



**HAL**  
open science

# Contrôle global de la partie centrale du détecteur d'ondes gravitationnelles Virgo. Recherche de signaux impulsionnels: application aux coïncidences entre interféromètres

Nicolas Arnaud

► **To cite this version:**

Nicolas Arnaud. Contrôle global de la partie centrale du détecteur d'ondes gravitationnelles Virgo. Recherche de signaux impulsionnels: application aux coïncidences entre interféromètres. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2002. Français. NNT: . tel-00006624

**HAL Id: tel-00006624**

**<https://theses.hal.science/tel-00006624>**

Submitted on 30 Jul 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS SUD  
CENTRE D'ORSAY

THÈSE *présentée*

*pour obtenir*

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité: Physique Théorique

*par*

**Nicolas ARNAUD**

***Contrôle Global de la partie centrale du détecteur  
d'ondes gravitationnelles Virgo***

***Recherche de signaux impulsionnels :  
application aux coïncidences entre interféromètres***

Soutenue le 18 Mars 2002 devant la Commission d'examen

MM.	François	RICHARD	Président
	Bruce	ALLEN	Rapporteur
	Fabien	CAVALIER	Invité
	Thibault	DAMOUR	
	Michel	DAVIER	Directeur de Thèse
	Adalberto	GIAZOTTO	
	Jean-Pierre	THIBAUD	Rapporteur

---

---

# Table des matières

<b>1 Ondes gravitationnelles et Sources</b>	<b>1</b>
1.1 Les Equations d'Einstein . . . . .	2
1.1.1 Enoncé . . . . .	2
1.1.2 Origine de ces équations . . . . .	2
1.1.3 Expression mathématique du tenseur d'Einstein . . . . .	3
1.1.4 Propriétés des Equations d'Einstein . . . . .	4
1.2 Ondes gravitationnelles . . . . .	5
1.2.1 Histoire et controverse . . . . .	5
1.2.2 Approximation de champ faible; équations d'Einstein linéarisées . . . . .	6
1.2.3 Solutions dans le vide . . . . .	7
1.2.4 Interprétation physique des polarisations . . . . .	8
1.2.5 Génération d'ondes gravitationnelles par des sources . . . . .	9
1.2.6 Luminosité d'une source d'onde gravitationnelle . . . . .	10
1.2.7 Application au Pulsar PSR 1913+16 . . . . .	11
1.3 Sources d'ondes gravitationnelles et exemples de méthodes de détection . . . . .	13
1.3.1 Généralités . . . . .	13
1.3.2 Phase <i>spirale</i> de la coalescences de systèmes binaires . . . . .	15
1.3.3 Oscillations de trous noirs . . . . .	18
1.3.4 Supernovae . . . . .	19
1.3.5 Sources périodiques . . . . .	24
1.3.6 Fond Stochastique . . . . .	26
<b>2 Virgo et la détection des ondes gravitationnelles</b>	<b>29</b>
2.1 Détection interférométrique . . . . .	30
2.1.1 Effet d'une onde gravitationnelle sur une cavité optique . . . . .	30
2.1.2 Détecteur interférométrique et sensibilité . . . . .	31
2.1.3 D'autres détecteurs: les barres résonnantes . . . . .	39
2.2 Le détecteur Virgo . . . . .	40
2.2.1 Description de Virgo; bruits du détecteur . . . . .	40
2.2.2 Acquisition des données et chaînes d'analyse, de l' <i>online</i> à l' <i>offline</i> . . . . .	49
2.2.3 L'interféromètre central (CITF) . . . . .	53
2.2.4 D'autres détecteurs interférométriques . . . . .	56
<b>3 Etude du Contrôle Global de Virgo</b>	<b>57</b>
3.1 Contrôles locaux et contrôle global . . . . .	58
3.1.1 Contrôles locaux . . . . .	59
3.1.2 Les différentes étapes du contrôle de Virgo . . . . .	59
3.1.3 Le Contrôle Global . . . . .	60
3.2 Spécifications de contrôle . . . . .	60
3.2.1 Stabilité du laser . . . . .	61
3.2.2 Contrôles longitudinaux . . . . .	61
3.2.3 Contrôles angulaires . . . . .	62
3.2.4 Les spécifications sont-elles réalistes? . . . . .	62
3.3 La chaîne de contrôle . . . . .	62
3.3.1 Contrôle et signaux d'erreurs . . . . .	63
3.3.2 Photodiodes . . . . .	69
3.3.3 Photodiodes à quadrants et alignement . . . . .	69

---

3.3.4	Agir sur les miroirs: les suspensions . . . . .	69
3.3.5	Synchronisation . . . . .	73
3.4	Le Contrôle Global . . . . .	73
3.4.1	Fonctionnalités . . . . .	73
3.4.2	Description technique: un choix d'architecture . . . . .	74
3.4.3	Développements logiciels . . . . .	77
3.4.4	Performances . . . . .	83
3.4.5	Définition des configurations des algorithmes . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Résultats expérimentaux du contrôle de l'interféromètre central</b>	<b>85</b>
4.1	Le contrôle du CITF: point de fonctionnement, signaux d'erreur et boucles d'asservissement . . . . .	86
4.2	Contrôler la longueur de frange noire . . . . .	87
4.2.1	Algorithmes de contrôle . . . . .	87
4.2.2	Première acquisition du contrôle: le 13 juin 2001 . . . . .	87
4.2.3	Première courbe de sensibilité . . . . .	89
4.3	Contrôler l'interféromètre recyclé . . . . .	91
4.3.1	Une méthode mise au point en simulation . . . . .	91
4.3.2	Résultats et performances de la méthode en simulation . . . . .	97
4.3.3	Une dure réalité: les <i>tilts</i> des miroirs . . . . .	102
4.3.4	Méthode de contrôle alternative . . . . .	103
4.3.5	Tests préliminaires . . . . .	106
4.3.6	Première acquisition du contrôle du recyclage . . . . .	107
4.4	Résultats expérimentaux . . . . .	107
4.4.1	<i>Runs</i> de longue durée . . . . .	108
4.4.2	Données du CITF contrôlé . . . . .	112
4.4.3	Comparaison de différentes courbes de sensibilité . . . . .	115
4.4.4	Mesure de la finesse de la cavité de recyclage . . . . .	115
4.4.5	Améliorations futures du contrôle . . . . .	119
4.5	Conclusion . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Méthodes de filtrage pour la recherche de signaux gravitationnels impulsionnels</b>	<b>123</b>
5.1	Spécificités des sources impulsionnelles d'ondes gravitationnelles . . . . .	124
5.2	Le Cadre des simulations . . . . .	125
5.2.1	Détecter les <i>bursts</i> d'ondes gravitationnelles . . . . .	125
5.2.2	Les signaux de supernova simulés par Zwerger-Müller . . . . .	126
5.2.3	Modèle de bruit . . . . .	126
5.2.4	Pré-traitement des données . . . . .	127
5.3	Méthodes de filtrage . . . . .	129
5.3.1	Des méthodes générales . . . . .	130
5.3.2	Filtrage adapté aux principales caractéristiques des <i>bursts</i> . . . . .	132
5.4	Espace des paramètres et pavage . . . . .	135
5.4.1	Problématique . . . . .	135
5.4.2	Application à la recherche d'un pic gaussien . . . . .	137
5.5	Application du pavage à la recherche des oscillations de trous noirs . . . . .	138
5.5.1	Désexcitation de trous noirs issus de la coalescence de deux astres compacts . . . . .	138
5.5.2	Position du problème . . . . .	140
5.5.3	Algorithme de pavage . . . . .	141
5.5.4	Test de l'algorithme: pavage par des cercles . . . . .	144
5.5.5	La métrique de l'espace des paramètres des sinusoides amorties . . . . .	144
5.5.6	Résultats du pavage . . . . .	145
5.5.7	Tests du réseau de calques . . . . .	147
5.6	Conclusion . . . . .	149

---

<b>6</b>	<b>Test des méthodes de recherche des signaux gravitationnels impulsionsnels</b>	<b>151</b>
6.1	Événements et fausses alarmes . . . . .	151
6.1.1	Comment définir un événement? . . . . .	151
6.1.2	Taux de fausses alarmes et seuils . . . . .	153
6.1.3	Cas des filtres généraux . . . . .	154
6.1.4	Exemple du filtrage adapté par des pics gaussiens . . . . .	156
6.2	Stratégies de filtrage pour les données réelles . . . . .	157
6.2.1	Réaliser des coïncidences entre filtres . . . . .	158
6.2.2	<i>Frames</i> sélectionnés . . . . .	160
6.2.3	Effet de la taille du <i>frame</i> . . . . .	160
6.2.4	Taux de sélection d’une batterie de filtres en “OU” . . . . .	162
6.3	Estimer la qualité des algorithmes . . . . .	164
6.3.1	Distances moyennes de détection et performance . . . . .	164
6.3.2	Comparatif des performances de différentes méthodes de filtrage . . . . .	170
6.3.3	Efficacité d’un filtre . . . . .	171
6.3.4	Concentrer les caractéristiques d’un filtre: les courbes <i>ROC</i> . . . . .	174
6.4	Conclusion . . . . .	175
<b>7</b>	<b>Détection des ondes gravitationnelles en coïncidence</b>	<b>177</b>
7.1	Comment conclure à une détection? . . . . .	177
7.2	Coïncidences temporelles entre détecteurs . . . . .	178
7.2.1	Tests temporels de coïncidence . . . . .	179
7.2.2	Taux de <i>frames</i> sélectionnés . . . . .	179
7.2.3	Reconstruire la direction de la source . . . . .	181
7.3	Détection en coïncidence entre interféromètres . . . . .	183
7.3.1	La réponse d’un détecteur au passage d’une onde gravitationnelle . . . . .	183
7.3.2	Un modèle de détection en réseau . . . . .	183
7.3.3	Effets de la fonction d’antenne sur l’efficacité de détection d’un seul interféromètre: exemple de Virgo . . . . .	184
7.3.4	Détermination du temps d’arrivée d’un signal . . . . .	188
7.3.5	Étude du réseau Virgo/LIGO . . . . .	190
7.3.6	Extension à six détecteurs . . . . .	197
7.4	Recherche de sources galactiques . . . . .	200
7.4.1	Modèle de distribution de sources et simulation . . . . .	200
7.4.2	Résultats . . . . .	202
7.5	Coïncidences avec les détecteurs de neutrinos . . . . .	203
7.5.1	Masses des neutrinos et oscillations . . . . .	203
7.5.2	Supernova . . . . .	205
7.5.3	Méthodes de détection . . . . .	207
7.5.4	Résultats sur la masse absolue des neutrinos . . . . .	208
7.5.5	Amélioration de l’efficacité de détection interférométrique . . . . .	210
7.6	Test de la compatibilité des données des détecteurs si la direction potentielle de la source est connue . . . . .	211
7.6.1	Reconstruction et analyse cohérente . . . . .	211
7.6.2	Utilisation d’un test de $\chi^2$ pour rejeter des échantillons de bruit contenant des transitoires . . . . .	212
7.6.3	Reconstruction et gains en rapports S/B . . . . .	217
7.6.4	Perspectives . . . . .	218
7.7	Conclusion . . . . .	218
<b>A</b>	<b>Bruit et densité spectrale</b>	<b>223</b>
A.1	Définitions et Notations . . . . .	223
A.2	Génération de bruit coloré . . . . .	224
A.2.1	Utilisation de la transformée de Fourier . . . . .	224
A.2.2	Méthode autorégressive . . . . .	224
A.3	Estimation de la densité spectrale de puissance . . . . .	225
<b>B</b>	<b>Matrice optique de l’interféromètre central</b>	<b>227</b>

<b>C</b>	<b>Filtrage adapté et rapport signal sur bruit</b>	<b>233</b>
C.1	Théorie du filtrage adapté . . . . .	233
C.1.1	Filtrage linéaire . . . . .	233
C.1.2	Rapport signal sur bruit . . . . .	234
C.1.3	Filtrages et optimalités . . . . .	235
C.1.4	Taux de fausses alarmes et seuils . . . . .	236
C.1.5	Notations condensées . . . . .	237
C.2	Exemple d'application à la recherche d'un pic gaussien . . . . .	238
C.2.1	Fonction d'autocorrélation d'un pic gaussien . . . . .	238
C.2.2	Recherche d'un pic gaussien . . . . .	238
<b>D</b>	<b>Calcul des fonctions d'antenne d'un détecteur</b>	<b>241</b>
D.1	Un problème géométrique . . . . .	241
D.1.1	Fonctions d'antenne et matrice de rotations . . . . .	242
D.1.2	Coordonnées équatoriales . . . . .	243
D.1.3	Angles d'Euler . . . . .	243
D.2	Calcul & résultats . . . . .	244
D.2.1	Expression des matrices de rotation . . . . .	244
D.2.2	Expression des fonctions d'antenne . . . . .	245
D.3	Expression des fonctions d'antenne en fonction des angles polaires d'un détecteur . . . . .	245
D.4	Distributions spatiale et statistique des fonctions d'antenne . . . . .	247
D.4.1	Un outil de visualisation: les cartes du ciel . . . . .	247
D.4.2	Distribution statistique . . . . .	248
D.4.3	Étude des fonctions $a$ et $b$ . . . . .	249
<b>E</b>	<b>Améliorations possibles de la sensibilité du détecteur Virgo</b>	<b>251</b>

# Liste des figures

1.1	Transport parallèle sur une boucle fermée . . . . .	4
1.2	Effet du passage d'une onde gravitationnelle polarisée pure "+" ou "x" en incidence normale sur un anneau de particules-test . . . . .	9
1.3	Exemple de <i>chirp</i> à l'ordre newtonien pour deux étoiles à neutrons à 100 Mpc. . .	16
1.4	Rapport S/B optimal dans Virgo pour la phase spirale de la coalescence de deux astres compacts de masses égales et situés à 20 Mpc . . . . .	17
1.5	Relations entre les paramètres du signal émis lors du retour à l'équilibre d'un trou noir et les caractéristiques de celui-ci . . . . .	19
1.6	Taux de supernovae attendu en fonction de la distance d'observation . . . . .	22
1.7	Amplitudes maximales attendues selon la distance de la source pour différents modèles de signaux de supernovae, comparées à des isocourbes du rapport S/B . . . .	23
1.8	Trois exemples de signaux de supernova de la bibliothèque de Zwerger et Müller .	24
2.1	Propagation d'un faisceau laser et réflexion sur un miroir . . . . .	30
2.2	Notations et conventions d'optique . . . . .	32
2.3	Profil du faisceau laser . . . . .	35
2.4	Schéma d'un interféromètre de Michelson . . . . .	35
2.5	Vue aérienne du détecteur Virgo et aperçu de l'intérieur du bâtiment central . . .	41
2.6	Schéma du détecteur Virgo complet . . . . .	42
2.7	Schéma d'un superatténuateur de Virgo . . . . .	43
2.8	Performances du damping inertiel pour le superatténuateur de la tour Nord . . . .	44
2.9	Vue en coupe d'un filtre de la chaîne d'atténuation de Virgo . . . . .	45
2.10	Conventions pour le repère lié au miroir . . . . .	45
2.11	Fonctions de transfert horizontale et verticale simulées du superatténuateur . . . .	46
2.12	Exemples de DSA de bruit thermique . . . . .	47
2.13	DSA totale associée au bruit thermique pour le détecteur Virgo . . . . .	48
2.14	Courbe de sensibilité de Virgo . . . . .	50
2.15	Variation du rapport S/B en fonction de l'indice de modulation $m$ pour un défaut de contraste $1 - C = 10^{-4}$ . . . . .	51
2.16	Schéma de la chaîne d'analyse de Virgo . . . . .	52
2.17	Influence de la réflectivité de la seconde face de la séparatrice . . . . .	55
3.1	Puissance stockée dans la cavité de recyclage et puissance en sortie de l'interféromètre en fonction des longueurs de frange noire et de la cavité de recyclage . . . .	57
3.2	Agrandissement de la figure précédente autour d'un des points de fonctionnement .	58
3.3	Copie d'écran d'un client graphique Gx . . . . .	59
3.4	Schéma de la chaîne de contrôle de l'expérience Virgo . . . . .	63
3.5	Schéma d'un asservissement en boucle fermée . . . . .	64
3.6	Exemple de filtre utilisé pour le contrôle de la longueur de frange noire du CITF en configuration Michelson simple . . . . .	66
3.7	Exemple de signal d'erreur Pound-Drever pour la cavité de recyclage du CITF . .	67
3.8	Exemple de signaux Pound-Drever "réels" . . . . .	68
3.9	Différentes normalisations du signal d'erreur AC . . . . .	68
3.10	Extraction des informations spatiales à partir d'une photodiode à quadrants . . . .	69
3.11	Vue de l'ensemble marionnette + miroir et masse de référence . . . . .	70
3.12	Fonctions de transfert entre la marionnette et le déplacement en $z$ du miroir et entre la masse de référence et ce même déplacement . . . . .	71
3.13	Description des fonctionnalités du Contrôle Global . . . . .	74

3.14	Schéma du châssis Contrôle Global . . . . .	76
3.15	Description des états Fsm d'un serveur et d'une partition . . . . .	79
3.16	Fenêtre générique du client graphique Superviseur de la partition du Contrôle Global	80
3.17	Fenêtre spécifique du client graphique associé au Superviseur du Contrôle Global .	81
3.18	Histogramme de la distribution du temps passé dans la boucle rapide à 10 kHz du Contrôle Global pendant plus de quinze jours consécutifs . . . . .	83
3.19	Client graphique StrategyUI . . . . .	84
4.1	L'interféromètre central de Virgo . . . . .	86
4.2	Exemple de filtre utilisé pour le contrôle du CITF en configuration Michelson . . .	88
4.3	Premier contrôle de la frange noire . . . . .	88
4.4	Courbe de sensibilité du Michelson obtenue lors du <i>run</i> "E0" . . . . .	90
4.5	Diagramme en bloc illustrant le processus de calcul de la sensibilité du détecteur .	90
4.6	Principe de la méthode d'acquisition de contrôle par impulsions . . . . .	92
4.7	Signaux d'erreur utilisés pour le contrôle de la longueur de frange noire dans la méthode des impulsions . . . . .	93
4.8	Impulsion en forme de rampe comparée au cas triangulaire . . . . .	94
4.9	Exemple de mauvaise reconstruction de la vitesse . . . . .	95
4.10	Compensation du pôle basse-fréquence de l'ensemble bobine+actuateur . . . . .	97
4.11	Performances de la procédure d'analyse pour la frange noire et le recyclage . . . .	99
4.12	Performances de la procédure d'action pour la frange noire et le recyclage . . . .	100
4.13	Comparaison des relations $v_{\text{avant}} \leftrightarrow \kappa$ et $a_{\text{avant}}/v_{\text{avant}} \leftrightarrow v_{\text{avant}}$ pour la frange noire	101
4.14	Exemple de comportement erratique des signaux d'erreur de contrôle de frange noire en cas de <i>tilts</i> des miroirs . . . . .	102
4.15	Exemple de résonance du CITF . . . . .	103
4.16	Exemple du comportement du <i>trigger</i> asymétrique . . . . .	104
4.17	Exemples de quantités reconstruites lorsque le <i>trigger</i> asymétrique est validé . . . .	105
4.18	Effet de la procédure d'amortissement optique sur la tour de recyclage (PR) . . . .	106
4.19	Exemple de succès en simulation de l'algorithme de contrôle du CITF complet . .	107
4.20	Transformée de Fourier du signal d'erreur lors d'un contrôle de la cavité PR-NI . .	108
4.21	Premier contrôle complet du CITF . . . . .	109
4.22	Evolution de la puissance maximale en sortie de la frange noire lors du <i>run</i> E0 . .	110
4.23	Cause de la seconde perte de contrôle lors du <i>run</i> E0 . . . . .	110
4.24	Quatrième perte de contrôle lors du <i>run</i> E0 . . . . .	111
4.25	Evolution de la puissance de frange noire en sortie du Michelson lors du <i>Run</i> E0 .	112
4.26	Dérive de l'alignement du CITF contrôlé pendant huit heures . . . . .	113
4.27	Transformée de Fourier du signal d'erreur de frange noire D1 AC après la phase de réalignement du CITF lors de son contrôle de huit heures . . . . .	113
4.28	Exemple d'une perte de contrôle du CITF . . . . .	114
4.29	FFT du signal d'erreur frange noire D1 AC au moment de l'apparition de la réso- nance qui entraîne la perte de contrôle . . . . .	114
4.30	Améliorations successives de la courbe de sensibilité du CITF . . . . .	116
4.31	Mise en perspective des différentes courbes de sensibilité du CITF . . . . .	117
4.32	Présentation des méthodes d'estimation de la finesse de la cavité de recyclage résonante	118
4.33	Comparaison des mouvement en $\theta_y$ des différents miroirs . . . . .	120
4.34	Effet du contrôle à partir du sommet de la suspension en-dessous de 70 mHz . . .	121
5.1	Quatre exemples de transformée de Fourier de signaux de Zwerger et Müller . . . .	126
5.2	Distribution de la fraction de rapport signal sur bruit optimal $\rho_{\text{opt}}$ comprise entre 100 Hz et 1 kHz pour les 78 signaux de la bibliothèque Zwerger-Müller . . . . .	127
5.3	Intérêt de la corrélation dans l'espace de Fourier . . . . .	134
5.4	Problèmes de pavage d'un espace des paramètres . . . . .	136
5.5	Algorithme de placement des calques pour les signaux gaussiens . . . . .	137
5.6	Rapport S/B moyen obtenu pour un signal d'oscillation de trou noir dans le détec- teur Virgo pour des sources à 100 Mpc et uniformément réparties dans le ciel; le trou noir a été créé par la coalescence de deux astres compacts . . . . .	139
5.7	Evolution du rapport S/B selon la courbe de sensibilité de Virgo . . . . .	140
5.8	Pavage optimal d'un plan par des cercles identiques de rayon $R$ . . . . .	142

5.9	Trajectoire suivie par l'algorithme pour déterminer (quadrant par quadrant) les cases recouvertes par une nouvelle ellipse . . . . .	143
5.10	Répartition dans l'espace des paramètres des ellipses correspondant aux meilleurs pavages pour les familles de cosinus et de sinus amortis . . . . .	147
5.11	Distribution de l'efficacité des ellipses retenues dans les banques de cosinus et de sinus amortis . . . . .	147
5.12	Positions des calques dans l'espace des paramètres pour les cosinus et les sinus amortis	148
5.13	Distribution de la valeur maximale de la fonction d'ambiguïté obtenue en corrélant une sinusoïde amortie dont les paramètres $(f, Q)$ sont tirés aléatoirement . . . . .	149
6.1	Exemple de corrélations pour les sorties de deux filtres généraux, MF et NF . . . .	152
6.2	Seuil $\eta$ en fonction du taux de fausses alarmes $\tau$ pour une variable normale . . . .	153
6.3	Seuil $\eta$ en fonction du taux de fausses alarmes $\tau$ pour une distribution de $\chi^2$ à $N$ degrés de liberté . . . . .	154
6.4	Evolution du rapport $\tau_{\text{cluster}}/\tau$ pour les filtres <i>Mean Filter</i> et <i>Norm Filter</i> en fonction de la taille de la fenêtre $N$ et pour trois valeurs différentes du seuil $\eta$ . . . . .	156
6.5	Répartition statistique des sorties des 12 filtres gaussiens utilisés pour détecter les pics de largeurs comprises entre 0.1 et 10 ms . . . . .	157
6.6	Evolution du taux de sélection de <i>frames</i> en fonction de la taille $N$ de la fenêtre d'analyse pour les filtres <i>Mean Filter</i> et <i>Norm Filter</i> . . . . .	162
6.7	Evolution du taux de sélection de <i>frames</i> en fonction du seuil $\eta(\tau)$ pour différents types de filtre . . . . .	162
6.8	Taux de <i>frames</i> sélectionnés pour une série de filtres du même type – MF ou NF – ayant des tailles de fenêtre d'analyse différentes . . . . .	163
6.9	Répartition des distances optimales moyennes de détection pour les soixante-dix huit signaux de la bibliothèque de Zwerger-Müller . . . . .	165
6.10	Evolution de $\langle \hat{d} \rangle_{\text{ZM}}$ en fonction de la taille de la fenêtre $N$ pour 3 filtres généraux .	167
6.11	Distance de détection $\langle \bar{d} \rangle_{\text{ZM}}$ moyennée sur les signaux de Zwerger-Müller en fonction de la taille de fenêtre $N$ pour plusieurs filtres – BC, MF, NF, PC et SF . . . . .	168
6.12	Répartition des meilleures tailles de fenêtre pour la détection des signaux de Zwerger-Müller à l'aide des filtres BC, MF, NF et PC . . . . .	168
6.13	Performance $\langle \pi_{\mathfrak{F}} \rangle_{\text{ZM}}$ moyennée sur les signaux de la bibliothèque de Zwerger-Müller en fonction de la taille de fenêtre $N$ pour les filtres BC, MF, NF, PC et SF . . . .	169
6.14	Répartition des meilleures performances pour la détection des signaux de Zwerger-Müller à l'aide des filtres BC, MF, NF et PC . . . . .	170
6.15	Corrélations existant entre les meilleures performances des filtres BC et NF d'une part, et MF et PC d'autre part . . . . .	171
6.16	Efficacité de détection pour un filtre dont la sortie suit une loi normale en fonction du rapport sur bruit de l'onde gravitationnelle . . . . .	172
6.17	Efficacité de détection d'un pic gaussien de largeur $\sigma = 1\text{ms}$ par le <i>Mean Filter</i> . .	173
6.18	Efficacité de détection d'un pic gaussien de largeur $\sigma = 1\text{ms}$ par filtrage de Wiener	174
6.19	Exemple de courbes ROC pour un filtre gaussien de largeur 1 ms . . . . .	175
7.1	Compatibilité d'une triple coïncidence entre Virgo et les deux détecteurs LIGO . .	180
7.2	Carte de la fonction d'antenne moyennée $\overline{F}$ du détecteur Virgo . . . . .	185
7.3	Distribution du rapport S/B en sortie du filtre du <i>burst</i> d'ondes gravitationnelles de largeur $\sigma = 1\text{ms}$ pour deux valeurs de $\rho_{\text{max}}$ : 10 et 20 . . . . .	186
7.4	Efficacité de détection par filtrage de Wiener pour un interféromètre unique en fonction de $\rho_{\text{max}}$ et pour différentes valeurs de la largeur $\sigma$ de la gaussienne . . . .	187
7.5	Evolution des cartes d'efficacité de détection de l'interféromètre Virgo en fonction du rapport S/B optimal . . . . .	187
7.6	Fraction du ciel (en %) associée avec une efficacité de détection donnée pour Virgo	188
7.7	Ecart-type de l'erreur sur le temps d'arrivée du signal normalisé par la largeur du pic gaussien en fonction du rapport S/B optimal . . . . .	189
7.8	Ecart-type de l'erreur faite sur le temps d'arrivée du signal gaussien (1 ms de largeur, amplitude correspondant à $\rho_{\text{max}} = 20$ ) en fonction du rapport S/B en sortie du filtre	190
7.9	Comparaison des cartes de la fonction d'antenne moyenne $\overline{F}$ pour Virgo et les deux interféromètres LIGO, Hanford et Livingston . . . . .	191
7.10	Moyenne de $\overline{F}$ sur une journée pour Virgo et les deux interféromètres LIGO . . . .	192

---

7.11	Efficacité de détection (en %) moyennée sur une journée pour les trois détecteurs du réseau: Virgo, LIGO Hanford et LIGO Livingston . . . . .	193
7.12	Carte du ciel associée à l'efficacité de détection dans un interféromètre au moins parmi les trois du réseau pour un rapport S/B optimal $\rho_{\max} = 10$ . . . . .	193
7.13	Probabilités de détection en coïncidence double pour le réseau Virgo-LIGO . . . . .	194
7.14	Cartes de l'efficacité de détection en coïncidence double pour le réseau Virgo-LIGO avec un rapport S/B optimal de 10 . . . . .	195
7.15	Cartes du ciel correspondant à des coïncidences triples entre Virgo et les deux détecteurs LIGO . . . . .	195
7.16	Efficacité de détection (en %) pour des configurations variées du réseau formé par Virgo et les deux interféromètres LIGO en fonction du rapport S/B optimal $\rho_{\max}$ .	196
7.17	Comparaison des cartes de la fonction d'antenne moyenne $\bar{F}$ pour les six détecteurs Virgo, LIGO Hanford et Livingston, GEO600, TAMA300 et AIGO . . . . .	197
7.18	Optimisation de l'orientation du détecteur AIGO . . . . .	198
7.19	Efficacité de détection pour le réseau de six interféromètres . . . . .	198
7.20	Distribution angulaire et en distance de sources galactiques . . . . .	201
7.21	Probabilité de survie du neutrino électron . . . . .	206
7.22	Différence temporelle entre le maximum de l'onde gravitationnelle émise et l'instant du rebond du coeur de la supernova pour les signaux de Zwerger-Müller . . . . .	206
7.23	Sensibilité estimée sur $\delta m_\nu^2$ pour les quatre méthodes testées . . . . .	209
7.24	Gain en efficacité de détection lorsque l'instant d'arrivée du signal est connu de manière extérieure . . . . .	210
7.25	Taux de fausses alarmes du test basé sur le $\chi^2$ de la procédure de reconstruction .	213
7.26	Courbe ROC mesurant l'efficacité du test de $\chi^2$ pour des <i>bursts</i> de bruit faibles . .	214
7.27	Efficacité de réjection du <i>burst</i> de bruit selon le détecteur dans lequel il survient en fonction de son rapport S/B . . . . .	215
7.28	Cartes montrant l'efficacité de réjection d'un <i>burst</i> de bruit selon le détecteur dans lequel il survient et la position de la source dans le ciel choisie pour hypothèse . . .	216
7.29	Distribution des efficacités de réjection d'un <i>burst</i> de bruit de rapport S/B = 10 pour une direction de source donnée dans le ciel . . . . .	216
A.1	Comparaison des DSP obtenues à partir d'échantillons de bruit coloré construits à partir d'un algorithme (M.A.) . . . . .	226
B.1	Notations pour le calcul de la matrice optique du CITF . . . . .	228
C.1	Seuil $\eta$ en fonction du taux de fausses alarmes $\tau$ pour une variable normale . . . . .	236
C.2	Pic gaussien et fonction d'autocorrélation . . . . .	239
C.3	Comparaison des distributions de probabilités et des fonctions de répartition de $\rho_\sigma(t)$ et $\rho_\sigma^{\max}(t_0)$ . . . . .	240
D.1	Description du repère $\mathfrak{R}_{\text{TT}}$ . . . . .	242
D.2	Définition de l'angle $\chi$ et du repère $\mathfrak{R}_{\text{iff}}$ . . . . .	242
D.3	Coordonnées équatoriales . . . . .	243
D.4	Définition des angles d'Euler . . . . .	244
D.5	Définition de l'angle $\gamma$ : orientation locale du détecteur . . . . .	245
D.6	Définition des deux angles sphériques utilisés pour repérer la direction d'une source par rapport à un détecteur donné . . . . .	246
D.7	Cartes du ciel associées au détecteur Virgo . . . . .	247
D.8	Distribution statistique des fonctions d'antenne pour des sources uniformément réparties dans le ciel . . . . .	248
D.9	Correlation entre les valeurs de $F_+$ et de $F_\times$ pour une répartition de sources uniforme dans le ciel . . . . .	249
D.10	Distribution des fonctions $a(t)$ et $b(t)$ pour les détecteurs Virgo, LIGO Hanford et LIGO Livingston pour une répartition uniforme des sources sur la voûte céleste . .	250
E.1	Comparaison des densités spectrales d'amplitudes des trois modèles de bruit . . . . .	252
E.2	Évolution des RMS des modèles de bruit . . . . .	253

# Liste des tableaux

1.1	Facteurs de compacité $\mathbb{C}$ typiques . . . . .	14
1.2	Caractéristiques du trou noir formé après la coalescence d'un système binaire obtenues par évolution numérique du système dans [49] . . . . .	20
1.3	Taux moyen de supernovae de type II en fonction du type de la galaxie hôte . . . . .	21
1.4	Exemples de prédictions théoriques pour le fond stochastique de rayonnement gravitationnel . . . . .	28
2.1	Récapitulatif des principaux bruits du détecteur Virgo et des remèdes utilisés pour les atténuer . . . . .	50
2.2	Paramètres du faisceau laser et du schéma de modulation . . . . .	53
2.3	Caractéristiques du miroir de recyclage . . . . .	54
2.4	Caractéristiques de la séparatrice . . . . .	54
2.5	Caractéristiques des miroirs de fond . . . . .	55
2.6	Caractéristiques géographiques des interféromètres en construction ou prévus . . . . .	56
4.1	Détail des paramètres utilisés pour les différentes séries de simulations à l'aide du logiciel SIESTA . . . . .	98
4.2	Résultats des simulations de la méthode de contrôle par impulsions . . . . .	98
5.1	Valeur du paramètre de blanchiment $\zeta$ pour différentes courbes de bruit de Virgo . . . . .	129
5.2	Position des douze calques gaussiens couvrant l'espace des paramètres . . . . .	138
5.3	Résultats de l'algorithme de pavage pour le cas d'un carré de côté $K$ à couvrir par des cercles de rayon 1 . . . . .	144
5.4	Estimation numérique du nombre de calques nécessaires pour couvrir l'espace des paramètres . . . . .	145
5.5	Efficacité de la procédure de nettoyage et effet du pas de maillage de la grille . . . . .	145
5.6	Détails du meilleur pavage de l'espace des paramètres avec la famille de filtres des cosinus amortis . . . . .	146
5.7	Caractéristiques des meilleurs pavages obtenus pour les cosinus et les sinus amortis . . . . .	146
6.1	Evolution du rapport $\tau_{\text{total}}/\tau_{\text{cluster}}$ pour le filtre <i>Mean Filter</i> en fonction de la taille de la fenêtre $N$ et du seuil de détection $\eta(\tau)$ . . . . .	155
6.2	Valeur du coefficient de corrélation pour différentes paires de filtres en fonction de la valeur de $\tau$ . . . . .	158
6.3	Exemples de réduction du taux de déclenchement obtenus en demandant une coïncidence entre deux des filtres généraux . . . . .	159
6.4	Réduction du taux de fausses alarmes dues aux coïncidences entre filtres corrigées du gain apporté par le regroupement des fausses alarmes consécutives . . . . .	159
6.5	Efficacité de détection en coïncidence pour des couples de filtres généraux . . . . .	159
6.6	Efficacité du filtrage optimal en fonction du taux de fausses alarmes pour un signal de rapport S/B $\rho = 5$ . . . . .	160
6.7	Evolution du taux de sélection de <i>frames</i> pour les filtres MF et NF en fonction de la durée du <i>frame</i> $T$ (exprimé en secondes) . . . . .	161
6.8	Comparatif des performances de différentes méthodes de filtrage . . . . .	170
7.1	Délais maximaux admissibles pour une coïncidence double au sein du réseau de trois détecteurs Virgo-LIGO . . . . .	179
7.2	Fraction de <i>frames</i> sélectionnés dans un détecteur en coïncidence double en fonction du délai maximal admissible et du seuil de déclenchement . . . . .	180

---

7.3	Taux de sélection de <i>frames</i> dans chacun des trois détecteurs du réseau Virgo-LIGO pour le cas de coïncidences doubles . . . . .	181
7.4	Taux de sélection en coïncidence double pour le réseau Virgo-LIGO avec les méthodes générales MF et NF . . . . .	181
7.5	Valeurs minimales du rapport S/B optimal $\rho_{\max}$ nécessaires pour atteindre une efficacité de détection fixée dans deux scénarios de coïncidences . . . . .	199
7.6	Efficacité de détection moyenne en “OU” en fonction du nombre de détecteurs du réseau pour $\rho_{\max} = 5$ . . . . .	200
7.7	Efficacité de détection “galactique” pour le réseau Virgo-LIGO . . . . .	202
7.8	Efficacité de détection “galactique” pour le réseau de six interféromètres . . . . .	203
7.9	Solutions favorisées par l’expérience pour les oscillations de neutrinos . . . . .	205
7.10	Méthodes utilisées dans les détecteurs de neutrinos pour estimer leurs masses . . . . .	208
7.11	Probabilité d’avoir au moins 3 neutrinos détectés dans SNO en fonction de la distance $L$ de la source . . . . .	209
B.1	Emplacement et nomenclature des différentes photodiodes pour le CITF et Virgo . . . . .	228
B.2	Coefficients de la matrice optique du CITF . . . . .	232
B.3	Sensibilités des photodiodes du CITF avec $P_{\text{in}} = 10 \text{ W}$ . . . . .	232
D.1	Comparaison calcul/simulation des valeurs des moyennes et des écarts-types des fonctions $a$ et $b$ pour trois détecteurs: Virgo, LIGO Hanford et LIGO Livingston . . . . .	250
E.1	Paramètres des modèles de bruit comparés . . . . .	252
E.2	RMS intégré sur la bande de fréquence de détection pour les trois configurations comparées . . . . .	253
E.3	RMS intégrés entre 10 Hz et 1 kHz . . . . .	253

---

# Introduction

Les ondes gravitationnelles apparaissent naturellement (et presque immédiatement) dans le cadre de la théorie de la Relativité Générale et leur existence a été prédite dès 1918 par A. Einstein lui-même. Plus de quatre-vingt ans plus tard, elles n'ont cependant pas encore été directement mises en évidence, au contraire d'un certain nombre d'autres conséquences des équations d'Einstein, toutes validées expérimentalement avec précision. Plutôt que de paradoxe, il vaut mieux parler ici de contraste entre l'apparente simplicité de leur dérivation et la difficulté de leur détection, faute d'instrument assez sensible.

Déjà, l'existence même de ce rayonnement a été pendant longtemps discutée : quel sens donner à la linéarisation de relations dont l'un des caractères fondamentaux est précisément leur non-linéarité ? La question de la justification mathématique des formules permettant de calculer l'amplitude des ondes gravitationnelles émises s'est aussi posée et n'a été définitivement tranchée par les théoriciens qu'assez récemment (entre la fin des années 60 et le début des années 80). A la même époque, l'étude de la variation de la période de rotation du pulsar binaire PSR 1913+16 a également donné une indication très significative en faveur de la validité de ce cadre d'analyse : données expérimentales et prédictions théoriques de la perte d'énergie par émission gravitationnelle coïncident au niveau du pourcent. Ainsi, bien que cette vérification soit purement indirecte – des causes distinctes pourraient produire des conséquences identiques –, il n'y a aujourd'hui plus guère de doute sur la réalité du phénomène... qu'il ne reste plus qu'à découvrir effectivement !

Les premiers détecteurs sont apparus il y a une quarantaine d'années et plusieurs générations d'appareils de plus en plus perfectionnés se sont succédés ensuite, tous basés sur la mesure de variations relatives de longueur provoquées par le passage d'une onde gravitationnelle, cette dernière s'interprétant naturellement comme une perturbation de la métrique de l'espace-temps plat (Minkowski) se déplaçant à la vitesse de la lumière. A cause de la faiblesse du rayonnement émis, seules des sources astrophysiques puissantes (supernovae, coalescences de systèmes doubles, trous noirs...) sont détectables : malgré leur grand éloignement, leur luminosité gravitationnelle est tellement importante que la fraction du rayonnement incident sur Terre excède de beaucoup d'ordres de grandeur les amplitudes produites lors d'une quelconque expérience de Hertz en laboratoire.

Néanmoins, le signal physique attendu reste très petit. Les détecteurs doivent donc avoir la capacité de réaliser des mesures très fines tout en s'affranchissant de nombreux bruits expérimentaux, d'autant plus variés et importants que la précision recherchée est grande. Seuls des interféromètres géants apparaissent aujourd'hui capables d'acquérir une "spécialisation" suffisante dans le signal par rapport au bruit de fond pour arriver à la sensibilité espérée. Plusieurs instruments de ce type sont actuellement en construction dans le monde ; parmi eux, Virgo, fruit d'une collaboration franco-italienne au sein de laquelle j'ai effectué ma thèse, est situé près de Pise.

Des variations de longueur du chemin optique suivi par une lumière laser sont mesurées en sortie d'un interféromètre de type Michelson sur une photodiode, puis converties en amplitude gravitationnelle équivalente. Grâce à un système d'isolation perfectionné situé au niveau de leurs suspensions, les miroirs sont des masses-test presque idéales ce qui assure une bonne sensibilité de l'ensemble aux ondes gravitationnelles. Celle-ci est également améliorée par le recyclage de la lumière à l'intérieur de l'instrument (maximisation de la puissance laser stockée) et par l'utilisation de bras de 3 km contenant des cavités Fabry-Perot. De plus, différents choix techniques permettent la diminution des bruits de mesure dans la bande de fréquence de détection (comprise entre quelques Hz et une dizaine de kHz) et l'instrument est maintenu à son point de fonctionnement par un ensemble d'asservissements, tant longitudinaux (cavités optiques en résonance) qu'angulaires (miroirs alignés).

Après deux chapitres généraux résumant la théorie des ondes gravitationnelles – dérivation des formules permettant le calcul du rayonnement émis, présentation de différentes sources potentielles et des signaux associés – et détaillant l'interféromètre Virgo, j'aborderai au chapitre 3 la question

du maintien du détecteur à son point de fonctionnement. La chaîne complète de contrôle sera alors décrite de manière générale, puis détaillée au niveau du sous-système Contrôle Global dont j'ai participé à la mise au point. Celui-ci, développé au LAL, est chargé de la gestion de la partie intelligente de l'asservissement de l'instrument complet :

- en phase de fonctionnement normal, calcul des corrections à partir des signaux d'erreurs provenant de photodiodes, puis envoi de celles-ci vers les suspensions concernées pour agir sur les positions des miroirs ;
- acquisition des asservissements lors du démarrage de la machine ou réacquisition suite à une perte de contrôle.

Le chapitre suivant – 4 – présente les résultats expérimentaux obtenus sur l'interféromètre central (CITF), principalement entre juin 2001 et début 2002. Le CITF n'étant pas un "petit Virgo" mais plutôt un instrument de test dédié à la définition et à la validation des tâches effectuées par chaque sous-système, les succès obtenus ne portent pas tant sur la qualité "physique" des données recueillies (même si les premières courbes de sensibilité ont été produites) mais plutôt sur la réussite de l'acquisition et du maintien des contrôles.

En effet, quelques mois après le premier asservissement du CITF en configuration Michelson simple (une seule longueur de cavité résonante), le détecteur complet a été contrôlé puis maintenu à son point de fonctionnement au mois de décembre 2001. Au-delà de la démonstration du bien-fondé de l'architecture globale, ces réussites permettent d'envisager de façon optimiste l'extension de ces procédures à Virgo puisque les longueurs ont été contrôlées avec la précision requise dans le futur.

Ensuite, j'aborderai la seconde partie de mon travail : la recherche d'ondes gravitationnelles impulsives (produites par exemple lors de l'explosion d'une supernova ou lors de la phase de retour à l'équilibre d'un trou noir excité) dans les futures données de Virgo, activité sous la responsabilité du groupe Virgo-LAL. La principale caractéristique de ces signaux est d'avoir des modes de production complexes qui ne peuvent actuellement être étudiés que par l'intermédiaire de simulations numériques. Ainsi, leurs formes et leurs amplitudes dépendent du modèle (conditions initiales, modélisation de l'évolution de l'émetteur...) et ne sont pas connues avec suffisamment de précision pour permettre l'utilisation du filtrage de Wiener, optimal parmi les méthodes linéaires.

Au contraire, il faut définir des algorithmes robustes – i.e. sensibles à une grande variété de signaux – mais forcément moins performants ; leur description fait l'objet du chapitre 5. On peut simplement les classer en deux catégories :

- les filtres généraux qui calculent des grandeurs statistiques dans une fenêtre d'analyse – moyenne, énergie, variations de pente... – ;
- des banques de calques basées sur le filtrage de Wiener qui visent à retrouver une caractéristique courante des signaux impulsifs, pic principal ou sinusoïde amortie.

Ce dernier type n'est pas au sens strict un filtrage adapté puisqu'il n'agit que sur une partie de l'onde gravitationnelle sans prendre en compte sa forme complète qui reste inconnue.

Le chapitre 6 recense les différents tests mis au point pour estimer la qualité de ces méthodes de recherche de signaux gravitationnels et présente les résultats obtenus pour plusieurs types de filtres. À l'aide de ces procédures, on peut quantifier le potentiel de détection "brut" de ces algorithmes et évaluer la perte par rapport au cas optimal.

Finalement, le chapitre 7 étudie la question de la détection d'une onde gravitationnelle en coïncidence. Ce point est particulièrement crucial pour les signaux impulsifs dont la forme n'est pas connue *a priori* et qui pourront donc facilement être confondus avec des événements de bruit non stationnaire s'ils ne sont vus que dans un seul détecteur. Le sujet ayant été peu traité dans la littérature, ce travail est assez original et novateur. En particulier, il montre que la fonction de réponse spatiale non uniforme des interféromètres rend les coïncidences moins probables qu'on ne pouvait l'espérer et qu'une analyse cohérente n'a de sens que si le plus grand nombre possible de détecteurs est impliqué : Virgo et les deux instruments américains LIGO ne suffisent pas à eux-seuls à assurer à la fois une bonne couverture du ciel et une probabilité satisfaisante de détection en coïncidence.

Enfin, l'exemple de l'utilisation concertée des interféromètres et des détecteurs de neutrinos pour améliorer les limites supérieures sur la masse des neutrinos (ou les déterminer si celles-ci sont dégénérées) montre les perspectives que la détection des ondes gravitationnelles pourrait apporter dans d'autres domaines, par exemple en physique des particules.

# Chapitre 1

## Ondes gravitationnelles et Sources

La théorie de la **Relativité Générale**, formulée par Albert Einstein en 1915-1916 [1] est l'aboutissement d'une somme de travaux effectués au cours des deux décennies précédentes par quelques-uns des plus grands savants de l'époque, H. Minkowski, H. Lorentz, H. Poincaré, D. Hilbert... Elle étend les résultats de la théorie de la **Relativité Restreinte** obtenue dix ans plus tôt [2] – invariance de la vitesse de la lumière  $c$  et des équations de la mécanique et de l'électromagnétisme sous les transformations de Lorentz – par l'introduction du **Principe d'Equivalence** (formulation tirée de [3] p. 68) :

*En chaque point de l'espace-temps plongé dans un champ gravitationnel quelconque, il est possible de choisir un système de coordonnées "localement inertiel" tel que, dans un voisinage du point où le champ peut être considéré comme constant, les lois de la nature sont en accord avec la Relativité Restreinte.*

Ainsi l'hypothèse de **relativité**, selon laquelle les lois physiques ne dépendent pas du référentiel utilisé, est prolongée par cet énoncé à tous les référentiels, et non plus seulement à ceux qui sont en mouvement relatif uniforme les uns par rapport aux autres comme c'était le cas avec la Relativité Restreinte.

Ce principe généralise "*l'idée la plus heureuse de [la] vie*" [4] d'A. Einstein : il y a équivalence entre accélération et gravitation, ce qui explique naturellement l'égalité entre masse grave ("charge" gravitationnelle) et masse inertielle (terme de masse dans la relation fondamentale de la dynamique) déjà présente dans la théorie newtonienne de la gravitation. Cette relation est aujourd'hui vérifiée expérimentalement à une précision de l'ordre de  $2 \times 10^{-13}$  avec un pendule de torsion [5, 6, 7].

De cet énoncé découle l'idée que la gravitation n'existe pas en temps que force indépendante d'un espace-temps plat dans lequel elle agirait : il s'agit en fait de la manifestation de la courbure de celui-ci au voisinage du point considéré. Les objets se déplacent en suivant des **géodésiques** (i.e. les trajectoires les plus "directes" pour une courbure donnée) qui ne dépendent que de la géométrie de l'espace-temps, elle-même due à la présence de matière.

La détermination de cette géométrie est le point central de la théorie et Einstein y travailla trois années durant, entre 1912 et 1915, aidé pour la partie technique par le mathématicien M. Grossmann. La relation entre géométrie et distribution de masse le conduisit à chercher une équation du type :

$$\text{COURBURE} = \text{MATIÈRE}$$

qu'il obtiendra finalement sous forme **tensorielle** et qui est connue sous le nom **d'équation d'Einstein** ; elle est **covariante**, i.e. invariante sous un changement quelconque de coordonnées.

Dans ce premier chapitre, nous donnerons tout d'abord la forme mathématique de cette équation et décrirons ses principales caractéristiques qui font à la fois sa difficulté de résolution et aussi – surtout – sa richesse. Ensuite, nous introduirons la notion d'**onde gravitationnelle** dont l'expérience Virgo vise la première détection directe. Enfin, nous présenterons les différentes sources de rayonnement gravitationnel prédites théoriquement, ce qui nous permettra d'élargir les motivations pour cette découverte bien au-delà d'un test "de plus" de la Relativité Générale : on pourra parler de l'ouverture d'une "*nouvelle fenêtre sur l'univers*" [8].

## 1.1 Les Equations d'Einstein

L'espace-temps considéré ici est une variété riemannienne à quatre dimensions, une de temps (coordonnée 0) et trois d'espaces (coordonnées 1 à 3). Par convention, les indices grecs varient de 0 à 3 et les latins de 1 à 3 ; on utilisera également la règle de sommation d'Einstein pour contracter les indices muets présents sous formes covariante et contravariante dans la même expression.

Pour rédiger cette partie, j'ai utilisé les références [3, 9, 10, 11], et plus particulièrement [9] pour la clarté et la pédagogie de son exposé.

### 1.1.1 Enoncé

Les équations d'Einstein relient par une relation de proportionnalité deux tenseurs symétriques d'ordre 4 et de rang 2 :

- pour la courbure, le tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$ , contraction du tenseur de Riemann  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  décrivant la courbure d'une variété générale ;
- pour la matière, le tenseur Energie-Impulsion  $T_{\mu\nu}$  qui décrit les densités et les flux d'énergie et d'impulsion d'un système dans un référentiel quelconque

$$\left( \begin{array}{c|c} T^{00} & T^{0j} \\ \hline T^{i0} & T^{ij} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \text{Densité} & \text{(Flux d'énergie)} \\ \text{d'énergie} & / c \\ \hline c \times (\text{Densité de} & \text{Flux de quantité} \\ \text{quantité de mouvement}) & \text{de mouvement} \end{array} \right)$$

De manière générale, dans un référentiel  $(x^\alpha)$ ,  $T^{\alpha\beta}$  est défini comme le flux de la composante  $\alpha$  du 4-vecteur quantité de mouvement  $p^\alpha$  sur une surface à  $x^\beta$  constant.

On peut remarquer que ce tenseur contient toutes les formes d'énergie possibles (cinétique, potentielle, pression...) et en particulier celle du champ de gravitation ; celui-ci apparaît donc dans les deux termes des équations (à la fois effet et source), ce qui les rend non-linéaires.

Sous forme tensorielle, les équations d'Einstein s'écrivent

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

La constante de proportionnalité, non donnée par la théorie, s'obtient en imposant de retrouver la loi de Newton dans la limite où le champ gravitationnel est faible et lentement variable.

### 1.1.2 Origine de ces équations

Après avoir posé les relations (1.1), on est en droit de se demander comment elles ont été obtenues originellement. Leur dérivation exacte dépasse de loin le cadre de ce chapitre de thèse, mais il est néanmoins possible d'apporter quelques rapides éléments de réponse.

Une fois postulé le lien décrit en introduction entre courbure et matière, la première théorie proposée a été celle de Nordström en 1913 ; scalaire, elle conduisait à des résultats en désaccord avec les observations, par exemple pour l'avance du périhélie de Mercure. En effet, celle-ci est de l'ordre de 574 secondes d'arc par siècle parmi lesquelles seul un résidu de 43" n'est pas explicable par la mécanique céleste classique mais trouve sa justification dans le cadre de la Relativité Générale. Au contraire, la théorie de Nordström prédisait un retard de ce périhélie. Par ailleurs, une équation vectorielle aurait impliqué l'existence de masses négatives ce qui est exclu par l'expérience. Donc, il était logique d'en venir à considérer des équations tensorielles.

Comme on le verra ci-après, le tenseur d'Einstein est construit à partir des composantes du tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  et de ses dérivées qui caractérisent la géométrie d'une surface riemannienne<sup>1</sup>. Or, comme l'a également montré D. Hilbert en 1915 [12], le tenseur d'Einstein est – à une petite généralisation près introduisant la célèbre constante cosmologique  $\Lambda$  – le **seul** tenseur contenant la métrique qui soit covariant.

<sup>1</sup>En particulier, l'intervalle infinitésimal de temps propre  $ds$  séparant deux événements de l'espace-temps est donné par  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

### 1.1.3 Expression mathématique du tenseur d'Einstein

Le tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$  s'écrit sous la forme

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (1.2)$$

- $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci obtenu par contraction du tenseur de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} \quad (1.3)$$

- $R = R^{\mu}_{\mu}$  est la courbure scalaire.

Par conservation de l'énergie, la divergence du tenseur énergie-impulsion est nulle. Le tenseur d'Einstein doit donc avoir la même propriété, que la présence du second terme dans le membre de droite de l'équation (1.2) permet de satisfaire.

Le tenseur de Riemann est une fonction de la métrique  $g_{\mu\nu}$  dont il dépend au travers d'une structure additionnelle, appelée **connection**, et qui est caractéristique de la courbure de la surface. Elle apparaît lors de la recherche d'une **dérivée covariante**  $\nabla$ , i.e. d'un opérateur dont la restriction à un espace plat est la dérivée partielle usuelle et qui, au contraire de cette dernière, se transforme comme un tenseur sur une variété quelconque. L'opérateur  $\nabla$  doit être linéaire et satisfaire à la règle de Leibniz pour la dérivation du produit. On l'écrit donc sous la forme d'une somme de la dérivée partielle et d'un terme de correction linéaire [11]. Pour un vecteur  $V$ , cela donne :

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}V^{\lambda} \quad (1.4)$$

Le coefficient  $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$  s'appelle **connection affine** ou **symbole de Christoffel** ; ce n'est pas un tenseur – il “corrige” la dérivée partielle – et donc on ne peut pas modifier la position de ses indices/exposants.

En imposant d'autres propriétés à cette connection (commutation avec les contractions, dérivation simple pour les quantités scalaires), on l'étend aux tenseurs de forme quelconque en ajoutant un symbole de Christoffel par indice contravariant et en retranchant un par indice covariant. Enfin, on obtient l'unicité de la connection pour une métrique donnée en demandant qu'elle soit symétrique  $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$  et que la dérivée covariante des éléments du tenseur métrique soit nulle en tout point. On parle alors de **connection métrique**.

Cela permet d'obtenir l'expression des symboles de Christoffel en fonction de la métrique :

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) \quad (1.5)$$

Le lien entre ces coefficients et le tenseur de Riemann se fait une fois introduite la notion de **transport parallèle**. Celle-ci généralise à un espace courbe l'invariance d'une quantité (vectorielle ou même tensorielle)  $T$  le long d'une courbe  $x^{\mu}(\lambda)$  d'un espace plat, condition traduite dans ce cas par l'équation

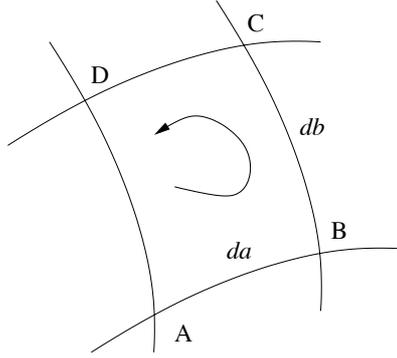
$$\frac{dT}{d\lambda} = 0 \text{ soit } \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{\partial T}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (1.6)$$

On la rend covariante en remplaçant la dérivée partielle par la dérivée covariante : on définit donc **l'opérateur de dérivation covariante le long d'une courbe** par

$$\frac{D}{D\lambda} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \nabla_{\mu} \quad (1.7)$$

et on dira qu'un tenseur  $T$  est **transporté parallèlement** lorsque

$$\frac{DT}{D\lambda} = 0 \quad (1.8)$$



**Figure 1.1:** Boucle fermée sur une variété le long de laquelle un vecteur  $V^\alpha$  est transporté parallèlement.

Le point crucial est que, pour un espace courbe, un tenseur est modifié lors de son transfert parallèle, y compris le long d'une courbe fermée. Cette modification dépend de la nature du parcours et donc de la courbure de la surface le long de celui-ci.

Supposons qu'un vecteur  $V^\alpha$  est transporté parallèlement le long d'une courbe fermée infinitésimale ABCDA (cf. Figure 1.1).

Le transport parallèle étant construit de manière covariante, la modification  $dV^\alpha$  du vecteur une fois la boucle parcourue doit s'exprimer à l'aide d'un tenseur noté  $R$ . La transformation linéaire fait intervenir les trois vecteurs  $V$ ,  $da$  et  $db$  contractés avec le tenseur  $R$  et donc celui-ci est une fois contravariant et trois fois covariant. Postulant une relation de la forme :

$$dV^\alpha = V^\beta R^\alpha_{\beta\gamma\delta} da^\gamma db^\delta \quad (1.9)$$

et utilisant la forme différentielle de l'équation (1.8) pour un vecteur  $V^\mu$  transporté le long d'une courbe  $x^\nu$  :

$$dV^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\rho dx^\nu \quad (1.10)$$

on calcule la variation du vecteur  $V^\alpha$  le long de la boucle fermée et on identifie l'expression du tenseur de Riemann à partir de l'Équation (1.9). On obtient finalement :

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\delta} \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \quad (1.11)$$

Par construction le tenseur de Riemann est antisymétrique en ses deux derniers indices (cela traduit les deux sens de parcours possibles de la boucle) ; l'ordre de ses trois indices covariants – qui ne jouent pas des rôles identiques – est une convention. De nombreuses relations existent entre ses coefficients, ce qui ramène à 20 le nombre de ses composantes indépendantes en dimension 4. On peut également montrer [13] que la déviation par rapport à un espace plat peut être mesurée par exactement 20 degrés de liberté s'exprimant à l'aide des dérivées secondes du tenseur métrique, ce qui est une indication supplémentaire du rôle clef joué par le tenseur de Riemann dans la mesure de la courbure.

### 1.1.4 Propriétés des Equations d'Einstein

#### Constante cosmologique

L'expression la plus générale de ces équations (1.1), incluant la constante cosmologique  $\Lambda$  est donnée par :

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

Cette constante fut introduite à l'origine par Einstein lui-même pour obtenir un modèle d'univers statique... puis abandonnée à la suite des découvertes de Hubble sur l'expansion de l'univers. Si on place le terme qui la contient dans le membre de droite de l'équation, il apparaît comme une sorte de tenseur impulsion-énergie, automatiquement conservé par définition de la connection métrique, et que l'on peut interpréter comme une "densité d'énergie du vide".

Des mesures récentes sur les supernovae Ia – voir [14] pour un historique des derniers développements en ce domaine et les articles cités en référence pour le détail des analyses et des résultats – sont compatibles avec une constante cosmologique *non nulle*<sup>2</sup> : en notant "classiquement"  $\Omega_\Lambda$  la densité d'énergie associée à la constante cosmologique normalisée à la densité critique, on a

$$\Omega_\Lambda = 0.76 \pm 0.10 \tag{1.13}$$

sous l'hypothèse que  $\Omega_{\text{total}} = 1$ , ce qui est compatible avec les mesures combinées actuelles donnant  $\Omega_{\text{total}} = 0.94 \pm 0.26$ . À partir de l'équation (1.13), on peut déduire une valeur pour  $\Lambda$  :

$$\Lambda = (1.13 \pm 0.15) 10^{-52} \left( \frac{h_0}{0.65} \right)^2 \text{ m}^{-2} \tag{1.14}$$

où  $h_0$  est la valeur de la constante de Hubble exprimée en unité de  $100 \text{ km s}^{-1} / \text{Mpc}$ . Or, le rapport  $\Upsilon$  entre le terme de force gravitationnelle par unité de masse "classique" causé par une masse  $M$  à la distance  $D$  et celui dû à la constante cosmologique<sup>3</sup> est donné par [10] :

$$\Upsilon = \frac{GM}{c^2 \Lambda D^3} = 4 \cdot 10^{21} \left( \frac{10^{-52}}{\Lambda} \right) \left( \frac{\text{Distance Terre-Soleil}}{D} \right)^3 \left( \frac{M}{\text{Masse du soleil}} \right) \gg 1 \tag{1.15}$$

Ainsi, la contribution de la constante cosmologique apparaît comme suffisamment faible pour pouvoir être négligée dans la suite de l'exposé de la théorie des ondes gravitationnelles – en particulier, on prendra  $\Lambda = 0$  lors de la linéarisation des équations d'Einstein. Celle-ci ne joue un rôle que pour des distances cosmologiques.

### Difficultés de résolution

La symétrie des deux tenseurs  $G$  et  $T$  ainsi que les *identités de Bianchi* ( $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ ) ramènent à 6 le nombre d'équations d'Einstein (1.1) indépendantes. Les résoudre revient à trouver simultanément la métrique  $g_{\mu\nu}$  et le tenseur énergie-impulsion  $T_{\mu\nu}$ . Ce dernier contenant le plus souvent la métrique, il est impossible de l'imposer *a priori* pour en déduire la courbure. Les équations d'Einstein sont donc non-linéaires, ce qui les rend inextricables dans le cas général, et ce même en l'absence de matière ; des hypothèses supplémentaires sont nécessaires.

Il peut s'agir de conditions de *symétrie*, comme par exemple pour déterminer la courbure de l'espace-temps autour d'une boule de fluide parfait à symétrie sphérique – le résultat est la métrique de Schwarzschild –, ou bien de contraintes sur *l'intensité et la vitesse de variation du champ gravitationnel*, ce qui permet de vérifier la limite newtonienne de la théorie.

Pour obtenir la théorie des **ondes gravitationnelles**, on se place dans **l'hypothèse d'un champ faible mais pouvant varier dans le temps** ; leur dérivation est l'objet de la prochaine section.

## 1.2 Ondes gravitationnelles

### 1.2.1 Histoire et controverse

*Les ondes gravitationnelles voyagent "à la vitesse de la pensée".*

Sir A.S. Eddington

---

<sup>2</sup>Ce résultat "surprenant" est encore en cours de vérification : recherche d'erreurs systématiques, tests des modèles ... En parallèle, d'autres études visent à déterminer l'origine de cette "énergie sombre" ; en effet, celle-ci pourrait également être causée par par des phénomènes autre que la constante cosmologique, comme la *quintessence*.

<sup>3</sup>La force par unité de masse  $F$  vaut  $F = -\frac{GM}{D^2} + \frac{c^2 \Lambda D}{3}$

La validité de la théorie de la Relativité Générale fut rapidement confrontée à l'expérience : tout d'abord par la prédiction correcte de l'avance du périhélie de Mercure (présentée en conclusion de l'article [1]), puis par la vérification de la déviation des rayons lumineux par le Soleil [15]. Les résultats expérimentaux et théoriques furent en accord, ce qui assura le succès de la théorie jusque parmi le grand public.

Depuis lors, les tests successifs ont toujours corroborés les calculs relativistes, que ce soit pour vérifier une prédiction spécifique (par exemple le retard de signaux électromagnétiques passant près d'une masse – "effet Shapiro" (1964) – a été vérifié à 0.1% près lors d'une expérience utilisant les sondes Viking posées sur Mars) ou pour comparer la relativité avec d'autres théories concurrentes dites "tenseur-scalaires" comme celle de Brans et Dicke (non-évidence de "l'effet Nordtvedt" dû, dans ces scénarios, à une violation de l'égalité entre les masses grave et inertielle).

Dans ce cadre, les ondes gravitationnelles ont un statut un peu particulier : imaginées dès 1900 par Lorentz puis en 1905 par Poincaré<sup>4</sup>, prédites théoriquement en 1918 par Einstein lui-même [17], elles n'ont encore jamais été observées directement. Pendant plusieurs décennies, la réalité de leur existence a même été mise en doute par de grands savants : on pouvait alors penser qu'elles n'étaient que des artefacts de calcul, appelées à disparaître par un changement astucieux de coordonnées. Ces doutes étaient dus à la méthode de linéarisation qui sera détaillée ci-après ; en effet, si elle fournit des solutions approchées aux équations d'Einstein, elle en modifie profondément la nature en les rendant linéaire – le champ gravitationnel n'y interagit plus avec lui-même ! De plus, cette méthode de calcul ne s'étend pas naturellement aux termes non-linéaires de correction.

Ce n'est que dans les années 50 et 60 que le cadre mathématique de la théorie des ondes gravitationnelles fut établi. Pirani [18] en donne une définition indépendante d'hypothèses concernant le champ gravitationnel ou le choix de coordonnées ; Isaacson [19, 20] formalise le développement des équations d'Einstein dans le cas d'ondes gravitationnelles de longueur d'onde courte devant le rayon de courbure de l'espace-temps – l'espace-temps plat de Minkowski, correspondant à une courbure nulle est un cas particulier de cette hypothèse.

Enfin, l'étude du pulsar binaire PSR 1913+16 qui a apporté une preuve indirecte de l'existence du rayonnement gravitationnel<sup>5</sup> a également été à l'origine de nombreux travaux théoriques. Il s'agissait alors de vérifier la formule dite du **quadrupôle d'Einstein** – cf. équation (1.44) – sur laquelle est basée l'interprétation des données astrophysiques recueillies lors de l'observation de ce pulsar. Là encore ce travail a été couronné de succès : un calcul complexe poussé à un ordre de développement bien supérieur à celui de la linéarisation simple redonne l'expression obtenue par Einstein. Sur ce sujet, on pourra consulter [21].

Aujourd'hui, l'existence des ondes gravitationnelles est admise par tous ; elles transportent réellement de l'énergie dont une petite partie est susceptible d'interagir avec la matière. Le problème est que l'intensité concernée est si faible qu'il est très difficile d'imaginer un instrument suffisamment peu bruyant pour y être sensible. La recherche directe du rayonnement gravitationnel a déjà une longue histoire sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 2 ; les détecteurs interférométriques géants comme Virgo apparaissent aujourd'hui comme les plus prometteurs pour atteindre ce but.

Cette découverte amènerait d'une part une clarification théorique sur le domaine de validité de la Relativité Générale (par exemple par rapport aux autres théories qui prédisent l'existence d'ondes gravitationnelles de type scalaire) mais aussi et surtout vis à vis de sa capacité à décrire le monde réel et d'autre part apporterait une connaissance nouvelle sur les sources détectables qui, comme nous allons le voir ci-après, sont toutes astrophysiques.

## 1.2.2 Approximation de champ faible ; équations d'Einstein linéarisées

L'hypothèse de champ faible revient à décomposer la métrique  $g_{\mu\nu}$  en une somme de deux composantes, la métrique de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-c, 1, 1, 1)$  décrivant un espace plat et une perturbation supposée petite  $h_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (1.16)$$

$h$  étant faible, on néglige dans les calculs les termes aux moins quadratiques en la perturbation ; en particulier, cela permet de monter et de descendre les indices avec la métrique  $\eta_{\mu\nu}$  :

<sup>4</sup>qui les avaient baptisées du nom poétique "d'ondes gravifiques" [16].

<sup>5</sup>Voir paragraphe 1.2.7 pour plus de détails.

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma} \quad (1.17)$$

Cette version linéarisée de la Relativité Générale revient à décrire la propagation d'un champ de tenseur symétrique  $h_{\mu\nu}$  sur un espace-temps plat.

En appliquant la règle de calcul définie *supra*, on obtient l'expression du tenseur d'Einstein :

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\sigma \partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma} + \eta_{\mu\nu} \square h) \quad (1.18)$$

avec

$$h = h_\mu^\mu = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (1.19)$$

$$\square = -\frac{1}{c^2} \partial_{tt} + \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz} \quad (\text{d'Alembertien de l'espace plat}) \quad (1.20)$$

Le tenseur énergie-impulsion est lui calculé à l'ordre 0 en  $h_{\mu\nu}$  : pour que l'hypothèse de champ faible soit satisfaite, les quantités d'énergie et de mouvement doivent elles-même être petites. A cet ordre, la loi de conservation est simplement  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

La décomposition de la métrique (1.16) ne fixe pas complètement le système de coordonnées de l'espace-temps ; deux "choix de jauge" successifs permettent d'une part de simplifier l'expression des équations d'Einstein et d'autre part de montrer qu'une onde gravitationnelle se réduit à une combinaison linéaire de deux états de polarisation.

Introduisons la perturbation de "trace renversée" :

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (1.21)$$

Il est toujours possible de choisir des coordonnées dans lesquelles la **condition de jauge harmonique** est vérifiée :

$$\partial_\mu \bar{h}_\nu^\mu = 0 \quad (1.22)$$

Les équations de champ (1.1) se réduisent alors à

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.23)$$

Elles sont similaires à celles de l'électromagnétisme et donc on leur applique la même méthode de résolution.

### 1.2.3 Solutions dans le vide

En l'absence de matière, on cherche les solutions sous forme d'ondes planes :

$$\bar{h}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (1.24)$$

avec le vecteur d'onde  $k$  de genre lumière :  $k^\sigma k_\sigma = 0$ . Les quatre conditions de jauge harmonique  $k_\mu C^{\mu\nu} = 0$  ramènent à six le nombre de composantes indépendantes du tenseur symétrique  $C_{\mu\nu}$ . A ce stade il reste encore des degrés de liberté dans la définition des coordonnées qui permettent un nouveau choix de jauge sur le tenseur  $C_{\mu\nu}$  :

$$C_\mu^\mu = 0 \quad \text{Sans trace} \quad (1.25)$$

$$C^{0\mu} = 0 \quad \text{Transverse} \quad (1.26)$$

On parle alors de la jauge "TT" (pour "Transverse-Traceless"). Ces cinq relations n'apportent en fait que quatre contraintes nouvelles sur les  $C^{\mu\nu}$  par rapport à la condition de jauge harmonique ; il ne reste donc plus que deux composantes indépendantes. Comme l'onde est maintenant de trace nulle, l'équation (1.21) indique que  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ .

---

Supposons de plus que la direction de propagation est  $\vec{e}_3$ , troisième vecteur du repère d'espace  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .  $k$  est alors de la forme  $k^\mu = (\omega/c, 0, 0, \omega)$  et les relations établies précédemment conduisent à  $C_{3\mu} = 0$ . La forme générale du tenseur symétrique et de trace nulle  $C_{\mu\nu}$  est alors

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Posons<sup>6</sup>  $C_{11} = h_+$  et  $C_{12} = h_\times$ ; en notation tensorielle, on a

$$h = [h_+ (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) + 2h_\times (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2)] e^{i\omega(t-x/c)} \quad (1.28)$$

L'onde gravitationnelle possède bien deux états de polarisation – “+” et “×” – qui, comme on va le voir maintenant, modifient de manière différente la courbure de l'espace-temps.

### 1.2.4 Interprétation physique des polarisations

Dans un espace courbe, le plus court chemin d'un point à un autre est appelé géodésique; par analogie avec le cas de la ligne droite dans un espace plat, on peut la définir de façon générale comme étant une trajectoire  $x^\mu(\lambda)$  dont le vecteur tangent  $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$  est transporté parallèlement. Exploitant la relation (1.8), on obtient **l'équation des géodésiques** :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (1.29)$$

Considérons deux particules libres suivant deux géodésiques voisines  $x^\mu(\lambda)$  et  $x^\mu(\lambda) + \xi^\mu(\lambda)$ . Ecrivant l'équation précédente pour chacune des deux particules et développant au premier ordre en  $\xi$ , on obtient l'équation décrivant l'évolution de  $\xi$ , dite de la **déviaton géodésique**

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\lambda^2} + R_{\nu\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \xi^\rho = 0 \quad (1.30)$$

Prenant maintenant comme paramètre le temps propre  $\tau$  – ce qui est possible car l'équation des géodésiques contraint le choix du paramètre – et exploitant le fait que le tenseur de Riemann est déjà du premier ordre dans la théorie linéarisée, l'équation de la déviaton géodésique se simplifie finalement en

$$\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \xi^\nu \frac{\partial^2 h_\nu^\mu}{\partial t^2} \quad (1.31)$$

En supposant à nouveau que l'onde gravitationnelle se propage dans la direction  $x^3$ , on voit que seuls  $\xi^1$  et  $\xi^2$  sont affectés par son passage. Par intégration du système précédent au premier ordre pour le cas où l'onde est purement polarisée, on obtient respectivement :

- Polarisation “+” ( $h_\times = 0$ ) :

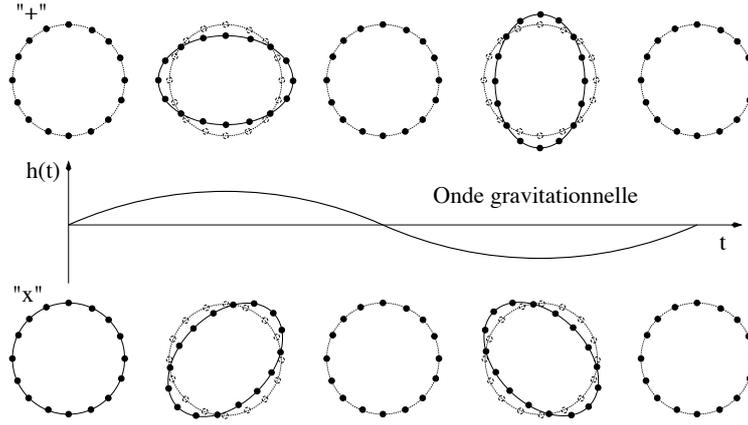
$$\begin{pmatrix} \xi^1(t) \\ \xi^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} h_+ e^{ik^\sigma x_\sigma} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2} h_+ e^{ik^\sigma x_\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

- Polarisation “×” ( $h_+ = 0$ ) :

$$\begin{pmatrix} \xi^1(t) \\ \xi^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} h_\times e^{ik^\sigma x_\sigma} \\ \frac{1}{2} h_\times e^{ik^\sigma x_\sigma} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1(0) \\ \xi^2(0) \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Dans le premier cas, les modifications de  $\xi$  ont lieu selon les axes tandis que dans le second elles sont selon les bissectrices des axes. Pour mieux “voir” cette différence de comportement, imaginons qu'un anneau de particules-test (i.e. sans masse et en chute libre) se trouve dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. Selon la polarisation de celle-ci, les oscillations de l'anneau diffèrent, comme le montre la figure 1.2.

<sup>6</sup>La signification de ces notations apparaîtra clairement au paragraphe suivant.



**Figure 1.2:** Effet du passage d'une onde gravitationnelle polarisée pure "+" ou "x" en incidence normale sur un anneau de particules-test. Dans les deux cas il y a simultanément une contraction et une dilatation des longueurs dans deux directions perpendiculaires dues au passage de l'onde.

### 1.2.5 Génération d'ondes gravitationnelles par des sources

On cherche maintenant à résoudre l'équation (1.23) avec un terme de source non nul. La **formule des potentiels retardés** permet d'écrire

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int_{\vec{y} \in \text{Source}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} T_{\mu\nu}(t_r, \vec{y}) d^3\vec{y} \quad (1.34)$$

avec  $|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\delta_{ij}(x^i - y^i)(x^j - y^j)}$  (distance euclidienne) et  $t_r = t - |\vec{x} - \vec{y}|/c$  (**temps retardé**).

Pour trouver une expression approchée de cette formule, on fait deux hypothèses, l'une sur la source d'ondes gravitationnelles, l'autre sur le spectre du rayonnement :

- La source est supposée isolée, de densité  $\rho$ , de dimension caractéristique  $\delta R$  et située à une distance  $R$  du point d'observation  $\vec{x}$  telle que  $\delta R \ll R$ . En particulier, on a  $|\vec{x} - \vec{y}| \approx R$  ce qui permet de sortir ce facteur constant de l'intégrale (1.34). Comme le tenseur énergie-impulsion satisfait la loi de conservation  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , la condition de jauge harmonique (1.22) est alors vérifiée.
- La radiation est majoritairement émise à des fréquences  $\omega/2\pi$  telles que  $\frac{\delta R}{c} \ll \frac{1}{\omega}$  : la lumière traverse la source bien plus vite que les éléments de celle-ci.

On montre alors que seules les coordonnées spatiales du tenseur  $\bar{h}_{\mu\nu}$  sont non nulles et qu'elles s'expriment en fonction de la dérivée seconde des **moments quadripolaires** de la source  $q_{ij}$  définis par

$$q_{ij} = \int_{\vec{y} \in \text{Source}} y_i y_j T_{00}(t, \vec{y}) d^3\vec{y} \quad \text{avec } T_{00} \approx \rho c^2 \quad (1.35)$$

La perturbation de la métrique est finalement

$$\bar{h}_{ij} = \frac{2G}{R c^4} \ddot{q}_{ij}(t_r) \quad (1.36)$$

Le passage dans la jauge TT se fait par une simple opération linéaire. Soit  $\vec{n} = \left(\frac{k^i}{\omega}\right)_i$  le vecteur unitaire donnant la direction de propagation de l'onde gravitationnelle ; on définit alors l'opérateur de projection  $P$  sur les plans perpendiculaires à  $\vec{n}$  par  $P_{ij} = \eta_{ij} - n_i n_j$  et on a

$$h_{ij}^{\text{TT}} = P_i^k P_j^l h_{kl} - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} h_{kl} \quad (1.37)$$

Le premier terme rend le tenseur  $h_{\mu\nu}^{\text{TT}}$  transverse tandis que le second annule la trace.

L'équation (1.36) montre que l'amplitude de la perturbation de la métrique  $h$  varie comme l'inverse de la distance à la source  $R$ ; ce résultat est fondamental pour la recherche des ondes gravitationnelles car les différents types de détecteurs mis au point sont sensibles à cette même amplitude. Une décroissance plus rapide (par exemple en  $1/R^2$ ) aurait rendu vain tout espoir de détection en restreignant de manière considérable la fraction d'univers observable.

### 1.2.6 Luminosité d'une source d'onde gravitationnelle

Une des raisons pour lesquelles l'existence des ondes gravitationnelles a été contestée pendant plusieurs décennies était la difficulté à définir la notion **d'énergie rayonnée** par une source donnée. En effet, les tenseurs énergie-impulsion associés par exemple à la théorie de l'électromagnétisme ou à celle d'un champ scalaire sont quadratiques dans les champs alors que la théorie des ondes gravitationnelles est linéaire; à cette situation se greffent des difficultés techniques dans le détail desquelles nous ne rentrerons pas ici. Dans la littérature, on trouve de nombreuses manières de définir ce tenseur énergie-impulsion qui, bien que différentes, donnent pour la plupart la même réponse aux questions de physique (une référence récente est, par exemple, [22]). Une façon d'introduire l'une de ces expressions consiste à développer la métrique  $g_{\mu\nu}$  et le tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$  au second ordre :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(2)} \quad (1.38)$$

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(1)}[\eta + h^{(2)}] + G_{\mu\nu}^{(2)}[\eta + h] \quad (1.39)$$

les équations d'Einstein dans le vide  $G_{\mu\nu} = 0$  peuvent alors se réécrire sous la forme

$$G_{\mu\nu}^{(1)}[\eta + h^{(2)}] = \frac{8\pi G}{c^4} t_{\mu\nu} \quad (1.40)$$

en définissant

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)}[\eta + h] \quad (1.41)$$

Les identités de Bianchi impliquent que  $\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0$  et donc, comme la notation choisie l'indique,  $t_{\mu\nu}$  peut être interprété comme le tenseur énergie-impulsion correspondant au champ de gravitation... bien qu'il ne soit évidemment pas un tenseur en toute généralité.

A partir de cette expression, on peut calculer la **densité d'énergie**  $t_{00}$  qui s'obtient par moyennage sur un grand nombre de cycles (car l'énergie est non localisée) :

$$t_{00} = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (1.42)$$

De là on en déduit la **luminosité** de la source  $\mathcal{L} = r^2 \int_{\text{Sphère de rayon } r} c t_{00} d\Omega$ . En introduisant les **moments quadrupolaires réduits**

$$Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} q_{kl} \quad (1.43)$$

on obtient la **formule du quadrupôle d'Einstein** :

$$\mathcal{L} = \frac{G}{c^5} \left\langle \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right\rangle \quad (1.44)$$

On peut remarquer qu'une émission d'onde gravitationnelle nécessite une variation du moment quadrupolaire, ce qui était déjà visible dans l'expression (1.36). Il s'agit là d'une caractéristique essentielle du rayonnement gravitationnel qui, ajoutée à la faiblesse de la constante de couplage entre la gravitation et la matière – ici  $G/5 c^5 \approx 10^{-53} \text{ W}^{-1}$  –, explique pourquoi les amplitudes des ondes gravitationnelles rencontrées dans la suite sont extrêmement petites, en comparaison par exemple de celles produites par le rayonnement électromagnétique.

En résumé :

- le rayonnement gravitationnel est **quadrupolaire**<sup>7</sup>; l'asymétrie du système doit donc être plus grande encore pour assurer un rayonnement élevé;
- **un corps à symétrie sphérique n'émet pas d'onde gravitationnelle** car ses moments quadrupolaires réduits sont nuls.

### 1.2.7 Application au Pulsar PSR 1913+16

La plupart des tests de la théorie de la Relativité Générale mesurent en fait de petites déviations par rapport à la mécanique newtonienne; le domaine de champ fort, où les effets relativistes sont prépondérants et la description classique inopérante, est longtemps apparu inaccessible à l'expérimentation. Le système binaire PSR 1913+16, découvert en 1974 par Hulse et Taylor [23] a pour la première fois permis de vérifier des prédictions dans ce régime... ainsi que l'existence du rayonnement gravitationnel et sa nature quadrupolaire illustrée par la formule (1.44).

PSR 1913+16 est composé de deux étoiles à neutrons; un pulsar de période environ 59 ms et un compagnon invisible – sans doute un pulsar mort –, en tout cas un autre astre compact. De ce fait, le mouvement du système est très propre (points matériels sans effet de marée ou autres) ce qui a permis de mesurer précisément un grand nombre de ses paramètres.

Dans le cadre de la Relativité Générale – utilisée ici comme outil d'analyse du pulsar binaire – ce système perd de l'énergie au cours du temps, sous forme d'ondes gravitationnelles. Ce phénomène a deux conséquences principales :

- La période de rotation du système  $P_b$  (à peu près 8 heures aujourd'hui) diminue lentement; c'est la seule quantité actuellement observable renseignant sur ce phénomène.
- Dans le même temps, les deux étoiles spiralent peu à peu l'une vers l'autre (leur distance est aujourd'hui de l'ordre d'un rayon solaire, i.e. environ  $7 \cdot 10^5$  km); dans quelques centaines de millions d'années ce processus se terminera par la coalescence des deux astres, événement lui-même générateur d'une puissante émission d'ondes gravitationnelles (cf. paragraphe 1.3.2)... qui serait (!) facilement détectable avec Virgo car le système est situé à "seulement" 5 kpc<sup>8</sup>.

Ce dernier taux de décroissance se calcule simplement à partir de la formule du quadrupôle (1.44). Supposons pour simplifier que les deux astres suivent une orbite circulaire de rayon  $R$  et qu'ils sont de même masse  $M$ . La seconde approximation est assez bien vérifiée par le vrai système –  $m_1 \approx 1.441 M_\odot$  et  $m_2 \approx 1.387 M_\odot$  ( $M_\odot = 1$  Masse solaire  $\approx 2 \cdot 10^{30}$  kg) – tandis que la première est moins réaliste: l'orbite elliptique de PSR 1913+16 a une excentricité  $\epsilon$  d'environ 0.617.

Posant  $\omega$  la pulsation du système et choisissant un repère  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  dans le plan de la trajectoire, on obtient l'expression des moments quadrupolaires réduits :

$Q_{xx}$	$Q_{yy}$	$Q_{xy}$
$M R^2 \cos 2\omega t$	$M R^2 \sin 2\omega t$	$-M R^2 \cos 2\omega t$

(1.44) donne la luminosité du système :

$$\mathcal{L} = \frac{128 G M^2 R^4 \omega^6}{5 c^5} \quad (1.45)$$

L'énergie du système  $E = -\frac{GM^2}{4R}$  peut s'exprimer en fonction de  $\omega = \sqrt{\frac{GM}{4R^3}}$  et on obtient

$$\frac{dE}{E} = \frac{2}{3} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{2}{3} \frac{dP_b}{P_b} \quad (1.46)$$

La **conservation de l'énergie** permet de relier la luminosité à la variation d'énergie:  $\mathcal{L} = -\frac{dE}{dt}$   
Des équations (1.45) et (1.46) on tire le rapport  $\frac{\dot{P}_b}{P_b}$  en fonction des paramètres du système binaire

$$\frac{\dot{P}_b}{P_b} = -\frac{12}{5} \frac{G^3 M^3}{c^5 R^4} \quad (1.47)$$

<sup>7</sup>En effet, le terme dipolaire – en général *dominant* – est *grosso modo* proportionnel à la somme des forces extérieures, laquelle est nulle pour un système isolé

<sup>8</sup>Un *parsec* (pc) vaut environ 3.26 années-lumière; le diamètre de la Voie Lactée est d'environ 20 kpc.

L'expression exacte donnant le taux de décroissance de la période du pulsar binaire PSR 1913+16 est similaire. Dans la littérature, on préfère la présenter sous la forme [21, 24]:

$$\dot{P}_b = -\frac{192\pi}{5c^5} \left( \frac{2\pi G M_{\text{tot}}}{P_b} \right)^{5/3} \left( \frac{\mu}{M_{\text{tot}}} \right) F(\epsilon) \quad (1.48)$$

avec

- $M_{\text{tot}} = m_1 + m_2$  (masse totale) et  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (**masse réduite**)
- $P_b$  est donné par la troisième loi de Kepler  $\frac{P_b^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G M_{\text{tot}}}$  avec  $R$  le demi grand axe de l'ellipse réduite<sup>9</sup>.
- $F(\epsilon) = \frac{1 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4}{(1-\epsilon^2)^{7/2}}$  [25]. L'ellipticité de l'orbite est entièrement contenue dans la "fonction d'augmentation"  $F$  qui croît fortement avec  $\epsilon$ :  $F(0) = 1$ ,  $F(0.6) \approx 10$ ,  $F(0.8) \approx 100$ ,  $F(0.9) \approx 1000$ . Moins la trajectoire est circulaire, plus le taux de décroissance est élevé car la luminosité est plus importante. Ce fait est à rapprocher de la règle générale qui veut qu'un "bon" émetteur d'ondes gravitationnelles soit asymétrique – en particulier, un corps à symétrie sphérique ne rayonne pas du tout. Une autre conséquence importante de ce fait est que l'émission d'ondes gravitationnelles tend à rendre les orbites circulaires.

La précision de la mesure sur  $\dot{P}_b$  a atteint 0.6% [24], ce qui a nécessité la prise en compte de l'effet de rotation différentielle de la Galaxie pour comparer les valeurs théorique  $\dot{P}_b^{GR}$  et expérimentale  $\dot{P}_b^{obs}$  de ce taux de décroissance. On obtient finalement [26]:

$$\frac{\dot{P}_b^{obs}}{\dot{P}_b^{GR}} = 1.0023 \pm 0.0041 \pm 0.0021 \quad (1.49)$$

Le premier terme correspond à l'erreur expérimentale, le second aux incertitudes sur les paramètres galactiques.

L'accord prédiction/mesure est très bon ce qui confirme les hypothèses faites: les deux étoiles se comportent comme des points matériels, sans effet de marée notable, dans le cadre de la Relativité Générale, *ondes gravitationnelles incluses*. Ce travail collectif, qui s'étend sur près de 20 ans, a valu aux découvreurs du pulsar, Hulse et Taylor, le prix Nobel de Physique 1993 [27].

Le même type d'étude a été entrepris pour le pulsar binaire PSR 1534+12 [28]. Le taux de décroissance de sa période est environ dix fois plus faible que pour PSR 1913+16 mais les mesures de "timing" sont plus précises; l'incertitude la plus grande porte sur la distance du système  $d$  estimée à 0.7 kpc par des mesures de dispersion. Avec cette donnée, l'écart entre la prédiction théorique et la mesure expérimentale de  $\dot{P}_b$  – corrigée des effets cinématiques de la Galaxie – est de l'ordre de 15 % ( $1.4\sigma$ ) [29] ce qui reste élevé. Par contre, il est possible d'inverser le point de vue, de supposer que la valeur donnée par la Relativité Générale est correcte, et de l'utiliser pour en déduire la distance du pulsar. On obtient alors  $d = 1.1 \pm 0.2$  kpc (68 % C.L.), soit une valeur supérieure d'environ 50% à celle estimée.

Si cette hypothèse était juste, cette modification aurait une conséquence sur le taux d'occurrence – et donc de coalescence – des systèmes binaires d'étoiles à neutrons: une distance plus large impliquerait des pulsars plus lumineux et donc moins nombreux dans la Galaxie, sans quoi un plus grand nombre d'entre-eux aurait été détecté [30].

La question des taux d'occurrence (par unité de volume)  $\Gamma$  des événements astrophysiques émettant suffisamment d'ondes gravitationnelles pour être détectés est centrale pour une expérience comme Virgo, obligée d'attendre l'arrivée d'un signal. Comme la perturbation à laquelle le détecteur est sensible est proportionnelle à l'inverse de la distance, celui-ci n'a accès qu'à un volume donné d'univers  $V$ . Symboliquement, si l'instrument a une durée de vie  $\Delta t$ , un scénario  $\Sigma$  de production de rayonnement gravitationnel n'aura d'intérêt que si on a

<sup>9</sup>Ce demi-grand axe est obtenu lors de la réduction du problème à deux corps. Dans le cas de deux masses égales, il vaut donc le double du rayon de l'orbite circulaire considéré dans les équations (1.45) à (1.47). Avec cette correspondance, cette dernière formule (1.47) apparaît bien comme un cas particulier de l'équation (1.48) où  $\mu/M_{\text{tot}} = 1/4$  et  $\epsilon = 0$ .

$$V \times \Gamma_{\Sigma} \times \Delta t \gtrsim 1 \quad (1.50)$$

L'estimation de ces taux d'occurrence est basée sur des modèles qui diffèrent d'un auteur à l'autre et qui dépendent fortement de données expérimentales ayant de larges barres d'erreur, comme pour le pulsar PSR 1534+12. Le résultat est que ces taux varient souvent d'un ou plusieurs ordres de grandeur dans la littérature et qu'ils évoluent rapidement à mesure que les connaissances sur tel ou tel aspect progressent : ainsi, poursuivant l'étude du même exemple, [29, 30] indiquent que l'augmentation de 50% de la distance  $d$  du pulsar 1534+12 entraînerait une diminution comprise entre 2.5 et ... 20 de la densité de systèmes similaires à ce pulsar binaire, estimée par plusieurs équipes (voir section 4.1 de [29] et les références citées à l'intérieur). Nous reviendrons sur cette question dans la prochaine section, consacrée aux sources d'ondes gravitationnelles.

En parallèle de la présentation des formes d'onde, des amplitudes prédites et du nombre d'événements attendus, les différentes méthodes de traitement du signal utilisées pour la détection seront rapidement évoquées.

## 1.3 Sources d'ondes gravitationnelles et exemples de méthodes de détection

### 1.3.1 Généralités

Comme la partie théorique l'a montré, on peut s'attendre à une luminosité gravitationnelle **très faible** : en effet, le facteur  $G/5c^5$  présent dans l'équation (1.44) vaut à peu près  $10^{-53} \text{ W}^{-1}$  ; deux exemples vont confirmer cette impression. Tout d'abord, en appliquant la formule (1.45) au mouvement orbital de Jupiter<sup>10</sup>, on obtient  $\mathcal{L} \approx 5.3 \text{ kW}$ , ce qui est bien trop faible pour que l'effet de cette perte d'énergie soit observable sur une échelle de temps de l'ordre de l'âge du système solaire. En effet, intégrée sur 10 milliards d'années, cette puissance correspond à une énergie de l'ordre de  $1.7 \cdot 10^{21} \text{ J}$ , négligeable devant l'énergie cinétique orbitale de Jupiter  $\approx 1.6 \cdot 10^{35} \text{ J}$ .

Ensuite, essayons d'imaginer une expérience de Hertz pour détecter directement des ondes gravitationnelles. Supposons qu'il soit possible de faire tourner à 5 tours/seconde une barre d'acier de... 500 tonnes, 2 mètres de diamètre et 20 de long... sans la briser ou même la déformer ! Alors, l'amplitude du rayonnement gravitationnel émis serait de l'ordre de  $10^{-34}$  à une distance de 1 mètre, valeur plus de dix ordres de grandeur en-dessous de la sensibilité espérée pour le détecteur Virgo – cf. équation (1.54).

En conclusion, aucune expérience de Hertz n'est envisageable pour la détection des ondes gravitationnelles ; la seule stratégie possible consiste à observer le volume d'univers le plus grand possible et à chercher dans les données recueillies par l'instrument des formes d'ondes caractéristiques, soit prédites théoriquement, soit inconnues mais non-assimilables à du bruit. Quelles sont les sources les plus prometteuses ? Quels signaux émettent-elles ? Quelles informations physiques révèlent-ils ?

Il est assez facile de répondre de manière générale à la première de ces questions en transformant la formule des quadrupôles (1.44) de façon à remplacer le minuscule facteur  $G/c^5$  par... son inverse plutôt grand ! C'est Joe Weber, le premier physicien à s'être réellement intéressé à la détection des ondes gravitationnelles, qui a imaginé ce calcul en 1974 afin de mettre en valeur les paramètres physiques favorisant une forte émission de rayonnement.

On introduit des grandeurs caractéristiques de la source : une masse  $M$ , une dimension  $R$ , une pulsation  $\omega$  et un *facteur d'asymétrie*  $a$  qui quantifie la déviation par rapport à la symétrie sphérique. On a alors

$$\frac{d^3 Q}{dt^3} \sim (a M R^2) \omega^3 \quad (1.51)$$

$$\mathcal{L} \sim \frac{G}{c^5} a^2 M^2 R^4 \omega^6 \quad (1.52)$$

---

<sup>10</sup>La seule différence est que le terme constant de l'expression est alors 32 et non 128 car c'est la masse totale –  $2M$  dans le cas du pulsar binaire – qui intervient ; les valeurs numériques utilisées dans le calcul se trouvent dans [3] p. 272.

Ensuite on élimine successivement  $M$  et  $\omega$  en posant  $R_S = \frac{2GM}{c^2}$  – le rayon de Schwarzschild de la source<sup>11</sup> – et  $\omega \sim v/R$  avec  $v$  vitesse caractéristique de la source. En définissant le **facteur de compacité**  $\mathbb{C} = \frac{R_S}{R}$  l’expression de la luminosité devient :

$$\mathcal{L} \sim \frac{c^5}{G} a^2 \mathbb{C}^2 \left(\frac{v}{c}\right)^6 \quad (1.53)$$

Par définition, on a  $\mathbb{C} \leq 1$ . La table 1.1 [31] présente quelques valeurs typiques de ce facteur.

Corps	Trou Noir	Etoile à Neutrons	Naine Blanche	Le Soleil	La Terre
$\mathbb{C}$	1	0.3	$10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-9}$

**Tableau 1.1:** Facteurs de compacité  $\mathbb{C}$  typiques

Un bon émetteur d’ondes gravitationnelles doit donc être **compact**, **asymétrique** et avoir une **vitesse relativiste**. Les trous noirs, les étoiles à neutrons ainsi que des événements “cataclysmiques” comme la phase finale de la coalescence d’un système binaire ou l’explosion d’une supernova répondent à un ou plusieurs de ces critères et sont au nombre des sources considérées ci-après.

En fait, on peut classer ces dernières en trois familles :

- Des sources **continues**, **stables** à l’échelle de la durée de la prise de données et **plutôt faibles**, qui ne pourront être détectées qu’à l’issue de longs temps d’intégration – de l’ordre d’une année ou plus. On peut citer comme exemple les **pulsars** et les **fonds stochastiques** de rayonnement.
- Des sources **permanentes** mais qu’on ne peut espérer détecter que sur une **courte période** de temps correspondant le plus souvent à un **changement de nature** du système considéré. L’exemple typique est la coalescence de deux objets compacts, processus lent qui dure des centaines de millions d’années et dont seules les dernières secondes du mouvement de spirale et la fusion des deux astres sont susceptibles d’être visibles dans un détecteur comme Virgo (voir les paragraphes 1.3.2 et 1.3.3).
- Des sources **impulsives**, durant de quelques millisecondes à quelques secondes, comme les explosions de **supernovae** et le **retour à l’équilibre d’un trou noir** formé par la coalescence de deux objets compacts ou encore excité par un apport extérieur de masse (accrétion).

Les méthodes d’analyse des signaux des deux dernières catégories (de faible durée) sont différentes de celles s’appliquant aux “signaux continus continuellement détectables”. Néanmoins, nous verrons qu’elles présentent des caractéristiques similaires (filtrage adapté, analyse temps-fréquence) et se heurtent aux mêmes difficultés : incertitudes sur les formes d’onde, sur les amplitudes caractéristiques et puissance de calcul limitée par rapport à la taille de l’espace des paramètres à explorer.

Le problème de la détection des ondes gravitationnelles sera abordé dans le chapitre 2. On admettra donc pour le moment que les instruments comme Virgo sont sensibles à l’**amplitude**  $h$  de l’onde (*proportionnelle à l’inverse de la distance*)<sup>12</sup> et que la sortie du détecteur  $s$  peut se décomposer sous la forme  $\mathbf{s} = \mathbf{h} + \mathbf{n}$ ,  $n$  étant le bruit du détecteur. La **sensibilité** attendue pour Virgo est [32] :

$$\begin{cases} 10^{-21}/\sqrt{\text{Hz}} @ 10 \text{ Hz} \\ 3 \times 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}} @ 1 \text{ kHz} \end{cases} \quad (1.54)$$

Ces valeurs seront à comparer avec les amplitudes des ondes gravitationnelles émises par les sources présentées dans la suite.

En plus de l’amplitude, un autre paramètre important du signal gravitationnel est sa gamme de fréquence : comme on le verra également dans le chapitre 2, un détecteur comme Virgo est sensible dans une bande de fréquence donnée, comprise entre quelques Hz (contrainte due au bruit du détecteur) et 10 kHz (la demi-fréquence d’échantillonnage). Cette capacité de détection **large bande**

<sup>11</sup>i.e. le rayon qu’aurait un trou noir de même masse, de l’ordre de  $\approx 3$  km pour le Soleil et 4 mm pour la Terre.  
<sup>12</sup>Et non pas à la puissance rayonnée  $\propto (\text{distance})^{-2}$  comme pour un détecteur électromagnétique.

### 1.3. SOURCES D'ONDES GRAVITATIONNELLES ET EXEMPLES DE MÉTHODES DE DÉTECTION

est un des avantages des interféromètres géants par rapport aux barres résonnantes (cf. paragraphe 2.1.3), historiquement les premiers instruments de recherche des ondes gravitationnelles et encore leurs concurrents : ceux-ci n'ont une sensibilité digne d'intérêt qu'à deux fréquences particulières (proches l'une de l'autre), avec à chaque fois une bande passante de l'ordre du Hertz.

Quelles sources potentielles peut-on attendre dans cet intervalle de fréquence ? Pour le savoir, nous allons commencer par quelques considérations générales sur l'émission gravitationnelle avant de détailler successivement les candidats prédits par la théorie. Un système autogravitant newtonien de masse  $M$ , de rayon  $R$  et de densité  $\rho$  a une fréquence dynamique naturelle [33] :

$$f_{\text{dyn}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi G \rho} = \sqrt{\frac{3 G M}{16 \pi^2 R^3}} \quad \text{car } M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \quad (1.55)$$

Or,  $R \geq R_S$  (rayon de Schwarzschild défini au paragraphe 1.3.1) et on obtient donc une borne supérieure pour la fréquence dynamique :

$$f_{\text{dyn}} \leq \sqrt{\frac{3}{8} \frac{c^3}{4\pi G M}} \sim \begin{cases} 1 \text{ kHz} & \left( \frac{10 M_{\odot}}{M} \right) \\ 7 \text{ kHz} & \left( \frac{1.4 M_{\odot}}{M} \right) \end{cases} \quad (1.56)$$

D'après l'équation (1.36), l'amplitude d'une onde gravitationnelle est proportionnelle à la dérivée seconde des moments quadrupolaires  $Q$ . Par une analyse similaire à celle utilisée pour dériver la relation (1.51), on obtient  $\ddot{Q} \sim M v_{\text{dyn}}^2$  avec  $v_{\text{dyn}} \sim 2\pi f_{\text{dyn}} R$ . Si la dépendance en fréquence de la vitesse est de la forme  $\exp(2i\pi f t)$ ,  $h$  sera proportionnelle à  $\exp(4i\pi f t) = \exp[2i\pi(2f)t]$ . Ainsi, **la fréquence naturelle de l'émission gravitationnelle est le double de la fréquence dynamique du système** – par exemple la fréquence de rotation en cas de mouvement circulaire. De plus, cette fréquence est **inversement proportionnelle à la masse** du corps.

Ainsi, les émissions d'ondes gravitationnelles *détectables* ont lieu à des fréquences inférieures à 10-15 kHz. La fréquence d'échantillonnage de Virgo – 20 kHz – qui fixe à 10 kHz la valeur maximale de la bande passante de l'interféromètre (en dehors de toute considération sur son bruit, cf. appendice A) ne devrait pas limiter de manière sensible ses possibilités de détection.

Par contre, pour des grandes masses, les fréquences des ondes gravitationnelles deviennent de l'ordre du mHz, valeur complètement inaccessible pour des instruments terrestres dominés à faible fréquence par le bruit sismique (cf. chap. 2). Néanmoins, comme il est très probable que des sources émettent dans cette gamme de fréquence (trous noirs supermassifs, binaires loin de la coalescence...), il existe actuellement un projet d'interféromètre spatial – *LISA* –, doté de "bras" de l'ordre de 5 millions de km et qui, à l'horizon 2015, devrait avoir accès à ces signaux [34].

#### 1.3.2 Phase *spirale* de la coalescences de systèmes binaires

Suite à la découverte du pulsar binaire 1913+16, les coalescences de systèmes doubles d'astres compacts (trous noirs, étoile à neutrons) sont devenus les candidats les plus prometteurs pour les détecteurs interférométrique d'ondes gravitationnelles. Au delà de la richesse de l'étude de PSR 1913+16, la raison majeure de cette orientation a été la possibilité de prédire la forme précise de l'onde par des développements de Taylor poussés à des ordres de plus en plus grands : le **développement post-newtonien** (*P.N.*) en puissances de  $v/c$ .

Comme on l'a vu au paragraphe 1.2.7 consacré au pulsar binaire – dont on conserve ici les notations –, la perte d'énergie émise sous forme d'ondes gravitationnelles fait que les deux astres compacts spiralent l'un vers l'autre de plus en plus rapidement jusqu'à la coalescence finale. Le signal gravitationnel est un "*chirp*"<sup>13</sup> de la forme

$$h(t) = A(t) \cos \phi(t) \quad (1.57)$$

L'amplitude  $A(t)$  et la fréquence instantanée  $\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}$  sont des fonctions croissantes du temps. La fréquence d'émission du rayonnement est le double de la fréquence orbitale ; ainsi, pour PSR 1913+16 elle est actuellement de l'ordre de<sup>14</sup>  $7 \cdot 10^{-5}$  Hz, valeur trop petite pour la bande de

<sup>13</sup>Littéralement un "gazouillis" d'oiseau. Cette traduction simple est peut-être la meilleure manière de décrire ce type de signaux pour lesquels l'amplitude et la fréquence augmentent au cours du temps.

<sup>14</sup> $P_b \approx 7 \text{ h } 45 \text{ min. } 7 \text{ sec.}$

fréquence des détecteurs interférométriques terrestres qui débute à quelques Hz – pour ne pas avoir trop de regrets, on peut mentionner que l’amplitude actuelle de ces ondes est de toute façon trop faible pour être vue.

On suppose que la coalescence a lieu à l’instant  $t = t_c$  et les résultats présentés ici sont valables pour  $t \leq t_{\text{LSO}}$  avec  $t_{\text{LSO}} \lesssim t_c$  correspondant à l’instant de la **dernière orbite stable**<sup>15</sup>. Au-delà, si le système est composé de deux étoiles à neutrons, les forces de marée et l’accrétion de matière les disloquent et rendent caduque l’approximation de points matériels utilisée dans le développement (P.N.). A  $t = t_{\text{LSO}}$ , le rayon de l’orbite est  $R_{\text{LSO}} \approx \frac{6G M_{\text{tot}}}{c^2}$  et la fréquence est  $f_{\text{LSO}} \approx 4400 \text{ Hz} \left( \frac{M_{\odot}}{M_{\text{tot}}} \right)$  ces deux quantités étant calculées à l’ordre le plus bas (dit “**newtonien**”), tout comme l’amplitude  $A(t)$ . Par contre, la phase  $\phi$  – essentielle pour la détection du signal – est développée en puissances demi-entières de  $v/c$ . Ces deux grandeurs dépendent en première approximation d’une fonction des deux masses, la masse “*chirp*”  $\mathfrak{M} = (M_{\text{tot}})^{2/5} \mu^{3/5}$ .

Dans cette partie et dans la suite de ce chapitre consacré à la présentation des différentes sources d’ondes gravitationnelles, on notera  $D$  la distance entre l’émetteur du rayonnement et le détecteur susceptible de l’observer.

Dans l’espace de Fourier, on a :

$$\mathfrak{F}[h](f) \propto \frac{(\pi f)^{-7/6}}{D} \left( \frac{G \mathfrak{M}}{c^3} \right)^{5/6} e^{i\varphi(f)} \quad (1.58)$$

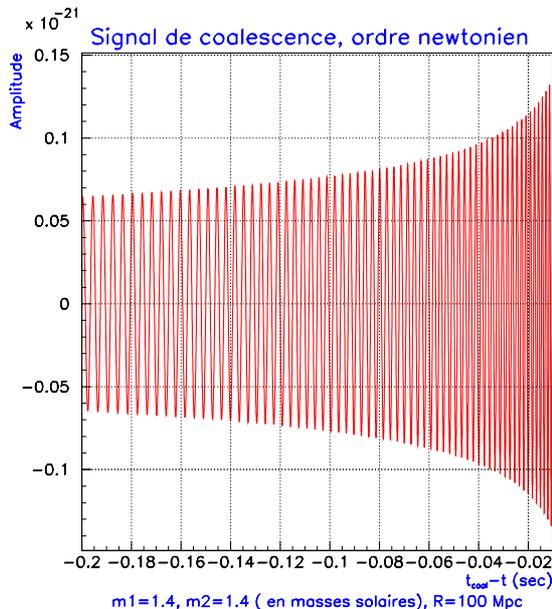
où

$$\varphi(f) = \text{Constante} + \frac{3}{128} \varphi_{\text{OG}}(f) \quad (1.59)$$

$$\varphi_{\text{OG}}(f) = \tau_0 (\pi f)^{-5/3} + \tau_1 (\pi f)^{-1} + \tau_{3/2} (\pi f)^{-2/3} + \tau_2 (\pi f)^{-1/3} + \dots \quad (1.60)$$

$$\text{avec } \tau_x \propto \left( \frac{G \mathfrak{M}}{c^3} \right)^{(-5+x)/3} \left( \frac{\mu}{M_{\text{tot}}} \right)^{-2x/5} \quad (1.61)$$

Le développement précédent est à l’ordre 2.5 (P.N.). Les valeurs des coefficients  $\tau_x$  peuvent être trouvés dans [35]. La méthode de calcul est exposée dans [36] ; les développements aux ordres 2, 2.5 et maintenant 3.5 (P.N.) ont été publiés respectivement dans [37, 38, 39].



**Figure 1.3:** Ondes gravitationnelles newtoniennes émises lors de la fin de la phase de spirale d’un système binaire de deux étoiles à neutrons situé à 100 Mpc.

A l’ordre newtonien – utilisé dans le calcul de  $\dot{P}_b$  pour le système binaire PSR 1913+16 – on a  $A(t) \propto (t_c - t)^{-1/4}$  et  $f(t) \propto (t_c - t)^{-3/8}$ . La figure 1.3 représente les dernières 200 ms du

<sup>15</sup>“*Last Stable Orbit*” en anglais.

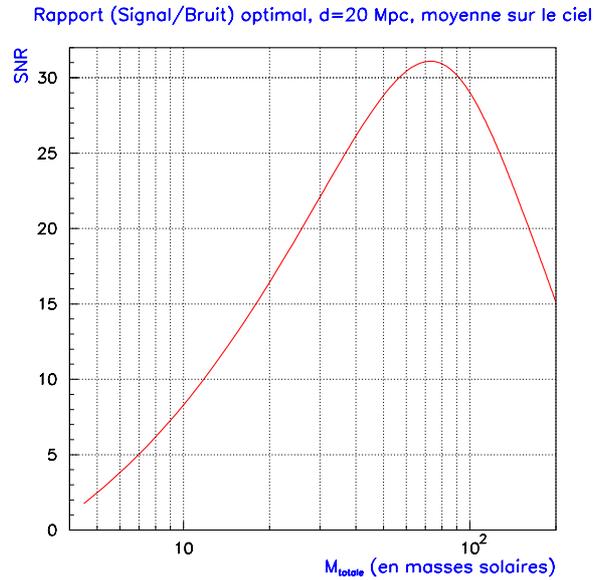
### 1.3. SOURCES D'ONDES GRAVITATIONNELLES ET EXEMPLES DE MÉTHODES DE DÉTECTION

signal gravitationnel à cet ordre pour un système formé de deux étoiles à neutrons (masses  $1.4 M_{\odot}$ ) situé à 100 Mpc : l'amplitude et la fréquence augmentent à mesure que l'instant de coalescence se rapproche.

Comme la forme du signal est (approximativement) connue, la méthode de détection choisie est le **filtrage adapté** (voir l'appendice C) qui a la propriété d'être *optimal* dans ce cas de figure. En supposant une distribution de systèmes binaires *uniforme* dans le ciel, le **rapport signal/bruit** (S/B)  $\rho$  est donné par :

$$\rho = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{6}} \left( \frac{G \mathfrak{M}}{c^3} \right)^{5/6} \frac{\pi^{-2/3} c}{D} \sqrt{\int_{f_{\min}}^{f_{\text{LSO}}} df \frac{f^{-7/3}}{S_{\text{Virgo}}(f)}} \quad (1.62)$$

où  $f_{\min}$  est la fréquence de coupure inférieure dépendant du niveau d'atténuation du bruit sismique et de la stratégie de détection – plus  $f_{\min}$  est faible, plus le temps d'intégration est long, ce qui nécessite une puissance de calcul plus importante tout en permettant d'obtenir un meilleur rapport S/B.



**Figure 1.4:** Evolution du rapport S/B (1.62) en fonction de la masse totale du système binaire à la distance de l'amas Virgo ( $\sim 20$  Mpc). Le modèle choisi pour le bruit de Virgo est celui présenté dans [41] avec les valeurs numériques suivantes :  $f_{\min} = 15$  Hz,  $S_{\text{pendule}} = 1.2 \cdot 10^{-36}$  Hz<sup>4</sup>,  $S_{\text{miroir}} = 3.6 \cdot 10^{-43}$  et  $S_{\text{shot}} = 3.5 \cdot 10^{-46}$  Hz<sup>-1</sup> ;  $f_{\text{cut}} = 500$  Hz [42]. Il est décrit à l'équation (E.1). Pour effectuer ce calcul, il suffit de connaître le module de la transformée de Fourier du signal. Par contre, en pratique, sa recherche nécessite également (surtout) la connaissance de la phase de l'onde gravitationnelle qui est déterminée par développement limité – cf. équations (1.58) à (1.61). Aussi, pour des masses  $M_{\text{totale}} \gtrsim 15 M_{\odot}$  pour lesquelles la dernière orbite stable de la coalescence est associée à des faibles fréquences (à la hauteur ou en deçà du minimum de la sensibilité du détecteur), les valeurs du rapport S/B optimal atteintes sur ce graphique sont un peu sujettes à caution : l'incertitude sur la phase peut entraîner des pertes importantes sur  $\rho$  ou bien encore le signal physique peut avoir une évolution différente dans cette zone.

La figure 1.4 présente la variation de  $\rho$  en fonction de  $M_{\text{tot}}$  pour le cas où les deux étoiles sont de même masse et situées à 20 Mpc<sup>16</sup>. L'allure de la courbe est due à la compétition entre deux effets :  $\rho \propto M_{\text{tot}}^{5/6}$  tandis que  $f_{\text{LSO}} \propto 1/M_{\text{tot}}$ . La coupure supérieure sur  $M_{\text{tot}}$  est brutale et correspond au moment où  $f_{\text{LSO}}$  atteint  $f_{\min}$ .

Dans cette analyse, les *spins* des deux étoiles et l'excentricité de l'orbite – circularisée par émission d'ondes gravitationnelles – ont été négligés ; les seuls paramètres du système intervenant

<sup>16</sup>La distance estimée de l'amas de galaxies Virgo d'où l'expérience tire son nom.

dans la forme de l'onde sont les masses  $m_1$  et  $m_2$ . A l'ordre newtonien, le signal ne dépend que d'une combinaison d'entre elles; cette dégénérescence est levée en utilisant les développements (P.N.) d'ordres supérieurs.

Comme exposé dans l'appendice C et dans le chapitre 5, le principal inconvénient du filtrage optimal est que le signal cherché doit être très "proche" du modèle pour obtenir un bon rapport S/B; en particulier, pour le signal de coalescence tout déphasage doit être évité. L'ordre 2 (P.N.) apparaît comme suffisamment adéquat pour être utilisé pour générer les **calques**. Néanmoins, une méthode alternative de resommation de Padé des développements (P.N.) a été proposée dans [40] pour les systèmes binaires de masse intermédiaire  $M_{\text{tot}} \lesssim 40 M_{\odot}$  afin d'obtenir une meilleure représentation dans l'espace de Fourier du signal gravitationnel.

L'**espace des paramètres** – i.e. les valeurs physiques admissibles pour les masses des étoiles – est couvert par une méthode de **pavage** (cf. chapitre 5) qui nécessite l'utilisation de plusieurs centaines de milliers de signaux-modèles [42, 43, 44]. La puissance informatique nécessaire pour effectuer cette recherche en temps réel est estimée à 300 GFlops [42]; des méthodes de recherche hiérarchique [45, 46, 47, 48] pourraient diminuer cette valeur.

### 1.3.3 Oscillations de trous noirs

Comme on l'a vu dans la partie précédente, la coalescence de deux astres compacts – étoiles à neutrons, trous noirs – est une source d'ondes gravitationnelles intéressante, d'une part parce que le signal émis est calculable, et d'autre part parce qu'il apparaît suffisamment fort pour être détecté à plusieurs Mpc. Toutefois, nous avons vu que la prédiction obtenue par le développement (P.N.) n'est plus valide au-delà de la dernière orbite stable lorsque les approximations utilisées pour mener le calcul ne sont plus valables, en particulier l'hypothèse de point matériel. Que se passe-t-il ensuite?

La coalescence se poursuit jusqu'à son terme mais le mouvement change de nature: les deux astres *plongent* l'un vers l'autre. Ce régime est caractérisé par une dynamique relativiste non-linéaire et en champ fort qui est très mal connue actuellement. Ainsi, les ondes gravitationnelles émises au cours de cette phase ne sont pas prédictibles mais leur détection éventuelle – par exemple en "coïncidence" avec la phase spirale d'une coalescence – apporterait des informations précieuses sur ce domaine de la Relativité Générale encore très mal connu.

Néanmoins, des calculs numériques récents [49] ont conclu que dans le cas de deux trous noirs de masses voisines, le signal émis au cours de la dernière phase de la coalescence est simplement la continuation du précédent. Au lieu de s'interrompre à  $R_{\text{LSO}} \approx 6 G M_{\text{totale}} / c^2$ , l'expression est valable jusqu'à  $R \sim 3 G M_{\text{totale}} / c^2$ , ce qui correspond à un ou deux cycles supplémentaires.

Le résultat final de la violente collision des deux étoiles est le plus souvent un **trou noir**. Il existe un *unique* modèle de trou noir stationnaire dans le vide, la métrique correspondante a été découverte en 1963 par Kerr. Elle est entièrement déterminée par trois paramètres:

- la masse  $M_{\text{BH}}$  du trou noir;
- le moment cinétique par unité de masse  $a_{\text{BH}}$  défini par

$$a_{\text{BH}} = \frac{c \times (\text{moment angulaire})}{G M_{\text{BH}}^2} \quad (1.63)$$

- la charge du trou noir.

Le cas particulier d'un trou noir de Schwarzschild s'obtient en posant  $a_{\text{BH}} = 0$  (pas de rotation) et en prenant la charge nulle.

Une fois formé, le trou noir retrouve peu à peu une configuration stationnaire en émettant de l'énergie, en particulier sous forme d'ondes gravitationnelles. Ce rayonnement peut être décrit sous forme d'une superposition de **modes propres de vibration** du trou noir [50, 51]; ceux-ci sont caractérisés par une fréquence  $f$  et un temps caractéristique  $\tau$ . Le mode favorisé par la phase de coalescence (quadrupolaire et suivant la rotation du système binaire) est également celui qui s'amortit le plus faiblement [52]. Pour simplifier l'analyse, on peut donc supposer qu'après une éventuelle phase transitoire – incluse dans la partie inconnue du signal – l'émission est **quasi-monochromatique**:

$$h(t) \propto \begin{cases} \exp(-\frac{t}{\tau}) e^{2i\pi f t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.64)$$

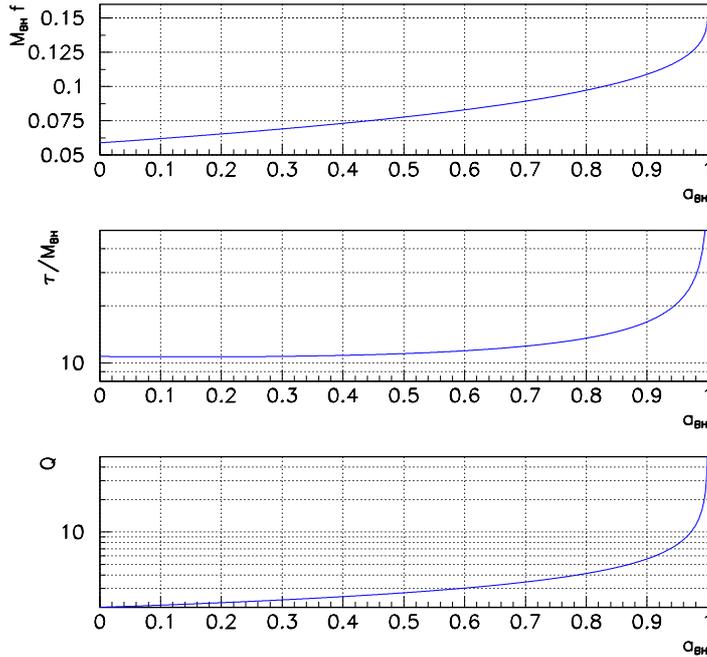
### 1.3. SOURCES D'ONDES GRAVITATIONNELLES ET EXEMPLES DE MÉTHODES DE DÉTECTION

[53] a montré qu'à la donnée  $(f, \tau)$  correspond un unique couple  $(M_{\text{BH}}, a_{\text{BH}})$ ; de plus, les relations liant les paramètres du trou noir et du signal s'expriment de façon *analytique* à 10% près [52, 54]. En introduisant le **facteur de qualité**  $Q = \pi f \tau$ , on a dans les unités géométriques ( $G = c = 1$ ):

$$Q \approx 2(1 - a_{\text{BH}})^{-9/20} \quad (1.65)$$

$$f \approx \frac{1}{2\pi M_{\text{BH}}} \left[ 1 - 0.63 (1 - a_{\text{BH}})^{3/10} \right] \quad (1.66)$$

Ces relations sont présentées sur la figure 1.5.



**Figure 1.5:** Relations entre  $Q$ ,  $f$ ,  $M_{\text{BH}}$  et  $a_{\text{BH}}$  pour un trou noir de Kerr oscillant dans les unités géométriques.

Ainsi, détecter un tel rayonnement donnerait un accès direct aux caractéristiques du trou noir émetteur. De plus, s'il est possible de relier cet événement à un signal de coalescence enregistré dans les secondes précédentes, cela validerait le modèle théorique de formation du trou noir (et prouverait leur existence!) tout en apportant des informations sur la physique du phénomène par comparaison des paramètres du système binaire avec ceux estimés à l'aide des équations (1.65) et (1.66).

Par exemple, des calculs numériques récents [49] ont cherché à reproduire l'évolution complète du signal gravitationnel produit par la coalescence de deux astres compacts de masses **voisines**: la phase de *spirale*, la coalescence proprement dite, et le retour à l'équilibre du trou noir nouvellement formé. Notant  $M_{\text{tot}}$  la masse totale des deux étoiles, les résultats de l'étude sont résumés dans la table 1.2. Environ 2% de l'énergie a été émise lors de la coalescence; le trou noir formé a un paramètre de rotation assez élevé.

La forme du signal étant connue, la méthode du filtrage optimale apparaît comme la plus adaptée pour sa détection; nous reviendrons plus en détail sur sa mise en oeuvre dans la section 5.5.

#### 1.3.4 Supernovae

Historiquement, les supernovae ont été pendant longtemps considérées comme les sources les plus prometteuses d'ondes gravitationnelles à cause d'une surestimation plus qu'optimiste de la fraction d'énergie rayonnée  $E_{\text{OG}}$  sous cette forme lors de l'effondrement: jusqu'à 10% de l'énergie de masse

$a_{\text{BH}}$	Energie	$f$	$Q$
0.7952	$0.9761 M_{\text{tot}} c^2$	$0.0951 c^3 / G M_{\text{tot}}$	3.833

**Tableau 1.2:** Caractéristiques du trou noir formé après la coalescence d’un système binaire. Les différences entre les valeurs présentées et les expressions (1.65) et (1.66) proviennent des termes de correction – symbolisés par les symboles “ $\approx$ ” – calculés dans [54]. Ces paramètres peuvent être comparés avec la figure 1.5.

totale  $M_{\text{SN}} c^2$ ! En fait, comme l’ont montré des simulations [55], le rayonnement gravitationnel est probablement beaucoup plus faible :

$$\frac{E_{\text{OG}}}{M_{\text{SN}} c^2} \ll 10^{-6} \quad (1.67)$$

Par la formule des quadrupôles (1.44) ou l’équation (1.36) on a vu que l’émission d’ondes gravitationnelles était reliée aux dérivées des moments quadrupolaires, lesquels sont proportionnels au moment d’inertie  $I$  et au facteur d’asymétrie  $a$ . Or,  $I$  décroît pendant l’effondrement car le coeur se contracte tandis que  $a$  augmente parce que le coeur s’aplatit de plus en plus. Malheureusement, le produit  $I \times a$  reste *constant* à 10% près; cette faible variation réduit d’un ordre de grandeur l’amplitude du rayonnement émis (par rapport à une situation où cette compensation serait absente) et de deux ordres de grandeurs l’énergie gravitationnelle émise [56].

L’explosion d’une supernova est un événement extrêmement lumineux – de l’ordre de  $10^9 L_{\odot}$  ( $L_{\odot} = (3.846 \pm 0.008) 10^{26}$  W), autant que la galaxie hôte – et de faible durée (l’effondrement du coeur dure quelques millisecondes). La seule méthode actuelle de détection est optique; une fois celle-ci effectuée, l’étude des **courbes de lumière** qui peuvent s’étendre sur plusieurs mois et celle du spectre d’émission permettent de classer la supernova en type I ou II.

Les modèles de supernovae de type I impliquent tous des systèmes binaires de naines blanches, des étoiles d’environ  $1 M_{\odot}$  qui représentent le stade ultime de l’évolution d’une étoile de masse inférieure à  $8 M_{\odot}$ , une fois qu’elle a épuisé son combustible. Le type Ia est utilisé en cosmologie comme “*chandelle standard*” pour mesurer les distances proches ( $z \lesssim 1.2$ ) mais son mécanisme de formation – une explosion thermonucléaire de l’un des deux astres qui a accrété suffisamment de matière de son compagnon pour atteindre la masse de Chandrasekhar  $M_{\text{Chandra}}$  – n’est pas propice à l’émission d’une grande quantité d’ondes gravitationnelles: soit l’étoile est détruite par l’explosion, soit seules les couches périphériques sont expulsées.

Le scénario du type Ib est complètement différent: lors du mouvement de spirale des deux étoiles, la moins massive est disloquée par les forces de marée et forme un disque autour de la naine blanche résultante. Celle-ci accrète de la matière et du moment cinétique jusqu’à  $M_{\text{Chandra}}$ , masse au-delà de laquelle aucune configuration stable n’existe; il y a donc effondrement de l’étoile comme pour le type II et l’émission de rayonnement gravitationnel est du même ordre que celle associée à ce dernier mécanisme que nous allons détailler maintenant.

Une étoile géante rouge – de masse supérieure à  $8 M_{\odot}$  – brûle tout son combustible nucléaire en quelques millions d’années. Le coeur de  $\sim 1.4 M_{\odot}$  est formé des éléments les plus stables (nickel et fer) et est instable: une fluctuation de la densité de masse augmente plus le champ gravitationnel que le champ de pression; celui-ci ne peut donc plus contrebalancer la gravité et le coeur s’effondre alors sur lui-même. La densité augmente et des neutrinos sont produits par capture  $\beta$  des électrons par des noyaux. Cette émission hors du coeur s’arrête lorsque le libre parcours moyen des  $\nu_e$  devient trop faible par rapport au rayon de l’étoile.

Une fois la densité nucléaire atteinte ( $\sim 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup>), l’effondrement se termine car la compression ne peut plus se poursuivre; par un effet de rebond, une onde de choc se propage vers la surface de l’étoile et expulse ses couches externes. Le milieu redevient alors brusquement transparent à sa périphérie pour les neutrinos et un court flash de  $\nu_e$  est émis, suivi par une production thermique de paires  $\nu\bar{\nu}$  qui dure plusieurs secondes.

Le coeur devient finalement une **étoile à neutrons** qui, par conservation du moment angulaire et du flux magnétique, a une vitesse de rotation et un champ magnétique plus important que l’astre dont il est issu. Si l’axe magnétique n’est pas parallèle à l’axe de rotation, il s’agit d’un **pulsar**.

Ce scénario est le seul détectable optiquement grâce à l’expulsion des couches externes de l’étoile. Néanmoins, il existe deux autres possibilités d’évolution [56], les supernovae

- “*silencieuses*” :  
le coeur s’effondre, le rebond a lieu mais les couches externes ne sont pas expulsées. La jeune étoile à neutrons formée accrète alors de la matière de son enveloppe et s’effondre en trou noir une fois qu’elle atteint la masse critique  $M_{\text{Chandra}}^{17}$ . Le rayonnement gravitationnel peut être très intense si l’accrétion brise la symétrie axiale de l’étoile ; une seconde émission a lieu lors de la formation du trou noir, quelques secondes plus tard.
- “*avortées*” :  
l’effondrement débouche directement sur un trou noir. L’émission d’ondes gravitationnelles est alors similaire aux oscillations de trous noirs présentées au paragraphe 1.3.3.

De par la courte vie de l’étoile-mère, les supernovae de type II n’existent que dans les galaxies jeunes ou dans celles qui présentent des zones de formation d’étoiles. La table 1.3 [58] présente les taux estimés de supernovae selon le type de la galaxie (*Elliptique*, *Spirale* ou *Irrégulière*) ; on remarque clairement que les supernovae de type II sont observées essentiellement dans les deux derniers types.

Type de galaxie	E-S0	S0a-Sb	Sbc-Sd	Sm, Irr
Taux de SN de type II	< 0.02	$0.24 \pm 0.11$	$0.86 \pm 0.35$	$0.97 \pm 0.60$

**Tableau 1.3:** Taux de Supernova de type II selon le type de galaxie exprimé en nombre de supernovae par siècle et par  $10^{10} L_{\odot}^H$  ce qui revient à normaliser par la masse de la galaxie car la luminosité d’une galaxie est à peu près proportionnelle à sa masse :

$$\frac{\log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right)}{\log\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)} \approx \begin{cases} \frac{1}{7.5} & \text{pour les galaxies irrégulières et spirales} \\ \frac{1}{30} & \text{pour les galaxies elliptiques} \end{cases}$$

Le taux de supernovae est donc relativement faible : étant donné la répartition des galaxies proches, un taux de 1 supernova de type II / an n’est atteint qu’à une distance de 12 Mpc et on peut en espérer entre 2 et 3 par an si on inclut en plus l’amas Virgo – cf. figure 1.6 issue de [59]. Dans la Voie Lactée, 9 supernovae ont été visibles dans les deux derniers millénaires (la dernière fut découverte par Kepler en 1604, celle de 1006 atteint 10% de la brillance de la Lune) mais on estime que 9 sur 10 échappent à la détection, masquées par la poussière interstellaire ou perdues dans l’intensité lumineuse du noyau galactique. Un taux réaliste pour notre Galaxie est donc d’une supernova tous les trente ans environ, 70% d’entre-elles étant de type II.

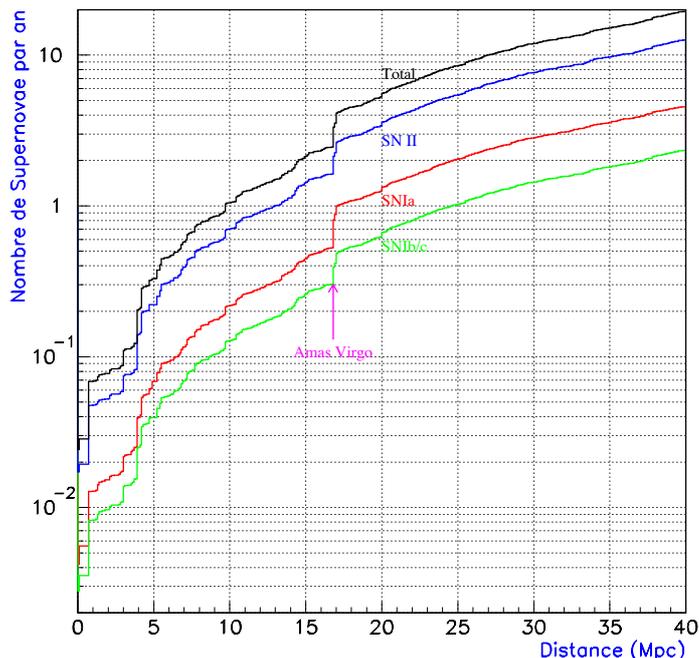
Il serait a priori possible que les supernovae silencieuses et avortées aient un taux d’occurrence supérieur. Néanmoins, aucun événement de ce type n’ayant encore été observé dans les détecteurs de neutrinos sur une période d’une vingtaine d’années, on peut en conclure que ce taux est vraisemblablement au mieux du même ordre de grandeur que celui des supernovae visibles.

Au contraire de la plupart des autres sources présentées dans ce chapitre, il n’est pas encore possible de prédire la forme exacte du rayonnement gravitationnel d’une supernova. Si le scénario général a été globalement vérifié lors de l’étude de l’explosion de SN 1987A dans le Grand Nuage de Magellan [60], il est si complexe que seules des méthodes numériques peuvent être utilisées pour suivre l’évolution de l’explosion et en particulier l’émission d’ondes gravitationnelles.

Elles reposent toutes sur les mêmes approximations (résumées par exemple dans [56]), la plus critique étant que l’accélération du fluide relativiste est obtenue par la différence des gradients de pression et du champ gravitationnel qui sont du même ordre de grandeur et qui doivent donc être estimés avec précision. Cela explique que le signal obtenu soit très “*modèle-dépendant*” et que l’amplitude du signal puisse varier d’un ou deux ordres de grandeur [56, 57, 61, 62, 63].

La forme inconnue des ondes gravitationnelles de supernovae empêche d’utiliser la méthode du filtre optimal pour la détection. Il faut au contraire des algorithmes **robustes** (i.e. assez peu sensibles aux détails du signal), aptes à détecter des **caractéristiques communes** des formes d’ondes – comme par exemple le pic principal ou une atténuation en sinusoïde amortie – et avec

<sup>17</sup>Cette masse de Chandrasekhar est différente de celle mentionnée un peu plus haut à propos des supernovae de types Ia. Elle vaut de l’ordre de  $3M_{\odot}$  et non pas environ  $1.4M_{\odot}$ . La différence s’explique par le fait que l’effondrement gravitationnel est contrebalancé par la pression d’un gaz de Fermi, composé dans un cas d’électrons (SN Ia) et dans l’autre cas de neutrons.



**Figure 1.6:** Evolution du taux de supernova (en nombre d'événements par an) en fonction de la distance d'observation. Ce graphe est tiré de [59] et a été obtenu à partir du catalogue de Tully [64] recensant les galaxies “proches”.

une **bonne localisation temporelle** car la durée du signal utile est de l'ordre de quelques millisecondes au plus. Par opposition au filtrage adapté, on parlera ici de **filtrage sous-adapté** car les performances de ces algorithmes pour la détection d'un signal donné seront bien entendu inférieures à celle obtenue par filtrage optimal, dans le cas d'une méthode linéaire. Nous reviendrons plus en détail sur ces méthodes au chapitre 5 : le groupe du LAL étant responsable de ce problème au sein de la collaboration Virgo, la définition et l'étude d'algorithmes répondant à ces spécifications a constitué une part importante de cette thèse.

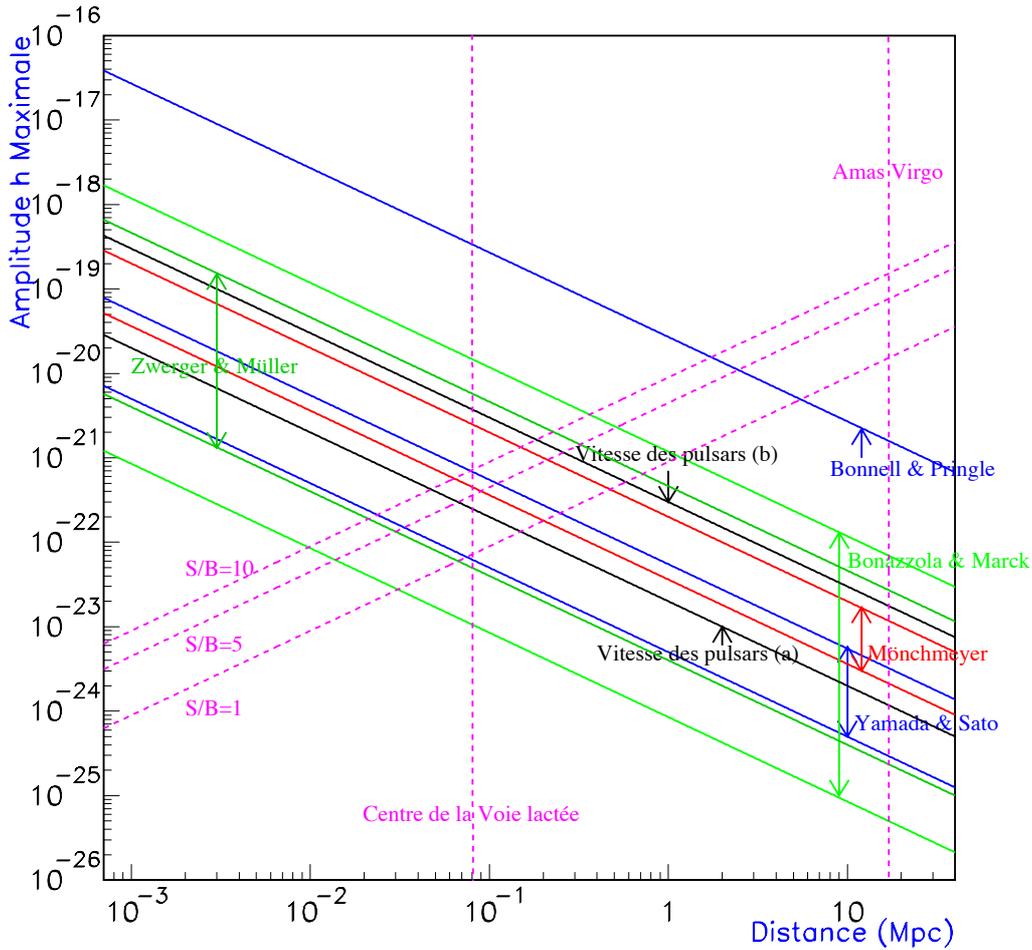
Le préliminaire indispensable de cette tâche était de se doter d'une banque de signaux “plausibles” de supernovae utilisable pour les tests de détection. Depuis 1997, nous utilisons les simulations de T. Zwerger et E. Müller [63] : 78 signaux correspondant à différentes conditions initiales pour la rotation et la distribution de moment angulaire de l'étoile. En plus de la cohérence de nos analyses successives basées sur les mêmes sources, ce choix se justifie par le fait que les amplitudes gravitationnelles obtenues  $-4 \cdot 10^{-25} \lesssim h_{\max} \lesssim 4 \cdot 10^{-23}$  @ 10 Mpc – sont intermédiaires entre les prédictions les plus pessimistes [56, 61] et les plus optimistes [62].

