



HAL
open science

Inférence statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires

Jean-François Coeurjolly

► **To cite this version:**

Jean-François Coeurjolly. Inférence statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2000. Français. NNT: . tel-00006736

HAL Id: tel-00006736

<https://theses.hal.science/tel-00006736v1>

Submitted on 24 Aug 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Jean-François Coeurjolly

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Inférence statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires

Soutenue le 19 Décembre 2000 devant la commission d'examen

Alain Le Breton	Président, Grenoble I.
Jean-Marc Azaïs	Rapporteur, Toulouse III.
Peter Robinson	Rapporteur, London School of Economics.
Jacques Istas	Examineur, Grenoble II.
Monique Pontier	Examineur, Toulouse III.
Georges Oppenheim	Examineur, Paris-Sud.
Philippe Soulier	Examineur, Evry.
Anestis Antoniadis	Directeur, Grenoble I.

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Modélisation et Calcul, équipe SMS

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Alain Le Breton, professeur à l'Université de Grenoble I, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Peter Robinson, professeur à la London School of Economics, pour avoir accepté la lourde tâche de lire mon document en français et de l'avoir rapporté. Son influence dans le domaine et ses questions m'ont permis de prendre un recul significatif par rapport à mon travail.

Je souhaite témoigner ma profonde gratitude envers Jean-Marc Azaïs, professeur à l'Université de Toulouse III, pour la lecture très attentive qu'il a faite de mon manuscrit et les nombreuses et intéressantes remarques qui ont permis l'achèvement d'une nouvelle version. Je regrette profondément qu'il n'ait pu assister à la soutenance de ce projet pour lequel il a montré un investissement important.

Je remercie également Philippe Soulier, maître de conférences à l'Université d'Evry, Monique Pontier, professeur à l'Université de Toulouse III et Georges Oppenheim, professeur à l'Université de Paris-Sud, pour avoir dévoilé un intérêt particulier et un esprit critique à la lecture de ma thèse dont je suis réellement flatté.

J'ai été ravi de voir Jacques Istas, professeur à l'Université de Grenoble II, parmi les membres de mon jury. Nos nombreuses discussions ont été pour moi très formatrices. Je le remercie d'avoir initié le travail effectué dans le Chapitre 3. Le Théorème 3.2, fruit de notre collaboration, a longtemps clamé sur la place publique "Que l'on me supprime je suis faux", et m'a dévoilé les deux qualités nécessaires à l'élaboration d'un travail de recherche la patience et l'acharnement.

Enfin, je tiens à remercier plus chaleureusement Anestis Antoniadis, professeur à l'Université de Grenoble I, qui est à l'origine de ce travail. Il m'est difficile de résumer en quelques mots tout ce qu'il m'a apporté par son implication tout au long de cette thèse, tant sur le plan scientifique répondant avec beaucoup de gentillesse à mes interrogations mathématiques souvent stupides et suivant la progression de mon travail avec beaucoup de curiosité, que sur le plan relationnel en m'invitant à travailler avec d'autres gens, extérieurs au laboratoire. Je lui suis reconnaissant d'avoir cru en moi et de m'avoir transmis sa passion de la recherche. Par ailleurs, même si j'ai toujours fait semblant de rire à toutes ses blagues, sa bonne humeur, ses encouragements et sa disponibilité sans faille ont été pour moi un soutien considérable. Je suis fier comme Artaban (et non pas comme un bar-tabac comme le disait Coluche) de pouvoir clamer que c'est sous sa direction que j'ai effectué mon travail.

Que tous ceux qui ont eu ne serait-ce qu'un jour l'idée que fonctionnaire rimait avec emploi fictif visitent le service administratif et le service de la reprographie de notre laboratoire. Je les remercie pour leur efficacité et leur bonne humeur.

Je remercie enfin la Stella Artois qui m'a permis à ma manière d'exprimer toute ma reconnaissance envers ceux venus assister à la soutenance qu'ils soient élèves, professeurs d'ici et d'ailleurs, experts en géographie des bars, spécialistes en pot de thèse (i.e. les thésards du LMC), compagnon d'un certain périple marocain et plus particulièrement ex-colocataires, parents [29], reine du dessin fractionnaire (ma soeur et non pas la vache qui rit), et la spécialiste en citation. Qu'ils sachent que par leur présence, leur amitié et leur sincérité tout au long de ce travail, ce jour restera, pour moi, un souvenir inoubliable.

Et à David, à qui je dois la résolution d'une grande partie de mes problèmes informatiques, je n'aurai qu'un conseil en vue de sa très prochaine brillante soutenance : ne remonte pas l'écran à la fin de ton exposé.

Deviens ce que tu es



FIG. 1 – *La notion de fractale vue par Anne-Lise Coeurjolly.*

Table des matières

Notations	13
1 Introduction	15
2 Identification du mouvement brownien fractionnaire par variations discrètes	23
2.1 Propriétés générales du mbf	23
2.2 Introduction au problème d'identification	24
2.3 k -variations du mbf	26
2.4 Applications des résultats à l'identification du mbf	28
2.4.1 Cas du mbf standard	28
2.4.2 Cas du mbf généralisé	31
2.5 Simulations et calculs numériques	35
2.5.1 Variances asymptotiques des estimateurs	35
2.5.2 Qualités des estimateurs par simulations	37
2.6 Performances des estimateurs vis-à-vis de l'estimateur de Whittle	43
2.6.1 Variances asymptotiques	43
2.6.2 Temps CPU des procédures d'estimation	43
2.6.3 Performances des estimateurs pour des séries courtes	45
2.7 Conclusion	45
2.8 Preuves des résultats	45
2.8.1 Développement en polynômes d'Hermite de $\mathbb{H}^k(t) = t ^k/E_k - 1$	45
2.8.2 k -variations du mbf	47
2.8.3 Identification du mbf standard	50
2.8.4 Identification du mbf non standard	51
3 Bornes de Cramèr-Rao pour le mouvement brownien fractionnaire	55
3.1 Introduction	55
3.2 Inverse de matrices localisées	56
3.2.1 Matrices à décroissance hyperbolique	57
3.2.2 Matrices à décroissance exponentielle	62
3.3 Applications au calcul des Bornes de Cramèr-Rao du mbf	63
3.3.1 Preuves des Théorèmes 3.5 et 3.6	65
3.3.2 Preuve de la Proposition 3.1	66
3.4 Conclusion	69

4	Problèmes statistiques induits par le mbf	71
4.1	Sur quelques tests liés au mbf	71
4.1.1	Introduction	71
4.1.2	Quelques tests existants	71
4.1.3	Une nouvelle classe de statistiques	74
4.1.4	Etude par simulations du nouveau test	76
4.1.5	Preuves des résultats	77
4.2	Débruitage d'un signal modélisé par un mbf	80
4.2.1	Introduction	80
4.2.2	Variations quadratiques bruitées	81
4.2.3	Identification du mbf bruité	82
4.2.4	Test de présence d'un bruit gaussien additif	84
4.2.5	Etude par simulations des estimateurs et du test	86
4.2.6	Preuve des résultats	86
4.3	Conclusion	94
5	Inférence statistique pour le mouvement brownien multifractionnaire	95
5.1	Introduction	95
5.2	Variations quadratiques locales : définitions et comportements asymptotiques	97
5.3	Applications des résultats à l'identification du mbm	99
5.3.1	Mouvement brownien multifractionnaire standard	99
5.3.2	Mouvement brownien multifractionnaire généralisé	101
5.4	Quelques simulations	103
5.4.1	Sélection de voisinage optimal	104
5.4.2	Estimateurs fonctionnels	104
5.5	Sur quelques tests pour le mbm	105
5.5.1	Kurtosis empirique local pour le mouvement brownien multifractionnaire	105
5.5.2	Tests paramétriques sur la fonction de Hurst	111
5.6	Conclusion et perspectives	114
5.7	Preuves des résultats	114
5.7.1	Test de multifractionnarité	126
A	Simulation du mouvement brownien fractionnaire	127
A.1	Introduction et position du problème	127
A.2	Représentation stochastique du mouvement brownien fractionnaire	128
A.3	Méthode de Sellan, Meyer et Abry	128
A.4	Méthode de Choleski	130
A.5	Méthode de Levinson	131
A.6	Méthode de Wood et Chan	132
A.7	Approximation d'un mbf via les sommes cumulées d'un bgf	133
A.8	Qualité des générateurs du mbf	133
B	Quelques estimateurs du paramètre de Hurst	137
B.1	Introduction et position du problème	137
B.2	Méthodes spectrales	137
B.2.1	Log-périodogramme	137
B.2.2	Variante de Robinson	138
B.3	Maximum de vraisemblance : estimateur de Whittle	138

B.4	Méthode temps-échelle : décomposition en ondelettes	139
B.5	Méthodes temporelles	140
B.5.1	Nombre de franchissements de zéro du bgf	140
B.5.2	Variations discrètes du mbf	140
B.6	Quelques simulations	140
B.7	Scripts S-plus	141
B.8	Adresses WEB	141
C	Simulation d'un mouvement brownien multifractionnaire	147
C.1	Introduction et position du problème	147
C.2	Méthode de Choleski	148
C.3	Approximation de Peltier et Lévy-Véhel	148
C.4	Approximation de Wood et Chan	149
C.5	Qualité des approximations	150
C.6	Conclusions	150
	Bibliographie	155

Notations :

$\mathbb{R}^k, \mathbb{N}^k, \mathbb{Z}^k$:	Ensemble des k-uplets réels, d'entiers, d'entiers relatifs.
$\mathbb{P}, \mathbb{E}, \text{Var}, \text{Cov}$:	Probabilité, espérance, variance, covariance.
v.a.	:	variable aléatoire.
v.a.i.i.d.	:	variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées.
$[x]$:	Partie entière d'un réel x .
$\delta_{i,j}$	=	1, si $i = j$ et 0 sinon.
$\Gamma(\cdot)$:	Fonction Gamma.
$\ v\ , v \in \mathbb{R}^k$:	Norme euclidienne sur \mathbb{R}^k .
$\mathbb{I}_E(\cdot)$:	Fonction indicatrice sur un ensemble E .
$\mathcal{M}_K(\mathbb{R})$:	Ensemble des matrices carrées de taille K à coefficients réels.
$A^t, A^{-1}, \text{ pour } A \in \mathcal{M}_K(\mathbb{R})$:	Matrice transposée de A , inverse de A .
$ A , \text{Tr}(A), \text{ pour } A \in \mathcal{M}_K(\mathbb{R})$:	Déterminant de A , trace de A .
$l^p(\mathbb{Z})$	=	$\left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n ^p \right\}^{1/p} < +\infty \right\}, \quad p \geq 1.$
$u_n \sim v_n$	si	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$
$u_n = \mathcal{O}(v_n)$	si	$\exists c > 0, u_n \leq c v_n .$
$u_n = o(v_n)$	si	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$
$u_n \asymp v_n$	si	$\exists c_1, c_2 > 0, c_1 v_n \leq u_n \leq c_2 v_n .$
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$:	Convergence en probabilité.
$\xrightarrow{p.s.}$:	Convergence presque sûre.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$:	Convergence en loi.
$\underline{\underline{\mathcal{L}}}$:	Egalité en loi.

Les processus autosimilaires, c'est-à-dire les processus invariants en loi par changement d'échelle, ont connu un véritable essor cette deuxième moitié de siècle tant sur l'aspect théorique avec le développement de nombreux modèles stochastiques, que sur le point pratique avec des domaines d'application nombreux et variés. Et pourtant, en observant les crues et les sécheresses successives du Nil, ces phénomènes d'invariance étaient connus depuis bien longtemps comme le souligne cette citation de la Bible (Genèse, 41-29.30):

“Voici, il y aura sept années de grande abondance dans tout le pays d’Égypte. Sept années de famine viendront après elles; et l’on oubliera toute cette abondance au pays d’Égypte, et la famine consumera le pays.”

Ce phénomène fut appelé *Effet Joseph* par Mandelbrot [70], et traduit un phénomène de cycles, de persistance d'un système dans un état (sécheresse ou crue dans le cas du Nil). Les premières données raisonnables sont basées sur les mesures des minima du niveau du Nil durant les années 622-1284, et ont été mises sur le devant de la scène par Tousson en 1925 [92]; la Figure Fig. 1.1 représente les cumuls des minima du niveau du Nil recentrés sur cette période de 663 années. Cette série chronologique a suscité une recherche importante et le travail le plus probant est celui de l'hydrologue H. Hurst [52]. En 1951, il a mis en évidence un comportement particulier de la statistique R/S (rescaled adjusted range), constamment utilisée en hydrologie, qui implique, entre autres, que la variance de la moyenne empirique (calculée sur une série de longueur N), converge vers zéro avec une vitesse plus faible que la vitesse N^{-1} . Ce résultat découvert empiriquement fut en totale contradiction avec les résultats classiques de l'époque pour les processus de Markov ou les processus mélangeants. Ce comportement fut appelé par la suite *Effet de Hurst* par Mandelbrot et *al.* [69], qui justement furent les premiers à tenter de modéliser ce nouveau phénomène, en introduisant pour cela un processus stochastique appelé mouvement brownien fractionnaire (noté mbf), processus déjà étudié dans un contexte théorique sans l'avoir nommé ainsi par Kolmogorov [62], en 1940. Le mbf est l'unique processus gaussien, paramétré par $(H, C) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^{+*}$, centré, nul à l'origine, à accroissements stationnaires et autosimilaires de paramètre H . Dans la suite de document, nous nous référerons toujours à cette définition lorsque nous parlerons de mbf. Nous laisserons de côté les définitions alternatives discutées par Marinucci et *al.* [71], qui ont conduit à certaines confusions dans la littérature économétrique. La notion d'autosimilarité d'un processus est très liée à la notion de fractale, objet mathématique introduit au début du siècle par Julia, Cantor ou encore Hausdorff. De manière simplifiée, une fractale est une figure géométrique ou un ensemble de points au tracé fractionné et irrégulier, invariant par changement d'échelle. Ceci se traduit d'un point de vue probabiliste : un processus $X = \{X(t), t \geq 0\}$ est dit autosimilaire de paramètre H si $\forall t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}^+$ et $\forall \delta > 0$

$$(X(t_1), \dots, X(t_d)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\delta^{-H} X(\delta t_1), \dots, \delta^{-H} X(\delta t_d)).$$

Le mbf constitue une extension notable du mouvement brownien, en ce sens que les accroissements du mbf ne sont plus indépendants. Leur structure de covariance décroît hyperboliquement avec le temps. Le mbf est un modèle très particulier car le paramètre H également appelé paramètre de Hurst ou paramètre fractionnaire, est lié à différentes notions. Outre la notion d'autosimilarité que nous avons déjà signalée, le paramètre H gère la régularité des trajectoires du processus. En effet, la dimension fractale du mbf vaut presque sûrement $2 - H$. Cette dernière propriété est intéressante car elle traduit le fait que le mbf permet d'obtenir des trajectoires plus irrégulières que celles du mouvement brownien lorsque $H < 1/2$, et inversement plus régulières lorsque $H > 1/2$. Enfin, et nous le verrons un peu plus en détail dans le Chapitre 2, le paramètre H gère la décroissance hyperbolique de la fonction d'autocovariance du mbf (notée $\gamma(\cdot)$ par la suite). On montre, en effet, que $\gamma(k) = \mathcal{O}(|k|^{2H-2})$. Le processus des accroissements, défini sur \mathbb{R}^+ , définit alors un processus à longue mémoire lorsque $H > 1/2$ car $\gamma(\cdot)$ n'est pas sommable pour cette valeur du paramètre.

Depuis le travail pionnier de Mandelbrot, le mouvement brownien fractionnaire a été utilisé comme outil de modélisation dans de nombreuses situations : en hydrologie [68], en turbulence [87], [43], en climatologie, *e.g.* [20], en économie [47], [37], en imagerie médicale [63], [56], [58], en réseaux de télécommunications, *e.g.* Willinger et *al.* [96], ou encore pour modéliser des courbes de charge électrique [72], [9].

Occultons pour un court moment les problèmes statistiques que peut soulever une telle modélisation (identification, prédiction, validation du modèle . . .) pour mettre en avant un des aspects limités du mouvement brownien fractionnaire. Considérons toujours les données du Nil, et focalisons-nous plus particulièrement sur les cent premières observations. A première vue, ces premières observations semblent fluctuer de manière plus indépendante que les cinquante suivantes, autrement dit le phénomène de persistance nettement visible après les années 720, est absent pour les premières données. Cette impression est confirmée par Beran qui, dans [21], a montré sous la forme d'un test statistique, que la variabilité de l'estimation de l'exposant fractionnaire sur les deux sous-séries était significative. Il montre ainsi que cette fluctuation des premières données n'est pas due au hasard mais à un réel changement de la structure de dépendance. Ainsi, l'exposant fractionnaire associé aux données du Nil n'est pas constant mais semble bien évoluer au cours du temps, ce qui nous amène à nous poser la question suivante : un modèle contrôlant "localement" la structure de dépendance ne serait-il pas plus adéquat?

Ce comportement ne constitue pas un phénomène isolé. D'autres situations semblent nécessiter l'évolution de l'exposant fractionnaire, comme l'illustre l'exemple ci-après, issu de la biomécanique. Le problème en question consiste en l'étude du système de contrôle de la posture d'un individu debout au repos, en utilisant des plates-formes qui mesurent la trajectoire du centre de poussée (CP) ou du centre de gravité (CG), et a pour objectif de juger de la qualité des réflexes. Collins et De Luca [31], d'une part, et Rougier [83], [84], d'autre part, ont analysé la projection sur l'un des deux axes (du système orthonormé centré sur les pieds de l'individu) de la trajectoire du CP au cours du temps, et ont ainsi pu mettre en évidence deux phases : une première très rapide (en moyenne < 0.4 seconde) où l'individu est en retard par rapport à ses perceptions sensorielles, contrôle mal sa position et a tendance à s'écarter davantage de son état d'équilibre, et une seconde au cours de laquelle il intègre rapidement les informations sensorielles et corrige presque instantanément sa position pour la ramener à un état d'équilibre. Collins et De Luca [31] ont proposé de modéliser ces deux phases de la trajectoire du CP par un mbf, du fait de l'apparence autosimilaire des trajectoires interpolées obtenues : à la première phase pourrait correspondre un phénomène modélisé par

un mbf de paramètre $H > 1/2$ et à la seconde phase plus irrégulière un phénomène modélisé par un mbf de paramètre $H < 1/2$.

L'exemple des données du Nil ainsi que celui issu de la biomécanique montrent que dans certaines situations, il peut être intéressant d'autoriser un système à changer de régime, de permettre à la structure de dépendance d'évoluer dans le temps. Frisch [43] expose également quelques situations identiques. Il semble donc naturel de développer un modèle stochastique susceptible de décrire de telles évolutions. Ceci a été entrepris parallèlement par Peltier et *al.* [77], et Benassi et *al.* [16] : ils introduisent le mouvement brownien multifractionnaire (noté mbm), extension du mouvement brownien fractionnaire au sens où les paramètres régissant le mbf (en particulier le paramètre d'autosimilarité H) deviennent des fonctions du temps. L'intérêt d'un tel modèle réside, comme le montrent les auteurs précités, dans le fait que l'on peut contrôler localement la régularité des trajectoires. Autrement dit, le mbm permet d'être en adéquation avec des phénomènes qui, par exemple, seraient de plus en plus persistants, de plus en plus antipersistants ou encore des phénomènes qui passeraient d'un état antipersistant à un état persistant.

Traiter d'un point de vue statistique ce genre de phénomène, a été l'objectif initial de ce travail de recherche. Néanmoins, ce travail a nécessité des connaissances théoriques constituées par un traitement approfondi et pertinent du mbf, tant sur la compréhension des résultats obtenus jusqu'alors que sur leurs extensions. Ce mémoire se décompose donc en deux grandes parties. Les Chapitres 2 à 4 traitent de l'inférence statistique pour le mouvement brownien fractionnaire, et le Chapitre 5 de l'inférence statistique pour le mouvement brownien multifractionnaire.

Partie 1 : Inférence statistique pour le mouvement brownien fractionnaire :

Précisons avant toute chose, que nous travaillons sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

- Ce second chapitre développe des méthodes pour identifier le mbf. L'approche considérée consiste à filtrer une seule trajectoire discrétisée d'un mbf observée sur un compact, et d'estimer les paramètres par une méthode de moments. Nous verrons que le filtrage de la trajectoire discrétisée a pour effet de détruire la longue dépendance. Ainsi, un filtre adapté permet d'éviter la dichotomie des comportements asymptotiques des estimateurs lorsque $H < 3/4$ et $H > 3/4$ (*e.g.* Poggi et *al.* [80], Peltier et *al.* [76], Beran [20]), provenant du fait que la fonction de covariance des accroissements du mbf met en défaut le théorème central limite de Breuer et Major [22] valable pour les fonctionnelles non linéaires de processus gaussiens. Nous verrons dans quel sens nous uniformisons et généralisons, pour le mbf, les travaux de Poggi et *al.* [80], d'Higuchi [50], d'Istas et *al.* [55], de Kent et *al.* [60] et de Peltier et *al.* [76], en étudiant le k -ème ($k \in \mathbb{R}^{+*}$) moment absolu empirique des variations discrètes d'une trajectoire discrétisée d'un mbf. Nous distinguons le cas mbf standard, processus pour lequel $C = 1$, du cas non standard, H et C inconnus. En supposant le processus discrétisé en $i/N, i = 0, \dots, N - 1$, nous montrons, entre autres, que les estimateurs développés de H convergent en loi vers une loi gaussienne avec la vitesse de convergence $1/\sqrt{N} \log(N)$, dans le cas standard, et $1/\sqrt{N}$, dans le cas non standard, et ce quel que soit $H \in]0, 1[$.

Pour l'ensemble des estimateurs développés, nous obtenons une expression analytique des constantes asymptotiques des variances, ce qui permet une comparaison efficace, vis-à-vis du choix du filtre et du réel k , entre autres. Une étude par simulation est ensuite menée, illustrant ainsi les performances des procédures. Enfin, une comparaison approfondie avec l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) est entreprise. Cette étude montre, entre autres, que les estimateurs développés ont l'avantage d'être très rapidement calculables et de se comporter tout aussi bien que l'EMV pour des séries courtes. Ceci est très intéressant car, rappelons-le, notre souci n'est pas de développer des estimateurs pour le modèle paramétrique que constitue le mbf, et pour lequel il est bien évident que l'EMV est le plus performant, mais de sélectionner une méthode qui permettra d'estimer localement l'exposant fractionnaire. Ce chapitre s'inscrit dans un cadre paramétrique, car nous développons des estimateurs pour les paramètres d'un mbf. Le cadre semi-paramétrique, très largement évoqué dans la littérature, *e.g.* Beran [20], Istas et Lang [55], Robinson [82], Moulines et Soulier [73], n'est pas traité ici. Cependant, les résultats obtenus dans ce chapitre peuvent certainement être étendus.

Une partie des résultats du Chapitre 2 constitue un article actuellement en cours de révision, [25].

- Nous nous intéressons, dans le Chapitre 3, à l'obtention d'une borne minimale "universelle" de la variance des estimateurs de H et C basés sur une trajectoire discrétisée du mbf aux instants $i/\Delta_N, i = 0, \dots, N-1$ (avec $\Delta_N \rightarrow +\infty$ lorsque $N \rightarrow +\infty$). C'est-à-dire à l'évaluation des bornes de Cramér-Rao des paramètres H et C . Dans le cas du mbf non standard (paramètres H et C inconnus), ce travail a déjà été entrepris par Dahlhaus, [34], qui montre, entre autres, que tout estimateur, disons \hat{H}_N , du paramètre d'autosimilarité vérifie à partir d'un certain rang

$$\text{Var}(\hat{H}_N) \geq \frac{\sigma^2}{N},$$

et explicite la constante σ^2 .

Notre contribution à ce travail est double : premièrement nous considérons les deux versions du mbf, standard et non standard, et deuxièmement, nous donnons une démonstration alternative, unique et originale. Notre preuve s'appuie sur un résultat d'algèbre linéaire fondamental concernant les inverses de suites de matrices "localisées" près de leur diagonale, que nous prouvons. Plus précisément, nous considérons "certaines" suites de matrices possédant la propriété de décroissance hyperbolique ou exponentielle de ses coefficients en s'éloignant de la diagonale, et montrons que leurs inverses possèdent la même propriété. Ces résultats d'algèbre linéaire adaptent et étendent ceux obtenus par Jaffard [57], dans le cas de matrices infinies.

Tout ce formalisme nous a, entre autres, permis de montrer que tout estimateur du paramètre d'autosimilarité vérifie à partir d'un certain rang

$$\text{Var}(\hat{H}_N) \geq \begin{cases} \frac{1}{2N \log^2(\Delta_N)} & \text{dans le cas standard,} \\ \frac{c^2}{N} & \text{pour un } c > 0, \text{ dans le cas non standard.} \end{cases}$$

Il faut ici noter que le travail de Dahlhaus, [34], est remarquable, car dans le cas non standard, il explicite la constante de la borne minimale de la variance, alors que notre approche ne nous permet de donner que son comportement asymptotique.

Le Chapitre 3 montre, entre autres, que les vitesses de convergence des estimateurs de H et C développés dans le Chapitre 2 sont identiques aux comportements asymptotiques des

bornes de Cramèr-Rao de H et C , et par conséquent optimales. Les résultats de ce Chapitre 3 ont été obtenus en collaboration avec J. Istas, et constituent un article accepté dans la revue *Statistics and Probability Letters* [27].

- Le Chapitre 4 traite de deux problèmes statistiques induits par le mbf : la validation du modèle, et l'identification du mbf en présence d'un bruit gaussien additif.

Dans une première partie, nous discutons de divers tests liés au mbf. Certains sont déjà établis dans la littérature : test d'adéquation à la distribution marginale, *e.g.* Beran *et al.* [17], test d'adéquation à la densité spectrale de Beran [18], test de longue mémoire de Kokoszka *et al.* [61], test d'autosimilarité de Bardet [9]. En outre, nous proposons une statistique qui généralise le kurtosis empirique des accroissements du mbf étudié par Peltier *et al.* [76]. Nous prouvons un théorème central limite pour cette statistique, sous l'hypothèse que l'on dispose d'une trajectoire discrétisée d'un mbf, puis d'une trajectoire discrétisée d'un processus gaussien à accroissements stationnaires, et localement autosimilaire en 0 au sens d'Istas et Lang [55]. Nous envisageons de tester la moyenne de cette statistique et illustrons les très bonnes performances de ce test à l'aide de simulations.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous considérons le problème statistique d'identification robuste suivant : nous supposons observer le modèle

$$Z(i/\Delta_N) = B_{H,C}(i/\Delta_N) + \epsilon(i), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

où $B_{H,C} = \{B_{H,C}(i/\Delta_N), i = 0, \dots, N-1\}$ est une trajectoire discrétisée d'un mbf de paramètres H et C , et où $\epsilon = \{\epsilon(i), i = 0, \dots, N-1\}$ est un échantillon de N v.a.i. gaussiennes centrées et de variance $\mathbb{E}(\epsilon(i)^2) = \sigma^2$. Nous supposons que $\Delta_N \rightarrow +\infty$, lorsque $N \rightarrow +\infty$ et qu'en outre $B_{H,C}$ et ϵ sont indépendants. Notre objectif est d'estimer les paramètres H et C . Dans [20], Beran discute de divers types de robustesse pour les processus à longue mémoire, tels que la stationnarité des accroissements, la gaussiannité, une perturbation de la structure au second ordre. La prise en compte d'un bruit gaussien additif dans une série chronologique formée d'un mbf discrétisé constitue un problème particulier de robustesse, qui, à notre connaissance, n'avait été regardé auparavant que par Wornell [100]. Cependant, nous améliorons son travail en nous affranchissant d'une hypothèse de démonstration fondamentale faite par Wornell.

La méthode d'identification développée utilise les idées du Chapitre 2, concernant l'identification du mbf sans bruit additif : méthode des moments et filtrage. Elle est basée sur la différence de moments d'ordre 2 du vecteur Z filtré par deux filtres, dont l'un est le dilaté double de l'autre. Nous montrons que H et C peuvent être estimés par une régression log-linéaire, de manière très simple et rapide. Nous prouvons les convergences en probabilité et en loi des estimateurs, moyennant quelques hypothèses sur le pas de discrétisation Δ_N . En supposant que $\Delta_N = N^\epsilon$, avec $0 < \epsilon < 1/4H$, nous obtenons des résultats de type théorème central limite pour les estimateurs avec la vitesse de convergence $N^{2H\epsilon-1/2}$ (resp. $N^{2H\epsilon-1/2} \log(N)$) pour l'estimateur de H (resp. C). Nous étudions également le cas particulier $\epsilon = 0$, pour lequel la vitesse de convergence de l'estimateur de H devient $1/\sqrt{N}$.

Nous avons ensuite développé un test statistique consistant, permettant de détecter la présence éventuelle d'un bruit gaussien additif. La statistique considérée est une mesure de l'écart entre deux estimateurs du paramètre d'autosimilarité : l'un prenant en compte la présence éventuelle d'un bruit, l'autre supposant la série non bruitée. Quel que soit le pas de discrétisation $\Delta_N = N^\epsilon$, avec $\epsilon \geq 0$, nous obtenons un théorème central limite pour cette

statistique, avec la vitesse de convergence $1/\sqrt{N}$. Les performances des estimateurs et de la procédure de test sont validées par une étude de simulation.

Partie 2 : Inférence statistique pour le mouvement brownien multifractionnaire:

- Le Chapitre 5 quitte le cadre paramétrique, parfois contraignant en modélisation stochastique, et s'inscrit dans un cadre semi-paramétrique. Nous introduisons une généralisation naturelle du mbf, le mouvement brownien multifractionnaire, proposé parallèlement par Peltier et *al.* [77] et Benassi et *al.* [16]. Cette extension est obtenue en substituant les paramètres H et C par deux fonctions du temps, dans les intégrales stochastiques représentant le mbf. Si la fonction H (resp. C) appartient à l'ensemble des fonctions höldériennes d'ordre $0 < \eta \leq 1$ sur $]0, 1[$ (resp. sur \mathbb{R}^{+*}), les auteurs montrent que cette extension se comporte "asymptotiquement localement" comme le mbf, ce qui suggère d'identifier le mbm en adaptant une méthode d'identification du mbf. Nous avons choisi d'adapter les estimateurs développés dans le Chapitre 2 car, d'une part, leur vitesse de convergence est optimale et, d'autre part, ils se comportent de manière très performante vis-à-vis de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Dans une première partie donc, nous développons des estimateurs de la fonction H à partir d'une seule trajectoire discrétisée aux instants $i/N, i = 0, \dots, N - 1$ d'un mbm vérifiant les hypothèses précitées. Par analogie avec le Chapitre 2, nous différencions le cas où le mbm est standard ($C \equiv 1$), du cas plus général (H et C inconnues). L'estimateur de la fonction H en $t \in [0, 1]$ est estimé à partir des observations du mbm au voisinage $\mathcal{V}_{N,\epsilon}(t) = \{j/N, j \in \mathbb{Z} \text{ tel que } |\frac{j}{N} - t| \leq \epsilon\}$, où ϵ est un paramètre destiné à tendre vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$. Nous montrons que les estimateurs convergent ponctuellement presque sûrement vers la vraie valeur de la fonction, et en loi sur $]0, 1[$ (avec la vitesse de convergence $\frac{1}{\sqrt{2N\epsilon \log(N)}}$ pour le cas standard, et $\frac{1}{\sqrt{2N\epsilon}}$ pour le cas non standard) vers des processus gaussiens centrés de fonction de covariance explicite. Dans les deux versions du mbm, nous montrons qu'il existe un choix asymptotique optimal pour le paramètre ϵ . Par ailleurs, nous présentons une procédure de Monte-Carlo pour choisir ϵ à taille d'échantillon fixée. Cette procédure ainsi que les estimateurs sont étudiés par simulation. Précisons que cette première partie étend le travail de Benassi et *al.*, qui dans [16] considèrent le cas $\eta = 1$, et proposent un estimateur consistant pour la fonction H , d'un mbm non standard (sans obtenir la convergence en loi).

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous présentons quelques tests pour le mbm. Premièrement, nous définissons une version locale du kurtosis empirique des accroissements du mbf, étudiée dans le Chapitre 4. Nous appelons naturellement cette nouvelle statistique kurtosis empirique local pour le mbm et prouvons qu'elle converge en loi sur $]0, 1[$ vers un processus gaussien centré, de fonction de covariance explicite. Dans une seconde partie, nous développons des tests paramétriques pour la fonction de Hurst. Plus précisément, nous testons l'hypothèse que la fonction de Hurst est issue d'un modèle linéaire. Pour cela, nous introduisons une statistique qui est une distance L^2 entre un estimateur fonctionnel de la fonction H et le modèle linéaire estimé. Nous montrons qu'elle converge en loi avec la vitesse $1/\sqrt{2N\epsilon}$ vers une variable aléatoire dont la loi est explicite. Ces statistiques généralisent celle introduite par Beran, [21], pour tester la variabilité du paramètre de Hurst dans une série modélisée par un processus à longue mémoire.

Annexes:

- Les Annexes A et B fournissent des outils pour simuler une trajectoire discrétisée du mbf et pour estimer le paramètre de Hurst à partir d'une seule trajectoire. Elles constituent une étude bibliographique non exhaustive mais suffisamment large pour comprendre les différentes manières entreprises jusqu'alors, pour résoudre ces deux problèmes. Une étude comparative des méthodes de simulation a été menée, ce qui a permis d'extraire une méthode exacte (pour simuler une trajectoire discrétisée des accroissements du mbf) et très rapide même pour des tailles d'échantillon élevées; il s'agit de la méthode développée par Wood et Chan [97], appelée méthode de la matrice circulante. Ces deux annexes ont fait l'objet d'une publication dans la revue *Journal of Statistical Software*, [28] .

- Enfin dans l'Annexe C, nous présentons trois méthodes de simulation du mbm. Deux d'entre elles étant des approximations, une étude comparative a été menée dans le but d'explorer leur qualité. Les scripts de ces méthodes, implémentées sous Matlab, sont également disponibles.

Perspectives:

- De par la diversité des thèmes abordés dans ce mémoire, les perspectives sont nombreuses. Elles sont pour la plupart discutées en fin de chaque chapitre. En particulier, un travail reste à mener pour établir de manière précise les liens entre les méthodes d'identification basées sur le filtrage, que nous développons, et celles basées sur la transformée en ondelettes, *e.g.* Flandrin [42], Wornell [100], Abry et *al.* [1] ... De notre point de vue, ces méthodes sont conceptuellement semblables mais il est primordial de comprendre les différentes connexions. En ce sens, les travaux basés sur les méthodes d'ondelettes ne sont pas discutés dans les chapitres à venir.

- De manière plus générale, l'objectif de cette thèse était le traitement statistique d'une alternative particulière du mbf, à savoir le mbm. Tel qu'il a été introduit, le mbm est un processus continu. Il ne permet donc pas de considérer des phénomènes dont la structure de dépendance varierait de manière brutale avec le temps. Ceci a été entrepris d'un point de vue probabiliste par Ayache et *al.* [6], et Benassi et *al.* [15]. Le traitement statistique est, pour le moment, partiel.

- Par ailleurs, notre travail s'inscrit dans un cadre gaussien. Celui-ci est particulièrement agréable, car les outils de démonstrations sont bien établis. Quitter le cadre gaussien et faire le lien avec l'analyse multifractale, qui connaît un véritable succès ces dernières années, constitue une perspective attrayante.

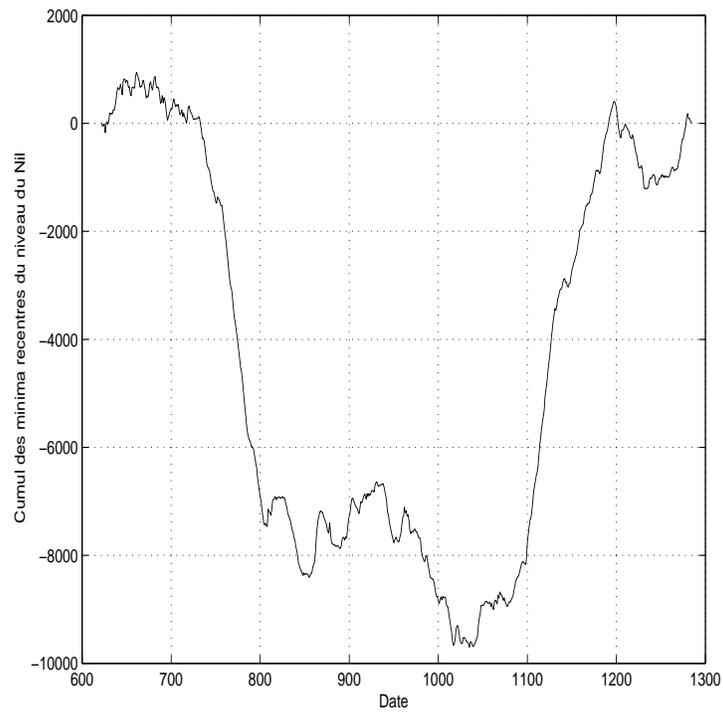


FIG. 1.1 – Sommes cumulées des minima du niveau du Nil recentrés par la moyenne empirique durant les années 622-1284 (voir Tousson [92]).

2 Identification du mouvement brownien fractionnaire par variations discrètes

Ce chapitre contient quelques rappels des principales propriétés statistiques du mbf, et développe des estimateurs consistants des paramètres du mouvement brownien fractionnaire basés sur le k -ème moment absolu des variations discrètes d'une seule trajectoire du mbf. Les performances de ces estimateurs sont illustrées et une étude comparative avec l'estimateur du maximum de vraisemblance y est menée.

2.1 Propriétés générales du mbf

Avant de s'attaquer au problème d'identification du mbf, nous souhaitons énumérer quelques propriétés de ce processus qui indiquent, entre autres, que l'estimation des paramètres n'est pas triviale.

Commençons par rappeler que le mouvement brownien fractionnaire (mbf) de paramètres $(H, C) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^{+*}$, est le processus, noté $\{B_{H,C}(t), t \geq 0\}$ issu de l'intégration fractionnaire d'un bruit blanc gaussien, ou de manière équivalente par l'intégrale stochastique :

$$B_{H,C}(t) = C V_H^{1/2} \int_{\mathbb{R}} f_t(s) dB(s) \quad (2.1)$$

avec $f_t(s) = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \left\{ |t - s|^{H - \frac{1}{2}} \mathbb{I}_{]-\infty, t]}(s) - |s|^{H - 1/2} \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}(s) \right\},$

avec $B_{H,C}(0) = 0$ et $V_H = \Gamma(2H + 1) \sin(\pi H)$; Γ désigne la fonction Gamma et B est un mouvement brownien standard. Ou encore plus simplement, le mbf est défini comme étant l'unique processus gaussien centré, nul à l'origine, à accroissements stationnaires et autosimilaires, tel que

$$\mathbb{E} \left(\{B_{H,C}(t) - B_{H,C}(s)\}^2 \right) = C^2 |t - s|^{2H}, \forall s, t \in \mathbb{R}^+.$$

Dans toute la suite, nous appellerons mbf standard le processus pour lequel $C = 1$. La propriété d'autosimilarité nous permet d'obtenir la fonction de covariance du mbf (notée $\Gamma(\cdot, \cdot)$) ainsi que la fonction d'autocovariance du mbf (i.e. la fonction de covariance des accroissements

notée $\gamma(\cdot)$) respectivement données par :

$$\Gamma(t, s) = \text{Cov}(B_{H,C}(t), B_{H,C}(s)) = \frac{C^2}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \gamma(t-s) &= \text{Cov}(B_{H,C}(t+1) - B_{H,C}(t), B_{H,C}(s+1) - B_{H,C}(s)) \\ &= \frac{C^2}{2} (|t-s-1|^{2H} - 2|t-s|^{2H} + |t-s+1|^{2H}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dans le cas particulier $H = 1/2$, le mbf s'identifie au mouvement brownien, avec dans ce cas $\gamma(k) = 0$, pour $|k| \geq 1$ (les accroissements sont indépendants). Lorsque $H \neq 1/2$, un développement limité en l'infini exhibe la décroissance hyperbolique suivante : $\gamma(k) \sim C^2 H(2H-1) |k|^{2H-2}$, lorsque $|k| \rightarrow +\infty$. Le processus des accroissements du mbf, appelé bruit gaussien fractionnaire (bgf), constitue une série chronologique stationnaire, et admet une densité spectrale (définie par la transformée de Fourier de $\gamma(\cdot)$) explicitement donnée par :

$$f(\lambda) = f(\lambda, H, C) = 2 c_\lambda (1 - \cos \lambda) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |2\pi j + \lambda|^{-1-2H}, \quad \forall \lambda \in [0, 2\pi], \quad (2.4)$$

avec $c_\lambda = \frac{C^2}{2\pi} \sin(\pi H) \Gamma(2H+1)$. Un développement de Taylor de f dans un voisinage de 0 montre que la signature spectrale du bgf est $|\lambda|^{1-2H}$, ce qui indique la présence d'un pôle en zéro lorsque $H > 1/2$, fait caractéristique des processus à longue mémoire.

En ce qui concerne la régularité des trajectoires, à l'instar du mouvement brownien, le mbf est à trajectoires continues et presque sûrement non différentiables. L'approche fractale raffine cette différence. En effet, la dimension de Hausdorff d'un mbf de paramètre $H \in]0, 1[$ est presque sûrement égale à $2 - H$, ce qui implique que pour $H < 1/2$ les trajectoires sont plus irrégulières que celles du mouvement brownien, et inversement plus régulières lorsque $H > 1/2$. La Figure Fig.2.1 illustre cette remarque.

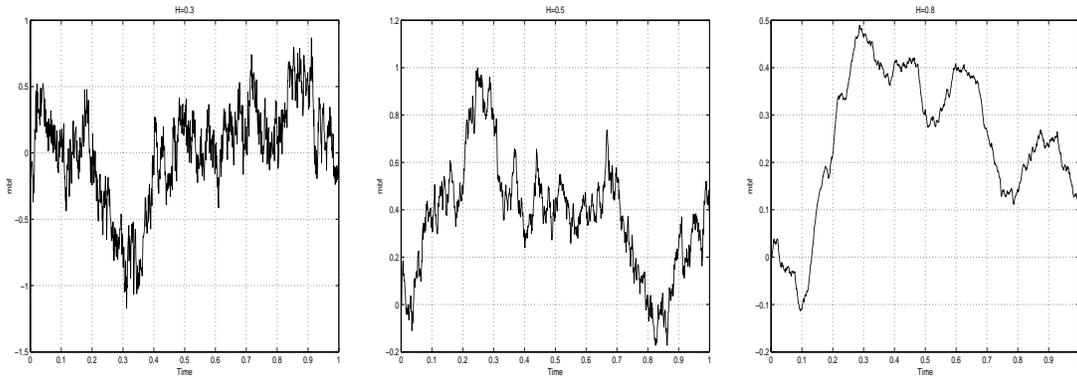


FIG. 2.1 – Trajectoires sur $[0, 1]$ de mbfs respectivement de paramètres $H = 0.3, 0.5, 0.8$ simulées par la méthode de Wood et Chan (voir Annexe A).

2.2 Introduction au problème d'identification

De par la complexité du processus, l'identification est une tâche délicate, ayant suscité une littérature importante depuis 1968. Une liste non exhaustive des estimateurs les

plus courants est présentée par Beran [20]: méthode R/S, variogramme, corrélogramme, log-périodogramme, maximum de vraisemblance (estimateur de Whittle). Nous renvoyons le lecteur à l'Annexe B pour un tour d'horizon plus complet des méthodes d'identification. Ces dernières années ont vu l'émergence de nouvelles approches: une approche par décomposition en ondelettes et une approche par variations discrètes, consistant toutes deux en le filtrage de l'observation d'une seule trajectoire, qui a pour effet d'accélérer la décorrélation des observations. Ces méthodes ne sont pas restreintes au modèle brownien fractionnaire et restent adaptées à une classe de processus beaucoup plus large que constituent les processus gaussiens localement autosimilaires en 0. Un processus gaussien, $\{X(t), t \geq 0\}$ centré, à accroissements stationnaires est dit localement autosimilaire en 0, noté glas (voir Istas et Lang [55]) si sa fonction demi-variance $v(t) = \frac{1}{2}\mathbb{E}((X(s+t) - X(s))^2)$ vérifie la propriété suivante, lorsque $t \rightarrow 0$:

$$v^{2D}(t) = v^{2D}(0) + (-1)^D C |t|^{2H} + o(|t|^{2H}), \quad (2.5)$$

où D est le plus grand entier tel que v soit $2D$ -fois différentiable, et $0 < H < 1$. La notion de processus localement autosimilaire est développée entre autres par Benassi et al. [13], et signifie que le processus tangent converge en loi vers un processus autosimilaire. Dans le cadre des processus gaussiens, cette notion est équivalente à (2.5). Par ailleurs, nous nous sommes restreints au cas où le processus X est centré mais précisons que Istas et Lang [55] ont étudié le cas de processus non centrés dont la fonction moyenne vérifie certaines conditions de régularité. Pour décrire les méthodes d'estimation du paramètre H désignons par (X) le vecteur obtenu par la discrétisation de $\{X(t), t \geq 0\}$ aux instants $i/N, i = 0, \dots, N-1$, et par (V^a) le vecteur (X) filtré par un filtre a . Définissons en outre les variations d'une certaine fonction \mathbb{F} , appelées \mathbb{F} -variations, par la statistique,

$$V_N(\mathbb{F}, a) = \frac{1}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} \mathbb{F}(V^a(i/N)).$$

De nombreux travaux sont basés sur cette approche, avec le choix particulier $\mathbb{F}(t) = \mathbb{H}^k(t) = \frac{|t|^k}{\mathbb{E}(|V^a(0)|^k)} - 1$. En effet, avec un modèle simplifié, Bardet [9], Poggi et Viano [80] dans le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{H}^2$ et Higuchi [50], empiriquement lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{H}^1$, exhibent des estimateurs convergents en $1/\sqrt{N}$, pour $H < 3/4$, basés sur une méthode de régression des \mathbb{F} -variations de plusieurs filtres d'ordre 1. Sous le modèle général, Istas et Lang [55] d'une part, Kent et Wood [60] d'autre part, étudient le comportement de variations quadratiques pour des filtres d'ordre $p \geq 2$, et exhibent des estimateurs convergents en $1/\sqrt{N}$, pour tout H . Enfin, en se restreignant au modèle du mouvement brownien fractionnaire standard ($C = 1$), Peltier et Lévy-Véhel [76], par une approche fractale du problème d'identification, explicitent une classe d'estimateurs de H convergents en $1/\sqrt{N} \log(N)$, pour $H < 3/4$, en estimant le k -ème moment absolu des accroissements du mbf ($\mathbb{F} = \mathbb{H}^k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$).

L'objectif de ce travail est d'uniformiser et de généraliser ces résultats en étudiant les \mathbb{H}^k -variations (pour $k \in \mathbb{R}^{+*}$) du mbf standard et non standard, pour un filtre d'ordre quelconque. Notre principale contribution est d'exhiber pour chaque modèle le k optimal et d'obtenir une convergence gaussienne pour tout $H \in]0, 1[$.

Dans la Section 2.3, nous introduisons un certain nombre de notations et définissons une statistique appelée k -variations, consistant en le k -ème moment absolu empirique des variations discrètes normalisées du mbf. En s'appuyant sur les travaux de Doob [40] et de Breuer et Major [22], nous démontrons sa convergence presque sûre et prouvons un théorème

central limite. La Section 2.4 se propose d'identifier le mbf standard ($C = 1$) et le mbf non standard ($C \neq 1$). Pour ces deux modèles, nous exhibons une classe d'estimateurs consistants et asymptotiquement gaussiens. Si le processus est observé aux instants i/N (resp. i/Δ_N avec $\Delta_N \rightarrow +\infty$ lorsque $N \rightarrow +\infty$) pour $i = 0, \dots, N-1$, la vitesse de convergence de la classe d'estimateurs de H lorsque le mbf est standard est $1/\sqrt{N} \log(N)$ (resp. $1/\sqrt{N} \log(\Delta_N)$), et $1/\sqrt{N}$ (quel que soit le pas de discrétisation) lorsque le mbf est généralisé. Enfin, ajoutons que pour l'ensemble des estimateurs proposés, la variance est minimale pour $k = 2$. La Section 2.5 propose d'illustrer les performances des estimateurs introduits dans la Section 2.4 via une étude de simulation. La Section 2.6, enfin, assure la cohérence et les perspectives de ce travail car nous nous attachons à comparer les estimateurs introduits pour identifier le mbf non standard avec l'estimateur de Whittle (issu du maximum de vraisemblance). Les preuves des différents résultats énoncés sont rassemblés dans la Section 2.8.

2.3 k -variations du mbf

L'objectif de cette première partie est d'introduire un certain nombre de notations et de présenter les résultats de convergence du k -ème moment absolu empirique des variations discrètes normalisées du mbf, de manière à rendre plus lisible la Section 2.4. Notre modèle statistique sera constitué d'une trajectoire, notée $B_{H,C}$, d'un mbf de paramètres $(H, C) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^{+*}$, discrétisée aux instants $i/N, i = 0, \dots, N-1$. Nous notons a un filtre de longueur $\ell + 1$ et d'ordre $p \geq 1$, i.e. un vecteur à composantes réelles vérifiant

$$\sum_{q=0}^{\ell} a_q q^i = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, p-1 \quad \text{et} \quad \sum_{q=0}^{\ell} a_q q^p \neq 0.$$

Soit V^a la série issue du filtrage de la trajectoire discrétisée $B_{H,C}$ par a :

$$V^a \left(\frac{j}{N} \right) = \sum_{q=0}^{\ell} a_q B_{H,C} \left(\frac{j-q}{N} \right), \quad \text{pour } j = \ell, \dots, N-1.$$

A titre d'exemple, V^a représente les accroissements du mbf dans le cas où $a = (1, -1)$, et les différences secondes lorsque $a = (1, -2, 1)$. Nous noterons E_k le k -ème moment absolu de la loi normale centrée réduite, explicitement donné par $E_k = 2^{k/2} \Gamma(k+1/2) / \Gamma(1/2), k > 0$. Définissons la variable aléatoire $V_N(k, a)$, appelée k -variations par

$$V_N(k, a) = \frac{1}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} \left\{ \frac{|V^a(i/N)|^k}{\mathbb{E}(|V^a(i/N)|^k)} - 1 \right\}. \quad (2.6)$$

La quantité $\mathbb{E}(|V^a(i/N)|^k)$ dépend explicitement des paramètres H et C . Il peut donc paraître sans intérêt d'étudier le comportement asymptotique de la variable aléatoire $V_N(k, a)$. Cependant, comme nous le verrons par la suite les comportements des estimateurs que nous définissons sont intimement liés à celui de $V_N(k, a)$. Avant tout, désignons par π_H^a la fonction de covariance de V^a . Il est clair que la série V^a est stationnaire (ceci provient du fait que la somme des composantes du filtre est nulle). L'autosimilarité du mbf entraîne que pour tout $j \in \mathbb{Z}$:

$$\pi_H^a(j) = \mathbb{E}(V^a(i/N)V^a((i+j)/N)) = -\frac{C^2}{2} \sum_{q,r=0}^{\ell} a_q a_r |q-r+j|^{2H}. \quad (2.7)$$

L'intérêt de l'approche, c'est-à-dire l'utilisation des filtres discrets, est donné par le Lemme suivant, dû à Istas et Lang [55].

Lemme 2.1 Avec les notations précédentes, nous avons $\pi_H^a(j) \sim \kappa j^{2H-2p}$, lorsque $j \rightarrow +\infty$, où $\kappa = -\frac{1}{2} \sum_{q,r=0}^{\ell} \beta_{2p,H} \frac{(q-r)^{2p}}{(2p)!}$ avec $\beta_{2p,H} = 2H(2H-1) \dots (2H-2p+1)$.

La Figure Fig.2.2 illustre la décroissance hyperbolique de π_H^a . Par la suite, nous noterons pour $j \in \mathbb{Z}$

$$\rho_H^a(j) = \frac{\pi_H^a(j)}{\pi_H^a(0)}. \quad (2.8)$$

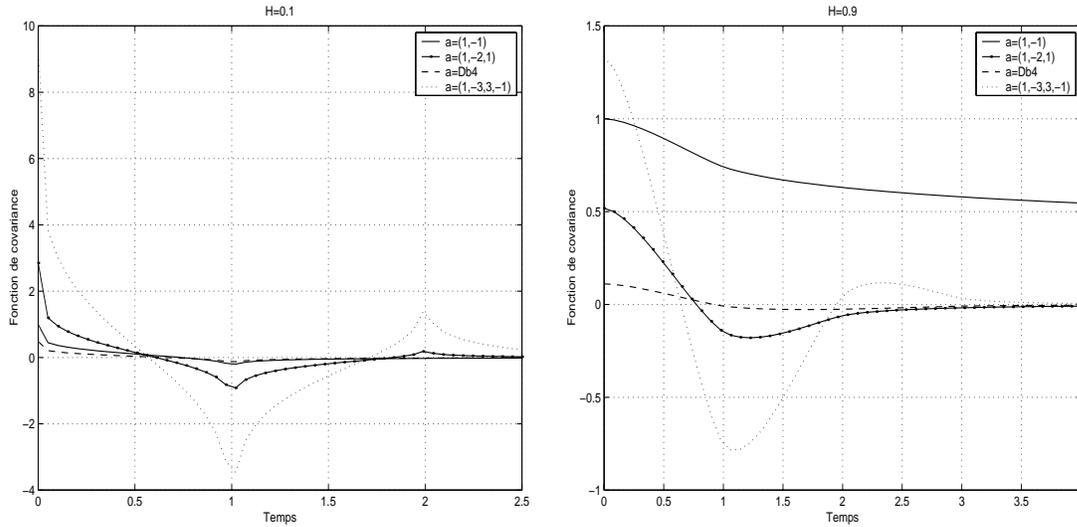


FIG. 2.2 – Tracés de la fonction π_H^a pour différents filtres (Db4 désignant le filtre d'une ondelette de Daubechies d'ordre 4) et pour deux valeurs du paramètre de Hurst.

En utilisant les travaux de Doob [40], de Breuer et Major [22] et d'après le développement en polynômes d'Hermite de la fonction $\mathbb{H}^k(t) = |t|^k/E_k - 1$, dont les coefficients notés c_{2j}^k sont explicités dans la Section 2.8.1, nous obtenons le résultat suivant quant à la convergence de $V_N(k, a)$:

Proposition 2.1 Soit a un filtre d'ordre $p \geq 1$ et soit k un réel strictement positif, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$ on a

(i)

$$V_N(k, a) \xrightarrow{p.s.} 0. \quad (2.9)$$

(ii) Si $p > H + 1/4$,

$$\sqrt{N} V_N(k, a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, A_1(H, k, a)), \quad (2.10)$$

où

$$A_1(H, k, a) = \sum_{j \geq 1} (c_{2j}^k)^2 (2j)! \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^{2j} \quad \text{et} \quad c_{2j}^k = \frac{1}{(2j)!} \prod_{q=0}^{j-1} (k - 2q). \quad (2.11)$$

La condition $p > H + 1/4$ de (ii) résulte de la condition de sommabilité au carré de ρ_H^α découlant elle-même du Théorème 1 de Breuer et Major [22]. Ainsi, si $p = 1$ la convergence en loi n'est valable que sur l'intervalle $H \in]0, 3/4[$, alors qu'elle est valable pour tout $H \in]0, 1[$ dès que $p \geq 2$.

Remarque : l'autosimilarité globale du processus n'est pas une condition nécessaire pour obtenir la convergence en loi des k -variations. Moyennant des hypothèses supplémentaires sur les paramètres d'un processus gaussien localement autosimilaire en 0 (i.e. sur le reste du développement en 0 de $v^{2D}(\cdot)$, sur le pas de discrétisation et sur l'ordre du filtre), Istas et Lang [55], Théorèmes 2 et 4, montrent, lorsque $k = 2$, que la limite reste gaussienne.

Le Corollaire 2.1 répond à la question suivante : que se passe-t-il si l'on fait varier k en fonction de N ? Cette question est motivée par le fait qu'en choisissant $\alpha > 0$ et $k = N^{-\alpha}$, on a lorsque $N \rightarrow +\infty$,

$$c_{2j}^k \sim N^{-\alpha} \theta_{2j} \quad \text{avec} \quad \theta_{2j} = (-1)^{j-1} 2^{j-1} \frac{(j-1)!}{(2j)!}.$$

Nous nous sommes alors intéressés à comprendre comment cela influait sur la vitesse de convergence de $V_N(N^{-\alpha}, a)$.

Corollaire 2.1 *Soit a un filtre d'ordre $p > H + 1/4$ et soit α un réel strictement positif, alors*

$$N^{\alpha+\frac{1}{2}} V_N(N^{-\alpha}, a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, A_1(H, a)),$$

avec

$$A_1(H, a) = \sum_{j \geq 1} (\theta_{2j})^2 (2j)! \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^{2j} \quad \text{et} \quad \theta_{2j} = (-1)^{j-1} \frac{2^{j-1} (j-1)!}{(2j)!}.$$

Ainsi, plus k tend rapidement vers zéro, plus la vitesse de convergence des k -variations est élevée. Ces résultats étant établis, nous nous proposons d'identifier les paramètres du mbf par une méthode de moments en distinguant les cas où le coefficient d'échelle, C , est connu ou non.

