omega)$

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi(x) \eta_{ij}(dx) \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 . \quad (1.51)$$

Notons η_{φ} la mesure matricielle de densité φ par rapport à $\eta : \eta_{\varphi} := \varphi(x)\eta(dx)$ et montrons que $\eta_{\varphi} = 0$. Pour ce faire, nous appliquons (1.51) à des fonctions $u \in C^1(\Omega)$ ne dépendant que d'une variable (c'est-à-dire telle qu'il existe une fonction f de la variable réelle vérifiant $u(x) = f(x_i)$). Grâce à l'inégalité de Jensen, l'application

$$f \in \mathcal{D}(0,1) \longrightarrow \int_0^1 f'(x_i) (\eta_{\varphi})_{ii}(dx_i) \in \mathbb{R},$$

où $(\eta_{\varphi})_{ii}(dx_i)$ représente la marginale de $(\eta_{\varphi})_{ii}(dx)$ sur \mathbb{R} , est continue pour la topologie forte $L^2(]0,1[)$. Ainsi, $(\eta_{\varphi})_{ii}(dx_i)$ est de la forme $\tilde{\eta}_{ii}(dx_i) = g(x_i) dx_i$ avec g continue sur $]0,1[$. Si la densité g n'est pas nulle, alors en considérant des fonctions f qui s'annulent en dehors d'un intervalle I où $g(x_i) > \varepsilon > 0$, on obtient

$$\int_I f'(x_i)^2 dx_i \leq \frac{C}{\varepsilon} \int_I f(x_i)^2 dx_i .$$

Cette inégalité ne pouvant pas être vraie pour tout f , la densité g est identiquement nulle sur $]0,1[$. On en déduit que la trace de la matrice $\varphi(x)\eta(dx)$ est nulle. Comme cette matrice est positive, elle est donc nulle. Ceci étant vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, on en déduit que $\eta(dx) = 0$.

□

Lemme 1.50 *Soit $F : L^2(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ quadratique et continue pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$. Si F admet sur $D(F) \cap C_0^1(\Omega)$ une représentation intégrale*

$$F(u) = \int_{\Omega} (u(x))^2 \nu(dx) ,$$

où ν est une mesure de Radon sur Ω , alors ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx , avec une densité dans $L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^+)$.

Preuve : Comme F est quadratique et continue sur $L^2(\Omega)$, il existe une constante positive C telle que, pour tout $u \in L^2(\Omega)$,

$$F(u) \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 . \quad (1.52)$$

Soit B un Borélien de Ω . Il existe une suite (K_n) de compacts croissant vers B et une autre (Ω_n) d'ouverts décroissant vers B telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(K_n) = \nu(B) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\Omega_n| = |B|. \quad (1.53)$$

Pour tout $n \geq 1$, soit $\varphi_n \in C_c^1(\Omega)$ une fonction égale à 1 sur K_n et nulle sur Ω_n^c . On a alors, compte tenu de (1.52) et (1.53)

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(K_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n^2 \nu(dx) \\ &\leq C \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n^2 dx \\ &\leq C \lim_{n \rightarrow \infty} |\Omega_n| \\ &\leq C|B|. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Il en résulte que ν est absolument continue par rapport à dx avec une densité dans $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$. \square

Lemme 1.51 *Soit $F : L^2(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ quadratique et continue pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$. Si F admet sur $D(F) \cap C_0^1(\Omega)$ une représentation intégrale du type*

$$F(u) = \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y))^2 \mu(dx, dy),$$

où μ est une mesure de Radon sur $\Omega \times \Omega$, alors $\mu^{sym}(dx, \Omega)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx , avec une densité dans $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$.

Preuve : Pour tout $\varepsilon > 0$, on note Δ_ε le voisinage de la diagonale Δ défini par $\Delta_\varepsilon := \{(x, y) \in \Omega \times \Omega : \|x - y\| < \varepsilon\}$ et μ_ε la restriction de μ à Δ_ε^c . Soit B un Borélien de Ω tel que $\text{diam}(B) < \varepsilon$. Il existe une suite (K_n) de compacts croissant vers B et une autre (Ω_n) d'ouverts décroissant vers B telles que, pour tout $n \geq 1$, $\text{diam}(\Omega_n) < \varepsilon$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_\varepsilon^{sym}(K_n \times \Omega) = \mu_\varepsilon^{sym}(B \times \Omega) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\Omega_n| = |B|. \tag{1.55}$$

Pour tout $n \geq 1$, soit $\varphi_n \in C_c^1(\Omega)$ une fonction égale à 1 sur K_n et nulle sur Ω_n^c . On a alors, compte tenu de (1.55),

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon^{sym}(B \times \Omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_\varepsilon^{sym}(K_n \times \Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_\varepsilon^{sym}(K_n \times \Omega_n^c) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{sym}(K_n \times \Omega_n^c) \\ &\leq \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} F(\varphi_n) \\ &\leq \frac{C}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} |\Omega_n| \\ &\leq \frac{C}{2} |B|, \end{aligned} \tag{1.56}$$

où C est une constante positive qui vérifie $F(u) \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ sur $L^2(\Omega)$ (puisque F est continue). L'inégalité (1.56) étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, tenant compte du fait que μ ne charge pas la diagonale Δ , on en déduit que

$$\mu^{sym}(B \times \Omega) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_\varepsilon^{sym}(B \times \Omega) \leq \frac{C}{2} |B|. \tag{1.57}$$

Il en découle que $\mu^{sym}(dx, \Omega)$ est absolument continue par rapport à dx avec une densité dans $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$. \square

Inversement, on vérifie aisément que si ν et μ sont deux mesures de Radon respectivement sur Ω et $\Omega \times \Omega$ telles que $\nu(dx)$ et $\mu(dx, \Omega)$ sont absolument continues par rapport à dx avec des densités dans $L^\infty(\Omega)$, alors la fonctionnelle définie par

$$\forall u \in L^2(\Omega), \quad F_{0,\nu,\mu}(u) := \int_{\Omega} (u(x))^2 \nu(dx) + \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y))^2 \mu(dx, dy). \quad (1.58)$$

est une forme de Dirichlet continues.

Comme mesures μ qui rendent continues la fonctionnelle $F_{0,0,\mu}$, il y a les mesures correspondant aux interactions à direction et portée fixes. On les appellera **interactions élémentaires**. On notera \mathcal{E} l'ensemble des interactions élémentaires :

$$\mathcal{E} := \{ \delta_{x+w}(dy) f(x) \mathbb{1}_{\Omega}(x+w) dx, w \in \Omega_2, f \in L^\infty(\Omega), f \geq 0 \}, \quad (1.59)$$

où Ω_2 désigne l'ensemble de tous les vecteurs de Ω à composantes dyadiques, soit

$$\Omega_2 := \{ w \in \mathbb{R}^3, \exists p \in \mathbb{N} : 2^p w \in \mathbb{N}^3 \}.$$

Cette restriction aux vecteurs à composantes dyadiques est purement technique.

Toute combinaison finie d'interactions élémentaires rend également continue la fonctionnelle définie par (1.58). On appellera **interactions atomiques** de telles combinaisons. On notera \mathcal{A} l'ensemble des interactions atomiques :

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{i=1}^n \delta_{x+w_i}(dy) f_i(x) \mathbb{1}_{\Omega}(x+w_i) dx, n \in \mathbb{N}, w_i \in \Omega_2, f_i \in L^\infty(\Omega), f_i \geq 0 \right\}. \quad (1.60)$$

Dans la suite nous utiliserons aussi le terme d'interaction élémentaire (resp. atomique) pour désigner les fonctionnelles $F_{0,0,\mu}$ lorsque la mesure μ appartient à \mathcal{E} (resp. \mathcal{A}).

Remarque 1.52 Une fonctionnelle quadratique F définie et continue sur $L^2(\Omega)$ admet comme domaine, $L^2(\Omega)$ tout entier.

En effet, soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ tel que $F(u_0) = +\infty$. Si F était continue en u_0 , on aurait $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F\left(\frac{u_0}{\lambda}\right) = F(0) = 0$, ce qui est absurde puisque l'on a $F\left(\frac{u_0}{\lambda}\right) = +\infty$, pour tout $\lambda > 0$.

Formes de Dirichlet objectives : On appellera *forme de Dirichlet objective* (par analogie au cas vectoriel), toute forme F qui vérifie, pour tout $u \in L^2(\Omega)$, et pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$F(u + c) = F(u). \quad (1.61)$$

Cette propriété est équivalente à

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad F(c) = 0. \quad (1.62)$$

En effet, si (1.62) est vérifiée, la quantité $(F(u+c) - F(u) - F(c))$ est linéaire en c et minorée par $F(u)$. Donc elle s'annule pour tout $c \in \mathbb{R}$, soit

$$\forall u \in L^2(\Omega), \forall c \in \mathbb{R}, \quad F(u+c) = F(u) .$$

L'ensemble des formes de Dirichlet objectives sera noté \mathfrak{D}_i . Par \mathfrak{D}_{ir} (resp. \mathfrak{D}_{ic}) on notera le sous-ensemble des formes de Dirichlet objectives et régulières (resp. objectives et continues).

Remarque 1.53 *Toute forme de Dirichlet continue et objective sur $L^2(\Omega)$ peut être représentée par une mesure μ , sur $\Omega \times \Omega$, de la manière suivante :*

$$F(u) = \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y))^2 \mu(dx, dy), \quad \text{pour tout } u \in L^2(\Omega). \quad (1.63)$$

En effet, F étant continue sur $L^2(\Omega)$, d'après ce qui précède, il existe deux mesures de Radon ν et μ sur Ω et $\Omega \times \Omega$ telles que $F = F_{0,\nu,\mu}$. La fonctionnelle F étant objective, ν est nulle. D'où l'assertion de la remarque.

Formes de Dirichlet de type diffusion : On appelle fonctionnelle de diffusion (isotrope) à coefficient non-dégénéré et borné, toute fonctionnelle de la forme $F = F_{\alpha,0,0}$ avec $\alpha \in L^{\infty}_{++}(\Omega)$. On notera \mathfrak{D}_d l'ensemble de telles fonctionnelles :

$$\mathfrak{D}_d := \{F_{\alpha,0,0} ; \alpha \in L^{\infty}_{++}(\Omega)\} . \quad (1.64)$$

Il faut noter qu'il n'y a pas de borne uniforme sur les coefficients de diffusion des éléments de \mathfrak{D}_d : aussi bien les grands que les petits coefficients de diffusion sont admissibles. Plus précisément,

$$\forall M \in]0, +\infty[, \quad F_{M,0,0} \in \mathfrak{D}_d .$$

Le fait que l'ensemble \mathfrak{D}_d soit relativement "petit" n'affaiblit en aucune manière nos résultats. Au contraire, plus petit est \mathfrak{D}_d , plus fort est un résultat de densité de \mathfrak{D}_d .

Nous aurons à considérer également, l'ensemble \mathfrak{D}_0 des fonctionnelles de diffusion soumises à une condition de Dirichlet sur \mathcal{B} :

$$\mathfrak{D}_0 := \{F_{\alpha,0,0}^0 ; \alpha \in L^{\infty}_{++}(\Omega)\} , \quad (1.65)$$

où

$$F_{\alpha,0,0}^0(u) := \begin{cases} \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla u(x)|^2 dx, & \text{si } u \in H^1(\Omega) \text{ et } u = 0 \text{ sur } \mathcal{B}, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.66)$$

1.7 Sur la convergence au sens de Mosco

La notion de convergence au sens de Mosco, introduite par U.Mosco [38] est reconnue comme un outil approprié à l'étude du comportement asymptotique des problèmes variationnels à données convexes. On en rappelle la définition et quelques propriétés. Pour plus de détails sur cette notion, nous renvoyons à [2] et [43].

Définition 1.54 (Mosco-convergence)

Soit X un espace de Banach réflexif. Soit (F_n) une suite de fonctionnelles convexes s.c.i et propres sur X à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ aussi convexe s.c.i et propre. On dit que la suite (F_n) converge au sens de Mosco vers F si les deux conditions suivantes sont réalisées :

i) L'inégalité de la Mosco-limite inférieure : pour tout $u \in X$, pour toute suite (u_n) convergeant faiblement vers u on a :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F(u) .$$

ii) L'inégalité de la Mosco-limite supérieure : pour tout $u \in X$, il existe une suite (u_n) dans X , dite approximante, telle que

$$u_n \longrightarrow u \text{ fortement dans } X, \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \leq F(u).$$

On dira que la suite (F_n) Mosco-converge vers F et on notera $F_n \xrightarrow{X-M} F$. Cette définition est à rapprocher avec celle de la Γ -convergence. Il apparaît alors immédiatement que

$$F_n \xrightarrow{X-M} F \implies F_n \xrightarrow{\Gamma} F . \quad (1.67)$$

Il faut, d'emblée, noter que les notions de Mosco-convergence et de convergence simple des suites de fonctionnelles sont indépendantes, comme le montre l'exemple élémentaire suivant :

Exemple 1.55 On prend $X = \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle. On pose, pour tout $x \in X$, $F_n(x) = e^{-nx^2}$. Il est clair que (F_n) converge simplement vers F définie par $F(0) = 1$ et $F(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$. Cependant (F_n) ne Mosco-converge pas vers F . En effet, la suite $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 sans que l'on ait $\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) \geq F(0)$, puisque pour tout n , $F_n(x_n) = e^{-1}$ et $F(0) = 1$.

Dans l'ouvrage [2], Attouch démontre (cf. théorème 3.26) que lorsque l'on se place dans le cadre des fonctionnelles convexes, s.c.i et propres, la convergence au sens de Mosco d'une suite (F_n) vers F est équivalente à la convergence simple, pour tout $\lambda > 0$, de $(Y_\lambda(F_n))$ vers $Y_\lambda(F)$. Ce qui, mis à part le cas de dimension finie, n'est, en général, pas vrai pour la Γ -convergence. Ce résultat a été généralisé par Azé dans [3] où il a remplacé la régularisée Moreau-Yosida $Y_\lambda(F)$ par une approximée inf-convolutive du type $\Psi_\lambda^k(F)(u) := \inf_{v \in X} \{F(v) + \lambda k(|u - v|)\}$, où le noyau k est de la forme $k(t) = |t|^\alpha$ avec $\alpha \geq 1$.

Remarque 1.56 Il est facile de voir que pour établir un résultat de Mosco-convergence, il suffit de ne considérer dans (i) que des suites à énergie bornée (c'est-à-dire telles que $F_n(u_n) < M < +\infty$) et dans (ii) que des fonctions u appartenant au domaine de F (c'est-à-dire vérifiant $F(u) < +\infty$).

Remarque 1.57 *Un résultat de Mosco-convergence établi pour la topologie de $L^2(\Omega)$ est aussi valable pour la topologie de $H_B^1(\Omega)$ si, pour tout $u \in H_B^1(\Omega)$, on peut imposer à la suite approximante (u_n) dans (ii) de converger vers u pour la topologie forte de $H_B^1(\Omega)$. Dans ce cas nous dirons que la suite (F_n) τ -converge vers F et nous écrivons*

$$F_n \xrightarrow{\tau} F$$

Puisque la Mosco-convergence met en jeu, simultanément les deux convergences forte et faible de $L^2(\Omega)$, la seule hypothèse de continuité sur une fonctionnelle G ne suffit pas à garantir la Mosco convergence de la suite $(F_n + G)$ vers $F + G$ lorsque (F_n) Mosco-converge vers F dans $L^2(\Omega)$. On exige, en plus de la continuité, que la perturbation G soit convexe.

Remarque 1.58 *Si G est une fonctionnelle convexe, et fortement continue sur $L^2(\Omega)$, alors on a*

$$F_n \xrightarrow{L^2(\Omega)-M} F \implies F_n + G \xrightarrow{L^2(\Omega)-M} F + G, \quad (1.68)$$

$$F_n \xrightarrow{\tau} F \implies F_n + G \xrightarrow{\tau} F + G. \quad (1.69)$$

En effet, si G est convexe et fortement continue sur $L^2(\Omega)$, elle est alors semicontinue inférieurement pour la topologie faible de $L^2(\Omega)$. Ainsi, (1.68) découle immédiatement de la définition 1.54. L'assertion (1.69) est due au fait que G est continue pour la topologie forte de $H_B^1(\Omega)$.

Ultérieurement, nous aurons à considérer des perturbations de la forme $F_{1,0,0}^0$ qui sont clairement convexes mais seulement semi-continues inférieurement. On sort alors du cadre de la remarque 1.58. Néanmoins, le résultat reste vrai.

Remarque 1.59 *Pour tout $c > 0$, on a*

$$F_n \xrightarrow{\tau} F \implies F_n + cF_{1,0,0}^0 \xrightarrow{\tau} F + cF_{1,0,0}^0. \quad (1.70)$$

En effet, pour tout $c > 0$, la fonctionnelle $cF_{1,0,0}^0$ est convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$. Elle est donc s.c.i pour la topologie faible de $L^2(\Omega)$ et l'inégalité de la Mosco-limite inférieure en découle. Considérons maintenant un élément u dans $L^2(\Omega)$ tel que $F(u) + cF_{1,0,0}^0(u) < +\infty$. Alors u appartient à $H_B^1(\Omega)$. Comme $F_n \xrightarrow{\tau} F$, il existe une suite (u_n) convergeant fortement vers u dans $H_B^1(\Omega)$ telle que $\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \leq F(u)$. Tenant compte de la continuité forte de $cF_{1,0,0}^0$ dans $H_B^1(\Omega)$, on a $\limsup_{n \rightarrow \infty} (F_n(u_n) + cF_{1,0,0}^0(u_n)) \leq F(u) + cF_{1,0,0}^0(u)$.

Procédure de diagonalisation :

Lorsque l'on cherche à établir un résultat de densité, on est souvent amené à utiliser une procédure de diagonalisation. Plus précisément, si (F_n) est une suite qui Mosco-converge vers une fonctionnelle F et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(F_{n,m})_m$ qui Mosco-converge vers F_n , lorsque m tend vers plus l'infini, alors on veut pouvoir affirmer l'existence

d'une suite d'entiers (m_n) telle que (F_{n,m_n}) Mosco-converge vers F , lorsque n tend vers plus l'infini. Cette procédure de diagonalisation est bien connue lorsque les suites étudiées sont dans un espace métrique. Ce qui est bien le cas dans la présente étude, puisque nos fonctionnelles appartiennent au cône convexe des fonctionnelles convexes, fortement s.c.i et propres sur $L^2(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, classiquement noté $\Gamma_M(L^2(\Omega))$. Or il est bien connu (cf. [2] théorème 3.36) que sur $\Gamma_M(L^2(\Omega))$, la topologie de la Mosco-convergence est métrisable. Par conséquent, on a

Proposition 1.60 *Soit (F_n) une suite dans $\Gamma_M(L^2(\Omega))$ qui Mosco-converge vers une fonctionnelle F . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(F_{n,m})_m$, dans $\Gamma_M(L^2(\Omega))$, qui Mosco-converge vers F_n , lorsque m tend vers plus l'infini, alors il existe une suite d'entiers (m_n) telle que la suite (F_{n,m_n}) Mosco-converge vers F , lorsque n tend vers plus l'infini.*

Dans la dernière étape de la preuve du résultat principal du chapitre 3, nous aurons besoin d'un résultat similaire à celui de la proposition 1.60, mais en ce qui concerne la τ -convergence. Nous faisons donc la

Remarque 1.61 *La proposition 1.60 est vraie lorsque l'on remplace la Mosco-convergence par la τ -convergence.*

En effet, soit d_1 la métrique associée à la Mosco-convergence dans $\Gamma_M(L^2(\Omega))$. Soit d_2 celle associée à la Mosco-convergence, dans le cône convexe des fonctionnelles convexes, fortement s.c.i et propres sur $H_B^1(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si l'on pose pour tout F et G dans $L^2(\Omega)$,

$$d(F, G) = d_1(F, G) + d_2(F|_{H^1(\Omega)}, G|_{H^1(\Omega)}),$$

alors d est une métrique dont la topologie sur $\Gamma_M(L^2(\Omega))$ est équivalente à celle de la τ -convergence :

$$F_n \xrightarrow{\tau} F \iff (d_1 + d_2)(F_n, F) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (1.71)$$

On est alors dans un cadre métrique où la diagonalisation est toujours vraie. D'où la remarque 1.61. \square

Définition 1.62

Soit \mathfrak{U} un sous-ensemble de \mathfrak{D} . On appellera Mosco-fermeture de \mathfrak{U} et on notera $\overline{\mathfrak{U}}$, l'ensemble des Mosco-limites, pour la topologie de $L^2(\Omega)$, des suites de \mathfrak{U} .

On peut remarquer que, grâce à la proposition 1.60, on a

$$\overline{\overline{\mathfrak{U}}} = \overline{\mathfrak{U}}. \quad (1.72)$$

Remarque 1.63 *L'ensemble \mathfrak{D} des formes de Dirichlet ainsi que le sous-ensemble \mathfrak{D}_i des formes de Dirichlet objectives sont fermés vis-à-vis de la Mosco-convergence, en ce sens que*

$$\overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \quad \text{et} \quad \overline{\mathfrak{D}_i} = \mathfrak{D}_i. \quad (1.73)$$

Ceci découle de la proposition 1.46 et du fait que la propriété (1.61) passe à la limite par Mosco-convergence.

Remarque 1.64 *Puisque (1.73) est aussi vraie pour la topologie de la Γ -convergence, tous nos résultats de densité peuvent être interprétés en termes de Γ -convergence pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$.*

Chapitre 2

Un résultat d'homogénéisation

Sommaire

2.1	Enoncé du résultat principal	38
2.2	Description du matériau composite	38
2.3	Preuve du théorème d'homogénéisation	41
2.3.1	L'inégalité de la Mosco-limite inférieure	41
2.3.2	L'inégalité de la Mosco-limite supérieure	44

Notre objectif dans ce chapitre est de démontrer que toute interaction élémentaire est la Mosco-limite d'une suite de fonctionnelles de diffusion. Ce résultat constitue la première étape de notre démarche dans l'identification de la fermeture de l'ensemble des fonctionnelles de diffusion. Elle consiste en la construction explicite d'un matériau composite ayant les bonnes propriétés effectives. Cette étape est cruciale pour l'ensemble de mon travail parce que les deux résultats principaux du cas scalaire de ma thèse l'utilisent fondamentalement.

2.1 Enoncé du résultat principal

Le résultat principal de ce chapitre s'énonce

Théorème 2.1 *Soit α dans $L_{++}^\infty(\Omega)$ ou $\alpha \equiv 0$, et $\mu(dx, dy) := \delta_{x+w}(dy)f(x)dx$ dans \mathcal{E} . Alors, il existe une suite (α_n) dans $L_{++}^\infty(\Omega)$ telle que $(F_{\alpha_n,0,0})$ Mosco-converge vers $F_{\alpha,0,\mu}$ dans $L^2(\Omega)$.*

Dans la section 2.2 nous décrivons la construction d'un matériau hétérogène dont la suite d'énergie correspondante $(F_{\alpha_n,0,0})$ va converger vers $F_{\alpha,0,\mu}$. La preuve de la Mosco-convergence des fonctionnelles $F_{\alpha_n,0,0}$ vers $F_{\alpha,0,\mu}$ constitue l'objet de la section 2.3.

2.2 Description du matériau composite

L'interaction non-locale μ est simulée par des cylindres de grandes conductivités, de longueur $\|w\|$ et d'axe w . Nous allons décrire ces fibres de manière plus détaillée.

Comme $w \in \Omega_2$, il existe un certain $q \in \mathbb{N}$ tel que $2^q w \in \mathbb{N}^3$. Ici n représente une suite d'entiers naturels qui tend vers plus l'infini. Pour des raisons purement techniques, nous choisirons la suite n de la forme $n = 2^{q_n}$ où q_n vérifie $q_n > q$. Soit (r_n) une suite tendant vers zéro de telle sorte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3} |\ln r_n| = +\infty. \quad (2.1)$$

N'importe quel rayon de la forme $r_n := e^{-(n)^\gamma}$ avec $\gamma > 3$ satisfait à l'hypothèse (2.1).

On découpe le domaine Ω en n^3 cubes élémentaires Ω_I^n

$$\Omega_I^n := \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right) \times \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right) \times \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right), \quad (2.2)$$

de centres c_I^n où $I = (i, j, k)$ appartient à $\{1 \cdots n\}^3$ (que l'on identifie à $\{1 \cdots n^3\}$). On note \mathcal{I}^n l'ensemble d'indices $I \in \{1, \cdots, n^3\}$ tels que $\Omega_I^n + w \subset \Omega$. Noter que, pour de tels indices, grâce aux hypothèses sur w et n , $\Omega_I^n + w$ coïncide avec un autre cube élémentaire. Nous allons maintenant définir les rayons de nos fibres conductrices en posant, pour tout $I \in \mathcal{I}^n$,

$$r_I^n := r_n \left(\frac{1}{n} + \frac{\|w\|}{\pi} \int_{\Omega_I^n} f(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

On introduit en même temps la grandeur

$$R := (4 + \|w\| \pi^{-1} \|f\|_{L^\infty(\Omega)})^{1/2}, \quad (2.4)$$

de telle sorte que la suite (Rr_n) majore celle des rayons (r_I^n) .