La figure 1.7 compare les principales amplitudes de ces signaux de supernovae. Pour rendre ce graphique plus concret, les distances du centre de la Galaxie et de l'amas Virgo ont été indiquées ainsi que trois “isocourbes” donnant la relation amplitude/distance à satisfaire pour obtenir un rapport S/B compris de 1, 5 ou 10 respectivement. Pour ce calcul, on a fait l'hypothèse que le RMS du bruit du détecteur était de  $4 \cdot 10^{-21}$  et que le signal durait de l'ordre de 1 ms, échantillonné à 20 kHz.

Deux enseignements peuvent être tirés immédiatement de ce graphique : d'une part, la détection d'un événement de type supernova est vraisemblable s'il se produit dans la Galaxie ; d'autre part, à partir de 1 Mpc (et *a fortiori* dans l'amas Virgo), les signaux sont trop faibles pour espérer une détection avec la première génération d'instruments.

Après avoir parlé de l'amplitude de ces ondes gravitationnelles, on en vient naturellement à considérer leurs formes. Les signaux “Zwerger-Müller” peuvent être classés en trois catégories :

- Type I : un pic principal suivi d'une décroissance en forme de sinusoïde amortie ;
- Type II : quelques pics distincts de plusieurs millisecondes ;



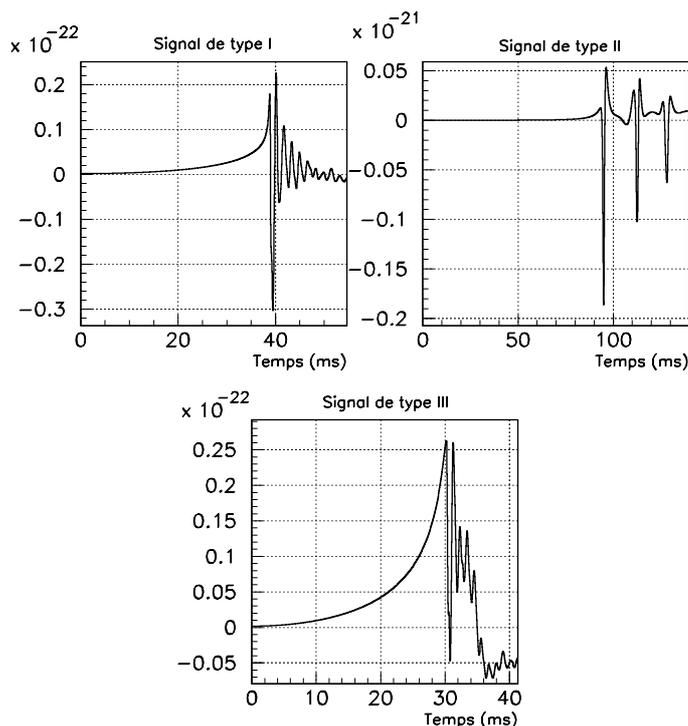
**Figure 1.7:** Comparaison de différentes amplitudes prédites pour des signaux de supernovae. On peut noter de grandes différences dans les niveaux prédits : jusqu'à plusieurs ordres de grandeur selon les modèles. Les simulations de Zwirger et Müller ont une position moyenne dans ce schéma. La perturbation gravitationnelle étant inversement proportionnelle à la distance, la relation liant ces deux grandeurs est linéaire en échelle "log-log". Les droites verticales marquent la position du Centre Galactique et de l'amas Virgo tandis que celles en pointillés montrent la relation amplitude/distance à satisfaire pour obtenir un rapport S/B de 1, 5 ou 10 en supposant que la durée du signal est 1 ms et que le RMS du bruit vaut  $4 \cdot 10^{-21}$ . Ce graphe est adapté de [59].

- Type III : absence de pic marqué mais des oscillations rapides ( $\sim 1$  kHz).

La figure 1.8 présente un exemple de formes d'onde pour chacun de ces types.

Si, comme nous venons de le voir, la découverte d'ondes gravitationnelles provenant d'une supernova sera sans doute difficile au moins avec la première génération de détecteurs, elle aurait un grand intérêt.

- En *astrophysique* tout d'abord, en apportant des informations sur la distribution de moment angulaire de l'étoile-mère, ou sur les équations d'état de la matière aussi bien lors de la phase d'effondrement que pour l'étoile à neutrons résultante.
- En *physique des particules* également : 98% de l'énergie émise par une supernova l'est sous forme de neutrinos. Si l'explosion est galactique, le signal gravitationnel sera vraisemblablement détecté et suivi quelques millisecondes après par le flux de neutrinos. Une coïncidence de ce type permettra de déterminer les masses absolues des neutrinos avec une précision infé-



**Figure 1.8:** Formes d'onde typiques des types I, II et III appartenant au catalogue de 78 signaux de T. Zwirger et E. Müller [63]; amplitudes à 1 Mpc.

rieure à  $1 \text{ eV}/c^2$  – ou au minimum de diminuer les valeurs des limites supérieures actuelles, voir [65] et le paragraphe 7.5.

### 1.3.5 Sources périodiques

La détection des sources quasi-périodiques nécessite une intégration des données sur de longues périodes d'observation pour augmenter le rapport signal sur bruit (S/B) initialement très faible. Il faut donc prendre en compte l'effet Doppler induit par le mouvement de la Terre ainsi que les variations de la fréquence  $f$  de l'onde gravitationnelle mesurées par le paramètre de *spindown*  $\kappa = f/\dot{f}$ . Si les **pulsars** ont été depuis longtemps considérés comme des émetteurs potentiels d'ondes gravitationnelles, de nouvelles sources sont apparus récemment, comme les **jeunes étoiles à neutrons** [66, 67] ou les **binaires X** [56, 68].

- Pulsars :

Un pulsar est une étoile à neutrons, née de l'explosion d'une supernova, et que l'on peut détecter grâce à des “flashes” d'ondes électromagnétiques dont le cône d'émission balaye la Terre à intervalles réguliers un peu comme le fait un phare. Lors de la phase de refroidissement, la forme de l'astre peut s'écarter de celle d'un ellipsoïde de révolution. Cette déformation est quantifiée par un paramètre  $\epsilon$  défini par  $\epsilon = \frac{|I_{xx} - I_{yy}|}{I_{zz}}$  où  $z$  est l'axe de symétrie de l'étoile  $x, y$  deux directions perpendiculaires et  $I$  le moment d'inertie; elle se perpétue une fois la surface de l'étoile figée et refroidie et est à l'origine de l'émission d'ondes gravitationnelles, principalement à deux fréquences, celle de rotation du pulsar  $f_{\text{orb}}$  et son double<sup>18</sup>. Le paramètre d'asymétrie  $\epsilon$  est contraint par l'effort maximal que l'écorce de l'étoile à neutrons peut supporter [70]:  $\epsilon < 10^{-5}$  ce qui limite considérablement l'intensité du rayonnement. Son amplitude caractéristique  $h_{\text{pulsar}}$  est donnée par [71, 72, 73]:

<sup>18</sup>En fait la fréquence qui intervient est  $f_{\text{orb}} - f_{\text{precession}}$  où  $f_{\text{precession}}$  est la fréquence de précession du pulsar [69], en général très petite devant la fréquence orbitale.

$$h_{\text{pulsar}} \approx 10^{-25} \left( \frac{f_{\text{orb}}}{1 \text{ kHz}} \right)^2 \left( \frac{\epsilon}{10^{-6}} \right) \left( \frac{I_{zz}}{10^{38} \text{ kg m}^2} \right) \left( \frac{10 \text{ kpc}}{D} \right) \quad (1.68)$$

La valeur de  $I_{zz}$  indiquée est typique d'une étoile à neutrons de masse  $1.4 M_{\odot}$ .

- Jeunes étoiles à neutrons :

Dans le cas où la jeune étoile a un mouvement de rotation suffisamment rapide, des instabilités appelées “*r-modes*” dues à la réaction au rayonnement gravitationnel peuvent se développer. L'essentiel du moment angulaire est alors dissipé sous forme d'ondes gravitationnelles en un temps de l'ordre d'une année pendant que l'étoile refroidit. La luminosité gravitationnelle peut être élevée :

$$h_{(\text{jeune NS})} \lesssim 10^{-24} \left( \frac{f_{\text{orb}}}{1 \text{ kHz}} \right)^3 \frac{20 \text{ Mpc}}{D} \quad (1.69)$$

et  $\kappa \approx (580 \text{ secondes}) \left( \frac{1 \text{ kHz}}{f_{\text{orb}}} \right)^6$

- Binaires X :

Il s'agit d'une étoile à neutrons appartenant à un système binaire en rotation et accrétant de la matière à partir d'un compagnon. Ce processus apporte de l'énergie – réémise sous forme de rayons X – et du moment angulaire à l'étoile à neutrons ; si les asymétries créées par l'accrétion sont suffisantes, une grande partie de ce moment est transformée en ondes gravitationnelles. La rotation de l'étoile s'accélère jusqu'à ce qu'un équilibre se forme ou s'établisse entre les processus de gain et de perte de moment angulaire ; la fréquence d'émission  $f_{\text{OG}}$  du rayonnement gravitationnel est alors voisine de 500 Hz, et son amplitude est donnée par

$$h_{(\text{binaire X})} \sim 10^{-26} \left( \frac{R}{10 \text{ km}} \right)^{3/4} \left( \frac{M}{1.4 M_{\odot}} \right)^{-1/4} \sqrt{\frac{F}{10^{-8} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}}} \sqrt{\frac{600 \text{ Hz}}{f_{\text{OG}}}} \quad (1.70)$$

avec  $R$  le rayon et  $M$  la masse de l'étoile à neutrons et  $F$  le flux de rayon X arrivant sur terre.

L'idéal est de procéder à une recherche *aveugle* dans tout le ciel et dans une large gamme de fréquences  $f_{\text{OG}}$  et de temps de *spindown*  $\kappa$ . Si la position de la source dans le ciel est connue, le rapport S/B augmente comme  $\sqrt{T}$  où  $T$  est le temps d'intégration  $T$ , une fois les données corrigées de l'effet Doppler. Par contre, le nombre de configurations à tester pour assurer qu'aucune source n'échappe à la détection est proportionnel à  $T^5$  [72] pour  $T \geq 1$  jour : plus le temps d'intégration est grand, plus le modèle doit être proche du signal réel pour que la corrélation soit significative. La puissance informatique nécessaire augmentant de la même manière, il faut imaginer des stratégies de détection plus réalistes.

Tout d'abord, tout comme pour les coalescences de systèmes binaires, une recherche hiérarchique à deux étapes [74, 75] (la première est grossière ; elle vise à détecter des candidats qui sont ensuite suivis plus finement sur des durées plus importantes) permet de réduire le temps de calcul d'un facteur 3 à 5. Ensuite, deux tendances principales s'affrontent.

La première, plus pratique, souhaite se limiter à des recherches “spécialisées”, basées sur des critères *a priori* et correspondant à des espaces de paramètres de volumes réduits :

- pour les pulsars, le Centre Galactique. La grande majorité de ceux qui ont été découverts se trouvent dans la Voie Lactée et, d'après des simulations récentes [76], 90% des pulsars galactiques seraient concentrés dans une bande de  $3^\circ$  d'épaisseur autour du plan galactique ;
- pour les jeunes étoiles à neutrons, la position des supernovae détectées optiquement ;
- pour les binaires X, les objets observés par émission électromagnétiques comme Sco X-1.

Cela permet de procéder à une recherche assez complète pour les paramètres  $f_{\text{orb}}$  et  $\kappa$ , tout en nécessitant une puissance de calcul “raisonnable” pour les années à venir –  $\sim 1$  TFlop. Le défaut de cette stratégie est qu’elle ne permettra pas de détecter des sources mêmes très proches situées dans d’autres régions du ciel; c’est le principal argument avancé en faveur de la seconde stratégie, une recherche dans tout le ciel en espérant que le “hasard” aura une fois de plus bien fait les choses, comme ce fut souvent le cas en science expérimentale! Au sein de la collaboration américaine LIGO, le choix semble s’orienter vers le premier scénario [74] tandis que le débat n’est pas clos dans Virgo.

### 1.3.6 Fond Stochastique

Un fond de rayonnement gravitationnel **stochastique**<sup>19</sup> (i.e. d’évolution temporelle imprédictible) similaire au rayonnement “CMB” à 2.7 K est susceptible d’être détecté par un détecteur interférométrique – éventuellement de seconde génération – comme Virgo. Il peut avoir deux origines principales :

- **cosmologique**

Le fond cosmologique aurait été émis peu de temps après le Big-Bang, lors du découplage des gravitons d’avec le plasma primordial. Moins la particule interagit, plus le niveau d’énergie où l’équilibre thermique est rompu est élevé : pour le graviton, la température de l’univers  $T$  était alors de l’ordre de la masse de Planck –  $M_{\text{Planck}} \sim 10^{19}$  GeV – et il s’était écoulé environ  $10^{-44}$  seconde depuis le *Big Bang*.

Par comparaison, les neutrinos se sont découplés pour  $T \sim 1$  MeV tandis que le fond de rayonnement cosmologique à 2.7 K correspond au moment de la **recombinaison**, quand les électrons et les protons commencent à interagir. A la place du plasma où nucléons, électrons et photons étaient en équilibre thermique, se forme la matière neutre qui se couple très peu avec les photons; ceux-ci voient leur libre parcours moyen augmenter très rapidement et ils cessent d’interagir. Un flash de lumière est alors émis correspondant au dernier instant d’interaction, 300 000 ans environ après le *Big Bang* et à une température  $T \approx 0.35$  eV.

Donc cette découverte serait une contribution essentielle à la physique des *très* hautes énergies car les caractéristiques de ce rayonnement cosmologique gravitationnel (par exemple le spectre) sont le reflet de l’état de l’univers au moment de son émission, instant si proche du *Big Bang* qu’il est complètement inaccessible à l’expérience autrement que par ce biais. Toutefois, les fréquences caractéristiques de ce rayonnement primitif semblent être bien supérieures à la bande de détection des interféromètres. De plus, une telle émission demande qu’il y ait équilibre thermique avant le découplage, ce qui est loin d’être théoriquement assuré à cette échelle d’énergie.

D’autres modèles théoriques de production ont été proposés : **inflation**, **cosmologie** basée sur la **théorie des cordes**, **cordes cosmiques** ou encore **transitions de phase**.

- **astrophysique**

i.e. une **superposition incohérente** d’ondes gravitationnelles d’un type donné provenant de sources proches indétectables séparément : formation de trous noirs après une explosion de supernova, instabilités dans des fluides relativistes... Le caractère stochastique de cette émission correspond à une grande valeur du paramètre  $\Lambda$ , appelé “*cycle utile*” et défini par

$$\Lambda = \frac{\text{Durée typique du signal}}{\text{Temps séparant deux événements}} \quad (1.71)$$

Pour les “r-modes” déjà considérés au paragraphe précédent,  $\Lambda \sim 10^9$  ce qui en font des bons candidats pour une seconde génération de détecteurs car l’intensité prédite pour ce rayonnement est un ordre de grandeur en dessous du niveau prévu pour les interféromètres actuels [78] – cf. Eq. (1.75).

Au caractère stochastique de ce rayonnement, on ajoute des hypothèses supplémentaires pour faciliter sa description : isotropie, invariance temporelle... Il en résulte que cette émission est essentiellement décrite par son spectre de fréquence  $S_{\text{stoch}}$  : un fond d’ondes gravitationnelles à une

---

<sup>19</sup>Le lecteur intéressé par ce thème pourra consulter la synthèse [77] dans laquelle j’ai trouvé l’essentiel de la matière de cette partie.

### 1.3. SOURCES D'ONDES GRAVITATIONNELLES ET EXEMPLES DE MÉTHODES DE DÉTECTION

fréquence  $f$  donnée se manifestera par un excès du niveau de bruit dans le détecteur. Néanmoins, par analogie avec les notations en vigueur en cosmologie, on préfère le caractériser par une densité d'énergie normalisée par la densité critique de l'univers  $\rho_c$  :

$$\Omega_{\text{stoch}} = \frac{1}{\rho_c} \frac{\pi}{2G} f^3 S_{\text{stoch}}(f) \quad (1.72)$$

$$\text{avec } \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad H_0 \text{ étant la constante de Hubble} \quad (1.73)$$

Pour éviter que les incertitudes pesant sur la valeur exacte de  $H_0$  ne se répercutent sur la densité d'énergie des ondes gravitationnelles, on s'intéresse plutôt à la quantité  $h_0^2 \Omega_{\text{stoch}}$  – indépendante de la valeur de la constante de Hubble – où  $h_0 = \frac{H_0}{100 \text{ km/s/Mpc}}$ .

Comme pour les sources continues présentées précédemment, la recherche du fond stochastique s'opère par intégration sur un long temps  $T$ . Si la détection est possible dans un seul détecteur, la stratégie optimale consiste à corrélérer les données d'au moins deux interféromètres. Leur complémentarité dépend de leurs positions sur la Terre ainsi que de leurs orientations respectives et elle est caractérisée par une fonction de corrélation définie dans l'espace de Fourier  $\gamma(f)$ . Si  $S_{\text{bruit}}$  et  $S_{\text{stoch}}$  sont respectivement les densités spectrales des bruits des détecteurs – supposées identiques – et du fond stochastique d'ondes gravitationnelles, le rapport S/B optimal est donné par

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{\text{optimal}} = \left[ \frac{8}{25} T \int_0^{+\infty} df \gamma^2(f) \frac{S_{\text{stoch}}^2(f)}{S_{\text{bruit}}^2(f)} \right]^{1/4} \quad (1.74)$$

Ce rapport S/B apparaît comme la racine carrée de celui que l'on aurait défini de façon similaire à l'équation (C.8). Ce choix s'explique par la volonté d'obtenir une quantité proportionnelle à l'amplitude du signal gravitationnel<sup>20</sup>.

Utiliser les données de deux détecteurs permet d'accéder à une valeur de la densité spectrale du fond stochastique plus faible d'un facteur  $\approx 1.3 \cdot 10^{-4} \lambda \sqrt{\frac{1 \text{ an}}{T}} \sqrt{\frac{1 \text{ Hz}}{\Delta f}}$  avec  $\Delta f$  la bande passante de la corrélation et  $\lambda \geq 1$  un facteur quantifiant la qualité de la corrélation entre les instruments.

Un seuil de détection typique (associé à un taux de fausses alarmes de 5% et une efficacité de détection de 95%) est  $S/B = 1.65$  [79]; comme une seule mesure est obtenue à partir d'une longue période de données ( $T \geq 4$  mois), le taux de fausses alarmes n'est pas critique et le seuil peut être ainsi considérablement abaissé par rapport aux recherches de signaux impulsions ou de faible durée – néanmoins, cette valeur est peut-être un peu faible pour une détection directe. En supposant le spectre du fond stochastique plat – hypothèse raisonnable vu le manque de connaissance théorique dans la physique des très hautes énergies –, la valeur minimale détectable de  $h_0^2 \Omega_{\text{stoch}}$  est donnée par

$$(h_0^2 \Omega_{\text{stoch}})^{\text{min}} \approx \begin{cases} 2 \cdot 10^{-7} \text{ (cas idéal)} \\ 5 \cdot 10^{-6} \text{ (LIGO-LIGO)} \\ 4 \cdot 10^{-6} \text{ (Virgo-LIGO)} \end{cases} \left(\frac{S}{B}\right)^2 \sqrt{\frac{1 \text{ an}}{T}} \quad (1.75)$$

Une seconde génération d'interféromètres pourrait abaisser ce seuil jusqu'à  $10^{-11}$ .

Dans [79], des scénarios impliquant un nombre plus grand de détecteurs sont également étudiés : soit la corrélation directe des sorties, soit une combinaison linéaire *optimale* des corrélations entre les différentes paires d'interféromètres du réseau considéré. Ces simulations prenant en compte les sensibilités plus faibles de GEO 600 et TAMA 300, le gain apporté par ces stratégies plus complexes n'est que de l'ordre de 30% au mieux.

La table 1.4 regroupe quelques prédictions actuelles sur les niveaux de rayonnement gravitationnel stochastique que l'on pourra comparer aux seuils de sensibilité établis ci-dessus pour les différentes configurations de détecteurs.

Dans l'immédiat, aucun modèle théorique ne prédit indépendamment de conditions de production favorables des valeurs de l'ordre de quelques  $10^{-7}$  pour  $h_0^2 \Omega_{\text{stoch}}$ . Néanmoins, les connaissances sur les mécanismes en question sont suffisamment faibles pour espérer une détection avec la première génération de détecteurs, même si elle est plus probable avec des instruments plus

<sup>20</sup>L'autre convention – dépendance quadratique – est utilisée par exemple dans [79].

Mécanisme de production	Inflation	Modèle cosmologique de la théorie des cordes	Cordes cosmiques	r-modes d'étoiles à neutrons
$h_0^2 \Omega_{\text{stoch}}$	$\sim 10^{-13}$	$\sim 10^{-7}$ ou $10^{-6}$	$\sim 10^{-8}$	$\sim 8 \cdot 10^{-8}$ entre 500 et 700 Hz

**Tableau 1.4:** Exemples de prédictions théoriques pour le fond stochastique de rayonnement gravitationnel.

perfectionnés. De plus, contraindre  $\Omega_{\text{stoch}}$  autour de  $10^{-6} - 10^{-7}$  représenterait déjà un grand pas en avant. Par exemple, la “meilleure” limite expérimentale actuelle sur  $\Omega_{\text{stoch}}$  est

$$\Omega_{\text{stoch}}(f_0) \leq 60 \quad \text{pour } f_0 = 907.20 \pm 0.05 \text{ Hz} \quad (1.76)$$

obtenue par corrélation des données des barres Explorer et Nautilus dont les fréquences de résonance ont été égalisées à la valeur  $f_0$  [80]. Ce résultat est une amélioration de la limite supérieure précédente, fixée à 100, et provenant de l'étude des données d'une seule barre résonnante [81].

## Chapitre 2

# Virgo et la détection des ondes gravitationnelles

*The future of gravitational-wave astronomy looks bright (...) (1972)*

*That the quest ultimately will succeed seems almost assured.*

*The only question is when, and with how much further effort. (1983)*

*(...) [I]nterferometers should detect the first waves in 2001 or several years thereafter (...) (1995)*

K. S. Thorne

Dans le chapitre précédent, la théorie des ondes gravitationnelles a été présentée : conséquences de la Relativité Générale, définies dès 1918 par Einstein lui-même, celles-ci n'ont pourtant encore jamais été observées directement. La raison principale de cet échec est la faiblesse générale de l'interaction qui limite les événements potentiellement détectables à une seule famille : les sources astrophysiques... lointaines et aléatoires. Une éventuelle observation nécessite de plus forcément la mesure de grandeurs extrêmement petites comme on le verra dans la suite.

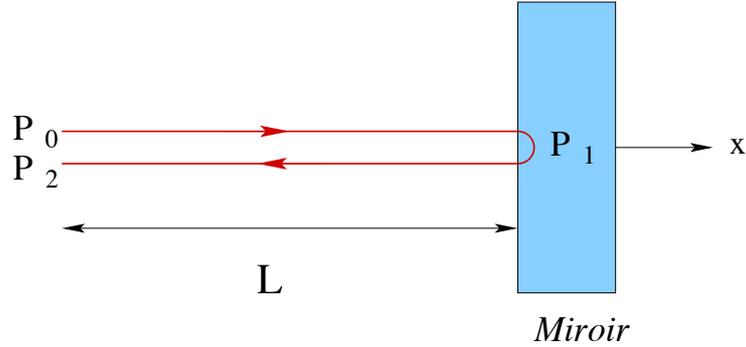
Le critère de la sensibilité apparaît ainsi comme primordial pour un détecteur d'ondes gravitationnelles. Mais, prise isolée, cette exigence préalable est loin d'être suffisante : il faut pouvoir exploiter cette possibilité, i.e. être en mesure, après analyse, d'isoler un signal éventuel du bruit de fond. Or la complexité de ce dernier croît en même temps que s'améliore l'instrument ! Il ne sert à rien de limiter la description d'un détecteur à sa sensibilité en terme d'onde gravitationnelle ; en parallèle, il faut détailler les différents bruits qui "polluent" la mesure et expliquer comment s'en affranchir ou les réduire au maximum. Seule la connaissance simultanée des deux informations permet de juger la qualité potentielle d'un instrument et de réfléchir alors à sa faisabilité éventuelle. Dans ce chapitre, nous allons essayer de suivre cette ligne de conduite en présentant les détecteurs interférométriques et plus particulièrement l'expérience **Virgo**, collaboration franco-italienne au sein de laquelle j'ai effectué ce travail de thèse.

Depuis une quarantaine d'années, des équipes de scientifiques cherchent à mettre au point des appareils susceptibles de réussir la première détection directe des ondes gravitationnelles. Parmi tous les types de détecteurs envisagés, seul un instrument basé sur un **interféromètre de Michelson** apparaît à l'heure actuelle capable de garantir à la fois une sensibilité suffisante et un niveau de bruit acceptable – et ce même si des groupes travaillent sur des détecteurs "*résonnants*" sur lesquels nous reviendrons brièvement à la fin de la description générale des interféromètres.

Virgo est donc basé sur la mesure des franges d'interférence de deux faisceaux issus d'une même source laser, séparés puis recombinaés après propagation dans des cavités optiques. La présentation de cette méthode de détection permettra de dégager les principaux paramètres quantifiant la sensibilité d'un tel instrument ce qui nous amènera naturellement à chercher de quelle manière les améliorer. En effet, au-delà de la découverte potentielle des ondes gravitationnelles, la mise au point du détecteur Virgo représente à elle seule un formidable challenge dans la mesure où chacune de ses composantes nécessite la réalisation d'équipements dont les contraintes sont aux limites – voire au-delà ! – des savoir-faire techniques actuels : qu'un seul de ces sous-systèmes ne parvienne pas à remplir ses spécifications et c'est le fonctionnement global de la machine qui en sera affecté.

## 2.1 Détection interférométrique

### 2.1.1 Effet d'une onde gravitationnelle sur une cavité optique



**Figure 2.1:** Propagation d'un faisceau laser et réflexion sur un miroir.

On s'intéresse à la propagation d'un rayon laser dans une **cavité optique** alignée dans la direction  $\vec{e}_x$  (cf. Figure 2.1) et on souhaite mesurer la perturbation de son trajet causée par une onde gravitationnelle incidente  $h(t)$ . Comme on l'a vu dans le chapitre 1 – dont on conserve les notations –, la lumière suit des géodésiques d'équation  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$ . On se place dans la jauge TT et on suppose valable la décomposition (1.16) de la métrique; faisant l'hypothèse que  $h_x = 0$ , l'équation de la géodésique devient alors :

$$c^2 dt^2 - dx^2 + h_+ dx^2 = 0 \quad (2.1)$$

On prend une valeur typique de  $\lambda_{EM} = 1\mu m$  (infrarouge) pour la longueur d'onde du laser; en conséquence  $f_{EM} \approx 3 \cdot 10^{14}$  Hz  $\gg f_{OG}$ , fréquence de l'onde gravitationnelle  $h_+$ . Cela implique que que la direction du rayon laser n'est pas affectée par la perturbation gravitationnelle.  $h_+$  étant de plus supposé petit, l'équation (2.1) devient

$$dx = \pm c dt \left[ 1 - \frac{1}{2} h_+(t) \right] \quad \text{selon le sens de propagation.} \quad (2.2)$$

Comme indiqué sur la figure 2.1, le rayon laser suit le trajet  $P_0 P_1 P_2$ , points atteints respectivement aux temps  $t_0$  – émission –,  $t_1$  – réflexion – et  $t_2$  – détection. De la relation (2.2) se déduisent immédiatement les deux équations

$$L = c(t_1 - t_0) + \frac{1}{2} c \int_{t_0}^{t_1} h_+(t) dt \quad (2.3)$$

$$-L = c(t_1 - t_2) - \frac{1}{2} c \int_{t_1}^{t_2} h_+(t) dt \quad (2.4)$$

En les soustrayant et en utilisant une nouvelle fois le fait que  $h_+(t)$  est petit, il vient finalement

$$\Delta t_{OG} = t_2 - t_0 = \underbrace{\frac{2L}{c}}_{\text{Propagation}} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{t_2 - 2L/c}^{t_2} h_+(t) dt}_{\text{Perturbation } \delta t_{OG}} \quad (2.5)$$

Une fois l'équation (2.5) établie, on peut l'appliquer au cas d'une onde gravitationnelle monochromatique de fréquence  $\omega_{OG} / 2\pi$ :  $h(t) = h_0 \cos(\omega_{OG} t)$ . Par un calcul similaire, on a :

$$\Delta t_{OG} \propto \text{sinc} \left( \frac{\omega_{OG} L}{c} \right) = \frac{\sin \left( \frac{\omega_{OG} L}{c} \right)}{\frac{\omega_{OG} L}{c}} \quad (2.6)$$

Deux enseignements peuvent être tirés de ce résultat :  $\Delta t_{\text{OG}} = 0$  pour des fréquences multiples de  $f_{\text{propa}} = c/2L$  et  $\Delta t_{\text{OG}} \propto 1/f_{\text{OG}}$  à “hautes fréquences”. Fort heureusement, ces deux problèmes n’en sont pas réellement pour la bande de détection de Virgo :

- $f_{\text{propa}} \approx 50 \text{ kHz} \left( \frac{3 \text{ km}}{L} \right) \gg 10 \text{ kHz}$  – limite supérieure de la bande de fréquence de Virgo.
- $\frac{\omega L}{c} = 9.36 \cdot 10^{-2} \left( \frac{\text{fréquence}}{1 \text{ kHz}} \right) \left( \frac{L}{3 \text{ km}} \right)$  et  $\text{sinc}(0.0936) \approx 0.9985$  : le sinus cardinal reste proche de 1 quand  $\frac{\omega L}{c}$  est petit ! Même en prenant la valeur limite de 10 kHz pour la fréquence, le sinus cardinal vaut encore 0.860.

On peut conclure de cette analyse rapide que la **réponse fréquentielle** du détecteur est à peu près constante et égale à 1 pour un choix quelconque de paramètres physiques.

La variation de temps de parcours du faisceau laser peut également s’interpréter comme une **variation de longueur** du chemin optique  $\delta L_{\text{OG}} = c \times \delta t_{\text{OG}}$ . Si l’onde gravitationnelle est constante d’amplitude  $h$  durant le temps d’intégration, la relation (2.5) peut se réécrire  $\frac{\delta L_{\text{OG}}}{2L} = \frac{h}{2}$  où  $2L$  est la longueur totale parcourue. Plus généralement, une longueur  $L$  varie de  $\delta L$  avec

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{h}{2} \tag{2.7}$$

Mesurer cette minuscule perturbation permettrait de détecter l’interaction entre le détecteur et une onde gravitationnelle et donc de conclure à l’existence de ce rayonnement. C’est le but de l’expérience Virgo qui vise à accéder à cette information par l’étude de la puissance lumineuse en sortie d’un interféromètre de type Michelson, méthode que nous allons détailler maintenant. Celle-ci est basée sur l’information essentielle contenue dans ce paragraphe : quelle que soit l’interprétation que l’on donne du phénomène, le passage d’une onde gravitationnelle affecte la propagation de la lumière proportionnellement à son amplitude  $h$  qui varie comme l’inverse de la distance.

### 2.1.2 Détecteur interférométrique et sensibilité

Avant de passer à la description proprement dite de la détection interférométrique, il convient de préciser certaines notations utilisées dans la suite pour les calculs d’optique. Elles seront illustrées par l’étude d’une **cavité Fabry-Perot**<sup>1</sup> [82] qui est l’élément de base de l’instrument Virgo. En outre, les caractéristiques du faisceau laser seront présentées brièvement, en particulier pour introduire sa **décomposition en modes propres**, essentielle pour le **contrôle** du détecteur.

#### Miroirs

Les miroirs de Virgo sont des optiques de haute précision, satisfaisant à des spécifications à la fois variées et très contraignantes dues au rôle central qu’ils jouent dans le détecteur, d’une part pour transformer les éventuelles perturbations gravitationnelles en puissance lumineuse, et d’autre part pour permettre à la mesure d’atteindre la sensibilité désirée. Dans ces quelques lignes – inspirées de [83] –, nous allons tenter de décrire la performance que représente la mise au point et le test de ces composants optiques.

Tous les miroirs de Virgo sont plan/plan, à l’exception de ceux situés au bout des bras Fabry-Perot dont la première face est légèrement courbe pour épouser le front d’onde du faisceau. Le rayon de courbure prévu est de l’ordre de 3450 mètres (à quelques pourcents près) pour un diamètre du substrat de l’ordre de 35 cm, ce qui représente une flèche de 4.5 microns au centre du miroir ! A l’échelle de la surface du miroir cela représente néanmoins une grande valeur car il est demandé que le profil de celle-ci n’ait des défauts qu’au niveau de  $10^{-2}$  microns RMS environ. Pour atteindre

---

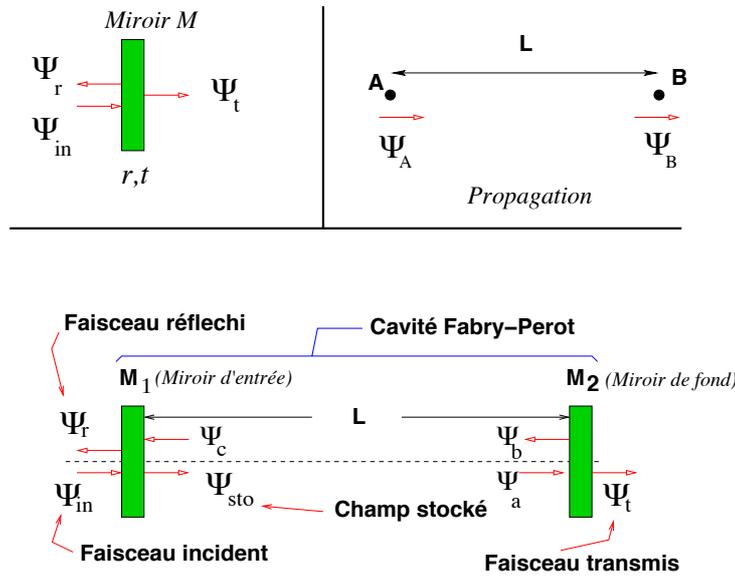
<sup>1</sup>Faut-il ou non un accent sur le “e” de Perot ? Bien que mineure, cette question n’est pas sans importance dans la mesure où la cavité Fabry-Perot étant un composant de base des détecteurs interférométriques du type de Virgo, les noms de ses inventeurs sont très régulièrement cités dans la littérature éditée dans ce domaine. Alors, autant utiliser si possible la bonne orthographe ! Si l’accent est toujours omis dans les publications anglo-saxonnes, il est présent de manière aléatoire – une fois sur deux environ ! – dans les textes français, de l’*Encyclopédia Universalis* au *Bruhat* d’Optique en passant par les bases de données de l’École Polytechnique où Perot a été élève puis professeur. Néanmoins, dans l’éloge que lui consacre Charles Fabry dans *ApJ* en 1926 un an après son décès, aucun accent n’apparaît alors que d’autres mots français cités dans le texte sont correctement orthographiés. Il semble donc vraisemblable que la solution exacte soit “Perot” sans accent, ce que confirme... l’examen des registres d’état civil de la ville de Metz où M. Perot est né ! Cela clôt le débat de manière définitive, en espérant pour montrer l’exemple qu’aucun accent inapproprié ne reste au détour d’une phrase de cette thèse...

cette précision, deux instruments sensibles à des fréquences spatiales différentes (interféromètre de Fizeau et *scattometers*) sont utilisés.

Les propriétés volumiques des substrats sont aussi importantes que celles de ses surfaces car la plupart des miroirs sont traversés complètement par la lumière laser. Les pertes principales dans le matériaux sont dues à l'absorption, à la dispersion et à la biréfringence causée par un couplage entre polarisations.

Une fois le substrat poli<sup>2</sup>, le processus de *coating* a lieu : il s'agit de déposer une multicouche mince sur le miroir pour lui donner ses propriétés optiques finales. La technique utilisée – dite "*Ion beam sputtering*" – a permis en une vingtaine d'années d'augmenter la valeur maximale du coefficient de réflexion en énergie  $R^{\max}$  de 99% à 99.9998%. Elle permet également d'obtenir des surfaces antiréfléchissantes – comme la seconde face de la séparatrice pour Virgo – pour lesquelles  $R$  est de l'ordre de  $10^{-5}$ .

**Conventions d'optique; exemple de la cavité Fabry-Perot**



**Figure 2.2:** Notations utilisées pour les calculs d'optique ; cas d'un miroir simple et d'une cavité Fabry-Perot.

Commençons tout d'abord par observer la partie supérieure de la figure 2.2 qui décrit les situations élémentaires à l'aide desquelles tout calcul d'optique *plane* et *stationnaire* peut se décomposer : réflexion/transmission et propagation dans le vide.

Un **miroir**  $M$  – supposé *plan* pour le moment – est caractérisé par trois coefficients :

- sa **réflexion** en *amplitude*  $r$  ;
- sa **transmission** en *amplitude*  $t$  ;
- ses **pertes**  $\mathcal{L}$ .

Seuls deux d'entre-eux sont indépendants : la relation

$$r^2 + t^2 = 1 - \mathcal{L} \tag{2.8}$$

traduit la conservation de l'énergie du faisceau incident. Pour simplifier les équations, on notera avec des majuscules les coefficients correspondants en *énergie* :  $R = r^2$  et  $T = t^2$ .

Notant  $\psi_{in}$  l'amplitude – complexe – du champ incident sur le miroir,  $\psi_r$  celle du champ réfléchi et  $\psi_t$  celle du champ transmis, on a *par convention* :

<sup>2</sup>Opération composée de quatre étapes – mise en forme, polissage grossier, polissage et superpolissage – dont chacune est nécessaire et correspond à des instruments et à des techniques bien précises. Sauter l'une d'entre-elles endommagerait le matériau polisseur utilisé ensuite pour affiner le résultat!

$$\begin{cases} \psi_r = i r \psi_{\text{in}} \\ \psi_t = t \psi_{\text{in}} \end{cases} \quad (2.9)$$

Si le miroir n'est pas plan – afin de mieux épouser la forme du faisceau laser dont le front d'onde a divergé lors de sa phase de propagation dans le vide, on notera  $\mathfrak{R}^c$  son **rayon de courbure**. On a toujours  $\mathfrak{R}^c$  très grand : miroir presque plan.

Dans le cas de la propagation d'une onde électromagnétique  $\psi$  de fréquence  $\omega/2\pi$  entre les points  $A$  et  $B$  distants de  $L$ , on a

$$\psi_B = e^{-ikL} \psi_A \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c} \text{ le nombre d'onde.} \quad (2.10)$$

Une fois ces notations établies et les conventions (2.9) et (2.10) fixées, venons en à l'étude de la **cavité Fabry-Perot** dont le schéma est présenté sur la partie basse de la figure 2.2. Sa *stabilité* est assurée par la règle qui veut que les rayons de courbure des miroirs d'extrémité soient supérieurs à sa longueur [84]. En notant  $r_i$  et  $t_i$  les paramètres des deux miroirs  $(M_i)_{i=1,2}$  délimitant la cavité et en introduisant des champs intermédiaires  $\psi_{a,b,c}$ , on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_r &= i r_1 \psi_{\text{in}} + t_1 \psi_c & \psi_t &= t_2 \psi_a & \psi_{\text{sto}} &= t_1 \psi_{\text{in}} + i r_1 \psi_c \\ \psi_a &= e^{-ikL} \psi_{\text{sto}} & \psi_b &= i r_2 \psi_a & \psi_c &= e^{-ikL} \psi_b \end{aligned}$$

desquelles il est facile de déduire les expressions donnant  $\psi_{\text{sto}}$ ,  $\psi_t$  et  $\psi_r$ .

$$\psi_{\text{sto}} = \frac{t_1 \psi_{\text{in}}}{1 + r_1 r_2 e^{-2ikL}} \quad (2.11)$$

$$\psi_t = \frac{t_1 t_2 e^{-ikL}}{1 + r_1 r_2 e^{-2ikL}} \psi_{\text{in}} \quad (2.12)$$

$$\psi_r = i \left[ r_1 + \frac{r_2 T_1 e^{-2ikL}}{1 + r_1 r_2 e^{-2ikL}} \right] \psi_{\text{in}} \quad (2.13)$$

La relation (2.11) montre que la **puissance stockée** dans la cavité  $P_{\text{sto}} = |\psi_{\text{sto}}|^2$  maximale vaut

$$P^{\text{max}} = \frac{T_1}{(1 - r_1 r_2)^2} P_{\text{in}} \quad (2.14)$$

et qu'elle est atteinte pour la condition de **résonance** :

$$e^{-2ikL} = -1 \quad \text{soit, en terme de longueur, } kL_{\text{res}} = \frac{\pi}{2} [\pi] \quad (2.15)$$

Une fois ce calcul effectué, une remarque d'intérêt *pratique* s'impose : comme  $r_{1,2} \approx 1$  pour Virgo, la forme de l'équation (2.14) fait que la puissance stockée  $P^{\text{max}}$  dépend fortement des valeurs exactes des coefficients de réflexion des miroirs de la cavité.

En fréquence, les résonances sont séparées par l'**intervalle spectral libre** (ISL)  $c/2L$ . Le rapport de l'ISL et de la largeur à mi-hauteur du pic de résonance définit la **finesse**  $\mathfrak{F}$  de la cavité. Son expression exacte est compliquée et lourde à manipuler<sup>3</sup> et on préfère en donner une valeur approchée, valable pour des réflectivités proches de 1 :

$$\mathfrak{F} \approx \pi \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (2.16)$$

La finesse est la grandeur caractéristique d'une cavité Fabry-Perot :

- Le **Gain**  $G = P_{\text{sto}}/P_{\text{in}}$  de la cavité vérifie  $G \approx 2\mathfrak{F}/\pi$  lorsque les miroirs ont des réflectivités différentes (typiquement,  $1 - r_1 \gg 1 - r_2$ ) tandis que  $G \approx \mathfrak{F}/\pi$  lorsque  $r_1 \approx r_2$ .

---

<sup>3</sup>On la trouvera cependant par exemple dans [85], p. 42, Éq. (3.21).

- Tenant compte du temps de stockage dans la cavité, un Fabry-Perot se comporte comme un filtre fréquentiel *passé-bas* du premier ordre de fréquence de coupure  $f_{\text{FP}} = \frac{c}{4L\mathfrak{F}}$  pour les perturbations du chemin optique [86].
- La largeur à mi-hauteur du pic de résonance<sup>4</sup> est donnée par la relation

$$l_{\text{FWHM}} = \frac{\lambda}{2\mathfrak{F}} \quad (2.17)$$

On rencontrera dans la suite de l'exposé deux types de cavité Fabry-Perot : l'interféromètre central lui-même est, une fois contrôlé dans ses deux degrés de liberté longitudinaux, une cavité de finesse  $\mathfrak{F} \approx 400$  dans sa configuration CITF et  $\approx 150$  pour Virgo – voir paragraphe 2.2.3 – ; chacun des bras kilométriques de Virgo sera un Fabry-Perot de finesse  $\mathfrak{F} \sim 50$  pour améliorer la sensibilité de l'instrument (cf. 2.2.1).

Dans Virgo, les miroirs sont suspendus au bout de fils et non pas rigidement fixés au sol. L'utilisation d'un système de suspension complexe dont le principe sera détaillé dans la suite – voir paragraphe 2.2.1 – permet de les isoler presque totalement du sol et de les rendre semblables à des masses libres sur lesquelles s'exercent les perturbations gravitationnelles.

### Description du faisceau laser

La situation réelle est un peu plus compliquée que celle qui vient d'être décrite. En fait, le faisceau laser n'est pas une onde plane ; le champ électromagnétique associé  $\mathfrak{E}$  vérifie l'équation de propagation de Helmholtz :  $[\Delta + k^2]\mathfrak{E} = 0$ . En supposant que l'amplitude de l'onde est *lente-ment variable* dans sa direction de propagation  $\vec{e}_z$  et que le faisceau est bien *focalisé* – i.e. diverge faiblement – on peut démontrer l'existence d'une *base* de solutions *orthogonales* (pour le produit scalaire complexe usuel) de cette équation, les modes d'**Hermite-Gauss**  $\text{TEM}_{mn}$ , étiquetés par deux entiers  $m$  et  $n$  :

$$\text{TEM}_{mn}(x, y, z) = \frac{A_{mn}}{w(z)} H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{w(z)}\right) H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{w(z)}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)} - \frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)} - i(kz - \phi_{mn}(z))} \quad (2.18)$$

avec

- $H_k$ , le  $k$ ème polynôme orthogonal d'Hermite ;
- $\phi_{mn}(z) = (m + n + 1) \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)$ , la **phase de Guoy** ;
- $A_{mn}$ , une constante de normalisation ;
- $w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2\right]$  mesure la divergence du faisceau dans une section transverse à la direction de propagation, i.e. l'extension du front d'onde à la distance  $z$  rapportée au col ("**waist**" en anglais) du faisceau  $\omega_0$  ;
- $R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right]$ , le **rayon de courbure** transverse à la direction de propagation ;
- le faisceau vu en coupe est une hyperbole dont les asymptotes forment un angle donné par  $\theta_\infty = \frac{\lambda}{\pi \omega_0}$ .

La figure 2.3 résume le profil du faisceau laser.

Le système optique de Virgo demande la résonance du mode *fondamental*  $m = n = 0$ . Cela nécessite, d'une part d'utiliser un faisceau en entrée aussi "pur" que possible (grâce à un *Mode-Cleaner*, cf. paragraphe 2.2.1) et d'autre part de contrôler chacune des cavités optiques pour maintenir les conditions optimales de fonctionnement :

- *longitudinales* pour assurer la résonance du  $\text{TEM}_{00}$  ;
- *angulaires* car le "*tilt*" d'un miroir ou les translations de l'axe optique introduisent des modes d'ordre 1 ( $m + n = 1$ ) à l'ordre le plus bas.

<sup>4</sup> *Full Width at Half Maximum* – FWHM – en anglais.

<sup>5</sup> Inclinaisons selon deux axes perpendiculaires à la direction du faisceau.

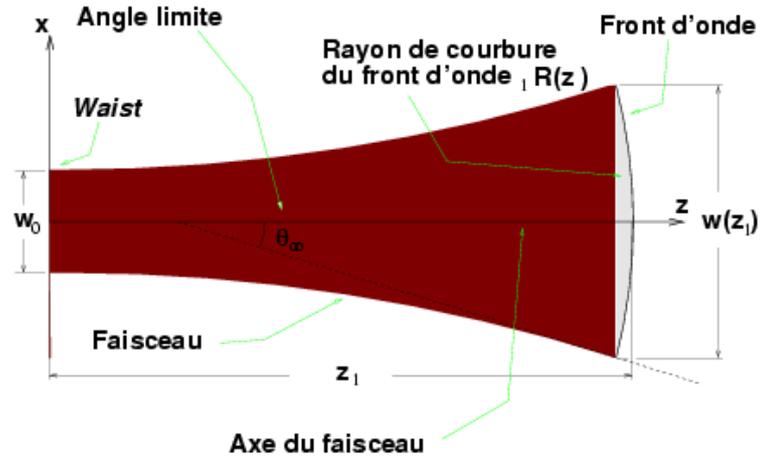


Figure 2.3: Profil du faisceau laser.

Enfin, comme les miroirs d'extrémité ne sont pas plans mais légèrement *courbes*, le *waist* du laser est adapté – au moyen d'un télescope – pour que le profil du faisceau suive au mieux celui de ces miroirs ; un décalage entre les deux profils ("*mismatch*") produit des modes d'ordre 2 ( $m+n=2$ ) à l'ordre le plus bas.

### Interféromètre de Michelson

Comme le paragraphe 2.1.1 l'a montré, l'étude du parcours d'un rayon lumineux doit permettre de révéler une éventuelle perturbation de la métrique due au passage d'une onde gravitationnelle. Si ce principe est effectivement utilisé par la collaboration Virgo, son application en est plus complexe : au-lieu de considérer une cavité optique formée uniquement de deux miroirs, le choix a été fait de construire un interféromètre de Michelson, représenté dans sa forme la plus simple sur la figure 2.4.

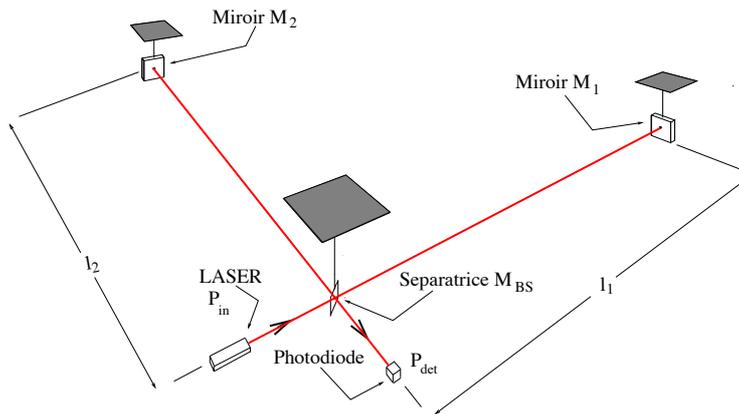


Figure 2.4: Schéma d'un interféromètre de Michelson. Les longueurs des bras sont pour le CITEF  $l_1 \approx 6.4$  m,  $l_2 \approx 5.5$  m.

Deux raisons principales peuvent expliquer cette complication.

- L'effet **différentiel** du passage d'une onde gravitationnelle : par un calcul similaire à celui détaillé dans les équations (2.2) à (2.5), il est facile de montrer que si une longueur  $L$  subit une modification  $L \rightarrow L + \delta L$ , une longueur *perpendiculaire*  $L_{\perp}$  est changée en  $L_{\perp} - \delta L_{\perp}$  avec  $\frac{\delta L}{L} = \frac{\delta L_{\perp}}{L_{\perp}}$ . Ainsi, la mesure de la différence de longueurs des deux bras –perpendiculaires – de l'interféromètre *amplifie d'un facteur 2 la perturbation*.

- Dans le cas d'une cavité simple, les bruits instrumentaux comme par exemple les fluctuations de la fréquence du laser sont "proportionnels" à la longueur de celle-ci. A contrario, dans le cas de l'interféromètre, ils ne dépendent que de la différence de longueur entre les deux bras qui est faible. Donc ce dispositif expérimental permet à la fois d'augmenter le signal cherché et de *diminuer les bruits*.

Le Michelson est composé de deux miroirs de fonds  $M_1$  et  $M_2$  très réfléchissants ( $r_{1,2} \lesssim 1$ ) et d'une lame séparatrice<sup>6</sup>  $M_{BS}$  qui divise un faisceau incident en deux parties égales, une réfléchiée, une transmise ( $R_{BS} \approx 0.5$  et  $T_{BS} \approx 0.5$ ). Ce miroir est placée à  $45^\circ$  pour envoyer la lumière dans les deux bras de l'interféromètre – cf. Figure 2.4.

Notant  $\delta l = l_2 - l_1$  la différence de longueur entre les deux bras, la puissance en sortie du détecteur lue sur une photodiode  $P_{det}$  est donnée par :

$$P_{det} = R_{BS} T_{BS} [r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(2 k \delta l)] P_{in} \quad (2.19)$$

où  $P_{in}$  est la puissance incidente sur la séparatrice. Pour simplifier cette équation, la séparatrice est supposée "parfaite", i.e.  $R_{BS} = T_{BS} = \frac{1}{2}$  et on introduit le **contraste**  $C$  défini par

$$C = \frac{P_{det}^{max} - P_{det}^{min}}{P_{det}^{max} + P_{det}^{min}} = \frac{2 r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} \quad (2.20)$$

Avec l'approximation  $r_1^2 + r_2^2 \approx 2$  l'équation (2.19) se réduit à

$$P_{det} = \frac{P_{in}}{2} [1 + C \cos(2 k \delta l)] \quad (2.21)$$

L'asymétrie entre les bras  $\delta l$  peut se décomposer en deux termes :

- la différence de longueur *statique*  $\delta l_{12}$  entre les deux bras de l'interféromètre ;
- la perturbation du chemin optique de la lumière, éventuellement due au passage d'une onde gravitationnelle sur le détecteur, notée  $\delta l_{OG}$ .

Notant  $\alpha_{12}$  et  $\alpha_{OG}$  les déphasages correspondants ( $\alpha_x = 2 k \delta l_x$ ), la relation (2.21) se réécrit au premier ordre en la perturbation

$$P_{det} \simeq \frac{P_{in}}{2} [1 + C \cos(\alpha_{12}) - C \sin(\alpha_{12}) \alpha_{OG}] \quad (2.22)$$

**La modification du chemin optique se traduit par une variation de la puissance mesurée sur la photodiode en sortie du détecteur.**

$$\delta P_{OG} = -\frac{P_{in} C \sin \alpha_{12}}{2} \alpha_{OG} \quad (2.23)$$

Une fois ce résultat obtenu, il convient de tester la sensibilité de la méthode de détection proposée et en particulier de l'optimiser. La première étape consiste à choisir la valeur la plus intéressante du paramètre libre  $\alpha_{12}$ . Pour ce faire, nous allons rencontrer un premier bruit affectant les données, le **bruit de comptage des photons** ("*shot noise*"), qui est une limitation fondamentale (au niveau optique) de la détection.

En l'absence de perturbation du parcours de la lumière,  $P_{det} = \frac{P_{in}}{2} (1 + C \cos \alpha_{12})$ . Le nombre de photons  $N$  de fréquence  $\omega/2\pi$  comptés par la photodiode pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  vérifie l'équation

$$N \hbar \omega = \eta P_{det} \Delta t \quad (2.24)$$

où  $\eta$  est l'*efficacité quantique*<sup>7</sup> de la photodiode ; typiquement,  $\eta \sim 0.9$  [87].

<sup>6</sup>"*Beam-Splitter*" en anglais.

<sup>7</sup>Rapport entre le nombre de photons détectés et le nombre de photons incident.

## 2.1. DÉTECTION INTERFÉROMÉTRIQUE

---

$N$  est un processus *poissonien* de fluctuation  $\delta N_{\text{shot}} \sim \sqrt{N}$ . Cette dernière est convertie en une variation de puissance  $\delta P_{\text{shot}}$  donnée par

$$\delta P_{\text{shot}} = \frac{\delta N_{\text{shot}} \hbar \omega}{\eta \Delta t} = \sqrt{\frac{P_{\text{det}} \hbar \omega}{\eta \Delta t}} \quad (2.25)$$

Il apparaît naturel de maximiser le *rapport signal sur bruit*  $S/B$  donné par

$$S/B = \frac{|\delta P_{\text{OG}}|}{\delta P_{\text{shot}}} \quad (2.26)$$

ce qui revient à chercher les extrema de la fonction  $f(\alpha_{12}) = \frac{|\sin \alpha_{12}|}{\sqrt{1+C \cos(\alpha_{12})}}$ . Après calcul, on voit que la valeur la plus intéressante de  $\alpha_{12}$  est donnée par

$$\cos \alpha_{12} \approx -1 + \underbrace{\sqrt{2(1-C)}}_{\ll 1 \text{ car } C \sim 1} \quad (2.27)$$

On a alors  $f(\alpha_{12}) \approx \sqrt{2}$ . Le point de fonctionnement doit donc être légèrement décalé de la **frange noire** ( $\cos \alpha_{12} = -1$ , correspondant à une puissance en sortie de l'interféromètre nulle) et

$$P_{\text{det}} = P_{\text{in}} \sqrt{\frac{1-C}{2}} \quad (2.28)$$

On peut remarquer que dans le cas de la frange noire "parfaite", l'approximation (2.23) n'est plus valable et que la variation de puissance due au passage d'une onde gravitationnelle est du second ordre ce qui la rendrait indétectable.

Quelle est alors la sensibilité de l'interféromètre? Pour l'estimer, on demande que la perturbation gravitationnelle soit au moins du même ordre de grandeur que le bruit de photons, i.e. on résout l'équation  $S/B = 1$ . On obtient alors la phase minimale détectable  $\alpha_{\text{OG}}^{\text{min}}$  que l'on préfère évaluer en terme de *densité spectrale* – voir l'appendice A – en assimilant  $1/\Delta t$  à la bande passante du processus:

$$\tilde{\alpha}_{\text{OG}}^{\text{min}} = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\eta P_{\text{in}}}} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \sim 10^{-10} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.29)$$

avec le choix : longueur d'onde du laser  $\lambda \sim 1 \mu\text{m}$ ,  $P_{\text{in}} \sim 1 \text{ W}$ ,  $\eta \sim 1$  et  $C \sim 1$ . Pour interpréter ce déphasage en terme d'amplitude d'onde gravitationnelle, on utilise la relation (2.7); il est facile de voir que dans ce cas la longueur totale à prendre en compte est  $(l_1 + l_2)/2$ . Comme la nature différentielle de la perturbation amplifie son effet par un facteur 2 dans les bras perpendiculaires de l'interféromètre, on a finalement :

$$\delta l_{\text{OG}} = h(l_1 + l_2) \Rightarrow \alpha_{\text{OG}} = \frac{4\pi}{\lambda} \left( \frac{l_1 + l_2}{2} \right) h \quad (2.30)$$

D'où, la sensibilité gravitationnelle obtenue est :

$$\tilde{h}^{\text{min}} = \frac{\lambda}{2\pi(l_1 + l_2)} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\eta P_{\text{in}}}} / \sqrt{\text{Hz}} = \frac{1}{2\pi(l_1 + l_2)} \sqrt{\frac{h_{\text{Planck}} c \lambda}{\eta P_{\text{in}}}} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (2.31)$$

Avec  $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$ , on a  $\tilde{h}^{\text{min}} \sim 10^{-17} / \sqrt{\text{Hz}}$ .

Il suffit de comparer cette valeur avec les amplitudes présentées dans le chapitre 1 pour voir qu'elle n'est pas assez petite pour espérer une détection. Prenons par exemple un signal d'amplitude  $h_{\text{RMS}} \sim 10^{-22}$  dont la bande de fréquence  $\Delta f$  a une largeur d'une centaine de Hz. Alors sa densité spectrale d'amplitude  $\tilde{h}$  est en gros donnée par :

$$\tilde{h} = \frac{h_{\text{RMS}}}{\sqrt{\Delta f}} \sim 10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (2.32)$$

Six ordres de grandeur *au moins* sont donc à gagner ! Nous verrons comment faire dans la suite.

Pour terminer ce paragraphe sur les bases de la détection interférométrique des ondes gravitationnelles, il convient de mentionner que la **réponse angulaire du détecteur n'est pas uniforme** : l'amplitude  $h(t)$  à laquelle l'instrument est sensible s'écrit de manière générale sous la forme

$$h(t) = F_+ h_+(t) + F_\times h_\times(t) \quad (2.33)$$

où  $h_+(t)$  et  $h_\times(t)$  sont les deux polarisations dans la jauge TT et où  $F_+$  et  $F_\times$  sont des fonctions dépendant de l'orientation relative de la source par rapport à l'interféromètre, comprises entre -1 et 1 ce qui réduit l'interaction du rayonnement avec le détecteur ; elles sont décrites en détail dans l'appendice D. On reviendra sur cette question – importante pour estimer les taux de détection potentiels d'un type d'événement donné et essentielle pour appréhender la question des **coïncidences** entre antennes – dans le chapitre 7.

### Améliorations au principe de base

Les principales possibilités d'amélioration sont tout entières contenues dans l'équation (2.31) :

- augmenter la longueur du parcours de la lumière  $l_1 + l_2$  ;
- augmenter et/ou amplifier la puissance du laser.

Le premier point est traité de deux manières : d'une part en construisant des bras de  $L_{\text{FP}} = 3$  km de long, et d'autre part en y installant des cavités Fabry-Perot obtenus par l'ajout d'un miroir à l'entrée de chacun d'eux. Ces *miroirs d'entrée* ont une réflectivité plus faible que les miroirs d'extrémité, ceci afin d'éviter d'avoir une finesse trop importante. Avec les notations utilisées lors de l'étude de ces cavités, cela se traduit par  $1 - r_1 \gg 1 - r_2$ . Les raisons de ce choix apparaîtront au paragraphe 2.2.3.

Le gain apporté par les Fabry-Perot se comprend simplement en développant la relation (2.13) au voisinage de la résonance<sup>8</sup> :  $L_{\text{FP}} = L_{\text{res}} + \delta L$ . Au premier ordre, on a

$$\frac{\psi_{\text{r}}}{\psi_{\text{in}}} = i \left[ \frac{r_1 - r_2}{1 - r_1 r_2} + \frac{2 r_2 T_1}{(1 - r_1 r_2)^2} i k \delta L \right] \quad (2.34)$$

Le premier terme du crochet se réécrit

$$\frac{r_1 - r_2}{1 - r_1 r_2} = \frac{(r_1 - 1) - (r_2 - 1)}{1 - r_1 r_2} \approx -\frac{1 - r_1}{1 - r_1 r_2} \approx -1 \quad \text{car } r_2 \approx 1 \quad (2.35)$$

et le second devient

$$\frac{2 r_2 T_1}{(1 - r_1 r_2)^2} \approx 2 \left( \frac{2 \mathfrak{F}}{\pi} \right) \quad \text{en introduisant la finesse du Fabry-Perot.} \quad (2.36)$$

D'où, à une phase constante près,

$$\psi_{\text{r}} \approx \exp \left[ 2 i k \left( \frac{2 \mathfrak{F}}{\pi} \right) \delta L \right] \psi_{\text{in}} \quad (2.37)$$

Comme pour le Michelson les deux faisceaux réfléchis par les Fabry-Perot se recombinaient sur la séparatrice et interfèrent. La contribution dominante du déphasage est donnée par

<sup>8</sup>On néglige entre-autres dans ce calcul l'effet de filtrage passe-bas d'une cavité Fabry-Perot mentionné précédemment ainsi que les pertes des miroirs :  $R_1 + T_1 = 1 = R_2 + T_2$

$$\alpha_{\text{OG}} = 2k \left( \frac{2\mathfrak{F}}{\pi} \right) \Delta L \quad (2.38)$$

où  $\Delta L$  est cette fois-ci l'*asymétrie entre les deux cavités Fabry-Perot*. Le déphasage est **amplifié** d'un facteur  $G_{\text{FP}} = 2\mathfrak{F}/\pi \approx \mathbf{30}$  (pour  $\mathfrak{F} = 50$  comme pour Virgo) par rapport au cas de la cavité simple.

Les cavités Fabry-Perot présentent un premier mode de stockage de la lumière laser. Néanmoins, avec ce schéma de l'interféromètre, la puissance interférant sur la séparatrice est renvoyée le long de l'axe du faisceau d'entrée et donc perdue (la sensibilité maximale du détecteur est obtenue lorsque la transmission est réglée sur la frange noire, ce qui correspond au cas où toute la lumière est rejetée vers la source, "réfléchi" par un miroir de réflectivité élevée).

Pour éviter cette perte de puissance, un **miroir de recyclage**  $M_{\text{rec}}$  ultra-réfléchissant est installé entre la source laser et la séparatrice, formant ainsi une cavité Fabry-Perot avec le reste de l'instrument. La conséquence de la grande réflectivité de ce miroir fait que sa transmission est faible – cf. équation (2.8) – et donc que seule une petite fraction du faisceau incident entre dans le détecteur. Toutefois, ce défaut apparent est plus que compensé par le niveau de puissance stockée à l'intérieur de celui-ci.

Les implications de la présence de ce miroir de recyclage, tant pour la détection que pour le contrôle, seront étudiées longuement dans le cadre du CITF et donc on se contentera ici de mentionner que le gain de puissance  $G_{\text{rec}} = P_0/P_{\text{in}}$  apporté par ce dispositif est donné de manière optimale par [86, 88]:

$$G_{\text{rec}} \approx \frac{1}{\mathfrak{L}_{\text{tot}}^2} \sim 100 \quad (2.39)$$

avec  $\mathfrak{L}_{\text{tot}}$  les pertes totales de l'interféromètre.

Enfin, pour Virgo on aura  $P_{\text{in}} = 20$  W (laser de puissance développé par la collaboration anglo-allemande GEO à Hannover). Tous ces gains permettent au système complet d'obtenir une sensibilité suffisante, de l'ordre de quelques

$$10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}} \text{ à } 1 \text{ kHz}$$

### 2.1.3 D'autres détecteurs : les barres résonnantes

Cet exposé sur la détection des ondes gravitationnelles serait incomplet sans la mention de l'autre type de détecteurs actuellement existant, les **barres résonnantes**. C'est en 1960 que Joe Weber [89] a conçu la première d'entre-elles, initiant l'activité expérimentale visant à détecter ce rayonnement ; aujourd'hui, cinq barres [90] de performances similaires sont en fonctionnement dans le monde mais leur sensibilité peine à atteindre un niveau suffisant pour espérer une détection.

Le détecteur est une barre cylindrique, de masse  $M$  et de longueur  $L$ , fixée en son centre de gravité ce qui laisse libre ses modes de vibrations longitudinaux. Le mode fondamental a une pulsation  $\omega_0 = \frac{\pi v_s}{L}$  avec  $v_s$  la vitesse du son dans le métal. Si l'on se limite à cette résonance, la barre est équivalente à un oscillateur harmonique formé de deux masses  $m = M/2$  distantes de  $d = \frac{4L}{\pi^2}$ . La constante de raideur du "ressort" vaut  $k = m\omega_0^2$  et une force de friction proportionnelle à  $m\omega_0/Q$  modélise la dissipation mécanique de l'excitation dans le métal.

Notant  $\xi(t)$  le déplacement par rapport à la position au repos, l'équation le reliant à la perturbation gravitationnelle  $h(t)$  est simplement<sup>9</sup>

$$\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \frac{d}{2} \ddot{h} \quad (2.40)$$

L'énergie mécanique des vibrations est ensuite transformée en énergie électrique par un *transducteur*. Le système barre-transducteur peut être vu comme un oscillateur *couplé* ce qui explique que

<sup>9</sup>Le point délicat est en fait de savoir si, suivant [89], le cylindre de métal peut vraiment être assimilé à un oscillateur pour décrire sa réaction à une onde gravitationnelle. Cette question est difficile à résoudre sur le plan théorique – en particulier, comment définir un solide en Relativité Générale? – et est encore ouverte : des travaux récents comme [91] en témoignent.

la courbe de sensibilité de l'ensemble présente classiquement deux *anti-résonances* – i.e des “trous” dans la densité spectrale de puissance (cf. appendice A) – proches de la fréquence de résonance de la barre :  $h \sim$  quelques  $10^{-22}/\sqrt{\text{Hz}}$ . A l'extérieur de ces deux régions, le bruit est rapidement au moins deux ordres de grandeur plus important.

La bande passante de ces résonances est aujourd'hui de l'ordre du Hz mais [90] parle d'une centaine de Hz comme d'un objectif raisonnable dans le futur. Ceci passe par une amélioration du facteur de qualité  $Q$  de la barre, un *refroidissement* du métal (à quelques dizaines de millikelvins), pour diminuer le bruit thermique et surtout un gain au niveau du bruit électronique dominant. Le rapport signal sur bruit étant proportionnel à  $m$ , on a intérêt à construire les barres les plus lourdes possibles. Un progrès substantiel pourrait également être accompli en utilisant des détecteurs *sphériques* : une sphère a 5 modes propres de résonance à une fréquence donnée – ce qui la rend semblable à un ensemble de plusieurs barres orientées dans différentes directions – et la masse équivalente de ces modes est un ordre de grandeur supérieur à ceux d'un cylindre.

## 2.2 Le détecteur Virgo

Le détecteur Virgo est le fruit d'une collaboration entre le CNRS français et l'INFN italien. Le site choisi est en Toscane, sur la commune de Cascina, à une quinzaine de kilomètres au sud-est de Pise, patrie de Fibonacci et de Galilée. La figure 2.5 présente une vue aérienne de l'interféromètre, prise en octobre 2001 alors que la construction des bras kilométriques entrait dans sa phase finale. Les trois bâtiments principaux sont indiqués sur la photo.

- Le *Mode-Cleaner* est le dispositif permettant de filtrer et de contrôler le faisceau d'entrée – pur TEM<sub>00</sub> dans l'idéal .
- Le bâtiment central, dans lequel se trouve la source laser, abrite également l'*interféromètre central* (CITF, cf. paragraphe 2.2.3), un Michelson recyclé dont les bras font 6m environ. Cet instrument n'est pas un petit Virgo mais plutôt un banc d'essai grandeur nature des procédures de contrôle, utilisé depuis le début de l'année 2000 en parallèle de la construction des bras kilométriques. Les méthodes testées sur ce détecteur sont variées :
  - contrôle des suspensions ;
  - contrôle des positions longitudinales et angulaires des miroirs ;
  - acquisition et maintien des résonances des cavités ;
  - calibration du détecteur, acquisition des données.

Le bas de la figure 2.5 présente une vue de l'intérieur du bâtiment central et montre les quatre grandes tours (sous vide et contenant chacune un miroir) dont l'ensemble forme le CITF.

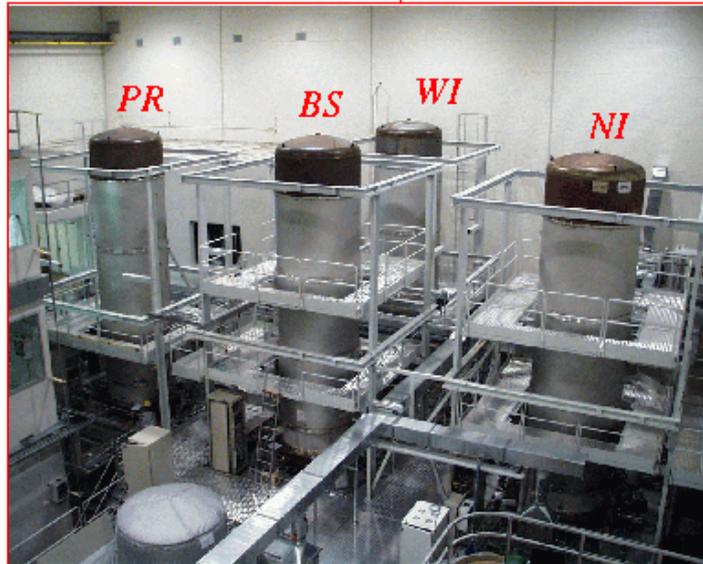
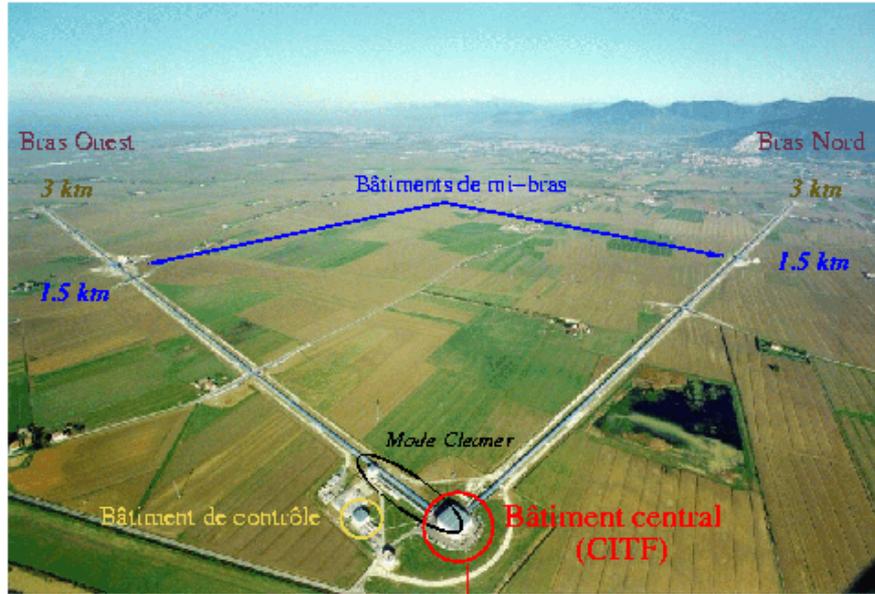
- Le bâtiment de contrôle qui, comme son nom l'indique, est le lieu où est piloté l'interféromètre. Cette dualité bâtiment central (contenant l'appareillage instrumental) / bâtiment de contrôle est rendue nécessaire par l'extrême sensibilité des couples miroirs-suspensions à toute forme d'activité sismique, en particulier d'origine humaine.

Par suite de l'orientation du détecteur, ses deux bras sont usuellement appelés *Nord* et *Ouest*. Pour simplifier les notations, on étiquette leurs composants respectifs par l'indice 1 (Nord) ou 2 (Ouest).

La figure 2.6 présente le schéma complet de l'instrument. Sur la gauche est représentée toute la partie visant à délivrer un faisceau laser de grande qualité, stabilisé en fréquence, puissance, forme et direction. Sur la droite se trouve l'interféromètre : miroir de recyclage (PR), séparatrice (BS) et les deux cavités Fabry-Perot Nord et Ouest. Avant le bloc de photodiodes de détection se trouve un petit *mode-cleaner* qui purifie le faisceau en sortie.

### 2.2.1 Description de Virgo ; bruits du détecteur

Le principe général de la détection interférométrique a été présenté dans les paragraphes précédents ce qui a permis de justifier la configuration optique du détecteur ainsi que la taille de celui-ci ; nous allons maintenant détailler les caractéristiques techniques de Virgo et montrer que chaque choix dans ce domaine est relié à la nécessité de combattre un *bruit* particulier. Une vue synthétique des

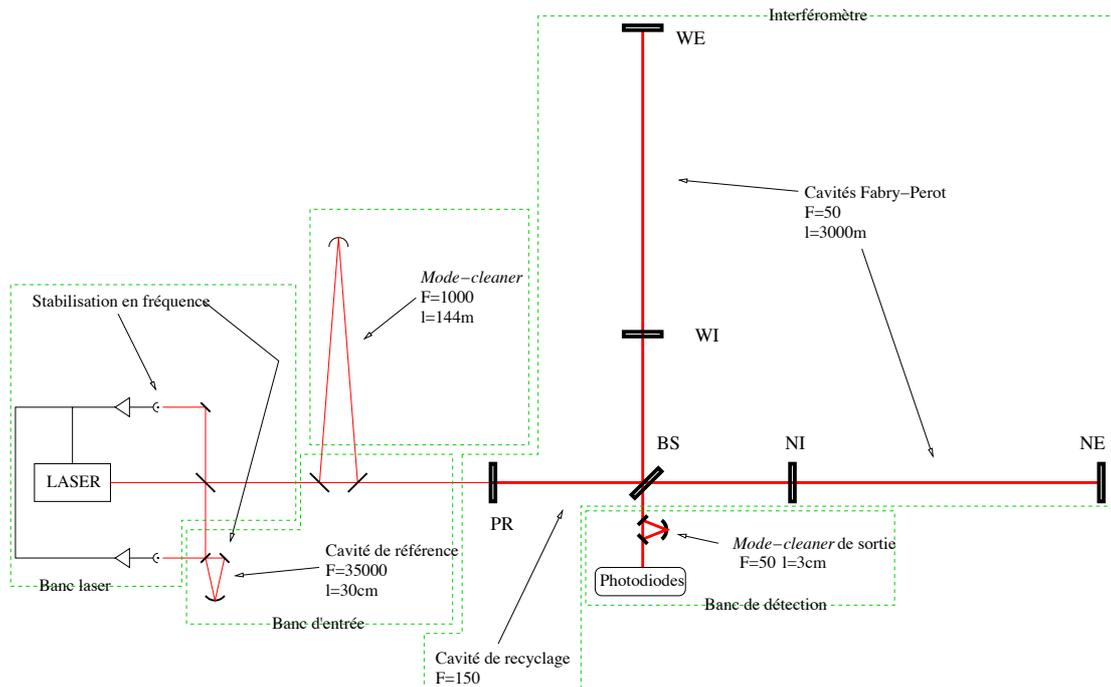


**Figure 2.5:** Vue aérienne du détecteur Virgo – en octobre 2001 – et aperçu de l’intérieur du bâtiment central contenant les 4 tours, fermées et sous vide, du CITF : miroir de recyclage (PR), séparatrice (BS) et les tours Ouest (WI) et Nord (NI) qui forment actuellement les deux extrémités de l’interféromètre de test (CITF) et qui seront plus tard les entrées des deux cavités Fabry-Perot kilométriques.

principaux bruits et des remèdes correspondants peut être trouvée dans le tableau 2.1 placé à la fin de cette partie.

Les DSA (cf. appendice A) seront exprimées en “*amplitude d’ondes gravitationnelles équivalente*”<sup>10</sup> pour permettre une comparaison immédiate avec les signaux attendus. [92] recense la liste de tous les bruits étudiés ainsi que les valeurs des paramètres permettant de calculer leurs amplitudes. Sauf mention contraire, les données numériques utilisées ici proviennent de cette source. En parallèle de la lecture de cette section, on pourra consulter la figure 2.14 qui regroupe sur un même graphique toutes les DSA mentionnées et présente la courbe de sensibilité officielle de Virgo.

<sup>10</sup>Si une grandeur  $x$  fluctue autour de sa valeur moyenne  $x_0$  à cause d’un bruit de DSA  $\tilde{x}(f)$ , le bruit équivalent vérifie  $\tilde{h}_x(f) \propto \frac{\tilde{x}(f)}{x_0}$ . Le coefficient de proportionnalité dépend du nombre d’éléments affectés par la perturbation et de la corrélation entre ces différentes sources de bruit ; si besoin, un facteur  $\sqrt{2}$  est ajouté pour transformer une DSA *bilatérale* en *monolatérale* – cf. appendice A.



**Figure 2.6:** Schéma du détecteur Virgo complet : le laser stabilisé en fréquence est asservi sur la cavité de référence avant d’être filtré dans la cavité *mode-cleaner* puis injecté dans l’interféromètre . Le faisceau en sortie est à nouveau filtré par un petit *mode-cleaner* – contrôlé thermiquement – avant d’être recueilli sur un bloc de photodiodes.

### Bruit sismique

Le bruit le plus gênant à *basse fréquence* est le **bruit sismique** qui se transmet aux miroirs par l’intermédiaire des structures au bout desquelles ils pendent. Son amplitude mesurée sur le site de Cascina vaut

$$\tilde{h}_{\text{sism}}(f) \sim 10^{-11} \left( \frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^2 / \sqrt{\text{Hz}} \quad \text{pour } f \geq 0.5 \text{ Hz.} \quad (2.41)$$

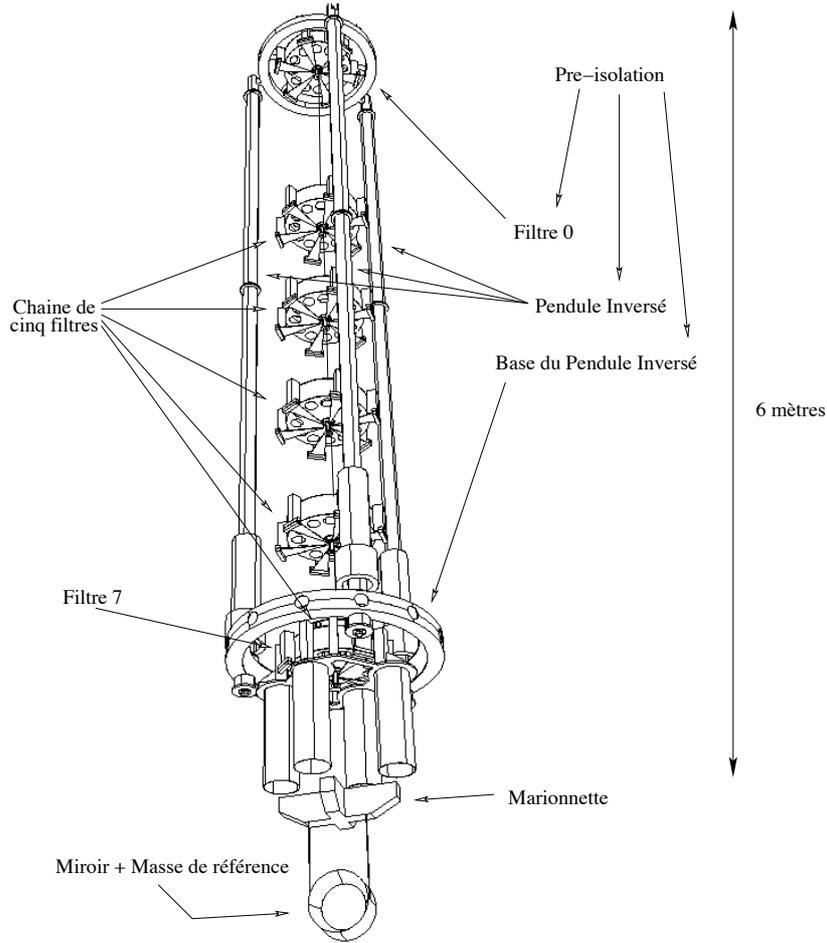
ce qui est bien supérieur – d’une dizaine d’ordres de grandeur... – à la sensibilité esperée ! Pour ramener ce bruit à un niveau plus raisonnable, une suspension très complexe a été mise au point sous la responsabilité de la section de l’INFN de Pise : le **superatténuateur** [93], représenté sur la figure 2.7.

Le dispositif d’atténuation des vibrations *horizontales* repose sur les propriétés de filtrage *passé-bas* du second ordre d’un *pendule* simple de fréquence de résonance  $f_{\text{res}}$  : une oscillation horizontale de fréquence  $f \gg f_{\text{res}}$  à son sommet est atténuée d’un facteur  $\left( \frac{f_{\text{res}}}{f} \right)^2$  à son autre extrémité. Une chaîne de 5 filtres est utilisée dans chaque superatténuateur ; grâce à la faible valeur de la fréquence de résonance de l’ensemble – voir ci-après –, le gain est supérieur à  $10^{14}$  à 10 Hz ! À cause de couplages mécaniques<sup>11</sup>, une fraction des mouvements *verticaux* du système – sur lesquels les pendules sont sans effet – est transmise horizontalement. Pour les atténuer, on ajoute des *ressorts* qui doivent être capables de supporter des poids importants sans se déformer. Schématiquement, un superatténuateur peut être divisé en quatre parties.

- L’étage de pré-isolation.

La chaîne de pendules est à l’intérieur d’un *pendule inversé* de masse  $m \sim 1$  tonne, de longueur  $l \sim 6$  mètres et de constante de raideur  $k \sim 1500$  N/m. Grâce à la compétition

<sup>11</sup>Créés par la courbure de la Terre ; l’angle de couplage est égal au rapport de la longueur d’un bras (3 km) sur le diamètre terrestre et vaut donc  $\theta_{\text{vert/hor}} \approx 2.35 \cdot 10^{-4}$  radians.



**Figure 2.7:** Schéma d'un superatténuateur de Virgo. On reconnaît le pendule inversé et le "filtre 0" (la pré-isolation), la chaîne de cinq pendules, le "filtre 7" et la marionnette, enfin la masse de référence et le miroir.

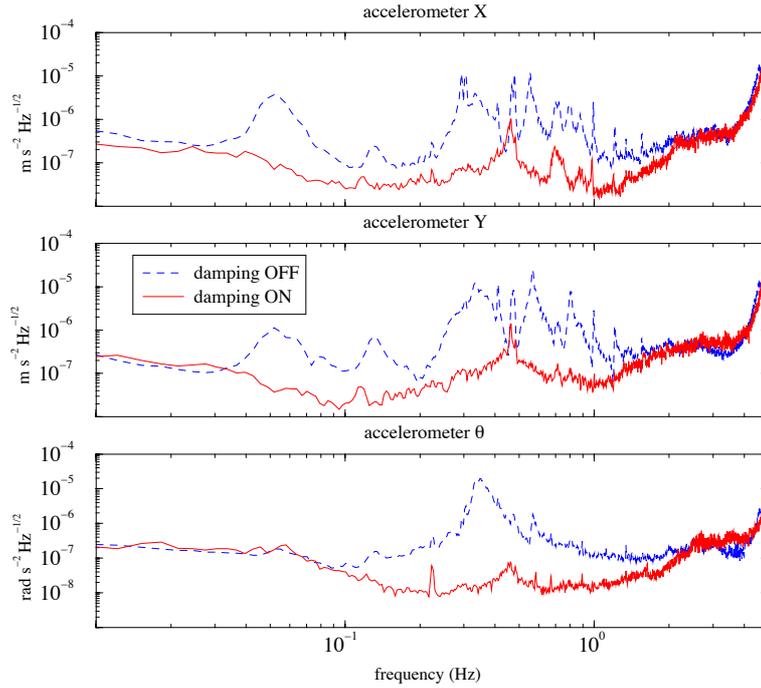
entre la force de gravité qui tend à l'éloigner de sa position d'équilibre et la force de rappel élastique, sa fréquence de résonance  $f_{\text{res}}$  peut être rendue très petite [94] :

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{l}} \approx 30 \text{ mHz pour Virgo.} \quad (2.42)$$

Deux applications numériques rapides permettent de mieux comprendre l'intérêt de cet élément : d'une part, en appliquant la formule "classique"  $T_{\text{res}} = 2\pi \sqrt{l/g}$ , on voit que la longueur équivalente du pendule est à peu près 280 mètres ; d'autre part, la force nécessaire pour faire bouger le sommet du pendule de  $\delta l = 1 \text{ cm}$  vaut seulement  $F = m (2\pi f_{\text{res}})^2 \delta l \approx 0.36 \text{ N}$ . Au niveau du "filtre 0" est placé un dispositif de contrôle **local**<sup>12</sup>, le **Damping Inertiel** [96], dont le but est de diminuer l'amplitude des mouvements et des vitesses des miroirs à basse fréquence. Pour cela, des accéléromètres réduisent les variations de vitesse du pendule inversé tandis que des LVDTs<sup>13</sup> mesurent son mouvement relatif par rapport à un repère externe et empêchent ses dérives à vitesse constante auxquelles les senseurs inertiels ne sont pas sensibles. Le prix à payer est une réinjection d'une fraction du bruit sismique par le signal des LVDTs. Aussi, le système de *feedback* (déjà rendu très complexe par la nécessité de contrôler deux degrés de translation et un de rotation *couplés*) est conçu de manière à utiliser les LVDTs pour  $f < f_{\text{merge}}$  et les accéléromètres pour les fréquences supérieures. Pour Virgo,  $f_{\text{merge}} \sim 30 \text{ mHz}$  ce qui revient à conserver quelques pourcents du bruit sismique. Abaisser

<sup>12</sup>i.e. restreint à une partie du détecteur – ici une tour –, par opposition au contrôle **global** qui vise à piloter de manière cohérente l'ensemble de l'interféromètre.

<sup>13</sup>*Linear Variable Differential Transformers.*



**Figure 2.8:** Performances du damping inertiel pour le superatténuateur de la tour Nord (NI) de Virgo placée sous vide – ce qui améliore les performances du feedback. Cette figure est extraite de [95] et, par convention,  $X$  désigne l’axe du faisceau,  $Y$  est une direction horizontale perpendiculaire à  $X$  et  $\theta$  est l’angle de rotation autour de la verticale.

cette fréquence permettrait de reinjecter moins de bruit dans le système mais conduirait aussi à une dégradation de la qualité des signaux des accéléromètres due aux légers *tilts* de l’étage supérieur du pendule inversé. La figure 2.8 présente les performances du damping inertiel sur une des tours de Virgo mise sous vide ; on voit bien qu’il n’y a plus de gain pour  $f < f_{\text{merge}}$ .

- Les cinq filtres.  
Chacun des filtres (représentés sur la figure 2.9) est un cylindre d’acier d’une centaine de kg qui supporte des lames élastiques en forme de triangle, courbées au repos de manière à être horizontales à pleine charge. Les fréquences de résonance sont autour de 0.5 Hz (pendule) et de 1.5 Hz (verticale). Aucun mode de la chaîne complète ne dépasse 7.5 Hz ce qui reste en deçà de la bande de détection de Virgo. Des anti-ressorts magnétiques réduisent la raideur verticale de l’ensemble et diminuent les fréquences de résonance correspondantes. Les couplages entre les translations et les rotations sont minimisés par les systèmes d’accrochage qui ne permettent que de faibles torsions provoquées par le bruit sismique.
- Le “filtre 7” et la marionnette.  
Le dernier étage du superatténuateur est appelé “filtre 7” pour des raisons historiques ; en dessous se trouve la *marionnette*, utilisée pour le contrôle des miroirs dans trois degrés de libertés :  $z$  (mouvement longitudinal selon l’axe du faisceau),  $\theta_x$  (“*pitch*”, rotation autour de la direction horizontale perpendiculaire à  $z$ ) et  $\theta_y$  (“*yaw*”, rotation autour de l’axe du pendule). Le pilotage est effectué à l’aide de 4 bobines agissant sur des aimants fixés sur la marionnette. Pour être isolées au mieux du bruit sismique, les bobines sont placées au bout de longues “jambes” cylindriques fixées au filtre 7.
- La masse de référence et le miroir.  
Quatre autres aimants sont montés directement au dos du miroir ; quatre bobines leur correspondent, situées sur la *masse de référence*, un bloc de poids similaire à celle du miroir et fixé à la même marionnette. Lorsque les bobines agissent sur le miroir, la masse de référence a un mouvement opposé ce qui permet de garder le centre de gravité de l’ensemble immobile. Ainsi, la chaîne verticale ne bouge pas.

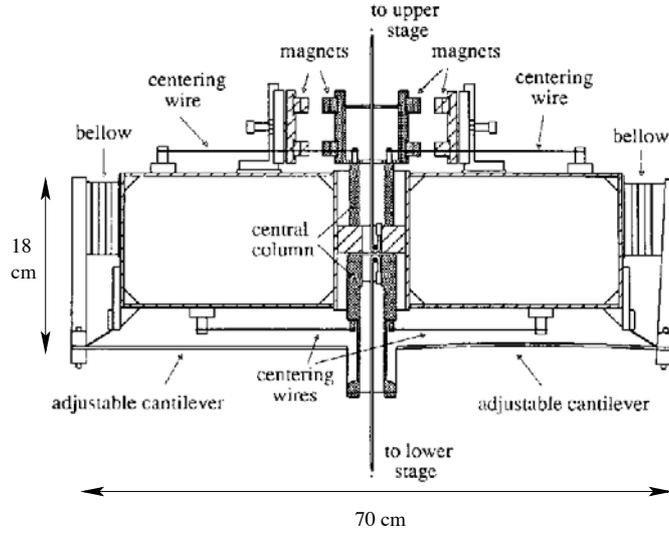


Figure 2.9: Vue en coupe d'un filtre de la chaîne d'atténuation de Virgo.

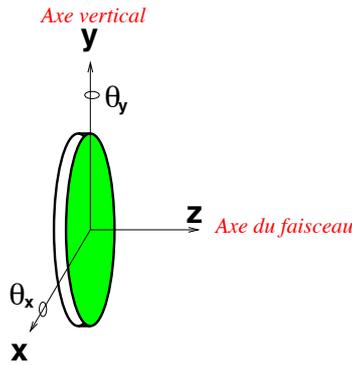


Figure 2.10: Conventions pour le repère lié au miroir.

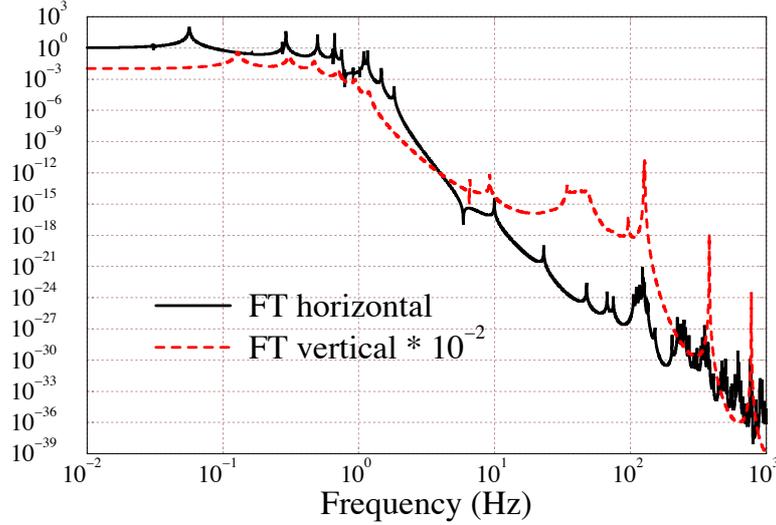
La figure 2.11 présente les performances *simulées* d'un superatténuateur de Virgo. La différence de deux ordres de grandeur entre les fonctions de transfert s'explique par le fait que la marionnette ne filtre que les mouvements horizontaux. Entre 1 et 10 Hz, l'atténuation est en  $1/f^{12}$  (mouvements verticaux) et  $1/f^{14}$  (mouvements horizontaux)! Néanmoins, le bruit sismique, même ainsi amorti, domine la sensibilité du détecteur jusqu'à 4 Hz environ et rend toute détection impossible à des fréquences inférieures. Par contre il devient complètement négligeable au delà de 10 Hz.

### Bruit de photons

L'expression du bruit de photons pour Virgo complet s'obtient directement à partir de l'équation (2.31) en procédant aux substitutions suivantes :

- $l_1 + l_2 \rightarrow \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right) 2 L_{FP}$
- $P_{in} \rightarrow G_{rec} P_{in}$
- Multiplication du bruit par un facteur  $\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{FP}}\right)^2}$  pour tenir compte de l'effet de filtrage passe-bas des cavités Fabry-Perot.

Finalement, on a



**Figure 2.11:** Fonctions de transfert horizontale et verticale (sans unité) simulées du superatténuateur.

$$\tilde{h}_{\text{shot}}(f) = \frac{1}{8 L_{\text{FP}} \mathfrak{F}} \underbrace{\sqrt{2 h_{\text{Planck}} \frac{\lambda c}{\eta G_{\text{rec}} P_{\text{in}}}}}_{\sim 1.85 \cdot 10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}}} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{\text{FP}}}\right)^2} / \sqrt{\text{Hz}} \quad \text{avec } f_{\text{FP}} \approx 500 \text{ Hz} \quad (2.43)$$

Le facteur  $\sqrt{2}$  est dû à la convention d’avoir une DSA *monolatérale*. Le bruit de photons vaut de l’ordre de  $2 \cdot 10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}}$  à basse fréquence et domine la courbe de sensibilité de Virgo à partir de 500-600 Hz.

### Bruits thermiques

Les **bruits thermiques** de l’ensemble suspensions + miroirs dominant dans la bande de fréquence intermédiaire de Virgo –  $\sim [4 \text{ Hz} ; 500 \text{ Hz}]$  environ. Ils sont causés par l’excitation des substrats des miroirs et des fils de suspension sous l’effet d’une température  $T$  non nulle. Le modèle choisi est celui de *dissipation interne* – comme les miroirs sont suspendus dans le vide, l’amortissement visqueux “classique” est négligeable. A l’aide du *théorème fluctuation-dissipation* [97] on peut calculer la DSA du bruit thermique  $x_{\text{ther}}(f)$  d’un composant donné, assimilé à un *oscillateur* de fréquence de résonance  $f_{\text{res}}$ , de facteur de qualité  $Q$  (ou d’angle de perte  $\varphi = 1/Q$ ) et de masse  $m$  (voir Figure 2.12) :

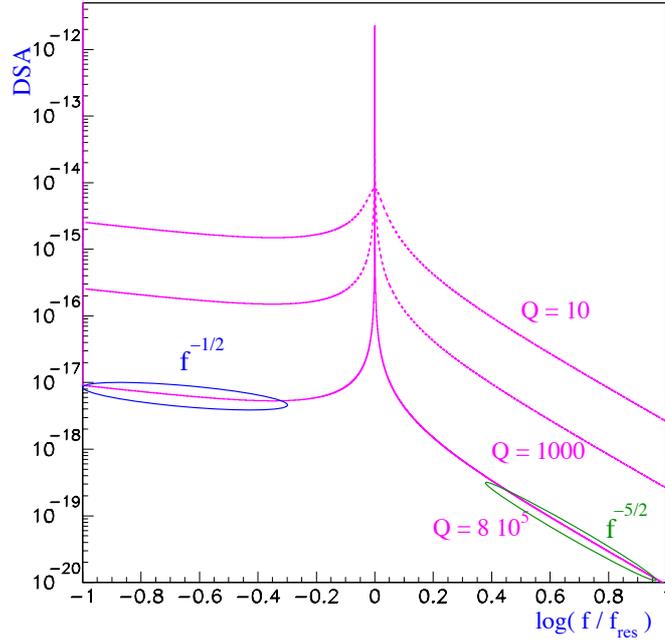
$$x_{\text{ther}}(f) = \sqrt{\frac{k_B T f_{\text{res}}^2}{2 \pi^3 m Q f} \frac{1}{(f^2 - f_{\text{res}}^2)^2 + \frac{f_{\text{res}}^4}{Q^2}}} \quad (2.44)$$

- Pour  $f \ll f_{\text{res}}$ , le bruit est en  $f^{-1/2}$  ;
- pour  $f \gg f_{\text{res}}$ , le bruit est en  $f^{-5/2}$ .

Les suspensions contribuent de trois manières au bruit thermique ; celles-ci sont présentées sur la figure 2.13. Tout d’abord par l’oscillation du *mode pendule* du miroir dont la fréquence de résonance  $f_{\text{res}} \approx 0.6 \text{ Hz}$  – très légèrement variable selon la suspension – est bien en-dessous de la bande de détection de Virgo<sup>14</sup>. Le facteur de qualité<sup>15</sup>  $Q$  vaut au moins  $8 \cdot 10^5$ . En conséquence, l’atténuation de ce mode est assez difficile – car très lente en régime libre ! – s’il est excité, ce

<sup>14</sup>La longueur des fils de suspension est 0.7 m.

<sup>15</sup>Il est intéressant de noter que le terme dominant des pertes est dû aux points de fixation des fils sur le support du miroir.



**Figure 2.12:** Exemples de DSA de bruit thermique pour trois valeurs du facteur de qualité :  $Q = 10$ ,  $Q = 1000$  et  $Q = 8 \cdot 10^5$  (mesuré pour les fils de suspension de première génération de Virgo). Le pic de résonance est d’autant plus élevé et étroit que  $Q$  est grand ; hors résonance, les DSA sont proportionnelles à  $1/\sqrt{Q}$ . Les deux axes sont en échelle logarithmique et celui des abscisses représente  $\ln(f/f_{\text{res}})$ .

qui peut arriver lorsqu’un problème apparaît dans le contrôle (local ou global) d’une suspension. Jusqu’à une cinquantaine de Hz, le bruit thermique pendulaire est dominant ; heureusement, il décroît en  $f^{-5/2}$ .

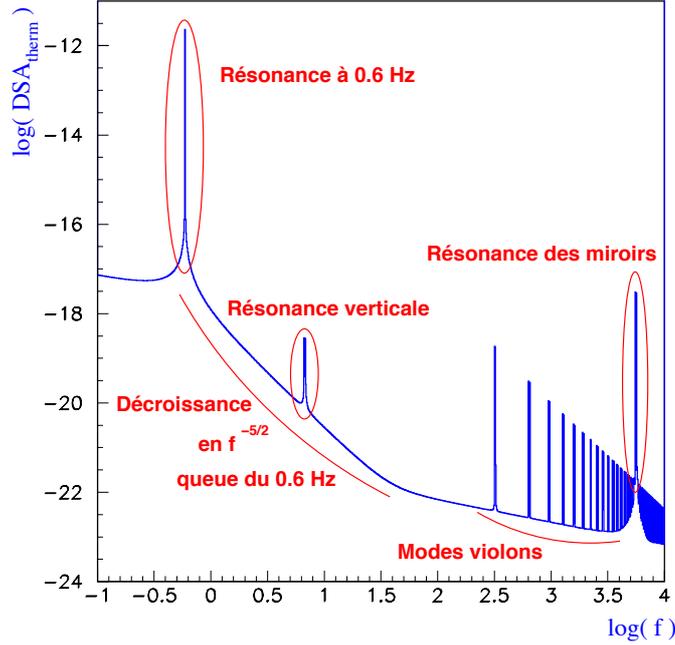
Ensuite, la première résonance apparaissant sur la courbe de sensibilité de Virgo correspond à une *oscillation verticale* à  $f_{\text{res}} \sim 6.7$  Hz et qui se transmet horizontalement par l’intermédiaire de l’angle de couplage  $\theta_{\text{vert/hor}}$ . Hors de la résonance, ce bruit est dominé par le mode pendule. Plus loin dans le spectre on trouve les *modes violons* (ou pianos) des fils, harmoniques d’un mode fondamental résonnant pour  $f_{\text{res}} \sim 327$  Hz.

Enfin, un peu après 5.5 kHz – très exactement à 5719 Hz pour les miroirs d’entrée des cavités Fabry-Perot et à 5582 Hz pour ceux du fond<sup>16</sup> [92] – on trouve la résonance des substrats des miroirs, caractérisée par un très grand facteur de qualité  $Q \sim 7.1 \cdot 10^5$  ce qui explique la hauteur du pic. Le bruit thermique des miroirs présenté par la collaboration américaine LIGO est plus faible que celui de Virgo ; cela n’est pas dû à la présence d’un quelconque dispositif expérimental plus performant mais plutôt aux choix d’hypothèses plus favorables pour le calcul de la DSA tandis qu’au contraire, Virgo a été plus conservateur pour estimer ce bruit. Dans l’un et l’autre cas, la sensibilité réelle sera ajustée en fonction des résultats expérimentaux et donc il est *inexact* de dire, comme on l’entend souvent, que LIGO est plus sensible que Virgo dans la gamme de fréquences intermédiaires (de quelques dizaines à quelques centaines de Hz) importante pour la détection de la phase spirale des coalescences de binaires.

### Limite quantique

Ce bruit est la limite ultime de sensibilité d’un détecteur interférométrique. Il repose sur la constatation simple suivante : pour diminuer le bruit de photons, on a vu qu’il “suffisait” d’augmenter  $P_{\text{in}}$  – Éq. (2.31) – ce qui revient à envoyer plus de photons sur les miroirs... et donc à augmen-

<sup>16</sup>La différence entre les fréquences de résonance est due à l’écart de masses entre les miroirs d’entrée et de fond car ceux-ci sont de dimensions différentes.



**Figure 2.13:** DSA totale associée au bruit thermique pour le détecteur Virgo. Sur ce graphe apparaissent ses différentes contributions, i.e. compris la résonance élevée à 0.6 Hz qui n'apparaît en général pas sur les courbes de sensibilité puisqu'elle est bien en deça du mur sismique. Néanmoins, comme le montre le schéma, la queue de sa distribution en  $f^{-5/2}$  gouverne le spectre thermique jusqu'à une cinquantaine de Hz.

ter les fluctuations de *pression de radiation* causées par les chocs des quanta sur les substrats. Ceux-ci induisent une incertitude  $\delta x_{\text{rad}} \propto \sqrt{N}$  sur la position d'un miroir donné qui s'ajoute quadratiquement au terme correspondant dû au *shot noise*  $\delta x_{\text{shot}} \propto 1/\sqrt{N}$ .

Il est facile de voir que  $\delta x_{\text{quant}} = \sqrt{\delta x_{\text{rad}}^2 + \delta x_{\text{shot}}^2}$  atteint son minimum lorsque les deux contributions sont égales et qu'il ne dépend alors que de la masse  $m$  du miroir. Négligeant l'effet de filtrage des cavités Fabry-Perot, on obtient une (pseudo-)DSA donnée par

$$\tilde{h}_{\text{quant}}(f) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m}} \frac{1}{\pi L_{\text{FP}} f} \approx 3.4 \cdot 10^{-23} \sqrt{\frac{20 \text{ kg}}{m}} \left(\frac{3 \text{ km}}{L_{\text{FP}}}\right) \left(\frac{10 \text{ Hz}}{f}\right) / \sqrt{\text{Hz}} \quad (2.45)$$

Au contraire des barres résonnantes, ce bruit est aujourd'hui loin d'être limitant pour Virgo.

### Bruits du faisceau laser

Le principe de base est que les bruits du laser ne doivent pas dominer le bruit de Virgo. Or, ses fluctuations de fréquence  $\delta \tilde{f}$  ou de puissance  $\delta \tilde{P}$  se couplent aux asymétries de l'interféromètre (différences de longueur ou de finesse des bras...); d'autres sources potentielles de bruit sont les variations de direction et de forme du faisceau (présence de modes d'ordres supérieurs...). La réduction de ses effets débouche sur plusieurs contraintes [98]; la spécification majeure porte sur la fréquence du laser :

$$\begin{aligned} \delta \tilde{f} &\leq 10^{-4} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} @ 10 \text{ Hz} \\ \delta \tilde{f} &\leq 10^{-6} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} @ 500 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Pour l'obtenir on procède à une stabilisation de fréquence en deux étapes : le laser est en permanence asservi sur une *cavité de pré-stabilisation* de petite taille, rigide et de grande finesse

( $\sim 30000$ ). De plus, lorsque l'interféromètre est contrôlé à son point de fonctionnement, le laser est asservi à "haute fréquence" (i.e. au delà de quelques Hz) sur la cavité de recyclage (Fabry-Perot kilométriques inclus!). Cette question délicate a été étudiée en détail dans [98].

Les fluctuations géométriques du laser sont éliminées par une cavité triangulaire de 144 m, le *mode-cleaner*. Il s'agit en fait d'un Fabry-Perot dont on exploite les capacités de filtrage en transmission pour purifier le faisceau : élimination des modes d'ordres supérieurs, des fluctuations de puissance et de fréquence... Sur ce sujet, on consultera par exemple [98] et la seconde partie de [99].

### Et bien d'autres...

Dans les paragraphes précédents ont été présentées les principales sources de bruit du détecteur Virgo. Néanmoins, étant donné son extrême sensibilité, il est soumis à beaucoup d'autres perturbations. Les lignes qui suivent visent à en recenser quelques unes, des plus concrètes aux plus rusées, sans souci d'exhaustivité! La note [92] détaille les DSA de chacun de ces bruits et donne les références associées.

- Les fluctuations d'indice provoquées par un gaz résiduel sur le trajet du faisceau laser. Pour y remédier, l'ensemble de l'optique de Virgo est enfermé dans des tubes où règne un *ultra-vide* – pression résiduelle  $\sim 10^{-10}$  mbar, et des contraintes plus grandes encore pour les hydrocarbures dont les propriétés polluantes ne sont plus à démontrer, surtout sur les substrats de Virgo, superpolis et recouverts d'un revêtement de couches minces – grâce à un système de pompes à vide réparties sur chacun des deux bras et à un étuvage spécial des sections métalliques afin de les faire dégazer. Virgo est l'une des plus grandes enceintes à vide au monde – seulement "battue" par les deux détecteurs américains LIGO dont les bras mesurent quatre kilomètres au lieu de trois!
- Le bruit de lumière diffusée dû aux réflexions parasites des photons sur les parois du tube. Des pièges à lumière et des déflecteurs sont installés à l'intérieur du tube ( $\sim 80$  par bras).
- Le "fluage" des fils de suspension au niveau microscopique – ou *creep*. Il s'agit de minuscules élongations des fils de suspension causées par des micro-ruptures anélastiques internes sous l'effet du poids en suspension. Leurs deux principaux paramètres – la "taille" d'un événement et son taux d'occurrence – ont pu être mesurés expérimentalement [100] ce qui a permis de montrer que ce bruit est négligeable, environ 4 ou 5 ordres de grandeur inférieur à la sensibilité de Virgo.
- Le bruit newtonien. Il tire son origine des fluctuations stochastiques de densité dans le sol, produites par des micro-séismes et qui entraînent des variations du champ gravitationnel qui se couplent directement aux miroirs. Les études faites, tant par Virgo que par LIGO, montrent que la DSA de ce bruit varie en  $1/f^2$  et qu'elle est dominée, d'abord par le bruit sismique à basse fréquence, puis par les bruits thermiques – néanmoins, ce bruit est du même ordre de grandeur que le bruit sismique à 3 Hz.

Pour résumer cette étude des différents bruits de Virgo, la table 2.1 récapitule les principaux – ainsi que les méthodes utilisées pour les atténuer – et la figure 2.14 présente la courbe de sensibilité du détecteur.

### 2.2.2 Acquisition des données et chaînes d'analyse, de l'*online* à l'*offline*

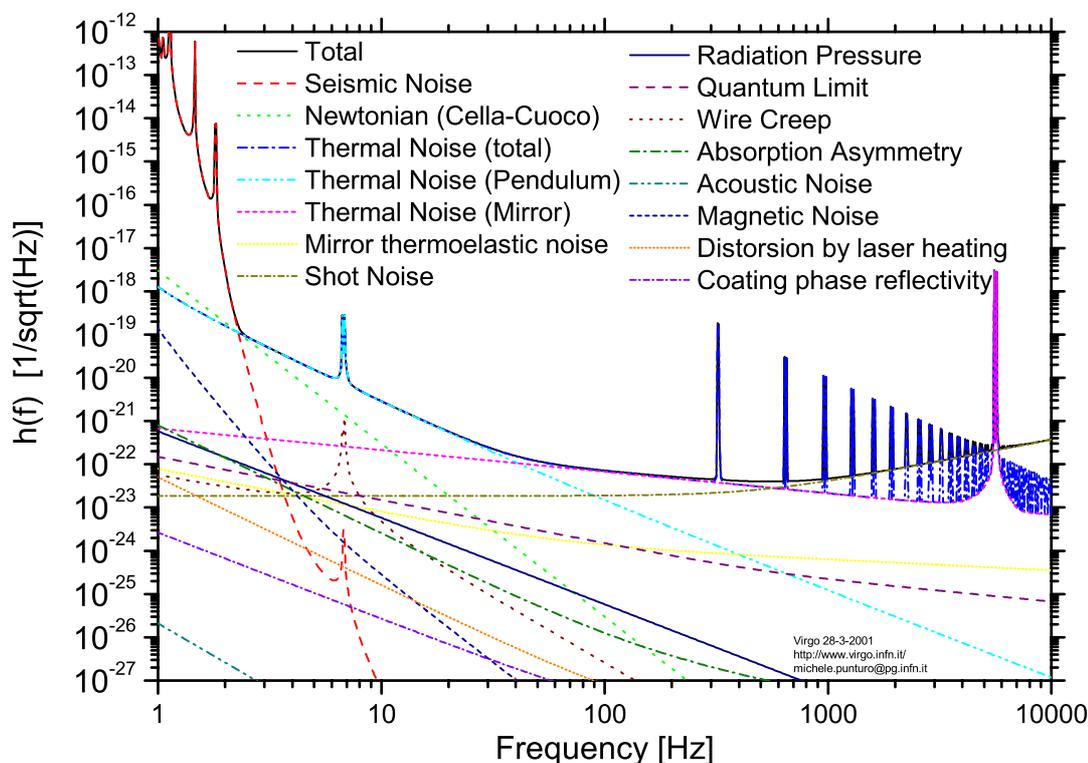
En fait, le processus d'extraction du signal est plus compliqué qu'une simple lecture de puissance DC sur un bloc de photodiodes. Il y a deux raisons principales à ce choix : d'une part le *bruit électronique* dont le spectre<sup>17</sup> est en  $1/f$  et d'autre part les fluctuations de la puissance du laser, trop importantes à basse fréquence. Ainsi, il est nécessaire de déplacer le processus de détection à de plus hautes fréquences, par exemple dans la *bande radio* (RF) à plusieurs MHz.

---

<sup>17</sup>Ce spectre divergent à basse fréquence est commun à la plupart des systèmes de mesure et il est essentiel de s'en affranchir. Pour plus de développements sur cette question – en particulier une approche concrète du problème et une mise en perspective historique de la manière dont il a été identifié et résolu en astrophysique –, on pourra consulter le brillant chapitre 10 de [101].

Bruit	Remède
Bruit sismique	Super Atténuateur: 5 étages de suspension, pendule inversé, atténuation $> 10^{14}$ à partir de 10 Hz
Bruits thermiques : fil de suspension, substrat du miroir, mode pendule de l'ensemble	Facteurs de qualité $Q$ élevés et masses de l'ordre de 20 kg
Bruit de photons	Puissance + recyclage du laser
Fluctuations de pression dans les tubes	Vide poussé ( $10^{-10}$ mbar)
Lumière diffusée	"Pièges à lumière" dans les tubes
Bruit de fréquence du laser	Stabilisation ( $10^{-6}$ Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$ ) à 500 Hz
Bruit géométrique du laser	Filtrage spatial par le <i>Mode-Cleaner</i>

**Tableau 2.1:** Récapitulatif des principaux bruits du détecteur Virgo et des remèdes utilisés pour les atténuer.



**Figure 2.14:** Courbe de sensibilité de Virgo – tirée de [92].

Cela s'obtient en **modulant** [102, 103] la phase du faisceau d'entrée (juste avant l'interféromètre pour avoir le moins de bruit possible) et en démodulant le signal en sortie de manière cohérente; ce processus introduit deux **bandes latérales** de part et d'autre de la fréquence du champ incident, appelée **porteuse**.

Il est caractérisé par un nombre  $m$ , appelé *indice de modulation* et une *fréquence de modulation*  $\Omega/2\pi$ ; le champ électromagnétique incident,  $\psi_{\text{in}}(t) = A_{\text{in}} e^{i\omega_{\text{in}}t}$  est transformé en un champ modulé  $\psi_{\text{mod}}(t)$  donné par :

$$\psi_{\text{mod}}(t) = A_{\text{in}} \exp \left[ i (\omega_{\text{in}} t + m \sin \Omega t) \right] = A_{\text{in}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m) e^{i(\omega_{\text{in}} + n \Omega) t} \quad (2.46)$$

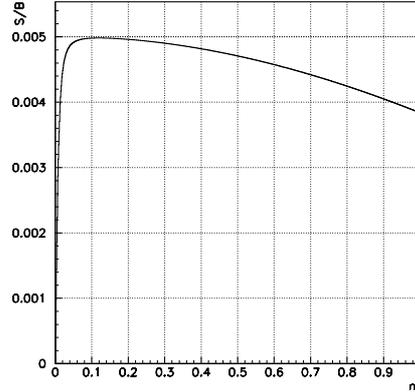
où les  $J_n$  sont les *fonctions de Bessel*. Si  $|m| \ll 1$ , on peut ne garder que les trois premiers termes de la somme; profitant de la relation  $J_{-1} = -J_1$ , on obtient finalement

$$\psi_{\text{mod}}(t) = A_{\text{in}} \left[ J_0(m) + J_1(m) e^{i \Omega t} - J_1(m) e^{-i \Omega t} \right] e^{i \omega_{\text{in}} t} \quad (2.47)$$

Par battement entre la porteuse et les bandes latérales, la puissance détectée en sortie  $P_{\text{det}}$  peut se décomposer sous la forme

$$P_{\text{det}}(t) = P_{\text{det}}^{\text{DC}} + P_{\text{det}}^{\text{phase}} \cos(\Omega t) + P_{\text{det}}^{\text{quad}} \sin(\Omega t) + \dots \text{ (termes en } 2\Omega t \text{ nfiltrés)} \quad (2.48)$$

Comme on le verra en détail dans le chapitre 3 consacré au contrôle du CITEF, on peut régler la *phase de démodulation* pour que le signal gravitationnel (et le bruit de l'interféromètre) apparaisse tout entier, soit dans le terme de **phase**  $P_{\text{det}}^{\text{phase}}$ , soit dans celui de **quadrature**  $P_{\text{det}}^{\text{quad}}$ , à la condition toutefois qu'il existe une *asymétrie* macroscopique entre les deux bras. Un autre avantage de cette méthode est que les signaux en phase et/ou en quadrature peuvent être utilisés comme **signaux d'erreurs** pour le contrôle des longueurs des cavités. On parle alors de signaux de *Pound-Drever* [103].



**Figure 2.15:** Variation du rapport S/B en fonction de l'indice de modulation  $m$  pour un défaut de contraste  $1 - C = 10^{-4}$ . L'unité du rapport S/B est arbitraire.

Quels critères utiliser pour choisir les deux paramètres de la modulation? Commençons par l'indice  $m$ . Dans le cas d'un Michelson simple, on peut montrer – voir appendice B – que le rapport S/B  $\rho$  vérifie :

$$\rho \propto \frac{J_0(m) J_1(m)}{\sqrt{J_0^2(m) + 2 J_1^2(m) \times \left[ \frac{2 - \sqrt{2(1-C)}}{1-C} \right]}} \quad (2.49)$$

où  $C$  est le contraste. Le tracé de cette fonction présenté sur la figure 2.15 ( $1 - C = 10^{-4}$ ) montre que l'optimum est assez plat, ce que confirme [104] (Figure 5) pour Virgo complet: ainsi, une large gamme d'indice de modulation convient. Un autre enseignement apporté par cette équation est que le rapport S/B est une fonction de  $m$  et de  $C$ , autrement dit qu'à  $C$  fixé, il existe une valeur optimale de  $m$ . [104] a montré que celle-ci variait comme  $(1 - C)^{1/8}$  pour Virgo.

Au contraire, le choix de  $\Omega$  est très important. Pour le CITEF – comme pour Virgo –, il assure la résonance des bandes latérales à l'intérieur de la **cavité de recyclage**, i.e. le Fabry-Perot formé par

le miroir de recyclage et le reste de l'interféromètre assimilé à un miroir de fond. La transmission de cette dernière cavité est la puissance en sortie sur la photodiode de frange noire. Comme le montre la comparaison des équations (2.11) et (2.12), cette configuration correspond également au cas d'une **transmission maximale** des bandes latérales vers la sortie du détecteur ce qui permet d'avoir un signal d'amplitude la plus grande possible [104].

Pour Virgo complet, il existe une contrainte supplémentaire sur  $\Omega$ , due à la présence des Fabry-Perot. En effet, les bandes latérales doivent être *anti-résonnantes* dans ces cavités kilométriques [104], ce qui permet d'avoir une résonance moins piquée dans la cavité de recyclage – et donc plus facilement contrôlable – et peu de perte en amplitude. Comme il y a un déphasage de  $\pi$  au niveau du signal réfléchi par le Fabry-Perot selon qu'il est *résonnant* ou *anti-résonnant*, la condition (2.51) définie ci-dessous est modifiée ce qui entraîne une division par deux de la fréquence de modulation sélectionnée – cf. table 2.2.

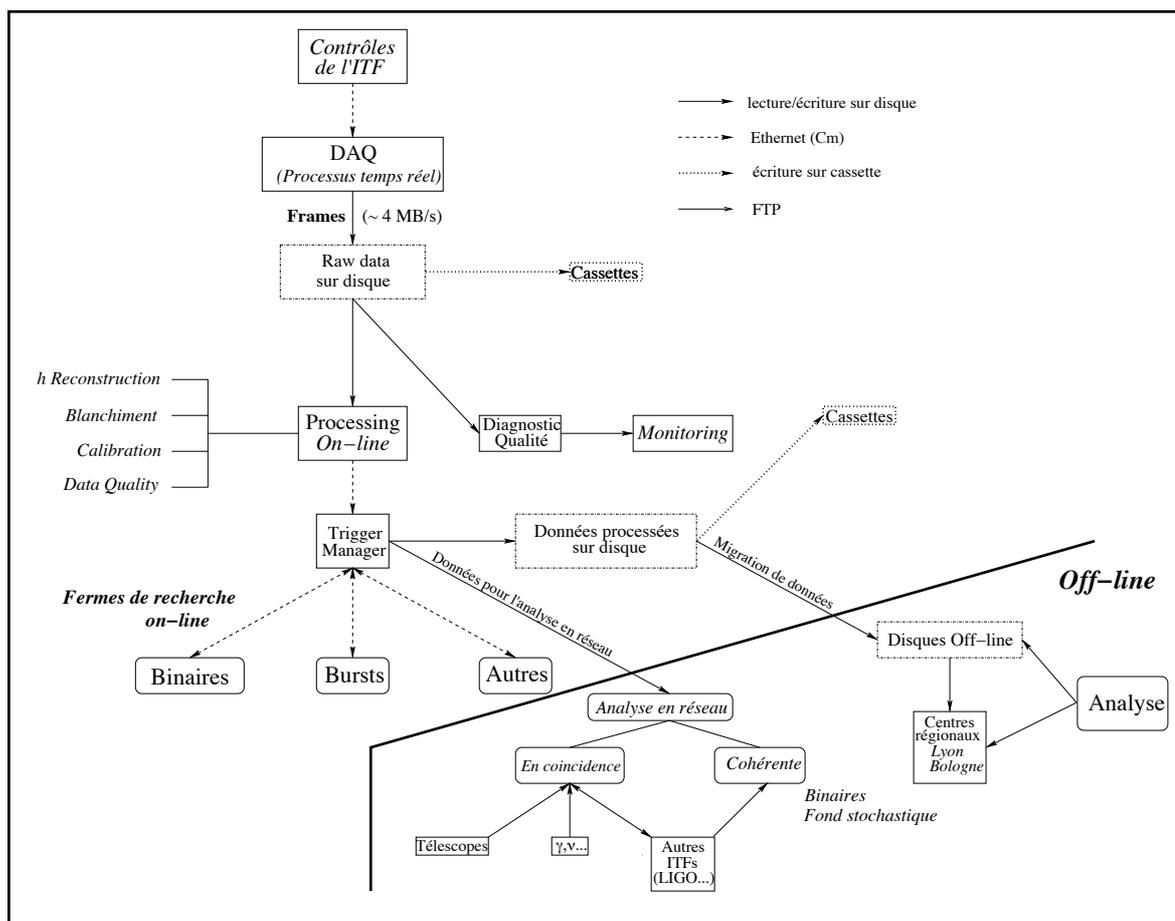


Figure 2.16: Schéma de la chaîne d'analyse de Virgo [105, 106].

Aux données des photodiodes s'ajoutent un grand nombre de canaux, échantillonnés de 50 Hz à 20 kHz, pour un flux total d'environ 4 MB/s. Ils donnent accès au statut du détecteur, à l'état des différents asservissements locaux (suspensions, laser) et globaux (contrôle des longueurs des cavités), ainsi qu'à des variables d'environnement (mesure des bruits électromagnétiques, de la température au niveau des tours...). La figure 2.16 présente un schéma de la chaîne d'analyse [105, 106], depuis l'acquisition jusqu'au stockage et aux analyses *off-line*, en passant par les recherches de signaux *on-line*. Le but principal de cette construction est de séparer et d'isoler au maximum les systèmes critiques afin d'assurer une meilleure fiabilité de l'ensemble.

Les processus *on-line* (calibration, reconstruction de  $h$ , blanchiment et validation de la qualité des données) conditionnent toute la suite de l'analyse : même en cas de bon fonctionnement sur une longue durée, on s'attend à ce que les caractéristiques de l'interféromètre évoluent au cours du temps sous l'effet de perturbations diverses (par exemple, les différences d'activité entre le jour et

la nuit...) et il faudra donc avoir des outils de diagnostic suffisamment précis et rapides pour suivre ces fluctuations. Ce *monitoring* servira finalement à avertir les opérateurs en cas de problème sur un sous-système quelconque.

### 2.2.3 L'interféromètre central (CITF)

Le but de ce paragraphe est de présenter les principales caractéristiques optiques de la partie centrale de l'interféromètre Virgo, le CITF. La motivation est double : d'abord quantifier la qualité de ses composants optiques – par exemple, qu'est-ce qu'un miroir *très réfléchissant* pour Virgo? – et ensuite préciser les diverses configurations dans lesquelles s'est déroulée l'activité expérimentale sur le site lors du travail sur le CITF. En effet, suite à des délais sur le système d'injection, celui-ci n'est toujours pas disponible et il a fallu utiliser un faisceau auxiliaire de puissance bien inférieure (160 mW nominaux au lieu de 10 W) ce qui n'a pas été sans poser quelques problèmes supplémentaires.

Dans le même temps, on procédera à une comparaison avec les composants demandés pour Virgo complet ; la différence majeure entre les deux détecteurs est que le CITF n'a pas de cavité Fabry-Perot kilométrique. Les miroirs situés dans les “tours d'entrée” *Nord* (NI) et *Ouest* (WI) sont donc l'équivalent des miroirs de fond de Virgo complet.

#### Laser et schéma de modulation

	Config. prévue du CITF	Config. réelle	Virgo
Fréq. de modulation $\Omega/2\pi$	12 586 274 Hz	Idem	La moitié (*)
Indice de modulation	0.5	$\sim 0.055$	0.4
Puissance du laser	10 W	$< 160$ mW	20 W
<i>Waist</i> du laser	$3.295 \cdot 10^{-3}$ m ( <i>Spécif.</i> : $3.244 \cdot 10^{-3}$ m) (**)	$\sim 3.2 \cdot 10^{-3}$ m	$\sim 1.98 \cdot 10^{-2}$ m

**Tableau 2.2:** Paramètres du faisceau laser et du schéma de modulation tirés de [59, 85].

(\*) A cause des cavités Fabry-Perot – cf. supra.

(\*\*) Le choix de la valeur du *waist* est donné par la condition que le rayon de courbure  $R_{\text{laser}}$  du front d'onde incident sur le miroir de fond soit égal au rayon de courbure  $\mathfrak{R}^c$  de ce composant. Pour une cavité de longueur  $L$  plan-courbe, on obtient la relation

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{L(\mathfrak{R}^c - L)} \quad (2.50)$$

En prenant les valeurs des rayons de courbure données dans la table 2.5 ci-après, on obtient deux valeurs pour  $w_0$ , l'une pour la cavité recyclage/miroir nord –  $w_0^{(1)}$  –, l'autre pour la cavité recyclage/miroir ouest –  $w_0^{(2)}$ .

$$\begin{cases} w_0^{(1)} \approx 3.3513 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ w_0^{(2)} \approx 3.3109 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{cases}$$

La valeur retenue pour le CITF est plus faible, faute de mieux : les miroirs montés ont un rayon de courbure 10% plus élevé environ que les spécifications auxquelles correspondait un *waist*  $w_0$  d'environ 3.24 mm. La conception du laser de puissance a suivi cette contrainte et, comme l'ajustement de  $w_0$  est limité à  $\pm 0.5$  mm, on a retenu la valeur possible la plus proche de la réalité. Avec le laser auxiliaire, le réglage du *waist* était quasiment impossible, d'où la valeur de la configuration réelle.

#### Longueurs des cavités du CITF

Les longueurs des deux bras  $l_1$  et  $l_2$  (délimités par la séparatrice et les miroirs de fond) ainsi que la distance entre le miroir de recyclage et la séparatrice  $l_0$  sont déterminées avec une grande précision [107] :

- $l_1 = 6380.7$  mm
- $l_2 = 5532.8$  mm

- $l_0 = 5952.75$  mm

De ces données, on déduit les valeurs des deux longueurs à **contrôler** pour le CITF.

- La “**longueur de frange noire**”  $l_{12} = l_2 - l_1 = 847.9$  mm.  
Cette valeur est choisie d’après une spécification donnée par [104] qui correspond à une transmission des bandes latérales quasi-optimale en sortie de l’interféromètre.
- La “**longueur de recyclage**”  $l_r = l_0 + \frac{l_1+l_2}{2} = 11909.5$  mm.  
Cette longueur assure la condition de résonance des bandes latérales dans la cavité de recyclage. En effet, celle-ci est un Fabry-Perot pour lequel la condition de résonance (2.15) devient  $k_\Omega L_r = \pi$  (voir l’appendice B) ce qui peut se réécrire

$$\frac{c}{2l_r} = \frac{\Omega}{2\pi} \quad (2.51)$$

Numériquement,  $\frac{c}{2l_r} = 12\,586\,273.899$  Hz, valeur à comparer avec celle présentée dans la table 2.2 pour la fréquence de modulation.

### Composants optiques

Pour ce qui est des composants optiques, toutes les spécifications – pour le CITF et pour Virgo – sont tirées de [32], tandis que les valeurs du CITF sont le résultat de mesures [108]. Les valeurs numériques indiquées dans les tables ci-après concernent les réflexions, transmissions et pertes en *puissance* et non pas en *amplitude*.

- Miroir de recyclage

	CITF	Spécification pour le CITF	Virgo
$R_0$	$0.9859 \pm 0.0003$	0.985	0.92

**Tableau 2.3:** Caractéristiques du miroir de recyclage.

Les pertes sont  $\mathcal{L}_0 = 5.3$  ppm<sup>18</sup>. Le miroir de recyclage est moins réfléchissant pour Virgo ; la cavité de recyclage aura un gain de 50 simplement au lieu de 400 environ pour le CITF. Cette valeur qui peut paraître assez faible correspond en fait au cas au **recyclage optimal** [88] (gain égal à l’inverse des pertes de l’interféromètre).

- Séparatrice

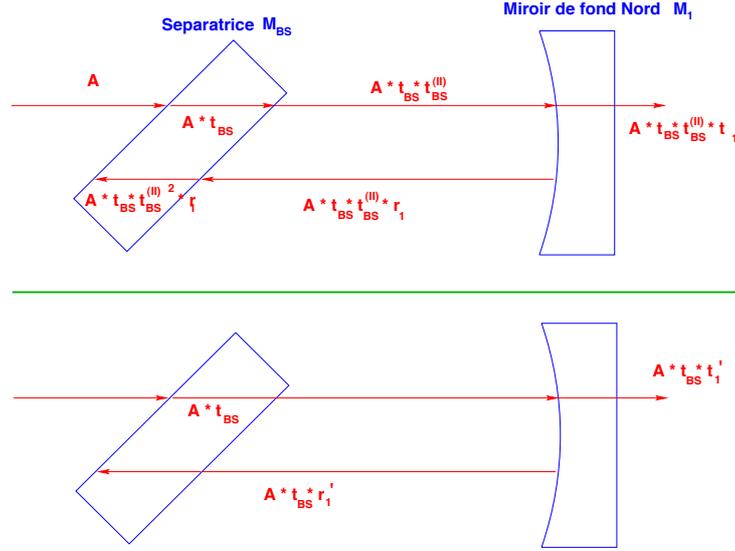
	CITF	Spécification
$R_{BS}$	$0.5011 \pm 0.0015$	$0.5 \pm 0.005$
$T_{BS}$	$0.498 \pm 0.002$	$0.5 \pm 0.005$

**Tableau 2.4:** Caractéristiques de la séparatrice.

Les pertes mesurées sont  $\mathcal{L}_{BS} = 8$  ppm<sup>19</sup>. Le produit  $R_{BS} T_{BS}$  vaut 1/4 à 0.2% près. La réflexion de la *seconde face de la séparatrice* – antiréfléchissante – a aussi été mesurée : elle vaut  $R_{BS}^{(II)} = (2.1 \pm 0.5) 10^{-3}$  au centre du miroir. Bien que faible, cette valeur a une grande importance pour deux raisons : tout d’abord, sa prise en compte revient à modifier les paramètres optiques du miroir nord  $M_1$  puisque le faisceau incident traverse deux fois cette seconde face avant de ressortir – cf. figure 2.17 ; ensuite, ce faisceau réfléchi est recueilli par une photodiode, appelée **D5**, dont on verra que ses signaux DC et AC servent pour le contrôle des longueurs de frange noire et de recyclage du CITF.

<sup>18</sup>Parties par million.

<sup>19</sup> $R_{BS} + T_{BS} + \mathcal{L}_{BS} \neq 1$  exactement et donc dans les calculs il faut fixer soit la transmission, soit la réflexion et en déduire l’autre coefficient en incluant les pertes.



**Figure 2.17:** Prise en compte de la réflectivité de la seconde face de la lame séparatrice en modifiant les coefficients de réflexion et de transmission du miroir Nord.

- Miroirs d'entrée des cavités Fabry-Perot

Ils sont bien évidemment absents dans la configuration CITF. Pour Virgo, les spécifications pour les coefficients de réflexion en puissance de ces miroirs donnent  $R \sim 0.88$  : là encore, les finesses souhaitées pour ces cavités sont simplement de l'ordre de 50 ; plusieurs raisons expliquent ce choix.

- Si la puissance stockée dans la cavité était plus grande, il y aurait – à pertes constantes – moins de lumière réfléchie dans l'interféromètre et donc moins à recycler. Il faut trouver un compromis entre les deux modes de stockage.
- La largeur de la résonance de la cavité varie comme  $1/\mathfrak{F}$  et donc son contrôle est d'autant plus difficile que la finesse est grande.
- Une finesse trop élevée entrainerait des pertes thermiques sur les substrats du miroir.
- La fréquence de coupure de la cavité Fabry-Perot est proportionnelle à l'inverse de la finesse, augmenter celle-ci revient donc à diminuer celle-là. On peut démontrer que la longueur effective des bras ( $\mathfrak{F}L/\pi$ ) est optimale quand elle est égale à la demi-longueur d'onde gravitationnelle [109].

- Miroirs de fond

	CITF	Spécification	Virgo
Miroir Nord $M_1$	$T_1 = (56 \pm 3) 10^{-6}$ (*) $\mathcal{L}_1 = 17$ ppm (*) $\mathfrak{R}_1^c = 101.5 \pm 0.5$ m	$10^{-5} < T < 10^{-4}$ 93 m	$R > 0.99995$ $\mathfrak{R}^c = 3450$ m
Miroir Ouest $M_2$	$T_2 = (72 \pm 6) 10^{-6}$ $\mathcal{L}_2 = 5$ ppm $\mathfrak{R}_2^c = 102.7 \pm 1$ m	$10^{-5} < T < 10^{-4}$ 93 m	$R > 0.99995$ $\mathfrak{R}^c = 3450$ m

**Tableau 2.5:** Caractéristiques des miroirs de fond.

(\*) Ces deux valeurs correspondent à  $R_1 = 0.999927$ . En fait, la situation réelle est un peu plus complexe à cause de la présence de la **seconde face** – antiréfléchissante – de la séparatrice. Une manière simple de la prendre en compte en simulation revient à la supposer parfaitement transparente et à modifier les paramètres optiques du miroir de fond Nord ; ainsi,  $R_1$  devient moins bon et les pertes augmentent. On obtient alors le jeu de paramètres

suivant :

$$\begin{cases} R_1 \rightarrow T_{\text{BS}}^{(II)} \times T_{\text{BS}}^{(II)} \times R_1 = 0.9957317 \\ T_1 \rightarrow T_{\text{BS}}^{(II)} \times T_1 \approx 5.588 \cdot 10^{-5} \\ \mathcal{L}_1 = 1 - R_1 - T_1 \approx 4212 \text{ ppm} \end{cases}$$

Ces valeurs seront utilisées dans la suite de l'exposé, associées au choix d'une seconde face de la séparatrice transparente. Le contraste vaut alors  $C \approx 1 - 2 \times 10^{-6}$ .

### 2.2.4 D'autres détecteurs interférométriques

Cinq<sup>20</sup> autres détecteurs interférométriques sont actuellement en construction ou en fonctionnement dans le monde. La plupart suivent le même schéma que Virgo, à savoir un Michelson recyclé de grande dimension avec des cavités Fabry-Perot dans les bras.

- Trois pour la collaboration américaine LIGO [111]: deux de 4 km de long à Hanford – état de Washington – et Livingston – Lousiane –, un de 2 km également à Hanford pour améliorer l'analyse des bruits des deux instruments (la plupart des bruits non-stationnaires sont spécifiques à un des détecteurs tandis qu'un signal gravitationnel apparaîtrait avec une différence *prévisible* dans les deux canaux de données).
- La collaboration anglo-allemande GEO [112] construit près de Hannovre un interféromètre-dont les bras mesurent 600 mètres et qui utilise la technique du **recyclage du signal** [113] pour améliorer sa sensibilité dans une gamme de fréquence sélectionnée. Un miroir est placé avant la photodiode et forme avec le reste du détecteur une cavité Fabry-Perot supplémentaire utilisée pour faire résonner les bandes latérales. Par ailleurs, les bras ne contiennent pas de Fabry-Perot mais des lignes à retard qui ont la même fonction : augmenter le chemin optique de la lumière.
- L'interféromètre japonais TAMA [114] – dont les bras font 300 m – prend des données depuis plus d'un an. Il détient actuellement la meilleure sensibilité, de l'ordre de  $10^{-20} / \sqrt{\text{Hz}}$  entre 200 Hz et 3 kHz [115].

La table 2.6 regroupe les principales caractéristiques de chacun des détecteurs interférométriques en fonctionnement, en construction ou prévus. En plus de leur courbe de sensibilité, chacun des instruments est entièrement caractérisé par 4 angles qui permettent de calculer sa réponse à une onde gravitationnelle issue de n'importe quelle direction du ciel – cf. chapitre 7.3.

- Deux coordonnées géographiques : *longitude*  $L$  – comptée positivement vers l'ouest – et *latitude*  $l$ .
- L'*écartement*  $\chi$  entre les deux bras – on verra (cf. appendice D) que  $90^\circ$  est un optimum.
- Une sorte d'*azimuth*  $\gamma$ , i.e. l'angle entre le sud local et la bissectrice interne des deux bras.