2.4 Applications des résultats à l'identification du mbf

2.4.1 Cas du mbf standard

Définissons le k -ème moment absolu empirique des variations discrètes du mbf par la statistique suivante

$$S_N(k, a) = \frac{1}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} |V^a(i/N)|^k. \quad (2.12)$$

La stationnarité de la série (V^a) et les notations introduites impliquent que

$$\mathbb{E}(S_N(k, a)) = \frac{1}{N H k} \{\pi_H^a(0)\}^{k/2} E_k.$$

Certains des auteurs cités précédemment, *e.g.* Istas et Lang [55], Kent et Wood [60], proposent un estimateur basé sur une méthode de régression à partir de la statistique $S_N(k, a)$ évaluée pour plusieurs filtres. Cette méthode a le mérite d'explicitier un estimateur indépendant de

$\mathbb{E}(V^a(i/N)^2)$. De ce fait, l'hypothèse d'autosimilarité locale en 0, peut suffire pour l'identification. L'avantage du modèle mbf est que l'autosimilarité est globale, $\mathbb{E}(S_N(k, a))$ est explicite : en utilisant un seul filtre toute l'information est conservée; en estimant $\mathbb{E}(S_N(k, a))$ par $S_N(k, a)$, on déduit une première classe d'estimateurs :

$$\widehat{H}_N(k, a) = g_{k,a,N}^{-1}(S_N(k, a)), \quad (2.13)$$

où nous définissons pour un entier $N \geq 1$, un filtre a quelconque et un réel k strictement positif, la fonction $g_{k,a,N}$ sur $]0, 1[$ par

$$g_{k,a,N}(t) = \frac{1}{N^{tk}} \{\pi_t^a(0)\}^{k/2} E_k.$$

En supposant que la taille de l'échantillon vérifie

$$N > \max_{t \in]0, 1[} \exp \left\{ \frac{\sum_{|q-r| > 2} a_q a_r \log(|q-r|) |q-r|^{2t}}{\sum_{q,r} a_q a_r |q-r|^{2t}} \right\}, \quad (\mathcal{H})$$

condition réalisée pour l'ensemble des filtres utilisés en pratique (accroissements d'ordre quelconque, filtres de Daubechies, coifflets), la monotonie (et donc l'inversibilité) de $g_{k,a,N}$ est assurée. En particulier, l'hypothèse (\mathcal{H}) assure l'existence de la classe d'estimateurs $\widehat{H}_N(k, a)$. Le cas $p = 1$, où la série V^a n'est autre que le bruit gaussien fractionnaire standard, a été étudié par Peltier et Lévy-Véhel [76]. Ils obtiennent une expression analytique des estimateurs, ce qui est impossible dès lors que $p \geq 2$. En effet, lorsque $p = 1$, la fonction $\pi_t^a(0)$ est constante et égale à 1 $\forall t \in]0, 1[$, alors qu'elle dépend de t lorsque $p \geq 2$. Précisons d'ailleurs que numériquement $\widehat{H}_N(k, a)$ est obtenu par minimisation de $g_{k,a,N}(t) - S_N(k, a)$ sur $]0, 1[$.

Par la suite, a désignera un filtre vérifiant implicitement l'hypothèse (\mathcal{H}) . La Proposition 2.1 permet d'obtenir le résultat suivant relatif à la convergence de $\widehat{H}_N(k, a)$.

Proposition 2.2 *Soit a un filtre d'ordre $p \geq 1$ et soit k un réel strictement positif, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$ on a*

(i)

$$\widehat{H}_N(k, a) \xrightarrow{p.s.} H. \quad (2.14)$$

(ii) Si $p > H + 1/4$,

$$\sqrt{N} \log(N) \left(\widehat{H}_N(k, a) - H \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{A_1(H, k, a)}{k^2} \right), \quad (2.15)$$

où $A_1(H, k, a)$ est donnée par (2.11).

La connaissance de la discrétisation et du coefficient d'échelle, C , se répercute dans la vitesse de convergence de l'estimateur en $1/\sqrt{N} \log(N)$, vitesse plus élevée que la vitesse paramétrique "classique" (en $1/\sqrt{N}$). A ce stade, connaissant explicitement la variance asymptotique des estimateurs, on peut se demander s'il existe une valeur optimale de k qui minimise la variance de $\widehat{H}_N(k, a)$. On a :

Corollaire 2.2 *Pour tout filtre a d'ordre $p \geq 1$, la variance de $\widehat{H}_N(k, a)$ est minimale pour $k = 2$.*

Preuve: Notons $(c_{2j}^k)' = \frac{1}{k^2}(c_{2j}^k)^2(2j)!$, où c_{2j}^k désigne le $2j$ -ème coefficient du développement en polynômes d'Hermite de la fonction $\mathbb{H}^k(t) = |t|^k/E_k - 1$. La Section 2.8 explicite ce calcul et montre que $c_{2j}^k = \frac{1}{(2j)!} \prod_{q=0}^{j-1} (k - 2q)$.

$$\frac{1}{k^2}A_1(H, k, a) = \sum_{j \geq 1} (c_{2j}^k)' \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^{2j} \geq (c_2^k)' \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^2.$$

Il suffit alors de remarquer que $(c_{2j}^k)' = 0$ pour $j > 1$, i.e. que $\frac{1}{4}A_1(H, 2, a) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(j)^2$. \square

Le Corollaire 2.2 implique en particulier qu'il est inutile de faire varier k en fonction de N pour estimer le paramètre H . Lorsque $k = 2$, nous obtenons le théorème limite suivant lorsque $N \rightarrow +\infty$:

$$\sqrt{N} \log(N) \left(\widehat{H}_N(2, a) - H \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^2 \right). \quad (2.16)$$

La classe d'estimateurs $\widehat{H}_N(k, a)$ que nous venons de définir et d'étudier n'est pas sans intérêt. Certes, elle suppose la connaissance de la discrétisation et du coefficient d'échelle C mais elle nous permet de construire un test asymptotique, basé sur (2.16), utilisé pour juger de la qualité de diverses méthodes de simulation du mbf. Nous renvoyons le lecteur à l'Annexe A.

Pour expliciter les estimateurs $\widehat{H}_N(k, a)$, nous avons supposé la trajectoire discrétisée aux instants $i/N, i = 0, \dots, N-1$. Si la discrétisation devient $i/\Delta_N, i = 0, \dots, N-1$, avec $\Delta_N \rightarrow +\infty$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, nous obtenons un résultat fort intéressant. De manière analogue à (2.13), définissons

$$\widehat{H}_{\Delta_N} = g_{k,a,\Delta_N}^{-1} (S_N(k, a)), \quad (2.17)$$

avec

$$S_N(k, a) = \frac{1}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} |V^a(i/\Delta_N)|^k \quad \text{et} \quad g_{k,a,\Delta_N}(t) = \frac{1}{(\Delta_N)^{tk}} \{\pi_t^a(0)\}^{k/2} E_k.$$

Le résultat suivant montre l'amélioration apportée pour une telle discrétisation.

Corollaire 2.3 *Soit a un filtre d'ordre $p > H + 1/4$ et soit k un réel strictement positif, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$ on a*

(i)

$$\widehat{H}_{\Delta_N}(k, a) \xrightarrow{p.s.} H.$$

(ii) Si $p > H + 1/4$,

$$\sqrt{N} \log(\Delta_N) (\widehat{H}_N(k, a) - H) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, A_1(H, k, a)).$$

Exemples: $\Delta_N = N^\alpha, \alpha > 0$, vitesse de convergence: $1/\alpha\sqrt{N} \log(N)$
 $\Delta_N = \exp(N)$, vitesse de convergence: $1/N^{\frac{3}{2}}$

La preuve résulte du fait que les preuves des Propositions 2.1 et 2.2 sont encore valables en remplaçant la discrétisation uniforme par la discrétisation $\{0, \dots, \frac{N-1}{\Delta_N}\}$.

2.4.2 Cas du mbf généralisé

Supposons de nouveau la trajectoire discrétisée aux instants $i/N, i = 0, \dots, N - 1$. Nous avons à présent deux paramètres à estimer, H et C . Il devient donc impossible d'utiliser la méthode précédente basée sur la régression non linéaire avec un seul filtre, et il est indispensable d'employer plusieurs filtres. Et parmi l'ensemble des filtres, il en existe une collection intéressante (également employée par Kent et Wood [60] dans le cas $k = 2$) constituée par la suite $(a^m)_{m \geq 1}$ définie pour $m \geq 1$ par

$$a_i^m = \begin{cases} a_j & \text{si } i = jm \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m\ell + 1,$$

Le filtre a^m n'est autre que le filtre a dilaté m fois. L'intérêt de cette famille réside dans le calcul suivant

$$\mathbb{E}(S_N(k, a^m)) = \frac{1}{N^{Hk}} \{\pi_H^{a^m}(0)\}^{k/2} E_k = m^{Hk} \mathbb{E}(S_N(k, a)),$$

qui indique la log-linéarité en H de $E(S_N(k, a^m))$. La procédure d'estimation devient simple et naturelle : on se donne M filtres ($M \geq 2$) et on effectue une régression linéaire simple de $L_N = \{\log S_N(k, a^m)\}_{1 \leq m \leq M}$ sur X_M , matrice $M \times 2$ du plan d'expérience définie par

$$X_M = \begin{pmatrix} 0 & k \log(2) & \dots & k \log(M) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^t, \quad (2.18)$$

ce qui permet d'obtenir une classe d'estimateurs de $\alpha = (H, \theta)^t$, que l'on notera $\tilde{\alpha}_N^{ols}(k, a, M) = (\tilde{H}_N^{ols}(k, a, M), \tilde{\theta}_N^{ols}(k, a, M))^t$, avec θ le paramètre défini par

$$\theta = \log \mathbb{E}(S_N(k, a)) = k \log(C) - Hk \log(N) + \log(\pi_H^a(0)^{\frac{k}{2}}/E_k).$$

Avec les notations adoptées précédemment, cette classe s'écrit

$$\tilde{\alpha}_N^{ols}(k, a, M) = (X_M^t X_M)^{-1} X_M^t L_N.$$

Nous pouvons alors établir le résultat suivant, énonçant la convergence des k -variations en dimension M , et la normalité asymptotique du résidu de la régression linéaire de L_N sur X_M .

Proposition 2.3 *Soient a un filtre d'ordre $p \geq 1$, k un réel strictement positif, et M un entier supérieur ou égal à 2, alors, lorsque $N \rightarrow +\infty$, on a*

(i)

$$(V_N(k, a^1), \dots, V_N(k, a^M)) \xrightarrow{p.s.} (0, \dots, 0). \quad (2.19)$$

Si $p > H + 1/4$,

(ii)

$$\sqrt{N} (V_N(k, a^1), \dots, V_N(k, a^M))^t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, G_k). \quad (2.20)$$

(iii)

$$\sqrt{N} (L_N - X_M \alpha) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, G_k). \quad (2.21)$$

G_k étant la matrice $M \times M$ définie par

$$g_{mn} = \sum_{j \geq 1} (c_{2j}^k)^2 (2j)! \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^{a^m, a^n}(i)^{2j} \quad \text{avec} \quad \rho_H^{a^m, a^n}(i) = \frac{\sum_{q,r=0}^{\ell} a_q a_r |mq - nr + i|^{2H}}{m^H n^H \sum_{q,r=0}^{\ell} a_q a_r |q - r|^{2H}}. \quad (2.22)$$

La définition de θ permet d'obtenir explicitement une classe d'estimateurs pour le coefficient d'échelle C :

$$\tilde{C}_N^{ols}(k, a, M) = N^{\tilde{H}^{ols}} \left(\pi_{\tilde{H}^{ols}}^a(0)^{\frac{1}{2}} E_k^{\frac{1}{k}} \right)^{-1} \exp \left(\tilde{\theta}_N^{ols}(k, a, M)/k \right), \quad (2.23)$$

où $\tilde{H}^{ols} = \tilde{H}_N^{ols}(k, a, M)$. Il en découle alors la proposition suivante, exprimant la convergence des estimateurs des paramètres H et C :

Proposition 2.4 Soient a un filtre d'ordre $p \geq 1$, k un réel strictement positif, et M un entier supérieur ou égal à 2, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$ on a

(i)

$$\left(\tilde{H}_N^{ols}(k, a, M), \tilde{C}_N^{ols}(k, a, M) \right) \xrightarrow{p.s.} (H, C), \quad (2.24)$$

(ii) Si $p > H + 1/4$,

$$\sqrt{N} \left(\tilde{H}_N^{ols}(k, a, M) - H \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{ols}^2(k)), \quad (2.25)$$

$$\frac{\sqrt{N}}{\log(N)} \left(\tilde{C}_N^{ols}(k, a, M) - C \right) / C \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{ols}^2(k)), \quad (2.26)$$

où la variance asymptotique $\sigma_{ols}^2(k)$, est définie par $\sigma_{ols}^2(k) = \frac{A^t G'_k A}{\|A\|^4}$; A étant le vecteur M -dimensionnel de composantes $A_m = \log(m) - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log(m)$, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de \mathbb{R}^M et G'_k la matrice $M \times M$ dont les termes génériques sont définis $g'_{mn} = g_{mn}/k^2$.

Par analogie avec le Corollaire 2.2, nous pouvons montrer le résultat suivant:

Corollaire 2.4 Pour tout filtre a d'ordre $p \geq 1$, la constante asymptotique $\sigma_{ols}^2(k)$ est minimale pour $k = 2$.

Preuve: Il suffit de remarquer que $\forall m, n = 1, \dots, M$ et $\forall k > 0$, on a

$$(G'_k)_{m,n} = \sum_{j \geq 1} \left(c_{2j}^k \right)' \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^{a^m, a^n}(i)^{2j} \geq \left(c_2^k \right)' \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^{a^m, a^n}(i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^{a^m, a^n}(i)^2 = (G'_2)_{m,n},$$

d'où le résultat. □

Dans notre procédure d'identification, nous avons évité l'estimation de H par une régression non linéaire de $\{S_N(k, a^m)\}_{1 \leq m \leq M}$ sur $\{\mathbb{E}(S_N(k, a^m))\}_{1 \leq m \leq M}$ en remarquant le fait que $\log \mathbb{E}(S_N(k, a^m))$ est linéaire en H . On pourrait alors penser que la non linéarité apportée par la transformation logarithmique entraînerait par sa courbure un biais non négligeable sur les paramètres. Ceci n'est manifestement pas le cas, comme le montrent les calculs suivants. Dans le cas particulier $k = 2$, notons ξ_N le vecteur $L_N - X_M \alpha$. En remarquant que $(\xi_N)_m =$

$\log Y_{N,m} - \log(N - m\ell)$, où $Y_{N,m}$ est définie par $Y_{N,m} = \sum_{i=m\ell}^{N-1} V^{am} (i/N)^2 / \mathbb{E}(V^{am} (i/N)^2)$, et en approchant, $\mathbb{E}(\log(Y_{N,m}))$ par $\mathbb{E}(\log(Y))$, où $Y \rightsquigarrow \chi_{N-m\ell}^2$, on obtient

$$\mathbb{E}((\xi_N)_m) \simeq \Psi\left(\frac{N - m\ell}{2}\right) - \log\left(\frac{N - m\ell}{2}\right), \quad \text{où } \Psi(t) = \Gamma'(t)/\Gamma(t). \quad (2.27)$$

Un développement limité montre alors que $\mathbb{E}((\xi_N)_m) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N-m\ell}\right)$: le biais est donc négligeable. Pour en être convaincu, le tableau ci-dessous donne une approximation de la part apportée par la non-linéarité du logarithme, dans l'estimation finale de H : celle-ci vaut $-\frac{A^t \mathbb{E}(\xi_N)}{2\|A\|^2}$ (avec $\mathbb{E}(\xi_N)$ donnée par (2.27)).

	Taille de l'échantillon					
	128	256	512	1024	2048	4096
M=2	4.53 10 ⁻⁵	1.11 10 ⁻⁵	2.77 10 ⁻⁶	6.91 10 ⁻⁷	1.73 10 ⁻⁷	4.31 10 ⁻⁸
M=5	7.77 10 ⁻⁵	1.89 10 ⁻⁵	4.67 10 ⁻⁶	1.16 10 ⁻⁶	2.89 10 ⁻⁷	7.23 10 ⁻⁸
M=10	1.31 10 ⁻⁴	3.13 10 ⁻⁵	7.66 10 ⁻⁶	1.89 10 ⁻⁶	4.71 10 ⁻⁷	1.17 10 ⁻⁷

En suivant une idée de Bardet [9], nous pouvons envisager une régression linéaire pondérée, en estimant la matrice de covariance G_k par $\hat{G}_k = G_k(\tilde{H}_N^{ols}(k, a, M))$. Avec les notations prises précédemment l'estimateur défini par la régression linéaire de L_N sur X_M pondérée par \hat{G}_k , est défini par

$$\tilde{\alpha}_N^{gls}(k, a, M) = (X_M^t (\hat{G}_k)^{-1} X_M)^{-1} X_M^t L_N.$$

Ceci détermine les estimateurs $\tilde{H}_N^{gls}(k, a, M)$ et $\tilde{\theta}_N^{gls}(k, a, M)$, et de manière identique à (2.23), nous obtenons une nouvelle classe d'estimateurs pour le coefficient d'échelle,

$$\tilde{C}_N^{gls}(k, a, M) = N^{\tilde{H}^{gls}} \left(\pi_{\tilde{H}^{gls}}^a(0)^{\frac{1}{2}} E_k^{\frac{1}{k}} \right)^{-1} \exp\left(\frac{1}{k} \tilde{\theta}_N^{gls}(k, a, M)\right),$$

où $\tilde{H}^{gls} = \tilde{H}_N^{gls}(k, a, M)$. Nous obtenons alors le résultat analogue à la Proposition 2.4, concernant les convergences du paramètre d'autosimilarité et du coefficient d'échelle.

Proposition 2.5 *Soient a un filtre d'ordre $p \geq 1$, k un réel strictement positif, et M un entier supérieur ou égal à 2, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$ on a*

(i)

$$\left(\tilde{H}_N^{gls}(k, a, M), \tilde{C}_N^{gls}(k, a, M) \right) \xrightarrow{p.s.} (H, C), \quad (2.28)$$

(ii) Si $p > H + 1/4$,

$$\sqrt{N} \left(\tilde{H}_N^{gls}(k, a, M) - H \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{gls}^2(k)), \quad (2.29)$$

$$\frac{\sqrt{N}}{\log(N)} \left(\tilde{C}_N^{gls}(k, a, M) - C \right) / C \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{gls}^2(k)), \quad (2.30)$$

où la variance asymptotique $\sigma_{gls}^2(k)$, est définie par

$$\sigma_{gls}^2(k) = \frac{1}{\|B_k\|_{G'_k}^2} \quad \text{avec} \quad \|B_k\|_{G'_k}^2 = B_k^t (G'_k)^{-1} B_k,$$

et B_k le vecteur

$$B_k = \left\{ I_M - \frac{1_M^t 1_M (G'_k)^{-1}}{1_M^t (G'_k)^{-1} 1_M} \right\} \{ \log(m) \}_{1 \leq m \leq M}, \quad \text{où } 1_M = (1, \dots, 1)^t.$$

De manière identique à la Proposition 2.2, si $p = 1$ (resp. $p \geq 2$), l'ensemble des résultats est valable pour $H < 3/4$ (resp. pour tout H , $0 < H < 1$).

Vient alors la question de la valeur du paramètre k minimisant la constante asymptotique $\sigma_{gls}^2(\cdot)$. La Figure Fig. 2.3 représente pour deux filtres $a = (1, -1)$ et $a = Db4$ (filtre d'une ondelette de Daubechies d'ordre 4), pour le paramètre $M = 5$ et pour différentes valeurs de k , le tracé de la fonction $\sigma_{gls}^2(k)/\sigma_{gls}^2(2)$ en fonction de H (H variant sur $]0, 3/4[$ pour le filtre d'ordre 1, et sur $]0, 3/4[$ pour le filtre $Db4$). Elle nous laisse conjecturer qu'un résultat analogue au Corollaire 2.4 peut être prouvé pour $\sigma_{gls}^2(k)$. Ce résultat n'a pas beaucoup d'intérêt en soi car, comme le montrent les simulations effectuées dans la Section 2.5, la procédure de régression linéaire pondérée n'amène pas un gain notable par rapport à la procédure de régression linéaire simple.

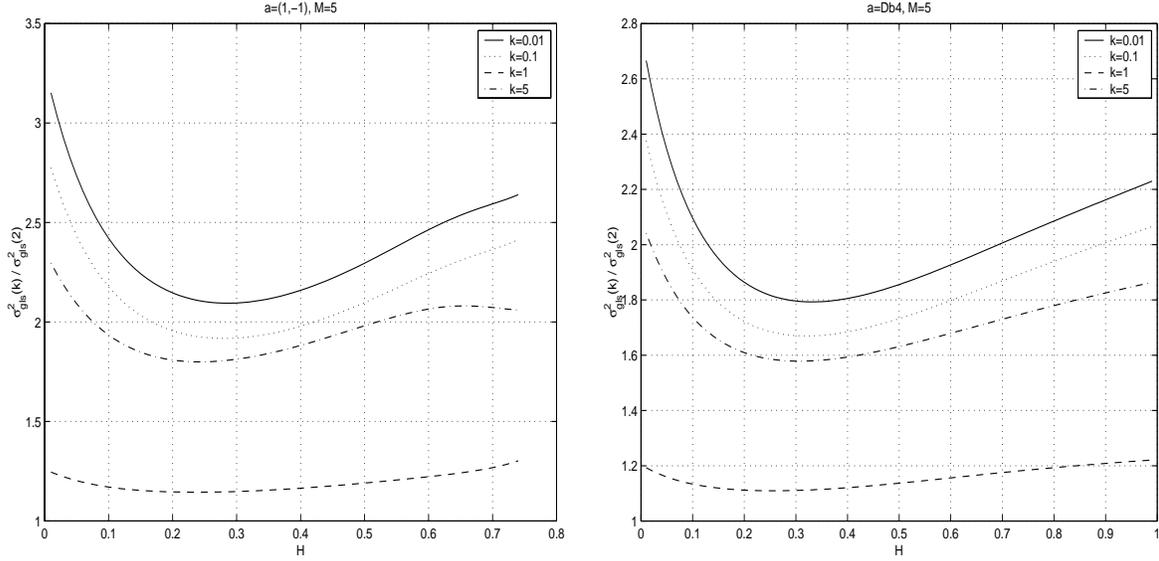


FIG. 2.3 – Rapport des variances asymptotiques $\sigma_{gls}^2(k)/\sigma_{gls}^2(2)$ en fonction de H , pour $M = 5$, pour les filtres $a = (1, -1)$ et $a = Db4$, et pour différentes valeurs de k .

Remarquons que seuls les estimateurs du coefficient d'échelle dépendent de la discrétisation de l'échantillon. Si l'on considère maintenant une discrétisation $\{0, \frac{1}{\Delta_N}, \dots, \frac{N-1}{\Delta_N}\}$, telle que lorsque $N \rightarrow +\infty$ on ait $\Delta_N \rightarrow +\infty$ et $\frac{\log(\Delta_N)}{\sqrt{N}} \rightarrow 0$; ceci assure que $\log(\Delta_N)(\tilde{H} - H)$ (avec $\tilde{H} = \tilde{H}_N^{ols}(k, a, M)$ ou $\tilde{H}_N^{gls}(k, a, M)$) converge en probabilité vers 0. Nous obtenons alors, en suivant les démonstrations des Propositions 2.4 et 2.5, le résultat suivant, soit

$$\tilde{C}_{\Delta_N}^{ols}(k, a, M) = (\Delta_N)^{\tilde{H}^{ols}} \left(\pi_{\tilde{H}^{ols}}^a(0)^{\frac{1}{2}} E_k^{\frac{1}{k}} \right)^{-1} \exp \left(\frac{1}{k} \tilde{\theta}_{\Delta_N}^{ols}(k, a, M) \right),$$

alors,

$$\tilde{C}_{\Delta_N}^{ols}(k, a, M) \xrightarrow{\mathbb{P}} C,$$

$$\text{et } \frac{\sqrt{N}}{\log(\Delta_N)} \left(\tilde{C}_{\Delta_N}^{ols}(k, a, M) - C \right) / C \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{ols}^2(k)).$$

Des résultats identiques sont valables pour $\tilde{C}_{\Delta_N}^{gls}(k, a, M)$.

Par ailleurs, la première classe d'estimateurs du paramètre d'autosimilarité, $\widehat{H}_{\Delta_N}(k, a)$ définie par (2.17), supposait la connaissance du coefficient d'échelle C . Cette hypothèse forte nous a permis d'expliciter une classe d'estimateurs ayant une vitesse de convergence très rapide, en $1/\sqrt{N} \log(\Delta_N)$. Est-il possible de conserver la même vitesse de convergence, lorsque le mouvement brownien fractionnaire n'est plus standard? Une fois le coefficient d'échelle estimé, la trajectoire discrétisée renormalisée par le coefficient d'échelle estimé, il s'agit de décrire le comportement de l'estimateur $\widehat{H}_{\Delta_N}(k, a)$ défini par

$$\widehat{H}_{\Delta_N}(k, a) = g_{k,a,\Delta_N}^{-1} (S'_N(k, a)),$$

où g_{k,a,Δ_N} est la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$g_{k,a,\Delta_N}(t) = \widetilde{C}^k \frac{1}{(\Delta_N)^{tk}} \{ \pi_t^a(0) \}^{k/2} E_k \quad \text{avec} \quad \widetilde{C} = \widetilde{C}_{\Delta_N}^{ols}(k, a, M) \quad \text{ou} \quad \widetilde{C}_{\Delta_N}^{gls}(k, a, M),$$

et où

$$S'_N(k, a) = \frac{1}{N - \ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} \frac{1}{\widetilde{C}^k} |V^a(i/\Delta_N)|^k.$$

La loi limite de $\widehat{H}_{\Delta_N}(k, a)$ passe par l'étude de la loi limite de $V'_N(k, a) = S'_N(k, a)/\mathbb{E}(S'_N(k, a)) - 1$. Or,

$$V'_N(k, a) = V_N(k, a) + \left| \frac{\widetilde{C} - C}{C} \right|^k \left| \frac{C}{\widetilde{C}} \right|^k V_N(k, a). \quad (2.31)$$

La convergence de \widetilde{C} et l'équation (2.31) montrent que $V'_N(k, a)$ converge vers une loi gaussienne centrée, avec la vitesse de convergence $\log(\Delta_N)/\sqrt{N}$, et par un raisonnement similaire à la Proposition 2.15, la vitesse de convergence de $\widehat{H}_{\Delta_N}(k, a)$ devient $1/\sqrt{N}$. En conclusion, la vitesse de convergence de \widetilde{C} , entraîne la perte d'un facteur $\log(\Delta_N)$ dans l'estimation finale de H .

Enfin, nous renvoyons le lecteur au Théorème 3 de Istas et Lang [55], qui sous certaines hypothèses de régularité du développement de $v(t)$ en 0, et du pas de discrétisation, montrent, lorsque $k = 2$, que ces méthodes de régression restent adaptées à l'estimation de l'exposant de Hölder d'un processus gaussien localement autosimilaire en 0. Dans ce cadre de travail, le cas $k \in \mathbb{R}^{+*}$ n'a pas été considéré.

2.5 Simulations et calculs numériques

2.5.1 Variances asymptotiques des estimateurs

Variance asymptotique de $\sqrt{N} \log(N) \widehat{H}_N(2, a)$

Introduisons les quelques notations suivantes :

- Diff. i : filtre des différences d'ordre i (i moments nuls).
- Diff. 2 dil : filtre des différences d'ordre 2, dilaté une fois (i.e. (1,0,-2,0,1)).
- Db i : filtre d'une ondelette de Daubechies d'ordre i , ($i/2$ moments nuls).
- Coifflets 1 : filtre d'une Coifflet d'ordre 1 (2 moments nuls).

Nous renvoyons le lecteur à Daubechies [35] pour des précisions sur les filtres d'ondelettes de Daubechies et les Coifflets. La Figure Fig.2.4 évalue la variance asymptotique

de $\sqrt{N}\widehat{H}_N(2, a)$, i.e. $\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^2$, pour différents filtres en fonction de H . Précisons tout d'abord, que la définition de ρ_H^a assure que la constante asymptotique est indépendante de la normalisation du filtre. Nous retrouvons, tout d'abord, le fait que lorsque $p = 1$, ρ_H^a n'est pas de carré sommable pour $H \geq 3/4$. En outre, lorsque $p \geq 2$, les calculs montrent que la variance asymptotique augmente avec l'ordre, quel que soit $H \in]0, 1[$. Ensuite, parmi les filtres d'ordre 2, le filtre $Db4$, dont nous rappelons la définition :

$$a \simeq (0.4829629, -0.8365163, 0.22414386, 0.12940952)$$

est optimal, et dilater ce dernier filtre n'amène pas d'améliorations. Nous avons calculé la valeur numérique H_c , à partir de laquelle, le filtre $a = (1, -1)$, devient moins bon que $Db4$, ce qui permet de dégager le meilleur filtre parmi les filtres étudiés pour l'estimateur $\widehat{H}_N(2, a)$:

$$a_{opt} = \begin{cases} (1, -1) & \text{si } H \leq H_c \\ Db4 & \text{si } H \geq H_c \end{cases} \quad \text{avec, } H_c \simeq 0.641.$$

Il est clair que a_{opt} dépend de H . D'un point de vue pratique, une connaissance à priori de H est donc nécessaire.

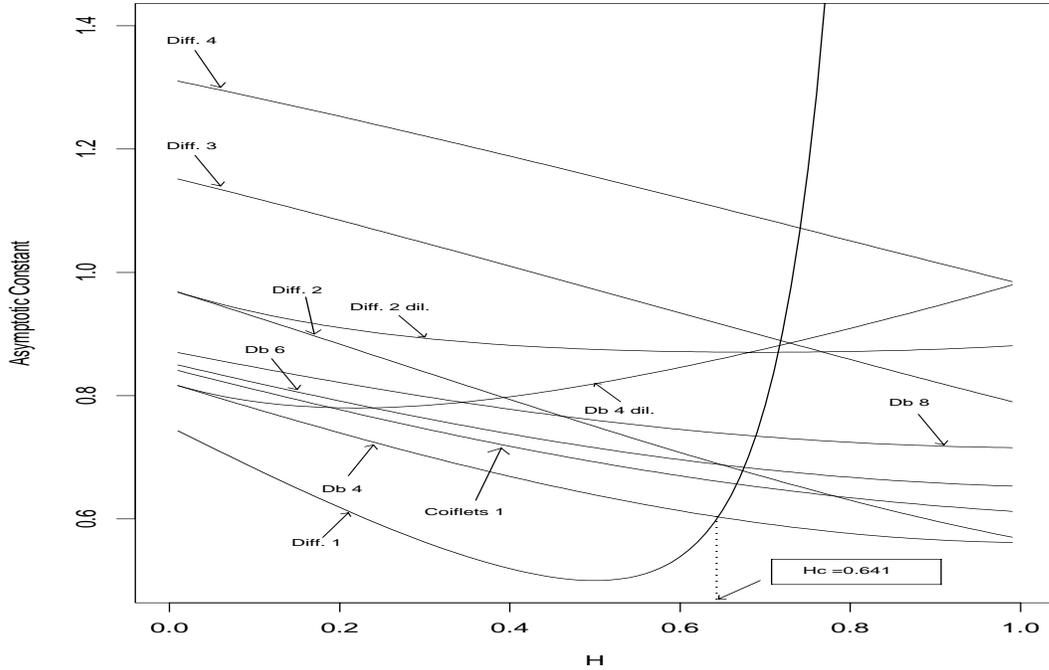


FIG. 2.4 – Constante asymptotique $\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^2$ pour différents filtres, en fonction de H

Variance asymptotique de $\sqrt{N}\widetilde{H}_N^{ols}(2, a, 2)$

La Figure Fig.2.5 évalue la variance asymptotique de $\sqrt{N}\widetilde{H}_N^{ols}(2, a, 2)$ ($k = 2$) à savoir

$$\sigma_{ols}^2(2) = \frac{1}{2 \log^2(2)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \rho_H^{a^1, a^1}(j)^2 + \rho_H^{a^2, a^2}(j)^2 - 2\rho_H^{a^1, a^2}(j)^2 \right\},$$

pour différents filtres en fonction de H . Pour cette valeur du paramètre M (égal à 2), il apparaît clairement que le filtre $a = (1, -1)$ minimise $\sigma_{ols}^2(2)$ sur $]0, 3/4[$ et que le filtre $a = Db4$ est le meilleur parmi les filtres d'ordre ≥ 2 . Nous avons ensuite souhaité pour ces deux derniers filtres analyser l'évolution en fonction de H de $\sigma_{ols}^2(2)$ pour différentes valeurs de M . La Figure Fig.2.6 semble indiquer que la constante asymptotique $\sigma_{ols}^2(2)$ diminue lorsque M augmente, Nous verrons cependant dans la Section 2.5.2.2 que choisir M trop grand diminue certes la variance empirique des estimateurs mais a tendance à biaiser la moyenne.

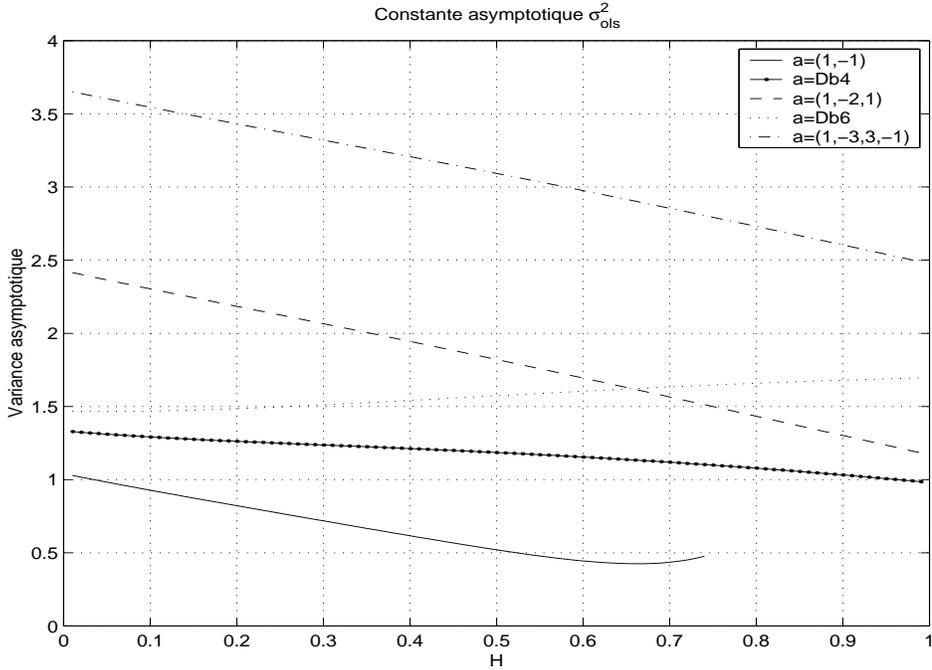


FIG. 2.5 – Variance asymptotique de $\sqrt{N}\tilde{H}_N^{ols}(2, a, 2)$ pour différents filtres en fonction de H .

Comparaison des variances asymptotiques de $\sigma_{ols}^2(2)$ et $\sigma_{gls}^2(2)$

Nous souhaitons, ici, comparer les variances asymptotiques σ_{ols}^2 et σ_{gls}^2 , pour le paramètre $k = 2$ qui a montré ses performances au travers du Corollaire 2.4 et de la Figure Fig. 2.3. La Figure Fig. 2.7 trace le rapport $\sigma_{ols}^2(2)/\sigma_{gls}^2(2)$ pour deux filtres et différentes valeurs de M , en fonction de H . On retrouve le résultat de Gauss-Markov, à savoir que ce rapport est constamment supérieur à 1. Cependant, il ressort de cette figure que, d'un point de vue théorique, le gain apporté par une régression linéaire pondérée n'est pas important (le rapport n'excède pas 1.5).

2.5.2 Qualités des estimateurs par simulations

Nous présentons dans cette partie des résultats de simulations pour les trois classes d'estimateurs du paramètre d'autosimilarité, ainsi que pour les estimateurs du coefficient d'échelle. Pour simuler une trajectoire d'un mbf discrétisée sur $[0,1]$, nous avons considéré la méthode introduite par Davis et Harte [36], reprise par Beran [20], et améliorée par Wood et Chan

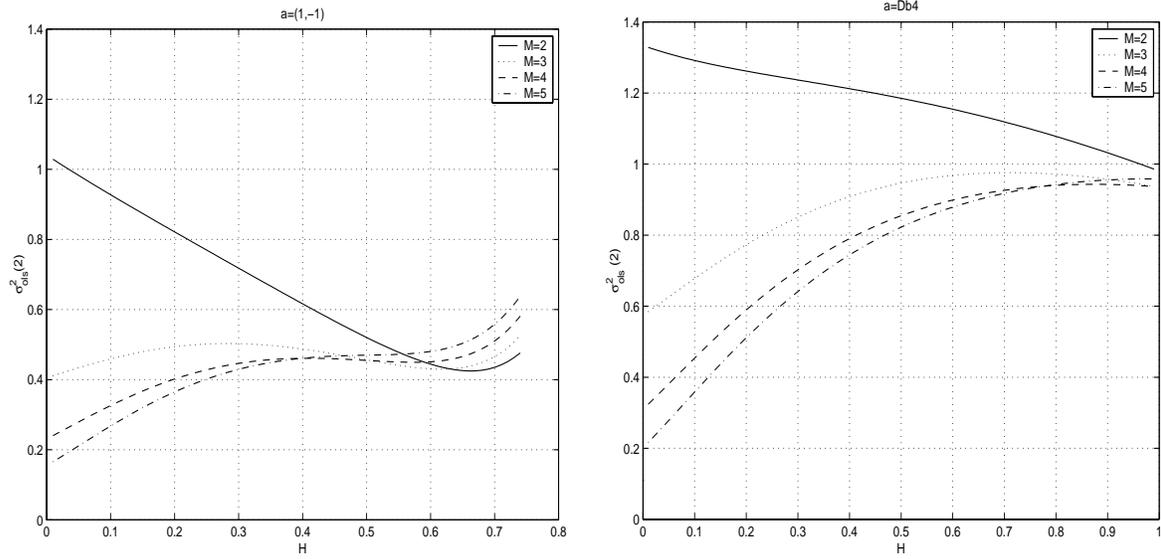


FIG. 2.6 – Variance asymptotique de $\sqrt{N}\tilde{H}_N^{ols}(2, a, M)$ pour les filtres $a = (1, -1)$ et $a = Db4$ en fonction de H et de M .

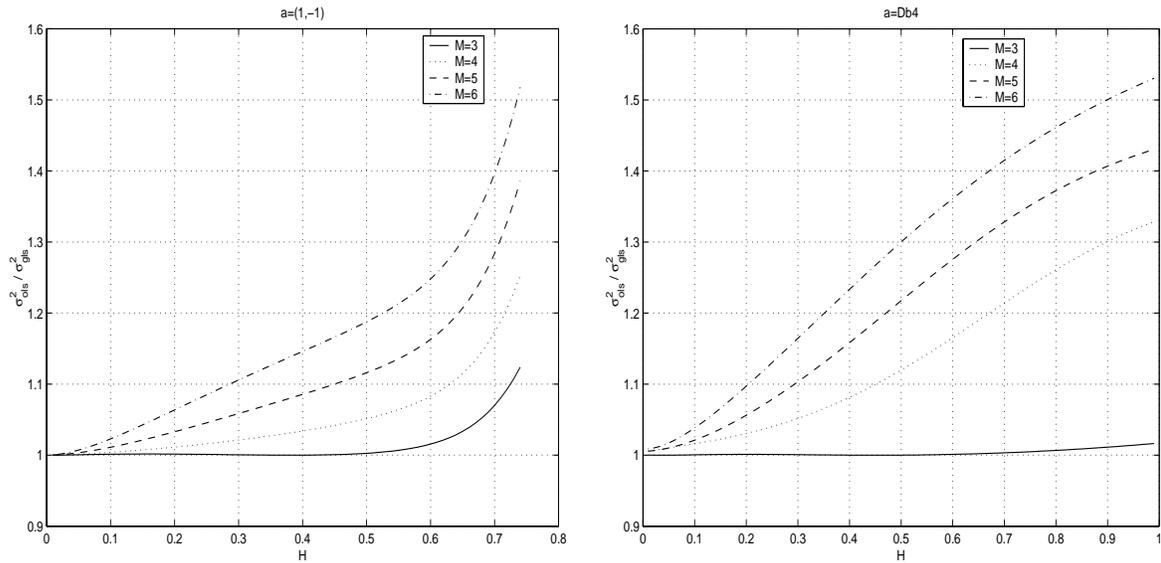


FIG. 2.7 – Rapport des variances asymptotiques $\sigma_{ols}^2(2)/\sigma_{gls}^2(2)$ pour les filtres $a = (1, -1)$ et $a = Db4$ en fonction de H et de M .

[97], qui consiste à extraire la racine de la matrice d'autocovariance du mbf en plongeant cette dernière dans une matrice circulante facilement diagonalisable. Parmi l'ensemble des méthodes de simulation du mbf, celle-ci a l'avantage d'être particulièrement rapide et exacte pour simuler un bgf (cf Annexe A pour un tour d'horizon des méthodes de simulation du mbf). Pour l'ensemble des simulations, nous avons adopté la discrétisation $\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\}$. Par ailleurs, nous noterons Diff. q (resp. Db q), le filtre des différences d'ordre q du mbf (resp. le filtre d'une ondelette de Daubechies d'ordre q).

2.5.2.1 Simulations pour l'identification du mbf standard

Dans un premier temps, nous illustrons les performances de la première classe d'estimateurs, $\hat{H}_N(k, a)$. Nous traitons l'évolution en fonction du filtre, l'évolution en fonction de k , et l'évolution en fonction de N .

Évolution en fonction du filtre : le Tableau Tab. 2.1 résume l'étude faite sur l'évolution des estimateurs $\hat{H}_N(k, a)$ en fonction du filtre. La taille de l'échantillon a été fixée à $N = 2048$, et le paramètre k à 2. Les trajectoires ont été simulées pour deux valeurs extrêmes du paramètre d'autosimilarité, ceci pour mettre en évidence les conséquences du choix du filtre $(1, -1)$, lorsque $H > 3/4$. Quant au filtre optimal, les conclusions de la Figure Fig.2.4 sont confirmées.

Filtre		MSE empirique	
		$H = 0.1, (10^{-6})$	$H = 0.9, (10^{-6})$
Ordre 1	Diff. 1	6.82	409
Ordre 2	Db4	7.22	1.83
	Diff. 2	7.75	2.14
Ordre 3	Db6	7.42	2.19
	Diff.3	8.58	3.07
Ordre 4	Db8	7.51	2.47
	Diff. 4	9.42	3.83

TAB. 2.1 – Calculs du MSE estimé sur les estimateurs $\hat{H}_N(k, a)$ ($k=2, N = 2^{11}$), pour différents filtres, basés sur 50 trajectoires du mbf standard, de paramètre $H = 0.1$, et $H = 0.9$. Le meilleur filtre pour ces valeurs de H est typographié en gras.

Évolution en fonction de k : la Figure Fig. 2.8 traduit le travail mené sur l'évolution de $\hat{H}_N(k, a)$ en fonction de k . Afin d'illustrer l'amélioration apportée par rapport au travail de Peltier et Lévy-Véhel [76], nous avons considéré une valeur extrême ($> 3/4$) pour le paramètre H , à savoir $H = 0.9$. De ce fait, nous avons choisi le filtre $a = Db4$. Nous retrouvons le résultat théorique énoncé auparavant, à savoir l'optimalité pour $k = 2$. Lorsque $k > 2$, l'estimateur reste non biaisé, mais la variance augmente rapidement avec k . En outre, choisir $k < 1$, n'amène pas d'améliorations.

Évolution en fonction de N : afin d'illustrer la convergence rapide de $\hat{H}_N(k, a)$, diverses trajectoires du mbf de paramètre $H = 0.9$ sont simulées pour $N = 100, \dots, 10.000$. Le filtre correspondant à $H = 0.9$ est $a = Db4$. La Figure Fig.2.9 illustre la convergence de l'écart quadratique moyen empirique (MSE) sur les 50 trajectoires en fonction de N .

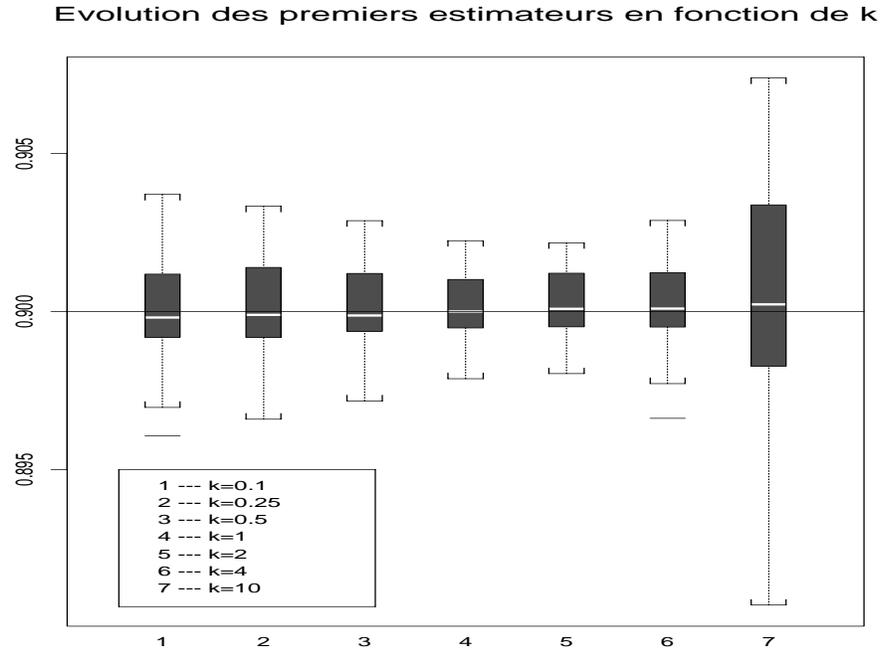


FIG. 2.8 – Diagrammes à moustaches des estimateurs $\hat{H}_N(k, a)$ basés sur 50 trajectoires du mbf standard de paramètre $H = 0.9$ en fonction de k ($a = Db4$, $N = 2048$)

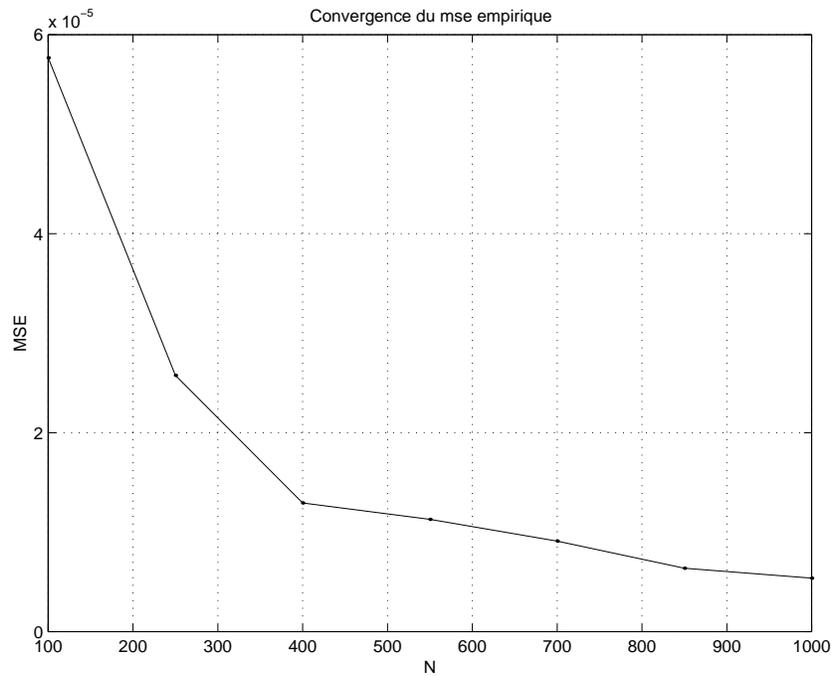


FIG. 2.9 – MSE empirique en fonction de N de l'estimateur $\hat{H}_N(2, a)$ ($a = Db4$) basé sur 50 trajectoires du mbf standard de paramètre $H = 0.9$.

2.5.2.2 Simulations pour l'identification du mbf non standard

Dans cette section, en vertu du Corollaire 2.4, le paramètre k a été fixé à 2. Dans un premier temps, nous avons tenté de déterminer le meilleur choix pour le paramètre M . Dans cette optique, nous avons simulé 100 mbfs de taille $N = 1000$ et calculé les estimateurs $\tilde{H}_N^{ols}(2, a, M)$ pour les filtres $a = (1, -1)$ et $a = Db4$ (filtres qui ont montré leurs qualités à M fixé dans la Section 2.5.1), et pour différentes valeurs de M . La Figure Fig.2.10 présente le MSE empirique de ces estimateurs en fonction de H . La Figure Fig.2.6 met en évidence la décroissance de la variance de $\sqrt{N}\tilde{H}_N^{ols}(2, a, M)$ lorsque M augmente. Cependant, comme le montre notre simulation, plus M augmente et plus l'estimateur semble biaisé. C'est pourquoi, nous conseillons le choix $M = 5$ qui semble être un bon compromis. Ajoutons que pour les faibles tailles d'échantillon (< 50), on ne peut choisir une valeur élevée du paramètre M . Ceci vient du fait que l'on estime $\mathbb{E}(S_N(2, a^M))$ avec $N - M\ell$ observations (à titre d'exemple pour $N = 50, M = 5, a = Db4$ on perd près de 30 % des observations). Pour de si petites tailles d'échantillon, il est préférable de choisir le paramètre le plus petit possible, à savoir $M = 2$.

Nous avons ensuite illustré la convergence des estimateurs $\tilde{H}_N^{ols}, \tilde{H}_N^{gls}, \tilde{C}_N^{ols}$ et \tilde{C}_N^{gls} . Pour ce faire, 100 mbfs de taille $N \in \{100, 200, \dots, 1000\}$ et de paramètres $H = 0.9$ et $C = 2$ ont été simulés. La Figure Fig.2.11 présente le MSE empirique de ces estimateurs en fonction de N . Il apparaît clairement que la procédure de régression linéaire pondérée n'amène pas d'améliorations notables. Ceci est dû au fait comme le montre la Figure Fig.2.12, que les points sont très bien alignés autour de la droite de régression. En conséquence, par la suite, nous n'envisagerons pas l'utilisation des estimateurs \tilde{H}_N^{gls} et \tilde{C}_N^{gls} en vertu de leur coût de calcul élevé (estimation de la matrice de covariance \hat{G}_2).

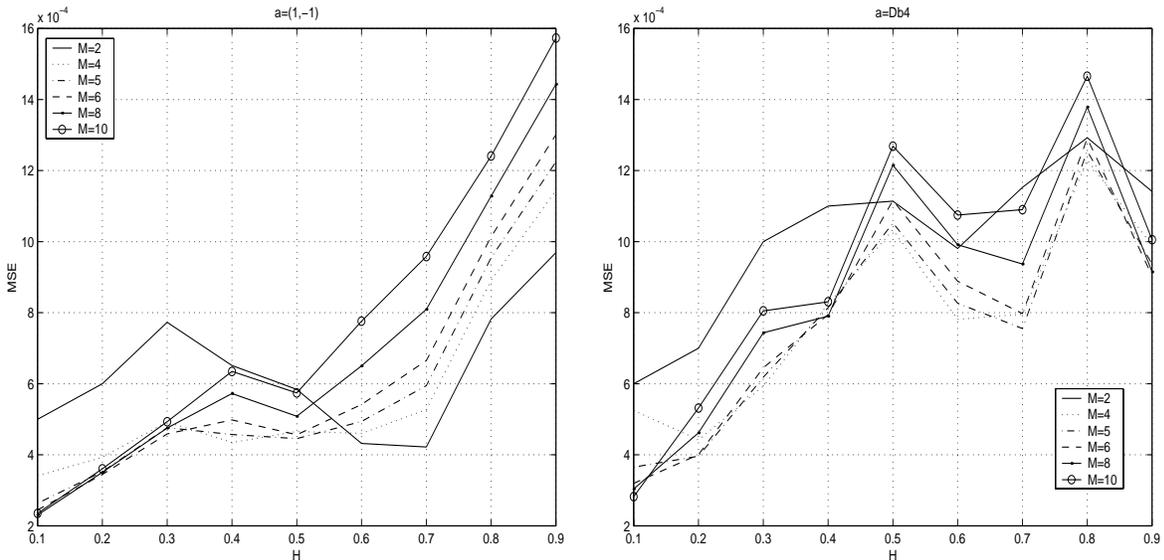


FIG. 2.10 – MSE empirique en fonction de H des estimateurs $\tilde{H}_N^{ols}(2, a, M)$ pour les filtres $a = (1, -1)$ et $a = Db4$ et pour différentes valeurs de M .

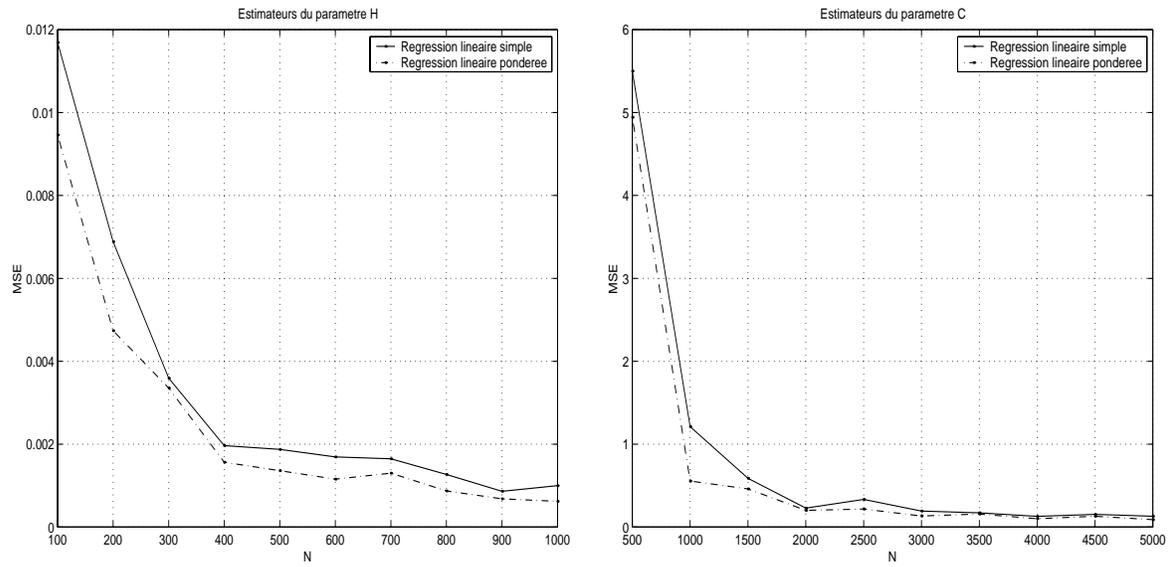


FIG. 2.11 – *MSE empirique en fonction de N des estimateurs \tilde{H}_N^{ols} , \tilde{H}_N^{gls} , \tilde{C}_N^{ols} et \tilde{C}_N^{gls} , basés sur 50 mbfs de paramètre $H = 0.9$ et $C = 2$.*

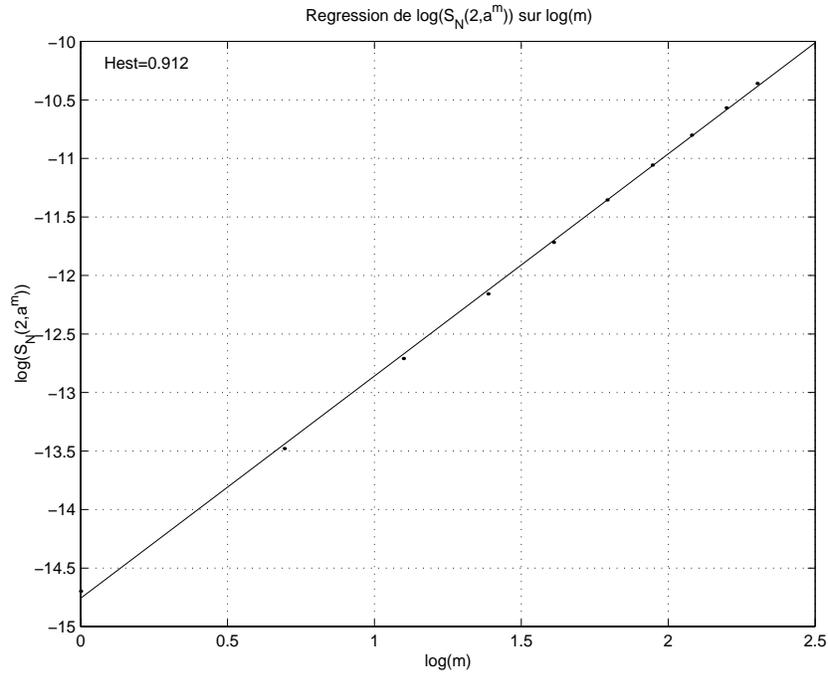


FIG. 2.12 – *Exemple de régression linéaire simple de $\log(S_N(2, a^m))$ sur $\log(m)$, ($m = 1, \dots, 10$) basée sur une trajectoire discrétisée d'un mbf standard de taille $N = 1000$ et de paramètre $H = 0.9$.*

2.6 Performances des estimateurs vis-à-vis de l'estimateur de Whittle

Dans cette section, nous souhaitons comparer les performances des estimateurs développés dans les sections précédentes, et plus précisément de l'estimateur $\tilde{H}_N^{ols}(k, a, M)$, pour les paramètres $k = 2, M = 2$ (voir la Section 2.5 qui montre la pertinence de ce choix de paramètres) avec l'estimateur de Whittle, estimateur d'une approximation de la vraisemblance (voir Beran [20] ou Annexes B.3 pour plus de détails concernant la construction de ces estimateurs). Ayant fixé le paramètre k à 2, nous confondons méthode des variations discrètes et méthode des variations quadratiques. Rappelons brièvement l'intérêt d'une telle étude comparative. Estimer les paramètres du mouvement brownien fractionnaire n'est pas une fin en soi. Si tel était le cas, notre travail s'inscrivant dans un cadre paramétrique, il serait totalement dénué de sens de développer des estimateurs qui de toute façon seraient moins performants que l'estimateur du maximum de vraisemblance. L'idée sous-jacente est que nous souhaitons identifier une extension du mbf à savoir le mouvement brownien multifractionnaire, processus qui comme nous le verrons dans le Chapitre 5 se comporte "localement" comme le mbf. Dans cette optique, nous avons besoin d'estimateurs ayant de "bonnes" propriétés de convergence, qui soient rapidement calculables et qui soient au moins aussi efficaces pour de petits échantillons que l'estimateur de Whittle. Tout ceci est étudié dans les paragraphes à venir.