Pour définir les extrémités de nos fibres conductrices, nous introduisons une famille de points x_I^n de la façon suivante : soit Δ_I^n la droite passant par x_I^n et de direction w . Notons $p_I^n(x)$ la projection orthogonale de x sur Δ_I^n . Cette famille de points est choisie de telle manière que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :

$$\|x_I^n - c_I^n\| < (4n)^{-1}, \quad (2.5)$$

$$\text{si } \Omega_I^n + mw = \Omega_{I'}^n, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \text{alors } x_I^n + mw = x_{I'}^n, \quad (2.6)$$

$$d(\Delta_I^n, x_{I'}^n) > 2Rn^{-2}, \quad \text{sinon.} \quad (2.7)$$

Grâce à ces trois propriétés, aucune collision entre les fibres n'est possible. Montrons maintenant qu'une telle famille existe bel et bien. Pour ce faire, nous démontrons, par récurrence, que, pour tout $p \in \{1 \cdots n^3\}$ il existe une famille $\{x_1^n, x_2^n, \cdots, x_p^n\}$ qui vérifie la propriété \mathcal{P}_p :

$$\mathcal{P}_p \begin{cases} \forall I \leq p, & \|x_I^n - c_I^n\| < (4n)^{-1}, \\ \forall I, I' \leq p, & \text{si } \Omega_I^n + mw = \Omega_{I'}^n \text{ pour un certain } m \in \mathbb{Z}, \quad \text{alors } x_I^n + mw = x_{I'}^n, \\ & d(\Delta_I^n, x_{I'}^n) > 2Rn^{-2}, \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Le cas $p = 1$ est évident : il suffit de choisir $x_1^n = c_1^n$. Supposons maintenant l'existence de $p - 1$ points $\{x_1^n, x_2^n, \dots, x_{p-1}^n\}$ qui vérifient la propriété \mathcal{P}_{p-1} . Si $\Omega_I^n + mw = \Omega_p^n$ pour un certain $I < p$ et un certain $m \in \mathbb{Z}$, prendre $x_p^n = x_I^n + mw$. Sinon, pour tout $I \leq p - 1$, considérons le cylindre d'axe Δ_I^n et de rayon $2Rn^{-2}$. On vérifie sans difficulté que le nombre de tels cylindres qui coupent la boule $B(c_p^n, (4n)^{-1})$ est inférieur à $3n$. De plus, comme le volume de chaque intersection est plus petit que $2n^{-1}\pi(2Rn^{-2})^2$, le volume total de ces intersections est inférieur à $14\pi R^2 n^{-4}$, et donc plus petit que celui de la boule $B(c_p^n, (4n)^{-1})$. Par conséquent, on peut choisir le point x_p^n dans cette boule et en dehors des cylindres. Il est clair que la famille $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ ainsi choisie vérifie la propriété \mathcal{P}_p .

□

Nos fibres de grande conductivité sont les cylindres \mathcal{C}_I^n , de rayons r_I^n , d'axes Δ_I^n et de longueur $\|w\|$:

$$\mathcal{C}_I^n := \{ x \in \Omega \mid p_I^n(x) \in [x_I^n, x_I^n + w], \|x - p_I^n(x)\| \leq r_I^n \}. \quad (2.8)$$

Comme les rayons de nos cylindres sont très petits, ils ne sont que faiblement connectés à la matrice. Pour améliorer cette connexion (aux extrémités seulement), on place aux extrémités de chaque fibre des boules \mathcal{B}_I^n faites d'un matériau hautement conducteur.

$$\mathcal{B}_I^n := B(x_I^n, n^{-2}). \quad (2.9)$$

Nous définissons maintenant la zone de grande conductivité de notre matériau hétérogène Ω^n (cf. figure 1) par :

$$\Omega^n := \left(\bigcup_{I \in \mathcal{I}^n} \mathcal{C}_I^n \right) \cup \left(\bigcup_I \mathcal{B}_I^n \right). \quad (2.10)$$

Dans cette zone Ω^n , le coefficient de conductivité a été choisi constant et égal à $r_n^{-2}n^{-3}$. Plus précisément, le coefficient de conductivité du matériau composite considéré est donné par :

$$\alpha_n(x) := \begin{cases} \alpha(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega^n, \\ r_n^{-2}n^{-3}, & \text{si } x \in \Omega^n. \end{cases} \quad (2.11)$$

L'addition du terme $n^{-1/2}$ à α dans la matrice n'aura d'intérêt que lorsque le coefficient de diffusion est identiquement nul, $\alpha \equiv 0$. Cela assurera l'appartenance de α_n à $L_{++}^\infty(\Omega)$.

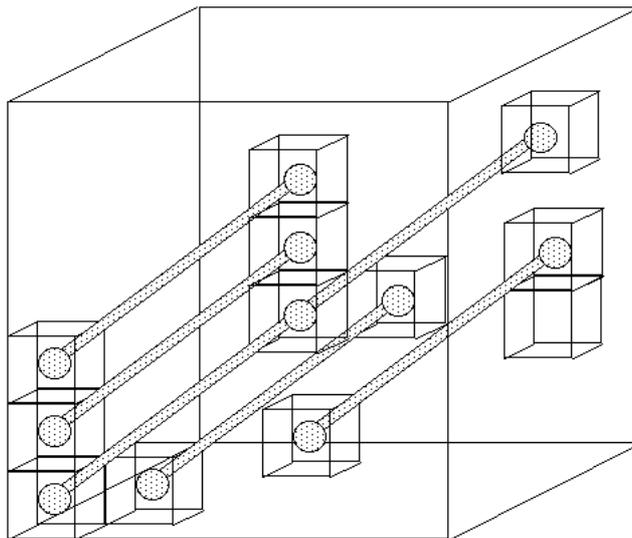


Figure 1 : Géométrie du matériau composite.

2.3 Preuve du théorème 2.1

Dans cette section, nous établissons la Mosco-convergence de la suite de fonctionnelles $(F_{\alpha_n,0,0})$ vers $F_{\alpha,0,\mu}$.

2.3.1 L'inégalité de la Mosco-limite inférieure

Soit (u_n) une suite à énergie bornée ($F_{\alpha_n,0,0}(u_n) < M$) convergeant faiblement vers un certain u dans $L^2(\Omega)$.

On commence par estimer l'énergie de u_n dans la matrice $\Omega \setminus \Omega^n$. Comme $\int_{\Omega^n} r_n^{-2} n^{-3} |\nabla u_n|^2 dx < M$, la quantité $\int_{\Omega^n} \alpha(x) |\nabla u_n|^2 dx$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus \Omega^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n|^2 dx \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla u_n|^2 dx \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{\alpha,0,0}(u_n). \quad (2.12)$$

La fonctionnelle $F_{\alpha,0,0}$ étant semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $L^2(\Omega)$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus \Omega^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n|^2 dx \geq F_{\alpha,0,0}(u). \quad (2.13)$$

En deuxième lieu, on évalue l'énergie de u_n dans le renforcement Ω^n . On définit, pour tout $I \in \mathcal{I}^n$, les cylindres $\mathcal{D}_I^n := \{x \in \mathcal{C}_I^n, \|p_I^n(x) - x_I^n\| \leq n^{-2}/2\}$ $\tilde{\mathcal{D}}_I^n := \{x \in \mathcal{C}_I^n, \|p_I^n(x) - x_{\tilde{I}}^n\| \leq n^{-2}/2\}$ où \tilde{I} est l'indice du point $x_I^n + w$ ($\Omega_{\tilde{I}}^n = \Omega_I^n + w$). De cette façon \mathcal{D}_I^n et $\tilde{\mathcal{D}}_I^n$ sont les deux extrémités du cylindre \mathcal{C}_I^n . Pour estimer l'énergie de u_n dans \mathcal{C}_I^n , on se sert

temporairement des coordonnées cylindriques de centre c_I^n et d'axe w . On note ω le disque $\omega := D(0, r_I^n) \subset \mathbb{R}^2$. Pour tout $0 < y < z < \|w\|$, on a

$$\begin{aligned} \int_{c_I^n} |\nabla u_n|^2 dx &= \int_{\omega} \left(\int_0^{\|w\|} |\nabla u_n|^2 dx_3 \right) dx' \\ &\geq \int_{\omega} \left(\int_0^{\|w\|} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 \right) dx' \geq \int_{\omega} \left(\int_y^z \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 \right) dx' \\ &\geq \frac{1}{z-y} \int_{\omega} \left(\int_y^z \frac{\partial u_n}{\partial x_3} dx_3 \right)^2 dx' \geq \frac{1}{\|w\|} \int_{\omega} \left(u_n(x', z) - u_n(x', y) \right)^2 dx'. \end{aligned} \quad (2.14)$$

En prenant la moyenne de cette dernière inégalité pour les $y \in [0, n^{-2}/2]$ et $z \in [\|w\| - n^{-2}/2, \|w\|]$, utilisant l'inégalité de Jensen, on a

$$\begin{aligned} \int_{c_I^n} |\nabla u_n|^2 dx &\geq \frac{1}{\|w\|} \int_{\omega} \left(\int_0^{\frac{1}{2n^2}} \left(\int_{\|w\| - \frac{1}{2n^2}}^{\|w\|} (u_n(x', z) - u_n(x', y))^2 dz \right) dy \right) dx' \\ &\geq \frac{\pi (r_I^n)^2}{\|w\|} \left(\int_{\mathcal{D}_I^n} u_n - \int_{\tilde{\mathcal{D}}_I^n} u_n \right)^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_{\Omega^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n|^2 dx \geq \frac{\pi}{\|w\|} \frac{1}{n^3} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\frac{r_I^n}{r_n} \right)^2 \left(\int_{\mathcal{D}_I^n} u_n - \int_{\tilde{\mathcal{D}}_I^n} u_n \right)^2. \quad (2.15)$$

Comme les cylindres \mathcal{D}_I^n sont contenus dans les boules \mathcal{B}_I^n , grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger appliquée à la boule \mathcal{B}_I^n , on a

$$\int_{\mathcal{D}_I^n} (u_n - \int_{\mathcal{B}_I^n} u_n)^2 dx \leq \int_{\mathcal{B}_I^n} (u_n - \int_{\mathcal{B}_I^n} u_n)^2 dx \leq \frac{C}{n^4} \int_{\mathcal{B}_I^n} |\nabla u_n|^2 dx.$$

Par ailleurs le volume de \mathcal{D}_I^n est petit devant $\frac{1}{2}\pi r_n^2 n^{-3}$, là encore, par l'inégalité de Jensen, et après sommation sur les I , on obtient

$$\left(\frac{1}{n^3} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{\mathcal{D}_I^n} u_n - \int_{\mathcal{B}_I^n} u_n \right)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\frac{2C}{\pi n} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \int_{\mathcal{B}_I^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\frac{2CM}{\pi n} \right)^{1/2}. \quad (2.16)$$

De la même manière, comme $\tilde{\mathcal{D}}_I^n \subset \mathcal{B}_I^n \subset \Omega_I^n + w$, on a

$$\left(\frac{1}{n^3} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{\tilde{\mathcal{D}}_I^n} u_n - \int_{\mathcal{B}_I^n} u_n \right)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\frac{2C}{\pi n} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \int_{\mathcal{B}_I^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\frac{2CM}{\pi n} \right)^{1/2}. \quad (2.17)$$

Notons \mathcal{F}_I^n l'ensemble $\mathcal{F}_I^n := \{x \in \Omega; \frac{1}{8n} < \|x - x_I^n\| < \frac{1}{4n}\}$. Nous utilisons des coordonnées cylindriques adaptées en posant $\rho := \|x - x_I^n\|^{-1}$ et $y := \rho(x - x_I^n)$ (y est un élément de la sphère unité S de \mathbb{R}^3). On introduit la mesure $\eta(d\rho) := \rho^{-4}d\rho$ sur \mathbb{R} . La quantité $\oint_A f(s) \eta(ds) := \left(\int_A \eta(ds)\right)^{-1} \left(\int_A f(s) \eta(ds)\right)$ représente la valeur moyenne de f sur un Borelien A de \mathbb{R} , par rapport à cette mesure. On remarque que $\eta(d\rho)dy$ est l'élément de volume pour ces nouvelles coordonnées. On a donc

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathcal{B}_I^n} u_n - \int_{\mathcal{F}_I^n} u_n\right)^2 &= \left(\int_{y \in S} \int_{n^2}^{\infty} u_n(x_I^n + \frac{y}{s}) \eta(ds) dy - \int_{y \in S} \int_{4n}^{8n} u_n(x_I^n + \frac{y}{t}) \eta(dt) dy\right)^2 \\ &\leq \int_{y \in S} \int_{n^2}^{\infty} \int_{4n}^{8n} \left(u_n(x_I^n + \frac{y}{s}) - u_n(x_I^n + \frac{y}{t})\right)^2 \eta(dt) \eta(ds) dy \\ &\leq \int_{y \in S} \int_{n^2}^{\infty} \int_{4n}^{8n} \left(\int_t^s |\nabla u_n(x_I^n + \frac{y}{r})| r^{-2} dr\right)^2 \eta(dt) \eta(ds) dy \\ &\leq \int_{y \in S} \int_{n^2}^{\infty} \int_{4n}^{8n} \left(\int_t^s dr \int_t^s |\nabla u_n(x_I^n + \frac{y}{r})|^2 \eta(dr)\right) \eta(dt) \eta(ds) dy \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_I^n} |\nabla u_n(x)|^2 dx \int_{n^2}^{\infty} \int_{4n}^{8n} (s-t) \eta(dt) \eta(ds) \\ &\leq \frac{n^2}{2\pi} \int_{\Omega_I^n} |\nabla u_n(x)|^2 dx . \end{aligned}$$

Comme $\alpha_n > n^{-1/2}$, la quantité $\int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx$ est inférieure à $M\sqrt{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Après sommation de ces dernières inégalités sur I , on a

$$\left(\frac{1}{n^3} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{\mathcal{B}_I^n} u_n - \int_{\mathcal{F}_I^n} u_n\right)^2\right)^{1/2} \leq \left(\frac{C'M}{2\pi n}\right)^{1/2} . \quad (2.18)$$

D'autre part, l'application de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger au cube élémentaire Ω_I^n donne

$$\int_{\mathcal{F}_I^n} \left(u_n - \int_{\Omega_I^n} u_n\right)^2 dx \leq \int_{\Omega_I^n} \left(u_n - \int_{\Omega_I^n} u_n\right)^2 dx \leq \frac{C''}{n^2} \int_{\Omega_I^n} |\nabla u_n|^2 dx . \quad (2.19)$$

On en déduit, après sommation sur les I , et compte tenu du fait que $\alpha_n > n^{-1/2}$, que

$$\left(\frac{1}{n^3} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{\mathcal{F}_I^n} u_n - \int_{\Omega_I^n} u_n\right)^2\right)^{1/2} \leq \left(\frac{C'''M}{n^{3/2}}\right)^{1/2} . \quad (2.20)$$

Regroupant les inégalités (2.16), (2.17), (2.18) et (2.20), l'estimation (2.15) s'écrit

$$\left(\int_{\Omega^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n|^2 dx\right)^{1/2} \geq \left(\frac{\pi}{\|w\|} \frac{1}{n^3} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\frac{r_I^n}{r_n}\right)^2 \left(\int_{\mathcal{F}_I^n} u_n - \int_{\Omega_I^n} u_n\right)^2\right)^{1/2} - O(n^{-1/4}). \quad (2.21)$$

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur Ω , la fonction constante par morceaux \bar{u}_n , par

$$\bar{u}_n(x) := \sum_{I=1}^{n^3} \left(\int_{\Omega_I^n} u_n \right) \mathbb{1}_{\Omega_I^n}(x), \quad (2.22)$$

rappelant la définition (2.3) de r_I^n , l'inégalité (2.21) s'écrit

$$\left(\int_{\Omega^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n|^2 dx \right)^{1/2} \geq \left(\int_{\Omega} (\bar{u}_n(x) - \bar{u}_n(x+w))^2 f(x) dx \right)^{1/2} - O(n^{-1/4}). \quad (2.23)$$

De plus, par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, la suite (\bar{u}_n) converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$. Le poids f étant un élément de $L^\infty(\Omega)$, on peut passer à la limite dans l'inégalité (2.23) et déduire

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} (u(x) - u(x+w))^2 f(x) dx. \quad (2.24)$$

En regroupant les estimations (2.13) et (2.24), on obtient l'inégalité de la Mosco-limite inférieure :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{\alpha_n, 0, 0}(u_n) \geq F_{\alpha, 0, \mu}(u). \quad (2.25)$$

□

2.3.2 L'inégalité de la Mosco-limite supérieure

Soit $u \in L^2(\Omega)$ tel que $F_{\alpha, 0, \mu}(u) < \infty$ (sinon l'inégalité de la Mosco-limite supérieure est évidente). Puisque $C^1(\bar{\Omega})$ est dense dans le domaine de $F_{\alpha, 0, \mu}$ pour la norme $|u|_{F_{\alpha, 0, \mu}} = (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + F_{\alpha, 0, \mu}(u))^{1/2}$, il suffit de prouver l'inégalité de la Mosco-limite supérieure pour les fonctions u dans $C^1(\bar{\Omega})$.

On construit de manière explicite une suite approximante (u_n) en deux étapes. On commence par définir une première suite (\tilde{u}_n) comme suit

$$\tilde{u}_n(x) := \begin{cases} u(x_I^n) & \text{si } \|x - x_I^n\| \leq Rn^{-2}, \\ u(x) & \text{si } \|x - x_I^n\| \geq 2Rn^{-2}, \\ \left(2 - \frac{2R}{n^2\|x - x_I^n\|}\right) u(x) + \left(\frac{2R}{n^2\|x - x_I^n\|} - 1\right) u(x_I^n), & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.26)$$

où R est la quantité définie par (2.4). Il est facile de vérifier que \tilde{u}_n est continue sur Ω , constante sur les boules $B(x_I^n, Rn^{-2})$ (qui contiennent les boules \mathcal{B}_I^n), coïncide avec u sur la base \mathcal{B} et vérifie $\|\tilde{u}_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. De plus, puisque l'on a

$$|u(x) - u(x_I^n)| \leq \sqrt{3}n^{-1} \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall x \in \Omega_I^n, \quad (2.27)$$

la suite \tilde{u}_n converge uniformément vers u . Sur chaque zone de transition $\mathcal{G}_I^n := B(x_I^n, 2Rn^{-2}) \setminus B(x_I^n, Rn^{-2})$, un simple calcul donne l'estimation

$$\sum_{I=1}^{n^3} \int_{\mathcal{G}_I^n} |\nabla \tilde{u}_n(x)|^2 dx \leq \frac{124\pi R^3}{3n^3} \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}^2. \quad (2.28)$$

Comme en dehors des zones de transition \mathcal{G}_I^n , la fonction \tilde{u}_n est soit constante, soit égale à u , on obtient, pour toute suite de domaines (\mathcal{G}^n) dont les volumes tendent vers zéro,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{G}^n} |\nabla \tilde{u}_n(x)|^2 dx = 0. \quad (2.29)$$

Le domaine où la fonction \tilde{u}_n ne coïncide pas avec u a un volume qui tend vers zéro. Donc, la remarque précédente nous permet d'affirmer que la suite (\tilde{u}_n) converge vers u pour la topologie forte de $H^1(\Omega)$. On a ainsi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\alpha(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) |\nabla \tilde{u}_n|^2 dx = \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla u|^2 dx. \quad (2.30)$$

Pour définir la suite approximante (u_n) , on a besoin d'introduire les fonctions d'interpolation f_n et g_n de \mathbb{R} à valeurs dans $[0, 1]$ comme suit :

$$f_n(s) = \frac{\log(s)}{|\log(n^2 r_n)|} \quad \forall s \in (1, r_n^{-1} n^{-2}) \quad \text{et} \quad g_n(s) = \frac{s - n^{-2}}{\|w\| - 2n^{-2}} \quad \forall s \in (n^{-2}, \|w\| - n^{-2}). \quad (2.31)$$

Elles sont continues et croissantes sur \mathbb{R} . Par ailleurs $f_n(s) = 0$ pour tout $s \leq 1$, $g_n(s) = 0$ pour tout $s \leq n^{-2}$, $f_n(s) = 1$ pour tout $s \geq r_n^{-1} n^{-2}$ et $g_n(s) = 1$ pour tout $s \geq \|w\| - n^{-2}$. Dans chaque cylindre ($I \in \mathcal{I}^n$)

$$\mathcal{A}_I^n := \left\{ x \in \Omega, p_I^n(x) \in]x_I^n, x_I^n + w[, \|x - p_I^n(x)\| < \frac{R}{n^2} \right\}, \quad (2.32)$$

nous utiliserons les coordonnées cylindriques adaptées (r, θ, z) de centre x_I^n et d'axe Δ_I^n . Notons \mathcal{A}^n la réunion de ces cylindres $\mathcal{A}^n := \bigcup_{I \in \mathcal{I}^n} \mathcal{A}_I^n$. On définit, enfin, la suite approximante (u_n) en posant, pour tout $I \in \mathcal{I}^n$, pour tout x dans \mathcal{A}_I^n

$$u_n(x) = f_n\left(\frac{r(x)}{r_I^n}\right) \tilde{u}^n(x) + \left(1 - f_n\left(\frac{r(x)}{r_I^n}\right)\right) \left((1 - g_n(z(x))) u(x_I^n) + g_n(z(x)) u(x_I^n + w) \right). \quad (2.33)$$

En dehors de \mathcal{A}^n , on pose $u_n(x) = \tilde{u}_n(x)$.

Grâce à l'hypothèse (2.7), les ensembles \mathcal{A}_I^n sont disjoints et u_n est bien définie par (2.33). Pour une raison similaire, on peut aussi remarquer que

$$u = 0 \text{ on } \mathcal{B} \implies u_n = 0 \text{ on } \mathcal{B}. \quad (2.34)$$

Grâce aux définitions (2.4) de R et (2.31) de f_n , grâce à la façon dont \tilde{u}_n a été définie, on peut affirmer que u_n est continue dans le domaine Ω tout entier.

Estimons, maintenant, l'énergie de u_n dans les différentes zones du domaine Ω : la zone de renforcement Ω^n , la zone de transition $\mathcal{A}^n \setminus \Omega^n$ et la zone restante $\Omega \setminus \mathcal{A}^n$.

Les fonctions u_n sont constantes sur chaque boule \mathcal{B}_I^n . Donc, pour la zone de renforcement, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n(x)|^2 dx &= \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \int_{\mathcal{C}_I^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n(x)|^2 dx \\ &\leq \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \frac{r_n^{-2} n^{-3} \pi (r_I^n)^2}{\|w\|} \left(u(x_I^n) - u(x_I^n + w) \right)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Passant à la limite dans cette dernière inégalité lorsque n tend vers l'infini, utilisant (2.3), (2.11) et (2.27), on obtient

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n(x)|^2 dx &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{I=1}^{n^3} \int_{\Omega_I^n} (u(x) - u(x+w))^2 f(x) \mathbb{1}_{\Omega}(x+w) dx \\ &\leq \int_{\Omega \times \Omega} \left(u(x) - u(y) \right)^2 \delta_{x+w}(dy) f(x) dx. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dans la zone $\Omega \setminus \mathcal{A}^n$, utilisant (2.30), on a

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus \mathcal{A}^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n(x)|^2 dx &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus \mathcal{A}^n} \left(\alpha(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) |\nabla \tilde{u}_n(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla u(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Et pour finir, il reste à estimer l'énergie de u_n dans la zone de transition $\mathcal{A}^n \setminus \Omega^n$. Puisque la suite $(|\mathcal{A}_n|)$ tend vers zéro, grâce à (2.29) et tenant compte du fait que g'_n est uniformément bornée, on obtient l'estimation

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{I=1}^{n^3} \int_{\mathcal{A}_I^n} |\nabla u_n(x)|^2 dx &\leq 12 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_I^{n^3} (r_I^n)^{-2} \int_{\mathcal{A}_I^n} \left(f'_n\left(\frac{r(x)}{r_I^n}\right) \right)^2 dx \leq \\ &\leq 12 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_I^{n^3} \frac{\|w\| \pi}{2 (\log(n^2 r_n))^2} \int_{r_I^n}^{Rn^{-2}} \frac{1}{r} dr. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Calculant explicitement cette dernière intégrale et utilisant l'hypothèse fondamentale (2.1), on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}^n} |\nabla u_n(x)|^2 dx \leq 24\pi \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^3 \frac{\log(Rn^{-2}) - \log(r_I^n)}{|\log(n^2 r_n)|^2} = 0. \quad (2.39)$$

Ainsi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}^n \setminus \Omega^n} \alpha_n(x) |\nabla u_n(x)|^2 dx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\left\| \alpha + \frac{1}{\sqrt{n}} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\mathcal{A}^n \setminus \Omega^n} |\nabla u_n(x)|^2 dx \right) = 0. \quad (2.40)$$

Regroupant les estimations (2.36), (2.37) et (2.40), on obtient l'inégalité de la Mosco-limite supérieure

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_{\alpha_n, 0, 0}(u_n) \leq F_{\alpha, 0, \mu}(u). \quad (2.41)$$

□

Ceci, avec l'inégalité de la Mosco-limite inférieure (2.25) établie dans la sous-section précédente, conclut la preuve du théorème 2.1.

□

Le résultat du théorème 2.1 reste valable lorsque l'on remplace la topologie de la Mosco-convergence sur $L^2(\Omega)$ par la τ -convergence. On a

Proposition 2.2 *Soit α dans $L_{++}^\infty(\Omega)$ ou $\alpha \equiv 0$, et $\mu(dx, dy) := \delta_{x+w}(dy)f(x)dx$ dans \mathcal{E} . Alors, il existe une suite (α_n) dans $L_{++}^\infty(\Omega)$ telle que $(F_{\alpha_n, 0, 0})$ τ -converge vers $F_{\alpha, 0, \mu}$.*

Preuve : Nous devons montrer que, si u appartient à $H_{\mathcal{B}}^1(\Omega)$, alors la suite approximante (u_n) que l'on a définie dans la preuve du théorème 2.1 converge aussi vers u pour la topologie forte de $H_{\mathcal{B}}^1(\Omega)$. Par un argument de densité, il suffit d'examiner le cas où $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et $u = 0$ sur la base \mathcal{B} . En fait, dans ce qui précède, nous avons déjà prouvé la convergence de la suite (u_n) vers u pour la topologie forte de $H^1(\Omega)$. Pour avoir la convergence de (u_n) dans $H_{\mathcal{B}}^1(\Omega)$, il faut s'assurer de l'appartenance de u_n à $H_{\mathcal{B}}^1(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; ce qui est fournie par (2.34).

□

Chapitre 3

La Mosco-fermeture des fonctionnelles de diffusion : $\overline{\mathfrak{D}}_d = \mathfrak{D}_i$ et $\overline{\mathfrak{D}}_0 = \mathfrak{D}$

Sommaire

3.1	Enoncé des résultats principaux de Mosco-densité	48
3.2	Densité des formes de Dirichlet continues dans l'ensemble de toutes les formes de Dirichlet	49
3.3	Extension du résultat d'homogénéisation aux mesures atomiques	50
3.4	Discrétisation d'une interaction non-locale	51
3.5	Preuve du théorème principal de Mosco-densité	54
3.6	Preuve du théorème de Mosco-densité en présence d'une condition de Dirichlet	54

Dans ce chapitre nous explicitons complètement la fermeture, vis-à-vis de la Mosco-convergence, de l'ensemble des fonctionnelles de diffusion, en montrant qu'elle coïncide avec l'ensemble de toutes les formes de Dirichlet positives. Nous devons considérer deux situations fondamentalement différentes :

- a) le cas objectif, i.e. lorsque aucune condition de Dirichlet n'est imposée dans le problème de diffusion de départ, et
- b) le cas non-objectif, i.e. si une condition de Dirichlet est imposée dans le problème de diffusion de départ.