Détecteur	Latitude $l$	Longitude $L$	Écartement des bras $\chi$	“Azimuth” $\gamma$
VIRGO	43.6	-10.5	90.0	206.5
LIGO Hanford	46.5	119.4	90.0	261.8
LIGO Livingston	30.6	90.8	90.0	333.0
GEO600	52.3	-9.8	94.3	158.8
TAMA300	35.7	-139.5	90.0	315.0
AIGO ( <i>prévu</i> )	-31.4	-115.7	90.0	<i>Non déterminée</i>

**Tableau 2.6:** Table regroupant les caractéristiques (position géographique, orientation, écartement des deux bras) des détecteurs interférométriques actuellement en construction ou prévus. Tous les angles sont donnés en degrés.

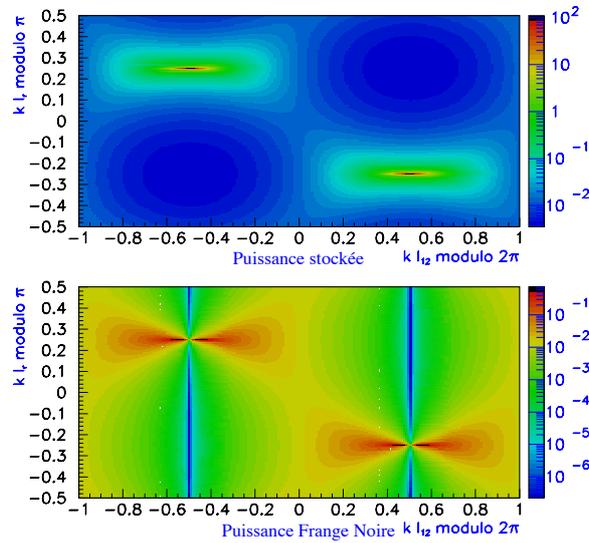
<sup>20</sup>La collaboration australienne ACIGA [110] a également un site près de Perth (AIGO) mais la construction d'un interféromètre n'a pas encore débuté, faute de moyens.

## Chapitre 3

# Etude du Contrôle Global de Virgo

Le chapitre 2 a présenté la complexité et la richesse du détecteur Virgo; cette situation est la conséquence de sa grande sensibilité, nécessaire pour rechercher un rayonnement dont le chapitre 1 nous a montré la faiblesse. De plus, on a vu que la qualité de l'instrument ne dépend pas uniquement du niveau du signal auquel il a accès mais aussi de sa capacité à s'affranchir des bruits qui viennent perturber sa mesure et qui sont d'autant plus nombreux qu'il est sensible. C'est surtout par cet aspect qu'un interféromètre géant comme Virgo se distingue des autres types de détecteurs d'ondes gravitationnelles en développement – barres de Weber – ou projetés.

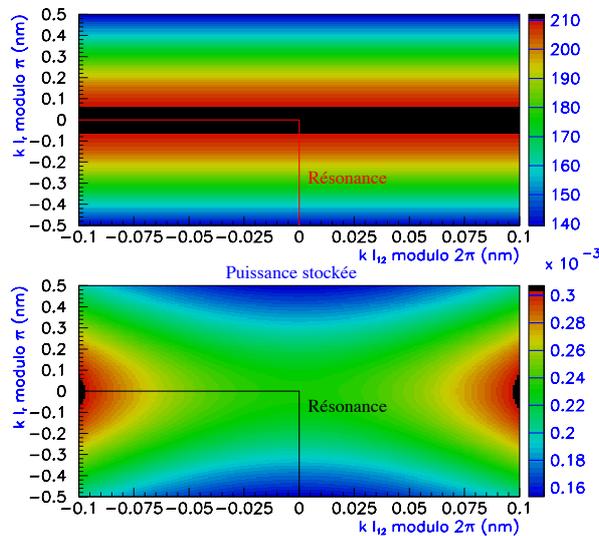
Les parties précédentes ont également recensé tous les efforts menés au niveau *technique* pour décrire puis construire un instrument qui suive ces spécifications draconiennes. Lors de cette étude est apparu le concept de **point de fonctionnement**, configuration dans laquelle le détecteur atteint sa sensibilité nominale: pour le CITF, frange noire en sortie et résonance de la cavité de recyclage, auxquelles s'ajoutent celles des deux cavités Fabry-Perot pour Virgo complet.



**Figure 3.1:** Puissance stockée dans la cavité de recyclage et puissance en sortie de l'interféromètre en fonction des longueurs de frange noire et de recyclage. On peut voir sur ces figures l'emplacement des deux points de fonctionnement possibles, correspondant à une puissance stockée maximale et une puissance frange noire minimale, les deux allant de pair. Les paramètres optiques des miroirs sont ceux du CITF et les puissances sont normalisées à un laser incident de 1 W.

En l'absence de tout contrôle, cette situation n'arriverait que très occasionnellement, voire jamais: ainsi, la figure 3.1 présente les variations de la puissance stockée et de la puissance de frange noire pour le CITF en fonction de la différence de longueur des bras  $l_{12}$  et de la longueur moyenne de la cavité  $l_r$  introduites au paragraphe 2.2.3. Sur ces graphes, il est clair que les deux

points de fonctionnement ne représentent qu'une très faible fraction des configurations possibles et que la sensibilité du détecteur est fortement dégradée hors de ces régions.



**Figure 3.2:** Agrandissements des deux graphes précédents centrés autour d'un des points de fonctionnement. Les axes  $x$  et  $y$  sont gradués en nanomètres ; les résonances correspondent au point  $(0,0)$ . La taille caractéristique de l'intervalle dans lequel peuvent varier les longueurs sans affecter les performances de l'interféromètre est donc de l'ordre de l'Angström. On peut également remarquer que le point de fonctionnement ne correspond pas exactement à la frange la plus noire : le champ en sortie du détecteur est proportionnel à celui stocké et donc le niveau de frange noire est un peu relevé au recyclage maximal.

L'agrandissement présenté sur la figure 3.2 autour d'un des points de fonctionnement permet d'affiner les remarques précédentes : les deux axes sont maintenant gradués en nanomètres et l'on s'aperçoit que l'amplitude des variations de longueurs permises doit être de l'ordre de l'Angström pour ne pas trop dégrader les performances du détecteur. On verra dans la suite que les spécifications réelles sont en fait encore plus contraignantes pour tenir compte, par exemple, des fluctuations en puissance et en fréquence du laser.

### 3.1 Contrôles locaux et contrôle global

Ainsi, comme l'exemple précédent l'a montré, faire fonctionner Virgo nécessite un contrôle permanent du détecteur pour le maintenir dans sa configuration optimale, seule capable de lui assurer une sensibilité suffisante. Schématiquement, on peut décomposer cette tâche en trois parties.

- Le contrôle du laser : en fréquence, en puissance et au niveau de la géométrie du faisceau (pur TEM<sub>00</sub> requis).
- Le contrôle longitudinal des cavités.
- Le contrôle angulaire des miroirs.

Dans cette thèse, le premier point sera très peu abordé ; pour de plus amples informations, on pourra consulter [98, 99]. Par contre, on reviendra plus longuement sur les deux autres contrôles, et en particulier sur les asservissements longitudinaux.

Pour conserver les cavités résonnantes et les miroirs alignés, deux types de contrôle complémentaires sont utilisés : les contrôles locaux et le Contrôle Global.

### 3.1.1 Contrôles locaux

Les **contrôles locaux** visent à diminuer le mouvement résiduel des miroirs au niveau de chaque suspension (indépendamment les uns des autres). Ils ont été présentés en partie au paragraphe 2.2.1 lors de la description du *superatténuateur* et du *damping inertiel*. Un contrôle supplémentaire a lieu au niveau angulaire<sup>1</sup> à l'aide d'une caméra CCD et d'un logiciel d'analyse d'images appelé **Gx** [116] – cf. figure 3.3 – qui permet d'accéder aux oscillations du miroir par l'observation de marqueurs placés sur le miroir ou son support. Deux modes de fonctionnement sont possibles.

- Le mode *grossier*: la caméra suit des taches placées sur le support des miroirs<sup>2</sup>.
- Le mode *fin*: la caméra suit un faisceau laser annexe unique (longueur d'onde visible) qui se réfléchit sur le substrat.

Dès que le faisceau annexe est détecté par la caméra, le contrôle passe du mode grossier au mode fin. Les RMS des mouvements angulaires résiduels sont de l'ordre de quelques microradians.

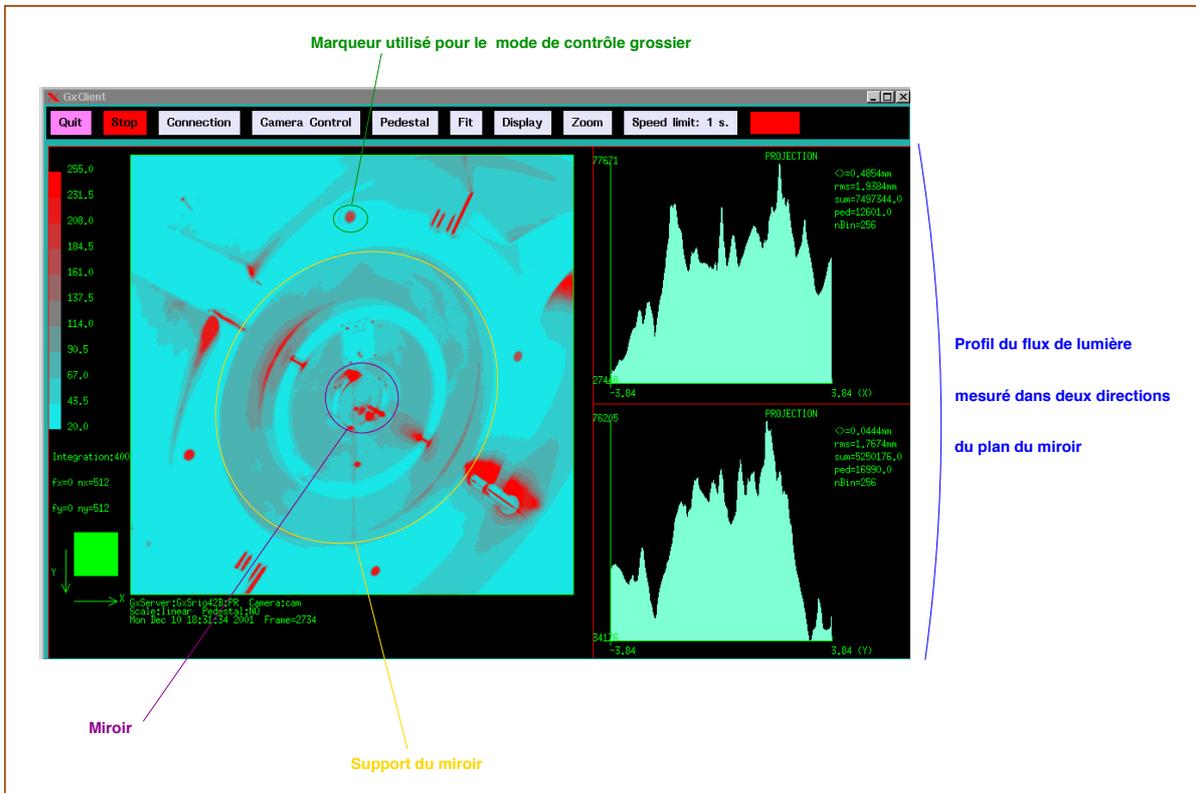


Figure 3.3: Vue d'un client graphique Gx utilisé pour le contrôle local d'un miroir.

Ces contrôles actifs agissent donc directement sur les miroirs, ce qui peut avoir des conséquences dramatiques sur ceux-ci en cas de dysfonctionnement. Après le bris d'une lame séparatrice – consécutif à un débranchement intempestif de câbles –, un programme de sécurité appelé "*Guardian*" [117] a été mis en place. Il surveille les mouvements du sommet de la suspension et ceux au niveau de la marionnette ; en cas d'oscillation trop importante dans un degré de liberté, la boucle de contrôle correspondante est automatiquement ouverte.

### 3.1.2 Les différentes étapes du contrôle de Virgo

Dans l'idéal, le dispositif de contrôle de Virgo évolue de la manière suivante pour amener l'interféromètre d'une position initiale quelconque à sa pleine sensibilité.

<sup>1</sup>Un contrôle longitudinal est théoriquement possible mais le signal d'erreur correspondant est pour le moment complètement dominé par le bruit de mesure de la caméra. Une modification des contrôles locaux – utilisation d'une seconde caméra – est en cours pour y ajouter cette fonctionnalité.

<sup>2</sup>Les miroirs du CITF étant plus petits que ceux de Virgo, ils sont montés sur un support.

- L'interféromètre est initialement libre : chaque degré de liberté oscille. Les boucles d'asservissement des contrôles locaux sont alors fermées pour ramener les mouvements résiduels des miroirs au niveau du  $\mu\text{m}$  et du  $\mu\text{rad}$ .
- Par action sur les superatténuateurs, les miroirs sont alignés "à la main" – *a priori* on devrait pouvoir revenir automatiquement à une position donnée mais ce n'est pas encore tout à fait le cas (l'interféromètre "bouge") et les causes de ce problème ne sont pas bien comprises au jour d'aujourd'hui ; le même comportement est observé également dans les détecteurs LIGO [118].
- Le contrôle des longueurs (de cavités) "**locking**" est acquis au moyen d'algorithmes spécifiques.
- Ces contrôles deviennent finalement *linéaires* (par exemple à l'aide de la **matrice optique**, cf. Appendice B) : il est plus simple de maintenir le détecteur au voisinage de son point de fonctionnement que de l'y amener d'une position arbitraire.
- L'**alignement automatique** est ensuite mis en marche : tout comme le contrôle longitudinal linéaire, il utilise des signaux de photodiodes (à quadrants, cf. paragraphe 3.3.3) pour mesurer les *tilts* des miroirs et calculer des corrections ; cela permet d'améliorer l'alignement général de l'instrument. Malheureusement, cette procédure ne peut être mise en route que si les longueurs des cavités sont résonantes : dans les autres situations, les signaux d'erreur d'alignement ne sont pas interprétables et, de plus, comme les miroirs d'extrémité de Virgo ont une transmission très petites, la lumière arrivant sur les photodiodes à quadrants est trop faible. L'acquisition des contrôles longitudinaux se fait donc forcément avec un alignement imparfait !
- A ce moment, le détecteur est entièrement piloté de manière **globale** et certains contrôles locaux ne sont plus nécessaires : devenus de simples sources de bruit, ils sont alors éteints. Néanmoins, une partie d'entre-eux seront conservés :
  - tous les désalignements sont calculés par rapport à la séparatrice dont le mouvement n'est pas corrigé de manière globale, mais simplement au niveau local pour que ses mouvements résiduels soient limités ;
  - les contrôles locaux peuvent servir à observer les dérives lentes de l'ensemble du détecteur : on peut par exemple penser au cas où la résonance d'une cavité Fabry-Perot est maintenue en agissant continuellement dans une même direction sur les miroirs d'entrée et de fond.

### 3.1.3 Le Contrôle Global

Le **contrôle global** de Virgo est assuré par un système homonyme [59, 119] développé à Orsay. Sa description est le sujet principal de ce chapitre. Après un point rapide sur les spécifications demandées pour le maintien du détecteur à son point de fonctionnement, je parlerai du *hardware* et du *software* développés et assemblés pour construire ce maillon essentiel de la chaîne de contrôle. En particulier, je m'efforcerai de justifier les différents choix faits au cours de sa mise au point afin de montrer qu'ils sont soit le fait de contraintes techniques, soit le reflet d'une volonté délibérée d'obtenir un système fiable, efficace et facilement évolutif. Le Contrôle Global est installé à Cascina depuis le mois de juin 2000 et fonctionne là-bas sans interruption, que sa présence soit ou non nécessaire à l'activité courante du site.

Dans un second temps je présenterai ses performances avant d'en venir aux succès expérimentaux lors desquels il a été utilisé : contrôle de la frange noire du CITF en juin 2001, contrôle simultané de cette longueur et de la cavité de recyclage en décembre 2001. On verra en particulier que ses fonctions ont été étendues peu à peu, d'une part pour pallier les insuffisances d'autres systèmes et d'autre part parce que les modifications étaient simples à mettre en oeuvre à ce niveau – grâce au choix d'architecture initial.

## 3.2 Spécifications de contrôle

Ce paragraphe regroupe les principales spécifications que doivent satisfaire les différents paramètres de l'interféromètre Virgo pour que celui-ci accède à sa sensibilité nominale. Trois domaines sont à

---

considérer : le laser, les longueurs des cavités et les positions angulaires des miroirs.

### 3.2.1 Stabilité du laser

Il est un peu délicat de parler de spécifications pour le laser de puissance dans le cas du CITF puisque l'apprentissage de son pilotage s'est effectué avec un laser auxiliaire du commerce (néanmoins le plus stable sur le marché), mais heureusement suffisamment peu bruyant pour permettre malgré tout l'acquisition des contrôles.

Néanmoins, il existe plusieurs contraintes sur les fluctuations de puissance et de fréquence du laser ainsi que sur le bruit de position du centre du faisceau, appelé également *jitter*. Ces spécifications devront être satisfaites pour Virgo afin d'accéder à la sensibilité nominale de l'instrument.

- Fluctuations de puissance attendues pour le futur laser 20 W :

$$\frac{\widetilde{\delta P_{\text{in}}}}{P_{\text{in}}} = 10^{-8}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (3.1)$$

- Fluctuations de fréquence :

Ce point a déjà été abordé au paragraphe 2.2.1. Les spécifications sont les suivantes :

$$\begin{cases} \delta \tilde{f} \leq 10^{-4} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} @ 10 \text{ Hz} \\ \delta \tilde{f} \leq 10^{-6} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} @ 500 \text{ Hz} \end{cases} \quad (3.2)$$

- Bruit de pointé du faisceau laser :

Ce bruit se couple avec les désalignements des miroirs, qu'ils soient d'origine statique ou dus par exemple au bruit sismique et il induit donc des spécifications d'alignement traitées ci-après. En sortie du *mode cleaner*, on attend un bruit de l'ordre de

$$\delta \theta_{\text{laser}} = 10^{-11} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Contrôles longitudinaux

Pour les cavités Fabry-Perot kilométriques et la longueur de recyclage, on demande que les fluctuations de longueur  $\delta l$  soient inférieures au dixième<sup>3</sup> de la demi-largeur à mi-hauteur du pic de résonance – cf. équation (2.17) :

$$\delta l < \frac{1}{20} l_{\text{FWHM}} \begin{cases} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m pour les deux Fabry-Perot } (\mathfrak{F} \sim 50) \\ = 2.5 \cdot 10^{-10} \text{ m pour la longueur de recyclage } (\mathfrak{F} \sim 100) \end{cases} \quad (3.4)$$

Dans le cas du CITF, si le laser de puissance avait été présent, la contrainte la plus forte sur la longueur de recyclage  $l_r$  aurait été due à la dynamique limitée de l'électronique des photodiodes :  $\sim 10^{-10}$  m.

Pour la longueur de frange noire, la spécification la plus importante vient du couplage de ses fluctuations avec les variations de puissance du laser. Or, on veut que cet effet ne limite pas la sensibilité et donc qu'il soit dominé par le bruit de comptage des photons. En utilisant l'équation (2.29), on aboutit à la relation

$$\frac{4\pi}{\lambda} \left( \frac{\widetilde{\delta P_{\text{in}}}}{P_{\text{in}}} \right) \delta l_{12} < \sqrt{\frac{h_{\text{Planck}} c}{\eta \lambda P_{\text{in}}}} \quad (3.5)$$

soit :

$$\delta l_{12} < 10^{-11} \text{ m pour Virgo}$$

Une spécification similaire existe pour le CITF mais elle n'a pas lieu d'être en pratique à cause de l'utilisation du laser auxiliaire.

---

<sup>3</sup>Facteur de sécurité classique dans Virgo bien qu'un peu arbitraire.

### 3.2.3 Contrôles angulaires

Pour le CITF, les couplages entre les différents désalignements sont négligeables mais l'objectif du test de la procédure d'alignement automatique est d'arriver à des performances similaires aux spécifications prévues pour Virgo. Les problèmes d'alignement sont essentiellement dus au couplage entre les fluctuations du pointage du laser  $\delta\theta_{\text{laser}}$  et les *tilts* des miroirs qui provoquent un déplacement de l'axe optique  $\delta l_{\text{axe}}$  [88]. A angle constant celui-ci est d'autant plus important que le rayon de courbure et la longueur de propagation sont grands. Cela explique les différences dans les spécifications selon la position des miroirs dans l'interféromètre :

$$\delta\theta_{\text{miroir}} < \begin{cases} 10^{-7} \text{ rad pour le miroir de recyclage} \\ 2 \cdot 10^{-8} \text{ rad pour les miroirs d'entrée des Fabry-Perot} \\ 3 \cdot 10^{-9} \text{ rad pour les miroirs de fond des Fabry-Perot} \end{cases} \quad (3.6)$$

en prenant pour  $\delta\theta_{\text{laser}}$  la valeur de l'équation (3.3). Ces contraintes sont nettement en-dessous du niveau du microradian atteint grâce aux contrôles locaux. Cela explique pourquoi il est prévu de mettre en place des procédures d'alignement automatiques basées, comme le contrôle des longueurs, sur des signaux d'erreur optiques.

### 3.2.4 Les spécifications sont-elles réalistes ?

Apparaissant au détour d'une thèse sur l'expérience Virgo, cette question peut sembler provocatrice mais il est légitime de se la poser : les spécifications longitudinales présentées dans les paragraphes précédents sont au niveau de l'Angström – taille caractéristique d'un atome –, voire en-dessous. De plus, la variation relative de longueur  $\delta l_{\text{OG}}/l_{\text{itf}}$  mesurée est égale à la sensibilité du détecteur  $h^{\text{min}}$ . En prenant  $l_{\text{itf}} \sim 100 \text{ km}$  et  $h^{\text{min}} \sim 10^{-21}$  – valeurs typiques présentées au chapitre 2 –, on obtient  $\delta l_{\text{OG}} \sim 10^{-16} \text{ m}$ , soit dix fois moins que le diamètre nucléaire ! Quelle interprétation donner à ces mesures ?

En fait il est assez facile de dissiper l'ambiguïté soulevée par les remarques précédentes. Tout d'abord, il ne s'agit pas de mesurer de façon précise la position d'un seul atome  $x_i$ , connue avec une incertitude  $\sigma$ , mais celle de la surface moyenne du miroir  $x_0$ . En première approximation, on peut dire que si  $N$  atomes sont impliqués dans cette mesure, l'incertitude correspondante vaut  $\sigma_0 = \sigma/\sqrt{N}$  et donc  $x_0$  est connue de manière bien plus précise que l'emplacement d'un atome particulier. Par exemple, la section transverse du faisceau laser sur les miroirs de fond des cavités Fabry-Perot de Virgo couvrira de l'ordre de  $100 \text{ cm}^2$  et touchera donc  $N \sim 10^{20}$  atomes. En supposant  $\sigma$  également de l'ordre de l'Angström, on obtient  $\sigma_0 \sim 10^{-20}$  mètres.

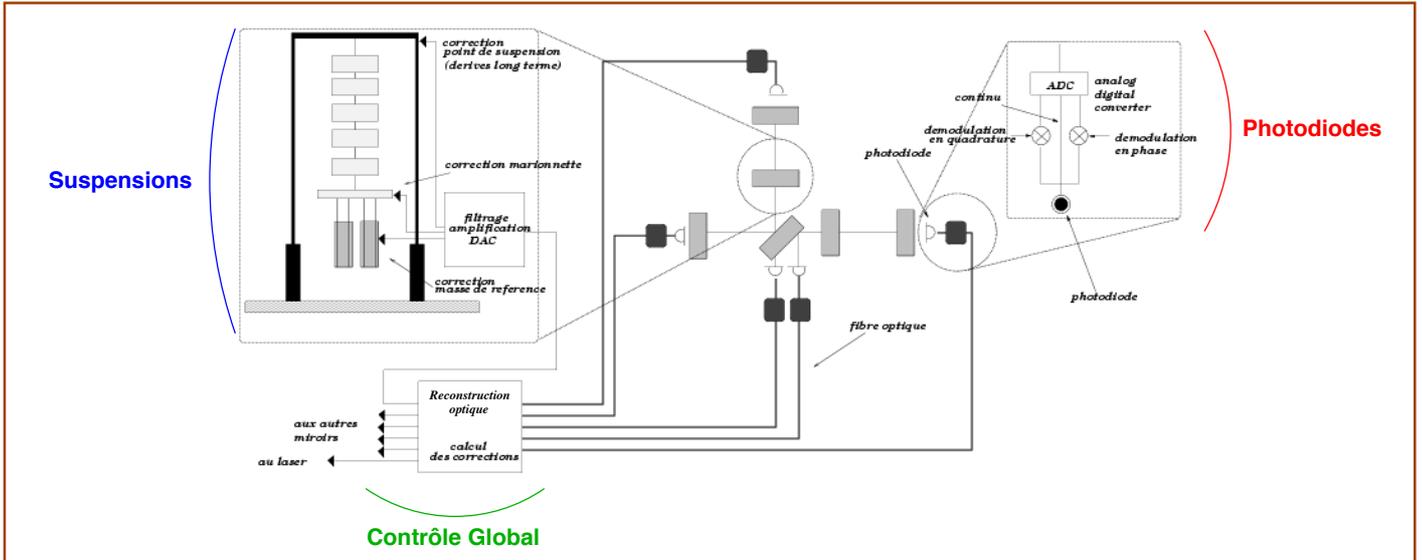
De plus, aucune mesure de distance n'est absolue dans Virgo : chaque longueur de cavité est simplement connue **modulo** un multiple de l'intervalle séparant deux résonances,  $\lambda/2$  ou  $\lambda/4$ . Ainsi, il n'y a de contradiction entre la précision des mesures de longueur et les incertitudes quantiques.

## 3.3 La chaîne de contrôle

La chaîne de contrôle de l'interféromètre Virgo a trois composantes principales. L'une d'elles est bien entendu le Contrôle Global, étudié en détail dans cette thèse, qui tient une place centrale dans ce système, tant au niveau de l'expertise que de l'enchaînement logique des tâches. En amont, les photodiodes enregistrent les signaux d'erreur et les lui transmettent ; en aval, les corrections calculées sont envoyées aux suspensions pour corriger les positions des miroirs et maintenir le détecteur à son point de fonctionnement.

La figure 3.4 présente un schéma de cette chaîne de contrôle, des photodiodes aux suspensions. On peut noter en particulier que les corrections peuvent être appliquées à trois endroits différents du superatténuateur : au point de suspension, au niveau de la marionnette et enfin par l'intermédiaire de la masse de référence.

Après un rapide rappel des principes et du vocabulaire utilisé dans le domaine des boucles de rétroaction [120, 121], je détaillerai le fonctionnement de l'acquisition des signaux des photodiodes ainsi que celui du contrôle au niveau des suspensions.



**Figure 3.4:** Schéma de la chaîne de contrôle de l'expérience Virgo: les signaux d'erreur enregistrés par les photodiodes sont transmis au Contrôle Global qui calcule alors des corrections (longitudinales et angulaires) transmises ensuite aux suspensions pour ramener l'interféromètre vers son point de fonctionnement.

### 3.3.1 Contrôle et signaux d'erreurs

Pour maintenir un système au voisinage de son point de fonctionnement – i.e. dans la limite des spécifications imparties –, il faut disposer d'un **signal d'erreur** (obtenu par comparaison de la sortie du système avec une référence) sensible aux variations de sa position. Convenablement **filtré**, il fournit un **signal de correction** transmis ensuite à un dispositif actif qui modifie la configuration du système pour le ramener vers l'état dont il s'était écarté. Ainsi, la mise au point d'une stratégie efficace de **rétroaction** est un processus complexe dont chaque étape (choix du signal d'erreur, traitement des informations qu'il contient, calcul et application des corrections) doit être étudiée pour obtenir au final le résultat escompté.

#### Principe

Le point essentiel dans la conception d'une boucle de rétroaction reste toutefois la définition du dispositif de **filtrage linéaire** qui permet de passer du signal d'erreur à la correction à appliquer. Pour cela, on abandonne la représentation temporelle pour travailler en fréquence dans **l'espace de Laplace**<sup>4</sup> de variable  $s = i\omega$ . La relation entre un signal d'entrée  $x(t)$  et un signal de sortie  $y(t)$  est alors décrite par sa **fonction de transfert**  $H(s)$  définie par

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} \quad (3.7)$$

En particulier, si  $x(t)$  est une sinusoïde de fréquence  $\omega/2\pi$ ,  $y(t)$  est du même type et le rapport des amplitudes est donné par  $H(i\omega)$ . On parle alors de réponse – forcée – en fréquence.  $H(s)$  est généralement une fraction rationnelle<sup>5</sup> en  $s$  formée à partir de quatre fonctions de base (correspondant à la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ ):

- Les *dérivateurs*  $H(s) = s + s_0$  de fréquence caractéristique  $f_0 = \omega_0/2\pi$ .
- Les *intégrateurs*  $H(s) = \frac{1}{s + s_0}$  de fréquence caractéristique  $f_0 = \omega_0/2\pi$ .

<sup>4</sup>La transformée de Laplace d'une fonction  $f(t)$  est définie par

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

<sup>5</sup>Les racines du numérateur s'appellent des zéros et celles du dénominateur des pôles.

- Les filtres du *second ordre*

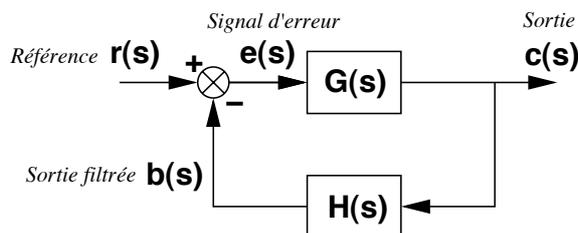
$$H(s) = s^2 + \frac{\omega}{Q}s + \omega^2 \quad \text{Passe-haut}$$

ou

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{\omega}{Q}s + \omega^2} \quad \text{Passe-bas}$$

Ces derniers sont caractérisés par leur fréquence de résonance  $f_{\text{res}} = \omega/2\pi$  et par leur facteur de qualité  $Q$ .

Le dispositif de contrôle le plus utilisé dans l'expérience Virgo est ce qu'on appelle un **asservissement en boucle fermée**: la sortie du système étudié est utilisée pour créer une **rétroaction** sur l'entrée afin de ramener l'ensemble vers le point de fonctionnement cherché. Le principe est décrit sur la figure 3.5 sous forme d'un diagramme "en bloc".



**Figure 3.5:** Schéma d'un asservissement en boucle fermée : la sortie  $c(t)$  est filtrée puis comparée à l'entrée  $r(t)$  pour obtenir le signal d'erreur  $e(t)$  qui est également filtré en sortie.

Le signal d'erreur  $e(s)$  vaut  $e(s) = r(s) - b(s)$ . Deux fonctions de transfert définies à partir de ce diagramme permettent l'étude complète de l'asservissement.

- La fonction de transfert en **boucle ouverte** correspondant au cas où le signal d'asservissement n'est pas comparé au signal d'entrée.

$$F_{\text{ouverte}}(s) = \frac{b(s)}{r(s)} = G(s)H(s) \tag{3.8}$$

- La fonction de transfert en **boucle fermée** où la rétroaction est effective.

$$F_{\text{fermée}}(s) = \frac{c(s)}{r(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{3.9}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte n'a pas d'intérêt au niveau du processus de contrôle lui-même car elle correspond au cas où il n'y a pas d'asservissement. Par contre, son importance est capitale pour prédire le comportement de la boucle de rétroaction qui, en plus de corriger les dérives du système doit être **stable**, i.e. ne pas exciter celui-ci. Le lien entre les deux fonctions de transfert se comprend aisément en observant que le dénominateur de  $F_{\text{fermée}}(s)$  vaut  $1 + F_{\text{ouverte}}(s)$  – cf. équation (3.9). La stabilité de la fonction de transfert en boucle fermée est donc naturellement reliée à la manière dont  $F_{\text{ouverte}}(s)$  "s'approche" de -1.

### Stabilité

Il existe un grand nombre de critères de stabilité; les plus courants sont les suivants.

- Le critère de **Routh-Hurwitz** basé sur l'étude des coefficients du polynôme en  $s$

$$1 + F_{\text{ouverte}}(s)$$

- Le critère de **Nyquist** qui utilise la représentation *polaire* dans le plan complexe de  $F_{\text{ouverte}}(i\omega)$ .

- Le critère de **Bode** enfin, le plus simple à manier et suffisant pour la plupart des asservissements utilisés dans Virgo. Le module et la phase du filtre  $F_{\text{ouverte}}$  sont représentés en échelle log/log sur des *diagrammes de Bode*<sup>6</sup>. On regarde alors la fréquence  $\omega_0/2\pi$  correspondant au **gain unité** –  $|F_{\text{ouverte}}(i\omega_0)| = 1$  – et on calcule la **marge de phase**  $\mathfrak{M}_\phi$ , i.e. la différence entre  $\arg[F_{\text{ouverte}}(i\omega_0)]$  et  $-\pi$ <sup>7</sup>. Pour que le filtre soit stable, on doit avoir

$$\mathfrak{M}_\phi > 0 \quad (3.10)$$

De même, on peut introduire la **marge de gain**  $\mathfrak{M}_G$  définie par

$$\mathfrak{M}_G = \frac{1}{|F_{\text{ouverte}}(i\omega_\pi)|} \text{ avec } \arg[F_{\text{ouverte}}(i\omega_\pi)] = -\pi \quad (3.11)$$

Généralement, on essaye d'avoir

$$\begin{aligned} 4 &< \mathfrak{M}_G < 6 \\ 45^\circ &< \mathfrak{M}_\phi < 60^\circ \end{aligned}$$

Finalement, une règle pratique de stabilité pour un filtre est d'avoir une pente en  $1/s$  sur le diagramme de Bode au niveau du gain unité.

### Performances

Classiquement, deux paramètres résument de manière générale les performances d'un filtre :

- le pic de résonance  $M_{\text{res}}$  ;

$$M_{\text{res}} = \max_\omega \frac{|F_{\text{fermée}}(i\omega)|}{|F_{\text{fermée}}(0)|} \quad (3.12)$$

- la bande passante  $\omega_{\text{BP}}$ , définie par la relation

$$\frac{|F_{\text{fermée}}(i\omega_{\text{BP}})|}{|F_{\text{fermée}}(0)|} = -3 \text{ dB} \quad (3.13)$$

$f_{\text{BP}} = \omega_{\text{BP}}/2\pi$  est la fréquence d'oscillation maximale à laquelle la boucle d'asservissement est sensible de manière satisfaisante. Par exemple, dans le cas d'une longueur à contrôler à  $\pm\delta l/2$ , un algorithme de rétroaction dont la bande passante vaut  $f_{\text{BP}}$  fonctionnera si la vitesse de la cavité est inférieure ou égale à un seuil  $v_{\text{seuil}}$  avec

$$v_{\text{seuil}} \sim \delta l \times f_{\text{BP}} \quad (3.14)$$

### Exemple

La figure 3.6 présente un exemple de boucle d'asservissement utilisée pour le contrôle de la longueur de frange noire du CITF en configuration Michelson (i.e. avec le miroir de recyclage désaligné). La partie supérieure du diagramme de Bode montre l'évolution du gain en fonction de la fréquence et la partie inférieure les variations de la phase.

Le filtre est dérivateur à basse fréquence pour asservir la vitesse de la cavité puis un double pôle aux alentours de 10 Hz permet d'obtenir une décroissance inversement proportionnelle à la fréquence au gain unité qui se trouve vers 27 Hz ; la marge de phase est de l'ordre de  $50^\circ$ . Le bruit à 50 Hz correspondant à la fréquence du secteur est atténué par un filtre particulier appelé *notch*. Au moment de l'utiliser, on rajoute un intégrateur à très basse fréquence pour neutraliser les mouvements à vitesse constante.

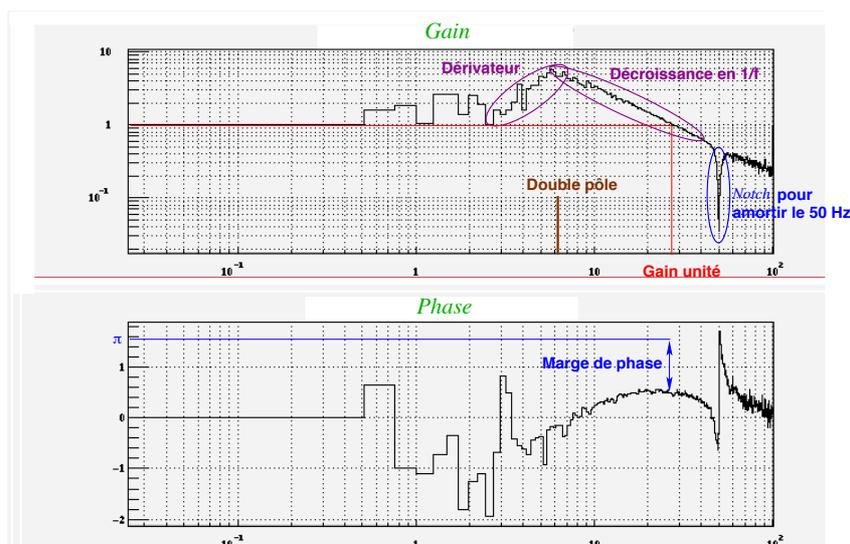
### Implémentation

Virgo a fait le choix d'avoir des systèmes d'asservissement totalement digitaux. Cela donne une grande souplesse dans la définition des algorithmes et apporte un gain de temps et d'efficacité lorsque des paramètres d'un filtre doivent être modifiés : pourvu que ceux-ci soient dans une base de données – cf. paragraphe 3.4.3 – la boucle de contrôle peut être réactivée immédiatement après leur changement. L'avantage de cette méthode de travail est apparu clair à mesure que se déroulaient les essais d'acquisition des résonances des cavités, d'abord pour le Michelson seul, puis pour le CITF entier.

---

<sup>6</sup>Qui ont la propriété pratique de s'ajouter quand deux filtres sont multipliés.

<sup>7</sup>L'argument de -1.



**Figure 3.6:** Exemple de fonction de transfert utilisée pour le contrôle de la longueur de frange noire du CITF en configuration Michelson simple. Le filtre est dérivateur à basse fréquence, puis un double pôle le fait décroître en  $1/f$  jusqu’au gain unité. Un *notch* permet de s’affranchir du 50 Hz. Au moment de l’acquisition du contrôle, un intégrateur pur est rajouté pour tenir le DC.

### Contrôle longitudinal: signaux de Pound-Drever

Comme on l’a vu au paragraphe 2.2.2, le schéma de modulation frontale permet de transporter la détection du signal au niveau RF et ainsi de s’affranchir du bruit basse fréquence. Un autre intérêt de ce processus est de fournir des **signaux d’erreur** – deux par photodiode, *phase* et *quadrature* – appelés **Pound-Drever** [103] utilisables dans des boucles d’asservissement semblables à celles décrites précédemment afin de maintenir le détecteur à son point de fonctionnement.

La figure 3.7 montre un exemple de ces signaux simulé à l’aide du logiciel SIESTA pour le cas de la résonance de la cavité de recyclage du CITF. Le signal d’erreur “D5 quad” est nul au maximum de la puissance stockée “D5 DC” et il est **linéaire** au voisinage de celle-ci ce qui permet d’accéder directement à l’écart de longueur par rapport à la résonance. Les deux graphes de droite montrent un agrandissement de la zone centrée sur la résonance.

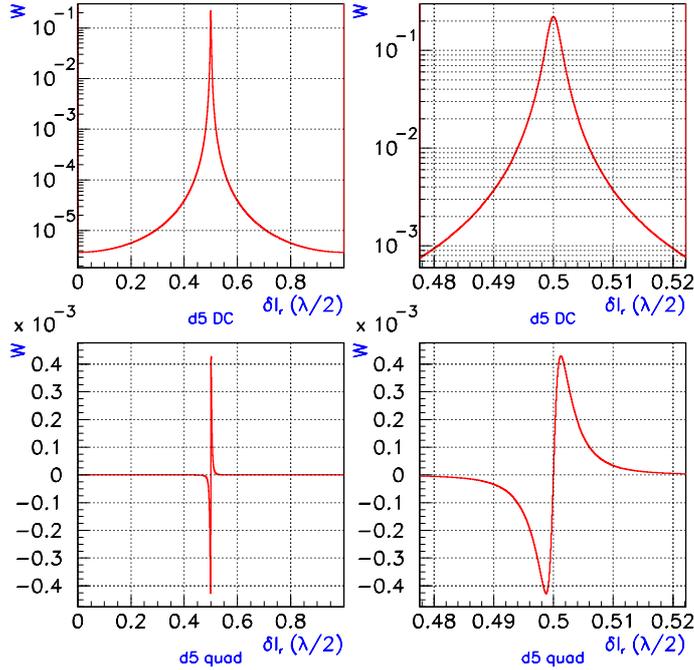
Dans cet exemple, le signal d’erreur est “parfait”: cavités résonnantes, alignées, faisceau laser exempt de fluctuations... Qu’en est-il dans la réalité? La figure 3.8 montre l’allure des signaux d’erreur frange noire et recyclage – ainsi que des puissances DC correspondantes – obtenus alors que le CITF était aligné<sup>8</sup> mais non contrôlé.

Plusieurs résonances de la cavité de recyclage (le mode fondamental  $TEM_{00}$  tout d’abord puis des modes d’ordre supérieurs créés par les désalignement de l’interféromètre) sont traversées sur ces graphes; on peut immédiatement remarquer que les signaux d’erreur ressemblent beaucoup à celui simulé sur la figure 3.7; par contre, leur amplitude varie sensiblement (de la même manière que la puissance DC). Seule la résonance du  $TEM_{00}$  convient pour le point de fonctionnement du détecteur, les autres sont des signaux parasites dont il faut s’affranchir.

Sur la même figure sont également représentés les deux signaux donnant l’état de la frange noire: la puissance DC et le signal d’erreur. Le fort couplage permanent avec l’état du recyclage est amplifié par les défauts d’alignement de l’interféromètre; aux résonances de la puissance stockée correspondent des pics DC sur la frange noire et des sauts brusques du signal d’erreur. Celui-ci ne pourra donc pas être utilisé tel quel pour l’acquisition du contrôle du CITF à cause de sa grande sensibilité aux perturbations du recyclage.

On verra au paragraphe 4.3 que les problèmes d’alignement et la difficulté de trouver un “bon” signal d’erreur pour le contrôle de la longueur de frange noire sont liés et qu’ils ont en fait représenté les obstacles principaux pour le *locking* du CITF.

<sup>8</sup>“A la main”: l’alignement automatique demande un contrôle longitudinal préalable des cavités.



**Figure 3.7:** Exemple de signal d’erreur Pound-Drever pour la cavité de recyclage du CITF. Le signal d’erreur “D5 quad” est linéaire au voisinage du pic de puissance stockée “D5 DC”. L’axe des abscisses représente une période spatiale pour la résonance du recyclage (demi-longueur d’onde) ; les puissances sont normalisées à un laser incident de 1 W. Les deux graphes de droite montrent un agrandissement de la zone centrée sur la résonance.

### Linéarisation

Avoir des signaux d’erreur propres est une condition nécessaire pour obtenir un asservissement stable et efficace. Deux qualités sont recherchées :

- d’une part, une faible sensibilité aux imperfections du CITF (résonances, alignement...) ;
- d’autre part, une zone linéaire (centrée sur le point de fonctionnement) la plus large possible.

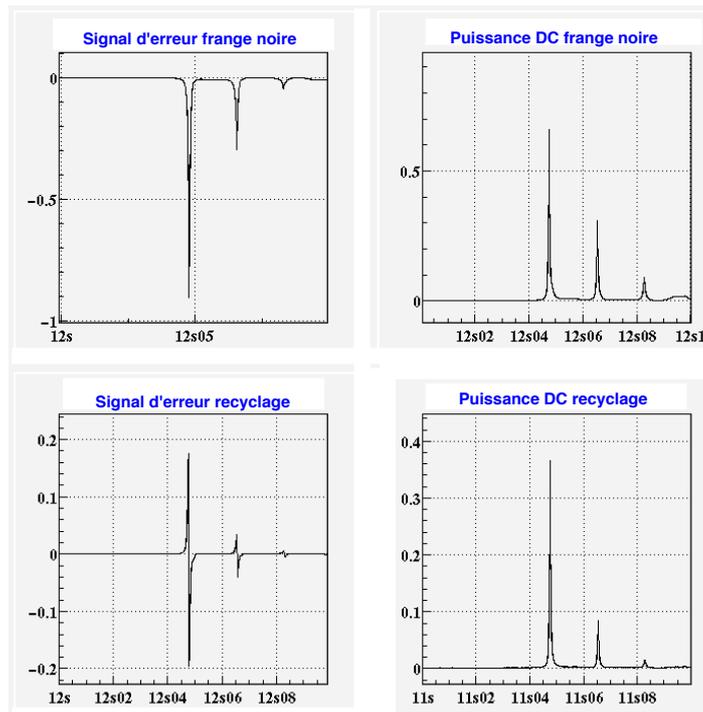
Ce dernier point est en particulier critique pour la cavité de recyclage dont la haute finesse rend très fine la largeur de la résonance. Pour cela, on normalise le signal d’erreur AC par la puissance DC élevée à une certaine puissance  $n$  :

$$(P^{AC})_{\text{norm}} = \frac{P^{AC}}{(P^{DC})^n} \quad (3.15)$$

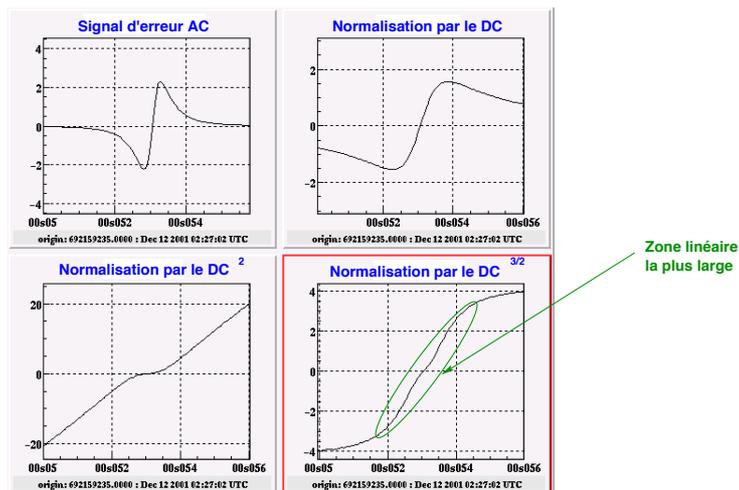
La figure 3.9 compare les signaux d’erreur obtenus en sortie de la photodiode D5 (réflexion sur la seconde face de la séparatrice) dans le cas où aucune normalisation n’intervient et pour trois valeurs de  $n$  : 1, 1.5 et 2. On voit que le meilleur résultat est obtenu pour  $n = 3/2$  : la taille de la zone linéaire a plus que doublé ; ce signal  $\frac{P_5^{AC}}{(P_5^{DC})^{3/2}}$  a été utilisé lors de l’acquisition du contrôle du CITF complet.

L’étude particulière du cas  $n = 3/2$  n’est pas due au hasard :

- pour une cavité où les bandes latérales ne sont pas résonnantes, on a intérêt à prendre  $n = 1$  (division par  $P^{DC}$ ) ;
- lorsque les bandes latérales sont résonnantes,  $n = 2$  est le meilleur choix ;
- en réalité on a un cas un peu intermédiaire (résonance non optimale des bandes latérales), ce qui explique le choix de  $n = 1.5$ .



**Figure 3.8:** Exemple de signaux Pound-Drever “réels”. Plusieurs résonances de la cavité de recyclage sont traversées : la plus haute est celle du mode fondamental  $TEM_{00}$  qui correspond au point de fonctionnement souhaité tandis que les autres concernent des modes d’ordre supérieurs qui apparaissent à cause des désalignement des miroirs. Le signal de Pound-Drever a bien la forme attendue pour la cavité de recyclage mais celui de la frange noire a des sauts brusques – couplés aux résonances de la puissance stockée dans le CITF – qui le rendent tel quel impropre au maintien du contrôle de la frange noire.



**Figure 3.9:** Démonstration de l’effet de la normalisation du signal d’erreur AC par la puissance DC : la largeur de la zone linéaire est allongée et le meilleur résultat obtenu pour la division par la puissance  $3/2$ .

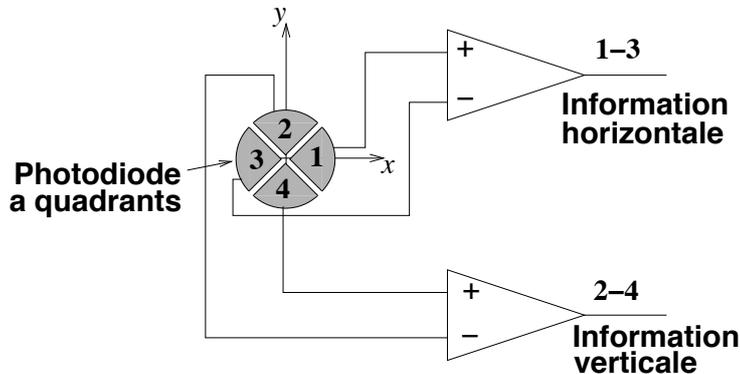
### 3.3.2 Photodiodes

Les photodiodes [87] sont toutes identiques et ont une efficacité quantique  $\eta \sim 90\%$ . Il y en a une seule par faisceau sauf pour la frange noire après le *mode-cleaner* de sortie pour laquelle seize sont utilisées. L'acquisition des signaux se fait à  $f_s = 20$  kHz et donc seule la moyenne de deux données consécutives est envoyée au Contrôle Global qui est synchronisé à 10 kHz. La numérisation des valeurs analogiques mesurées – un courant – se fait en plusieurs étapes. Elle vise à éviter toute injection de bruit électronique dans les données bien que la dynamique du signal soit réduite pour convenir aux ADC de 16 bits utilisés alors que 20 bits seraient *a priori* nécessaires. De plus, le repliement des fréquences supérieures à  $f_s/2$  – *aliasing* – est évité grâce à un filtre spécial; l'atténuation est d'un facteur  $\sim 10000$  à  $f_s$ .

### 3.3.3 Photodiodes à quadrants et alignement

Au paragraphe 2.1.2, la description du faisceau laser a montré que celui-ci pouvait se décomposer en une somme de modes propres; le bon fonctionnement du détecteur Virgo nécessite que le fondamental ( $TEM_{00}$ ) soit résonant. Tout désalignement d'un miroir  $\theta$  ou déplacement de l'axe optique d'un faisceau  $a$  se traduit par l'apparition des modes  $TEM_{10}$  et  $TEM_{01}$  – indifférenciables au niveau de la condition de résonance dans un Fabry-Perot mais de profils spatiaux différents – au premier ordre. La détection de signaux proportionnels au produit  $TEM_{00} \times TEM_{10}$  permet d'avoir accès aux deux rapports  $\theta/\theta_\infty$  et  $a/\omega_0$  et donc aux différents défauts d'alignement et de pointage à corriger.

Le dispositif de contrôle choisi pour Virgo [32] associe deux techniques donnant accès à cette information : la méthode d'Anderson [122] et la méthode de Ward [123]. La quantité cherchée est contenue dans les signaux AC phase et quadrature mais, par imparité du produit des deux modes  $TEM_{00} \times TEM_{10}$ , ils sont *nuls* en moyenne pour une photodiode du type de celles utilisées pour les contrôles longitudinaux et la reconstruction du signal gravitationnel. Il faut donc utiliser des photodiodes spéciales, dites **photodiodes à quadrants**, dont la surface est séparée en quatre parties indépendantes ce qui permet d'obtenir les informations spatiales souhaitées, comme le montre la figure 3.10. Deux photodiodes fonctionnant avec des phases de Guoy différentes sont nécessaires pour extraire les deux rapports cherchés.



**Figure 3.10:** Extraction des informations spatiales à partir d'une photodiode à quadrants.

Pour le reste, ce système est similaire à celui détaillé pour le contrôle longitudinal, tant pour l'acquisition du signal<sup>9</sup> que pour son traitement. Une *matrice d'alignement* [85] permet de calculer des corrections par une méthode de  $\chi^2$  linéaire au niveau du Contrôle Global et celles-ci sont envoyées ensuite vers les suspensions.

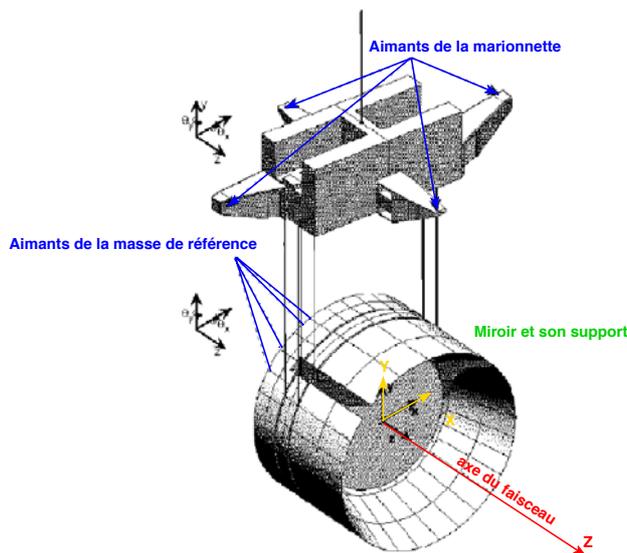
### 3.3.4 Agir sur les miroirs : les suspensions

Les suspensions [32, 95] reçoivent les corrections émises par le Contrôle Global (à 10 kHz pour le contrôle longitudinal et à 500 Hz pour l'alignement, voir paragraphe 3.4.1 pour une tentative

<sup>9</sup>Excepté le fait que cette phase est moins critique au niveau *hardware* car l'ensemble ne fonctionne qu'à  $f_{\text{align}} = 500$  Hz, ce qui lève la contrainte principale due à la fréquence d'échantillonnage très élevée.

de justification de ces valeurs un peu arbitraires) auxquelles s'ajoutent éventuellement celles des contrôles locaux à 50 Hz. Comme on l'a vu dans l'introduction du paragraphe 3.3, on peut agir sur un superatténuateur à partir de trois endroits différents. Le sommet du pendule inversé est utilisé pour des déplacements de grande amplitude (jusqu'au centimètre) et à basse fréquence<sup>10</sup> (< 70 mHz). La marionnette reçoit l'ensemble des corrections d'alignement ainsi que celles de longueur jusqu'à 4 Hz ; au-delà, ces dernières sont transmises à la masse de référence.

La figure 3.11 détaille la structure marionnette + miroir et masse de référence ; on peut voir en particulier les aimants permettant d'agir sur la marionnette.



**Figure 3.11:** Vue de l'ensemble marionnette + miroir et masse de référence.

Comme expliqué au paragraphe 2.2.1 lors de la description du superatténuateur, les forces sont fournies par un système aimants/bobines. En agissant de manière différente sur les quatre aimants situés sur chacun des points d'application, on peut obtenir des déplacements selon les degrés de liberté à contrôler<sup>11</sup>.

L'acquisition des contrôles des cavités pour le Michelson et le CITF s'est faite entièrement à partir de la masse de référence car la fonction de transfert entre celle-ci et les déplacements en  $z$  est simple – cf. figure 3.12 et car la force effectivement transmise par le couple bobines/actuateurs est très proche de l'impulsion souhaitée. Ce dernier système est en fait un filtre passe-bas du premier ordre dont on peut négliger l'effet d'atténuation car le pôle de la fonction de transfert a été mesuré à plusieurs centaines de Hz, bien au-delà de la bande passante des contrôles.

Le rapport entre la force appliquée  $F$  et l'intensité du courant  $I$  dans une bobine vaut  $\alpha = 1.3$  mN/A. L'expression de la force maximale  $F_{\max}$  donc donnée par

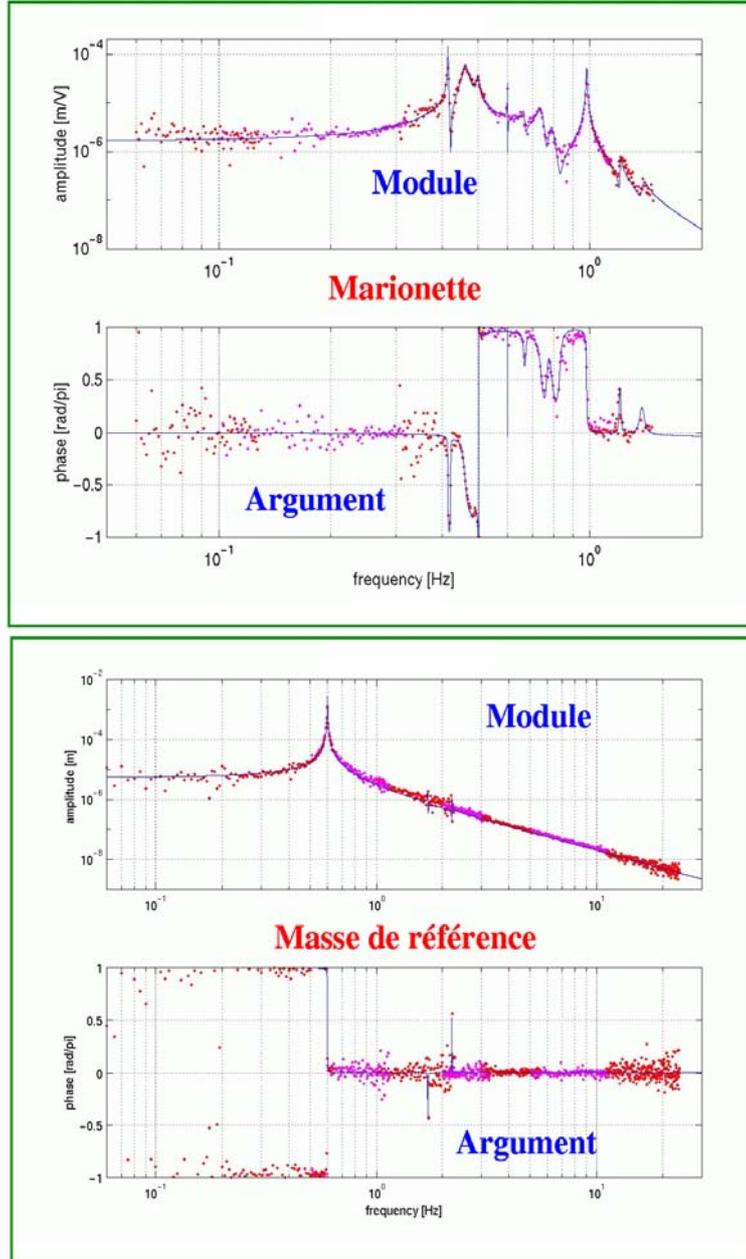
$$F_{\max} = 4 \alpha I_{\max} \sim 10.4 \text{ mN} \left( \frac{I_{\max}}{2 \text{ A}} \right) \quad (3.16)$$

car l'intensité du courant peut atteindre 2 A environ.

Or, le point délicat de l'asservissement longitudinal des cavités de Virgo n'est pas tant le maintien de ce contrôle que son acquisition qui, schématiquement, revient à "arrêter" l'expansion d'une longueur au voisinage immédiat d'une résonance. Est-ce possible avec la contrainte sur  $F_{\max}$  déterminée ci-dessus?

<sup>10</sup>La rétroaction sur le point de suspension à partir des signaux de correction délivrés par le Contrôle Global a été mise en place sur le CITF pour des fréquences inférieures à 70 mHz [124]. Le contrôle au niveau de la marionnette n'a pas encore été utilisé ni même testé.

<sup>11</sup>Déterminer les combinaisons exactes d'actions sur les différents aimants associées à chaque degré de liberté est un processus très délicat : la *diagonalisation* des actuateurs se fait à l'aide des caméras Gx elles-mêmes soumises à des couplages entre les différents mouvements reconstruits : par une seule mesure, il faut à la fois calibrer les dispositifs d'action et d'observation ! Ceci explique pourquoi les performances des contrôles locaux ne sont pas au niveau attendu : par exemple, en phase de *locking*, le contrôle longitudinal excite les mouvements en  $\theta_y$  sur la tour Ouest – cf paragraphe 4.4.



**Figure 3.12:** Fonctions de transfert entre la marionnette et le déplacement en  $z$  du miroir et entre la masse de référence et ce même déplacement. Les points représentent les valeurs expérimentales et la courbe continue à la fonction de transfert reconstruite à partir de ces mesures [125]. Pour la masse de référence, elle correspond à un pendule simple et est plus facile à contrôler que celle de la marionnette qui est nettement plus compliquée ; par contre, l'atténuation à haute fréquence n'est qu'en  $1/f^2$  au lieu de  $1/f^4$ .

Pour le voir, on peut partir de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un système monodimensionnel (ici la direction du faisceau  $z$ ). La force  $\vec{F}$  à appliquer pendant une durée  $\Delta t$  pour stopper un objet de masse  $m$  initialement à une vitesse  $\vec{v}$  vérifie la relation

$$m \vec{v} = -\vec{F} \Delta t \quad (3.17)$$

En supposant la vitesse constante pendant le temps de traversée de la résonance, on a

$$\Delta t = \frac{l_{\text{FWHM}}}{v} \quad (3.18)$$

où  $l_{\text{FWHM}}$  est la largeur à mi-hauteur du pic de résonance définie à l'équation (2.17). Finalement, l'intensité nécessaire  $F$  vaut

$$F = \frac{m v^2}{l_{\text{FWHM}}} \quad (3.19)$$

Comme  $l_{\text{FWHM}} \sim 3 \cdot 10^{-9}$  m pour la cavité de recyclage du CITF (finesse  $\sim 200$  sans alignement automatique) et que  $m \sim 30$  kg, on a

$$F \sim 11.3 \text{ mN} \left( \frac{v}{1 \text{ } \mu\text{m/s}} \right)^2 \quad (3.20)$$

Comme  $v$  est typiquement de l'ordre de  $1 - 3 \text{ } \mu\text{m/s}$  lorsque l'interféromètre est "calme", cette relation permet de mettre en évidence une autre difficulté de l'acquisition du contrôle longitudinal du CITF complet : la force maximale applicable est trop faible pour freiner suffisamment un miroir au voisinage de la résonance. Pour espérer réussir, un schéma de contrôle doit prendre en compte cette contrainte et y apporter une solution satisfaisante ; nous verrons dans la suite – au paragraphe 4.3 – deux méthodes pour résoudre cette difficulté.

Pour Virgo, deux systèmes de bobines sont prévus : l'un pour l'acquisition du contrôle alimenté par un fort courant et sans spécification de bruit, l'autre pour le *locking* linéaire, peu bruité et à faible courant. La procédure inverse de la digitisation – et qui consiste donc à transcrire en Volts une valeur codée en binaire – est assurée par un DAC<sup>12</sup> 20 bits fonctionnant entre -10 V et 10 V. Il est caractérisé par sa **dynamique**  $\mathfrak{D}$  définie comme le rapport entre le voltage maximum délivré par le DAC  $V_{\text{max}}$  et le niveau de bruit électronique (blanc)  $\sigma_{\text{bruit}}$ . On a

$$\mathfrak{D} = \frac{V_{\text{max}}}{\sigma_{\text{bruit}}} = 2 \cdot 10^7 \sqrt{\text{Hz}} \text{ pour les DAC des suspensions de Virgo} \quad (3.21)$$

Cette valeur sert à déterminer le niveau de force que l'on peut appliquer sur les miroirs sans réintroduire le bruit électronique dans les données [126]. Pour le voir, on divise la densité spectrale (mesurée) de déplacement du miroir  $\tilde{z}_{\text{miroir}}(f)$  par la fonction de transfert entre la force et le déplacement pour l'ensemble marionnette-miroir  $G(f)$ . Le résultat (en  $\text{N}/\sqrt{\text{Hz}}$ ),

$$\tilde{F}(f) = \frac{\tilde{z}_{\text{miroir}}(f)}{G(f)} \quad (3.22)$$

est le spectre de force associé au déplacement du miroir. Dans le cas de Virgo, le minimum de cette courbe est atteint autour de 3 Hz, lors du croisement entre les DSA associées aux bruits sismique et thermique, et vaut  $\tilde{F}_{\text{min}} \sim 10^{-11} \text{ N}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Pour ne pas réinjecter de bruit, le RMS de la force exécuté par la marionnette sur le miroir est donné par :

$$\sigma_{\text{F}} = \mathfrak{D} \times \tilde{F}_{\text{min}} \approx 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ N} \quad (3.23)$$

Cela correspond à un RMS de déplacement de l'ordre de  $0.1 \text{ } \mu\text{m}$  et à une force maximale

$$F_{\text{max}} = \sqrt{2} \sigma_{\text{F}} \sim 3.5 \cdot 10^{-4} \text{ N} \quad (3.24)$$

---

<sup>12</sup>Digital Analogic Convertor.

### 3.3.5 Synchronisation

La synchronisation entre les différents sous-systèmes de Virgo et au niveau de chacune de leurs tâches spécifiques (asservissement, acquisition des différentes données...) est assurée de manière centralisée à partir du bâtiment central [127]. L'horloge maître est basée sur le temps GPS et transmet ses impulsions par fibre optique à des convertisseurs situés dans les différents bâtiments. Localement, une carte *Timing* reçoit ces informations analogiques à partir desquelles elle construit des signaux cadencés aux fréquences utiles pour le sous-système considéré (par exemple pour le Contrôle Global  $f_{locking} = 10$  kHz). Ceux-ci peuvent soit être délivrés "en face avant", soit convertis en interruptions *hardware* sur le bus. Le Contrôle Global n'utilise que la première de ces deux fonctionnalités pour économiser du temps.

Parmi toutes les fréquences générées par le système maître, trois sont importantes pour le Contrôle Global.

- La fréquence d'**échantillonnage** – *sampling* – fixée à 20 kHz. Les fréquences de *locking* et *d'alignement* se déduisent de celle-ci au niveau de la carte *Timing* locale. Par exemple, un moyen de tester la synchronisation du contrôle des longueurs est de vérifier que seuls des numéros de *sampling* **impairs** (délivrés indépendamment de  $f_{locking}$ ) étiquettent les paquets de données reçus des photodiodes à chaque coup d'horloge à 10 kHz.
- La fréquence associée au numéro de **frame**, i.e. l'unité temporelle utilisée pour discrétiser le flot "continu" de données au moment du stockage de celles-ci. Elle est pour l'instant fixée à 1 Hz. Chaque *frame* contient un grand nombre de canaux de données pour une taille totale de l'ordre de 4 Mb. La nomenclature des noms de ces signaux est fixée afin de les rendre significatif [128].
- La fréquence associée au numéro de **run**, le second nombre utilisé pour repérer la position d'un événement. Il s'incrémente automatiquement quand  $n_{frame}$  excède 65535 (et le numéro de *frame* repasse alors à 0) ou bien lorsque l'état du détecteur (par ex., le niveau de contrôle) est modifié, ou encore en cas d'intervention manuelle.

## 3.4 Le Contrôle Global

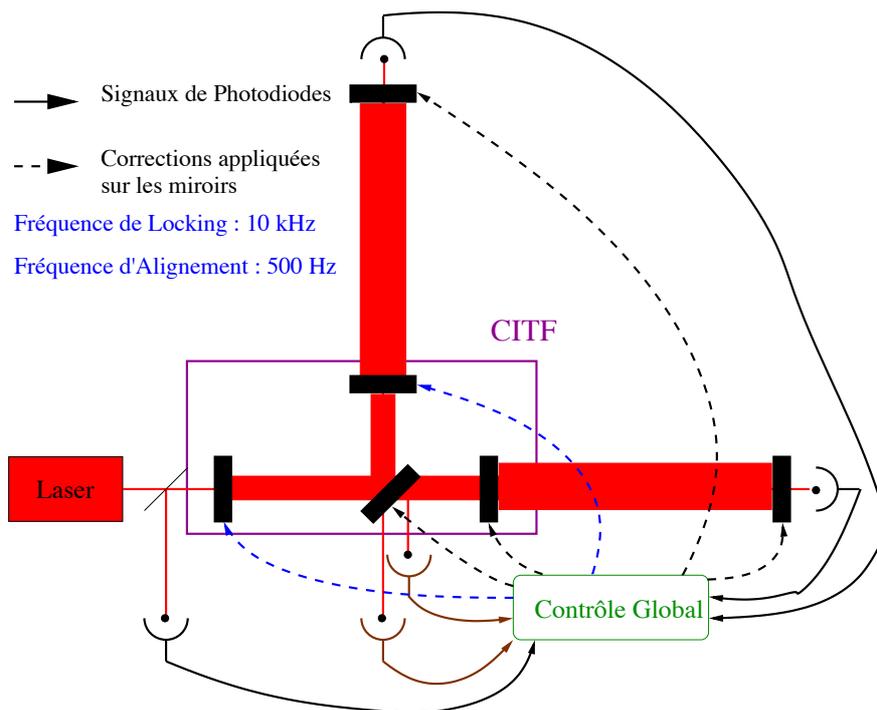
### 3.4.1 Fonctionnalités

Les fonctionnalités du système Contrôle Global sont résumées sur la figure 3.13 ; à partir des signaux d'erreur reçus des différentes photodiodes, des corrections longitudinales et angulaires sont calculées puis envoyées vers les suspensions. Le contrôle des longueurs s'effectue à  $f_{locking} = 10$  kHz tandis que la fréquence d'alignement  $f_{align}$  vaut 500 Hz.

Le choix précis de ces valeurs est assez arbitraire. En effet, en période de fonctionnement stable du détecteur, les bandes passantes des asservissements ne devraient pas dépasser quelques dizaines de Hz car les mouvements résiduels ont lieu essentiellement à basse fréquence. Par contre, lorsque l'on est en phase d'acquisition des contrôles, on a intérêt à utiliser un échantillonnage du signal le plus rapide possible, pour avoir, par exemple le plus de points dans la zone linéaire des signaux d'erreur autour de la résonance. Finalement, les valeurs sélectionnées apparaissent comme un compromis entre les contraintes de l'implémentation *hardware* et la volonté d'avoir le système le plus performant lorsqu'il faut contrôler l'interféromètre. En particulier, il aurait été assez difficile de monter significativement au-delà de 500 Hz pour l'alignement.

A chaque coup d'horloge (10 kHz) :

- les photodiodes (au nombre de sept) servant au contrôle des longueurs des cavités envoient 3 informations (puissance DC, puissances AC phase et quadrature) ;
- les photodiode à quadrants – utilisées pour l'alignement, cf. paragraphe 3.3.3 – émettent 8 mots chacune ;
- les six suspensions reçoivent trois corrections – une longitudinale  $\delta z$  et deux angulaires  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . La première ( $\delta z$ ) est modifiée à 10 kHz tandis que les deux valeurs d'alignement ne changent qu'à  $f_{align}$ .



**Figure 3.13:** Description des fonctionnalités du Contrôle Global. Les signaux d’erreurs provenant des différentes photodiodes sont lus à 10 kHz et des corrections sont calculées puis envoyées vers les suspensions et le banc laser. Le contrôle longitudinal des longueurs s’effectue à 10 kHz tandis que les corrections des désalignements sont synchronisées à 500 Hz.

Chacun de ces échanges de données est accompagné d’un **mot de contrôle** qui sert, d’une part à renseigner sur l’état du système qui les a émises – fonctionnement normal, erreur, problème... – et d’autre part à vérifier la bonne synchronisation de la chaîne. Enfin, toutes les corrections calculées au niveau du Contrôle Global ainsi que différents paramètres résumant l’état du système sont envoyés vers l’acquisition de données.

Le flot de données traité et généré par le Contrôle Global est assez important<sup>13</sup>:

- $\sim 40$  mots à lire et  $\sim 40$  à écrire @  $f_{locking}$
- $\sim 80$  mots à lire et  $\sim 20$  à écrire @  $f_{align}$

### 3.4.2 Description technique : un choix d’architecture

Ce paragraphe vise à détailler les choix techniques effectués au niveau de l’architecture du Contrôle Global et à les motiver en fonction des contraintes que ce système doit supporter, tant au niveau de ses propres spécifications de fonctionnement – *locking* à 10 kHz, alignement à 500 Hz – que des protocoles de communication avec les autres sous-systèmes. Le lecteur désireux d’aller au-delà de cette présentation consultera [59] qui décrit l’ensemble du système de manière plus précise et duquel j’ai extrait la plupart des données expérimentales (temps de lecture-écriture, comparaison des différentes architectures...) présentées ici.

En même temps, la conception du système s’est efforcée de satisfaire à trois conditions, facultatives mais quasi obligatoires pour assurer un fonctionnement *robuste* et *permanent* du Contrôle Global :

- séparer les fonctions du Contrôle Global entre différents programmes et plusieurs CPUs les plus indépendants possibles ;

<sup>13</sup>Pour plus de détails sur ce sujet, le lecteur est invité à consulter [59]. L’utilisation du signe  $\sim$  dans l’énumération du texte s’explique par le fait que certaines spécifications ne sont pas encore complètement fixées et donc que certains nombres de mots – en particulier ceux transmis à l’acquisition de données – peuvent encore varier.

- isoler la boucle la plus rapide (celle en charge du contrôle longitudinal à 10 kHz) pour ne pas qu'elle puisse être perturbée par des problèmes extérieurs;
- pouvoir faire évoluer facilement les différents composants du système lorsqu'une amélioration apparaît évidente et nécessaire.

#### Envoi et réception de données

L'échange de données entre deux sous-systèmes de Virgo se fait de manière digitale, par fibre optique, l'émission et la réception étant contrôlée par une carte appelée **DOL** – *Digital Optical Link* – conçue au LAPP [129]; chacune des deux fonctions est assurée par des canaux différents et indépendants. Ce composant sert au transfert d'un petit nombre de données et des mémoires FIFO<sup>14</sup> sont utilisées comme tampons lors des échanges avec le bus local. Le châssis Contrôle Global contient onze DOLs, soit pour recevoir, soit pour envoyer des données.

#### Lecture et écriture sur les bus

Les deux cartes **A** et **B** utilisées dans le Contrôle Global sont fabriqués par la firme suisse CES. Leurs CPUs sont des PowerPC et les bus des standards VME/VSB; ces choix sont en fait communs à la partie *online* de Virgo.

La boucle de *locking* fonctionnant à 10 kHz, toutes les opérations relatives à ce contrôle – lecture, calcul et écriture – doivent être toujours effectuées en moins de 100  $\mu$ s. Par suite des fluctuations aléatoires dans les divers accès bus et mémoire, cela signifie que le temps moyen utilisé pour ce travail doit être bien inférieur à cette limite afin qu'aucun événement n'aille au-delà. Or, le mode d'accès "mot à mot" aussi bien sur le VME que sur le VSB est trop lent: la limite des 100  $\mu$ s est atteinte en ajoutant les temps de lecture et d'écriture. Le mode "**bloc**" (VME) apparaît plus intéressant car il est six fois plus rapide pour accéder ou délivrer des données. Par contre, un temps considérable est "perdu" lors des phases d'initialisation, de changement de cartes et finalement de traitement des interruptions, ce qui fait que la durée totale des opérations est également de l'ordre de 100  $\mu$ s également.

Ainsi, seul le mode bloc peut convenir, à condition toutefois de trouver un moyen d'économiser du temps; pour cela, il est nécessaire d'aller au-delà des composants *hardware* standards de Virgo et de définir une architecture spécifique pour le Contrôle Global afin de satisfaire à ses spécifications. Nous allons maintenant la détailler.

#### Solutions et choix

La figure 3.14 présente un schéma du châssis Contrôle Global tel qu'il se trouve à Cascina. Si certains des composants visibles sur ce dessin ont été déjà présentés dans les paragraphes précédents, d'autres sont nouveaux et leurs fonctions vont maintenant être expliquées; on verra qu'ils permettent de valider le cahier de charge détaillé aux paragraphes précédents.

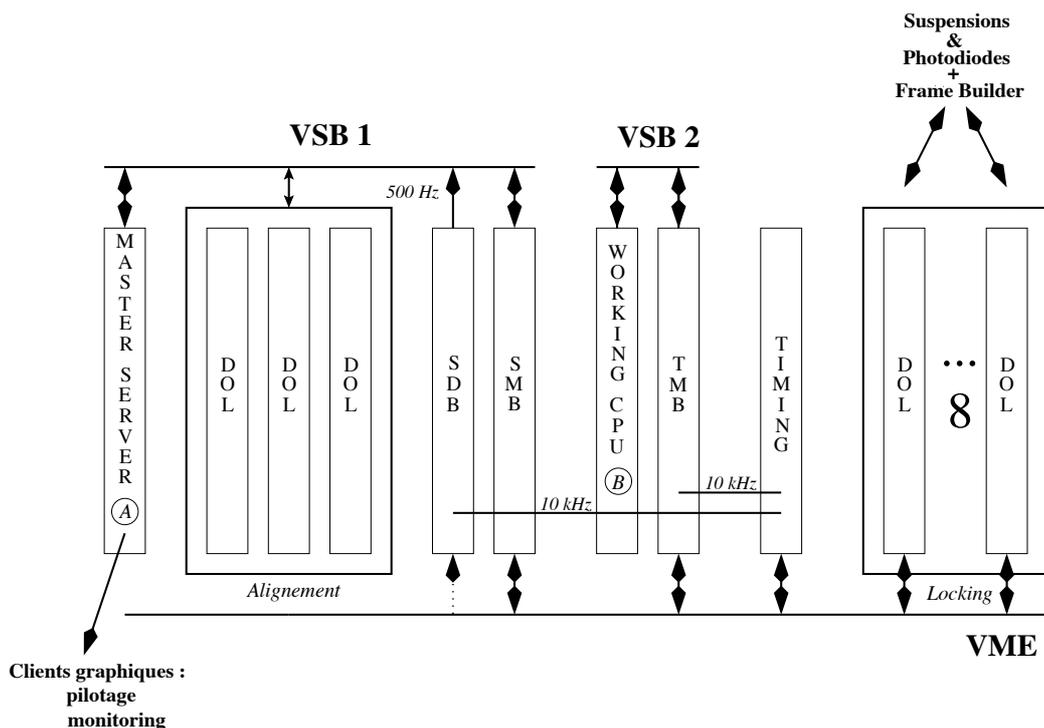
Deux CPUs cadencés à 400 MHz sont utilisés. Le **B** est en charge de la boucle rapide de *locking* et n'est connecté qu'au second bus VSB; le **A**, lui, est arbitre sur le VME (et donc situé en "slot 1" dans le châssis) et est relié au reste du Contrôle Global par le VSB 1, soit de manière totalement indépendante du CPU **B**. Il s'occupe du calcul des corrections d'alignement, de la gestion des transitions entre les différentes phases du *locking* – acquisition, maintien, perte – et de la distribution de données via Ethernet vers les clients graphiques de surveillance ou de pilotage (voir le paragraphe suivant 3.4.3) qui fonctionnent sur une station ALPHA.

On a vu précédemment que le temps de lecture/écriture était trop important pour tenir la synchronisation à 10 kHz, à cause d'une part du temps d'accès aux données, et d'autre part des délais dus aux interruptions et aux phases d'initialisation du mode utilisé pour le transfert. Deux améliorations de cette procédure ont permis d'obtenir un gain de temps considérable sur ces opérations et donc de satisfaire aux spécifications du système.

La première est visible sur le schéma 3.14: il s'agit de la carte TMB (*Transparent Memory Board*) [130] conçue au LAL. Grâce à elle, le CPU **B** ne lit et écrit qu'à une seule adresse VSB et n'est plus perturbé par des interruptions – la synchronisation se fait à partir de la TMB qui envoie des données sur le VSB ce qui déclenche le CPU en attente de cette arrivée. Comme indiqué sur le dessin du châssis, c'est une carte double port VME/VSB qui effectue des séquences automatiques de lecture/écriture sur le VME (sur lequel elle est maître) lorsqu'elle reçoit un signal de la carte

---

<sup>14</sup>"First In First Out": les premières données écrites/reçues sont les premières envoyées/décodées.



**Figure 3.14:** Schéma du châssis Contrôle Global. Le CPU **B** est en charge de la boucle rapide à 10 kHz – maintien des cavités en résonance – tandis que le CPU **A** s’occupe du calcul des corrections d’alignement à 500 Hz, du pilotage du système et de la gestion des communications avec une station ALPHA sur laquelle tournent les clients de *monitoring* et de contrôle.

*Timing* décrite précédemment. L’adjectif “Transparent” s’explique par le fait que les données sont transmises en interne d’un bus à l’autre immédiatement après qu’elles sont disponibles.

Avec cette carte, un gain d’un facteur six est obtenu pour le bus VME : les performances de lecture/écriture sont similaires à celles du mode bloc mais il n’y a plus de phase d’initialisation et les changements d’adresse sont plus rapides. Par contre, le gain côté VSB est nettement plus faible (de l’ordre de 20% seulement) car plus de 50  $\mu$ s sont encore consommées par des opérations d’initialisation/interruption au niveau CPU. Ainsi, si les accès VME sont devenus négligeables devant ceux sur le bus VSB, ces derniers sont encore prohibitifs en temps.

Ce problème a été résolu par un autre moyen, invisible sur le schéma : la modification du pilote (*driver*) VSB commercial. Celui-ci est normalement optimisé de manière à ce que le CPU soit opérationnel pendant le transfert des données ; la fin des accès VSB est alors marquée par une interruption dont le traitement est coûteux. Dans le cas du Contrôle Global, le CPU n’a aucune opération particulière à faire à ce moment là – il est en attente des données. Modifier cette logique permet d’avoir une procédure de lecture-écriture plus efficace.

Dans le nouveau schéma, le CPU **B** lit en permanence un registre mémoire interne qui contient une information sur l’état du transfert en cours et permet donc de savoir quand celui-ci est terminé ; il n’est alors plus nécessaire de générer ensuite une interruption. Cette opération s’appelle le *polling*. De plus, comme cette vérification ralentit quand même un peu le transfert et que la durée de celui-ci peut être estimée, l’accès au registre n’est fait qu’après une certaine durée, générée par le passage du CPU dans une boucle vide. Enfin, certaines vérifications internes au *driver* ont été enlevées pour gagner encore un peu de temps.

Le résultat est cette fois-ci significatif : des mesures effectuées à l’aide d’une carte compteur développée au LAL [131] montrent un gain de temps important sur le VSB : plus de 35% en lecture et 45% en écriture. De plus, la dispersion des valeurs est plus faible avec le nouveau *driver* : ainsi, la stabilité de cette nouvelle configuration renforce la marge de sécurité du système par rapport aux 100  $\mu$ s.

Néanmoins, un point soulevé par la discussion précédente reste valable : les phases de lecture et d’écriture vont nécessairement consommer une large fraction du temps imparti à la boucle à 10

kHz ; le reste doit vraiment être consacré aux calculs des corrections, sans autre interférence. Or, le fonctionnement du Contrôle Global demande une connaissance constante de l'état du système – le *monitoring* – pour pouvoir agir rapidement sur ses paramètres en cas de besoin. Le CPU **B** n'a pas les moyens d'effectuer ce travail qui doit ainsi échoir au CPU **A**. Il faut donc qu'il ait accès aux différentes données traitées (signaux des photodiodes, corrections...) sans perturber le fonctionnement de la partie rapide. En particulier, l'idée de faire communiquer les deux CPUs ou celle de recopier tout ou partie des informations dans une mémoire sont à rejeter : la première parce qu'elle conduirait forcément à des interruptions de la procédure et donc à des pertes de synchronisation, la seconde parce qu'elle serait simplement trop longue (doublement du nombre de mots à traiter).

La solution est de fabriquer une carte **espion**, la SDB, qui récupère toutes les données passant sur le bus VME et les délivre sur le bus VSB 1 où elles sont à la disposition du CPU **A**. Deux types de stockage sont prévus.

- Le mode 1/N qui sélectionne une fraction des événements. Lorsque les données correspondantes sont disponibles côté VSB, un signal est délivré pour prévenir le CPU **A** ; ce même signal sert également à synchroniser le calcul des corrections d'alignement.
- Le mode "analyse" : tous les événements sont copiés sur une mémoire circulaire. Ainsi, en cas de problème (perte de contrôle, variations brusques de la courbe de sensibilité...), les données immédiatement antérieures ( $\sim$  quelques minutes à 10 kHz) sont disponibles pour analyse afin de mieux comprendre la cause du dysfonctionnement. De plus, la grande profondeur du tampon peut également permettre d'étudier certaines dérives "lentes" – de l'ordre de la dizaine-centaine de mHz – et d'ajuster de manière fine certains des paramètres de contrôle, par exemple les coefficients de la matrice optique, cf. appendice B.

Enfin, la carte commerciale SMB – *Shared Memory Board* – permet par son double port VME/VSB l'échange de données entre les bus : le CPU **A** vient y lire le statut de la partie rapide et y écrit les corrections d'alignement que le CPU **B** accède par l'intermédiaire de la TMB. La SMB est le seul lien entre la boucle à 10 kHz et le reste du réseau de Virgo.

#### 3.4.3 Développements logiciels

Le développement du Contrôle Global a bénéficié d'un riche environnement *software* initié au LAL pour Virgo. Ce paragraphe a pour but de présenter le principe de chacun de ces outils et de montrer qu'ils répondent tous à des besoins généraux de la collaboration. Certains comme le protocole de communication entre applications Cm est utilisé par l'ensemble des systèmes du détecteur ; les autres devraient l'être car ils simplifient le travail de développement une fois leurs principes de fonctionnement assimilés. En particulier, le cas du Superviseur sera discuté plus longuement : le détecteur Virgo est si complexe que l'utilisation d'un outil simple et performant pour le contrôler et le piloter, soit de manière globale, soit au niveau des détails particuliers d'un sous-système donné, est évidente ; c'est pour répondre à ce besoin que ce programme a été mis au point. Il peut ainsi se décliner en plusieurs versions, soit générale, soit adaptée aux programmes qu'il doit piloter.

Dans ce cadre, le Contrôle Global a développé son propre outil qui sera présenté dans la suite ; par contre, ce travail d'intégration reste à effectuer au niveau des autres sous-systèmes, soit que cette tâche n'est pas été considérée prioritaire, soit que son intérêt même n'ait pas été perçu. A mesure que les différentes parties de l'instrument s'assemblent et fonctionnent simultanément, la difficulté d'effectuer un diagnostic global rapide et la nécessité de surveiller chaque détail du détecteur se font plus pressantes et rendent nécessaires l'utilisation d'un tel objet. On peut donc espérer que cette situation va rapidement évoluer dans le futur.

Enfin, cette présentation permettra de mettre en évidence certains des principaux concepts du *software* développé autour du Contrôle Global : la notion d'**états** associés à un système donné, les **transitions** utilisées pour changer d'état et enfin la distinction entre **serveurs** et **clients**.

#### Des protocoles généraux

Tous les logiciels écrits pour Virgo sont bien entendus amenés à évoluer au cours de la vie de l'expérience, d'une part en augmentant le nombre de leurs lignes de code, d'autre part en s'interfaçant avec diverses bibliothèques générales ou spécifiques, le plus souvent écrites par d'autres personnes –

par exemple, le Contrôle Global utilise de façon plus ou moins directe pas moins de 47 ensembles distincts de programmes! Deux outils y pourvoient. La gestion de la hiérarchie des versions, des compatibilités ou des conflits avec les programmes extérieurs doit être automatisée sous peine de générer un nombre important d'erreurs visibles à la compilation ou, plus graves, cachées au cours de l'exécution et par la même presque indétectables.

- **CVS** [132], logiciel non spécifique à Virgo, utilisé un peu partout dans le monde pour archiver les versions successives d'un ensemble de programmes. Les différents historiques (associés à des commentaires présentant les modifications) sont stockés à un seul endroit; cette centralisation de l'information permet à chaque utilisateur d'avoir accès aux sources et de gérer la compatibilité des codes dans le cas de développements parallèles.
- **CMT** – *Configuration Management Tool* – [133] développé pour Virgo à l'origine est maintenant utilisé dans d'autres expériences de physique comme Atlas, NEMO, Auger et LHCb. Il s'occupe de gérer les dépendances entre plusieurs programmes (comme par exemple la connexion avec des bibliothèques, le choix du compilateur...) en tenant compte des problèmes de priorité éventuels entre versions.

Deux applications différentes de Virgo doivent pouvoir échanger des informations (configuration, données, variables d'environnement...). Dans ce but, un outil appelé **Cm** [133] a été développé; basé sur le protocole TCP/IP, il permet l'émission et la réception de messages de format libre (construits à partir des types de base du langage C) entre des applications quelconques – en particulier, fonctionnant sur des machines distinctes, éventuellement distantes et dotées de systèmes d'exploitation différents. L'utilisation de l'outil est très simple et cache totalement les détails techniques des procédures d'émission et de réception spécifiques à chaque environnement. Le seul point dont le programmeur doit être conscient est que ce mode de communication est **asynchrone** puisque c'est une caractéristique intrinsèque à TCP/IP.

Chaque composante de la partie *online* du détecteur – photodiodes, contrôles, procédure de reconstruction du signal gravitationnel, acquisition de données – gère un grand nombre de paramètres dont les valeurs sont ajustées pour assurer le bon fonctionnement de l'ensemble du système. Une base de données appelée **Db** [133] permet de stocker ces configurations – l'utilisation de CVS assure une conservation de l'historique – et d'y accéder par l'intermédiaire de Cm. A partir une fois encore des types de base du C (augmentés de la notion de tableaux mono- ou bi-dimensionnels), chaque utilisateur peut construire des objets plus complexes regroupant des données reliées entre-elles. L'archive centrale se décompose en répertoires et une interface graphique permet de visualiser son contenu et de le modifier, de reprendre des versions passées d'un objet ou de sélectionner celles qui correspondent à un état particulier du système, au préalable identifiés par un marqueur.

Enfin, chaque système peut établir une liaison avec un outil d'archivage des erreurs appelé **El** – *Error Logger* – [133] qui reçoit par Cm les alertes générées par les différents sous-systèmes de Virgo. Quatre niveaux quantifient la gravité du problème: information, attention, erreur sévère et finalement fatale. Comme la distinction entre les trois dernières catégories n'est pas clairement établie et dépend des utilisateurs; une clarification de ce point sera nécessaire à cause des relations de dépendance entre les différents programmes. On peut imaginer que l'apparition d'une erreur au niveau d'un sous-système donné se répercute ailleurs et que les procédures déclenchées alors dépendent de la sévérité du problème; il faut donc que l'échelle de classification soit commune.

Ainsi, différents outils ont été développés pour assurer le bon fonctionnement des serveurs: archivage et protection de données, transmission et étiquetage d'informations... Le dernier point à aborder concerne la gestion de l'ensemble du détecteur.

La manière la plus commode de travailler est d'utiliser des séries de séquences enchainées lorsque des états particuliers du système, préalablement définis, sont atteints. Ces actions peuvent soit être laissées à l'initiative d'un opérateur (par exemple pour le démarrage d'un programme) soit être regroupées dans des procédures automatisées. Ces fonctionnalités sont assurées par un programme développé au LAL, appelé **Superviseur** [133], et utile aussi bien pour une gestion globale de l'instrument que pour celle d'un nombre limité d'applications. En complément de cet outil, une logique est proposée afin de définir proprement les états successifs d'un programme ainsi que les transitions permettant de passer de l'un à l'autre.

### Client, serveur et maîtrise

Avant de présenter le Superviseur et son application au pilotage du Contrôle Global, il convient de définir les trois termes principaux associés à l'architecture *software* sur le modèle de laquelle le

---

Superviseur est construit.

- **Le serveur**

Un serveur est un programme qui réalise une action sur les composants *hardware* du système : lecture, écriture, calcul de corrections... Il est généralement organisé en deux parties : une lente en charge de la communication avec d'autres applications, une rapide en charge du travail effectif utilisant la notion de *threads*<sup>15</sup>.

- **Le client**

Un client sert d'interface (graphique le plus souvent) entre un serveur et un opérateur. A un même serveur peuvent se connecter plusieurs clients (par exemple l'un fonctionnant au LAL et l'autre à Cascina) ce qui nécessite une gestion des priorités entre-eux, permise par la notion de maîtrise.

- **La maîtrise**

A un instant donné, un seul client peut agir sur le serveur, celui qui possède la maîtrise. Tant qu'il ne l'a pas relâchée, les autres ne peuvent que recevoir des données. Par défaut aucun client n'est maître ; il doit le demander au Superviseur pour le devenir.

### Le Superviseur

Le Superviseur gère une **partition**, i.e. un ensemble de programmes reliés entre-eux. Il permet de démarrer les applications (en sélectionnant la bonne version du logiciel ainsi que la machine sur laquelle il doit être lancé) et de les piloter jusqu'à leurs arrêts. Au niveau de la partition et plus généralement de chacun de ses composants, cette gestion se traduit par des changements d'**états** qui correspondent à des niveaux particuliers de configuration et d'exécution du code atteints par l'intermédiaire de **transitions**. Le langage **Fsm** – *Finite State Machine* – [133] a été défini pour codifier ces étapes dans l'évolution d'un programme ainsi que les changements d'états.



**Figure 3.15:** Détails des différents états Fsm accessibles pour un serveur donné (schéma de gauche) et pour une partition complète (schéma de droite) ; figures extraites de [59].

Comme exemple de ces procédures, la figure 3.15 présente deux schémas montrant les différents états atteignables par un serveur (à gauche) et par une partition (à droite) ; les flèches symbolisent les transitions possibles. Les états associés à un serveur se retrouvent dans la liste de la partition, laquelle en contient d'autres (*Golden State*, *Running DAQ*) qui sont plus généraux et dont les transitions d'accès sont conditionnées par la situation d'autres sous-systèmes – par exemple, passage des contrôles locaux au contrôle global. On peut distinguer trois parties principales dans cette architecture :

- le démarrage, amenant les applications dans l'état *Idle* ;

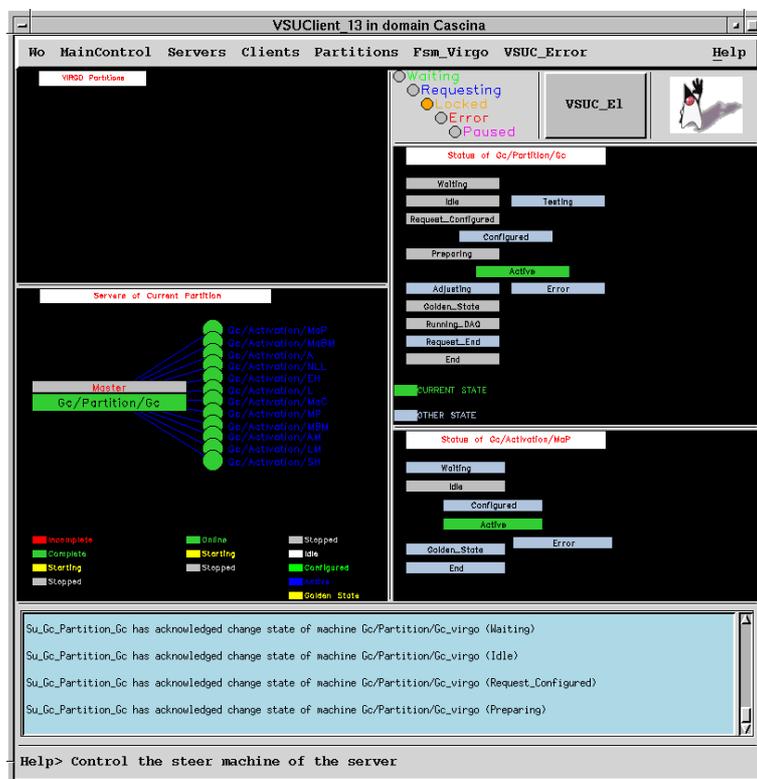
<sup>15</sup>Les *threads* sont des sous-programmes qui peuvent fonctionner en parallèle – avec des niveaux de priorité ajustables.

- la configuration ;
- la phase active où les programmes fonctionnent effectivement et passent éventuellement par plusieurs étapes avant d’atteindre leur niveau optimal.

Chacune utilisateur des fonctionnalités du Superviseur définit le contenu de ses transitions ainsi qu’une partie plus spécifique à ses propres applications. En particulier, le client graphique associé au Superviseur contient deux pages principales, l’une générique et commune aux différents systèmes, et l’autre personnalisable. Dans la suite, nous verrons comment elle a été adaptée à la structure du Contrôle Global.

### Piloter le Contrôle Global

Le pilotage des différents sous-systèmes de Virgo, et donc du Contrôle Global en particulier, s’effectue dans le cadre de l’outil Superviseur, à l’aide de son client graphique associé. Les figures 3.16 et 3.17 montrent une copie des deux écrans principaux de cette interface, le premier étant identique – aux détails de la composition de la partition – pour tous les Superviseurs, le second étant spécifique au Contrôle Global car il allie à une représentation de l’architecture du sous-système des informations spécifiques sur le fonctionnement de celui-ci.



**Figure 3.16:** Fenêtre générique du client graphique associé au Superviseur en charge de la partition du Contrôle Global : on peut voir dans la partie inférieure gauche la liste des différentes applications. Les codes couleurs permettent d’avoir une information résumée sur leur état (“vert” = OK). Sur la droite, on a, de haut en bas, l’état Fsm de la partition (i.e. l’état courant du programme le moins avancé de la partition) et celui d’une des applications choisie par l’opérateur.

La fenêtre présentée sur la figure 3.16 permet de piloter la partition dans son ensemble tout en donnant quelques informations sur chacune des applications qui la composent. Sur la partie gauche, sous le nom de la partition, on a la liste des différents programmes dont les états courants sont donnés par un code de couleur : vert et bleu si tout va bien, rouge ou gris en cas de problème. L’inscription “Master” en lettres rouges montre que cette interface a actuellement la maîtrise sur le Contrôle Global, i.e. qu’elle peut agir sur ce sous-système. A droite, on trouve le détail de l’état Fsm global à la partition (i.e. l’état de l’application la moins avancée de la partition) et en dessous celui d’un programme donné, sélectionné par l’opérateur du client graphique.

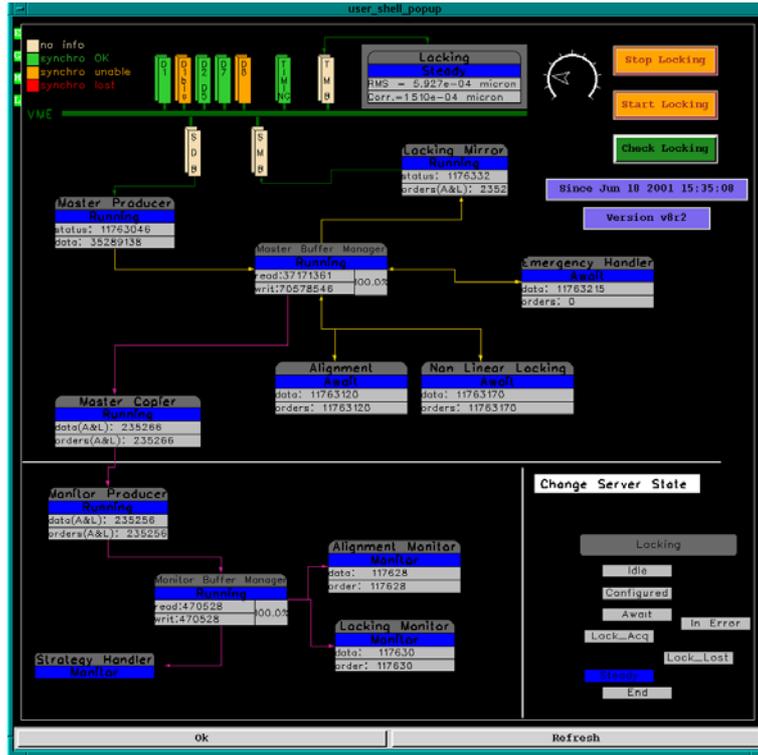


Figure 3.17: Fenêtre spécifique du client graphique associé au Superviseur du Contrôle Global.

Sur la figure 3.17, on peut voir la fenêtre graphique qui sert à gérer le fonctionnement détaillé du Contrôle Global, et en particulier celui de la boucle rapide à 10 kHz sur le CPU B. En effet, le programme en charge de ce travail, appelé *Locking* en référence au nom anglais de sa tâche, a un statut spécial : il n'apparaît pas dans la partition – car il n'est pas accessible à partir du réseau lorsqu'il fonctionne à 10 kHz – mais seulement sur cet écran à partir duquel il est démarré, piloté et enfin arrêté ; les informations le concernant sont regroupées dans la partie supérieure.

- A droite, les boutons de démarrage et d'arrêt ainsi qu'une touche permettant de rafraîchir l'état de l'application *Locking* lorsqu'un doute apparaît au sujet de son état courant.
- Juste dessous, on peut voir la date de démarrage du programme ainsi que son numéro de version (nomenclature CMT).
- L'aiguille servira dans le futur d'indicateur de la qualité de la reconstruction des longueurs à partir de la matrice optique – le *locking* linéaire –, donnée par la valeur du  $\chi^2$ .
- Horizontalement, une vue synthétique de l'état du programme est présentée sous forme de bandeau. Les boîtes verticales montrent par un code de couleurs (dont la légende est située à l'extrême gauche) le niveau de synchronisation entre le Contrôle Global, les différentes photodiodes et la carte *Timing*. La situation présentée ici correspond à la configuration utilisée pour les essais de contrôle du CITF : la synchronisation est établie avec les diodes D1 (frange noire) et D5 (faisceau réfléchi sur la seconde face de la séparatrice donnant accès à la puissance intracavité).
- Un peu plus à droite, le grand rectangle horizontal montre l'état courant du Contrôle Global ainsi que deux informations sur les corrections calculées, ici la valeur de celle associée à la longueur de frange noire et le RMS de ces valeurs intégré sur les dix dernières minutes.
- Le reste de l'écran présente des données d'environnement concernant les divers programmes appartenant à la partition du Contrôle Global et fonctionnant soit sur le CPU A, soit sur une station ALPHA. Ceux-ci sont l'objet du paragraphe suivant.

### Le software du Contrôle Global

Au-milieu de la figure 3.17 se trouve un trait horizontal qui marque la séparation entre les programmes du CPU **A** et ceux fonctionnant sous ALPHA; les premiers nommés s'occupent de l'alignement et de la transition entre les différentes phases du *locking*.

- *Master Producer*  
Ce programme lit les données de la SDB sur le bus VSB 1 et fonctionne donc à la fréquence d'alignement; il écrit dans le *Master Buffer Manager*.
- *Locking Mirror*  
C'est par son intermédiaire que la boucle rapide *Locking* est gérée. Il écrit ses instructions (démarrage de l'application, changement d'état...) dans la SMB d'où elles passeront sur le bus VME puis au CPU **B** par la TMB.
- *Master Buffer Manager*  
Sa place est centrale dans l'architecture du Contrôle Global dans la mesure où il distribue les données, aussi bien celles fournies par la SDB et destinées au *monitoring* et aux serveurs spécifiques (alignement, acquisition des contrôles longitudinaux...) que celles calculées par ces mêmes programmes et destinées à remonter vers le CPU **B**. Il s'occupe de gérer les allocations/désallocations de mémoire à destination des **producteurs** – i.e. ceux qui écrivent des données – et indique les pointeurs associés à ces zones aux **consommateurs** – ceux qui lisent les données.
- *Master Copier*  
Il fait l'interface entre la partie *Master* du Contrôle Global situé sur le CPU **A** et la partie *Monitoring* sur la machine ALPHA. C'est un consommateur du *Master Buffer Manager* et il envoie ses données vers *Monitor Producer*.
- *Alignment*  
Sa fonction est de calculer les corrections d'alignement à partir des données fournies par le *Master Buffer Manager*. Il est donc présent en permanence.
- *Non-Linear Locking*  
Ce programme s'occupe de gérer la phase d'acquisition du contrôle longitudinal des cavités et ne fonctionne donc que lors de périodes bien définies. Il n'a pas été utilisé pour le travail sur le CITF car les acquisitions étaient suffisamment "simples" (une fois le bon algorithme trouvé!) et rapides pour être directement incluses dans le programme *Locking*. La question du contrôle de l'interféromètre Virgo complet étant encore ouverte, il est possible que cette application soit finalement inutile – en tout cas, elle est prévue dans l'architecture.
- *Emergency Handler*  
Comme le précédent, ce programme ne fonctionne qu'en cas d'urgence, lors des pertes de contrôle, typiquement pour amortir l'excitation d'une suspension causée par le dysfonctionnement d'une boucle de rétroaction. La réserve sur l'utilité au final de l'application *Non-Linear Locking* s'applique également à *Emergency Handler*.

Quant aux programmes de la seconde catégorie, ils servent au *monitoring* du Contrôle Global.

- *Monitor Producer* et *Monitor Buffer Manager*  
Ce sont des copies, pour la partie ALPHA, des programmes *Master Producer* et *Master Buffer Manager* respectivement; *Monitor Producer* reçoit ses données de *Master Copier*.
- *Strategy Handler*  
Ce programme est important pour assurer un contrôle de l'interféromètre sur le long terme: sa fonction est de mesurer les dérives de certaines parties du détecteur, les variations de certaines de ses réponses (longitudinales, angulaires...) et d'en déduire les modifications adéquates des paramètres des boucles d'asservissement – voire le changement complet de l'algorithme de rétroaction – pour ramener Virgo à son point de fonctionnement sans perte de sensibilité ou de contrôle. La logique de cette application, encore assez simple pour le moment, sera certainement amenée à se développer dans le futur en parallèle des améliorations de la compréhension du détecteur complet.

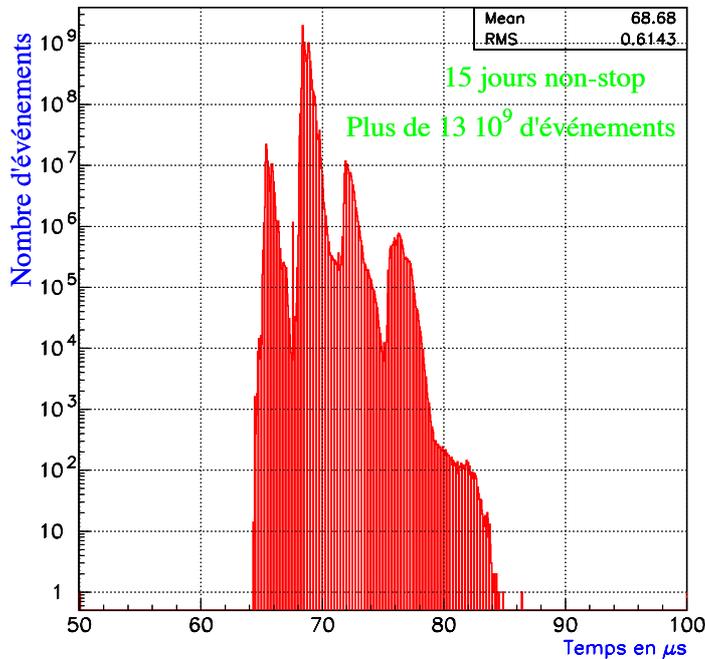
- *Alignment Monitor* et *Locking Monitor*

Ces deux applications délivreront à basse fréquence à des clients graphiques – *Monitor UI* – des informations statistiques utiles pour contrôler le bon fonctionnement des différentes boucles d’asservissement. Les algorithmes utilisés pour cette tâche restent à définir.

### 3.4.4 Performances

Le Contrôle Global a été installé sur le site de Cascina au mois de juin 2000 et il est en fonctionnement depuis lors. Comme les paragraphes précédents ont cherché à le montrer, la mise au point de ce système s’est accompagnée de développements parallèles visant à fournir à ses experts ou aux opérateurs du détecteur les moyens d’établir un diagnostic précis de son fonctionnement à tout instant. Ces outils ont également été utiles pour estimer ses performances réelles.

Le premier point important est la question de la synchronisation du système, délicate à 10 kHz mais essentielle pour le bon fonctionnement des asservissements. A chaque tour, la comparaison entre le numéro de *sampling* courant et ceux qui estampillent les paquets de données provenant des photodiodes permet de tester qu’il n’y a pas de retard dans le traitement des signaux d’erreur. En plus d’un an et demi, aucune perte de synchronisation n’a été causée par le Contrôle Global.



**Figure 3.18:** Histogramme de la distribution du temps passé dans la boucle rapide à 10 kHz portant sur plus de quinze jours consécutifs. La moyenne de la distribution est autour de  $69 \mu\text{s}$  et un seul événement est au delà de  $86 \mu\text{s}$ . En notant le fait que l’échelle verticale est logarithmique, on peut voir que les queues de cette distribution ont une faible extension et donc que le Contrôle Global satisfait à ses spécifications présentées dans les paragraphes précédents.

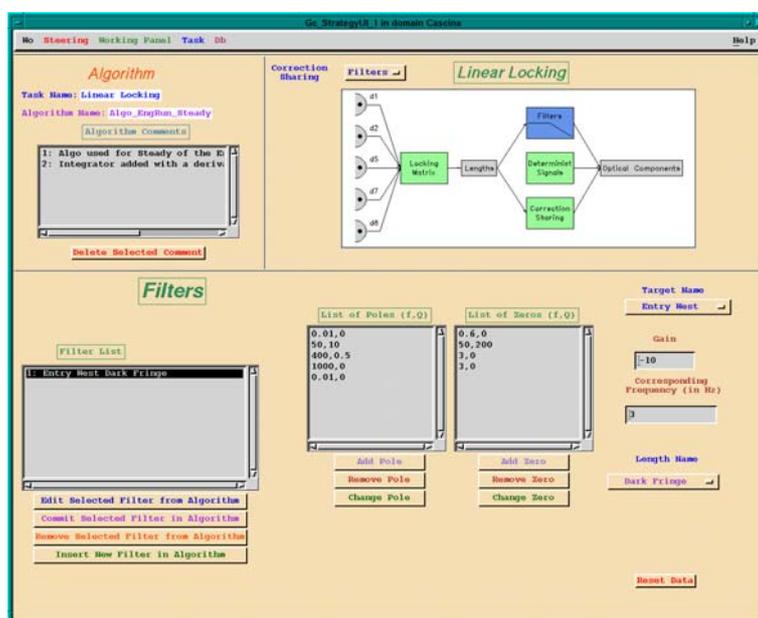
De plus, un test de la synchronisation **interne** de *Locking* est fait à 10 kHz en vérifiant que les numéros de *sampling* (cadencés à 20 kHz) changent bien de 2 exactement à chaque itération de la boucle rapide. La durée de ces cycles est également mesurée par une carte compteur [131] incorporée au châssis Contrôle Global. Comme aucun transfert intempestif de données n’est possible entre le CPU **B** et le reste du réseau, ces informations ne sont disponibles que lorsque l’application est arrêtée et apparaissent sous forme d’histogrammes similaires à celui présenté sur la figure 3.18.

Ainsi, la figure 3.18 présente un exemple d’histogramme correspondant à un fonctionnement continu d’une durée supérieure à quinze jours, soit plus de treize milliards d’événements. L’échelle verticale est logarithmique ce qui montre que les queues de la distribution sont faiblement étendues,

et en tout cas restent bien en-deçà de la limite des  $100 \mu\text{s}$  imposée : la valeur moyenne est de l'ordre de  $69 \mu\text{s}$ , l'écart-type inférieur à  $1 \mu\text{s}$  et un seul événement est au-delà de  $86 \mu\text{s}$ . Le programme *Locking* satisfait à ses spécifications avec une marge de sécurité satisfaisante : les algorithmes pourront être rendus plus complexes dans le futur puisqu'il reste du temps libre dans la boucle – et ce d'autant plus facilement que la très grande majorité du temps consommé l'est par les phases de lecture/écriture (environ  $62 \mu\text{s}$  par cycle, ce qui montre que les algorithmes de contrôle prennent actuellement à peine  $5 \mu\text{s}$  environ).

L'information de synchronisation est également disponible en temps réel sur la page spécifique du client Superviseur du Contrôle Global, rafraîchie à quelques dixièmes de Hz – cf. paragraphe 3.4.3. D'éventuelles pertes de synchronisation de faibles durée échappent à ce *monitoring*. Aussi, un fichier renouvelé à chaque arrêt de *Locking*<sup>16</sup> présente une vue synthétique de cette question – nombre d'erreurs de synchronisation avec chaque photodiode, durée de la dernière, nombre d'erreurs internes... – ainsi que des informations sur la qualité des données (pourcentage de valeurs hors de l'intervalle de variation permis, nombre de données manifestement erronées...).

### 3.4.5 Définition des configurations des algorithmes



**Figure 3.19:** Client graphique StrategyUI utilisé pour choisir de manière simple les paramètres des algorithmes de contrôle, ici par exemple le filtre utilisé pour contrôler la frange noire du CITF en configuration Michelson.

Les paramètres des algorithmes de contrôle sont stockés dans la base de données *online* Db. Pour facilement les modifications de ces configurations, j'ai développé le client graphique **StrategyUI** intégré au *software* du Contrôle Global, dont une copie de la fenêtre utilisateur est présentée sur la figure 3.19. Pour chaque type d'asservissement, on peut charger les fichiers existants, les modifier et en créer de nouveau. Le schéma logique de la procédure de contrôle (lecture des signaux d'erreur et détail du calcul des corrections) est représenté sur une image (en haut à droite du graphique 3.19) sur laquelle l'utilisateur peut "cliquer" pour faire apparaître dans la partie basse de la fenêtre du client les détails du module sélectionné et les modifier si besoin.

<sup>16</sup>Comme pour l'histogramme présenté précédemment, les informations collectées en interne par le programme ne sont pour l'instant disponibles qu'une fois que celui-ci est arrêté pour éviter tout dépassement de temps engendré par des transferts de données intempestifs. Toutefois, il est prévu de pouvoir y accéder au vol par la SMB à partir de *Locking Mirror* : à raison d'un mot par boucle de  $100 \mu\text{s}$ , des quantités importantes de données pourront être envoyées par ce canal en quelques secondes au plus, délai sans importance pour le *Monitoring*.

## Chapitre 4

# Résultats expérimentaux du contrôle de l'interféromètre central

Ce chapitre présente les résultats obtenus sur l'interféromètre central de Virgo (CITF) de juin 2001 – date du premier contrôle de la longueur de frange noire – au début de l'année 2002. Il s'attache à décrire les procédures effectivement utilisées pour les asservissements longitudinaux ainsi que les mesures expérimentales effectuées pour les deux configurations différentes étudiées.

- Le Michelson simple : miroir de recyclage désaligné, un seul degré de liberté longitudinal à contrôler (le mode différentiel de l'interféromètre i.e. la différence de longueurs entre les deux bras, appelée frange noire).
- Le CITF recyclé : miroir de recyclage aligné et donc deux longueurs à contrôler, la frange noire et le recyclage.

Malgré les difficultés rencontrées au cours des années précédentes en particulier au niveau du génie civil, les événements se sont récemment accélérés pour l'interféromètre Virgo : en un peu plus de six mois, le CITF a été amené et maintenu à son point de fonctionnement, d'abord dans le cas simple du Michelson (une seule longueur à contrôler) puis dans sa configuration nominale. L'expérience déjà acquise à la suite de ces succès a permis de progresser dans différentes directions (contrôle, suspension, acquisition des données...), tant au niveau de la compréhension du détecteur que de l'amélioration de la sensibilité. Des *Runs* de trois jours ont montré la robustesse du contrôle sur de longues périodes et les quelques événements de perte d'asservissement ont été pour la plupart compris.

Cette période de fonctionnement plus concret de l'instrument a également mis en lumière les avantages et les inconvénients des différents sous-systèmes fonctionnant ensemble pour la première fois, et en particulier leurs capacités d'adaptation aux modifications apparues nécessaires au fur à mesure du développement de l'activité sur le CITF. Le Contrôle Global s'est plutôt bien sorti de cette confrontation avec l'expérience et il a peu à peu été utilisé pour des tâches qui ne lui étaient pas dévolues à l'origine. On peut citer deux exemples :

- implémentation complète de la stratégie de contrôle en interne, les suspensions ne prenant plus que la décision d'agir effectivement sur les miroirs et gérant la répartition des corrections entre la masse de référence et le sommet du pendule inversé ;
- utilisation des signaux optiques pour amortir le mouvement résiduel des cavités – en préalable au contrôle du CITF – à un niveau actuellement inaccessible au niveau des contrôles locaux.

Bien sûr, la sensibilité actuelle du CITF n'est pas encore au niveau escompté : de nombreuses améliorations restent à apporter sur le détecteur au cours des six prochains mois, i.e. jusqu'à ce que la période d'étude de l'interféromètre de test s'achève et qu'il soit temps de passer à Virgo complet – par ailleurs en bonne voie puisque la construction des bras kilométriques est presque achevée et qu'une grande longueur des tubes – dont la production atteindra bientôt le 6ème km – est déjà sous vide. Les plus importantes modifications sont au nombre de trois :

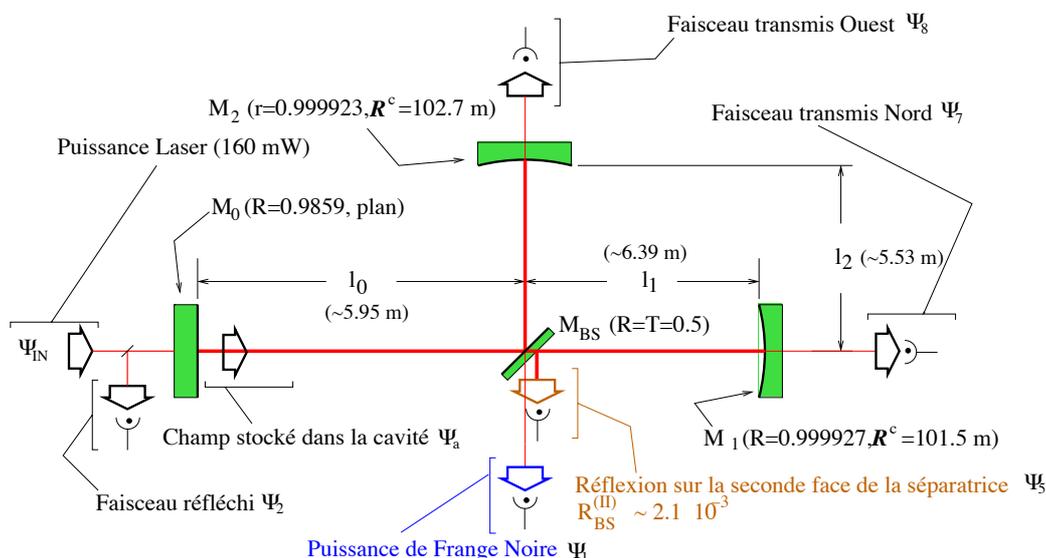
- amélioration des contrôles locaux (et plus généralement des modes d'action sur les miroirs : découplage des différents degrés de liberté, contrôle depuis le sommet de la suspension généralisé sur les différentes tours...);

- mise en place des procédures d'alignement automatiques ;
- utilisation du laser de puissance pour maximiser la puissance stockée dans l'interféromètre et tester les électroniques en configuration nominale.

Au niveau du Contrôle Global, l'implémentation des algorithmes d'alignement se double d'un travail *hardware* sur la carte "espion" SDB dont le fonctionnement doit être optimisé. 2002 devrait également voir la généralisation de l'utilisation du Superviseur dont les fonctionnalités de pilotage et de gestion des applications ont fait défaut pour certains sous-systèmes...

Si tout n'est pas encore pour le mieux dans le meilleur des mondes, l'expérience Virgo a vraiment commencé à fonctionner en 2001 et sa situation devrait aller maintenant en s'améliorant : le détecteur est contrôlé, des données sont prises et commencent à pouvoir être interprétées avec précision. Si ce sentiment est partagé par le lecteur à la fin de la lecture de ce chapitre, c'est que ce dernier n'aura pas été inutile !

## 4.1 Le contrôle du CITF : point de fonctionnement, signaux d'erreur et boucles d'asservissement



**Figure 4.1:** L'interféromètre central de Virgo : un Michelson simple recyclé avec des bras de 6 mètres environ. Le contrôle de la longueur de frange noire s'obtient en utilisant les signaux d'erreur de la photodiode D1 tandis que D5 (faisceau réfléchi par la seconde face de la séparatrice) permet d'amener la cavité de recyclage en résonance.

Avant de passer en revue les résultats expérimentaux obtenus sur l'interféromètre central de Virgo et de décrire l'évolution du travail qui a conduit tout d'abord au contrôle du Michelson simple puis à celui du CITF entier, ce paragraphe a pour fonction de résumer rapidement les principales caractéristiques de l'instrument décrit aux chapitres précédents.

La figure 4.1 présente un schéma du CITF qui montre les principales caractéristiques des miroirs (recyclage, séparatrice et deux miroirs d'extrémité) ainsi que les longueurs physiques des cavités. Les deux photodiodes qui ont fourni les signaux d'erreur utilisés pour le contrôle longitudinal y sont également représentées :

- D1 – faisceau en sortie de l'interféromètre avant le *mode-cleaner* de sortie – pour la longueur de frange noire, i.e. la différence de longueur des deux bras ;
- D5 – faisceau réfléchi par la seconde face de la séparatrice – donnant accès à la longueur de recyclage, i.e. la longueur moyenne de l'instrument.

Le point de fonctionnement correspondant à la meilleure sensibilité est obtenu lorsque la puissance en sortie est minimale (“frange noire”) et quand celle stockée à l’intérieur de l’interféromètre est maximale, les deux conditions allant de pair – si rien ne sort du détecteur et que le miroir de recyclage est présent, tout est recyclé! Malgré la qualité des dispositifs mécaniques de suspension des miroirs, les mouvements libres résiduels – en particulier aux fréquences inférieures à celle de résonance des pendules – sont encore bien trop importants pour que l’instrument, même initialement au repos, reste dans cette configuration de lui-même: un contrôle actif, longitudinal et angulaire, est nécessaire pour tenir les spécifications.

Celui-ci se décompose en deux étapes à partir d’une situation initiale où l’interféromètre est aussi calme que possible et a été aligné au mieux – à *la main*<sup>1</sup> toutefois. La première est appelée **l’acquisition**; elle consiste à amener le détecteur dans une configuration proche de celle de référence (cavités en résonance et vitesses d’expansion très faibles). Une fois celle-ci atteinte, les algorithmes de **contrôle linéaire** se mettent à fonctionner et maintiennent l’instrument autour de son point de fonctionnement.

Selon les cas, les méthodes utilisées pour chacune des deux phases peuvent être identiques ou différentes. Si pour le CITF elles ont été les mêmes, il est vraisemblable que la complexité du problème du contrôle de Virgo entier rendra nécessaire l’utilisation de boucles de rétroaction spécifiques pour les périodes d’acquisition. En effet, celles-ci auront pour but d’amener “physiquement” le détecteur au voisinage de son point de fonctionnement tandis que les servos linéaires devront satisfaire à des spécifications rigoureuses sur leur niveau de bruit pour garantir la meilleure sensibilité possible de l’instrument.

La suite de ce chapitre décrit les algorithmes développés en particulier au LAL pour le *locking* des cavités du CITF ainsi que les résultats expérimentaux obtenus.

## 4.2 Contrôler la longueur de frange noire

Ce paragraphe est consacré au contrôle de la longueur de frange noire pour le CITF en configuration Michelson simple, i.e. avec le miroir de recyclage désaligné, ce qui revient à le faire “disparaître” de la figure 4.1... au prix toutefois d’une diminution de la puissance en entrée du détecteur d’un facteur  $\sim 70$  à cause de sa réflectivité. Il n’y a alors qu’une seule longueur (dite de “frange noire”) à contrôler, le mode différentiel de l’interféromètre i.e. l’écart entre les deux bras.

### 4.2.1 Algorithmes de contrôle

Le contrôle du Michelson a été réalisé de la manière la plus simple possible, en agissant sur un seul miroir, en l’occurrence celui de la tour Ouest. Le signal d’erreur utilisé est la puissance AC en sortie de l’interféromètre (frange noire) et aucun seuil n’est placé sur la puissance DC – la correction est donc toujours transmise au miroir une fois l’asservissement fermé. Le filtre utilisé est du type de celui présenté sur la figure 4.2: intégrateur à très basse fréquence, puis dérivateur à basse fréquence et avec un gain unité situé à quelques dizaines de Hz. L’acquisition de la résonance est quasi immédiat (moins d’une seconde) une fois que la boucle d’asservissement est fermée et a été reproductible à volonté depuis la première réussite du contrôle, le 13 juin 2001.

### 4.2.2 Première acquisition du contrôle: le 13 juin 2001

La figure 4.3 est en un sens “historique” puisqu’elle présente l’instant du premier contrôle de la frange noire du CITF en configuration Michelson le 13 juin 2001.

Le premier graphique représente le mouvement de la cavité à hauteur du micron (plus exactement par sauts de  $\lambda/4 \sim 2.5 \cdot 10^{-7}$  m) reconstruit à l’aide d’un algorithme de **compteur de franges** [134] implémenté dans le Contrôle Global. Cette méthode permet d’avoir une idée du mouvement libre de la cavité à partir du signal d’erreur Pound-Drever  $P_{AC}$  et de la puissance DC  $P_{DC}$  sur la même photodiode.

- A partir de données acquises lors d’un mouvement libre de la cavité, on calibre le compteur de franges en relevant la puissance correspondant à la frange noire ( $P_{DC}^{\min}$ ) et celle associée à la frange blanche ( $P_{DC}^{\max}$ ).

---

<sup>1</sup>Cette expression n’a rien de péjorative: elle signifie simplement qu’il n’y a encore de procédure automatique d’alignement et donc que ces différentes phases sont effectuées directement par les opérateurs. En fonction de signaux vidéo (“spot” du faisceau en transmission des miroirs de fond par exemple), les miroirs sont déplacés avec précision verticalement et au niveau angulaire pour améliorer la configuration de l’interféromètre.

---

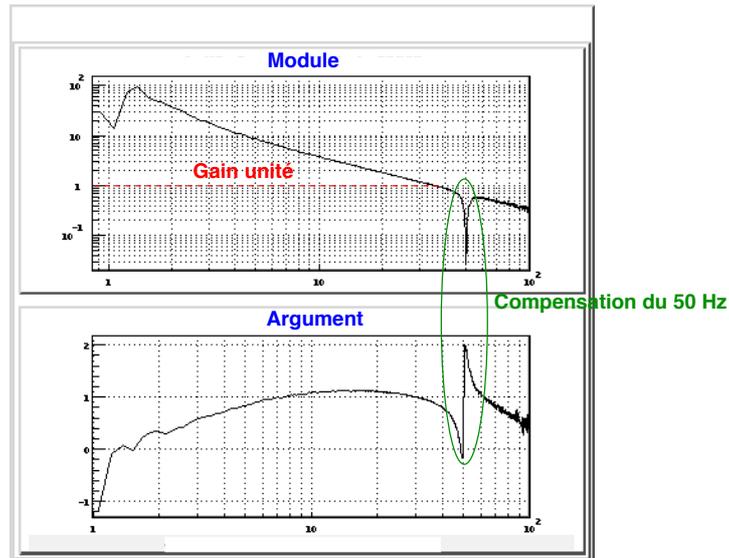


Figure 4.2: Exemple de filtre utilisé pour le contrôle du CITF en configuration Michelson

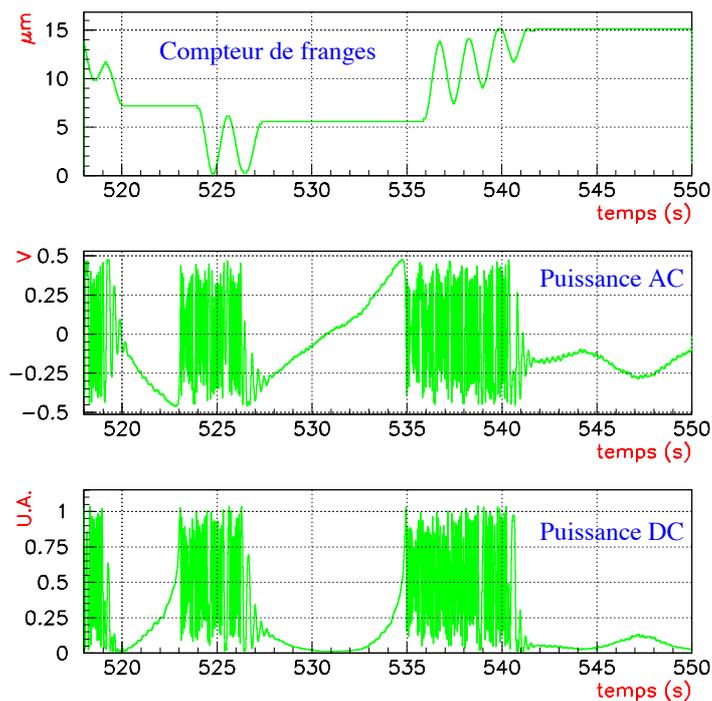


Figure 4.3: Premier contrôle de la frange noire : à  $t \sim 542$  s, le mouvement de la cavité à l'échelle du  $\mu\text{m}$  stoppe, la puissance DC reste faible (on est à la frange noire !) et le signal d'erreur (AC) oscille autour de sa valeur d'équilibre. A partir de cet instant, le contrôle a été conservé pendant plus de 17 heures avant d'être arrêté volontairement. L'échelle verticale du compteur de franges est en  $\mu\text{m}$ , celle de la puissance AC est en V et celle de la puissance DC est en unité arbitraire, de manière à avoir  $\approx 0$  à la frange noire et  $\approx 1$  à la frange blanche. Pour les trois courbes, l'axe horizontal représente le temps, gradué en secondes.

- Ensuite, on choisit deux niveaux intermédiaires, par exemple à  $\eta_{\text{inf}} = 25\%$  et  $\eta_{\text{sup}} = 75\%$  du

pic de résonance. On prend alors la convention suivante :

$$\begin{cases} P_{\text{DC}} \leq P_{\text{DC}}^{\text{min}} + \eta_{\text{inf}} \times (P_{\text{DC}}^{\text{max}} - P_{\text{DC}}^{\text{min}}) & \text{“Frange Noire”} \\ P_{\text{DC}} \geq P_{\text{DC}}^{\text{min}} + \eta_{\text{sup}} \times (P_{\text{DC}}^{\text{max}} - P_{\text{DC}}^{\text{min}}) & \text{“Frange Blanche”} \end{cases}$$

La zone intermédiaire n’est pas prise en compte.

- A chaque fois qu’une transition “frange noire”  $\rightarrow$  “frange blanche” (ou le contraire) a lieu, on regarde le signe du signal d’erreur  $P_{\text{AC}}$  ce qui permet de savoir dans quelle direction la cavité s’est déplacée.

Ainsi, l’algorithme compte le nombre de franges  $N$  (indifféremment blanches ou noires) traversées, d’où son nom. Comme l’intervalle entre deux résonances de frange noire est égal à  $\lambda/2$  ( $\lambda$  : longueur d’onde du laser), les mouvements de la cavité sont donnés de  $\lambda/4$  en  $\lambda/4$ . La trajectoire précise n’est pas reconstruite exactement mais la précision est suffisante pour suivre les oscillations libres. En particulier, on peut voir sur la figure 4.3 que le mouvement dominant a lieu à 0.6 Hz, fréquence de résonance principale de la suspension. A cause de sa “quantification” et de son manque de précision, l’information fournie par le compteur de franges ne peut pas être utilisée comme signal d’erreur dans une boucle d’asservissement mais fournit à l’opérateur un moyen d’apprécier le mouvement réel de la cavité non contrôlée.

Revenons maintenant à l’examen de la figure 4.3. Les instants où les puissances AC et DC oscillent fortement correspondent à des périodes de traversée rapide des franges d’interférence, comme on peut le voir au niveau du compteur de franges. A deux instants ( $t \sim 520$  et  $527.5$  s), le “contrôle”<sup>2</sup> de la frange noire est acquis l’espace de quelques secondes (aux alentours de 7 s pour le second événement) puis perdu.

Par contre, à  $t \sim 542$  s, les oscillations “micronscopiques” cessent à nouveau (le mouvement résiduel de la cavité contrôlée est nettement inférieur au  $\mu\text{m}$ , plutôt de l’ordre de quelques nanomètres voire moins), le signal d’erreur AC – second graphe – oscille autour une position d’équilibre tandis que la puissance DC – dernier graphe – reste faible et qu’aucune résonance n’est plus traversée. L’interféromètre est ainsi contrôlé sur la frange noire et l’est resté plus de dix-sept heures à partir de cet instant avant que l’asservissement ne soit finalement ouvert volontairement.

Cet enchaînement “acquisition/perte/acquisition/perte/acquisition finalement réussie” est typique de la procédure suivie pour réaliser un asservissement : on a vu au paragraphe 3.3.1 que le gain  $G$  d’une boucle de rétroaction ne devait pas être choisi trop important pour éviter les instabilités (marge de phase négative). Aussi, on commence par calculer l’ordre de grandeur de  $G$ , puis on ferme le contrôle avec une valeur un peu sous-estimée pour le gain. Si le comportement du système est tel qu’attendu (typiquement un ralentissement du mouvement de la cavité sans excitation particulière), on augmente peu à peu  $G$  jusqu’à ce que le contrôle soit acquis (ou qu’un problème apparaisse). C’est exactement ce qui s’est passé pour la longueur de frange noire : à  $t \sim 542$  s, le gain était suffisant pour asservir la cavité... mais néanmoins encore assez faible ! En effet, le signal d’erreur (puissance AC) a des fluctuations assez importantes – il devrait osciller autour de 0 – et la frange noire n’est qu’au niveau du dixième de la frange blanche ; les mouvements résiduels sont à basse fréquence.

### 4.2.3 Première courbe de sensibilité

La figure 4.4 présente la courbe de sensibilité initiale du CITF en configuration Michelson obtenue lors du premier *Run* de trois jours de fonctionnement continu en septembre 2001. Elle est ici exprimée en  $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$  et son minimum vaut environ

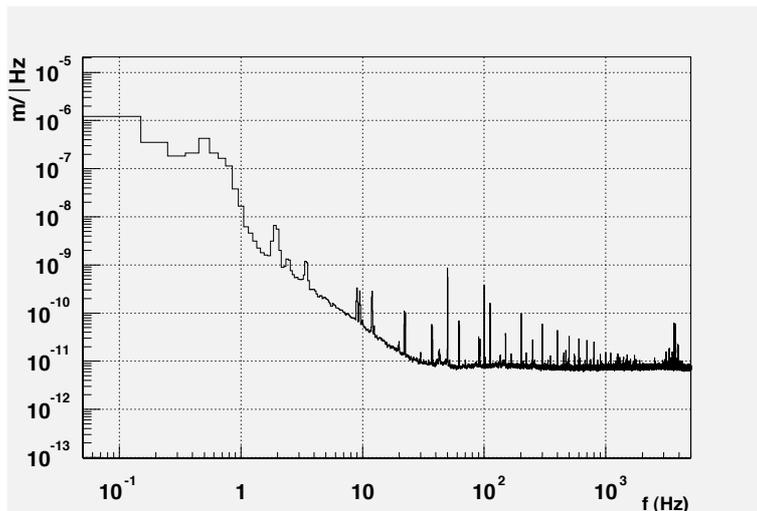
$$8 \cdot 10^{-12} \text{m}/\sqrt{\text{Hz}} \text{ à } 500 \text{ Hz}$$

En terme d’amplitude gravitationnelle, cela correspond à une sensibilité de l’ordre de  $7 \cdot 10^{-13}/\sqrt{\text{Hz}}$  puisque la longueur de l’interféromètre est de 12 mètres environ.

Les pics entre 2 et 10 Hz sont des résonances mécaniques de la chaîne de suspension (vibrations en  $\theta_x$  et mode propre d’oscillation verticale des fils) et l’on voit distinctement l’effet de l’alimentation à 50 Hz et de ses harmoniques. A haute fréquence, c’est le bruit électronique qui domine :

---

<sup>2</sup>Dans ce cas là, parler de contrôle est un abus de langage : ce terme devrait être réservé à des asservissements qui ont fonctionné sur des temps grands devant les périodes des résonances du système (1.7 s pour le 0.6 Hz).