2.6.1 Variances asymptotiques

Dans un premier temps, nous comparons les variances asymptotiques de $\sqrt{N}\hat{H}_W$ (où \hat{H}_W désigne l'estimateur de Whittle) et $\sqrt{N}\tilde{H}_N^{ols}(2, a, 2)$ pour les filtres $a = (1, -1)$ et $a = Db4$. Notons respectivement $\sigma_W^2(H)$ et $\sigma_{VQ}^2(a, H)$ (VQ pour variations quadratiques) ces constantes. D'après Beran [20] (ou Annexes B.3) et la Proposition 2.4, il est clair que :

$$\begin{aligned} \sigma_W^2(H) &= \frac{2}{D}, \quad \text{avec } D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial H} \log f(x, H) \right\}^2 dx . \\ \sigma_{VQ}^2(a, H) &= \frac{1}{2 \log^2(2)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \rho_H^{a^1, a^1}(j)^2 + \rho_H^{a^2, a^2}(j)^2 - 2\rho_H^{a^1, a^2}(j)^2 \right\}, \end{aligned}$$

où $\rho_H^{a^m, a^n}$ est défini par (2.22). Les Figures Fig. 2.13 décrivent les comportements de ces constantes asymptotiques en fonction de $H \in]0, 1[$, ainsi que l'efficacité des estimateurs définie par $Eff(a, H) = \frac{\sigma_{VQ}^2(a, H)}{\sigma_W^2(H)}$. Précisons que pour le filtre $a = (1, -1)$, filtre d'ordre 1, $\sigma_{VQ}^2(a, H)$ et $Eff(a, H)$ ont été évaluées sur leur intervalle de définition à savoir $]0, 3/4[$. Il ressort que les estimateurs développés, d'un point de vue théorique, se comportent très bien vis-à-vis de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

2.6.2 Temps CPU des procédures d'estimation

Le Tableau Tab.2.2 résume l'étude faite quant au temps CPU des procédures d'estimation de H par variations discrètes et par maximum de vraisemblance. Il présente les temps CPU en secondes de 1000 répétitions de la procédure d'identification pour des tailles d'échantillon allant de 50 à 100.000. Le tableau est éloquent : pour $n \geq 10.000$, la simulation n'a pas été envisagée pour l'estimateur de Whittle, les calculs étant trop longs alors qu'au-delà de cette taille d'échantillon, nos estimateurs restent très adaptés.

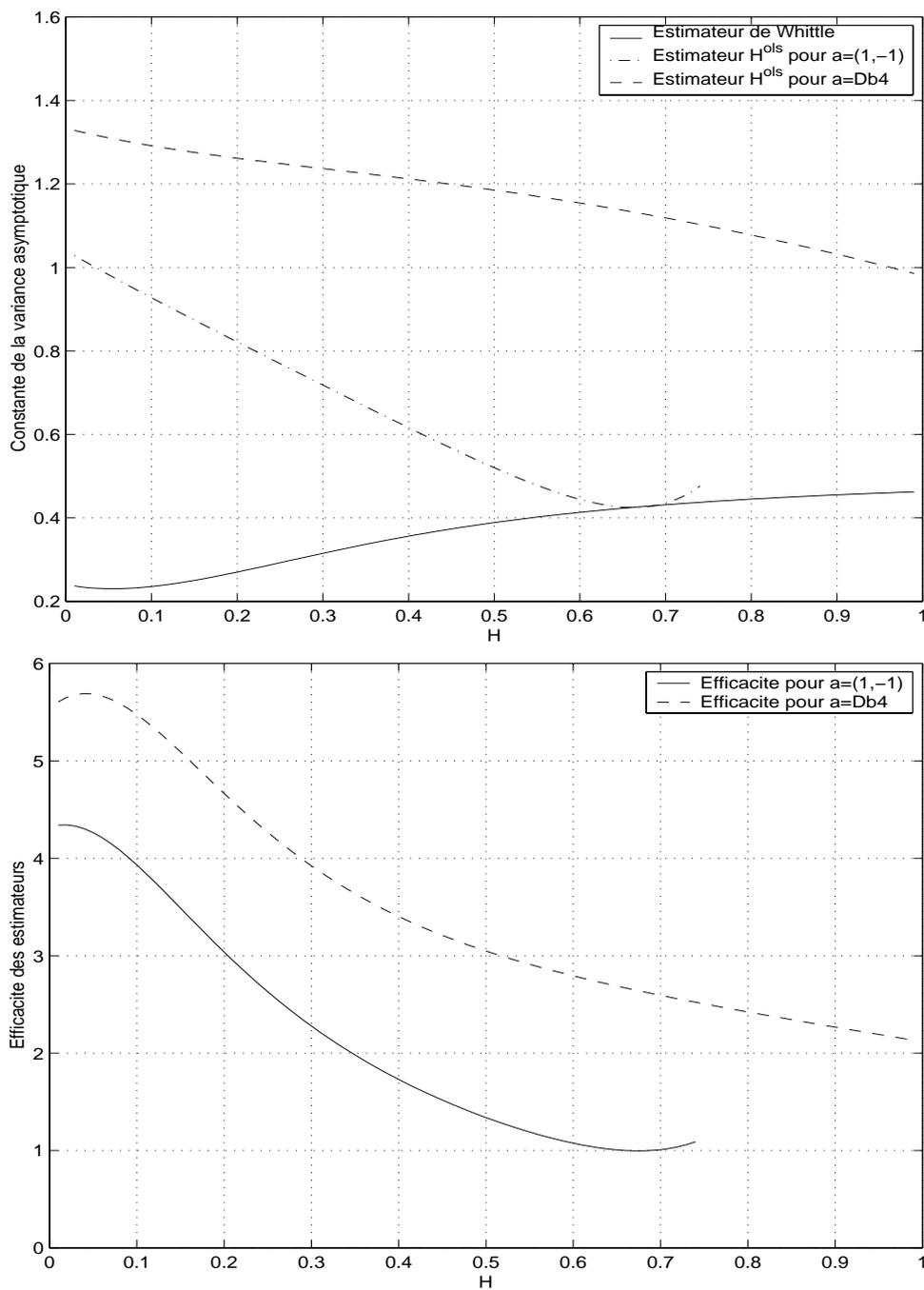


FIG. 2.13 – Comportements des constantes asymptotiques σ_W^2 et $\sigma_{VQ}^2(a, \cdot)$ (pour les filtres $a = (1, -1)$ et $a = Db4$) et de l'efficacité des estimateurs vis-à-vis de l'estimateur de Whittle, en fonction de $H \in]0, 1[$.

	Taille de l'échantillon									
	50	100	250	500	750	1000	5000	10.000	50.000	100.000
MV	26.49	63.22	141.51	275.53	419.18	553.71	3071.20	×	×	×
VQ	0.19	0.18	0.24	0.29	0.30	0.34	0.99	1.68	8.50	17.47

TAB. 2.2 – Temps CPU (en sec.) des procédures issues de la méthode du maximum de vraisemblance et de la méthode des variations quadratiques pour 1000 répétitions en fonction de la taille de l'échantillon.

2.6.3 Performances des estimateurs pour des séries courtes

En vue d'appliquer localement les estimateurs pour le modèle plus complexe que constitue le mbm, nous nous intéressons aux performances des estimateurs lorsque N est assez faible. Nous appelons filtre optimal (noté a_{opt}) le filtre $a = (1, -1)$ lorsque $H < 3/4$, et $a = Db4$ dans le cas contraire. Pour $N = 20, 40, 60, 80, 100$ et pour $H = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$, nous avons simulé 1000 trajectoires du mbf par la méthode de Wood et Chan et calculé les estimateurs \hat{H}_W et $\tilde{H}_N^{ols}(2, a_{opt}, 2)$. Il ressort de cette étude que l'estimateur de Whittle est biaisé pour les courtes séries envisagées mais garde une variance bien inférieure à celle de l'estimateur \tilde{H}_N^{ols} , qui lui est sans biais. La Figure Fig.2.14 permet de raffiner cette comparaison puisqu'elle illustre le MSE empirique pour les différentes valeurs du paramètre de Hurst envisagées. Au vu de ces graphes, nous pouvons conclure à l'équivalence des performances des estimateurs \hat{H}_W et \tilde{H}_N^{ols} lorsque la taille de l'échantillon est faible.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé des classes d'estimateurs des paramètres du mbf standard et non standard par une méthode de moments filtrés. Ces estimateurs constituent d'excellentes alternatives à l'estimateur du maximum de vraisemblance (estimateur de Whittle) lorsque la taille d'échantillon est faible. En outre, les procédures proposées sont extrêmement rapides. Les qualités de l'approche variations discrètes font des estimateurs $\hat{H}_N(2, a)$ et $\tilde{H}_N^{ols}(2, a, 2)$ de très bons candidats pour estimer localement l'exposant fractionnaire du mouvement brownien multifractionnaire qui constitue une extension du mbf au sens où les paramètres H et C évoluent au cours du temps.

Ce chapitre s'inscrit dans un cadre gaussien. Si l'on souhaite relâcher cette contrainte de gaussianité, la méthode de moments que nous avons développée, supposant en fait la finitude du moment d'ordre 4 du processus, risque fort d'échouer, alors que l'estimateur de Whittle continue d'avoir de bonnes propriétés, *e.g.* Giraitis et al. [45].

2.8 Preuves des résultats

2.8.1 Développement en polynômes d'Hermite de $\mathbb{H}^k(t) = |t|^k/E_k - 1$

Nous noterons c_j^k , le j -ème coefficient du développement de $\mathbb{H}^k(t) = \frac{|t|^k}{E_k} - 1$, dans la base de polynômes d'Hermite, $c_j^k = \mathbb{E}(\mathbb{H}^k(Y)H_j(Y))$, où Y est une v.a. suivant la loi normale centrée réduite. H_j est le j -ème polynôme d'Hermite défini par :

$$H_j(x) = \sum_{p=0}^{[j/2]} (-1)^p \frac{j!}{(j-2p)!p!} 2^{-p} x^{j-2p}, \quad [t] \text{ désignant la partie entière du réel } t.$$

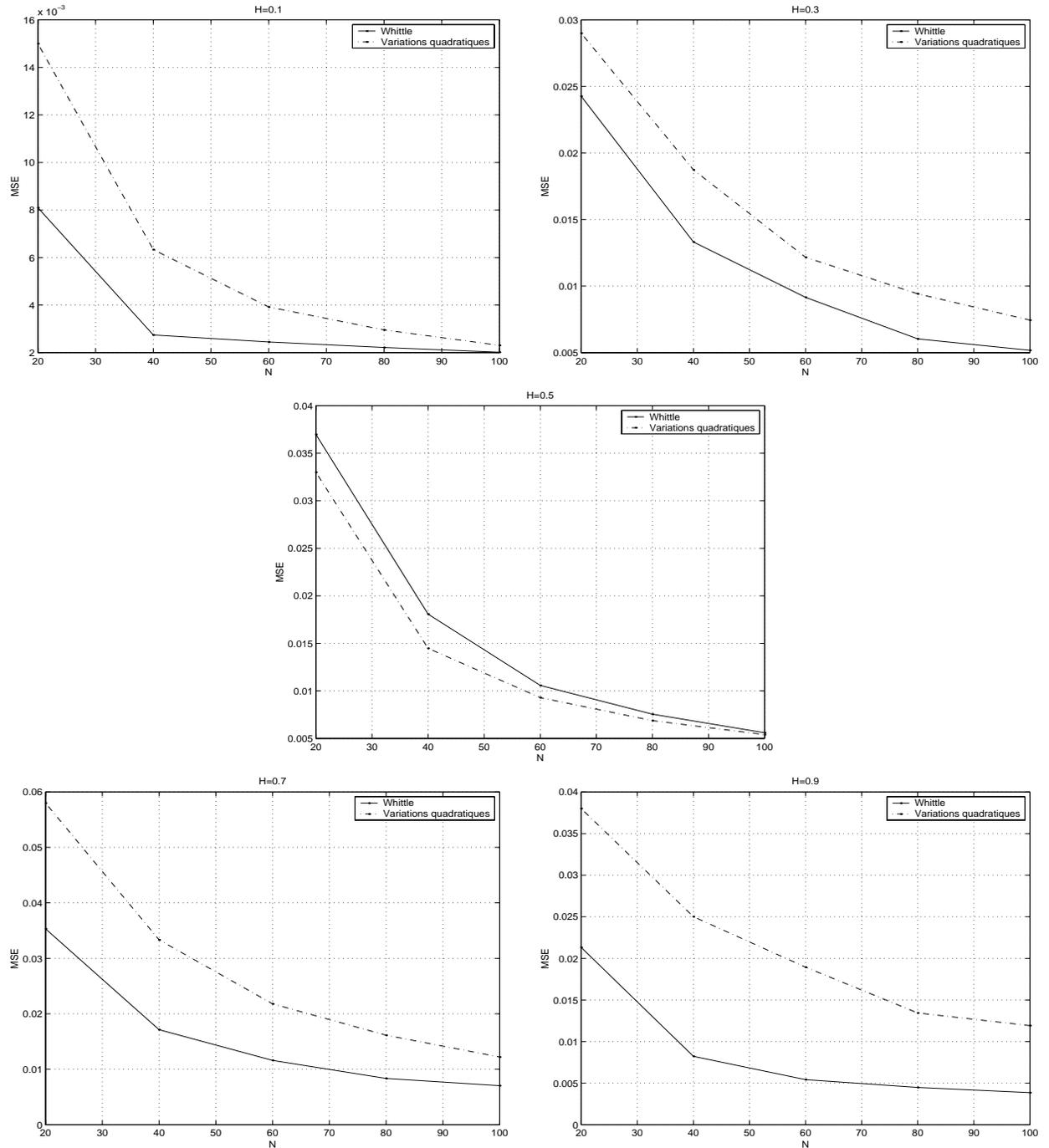


FIG. 2.14 – Erreur quadratique moyenne empirique pour les estimateurs issus du maximum de vraisemblance et des variations quadratiques pour des courtes séries simulées pour $H \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.

Lemme 2.2 Soit k un réel strictement positif, alors

$$c_{2j+1}^k = 0, \quad \forall j \geq 0 \quad (2.32)$$

$$c_{2j}^k = \frac{1}{(2j)!} \prod_{i=0}^{j-1} (k - 2i), \quad \forall j \geq 1. \quad (2.33)$$

Preuve : (2.32) est obtenu trivialement, en remarquant que \mathbb{H}^k est paire, et que les polynômes $(H_{2j+1})_{j \geq 0}$ sont impairs. Pour démontrer (2.33), commençons par noter P_j , le polynôme à coefficients réels défini par

$$P_j(k) = \mathbb{E}(\mathbb{H}^k(Y) H_{2j}(Y)).$$

Par définition des polynômes d'Hermite, P_j est un polynôme de degré j . En effet, pour $j \geq 1$

$$P_j(k) = \sum_{q=0}^j (-1)^q \frac{(2j)!}{(2j-2q)! q! 2^q} \frac{E_{k+2j-2q}}{E_k},$$

et il est facile de voir que

$$E_{k+2j-2q} = (k+1)(k+3) \dots (k+2j-2q-1) E_k, \quad \text{si } j > q.$$

Choisissons maintenant $n \in \{0, \dots, j-1\}$, \mathbb{H}^{2n} étant $2j$ -fois différentiable dans $L^2(\phi)$ (espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la densité de la loi normale centrée réduite), il est clair (Neveu [75], p.155) que pour $Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1)$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{H}^{2n}(Y) H_{2j}(Y)) = \mathbb{E}((\mathbb{H}^{2n})^{(2j)}(Y)) = 0.$$

L'ensemble $\{0, 2, 4, \dots, 2(j-1)\}$ constitue donc les racines du polynôme P_j , et par unicité de la factorisation il vient, $P_j(k) = \prod_{q=0}^{j-1} (k-2q)$, d'où le résultat. \square

2.8.2 k -variations du mbf

Dans les démonstrations qui suivent, a désigne un filtre de longueur $\ell + 1$, et d'ordre $p \geq 1$.

Preuve du Lemme 2.1 : cette démonstration peut être retrouvée dans Istas et Lang [55], et est présentée ici par souci de complétude.

Rappelons que π_H^a est défini par

$$\pi_H^a(j) = -\frac{1}{2} \sum_{q,r=0}^{\ell} a_q a_r |j+q-r|^{2H},$$

ce qui, en choisissant $j \geq \ell$, s'écrit

$$\pi_H^a(j) = -\frac{1}{2} j^{2H} \sum_{q,r} a_q a_r \left(1 + \frac{q-r}{j}\right)^{2H}.$$

Grâce à un développement en séries entières pour chaque terme de la somme on obtient,

$$\pi_H^a(j) = -\frac{1}{2} j^{2H} \sum_{q,r} a_q a_r \left\{ \sum_{s=0}^{2p-1} \frac{\beta_{s,H} (q-r)^s}{s! j^s} + \frac{1}{j^{2p}} \sum_{s \geq 2p} \frac{\beta_{s,H} (q-r)^s}{s! j^{s-2p}} \right\},$$

avec $\beta_{0,H} = 1$ et $\beta_{q,H} = 2H(2H-1)\dots(2H-q+1)$, $q > 0$. Ainsi,

$$\pi_H^a(j) = -\frac{1}{2}j^{2H} \sum_{s=0}^{2p-1} \frac{\beta_{s,H}}{s!} \sum_{q,r} a_q a_r (q-r)^s - \frac{1}{2}j^{2H-2p} \sum_{q,r=0}^{\ell} \sum_{s \geq 2p} \frac{\beta_{s,H}}{s!} \frac{(q-r)^s}{j^{s-2p}}.$$

Puisque le filtre est d'ordre p , l'un au moins des termes $\sum_{q=0}^{\ell} (a_q q^s) \sum_{r=0}^{\ell} (a_r r^{2p-1-s})$ est nul pour $s = 0, \dots, 2p-1$. Par conséquent, $\pi_H^a(j) = j^{2H-2p} L(j)$ avec

$$L(j) = \sum_{q,r=0}^{\ell} \sum_{s \geq p} \frac{\beta_{s,H}}{s!} \frac{(q-r)^s}{j^{s-p}} \sim -\frac{1}{2} \sum_{q,r=0}^{\ell} \frac{\beta_{2p,H}}{(2p)!} (q-r)^{2p} \text{ lorsque } j \rightarrow +\infty.$$

□

Preuve de la Proposition 2.1 :

(i) Il s'agit d'utiliser une formule bien connue sur les polynômes d'Hermite qui peut être vue comme un cas particulier de la non moins célèbre formule du diagramme (Taqqu [88], Breuer et Major [22]) : soient U et V deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites de coefficient de corrélation ρ , alors

$$\mathbb{E}(H_i(U)H_j(V)) = \delta_{ij} i! \rho^i, \quad \forall i, j \geq 1. \quad (2.34)$$

En notant $\mathbb{H}^k(t) = \frac{|t|^k}{E_k} - 1$ et $Z^a(i) = V^a(i/N)/\mathbb{E}(V^a(i/N)^2)^{1/2}$ il vient

$$V_N(k, a) = \frac{1}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} \mathbb{H}^k(Z^a(i)),$$

ce qui nous permet d'obtenir pour la variance de cette statistique

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_N(k, a)^2) &= \frac{1}{(N-\ell)^2} \sum_{i,j=\ell}^{N-1} \mathbb{E}(\mathbb{H}^k(Z^a(i))\mathbb{H}^k(Z^a(j))) \\ &= \frac{1}{(N-\ell)^2} \sum_{q,r \geq 0} c_q^k c_r^k \sum_{i,j=\ell}^{N-1} \mathbb{E}(H_q(Z^a(i))H_r(Z^a(j))), \end{aligned}$$

où $(c_q^k, q \geq 1)$ sont les coefficients du développement en polynômes d'Hermite de la fonction \mathbb{H}^k . En tenant compte du fait que les coefficients c_{2q+1}^k et c_0^k sont nuls (Lemme 2.2), nous obtenons

$$\mathbb{E}(V_N(k, a)^2) = \frac{1}{(N-\ell)^2} \sum_{q \geq 1} \alpha_{2q}^k \sum_{i=\ell-N}^{N-\ell} (N-\ell-|i|) \rho_H^a(i)^{2q},$$

avec $\alpha_{2q}^k = (c_{2q}^k)^2 (2q)!$. Rappelons que d'après le Lemme 2.1, $\rho_H^a(i) = \mathcal{O}(|i|^{2H-2p})$ donc si $4H - 4p < 1$, i.e. si $p > H + 1/4$ ($p \geq 2$ et $H \in]0, 1[$ ou $p = 1$ et $H < 3/4$), la série $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^{2q}$ converge pour tout $q \geq 1$, et donc

$$\mathbb{E}(V_N(k, a)^2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (2.35)$$

Etudions les cas critiques $p = 1$ et $H = 3/4$,

$$\mathbb{E}(V_N(k, a)^2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N} \sum_{|i| < N} \frac{1}{i}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\log(N)}{N}\right). \quad (2.36)$$

Et $p = 1$ et $H > 3/4$,

$$\mathbb{E}(V_N(k, a)^2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N} \sum_{|i| < N} \frac{1}{i^{2-2H}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{2-2H}}\right). \quad (2.37)$$

La convergence presque sûre est assurée par (2.35), (2.36) ou (2.37), selon p et H , et le Théorème 6.2 de Doob ([40], p.492), établissant une condition sous laquelle les convergence en moyenne quadratique et presque sûre, sont équivalentes pour la convergence de moyennes empiriques de processus stationnaires discrétisés.

(ii) Nous avons montré, Lemme 2.2, que le rang d'Hermite de \mathbb{H}^k valait 2. En outre, le Lemme 2.1 permet d'affirmer que pour tout $k > 0$ et $p > H + \frac{1}{4}$, $\rho_H^a(j)$ est de carré sommable quel que soit $H \in]0, 1[$. Par conséquent, d'après le Théorème 1 de Breuer et Major, il vient lorsque $N \rightarrow +\infty$: ([22])

$$\sqrt{N} V_N(k, a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, A_1(H, k, a)),$$

où $A_1(H, k, a) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma_{N, k, a}^2$ et $\sigma_{N, k, a}^2 = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \left(\sum_{i=\ell}^{N-1} \mathbb{H}^k(Z^a(i))\right)^2\right)$, et d'après la démonstration de (i), on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_{N, k, a}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{j \geq 1} (c_{2j}^k)^2 (2j)! \sum_{i=\ell-N}^{N-\ell} (N-\ell-|i|) \rho_H^a(i)^{2j} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{j \geq 1} (c_{2j}^k)^2 (2j)! \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^{2j}. \end{aligned}$$

□

Preuve du Corollaire 2.1 :

Soit f , la fonction définie par le développement en polynômes d'Hermite suivant,

$$f(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \theta_{2j} H_{2j}(t), \quad \text{avec } \theta_{2j} = (-1)^{j-1} \frac{2^{j-1} (j-1)!}{(2j)!}.$$

La formule de Stirling justifie le développement ci-dessus. En effet,

$$(\theta_{2j})^2 (2j)! \sim \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{j^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.38)$$

par conséquent $\sum_{j \geq 1} (\theta_{2j})^2 (2j)! < \infty$. Par ailleurs, soit X_N , la variable aléatoire définie par

$$X_N = \frac{1}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} f(Z^a(i)).$$

La fonction f étant de rang d'Hermite 2, le Théorème 1 de Breuer et Major [22] nous assure, dès que $p > H + \frac{1}{4}$, que lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{N} X_N \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, A_1(H, a)),$$

où $A_1(H, a) = \sum_{j \geq 1} (\theta_{2j})^2 (2j)! \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^{2j}$. L'intérêt d'avoir étudié la convergence de la variable X_N réside dans le fait que $c_{2j}^{N-\alpha} \sim \frac{1}{N^\alpha} \theta_{2j}$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Donc, si nous montrons

la convergence en probabilité de $X'_N = \sqrt{N}(X_N - N^\alpha V_N(N^{-\alpha}, a))$ vers 0, le théorème de Slutsky, *e.g.* [48], assurera que lorsque $N \rightarrow +\infty$, $N^{\alpha+1/2}V_N(N^{-\alpha}, a) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, A_1(H, a))$. Or,

$$X'_N = \frac{\sqrt{N}}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} \sum_{j \geq 2} \Theta_{2j,N} H_{2j}(Z^a(i)) \quad \text{avec} \quad \Theta_{2j,N} = \theta_{2j} - N^\alpha c_{2j}^{N-\alpha}.$$

La variance de X'_N s'écrit

$$\mathbb{E}(X_N'^2) = \sum_{j \geq 2} \frac{N}{(N-\ell)^2} (\Theta_{2j,N})^2 (2j)! \sum_{i=\ell-N}^{N-\ell} (N-\ell-|i|) \rho_H^a(i)^{2j}.$$

Puisque $p > H + 1/4$, nous avons pour tout $j \geq 2$, $\sum_{|i| < N-\ell} (N-\ell-|i|) \rho_H^a(i)^{2j} = \mathcal{O}(N)$. Ensuite, d'après le Lemme 2.2 on peut montrer que

$$\Theta_{2j,N} = \theta_{2j} - N^\alpha c_{2j}^{N-\alpha} \sim \frac{1}{N^{2\alpha}} (-\theta_{2j}) \sum_{q=1}^{j-1} \frac{1}{2q}, \quad \text{lorsque } N \rightarrow +\infty.$$

Définissons $\theta'_{2j} = -\theta_{2j} \sum_{q=1}^{j-1} \frac{1}{q}$, on a d'après (2.38), $(\theta'_{2j})^2 (2j)! \sim \frac{\sqrt{\pi} \log(j)^2}{16 j^{3/2}}$, ce qui au final permet d'obtenir lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\mathbb{E}(X_N'^2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{4\alpha}} \sum_{j \geq 2} \frac{\log(j)^2}{j^{3/2}}\right) = \mathcal{O}(N^{-4\alpha}).$$

D'où le fait que X'_N converge en probabilité vers 0. □

2.8.3 Identification du mbf standard

Preuve de la Proposition 2.2 :

(i) Remarquons que

$$(1 + V_N(k, a)) = N^{k(H - \widehat{H}_N(k, a))} \left(\frac{\pi_{\widehat{H}_N(k, a)}^a(0)}{\pi_H^a(0)} \right)^{\frac{k}{2}}. \quad (2.39)$$

La convergence presque sûre de $V_N(k, a)$ vers 0, et la continuité de la fonction logarithme en 1, assurent alors que

$$k \log(N)(H - \widehat{H}_N(k, a)) + \frac{k}{2} \log\left(\frac{\pi_{\widehat{H}_N(k, a)}^a(0)}{\pi_H^a(0)}\right) \xrightarrow{p.s.} 0,$$

donc,

$$(H - \widehat{H}_N(k, a)) + \frac{1}{2 \log(N)} \log\left(\frac{\pi_{\widehat{H}_N(k, a)}^a(0)}{\pi_H^a(0)}\right) \xrightarrow{p.s.} 0. \quad (2.40)$$

D'après la convergence presque sûre de $V_N(k, a)$ on a : $N^{Hk} S_N(k, a) \xrightarrow{p.s.} \{\pi_H^a(0)\}^{k/2} E_k$. Ainsi, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall N \geq N_0$ on ait presque sûrement

$$S_N(k, a) \leq \frac{2}{N^{Hk}} \{\pi_H^a(0)\}^{k/2} E_k.$$

Supposons $H \in]\epsilon, 1[$ pour un $\epsilon > 0$, alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall N \geq N_1$ on ait presque sûrement

$$0 < S_N(k, a) < \frac{1}{N^{\epsilon k}} \{\pi_\epsilon^a(0)\}^{k/2} E_k = g_{k,a,N}(\epsilon).$$

Donc, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall N \geq N_1$ on ait presque sûrement

$$\widehat{H}_N(k, a) = g_{k,a,N}^{-1}(S_N(k, a)) \in]\epsilon, 1[, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Ceci et (2.40) assurent la convergence presque sûre de $\widehat{H}_N(k, a)$.

(ii) La convergence presque sûre de $\widehat{H}_N(k, a)$ et (2.39) permettent d'écrire

$$V_N(k, a) = k \log(N) \left(\widehat{H}_N(k, a) - H \right) (1 + o_P(1)).$$

D'après le Théorème de Slutsky, *e.g.* Grimmet et *al.* [48], nous en déduisons que $k\sqrt{N} \log(N) (\widehat{H}_N(k, a) - H)$ converge en loi vers la même limite que $\sqrt{N}V_N(k, a)$, d'où le résultat. \square

2.8.4 Identification du mbf non standard

Preuve de la Proposition 2.3 :

(i) Evident d'après la Proposition 2.1 (i).

(ii) La normalité asymptotique du vecteur des k -variations est obtenue en utilisant le même schéma de démonstration que Istas et Lang [55], lorsque $k = 2$. La matrice de covariance asymptotique est obtenue par

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N \mathbb{E} \left(V_N(k, a^m) V_N(k, a^n) \right), \quad \text{pour } m, n \in \{1, \dots, M\}.$$

Or,

$$\begin{aligned} N \mathbb{E} \left(V_N(k, a^m) V_N(k, a^n) \right) &= \frac{N}{(N-m\ell)(N-n\ell)} \sum_{q=m\ell}^{N-1} \sum_{r=n\ell}^{N-1} \mathbb{E} \left(\mathbb{H}^k(Z^{a^m}(q)) \mathbb{H}^k(Z^{a^n}(r)) \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{j \geq 1} (c_{2j}^k)^2 (2j)! \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^{a^m, a^n}(i)^{2j}. \end{aligned}$$

(iii) Il suffit de remarquer que presque sûrement, on a :

$$\log S_N(k, a^m) - \log \mathbb{E}(S_N(k, a^m)) = V_N(k, a^m) (1 + o(1)). \quad (2.41)$$

\square

Preuve de la Proposition 2.4 :

(i) Soit ξ_N le vecteur du bruit de la régression de L_N sur X_M , $\xi_N = L_N - X_M \alpha$. La théorie de la régression linéaire montre que

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_N^{ols}(k, a, M) - H &= \frac{A^t}{k \|A\|^2} \xi_N, \\ \text{et } \widetilde{\theta}_N^{ols}(k, a, M) - \theta &= \frac{(A')^t}{k \|A'\|^2} \xi_N, \end{aligned}$$

où A et A' sont les vecteurs définis pour $m = 1, \dots, M$ par

$$\begin{aligned} A_m &= \log(m) - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log(m), \\ A'_m &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log(m)^2 - \log(m) \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log(m), \end{aligned}$$

Le résultat (i) de la Proposition 2.3 entraîne que $\xi_N \xrightarrow{p.s.} (0, 0, \dots, 0)^t$. La convergence de \tilde{H}_N^{ols} et $\tilde{\theta}_N^{ols}$ est donc assurée. Une lecture attentive de la preuve du Théorème 6.2 de Doob ([40], p.492), montre que l'on peut légèrement améliorer ce résultat et montrer que $\log(N)V_N(k, a) \xrightarrow{p.s.} 0$, ce qui permet d'obtenir

$$\log(N) \left(\tilde{H}_N^{ols}(k, a, M) - H \right) \xrightarrow{p.s.} 0.$$

Par définition de l'estimateur du coefficient d'échelle, ceci entraîne la convergence presque sûre de \tilde{C}_N^{ols} vers C .

(ii) Pour $p > H + \frac{1}{4}$, $\tilde{H}_N^{ols}(k, a, M)$ étant défini comme une combinaison linéaire de composantes d'un vecteur asymptotiquement gaussien est asymptotiquement gaussien. En outre,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left\{ \sqrt{N} \left(\tilde{H}_N^{ols}(k, a, M) - H \right) \right\}^2 \right) &= \frac{A^t}{k^2 \|A\|^4} \mathbb{E} \left(N \xi_N \xi_N^t \right) A \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\|A\|^4} A^t \frac{G_k}{k^2} A. \end{aligned}$$

De la même manière, on montre aisément que

$$\sqrt{N} \left(\tilde{\theta}_N^{ols}(k, a, M) - \theta \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{(A')^t G'_k A'}{\|A\|^4} \right). \quad (2.42)$$

On remarquera ensuite, d'une part que presque sûrement

$$\log(\tilde{C}_N^{ols}(k, a, M)) - \log(C) = \frac{1}{C} (\tilde{C}_N^{ols}(k, a, M) - C) (1 + o(1)),$$

et d'autre part que

$$\log(\tilde{C}_N^{ols}(k, a, M)) - \log(C) = (\tilde{H}^{ols} - H) \log(N) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\pi_H^a(0)}{\pi_{\tilde{H}^{ols}}^a(0)} \right) + \frac{1}{k} (\tilde{\theta}_N^{ols}(k, a, M) - \theta).$$

avec $\tilde{H}^{ols} = \tilde{H}_N(k, a, M)$. D'après (2.42) et la Proposition 2.4 (i), on a

$$\frac{\sqrt{N}}{\log(N)} \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\pi_H^a(0) / \pi_{\tilde{H}^{ols}}^a(0) \right) + \frac{1}{k} (\tilde{\theta}_N^{ols}(k, a, M) - \theta) \right\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

ce qui assure que $\frac{\sqrt{N}}{\log(N)} \frac{1}{C} (\tilde{C}_N^{ols}(k, a, M) - C)$ converge en loi vers la même limite que $\sqrt{N} (\tilde{H}_N^{ols}(k, a, M) - H)$.

□

Preuve de la Proposition 2.5 :

Seule la démonstration des convergences de $\tilde{H}_N^{gls}(k, a, M)$ est présentée, le schéma de démonstration de la Proposition 2.4, s'appliquant de manière tout à fait analogue pour les démonstrations des convergences de $\tilde{C}_N^{gls}(k, a, M)$.

(i) Par définition de la régression linéaire pondérée, il est clair que

$$\tilde{H}_N^{gls}(k, a, M) - H = \frac{(\hat{B}_k)^t \hat{G}_k^{-1}}{k \|\hat{B}_k\|_{\hat{G}_k}^2} \xi_N ,$$

où \hat{B}_k est le vecteur défini par

$$\hat{B}_k = \left\{ I_M - \frac{1_M^t 1_M (\hat{G}_k)^{-1}}{1_M^t \hat{G}_k^{-1} 1_M} \right\} \{ \log(m) \}_{1 \leq m \leq M} ,$$

avec I_M la matrice identité de taille M et $1_M = (1, 1, \dots, 1)^t$. La convergence presque sûre de $\tilde{H}_N^{ols}(k, a, M)$ entraîne les convergences suivantes

$$\hat{G}_k^{-1} \xrightarrow{p.s.} G_k^{-1}, \quad \hat{B}_k \xrightarrow{p.s.} B_k \quad \text{et} \quad \|\hat{B}_k\|_{\hat{G}_k}^2 \xrightarrow{p.s.} \|B\|_{G_k}^2 .$$

La convergence presque sûre de ξ_N termine alors la démonstration.

(ii) Pour $p > H + 1/4$, $\tilde{H}_N^{gls}(k, a, M)$ étant encore défini comme une combinaison linéaire de composantes d'un vecteur asymptotiquement gaussien est asymptotiquement gaussien. En outre,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\{ \sqrt{N}(\tilde{H}_N^{gls}(k, a, M) - H) \}^2) &= \frac{(\hat{B}_k)^t \hat{G}_k^{-1}}{k^2 \|\hat{B}_k\|_{\hat{G}_k}^4} \mathbb{E}(N \xi_N \xi_N^t) (\hat{G}_k^{-1})^t \hat{B}_k \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\|B_k\|_{G_k'}^2} . \end{aligned}$$

□

3 Bornes de Cramèr-Rao pour le mouvement brownien fractionnaire

Ce chapitre explicite un résultat d'algèbre linéaire concernant le comportement de suite d'inverses de matrices localisées près de leur diagonale. Nous appliquons ce résultat au calcul de la borne de Cramèr-Rao des estimateurs des paramètres du mouvement brownien fractionnaire, problème déjà abordé et résolu par Dahlhaus [34] par une approche différente de celle présentée dans ce chapitre.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous continuerons à noter $\{B_{H,C}(t), t \geq 0\}$ le mbf de paramètres $(H, C) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^{+*}$. Pour tester l'efficacité d'estimateurs tels que ceux développés par la méthode des variations discrètes dans le Chapitre 2, il est d'usage de comparer leur écart quadratique moyen avec la borne de Cramèr-Rao dont nous rappelons dès à présent la définition : soit $x = (x_1, \dots, x_N)$ un vecteur aléatoire dont la densité de probabilité dépend d'un paramètre réel θ inconnu, alors sous certaines conditions de régularité, *e.g.* Dacunha-Castelle et *al.* [33] p.178, tout estimateur non biaisé $\hat{\theta}$ de θ satisfait

$$\mathbb{E} \left(\left\{ \hat{\theta} - \theta \right\}^t \left\{ \hat{\theta} - \theta \right\} \right) \geq I_N(\theta)^{-1} \equiv BCR_N(\theta), \quad (3.1)$$

où $I_N(\theta)$ est la matrice d'information de Fisher définie par

$$I_N(\theta) = \left\{ \mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log L(x, \theta) \right) \right\}_{1 \leq i, j \leq k} \quad (3.2)$$

$L(x, \cdot)$ étant la vraisemblance du modèle.

Notre modèle statistique sera constitué d'une trajectoire soit d'un mbf standard (processus pour lequel $C = 1$) soit d'un mbf non standard discrétisée aux instants $i/\Delta_N, i = 0, \dots, N-1$, avec $\Delta_N \rightarrow +\infty$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Nous noterons ces trajectoires discrétisées respectivement B_H et $B_{H,C}$. Les paramètres d'intérêt seront donc respectivement H et (H, C) , et nous noterons selon le cas $BCR_N(H)$ et $BCR_N(H, C^2)$ les bornes de Cramèr-Rao associées. Après quelques calculs détaillés dans la Section 3.3, l'obtention des BCR se ramène au calcul de

$$\text{Tr} \left(\frac{d}{dH} \Sigma_H \cdot \Sigma_H^{-1} \right), \quad (3.3)$$

où Σ_H représente la matrice de covariance normalisée d'une transformation linéaire, notée ℓ , de la trajectoire discrétisée $B_H : \Sigma_H = \Delta_N^{2H} \mathbb{E} (\ell(B_H) \ell(B_H)^t)$. Si ℓ représente les accroissements, $\ell(B_H)$ définit un bgf standard observé aux instants $i/\Delta_N, i = 0, \dots, N-1$ et Σ_H la matrice d'autocovariance normalisée du mbf. On comprend bien alors que la difficulté d'évaluer (3.3) réside dans le fait que la matrice Σ_H n'est pas creuse, $(\Sigma_H)_{i,j} = \frac{1}{2}(|j-i-1|^{2H} - 2|j-i|^{2H} + |j-i+1|^{2H})$. Le problème n'est cependant pas insurmontable car cette matrice de Toeplitz possède une propriété intéressante de décroissance hyperbolique des coefficients loin de la diagonale, $(\Sigma_H)_{i,j} \sim c|j-i|^{2H-2}$. Dans ce cadre de travail, le problème est entièrement résolu par Dahlhaus [34] qui en 1989 a étudié les BCR de paramètres de divers processus autosimilaires. Sans avoir étudié séparément les comportements de $\frac{d}{dH}\Sigma_H$ et de Σ_H^{-1} , il parvient à établir la limite de (3.3) lorsque N tend vers $+\infty$, et finalement à montrer pour le mbf non standard que la borne de Cramér-Rao des estimateurs du paramètre H vérifie :

$$(BCR_N(H, C^2))_{1,1} \sim \frac{1}{N} \frac{2}{D}, \text{ avec } D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial H} \log f(\lambda) \right\}^2 d\lambda,$$

où f désigne la densité spectrale du bgf. Notre approche est légèrement différente puisque nous commençons par démontrer un résultat d'algèbre linéaire (qui nous semble par ailleurs intéressant en lui-même) concernant l'inverse de matrices qui sont localisées près de la diagonale, ce qui nous permet d'exhiber une transformation linéaire pour laquelle nous contrôlons les comportements des coefficients de $\frac{d}{dH}\Sigma_H$ d'une part et de Σ_H^{-1} d'autre part. Ce contrôle séparé des coefficients nous permet d'obtenir exactement $BCR_N(H)$ et la vitesse de convergence de $BCR_N(H, C^2)$ (notre approche ne nous permet pas d'obtenir la constante asymptotique $2/D$).

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la Section 3.2, nous généralisons un résultat d'algèbre linéaire fondamental démontré par Jaffard [57] et qui nous permet de contrôler les coefficients de suites de certaines matrices $N \times N$ exhibant soit une décroissance hyperbolique soit une décroissance exponentielle. Plus précisément, nous prouvons que les inverses de telles matrices possèdent la même propriété de localisation que la matrice initiale. En filtrant fractionnairement et partiellement la trajectoire discrétisée, nous parvenons à exhiber dans la Section 3.3, une transformation linéaire pour laquelle nous contrôlons (3.3) et finalement à établir les comportements de $BCR_N(H)$ et $BCR_N(H, C^2)$.

3.2 Inverse de matrices localisées

Cette section a pour objectif de présenter un résultat d'algèbre linéaire fondamental sur les inverses de suite de matrices finies localisées près de leur diagonale. Nous entendons par matrice localisée une matrice dont les termes décroissent hyperboliquement ou exponentiellement en s'éloignant de la diagonale.

Caractériser l'inverse d'une matrice est un problème majeur en algèbre linéaire qui a intéressé de nombreux chercheurs, et engendré une littérature importante: Varga [93] et Demko [39] se sont intéressés à obtenir des bornes de $\|A^{-1}\|_{\infty}$ où A est une matrice par bandes; Chew [24], Vassilevski [94], Barret et al. [10] et Shivakumar et al. [86] explicitent des bornes des coefficients de l'inverse de matrices par bandes et/ou matrices tridiagonales; Demko et al. [38] se sont pour leur part attachés à exhiber la vitesse de décroissance des coefficients de l'inverse de certaines matrices localisées. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive. Cependant à notre connaissance seul Jaffard [57] s'est intéressé à borner les coefficients de matrices localisées infinies. Plus précisément, il montre sous certaines conditions

que si une matrice localisée infinie est inversible en tant qu'opérateur de $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ alors son inverse exhibe la même propriété de "localisation". Notre contribution est de regarder très précisément comment peuvent s'adapter ces résultats à des suites de matrices finies. Commençons par introduire quelques notations ainsi que les résultats de Jaffard que nous généralisons, d'une part pour les matrices à décroissance hyperbolique, ensuite pour les matrices à décroissance exponentielle.

3.2.1 Matrices à décroissance hyperbolique

Etant donnés $\alpha > 0, c > 0$, $Q_{\alpha,c}$ désignera l'ensemble des matrices indexées par $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant

$$A \in Q_{\alpha,c} \Leftrightarrow |(A)_{k,k'}| \leq c (1 + |k' - k|)^{-\alpha}, \quad \forall k, k' \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

De plus, $(Q_{\alpha,c,N})_{N \geq 1}$ désignera la suite de sous-ensembles de matrices $N \times N$ telles que

$$A \in Q_{\alpha,c,N} \Leftrightarrow |(A)_{k,k'}| \leq c (1 + |k' - k|)^{-\alpha}, \quad \forall k, k' = 1, \dots, N, \quad (3.5)$$

avec dans (3.5) α et c indépendants de N . Le Lemme préliminaire suivant explicite une propriété importante des ensembles $Q_{\alpha,c}$ et $Q_{\alpha,c,N}$.

Lemme 3.1 $Q_{\alpha,c}$ et $Q_{\alpha,c,N}$ constituent des algèbres dès que $\alpha > 1$.

La preuve de ce résultat est omise, étant en tout point identique à celle de la Proposition 1 de Jaffard [57].

Théorème 3.1 (Jaffard) Soit A une matrice appartenant à $Q_{\alpha,c}$ avec $\alpha > 1$, inversible en tant qu'opérateur de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ alors il existe $c' > 0$ telle que $A^{-1} \in Q_{\alpha,c'}$.

Le théorème suivant présente les résultats obtenus en restreignant le cadre de travail aux suites de matrices $N \times N$. Dans l'énoncé du résultat suivant, \hat{a} désigne la transformée de Fourier d'une suite $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Théorème 3.2 Soit $\alpha \in]1, 3/2[$, et soit $(A_N)_{N \geq 1}$ une suite de matrices $N \times N$ symétriques définies positives telle que $A_N \in Q_{\alpha,c,N}$. Soit A_∞ l'opérateur défini, si la limite suivante existe, pour $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ par

$$(A_\infty)_{i,j} = \lim_{N \rightarrow +\infty} (A_N)_{i,j}$$

Supposons satisfaites les hypothèses suivantes

- (H₁) $(A_\infty)_{i,i+j} = a(j)$ avec $a(j) \sim c|j|^{-\alpha}$, lorsque $|j| \rightarrow +\infty$,
- (H₂) $\hat{a}(\lambda) > 0$ for $\lambda \neq 0$,
- (H₃) $\sum_{i,j=1}^N \{(A_\infty)_{i,j} - (A_N)_{i,j}\}^2 = o(1)$, lorsque $N \rightarrow +\infty$,

alors il existe $c' > 0$ telle que $A_N^{-1} \in Q_{\alpha,c',N}$.

Une lecture attentive des théorèmes précédents montre que notre travail a consisté à établir les conditions pour lesquelles l'inversibilité sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ est assurée uniformément en N : hypothèses (H₁), (H₂) et (H₃).

Exemple: soit G_N la matrice de corrélation d'un bgf standard discrétisé en $i/N, i = 1, \dots, N-1$. D'après la Section 2.1,

$$(G_N)_{i,j} = \frac{1}{2} \{ |j-i-1|^{2H} - 2|j-i|^{2H} + |j-i+1|^{2H} \} \sim c|j-i|^{2H-2} \text{ lorsque } |j-i| \rightarrow +\infty.$$

L'opérateur G_∞ tel qu'il est défini dans le Théorème 3.2 n'est autre que l'extension de la matrice G_N aux indices $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, donc l'hypothèse (\mathbf{H}_3) est trivialement vérifiée. De plus, si $H \in]1/4, 1/2[$ l'hypothèse (\mathbf{H}_1) est satisfaite pour $\alpha = 2 - 2H$, et la densité spectrale du bgf étant strictement positive en dehors de 0, (\mathbf{H}_2) est assurée. En conclusion, si $H \in]1/4, 1/2[$, $G_N^{-1} \in Q_{2-2H, c, N}$.

Preuve du Théorème 3.2

Par la suite, $(A_N)_{N \geq 1}$ désignera une suite de matrices $N \times N$ définies positives satisfaisant les hypothèses du Théorème 3.2, et c une constante générique strictement positive et indépendante de N . Et par souci de simplicité, nous reprenons les notations introduites par Jaffard [57].

$$\begin{aligned} \|A_N\| &= \sup_{X \in \mathbb{R}^N, X \neq 0} \frac{\|A_N X\|_{\ell^2}}{\|X\|_{\ell^2}} = \sup_{X \in \mathbb{R}^N, X \neq 0} \frac{X^t A_N X}{X^t X}. \\ \|A_N\|_\beta &= \sup_{k, j} |(A_N)_{j, k}| (1 + |k - j|)^\beta, \quad \text{pour } \beta > 0 \\ \|A_N\|_{\ell^p} &= \sup_j \left[\sum_k |(A_N)_{j, k}|^p \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

De plus, pour une suite $u = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, nous noterons $\|u\|_{\ell^p} = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|^p \right\}^{1/p}$, pour $p \geq 1$. Définissons, $B_N = I - \frac{A_N}{\|A_N\|}$. Le premier Lemme, qui joue le rôle le plus important dans notre démonstration, donne une borne pour $\|B_N\|$.

Lemme 3.2 *Il existe $0 < r < 1$, r indépendant de N , tel que $\|B_N\| \leq r < 1$.*

Preuve du Lemme 3.2.

• Commençons par montrer que A_∞ est un opérateur continu et inversible de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Soit $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, puisque $A_\infty u = a * u$ (où $*$ symbolise le produit de convolution), d'après l'inégalité de Young on a

$$\|A_\infty u\|_{\ell^2} = \|a * u\|_{\ell^2} \leq \|a\|_{\ell^1} \|u\|_{\ell^2}.$$

L'hypothèse (\mathbf{H}_1) assure que $a \in \ell^1$, A_∞ est donc continu. Ensuite, remarquons que $\widehat{a * u} = \widehat{a} \widehat{u}$. Puisque, $\widehat{a} > 0$ presque partout, $a * u = 0$ implique que $u = 0$ et donc A_∞ est injectif. A présent, notons $v = a * u$ et supposons $v \in \ell^2$, d'après l'égalité de Parseval et l'inégalité de Hölder, il est facile de voir que

$$\|u\|_{\ell^2} \leq \|v\|_{\ell^2} \|\widehat{a}^{-1}\|_{L^2(-\pi, \pi]}.$$

Nous avons $a(j) \sim c|j|^{-\alpha}$, lorsque $|j| \rightarrow +\infty$, avec $\alpha \in]1, 3/2[$, donc d'après le résultat de Zygmund [101], $\widehat{a}(\lambda)^{-1} \sim c|\lambda|^{1-\alpha}$ lorsque $|\lambda| \rightarrow 0$, et ainsi en utilisant (\mathbf{H}_1) et (\mathbf{H}_2) , on montre que $1/\widehat{a} \in L^2(-\pi, \pi]$. Bref, A_∞ est un opérateur continu et inversible de $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$. En conséquence, l'opérateur A_∞^{-1} existe et est continu de $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$.

• Un peu d'algèbre linéaire conduit aux relations suivantes

$$\|A_N\| = \lambda_M, \quad \text{et} \quad \|B_N\| = 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_M}, \quad (3.6)$$

où λ_M (resp. λ_m) est la plus grande (resp. plus petite) valeur propre de la matrice A_N . Pour démontrer le Lemme 3.2, il suffit de borner le rapport λ_M/λ_m indépendamment de N . Soient X_M et X_m les vecteurs propres associés à λ_M et λ_m . Définissons les vecteurs X_M^0 et la matrice A_N^0 par:

$$(X_M^0)_i = \begin{cases} (X_M)_i & \text{si } 1 \leq i \leq N. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (A_N^0)_{i, j} = \begin{cases} (A_N)_{i, j} & \text{si } 1 \leq i, j \leq N. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit de la même manière le vecteur X_m^0 , associé à X_m .

- Commençons par majorer λ_M :

$$\lambda_M = \frac{X_M^t A_N X_M}{X_M^t X_M} = \frac{(X_M^0)^t A_N^0 X_M^0}{(X_M^0)^t X_M^0} = \frac{(X_M^0)^t (A_N^0 - A_\infty) X_M^0}{(X_M^0)^t X_M^0} + \frac{(X_M^0)^t A_\infty X_M^0}{(X_M^0)^t X_M^0}.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$\frac{(X_M^0)^t (A_N^0 - A_\infty) X_M^0}{(X_M^0)^t X_M^0} \leq \left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq N} \{(A_N - A_\infty)_{i, j}\}^2 \right\}^{1/2} = o(1), \text{ d'après l'hypothèse } (\mathbf{H}_3).$$

De plus,

$$\frac{(X_M^0)^t A_\infty X_M^0}{(X_M^0)^t X_M^0} \leq \sup_{X \in \ell^2, X \neq 0} \frac{X^t A_\infty X}{X^t X} = \|A_\infty\|.$$

Donc à partir d'un certain rang,

$$\lambda_M \leq 2\|A_\infty\|. \quad (3.7)$$

- Cherchons à présent à minorer λ_m . Avec les notations introduites auparavant, on a:

$$\lambda_m = \frac{X_m^t A_N X_m}{X_m^t X_m} = \frac{(X_m^0)^t A_N^0 X_m^0}{(X_m^0)^t X_m^0} = \frac{(X_m^0)^t (A_N^0 - A_\infty) X_m^0}{(X_m^0)^t X_m^0} + \frac{(X_m^0)^t A_\infty X_m^0}{(X_m^0)^t X_m^0}.$$

De nouveau,

$$\frac{(X_m^0)^t (A_N^0 - A_\infty) X_m^0}{(X_m^0)^t X_m^0} = o(1), \text{ d'après l'hypothèse } (\mathbf{H}_3).$$

L'opérateur A_∞ étant un opérateur symétrique défini positif, définissons $Y_m^0 = A_\infty^{1/2} X_m^0$. On a alors

$$\frac{(X_m^0)^t A_\infty X_m^0}{(X_m^0)^t X_m^0} = \frac{(Y_m^0)^t Y_m^0}{(Y_m^0)^t A_\infty^{-1} Y_m^0} \geq \frac{1}{\|A_\infty^{-1}\|}.$$

Donc à partir d'un certain rang,

$$\frac{1}{\lambda_m} \leq 2\|A_\infty^{-1}\|. \quad (3.8)$$

Les résultats (3.7) et (3.8) montrent qu'à partir d'un certain rang $\lambda_M/\lambda_m \leq 4\|A_\infty\|\|A_\infty^{-1}\|$. La première partie de la preuve assure que ce quotient est fini, ce qui termine la preuve du Lemme 3.2. \square

Le Lemme 3.2 nous permet d'utiliser le cadre de travail établi par Jaffard: il nous faut prouver que $A_N^{-1} \in Q_{\alpha, c, N}$ i.e. que $\|A_N^{-1}\|_\alpha \leq c$. En écrivant, $A_N^{-1} = \sum_{n \geq 0} (B_N)^n$, on s'aperçoit qu'il suffit de borner la série $\sum_{n \geq 0} \|(B_N)^n\|_\alpha$ indépendamment de N . Les cinq Lemmes suivants sont dûs à Jaffard [57]. Nous vérifions leur validité avec les hypothèses du Théorème 3.2.

Lemme 3.3 $\forall p \in]1, 2]$, $\|B_N\|_{\ell^p} \leq c_p \|B_N\|_1^{2/p-1} \|B_N\|_{\ell^2}^{2-2/p}$, avec c_p indépendant de N .

Preuve du Lemme 3.3

Soit $b_{jk} = (B_N)_{j,k}$, et soit $T \in \{1, \dots, N\}$ (T sera fixé ultérieurement), alors

$$\left(\sum_k |b_{jk}|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{|k-j| \leq T} |b_{jk}|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{|k-j| > T} \frac{\|B_N\|_1^p}{|k-j|^p} \right)^{1/p}. \quad (3.9)$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\left(\sum_{i=-T}^T |a_i|^p \right)^{1/p} \leq (3T)^{1/p-1/2} \left(\sum_{i=-T}^T |a_i|^2 \right)^{1/2}.$$

De plus,

$$\sum_{k=T+1}^N \frac{1}{k^p} \leq \int_T^{+\infty} x^{-p} dx = \frac{1}{p-1} T^{1-p}.$$

En passant à la borne supérieure de (3.9), il vient

$$\|B_N\|_{\ell^p} \leq (3T)^{1/p-1/2} \|B_N\|_{\ell^2} + 2(p-1)^{-1/p} T^{1/p-1} \|B_N\|_1.$$

Puisque $a \in \ell^1$, $\|B_N\|_1$ est bornée indépendamment de N . De plus, $(\|B_N\|_{\ell^2})_{N \geq 1}$ est une suite croissante, donc pour N suffisamment grand, on peut choisir $T = \lceil \frac{\|B_N\|_1^2}{\|B_N\|_{\ell^2}^2} \rceil$ et ainsi obtenir

$$\|B_N\|_{\ell^p} \leq c_p \|B_N\|_1^{2/p-1} \|B_N\|_{\ell^2}^{2-2/p} \quad \text{avec } c_p = 2 \times \max(3^{1/p-1/2}, 2(p-1)^{-1/p}).$$

□

Lemme 3.4 Soit \tilde{B}_N la matrice définie par $(\tilde{B}_N)_{j,k} = \tilde{b}_{jk} = (k-j)b_{jk}$, et soit p un réel satisfaisant $1 < p < \frac{2}{3-\alpha}$. Si M_1 et M_2 sont deux matrices telles que $\|M_1\|_{\ell^p} < +\infty$ et $\|M_2\|_{\ell^p} < +\infty$, alors il existe une constante c indépendante de N telle que

$$|(M_1 \tilde{B}_N M_2)_{i,j}| \leq c \|B_N\|_{\alpha} \|M_1\|_{\ell^p} \|M_2\|_{\ell^p}.$$

Preuve du Lemme 3.4 Commençons par prouver que \tilde{B}_N est borné de $\ell^p \rightarrow \ell^r$, avec r tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$. Nous avons $|\tilde{b}_{jk}| \leq c|k-j|^{1-\alpha}$. Maintenant, la suite $(|k|^{1-\alpha})_{k \in \mathbb{Z}^*} \in \ell^q$ si $q > \frac{1}{\alpha-1}$, et donc d'après l'inégalité de Young, \tilde{B}_N sera continu $\ell^p \rightarrow \ell^r$ si $\frac{1}{r} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. La condition imposée à p nous permet de choisir r tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ (ce qui justifiera l'utilisation de l'inégalité de Hölder ci-après).