3.1 Enoncé des résultats principaux de Mosco-densité

Dans le cas objectif, notre résultat s'énonce

Théorème 3.1 *La fermeture des fonctionnelles de diffusion, vis-à-vis de la Mosco-convergence, coïncide avec l'ensemble des formes de Dirichlet objectives :*

$$\overline{\mathfrak{D}_d} = \mathfrak{D}_i.$$

Puisque tous les éléments de \mathfrak{D}_d sont objectifs, une forme quadratique non-objective ne peut être obtenue comme Mosco-limite d'une suite d'éléments dans \mathfrak{D}_d . Ceci est dû au fait que l'objectivité passe à la limite au sens de la Mosco-convergence. Aussi, pour atteindre des fonctionnelles non-objectives, comme, par exemple, celles qui contiennent des termes étranges, nous supprimons l'objectivité des fonctionnelles des diffusion de départ, en imposant une condition de Dirichlet sur une partie du bord du domaine Ω . Le second résultat s'écrit

Théorème 3.2 *La fermeture des fonctionnelles de diffusion avec conditions de Dirichlet au bord, vis-à-vis de la Mosco-convergence, coïncide avec l'ensemble de toutes les formes de Dirichlet :*

$$\overline{\mathfrak{D}_0} = \mathfrak{D}.$$

3.2 Densité des formes de Dirichlet continues dans l'ensemble de toutes les formes de Dirichlet :

$$\overline{\mathfrak{D}_c} = \mathfrak{D}$$

Approximation de Moreau-Yosida

Soient $F \in \mathfrak{D}$ une forme de Dirichlet et λ un réel positif. On rappelle (cf. section 1.4) que l'*approximation de Moreau-Yosida* d'ordre λ de F est la fonctionnelle définie sur $L^2(\Omega)$ par

$$Y_\lambda(F)(u) = \inf_{v \in L^2(\Omega)} \{F(v) + \lambda \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2\}. \quad (3.1)$$

C'est une forme de Dirichlet qui est localement Lipschitzienne et par conséquent continue sur $L^2(\Omega)$: $Y_\lambda(F) \in \mathfrak{D}_c$. Par ailleurs, il est clair que, si la fonctionnelle F est objective, son approximation Moreau-Yosida l'est également : $(F \in \mathfrak{D}_i) \implies (Y_\lambda(F) \in \mathfrak{D}_i)$. Une forme de Dirichlet pouvant ne pas être continue, le passage à la limite dans certaines équations, lorsque n tend vers l'infini, peut ne pas être sans difficultés. La proposition suivante fournit un outil pour pallier à cet état de fait. En effet, elle nous permet de travailler, d'abord avec des formes de Dirichlet continues, et ensuite, par un processus de diagonalisation d'atteindre toute forme de Dirichlet. On a la

Proposition 3.3 *i) L'ensemble des formes de Dirichlet continues \mathfrak{D}_c est dense dans \mathfrak{D} pour la topologie de la Mosco-convergence :*

$$\overline{\mathfrak{D}_c} = \mathfrak{D}.$$

ii) L'ensemble des formes de Dirichlet objectives et continues \mathfrak{D}_{ci} est dense dans \mathfrak{D}_i pour la topologie de la Mosco-convergence :

$$\overline{\mathfrak{D}_{ci}} = \mathfrak{D}_i.$$

Preuve : Considérons la suite $(Y_n(F))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonctionnelle $Y_n(F)$ appartient à \mathfrak{D}_c (à \mathfrak{D}_{ci} si $F \in \mathfrak{D}_i$). Par ailleurs, pour tout $u \in L^2(\Omega)$, par l'assertion ii) de la proposition 1.29, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(F)(u) = F(u). \quad (3.2)$$

Ceci démontre l'inégalité de la Mosco-limite supérieure, puisqu'il suffit de choisir comme suite approximante, la suite constante $u_n = u$.

Pour établir l'inégalité de la Mosco-limite inférieure, considérons maintenant une suite (u_n) qui converge faiblement vers un certain u dans $L^2(\Omega)$. Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$Y_n(F)(u_n) \geq Y_{n_0}(F)(u_n). \quad (3.3)$$

Par ailleurs, la fonctionnelle $Y_{n_0}(F)$ étant convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$, elle est faiblement semi-continue inférieurement sur $L^2(\Omega)$. Ainsi, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_n Y_n(F)(u_n) \geq \liminf_n Y_{n_0}(F)(u_n) \geq Y_{n_0}(F)(u). \quad (3.4)$$

Passant à la limite dans cette dernière inégalité, lorsque n_0 tend vers plus l'infini, on obtient l'inégalité de la Mosco-limite inférieure :

$$\liminf_n Y_n(F)(u_n) \geq F(u).$$

La Mosco-convergence de la suite $(Y_n(F))$ vers F est ainsi établie. □

Le choix fait pour la suite approximante dans la Mosco-limite supérieure nous permet clairement de faire la

Remarque 3.4 *La proposition 3.3 reste valable lorsque l'on remplace la Mosco-convergence dans $L^2(\Omega)$ par la τ -convergence.*

En effet, soit (u_n) une suite dans $H_B^1(\Omega)$ convergeant faiblement vers un certain u dans $H_B^1(\Omega)$. Elle converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$, et l'on a l'inégalité de la Mosco-limite inférieure. Quant à l'inégalité de la Mosco-limite supérieure, elle est immédiate du fait que, pour tout u dans $H_B^1(\Omega)$, la suite approximante choisie est la suite constante $u_n := u$. □

3.3 Extension du résultat d'homogénéisation aux mesures atomiques

Dans cette section, nous généralisons le résultat du théorème 2.1 à une somme finie d'interactions élémentaires ; soit à une interaction atomique. On a le

Théorème 3.5 *Soit $\mu \in \mathcal{A}$. Alors il existe une suite (α_n) dans $L_{++}^\infty(\Omega)$ telle que la suite de fonctionnelles $(F_{\alpha_n, 0, 0})$ Mosco-converge vers $F_{0, 0, \mu}$ dans $L^2(\Omega)$.*

Preuve : Comme μ est un élément de \mathcal{A} , par définition, il existe p éléments w_1, w_2, \dots, w_p de Ω_2 et p fonctions f_1, f_2, \dots, f_p dans $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$ tels que

$$\mu = \sum_{i=1}^p \delta_{x+w_i}(dy) f_i(x) \mathbb{I}_\Omega(x + w_i) dx. \quad (3.5)$$

Nous allons démontrer par récurrence, sur l'entier p , que toute fonctionnelle $F_{0,0,\mu}$ avec μ de la forme (3.5) appartient à la fermeture $\overline{\mathfrak{D}}_d$ de \mathfrak{D}_d .

Le cas $p = 1$ est donné par le théorème 2.1. En effet, dans ce cas μ étant une interaction élémentaire, ce dernier affirme l'existence d'une suite (α_n) dans $L_{++}^\infty(\Omega)$ telle que $(F_{\alpha_n,0,0})$ Mosco-converge vers $F_{0,0,\mu}$ dans $L^2(\Omega)$.

Pour tout $i \leq p$, on note μ^i l'interaction élémentaire $\mu^i := \delta_{x+w_i}(dy) f_i(x) \mathbb{I}_\Omega(x + w_i) dx$ et $\tilde{\mu} := \sum_{i=1}^{p-1} \mu^i$. Supposons maintenant le résultat vrai à l'ordre $p-1$. Il existe donc une suite $(F_{\beta_n,0,0})$ dans \mathfrak{D}_d qui Mosco-converge vers $F_{0,0,\tilde{\mu}}$, lorsque n tend vers plus l'infini. Comme la fonctionnelle $F_{0,0,\mu^p}$ est convexe et continue pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$, grâce à la remarque 1.58, nous avons la Mosco-converge de la suite $(F_{\beta_n,0,\mu^p} = F_{\beta_n,0,0} + F_{0,0,\mu^p})$ vers $F_{0,0,\mu} = F_{0,0,\tilde{\mu}} + F_{0,0,\mu^p}$. Par ailleurs, d'après le théorème 2.1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(F_{\beta_{n,m},0,0})$ dans \mathfrak{D}_d qui Mosco-converge vers $F_{\beta_n,0,\mu^p}$ lorsque m tend vers l'infini. Ainsi, par un argument de diagonalisation (Proposition 1.60), il existe une suite $(\alpha_n = \beta_{n,m(n)})$, dans $L_{++}^\infty(\Omega)$, telle que $(F_{\alpha_n,0,0})$ Mosco-converge vers $F_{0,0,\mu}$. Ceci conclut la preuve du théorème 3.5. □

D'après la proposition 2.2, tous les arguments utilisés dans la preuve du théorème 3.5 sont valables pour la topologie de $H_B^1(\Omega)$. Par conséquent, on peut faire la

Remarque 3.6 *Le théorème 3.5 reste valable lorsque l'on remplace la Mosco-convergence dans $L^2(\Omega)$ par la τ -converge.*

3.4 Discrétisation d'une interaction non-locale

Dans cette section nous nous servons du concept d'interaction atomique défini dans la section 1.6 pour démontrer que toute forme de Dirichlet continue et objective est la Mosco-limite d'une suite de telles interactions. Plus précisément, on a le

Théorème 3.7 *Soit F une forme de Dirichlet continue et objective. Alors, il existe une suite (μ_n) dans \mathcal{A} telle que la suite $(F_{0,0,\mu_n})$ Mosco-converge vers F dans $L^2(\Omega)$.*

Preuve : Nous rappelons (voir remarque 1.53) que toute forme de Dirichlet continue et objective sur $L^2(\Omega)$ peut être représentée par une mesure μ sur $\Omega \times \Omega$ de la manière suivante :

$$F(u) = \int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y))^2 \mu(dx, dy).$$

Autrement dit, toute forme de Dirichlet continue et objective sur $L^2(\Omega)$ n'est rien d'autre qu'une interaction non-locale. Comme au chapitre 2, ici n représente une suite d'entiers

naturels tendant vers plus l'infini de la forme $n = 2^{q_n}$ (avec $q_n \in \mathbb{N}$). Le domaine Ω est divisé en n^3 cubes élémentaires

$$\Omega_I^n := \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right) \times \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right) \times \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right), \quad (3.6)$$

de centres c_I^n où $I := (i, j, k)$ appartient à $\{1 \dots n\}^3$ que l'on identifie à $\{1 \dots n^3\}$. Considérons la suite (μ_n) de mesures définies par

$$\mu_n := \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} a_{II'}^n \mathbb{1}_{\Omega_I^n}(x) \delta_{x+w_{II'}^n}(dy) \mathbb{1}_{\Omega}(x + w_{II'}^n) dx \quad (3.7)$$

où $a_{II'}^n := n^3 \mu(\Omega_I^n \times \Omega_{I'}^n)$ et $w_{II'}^n := c_I^n - c_{I'}^n$.

Grâce à la forme particulière de n , chaque vecteur $w_{II'}^n$ est à composantes dyadiques. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la mesure μ_n appartient à \mathcal{A} .

Montrons maintenant que la suite $(F_{0,0,\mu_n})$ Mosco-converge vers $F_{0,0,\mu}$, lorsque n tend vers plus l'infini.

Soit (u_n) une suite à énergie bornée ($F_{0,0,\mu_n}(u_n) < M < +\infty$) convergeant faiblement vers un certain u dans $L^2(\Omega)$. Pour tout n , on définit la fonction constante par morceaux \bar{u}_n sur Ω par

$$\bar{u}_n(x) := \sum_{I=1}^{n^3} \left(\int_{\Omega_I^n} u_n \right) \mathbb{1}_{\Omega_I^n}(x). \quad (3.8)$$

La suite (\bar{u}_n) ainsi définie converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$. En effet, pour tout $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$. On a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} \bar{u}_n(x) \varphi(x) dx - \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{\varphi}_n(x) - \varphi(x)\|_{L^2(\Omega)}), \quad (3.9)$$

où l'on a posé $\bar{\varphi}_n(x) := \sum_{I=1}^{n^3} \left(\int_{\Omega_I^n} \varphi \right) \mathbb{1}_{\Omega_I^n}(x)$. La régularité de la fonction test φ assurant la convergence uniforme, sur Ω , de la suite $(\bar{\varphi}_n)$ vers φ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \bar{u}_n(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx. \quad (3.10)$$

Par densité de $C^1(\bar{\Omega})$ dans $L^2(\Omega)$, la suite (\bar{u}_n) converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$. D'après les définitions (3.7) et (3.8), respectivement de μ_n et \bar{u}_n , on a, puisque $\mu_n(dx, \Omega)$

ne charge pas les ensembles $(\partial\Omega_I^n)$,

$$\begin{aligned}
F_{0,0,\mu_n}(u_n) &= \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} a_{II'}^n |\Omega_I^n| \int_{\Omega_I^n} [u_n(x) - u_n(x + w_{II'}^n)]^2 dx \\
&\geq \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} a_{II'}^n |\Omega_I^n| \left(\int_{\Omega_I^n} u_n(x) dx - \int_{\Omega_I^n} u_n(x + w_{II'}^n) dx \right)^2 \\
&\geq \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} a_{II'}^n \int_{\Omega_I^n} [(\bar{u}_n(x) - \bar{u}_n(x + w_{II'}^n))]^2 dx \\
&\geq F_{0,0,\mu_n}(\bar{u}_n).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Par ailleurs, la fonctionnelle $F_{0,0,\mu}$ étant continue sur $L^2(\Omega)$, la mesure $\mu^{sym}(dx, \Omega)$ ne charge pas les ensembles $\partial\Omega_I^n$ (cf. Chapitre 1, paragraphe sur les formes de Dirichlet continues). On a

$$F_{0,0,\mu_n}(\bar{u}_n) = \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} \int_{\Omega_I^n \times \Omega_{I'}^n} (\bar{u}_n(x) - \bar{u}_n(y))^2 \mu_n(dx, dy) = F_{0,0,\mu}(\bar{u}_n), \tag{3.12}$$

et l'inégalité (3.11) devient

$$F_{0,0,\mu_n}(u_n) \geq F_{0,0,\mu}(\bar{u}_n). \tag{3.13}$$

Comme la suite (\bar{u}_n) converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$, et comme la fonctionnelle $F_{0,0,\mu}$ est faiblement semi-continue inférieurement sur $L^2(\Omega)$, par passage à la limite dans (3.13), on obtient l'inégalité de la Mosco-limite inférieure

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{0,0,\mu_n}(u_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{0,0,\mu}(\bar{u}_n) \geq F_{0,0,\mu}(u).$$

Soit maintenant $u \in L^2(\Omega)$ tel que $F_{0,0,\mu}(u) \leq M < +\infty$, sinon l'inégalité de la Mosco-limite supérieure est trivialement vérifiée. Par un argument de densité, on peut supposer u dans $C_0^1(\Omega)$. A la suite constante $u_n := u$ on associe la suite (\bar{u}_n) définie par (3.8). La suite (\bar{u}_n) converge uniformément vers u . De plus, on a

$$\begin{aligned}
|F_{0,0,\mu_n}(u_n) - F_{0,0,\mu_n}(\bar{u}_n)| &= \sum_{II'}^{n^3} a_{II'}^n \int_{\Omega_I^n} ([u(x) - u(x + w_{II'}^n)]^2 - [\bar{u}_n(x) - \bar{u}_n(x + w_{II'}^n)]^2) dx \leq \\
&\leq \frac{8\sqrt{3} \|\nabla u\|_\infty \|u\|_\infty}{n} \sum_{II'}^{n^3} \frac{a_{II'}^n}{n^3} \leq \frac{8\sqrt{3} \|\nabla u\|_\infty \|u\|_\infty}{n} \mu(\Omega \times \Omega).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Il en découle que

$$F_{0,0,\mu_n}(u_n) = F_{0,0,\mu_n}(\bar{u}_n) + O\left(\frac{1}{n}\right) = F_{0,0,\mu}(\bar{u}_n) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.15}$$

Ainsi, par passage à la limite dans (3.15), utilisant la continuité de $F_{0,0,\mu}$, on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_{0,0,\mu_n}(u_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{0,0,\mu}(\bar{u}_n) = F_{0,0,\mu}(u)$$

et l'inégalité de la Mosco-limite supérieure est établie. Ceci conclut la preuve du théorème 3.7. □

Le choix que l'on a fait pour la suite approximante nous permet de faire la

Remarque 3.8 *Le théorème 3.7 reste valable lorsque l'on remplace la Mosco-convergence par la τ -convergence.*

3.5 Preuve du théorème principal de Mosco-densité

La preuve du théorème 3.1 est une combinaison de la proposition 3.3 avec les théorèmes 3.7 et 3.5 établis dans les deux sections précédentes.

Preuve : Il s'agit, étant donnée une forme de Dirichlet objective F , d'établir l'existence d'une suite de fonctionnelles purement diffusives dans \mathfrak{D}_d qui Mosco-converge vers F .

Soit donc F une forme de Dirichlet dans \mathfrak{D}_i . D'après la proposition 3.3, il existe une suite $(F_{0,0,\mu_m})_{m \in \mathbb{N}}$ de formes de Dirichlet continues et objectives qui Mosco-converge vers F . D'autre part, le théorème 3.7 assure, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'existence d'une suite $(\mu_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ d'interactions atomiques telle que la suite $(F_{0,0,\mu_{m,n}})_{n \in \mathbb{N}}$ Mosco-converge vers $F_{0,0,\mu_m}$. Et enfin, grâce au théorème 3.5, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe une suite $(F_{\alpha_{m,n,p},0,0})_{p \in \mathbb{N}}$ dans \mathfrak{D}_d qui Mosco-converge vers $F_{0,0,\mu_{m,n}}$. Par conséquent, en vertu de la proposition 1.60, il existe une suite $(F_{\alpha_j,0,0})_{j \in \mathbb{N}}$ dans \mathfrak{D}_d qui Mosco-converge vers F . Ceci achève la démonstration du théorème 3.1. □

Dans la démonstration du théorème 3.2, on aura besoin du résultat de Mosco-densité du théorème 3.1, mais cette fois, vis-à-vis de la τ -convergence. Nous avons la

Remarque 3.9 *Le théorème 3.1 est encore valable lorsque l'on remplace la Mosco-convergence dans $L^2(\Omega)$ par la τ -convergence.*

Ceci est une conséquence immédiate des remarques 3.6, 3.8, 3.4 et 1.61 puisque dans la preuve du théorème 3.1, les seuls résultats utilisés sont : les théorèmes 3.5 et 3.7 ainsi que les propositions 3.3 et 1.60.

3.6 Preuve du théorème de Mosco-densité en présence d'une condition de Dirichlet

L'idée principale de cette preuve suit la remarque selon laquelle, grâce à la condition de Dirichlet sur \mathcal{B} dans la définition des éléments de \mathfrak{D}_0 , tout terme étrange $\int_{\Omega} (u(x))^2 \nu(dx)$

peut s'exprimer comme une interaction non-locale $\int_{\Omega \times \Omega} (u(x) - u(y))^2 \eta(dx, dy)$ entre l'ouvert Ω et la zone \mathcal{B} du bord $\partial\Omega$ où est imposée cette condition de Dirichlet. Il est question, pour une forme de Dirichlet F quelconque, de construire une suite $(F_{\alpha_n, 0, 0}^0)$ dans \mathfrak{D}_0 qui Mosco-converge vers F . Comme dans la preuve du théorème 3.1, grâce à la densité de \mathfrak{D}_c dans \mathfrak{D} , il suffit de traiter le cas où F appartient à \mathfrak{D}_c ; la fonctionnelle F prend alors la forme $F = F_{0, \nu, \mu}$ (cf. Chapitre 1, paragraphe sur les formes de Dirichlet continues). Soit $\tilde{\mu}$ la mesure de Radon définie sur $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ par

$$\tilde{\mu}(dx, dy) := \mu(dx, dy) + \nu(dx) \mathcal{H}_{|\mathcal{B}}^2(dy), \quad (3.16)$$

où $\mathcal{H}_{|\mathcal{B}}^2$ désigne la mesure de Hausdorff de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 . Pour tout $\lambda > 0$, on définit la fonctionnelle $F_{\lambda, 0, \tilde{\mu}}$, sur $L^2(\Omega)$ par

$$F_{\lambda, 0, \tilde{\mu}}(u) := \begin{cases} \int_{\Omega} \lambda |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} (u(x) - u(y))^2 \tilde{\mu}(dx, dy), & \text{si } u \in H^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.17)$$

(On peut remarquer que, malgré une grande ressemblance entre (3.17) et (1.66), la fonctionnelle $F_{\lambda, 0, \tilde{\mu}}$ n'appartient pas nécessairement à \mathfrak{D}_0 , puisque la mesure $\tilde{\mu}$ peut être concentrée sur le bord $\partial\Omega$.) Puisque pour tout u dans $H_{|\mathcal{B}}^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (u(x))^2 \nu(dx) = \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} (u(x) - u(y))^2 \mathcal{H}_{|\mathcal{B}}^2(dy) \nu(dx), \quad (3.18)$$

on a, pour tout u dans $L^2(\Omega)$

$$F_{0, \nu, \mu}(u) + 2\lambda F_{1, 0, 0}^0(u) = F_{\lambda, 0, \tilde{\mu}}(u) + \lambda F_{1, 0, 0}^0(u). \quad (3.19)$$

La mesure $\tilde{\mu}^{sym}(dx, \Omega)$ ne chargeant pas les ensembles de capacité nulle, la fonctionnelle $F_{\lambda, 0, \tilde{\mu}}$ est une forme de Dirichlet sur $L^2(\Omega)$. De plus, elle est objective. Elle appartient donc à \mathfrak{D}_i . Grâce à la proposition 2.2, $F_{\lambda, 0, \tilde{\mu}}$ est la τ -limite d'une suite $(F_{\alpha_n, 0, 0}^0)$ dans \mathfrak{D}_d . Par la remarque 1.59, on a

$$F_{\alpha_n + \lambda, 0, 0}^0 = F_{\alpha_n, 0, 0}^0 + \lambda F_{1, 0, 0}^0 \xrightarrow{L^2(\Omega) - M} F_{\lambda, 0, \tilde{\mu}} + \lambda F_{1, 0, 0}^0 = F_{0, \nu, \mu} + 2\lambda F_{1, 0, 0}^0. \quad (3.20)$$

Ainsi, pour tout $\lambda > 0$, la fonctionnelle $F_{0, \nu, \mu} + 2\lambda F_{1, 0, 0}^0$ appartient à la fermeture $\overline{\mathfrak{D}_0}$ de \mathfrak{D}_0 . Par ailleurs, on vérifie facilement que la suite $(\frac{1}{n} F_{1, 0, 0}^0)$ Mosco-converge vers zéro. La fonctionnelle $F_{0, \nu, \mu}$ étant convexe et continue pour la topologie forte de $L^2(\Omega)$, grâce à la remarque 1.58, la suite $(F_{0, \nu, \mu} + \frac{1}{n} F_{1, 0, 0}^0)$ Mosco-converge vers $F_{0, \nu, \mu}$. On conclut la preuve du théorème 3.2 en utilisant la procédure de diagonalisation énoncée dans la proposition 1.60.

Chapitre 4

Fonctionnelles objectives des déplacements de l'espace physique

Sommaire

4.1	Elasticité linéaire	56
4.1.1	Déplacements dans l'espace physique	56
4.1.2	Objectivité	57
4.1.3	Inégalité de Korn	57
4.2	Sur une notion de convergence adaptée	58
4.2.1	Les formes quadratiques	62
4.3	Stratégie de la preuve du résultat de densité en élasticité . .	66

Dans ce chapitre, après de brefs rappels sur l'élasticité linéaire, nous introduisons une notion de convergence de fonctionnelles qui servira à établir les résultats des deux prochains chapitres. L'intérêt de cette notion de convergence, plus forte que la Mosco-convergence et la Γ -convergence pour la topologie forte de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, est qu'elle simplifie l'énoncé des résultats et en raccourcit aussi les démonstrations.

4.1 Elasticité linéaire

4.1.1 Déplacements dans l'espace physique

Soit Ω un convexe ouvert, borné et régulier de l'espace physique \mathbb{R}^3 . Nous référerons à un point x de Ω par ses coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) . De même, par (u_1, u_2, u_3) nous désignerons les coordonnées d'un vecteur u de \mathbb{R}^3 . On appellera *déplacement*, tout élément u de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Noter que son gradient est alors un élément de $L^2(\Omega, M_{3 \times 3})$, où $M_{3 \times 3}$ désigne l'espace des matrices 3×3 à coefficients réels muni de sa norme Euclidienne notée $\|\cdot\|_{M_{3 \times 3}}$. Quand il n'y a pas de risques de confusion, on la notera simplement $\|\cdot\|$. Pour toute matrice $A \in M_{3 \times 3}$, on notera A^t sa transposée et $\text{Tr}(A)$ sa trace. On définit le *tenseur des déformations linéarisé* $e(u)$ associé à u comme étant la partie symétrique du gradient de u , soit $e(u) := (\nabla u + \nabla u^t)/2$. La notation $\nabla^a u$ désignera la partie antisymétrique

de ∇u , soit $\nabla^a u := (\nabla u - \nabla u^t)/2$. On appellera *mouvement rigide*, tout élément u de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vérifiant $e(u) = 0$. On montre [17] qu'un déplacement u est un mouvement rigide si, et seulement si, il existe deux vecteurs a et b dans \mathbb{R}^3 tels que, pour presque tout $x \in \Omega$, $u(x) = a + b \wedge x$. L'ensemble des mouvements rigides sera noté \mathcal{R} .

4.1.2 Objectivité

Des considérations physiques (l'objectivité de l'énergie) suggèrent de ne prendre en compte que des fonctionnelles qui s'annulent pour les mouvements rigides. Une fonctionnelle $F : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow [0, +\infty]$, sera dite *objective* si elle vérifie :

$$\forall r \in \mathcal{R}, F(r) = 0. \quad (4.1)$$

On référera à cette propriété comme étant *l'objectivité* de F .