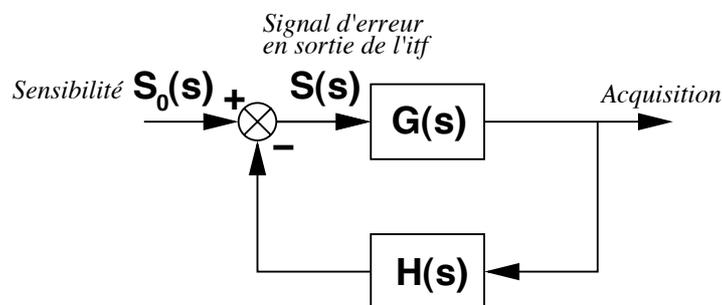
**Figure 4.4:** Courbe de sensibilité du Michelson (en  $m/\sqrt{\text{Hz}}$ ) obtenue [135] lors du premier *run* "E0" de 72 heures consécutives de fonctionnement.

comme le laser de 10 W prévu a finalement été remplacé par un laser auxiliaire de 160 mW, les gains électroniques ont été augmentés pour tenir compte de la plus faible puissance reçue sur les photodiodes. Ces systèmes fonctionnent donc dans une configuration différente de celle pour laquelle ils ont été conçus ce qui explique qu'ils aient un niveau de bruit plus important que prévu. En particulier, la partie horizontale de la courbe de sensibilité (au-delà de 50 Hz) correspond exactement au niveau de bruit électronique mesuré expérimentalement sur les photodiodes (par exemple en les couvrant d'un matériau opaque au faisceau laser et en observant les fluctuations résiduelles du voltage en sortie).

La sensibilité  $S_0$  est donnée en fonction du signal AC sur la frange noire  $S$  par l'expression :

$$S_0 = (1 - HG) S \quad (4.1)$$

où  $H$  est la fonction de transfert mécanique entre la masse de référence et le déplacement longitudinal du miroir Ouest (pendule simple, cf. partie inférieure de la figure 3.12) et  $G$  la fonction de transfert de la boucle de contrôle. Le schéma bloc correspondant à ce calcul est précisé sur la figure 4.5.



**Figure 4.5:** Diagramme en bloc illustrant le processus de calcul de la sensibilité du détecteur à partir du signal d'erreur frange noire  $S$  et des fonctions de transfert mécanique et de contrôle  $H$  et  $G$ .

### 4.3 Contrôler l'interféromètre recyclé

Une fois le contrôle du Michelson simple devenu routinier, l'étape suivante est de passer au CITF complet, i.e. avec le miroir de recyclage aligné (manuellement comme les autres) qui permet un stockage de puissance dans la cavité. Ce problème est plus compliqué que le précédent : deux longueurs doivent être asservies malgré le "couplage" existant entre elles. En particulier, les signaux d'erreur frange noire dépendent de l'état de la cavité de recyclage (résonnante ou non, et si oui, quel mode est favorisé ?) ce qui, comme on va le voir dans la suite, a été la difficulté principale à surmonter au cours de ce travail. De plus, la grande finesse  $\mathfrak{F}$  de la cavité de recyclage rend son contrôle délicat car la largeur de la résonance est proportionnelle à  $1/\mathfrak{F}$  – cf. équation (2.17).

Pour se préparer à ce problème difficile, il a été décidé il y a plusieurs années d'effectuer un travail préliminaire à l'aide du logiciel de simulation SIESTA [136, 137] pour tenter de mettre au point une méthode d'acquisition du contrôle longitudinal du CITF, bien avant que des données réelles ne soient disponibles. Cette démarche a permis d'acquérir une grande expertise sur l'instrument qui a été très utile lorsque les essais de contrôle réel ont commencé.

Néanmoins, utiliser exclusivement des simulations a un défaut : le modèle peut différer de la réalité et inciter l'exploration de directions en fait interdites. Ce cas s'est présenté pour la première méthode qui va être rapidement détaillée dans la suite : un postulat de base de l'algorithme (la possibilité de contrôler la longueur de frange noire indépendamment de l'état du recyclage) s'est révélé faux – ou au moins très délicat – ce qui a conduit à l'abandon – peut-être provisoire – de celle-ci. Un autre point qui a favorisé cette décision a été la réticence – à mon sens injustifiée – de certains expérimentateurs d'agir sur les suspensions de manière prolongée, idée de base de la méthode pour compenser la faiblesse des forces agissant sur les miroirs.

Si les détails de l'algorithme sont à revoir, son principe (ralentir les cavités en les forçant à retraverser la résonance) reste valable ainsi que tout le travail fait pour définir la forme d'impulsion la plus satisfaisante, étant données les contraintes sur la force maximale et la réponse des bobines.

#### 4.3.1 Une méthode mise au point en simulation

Cette méthode a d'abord été développée par Luca Matone [85] avant que je ne poursuive ce travail [138].

##### Principe

L'objectif de l'algorithme est d'assurer le contrôle du CITF et donc de deux longueurs – frange noire et recyclage. Son mode de fonctionnement est séquentiel : la frange noire est amenée en résonance puis contrôlée en premier ; la même méthode est ensuite appliquée au recyclage.

Le principe d'acquisition de contrôle est résumé sur le schéma 4.6. Itératif, il est basé sur la répétition d'une même procédure que l'on peut décomposer en deux phases.

- La phase d'analyse

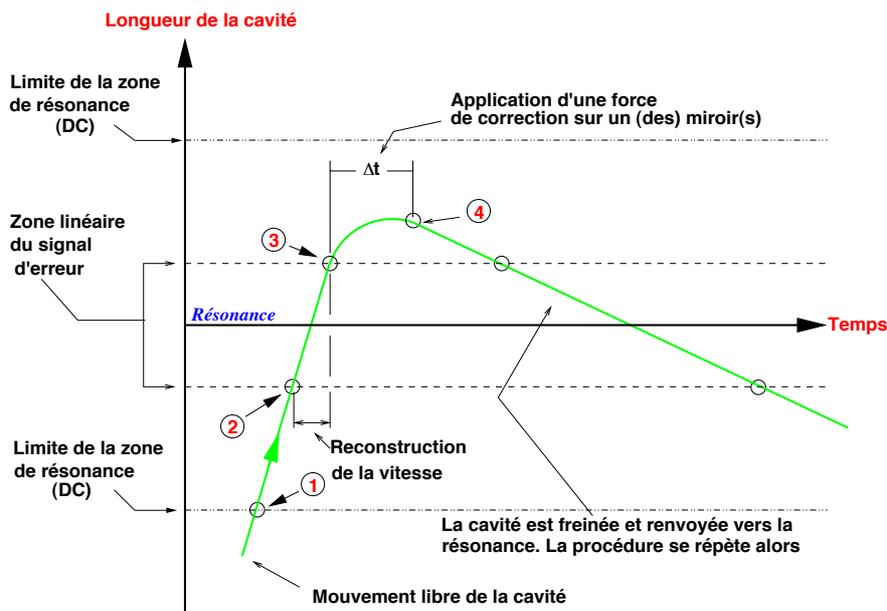
Un seuil sur la puissance DC permet de savoir quand la longueur de la cavité est proche de la résonance. Ce niveau est choisi suffisamment haut (longueur de recyclage) / bas (longueur de frange noire) pour assurer que le signal de Pound-Drever est quasi linéaire lorsqu'il est satisfait. Pendant que la cavité est dans cette zone, les valeurs du signal d'erreur sont stockées ; dès qu'elle en sort, une minimisation de  $\chi^2$  fournit une estimation de la vitesse longitudinale  $\vec{v}_{\text{recons}}$  supposée constante<sup>3</sup> au cours de la traversée de la résonance – en fait, le résultat du calcul est en W/s et est converti en m/s à l'aide du coefficient de calibration en W/m dont on fait l'hypothèse qu'il ne dépend pas de l'état de l'interféromètre.

- La phase d'action

Une fois la vitesse de la cavité construite, le mouvement relatif des miroirs est amorti par l'application d'une force  $\vec{F}(t)$  qui vérifie l'égalité suivante

$$\int_0^{\Delta t} \vec{F}(t) dt = -m(1 + \epsilon) \vec{v}_{\text{recons}} \quad (4.2)$$

<sup>3</sup>Cette approximation est valable car le mouvement libre des miroirs s'effectue principalement à des fréquences inférieures au Hz – la résonance principale du mode pendule des suspensions est à 0.6 Hz – alors que la traversée de la zone linéaire ne dure que quelques millisecondes.



**Figure 4.6:** Description de la méthode d'acquisition de contrôle par impulsions. Au départ, la vitesse d'expansion de la cavité est inconnue ; un seuil sur la puissance DC permet de savoir que celle-ci traverse la résonance. A cet endroit, le signal d'erreur AC est linéaire (de pente en  $W/m$  connue) et donne donc accès à la vitesse de la cavité. Une fois cette dernière reconstruite, une impulsion est envoyée vers la suspension pour "forcer" la cavité à s'arrêter et à repartir en sens inverse avec une vitesse moindre (typiquement de l'ordre de la moitié). Une nouvelle traversée de la résonance s'ensuit au cours de laquelle la même procédure de reconstruction/action est appliquée. La méthode est itérée jusqu'au moment où la cavité est à la fois très proche de son point de fonctionnement et presque immobile, ce qui permet aux algorithmes de contrôle linéaires de prendre le relais et de maintenir la longueur en résonance.

où  $\Delta t$  est la durée de l'impulsion,  $m$  la masse du miroir et  $\epsilon \in [0, 1]$  un paramètre arbitraire qui quantifie la rapidité de l'amortissement : en effet, l'effet de la force est de changer la vitesse en  $-\epsilon v_{\text{recons}}$  : la cavité est forcée à retraverser la résonance avec une vitesse réduite. Une valeur typique est  $\epsilon = 0.5$ .

Ce schéma se poursuit jusqu'à ce que la vitesse devienne suffisamment faible – inférieure à  $v_{\text{seuil}}$  définie comme à l'équation (3.14) – pour que les asservissements linéaires puissent entrer en fonctionnement.

Enfin, la figure 4.7 présente les signaux utilisés pour le contrôle de la frange noire :

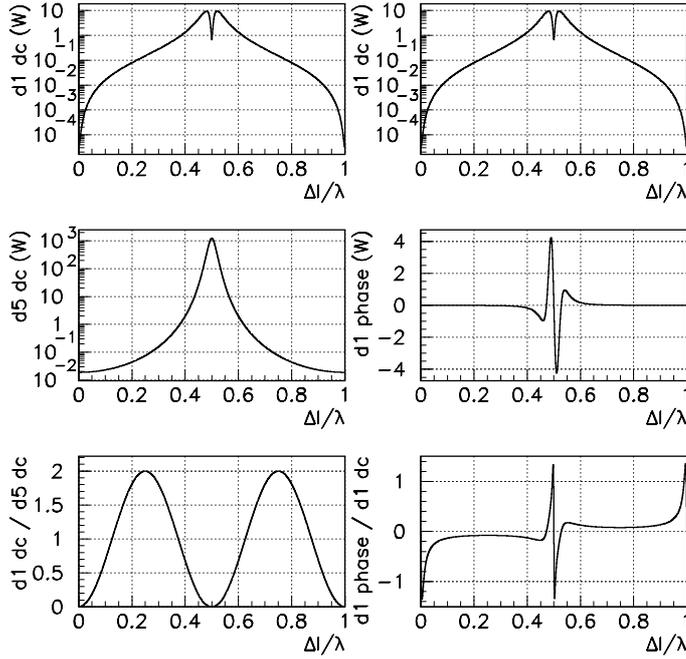
- le rapport  $\frac{D1_{DC}}{D5_{DC}}$  donne la zone linéaire autour de la résonance – diviser par  $D5_{DC}$  permet d'avoir un résultat indépendant de la puissance stockée dans la cavité – ;
- le rapport  $\frac{D1_{AC}}{D1_{DC}}$  sert de signal d'erreur pour contrôler la longueur.

### Étude de la forme de l'impulsion

Dans [85], l'impulsion exercée sur les miroirs était choisie constante pendant le temps  $\Delta t$  – modèle "rectangulaire". Comme la condition (4.2) ne porte que sur la force totale, on peut modifier la distribution temporelle de la force sans changer le taux d'amortissement de la vitesse. Quelle est la forme la plus intéressante pour l'impulsion ? Sur quels critères baser ce choix ?

Notons  $\Delta L$  la différence de longueur de la cavité entre le moment où l'application de la force débute, et celui où elle cesse. Dans le cas du modèle rectangulaire, il est facile de voir que l'on a

$$\Delta L_{\text{rectangle}} \sim \left( \frac{1 - \epsilon}{2} \right) \Delta t v_{\text{recons}} > 0 \quad (4.3)$$



**Figure 4.7:** Signaux d'erreur utilisés pour le contrôle de la longueur de frange noire dans la méthode des impulsions. Le rapport  $\frac{D1 \ DC}{D5 \ DC}$  sert à délimiter la zone linéaire autour de la résonance et le signal d'erreur est, par exemple,  $\frac{D1 \ AC}{D1 \ DC}$ .

Cette valeur est toujours positive quelle que soit  $\epsilon$  : la cavité s'est éloignée de la zone de résonance. Cela vient du fait que le niveau de force appliquée est uniforme alors que la vitesse s'amortit. Il serait préférable d'utiliser une impulsion plus importante au début – pour freiner la cavité plus rapidement – puis de réduire l'intensité de la force. C'est pourquoi une forme de “rampe” – cf. figure 4.8 – a été testée :

$$F(t) = \Gamma \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) \quad (4.4)$$

La relation (4.2) devient alors

$$\frac{\Gamma \Delta t}{2} = -m (1 + \epsilon) v_{\text{recons}} \quad (4.5)$$

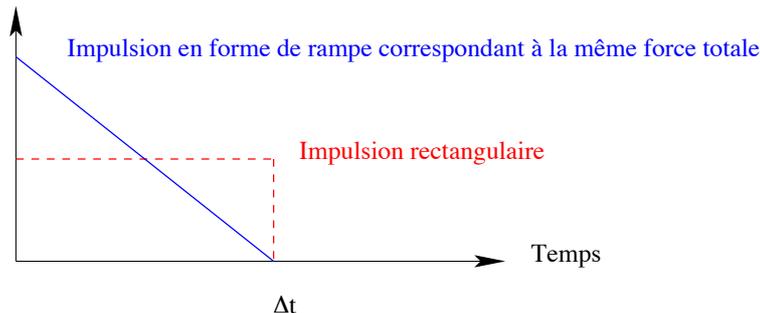
Dans ce cas là, on a

$$\Delta L_{\text{rampe}} \sim \left(\frac{1 - 2\epsilon}{3}\right) \Delta t v_{\text{recons}} \quad (4.6)$$

Pour  $\epsilon = 0.5$ ,  $\Delta L_{\text{rampe}} \sim 0$  : la cavité est à nouveau à l'entrée de la zone linéaire autour de la résonance. Cette forme d'impulsion apparaît donc plus favorable pour l'acquisition du contrôle ce que les simulations ont confirmé : le gain de temps moyen est de l'ordre de 25% par rapport à une force rectangulaire.

L'inconvénient de ce choix est que la force maximale nécessaire est deux fois plus élevée que dans le premier cas, ce qui peut causer une saturation au niveau des bobines. En effet, en posant  $\Gamma = F_{\text{max}} \sim 10 \text{ mN}$  la force maximale applicable, la vitesse maximale  $\vec{v}_{\text{max}}$  que la procédure peut diviser par deux est donnée par

$$|v_{\text{max}}| = \frac{F_{\text{max}} \Delta t}{2 m (1 + \epsilon)} \quad (4.7)$$



**Figure 4.8:** Impulsion en forme de rampe comparée au cas triangulaire : la valeur maximale est deux fois supérieure.

soit, numériquement :

$$|v_{\max}| = \left( \frac{F_{\max}}{10 \text{ mN}} \right) \left( \frac{28 \text{ kg}}{m} \right) \left( \frac{\Delta t}{20 \text{ ms}} \right) \left( \frac{1.5}{1 + \epsilon} \right) 2.38 \mu\text{m} / \text{s} \quad (4.8)$$

Les mouvements libres des miroirs peuvent être nettement plus importants et donc il faut trouver un moyen de contourner cette contrainte. La manière la plus simple de procéder est de choisir une durée variable pour l'impulsion :

- on prend  $\Delta t_0 = 20 \text{ ms}$  comme durée de référence pour l'application de la force ;
- si la valeur  $\Gamma_0$  déduite de la relation (4.5) avec le choix  $\Delta t = \Delta t_0$  excède  $F_{\max}$ , on fait le choix

$$\begin{cases} \Gamma = F_{\max} \\ \Delta t = \left( \frac{\Gamma_0}{F_{\max}} \right) \Delta t_0 \end{cases}$$

Ce choix permet d'appliquer une force totale plus importante sans saturer les bobines. Un autre avantage de cette méthode est de diminuer l'effet Joule produit à ce niveau et donc d'éviter que la puissance thermique dissipée n'affecte le fonctionnement du système d'actuateurs.

Finalement, on peut remarquer en comparant les équations (4.3) et (4.6) que le choix d'une durée d'impulsion  $\Delta t$  variable aurait eu de gros inconvénients dans le cas de l'impulsion rectangulaire :  $\Delta L_{\text{rectangle}} > 0$  et est proportionnel à  $\Delta t$ . L'augmentation du temps d'application aurait trop écarté le système de la résonance. Au contraire, pour la forme de rampe,  $\Delta L_{\text{rampe}} \approx 0$  pour  $\epsilon = 0.5$  quel que soit la valeur de  $\Delta t$ .

### Amélioration de la procédure de reconstruction

Les premiers tests en simulation de la procédure d'acquisition de contrôle décrites ci-dessus ont montré une efficacité satisfaisante : 100% pour la longueur de frange noire (la plus facile à asservir) et  $\sim 93\%$  pour la longueur de recyclage. Néanmoins, une petite fraction des essais se conclut par un échec : l'interféromètre est bien amené au voisinage du point de fonctionnement (recyclage très proche de la résonance, vitesse d'expansion de la cavité faible) et le contrôle linéaire est alors mis en marche mais il échoue à maintenir l'instrument dans cette position. Plus grave, il cause même une excitation du système (toujours difficile à atténuer à cause des grands facteurs de qualité des suspensions) puisqu'il déduit des corrections d'un signal d'erreur devenu non-linéaire suite à la perte de résonance.

On veut donc chercher à diminuer ces échecs quitte à ce que le temps moyen d'acquisition devienne plus long – en simulation il vaut environ 4.5 secondes avec une impulsion “rampe”, ce qui est faible. Pour cela, deux conditions supplémentaires ont été ajoutées dans la partie de la procédure consacrée au contrôle de la longueur de recyclage.

- La première porte sur la largeur de la zone linéaire autour de la résonance.  
En effet, la méthode de contrôle donne accès à la vitesse de la cavité et non pas à sa position.

Or, les algorithmes d'asservissement linéaires sont conçus pour fonctionner au voisinage du point de fonctionnement ; mis en marche trop loin de celui-ci, ils sont inefficaces. L'idée de la première amélioration est de faire remonter plus rapidement l'information reconstruite par la procédure d'analyse lorsque le système est presque prêt à être contrôlé.

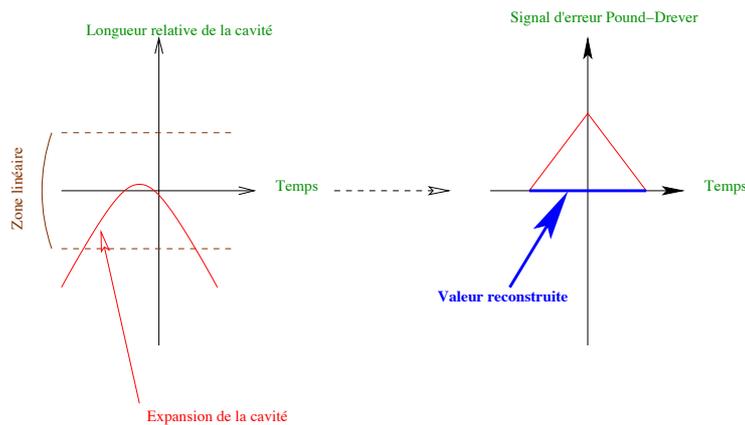
Plus la vitesse d'expansion de la cavité est réduite, plus le nombre de points enregistrés pour le  $\chi^2$  est important. On peut donc réduire la largeur de la fenêtre de stockage sans diminuer la précision de la reconstruction. La condition associée à la zone linéaire est de la forme :

$$\frac{P^{\text{DC}}}{P_{\text{résonance}}^{\text{DC}}} \geq \eta_{\text{DC}} \quad (4.9)$$

où  $\eta_{\text{DC}}$  est un seuil fixé par l'opérateur et  $P^{\text{DC}}$  la puissance continue détectée en sortie d'une des photodiodes sensibles à l'état du recyclage, i.e. D2, D5, D7 ou D8 – cf. figure B.1. On la rend plus contraignante en augmentant la valeur du seuil à partir du moment où la vitesse de la cavité de recyclage  $v_{\text{recyclage}}$  devient de l'ordre de 5 fois la vitesse de seuil  $v_{\text{seuil}}$  en dessous de laquelle les algorithmes de contrôle linéaire sont opérationnels. La réduction de la taille de la fenêtre linéaire est de l'ordre de 30%, ce qui permet de reconstruire la vitesse de la cavité plus près de la résonance et donc de démarrer éventuellement les servos linéaires dans de meilleures conditions.

L'inconvénient de cette méthode est que si la procédure d'action qui suit la décision de réduire la zone linéaire ne fonctionne pas comme prévu (par exemple à cause d'une brusque fluctuation du bruit sismique au niveau d'une tour) et que la vitesse de la cavité n'est pas réduite, il risque de ne plus y avoir assez de points stockés au cours du passage suivant à travers la résonance ce qui engendre une erreur sur la reconstruction de la vitesse. Ainsi, cette nouvelle condition augmente le temps moyen d'acquisition du contrôle ce qui est sans importance.

- La seconde consiste à ajouter un seuil inférieur sur la vitesse reconstruite. La condition de mise en marche du contrôle linéaire porte sur la valeur de la vitesse reconstruite. On peut donc tenter d'imaginer les cas où cette dernière est faible alors que le système n'est en fait pas suffisamment ralenti. On peut imaginer au moins deux circonstances où ce fait se produit :
  - le système entre dans la zone linéaire sans la traverser et ressort du même côté ;
  - l'accélération de la longueur de cavité est constante et la vitesse est par hasard proche de zéro à la résonance.



**Figure 4.9:** Exemple de mauvaise reconstruction de la vitesse lorsque le modèle linéaire est en défaut.

Dans chacune de ces situations, le modèle linéaire ne correspond pas à la réalité et la vitesse reconstruite est mauvaise. Aussi, un seuil bas de l'ordre de  $v_{\text{seuil}}/1000$  est placé sur la vitesse reconstruite. S'il n'est pas atteint, aucune décision n'est prise et on attend le passage d'une autre résonance pour reprendre la procédure.

Enfin, une dernière caractéristique de la méthode doit être prise en compte : par construction, le système est à nouveau prêt à entrer dans la zone linéaire – cf équation (4.6). Ce résultat étant vrai en moyenne, il va forcément arriver des situations où la cavité se trouve dans la fenêtre d'analyse alors que l'impulsion de force n'est pas terminée. Ce fait peut être source de confusion en particulier si la cavité a une vitesse faible et ne s'éloigne pas beaucoup de la résonance – et donc causer des pertes de contrôle lors de la transition entre les phases d'acquisition et linéaire. Pour savoir si cette observation avait des conséquences réelles, deux séries de simulation ont été menées : dans l'une (appelée "changement possible"), l'application des forces n'était assortie d'aucune condition particulière tandis que dans l'autre, "changement impossible", la procédure d'analyse fonctionnait uniquement à partir du moment où plus aucune force n'était appliquée.

### Prise en compte de la chaîne d'acquisition réelle du Contrôle Global aux suspensions

Une partie importante de la note [138] était consacrée au problème de la compensation du pôle de la fonction de transfert des bobines  $H_{\text{bobine}}(s)$ , alors estimé à  $f_{\text{bobine}} = 16$  Hz et dont l'effet de filtrage passe-bas modifie l'allure de la force effectivement appliquée sur le miroir. Pour le CITF, le système bobine-actuateur a un pôle situé beaucoup plus haut en fréquence et donc négligeable : l'impulsion voulue est préservée, en forme comme en amplitude.

Aussi, cette question ne sera pas développée en détail dans cette thèse : je vais me contenter de décrire la solution apportée pour résoudre cette difficulté – qui pourra être utilisée dans le futur si nécessaire. La fonction de transfert des bobines

$$H_{\text{bobine}}(s) = \frac{\omega_{\text{bobine}}}{\omega_{\text{bobine}} + s} \quad (4.10)$$

est compensée par un filtre digital placé en amont des bobines et qui a un zéro à 16 Hz et un pôle d'ordre  $n$  supérieur ou égal à 2 à haute fréquence pour assurer sa stabilité. Après quelques tests, le choix s'est porté sur la fonction de transfert suivante :

$$H_{\text{comp}}(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_{\text{bobine}}}}{\left[1 + \frac{s}{2\pi \times (1 \text{ kHz})}\right]^4} \quad (4.11)$$

Un second problème apparaît alors : la discontinuité initiale de la rampe de force est amplifiée d'un facteur 14 (!) en sortie du compensateur et celle-ci ressemble à un Dirac. Ce nouveau profil n'est pas adapté car il va souvent conduire à la saturation du courant dans les bobines. La solution est une fois encore de modifier la distribution de force et de remplacer la rampe par une forme triangulaire, initialement à zéro et qui augmente rapidement avant de décroître plus lentement. Notant  $\alpha$  le temps de montée de la force rapporté à la durée de l'impulsion<sup>4</sup>, l'expression analytique du nouveau profil est

$$F_{\alpha}(t) = \begin{cases} \Gamma\left(\frac{t}{\alpha\Delta t}\right) & \text{for } 0 \leq t \leq \alpha\Delta t \\ \Gamma\left(1 - \frac{t - \alpha\Delta t}{(1 - \alpha)\Delta t}\right) & \text{for } \alpha\Delta t \leq t \leq \Delta t \end{cases} \quad (4.12)$$

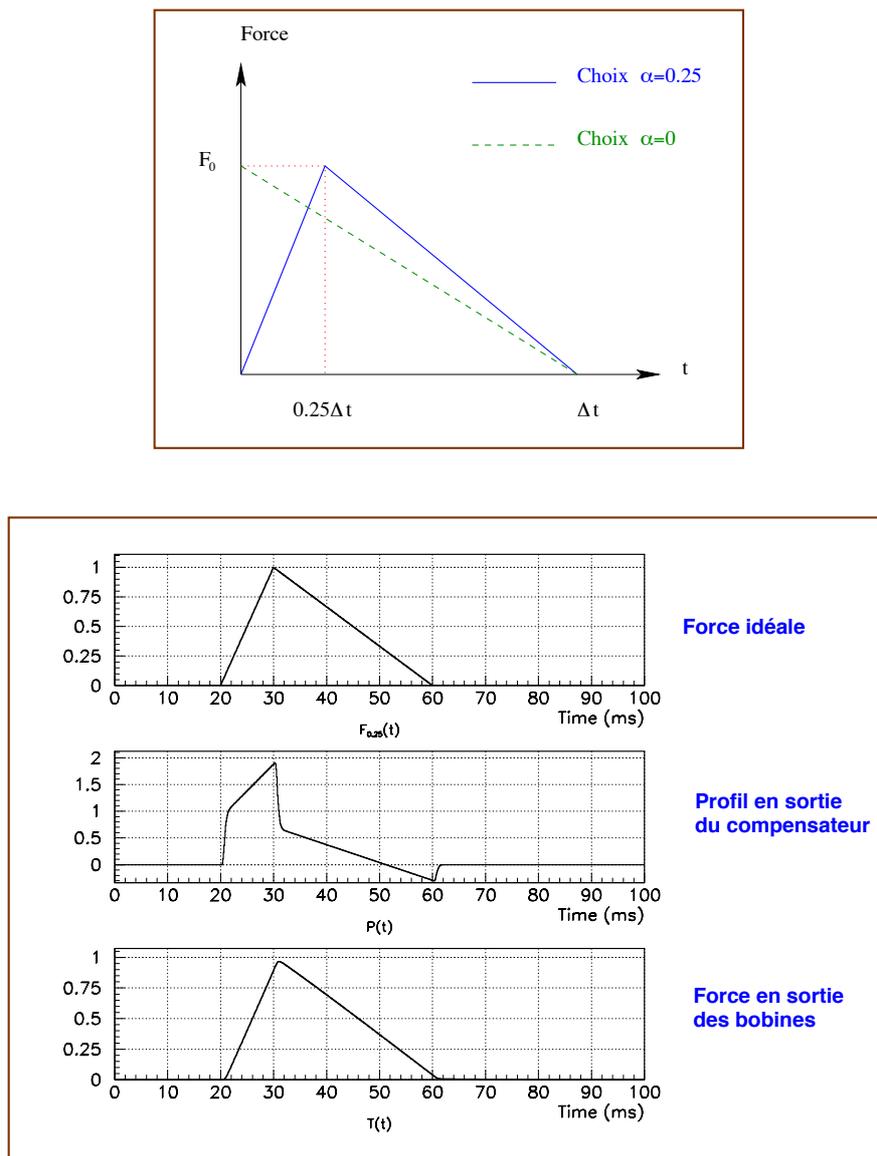
Le choix de  $\alpha = 0.25$  limite à deux le facteur d'amplification en sortie du filtre compensateur et à quelques pourcents (3.5%) la perte d'amplitude entre la valeur calculée par la procédure de reconstruction et la sortie des bobines, comme le montre la figure 4.10 : dans le cadre du haut, les impulsions en forme de rampe et triangulaire ( $\alpha = 0.25$ ) sont comparées tandis que celui du dessous présente l'évolution de la distribution temporelle de force à chaque étape : en sortie de la procédure d'analyse puis du filtre compensateur et finalement après les bobines.

Ainsi, le choix de  $F_{0.25}(t)$  permet de s'affranchir complètement de l'effet d'atténuation du pôle du système actuateur/bobine. Ses performances pour l'acquisition du contrôle du CITF sont un peu moins bonnes que celle de l'impulsion rampe car la force totale – identique dans les deux cas : les aires sont égales! – est moins bien distribuée, mais elle est la seule à convenir.

La prise en compte de la fonction de transfert supposée du couple bobine-actuateur fait partie d'un travail plus général : l'incorporation de la chaîne de contrôle au sein de la simulation. Cet enrichissement progressif des fonctionnalités du logiciel SIESTA s'est ensuite poursuivi : le

---

<sup>4</sup>La forme de rampe correspond ainsi à  $\alpha = 0$ .



**Figure 4.10:** La forme triangulaire de l'impulsion ainsi que son amplitude sont presque parfaitement conservées en sortie de l'ensemble filtre compensateur + bobine. Le problème du doublement de l'amplitude se résout en augmentant d'un facteur deux la durée de l'impulsion et en diminuant  $\Gamma$ .

détail mécanique des suspensions, le bruit sismique mesuré sur le site de Cascina, les délais des différents contrôles ont été successivement ajoutés à la description à l'origine purement optique de l'interféromètre.

Ce travail de longue haleine [139] a finalement trouvé son aboutissement au moment du premier contrôle du CITF entier: le schéma et l'effet de la boucle d'asservissement ont été complètement déterminés en simulation. Une fois les valeurs des différents paramètres fixés, la méthode a été incorporée dans le Contrôle Global et a fonctionné assez vite, pratiquement sans aucune modification.

### 4.3.2 Résultats et performances de la méthode en simulation

Ce paragraphe résume les résultats de l'étude de la méthode d'acquisition du contrôle du CITF par impulsions. Ceux-ci ont été obtenus par simulation Monte-Carlo à l'aide du logiciel SIESTA. Tout d'abord les performances générales de l'algorithme sont présentées; la comparaison de quatre versions de la procédure permet de voir les conséquences des différentes améliorations qui ont été

apportées au schéma initial. Ensuite, on s'intéressera plus en détail aux résultats particuliers des deux composantes de la méthode : la reconstruction de la vitesse de traversée de la résonance et l'action sur les miroirs.

### Comparaison des performances de la méthode

La table 4.1 présente les quatre jeux de paramètres différents qui ont été utilisés lors des simulations et qui seront dans la suite désignés par un chiffre compris entre 1 et 4. La forme rectangulaire de l'impulsion n'apparaît nulle part car le choix d'une rampe pour impulsion s'est rapidement imposé comme standard.

La comparaison des résultats de **1** et **2** montre l'intérêt d'utiliser une durée variable pour l'impulsion (rappelons que si la durée est fixe, une partie de la force peut être tronquée par saturation des acteurs). **3** et **4** bénéficient des deux améliorations mises en place pour réduire les pertes de contrôles. Ces deux séries ne diffèrent que sur un point : la possibilité ou non de faire se chevaucher une procédure d'action et une procédure de reconstruction.

Ensemble des paramètres	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
Forme de l'impulsion	Rampe	Rampe	Rampe	Rampe
$\Delta t$ variable ( $\Delta t_0=20$ ms)	non	oui	oui	oui
Zone linéaire variable	non	non	oui	oui
Seuil inférieur sur $v_{\text{recons}}$	non	non	oui	oui
Changement	possible	possible	possible	impossible

**Tableau 4.1:** Détail des paramètres utilisés pour les différentes séries de simulations à l'aide du logiciel SIESTA.

Série de paramètres	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
Temps moyen de contrôle (DF) (s)	1.27	1.17	1.16	1.19
Temps moyen de contrôle (RC) (s)	2.43	3.30	3.28	6.88
Nombre moyen d'impulsions (DF)	8.6	8.6	8.7	8.4
Nombre moyen d'impulsions (RC)	18.6	26.5	22.9	27.5
Force moyenne appliquée (DF) (mN)	2.49	2.39	2.42	2.41
Force moyenne appliquée (RC) (mN)	2.17	2.14	2.20	2.87
Force maximale appliquée (DF) (mN) (*)	9.15	8.93	9.08	8.96
Force maximale appliquée (RC) (mN) (*)	11.22	11.38	11.62	12.17
Pourcentage de perte de contrôle (%)	16.0	6.7	4.6	0.4

**Tableau 4.2:** Résultats des simulations (1000 par série de paramètres). Les initiales "DF" désignent la longueur de frange noire et "RC" la longueur de recyclage.

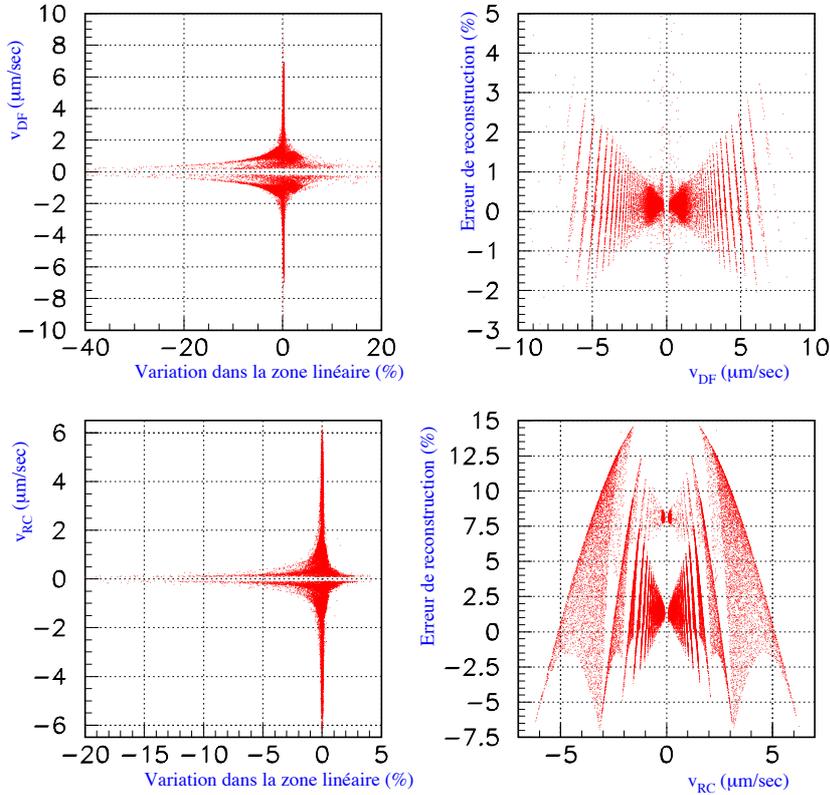
(\*) La force maximale applicable était fixée à 15 mN lors de ces simulations.

Chaque série de paramètres a été testée durant 1000 simulations Monte-Carlo ; leurs résultats sont présentés dans la table 4.2.

Quel que soit le choix des détails de la procédure, les performances sont similaires pour le contrôle de la longueur de frange noire. Par rapport aux impulsions rectangulaires, le temps moyen de contrôle est deux fois supérieur mais la force moyenne appliquée est par contre deux fois moindre. Dans tout les cas, la résonance obtenue en quelques secondes est maintenue par l'algorithme d'asservissement linéaire.

Par contre, les résultats pour la longueur de recyclage dépendent fortement de la configuration des paramètres. Par exemple, moduler la durée de l'impulsion en fonction de l'amplitude de celle-ci réduit de 60% les pertes de contrôle au prix d'un accroissement – raisonnable  $\sim 35\%$  – du temps d'acquisition. L'ajout des deux seuils supplémentaires améliore encore le taux de réussite de l'algorithme mais c'est l'interdiction du mélange entre les procédures d'analyse et d'action qui apporte le gain le plus important en diminuant le taux d'échec d'un ordre de grandeur. Entre les cas **1** et **4**, on a gagné un facteur 40 sur les pertes de contrôle ! Par contre, le temps moyen nécessaire pour mener la cavité de recyclage à son point de fonctionnement a triplé et le nombre moyen d'impulsions a augmenté de 50%. Ces points sont mineurs par rapport au niveau d'efficacité de 99.6% finalement obtenu.

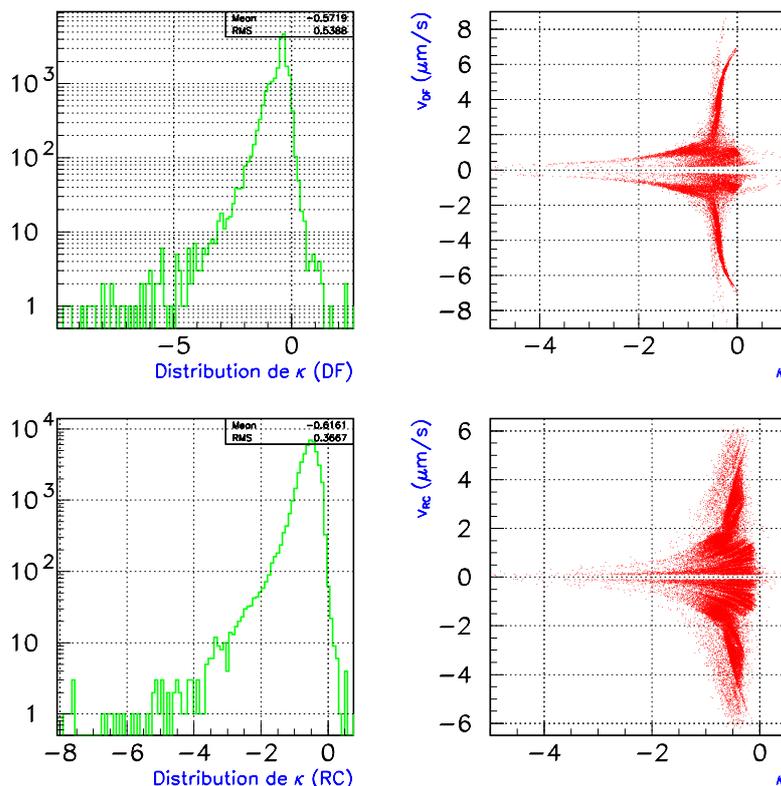
## Performances de la procédure d'analyse



**Figure 4.11:** Performances de la procédure d'analyse pour les longueurs de frange noire (en haut) et de recyclage (en bas). Dans la colonne de gauche, on peut voir la relation entre la vitesse en sortie de la zone linéaire et sa variation à l'intérieur de cette fenêtre d'analyse. À droite, l'erreur de reconstruction sur la vitesse est représentée en fonction de la vitesse réelle.

La figure 4.11 montre les performances de la procédure d'analyse pour les longueurs de frange noire (sur la partie supérieure) et de recyclage (partie inférieure). Dans la colonne de gauche, la vitesse d'expansion de la cavité en sortie de la zone linéaire est présentée en fonction de son taux de variation (en %) lors de la traversée de la fenêtre d'analyse. Cela permet de voir qu'au delà de  $2 \mu\text{m/s}$  le mouvement est uniforme (variation nulle) alors que pour les faibles vitesses, il y a un biais (d'origine sismique) d'autant plus important que le mouvement est lent. Cette représentation montre un paradoxe apparent de la méthode d'acquisition : à mesure qu'elle s'approche de son but et ralentit le mouvement relatif des miroirs, la reconstruction de la vitesse fonctionne moins bien (car les hypothèses fondant le calcul ne sont plus valables) et peut aboutir à des diagnostics erronés qui soit retardent le contrôle, soit conduisent à une excitation de l'interféromètre.

Sur la droite est présentée l'erreur sur la reconstruction de la vitesse en fonction de la valeur de cette dernière. Tant pour la frange noire que pour le recyclage, on peut noter une erreur relative systématique positive<sup>5</sup> ; néanmoins, la reconstruction est dans la plupart des cas assez précise, ce qui assure un bon amortissement de la cavité. Les structures sur les "ailes" des distributions sont le reflet de la discrétisation du nombre de points utilisés pour la minimisation du  $\chi^2$ .



**Figure 4.12:** Performances de la procédure d'action pour les longueurs de frange noire (en haut) et de recyclage (en bas). A gauche se trouvent les distributions de probabilité de la quantité  $\kappa$  (centrées sur  $\epsilon = -1/2$ ) tandis que la colonne de droite montre la relation entre la vitesse d'expansion de la cavité et  $\kappa$ .

### Performances de la procédure d'action

Qu'en est-il maintenant de la procédure d'action qui, une fois la vitesse de la cavité estimée, doit ralentir le mouvement relatif des miroirs? Au cours de la présentation de l'algorithme au début du paragraphe 4.3.1, le paramètre d'amortissement  $\epsilon$  a été défini et sa valeur fixée à 0.5: ainsi, à chaque itération de la méthode, la vitesse doit changer de sens et son amplitude être divisée par deux. Pour le vérifier, on définit la variable  $\kappa$  comme étant le rapport entre les vitesses d'expansion avant –  $v_{\text{avant}}$  – et après l'application de l'impulsion –  $v_{\text{après}}$  :

$$\kappa = \frac{v_{\text{après}}}{v_{\text{avant}}} \quad (4.13)$$

La figure 4.12 présente – toujours pour les deux cavités, frange noire et recyclage – la distribution statistique de  $\kappa$  (colonne de gauche) et le lien entre  $v_{\text{avant}}$  et  $\kappa$ . Comme attendu, les valeurs moyennes sont proches de  $-\epsilon$  mais avec un biais vers les valeurs inférieures à  $-0.5$ : cela signifie que la norme de la nouvelle vitesse  $v_{\text{après}}$  est en général supérieure à  $|v_{\text{avant}}|/2$ : le miroir est un peu trop repoussé! Ce point se comprend bien si l'on se souvient du biais mis en évidence dans la reconstruction de la vitesse: la norme de celle-ci est en général un peu surestimée d'où il s'ensuit que la force appliquée est légèrement trop importante. L'échelle verticale est logarithmique pour ces distributions ce qui montre que la plupart des valeurs de  $\kappa$  sont proches de  $-\epsilon$ . Toutefois, quelques événements (2.7% pour la longueur de frange noire) sont associés à une valeur positive de  $\kappa$ : le sens de la vitesse n'a pas été modifié par la procédure d'action. Un nombre encore plus

<sup>5</sup>Due au fait que la pente du signal d'erreur choisie pour la reconstruction correspond au recyclage optimal et qu'elle est donc maximale et toujours supérieure aux cas réels.

marginal de données est caractérisée par  $\kappa \leq -1.5$  ce qui montre que la vitesse du déplacement a été multipliée par trois au moins; ils sont tous associés à des vitesses initiales très faibles (comme le montre les deux autres graphes de cette figure) et donc à des cas où la procédure de reconstruction échoue et où l'impulsion envoyée sur le miroir est faible et donc facilement dominée par les fluctuations de bruit.

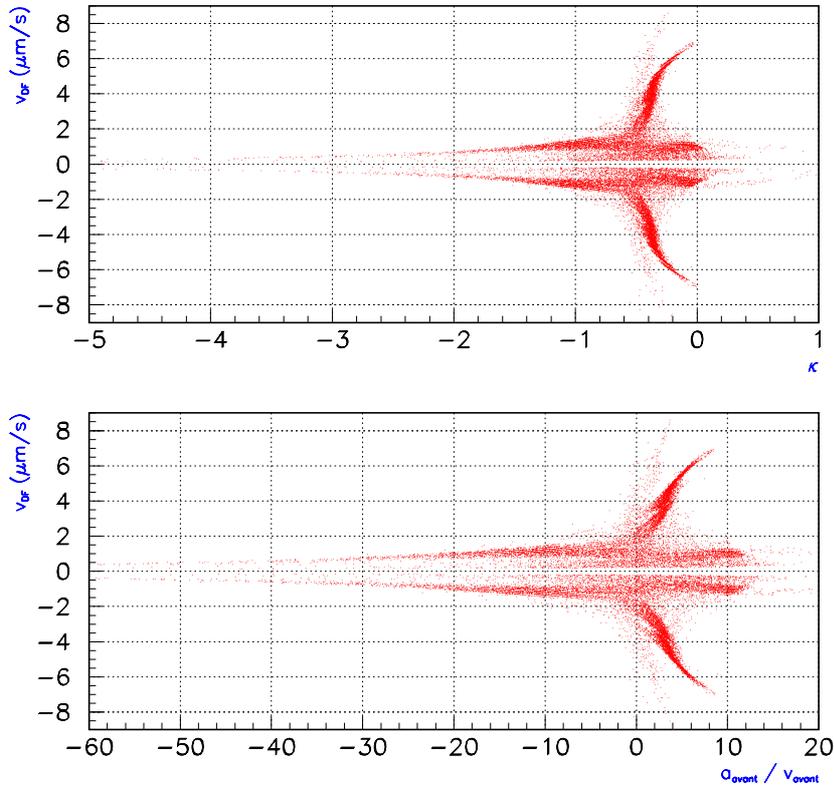
La colonne de droite de la figure 4.12 présente la corrélation entre  $v_{\text{avant}}$  et  $\kappa$  – notée sur les graphiques  $v_{\text{DF}}$  ou  $v_{\text{RC}}$  pour bien faire la différence entre les résultats des deux longueurs. A basse vitesse, les valeurs de  $\kappa$  sont très dispersées car les deux procédures (reconstruction et action) sont moins efficaces dans cette zone. Si cette constatation était attendue, une autre particularité de ces deux graphes est un peu troublante: le comportement de  $\kappa$  à haute vitesse qui a tendance à devenir supérieur à  $-\epsilon$ . La structure en forme d'arche est particulièrement visible pour la frange noire.

En fait, cet effet est dû à la fonction de transfert entre la force et le miroir qui est essentiellement celle d'un pendule simple de fréquence  $f \sim 0.6$  Hz et de facteur de qualité  $Q \sim 10^6$ . En négligeant le facteur d'amortissement et en faisant un calcul au premier ordre en  $f\Delta t$  – approximation légitime car  $\Delta t$  vaut quelques dizaines de millisecondes tout au plus – on obtient la relation suivante :

$$\kappa = -\epsilon + \left( \frac{a_{\text{avant}}}{v_{\text{avant}}} \right) \Delta t \quad (4.14)$$

avec  $a_{\text{avant}}$  l'accélération immédiatement avant le début de l'application de l'impulsion.

Ce phénomène se vérifie effectivement en comparant les deux schémas de la partie de droite de la figure 4.12 avec un graphique montrant la variation de  $v_{\text{avant}}$  en fonction du rapport  $a_{\text{avant}}/v_{\text{avant}}$  – cf figure 4.13: le lien entre les deux phénomènes apparaît évident.

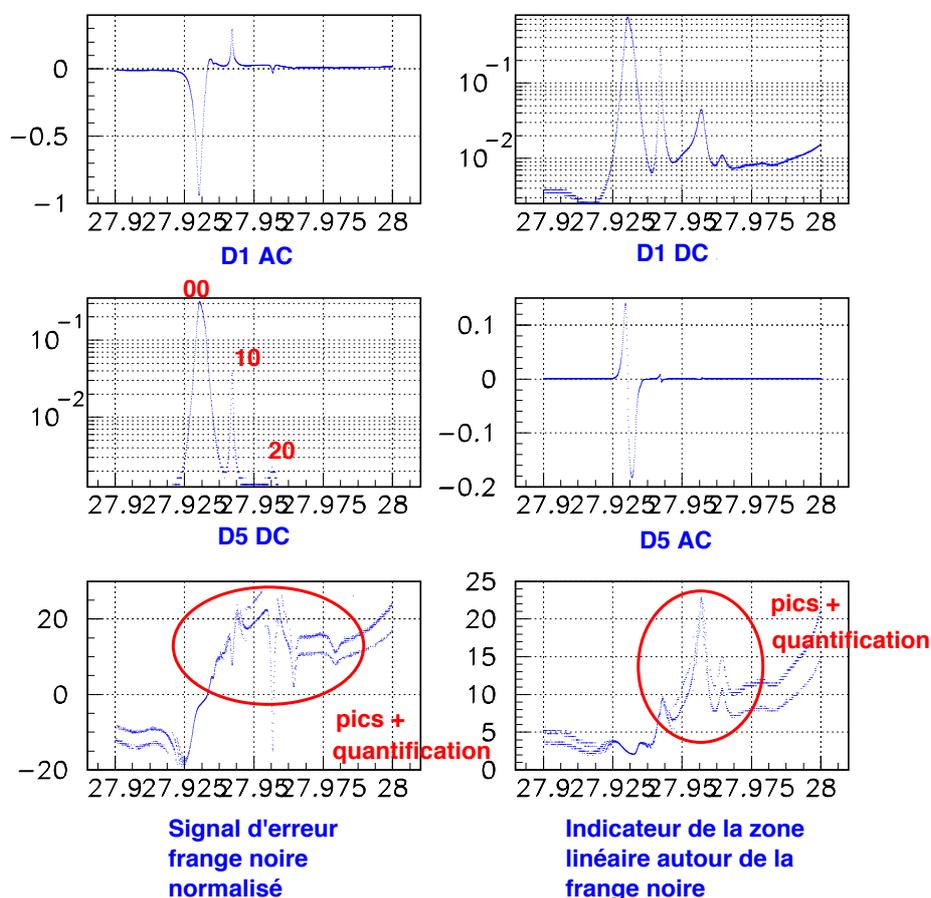


**Figure 4.13:** Comparaison des relations  $v_{\text{avant}} \leftrightarrow \kappa$  et  $a_{\text{avant}}/v_{\text{avant}} \leftrightarrow v_{\text{avant}}$  pour la longueur de frange noire. Les deux distributions sont similaires ce qui montre bien la corrélation entre  $\kappa$  et  $a_{\text{avant}}/v_{\text{avant}}$ .

### 4.3.3 Une dure réalité : les *tilts* des miroirs

En fait, les premières mesures effectuées sur le CITF en configuration finale (i.e. avec le miroir de recyclage aligné) ont rapidement montré que les signaux d'erreur considérés en simulation dans la méthode d'acquisition du contrôle par impulsion n'étaient en fait pas utilisables tels quels dans une boucle d'asservissement : présence de pics imprévus, brusques variations de pente à la résonance...

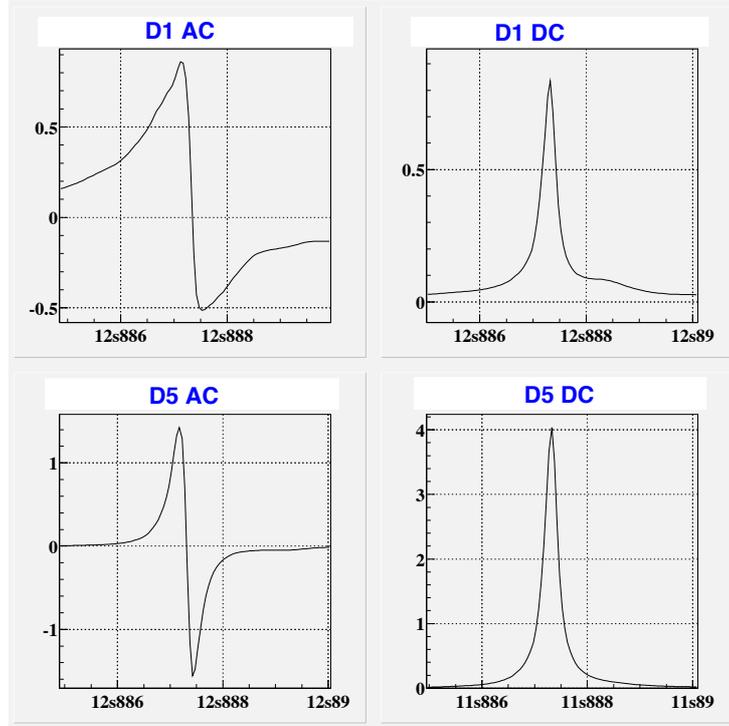
La figure 4.14 montre un exemple de ce comportement erratique enregistré sur des données du mois de septembre 2001. Trois résonances de la cavité de recyclage sont successivement traversées ; la première correspond au fondamental  $TEM_{00}$  tandis que les deux autres sont associées aux modes parasites  $TEM_{10}$  et  $TEM_{20}$  générés par les désalignements. L'effet de ces dernières est désastreux au niveau du comportement des signaux d'erreurs : pics brusques, sauts entre deux valeurs consécutives... Cela nuit à l'acquisition du contrôle. Le phénomène est encore amplifié par le fait que la puissance lumineuse recueillie sur la photodiode D5 est très faible (à peine 1.5% des 160 mW fournis par le laser auxiliaire rentre effectivement dans l'interféromètre à cause de la faible transmission du miroir de recyclage).



**Figure 4.14:** Exemple de comportement erratique des signaux d'erreur de contrôle de frange noire. Sur le graphique, trois résonances de la cavité de recyclage sont traversées ; la première correspond au mode fondamental  $TEM_{00}$  tandis que les deux autres sont associées aux  $TEM_{10}$  et  $TEM_{20}$  respectivement. Ces deux résonances parasites produisent des pics et des variations brusques des signaux utilisés pour le contrôle. En particulier, on voit apparaître sur les deux schémas du bas l'effet de la quantification des ADC : les puissances recueillies sur les photodiodes sont tellement faibles (laser auxiliaire) qu'elles font "sauter" le signal d'erreur lorsqu'elles varient.

La raison de ces comportements n'est pas évidente : les défauts d'alignement (*tilts*) génèrent des modes d'ordres supérieurs qui résonnent ensuite dans la cavité de recyclage et parasitent les

signaux d'erreur. Cet effet est amplifié par l'asymétrie macroscopique entre les deux bras qui modifie les conditions de résonance du  $TEM_{10}$  par rapport à celles du  $TEM_{00}$  ; la conséquence de ce point est que la linéarisation des signaux ne fonctionne plus bien lorsque des modes d'ordres supérieurs sont présents. Par contre, lorsque le CITF est bien aligné et que la puissance stockée dans la cavité devient importante (résonances simultanées de la longueur de frange noire et du recyclage), les signaux d'erreur sont bien conformes à ce qui est attendu : cf. figure 4.15.



**Figure 4.15:** Exemple de résonance du CITF : puissance stockée dans la cavité maximale et puissance en sortie (frange noire) résonnante. On peut voir deux exemples de “beaux” signaux d’erreur Pound-Drever. Les défauts d’alignement font qu’une partie de la puissance stockée s’échappe du détecteur ce qui explique le pic qui apparaît sur D1 DC. De plus, les bandes latérales résonnent également dans la cavité et sortent sur la frange noire.

#### 4.3.4 Méthode de contrôle alternative

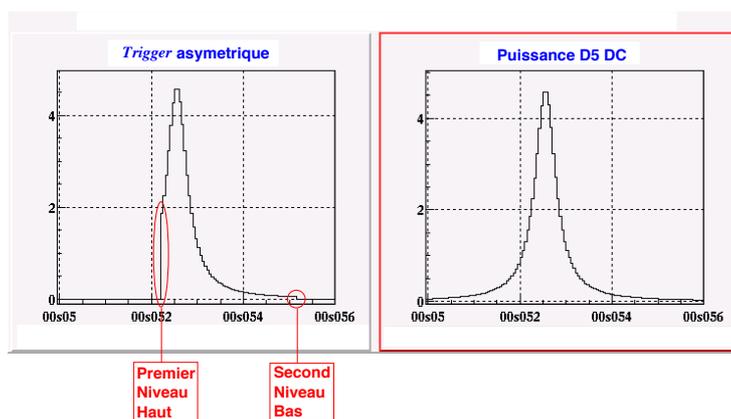
Ainsi, la stratégie mise au point en simulation ne peut pas être appliquée dans la réalité : il faut contrôler les deux longueurs simultanément car il n’apparaît pas possible de tenir l’asservissement sur la longueur de frange noire indépendamment de l’état du recyclage. Cette conclusion s’est peu à peu imposée au cours du mois de septembre et la recherche d’un nouvel algorithme a été alors démarrée, en parallèle à la poursuite des activités expérimentales sur le Michelson. La méthode des impulsions (toujours un peu suspecte aux yeux des opérateurs du CITF dans la mesure où elle est basée sur des actions relativement longues sur les miroirs) est alors placée en réserve pour la cas où rien d’autre ne marcherait.

Comme pour la méthode des impulsions, le logiciel SIESTA a été utilisé pour tester les nouvelles idées mais cette fois-ci, la comparaison des simulations et des données expérimentales réelles a permis de faire des progrès plus rapides et plus assurés que dans le cas précédent. Pour ce faire, le travail sur l’algorithme de contrôle s’est doublé d’un enrichissement de SIESTA (nouveaux modules, choix de paramètres plus réalistes...), régulièrement validé par des aller-retours entre le détecteur et la simulation [139]. Ce dernier point est la généralisation de l’approche développée lors des tests de la méthode des impulsions qui ont montré la nécessité de disposer de simulations les plus réalistes possibles.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons voir les différents ingrédients de la nouvelle méthode d'acquisition du contrôle du CITF. Chacun d'eux a une double fonction :

- apporter une information sur l'état du détecteur et/ou le rapprocher de son point de fonctionnement ;
- s'affranchir des problèmes mis en évidence par l'examen initial des données.

### Isoler la bonne résonance et agir sur les miroirs



**Figure 4.16:** Exemple du comportement du *trigger* asymétrique : le seuil d'entrée est haut pour sélectionner uniquement la résonance du mode fondamental  $TEM_{00}$  dans la cavité de recyclage tandis que le seuil de sortie est beaucoup plus faible pour augmenter la durée d'action sur la cavité.

Une bonne partie des problèmes de contrôle est due aux résonances parasites des modes d'ordres supérieurs dans la cavité de recyclage à cause des défauts d'alignement des miroirs. La seule manière de différencier ces résonances de celle du mode fondamental (que l'on recherche) est de mettre un seuil élevé sur la puissance stockée – i.e. D5 DC – pour être certain de ne sélectionner que le  $TEM_{00}$ .

L'inconvénient est que cela réduit encore la taille de la zone d'action autour de la résonance, déjà très petite à cause de la grande finesse de la cavité. La solution est d'utiliser un système de *trigger asymétrique* composé de deux seuils :

- un seuil haut  $\eta_{\text{haut}}$  marquant l'entrée de la cavité dans le voisinage immédiat du point de fonctionnement ;
- un seuil bas  $\eta_{\text{bas}}$  pour arrêter l'asservissement lorsque le système est trop loin de la résonance.

On a  $\eta_{\text{bas}} \ll \eta_{\text{haut}}$ , le premier valant typiquement 1% du second. Ainsi, on utilise la séparation spatiale des modes de résonance : une fois que le fondamental a été isolé, on peut agir sur les miroirs pendant un temps plus long, i.e. tant que l'on reste suffisamment proche du  $TEM_{00}$ . Un autre avantage de choisir une valeur élevée pour le premier seuil  $\eta_{\text{haut}}$  est de s'assurer que l'on est en même temps proche de la frange noire : si une grande partie de la puissance lumineuse est stockée dans l'interféromètre, c'est qu'une petite fraction seulement sort du détecteur.

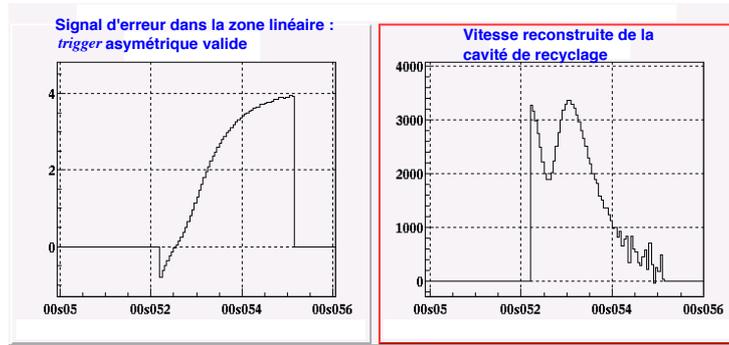
La partie gauche de la figure 4.16 montre la manière dont ce *trigger* se traduit sur le pic de résonance du fondamental dans la cavité de recyclage (rappelé sur le graphique de droite) : la montée du signal est tronquée par la condition de seuil haut tandis que sa descente est très longtemps préservée jusqu'à ce que le seuil bas soit atteint. Ainsi, le temps d'action est multiplié par trois ou quatre au moins.

En fait, dans la pratique, le *trigger* asymétrique est un peu plus compliqué : le seuil haut se décline en deux valeurs. Lorsque la première est atteinte, le signal de correction commence à être calculé, ce qui permet d'initialiser la mémoire des filtres digitaux utilisés par l'asservissement et d'éviter l'apparition de transitoires. Une fois la seconde dépassée, la correction est effectivement transmise aux suspensions ce qui revient à une fermeture effective de la boucle de rétroaction.

### Reconstruire le mouvement de la cavité de recyclage

Ensuite, il faut trouver le moyen d'accéder à la position des cavités et d'en déduire des signaux d'erreurs valables. Pour la frange noire, le choix du signal démodulé D1 AC s'impose, par pragmatisme tout d'abord – c'est le seul signal disponible sensible à la puissance en sortie de l'interféromètre –, mais aussi pour une raison pratique : il n'est pas nécessaire de le normaliser par une puissance DC puisque la validation du seuil haut du *trigger* asymétrique impose, comme nous l'avons vu ci-dessus, que le détecteur soit proche de son point de fonctionnement et donc que les deux longueurs soient elles-même quasi résonnantes.

Par contre, pour ce qui est de la cavité de recyclage, la sélection du signal d'erreur est critique car la résonance est plus étroite. Pour avoir la zone linéaire la plus large possible, le choix se porte naturellement sur  $\frac{P_5^{AC}}{(P_5^{DC})^{3/2}}$  – cf. figure 3.9. A partir de ce signal d'erreur, on estime la vitesse d'expansion de la cavité en utilisant un filtre dérivateur pur jusqu'à quelques kHz (3 kHz pour l'acquisition expérimentale du contrôle du CITF).



**Figure 4.17:** Quantités reconstruites lorsque le *trigger* asymétrique est validé : sur la gauche, la longueur de la cavité de recyclage (la première partie de la zone linéaire n'apparaît pas à cause du haut niveau du premier seuil) et sur la droite la vitesse estimée à l'aide d'un filtre dérivateur.

La figure 4.17 montre la reconstruction de ces deux grandeurs lorsque le *trigger* asymétrique est vérifié : sur la gauche le signal d'erreur (quasi-linéaire comme attendu mais à-demi tronqué à cause du seuil d'entrée haut), sur la droite la vitesse reconstruite en unité arbitraire. Une fois convenablement normalisée, cette dernière aurait pu être comparée à un seuil pour que les corrections ne soient appliquées que si le mouvement résiduel de la cavité de résonance était suffisamment faible. En fait, cette précaution ne s'est pas révélée nécessaire à cause de la procédure d'**amortissement optique** qui permet d'obtenir des conditions initiales très calmes.

### Un élément essentiel : l'amortissement optique

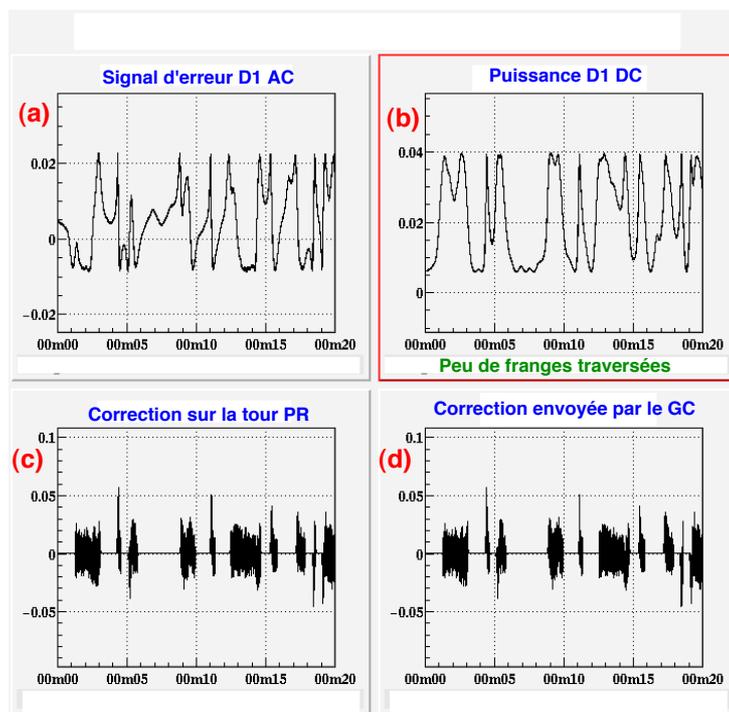
La nouvelle méthode d'acquisition du contrôle du CITF est basée sur un contrôle simultané de ses deux degrés de liberté longitudinaux. Pour cela, il faut "arrêter" les miroirs en un temps assez court lorsque les résonances sont traversées ce qui revient à utiliser des forces importantes qui risquent d'exciter l'instrument si elles ne parviennent pas à l'asservir. Aussi, il est important d'avoir un algorithme qui fonctionne au premier essai et la meilleure manière de le garantir est de partir d'une situation où les mouvements résiduels sont lents et d'amplitude faible.

Or, les contrôles locaux en  $z$  sont insuffisants pour cette tâche : en particulier, le signal d'erreur de la caméra est inutilisable car noyé dans le bruit de mesure. Aussi, on a eu l'idée de mettre en place un amortissement optique, basé sur le signal d'erreur de la photodiode D1, initié à partir du Contrôle Global, et qui est utilisé en cas d'excitation d'un des miroirs asservis, soit celui de la tour de recyclage (PR), soit celui de la tour Ouest (WI).

Dans les deux cas, le miroir non excité est désaligné : si on veut amortir PR, on utilise la cavité simple PR-NI<sup>6</sup> (miroir Ouest tourné), tandis que s'il s'agit de WI, on travaille en configuration Michelson simple (miroir de recyclage désaligné). Le mouvement propre n'est pas directement ralenti mais plutôt accordé sur celui du miroir Nord. En pratique, cela revient au-même puisque

<sup>6</sup>Dont la résonance correspond à une frange blanche sur la photodiode D1 en sortie de l'interféromètre.

cette dernière suspension est en général calme dans la mesure où aucun signal de correction ne lui est appliqué. L'action s'effectue à partir du signal d'erreur de la diode D1 qui est passé dans un filtre dérivateur et l'action sur le miroir n'a lieu qu'au voisinage de la résonance, ce que montre bien l'exemple d'amortissement de la figure 4.18 pour le cas du miroir de recyclage : moins de dix frange sont traversées en une vingtaine de secondes, ce qui implique que la vitesse d'expansion est de l'ordre de  $0.25\mu\text{m/s}$ .



**Figure 4.18:** Effet de la procédure d'amortissement optique sur la tour de recyclage (PR) : le CITF est très calme, seules quelques franges sont traversées en une vingtaine de secondes – cf. le signal D1 DC.

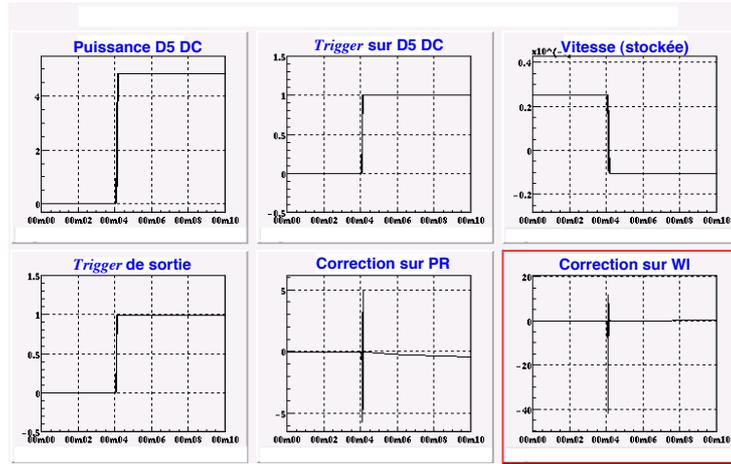
La figure 4.18 montre bien le mécanisme de cet amortissement optique. Le graphique (a) représente en fonction du temps le signal d'erreur (D1 AC) reçu par le Contrôle Global. En (d), on voit les corrections calculées à partir de celui-ci et envoyées vers la suspension. Le signal d'erreur est filtré avec un “dérivateur pur” pour accéder à la vitesse relative d'expansion de la cavité, sans intégrateur à l'origine ce qui empêche l'acquisition effective du contrôle (le décalage “statique” par rapport au point de fonctionnement n'est pas traité). On peut voir que le signal de correction est à zéro lorsque la puissance D1 DC n'est pas proche de la frange blanche – cf. graphiques (b) et (d). En effet, on n'agit sur les miroirs qu'au voisinage de celle-ci, lorsque le signal d'erreur est linéaire. Enfin, la comparaison des courbes (c) et (d) montre que la correction calculée est bien celle qui est ensuite transmise à la suspension.

### Un exemple d'acquisition du contrôle en simulation

La figure 4.19 montre un exemple de succès de l'algorithme en simulation avec SIESTA. Lorsque les différents seuils sont validés, des impulsions assez fortes sont envoyées sur les tours de Recyclage (PR) et Ouest (WI) ; l'acquisition du contrôle est immédiate, la puissance D5 DC atteint un haut niveau et reste constante ensuite. Ce test permet de valider l'idée générale de la méthode même si, dans ce cas précis, l'interféromètre était parfaitement aligné (ce qui explique pourquoi la puissance D5 DC ne fluctue pas). Par contre, le bruit sismique et le bruit électronique étaient présents.

### 4.3.5 Tests préliminaires

Avant d'essayer réellement de contrôler le CITF, un certain nombre de mesures ont été effectuées pour vérifier la cohérence entre les simulations et les données expérimentales.



**Figure 4.19:** Exemple de succès en simulation (SIESTA) de l’algorithme de contrôle du CITF complet.

- Contrôler le Michelson simple permet d’obtenir divers paramètres optiques: puissance du laser, valeur de l’indice de modulation, allure des signaux d’erreurs, amplitudes des résonances...
- Contrôler la cavité simple recyclage-miroir Nord<sup>7</sup> donne d’autres informations utiles, en particulier le protocole à suivre pour agir sur le miroir de recyclage à partir des bobines. Cela revient à asservir la puissance en sortie de l’interféromètre sur la frange blanche.

Pour illustrer ce dernier cas, la figure 4.20 montre la transformée de Fourier du signal d’erreur D1 lors d’un contrôle de la cavité PR-NI. On peut y voir les sources de bruit dominantes: des résonances mécaniques (en particulier une concernant  $\theta_x$ ) et le 50 Hz ainsi que ses harmoniques.

### 4.3.6 Première acquisition du contrôle du recyclage

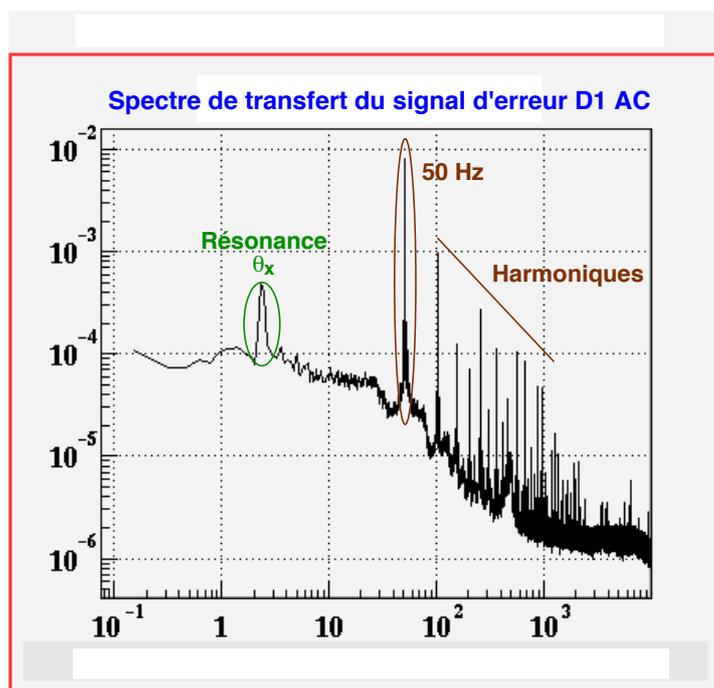
La première acquisition du contrôle du CITF – reproduite sur la figure 4.21 – a finalement eu lieu le 19 décembre 2001; les résonances ont été maintenues pendant trois quarts d’heure environ avant d’être perdues – cf. paragraphe 4.4.2 pour l’étude de cet événement. Comme l’alignement n’est pas parfait, la puissance stockée fluctue beaucoup, de manière inverse de celle sur la frange noire; beaucoup reste à faire pour améliorer la qualité de ce contrôle initial. Comme dans le cas du Michelson, le calcul des corrections se fait au niveau du Contrôle Global qui, selon que les seuils sont ou non satisfaits, décide si elles doivent être ou non transmises aux suspensions.

## 4.4 Résultats expérimentaux

Si la première acquisition du contrôle longitudinal du détecteur (en configuration Michelson simple ou pour le CITF complet) est une étape importante du travail expérimental, elle marque plutôt le commencement d’une nouvelle phase d’étude que l’aboutissement d’un projet. En effet, le maintien des résonances n’a de sens que s’il s’inscrit dans la durée, ce qui implique deux choses; d’une part, la robustesse des boucles d’asservissement et d’autre la rapidité de réaction et de retour à la normale lorsque, pour une raison ou une autre, le point de fonctionnement est perdu. Or, le travail quotidien ne permet pas d’accéder à cette connaissance de l’instrument: plusieurs tâches – parfois antagonistes – se poursuivent en parallèle et il est très difficile de conserver longtemps une même configuration pour la tester complètement.

Aussi, il est nécessaire de définir des périodes pendant lesquelles l’interféromètre est en fonctionnement “normal”, avec le maximum de sous-systèmes opérationnels: suspensions, Contrôle

<sup>7</sup>Bien que les deux miroirs d’extrémité de cette cavité aient des réflectivités proches de 1, la finesse de cette cavité n’est que de 4 environ car la moitié de la puissance est perdue à chaque tour par l’intermédiaire de la séparatrice. Cette résonance est donc plus simple à contrôler.



**Figure 4.20:** Transformée de Fourier du signal d'erreur frange noire lors d'un contrôle de la cavité Recyclage-Tour Nord. On peut remarquer les principaux pics de bruit : une oscillation en  $\theta_x$  (entre le miroir et la masse de référence) et l'effet du 50 Hz et de ses harmoniques.

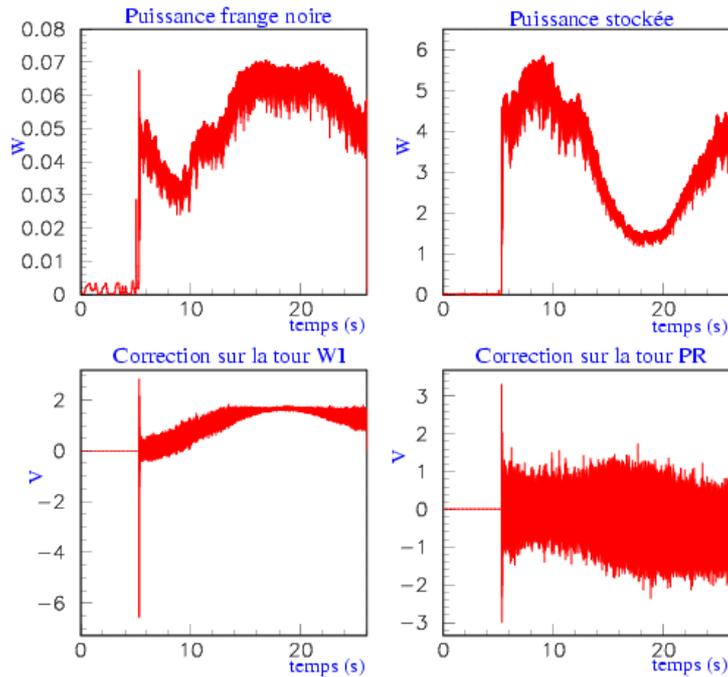
Global, acquisition des données... Deux *runs* ont ainsi déjà eu lieu, chacun de 72 heures, avec le CITF en configuration Michelson. Dans le paragraphe suivant, nous reviendrons sur les résultats et les enseignements tirés de ces expériences, en nous concentrant particulièrement sur le premier d'entre-eux, et sur les pertes de contrôle intervenues lors de ces trois jours. Ensuite, nous décrirons quelques résultats préliminaires obtenus avec les premières données prises pendant les périodes de contrôle du CITF complet.

#### 4.4.1 *Runs* de longue durée

Deux *Runs* – appelés E0 et E1 – de trois jours chacun ont donc été organisés, respectivement en septembre et au mois de décembre. Dans les deux cas, ils se sont étendus du vendredi après-midi au lundi après-midi, soit majoritairement pendant le week-end. Ainsi, l'activité sur le site était minimale pendant la plus grande partie du temps, et ce d'autant plus que l'accès du bâtiment central (contenant le CITF, cf. figure 2.5) était interdit, sauf circonstances exceptionnelles<sup>8</sup>.

Tout le pilotage du détecteur était effectué à partir du bâtiment de contrôle par une équipe de quatre personnes relevée toutes les huit heures : un responsable interféromètre, un responsable acquisition de données et deux autres opérateurs non experts le plus souvent, mais désireux de se former. Une procédure de calibration rééditée à différents moments de ces *Runs* a permis d'obtenir la première courbe de sensibilité de Virgo ; celle du E0 est reproduite sur la figure 4.4 tandis que celle du E1 apparaît sur les figures 4.30 et 4.31.

Chacun des runs a conduit à l'écriture de données d'un volume de 1 TB environ sous forme de *frames* qui ont été analysées par plusieurs groupes de travail en charge de différentes études. Au LAL, nous nous sommes occupés plus particulièrement des pertes de contrôles, sujet que je vais maintenant développer.



**Figure 4.21:** Premier contrôle complet du CITF – résonances simultanées de la longueur de frange noire et de la cavité de recyclage. Les deux graphes du haut sont respectivement la puissance sur la frange noire (à gauche) et la puissance stockée dans la cavité (à droite); en-dessous sont représentés les signaux de correction appliqués sur la tour ouest (W1; contrôle de la frange noire) et la tour de recyclage (PR; contrôle de la longueur de recyclage). On peut remarquer que la frange en sortie de l’interféromètre est loin d’être “noire” et que la puissance stockée fluctue beaucoup. C’est majoritairement dû aux défauts d’alignement des miroirs – les corrections longitudinales induisent des mouvements angulaires à cause des couplages entre les degrés de liberté et l’alignement automatique n’est pas en fonctionnement – et aussi au fait que les gains des algorithmes de *feedback* n’étaient pas très élevés.

### Étude des pertes de contrôle du *Run E0*

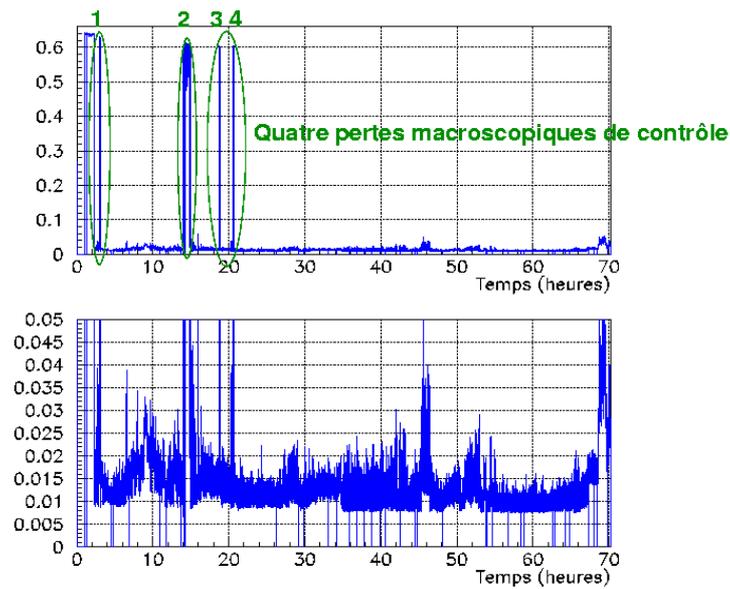
La figure 4.22 présente l’évolution de la puissance maximale en sortie de l’interféromètre lors du *Run E0*. Ce signal est calculé à 1 Hz à partir des données reçues au niveau du Contrôle Global en provenance de la photodiode D1 et permet de voir clairement les défauts macroscopiques de contrôle qui correspondent à des pics dans ces données. Si l’on excepte les premiers moments du *Run* où une calibration en boucle ouverte a été effectuée – sans contrôle longitudinal donc –, on distingue quatre moments (numérotés de 1 à 4 sur la figure) où le point de fonctionnement du détecteur a été perdu.

Les événements **1** et **3** ne présentent pas d’intérêt particulier: l’un est le résultat d’une erreur de l’opérateur (injection d’un bruit de calibration trop fort qui a excité le système) tandis que l’autre a été provoqué volontairement pour redémarrer une application associée au *mode-cleaner* de sortie. Par contre, les deux autres périodes (dont on peut deviner sur la figure qu’elles ont été les plus longues) sont plus intéressantes.

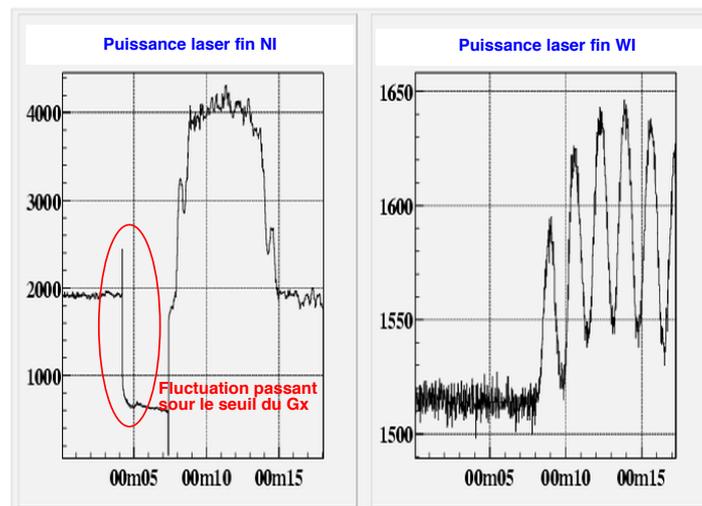
L’événement **2** est dû à une excitation importante de la tour Nord qui n’a été complètement maîtrisée qu’une heure environ après la perte de contrôle. Ce n’est pas la boucle d’asservissement longitudinale (en fonction sur la tour Ouest) qui est en cause mais plutôt le contrôle local de la tour Nord.

Ce système a été décrit au paragraphe 3.1.1; en mode fin, une caméra suit la position d’un petit faisceau laser sur la monture du miroir dont le programme Gx utilise les déplacements pour

<sup>8</sup>Le lundi matin toutefois, son accès redevenait libre pour pouvoir mesurer l’augmentation de bruit liée à l’activité humaine près des tours (du moins dans le même bâtiment car leur voisinage immédiat restait inaccessible).



**Figure 4.22:** Evolution de la puissance maximale en sortie de la frange noire lors du *run* E0 : le signal est échantillonné à 1 Hz à partir d'un canal de *monitoring* du Contrôle Global qui est envoyé vers l'acquisition de données. On peut noter les quatre pertes de *contrôle* macroscopique, la plus longue durant environ une heure. Le graphique du bas est un agrandissement de celui du haut pour les petites valeurs de la puissance DC pour voir l'évolution de celle-ci au cours du temps.

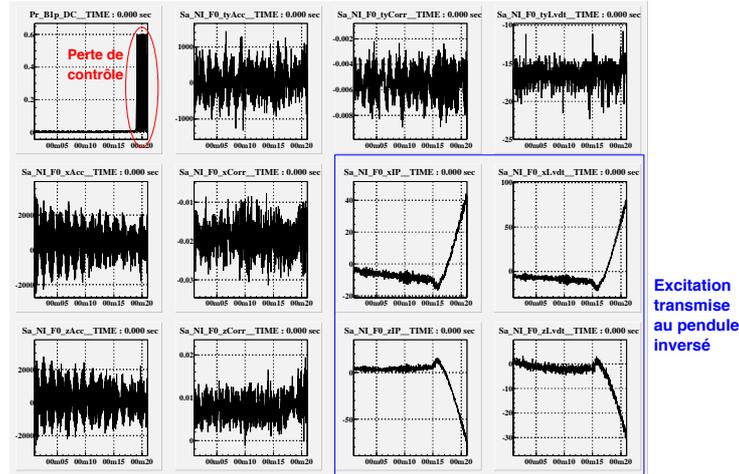


**Figure 4.23:** Cause de la seconde perte de contrôle lors du *run* E0 : un décrochage des contrôles locaux sur la tour Nord à cause d'une fluctuation de la puissance reçue sur la caméra utilisée par ce système.

en déduire les mouvements angulaires en  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . Or, pendant un court instant (un coup d'horloge à 50 Hz soit au plus 20 ms), la puissance de ce laser lue par la caméra a brusquement chuté – cf. figure 4.23 – et est passée sous le seuil de la transition mode grossier/mode fin. A cause d'un défaut de protection, le système a basculé d'un asservissement à l'autre mais la transition s'est mal passée car les données correspondantes n'étaient pas non plus disponibles – ce qui laisse

supposer un problème au niveau de la caméra. Finalement, le contrôle de cette tour a été perdu et les programmes *Guardian* ont ouvert les boucles d’asservissement dans la partie basse de la suspension (marionnette). En fait, celles-ci ont pu être fermées à nouveau au bout d’un quart d’heure mais la résonance<sup>9</sup> de  $\theta_y$  à 16 mHz a été excitée (amplitudes de l’ordre de 100  $\mu$ rad) et il a fallu attendre son amortissement durant trois quarts d’heure avant de pouvoir reprendre le contrôle longitudinal de l’interféromètre.

Cet événement démontre une nouvelle fois la grande importance des contrôles locaux dans le bon fonctionnement de Virgo et l’intérêt de les rendre aussi robustes et performants que possible. Il est à noter que la même péripétie est arrivée également pendant le *Run E1* à cause du dysfonctionnement de la même caméra.



**Figure 4.24:** Quatrième perte de contrôle lors du *run E0*: deux personnes marchent autour de la tour Nord (pour une vérification technique) et une excitation est transmise au superatténuateur à ce moment-là.

La perte de contrôle **4** a une origine toute autre et nettement plus facile à diagnostiquer : suite aux premières analyses de l’événement **2**, deux personnes sont entrées dans le bâtiment central et se sont approchées très près de la tour Nord pour vérifier en particulier son branchement électrique<sup>10</sup> de la caméra du contrôle local. Une excitation est donc apparue sur la tour Nord qui s’est couplée alors à un mouvement longitudinal que la boucle de rétroaction de la tour Ouest chargée de maintenir le détecteur en résonance a essayé en vain de compenser.

La figure 4.24 montre bien le brusque mouvement du superatténuateur qui a causé finalement la perte de contrôle. L’intérêt de ce graphique est de prouver que la perturbation s’est bien propagée par l’intermédiaire de la suspension et non pas, par exemple par les contrôles locaux. Dans ce cas-là, l’excitation n’a pas été trop importante et la résonance a été acquise à nouveau au bout de cinq minutes. Après ce dernier problème, le “*lock*” a été conservé pendant cinquante et une heures consécutives, jusqu’à la fin du *Run* ; finalement, le Michelson a donc été contrôlé plus de 95% du temps. La figure 4.22 montre également qu’aucune perte de *lock* microscopique (i.e. d’une durée de l’ordre de la milliseconde) n’a été observée.

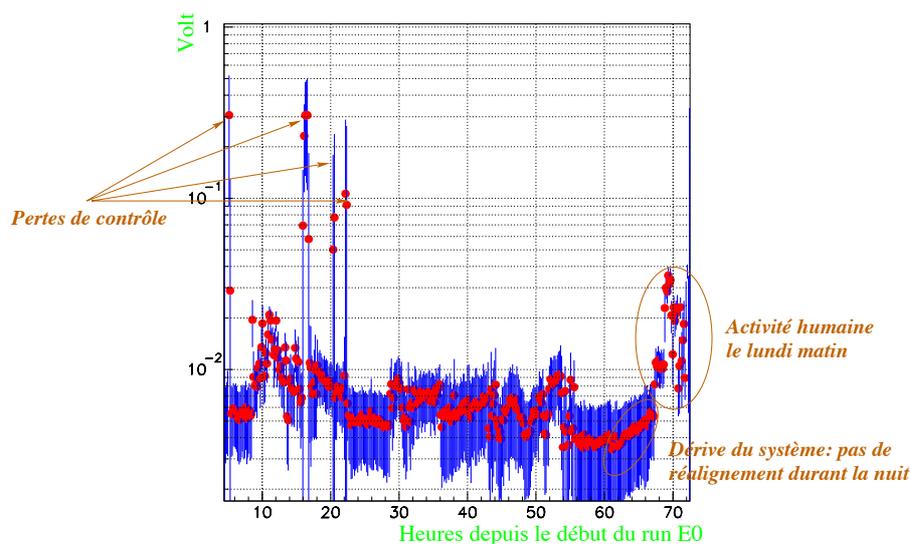
Pour conclure sur ce sujet, la figure 4.25 présente l’évolution de la moyenne de la puissance de frange noire par tranche de dix minutes. Comme sur le graphique 4.22, on voit bien les quatre pertes de contrôle ainsi que les remontées du niveau de bruit dues au dérives de l’alignement et à la reprise de l’activité autour de l’interféromètre le lundi matin.

### Run E1

La principale différence entre les *Runs E0* et *E1* a été l’introduction du contrôle de la tour Ouest à partir du sommet du superatténuateur pour les fréquences inférieures à 70 mHz. Cette amélio-

<sup>9</sup>Cette résonance ne peut pas être amortie par les contrôles locaux car elle correspond à une fréquence où ceux-ci ont un faible gain.

<sup>10</sup>Tous les dispositifs sensibles de Virgo sont alimentés par un circuit particulier qui permet d’isoler l’installation des microcoupures du secteur. Une des hypothèses initiales pouvant expliquer le problème **2** était que la caméra ne soit pas branchée sur ce réseau par suite d’une erreur de câblage.



**Figure 4.25:** Evolution de la puissance de frange noire (moyennée sur des intervalles de dix minutes) en sortie du Michelson lors du *Run E0*. On distingue parfaitement les quatre pertes de contrôle macroscopiques ainsi que les remontées du niveau de bruit dues aux dérives de l'alignement et à la reprise de l'activité humaine dans le bâtiment central en fin de *run*.

ration, associée au fait que la puissance du laser auxiliaire était un peu plus forte que lors du *Run E0* a permis d'améliorer légèrement la sensibilité de la mesure : le minimum est ainsi passé de  $8 \cdot 10^{-12} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  à  $5 \cdot 10^{-12} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  environ.

Deux pertes de contrôle ont été constatées durant les trois jours de fonctionnement : l'une due à nouveau à des problèmes au niveau des contrôles locaux de la tour Nord (toujours causés par une protection insuffisante au niveau de la transition *Fine*  $\rightarrow$  *Coarse*), l'autre sans doute provoquée par la fermeture manuelle de la valve V51 associée à la tour Nord. Les phases de reprise du contrôle du CITF consécutives à ces événements ayant été nettement plus longues que lors du *Run E0*, le cycle utile n'a été finalement que de l'ordre de 85%.

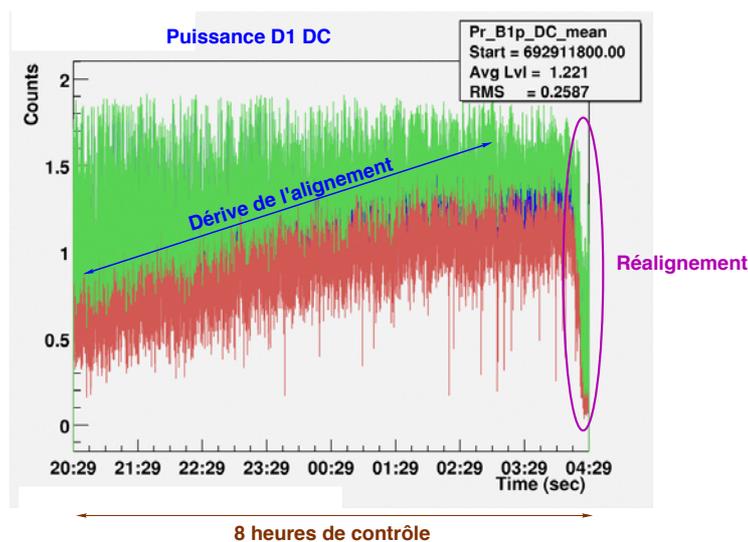
D'ici à la fin du *commissioning* du CITF prévue en juin, d'autres *Runs* sont prévus : CITF recyclé (début avril), utilisation de l'alignement automatique... Il serait également souhaitable de pouvoir utiliser au moins une fois le laser de puissance associé à l'ensemble du banc d'injection.

#### 4.4.2 Données du CITF contrôlé

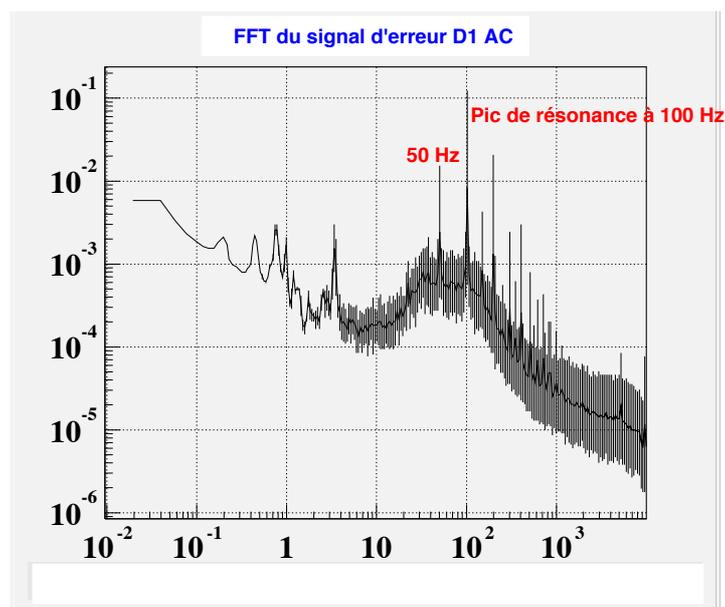
Ce paragraphe présente quelques résultats obtenus à partir des données enregistrées lors des premières périodes de contrôle du CITF entier, fin décembre 2001.

##### Effet des dérives de l'alignement

La figure 4.26 montre l'évolution de la puissance D1 DC en sortie de l'interféromètre lors d'un contrôle de huit heures. Pendant presque toute cette durée, aucun réalignment n'a été opéré ce qui permet de voir clairement l'effet des dérives lentes de l'alignement : la puissance de frange noire augmente. Quelques minutes avant que la boucle d'asservissement ne soit ouverte<sup>11</sup>, un réalignment a été effectué qui se traduit par une brusque diminution de la puissance en sortie du détecteur.



**Figure 4.26:** Dérive de l'alignement du CITF contrôlé pendant huit heures : la frange noire devient de moins en moins noire jusqu'au moment du réalignement.



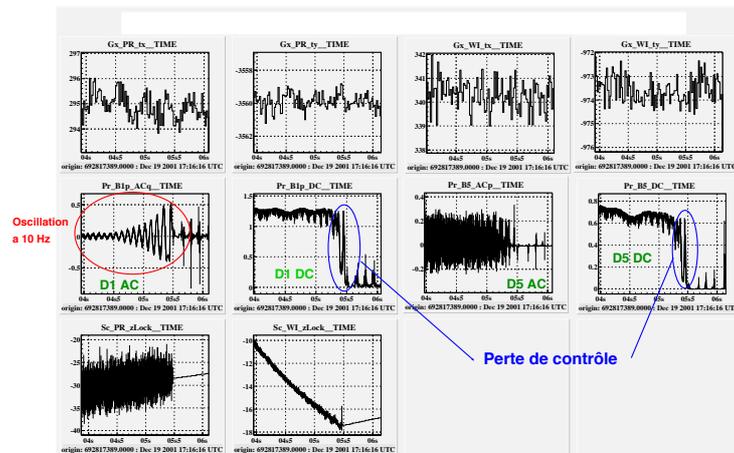
**Figure 4.27:** Transformée de Fourier du signal d'erreur de frange noire D1 AC après la phase de réalignement du CITF lors de son contrôle de huit heures.

### Spectre du signal d'erreur frange noire

La figure 4.27 présente le spectre du signal d'erreur frange noire D1 AC juste après le réalignement à la fin de la période de 8 heures de contrôle consécutives. En plus des résonances mécaniques classiques à basse fréquence, on peut voir un fort pic de résonance à 100 Hz dont l'origine précise n'est pas encore connue : il est *a priori* trop élevé pour être uniquement dû au premier harmonique du 50 Hz et pourrait être lié à un bruit de fréquence du laser.

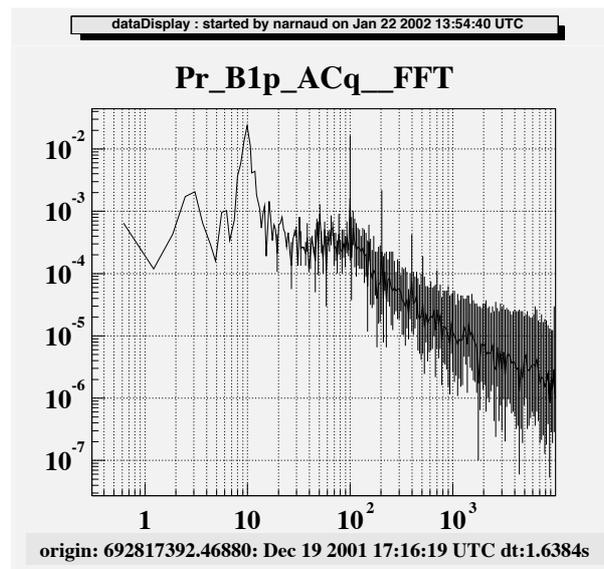
<sup>11</sup>La fin du contrôle s'est faite à l'initiative des opérateurs – il était plus de quatre heures du matin! – et n'a rien à voir avec l'opération de réalignement.

Exemple de perte de contrôle



**Figure 4.28:** Exemple d'une perte de contrôle du CTF : une oscillation à 10 Hz (mode de résonance verticale des miroirs), visible dans le signal d'erreur D1 AC, apparaît sur la tour Ouest, s'amplifie et provoque le décrochage du contrôle une à deux secondes plus tard. La situation du CTF était de toute manière fragilisée par de grands désalignements : juste avant, la puissance recyclée était à un niveau trois ou quatre fois inférieur à sa meilleure valeur au cours du *run*.

La figure 4.28 présente l'instant de la perte du premier contrôle du CTF complet. Une oscillation à 10 Hz – résonance verticale des miroirs dont la valeur de la fréquence est liée au diamètre des fils de suspension – apparaît sur la tour Ouest puis s'amplifie, ce qui est visible dans le signal D1 AC. Le contrôle est perdu une à deux secondes plus tard à cause de cette perturbation mais la situation du CTF était de toute manière fragilisée par la dérive de l'alignement : la puissance stockée avait baissé d'au moins un facteur trois par rapport au début de la phase de contrôle. La figure 4.29 montre le spectre du signal d'erreur D1 AC au moment où l'oscillation apparaît : cela permet de vérifier que sa fréquence est bien égale à 10 Hz.



**Figure 4.29:** FFT du signal d'erreur frange noire D1 AC au moment de l'apparition de la résonance qui entraîne la perte de contrôle. On peut ainsi vérifier que la fréquence d'oscillation dominante est bien à 10 Hz.

### 4.4.3 Comparaison de différentes courbes de sensibilité

Ce paragraphe compare<sup>12</sup> les sensibilités du CITF selon les méthodes utilisées pour contrôler le détecteur.

- Une configuration Michelson simple ;
- Le CITF complet avec contrôle de la frange noire à partir du signal d’erreur de frange noire D1 AC – action sur le miroir Ouest – et contrôle de la longueur de recyclage par action sur la fréquence du laser<sup>13</sup>. Cette stratégie de contrôle a été depuis lors étendue à la méthode de la “double boucle” [98] : pour Virgo complet, le laser sera asservi à haute fréquence sur la cavité recyclée (très stable dans cette gamme de fréquence) tandis qu’il représente l’étalon le plus stable à basse fréquence. La répartition des corrections entre le laser et les suspensions sera assurée par des filtres très complexes à définir qui devront se croiser de manière très rapide à une fréquence prédéfinie (pour assurer une bonne séparation entre les bandes de fréquence), autour de 3 Hz. Ce type d’asservissement est actuellement testé sur le CITF.
- Le CITF complet avec contrôle uniquement à l’aide des suspensions :
  - maintien de la frange noire par action sur le miroir Ouest (signal d’erreur D1 AC) ;
  - maintien de la résonance de la puissance stockée par action sur le miroir de recyclage – signal d’erreur  $\frac{P_s^{AC}}{(P_s^{DC})^{3/2}}$ .

La figure 4.30 montre la sensibilité obtenue dans les trois cas<sup>14</sup>. On peut voir que l’amélioration entre le Michelson et les deux configurations CITF apparaît surtout au delà de quelques Hz ; on verra au paragraphe 4.4.5 que le bruit réinjecté par les contrôles locaux domine en deça de cette fréquence ce qui explique la stabilité de la DSA dans cette zone. L’amélioration de la courbe de sensibilité s’explique en partie par la hausse de la puissance stockée qui permet en particulier un meilleur réglage des électroniques dont le bruit n’est alors plus limitant à haute fréquence. Par contre, il reste encore à déterminer l’origine du ou des bruits dominants ; des analyses – utilisant d’autres canaux de données : signaux d’erreur ou de correction, variables d’environnement... – sont actuellement en cours.

Entre les deux méthodes présentées pour le contrôle du CITF, la plus sensible est celle qui utilise l’asservissement sur la fréquence du laser car la dynamique est plus importante : l’action est plus “facile” que sur la suspension. Cette procédure a réussi une dizaine de jours avant l’autre et a servi à mieux connaître le système pour préparer de manière appropriée l’étape finale du contrôle, uniquement à partir des suspensions.

Ainsi, par exemple, la figure 4.31 affine la comparaison des différentes sensibilités dans la région des basses fréquences en présentant en plus l’évolution attendue de la DSA du bruit sismique filtré par les superatténuateurs et le bruit de fréquence du laser. On peut voir que les résonances des suspensions sont présentes sur la courbe de sensibilité en dessous du Hz mais qu’au-delà le bruit est dominé par d’autres sources : contrôles locaux, bruit thermique et bruit de fréquence du laser (au moins pour le Michelson). L’utilisation du laser de puissance 10 W stabilisé aurait d’une part permis de diminuer cette dernière perturbation et d’autre part abaissé globalement le niveau de sensibilité en fournissant une puissance soixante fois plus grande.

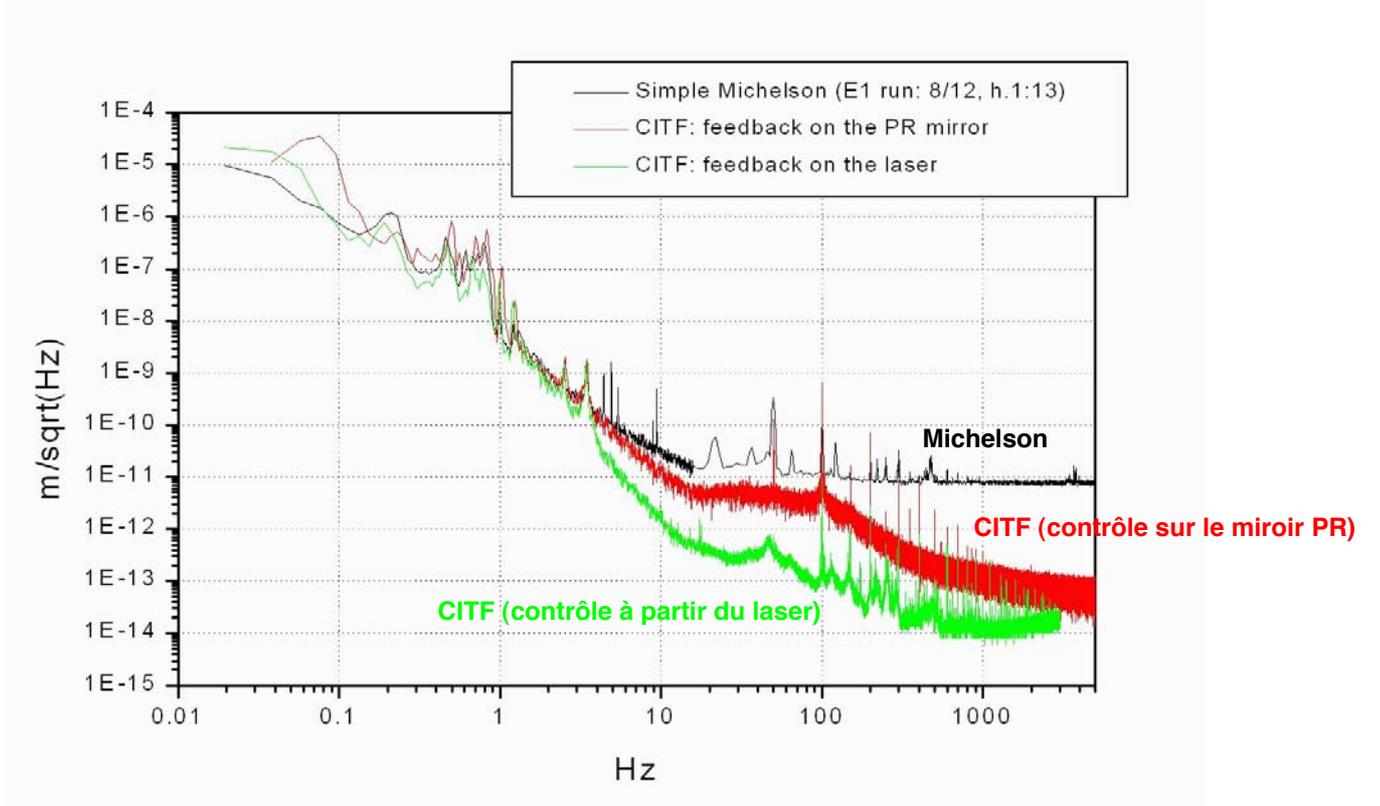
### 4.4.4 Mesure de la finesse de la cavité de recyclage

Comme on l’a vu au paragraphe 2.1.2, la grandeur caractéristique d’une cavité Fabry-Perot est sa finesse  $\mathfrak{F}$ . Or, on peut décrire le CITF au moyen de ce formalisme en prenant le miroir de recyclage

<sup>12</sup>Les deux graphiques présentés ici proviennent de [141].

<sup>13</sup>La condition de résonance d’une cavité Fabry-Perot fait intervenir le produit de la longueur de la cavité et de la fréquence du laser, cf. équation (2.15). Cette modification change également la condition de résonance de la frange noire mais de manière beaucoup moins importante car l’effet est atténué par un facteur de l’ordre de l’asymétrie des bras divisé par la longueur de la cavité de recyclage, soit en gros 1 / 25 pour le CITF – et beaucoup plus pour Virgo.

<sup>14</sup>Dans le cas du CITF, les courbes de sensibilité sont encore provisoires : pour les obtenir, on a effectué la somme quadratique du signal d’erreur (dominant à haute fréquence) et du signal de correction (dominant à basse fréquence). La raison de cette procédure est que les mouvements en-dessous de la fréquence de gain unité de l’asservissement sont amortis et donc se retrouvent uniquement dans le signal de correction et non plus dans le signal d’erreur. En fait, il faudra mettre au point une procédure de reconstruction plus sophistiquée car les deux canaux ne sont pas des bruits indépendants que l’on peut ajouter de cette manière. Néanmoins, on obtient ainsi simplement une DSA proche de la réalité.



**Figure 4.30:** Améliorations de la courbe de sensibilité du CIFT selon les différentes méthodes de contrôle utilisées : Michelson simple, CIFT complet avec maintien de la résonance du recyclage en agissant sur la fréquence du laser et CIFT complet contrôlé uniquement à partir des suspensions.

$M_0$  comme miroir d'entrée et en considérant le Michelson dans son ensemble comme un miroir de fond  $M_{\text{mic}}$  dont la transmission est la puissance de frange noire. En fonction de l'état d'alignement de l'instrument, le coefficient de réflexion  $r_{\text{mic}}$  fluctue<sup>15</sup> ainsi que la finesse à laquelle il est reliée par la relation :

$$\mathfrak{F} = \frac{\pi \sqrt{r_0 r_{\text{mic}}}}{1 - r_0 r_{\text{mic}}} \quad (4.15)$$

Le problème est qu'il n'existe pas de moyen direct de mesurer la finesse : il faut passer par des résultats intermédiaires et d'éventuelles procédures de calibration qui peuvent être entachées d'erreurs expérimentales. Aussi, il est intéressant d'utiliser plusieurs méthodes indépendantes et de comparer les résultats qu'elles donnent. Celles-ci sont résumées sur la figure 4.32 qui présente un exemple de résonance de la cavité de recyclage :

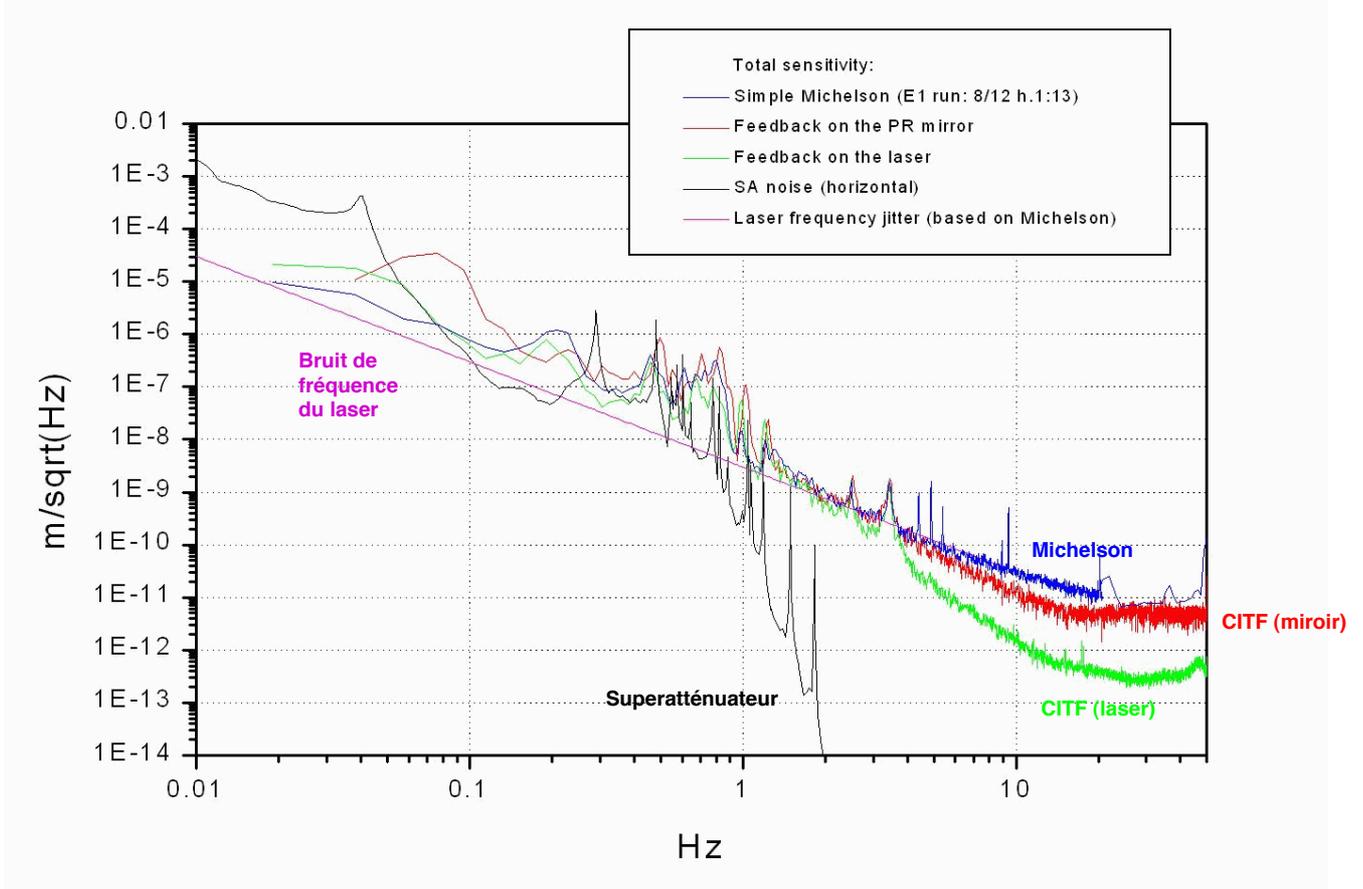
- utiliser le gain de puissance DC  $G$  ;
- évaluer la valeur pic/pic de la zone linéaire du signal d'erreur AC et la convertir en mètre ou en intervalle de fréquence à l'aide de coefficients de calibration mesurés auparavant.

Dans la suite, nous allons présenter ces différentes possibilités et les appliquer à la résonance expérimentale considérée ici.

### Gain et finesse

Le gain est défini comme le rapport entre la puissance stockée dans la cavité et la puissance incidente. En conservant les notations du paragraphe précédent, la relation (2.14) donne l'expression de  $G$  en fonction des coefficients de réflexion des "miroirs" :

<sup>15</sup>Si on néglige les pertes,  $r_{\text{mic}}^2 = 1 - t_{\text{mic}}^2$  où  $t_{\text{mic}}$  est le coefficient de transmission en amplitude du Michelson.



**Figure 4.31:** Mise en perspective des différentes courbes de sensibilité du CITF avec certaines DSA de bruit.

$$G = \frac{t_0^2}{(1 - r_0 r_{itf})^2} \quad (4.16)$$

Contrairement à une idée assez répandue, la relation entre  $G$  et  $\mathfrak{F}$  n'est pas simple et dépend des transmissions des miroirs du Fabry-Perot :

$$G = \frac{(1 - \zeta) \mathfrak{F}}{\pi} \quad (4.17)$$

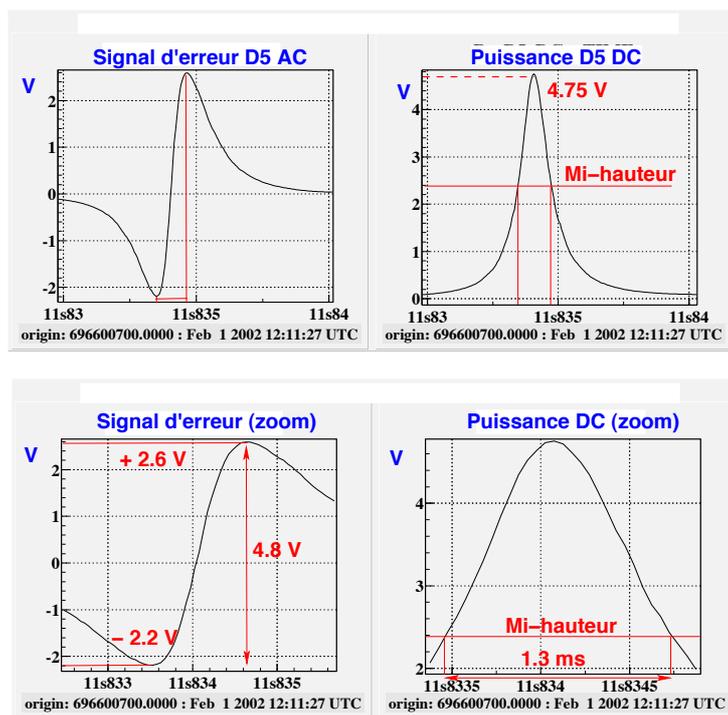
où  $\zeta$  est la réflectivité en champ de la cavité. D'après l'équation (2.13), on a, en négligeant les pertes de  $M_0$

$$\zeta = \frac{r_0 - r_{mic}}{1 - r_0 r_{mic}} \approx \frac{T_{mic} - T_0}{T_{mic} + T_0} \text{ au premier ordre (suffisant pour l'expérience)} \quad (4.18)$$

Les deux cas extrêmes de la relation gain  $\leftrightarrow$  finesse sont donc

$$\begin{cases} \zeta = 0 \Rightarrow G = \frac{\mathfrak{F}}{\pi} \text{ pour une cavité symétrique (comme le } mode-cleaner \text{ parfait)} \\ \zeta = -1 \Rightarrow G = \frac{2\mathfrak{F}}{\pi} \text{ comme pour les Fabry-Perot kilométriques où } T_{fond} \ll T_{entrée} \end{cases}$$

Ainsi, la finesse estimée à partir du gain peut donc varier du simple au double selon les relations entre les réflectivités, ce qui pose un problème pratique dans le cas qui nous intéresse puisque  $r_{mic}$  est fortement variable. Il faut donc procéder autrement : on remarque qu'un seul paramètre des



**Figure 4.32:** Exemple d'un événement de résonance de la cavité de recyclage du CITF en mouvement libre. Sur la partie haute, on voit le signal d'erreur D5 AC et la puissance continue D5 DC ; en-dessous sont représentés les agrandissements des courbes autour de la résonance. Les flèches surimposées sur les schémas montrent les différentes manières d'estimer la finesse de la cavité : calcul du maximum de résonance de D5 DC ou de la largeur pic/pic du signal d'erreur.

équations (4.15) et (4.16) est inconnu -  $r_{mic}$ . On le détermine à partir du gain, puis on l'injecte dans l'expression de la finesse.

Sur la figure 4.32, on voit que  $P^{\max} \approx 4.75$  V. Or, le facteur de conversion  $V \leftrightarrow W$  reliant la tension en Volt mesurée sur la photodiode D5 et la puissance stockée dans le bras Nord du CITF vaut environ 1.46 W/V - il dépend de la position estimée du faisceau sur la seconde face de la séparatrice (et donc du coefficient d'anti-reflet de la surface) ainsi que de l'électronique d'acquisition. Aussi, la puissance sur la séparatrice - double de celle d'un bras - vaut :

$$P^{\text{stockée}} \approx 2 \times 1.46 \times 4.75 = 13.83 \text{ W}$$

Le laser auxiliaire ayant une puissance nominale de 160 mW, le gain vaut  $G \approx 86.43$  ce qui correspond à  $R_{mic} \approx 98.86\%$  et finalement à une finesse de l'ordre de

$$\mathfrak{F} \sim 244$$

Dans cet exemple, on a  $R_0 \approx R_{mic}$ , soit un Fabry-Perot presque symétrique. On le vérifie en calculant  $G\pi/\mathfrak{F} \approx 1.1$  qui est proche de 1 comme attendu.

Le point faible de cette méthode est le coefficient de conversion V/W, peut-être mal estimé. On pourrait *a priori* faire une mesure directe en comparant simplement le pic de résonance de la puissance stockée à sa valeur RMS lorsque le recyclage est inopérant : le facteur inconnu disparaîtrait alors lors du rapport. Dans le cas du CITF c'est impossible car le laser auxiliaire délivre une puissance trop faible après traversée du miroir de recyclage : hors résonance, les valeurs de D5 DC sont dominées par le bruit électronique.

#### Utilisation des valeurs pic/pic du signal d'erreur

Lorsque le CITF est contrôlé, on peut calibrer le signal d'erreur D5 AC – en Volt – en appliquant une sinusoïde au degré de liberté utilisé pour le contrôle : soit la fréquence du laser, soit le miroir de recyclage. La comparaison de son amplitude avec celle qui apparaît sur le signal d'erreur permet d'obtenir le coefficient linéaire de conversion en Hz/V ou en m/V selon le cas. Les valeurs mesurées expérimentalement sont [140] :

- Hz  $\rightarrow$  V :  $K(\text{Hz/V}) = 5.7 \text{ kHz/V}$  ;
- m  $\rightarrow$  V :  $K(\text{m/V}) = 2.3 \cdot 10^{-10} \text{ m/V}$ .

Or, dans la zone linéaire du signal d'erreur AC définie

- en terme de longueur dans l'intervalle  $[-l_{\text{FWHM}}/2; l_{\text{FWHM}}/2]$  autour de la résonance
- et en terme de fréquence dans  $[-\nu_{\text{FWHM}}/2; \nu_{\text{FWHM}}/2]$

le signal d'erreur Pound-Drever est proportionnel à  $\frac{x}{1+x^2}$  (avec  $x = 2\delta l/l_{\text{FWHM}}$  ou  $x = 2\delta\nu/\nu_{\text{FWHM}}$ ), facteur qui vaut donc 1/2 aux extrémités de la demi-largeur de résonance. Aussi, la mesure de l'écart pic/pic en V sur D5 AC doit être corrigé d'un facteur 2 pour tenir compte de cet effet. D'où, la valeur de la variation de voltage  $\Delta V$  à utiliser pour l'approximation de la finesse dans l'exemple de la figure 4.32 est donnée par

$$\Delta V \approx 24.8 = 9.6 \text{ V}$$

Grâce aux coefficients de calibration mentionnés précédemment, on obtient les tailles de la zone linéaire autour de la résonance du recyclage, exprimées soit en longueur, soit en fréquence :

- $l_{\text{FWHM}} = 2.2 \cdot 10^{-9} \text{ m}$
- $\nu_{\text{FWHM}} = 54.7 \text{ kHz}$

Finalement, on en déduit les estimations de la finesse :

$$\mathfrak{F} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2l_{\text{FWHM}}} \approx 242 \\ \frac{\Omega}{2\pi\nu_{\text{FWHM}}} \approx 230 \end{cases} \quad (4.19)$$

où  $\lambda \sim 1.064 \mu\text{m}$  est la longueur d'onde du laser et  $\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{c}{2l_r} \sim 12586274 \text{ Hz}$  est la fréquence associée à la longueur de recyclage du CITF – elle est également égale à la fréquence de modulation utilisée dans le CITF pour assurer la résonance des bandes latérales dans la cavité, cf. paragraphe 2.2.3.

Les trois mesures donnent des résultats très proches ; indépendantes, elles permettent de considérer avec confiance la valeur de

$$\mathfrak{F} \sim 230 - 240$$

qui est un très bon résultat sans alignement automatique. Une dernière manière de vérifier la vraisemblance des résultats présentés ici est d'estimer la vitesse de traversée de la résonance :

$$v_{\text{res}} = \frac{l_{\text{FWHM}}}{\Delta t_{\text{FWHM}}} \approx \frac{2.2 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{1.3 \text{ ms}} = 1.7 \mu\text{m/s} \quad (4.20)$$

qui correspond tout à fait aux valeurs rencontrées lors du mouvement libre de la cavité de recyclage.

#### 4.4.5 Améliorations futures du contrôle

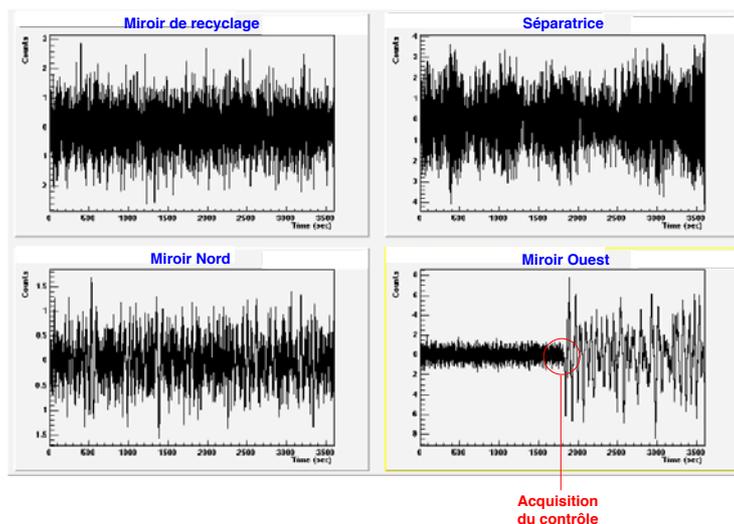
Pour conclure cette partie consacrée aux résultats expérimentaux obtenus sur le CITF, je voudrais présenter quelques domaines dans lesquels les algorithmes de contrôle actuels doivent être améliorés.

---

### Contrôle de la longueur de recyclage

Pour l'instant, le signal d'erreur pour le contrôle de la longueur de recyclage est  $\frac{P_5^{AC}}{(P_5^{DC})^{3/2}}$ , i.e. le même que celui utilisé pour l'acquisition de la résonance. La normalisation par le DC puissance  $3/2$  est essentielle lors de cette première phase pour avoir un signal d'erreur qui fluctue assez peu avec l'état du recyclage mais elle peut poser un problème une fois l'asservissement établi en amplifiant les variations de la puissance stockée. Aussi, dans le futur, une transition sera faite une fois que la boucle de rétroaction est stable pour remplacer  $\frac{P_5^{AC}}{(P_5^{DC})^{3/2}}$  par  $P_5^{AC}$  simplement.

### Effet du contrôle longitudinal sur les mouvements en $\theta_y$



**Figure 4.33:** Comparaison des mouvements en  $\theta_y$  des différents miroirs. On note une excitation significative de la tour Ouest lorsque le contrôle du Michelson est acquis en agissant sur cette même suspension : le *locking* longitudinal est couplé aux rotations.

La figure 4.33 compare les mouvements angulaires en  $\theta_y$  (autour de l'axe vertical de la suspension) pour les quatre tours. Ils sont équivalents jusqu'au moment où le contrôle longitudinal du CITF en configuration Michelson est acquis par action sur le miroir Ouest. A ce moment, l'amplitude des oscillations angulaires est multipliée par un facteur de l'ordre de quatre pour ce miroir et leur fréquence principale devient 16 mHz. Un meilleur découplage de ces degrés de liberté permettra de diminuer cette contamination et ainsi d'améliorer le contrôle. Le même phénomène apparaît beaucoup moins nettement quand la boucle d'asservissement est fermée sur le miroir de recyclage : sur cette tour, la diagonalisation des degrés de liberté est meilleure.

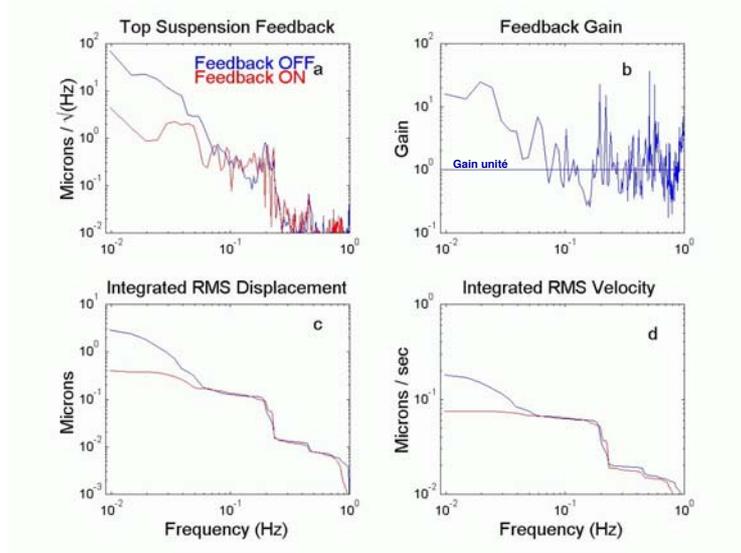
### Bruits de contrôle angulaire et limitation de sensibilité

L'étude de la partie basse fréquence ( $\sim 1 - 10$  Hz) des différentes courbes de sensibilité présentées dans ce chapitre montre une décroissance du spectre lente par rapport aux capacités d'atténuation des superatténuateurs (au moins en  $1/f^{12}$ , cf. paragraphe 2.2.1). Cela signifie que le bruit sismique n'est pas dominant dans cette bande de fréquence. En fait, des mesures de **cohérence**<sup>16</sup> [142] montrent que la sensibilité est en fait limitée par les corrections angulaires des contrôles locaux qui réintroduisent du bruit.

Dans leur configuration actuelle, ces asservissements ont du gain dans cette bande de fréquence pour amortir les résonances du système miroir-masse de référence : 0.8 Hz et 1.2 Hz pour  $\theta_y$  ; 2.5 Hz et 3.5 Hz pour  $\theta_x$ . Néanmoins, celles-ci n'ont aucune raison de s'exister en période de fonctionnement normal et donc on pourrait très bien imaginer de diminuer la force de ces rétroactions une fois le contrôle longitudinal acquis. Cette piste est actuellement explorée sur le site.

<sup>16</sup>La cohérence permet de tester la ressemblance entre deux signaux différents. Exprimée dans l'espace de Fourier, elle indique la corrélation entre ceux-ci, bande de fréquence par bande de fréquence : elle vaut 1 quand les deux signaux sont proportionnels et 0 quand ils sont complètement différents.

## Répartition des corrections sur la suspension



**Figure 4.34:** Effet du contrôle à partir du sommet de la suspension en-dessous de 70 mHz : le mouvement résiduel et la vitesse sont nettement réduits, en particulier à basse fréquence.

Normalement, les corrections de *locking* doivent être réparties en trois points : la masse de référence, la marionnette et le sommet de la suspension. Plus elle est appliquée haut, plus elle concerne des fréquences faibles mais des amplitudes grandes. Si rien n'a encore été entrepris pour ce qui concerne la marionnette, le contrôle à partir de la partie supérieure du pendule inversé a été testé, d'abord pour le Michelson, puis pour le CITEF au niveau de la tour Ouest.

La figure 4.34 issue de [124] montre le gain apporté au niveau du mouvement résiduel par ce système : le déplacement et la vitesse RMS intégrés vers les basses fréquences sont considérablement réduits par ce dispositif qui fonctionne jusqu'à 70 mHz (fréquence de gain unité). L'ajout du contrôle au niveau de la marionnette (dont le test est prévu en mars-avril) devrait encore améliorer ce résultat, grâce en particulier à la décroissance en  $1/f^4$  de la fonction de transfert à haute fréquence – cf. figure 3.12. L'idéal serait d'arriver à éteindre le contrôle à partir de la masse de référence et de tout contrôler avec le sommet du pendule inversé et la marionnette.

## Fréquence de contrôle et sensibilité

Les algorithmes de contrôle visent à maintenir l'instrument à son point de fonctionnement en atténuant les mouvements résiduels des miroirs détectés par les différentes photodiodes (signaux d'erreur). Or une partie de ces fluctuations pourrait être due à une onde gravitationnelle incidente sur l'interféromètre et que l'on souhaite observer. Aussi, la procédure finale de reconstruction du signal " $h(t)$ " en sortie du détecteur utilisera non seulement les signaux d'erreur mais aussi les signaux de correction (qui pourraient donc contenir des informations physiques intéressantes) selon une méthode qui reste à définir dans le détail. Le choix le plus confortable (à la fois le plus simple et le moins "risqué" dans la mesure où il minimiserait les manipulations sur les différents canaux de données) serait d'avoir une fréquence de gain unité aussi faible que possible au niveau des boucles d'asservissement afin que celles-ci interagissent au minimum avec la bande de détection de Virgo.

## 4.5 Conclusion

Pour résumer les développements expérimentaux récents de Virgo, on pourrait dire que le détecteur est passé en un peu plus de six mois d'une existence essentiellement virtuelle à une réalité tangible. Des sous-systèmes complexes (photodiodes, Contrôle Global, suspensions) ont prouvé non seulement leurs capacités à remplir les fonctions pour lesquelles ils ont été mis au point mais aussi leurs aptitudes à communiquer entre-eux et à s'échanger les informations nécessaires. Les

succès représentés par l'acquisition des contrôles longitudinaux du Michelson puis du CITF complet ont validé les différents choix techniques de conception (superatténuateurs, filtrages digitaux, fiabilité et évolutivité du Contrôle Global...) tandis que la construction du génie-civil de Virgo entrainait dans sa phase finale : fin des bras kilométriques, pose de la plupart des modules du tube, mise sous vide réussie d'une large fraction d'entre-eux...

Certes un gros travail expérimental reste à accomplir pour amener la sensibilité du CITF au niveau le plus bas possible ; néanmoins, la plupart des limitations actuelles sont comprises et des solutions existent pour y remédier. Elles seront testées jusqu'à l'été avant que ne s'opère la transition entre l'interféromètre central et le détecteur complet, dont le démarrage de la phase d'étude est prévu pour début 2003, avec une première prise de données physiques six mois après environ. Même si ce planning subira peut-être quelques retards, je crois qu'on peut être maintenant optimiste sur l'avenir de Virgo et laisser un peu de côté les problèmes quotidiens sur le terrain pour regarder – enfin –, vers les étoiles.

## Chapitre 5

# Méthodes de filtrage pour la recherche de signaux gravitationnels impulsionnels

Les chapitres 2 et 3 ont présenté en détail l'architecture du détecteur interférométrique Virgo ainsi que son mode de fonctionnement, tous deux validés au chapitre 4 par les réussites des asservissements des deux cavités du CITE. Aux choix techniques apportant la meilleure sensibilité possible se sont ajoutés les différents dispositifs expérimentaux de réduction des bruits de mesure (d'autant plus variés que la précision atteinte est élevée) ainsi que les systèmes de contrôle actif de l'instrument – tant locaux que global – qui visent à maintenir ce dernier à son point de fonctionnement.

La mise au point de l'interféromètre – au carrefour de nombreuses disciplines et par bien des aspects à la pointe de la technique – est un travail fondamental, à la fois préalable et nécessaire à toute analyse de physique. De sa qualité dépend une partie de la valeur finale du rapport signal/bruit obtenue en sortie des **méthodes de détection** proprement dites ; à la lutte contre le bruit est associée la recherche de moyens d'amplification de l'interaction entre le détecteur et le signal gravitationnel.

Dans la suite, nous allons laisser de côté le domaine instrumental pour supposer que le fonctionnement de l'instrument est tel qu'il a été décrit et nous consacrer à l'étude de procédures de **filtrage** des données chargées de séparer les vrais signaux gravitationnels du bruit instrumental et d'isoler leurs caractéristiques : temps d'arrivée, amplitude et forme d'ondes. Leurs comparaisons avec des modèles théoriques décrits pour certains au chapitre 1 donnera accès à des informations sur la nature de la source du rayonnement ainsi que sur la physique du phénomène en cause. Ce chapitre présente les différentes méthodes de recherche mises au point tandis que le suivant traite de leurs performances, en présence de bruit seul puis vis à vis d'un signal. Enfin, le chapitre 7 étudie la question de la détection en coïncidence entre interféromètres.

Avant de commencer, il convient de résumer en quelques lignes les principales caractéristiques de la recherche d'ondes gravitationnelles dans les détecteurs interférométriques comme Virgo. On pourra trouver cette énumération un peu pessimiste mais nous préférons la qualifier de réaliste : leur connaissance permet de dégager les hypothèses principales autour desquelles s'organise tout le travail de traitement de signal, le but à atteindre autant que les moyens à mettre en oeuvre pour y parvenir.

Tout d'abord, les amplitudes attendues pour les signaux physiques sont petites comparées au niveau du bruit du détecteur : au moins au début du fonctionnement de l'instrument, les rapports S/B enregistrés devraient être faibles pour la majorité des sources, à l'exception notable des coalescences trou noir-trou noir. Ensuite, les formes d'onde sont au mieux approximativement connues et varient en tout cas beaucoup selon le type de source et le modèle utilisé.

Enfin, l'impossibilité de recourir à des expériences de Hertz force à attendre des signaux qui surviennent de manière aléatoire avec une statistique d'au mieux quelques événements par an pour la première génération de détecteurs. Toutefois, cette dernière affirmation est à manipuler avec précaution : les taux prédits ont pour la plupart des barres d'erreur si importantes qu'ils peuvent facilement varier d'un ordre de grandeur dans un sens ou dans l'autre. De plus, un détecteur explorant un nouveau domaine de physique inconnu a toujours fait des découvertes imprévues ;

l'histoire des sciences est riche de tels exemples.