Soit (e_i) la base canonique de ℓ^2 , $M_2 e_j \in \ell^p$ donc $\|M_2 e_j\|_{\ell^p} \leq \|M_2\|_{\ell^p}$. Ainsi, $\tilde{B}_N M_2 e_j \in \ell^r$ et $\|\tilde{B}_N M_2 e_j\|_{\ell^r} \leq c \|B_N\|_{\alpha} \|M_2\|_{\ell^p}$. Enfin, puisque $M_1^t e_j \in \ell^p$, nous obtenons d'après l'inégalité de Hölder

$$\left| \langle M_1^t e_j, \tilde{B}_N M_2 e_j \rangle \right| \leq c \|B_N\|_{\alpha} \|M_1\|_{\ell^p} \|M_2\|_{\ell^p}.$$

□

Lemme 3.5 Il existe une constante $\kappa = \kappa(R)$ indépendante de N telle que pour $n \geq 0$ on ait

$$\|(B_N)^n\|_1 \leq \kappa R^n, \quad \forall R > \|B_N\|.$$

Preuve du Lemme 3.5. Soit $b_{n,jk}$ le coefficient d'indices (j, k) de la matrice $(B_N)^n$, et soit $\tilde{b}_{n,jk} = (k - j) b_{n,jk}$. On a,

$$b_{n,jk} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} b_{ji_1} b_{i_1 i_2} \dots b_{i_{n-1} k}.$$

Puisque,

$$|k - j| \leq |j - i_1| + \dots + |i_{n-1} - k|,$$

il vient

$$|\tilde{b}_{n,jk}| \leq \sum_{i_1} |\tilde{b}_{ji_1}| |b_{i_1 i_2}| \dots |b_{i_{n-1} k}| + \dots + \sum_{i_{n-1}} |b_{ji_1}| |b_{i_1 i_2}| \dots |\tilde{b}_{i_{n-1} k}|.$$

Le Lemme 3.4 nous permet alors d'obtenir la majoration suivante,

$$\|(B_N)^n\|_1 \leq 2c \|B_N\|_\alpha \|(B_N)^{n-1}\|_{\ell^p} + c \sum_{i=1}^{n-2} \{ \|B_N\|_\alpha \|(B_N)^i\|_{\ell^p} \|(B_N)^{n-i-1}\|_{\ell^p} \}.$$

D'après le Lemme 3.3, il existe une constante c' indépendante de N telle que

$$\begin{aligned} \|(B_N)^n\|_1 \leq & c' \|B_N\|_\alpha \left\{ \|(B_N)^{n-1}\|_1^{2/p-1} \|B_N\|^{(n-1)(2-2/p)} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{n-2} (\|B_N\|_1 \|(B_N)^{n-1-i}\|_1)^{2/p-1} \|B_N\|^{(n-1)(2-2/p)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

$Q_{\alpha, N}$ étant une algèbre (voir [57] pour une preuve détaillée), il existe $R_0 > 0$ tel que, pour tout n , on ait : $\|(B_N)^n\|_1 \leq R_0^n$. D'après (3.10), nous obtenons alors

$$\|(B_N)^n\|_1 \leq 2c' n \|B_N\|_\alpha R_0^{(n-1)(2/p-1)} \|B_N\|^{(n-1)(2-2/p)}.$$

La fin de la preuve est identique : si $R_1 > R_0^{2/p-1} \|B_N\|^{2-2/p}$, alors il existe $\kappa_1 = \kappa_1(R_1)$ tel que $\|(B_N)^n\|_1 \leq \kappa_1 R_1^n$. La démonstration est terminée en itérant cet argument et en remarquant que $\|B_N\|$ est l'unique point fixe de l'application $x \mapsto x^{2/p-1} \|B_N\|^{2-2/p}$. \square

Lemme 3.6 *Il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $R > \|B_N\|$, on ait*

$$\|(B_N)^n\|_{1+\gamma} \leq \kappa R^n, \quad \text{avec } \kappa = \kappa(R) \text{ indépendante de } N.$$

Preuve du Lemme 3.6 La preuve est identique à celle du Lemme 4 de Jaffard [57]. Elle repose sur le fait que l'on peut prouver un résultat identique au Lemme 3.4 pour la matrice \tilde{B}_N définie par $(\tilde{B}_N)_{j,k} = |k - j|^{1+\gamma} b_{jk}$ (avec $0 < \gamma < 1$). Il suffit ensuite d'appliquer le schéma de la preuve du Lemme 3.5 pour la matrice ayant pour termes $|k - j|^{1+\gamma} b_{n,jk}$. \square

Lemme 3.7 *Il existe $\gamma > 0$ tel que $A_N^{-1} \in Q_{\gamma+1, c, N}$.*

Preuve du Lemme 3.7

D'après le Lemme 3.3, $\|B_N\| \leq r < 1$, on peut choisir $R = r$ dans le Lemme 3.6 et ainsi obtenir $\sum_{n \geq 0} \|(B_N)^n\|_{1+\gamma} \leq \frac{\kappa}{1-r}$, ce qui implique que $A_N^{-1} \in Q_{1+\gamma, c, N}$. \square

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du Théorème 3.2. Remarquons que

$$(k-j)(A_N^{-1})_{j,k} = - \sum_{\ell} \sum_m (A_N^{-1})_{k,\ell} (\ell-m) (A_N)_{\ell,m} (A_N^{-1})_{m,j}.$$

Il existe une constante c indépendante de N , telle que

$$|(A_N^{-1})_{k,\ell}| \leq c (1+|k-\ell|)^{-\gamma-1} \quad \text{et} \quad |(\ell-m)(A_N)_{\ell,m}| \leq c (1+|\ell-m|)^{1-\alpha}.$$

En se basant sur le Lemme 3.1, on peut montrer que si $M \in Q_{\epsilon,c,N}$ et $M' \in Q_{\beta,c',N}$ avec $\epsilon < 1, \beta > 1$ alors $(MM') \in Q_{\epsilon,c'',N}$ avec $c, c', c'' > 0$. Ainsi, il existe une constante $c > 0$ indépendante de N telle que

$$|(k-j)(A_N^{-1})_{j,k}| \leq c (1+|k-j|)^{1-\alpha},$$

et le Théorème 3.2 est prouvé. □

3.2.2 Matrices à décroissance exponentielle

En travaillant sur la généralisation du résultat de Jaffard concernant les matrices dont les termes décroissent de manière hyperbolique en s'éloignant de la diagonale, nous nous sommes aperçus qu'une telle généralisation était possible pour les matrices présentant une décroissance exponentielle.

Etant donnés $\beta > 0, c > 0$, $\mathcal{E}_{\beta,c}$ désignera l'ensemble des matrices indexées par $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant

$$A \in \mathcal{E}_{\beta,c} \Leftrightarrow |(A)_{k,k'}| \leq c \exp(-\beta|k'-k|), \quad \forall k, k' \in \mathbb{Z}. \quad (3.11)$$

De plus, $(\mathcal{E}_{\beta,c,N})_{N \geq 1}$ désignera la suite de sous-ensembles de matrices $N \times N$ telles que

$$A \in \mathcal{E}_{\beta,c,N} \Leftrightarrow |(A)_{k,k'}| \leq c \exp(-\beta|k'-k|), \quad \forall k, k' = 1, \dots, N. \quad (3.12)$$

Clairement, dans (3.12) β et c sont indépendants de N .

Théorème 3.3 (Jaffard) *Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{E}_{\beta,c}$, inversible en tant qu'opérateur de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ alors il existe $c' > 0$ telle que $A^{-1} \in \mathcal{E}_{\beta,c'}$.*

Le Théorème suivant présente les résultats obtenus en restreignant le cadre de travail aux suites de matrices $N \times N$.

Théorème 3.4 *Soit $(A_N)_{N \geq 1}$ une suite de matrices $N \times N$ symétriques définies positives telle que $A_N \in \mathcal{E}_{\beta,c,N}$. Soit A_∞ l'opérateur défini, si la limite suivante existe, pour $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ par*

$$(A_\infty)_{i,j} = \lim_{N \rightarrow +\infty} (A_N)_{i,j}$$

Supposons satisfaites les hypothèses suivantes

- (H₁) $(A_\infty)_{i,i+j} = a(j)$ avec $a(j) \sim c \exp(-\beta|j|)$ lorsque $|j| \rightarrow +\infty$
- (H₂) $|\hat{a}(\lambda)| > 0$ for $\lambda \neq 0$
- (H₃) $\sum_{i,j=1}^N \{(A_\infty)_{i,j} - (A_N)_{i,j}\}^2 = o(1)$, lorsque $N \rightarrow +\infty$

alors il existe $c' > 0$ telle que $A_N^{-1} \in \mathcal{E}_{\beta,c',N}$.

Preuve du Théorème 3.4

Une lecture attentive de la preuve du Théorème 3.3 de Jaffard montre que l'extension aux suites de matrices $N \times N$ est envisageable dès que l'on obtient un résultat analogue au Lemme 3.2 pour les matrices appartenant à $\mathcal{E}_{\beta,N}$, i.e. dès qu'il existe $r < 1$, r indépendant de N , tel que $\|I - \frac{A_N}{\|A_N\|}\| \leq r$. Et une lecture attentive du Lemme 3.2 montre que ceci est réalisé dès que $a \in \ell^1$, $1/\hat{a} \in L^2(\cdot) - \pi, \pi[\cdot]$ et $|\hat{a}(\lambda)| > 0$ pour $\lambda \neq 0$. Or, un simple calcul intégral montre qu'il existe $c > 0$ tel que $\hat{a}(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2 + \beta^2}$. Donc les trois conditions précitées sont trivialement vérifiées.

□

3.3 Applications au calcul des Bornes de Cramèr-Rao du mbf

Dans cette section, nous souhaitons appliquer les résultats de la section précédente à l'évaluation de la vitesse des bornes de Cramèr-Rao pour les paramètres du mbf standard, $BCR_N(H)$, et du mbf non standard, $BCR_N(H, C^2)$. Les résultats de cette section ne sont pas novateurs d'un point de vue théorique puisqu'ils ont déjà en partie été présentés par Dahlhaus [34], qui par son approche parvient à obtenir un équivalent de $BCR_N(H, C^2)$. Cependant, la démonstration que nous apportons est unique, originale et n'est à notre avis pas dénuée d'intérêt.

Rappelons les notations suivantes pour x_N et y_N , deux suites réelles: $x_N \sim y_N$ si la limite $\lim_{N \rightarrow +\infty} x_N/y_N$ existe et est égale à 1. Par ailleurs, nous aurons $x_N = \mathcal{O}(y_N)$ (resp. $x_N \asymp y_N$), s'il existe une constante $c > 0$, (resp. $c_1, c_2 > 0$), telle que $|x_N| \leq c|y_N|$ (resp. $c_1|y_N| \leq |x_N| \leq c_2|y_N|$). Pour deux matrices A et B , nous aurons $A_N \asymp B_N$ si pour tout i, j $(A_N)_{i,j} \asymp (B_N)_{i,j}$.

Théorème 3.5 *Soit $0 < H < 1$ le paramètre de Hurst d'un mbf standard observé aux instants i/Δ_N , $i = 0, \dots, N-1$. Alors la borne de Cramèr-Rao de H vérifie lorsque $N \rightarrow +\infty$, $\Delta_N \rightarrow +\infty$:*

$$BCR_N(H) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{N \log^2(\Delta_N)}. \quad (3.13)$$

Théorème 3.6 *Soient $0 < H < 1$ et $0 < C$ le paramètre de Hurst et le paramètre d'échelle d'un mbf non standard observé aux instants i/Δ_N , $i = 0, \dots, N-1$. Alors la borne de Cramèr-Rao de (H, C) vérifie lorsque $N \rightarrow +\infty$, $\Delta_N \rightarrow +\infty$:*

$$BCR_N(H, C^2) \asymp \begin{pmatrix} 1/N & \log(\Delta_N)/N \\ \log(\Delta_N)/N & \log^2(\Delta_N)/N \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Commençons par introduire quelques notations et par décrire l'approche utilisée pour démontrer ces deux résultats. Le vecteur B_H (resp. $B_{H,C}$) désignera une trajectoire d'un mbf standard (resp. non standard) discrétisée aux instants i/Δ_N , $i = 0, \dots, N-1$. Soit c le vecteur défini pour $d \in]-1/2, 1/2[$ et pour $k \geq 0$ par

$$c_k = (-1)^k \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-d+1)},$$

où Γ désigne la fonction Gamma. La suite c représente un filtre fractionnaire d'ordre d , i.e. les coefficients du développement en séries de la fonction $(1-z)^d$. Nous renvoyons le lecteur

à Beran [20] qui énonce quelques généralités sur les filtres fractionnaires. Entre autres, il montre que la transformée de Fourier de c , notée \hat{c} , est donnée par $\hat{c}(\lambda) = (1 - e^{i\lambda})^d$ pour $\lambda \in]-\pi, \pi[$. A présent définissons $\Delta_d B_H$ (resp. $\Delta_d B_{H,C}$) comme étant le vecteur issu du filtrage fractionnaire partiel des accroissements de B_H (resp. $B_{H,C}$) avec le vecteur c :

$$\Delta_d B_H(i) = \sum_{k=0}^{N-1-i} c_k X_H \left(\frac{k+i}{\Delta_N} \right) \quad \text{pour } i = 0, \dots, N' - 1,$$

où $N' = [N(1 - 1/\log N)]$ ($[x]$ désignant la partie entière d'un réel x), et où $X_H(0) = B_H(0)$ et $X_H(j/\Delta_N) = B_H(j/\Delta_N) - B_H(j - 1/\Delta_N)$, pour $j = 1, \dots, N' - 1$. Désignons encore par $\Sigma_{H,\Delta}$ la matrice de covariance de $\Delta_d B_H$ définie par $\Sigma_{H,\Delta} = \mathbb{E}((\Delta_d B_H)^t (\Delta_d B_H))$. L'autosimilarité du mbf suffit à montrer que

$$(\Sigma_{H,\Delta})_{i,j} = \frac{1}{(\Delta_N)^{2H}} \sum_{(k,k')=(0,0)}^{(N-i,N-j)} c_k c_{k'} \gamma(k' - k + j - i), \quad i, j = 1, \dots, N', \quad (3.15)$$

où γ désigne la fonction de covariance du bgf donnée par $\gamma(\tau) = 1/2(|\tau - 1|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau + 1|^{2H})$. Σ_H désignera la matrice normalisée $\Sigma_{H,1}$, $|\Sigma_H|$ le déterminant de Σ_H et $\frac{d}{dH}\Sigma_H$ la matrice dont les termes sont les termes de Σ_H dérivés par rapport à H .

Le Lemme 3.8 montre la pertinence du filtrage fractionnaire partiel des accroissements de B_H . Ce Lemme montre en effet que pour un certain choix du réel d , la matrice Σ_H de taille $N' \times N'$ satisfait les hypothèses **(H₁)** et **(H₂)** du Théorème 3.2. Ensuite, le fait d'avoir défini uniquement $\Delta_d B_H(i)$ pour $0 \leq i < N'$ assure que chaque composante est obtenue en filtrant au moins $\frac{N}{\log(N)}$ observations du mbf, ce qui est primordial pour assurer l'hypothèse **(H₃)** du Théorème 3.2. En résumé, l'approche développée, i.e. le filtrage fractionnaire partiel, nous permet de construire une matrice (Σ_H) , pour laquelle nous contrôlons les coefficients ainsi que les coefficients de son inverse par application du Théorème 3.2, et ce pour tout $H \in]0, 1[$. Ceci est le point-clé pour obtenir les comportements de $BCR_N(H)$ et $BCR_N(H, C^2)$. Si nous avons considéré uniquement les accroissements du mbf (sans filtrage fractionnaire), les hypothèses du Théorème 3.2 n'auraient été satisfaites que pour $H \in]1/4, 1/2[$ et nous n'aurions été en mesure de déterminer les comportements de $BCR_N(H)$ et $BCR_N(H, C^2)$ que pour $H \in]1/4, 1/2[$.

Ajoutons également que de par leur équivalence, nous abuserons des notations en continuant à noter $BCR_N(H)$ (resp. $BCR_N(H, C^2)$) la borne de Cramèr-Rao de H (resp. (H, C^2)) basée soit sur B_H (resp. $B_{H,C}$) soit sur $\Delta_d B_H$ (resp. $\Delta_d B_{H,C}$) puisque $N' \sim N$. Sans perte de généralité, la preuve devient plus claire.

Enfin, introduisons les quelques notations suivantes :

$$X_{N'} = X_{N'}(H, \Delta_N) \equiv ((\Delta_N)^H \Delta_d B_H)^t (\Sigma_H)^{-1} ((\Delta_N)^H \Delta_d B_H), \quad (3.16)$$

$$Y_{N'} = Y_{N'}(H, \Delta_N) \equiv ((\Delta_N)^H \Delta_d B_H)^t \frac{d}{dH} (\Sigma_H)^{-1} ((\Delta_N)^H \Delta_d B_H), \quad (3.17)$$

et,

$$u_{N'} = \text{Var}(X_{N'}), \quad v_{N'} = \text{Var}(Y_{N'}), \quad \text{and} \quad c_{N'} = \text{Cov}(X_{N'}, Y_{N'}). \quad (3.18)$$

Nous énonçons un résultat préliminaire, concernant les comportements de $v_{N'}$ et $c_{N'}$, qui sera prouvé dans la Section 3.3.2.

Proposition 3.1 *Lorsque $N \rightarrow +\infty$, $\Delta_N \rightarrow +\infty$, on a :*

$$v_{N'} = \mathcal{O}(N) , \quad c_{N'} = \mathcal{O}(N) , \quad w_{N'} = u_{N'} v_{N'} - c_{N'}^2 > 0 , \quad \text{et} \quad w_{N'} = \mathcal{O}(N^2) .$$

3.3.1 Preuves des Théorèmes 3.5 et 3.6

Preuve du Théorème 3.5 :

La log-vraisemblance du vecteur $\Delta_d B_H$ est donnée par :

$$\ell_{N'}(\Delta_d B_H, H) = -\frac{N'}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\Sigma_{H,\Delta}| - \frac{1}{2} (\Delta_d B_H)^t (\Sigma_{H,\Delta})^{-1} (\Delta_d B_H) . \quad (3.19)$$

Le score, $S(\Delta_d B_H, H)$, défini comme étant la dérivée de la vraisemblance par rapport à H est donné par :

$$S(\Delta_d B_H, H) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dH} \log |\Sigma_{H,\Delta}| - \frac{1}{2} (\Delta_d B_H)^t \frac{d}{dH} (\Sigma_{H,\Delta})^{-1} (\Delta_d B_H) . \quad (3.20)$$

La densité du vecteur $\Delta_d B_H$ satisfait

$$(2\pi)^{-\frac{N'}{2}} |\Sigma_{H,\Delta}|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^{N'}} \exp \left(-\frac{1}{2} x^t (\Sigma_{H,\Delta})^{-1} x \right) dx = 1 . \quad (3.21)$$

La fonction $\exp \left(-\frac{1}{2} x^t \Sigma_H^{-1} x \right)$ est dérivable par rapport à H , et la dérivée est donnée par $f(x) = -x^t \frac{d}{dH} \Sigma_H^{-1} x \exp \left(-\frac{1}{2} x^t \Sigma_H^{-1} x \right)$. Soit $c = \max_{j,k} \frac{d}{dH} (\Sigma_H^{-1})_{j,k}$, nous avons clairement $|f(x)| \leq c (x^t x) \exp \left(-\frac{1}{2} x^t \Sigma_H^{-1} x \right) x \in L^1(\mathbb{R}^{N'})$. Donc en dérivant (3.21) par rapport à H , nous obtenons :

$$\frac{d}{dH} \log |\Sigma_{H,\Delta}| = -\mathbb{E} \left(\frac{d}{dH} (\Delta_d B_H)^t (\Sigma_{H,\Delta})^{-1} \Delta_d B_H \right) ,$$

ce qui permet de réécrire (3.20) de la manière suivante :

$$S(\Delta_d B_H, H) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbb{E} \left((\Delta_d B_H)^t \frac{d}{dH} (\Sigma_{H,\Delta})^{-1} (\Delta_d B_H) \right) - (\Delta_d B_H)^t \frac{d}{dH} (\Sigma_{H,\Delta})^{-1} (\Delta_d B_H) \right\} . \quad (3.22)$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dH} (\Sigma_{H,\Delta})^{-1} &= \frac{d}{dH} \left((\Delta_N)^{2H} (\Sigma_H)^{-1} \right) \\ &= 2(\Delta_N)^{2H} \log(\Delta_N) (\Sigma_H)^{-1} + (\Delta_N)^{2H} \frac{d}{dH} (\Sigma_H)^{-1} . \end{aligned}$$

D'après (3.16) et (3.17), (3.22) devient :

$$S(\Delta_d B_H, H) = \log(\Delta_N) \{ \mathbb{E}(X_{N'}) - X_{N'} \} + \frac{1}{2} \{ \mathbb{E}(Y_{N'}) - Y_{N'} \} . \quad (3.23)$$

Et en utilisant les notations (3.18), la matrice d'information de Fisher est alors donnée par (voir (3.2)) :

$$\begin{aligned} I(\Delta_d B_H, H) &= \mathbb{E}(S(\Delta_d B_H, H)^2) = \text{Var}(S(\Delta_d B_H, H)) \\ &= u_{N'} \log^2(\Delta_N) + \frac{1}{4} v_{N'} + c_{N'} \log(\Delta_N). \end{aligned} \quad (3.24)$$

On vérifie trivialement que la distribution de $X_{N'}$ est un chi-deux à N' degrés de liberté, donc $u_{N'} = 2N'$. Ceci et la Proposition 3.1 impliquent que :

$$I(\Delta_d B_H, H) = 2N' \log^2(\Delta_N) + \mathcal{O}(N) + \mathcal{O}(N \log(\Delta_N)),$$

et le Théorème 3.5 est prouvé ($N' \sim N$). □

Preuve du Théorème 3.6

Le score dépend maintenant des paramètres H et C :

$$S(\Delta_d B_{H,C}, H, C^2) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \begin{pmatrix} \log(\Delta_N) \{ \mathbb{E}(X_{N'}) - X_{N'} \} + \frac{1}{2} \{ \mathbb{E}(Y_{N'}) - Y_{N'} \} \\ \frac{1}{2C^2} \{ X_{N'} - \mathbb{E}(X_{N'}) \} \end{pmatrix}.$$

La matrice d'information de Fisher est alors donnée par :

$$I(\Delta_d B_{H,C}, H, C^2) = \begin{pmatrix} u_{N'} \log^2(\Delta_N) + \frac{1}{4} v_{N'} + c_{N'} \log(\Delta_N) & -\frac{1}{2C^2} u_{N'} \log(\Delta_N) - \frac{1}{4C^2} c_{N'} \\ -\frac{1}{2C^2} u_{N'} \log(\Delta_N) - \frac{1}{4C^2} c_{N'} & \frac{1}{4C^4} u_{N'} \end{pmatrix}.$$

D'après la Proposition 3.1, $|I(\Delta_d B_{H,C}, H, C^2)| \neq 0$ et $I(\Delta_d B_{H,C}, H, C^2)$ est inversible d'où :

$$\begin{aligned} I(\Delta_d B_{H,C}, H, C^2)^{-1} &= (u_{N'} v_{N'} - c_{N'}^2)^{-1} \times \\ &\begin{pmatrix} 4u_{N'} & 4C^2(2u_{N'} \log(\Delta_N) + c_{N'}) \\ 4C^2(2u_{N'} \log(\Delta_N) + c_{N'}) & 4C^4(4u_{N'} \log^2(\Delta_N) + v_{N'} + 4c_{N'} \log(\Delta_N)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant la Proposition 3.1, nous obtenons une borne inférieure pour $BCR_N(H, C^2)$. Mais le Chapitre 2 fournit des estimateurs des paramètres H et C^2 dont les écarts quadratiques moyens se comportent comme (3.14). Ces écarts quadratiques moyens constituent une borne supérieure de $BCR_N(H, C^2)$, ce qui termine la preuve. □

3.3.2 Preuve de la Proposition 3.1

La Proposition 3.1 repose sur le Lemme suivant explicitant les comportements des coefficients de $\frac{d}{dH} \Sigma_H$ et de Σ_H^{-1} .

Lemme 3.8

- (i) Il existe $\alpha \in]1, 3/2[$ tel que Σ_H satisfasse les hypothèses du Théorème 3.2.
- (ii) Il existe $\beta > 1$ et $c > 0$ telles que $\frac{d}{dH}(\Sigma_H) \in Q_{\beta, c, N'}$

Preuve du Lemme 3.8. $\kappa(H)$ désignera une constante générique dépendant de H .

(i) Pour $0 < \epsilon < 1/8$, définissons

$$d = \begin{cases} H - 1/4 - \epsilon & \text{si } H \in]0, 3/4 - \epsilon] \\ 1/2 - \epsilon & \text{si } H \in]3/4 - \epsilon, 1 - \epsilon[\end{cases} \quad (3.25)$$

- Définissons également le processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{Z}}$ obtenu en filtrant le processus des accroissements du mbf avec le filtre fractionnaire c d'ordre d :

$$Y(i) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X \left(\frac{k-i}{\Delta_N} \right), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Puisque $d \in]-1/2, 1/2[$, la densité spectrale de Y , notée $\hat{\sigma}$ est explicitement donnée par (cf Beran [20] p.61)

$$\hat{\sigma}(\lambda) = 2^d (1 - \cos(\lambda))^d f(\lambda), \quad \text{pour } \lambda \in]-\pi, \pi[,$$

où f désigne la densité spectrale du processus des accroissements du mbf. Rappelons que $f(\lambda) \sim \kappa(H)|\lambda|^{1-2H}$ lorsque $|\lambda| \rightarrow 0$, et donc $|\hat{\sigma}(\lambda)| \sim \kappa(H)|\lambda|^{1-2H+2d}$ lorsque $|\lambda| \rightarrow 0$. Le réel d a été choisi de telle sorte que $2d + 2 - 2H \in]1, 3/2[$ pour $H \in]0, 1 - \epsilon[$, ainsi d'après Zygmund [101] $\sigma(j) \sim \kappa(H)|j|^{2H-2d-2}$ lorsque $|j| \rightarrow +\infty$. Nous avons ainsi prouvé l'existence d'un réel $\alpha \in]1, 3/2[$ tel que pour tout $H \in]0, 1[$, $\sigma(j) \sim \kappa(H)|j|^{-\alpha}$ lorsque $|j| \rightarrow +\infty$.

Par définition,

$$\sigma(j) = \sum_{(k,k')=(0,0)}^{(+\infty,+\infty)} c_k c_{k'} \gamma(k' - k + j),$$

où γ est la fonction d'autocovariance du mbf. Ceci signifie que la limite $\lim_{N' \rightarrow +\infty} (\Sigma_H)_{i,i+j}$ existe et est égale à $\sigma(j)$, ce qui remplit l'hypothèse **(H₁)** du Théorème 3.2.

- Puisque la densité spectrale du bgf, $f(\lambda)$ est strictement positive pour $\lambda \neq 0$, $\hat{\sigma} > 0$ pour $\lambda \neq 0$, l'hypothèse **(H₂)** est satisfaite.
- Notons Σ_∞ la matrice infinie définie pour $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ par $(\Sigma_\infty)_{i,j} = \sigma(j - i)$. Il nous faut prouver que $S_N = \sum_{1 \leq i, j \leq N'} \{(\Sigma_\infty)_{i,j} - (\Sigma_H)_{i,j}\}^2 = o(1)$. Il est bien connu que $|\gamma(\tau)| \sim \kappa|\tau|^{2H-2}$, lorsque $|\tau| \rightarrow +\infty$. D'après Zygmund [101], on a $|c_\tau| \sim \kappa|\tau|^{-d-1}$, lorsque $|\tau| \rightarrow +\infty$. Ainsi, on peut obtenir la majoration suivante pour S_N :

$$\begin{aligned} S_N &\leq \kappa N' \sum_{|i| \leq N'} \left\{ \sum_{k, k' = N''}^{+\infty} |k|^{-d-1} |k'|^{-d-1} |k' - k + i|^{2H-2} \right\}^2, \\ &\quad \text{avec } N'' = N - N' \text{ (on a } N'' \rightarrow +\infty, \text{ lorsque } N \rightarrow +\infty), \\ &\leq N' \sum_{k_1, \dots, k_4 \geq N''} |k_1|^{-d-1} \dots |k_4|^{-d-1} \left\{ \sum_{|i| \leq N'} |k_1 - k_3 + i|^{2H-2} |k_2 - k_4 + i|^{2H-2} \right\}. \end{aligned}$$

En se basant sur la preuve du Lemme 3.1, on peut écrire

$$\sum_{|i| \leq N'} |k_1 - k_3 + i|^{2H-2} |k_2 - k_4 + i|^{2H-2} \leq \kappa x_{N'} |k_1 + k_2 - k_3 - k_4|^{2H-2},$$

$$\text{avec } x_{N'} = \begin{cases} 1 & \text{si } H < 1/2 \\ \log(N') & \text{si } H = 1/2 \\ (N')^{2H-1} & \text{si } H > 1/2 \end{cases}$$

D'où la majoration suivante pour $S_N \leq \kappa N' x_{N'} \sum_{k_1, \dots, k_4 \geq N''} F(k_1, \dots, k_4)$ où $F(k_1, \dots, k_4) = |k_1|^{-d-1} \dots |k_4|^{-d-1} |k_1 + k_2 - k_3 - k_4|^{2H-2}$. Définissons pour $\eta > 0$

$$E_1 = \left\{ k_1, \dots, k_4 \geq N'', 0 < (N'')^{1+\eta} x_{N'} |k_1 + k_2 - k_3 - k_4|^{2H+2+\eta} < |k_1 k_2 k_3 k_4|^{d+1} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ k_1, \dots, k_4 \geq N'', (N'')^{1+\eta} x_{N'} |k_1 + k_2 - k_3 - k_4|^{2H+2+\eta} \geq |k_1 k_2 k_3 k_4|^{d+1} \right\}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \sum_{(k_1, \dots, k_4) \in E_1} F(k_1, \dots, k_4) &\leq (N'')^{-1-\eta} x_{N'}^{-1} \sum_{k_1, \dots, k_4 \geq N''} |k_1 + k_2 - k_3 - k_4|^{-4-\eta} \\ &\leq (N'')^{-1-\eta} x_{N'}^{-1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Et,

$$\begin{aligned} \sum_{(k_1, \dots, k_4) \in E_2} F(k_1, \dots, k_4) &\leq (N'')^{\frac{(1+\eta)(2-2H)}{2+2H+\eta}} x_{N'}^{\frac{2-2H}{2H+2+\eta}} \left\{ \sum_{k \geq N''} |k|^{-(d+1) \left(1 + \frac{2-2H}{2+2H+\eta}\right)} \right\}^4 \\ &\leq (N'')^{\frac{(1+\eta)(2-2H)}{2+2H+\eta}} x_{N'}^{\frac{2-2H}{2H+2+\eta}} (N'')^{4 - \frac{4(d+1)(4+\eta)}{2H+2+\eta}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Les inégalités (3.26), (3.27) et les définitions de N' et N'' impliquent finalement que,

$$S_N = L(N) \left\{ \mathcal{O}(N^{-\eta}) + \mathcal{O} \left(x_N^{\frac{4+\eta}{2+2H+\eta}} N^{\left\{ 5 - \frac{4(4+\eta)(d+1) - (1+\eta)(2-2H)}{2+2H+\eta} \right\}} \right) \right\}, \quad (3.28)$$

où L est une fonction à variations lentes. Nous laissons alors le soin au lecteur de vérifier que le terme de droite de (3.28) tend vers 0, lorsque $N \rightarrow +\infty$ si

$$\frac{8\epsilon + 2\eta + 2\epsilon\eta}{4 + 3\eta} < H < 1 - \epsilon - \frac{\epsilon\eta}{4}, \quad (3.29)$$

où ϵ est le paramètre introduit pour définir d , voir (3.25). L'équation (3.29) étant valable pour tout $\eta > 0$, $\epsilon > 0$, on obtient que pour tout $H \in]0, 1[$, $S_N \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, et l'hypothèse **(H₃)** est satisfaite.

(ii) On vérifie facilement que $|\frac{d}{dH}\hat{\sigma}(\lambda)| \sim \kappa(H)|\lambda|^{1-2H+2d}L(1/\lambda)$ lorsque $|\lambda| \rightarrow 0$ où L désigne une fonction à variations lentes. D'après Zygmund [101], on a alors $\frac{d}{dH}\sigma(j) \sim \kappa(H)|j|^{2H-2d-2}L(j)$ lorsque $|j| \rightarrow +\infty$. En conclusion, il existe $\beta > 1$ et $c > 0$ telles que $\frac{d}{dH}\sigma(j) = \mathcal{O}(|j|^{-\beta})$ i.e. tel que $\frac{d}{dH}\Sigma_H \in Q_{\beta, N'}$. □

Preuve de la Proposition 3.1 :

Un peu d'algèbre linéaire et la formule d'Isserlis pour les variables gaussiennes [54], conduisent à :

$$v_{N'} = 2 \operatorname{Tr} \left(\left(\frac{d}{dH} \Sigma_H \right) \Sigma_H^{-1} \left(\frac{d}{dH} \Sigma_H \right) \Sigma_H^{-1} \right)$$

$$c_{N'} = 2 \operatorname{Tr} \left(\left(\frac{d}{dH} \Sigma_H \right) \Sigma_H^{-1} \right)$$

Puisque $Q_{\alpha,c,N'}$ est une algèbre pour $\alpha > 1$ (Lemme 3.1), le Lemme 3.8 implique l'existence de $\beta > 1$ tel que $\frac{d}{dH}\Sigma_H \cdot \Sigma_H^{-1} \in Q_{\beta,c,N'}$. Par ailleurs, $v_{N'} = \mathcal{O}(N') = \mathcal{O}(N)$ et $c_{N'} = \mathcal{O}(N') = \mathcal{O}(N)$. Enfin par souci de simplicité notons $M = \frac{d}{dH}\Sigma_H \cdot \Sigma_H^{-1}$. En utilisant une fois encore la formule d'Isserlis [54], on a

$$\begin{aligned} w_{N'} &\equiv u_{N'}v_{N'} - c_{N'}^2 = 4 N' \sum_{i,j} (M)_{i,j}^2 - 4 \left\{ \sum_i (M)_{i,i} \right\}^2 \\ &\geq 4 N' \sum_{i \neq j} (M)_{i,j}^2 + 4 N' \left\{ \sum_i (M)_{i,i}^2 - \left(\sum_i (M)_{i,i} \right)^2 \right\} > 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Clairement, $w_{N'} \leq u_{N'}v_{N'} = \mathcal{O}(N^2)$, ce qui achève la preuve de la Proposition 3.1. □

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une alternative à la preuve de Dahlhaus pour l'évaluation des BCR des paramètres du mbf, en démontrant un résultat fin d'algèbre linéaire qui explicite le comportement de coefficients de l'inverse de matrices à décroissance polynomiale ou exponentielle. Dans un travail ultérieur, il serait intéressant de pouvoir appliquer ces deux résultats dans des domaines tels que les chaînes de Markov à transitions rares.

4 Problèmes statistiques induits par le mbf

Ce chapitre présente quelques tests liés au mouvement brownien fractionnaire et propose une estimation robuste des paramètres du mbf. Par estimation robuste, nous entendons estimation des paramètres en présence d'un bruit additif.

4.1 Sur quelques tests liés au mbf

4.1.1 Introduction

Dans cette section, nous souhaitons présenter quelques tests liés au mouvement brownien fractionnaire. Certains sont déjà établis dans la littérature (test d'adéquation à la distribution marginale, à la densité spectrale, test de longue mémoire, test d'autosimilarité) et nous n'en donnerons que les grandes lignes, par souci de complétude de ce mémoire, dans la Section 4.1.2. En outre, nous généralisons une statistique introduite par Peltier et Lévy-Véhel, [76], et démontrons un théorème central limite pour cette statistique dans la Section 4.1.3, ce qui permet d'envisager de tester sa moyenne. Ces résultats sont démontrés sous l'hypothèse que la série sous-jacente est issue d'un mbf dans une première partie puis d'un processus gaussien localement autosimilaire en 0, au sens d'Istas et Lang [55] dans une seconde partie. Quelques simulations sont proposées dans la Section 4.1.4 et les preuves sont présentées dans la Section 4.1.5.

4.1.2 Quelques tests existants

4.1.2.1 Test d'adéquation à la distribution marginale

Soit X_1, \dots, X_N , N v.a. de même distribution marginale F , on désire tester la normalité de cette série, i.e. tester les hypothèses

$$H_0 : F\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi \quad \text{contre} \quad H_1 : F\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \neq \Phi,$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale standard, où $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ et où $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$. De nombreuses méthodes ont été mises en œuvre pour effectuer ce test. Pour la plupart d'entre elles, l'hypothèse est de supposer les variables indépendantes. Dans le cas de variables dépendantes, nous citerons les travaux de Gleser et Moore [46], de Beran et Gosh [17], ainsi que l'excellent livre de Beran [20]. Dans ces papiers, il est présenté différentes statistiques, à savoir les statistiques du χ^2 , de Kolmogorov-Smirnov, d'Anderson-Darling, ainsi qu'une statistique basée sur la fonction caractéristique empirique. Sous l'hypothèse

que les observations proviennent d'un processus gaussien stationnaire admettant une densité spectrale dont la signature spectrale se comporte en $|\lambda|^{1-2H}$, $H \in]0, 1[$ (ceci est vrai pour le bruit gaussien fractionnaire), les différentes convergences de ces statistiques y sont prouvées. Nous renvoyons le lecteur intéressé à ces travaux pour plus de détails.

4.1.2.2 Test d'adéquation de la densité spectrale

Etant données N observations X_1, \dots, X_N d'un processus gaussien stationnaire admettant une densité spectrale $g(\lambda)$, on peut s'intéresser à savoir si cette densité spectrale appartient à la classe de densités spectrales paramétriques du bruit gaussien fractionnaire, définie par (2.4), i.e. s'intéresser à tester

$$H_0 : g(\lambda) = f(\lambda, H, C) \text{ pour } (H, C) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^{+*} \text{ contre } H_1 : g(\lambda) \neq f(\lambda, H, C) \quad \forall H, C.$$

Pour mettre en œuvre ce test, Beran [18] introduit la statistique suivante :

$$T_N(\hat{H}_W, \hat{C}_W) = \frac{A_N(\hat{H}_W, \hat{C}_W)}{B_N(\hat{H}_W, \hat{C}_W)^2},$$

$$\text{avec } A_N(\hat{H}_W, \hat{C}_W) = \frac{4\pi}{N} \sum_{k=1}^{N^*} \left\{ \frac{I_N(\lambda_j)}{f(\lambda_j, \hat{H}_W, \hat{C}_W)} \right\}^2 \text{ et } B_N(\hat{H}_W, \hat{C}_W) = \frac{4\pi}{N} \sum_{k=1}^{N^*} \frac{I_N(\lambda_j)}{f(\lambda_j, \hat{H}_W, \hat{C}_W)},$$

où $\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}$ pour $j = 1, \dots, N^*$ avec $N^* = [(N-1)/2]$, où I_N désigne le périodogramme, et où \hat{H}_W (resp. \hat{C}_W) désigne l'estimateur de Whittle de H (resp. C) (voir Annexe B pour plus de détails sur cet estimateur). Beran [18] montre que, sous H_0 , T_N est asymptotiquement gaussien de moyenne $1/\pi$ et de variance $1/2N\pi^2$, ce qui permet facilement d'obtenir une bonne approximation des quantiles de $T_N(\hat{H}_W, \hat{C}_W)$.

4.1.2.3 Test de longue mémoire

Pour tester la présence éventuelle d'une longue mémoire dans une série chronologique, X_1, \dots, X_N , Kokoszka et Leipus [61] ont proposé la statistique suivante généralisant la statistique R/S proposée par Hurst [52] ainsi que les statistiques R/S modifiées entreprises par Lo [66] d'une part, et Kwiatowski et *al.* [64], d'autre part :

$$M_N(q) = \frac{1}{\hat{s}_N^2(q)} \frac{1}{N^2} \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}_N) \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}_N) \right)^2 \right\},$$

où

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{et où} \quad \hat{s}_N^2(q) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (X_j - \bar{X}_N)^2 + 2 \sum_{j=1}^q \omega_j(q) \hat{\gamma}_j$$

avec encore

$$\omega_j(q) = 1 - j/(q+1) \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-j} (X_i - \bar{X}_N)(X_{i+j} - \bar{X}_N), \quad 0 \leq j < N.$$

Dans [61], les auteurs montrent l'intérêt de cette statistique par rapport aux précédentes et prouvent (entre autres) lorsque $q \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$, $q/N \rightarrow 0$ les résultats suivants :

Sous l'hypothèse que la série chronologique est la discrétisation d'un bruit gaussien fractionnaire de paramètre $H \leq 1/2$

$$M_N \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^1 W^0(t)^2 dt - \left(\int_0^1 W^0(t) dt \right)^2,$$

où $W^0(t)$ désigne un pont brownien.

Et sous l'hypothèse que la série chronologique est la discrétisation d'un bruit gaussien fractionnaire de paramètre $H > 1/2$

$$\left(\frac{q}{N} \right)^{2H-1} M_N \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^1 W_H^0(t)^2 dt - \left(\int_0^1 W_H^0(t) dt \right)^2,$$

où $W_H^0(t)$ est un pont brownien fractionnaire de paramètre H . Ces résultats permettent d'évaluer les quantiles asymptotiques. Ajoutons en outre, qu'une étude de simulation a été menée dans [61], illustrant l'efficacité de ce test par rapport à la statistique R/S et ses dérivées.

4.1.2.4 Test d'autosimilarité de Bardet

Pour estimer les paramètres H et C du mbf, nous avons dans le Chapitre 2 remarqué la relation log-linéaire suivante

$$\log \mathbb{E}(S_N(k, a^m)) = Hk \log(m) + \log \mathbb{E}(S_N(k, a)),$$

où a^m est le filtre a dilaté m fois, et où $S_N(k, a)$ représente le k -ème moment absolu empirique de la trajectoire discrétisée d'un mbf filtrée par a . Ce faisant, nous avons pu estimer les paramètres (H, θ) avec $\theta = \log \mathbb{E}(S_N(k, a))$, en effectuant une régression linéaire simple de $L_N = \{\log(S_N(k, a^m))\}_{1 \leq m \leq M}$ sur X_M , matrice du plan d'expérience définie par (2.18). Dans [9], Bardet considère le cas $k = 2$ et $a = (1, -1)$ et met en œuvre un test pour le mbf en se basant sur le comportement asymptotique des résidus de la régression précédente: il commence par construire la distance normalisée des points à la droite de régression

$$D_N(2, (1, -1), M) = N \left\| L_N - X_M \begin{pmatrix} \tilde{H}_N^{ols}(2, (1, -1), M) \\ \tilde{\theta}_N^{ols}(2, (1, -1), M) \end{pmatrix} \right\|_{\hat{G}_2^{-1}}^2,$$

où $\|Y\|_Q^2 = Y^t Q Y$ et où \hat{G}_2 désigne la matrice de covariance asymptotique estimée de $\sqrt{N}(L_N - X_M(H, \theta)^t)$, définie par (2.22). Ensuite, Bardet montre que si M est un entier ≥ 3 alors on a pour $H \in]0, 3/4[$

$$D_N(2, (1, -1), M) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_{M-2}^2. \quad (4.1)$$

Ceci permet de construire le test de niveau α suivant

$$H_0 : \mathbb{E}(D_N(2, (1, -1), M)) = M-2 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mathbb{E}(D_N(2, (1, -1), M)) \neq M-2,$$

avec la région critique de confiance, $[(\chi_{M-2}^2)^{-1}(\frac{\alpha}{2}), (\chi_{M-2}^2)^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})]$. Ajoutons que Bardet [9] a également prouvé le résultat (4.1), en supposant non plus que la trajectoire discrétisée est celle d'un mbf mais d'un processus gaussien à accroissements stationnaires possédant une certaine propriété autosimilaire en 0, ce qui permet d'étendre la classe d'alternatives de rejet du test.

4.1.3 Une nouvelle classe de statistiques

Dans [76], Peltier et Lévy-Véhel ont introduit la statistique suivante, qui peut être vue comme le kurtosis empirique des accroissements d'un mbf observé aux instants $i/N, i = 0, \dots, N-1$

$$P_N = \frac{1}{3} \frac{S_N(4, (1, -1))}{S_N(2, (1, -1))^2},$$

où $S_N(k, a)$ est donné par (2.12). Ils prouvent la convergence en probabilité vers 1 de cette statistique ainsi que la normalité asymptotique pour $0 < H < 7/8$ sans expliciter la variance asymptotique. Le travail effectué dans le Chapitre 2, nous permet de généraliser cette statistique et d'obtenir des résultats plus fins. Définissons pour un filtre a d'ordre $p \geq 1$ et un réel $k > 0$ la statistique $P_N(k, a)$ par

$$P_N(k, a) = \frac{E_k^2}{E_{2k}} \frac{S_N(2k, a)}{S_N(k, a)^2}, \quad E_k = \mathbb{E}(|Y|^k), \quad Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1), \quad (4.2)$$

La Proposition suivante établit les résultats de convergence obtenus pour cette statistique.

Proposition 4.1 *Soit a un filtre d'ordre $p \geq 1$ et soit k un réel strictement positif, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$ on a*

(i)

$$P_N(k, a) \xrightarrow{p.s.} 1. \quad (4.3)$$

(ii) Si $p > H + 1/8$ alors

$$\sqrt{N} \{P_N(k, a) - 1\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(H, k, a)) \quad (4.4)$$

$$\text{avec} \quad \sigma^2(H, k, a) = \sum_{j \geq 2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (d_{2j}^k)^2 (2j)! \rho_H^a(i)^{2j} \quad (4.5)$$

$$\text{et} \quad d_{2j}^k = \frac{1}{(2j)!} \left\{ \prod_{q=0}^{j-1} (2k - 2q) - 2 \prod_{q=0}^{j-1} (k - 2q) \right\}, \quad j \geq 2, \quad (4.6)$$

avec ρ_H^a défini par (2.7).

Comme nous le verrons dans la Section 4.1.4, la statistique $P_N(k, a)$ est très intéressante car elle s'écarte significativement de 1 sous certaines hypothèses. En estimant préalablement le paramètre d'autosimilarité, par un estimateur consistant, le résultat (4.4) nous permet la construction du test de niveau α suivant

$$H_0 : \mathbb{E}(P_N(k, a)) = 1 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mathbb{E}(P_N(k, a)) \neq 1.$$

On notera que le cas particulier $k = 2$ réduit la variance asymptotique à $\sigma^2(H, 2, a) = \frac{8}{3} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^4$. Le Corollaire suivant répond à une question déjà soulevée dans le Chapitre 2, Corollaire 2.1, quant au comportement de cette statistique lorsque k varie en fonction de N .

Corollaire 4.1 Soient a un filtre d'ordre $p > H + \frac{1}{8}$, et α un réel strictement positif, alors pour tout $H \in]0, 1[$ on a lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$N^{2\alpha + \frac{1}{2}} \{ P_N(N^{-\alpha}, a) - 1 \} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(H, a)),$$

avec

$$\sigma^2(H, a) = \sum_{j \geq 2} (\delta_{2j})^2 (2j)! \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^\alpha(i)^{2j} \quad \text{et} \quad \delta_{2j} = (-1)^j \frac{2^{j-1} (j-1)!}{(2j)!} \sum_{q=1}^{j-1} \frac{1}{q}. \quad (4.7)$$

La Proposition 4.1 limite l'utilisation du test qui permet seulement de rejeter l'hypothèse mbf. La question que l'on se pose alors est la suivante : est-il possible d'étendre la classe de rejet du test ?

Ceci est possible car nous pouvons obtenir les résultats limites de la Proposition 4.1 pour une classe de processus beaucoup plus large que le mouvement brownien fractionnaire, à savoir les processus gaussiens localement autosimilaires en 0, au sens d'Istas et Lang [55]. Pour cela, commençons par nous replacer dans leur cadre de travail. Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus gaussien centré non différentiable à accroissements stationnaires, et soit (X) sa discrétisation aux instants i/Δ_N pour $i = 0, \dots, N-1$, $\Delta_N \rightarrow +\infty$, lorsque $N \rightarrow +\infty$. $T = (N-1)/\Delta_N$ représentera la période d'observation. Un tel processus sera dit localement auto-similaire en 0, si sa fonction demi-variance, $v(t)$, définie par $v(t) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(X(s+t) - X(s))^2$, vérifie l'une des deux hypothèses suivantes :

(H1)

- On suppose qu'il existe un réel s , $0 < s < 2$, et un réel $C > 0$ vérifiant lorsque $t \rightarrow 0$,

$$v(t) = v(0) + C^2 |t|^s + o(|t|^{2H}),$$

- $h = s/2$ est l'exposant de Hölder local en moyenne quadratique.
- on note $r(t)$ le reste du développement de $v(t)$ en zéro : $r(t) = v(t) - v(0) - C^2 |t|^s$.
- Il existe un réel $\delta > 0$, un réel $\beta > s$, et un entier d tel que :
 - r est β -höldérienne sur l'intervalle $[-\delta, \delta]$.
 - v est d fois dérivable sur $]\delta, T]$ et $\int_\delta^T |v^{(2)}| < \infty$.

(H2)

- Même hypothèse que **(H1)** sauf que l'hypothèse sur r est remplacée par : il existe un réel $\delta > 0$, un réel $G > 0$, un réel $\gamma > s$, et deux entiers q et d tels que
 - r est q fois dérivable sur l'intervalle $[-\delta, \delta]$, et $|r^{(q)}(t)| \leq G |t|^{\gamma-q}$.
 - v est d fois dérivable sur $]\delta, T]$ et $\int_\delta^T |v^{(d)}| < \infty$.

Dans le but de décrire le comportement de la statistique $P_N(k, a)$, nous considérons les jeux d'hypothèses suivants

Jeu d'hypothèses 1 (resp. 1bis) : on considère l'hypothèse **(H1)** avec les relations suivantes sur les paramètres : β et $d > s + 1/2$ (resp. β et $d > s + 1/4$). On choisit un filtre a tel que $p > \text{Max}(\beta/2, d/2)$.

Jeu d'hypothèses 2 (resp. 2bis) : on considère l'hypothèse **(H2)** avec les relations suivantes sur les paramètres : $q > \gamma + 1/2$ et $d > s + 1/2$ (resp. $d > s + 1/4$). On choisit un filtre a tel que $p > \text{Max}(q/2, d/2)$.

Jeu d'hypothèses 3 (resp. 3bis) (cas critique) : on considère l'hypothèse **(H2)** avec les relations suivantes sur les paramètres : $s > 3/2$ (resp. $s > 7/4$), et q et d sont égaux à 2. On choisit un filtre a et Δ_N tel que $p = 1$ et $\Delta_N^{2s-3} = L(N)$ (resp. $\Delta_N^{4s-7} = L(N)$), où L est une fonction à variations lentes.

Nous obtenons alors le résultat suivant qui justifie la possible utilisation de la statistique $P_N(k, a)$.

Corollaire 4.2 *Soit k un réel strictement positif,*

(i) *Sous les jeux d'hypothèses 1, 2 et 3 on a*

$$P_N(k, a) \xrightarrow{p.s.} 1$$

(ii) *Sous les jeux d'hypothèses 1bis et 2bis, on a*

$$\sqrt{N}P_N(k, a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(H, k, a)).$$

et sous le jeu d'hypothèses 3bis on a

$$\sqrt{N}\Delta_N^{2s-7/2}P_N(k, a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(H, k, a)).$$

où $\sigma^2(H, k, a)$ est donné par (4.5).

Il faut préciser que Istas et Lang [55] étudient des processus gaussiens localement autosimilaires en 0 qui ne sont plus centrés et dont la moyenne vérifie certaines conditions de régularité. Nous n'avons pas regardé cette possible extension mais nous pensons néanmoins que les résultats sous les mêmes conditions que celles établies par Istas et Lang restent identiques.

4.1.4 Etude par simulations du nouveau test

Nous nous attachons dans cette partie à illustrer le test de moyenne pour les processus gaussiens localement autosimilaires en 0, basé sur la statistique $P_N(2, a)$. Les hypothèses de test sont

$$H_0 : \mathbb{E}(P_N(2, a)) = 1 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mathbb{E}(P_N(2, a)) \neq 1.$$

Nous simulons R trajectoires de divers processus gaussiens localement autosimilaires en 0; pour chacune d'entre elles, nous construisons l'intervalle de confiance de niveau α , suivant

$$I = I_{P_N(2, a)} = \left] P_N(2, a) - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N}} ; P_N(2, a) + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right[\quad \text{où,} \quad \sigma^2 = \frac{8}{3} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_{\tilde{H}}^a(i)^4.$$

avec $u_\alpha = \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$, et \tilde{H} un estimateur de H . Pour des questions de rapidité, nous avons choisi $\tilde{H} = \tilde{H}_N^{ols}(2, Db4, 5)$. Nous construisons finalement la statistique $T = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \mathbb{I}(1 \notin I)$, permettant d'évaluer ainsi le pourcentage de rejet de H_0 . Dans un premier temps, nous appliquons cette procédure de test à des processus gaussiens localement autosimilaires en 0. Nous avons, en outre, considéré les deux alternatives aux processus gls en 0 suivantes :

– Modèle 1 :

$$X_1(t) = B_H(t) + f_1(t), \quad f_1(t) = \gamma \{ \mathbb{I}(t \in]0, \frac{1}{2}]) - \mathbb{I}(t \in]\frac{1}{2}, 1[) \}.$$

– Modèle 2 :

$$X_2(t) = B_H(t) + f_2(t), \quad f_2(t) = \gamma \left\{ \mathbb{I}(t \in]0, \frac{1}{3}]) - \mathbb{I}(t \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[) + \mathbb{I}(t \in]\frac{2}{3}, 1[) \right\}.$$

Pour la valeur $\gamma = 0.008$, la figure ci-après présente les tracés des fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Le réel γ implique que les processus X_1 et X_2 n'appartiennent plus à la classe des processus gaussiens localement autosimilaires en 0.

L'ensemble des résultats des tests est résumé dans le tableau Tab. 4.1.4. Pour $\alpha = 0.05$, le test détecte l'autosimilarité locale en 0, des différents processus gaussiens localement autosimilaires envisagés ($D = 0$ ou $D = 1$), et ce pour des tailles d'échantillon faibles ($N = 256$). En ce qui concerne les alternatives aux processus glas en 0, lorsque γ est nul, les processus X_1 et X_2 se réduisent au mouvement brownien fractionnaire. Le test est alors concluant mais si l'on augmente légèrement la valeur de γ , le test détecte le fait qu'il n'y a plus autosimilarité locale en 0.

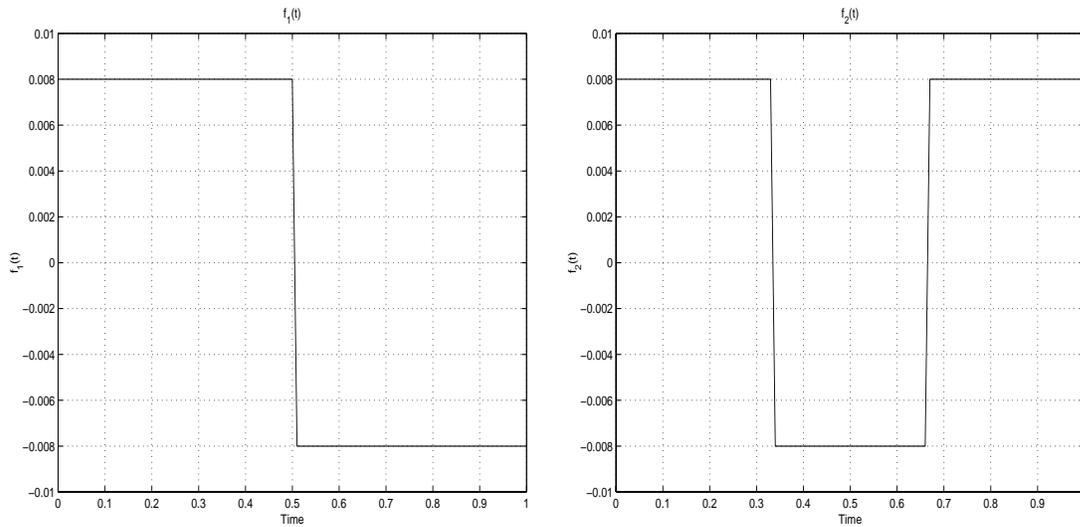


FIG. 4.1 – Fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ ($\gamma = 0.008$), définissant les processus $X_1(t)$ et $X_2(t)$, alternatives aux processus glas en 0.