4.1.3 Inégalité de Korn

Cette inégalité régulièrement utilisée dans les problèmes d'élasticité linéaire, est assez surprenante à première vue, puisqu'elle affirme que l'on peut contrôler la norme $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ des 9 dérivées partielles d'un élément u de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ par la norme $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de seulement 6 combinaisons linéaires de ces mêmes dérivées partielles.

Théorème 4.1 (Inégalité de Korn) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 de frontière régulière. Il existe une constante $C = C(\Omega)$ positive telle que*

$$\forall u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega; M_{3 \times 3})} \leq C \left(\|u\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} + \|e(u)\|_{L^2(\Omega; M_{3 \times 3})} \right). \quad (4.2)$$

Pour la preuve du théorème 4.1, voir par exemple [21]. Comme conséquence de (4.2), la semi-norme $\|e(u)\|_{L^2(\Omega; M_{3 \times 3})}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

On peut noter que la présence de la norme $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de u dans (4.2) fait que la constante C varie par changement d'échelle. Ceci rend l'inégalité de Korn inopérante dans certaines situations. Pour contourner cette difficulté, nous établissons une variante de l'inégalité de Korn avec une constante invariante par changement d'échelle.

Lemme 4.2 (Inégalité de Korn homogène) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 de frontière régulière. Alors, il existe une constante $C = C(\Omega)$ positive telle que, pour tout $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$,*

$$\int_{\Omega} \left\| \nabla u - \int_{\Omega} \nabla^a u \right\|^2 dx \leq C \int_{\Omega} \|e(u)\|^2 dx. \quad (4.3)$$

Preuve : Nous allons faire un raisonnement par l'absurde. Supposons donc que pour toute constante $C > 0$, il existe un certain $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vérifiant l'inégalité inverse de

(4.3), soit tel que

$$\int_{\Omega} \left\| \nabla u - \int_{\Omega} \nabla^a u \right\|^2 dx > C \int_{\Omega} \|e(u)\|^2 dx. \quad (4.4)$$

Il existe donc une suite (u_n) dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ qui vérifie

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \|e(u^n)\|^2 dx \longrightarrow 0 \\ \int_{\Omega} \left\| \nabla u^n - \int_{\Omega} \nabla^a u^n \right\|^2 dx = 1. \end{cases}$$

Posant $v^n := u^n - \left(\int_{\Omega} \nabla^a u^n \right) \cdot x - \int_{\Omega} u^n$, la suite (v_n) vérifie

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \|e(v^n)\|^2 dx = \int_{\Omega} \|e(u^n)\|^2 dx \longrightarrow 0, \int_{\Omega} v^n = 0, \int_{\Omega} \|\nabla v^n\|^2 dx = 1, \\ \nabla v^n = \nabla u^n - \int_{\Omega} \nabla^a u^n, \int_{\Omega} \nabla^a v^n = 0. \end{cases}$$

D'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, la suite (v^n) est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$: il existe un certain v dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tel que, à une sous-suite près, (v^n) converge faiblement vers v dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. On a $\int_{\Omega} \|e(v)\|^2 = 0$ et, d'après ce qui précède, v est un mouvement rigide. De plus

$$\int_{\Omega} v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla^a v(x) dx = 0.$$

Par conséquent $v = 0$. Ainsi (v^n) converge fortement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vers 0. Par suite on a

$$\|v^n\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla v^n\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 \longrightarrow 1.$$

D'autre part, puisque $e(v^n) \longrightarrow 0$ et $v^n \longrightarrow 0$, on a

$$\|v^n\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}^2 + \|e(v^n)\|_{L^2(\Omega, \mathcal{M}_{n \times n})}^2 \longrightarrow 0.$$

Ceci est en contradiction avec l'inégalité de Korn (4.2) qui assure que ces deux quantités sont des normes équivalentes dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. □

4.2 Sur une notion de convergence adaptée

L'étude de la fermeture des fonctionnelles de l'élasticité ayant été conclue après celle de la fermeture de celles de diffusion, nous nous sommes aperçus que les résultats s'énonçaient plus simplement et se démontraient plus élégamment en introduisant une notion de convergence plus adaptée que la Mosco ou la Γ -convergence : une notion que nous nommons

τ -convergence dans la suite. Faute de temps nous n'avons malheureusement pas pu réécrire les chapitres précédent dans ce cadre.

Toutes les fonctionnelles que nous considérons dans ce chapitre sont définies sur l'espace de Lebesgue $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Elles sont propres, convexes et semi-continues inférieurement sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Nous notons \mathfrak{F} leur ensemble et introduisons cette notion de convergence de fonctionnelles qui est particulièrement adaptée à notre problème :

Définition 4.3

Nous dirons qu'une suite de fonctionnelles (F_n) dans \mathfrak{F} τ -converge vers une fonctionnelle F , et nous écrirons $F_n \xrightarrow{\tau} F$, si, et seulement si, elle vérifie les trois propriétés suivantes :

i) *Inégalité de la borne inférieure* : Pour toute suite (u_n) qui converge faiblement vers un certain u dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F(u) . \quad (4.5)$$

ii) *Première inégalité de la borne supérieure* : Pour tout u dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, il existe une suite approximante (u_n) convergeant vers u fortement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de telle sorte que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \leq F(u) . \quad (4.6)$$

iii) *Deuxième inégalité de la borne supérieure* : Pour tout u dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, il existe une suite (u_n) convergeant vers u pour la topologie forte de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \leq F(u) . \quad (4.7)$$

Remarque 4.4 *Tout résultat de densité établi pour la τ -convergence est aussi valable pour la Mosco-convergence dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et la Γ -convergence pour la topologie forte de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$.*

Cette notion de τ -convergence est étroitement liée à celle de Γ -convergence qui est adaptée à l'étude de problèmes variationnels et à celle de Mosco-convergence qui est particulièrement adaptée aux cas convexes. En effet les points (i) et (ii) de notre définition sont équivalents à la Mosco-convergence dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de la suite (F_n) vers F . Le point (iii) affirme de plus que la suite des restrictions à $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ des fonctionnelles F_n Mosco-converge, dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, vers la restriction de F à $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$: grossièrement parlant, la τ -convergence est la Mosco convergence à la fois dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. La Γ -convergence est une notion plus faible : comme vu au premier chapitre, pour prouver la Γ -convergence de (F_n) vers F pour une certaine topologie, on doit établir l'inégalité de la borne inférieure et celle de la borne supérieure (4.5) et (4.6) lorsque (u_n) tend vers u pour cette topologie. On vérifie facilement que la τ -convergence de (F_n) vers F implique sa Γ -convergence vers F pour les topologies forte et faible de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et la Γ -convergence des restrictions à $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ pour les topologies forte et faible de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. La remarque 4.4 résulte du fait que, plus une notion de convergence est forte, plus fort est le résultat de densité associé.

Il est classique de raccourcir les preuves en analyse asymptotique en considérant uniquement des suites à énergie bornée. En effet :

Remarque 4.5 *Il est clair qu'un résultat de τ -convergence est prouvé même si l'on ne considère dans (i) que des suites (u_n) à énergie bornée (i.e. telles que $F_n(u_n) < M < +\infty$) et dans (ii) ainsi que dans (iii) uniquement des fonctions u telles que $F(u) < +\infty$.*

De la même manière, on raccourcit la démonstration des points ii) et iii) en ne considérant pour des raisons de densité que des fonctions régulières.

Remarque 4.6 *Si F est continue pour la topologie forte de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ alors les assertions ii) et iii) sont équivalentes à l'assertion suivante :*

iv) *Pour tout $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$, il existe une suite (u_n) convergeant fortement vers u dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et vérifiant*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \leq F(u). \quad (4.8)$$

En effet, soit $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $v_n \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\|u - v_n\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{n}, \quad (4.9)$$

$$|F(u) - F(v_n)| \leq \frac{1}{n}, \quad (4.10)$$

$$\text{et } \|u - v_n\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{n} \text{ si } u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3). \quad (4.11)$$

D'après (4.8), pour tout n il existe u_n tel que

$$\|u_n - v_n\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{n} \text{ et } F_n(u_n) \leq F(v_n) + \frac{1}{n}. \quad (4.12)$$

Les inégalités (4.10), (4.11) et (4.12) impliquent l'assertion iii) alors que les inégalités (4.9), (4.10) et (4.12) impliquent l'assertion ii). \square

La propriété suivante mettra en évidence un premier intérêt de la notion de τ -convergence. En effet cette convergence est stable par addition d'éléments d'une large classe de perturbations.

Propriété 4.7 *Notons \mathfrak{X} l'ensemble de toutes les fonctionnelles dans \mathfrak{F} qui sont, soit continues pour la topologie forte de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, soit continues pour la topologie forte de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ avec un domaine contenu dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. On a*

$$F_n \xrightarrow{\tau} F \quad \text{et} \quad G \in \mathfrak{X} \quad \Rightarrow \quad F_n + G \xrightarrow{\tau} F + G. \quad (4.13)$$

Preuve : Soit (u_n) une suite convergeant faiblement vers u dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Comme $G \in \mathfrak{X}$ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, la τ -convergence de (F_n) vers F implique l'inégalité de la borne inférieure :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (F_n + G)(u_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} G(u_n) \geq F(u) + G(u),$$

et le point (i) de la définition 4.3 est prouvé. Soit maintenant $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. La τ -convergence de (F_n) vers F implique l'existence d'une suite (u_n) qui converge fortement vers u dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et qui vérifie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \leq F(u) . \quad (4.14)$$

Comme dans tous les cas G est continue, pour la topologie forte de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, nous avons aussi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (F_n + G)(u_n) \leq (F + G)(u) \quad (4.15)$$

et le point (iii) est prouvé. Clairement, ceci prouve également le point (ii) lorsque le domaine de G est contenu dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Sinon, G est continue pour la topologie forte de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. La τ -convergence de (F_n) vers F donne l'existence d'une suite (u_n) qui converge fortement vers u dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et qui satisfait l'inégalité de la borne supérieure (4.14). Par continuité de G , l'inégalité (4.15) et donc le point (ii) sont vérifiés. \square

Définition 4.8

Soit \mathfrak{U} un sous-ensemble de \mathfrak{P} . On appellera fermeture de \mathfrak{U} et on notera $\overline{\mathfrak{U}}$ l'ensemble de toutes les τ -limites de suites dans \mathfrak{U} .

La propriété suivante est essentielle dans notre démarche. Elle met en évidence un deuxième intérêt de la notion de τ -convergence.

Propriété 4.9 *Pour tout sous-ensemble \mathfrak{U} de \mathfrak{P} , on a $\overline{\overline{\mathfrak{U}}} = \overline{\mathfrak{U}}$.*

Preuve : Comme la Mosco-convergence et contrairement à la Γ -convergence, la τ -convergence est métrisable au moins sur une grande partie de \mathfrak{P} , notamment sur l'ensemble \mathfrak{P}_{pr} de toutes les fonctionnelles dans \mathfrak{P} dont les domaines rencontrent $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Il a été prouvé dans [2] (section 3.5) que la topologie de la Mosco-convergence est métrisable sur l'ensemble des fonctionnelles propres, convexes et semi-continues inférieurement : il existe une métrique d_1 sur \mathfrak{P} telle que la Mosco-convergence, dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, d'une suite (F_n) vers une fonctionnelle F soit équivalente à la convergence de $d_1(F_n, F)$ vers zéro :

$$F_n \xrightarrow{L^2(\Omega)-M} F \iff d_1(F_n, F) \longrightarrow 0.$$

Comme dans tout espace métrique, la propriété de diagonalisation est alors valable.

Soit $F \in \overline{\mathfrak{U}}$. Par définition de $\overline{\mathfrak{U}}$, il existe une suite (F_n) dans \mathfrak{U} qui τ -converge vers F lorsque n tend vers plus l'infini, et par définition de $\overline{\mathfrak{U}}$, pour tout n , il existe une suite (F_m^n) dans \mathfrak{U} qui τ -converge vers F_n lorsque m tend vers plus l'infini. Comme la τ -convergence implique la Mosco-convergence dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, et comme cette dernière convergence est métrisable, il existe une suite diagonale $(F_{m(n)}^n)$ qui Mosco-converge dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vers F lorsque n tend vers plus l'infini.

Si F appartient à $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_{pr}$, ceci suffit à affirmer la τ -convergence de (F_n) vers F . En effet, $F(u) = +\infty$ pour tout $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et, en vertu de la remarque 4.5, le point (iii) de la définition 4.3 est trivial.

Si F appartient à \mathfrak{F}_{pr} , on peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, que chaque F_n et chaque F_m^n appartient aussi à \mathfrak{F}_{pr} . Montrons, maintenant, que la τ -convergence est métrisable sur \mathfrak{F}_{pr} . La restriction à $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de n'importe quel élément de \mathfrak{F}_{pr} appartient à l'ensemble des fonctionnelles propres, convexes et semi-continues inférieurement pour la topologie de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Donc, il existe une métrique d_2 sur cet ensemble qui définit la Mosco-convergence dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Introduisons la distance $d := d_1 + d_2$ sur \mathfrak{F}_{pr} . La convergence au sens de la distance d est équivalente à la τ -convergence et l'on peut encore utiliser la propriété de diagonalisation. Il existe une suite diagonale $(F_{m(n)}^n)$ qui τ -converge dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vers F lorsque n tend vers plus l'infini. Ainsi, dans les deux cas, F appartient à $\overline{\mathfrak{U}}$. \square

Propriété 4.10 *Soit \mathfrak{U} un cône convexe dans \mathfrak{R} . Soit F et G dans $\overline{\mathfrak{U}}$. Si $F \in \mathfrak{R}$ alors $F + G$ appartient à $\overline{\mathfrak{U}}$.*

En effet, il existe des suites (F_n) et (G_n) dans \mathfrak{U} qui τ -convergent respectivement vers F and G . Donc, par la propriété 4.7, $F + G_n$ τ -converge vers $F + G$ et, pour tout n , $F_m + G_n$ τ -converge vers $F + G_n$ lorsque m tend vers plus l'infini. Ainsi $F + G$ appartient à $\overline{\mathfrak{U}}$ et le résultat découle de la propriété 4.9. \square

Propriété 4.11 *Soit (F_n) une suite croissante de fonctionnelles dans \mathfrak{F} qui converge simplement vers une fonctionnelle F . Alors (F_n) τ -converge vers F .*

Preuve : On a, pour tout $n > n_0$, et tout $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$,

$$F(v) \geq F_n(v) \geq F_{n_0}(v). \quad (4.16)$$

Soit (u_n) une suite qui converge faiblement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vers un certain u . Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la fonctionnelle F_{n_0} est semi-continue inférieurement. Donc les inégalités (4.16) donnent

$$\liminf_n F_n(u_n) \geq \liminf_n F_{n_0}(u_n) \geq F_{n_0}(u).$$

Par passage à la limite, lorsque n_0 tend vers plus l'infini, dans l'inégalité précédente, nous obtenons l'inégalité de la borne inférieure :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F(u).$$

Les inégalités de la borne supérieure (points (ii) et (iii) de la définition 4.3) sont assurées par la convergence simple de (F_n) vers F . En effet, il suffit de choisir comme suite approximante la suite constante $u_n := u$. \square

4.2.1 Les formes quadratiques

Formes quadratiques objectives : On note $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{F}$ l'ensemble des formes quadratiques objectives, i.e. l'ensemble de toutes les formes quadratiques $F : L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, positives et semi-continues inférieurement qui vérifiant $F(r) = 0$, pour tout $r \in \mathcal{R}$.

Remarque 4.12 *L'ensemble de toutes les formes quadratiques objectives est fermé : $\overline{\Omega} = \Omega$.*

En effet, on vérifie facilement que toute τ -limite est s.c.i dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et que les propriétés (4.1), (1.32), (1.33) et (1.34) passent à la limite par τ -convergence. Noter que ce résultat de fermeture est valable pour la Γ -convergence pour la topologie forte de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ [36]. Ceci est nécessaire si l'on veut interpréter nos résultats de densité en termes de Γ -convergence pour la topologie forte de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Fonctionnelles d'élasticité : Les fonctionnelles d'élasticité appartiennent à Ω . Dorénavant, nous fixons un coefficient de Poisson ν dans $(-1, 1/2)$. Nous considérons l'ensemble \mathfrak{E}_ν des fonctionnelles d'élasticité dont le coefficient de Poisson coïncide avec ν . Plus précisément, posant

$$j_\nu(u) := \|e(u)\|^2 + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \text{tr}(e(u))^2, \quad (4.17)$$

et

$$E_{\alpha,\nu}(u) := \begin{cases} \int_{\Omega} \alpha(x) j_\nu(u) dx, & \text{si } u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.18)$$

l'ensemble \mathfrak{E}_ν s'exprime comme suit

$$\mathfrak{E}_\nu := \{E_{\alpha,\nu} ; \alpha \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+), \alpha^{-1} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)\} . \quad (4.19)$$

De simples comparaisons algébriques de formes quadratiques sur les matrices symétriques mènent à la

Remarque 4.13 *Pour tout u , on a*

$$(1 + \nu)(e_{33}(u))^2 \leq j_\nu(u) \quad (4.20)$$

et

$$k_\nu \|e(u)\|^2 \leq j_\nu(u) \leq K_\nu \|e(u)\|^2, \quad (4.21)$$

où k_ν et K_ν sont les constantes positives : $k_\nu := \min(1, \frac{1+\nu}{1-2\nu})$, $K_\nu := \max(1, \frac{1+\nu}{1-2\nu})$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} j_\nu(u) - (1 + \nu)(e_{33}(u))^2 &\geq \\ &\geq (e_{11}(u))^2 + (e_{22}(u))^2 - \nu(e_{33}(u))^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_{11}(u) + e_{22}(u) + e_{33}(u))^2 \\ &\geq ((e_{11}(u))^2 + (e_{22}(u))^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} (e_{11}(u) + e_{22}(u))^2 \\ &\quad + \frac{2}{1-2\nu} (e_{11}(u) + e_{22}(u))\nu e_{33}(u) + \frac{2}{1-2\nu} (\nu e_{33}(u))^2). \end{aligned}$$

Utilisant le fait que $2((e_{11}(u))^2 + (e_{22}(u))^2) \geq (e_{11}(u) + e_{22}(u))^2$, on obtient

$$\begin{aligned} j_\nu(u) - (1 + \nu)(e_{33}(u))^2 &\geq \\ &\geq \frac{1}{2(1 - 2\nu)}(e_{11}(u) + e_{22}(u))^2 + \frac{2}{1 - 2\nu}(e_{11}(u) + e_{22}(u))\nu e_{33}(u) + 2\frac{(\nu e_{33}(u))^2}{1 - 2\nu} \\ &\geq \frac{1}{1 - 2\nu} \left(\frac{e_{11}(u) + e_{22}(u)}{\sqrt{2}} + \nu e_{33}(u)\sqrt{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Ceci prouve (4.20). Pour établir (4.21), on distingue deux cas :

Lorsque $\nu \in [0, 1/2[$, grâce à l'inégalité

$$3((e_{11}(u))^2 + (e_{22}(u))^2 + (e_{33}(u))^2) \geq (e_{11}(u) + e_{22}(u) + e_{33}(u))^2,$$

on a

$$\begin{aligned} \|e(u)\|^2 \leq j_\nu(u) &= (e_{11}(u))^2 + (e_{22}(u))^2 + (e_{33}(u))^2 + 2((e_{12}(u))^2 + (e_{13}(u))^2 + (e_{23}(u))^2) \\ &\quad + \frac{\nu}{1 - 2\nu}(e_{11}(u) + e_{22}(u) + e_{33}(u))^2 \\ &\leq (e_{11}(u))^2 + (e_{22}(u))^2 + (e_{33}(u))^2 + 2((e_{12}(u))^2 + (e_{13}(u))^2 + (e_{23}(u))^2) \\ &\quad + \frac{3\nu}{1 - 2\nu}((e_{11}(u))^2 + (e_{22}(u))^2 + (e_{33}(u))^2) \\ &\leq \left(1 + \frac{3\nu}{1 - 2\nu}\right) \|e(u)\|^2 \\ &\leq \left(\frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}\right) \|e(u)\|^2. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Lorsque $\nu \in]-1, 0]$, de la même manière, on obtient

$$\|e(u)\|^2 \geq j_\nu(u) \geq \left(1 + \frac{3\nu}{1 - 2\nu}\right) \|e(u)\|^2 \geq \left(\frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}\right) \|e(u)\|^2. \tag{4.23}$$

L'inégalité (4.23) complétée par (4.22) implique (4.21)¹.

Formes continues : Comme dans le cas scalaire, le sous-ensemble de \mathfrak{Q} de fonctionnelles qui sont continues pour la topologie forte de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ joue un rôle très important dans nos preuves. On le note \mathfrak{C} .

Remarque 4.14 *L'ensemble $\overline{\mathfrak{E}}_\nu \cap \mathfrak{C}$ est un cône convexe.*

En effet, \mathfrak{E}_ν et \mathfrak{C} sont des cônes convexes inclus dans \mathfrak{R} . Si F et G appartiennent à $\overline{\mathfrak{E}}_\nu \cap \mathfrak{C}$, alors la propriété 4.10 assure que $F + G \in \overline{\mathfrak{E}}_\nu$.

¹Une autre façon d'établir (4.21) consiste à décomposer la matrice $e(u)$ en partie déviatrice $\mathring{e}(u)$ et partie trace $\frac{1}{3}\text{Tr}(e(u))\mathbf{I}$, où \mathbf{I} est l'identité dans $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. On a alors $j_\nu(u) = \|\mathring{e}(u)\|^2 + (\frac{1+\nu}{1-2\nu})\frac{1}{3}\text{Tr}(e(u))^2$, et donc $\min(1, \frac{1+\nu}{1-2\nu})\|e(u)\|^2 \leq j_\nu(u) \leq \max(1, \frac{1+\nu}{1-2\nu})\|e(u)\|^2$.

Formes discrètes : Pour toute fonction $g \neq 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^+)$, pour toute famille $(x_i) \in \Omega^p$ de p points distincts dans Ω et toute forme quadratique positive q sur $(\mathbb{R}^3)^p$, on note $D_{q,(x_i),g}$ la forme quadratique définie, pour tout $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, par

$$D_{q,(x_i),g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} q(u(x_1 + x), u(x_2 + x), \dots, u(x_p + x))g(x) dx, \quad (4.24)$$

où $\tilde{\Omega} := \cap_{i=1}^p (\Omega - x_i)$. On vérifie qu'une telle fonctionnelle est continue pour la topologie forte de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et qu'elle est objective si, et seulement si, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$,

$$q(v, v, \dots, v) = 0 \quad \text{et} \quad q(v \wedge x_1, v \wedge x_2, \dots, v \wedge x_p) = 0. \quad (4.25)$$

Nous référerons à la propriété (4.25) comme *l'objectivité de $(q, (x_i))$* . L'ensemble de toutes les formes objectives $D_{q,(x_i),g}$ est noté \mathfrak{Q}_p .

Formes discrètes de rang un : Pour toute fonction $g \neq 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^+)$, pour toute famille $(x_i) \in \Omega^p$ de p points distincts dans Ω et toute famille de "forces" $(f_i) \in (\mathbb{R}^3)^p$, on note $L_{(f_i),(x_i),g}$ la forme quadratique définie, pour tout $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, par

$$L_{(f_i),(x_i),g}(u) := \int_{\tilde{\Omega}} \left(\sum_{i=1}^p f_i \cdot u(x_i + x) \right)^2 g(x) dx. \quad (4.26)$$

Pour qu'une telle fonctionnelle soit objective, il faut et il suffit que la famille (x_i, f_i) vérifie

$$\sum_{i=1}^p f_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p x_i \wedge f_i = 0. \quad (4.27)$$

Nous référerons à cette propriété comme *l'équilibre du système de forces (f_i, x_i)* . L'ensemble de toutes les formes objectives $L_{(f_i),(x_i),g}$ est un sous-ensemble de \mathfrak{Q}_p . On le note \mathfrak{L}_p .

Formes élémentaires : Le cas $p = 2$ joue un rôle crucial dans cette étude. On vérifie sans peine que \mathfrak{Q}_2 coïncide avec \mathfrak{L}_2 qui contient uniquement des fonctionnelles "élémentaires" de la forme :

$$S_{(x_1, x_2),g}(u) = \int_{\tilde{\Omega}} s_{(x_1, x_2)}(u(x_1 + x), u(x_2 + x))g(x) dx, \quad (4.28)$$

où $s_{(x_1, x_2)}$ est la forme quadratique définie, pour tout $(u_1, u_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$, par

$$s_{(x_1, x_2)}(u_1, u_2) = \left((u_1 - u_2) \cdot \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} \right)^2. \quad (4.29)$$

Noter que, d'un point de vue mécanique, $s_{(x_1, x_2)}$ correspond à une interaction de type "ressort" entre les points x_1 et x_2 .

4.3 Stratégie de la preuve du résultat de densité en élasticité

Le résultat principal (Théorème 6.13) de cette partie sur l'élasticité s'établit, à l'instar du cas scalaire, en plusieurs étapes : D'abord, on montre au chapitre 5 que $\mathfrak{L}_2 \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}$. Ceci signifie que toute interaction à deux points de type ressort appartient à la fermeture. Pour ce faire, on construit un matériau composite qui a les propriétés effectives cherchées. Cette étape est la plus longue et aussi la plus technique. Mais le résultat qu'on y établit est la base sur laquelle s'appuie le reste de notre argument.

Le deuxième outil fondamental est fourni par le théorème 6.3 au chapitre 6. Un théorème qui nous permet de considérer des interactions "indirectes". D'un point de vue mécanique, les interactions à plusieurs points via un "treillis de ressorts" peuvent alors être obtenues. Ceci nous permet de généraliser le premier résultat et de prouver successivement que \mathfrak{L}_4 et donc, par récurrence, \mathfrak{L}_p pour $p > 4$, sont inclus dans $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. La généralisation de ce dernier à \mathfrak{Q}_p ne présente aucune difficulté.