Un dernier point à soulever est celui de la validation d'une détection : en cas de signal dans un échantillon de données, comment être sûr qu'il s'agit bien d'une onde gravitationnelle et pas d'une non stationnarité de l'instrument ? Même si le bruit de fond de l'instrument suit en majorité une statistique gaussienne, on s'attend à ce qu'une partie de celui-ci soit composée d'événements non stationnaires, transitoires et fortement non gaussiens. Cette hypothèse née de l'examen des données des prototypes d'interféromètres est actuellement confirmée par les premiers résultats de TAMA300.

## 5.1 Spécificités des sources impulsionnelles d'ondes gravitationnelles

Les sources d'ondes gravitationnelles actuellement recensées sont extrêmement variées – cf. chapitre 1. En conséquence, il est impossible d'espérer définir des stratégies suffisamment générales pour s'appliquer aux différentes formes de signaux et il est illusoire de penser les étudier toutes en parallèle. Aussi, depuis 1997, le groupe Virgo du LAL s'est spécialisé dans un domaine particulier, celui des signaux impulsionnels, également appelés “*bursts*”.

Pourquoi ce choix ? Certainement parce que peu de personnes s'y étaient intéressés auparavant : les signaux attendus sont de courte durée, et les formes d'ondes mal connues ; paradoxalement, ces défauts sont pourtant synonymes de richesse, en premier lieu au niveau de leur contenu physique. Par exemple, la détection d'un signal de supernova donnera des informations sur le mécanisme de l'effondrement de l'astre massif et, en cas de coïncidence avec un détecteur de neutrinos, pourra améliorer les limites supérieures sur les masses de ces derniers. Ou bien, la découverte d'un mode de désexcitation de trou noir permettra d'estimer sa masse et son moment angulaire et apparaîtra comme une preuve irréfutable de son existence.

De plus, le cadre non prédéfini de l'analyse demande de la créativité pour tester une grande quantité d'algorithmes, de méthodes **robustes** mais **sous-optimales** s'adaptant à une grande variété de formes d'onde à des **filtrages adaptés** utilisés pour identifier des caractéristiques communes aux signaux recherchés : pic principal, décroissance amortie... En parallèle, il faut mettre au point les outils adéquats pour estimer la qualité de ces nouveaux filtres et définir des moyens de les comparer entre eux.

Enfin, la détection de signaux transitoires de faible durée est un travail très relié à la caractérisation des bruits non stationnaires du détecteur. Un des premiers objectifs de l'analyse des données de Virgo est d'apprendre à les détecter, à les classer en fonction de leurs causes et finalement à les éliminer des données conservées. Les méthodes mises au point pour la recherche de *bursts* gravitationnels s'appliquent naturellement à ce travail, le tri entre les fausses alarmes du détecteur et les candidats potentiels s'effectuant en aval de la sélection, par exemple par l'ajout d'informations provenant de senseurs environnementaux.

Dans la suite, je chercherai également à montrer comment les stratégies de recherche ont évolué au sein du groupe à mesure que la compréhension des différentes pièces du puzzle s'améliorait : partis de l'étude de filtres rapides et parmi les plus simples auxquels on puisse penser – mais pas forcément les moins efficaces comme on le verra –, nous sommes maintenant arrivés à considérer un processus de détection complexe, basé sur de **nécessaires coïncidences** entre des interféromètres recevant également les alertes provenant des détecteurs de neutrinos, thème qui sera le sujet unique du chapitre 7.

Dans nos premières analyses, nous avons commencé par supposer optimale l'orientation du détecteur vis à vis de la source d'ondes gravitationnelles avant de finalement prendre en compte l'effet de l'interaction entre le détecteur et la perturbation – qui diminue l'amplitude du signal et donc sa probabilité de détection potentielle. Finalement, nous avons utilisé un modèle simple de la répartition de sources dans la Galaxie pour vérifier le comportement de nos algorithmes de détection dans des conditions plus réalistes, dans la mesure où l'une des principales conclusions à laquelle nous avons abouti a été de montrer que l'explosion de supernovae ne sera sans doute pas détectable au delà de la Voie Lactée (éventuellement jusqu'aux Nuages de Magellan).

C'est ce cheminement – auquel j'ai contribué depuis l'origine – que je vous invite à découvrir maintenant ; il s'agit évidemment d'un travail de simulation, *en attendant Virgo* !

## 5.2 Le Cadre des simulations

L'absence de données expérimentales disponibles limite l'analyse aux activités de simulation. Celles-ci poursuivent plusieurs buts complémentaires :

- l'implémentation et le test des nouveaux algorithmes ;
- la définition de stratégies de filtrage ;
- la recherche de moyens de conclure valablement à une détection réelle.

Comme les schémas de filtrage devront être utilisables (et efficaces! ) dès que l'interféromètre Virgo sera en fonctionnement, une attention particulière doit être portée à la conception des méthodes et des modèles utilisés pour mesurer leur efficacité<sup>1</sup>.

Avant de détailler les différents filtres définis pour l'analyse des *bursts*, je vais préciser les hypothèses à la base de l'ensemble de nos travaux. Tout d'abord, un résumé rapide des caractéristiques principales de ces signaux gravitationnels rendra claire l'orientation générale de ce travail, i.e. la volonté de mettre au point des méthodes s'appliquant à une **grande variété** de formes d'ondes – le défaut de ce choix étant une efficacité **non optimale** pour la détection d'un signal particulier.

Malgré le manque de connaissance des ondes gravitationnelles impulsionnelles, il faut cependant tester les algorithmes sur des signaux aussi réalistes que possible. Pour cela, une bibliothèque de soixante dix-huit signaux simulés de supernova [63] a été utilisée. On reviendra sur ce catalogue dans la suite au paragraphe 5.2.2 ; pour le moment, il suffit de préciser que la grande variété des formes d'onde en fait un banc d'essai adéquat pour le calcul de l'efficacité des filtres.

Enfin, un modèle de bruit complète ce schéma général de simulation. Le chapitre 2 a montré que la densité spectrale du bruit de Virgo était colorée, i.e. variable en fonction de la fréquence – cf. figure 2.14. Néanmoins, dans la bande de fréquence attendue pour les *bursts*, le spectre est à peu près plat ce qui nous a conduit à faire l'hypothèse d'un bruit **blanc**, plus simple à mettre en place et plus rapide à générer.

### 5.2.1 Détecter les *bursts* d'ondes gravitationnelles

Les signaux impulsionnels sont caractérisés par une courte durée (de l'ordre de quelques millisecondes) et, éventuellement, par une faible amplitude susceptible de restreindre la zone d'univers dans laquelle ils sont éventuellement détectables<sup>2</sup>. De plus, ils sont en général produits par des événements astrophysiques violents (explosion de supernova, fin de coalescence d'un système binaire...) pour lesquels aucun calcul analytique n'est possible. Les formes d'onde doivent donc être calculées numériquement et dépendent alors des choix de paramètres et de modèles (hydrodynamique relativiste, équation d'état de la matière nucléaire, Relativité Générale numérique...).

Le manque de connaissance précise sur ces ondes gravitationnelles empêche l'utilisation du filtrage adapté, la méthode linéaire optimale – cf. appendice C. Au contraire, il faut mettre au point des algorithmes **robustes**, adaptés à une large variété de sources. On peut les classer essentiellement en deux types.

- Les méthodes générales  
Celles-ci calculent des grandeurs “statistiques” dans une fenêtre de données : moyenne, énergie, variations de pente... et fonctionnent récursivement.
- Les recherches de caractéristiques particulières communes aux signaux  
Elles font appel au filtrage adapté mais, à la différence par exemple de la recherche de la phase spirale de coalescence d'un système binaire, il ne s'agit pas alors de détecter un signal donné complet, mais plutôt une partie de celui-ci que l'on retrouve dans une famille de formes d'onde : pic principal, sinusoïde amortie...

Des méthodes temps-fréquence [143, 144] ou basées sur les transformées en ondelettes discrètes [145] et continues [146] ont été proposées par différentes équipes mais sans concrétiser totalement les espoirs placés *a priori* en ces outils plus “sophistiqués”. En conséquence, nous ne nous sommes pas impliqués pour le moment dans ces domaines d'analyse.

---

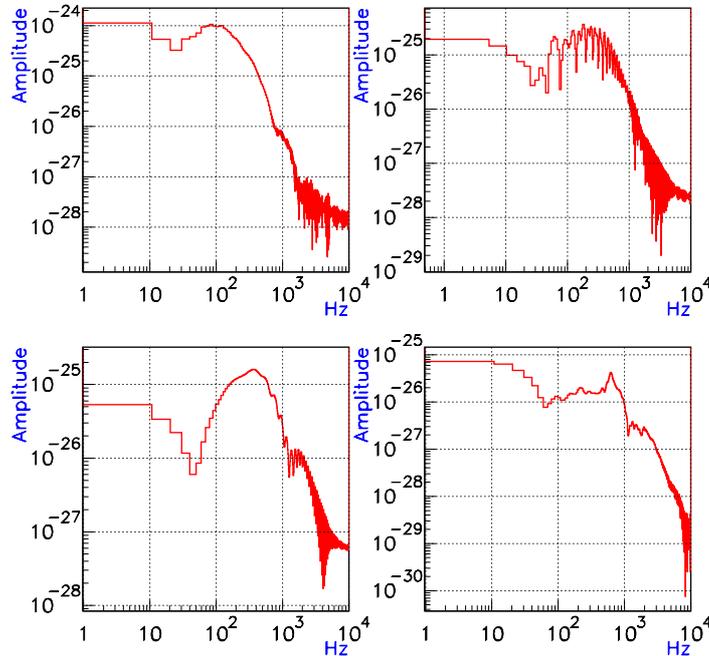
<sup>1</sup>Néanmoins, il ne fait aucun doute que la réalité différera quelque peu des simulations et qu'un certain nombre d'ajustements seront nécessaires en présence des vraies données, en premier lieu la définition des véritables seuils de déclenchement.

<sup>2</sup>Bien entendu, on espère que certaines sources seront visibles très loin, ce qui augmentera la statistique des événements détectés dans l'instrument. Néanmoins, dans tous les cas, il faudra dans un premier temps s'attendre à des rapports S/B assez faibles, comme dans tout détecteur encore en phase de développement.

### 5.2.2 Les signaux de supernova simulés par Zwerger-Müller

La bibliothèque des 78 signaux simulés de supernova de T. Zwerger et E. Müller [63] a permis de tester les algorithmes de filtrage sur des signaux “plausibles”. Les caractéristiques de ces formes d’onde ont déjà été présentées au paragraphe 1.3.4 et la figure 1.8 montre un exemple de trois signaux représentatifs de l’ensemble. Aussi, je me contenterai ici de décrire simplement en quelques lignes le processus de simulation.

Les calculs numériques ont été menés en deux dimensions, avec un code d’hydrodynamique newtonienne aux différences finies. Les coeurs d’étoiles simulés présentent une symétrie *axiale* ce qui implique que les ondes gravitationnelles émises avec la polarisation “x” sont nulles : seul  $h_+ \neq 0$ . Les conditions initiales étaient données par la quantité d’énergie de rotation ainsi que par la distribution de moment angulaire – en tout 18 modèles différents. L’équation d’état de la matière nucléaire avait une partie *polytropicque* et une partie *thermale*. L’effondrement est simulé par une réduction soudaine de l’indice *adiabatique*  $\Gamma$  utilisé dans l’équation d’état de la valeur d’équilibre (4/3) à une valeur comprise entre 1.28 et 1.325. Le signal gravitationnel a été calculé à partir de formules *post-newtoniennes* adaptées au traitement numérique de la simulation.



**Figure 5.1:** Quatre exemples de transformée de Fourier de signaux issus de la bibliothèque de Zwerger et Müller : la bande de fréquence dominante est essentiellement comprise entre 100 Hz et 1 kHz. Au delà, le spectre chute très vite et son amplitude dans les basses fréquences n’est pas très importante.

### 5.2.3 Modèle de bruit

Les fréquences caractéristiques des signaux gravitationnels impulsionnels sont comprises entre 100 Hz et 1 kHz, comme le montrent les exemples de spectre représentés sur la figure 5.1. Or, la courbe de sensibilité de Virgo est assez plate dans cette région – cf. figure 2.14 – ce qui explique le choix d’un modèle de bruit **blanc gaussien**<sup>3</sup> pour nos simulations. Sa densité spectrale (monolatérale)  $S_{\text{bruit}}$  est donc constante et elle est reliée à sa variance  $\sigma_{\text{bruit}}^2$  par la relation (A.7) qui prend la forme simplifiée suivante :

$$\sigma_{\text{bruit}}^2 = S_{\text{bruit}} f_c \quad (5.1)$$

<sup>3</sup>Sauf mention contraire, cette hypothèse prévaut dans toute la suite du manuscrit.

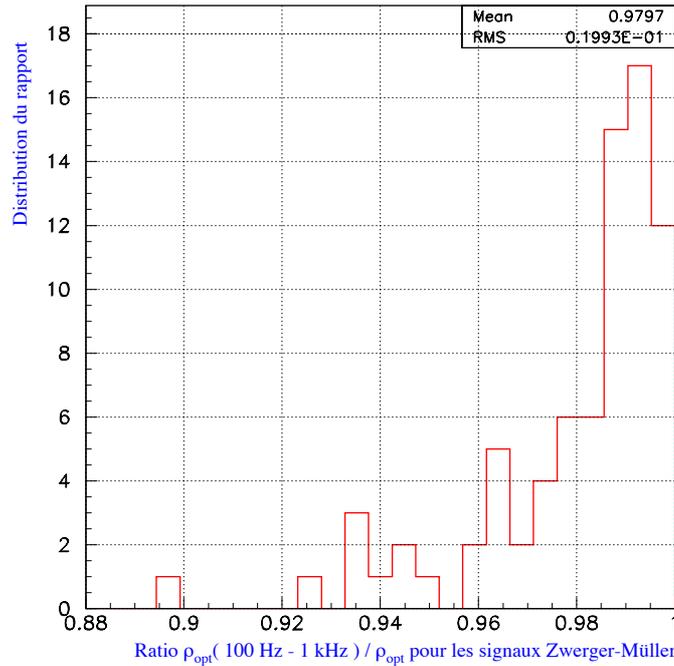
où  $f_c = f_s/2 = 10$  kHz est la fréquence de Nyquist (la moitié de la fréquence d'échantillonnage fixée à 20 kHz pour Virgo). En prenant pour  $S_{\text{bruit}}$  le minimum de la sensibilité du détecteur, environ  $(4 \cdot 10^{-23})^2 / \text{Hz}$ , on obtient  $\sigma_{\text{bruit}} = 4 \cdot 10^{-21}$ . La formule (C.10) donnant le rapport signal sur bruit (S/B)  $\rho_{\text{opt}}$  optimal d'un signal  $h(t)$  devient, en utilisant la relation de Parseval,

$$\rho_{\text{opt}}^2 = \frac{f_s}{\sigma_{\text{bruit}}^2} \int h(t)^2 dt \quad (5.2)$$

C'est simplement l'énergie du signal normalisée par la variance du bruit par unité de fréquence. Dans la suite, en l'absence de précision sur des conventions particulières, les rapports S/B seront calculés avec cette valeur du RMS du bruit.

Avant de poursuivre, on peut remarquer que la dépendance de l'expression (5.2) en la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  n'est qu'artificielle puisque l'équation (5.1) montre que le rapport  $f_s/\sigma_{\text{bruit}}^2$  est constant. Le paramètre important est la valeur de la DSP du bruit  $S_{\text{bruit}}$  en 1/Hz.

En restant dans l'espace de Fourier, on peut utiliser l'équation (5.2) pour calculer le rapport S/B optimal dans une bande de fréquence donnée afin de voir quelles sont celles qui contribuent le plus. La figure 5.2 présente la distribution de la fraction de  $\rho_{\text{opt}}$  comprise entre 100 Hz et 1 kHz pour les 78 signaux de Zwinger-Müller. Comme attendu pour les *bursts*, on peut voir qu'elle est toujours supérieure à 89% et qu'elle vaut même 98% en moyenne.



**Figure 5.2:** Distribution de la fraction de rapport signal sur bruit optimal  $\rho_{\text{opt}}$  comprise entre 100 Hz et 1 kHz pour les 78 signaux de la bibliothèque Zwinger-Müller. On peut voir que près de 98% de  $\rho_{\text{opt}}$  est en moyenne compris dans la bande de fréquence [100 Hz ; 1 kHz] et que, pour tous les signaux sauf un, la fraction est supérieure à 92%.

### 5.2.4 Pré-traitement des données

La reconstruction du “signal gravitationnel”  $h(t)$  à partir des données brutes issues du détecteur Virgo est un processus délicat : il faut d’abord **calibrer** le détecteur et ensuite extraire le canal physique non seulement à partir des signaux d’erreurs des photodiodes (en majorité de D1 – frange noire – mais pas uniquement) mais aussi en examinant les signaux de correction.

En effet, bien que les asservissements prévus pour Virgo aient un gain unité de l’ordre de quelques dizaines de Hz au plus, ceux-ci auront un effet sur des émissions d’ondes gravitationnelles à

basse fréquence, jusqu’au mur sismique. Typiquement, il peut s’agir du début de l’entrée dans la bande de fréquence du détecteur d’une phase spirale de coalescence de deux astres compacts. Le “vrai” signal sera alors interprété comme une dérive du détecteur par les boucles de rétroaction qui tenteront de le compenser ! Un important travail reste à effectuer dans ce domaine bien que des études préliminaires aient déjà eu lieu.

Une fois les méthodes de reconstruction opérationnelles, le signal délivré comprendra un certain nombre “d’impuretés” (résonances mécaniques permanentes ou transitoires, 50 Hz et ses harmoniques...) qui viendront se superposer à une DSP de bruit déjà assez compliquée – cf. figure 2.14.

En particulier, le bruit à très basse fréquence, provoqué en grande partie par l’activité sismique d’origine naturelle ou humaine et que les superatténuateurs ne peuvent pas annuler complètement, sera dominant. Dès lors, un traitement supplémentaire devra être opéré sur les données pour faciliter leurs analyses. Les différentes interventions en aval de la reconstruction de  $h$  et en amont de son traitement peuvent être séparées en deux catégories selon qu’il s’agit d’un processus général ou d’une action dépendant du type de sources étudié. Par exemple, les données destinées à la recherche de pulsars ou de la phase spirale de la coalescence de systèmes binaires peuvent être sous-échantillonnées à quelques kHz puisqu’il n’y a pas d’émission gravitationnelle au delà de ces fréquences.

Ces algorithmes de pré-traitement doivent pouvoir éliminer le bruit localisé à une fréquence donnée sans altérer un éventuel signal monochromatique moins puissant situé dans la même zone du spectre. C’est par exemple le cas de deux méthodes, l’une utilisée pour les interférences causées par le courant alternatif à 50 Hz [147], l’autre destinée à réduire les modes violons des fils de suspension [148]. Chacune se sert de propriétés particulières des bruits recherchés (la présence d’harmoniques dans un cas, le mécanisme physique de production de la perturbation dans l’autre) pour les identifier, les isoler et finalement les soustraire des données. Le fait amusant est que ces deux outils sont réellement complémentaires : les résonances éliminées par l’un sont laissées intactes par l’autre et vice et versa.

Une autre piste explorée pour la préparation des données consiste à étudier leur gaussianité. Les expériences menées en 1994 sur le prototype de 40 mètres à Caltech [149] et les premiers résultats de TAMA300 [115] montrent clairement un écart par rapport à la distribution gaussienne dès  $2 \sigma_{\text{bruit}}$ . Un algorithme [150] utilisé sur les données du 40m a permis d’obtenir des canaux plus gaussiens en éliminant une partie des bruits transitoires sans modifier de manière notable un signal de phase spirale de coalescence préalablement ajouté au bruit. Il est basé sur une méthode de prédiction linéaire qui, sous l’hypothèse de gaussianité, cherche à “deviner” la valeur suivante du bruit à partir des précédentes.

Pour la recherche de signaux impulsionsnels, la bande de fréquence intéressante est essentiellement comprise entre 100 Hz et 1 kHz et les rapports S/B attendus sont plutôt faibles ce qui rend le travail de pré-traitement des données essentiel. Par exemple, il serait intéressant de disposer de données **blanchies** pour lesquelles la DSP est presque constante ; des méthodes permettant d’obtenir ce résultat sont actuellement étudiées au sein de la collaboration Virgo [41]. On pourrait également imaginer de couper complètement les très basses fréquences ( $\lesssim 10 - 15$  Hz) dont la contribution au RMS du bruit est majeure<sup>4</sup>.

Un sous produit intéressant de ces méthodes de blanchiment (basées sur des processus de type MA-ARMA présentés rapidement au paragraphe A.2.2) est la production de DSP estimées “en ligne” afin de faire évoluer au cours du temps les paramètres du modèle décrivant le bruit de Virgo.

Avant de conclure ce paragraphe, on peut remarquer que la notion de bruit coloré est assez délicate à traduire concrètement : s’il est facile de voir qu’une DSP n’est pas plate, jusqu’où peut-on dire que le bruit reste presque blanc ? Un paramètre  $\zeta$  [41] permet de quantifier un peu mieux le choix entre ces qualificatifs. Si  $f_{\min}$  est la fréquence de coupure inférieure due au mur sismique, on pose :

$$\zeta = \frac{\exp \left[ \frac{1}{f_c - f_{\min}} \int_{f_{\min}}^{f_c} \ln(S_x(f)) df \right]}{\frac{1}{f_c - f_{\min}} \int_{f_{\min}}^{f_c} S_x(f) df} \quad (5.3)$$

Par convexité de l’exponentielle, on a toujours  $\zeta \leq 1$ , l’égalité n’étant atteinte que pour un bruit blanc correspondant à  $S_x(f) = \text{constante}$  ; en pratique,  $\zeta \approx 0.99$  pour une série de données

<sup>4</sup>Cf. figure E.2 pour plus de détails sur l’évolution du niveau de bruit en fonction de la bande de fréquence prise en compte.

générees à partir d'un bruit blanc. Au contraire, on s'attend à ce que ce paramètre soit beaucoup plus faible pour un bruit coloré. Et c'est effectivement ce qu'on trouve en calculant la valeur de  $\zeta$  à partir de la courbe de sensibilité de Virgo représentée sur la figure 2.14:  $\zeta \approx 4 \cdot 10^{-3} \ll 1$ .

S'il est clair que la DSA de Virgo varie beaucoup en fonction de la fréquence – signe d'un bruit coloré –, il est intéressant de chercher à isoler ses caractéristiques responsables d'une telle diminution de  $\zeta$ . Pour le voir, on commence par ne plus prendre en compte que deux composantes de la courbe de sensibilité: le bruit thermique total (et ses nombreux pics de résonance) et le bruit de photons pour avoir la remontée du bruit à haute fréquence. Le même calcul conduit alors à une valeur de  $\zeta$  similaire:  $\zeta \approx 5 \cdot 10^{-3}$ , ce qui apparaît raisonnable dans la mesure où ces deux contributions fixent l'allure générale du spectre.

Ensuite, on ôte toutes les résonances (miroir, fils de suspension...) en appliquant la même analyse aux modèles simplifiés de DSP définis à l'équation (E.1) et dont les valeurs des coefficients sont présentées dans la table E.1: la courbe de bruit "Standard" et les améliorations apportées par l'utilisation de fils de suspensions en quartz ou de miroirs en saphir (YAG). Les résultats de ces calculs se trouvent dans la table 5.1 où ils sont comparés avec celui qui correspond au spectre de bruit complet attendu pour Virgo. On peut voir immédiatement qu'ils sont beaucoup plus élevés que la valeur de référence, particulièrement pour les deux spectres améliorés au niveau du bruit thermique. Cela montre que la forme de la densité spectrale n'est qu'une contribution parmi d'autres à la coloration du bruit: les pics de résonances, même de largeur assez faible comptent beaucoup.

Configuration	Virgo complet	Standard	Fils de Quartz	Fils de Quartz + Miroirs YAG
$\zeta$	$4 \cdot 10^{-3}$	0.15	0.52	0.47

**Tableau 5.1:** Valeurs du paramètre de blanchiment  $\zeta$  pour les modèles simplifiés de bruit de Virgo présentés à l'appendice E – cf. équation (E.1) et table E.1.

Aussi, le paramètre  $\zeta$ , défini dans [41] pour tester la qualité de blanchiment de données simulées de Virgo doit être utilisé avec prudence: s'il permet de séparer les bruits blancs ( $\zeta \lesssim 1$ ) de bruits colorés ( $\zeta < 1$ ), il n'offre pas un moyen précis de quantifier le niveau de coloration du spectre. En effet, dans [99], on montre que l'ajout d'une composante monochromatique au bruit blanc de manière à augmenter artificiellement le taux de déclenchement du filtre ALF de 10% ne modifie que très peu la valeur de  $\zeta$  qui vaut alors encore 0.97 (indépendamment de la fréquence d'oscillation). Dès  $\zeta = 0.95$ , le taux de fausses alarmes est deux ordres de grandeur au dessus du niveau attendu.

## 5.3 Méthodes de filtrage

Les différents algorithmes de filtrage développés depuis 1997 au LAL pour la recherche de signaux gravitationnels impulsionnels peuvent être classés en deux catégories: d'une part, des méthodes générales ne faisant appel à aucune hypothèse particulière sur la nature du signal, et d'autre part des procédures cherchant à détecter certaines caractéristiques des formes d'onde. Ces dernières s'apparentent au filtrage de Wiener, à la différence que seule une partie du signal – commune à différentes ondes gravitationnelles – est recherchée.

Ces méthodes sont conçues pour être utilisées en temps réel afin d'isoler des zones intéressantes de données sur lesquelles seront faites des analyses ultérieures plus poussées. Les deux principaux critères auxquels elles doivent satisfaire sont la robustesse vis à vis de la forme du signal et la rapidité d'exécution (incluant aussi l'analyse, d'où la volonté de construire des filtres dont les sorties  $\Phi$  aient une distribution de probabilité simple sous l'hypothèse de bruit seul). Si nécessaire, on construit à partir de  $\Phi$  une seconde variable  $\tilde{\Phi}$  qui, au moins dans une bonne approximation, suit une loi de probabilité normale. C'est le **rapport signal sur bruit** de la méthode.

Même si ces filtres sont par construction sous-optimaux, un travail est mené pour les rendre aussi efficaces que possible, sur la base de critères détaillés au paragraphe 6.3 et en utilisant les signaux de Zwerger-Müller – cf. paragraphe 5.2.2 – et le modèle de bruit décrit précédemment – cf. paragraphe 5.2.3.

### 5.3.1 Des méthodes générales

Ce paragraphe détaille les quatre méthodes mises au point pour l'analyse des signaux gravitationnels impulsionnels; elles sont présentées dans l'ordre chronologique de leur étude, qui est aussi d'ailleurs le classement de leurs efficacités – cf. section 6.3 – par ordre croissant. Cette corrélation montre les progrès dans la compréhension des caractéristiques dominantes des signaux cherchés ainsi que dans la manière de les détecter le mieux possible.

Chacune de ces méthodes fonctionne sur le même schéma : à partir d'une **fenêtre**  $W_i$  contenant  $N$  échantillons de données, la sortie du filtre  $\Phi_i$  est calculée, puis comparée à un **seuil**  $\eta$  fixé au préalable en fonction du **taux de fausses alarmes**  $\tau$ . Si  $\Phi_i$  excède le seuil, une alarme est enregistrée. Ensuite, la zone de données analysée se déplace,  $W_i \rightarrow W_{i+1}$  et le processus recommence.

#### Calculer le nombre d'échantillons de la fenêtre d'analyse dépassant un seuil

Le principe de cette méthode est de s'intéresser à la distribution des données dans la fenêtre d'analyse en comptant le nombre de valeurs  $(n_k)_{1 \leq k \leq N}$  vérifiant

$$|n_k| \geq s \times \sigma_{\text{bruit}} \quad (5.4)$$

où le seuil  $s$  est un des deux paramètres de l'algorithme – avec le choix de la taille de la fenêtre d'analyse  $N$ .

Optimiser la valeur de  $s$  s'effectue à l'aide de simulations de Monte-Carlo du processus de détection : si  $s$  est choisi trop petit, la fraction de points supérieurs au seuil sera importante simplement à cause des fluctuations statistiques du bruit et la contribution d'un signal passera facilement inaperçue. De même, si  $s$  est très grand, le filtre ne déclenchera pas non plus en présence d'une onde gravitationnelle car les rapports S/B attendus sont faibles.

Dans la suite, les variables se rapportant à cet algorithme seront désignées par les deux lettres "bc" – pour *Bin Counting*, le nom sous lequel cette méthode a été publiée dans [151] – placées en exposant. Sous l'hypothèse de bruit blanc gaussien, la sortie  $\Phi^{\text{bc}}$  de ce filtre suit une distribution binomiale de paramètre  $p = \text{erfc}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$  où  $\text{erfc}$  est la fonction d'erreur complémentaire. En particulier, ses grandeurs caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{cases} \text{Pour } n \leq N, \mathbb{P}\left(\Phi^{\text{bc}} = n\right) = \binom{N}{n} \left[\text{erfc}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right]^n \left[1 - \text{erfc}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right]^{N-n} \\ \text{Moyenne: } \mu^{\text{bc}} = Np \\ \text{Ecart-type: } \sigma^{\text{bc}} = \sqrt{Np(1-p)} \end{cases}$$

Si les deux conditions  $Np > 5$  et  $N(1-p) > 5$  sont satisfaites [152] – seule la première est en fait contraignante en pratique car  $p$  est une probabilité associée à un événement statistiquement "rare" (donnée supérieure à  $s \times \sigma_{\text{bruit}}$  en valeur absolue) et donc faible – la quantité  $\tilde{\Phi}^{\text{bc}}$  définie par :

$$\tilde{\Phi}^{\text{bc}} = \frac{\Phi^{\text{bc}} - \mu^{\text{bc}}}{\sigma^{\text{bc}}} \quad (5.5)$$

est proche d'une variable normale. Typiquement,  $s \sim 2$  (valeur obtenue à l'aide de la bibliothèque des signaux de Zwerger-Müller) et donc  $p \sim 5\%$  ce qui met une limite inférieure sur  $N$  de l'ordre de 100 pour que l'approximation de la distribution normale soit valable.

#### Calculer l'énergie du signal

Une autre manière d'extraire une information globale des données contenues dans une fenêtre d'analyse<sup>5</sup>  $W_i = \{x(1), \dots, x(n)\}$  est de calculer leur énergie  $\Phi^{\text{nf}}$  – "nf" pour *Norm Filter* – [151] définie par

<sup>5</sup>La donnée  $x(i)$  est prise au temps  $t_i$  – fourni par le système GPS –; on suppose que l'acquisition est à cadence constante et donc que  $|t_i - t_j| = \frac{|i-j|}{f_s}$  où  $f_s = 20$  kHz est la fréquence d'échantillonnage de Virgo.

$$\Phi^{\text{mf}} = \sum_{k=1}^{k=N} x(k)^2 \quad (5.6)$$

En présence de bruit,  $\Phi^{\text{mf}}$  est une variable de  $\chi^2$  à  $N$  degrés de liberté, de moyenne<sup>6</sup>  $\mu^{\text{mf}} = N$  et de RMS  $\sigma^{\text{mf}} = \sqrt{2N}$ . Même si sa distribution de probabilité est standard et que la correspondance seuil  $\eta \leftrightarrow$  taux de fausses alarmes  $\tau$  est disponible soit dans des tables, soit numériquement, on peut vouloir l'approcher par une loi normale. On construit alors une nouvelle variable  $\tilde{\Phi}^{\text{mf}}$  donnée par

$$\tilde{\Phi}^{\text{mf}} = \sqrt{2\Phi^{\text{mf}}} - \sqrt{2N - 1} \quad (5.7)$$

qui a une distribution quasi-normale pour  $N > 30$  [152]. Une méthode similaire mais fonctionnant en fréquence a été développée de manière indépendante dans [153].

### Calculer la moyenne du signal

Ce filtre [154] est certainement le plus simple que l'on puisse imaginer, mais pas le moins efficace ! Il se "contente" de calculer la moyenne des données contenues dans la fenêtre d'analyse – d'où son nom *Mean Filter*. Conservant des notations identiques à celles utilisées dans les paragraphes précédents, on a donc

$$\Phi^{\text{mf}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} x(k) \quad (5.8)$$

Sous l'hypothèse de bruit seul,  $\Phi^{\text{mf}}$  suit une distribution gaussienne de moyenne  $\mu^{\text{mf}}$  nulle et d'écart type  $\sigma^{\text{mf}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ . La variable normale correspondante s'en déduit immédiatement :

$$\tilde{\Phi}^{\text{mf}} = \frac{\Phi^{\text{mf}}}{\sigma^{\text{mf}}} \quad (5.9)$$

### Un détecteur de pente

Chacun des algorithmes présentés précédemment cherche à détecter une variation de la structure des données, peu probable sous l'hypothèse de bruit seul et qui pourrait donc être le signe de la présence d'un signal physique réel. Bien qu'ayant tous des performances intéressantes (comme nous le verrons au paragraphe 6.3), ils ne détectent une perturbation donnée que de manière incomplète puisqu'ils ne sont sensibles qu'à un aspect particulier de celle-ci : répartition des valeurs dans la fenêtre d'analyse, énergie totale ou encore calcul de la moyenne. Une méthode mélangeant ces différents aspects donnera nécessairement de meilleurs résultats.

Une façon naturelle d'obtenir une information plus précise sur une variation dans les données est de trouver l'approximation linéaire  $x(k) = at(k) + b$ ,  $1 \leq k \leq N$ , la plus proche – au sens des moindres carrés – de leur évolution dans la fenêtre d'analyse.

Notant  $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} x(k)$  la valeur moyenne de la quantité  $x$  à l'intérieur de la fenêtre d'analyse considérée, la minimisation de l'expression

$$\chi^2(a, b) = \sum_{k=1}^{k=N} [x(k) - a t_k - b]^2 \quad (5.10)$$

permet de déterminer les valeurs de la pente et de l'ordonnée à l'origine :

$$a = \frac{\langle x t \rangle - \langle x \rangle \langle t \rangle}{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2} \quad (5.11)$$

$$b = \frac{\langle x \rangle \langle t^2 \rangle - \langle x t \rangle \langle t \rangle}{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2} \quad (5.12)$$

---

<sup>6</sup>A partir de maintenant, on pose  $\sigma_{\text{bruit}} = 1$  pour alléger les notations. Comme le bruit est blanc, on peut toujours se ramener à ce cas de figure en divisant les signaux gravitationnels simulés par l'écart-type du bruit.

En cas de signal,  $a$  – sortie appelée *Slope Filter* (SF) – peut présenter une brusque variation et  $b$  prendre une valeur significativement non nulle. La connaissance de ces deux quantités renseigne à la fois sur la répartition des données, leur valeur moyenne ou encore la soudaineté et l’amplitude de la perturbation.

En faisant toujours l’hypothèse de bruit blanc gaussien,  $a$  et  $b$  sont également des variables gaussiennes car elles sont obtenues par combinaison linéaire à partir des réalisations du bruit. Leur normalisation par leurs RMS respectifs – facilement calculables – conduit à deux variables  $X_a$  et  $X_b$  qui suivent une loi de probabilité normale : moyenne nulle, RMS unité. Celles-ci ne sont toutefois pas indépendantes et sont même assez fortement (anti)corrélées car leur coefficient de corrélation  $C_{ab} = \mathbb{E}(X_a X_b)$  vaut environ<sup>7</sup>  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$ . Pour faire ressortir les parts d’information propres que chacune des quantités contient, il suffit de les décorréler ce qui amène à définir deux nouvelles variables normales :

$$X_{\pm} = \frac{X_a \pm X_b}{\sqrt{2(1 \pm C_{ab})}} \quad (5.13)$$

À partir d’elles, on peut construire un  $\chi^2$  à deux degrés de liberté qui donne une estimation “optimale”, i.e. sans redondance, de la qualité avec laquelle le modèle linéaire décrit les données :  $\Phi^{\text{alf}} = X_+^2 + X_-^2$ . Ce filtre unique est appelé *ALF* – pour *Advanced Linearfit Filter*, dénomination compliquée trouvée pour justifier *a posteriori* le choix de l’acronyme – et son étude détaillée est l’objet du chapitre 3 de [99], référence que le lecteur est invité à consulter pour plus de détails sur cet algorithme. Une partie des résultats concernant cette méthode ont été publiés dans [155].

La méthode *ALF* – optimisée par l’utilisation en parallèle de plusieurs filtres associés à des tailles de fenêtre différentes – est actuellement la meilleure parmi tous les filtres temps réel étudiés au sein de notre groupe.

### Relations de récurrence et rapidité de calcul

Tous les filtres généraux présentés ici ont une caractéristique commune qui les rend très intéressants pour l’analyse temps réel : grâce à des relations de récurrence simples entre les composants intervenant dans leur expression, leur calcul est très rapide, voire complètement négligeable en temps puisqu’on passe de  $\Phi_i$  à  $\Phi_{i+1}$  au prix de quelques opérations élémentaires.

Ainsi, on peut sans problème construire une batterie de telles méthodes fonctionnant en parallèle à partir du même flot de données sans prendre de retard par rapport à l’acquisition. En effet, la taille de la fenêtre d’analyse  $N$  est un paramètre crucial pour juger de l’adéquation entre un signal gravitationnel donné et le filtre qui cherche à la détecter : la durée temporelle de l’événement et la quantité de valeurs prises en compte simultanément par l’algorithme doivent en général être du même ordre. Donc plusieurs versions d’une même méthode (analysant simultanément des quantités de données différentes) seront utilisées en parallèle pour couvrir la gamme la plus large possible au niveau de la durée des signaux.

Une autre conséquence de cette propriété de récurrence est que la **longueur de corrélation** d’un tel filtre n’est pas nulle : les fenêtres d’analyse étant décalées de donnée en donnée, les sorties consécutives vont être très proches puisqu’elles concernent presque le même ensemble de données. En particulier, un seuil de détection sera le plus souvent dépassé par une série quasi consécutive de résultats de l’algorithme qui correspondent en fait au même événement. Cela conduit à redéfinir le taux d’événements en identifiant ceux qui sont très proches.

Ces “multi-événements” sont assez délicats à manipuler lorsque l’on cherche à faire des coïncidences entre deux (ou plus) filtres issus de la même méthode (et différant par exemple par la taille de la fenêtre d’analyse) ou correspondant à des algorithmes différents. Un autre point à régler dans ce cas est la nature du rapprochement effectué entre les différentes sorties : opère-t-on simplement un “OU” (l’un des filtres au moins détecte) ou un “ET” (détection simultanée en coïncidence). Ces questions seront abordées au paragraphe 6.2.

### 5.3.2 Filtrage adapté aux principales caractéristiques des *bursts*

Une approche alternative aux méthodes de détection générales présentées au paragraphe précédent consiste à chercher des comportements caractéristiques des signaux, suffisamment généraux pour

<sup>7</sup>Approximation à moins de 5% près dès que la taille de la fenêtre d’analyse  $N \gtrsim 10$ .

être commun à une famille entière d'ondes gravitationnelles, mais également assez particuliers pour pouvoir ressortir du bruit de fond. L'étude des exemples variés de *bursts* permet de dégager deux formes particulières repérables par filtrage de type Wiener : la présence d'un pic principal (proche d'une gaussienne) ou la décroissance du signal accompagnée d'une oscillation, assimilable à une sinusoïde amortie.

Si les algorithmes décrits dans la suite font appel au vocabulaire et aux méthodes du filtrage adapté – cf. appendice C –, ils n'appartiennent pas pour autant à cette famille puisqu'ils ne sont sensibles qu'à une partie "générique" du signal gravitationnel dont le détail exact reste inconnu.

### Recherche de pics

La façon la plus simple de décrire un signal "piqué" est de supposer qu'il s'agit d'une gaussienne d'une certaine largeur  $\sigma$  dilatée pour obtenir l'amplitude souhaitée. Cet algorithme ainsi que ses performances de base sont décrits en détail au paragraphe C.2 et je vais donc me contenter ici de résumer ses principales caractéristiques.

Une fois sa largeur  $\sigma$  définie, un calque  $k_\sigma(t)$  est proportionnel à  $\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$  – cf. équation (C.20) – et la sortie du filtre ("*Peak Correlator*") correspondant n'est rien d'autre que le rapport S/B obtenu par filtrage de Wiener : si  $x(t)$  désigne les données du détecteur, on a avec les notations de l'appendice C :

$$\Phi^{\text{pc}} = \frac{\langle x(t) | k_\sigma(t) \rangle}{\sqrt{\langle k_\sigma(t) | k_\sigma(t) \rangle}} \quad (5.14)$$

### Recherche d'oscillations amorties

Le cas de la recherche des oscillations amorties – *Damped Sine* – se traite de la même manière que celui des pics gaussiens, à la différence que le calque dépend de plus de paramètres, 3 en toute généralité : la fréquence  $\omega/2\pi$  de l'oscillation, son temps caractéristique d'amortissement  $\tau$  et un terme de phase  $\phi$  :

$$k_{\omega,\tau,\phi}(t) \propto \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\omega t + \phi) \quad (5.15)$$

À la place du temps d'amortissement  $\tau$ , on préférera le plus souvent utiliser une grandeur sans dimension, le facteur de qualité  $Q$ , défini par

$$Q = \pi \omega \tau \quad (5.16)$$

Une distinction est à faire parmi ces paramètres entre  $(\omega, Q)$  d'une part et  $\phi$  d'autre part : si les deux premiers sont caractéristiques du signal, le troisième est une phase essentiellement aléatoire, dépendant du moment où commence le signal<sup>8</sup> et de celui où il devient détectable par l'instrument. Deux stratégies seront donc utilisées pour s'affranchir de l'angle  $\phi$ .

- La plus simple consiste à laisser de côté ce paramètre et à s'intéresser séparément à deux sous-familles de signaux :  $\mathfrak{C}_{\omega,Q} = k_{\omega,Q,0}(t)$  – sinus amorti – et  $\mathfrak{S}_{\omega,Q} = k_{\omega,Q,\pi/2}(t)$  – cosinus amorti.
- La seconde consiste à utiliser de manière combinée les informations issues du filtrage avec un cosinus et un sinus, à la manière des algorithmes de recherche de la partie spirale de la coalescence d'un système binaire, signaux contenant également une phase aléatoire. À partir des valeurs  $\Phi^{\mathfrak{C}}$  et  $\Phi^{\mathfrak{S}}$ , on choisit la valeur de  $\phi$  qui maximise ce résultat, ce qui revient à prendre comme sortie de la méthode la quantité [156]

$$\Phi^{\text{ds}} = \sqrt{(\Phi^{\mathfrak{C}})^2 + (\Phi^{\mathfrak{S}})^2} \quad (5.17)$$

Le problème est que les canaux  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{S}$  ne sont pas indépendants quand  $\tau < +\infty$ .

---

<sup>8</sup>Par exemple pour le cas d'oscillations de trou noir issu d'un système double d'étoiles compactes, l'instant où la coalescence proprement dite se termine et laisse la place à la phase de mise à l'équilibre du nouvel objet formé.

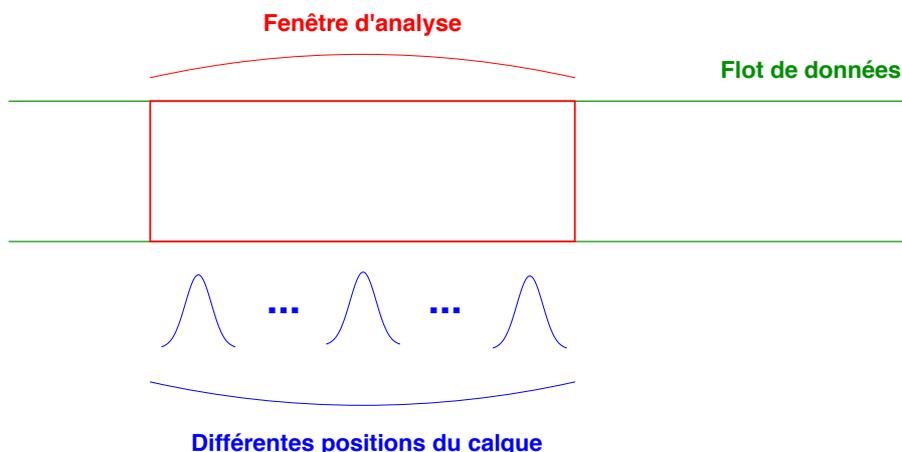
### Implémentation pratique

Le mode de calcul de la sortie de ces filtres diffère de celui présenté pour les méthodes générales. On pourrait bien sûr procéder de manière identique (i.e. bouger la fenêtre d'analyse de donnée en donnée) mais l'absence de relations de récurrence rendrait immédiatement prohibitif le temps CPU nécessaire, et ce d'autant plus qu'un algorithme de filtrage adapté a le défaut de ses qualités : s'il est optimal parmi les méthodes linéaires pour la détection d'un événement exactement identique à lui-même, ses performances chutent très vite dès que ses caractéristiques diffèrent de celles (inconnues) du signal réel – voir l'appendice C. Pour assurer une efficacité raisonnable de la méthode de détection, il faut utiliser en parallèle plusieurs **calques** répartis de manière précise dans l'**espace des paramètres** – i.e. l'ensemble des signaux physiquement admissibles – comme on le verra aux paragraphes 5.4 et 5.5.

L'algorithme générique de calcul est basé sur l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (FFT) (cf. paragraphe C.2.2 pour le détail complet de la méthode) :

- on calcule la FFT des données contenues dans la fenêtre d'analyse ;
- on multiplie cette fonction par le conjugué de la FFT du calque ;
- on revient dans l'espace direct par une FFT inverse et on prend le maximum des valeurs obtenues, après normalisation.

Ce procédé utilise le fait que la transformée de Fourier (notée  $\mathfrak{F}$  selon la convention de l'appendice A) de la corrélation de deux fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  est donnée par le produit dans l'espace des fréquences de  $\mathfrak{F}[x(t)](f)$  et de  $\mathfrak{F}[y(t)]^*(f)$ . Ainsi, par le calcul unique décrit ci-dessus, on a accès à toutes les corrélations entre les données et la fonction calque lorsque celle-ci se “déplace” dans la fenêtre d'analyse comme illustré sur la figure 5.3. Le maximum détermine la zone (et l'instant d'occurrence) où la répartition des valeurs est la plus proche du filtre utilisé.



**Figure 5.3:** Le calcul de la corrélation entre le calque et la fenêtre d'analyse par passage dans l'espace de Fourier donne en fait accès directement à toutes les valeurs de celle-ci correspondant aux différentes positions relatives du filtre par rapport aux données.

Théoriquement, il suffirait une fois ces quantités calculées de prendre une nouvelle série de données et donc de déplacer la fenêtre d'une longueur égale à sa taille  $N$ . Dans la pratique, on est obligé de prendre quelques précautions pour tenir compte du nombre fini de valeurs analysées simultanément et du fait que celles-ci ne sont pas périodiques. Deux techniques servent à atténuer ces effets : le *zero padding* (ajouter  $N$  zéros après les données) et la réduction du décalage de la fenêtre d'analyse de  $N$  à  $N/2$  ou mieux  $N/4$  – et dans ce cas le maximum n'est pris que sur la moitié “centrale” des sorties du filtre, de  $N/4$  à  $3N/4$ .

Comment choisir les calques à utiliser? Leurs positions doivent être définies avec soin selon des critères pertinents que nous allons présenter maintenant. Après une rapide introduction générale du cadre et du formalisme de méthode, nous l'appliquerons aux deux exemples de filtrage adapté développés précédemment : les pics gaussiens et les sinusoides amorties.

## 5.4 Espace des paramètres et pavage

Même dans le cas où la forme du signal est connue – par exemple pour la phase spiralante d’une coalescence de binaires ou les oscillations de trous noirs –, les ondes gravitationnelles dépendent de paramètres  $\vec{\lambda}$  inconnus. L’ensemble des valeurs physiquement admissibles de ce vecteur représente **l’espace des paramètres**  $\mathbb{P}$  qui, bien que *continu*, doit être couvert par un nombre *fini* de calques. Or, on a vu qu’il est nécessaire que le calque soit “*proche*” du signal cherché pour que le rapport S/B soit maximal. Pour obtenir un cadre d’analyse satisfaisant, il faut donc répondre à plusieurs questions.

- Comment quantifier la **proximité** de deux calques?
- Où placer les calques dans  $\mathbb{P}$ ?
- Comment garantir une perte minimale d’événements tout en conservant un nombre de calques raisonnables?

Le paragraphe suivant présente la méthode “usuelle” de résolution de ces problèmes; basée sur des idées très simples, elle a été rendue très – trop? – formelle dans [43]. Elle sera ensuite appliquée tout d’abord dans le cas de la recherche des pics gaussiens (où  $\mathbb{P}$  est monodimensionnel), puis dans celui des oscillations de trous noirs ( $\mathbb{P}$  de dimension deux).

### 5.4.1 Problématique

On considère deux calques  $k_{\vec{\lambda}}$  et  $k_{\vec{\lambda}+d\vec{\lambda}}$  dont les vecteurs de paramètres diffèrent d’une – petite – quantité  $d\vec{\lambda}$ . Chacun a été normé selon la prescription (C.19) – voir l’appendice C consacré à la théorie du filtrage adapté – ce qui implique que la **fonction d’ambiguïté**

$$\Gamma(\vec{\lambda}; d\vec{\lambda}) = \langle k_{\vec{\lambda}} | k_{\vec{\lambda}+d\vec{\lambda}} \rangle \quad (5.18)$$

est maximale pour  $d\vec{\lambda} = \vec{0}$  et vaut 1. Suivant les notations de [43], on définit le **recouvrement minimal**<sup>9</sup>  $MM$  et on dira que les calques sont suffisamment proches si  $\Gamma(\vec{\lambda}; d\vec{\lambda}) \geq MM$ .

$1 - MM$  représente ainsi la perte maximale de rapport S/B admissible en parcourant  $\mathbb{P}$ : un signal quelconque  $k_{\vec{\mu}}(t)$  doit être détecté par l’un au moins des calques “voisins” avec une perte de rapport S/B inférieure. Traditionnellement, on prend  $MM = 0.97$  pour avoir une perte en événements  $1 - MM^3$  de l’ordre de  $\approx 10\%$ .

La **zone d’efficacité**  $\mathfrak{E}$  du calque  $k_{\vec{\lambda}}$  dans l’espace des paramètres  $\mathbb{P}$  est définie comme étant l’ensemble des  $\vec{\mu} = \vec{\lambda} + d\vec{\lambda}$  tels que  $\Gamma(\vec{\lambda}; d\vec{\lambda}) \geq MM$ . C’est une (hyper)surface dont le contour est en général très délicat à déterminer; en pratique, on fait l’hypothèse que  $\|d\vec{\lambda}\| \ll \|\vec{\lambda}\|$  et on développe  $\Gamma(\vec{\lambda}; d\vec{\lambda})$  au second ordre:

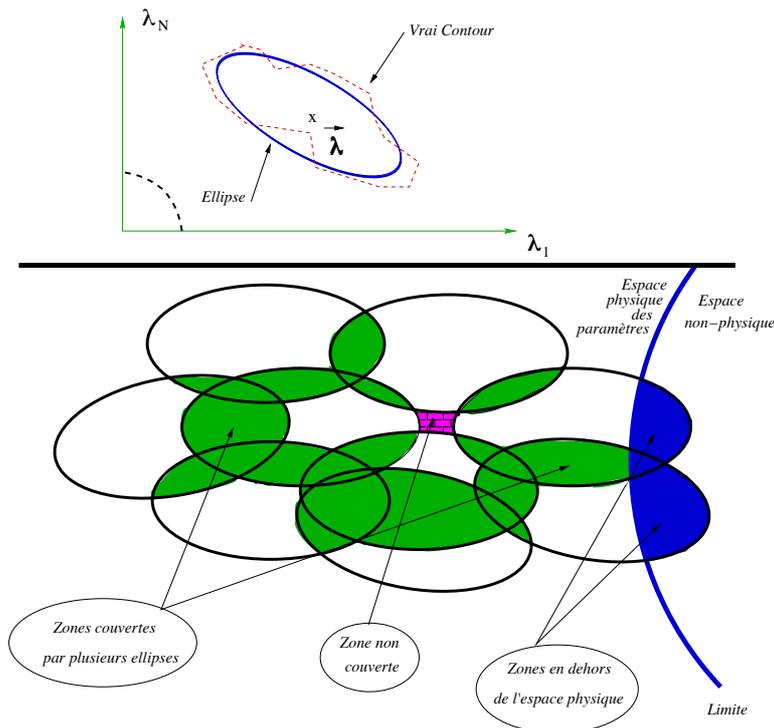
$$\Gamma(\vec{\lambda}; d\vec{\lambda}) = \underbrace{\Gamma(\vec{\lambda}; \vec{0})}_{= 1 \text{ (Max.)}} + \underbrace{\langle \vec{u}(\vec{\lambda}) | d\vec{\lambda} \rangle}_{= \vec{0}} - \langle d\vec{\lambda} | \mathfrak{M}(\vec{\lambda}) | d\vec{\lambda} \rangle \quad (5.19)$$

Comme  $\Gamma(\vec{\lambda}; \vec{0}) = 1$  est un maximum absolu de la fonction d’ambiguïté, le vecteur  $\vec{u}(\vec{\lambda})$  des dérivés premières est nul et  $\mathfrak{M}(\vec{\lambda})$  est la matrice d’une *forme quadratique définie positive*. La zone d’efficacité  $\mathfrak{E}$  est alors définie par:

$$\langle d\vec{\lambda} | \mathfrak{M}(\vec{\lambda}) | d\vec{\lambda} \rangle \leq 1 - MM \quad (5.20)$$

ce qui correspond à l’intérieur d’un **ellipsoïde** centré au point de paramètre  $\vec{\lambda}$ . Pour assurer que le système de filtrage a un comportement identique avec chacun des signaux physiques possibles, il faut recouvrir l’ensemble de  $\mathbb{P}$  par une série d’hypersurfaces  $\mathfrak{E}$ . On parle alors de **pavage** de l’espace des paramètres.

<sup>9</sup>“Minimal Match” en anglais.



**Figure 5.4:** Exemple de pavage de l'espace des paramètres  $\mathbb{P}$  et des problèmes afférents : comment placer optimalement les ellipses les unes par rapport aux autres.

Deux questions se posent ensuite : quelle méthode employer pour ce pavage ? Comment juger de son efficacité ? Ces problèmes sont intimement liés et il est très difficile de les résoudre de manière satisfaisante car il faut à la fois couvrir tout l'espace des paramètres, mais également réduire au maximum le nombre de calques – et donc d'ellipsoïdes – pour limiter la puissance de calcul nécessaire.

En dimension 2, la question de la couverture optimale d'une surface donnée par un type de figure particulier est déjà délicate sur le plan mathématique et les quelques cas complètement solubles le sont grâce à l'ajout d'hypothèses supplémentaires, non vérifiées pour les applications pratiques : surface infinie (*sans bords !*), motif de pavage invariant...

L'absence d'une méthode *ad hoc* de pavage fait qu'une stratégie doit être définie pour résoudre chaque problème particulier : l'une d'entre-elles, développée au sein du groupe Virgo-LAL par Fabien Cavalier et moi-même, est décrite au paragraphe 5.5 et concerne les oscillations de trous noirs ; [44] présente la méthode mise au point par LIGO et GEO600 pour placer les calques dans le cas de la phase spirale des coalescences de binaires – cet algorithme ne teste pas l'uniformité de la couverture de  $\mathfrak{F}$ .

Les principales difficultés techniques à résoudre sont présentées sur la figure 5.4. Il y a tout d'abord le fait que l'ellipse calculée n'est qu'une approximation de la surface réelle (cf. la partie supérieure du schéma) ; ce problème est difficile à prendre en compte et il est en général négligé car on le suppose résolu par le défaut majeur des pavages, le **chevauchement** des ellipses visant à éviter de laisser des espaces vides entre les zones d'efficacité des calques.

Ce dernier effet est amplifié par le fait que les méthodes de pavage sont *itératives* : on place une première ellipse, puis ses voisines et ainsi de suite de proche en proche. Ainsi, aucune vision d'ensemble ne permet de sélectionner les positions les plus intéressantes pour celles-ci – d'ailleurs le plus souvent impossibles à déterminer. Une fraction éventuellement importante des ellipses n'a au final qu'une **surface efficace** faible : la majorité de leurs zones d'efficacité est couverte par leurs voisines. Cela peut augmenter considérablement le nombre de calques et donc le temps de calcul : dans l'exemple "typique" présenté dans le bas de la figure 5.4, on peut estimer à 30% la fraction de surface recouverte par plus d'une ellipse. Enfin, ce "gaspillage" est encore accru par les **effets de bords** : une partie des zones d'efficacité se retrouve hors de l'espace des paramètres et est donc perdue.

Si le travail de pavage intervient en amont de l'analyse proprement dite des données, il n'en est pas moins essentiel pour assurer la meilleure détection possible associée à une puissance de calcul raisonnable. La section 5.5 présente en détail une application de pavage à un espace des paramètres  $\mathbb{P}$  bidimensionnel ; ici, nous nous limitons volontairement à un cas beaucoup plus simple, celui de la recherche d'un pic gaussien entièrement déterminé par la connaissance de sa demi-largeur  $\sigma$  (cf. paragraphe C.2). Ce travail a été la première application envisagée de la méthode du filtrage adapté à la détection des signaux impulsionnels au sein du groupe Virgo-LAL et est détaillé dans [151].

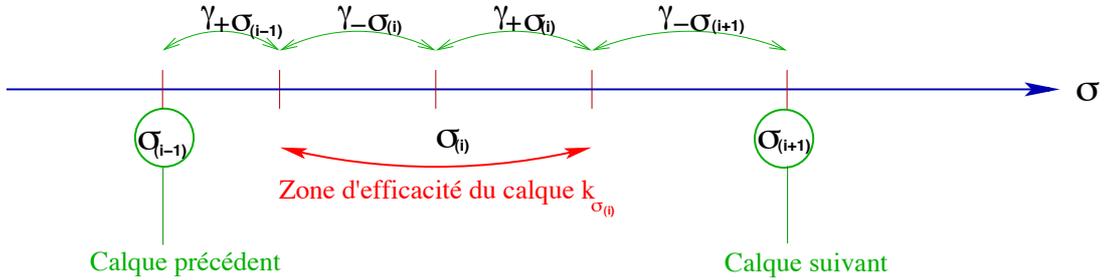
### 5.4.2 Application à la recherche d'un pic gaussien

On conserve ici les notations établies dans les paragraphes précédents et on fait encore l'hypothèse que le bruit du détecteur est *blanc*. La théorie des intégrales gaussiennes permet de calculer la fonction d'ambiguïté.

$$\Gamma(\sigma, d\sigma) = \sqrt{\frac{2 \left(1 + \frac{d\sigma}{\sigma}\right)}{1 + \left(1 + \frac{d\sigma}{\sigma}\right)^2}} \quad (5.21)$$

On a bien  $\Gamma(\sigma, 0) = 1$  et l'application de la prescription  $\Gamma(\sigma, d\sigma) \geq MM$  conduit au résultat suivant : un calque  $k_{\sigma}(t)$  est efficace dans la région de  $\mathbb{P}$  comprise entre  $\sigma_- = [1 + \gamma_- (MM)]\sigma$  et  $\sigma_+ = [1 + \gamma_+ (MM)]\sigma$  avec

$$\gamma_{\pm}(MM) = \frac{\sqrt{1 - MM^2} (\sqrt{1 - MM^2} \pm \sqrt{1 + MM^2})}{MM^2} \approx \pm 2 \sqrt{1 - MM} \quad (5.22)$$



**Figure 5.5:** Algorithme de placement des calques pour les signaux gaussiens.

A l'aide de cette relation, il est facile de placer les deux calques "voisins"  $k_{\sigma_{(i-1)}}(t)$  et  $k_{\sigma_{(i+1)}}(t)$  d'un filtre  $k_{\sigma_{(i)}}(t)$  en suivant la méthode représentée sur la figure (5.5) : les nouveaux calques ont des zones d'efficacité qui s'étendent exactement<sup>10</sup> jusqu'aux bornes de celle du calque  $k_{\sigma_{(i)}}(t)$ . On a

$$\begin{cases} \sigma_{(i+1)} = \frac{1+\gamma_+}{1+\gamma_-} \sigma_{(i)} \\ \sigma_{(i-1)} = \frac{1+\gamma_-}{1+\gamma_+} \sigma_{(i)} \end{cases} \quad (5.23)$$

A partir des équations précédentes, il est immédiat de voir que le nombre total  $\mathfrak{N}$  de calques nécessaires pour couvrir la bande  $[\sigma_{\min}; \sigma_{\max}]$  est donné par

$$\mathfrak{N} \approx \frac{\ln\left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}\right)}{4\sqrt{1 - MM}} \quad (5.24)$$

<sup>10</sup>Ce point corrige la référence [151] dans laquelle le pavage présenté est redondant : le centre du calque précédent/suivant y est placé à la limite de la zone d'efficacité des voisins. Cette erreur fait que finalement seule la moitié de  $\mathfrak{C}$  est effectivement prise en compte et que le nombre estimé de calques est deux fois supérieur à ce qui est nécessaire.

La dépendance en  $1 - MM$  de l'équation (5.24) est caractéristique du fait que l'espace des paramètres  $\mathbb{P}$  est de dimension 1 – cf. (5.27).

Plus le nombre de paramètres est élevé, plus le choix de  $MM$  est critique pour contrôler le nombre de calques puisque celui-ci augmente de plus en plus vite quand  $MM$  se rapproche de 1. Bien sûr cette dernière formule ne prend en compte ni les effets de recouvrements, ni ceux dus aux bords de  $\mathbb{P}$  mais elle donne un bon aperçu de la manière dont la tâche se complique à mesure que le volume de l'espace des paramètres s'accroît.

En prenant  $\sigma_{\min} = 0.1$  ms,  $\sigma_{\max} = 10$  ms et  $MM = 0.99$ , la formule (5.24) donne  $\mathfrak{N} \approx 11.5$ , ce qui est assez peu. L'application directe de la méthode de pavage conduit au même résultat : selon l'emplacement du calque de départ  $\sigma_{\text{init}}$  (à partir de laquelle les positions de tous les autres sont obtenues de manière itérative à l'aide de la relation (5.23), on a besoin de 12 ou 13 filtres. Un choix “à gauche” i.e.  $\gamma_- \sigma_{\text{init}} = \sigma_{\min}$  conduit à un jeu de douze calques dont les valeurs sont regroupées dans le tableau 5.2.

Numéro	1	2	3	4	5	6
$\sigma$ (ms)	0.122	0.182	0.273	0.409	0.611	0.914
Numéro	7	8	9	10	11	12
$\sigma$ (ms)	1.367	2.044	3.057	4.571	6.835	10.221

**Tableau 5.2:** Position des douze calques gaussiens couvrant l'espace des paramètres  $\mathbb{P} = [\sigma_{\min}; \sigma_{\max}]$  avec une perte en rapport S/B au plus de 1% ( $MM = 0.99$ ).

La recherche de pics gaussiens sur une large plage de largeurs  $\sigma$  ne nécessite donc qu'un petit nombre de filtres et s'intègre ainsi parfaitement aux algorithmes de recherche temps réel.

## 5.5 Application du pavage à la recherche des oscillations de trous noirs

### 5.5.1 Désexcitation de trous noirs issus de la coalescence de deux astres compacts

Le paragraphe 1.3.3 a présenté les caractéristiques principales des ondes gravitationnelles émises lors du retour à l'équilibre d'un trou noir excité. Le signal a la forme d'une sinusoïde amortie qui dépend de deux paramètres : sa fréquence d'oscillation  $f$  et le facteur de qualité  $Q$ . Ceux-ci sont reliés directement aux paramètres du trou noir, sa masse  $M_{\text{BH}}$  et son moment angulaire réduit  $a_{\text{BH}}$  – cf. équations (1.65) et (1.66). Ainsi, détecter une telle forme d'onde apporterait des renseignements directs sur la physique de l'émetteur.

Quel rapport S/B  $\rho$  peut-on attendre pour ces signaux en sortie du détecteur Virgo, par exemple pour le cas d'un trou noir formé par la coalescence de deux objets compacts ? Pour le voir, on utilise les résultats présentés dans [157]. Deux méthodes d'estimation de  $\rho$  y sont considérées :

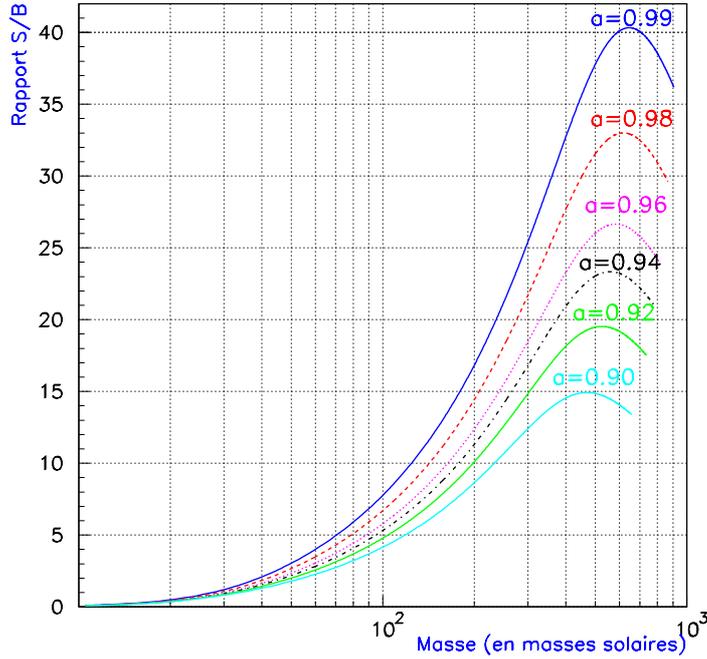
- supposer que le bruit du détecteur est blanc à la fréquence d'oscillation et faire un calcul dans l'espace direct ;
- calculer le spectre de Fourier du signal et l'assimiler à un Dirac à la fréquence d'oscillation.

Dans les deux cas, le résultat final est le même. En supposant une distribution uniforme de sources dans le ciel, le rapport S/B moyen obtenu par filtrage de Wiener  $\bar{\rho}$  est donné par :

$$\bar{\rho} \approx \left( \frac{A}{0.4} \right) \frac{1}{5 \sqrt{5} \pi} \left( \frac{G M_{\odot}}{D c^2} \right) \left( \frac{M_{\text{BH}}}{M_{\odot}} \right) \sqrt{\frac{Q}{f \times S_{\text{bruit}}(f)}} \quad (5.25)$$

où  $D$  est la distance de la source,  $S_{\text{bruit}}$  la DSP du bruit du détecteur<sup>11</sup> et  $A$  un coefficient sans dimension qui quantifie l'amplitude de l'émission et dont [157] (sur)estime la valeur à 0.4, choix qui sera fait dans la suite de ce paragraphe. Cette équation est valable à quelques pourcents près car le premier terme négligé est en  $1/2Q$  et a une phase arbitraire nulle en moyenne.

<sup>11</sup>Le terme  $\sqrt{f \times S_{\text{bruit}}(f)}$  est souvent appelé densité spectrale d'amplitude *effective* ; sans dimension, il s'interprète comme la DSA par bande de fréquence logarithmique.



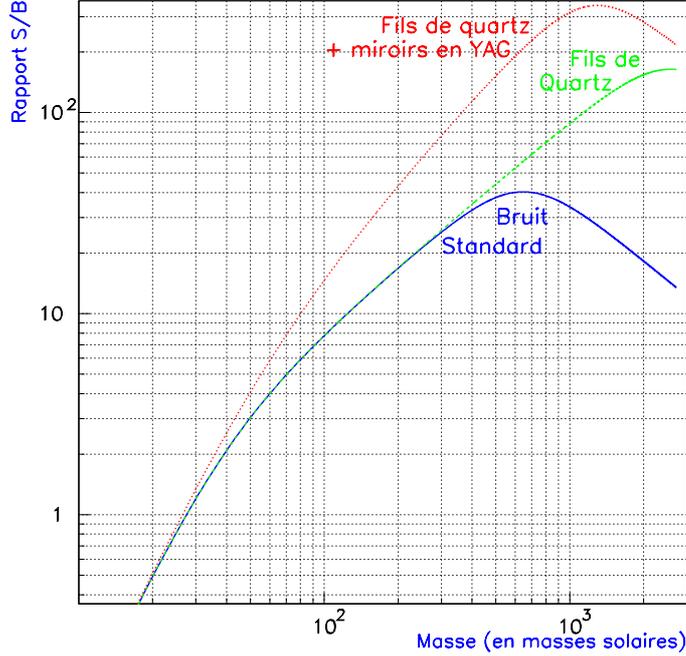
**Figure 5.6:** Rapport S/B moyen  $\bar{\rho}$  obtenu pour un signal d’oscillation de trou noir (créé par la coalescence de deux astres compacts) dans le détecteur Virgo. Les sources sont situés à une distance  $D = 100$  Mpc et supposées uniformément réparties sur le ciel. Les courbes sont présentées en fonction de la masse du trou noir  $M_{\text{BH}}$  exprimée en  $M_{\odot}$  et correspondent à différentes valeurs du moment angulaire réduit  $a_{\text{BH}}$ , comprises entre 0.9 et 0.99. Elles se terminent au moment où la fréquence de l’oscillation ( $\propto 1/M_{\text{BH}}$ ) atteint le “mur” sismique placé ici à 10 Hz. L’expression de la courbe de sensibilité utilisée est donnée à l’équation (E.1) et les valeurs choisies pour ses paramètres se trouvent dans la table E.1 – ligne “Standard”.

La figure 5.6 présente la variation de  $\bar{\rho}$  en fonction de la masse  $M_{\text{BH}}$  du trou noir (exprimée en masses solaires  $M_{\odot}$ ) pour différentes valeurs du moment angulaire réduit  $a_{\text{BH}}$  comprises entre 0.9 et 0.99, pour des sources à une distance  $D = 100$  Mpc et réparties uniformément sur la voûte céleste. Le modèle de bruit utilisé est celui de l’équation (E.1) avec les paramètres “Standard” de la table E.1; les courbes s’arrêtent quand la fréquence de l’oscillation  $f$  atteint le mur sismique, placé ici à 10 Hz. La masse correspondant à cette coupure croît avec  $a_{\text{BH}}$  – cf. équation (1.66).

Le rapport S/B est une fonction croissante de  $a_{\text{BH}}$  ce qui est un avantage car les forts moments angulaires sont théoriquement favorisés. Cette augmentation est en fait reliée à celle de  $Q$  : le signal est de plus en plus long ce qui facilite sa détection. Néanmoins, seuls les événements associés à des masses élevées ( $\geq 100M_{\odot}$ ) seront vus jusqu’à 100 Mpc. Si l’on se limite à l’amas Virgo distant d’environ 20 Mpc, une détection sera possible à partir de quelques dizaines de masses solaires.

La figure 5.7 montre les gains en rapport S/B apportés par deux améliorations possibles de la courbe de sensibilité de Virgo décrites dans l’appendice E : l’utilisation de fils de suspension en quartz et de miroirs en YAG (saphir). Sur ce graphique, le moment angulaire réduit vaut  $a_{\text{BH}} = 0.99$  et les sources sont toujours à une distance  $D = 100$  Mpc. L’augmentation de  $\bar{\rho}$  concerne surtout les grandes masses car les progrès sur la sensibilité se font à basse fréquence (jusqu’à quelques centaines de Hz). En particulier, le maximum du rapport S/B est reporté vers des masses plus importantes quand le niveau de bruit décroît.

Dans le cas d’un trou noir formé à la suite d’une explosion de supernova, les rapports S/B attendus sont nettement plus faibles. On pourra par exemple consulter [158] et [159] pour la description de simulations de ces événements et l’analyse détaillée de leurs résultats.



**Figure 5.7:** Comparaison de la valeur de  $\bar{\rho}$  pour les trois modèles de bruit présentés dans la table E.1. La distance de la source est toujours à  $D = 100$  Mpc et le moment angulaire réduit du trou noir vaut  $a_{\text{BH}} = 0.99$ .

## 5.5.2 Position du problème

### Notations

Le signal d'oscillation de trou noir est *a priori* fonction de quatre paramètres:  $f$ ,  $Q$ , une phase arbitraire  $\phi$  et le temps d'arrivée de l'onde gravitationnelle. Pour simplifier le problème, on néglige le terme de phase pour ne considérer que des sinusoides amorties pures et on maximise la fonction d'ambiguïté en supposant le calque et le signal coïncidant. Ainsi, tout se ramène à deux variables, la fréquence et le facteur de qualité de l'oscillation. Un calque  $\mathfrak{F}_0$  est donc désigné par un couple de valeurs  $(f_0, Q_0)$  appartenant à l'espace des paramètres qui est donc de dimension deux.

L'équation de l'ellipse délimitant la zone d'efficacité du calque (5.20) devient :

$$\alpha(Q_0, f_0) \left( \frac{\delta Q}{Q_0} \right)^2 + 2\beta(Q_0, f_0) \left( \frac{\delta Q}{Q_0} \right) \left( \frac{\delta f}{f_0} \right) + \gamma(Q_0, f_0) \left( \frac{\delta f}{f_0} \right)^2 = 1 - MM \quad (5.26)$$

où  $1 - MM$  est la perte maximale admissible de rapport S/B. Pour chaque calque  $\mathfrak{F}_0$ , trois coefficients  $\alpha(Q_0, f_0)$ ,  $\beta(Q_0, f_0)$  et  $\gamma(Q_0, f_0)$  sont donc à calculer.

La matrice  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$  représente la "métrique d'Owen" [43] autour du point  $(Q_0, f_0)$  de l'espace des paramètres. A partir de celle-ci, on peut estimer le nombre  $\mathfrak{N}$  de calques nécessaires pour recouvrir  $\mathbb{P}$  en intégrant son déterminant (interprété ici comme un élément de volume) :

$$\mathfrak{N} = \frac{\int_{\mathbb{P}} \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{\delta V} \quad (5.27)$$

où  $\delta V$  est le volume propre d'un calque. En dimension  $N$ , on a de manière générale :

$$\delta V = \left( 2 \sqrt{\frac{1 - MM}{N}} \right)^N \quad (5.28)$$

ce qui donne, dans le cas  $N = 2$ ,  $\delta V = 2(1 - MM)$ . Ainsi, l'équation (5.27) devient finalement :

$$\mathfrak{N} = \frac{\int_{\mathbb{P}} \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{2(1 - MM)} \quad (5.29)$$

dont la forme est à rapprocher de la remarque faite au cours de l'étude du pavage de l'espace des paramètres des pics gaussiens au paragraphe 5.4.2 – cf. équation (5.27). On peut remarquer que le nombre de calques nécessaires  $\mathfrak{N}$  est inversement proportionnel à  $1 - MM$  et augmente donc rapidement quand  $MM$  se rapproche de 1.

### Choix de l'espace des paramètres

Comme il n'y a pas de relation connue entre la masse  $m_{\text{BH}}$  d'un trou noir et son moment angulaire réduit  $a_{\text{BH}}$  et que l'on souhaite que la banque de calques mise au point puisse être utilisée pour une large variété de signaux (au-delà des oscillations de trous noirs en particulier), on choisit de considérer un espace des paramètres rectangulaire :

$$\mathbb{P} = [Q_{\min}; Q_{\max}] \times [f_{\min}; f_{\max}]$$

Pour fixer l'intervalle de variation du facteur de qualité  $Q$ , on utilise cependant la relation (1.65) :

$$\begin{cases} Q_{\min} = Q(a_{\text{BH}} = 0) = 2 \\ Q_{\max} = Q(a_{\text{BH}} = 0.99) \approx 16 \end{cases}$$

Comme valeur de  $f_{\max}$  on choisit 5 kHz, soit la moitié de la fréquence de Nyquist de Virgo (échantillonnage à 20 kHz), afin d'avoir quelques données par cycle et on prend  $f_{\min} = 20$  Hz, valeur de l'ordre du double de la fréquence de coupure sismique.

Enfin, on prend  $MM = 0.97$  ce qui limite à 3% la perte de rapport S/B admissible.

### 5.5.3 Algorithme de pavage

La méthode de pavage de l'espace des paramètres  $\mathbb{P}$  décrite au paragraphe 5.4 est incomplète. Si elle fournit un formalisme adapté et un procédé de calcul efficace pour décrire la zone de  $\mathbb{P}$  dans laquelle un calque particulier est valable – i.e. détecte un signal gravitationnel avec une perte de rapport S/B minimale – elle ne donne aucune indication sur la manière globale de disposer les filtres : par où commencer, comment les répartir ?

Deux principes antagonistes doivent être satisfaits par le pavage :

- utiliser le moins de filtres possible afin d'économiser du temps de calcul ;
- couvrir l'ensemble de l'espace des paramètres pour qu'aucun signal ne puisse échapper à la méthode.

### Couverture de l'espace des paramètres

Fabien Cavalier et moi-même [160] avons développé un algorithme itératif pour résoudre ce problème et nous l'avons appliqué au cas des filtres de sinusoides amorties utilisés, par exemple, pour la recherche d'oscillations de trous noirs. Il repose sur une idée simple : la méthode optimale de pavage d'un plan (infini) par des cercles **identiques** est connue, elle consiste à placer les centres sur un réseau hexagonal de la manière décrite sur la figure 5.8. Une fois les six voisins d'un cercle placés, le processus s'itère à l'identique dans toutes les directions.

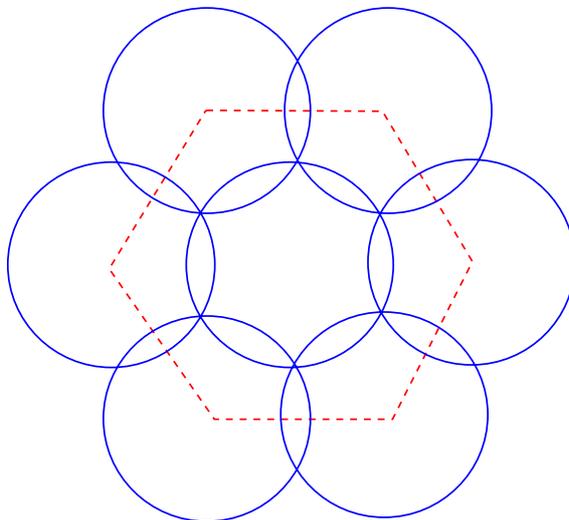
Le rapport  $\rho_{\text{opt}}$  entre l'aire du plan effectivement couverte par les disques et la somme totale des aires de ceux-ci est donné par

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 82.7\% \quad (5.30)$$

Même pour ce pavage optimal, presque 19% de la surface disponible est perdue à cause des recouvrements entre disques. Ainsi, la fraction de disques en excès  $\delta\mathfrak{N}$  nécessaire pour assurer le pavage du plan est donnée par

$$\delta\mathfrak{N} = \frac{1}{\rho_{\text{opt}}} - 1 \approx 21\% \quad (5.31)$$

Ce résultat sera utilisé au paragraphe 5.5.4 pour tester le bon fonctionnement de l'algorithme de pavage.



**Figure 5.8:** Pavage optimal d'un plan par des cercles identiques de rayon  $R$ . Les centres se trouvent sur un réseau hexagonal.

On suppose maintenant que la position d'un calque dans l'espace des paramètres  $\mathbb{P}$  a été fixée. Par une affinité orthogonale bien choisie  $A$ , l'ellipse  $\mathfrak{E}_0$  associée à la zone d'efficacité de ce calque se transforme en un cercle  $\mathfrak{C}_0$ . Une fois ce changement de coordonnées effectué, il est facile de placer les six voisins "optimaux" de  $\mathfrak{C}_0$  aux sommets de l'hexagone construit autour du cercle.

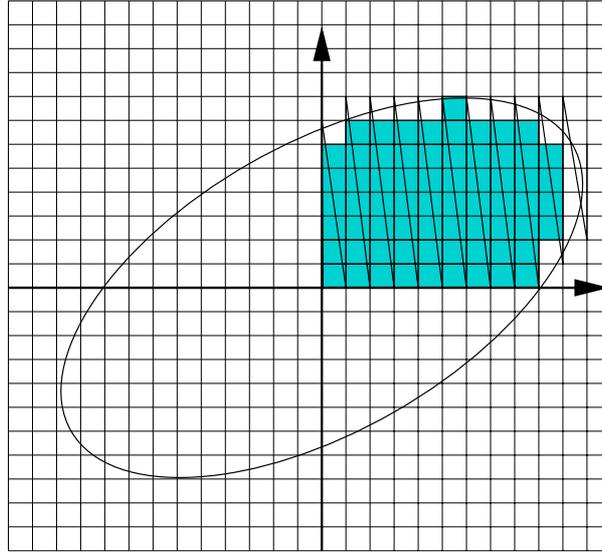
En revenant dans l'espace des paramètres initial par l'affinité inverse, les six centres correspondent à six nouveaux calques dont on peut alors calculer les ellipses de confiance  $(\mathfrak{E}_i)_{1 \leq i \leq 6}$ . Sous l'hypothèse que les coefficients de celles-ci sont des fonctions lentement variables des paramètres du filtre, la zone autour de  $\mathfrak{E}_0$  doit être bien couverte par la réunion des  $(\mathfrak{E}_i)$  avec un chevauchement faible.

Pour le vérifier, l'espace des paramètres  $\mathbb{P}$  est recouvert d'une grille rectangulaire très fine formée de  $K = n_Q \times n_f$  cases  $(\mathfrak{R}_{u,v})_{(u,v) \in [1;n_Q] \times [1;n_f]}$ . A chaque itération de l'algorithme (création de six nouveaux calques), la surface entourant les nouvelles ellipses est parcourue pour recenser les cases qui viennent d'être recouvertes<sup>12</sup> –cf. figure 5.9. Pour garder la trace de ce processus, un entier  $I_{u,v}$  – appelé **indice de recouvrement** – est associé à chaque rectangle ; valant initialement 0, il est incrémenté chaque fois qu'une nouvelle ellipse couvre sa case correspondante.

Un système de stockage interne à l'algorithme enregistre les coordonnées des nouveaux calques et les classe selon le moment où ils ont été créés : d'abord par rapport au numéro d'ordre de la série de six ellipses à laquelle ils appartiennent, ensuite à l'intérieur de celle-ci en utilisant le sens trigonométrique pour les ranger l'un après l'autre. Cela permet de garantir qu'aucun calque ne sera laissé de côté et qu'à un moment ou un autre de l'algorithme, ses six voisins seront déterminés. Deux variables sont utilisées pour cela : l'une, qui se déplace d'un seul centre à chaque passage dans la boucle et qui contient les coordonnées du filtre dont on calcule la zone d'efficacité ; l'autre qui incorpore les six nouveaux points à chaque itération – de manière à ce que chacun d'eux connaisse son suivant.

Un filtre situé hors de l'espace des paramètres peut être retenu dans le cas où une partie de son ellipse d'efficacité est à l'intérieur de celui-ci ; dans le cas contraire, il n'est pas pris en compte. La procédure s'arrête finalement lorsque l'indice de toutes les cases du réseau est supérieur ou égal à un ou lorsqu'il n'est plus possible d'ajouter de nouvelles ellipses.

<sup>12</sup>Le test de recouvrement d'une case consiste simplement à regarder si les coins du rectangle sont à l'intérieur d'une ellipse donnée puisque celle-ci est une figure convexe.



**Figure 5.9:** Trajectoire suivie par l’algorithme pour déterminer (quadrant par quadrant) les cases recouvertes par une nouvelle ellipse. Dans cet exemple, les cases retenues ont été coloriées ; les autres sont laissées de côté.

### Nettoyage de la liste des calques

On suppose maintenant que l’on est dans le premier cas :  $\mathbb{P}$  est entièrement recouvert par les ellipses. A ce stade, il est vraisemblable que la liste de calques ainsi construite est redondante : certains d’entre-eux sont inutiles, ce qui se traduit géométriquement par le fait que leurs ellipses de confiance sont entièrement recouvertes par d’autres. Autrement dit, ces filtres ne couvrent aucune zone de l’espace des paramètres en propre. Il faut donc utiliser une procédure de **nettoyage** pour les enlever et ne conserver que les calques utiles.

- Pour chaque ellipse retenue  $\mathcal{E}$ , on calcule son efficacité  $\epsilon(\mathcal{E})$  définie comme la fraction de cases qu’elle est seule à couvrir. Celles qui sont surnuméraires sont donc caractérisées par  $\epsilon = 0$ .
- Parmi celles-ci, on supprime celle dont l’aire  $\mathbb{A}$  est la plus faible : ce choix est dicté par l’idée intuitive qu’il vaut mieux garder les grosses ellipses qui couvrent une plus grande partie de  $\mathbb{P}$ .
- Toutes les mailles couvertes par cette ellipse voient leur indice diminué d’une unité et on recalcule les efficacités autour de l’emplacement de l’ancien calque maintenant éliminé. En effet, certaines ellipses peuvent maintenant se retrouver “utiles” suite à cette disparition.
- On itère le même processus tant qu’il reste des ellipses d’efficacité nulle.

### Estimation de la qualité du pavage

Une fois toutes ces opérations effectuées, l’espace des paramètres est entièrement pavé par un ensemble d’ellipses ( $\mathcal{E}_k$ ). Trois variables permettent d’estimer la qualité du pavage, i.e. si le nombre d’ellipses excédentaires dues aux chevauchements des surfaces et aux effets de bord n’est pas trop important :

- le nombre final de calques  $\mathcal{N}_{\text{cover}}$  ;
- le rapport  $\rho_{\text{up}}$  entre la somme des aires des ellipses et l’aire de l’espace des paramètres :

$$\rho_{\text{up}} = \frac{1}{(Q_{\text{max}} - Q_{\text{min}}) \times (f_{\text{max}} - f_{\text{min}})} \sum_{1 \leq k \leq \mathcal{N}_{\text{cover}}} \mathbb{A}(\mathcal{E}_k) \quad (5.32)$$

- le rapport  $\rho_{\text{down}}$  entre la fraction de l'aire totale des ellipses effectivement incluse dans  $\mathbb{P}$  et l'aire de l'espace des paramètres. Si on pose  $I(u, v)$  l'indice de la cellule courante, ( $u \in [1; n_Q]$  {et  $v \in [1; n_f]$ ) on a simplement

$$\rho_{\text{down}} = \frac{1}{n_Q \times n_f} \sum_{u,v} I(u, v) \quad (5.33)$$

On a nécessairement  $\rho_{\text{up}} > \rho_{\text{down}}$ . Leurs valeurs permettent d'estimer le taux de recouvrement restant une fois le pavage "optimisé" ainsi que l'aire perdue au-delà des bords de l'espace des paramètres.

#### 5.5.4 Test de l'algorithme : pavage par des cercles

Le test le plus simple de l'algorithme de pavage est de l'utiliser dans la seule situation dont on connaît le résultat, i.e. pour recouvrir un plan (en fait un carré de côté plus ou moins grand) avec des cercles identiques. Dans ce cas là,  $\rho_{\text{up}}$  et  $\rho_{\text{down}}$  doivent être proches de  $1/\rho_{\text{opt}}$  défini à l'équation (5.30).

$K$	Position du premier calque	Nombre de cercles utilisés	$\delta\mathfrak{N}$	$\rho_{\text{down}}$	$\rho_{\text{up}}$
9	(4.5,4.5)	45	75%	1.183	1.745
9	(5,5) or (4,4)	42	63%	1.182	1.629
10	(5,5)	45	41%	1.172	1.414
10	(4.5,4.5) or (5.5,5.5)	56	76%	1.188	1.759
11	(5.5,5.5)	67	74%	1.190	1.740
11	(5; 5)	56	45%	1.176	1.454
50	(25,25)	1033	30%	1.172	1.298
50	(20,20) or (30,30)	1020	28%	1.170	1.282
50	(40,40)	1050	32%	1.173	1.319
200	(100,100)	15727	24%	1.151	1.235
200	(50,50) or (150,150)	15611	23%	1.150	1.226
200	(0,0)	15544	22%	1.147	1.221
$\infty$			21%	1.209	1.209

**Tableau 5.3:** Résultats de l'algorithme de pavage pour le cas d'un carré de côté  $K$  à couvrir par des cercles de rayon 1. Selon le point de départ de l'algorithme, on peut voir que les résultats obtenus peuvent être assez différents, particulièrement lorsque le carré est petit et que les effets de bord sont importants.

La table 5.3 présente les résultats de la procédure de pavage pour trois "tailles" de l'espace des paramètres  $K^2$ . Le pas de la grille n'a pas été inclus dans le tableau car l'algorithme place automatiquement les centres des nouveaux cercles sur le réseau hexagonal pourvu que le maillage ne soit pas trop grossier. La principale conclusion que l'on peut tirer de l'étude de cet exemple est que les **effets de bord** dus à la taille finie de  $\mathbb{P}$  ne sont pas négligeables, particulièrement quand  $K$  est petit.

Dans ce cas, une légère variation de la position du calque initial ou de la longueur du côté peut conduire à un nombre total d'ellipses assez différent.  $\rho_{\text{down}}$  est moins sensible que  $\rho_{\text{up}}$  à ces modifications ce qui montre bien que leur origine est le décalage d'une "rangée" d'ellipses vers les bords de l'espace des paramètres: des trous apparaissent alors qui doivent être comblés par de nouveaux calques. Quand  $K$  augmente, les résultats de la méthode convergent vers le cas limite du plan infini.

#### 5.5.5 La métrique de l'espace des paramètres des sinusoides amorties

Dans notre étude, nous avons considéré deux familles particulières de signaux :

- les cosinus amortis

$$\mathfrak{C}_{f,Q}(t) = \cos(2\pi ft) \exp\left[-\frac{\pi ft}{Q}\right]$$

- les sinus amortis

$$\mathfrak{S}_{f,Q}(t) = \sin(2\pi ft) \exp\left[-\frac{\pi ft}{Q}\right]$$

Dans chacun des cas, les coefficients de la métrique  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  ont été calculés. Sans dimension, ils ne dépendent en fait que du facteur de qualité  $Q$  et sont donnés ci-dessous :

- pour les cosinus amortis

$$\begin{aligned}\alpha(Q) &= \frac{1}{8} \frac{64Q^8 + 128Q^6 + 28Q^4 + 1}{(1 + 4Q^2)^2 (1 + 2Q^2)^2} \\ \beta(Q) &= -\frac{1}{8} \frac{8Q^4 + 2Q^2 + 1}{(1 + 2Q^2)(1 + 4Q^2)} \\ \gamma(Q) &= \frac{1}{8} \frac{16Q^4 + 6Q^2 + 1}{1 + 2Q^2}\end{aligned}$$

- pour les sinus amortis

$$\begin{aligned}\alpha(Q) &= \frac{1}{8} \frac{16Q^4 + 3}{Q^2 (1 + 4Q^2)^2} \\ \beta(Q) &= -\frac{1}{8} \frac{3 + 4Q^2}{1 + 4Q^2} \\ \gamma(Q) &= \frac{8Q^2 + 3}{8}\end{aligned}$$

Dans la limite où le facteur de qualité  $Q$  est grand devant 1, le développement des coefficients associés aux sinus amortis redonne les expressions calculées dans [161] avec cette approximation.

A partir de la formule (5.27), on peut estimer le nombre de calques nécessaires pour couvrir l'espace des paramètres  $\mathbb{P}$  tel qu'il a été défini au paragraphe 5.5.2; les résultats du calcul pour les deux familles de signaux et le choix  $MM = 0.97$  sont donnés dans la table 5.4: à trois unités près, les deux valeurs sont les mêmes.

Famille	Cosinus amortis	Sinus amortis
$\mathfrak{N}$	$\approx 457$	$\approx 454$

**Tableau 5.4:** Estimation numérique du nombre de calques nécessaires pour couvrir  $\mathbb{P}$  à partir de la formule (5.27).

### 5.5.6 Résultats du pavage

Ce paragraphe traite essentiellement des cosinus amortis puisque les résultats obtenus pour l'autre famille de signaux sont très similaires.

Grille ( $n_Q \times n_f$ )	# Centres avant nettoyage	# Centres après nettoyage	$\rho_{\text{down}}$	$\rho_{\text{up}}$
$500 \times 60000$	1544	735	2.05	2.50
$1000 \times 30000$	1553	750	2.07	2.53
$1500 \times 20000$	1562	765	2.07	2.54

**Tableau 5.5:** Efficacité de la procédure de nettoyage et effet du pas de maillage de la grille. La couverture de l'espace des paramètres  $\mathbb{P}$  s'effectue dans ce cas à partir de son extrémité inférieure gauche ( $Q = 2$ ,  $f = 20$  Hz).

La table 5.5 présente trois exemples de résultats de la procédure de pavage pour la famille des cosinus amortis. On peut noter l'importance de la phase de nettoyage qui diminue par deux le nombre de calques retenus. Les essais ont le même point de départ ( $Q = 2$ ,  $f = 20$  Hz) et le même nombre de cellules dans la grille ( $3 \times 10^7$ ); la seule différence est la forme rectangulaire de

la maille obtenue en faisant varier  $n_Q$  et  $n_f$ .  $\mathfrak{N}$  reste le même à 5% près et ne dépend donc pas beaucoup de ce paramètre.

L'augmentation de la résolution de la grille permet de diminuer de quelques pourcents le nombre de calques nécessaires mais le gain est limité. Pour obtenir une réduction plus significative, j'ai finalement eu l'idée de rassembler plusieurs listes de filtres obtenues en partant de points différents de l'espace des paramètres et d'appliquer ensuite la procédure de réduction à l'ensemble des centres avec un pas aussi fin que possible.

Pavage	Grille ( $n_Q \times n_f$ )	Point de départ	# Centres après nettoyage ( $\mathfrak{N}$ )	$\rho_{\text{down}}$	$\rho_{\text{up}}$
1	450 × 250000	(2,20)	724	2.06	2.50
2	450 × 250000	(9,2990)	752	2.14	2.69
3	440 × 240000	(2,5000)	752	2.10	2.68
4	440 × 240000	(16,20)	707	2.04	2.47
5	440 × 240000	(16,5000)	747	2.09	2.63
<b>Meilleur pavage</b>	<b>800 × 280000</b>		<b>639</b>	<b>1.82</b>	<b>2.22</b>

**Tableau 5.6:** Comparaison du meilleur pavage de l'espace des paramètres avec la famille de filtres des cosinus amortis et des recouvrements utilisés pour l'obtenir finalement.

La table 5.6 compare le meilleur pavage pour la famille des cosinus amortis obtenu par cette méthode avec les cinq recouvrements différents qui ont été mélangés pour construire la dernière liste de calques. La réduction du nombre de filtres est de l'ordre de 10-20% tandis que  $\rho_{\text{down}}$  devient inférieur à 2 et que  $\rho_{\text{up}}$  décroît également de l'ordre de 10%.

Par rapport au nombre de calques estimé à partir de la formule (5.27) – cf. table 5.4 –, le résultat final présente un excès d'environ 40% dû aux recouvrements entre ellipses et aux effets de bord.

Au niveau du temps de calcul, la définition d'un pavage tel que ceux présentés dans la table 5.6 a demandé entre douze et vingt-trois heures de temps CPU sur un Pentium III à 750 MHz ; la phase la plus coûteuse est la première, lorsqu'il s'agit de créer la liste (redondante) de calques. Quant à la grande procédure de nettoyage qui a permis d'obtenir le meilleur recouvrement de  $\mathbb{P}$ , elle a demandé 134 heures CPU sur une station DEC alpha à 600 MHz. Ces durées relativement longues ne sont pas importantes en elles-mêmes puisque le positionnement des filtres est une opération qui doit être effectuée une seule fois avant l'implémentation de la banque de calques dans le schéma d'analyse.

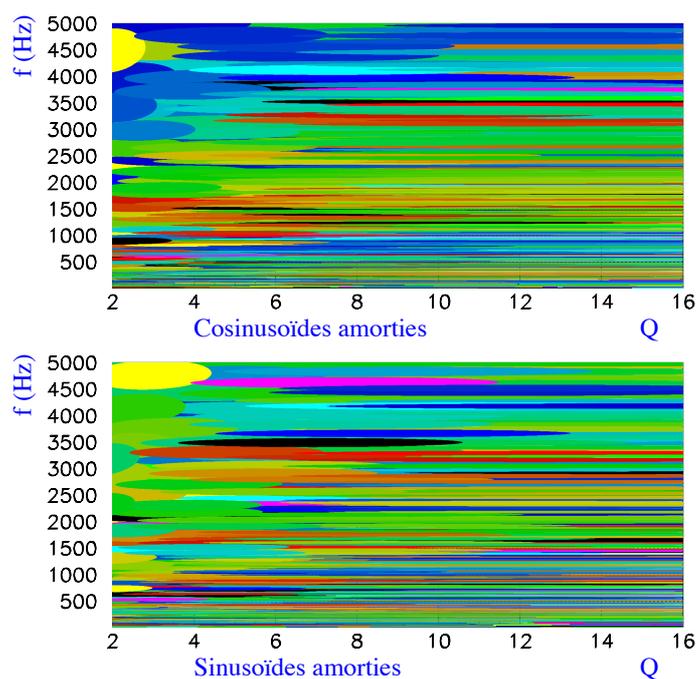
	# Centres avant nettoyage final	# Centres après nettoyage	$\rho_{\text{down}}$	$\rho_{\text{up}}$
Cosinus amortis	<b>3682</b>	<b>639</b>	<b>1.82</b>	<b>2.22</b>
Sinus amortis	<b>3662</b>	<b>634</b>	<b>1.83</b>	<b>2.25</b>

**Tableau 5.7:** Caractéristiques des meilleurs pavages obtenus pour les cosinus et les sinus amortis.

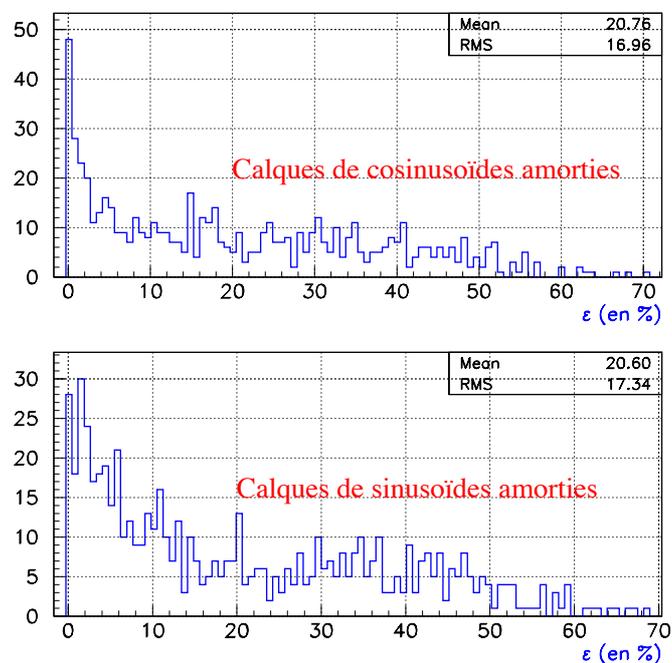
La figure 5.10 montre la répartition des calques dans l'espace des paramètres pour les meilleurs pavages des familles de cosinus et de sinus amorties. On peut remarquer que la forme des ellipses change considérablement dans  $\mathbb{P}$  : quand  $Q$  et  $f$  augmentent, elles s'étirent dans la direction du facteur de qualité et se contractent dans celle de  $f$ . L'explication de ce phénomène est simple : d'une part l'estimation d'une fréquence doit être d'autant plus précise que celle-ci est élevée et d'autre part le réseau de calques se fait plus lâche quand la durée observable du signal (directement reliée à  $Q$  pour  $f$  constant) diminue. Ce dernier phénomène a également été rencontré lors de l'étude des pics gaussiens – cf. équation (5.22), l'écart entre deux filtres est dans ce cas proportionnel à la largeur  $\sigma$ .

En termes géométriques, cette distribution non uniforme de calques peut s'interpréter comme la présence d'une "courbure" [162] de l'espace des paramètres.

Enfin, la figure 5.11 montre la distribution de l'efficacité des ellipses (i.e. la fraction de leur surface non recouverte par d'autres) pour les meilleurs pavages à l'aide des cosinus et des sinus amortis. Dans les deux cas, la valeur moyenne est de 20% environ avec un écart-type de l'ordre de 17% : une partie non négligeable des ellipses ont une faible efficacité ce qui est le signe que la couverture de l'espace des paramètres devrait encore pouvoir être améliorée.



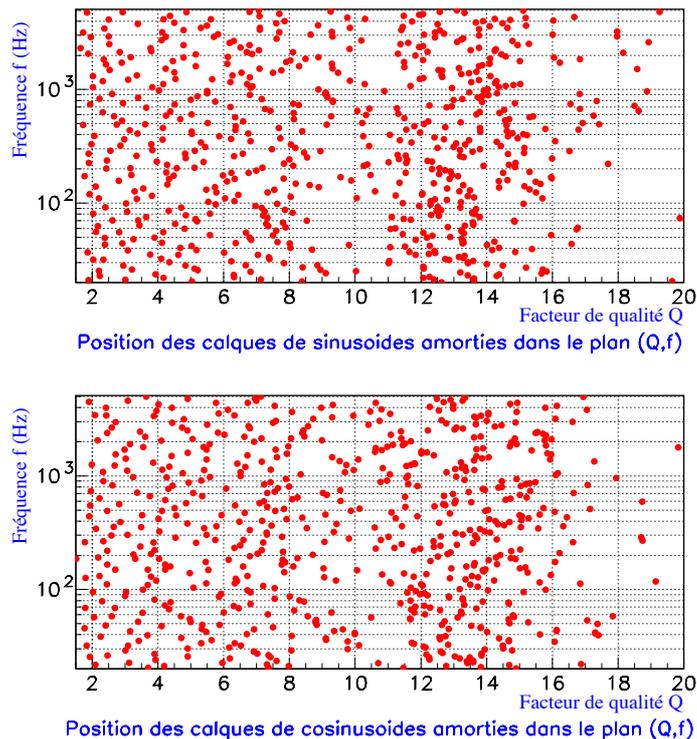
**Figure 5.10:** Répartition dans l'espace des paramètres des ellipses correspondant aux meilleurs pavages pour les familles de cosinus et de sinus amortis.



**Figure 5.11:** Distribution de l'efficacité des ellipses retenues dans les banques de cosinus et de sinus amortis.

### 5.5.7 Tests du réseau de calques

La figure 5.12 montre la répartition des calques dans l'espace des paramètres pour les deux familles des cosinus et des sinus amortis; l'axe vertical des graphiques est logarithmique. La distribution



**Figure 5.12:** Positions des calques dans l'espace des paramètres pour les cosinus et les sinus amortis

apparaît assez uniforme, sauf dans la zone des grands facteurs de qualité où les calques sont moins nombreux. Environ 7% d'entre-eux sont situés hors de  $\mathbb{P}$ . On peut voir à certains endroits une accumulation de points qui montre que, au moins localement, la disposition des filtres pourrait être améliorée, ce qui va dans le sens du commentaire de la figure 5.11.

Le but principal de la méthode de placement des calques développée ici est de satisfaire à la contrainte suivante: quel que soit le signal appartenant à l'espace des paramètres, il doit exister au moins un calque qui le détecte avec une perte d'efficacité moyenne inférieure à  $1 - MM = 3\%$ . Le dernier test à faire pour valider l'algorithme de pavage est donc de vérifier ce point, ce qui permettra également d'examiner la véracité de l'hypothèse faite au tout début du paragraphe 5.4 lorsque la zone d'efficacité réelle (de forme complexe) a été remplacée par une ellipse – cf. figure 5.4.

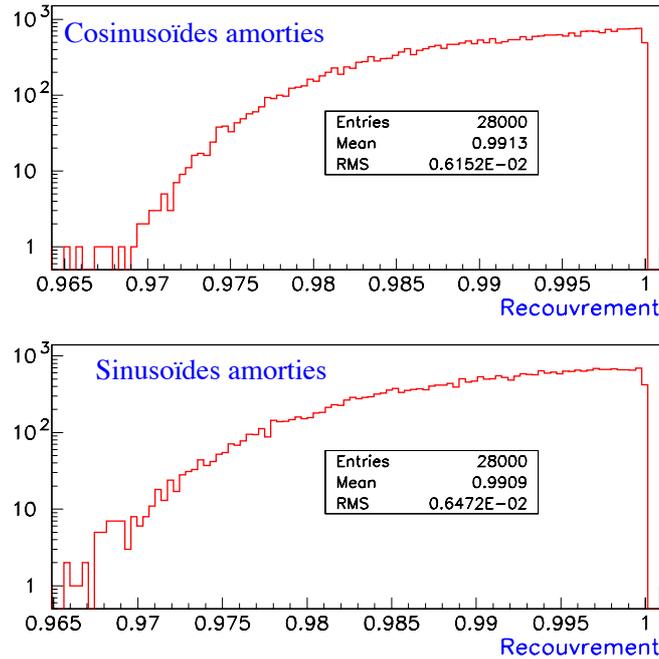
Ce travail a été effectué avec des simulations Monte-Carlo: des signaux dont les paramètres ont été tirés uniformément dans  $\mathbb{P}$  ont été corrélés avec chacun des calques du pavage et la valeur maximale de ces opérations conservée. Leurs distributions (pour les cosinus et les sinus amortis) sont présentées sur la figure 5.13.

Pour plus de 99.5% des signaux, la perte en rapport S/B est inférieure à la valeur de  $1 - MM = 3\%$  fixée comme but à atteindre. La perte moyenne est même de l'ordre de 1% et l'écart-type de la distribution est du même ordre de grandeur.

Ainsi, les pavages sont pleinement satisfaisants au point de vue de la détection. Le recouvrement entre les calques pourrait certainement être amélioré mais cet excès (en partie dus aux effets de bord) est sans grande importance vu le petit nombre de filtres mis en jeu<sup>13</sup>.

Si l'algorithme de pavage ne s'étend pas aisément au cas d'un espace des paramètres de dimension supérieure ou égale à trois à cause de la progression en loi de puissance du nombre de cellules – il peut être utilisé pour résoudre d'autres problèmes de placement de filtres sur une surface de dimension 2. Plus le nombre de calques nécessaires sera grand, moins les effets de bord se feront sentir ce qui devrait diminuer l'excès de filtres par rapport au nombre estimé à partir des coefficients de la métrique obtenue par le développement de la fonction d'ambiguïté.

<sup>13</sup>En comparaison par exemple de celui nécessaire à la recherche de la phase spirale de la coalescence d'un système binaire: de l'ordre de 120000 à l'ordre 2 P.N. pour Virgo [163]



**Figure 5.13:** Distribution de la valeur maximale de la fonction d’ambiguïté obtenue en corrélant une sinusoïde amortie dont les paramètres  $(f, Q)$  sont tirés aléatoirement. Plus de 99.5% des signaux testés montrent une perte de rapport S/B inférieure au seuil de  $1 - MM = 3\%$  fixé au départ de la procédure de pavage et la valeur moyenne de la fonction d’ambiguïté est autour de 99% pour les deux familles de calques.

## 5.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté le principe des différents algorithmes “temps réel” développés pour la recherche d’ondes gravitationnelles impulsionnelles. Par manque de connaissance précise des formes d’ondes, les méthodes sont soit générales (mesure de la valeur moyenne, de l’énergie ou encore des variations de pentes dans la fenêtre d’analyse), soit basées sur la recherche d’une forme caractéristique (pic, amortissement oscillant) que l’on espère commune à une grande variété de signaux. Si celles qui appartiennent à la première catégorie sont très simples à mettre en oeuvre, les deux filtres basés sur le formalisme du filtrage de Wiener demandent un travail préparatoire permettant de sélectionner les emplacements les plus adéquats des calques utilisés en parallèle, afin de couvrir de manière quasi-uniforme et à moindre coût la gamme des signaux physiques admissibles. En particulier, un algorithme de placement de ces calques a été développé pour le cas d’un espace des paramètres bidimensionnel.

Dans le chapitre suivant, ces filtres sont testés, d’abord sur des échantillons de bruit seul, puis sur des signaux simulés représentatifs de la gamme des *bursts*. Ainsi, on met en évidence les relations entre niveaux de seuil et taux de fausses alarmes et les efficacités de détection des différentes méthodes seront estimées. La comparaison avec les résultats du filtrage linéaire optimal permettra enfin de voir si les performances obtenues sont ou non satisfaisantes.



## Chapitre 6

# Test des méthodes de recherche des signaux gravitationnels impulsionnels

Après avoir présenté au chapitre précédent le principe des différentes méthodes de filtrage des signaux impulsionnels, nous allons maintenant étudier leur comportement en présence de bruit d'une part, et de signal d'autre part. Tout d'abord, la notion d'événements sera (re)définie pour tenir compte de la manière dont les données sont filtrées par ces algorithmes. Ensuite, on déduira les relations taux de fausses alarmes  $\tau \leftrightarrow$  niveaux de seuils de déclenchement  $\eta$  à l'aide de simulations Monte-Carlo : en effet, la forte corrélation entre les valeurs successives calculées en sortie des filtres modifie les fonctions théoriques  $\tau(\eta)$  correspondant aux distributions gaussiennes ou de  $\chi^2$ .

Puis, on verra quelques exemples de stratégies de détection réelles : coïncidences entre répliques d'une même méthode (associées à différentes tailles de fenêtre), entre différents algorithmes, ou encore prise en compte de la quantification des données sous forme de *frames* dont la longueur actuelle est une seconde.

Enfin, plusieurs tests de la qualité des filtres en présence de signal seront présentés ; tous utilisent des formes d'onde génériques : soit la bibliothèque de Zwerger et Müller, soit un pic gaussien de largeur variable et d'amplitude calibrée pour correspondre à un rapport S/B donné. On développera successivement les notions de performance (rapport entre la distance moyenne de détection et celle correspondant au filtrage optimal pour un même signal) et d'efficacité (fraction d'événements effectivement détectés à distance (ou rapport S/B) constante).

### 6.1 Événements et fausses alarmes

Sous l'hypothèse de bruit blanc gaussien seul, les sorties des filtres présentés au paragraphe 5.3 suivent en théorie des distributions statistiques simples : loi normale ou du  $\chi^2$ . Néanmoins, par suite des contraintes liées à leurs temps de calcul respectifs, chaque algorithme a un comportement réel différent qui dépend du petit nombre de paramètres qui lui sont associés et de son implémentation effective (utilisation de relations de récurrence ou corrélation dans l'espace de Fourier). Celui-ci n'est accessible qu'au moyen de simulations de Monte-Carlo qui, utilisées d'abord avec du bruit seul, permettent d'obtenir la fonction de répartition des résultats du filtrage, et par-là même les seuils correspondant aux taux de fausses alarmes souhaités.

Ces derniers sont fixés par des contraintes liées au schéma d'analyse choisi : quelle fraction d'événements sélectionnés est compatible avec la puissance de calcul disponible pour les étudier ensuite hors ligne ? Pour cela, il faut d'abord définir précisément ce qu'est un déclenchement pour un filtre particulier et la manière de le comptabiliser.

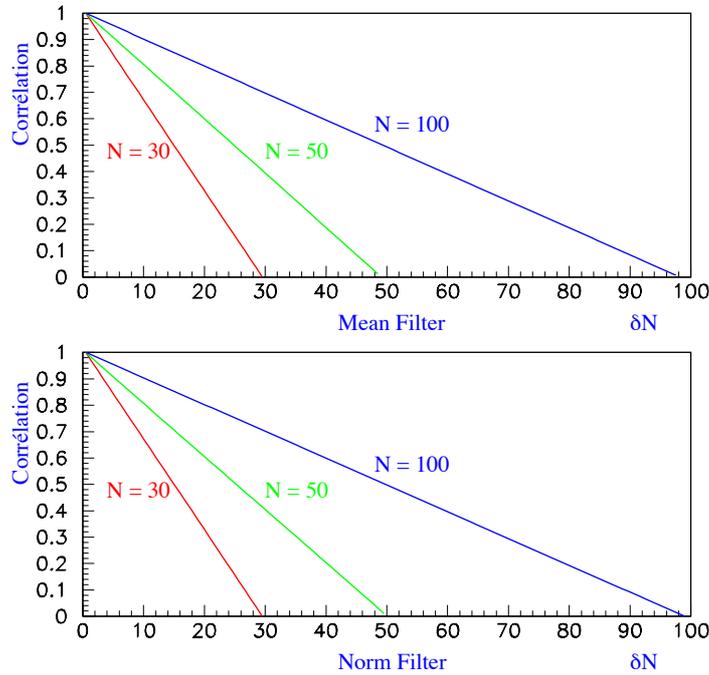
#### 6.1.1 Comment définir un événement ?

Intuitivement, une fenêtre d'analyse sera sélectionnée par un filtre lorsque la sortie de celui-ci dépassera un niveau de seuil fixé au préalable de manière à n'être atteint que "rarement" par du bruit seul. Cette définition s'applique bien au cas des filtres adaptés dont on vu qu'ils renouvellent de 25% au moins les données analysées à chaque étape ce qui implique que les résultats consécutifs sont très peu corrélés (et d'autant moins que la taille de la fenêtre  $N$  est adaptée à celle du calque).

Par contre, le problème est totalement différent pour les filtres généraux dont les sorties sont calculées à l'aide de relations de récurrence associant le contenu des fenêtres d'analyse consécutives, décalées simplement de donnée en donnée. La corrélation des résultats successifs est alors maximale<sup>1</sup> et la fonction de corrélation  $C_{\mathfrak{F}}(\delta N) = \frac{\Phi^{\mathfrak{F}}(N) \Phi^{\mathfrak{F}}(N + \delta N)}{\Phi^{\mathfrak{F}}(N)^2}$  doit décroître lentement en fonction de  $\delta N$ . La figure 6.1 vérifie cette assertion dans le cas des méthodes *Mean Filter* et *Norm Filter* pour trois tailles de fenêtre différentes (30, 50 et 100). Sur ce graphique, on voit très clairement que la fonction de corrélation est presque linéaire :

$$C_{\mathfrak{F}}(\delta N) \approx 1 - \frac{\delta N}{N} \text{ pour } \delta N \leq N \quad (6.1)$$

La longueur de corrélation d'un filtre général associé à une taille de fenêtre d'analyse  $N$  est donc  $N/2$ . Pour  $\delta N \geq N$ ,  $C_{\mathfrak{F}}(\delta N)$  est bien évidemment nulle par indépendance statistique du contenu des fenêtres d'analyses considérées.



**Figure 6.1:** Exemple de corrélations pour les sorties de deux filtres généraux, *Mean Filter* et *Norm Filter*: pour trois largeurs différentes de  $N = 30, 50$  et  $100$  – la fonction de corrélation  $C_{\mathfrak{F}}(\delta N) = \frac{\Phi^{\mathfrak{F}}(N) \Phi^{\mathfrak{F}}(N + \delta N)}{\Phi^{\mathfrak{F}}(N)^2}$  est tracée en fonction de  $\delta N$ . Pour faciliter leurs comparaisons, elles sont normalisées à l'origine :  $C_{\mathfrak{F}}(0) = 1$ . On a clairement  $C_{\mathfrak{F}}(\delta N) \approx 1 - \delta N/N$ .

Ainsi, les déclenchements d'un tel algorithme – qu'ils soient dus aux fluctuations statistiques de bruits ou à un signal physique d'origine gravitationnelle ou non –, sont le plus souvent consécutifs. Correspondants à la même zone de données, il faut les regrouper dans une alarme unique.

Aussi, la notion d'événement sera pour ces méthodes définie comme étant un ensemble de sorties **successives** dépassant le seuil. On pourrait compliquer un peu ce critère en reliant des groupes sélectionnés et séparés par un court intervalle [99] (par exemple la longueur de corrélation de l'algorithme). Mais c'est un effet *a priori* du second ordre et sans intérêt pratique car les données de Virgo se présenteront sous forme de *frames* – i.e. des paquets insécables, par exemple d'une durée d'une seconde – qui devront être ou conservés ou rejetés en bloc. Il suffit de regrouper les déclenchements consécutifs pour estimer le taux d'alarmes par unité de temps  $\mathbb{T}$ .

---

<sup>1</sup>En particulier pour les méthodes qui ne retirent pas d'information de l'ordre temporel des valeurs utilisées en entrée du calcul ce qui est le cas pour tous les algorithmes généraux excepté *ALF*.

### 6.1.2 Taux de fausses alarmes et seuils

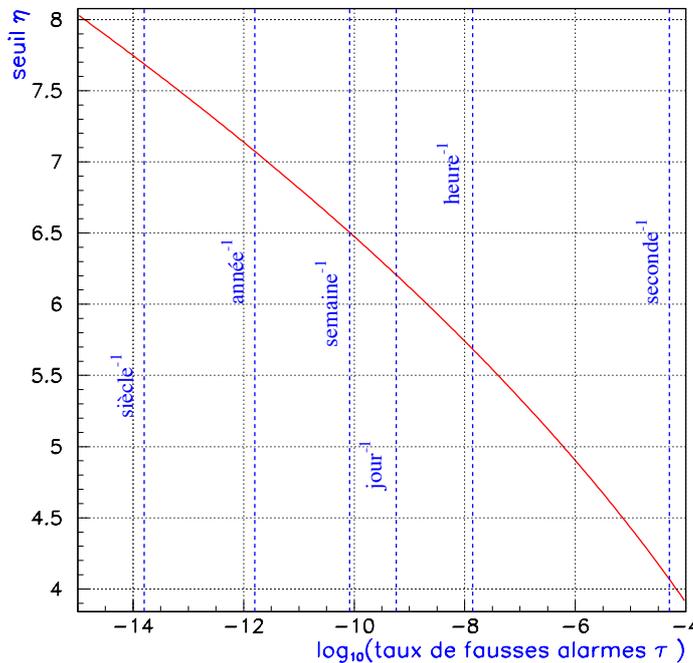
La question de la relation entre taux de fausses alarmes  $\tau$  et seuils  $\eta$  est également abordée au paragraphe C.1.4 de l'appendice consacré à la présentation du filtrage adapté. Ici, nous allons donc simplement rappeler ses principales caractéristiques et présenter le cas simple où les valeurs consécutives issues des algorithmes de filtrage sont décorréliées et échantillonnées à la fréquence d'acquisition des données de Virgo ( $f_s = 20$  kHz). On s'intéressera plus particulièrement aux deux distributions "génériques" auxquelles obéissent les sorties des méthodes de filtrage sous l'hypothèse d'un bruit gaussien : la loi normale et la loi de  $\chi^2$  à  $N$  degrés de liberté.

Une fois ces bases établies, le comportement des différentes méthodes de filtrage sera étudié au moyen de simulations Monte-Carlo. On verra que les définitions particulières de la notion d'événement – cf. paragraphe précédent – et le mode de calcul des différents filtres conduisent à des résultats qui, sans être trop éloignés des distributions théoriques, en diffèrent néanmoins nettement : à seuil donné, le taux de fausses alarmes est plus faible.

La détermination d'un seuil se fait toujours de la même manière : on commence par tracer la **fonction de répartition** (statistique) de la sortie  $\Phi_{\mathfrak{F}}$  du filtre  $\mathfrak{F}$ , i.e. la courbe donnant en fonction du seuil  $\eta$  la probabilité  $\tau(\eta)$  que  $\Phi_{\mathfrak{F}}$  excède ce seuil. Ensuite, on choisit le taux de fausses alarmes  $\tau$  approprié et on utilise le graphique pour en déduire le seuil correspondant.

#### Loi normale

Une variable normale  $X$  est gaussienne, de moyenne nulle et d'écart-type 1. Le taux de fausses alarmes  $\tau$  correspondant au seuil  $\eta$  n'est rien d'autre que la probabilité de l'événement  $|X| \geq \eta$  donnée à partir de la fonction d'erreur complémentaire  $\text{erfc}$  :  $\tau = \text{erfc}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)$  – cette relation est également présentée à l'équation (C.12).



**Figure 6.2:** Seuil  $\eta$  en fonction du taux de fausses alarmes  $\tau$  pour une variable normale.

La figure 6.2 – également reprise dans l'appendice C – présente la valeur du seuil  $\eta$  en fonction de  $\tau$  pour une large gamme du taux de fausses alarmes : d'une par seconde à moins d'une par siècle dans le cas d'un échantillonnage des réalisations de  $X$  à 20 kHz. Le point important à retenir est que  $\eta$  varie très lentement en fonction de  $\tau$ , à peine d'un facteur deux pour ces cas extrêmes.

Or, la distance de détection d'un signal donné est en première approximation inversement proportionnelle à  $\tau$ . Aussi, en particulier pour la recherche d'événements de type supernova diffi-

lement détectables au-delà de la Voie Lactée par la première génération d'interféromètres, le seuil devra être choisi assez bas pour couvrir au moins la Galaxie sans pour autant être submergé par les déclenchements. Cela explique l'importance de la valeur choisie de  $\tau$  – le paramètre critique de la méthode de filtrage – et la volonté d'étudier cette question de manière détaillée.

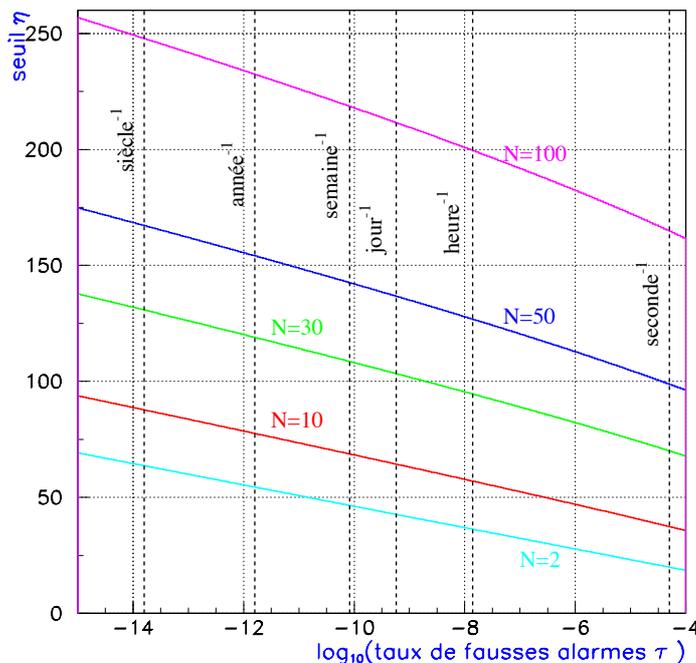
### Loi de $\chi^2(N)$

La relation  $\tau \leftrightarrow \eta$  est plus compliquée pour le cas d'une variable suivant une distribution de  $\chi^2$  – comme *Norm Filter* ou *ALF* – puisque le nombre de degrés de liberté  $N$  de celui-ci entre en jeu. En effet, la relation entre  $\tau$  et le seuil  $\eta$  est donnée par [164]

$$\tau = Q\left(\frac{N}{2}, \frac{\eta}{2}\right) \quad (6.2)$$

où  $Q(a, x)$  est une fonction Gamma incomplète :

$$Q(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \quad (6.3)$$



**Figure 6.3:** Seuil  $\eta$  en fonction du taux de fausses alarmes  $\tau$  pour une distribution de  $\chi^2$  à  $N$  degrés de liberté. La relation entre  $\tau$  et le taux de déclenchements par unité de temps  $\mathbb{T}$  est assurée en supposant une fréquence d'échantillonnage de 20 kHz.

La figure 6.3 montre quelques exemples de la relation (6.2) pour différentes valeurs de  $N$  : 2, 10, 30, 50 et 100. La relation donnant  $\eta$  est presque linéaire en fonction de  $\log(\tau)$  et le seuil augmente avec  $N$ . Aussi, au contraire du cas des filtres gaussiens, à chaque taille de fenêtre du *Norm Filter* correspond une valeur de  $\eta$  différente. Pour  $N = 2$  (cas du filtre ALF) et  $\tau = 10^{-6}$ , on a  $\eta \approx 27.63$ .

### 6.1.3 Cas des filtres généraux

La rapidité de calcul de ces filtres par l'utilisation de relations de récurrence entre deux sorties consécutives a comme conséquence la présence de fortes corrélations entre les rapports S/B associés à des fenêtres très proches. En particulier, une fausse alarme, i.e. un événement de bruit qui

dépasse le seuil choisi pour la méthode, ne se présente pas en général de manière isolée, mais plus vraisemblablement sous la forme d'un groupe de valeurs consécutives qu'il ne convient pas de distinguer puisque toutes se rapportent à la même zone de données qui a produit les déclenchements. Ainsi, selon la façon choisie pour comptabiliser les fausses alarmes, on peut définir deux taux de fausses alarmes associés à un seuil  $\eta$  donné :

- $\tau_{\text{total}}$ , i.e. le nombre total de fenêtres dans lesquelles la sortie dépasse le seuil ;
- $\tau_{\text{cluster}}$  pour lequel la structure des fausses alarmes est prise en compte – un groupe consécutif ne représentant qu'un seul événement.

C'est bien entendu la seconde variable qui a du sens au niveau physique mais conserver l'autre permet de quantifier le gain effectivement obtenu par cette redéfinition de la notion d'événement. De plus, chacune de ces grandeurs peut être comparée à un troisième (!) taux de fausses alarmes  $\tau$  obtenu à partir du seuil  $\eta$  à l'aide par exemple de la figure C.1 puisque la plupart des méthodes de filtrage présentent une distribution gaussienne de rapports S/B. C'est un moyen commode de relier un seuil à un taux de fausses alarmes, même si ce dernier n'est qu'une approximation de la situation réelle.

Ce paramètre  $\tau$  peut être qualifié de **niveau de référence** puisqu'il est utilisé en pratique comme approximation initiale du taux de fausses alarmes réel – parfois à un ordre de grandeur près quand même! – et qu'il permet d'obtenir une valeur de  $\eta$  proche de celle qui sera finalement choisie pour le seuil.

On s'attend à la relation :

$$\tau_{\text{cluster}} \leq \tau \lesssim \tau_{\text{total}} \quad (6.4)$$

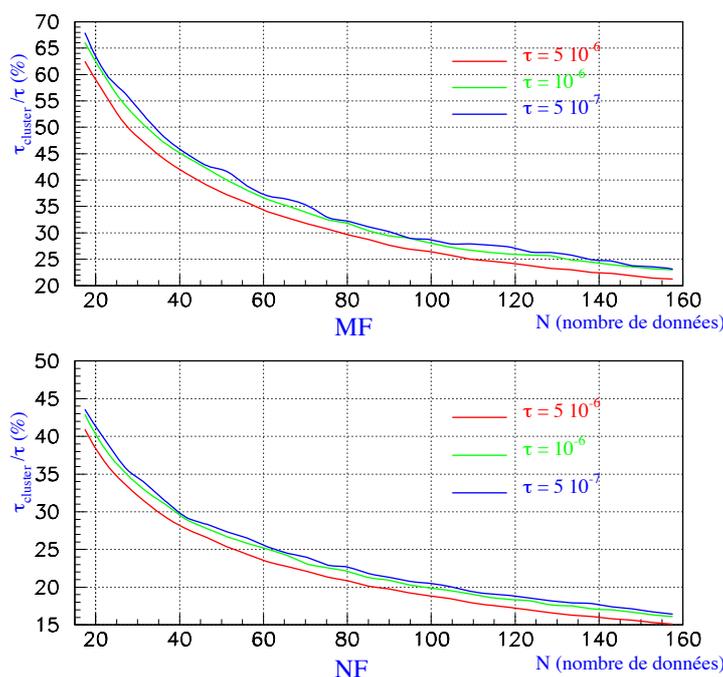
ce que confirment les résultats des simulations. Un point intéressant à noter (intuitif mais difficile à démontrer de manière rigoureuse) est que  $\tau_{\text{total}}$  varie – à  $\tau$  fixé – en gros comme  $\sqrt{N}$  où  $N$  est la largeur de la fenêtre d'analyse. Ainsi, le gain apporté par le regroupement des fausses alarmes est d'autant plus important que le nombre de données analysées est grand.

$\tau_{\text{total}}/\tau_{\text{cluster}}$	N	30	50	100	150	200
$\log(\tau)$						
-4		2.45	3.12	4.36	5.30	6.16
-4.5		2.31	2.95	4.09	5.01	5.79
-5		2.20	2.79	3.85	4.75	5.52
-5.5		2.11	2.69	3.66	4.55	5.22
-6		2.01	2.56	3.35	4.29	4.90
-6.5		1.99	2.45	3.39	4.05	4.88
-7		1.88	2.43	3.38	4.00	4.77

**Tableau 6.1:** Evolution du rapport  $\tau_{\text{total}}/\tau_{\text{cluster}}$  pour le filtre *Mean Filter* en fonction de la taille de la fenêtre  $N$  et du seuil de détection  $\eta(\tau)$ . Le gain apporté par le regroupement des déclenchements consécutifs augmente avec  $N$  mais décroît à mesure que  $\tau$  diminue : les fausses alarmes sont dans ce dernier cas de moins en moins probables et se présentent le plus souvent de manière isolée.

Un autre phénomène est que le rapport  $\tau_{\text{cluster}}/\tau$  tend vers 1 (par valeur inférieure) lorsque le seuil augmente : puisqu'il devient moins probable de dépasser ce niveau, les groupes de fausses alarmes consécutives sont plus petits et le gain apporté par leur prise en compte simultanée est dès lors moins important. La figure 6.4 montre l'évolution de ce rapport en fonction de la taille de la fenêtre d'analyse pour les filtres *Mean Filter* et *Norm Filter*; les différentes courbes correspondent à trois valeurs différentes de  $\eta$  associées respectivement à  $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $10^{-6}$  et  $5 \cdot 10^{-7}$ .

Enfin, on constate que les deux grandeurs  $\tau$  et  $\tau_{\text{total}}$  sont égales au niveau du pourcent et que  $\tau_{\text{total}}$  devient même un peu inférieur à  $\tau$  lorsque celui-ci atteint des niveaux de l'ordre de  $10^{-4} - 10^{-5}$ . L'explication est simple : la corrélation qui apparaît au niveau des fausses alarmes joue également pour les sorties inférieures au seuil : cette "mémoire" des données filtrées les fait varier assez lentement et le comportement général de l'ensemble est finalement proche de celui d'une variable normale classique dont les réalisations sont indépendantes.



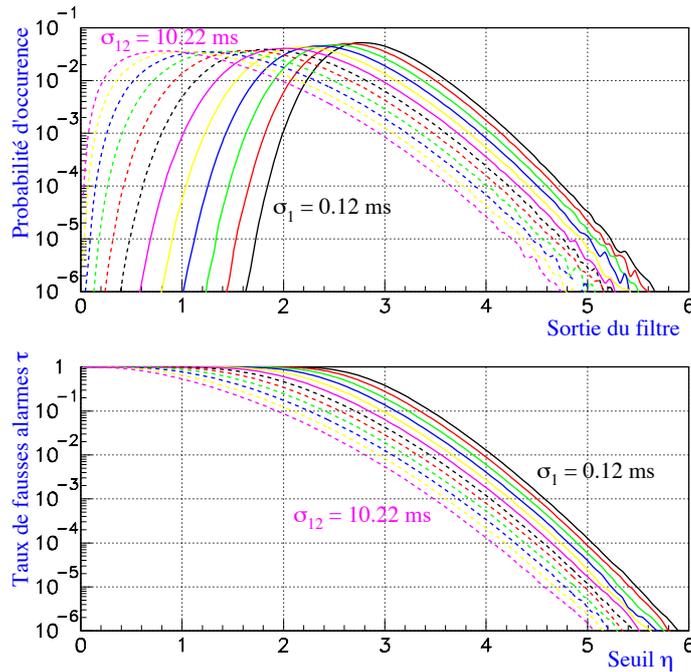
**Figure 6.4:** Evolution du rapport  $\tau_{cluster}/\tau$  pour les filtres *Mean Filter* et *Norm Filter* en fonction de la taille de la fenêtre  $N$  et pour trois valeurs différentes du seuil  $\eta$  correspondant respectivement à  $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $10^{-6}$  et  $5 \cdot 10^{-7}$ .

#### 6.1.4 Exemple du filtrage adapté par des pics gaussiens

Comme on l'a vu au paragraphe 5.4.2, la recherche de pics gaussiens s'effectue pour des signaux de largeurs comprises entre 0.1 et 10 ms. En admettant une perte maximale de rapport S/B de l'ordre de 1%, on a montré au paragraphe 5.4.2 que l'utilisation en parallèle d'une douzaine de filtres est nécessaire.

La figure 6.5 présente la fonction de répartition statistique des rapports S/B obtenus en sortie de ces douze algorithmes de recherche de pics gaussiens. La comparaison des différentes courbes montre que plus la largeur  $\sigma$  du pic est petite, plus la distribution est décalée vers les valeurs élevées; autrement dit, à seuil constant, le taux de fausses alarmes augmente quand le pic se fait plus étroit. Là encore, ce comportement s'explique facilement si l'on se souvient que, pour la méthode du filtrage de Wiener, le décalage des fenêtres d'analyse est proportionnel à la taille  $N$  de celle-ci. Or, cette dernière n'a pas de raison d'excéder celle du calque; pour le cas d'une gaussienne, on peut l'exprimer en terme de la largeur  $\sigma$  – par exemple, une coupure à  $3\sigma$  revient à tronquer la partie du signal en deça de 1% du maximum. Plus  $\sigma$  est faible, moins l'algorithme effectue de mesures “dépendantes” dans une zone définie de données et donc plus il va accéder à des valeurs élevées de sa distribution de probabilité, d'où l'augmentation du taux de fausses alarmes.

Cette hausse du taux de déclenchement du filtre est assez gênante puisqu'elle n'a aucune répercussion sur la capacité de la méthode à détecter un vrai signal physique par comparaison du rapport S/B avec le seuil  $\eta$ . Si ce dernier est augmenté pour diminuer le taux de fausses alarmes, l'efficacité du filtre en est forcément affectée. Ce problème devra être pris en compte lors de l'implémentation effective de ces algorithmes de détection pour la recherche temps réel de signaux impulsionnels dans les données de Virgo. Dans un premier temps, on pourra travailler à  $\tau$  constant pour toutes les méthodes et accepter ainsi d'avoir des efficacités de détection hétérogènes selon les filtres. Dans un second temps, l'analyse s'étoffera au-delà de ce cadre général et se particularisera au niveau de chaque algorithme de détection. Les différents traitements des fenêtres d'analyse sélectionnées – au moyen de coupures, de coïncidences avec d'autres filtres ou d'autres sous détecteurs, par exemple en charge de certaines variables d'environnement – permettront de limiter les taux de déclenchement et de donc de baisser les seuils pour gagner en sensibilité.



**Figure 6.5:** Répartition statistique des sorties des 12 filtres gaussiens utilisés pour détecter les pics de largeurs comprises entre 0.1 et 10 ms. Plus la largeur du filtre est faible, plus la distribution du rapport S/B est décalée vers les valeurs élevées. Comme la sortie du filtre est en fait le maximum des corrélations données/calque sur la fenêtre d'analyse, les distributions présentées ne sont pas gaussiennes.

## 6.2 Stratégies de filtrage pour les données réelles

Même en l'absence de données physiques, la mise au point d'algorithmes de filtrage doit aller au delà de simples tests "académiques" de leurs performances et s'efforcer d'intégrer également les aspects pratiques de la future analyse en temps réel.

Un premier problème qui vient immédiatement à l'esprit est la réduction des fausses alarmes. En effet, chacune des méthodes générales sera sans doute implémentée en plusieurs exemplaires – correspondant à des tailles de fenêtre différentes – tandis que le filtrage de Wiener nécessite toujours une batterie de calques utilisés en parallèle pour assurer une bonne couverture de l'espace des paramètres – cf paragraphe 5.4. Une manière possible d'éliminer une partie de ces déclenchements serait d'utiliser des coïncidences entre filtres, l'idée étant que les différences entre les méthodes rendent leurs sorties décorréliées pour du bruit seul alors que les vrais signaux doivent donner des rapports S/B du même ordre puisque les performances de ces algorithmes sont assez similaires.

Comme corollaire de la question du nombre de fausses alarmes, on peut se poser le problème du volume des données sélectionnées par les filtres temps réel. En effet, celui-ci a des implications majeures sur les moyens et les capacités de stockage ainsi que sur la manière de conduire des analyses ultérieures plus fines pour rejeter ou confirmer l'hypothèse de présence d'un signal.

Or, les données de Virgo sont regroupés par *frames*, actuellement de durée 1 seconde, et faisant environ 4 MB si tous les canaux bruts (photodiodes, suspensions, variables d'environnement...) y sont inclus. Même si un flot "allégé" est mis en place pour concentrer le signal "h" reconstruit et les informations essentielles à la compréhension du détecteur, le total des *frames* sélectionnés peut rapidement représenter un gros volume. De plus, pour les filtres généraux, la notion de blocs consécutifs de fausses alarmes perd de son intérêt une fois cette forme de quantification de l'information prise en compte. Comment se traduit-elle en terme de fraction de *frames* sélectionnés?