4.1.5 Preuves des résultats

Preuve de la Proposition 4.1 :

(i) Il suffit de remarquer que

$$P_N(k, a) = \frac{V_N(2k, a) + 1}{(V_N(k, a) + 1)^2}, \quad (4.8)$$

où $V_N(k, a)$ est la statistique appelée k -variations dans le Chapitre 2, définie par (2.6) et d'utiliser la convergence presque sûre de $V_N(k, a)$ établie par la Proposition 2.1.

(ii) D'après (4.8), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} P_N(k, a) - 1 &= (V_N(k, a) + 1)^{-2} \{ V_N(2k, a) + 1 - (V_N(k, a) + 1)^2 \} \\ &= (V_N(k, a) + 1)^{-2} \{ V_N(2k, a) - 2V_N(k, a) - V_N(k, a)^2 \}. \end{aligned}$$

Processus	Paramètres	Taille de l'échantillon		
		256	512	1024
Mouvement brownien fractionnaire	$D = 0, H = 0.9$	5 %	4.8 %	3.8 %
Arima fractionnaire	$D = 0, H = 0.9$	5.6 %	3 %	4.2 %
Processus gaussien de covariance : $\exp(- t ^{1.8})$	$D = 0, H = 0.9$	4.8 %	3.2 %	4.8 %
$X_1(t) = B_H(t) + f_1(t)$ $H = 0.9$	$\gamma = 0.004$	8 %	25 %	97 %
	$\gamma = 0.008$	38 %	98.5 %	100 %
$X_2(t) = B_H(t) + f_2(t)$ $H = 0.9$	$\gamma = 0.004$	5 %	42.5 %	100 %
	$\gamma = 0.008$	64 %	100 %	100 %

TAB. 4.1 – Pourcentage de rejet de H_0 ($\mathbb{E}(P_N(2, a) = 1)$) empirique basé sur la simulation de 500 statistiques $P_N(2, a)$ (où $a=Db4$), pour divers processus gaussiens localement autosimilaires, ainsi que pour les processus X_1 et X_2

D'après la Proposition 2.1, $\sqrt{N}(P_N(k, a) - 1)$ converge en loi vers la même limite que $\sqrt{N}(V_N(2k, a) - 2V_N(k, a))$. Or, en notant $\mathbb{H}^k(t) = |t|^k/E_k - 1$ et $Z^a(i) = V^a(i/N)/\mathbb{E}(V^a(i/N)^2)^{1/2}$ on a

$$\begin{aligned} V_N(2k, a) - 2V_N(k, a) &= \frac{1}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} \left\{ \mathbb{H}^{2k} - 2\mathbb{H}^k \right\} (Z^a(i)) \\ &= \frac{1}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} d_{2j}^k H_{2j}(Z^a(i)), \end{aligned}$$

où les coefficients, d_{2j}^k , du développement d'Hermite sont définis par

$$d_{2j}^k = \frac{1}{(2j)!} \left\{ \prod_{q=0}^{j-1} (2k - 2q) - 2 \prod_{q=0}^{j-1} (k - 2q) \right\}. \quad (4.9)$$

Le rang d'Hermite de $\mathbb{H}^{2k} - 2\mathbb{H}^k$ vaut 4. Donc, d'après le Lemme 2.1 explicitant le comportement asymptotique de ρ_H^a , fonction de corrélation de Z^a , si $p > H + 1/8$, ρ_H^a est de puissance 4 sommable, et d'après le Théorème 1 de Breuer et Major [22], il existe $\sigma^2(H, k, a)$ telle que :

$$\sqrt{N} \left(V_N(2k, a) - 2V_N(k, a) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(H, k, a)). \quad (4.10)$$

Pour calculer $\sigma^2(H, k, a)$, on remarquera que

$$\mathbb{E} \left(N \left\{ V_N(2k, a) - 2V_N(k, a) \right\}^2 \right) = \frac{1}{N} \sum_{j \geq 2} \sum_{i=\ell-N}^{N-\ell} (N-\ell-|i|) (d_{2j}^k)^2 (2j)! \rho_H^a(i)^{2j},$$

où ρ_H^a est défini par (2.7). On obtient donc,

$$\sigma^2(H, k, a) = \sum_{j \geq 2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (d_{2j}^k)^2 (2j)! \rho_H^a(i)^{2j}.$$

□

Preuve du Corollaire 4.1 :

La démonstration est basée sur le même schéma que celle du Corollaire 2.1. Soit F , la fonction définie par le développement d'Hermite suivant

$$F(t) = \sum_{j \geq 2} \delta_{2j} H_{2j}(t), \quad \text{avec } \delta_{2j} = (-1)^j \frac{2^{j-1}(j-1)!}{(2j)!} \sum_{q=1}^{j-1} \frac{1}{q}.$$

La formule de Stirling justifie le développement ci-dessus. En effet,

$$(\delta_{2j})^2 (2j)! \sim \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\log(j)^2}{j^{\frac{3}{2}}},$$

par conséquent $\sum_{j \geq 2} (\delta_{2j})^2 (2j)! < \infty$. Par ailleurs, soit Y_N , la variable aléatoire définie par

$$Y_N = \frac{1}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} F(Z^a(i)).$$

La fonction F étant de rang d'Hermite 4, le Théorème 1 de Breuer et Major [22] nous assure, dès que $p > H + 1/8$, que lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{N} Y_N \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(H, a)), \quad \text{où } \sigma^2(H, a) = \sum_{j \geq 2} (\delta_{2j})^2 (2j)! \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^a(i)^{2j}.$$

L'intérêt d'avoir étudié la convergence de la variable Y_N réside dans le fait que $d_{2j}^{N-\alpha} \sim \frac{1}{N^{2\alpha}}$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Donc, si nous montrons la convergence en probabilité de $Y'_N = \sqrt{N} (Y_N - N^{2\alpha} \{V_N(2N^{-\alpha}, a) - 2V_N(N^{-\alpha}, a)\})$ vers 0, le Théorème de Slutsky, *e.g.* [48], assurera que lorsque $N \rightarrow +\infty$, $N^{2\alpha+1/2} \{V_N(2N^{-\alpha}, a) - 2V_N(N^{-\alpha}, a)\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(H, a))$. Or,

$$Y'_N = \frac{\sqrt{N}}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} \sum_{j \geq 3} \Delta_{2j,N} H_{2j}(Z^a(i)) \quad \text{avec } \Delta_{2j,N} = \delta_{2j} - N^{2\alpha} d_{2j}^{N-\alpha}.$$

Puisque $p > H + 1/8$, nous avons pour tout $j \geq 3$, $\sum_{|i| < N-\ell} (N-\ell-|i|) \rho_H^a(i)^{2j} = \mathcal{O}(N)$. Ensuite, d'après (4.6) on peut montrer que

$$\Delta_{2j,N} = \delta_{2j} - N^{2\alpha} d_{2j}^{N-\alpha} \sim \frac{1}{N^{3\alpha}} \delta'_{2j}.$$

où nous définissons $\delta'_{2j} = 6(-1)^{j-1} \frac{2^{j-1}(j-1)!}{(2j)!} \sum_{q=1}^{j-2} \sum_{r=q+1}^{j-1} \frac{1}{(2r)(2s)}$. D'après la formule de Stirling,

$$(\delta'_{2j})^2 (2j)! \sim \frac{9\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{j^{3/2}} \left\{ \sum_{r=1}^{j-2} \sum_{s=r+1}^{j-1} \frac{1}{rs} \right\}^2.$$

Il existe $J \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall j \geq J$ on ait

$$\begin{aligned} (\delta'_{2j})^2 (2j)! &= \frac{1}{j^{3/2}} \mathcal{O} \left(\left(\sum_{q=1}^{j-2} \frac{\log(r)}{r} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{j^{3/2}} \mathcal{O} \left(\left(\sum_{q=1}^{j-2} \frac{1}{r^{3/8}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{j^{3/2}} \mathcal{O} (j^{1/4}) = \mathcal{O} (j^{-5/4}). \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\mathbb{E}(Y_N'^2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{6\alpha}} \sum_{j \geq 3} \frac{1}{j^{5/4}}\right) = \mathcal{O}(N^{-4\alpha}).$$

D'où le fait que Y_N' converge en probabilité vers 0. □

Preuve du Corollaire 4.2 :

(i) Dans [55], Istas et Lang montrent que

$$\sum_{|i| < N} \rho_{H,\Delta}^a(i)^2 = \begin{cases} \mathcal{O}(1) & \text{sous les jeux d'hypothèses 1 et 2,} \\ \mathcal{O}(\Delta_N^{2s-3}) & \text{sous le jeu d'hypothèses 3.} \end{cases},$$

où nous avons noté $\rho_{H,\Delta}^a(i) = \mathbb{E}(V^a(i/\Delta_N)V^a(0)) / \{\mathbb{E}(V^a(0)^2)^{1/2}\mathbb{E}(V^a(i/\Delta_N)^2)^{1/2}\}$ et où cette fois-ci V^a désigne la trajectoire discrétisée d'un processus gaussien localement autosimilaire filtré par a . En utilisant la preuve de la Proposition 2.1, on montre que

$$\mathbb{E}(V_N(k,a)^2) = \begin{cases} \mathcal{O}(1/N) & \text{sous les jeux d'hypothèses 1 et 2,} \\ \mathcal{O}(\Delta_N^{2s-3}/N) & \text{sous le jeu d'hypothèses 3.} \end{cases}$$

Il suffit alors d'utiliser le Théorème 6.2 de Doob ([40],p.492) pour obtenir la convergence presque sûre de la statistique $V_N(k,a)$ vers 0, ce qui est suffisant d'après (4.8) pour obtenir celle de $P_N(k,a)$.

(ii) Une lecture attentive de la preuve de la Proposition 4.1 montre que l'on obtient un critère de normalité asymptotique dès que $\rho_{H,\Delta}^a$ est de puissance 4 sommable. Or, en reprenant les démonstrations effectuées par Istas et Lang [55], on s'aperçoit que

$$\sum_{|i| < N} \rho_{H,\Delta}^a(i)^4 = \begin{cases} \mathcal{O}(1) & \text{sous les jeux d'hypothèses 1bis et 2bis,} \\ \mathcal{O}(\Delta_N^{4s-7}) & \text{sous le jeu d'hypothèses 3bis.} \end{cases}$$

En utilisant le même schéma que pour la démonstration de la Proposition 4.1, le résultat est prouvé. □

4.2 Débruitage d'un signal modélisé par un mbf

4.2.1 Introduction

Cette section a pour objet l'estimation de manière robuste des paramètres d'un mouvement brownien fractionnaire. Nous étudions un type de robustesse bien précis puisque nous souhaitons estimer les paramètres d'un mbf bruité par un bruit gaussien additif. Dans le cadre des processus à longue mémoire, Beran [20] regarde d'autres types de problèmes robustes : stationnarité du processus, gaussiannité, perturbation de la structure au second ordre. Nous distinguons deux approches pour estimer les paramètres d'un mbf bruité :

- la première consiste à estimer la variance du bruit présent dans le signal, à débruiter le signal de manière à retrouver le mbf sous-jacent. Il suffit ensuite d'appliquer une méthode d'estimation classique à ce signal débruité. Et pour débruiter un processus autosimilaire, nous pouvons envisager d'utiliser une procédure développée par Vidakovic et al. [95], basée sur une approche ondelettes bayésiennes.

- la seconde consiste à estimer directement les paramètres H et C du mbf (sans se préoccuper de la variance du bruit) par une méthode du type de celle développée dans le Chapitre 2 (méthode des moments et filtrage).

Dans ce mémoire, nous avons considéré la seconde approche mais il ne serait pas dénué d'intérêt dans un travail ultérieur de comparer les performances des deux approches. A notre connaissance, seul Wornell [100] a regardé ce type de problèmes. Sa méthode consiste à calculer les coefficients d'ondelettes au vu d'une trajectoire discrétisée d'un mbf bruité par un bruit gaussien d'écart-type constant, et d'estimer H par un maximum de vraisemblance sur les coefficients d'ondelettes en supposant ces derniers indépendants. Notre approche nous permet, sans hypothèse de démonstration d'exhiber des estimateurs du paramètre H et d'établir les théorèmes limite associés. La Section 4.2.2 présente le modèle statistique considéré et donne les résultats de convergence d'une statistique appelée variations quadratiques bruitées, qui a pour analogue la statistique $V_N(k, a)$ introduite dans le Chapitre 2 pour le cas non bruité. Nous développons une méthode dans la Section 4.2.3 pour estimer les paramètres H et C du mbf, basée sur la différence de moments d'ordre 2 des observations filtrées par deux filtres, dont l'un est le dilaté double de l'autre. Les convergences en probabilité et en loi des estimateurs introduits y sont démontrées. Nous nous attachons, dans la Section 4.2.4, à développer un test permettant de détecter la présence d'un bruit gaussien additif, test basé sur la mesure de l'écart entre deux estimateurs du paramètre H . La Section 4.2.5 présente une étude de simulation et la Section 4.2.6 contient les preuves des différents résultats énoncés.

4.2.2 Variations quadratiques bruitées

L'objectif de cette première partie est de présenter les résultats de convergence des variations quadratiques bruitées. Notre modèle statistique sera constitué du vecteur $Z = \{Z(i/\Delta_N), i = 0, \dots, N-1\}$ vérifiant

$$Z(i/\Delta_N) = B_{H,C}(i/\Delta_N) + \epsilon(i), \quad (4.11)$$

où $B_{H,C} = \{B_{H,C}(i/\Delta_N), i = 0, \dots, N-1\}$ est une trajectoire discrétisée d'un mbf de paramètres H et C , et où $\epsilon = \{\epsilon(i), i = 0, \dots, N-1\}$ est un vecteur de N v.a.i. gaussiennes centrées et de variance $\mathbb{E}(\epsilon(i)^2) = \sigma^2$. Nous supposons que $\Delta_N \rightarrow +\infty$ et qu'en outre $B_{H,C}$ et ϵ sont indépendants. Par souci de simplicité, nous utilisons les mêmes notations que dans le Chapitre 2. Ainsi, le vecteur a désignera toujours un filtre de longueur $\ell + 1$ et d'ordre $p \geq 1$. Soit V^a la série issue du filtrage de Z par a

$$V^a \left(\frac{i}{\Delta_N} \right) = \sum_{q=0}^{\ell} a_q \left\{ B_{H,C} \left(\frac{i-q}{\Delta_N} \right) + \epsilon(i-q) \right\}, \quad \text{pour } i = \ell, \dots, N-1.$$

Définissons les variations quadratiques bruitées par :

$$V_{N,\sigma^2}(a) = \frac{1}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} \left\{ \frac{V^a(i/\Delta_N)^2}{\mathbb{E}(V^a(i/\Delta_N)^2)} - 1 \right\}. \quad (4.12)$$

Enfin, la famille de filtres $(a^m)_{m \geq 1}$ désignera toujours la suite de filtres dilatés du filtre a . Tout comme dans le Chapitre 2, on utilise les résultats de Doob [40], d'une part, et de Breuer et Major [22], d'autre part, pour montrer le résultat suivant.

Proposition 4.2 Soit a un filtre d'ordre $p \geq 1$ et soit M un entier supérieur ou égal à 2, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$ on a

$$(i) \quad (V_{N,\sigma^2}(a^1), \dots, V_{N,\sigma^2}(a^{2M})) \xrightarrow{p.s.} (0, \dots, 0)$$

$$(ii) \quad \text{Si } p > H + 1/4, \quad \sqrt{N} (V_{N,\sigma^2}(a^1), \dots, V_{N,\sigma^2}(a^{2M}))^t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, G_{\sigma^2}),$$

où G_{σ^2} est la matrice $2M \times 2M$ définie pour $m, n = 1, \dots, 2M$ par

$$(G_{\sigma^2})_{m,n} = g_{m,n} = 2 \left\{ \sum_{-m\ell \leq i \leq n\ell} \frac{\beta^{a^m, a^n}(i)^2}{\beta^a(0)^2} + \sum_{\substack{i < -m\ell, \\ i > n\ell}} \frac{\pi_H^{a^m, a^n}(i)^2}{\pi_H^{a^m}(0)\pi_H^{a^n}(0)} \right\}. \quad (4.13)$$

Pour deux vecteurs a, a' de longueur respectives $\ell + 1$ et $\ell' + 1$, nous avons noté

$$\pi_H^{a, a'}(j) = \sum_{(q,r)=(0,0)}^{(\ell, \ell')} a_q a'_r |q - r + j|^{2H} \quad \text{et} \quad \beta^{a, a'}(j) = \sum_{q,r=(0,0)}^{(\ell, \ell')} a_q a_r \delta_{j+q-r, 0}. \quad (4.14)$$

En outre,

$$\pi_H^a(0) = \pi_H^{a,a}(0) \quad \text{et} \quad \beta^a(0) = \beta^{a,a}(0) = \sum_{q=0}^{\ell} a_q^2. \quad (4.15)$$

4.2.3 Identification du mbf bruité

Dans cette section, nous allons développer une méthode de moments permettant d'estimer les coefficients H et C tout en prenant en compte la présence éventuelle d'un bruit gaussien additif. Pour cela, définissons le moment d'ordre 2 empirique par

$$S_{N,\sigma^2}(a) = \frac{1}{N-\ell} \sum_{i=\ell}^{N-1} V^a(i/\Delta_N)^2. \quad (4.16)$$

D'après le Lemme 4.1 démontré dans la Section 4.2.6, il est clair que

$$\mathbb{E}(S_{N,\sigma^2}(a)) = \frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0) + \sigma^2 \beta^a(0),$$

où π_H^a et β^a sont donnés par (4.15). Par analogie avec le cas non bruité, Section 2.4.2, $\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0)$ représente la moyenne du moment d'ordre 2 empirique d'un mbf de paramètres H, C observé aux instants $i/\Delta_N, i = 0, \dots, N-1$ et $\sigma^2 \frac{\beta^a(0)}{(\Delta_N)^{2H}}$ représente la part apportée par le bruit ϵ . Considérons toujours la suite de filtres $(a^m)_{m \geq 1}$. Dans le cas non bruité, nous avons

$$\mathbb{E}(S_{N,\sigma^2}(a^m)) = m^{2H} \frac{C^2 \pi_H^a(0)}{(\Delta_N)^{2H}},$$

qui indiquait la log-linéarité en H de $\log \mathbb{E}(S_{N,\sigma^2}(a^m))$, ce qui permettait d'explicitier très simplement des estimateurs de H et C par régression linéaire simple de $\{\log(S_{N,\sigma^2}(a^m))\}_{1 \leq m \leq M}$ sur X_M , matrice du plan d'expérience définie par (2.18). Cette propriété n'est plus valable

dans le cas où $\sigma^2 \neq 0$. Une alternative pourrait être alors d'estimer H et C par minimisation d'un critère moindre carré du type

$$f(H, C, \sigma^2) = \sum_{m=1}^M \{S_{N, \sigma^2}(a^m) - \mathbb{E}(S_{N, \sigma^2}(a^m))\}^2.$$

Le gradient de cette fonction ne permet pas d'obtenir une expression analytique des paramètres minimisant cette fonction, et donc engendre des complexités pour étudier les propriétés statistiques des estimateurs. Pour contourner cette difficulté, il faut remarquer que

$$\beta^{a^m, a^m}(0) = \sum_{q=0}^{m\ell} (a_q^m)^2 = \beta^a(0),$$

et donc en considérant la suite de variables $T_{N, \sigma^2}(a^m) = S_{N, \sigma^2}(a^{2m}) - S_{N, \sigma^2}(a^m)$, nous remarquons que

$$\mathbb{E}(T_{N, \sigma^2}(a^m)) = m^{2H} \frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0) \{2^{2H} - 1\}.$$

Par cette opération, nous récupérons la log-linéarité en H de $\log \mathbb{E}(T_{N, \sigma^2}(a^m))$. La procédure devient triviale : on se donne M filtres ($M \geq 2$) et on effectue une régression linéaire simple de $L_{T_{N, \sigma^2}} = \{\log T_N(a^m)\}_{1 \leq m \leq M}$ sur X_M , matrice $M \times 2$ du plan d'expérience définie par (2.18), ce qui permet d'obtenir une classe d'estimateurs de $\alpha = (H, \theta)^t$, avec θ le paramètre défini par $\theta = 2 \log(C) - 2H \log(\Delta_N) + \log(\pi_H^a(0) \{2^{2H} - 1\})$. Cette classe d'estimateurs s'écrit explicitement

$$\tilde{\alpha}_{N, \sigma^2}(a, M) = \left(\tilde{H}_{N, \sigma^2}(a, M), \tilde{\theta}_{N, \sigma^2}(a, M) \right)^t = (X_M^t X_M)^{-1} X_M^t L_{T_{N, \sigma^2}}.$$

Et on obtient une classe d'estimateurs de C via l'équation

$$\tilde{C}_{N, \sigma^2} = \Delta_N^{\tilde{H}_{N, \sigma^2}} \left(\pi_{\tilde{H}_{N, \sigma^2}}^a(0) \{2^{2\tilde{H}_{N, \sigma^2}} - 1\} \right)^{-1/2} \exp\left(\tilde{\theta}_{N, \sigma^2}(a, M)/2\right),$$

où nous avons noté $\tilde{H}_{N, \sigma^2} = \tilde{H}_{N, \sigma^2}(a, M)$. En se basant sur la preuve de la Proposition 4.2, on peut alors montrer les convergences suivantes quant aux estimateurs \tilde{H}_{N, σ^2} et \tilde{C}_{N, σ^2} .

Proposition 4.3 *Soient a un filtre d'ordre $p > H + 1/4$, M un entier supérieur ou égal à 2, et supposons $\Delta_N = N^\epsilon$ avec ϵ un réel vérifiant $0 < \epsilon < 1/4H$, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$, on a*

(i)

$$\left(\tilde{H}_{N, \sigma^2}(a, M), \tilde{C}_{N, \sigma^2}(a, M) \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} (H, C), \quad (4.17)$$

(ii)

$$N^{1/2-2H\epsilon} \left(\tilde{H}_{N, \sigma^2}(a, M) - H \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{A^t(G'_{\sigma^2})A}{4\|A\|^4} \right), \quad (4.18)$$

$$\frac{N^{1/2-2H\epsilon}}{\log(N)} \left(\tilde{C}_{N, \sigma^2}(a, M) - C \right) / C \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{A^t(G'_{\sigma^2})A}{4\|A\|^4} \right), \quad (4.19)$$

où A est le vecteur de composantes $A_m = \log(m) - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log(m)$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne et où G'_{σ^2} est la matrice $M \times M$ définie pour $m, n = 1, \dots, M$ par

$$(G'_{\sigma^2})_{m,n} = \nu_m \nu_n \{g_{2m,2n} + g_{m,n} - g_{2m,n} - g_{2n,m}\}, \quad (4.20)$$

où ν est le vecteur de composantes $\nu_m = \frac{\sigma^2 \beta^a(0)}{C^2 \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}}$ avec $g_{m,n}$ le terme générique de la matrice (G_{σ^2}) définie par (4.13).

Il est important de remarquer que la présence du bruit ϵ implique une condition assez forte sur le pas de discrétisation Δ_N pour obtenir la normalité asymptotique de $\tilde{H}_{N,\sigma^2}(a, M)$. Dans le cas non bruité cette lacune n'apparaissait pas puisque l'estimateur de H que nous développons, voir Section 2.4.2, était indépendant du pas de discrétisation.

Nous tenons à présenter le cas particulier suivant explicitant le comportement des estimateurs lorsque $\epsilon = 0$, i.e. lorsque le mbf est observé aux instants $i = 0, \dots, N - 1$.

Corollaire 4.3 *Soient a un filtre d'ordre $p > H + 1/4$ et M un entier supérieur ou égal à 2, alors dans le cas particulier où $\Delta_N = 1$, on a lorsque $N \rightarrow +\infty$*

(i)

$$\sqrt{N} (V_{N,\sigma^2}(a^1), \dots, V_{N,\sigma^2}(a^{2M}))^t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, J_{\sigma^2}) \quad (4.21)$$

(ii)

$$\sqrt{N} \left(\tilde{H}_{N,\sigma^2}(a, M) - H \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{A^t (J'_{\sigma^2}) A}{4 \|A\|^4} \right), \quad (4.22)$$

où J_{σ^2} est la matrice $2M \times 2M$ définie pour $m, n = 1, \dots, 2M$ par

$$(J_{\sigma^2})_{m,n} = 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\left\{ C^2 \pi_H^{a^m, a^n}(j) + \sigma^2 \beta^{a^m, a^n}(j) \right\}^2}{\left\{ C^2 \pi_H^{a^m}(0) + \sigma^2 \beta^{a^m}(0) \right\} \left\{ C^2 \pi_H^{a^n}(0) + \sigma^2 \beta^{a^n}(0) \right\}}$$

et où J'_{σ^2} est la matrice $M \times M$ définie pour $m, n = 1, \dots, M$ par

$$(J'_{\sigma^2})_{m,n} = \lambda_m \lambda_n (J_{\sigma^2})_{2m,2n} + \mu_m \mu_n (J_{\sigma^2})_{m,n} - \lambda_m \mu_n (J_{\sigma^2})_{2m,n} - \mu_m \lambda_n (J_{\sigma^2})_{2n,m},$$

avec λ et μ les vecteurs de composantes

$$\lambda_m = \frac{C^2 \pi_H^a(0) (2m)^{2H} + \sigma^2 \beta^a(0)}{C^2 \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}} \quad \text{et} \quad \mu_m = \frac{C^2 \pi_H^a(0) m^{2H} + \sigma^2 \beta^a(0)}{C^2 \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}}.$$

Nous avons présenté uniquement les convergences en loi des variations quadratiques bruitées et de l'estimateur de H , les convergences en probabilité découlent trivialement des Propositions 4.2 et 4.3.

4.2.4 Test de présence d'un bruit gaussien additif

Nous nous proposons ici de développer un test statistique consistant permettant de détecter la présence éventuelle d'un bruit gaussien additif. Les hypothèses à tester sont

$$H_0 : \sigma^2 = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \sigma^2 \neq 0.$$

Une idée naturelle, consiste à mesurer l'écart entre deux estimateurs de H , le premier obtenu par la procédure décrite dans la Section 2.4.2 (estimateur ne tenant pas compte du bruit) et le second développé dans la Section 4.2.3 qui intègre la présence d'un bruit gaussien additif. Simplifions les notations et notons $\tilde{H}_{S_{N,\sigma^2}}(a, M)$ (resp. $\tilde{H}_{T_{N,\sigma^2}}(a, M)$), l'estimateur obtenu par régression linéaire de $L_{S_{N,\sigma^2}} = \{\log(S_{N,\sigma^2}(a^m))\}_{1 \leq m \leq M}$ (resp. $L_{T_{N,\sigma^2}}$), sur X_M . Nous pouvons alors déduire de la Proposition 4.3 le résultat suivant

Proposition 4.4 *Soit a un filtre d'ordre $p \geq 1$, soit M un entier supérieur ou égal à 2, et soit $\Delta_N = N^\epsilon$ avec $\epsilon \geq 0$, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$ on a sous l'hypothèse H_0*

(i)

$$\tilde{H}_{T_{N,0}}(a, M) - \tilde{H}_{S_{N,0}}(a, M) \xrightarrow{p.s.} 0. \quad (4.23)$$

(ii) Si $p > H + 1/4$

$$\sqrt{N} \left(\tilde{H}_{T_{N,0}}(a, M) - \tilde{H}_{S_{N,0}}(a, M) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tau^2(H)), \quad (4.24)$$

avec $\tau^2(H) = \frac{A^t(G'')A}{4\|A\|^4}$ où G'' est la matrice $M \times M$ définie pour $m, n = 1, \dots, M$ par

$$(G'')_{m,n} = g''_{m,n} = \nu^2 \{ r_{2m,2n} + r_{m,n} - r_{2m,n} - r_{2n,m} \}, \quad (4.25)$$

avec $\nu = \frac{2^{2H}}{2^{2H}-1}$ et $r_{m,n}$ le terme générique de R définie par $(R)_{m,n} = 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_H^{a^m} \cdot a^n(j)^2}{m^{2H} n^{2H} \pi_H^a(0)^2}$.

Définissons alors

$$TBB(a, M) = \frac{N}{\tau^2(\tilde{H}_{T_{N,\sigma^2}}(a, M))} \left\{ \tilde{H}_{T_{N,\sigma^2}}(a, M) - \tilde{H}_{S_{N,\sigma^2}}(a, M) \right\}^2. \quad (4.26)$$

D'après la Proposition 4.4 sous l'hypothèse H_0 , $TBB(a, M) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_1^2$, donc pour mettre en oeuvre un test statistique de niveau α , il suffit d'évaluer le $(1 - \alpha)$ -quantile, q_α , de la loi χ_1^2 et de rejeter H_0 si $TBB(a, M) > q_\alpha$.

On peut ensuite s'intéresser à la puissance de ce test. Pour cela, considérons la suite d'hypothèses $H_{1,N}$ suivante, $H_{1,N} : \sigma^2 = \sigma_N^2 = \frac{\delta_N}{\sqrt{N} \Delta_N^{2H}}$, où $(\delta_N)_{N \geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs vérifiant lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\delta_N \rightarrow +\infty, \quad \frac{\delta_N}{\sqrt{N}} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\delta_N}{\Delta_N^{2H}} \rightarrow +\infty, \quad \text{avec} \quad \Delta_N = N^\epsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq \epsilon < 1/4H.$$

Avec ce choix de suite d'hypothèses, dépendant clairement du pas de discrétisation, nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.5 *Soit a un filtre d'ordre $p > H + 1/4$ et soit M un entier supérieur ou égal à 2, alors pour tout $u \geq 0$, nous avons*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(TBB \geq u \mid H_{1,N} \right) = 1. \quad (4.27)$$

En conséquence, sous la suite d'hypothèses $H_{1,N}$, le test basé sur la statistique TBB est asymptotiquement de puissance 1.

4.2.5 Etude par simulations des estimateurs et du test

Dans cette section, nous illustrons les performances des estimateurs de H lorsque le mbf est bruité, ainsi que la qualité du test de présence de bruit gaussien additif.

4.2.5.1 Identification du mbf bruité

La Figure Fig.4.2 illustre les écarts quadratiques moyens (MSE) empiriques, en fonction de N , basés sur 100 trajectoires, des estimateurs $\tilde{H}_{T_{N,\sigma^2}}(a, M)$ (tenant compte du bruit) et $\tilde{H}_{S_{N,\sigma^2}}(a, M)$ (ne tenant pas compte du bruit). Ceci a été réalisé pour $H = 0.3, 0.5, 0.8$, $\sigma = 0, 0.1, 1$ et $\Delta_N = 1$. Lorsque $\sigma = 0$, quelle que soit la valeur de H , les MSE tendent vers 0 avec la taille d'échantillon. Et il faut noter la meilleure performance de l'estimateur $\tilde{H}_{S_{N,\sigma^2}}$ par rapport à $\tilde{H}_{T_{N,\sigma^2}}$. Lorsque σ augmente, l'estimateur $\tilde{H}_{S_{N,\sigma^2}}$ se détériore et devient moins bon que $\tilde{H}_{T_{N,\sigma^2}}$ pour $\sigma = 1$. Ceci provient du fait, comme le montre la Figure Fig.4.3, que, lorsque σ augmente, l'estimateur $\tilde{H}_{S_{N,\sigma^2}}$ est très fortement biaisé alors que sa variance continue à décroître avec N . L'estimateur $\tilde{H}_{T_{N,\sigma^2}}$, quant à lui, est non biaisé. Le prix à payer, cependant, pour obtenir cette consistance réside dans la variance qui est relativement élevée. En outre, nous pouvons remarquer, à σ fixé, que l'estimateur est plus performant lorsque le paramètre H est élevé. Enfin, nous tenons à préciser que la procédure basée sur la statistique T_{N,σ^2} nécessite une taille d'échantillon > 1000 . Pour des tailles d'échantillon inférieures, il peut arriver que $T_{N,\sigma^2}(a) < 0$ (ce qui est théoriquement impossible), ce qui engendre une erreur dans la procédure d'estimation, celle-ci étant basée sur l'évaluation de $\log T_{N,\sigma^2}(a)$.

4.2.5.2 Test de présence d'un bruit

La Figure Fig.4.4 illustre l'étude de simulation menée pour le test de présence d'un bruit gaussien additif. Nous avons donc considéré le test d'hypothèses

$$H_0 : \sigma^2 = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \sigma^2 \neq 0.$$

Pour $H = 0.3, 0.6, 0.8$, nous avons simulé 500 trajectoires du mbf bruité par un bruit gaussien d'écart-type $\sigma \in [0, 1]$ et évalué pour chacune de ces trajectoires la statistique TBB . Pour chaque valeur du paramètre H , nous traçons le pourcentage de rejet de H_0 empirique au niveau $\alpha = 0.05$. Il ressort de cette étude que lorsque $\sigma = 0$, nous sommes amenés à rejeter environ 5 fois sur 100 l'hypothèse H_0 pour l'hypothèse H_1 , et ce quelle que soit la valeur de H . Ce pourcentage augmente avec σ , et nous pouvons noter une différence en fonction de H . Lorsque H est petit ($H = 0.3$), le pourcentage de rejet de H_0 (toujours au niveau α) n'est que de 50%, ce qui implique que le test n'est pas très puissant pour cette valeur du paramètre de Hurst. A l'inverse, lorsque H est plus élevé ($H = 0.6, 0.8$), le pourcentage de rejet est rapidement très élevé en fonction de σ . Cette différence de comportement en fonction de H provient du fait que plus H est élevé, plus l'estimateur $\tilde{H}_{S_{N,\sigma^2}}(a, M)$ est biaisé et donc plus la statistique TBB est élevée.

4.2.6 Preuve des résultats

Preuve de la Proposition 4.2

Lemme 4.1 Soient m et n deux entiers ≥ 1 , alors, avec les notations 4.14,

$$\mathbb{E}(V^{a^m}(i/\Delta_N)V^{a^n}(i+j/\Delta_N)) = \frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}}\pi_H^{a^m, a^n}(j) + \sigma^2\beta^{a^m, a^n}(j) = \frac{1}{\Delta_N^{2H}}\mathcal{O}(|j|^{2H-2p}),$$

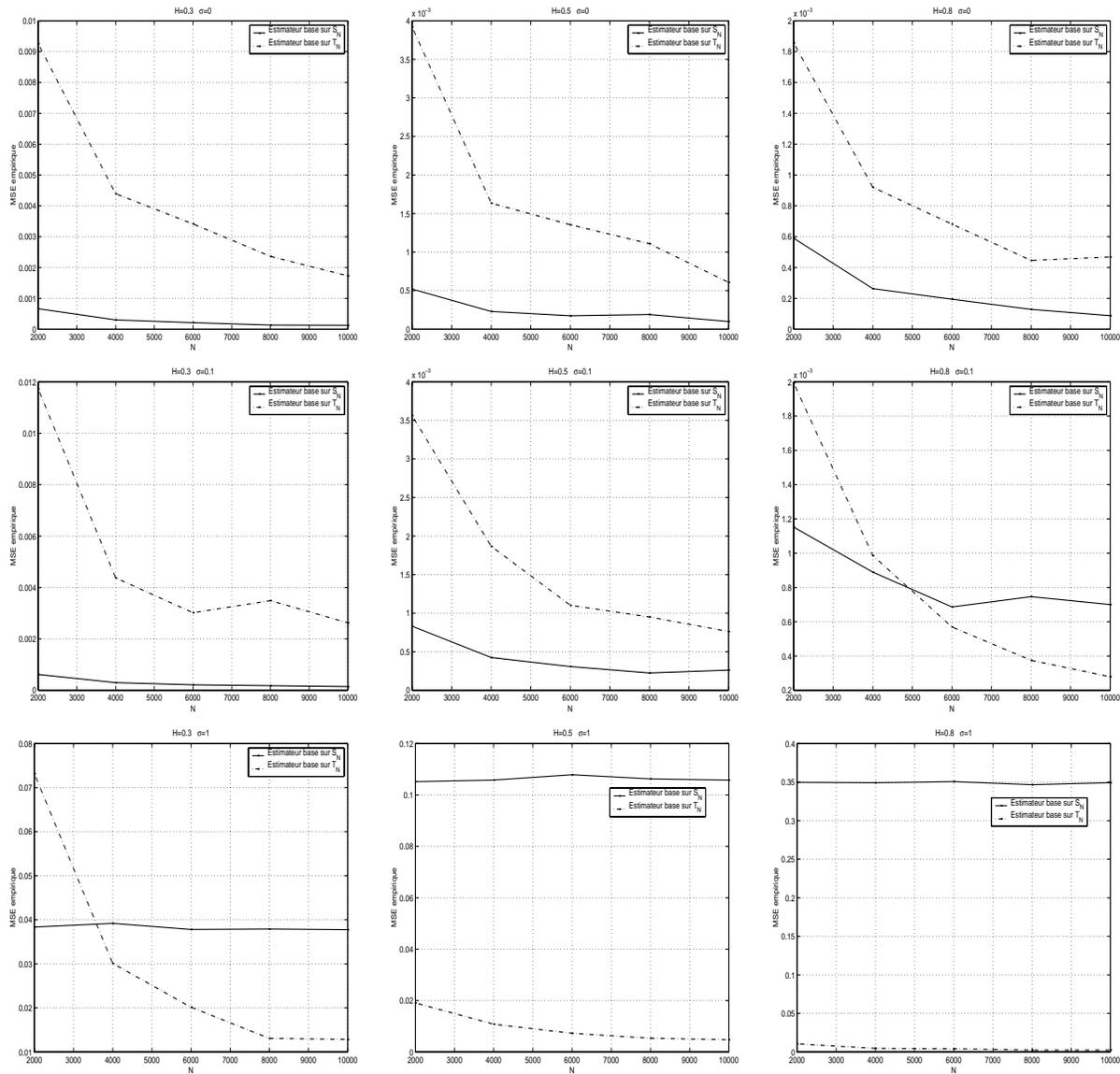


FIG. 4.2 – MSE empiriques en fonction de N des estimateurs $\tilde{H}_{T_N, \sigma^2}$ et $\tilde{H}_{S_N, \sigma^2}$ basés sur 100 trajectoires de mbfs de paramètre $H = 0.3, 0.5, 0.8$ bruités par des bruits gaussiens d'écart-type $\sigma = 0, 0.1, 1$. Les paramètres des estimateurs sont $a = Db4$ et $M = 2$.

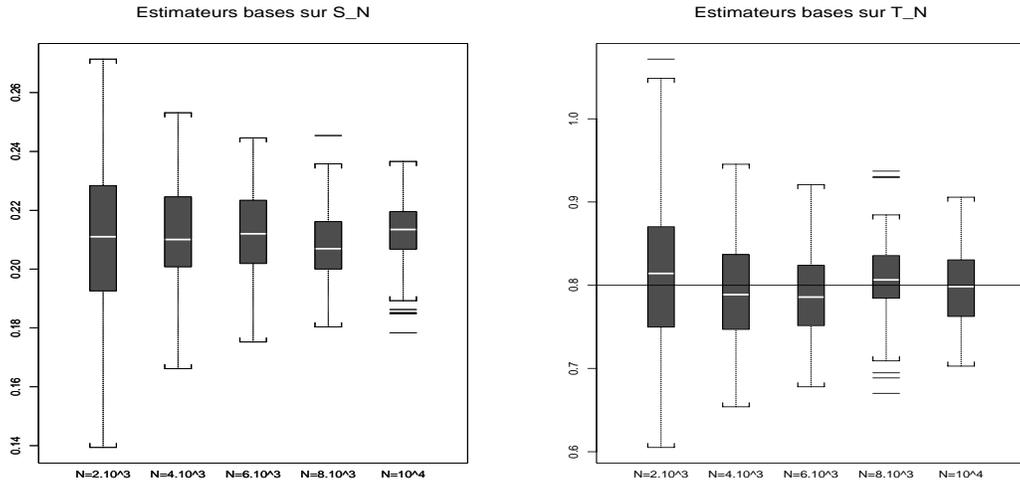


FIG. 4.3 – Diagrammes à moustaches des estimateurs $\tilde{H}_{T_N, \sigma^2}$ et $\tilde{H}_{S_N, \sigma^2}$ en fonction de N , basés sur 100 trajectoires de mbf de paramètre $H = 0.8$ bruités par un bruit gaussien d'écart-type 1.

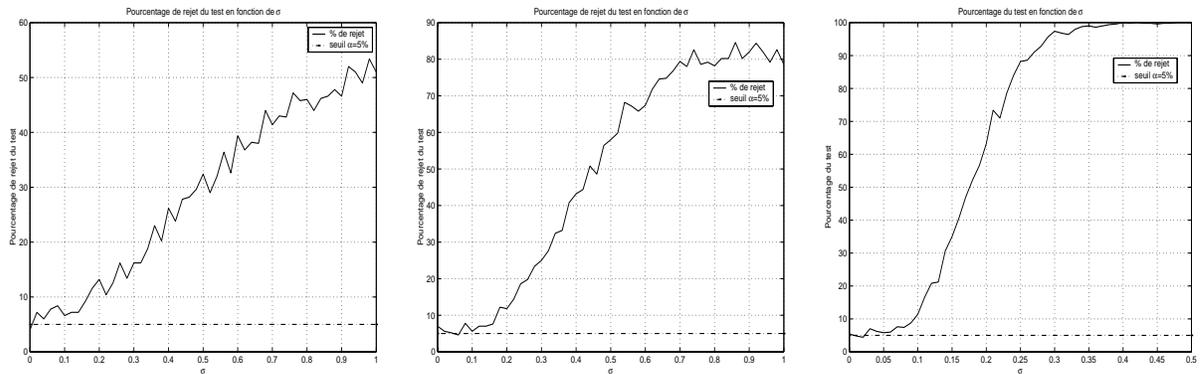


FIG. 4.4 – Pourcentages de rejet de H_0 empirique (au niveau $\alpha = 5\%$) en fonction de l'écart-type du bruit, σ , basés sur 500 trajectoires de mbf bruité, de taille $N = 1000$ et $H = 0.3, 0.6, 0.8$.

lorsque $|j| \rightarrow +\infty$.

Preuve du Lemme 4.1

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V^{a^m}(i/\Delta_N)V^{a^n}(i+j/\Delta_N)) &= \sum_{(q,r)=(0,0)}^{(m\ell,n\ell)} a_q^m a_r^m \mathbb{E}(B_{H,C}(i-q/\Delta_N)B_{H,C}(i+j-r/\Delta_N)) \\ &\quad + \sum_{(q,r)=(0,0)}^{(m\ell,n\ell)} a_q^m a_r^m \mathbb{E}(\epsilon(i-q)\epsilon(i+j-r)) \\ &= \frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^{a^m, a^n}(j) + \sigma^2 \beta^{a^m, a^n}(j), \end{aligned}$$

où $\pi_H^{a^m, a^n}$ et β^{a^m, a^n} sont donnés par (4.14). Dès que $j < -m\ell$ ou $j > n\ell$, le second terme est nul. De plus, d'après le Lemme 2.1, on sait que le premier terme décroît en $|j|^{2H-2p}$, d'où le résultat. \square

(i) Commençons par regarder la convergence presque sûre de la statistique $V_{N, \sigma^2}(a)$ pour un filtre a . D'après la preuve de la Proposition 2.1 et d'après le Lemme 4.1, on a lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_{N, \sigma^2}(a)^2) &\sim \frac{2}{N^2} \sum_{|i| < N-\ell} (N-\ell-|i|) \left\{ \frac{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(j) + \sigma^2 \beta(j)}{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0) + \sigma^2 \beta(0)} \right\}^2 \\ &\sim \frac{2}{N} \left\{ \sum_{|i| < \ell} \left\{ \frac{\beta^a(j)}{\beta^a(0)} \right\}^2 + \sum_{\ell \leq |i| < N-\ell} \left\{ \frac{\pi_H^a(j)}{\pi_H^a(0)} \right\}^2 \right\} \\ &= \begin{cases} \mathcal{O}(1/N) & \text{si } p \geq 2 \text{ ou } p = 1 \text{ et } H < 3/4, \\ \mathcal{O}(\log(N)/N) & \text{si } p = 1 \text{ et } H = 3/4, \\ \mathcal{O}(N^{2H-2}) & \text{si } p = 1 \text{ et } H > 3/4. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.28)$$

La convergence presque sûre découle alors du Théorème 6.2 de Doob [40]. L'extension en dimension supérieure ne pose pas de problèmes.

(ii) Commençons par étudier la convergence gaussienne pour un seul filtre. La statistique $V_{N, \sigma^2}(a)$ peut s'écrire

$$V_{N, \sigma^2}(a) = \frac{1}{N-\ell} \sum_{j=\ell}^{N-1} H_2(W(j)),$$

où H_2 est le deuxième polynôme d'Hermite et où $W(j) = \frac{V^a(j/\Delta_N)}{\mathbb{E}(V^a(j/\Delta_N)^2)^{1/2}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1)$. D'après le Lemme 4.1, la série $\sum_j \mathbb{E}(W(i)W(i+j))^2$ est convergente dès que $p > H + 1/4$. En effet, $\sum_j \mathbb{E}(W(i)W(i+j))^2 \sim 2 \left\{ \sum_{|j| < \ell} \frac{\beta^a(j)^2}{\beta^a(0)^2} + \sum_{|j| \geq \ell} \frac{\pi_H^a(j)^2}{\pi_H^a(0)^2} \right\}$, et la seconde série est convergente si $p > H + 1/4$. Donc d'après le Théorème 1 de Breuer et Major [22], on a lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{N}V_{N, \sigma^2}(a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, 2 \left\{ \sum_{|j| < \ell} \frac{\beta^a(j)^2}{\beta^a(0)^2} + \sum_{|j| \geq \ell} \frac{\pi_H^a(j)^2}{\pi_H^a(0)^2} \right\} \right).$$

Remarquons ici que supposer le bruit gaussien est indispensable pour pouvoir appliquer le Théorème de Breuer et Major [22]. L'extension en dimension $2M$ suit en tout point la preuve de la Proposition 2.3. Soit G_{σ^2} la matrice de covariance asymptotique

$$\begin{aligned} (G_{\sigma^2})_{m,n} &= g_{m,n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} N \mathbb{E} (V_{N,\sigma^2}(a^m) V_{N,\sigma^2}(a^n)) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{N} \sum_{i=m\ell}^{N-1} \sum_{j=n\ell}^{N-1} \left\{ \frac{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^{a^m, a^n}(j-i) + \sigma^2 \beta^{a^m, a^n}(j-i)}{\left(\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^{a^m}(0) + \sigma^2 \beta^a(0) \right)^{1/2} \left(\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^{a^n}(0) + \sigma^2 \beta^a(0) \right)^{1/2}} \right\}^2 \\ &\sim 2 \sum_{|i| < N - (n \wedge m)\ell} \left\{ \frac{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^{a^m, a^n}(j-i) + \sigma^2 \beta^{a^m, a^n}(j-i)}{\left(\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^{a^m}(0) + \sigma^2 \beta^a(0) \right)^{1/2} \left(\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^{a^n}(0) + \sigma^2 \beta^a(0) \right)^{1/2}} \right\}^2 \end{aligned}$$

Et en utilisant le fait que $\beta^{a^m, a^n}(i)$ est nul pour $i < -m\ell$ et $i > n\ell$, nous obtenons

$$(G_{\sigma^2})_{m,n} = 2 \left\{ \sum_{-m\ell \leq i \leq n\ell} \frac{\beta^{a^m, a^n}(i)^2}{\beta^a(0)^2} + \sum_{\substack{i < -m\ell \\ i > n\ell}} \frac{\pi_H^{a^m, a^n}(i)^2}{\pi_H^{a^m}(0) \pi_H^{a^n}(0)} \right\}.$$

Cette matrice de covariance asymptotique est bien symétrique. □

Preuve de la Proposition 4.3

(i) et (ii) Par définition d'une régression linéaire simple

$$\tilde{H}_{N,\sigma^2}(a, M) - H = \frac{A^t}{2 \|A\|^2} \xi_{T_{N,\sigma^2}}, \quad (4.29)$$

$$\text{et } \tilde{\theta}_{N,\sigma^2}(a, M) - \theta = \frac{(A')^t}{2 \|A'\|^2} \xi_{T_{N,\sigma^2}}, \quad (4.30)$$

où A et A' sont les vecteurs définis pour $m = 1, \dots, M$ par

$$\begin{aligned} A_m &= \log(m) - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log(m), \\ A'_m &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log(m)^2 - \log(m) \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \log(m), \end{aligned}$$

et où $\xi_{T_{N,\sigma^2}} = L_{T_{N,\sigma^2}} - X_M(H, \theta)^t$. Par définition de $T_{N,\sigma^2}(a^m)$ on peut déduire la relation suivante

$$\frac{T_{N,\sigma^2}(a^m)}{\mathbb{E}(T_{N,\sigma^2}(a^m))} - 1 = \lambda_m V_{N,\sigma^2}(a^{2m}) - \mu_m V_{N,\sigma^2}(a^m), \quad (4.31)$$

où λ et μ sont les vecteurs définis par

$$\lambda_m = \frac{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0) (2m)^{2H} + \sigma^2 \beta^a(0)}{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} (\Delta_N)^{2H} \frac{\sigma^2 \beta^a(0)}{C^2 \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}} \quad (4.32)$$

$$\mu_m = \frac{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0) m^{2H} + \sigma^2 \beta^a(0)}{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} (\Delta_N)^{2H} \frac{\sigma^2 \beta^a(0)}{C^2 \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}} \quad (4.33)$$

Notons ν le vecteur de composantes $\nu_m = \frac{\sigma^2 \beta^a(0)}{C^2 \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}}$ et supposons désormais $\Delta_N = N^\epsilon$, avec $\epsilon > 0$. D'après (4.28), pour un filtre d'ordre $p > H + 1/4$, et un réel ϵ vérifiant $\epsilon < 1/4H$ on a $N^{2H\epsilon} V_{N,\sigma^2}(a) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Par ailleurs, pour ce choix de ϵ , $N^{1/2-2H\epsilon} \log \frac{T_{N,\sigma^2}(a^m)}{\mathbb{E}(T_{N,\sigma^2}(a^m))}$ converge en loi vers la même limite que $N^{1/2-2H\epsilon} \left\{ \frac{T_{N,\sigma^2}(a^m)}{\mathbb{E}(T_{N,\sigma^2}(a^m))} - 1 \right\}$, i.e. que la variable $\nu_m \sqrt{N} \{V_{N,\sigma^2}(a^{2m}) - V_{N,\sigma^2}(a^m)\}$, qui converge en loi vers une gaussienne centrée en vertu de la Proposition 4.2. En conséquence, pour un filtre d'ordre $p > H + 1/4$, un entier $M \geq 2$ et un réel $\epsilon > 0$ vérifiant $\epsilon < \frac{1}{4H}$, on a lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \xi_{T_{N,\sigma^2}} &\xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \\ N^{1/2-2H\epsilon} \xi_{T_{N,\sigma^2}} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, G'_{\sigma^2}), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (G'_{\sigma^2})_{m,n} &= g'_{m,n} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N}{N^{4H\epsilon}} \mathbb{E} \left(\{ \lambda_m V_{N,\sigma^2}(a^{2m}) - \mu_m V_{N,\sigma^2}(a^m) \} \{ \lambda_n V_{N,\sigma^2}(a^{2n}) - \mu_n V_{N,\sigma^2}(a^n) \} \right) \\ &= \nu_m \nu_n \{ g_{2m,2n} + g_{m,n} - g_{2m,n} - g_{2n,m} \}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{H}_{N,\sigma^2}(a, M) \xrightarrow{\mathbb{P}} H$. En outre, $\tilde{H}_{N,\sigma^2}(a, M) - H$ étant défini comme une combinaison linéaire de composantes d'un vecteur asymptotiquement gaussien est asymptotiquement gaussien (si $p > H + 1/4$) et $\frac{N}{N^{4H\epsilon}} \text{Var} \left(\tilde{H}_{N,\sigma^2}(a, M) - H \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{A^t (G'_{\sigma^2}) A}{4 \|A\|^4}$. De la même manière, $\tilde{\theta}_{N,\sigma^2}(a, M) \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ et si $p > H + 1/4$ et $0 < \epsilon < 1/4H$, on a lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$N^{1/2-2H\epsilon} \left(\tilde{\theta}_{N,\sigma^2}(a, M) - \theta \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{(A')^t G'_{\sigma^2} A'}{4 \|A'\|^4} \right). \quad (4.34)$$

Enfin, remarquons que,

$$\begin{aligned} \log \left(\tilde{C}_{N,\sigma^2}(a, M) / C \right) &= \left(\tilde{H}_{N,\sigma^2}(a, M) - H \right) \log(N) \\ &+ \frac{1}{2} \log \left(\frac{\pi_H^a(0) \{2^{2H} - 1\}}{\pi_{\tilde{H}_{N,\sigma^2}}^a(0) \{2^{2\tilde{H}_{N,\sigma^2}} - 1\}} \right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{\theta}_{N,\sigma^2}(a, M) - \theta \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

On montre facilement que $\frac{\log(N)}{N^{2H\epsilon}} \xi_{T_{N,\sigma^2}} \xrightarrow{\mathbb{P}} (0, \dots, 0)^t$, ce qui assure la convergence en probabilité de $\tilde{C}_{N,\sigma^2}(a, M)$ vers C . D'après (4.34) et (4.35), on peut noter que la variable aléatoire $\frac{N^{1/2-2H\epsilon}}{\log(N)} \log \left(\tilde{C}_{N,\sigma^2}(a, M) / C \right)$ converge en loi vers la même limite que la variable aléatoire $\frac{N^{1/2-2H\epsilon}}{\log(N)} \left(\tilde{C}_{N,\sigma^2}(a, M) - C \right) / C$, i.e. finalement que la v.a. $N^{1/2-2H\epsilon} \left(\tilde{H}_{N,\sigma^2}(a, M) - H \right)$, d'où le résultat. \square

Preuve du Corollaire 4.3

(i) Dans ce cas particulier le Lemme 4.1 s'écrit

$$\mathbb{E}(V^{a^m}(i) V^{a^n}(i+j)) = C^2 \pi_H^{a^m, a^n}(j) + \sigma^2 \beta^{a^m, a^n}(j) = \mathcal{O}(|j|^{2H-2p}), \quad \forall m, n \geq 1. \quad (4.36)$$

La normalité asymptotique se démontre de la même manière que dans le cas où $\epsilon > 0$, Proposition 4.2. Seule, la matrice de covariance asymptotique change, matrice $2M \times 2M$, que nous notons J_{σ^2} . D'après (4.36)

$$\begin{aligned} (J_{\sigma^2})_{m,n} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} N \mathbb{E} (V_{N,\sigma^2}(a^m) V_{N,\sigma^2}(a^n)) \\ &= 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\left\{ C^2 \pi_H^{a^m, a^n}(j) + \sigma^2 \beta^{a^m, a^n}(j) \right\}^2}{\left\{ C^2 \pi_H^{a^m}(0) + \sigma^2 \beta^a(0) \right\} \left\{ C^2 \pi_H^{a^n}(0) + \sigma^2 \beta^a(0) \right\}}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

(ii) La relation (4.31) est toujours valable avec les vecteurs λ et μ définis par

$$\lambda_m = \frac{C^2 \pi_H^a(0) (2m)^{2H} + \sigma^2 \beta^a(0)}{C^2 \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}} \quad \text{et} \quad \mu_m = \frac{C^2 \pi_H^a(0) m^{2H} + \sigma^2 \beta^a(0)}{C^2 \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}}.$$

A présent, $\sqrt{N} \left\{ \frac{T_{N,\sigma^2}(a,M)}{\mathbb{E}(T_{N,\sigma^2}(a,M))} - 1 \right\}$ converge en loi vers la même limite que la variable $\sqrt{N} \log \frac{T_{N,\sigma^2}(a,M)}{\mathbb{E}(T_{N,\sigma^2}(a,M))}$, i.e. que $\sqrt{N} \{ \lambda_m V_{N,\sigma^2}(a^{2m}) - \mu_m V_{N,\sigma^2}(a^m) \}$ qui converge en loi vers une gaussienne centrée en vertu de (i). Ainsi, si $p > H + 1/4$ on a lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{N} \xi_{T_{N,\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, J'_{\sigma^2}),$$

où J'_{σ^2} est la matrice $M \times M$ définie par

$$(J'_{\sigma^2})_{m,n} = \lambda_m \lambda_n (J_{\sigma^2})_{2m,2n} + \mu_m \mu_n (J_{\sigma^2})_{m,n} - \lambda_m \mu_n (J_{\sigma^2})_{2m,n} - \mu_m \lambda_n (J_{\sigma^2})_{2n,m}.$$

Par la suite, d'après (4.29)

$$\sqrt{N} \left(\tilde{H}_{N,\sigma^2}(a, M) - H \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{A^t (J'_{\sigma^2}) A}{4 \|A\|^4} \right).$$

□

Preuve de la Proposition 4.4

(i) et (ii) Les estimateurs $\tilde{H}_{T_{N,\sigma^2}}(a, M)$ et $\tilde{H}_{S_{N,\sigma^2}}(a, M)$ sont définis par les relations suivantes

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{T_{N,\sigma^2}}(a, M) &= \frac{A^t}{2 \|A\|^2} L_{T_{N,\sigma^2}}, \\ \tilde{H}_{S_{N,\sigma^2}}(a, M) &= \frac{A^t}{2 \|A\|^2} L_{S_{N,\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse H_0 , on a presque sûrement

$$(L_{T_{N,0}} - L_{S_{N,0}})_m = \nu \{ V_{N,0}(a^{2m}) - V_{N,0}(a^m) \} \{ 1 + o(1) \}, \quad (4.38)$$

avec $\nu = \frac{2^{2H}}{2^{2H}-1}$. L'équation (4.38) et la convergence presque sûre de $V_{N,0}$ assurent la convergence presque sûre énoncée sous H_0 .