Ensuite, nous approchons toute fonctionnelle continue par des éléments de \mathfrak{Q}_p . La difficulté majeure de cette discrétisation réside dans le fait que l'on ne doit utiliser que des fonctionnelles approximantes objectives. Tous ces résultats sont résumés dans le théorème 6.11 qui affirme que

$$\mathfrak{C} \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}. \quad (4.30)$$

La dernière étape est classique. On utilise la notion d'approximation de Moreau-Yosida, pour approcher tout élément de \mathfrak{Q} par une suite de fonctionnelles continues. Le théorème 6.12 affirme que

$$\mathfrak{Q} \subset \overline{\mathfrak{C}}. \quad (4.31)$$

Chapitre 5

Un milieu composite élastique présentant des interactions non-locales

Sommaire

5.1	Description d'un matériau composite élastique	68
5.2	Un théorème d'homogénéisation en élasticité	69
5.2.1	Lemmes préliminaires	70
5.2.2	L'inégalité de la borne inférieure	78
5.2.3	L'inégalité de la borne supérieure	79

Le but de ce chapitre est de montrer que toute interaction non-locale à deux points appartient à la fermeture $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$ de l'ensemble des fonctionnelles de l'élasticité de coefficient de Poisson ν . Il s'agit d'un problème tout à fait similaire à celui traité dans le chapitre 2. Les constructions utilisées sont voisines. Les modifications proviennent essentiellement des estimations d'énergie qui sont spécifiques à l'élasticité. D'un point de vue technique, et grâce au cadre fonctionnel adapté que nous avons introduit dans le chapitre précédent, nous traitons le cas d'un ouvert borné régulier Ω au lieu de nous limiter à un cube. Les démonstrations en sont même simplifiées. Le résultat principal de ce chapitre s'énonce

Théorème 5.1 *On a $\mathfrak{L}_2 \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}$.*

Preuve : Soit $S_{(x_1, x_2), g}$ dans \mathfrak{L}_2 . Il existe une suite croissante de fonctions (g_n) à support compact dans $\tilde{\Omega} := (\Omega - x_1) \cap (\Omega - x_2)$ qui converge vers g pour presque tout $x \in \tilde{\Omega}$. Ceci entraîne la convergence simple de la suite croissante $(S_{(x_1, x_2), g_n})$ vers $S_{(x_1, x_2), g}$ et donc, grâce à la propriété 4.11, sa τ -convergence vers $S_{(x_1, x_2), g}$. Par conséquent, par la propriété de diagonalisation (Propriété 4.9), il suffit de prouver que $S_{(x_1, x_2), g_n}$ appartient à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. Donc, sans perte de généralité, on peut supposer que g a un support compact dans $\tilde{\Omega}$.

De plus, puisque $\mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{R}$, la remarque 4.14 nous permet de découper la fonction g en plusieurs parties et donc de supposer, sans perte de généralité, que le support de g

est contenu dans un cube

$$C := x_0 + (0, d)^3 \quad (5.1)$$

qui vérifie

$$x_1 + C \subset \Omega, \quad x_2 + C \subset \Omega \quad \text{et} \quad (x_1 + C) \cap (x_2 + C) = \emptyset. \quad (5.2)$$

Par un argument de translation suivie d'une homothétie nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que

$$C := (0, 1)^3. \quad (5.3)$$

Lorsque g vérifie toutes ses hypothèses, on conclut la preuve en construisant, de manière explicite, une suite $(E_{\alpha_n, \nu})$ de fonctionnelles de l'élasticité et en prouvant la τ -convergence de cette suite vers $S_{(x_1, x_2), g}$. Ceci est l'objet des deux prochaines sections.

5.1 Description d'un matériau composite élastique

Nous allons construire un matériau composite qui conduit aux propriétés effectives voulues. Soit n une suite d'entiers naturels tendant vers plus l'infini et (r_n) une suite de réels qui converge vers zéro de telle sorte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3} |\ln r_n| = +\infty. \quad (5.4)$$

Pour tout n , on divise le cube C en n^3 petits cubes

$$C_I^n := \left(\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right) \times \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right) \times \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right) \right), \quad (5.5)$$

où $I = (i, j, k)$ appartient à l'ensemble $\{1 \cdots n\}^3$ qui, dans la suite, sera identifié à $\mathcal{I}^n := \{1 \cdots n^3\}$.

L'interaction non-locale est simulée par des fibres d'une grande rigidité : ce sont des cylindres très fins d'axe $x_2 - x_1$ et de rayon

$$r_I^n := r_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\|x_2 - x_1\| n^3}{\pi(1+\nu)} \int_{C_I^n} g(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.6)$$

On fixe les extrémités de nos fibres en introduisant une famille (z_I^n) comme suit : soit c_I^n le centre de C_I^n , soit Δ_I^n la droite passant par z_I^n et de direction $x_2 - x_1$. On impose à la famille (z_I^n) de vérifier

$$\|z_I^n - c_I^n\| < (8n)^{-1}, \quad \forall I \in \{1 \cdots n^3\} \quad (5.7)$$

$$d(\Delta_I^n, \Delta_{I'}^n) > 2n^{-2}, \quad \forall I \neq I' \in \{1 \cdots n^3\}. \quad (5.8)$$

L'existence d'une telle famille a déjà été prouvée au chapitre 2.

Considérons, dans C , les boules : $\mathcal{B}_I^n := B(z_I^n, n^{-2})$, et, dans Ω , les cylindres \mathcal{F}_I^n :

$$\mathcal{F}_I^n := z_I^n + \{x' + (1-t)x_1 + tx_2 ; x' \perp (x_2 - x_1), \|x'\| < r_I^n, t \in (0, 1)\}.$$

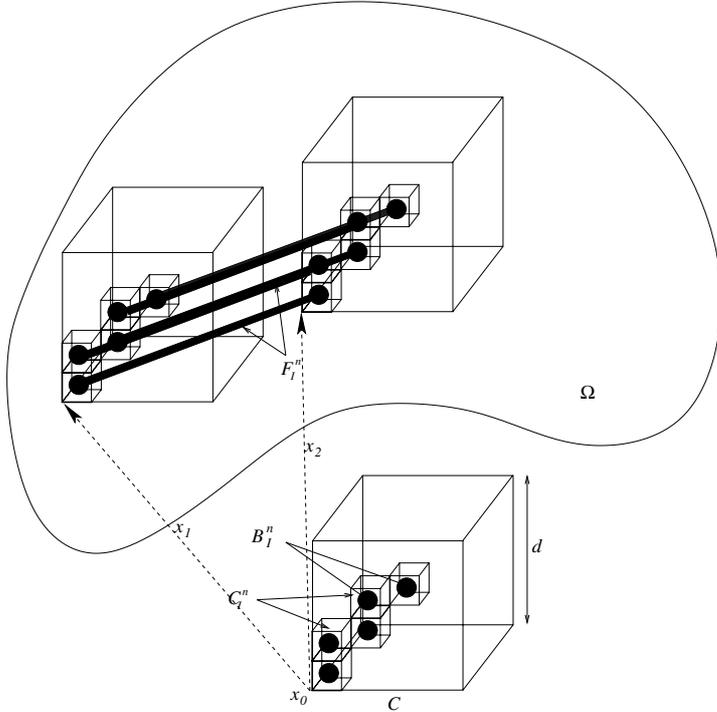


Figure 2 : Le matériau composite .

On définit la zone de renforcement $\Omega^n \subset \Omega$ (cf. Figure 2) par :

$$\Omega^n := \bigcup_{I \in \mathcal{I}^n} (\mathcal{F}_I^n) \cup (x_1 + \mathcal{B}_I^n) \cup (x_2 + \mathcal{B}_I^n). \quad (5.9)$$

Noter que la façon dont on a choisi la famille (z_I^n) évite toute collision entre les fibres ; ce qui n'était, a priori, pas évident (cf. Figure 2) puisque le nombre (n^3) des fibres est très grand. Et enfin, on fixe la rigidité de notre matériau composite en posant

$$\alpha_n(x) := \begin{cases} n^{-1/2} & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega^n, \\ r_n^{-2} n^{-3} & \text{si } x \in \Omega^n. \end{cases} \quad (5.10)$$

Le théorème 5.1 sera prouvé une fois que l'on aura montré que la suite $(E_{\alpha_n, \nu})$ τ -converge vers $S_{(x_1, x_2), g}$.

5.2 Un théorème d'homogénéisation en élasticité

Le but de cette section est de prouver le

Théorème 5.2 *La suite de fonctionnelles de l'élasticité $(E_{\alpha_n, \nu})$ définies dans la section 5.1 τ -converge vers $S_{(x_1, x_2), g}$.*

5.2.1 Lemmes préliminaires

Le premier lemme donne une estimation de l'énergie d'une poutre en extension. Soit $\varepsilon > 0$ et $\ell > 0$ deux nombres réels donnés. Soit $D(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$ le disque de rayon ε . Dans le cylindre $D(0, \varepsilon) \times (0, \ell) \subset \mathbb{R}^3$, on pose $x = (x', x_3)$ et $u = (u', u_3)$.

Lemme 5.3 *Pour tout $0 < a < b < \ell$ et $u \in H^1(D(0, \varepsilon) \times (0, \ell), \mathbb{R}^3)$, on a*

$$\int_{D(0, \varepsilon) \times (0, \ell)} j_\nu(u) dx \geq \frac{\pi \varepsilon^2}{\ell} (1 + \nu) \left(\int_{D(0, \varepsilon) \times (0, a)} u_3 - \int_{D(0, \varepsilon) \times (b, \ell)} u_3 \right)^2.$$

Preuve : Dans $D(0, \varepsilon) \times (0, \ell)$, posons $x = (x', x_3)$. Grâce à la remarque 4.13, on a, pour tout $0 < y < z < \ell$,

$$\begin{aligned} \int_{D(0, \varepsilon) \times (0, \ell)} j_\nu(u) dx &\geq (1 + \nu) \int_{D(0, \varepsilon)} \left(\int_0^\ell \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 \right) dx' \\ &\geq (1 + \nu) \int_{D(0, \varepsilon)} \left(\int_y^z \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 \right) dx' \\ &\geq (1 + \nu) \frac{1}{z - y} \int_{D(0, \varepsilon)} \left(\int_y^z \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \right)^2 dx' \\ &\geq (1 + \nu) \frac{1}{\ell} \int_{D(0, \varepsilon)} (u_3(x', z) - u_3(x', y))^2 dx'. \end{aligned}$$

Prenant la moyenne dans cette dernière inégalité pour les $y \in (0, a)$ et $z \in (b, \ell)$, l'inégalité de Jensen et le théorème de Fubini impliquent que

$$\begin{aligned} &\int_{D(0, \varepsilon) \times (0, \ell)} j_\nu(u) dx \\ &\geq \frac{(1 + \nu)}{\ell a (\ell - b)} \int_{D(0, \varepsilon)} \left(\int_0^a \left(\int_b^\ell (u_3(x', z) - u_3(x', y))^2 dz \right) dy \right) dx' \\ &\geq \frac{(1 + \nu)}{\ell a^2 (\ell - b)^2 \pi \varepsilon^2} \left(\int_{D(0, \varepsilon)} \left(a \int_b^\ell u_3(x', z) dz - (\ell - b) \int_0^a u_3(x', y) dy \right) dx' \right)^2 \\ &\geq \frac{(1 + \nu) \pi \varepsilon^2}{\ell} \left(\int_{D(0, \varepsilon) \times (0, a)} u_3(x) dx - \int_{D(0, \varepsilon) \times (b, \ell)} u_3(x) dx \right)^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

□

Le lemme suivant affirme que, pour un cylindre suffisamment mince, l'inégalité précédente est optimale. De plus, il donne une estimation de l'énergie d'interaction entre ce cylindre et un autre qui l'entoure.

Soit δ un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < \delta < \ell/4$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre $\mathcal{C} := D(0, \delta) \times (0, \ell)$, et $\mathcal{B}^-, \mathcal{B}^+$ les demi-sphères (cf. Figure 3) définies par

$$\mathcal{B}^- := \{x \in \mathcal{C}; \|x\| < \delta\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^+ := \{x \in \mathcal{C}; \|x - (0, \ell)\| < \delta\}.$$

On note \mathfrak{H} l'ensemble des fonctions de classe C^1 par morceaux sur \mathcal{C} qui sont constantes sur \mathcal{B}^- et \mathcal{B}^+ (u^- et u^+ sont les valeurs prises par un $u \in \mathfrak{H}$, respectivement, sur \mathcal{B}^- et \mathcal{B}^+).

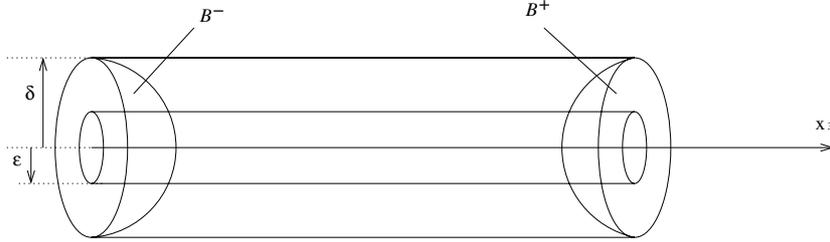


Figure 3 : La géométrie du cylindre \mathcal{C} .

Lemme 5.4 *Il existe un opérateur $\Lambda_{\mathcal{C},\varepsilon}$ de \mathfrak{H} dans \mathfrak{H} , qui vérifie, pour tout $u \in \mathfrak{H}$,*

$$\Lambda_{\mathcal{C},\varepsilon}(u) = u^- \text{ sur } \mathcal{B}^- \quad , \quad \Lambda_{\mathcal{C},\varepsilon}(u) = u^+ \text{ sur } \mathcal{B}^+, \quad (5.12)$$

$$\Lambda_{\mathcal{C},\varepsilon}(u) = u \quad \text{sur } \partial\mathcal{C} \quad , \quad \|\Lambda_{\mathcal{C},\varepsilon}(u)\| \leq c \text{ sur } \mathcal{C} \quad , \quad (5.13)$$

$$\int_{D(0,\varepsilon) \times (0,\ell)} j_\nu(\Lambda_{\mathcal{C},\varepsilon}(u)) \, dx \leq \frac{\pi\varepsilon^2}{\ell} (1 + \nu)(u_3^+ - u_3^-)^2 + c\varepsilon^2\delta, \quad (5.14)$$

$$\int_{(D(0,\delta) \setminus D(0,\varepsilon)) \times (0,\ell)} j_\nu(\Lambda_{\mathcal{C},\varepsilon}(u)) \, dx \leq c \left(\delta^2 - \varepsilon^2 + \frac{1}{\log(\delta) - \log(\varepsilon)} \right), \quad (5.15)$$

où c est une constante qui dépend uniquement de ν , ℓ et $M := \max(\|u\|_\infty, \|e(u)\|_\infty)$.

Preuve : Nous allons construire une fonction $\Lambda_{\mathcal{C},\varepsilon}(u)$ (que nous noterons simplement v) qui vérifie (5.12)-(5.15). Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée dans laquelle $(u^+ - u^-)$ s'écrit $(u^+ - u^-) = \xi_1 e_1 + \xi_3 e_3$. On introduit $\gamma \in C^0((0, \ell), (0, 1))$ comme suit

$$\gamma(s) := 0 \quad \text{si } s \leq \delta \text{ ou } s \geq \ell - \delta, \quad \gamma(s) := 1 \quad \text{si } s \in (2\delta, \ell - 2\delta),$$

$$\gamma(s) := \frac{s}{\delta} - 1 \quad \text{si } s \in (\delta, 2\delta) \quad \text{et} \quad \gamma(s) := \frac{\ell - s}{\delta} - 1 \quad \text{si } s \in (\ell - 2\delta, \ell - \delta).$$

On définit v sur $D(0, \varepsilon) \times (0, \ell)$ en posant $v(x) := u^-$ si $x_3 \leq \delta$, $v(x) := u^+$ si $x_3 \geq \ell - \delta$ et, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in D(0, \varepsilon) \times [\delta, \ell - \delta]$,

$$\begin{cases} v_1(x) := u_1^- + \xi_1 \left[3 \left(\frac{x_3 - \delta}{\ell - 2\delta} \right)^2 - 2 \left(\frac{x_3 - \delta}{\ell - 2\delta} \right)^3 \right] - \frac{\xi_3 \nu}{\ell} \gamma(x_3) x_1, \\ v_2(x) := u_2^- - \frac{\xi_3 \nu}{\ell} \gamma(x_3) x_2, \\ v_3(x) := u_3^- - \xi_1 \left[\frac{6(x_3 - \delta)}{(\ell - 2\delta)^2} - \frac{6(x_3 - \delta)^2}{(\ell - 2\delta)^3} \right] x_1 + \xi_3 \left(\frac{x_3 - \delta}{\ell - 2\delta} \right). \end{cases}$$

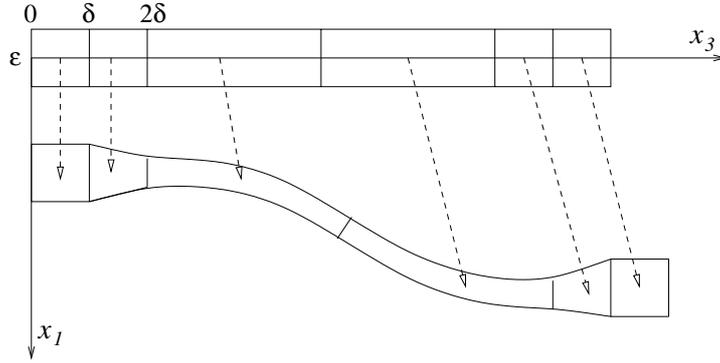


Figure 4 : Le déplacement v dans une poutre.

D'un point de vue mécanique, v est une approximation du mouvement d'une poutre élastique qui a des déplacements fixés et constants aux extrémités. Les termes qui font intervenir ξ_1 décrivent la flexion de la poutre, le dernier terme dans v_3 décrit son extension pendant que les termes qui font intervenir γ décrivent le rétrécissement (ou l'élargissement si $\nu < 0$) dû à un coefficient de Poisson non nul (voir Figure 4). La précision de cette approximation est donnée par les estimations ci-dessous. Il est évident que v est de classe C^1 par morceaux sur $D(0, \varepsilon) \times (0, \ell)$. Des estimations rapides sur chaque composante de v et ∇v montrent qu'il existe des constantes M_1, M_2, M_3 dépendant uniquement de M, ν et ℓ telles que, pour tout $x \in D(0, \varepsilon) \times (0, \ell)$,

$$\|v(x)\| \leq M_1, \quad \|\nabla v(x)\| \leq M_2, \quad (5.16)$$

et pour tout $x \in D(0, \varepsilon) \times (\delta, \ell - \delta)$

$$|e_{33}(v)(x) - \ell^{-1}\xi_3| \leq M_3\delta. \quad (5.17)$$

Utilisant ces estimations et la remarque 4.13 on peut écrire

$$\int_{D(0, \varepsilon) \times (0, \ell)} j_\nu(v) dx \leq 2K_\nu \pi M_2^2 \varepsilon^2 \delta + \int_{D(0, \varepsilon) \times (2\delta, \ell - 2\delta)} j_\nu(v) dx.$$

Sur $D(0, \varepsilon) \times (2\delta, \ell - 2\delta)$, un simple calcul donne

$$\begin{aligned} j_\nu(v) &= (1 + \nu)(e_{33}(v)(x))^2 + \frac{2\nu^2}{1 - 2\nu} \left(e_{33}(v)(x) - \frac{\xi_3}{\ell} \right)^2 \\ &\leq (1 + \nu) \left(\frac{\xi_3}{\ell} \right)^2 + M_4\delta, \end{aligned} \quad (5.18)$$

où M_4 dépend uniquement de M, ν et ℓ . L'inégalité (5.14) en découle. Elle reflète une propriété bien connue des poutres élastiques minces : l'énergie liée à leur flexion est négligeable comparée à celle due à l'extension.

Nous prolongeons v à l'ensemble $(D(0, \delta) \setminus D(0, \varepsilon)) \times (0, \ell)$ en posant, pour tout $x' \in (D(0, \delta) \setminus D(0, \varepsilon))$ et tout $x_3 \in [0, \ell]$,

$$v(x', x_3) = \frac{\log(\|x'\|) - \log(\varepsilon)}{\log(\delta) - \log(\varepsilon)} u(x', x_3) + \frac{\log(\delta) - \log(\|x'\|)}{\log(\delta) - \log(\varepsilon)} v\left(\frac{\varepsilon x'}{\|x'\|}, x_3\right).$$

Le fait que v soit de classe C^1 par morceaux sur $D(0, \delta) \times (0, \ell)$ est clair. De plus v coïncide avec u sur le bord "latéral" $\{(x', x_3); \|x'\| = \delta\}$ du cylindre. Tel est aussi le cas sur \mathcal{B}^- et \mathcal{B}^+ puisque $u(x', x_3)$ et $v(\frac{\varepsilon x'}{\|x'\|}, x_3)$ coïncident avec les constantes u^- et u^+ lorsque (x', x_3) appartient à ces ensembles. Par définition de v et grâce aux estimations (5.16) et (5.17) on obtient des constantes C_1 et C_2 , dépendant uniquement de M , ν et ℓ telles que, pour tout $x' \in (D(0, \delta) \setminus D(0, \varepsilon))$ et tout $x_3 \in (0, \ell)$,

$$\|e(v)(x', x_3)\|^2 \leq C_1 + C_2 \left(\frac{1}{\log(\delta) - \log(\varepsilon)} \right)^2 \frac{1}{\|x'\|^2}.$$

Par la remarque 4.13, on obtient, après intégration

$$\int_{(D(0, \delta) \setminus D(0, \varepsilon)) \times (0, \ell)} j_\nu(v) dx \leq K_\nu \left[\pi C_1 (\delta^2 - \varepsilon^2) \ell + 2\pi C_2 \ell \frac{1}{\log(\delta) - \log(\varepsilon)} \right].$$

L'inégalité (5.15) en découle. □

Le lemme suivant nous donne une estimation de la capacité d'un réseau de boules et de celle d'un réseau de petites zones incluses dans ces boules.

Lemme 5.5 *Soit $\eta < -1$ et $\gamma < 3 + \eta$ deux nombres réels. Soit (v^n) une suite convergeant faiblement vers v dans $L^2(C, \mathbb{R}^3)$.*

i) Si, pour un certain $M > 0$, v^n vérifie

$$\int_C \|e(v^n)\|^2 dx < Mn^\gamma, \quad (5.19)$$

alors la convergence faible, dans $L^2(C, \mathbb{R}^3)$, de $\sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{B(z_I^n, n^\eta)} v^n(x) \right) \mathbb{1}_{C_I^n}$ vers v est assurée.

ii) Soit $\mathcal{D}_I^n \subset B(z_I^n, n^\eta)$ des sous-ensembles centrés en z_I^n en ce sens que $\int_{\mathcal{D}_I^n} x dx = z_I^n$. Si $|\mathcal{D}_I^n| \geq s_n > 0$ pour une certaine suite (s_n) et si v^n vérifie, outre (5.19), la condition suivante

$$\sum_{I \in \mathcal{I}^n} \int_{B(z_I^n, n^\eta)} \|e(v^n)\|^2 dx \leq Ms_n n^{2-2\eta}, \quad (5.20)$$

alors la convergence faible, dans $L^2(C, \mathbb{R}^3)$, de $\sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{\mathcal{D}_I^n} v^n(x) dx \right) \mathbb{1}_{C_I^n}$ vers v est également assurée.

Preuve : Dans C_I^n , considérons les ensembles $E_I^n := \{x \in C_I^n; \frac{1}{8n} < \|x - z_I^n\| < \frac{1}{4n}\}$. Nous considérons également les fonctions \bar{v}_n définies sur chaque C_I^n par

$$\bar{v}^n(x) := v^n - \left(\int_{C_I^n} \nabla^a v^n \right) \cdot (x - z_I^n).$$

Nous avons alors

$$e(\bar{v}^n) = e(v^n), \quad \int_{C_I^n} \nabla^a \bar{v}^n = 0, \quad \int_{B(z_I^n, n^n)} \bar{v}^n = \int_{B(z_I^n, n^n)} v^n, \quad \text{et} \quad \int_{E_I^n} \bar{v}^n = \int_{E_I^n} v^n. \quad (5.21)$$

L'inégalité de Korn fournit une constante C_0 , indépendante de n et invariante par changement d'échelle, telle que, pour tout $\psi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ on a

$$\int_{C_I^n} \left\| \nabla \psi - \int_{C_I^n} \nabla^a \psi \right\|^2 dx \leq C_0 \int_{C_I^n} \|e(\psi)\|^2 dx.$$

En appliquant cette inégalité à \bar{v}^n on obtient

$$\int_{C_I^n} \|\nabla \bar{v}^n\|^2 dx \leq C_0 \int_{C_I^n} \|e(v^n)\|^2 dx. \quad (5.22)$$

L'inégalité de Poincaré-Wirtinger, suivie d'un changement d'échelle, fournit une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\int_{C_I^n} \left\| v^n - \int_{E_I^n} v^n \right\|^2 dx \leq \frac{C_1}{n^2} \int_{C_I^n} \|\nabla v^n\|^2 dx. \quad (5.23)$$

Soit S^2 la sphère unité de \mathbb{R}^3 . Dans chaque C_I^n nous utilisons les coordonnées sphériques de centre z_I^n : $\rho := \|x - z_I^n\|$, $y := \frac{x - z_I^n}{\rho} \in S^2$. Pour tout $0 < a < b < \frac{1}{4n}$, on a

$$\int_{C_I^n} \|\nabla \bar{v}^n\|^2 dx \geq \int_{S^2} \int_a^b \left\| \frac{\partial}{\partial \rho} (\bar{v}^n(z_I^n + \rho y)) \right\|^2 \rho^2 d\rho dy.$$

Une simple minimisation unidimensionnelle donne

$$ab^2 \int_a^b \left\| \frac{\partial \bar{v}^n}{\partial \rho} (z_I^n + \rho y) \right\|^2 \rho^2 d\rho \geq a^2 b^2 \left\| \bar{v}^n(z_I^n + by) - \bar{v}^n(z_I^n + ay) \right\|^2.$$

Ainsi

$$\int_{S^2} a^2 b^2 \left\| \bar{v}^n(z_I^n + by) - \bar{v}^n(z_I^n + ay) \right\|^2 dy \leq ab^2 \int_{C_I^n} \|\nabla \bar{v}^n\|^2 dx.$$

En intégrant cette inégalité pour les $a \in (0, n^n)$ et les $b \in (\frac{1}{8n}, \frac{1}{4n})$, et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{n^n} \int_{\frac{1}{8n}}^{\frac{1}{4n}} \int_{S^2} a^2 b^2 (\bar{v}^n(z_I^n + by) - \bar{v}^n(z_I^n + ay)) dy db da \right\|^2 \\ & \leq \left(\int_0^{n^n} \int_{\frac{1}{8n}}^{\frac{1}{4n}} ab^2 db da \right) \times \left(\int_0^{n^n} \int_{\frac{1}{8n}}^{\frac{1}{4n}} \int_{S^2} a^2 b^2 dy db da \right) \\ & \quad \times \left(\int_{C_I^n} \|\nabla \bar{v}^n\|^2 dx \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Par conséquent, on a

$$\left\| \int_{E_I^n} \bar{v}^n - \int_{B(z_I^n, n^\eta)} \bar{v}^n \right\|^2 \leq \frac{3}{8\pi n^\eta} \int_{C_I^n} \|\nabla \bar{v}^n\|^2 dx. \quad (5.25)$$

Grâce à (5.21), avec l'estimation (5.22) on obtient

$$\left\| \int_{E_I^n} v^n - \int_{B(z_I^n, n^\eta)} v^n \right\|^2 \leq \frac{3C_0}{8\pi n^\eta} \int_{C_I^n} \|e(v^n)\|^2 dx. \quad (5.26)$$

Cette estimation, complétée par (5.23), donne

$$\int_{C_I^n} \left\| v^n - \int_{B(z_I^n, n^\eta)} v^n \right\|^2 dx \leq \frac{2C_1}{n^2} \int_{C_I^n} \|\nabla v^n\|^2 dx + \frac{3C_0}{4\pi n^{3+\eta}} \int_{C_I^n} \|e(v^n)\|^2 dx.$$

Après sommation pour tous les $I \in \mathcal{I}^n$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_C \left\| v^n - \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{B(z_I^n, n^\eta)} v^n \right) \mathbb{1}_{C_I^n} \right\|^2 dx \\ \leq \frac{2C_1}{n^2} \int_C \|\nabla v^n\|^2 dx + \frac{3C_0}{4\pi n^{3+\eta}} \int_C \|e(v^n)\|^2 dx. \end{aligned} \quad (5.27)$$

L'assertion i) du lemme est ainsi prouvée puisque l'inégalité de Korn et les hypothèses faites sur η assurent que les deux termes du membre de droite de cette dernière inégalité tendent vers zéro.