Les deux paragraphes suivants abordent de manière un peu plus précise ces questions en présentant quelques résultats concrets obtenus par simulation. Néanmoins, ils n'ont pas l'ambition de couvrir complètement ces sujets qui nécessitent des analyses plus poussées, en particulier à partir

du moment où des vraies données seront disponibles.

Enfin, ces sections se focalisent uniquement sur les fausses alarmes d'origine statistique et laisse complètement de côté une autre contribution aux taux de déclenchement qui, au moins au début du fonctionnement de Virgo, dominera sans doute largement : les événements non stationnaires de bruit (d'origine mécanique, électronique ou autre, liés à un problème dans un des sous-détecteurs...) ou les perturbations extérieures (sismiques, électromagnétiques...). Leur prise en compte demande à la fois l'utilisation de méthodes de traitement de signal mentionnées au paragraphe 5.2.4 et une connaissance pointue de l'instrument et des variables d'environnement significatives. L'essentiel de ce travail aura lieu lorsque le détecteur complet sera en fonctionnement.

### 6.2.1 Réaliser des coïncidences entre filtres

Ce paragraphe présente une étude préliminaire de cette question réalisée avec quatre filtres généraux : *Bin Counting*, *Mean Filter*, *Norm Filter* et *Slope Filter*.

#### Réduction du taux de fausses alarmes

La première chose que l'on peut étudier est la corrélation existant entre les fausses alarmes de ces méthodes. Pour cela, à partir des sorties  $\Phi_i$  de chacun des filtres  $\mathfrak{F}_i$ , on définit une nouvelle variable aléatoire  $\Psi_i$  de la manière suivante :

$$\Psi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_i \text{ excède le seuil } \eta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.5)$$

$\Psi_i$  prend la valeur 1 avec une probabilité  $\tau_i$ , égale à son espérance ; quant à l'écart-type, il vaut  $\sqrt{\tau_i (1 - \tau_i)}$ . Ce choix de notation est cohérent avec les précédentes définitions des taux de fausses alarmes puisque  $\tau_i$  s'interprète comme la probabilité de déclenchement du filtre  $\mathfrak{F}_i$  en présence de bruit seul.

En notant  $\Psi_{ij}$  la variable aléatoire recensant les coïncidences entre les filtres  $\mathfrak{F}_i$  et  $\mathfrak{F}_j$ , le coefficient de corrélation  $\rho_{ij}$  des déclenchements de ces deux filtres s'écrit :

$$\rho_{ij} = \frac{\mathbb{E}[\Psi_{ij}] - \tau_i \tau_j}{\sqrt{\tau_i (1 - \tau_i) \tau_j (1 - \tau_j)}} \quad (6.6)$$

Les différents termes de cette équation sont estimés par simulations Monte-Carlo. Les résultats, à peu près indépendants du niveau de seuil  $\eta(\tau)$  – cf. table 6.2 –, montrent que les coefficients de corrélation sont inférieurs à 1% pour tous les couples de filtres sauf pour la paire *Bin Counting-Norm Filter* où la corrélation est de l'ordre de 20%.  $\rho_{\text{MF-SF}}$  est même presque nul ce qui n'est pas étonnant puisque le *Mean Filter* est sensible à la moyenne des données tandis que le *Slope Filter* détecte des changements de pente.

Couple de filtres	MF-NF	MF-SF	MF-BC	NF-SF	NF-BC	SF-BC
$\tau$						
$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$10^{-2}$
$10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$10^{-2}$
$5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-3}$

**Tableau 6.2:** Valeur du coefficient de corrélation pour différentes paires de filtres en fonction de la valeur de  $\tau$ . Dans tous les cas, la taille de la fenêtre d'analyse est fixée à  $N = 50$ .

La décorrélation des différents filtres se voit aussi en regardant les valeurs des taux de fausses alarmes en coïncidence  $\tau_{ij}$ . Ainsi, la table 6.3 montre le taux de fausses alarmes résiduel  $\tau_{ij}/\tau$  pour quelques exemples de paires de filtres  $\mathfrak{F}_i$  et  $\mathfrak{F}_j$ . Dans chacun de ces cas, les deux algorithmes ont la même taille de fenêtre et les seuils correspondant "théoriquement" à un taux de déclenchement  $\tau$  (on a vu – équation (6.4) – qu'en pratique,  $\tau_{\text{cluster}} < \tau$ ). Là encore, les couples MF-SF et NF-BC se distinguent : le premier parce que la réduction du taux de fausses alarmes est de l'ordre d'un facteur 10000 ( $\tau_{ij}/\tau \sim 10^{-2}\%$ ), le second car le gain est limité à un ordre de grandeur

Rapport $\tau_{ij}/\tau$ (en %)	Filtres			MF-NF			MF-SF			NF-SF			NF-BC		
	$N$	30	50	100	30	50	100	30	50	100	30	50	100		
$\tau$															
$5 \cdot 10^{-4}$		1.59	0.90	0.71	0.04	0.01	0.01	0.92	0.55	0.42	8.30	13.25	8.43		
$10^{-4}$		0.94	0.46	0.38	0.03	0.01	0.01	0.47	0.25	0.19	7.70	7.50	9.26		
$5 \cdot 10^{-5}$		0.54	0.21	0.14	0.03	0.01	0.002	0.19	0.08	0.06	5.66	6.54	5.30		

**Tableau 6.3:** Exemples de réduction du taux de déclenchement obtenus en demandant une coïncidence entre deux des filtres généraux : pour chaque paire de filtres  $\mathfrak{F}_i$  et  $\mathfrak{F}_j$ , le rapport  $\tau_{ij}/\tau$  est exprimé en %. Les algorithmes ont la même taille de fenêtre  $N$  et des seuils correspondant au taux de fausses alarmes  $\tau$ .

( $\tau_{ij}/\tau \sim 10\%$ ). Les associations MF-NF et NF-SF montrent un taux de déclenchement résiduel réduit d'un facteur compris entre 100 et 1000 et sont représentatives des autres combinaisons.

Ces gains importants demandent cependant à être relativisés puisqu'une partie de la diminution du taux de fausses alarmes est due aux regroupements des fausses alarmes consécutives. Au lieu de la quantité  $\tau_{ij}/\tau$ , il vaut mieux calculer le rapport  $\tau_{ij}/\sqrt{\tau_i\tau_j}$  qui donne une meilleure idée de la réduction du taux de déclenchement propre à la détection en coïncidence. La table 6.4 montre les valeurs de cette quantité pour les mêmes couples de filtres et des choix de paramètres ( $N$ ,  $\tau$ ) identiques. Il y a en moyenne de 2 à 5 fois plus de fausses alarmes résiduelles par rapport à la table 6.3 mais malgré cela le gain reste intéressant.

$\tau_{ij}/\sqrt{\tau_i\tau_j}$ (en %)	Filtres			MF-NF			MF-SF			NF-SF			NF-BC		
	$N$	30	50	100	30	50	100	30	50	100	30	50	100		
$\tau$															
$5 \cdot 10^{-4}$		5.15	3.86	3.06	0.08	0.09	0.10	2.34	1.48	0.82	26.35	27.56	28.45		
$10^{-4}$		2.69	1.71	1.09	0.02	0.02	0.02	1.30	0.72	0.34	18.01	20.62	21.65		
$5 \cdot 10^{-5}$		2.03	1.37	0.70	0.01	0.01	0.01	0.96	0.53	0.22	16.69	17.69	19.61		

**Tableau 6.4:** Réduction du taux de fausses alarmes dues aux coïncidences entre filtres corrigées du gain apporté par le regroupement des fausses alarmes consécutives.

### Comportement en présence de signal

Si les coïncidences entre méthodes générales permettent de baisser significativement le taux de fausses alarmes, il faut également tester le comportement de ces couples de filtres en présence d'un vrai signal. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser un pic gaussien de largeur  $\sigma = 1$  ms et dont le rapport S/B optimal  $\rho$  est fixé à 5, valeur intermédiaire entre un signal trop faible ( $\rho \sim 1$ ) et un signal quasiment toujours détecté ( $\rho \sim 10$ ). Les efficacités de détection sont regroupées dans le tableau 6.5 et sont obtenues pour les mêmes configurations que celles des tables 6.3 et 6.4.

Efficacité de détection (en %)	Filtres			MF-NF			MF-SF			NF-SF			NF-BC		
	$N$	30	50	100	30	50	100	30	50	100	30	50	100		
$\tau$															
$5 \cdot 10^{-4}$		25.4	24.3	15.1	4.0	20.4	50.0	2.5	6.3	11.2	17.3	16.7	10.5		
$10^{-4}$		13.0	11.9	6.5	0.9	7.1	26.3	0.6	1.95	3.8	10.4	7.2	4.3		
$5 \cdot 10^{-5}$		9.5	8.8	4.6	0.4	4.3	19.1	0.3	1.1	2.8	5.2	5.7	2.6		

**Tableau 6.5:** Efficacité de détection en coïncidence pour des couples de filtres généraux. Le signal cherché est un pic gaussien de largeur  $\sigma = 1$  ms et de rapport S/B  $\rho = 5$

Les efficacités présentées dans ce tableau sont moins bonnes que celles que fournirait le filtrage de Wiener avec des seuils correspondant aux taux de fausses alarmes effectifs recensés dans la

table 6.3 à l'exception notable de la paire MF-SF pour le choix de fenêtre  $N = 100$  qui atteint des meilleurs niveaux de détection. Pour comparaison, le tableau 6.6 présente quelques-unes de ces probabilités de détection dans le cas optimal.

$\tau$	$5 \cdot 10^{-6}$	$10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-8}$	$10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-9}$	$10^{-9}$
Efficacité (en %)	66.8	54.3	49.0	37.2	32.6	23.2	19.9	13.4

**Tableau 6.6:** Efficacité du filtrage optimal en fonction du taux de fausses alarmes pour un signal de rapport S/B  $\rho = 5$ .

Deux effets jouent pour expliquer ces différences: les méthodes de filtrage ne sont pas particulièrement adaptées pour le signal en forme de pic gaussien et la taille de la fenêtre d'analyse joue également. On reviendra plus en détail sur ces problèmes au paragraphe 6.3 mais les résultats de la table 6.5 permettent déjà de deviner quelques tendances.

Tout d'abord, on peut remarquer que la largeur d'1 ms correspond à 20 données échantillonnées à 20 kHz. Donc on s'attend à ce que les petites fenêtres (30 et 50) donnent de meilleurs résultats que le choix  $N = 100$ ; c'est en particulier le cas pour les paires MF-NF et NF-BC. Par contre, cet énoncé est mis en défaut pour les deux autres couples de filtres MF-SF et NF-SF. La raison est que tous les deux contiennent le *Slope Filter* qui lui est nettement plus performant avec des grandes tailles de fenêtre [99] tandis que MF et NF sont assez robustes en-dessous de  $N=100$ . La croissance de l'efficacité de détection globale est ainsi due à l'amélioration de celle de SF.

Pour le choix particulier de l'association MF-SF et de la taille de fenêtre  $N = 100$ , les efficacités de détection des deux méthodes se "complètent" et le filtre construit ainsi se révèle plus performant que la procédure optimale. Le processus construit par coïncidence étant non linéaire, ce cas de figure est parfaitement possible.

En conclusion, on peut dire que l'utilisation de coïncidences entre différentes méthodes générales peut se révéler intéressante au niveau de l'analyse temps réel, à condition toutefois de bien sélectionner les couples de filtres choisis: le fait que seule l'association MF-SF (et pour une taille de fenêtre particulière) donne de meilleurs résultats que la détection optimale n'est pas surprenant dans la mesure où ces deux algorithmes sont individuellement les plus performants.

De plus, ce type de procédure peut servir hors ligne lors de la réanalyse d'échantillons sélectionnés car le taux résiduel de fausses alarmes est faible.

## 6.2.2 *Frames* sélectionnés

La prise en compte de l'appartenance des données à un *frame* insécable permet d'avoir un premier contact avec ce que sera vraiment l'analyse temps réel des données de Virgo. Des simulations de Monte-Carlo simples mettent en évidence un certain nombre d'effets de cette quantification de l'information:

- le lien entre la taille du *frame* et le volume de données sélectionnées;
- la fraction de *frames* retenue par une batterie de filtres, MF et NF par exemple.

On verra au paragraphe 7.2.2 une relation entre analyse en coïncidence et taux de sélection dans les différents interféromètres appartenant au réseau.

## 6.2.3 Effet de la taille du *frame*

Commençons par supposer que la sortie du filtre  $\mathfrak{F}$  suit une loi normale et qu'il n'existe pas de corrélation entre ses valeurs successives. On note  $T$  la durée du *frame* en secondes et  $f_s$  la fréquence d'échantillonnage de Virgo. Si le seuil de sélection  $\eta$  correspond à un taux de fausses alarmes  $\tau$ , la probabilité  $\mathfrak{P}_{\text{select}}$  de garder un *frame* vaut<sup>2</sup>

$$\mathfrak{P}_{\text{select}} \approx T f_s \tau = 2\% \left( \frac{T}{1 \text{ seconde}} \right) \left( \frac{f_s}{20 \text{ kHz}} \right) \left( \frac{\tau}{10^{-6}} \right) \quad (6.7)$$

---

<sup>2</sup>En fait l'expression correcte est  $\mathfrak{P}_{\text{select}} = [1 - (1 - \tau)^T f_s]$  mais on peut développer la puissance au premier ordre à condition que  $\tau T f_s$  soit petit devant 1 ce qui est en général le cas.

Or, le volume de stockage  $V_{\text{stock}}$  est proportionnel à  $\mathfrak{P}_{\text{select}} \times T$  et varie donc comme  $T^2$  : plus le *frame* est long, plus il sera “souvent” sélectionné ! Ce fait est également observé pour les filtres généraux *Mean Filter* et *Norm Filter* ; les taux de déclenchements diminuent avec la taille du *frame*, comme le montre le tableau 6.7. On peut également noter que pour de petits *frames*, les taux de sélection des deux algorithmes sont très proches alors que NF est plus “économique” pour des *frames* d’une seconde.

$T$ en sec. ( $f_s = 20$ kHz)	<i>Mean Filter</i>			<i>Norm Filter</i>			Cas Gaussien décorrélé
	$N = 20$	$N = 50$	$N = 100$	$N = 20$	$N = 50$	$N = 100$	
0.05	0.05%	0.03%	0.02%	0.05%	0.03%	0.02%	0.1%
0.25	0.26%	0.15%	0.09%	0.26%	0.15%	0.09%	0.5%
0.5	0.52%	0.29%	0.17%	0.52%	0.29%	0.17%	1%
1	1.03%	0.58%	0.34%	0.65%	0.38%	0.24%	2%

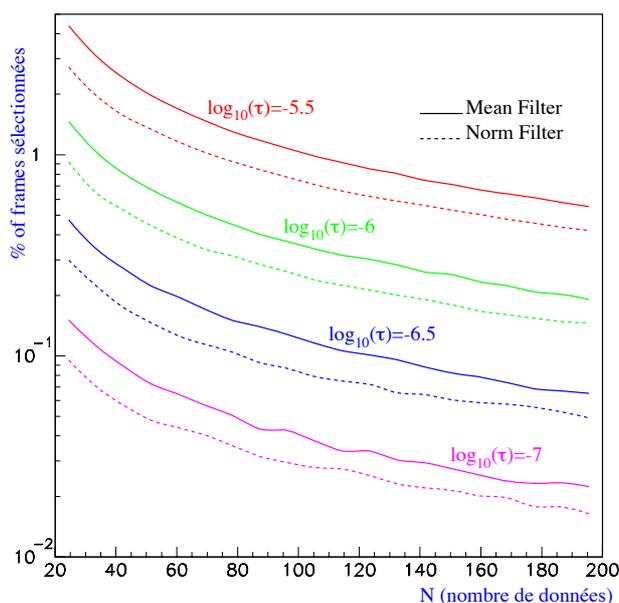
**Tableau 6.7:** Evolution du taux de sélection de *frames* pour les filtres MF et NF en fonction de  $T$  (exprimé en nombre de données) ; le cas gaussien est rappelé dans la dernière colonne pour comparaison. Les valeurs de  $\mathfrak{P}_{\text{select}}$  correspondent à  $\tau = 10^{-6}$ . On peut remarquer que le pourcentage de déclenchement est bien proportionnel à  $T$  sauf pour le *Norm Filter* quand le *frame* passe de 0.5 s à une seconde ; l’augmentation est plus faible qu’attendu, sans doute grâce au regroupement des fausses alarmes.

La dépendance quadratique du volume de données à conserver impose une optimisation, tant de la taille du *frame* que de son contenu – nombre de signaux conservés et fréquences d’échantillonnage de ces données.

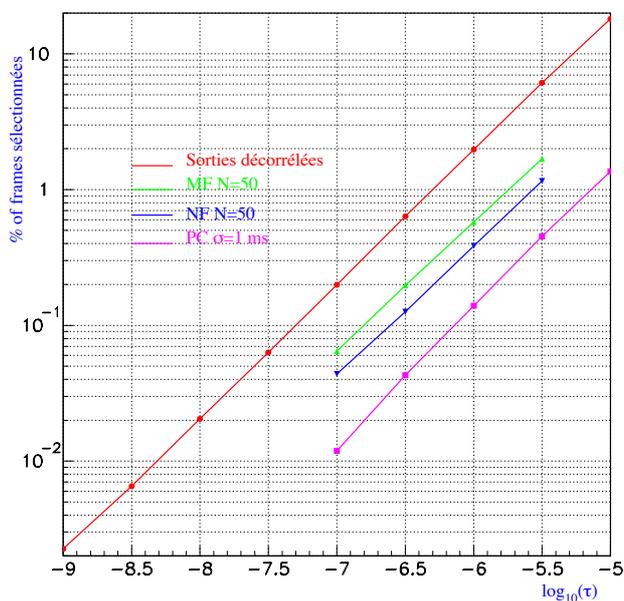
Les signaux impulsionnels ont une durée caractéristique de l’ordre de la milliseconde et donc, au moins pour ce qui est de la recherche de *bursts*, il serait envisageable de passer à une taille de *frame* de l’ordre de 100 ms ce qui ferait gagner environ deux ordres de grandeurs sur le stockage. Bien entendu la problématique est différente pour d’autres types d’ondes gravitationnelles, comme par exemple les signaux de phase spirale de coalescence, qui peuvent être détectable sur une durée de l’ordre de quelques secondes voire de plusieurs minutes. De plus, multiplier le nombre de *frames* – aussi bien en raccourcissant leur longueur qu’en en produisant plusieurs séries en parallèle destinées à différents utilisateurs – finira par poser des problèmes au niveau de la gestion de la base de données principale de l’expérience : rappelons pour fixer les idées qu’avec  $T = 1$  seconde comme actuellement, un jour complet de fonctionnement correspondra à au moins 86400 entrées nouvelles dans celle-ci !

On se place maintenant à  $T$  fixé (1 seconde). Une remarque faite en introduction du paragraphe 6.2 indiquait que la prise en compte de la structure consécutive d’une fausse alarme n’avait plus de sens avec la notion de *frame* puisque celui-ci est soit conservé, soit laissé de côté en totalité. Par contre, l’effet de la corrélation existant entre les sorties successives du filtre (en gros  $\propto \sqrt{N}$  où  $N$  est la longueur de la fenêtre d’analyse) est toujours valable et se traduit par une diminution du nombre de données “indépendantes” en sortie du *frame* et donc par une baisse du taux de déclenchement. Ainsi, la figure 6.6 montre l’évolution de la fraction de *frames* sélectionnés en fonction de  $N$  pour les filtres MF et NF. Celle-ci décroît à mesure que  $N$  augmente, dans des proportions similaires pour les deux filtres et pour différentes valeurs de  $\tau$ .

La figure 6.7 montre la variation du taux de sélection de *frames* en fonction de  $\tau$  pour un échantillon représentatif de filtres : deux méthodes générales – *Mean Filter* et *Norm Filter* – avec des fenêtres d’analyse de taille  $N = 50$  et l’algorithme de corrélation avec un pic gaussien de largeur 1 ms ; une dernière courbe présente la fraction de *frames* qui serait sélectionnée si les sorties consécutives des filtres n’étaient pas corrélées. La comparaison montre que le taux de sélection réel est plus faible dans tous les cas. On peut remarquer que la variation de  $\log(\mathfrak{P}_{\text{select}})$  en fonction de  $\log(\tau)$  est quasi linéaire comme pour l’équation (6.7). Un résultat constant, à nouveau illustré sur ce graphique, est le fait que NF a toujours moins de fausses alarmes que MF. On voit également que *Peak Correlator* sélectionne encore moins de *frames* mais on ne peut pas tirer de conclusion particulière de ce fait à cause de l’implémentation différente de PC par rapport aux filtres généraux.



**Figure 6.6:** Evolution du taux de sélection de *frames* en fonction de la taille  $N$  de la fenêtre d'analyse pour les filtres *Mean Filter* et *Norm Filter*. La taille du *frame*  $T$  est fixée à 1 seconde et les seuils sont calculés avec  $\tau$  variant entre  $10^{-5.5}$  et  $10^{-7}$ .



**Figure 6.7:** Evolution du taux de sélection de *frames* en fonction du seuil  $\eta(\tau)$  pour différents types de filtre : les méthodes générales *Mean Filter* (MF) et *Norm Filter* (NF) – avec une taille de fenetre  $N = 50$  – ainsi que le filtrage par un pic gaussien (PC) de largeur  $\sigma = 1$  ms. Le cas où la sortie des filtres serait complètement décorrélée est également indiqué pour comparaison.

### 6.2.4 Taux de sélection d'une batterie de filtres en "OU"

Pour l'analyse en temps réel des données de Virgo, plusieurs exemplaires de chaque type de filtres généraux – correspondant à des tailles de fenetre  $N$  différentes – seront implémentés en parallèle

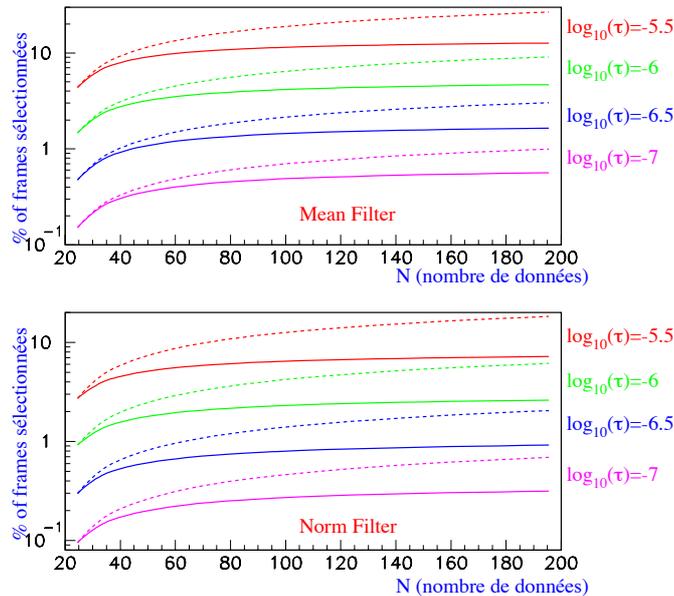
pour couvrir la gamme des durées possibles des *bursts*. Un premier exemple d'étude du comportement d'une telle batterie de filtres est présenté pour le *Mean Filter* dans le chapitre "sources impulsives" [165] du Data Analysis Design (DAD), document interne à la collaboration Virgo regroupant des contributions des différents groupes impliqués dans l'analyse des données.

Pour ce travail, dix largeurs de fenêtre comprises entre  $N = 10$  et  $N = 200$  ont été sélectionnées. Le but était d'étudier les performances de détections "en OU" de cette série d'algorithmes sur les signaux Zwerger-Müller.

Ici, ces configurations ont été reprises sous l'hypothèse de bruit seul pour estimer leur taux de sélection de *frames* pour le *Mean Filter* bien sûr, mais aussi pour le *Norm Filter* pour avoir des éléments de comparaison. La figure 6.8 montre l'évolution de cette valeur à mesure que les filtres de largeurs de fenêtre plus élevées sont inclus. Cela permet de vérifier une fois encore que le nombre de *frames* conservés par un filtre donné décroît en fonction de  $N$  (les courbes en pointillés présentées sur la figure 6.8 "s'aplatissent" à mesure que la taille de fenêtre augmente).

Pour chacun des quatre choix pour  $\tau$  (de  $10^{-5.5}$  à  $10^{-7}$ ), deux courbes sont présentées : celle en trait continu indique la fraction de *frames* effectivement conservée tandis que celle en pointillés montre le niveau de sélection obtenu par la simple addition du nombre de *frames* sélectionnés par chacun des filtres sans s'occuper de savoir si ceux-ci ont ou non été retenus plusieurs fois.

Ce second total est toujours supérieur au premier ce qui montre que les sorties de filtres associés à différentes largeurs de fenêtre peuvent produire des déclenchements dans le même *frame*. Le décalage s'accroît à mesure que  $N$  augmente, on peut en déduire que la plupart des *frames* retenus par des filtres avec une large taille de fenêtre ont également été sélectionnés par d'autres analysant de plus petites tranches de données. Cela est conforme à l'intuition : quand  $N$  est grand, les algorithmes enregistrent des fluctuations de bruit "de longue durée" souvent également détectables à plus petite échelle.



**Figure 6.8:** Taux de *frames* sélectionnés pour une série de filtres du même type – MF ou NF – ayant des tailles de fenêtre d'analyse différentes, tirées de [165]. L'évolution est similaire pour les deux méthodes de détection et les quatre valeurs différentes de  $\tau$  : la fraction de *frames* sélectionnés par un nouvel algorithme diminue quand  $N$  augmente et de moins en moins de nouveaux *frames* (i.e non retenus par des filtres associés à de plus petites tailles de fenêtre) sont ajoutés au total.

Un taux de sélection acceptable est de l'ordre du pourcent ; sur la figure 6.8 on voit que cela correspond à un taux de fausses alarmes de l'ordre de  $10^{-6.5}$ , valeur basse par rapport à celles utilisées pour le test des méthodes. Cette analyse préliminaire devra être complétée par un travail dans deux directions : optimisation de la taille du *frame* en fonction des contraintes de stockage et des souhaits des groupes d'analyse ; choix précis des seuils pour chaque taille de fenêtre.

## 6.3 Estimer la qualité des algorithmes

En parallèle de la recherche d’algorithmes de détection d’ondes gravitationnelles impulsionnelles, une autre activité complémentaire a été développée : la mise au point de procédés permettant d’estimer la qualité d’un filtre donné, d’abord de manière individuelle mais aussi par rapport aux autres méthodes en cours de développement. Ce travail intervient une fois que tous les paramètres du filtre (en particulier la taille de la fenêtre  $N$  et le seuil de déclenchement  $\eta$ ) ont été fixés.

L’instrument principale de cette démarche est la simulation Monte-Carlo, utile pour recréer et tester le processus de détection en présence d’un signal physique. Les paragraphes précédents nous ont déjà permis de rencontrer un certain nombre de caractéristiques de cet outil :

- hypothèse de bruit blanc gaussien et additif ;
- hypothèse de stationnarité de ses caractéristiques ;
- utilisation de la bibliothèque “Zwenger-Müller” de signaux de supernovae simulés – la plupart des quantités calculées pour estimer la qualité d’un filtre  $\mathfrak{F}$  sont moyennées sur ces 78 formes d’onde et les résultats correspondants sont désignés par les crochets  $\langle \rangle_{\text{ZM}}$  ;
- chaîne d’acquisition parfaite : l’interaction du signal gravitationnel avec le détecteur se retrouve sans altération dans le signal de bruit.

Une dernière simplification est de supposer, au moins dans une partie de ce paragraphe, l’orientation du détecteur parfaite par rapport à la source. Cette hypothèse restrictive sera levée au cours du paragraphe 6.3.3 qui servira en quelque sorte d’introduction au chapitre 7 où est étudié le problème de la détection en coïncidence entre plusieurs interféromètres.

### 6.3.1 Distances moyennes de détection et performance

Améliorer la sensibilité d’un détecteur interférométrique comme Virgo permet de repérer des signaux plus faibles et donc d’avoir accès à une portion de l’univers plus étendue. Pour une distribution de sources uniforme (en distance), le nombre d’événements détectables varie comme le cube du rayon de la zone observable et donc un gain sur la sensibilité se traduit concrètement au niveau de l’occurrence de signaux gravitationnels – les seules ondes gravitationnelles détectables étant d’origine astrophysique, Virgo ne peut “qu’être à l’écoute” et attendre...

Déterminer la distance (moyenne) de détection d’un signal, c’est donc non seulement tester la qualité d’un algorithme de filtrage donné, mais aussi – et surtout –, voir si la recherche même de ce signal a un sens. En effet, si un émetteur d’ondes gravitationnelles est observable jusqu’à une distance  $D$  et que la probabilité d’occurrence de l’événement est quasi-nulle jusqu’à  $10D$ , il ne sert à rien de mettre au point sur le champ une méthode sensible à ce signal puisque, aussi intéressant soit-il, aucune émission de ce type ne sera détectée ! *A contrario*, une amélioration toujours possible d’un ordre de grandeur de la sensibilité – cf. appendice E – dans la bonne bande de fréquence rendrait immédiatement cette source intéressante ce qui légitime néanmoins son étude, en prévision de ce type de circonstance.

Un exemple simple montrant l’importance de cette remarque est donné par la recherche des signaux de supernovae. Contrairement aux idées en vogue jusqu’à il y a une dizaine d’années<sup>3</sup>, les ondes gravitationnelles émises par les supernovae ont des amplitudes assez faibles – cf. paragraphe 1.3.4 – et seuls les phénomènes proches sont donc détectables, typiquement jusqu’à 100 kpc en étant large.

Une fois la distance moyenne de détection  $\bar{d}_{\mathfrak{F}}$  déterminée pour un signal et un filtre  $\mathfrak{F}$  particuliers, comment savoir si elle est satisfaisante ? Et quel sens donner à ce dernier adjectif ? La manière la plus simple de faire est de la comparer avec la valeur obtenue  $\bar{d}_{\text{opt}}$  par la méthode linéaire optimale, i.e. le filtre de Wiener. Par définition, on a – pour un filtre linéaire – la relation

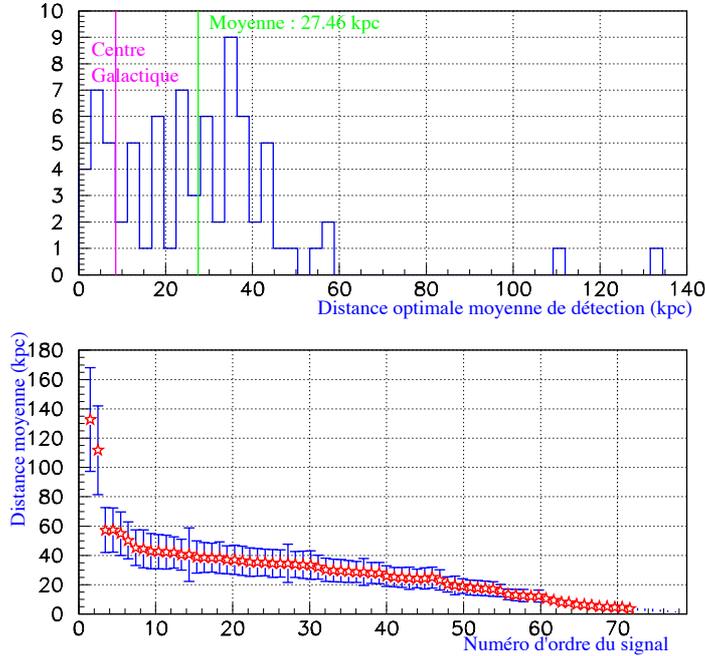
$$\bar{d}_{\mathfrak{F}} \leq \bar{d}_{\text{opt}} \tag{6.8}$$

qui traduit simplement la non-optimalité de l’algorithme, imposée par la méconnaissance de la forme précise des signaux gravitationnels impulsionnels ainsi que par la volonté de définir des méthodes robustes, i.e. sensibles à une large variété de signaux.

---

<sup>3</sup>Un tournant a été véritablement amorcé par le travail [55] de S. Bonnazzola et J.-A. Marck publié en 1993, confirmé par exemple par les simulations de T. Zwenger et E. Müller [63] (1997) puis par notre première publication sur la détection des signaux impulsionnels [151].

## Détection optimale pour les signaux de Zwirger-Müller



**Figure 6.9:** Répartition des distances optimales moyennes de détection pour les soixante-dix-huit signaux de la bibliothèque de Zwirger-Müller. La partie supérieure montre la distribution de  $\bar{d}_{\text{opt}}$  : seuls deux formes d’onde dépassent les 100 kpc tandis que les autres sont concentrées en dessous de 60 kpc. Le second graphique permet de voir les écart-types associés à chacune de ces distances de détection : ils sont en moyenne de l’ordre de 30% de  $\bar{d}_{\text{opt}}$ .

La figure 6.9 montre la distribution de  $\bar{d}_{\text{opt}}$  pour les 78 signaux Zwirger-Müller.  $\langle \bar{d}_{\text{opt}} \rangle_{\text{ZM}} \approx 27.5$  kpc, ce qui est un peu supérieur au diamètre de la Voie Lactée, de l’ordre de 20 kpc ; curieusement, cette moyenne est également la médiane de la distribution. Seize signaux ne sont pas détectables jusqu’au centre galactique ( $\sim 8.5$  kpc) tandis que deux formes d’onde seulement pourraient être visibles jusqu’aux Nuages de Magellan. Dans la partie basse de la figure, on peut voir pour chaque signal l’écart-type associé à  $\bar{d}_{\text{opt}}$  ; il vaut en moyenne 30% de la distance de détection. Leur prise en compte conduit à l’estimation d’un RMS d’environ 1.1 kpc pour  $\langle \bar{d}_{\text{opt}} \rangle_{\text{ZM}}$ .

Si ces signaux sont représentatifs des ondes gravitationnelles émises lors d’explosions réelles de supernovae, aucune des méthodes d’analyse précédemment décrites n’est conçue spécifiquement pour détecter une de ces formes d’onde, toutes différentes et par là-même particulières. Aussi, elles donneront des résultats moins bons que le filtre optimal, ce qui prouve ainsi que seules des phénomènes “proches” (à l’échelle de l’Univers!) pourront être vus.

## Distances moyennes de détection

Le calcul de  $\bar{d}_{\mathfrak{F}}$  et  $\bar{d}_{\text{opt}}$  s’effectue à l’aide de simulations Monte-Carlo du processus de détection. Pour chaque réalisation de bruit, la distance de détection  $d_{\text{detect}}$  – correspondant à  $\Phi(d_{\text{detect}}) = \eta$  – est estimée, par exemple par dichotomie ou bien analytiquement<sup>4</sup>.  $\bar{d}_{\mathfrak{F}}$  et  $\bar{d}_{\text{opt}}$  sont les valeurs moyennes des distributions correspondantes de  $d_{\text{detect}}$ .

Ce processus est coûteux en temps de calcul ce qui a motivé la recherche d’un estimateur de cette quantité qui soit plus simple à déterminer. Dans le cas d’un filtre linéaire  $\mathfrak{F}$ , on a

<sup>4</sup>Dans la plupart des cas, l’équation  $\Phi(d_{\text{detect}}) = \eta$  se ramène à une équation du premier ou du second degré en  $d_{\text{detect}}$  dont les coefficients dépendent de la réalisation du bruit. Pour le second degré, on peut montrer que l’existence d’une solution positive revient à supposer que l’échantillon de bruit ne contient pas de fausse alarme.

$$\Phi_{\mathfrak{F}}[s(t) + n(t)] = \underbrace{\Phi_{\mathfrak{F}}[s(t)]}_{\propto 1/d} + \underbrace{\Phi_{\mathfrak{F}}[n(t)]}_{\text{loi normale}} \quad (6.9)$$

où  $s(t)$  est le signal et  $n(t)$  le bruit. La valeur moyenne du rapport S/B en sortie du filtre est

$$\Phi_{\mathfrak{F}}[s(t)] = \left( \frac{d_0}{d} \right) \Phi_{\mathfrak{F}}[s_0(t)] \quad (6.10)$$

avec  $d_0$  une distance de référence (par exemple 1 Mpc) où l'amplitude du signal  $s_0(t)$  est donnée. On pose alors :

$$\hat{d}_{\mathfrak{F}}[s_0(t)] = \frac{d_0 \Phi_{\mathfrak{F}}[s_0(t)]}{\eta} \quad (6.11)$$

$\hat{d}_{\mathfrak{F}}$  est l'estimateur cherché ; intuitivement, sa valeur doit être assez proche de  $\bar{d}_{\mathfrak{F}}$  et son calcul est quasiment immédiat. De plus, cette définition s'étend assez facilement aux filtres quadratiques en procédant de la même manière.

Or, en comparant les valeurs de  $\hat{d}_{\mathfrak{F}}$  et  $\bar{d}_{\mathfrak{F}}$  pour différents types de signaux et de filtres, on s'aperçoit que l'inégalité suivante est toujours vérifiée :

$$\hat{d}_{\mathfrak{F}} < \bar{d}_{\mathfrak{F}} \quad (6.12)$$

Par exemple, en moyennant ces grandeurs sur les signaux de Zwerger-Müller et en utilisant la méthode du filtrage de Wiener pour les détecter<sup>5</sup>, on obtient

$$\begin{cases} \langle \hat{d}_{\text{opt}} \rangle_{\text{ZM}} = 25.40 \text{ kpc} \\ \langle \bar{d}_{\text{opt}} \rangle_{\text{ZM}} = 27.46 \pm 1.09 \text{ kpc} \end{cases}$$

Cette relation d'ordre est liée au mode de calcul des deux quantités :  $\hat{d}_{\mathfrak{F}}$  s'interprète en fait d'un point de vue probabiliste comme un estimateur de la moyenne *harmonique*<sup>6</sup> de la distance de détection et l'équation (6.12) n'est rien d'autre qu'un cas particulier d'un théorème de comparaison des moyennes arithmétique, géométrique et harmonique dû à Gauss<sup>7</sup>.

Néanmoins, comme l'écart entre les deux quantités  $\bar{d}_{\mathfrak{F}}$  et  $\hat{d}_{\mathfrak{F}}$  n'est que de quelques pourcents, la valeur de cette dernière grandeur est un bon critère pour une première estimation de la performance d'un filtre sur un signal donné ou une famille de formes d'onde.

La figure 6.10 montre par exemple la variation de  $\langle \hat{d} \rangle_{\text{ZM}}$  – exprimée en kpc – en fonction de la taille de la fenêtre d'analyse  $N$  pour trois filtres généraux : *Mean Filter*, *Norm Filter* et *Slope Filter*. Ce graphe permet déjà de comparer les méthodes entre elles et d'émettre un premier diagnostic sur la qualité de ces algorithmes pour détecter les signaux de la bibliothèque Zwerger-Müller :

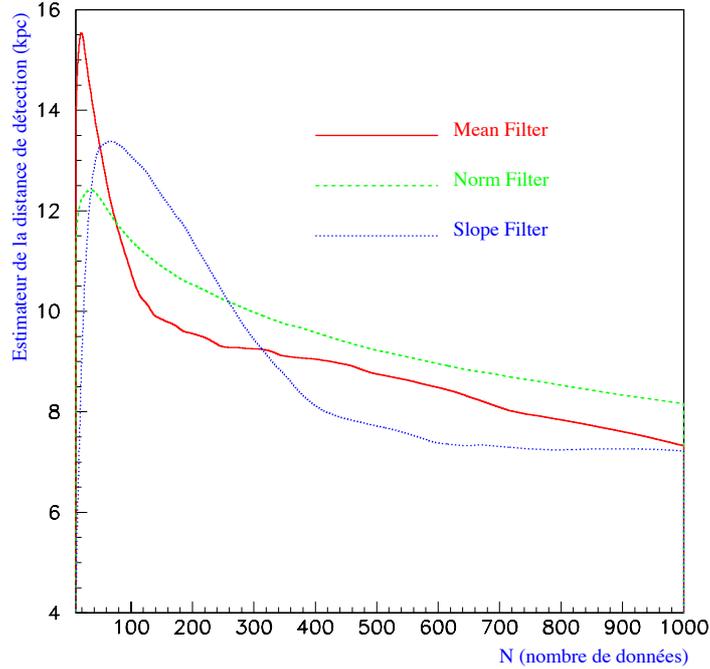
- les distances de détection sont au-mieux de l'ordre de 60% de celles obtenues par filtrage optimal ;
- le *Mean Filter* est meilleur que le *Norm Filter* pour  $N$  petit alors que c'est le contraire pour  $N$  grand ;
- le *Slope Filter* est plus robuste (i.e. donne de bons résultats dans une plus large gamme de fenêtres) que les deux autres et est efficace pour des valeurs de  $N$  comprises entre 80 et 200 environ ;
- les petites tailles de fenêtre sont favorisées.

---

<sup>5</sup>Corrélation du signal cherché avec un calque identique, ce qui est l'algorithme linéaire optimal.

<sup>6</sup> $\frac{1}{\hat{d}_{\mathfrak{F}}} = \left( \frac{1}{\bar{d}_{\text{detect}}} \right)$  : l'inverse de  $\hat{d}_{\mathfrak{F}}$  est la moyenne des inverses des distances de détection.

<sup>7</sup>La comparaison sur les signaux de la bibliothèque de Zwerger-Müller de la valeur réelle de la moyenne harmonique et de  $\hat{d}_{\text{opt}}$  a montré une différence systématique de l'ordre de 2.5% en moyenne entre ces deux grandeurs, contre 8.5% entre  $\bar{d}_{\text{opt}}$  et  $\hat{d}_{\text{opt}}$ . Un point intéressant à remarquer est le très bon accord entre la moyenne harmonique et la médiane de la distribution des distances de détection. Ces dernières valeurs apparaissent comme des estimateurs plus robustes de la qualité d'un filtre puisqu'elles ne sont pas "polluées" par les échantillons de données où le bruit seul est proche du seuil de détection et pour lesquels, par hasard, le signal est détectable très loin.



**Figure 6.10:** Evolution de  $\langle \hat{d} \rangle_{ZM}$  (en kpc) en fonction de la taille de la fenêtre d'analyse  $N$  pour trois filtres généraux : *Mean Filter*, *Norm Filter* et *Slope Filter* avec un seuil correspondant à  $\tau = 10^{-6}$ .

### Comparaison de $\langle \bar{d} \rangle_{ZM}$ pour différents filtres généraux

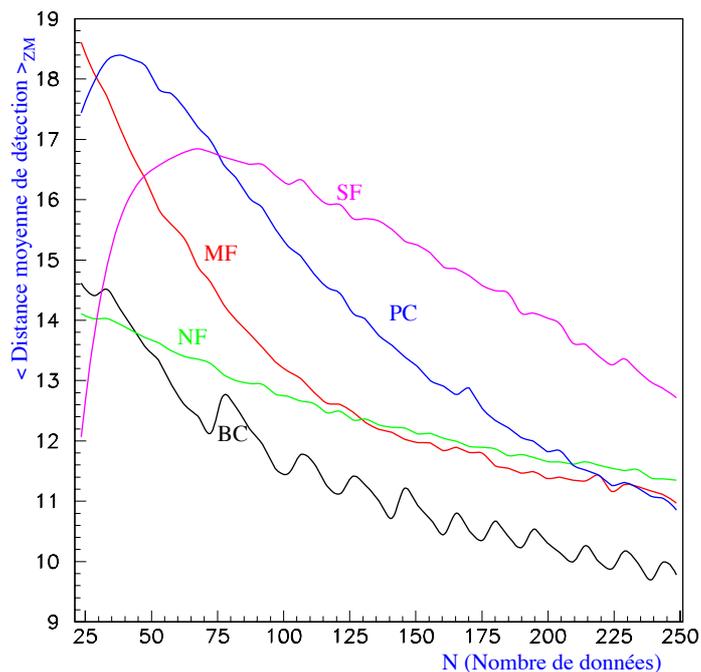
La figure 6.11 présente la variation de  $\langle \bar{d} \rangle_{ZM}$  en fonction de la taille  $N$  de la fenêtre d'analyse pour l'ensemble des filtres généraux, à l'exception de ALF, extensivement étudié dans [99]. La méthode *Slope Filter* a été incluse pour montrer la différence de comportement entre les algorithmes du type SF-ALF et les autres : en effet, les premiers privilégient des fenêtres assez larges tandis que les autres – en particulier le *Mean Filter* – ont les meilleurs résultats avec des zones de données réduites.

Pour éviter d'avoir des distances de détection anormalement grandes lors de certaines simulations, les échantillons de bruit ne devaient comporter aucune fausse alarme pour les différents filtres. Cette condition plus restrictive (nécessaire pour comparer les résultats des méthodes sur les mêmes données) biaise un peu les valeurs de  $\langle \bar{d} \rangle_{ZM}$  en privilégiant des échantillons où le niveau de bruit est plutôt "faible". Néanmoins, l'effet est peu important (de l'ordre d'un ou deux pourcents tout au plus) et peut donc être négligé.

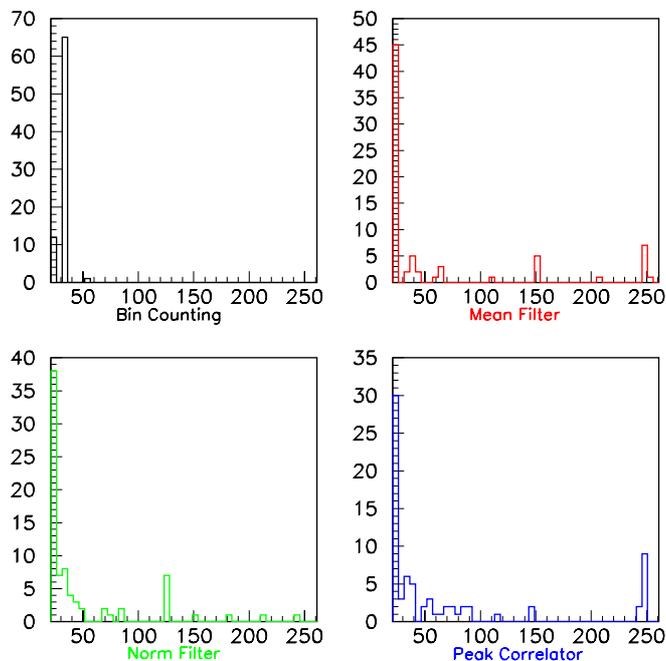
Dans cet exemple, les seuils des différents filtres sont calculés à partir des distributions théoriques en prenant un taux de fausses alarmes  $\tau = 10^{-6}$ . La largeur  $\sigma$  du *Peak Correlator* est optimisée en fonction de la taille de la fenêtre d'analyse de manière à ce que le pic soit tronqué à 1% de sa valeur maximale.

Les filtres peuvent être globalement séparés en deux catégories : d'un côté, MF, PC et SF qui montrent des résultats équivalents et de l'autre NF et BC, moins performants. Les résultats pour le *Norm Filter* dépendent très peu de la taille de la fenêtre et rejoignent ceux de MF et de PC pour les grandes valeurs de  $N$  tandis que SF reste plus performant.

La figure 6.12 montre la répartition des meilleures tailles de fenêtre (i.e. celles associées à la distance moyenne de détection la plus grande) pour chacun des soixante-dix huit signaux de Zwerger Müller. Pour les quatre filtres présentés (BC, MF, NF et PC), on peut noter une nette préférence pour les petites valeurs de  $N$ , en particulier pour le *Bin Counting*; le *Mean Filter* et le *Peak Correlator* présentent des distributions plus étalées.



**Figure 6.11:** Distance de détection  $\langle \bar{d} \rangle_{ZM}$  moyennée sur les signaux de la bibliothèque de Zwerger-Müller en fonction de la taille de fenêtre  $N$  pour les filtres *Bin Counting*, *Mean Filter*, *Norm Filter*, *Peak Correlator* et *Slope Filter*. Les graphes correspondants pour le filtre ALF peuvent être trouvés dans [99] au paragraphe 3.10.



**Figure 6.12:** Répartition des meilleures tailles de fenêtre pour la détection des signaux de Zwerger-Müller à l'aide des filtres *Bin Counting*, *Mean Filter*, *Norm Filter* et *Peak Correlator*.

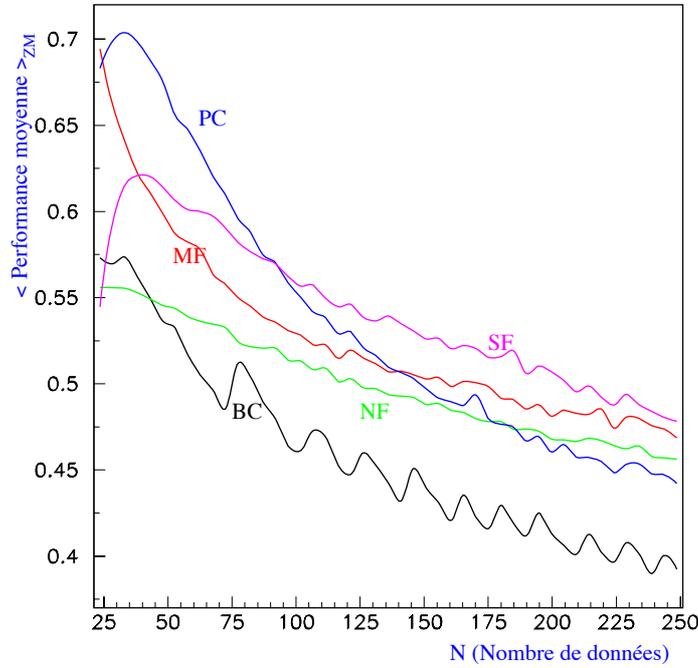
### Performances

La **performance** d'un filtre  $\mathfrak{F}$  pour la détection d'un signal  $s_k(t)$  est définie comme le rapport entre  $\bar{d}_{\mathfrak{F}}^k$  et  $\bar{d}_{\text{opt}}^k$  :

$$\pi_{\mathfrak{F}}^k = \frac{\bar{d}_{\mathfrak{F}}^k}{\bar{d}_{\text{opt}}^k} \leq 1 \text{ pour un filtre linéaire} \quad (6.13)$$

Pour avoir une valeur plus représentative de la qualité d'un filtre, on moyenne en général cette quantité sur une famille de signaux  $[s_k(t)]_{1 \leq k \leq K}$  - par exemple la bibliothèque de  $K = 78$  formes d'onde de Zwerger et Müller.

$$\langle \pi_{\mathfrak{F}} \rangle_K = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \pi_{\mathfrak{F}}^k \quad (6.14)$$

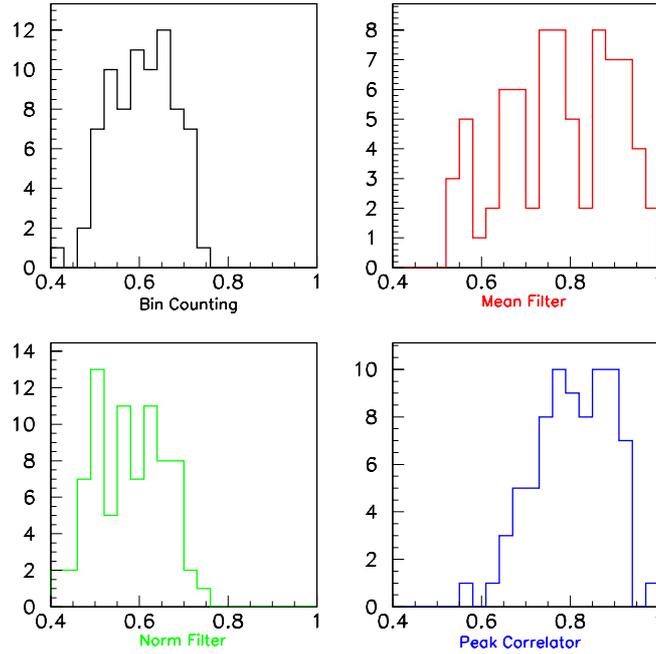


**Figure 6.13:** Performance  $\langle \pi_{\mathfrak{F}} \rangle_{\text{ZM}}$  moyennée sur les signaux de la bibliothèque de Zwerger-Müller en fonction de la taille de fenêtre  $N$  pour les filtres *Bin Counting*, *Mean Filter*, *Norm Filter*, *Peak Correlator* et *Slope Filter*.

La figure 6.13 présente la variation de la performance de détection  $\langle \pi_{\mathfrak{F}} \rangle_{\text{ZM}}$  pour les filtres généraux BC, MF, NF, PC et SF. Elle a été obtenue dans les mêmes conditions que le graphique 6.11 qui concernait lui les distances de détection et son examen permet de compléter les remarques faites au paragraphe précédent. En effet, on peut voir que les meilleurs résultats sont obtenus par le *Peak Correlator*, y compris pour les plus petites fenêtres. Le *Slope Filter* devient également assez vite plus performant que le *Mean Filter*, ce qui revient à dire que PC et SF ont des résultats plus homogènes sur l'ensemble des formes d'onde tandis que MF est plus ou moins efficace selon le signal considéré. Pour le reste, les figures 6.13 et 6.11 sont assez similaires.

La figure 6.14 montre la répartition des meilleures performances  $\pi_{\mathfrak{F}}^{\text{max}}$  (le maximum étant pris sur les tailles de fenêtre  $N$ ) pour les signaux de la bibliothèque de Zwerger-Müller. Avec cette optimisation, les performances sont supérieures à 0.4 dans tous les cas et atteignent au moins 0.6 pour le cas du *Peak Correlator*.

On peut noter une certaine similitude entre les distributions de BC et NF d'une part, et de MF et PC d'autre part, ce qui conduit à l'idée de représenter  $\pi_{\text{BC}}^{\text{max}}$  en fonction de  $\pi_{\text{NF}}^{\text{max}}$  et  $\pi_{\text{PC}}^{\text{max}}$  en



**Figure 6.14:** Répartition des meilleures performances pour la détection des signaux de Zwinger-Müller à l'aide des filtres *Bin Counting*, *Mean Filter*, *Norm Filter* et *Peak Correlator*.

fonction de  $\pi_{MF}^{\max}$ , ce qui est fait sur la figure 6.15. On peut voir que les performances maximales des filtres *Bin Counting* et *Norm Filter* sont très corrélées sur un même signal et légèrement à l'avantage de BC qui a des meilleures propriétés que NF pour les toutes petites fenêtres. La corrélation existe également pour *Mean Filter* et *Peak Correlator*, même si elle est moins marquée.

### 6.3.2 Comparatif des performances de différentes méthodes de filtrage

Méthode	Filtrage optimal	BC	NF	PC	MF	ALF
$\langle d \rangle_{ZM}$ (kpc)	27.5	15.5	14	18.5	20.0	21.7
$\langle \pi_{\mathcal{F}} \rangle_{ZM}$	1	0.57	0.55	0.73	0.78	0.80

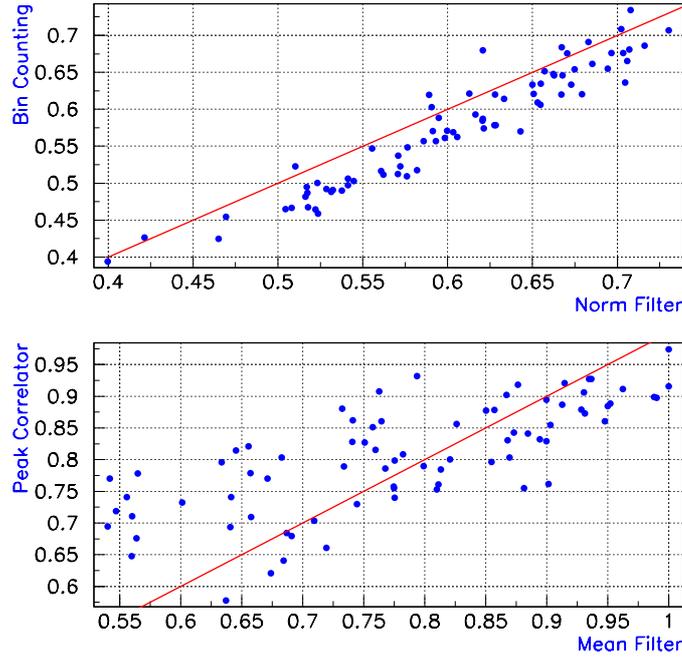
**Tableau 6.8:** Comparatif des performances de différentes méthodes de filtrage

Pour conclure ce paragraphe sur les performances des différentes méthodes de filtrage, la table 6.8 présente un comparatif de leurs résultats (distance moyenne de détection et performance) pour la bibliothèque de signaux Zwinger et Müller. Elle montre clairement que le filtre ALF [99] est le meilleur, devant le *Mean Filter*, le *Peak Correlator* et enfin le *Bin Counting* et le *Norm Filter*.

Néanmoins, ces résultats ont été obtenus avec des procédures de simulation légèrement différentes et des niveaux d'optimisation des techniques variables :

- ALF fonctionne avec quatre tailles de fenêtre différentes en parallèle, choisies comme étant les plus adéquates pour les signaux Zwinger-Müller ;
- le *Mean Filter* utilise un jeu de dix fenêtres choisies dans [165] pour coïncider au mieux avec la distribution des meilleures tailles de fenêtre d'analyse – cf. figure 6.12 – mais sans que cette notion soit rigoureusement quantifiée ;
- le *Norm Filter* a une seule fenêtre d'analyse.

Aussi, un des axes de travail actuel du groupe [166] est d'unifier toutes ces données à partir d'un protocole de simulation commun pour obtenir des résultats comparables: taux de fausses



**Figure 6.15:** Corrélations existant entre les meilleures performances des filtres BC et NF d’une part, et MF et PC d’autre part. On a en particulier  $\pi_{BC}^{\max} \approx \pi_{NF}^{\max}$ . La ligne représentée sur les graphes n’est pas le résultat d’une régression linéaire mais plus simplement la droite  $y=x$ ; elle permet de voir que les performances optimales de NF sont un peu meilleures en moyenne que celles de BC, tout comme celles de PC par rapport à MF.

alarmes, performances, efficacité de détection.... En parallèle, la construction de la librairie [167] qui sera utilisée pour la détection en ligne a débuté: il s’agit de gérer l’accès aux données arrivant par paquets d’une seconde (les *frames*), de les filtrer et de faire remonter l’information sur les événements sélectionnés vers l’acquisition.

### 6.3.3 Efficacité d’un filtre

#### Généralités

Une fois déterminée l’échelle de distance à laquelle un signal donné  $s_0(t)$  (correspondant à une source éloignée d’une distance  $d_0$ ) est détectable par un algorithme de recherche  $\mathfrak{F}$  se pose une autre question intéressante: si un tel événement se produit à une distance  $d \sim d_0$ , quelle est la probabilité qu’il soit effectivement détecté par le filtre?

La réponse à cette question est à nouveau apportée par simulation: on “dilate” l’amplitude de  $s_0(t)$  à l’aide de la loi d’échelle

$$\frac{s(t)}{s_0(t)} = \frac{d}{d_0} \quad (6.15)$$

pour obtenir le signal  $s(t)$ . Ensuite celui-ci est ajouté au bruit simulé pour former les données analysées par le filtre. Le rapport S/B en sortie de celui-ci est comparé au seuil pour savoir s’il y a eu ou non détection. L’**efficacité**  $\epsilon_{\mathfrak{F}}(d)$  est la fraction d’événements effectivement recensés, i.e.:

$$\epsilon_{\mathfrak{F}}(d) = \frac{\text{Nombre d'événements détectés}}{\text{Nombre de simulations}} \quad (6.16)$$

On peut remarquer que  $\epsilon_{\hat{d}_{\mathfrak{F}}}(\hat{d}_{\mathfrak{F}}) = 50\%$  par construction de cet estimateur. En particulier, à la distance de détection  $\hat{d}_{\mathfrak{F}}$ , l'efficacité de détection est inférieure à 50%.

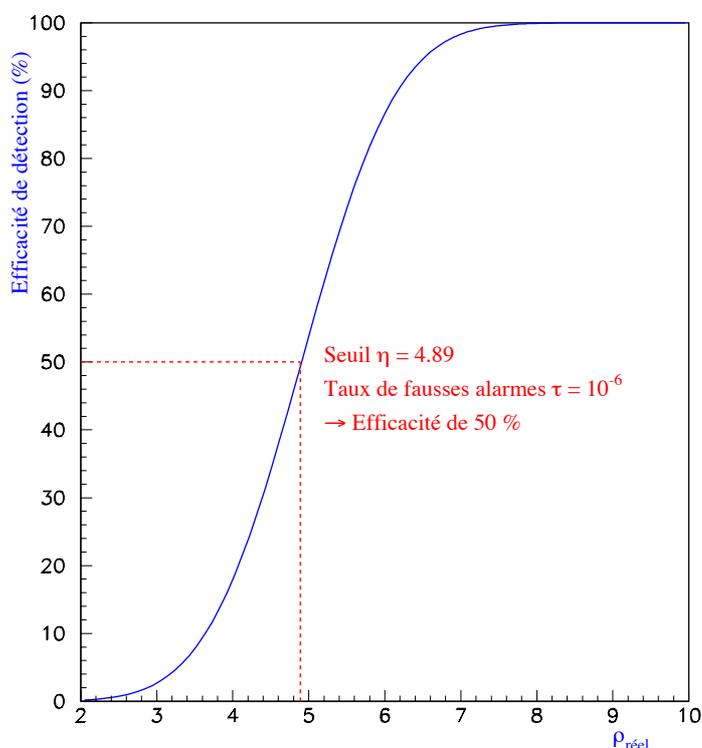
### Cas d'un filtre linéaire

Au lieu de parler en terme de distance de détection  $d$ , il est équivalent, et certainement plus pratique de raisonner avec des rapports S/B  $\rho$ . La relation entre ces deux grandeurs est simple –  $\rho \propto 1/d$  – et l'utiliser permet de donner des résultats indépendants de l'amplitude du signal et du niveau de bruit du détecteur. Dans le cas où ces paramètres sont connus, la conversion de l'un à l'autre des vocabulaires est simple.

Dans la suite de cette thèse, et particulièrement dans le chapitre 7 consacré aux coïncidences entre interféromètres et aux possibilités d'analyses cohérentes avec des détecteurs de neutrinos, la plupart des raisonnements seront faits avec des rapports S/B. Pour se familiariser avec ces notations, la suite de ce paragraphe présente plusieurs graphiques montrant la variation de l'efficacité de détection en fonction de  $\rho$ .

Le premier d'entre-eux – figure 6.16 – concerne les filtres linéaires dont la sortie est une variable aléatoire normale, sous l'hypothèse de bruit gaussien. Il montre l'efficacité de détection en fonction de  $\rho$  pour un seuil fixé ici à  $\eta = 4.89$ , ce qui correspond à  $\tau = 10^{-6}$  (voire la figure C.1).

Sur ce graphique, on peut voir que la probabilité de détection de 1/2 est atteinte pour  $\rho = \eta$  valeur du seuil à partir duquel la grandeur  $\hat{d}$  a été définie – cf. équation (6.11).  $\epsilon(\rho)$  reste faible jusqu'à un rapport S/B de 3 environ ; à partir de 4, elle croît très rapidement et elle est presque de 100% au delà de 7 : un simple gain d'un facteur deux sur la sensibilité du détecteur peut ainsi avoir des conséquences importantes sur le nombre d'événements enregistrés en transformant des détections possibles en probables.



**Figure 6.16:** Efficacité de détection pour un filtre dont la sortie (sous l'hypothèse de bruit seul) suit une loi normale en fonction du rapport sur bruit de l'onde gravitationnelle  $\rho$ . Au seuil  $\eta = 4.89$  ici, celle-ci vaut 50% puisque, par linéarité de l'algorithme,  $\rho$  est la valeur moyenne de la distribution en présence de signal.

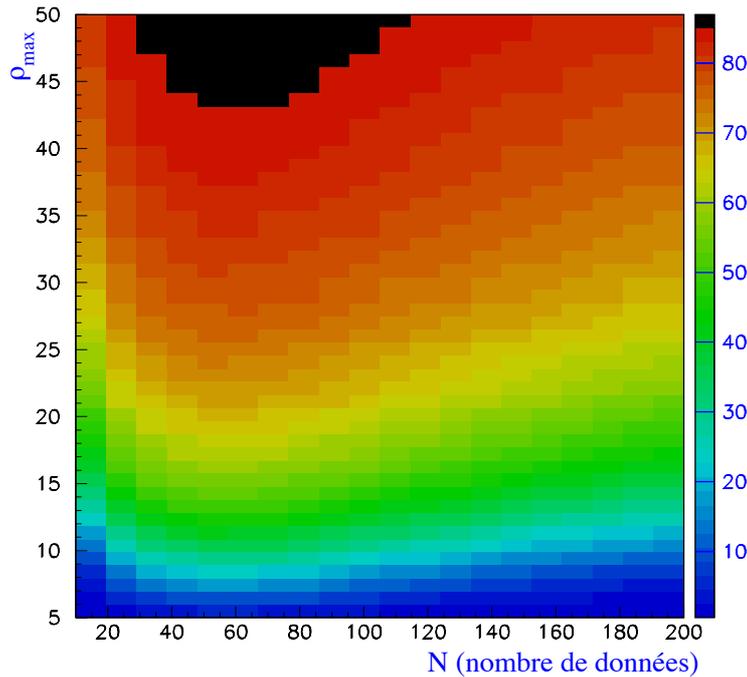
### Efficacité de détection d'un pic gaussien par le *Mean Filter*

Bien sûr, l'analyse présentée ici est incomplète car elle ne prend pas en compte la source de non-détection peut-être la plus importante, à savoir le fait que la réponse d'un détecteur interférométrique n'est pas uniforme selon la position de la source sur la voûte céleste. Ce point nécessite une analyse particulière, présentée dans le chapitre 7.

Néanmoins, pour introduire ce concept dès maintenant, on s'intéresse à l'efficacité de détection d'un pic gaussien de largeur  $\sigma = 1$  ms – typique d'un *burst* d'onde gravitationnelle – par la méthode *Mean Filter*. A l'aide d'un formalisme développé en détail au paragraphe 7.3.2, on prend en compte l'orientation (et donc la réponse) variable du détecteur, ce qui revient à supposer une réduction aléatoire du rapport S/B  $\rho$  enregistré en sortie de l'algorithme par rapport au cas optimal  $\rho_{\max}$ .

La quantité  $\rho_{\max}$  permet de quantifier l'amplitude "absolue" d'un signal, indépendamment de l'instrument utilisé pour le rechercher. La figure 6.17 présente l'efficacité de détection  $\epsilon$  du *Mean Filter* en fonction de cette variable – variant de 5 (soit un peu au-dessus du seuil classique choisi  $\eta = 4.89$ ) à 50 (valeur très élevée et irréaliste) – et de la largeur de la fenêtre d'analyse  $N$ .

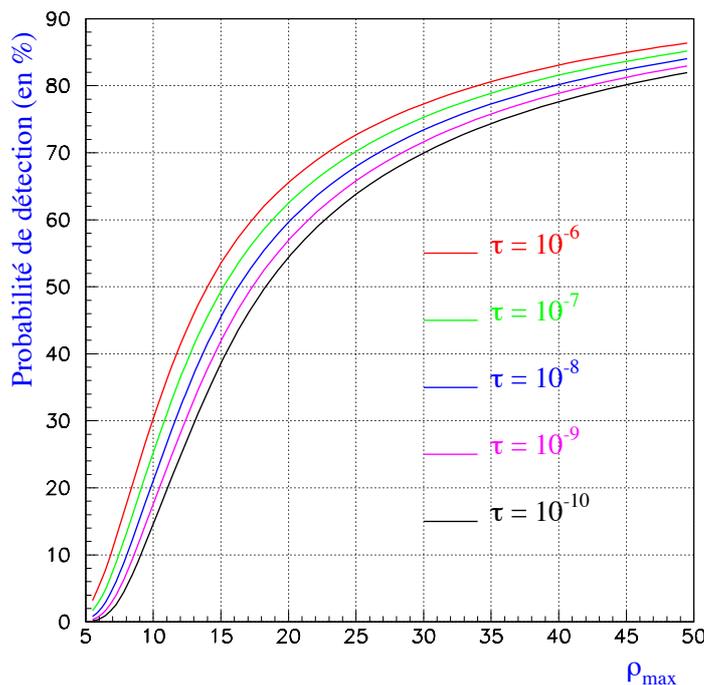
La première chose à remarquer est que l'efficacité plafonne autour de 90% même pour des signaux très forts: même dans des cas extrêmes tels que ceux-là, la détection n'est pas assurée. De plus, on peut voir sur cet exemple l'effet de la fenêtre d'analyse: à  $\rho_{\max}$  fixé,  $\epsilon$  augmente avec  $N$  jusque vers 60-70 puis décroît ensuite. Cette valeur est liée à la taille du signal cherché, un pic gaussien de largeur 1 ms, soit 20 données à la fréquence d'échantillonnage de 20 kHz. En dessous de  $\rho_{\max} = 10$ , la probabilité de détection reste faible et elle n'atteint les 50% qu'au-delà d'un rapport S/B optimal de l'ordre de 15 pour les fenêtres les plus adaptées.



**Figure 6.17:** Efficacité du détection d'un pic gaussien de largeur  $\sigma = 1$  ms par le *Mean Filter* en fonction de la taille de la fenêtre d'analyse  $N$  et du rapport S/B optimal du signal.

### Efficacité de détection et seuil de fausses alarmes

La figure 6.18 enfin montre la variation de l'efficacité de détection d'un pic gaussien par filtrage de Wiener (corrélation avec un calque identique) en fonction du rapport S/B optimal  $\rho_{\max}$  pour plusieurs choix du taux de fausses alarmes  $\tau$  (et donc du seuil  $\eta$ ). Comme pressenti à l'examen de la figure C.1 reliant  $\eta$  à  $\tau$  pour un filtre gaussien,  $\epsilon$  dépend assez faiblement du choix du niveau de déclenchement pour les grandes valeurs de  $\rho_{\max}$ . Par contre, la différence est plus critique pour

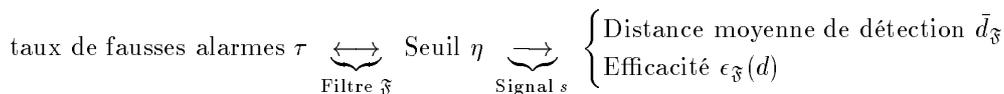


**Figure 6.18:** Efficacité de détection d'un pic gaussien de largeur  $\sigma = 1$  ms par filtrage de Wiener en fonction du rapport S/B optimal du signal  $\rho_{\max}$  et du taux de fausses alarmes  $\tau$ , variant de  $10^{-6}$  à  $10^{-10}$ .

les signaux les plus faibles où l'écart peut atteindre un facteur cinq ou plus – néanmoins, dans ces cas-là la détection est de toute façon improbable.

### 6.3.4 Concentrer les caractéristiques d'un filtre : les courbes ROC

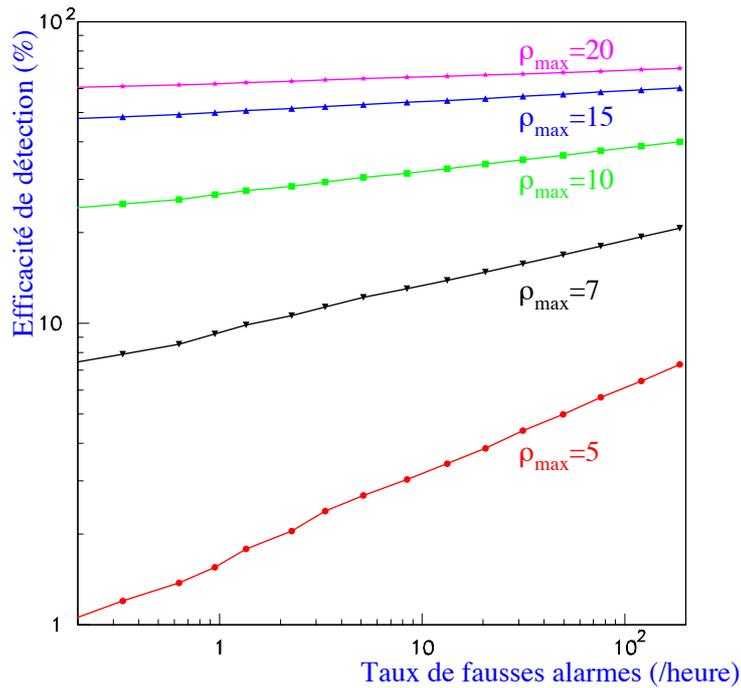
La procédure de test de la qualité d'un filtre telle qu'elle a été présentée ci-dessus peut être résumée par le schéma suivant :



A un taux de fausses alarmes fixé  $\tau$  correspond un seuil  $\eta$  obtenu à partir de la fonction de répartition de la sortie du filtre  $\mathfrak{F}$  sous l'hypothèse de bruit seul. Une fois ce dernier paramètre de l'algorithme déterminé, un signal gravitationnel est ajouté au bruit et une série de simulations Monte-Carlo permet d'obtenir la distance moyenne de détection et l'efficacité de la méthode  $\epsilon_{\mathfrak{F}}$ .

Si on fixe le signal – i.e. on choisit son type, ses caractéristiques ET la distance de la source –, on peut condenser une grande partie de l'information sur sa détection par un filtre fixé en un seul graphique, appelé **ROC** (pour *Receiver Operating Characteristics*), qui présente l'efficacité de détection  $\epsilon_{\mathfrak{F}}$  en fonction du taux de fausses alarmes  $\tau$ . La valeur du seuil n'apparaît plus – elle reste bien entendue disponible à partir de la fonction de répartition  $\tau(\eta)$  – dans la mesure où, au contraire du taux de déclenchement, elle n'apporte pas d'information particulière en elle-même. Par contre, cette courbe fait bien ressortir les motivations du choix de  $\tau$  : ménager à la fois le confort d'analyse (peu d'alarmes par heure) et la capacité de détection d'un signal donné (efficacité maximale).

La figure 6.19 montre un exemple de courbes ROC pour le cas du filtrage de Wiener par une gaussienne de largeur 1 ms ; les détails de la simulation sont décrits dans la légende du graphe. Comme attendu, l'efficacité est une fonction croissante de l'amplitude du signal – décrite par le rapport S/B optimal  $\rho_{\max}$  – et du nombre de fausses alarmes  $\mathbb{T}$  par unité de temps. Le modèle utilisé ici est plus réaliste que ceux qui ont été présentés jusqu'ici dans la mesure où il prend en



**Figure 6.19:** Exemple de courbes ROC pour un filtre gaussien de largeur 1 ms. Le signal étant du même type, on peut parler ici de filtrage de Wiener. L'efficacité de détection est présentée en fonction du nombre de fausses alarmes par heure  $\mathbb{T}$ . Chacune des courbes correspond à une amplitude différente du signal, quantifiée par le rapport S/B  $\rho_{\max}$ , définie comme étant la sortie – en moyenne – du filtre optimal pour le cas d'une orientation parfaite du détecteur par rapport à la source. Cette quantité sera au centre de la discussion sur les coïncidences entre interféromètres au paragraphe 7.3. Dans cette simulation, la perte en rapport S/B due aux variations de la réponse de l'instrument est prise en compte selon le protocole détaillé dans la section 7.3.2. Cela explique pourquoi l'efficacité semble plafonner autour de 80% même pour des valeurs relativement grandes de  $\rho_{\max}$  et  $\mathbb{T}$ .

compte la non-uniformité de la réponse du détecteur à un signal donné. Cela explique la croissance assez lente de l'efficacité de détection en fonction de  $\mathbb{T}$ .

Les courbes ROC peuvent servir dans la définition de la stratégie de filtrage, en particulier pour la définition des seuils pour les méthodes utilisant le filtrage de Wiener. Laisant de côté dans un premier temps la question des distances de détection, on raisonne uniquement en terme de rapport S/B optimal  $\rho_{\max}$  et on impose par exemple la prescription suivante : un signal quelconque appartenant à l'espace des paramètres  $\mathbb{P}$  et d'amplitude  $\rho_{\max}$  fixée (typiquement entre 10 et 15) doit être détectée par la famille de calques correspondante avec une efficacité minimale (entre 30% et 50%).

Ce type de condition peut également s'appliquer aux méthodes générales même s'il est plus difficile de sélectionner les signaux tests. On pourrait soit se restreindre à des pics gaussiens ou à des oscillations amorties, soit utiliser la bibliothèque de Zwerger et Müller. Dans ce dernier cas se pose le problème de la différence d'amplitude entre les formes d'onde. Faut-il toutes les ajuster à une valeur commune (par exemple  $\rho_{\max} = 10$ ) ou conserver la hiérarchie existante et considérer l'efficacité moyenne? Dans les deux cas, on ne peut pas s'affranchir de la notion de distance et donc il est possible que raisonner en terme de performances soit le plus simple.

## 6.4 Conclusion

De nombreuses méthodes de détection de sources impulsives d'ondes gravitationnelles ont été mises au point en cinq ans au sein du groupe Virgo-LAL ; certaines sont générales et cherchent

des fluctuations de quantités statistiques associées à la fenêtre d'analyse – moyenne, énergie ou encore pente – tandis que d'autres utilisent le cadre du filtrage adapté pour repérer des évolutions caractéristiques des formes d'onde : présence d'un pic principal, amortissement oscillant... Grâce aux optimisations effectuées sur leurs algorithmes de calcul, ces différents filtres seront utilisés pour l'analyse en ligne des données de Virgo puisqu'ils se sont tous montrés efficaces pour la détection de signaux typiques, en particulier issus de la bibliothèque de Zwerger et Müller.

Ce travail arrive actuellement à une période charnière qui marque la fin des tests en simulation et le début d'une nouvelle activité : l'intégration de ces méthodes dans le schéma réel d'analyse. Au-delà de l'implémentation proprement dite qui est déjà en elle-même un problème délicat (définition des entrées/sorties, lien avec les *frames*...), le point de vue concernant les filtres doit être modifié.

Tout d'abord, il faudra raisonner en terme de fraction de *frames* sélectionnés et laisser de côté la notion de taux de fausses alarmes telle qu'elle est utilisée pour l'estimation brute de la qualité d'un filtre ; une première étude de ce point a été faite au paragraphe 6.2.2.

Ensuite, un choix sera fait pour chacun des filtres généraux afin de déterminer combien de largeurs de fenêtre sont utilisées en parallèle et quelles sont les valeurs de  $N$  retenues. Ce nombre ne doit pas être trop petit pour que les algorithmes soient sensibles à une large gamme de signaux – cf. figure 6.17 pour voir un exemple de l'effet de  $N$  sur l'efficacité de la méthode – mais doit rester raisonnable pour conserver un taux de déclenchement faible et une bonne capacité de détection. Lors de cette construction, l'écueil à éviter est de sélectionner une configuration trop adaptée aux signaux de Zwerger Müller qui ont servi aux tests de simulations.

Une fois défini le contenu des différentes méthodes, il faudra réaliser une simulation de l'ensemble de la procédure d'analyse pour estimer la fraction finale de *frames* sélectionnés par tous ces filtres. Beaucoup de déclenchements seront multiples et seul un Monte-Carlo permettra d'accéder simplement au taux de sélection réel.

Pour cela, des seuils auront été associés à chaque algorithme. Là encore, une réflexion sera nécessaire pour savoir comment procéder : doit-on favoriser les méthodes *a priori* les plus sensibles en leur concédant un taux de déclenchement plus important ou homogénéiser la sélection ? Toutes ces questions passionnantes (et certainement bien d'autres encore) vont se poser dans les mois suivants afin de construire le schéma d'analyse temps réel le plus performant possible.

## Chapitre 7

# Détection des ondes gravitationnelles en coïncidence

### 7.1 Comment conclure à une détection ?

Toutes les méthodes de détection des ondes gravitationnelles – en temps réel ou incluses dans des analyses ultérieures et plus développées des échantillons sélectionnés –, sont basées sur le même principe. Elles calculent à chaque instant une ou plusieurs variables à partir des données appartenant à la fenêtre d’analyse ; ces coefficients ont une distribution de probabilité connue en présence de bruit seul. L’application de seuils sur leurs valeurs permet de ne conserver que les événements statistiquement improbables censés contenir aussi les éventuels signaux gravitationnels. Enfin, ces derniers doivent finalement être localisés puis séparés du bruit par d’autres algorithmes appropriés. Comment procéder ? Les chapitres précédents ont montré la complexité du problème :

- les formes d’ondes des signaux impulsionnels sont mal connues ;
- la réponse du détecteur varie selon la position relative de la source dans le ciel ;
- les rapports S/B attendus étant faibles, les seuils de déclenchement devront être choisis bas et donc, associés à des taux de fausses alarmes importants ;
- les taux de sélection varient selon le filtre employé ;
- au bruit de fond gaussien du détecteur s’ajouteront des événements transitoires non stationnaires et des périodes de non gaussianité qu’il faut pouvoir discriminer d’une onde gravitationnelle.

Toutes ces remarques mises bout à bout indiquent que seule une parfaite connaissance du fonctionnement de l’instrument pourrait permettre de découvrir avec une quasi-certitude une onde gravitationnelle à partir de ses seules données. La réalité d’un candidat sera bien mieux assurée en cas de **coïncidence** entre plusieurs détecteurs.

Le mot “détecteur” désigne ici en premier lieu des interféromètres du même type que Virgo dont six sont actuellement en construction ou en projet (cf. paragraphe 2.2.4). Néanmoins, comme certains événements émetteurs d’ondes gravitationnelles produisent également d’autres types de rayonnement – neutrinos pour les supernovae, sursauts  $\gamma$  etc... – on peut imaginer d’étendre la notion de coïncidence à d’autres types d’instruments, en prenant bien garde toutefois à la manière dont la communication est établie entre les différentes communautés. Ainsi, dans le paragraphe 7.5 consacré aux coïncidences avec les détecteurs de neutrinos, nous verrons que comme ceux-ci fonctionnent avec un taux de fausses alarmes nul (au contraire des détecteurs interférométriques), la transmission d’alertes ne peut se faire que dans un sens, vers les antennes gravitationnelles.

Or, si beaucoup d’articles [168, 169, 170, 171] parlent de détections multiples entre interféromètres, c’est uniquement comme point de départ de leurs analyses. Ils l’utilisent pour aborder la question du **problème inverse**, i.e. comment extraire de l’information – position de la source dans le ciel, forme des deux polarisations  $h_+(t)$  et  $h_\times(t)$ , paramètres astrophysiques, physique de l’émission... – à partir des données déjà sélectionnées contenant effectivement un vrai signal.

Le postulat de ces travaux est donc que les coïncidences arrivent dans la réalité avec une fréquence de l’ordre de celle des émissions gravitationnelles – ce qui revient à dire que si un signal

est détecté, il l'est le plus souvent de manière multiple. A la lumière des résultats présentés dans les chapitres précédents sur la recherche des ondes gravitationnelles impulsionnelles, il est légitime de se demander si cette hypothèse est effectivement valide.

Ce préalable à toute analyse cohérente n'avait en fait jamais été considéré dans la littérature, avant que nous ne décidions de l'étudier [172]. La connaissance de la manière dont le **réseau** de détecteurs interférométriques prévus est sensible aux différentes parties du ciel est essentielle pour définir des méthodes de détection utilisant les sorties de plusieurs d'entre-eux. La question principale est la suivante : les coïncidences sont-elles probables ? Pour y répondre, nous avons choisi d'utiliser des simulations Monte-Carlo du processus de détection dans un réseau d'interféromètres. Après un rapide rappel de la manière dont un détecteur réagit au passage d'une onde gravitationnelle – détaillée dans l'appendice D –, le modèle utilisé au cours des calculs sera décrit dans ses trois différents aspects : le détecteur, le signal impulsionnel et l'algorithme de recherche.

Ensuite, nous verrons l'effet de la réponse spatiale non uniforme d'un interféromètre sur son efficacité de détection. Dans le même temps, nous estimerons l'erreur faite sur le temps d'arrivée du signal (dont la connaissance sert à remonter à la direction de la source dans le ciel) en fonction du rapport S/B détecté. Une fois ces caractéristiques établies pour un détecteur unique, le réseau de trois antennes Virgo/LIGO sera étudié en détail :

- leur couverture du ciel – i.e. quelle fraction de sources peut leur échapper ;
- les coïncidences doubles ;
- les coïncidences triples.

L'ajout des détecteurs GEO600, TAMA300 et AIGO étendra finalement à six le nombre d'interféromètres du réseau ; là encore, la question des détections multiples sera considérée. Puis, on parlera des procédures de reconstruction de la position de la source sur la sphère céleste par triangulation, possible dans le cas d'une coïncidence au moins triple – et qui demande une connaissance précise des instants d'arrivée du signal dans les différents instruments. Dans le cas d'un événement de supernova, cette information peut être exploitée avec un détecteur de neutrinos qui aura enregistré au même moment un excès d'événements (comme ce fut le cas pour la supernova 1987A dans le Grand Nuage de Magellan). En particulier, on verra comme application potentielle une méthode d'estimation de la masse du  $\nu_e$  avec une précision meilleure que les limites actuelles.

De plus, toujours dans ce cas de figure, si la supernova n'est pas trop lointaine, un détecteur de neutrinos seul peut déterminer la zone du ciel où l'événement s'est produit et donc transmettre une alerte vers les interféromètres même si ceux-ci n'ont à première vue rien enregistré de particulier à ce moment-là. Dans ce scénario de recherche d'onde gravitationnelle, la direction de la source est connue *a priori* – et donc dans une certaine mesure les fonctions d'antenne pondérant la réponse de chaque détecteur au passage du signal. Préalablement à toute analyse cohérente, il convient de vérifier alors si les données issues des différents détecteurs sont compatibles avec cette hypothèse.

Pour cela, nous introduisons un test de type  $\chi^2$  mis au point pour répondre en partie à cette question. S'il élimine effectivement des périodes où un événement de bruit transitoire a pollué la sortie d'un détecteur, son diagnostic "données compatibles avec une source dans la direction considérée", ne permet pas de trancher entre la présence ou l'absence d'un signal réel : rien n'indique que son amplitude la plus probable n'est pas nulle !

Enfin, comme il apparaît vraisemblable que les signaux de type supernova ne seront pas détectables loin au-delà de la Galaxie pour la première génération d'interféromètres, un modèle simple de distribution de sources dans la Voie Lactée a été mis au point pour examiner si les résultats obtenus pour le problème des coïncidences entre détecteurs sous l'hypothèse d'une répartition **uniforme** des sources sur la route céleste changent de manière notable dans ce cas de figure.

## 7.2 Coïncidences temporelles entre détecteurs

A cause des événements de bruit non stationnaires ou non gaussiens, un seul interféromètre ne suffira pas pour valider la détection d'un signal gravitationnel : seules des coïncidences entre différents détecteurs permettront un diagnostic clair de cette question. Cet argument est le point de départ du paragraphe 7.3 où ce sujet est étudié plus en détail.

L'un des points délicats de ce travail est la prise en compte de la fonction de réponse réelle de l'instrument à la perturbation gravitationnelle : en effet, celle-ci varie significativement selon la position relative de la source par rapport à l'interféromètre. Or, on s'intéresse ici seulement

à la question des faux déclenchements causés par des fluctuations de bruit : ceux-ci arrivent de manière aléatoire dans les différents interféromètres et sont parfois compatibles avec le passage d'une onde gravitationnelle dans les différents détecteurs. L'idée est de voir quel taux de *frames* va être conservé à cause de ces coïncidences fortuites.

Dans ce cas, le problème est très simplifié car l'interaction entre le détecteur et l'onde gravitationnelle n'est pas à considérer et il est facile de développer un modèle de simulations Monte-Carlo donnant le taux de sélection multiple "fortuit".

### 7.2.1 Tests temporels de coïncidence

Dans ce paragraphe, on se restreint aux trois interféromètres *a priori* les plus sensibles : Virgo (V) et les deux détecteurs américains LIGO (voir le paragraphe 2.2.4) situés à Hanford (H) et Livingston (L). A cause de leurs positions différentes sur la Terre – cf. table 2.6 –, une même onde gravitationnelle est détectée à des instants différents dans les trois instruments : le délai maximal  $D_1$  et  $D_2$   $\Delta_{D_1-D_2}^{\max}$  entre deux détecteurs est égal au temps mis par la lumière pour aller de l'un à l'autre (voir paragraphe 7.2.3) ; la table 7.1 présente leurs valeurs pour les coïncidences entre Virgo et LIGO.

Paire de détecteurs	Délai maximal en ms et correspondance en nombre de données
Virgo-LIGO Hanford	$\Delta_{(V-H)}^{\max} = \pm 27.20$ (544)
Virgo-LIGO Livingston	$\Delta_{(V-L)}^{\max} = \pm 26.39$ (528)
LIGO Hanford-LIGO Livingston	$\Delta_{(H-L)}^{\max} = \pm 10.00$ (200)

**Tableau 7.1:** Délais maximaux admissibles pour une coïncidence double au sein du réseau de trois détecteurs Virgo-LIGO. Les valeurs sont données en millisecondes et en nombre de données (sous l'hypothèse d'une fréquence d'échantillonnage de 20 kHz).

La mesure aussi précise que possible des délais temporels entre l'apparition d'un même signal gravitationnel dans des interféromètres différents est importante pour remonter à la direction de la source par **triangulation**. Pour cela une triple coïncidence est nécessaire et conduit à deux positions dans le ciel, symétriques par rapport au plan contenant le réseau. Utiliser l'information provenant d'un plus grand nombre de détecteurs permet de lever cette dégénérescence et de réduire les erreurs de reconstruction. Ce point sera abordé un peu plus longuement au paragraphe 7.3.4.

#### Coïncidences doubles

En supposant que les différentes chaînes d'acquisition n'introduisent aucun retard supplémentaire, une coïncidence double entre les interféromètres  $D_i$  et  $D_j$  est valide si l'intervalle entre les deux détections  $\Delta_{D_i-D_j}$  n'excède pas le délai maximal :

$$|\Delta_{D_i-D_j}| \leq |\Delta_{D_i-D_j}^{\max}| \quad (7.1)$$

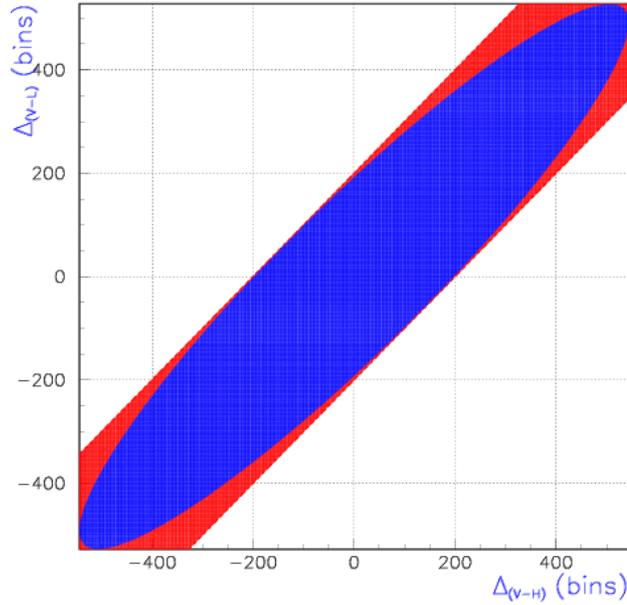
#### Coïncidences triples

On peut procéder de la même manière pour des coïncidences triples à partir des valeurs de deux délais,  $\Delta_{(V-H)}$  et  $\Delta_{(V-L)}$  par exemple. La condition de cohérence est plus compliquée qu'une simple juxtaposition de deux coïncidences doubles : la zone permise au couple  $(\Delta_{D_1-D_2}, \Delta_{D_1-D_3})$  est à l'intérieur d'une ellipse [173] représentée sur la figure 7.1 pour le cas du réseau Virgo-LIGO.

### 7.2.2 Taux de *frames* sélectionnés

Pour les simulations, on suppose les trois détecteurs identiques (même niveau de bruit en particulier) et on calcule le taux de sélection de *frames* dans chacun d'eux pour les coïncidences doubles et triples définies comme ci-dessus. De même qu'au paragraphe traitant de l'effet de la taille du *frame*, on peut commencer par supposer que les sorties des algorithmes suivent une loi normale et que deux valeurs consécutives sont décorrélés.

On considère tout d'abord deux instruments fictifs et on regarde l'évolution du taux de déclenchement en fonction de la valeur du délai maximal  $\Delta_{\max}$  – cf. table 7.2. Plus celui-ci est important,



**Figure 7.1:** Compatibilité d’une triple coïncidence entre Virgo (V) et les deux détecteurs LIGO, Hanford (H) et Livingston (L) : les délais entre Virgo et Hanford  $\Delta_{(V-H)}$  et Virgo et Livingston  $\Delta_{(V-L)}$  doivent se trouver à l’intérieur de l’ellipse pour être cohérents. Le rectangle délimite la zone admissible en demandant simplement que les deux inégalités  $|\Delta_{(V-L)}| \leq \Delta_{(V-L)}^{\max}$  et  $|\Delta_{(V-H)}| \leq \Delta_{(V-H)}^{\max}$  soient vérifiées séparément. 18% de celui-ci est en dehors de l’ellipse : la condition de triple coïncidence est plus contraignante que la juxtaposition de deux coïncidences doubles.

plus il y a de *frames* sélectionnés puisque la comparaison porte sur un nombre de données plus important.

$\log(\tau)$	$\Delta_{\max} = 10$ ms ( $\sim$ LIGO-LIGO)	$\Delta_{\max} = 27.5$ ms ( $\sim$ Virgo-LIGO)
-4	7.46%	17.96%
-4.5	0.8%	2.09%
-5	0.08%	0.22%

**Tableau 7.2:** Fraction de *frames* sélectionnés dans un détecteur en coïncidence double en fonction du délai maximal  $\Delta_{\max}$  et du seuil  $\eta(\tau)$ . A taux de fausses alarmes constant, plus de *frames* sont gardés quand  $\Delta_{\max}$  augmente.

On peut étendre ce problème en incluant un troisième détecteur ce qui revient à chercher les coïncidences entre deux interféromètres parmi trois. Si le résultat précédent était intuitif, celui apporté par la simulation de ce cas de figure est un peu déroutant au premier abord bien qu’il soit en fait causé par le même phénomène. Comme le montre la table 7.3, les taux de sélection diffèrent d’un instrument à l’autre – avec un excès particulièrement significatif pour Virgo – alors que la méthode de détection apparaît symétrique. En fait elle ne l’est pas, une fois encore à cause des différences de distance entre détecteurs.

Virgo et les deux LIGO forment un triangle presque isocèle dont le petit côté joint les instruments américains. Ainsi, il est plus “facile” pour un *frame* de données de Virgo de tomber en coïncidence avec des données sélectionnées de LIGO. Utiliser un plus grand nombre de détecteurs devrait rendre plus homogène ces résultats : en attendant, les futures analyses cohérentes devront prendre en compte cet excès de déclenchement, soit en adaptant les méthodes à ce flot de *frames* plus important, soit en le réduisant, par exemple en augmentant les seuils des filtres de Virgo. Le défaut de ce dernier choix serait bien entendu une baisse de l’efficacité de détection pour un vrai signal.

$\log(\tau)$	Virgo	LIGO Hanford	LIGO Livingston
-4	30.94%	23.39%	22.98%
-4.5	4.00%	2.89%	2.75%
-5	0.42%	0.29%	0.29%

**Tableau 7.3:** Taux de sélection de *frames* dans chacun des trois détecteurs du réseau pour le cas de coïncidences doubles. Virgo étant le plus “éloigné”, il a le taux de sélection le plus important ; les deux détecteurs LIGO situés à peu près à égale distance de Virgo ont des résultats similaires.

La table 7.4 présente quelques taux de sélection en coïncidence double avec les filtres *Mean Filter* et *Norm Filter*. La différence entre Virgo et les deux interféromètres LIGO est toujours présente bien qu’une fraction nettement plus réduite de *frames* soit retenue par chacun des détecteurs : l’hypothèse de non-corrélation des sorties des algorithmes surestime beaucoup le nombre de fausses alarmes, et ce quelle que soit la stratégie de détection – instrument seul ou à l’intérieur d’un réseau. Comme pour le cas des détections simples examiné précédemment, la méthode NF sélectionne moins de *frames* – ce fait est à rapprocher de sa moindre performance sur les signaux Zwerger-Müller et souligne l’intérêt d’utiliser des diagrammes “ROC” pour comparer des filtres.

Filtre	$N$	Virgo	LIGO Hanford	LIGO Livingston
<i>Mean Filter</i>	20	0.83%	0.58%	0.57%
	60	0.20%	0.14%	0.15%
	100	0.09%	0.07%	0.07%
<i>Norm Filter</i>	20	0.35%	0.25%	0.24%
	60	0.09%	0.07%	0.06%
	100	0.05%	0.04%	0.03%

**Tableau 7.4:** Taux de sélection en coïncidence double pour le réseau Virgo-LIGO avec les méthodes générales MF et NF ; on a  $\log(\tau) = -4.5$ .

Pour conclure cette partie, il convient de dire un mot des coïncidences triples. La contrainte sur les fausses alarmes étant beaucoup plus forte, les taux de sélection diminuent drastiquement ; dans ce dernier cas, ils sont bien entendu identiques dans les différents détecteurs. Pour  $\log(\tau) \leq -3.5$ , moins de 1% des *frames* sont conservées quelle que soit la taille de la fenêtre du *Mean Filter* ou du *Norm Filter* et à partir de  $\tau = 10^{-4}$ , seule une fraction négligeable (inférieure à un pour mille) est sélectionnée.

### 7.2.3 Reconstruire la direction de la source

La reconstruction de la direction de la source s’effectue par triangulation ; cette méthode nécessite la connaissance de trois instants d’arrivée du signal gravitationnel dans des détecteurs différents, soit une triple coïncidence.

Pour le voir, il convient d’abord d’introduire quelques notations. On note  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  les trois interféromètres,  $O$  le centre de la terre et  $M$  la position de la source dans le ciel. La distance  $OM$  est inconnue mais on note  $\vec{n}$  le vecteur unitaire pointant de  $O$  vers  $M$ . Connaître la direction de la source, c’est déterminer les coordonnées de  $\vec{n}$ .

Le temps d’arrivée  $t_i$  dans le détecteur  $D_i$  est donné par  $t_i = \frac{MD_i}{c}$ . En posant

$$MD_i = \sqrt{(\vec{M}\vec{O} + \vec{O}\vec{D}_i)^2} \quad (7.2)$$

et en développant le carré scalaire au premier ordre en utilisant l’hypothèse  $OD_i \ll MO$ , on obtient finalement :

$$\Delta_{D_i-D_j} = t_j - t_i \approx \frac{1}{c} \underbrace{\frac{\vec{M}\vec{O}}{MO}}_{=-\vec{n}} \cdot (\vec{O}\vec{D}_j - \vec{O}\vec{D}_i) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{D}_j \vec{D}_i}{c} \quad (7.3)$$

Conformément à l'intuition, le délai temporel est maximal quand la source est alignée avec les deux instruments et nul quand elle appartient au plan médiateur des détecteurs.

Le délai temporel entre deux détecteurs  $\Delta_{D_i-D_j}$  ne dépend donc que de la position de la source sur la sphère céleste et non de la distance entre celle-ci et la Terre. Le lieu géométrique correspondant à  $\Delta_{D_i-D_j} = \text{constante}$  est (en général) un cercle  $C_{ij}$ ; ainsi, un seul délai temporel ne permet pas de définir la position de la source alors que deux y parviennent : l'intersection de deux de ces cercles se réduit à deux points, symétriques l'un de l'autre par rapport au plan contenant les trois détecteurs.

Pour relier les deux délais temporels à la position de la source dans le ciel, on choisit le repère le plus adapté dans lequel l'expression des produits scalaires est simple.

- On prend l'un des détecteurs, par exemple  $D_1$ , comme origine.
- Comme premier vecteur de base, on choisit une direction reliant deux interféromètres :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{D_1 D_2}}{D_1 D_2}$$

- Le second vecteur de base  $\vec{v}$  est choisi dans le plan  $D_1 D_2 D_3$  orthogonal à  $\vec{u}$ . Posant  $\vec{v}' = \lambda \vec{u} + \overrightarrow{D_1 D_3}$ , la condition  $\vec{u} \cdot \vec{v}' = 0$  conduit à

$$\lambda = -\frac{\overrightarrow{D_1 D_2} \cdot \overrightarrow{D_1 D_3}}{D_1 D_2}$$

On pose alors  $\vec{v} = \vec{v}' / \|\vec{v}'\|$ .

- Finalement, le troisième vecteur de la base  $\vec{w}$  est choisi pour que celle-ci forme un repère orthonormé direct :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Dans ce repère,  $\overrightarrow{D_1 D_2} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{D_1 D_3} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{n} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$  avec  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ .

Le délai temporel entre les détecteurs  $D_1$  et  $D_2$  donne la valeur de  $X$  :

$$X = \frac{\Delta_{D_1-D_2}}{a} \tag{7.4}$$

Tandis que celui entre  $D_1$  et  $D_3$  permet d'accéder à  $Y$  :

$$Y = \frac{\Delta_{D_1-D_3} - bX}{c} = \frac{\Delta_{D_1-D_3} - \frac{b\Delta_{D_1-D_2}}{a}}{c} \tag{7.5}$$

Finalement, on obtient  $Z^2 = 1 - X^2 - Y^2$  : l'indétermination sur le signe de  $Z$  reflète les deux solutions possibles, symétriques par rapport au plan  $D_1 D_2 D_3$ .

Une fois  $X$ ,  $Y$  et  $|Z|$  déterminés, une simple rotation – caractérisée par sa matrice  $M_{\text{réseau} \rightarrow \text{Greenwich}}$  – permet d'obtenir les coordonnées équatoriales “horaires”<sup>1</sup> de la position estimée de la source :  $\mathfrak{h}(t) = T(t) - \alpha$  et  $\delta$ .

$$\begin{pmatrix} \cos \mathfrak{h}(t) \cos \delta \\ \sin \mathfrak{h}(t) \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = M_{\text{réseau} \rightarrow \text{Greenwich}} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

La connaissance du temps sidéral à Greenwich à l'instant de la mesure donne finalement la valeur de l'ascension droite  $\alpha$ . Pour le cas du réseau formé (dans cet ordre) par les interféromètres Virgo, LIGO Hanford et LIGO Livingston, on a :

$$M_{\text{réseau} \rightarrow \text{Greenwich}} = \begin{pmatrix} -0.819998 & 0.494587 & 0.288075 \\ -0.571722 & -0.731649 & -0.371246 \\ 0.0271568 & -0.46912 & 0.882717 \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

<sup>1</sup>La dépendance temporelle vient du mouvement de rotation propre de la Terre.

## 7.3 Détection en coïncidence entre interféromètres

### 7.3.1 La réponse d'un détecteur au passage d'une onde gravitationnelle

Dans la jauge TT, une onde gravitationnelle est caractérisée par deux polarisations  $h_+(t)$  et  $h_\times(t)$  – cf. chapitre 1. Le détecteur est sensible à une combinaison linéaire de ces fonctions

$$h(t) = F_+ h_+(t) + F_\times h_\times(t) \quad (7.8)$$

où  $F_+$  et  $F_\times$  sont des fonctions d'antenne (voir appendice D) comprises entre -1 et 1 et dont la valeur dépend de la direction de la source et de l'orientation du détecteur, ainsi que de l'angle de polarisation  $\psi$  du rayonnement gravitationnel. L'expression analytique de ces fonctions est calculable – cf. équation (D.13) et suivantes – et dépend de huit paramètres.

- Quatre pour caractériser l'interféromètre :
  - sa latitude  $l$  ;
  - sa longitude  $L$  (comptée positivement vers l'ouest par convention) ;
  - l'écartement de ses bras  $\chi$  (en général  $90^\circ$ , angle optimal) ;
  - un "azimuth"  $\gamma$  qui traduit l'orientation locale du détecteur (par exemple par rapport à la direction nord-sud au point d'intersection des bras).
- Trois pour repérer la position de la source par rapport à l'instrument :
  - les deux coordonnées équatoriales  $\alpha$  (ascension droite) et  $\delta$  (déclinaison) ;
  - un angle horaire  $\mathfrak{H}(t)$  prenant en compte le mouvement de rotation propre de la Terre.
- L'angle de polarisation  $\psi$ .

Pour un interféromètre donné, ces fonctions d'antenne dépendent donc de la position relative de la source : un même événement (phénomène physique semblable, amplitudes émises et distance d'émission égales) correspond à des rapports S/B différents selon la région du ciel où il a lieu ; l'efficacité de détection n'est pas uniforme. En conséquence, des détecteurs éloignés auront des réponses différentes à une onde gravitationnelle identique et donc une probabilité de coïncidence diminuée.  $F_+$  et  $F_\times$  ont des distributions de probabilité identiques ; pour le cas de sources uniformément réparties sur la voûte céleste, leur écart-type vaut 0.45 environ et la moyenne est nulle (cf. paragraphe D.4.2).

### 7.3.2 Un modèle de détection en réseau

#### Le réseau

Pour simplifier l'analyse – et comme, à l'exception de TAMA300, les courbes de sensibilité des différents détecteurs n'existent encore que sur le papier –, on fait le choix de supposer les interféromètres identiques. De toute manière, inclure un instrument dont la DSA de bruit est deux ordres de grandeur au-dessus de celles des autres n'aurait aucun sens pour la recherche de signaux de faibles amplitudes puisque son efficacité de détection serait nulle en pratique.

De plus, comme la motivation initiale de ce travail est la recherche de *bursts*, on supposera que les bruits de mesure sont blancs (gaussiens, de moyennes nulles et de RMS  $\sigma_{\text{bruit}}$ ) et indépendants les uns des autres. La valeur exacte de l'écart-type  $\sigma_{\text{bruit}}$  est sans importance car nous allons raisonner uniquement en terme de rapport S/B. Pour fixer les idées, on pourra suivre le modèle établi au paragraphe 5.2.3 et donc prendre  $\sigma_{\text{bruit}} = 4 \cdot 10^{-21}$ .

#### Le signal

Comme modèle générique de signal gravitationnel, on choisit les pics gaussiens

$$k_\sigma(t) = K_\sigma \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7.9)$$

où  $\sigma$  est la largeur du signal – typiquement entre 0.1 ms et 10 ms – et où  $K_\sigma$  est un facteur d'échelle. Pour fixer la valeur de ce coefficient, on introduit un nouveau paramètre qui sera abondamment utilisé dans la suite: le **rapport S/B optimal**  $\rho_{\max}$  obtenu (en moyenne à cause des fluctuations de bruit du détecteur) en sortie du filtrage de Wiener pour une orientation optimale de l'interféromètre par rapport à la position de la source dans le ciel.

Notant  $f_s$  la fréquence d'échantillonnage des données (par ex. 20 kHz pour Virgo), l'équation (5.2) donne la relation :

$$\rho_{\max} = K \frac{\pi^{1/4} \sqrt{f_0} \times \sigma}{\sigma_{\text{bruit}}} \quad (7.10)$$

$K$  et  $\rho_{\max}$  sont donc directement proportionnels. Lorsque rien n'est précisé sur la largeur de la gaussienne choisie, la convention est  $\sigma = 1$  ms.

Le temps d'arrivée du signal n'est pas choisi coïncident avec l'échantillonnage des données mais suit une loi de probabilité uniforme dans l'intervalle  $\left[-\frac{1}{2f_s}; \frac{1}{2f_s}\right]$  centré autour d'un instant de prise de donnée arbitraire; l'écart-type de cette distribution est  $\frac{1}{\sqrt{12}f_s} \approx 1.4 \cdot 10^{-2}$  ms. S'il est négligeable pour des signaux pour lesquels le produit  $\sigma f_s$  est grand devant 1, il est important pour des signaux de faibles durées: le décalage entre le calque et la forme d'onde conduit dans ce cas à une diminution du rapport S/B en sortie du filtre (puisque une partie des valeurs élevées du signal est aléatoirement enlevée) et donc d'une perte en efficacité de détection. De plus, même si le seuil est atteint, c'est au prix d'une erreur plus ou moins importante sur le temps d'arrivée de l'onde gravitationnelle dans le détecteur.

Enfin, l'émetteur du rayonnement gravitationnel est supposé axisymétrique – comme dans le cas des soixante-dix huit signaux simulés par Zwerger et Müller – ce qui implique  $h_x = 0$ . Ainsi, la forme de l'onde gravitationnelle n'est pas modifiée par les fonctions d'antenne, simplement son amplitude.

### La procédure de détection

La méthode de détection choisie est celle du filtrage de Wiener (corrélation avec le signal lui-même) déjà abordée aux paragraphes 5.3.2 et C.2. Cette simplification n'a pas de conséquence particulière sur les résultats des simulations puisqu'il est possible de couvrir tout l'espace des paramètres des pics gaussiens [ $\sigma_{\min} = 0.1$  ms;  $\sigma_{\max} = 10$  ms] avec 12 calques assurant une perte de rapport S/B inférieure à 1% – cf. paragraphe 5.4.2.

Le seuil de détection est fixé à  $\eta = 4.89$  ce qui correspond à un taux de fausses alarmes  $\tau = 10^{-6}$ , soit  $\mathbb{T} = 72$  fausses alarmes à l'heure pour une sortie gaussienne et échantillonnée à  $f_s = 20$  kHz (voir la figure C.1). Cette valeur standard dans nos analyses est un compromis entre une bonne sensibilité et un nombre de déclenchement raisonnable. De plus, dès que les interféromètres fonctionnent en réseau, le nombre de fausses alarmes en coïncidence est beaucoup plus faible: par exemple, pour deux détecteurs ayant ce même taux de fausses alarmes  $\mathbb{T}$  (72/h) et en fixant (de manière large) à 100 ms le délai pour un déclenchement cohérent, on n'a plus qu'environ 3.5 événements de bruit par jour. Enfin, comme le seuil  $\eta$  varie lentement en fonction de  $\tau$  (cf. par exemple à nouveau la figure C.1), les résultats de l'analyse ne sont pas beaucoup modifiés si on modifie le taux de fausses alarmes.

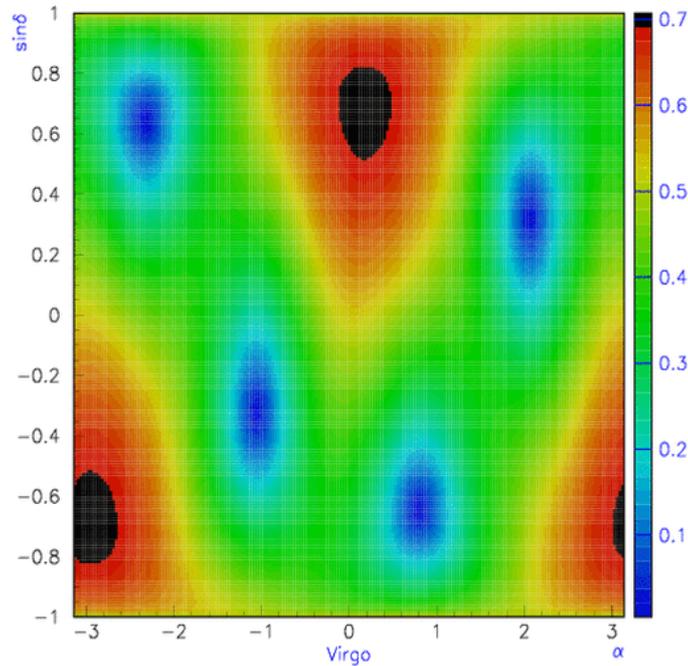
### 7.3.3 Effets de la fonction d'antenne sur l'efficacité de détection d'un seul interféromètre: exemple de Virgo

Il y a deux façons complémentaires de décrire l'effet de la fonction d'antenne sur l'efficacité de détection d'un interféromètre particulier, par exemple Virgo. La première, la plus rapide et la plus simple puisqu'elle n'inclut pas la méthode de filtrage des données, consiste à utiliser la **carte** (cf. paragraphe D.4.1) de la fonction d'antenne moyenne  $\bar{F}$ . On peut rappeler que  $\bar{F}$  est définie de la manière suivante :

$$\bar{F} = \sqrt{\frac{(F_+^2 + F_x^2)^\psi}{2}} \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad (7.11)$$

et qu’une “carte” consiste à représenter les variations de la quantité considérée en fonction des coordonnées équatoriales  $(\alpha, \delta)$  (sous forme “d’isocontours”) sur un graphe bidimensionnel. Pour avoir une projection uniforme de la sphère céleste, la quantité représentée sur l’axe vertical d’un tel graphique n’est pas  $\delta \in [-90^\circ; 90^\circ]$  mais  $\sin \delta \in [-1; 1]$ . Chaque carte représente une vue de la situation à un instant de la journée particulier, choisi comme origine ; à cause du mouvement de rotation propre de la Terre, l’image “glisse” horizontalement (une fois identifiés ses bords verticaux) à raison d’un tour complet par jour sidéral moyen ( $\sim 23$  heures 56 minutes et 4 secondes).

L’intérêt de la fonction d’antenne moyenne est qu’elle ne dépend que de la position de la source dans le ciel et contient donc une information géométrique reliée à l’efficacité de détection dans une direction donnée. Sa valeur moyenne est  $\approx 0.42$  et son écart-type  $\approx 0.16$  ; pour chaque interféromètre,  $\overline{F}$  présente deux maxima (le long de la verticale locale) et quatre minima nuls (le long de la bissectrice des bras et dans la direction perpendiculaire appartenant au plan du détecteur). La figure 7.2 montre la carte de la fonction d’antenne moyenne associée à Virgo.

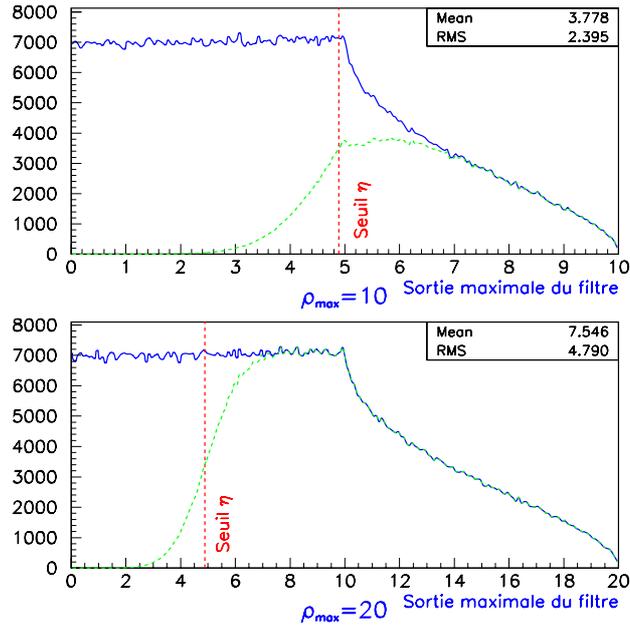


**Figure 7.2:** Carte de la fonction d’antenne moyennée  $\overline{F}$  du détecteur Virgo. Deux régions du ciel ont des efficacités optimales et quatre sont totalement inaccessibles à l’interféromètre ; ces dernières sont situées dans une large vallée où l’interaction onde gravitationnelle/instrument a un niveau plutôt médiocre.

Le second moyen de quantifier la perte en rapport S/B due à la réponse non uniforme du détecteur est d’inclure le processus de détection dans la simulation. Pour ce faire, on abandonne la description à l’aide de  $\overline{F}$  pour revenir aux vraies fonctions d’antenne  $F_+$  et  $F_\times$ . On fait l’hypothèse d’une distribution de sources uniforme sur la voûte céleste :  $\alpha$  varie dans  $[-\pi; \pi]$ ,  $\sin \delta$  dans  $[-1; 1]$  et  $\psi$  dans  $[-\pi; \pi]$ . Le schéma du Monte-Carlo est toujours le même, quelle que soit la configuration du réseau testé.

- La valeur du rapport signal sur bruit optimal  $\rho_{\max}$  est fixée une fois pour toute ; on calcule alors  $K$  à partir de l’équation (7.10).
- A chaque simulation, la direction de la source  $(\alpha, \delta)$  et la valeur de l’angle de polarisation  $\psi$  sont tirées aléatoirement.
- Le résultat de l’interaction entre l’onde gravitationnelle et l’interféromètre,  $F_+ \times k_\sigma(t)$ , est ajouté à un échantillon de bruit ; l’ensemble est filtré et la valeur maximale du rapport S/B obtenue en sortie de l’algorithme de détection est comparée au seuil.

La figure 6.16 présentée au chapitre précédent montre la probabilité de détection d’un signal en fonction du rapport S/B moyen  $\rho$  obtenu en sortie de l’algorithme de filtrage. A cause des fluctuations du bruit, l’efficacité au seuil ne vaut que 50%. Dans le cas qui nous intéresse ici, on a



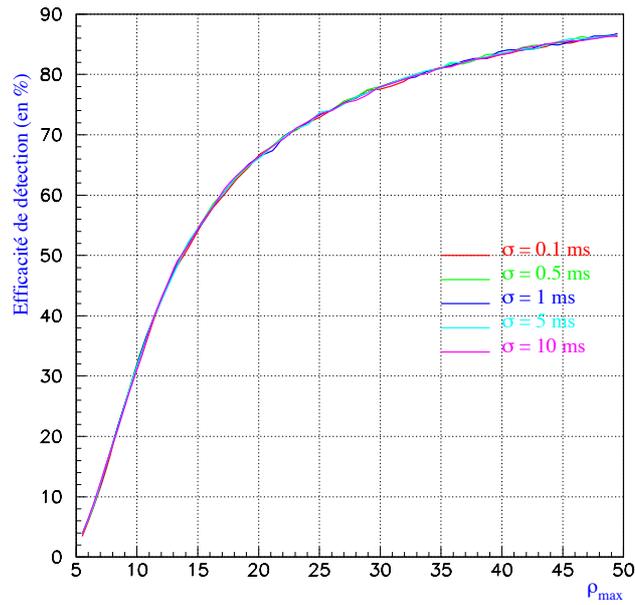
**Figure 7.3:** Distribution du rapport S/B réel – i.e. en sortie du filtre – du *burst* d’ondes gravitationnelles de largeur  $\sigma = 1$  ms pour deux valeurs de  $\rho_{\max}$  : 10 et 20. La ligne continue montre la répartition de  $\rho$  due uniquement aux fonctions d’antenne du détecteur tandis que la ligne pointillée incorpore le processus de détection : à  $\rho = F \times \rho_{\max}$  constant, seule une fraction des événements – d’autant plus importante que  $\rho$  est grand – est détectée par le filtre.

$$\rho = |F_+| \times \rho_{\max} \quad (7.12)$$

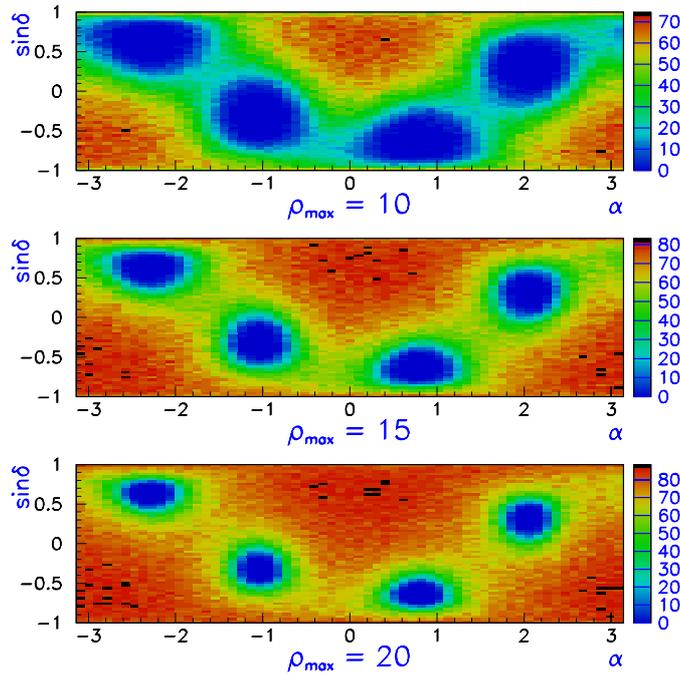
En incluant le comportement de l’algorithme de filtrage en présence de bruit dans le calcul de l’efficacité de détection, on obtient des graphes du type de ceux présentés sur la figure 7.3 pour  $\rho_{\max} = 10$  et 20. La ligne continue montre la distribution de  $\rho$  à  $\rho_{\max}$  constant ; la forme de la courbe est simplement due aux fonctions d’antenne. De 0 à  $\rho_{\max}/2$ , la distribution de  $\rho$  est plate ; puis, pour des valeurs supérieures, elle décroît de façon monotone jusqu’au rapport S/B optimal. Quant à la ligne pointillée, elle indique la fraction de signaux réellement détectée en incluant la relation efficacité  $\leftrightarrow \rho$  de la figure 6.16. Le nombre d’événements retenus à petit rapport S/B est considérablement diminué alors qu’il est presque entièrement préservé à partir de  $\rho = 7$ . On a finalement une efficacité de détection de 32% pour  $\rho_{\max} = 10$  et de 66% pour  $\rho_{\max} = 20$ .

En simulant le processus de détection pour différentes valeurs de  $\rho_{\max}$ , on obtient la relation donnant l’efficacité de détection dans un seul détecteur en fonction du rapport S/B optimal. La figure 7.4 présente ces courbes pour différentes valeurs de la largeur de la gaussienne  $\sigma$ . Comme attendu, la probabilité de détection dépend uniquement de  $\rho_{\max}$  qui est la variable signifiante en analyse du signal. La conjonction de l’effet des fonctions d’antenne et du bruit du détecteur fait que l’efficacité reste faible même pour de grandes valeurs du rapport S/B optimal :  $\sim 30\%$  pour  $\rho_{\max} = 10$ , 50% pour  $\rho_{\max} = 14$  et 90% seulement pour des amplitudes improbables du signal. La conclusion principale à tirer des figures 7.3 et 7.4 est claire : la prise en compte de la réponse spatiale non uniforme d’un détecteur diminue considérablement la probabilité de détection d’un signal à  $\rho_{\max}$  fixé, que ce rapport S/B maximal soit petit ou grand.

Les efficacités présentées sont obtenues par moyennage de la position de la source sur la sphère céleste. Pour compléter ces résultats, il est intéressant de voir la manière dont ces quantités varient en fonction de  $(\alpha, \delta)$ , ce que montre la figure 7.5 pour trois valeurs différentes de  $\rho_{\max}$  : 10, 15 et 20. La première chose à noter en examinant ces graphiques est la forte corrélation existant entre ces trois cartes et celle de la figure 7.2 : comme attendu, la fonction de réponse moyenne  $\bar{F}$  est un bon estimateur (et facile à manipuler puisque son calcul ne nécessite aucune simulation) de l’efficacité de détection dans une région du ciel donnée, particulièrement pour les



**Figure 7.4:** Efficacité de détection pour un interféromètre unique (par exemple Virgo) en fonction de  $\rho_{\max}$  et pour différentes valeurs de la largeur  $\sigma$  de la gaussienne.

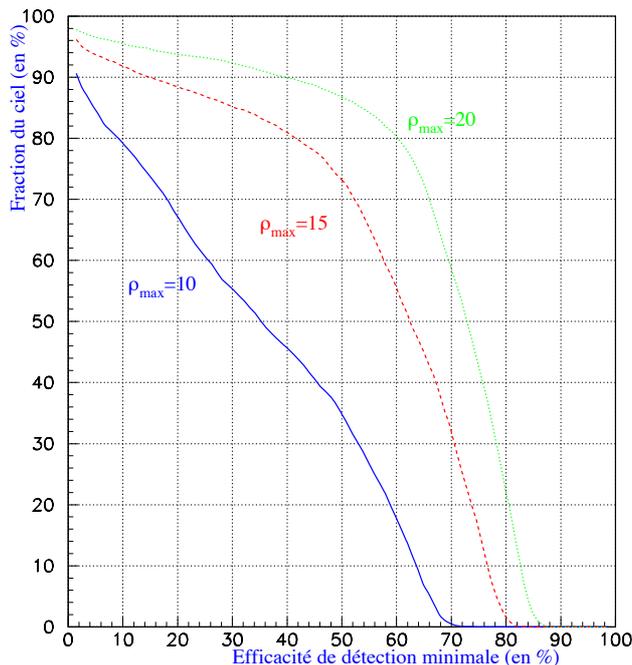


**Figure 7.5:** Comparaison des cartes d'efficacité de détection de l'interféromètre Virgo pour trois valeurs différentes du rapport S/B optimal  $\rho_{\max}$  : 10, 15 et 20. On pourra noter les différences entre les échelles des codes de couleur.

faibles valeurs du rapport S/B  $\rho$  qui correspondront vraisemblablement aux premiers événements détectés.

Dans le premier cas ( $\rho_{\max} = 10$ ), les zones du ciel visible sont concentrées autour des directions perpendiculaires au plan du détecteur ce qui réduit considérablement l'efficacité de détection : une large fraction du ciel reste invisible. Pour  $\rho_{\max} = 15$  et 20, les résultats sont plus uniformes ; les quatre minima sont encore là mais ont une superficie plus réduite et qui diminue à mesure que le

rapport S/B optimal augmente. Dans le dernier cas, l'efficacité est partout supérieure à 60% sauf dans des "îles" où l'interféromètre reste presque aveugle.



**Figure 7.6:** Fraction du ciel (en %) associée avec une efficacité de détection supérieure ou égale à une valeur donnée, indiquée en abscisse. Les trois courbes correspondent à  $\rho_{\max} = 10$ , 15 et 20 respectivement.

Si l'on convertit ces cartes du ciel en terme d'aires associées à une probabilité de détection donnée, on obtient la figure 7.6. La fraction du ciel couverte décroît d'abord lentement lorsque l'efficacité augmente (particulièrement pour  $\rho_{\max}$  grand) puis ensuite plus rapidement au-delà d'une valeur critique. Ce comportement s'explique à l'aide de la figure 7.5 qui montre que la probabilité de détection est quasi-constante dans de vastes régions du ciel.

Pour  $\rho_{\max} = 10$ , la probabilité de détection est supérieure à 30% dans 40% du ciel; pour  $\rho_{\max} = 15$ , elle dépasse 50% dans plus de la moitié du ciel et approche les 60% dans 70% du ciel pour  $\rho_{\max} = 20$ . Ainsi, même si l'efficacité reste toujours inférieure à 90%, les détections sont probables dans toutes les directions pour de grandes valeurs du rapport S/B optimal ( $\rho_{\max} \geq 20$ ).

### 7.3.4 Détermination du temps d'arrivée d'un signal

Déterminer le temps d'arrivée absolu d'un signal gravitationnel dans un interféromètre est important pour trois raisons au moins.

- Les coïncidences entre instruments doivent, pour être validées, vérifier des conditions sur les délais temporels entre les différentes détections – cf. par exemple figure 7.1.
- La procédure de reconstruction de la direction de la source d'ondes gravitationnelles par triangulation s'effectue à partir de deux délais temporels (soit trois temps d'arrivée) et demande donc une triple coïncidence au minimum.
- Les coïncidences avec d'autres types de détecteurs sont uniquement basées sur des corrélations temporelles. Le paragraphe 7.5 en donnera un exemple d'application pour l'émission de neutrinos consécutive à l'explosion d'une supernova proche.

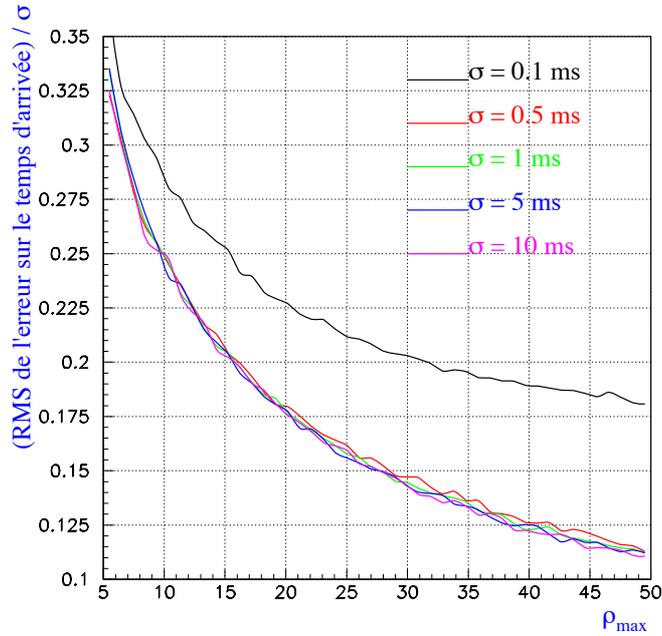
Posons  $\Delta t$  la différence de temps entre l'arrivée d'une onde gravitationnelle sur le détecteur  $t_{\text{vrai}}$  et son estimation  $t_{\text{detect}}$  correspondant au maximum de rapport S/B en sortie de l'algorithme :

$$\Delta t = t_{\text{vrai}} - t_{\text{detect}} \quad (7.13)$$

On suppose qu'il n'y a pas d'erreur systématique entre  $t_{\text{vrai}}$  et  $t_{\text{détect}}$  due au dispositif de filtrage. Cette hypothèse est vraie pour un filtrage de Wiener puisque la sortie de celui-ci est maximale quand le calque et le signal se confondent et elle est en pratique vérifiée même pour des méthodes *a priori* non adaptées à ce problème : ainsi, le filtre ALF [99] détecte les signaux de Zwerger et Müller avec une précision de l'ordre de 0.5 ms en moyenne. Comme  $\overline{\Delta t} = 0$ , l'erreur sur le temps d'arrivée est simplement caractérisée par son écart-type  $\Delta t^{\text{RMS}}$ .

L'erreur  $\Delta t$  a deux causes principales. La première, déjà évoquée au paragraphe 7.3.2 est due à l'échantillonnage des données du détecteur : dans le cas d'un signal de faible durée, une partie importante de l'énergie de l'onde gravitationnelle est perdue par ce biais, ce qui diminue le rapport S/B et dilue la position de son maximum soumise aux fluctuations du bruit. Ces dernières sont la seconde source d'erreur dans la localisation temporelle d'un signal, et elles sont d'autant plus importantes que  $\rho$  est proche du seuil  $\eta$ . On s'attend à ce qu'elles dominent pour les pics de grande largeur  $\sigma$ .

Cette dernière quantité est la seule variable de la simulation homogène à un temps. D'où, par analyse dimensionnelle, on postule une relation du type  $\Delta t^{\text{RMS}} \propto \sigma$ . Pour vérifier cette hypothèse, la figure 7.7 montre la variation de  $\frac{\Delta t^{\text{RMS}}}{\sigma}$  en fonction du rapport S/B optimal  $\rho_{\text{max}}$  pour cinq largeurs différentes du pic gaussien : 0.1 ms, 0.5 ms, 1 ms, 5 ms et 10 ms. A l'exception du cas  $\sigma = 0.1$  ms qui est sensible à l'échantillonnage du signal, les courbes sont identiques.



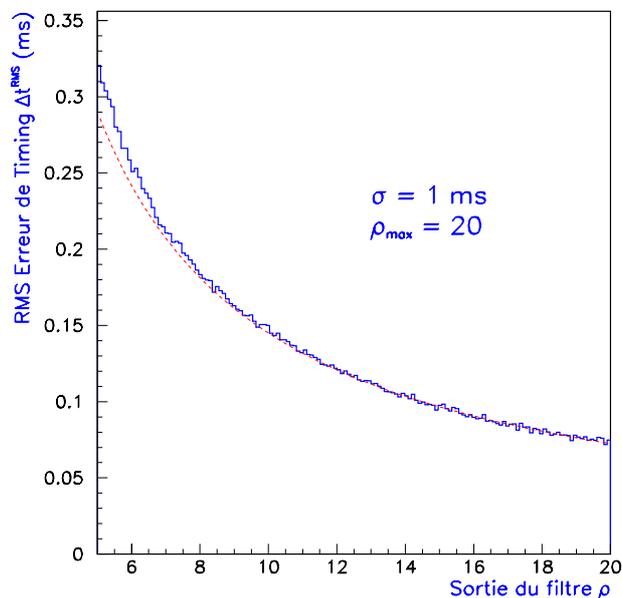
**Figure 7.7:** Écart-type de l'erreur sur le temps d'arrivée du signal normalisé par la largeur du pic gaussien –  $\Delta t^{\text{RMS}}/\sigma$  – en fonction du rapport S/B optimal et pour cinq différentes valeurs de  $\sigma$  comprises entre 0.1 et 10 ms – la méthode de détection est le filtrage de Wiener.

Or, si la grandeur  $\rho_{\text{max}}$  est incontournable dans les simulations présentées ici puisqu'elle quantifie l'amplitude d'un signal gravitationnel indépendamment des différents détecteurs, elle n'est pas accessible lors d'une réelle analyse de données, au contraire de la sortie maximale du filtre  $\rho$  (qui, selon l'échantillon de bruit considéré et la valeur de la fonction d'antenne peut correspondre à différentes valeurs du rapport S/B optimal). C'est cette dernière variable qui doit être reliée à  $\Delta t^{\text{RMS}}$  ; l'analyse des résultats du Monte-Carlo conduit au modèle suivant :

$$\Delta t^{\text{RMS}} \approx \frac{1.45 \text{ ms}}{\rho} \left( \frac{\sigma}{1 \text{ ms}} \right) \quad (7.14)$$

valable, pour des signaux insensibles à l'échantillonnage discret des données – soit pour  $\sigma \geq 0.2$  ms – et dès que  $\rho$  est de l'ordre de 5-6 (i.e. un peu supérieur au seuil fixé à  $\eta = 4.89$ ). Ainsi, la

figure 7.8 montre l'écart entre le résultat des simulations et la formule (7.14) : l'accord est bon à partir de  $\rho = 6$ . Pour  $\tau = 1$  ms et  $\rho = 10$ ,  $\Delta t^{\text{RMS}} \sim 0.15$  ms  $\ll 1$  ms, niveau de précision souhaitable pour effectuer des coïncidences avec les détecteurs de neutrinos – cf. paragraphe 7.5.



**Figure 7.8:** Ecart-type de l'erreur  $\Delta t^{\text{RMS}}$  faite sur le temps d'arrivée du signal gaussien (1 ms de largeur, amplitude correspondant à  $\rho_{\text{max}} = 20$ ) en fonction du rapport S/B  $\rho$  en sortie du filtre. La courbe continue représente la distribution réelle tandis que celle en pointillée correspond au modèle (7.14). On peut noter un très bon accord entre les deux graphes pour  $\rho \geq 6$ .

### 7.3.5 Étude du réseau Virgo/LIGO

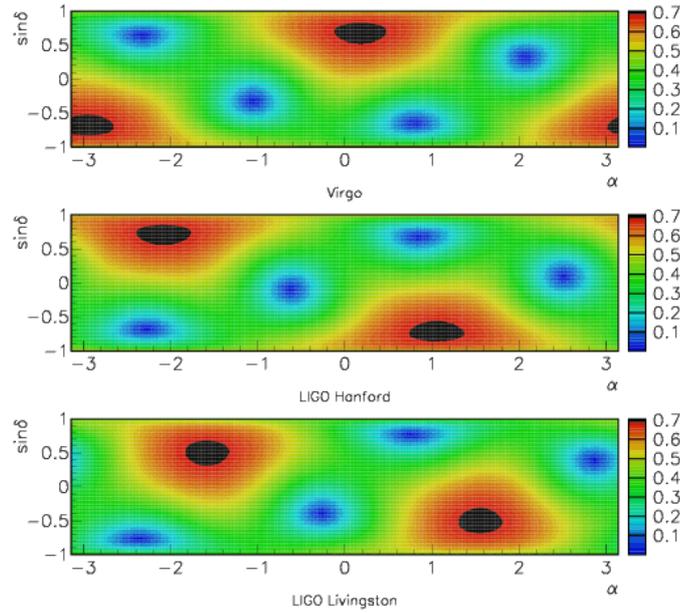
Dans ce paragraphe, on introduit réellement la détection en réseau en ajoutant à Virgo les deux détecteurs américains LIGO, l'un situé à Hanford (état de Washington), l'autre à Livingston (Louisiane). Ces deux interféromètres appartiennent, comme leur nom l'indique, à une même collaboration et ont donc été construits de manière concertée. Loin d'être une lapalissade, cette remarque trouvera son écho dans les résultats des simulations présentés ci-après : le comportement en coïncidence de la paire LIGO est différent de ceux des autres couples de détecteurs dont on pourrait presque dire qu'ils sont disposés "aléatoirement" sur la Terre – du moins, là où la place est suffisante ! La complémentarité de ces instruments est étudiée sous trois angles différents :

- la détection dans (au moins) un interféromètre– ou, de manière équivalente, le calcul de la fraction de signaux qui échappent à toute détection ;
- les coïncidences doubles dans les trois couples de détecteurs ;
- les coïncidences triples.