Sous l'hypothèse H_0 , d'après (4.38), on remarque que $\sqrt{N} (L_{T_{N,0}} - L_{S_{N,0}})$ converge en loi vers la même limite que le vecteur de composantes $\sqrt{N} \nu \{ V_{N,0}(a^{2m}) - V_{N,0}(a^m) \}$. Les

composantes de ce dernier vecteur étant définies comme une combinaison linéaire de composantes d'un vecteur asymptotiquement gaussien est asymptotiquement gaussien. Ainsi, lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{N} (L_{T_{N,0}} - L_{S_{N,0}}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, G''),$$

où G'' est la matrice $M \times M$ définie pour $m, n = 1, \dots, M$ par

$$\begin{aligned} (G'')_{m,n} &= g''_{m,n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \nu^2 \mathbb{E} \left(\{V_{N,0}(a^{2m}) - V_{N,0}(a^m)\} \{V_{N,0}(a^{2n}) - V_{N,0}(a^n)\} \right) \\ &= \nu^2 \{r_{2m,2n} + r_{m,n} - r_{2m,n} - r_{2n,m}\}, \end{aligned}$$

et où $r_{m,n}$ est le terme générique de R définie par $(R)_{m,n} = 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_H^{a^m, a^n}(j)^2}{m^{2H} n^{2H} \pi_H^a(0)^2}$. □

Preuve de la Proposition 4.5

Par définition de $T_{N,\sigma^2}(a^m)$ on a sous la suite d'hypothèses $H_{1,N}$ la relation suivante

$$\frac{T_{N,\sigma^2}(a^m)}{\mathbb{E}(T_{N,\sigma^2}(a^m))} - 1 = \lambda_m V_{N,\sigma^2}(a^{2m}) - \mu_m V_{N,\sigma^2}(a^m),$$

où λ et μ , cette fois-ci, sont les vecteurs définis par

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \frac{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0) (2m)^{2H} + \sigma_N^2 \beta^a(0)}{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2H}}{2^{2H} - 1} \\ \mu_m &= \frac{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0) m^{2H} + \sigma_N^2 \beta^a(0)}{\frac{C^2}{(\Delta_N)^{2H}} \pi_H^a(0) m^{2H} \{2^{2H} - 1\}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2H}}{2^{2H} - 1}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

En conséquence, on a presque sûrement

$$\begin{aligned} \left(L_{T_{N,\sigma^2}} - L_{S_{N,\sigma^2}} \right)_m &\underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2H}}{2^{2H} - 1} \{V_{N,\sigma^2}(a^{2m}) - V_{N,\sigma^2}(a^m)\} (1 + o(1)) \\ &\quad + \log \left(\frac{2^{2H} - 1}{1 + \sigma_N^2 \frac{\Delta_N^{2H} \beta^a(0)}{m^{2H} C^2 \pi_H^a(0) \{2^{2H} - 1\}}} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Définissons pour simplifier les vecteurs ϕ et B_{σ^2} pour $m = 1, \dots, M$:

$$\phi_m = \left(L_{T_{N,\sigma^2}} - L_{S_{N,\sigma^2}} \right)_m \quad \text{et} \quad (B_{\sigma^2})_m = \log \left(\frac{1 + \sigma_N^2 \frac{\Delta_N^{2H} \beta^a(0)}{m^{2H} C^2 \pi_H^a(0) \{2^{2H} - 1\}}}{2^{2H} - 1} \right).$$

D'après la Proposition 4.4 et (4.40), il existe κ^2 telle que nous avons la convergence en loi suivante lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$T_N := \sqrt{N} \frac{A^t}{\sqrt{2} \|A\|^2} (\phi + B_{\sigma^2}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \kappa^2). \quad (4.41)$$

Par ailleurs, sous la suite d'hypothèses $H_{1,N}$ il existe un vecteur B_0 tel que pour tout $m = 1, \dots, M$ on ait

$$(B_{\sigma^2})_m \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} (B_0)_m \frac{\delta_N}{\sqrt{N}}. \quad (4.42)$$

Sous la suite d'hypothèses $H_{1,N}$, nous avons alors pour tout $u \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(TBB(a, M) \geq u) &= \mathbb{P}\left(\frac{A^t}{2\|A\|^4} N \phi \phi^t A \geq u\right) \\
&\stackrel{N \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbb{P}\left(T_N^2 - \delta_N \frac{A^t B_0}{\sqrt{2}\|A\|^2} T_N - \delta_N T_N \frac{B_0^t A}{\sqrt{2}\|A\|^2} + \delta_N^2 \frac{A^t B_0 B_0^t A}{2\|A\|^4} \geq u\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{T_N^2}{\delta_N^2} - 2\frac{\alpha}{\delta_N} T_N + \alpha^2 \geq \frac{u}{\delta_N^2}\right), \quad \text{avec } \alpha = \frac{A^t B_0}{\sqrt{2}\|A\|^2} \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{2\alpha}{\delta_N} T_N - \frac{1}{\delta_N^2} T_N^2 + \frac{u}{\delta_N^2} \leq \alpha^2\right).
\end{aligned}$$

Or, T_N converge en loi, lorsque $N \rightarrow +\infty$, donc d'après le Théorème de Slutsky, *e.g.* Grimmet et *al.* [48], et puisque $\delta_N \rightarrow +\infty$, on a :

$$\frac{2\alpha}{\delta_N} T_N - \frac{1}{\delta_N^2} T_N^2 + \frac{u}{\delta_N^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\frac{2\alpha}{\delta_N} T_N - \frac{1}{\delta_N^2} T_N^2 + \frac{u}{\delta_N^2} \leq \alpha^2\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1,$$

ce qui revient à dire que sous la suite d'hypothèses $H_{1,N}$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(TBB(a, M) \geq u | H_{1,N}) = 1.$$

□

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, d'une part, nous avons énuméré un certain nombre de tests et proposé une généralisation du kurtosis empirique. Hormis peut-être le test d'adéquation à la densité spectrale de Beran, aucun de ces tests n'est puissant pour le mouvement brownien fractionnaire. Il serait intéressant de regarder un peu plus précisément la puissance de ce test. En ce qui concerne la partie sur le débruitage, les résultats sont performants pour des tailles d'échantillon > 1000 . Comme nous l'avons déjà signalé, notre méthode basée sur une régression log-linéaire donne parfois des résultats aberrants pour des tailles d'échantillon inférieures. Nous pensons qu'une estimation des paramètres par minimisation d'un critère moindres carrés basé sur le moment d'ordre 2 empirique des coefficients d'ondelettes serait numériquement plus stable. Enfin, il serait pertinent de comparer les deux approches précitées, avec celle qui consisterait à débruiter le signal d'une part puis à identifier le signal débruité. Ces deux derniers points sont en cours d'étude et font l'objet d'un travail commun avec A. Antoniadis.

Inférence statistique pour le mouvement brownien multifractionnaire

Ce chapitre développe des méthodes pour identifier le mouvement brownien multifractionnaire (extension du mouvement brownien fractionnaire au sens où les paramètres évoluent à présent avec le temps) et présente quelques tests liés au modèle.

5.1 Introduction

Nous avons montré dans l'Introduction de ce mémoire, que dans certaines situations il pouvait être intéressant de relâcher la contrainte de stationnarité, de permettre à l'exposant fractionnaire d'évoluer au cours du temps. Dans cette optique, a été récemment développé un modèle susceptible de décrire de telles évolutions : il s'agit du mouvement brownien multifractionnaire (noté mbm). Deux approches naturelles ont été abordées pour obtenir une extension du mbf. Elles consistent à substituer les paramètres H, C dans les intégrales stochastiques définissant le mbf par deux fonctions du temps $H(t), C(t)$. La première approche est une approche moyenne mobile et a été proposée par Peltier et Lévy-Véhel [77], processus $\{W_1(t), t \in \mathbb{R}^+\}$. La seconde est une approche spectrale introduite par Benassi et *al.* [16], processus $\{W_2(t), t \in \mathbb{R}^+\}$:

$$W_1(t) = C(t) \{\pi K(2H(t))\}^{1/2} \int_{\mathbb{R}} f_t(s) dB_1(s) \quad (5.1)$$

$$\text{avec } f_t(s) = \frac{1}{\Gamma(H(t) + 1/2)} \left\{ |t - s|^{H(t) - \frac{1}{2}} \mathbb{I}_{]-\infty, t]}(s) - |s|^{H(t) - 1/2} \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}(s) \right\},$$

$$W_2(t) = C(t) \{K(2H(t))/2\}^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\exp(it\lambda) - 1)}{|\lambda|^{H(t) + 1/2}} dB_2(\lambda), \quad (5.2)$$

où B_1 et B_2 sont deux mouvements browniens et où K est la fonction définie sur $]0, 2[$ par $K(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1) \sin(\alpha\pi/2)/\pi$. Dès que les fonctions H et C appartiennent à l'ensemble des fonctions höldériennes d'ordre $0 < \eta \leq 1$ (sur $[0, 1]$ pour H , et sur \mathbb{R}^{+*} pour C), alors les processus W_1 et W_2 sont de carré intégrable. Ajoutons que, sous ces mêmes hypothèses, Cohen [30] a prouvé l'égalité en loi de ces deux processus, qui, précisons-le, ont été ajustés de manière à ce que $\mathbb{E}(W_1(t)^2) = \mathbb{E}(W_2(t)^2) = C(t)^2 |t|^{2H(t)}$. Dans la suite, nous noterons indifféremment $\{W(t), t \geq 0\}$ le mouvement brownien multifractionnaire de fonction de Hurst $H(t)$, et de variance normalisée $C(t)$. Le mbm étant un processus gaussien de carré intégrable, on peut le définir de manière analogue à (5.1) et (5.2) comme étant l'unique processus gaussien, centré,

nul à l'origine et de fonction de covariance définie pour $s, t \in [0, 1]$ par :

$$\mathbb{E}(W(t)W(s)) = \frac{C(t)C(s)}{2} g(H(t), H(s)) \left\{ |t|^{H(t)+H(s)} + |s|^{H(t)+H(s)} - |t-s|^{H(t)+H(s)} \right\}, \quad (5.3)$$

où g est définie par

$$g(H(t), H(s)) = K(H(t) + H(s))^{-1} \{K(2H(t))K(2H(s))\}^{1/2}. \quad (5.4)$$

Le calcul de la fonction de covariance, dont nous rappelons qu'elle constitue un noyau hermitien de type positif (voir Neveu [75] p.34), s'appuie sur le Théorème de représentation de $|u|^\alpha$ (e.g. Bahr et al. [8]):

$$|u|^\alpha = K(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(\lambda u)}{|\lambda|^{\alpha+1}} d\lambda, \quad \forall u \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 2.$$

L'objectif de ce chapitre est d'identifier et valider le mbm. L'identification de ce modèle est un problème partiellement traité par Benassi et al. [16]. Les auteurs y explicitent un estimateur d'une fonction de Hurst continûment dérivable sur $[0, 1]$ et démontrent sa consistance. Nous nous proposons de généraliser et compléter ce travail, d'une part, en considérant des fonctions de Hurst et des fonctions échelles höldériennes d'ordre $\eta > 0$, d'autre part, en obtenant les théorèmes limite pour les estimateurs introduits. Nous discutons des problèmes pratiques engendrés par un tel modèle et proposons quelques tests.

Les propriétés de stationnarité et d'autosimilarité des accroissements sont vérifiées par le mbm non plus de manière globale mais de manière asymptotiquement locale; Benassi et al. [16] montrent que si $H \in \mathcal{C}^\eta([0, 1])$ vérifie $\sup_t H(t) < \min(1, \eta)$, alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{W(t + \epsilon u) - W(t)}{\epsilon^{2H(t)}} \right)_{u \in \mathbb{R}^+} \stackrel{\mathcal{L}}{=} C(t) (B_{H(t)}(u))_{u \in \mathbb{R}^+}, \quad (5.5)$$

où $B_{H(t)}(u)$ désigne le mbf de paramètre $H(t)$ défini sur \mathbb{R}^+ . Le résultat (5.5) suggère que pour estimer les paramètres d'un tel processus, nous pouvons adapter localement des méthodes globales valables pour l'identification du mbf. La méthode utilisée est appelée méthode des variations quadratiques locales. Elle se réduit à adapter localement la méthode des variations quadratiques, étudiée par Istas et Lang [55] et par nous-mêmes dans le Chapitre 2, et qui consiste à filtrer les observations d'un processus gaussien stationnaire autosimilaire ou localement autosimilaire en 0, ce qui a pour effet de détruire la dépendance des observations, et d'estimer le moment empirique d'ordre 2 de la série filtrée. Le choix d'adapter la méthode des variations quadratiques plutôt qu'une autre méthode d'identification est justifié d'une part par le fait que cette méthode induit des estimateurs ayant pour vitesse de convergence les vitesses des bornes de Cramèr-Rao des paramètres du mbf (voir Chapitre 3), et d'autre part par le fait que cette méthode est rapidement calculable, stable numériquement, et se comporte particulièrement bien vis-à-vis de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour de petits échantillons (voir Section 2.6). Ce dernier point est primordial car rappelons-le le mouvement brownien multifractionnaire sera identifié de manière locale.

La Section 5.2 rassemble les outils nécessaires pour identifier le modèle. Nous y définissons une statistique appelée variations quadratiques locales représentant la variance empirique de la trace d'un mbm filtré et normalisé. Nous appliquons les résultats de convergence de cette

statistique au problème d'identification dans la Section 5.3. Dans cette partie, nous explicitons des estimateurs de la fonction de Hurst $H \in \mathcal{C}^\eta([0, 1])$, en distinguant les cas où la fonction échelle C est connue ou inconnue. La consistance, les convergences finies-dimensionnelles et en loi y sont démontrées. Notre méthode est une méthode locale et dépend en cela d'un paramètre régissant la taille d'un voisinage. Dans ce cadre, nous présentons également une procédure permettant un choix efficace de ce paramètre. Une étude de simulation a été menée dans la Section 5.4 pour valider cette procédure et explorer la qualité des estimateurs. Dans la Section 5.5, nous développons quelques tests pour le mbm. Dans une première partie, nous adaptons localement la statistique $P_N(2, a)$, qui représentait le kurtosis empirique des variations discrètes du mbf et démontrons sa convergence en loi vers un processus gaussien centré de fonction de covariance explicite, ce qui permet d'envisager une procédure de test. Dans [21], Beran et *al.* s'interrogent sur d'éventuels changements de variations du paramètre de longue mémoire. Dans cette optique, la seconde partie de cette section propose un test statistique convergent d'hypothèses $H(\cdot)$ est constante contre $H(\cdot)$ non constante, ainsi que quelques généralisations possibles. Enfin, les preuves des différents résultats énoncés sont présentés dans la Section 5.7.

5.2 Variations quadratiques locales : définitions et comportements asymptotiques

L'objectif de cette première partie est de rappeler certaines définitions et notations déjà utilisées dans le Chapitre 2, et de présenter les résultats de convergence de la variance empirique de la trace d'un mbm filtré et normalisé, de manière à rendre la Section 5.3, relative à l'identification de la fonction de Hurst, plus lisible. Par la suite, notre modèle statistique sera constitué d'une trajectoire d'un mbm discrétisée, notée (W) , aux instants i/N pour $i = 0, \dots, N - 1$, de paramètres fonctionnels H et C . Nous supposons que la fonction de Hurst, H (resp. C), appartient à l'espace des fonctions höldériennes d'ordre $0 < \eta \leq 1$ sur $[0, 1]$ (resp. sur \mathbb{R}^{+*}) et vérifie $\sup_t H(t) < \min(1, \eta)$. Dans la suite de ce présent document, ces hypothèses seront implicitement vérifiées. Nous notons a un filtre de longueur $\ell + 1$ et d'ordre $p \geq 1$, i.e. un vecteur à composantes réelles vérifiant

$$\sum_{q=0}^{\ell} a_q q^i = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, p - 1 \quad \text{et} \quad \sum_{q=0}^{\ell} a_q q^p \neq 0 .$$

Soit (V^a) la série issue du filtrage de (W) par a :

$$V^a \left(\frac{j}{N} \right) = \sum_{q=0}^{\ell} a_q W \left(\frac{j-q}{N} \right) , \quad \text{pour } j = \ell, \dots, N - 1 .$$

A titre d'exemple, (V^a) représente les accroissements du mbm dans le cas où $a = (1, -1)$, et les différences secondes lorsque $a = (1, -2, 1)$. Définissons la statistique $V_{N,\epsilon}(t, a)$ pour $t \in [0, 1]$, appelée variations quadratiques locales, par :

$$V_{N,\epsilon}(t, a) = \frac{1}{v_N(t, a)} \sum_{j \in \mathcal{V}_{N,\epsilon}(t, a)} \left\{ \frac{V^a \left(\frac{j}{N} \right)^2}{\mathbb{E} \left(V^a \left(\frac{j}{N} \right)^2 \right)} - 1 \right\} , \quad (5.6)$$

où $\mathcal{V}_{N,\epsilon}(t, a)$ est un voisinage de t défini, pour un $\epsilon > 0$ destiné à tendre vers 0, par : $\mathcal{V}_{N,\epsilon}(t, a) = \left\{ j \in \mathbb{Z}, \left| \frac{j}{N} - t \right| \leq \epsilon \right\}$ et où $v_N(t, a) = \text{Card}(\mathcal{V}_{N,\epsilon}(t, a))$. La statistique $V_{N,\epsilon}(t, a)$

peut être vue comme les H_2 -variations locales d'un certain processus gaussien (H_2 étant le deuxième polynôme d'Hermite défini par $H_2(t) = t^2 - 1$). En ce sens, c'est une version locale des statistiques étudiées entre autres par Guyon et *al.* [49] ou Breuer et *al.* [22], statistiques pour lesquelles les auteurs énoncent des théorèmes central limite. Avant de décrire le comportement asymptotique de $V_{N,\epsilon}(t, a)$, nous avons besoin du Lemme suivant explicitant la structure de corrélation de (V^a) .

Lemme 5.1 *Soient $t, t' \in [0, 1]$ et soient $j \in \mathcal{V}_{N,\epsilon}(t, a)$, $j' \in \mathcal{V}_{N,\epsilon}(t', a)$ alors, lorsque $|j' - j| \rightarrow +\infty$, on a*

$$\mathbb{E} \left(V^a \left(\frac{j}{N} \right) V^a \left(\frac{j'}{N} \right) \right) = \frac{C(t)C(t')}{NH(t)+H(t')} \pi_{\frac{H(t)}{2} + \frac{H(t')}{2}}^a(j' - j) \{1 + \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N))\}, \quad (5.7)$$

$$\text{où} \quad \pi_H^a(k) = -\frac{1}{2} \sum_{q, q'=0}^{\ell} a_q a_{q'} |q - q' + k|^{2H}. \quad (5.8)$$

Ce résultat montre entre autres que localement la fonction de covariance de (V^a) est asymptotiquement stationnaire, ce à quoi l'on s'attendait en vertu du résultat (5.5). Nous sommes à présent en mesure d'énoncer les résultats de convergence des variations quadratiques locales.

Proposition 5.1 *Soit $t \in [0, 1]$ et soit a un filtre d'ordre $p \geq 1$, alors lorsque $(N, \epsilon) \rightarrow (+\infty, 0)$ avec $N\epsilon \rightarrow +\infty$, nous avons :*

$$(i) \quad V_{N,\epsilon}(t, a) \xrightarrow{p.s.} 0. \quad (5.9)$$

(ii) Si $p > H(t) + 1/4$,

$$\sqrt{v_N(t, a)} V_{N,\epsilon}(t, a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(H(t), a)), \quad (5.10)$$

$$\text{avec,} \quad \sigma^2(H(t), a) = 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_{H(t)}^a(j)^2}{\pi_{H(t)}^a(0)^2}. \quad (5.11)$$

(iii) Soit $d > 1$ et soient $t_1, \dots, t_d \in [0, 1]$, alors si $p > \bar{H} + 1/4$, avec $\bar{H} = \sup_t H(t)$, on a

$$\left(\sqrt{v_N(t_1, a)} V_{N,\epsilon}(t_1, a), \dots, \sqrt{v_N(t_d, a)} V_{N,\epsilon}(t_d, a) \right)^t \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathbb{G}(t_1), \dots, \mathbb{G}(t_d))^t, \quad (5.12)$$

où $(\mathbb{G}(t_1), \dots, \mathbb{G}(t_d))^t$ est un vecteur gaussien centré, tel que $\forall i, j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\text{Cov}(\mathbb{G}(t_i), \mathbb{G}(t_j)) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_{\frac{H(t_i)}{2} + \frac{H(t_j)}{2}}^a(k)^2}{\pi_{H(t_i)}^a(0) \pi_{H(t_j)}^a(0)}. \quad (5.13)$$

Il est rassurant de remarquer que nous obtenons "localement" le même résultat de convergence presque sûre et en loi pour la statistique $V_{N,\epsilon}(\cdot, a)$ que dans le cas du mbf (Proposition 2.1). L'analogie se poursuit sur la validité du résultat (ii) : en effet, en choisissant un filtre au moins d'ordre 2, nous sommes assurés de la convergence gaussienne de $V_{N,\epsilon}(t, a)$ quelle que

soit la valeur de $H(t)$, le filtre d'ordre 1 ne l'autorisant que lorsque $0 < H(t) < 3/4$.

Nous nous intéressons maintenant à la convergence en distribution de $V_{N,\epsilon}(\cdot, a)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles compacts. Pour cela, nous avons besoin de l'inégalité suivante, assurant un critère d'équitension.

Lemme 5.2 *Soit a un filtre d'ordre $p > \overline{H} + 1/4$ où $\overline{H} = \sup_t H(t)$, soit r un entier pair ≥ 4 et soient $t, t' \in I_{N,\epsilon} = [\frac{\ell}{N} + \epsilon, \frac{N-1}{N} - \epsilon]$, on a alors, en notant $v_N = 2N\epsilon$:*

$$\mathbb{E} \left(v_N^{r/2} (V_{N,\epsilon}(t, a) - V_{N,\epsilon}(t', a))^r \right) = \mathcal{O}(|t - t'|^{r\eta}) . \quad (5.14)$$

En particulier, en choisissant $r > 1 + \left\lceil \frac{1}{\eta} \right\rceil$ on aboutit au résultat suivant

Proposition 5.2 *Soit a un filtre d'ordre $p > \overline{H} + 1/4$ où $\overline{H} = \sup_t H(t)$, alors lorsque $(N, \epsilon) \rightarrow (+\infty, 0)$ avec $N\epsilon \rightarrow +\infty$, nous avons la convergence en loi suivante sur $]0, 1[$:*

$$\sqrt{v_N} V_{N,\epsilon}(\cdot, a) \longrightarrow \mathbb{G} , \quad (5.15)$$

où $v_N = 2N\epsilon$ et où $\mathbb{G} = \{\mathbb{G}(t), t \in]0, 1[\}$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance donnée par (5.13).

Ces résultats préliminaires étant établis, nous nous proposons à présent d'identifier le mbm par une méthode des moments en distinguant les cas où la fonction normalisante C est connue ou inconnue.

5.3 Applications des résultats à l'identification du mbm

5.3.1 Mouvement brownien multifractionnaire standard

Nous parlerons de mouvement brownien multifractionnaire standard, lorsque la fonction échelle C est connue. Pour estimer l'unique paramètre fonctionnel H , l'idée est d'adapter localement un estimateur obtenu par régression non linéaire, pour le mouvement brownien fractionnaire standard, étudié dans le Chapitre 2. Définissons la statistique

$$S_{N,\epsilon}(t, a) = \frac{1}{v_N(t, a)} \sum_{j \in \mathcal{V}_{N,\epsilon}(t, a)} V^a \left(\frac{j}{N} \right)^2 , \quad \text{pour } t \in [0, 1] . \quad (5.16)$$

Le Lemme 5.1 justifie l'approximation suivante quant à la moyenne de la statistique $S_{N,\epsilon}(t, a)$:

$$\mathbb{E}(S_{N,\epsilon}(t, a)) = g_{N,a}(H(t)) + \mathcal{O}\left(\epsilon^\eta N^{-2H(t)} \log(N)\right) ,$$

où $g_{N,a}$ est une fonction définie sur $[0, 1]$ par, $g_{N,a}(u) = N^{-2u} \pi_u^a(0)$, et où π_u^a est défini par (5.8). Dans la Section 2.4.1, nous avons prouvé que $g_{N,a}$ est inversible sous la condition (\mathcal{H}) suivante sur le filtre :

$$N > \text{Max}_{x \in]0, 1[} \exp \left\{ \frac{\sum_{|q-r| > 2} a_q a_r \log(|q-r|) |q-r|^{2x}}{\sum_{q,r} a_q a_r |q-r|^{2x}} \right\} , \quad (\mathcal{H})$$

condition réalisée par l'ensemble des filtres classiques : accroissements, filtres d'une ondelette de Daubechies, ... et qui par conséquent sera implicitement satisfaite dans la présentation

des résultats de convergence. Ceci permet de définir une classe d'estimateurs de la fonction de Hurst H , en $t \in [0, 1]$ par

$$\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) = g_{N,a}^{-1}(S_{N,\epsilon}(t, a)). \quad (5.17)$$

Le travail effectué dans la Section 5.2 et les propriétés de la fonction $g_{N,a}$ nous permettent d'obtenir le résultat suivant, quant à la convergence de cette classe d'estimateurs :

Proposition 5.3 *Soit a un filtre d'ordre $p > \overline{H} + 1/4$ où $\overline{H} = \sup_t H(t)$, et supposons $\epsilon = \mathcal{O}(N^{-\beta} \log(N)^\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $0 < \beta < 1$, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$, nous avons :*

(i) *Pour tout $t \in [0, 1]$,*

$$\text{Biais}(\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a)) = \mathcal{O}(\epsilon^\eta), \quad \text{Var}(\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a)) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N\epsilon \log(N)^2}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) \xrightarrow{p.s.} H(t). \quad (5.18)$$

(ii) *Soit $d \geq 1$ et soient $t_1, \dots, t_d \in [0, 1]$ alors*

$$\left(\sqrt{v_N(t_1, a)} \log(N) B_{N,\widehat{H}}(t_1), \dots, \sqrt{v_N(t_d, a)} \log(N) B_{N,\widehat{H}}(t_d)\right)^t \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathbb{G}_{\widehat{H}}(t_1), \dots, \mathbb{G}_{\widehat{H}}(t_d))^t, \quad (5.19)$$

où $B_{N,\widehat{H}}(t) = \widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) - H(t)$ et où $(\mathbb{G}_{\widehat{H}}(t_1), \dots, \mathbb{G}_{\widehat{H}}(t_d))^t$ est un vecteur gaussien centré, tel que $\forall i, j \in \{1, \dots, d\}$

$$\text{Cov}(\mathbb{G}_{\widehat{H}}(t_i), \mathbb{G}_{\widehat{H}}(t_j)) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi^{\frac{a}{2} + \frac{H(t_j)}{2}}(j)^2}{\pi^{\frac{a}{2}}(0) \pi^{\frac{a}{2}}(0)}. \quad (5.20)$$

(iii) *Sur $]0, 1[$, on a la convergence en loi suivante :*

$$\sqrt{v_N} \log(N) (\widehat{H}_{N,\epsilon}(\cdot, a) - H(\cdot)) \longrightarrow \mathbb{G}_{\widehat{H}}, \quad (5.21)$$

où $v_N = 2N\epsilon$ et où $\mathbb{G}_{\widehat{H}} = \{\mathbb{G}_{\widehat{H}}(t), t \in]0, 1[\}$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance donnée par (5.20).

Nous pouvons encore souligner l'analogie des résultats (i) et (ii) avec ceux obtenus avec le modèle mbf (Proposition 2.2). Ce parallèle autorise la remarque suivante : il est inutile d'estimer la fonction de Hurst en estimant le k -ème moment absolu empirique local défini par $S_{N,\epsilon}(t, a, k) = v_N(t, a)^{-1} \sum_{j \in \mathcal{V}_{N,\epsilon}(t, a)} |V^a(j/N)|^k$, pour $t \in [0, 1]$ et $k > 0$, plutôt que le moment d'ordre 2, car nous avons prouvé, dans le cas du mouvement brownien fractionnaire, que la variance asymptotique de l'estimateur était minimale pour $k = 2$ (Corollaire 2.2).

Le choix optimal du paramètre ϵ relatif au voisinage dépend d'un critère choisi a priori. En se donnant le critère de l'erreur quadratique moyenne intégrée (noté MISE), critère largement utilisé pour les problèmes relatifs à l'estimation fonctionnelle, il vient d'après la Proposition 5.3 :

$$\text{MISE}(\widehat{H}_{N,\epsilon}(\cdot, a) - H(\cdot)) = \mathcal{O}(\epsilon^{2\eta}) + \mathcal{O}(v_N(t, a)^{-1} \log(N)^{-2}).$$

En choisissant $\epsilon = \mathcal{O}(N^{-\beta} \log(N)^\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \beta < 1$, on montre que le MISE optimal (noté MISE*) peut s'écrire

$$\text{MISE}^* (\widehat{H}_{N,\epsilon}(\cdot, a) - H(\cdot)) = \mathcal{O} \left(N^{-\frac{2\eta}{2\eta+1}} \log(N)^{-\frac{4\eta}{2\eta+1}} \right).$$

De manière équivalente la vitesse optimale de convergence pour cette classe d'estimateurs est : $N^{-\frac{\eta}{2\eta+1}} \log(N)^{-\frac{2\eta}{2\eta+1}}$. En particulier, si $\eta = 1$ (i.e. la fonction de Hurst est continûment dérivable sur $[0, 1]$), ceci s'écrit $N^{-\frac{1}{3}} \log(N)^{-\frac{2}{3}}$. La classe d'estimateurs $\widehat{H}_{N,\epsilon}$ utilise non seulement l'asymptotique autosimilarité du mbm mais surtout le fait que le processus est observé aux instants $\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\}$. Cette dernière information augmente la vitesse optimale de convergence classique en estimation non paramétrique, équivalente à $N^{-\frac{\eta}{2\eta+1}}$, de $\log(N)^{-\frac{\eta}{2\eta+1}}$.

L'intérêt de cette classe d'estimateurs réside dans le fait qu'elle converge rapidement vers la vraie fonction $H(t)$ et devrait, entre autres, nous permettre de juger de la qualité de méthodes de simulation du mouvement brownien multifractionnaire.

5.3.2 Mouvement brownien multifractionnaire généralisé

Si l'on cherche à modéliser des données réelles par un mouvement brownien multifractionnaire, c'est-à-dire un processus régi par deux paramètres fonctionnels distincts, supposer C connue devient douteux : la méthode précédente basée sur une régression non linéaire sur un seul filtre devient donc inutilisable. Nous contournons cette difficulté en introduisant, pour $m \geq 1$, le filtre a^m défini par :

$$a_i^m = \begin{cases} a_j & \text{si } i = jm \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, \dots, ml.$$

Le filtre a^m représente le filtre a dilaté m fois. Définissons la statistique $S_{N,\epsilon}(t, a^m)$ par :

$$S_{N,\epsilon}(t, a^m) = \frac{1}{v_N(t, a^m)} \sum_{j \in \mathcal{V}_{N,\epsilon}(t, a^m)} V^{a^m} \left(\frac{j}{N} \right)^2, \quad \text{pour } t \in [0, 1]. \quad (5.22)$$

L'intérêt de la suite $(a^m)_{m \geq 1}$ réside dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{N,\epsilon}(t, a^m)) &= g_{N,a^m}(H(t)) + \mathcal{O}(\epsilon^\eta N^{-2H(t)} \log(N)) \\ &= m^{2H(t)} g_{N,a}(H(t)) + \mathcal{O}(\epsilon^\eta N^{-2H(t)} \log(N)), \end{aligned}$$

où $g_{N,a}(u) = N^{-2u} \pi_u^a(0)$. Ceci traduit le fait que

$$\log \mathbb{E}(S_{N,\epsilon}(t, a^m)) \sim 2H(t) \log(m) + \log g_{N,a}(H(t)), \quad \text{lorsque } (N, \epsilon) \rightarrow (+\infty, 0).$$

Soit M un entier ≥ 2 . Nous pouvons alors envisager d'estimer $H(t)$ par une régression linéaire simple locale de $L_{N,\epsilon}(t, a)$, sur X_M , matrice du plan d'expérience, définis par

$$L_{N,\epsilon}(t, a) = \{ \log S_{N,\epsilon}(t, a^m) \}_{1 \leq m \leq M} \quad \text{et} \quad X_M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \log(2) & \dots & 2 \log(M) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^t$$

Soit $\alpha(t) = (H(t), \log g_{N,\epsilon}(t, a))^t$. Alors la première composante du vecteur $\tilde{\alpha}_{N,\epsilon}(t, a, M)$, estimateur de $\alpha(t)$ donné par $\tilde{\alpha}_{N,\epsilon}(t, a, M) = (X_M^t X_M)^{-1} X_M^t L_{N,\epsilon}(t, a)$, fournit une classe d'estimateurs de la fonction de Hurst, que l'on note $\tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M)$. Cette construction d'une nouvelle classe d'estimateurs de la fonction H est une version locale de celle obtenue pour estimer le paramètre constant H d'un mbf, voir Section 2.4.2. Enonçons à présent les résultats de convergence de $\tilde{H}_{N,\epsilon}$.

Proposition 5.4 *Soient a un filtre d'ordre $p > \bar{H} + 1/4$ où $\bar{H} = \sup_t H(t)$, M un entier supérieur ou égal à 2 et supposons que $\epsilon = \mathcal{O}(N^{-\beta} \log(N)^\alpha)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $0 < \beta < 1$, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$, nous avons :*

(i) *Pour tout $t \in [0, 1]$,*

$$\begin{aligned} \text{Biais} \left(\tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M) \right) &= \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N)), & \text{Var} \left(\tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M) \right) &= \mathcal{O} \left(\frac{1}{N\epsilon} \right) \\ \text{et} \quad \tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M) &\xrightarrow{p.s.} H(t). \end{aligned} \quad (5.23)$$

(ii) *Soit $d \geq 1$ et soient $t_1, \dots, t_d \in [0, 1]$ alors en notant $B_{N,\bar{H}}(t) = \tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M) - H(t)$, on a*

$$\left(\sqrt{v_N(t_1, a, M)} B_{N,\bar{H}}(t_1), \dots, \sqrt{v_N(t_d, a, M)} B_{N,\bar{H}}(t_d) \right)^t \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathbb{G}_{\bar{H}}(t_1), \dots, \mathbb{G}_{\bar{H}}(t_d))^t, \quad (5.24)$$

où $(\mathbb{G}_{\bar{H}}(t_1), \dots, \mathbb{G}_{\bar{H}}(t_d))^t$ est un vecteur gaussien centré tel que $\forall i, j, \in \{1, \dots, d\}$

$$\text{Cov}(\mathbb{G}_{\bar{H}}(t_i), \mathbb{G}_{\bar{H}}(t_j)) = \frac{1}{4\|A\|^4} A^t \Sigma \left(\frac{H(t_i)}{2} + \frac{H(t_j)}{2}, H(t_i), H(t_j) \right) A, \quad (5.25)$$

avec $\Sigma(H_1, H_2, H_3)$ la matrice $M \times M$ définie par

$$(\Sigma(H_1, H_2, H_3))_{m,n} = 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_{H_1}^{a^m, a^n}(j)^2}{\pi_{H_2}^{a^m}(0) \pi_{H_3}^{a^n}(0)}, \quad m, n = 1, \dots, M.$$

$$\text{avec,} \quad \pi_H^{a^m, a^n}(j) = \sum_{q=0}^{m\ell} \sum_{q'=0}^{n\ell} a_q a_{q'} |mq - nq' + j|^{2H}, \quad (5.26)$$

et où A est le vecteur défini pour $m = 1, \dots, M$ par $A_m = \log(m) - M^{-1} \sum_{m=1}^M \log(m)$.

(iii) *Sur $]0, 1[$, on a la convergence en loi suivante :*

$$\sqrt{v_N} \left(\tilde{H}_{N,\epsilon}(\cdot, a, M) - H(\cdot) \right) \longrightarrow \mathbb{G}_{\bar{H}}, \quad (5.27)$$

où $v_N = 2N\epsilon$ et où $\mathbb{G}_{\bar{H}} = \{\mathbb{G}_{\bar{H}}(t), t \in]0, 1[\}$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance donnée par (5.25).

Nous tenons à faire remarquer que Benassi et al. [16] n'obtenaient la consistance de $\tilde{H}_{N,\epsilon}$ (pour le filtre $(1, -2, 1)$) que sous la condition $0 < \beta < 1/2$.

Par ailleurs, il est tout à fait possible d'envisager une régression linéaire pondérée de $L_{N,\epsilon}$ sur X_M . Dans cette optique, nous obtiendrions des résultats de convergence analogues à ceux de la Proposition 5.4, en adaptant localement la Proposition 2.5. Ceci n'a pas été entrepris car, pour avoir implémenté ce type de méthode pour le mbf, nous pensons que le gain apporté est minime en comparaison du coût de calculs engendré par l'estimation de la matrice de covariance Σ .

La taille de fenêtre optimale est obtenue en minimisant l'erreur quadratique moyenne intégrée de $\tilde{H}_{N,\epsilon}$. Un rapide calcul montre que le MISE optimal (noté MISE*) peut s'écrire

$$\text{MISE}^*(\tilde{H}_{N,\epsilon}(\cdot, a, M) - H(\cdot)) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{2\eta}{2\eta+1}} \log(N)^{\frac{2}{2\eta+1}}\right),$$

et la vitesse de convergence optimale pour la classe d'estimateurs $\tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M)$ est donc : $N^{-\frac{\eta}{2\eta+1}} \log(N)^{\frac{1}{2\eta+1}}$.

Remarque sur le voisinage optimal: Dans les Sections 5.2 et 5.3, nous avons présenté des résultats de convergence d'estimateurs à un paramètre ϵ près. Nous avons déterminé le comportement optimal asymptotique (en fonction de la taille de l'échantillon) de ce paramètre. Cette remarque vise à fournir une procédure de sélection de ϵ , à taille d'échantillon fixée.

Nous présentons le problème de voisinage optimal pour l'estimateur $\tilde{H}_{N,\epsilon}$ (Section 5.3.2). Il est évident que nous pouvons procéder de manière analogue pour l'estimateur $\hat{H}_{N,\epsilon}$. Le problème est donc de choisir le paramètre ϵ par minimisation de l'erreur quadratique intégrée (*ISE*),

$$\text{ISE}(\tilde{H}_{N,\epsilon} - H) = \int_0^1 \left\{ \tilde{H}_{N,\epsilon}(t) - H(t) \right\}^2 dt,$$

ou plutôt la version discrétisée, que l'on notera $Risk_K(\epsilon)$ pour un entier $K > 0$:

$$Risk_K(\epsilon) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \left\{ \tilde{H}_{N,\epsilon}(i/K) - H(i/K) \right\}^2.$$

Puisque la fonction H est inconnue, il faut estimer $Risk_K(\epsilon)$. Et pour ce faire, nous proposons une procédure de Monte-Carlo. L'idée est de simuler B ($B \geq 1$) mbms standard de fonction de Hurst $\tilde{H}_{N,\epsilon}$. Pour chaque trajectoire, nous estimons la fonction de régularité en utilisant les mêmes paramètres que pour calculer l'estimateur $\tilde{H}_{N,\epsilon}$. En notant $\tilde{H}_{N,\epsilon}^{(b)}$ l'estimateur de la b -ème trajectoire simulée ($b = 1, \dots, B$), ceci permet au final d'estimer $Risk_K(\epsilon)$ par

$$\widehat{Risk}_K(\epsilon) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \left\{ \tilde{H}_{N,\epsilon}(i/K) - \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \tilde{H}_{N,\epsilon}^{(b)}(i/K) \right\}^2. \quad (5.28)$$

Notons à présent $\epsilon^* = \text{argmin } Risk_K(\epsilon)$ et $\hat{\epsilon}^* = \text{argmin } \widehat{Risk}_K(\epsilon)$. L'étude de simulation de la Section 5.4 montre que cette procédure est performante. Un travail ultérieur pourrait permettre de justifier théoriquement cette procédure.

5.4 Quelques simulations

Le problème de simuler une trajectoire du mbm est traité dans l'Annexe C. Précisons seulement que dans cette étude, nous avons opté pour la méthode de Choleski consistant à

décomposer la matrice de covariance du mbm discrétisé en $i/N, i = 0, \dots, N-1$ sous sa forme de Choleski. Nous avons regardé trois types de fonction de Hurst : une fonction linéaire, une fonction périodique et un fonction logistique.

$$H_1(t) = 0.1 + (0.9 - 0.1)t \quad (5.29)$$

$$H_2(t) = 0.5 + 0.3 \sin(4\pi t) \quad (5.30)$$

$$H_3(t) = 0.3 + 0.3/(1 + \exp(-100(t - 0.7))) \quad (5.31)$$

Fixons dès à présent certains paramètres utilisés dans toute cette section.

N	:	taille des séries simulées	:=	1000
N_t	:	nombre de trajectoires simulées	:=	50
K	:	discrétisation des estimateurs	:=	100
a	:	filtre d'une ondelette de Daubechies d'ordre 4 (Db4): 2 moments nuls.		
M	:	nombre de filtres pour l'estimateur $\tilde{H}_{N,\epsilon}$:=	2
B	:	nombre de trajectoires simulées pour le calcul de $\hat{\epsilon}^*$:=	20

Nous avons choisi de travailler avec le filtre *Db4* car dans le cas du mbf, il s'est avéré que ce filtre donnait les meilleurs résultats parmi les filtres d'ordre ≥ 2 , ce qui est intéressant si l'on souhaite éviter les problèmes dus au filtre d'ordre 1 pour $H(t) \geq 3/4$. Dans l'ensemble de cette section, nous parlerons de distribution du risque empirique (resp. de l'estimateur empirique ...), la distribution du risque (resp. de l'estimateur ...) moyennisé sur l'ensemble des N_t trajectoires. Dans un premier temps, nous vérifions notre procédure de recherche de voisinage optimal; nous l'appliquons ensuite aux estimateurs fonctionnels $\hat{H}_{N,\epsilon}, \tilde{H}_{N,\epsilon}$.

5.4.1 Sélection de voisinage optimal

Pour chacun des trois cas tests définis par (5.29), (5.30) et (5.31), nous nous proposons d'appliquer la procédure de recherche de voisinage par méthode de Monte-Carlo décrite dans la Section 5.3. Nous nous sommes restreints, sans perte de généralité, aux choix de ϵ tel que $N\epsilon$ est un entier. Définissons $h = N\epsilon$ puis $h^* = N\epsilon^*$ et $\hat{h}^* = N\hat{\epsilon}^*$. La Figure Fig.5.1 illustre la distribution empirique du risque théorique ($Risk_K$) et estimé (\widehat{Risk}_K) en fonction de $h \in [10, 100]$. Le choix de la grille de h est justifié par le fait que les minima des risques (théorique et estimé) empiriques pour les trois cas tests se situent dans cet intervalle (et même mieux dans l'intervalle $[20, 50]$). Le tableau Tab.5.1, quant à lui, résume les calculs de h^* et \hat{h}^* , ainsi que les valeurs des risques respectifs en ces valeurs.

	h^*	\hat{h}^*	$Risk_K(\epsilon^*)$	$\widehat{Risk}_K(\hat{\epsilon}^*)$
$H(t)$ linéaire	51	46	$5.91 \cdot 10^{-4}$	$8.36 \cdot 10^{-4}$
$H(t)$ périodique	22	25	$2.20 \cdot 10^{-3}$	$3.00 \cdot 10^{-3}$
$H(t)$ logistique	43	47	$6.59 \cdot 10^{-4}$	$7.68 \cdot 10^{-4}$

TAB. 5.1 – Fenêtres optimales (empiriques) théorique et estimé, et risques associés

5.4.2 Estimateurs fonctionnels

Dans cette section, nous calculons les distributions empiriques des estimateurs de fonction de Hurst, $\hat{H}_{N,\epsilon}$ et $\tilde{H}_{N,\epsilon}$ (avec les paramètres définis en introduction de cette section), pour chacune des fonctions (5.29), (5.30) et (5.31). Pour chacun des estimateurs, nous calculons

également les bandes de confiance théoriques (discrétisées K fois) au niveau $\alpha = 0.05$. Soit $\sigma_1^2(t)$ (resp. $\sigma_2^2(t)$) la constante de la variance asymptotique de $\sqrt{v_N(t, a)} \log(N) (H(t) - \widehat{H}_{N, \epsilon}(t, a))$ (resp. $\sqrt{v_N(t, a)} (H(t) - \widetilde{H}_{N, \epsilon}(t, a, M))$). Rappelons que d'après (5.19) et (5.24) :

$$\begin{aligned}\sigma_1^2(t) &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_{H(t)}^a(j)^2}{\pi_{H(t)}^a(0)^2}, \quad \text{où } \pi_{H(t)}^a(j) \text{ est donné par (5.8).} \\ \sigma_2^2(t) &= \frac{1}{2 \log^2(2)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi_{H(t)}^{a^2, a^2}(j)^2}{\pi_{H(t)}^{a^2, a^2}(0)^2} + \frac{\pi_{H(t)}^{a^1, a^1}(j)^2}{\pi_{H(t)}^{a^1, a^1}(0)^2} - 2 \frac{\pi_{H(t)}^{a^1, a^2}(j)^2}{\pi_{H(t)}^{a^1}(0) \pi_{H(t)}^{a^2}(0)} \right\},\end{aligned}$$

avec $\pi_{H(t)}^{a^m, a^n}(j)$ défini par (5.26). Précisons en outre que les estimateurs ont été calculés pour $\epsilon = \widehat{\epsilon}^*$ où $\widehat{\epsilon}^*$ est donné par le tableau Tab.5.1.

Lorsque $C(t)$ est connue (estimateur fonctionnel $\widehat{H}_{N, \epsilon}$), les figures Fig.5.2 à 5.4 montrent que la distribution empirique de l'estimateur coïncide parfaitement avec la vraie valeur de la fonction et ce pour $H(t)$ linéaire, périodique et logistique. Ceci nous permet intrinsèquement de valider notre procédure de simulation. Maintenant, lorsque $C(t)$ est inconnue (estimateurs $\widetilde{H}_{N, \epsilon}$), ce qui est le cas pour des données réelles, les simulations montrent qu'en moyenne on retrouve de manière très satisfaisante la forme originelle de la fonction de Hurst.

5.5 Sur quelques tests pour le mbm

Cette section montre sous l'hypothèse du mbm la convergence du kurtosis empirique local et propose quelques tests paramétriques pour la fonction de Hurst. Les résultats découlent de ceux présentés dans les Sections 5.2 et 5.3. Les notations utilisés sont identiques.

5.5.1 Kurtosis empirique local pour le mouvement brownien multifractionnaire

Il s'agit ici de généraliser une propriété démontrée dans la Section 4.1.3 pour le mbf, concernant la convergence du "kurtosis empirique" pour le mbf. Définissons les statistiques $S_{N, \epsilon}(t, a, k)$ et $P_{N, \epsilon}(t, a)$, pour $t \in [0, 1]$ et $k > 0$, par :

$$S_{N, \epsilon}(t, a, k) = \frac{1}{v_N(t, a)} \sum_{j \in \mathcal{V}_{N, \epsilon}(t, a)} \left| V^a \left(\frac{j}{N} \right) \right|^k. \quad (5.32)$$

$$P_{N, \epsilon}(t, a) = \frac{1}{3} \frac{S_{N, \epsilon}(t, a, 4)}{S_{N, \epsilon}(t, a, 2)^2}. \quad (5.33)$$

L'intérêt de cette statistique réside dans le fait qu'elle s'exprime indépendamment des fonctions H et C , et de la proposition suivante énonçant les résultats de convergence de $P_{N, \epsilon}(\cdot, a)$:

Proposition 5.5 *Soit a un filtre d'ordre $p > \overline{H} + 1/8$ où $\overline{H} = \sup_t H(t)$, et supposons $\epsilon = \mathcal{O}(N^{-\beta} \log(N)^\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $0 < \beta < 1$, alors lorsque $N \rightarrow +\infty$, nous avons :*

(i) Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$P_{N, \epsilon}(t, a) \xrightarrow{p.s.} 1. \quad (5.34)$$

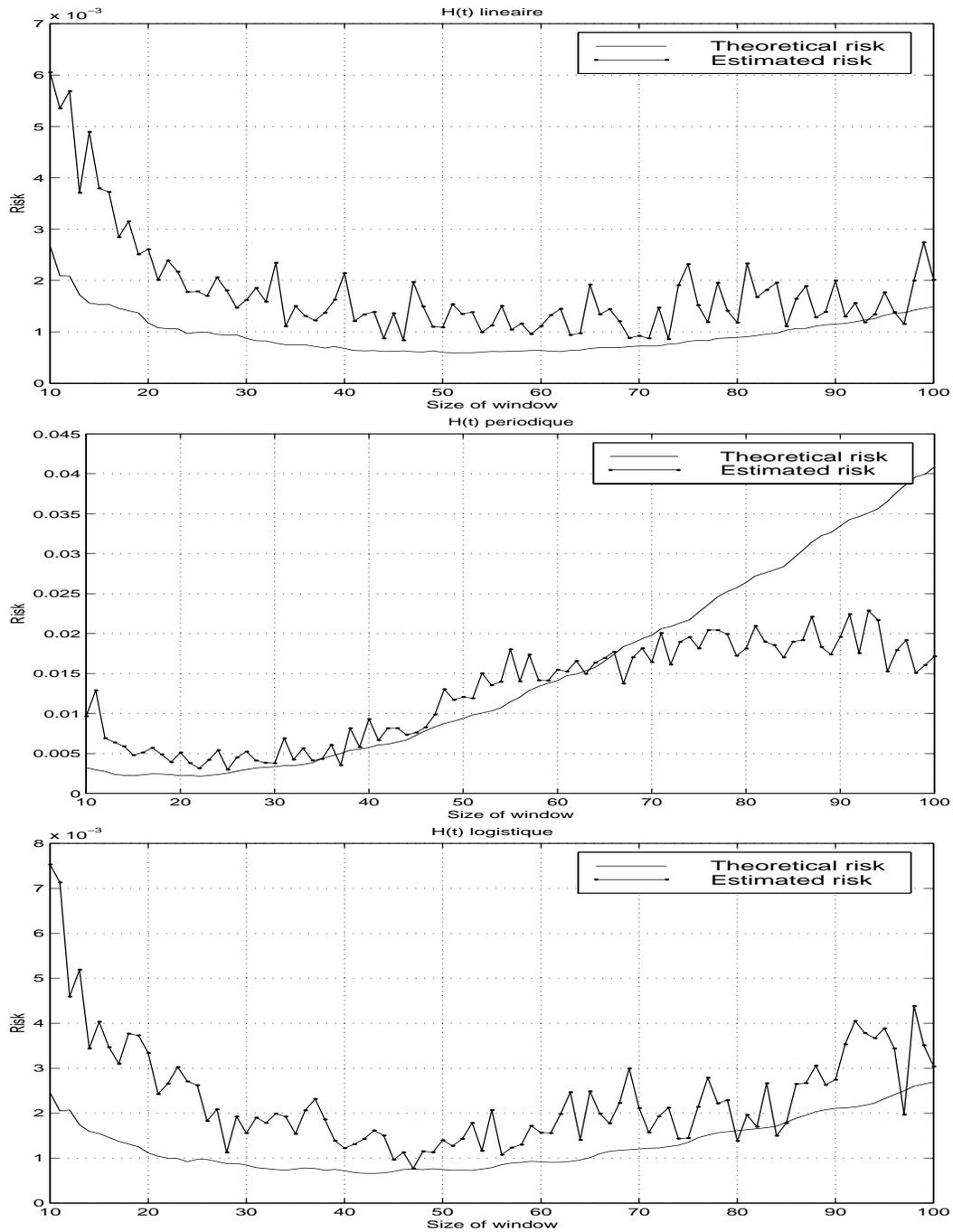


FIG. 5.1 – Distribution empirique des risques théorique et estimé en fonction de $h = N\epsilon$ pour les trois cas tests définis par (5.29), (5.30) et (5.31)

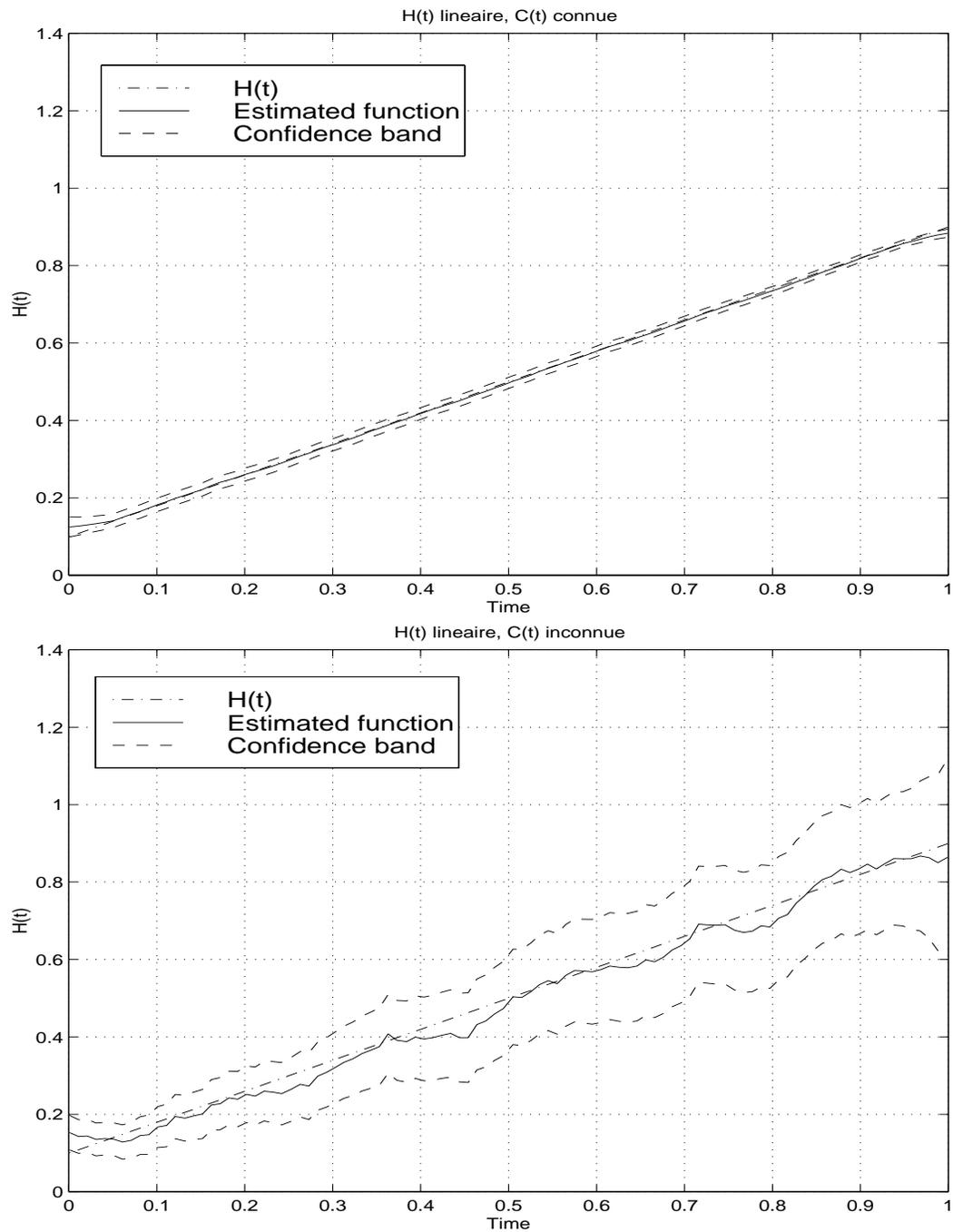


FIG. 5.2 – Distribution empirique des estimateurs de la fonction de Hurst linéaire définie par (5.29), et bandes de confiance théoriques discrétisées au niveau $\alpha = 0.05$.