Nous allons établir la deuxième assertion d'une manière similaire. Soit, maintenant, (\tilde{v}^n) définie sur chaque $B(z_I^n, n^\eta)$ par

$$\tilde{v}^n(x) = v^n(x) - \left(\int_{B(z_I^n, n^\eta)} \nabla^a v^n \right) \cdot (x - z_I^n),$$

où $\nabla^a v^n := \nabla v^n - e(v^n)$, comme précédemment, désigne la partie antisymétrique du gradient de v^n . Comme z_i^n est le centre de $B(z_I^n, n^\eta)$ mais aussi celui de \mathcal{D}_I^n on a

$$\begin{aligned} e(\tilde{v}^n) &= e(v^n), \quad \int_{B(z_I^n, n^\eta)} \nabla^a \tilde{v}^n = 0, \\ \int_{B(z_I^n, n^\eta)} \tilde{v}^n &= \int_{B(z_I^n, n^\eta)} v^n, \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{D}_I^n} \tilde{v}^n = \int_{\mathcal{D}_I^n} v^n. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Korn (4.3), il existe une constante C_2 (invariant par changement d'échelle et donc indépendant de n) telle que, pour tout $w \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$,

$$\int_{B(z_I^n, n^\eta)} \left\| \nabla w - \int_{B(z_I^n, n^\eta)} \nabla^a w \right\|^2 dx \leq C_2 \int_{B(z_I^n, n^\eta)} \|e(w)\|^2 dx.$$

De plus, si l'on note C_3 la constante de Poincaré pour la boule unité de \mathbb{R}^3 , on obtient par changement d'échelle

$$\int_{B(z_I^n, n^\eta)} \left\| w - \fint_{B(z_I^n, n^\eta)} w \right\|^2 dx \leq C_3 n^{2\eta} \int_{B(z_I^n, n^\eta)} \|\nabla w\|^2 dx.$$

Appliquant ces deux dernières inégalités à \tilde{v}^n , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_I^n} \left\| \tilde{v}^n - \fint_{B(z_I^n, n^\eta)} \tilde{v}^n \right\|^2 dx &\leq \int_{B(z_I^n, n^\eta)} \left\| \tilde{v}^n - \fint_{B(z_I^n, n^\eta)} \tilde{v}^n \right\|^2 dx \\ &\leq C_2 C_3 n^{2\eta} \int_{B(z_I^n, n^\eta)} \|e(\tilde{v}^n)\|^2 dx. \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left\| \fint_{\mathcal{D}_I^n} v^n - \fint_{B(z_I^n, n^\eta)} v^n \right\|^2 &\leq \frac{C_2 C_3 n^{2\eta}}{|\mathcal{D}_I^n|} \int_{B(z_I^n, n^\eta)} \|e(v^n)\|^2 dx \\ &\leq \frac{C_2 C_3 n^{2\eta}}{s_n} \int_{B(z_I^n, n^\eta)} \|e(v^n)\|^2 dx \end{aligned} \quad (5.28)$$

Par sommation sur tous les $I \in \mathcal{I}^n$, on obtient

$$\left\| \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\fint_{\mathcal{D}_I^n} v^n(x) \right) \mathbb{1}_{C_I^n} - \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\fint_{B(z_I^n, n^\eta)} v^n(x) \right) \mathbb{1}_{C_I^n} \right\|_{L^2(C, \mathbb{R}^3)}^2 \leq \frac{M C_2 C_3}{n}.$$

La preuve de l'assertion (ii) en découle grâce au (i). □

Le lemme suivant nous permet d'approcher une fonction régulière sur C par une autre qui prend des valeurs constantes sur un réseau de boules.

Lemme 5.6 *Pour tout entier n , pour tout réel $\eta \leq -2$, pour toute fonction $u \in C^1(C, \mathbb{R}^3)$ et toute famille $(w_I^n)_{I \in \mathcal{I}^n} \in (\mathbb{R}^3)^{n^3}$, on pose*

$$T_{n,\eta}(u, (w_I^n))(x) := \begin{cases} w_I^n, & \text{si } x \in B(z_I^n, n^\eta), \\ u(x), & \text{si } \forall I \in \mathcal{I}^n, \|x - z_I^n\| \geq 2n^{-2}, \\ \frac{2\|x - z_I^n\| - 2n^\eta}{(2 - n^{\eta+2})\|x - z_I^n\|} u(x) + \frac{2n^\eta - n^{\eta+2}\|x - z_I^n\|}{(2 - n^{\eta+2})\|x - z_I^n\|} w_I^n, & \\ & \text{si } n^\eta \leq \|x - z_I^n\| \leq 2n^{-2}. \end{cases}$$

L'opérateur $T_{n,\eta}$ vérifie alors

- i) $T_{n,\eta}(u, (w_I^n))$ est de classe C^1 par morceaux et coïncide avec u sur le bord de C ,
- ii) $\|T_{n,\eta}(u, (w_I^n))\|_\infty \leq \max(\|u\|_\infty, \max_I \|w_I^n\|)$,
- iii) $\int_C \|e(T_{n,\eta}(u, (w_I^n)))\|^2 dx < c n^{(3+\eta)^+}$, où $(3+\eta)^+ := \max(0, 3+\eta)$ et c dépend uniquement de $\max(\|u\|_\infty, \|\nabla u\|_\infty, \max_I \|w_I^n\|)$,
- iv) si $\eta < -3$ et si les familles (w_I^n) sont uniformément bornées, alors la suite $T_{n,\eta}(u, (w_I^n))$ converge fortement vers u dans $H^1(C, \mathbb{R}^3)$ lorsque n tend vers plus l'infini,
- v) $\|\nabla T_{n,\eta}(u, (u(z_I^n)))\|_\infty \leq \sqrt{10}\|\nabla u\|_\infty$,
- vi) $T_{n,\eta}(u, (u(z_I^n)))$ converge fortement vers u dans $H^1(C, \mathbb{R}^3)$ lorsque n tend vers plus l'infini.

Preuve : L'assertion (i) découle immédiatement de l'hypothèse (5.7) qui, pour $\eta \leq -2$, empêche les boules $B(z_I^n, n^\eta)$ non seulement de se toucher, mais de toucher le bord de C .

L'assertion (ii) est évidente puisque, en chaque point $x \in C$, $T_{n,\eta}(u, (w_I^n))(x)$ vaut soit $u(x)$, soit w_I^n , ou une interpolation entre $u(x)$ et un certain w_I^n .

Dans chaque C_I^n , on pose $\rho := \|x - z_I^n\|$ et on note \mathcal{G}_I^n la zone de transition $\mathcal{G}_I^n := \{x \in C_I^n; \rho \in (n^\eta, 2n^{-2})\}$. Pour tout $x \in \mathcal{G}_I^n$, on a

$$\|\nabla(T_{n,\eta}(u, (w_I^n)))(x)\|^2 \leq 2\|\nabla u(x)\|^2 + 8\|u(x) - w_I^n\|^2 n^{2\eta} \rho^{-4}. \quad (5.29)$$

Après intégration sur \mathcal{G}_I^n et par sommation, pour tous les $I \in \mathcal{I}^n$, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \int_{\mathcal{G}_I^n} \|e(T_{n,\eta}(u, (w_I^n)))(x)\|^2 dx \\ & \leq 64\pi \left(\frac{1}{3} \|\nabla u\|_\infty^2 n^{-3} + (\max(\|u\|_\infty, \max_I \|w_I^n\|))^2 n^{3+\eta} \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

On en déduit l'assertion (iii), puisqu'en dehors des zones de transition \mathcal{G}_I^n , $T_{n,\eta}(u, (w_I^n))$ est soit constant, soit égal à u .

La zone où $T_{n,\eta}(u, (w_I^n))$ ne coïncide pas avec u a un volume qui tend vers zéro. Grâce à (ii), on sait que $T_{n,\eta}(u, (w_I^n))$ converge vers u fortement dans $L^2(C, \mathbb{R}^3)$. Lorsque $\eta < -3$, l'inégalité (5.30) implique que

$$\int_C \|e(u - T_{n,\eta}(u, (w_I^n)))(x)\|^2 dx \rightarrow 0.$$

L'assertion (iv) s'obtient alors en utilisant l'inégalité de Korn.

Dans le cas particulier où $w_I^n = u(z_I^n)$, l'inégalité (5.29) conduit à une estimation plus fine :

$$\begin{aligned} \|\nabla(T_{n,\eta}(u, (u(z_I^n)))(x)\|^2 & \leq 2\|\nabla u(x)\|^2 + 8\|\nabla u\|_\infty^2 n^{2\eta} \rho^{-2} \\ & \leq 10\|\nabla u\|_\infty^2. \end{aligned} \quad (5.31)$$

L'assertion (v) est ainsi prouvée.

La différence $u - T_{n,\eta}(u, (u(z_I^n)))$ est nulle en dehors d'un domaine de volume tendant vers zéro. Elle est uniformément bornée ainsi que son gradient. On en déduit l'assertion (vi).

□

Nous allons, à présent, montrer la τ -convergence de la suite $(E_{\alpha_n, \nu})$ vers $S_{(x_1, x_2), g}$.

5.2.2 L'inégalité de la borne inférieure

Soit (u^n) une suite à énergie bornée ($E_{\alpha_n, \nu}(u^n) < M$) qui converge faiblement vers un certain u dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. On a

$$E_{\alpha_n, \nu}(u^n) \geq \int_{\Omega^n} \alpha_n j_\nu(u^n) dx \geq n^{-3} r_n^{-2} \int_{\Omega^n} j_\nu(u^n) dx. \quad (5.32)$$

Posons temporairement $a := n^{-2}$, $b := \|x_2 - x_1\|$, $\ell := \|x_2 - x_1\| + n^{-2}$ et $w := \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}$, et appliquons le lemme 5.3 à chaque cylindre

$$z_I^n + x_1 + \left\{ x' + tw ; x' \perp w, \|x'\| < r_I^n, t \in \left(-\frac{a}{2}, \ell - \frac{a}{2} \right) \right\}. \quad (5.33)$$

En remarquant que ces cylindres sont disjoints et contenus dans Ω^n , on obtient

$$E_{\alpha_n, \nu}(u^n) \geq \frac{1 + \nu}{n^3 r_n^2} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \frac{\pi r_I^{n^2}}{\|x_2 - x_1\| + n^{-2}} \times \left[\left(\int_{x_2 + \mathcal{D}_I^n} u^n - \int_{x_1 + \mathcal{D}_I^n} u^n \right) \cdot \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|} \right]^2, \quad (5.34)$$

où \mathcal{D}_I^n est le cylindre (inclus dans \mathcal{B}_I^n) défini par

$$\mathcal{D}_I^n := z_I^n + \left\{ x' + tw ; x' \perp w, \|x'\| < r_I^n, t \in \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) \right\}, \quad (5.35)$$

de telle sorte que $x_1 + \mathcal{D}_I^n$ et $x_2 + \mathcal{D}_I^n$ soient les extrémités des cylindres définis par (5.33). Rappelant la définition (5.6) de r_I^n , on obtient

$$E_{\alpha_n, \nu}(u^n) \geq \frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x_2 - x_1\| + n^{-2}} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{C_I^n} g(x) dx \right) \times \left[\left(\int_{x_2 + \mathcal{D}_I^n} u^n - \int_{x_1 + \mathcal{D}_I^n} u^n \right) \cdot \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|} \right]^2. \quad (5.36)$$

Ainsi

$$E_{\alpha_n, \nu}(u^n) \geq \frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x_2 - x_1\| + n^{-2}} \int_C \left[\left(\sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{x_2 + \mathcal{D}_I^n} u^n \right) \mathbb{1}_{C_I^n}(x) \right) - \left(\sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{x_1 + \mathcal{D}_I^n} u^n \right) \mathbb{1}_{C_I^n}(x) \right) \right] \cdot \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|} \right]^2 g(x) dx. \quad (5.37)$$

La définition (5.6) de r_I^n nous assure que le volume de chaque cylindre $\{\mathcal{D}_I^n\}$ est supérieur à $s_n := \pi r_n^2 n^{-1/2} n^{-2}$. Pour $i = 1$ ou 2 , $\int_C \alpha_n(x_i + x) \|e(v^n)(x_i + x)\|^2 dx \leq M$ implique que

$$\int_C \|e(v^n)(x_i + x)\|^2 dx \leq M n^{1/2}$$

et

$$\sum_{I \in \mathcal{I}^n} \int_{\mathcal{B}_I^n} \|e(v^n)(x_i + x)\|^2 dx \leq Mn^3 r_n^2 \leq \frac{M}{\pi} s_n n^{11/2}.$$

Si l'on pose $\eta = -2$ et $\gamma = 1/2$, les hypothèses du lemme 5.5 sont vérifiées. En effet les suites de fonctions translatées $x \rightarrow u^n(x - x_2)$ et $x \rightarrow u^n(x - x_1)$ convergent faiblement dans $L^2(C, \mathbb{R}^3)$, respectivement, vers $x \rightarrow u(x - x_2)$ et $x \rightarrow u(x - x_1)$. Le lemme 5.5 nous permet donc de passer à la limite dans (5.37) pour obtenir l'inégalité de la borne inférieure

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} E_{\alpha_n, \nu}(u^n) &\geq \int_C \left[(u(x_2 + x) - u(x_1 + x)) \cdot \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|} \right]^2 g(x) dx \\ &\geq S_{(x_1, x_2), g}(u). \end{aligned} \quad (5.38)$$

□

5.2.3 L'inégalité de la borne supérieure

Pour tout $w \in \mathbb{R}^3$ et toute fonction u , on note $\tau_w u$ la fonction translatée : $\tau_w u(x) := u(x - w)$. Soit $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ telle que $S_{(x_1, x_2), g}(u) < +\infty$. Par un argument de densité on peut supposer que u appartienne à $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Commençons par appliquer le lemme 5.6 et définissons, pour tout $x \in \Omega$,

$$\begin{cases} \tilde{u}^n(x) = T_{n, -2}(\tau_{-x_1} u, (u(x_1 + x_I^n)))(x - x_1), & \text{si } x \in x_1 + C, \\ \tilde{u}^n(x) = T_{n, -2}(\tau_{-x_2} u, (u(x_2 + x_I^n)))(x - x_2), & \text{si } x \in x_2 + C, \\ \tilde{u}^n(x) = u(x), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.39)$$

D'après le lemme 5.6, la fonction \tilde{u}^n est de classe C^1 par morceaux et est constante sur les boules $x_1 + \mathcal{B}_I^n$ et $x_2 + \mathcal{B}_I^n$. Il existe une constante M , qui dépend uniquement de u , telle que, pour tout $x \in \Omega$,

$$\|\tilde{u}^n(x)\| < M \quad \text{et} \quad \|e(\tilde{u}^n)(x)\| < M. \quad (5.40)$$

De plus, la suite (\tilde{u}^n) converge vers u pour la topologie forte de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Pour chaque I dans \mathcal{I}^n , utilisant les coordonnées cylindriques adaptées (x', x_3) , de centre $z_I^n + x_1$ et d'axe $x_2 - x_1$, la fibre \mathcal{F}_I^n s'écrit

$$\mathcal{F}_I^n = \{(x', x_3); \|x'\| \leq r_I^n, x_3 \in (0, \|x_2 - x_1\|)\}.$$

Elle est contenue dans un cylindre \mathcal{A}_I^n plus large

$$\mathcal{A}_I^n = \{(x', x_3); \|x'\| \leq n^{-2}, x_3 \in (0, \|x_2 - x_1\|)\}.$$

Le lemme 5.4 fournit sur \mathcal{A}_I^n une fonction $\Lambda_{\mathcal{A}_I^n, r_I^n}(\tilde{u}^n)$ qui vérifie

$$\int_{\mathcal{F}_I^n} j_\nu(\Lambda_{\mathcal{A}_I^n, r_I^n}(\tilde{u}^n))(x) dx \leq \frac{\pi(r_I^n)^2}{\|x_2 - x_1\|} (1 + \nu)(u_3^+ - u_3^-)^2 + c'(r_I^n)^2 n^{-2}, \quad (5.41)$$

et

$$\int_{\mathcal{A}_I^n \setminus \mathcal{F}_I^n} j_\nu(\Lambda_{\mathcal{A}_I^n, r_I^n}(\tilde{u}^n))(x) dx \leq c' \left(n^{-4} - (r_I^n)^2 - \frac{1}{2 \log(n) + \log(r_I^n)} \right), \quad (5.42)$$

où c' ne dépend que de x_1 , x_2 , ν et M (i.e., de u). Grâce à l'hypothèse (5.8), les cylindres \mathcal{A}_I^n sont disjoints et on peut définir la suite approximante (u^n) par :

$$\begin{cases} u^n(x) = \Lambda_{\mathcal{A}_I^n, r_I^n}(\tilde{u}^n)(x), & \text{si } x \in \mathcal{A}_I^n, \\ u^n(x) = \tilde{u}^n(x), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.43)$$

Estimons, à présent, l'énergie $E_{\alpha_n, \nu}(u^n)$. On remarque que u^n est constante sur les boules $x_1 + \mathcal{B}_I^n$ et $x_2 + \mathcal{B}_I^n$. En effet, grâce à l'hypothèse (5.12), u^n coïncide avec \tilde{u}^n sur ces boules. Ainsi,

$$E_{\alpha_n, \nu}(u^n) = n^{-1/2} \int_{\Omega \setminus \cup_{I \in \mathcal{I}^n} \mathcal{F}_I^n} j_\nu(u^n) dx + n^{-3} r_n^{-2} \int_{\cup_{I \in \mathcal{I}^n} \mathcal{F}_I^n} j_\nu(u^n) dx. \quad (5.44)$$

L'inégalité (5.40) nous assure que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(n^{-1/2} \int_{\Omega \setminus \cup_{I \in \mathcal{I}^n} \mathcal{A}_I^n} j_\nu(u^n) dx \right) = 0. \quad (5.45)$$

Prenant en compte l'ordre de grandeur de r_n donné par (5.4), on obtient, après sommation des inégalités (5.42) pour tous les $I \in \mathcal{I}^n$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\cup_{I \in \mathcal{I}^n} (\mathcal{A}_I^n \setminus \mathcal{F}_I^n)} j_\nu(u^n)(x) dx \right) = 0, \quad (5.46)$$

et donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(n^{-1/2} \int_{\cup_{I \in \mathcal{I}^n} (\mathcal{A}_I^n \setminus \mathcal{F}_I^n)} j_\nu(u^n)(x) dx \right) = 0. \quad (5.47)$$

Enfin, par sommation des inégalités (5.41) pour tous les $I \in \mathcal{I}^n$, et en rappelant la définition (5.6) de r_I^n , on obtient

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\cup_{I \in \mathcal{I}^n} \mathcal{F}_I^n} n^{-3} r_n^{-2} j_\nu(u^n)(x) dx \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \frac{r_n^{-2} n^{-3} (1 + \nu) \pi (r_I^n)^2}{\|x_2 - x_1\|} \left[(u(x_1 + z_I^n) - u(x_2 + z_I^n)) \cdot \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|} \right]^2 \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \int_{C_I^n} \left[(u(x_1 + z_I^n) - u(x_2 + z_I^n)) \cdot \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|} \right]^2 g(x) dx \\ & \leq \int_{\Omega} \left[(u(x_1 + x) - u(x_2 + x)) \cdot \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|} \right]^2 g(x) dx. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Cette inégalité, complétée par (5.44), (5.45) et (5.47) prouve que u^n vérifie l'inégalité de la borne supérieure

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_{\alpha_n, \nu}(u^n) \leq S_{(x_1, x_2), g}(u). \quad (5.49)$$

Des estimations (5.46), (5.48) et la remarque 4.13, on déduit également que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\cup_{I \in \mathcal{I}^n} \mathcal{A}_I^n} \|e(u^n)\|^2 dx \leq k_\nu^{-1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\cup_{I \in \mathcal{I}^n} \mathcal{A}_I^n} j_\nu(u^n) dx = 0, \quad (5.50)$$

et donc que la suite $(u^n - \tilde{u}^n)$ converge fortement vers zéro dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Ainsi, u^n , comme \tilde{u}^n , tend vers u fortement dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Ceci, avec l'inégalité de la borne inférieure (5.38) et celle de la borne supérieure (5.49) achève la preuve de la τ -convergence du théorème 5.2 et donc celle du théorème 5.1.

□

Chapitre 6

Fermeture des fonctionnelles de l'élasticité linéaire

Sommaire

6.1 Interactions à deux points non élémentaires	82
6.1.1 Approximation d'une interaction non-locale par des interactions atomiques	83
6.1.2 De l'insuffisance de ce résultat	85
6.2 Interactions non-locales à plusieurs points	86
6.2.1 Un deuxième résultat d'homogénéisation	86
6.2.2 Des interactions à deux points aux interactions à plusieurs points	89
6.3 Discrétisation d'une interaction non-locale continue	95
6.4 Approximation Moreau-Yosida	97
6.5 Fermeture des fonctionnelles de l'élasticité	97

Dans ce chapitre nous déterminons complètement la fermeture de l'ensemble des fonctionnelles de l'élasticité qui nous intéressent. La démarche est similaire à celle suivie dans le chapitre 3 pour déterminer celle des fonctionnelles de diffusion. Cependant les difficultés sont d'un tout autre ordre de grandeur et une démarche calquée sur celle du chapitre 3 conduit à une impasse. C'est ce que nous montrons dans le paragraphe suivant, paragraphe qui peut être ignoré par un lecteur intéressé uniquement par la démonstration de notre résultat principal.

6.1 Interactions à deux points non élémentaires

Dans ce qui suit, μ désigne une mesure de Radon positive sur $\Omega \times \Omega$ qui rend fortement continue la fonctionnelle F_μ définie sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ par

$$F_\mu(u) := \int_{\Omega \times \Omega} s_{(x,y)}(u(x), u(y)) \mu(dx, dy). \quad (6.1)$$

Notre objectif dans cette section, est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.1 *On a $F_\mu \in \overline{\mathfrak{E}}_\nu$.*

6.1.1 Approximation de μ par des interactions atomiques

A l'instar de ce que l'on a vu au chapitre 3 (section 3.4), nous allons approcher F_μ par une suite de fonctionnelles (F_{μ_n}) avec des mesures μ_n atomiques.

Théorème 6.2 *Il existe une suite (μ_n) dans \mathcal{A} telle que la suite de fonctionnelles (F_{μ_n}) τ -converge vers F_μ .*

Preuve : Soit (μ_n) la suite de mesures de Radon sur $\Omega \times \Omega$ définie par

$$\mu_n := \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} a_{II'}^n \mathbb{1}_{\Omega_I^n}(x) \delta_{x+w_{II'}^n}(dy) \mathbb{1}_{\Omega}(x + w_{II'}^n) dx,$$

où $a_{II'}^n := n^3 \mu(\Omega_I^n \times \Omega_{I'}^n)$ et $w_{II'}^n := c_{I'}^n - c_I^n$. On peut noter que chaque mesure μ_n est atomique.

Montrons que la suite (F_{μ_n}) ainsi définie τ -converge vers F_μ .