Auparavant, les fonctions d'antenne des trois détecteurs sont rapidement comparées, d'abord à l'aide de leurs cartes de  $\overline{F}$  respectives, puis par moyennage de ces valeurs sur une journée pour tenir compte du mouvement de rotation propre de la Terre.

#### Fonctions d'antenne et rotation propre de la Terre

La figure 7.9 présente les cartes de la fonction d'antenne moyenne  $\overline{F}$  pour les détecteurs du réseau, Virgo et les deux interféromètres LIGO. Elles ont toutes trois la même structure : deux maxima, quatre minima contenus dans une large bande où l'interaction entre l'instrument et l'onde



**Figure 7.9:** Comparaison des cartes de la fonction d'antenne moyenne  $\overline{F}$  pour Virgo et les deux interféromètres LIGO, Hanford et Livingston.

gravitationnelle est plutôt faible. Leur comparaison montre des ressemblances entre les deux cartes de LIGO Hanford et LIGO Livingston, elles-même très différentes de la troisième associée à Virgo : les maxima de celle-ci correspondent à des minima de celles-là et réciproquement. Ce diagnostic met en lumière une des caractéristiques principales du réseau : les réponses des deux détecteurs LIGO sont assez similaires tandis que Virgo apparaît plutôt complémentaire :

- LIGO Hanford et LIGO Livingston sont avantagés au niveau des coïncidences doubles ;
- par contre, en contrepartie, ils sont aveugles dans une plus grande zone ;
- en ajoutant Virgo, le réseau couvre la majeure partie du ciel pour une détection simple mais les coïncidences entre Virgo et un interféromètre LIGO sont moins probables.

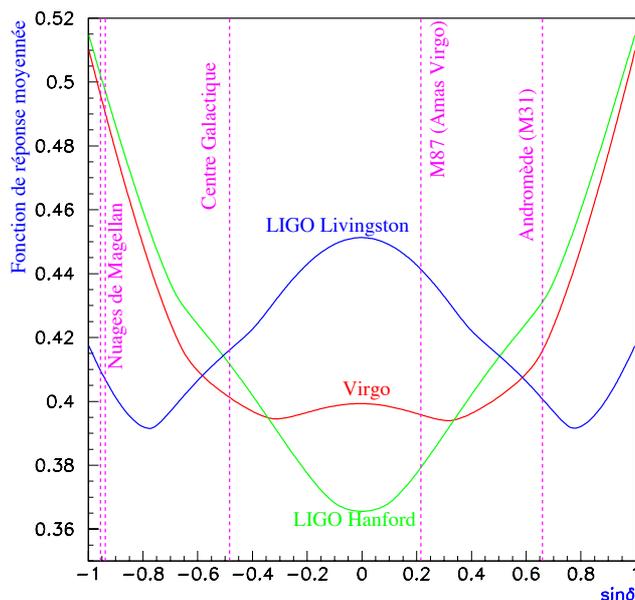
En particulier, si un signal est détecté dans Virgo, il est possible qu'il ne soit vu dans aucun des deux instruments LIGO et la réciproque est également vraie. Le réseau Virgo-LIGO n'est pas optimal pour les coïncidences triples mais il a une bonne couverture globale du ciel.

Il a été mentionné au paragraphe 7.3.3 que les cartes des fonctions d'antenne moyenne  $\overline{F}$  sont en fait des fonctions du temps à cause du mouvement de rotation propre de la Terre. Dès lors, une autre façon de présenter l'information qu'elles contiennent est de moyennner  $\overline{F}$  sur un jour sidéral (et donc sur  $\alpha$ ) pour ne conserver que la dépendance en la variable de déclinaison  $\delta$ .

$$(\overline{F})^{\text{jour}}(\sin \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \overline{F}(\alpha, \sin \delta) \quad (7.15)$$

La figure 7.10 présente les courbes de  $(\overline{F})^{\text{jour}}(\sin \delta)$  pour les trois détecteurs du réseau. On peut remarquer que l'échelle de l'axe verticale est adaptée aux valeurs représentées ce qui a tendance à amplifier les variations relatives de la fonction  $(\overline{F})^{\text{jour}}$  qui sont en fait assez réduites, de l'ordre de 30% autour de la moyenne de 0.42.

Par suite des moyennages successifs, l'allure de  $(\overline{F})^{\text{jour}}$  dépend essentiellement de la latitude du détecteur, ce qui explique les ressemblances entre les courbes de Virgo et de LIGO Hanford. Pour rendre la figure plus concrète, les lignes pointillées verticales montrent la position de centres de galaxies susceptibles d'abriter des sources d'ondes gravitationnelles : la Voie Lactée, les Nuages de Magellan, Andromède (M31) et M87 appartenant à l'amas Virgo. Pour le Centre Galactique



**Figure 7.10:** Moyenne de  $\overline{F}$  sur une journée pour Virgo et les deux interféromètres LIGO ; à cause de la rotation propre de la Terre, la dépendance en  $\alpha$  disparaît. La forme des courbes est fixée par la latitude du détecteur ce qui explique la ressemblance entre les fonctions associées à Virgo et à LIGO Hanford. Les lignes verticales en pointillés montrent la valeur des déclinaisons de quelques centres galactiques susceptibles d’abriter des sources impulsives : la Voie Lactée, les Nuages de Magellan, Andromède (M31) et M87, une des plus grandes galaxies de l’amas Virgo.

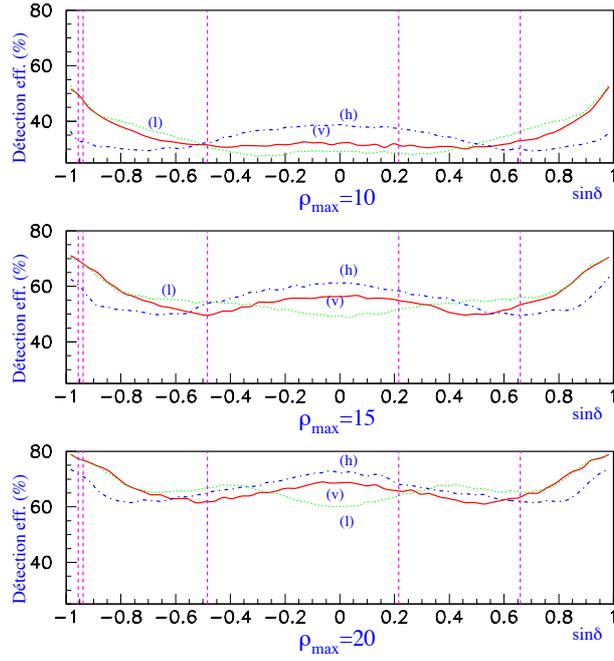
et M31, les trois détecteurs ont des caractéristiques très voisines tandis que LIGO Livingston apparaît meilleur pour M87 et Virgo/LIGO Hanford pour les Nuages de Magellan.

### Détections dans un seul interféromètre

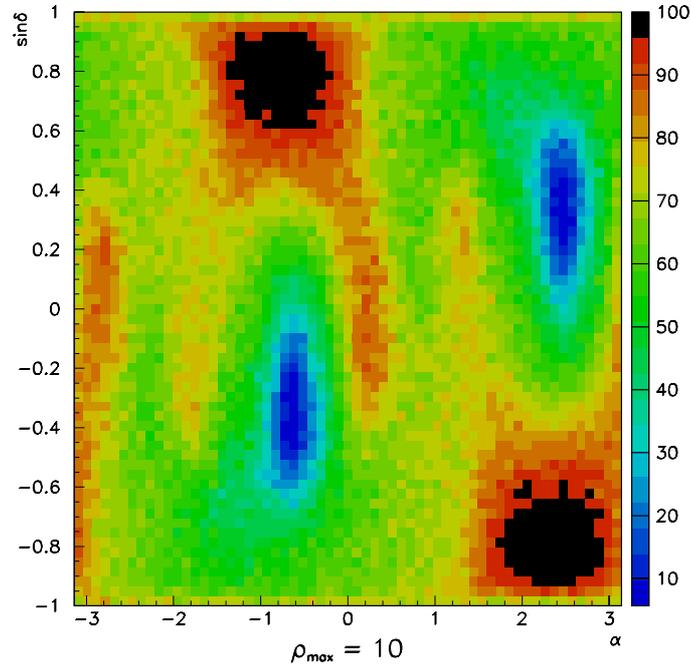
Comme dans le cas de l’étude des performances de l’interféromètre Virgo seul, il est intéressant d’associer à la figure 7.10 qui présente la dépendance en  $\sin \delta$  des fonctions d’antenne (doublement) moyennées un autre graphique montrant la traduction de cet effet en terme de probabilité de détection. La figure 7.11 montre l’efficacité de chacun des interféromètres moyennée sur une journée. Les différentes figures correspondent à un rapport S/B optimal de 10, 15 et 20 respectivement et ils ont tous la même échelle verticale ce qui permet de voir la manière dont les pourcentages de détection augmentent avec  $\rho_{\max}$ .

Comme pour la figure 7.10, les lignes pointillées verticales indiquent la position de centres de galaxies. Les courbes de détection sont proches de celles associées à  $(\overline{F})^{\text{jour}}(\sin \delta)$  : LIGO Livingston a les meilleurs résultats pour de petites valeurs de  $|\sin \delta|$  alors que Virgo et LIGO Hanford sont plus efficaces pour de larges  $|\sin \delta|$ . Néanmoins, il y a certaines différences entre les deux types de figure ; le calcul des fonctions d’antenne moyennées donne une bonne idée des probabilités de détection dans une région du ciel donnée mais il est nécessaire d’effectuer des simulations de Monte-Carlo prenant en compte le processus de détection parmi le bruit de fond pour calculer les efficacités exactes.

Avant de passer aux coïncidences entre les interféromètres du réseau, il reste à examiner la couverture du ciel par ces détecteurs, i.e. l’efficacité de détection dans un des trois instruments au moins (stratégie en “OU”) en fonction de la région du ciel observée. La figure 7.12 montre la carte de cette probabilité pour un rapport S/B optimal  $\rho_{\max} = 10$  (soit une valeur moyenne de  $\rho$  en sortie du détecteur d’environ 4.2, un peu inférieure au seuil de déclenchement) que l’on peut comparer avec la première carte de la figure 7.5 pour le cas Virgo seul. L’efficacité a en moyenne doublé (passant de 34% à 67%, cf. figure 7.16) et elle est plus homogène dans le ciel.



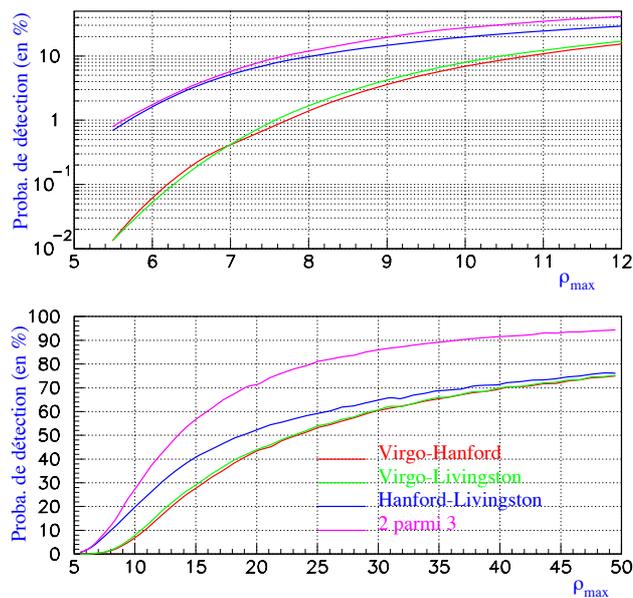
**Figure 7.11:** Efficacité de détection (en %) moyennée sur une journée pour les trois détecteurs du réseau : Virgo (v), LIGO Hanford (h) et LIGO Livingston (l). Chacun des trois graphes correspond à une valeur différente du rapport S/B optimal :  $\rho_{\max} = 10$ , 15 et 20 respectivement. Pour montrer la manière dont la probabilité de détection évolue avec  $\rho_{\max}$ , l'échelle verticale est identique sur chacun des graphiques.



**Figure 7.12:** Carte du ciel associée à l'efficacité de détection dans un interféromètre au moins parmi les trois du réseau pour un rapport S/B optimal  $\rho_{\max} = 10$ .

### Coïncidences doubles

On s'intéresse maintenant aux détections simultanées qui, comme on l'a vu par ailleurs, permettraient de valider un signal réel avec un plus grand niveau de confiance. Dans ce paragraphe, on



**Figure 7.13:** Probabilités de détection en coïncidence double pour le réseau Virgo-LIGO. Le graphe du bas couvre l’intervalle  $[5; 50]$  pour le rapport S/B optimal tandis que celui du haut est un agrandissement de la zone des petites valeurs de  $\rho_{\max}$ .

étudie les coïncidences doubles et dans le suivant les coïncidences triples.

La figure 7.13 présente les efficacités de détection simultanée en fonction du rapport S/B optimal  $\rho_{\max}$  pour les trois paires d’interféromètres : Virgo-LIGO Hanford, Virgo-LIGO Livingston et Hanford-Livingston. De plus, la courbe correspondant à une détection dans deux instruments du réseau parmi trois a été ajoutée. Le graphique du haut est un agrandissement de la zone des petites valeurs de  $\rho_{\max}$  (entre 5 et 12, et son échelle verticale est logarithmique pour mieux montrer les variations des différentes courbes) tandis que le second couvre tout l’intervalle  $\rho_{\max} \in [5; 50]$ .

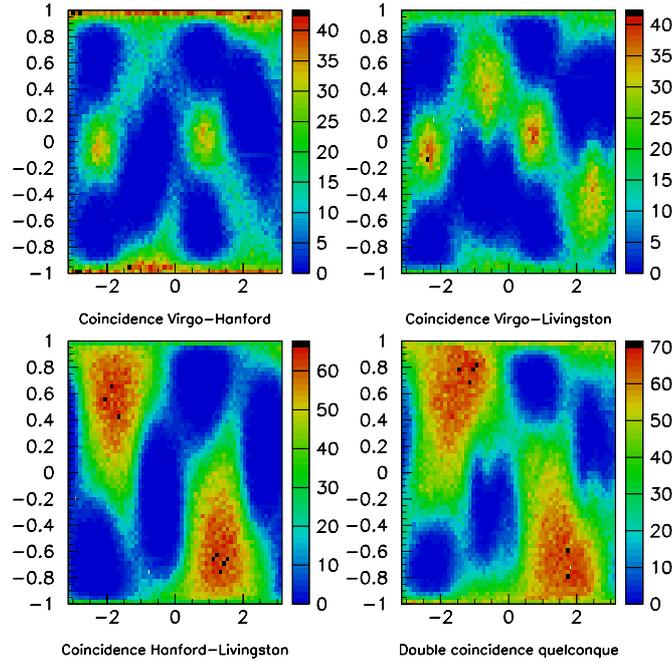
Comme prévu lors de l’examen de la figure 7.9, l’association des deux interféromètres LIGO est toujours la meilleure et domine très largement pour les faibles valeurs de  $\rho_{\max}$ . Néanmoins, l’efficacité de détection reste peu élevée : elle atteint seulement 20% pour  $\rho_{\max} = 10$ . Ainsi, la coïncidence double est plutôt improbable pour les ondes gravitationnelles faibles et ne devient possible (efficacité  $\sim 40\%$ ) que pour  $\rho_{\max} \geq 15$ . Enfin, ajouter Virgo a tout de même un intérêt certain puisque par exemple à  $\rho_{\max} = 10$ , la probabilité de détection globale dans au moins deux interféromètres excède de 50% celle de la paire Hanford-Livingston.

Comme l’efficacité de détection en coïncidence reste faible pour les petites valeurs du rapport S/B optimal, il est intéressant de voir la manière dont elle se distribue dans le ciel. La figure 7.14 présente donc les cartes de la probabilité de détection en coïncidence double pour  $\rho_{\max} = 10$ , une valeur vraisemblable pour les premiers événements détectés. Les trois premiers graphiques correspondent aux paires possibles d’interféromètres tandis que le quatrième montre l’efficacité de détection dans au moins deux instruments parmi trois.

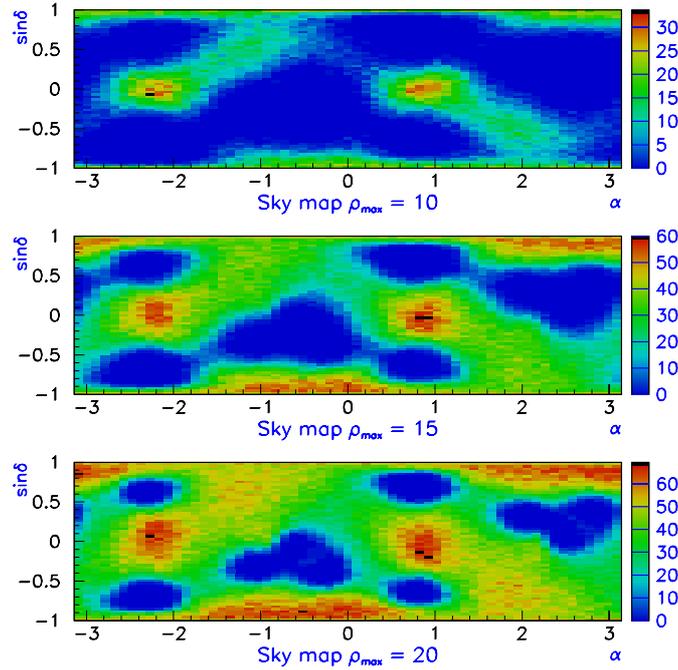
Malgré les différences dans le code couleur des graphes, on voit clairement que les zones du ciel associées à une grande probabilité de détection sont petites pour les différents couples d’antennes gravitationnelles. Sur la dernière carte, ces régions sont “reliées” et l’efficacité est meilleure. Néanmoins, une large fraction du ciel reste invisible pour les coïncidences à faibles – mais réalistes – valeurs de  $\rho_{\max}$ .

### Coïncidences triples

A partir des conclusions tirées au paragraphe précédant à propos des coïncidences doubles, il est clair qu’une détection simultanée dans les trois interféromètres est peu probable à moins que le rapport S/B optimal soit très grand. Ainsi, reconstruire la position dans le ciel de la source du rayonnement gravitationnel par triangulation et plus généralement avoir accès à des informa-



**Figure 7.14:** Cartes de l'efficacité de détection en coïncidence double pour le réseau Virgo-LIGO avec un rapport S/B optimal de 10.



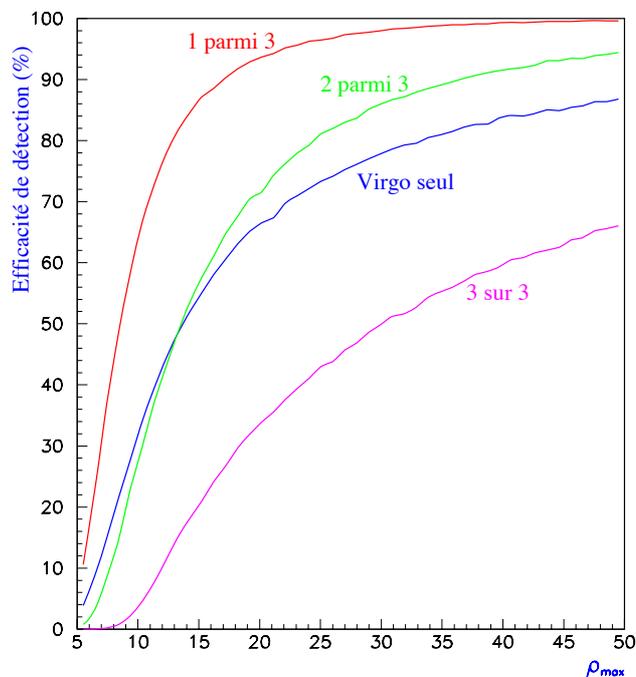
**Figure 7.15:** Cartes du ciel correspondant à des coïncidences triples entre Virgo et les deux détecteurs LIGO. Les efficacités de détection correspondent à trois valeurs différentes du rapport S/B optimal  $\rho_{\max}$  : 10, 15 et 20 respectivement. Pour mieux comparer les trois graphiques, il convient de noter les différences dans les échelles de couleurs.

tions astrophysiques apparaît difficile avec les niveaux de sensibilité de la première génération de détecteurs.

Néanmoins, la figure 7.15 montrent les cartes d'efficacité en coïncidence triple pour les trois valeurs maintenant classiques du rapport S/B optimal : 10, 15 et 20. Dans le premier cas ( $\rho_{\max} = 10$ ),

les probabilités de détection non nulles sont concentrées dans deux petites régions correspondant aux zones de visibilité communes à Virgo et aux deux interféromètres LIGO, mais même là, elles sont inférieures à 30%. Pour les deux autres cartes, la distribution est plus uniforme même s'il subsiste malheureusement des régions entières invisibles – néanmoins de plus en plus petites quand  $\rho_{\max}$  augmente.

### Bilan



**Figure 7.16:** Efficacité de détection (en %) pour des configurations variées du réseau formé par Virgo et les deux interféromètres LIGO en fonction du rapport S/B optimal  $\rho_{\max}$ . La courbe pleine présente la probabilité de détection dans un instrument au moins, celle en pointillés rappelle pour comparaison le cas de Virgo seul tandis que les deux dernières montrent les scénarios de double et de triple coïncidence.

Pour conclure cette partie consacrée à l'étude du réseau formé par les trois détecteurs *a priori* les plus sensibles – Virgo, LIGO Hanford et LIGO Livingston –, la figure 7.16 montre l'évolution de la probabilité de détection en fonction du rapport S/B optimal  $\rho_{\max}$  pour différentes configurations étudiées dans les paragraphes précédents :

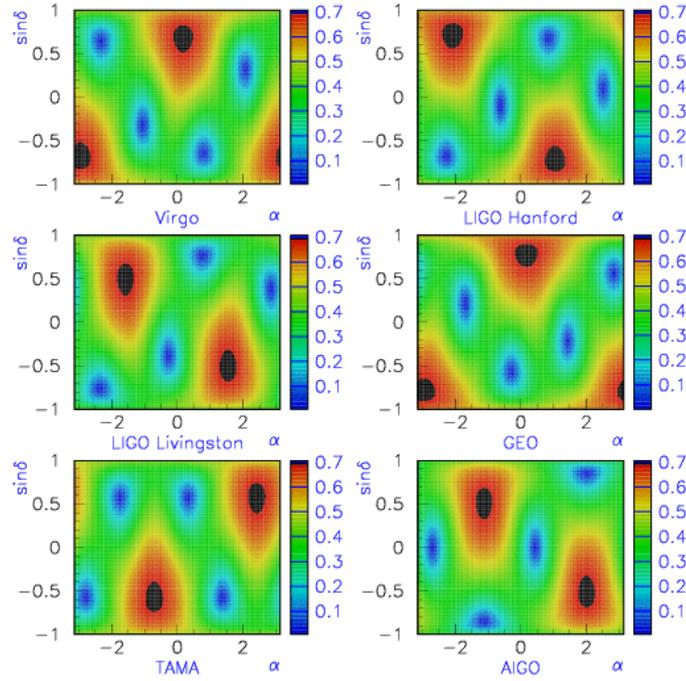
- un détecteur seul (Virgo) ;
- détection dans au moins un interféromètre (stratégie en “OU”) ;
- détection dans deux antennes parmi trois ;
- triple coïncidence.

Le potentiel de détection simple est clairement meilleur pour le réseau, et la différence est d'autant plus grande que  $\rho_{\max}$  est faible : plus d'un facteur deux pour  $5 \leq \rho_{\max} \leq 10$  et un écart de plus d'une fois et demie jusqu'à  $\rho_{\max} = 17$ . L'efficacité en “OU” atteint 50% à  $\rho_{\max} = 8$  et dépasse les 85% pour  $\rho_{\max} \geq 15$  : à ce niveau, la détection est probable quelle que soit la région du ciel abritant la source.

Un phénomène intéressant visible sur cette figure est que, à partir de  $\rho_{\max} = 13$ , il devient plus probable d'avoir une détection dans deux interféromètres parmi trois plutôt que dans un instrument donné, ce qui justifie l'intérêt de faire des recherches en coïncidence même si les résultats obtenus ici sont moins bon que ceux espérés (ou du moins implicitement supposés dans la littérature). Enfin, on peut voir que l'efficacité en détection triple est très faible pour  $\rho_{\max} \leq 10$  et n'atteint des valeurs significatives ( $\sim 50\%$ ) que pour  $\rho_{\max} \geq 30$ .

## 7.3.6 Extension à six détecteurs

## Fonctions d'antenne



**Figure 7.17:** Comparaison des cartes de la fonction d'antenne moyenne  $\overline{F}$  pour les six détecteurs détaillés dans la table 2.6 : Virgo, LIGO Hanford et Livingston, GEO600, TAMA300 et AIGO. L'orientation de ce dernier interféromètre – non encore définie – a été optimisée pour que le réseau complet soit le plus performant possible.

L'analyse du réseau à trois interféromètres Virgo-LIGO a montré qu'il couvrait assez bien le ciel mais que ses possibilités de détection en coïncidence restaient limitées, non pas tant à cause de la position des détecteurs – même si les deux antennes LIGO ont bénéficié d'une optimisation dans leur placement relatif – mais plutôt à cause de l'effet des fonctions d'antenne. Une manière de remédier à cela est d'augmenter<sup>2</sup> la taille du réseau en rajoutant les trois autres détecteurs en construction ou prévus : GEO600, TAMA300 et AIGO (cf. paragraphe 2.2.4).

La figure 7.17 compare leurs cartes pour la fonction d'antenne moyenne  $\overline{F}$ . Le “relief” attendu est bien présent sur chacune d'elles et n'appelle aucun commentaire particulier, à l'exception toutefois du graphique concernant l'interféromètre australien AIGO. La table 2.6 précise que son orientation  $\gamma_{\text{AIGO}}$  n'a pas encore été choisie ; elle a donc été “optimisée” par rapport aux autres détecteurs du réseau.

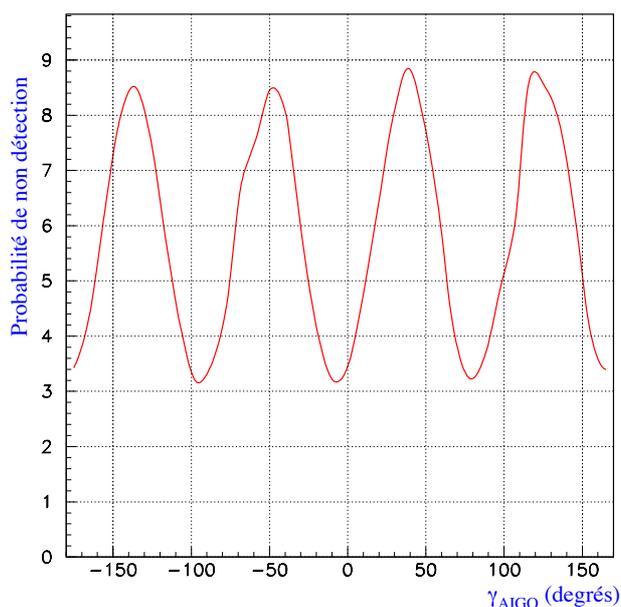
## Orientation optimale de AIGO

Pour déterminer l'orientation “optimale” du détecteur AIGO, le critère suivant a été choisi : minimiser la probabilité de non-détection du réseau complet à faible rapport S/B optimal (lorsque les coïncidences sont peu probables et donc quand chacun des interféromètres est sensible à sa zone du ciel propre). La figure 7.18 montre la variation de cette “inefficacité” en fonction de l'angle  $\gamma_{\text{AIGO}}$  exprimé en degrés.

Comme attendu, la fonction est (quasi-)périodique de période  $90^\circ$  : tourner un interféromètre d'un multiple de cet angle autour de sa séparatrice ne change pas la distribution de sa fonction d'antenne<sup>3</sup>. Selon la valeur de  $\gamma_{\text{AIGO}}$ , l'inefficacité varie d'un facteur 3 environ (entre 3%

<sup>2</sup>On rappelle que tous les détecteurs sont supposés identiques, y compris au niveau de leur sensibilité. D'une part, les DSA sont, à l'exception de TAMA300, encore hypothétiques puisque les interféromètres sont encore en construction ; d'autre part, rajouter un instrument nettement moins sensible dans le réseau n'apporterait rien en terme de détection.

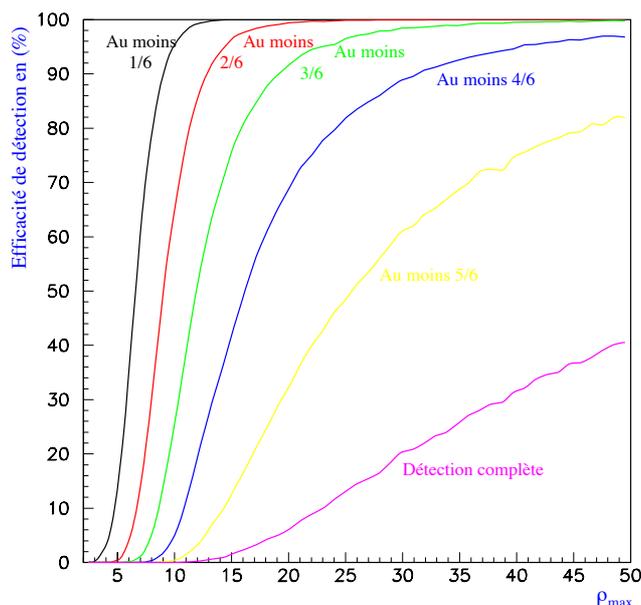
<sup>3</sup>En effet, les expressions des coefficients  $a(t)$  et  $b(t)$  introduites au paragraphe D.2.2 ne dépendent que de l'angle  $2\gamma$  et rajouter  $\pi/2$  à  $\gamma$  revient à changer le signe de ces deux valeurs, lequel signe peut être absorbé ensuite dans la



**Figure 7.18:** Probabilité de non détection pour un signal de rapport S/B optimal  $\rho_{\max} = 10$  dans le réseau complet de six détecteurs en fonction de l'orientation  $\gamma_{\text{AIGO}}$  du futur interféromètre AIGO.

et 9%); le choix  $0^\circ$  correspond à une orientation quasi-optimale, convention que nous avons donc choisie pour la suite de l'étude du réseau complet.

### Efficacité en multi-détections



**Figure 7.19:** Efficacité de détection pour le réseau de six interféromètres.

---

matrice de rotation associée à l'angle de polarisation  $\psi$  – cf. équation (D.13).

La figure 7.19 montre l'efficacité de détection pour le réseau complet, de la stratégie en "OU" global – au moins une détection parmi six – au cas de la sextuple coïncidence, le tout en fonction du rapport S/B optimal. Les résultats présentés sont bien meilleurs que ceux du petit réseau Virgo-LIGO, résumés par exemple sur la figure 7.16.

Ainsi, pour  $\rho_{\max} = 7$ , la probabilité de détection en "OU" atteint déjà 70% et culmine à 100% pour  $\rho_{\max} \geq 12$  alors que pour Virgo seul et pour le réseau Virgo-LIGO, l'efficacité de 70% n'était atteinte que pour des valeurs du rapport S/B optimal de 23 et 11 respectivement.

La situation est également plus favorable pour les coïncidences. Pour le voir, il suffit de s'intéresser à deux exemples représentatifs des buts de l'analyse cohérente. Le premier, qui pourrait s'appeler "détection multiple", correspond à une coïncidence dans au moins deux interféromètres, configuration minimale pour valider une détection en s'affranchissant des bruits non stationnaires d'un instrument particulier. Le second est relié à la possibilité d'extraire des informations de physique (position de la source dans le ciel, polarisations de l'onde gravitationnelle...) à partir de la coïncidence; pour cela, une triple détection est au minimum nécessaire. La table 7.5 montre le niveau du rapport S/B optimal  $\rho_{\max}$  à atteindre pour que l'efficacité de ces scénarios atteigne une valeur donnée.

Efficacité de détection	50%	90%	95%
Détection multiple ( $N \geq 2$ )	9	13	15
Détermination de la position de la source et des polarisations ( $N \geq 3$ )	12	20	23

**Tableau 7.5:** Valeurs minimales du rapport S/B optimal nécessaires pour atteindre une efficacité de détection fixée dans deux scénarios de coïncidences.

Enfin, pour  $\rho_{\max} \geq 16$ , 50% des ondes gravitationnelles sont détectées dans quatre interféromètres ou plus, ce qui permet une analyse plus précise grâce à la redondance des informations; toutefois, la coïncidence complète reste peu probable sauf pour des valeurs très larges du rapport S/B optimal.

Pour conclure ce paragraphe, on peut dire que le passage de trois à six instruments augmente énormément le potentiel de détection en réseau. La mise en place d'une analyse cohérente des données issues des détecteurs interférométriques n'a finalement de sens que dans l'optique d'une collaboration internationale aussi large que possible, regroupant toutes les antennes gravitationnelles.

### Comparaison des réseaux

L'ajout de trois détecteurs au premier réseau étudié constitué de Virgo et des deux interféromètres LIGO permet de comparer entre eux les "sous-réseaux", regroupant entre deux et cinq instruments au-moyen de leurs efficacité de détection en coïncidence. Ainsi, les résultats établis au paragraphe 7.3.5 sont mieux mis en perspective et leurs conclusions affinées.

La différence de comportement entre deux groupes différents d'interféromètres apparaît mieux pour les faibles valeurs du rapport S/B optimal: un détecteur quelconque voit un fort signal gravitationnel, non pas parce que son orientation est bonne par rapport à celui-ci, mais car il est sensible à sa grande amplitude. Aussi, ce paragraphe se concentre sur la zone  $\rho_{\max} \leq 15$ .

Seuls les deux détecteurs de la collaboration LIGO ont été construits de manière concertée; il n'est donc pas étonnant que leur association soit le meilleur choix pour des coïncidences doubles: leur efficacité est le double de celle obtenue en moyenne pour les autres paires d'interféromètres à  $\rho_{\max} = 10$  et elle est encore de 30% à 40% meilleure pour  $\rho_{\max} = 15$ . D'un autre côté, ce réseau est le moins bon pour la stratégie en "OU": sa probabilité de détection vaut seulement 50% à  $\rho_{\max} = 10$  au lieu de 60% pour les autres. Leurs orientations similaires font qu'ils ont souvent le même comportement, soit en détectant, soit en "ratant" un signal donné. Ainsi, les deux antennes LIGO ne sont pas suffisantes en elles-mêmes pour la détection et d'autres instruments doivent leur être adjoints.

La situation est la même pour les réseaux à trois interféromètres. Avec  $\rho_{\max} = 10$ , ceux qui contiennent les deux détecteurs LIGO ratent plus d'événements (32% au lieu de 22-26% pour les autres configurations) mais ont un meilleur niveau de détection multiple: de l'ordre de 30% au lieu de 25%. Ces probabilités sont presque indépendantes du choix du troisième détecteur.

Pour de faibles valeurs de  $\rho_{\max}$  – par exemple 5 –, ajouter des interféromètres les uns après les autres, n'améliore pas beaucoup la sensibilité en "OU" qui plafonne autour de 20% – cf. table

7.6 – : le signal est tout simplement trop faible. Comme à ce niveau de rapport S/B il n’y a presque pas de coïncidence, l’efficacité est à peu près égale à la probabilité de détection dans un seul instrument multipliée par le nombre d’antennes du réseau. Par contre, dès que  $\rho_{\max}$  atteint 10, la situation est plus prometteuse : avec quatre interféromètres, l’efficacité de détection en “OU” est de 80% et elle atteint 90% pour cinq antennes.

Taille du réseau	1	2	3	4	5	6
Efficacité de détection moyenne	3.8%	7.5%	11.2%	14.7%	18.2%	21.3%

**Tableau 7.6:** Efficacité de détection moyenne en “OU” en fonction du nombre de détecteurs du réseau pour  $\rho_{\max} = 5$ .

Le lien entre les deux détecteurs LIGO est toujours visible même s’il est dilué par la présence d’autres instruments : un réseau contenant cette paire a de meilleures chances d’avoir des détections en coïncidence mais une moins bonne efficacité en “OU”. A l’exception de ce fait particulier, les différences entre réseaux sont finalement assez peu significatives : des configurations “bien distribuées” sur la Terre comme Virgo-LIGO Livingston-TAMA-AIGO montrent des résultats très similaires aux autres. En conclusion, on peut dire que le nombre d’interféromètres est plus important que leur position géographique, au moins pour ce qui concerne la recherche de multi-détections.

## 7.4 Recherche de sources galactiques

Les analyses précédentes sont toutes basées sur l’hypothèse d’une distribution uniforme de sources sur la voûte celeste. Or, les amplitudes attendues pour les signaux de supernovae limitent, au moins pour la première génération d’interféromètres, les distances de détection à quelques dizaines de kpc, soit à peine au delà de la Voie Lactée. A cette échelle, les étoiles sont réparties dans des zones précises du ciel et ont également une densité variable selon la distance. Aussi, à l’aide d’un modèle simple de la Galaxie, nous avons voulu voir dans quelle mesure les efficacités de détection étaient modifiées par cette distribution particulière de sources.

Comme le rappelle la figure 1.6, le taux de supernova dans la galaxie est très faible : de l’ordre d’un événement tous les 30-40 ans en moyenne. Ainsi, cette analyse apparaît assez académique si on se limite à ce type particulier de sources. En fait, elle a un cadre d’application plus général qui s’étend à tous les types (connus ou inconnus) d’ondes gravitationnelles galactiques. La seule hypothèse faite sera sur l’amplitude des signaux, choisie par exemple pour correspondre à un rapport S/B optimal  $\rho_{\max}^0$  à 10 kpc fixé, typiquement de 7 à 13 pour un seuil de détection valant 4.89.

### 7.4.1 Modèle de distribution de sources et simulation

Comme première hypothèse, on supposera que la Terre se trouve dans le plan galactique : elle est en fait située à environ 20 années-lumière de ce plan, distance très faible par rapport à la distance<sup>4</sup> au centre galactique  $\Omega$  :

$$R_{\text{centre}} \approx 8.5 \text{ kpc}$$

L’angle entre le plan galactique et la ligne de visée  $\Omega$ -Terre vaut donc environ  $0.04^\circ$ , et est donc complètement négligeable.

Pour décrire la distribution de matière  $\lambda$ , on se place dans un repère centré sur  $\Omega$  où l’axe  $z$  est perpendiculaire au plan galactique. En coordonnées cylindriques – un point  $M$  est décrit par trois coordonnées,  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  – on a :

$$\lambda(M) \propto \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \exp\left(-\frac{|z|}{H_0}\right) \quad (7.16)$$

---

<sup>4</sup> $R_{\text{centre}} = 8.5 \text{ kpc}$  correspond aux mesures récentes (1997) faites par le satellite HIPPARCOS qui l’estiment à environ 28000 années-lumière; c’est un peu plus que d’autres estimations qui privilégient une valeur de l’ordre de 8 kpc – on pourra consulter [174] pour avoir plus de détails sur la question. Nous avons choisi la valeur la plus conservative pour nos simulations.

ce qui correspond à un **modèle en “disque fin”** [175]. On prend  $r_0 = 3.5$  kpc et  $H_0 = 0.325$  kpc.

L'angle  $\theta$  a une distribution de probabilité uniforme dans  $[-\pi; \pi]$  tandis que la probabilité  $\mathfrak{P}(r, z)$  de trouver une source à la distance  $r$  et à la hauteur  $z$  est donnée par

$$\mathfrak{P}(r, z) = \left( \frac{r e^{-r/r_0}}{r_0^2} \right) \left( \frac{e^{-|z|/H_0}}{2 H_0} \right) \quad (7.17)$$

Les variables étant séparées, on peut tirer aléatoirement  $r$  et  $z$  de manière indépendante :

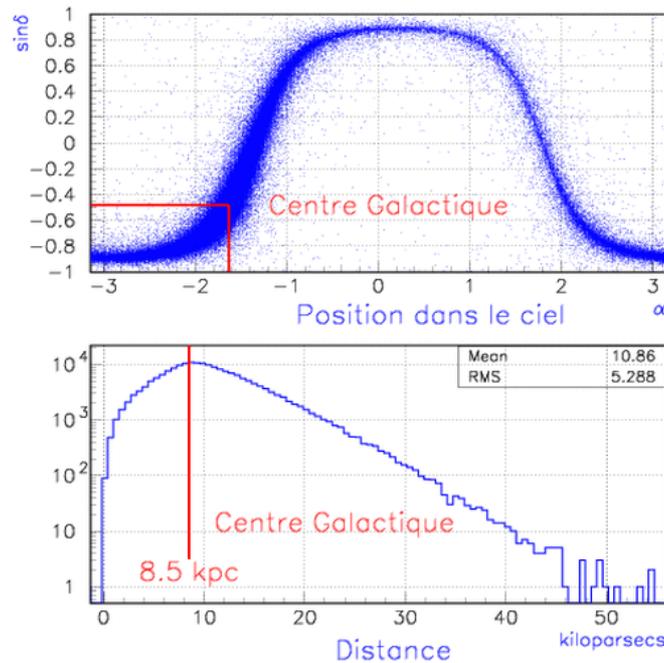
- $r$  suit une loi dite  $\Gamma(2)$  de paramètre  $r_0$  ;
- $|z|$  suit une loi exponentielle de paramètre  $H_0$ , également appelée  $\Gamma(1)$  et le signe de  $z = \pm|z|$  est ensuite tiré aléatoirement.

La simulation d'une loi de probabilité  $\Gamma(N)$  de paramètre unité s'effectue en prenant l'opposé du logarithme du produit de  $N$  variables aléatoires indépendantes et uniformes dans  $[0; 1]$  [164].

Une fois les coordonnées  $(r, \theta, z)$  connues, on se ramène au repère équatorial par la composition d'une translation et d'une rotation, ce qui fournit la distance  $R$  entre la Terre et la source, ainsi que l'ascension droite  $\alpha$  et la déclinaison  $\delta$  de cette dernière. Il reste à prendre en compte le mouvement propre de rotation de notre planète pour obtenir la position de la source à l'instant  $t$  de la simulation. On peut alors calculer le rapport S/B optimal de la source :

$$\rho_{\max} = \left( \frac{R_0}{R} \right) \rho_{\max}^0 \quad (7.18)$$

avec  $R_0 = 10$  kpc (distance de calibration) et  $7 \leq \rho_{\max}^0 \leq 13$  : des valeurs moyennes ne correspondant ni à des probabilités de détection trop faibles, ni à des efficacités proches de 100% dans presque tout le ciel.



**Figure 7.20:** Distribution de sources galactiques obtenue par simulation Monte-Carlo à partir du modèle présenté ci-dessus. La partie supérieure de la figure montre leur répartition dans le ciel – plan  $(\alpha; \sin \delta)$  – tandis que le second graphe traite des distances exprimées en kpc. Dans les deux cas la position du Centre Galactique est présentée.

La figure 7.20 présente le résultat de la simulation de la Galaxie : le graphe du haut montre la répartition des sources dans le ciel qui est loin d'être uniforme tandis que celui du bas indique

la distribution de la distance  $R$  entre la Terre et la source, dont la valeur moyenne est de l'ordre de 10.9 kpc, un peu au delà de  $R_{\text{centre}}$ . Dans les deux cas, la position du Centre Galactique est matérialisée, soit par un point (partie supérieure), soit par une ligne continue (partie inférieure). On peut voir qu'il correspond comme attendu aux valeurs les plus probables des angles et de  $R$ .

Le protocole concernant le signal et la méthode de détection est inchangé par rapport au paragraphe 7.3.2; il s'agit toujours d'un pic gaussien de largeur 1 ms auquel est appliqué le filtrage de Wiener. Quant aux détecteurs, ils sont comme précédemment choisis identiques et indépendants.

## 7.4.2 Résultats

Comme au paragraphe traitant des coïncidences entre interféromètres sous l'hypothèse d'une distribution de source uniforme dans le ciel, deux cas ont été considérés: d'abord le réseau particulier de trois détecteurs formé de Virgo et des deux instruments LIGO, ensuite le réseau complet des six antennes gravitationnelles actuellement en construction ou prévues.

### Cas du réseau Virgo-LIGO

$\rho_{\text{max}}^0$	7	8	9	10	11	12	13
1 seul interféromètre (Virgo)	21.1%	25.9%	30.6%	35.3%	39.2%	43.2%	46.7%
Au moins 1 détection sur 3	39.9%	47.7%	54.9%	61.3%	66.3%	71.1%	74.5%
Coïncidence Virgo-Hanford	7.0%	9.2%	11.8%	14.7%	17.4%	20.3%	23.2%
Coïncidence Virgo-Livingston	7.7%	10.2%	12.9%	15.8%	18.8%	21.7%	24.6%
Coïncidence Hanford-Livingston	13.7%	17.5%	21.1%	24.7%	28.1%	31.5%	34.7%
Au moins 2 détections sur 3	18.1%	23.1%	28.1%	33.3%	37.9%	42.7%	46.7%
Coïncidence complète	5.1%	6.7%	8.9%	11.0%	13.2%	15.4%	17.9%

**Tableau 7.7:** Efficacité de détection ‘galactique’ pour le réseau Virgo-LIGO. Pour chacune des configurations étudiées, les probabilités sont données en pourcents et correspondent au modèle de source développé au paragraphe précédent, le seul paramètre ajustable étant l'amplitude du signal gravitationnel à 10 kpc définie par la quantité  $\rho_{\text{max}}^0$ .

La table 7.7 présente les efficacités de détection des différentes configurations possibles (d'un détecteur simple à la coïncidence triple) en fonction de la valeur du rapport S/B optimal à 10 kpc. Les valeurs obtenues en simulation sont cohérentes avec les scénarios déduits lors de l'étude détaillée des coïncidences entre interféromètres et ne nécessitent pas de commentaires particuliers: les coïncidences triples sont peu probables, les deux détecteurs LIGO sont favorisés par rapport aux autres paires pour les coïncidences doubles, et une détection est assez probable dans au moins un instrument sur les trois. Par contre, il est nettement plus intéressant d'essayer de quantifier l'impact de la distribution de sources non uniforme dans le ciel et de la répartition de celles-ci en distance.

Pour accéder à l'information angulaire, la distribution en  $R$  a été conservée tandis que les coordonnées équatoriales  $\alpha$  et  $\delta$  étaient tirées uniformément. Les résultats obtenus coïncident au niveau du pourcent avec ceux présentés dans la table 7.7 ce qui montre que la répartition des sources spécifiques à la Voie Lactée ne joue pas. Cela se comprend en se souvenant que le mouvement propre de la Terre ‘uniformise’ la dépendance en  $\alpha$  d'une source donnée et rend plus homogène la distribution de celles-ci. De plus, la dépendance suivant l'angle de polarisation  $\psi$  moyenne également les variations des fonctions d'antenne.

La distance moyenne  $\bar{R}$  entre la Terre et la source est d'environ 11 kpc. En supposant par exemple que  $\rho_{\text{max}}^0 = 10$  à 10 kpc, cela correspond à  $\rho_{\text{max}}(\bar{R}) \approx 9$ . On peut donc comparer les résultats dans la quatrième colonne du tableau 7.7 avec ceux obtenus pour une distribution uniforme de sources et  $\rho_{\text{max}} = 9$ . Sans surprise, les valeurs obtenues pour le modèle galactique sont meilleures, grâce à la contribution des sources plus proches ( $R \leq \bar{R}$ ) très bien détectées. Par exemple, pour le cas  $\rho_{\text{max}} = 9$ , la probabilité d'avoir une détection dans Virgo est seulement de 27.9% et l'efficacité en coïncidence double de 23.1%.

### Extension du réseau aux six détecteurs

Comme dans le cas d'une distribution uniforme de sources, le passage de trois à six détecteurs améliore grandement les probabilités de détection, comme le montre la table 7.8. Un événement quelconque a plus d'une chance sur deux d'être vu et les efficacités en coïncidence double ou triple sont bonnes. Dans le cas où tous ces instruments auraient réellement des sensibilités proches, une émission d'ondes gravitationnelles d'origine galactique aurait de bonnes chances d'être détectée avec suffisamment de précision pour pouvoir valider effectivement cet événement et en extraire des informations physiques intéressantes.

$\rho_{\max}^0$	7	8	9	10	11	12	13
Au moins 1 détection sur 6	59.6%	69.1%	76.7%	82.2%	86.7%	90.0%	92.5%
Au moins 2 détections sur 6	33.5%	42.7%	51.6%	58.9%	65.8%	71.3%	76.3%
Au moins 3 détections sur 6	17.9%	24.1%	30.3%	36.7%	43.2%	49.3%	55.1%
Au moins 4 détections sur 6	9.3%	12.6%	16.4%	20.5%	24.9%	29.3%	34.0%
Au moins 5 détections sur 6	4.3%	5.6%	7.2%	9.1%	11.2%	13.5%	16.1%
Coïncidence complète	1.3%	1.7%	2.2%	2.7%	3.4%	4.0%	4.7%

**Tableau 7.8:** Efficacité de détection "galactique" pour le réseau de six interféromètres.

## 7.5 Coïncidences avec les détecteurs de neutrinos

Parmi toutes les sources possibles d'ondes gravitationnelles, les supernovae présentent un intérêt particulier: en effet, seule une faible fraction de l'immense quantité d'énergie émise à cette occasion l'est sous cette forme. Le reste est converti en divers rayonnements, photons et neutrinos en particulier. La lumière émise lors d'un tel événement est de l'ordre de celle de la galaxie hôte entière, ce qui explique que la principale méthode de détection de tels événements soit optique, et ce jusqu'à des distances cosmologiques ( $z \sim 1$ ).

Récemment pourtant une explosion dans le grand nuage de Magellan (supernova 1987A) a également été vue dans des détecteurs de neutrinos [60, 176] en plus de sa contrepartie optique: elle était suffisamment proche pour que quelques uns des antineutrinos produits alors (13 par rapport à  $10^{57}$  environ pour Kamiokande et 6 pour IMB) interagissent dans la cuve d'eau en produisant des positons détectés par effet Cherenkov. Cet unique exemple a montré la capacité des détecteurs de neutrinos à observer des supernovae proches, un événement malheureusement plutôt rare (cf. figure 1.6) et resté sans équivalent depuis.

Exploiter une triple coïncidence entre un signal optique, des neutrinos et une onde gravitationnelle tous issus d'une même supernova aurait un grand intérêt physique: d'abord la confirmation du potentiel des détecteurs de neutrinos (déjà démontré en pratique avec des instruments moins sensibles que ceux actuels), ensuite la validation d'un vrai signal gravitationnel à l'aide de deux observations extérieures. Cette dernière possibilité est en elle-même assez séduisante mais elle peut pourtant être encore enrichie d'une information supplémentaire: la différence entre les temps d'arrivée de l'onde gravitationnelle et des neutrinos donne accès à leur masse avec une sensibilité meilleure que les limites actuelles. L'objet de ce paragraphe est de présenter les grandes lignes de la méthode, détaillée dans [65], ainsi que ses résultats.

On verra en particulier que les limites à 95% de confiance atteignent  $0.75 \text{ eV}/c^2$  dans le cas où les  $\nu_e$  produits lors du rebond du noyau de la supernova survivent dans une proportion non négligeable, et  $1.1 \text{ eV}/c^2$  dans le cas contraire – conversion des  $\nu_e$  en  $\nu_\mu$  et  $\nu_\tau$ . Tant qu'un nombre suffisant (3 au minimum) de neutrinos est détecté, l'efficacité de la méthode ne dépend pas de la distance de la source pourvu que l'amplitude du signal gravitationnel soit assez forte – rapport S/B typiquement de l'ordre de 10.

### 7.5.1 Masses des neutrinos et oscillations

#### Lien entre masses et oscillations

Des données expérimentales convergentes, mettant en évidence des **oscillations** [177] entre les trois saveurs connues – neutrino électron ( $\nu_e$ ), neutrino  $\mu$  ( $\nu_\mu$ ) et neutrino  $\tau$  ( $\nu_\tau$ ) – montrent que les neutrinos ont sans doute des masses non nulles. En effet, ce mécanisme s'interprète parfaitement en

supposant que les différents neutrinos (labellés génériquement par l'indice  $l$ ) sont des superpositions linéaires cohérentes d'états propres ( $\nu_m$ ) de masses  $M_m$  :

$$|\nu_l\rangle = \sum_m U_{lm} |\nu_m\rangle \quad (7.19)$$

En supposant que le nombre d'états propres de masse est égal à trois,  $U$  est une matrice carrée unitaire d'ordre 3, appelée matrice de mélange leptonique.

A partir de cette définition on peut calculer la probabilité qu'un neutrino  $\nu_l$  (ultra-relativiste), produit avec une énergie  $E$  et qui s'est propagé sur une distance  $L$ , se soit alors transformé en un neutrino  $\nu_\nu$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\nu_l \rightarrow \nu_\nu ; L) &= |\langle \nu_\nu | \nu_l(L) \rangle|^2 \\ &= \left| \sum_m U_{lm} \exp\left[-\frac{i L M_m^2 c^3}{2 E \hbar^3}\right] U_{l'\nu}^* \right|^2 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Dans le cas d'un modèle simplifié où seule l'oscillation  $\nu_e - \nu_\mu$  est prise en compte, la matrice  $U$  est celle d'une rotation dans le plan d'angle de mélange  $\theta_{e\mu}$ . L'équation (7.20) prend alors la forme

$$\mathbb{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu ; L) = \sin^2(2\theta_{e\mu}) \sin^2\left(\frac{\Delta M_{12}^2 L c^3}{4 E \hbar}\right) \quad (7.21)$$

où  $\Delta M_{12}^2 = M_2^2 - M_1^2$ . Numériquement,

$$\frac{\Delta M_{12}^2 L c^3}{4 E \hbar} \approx 1.27 \left(\frac{\Delta M_{12}^2}{1 \text{ eV}^2/c^4}\right) \left(\frac{L}{1 \text{ km}}\right) \left(\frac{1 \text{ GeV}}{E}\right) \quad (7.22)$$

Dans le cas de trois saveurs, l'expérience montre que les deux premiers états propres de masse sont presque dégénérés :

$$\begin{cases} |\Delta M_{12}^2| \ll |\Delta M_{13}^2| \\ |\Delta M_{23}^2| \approx |\Delta M_{13}^2| \end{cases}$$

Si maintenant  $|\Delta M_{13}^2| L/E \sim 1$  (et donc  $|\Delta M_{12}^2| L/E \ll 1$ ), on retrouve une probabilité d'oscillation similaire à l'équation (7.21) :

$$\mathbb{P}(\nu_l \rightarrow \nu_\nu ; L) \approx |2U_{l3} U_{\nu 3}|^2 \sin^2\left(\frac{\Delta M_{13}^2 L}{4 E}\right) \quad (7.23)$$

L'expression précédente dépend essentiellement des éléments de matrice  $U_{l3}$  entre l'état propre de saveur  $\nu_l$  et l'état propre de masse la plus élevée.

### Données expérimentales

Deux types d'oscillations sont observées expérimentalement.

- Une oscillation  $\nu_\mu - \nu_\tau$  pour les neutrinos atmosphériques produits par les rayons cosmiques est observée par le détecteur SuperKamiokande (SuperK) [178] et confirmé par d'autres expériences [177] : en effet, le flux de neutrinos  $\nu_\mu$  détectés n'est pas isotrope, il y a un déficit (de l'ordre de 50%) pour ceux qui ont traversé la Terre par rapport à ceux qui viennent directement de l'atmosphère.
- Une oscillation  $\nu_e - \nu_\mu$  des neutrinos solaires : le flux de  $\nu_e$  solaires détecté est inférieur à la prédiction du modèle standard du Soleil [179]. Ce résultat peut être interprété en termes d'oscillations en prenant en compte l'effet MSW (Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein) [180] qui décrit la propagation des neutrinos dans un milieu matériel de densité variable.

Oscillation	$\Delta M^2$ (eV <sup>2</sup> /c <sup>4</sup> )	Oscillation	Mélange
$\nu_e - \nu_\mu$	$\sim 10^{-10}$	Vide	presque maximal
	$\sim 10^{-7}$	MSW	presque maximal
	$\sim 5 \cdot 10^{-5}$	MSW	presque maximal
	$\sim 10^{-5}$	MSW	faible
$\nu_\mu - \nu_\tau$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	MSW	maximal

**Tableau 7.9:** Solutions favorisées par l'expérience pour les oscillations de neutrinos.

Les scénarios permettant d'expliquer ces résultats sont reproduits dans la table 7.9 : on a quatre solutions distinctes pour l'oscillation  $\nu_e - \nu_\mu$  et une seule pour l'oscillation  $\nu_\mu - \nu_\tau$ .

Ces résultats associés aux limites supérieures directes sur la masse des neutrinos (3 eV/c<sup>2</sup> pour le  $\nu_e$ , 190 keV/c<sup>2</sup> pour le  $\nu_\mu$  et 18 MeV/c<sup>2</sup> pour le  $\nu_\tau$ ) permettent d'imaginer deux scénarios extrêmes :

- spectre hiérarchique de masse : 
$$\begin{cases} m_{\nu_e} \ll 3 \text{ meV}/c^2 \\ m_{\nu_\mu} \sim 3 \text{ meV}/c^2 \\ m_{\nu_\tau} \sim 60 \text{ meV}/c^2 \end{cases}$$
- spectre quasi-dégénéré : trois masses voisines pouvant atteindre 3 eV/c<sup>2</sup>.

## 7.5.2 Supernova

Ce paragraphe revient rapidement sur le mécanisme d'explosion de supernova de type II déjà présenté au paragraphe 1.3.4.

### Emission de neutrinos

Au cours de la phase d'effondrement du coeur, des  $\nu_e$  sont produits par interaction entre électrons et protons. Une fois que la densité nucléaire est atteinte, ces neutrinos ne peuvent plus diffuser vers l'extérieur et leur émission est très réduite. Lorsque la compressibilité de la matière atteint sa limite, l'effondrement s'arrête plus ou moins brutalement en produisant un rebond qui génère une onde de choc se propageant à une vitesse de l'ordre du dixième de celle de la lumière. Lorsqu'elle atteint un rayon de 100 km environ, le milieu redevient transparent aux neutrinos et un bref –  $\sigma_{\text{flash}} \sim (2.3 \pm 0.3) \text{ ms}$  – mais intense ( $\sim 3 \cdot 10^{44} \text{ J}$ ) flash de  $\nu_e$  est émis. Les estimations et les simulations détaillées montrent que le temps moyen  $\Delta t_{\nu_e, \text{rebond}}$  entre l'instant du rebond et le flash est donc donné par :

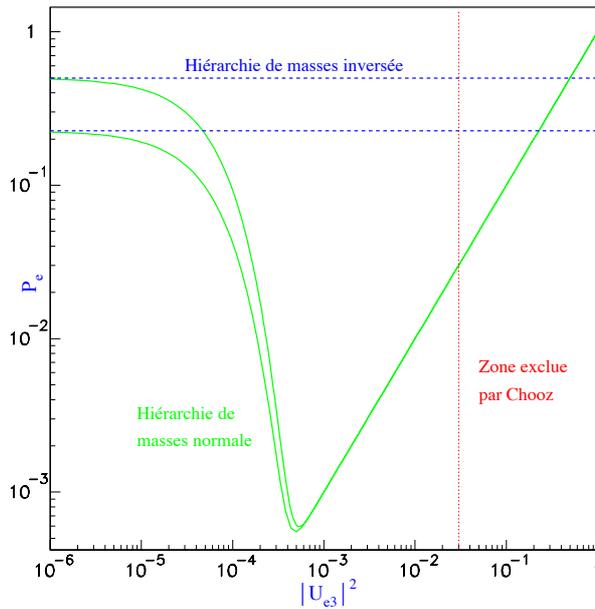
$$\Delta t_{\nu_e, \text{rebond}} = (3.5 \pm 0.5) \text{ ms} \quad (7.24)$$

Après le flash, une émission de paires  $\nu\bar{\nu}$  d'origine thermique dure plusieurs secondes et constitue l'essentiel de la production de neutrinos par la supernova. Les méthodes présentées ici sont basées sur la détection du pic de  $\nu_e$ , directement ou indirectement.

La théorie MSW permet d'estimer la probabilité de survie des neutrinos électron produits lors du flash qui suit le rebond du coeur de la supernova. Les paramètres importants du modèle sont la valeur de l'élément de la matrice de mélange  $|U_{e3}|^2$  et la hiérarchie des masses, "normale" – l'état propre de masse  $\nu_1$  le plus proche du  $\nu_e$  est le plus léger – ou "inversée" –  $M_1$  est la plus élevée. Les calculs sont effectués à partir de l'analyse de la référence [181].

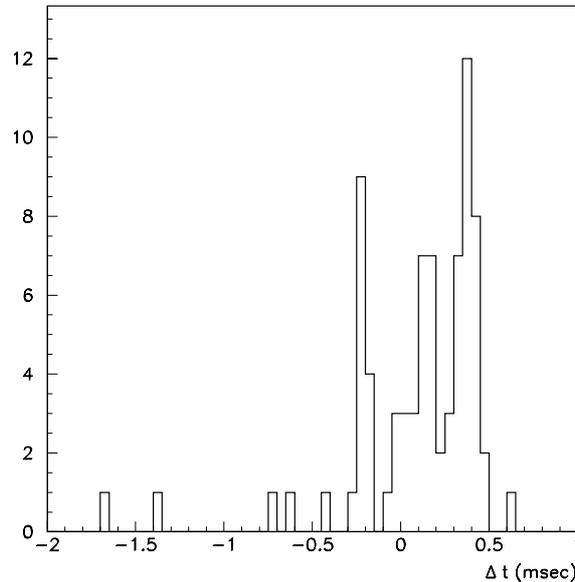
La figure 7.21 présente la probabilité de survie du neutrino électron en fonction de  $|U_{e3}|^2$  pour les deux scénarios de hiérarchie de masses, et pour deux grandes valeurs de l'angle de mélange entre les  $\nu_e$  et les  $\nu_\mu$  (favorisées par l'étude des oscillations des neutrinos solaires) :  $\sin^2(2\theta_\odot) = 1.0$  ou 0.7. Pour  $|U_{e3}|^2 \geq 10^{-5}$  la probabilité diminue rapidement et devient négligeable jusqu'à la limite de la zone exclue par l'expérience Chooz [182].

En pratique, deux cas extrêmes sont à considérer : dans le premier, les neutrinos électrons survivent à la traversée du coeur de l'étoile et oscillent ensuite dans le vide jusqu'à la Terre. Comme la longueur caractéristique de l'oscillation est très faible devant la distance de la source, en moyenne 50% des  $\nu_e$  arrivent effectivement jusqu'au détecteur. Le second cas correspond à une disparition complète des neutrinos électron.



**Figure 7.21:** Probabilité de survie du neutrino électron en fonction de l'élément de matrice  $|U_{e3}|^2$  pour deux grandes valeurs de l'angle de mélange entre le  $\nu_e$  et le  $\nu_\mu$  et le cas des hiérarchies de masses normale et inversée.

### Emission du signal gravitationnel



**Figure 7.22:** Différence temporelle entre le maximum de l'onde gravitationnelle émise et l'instant du rebond du coeur de la supernova pour les signaux de la bibliothèque de Zwerger-Müller. En moyenne,  $\Delta t_{\text{OG, rebond}} = (0.1 \pm 0.4)$  ms.

L'émission gravitationnelle est bien entendu fortement corrélée avec les différentes phases de l'explosion de la supernova; en particulier, on s'attend à ce que l'amplitude maximale du signal soit

proche de l'instant du rebond ce que confirme l'étude des signaux de Zwerger Müller – voir figure 7.22. On a

$$\Delta t_{\text{OG, rebond}} = (0.1 \pm 0.4) \text{ ms} \quad (7.25)$$

à comparer avec la durée totale de l'explosion (effondrement + phase de rebond) qui est de l'ordre de la dizaine de millisecondes. Le signal gravitationnel fournit donc un excellent chronomètre pour synchroniser les différentes manifestations liées à la dynamique de la supernova.

### 7.5.3 Méthodes de détection

#### Détection interférométrique de l'onde gravitationnelle

La détection du signal gravitationnel s'effectue par exemple avec l'une des méthodes présentées au chapitre 5 ; le point important est d'estimer l'erreur faite sur le temps d'arrivée de l'onde gravitationnelle. Pour cela, on peut utiliser la formule (7.14). En prenant une largeur typique du signal de l'ordre de 1 ms et un rapport S/B de 10 (typique d'un signal de Zwerger-Müller à 10 kpc), on obtient une incertitude de 0.15 ms sur l'instant de détection.

#### Détection des neutrinos

SuperKamiokande et SNO [183] sont les deux détecteurs Cherenkov les plus sensibles<sup>5</sup>. SuperK détecte tous les types de neutrinos par diffusion élastique :

$$\nu_l e^- \rightarrow \nu_l e^- \quad (7.26)$$

et est sensible par des processus de courant chargé du type :

$$\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n \quad (7.27)$$

aux neutrinos produits thermiquement.

Le volume du détecteur SNO est nettement plus réduit que celui de SuperK mais il utilise de l'eau lourde ce qui permet de détecter les neutrinos et antineutrinos électrons par un processus de courant chargé sur les deutérons (noyaux de deutérium) :

$$\nu_e d \rightarrow e^- p p \quad (7.28)$$

$$\bar{\nu}_e d \rightarrow e^+ n n \quad (7.29)$$

La section efficace de la réaction (7.28) étant plus importante que celle de la diffusion élastique (7.26), les taux d'événements attendus sont similaires entre les deux détecteurs dans le cas où le flash de  $\nu_e$  émis par la supernova a été préservé : 15 pour SuperK et 13 pour SNO pour une source à  $L = 10$  kpc et une probabilité de survie des neutrinos électron égale à un.

Le deutérium permet également à SNO de détecter tous les types de neutrinos à l'aide du processus de courant neutre

$$\nu_l d \rightarrow \nu_l p n \quad (7.30)$$

Toutes ces réactions ont des temps de réponse de l'ordre de la dizaine de nanosecondes (donc complètement négligeables ici) à l'exception de la dernière qui dépend du temps de diffusion du neutron jusqu'à sa capture et la détection du photon correspondant, distribué exponentiellement avec une constante de temps de l'ordre de 4 ms (qui peut être mesurée *in situ*).

---

<sup>5</sup>SuperK est actuellement hors service pour un temps indéterminé à cause d'un accident qui a détruit la plus grande partie de ses photomultiplicateurs.

### Délai temporel entre les neutrinos et l'onde gravitationnelle

Pour obtenir le délai temporel entre le flash de  $\nu$  et le pic du signal gravitationnel, il reste à calculer le retard  $\Delta t_{\text{propa}}$  pris par les neutrinos lors de la propagation entre la source et la Terre, distantes de  $L$ .

$$\Delta t_{\text{propa}} = L \left( \frac{1}{v_\nu} - \frac{1}{c} \right) \quad (7.31)$$

A partir des deux relations

$$\begin{cases} E_\mu^2 = p_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4 \\ \frac{v_\nu}{c} = \frac{p_\nu c}{E_\nu} \end{cases}$$

et d'un développement au premier ordre en  $m_\nu c^2 / E_\nu \ll 1$ , on obtient  $\Delta t_{\text{propa}}$  en fonction de la masse du neutrino  $m_\nu$  et de son énergie  $E_\nu$ .

$$\Delta t_{\text{propa}} = \frac{L}{2c} \left( \frac{m_\nu c^2}{E_\nu} \right)^2 \quad (7.32)$$

$$\simeq 5.15 \text{ ms} \left( \frac{L}{10 \text{ kpc}} \right) \left( \frac{m_\nu c^2}{1 \text{ eV}} \right)^2 \left( \frac{10 \text{ MeV}}{E_\nu} \right)^2 \quad (7.33)$$

#### 7.5.4 Résultats sur la masse absolue des neutrinos

Expérimentalement, la quantité  $\Delta t_{\text{propa}}$  est obtenue à partir de la relation

$$\Delta t_{\text{propa}} = \underbrace{\Delta t_{\nu_e, \text{OG}}}_{\text{observé}} + \Delta t_{\nu_e, \text{rebond}} - \Delta t_{\text{OG}, \text{rebond}} \quad (7.34)$$

On suppose la distance  $L$  de la source connue ainsi que sa position dans le ciel (par exemple par l'observation de la contrepartie optique de la supernova) ce qui permet d'éliminer les délais de propagation dus aux différents emplacements géographiques des détecteurs. D'après les résultats présentés aux paragraphes 7.5.2 et 7.5.3,  $\Delta t_{\text{propa}}$  présente une contribution "déterministe" de l'ordre de 3.4 ms (liée au retard physique de l'émission de neutrinos par rapport au pic de l'émission d'ondes gravitationnelles), associée à une erreur systématique de l'ordre de 0.65 ms et à une erreur statistique liée à la détermination du pic du flash de neutrinos ( $\propto \sigma_{\text{flash}} / \sqrt{N_\nu}$  où  $N_\nu$  est le nombre de neutrinos détectés).

Quatre méthodes peuvent être envisagées selon la réaction utilisée pour détecter les neutrinos et le type de ces derniers (électron ou autre) ; elles sont recensées dans la table 7.10. Pour chacune d'elles, la forme de la distribution de neutrinos dans le plan  $(E_\nu, t_\nu)$  – où  $t_\nu$  est le décalage obtenu après soustraction du retard estimé correspondant à une masse du neutrino nulle – est ajustée par la méthode du maximum de vraisemblance sur le modèle (7.32). Contrairement aux autres, la méthode **3** n'est pas basée sur le flash de  $\nu_e$  mais sur la montée du signal thermique mesuré par les  $\bar{\nu}_e$ .

Méthode	Type de neutrino cherché	Détecteur	réaction
<b>1</b>	$\nu_e$	SNO	(7.28)
<b>2</b>	$\nu_e$	SuperK	(7.26)
<b>3</b>	$\bar{\nu}_e$	SuperK	(7.27)
<b>4</b>	$\nu_\mu, \nu_\tau$	SNO	(7.30)

**Tableau 7.10:** Méthodes utilisées dans les détecteurs de neutrinos pour estimer leurs masses

Si la statistique est suffisante, la méthode **1** peut à elle seule estimer la masse des neutrinos (à l'aide des événements de faible énergie) et le temps d'arrivée du flash (événements à haute énergie). Néanmoins, comme le nombre de  $\nu$  interagissant avec le détecteur varie en  $1/L^2$ , l'information

donnée par la coïncidence avec un interféromètre prend de plus en plus d'importance à mesure que  $L$  augmente – en effet, une contrainte supplémentaire est mise sur l'instant d'occurrence du flash en imposant qu'il soit compatible avec le temps d'arrivée de l'onde gravitationnelle. Ainsi, les résultats de cette méthode sont essentiellement indépendants de la distance de la source, jusqu'au moment où la statistique est trop fortement dégradée; on prend  $L = 13$  kpc comme limite (cf. table 7.11).

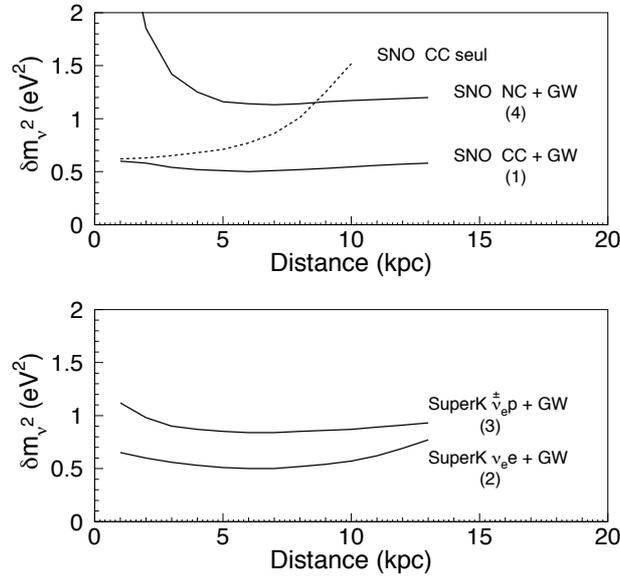
Distance $L$ (kpc)	13	15	17
Probabilité d'avoir au moins 3 événements (en %)	73	55	22

**Tableau 7.11:** Probabilité d'avoir au moins 3 événements – nombre minimal demandé pour l'ajustement – dans SNO en fonction de la distance  $L$  de la source. Pour  $L = 13$  kpc, la probabilité est encore de 3/4 environ mais elle se dégrade rapidement. Ainsi, au-delà de cette limite, l'efficacité de la méthode diminue beaucoup.

La méthode **2** est un peu moins bonne car l'information sur l'énergie du neutrino est dégradée par rapport au cas **1**. Néanmoins, le temps d'arrivée des neutrinos est préservé ce qui permet d'ajuster convenablement le modèle.

La méthode **3** est intéressante car le nombre d'événements détectés est essentiellement indépendant du mécanisme d'oscillations et qu'il est beaucoup plus élevé que dans les cas **1** et **2** car la production thermique de  $\bar{\nu}_e$  est plus importante. En particulier, cette procédure est efficace jusqu'à une centaine de kpc en utilisant SuperK et c'est donc la sensibilité des interféromètres de première génération (*grosso modo* limitée à la Voie Lactée) qui est limitante. Néanmoins, ses résultats sont moins bons que les précédents car l'information sur le pic de  $\nu_e$  n'est pas directe.

Enfin, la méthode **4** doit être utilisée à la place de **1** et **2** si le flash de  $\nu_e$  a été complètement transformé en  $\nu_\mu$  ou  $\nu_\tau$ . Sa sensibilité est nettement moins bonne: la section efficace d'interaction est plus faible, l'information sur l'énergie du neutrino est perdue et une incertitude sur les temps d'arrivée des  $\nu$  liée au temps de capture du neutron produit apparaît. Dans ce cas là, il est clair que l'information donnée par le détecteur interférométrique est cruciale.



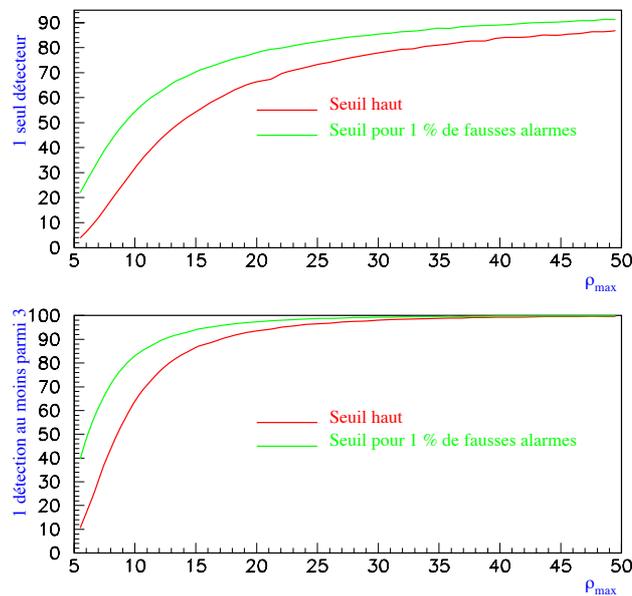
**Figure 7.23:** Sensibilité estimée sur  $\delta m_\nu^2$  pour les quatre méthodes testées; on peut voir que les résultats sont essentiellement indépendants de la distance jusqu'à la limite des simulations fixée à 13 kpc. Les méthodes **1** et **2** correspondent au cas où les neutrinos électron sont conservés tandis que **4** considère celui où tous les  $\nu_e$  ont disparu. Quant à la procédure **3**, elle fonctionne de manière identique dans les deux scénarios.

La figure 7.23 regroupe tous ces résultats. La sensibilité en  $\delta m_\nu^2$  est essentiellement indépen-

dante de la distance de la source  $L$  et est comprise entre  $0.5$  et  $1.5 \text{ eV}^2/c^4$  selon les cas. Comme ces méthodes sont indépendantes, on peut les combiner lorsque la situation le permet. Ainsi, lorsque le  $\nu_e$  est conservé, l'utilisation des quatre méthodes aboutit à  $\delta m_\nu^2 \sim 0.35 \text{ eV}^2/c^4$  tandis que dans l'autre scénario, seules les procédures **3** et **4** sont à considérer ; la valeur obtenue est alors de  $0.69 \text{ eV}^2/c^2$ .

Si les masses des neutrinos sont dégénérées et de l'ordre d' $1 \text{ eV}/c^2$ , les méthodes présentées ici pourront déterminer leur valeur commune puisque les données sur les oscillations montrent que les masses sont séparées de quelques  $\text{meV}/c^2$  au plus. Par contre, si elles se situent à un niveau beaucoup plus bas, seule une limite supérieure pourra être mise : respectivement  $0.75$  et  $1.1 \text{ eV}/c^2$  (à 95% de confiance) dans les deux scénarios possibles permis par les résonances MSW pour le  $\nu_e$ . Ces valeurs amélioreraient néanmoins les limites actuelles sur la masse du neutrino électron.

### 7.5.5 Amélioration de l'efficacité de détection interférométrique



**Figure 7.24:** Amélioration de l'efficacité de détection dans un seul interféromètre en diminuant le seuil lorsque l'instant d'arrivée du signal potentiel est connu par ailleurs. En haut : cas d'un seul interféromètre ; en bas, les trois détecteurs du réseau Virgo-LIGO placés en "OU" (au moins une détection parmi trois).

Si l'instant d'arrivée et la position d'une source potentielle d'ondes gravitationnelles sont connus *a priori* – par exemple à la suite d'une alerte dans un ou plusieurs détecteurs de neutrinos –, on peut diminuer les seuils de déclenchement de manière significative, jusqu'à 1%, correspondant à un niveau de confiance de 99% pour un vrai signal. La figure 7.24 montre le gain correspondant en efficacité de détection (par rapport au seuil considéré dans le reste du chapitre  $\eta = 4.89$ ) en fonction du rapport S/B optimal pour deux configurations particulières : un détecteur unique et le réseau Virgo-LIGO en "OU" (au moins 1 détection sur 3). Dans les deux cas, les seuils de déclenchements des interféromètres ont été estimés par simulations Monte-Carlo de manière à ce que le taux de fausses alarmes soit de 1% pour la stratégie considérée : ainsi,  $\eta$  est un peu plus faible lorsqu'un seul instrument est utilisé que quand trois antennes sont regroupées ensemble.

L'amélioration par rapport à la situation standard est assez significative, surtout dans la zone des bas rapports S/B  $\rho_{\max}$  – en effet, un autre avantage apporté par la connaissance de l'instant d'arrivée de l'onde gravitationnelle est de pouvoir restreindre la taille de la fenêtre d'analyse ; plus le nombre de sorties du filtre est faible, plus son seuil peut être baissé à taux de fausses alarmes constant. Pour le cas de l'interféromètre seul, on a par exemple une efficacité de détection de 22% au lieu de 4% pour  $\rho_{\max} = 5$ , 56% au lieu de 34% à  $\rho_{\max} = 10$  et la barre des 70% est dépassée

pour  $\rho_{\max} \sim 15$ . Le gain est encore plus important dans le cas de la stratégie en “OU” entre les trois antennes : 40% d’efficacité au lieu de 11% pour  $\rho_{\max} = 5$ , et plus de 90% pour les rapports S/B supérieurs à 12. Aussi, bien que le taux de fausses alarmes soit de manière générale une fonction très rapidement variable du seuil de déclenchement, la double connaissance de la direction de la source et de l’instant d’arrivée des signaux dans les détecteurs permet d’obtenir des probabilités de détection extrêmement importantes à 99% de confiance.

## 7.6 Test de la compatibilité des données des détecteurs si la direction potentielle de la source est connue

### 7.6.1 Reconstruction et analyse cohérente

Le but principal de l’analyse cohérente qui suit la détection en coïncidence d’une onde gravitationnelle est d’apporter des informations physiques sur la source à l’origine de l’émission. Pour cela, la première étape est la reconstruction des deux polarisations  $h_+(t)$  et  $h_\times(t)$  qui sont ensuite comparées avec différents modèles dont les paramètres sont ajustés au mieux. La connaissance de ces derniers permet finalement d’obtenir les renseignements recherchés : par exemple la masse des deux corps dans le cas de la phase spirale de la coalescence d’un système binaire ou bien  $a_{\text{BH}}$  et  $M_{\text{BH}}$  pour les modes propres d’oscillation d’un trou noir.

L’algorithme de reconstruction est basé sur l’hypothèse que la détection du signal a eu lieu dans  $P \geq 2$  interféromètres et que la direction de la source est connue avec une bonne précision (soit par triangulation comme indiqué au paragraphe 7.2.3, soit par exemple grâce à une coïncidence avec un détecteur de neutrinos, soit surtout par la détection d’une contrepartie optique). Chaque sortie  $s^{(i)}(t)$  peut se décomposer sous la forme

$$s^{(i)}(t) = \underbrace{n^{(i)}(t)}_{\text{bruit}} + \underbrace{F_+^{(i)} h_+(t) + F_\times^{(i)} h_\times(t)}_{h^{(i)}(t): \text{interaction avec le détecteur}} \quad (7.35)$$

où les fonctions d’antenne  $F_+$  et  $F_\times$  sont spécifiques à chaque détecteur – cf. appendice D.

En fait, même dans le cas où la position de la source est parfaitement déterminée dans le ciel, ces deux facteurs ne sont pas connus exactement pour chaque détecteur car leur expression fait intervenir l’angle de polarisation  $\psi$  inconnu (associé à la convention utilisée pour définir  $h_+$  et  $h_\times$ ). Il faut procéder de manière un peu différente et commencer par isoler la partie purement géométrique des fonctions d’antenne, entièrement contenue dans les fonctions  $a^{(i)}$  et  $b^{(i)}$ . En inversant l’équation (D.13), on peut réécrire la partie de la relation (7.35) associée au signal gravitationnel de la manière suivante :

$$h^{(i)}(t) = a^{(i)} h_a(t) + b^{(i)} h_b(t) \quad (7.36)$$

$$\text{avec } \begin{pmatrix} h_a(t) \\ h_b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & -\sin 2\psi \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_+(t) \\ h_\times(t) \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

Seules les quantités  $h_a(t)$  et  $h_b(t)$  peuvent être reconstruites. Une fois celles-ci obtenues, leur comparaison avec les formes analytiques attendues pour  $h_+(t)$  et  $h_\times(t)$  (lorsqu’elles existent) permet éventuellement de déterminer  $\psi$  en utilisant par exemple la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

La manière la plus simple d’obtenir les polarisations estimées  $h_a^{\text{rec}}(t)$  et  $h_b^{\text{rec}}(t)$  consiste à minimiser le  $\chi^2$  défini à l’instant  $t$  par

$$\chi^2(h_a^{\text{rec}}, h_b^{\text{rec}}) = \sum_{1 \leq i \leq P} \left( \frac{s^{(i)}(t) - a^{(i)} h_a^{\text{rec}} - b^{(i)} h_b^{\text{rec}}}{\sigma^{(i)}} \right)^2 \quad (7.38)$$

où  $\sigma^{(i)}$  représente le niveau de bruit dans le détecteur  $D^{(i)}$ . En écrivant cette équation, on suppose que les délais temporels entre les interféromètres ont été pris en compte et incorporés dans les différentes séries de données de manière à synchroniser les interactions entre l’onde gravitationnelle supposée et les instruments.

Pour présenter les résultats du calcul de manière plus simple, on introduit les notations “vectorielles” classiques :

- $\alpha^{(i)} = \frac{a^{(i)}}{\sigma^{(i)}}; \beta^{(i)} = \frac{b^{(i)}}{\sigma^{(i)}}; \nu^{(i)} = \frac{n^{(i)}}{\sigma^{(i)}};$
- $\langle u|v \rangle = \sum_i u^{(i)} \times v^{(i)}; \|u\| = \sqrt{\langle u|u \rangle}.$

Finalement, les grandeurs reconstruites coïncident avec les vraies valeurs à un terme de bruit près :

$$\begin{cases} h_a^{\text{rec}} = h_a + n_a \\ h_b^{\text{rec}} = h_b + n_b \end{cases} \quad (7.39)$$

Les expressions de  $n_a$  et  $n_b$  sont données par les deux relations

$$n_a = \frac{\langle (\|\beta\|^2 \alpha - \langle \alpha|\beta \rangle \beta) | \nu \rangle}{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - \langle \alpha|\beta \rangle^2} \quad (7.40)$$

$$n_b = \frac{\langle (-\langle \alpha|\beta \rangle \alpha + \|\alpha\|^2 \beta) | \nu \rangle}{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - \langle \alpha|\beta \rangle^2} \quad (7.41)$$

Sous l'hypothèse que les détecteurs ont des bruits blancs et décorrés,  $n_a$  et  $n_b$  sont deux variables aléatoires gaussiennes, de moyennes nulles et d'écart-type respectifs

$$\Sigma_a = \frac{\|\beta\|}{\sqrt{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - \langle \alpha|\beta \rangle^2}} \quad (7.42)$$

$$\Sigma_b = \frac{\|\alpha\|}{\sqrt{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - \langle \alpha|\beta \rangle^2}} \quad (7.43)$$

Elles ne sont plus indépendantes mais ont un coefficient de corrélation donné par  $C_{ab} = -\frac{\langle \alpha|\beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$ .

On peut noter que l'analyse présentée ici aboutit dans les équations (7.39), (7.40) et (7.41) aux mêmes<sup>6</sup> conclusions que [168] mais de manière plus rapide et plus élégante et avec un formalisme qui s'étend à un nombre quelconque de détecteurs alors que la référence citée précédemment étudiait seulement le cas  $P = 3$ .

## 7.6.2 Utilisation d'un test de $\chi^2$ pour rejeter des échantillons de bruit contenant des transitoires

### Motivation et limite du test

La variable de  $\chi^2$  définie à l'équation (7.38) et calculée avec les valeurs des deux polarisations reconstruites  $h_a^{\text{rec}}$  et  $h_b^{\text{rec}}$  a  $P-2$  degrés de liberté. De plus, si l'on suppose comme souvent dans cette thèse que les bruits des détecteurs sont blancs, les sorties successives du  $\chi^2$  sont statistiquement indépendantes. L'évolution temporelle de cette quantité permet d'estimer la validité de l'hypothèse faite sur la position de la source dans le ciel. Un "grand"  $\chi^2$  sera en particulier le signe que le modèle n'est pas vérifié ; au contraire, une faible valeur ne sera pas significative. En l'absence de signal gravitationnel et pour des périodes temporelles où les bruits des détecteurs sont stationnaires, le test donnera de bons résultats pour toutes les directions possibles du ciel et des polarisations reconstruites compatibles avec zéro.

Seul le calcul des rapports S/B associés aux quantités  $h_a^{\text{rec}}$  et  $h_b^{\text{rec}}$  (en utilisant par exemple les mêmes algorithmes que ceux qui ont déclenché au niveau des détecteurs individuels) peut prouver la présence réelle d'un signal. Son incorporation au sein de la procédure d'analyse cohérente va bien au-delà du test simple présenté ici et ne sera donc pas considérée ici. Néanmoins, le paragraphe suivant 7.6.3 donnera quelques résultats préliminaires sur la manière dont les rapports S/B évoluent avec la procédure de reconstruction.

---

<sup>6</sup>Une fois les différences de notation prises en compte, il est facile de vérifier que les résultats coïncident.

**Présentation du test**

Comme tous les signaux recherchés ont une durée non nulle, un test basé sur les valeurs du  $\chi^2$  n'a d'intérêt que s'il concerne un ensemble de données consécutives d'une durée similaire à l'échelle de temps correspondant aux *bursts* recherchés. Pour mettre en place la méthode, on commence donc par choisir une taille de fenêtre d'analyse  $N$  et on calcule à chaque instant  $t_0$  la quantité

$$K_N(t_0) = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq i < N} \chi^2 \left( t_0 + \frac{i}{f_s} \right) \quad (7.44)$$

où  $f_s$  est la fréquence d'échantillonnage, 20 kHz pour Virgo.  $K_N$  est une variable aléatoire de moyenne  $\mu_N = P - 2$  (nombre de degrés de liberté du  $\chi^2$ ) et d'écart-type

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{2(P-2)}{N}} \quad (7.45)$$

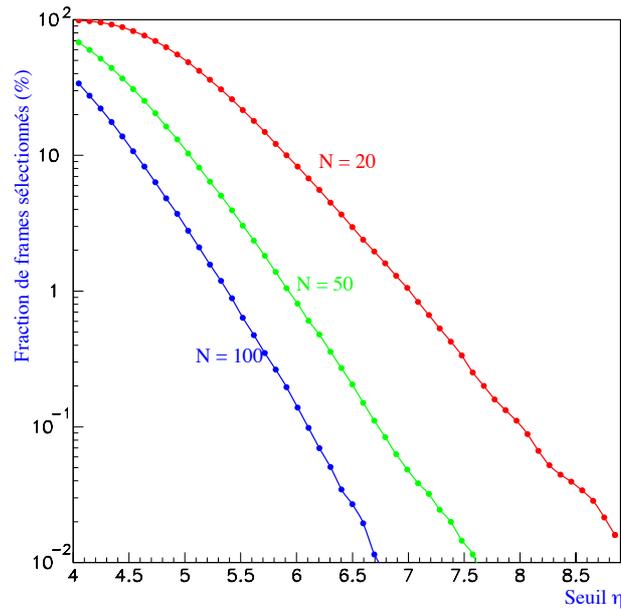
Pour simplifier l'étude, on se limite dans la suite à un réseau de  $P = 3$  détecteurs : Virgo et les deux interféromètres LIGO.

Comme pour les autres méthodes de filtrage détaillées dans les chapitres précédents, on construit à partir de  $K_N$  une variable de moyenne nulle et de RMS unité :

$$\tilde{K}_N = \frac{K_N - \mu_N}{\sigma_N} \quad (7.46)$$

et on enregistre un déclenchement lorsque  $\tilde{K}_N$  excède un seuil  $\eta$  associé au taux de fausses alarmes  $\tau$  mesuré en présence de bruit seul et qu'on exprimera ici en terme de fraction de *frames* – de longueur d'une seconde – sélectionnés.

De manière similaire aux algorithmes généraux, les sorties consécutives de ce filtre sont très corrélées et la relation entre  $\eta$  et  $\tau$  ne peut être obtenue qu'à l'aide de simulations Monte-Carlo dans lesquelles les sorties des détecteurs ne contiennent que des réalisations de bruits blancs stationnaires. Les directions de la source potentielle sont tirées aléatoirement de manière uniforme sur la sphère céleste.



**Figure 7.25:** Fraction de *frames* sélectionnés par le test sur le  $\chi^2$  de la procédure de reconstruction en fonction du seuil  $\eta$  et de la taille de la fenêtre d'analyse  $N$ .

La figure 7.25 montre la fraction de *frames* sélectionnés en fonction du niveau de seuil  $\eta$  pour différentes largeurs de la fenêtre d'analyse. Comme attendu, le taux de déclenchement diminue à mesure que la longueur de corrélation entre les sorties (fonction croissante de  $N$ ) augmente.

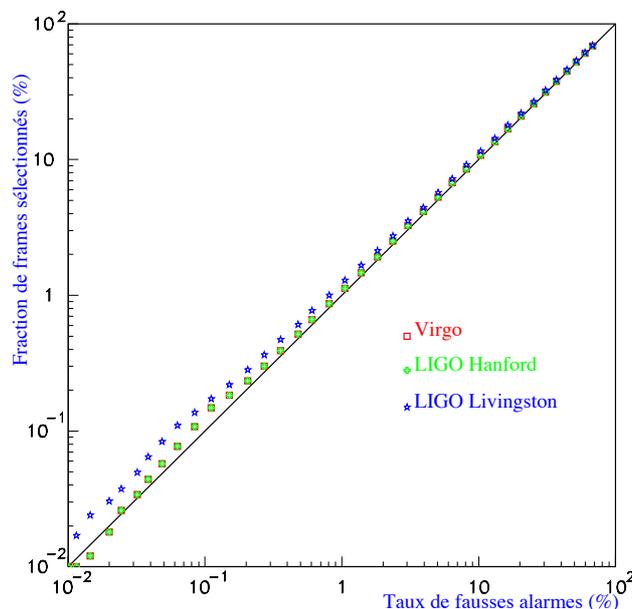
Cet algorithme n'est pas destiné à être utilisé en temps réel puisqu'il suppose connue la direction de la source. Il servira plutôt à re-analyser certains événements particulièrement intéressants sélectionnés par des méthodes de filtrage spécifiques. Aussi, on peut se contenter d'un taux de fausses alarmes de l'ordre du pourcent pour travailler à 99% de confiance.

### Application à la recherche d'événements de bruit non stationnaires

Le but de ce test est de vérifier la compatibilité des sorties des détecteurs avec l'hypothèse de la présence d'une source dans une direction particulière du ciel. En particulier, on souhaite qu'il rejette des périodes où les données fournies par l'un des instruments ont été "polluées" par un événement de bruit non stationnaire.

Comme modèle de bruit transitoire, on prend à nouveau un signal en forme de pic gaussien de largeur typique 1 ms. Là encore, les performances de l'algorithme dépendent de l'adéquation entre cette durée et celle de la fenêtre d'analyse. On fera donc ici le choix de  $N = 50$  (soit 2.5 ms pour  $f_s = 20$  kHz), bien adapté au bruit transitoire recherché sans pour autant être optimal. De manière identique au cas d'une onde gravitationnelle, l'amplitude du sursaut de bruit est entièrement caractérisée par son rapport S/B  $\rho$  – présent cependant ici dans un seul des trois détecteurs dont les bruits sont considérés indépendants.

La première chose que l'on peut étudier est la réponse de la méthode aux faibles valeurs de  $\rho$ , typiquement de l'ordre de 5. Aussi, la figure 7.26 montre sous forme de ROC l'efficacité de détection d'un tel *burst* de bruit (apparaissant dans l'un des trois interféromètres) en fonction du taux de déclenchement. L'intérêt d'utiliser un graphique ROC apparaît immédiatement ici : les pourcentages de détection en présence ou en l'absence de signal sont très voisins. La méthode ne déclenche pas parce qu'elle voit le bruit transitoire mais simplement parce qu'elle "doit" statistiquement le faire. Le test n'est donc pas efficace pour  $\rho \sim 5$ . A faible taux de fausses alarmes, on peut noter que le taux de déclenchement est légèrement en excès (en particulier pour LIGO Livingston) mais cela n'a aucun intérêt en pratique puisque ce dernier est très faible : au plus 1%.



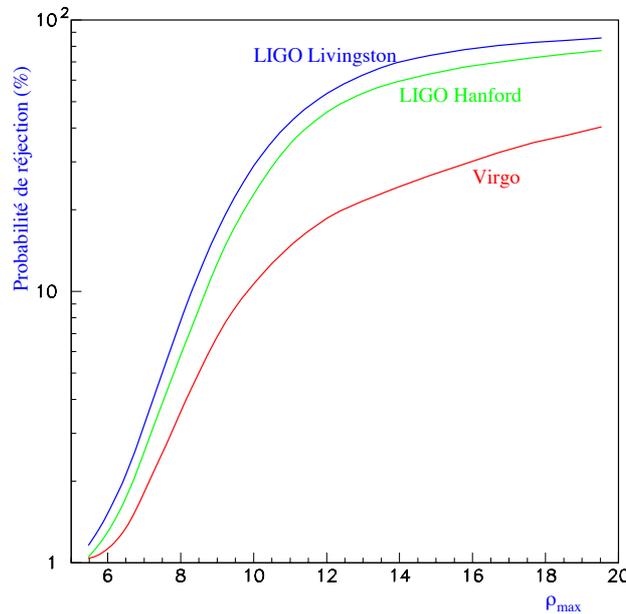
**Figure 7.26:** Diagramme ROC présentant l'efficacité de détection d'un *burst* de bruit localisé dans l'un des trois détecteurs du réseau en fonction du taux de faux déclenchements pour un rapport S/B de 5.

Ensuite on peut s'intéresser à l'évolution de la probabilité de réjection en fonction du rapport S/B du *burst* de bruit. Celle-ci est présentée pour le cas de chaque détecteur dans la figure 7.27. Sur

## 7.6. TEST DE LA COMPATIBILITÉ DES DONNÉES DES DÉTECTEURS SI LA DIRECTION POTENTIELLE DE LA SOURCE EST CONNUE

ce graphe, on voit réapparaître une caractéristique du réseau Virgo-LIGO déjà mise en évidence dans les paragraphes précédents : les deux interféromètres américains ont des orientations très proches alors que Virgo leur est plutôt complémentaire. Ainsi, l'événement de bruit transitoire est bien mieux rejeté s'il arrive à Hanford ou Livingston puisqu'il devrait apparaître de manière similaire dans l'autre antenne de la paire s'il s'agissait vraiment d'une onde gravitationnelle.

Au contraire, il est beaucoup plus difficile d'arriver à la même conclusion si le signal est dans Virgo seul car la direction supposée de la source a une probabilité significative de correspondre à une zone du ciel où les deux autres instruments sont presque "aveugles". Pour  $\rho = 10$ , le taux de réjection est de 11% pour Virgo, 24% pour LIGO Hanford et 31% pour LIGO Livingston, ce qui reste assez peu. Par contre, pour  $\rho \geq 15$ , près de 70% des échantillons sont rejetés dans les deux interféromètres LIGO alors que la fraction n'est que de 25% environ dans Virgo. Finalement, pour  $\rho = 20$ , l'efficacité est deux fois meilleure pour les détecteurs LIGO que pour Virgo – 80% contre 40%.

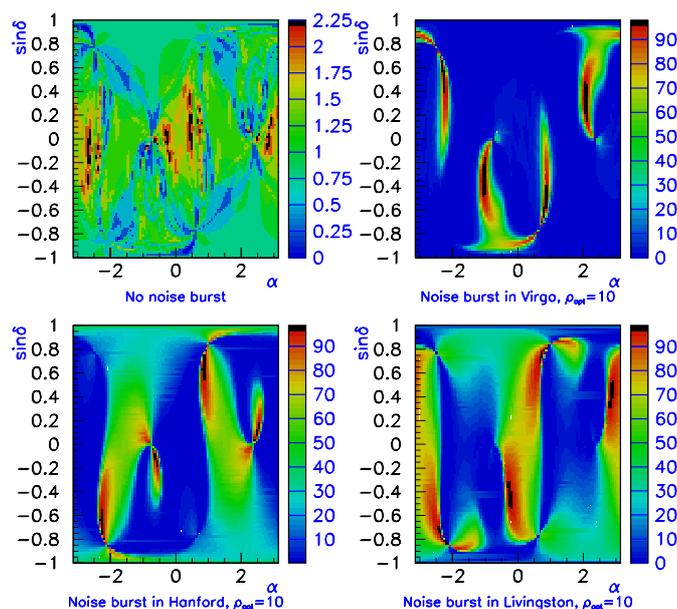


**Figure 7.27:** Efficacité de détection du *burst* de bruit selon le détecteur dans lequel il survient en fonction de son rapport S/B.

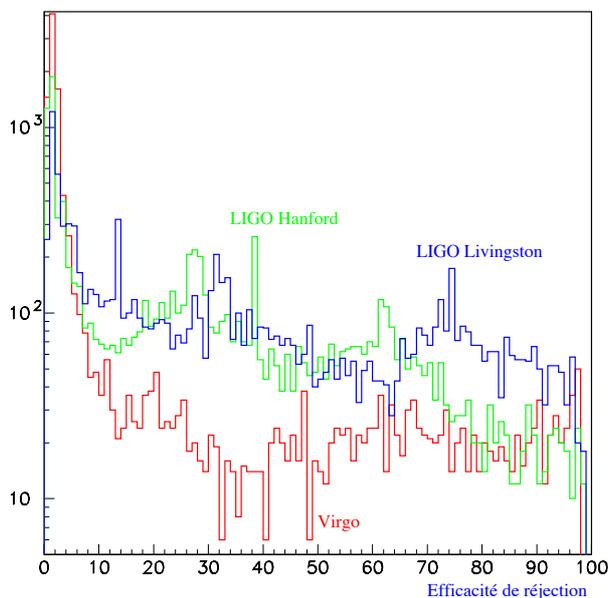
Le taux de rejet d'un événement transitoire de bruit apparu dans un détecteur dépend donc de l'hypothèse faite sur la direction de la source dans le ciel. Dans certaines régions le diagnostic sera presque certain tandis qu'ailleurs il sera nettement plus aléatoire. Pour mieux le voir, la figure 7.28 présente les cartes de l'efficacité de réjection d'un *burst* de bruit de rapport S/B  $\rho = 10$  selon l'interféromètre dans lequel il survient. Pour comparaison, la première carte indique la répartition des fausses alarmes en l'absence d'événements non-stationnaires de bruit ou de signal.

Ces cartes sont bien entendues non uniformes mais sont plus difficiles à interpréter que les diagrammes d'antenne. On peut néanmoins remarquer – cf. figure 7.9 – que le taux de réjection est très faible dans la direction où la réponse du détecteur est maximale (il est alors "normal" que le signal soit très fort dans cet instrument et faibles dans les autres) et qu'il est élevé dans des zones du ciel où les fonctions d'antenne moyennées sont du même ordre de grandeur.

Pour faciliter l'examen de ces cartes du ciel, la figure 7.29 montre la manière dont les taux de réjection se distribuent entre 0 et 100%. L'échelle verticale logarithmique écrase un peu les différences mais on peut voir que la majorité du ciel est associée à une efficacité faible pour Virgo tandis que la répartition est plus uniforme pour les deux interféromètres LIGO, celui de Livingston donnant comme attendu les meilleurs résultats.



**Figure 7.28:** Cartes de l'efficacité de réjection d'un événement de bruit transitoire de rapport S/B  $\rho = 10$  selon le détecteur dans lequel il apparaît. La position dans le ciel correspond à celle choisie pour la source lors de la procédure de reconstruction. Pour comparaison, la première carte montre la répartition des fausses alarmes lorsque les bruits sont stationnaires ; dans ce dernier cas, le code couleur est très différent des autres graphes.



**Figure 7.29:** Distribution des efficacités de réjection d'un *burst* de bruit de rapport S/B 10 pour une direction de source donnée dans le ciel. Peu de régions du ciel ont une bonne efficacité pour le cas du détecteur Virgo alors que les distributions sont plus uniformes pour les deux LIGO.

### Comportement en présence de signal

Comme les fonctions d’antenne ne dépendent pas seulement de la position de la source dans le ciel par rapport au détecteur mais aussi de la valeur de l’angle de polarisation  $\psi$ , une fraction des événements comportant un signal gravitationnel réel va être rejetée comme non compatibles par le test. Il convient donc d’estimer ce taux de “mauvaise réjection”, particulièrement pour des signaux de rapport S/B intermédiaire ( $\rho_{\max} \sim 10$ ) : ceux qui sont plus faibles ne seront de toute façon pas vus en coïncidence tandis que ceux dont l’amplitude est plus élevée seront plus facilement détectés dans différents détecteurs. Pour  $\rho_{\max} = 10$ , des simulations effectuées dans les mêmes conditions (taux de sélection de *frame* de l’ordre de 1%) montrent que le taux de réjection d’un événement de type signal est du même ordre que pour le cas bruit seul. Une manière d’améliorer ces résultats serait sans doute de prendre en compte les rapports S/B des deux canaux reconstruits  $h_a$  et  $h_b$ .

### 7.6.3 Reconstruction et gains en rapports S/B

La procédure de reconstruction telle qu’elle a été décrite précédemment permet d’obtenir deux séries de données, l’une contenant  $h_a$  et l’autre  $h_b$ , à partir des sorties des  $P$  détecteurs –  $P = 3$  ici – et une fois la direction de la source connue. La question naturelle que l’on peut se poser est de savoir si cette procédure a apporté un gain en rapport S/B pour le signal. Intuitivement, on répondrait sans doute immédiatement “oui” mais, en pratique, le problème apparaît un peu plus compliqué dans la mesure où l’on passe de  $P$  canaux dans lesquels le signal est plus ou moins présent à deux simplement.

Pour confirmer ou infirmer cette idée, il suffit de filtrer les séries associées aux polarisations reconstruites  $h_a$  et  $h_b$  avec l’algorithme utilisé pour les sorties des différents détecteurs et de comparer les rapports S/B obtenus – en tenant bien compte du fait que les bruits  $n_a$  et  $n_b$  ont des écarts-type  $\Sigma_a$  et  $\Sigma_b$  variables selon la position de la source dans le ciel – cf. équations (7.42) et (7.43).

En parallèle de cette opération, on peut également se souvenir que les bruits  $n_a$  et  $n_b$  ont un coefficient de corrélation  $C_{ab}$  non nul en général alors qu’il serait plus intéressant d’avoir des sorties décorrélées. Cela revient, une fois la matrice de corrélation diagonalisée, à introduire deux nouvelles séries de données définies par :

$$\hat{s} = \frac{\frac{s_a}{\Sigma_a} + \frac{s_b}{\Sigma_b}}{\sqrt{2} (1 + C_{ab})} \quad (7.47)$$

$$\check{s} = \frac{\frac{s_a}{\Sigma_a} - \frac{s_b}{\Sigma_b}}{\sqrt{2} (1 - C_{ab})} \quad (7.48)$$

où  $s_{(a,b)} = h_{(a,b)} + n_{(a,b)}$ .

À la suite de cette transformation linéaire, les bruits correspondants  $\hat{n}$  et  $\check{n}$  ont un écart-type unité. On peut donc étendre la simulation Monte-Carlo en filtrant également les deux canaux  $\hat{s}$  et  $\check{s}$ .

### Détections en “OU”

Pour chaque événement simulé, on dispose donc de sept rapports S/B distincts qui s’ordonnent en trois familles :

- $\rho_{\text{Virgo}}$ ,  $\rho_{\text{Hanford}}$  et  $\rho_{\text{Livingston}}$  qui correspondent aux sorties des trois interféromètres ;
- $\rho_a$  et  $\rho_b$  associés aux deux signaux reconstruits ;
- $\hat{\rho}$  et  $\check{\rho}$  obtenus pour les deux canaux dont les bruits ont été décorrélés.

Dans chacun des cas, on peut estimer les probabilités de détection en “OU” ce qui revient à comparer les rapports S/B maximum – notés respectivement  $\rho_{\text{itfs}}$ ,  $\rho_{\text{recons}}$  et  $\rho_{\text{decorrel}}$  – au seuil de déclenchement  $\eta$ . Les deux principaux résultats de ce calcul sont les suivants : passer de trois détecteurs à deux canaux reconstruits amène en moyenne une perte du rapport S/B maximal alors que  $\rho_{\text{decorrel}} > \rho_{\text{itfs}}$  en général. Décorréliser les bruits permet d’exploiter au mieux les rapports S/B fournis par les interféromètres et d’augmenter leur valeur maximale, indépendamment de la valeur du rapport S/B optimal du signal. L’analyse des données reconstruites “brutes”  $s_a$  et  $s_b$

n’apportant rien en terme de rapport S/B, on se concentre maintenant sur les deux sorties dont les bruits sont décorrélés.

Pour  $\rho_{\max} \gtrsim 10$ ,  $\rho_{\text{decorrel}} > \rho_{\text{itfs}}$  dans plus de 75% des cas et le gain en rapport S/B est en moyenne d’une quinzaine de pourcents. Néanmoins, les efficacités de détection sont du même ordre de grandeur (70% et au-delà) à moins de 5% près : la plupart des événements étant vus, l’amélioration des rapports S/B ne se traduit pas complètement en terme de taux de sélection. Dans cette région, les résultats de l’analyse des sorties des interféromètres et des deux canaux décorrélés sont similaires.

Par contre, pour  $\rho_{\max} \lesssim 10$ , la situation est très différente. Par exemple, pour  $\rho_{\max} = 5$ ,  $\rho_{\text{decorrel}}$  n’est supérieur à  $\rho_{\text{itfs}}$  que six fois sur dix (avec un gain moyen en rapport S/B de 6%) mais l’efficacité de détection est double : 20% au lieu de 10%. Dans la zone des faibles rapports S/B, l’utilisation des canaux décorrélés permet d’augmenter considérablement le niveau de déclenchement !

### Détections en coïncidence

Faire des coïncidences entre les signaux reconstruits ou décorrélés n’a pas tellement de sens physique : les deux polarisations de l’onde gravitationnelle n’ont pas forcément de lien (par exemple  $h_x = 0$  pour un effondrement axisymétrique de supernova) et le bruit de ces canaux dépend de la direction de la source. De plus, la décorrélation des sorties conduit à une sorte de spécialisation de  $\hat{s}$  ou  $\check{s}$  : si  $\hat{\rho} > \rho_{\text{itfs}}$ , on a en général  $\check{\rho} \ll \rho_{\text{itfs}}$  et réciproquement.

#### 7.6.4 Perspectives

Les résultats présentés dans cette partie sont seulement préliminaires : s’ils démontrent l’intérêt de la vérification de la cohérence des sorties des différents détecteurs lors d’une recherche en coïncidence, ils demandent à être complétés. D’une part, en ajustant plus précisément le niveau des seuils (par exemple en considérant des périodes de données plus petites) et d’autre part en groupant les informations sur la qualité de la reconstruction et les rapports S/B des signaux reconstruits : en particulier, pour un événement de bruit transitoire arrivant dans un détecteur donné,  $\rho_{\text{decorrel}}$  et  $\rho_{\text{recons}}$  devraient être plus faibles que  $\rho_{\text{itfs}}$  (par moyennage avec les sorties de bruit stationnaires) alors que le contraire est probable pour le cas d’un signal comme on vient de le voir. Enfin, il serait intéressant de voir comment la méthode s’étend à un plus grand nombre de détecteurs.

## 7.7 Conclusion

Les résultats obtenus à l’aide du modèle de simulation développé pour les détections en réseau sont un peu décevants : l’efficacité de détection dans un interféromètre donné est fortement réduite par les fonctions d’antenne. La situation n’est pas meilleure au niveau des coïncidences entre instruments, du moins si l’on considère simplement un réseau “minimal” de trois antennes : Virgo et les deux détecteurs LIGO. Ces derniers – construits de manière concertée – sont plutôt complémentaires de Virgo, ce qui a comme principale conséquence d’augmenter l’efficacité de détection en “OU” tout en réduisant les coïncidences. 30% des événements à  $\rho_{\max} = 10$  sont détectés dans au moins deux interféromètres sur trois tandis que la probabilité de triple détection n’atteint 50% que pour  $\rho_{\max} = 30$  alors qu’un événement sur deux avec  $\rho_{\max} = 8$  est détecté dans l’un des trois instruments.

Par contre, l’extension du réseau aux six instruments en construction ou prévus permet d’atteindre de meilleurs résultats : pour  $\rho_{\max} = 7$ , l’efficacité en “OU” est déjà de l’ordre de 70% et elle atteint 99% à partir d’un rapport S/B optimal de 12. Pour  $\rho_{\max} \geq 15$ , 95% des signaux sont détectés dans au moins deux interféromètres sur six. Aussi, l’analyse cohérente n’est intéressante que si elle s’applique au réseau le plus étendu possible.

Ces résultats obtenus en supposant une distribution de source uniforme dans le ciel s’étendent presque sans modification au cas des signaux galactiques. Si un nombre suffisant d’interféromètres sont utilisés pour cette recherche, la probabilité de détecter des sources dans la Voie Lactée ayant un rapport S/B optimal de l’ordre de 10 est grande : de l’ordre de  $\sim 80\%$  pour une détection simple et encore 37% pour une coïncidence triple.

Pour ce qui est de la localisation temporelle d’un événement, la situation est satisfaisante : même pour de faibles valeurs de  $\rho_{\max}$ , la précision est inférieure à la milliseconde ce qui per-

mettra d'exploiter d'éventuelles coïncidences avec des détecteurs de neutrinos. Enfin, des tests de cohérence des données sélectionnées associés aux mesures de rapports S/B des canaux reconstruits semblent prometteurs pour vérifier la réalité d'une détection même si ces dernières méthodes doivent être analysées plus en détails.

L'étude des détections en coïncidence et des possibilités qu'elles offrent est actuellement en pleine expansion au sein de la communauté scientifique des ondes gravitationnelles et on peut espérer que ce travail servira de base de départ aux développements futurs.

\* \*

\*

Pour terminer ce chapitre, on peut tenter de rassembler une partie des résultats présentés dans la partie analyse de données de cette thèse pour faire un peu de "science-fiction" avec, comme scénario de base, un événement supernova dans la Galaxie. Typiquement, le signal gravitationnel émis est similaire à ceux contenus dans la bibliothèque de formes d'onde calculées par T. Zwerger et E. Müller et a donc un rapport S/B optimal de l'ordre de 10 à 10 kpc.

On commence par supposer que la supernova ne se termine pas par un trou noir : en parallèle de l'émission d'ondes gravitationnelles, des neutrinos sont produits (d'abord lors du flash de  $\nu_e$  puis thermiquement sous forme de paires  $\nu\bar{\nu}$ ) et une contrepartie optique est éventuellement visible dans les heures/jours qui suivent l'effondrement sous forme d'une courbe caractéristique de variation de luminosité. Parmi tous les canaux considérés, la détection sera la plus simple dans les détecteurs de neutrinos : le modèle d'émission a été testé et validé grâce à l'événement 1987A dans le Grand Nuage de Magellan et les instruments de la génération actuelle appartenant au réseau SNEWS [184] verront ce signal avec une probabilité de 100% et sans fausse alarme (de l'ordre d'une par siècle).

Pour ce qui est des détecteurs d'ondes gravitationnelles, on a vu que des coïncidences seront nécessaires pour valider le signal en le séparant avec certitude des fluctuations de bruit transitoires dans un instrument donné. A cause des pertes en rapport S/B occasionnées par la non-uniformité spatiale des fonctions d'antenne quantifiant l'interaction entre la perturbation gravitationnelle et l'interféromètre, ces antennes ne peuvent pas travailler avec des taux de fausses alarmes aussi faibles que ceux des détecteurs de neutrinos. Et même dans ce cas, la probabilité d'une coïncidence multiple reste faible tant que le rapport S/B optimal émis n'est pas très important. Les interféromètres n'ont donc pas d'intérêt à entrer dans un système d'alerte primaire comme SNEWS.

Une corrélation optique permettra de situer la position de la source dans le ciel sans pour autant donner accès à l'instant d'arrivée du signal puisque la variation de la courbe de luminosité n'est détectable qu'après un délai de l'ordre de la journée. Par contre, une coïncidence avec des neutrinos apportera également cette information et restreindra considérablement la zone de données à étudier. Ainsi, le taux de faux déclenchements admissible pourra être augmenté – jusqu'à environ 1%, valeur suffisante pour confirmer une détection – et l'abaissement des seuils améliorera l'efficacité de la recherche : pour un rapport S/B optimal de l'ordre de 10, la probabilité d'effectuer une détection est de l'ordre de 56% pour un interféromètre seul et atteint 84% pour le réseau Virgo-LIGO en "OU".

Dans le cas d'une supernova avortée ou silencieuse, le coeur s'effondre finalement en trou noir, ce qui interrompt de manière brutale les éventuelles émissions de photons et de neutrinos. Dans les détecteurs interférométriques, on peut espérer détecter les oscillations émises lors du retour à l'équilibre du trou noir, ce qui serait une preuve directe et irréfutable de l'existence du phénomène (et de la validité de sa description théorique), tout comme d'ailleurs la coïncidence de ce type de signal avec l'arrêt du flux de neutrinos. Les rapports S/B attendus – cf. [159] – devraient permettre une détection dans les antennes gravitationnelles au moins pour un événement galactique.



# Conclusion

En l'espace d'un an, le détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles Virgo a considérablement évolué dans différents domaines ; mis bout à bout, ces changements démontrent en grande partie la faisabilité d'un tel instrument et permettent d'envisager avec optimisme le futur de l'expérience. Certains d'entre-eux n'ont pas été mentionnés au cours de cette thèse car ils concernent principalement le génie-civil de l'appareil complet : fin de la construction des bras kilométriques et mise en place de leur alimentation électrique, production du 6ème km de tube (400 modules de 15m!) et mise sous vide réussie d'une longueur presque équivalente à celle d'un bras.

D'autres au contraire ont été détaillés dans les deux chapitres expérimentaux 3 et 4. Pour atteindre sa sensibilité nominale, il est crucial que l'interféromètre soit maintenu à son point de fonctionnement : quatre cavités résonantes (frange noire, recyclage et les deux Fabry-Perot) et tous les miroirs alignés. Or, les spécifications longitudinales et angulaires sont très sévères et en tout cas incompatibles avec les mouvements résiduels basse fréquence des suspensions. Aussi, un contrôle actif est nécessaire pour conserver l'état requis du détecteur. Celui-ci a lieu à deux niveaux : d'abord localement pour chacun des miroirs (dont les oscillations sont amorties dans trois degrés de liberté), puis globalement à l'échelle de l'instrument entier pour positionner ses différents composants les uns par rapport aux autres.

Dans les deux cas les asservissements utilisent des signaux d'erreur, soit vidéo soit optiques à partir desquels des corrections sont calculées puis transmises aux différentes suspensions pour une action sur les miroirs. La partie "intelligente" du contrôle global – i.e. celle qui choisit la stratégie et les algorithmes de rétroaction longitudinaux et angulaires puis qui les met en oeuvre – est assurée par un système homonyme développé au LAL. Tout comme les autres composants de la chaîne de contrôle, il a fait la preuve de son bon fonctionnement en situation réelle puisqu'il a été utilisé lors des acquisitions réussies des résonances longitudinales de l'interféromètre central (CITF), d'abord pour le Michelson simple, puis en configuration nominale avec le recyclage.

La boucle rapide à 10 kHz accomplit ses trois opérations successives – lecture, calcul, écriture – en un temps proche des 70  $\mu$ s, soit bien en deça de la limite fixée à 100  $\mu$ s et les algorithmes implémentés fonctionnent parfaitement, en particulier les filtrages digitaux, bien plus commodes à l'usage que les dispositifs équivalents analogiques. De plus, grâce à un choix conscient fait d'abord lors de la conception initiale du système puis confirmé au cours de son développement – en particulier *software* –, le Contrôle Global a montré une grande capacité d'adaptation et une simplicité d'utilisation, tant au niveau de son pilotage (assuré par le Superviseur) que de la prise en compte de modifications demandées par les opérateurs travaillant sur le détecteur. Ainsi, sa contribution a été au final plus importante que prévue.

Même si le CITF n'est pas un petit Virgo mais plutôt un interféromètre de test, l'acquisition et le maintien de son contrôle ont montré que ces opérations pourront également être réalisées au niveau du détecteur complet : la précision des asservissements longitudinaux est de l'ordre de celle requise dans le futur et la cavité de recyclage contrôlée a une finesse plus grande (et donc une largeur de résonance plus faible) que les cavités Fabry-Perot finales. De plus, l'organisation de *Runs* de prise de données de trois jours consécutifs a permis de vérifier la stabilité des contrôles sur une longue durée. Enfin, l'expérience acquise et les améliorations effectuées par les différents sous-systèmes parties prenantes du *commissioning* du CITF assureront certainement des progrès plus rapides et une avance plus directe lorsqu'il s'agira vraiment de faire fonctionner Virgo.

L'activité de préparation à l'analyse des futures données est plus ancienne que les succès expérimentaux récents du CITF : elle a été initiée au sein du groupe Virgo LAL dès 1997 et j'ai eu le plaisir de travailler sur ce sujet dès l'origine alors que j'étais en stage. Le domaine principal d'étude concerne les signaux dits "impulsionnels", caractérisés par des amplitudes et des durées assez faibles, et dont les formes d'onde ne sont pas en général bien connues : leur calcul est uniquement numérique – la complexité des phénomènes à l'origine de l'émission empêche toute dérivation

analytique – et les résultats dépendent donc des hypothèses et des procédures de simulation.

Pour pallier cette difficulté, de nombreux filtres robustes (mais sous-optimaux) ont été mis au point. Leurs caractéristiques sont décrites au chapitre 5 tandis que leur capacité à détecter des signaux proches de ceux attendus est vérifiée au chapitre suivant. Tous ces algorithmes sont présentés en détail dans cette partie de ma thèse, à l’exception notable de ALF dont l’étude est l’un des deux thèmes principaux de la thèse de T. Pradier citée en référence et qui, convenablement optimisé, donne actuellement les meilleurs résultats sur les signaux issus de la bibliothèque de T. Zwerger et E. Müller.

De cette typologie de méthodes de recherche, il ressort assez nettement – du moins je l’espère – que nous disposons maintenant d’un ensemble varié de techniques efficaces, soit chargées de détecter une caractéristique particulière d’une onde gravitationnelle (par exemple un pic principal ou une oscillation qui va en s’amortissant), soit surveillant l’évolution de quantités statistiques intéressantes associées à la fenêtre courante de données analysées (moyenne, énergie, pente...). Elles sont toutes suffisamment rapides pour pouvoir être utilisées en temps réel afin d’effectuer une première sélection pour ne conserver que les *frames* potentiellement intéressants.

La plupart des mesures de leurs efficacités et de leurs performances sont maintenant terminées ; toutefois, un travail d’unification des résultats est actuellement en cours afin de proposer une comparaison plus simple des différentes méthodes qui soit basée sur des protocoles de test communs et des procédures de simulation identiques. L’essentiel de l’activité du groupe est maintenant orientée vers l’écriture du *software* qui sera utilisé en ligne : réception et lecture des canaux intéressants contenus dans les *frames*, copie des données dans les fenêtres d’analyse des filtres, calcul de leurs sorties et enfin marquage des zones sélectionnées associé à une sauvegarde d’informations importantes : type et caractéristiques de l’algorithme qui a déclenché, valeur du rapport Signal sur Bruit (S/B) maximal, instants où le seuil a été dépassé...

Toute cette mécanique devra être opérationnelle lors des premières prises de données afin que la dernière phase du travail de préparation à l’analyse puisse avoir lieu : l’ajustement des seuils de déclenchement, d’une part entre les calques associés à une même méthode de recherche, d’autre part entre les différents types de filtres. L’objectif est de conserver un taux de sélection de *frames* suffisamment faible – typiquement de l’ordre du pourcent – tout en ayant la meilleure sensibilité de détection possible dans la zone “critique” des faibles rapports S/B. Cette ultime opération ne peut avoir lieu qu’avec les sorties réelles du détecteur dont les caractéristiques statistiques (RMS, gaussianité, densité spectrale...) et la présence éventuelle d’événements transitoires (relaxations mécaniques, bruits électroniques...) différeront forcément des simulations comme des prévisions.

Enfin, le dernier chapitre de cette thèse traite du problème des coïncidences entre interféromètres, nécessaires pour valider un événement en le différenciant d’une instabilité du niveau de bruit dans un instrument particulier. L’originalité de ce travail n’est pas tant dans l’idée de l’utilisation d’une analyse cohérente pour valider une détection – déjà présente depuis longtemps dans la littérature – que dans la mise en place effective d’un cadre de simulation pour tester de manière statistique les possibilités de la stratégie de détection en réseau.

Les résultats obtenus couvrent une large gamme de configurations, allant du détecteur simple à un réseau regroupant les six interféromètres actuellement en construction ou en projet. En particulier, ils montrent que la non-uniformité de la réponse spatiale des antennes gravitationnelles minore la probabilité de détection dans un instrument donnée, et donc *a fortiori* celle de coïncidences. Pour le réseau Virgo-LIGO, la couverture globale du ciel (au moins une détection) est bonne y compris pour des rapports S/B peu importants ; par contre, la stratégie en coïncidence est peu payante car Virgo est complémentaire de la paire LIGO dont les interféromètres sont “alignés”. Le paramètre le plus important apparaît finalement être le nombre de détecteurs dans le réseau qui doit idéalement être supérieur d’une à deux unités à celui des coïncidences souhaitées. Pour le cas d’une supernova, l’extension de l’analyse cohérente aux détecteurs de neutrinos permettrait d’améliorer les contraintes sur leurs masses.

Les résultats expérimentaux déjà obtenus avec le CITF démontrent la faisabilité du contrôle d’un instrument aussi complexe que le détecteur Virgo complet. Dans le même temps, les progrès effectués au niveau de la préparation de l’analyse des données, tant dans la compréhension de la situation réelle (rapports S/B attendus, formes d’onde, possibilités de coïncidences) que dans la mise au point et l’implémentation de méthodes de filtrage efficaces permettent d’envisager le futur de l’expérience avec confiance : Virgo fonctionnera. Cette vision optimiste s’appuie maintenant sur des bases réalistes.

## Annexe A

# Bruit et densité spectrale

### A.1 Définitions et Notations

Un processus aléatoire **gaussien** de **moyenne nulle** – un *bruit* –  $x$  est complètement caractérisé par sa **densité spectrale de puissance** (*DSP*) – *monolatérale* (“*one-sided*” en anglais)  $S_x(f)$  donnée dans l’espace de Fourier. Par convention,  $S_x$  est définie seulement pour les fréquences positives dans l’intervalle  $[0; f_c]$  avec  $f_c = f_s/2$  (fréquence de Nyquist) et  $f_s$  la fréquence d’échantillonnage (= 20 kHz pour Virgo); ce choix de repliement des fréquences négatives implique la présence d’un facteur 2 dans l’équation (A.3) et 1/2 dans l’équation (A.4). Lors du détail de certains calculs (voir par exemple l’appendice C), on fera intervenir la densité spectrale de puissance *bilatérale* (“*two-sided*” en anglais)  $S_x^{(II)}(f)$  définie par :

$$S_x^{(II)}(f) = \frac{1}{2} S_x(|f|) \quad f \in [-f_c; f_c] \quad (\text{A.1})$$

On introduit la **fonction d’autocorrélation**  $A_x(\tau)$  :

$$A_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt x(t) x(t + \tau) \quad (\text{A.2})$$

Par définition, on a alors en notant  $\mathfrak{F}$  la transformée de Fourier<sup>1</sup> :

$$S_x(f) = 2 \mathfrak{F}[A_x(\tau)](f) \quad (\text{A.3})$$

Il est facile de voir que  $S_x(f)$  est un réel positif et que son unité est [unité de  $x$ ]<sup>2</sup> Hz<sup>-1</sup>. À partir de la DSP, on définit la **densité spectrale d’amplitude** (*DSA*)  $\tilde{x}(f)$  par  $\tilde{x}(f) = \sqrt{S_x(f)}$  dont l’unité est [unité de  $x$ ] /  $\sqrt{\text{Hz}}$ . La DSP et la DSA ont plusieurs propriétés remarquables :

- Notant  $\mathbb{E}$  l’espérance mathématique d’un processus aléatoire, on a

$$\mathbb{E}[\mathfrak{F}[x](f) \mathfrak{F}[x](f')] = \frac{1}{2} S_x(|f|) \delta(f - f') \quad (\text{A.4})$$

- $S_x$  admet une autre définition utile pour son estimation numérique :

$$S_x(f) = 2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T dt x(t) \exp(2i\pi ft) \right|^2 \quad (\text{A.5})$$

- Le RMS du bruit contenu dans la bande de fréquence  $[f_1; f_2]$  est donné par

$$\text{RMS}[f_1; f_2] = \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} df S_x(f)} \quad (\text{A.6})$$

<sup>1</sup> Transformée de Fourier (TF) :  $\mathfrak{F}[\phi(t)](f) = \int_{\mathbb{R}} dt \phi(t) \exp(2i\pi ft)$   
 Transformée inverse (TF<sup>-1</sup>) :  $\mathfrak{F}^{-1}[\psi(f)](t) = \int_{\mathbb{R}} df \psi(f) \exp(-2i\pi ft)$

En particulier, la **variance** de  $x$  vérifie

$$\overline{x^2} = \int_0^{f_c} df S_x(f) = \int_{-f_c}^{f_c} df S_x^{(II)}(f) \quad (\text{A.7})$$

- Si un processus aléatoire  $X$  s'écrit comme somme de  $N$  processus  $x_i$  indépendants  $X = \sum_{i=1}^N x_i$  on a  $S_X = \sum_{i=1}^N S_{x_i}$ . La courbe de sensibilité de l'interféromètre Virgo (cf. figure 2.14) est obtenue de cette manière : les bruits étant supposés indépendants, chaque DSP est calculée séparément avant d'être sommée avec les autres.

$S_x(f)df$  représente la contribution de l'intervalle de fréquence  $[f; f + df]$  à la variance du bruit, i.e. l'intensité du bruit autour de cette fréquence. Pour être détectable, un signal monochromatique de fréquence  $f$  doit être "*plus fort*" que ce niveau de bruit. Cette idée intuitive est définie de façon plus rigoureuse dans l'appendice C à l'aide du **rapport signal sur bruit**.

Si la DSP est indépendante de la fréquence, on parle de **bruit blanc** et dans le cas contraire de **bruit coloré**. De par sa définition, la DSP est reliée à la fonction d'autocorrélation du bruit – cf. équation (A.3). Or comme cette dernière caractérise complètement un processus gaussien<sup>2</sup>, la connaissance de la DSP suffit à décrire le bruit du détecteur Virgo, supposé par hypothèse gaussien (et stationnaire) dans toutes les analyses présentées dans cette thèse.

## A.2 Génération de bruit coloré

S'il est facile de générer un bruit blanc gaussien à partir de variables à densité uniforme – par exemple à partir des formules de Box-Mueller – il est un peu plus délicat d'obtenir un bruit dont la DSP n'est pas constante en fonction de la fréquence. Il existe deux méthodes principales que nous allons nous contenter de citer ici sans les détailler très précisément. Toutes deux font appel à la densité spectrale de puissance à simuler, même si c'est de manière un peu différente.

Comme dans les deux cas on utilise un bruit blanc pour construire le bruit coloré, on notera  $c(t)$  ce dernier et  $g(t)$  la variable normale initiale.

### A.2.1 Utilisation de la transformée de Fourier

L'algorithme se décompose en trois parties principales :

- Génération d'un vecteur  $\vec{g}$  de bruit gaussien de la taille souhaitée dont on prend la TF  $\mathfrak{F}[g]$  ;
- Pondération des coefficients de Fourier par la DSA théorique et normalisation éventuelle ;
- Retour dans l'espace direct par  $\text{TF}^{-1}$  une fois la symétrie hermitienne vérifiée.

La première étape peut éventuellement être raccourcie en générant directement le bruit dans l'espace de Fourier. Une justification de ce raccourci ainsi qu'une discussion sur cette question se trouvent dans [35]. L'implémentation détaillée de ce schéma est liée au choix d'algorithme pour la transformée de Fourier rapide ; pour ce point particulier on pourra consulter par exemple [164].

Le principal défaut de cette méthode est son manque de souplesse : on est forcé de générer le bruit par blocs de taille fixée (et indépendants) ; d'autre part, la nécessité de procéder à des transformées de Fourier peut rendre le calcul coûteux. C'est pourquoi il apparaît préférable d'utiliser la seconde méthode : si sa mise en pratique nécessite un travail préparatoire plus important, la simulation de nouvelles données de bruit est instantanée.

### A.2.2 Méthode autorégressive

Cette méthode utilise de manière "indirecte" la DSP par l'intermédiaire de la fonction d'autocorrélation  $A_n(\tau)$  du bruit à générer  $n(t)$ . Inversant la relation (A.3), on a

$$A_n(\tau) = \int_0^{f_c} df S_n(f) \cos(2\pi f\tau) \quad (\text{A.8})$$

---

<sup>2</sup>Puisque tous les moments se déduisent de ceux d'ordre 2 précisément donnés par la fonction d'autocorrélation.

La fonction d'autocorrélation se calcule directement à partir de la DSP  $S_n(f)$ .

Le seul paramètre de la **méthode autorégressive** (A.R.) est l'ordre du calcul  $P$  – généralement une puissance de deux. Une fois calculées les  $P + 1$  valeurs  $\left[A_n\left(\frac{k}{f_c}\right)\right]_{0 \leq k \leq P}$  un processus itératif, appelé *algorithme de Durbin*, construit  $P$  coefficients  $a_k$  et une variance  $\sigma^2$  qui servent à calculer les nouveaux échantillons de bruit coloré à l'aide de la relation récursive suivante :

$$c[n] = \sum_{1 \leq k \leq P} a_k \times c[n - k] + \sigma \times g[n] \quad (\text{A.9})$$

Ainsi, chaque donnée porte une sorte de “*mémoire*” des valeurs précédentes qui traduit la corrélation temporelle d'un bruit coloré, sa principale différence d'avec un bruit blanc.

Une fois les paramètres du modèle calculés, l'itération est très simple et permet d'obtenir le nombre voulu de données. La seule précaution à prendre est due aux conditions initiales –  $c[k] = 0$  pour  $k < p$  par exemple – qui rendent nécessaire le rejet des premières sorties de l'algorithme le temps que celui-ci atteigne son équilibre.

Il est possible de généraliser la méthode (A.R.) en rendant plus complexe la relation entre  $c(t)$  et  $g(t)$  de l'équation (A.9). On parle alors d'algorithme (A.R.M.A) – “*Auto Regressing Moving Average*”. Pour plus de détails sur ces processus et sur l'algorithme de Durbin, on consultera [41].

### A.3 Estimation de la densité spectrale de puissance

La connaissance de la densité spectrale de puissance du bruit du détecteur Virgo est essentielle, tant pour estimer sa sensibilité en terme d'amplitude d'onde gravitationnelle  $h$  que pour les méthodes d'analyse des données elles-mêmes (voir par exemple l'appendice C). Ces remarques permettent de comprendre l'importance d'une méthode d'estimation de la DSP, d'une part pour confronter la théorie à la pratique et d'autre part pour avoir une connaissance continue des caractéristiques du bruit dans la mesure où celui-ci sera certainement non-stationnaire sur de grandes échelles de temps.

La méthode que nous présentons ici est tirée de [164]; on la trouvera également expliquée de manière “pratique” dans l'annexe de [45]. On dispose de  $N = 2^{k+p}$  données de bruit<sup>3</sup>; plutôt que d'utiliser directement ces  $N$  valeurs pour construire un estimateur de la DSP, on préfère pour des questions de robustesse prendre la **moyenne** des  $p$  résultats obtenus à partir des échantillons de taille  $d = 2^k$  notés  $n^{(k)}(t)$ .

En effet, augmenter “naïvement” la longueur de la FFT donne accès à une résolution plus fine en fréquence mais n'améliore en aucun cas la précision que l'on peut avoir sur l'estimation de la DSP à une fréquence donnée. Dans le second cas, la variance de l'estimateur est proportionnelle à  $1/p$  et les tableaux de données manipulés restent de taille raisonnable, ce qui est un autre avantage de la méthode.

Avant d'appliquer l'algorithme à  $n^{(k)}(t)$ , une précaution est nécessaire : les discontinuités liées aux bords de la fenêtre analysée – transitions brusques vers des valeurs non nulles – engendrent des hautes fréquences qui font “*déborder*” les composantes estimées de la DSP sur leurs voisines. Pour éviter ces problèmes numériques, on multiplie les données par une *fonction de fenêtre*  $w(t)$ , comprise entre 0 et 1, maximale au-milieu de la fenêtre et **nulle** aux extrémités :

$$n^{(k)}[i] \rightarrow (n * w)^{(k)}[i] = \frac{n^{(k)}[i] \times w[i]}{W}$$

$$\text{où } W = \sqrt{\frac{1}{d} \sum_{1 \leq i \leq d} w[i]^2}$$

Un choix courant est celui de la fenêtre de *Welch* où  $w[i] = 1 - \left(1 - \frac{2i}{d}\right)^2$ . Pour chacun des  $p$  segments considérés, l'estimateur de la DSP à la fréquence  $f$  est donné par :

$$\tilde{S}_{n^{(k)}}(f) = \left| \mathfrak{F}[(n * w)^{(k)}](f) \right|^2 \quad (\text{A.10})$$

---

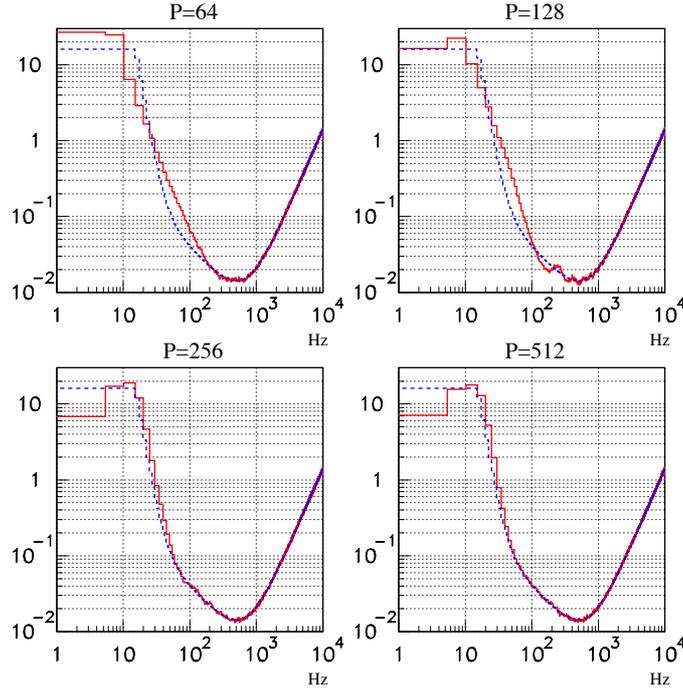
<sup>3</sup>Le choix d'une puissance de 2 n'est pas obligatoire mais il est en pratique nécessaire à cause de l'utilisation d'une transformée de Fourier rapide (FFT).