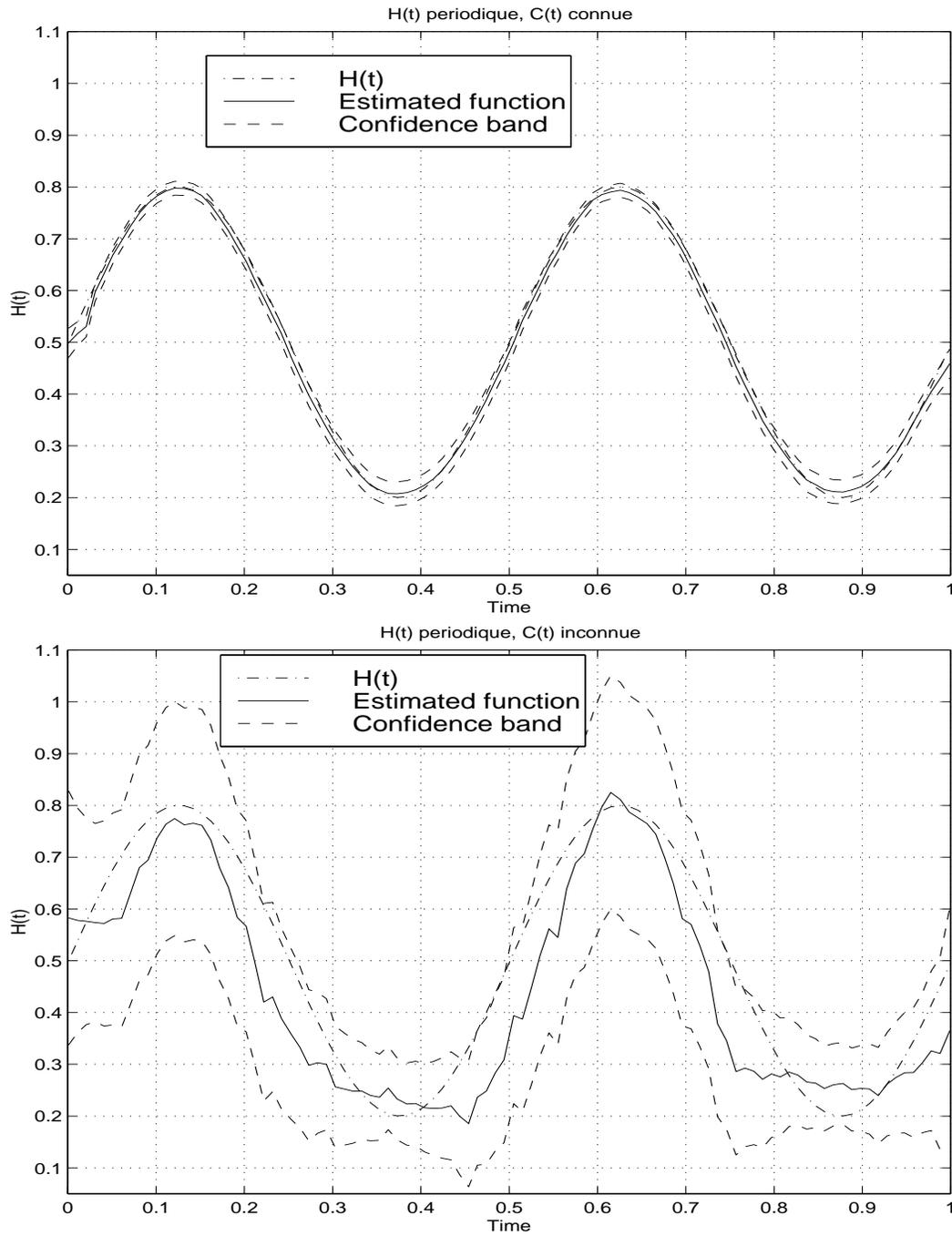


FIG. 5.3 – Distribution empirique des estimateurs de la fonction de Hurst périodique définie par (5.30), et bandes de confiance théoriques discrétisées au niveau $\alpha = 0.05$.

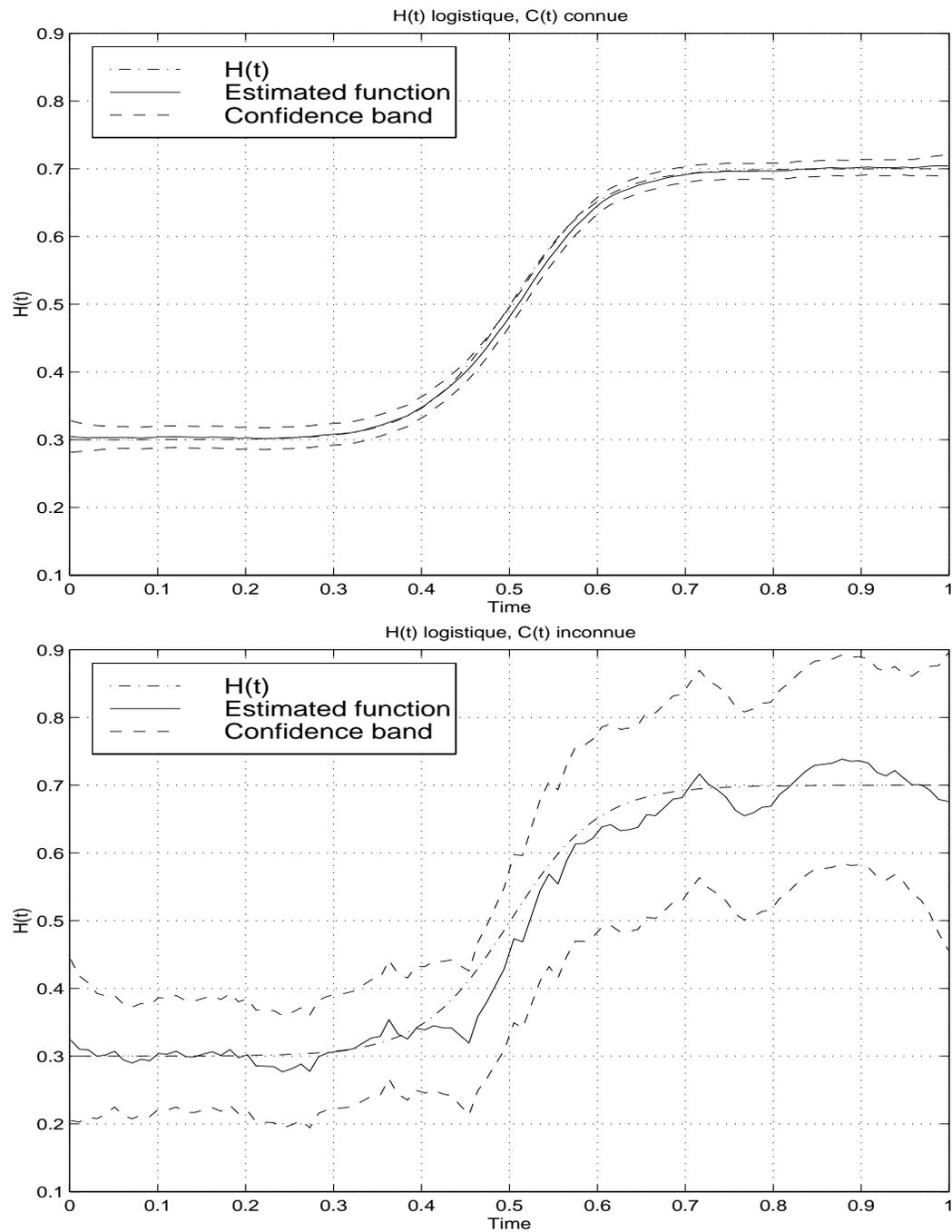


FIG. 5.4 – Distribution empirique des estimateurs de la fonction de Hurst logistique définie par (5.31), et bandes de confiance théoriques discrétisées au niveau $\alpha = 0.05$.

(ii) soit $d \geq 1$ et soient $t_1, \dots, t_d \in [0, 1]$

$$\left(\sqrt{v_N(t_1, a)} (P_{N,\epsilon}(t_1, a) - 1), \dots, \sqrt{v_N(t_d, a)} (P_{N,\epsilon}(t_d, a) - 1) \right)^t \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathbb{G}_P(t_1), \dots, \mathbb{G}_P(t_d))^t, \quad (5.35)$$

où $(\mathbb{G}_P(t_1), \dots, \mathbb{G}_P(t_d))^t$ est un vecteur gaussien centré et tel que $\forall i, j \in \{1, \dots, d\}$

$$\text{Cov}(\mathbb{G}_P(t_i), \mathbb{G}_P(t_j)) = \frac{8}{3} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\pi^{\frac{a}{2} + \frac{H(t_j)}{2}}(k)^4}{\pi^{\frac{a}{2} + \frac{H(t_i)}{2}}(0)^2 \pi^{\frac{a}{2} + \frac{H(t_j)}{2}}(0)^2}. \quad (5.36)$$

(iii) Sur $]0, 1[$, on a la convergence en loi suivante

$$\sqrt{v_N} (P_{N,\epsilon}(\cdot, a) - 1) \rightarrow \mathbb{G}_P, \quad (5.37)$$

où $v_N = 2N\epsilon$ et où $\mathbb{G}_P = \{\mathbb{G}_P(t), t \in]0, 1[\}$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance donnée par (5.36).

On montre aisément que l'erreur quadratique moyenne intégrée optimale peut s'écrire

$$\text{MISE}^*(P_{N,\epsilon}(\cdot, a) - 1) = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{2\eta}{2\eta+1}} \log(N)^{\frac{2}{2\eta+1}}\right).$$

Au vu des résultats de convergence de $P_{N,\epsilon}(\cdot, a)$, on peut s'intéresser à former le test (au niveau α) suivant d'hypothèses

$$H_0(\beta_1, \beta_2) : \mathbb{E}(P_{N,\epsilon}(t, a)) = 1 \text{ sur } [\beta_1, \beta_2] \quad \text{contre} \quad H_1(\beta_1, \beta_2) : \mathbb{E}(P_{N,\epsilon}(t, a)) \neq 1 \text{ sur } [\beta_1, \beta_2],$$

avec $\beta_1, \beta_2 \in]0, 1[$. Pour cela définissons la statistique

$$P'_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) = v_N \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \{P_{N,\epsilon}(t, a) - 1\}^2 dt.$$

La convergence en loi sur $]0, 1[$ de $P_{N,\epsilon}(\cdot, a)$ suffit à montrer que

$$P'_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \mathbb{G}_P^2(t) dt.$$

Ce comportement asymptotique nous permet de rejeter l'hypothèse $H_0(\beta_1, \beta_2)$ (et donc intrinsèquement l'hypothèse que la trajectoire discrétisée initiale est celle d'un mbm) si $q_\alpha < P'_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2)$ où q_α est le $(1 - \alpha)$ -quantile de la loi limite $\frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \mathbb{G}_P(t)^2 dt$.

Nous tenons à préciser que si $H_0(\beta_1, \beta_2)$ n'est pas rejetée, la statistique $P'_{N,\epsilon}$ ne fournit aucun renseignement sur le fait que la trajectoire discrétisée est celle d'un mbm car comme nous l'avons déjà signalé pour le mbf, [25] p.15, un tel résultat peut être prouvé pour des processus multifractionnaires plus généraux tels que ceux introduits par Benassi et al [16].

5.5.2 Tests paramétriques sur la fonction de Hurst

5.5.2.1 Test de multifractionnarité

Dans cette première partie, on se propose de fournir une procédure de test permettant de différencier les deux modèles que sont le mbf et le mbm. Un tel problème est à relier avec le travail de Beran *et al.* Dans [21], les auteurs s'intéressent à savoir si un processus à longue mémoire exhibe des changements de variations de son paramètre à longue mémoire. Leur statistique de test se base sur la procédure suivante. Pour $t \in [0, 1]$, on découpe la trajectoire discrétisée $X = \{X(0), \dots, X(N-1/N)\}$ en deux séries chronologiques :

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \left\{ X(0), \dots, X\left(\frac{[Nt]}{N}\right) \right\} \\ X_2(t) &= \left\{ X\left(\frac{[Nt]+1}{N}\right), \dots, X\left(\frac{N-1}{N}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Ensuite, on estime le paramètre de longue mémoire de X_1 et X_2 (estimateurs notés $\widehat{H}_1(t)$ et $\widehat{H}_2(t)$) par une méthode de maximum de vraisemblance. La statistique de test est alors définie pour un $\delta > 0$

$$T_N = \sqrt{N} \sup_{\delta < t < 1-\delta} \sqrt{t(1-t)} \left| \widehat{H}_1(t) - \widehat{H}_2(t) \right|. \quad (5.38)$$

Notre approche est différente puisque nous supposons disposer non pas d'une trajectoire discrétisée d'un processus à longue mémoire mais d'un processus localement à longue mémoire. Nous estimons à tout instant la régularité du processus, ce qui nous permet de former la statistique mesurant l'écart quadratique moyen de l'estimateur fonctionnel par rapport à sa moyenne ergodique. En outre, l'intérêt d'estimer à tout instant la régularité du processus nous permet de construire des tests plus généraux que celui discuté (voir Section 5.5.2.2).

Revenons à notre cadre de travail et définissons les hypothèses de test :

$$H_0(\beta_1, \beta_2) : H(t) = H \text{ sur } [\beta_1, \beta_2] \quad \text{contre} \quad H_1(\beta_1, \beta_2) : H(t) \neq H \text{ sur } [\beta_1, \beta_2],$$

pour des réels $\beta_1, \beta_2 \in]0, 1[$. Définissons ensuite la statistique $T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2)$ par :

$$T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \widetilde{H}_{N,\epsilon}(t) - \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \widetilde{H}_{N,\epsilon}(s) ds \right\}^2 dt. \quad (5.39)$$

où $\widetilde{H}_{N,\epsilon}(\cdot) = \widetilde{H}_{N,\epsilon}(\cdot, a, M)$ désigne l'estimateur de la fonction de Hurst explicitée dans la Section 5.3.2. L'introduction de cette statistique est justifiée par le résultat suivant, explicitant le comportement asymptotique de $T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2)$ sous l'hypothèse H_0 .

Proposition 5.6 *Soient $\beta_1, \beta_2 \in]0, 1[$, $\beta_1 \leq \beta_2$, alors sous les hypothèses de la Proposition 5.4 et sous l'hypothèse nulle $H_0(\beta_1, \beta_2)$, nous avons lorsque $N \rightarrow +\infty$*

$$T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) \xrightarrow{p.s.} 0 \quad (5.40)$$

$$v_N T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) \xrightarrow{\mathcal{L}} T(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \mathbb{G}_{\widetilde{H}}(t) - \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \mathbb{G}_{\widetilde{H}}(s) ds \right\}^2 dt. \quad (5.41)$$

où $v_N = 2N\epsilon$ et où $\mathbb{G}_{\widetilde{H}}$ est le processus gaussien centré de fonction de covariance définie par (5.25).

La preuve de la Proposition 5.6 découle directement du Théorème de convergence dominée et de la convergence en loi sur $]0, 1[$ de $\tilde{H}_{N,\epsilon}(\cdot, a, M) - H(\cdot)$, Proposition 5.4. Pour mettre en œuvre un test de niveau α basé sur la statistique $T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2)$, il suffit de calculer le $(1 - \alpha)$ -quantile, q_α , de $T(\beta_1, \beta_2)$ et de rejeter H_0 si $v_N T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) > q_\alpha$. Pour évaluer le quantile q_α , nous proposons une méthode de Monte-Carlo consistant à simuler R mouvements browniens multifractionnaires de fonction de Hurst $\tilde{H}_{N,\epsilon}$. Pour chacun de ces mbms, on estime la fonction de Hurst, estimateur fonctionnel que l'on note $\tilde{H}_{N,\epsilon}^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, R$ puis on évalue les statistiques

$$v_N T_{N,\epsilon}^{(i)}(\beta_1, \beta_2) = v_N \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \tilde{H}_{N,\epsilon}^{(i)}(t) - \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \tilde{H}_{N,\epsilon}^{(i)}(s) ds \right\}^2 dt,$$

pour $i = 1, \dots, R$. Il suffit alors d'estimer q_α par le quantile empirique de $\{v_N T_{N,\epsilon}^{(1)}, \dots, v_N T_{N,\epsilon}^{(R)}\}$.

Intéressons nous à présent au calcul de la puissance asymptotique de notre test. Pour cela, définissons la suite d'hypothèses

$$H_{1,N}(\beta_1, \beta_2) : \quad |H(t) - \bar{H}| = \frac{\delta_N}{\sqrt{v_N}}, \quad \forall t \in [\beta_1, \beta_2], \quad (5.42)$$

où nous notons $\bar{f} = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(s) ds$, et où $(\delta_N)_{N \geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs vérifiant $\delta_N \rightarrow +\infty$, $\frac{\delta_N}{\sqrt{v_N}} \rightarrow 0$, lorsque $N \rightarrow +\infty$. Avec ce choix de suite d'hypothèses $H_{1,N}$, nous pouvons montrer le résultat suivant :

Proposition 5.7 *Pour tout $u \geq 0$, nous avons*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(v_N T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) \geq u \mid H_{1,N}(\beta_1, \beta_2) \right) = 1. \quad (5.43)$$

En conséquence, sous la suite d'hypothèses $H_{1,N}(\beta_1, \beta_2)$ le test est asymptotiquement de puissance 1.

5.5.2.2 Extension des résultats

Le but de cette seconde partie est d'étendre les statistiques de tests, i.e. de pouvoir tester le fait que H appartienne à une famille de fonctions paramétrée par θ . Plus précisément, nous supposons que H est issue d'un modèle linéaire, i.e. que H peut s'exprimer sous la forme $H(t) = \sum_{i=1}^q \theta_i g_i(t)$ sur $[\beta_1, \beta_2]$ ($\beta_1, \beta_2 \in]0, 1[$), où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$ ($q \geq 1$) (Θ d'intérieur non vide), et où

$$g : \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q \\ t \longmapsto (g_1(t), \dots, g_q(t)) \end{array}$$

satisfait les deux hypothèses suivantes.

- (i) $g_i \in L^2([\beta_1, \beta_2])$, $i = 1, \dots, q$.
- (ii) les fonctions (g_1, \dots, g_q) sont indépendantes.

Définissons le sous-espace vectoriel \mathcal{G}

$$\mathcal{G} = \left\{ \sum_{i=1}^q \theta_i g_i(\cdot), g \text{ satisfaisant (i) et (ii), } \theta \in \Theta \right\}.$$

On souhaite donc tester

$$H_0(\beta_1, \beta_2) : H \in \mathcal{G} \quad \text{contre} \quad H_1(\beta_1, \beta_2) : H \notin \mathcal{G},$$

sur l'intervalle $[\beta_1, \beta_2]$. Au vu de l'estimateur fonctionnel $\tilde{H}_{N,\epsilon}$, on peut estimer le paramètre θ en minimisant la fonction

$$f(\theta) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \tilde{H}_{N,\epsilon}(t) - \theta^t g(t) \right\}^2 dt,$$

soit

$$\tilde{\theta}_{N,\epsilon} = G^{-1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(s)^t \tilde{H}_{N,\epsilon}(s) ds.$$

Il est donc naturel d'introduire la statistique suivante :

$$T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \tilde{H}_{N,\epsilon}(t) - \tilde{\theta}_{N,\epsilon}^t g(t) \right\} dt. \quad (5.44)$$

Nous obtenons alors le Corollaire suivant.

Corollaire 5.1 Soient $\beta_1, \beta_2 \in]0, 1[$, $\beta_1 \leq \beta_2$, alors sous les hypothèse de la Proposition 5.4 et sous l'hypothèse nulle $H_0(\beta_1, \beta_2)$, nous avons lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) \xrightarrow{p.s.} 0 \quad (5.45)$$

$$v_N T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) \xrightarrow{\mathcal{L}} T(\beta_1, \beta_2), \quad (5.46)$$

avec

$$T(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \mathbb{G}_{\tilde{H}}(t) - \left(G^{-1} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} g(s)^t \mathbb{G}_{\tilde{H}}(s) ds \right)^t g(t) \right\}^2 dt. \quad (5.47)$$

La preuve est identique à celle de la Proposition 5.6 découlant elle-même du Théorème de convergence dominée et de la Proposition 5.4.

Exemple : tendance linéaire, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $g(t) = (1, t)$. Un simple calcul montre que l'estimateur de θ est défini par

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{N,\epsilon}^{(1)} &= \frac{2}{(\beta_2 - \beta_1)^2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} (2(\beta_2 - \beta_1) - 3t) \tilde{H}_{N,\epsilon}(t) dt \\ \tilde{\theta}_{N,\epsilon}^{(2)} &= \frac{6}{(\beta_2 - \beta_1)^3} \int_{\beta_1}^{\beta_2} (2t - (\beta_2 - \beta_1)) \tilde{H}_{N,\epsilon}(t) dt. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Remarque : considérons la suite d'hypothèses définie par

$$H_{1,N}(\beta_1, \beta_2) : \quad |H(t) - \theta^t g(t)| = \frac{\delta_N}{\sqrt{v_N}}, \quad \forall t \in [\beta_1, \beta_2],$$

où $(\delta_N)_{N \geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs vérifiant $\delta_N \rightarrow +\infty$, $\frac{\delta_N}{\sqrt{v_N}} \rightarrow 0$, lorsque $N \rightarrow +\infty$. On peut obtenir un résultat analogue à la Proposition 5.7, à savoir que le test est asymptotiquement de puissance 1, sous la suite d'hypothèses $H_{1,N}(\beta_1, \beta_2)$.

Pour le moment nous disposons de statistiques nous permettant de tester l'appartenance de la fonction de Hurst à un modèle linéaire déterminé. Il serait intéressant de pouvoir tester, en s'appuyant sur les travaux de Cox et al [32], le fait que H est polynomiale contre l'alternative H n'est pas polynomiale. Ceci n'a pas été envisagé et pourrait faire l'objet d'un travail ultérieur.

5.6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons développé des méthodes pour identifier la régularité locale d'une trajectoire discrétisée d'un mbm. Les résultats permettent d'obtenir un estimateur de toute fonction $H \in \mathcal{C}^\eta([0, 1])$, avec $0 < \eta \leq 1$. Les simulations effectuées ont montré que lorsque $\eta = 1$, les procédures développées sont performantes, même pour des tailles d'échantillon de l'ordre de $N = 1000$, qui est une valeur raisonnable au regard de la complexité du processus. Dans un proche avenir, une attention particulière sera portée au cas $\eta < 1$, qui, pour le moment, pose quelques problèmes numériques. Par ailleurs, les tests développés dans la Section 5.5 offrent de belles perspectives pour les applications.

5.7 Preuves des résultats

Variations quadratiques locales

Lemme 5.3 *Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus centré admettant une fonction de corrélation r , et soit \bar{X}_n la moyenne empirique du processus X observé en $j = 1, \dots, n$, définie par $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X(j)$. Supposons $\forall i, j = 1, \dots, n$, $r(i, j) = \mathcal{O}(r'(j - i))$, avec r' telle que $r'(0) > r'(j)$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. Si $\mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, alors $\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} 0$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.*

Ce premier Lemme adapte un résultat de Doob ([40], p.492) valable pour les processus stationnaires, aux processus dont la fonction de corrélation est asymptotiquement stationnaire. **Preuve du Lemme 5.3 :** Il s'agit de reprendre la preuve du Théorème 6.2 de Doob [40] et de vérifier sa véracité avec les hypothèses énoncées. Soit α' tel que $\alpha\alpha' > 1$ et soit $n > m^{\alpha'}$, on a $\mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = \mathcal{O}(m^{-\alpha\alpha'})$. Notons $(n_m)_{m \geq 1}$ la suite d'entiers définie par $n_m = [m^{\alpha'}] + 1$, alors $\forall \epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_{n_m}| > \epsilon) \leq \frac{K^2}{\epsilon^2} \frac{1}{m^{\alpha\alpha'}}.$$

D'après le Lemme de Borel-Cantelli, nous avons alors lorsque $n \rightarrow +\infty$

$$\bar{X}_{n_m} \xrightarrow{p.s.} 0. \quad (5.49)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\max_{n_m \leq n \leq n_{m+1}} \left|\bar{X}_n - \frac{n_m}{n} \bar{X}_{n_m}\right|^2\right) &\leq \frac{1}{|n_m|^2} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=n_m}^{n_{m+1}} X(j)\right)^2\right) \\ &\leq \frac{1}{n_m^2} \sum_{j, j'=n_m}^{n_{m+1}} \mathbb{E}(X(j)X(j')) \\ &\leq K r'(0) \frac{(n_{m+1} - n_m)^2}{n_m^2} \leq \frac{K'}{m^2}. \end{aligned}$$

D'où $\forall \epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{n_m \leq n \leq n_{m+1}} \left|\bar{X}_n - \frac{n_m}{n} \bar{X}_{n_m}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{K'^2}{\epsilon^2} \frac{1}{m^2},$$

et d'après le Lemme de Borel-Cantelli

$$\bar{X}_n - \frac{n_m}{n} \bar{X}_{n_m} \xrightarrow{p.s.} 0, \quad (5.50)$$

(5.49) et (5.50) montrent que $\overline{X}_n \xrightarrow{p.s.} 0$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.

□

Remarque: une lecture attentive de ce Lemme montre que si X est un processus vérifiant les hypothèses du Lemme 5.3 alors $\log(n)\overline{X}_n \xrightarrow{p.s.} 0$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Preuve du Lemme 5.1 :

Pour effectuer ce calcul, nous utilisons la représentation spectrale du mbm car elle permet la séparation entre la variable t gérant l'évolution de la régularité et la variable λ , variable fréquentielle. Par souci de clarté, notons $C'(t) = C(t)K(2H(t))^{1/2}/\sqrt{2}$. D'après (5.2) et un changement de variables $\lambda = Nu$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(V^a \left(\frac{j}{N} \right) V^a \left(\frac{j'}{N} \right) \right) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{q, q'} a_q a_{q'} (e^{i(j-q)u} - 1) (e^{-i(j'-q')u} - 1) \frac{C'(\frac{j-q}{N}) C'(\frac{j'-q'}{N})}{|Nu|^{H(\frac{j-q}{N}) + H(\frac{j'-q'}{N})}} N du \\ &= A + B, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{q, q'=0}^{\ell} a_q a_{q'} (e^{i(j-q)u} - 1) (e^{-i(j'-q')u} - 1) \frac{C'(t)C'(t')}{N^{H(t)+H(t')}} \frac{du}{|u|^{H(t)+H(t')+1}}. \\ B &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{q, q'=0}^{\ell} a_q a_{q'} (e^{i(j-q)u} - 1) (e^{-i(j'-q')u} - 1) \frac{|N|^{-H(t)-H(t')}}{|u|^{H(t)+H(t')+1}} \times \\ &\quad \left\{ \frac{C'(\frac{j-q}{N}) C'(\frac{j'-q'}{N})}{|Nu|^{H(\frac{j-q}{N}) + H(\frac{j'-q'}{N}) - H(t) - H(t')}} - C'(t)C'(t') \right\} du. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Puisque le filtre est d'ordre ≥ 1 ,

$$\sum_{q, q'=0}^{\ell} a_q a_{q'} (e^{i(j-q)u} - 1) (e^{-i(j'-q')u} - 1) = \sum_{q, q'=0}^{\ell} e^{i(j-j'+q'-q)u} a_q a_{q'},$$

ce qui permet de réécrire le premier terme :

$$\begin{aligned} A &= N^{-H(t)-H(t')} C'(t)C'(t') \sum_{q, q'=0}^{\ell} a_q a_{q'} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(j-j'+q'-q)u}}{|u|^{H(t)+H(t')+1}} du \\ &= N^{-H(t)-H(t')} C'(t)C'(t') \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{q, q'=0}^{\ell} a_q a_{q'} |q - q' + j' - j|^{H(t)+H(t')} \\ &= \frac{C'(t)C'(t')}{N^{H(t)+H(t')}} \pi^{\frac{a_{H(t)} + \frac{H(t')}{2}}}{2} (j' - j). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Puisque $H \in \mathcal{C}^\eta([0, 1])$,

$$|Nu|^{H(\frac{j-q}{N}) - H(t) + H(\frac{j'-q'}{N}) - H(t')} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(|Nu|)). \quad (5.53)$$

En outre,

$$C' \left(\frac{j-q}{N} \right) = C'(t) + \mathcal{O}(\epsilon^\eta) \quad \text{et} \quad C' \left(\frac{j'-q'}{N} \right) = C'(t') + \mathcal{O}(\epsilon^\eta). \quad (5.54)$$

(5.53) et (5.54) permettent d'obtenir la majoration suivante pour B :

$$B = \frac{C(t)C(t')}{NH(t)+H(t')} \pi_{\frac{H(t)+H(t')}{2}}^a (j' - j) \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N)) +$$

$$C'(t)C'(t') \sum_{q,q'=0}^{\ell} a_q a_{q'} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(j-j'+q'-q)u}}{|u|^{H(t)+H(t')+1}} \log(|u|) du \right) \times \mathcal{O}(\epsilon^\eta).$$

Dans un voisinage de 0,

$$\sum_{q,q'} a_q a_{q'} \frac{e^{i(j-j'+q'-q)u}}{|u|^{H(t)+H(t')+1}} \log(|u|) = o(|u|^{2p-H(t)-H(t')} \log(|u|)).$$

L'intégrale est définie en 0, et nous pouvons conclure à

$$\mathbb{E} \left(V^a \left(\frac{j}{N} \right) V^a \left(\frac{j'}{N} \right) \right) = \frac{C(t)C(t')}{NH(t)+H(t')} \pi_{\frac{H(t)+H(t')}{2}}^a (j' - j) \{1 + \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N))\}.$$

□

Preuve de la Proposition 5.1 :

(i) On a

$$\mathbb{E} (V_{N,\epsilon}(t, a)^2) = \frac{1}{v_N(t, a)^2} \sum_{j,j' \in \mathcal{V}_{N,\epsilon}(t, a)} \mathbb{E} (H_2(Z_N^a(j)) H_2(Z_N^a(j'))) ,$$

où $Z_N^a(j) = \frac{V^a(\frac{j}{N})}{\mathbb{E}(V^a(\frac{j}{N})^2)^{1/2}}$ et où H_2 est le deuxième polynôme d'Hermite défini par $H_2(u) = u^2 - 1$. D'après le Lemme 5.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (H_2(Z_N^a(j)) H_2(Z_N^a(j'))) &= 2 \mathbb{E} (Z_N^a(j) Z_N^a(j'))^2 \\ &= 2 \frac{\pi_{H(t)}^a (j' - j)^2}{\pi_{H(t)}^a(0)^2} \{1 + \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N))\} . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (V_{N,\epsilon}(t, a)^2) &= \frac{1}{v_N(t, a)^2} \sum_{|j| < v_N(t, a)} (v_N(t, a) - 1 - |j|) \frac{\pi_{H(t)}^a(j)^2}{\pi_{H(t)}^a(0)^2} \{1 + \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N))\} \\ &\sim \frac{1}{v_N(t, a)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_{H(t)}^a(j)^2}{\pi_{H(t)}^a(0)^2}, \quad \text{lorsque } (N, \epsilon) \rightarrow (+\infty, 0). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.1,

$$\pi_{H(t)}^a(j) = \mathcal{O}(j^{4H(t)-4p}).$$

Donc si $p > H(t) + 1/4$,

$$\mathbb{E} (V_{N,\epsilon}(t, a)^2) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{v_N(t, a)} \right). \quad (5.55)$$

Précisons le cas critique : si $p = 1$ et $H(t) = 3/4$ alors

$$\mathbb{E} (V_{N,\epsilon}(t, a)^2) = \mathcal{O} \left(\frac{\log(v_N(t, a))}{v_N(t, a)} \right), \quad (5.56)$$

et si $p = 1$ et $H(t) > 3/4$ alors

$$\mathbb{E} (V_{N,\epsilon}(t, a)^2) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{v_N(t, a)^{2-2H(t)}} \right). \quad (5.57)$$

La convergence presque sûre est assurée par (5.55), (5.56) ou (5.57) selon p et $H(t)$, et le Lemme 5.3.

(ii) D'après le Théorème 1 de Breuer et Major adapté aux processus gaussiens non stationnaires ([22], p.429), la condition nécessaire pour obtenir un critère de normalité asymptotique est la sommabilité au carré de $\mathbb{E} (Z_N^a(j') Z_N^a(j' + j))$, $\forall j' \in \mathbb{Z}$. Or,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} (Z_N^a(j') Z_N^a(j' + j))^2 \sim \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{O} \left(j^{4H(t)-4p} \right), \quad \text{lorsque } (N, \epsilon) \rightarrow (+\infty, 0).$$

On obtient alors le résultat énoncé en utilisant le fait que $p > \overline{H} + 1/4$. □

(iii) Nous traitons le cas $d = 2$, le cas $d > 2$ s'en déduisant facilement. Définissons pour $t \in [0, 1]$, $v(t) = \lim_{(N,\epsilon) \rightarrow (+\infty, 0)} \frac{v_N(t, a)}{N\epsilon}$. Soient $t_1, t_2 \in [0, 1]$, définissons encore pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire suivante

$$T_{N,\epsilon}(\lambda, \mu) = \lambda \sqrt{v(t_1)} V_{N,\epsilon}(t_1, a) + \mu \sqrt{v(t_2)} V_{N,\epsilon}(t_2, a). \quad (5.58)$$

On remarque que

$$T_{N,\epsilon}(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^{v_N(t_1, a) + v_N(t_2, a)} H_k(T(k)),$$

$$\text{où } H_k(x) = \begin{cases} \lambda \sqrt{v(t_1)} H_2(x) & \text{si } 1 \leq k \leq v_N(t_1, a) \\ \mu \sqrt{v(t_2, a)} H_2(x) & \text{si } v_N(t_1, a) < k \leq v_N(t_2, a) \end{cases}, \quad (5.59)$$

$$\text{et } T(k) = \begin{cases} Z(k_1^*) & \text{si } 1 \leq k \leq v_N(t_1, a) \\ Z(k_2^*) & \text{si } v_N(t_1, a) < k \leq v_N(t_2, a) \end{cases}.$$

H_2 désigne le deuxième polynôme d'Hermite, $Z(k)$ la v.a. $\frac{V^a(k/N)}{\mathbb{E}(V^a(k/N)^2)^{1/2}}$. Enfin, $k_1^* = \phi_{t_1}(k)$ (resp. $k_2^* = \phi_{t_2}(k)$) où ϕ_{t_1} (resp. ϕ_{t_2}) désigne une bijection de $\mathcal{V}_{N,\epsilon}(t_1, a)$ (resp. $\mathcal{V}_{N,\epsilon}(t_2, a)$) sur $\{1, \dots, v_N(t_1, a)\}$ (resp. $\{v_N(t_1, a) + 1, \dots, v_N(t_1, a) + v_N(t_2, a)\}$). Il est facile de voir que la fonction H_k définie par (5.59) est de rang d'Hermite 2. En outre pour $k_1, k_2 \in \{1, \dots, v_N(t_1, a) + v_N(t_2, a)\}$ ($k_1 \leq k_2$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T(k_1)T(k_2)) & \xrightarrow{(N,\epsilon) \rightarrow (+\infty, 0)} 2 \begin{cases} \frac{\pi_{H(t_1)}^a(k_2 - k_1)}{\pi_{H(t_1)}^a(0)} & \text{si } k_1, k_2 \leq v_N(t_1, a) \\ \frac{\pi_{H(t_2)}^a(k_2 - k_1)}{\pi_{H(t_2)}^a(0)} & \text{si } k_1, k_2 > v_N(t_1, a) \\ \frac{\pi_{\frac{H(t_1)}{2} + \frac{H(t_2)}{2}}^a(k_2 - k_1)}{\{\pi_{H(t_1)}^a(0)\pi_{H(t_2)}^a(0)\}^{1/2}} & \text{si } k_1 \leq v_N(t_1, a), k_2 > v_N(t_1, a) \end{cases} \\ & = \begin{cases} \mathcal{O}(|k_2 - k_1|^{2H(t_1)-2p}) & \text{si } k_1, k_2 \leq v_N(t_1, a) \\ \mathcal{O}(|k_2 - k_1|^{2H(t_2)-2p}) & \text{si } k_1, k_2 > v_N(t_1, a) \\ \mathcal{O}(|k_2 - k_1|^{H(t_1)+H(t_2)-2p}) & \text{si } k_1 \leq v_N(t_1, a), k_2 > v_N(t_1, a) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $\forall k' \in \{1, \dots, v_N(t_1, a) + v_N(t_2, a)\}$ puisque $p > \overline{H} + 1/4$ on a

$$\sum_{k=1}^{v_N(t_1, a) + v_N(t_2, a)} \mathbb{E} (T(k)T(k'))^2 = \mathcal{O}(1).$$

D'après le Théorème 1 de Breuer et Major adapté aux processus gaussiens non stationnaires ([22], p.429), il existe $\sigma^2(t_1, t_2, H, a)$ tel que $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{N} \epsilon T_{N, \epsilon}(\lambda, \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(t_1, t_2, H, a)).$$

En conclusion, le vecteur $\left(\sqrt{v_N(t_1, a)} V_{N, \epsilon}(t_1, a), \sqrt{v_N(t_2, a)} V_{N, \epsilon}(t_2, a) \right)^t$ est asymptotiquement gaussien. Enfin d'après les calculs précédents

$$\text{Cov} \left(\sqrt{v_N(t_1, a)} V_{N, \epsilon}(t_1, a), \sqrt{v_N(t_2, a)} V_{N, \epsilon}(t_2, a) \right) \longrightarrow 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_{\frac{H(t_1)}{2} + \frac{H(t_2)}{2}}^a(j)^2}{\pi_{\frac{H(t_1)}{2}}^a(0) \pi_{\frac{H(t_2)}{2}}^a(0)}. \quad (5.60)$$

□

Preuve du Lemme 5.2 :

Soit r un entier ≥ 4 . Par souci de clarté, nous noterons $Z(j) = Z_N^a(j) = \frac{V^a(\frac{j}{N})}{\mathbb{E}(V^a(\frac{j}{N})^2)^{1/2}}$, et $t^* = [N(t' - t)]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(v_N^{r/2} (V_{N, \epsilon}(t, a) - V_{N, \epsilon}(t', a))^r \right) &= \frac{1}{v_N^{r/2}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{V}_{N, \epsilon}(t, a)} H_2(Z(j)) - H_2(Z(j + t^*)) \right\}^r \\ &= \frac{1}{v_N^{r/2}} \sum_{j_1, \dots, j_r} \sum_{q=0}^r (-1)^q C_r^q \mathbb{E} (H_2(Z(j_1 + t^*)) \dots H_2(Z(j_q + t^*)) H_2(Z(j_{q+1})) \dots H_2(Z(j_r))). \end{aligned}$$

D'après la formule du diagramme, *e.g.* Taqqu [88],

$$\mathbb{E} (H_2(Z(j_1 + t^*)) \dots H_2(Z(j_q + t^*)) H_2(Z(j_{q+1})) \dots H_2(Z(j_r))) = T_1 + T_2 ,$$

où T_1 (resp. T_2) représente l'ensemble des termes issus du produit des covariances (resp. covariances au carré), dont nous explicitons la forme ci-après.

Termes T_1 : à des permutations près sur les indices les termes de T_1 peuvent s'écrire

$$\mathbb{E} (Z(j_1 + t^*)Z(j_2 + t^*)) \dots \mathbb{E} (Z(j_{q-1} + t^*)Z(j_q + t^*)) \dots \mathbb{E} (Z(j_{r-1})Z(j_r)) \quad (5.61)$$

D'après le Lemme 5.1 il existe $K > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $N \geq N_1$, on ait :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_N^{r/2}} \sum_{j_1, \dots, j_r} (5.61) &\leq \frac{1}{v_N^{r/2}} \sum_{j_1, \dots, j_r} \pi_{\frac{H(t')}{2}}^a(j_2 - j_1) \dots \pi_{\frac{H(t')}{2}}^a(j_q - j_{q-1}) \pi_{\frac{H(t)}{2} + \frac{H(t')}{2}}^a(j_{q+1} - j_q) \dots \\ &\quad \dots \pi_{\frac{H(t)}{2}}^a(j_r - j_{r-1}) \pi_{\frac{H(t)}{2} + \frac{H(t')}{2}}^a(j_1 - j_r) \\ &\leq \frac{K}{v_N^{r/2}} \sum_{j_2, \dots, j_r} \left\{ \sum_{j_1} \pi_{\frac{H(t)}{2} + \frac{H(t')}{2}}^a(j_1 - j_r) \pi_{\frac{H(t')}{2}}^a(j_2 - j_1) \right\} \dots \pi_{\frac{H(t)}{2}}^a(j_r - j_{r-1}). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Soient A_1 , A_2 et A_3 les matrices de covariance associées aux opérateurs $\pi_{H(t)}^a$, $\pi_{H(t')}^a$ et $\pi_{\frac{H(t)}{2} + \frac{H(t')}{2}}^a$, et soit Q_α l'ensemble des matrices carrées dont les coefficients vérifient

$$|(A)_{j,k}| \leq c(1 + |k - j|)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, c > 0.$$

On sait que A_1 , A_2 et $A_3 \in Q_{2p-2\bar{H}}$ où $\bar{H} = \sup_t H(t)$. En outre, Jaffard [57] a montré que Q_α est une algèbre, pour $\alpha > 1$. Donc,

$$A_i A_j \in Q_{2p-2\bar{H}}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

En itérant cet argument, on montre qu'il existe $B \in Q_{2p-2\bar{H}}$ telle que

$$\begin{aligned} (5.62) \quad &\leq \frac{C_1}{v_N^{r/2}} \sum_{j_{r-1}, j_r} (B)_{j_{r-1} j_r} (A_1)_{j_{r-1} j_r} \\ &\leq \frac{C_2}{v_N^{r/2}} \sum_{j_{r-1}, j_r} (1 + |j_r - j_{r-1}|)^{4\bar{H}-4p} \sim \frac{C_2}{v_N^{r/2-1}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|)^{4\bar{H}-4p}. \end{aligned}$$

Puisque $p > \bar{H} + 1/4$, la série converge et par conséquent :

$$\frac{1}{v_N^{r/2}} \sum_{j_1, \dots, j_r} \sum_{q=0}^r (-1)^q C_r^q \times T_1 \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } (N, \epsilon) \rightarrow (+\infty, 0). \quad (5.63)$$

Termes T_2 : d'après la formule du diagramme et le Lemme 5.1, il existe $K > 0$, $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $N \geq N_2$ on ait :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_N^{r/2}} \sum_{q=0}^r (-1)^q C_r^q \sum_{j_1, \dots, j_r} T_2 &\leq K \sum_{q=0}^r (-1)^q C_r^q \sum_{\substack{i=0, \dots, \min(q, r-q) \\ q-i \text{ pair}}} \\ &\left\{ A_{\max(q, r-q)}^{|r-2q|} S\left(\frac{H(t)}{2} + \frac{H(t')}{2}\right)^i N_{r-q-i} S(H(t))^{\frac{r-q-i}{2}} N_{q-i} S(H(t'))^{\frac{q-i}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\text{où } S(H) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \pi_H^a(j)^2 \quad \text{et } N_\alpha = (\alpha - 1) \times (\alpha - 3) \times \dots \times 3 \times 1.$$

En utilisant (5.63) et (5.64), on vérifie alors que :

$$\mathbb{E} \left(v_N^{r/2} (V_{N,\epsilon}(t, a) - V_{N,\epsilon}(t', a))^r \right) = \mathcal{O} \left\{ \left(S(H(t)) - 2S\left(\frac{H(t)}{2} + \frac{H(t')}{2}\right) + S(H(t')) \right)^{r/2} \right\}. \quad (5.65)$$

Notons $U(t, t') = S(H(t)) - 2S\left(\frac{H(t)}{2} + \frac{H(t')}{2}\right) + S(H(t'))$. En utilisant (5.8), on montre alors que :

$$\begin{aligned}
U(t, t') &= \frac{1}{4} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{q_1, \dots, q_4} a_{q_1} \dots a_{q_4} (|q_1 - q_2 + j| |q_3 - q_4 + j|)^{H(t)+H(t')} \times \\
&\quad \left\{ (|q_1 - q_2 + j| |q_3 - q_4 + j|)^{H(t)-H(t')} - 1 + (|q_1 - q_2 + j| |q_3 - q_4 + j|)^{H(t')-H(t)} - 1 \right\} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{q_1, \dots, q_4} a_{q_1} \dots a_{q_4} (|q_1 - q_2 + j| |q_3 - q_4 + j|)^{H(t)+H(t')} \times \\
&\quad \left\{ |t - t'|^{2\eta} \log(|q_1 - q_2 + j| |q_3 - q_4 + j|)^2 (1 + o(1)) \right\} \\
&= |t - t'|^{2\eta} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{O} \left(|j|^{2H(t)+2H(t')-4p} \log(1 + |j|) \right).
\end{aligned}$$

La série converge si $p > \overline{H} + 1/4$, en conséquence :

$$U(t, t') = \mathcal{O}(|t - t'|^{2\eta}). \quad (5.66)$$

□

Preuve de la Proposition 5.2 :

Soit $r = 2 \left(1 + \left\lfloor \frac{1}{\eta} \right\rfloor \right)$, d'après le Lemme 5.2, il vient

$$\mathbb{E} \left(v_N^{r/2} (V_{N,\epsilon}(t, a) - V_{N,\epsilon}(t', a))^r \right) = \mathcal{O}(|t - t'|^{r\eta}).$$

D'après la Proposition 5.1 (iii) et puisque $r\eta > 1$, nous avons de manière classique la convergence en loi, pour la topologie de Skorohod, de $V_{N,\epsilon}(\cdot, a)$ vers le processus gaussien \mathbb{G} de fonction de covariance définie par (5.60).

□

Modèle mbms

Preuve de la Proposition 5.3 :

(i) Les définitions de $V_{N,\epsilon}$, $S_{N,\epsilon}$ et le Lemme 5.1 permettent de montrer que

$$\{1 + V_{N,\epsilon}(t, a)\} \{1 + \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N))\} = N^{2(\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) - H(t))} \frac{\pi_{\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a)}^a(0)}{\pi_{H(t)}^a(0)}. \quad (5.67)$$

En utilisant la convergence presque sûre de $V_{N,\epsilon}(t, a)$ vers 0 et la continuité du logarithme en 1, il vient

$$2(\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) - H(t)) \log(N) + \log \left(\pi_{\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a)}^a(0) / \pi_{H(t)}^a(0) \right) \xrightarrow{p.s.} 0.$$

Puis,

$$\left(\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) - H(t) \right) + \frac{1}{2 \log(N)} \log \left(\pi_{\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a)}^a(0) / \pi_{H(t)}^a(0) \right) \xrightarrow{p.s.} 0. \quad (5.68)$$

D'après la convergence presque sûre de $V_{N,\epsilon}(t, a)$ on a : $N^{2H(t)} S_{N,\epsilon}(t, a) \xrightarrow{p.s.} \pi_{H(t)}^a(0)$. Ainsi, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall N \geq N_0$ on ait presque sûrement

$$S_{N,\epsilon}(t, a) \leq \frac{2}{N^{2H(t)}} \pi_{H(t)}^a(0).$$

Supposons $H(t) \in]\delta, 1[$ pour un $\delta > 0$, alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall N \geq N_1$ on ait presque sûrement

$$0 < S_{N,\epsilon}(t, a) < \frac{1}{N^{2\delta}} \pi_\delta^a(0) = g_{N,a}(\delta).$$

Donc, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall N \geq N_1$ on ait presque sûrement

$$\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) = g_{N,a}^{-1}(S_{N,\epsilon}(t, a)) \in]\delta, 1[, \quad \forall \delta > 0.$$

Ceci et (5.68) assurent la convergence presque sûre de $\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a)$. En outre, d'après (5.67) et la Proposition 5.1,

$$\mathbb{E} \left(\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) - H(t) \right) = \mathcal{O}(\epsilon^\eta),$$

$$\text{et } \text{Var} \left(\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) - H(t) \right) = \mathcal{O}(\text{Var}(V_{N,\epsilon}(t, a)) \log(N)^{-2}) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{N \epsilon \log(N)^2} \right).$$

(ii) Commençons par regarder le cas $d = 1$. D'après (5.67), on a presque sûrement

$$V_{N,\epsilon}(t, a) \stackrel{N \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \left(H(t) - \widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) \right) \log(N) (1 + o(1)). \quad (5.69)$$

Ainsi, la variable aléatoire $\sqrt{v_N(t, a)} V_{N,\epsilon}(t, a)$ converge en loi vers la même limite que la variable aléatoire $2\sqrt{v_N(t, a)} \log(N) \left(\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) - H(t) \right)$, d'où le résultat. Le cas $d > 1$ se déduit facilement de la Proposition 5.1 (iii). Terminons par le calcul suivant pour $t, t' \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(\sqrt{v_N(t, a)} \log(N) \{ \widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) - H(t) \}, \sqrt{v_N(t', a)} \log(N) \{ \widehat{H}_{N,\epsilon}(t', a) - H(t') \} \right) \\ \sim \frac{1}{4} \text{Cov} \left(\sqrt{v_N(t, a)} V_{N,\epsilon}(t, a), \sqrt{v_N(t', a)} V_{N,\epsilon}(t', a) \right) \\ \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_{\frac{H(t)+H(t')}{2}}^a(j)^2}{\pi_{H(t)}^a(0) \pi_{H(t')}^a(0)}, \quad \text{lorsque } N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

(iii) Soit r un entier pair ≥ 4 et soient $t, t' \in]0, 1[$. D'après (5.69) il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall N \geq N_0$ on ait presque sûrement

$$V_{N,\epsilon}(t, a) - V_{N,\epsilon}(t', a) \leq \{ H(t) - \widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) - H(t') - \widehat{H}_{N,\epsilon}(t', a) \} \log(N).$$

Par conséquent, pour tout $N \geq N_0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(v_N^{r/2} \log(N)^r \left(\widehat{H}_{N,\epsilon}(t, a) - H(t) - \widehat{H}_{N,\epsilon}(t', a) - H(t') \right)^r \right) = \\ \mathcal{O} \left(\mathbb{E} \left(v_N^{r/2} (V_{N,\epsilon}(t, a) - V_{N,\epsilon}(t', a))^r \right) \right). \end{aligned}$$

En choisissant r suffisamment grand, le résultat découle du Lemme 5.2.

□

Modèle mbm non standard

Outre les notations introduites auparavant, nous définissons

$$\xi_{N,\epsilon}(t, a) = L_{N,\epsilon}(t, a) - X_M \alpha(t).$$

Preuve de la Proposition 5.4 :

(i) Il s'agit tout d'abord de remarquer que

$$\tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M) - H(t) = \frac{A^t}{2\|A\|^2} \xi_{N,\epsilon}(t, a), \quad (5.70)$$

puis que

$$N^{2H(t)} \frac{S_{N,\epsilon}(t, a^m)}{C(t)^2 \pi_{H(t)}^{a^m}(0)} = \{1 + V_{N,\epsilon}(t, a^m)\} \{1 + \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N))\}. \quad (5.71)$$

D'après la Proposition 5.1, il vient que $N^{2H(t)} \frac{S_{N,\epsilon}(t, a^m)}{C(t)^2 \pi_{H(t)}^{a^m}(0)} \xrightarrow{p.s.} 1$, et par la suite $(\xi_{N,\epsilon}(t, a))_m \xrightarrow{p.s.} 0$, d'où la convergence presque sûre de $\tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M)$ vers $H(t)$. Remarquons en outre que $\mathbb{E}((\xi_{N,\epsilon}(t, a))_m) = \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N))$, d'où $\mathbb{E}(\tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M) - H(t)) = \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N))$, puis que $\text{Var}((\xi_{N,\epsilon}(t, a))_m) = \mathcal{O}(v_N(t, a^m)^{-1})$ d'où $\text{Var}(\tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M)) = \mathcal{O}((N\epsilon)^{-1})$.

(ii) Commençons par regarder le cas $d = 1$. D'après (i), on a presque sûrement

$$(\xi_{N,\epsilon}(t, a))_m = \log \left(N^{2H(t)} \frac{S_{N,\epsilon}(t, a^m)}{C(t)^2 \pi_{H(t)}^{a^m}(0)} \right) = \left(N^{2H(t)} \frac{S_{N,\epsilon}(t, a^m)}{C(t)^2 \pi_{H(t)}^{a^m}(0)} - 1 \right) (1 + o(1)). \quad (5.72)$$

Ainsi d'après (5.71), $\sqrt{v_N(t, a^m)}(\xi_{N,\epsilon}(t, a))_m$ converge en loi vers la même limite que la variable $\sqrt{v_N(t, a^m)}V_{N,\epsilon}(t, a^m)$ et d'après la Proposition 2.3, la Proposition 5.1 et puisque $\frac{v_N(t, a^i)}{v_N(t, a^M)} \rightarrow 1$, pour $i = 1, \dots, M$, on a :

$$\sqrt{v_N(t, a^M)} \xi_{N,\epsilon}(t, a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \Sigma(H(t), H(t), H(t))\right), \quad (5.73)$$

où $\Sigma(H(t), H(t), H(t))$ est la matrice $M \times M$ définie par

$$\begin{aligned} (\Sigma(H(t), H(t), H(t)))_{m,n} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sqrt{v_N(t, a^m)} \sqrt{v_N(t, a^n)} \mathbb{E}(V_{N,\epsilon}(t, a^m) V_{N,\epsilon}(t, a^n)) \\ &= 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_{H(t)}^{a^m, a^n}(j)^2}{\pi_{H(t)}^{a^m}(0) \pi_{H(t)}^{a^n}(0)}, \quad m, n = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

$$\text{avec,} \quad \pi_H^{a^m, a^n}(j) = \sum_{q=0}^{m\ell} \sum_{q'=0}^{n\ell} a_q a'_q |mq - nq' + j|^{2H}.$$

Les résultats (5.70) et (5.73) assurent que $\tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a) - H(t)$ est asymptotiquement gaussien. Le cas $d > 1$ se déduit très facilement en utilisant la Proposition 5.1 (iii), qui implique la convergence finie-dimensionnelle gaussienne de $\xi_{N,\epsilon}(\cdot, a)$. Terminons par calculer pour $t, t' \in [0, 1]$

$$\text{Cov} \left(\sqrt{v_N(t, a)} \{ \tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M) - H(t) \}, \sqrt{v_N(t', a)} \{ \tilde{H}_{N,\epsilon}(t', a, M) - H(t') \} \right)$$

$$\begin{aligned} &\sim \frac{A^t}{4\|A\|^4} \mathbb{E} \left(\sqrt{v_N(t, a^M)} \{V_{N, \epsilon}(t, a^1), \dots, V_{N, \epsilon}(t, a^M)\}^t \sqrt{v_N(t', a^M)} \{V_{N, \epsilon}(t', a^1), \dots, V_{N, \epsilon}(t', a^M)\} \right) A \\ &\rightarrow \frac{1}{4\|A\|^4} A^{t\Sigma} \left(\frac{H(t)}{2} + \frac{H(t')}{2}, H(t), H(t') \right) A, \quad \text{lorsque } N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

(iii) Soient r un entier ≥ 4 , et soient $t, t' \in]0, 1[$, d'après (5.72), il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall N \geq N_0$ on ait presque sûrement pour $m = 1, \dots, M$

$$(\xi_{N, \epsilon}(t, a) - \xi_{N, \epsilon}(t', a)) \leq 2 \left(N^{2H(t)} \frac{S_{N, \epsilon}(t, a^m)}{C(t)^2 \pi_{H(t)}^{a^m}(0)} - N^{2H(t')} \frac{S_{N, \epsilon}(t', a^m)}{C(t')^2 \pi_{H(t')}^{a^m}(0)} \right).$$

D'après (5.71), il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall N \geq N_1$ on ait presque sûrement pour $m = 1, \dots, M$

$$\left(N^{2H(t)} \frac{S_{N, \epsilon}(t, a^m)}{C(t)^2 \pi_{H(t)}^{a^m}(0)} - N^{2H(t')} \frac{S_{N, \epsilon}(t', a^m)}{C(t')^2 \pi_{H(t')}^{a^m}(0)} \right) \leq 2 (V_{N, \epsilon}(t, a^m) - V_{N, \epsilon}(t', a^m)).$$

Ainsi pour tout $N \geq \max\{N_0, N_1\}$ on a

$$\mathbb{E} \left(v_N^{r/2} \{ \xi_{N, \epsilon}(t, a) - \xi_{N, \epsilon}(t', a) \}^r \right) = \mathcal{O} \left(\mathbb{E} \left(v_N^{r/2} \{ V_{N, \epsilon}(t, a) - V_{N, \epsilon}(t', a) \}^r \right) \right).$$

En choisissant r suffisamment grand, on obtient en utilisant le Lemme 5.2 la convergence en loi sur $]0, 1[$ de $\xi_{N, \epsilon}(\cdot, a)$, puis celle de $\tilde{H}_{N, \epsilon}(\cdot, a, M) - H(\cdot)$ en utilisant (5.70). \square

Propriété asymptotique du mbm

Preuve de la Proposition 5.5 : Définissons

$$V_{N, \epsilon}(t, a, k) = \frac{1}{v_N(t, a)} \sum_{j \in \mathcal{V}_{N, \epsilon}(t, a)} \mathbb{H}^k \left(\frac{V^a(j/N)}{\mathbb{E}(V^a(j/N)^2)^{1/2}} \right),$$

où $\mathbb{H}^k(t) = |t|^k / E_k - 1$ et où E_k désigne le k -ème moment absolu de la loi normale standard. Dans le Chapitre 5, nous avons montré la convergence presque sûre et la convergence en loi de cette statistique dans le cas $k = 2$. Ceci n'est pas restrictif car en nous basant sur la preuve de la Proposition 2.1, on peut facilement montrer que lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$V_{N, \epsilon}(t, a, k) \xrightarrow{p.s.} 0, \quad (5.74)$$

et

$$\sqrt{v_N(t, a)} V_{N, \epsilon}(t, a, k) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(H(t), a, k)), \quad (5.75)$$

où

$$\sigma^2(H(t), a, k) = \sum_{q \geq 1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (c_{2j}^k)^2 (2j)! \frac{\pi_{H(t)}^a(j)^{2q}}{\pi_{H(t)}^a(0)^{2q}}.$$

c_{2j}^k représentant le $2j$ -ème coefficient du développement en polynômes d'Hermite de \mathbb{H}^k , donné par :

$$c_{2j}^k = \frac{1}{(2j)!} \prod_{q=0}^{j-1} (k - 2q).$$

(i) Commençons par remarquer que

$$P_{N,\epsilon}(t, a) = \frac{(1 + V_{N,\epsilon}(t, a, 4))}{(1 + V_{N,\epsilon}(t, a, 2))^2} \{1 + \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N))\}, \quad (5.76)$$

D'après (5.9) ceci signifie que presque sûrement, on a

$$\begin{aligned} P_{N,\epsilon}(t, a) - 1 &= (1 + V_{N,\epsilon}(t, a, 2))^{-2} \{V_{N,\epsilon}(t, a, 4) - 2V_{N,\epsilon}(t, a, 2) - V_{N,\epsilon}(t, a, 2)^2\} \times \\ &\quad \{1 + \mathcal{O}(\epsilon^\eta \log(N))\} \\ &\stackrel{N \rightarrow +\infty}{\underset{\sim}{\sim}} \{V_{N,\epsilon}(t, a, 4) - 2V_{N,\epsilon}(t, a, 2)\} \{1 + o(1)\}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

d'où le résultat.