L'inégalité de la borne inférieure :

Soit (u_n) une suite qui converge faiblement vers un certain u dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Soit la suite (\bar{u}^n) définie par

$$\bar{u}^n := \sum_{I=1}^{n^3} \left(\int_{\Omega_I^n} u^n \right) \mathbb{1}_{\Omega_I^n}.$$

Par définition de μ_n , et par convexité, on a

$$\begin{aligned} F_{0,0,\mu_n}(u^n) &= \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} \int_{\Omega_I^n \times \Omega_{I'}^n} a_{II'}^n [(u^n(x) - u^n(y)) \cdot (x - y)]^2 \delta_{x+w_{II'}^n}(y) dx \\ &= \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} a_{II'}^n |\Omega_I^n| \int_{\Omega_I^n} [(u^n(x) - u^n(x + w_{II'}^n)) \cdot w_{II'}^n]^2 dx \\ &\geq \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} a_{II'}^n |\Omega_I^n| \left(\left(\int_{\Omega_I^n} u^n(x) dx - \int_{\Omega_I^n} u^n(x + w_{II'}^n) dx \right) \cdot w_{II'}^n \right)^2 \\ &\geq \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} a_{II'}^n \int_{\Omega_I^n} [(\bar{u}^n(x) - \bar{u}^n(x + w_{II'}^n)) \cdot w_{II'}^n]^2 dx \\ &\geq F_{0,0,\mu_n}(\bar{u}^n). \end{aligned} \tag{6.2}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|F_{0,0,\mu_n}(\bar{u}^n) - F_{0,0,\mu}(\bar{u}^n)| &= \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} \int_{\Omega_I^n \times \Omega_{I'}^n} [(\bar{u}^n(x) - \bar{u}^n(y)) \cdot (w_{II'}^n + [(x-y) - w_{II'}^n])]^2 (\mu_n - \mu)(dx, dy) \\
&\leq 2 \underbrace{\sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} \int_{\Omega_I^n \times \Omega_{I'}^n} [(\bar{u}^n(x) - \bar{u}^n(y)) \cdot w_{II'}^n]^2 (\mu_n - \mu)(dx, dy)}_{I_1} \\
&\quad + 2 \underbrace{\sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} \int_{\Omega_I^n \times \Omega_{I'}^n} [(\bar{u}^n(x) - \bar{u}^n(y)) \cdot ((x-y) - w_{II'}^n)]^2 (\mu_n - \mu)(dx, dy)}_{I_2}. \quad (6.3)
\end{aligned}$$

La quantité I_1 s'annule car \bar{u}^n est constante sur chaque Ω_I^n et par définition de la mesure μ_n , on a $\mu_n(\Omega_I^n \times \Omega_{I'}^n) = \mu(\Omega_I^n \times \Omega_{I'}^n)$. Par ailleurs, pour tout $(x, y) \in \Omega_I^n \times \Omega_{I'}^n$, on a $\|x - y - w_{II'}^n\|^2 \leq \frac{3}{n^2}$ et, par suite

$$\begin{aligned}
|F_{0,0,\mu_n}(\bar{u}^n) - F_{0,0,\mu}(\bar{u}^n)| &\leq \frac{12}{n^2} \int_{\Omega \times \Omega} \|\bar{u}^n(x) - \bar{u}^n(y)\|^2 \mu(dx, dy) \\
&\leq \frac{48}{n^2} \int_{\Omega} \|\bar{u}^n(x)\|^2 \mu(dx, \Omega). \quad (6.4)
\end{aligned}$$

Comme la fonctionnelle $F_{0,0,\mu}$ est fortement continue sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, la marginale $\mu(dx, \Omega)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue avec une densité dans $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$ (cf. Lemme 1.51). Par ailleurs, la suite (\bar{u}^n) converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$; elle y est donc bornée. Il en résulte que la suite de réels $(\int_{\Omega} (\bar{u}^n)^2 \mu(dx, \Omega))$ est bornée. On déduit alors de (6.4) que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{0,0,\mu_n}(\bar{u}^n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{0,0,\mu}(\bar{u}^n). \quad (6.5)$$

D'autre part, grâce à (6.2), on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{0,0,\mu_n}(u^n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{0,0,\mu_n}(\bar{u}^n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{0,0,\mu}(\bar{u}^n); \quad (6.6)$$

ce qui, par semi-continuité inférieure de $F_{0,0,\mu}$ sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ faible, donne

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{0,0,\mu_n}(u^n) \geq F_{0,0,\mu}(u). \quad (6.7)$$

Les inégalités de la borne supérieure :

Nous commençons par établir la convergence étroite de la suite de mesures (μ_n) vers μ . Pour tout $\varphi \in C_b^\infty(\Omega \times \Omega)$ (ici $C_b^\infty(\Omega \times \Omega)$ représente l'ensemble des fonctions infiniment différentiables et bornées sur $\Omega \times \Omega$) et $n \geq 1$, on pose

$$\bar{\varphi}_n(x, y) := \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} \int_{\Omega_I^n} \varphi(x, x + w_{II'}^n) dx \mathbb{1}_{\Omega_I^n}(x) \mathbb{1}_{\Omega_{I'}^n}(y).$$

Grâce à la régularité de φ , la suite $(\bar{\varphi}_n)$ ainsi définie converge uniformément vers φ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \times \Omega} \varphi \mu_n(dx, dy) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} a_{II'}^n \int_{\Omega_I^n} \varphi(x, x + w_{II'}^n) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{I=1}^{n^3} \sum_{I'=1}^{n^3} \frac{1}{n^3} a_{II'}^n \int_{\Omega_I^n} \varphi(x, x + w_{II'}^n) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \times \Omega} \bar{\varphi}_n(x, y) \mu(dx, dy). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \times \Omega} \varphi \mu_n(dx, dy) = \int_{\Omega \times \Omega} \varphi \mu(dx, dy).$$

Ceci prouve la convergence étroite de la suite de mesures (μ_n) vers μ .

Soit, maintenant, u dans $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Par convergence étroite de (μ_n) vers μ , la suite constante $u^n := u$ vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mu_n}(u^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mu_n}(u) = F_\mu(u). \quad (6.9)$$

D'après la remarque 4.6, ceci prouve les deux inégalités de la borne supérieure. La τ -convergence de la suite (F_{μ_n}) vers F_μ est ainsi établie. \square

Preuve du théorème 6.1 : D'après le théorème 6.2, il existe une suite de mesures atomiques (μ_n) telle que (F_{μ_n}) τ -converge vers F_μ . Par ailleurs, d'après la propriété 4.10 et le théorème 5.1, pour tout $n \geq 1$, F_{μ_n} appartient à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. Donc, par diagonalisation, la fonctionnelle F_μ appartient à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. Le théorème 6.1 est ainsi démontré. \square

6.1.2 De l'insuffisance de ce résultat

Le problème que nous avons rencontré après avoir démontré ce résultat (théorème 6.1) est que, contrairement au cas scalaire, l'ensemble des fonctionnelles non-locales obtenues est loin d'être l'ensemble de toutes les fonctionnelles non-locales continues appartenant à la fermeture recherchée. Dans le cas scalaire, c'est la formule de Denis-Beurling (1.47) qui nous assure que la mesure d'interaction non-locale μ est positive. Rien de tel dans le cas de l'élasticité.

Considérons l'exemple suivant. Soit $w = (w_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ et $f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$ tels que le support de f soit contenu dans $\Omega \cap (\Omega + w) \cap (\Omega - w)$, et soit la fonctionnelle F_i définie par

$$F_i(u) := \int_{\Omega} [u_i(x - w) - 2u_i(x) + u_i(x + w)]^2 f(x) dx. \quad (6.10)$$

On vérifie sans peine que F_i est fortement continue sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, quadratique, positive et surtout objective. Une telle fonctionnelle appartient à \mathfrak{L}_3 et (nous le prouverons

ultérieurement) appartient à la fermeture recherchée. Réécrivons cette fonctionnelle sous une forme qui nous permette de la comparer au résultat du théorème 6.1. On a

$$F_i(u) = \int_{\Omega} [2(u_i(x-w) - u_i(x))^2 + 2(u_i(x+w) - u_i(x))^2 - (u_i(x-w) - u_i(x+w))^2] f(x) dx.$$

Soit

$$F_i(u) = \int_{\Omega \times \Omega} (u(y) - u(x) \cdot e^i)^2 \mu(dx, dy),$$

où $\mu(dx, dy) := (2\delta_{x-w}(dy)f(x) + 2\delta_{x+w}(dy)f(x) - \delta_{x+2w}(dy)f(x+w))dx$.

Lorsque $i = 1$, on obtient bien une énergie du type considéré dans le théorème 6.1 mais il est facile de vérifier que la mesure μ n'est pas positive! D'autre part, lorsque $i = 2$, on est face à un phénomène différent. La mesure énergie $(u_2(y) - u_2(x))^2 \mu(dx, dy)$ n'est plus objective. Bien que la fonctionnelle soit positive et objective, on a perdu la positivité et l'objectivité locale. C'est ce phénomène qui rend plus délicate l'étude de la fermeture des fonctionnelles de l'élasticité. C'est aussi pour cela que le résultat est plus riche. Afin d'atteindre des fonctionnelles qui ne sont pas localement positives ou objectives, nous établissons un second résultat d'homogénéisation.

6.2 Interactions non-locales à plusieurs points

Dans cette section on étend le résultat du chapitre précédent aux interactions faisant intervenir plus de deux points, en montrant, notamment que, pour tout entier naturel p , \mathfrak{L}_p et plus généralement \mathfrak{Q}_p sont inclus dans la fermeture des fonctionnelles de l'élasticité linéaire \mathfrak{E}_ν . On commence par prouver un deuxième résultat d'homogénéisation qui constitue un outil essentiel pour la suite.

6.2.1 Un deuxième résultat d'homogénéisation

Théorème 6.3 *Soit $0 < r < p$ deux entiers naturels. Soit $(x_i) \in (\mathbb{R}^3)^p$ une famille de p points distincts dans Ω et $(y_i) \in (\mathbb{R}^3)^r$ la sous-famille $y_i = x_i$, $i = 1 \dots r$. Soit q une forme quadratique positive sur $(\mathbb{R}^3)^p$. On définit la forme quadratique positive \tilde{q} sur $(\mathbb{R}^3)^r$, en posant, pour tout $(u_i) \in (\mathbb{R}^3)^r$,*

$$\tilde{q}(u_1, u_2, \dots, u_r) := \inf \{q(u_1, u_2, \dots, u_p); (u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_p) \in (\mathbb{R}^3)^{p-r}\}.$$

Si, pour tout g dans $L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^+)$, les fonctionnelles $D_{q, (x_i), g}$ appartiennent à la fermeture \mathfrak{E}_ν des fonctionnelles de l'élasticité, alors il en est de même pour les fonctionnelles $D_{\tilde{q}, (y_i), g}$.

Preuve : Pour les mêmes raisons que dans la preuve du théorème 5.1, il suffit de traiter le cas où le support de la fonction g est inclus dans un cube C de telle sorte que les ensembles $x_i + C$, ($i \in \{1, \dots, p\}$) soient disjoints et inclus dans Ω .

Nous utilisons les notations géométriques du chapitre 5 et définissons α_n et g_n dans $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ par

$$\begin{cases} \alpha_n(x) = n^6, & \text{si } x \in x_i + B(z_I^n, n^{-2}), \ i \in \{1, \dots, r\}, \ I \in \mathcal{I}^n, \\ \alpha_n(x) = n^{-1/2}, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.11)$$

et

$$g_n = \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \frac{1}{|B(z_I^n, n^{-4})|} \left(\int_{C_I^n} g(x) dx \right) \mathbb{1}_{B(z_I^n, n^{-4})}. \quad (6.12)$$

Posons

$$E_n := D_{q, (x_i), g_n} + E_{\alpha_n, \nu}. \quad (6.13)$$

Les hypothèses du théorème 6.3 impliquent que, pour tout n , $D_{q, (x_i), g_n}$ appartient à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. Grâce à la propriété 4.10, E_n appartient aussi à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. Donc, par la propriété 4.9, le théorème sera prouvé une fois que l'on aura établi la τ -convergence de la suite (E_n) vers $D_{\tilde{q}, (y_i), g}$. Tel est l'objectif des deux prochains paragraphes.

6.2.1.1 L'inégalité de la borne inférieure

Soit (u^n) une suite convergeant faiblement vers un certain u dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ à énergie bornée ($E_n(u^n) < M < \infty$). On a

$$\begin{aligned} E_n(u^n) &\geq \int_C q(u^n(x_1 + x), \dots, u^n(x_p + x)) g_n(x) dx \\ &\geq \int_C \inf_{u_{r+1}, \dots, u_p} q(u^n(x_1 + x), \dots, u^n(x_r + x), u_{r+1}, \dots, u_p) g_n(x) dx \\ &\geq \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \int_{C_I^n} \tilde{q}(u^n(x_1 + x), \dots, u^n(x_r + x)) g_n(x) dx \\ &\geq \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{C_I^n} g(x) dx \right) \left(\int_{B(z_I^n, n^{-4})} \tilde{q}(u^n(x_1 + x), \dots, u^n(x_r + x)) dx \right), \end{aligned}$$

et par convexité,

$$\begin{aligned} E_n(u^n) &\geq \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left[\tilde{q} \left(\int_{B(z_I^n, n^{-4})} u^n(x_1 + x) dx, \dots, \int_{B(z_I^n, n^{-4})} u^n(x_r + x) dx \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_{C_I^n} g(x) dx \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Si l'on définit \bar{u}^n sur chaque $x_i + C$ ($i = 1, \dots, r$) en posant, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et pour tout $x \in C$,

$$\bar{u}^n(x_i + x) := \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \left(\int_{B(z_I^n, n^{-4})} u^n(x_i + y) dy \right) \mathbb{1}_{C_I^n}(x) \quad (6.15)$$

et $\bar{u}^n(x) := u^n(x)$ ailleurs, l'inégalité (6.14) s'écrit

$$\begin{aligned} E_n(u^n) &\geq \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \int_{C_I^n} \tilde{q}(\bar{u}^n(x_1 + x), \dots, \bar{u}^n(x_r + x)) g(x) dx \\ &\geq D_{\tilde{q}, (y_i), g}(\bar{u}^n). \end{aligned} \quad (6.16)$$

D'autre part, la borne $E_n(u^n) < M$, implique que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$n^{-1/2} \int_{x_i + C} \|e(u^n)\|^2 dx \leq k_\nu^{-1} M$$

et

$$\sum_{I \in \mathcal{I}^n} \int_{B(z_I^n, n^{-4})} n^6 \|e(u^n)\|^2 dx \leq k_\nu^{-1} M.$$

Les hypothèses du lemme 5.5 sont satisfaites si l'on pose $\eta = -2$, $\gamma = 1/2$, $\mathcal{D}_I^n = B(z_I^n, n^{-4})$ et $s_n = 4/3\pi n^{-12}$. Ainsi, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, (\bar{u}^n) converge vers u faiblement dans $L^2(x_i + C, \mathbb{R}^3)$, (\bar{u}^n) converge vers u faiblement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et on peut passer à la limite dans l'inégalité (6.16) pour obtenir :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n(u^n) \geq D_{\tilde{q}, (y_i), g}(u). \quad (6.17)$$

6.2.1.2 Les inégalités de la borne supérieure

Soit $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Par un argument de densité, on peut supposer que u appartient à $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Pour tout $I \in \mathcal{I}^n$ et tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on pose $u_{I,i}^n := u(x_i + z_I^n)$. On définit alors $(u_{I,r+1}^n, \dots, u_{I,p}^n)$ comme une solution du problème de minimisation

$$\inf \left\{ q(u_{I,1}^n, \dots, u_{I,r}^n, u_{I,r+1}^n, \dots, u_{I,p}^n); (u_{I,r+1}^n, \dots, u_{I,p}^n) \in (\mathbb{R}^3)^{p-r} \right\} .$$

On peut, de plus, imposer à la solution choisie de vérifier, pour une certaine constante M qui dépend uniquement de u et de q ,

$$\forall I \in \mathcal{I}^n, \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad \|u_{I,i}^n\| \leq M.$$

On définit, enfin, la suite approximante (u^n) , en utilisant l'opérateur $T_{n,\eta}$ donné par le lemme 5.6, en posant

$$u^n(x) := \begin{cases} \tau_{x_i} T_{n,-2}(\tau_{-x_i}(u), (u_{I,i}^n)), & \text{si } x \in x_i + C, i \in \{1, \dots, r\}, \\ \tau_{x_i} T_{n,-4}(\tau_{-x_i}(u), (u_{I,i}^n)), & \text{si } x \in x_i + C, i \in \{r+1, \dots, p\}, \\ u(x) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.18)$$

La propriété (iv) de $T_{n,\eta}$, énoncée dans le lemme 5.6, nous assure que (u^n) converge vers u fortement dans $H^1(x_i + C, \mathbb{R}^3)$ pour tout $i \in \{r+1, \dots, p\}$. Par ailleurs la propriété (vi) assure que tel est encore le cas, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Ainsi (u^n) converge vers u fortement dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

La propriété (iii) de $T_{n,\eta}$, énoncée dans le lemme 5.6, nous assure que la suite réelle $(\int_{x_i + C} j_\nu(u^n) dx)_n$ est bornée pour tout $i \in \{r+1, \dots, p\}$ par un certain M' qui ne dépend

que de u et de M . Par la propriété (v), la suite $(\|\nabla u^n\|)$ est uniformément bornée sur chaque ensemble $x_i + C$ lorsque $i \in \{1, \dots, r\}$. Ainsi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} n^{-1/2} j_{\nu}(u^n) dx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} K_{\nu} \int_{\Omega} n^{-1/2} \|e(u^n)\| dx = 0. \quad (6.19)$$

Comme u^n est constante sur les boules $x_i + B(z_I^n, n^{-2})$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et $I \in \mathcal{I}^n$, cette dernière inégalité implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\alpha_n, \nu}(u^n) = 0. \quad (6.20)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} D_{q, (x_i), g_n}(u^n) &= \sum_{I \in \mathcal{I}^n} q(u_{I,1}^n, \dots, u_{I,p}^n) \int_{C_I^n} g(x) dx \\ &= \sum_{I \in \mathcal{I}^n} \tilde{q}(u_{I,1}^n, \dots, u_{I,r}^n) \int_{C_I^n} g(x) dx. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Si l'on note, comme précédemment, \bar{u}^n la fonction définie par (6.15) sur chaque $x_i + C$ et $\bar{u}^n(x) = u^n(x)$ ailleurs, la dernière égalité s'écrit

$$D_{q, (x_i), g_n}(u^n) = D_{\tilde{q}, (y_i), g}(\bar{u}^n). \quad (6.22)$$

Puisque u est régulière, la suite (\bar{u}^n) converge vers u fortement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. On peut ainsi passer à la limite pour obtenir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} D_{q, (x_i), g_n}(u^n) \leq D_{\tilde{q}, (y_i), g}(u). \quad (6.23)$$

Regroupant les inégalités (6.20) et (6.23) on obtient l'inégalité de la borne supérieure :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n(u^n) \leq D_{\tilde{q}, (y_i), g}(u). \quad (6.24)$$

Ceci conclut la preuve de la τ -convergence de (E_n) vers $D_{\tilde{q}, (y_i), g}$ et donc celle du théorème 6.3. □

6.2.2 Des interactions à deux points aux interactions à plusieurs points

Dans cette section nous prouvons que toute fonctionnelle dans \mathfrak{L}_p (i.e., du type (4.26)) appartient à la fermeture des fonctionnelles de l'élasticité linéaire. Ceci est une généralisation du théorème 5.1 qui donne ce résultat dans le cas $p = 2$. Pour $p > 4$ ce résultat se démontre par récurrence alors que les cas $p = 3$ et $p = 4$ nécessitent un traitement spécifique. On généralise ensuite ce résultat à toute fonctionnelle discrète et objective, en prouvant que \mathfrak{Q}_p est aussi inclus dans la fermeture des fonctionnelles de l'élasticité linéaire. D'un point de vue mécanique, ces résultats montrent que toute interaction objective entre p points peut être vue comme l'énergie d'un treillis, c'est-à-dire d'une réunion finie de ressorts.

Lemme 6.4 *On a $\mathcal{L}_4 \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}$.*

La preuve de ce lemme utilise deux autres lemmes algébriques que voici :

Lemme 6.5 *Soit $\{u_1, u_2, u_3, f_1, f_2, f_3\}$ une famille de rang 3 dans \mathbb{R}^3 vérifiant*

$$u_1 \wedge f_1 + u_2 \wedge f_2 + u_3 \wedge f_3 = 0.$$

Alors le rang de la famille $\{u_1 + \varepsilon f_1, u_2 + \varepsilon f_2, u_3 + \varepsilon f_3\}$ est 3 pour tout ε de \mathbb{R} sauf pour un nombre fini de valeurs de ε .

Preuve du lemme 6.5 : Remarquons tout d'abord que le problème est symétrique vis-à-vis de la transposition des familles $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Nous allons faire une démonstration par l'absurde. Supposons alors que le rang de la famille $\{u_1 + \varepsilon f_1, u_2 + \varepsilon f_2, u_3 + \varepsilon f_3\}$ soit inférieur à 3 pour plus de 3 valeurs distinctes de ε . Le polynôme de degré 3 en ε : $\det(u_1 + \varepsilon f_1, u_2 + \varepsilon f_2, u_3 + \varepsilon f_3)$ est donc nul. Considérant en particulier le coefficient des termes de degré 3 on obtient

$$\det(f_1, f_2, f_3) = 0,$$

et en considérant le coefficient des termes de degré 0

$$\det(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Ces deux familles sont de rang inférieur à 2, leur réunion est de rang 3 : l'une des deux, et l'on peut, par symétrie, supposer que c'est $\{u_1, u_2, u_3\}$, est de rang 2. On peut aussi supposer, sans nuire à la généralité, que $\{u_1, u_2\}$ est libre.

En considérant les termes de degré 1 on obtient

$$\det(u_1, u_2, f_3) + \det(u_2, u_3, f_1) + \det(u_3, u_1, f_2) = 0. \quad (6.25)$$

Notons f'_1, f'_2 et f'_3 les parties de f_1, f_2 et f_3 orthogonales au plan engendré par $\{u_1, u_2\}$. L'équation (6.25) peut alors se réécrire

$$\det(u_1, u_2, f'_3) + \det(u_2, u_3, f'_1) + \det(u_3, u_1, f'_2) = 0. \quad (6.26)$$

Notons a et b les réels tels que

$$f'_2 = au_1 \wedge u_2 \quad \text{et} \quad f'_1 = -bu_1 \wedge u_2,$$

puis définissons $w = au_1 + bu_2$. On a

$$f'_1 = w \wedge u_1 \quad \text{et} \quad f'_2 = w \wedge u_2.$$

L'équation (6.26) se traduit alors par

$$f'_3 \cdot (u_1 \wedge u_2) + (w \wedge u_1) \cdot (u_2 \wedge u_3) + (w \wedge u_2) \cdot (u_3 \wedge u_1) = 0,$$

soit

$$f'_3 \cdot (u_1 \wedge u_2) = b(u_1 \wedge u_2) \cdot (u_2 \wedge u_3) - a(u_1 \wedge u_2) \cdot (u_3 \wedge u_1)$$

ou finalement

$$f'_3 = w \wedge u_3.$$

On a alors

$$\begin{aligned} 0 &= w \cdot (u_1 \wedge f_1 + u_2 \wedge f_2 + u_3 \wedge f_3) \\ &= w \cdot (u_1 \wedge f'_1 + u_2 \wedge f'_2 + u_3 \wedge f'_3) \\ &= (w \wedge u_1) \cdot f'_1 + (w \wedge u_2) \cdot f'_2 + (w \wedge u_3) \cdot f'_3 \\ &= \|w \wedge u_1\|^2 + \|w \wedge u_2\|^2 + \|w \wedge u_3\|^2. \end{aligned}$$

Donc $\|w \wedge u_i\| = 0$ pour tout i et $w = 0$. On obtient alors $f'_i = 0$ pour tout i . Les vecteurs f_i appartiennent au plan des u_i ce qui est contraire à l'hypothèse que la famille $\{u_1, u_2, u_3, f_1, f_2, f_3\}$ est de rang 3. □

Lemme 6.6 *Soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ trois vecteurs distincts non nuls. Il existe une famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ telle que $\{u_1, u_2, u_3, f_1, f_2, f_3\}$ soit une famille de rang 3 et vérifiant*

$$u_1 \wedge f_1 + u_2 \wedge f_2 + u_3 \wedge f_3 = 0.$$

Preuve du lemme 6.6 : La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est de rang 1 ou 2 sinon le résultat est trivial. Supposons d'abord qu'elle soit de rang 2 et engendrée par $\{u_1, u_2\}$. En posant $u_3 = au_1 + bu_2$, il est facile de vérifier que la famille

$$f_1 := -au_1 \wedge u_2 \quad , \quad f_2 := -bu_1 \wedge u_2 \quad \text{et} \quad f_3 := u_1 \wedge u_2,$$

convient. Supposons maintenant que la famille est de rang 1. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $u_1 = i$, $u_2 = ai$ et $u_3 = bi$ où $\{i, j, k\}$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . il est facile de vérifier que la famille

$$f_1 := aj + bk \quad , \quad f_2 := -j \quad \text{et} \quad f_3 := -k,$$

convient. □

Nous pouvons maintenant procéder à la preuve du lemme 6.4.

Preuve du lemme 6.4 : Considérons un système équilibré de quatre forces (f_i, x_i) ($i = 0, 1, 2, 3$), avec $x_i \in \Omega$, $i = 0, \dots, 3$. Nous commençons par considérer le cas où f_i et $x_i - x_0$, pour $i = 1, 2, 3$, n'appartiennent pas au même plan. Alors, grâce au lemme 6.5, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que les points (x_0, x'_1, x'_2, x'_3) (où $x'_i := x_i + \varepsilon f_i$) ne soient pas coplanaires. On définit la forme quadratique q sur $(\mathbb{R}^3)^7$ en posant :

$$\begin{aligned} q(u_0, u_1, u_2, u_3, u'_1, u'_2, u'_3) &:= \sum_{i=1}^3 s_{(x_0, x'_i)}(u_0, u'_i) + \sum_{i=1}^3 s_{(x_i, x'_i)}(u_i, u'_i) \\ &\quad + s_{(x'_1, x'_2)}(u'_1, u'_2) + s_{(x'_2, x'_3)}(u'_2, u'_3) + s_{(x'_3, x'_1)}(u'_3, u'_1), \end{aligned}$$

et sur $(\mathbb{R}^3)^4$, la forme quadratique \tilde{q} par :

$$\tilde{q}(u_0, u_1, u_2, u_3) := \inf \{q(u_0, u_1, u_2, u_3, u'_1, u'_2, u'_3); (u'_1, u'_2, u'_3) \in (\mathbb{R}^3)^3\}.$$

Identifions le noyau K de $\tilde{q} : (u_0, u_1, u_2, u_3)$ appartient à K si, et seulement si, il existe (u'_1, u'_2, u'_3) tel que

$$s_{(x'_1, x'_2)}(u'_1, u'_2) = 0, \quad s_{(x'_2, x'_3)}(u'_2, u'_3) = 0, \quad s_{(x'_3, x'_1)}(u'_3, u'_1) = 0, \quad (6.27)$$

$$s_{(x_0, x'_1)}(u_0, u'_1) = 0, \quad s_{(x_0, x'_2)}(u_0, u'_2) = 0, \quad s_{(x_0, x'_3)}(u_0, u'_3) = 0, \quad (6.28)$$

et pour $i = 1, 2$ ou 3 ,

$$s_{(x_i, x'_i)}(u_i, u'_i) = 0. \quad (6.29)$$

Comme les points (x_0, x'_1, x'_2, x'_3) ne sont pas coplanaires, ces dernières conditions sont équivalentes à l'existence d'un vecteur w tel que, pour tout $i = 1, 2$ ou 3 ,

$$u'_i - u_0 = w \wedge (x'_i - x_0) \quad \text{et} \quad f_i \cdot (u_i - (u_0 + w \wedge (x_i - x_0))) = 0 \quad (6.30)$$

ou, de manière équivalente,

$$w \cdot ((x_i - x_0) \wedge f_i) = f_i \cdot (u_i - u_0). \quad (6.31)$$

En effet, d'après (6.27) et (6.28), les vecteurs u_0, u'_1, u'_2 et u'_3 sont les valeurs d'un champs équijectif, respectivement, en x_0, x_1, x_2 , et x_3 . Si l'on note w sa résultante on a

$$u'_i = u_0 - w \wedge (x_i - x_0) - \varepsilon w \wedge f_i.$$

Par ailleurs, d'après (6.29) on a $(u'_i - u_i) \cdot f_i = 0$. Il en résulte que

$$f_i \cdot ((u_0 - u_i) - w \wedge (x_i - x_0) - \varepsilon w \wedge f_i) = f_i \cdot (u'_i - u_i) = 0,$$

et (6.30) en découle.