Finalement,

$$\tilde{S}_n(f) = \frac{f_s}{N} \frac{1}{p} \sum_{1 \leq k \leq p} \tilde{S}_{n^{(k)}}(f) \quad (\text{A.11})$$

où la première fraction de l'équation précédente normalise l'estimateur de la DSP en le rendant indépendant de la durée de mesure  $T = f_s/N$ .

La figure A.1 présente pour quatre choix du paramètre  $P$  (64, 128, 256 et 512) une comparaison entre la DSP "vraie" et celles estimées par l'analyse de données de bruit construites à l'aide de l'algorithme (M.A.). Avec les notations de ce paragraphe, on a  $k + p = 21$  et  $k = 12$ .



**Figure A.1:** Comparaison des DSP obtenues à partir d'échantillons de bruit coloré construits à partir d'un algorithme (M.A.). Les valeurs pour  $P$  sont 64, 128, 256 et 512. L'amplitude des courbes est arbitraire mais la forme de la densité spectrale du bruit est similaire à celle de Virgo : une décroissance due aux bruits thermiques pendulaire et de miroir puis une remontée due au bruit de photons.

Dans les quatre cas l'erreur relative sur le RMS est égale ou inférieure au 1/10 de % mais les deux premières courbes –  $P = 64$  et  $P = 128$  – ne reproduisent qu'imparfaitement la partie de la DSP dominée par les bruits thermiques. Par contre les deux autres ( $P = 256$  et  $P = 512$ ) sont très fidèles au tracé réel, à l'exception des fréquences les plus faibles dont l'amplitude apparaît sous-estimée. Ainsi, le choix de l'un de ces deux jeux de paramètres permet de simuler un bruit coloré satisfaisant ; le nombre assez peu élevé de coefficients rend la méthode assez peu coûteuse en temps de calcul. De plus, cette comparaison valide l'algorithme d'estimation de la densité spectrale de puissance puisque celle-ci est convenablement reconstruite lorsque la génération du bruit est elle-même assez précise.

## Annexe B

# Matrice optique de l'interféromètre central

La **matrice optique**  $M_{\text{optique}}$  donne les dépendances **linéaires** des signaux d'erreur *phase* et *quadrature* des différentes photodiodes lorsque l'interféromètre central (CITF) est à son point de fonctionnement en fonction des écarts de longueur à la résonance: frange noire en sortie et cavité de recyclage résonante. Dans cet appendice, on établit son expression analytique à l'aide d'un calcul en ondes planes, par un développement des différents champs au premier ordre autour de la position d'équilibre. Une comparaison avec le logiciel de simulation SIESTA permet finalement de valider les résultats obtenus avec une bonne précision.

Notant  $\delta l_{12}$  l'écart à la frange noire et  $\delta l_r$  celui à la longueur de recyclage, on a symboliquement :

$$\vec{P}_{\text{photodiodes}} = M_{\text{optique}} \times \begin{pmatrix} \delta l_{12} \\ \delta l_r \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La connaissance des expressions des coefficients de  $M_{\text{optique}}$  permet de mieux comprendre l'influence des différents paramètres optiques de l'instrument. En période de fonctionnement du détecteur, elle pourra éventuellement servir d'outil de diagnostic en testant la compatibilité entre les valeurs attendues de ses coefficients et celles donnant de bons résultats dans la réalité.

La matrice optique sert à contrôler le détecteur en phase **linéaire**, une fois les deux résonances longitudinales acquises et maintenues. Par des méthodes de type  $\chi^2$ , elle convertit les différents signaux issus des photodiodes en écarts par rapport aux résonances et donne ainsi accès aux corrections transmises ensuite aux suspensions. De plus, la redondance des informations (en nombre bien supérieur aux deux longueurs à contrôler) permet de réaliser d'autres études :

- vérifier le bon fonctionnement des photodiodes ;
- estimer les variations des coefficients de la matrice dues aux dérives lentes de l'instrument ;
- ou encore diagnostiquer un problème éventuel au niveau de la procédure de démodulation.

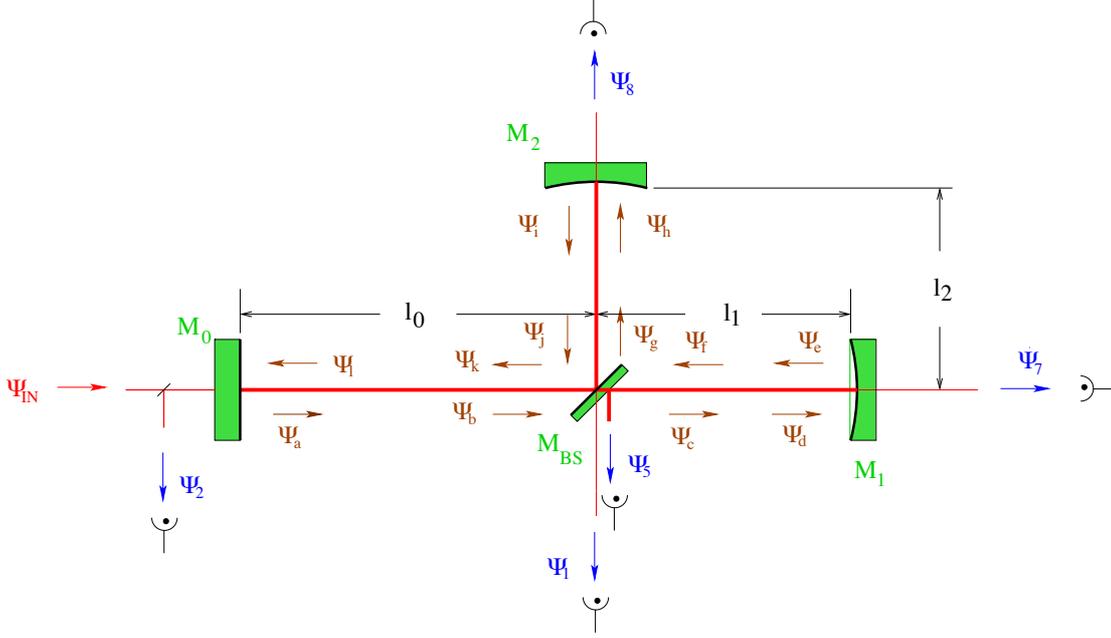
Pour plus de détails sur ces applications de la reconstruction optique, on consultera [59].

Sous l'effet de la modulation frontale décrite au paragraphe 2.2.2, le champ électrique  $\psi(t)$  incident sur une photodiode  $D$  donnée se décompose en trois termes :

$$\psi(t) = \underbrace{\psi_0(t)}_{\text{porteuse}} + \underbrace{\psi_+(t) e^{i\Omega t} + \psi_-(t) e^{-i\Omega t}}_{\text{bandes latérales à } \pm\Omega} \quad (\text{B.2})$$

La puissance lue sur la photodiode vaut donc

$$P_D = \underbrace{|\psi_0|^2 + |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2}_{\text{puissance continue ou DC}} + \underbrace{2\Re\left[(\psi_0^* \psi_+ + \psi_0 \psi_-^*) e^{i\Omega t}\right]}_{\text{puissance AC (phase et quadrature)}} + \underbrace{\text{termes en } 2\Omega}_{\text{éliminés par filtrage}} \quad (\text{B.3})$$



**Figure B.1:** Notations pour le calcul de la matrice optique du CITF. Les numéros associés aux différents photodiodes ont une origine historique ; les chiffres non utilisés correspondent à des éléments envisagés initialement et qui ont disparu à mesure que la conception du détecteur se précisait. La table B.1 indique également la position de chacun des différents faisceaux recueillis dans l'interféromètre.

Diode	Emplacement
D1	Frange Noire : D1 est en fait le faisceau situé après le <i>mode cleaner de sortie</i> , tandis que celui d'avant est appelé D1bis. Selon l'état du détecteur, l'une ou l'autre de ces données est envoyée vers le Contrôle Global.
D2	Réflexion du miroir de recyclage
D5	Réflexion de la seconde face de la séparatrice
D7	Transmission du miroir de fond Nord
D8	Transmission du miroir de fond Ouest

**Tableau B.1:** Emplacement et nomenclature des différentes photodiodes pour le CITF et Virgo.

La puissance AC est la somme d'un terme proportionnel à  $\cos(\Omega t)$  et d'un terme en  $\sin(\Omega t)$ , appelés l'un **phase** et l'autre **quadrature** ; ce sont les signaux d'erreur qui renseignent sur la position relative de l'interféromètre par rapport à son point de fonctionnement.

Dans le calcul des éléments de la matrice optique dont les étapes essentielles sont détaillées ci-après, on négligera les phases globales (qui disparaissent de toute manière) et on utilisera abondamment les notations décrites au chapitre 2. La figure B.1 présente les conventions pour le calcul des différents champs et la table B.1 indique l'emplacement des photodiodes correspondantes.

Posant  $k$  le nombre d'onde de la lumière émise par le laser, on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \psi_a &= t_0 \psi_{in} + i r_0 \psi_1 & \psi_b &= e^{-ikl_0} \psi_a & \psi_k &= t_{BS} \psi_f + i r_{BS} \psi_j & \psi_1 &= e^{-ikl_0} \psi_k \\
 \psi_c &= t_{BS} \psi_b & \psi_d &= e^{-ikl_1} \psi_c & \psi_e &= i r_1 \psi_d & \psi_f &= e^{-ikl_1} \psi_e \\
 \psi_g &= i r_{BS} \psi_b & \psi_h &= e^{-ikl_2} \psi_g & \psi_i &= i r_2 \psi_h & \psi_j &= e^{-ikl_2} \psi_i \\
 \psi_m &= t_0 \psi_1 + i r_0 \psi_{in}
 \end{aligned}$$

De ces relations, on déduit les champs incidents sur les photodiodes :

$$\psi_1 = t_{BS} \psi_j + i r_{BS} \psi_f \quad \psi_2 = \psi_m \quad \psi_5 = r_{BS}^{(II)} \psi_f \quad \psi_{7,8} = t_{1,2} \psi_{d,h}$$

$r_{BS}^{(II)} \approx 2.1 \cdot 10^{-3}$  correspond à la fraction de l'amplitude du champ effectivement réfléchi par la seconde face de la séparatrice et ainsi envoyée vers la photodiode D5, utile pour le contrôle de la

longueur de recyclage. En combinant les formules ci-dessus, il est facile d'obtenir l'expression des champs donnant accès à l'état du CITF, i.e. ceux correspondant aux différentes photodiodes ainsi que le champ stocké  $\psi_a$ .

$$\psi_a = \frac{t_0}{1 + r_0 e^{-2ikl_r} (r_1 T_{BS} e^{ikl_{12}} - r_2 R_{BS} e^{-ikl_{12}})} \psi_{in} \quad (\text{B.4})$$

$$\psi_1 = -r_{BS} t_{BS} e^{ikl_0} e^{-2ikl_r} (r_1 e^{ikl_{12}} + r_2 e^{-ikl_{12}}) \psi_a \quad (\text{B.5})$$

$$\psi_2 = i \left[ \frac{r_0 + \overbrace{(r_0^2 + t_0^2)}^{\approx 1} e^{-2ikl_r} (r_1 T_{BS} e^{ikl_{12}} - r_2 R_{BS} e^{-ikl_{12}})}{1 + r_0 e^{-2ikl_r} (r_1 T_{BS} e^{ikl_{12}} - r_2 R_{BS} e^{-ikl_{12}})} \right] \psi_{in} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \psi_5 &= r_{BS}^{(II)} i r_1 t_{BS} e^{-ik(2l_1+l_0)} \psi_a \\ &= r_{BS}^{(II)} e^{-ik(2l_1+l_0)} \frac{i r_1 t_{BS} t_0}{1 + r_0 e^{-2ikl_r} (r_1 T_{BS} e^{ikl_{12}} - r_2 R_{BS} e^{-ikl_{12}})} \psi_{in} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\psi_7 = t_1 t_{BS} e^{-ik(l_0+l_1)} \psi_a \quad (\text{B.8})$$

$$\psi_8 = i t_2 r_{BS} e^{-ik(l_0+l_2)} \psi_a \quad (\text{B.9})$$

Une fois ces relations établies, il s'agit de les développer autour du point de fonctionnement du détecteur. Pour chaque terme, deux calculs différents doivent être menés selon que l'on s'intéresse à la *porteuse* ( $k = k_0$ , nombre d'onde du faisceau laser) ou à l'une des *bandes latérales* ( $k = k_0 \pm k_\Omega$ ). Les conditions exactes de résonance sont impossibles à déterminer analytiquement à cause de la présence du miroir de recyclage qui complique l'expression des différents champs (le calcul correspondant était déjà complexe pour un interféromètre de Michelson simple, cf. paragraphe 2.1.2). Aussi, on se contentera de relations approchées mais faciles à dériver ; cette approximation sera validée finalement en comparant les coefficients de la matrice optique obtenus analytiquement avec ceux donnés par la simulation avec un jeu de paramètres identique ; l'intérêt du calcul réside plus dans la compréhension de l'influence de "l'asymétrie" des miroirs ( $r_1 \neq r_2$ ).

Pour commencer, on va déduire la condition de *frange noire* de l'équation (B.5) en négligeant la dépendance de  $\psi_a$  en  $\delta l_{12}$ . Cela revient à minimiser

$$|r_1 e^{ik_0 l_{12}} + r_2 e^{-ik_0 l_{12}}| = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(2k_0 l_{12})$$

soit  $\cos(2k_0 l_{12}^{\text{res}}) = -1$  et donc  $k_0 l_{12}^{\text{res}} = \frac{\pi}{2} [\pi]$ . On retrouve une condition similaire à celle dérivée pour le Michelson simple. Pour le *recyclage optimal de la porteuse*, il faut rendre minimal le module du dénominateur de  $\psi_a$  ce qui correspond clairement à

$$r_0 e^{-2ikl_r} (r_1 T_{BS} e^{ikl_{12}} - r_2 R_{BS} e^{-ikl_{12}}) \in \mathbb{R}^- \quad (\text{B.10})$$

En injectant la condition de frange noire déjà calculée, on obtient  $\exp(-2i k_0 l_r^{\text{res}}) = i$  avec le choix de  $\sin(2k_0 l_{12}^{\text{res}}) = 1$ . Le *recyclage optimal des bandes latérales* est donné de même par la relation  $\exp(-2i (k_0 \pm k_\Omega) l_r^{\text{res}}) = i$  qui se traduit simplement en  $\exp(\pm 2i k_\Omega l_r^{\text{res}}) = 1$ . Finalement :

$$\begin{cases} \exp(i k_0 l_{12}^{\text{res}}) = i \\ \exp(-2i k_0 l_r^{\text{res}}) = i \\ \exp(\pm 2i k_\Omega l_r^{\text{res}}) = 1 \end{cases}$$

Dans la suite, on notera  $\delta l_{12}$  et  $\delta l_r$  les écarts de longueur par rapport aux conditions de résonance de frange noire et du recyclage respectivement. Pour alléger les expressions, on pose également  $\rho_1 = r_1 T_{BS}$  et  $\rho_2 = r_2 R_{BS}$ . Enfin, on définit les quatre grandeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{r_1 e^{ik_\Omega l_{12}^{\text{res}}} + r_2 e^{-ik_\Omega l_{12}^{\text{res}}}}{2} \approx \frac{r_1 + r_2}{2} \cos(k_\Omega l_{12}^{\text{res}}) \\
 S &= \frac{r_1 e^{ik_\Omega l_{12}^{\text{res}}} - r_2 e^{-ik_\Omega l_{12}^{\text{res}}}}{2i} \approx \left( \frac{r_1 + r_2}{2} \right) \sin(k_\Omega l_{12}^{\text{res}}) \\
 C_{\text{BS}} &= \rho_1 e^{ik_\Omega l_{12}^{\text{res}}} + \rho_2 e^{-ik_\Omega l_{12}^{\text{res}}} \approx (\rho_1 + \rho_2) \cos(k_\Omega l_{12}^{\text{res}}) \\
 S_{\text{BS}} &= \frac{\rho_1 e^{ik_\Omega l_{12}^{\text{res}}} - \rho_2 e^{-ik_\Omega l_{12}^{\text{res}}}}{i} \approx (\rho_1 + \rho_2) \sin(k_\Omega l_{12}^{\text{res}})
 \end{aligned}$$

Les notations choisies sont cohérentes avec un développement de ces quantités au premier ordre pour le cas d'un interféromètre parfait et symétrique ( $r_1 = r_2 = 1$  et  $r_{\text{BS}} = t_{\text{BS}} = 1/\sqrt{2}$ ) : les termes “C” donneraient des cosinus et les “S” des sinus.

Une fois toutes ces variables définies, venons en aux expressions des différents coefficients de la matrice optique. Pour chaque photodiode  $D_i$  décrite sur la figure B.1, deux termes sont à calculer, décrits par l'équation (B.3).

- La puissance DC  $P_i^{\text{DC}}$ .

Elle est reliée au bruit de photons  $\tilde{n}_{\text{shot}}$  de la photodiode par la formule

$$\tilde{n}_{\text{shot}} = \sqrt{\frac{\hbar c P_i^{\text{DC}}}{2 \lambda f_{\text{ech}}}} \quad (\text{B.11})$$

(où  $f_{\text{ech}} = 10$  kHz) et doit être indépendante de  $\delta l_{12}$  et  $\delta l_r$ , au premier ordre. Le facteur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  vient du fait que ce bruit de comptage de photons s'applique sur chacun des deux termes AC, *phase* et *quadrature*.

- La puissance AC  $P_i^{\text{AC}}$  issue du battement entre la porteuse et les bandes latérales. De façon générale, on a au premier ordre :

$$P_i^{\text{AC}} = \Gamma_i \left[ (\alpha_i^C \delta l_{12} + \beta_i^C \delta l_r) \cos(\Omega t) + (\alpha_i^S \delta l_{12} + \beta_i^S \delta l_r) \sin(\Omega t) \right] \quad (\text{B.12})$$

Il n'y a pas de terme constant dans cette équation car les puissances AC sont des **signaux d'erreur** nuls à la résonance. Les quatre coefficients  $\Gamma_i \times \alpha_i^C$ ,  $\Gamma_i \times \beta_i^C$ ,  $\Gamma_i \times \alpha_i^S$  et  $\Gamma_i \times \beta_i^S$  sont ceux de la matrice optique. La procédure de démodulation contient un terme de phase aléatoire  $\phi$  (propagation dans les câbles...) qui fait que les pentes en  $\delta l_{12}$  et en  $\delta l_r$  peuvent se répartir entre les termes de phase et de quadrature. Ainsi, une fois les différentes expressions obtenues analytiquement, la vérification de leur “exactitude” sera quantitative certes, mais surtout qualitative : quel est le terme dominant ? Quelle est son importance par rapport aux autres pentes ? La comparaison avec les simulations suivra ce cadre et montrera un accord à quelques pourcents près avec les résultats du calcul.

Voici pour chaque photodiode la puissance DC et les termes AC de phase et de quadrature.

$$\text{Diode D1 : } P_1^{\text{DC}} = R_{\text{BS}} T_{\text{BS}} T_0 \left[ \frac{J_0^2 (r_1 - r_2)^2}{[1 - r_0 (\rho_1 + \rho_2)]^2} + \frac{8 J_1^2 S^2}{(1 - r_0 C_{\text{BS}})^2} \right] P_{\text{in}} \quad (\text{B.13})$$

$$\Gamma_1 = - \frac{8 R_{\text{BS}} T_{\text{BS}} T_0 J_0 J_1 k_0}{[1 - r_0 (\rho_1 + \rho_2)]^2 (1 - r_0 C_{\text{BS}})^2} P_{\text{in}} \quad (\text{B.14})$$

$$\alpha_1^C = - \left[ (r_1 + r_2) - 2 r_0 (r_1 \rho_2 + r_2 \rho_1) \right] (1 - r_0 C_{\text{BS}}) S \quad (\text{B.15})$$

$$\beta_1^C = 2 r_0 (r_1 - r_2) S (\rho_1 + \rho_2 - C_{\text{BS}}) \quad (\text{B.16})$$

$$\alpha_1^S = (r_1 - r_2) \left[ 1 - r_0 (\rho_1 + \rho_2) \right] \left[ C - r_0 (C C_{\text{BS}} + S S_{\text{BS}}) \right] \quad (\text{B.17})$$

$$\beta_1^S = 0 \quad (\text{B.18})$$

---


$$\text{Diode D2: } P_2^{\text{DC}} = \left[ \frac{J_0^2 (r_0 - \rho_1 - \rho_2)^2}{[1 - r_0 (\rho_1 + \rho_2)]^2} + \frac{2 J_1^2 (r_0 - C_{\text{BS}})^2}{(1 - r_0 C_{\text{BS}})^2} \right] P_{\text{in}} \quad (\text{B.19})$$

$$\Gamma_2 = \frac{4 T_0 J_0 J_1 k_0}{[1 - r_0 (\rho_1 + \rho_2)]^2 (1 - r_0 C_{\text{BS}})^2} P_{\text{in}} \quad (\text{B.20})$$

$$\alpha_2^C = [r_0 - (\rho_1 + \rho_2)] [1 - r_0 (\rho_1 + \rho_2)] S_{\text{BS}} \quad (\text{B.21})$$

$$\beta_2^C = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\alpha_2^S = -(r_0 - C_{\text{BS}}) (1 - r_0 C_{\text{BS}}) (\rho_1 - \rho_2) \quad (\text{B.23})$$

$$\beta_2^S = -2 r_0 [C_{\text{BS}} [1 + (\rho_1 + \rho_2)^2], -(\rho_1 + \rho_2) (1 + C_{\text{BS}}^2)] \quad (\text{B.24})$$

$$\text{Diode D5: } P_5^{\text{DC}} = R_{\text{BS}}^{(II)} T_{\text{BS}} R_1 T_0 \left[ \frac{J_0^2}{[1 - r_0 (\rho_1 + \rho_2)]^2} + \frac{2 J_1^2}{(1 - r_0 C_{\text{BS}})^2} \right] P_{\text{in}} \quad (\text{B.25})$$

$$\Gamma_5 = R_{\text{BS}}^{(II)} \frac{4 T_{\text{BS}} T_0 J_0 J_1 k_0 r_0 R_1}{[1 - r_0 (\rho_1 + \rho_2)]^2 (1 - r_0 C_{\text{BS}})^2} P_{\text{in}} \quad (\text{B.26})$$

$$\alpha_5^C = -[1 - r_0 (\rho_1 + \rho_2)] S_{\text{BS}} \quad (\text{B.27})$$

$$\beta_5^C = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$\alpha_5^S = (\rho_1 - \rho_2) (1 - r_0 C_{\text{BS}}) \quad (\text{B.29})$$

$$\beta_5^S = -2 (\rho_1 + \rho_2 - C_{\text{BS}}) \quad (\text{B.30})$$

### Diodes D7 et D8 :

Les expressions des puissances DC et AC pour ces deux diodes se déduisent directement de celles associées à D5 – cf. équations (B.7), (B.8) et (B.9) en modifiant simplement les termes en facteur.

- D7:  $R_1 T_0 \rightarrow T_0$  et  $R_{\text{BS}}^{(II)} \rightarrow T_1$
- D8:  $R_1 T_0 T_{\text{BS}} \rightarrow T_0 R_{\text{BS}}$  et  $R_{\text{BS}}^{(II)} \rightarrow T_2$

### Résultats

La table B.2 présente les valeurs numériques des coefficients de la matrice optique du CITF alimenté par le laser auxiliaire de puissance 160 mW et avec un indice de modulation très faible ( $\sim 0.05$ ). Dans les deux colonnes “*pentés*”, on trouve les coefficients définis par l’équation (B.12), **rapportés** au terme dominant dont la valeur se trouve dans la colonne “*Normalisation*”. Cette disposition permet de comparer plus facilement l’importance relative des différentes variables. Enfin, la dernière colonne “*Sensibilité*” donne la fluctuation minimale de longueur détectable par le signal d’erreur, définie par

$$\text{Normalisation} \times \text{Sensibilité} = \tilde{n}_{\text{shot}} \quad (\text{B.31})$$

Pour chaque photodiode, cette sensibilité vaut pour la longueur associée à la pente dominante.

Les valeurs significatives de cette matrice optique ont été comparées avec celles données par le logiciel de simulation SIESTA, indiquées entre parenthèses dans le tableau B.2. On peut noter un bon accord au niveau de quelques pourcents: ceci valide l’utilisation de SIESTA pour estimer des matrices optiques, par exemple pour Virgo où la présence des cavités Fabry-Perot complique (beaucoup plus) le calcul analytique. Un exemple de  $M_{\text{optique}}$  pour Virgo se trouve dans [59].

La lecture de la matrice optique du CITF fait apparaître une séparation entre la diode D1 et les autres. En effet, les signaux d’erreur de D2-D5-D7-D8 dépendent essentiellement de la longueur de recyclage  $\delta l_r$  tandis que D1 est dominée par  $\delta l_{12}$  avec néanmoins une contribution de l’ordre de 20% de la longueur de recyclage. En conséquence, D1 doit être utilisée pour le contrôle de la longueur de frange noire (car c’est la seule diode qui y est réellement sensible!) mais son signal d’erreur aura également une composante non négligeable en  $\delta l_r$ , dont il faut tenir compte.

On peut inférer de la remarque précédente que cette propriété s’étend au-delà de la zone linéaire centrée sur le point de fonctionnement : **le signal d’erreur de frange noire est couplé à l’état**

---

Diode	Pentes pour $\delta l_{12}$	Pentes pour $\delta l_r$	Normalisation (W/m)	Sensibilité (m)
D1 phase	1	- 0.193 (- 0.210)	2.419 (2.370) $10^6$	3.239 (3.309) $10^{-16}$
D1 quad	-0.002	0		
D2 phase	- 0.008	0	5.442 (5.454) $10^7$	1.649 (1.634) $10^{-16}$
D2 quad	0.002	1		
D5 phase	- 0.036	0	- 2.099 (2.007) $10^6$	2.736 (2.815) $10^{-15}$
D5 quad	0.002	1		
D7 phase	0.036	0	- 5.611 (5.369) $10^4$	1.674 (1.722) $10^{-14}$
D7 quad	0.002	1		
D8 phase	0.036	0	- 7.261 (6.923) $10^4$	1.471 (1.519) $10^{-14}$
D8 quad	0.002	1		

**Tableau B.2:** Coefficients de la matrice optique du CITF obtenus à partir des expressions présentées dans les équations (B.13) à (B.30). Le *facteur de normalisation* donne la valeur de la pente dominante (en W/m) pour une photodiode donnée. La *sensibilité* est le rapport (en m) entre le bruit de photons et ce coefficient ; elle indique l'écart minimum de longueur par rapport à la résonance détectable par ce signal d'erreur. Entre parenthèses sont indiqués les valeurs calculées par le logiciel SIESTA ; on peut noter un bon accord entre les deux approches.

**du recyclage.** Ce fait a été vérifié expérimentalement sur le CITF et est une des principales sources des problèmes qui ont retardé l'acquisition de son contrôle – cf. chapitre 3 pour plus de détails.

Pour la longueur de recyclage, la diode D2 est nettement la plus sensible mais, tout comme le laser de puissance, elle n'était pas disponible pour le travail sur le CITF et c'est donc D5 qui a été utilisée pour l'acquisition et le contrôle de la résonance de la cavité de recyclage. Les puissances transmises en bout de bras sont trop faibles pour être exploitées autrement que dans la phase de contrôle linéaire. Pour Virgo, elles serviront à connaître l'état des deux cavités Fabry-Perot lors de l'acquisition du contrôle de leurs longueurs puis ensuite à tester la consistance de la minimisation du  $\chi^2$  en exploitant la redondance des informations.

Les divers coefficients de la matrice optique dépendent de manière très importante de la qualité des différents miroirs (réflexion, pertes...). Cela se voit en particulier sur le terme

$$\left[ 1 - r_0 (\rho_1 + \rho_2) \right]^2$$

présent au dénominateur de chacune des expressions calculés ci-dessus. Comme les trois miroirs d'extrémité du CITF sont très bien réfléchissants,  $r_0 \lesssim 1$  et  $\rho_{1,2} \lesssim 1/2$  ce qui implique que le terme considéré est très faible ( $\sim 8.16 \cdot 10^{-3}$ ) et que son inverse est très grand. Une faible variation de la réflexivité des miroirs modifie donc beaucoup la pente des signaux d'erreurs.

Les sensibilités sont inversement proportionnelles à  $\sqrt{P_{\text{in}}}$ . Avec les 10 W de puissance normalement prévus pour le CITF, on aurait les valeurs suivantes :

Diode	D1	D2	D5	D7	D8
Sensibilité (m)	$4.10 \cdot 10^{-17}$	$2.08 \cdot 10^{-17}$	$3.46 \cdot 10^{-16}$	$2.12 \cdot 10^{-15}$	$1.86 \cdot 10^{-15}$

**Tableau B.3:** Sensibilités des photodiodes du CITF avec  $P_{\text{in}} = 10$  W.

Le gain en sensibilité vaut  $\sqrt{\frac{10 \text{ W}}{160 \text{ mW}}} \approx 7.9$ . L'absence du laser de puissance limite effectivement les possibilités de contrôle des cavités et donc la sensibilité du CITF.

Les pentes des signaux d'erreur et les niveaux de bruit de photons dépendent aussi du choix de l'indice de modulation  $m$  par l'intermédiaire des fonctions de Bessel  $J_0(m)$  et  $J_1(m)$ . C'est donc également le cas de la sensibilité des différentes photodiodes dont les expressions en fonction de  $m$  sont similaires à l'équation (2.49). Cela explique pourquoi les sensibilités pour le cas  $P_{\text{in}} = 10$  W sont plus faibles que celles présentés dans [59] qui correspondent au cas  $m = 0.5$ .

## Annexe C

# Filtrage adapté et rapport signal sur bruit

Comme dans beaucoup de domaines traitant de l'analyse du signal (transmissions radio, radars et sonars...), le **filtrage adapté** est l'une des principales méthodes envisagées dans l'expérience Virgo pour détecter des ondes gravitationnelles. Bien loin de se vouloir un traité exhaustif de cette technique, cet appendice vise plus modestement à la présenter, d'abord de façon théorique – en quoi cette méthode est-elle optimale? – puis de manière pratique :

- Comment l'utiliser?
- A quels types de résultat doit-on s'attendre?
- Quelles sont ses limites?

### C.1 Théorie du filtrage adapté

#### C.1.1 Filtrage linéaire

On suppose tout d'abord que la sortie du détecteur  $s(t)$  peut s'écrire comme somme de deux termes

$$s(t) = h(t) + n(t) \tag{C.1}$$

où

- $h(t)$  est le **signal**, qui peut être absent – hypothèse  $\mathbb{H}_0$  – ou présent – hypothèse  $\mathbb{H}_1$  – selon l'instant  $t$  ;
- $n(t)$  est le **bruit** du détecteur, représenté par un **processus aléatoire et stationnaire**, c'est-à-dire dont les caractéristiques – en premier lieu la moyenne et la variance, mais aussi par exemple la *densité spectrale* définie dans l'appendice A – ne varient pas au cours du temps, ou tout au moins évoluent suffisamment lentement pour que ces modifications soient négligeables pour une analyse donnée.

Pour effectuer un choix entre les hypothèses  $\mathbb{H}_0$  et  $\mathbb{H}_1$ , on **filtre** la sortie  $s(t)$  ; idéalement, le résultat obtenu  $\mathfrak{S}(t)$  doit être construit de façon à être maximal en présence de signal ce qui permet de faire ressortir les événements correspondants du bruit de fond à l'aide de coupures. Parmi les différentes méthodes de filtrage, on se limite dans la suite à celles qui sont **linéaires et invariantes temporellement** : chacune est caractérisée par une fonction  $k(t)$  telle que

$$\mathfrak{S}(t) = \int_{\mathbb{R}} s(t') k(t-t') dt' \tag{C.2}$$

Sur l'équation (C.2), on voit que  $\mathfrak{S}(t)$  est obtenu comme combinaison linéaire de  $s(t)$  et que le poids  $k(t-t')$  ne dépend que de la différence des temps  $t-t'$ , ce qui illustre les deux propriétés

mentionnées précédemment. La fonction  $k(t)$  est appelée *réponse impulsionnelle* du filtre – si  $s(t)$  est la distribution de Dirac,  $\mathfrak{S}(t) = k(t)$  – et son développement sur la base de Fourier permet d'introduire la notion essentielle de **fonction de transfert** du filtre définie par  $K(f) = \mathfrak{F}[k(t)](f)$ .

Cette définition se comprend de la manière suivante ; supposons que l'entrée du filtre est de la forme

$$s(t) = s_f \exp(2i\pi ft) \quad \text{avec } s_f \text{ constant} \quad (\text{C.3})$$

Il est alors facile de montrer que  $\mathfrak{S}(t) = S_f \exp(2i\pi ft)$  est également une oscillation à la même fréquence  $f$  et que l'on a

$$K(f) = \frac{S_f}{s_f} \quad (\text{C.4})$$

Avec cette notation, le filtrage (C.2) peut se réécrire

$$\mathfrak{S}(t) = \int_{\mathbb{R}} df \exp(-2i\pi ft) K(f) \mathfrak{F}[s(t)](f) \quad (\text{C.5})$$

On spécifie encore plus le type de filtre étudié en demandant que ce soit un **corrélateur à mémoire finie** de durée  $T$  : à un instant  $t$  donné,  $\mathfrak{S}(t)$  est construit uniquement à partir des valeurs  $s(t')$  pour  $t' \in [t - T, t]$  – cela revient à supposer  $k(t') = 0$  pour  $t' < 0$  ou  $t' > T$ . Ce dernier choix légitime tous les développements précédents et correspond à la situation réelle de recherche de signaux transitoires par exemple pour l'expérience Virgo.

De plus, la fréquence d'échantillonnage finie  $f_s$  du détecteur limite l'étendue de la DSP du bruit : celle-ci n'est non-nulle que pour des fréquences inférieures à  $f_c = f_s/2$ , la fréquence de Nyquist. En conséquence, les intégrales s'étendent en fait de  $-f_c$  à  $f_c$  et non plus sur  $\mathbb{R}$  entier.

### C.1.2 Rapport signal sur bruit

Le fait d'avoir choisi un filtre linéaire simplifie considérablement son étude ; en effet, avec des notations évidentes – similaires à celles de l'équation (C.1) –, on peut décomposer la sortie du filtre sous la forme

$$\mathfrak{S}(t) = \mathfrak{H}(t) + \mathfrak{N}(t) \quad (\text{C.6})$$

avec  $\mathfrak{H}(t)$  et  $\mathfrak{N}(t)$  les contributions respectives du signal et du bruit.

Comme on l'a vu dans l'appendice A,  $n(t)$  – supposé de moyenne nulle – est caractérisé par sa variance  $\overline{n^2(t)}$  définie par l'équation (A.7). Par linéarité du processus de filtrage, le bruit en sortie  $\mathfrak{N}(t)$  a sa variance donnée par

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{N}^2(t)} &= \int_{-f_c}^{f_c} df \int_{-f_c}^{f_c} df' e^{-2i\pi ft} e^{2i\pi f't} K(f) K^*(f') \mathbb{E}[N(f)N^*(f')] \\ &= \int_{-f_c}^{f_c} df \int_{-f_c}^{f_c} df' e^{2i\pi(f'-f)t} K(f) K^*(f') S_n^{(II)}(f) \delta(f - f') \quad \text{d'après l'équation (A.4)} \\ &= \int_{-f_c}^{f_c} df |K(f)|^2 S_n^{(II)}(f) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

où  $N(f) = \mathfrak{F}[n](f)$  est la transformée de Fourier du bruit.

Le **rapport signal sur bruit** (S/B) à un instant  $t_0$   $\rho(t_0)$  est défini par

$$\rho(t_0) = \frac{\mathfrak{S}(t_0)}{\sqrt{\overline{\mathfrak{N}^2(t)}}} \quad (\text{C.8})$$

On peut remarquer que  $\rho$  est homogène à un rapport d'amplitude ; certains auteurs, comme par exemple [185], définissent un rapport S/B en intensité qui est le carré de l'expression (C.8).

---

On veut que  $\rho$  soit maximal en présence du signal  $h(t)$ . On suppose maintenant que celui-ci est **parfaitement** connu et on note  $H(f) = \mathfrak{F}[h](f)$  sa transformée de Fourier. En l'absence de bruit, on a

$$\rho(t_0)^2 = \frac{\left| \int_{-f_c}^{f_c} df e^{-2i\pi f t_0} H(f) K(f) \right|^2}{\int_{-f_c}^{f_c} df |K(f)|^2 S_n^{(II)}(f)} \quad (\text{C.9})$$

Par application de l'*inégalité de Schwarz*, on peut majorer le rapport S/B :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-f_c}^{f_c} df e^{-2i\pi f t_0} H(f) K(f) \right|^2 &= \left| \int_{-f_c}^{f_c} df e^{-2i\pi f t_0} H(f) \sqrt{S_n^{(II)}(f)} \frac{K(f)}{\sqrt{S_n^{(II)}(f)}} \right|^2 \\ &\leq \left( \int_{-f_c}^{f_c} df |K(f)|^2 S_n^{(II)}(f) \right) \left( \int_{-f_c}^{f_c} df \frac{|H(f)|^2}{S_n^{(II)}(f)} \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\rho(t_0)^2 \leq \int_{-f_c}^{f_c} df \frac{|H(f)|^2}{S_n^{(II)}(f)} \quad (\text{C.10})$$

et cette borne supérieure est atteinte en choisissant

$$K(f) \propto e^{2i\pi f t_0} \frac{H^*(f)}{S_n^{(II)}(f)} \quad (\text{C.11})$$

Le filtre linéaire **optimal** nécessite donc la **connaissance exacte** du signal recherché puisque la fonction  $K(f)$  est "proportionnelle" à la transformée de Fourier de  $h(t)$ . Cette simple remarque permet d'expliquer les deux orientations principales prises dans le domaine de la préparation à l'analyse des données de détecteurs comme Virgo :

- utilisation du filtrage adapté lorsque les ondes gravitationnelles recherchées ont une forme prédite théoriquement ;
- recours à des méthodes *sous-optimales* mais *plus robustes* – i.e. moins sensibles à la forme particulière du signal – dans le cas contraire.

L'interprétation physique de l'équation (C.10) est aisée : une bande de fréquence  $[f; f + df]$  va contribuer d'autant plus au rapport S/B  $\rho$  que la composante de Fourier correspondante du signal sera grande par rapport au RMS du bruit intégré sur cet intervalle.

Par construction,  $\rho(t)$  est sous l'hypothèse  $\mathbb{H}_0$  – bruit seul – une variable **gaussienne** de **moyenne nulle** (par linéarité du filtrage) et de **variance unité**.

### C.1.3 Filtrages et optimalités

Le filtrage de Wiener est optimal parmi tous les algorithmes linéaires dans la mesure où il maximise le rapport S/B en présence du signal cherché – cf. paragraphe C.1.2. Le rôle central de cette méthode se retrouve dans d'autres approches de l'analyse du signal – centrées sur l'utilisation du rapport de vraisemblance – dont deux exemples (concernant tous deux un bruit gaussien et stationnaire) sont donnés ici.

- Le filtrage de Wiener apparaît naturellement dans le cadre de la théorie du "Récepteur Optimal" – voir [185].
- Le filtrage de Wiener est optimal par rapport à tous les autres algorithmes pour la recherche d'un signal donné dans la mesure où il minimise le pourcentage de non détection en présence de signal<sup>1</sup> à taux de fausses alarmes – cf. C.1.4 – fixé.

<sup>1</sup> *False dismissals* en anglais.

### C.1.4 Taux de fausses alarmes et seuils

Une fois le filtre construit et adapté au signal recherché, il faut encore définir la manière d'interpréter ses résultats. Pour cela, on introduit un **seuil**  $\eta$  qui caractérise la *règle de décision* choisie :

Si  $|\rho(t)| \geq \eta$ , l'hypothèse  $\mathbb{H}_1$  est vraie : le signal est présent.

Si  $|\rho(t)| < \eta$ , l'hypothèse  $\mathbb{H}_0$  est vraie : le signal est absent.

$\eta$  est fixé par la donnée du **taux de fausses alarmes**  $\tau$ , i.e. la fraction moyenne d'événements de bruit seul dont le rapport (S/B) va dépasser le seuil par simple effet statistique. Comme on a vu que  $\rho(t)$  suit une loi normale, la relation entre  $\tau$  et  $\eta$  est donnée par

$$\tau = \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \quad (\text{C.12})$$

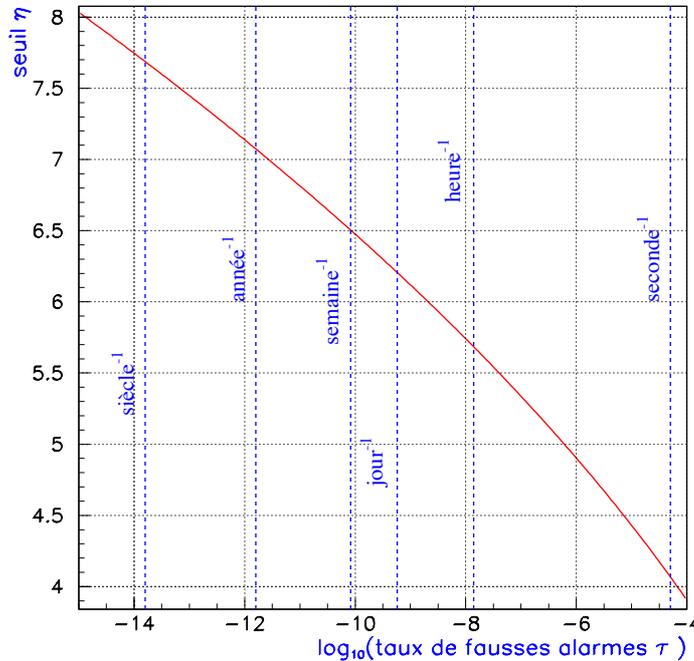
où  $\operatorname{erfc}$  est la fonction d'erreur complémentaire.

Le choix de  $\tau$  est délicat : il s'agit de réaliser un compromis entre un taux de fausses alarmes faible ( $\tau$  grand) et une bonne sensibilité vis à vis des signaux recherchés ( $\tau$  petit). Lorsqu'on cherche à faire des **coïncidences** – entre différents filtres analysant les mêmes données et/ou entre plusieurs interféromètres – il peut s'avérer encore plus difficile de fixer la valeur de  $\tau$  (voir la partie 7.3). Pour simplifier, on supposera dans la suite que le filtre est unique.

Comme  $\tau$  n'est pas un paramètre très intuitif, on préfère parler en terme de *nombre de fausses alarmes par unité de temps*  $\mathbb{T}$ . La relation générale entre ces deux grandeurs est :

$$\tau = \frac{\mathbb{T} \text{ (par heure)}}{3600 \gamma f_s} \quad (\text{C.13})$$

avec  $f_s$  la fréquence d'échantillonnage de Virgo et  $\gamma \in ]0, 1]$ .  $\gamma$  sert à réduire la fréquence *effective* du filtre pour tenir compte de la corrélation qui existe entre des sorties consécutives de celui-ci dans la mesure où une grande partie des données analysées est commune. Typiquement,  $\gamma \approx 0.01 - 0.1$ .



**Figure C.1:** Seuil  $\eta$  en fonction du taux de fausses alarmes  $\tau$  pour une variable normale. Les paramètres choisis sont  $f_s = 20$  kHz et  $\gamma = 1$ .

La figure C.1 montre la variation du seuil  $\eta$  en fonction du taux de fausses alarmes  $\tau$  obtenue en inversant numériquement l'équation (C.12). Les lignes verticales représentent des valeurs particulières de  $\mathbb{T}$  correspondant à la relation (C.13) avec  $f_s = 20$  kHz et  $\gamma = 1$ . On peut voir que le

seuil varie très lentement en fonction de  $\tau$  : il double simplement alors que  $\mathbb{T}$  passe d’une fausse alarme par seconde à une par siècle !

Or on a vu que l’amplitude  $h(t)$  d’une onde gravitationnelle est inversement proportionnelle à la distance  $D$  entre la source et le détecteur :

$$h(t) = \frac{D_0}{D} h_0(t) \quad (\text{C.14})$$

où  $h_0(t)$  est l’amplitude du rayonnement gravitationnel calibré à une distance  $D_0$  arbitraire. Par linéarité du filtre,

$$\rho(t) = \frac{D_0}{D} \rho_0(t) \quad (\text{C.15})$$

A l’aide de la règle de décision présentée ci-dessus, on peut estimer la distance “moyenne” de détection  $D_{\text{detect}}$  en résolvant l’équation  $\rho(t) = \eta$  :

$$D_{\text{detect}} = D_0 \frac{\rho_0(t)}{\eta} \propto \frac{1}{\eta} \quad (\text{C.16})$$

D’un côté, on peut dire que  $D_{\text{detect}}$  dépend faiblement du seuil et donc que réduire  $\eta$  au maximum en discriminant mieux les fausses alarmes “naturelles” du bruit (par exemple à l’aide de coïncidences entre des filtres décorrélés) n’apporte qu’un faible gain en nombre d’événements. En effet, c’est par exemple vrai pour les ondes gravitationnelles émises par les **supernovae** : comme elles ne sont a priori détectables que dans la Voie Lactée ou son voisinage immédiat par la première génération d’interféromètres et que la densité de galaxies est loin d’être uniforme à courte distance, gagner un facteur 2 sur  $D_{\text{detect}}$  aura une incidence quasi nulle sur la statistique de ces sources.

A contrario, diminuer le seuil apparaît comme très intéressant pour des sources détectables à de plus grandes distances – typiquement à partir du Mpc. Leur répartition plus uniforme rend le taux d’événement proportionnel à  $(D_{\text{detect}})^3$  et donc un gain d’un facteur 2 sur le seuil multiplie en moyenne par 8 le nombre d’ondes gravitationnelles détectées en un temps donné.

En conclusion, si la meilleure prise en compte des fausses alarmes – et par conséquent la diminution des seuils – est clairement un des buts de l’analyse des données, sa traduction pratique en terme de détection d’une source donnée dépend beaucoup de la nature du rayonnement recherché, selon que la portion d’univers visible est ou non étendue.

Bien entendu, le scénario présenté sur la figure C.1 n’est que théorique : dans la pratique, des événements non stationnaires devraient se superposer au bruit gaussien. De plus, même si la plupart d’entre-eux sont éliminés par des algorithmes *ad hoc* (voir section 5.2.4), il est peu vraisemblable que le bruit soit gaussien jusqu’à 6 sigma ou plus. Des ajustements seront donc nécessaires en présence des vraies données pour rendre les taux de sélection compatibles avec la capacité de traitement des données.

### C.1.5 Notations condensées

Les développements précédents ont montré qu’un filtrage linéaire revenait en fait à *corréler* la sortie du détecteur  $s(t)$  avec une certaine fonction  $k(t)$  associée au filtrage. La plupart du temps, cette opération peut s’exprimer en introduisant un **produit scalaire** bien choisi. En particulier, pour la recherche de la phase “spirale” de la coalescence de systèmes binaires, le produit scalaire associé au rapport S/B est [186] :

$$\langle s(t) | k(t) \rangle = 4\Re \left( \int_0^{f_c} df \frac{\mathfrak{F}[s](f) \mathfrak{F}[k](f)^*}{S_n(f)} \right) \quad (\text{C.17})$$

Le premier facteur 2 s’explique par la restriction de l’intégration aux fréquences “physiques” – i.e. positives – et le second par l’utilisation de la DSP monolatérale.

Pour alléger les formules, ces notations seront conservées dans la suite de cet appendice et utilisées dans le chapitre 5,  $s(t)$  étant le flot de données à analyser et  $k(t)$  la fonction de filtrage. En utilisant cette convention, l’équation (C.7) se généralise en

$$\mathbb{E}[\langle n(t) | a(t) \rangle \langle n(t) | b(t) \rangle] = \langle a(t) | b(t) \rangle \quad (\text{C.18})$$

et donc le rapport S/B se note

$$\rho(t) = \frac{\langle s(t) | k(t) \rangle}{\sqrt{\langle k(t) | k(t) \rangle}} = \langle s(t) | k(t) \rangle \text{ une fois } k \text{ convenablement normalisé.} \quad (\text{C.19})$$

Comme le signal recherché dépend en général d'un ou plusieurs paramètres<sup>2</sup> inconnus reliés aux caractéristiques de la source particulière qui l'a émis, il est nécessaire d'utiliser une série de filtres pour rendre maximale la probabilité de détection. On parlera alors de **calques** pour désigner des filtres similaires dans la forme et ne différant que par des choix de constantes. La question – délicate – de la répartition de ces calques est étudiée au paragraphe 5.4 et reliée à la notion d'**espace des paramètres**.

## C.2 Exemple d'application à la recherche d'un pic gaussien

Bien que les signaux gravitationnels impulsionnels – comme par exemple ceux de supernovae, cf. paragraphe 1.3.4 – soient en général mal prédits par la théorie, il est possible d'identifier certaines de leurs caractéristiques communes, au premier rang desquelles la présence d'un pic principal de grande amplitude. Pour le rechercher, notre groupe a choisi de développer une méthode de filtrage adaptée en utilisant des **calques gaussiens**; ceux-ci dépendent d'un seul paramètre, la *demi-largeur*  $\sigma$ . La fonction associée  $k_\sigma(t)$  est de la forme

$$k_\sigma(t) = K_\sigma \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{C.20})$$

avec  $K_\sigma$  une constante de normalisation définie par la relation (C.19).

### C.2.1 Fonction d'autocorrélation d'un pic gaussien

On commence par supposer que le bruit est négligeable devant le signal et que la demi-largeur de ce dernier  $\sigma$  est connue. Le filtre optimal s'obtient en corrélant le signal avec lui-même; en prenant pour origine des temps ( $t=0$ ) le pic du signal, le rapport S/B vérifie

$$\rho_\sigma(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{8\sigma^2}\right) = \exp\left[-\frac{t^2}{2(2\sigma)^2}\right] \quad (\text{C.21})$$

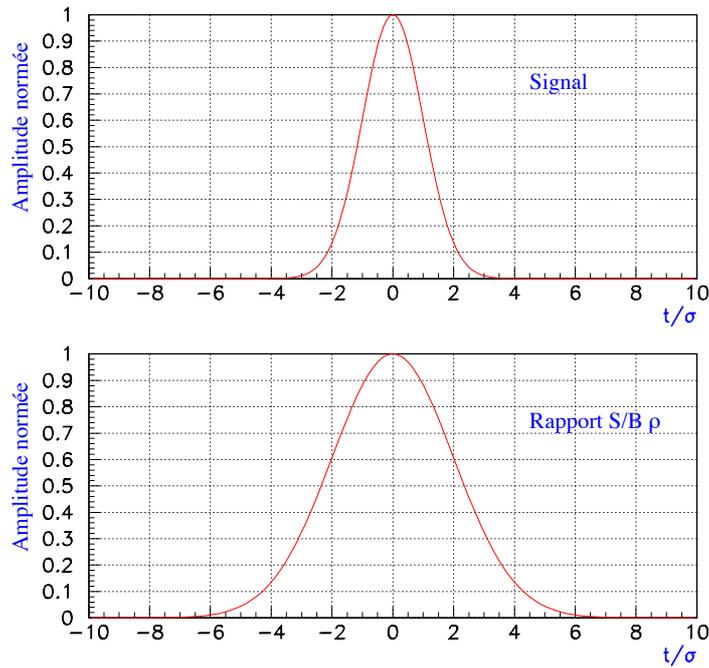
La figure C.2 présente les courbes  $k_\sigma(t)$  et  $\rho_\sigma(t)$ . La courbe du rapport S/B est bien évidemment centrée en  $t = 0$  et elle décroît moins rapidement que le signal initial car sa largeur est deux fois plus importante. Néanmoins, on peut également voir que placer le seuil à 90% de la valeur maximale de  $\rho_\sigma$  restreint la zone de détection à environ  $\pm \sigma$ . Typiquement,  $\sigma$  est de l'ordre de la milliseconde pour les signaux de supernovae; comme la présence de bruit dégrade nécessairement les résultats optimaux, on peut voir sur cet exemple simple un des inconvénients majeurs du filtre optimal: le rapport S/B se dégrade rapidement dès qu'il apparaît une différence – ici le temps d'arrivée – entre le calque et le signal réel. Ces questions sont traitées en détail dans les paragraphes 5.4 et 5.5 du chapitre consacré à la présentation des méthodes de recherche de signaux impulsionnels.

### C.2.2 Recherche d'un pic gaussien

Calculer la sortie du filtre à chaque instant serait trop coûteux en temps et redondant à cause de la longueur de corrélation non nulle de l'algorithme. En pratique, on procède de la façon suivante :

---

<sup>2</sup>On peut classer les paramètres d'un signal en deux catégories [43]: ceux qui sont intrinsèques – i.e. constitutifs de la forme d'onde (fréquence propre, facteur de qualité...) – et les autres, sans signification physique particulière – par exemple le temps d'arrivée de l'onde gravitationnelle ou un terme de phase aléatoire – qui disparaissent lors des phases de maximisation. Sauf mention contraire explicite, le mot "paramètres" désigne seulement les grandeurs caractéristiques du signal.



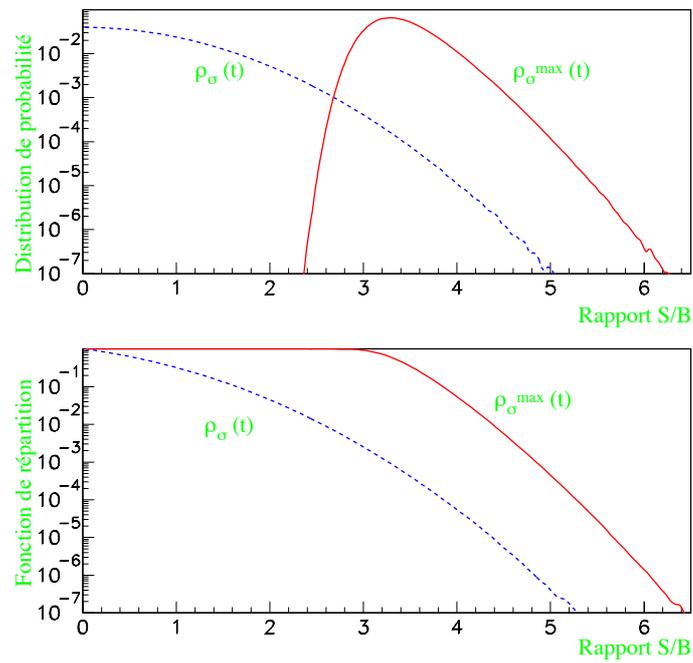
**Figure C.2:** Pic Gaussien et fonction d'autocorrélation correspondante ; temps  $t$  en unité de  $\sigma$ .

- On découpe les données en paquets de taille fixe  $N = 2^p$  (le choix d'une puissance de 2 est nécessaire pour utiliser une FFT)  $s(t)$  et que l'on complète par un nombre égal  $N$  de zéros. Ce procédé s'appelle le "zero-padding" et a pour but d'éviter des erreurs numériques dans le processus de filtrage dues à la finitude des données.
- On prend la transformée de Fourier de  $s(t)$   $\mathfrak{F}[s](f)$ , on la multiplie par le conjugué de celle du filtre  $\mathfrak{F}[k_\sigma](f)^*$  et on normalise par la DSP  $S_n(f)$ .
- Finalement, on revient dans l'espace direct par F.F.T. inverse pour obtenir *simultanément* les  $N$  corrélations correspondant au paquet de données étudié  $\rho_\sigma(t)$ . A cause des effets de bords – particulièrement importants lorsque la taille du paquet est réduite, ce qui est le cas pour les *bursts* qui durent quelques millisecondes échantillonnées à  $f_s = 20$  kHz –, seule la zone centrale du filtrage est prise en compte (entre  $N/4$  et  $3N/4$ ). La sortie du filtre correspondant à cette fenêtre est notée  $\rho_\sigma^{\max}(t_0)$  et est définie comme le **maximum** de  $|\rho_\sigma(t)|$  sur cette zone.
- Ensuite, on déplace le paquet analysé de  $N/4$  données et on recommence le processus de filtrage.

Cette procédure est bien sûr plus rapide que le calcul de la corrélation pour chaque position possible du calque mais elle a également quelques inconvénients comme le problème des effets de bord dont on vient de voir comment s'affranchir. Une autre difficulté vient du fait que, contrairement à toutes les autres étapes du calcul, le passage au maximum n'est pas un processus linéaire. En conséquence, la distribution probabilité de  $\rho_\sigma^{\max}(t_0)$  diffère de celle de  $\rho_\sigma(t)$ , comme le montre par exemple la figure C.3.

Dans la partie supérieure sont comparées les deux distributions de probabilité obtenues pour une taille de fenêtre d'analyse  $N = 4096$ . La courbe en trait plein –  $\rho_\sigma^{\max}(t_0)$  – est décalée vers les valeurs supérieures du rapport S/B par rapport à celle correspondant à  $\rho_\sigma(t)$  (en pointillés). Cela se voit également sur le second graphe qui montre cette fois-ci les fonctions de répartition des deux variables aléatoires.

L'allure des courbes concernant  $\rho_\sigma^{\max}(t_0)$  dépend de la valeur du paramètre  $N$  – puisque le nombre de valeurs dans lesquelles on cherche le maximum est proportionnel à  $N$  – et doit donc être calculé par simulations de Monte-Carlo. Une fois celles-ci produites, le seuil de détection  $\eta$  est choisi à partir du taux de fausses alarmes, donné par la relation (C.13) avec  $\gamma = \frac{4}{N}$ .



**Figure C.3:** Comparaison des distributions de probabilités et des fonctions de répartition de  $\rho_\sigma(t)$  et  $\rho_\sigma^{\max}(t)$

Ces questions sont abordées plus longuement au chapitre 5.

## Annexe D

# Calcul des fonctions d'antenne d'un détecteur

Les fonctions d'antenne  $F_+$  et  $F_\times$  traduisent la manière dont un interféromètre réagit à une onde gravitationnelle incidente, caractérisée dans la jauge TT par deux polarisations  $h_+(t)$  et  $h_\times(t)$  (cf. chapitre 1). En effet, comme le paragraphe suivant le montrera, le détecteur est sensible à une **combinaison linéaire**  $h(t)$  des deux polarisations [70]:

$$h(t) = F_+ h_+(t) + F_\times h_\times(t) \quad (\text{D.1})$$

Pour le point de vue l'analyse de données, il est important de noter que ces fonctions d'antenne sont toujours inférieures à 1 en valeur absolue, réduisant l'amplitude des signaux gravitationnels, et donc les possibilités de détection! De plus, elles dépendent de la position relative de la source par rapport à l'instrument: la forme d'une même onde gravitationnelle et son intensité varient selon l'interféromètre considéré. C'est la principale limitation aux stratégies de coïncidences en réseau considérées au paragraphe 7.3.

La connaissance précise de ces fonctions d'antenne apparaît donc obligatoire pour réaliser des simulations cohérentes d'efficacité de détection pour un détecteur ou un réseau d'antennes donné. Le point est de repérer une direction donnée du ciel indépendamment d'un interféromètre particulier et d'exprimer la manière dont une onde gravitationnelle émise par une source située dans cette région interagit avec le détecteur.

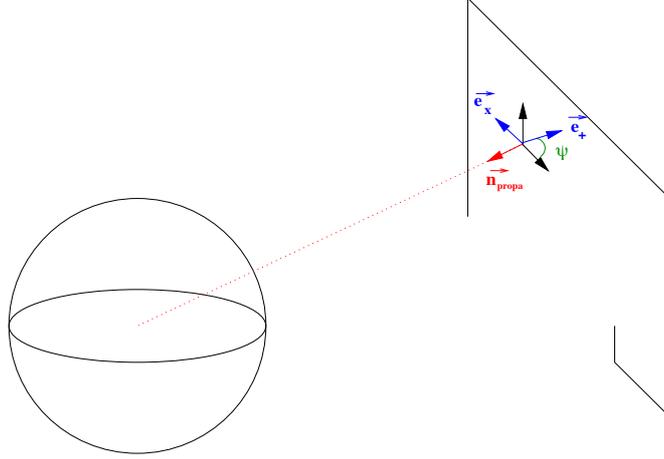
Les expressions générales de  $F_+$  et  $F_\times$  ont déjà été présentées dans la littérature [169, 187] mais sans beaucoup de détails ni d'analyse particulière. La reprise de ce calcul a été motivée par plusieurs considérations: la vérification des formules bien sûr, mais aussi – et surtout! – la nécessité de se familiariser avec leur expression et la volonté de laisser une trace exploitable de leur dérivation. C'est l'objet de la suite de cet appendice un peu technique qui présente les grandes étapes de ce calcul ainsi que les principaux résultats intermédiaires.

### D.1 Un problème géométrique

Dans la jauge TT, le repère naturel associé à une onde gravitationnelle  $\mathfrak{R}_{\text{TT}} = (\vec{e}_+, \vec{e}_\times, \vec{n}_{\text{propa}})$  (où  $\vec{n}_{\text{propa}}$  est la direction de propagation de l'onde, cf. figure D.1) est tel que la restriction  $H$  aux trois dimensions d'espace du tenseur mesurant la perturbation gravitationnelle est donnée par

$$H = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Calculer les fonctions d'antenne revient d'une part à effectuer un changement de repère pour traduire ce tenseur dans un référentiel lié au détecteur et d'autre part à calculer l'interaction entre l'onde gravitationnelle et l'interféromètre. Si  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont les deux vecteurs directeurs issus de la position de la séparatrice et orientés selon les axes des deux bras et si  $M$  est la matrice du tenseur après transformation, on a

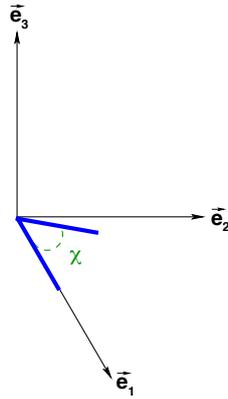

**Figure D.1:** Description du repère  $\mathfrak{R}_{TT}$ 

$$h(t) = \frac{1}{2} \left( {}^t \vec{n}_1 \cdot M \cdot \vec{n}_1 - {}^t \vec{n}_2 \cdot M \cdot \vec{n}_2 \right) \quad (\text{D.3})$$

### D.1.1 Fonctions d'antenne et matrice de rotations

On note  $\chi$  l'angle entre les deux bras de l'interféromètre (en général  $\chi = 90^\circ$  car on verra que cela correspond à l'écartement optimal). Par un choix de repère  $\mathfrak{R}_{\text{itf}} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  indiqué sur la figure D.2, l'équation (D.3) devient

$$h(t) = \frac{1}{2} \sin \chi \left[ (M_{11} - M_{22}) \sin \chi - (M_{12} + M_{21}) \cos \chi \right] \quad (\text{D.4})$$


**Figure D.2:** Définition de l'angle  $\chi$  et du repère  $\mathfrak{R}_{\text{itf}}$ 

Le changement de repère  $\mathfrak{R}_{TT} \rightarrow \mathfrak{R}_{\text{itf}}$  peut se décomposer en trois parties.

- Le passage du repère lié à l'onde gravitationnelle à celui de la sphère céleste définie par ses coordonnées **équatoriales**  $(\alpha, \delta)$  – cf. paragraphe D.1.2 ci-après. La matrice de rotation correspondante est notée  $A$ .
- Le repère équatorial ayant pour centre celui de la Terre, il faut passer à un repère centré sur le détecteur ce qui se fait à l'aide d'une nouvelle matrice de rotation<sup>1</sup> notée  $B$ .

<sup>1</sup>Pour ce calcul on néglige les translations Soleil  $\rightarrow$  Terre et centre de la Terre  $\rightarrow$  détecteur car ces distances sont minuscules par rapport à l'éloignement de la source.

- Enfin, il y a un choix d'axes liés à l'interféromètre – en particulier pour définir son *orientation* locale – correspondant à une dernière matrice  $C$ .

Notant  $P = C \times B \times A$  la matrice de passage du changement de repère complet, on a

$$M = {}^t P H P \quad (\text{D.5})$$

En utilisant la forme particulière de  $H$  – cf. équation (D.2) – on peut réécrire la relation (D.4) sous son aspect habituel :

$$h(t) = F_+ h_+(t) + F_X h_X(t) \quad \text{avec} \quad (\text{D.6})$$

$$F_+ = \sin \chi \left[ \frac{(P_{11}^2 - P_{12}^2 - P_{21}^2 + P_{22}^2)}{2} \sin \chi - (P_{11} P_{21} - P_{12} P_{22}) \cos \chi \right]$$

$$F_X = \sin \chi \left[ (P_{11} P_{12} - P_{21} P_{22}) \sin \chi - (P_{12} P_{21} + P_{11} P_{22}) \cos \chi \right] \quad (\text{D.7})$$

### D.1.2 Coordonnées équatoriales

En astronomie, il est usuel de repérer la position d'un astre sur la voûte céleste par le **système équatorial**,  $\alpha$  et  $\delta$ , la première coordonnée – appelée **ascension droite** – étant une sorte de “longitude” et la seconde – la **déclinaison** – une “latitude” comme le montre la figure D.3. La troisième direction de ce repère coïncide avec l'axe de rotation de la Terre et l'origine des ascensions droites est prise au **point vernal**, i.e. l'intersection du plan orthogonal à cet axe et du plan de l'écliptique<sup>2</sup> au *noeud ascendant*<sup>3</sup>.

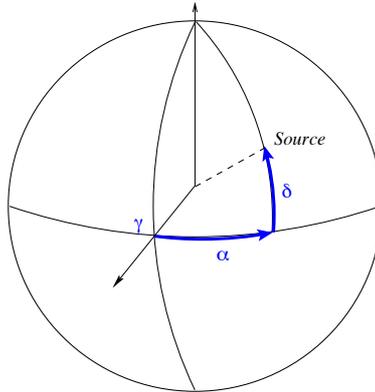


Figure D.3: Coordonnées équatoriales

Du fait de la rotation propre de la Terre, une source donnée suit une trajectoire  $\delta = \text{constante}$  au cours de la journée, uniforme en  $\alpha$  et de période égale à un jour sidéral ( $\approx 23\text{h}$  et  $56$  minutes). Les coordonnées  $(\alpha, \delta)$  d'une source donnée varient très lentement au cours du temps et sont réactualisées tous les cinquante ans, la dernière fois en l'an 2000.

### D.1.3 Angles d'Euler

La manière la plus simple de décrire une rotation à trois dimensions est d'utiliser les **angles d'Euler**  $(\phi, \theta, \psi)$ . Le passage d'un repère  $\mathfrak{R} = (x, y, z)$  à un repère  $\mathfrak{R}' = (x', y', z')$  s'effectue en 3 étapes (voir figure D.4) :

- rotation d'un angle  $\phi$  autour de  $z$  :  $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta = z)$  ;
- rotation d'un angle  $\theta$  autour de  $\xi$  :  $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (\xi' = \xi, \eta', \zeta')$  ;
- rotation d'un angle  $\psi$  autour de  $\zeta'$  :  $(\xi', \eta', \zeta') \rightarrow (x', y', z')$

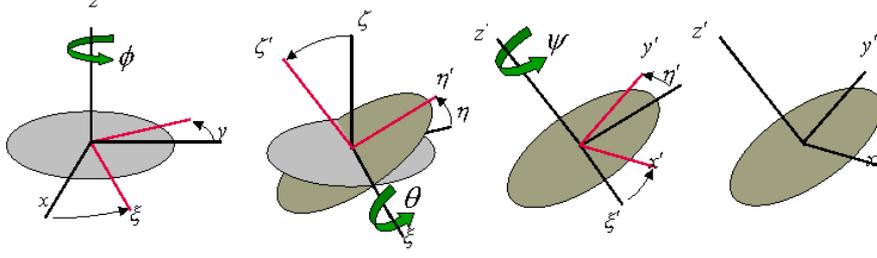


Figure D.4: Définition des angles d'Euler

En composant ces trois rotations élémentaires, l'expression générale de la matrice de rotation  $M_{\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'}$  s'obtient facilement [188] :

$$M_{\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

## D.2 Calcul & résultats

### D.2.1 Expression des matrices de rotation

La matrice  $A$  dépend de trois angles :  $\alpha$ ,  $\delta$  et l'**angle de polarisation**  $\psi$  qui définit la position des axes de polarisation de l'onde gravitationnelle (jauge TT) dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation de cette perturbation – cf. figure D.1. Avec des notations évidentes,  $\phi_A = \alpha - \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_A = \delta + \frac{\pi}{2}$  et  $\psi_A = \psi$  (!) ; l'expression de  $A$  s'obtient alors facilement en prenant la transposée de la relation (D.8) – avec les conventions choisies, le changement de repère correspond à la transformation inverse de celle présentée *supra*.

$$A = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \psi - \cos \alpha \sin \delta \sin \psi & -\sin \alpha \sin \psi - \cos \alpha \sin \delta \cos \psi & -\cos \alpha \cos \delta \\ -\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin \delta \sin \psi & \cos \alpha \sin \psi - \sin \alpha \sin \delta \cos \psi & -\sin \alpha \cos \delta \\ \cos \delta \sin \psi & \cos \delta \cos \psi & -\sin \delta \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

La matrice  $B$  dépend de deux quantités : la **latitude** du détecteur  $l$  et le **temps sidéral local**<sup>4</sup>  $T$ . Les angles d'Euler correspondants vérifient :  $\phi_B = T + \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_B = \frac{\pi}{2} - l$  et  $\psi_B = -\frac{\pi}{2}$ . D'où

$$B = \begin{pmatrix} \sin l \cos T & \sin l \sin T & -\cos l \\ -\sin T & \cos T & 0 \\ \cos l \cos T & \cos l \sin T & \sin l \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

Il reste à calculer la matrice  $C$  dont on a vu précédemment qu'elle doit dépendre de l'orientation locale du détecteur. Une façon simple de faire serait de prendre comme axes les deux bras de l'interféromètre mais ce n'est pas toujours possible car ils ne sont pas forcément à angle droit (c'est par exemple le cas de GEO600, cf. table 2.6). Aussi, on préfère utiliser l'angle  $\gamma$  entre la direction Sud-Nord locale et la bissectrice des bras – cf. figure D.5. La matrice  $C$  est simplement celle d'une rotation d'angle  $\gamma - \chi/2$  autour de la verticale locale et son expression est :

$$C = \begin{pmatrix} \cos(\gamma - \frac{\chi}{2}) & \sin(\gamma - \frac{\chi}{2}) & 0 \\ -\sin(\gamma - \frac{\chi}{2}) & \cos(\gamma - \frac{\chi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

<sup>2</sup>Plan dans lequel est située la trajectoire de la Terre dans son mouvement autour du Soleil.

<sup>3</sup>C'est-à-dire au printemps ; cette distinction est nécessaire pour séparer les deux points d'intersection.

<sup>4</sup>Le temps sidéral local  $T$  est donné par la somme de la longitude  $L$  du détecteur et d'une phase horaire prenant en compte le mouvement propre de rotation de la Terre :  $T(t) = \kappa t + T_{\text{Greenwich}}(0) - L$  avec  $\kappa \approx 1.0027379 \times 15^\circ/\text{heure}$ .  $T_{\text{Greenwich}}(0)$  est le temps sidéral de Greenwich à 0h UT et le signe moins devant  $L$  vient du fait que la longitude est comptée **positivement vers l'ouest**.

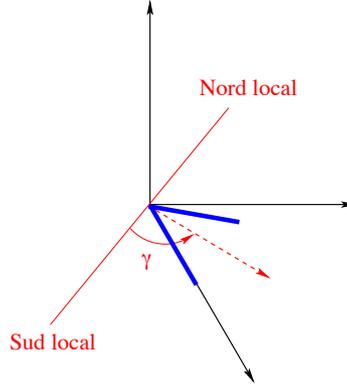


Figure D.5: Définition de l'angle  $\gamma$  : orientation locale du détecteur

## D.2.2 Expression des fonctions d'antenne

Une fois toutes les grandeurs nécessaires définies, la dérivation des expressions exactes des fonctions d'antenne est facile quoiqu'un peu pénible. Quelques phénomènes apparaissant au cours du calcul sont toutefois à mentionner.

- La dépendance en  $\chi$  disparaît à l'intérieur des crochets des expressions (D.6) et (D.7). Seul  $\sin \chi$  reste en facteur global dans les deux formules ce qui valide l'énoncé écrit au paragraphe D.1.1 selon lequel la configuration optimale est obtenue pour des bras à angle droit.
- Les variables  $T$  et  $\alpha$  n'interviennent finalement que selon une dépendance unique en  $T - \alpha$ . On est donc conduit à introduire **l'angle horaire local** d'une source

$$\mathfrak{H}(t) = T(t) - \alpha = \kappa t - (\alpha + L) + T_{\text{Greenwich}}(0) \quad (\text{D.12})$$

- l'angle de polarisation apparaît uniquement sous la forme de l'angle double  $2\psi$  et l'expression des fonctions d'antenne peut être factorisée sous la forme :

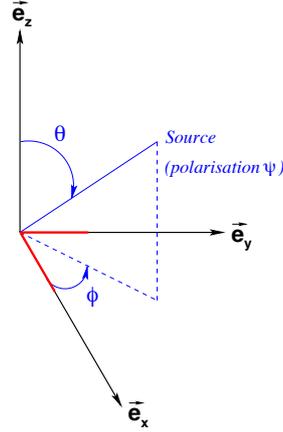
$$\begin{pmatrix} F_+(t) \\ F_\times(t) \end{pmatrix} = \sin \chi \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ -\sin 2\psi & \cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (\text{D.13})$$

Leur complexité est donc entièrement contenue dans les deux fonctions  $a(t)$  et  $b(t)$  qui dépendent de la position relative de la source par rapport au détecteur ainsi que l'orientation de celui-ci. Leur expression complète est présentée ci-dessous :

$$\begin{aligned} a(t) &= -\frac{1}{16} \sin 2\gamma (3 - \cos 2l)(3 - \cos 2\delta) \cos 2\mathfrak{H}(t) - \frac{1}{4} \cos 2\gamma \sin l (3 - \cos 2\delta) \sin 2\mathfrak{H}(t) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sin 2\gamma \sin 2l \sin 2\delta \cos \mathfrak{H}(t) - \frac{1}{2} \cos 2\gamma \cos l \sin 2\delta \sin \mathfrak{H}(t) - \frac{3}{4} \sin 2\gamma \cos^2 l \cos^2 \delta \\ b(t) &= -\cos 2\gamma \sin l \sin \delta \cos 2\mathfrak{H}(t) + \frac{1}{4} \sin 2\gamma (3 - \cos 2l) \sin \delta \sin 2\mathfrak{H}(t) \\ &\quad - \cos 2\gamma \cos l \cos \delta \cos \mathfrak{H}(t) + \frac{1}{2} \sin 2\gamma \sin 2l \cos \delta \sin \mathfrak{H}(t) \end{aligned}$$

## D.3 Expression des fonctions d'antenne en fonction des angles polaires d'un détecteur

Dans le cas où les bras du détecteurs sont à angle droit (ce qui permet de les utiliser comme axes de repère), on peut obtenir une expression beaucoup plus simple des fonctions d'antenne en fonction de deux angles sphériques  $(\theta, \phi)$  – cf. figure D.6 – et de l'angle de polarisation  $\psi$ . Le défaut majeur de cette approche est bien évidemment le fait qu'elle ne s'étend pas simplement à un réseau de détecteurs par manque de correspondance simple entre  $(\theta, \phi)$  et la position de la source dans le



**Figure D.6:** Définition des deux angles sphériques utilisés pour repérer la direction d'une source par rapport à un détecteur donné.

ciel. Néanmoins, elle permet d'obtenir facilement des résultats de base sur les fonctions d'antenne et sur leur distribution.

Un calcul similaire à celui présenté précédemment dans un cadre plus général donne les résultats suivants [70] :

$$F_+ = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos(2\phi) \cos(2\psi) - \cos(\theta) \sin(2\phi) \sin(2\psi) \quad (\text{D.14})$$

$$F_\times = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos(2\phi) \sin(2\psi) + \cos \theta \sin(2\phi) \cos(2\psi) \quad (\text{D.15})$$

On peut noter que la structure en  $2\psi$  est identique à celle de l'équation (D.13).

Sur ces formules il est assez clair que les fonctions d'antenne varient entre -1 et 1 : en effet, pour les rendre maximales il faut faire le choix de  $\cos \theta = \pm 1$  et on a alors

$$\begin{aligned} F_+ &= \cos [ 2 (\phi \pm \psi) ] \\ F_\times &= \sin [ 2 (\psi \pm \phi) ] \end{aligned}$$

Cette remarque montre que la meilleure réponse à un signal gravitationnel est obtenue pour une **incidence normale** : direction de la source perpendiculaire au plan du détecteur.

Une manière commode de caractériser la réponse angulaire d'un détecteur est de s'affranchir de la dépendance en l'angle de polarisation  $\psi$ . Pour cela, on suppose sa distribution uniforme et on moyenne le carré des fonctions d'antenne – un moyennage direct donnerait 0. On a

$$\overline{F_+^2}^\psi = \overline{F_\times^2}^\psi$$

et on note  $\overline{F}$  la racine carrée de cette moyenne commune – appelée **fonction d'antenne moyenne** – et qui est donnée par

$$\overline{F} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta)^2 \cos^2(2\phi) + \cos^2 \theta \sin^2(2\phi) \right]} \quad (\text{D.16})$$

$$= |\sin \chi| \sqrt{\frac{a^2(t) + b^2(t)}{2}} \quad (\text{D.17})$$

Le choix de  $\cos \theta = \pm 1$  donne  $\overline{F} = 1/\sqrt{2}$ .

A partir de cette expression, on peut voir dans quelles configurations le détecteur est insensible au passage de l'onde gravitationnelle, i.e.  $\overline{F} = 0$ . Cela correspond à  $\cos \theta = 0$  (perturbation contenue dans le plan du détecteur) et à  $\cos(2\phi) = 0$ . Cette dernière condition se réécrit

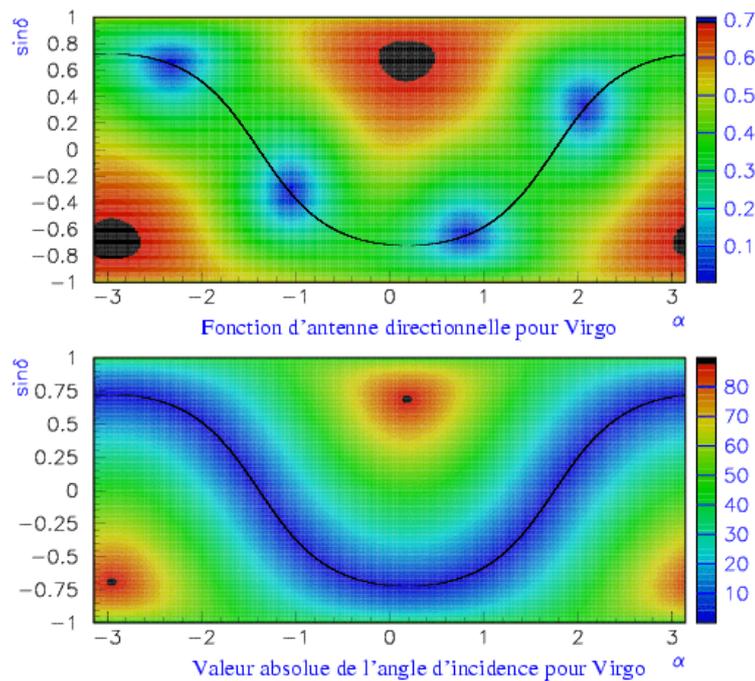
$\phi = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\pi}{2} \right]$ , on a finalement une fonction d'antenne nulle lorsque l'onde arrive le long de la **bissectrice de l'angle formé par les bras de l'interféromètre** ou dans les trois directions se déduisant de celle-ci par des rotations de  $90^\circ$ . Ces résultats découlent entièrement du caractère transverse et quadrupolaire de l'onde gravitationnelle.

## D.4 Distributions spatiale et statistique des fonctions d'antenne

### D.4.1 Un outil de visualisation : les cartes du ciel

Le paragraphe D.3 a permis d'établir les premiers résultats concernant les fonctions d'antenne sur un exemple simple. Ici, le cas général est traité (lien entre la direction de la source et ses coordonnées équatoriales). Une manière commode de présenter la dépendance d'une quantité en  $(\alpha, \delta)$  est d'utiliser un graphique bidimensionnel appelé **carte** sur lequel une direction donnée du ciel est repérée par les deux coordonnées équatoriales  $\alpha$  et  $\sin \delta$  – projection uniforme de la sphère céleste – et où un code de couleur indique la valeur de l'expression au point considéré.

Il a été établi précédemment que la fonction de réponse d'un détecteur est liée à l'angle d'incidence entre le plan qui le contient et la direction de la source dans le ciel. Néanmoins, ce n'est pas la seule dépendance : l'orientation relative du détecteur joue également. La figure D.7 présente sous forme de cartes une vue synthétique de ces relations pour Virgo.



**Figure D.7:** Cartes du ciel associées au détecteur Virgo : en haut, celle de la fonction d'antenne moyenne  $\overline{F}$ , en bas celle de l'angle d'incidence entre la direction de la source et le plan de l'interféromètre. L'incidence normale est optimale tandis que le détecteur est aveugle dans quatre directions situées dans son plan.

La partie supérieure de la figure montre la dépendance de la fonction d'antenne moyenne  $\overline{F}$  en  $(\alpha, \sin \delta)$ . On peut voir que celle-ci présente deux zones de maximum et quatre de minimum (où  $\overline{F} = 0$  : le détecteur est aveugle !), ces dernières étant incluses dans une large "vallée" où  $\overline{F}$  est assez faible. La distribution de la fonction d'antenne moyenne est loin d'être uniforme et les valeurs les plus probables sont assez faibles, ce que confirmera le paragraphe suivant.

Dans la partie inférieure est représentée la carte de la valeur absolue<sup>5</sup> de l'angle d'incidence

<sup>5</sup>Les fonctions d'antenne sont symétriques par rapport au plan du détecteur.

entre le plan du détecteur et la direction de la source. La corrélation des deux cartes est évidente : les maxima correspondent à une incidence normale et les minima à une incidence nulle. La courbe noire superposée aux deux graphiques montre les directions contenues dans le plan du détecteur, en particulier les quatre pour lesquelles l'interféromètre est aveugle.

L'ensemble de ces caractéristiques est commun à tous les détecteurs interférométriques quelles que soient leurs positions sur la Terre. Par contre, la répartition des valeurs dans le plan  $(\alpha, \sin \delta)$  change selon le détecteur considéré : en particulier, les "pics" et les "vallées" ne coïncident en général pas ce qui a des conséquences importantes pour l'études des détections en réseau – cf. paragraphe 7.3.

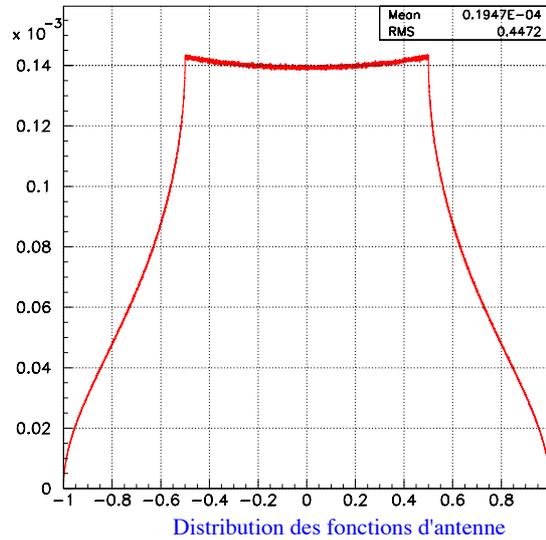
### D.4.2 Distribution statistique

Dans ce paragraphe, on suppose une répartition **uniforme** des sources dans le ciel, ce qui revient à traiter  $\alpha$  et  $\sin \delta$  comme des variables uniformes, respectivement dans  $[-\pi; \pi]$  et  $[-1; 1]$ . Les moyennages sur ces variables s'ajoutent à celui déjà effectué précédemment sur  $\psi$ .

Les deux fonctions d'antenne  $F_+$  et  $F_\times$  ont la même distribution de probabilité.  $\overline{F_+} = \overline{F_\times} = 0$  et l'écart type commun  $\sigma_F$  est donné par :

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0.4472 \quad (\text{D.18})$$

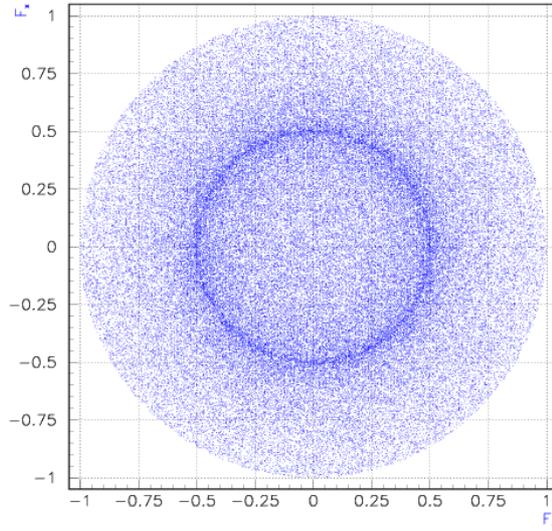
Cette distribution est représentée sur la figure D.8. Symétrique par rapport à 0, elle est presque uniforme sur l'intervalle  $[-0.5; 0.5]$  avant de décroître rapidement vers les valeurs extrêmes -1 et 1.



**Figure D.8:** Distribution statistique des fonctions d'antenne pour des sources uniformément réparties dans le ciel

La variance  $\sigma_F^2$  est égale à la valeur moyenne de  $\overline{F^2}$ .

Pour conclure ce paragraphe, la figure D.9 présente les corrélations entre  $F_+$  et  $F_\times$  pour une distribution de sources uniforme dans le ciel. Du fait de leur dépendance en l'angle de polarisation  $\psi$  – cf. équation (D.13) –, les couples de valeur se distribuent sur des cercles concentriques, correspondants chacun à une valeur fixée de  $\sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$  et parcourus lorsque  $\psi$  varie entre  $-\pi$  et  $\pi$ . La distribution radiale des points est reliée à celle de  $\sqrt{2} \overline{F}$  dont la valeur la plus probable est 1/2 ce qui explique l'accumulation de points à cet endroit.



**Figure D.9:** Correlation entre les valeurs de  $F_+$  et de  $F_x$  pour une répartition de sources uniforme dans le ciel. Par suite du moyennage sur l'angle de polarisation  $\psi$ , les points  $(F_+, F_x)$  se répartissent de manière concentrique.

### D.4.3 Étude des fonctions $a$ et $b$

Les fonctions  $a$  et  $b$  dérivées au paragraphe D.2.2 contiennent l'ensemble de l'information purement "géométrique" décrivant l'interaction entre un interféromètre et une source. Au contraire des distributions présentées précédemment, elles sont propres à chaque détecteur. Toujours en considérant une distribution de sources uniforme, on peut calculer analytiquement les valeurs moyennes et écart-types des deux fonctions  $a$  et  $b$ .

- Moyennes :

$$\bar{a} = -\frac{1}{2} \sin(2\gamma) \cos^2 l \quad (\text{D.19})$$

$$\bar{b} = 0 \quad (\text{D.20})$$

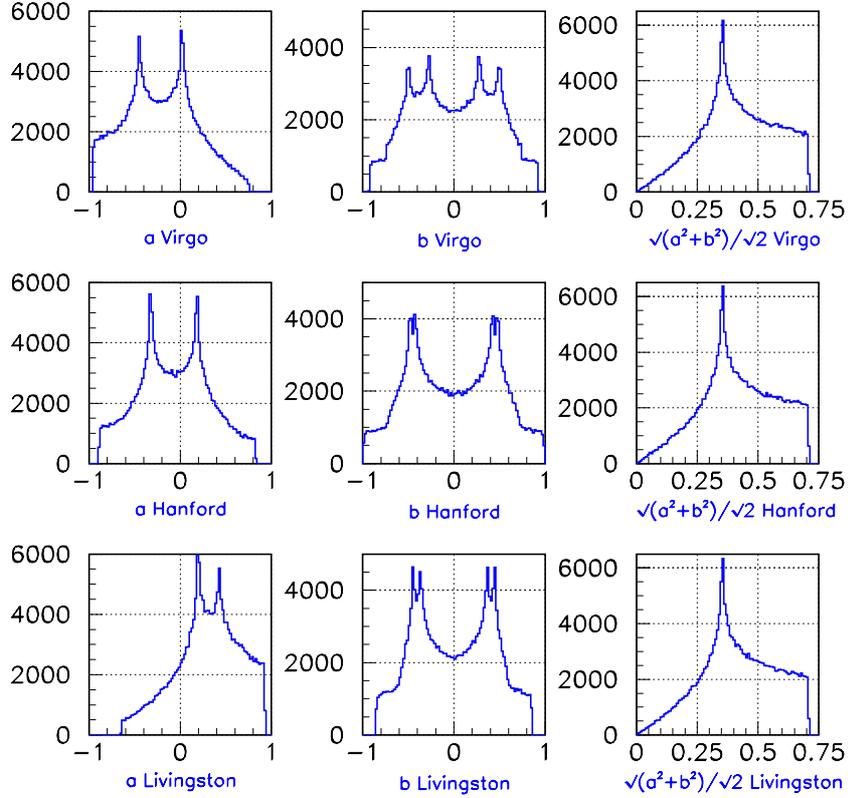
- Écart-types :

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{15} \left[ \left( \frac{7}{32} (3 - \cos(2l))^2 + \frac{\sin^2(2l)}{4} \right) \sin^2(2\gamma) + \left( \frac{7}{2} \sin^2 l + \cos^2 l \right) \cos^2(2\gamma) \right] + \frac{\cos^4 l \sin^2(2\gamma)}{20}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{6} \left[ (1 + \cos^2 l) \cos^2(2\gamma) + \left[ \left( \frac{3 - \cos(2l)}{4} \right)^2 + \frac{\sin^2(2l)}{2} \right] \sin^2(2\gamma) \right]$$

Par simulation, on obtient leurs distributions de probabilité, présentées sur la figure D.10 pour trois détecteurs, Virgo, LIGO Hanford et LIGO Livingston ; comme mentionné ci-dessus, les formes varient. L'intérêt des calculs analytiques des premiers moments de  $a$  et de  $b$  est en lui-même assez limité, si ce n'est pour vérifier que les diverses distributions ont été correctement générées. La table D.1 présente une comparaison des valeurs moyennes et des RMS issus du calcul et des simulations.

Bien que les distributions des fonctions  $a(t)$  et  $b(t)$  diffèrent selon le détecteur, elles ont pourtant un lien entre-elles, illustré dans la troisième colonne de la figure D.10 et déjà visible à l'équation (D.17) : la fonction d'antenne moyenne  $\bar{F}$  construite à partir de  $a(t)$  et de  $b(t)$  a une distribution de probabilité invariante. C'est donc bien une quantité importante pour décrire de manière générale l'interaction entre un détecteur et une onde gravitationnelle.



**Figure D.10:** Distribution des fonctions  $a(t)$  et  $b(t)$  pour les détecteurs Virgo, LIGO Hanford et LIGO Livingston. La distribution des sources est supposée uniforme sur la sphère céleste. Si les représentations graphiques diffèrent selon les détecteurs pour ces deux fonctions (deux premières colonnes de la figure), la distribution de la fonction d'antenne moyennée  $\bar{F}$  – définie à l'équation (D.17) – est identique dans les trois cas (colonne de droite).

Détecteur	Grandeur	Valeur obtenue par simulation	Valeur analytique
Virgo	$\bar{a}$	$-0.2080 \pm 8.8 \cdot 10^{-4}$	-0.2092
	$\sigma_a$	$0.3918 \pm 6.2 \cdot 10^{-4}$	0.3915
	$\bar{b}$	$0.0007 \pm 1.0 \cdot 10^{-3}$	0
	$\sigma_b$	$0.4507 \pm 7.1 \cdot 10^{-4}$	0.4505
LIGO Hanford	$\bar{a}$	$-0.0660 \pm 8.8 \cdot 10^{-4}$	-0.0670
	$\sigma_a$	$0.3930 \pm 6.2 \cdot 10^{-4}$	0.3937
	$\bar{b}$	$-0.0005 \pm 1.1 \cdot 10^{-3}$	0
	$\sigma_b$	$0.4907 \pm 7.8 \cdot 10^{-4}$	0.4905
LIGO Livingston	$\bar{a}$	$0.2997 \pm 7.9 \cdot 10^{-4}$	0.2999
	$\sigma_a$	$0.3528 \pm 5.6 \cdot 10^{-4}$	0.3532
	$\bar{b}$	$0.0002 \pm 9.6 \cdot 10^{-4}$	0
	$\sigma_b$	$0.4306 \pm 6.8 \cdot 10^{-4}$	0.4305

**Tableau D.1:** Comparaison calcul/simulation des valeurs des moyennes et des écarts-types des fonctions  $a$  et  $b$  pour trois détecteurs: Virgo, LIGO Hanford et LIGO Livingston.

## Annexe E

# Améliorations possibles de la sensibilité du détecteur Virgo

Comme l'a montré la section 2.2 qui présente le détecteur Virgo, sa sensibilité en fréquence peut être décomposée en trois régions, chacune contrainte par un bruit différent :

- *le domaine des basses fréquences* ( $\leq 4\text{-}10$  Hz), dominé par le **bruit sismique** – on parle de “mur” – et inaccessible à la détection malgré les superatténuateurs ;
- *les fréquences intermédiaires* ( $\sim 20$  Hz  $\rightarrow$  1 kHz) où le **bruit thermique** du mode pendule puis du miroir est dominant ;
- *les hautes fréquences* (1 kHz  $\rightarrow$  10 kHz) où le **bruit de comptage de photons** est prépondérant.

Dès lors, aucune amélioration de la sensibilité de Virgo ne peut être globale : selon la partie du détecteur modifiée, le gain sera limité à une gamme de fréquence donnée. Celle-ci devant dans la pratique correspondre à une région riche en sources potentielles ou confirmées d'ondes gravitationnelles, les activités actuelles de recherche se concentrent sur les fréquences intermédiaires, c'est-à-dire sur la diminution des bruits thermiques.

Bien que des projets de détecteurs **cryogéniques** existent déjà [189], on se limitera ici à la présentation de deux améliorations possibles : l'utilisation de **fil de quartz monolithiques** et de **miroirs en YAG (saphir)**. La comparaison des courbes de sensibilité et des RMS intégrés par bandes de fréquence permettra de mesurer le gain apporté par ces innovations.

Ces deux voies sont actuellement étudiées au sein de la *R&D* Virgo ; néanmoins, elles présentent des niveaux de développement très différents. Si la faisabilité de la seconde n'est pas encore assurée – la difficulté majeure est d'obtenir des substrats de taille suffisante pour les miroirs –, la première a déjà débouchée sur des applications concrètes [190].

Les pertes des fils de quartz sont deux ordres de grandeur plus faibles que celles de ceux d'acier actuellement utilisés et leur tension de rupture est en moyenne plus élevée. Cependant, une partie de ce dernier gain est annulée par la nécessité d'utiliser un coefficient de sécurité plus contraignant sur la tension maximale admissible à cause de la plus grande dispersion des mesures. De plus, des questions techniques restent à résoudre pour tenir compte de l'extrême fragilité des fils de quartz : comment les fixer au miroir et quelle procédure utiliser lors du montage de l'ensemble dans la tour ? Même s'il apparaît probable que les fils d'acier seront utilisés pour la première génération de Virgo, on peut penser que les suspensions monolithiques pourront être utilisées à moyenne échéance, par exemple lors d'une *upgrade* général du détecteur.

On fait le choix d'un modèle simplifié du bruit de Virgo (développé par exemple dans [41]), valable pour  $f \geq f_{\text{sismique}}$  :

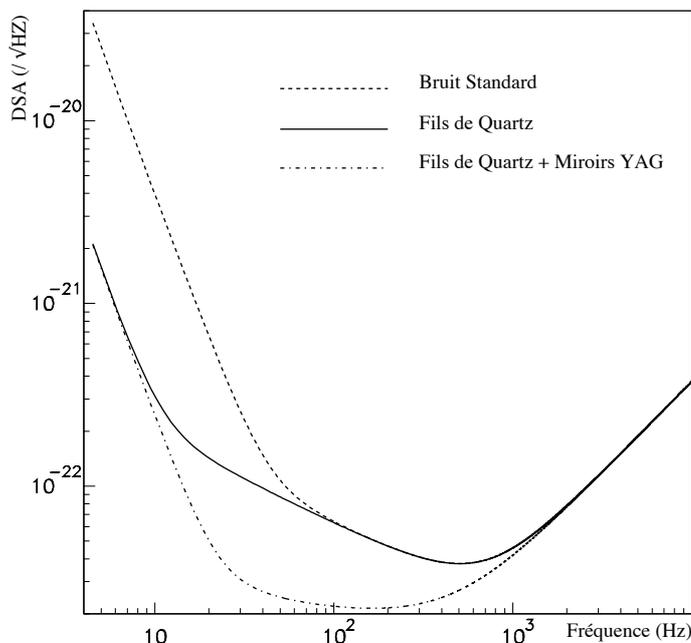
$$S_{\text{Virgo}}(f) = \frac{S_{\text{pendule}}}{f^5} + \frac{S_{\text{miroir}}}{f} + S_{\text{shot}} \left[ 1 + \left( \frac{f}{f_{\text{cut}}} \right)^2 \right] \quad (\text{E.1})$$

Le premier terme de la somme correspond au bruit thermique pendulaire, le second au bruit thermique des miroirs et le troisième au shot-noise. Le tableau E.1 présente les valeurs retenues

ANNEXE E. AMÉLIORATIONS POSSIBLES DE LA SENSIBILITÉ DU DÉTECTEUR VIRGO

Configuration	$S_{\text{pendule}} \text{ (Hz}^4\text{)}$	$S_{\text{miroir}}$	$S_{\text{shot}} \text{ (Hz}^{-1}\text{)}$	$f_{\text{cut}} \text{ (Hz)}$
Standard	$1.2 \times 10^{-36}$	$3.6 \times 10^{-43}$	$3.5 \times 10^{-46}$	500
Fils de Quartz	$4.5 \times 10^{-39}$	$3.6 \times 10^{-43}$	$3.5 \times 10^{-46}$	500
Fils de Quartz + Miroirs YAG	$4.5 \times 10^{-39}$	$1.2 \times 10^{-44}$	$3.5 \times 10^{-46}$	500

**Tableau E.1:** Paramètres des modèles de bruit comparés; données tirées de [42].



**Figure E.1:** Comparaison des densités spectrales d'amplitudes des trois modèles de bruit.

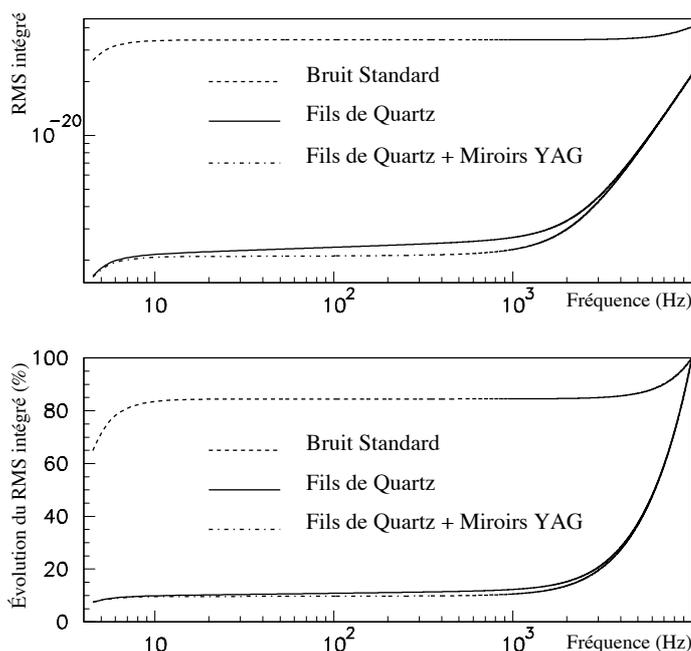
pour les coefficients de l'équation (E.1) pour les trois configurations comparées: standard, avec les fils de quartz et avec les fils de quartz et les miroirs en YAG.

La figure E.1 montre une comparaison entre les densités spectrales d'amplitude correspondant aux trois modèles entre 4 Hz (valeur classique de  $f_{\text{sismique}}$ ) et 10 kHz. Le gain procuré par l'utilisation des fils de quartz fait effet jusqu'à 60 Hz – fréquence où le bruit thermique du miroir redevient prépondérant – tandis que les miroirs en YAG diminuent considérablement ce bruit de 10 Hz à 1 kHz: à 100 Hz, le bruit est diminué d'un facteur 3 environ.

Néanmoins, ces améliorations de sensibilité portent sur une plage de fréquence qui ne représente qu'une fraction (10% environ ou deux décades sur trois selon la manière de raisonner) de la bande de détection de Virgo; pour quantifier leur impact, il convient de comparer les RMS des différents modèles, ce qui peut se faire de manière globale ou dans une bande de fréquence particulière. On verra que c'est cette seconde approche qui fournit le bon indicateur permettant de quantifier le mieux le gain en sensibilité.

Le premier graphe de la figure E.2 montre l'évolution du RMS calculé à partir de  $f_{\text{sismique}}$  en fonction de la borne supérieure d'intégration. On voit que le gain apporté par l'utilisation des fils en quartz est significatif par rapport au bruit standard, tandis que la différence apparaît assez faible au niveau du RMS total entre les solutions quartz et quartz + YAG. Cela est confirmé par les valeurs présentées dans la table E.2.

Utiliser des fils de quartz pour suspendre les miroirs permet de gagner un facteur 2 sur le RMS tandis que l'ajout des miroirs en YAG ne donne qu'un gain supplémentaire inférieur à 1%. Cette différence se comprend à l'aide des deux graphes de la figure E.2: la contribution du bruit thermique est très majoritaire pour le RMS du modèle standard ( $\sim 85\%$ ) tandis que les deux autres configurations sont dominées par le *shot-noise* ( $\sim 90\%$ ). L'amélioration apportée par les



**Figure E.2:** Évolution des RMS des modèles de bruit : en haut, valeurs en fonction de la borne supérieure d'intégration en fréquence ; en bas, répartition sur la bande de détection de Virgo.

Configuration	Standard	Fils de Quartz	Fils de Quartz + Miroirs YAG
RMS	$4.06 \cdot 10^{-20}$	$2.18 \cdot 10^{-20}$	$2.18 \cdot 10^{-20}$

**Tableau E.2:** RMS intégré sur la bande de fréquence de détection pour les trois configurations comparées.

miroirs en YAG est ainsi masquée dans le calcul du RMS ; par contre, elle apparaît très clairement si on se limite à l'intervalle [10 Hz ; 1 kHz] où les deux DSA diffèrent (cf. figure E.1) comme le montre la table E.3 : l'utilisation du YAG pour les substrats des miroirs diminue ce RMS "partiel" de 40% par rapport à la configuration avec simplement les fils de quartz ce qui représente un gain total supérieur à 5 par rapport au bruit standard.

Configuration	Standard	Fils de Quartz	Fils de Quartz + Miroirs YAG
RMS	$5.70 \cdot 10^{-21}$	$1.61 \cdot 10^{-21}$	$9.90 \cdot 10^{-22}$
Gain		72%	40% supplémentaires

**Tableau E.3:** RMS intégrés entre 10 Hz et 1 kHz.

Ces deux exemples d'amélioration possible de la sensibilité du détecteur Virgo sont riches de perspective pour ce qui est de l'analyse des données : en effet, le nombre supplémentaire d'événements détectables est en gros proportionnel au cube du gain sur le bruit (en supposant une répartition de sources uniforme en volume). Si Virgo possède un gros potentiel de développements futurs, ceux-ci nécessitent au préalable un gros travail de recherche-développement et donc devraient s'étendre sur de nombreuses années.



# Bibliographie

- [1] A. Einstein, *Communication à l'Académie des Sciences de Prusse le 25 Novembre 1915* Sitzungsberg. Preuss. Akad. Wiss. p. 844; article publié dans **Annalen der Physik**, **49**, p. 769-882 (1916). Traduction française dans F. Balibar et al. **Albert Einstein, Oeuvres Choiesies, tome 2.** (Editions du Savoir, Seuil CNRS).
- [2] A. Einstein, *Ann. Physik*, **17** 891 (1905); **18** 639 (1905). Traduction française dans F. Balibar et al. *op. cité*.
- [3] S. Weinberg, **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity** (John Wiley & Sons, New York, 1972).
- [4] A. Einstein, *article non publié de 1919*; cité dans Jun Ishiwara, **Einstein Koën-Roku** (Tokyo-Tosho 1977) et dans F. Balibar et al. *op. cité*, p. 83-84.
- [5] V.B. Braginsky & V.I. Panov, *Sov. Phys. JETP* **34**, 463-466 (1972).
- [6] Y. Su, B.R. Heckel, E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, M. Harris, G.H. Smith and H.E. Swanson, *Phys. Rev. D* **50** 3614 (1994).
- [7] G.L. Smith, C.D. Hoyle, J.H. Gundlach, E.G. Adelberger, B.R. Heckel, and H.E. Swanson, *Phys. Rev. D* **61** 022001 (2000).
- [8] Citation de K. S. Thorne reprise dans plusieurs de ses articles.
- [9] S.M. Carroll, **Lecture Notes on General Relativity**, Institute for Theoretical Physics, University of California (1997); *preprint gr-qc 9712019*.
- [10] I.R. Kenyon, **General Relativity** (Oxford University Press, 1995).
- [11] R. Wald, **General Relativity** (Chicago 1984).
- [12] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (Les Fondements de la Physique) Conférence devant la Société royale des Sciences à Göttingen le 16 novembre 1915... soit 9 jours avant Einstein. Publication dans **Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen** (1915), p. 395.
- [13] B.F. Schutz, **A first course in General Relativity** (Cambridge Press 1985).
- [14] A.V. Filippenko, **Einstein's Biggest Blunder? High-Redshift Supernovae and the Accelerating Universe**, preprint *astro-ph/0109399*.
- [15] A. S. Eddington, *The Observatory*, Vol. **42** 119-122 (1919).  
A. S. Eddington, *The Observatory*, Vol. **43** 228-229 (1920).
- [16] "j'ai été d'abord conduit à supposer que la propagation de la gravitation n'est pas instantanée mais se fait à la vitesse de la lumière ... Quand nous parlerons donc de la position ou de la vitesse du corps attirant, il s'agira de cette position ou de cette vitesse à l'instant où l'*onde gravifique* est partie de ce corps; ..." [italiques de l'auteur]  
H. Poincaré, C.R. Acad. Sci. Paris, **140**, 1504 (1905), cité dans T. Damour, *Theoretical Aspects of Gravitational Radiation* dans **General Relativity and Gravitation (GR 14)** (World Scientific 1997).
- [17] A. Einstein, **Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte** p. 154-167 (1918). Traduction française dans F. Balibar et al. **Albert Einstein, Oeuvres Choiesies, tome 3.** (Editions du Savoir, Seuil CNRS).

- 
- [18] F.A.E. Pirani, *Phys. Rev.* **105** 1089-1099 (1957).
- [19] R.A. Isaacson, *Phys. Rev.* **166** 1263-1271 (1968).
- [20] R.A. Isaacson, *Phys. Rev.* **166** 1272-1280 (1968).
- [21] T. Damour, *Phys. Rev. Lett.* **51** 1019 (1983).
- [22] S. V. Babak, L. P. Grishchuk, *Phys. Rev. D* **61** 024038 (2000).
- [23] R.A. Hulse and J.H. Taylor, *Astrophys. Jour.* **195** L51-L53 (1975).
- [24] T. Damour and J.H. Taylor, *Astrophys. Jour.* **366** 501-511 (1991).
- [25] P.C. Peters and J. Mathews, *Phys. Rev.* **131** 435-440 (1963).
- [26] C.M. Will, **The Confrontation between General Relativity and Experiment**, *Living Rev.Rel.* **4** [ preprint *gr-qc/0103036*] (2001).
- [27] Discours de réception du prix Nobel, 1993  
R.A. Hulse, *Rev. Mod. Phys.* **66** 699 (1994).  
J.H. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **66** 711 (1994).
- [28] A. Wolszczan, *Nature* **350** 688 (1991).
- [29] I.H. Stairs *et al.* **Measurement of Relativistic Orbital Decay in the PSR 1534+12 Binary System** (1997), preprint *astro-ph/9712296* submitted to *ApJ*.
- [30] V.M. Kaspi, *Relativistic Gravity and Binary Radio Pulsars Proceedings of the 8th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics* Editions C.P. Burgess, R.C. Myers (1999).
- [31] S. Bonazzola and E.ourgoulhon, *Physics of sources of gravitationnal waves, International Summer School on Experimental Physics of Gravitational Waves*, Ed. M. Barone *et al.*, p. 62-105 (2000).
- [32] The Virgo Collaboration, **Virgo Final Design Report** (1997), non publié.
- [33] B.F. Schutz, *Low-Frequency Sources of Gravitational waves: a tutorial Proceedings of the 1997 Alpbach Summer School on Fundamental Physics in Space*, Édition A. Wilson, ESA (1997).
- [34] The LISA collaboration, **Pre-Phase A Report**, 2<sup>nd</sup> Edition (1998).
- [35] Ph. Canitrot, **Détection des ondes gravitationnelles émises par des étoiles binaires compactes spiralantes avec l'interféromètre Virgo**, *Thèse de l'Université Paris-Sud, centre d'Orsay* (2001), non publiée.
- [36] L. Blanchet, *Gravitational Radiation from Relativistic Sources, Proceedings of the Les Houches School* (1996) *gr-qc/9607025*
- [37] L. Blanchet, T.Damour and B.R. Iyer, *Phys. Rev. D* **51** 5360 (1995).
- [38] L. Blanchet, G. Faye, B. Ponsot, *Phys. Rev. D* **58** 124002 (1998).
- [39] L. Blanchet, G. Faye, B.R. Iyer, B. Jogueet, **Gravitational-Wave Inspiral of Compact Binary Systems to 7/2 Post-Newtonian Order**, submitted to *Phys. Rev. Lett.* preprint *gr-qc/0105099*.
- [40] T.Damour, B.R. Iyer and B.S. Sathyaprakash, *Phys. Rev. D* **62** 084036 (2000).
- [41] E. Cuoco *et al.*, *Class. Quant. Grav.* **18** 1727-1752 (2001).
- [42] P. Canitrot, L. Milano, A. Vicere, **Computational costs for coalescing binaries detection in VIRGO**, *Note Virgo VIR-NOT-PIS-1390-149* (2000) *intégralement reproduite dans [35]*.
- [43] B.J. Owen, *Phys. Rev. D* **53** 6749 (1996).
-

- [44] B.J. Owen and B.S. Sathyaprakash, *Phys. Rev. D* **60** 022002 (1999).
- [45] S.D. Mohanty, *Phys. Rev. D* **57** 122002 (1998).
- [46] T. Tanaka, H. Tagoshi, *Phys. Rev. D* **62** 082001 (2000).
- [47] The TAMA Collaboration, *Phys. Rev. D* **63** 062001 (2001).
- [48] A.S. Sengupta *et al.*, preprint gr-qc/0109088 (2001).
- [49] A. Buonanno, T. Damour, *Phys. Rev. D* **62** 064015 (2000).
- [50] W.H. Press, *Astrophys. Jour. Lett.* **170**, L105 (1971).
- [51] A. Teukolsky and W.H. Press, *Astrophys. Jour.* **193**, 443 (1974).
- [52] F. Echevarria, *Phys. Rev. D* **40** (1989) 3194.
- [53] S.L. Detweiler, *Astrophys. Jour.* **239**, 292 (1980).
- [54] E.W. Leaver, *Proc. R.Soc. London A* **402**, 285 (1986).
- [55] S. Bonazzola, & J.-A. Marck, *Astron. Astrophys.* **267** 623 (1993).
- [56] S. Bonazzola, & J.-A. Marck, *Ann. Rev. Part. Sci.* **45** 635 (1994).
- [57] R. Mönchneyer, G. Schaeffer, E. Müller & R.E. Kates, *Astron. Astrophys.* **246** 417 (1991).
- [58] N. Panagia, *Supernovae, International Summer School on Experimental Physics of Gravitational Waves*, Ed. M. Barone *et al.*, p. 106-119 (2000).
- [59] F. Cavalier, **Le Contrôle Global de Virgo**, *Thèse d'Habilitation à diriger des Recherches, Université Paris-Sud LAL 01-69* (2001), disponible sur le WEB à l'adresse :  
[www.lal.in2p3.fr/presentation/bibliotheque/publications/2001/web/habilitation.html](http://www.lal.in2p3.fr/presentation/bibliotheque/publications/2001/web/habilitation.html)
- [60] K.S. Hirata *et al.*, *Phys. Rev. D* **38** 448 (1998).
- [61] S. Yamada & K. Sato, *Astrophys. Jour.* **450** 245 (1995).
- [62] I.A. Bonnel, J.E. Pringle, *Mon. Not. R. Ast. Soc.* **273** 212 (1995).
- [63] T. Zwerger & E. Müller, *Astron. Astrophys.* **320** 209 (1997).
- [64] R. B. Tully, **Nearby Galaxies Catalog**, Cambridge University Press (1988).
- [65] N.Arnaud *et al.*, *Phys. Rev. D* **64** 033010 (2002).
- [66] N. Andersson, *Astrophys. Jour.* **502** 708 (1999).
- [67] B. Owen *et al.*, *Phys. Rev. D* **58** 084020 (1998).
- [68] L. Bildsen, *Astrophys. Jour.* **501** L89 (1998).
- [69] M. Zimmermann and E. Szedenits Jr, *Phys. Rev. D* **20** 351-355 (1979).  
M. Zimmermann, *Phys. Rev. D* **21** 891-898 (1980).
- [70] K.S. Thorne, *Gravitational Radiation*, dans **300 Years of Gravitation**, Eds. S.W.Hawking, W.Israel (Cambridge University Press, 1987).
- [71] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, *Astron. Astrophys.* **312** 675-690 (1996).
- [72] P.R. Brady, T. Creighton, C. Cutler and B.F. Schutz *Phys. Rev. D* **57** 2101-2116 (1998).
- [73] K.S. Thorne, *Probing Black Holes and Relativistic Stars with Gravitational Waves*, soumis pour publication dans le livre **Black Holes and Relativistic Stars, Proceedings of a Conference in Memory of S. Chandrasekhar**, Ed. R. M. Wald (University of Chicago Press, Chicago) preprint *gq-qc/9706079*
- [74] P.R. Brady, T. Creighton, *Phys. Rev. D* **61** 082001 (2000).

- 
- [75] M.A. Papa *et al.*, *Searching for continuous gravitational wave signals – The hierarchical Hough transform algorithm* –, communication donnée au Workshop **Gravitational Waves: A Challenge to Theoretical Astrophysics** (5-9 juin 2000).
- [76] T. Regimbau, J.A. de Freitas Pacheco, **Gravitational Wave Emission from Radio Pulsars Revisited**, soumis à *A&A preprint astro-ph/0005043*  
T. Regimbau, **Model of pulsar population and consequences for VIRGO**, communication à **GWDaw 4**, Baton Rouge, Louisiane 14-16 décembre 2000; transparents disponibles à l'adresse <http://gravity.phys.lsu.edu/gwdaw>
- [77] M. Maggiore **Gravitational Wave Experiments and Early Universe Cosmology** publié dans *Physics Report* **331** (2000). Preprint *gr-qc/9909001*.
- [78] V. Ferrari *et al.*, *Mon. Not. R. Ast. Soc.* **303** 258-264 (1999).
- [79] B. Allen and J. Romano, *Phys. Rev. D* **59** 102001 (1999).
- [80] P.Astone *et al.*, *Astron. Astrophys.* **351** 811-814 (1999).
- [81] P.Astone *et al.*, *Phys. Lett. B* **385** (1996).
- [82] C. Fabry and A. Perot, **On a new form of Interferometer**, *Astrophys. Jour.* **13** 265 (1901) *traduit des "Annales de Chimie et de Physique"*.
- [83] V. Lorette, *Optics Manufacturing and Testing for interferometric gravitational-wave detectors*, **International Summer School on Experimental Physics of Gravitational Waves**, Ed. M. Barone *et al.*, p. 258-287 (2000).
- [84] H.Kogelnik and T.Li, *Appl. Opt.* **5** 1550 (1966).
- [85] L.Matone, **Étude du Contrôle Global de l'Interféromètre Central de Virgo**, *Thèse de l'Université Paris-Sud*, LAL 99-57 (1999).
- [86] J-Y.Vinet, B.Meers, C.N.Man, A.Brillet, *Phys. Rev. D* **38** 433-447 (1988).
- [87] L. Derome, **Le système de détection de l'expérience Virgo dédiée à la recherche d'ondes gravitationnelles**, *Thèse de l'Université de Savoie* (1999).
- [88] P. Hello, **Couplings in Interferometric Gravitational-Wave Detectors**, *Thèse d'Habilitation à diriger des Recherches*, Université Paris-Sud LAL 96-93 (1996).
- [89] J. Weber, *Phys. Rev.* **117** 306-313 (1960).
- [90] M. Visco, L. Votano, *Resonant bar gravitational wave detector*, **International Summer School on Experimental Physics of Gravitational Waves**, Ed. M. Barone *et al.*, p. 288-305 (2000). *Pour des détails sur une expérience particulière, voir par exemple les références citées dans l'article.*
- [91] L. Hannibal and J. Warkall, **Response of massive bodies to gravitational waves**, *gr-qc/0004053* (2000).
- [92] M. Punturo, **The VIRGO sensitivity curve**, *Note Virgo VIR-NOT-PER-1390-51 issue 5* (2001).
- [93] S. Braccini *et al.*, **Design of the Superattenuators for VIRGO construction**, *Note Virgo VIR-TRE-PIS-4600-134* (1997).
- [94] G.Losurdo, **Ultra-Low Frequency Inverted Pendulum for the VIRGO Test Mass Suspension**, *Thèse de la Scuola Normale Superiore di Pisa non publiée* (1998).
- [95] G. Losurdo *et al.*, *Rev. Sci. Inst.* **72** 3653 (2001).
- [96] G. Losurdo, *Active controls in the interferometric detectors of gravitational waves: inertial damping of the Virgo superattenuator*, **International Summer School on Experimental Physics of Gravitational Waves**, Ed. M. Barone *et al.* p. 379-389 (2000).
-

- [97] H.B. Callen and T.A. Welton, *Phys. Rev.* **83** 34-40 (1951).  
Le problème récurrent avec les DSA est de savoir si elles sont *monolatérales* ou *bilatérales*. Le théorème *fluctuation-dissipation* fournit une densité *monolatérale* ce qui explique l'absence de facteur  $\sqrt{2}$  dans l'expression (2.44).
- [98] M. Barsuglia, **Stabilisation en fréquence du laser et contrôle de cavités optiques à miroirs suspendus pour le détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles Virgo**, LAL 99-25 *Thèse de l'Université Paris-Sud* (1999).
- [99] T. Pradier, **Étude d'algorithmes pour la détection de signaux impulsifs d'ondes gravitationnelles ; Contrôle de la cavité mode cleaner de Virgo**, *Thèse de l'Université Paris-Sud* LAL 01-15(2001).
- [100] C. Cagnoli *et al.*, *Phys. Lett. A* **237** 21-27 (1998).
- [101] P.S. Saulson, **Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors**, Editions World Scientific Publishing, (1994).
- [102] L. Schnupp, intervention au **Workshop on G.W. detectors**, Munich (1988) *non publié*.
- [103] R.W.P. Drever *et al.*, *Appl. Phys.* **B31** 97 (1983).
- [104] R. Flaminio, H. Heitmann, **Longitudinal control of an interferometer for the detection of gravitational waves**, *Phys. Lett. A* **214** 112-122 (1996).
- [105] *The Virgo Collaboration The Virgo Computing Model*, *Note Virgo VIR-MEM-DIR-7100-102* (2000).
- [106] *The Virgo Collaboration The Virgo Computing Plan*, *Note Virgo VIR-MEM-DIR-7000-122* (2001).
- [107] G. Giordano, **CITF Optical Parameters**, *Note Virgo VIR-NOT-FRA-1390-131* (1999).
- [108] P. Puppo, **Mirrors mounted on CITF Suspensions**, *Note Virgo VIR-SPE-ROM-4700-106* (2001).
- [109] P. Hello, **Ondes gravitationnelles : méthodes de détection**, Cours donné à la *25ème Ecole d'Été de Physique des Particules*, Gif-sur-Yvette, 13-17 septembre 1993.
- [110] R.J. Sandeman, *The Australian Consortium for Gravitational wave Astronomy (ACIGA) Present and future projects and prospects*, **Second Workshop on Gravitational Wave Data Analysis**, Ed. Frontières (1998).
- [111] A. Abramovici *et al.*, *Science*, **256** 325 (1992).
- [112] K. Danzmann *et al.*, *Lectures Notes in Physics* **410** 184 (1992).
- [113] B. Meers, *Phys. Rev. D* **38** 2317-2326 (1988).
- [114] Tsubono, K., in **Gravitational wave experiments**, p. 112, Ed. E. Coccia and G. Pizella and F. Ronga, World Scientific, Singapore.
- [115] Masaki Ando *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86** 3950-3954 (2001).  
Voir aussi le site <http://tamago.mtk.nao.ac.jp/> pour des résultats plus récents.
- [116] C. Drezen, **Utilisation de caméras CCD pour le contrôle du détecteur d'ondes gravitationnelles VIRGO : Elaboration d'une interface VME et analyse d'images**, *Thèse de l'Université Joseph Fourier Grenoble I* (1997).
- [117] G. Ballardini, S. Braccini, D. Passuello, **THE GUARDIAN : a safety software to avoid payload oscillations**, *Note Virgo VIR-TRE-PIS-4900-108* (2001).
- [118] L. Matone, communication privée (2002).
- [119] N. Arnaud, M. Barsuglia, M.-A. Bizouard, F. Cavalier, **Global Control User Manual** [http://www.lal.in2p3.fr/virgo/GloCon/Gc\\_User\\_Manual/Gc\\_User\\_Manual.html](http://www.lal.in2p3.fr/virgo/GloCon/Gc_User_Manual/Gc_User_Manual.html) (2001).
-

- 
- [120] K. Ogata, **Modern Control Engineering**, Prentice-Hall (1997).
- [121] L. Benvenuti, M. D. Di Benedetto, *An Introduction to feedback control systems*, **International Summer School on Experimental Physics of Gravitational Waves**, Ed. M. Barone *et al.*, p. 327-348 (2000).
- [122] D.Z. Anderson, *Appl. Opt.* **23** 2944 (1984).
- [123] Morrison *et al.*, *Appl. Opt.* **33** 8041 (1994).
- [124] L. Holloway, G. Losurdo, D. Passuello, **Feedback of Interferometer Error Signal to Upper Suspension**, *Note Virgo VIR-NOT-PIS-1390-182* (2001).
- [125] The Virgo Collaboration, **Last stage Control and mechanical transfer function measurement of the VIRGO suspensions**, accepté dans *Rev. Sci. Inst.* en décembre 2001.
- [126] G. Losurdo for the Virgo collaboration, **The inertial damping of the VIRGO superattenuator and the residual motion of the mirror**, *Class. Quantum Gravity* **19** (2002).
- [127] D. Boget, F. Bellachia & B. Mours, *Note Virgo VIR-SPE-LAP-5200-103* (1997).
- [128] R. Flaminion, B. Mours, D. Verkindt **Signals names list** *Note Virgo VIR-MAN-LAPP-5400-114* (2001).
- [129] D. Boget, F. Bellachia, B. Mours & D. Verkindt, *Note Virgo VIR-SPE-LAP-5200-105* (1998).
- [130] R. Chiche, *Note Virgo VIR-SPE-LAL-5100-111* (2000).
- [131] C. Eder, **Carte mesure de temps** (1999).
- [132] <http://www.cvshome.com>
- [133] Les logiciels développés au LAL sont accessibles aux adresses suivantes :
- |             |   |
|-------------|---|
| CMT         | <a href="http://www.lal.in2p3.fr/SI/CMT/CMT.html">http://www.lal.in2p3.fr/SI/CMT/CMT.html</a>   |
| Cm          | <a href="http://www.lal.in2p3.fr/SI/Cm/Cm.html">http://www.lal.in2p3.fr/SI/Cm/Cm.html</a>   |
| Db          | <a href="http://www.lal.in2p3.fr/SI/Db/Db.html">http://www.lal.in2p3.fr/SI/Db/Db.html</a>   |
| El          | <a href="http://www.lal.in2p3.fr/virgo/El/El.html">http://www.lal.in2p3.fr/virgo/El/El.html</a>   |
| Superviseur | <a href="http://www.cascina.virgo.infn.it/sDoc/virgoApp/Su/readme.html">http://www.cascina.virgo.infn.it/sDoc/virgoApp/Su/readme.html</a> |
| Fsm         | <a href="http://www.lal.in2p3.fr/SI/Fsm/FSsm.html">http://www.lal.in2p3.fr/SI/Fsm/FSsm.html</a>   |
- [134] F. Barone *et al.*, *Appl. Opt.* **33** 1194 (1994).  
F. Barone *et al.*, *Appl. Opt.* **34** 8100 (1995).
- [135] O. Veziant, **La calibration de l'interféromètre Virgo**, *Actes de conférence des journées Jeunes Chercheurs 2001* (2002).  
Disponible sur le WEB à l'adresse : <http://polywww.in2p3.fr/JJC2001/Programme/programme.html>
- [136] B. Caron *et al.*, *Astropart. Phys.*, **10/4** 369-386 (1999).
- [137] F. Marion, *Thèse d'Habilitation à diriger des Recherches* (2000).
- [138] N. Arnaud *et al.*, **CITF Lock Acquisition: Tests of the 'Pulses Method'**, *Note Virgo VIR-NOT-LAL-1390-156* (2000).
- [139] Accompli par le "groupe *Locking*" coordonné par Matteo Barsuglia.
- [140] F. Bondu *et al.*, entrées sur le *Logbook* de Virgo en décembre 2001 et février 2002.
- [141] P. La Penna et M. Barsuglia, communication personnelle (2002).
- [142] M. Barsuglia, communication personnelle (2002).
- [143] W.G. Anderson, R. Balasubramanian, *Phys. Rev. D* **60** 102001 (1999).
- [144] S.D. Mohanty, *Phys. Rev. D* **61** 122002 (2000).
-

- [145] L. Fabbroni, M. Vannucci, **Wavelet test for the detection of transients**, *Note Virgo VIR-NOT-FIR-1390-151* (2000).
- [146] J.M. Innocent and B. Torrèsani, **Wavelet Transforms and Binary Coalescence Detection**, *Mathematical Aspects of Gravitation*, Banach Center Publications **41**, Varsovie (1997).  
J.M. Innocent and B. Torrèsani, **Wavelets and Binary Coalescence Detection**, *Applied and Computational Harmonic Analysis* **4**, 1997.
- [147] A.M. Sintes, B.F. Schutz, *Phys. Rev. D* **58** 122003 (1998)  
A.M. Sintes, B.F. Schutz, *Phys. Rev. D* **60** 062001 (1999).
- [148] L.S. Finn, S. Mukherjee, *Phys. Rev. D* **63** 062004 (2001).
- [149] A. Abramovici *et al.*, *Phys. Lett. A* **218** (1996).
- [150] E. Chassande-Mottin, S.V. Dhurandhar, *Phys. Rev. D* **63** 042004 (2001).
- [151] N. Arnaud *et al.*, *Phys. Rev. D* **59** 082002 (1999).
- [152] M.R. Spiegel, **Probabilités et statistique, Cours et problèmes**, McGraw-Hill, Paris, (1981).
- [153] W. G. Anderson *et al.*, *Phys. Rev. D* **63** 042003 (2000).
- [154] N. Arnaud *et al.*, **The Mean Filter for detecting gravitationnal wave bursts**, *Note Virgo VIR-NOT-LAL-1390-177* (2001).
- [155] T. Pradier *et al.*, *Phys. Rev. D* **63** 042002 2001).
- [156] B. S. Sathyaprakash, S. V. Dhurandhar, *Phys. Rev. D* **44** 3819-3834 (1991).
- [157] E. E. Flanagan, S. A. Hughes, *Phys. Rev. D* **57** 4535-4565 (1998).
- [158] R. F. Stark, T. Piran, *Phys. Rev. Lett.* **55** p. 891 (1985).
- [159] V. Ferrari, C. Palomba, *Int. J. Mod. Phys D* **7** 825-848 (1998).
- [160] N. Arnaud *et al.*, **Study of a three dimensional set of filters**, *Note Virgo VIR-NOT-LAL-1390-125* (1998).
- [161] J. D. E. Creighton, *Phys. Rev. D* **60** 022001-022009 (1999).
- [162] E. K. Porter and S. V. Babak, **The Curvature of the Binary Inspiral Gravitational Wave Search Manifold**, *en préparation* (2002).
- [163] E. K. Porter, **The Modelling and Detection of Gravitational Wave from Compact Binary Sources**, *Thèse de l'université du Pays de Galles* (2001).
- [164] W.H. Press *et al.*, **Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing**, 2nd Edition *Cambridge University Press*.
- [165] The Virgo collaboration, **Data Analysis Design**, chapitre *Detection of impulsive sources* (1999), disponible à l'adresse :  
<http://www.lal.in2p3.fr/recherche/virgo/DAD/dadweb.html>
- [166] N. Arnaud *et al.* **Comparison of filters for detecting gravitational wave burts in interferometric detectors** *en préparation* (2002).
- [167] **LAL++ A Gravitational Wave Searches Library for Burst Sources and Black Holes Coalescing Binary Systems** (2002).
- [168] Y. Gürsel and M. Tinto, *Phys. Rev. D* **40** 3884 (1989).
- [169] P. Jaranowski, A. Krolak, *Phys. Rev. D* **49** 1723 (1994).
- [170] S. Bose, A. Pai, S. Dhurandhar, *Int.J.Mod.Phys.* **D9** 325 (2000).  
A. Pai, S. Dhurandhar, S. Bose, *Phys. Rev. D* **64** 042004 (2001).

- 
- [171] L.S. Finn, *Phys. Rev. D* **63** 102001 (2001).
- [172] N. Arnaud *et al.*, *Phys. Rev. D* **65** (2002).
- [173] B. Bhawal, S.V. Dhurandhar, **Coincidence detection of broadband signals by networks of the planned interferometric gravitational wave detectors** *gr-qc/9509042* (1995).
- [174] <http://seds.lpl.arizona.edu/messier/more/mw.html>
- [175] F. Derue *et al.*, *Astron. Astrophys.* **373** 126-138 (2001).
- [176] R.M. Bionta *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **58** 1494 (1987)  
C.B. Bratton *et al.*, *Phys. Rev. D* **D37** 3361 (1988).
- [177] E. Kearns, Proceedings of the **XXX<sup>th</sup> International Conference on High Energy Physics**, Osaka, (2000), Eds. C. S. Lim and T. Yamanaka, World Scientific (2001);  
K. Nishikawa, *ibid.*
- [178] Y. Fukuda *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **80** 1158 (1998).
- [179] P.I. Krastev and A. Yu. Smirnov, *preprint hep-ph/0108177*.
- [180] S.P. Mikheyev and A.Y. Smirnov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **42** 913 (1985)  
L. Wolfenstein, *Phys. Rev. D* **D17** 2369 (1978).
- [181] A.S. Dighe and A.Y. Smirnov, *Phys. Rev. D* **D62** 033007 (2000).
- [182] CHOOZ Collaboration, M. Apollonio *et al.*, *Phys. Lett. B* **420** 397 (1988).
- [183] J. Boger *et al.*, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res.* **A449** 172 (2000).
- [184] <http://hep.bu.edu/snet/>
- [185] L.A. Wainstein, V.D. Zubakov, **Extraction of signals from noise**, Prentice-Hall, Inc. (1962).
- [186] C. Cutler *et al.*, *Phys. Rev. D* **50** 2658-2697 (1994).
- [187] P. Jaranowski, A. Krolak, B.F. Schutz, *Phys. Rev. D* **58** 063001 (1998).
- [188] H. Goldstein, **Classical Mechanics 2nd edition**, (Addison-Wesley Series in Physics, 1980).
- [189] K. Kuroda *et al.*, *Int. J. Mod. Phys D* **8** 557 (1999).  
Un projet de R&D sur cette question a démarré dans le groupe Virgo-LAL ; voir :  
N. Arnaud *et al.*, **Étude de faisabilité pour un upgrade cryogénique de Virgo**, *non publié* (2001).  
P. Marin, **Proposal for a vacuum system of a Virgo L.C.G.T.**, *non publié* (2001).
- [190] P. Amico *et al.* **Monolithic fused silica suspension for Gravitational Waves detectors** *soumis à Physics Letter A* (2001).
-

### Summary

The Virgo interferometer is aimed at achieving the first direct detection of the gravitational waves. Before the availability of the complete detector, some preliminary activities are taking place: tests of the different sub-systems on the central interferometer (CITF) and simulations of the future data analysis. I worked in both fields: on the longitudinal control of the cavities and on the search of on-line detection triggers for impulsive sources.

To reach its sensitivity, Virgo must be kept at its working point by longitudinal and angular servo controls. The Global Control steers this task centrally. After having presented its hardware and software features, one shows that they follow the necessary requirements.

Then its uses on the ITF are described, in particular during cavity resonance acquisitions, first for the simple Michelson, then for the whole CITF (recycling mirror aligned). In parallel, the tested strategies as well as the first experimental results are presented. These tests prove the capability of the Virgo control as the lengths have been controlled with the required precision.

The part of my thesis dealing with the data analysis of impulsive sources can be divided into three main chapters. First, the presentation of the simulation framework (noise and signal models), the motivation for this search and its starting points (to use non-optimal but robust filtering methods as the waveforms are unknown). Then, various filtering methods are described and their behaviour with noise alone (false alarms) or noise + signal (performance, detection efficiency) are tested. Finally, the subject of coincidences between detectors (the only way to validate a candidate) is studied with a network detection model. A strategy including neutrino detectors is also presented.

**Keywords :**

Virgo  
Interferometer  
Gravitational Waves  
Global Control  
Locking  
Feedback  
Supernova  
On-line Filtering  
Coincidences  
Neutrinos

## Résumé

L'interféromètre Virgo vise à réaliser la première détection directe des ondes gravitationnelles. Avant que l'instrument complet ne soit disponible, des activités préparatoires ont lieu : tests des sous-systèmes sur l'interféromètre central (CITF) ou simulations de la future analyse des données. J'ai travaillé dans ces deux domaines, sur le contrôle longitudinal des cavités et la recherche d'algorithmes de détection en temps réel de signaux impulsionnels.

Pour atteindre sa sensibilité, Virgo doit être maintenu à son point de fonctionnement par des asservissements tant longitudinaux qu'angulaires. Cette tâche est gérée de manière centrale par le Contrôle Global. Une fois ses caractéristiques *hardware* et *software* présentées, on montre qu'elles permettent d'atteindre le niveau de spécification requis. Ensuite, son utilisation sur le CITF est décrite, en particulier lors des acquisitions des résonances des cavités, pour le Michelson simple d'abord, puis pour le CITF complet (miroir de recyclage aligné). En parallèle, les stratégies testées sont présentées ainsi que les premiers résultats expérimentaux. Ces tests montrent la faisabilité du contrôle de Virgo car les longueurs asservies l'ont été avec la précision requise.

La partie de ma thèse consacrée à l'analyse des signaux impulsionnels peut être divisée en trois ensembles. D'abord, la présentation du cadre des simulations (modèles de bruit et de signaux), les motivations de cette recherche et les choix initiaux (filtrage robuste et sous-optimal par manque de connaissance des signaux). Ensuite, différentes méthodes de filtrage sont décrites puis leurs comportements en présence de bruit seul (fausses alarmes) et de signal (performance, efficacité de détection) sont testés. Enfin, la question des coïncidences entre détecteurs (seule manière de valider un candidat) est abordée d'un point de vue statistique à partir d'un modèle de détection en réseau ; une stratégie incluant les détecteurs de neutrinos est aussi étudiée.

### Mots Clés :

Virgo  
Interféromètre  
Ondes Gravitationnelles  
Contrôle Global  
*Locking*  
Asservissements  
Supernova  
Filtrage temps réel  
Coïncidences  
Neutrinos