Comme les vecteurs f_i et $x_i - x_0$ n'appartiennent pas au même plan et comme l'équilibre de notre système impose que

$$\sum_{i=1}^3 ((x_i - x_0) \wedge f_i) = 0,$$

la famille $((x_i - x_0) \wedge f_i)$ est donc de rang 2. L'existence d'un w vérifiant (6.31) est équivalente à

$$\sum_{i=1}^3 f_i \cdot (u_i - u_0) = 0.$$

La codimension du noyau de \tilde{q} est un : il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\tilde{q}(u_0, u_1, u_2, u_3) = \lambda \left(\sum_{i=1}^3 f_i \cdot (u_i - u_0) \right)^2 = \lambda \left(\sum_{i=0}^3 f_i \cdot u_i \right)^2.$$

D'après le théorème 5.1 et la propriété 4.10, pour tout $g \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^+)$, la fonctionnelle $D_{g, (x_0, x_i, x'_i), g}$ appartient à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. Par le théorème 6.3, la fonctionnelle $D_{\tilde{q}, (x_i), g}$ appartient aussi à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. Comme $L_{(f_i), (x_i), g}$ coïncide avec $\lambda^{-1} D_{\tilde{q}, (x_i), g}$, le lemme est prouvé dans le cas où f_i et $x_i - x_0$, pour $i = 1, 2, 3$, n'appartiennent pas au même plan.

Maintenant considérons le cas général : pour toute famille de quatre points distincts (x_i) , grâce au lemme 6.6, il existe une famille (g_i) telle que les vecteurs g_i et $x_i - x_0$, pour $i = 1, 2, 3$, ne soient pas coplanaires et telle que le système de forces (g_i, x_i) soit équilibré.

Alors, pour un $\eta > 0$ suffisamment petit, les vecteurs $f_i + \eta g_i$ et $x_i - x_0$ ne sont pas coplanaires. Par la remarque précédente, on sait que la fonctionnelle $L_{(f_i + \eta g_i), (x_i), g}$ appartient à la fermeture $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. Si l'on fait tendre η vers zéro, alors, clairement, la suite de fonctionnelles $(L_{(f_i), (x_i), g} + \eta L_{(g_i), (x_i), g})_\eta$ τ -converge vers $L_{(f_i), (x_i), g}$. Par conséquent, grâce à la propriété de diagonalisation (propriété 4.9), la fonctionnelle $L_{(f_i), (x_i), g}$ appartient aussi à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. □

Remarque 6.7 Comme $\mathfrak{L}_3 \subset \mathfrak{L}_4$, ceci prouve aussi que $\mathfrak{L}_3 \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}$.

Théorème 6.8 Pour tout entier $p > 1$, on a $\mathfrak{L}_p \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}$.

La preuve de ce théorème utilise un autre lemme algébrique que voici :

Lemme 6.9 Soit, dans \mathbb{R}^3 , $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une famille de n vecteurs distincts non nuls et $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ une autre famille de n vecteurs. On note m le vecteur $m := \sum_{i=1}^n u_i \wedge f_i$. Soit u un vecteur non nul n'appartenant pas à la famille $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et orthogonal à m . Alors il existe f et f' tels que

$$f + f' + \sum_{i=1}^n f_i = 0, \quad \text{et} \quad u \wedge f + m = 0.$$

Preuve du lemme 6.9 : On vérifie aisément que les vecteurs f et f' définis par

$$f := \frac{u}{\|u\|^2} \wedge m \quad \text{et} \quad f' := -f - \sum_{i=1}^n f_i$$

conviennent. En effet

$$\begin{aligned} u \wedge f + m &= m + u \wedge \left(\frac{u}{\|u\|^2} \wedge m \right) \\ &= m + \frac{1}{\|u\|^2} (u(u \cdot m) - m(u \cdot u)) \\ &= m - \frac{1}{\|u\|^2} m(u \cdot u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 6.8 : Nous allons procéder par récurrence sur p . Le cas $p = 2$ est traité dans le théorème 5.1. Le cas $p \leq 4$ a été considéré dans le lemme 6.4.

Soit $p > 4$ et supposons que $\mathfrak{L}_t \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}$ pour tout $t < p$. Soit $L_{(f_i), (x_i), g}$ un élément de \mathfrak{L}_p . Soit r la partie entière de $p/2$ et $y \in \Omega \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ tel que $y - x_1$ soit orthogonal à $\sum_{i=2}^{r+1} (x_i - x_1) \wedge f_i$. Alors, il existe deux vecteurs f et f' dans \mathbb{R}^3 tels que les deux familles

$$((f, y), (f_1 + f', x_1), (f_2, x_2), (f_3, x_3), \dots, (f_{r+1}, x_{r+1}))$$

et

$$((-f, y), (-f', x_1), (f_{r+2}, x_{r+2}), (f_{r+3}, x_{r+3}), \dots, (f_p, x_p))$$

soient des systèmes de forces équilibrés. On définit les formes quadratiques q' et q'' respectivement sur $(\mathbb{R}^3)^{r+2}$ et $(\mathbb{R}^3)^{p-r+1}$ par

$$q'(v, u_1, \dots, u_{r+1}) := \left(f \cdot v + f' \cdot u_1 + \sum_{i=1}^{r+1} f_i \cdot u_i \right)^2,$$

$$q''(v, u_1, u_{r+2}, \dots, u_p) := \left(-f \cdot v - f' \cdot u_1 + \sum_{i=r+2}^p f_i \cdot u_i \right)^2.$$

Les fonctionnelles $D_{q', (y, x_1, \dots, x_{r+1}), g}$ et $D_{q'', (y, x_1, x_{r+2}, \dots, x_p), g}$ appartiennent respectivement à \mathfrak{L}_{r+2} et \mathfrak{L}_{p-r+1} . Comme $p > 4$, alors $r+2 < p$ et $p-r+1 < p$; l'hypothèse de récurrence implique que ces deux fonctionnelles appartiennent à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$ ainsi que leur somme.

Calculons maintenant l'infimum

$$\tilde{q}(u_1, u_2, \dots, u_p) := \inf_{v \in \mathbb{R}^3} \{2q'(v, u_1, \dots, u_{r+1}) + 2q''(v, u_1, u_{r+2}, \dots, u_p)\}.$$

Comme cet infimum est atteint lorsque

$$f \cdot v = \frac{1}{2} \left(- \left(f' \cdot u_1 + \sum_{i=1}^{r+1} f_i \cdot u_i \right) + \left(-f' \cdot u_1 + \sum_{i=r+2}^p f_i \cdot u_i \right) \right),$$

on obtient

$$\tilde{q}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \left(\sum_{i=1}^p f_i \cdot u_i \right)^2.$$

Ainsi, $L_{(f_i), (x_i), g}$ coïncide avec $D_{\tilde{q}, (x_i), g}$. Donc, par le théorème 6.3, la fonctionnelle $L_{(f_i), (x_i), g}$ appartient à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. La proposition $\mathfrak{L}_t \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}$ est vraie pour $t = p$. \square

Théorème 6.10 *Pour tout $p > 1$, on a $\mathfrak{Q}_p \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}$.*

Preuve : Soit $D_{q, (x_i), g}$ dans \mathfrak{Q}_p . La forme quadratique positive q sur $(\mathbb{R}^3)^p$ peut être considérée comme une forme quadratique sur \mathbb{R}^{3p} et diagonalisée dans une base orthogonale. C'est alors la somme des carrés de $3p$ formes linéaires sur \mathbb{R}^{3p} (c'est-à-dire sur $(\mathbb{R}^3)^p$) qui

s'annulent sur le noyau de q . Ainsi, il existe $3p$ familles de p vecteurs (f_i^j) ($i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, 3p$) telles que

$$q(u_1, \dots, u_p) = \sum_{j=1}^{3p} \left(\sum_{i=1}^p (f_i^j \cdot u_i)^2 \right).$$

De plus, pour chaque j , le système de forces (f_i^j, x_i) est équilibré puisque $(q, (x_i))$ est objective. Par conséquent, chaque fonctionnelle $L_{(f_i^j), (x_i), g}$ appartient à \mathfrak{L}_p et donc, par le théorème 6.8, à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. Grâce à la remarque 4.14, leur somme $D_{q, (x_i), g} = \sum_{j=1}^{3p} L_{(f_i^j), (x_i), g}$ appartient à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$. \square

6.3 Discrétisation d'une interaction non-locale continue

Théorème 6.11 *On a $\mathfrak{C} \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}$.*

Preuve : Pour tout F dans \mathfrak{C} , on construit une suite dans $\cup_p \Omega_p$ qui τ -converge vers F . Soit C^n le cube

$$C^n := \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^3$$

et $(C_i^n)_{i=1}^{p_n}$ la famille de tous les cubes $C_i^n := c_i^n + C^n$ inclus dans Ω et tels que $nc_i^n \in \mathbb{Z}^3$. Tout compact inclus dans Ω est, pour n suffisamment grand, recouvert, presque partout, par la famille (C_i^n) ; mais ceci n'est, en général, pas le cas pour tout le domaine Ω . On élargit alors certains C_i^n en définissant la famille

$$K_i^n := \left\{ x \in \Omega ; \|x - c_i^n\| < \|x - c_j^n\|, \forall j = 1, \dots, p_n, j \neq i \right\}. \quad (6.32)$$

Noter que, pour tout $i \in \{1, \dots, p_n\}$,

$$C_i^n \subset K_i^n \quad \text{et} \quad \Omega \subset \overline{\cup_{i=1}^{p_n} K_i^n}.$$

De plus, puisque Ω est à frontière régulière, le diamètre des ensembles K_i^n tend vers zéro lorsque n tend vers plus l'infini ($\max_{i \in \{1, \dots, p_n\}} \{\text{diam}(K_i^n)\} \rightarrow 0$). Introduisons le barycentre $c^n := (p_n)^{-1} \sum_{i=1}^{p_n} c_i^n$ des centres (c_i^n) et J^n leur matrice centrale d'inertie définie par

$$J^n \cdot w := \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^{p_n} ((c_i^n - c^n) \wedge w) \wedge (c_i^n - c^n), \quad \forall w \in \mathbb{R}^3. \quad (6.33)$$

Pour n suffisamment grand, la matrice J^n est symétrique, définie positive et donc inversible. On peut alors introduire un opérateur linéaire Γ^n qui à chaque famille (u_i^n) de $(\mathbb{R}^3)^{p_n}$ associe, une fonction $\Gamma^n((u_i^n)) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma^n((u_i^n))(x) := \\ \sum_{i=1}^{p_n} \left[u_i^n + \left((J^n)^{-1} \cdot \frac{1}{p_n} \sum_{j=1}^{p_n} (c_j^n - c^n) \wedge u_j^n \right) \wedge (x - c_i^n) \right] \mathbf{1}_{K_i^n}(x). \end{aligned} \quad (6.34)$$

L'intérêt de cet opérateur réside dans ses propriétés que voici :

- i) $\Gamma^n(w, w, \dots, w)(x) = w$ et $\Gamma^n(w \wedge c_1^n, w \wedge c_2^n, \dots, w \wedge c_{p_n}^n)(x) = w \wedge x$, pour presque tout x dans Ω ,
- ii) $\|\Gamma^n((u_i^n))\|_\infty \leq 2 \max_{i \in \{1, \dots, p_n\}} \|u_i^n\|$,
- iii) si une suite de fonctions (u^n) converge vers u faiblement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors la suite $\Gamma^n\left(\int_{C_i^n} u^n\right)$ converge aussi vers u faiblement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$.
- iv) si u appartient à $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors la suite $\left(\Gamma^n\left(\int_{C_i^n} u\right)\right)$ converge vers u fortement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

La propriété (i) est facile. Pour prouver (ii) et (iii), il suffit de remarquer que la suite de matrices (J^n) converge vers la matrice centrale d'inertie de Ω qui est définie positive. Par conséquent $\|(J^n)^{-1}\|$ est bornée ainsi que la quantité $\left\| (J^n)^{-1} \cdot \frac{1}{p_n} \sum_{j=1}^{p_n} (c_j^n - c^n) \wedge u_j^n \right\|$. Comme le diamètre de K_i^n tend vers zéro, le terme de droite dans la définition de $\Gamma^n((u_i^n))$ tend uniformément vers zéro. La propriété (iii) résulte de la convergence faible de $\sum_{i=1}^{p_n} \left(\int_{C_i^n} u^n\right) \mathbf{1}_{K_i^n}$ vers u . La propriété (iv) est évidente. En effet, cette convergence est en réalité uniforme.

Notons g_n la fonction $g_n := \frac{1}{|C^n|} \mathbb{1}_{C^n}$ et q_n la forme quadratique définie sur $(\mathbb{R}^3)^{p_n}$ par

$$q_n(u_1^n, u_2^n, \dots, u_{p_n}^n) := F\left(\Gamma^n\left(\int_{C_i^n} u_i^n\right)\right). \quad (6.35)$$

La propriété (i) de Γ^n assure l'objectivité de $(q_n, (x_i^n))$: la fonctionnelle $D_{q_n, (c_i^n), g_n}$ appartient à \mathfrak{Q}_{p_n} . Grâce au théorème 6.10, elle appartient à $\overline{\mathfrak{E}_\nu}$.

Soit (u^n) une suite convergeant vers u faiblement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Par convexité, on a

$$\begin{aligned} D_{q_n, (c_i^n), g_n}(u^n) &= \int_{C^n} q_n(u^n(c_1^n + x), u^n(c_2^n + x), \dots, u^n(c_{p_n}^n + x)) dx \\ &\geq q_n\left(\int_{C_1^n} u^n, \int_{C_2^n} u^n, \dots, \int_{C_{p_n}^n} u^n\right) \\ &\geq F\left(\Gamma^n\left(\int_{C_i^n} u^n\right)\right). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Grâce à la propriété (iii) de Γ^n et à la semi-continuité de F , on peut passer à la limite et obtenir l'inégalité de la borne inférieure

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} D_{q_n, (c_i^n), g_n}(u^n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} F\left(\Gamma^n\left(\int_{C_i^n} u^n\right)\right) \geq F(u). \quad (6.37)$$

Soit, maintenant u dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Par un argument de densité on peut supposer que u appartient à $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Comme pour tout $i \in \{1, \dots, p_n\}$ et tout $x \in C^n$, $\|u(c_i^n + x) - u(c_i^n)\| \leq \frac{1}{n} \|\nabla u\|_\infty$, la propriété (ii) de Γ^n implique que $\|\Gamma^n((u(c_i^n + x))) - \Gamma^n((u(c_i^n)))\|_\infty \leq$

$\frac{2}{n}\|\nabla u\|_\infty$. La forme quadratique continue F est Lipschitzienne sur tout domaine borné de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$: il existe une constante C' telle que, pour tout $x \in C^n$,

$$|q_n(u(c_1^n+x), u(c_2^n+x), \dots, u(c_{p_n}^n+x)) - q_n(u(c_1^n), u(c_2^n), \dots, u(c_{p_n}^n))| \leq \frac{C'}{n}.$$

Donc

$$\begin{aligned} D_{q_n, (c_i^n), g_n}(u) &= \int_{C^n} q_n(u(c_1^n+x), u(c_2^n+x), \dots, u(c_{p_n}^n+x)) dx \\ &\leq q_n(u(c_1^n), u(c_2^n), \dots, u(c_{p_n}^n)) + \frac{C'}{n} \\ &\leq F\left(\Gamma^n\left((u(c_i^n))\right)\right) + \frac{C'}{n}. \end{aligned}$$

Grâce à la propriété (iv) de Γ^n et à la continuité de F , on peut passer à la limite pour obtenir l'inégalité de la borne supérieure

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} D_{q_n, (c_i^n), g_n}(u) \leq F(u). \quad (6.38)$$

Cette inégalité, complétée par celle de la borne inférieure (6.37) prouve que $(D_{q_n, (c_i^n), g_n})$ τ -converge vers F . On conclut la preuve du théorème 6.11 en évoquant la propriété 4.9. \square

6.4 Approximation Moreau-Yosida

Comme déjà vu dans les chapitres antérieurs, l'approximation Moreau-Yosida est un moyen classique d'approcher une fonctionnelle qui n'est pas continue par une autre qui l'est. La restriction aux fonctionnelles objectives ne présente aucune difficulté.

Théorème 6.12 *On a $\Omega \subset \bar{\mathfrak{C}}$.*

Preuve : Soit $F \in \Omega$. Soit $(Y_n(F))$ la suite des approximations Moreau-Yosida de F . On sait d'une part que, pour tout $n \geq 1$, $Y_n(F)$ est continue sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. D'autre part, on vérifie facilement que si F est objective alors son approximation Moreau-Yosida l'est également. Par conséquent $Y_n(F) \in \mathfrak{C}$. Par ailleurs, la suite $(Y_n(F))$ est croissante et converge simplement vers F dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Donc, grâce à la propriété 4.11, $(Y_n(F))$ τ -converge vers F . On en déduit que F appartient à $\bar{\mathfrak{C}}$. \square

6.5 Fermeture des fonctionnelles de l'élasticité

Nous avons, à présent tous les outils nécessaires pour établir le résultat principal de ce chapitre qui s'énonce

Théorème 6.13 *Soit $\nu \in (-1, 1/2)$. La fermeture de l'ensemble \mathfrak{E}_ν des fonctionnelles de l'élasticité linéaire coïncide avec l'ensemble de toutes les formes quadratiques positives, objectives et semi-continues inférieurement : $\overline{\mathfrak{E}_\nu} = \mathfrak{Q}$.*

Preuve : Nous savons déjà, par la remarque 4.12 que $\overline{\mathfrak{E}_\nu} \subset \mathfrak{Q}$. Par ailleurs nous venons de voir dans la section précédente que

$$\mathfrak{Q} \subset \overline{\mathfrak{E}}.$$

Or, d'après le théorème 6.11, $\mathfrak{E} \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}$; ce qui, par la propriété 4.9, implique que

$$\overline{\mathfrak{E}} \subset \overline{\mathfrak{E}_\nu}.$$

Ceci prouve l'inclusion inverse et le théorème 6.13 est ainsi démontré.

□

Bibliographie

- [1] ALIBERT J.J, DELL'ISOLA F, SEPPECHER P, *Truss Modular beams the Deformation energy of which depends on higher Displacement gradients*, Soumis à Math. and Mech. of Solids.
- [2] ATTOUCH H., *Variational Convergence for Functions and Operators*, Pitman, London, (1984).
- [3] AZÉ D., *Caractérisation de la convergence au sens de Mosco en terme d'approximations inf-convolutives*, Annales Faculté des Sciences de Toulouse, Vol.VIII, n°3, pp. 293-314 (1986).
- [4] BELLIEUD M., BOUCHITTÉ G., *Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. Non local effects*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 26, 407-436 (1998).
- [5] BELLIEUD M., BOUCHITTÉ G., *Homogénéisation en présence de fibres de grandes conductivité*, CRAS, t.323, Série I, p.1135-1140 (1996).
- [6] BEURLING A., DENY J., *Dirichlet spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 45, 208-215 (1959).
- [7] BOUCHITTÉ G., BUTTAZZO G., SEPPECHER P., *Energies with respect to a measure and applications to low-dimensional structures.*, Calc. Var. Partial Differential Equations 5 , no.1, p.37-54 (1997).
- [8] BRÉZIS H., *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Coll. Math. appliquées pour la maîtrise. Masson(1983).
- [9] BRÉZIS H., *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North Holland (1973).
- [10] BRIANE M., TCHOU N., *Fibered microstructures for some nonlocal Dirichlet forms*, Prépublication/IRMAR-Rennes, (2000) ; 00-48 -27 p.
- [11] BUTTAZZO G., *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser. 207, Longman, Harlow (1989).
- [12] BUTTAZZO G., DAL MASO G., *Γ -limits of integral functionals*, J. Analyse Math., 37, pp. 145-185 (1980).
- [13] CAMAR-EDDINE M., SEPPECHER P., *Non-local interactions resulting from the homogenization of a linear diffusive medium*, C.R. Acad. Sci. Paris, 332, Série I , pp. 485-490 (2001).

- [14] CAMAR-EDDINE M., SEPPECHER P., *Closure of the set of diffusion functionals with respect to the Mosco-convergence*, à paraître dans Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Issue 8 (12) (2002).
- [15] CAMAR-EDDINE M., SEPPECHER P., *Determination of the Closure of elasticity functionals with respect to the Mosco-convergence*, soumis à Arch. Rational Mech. Anal.
- [16] CASADO-DIAZ J., DAL MASO G. *A weak notion of convergence in capacity with applications to thin obstacle problems*, Calculus of variations and differential equations (Haifa, 1998), Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math., 410, pp. 56-64.
- [17] CIARLET P.G., *Elasticité Tridimensionnelle*, Masson, Paris (1985).
- [18] CIORANESCU D, MURAT F., *A strange term brought from somewhere else*, Nonlinear differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol II, pp. 98 -138, 389-390, (Paris, 1979/1980), Res.Notes in Math., 60, Pitman, Boston, Mass.-London, (1982).
- [19] DAL MASO G., *An introduction to Γ -convergence*, Progress in linear diff. eq. and their app., Birkhäuser, Boston, (1993).
- [20] DE GIORGI E., *Su un tipo di convergenza variazionale*, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 58 (1975), pp. 842-850.
- [21] DUVAUT G., *Mécanique des milieux continus*, Masson, (1990).
- [22] EVANS L.C., GARIEPY R.F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, (1992).
- [23] FREHSE J., *Capacity Methods in the Theory of Partial Differential Equations*, Jber. d. Dt. Math. Verein 84, pp.1-44 (1982).
- [24] FUKUSHIMA M., *Dirichlet Forms and Markov Processes*, North Holland (1980).
- [25] GERMAIN P., *Cours de mécanique des milieux continus*, tome I, Masson, Paris (1973).
- [26] HASHIN Z., SHTRIKMAN S., *A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials*, J. Mech. Phys. Solids 11 (1963), pp. 127-140.
- [27] HEDBERG L.I., *Spectral Synthesis in Sobolev Spaces and Uniqueness of Solutions of Dirichlet Problems*, Acta. Math. 147, pp. 237-263 (1982).
- [28] JIKOV V.V., KOZLOV S.M., OLEINIK O. A. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer Verlag Berlin (1994).
- [29] KHRUSLOV E. YA, *Homogenized models of composite media*, Composite Media and Homogenization Theory, G. Dal Maso and G. F. Dell' Antonio editors, in Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser pp. 159-182 (1991).
- [30] MA Z.M, RÖCHNER M, *An Introduction to the Theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Springer, Berlin (1992).
- [31] MALÝ J., ZIEMER W. P., *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, (1997).

- [32] MARTIO O., *Capacity and measure densities*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. 4, pp. 109-118 (1978/79).
- [33] MILTON G.W., *Composite materials with Poisson's ratios close to -1*, J. Mech. Phys. Solids 40 no. 5 pp. 1105-1137 (1992).
- [34] MOREAU J.J., *Proximité et dualité dans un espace Hilbertien*, Bull.Soc.Mat. de France.,93,P.273-299,(1965).
- [35] MOSCO U., *Approximation of the solutions of some variational inequalities*, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, 21, pp. 373-394 (1967).
- [36] MOSCO U., *Composite media and asymptotic Dirichlet forms*, Journal of Functional Analysis, 123, 368-421 (1994).
- [37] MOSCO U., *On the continuity of Young-Fenchel transformation*, Journ. Math. Anal. and Appl., t. 35, pp.518-535 (1971).
- [38] MOSCO U., *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math. Vol.3, t. 4, PP. 510-585 (1969).
- [39] MURAT F., TARTAR L., *H-Convergence, Topics in the mathematical modelling of composite materials*, Progress in Nonlinear Diff. Eq. and their Applications, R.V. Kohn Ed., Birkhäuser, Boston, (1994).
- [40] MURAT F., TARTAR,L., *Calculus of variations and homogenization*, Topics in the mathematical modelling of composite materials, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 31, Birkhauser Boston, Boston, MA, pp. 139-173 (1997).
- [41] PIDERI C., SEPPECHER P., *A second gradient material resulting from the homogenization of an heterogeneous linear elastic medium*, Continuum Mech.andThermodyn.,9,P.241-257,(1997).
- [42] RUDIN W., *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Inc (1966).
- [43] SONNTAG Y., *Convergence au sens de Mosco : théorie et applications à l'approximation des solutions d'inéquations*, Thèse d'Etat. Université de Provence. Marseille (1982).
- [44] TARTAR,L., *Estimations de coefficients homonésés*, Computing methods in applied sciences and engineering, R. Glowinski, J.L. Lions eds, Lecture Notes in Math., 704, Springer Verlag , pp. 364-373 (1978).
- [45] TARTAR L, *Estimations fines des coefficients homogénéisés*, Ennio De Giorgi Colloquium. Edited By P. Krée, Res. Notes in Math. 125 Pitman, London pp. 168-187 (1985).
- [46] ZIEMER W.P., *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag,Berlin, (1989).