(ii) Commençons par le cas $d = 1$. Soit $t \in [0, 1]$ et notons $Z^a(j/N) = \frac{V^a(j/N)}{\mathbb{E}(V^a(j/N)^2)^{1/2}}$, nous pouvons alors remarquer que

$$V_{N,\epsilon}(t, a, 4) - 2V_{N,\epsilon}(t, a, 2) = \frac{1}{3v_N(t, a)} \sum_{j \in \mathcal{V}_{N,\epsilon}(t, a)} H_4(Z^a(j/N)),$$

où H_4 désigne le 4-ème polynôme d'Hermite défini par $H_4(t) = t^4 - 6t^2 + 3$. D'après le Théorème 1 de Breuer et Major adapté aux processus gaussiens non stationnaires ([22], p.429), la condition nécessaire pour obtenir un critère de normalité asymptotique est la convergence de la série

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} (Z^a(j/N) Z^a(j + j'/N))^4, \quad \forall j' \in \mathbb{Z}.$$

Or, d'après le Lemme 5.7

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} (Z^a(j/N) Z^a(j + j'/N))^4 \stackrel{N \rightarrow +\infty}{\underset{\sim}{\sim}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(j^{4H(t) - 4p}), \quad \forall j' \in \mathbb{Z}.$$

En choisissant $p > \overline{H} + 1/8$, cette série est convergente. Ainsi, en utilisant en outre (5.77), on en déduit qu'il existe $\sigma^2(t)$ telle que lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{v_N(t, a)} \{P_{N,\epsilon}(t, a) - 1\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(t)).$$

La variance $\sigma^2(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} v_N(t, a) \mathbb{V}\text{ar}(P_{N,\epsilon}(t, a) - 1) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} v_N(t, a) \mathbb{V}\text{ar}(V_{N,\epsilon}(t, a, 4) - 2V_{N,\epsilon}(t, a, 2)) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{9} \sum_{j, j' \in \mathcal{V}_{N,\epsilon}(t, a)} \mathbb{E} (H_4(Z^a(j/N)) H_4(Z^a(j'/N))) \\ &= \frac{8}{3} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_{H(t)}^a(j)^4}{\pi_{H(t)}^a(0)^4}. \end{aligned}$$

La convergence finie-dimensionnelle de $(\sqrt{v_N(t_1, a)} \{P_{N,\epsilon}(t_1, a) - 1\}, \dots, \sqrt{v_N(t_d, a)} P_{N,\epsilon}(t_d, a)\})^t$, pour $t_1, \dots, t_d \in [0, 1]$ se démontre de la même manière que la Proposition 5.1 (iii). Terminons par calculer pour $t, t' \in [0, 1]$ et lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\text{Cov} \left(\sqrt{v_N(t, a)} \{P_{N,\epsilon}(t, a) - 1\}, \sqrt{v_N(t', a)} \{P_{N,\epsilon}(t', a) - 1\} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \sim \frac{1}{3} \sum_{\substack{j \in \mathcal{V}_{N,\epsilon}(t,a) \\ j' \in \mathcal{V}_{N,\epsilon}(t',a)}} \mathbb{E} (H_4(Z(j))H_4(Z(j'))) \\
& \rightarrow \frac{8}{3} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\pi_{\frac{H(t)+H(t')}{2}}^a(j)^4}{\pi_{H(t)}^a(0)^2 \pi_{H(t')}^a(0)} . \tag{5.78}
\end{aligned}$$

(iii) On se propose d'établir un critère de tension. Soient $t, t' \in I_{N,\epsilon}$, en notant $t^* = [N(t' - t)]$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(v_N^{r/2} \{ V_{N,\epsilon}(t, a, 4) - 2V_{N,\epsilon}(t, a, 2) - V_{N,\epsilon}(t', a, 4) + 2V_{N,\epsilon}(t', a, 2) \}^r \right) = \\
& \frac{1}{3^r v_N^{r/2}} \sum_{j_1, \dots, j_r} \sum_{q=0}^r (-1)^q C_r^q \mathbb{E} (H_4(Z(j_1 + t^*)) \dots H_4(Z(j_q + t^*)) H_4(Z(j_{q+1})) \dots H_4(Z(j_r))) .
\end{aligned}$$

En utilisant une nouvelle fois la formule du diagramme, il est possible de montrer, par des arguments similaires à la preuve du Lemme 5.2 qu'il existe $N_3 \in \mathbb{N}^*$ et $K > 0$ tels que pour tout $N \geq N_3$ on ait :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(v_N^{r/2} \{ V_{N,\epsilon}(t, a, 4) - 2V_{N,\epsilon}(t, a, 2) - V_{N,\epsilon}(t', a, 4) + 2V_{N,\epsilon}(t', a, 2) \}^r \right) \leq K \sum_{q=0}^r (-1)^q C_r^q \times \\
& \sum_{\substack{i=0, \dots, \min(q, r-q) \\ q-i \text{ pair}}} \left\{ A_{\max(q, r-q)}^{|r-2q|} S' \left(\frac{H(t)}{2} + \frac{H(t')}{2} \right)^i N_{r-q-i} S'(H(t))^{\frac{r-q-i}{2}} N_{q-i} S'(H(t'))^{\frac{q-i}{2}} \right\} . \tag{5.79}
\end{aligned}$$

$$\text{où } S'(H) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \pi_H^a(j)^4 \quad \text{et} \quad N_\alpha = (\alpha - 1) \times (\alpha - 3) \times \dots \times 3 \times 1 .$$

Ceci permet d'obtenir la majoration suivante, cf. (5.64) et (5.65) :

$$\mathbb{E} (\{ P_{N,\epsilon}(t, a) - 1 \}^r) = \mathcal{O} \left(\left\{ S'(H(t)) + S'(H(t')) - 2S' \left(\frac{H(t)}{2} + \frac{H(t')}{2} \right) \right\}^{r/2} \right) ,$$

et si $p > \overline{H} + 1/8$, d'après (5.66)

$$\mathbb{E} (\{ P_{N,\epsilon}(t, a) - 1 \}^r) = \mathcal{O} \left(|t - t'|^{\frac{rp}{2}} \right) . \tag{5.80}$$

Nous assurons ainsi le critère de tension dans l'espace des fonctions continues à droite et possédant une limite à gauche, en choisissant r suffisamment grand.

□

5.7.1 Test de multifractionnarité

Preuve de la Proposition 5.7 : sous la suite d'hypothèses $H_{1,N}(\beta_1, \beta_2)$ définie par (5.42), on a presque sûrement :

$$v_N T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) \geq W_{N,\epsilon} + \delta_N^2,$$

avec

$$\begin{aligned} W_{N,\epsilon} &= \frac{v_N}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M) - H(t) - \overline{\tilde{H}_{N,\epsilon}(\cdot, a, M) - H(\cdot)} \right\}^2 dt \\ &\quad - \frac{\delta_N}{\sqrt{v_N}} \frac{2v_N}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \tilde{H}_{N,\epsilon}(t, a, M) - H(t) - \overline{\tilde{H}_{N,\epsilon}(\cdot, a, M) - H(\cdot)} \right\} dt. \end{aligned} \quad (5.81)$$

D'après la convergence en loi sur $]0, 1[$ de $\tilde{H}(\cdot, a, M) - H(\cdot)$, énoncée par la Proposition 5.4, et d'après le Théorème de Slutsky, *e.g.* Grimmet et *al.* [48], il vient lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$W_{N,\epsilon} \xrightarrow{\mathcal{L}} T(\beta_1, \beta_2),$$

où $T(\beta_1, \beta_2)$ est la v.a. définie par (5.41). Pour tout $u \geq 0$, nous avons alors sous la suite d'hypothèses $H_{1,N}(\beta_1, \beta_2)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(v_N T_{N,\epsilon}(\beta_1, \beta_2) \geq u) &\geq \mathbb{P}(W_{N,\epsilon} + \delta_N^2 \geq u) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\delta_N^2} \{u - W_{N,\epsilon}\} \leq 1\right). \end{aligned}$$

Toujours d'après le Théorème de Slutsky, *e.g.* Grimmet et *al.* [48], on a lorsque $N \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\delta_N^2} \{u - W_{N,\epsilon}\} \xrightarrow{\mathcal{L}} 0,$$

d'où

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\delta_N^2} \{u - W_{N,\epsilon}\} \leq 1\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

□

A Simulation du mouvement brownien fractionnaire

A.1 Introduction et position du problème

Dans cette première annexe, nous souhaitons réaliser une étude bibliographique et comparative non exhaustive du problème de la simulation de trajectoires du mbf. La motivation d'obtenir de bonnes trajectoires est double : éventuelle adéquation graphique avec des données réelles, comparaison d'estimateurs du paramètre d'autosimilarité H par simulations de Monte-Carlo (et en particulier comparaison des estimateurs développés dans le Chapitre 2 avec l'estimateur du maximum de vraisemblance).

Cette annexe est organisée de la manière suivante. Nous décrivons cinq méthodes de simulation dans les Sections A.2 à A.6. Cette liste n'est pas exhaustive mais rassemble cependant les méthodes les plus citées et plus performantes dans la littérature. La Section A.7 discute de la qualité de l'approximation de la trajectoire discrétisée d'un mbf via les sommes cumulées de la trajectoire discrétisée d'un bgf. Enfin, la Section A.8 propose un critère permettant de juger de la qualité des divers simulateurs. Une telle étude a déjà été entreprise par Jenane et *al* [59] : trois procédures de tests définies indépendamment de l'identification du modèle y sont considérées. Notre approche est légèrement différente puisque nous proposons un test théorique basé sur le comportement asymptotique d'un estimateur paramétrique de H , ce qui permet d'extraire une méthode de simulation efficace parmi celles étudiées.

Pour cette étude, nous adoptons le cadre de travail suivant : simulation d'une trajectoire discrétisée, notée B_H , d'un mbf standard ($C = 1$) de taille N aux instants i/N pour $i = 0, \dots, N - 1$. Nous ne perdons aucune généralité à imposer ceci car une trajectoire discrétisée d'un mbf non standard, notée $B_{H,C}$, que l'on souhaiterait simuler aux instants i/Δ_N est obtenue trivialement par l'équation

$$B_{H,C}(i/\Delta_N) \stackrel{\mathcal{L}}{=} C \left(\frac{N}{\Delta_N} \right)^H B_H(i/N), \quad \text{pour } i = 0, \dots, N - 1.$$

Nous distinguons deux approches : la première consiste à ne regarder que le mbf (sans se préoccuper des accroissements) et donne naissance à trois méthodes : la première est basée sur la représentation stochastique moyenne mobile du mouvement brownien fractionnaire [69], la seconde repose sur l'intégration fractionnaire d'un bruit blanc gaussien décomposé sur une analyse multirésolution et suit en cela le travail de Sellan et *al*. [2], la dernière, la plus évidente, consiste à extraire la racine carrée de la matrice de covariance du mbf. La seconde approche est en fait un moyen détourné. L'idée est de générer un bruit gaussien fractionnaire, noté X , aux instants i/N pour $i = 0, \dots, N - 1$ et de définir une trajectoire discrétisée d'un mbf via les

sommes cumulées de X , c'est-à-dire de définir $B_H(i/N) = \sum_{k=0}^i X(k/N)$ pour $i = 1, \dots, N-1$ et $B_H(0) = 0$. L'intérêt de simuler le processus des accroissements réside dans sa stationnarité. La matrice de covariance du bgf aux instants i/N pour $i = 0, \dots, N-1$ devient une matrice de Toeplitz. Les deux méthodes développées ci-après (méthode de Levinson [78], méthode de Wood et Chan [97]) consistent en l'évaluation de la racine carrée d'une matrice de Toeplitz.

A.2 Représentation stochastique du mouvement brownien fractionnaire

En considérant la représentation stochastique moyenne mobile du mouvement brownien fractionnaire de Mandelbrot et Van Ness [69], une première tentative naturelle pour simuler le mbf consiste à discrétiser l'intégrale stochastique (2.1). Il nous suffit d'approcher (2.1) par une somme de Riemann tronquée à une borne $-a_N \rightarrow -\infty$, ce qui nous permet d'obtenir pour $t = 1, \dots, N-1$

$$B_H\left(\frac{t}{N}\right) = K_H \left\{ \sum_{k=-a_N}^0 \left[(t-k)^{H-1/2} - (-k)^{H-1/2} \right] B_1(k) + \sum_{k=0}^t (t-k)^{H-1/2} B_2(k) \right\},$$

où $K_H = \frac{V_H^{1/2}}{\Gamma(H+1/2) N^H}$ et où B_1 (resp. B_2) est un vecteur de $a_N + 1$ (resp. N) variables aléatoires gaussiennes standard indépendantes et indépendantes de B_2 . Le choix de a_N résulte d'un compromis entre la précision désirée et le nombre de points temporels. En pratique, et pour les illustrations qui vont suivre, nous avons choisi $a_N = N^{1.5}$. Cette approche est purement historique, et du fait des approximations successives, ne constitue pas une bonne manière de simuler un mbf.

A.3 Méthode de Sellan, Meyer et Abry

Cette méthode a été l'initiative de Sellan, Meyer et Abry [2]. Le mbf dérivant de l'intégration fractionnaire d'un bruit blanc (bb) gaussien, l'idée est de partir de la décomposition d'un bb sur une analyse multirésolution (notée AMR), *e.g.* Daubechies [35] pour un point de vue général sur les ondelettes et les AMRs :

$$w(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(k) \phi_0(t-k) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_j(k) \psi_{j,k}(t), \quad (\text{A.1})$$

où $\lambda(k)$ et $\gamma_j(k)$ sont des v.a. gaussiennes standard indépendantes. ϕ_0 représente la fonction échelle et $\{\psi_{j,k}\}_{j \geq 0, k \in \mathbb{Z}}$ la famille d'ondelettes associées à l'AMR. L'action de l'opérateur d'intégration fractionnaire, noté D^{-s} (avec $s = H + 1/2$), à (A.1) conduit à

$$B_H(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(k) (D^{-s} \phi_0)(t-k) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_j(k) (D^{-s} \psi_{j,k})(t). \quad (\text{A.2})$$

Le résultat suivant, dû à Sellan [85] décrit explicitement la manière d'intégrer fractionnairement une AMR, et la nécessité d'introduire des ondelettes biorthogonales.

Théorème A.1 Soit $V_0(\phi_0)$ une AMR orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$, de régularité $r \in \mathbb{N}^*$, ϕ_0 et ψ_0 représentant respectivement la fonction échelle et l'ondelette mère déduites de cette analyse. Supposons que $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, alors

$$V_0^{(s)} = \{ f \in L^2(\mathbb{R}), D^s f \in V_0 \}, \quad \text{et} \quad V_0^{(-s)} = \overline{\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \overline{D^{-s} f} \in V_0 \}},$$

définissent deux AMRs biorthogonales, admettant pour fonction échelle

$$\phi_0^{(s)} = U_s(\phi_0) \quad \text{pour} \quad V_0^{(s)}(\phi_0), \quad \text{et} \quad \phi_0^{(-s)} = \overline{U_{-s}(\phi_0)} \quad \text{pour} \quad V_0^{(-s)}(\phi_0),$$

où $g = U_s(f)$ a pour transformée de Fourier $(i2\pi\nu)^{-s}(1 - \exp(i2\pi\nu))^2 \widehat{f}(\nu)$, et pour ondelettes mère :

$$\psi_0^{(s)} = 4^s D^{-s}(\psi_0), \quad \text{et} \quad \psi_0^{(-s)} = 4^{-s} \overline{D^s}(\psi_0).$$

$\overline{D^{-s}}$ désigne l'opérateur conjugué de D^{-s} , et \overline{E} , pour un ensemble E , l'adhérence de E . Sous les conditions du Théorème A.1, Sellan montre qu'il existe un bb gaussien de variance σ^2 , permettant de construire un processus *ARIMA*(0, s , 0), noté b_H , et pour $j \in \mathbb{Z}^+$, un bb gaussien discret de variance $2^j \sigma^2$, noté $(\gamma_j(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, de telle sorte que la restriction de B_H à tout intervalle $]0, T]$, $T > 0$ admette la représentation suivante

$$\forall t \in]0, T], \quad B_H(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_H(k) \phi_0^{(s)}(t-k) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 4^{-s} 2^{-js} \gamma_j(k) \psi_{j,k}^{(s)}(t). \quad (\text{A.3})$$

L'implémentation informatique est réalisée en trois étapes :

1. Calcul des filtres relatifs à $\phi_0^{(s)}$ et $\psi_0^{(s)}$: soit $u(k)$ le filtre initial de l'AMR, relatif à ϕ_0 , et soit $v(k)$ le filtre en miroir quadrature associé. Les auteurs cités précédemment montrent, en notant $u^{(s)}$ et $v^{(s)}$ (resp. $u^{(-s)}$ et $v^{(-s)}$), les filtres associés à $\phi_0^{(s)}$ et $\psi_0^{(s)}$ (resp. $\phi_0^{(-s)}$ et $\psi_0^{(-s)}$), les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u^{(s)} &= f^{(s)} * u, & F^{(s)}(z) &= 2^{-s}(1+z^{-1})^s. \\ v^{(s)} &= g^{(s)} * v, & G^{(s)}(z) &= 2^s(1-z^{-1})^{-s}. \\ u^{(-s)} &= f^{(-s)} * u, & F^{(-s)}(z) &= 2^s(1+z)^{-s}. \\ v^{(-s)} &= g^{(-s)} * v, & G^{(-s)}(z) &= 2^{-s}(1-z)^s. \end{aligned}$$

où $*$ désigne le produit de convolution et où $F^{(\epsilon s)}$ (resp. $G^{(\epsilon s)}$) désigne la z -transformée de $f^{(\epsilon s)}$ (resp. $g^{(\epsilon s)}$), $\epsilon = \pm 1$. Cependant, un problème numérique survient : pour $s = H + 1/2$, les fonctions $f^{(s)}$ et $g^{(s)}$ ont, en général, un support infini et la série (A.3) diverge. Pour éviter ce problème, les approximations suivantes sont proposées :

$$\begin{aligned} u^{(s)} &= u * f^{(1)} * t f^{(d)}, & u^{(-s)} &= -\delta_{-1} * (\tilde{v}^{(s)})^\vee, \\ v^{(s)} &= v * g^{(1)} * t g^{(d)}, & v^{(-s)} &= \delta_1 * (\tilde{u}^{(s)})^\vee, \end{aligned}$$

où nous avons noté $(\tilde{w})^\vee$ le filtre de composantes $(-1)^k w(-k)$, où $d = s - 1$ et où $t f^{(d)}$ et $t g^{(d)}$ sont des versions de $f^{(d)}$ et $g^{(d)}$ tronquées supérieurement à un ordre choisi a priori.

2. Simulation de b_H : le processus *ARIMA*(0, s , 0) résulte de la convolution d'un bb gaussien avec le filtre de réponse impulsionnelle :

$$\alpha_k^{(s)} = \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{-s}{p} \quad \text{avec} \quad \binom{-s}{p} = \frac{\Gamma(-s+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(-s-k+1)}$$

La difficulté numérique décrite ci-dessus apparaissant de nouveau, l'approximation suivante est proposée: $b_H = \gamma_j * \alpha^{(1)} * t\alpha^{(d)}$, où $t\alpha^{(d)}$ est une version de $\alpha^{(d)}$ tronquée supérieurement à un ordre choisi a priori.

3. On tronque ensuite la série (A.3) à une résolution J pour obtenir :

$$B_H^J(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_H(k) \phi_{-J,k}^{(s)}(t) + \sum_{j=0}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_j(k) 4^{-s} 2^{-js} \psi_{j,k}^{(s)}(t). \quad (\text{A.4})$$

Ceci étant fait, nous pouvons utiliser l'algorithme pyramidal de Mallat adapté aux ondelettes biorthogonales, cf Daubechies [35]: décomposition à l'aide des filtres $u^{(-s)}$ et $v^{(-s)}$, et synthèse à l'aide des filtres $u^{(s)}$ et $v^{(s)}$. Le diagramme Fig.A.1 résume la procédure. Pour rester cohérent, l'obtention d'une trajectoire discrétisée de taille N avec une résolution J nécessite de générer le mbf sur une durée $T = 2^{-J}N$; il suffit d'utiliser l'autosimilarité du processus pour obtenir une trajectoire discrétisée aux instants i/N , pour $i = 0, \dots, N - 1$. D'un point de vue pratique, nous avons, comme Abry et Sellan le préconisent, choisi une résolution de 6 ou 7 et utilisé le filtre d'une ondelette de Daubechies d'ordre 20 pour sa régularité.

Légende

- ▷ $[\uparrow 2]$: opérateur de dilatation défini par $[\uparrow 2]x_k = x_{2k}$.
- ▷ b_H : $ARIMA(0, s, 0)$ simulé.
- ▷ g_0, \dots, g_{J-1} : v.a. gaussiennes standard simulées.

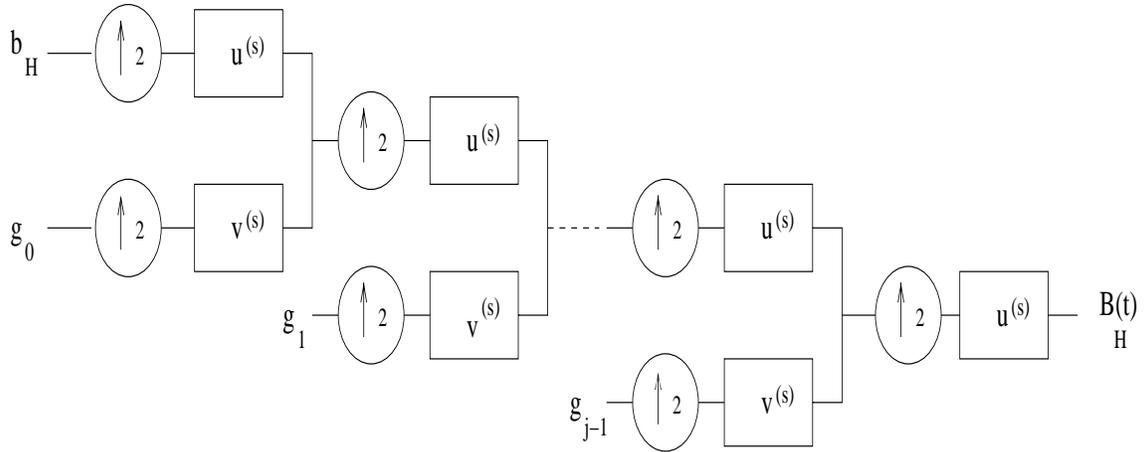


FIG. A.1 – Diagramme pour la simulation d'un mbf par synthèse d'ondelettes.

A.4 Méthode de Choleski

Soit Γ la matrice de covariance du mbf standard discrétisé aux instants i/N , pour $i = 0, \dots, N - 1$. D'après (2.2),

$$(\Gamma)_{i,j} = \Gamma\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right), \quad \text{pour } i, j = 0, \dots, N - 1.$$

Définissons Γ' comme étant la matrice Γ privée de sa première ligne et de sa première colonne. Puisque Γ' est une matrice symétrique définie positive, elle admet une décomposition de Choleski, $\Gamma' = LL^t$ où L est une matrice triangulaire inférieure. Simuler un une trajectoire discrétisée d'un mbf aux instants i/N pour $i = 1, \dots, N-1$ revient alors à générer un vecteur Z de $(N-1)$ v.a.i. gaussiennes standard et à effectuer le produit matriciel LZ . En effet, LZ est un vecteur gaussien centré et $\mathbb{E}((LZ)(LZ)^t) = \Gamma'$. Le vecteur $B_H = (0, (LZ)^t)^t$ définit un une trajectoire discrétisée d'un mbf aux instants désirés.

Cette méthode est la seule exacte en théorie, mais du fait de la complexité des calculs, de l'ordre de $\mathcal{O}(N^3)$, et du mauvais conditionnement de Γ' il n'est pas dénué de sens de s'intéresser à des méthodes moins coûteuses numériquement.

A.5 Méthode de Levinson

Soit G la matrice d'autocovariance du mbf standard discrétisé aux instants i/N , pour $i = 0, \dots, N-1$. D'après (2.3),

$$(G)_{i,j} = \gamma(j-i), \quad \text{pour } i, j = 0, \dots, N-1.$$

Pour contourner les coûts de calculs engendrés par la décomposition de Choleski de G (ce qui conduirait à une méthode identique à celle présentée dans la Section A.4), il suffit de remarquer que G est une matrice de Toeplitz. Le caractère Toeplitz signifie que la première ligne de G caractérise toute la matrice, ce qui conduit à des algorithmes plus performants pour extraire la racine carrée de G . L'algorithme suivant peut être retrouvé dans [78].

A l'étape 1 définissons

$$\begin{aligned} \rightarrow k_1 &= -\gamma\left(\frac{1}{N}\right), \quad \sigma_1^2 = 1, \\ \rightarrow L^1 &= \left(1, \gamma\left(\frac{1}{N}\right), \dots, \gamma\left(\frac{N-1}{N}\right)\right)^t \quad \text{et} \quad \widehat{L}^1 = \left(0, \gamma\left(\frac{1}{N}\right), \dots, \gamma\left(\frac{N-1}{N}\right)\right)^t. \end{aligned}$$

Définissons ensuite les vecteurs $L^j = \sigma_j^2 \left(0, \dots, 0, 1, \ell_2^j, \dots, \ell_{N-j+1}^j\right)^t$ et $\widehat{L}^j = \sigma_j^2 \left(0, \dots, 0, 0, \hat{\ell}_2^j, \dots, \hat{\ell}_{N-j+1}^j\right)^t$.

À l'étape $j+1$, on a :

$$\begin{aligned} \rightarrow k_{j+1} &= \frac{-\hat{\ell}_1^j}{\sigma_j^2} \quad \sigma_{j+1}^2 = \sigma_j^2(1 - k_{j+1}^2), \\ \rightarrow \begin{pmatrix} \widehat{L}^{j+1} \\ L^{j+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_N & k_{j+1} Z \\ k_{j+1} I_N & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{L}^j \\ L^j \end{pmatrix}, \quad \text{où } Z = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Désignons par D la matrice $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ et soit $L = (L^1, \dots, L^N) D^{-1}$. On peut vérifier que $LL^t = G$. En désignant par Z un vecteur de N v.a.i. gaussiennes standard, le vecteur (LZ) définit alors un bgf aux instant i/N pour $i = 0, \dots, N-1$. Les sommes cumulées de ce vecteur définissent une trajectoire discrétisée, notée B_H , d'un mbf aux instants désirés (en posant en outre $B_H(0) = 0$). Cette méthode génère de manière exacte un bgf avec un coût de calcul de l'ordre de $\mathcal{O}(N^2 \log(N))$ mais reste particulièrement lente, avec le logiciel S-plus, dès que la taille de l'échantillon $N > 1000$.

A.6 Méthode de Wood et Chan

Initialement proposée par Davis et Harte [36], cette méthode valable pour une grande classe de processus gaussiens stationnaires, a été récemment améliorée par Wood et Chan [97]. Dans le but d'extraire la racine carrée de la matrice d'autocovariance G , l'idée est de plonger G dans une matrice circulante C , de taille $m = 2^g$, $g \in \mathbb{N}^*$, facilement diagonalisable dans la base de Fourier, de générer un vecteur $Y = (Y_0, \dots, Y_{m-1})^t \stackrel{\text{mathcal{L}}}{=} \mathcal{N}(0, C)$, et grâce à une construction appropriée de C , de générer $(Y_0, \dots, Y_{N-1})^t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, G)$. Soit C la matrice définie par :

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{m-1} \\ c_{m-1} & c_0 & \dots & c_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad c_j = \begin{cases} \gamma\left(\frac{j}{N}\right) & \text{si } 0 \leq j < \frac{m}{2}, \\ \gamma\left(\frac{m-j}{N}\right) & \text{si } \frac{m}{2} < j < m-1. \end{cases}$$

Par construction, C est une matrice symétrique circulante. On choisit m la première puissance de deux, pour des questions de rapidité d'algorithme, $m \geq 2(N-1)$ tel que C est définie positive. Les auteurs suggèrent une approximation lorsque cette dernière condition n'est pas satisfaite. Pour le mbf, nous avons remarqué numériquement que cette condition était remplie pour la valeur $m = 2 * 2^\nu$, où 2^ν est la première puissance de deux supérieure à N , et ce quelles que soient la taille d'échantillon N et la valeur du paramètre H . On fait ensuite l'usage d'un résultat de Brockwell et Davis pour diagonaliser C : il existe une matrice diagonale Λ telle que $C = Q\Lambda Q^*$, où Q est la matrice unitaire définie par

$$(Q)_{j,k} = m^{-1/2} \exp\left(-2i\pi \frac{jk}{m}\right), \quad \text{pour } j, k = 0, \dots, m-1.$$

Puisque Q est unitaire, si $Y = Q\Lambda^{1/2}Q^*Z$ avec $Z \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, I_m)$, alors $Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, C)$. La procédure de simulation d'un bgf discrétisé se réduit alors aux trois étapes suivantes :

1. Calcul des valeurs propres de C : un simple calcul matriciel montre que

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \exp\left(-2i\pi \frac{jk}{m}\right) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \exp\left(2i\pi \frac{jk}{m}\right), \quad \text{pour } k = 0, \dots, m-1.$$

Ce calcul peut être réalisé en utilisant la transformée de Fourier rapide, FFT (directe ou inverse).

2. Simulation rapide de Q^*Z : en décomposant Q^*Z en partie réelle et partie imaginaire, simuler $W = Q^*Z$ revient aux deux sous-étapes suivantes :

→ générer U, V deux v.a.i gaussiennes standard, et écrire $W_0 = U$ et $W_{\frac{m}{2}} = V$.

→ pour $1 \leq j < \frac{m}{2}$, générer U_j, V_j deux v.a.i. gaussiennes standard, et écrire

$$W_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_j + iV_j),$$

$$W_{m-j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_j - iV_j).$$

3. Reconstruction de X : la dernière étape consiste à calculer

$$X\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\lambda_j} W_j \exp\left(-2i\pi \frac{jk}{m}\right), \quad \text{pour } k = 0, \dots, m-1,$$

en utilisant une fois encore la FFT. Nous obtenons ensuite une trajectoire discrétisée, notée B_H , via les sommes cumulées de X , en posant en outre $B_H(0) = 0$.

La méthode de Wood et Chan est exacte pour simuler un bgf, a une complexité de $N \log(N)$, et d'un point de vue pratique est rapide même pour de très grandes valeurs de N .

A.7 Approximation d'un mbf via les sommes cumulées d'un bgf

Soit \tilde{B}_H le vecteur défini par :

$$\begin{aligned}\tilde{B}_H(0) &= 0 \\ \tilde{B}_H(i/N) &= \sum_{k=0}^i \tilde{X}(k/N), \quad i = 1, \dots, N-1,\end{aligned}$$

où \tilde{X} désigne un bgf simulé aux instants $i/N, i = 0, \dots, N-1$. Rappelons que $\mathbb{E}(\tilde{X}(i/N)\tilde{X}(j/N)) = \gamma((j-i)/N), i, j = 0, \dots, N-1$. Donc, il est clair que

$$\mathbb{E}(\tilde{B}_H(i/N)\tilde{B}_H(j/N)) = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \gamma((j-i)/N), \quad i, j = 1, \dots, N-1.$$

Nous pouvons ainsi définir une mesure de l'approximation d'une trajectoire discrétisée d'un mbf par les sommes cumulées d'une trajectoire discrétisée d'un bgf, via la fonction E définie sur $\{0, \dots, N-1\} \times \{0, \dots, N-1\}$ par

$$E(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ ou } j = 0 \\ \left| \left(\Gamma(i, j) - \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \gamma(j-i) \right) / \Gamma(i, j) \right| & \text{sinon.} \end{cases}$$

La Figure Fig.A.2 illustre le graphe de la fonction E pour différentes valeurs de H . Il apparaît clairement qu'une telle approximation engendre des erreurs négligeables sur la structure de covariance.

A.8 Qualité des générateurs du mbf

Cette section a pour but d'explorer la qualité des différentes méthodes de simulation décrites auparavant. Une telle étude a déjà été entreprise par Jennane et *al.* [59]. Ils considèrent plusieurs générateurs du mbf et proposent explicitement trois procédures testant la normalité, la stationnarité et l'autosimilarité des accroissements du mbf. Les deux premières procédures ne permettent pas une exploration de la qualité des divers simulateurs : en effet les tableaux Tab.3 et Tab.4 de [59] montrent que quatre méthodes parmi les cinq considérées passent les tests avec succès. De par le caractère omnibus de ces tests, nous n'avons pas envisagé de tester la normalité et la stationnarité du bgf. Et à la procédure proposée pour vérifier l'autosimilarité des échantillons simulés, nous avons préféré nous orienter vers une approche basée sur le comportement asymptotique d'un estimateur paramétrique.

L'estimateur que nous employons a été introduit et complètement étudié dans la Section 2.4.1. Il est basé sur la méthode des variations discrètes qui consiste à estimer le moment d'ordre 2 de la série issue du filtrage de la trajectoire discrétisée d'un mbf standard avec

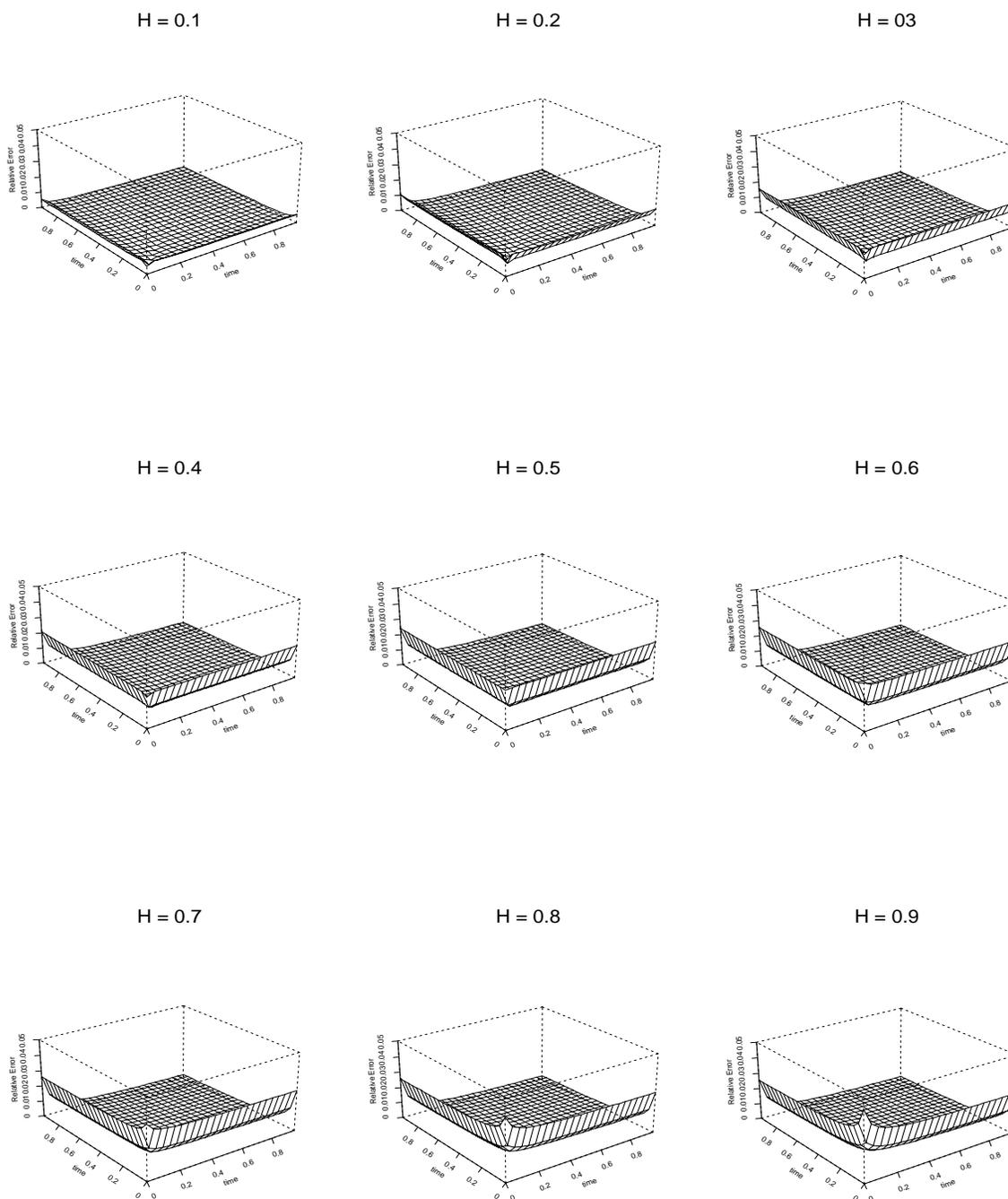


FIG. A.2 – Erreur relative de la structure de covariance d'un mbf approché par les sommes cumulées d'un bgf, pour différentes valeurs de H .

un filtre noté a . Rappelons qu'un filtre a de longueur $\ell + 1$ et d'ordre $p \geq 1$ un vecteur à composantes réelles vérifiant

$$\sum_{q=0}^{\ell} a_q q^i = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, p-1 \quad \text{et} \quad \sum_{q=0}^{\ell} a_q q^p \neq 0 .$$

Nous renvoyons donc le lecteur à la Section 2.4.1 pour de plus amples détails sur la construction et les propriétés de l'estimateur en question que nous noterons $\widehat{H}_N(2, a)$. Enonçons seulement son intérêt révélé par la convergence suivante, voir Eq.(2.16) :

$$\sqrt{N} \log(N) \left(\widehat{H}_N(2, a) - H \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (\text{A.5})$$

où $\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{q,r=0}^{\ell} a_q a_r |q-r+j|^{2H} / \sum_{q,r=0}^{\ell} a_q a_r |q-r|^{2H} \right\}^2$. Décrivons à présent la procédure de simulation utilisant le comportement asymptotique (A.5). Pour différentes valeurs du paramètre d'autosimilarité, et pour deux filtres (le premier est associé aux accroissements $a = Inc1 = (1, -1)$, le second est associé à une ondelette de Daubechies d'ordre 4, $a = Db4 \simeq (0.482629, -0.8365163, 0.2241439, 0.1294095)$) :

1. Nous générons 200 trajectoires du mbf par chacune des méthodes de simulation.
2. Pour $i = 1, \dots, 200$:
 - Nous estimons le paramètre d'autosimilarité par variations discrètes, que nous notons $\widehat{H}_i(a)$.
 - Nous construisons l'intervalle de confiance au niveau $\alpha = 0.05$

$$I(\sigma^2, H, a) = \left[\widehat{H}_i(a) - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N} \log(N)} ; \widehat{H}_i(a) + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{N} \log(N)} \right],$$

où $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha/2) \approx 1.96$, et σ^2 est la constante asymptotique dépendant de H et du filtre utilisé et donnée par le tableau Tab.A.1.

paramètre de Hurst	H=0.1	H=0.3	H=0.5	H=0.7	H=0.9
$a = Inc1$	0.6820765	0.5625909	0.5	0.7854074	×
$a = Db4$	0.7790751	0.7396438	0.6388889	0.5922214	0.5661291

TAB. A.1 – Constante asymptotique σ^2 pour différentes valeurs de H et pour les deux filtres $Inc1$ et $Db4$

3. Nous évaluons le taux de recouvrement des intervalles de confiance :

$$S(H, a) = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} \mathbb{1}(H \in I(\sigma^2, H, a)) .$$

Les résultats sont présentés dans le tableau Tab.A.2. Pour $H > 3/4$, la procédure n'a pas été réalisée pour le filtre $Inc1$ puisque la convergence en loi gaussienne de l'estimateur $\widehat{H}_N(2, Inc1)$ n'est valable que sur l'intervalle $0 < H < 3/4$. Nous pouvons noter que les méthodes de Mandelbrot et *al.* et Levinson ne sont pas efficaces pour les faibles et larges valeurs du paramètre H . En ce qui concerne la méthode de Choleski et celle développée par Wood et Chan, les résultats sont satisfaisants puisque le taux de recouvrement théorique de 95% est presque toujours atteint. Il apparaît également clairement que les estimateurs

déduits de trajectoires discrétisées générées par la méthode de Sellan et *al.* sont fortement biaisés. Bref, cette étude souligne le fait que les méthodes les plus stables sont les méthodes de Choleski et de Wood et *al.* Et puisque la Section A.7 a montré l'excellente approximation d'un mbf via les sommes cumulées d'un bgf, nous conseillons d'utiliser la méthode de Wood et Chan, en vertu de sa rapidité de calculs, pour simuler un mbf.

Méthode de simulation	Paramètre de Hurst					
	H=0.1	H=0.3	H=0.5	H=0.7	H=0.9	
Mandelbrot et <i>al.</i>	<i>Inc1</i>	72.0 %	89.0 %	97.0 %	83.0 %	×
	<i>Db4</i>	92.0 %	93.0 %	96.0 %	3.0 %	0.0 %
Sellan et <i>al.</i>	<i>Inc1</i>	69 %	2.5 %	0 %	0 %	×
	<i>Db4</i>	87.0 %	22.0 %	20.0 %	7.5 %	0.0 %
Choleski	<i>Inc1</i>	97.5 %	94.5 %	93.0 %	91.0 %	×
	<i>Db4</i>	93.0 %	96.5 %	94.5 %	97.5 %	93.0 %
Levinson	<i>Inc1</i>	50.5 %	79.5 %	97.0 %	63.5 %	×
	<i>Db4</i>	85.0 %	93.5 %	99.0 %	89.0 %	0.0 %
Wood et <i>al.</i>	<i>Inc1</i>	94 %	93.5 %	92.5 %	92.0 %	×
	<i>Db4</i>	94.5 %	96.5 %	96.5 %	97.5 %	100 %

TABLE A.2 – Résultats du taux de recouvrement en pourcentage des intervalles de confiance au niveau 95% pour différentes méthodes de simulation.

B Quelques estimateurs du paramètre de Hurst

B.1 Introduction et position du problème

Cette annexe a pour but de dresser une liste non exhaustive des estimateurs du paramètre d'autosimilarité, de présenter quelques simulations et de décrire brièvement la boîte à outils développée sous le logiciel S-plus 3.4 regroupant l'ensemble des procédures décrites dans les Annexes A et B.

Nous distinguons quatre approches pour aborder l'identification du mbf :

- Méthodes spectrales : log-périodogramme, variante de Robinson.
- Maximum de vraisemblance : estimateur de Whittle.
- Méthodes temps-échelle : décomposition en ondelettes du mbf.
- Méthodes temporelles : nombre de franchissements d'un niveau donné, variations discrètes.

Encore une fois cette liste n'est pas exhaustive (la méthode R/S ou la méthode basée sur le corrélogramme, par exemple, n'ont pas été considérées) mais présente les différentes manières entreprises pour identifier le modèle mbf. Par la suite, nous supposons disposer d'un échantillon $B_{H,C}$ d'un mbf non standard de taille N , aux instants i/N pour $i = 0, \dots, N-1$; X désignera le vecteur des accroissements de $B_{H,C}$ et le coefficient d'échelle C sera supposé inconnu.

B.2 Méthodes spectrales

Les méthodes spectrales sont des méthodes semi-paramétriques. Nous les présentons brièvement, ici, car elles ont été largement utilisées dans la littérature pour estimer le paramètre d'autosimilarité d'un mbf, *e.g.* Beran [20].

B.2.1 Log-périodogramme

Cette première approche consiste à exploiter d'une part la signature du bgf, $f(\lambda) \sim c_f |\lambda|^{1-2H}$, quand $|\lambda| \rightarrow 0$, et d'autre part le fait que le périodogramme défini par

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=0}^{N-1} X(t) e^{-it\lambda} \right|^2, \quad \text{pour } \lambda = \lambda_{k,N} = \frac{2\pi k}{N},$$

est un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité spectrale. Il suffit alors de remarquer que

$$\log \mathbb{E}(I_N(\lambda)) \simeq \log c_f + (1 - 2H) \log(|\lambda|),$$

soulignant la linéarité en H de $\log \mathbb{E}(I_N(\lambda))$ dans un voisinage de zéro. Soient $1 \leq m_1 < m_2 \leq N^* = [N - 1/2]$, définissons $\hat{\alpha}_N$ l'estimateur déduit de la régression linéaire sur $\{\log(\lambda_k)\}_{m_1 \leq k \leq m_2}$ de $\{\log(I_N(\lambda_k))\}_{m_1 \leq k \leq m_2}$, on obtient alors un estimateur de H par la relation

$$\hat{H}_N(m_1, m_2) = \frac{1}{2}(1 - \hat{\alpha}_N) .$$

Si m_1 et m_2 satisfont $\sqrt{m_2} \log(m_2)/m_1 + m_1 \log^2(N)/m_2 \rightarrow 0$, Geweke et Porter-Hudak [44] exposent le résultat suivant (sans en donner une preuve rigoureuse):

$$\frac{\sqrt{m_2}}{\log(N)} \left(\hat{H}_N(m_1, m_2) - H \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\pi^2}{6}\right) . \quad (\text{B.1})$$

B.2.2 Variante de Robinson

En notant $F(\lambda) = \int_0^\lambda f(\theta) d\theta$, Robinson [82] remarque l'existence d'une relation log-linéaire entre deux valeurs de $F(\lambda)$. Soit $q \in]0, 1[$, on a, $\frac{F(q\lambda)}{F(\lambda)} \sim q^{2-2H}$, lorsque $|\lambda| \rightarrow 0$. En estimant $F(\lambda_{k,N})$ par

$$\hat{F}(\lambda_{k,N}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^{[N\lambda_{k,N}/2\pi]} I_N(\lambda_{j,N}), \quad \text{pour } k = m_1, \dots, m_2 ,$$

on en déduit un estimateur de H :

$$\hat{H}_N(q, m_1, m_2) = 1 - \frac{1}{2 \log(q)} \log \left\{ \frac{\hat{F}(q\lambda_{m_2,N})}{\hat{F}(\lambda_{m_2,N})} \right\} .$$

Pour $1/2 < H < 3/4$, Lobato et Robinson [67] exhibent la valeur optimale de q par simulations. Ajoutons qu'en choisissant m_1 et m_2 comme précédemment, on peut obtenir un résultat de normalité asymptotique identique à (B.1).

B.3 Maximum de vraisemblance : estimateur de Whittle

Appliqué à notre modèle, la méthode consiste à maximiser la log-vraisemblance du bgf de paramètre $\theta = \left(\frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi}, H \right)$, où σ_ϵ^2 est la variance de l'innovation, donné par :

$$L_N(x, \theta) = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\det(G)| - \frac{1}{2} x^t G^{-1} x ,$$

où $G = G(\theta)$ désigne la matrice du bgf échantillonné. L'implémentation informatique met en évidence deux difficultés : premièrement les calculs de G^{-1} et $\log |\det(G)|$ sont particulièrement lents et "chers", et deuxièmement G est extrêmement mal conditionnée. Pour contourner ces difficultés une approximation de la vraisemblance s'est imposée, *e.g.* Beran [20], donnant naissance à un nouvel estimateur appelé estimateur de Whittle et explicitement donné par :

$$\hat{H}_N = \arg \min_H \sum_{j=1}^{N^*} \frac{I_N(\lambda_{j,N})}{f(\lambda_{j,N}, (1, H))} ,$$

où $f(\cdot, (1, H))$ désigne la densité spectrale de paramètres $(1, H)$ du bgf, et $I_N(\lambda)$ le périodogramme empirique. Il est désormais bien connu, *e.g.* Beran [20], que \hat{H}_N tend presque sûrement vers H , et vérifie le résultat de normalité asymptotique suivant :

$$\sqrt{N} (\hat{H}_N - H) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, \frac{2}{D} \right), \quad \text{avec } D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial H} \log f(x, \theta) \right\}^2 dx.$$

Malgré ces performances, l'estimateur de Whittle souffre d'être lent à l'exécution, biaisé pour de petits échantillons, et très sensible à un bruit blanc additif. Précisons également qu'il existe une version semi-paramétrique de l'estimateur de Whittle. Nous restreignant au cadre paramétrique du mbf, nous ne la présentons pas et renvoyons pour cela le lecteur à Taqq et *al.* [91].

B.4 Méthode temps-échelle : décomposition en ondelettes

Soit $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi_0(2^{-j}t - k), j = 1, \dots, J, k \in \mathbb{Z}\}$ la famille d'ondelettes, générées à partir d'une ondelette mère ψ_0 , elle-même définie via une analyse multirésolution, voir [35]. Nous noterons $\langle B_{H,C}, \psi_{j,k} \rangle$ les coefficients de la DWT (discrete wavelet transform). Deux raisons permettent d'expliquer l'utilisation de la transformée en ondelette pour l'identification du mbf :

1. Autosimilarité des coefficients d'ondelettes : l'autosimilarité du mbf assure que la variance des coefficients s'écrit :

$$\mathbb{E}(\langle B_{H,C}, \psi_{j,k} \rangle^2) = \frac{1}{2} 2^{j(2H+1)} \frac{C^2}{N^{2H}} \int_{\mathbb{R}^2} |u-v|^{2H} \psi(u) \psi(v) du dv = K_H 2^{j(2H+1)},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$.

2. La transformée en ondelette décorrèle l'échantillon du mbf. En effet, en notant M le nombre de moments nuls de l'ondelette mère, Flandrin et *al.* [1], par exemple ont montré que lorsque $|j - j'| \rightarrow +\infty$

$$\mathbb{E}(\langle B_{H,C}, \psi_{j,k} \rangle \langle B_{H,C}, \psi_{j',k'} \rangle) = \mathcal{O}(|2^j k - 2^{j'} k'|^{2(H-M)}).$$

De manière identique aux méthodes spectrales, on peut alors remarquer la linéarité en H de $\log_2 \mathbb{E}(\langle B_{H,C}, \psi_{j,k} \rangle^2)$,

$$\log_2 \mathbb{E}(\langle B_{H,C}, \psi_{j,k} \rangle^2) = j(2H + 1) + \log_2(K_H).$$

Il suffit alors d'estimer le $\mathbb{E}(\langle B_{H,C}, \psi_{j,k} \rangle^2)$ par le moment empirique d'ordre 2,

$$\mu_j = 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle B_{H,C}, \psi_{j,k} \rangle^2,$$

pour déduire un estimateur de H par la régression linéaire de $\{\log_2(\mu_j)\}_{j_1 \leq j \leq j_2}$ sur $\{j\}_{j_1 \leq j \leq j_2}$, où $[j_1, j_2]$ représente la gamme de résolutions utilisées. Abry et *al.* [3] ont récemment amélioré cette méthode. Soit ξ le vecteur du bruit défini par

$$\xi_j = \log_2(\mu_j) - (2H + 1)j - \log_2(K_H), \quad \text{pour } j = j_1, \dots, j_2$$

les auteurs cités montrent que

$$\mathbb{E}(\xi_j) = \frac{\Psi(2^{j-1})}{\log 2} - (j-1) \quad \text{et} \quad \text{Var}(\xi_j) = \frac{\zeta(2, 2^{j-1})}{(\log 2)^2},$$

où Ψ est la fonction Digamma définie par $\Psi(t) = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$, et où $\zeta(2, t)$ est la fonction Zeta de Riemann généralisée. Un nouvel estimateur de H est alors déduit de la régression linéaire de $\{\log_2(\mu_j) - \mathbb{E}(\xi_j)\}_{j_1 \leq j \leq j_2}$ sur $\{j\}_{j_1 \leq j \leq j_2}$, pondérée par $\{\text{Var}(\xi_j)\}_{j_1 \leq j \leq j_2}$. D'un point de vue pratique, ajoutons que la librairie `Wavethresh()` de S-plus a été utilisée pour évaluer les coefficients d'ondelettes du mbf.

B.5 Méthodes temporelles

B.5.1 Nombre de franchissements de zéro du bgf

Le caractère lisse de la fonction de covariance du bgf assure la convergence du temps local, Azaïs [7]. Feuerverger et al. [41] se basent sur ce résultat pour estimer l'exposant de Hölder d'un processus gaussien non différentiable, en comptant le nombre de franchissements d'un niveau donné. Nous présentons une version simplifiée de cet estimateur. Définissons le nombre moyen de franchissements de zéro du bgf échantillonné par la statistique :

$$S_N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-2} \mathbb{I}(X(i/N)X(i+1/N) < 0),$$

où $\mathbb{I}(\cdot)$ désigne la fonction indicatrice. L'ergodicité des accroissements et un calcul intégral suffisent à montrer que : $S_N \xrightarrow{p.s.} \theta/\pi$, avec θ défini, en notant $r = 2^{2H-1} - 1$, par

$$\text{où} \quad \theta = \begin{cases} \arctan((1-r^2)^{1/2}/r) & \text{si } r > 0 \\ \pi/2 + \arctan(-r/(1-r^2)^{1/2}) & \text{sinon,} \end{cases}.$$

Supposons que l'on connaisse a priori $\epsilon = \text{sgn}(H - \frac{1}{2})$, nous pouvons alors facilement déduire l'estimateur suivant

$$\hat{H}_N = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \log_2 \left(1 + \epsilon |\cos(\pi S_N)| \right) \right\}.$$

Ajoutons que pour $0 < H < 3/4$, \hat{H}_N est asymptotiquement gaussien avec la vitesse de convergence $1/\sqrt{N}$, cf. Ho et Sun [51].

B.5.2 Variations discrètes du mbf

Cette approche est entièrement développée dans le Chapitre 2, nous y renvoyons donc le lecteur intéressé.

B.6 Quelques simulations

Nous nous proposons d'illustrer les méthodes présentées dans les Annexes A et B à travers quelques simulations. Pour une taille d'échantillon de $N = 1000$, nous avons généré 50 trajectoires de mbf standard de paramètre $H = 0.9$, discrétisés uniformément sur $[0, 1[$, par les méthodes de Mandelbrot (discrétisation de la représentation stochastique du mbf), de Sellan

et *al.*, de Choleski, de Levinson et de Wood et Chan. Les fonctions S-plus associées sont respectivement `mvnFBM()`, `waveFBM()`, `cholFBM()`, `levFBM()`, et `circFBM()`, voir Section B.7. Pour chaque trajectoire, nous calculons les estimateurs de H par les méthodes décrites dans les Sections B.2 à B.5.2. Des diagrammes à moustaches, Fig.B.1, Fig.B.2 et Fig.B.3 illustrent les résultats. La valeur élevée du paramètre de Hurst met en évidence plusieurs points faibles des diverses méthodes de simulation et d'estimation discutées dans les sections précédentes.

B.7 Scripts S-plus

L'ensemble de ce travail a été réalisé avec le logiciel S-plus 3.4. Le tableau Tab.B.1 résume cette étude : à chaque méthode correspond un nom d'appel sous S-plus, les paramètres nécessaires, et éventuellement les sous-programmes reliés. Nous conseillons à l'utilisateur de fixer précisément les paramètres d'entrées de chaque procédure. Par exemple, pour générer un mbf standard de longueur N et de paramètre $H = 0.8$ par la méthode de Wood et Chan, on écrira `circFBM(n=1000,H=0.8)`. Par défaut, `plotfBm=1` la trajectoire résultante sera donc tracée. Enfin précisons que la fonction `waveST()` estimant le paramètre H par une méthode d'ondelette a été implémentée en utilisant la librairie `Wavethresh()`, disponible gratuitement à l'adresse suivante <http://www.stat.cmu.edu/S/>. Cette librairie ne permettant que la décomposition d'un signal de longueur une puissance de deux, pour un signal de taille quelconque nous avons miroité les données jusqu'à la puissance de deux suivante.

B.8 Adresses WEB

Les Annexes A et B constituent un article accepté au *Journal of Statistical Software* (Vol.5, 2000), disponible sur le WEB l'adresse suivante : <http://www.jstatsoft.org/>.

D'autres adresses WEB traitant les mêmes sujets :

- <http://www-syntim.inria.fr/fractales> , boîte à outils d'analyse fractale pour le traitement du signal sous matlab.
- <http://www.ens-lyon.fr/~pabry/OT22HTML> , serveur de l'Opération Thématique 2.2 du GdR PRC ISIS *Ondelettes et fractales pour le traitement du signal et des images*.
- <http://www.maths.unsw.edu.au/~grace>, procédures de simulation de processus gaussiens stationnaires et de champs gaussiens stationnaires en FORTRAN (page personnelle de G.Chan).

|bullet <http://www.stat.cmu.edu/S/>, boîte à outils S-plus de Beran pour la simulation et l'identification de processus à longue mémoire.

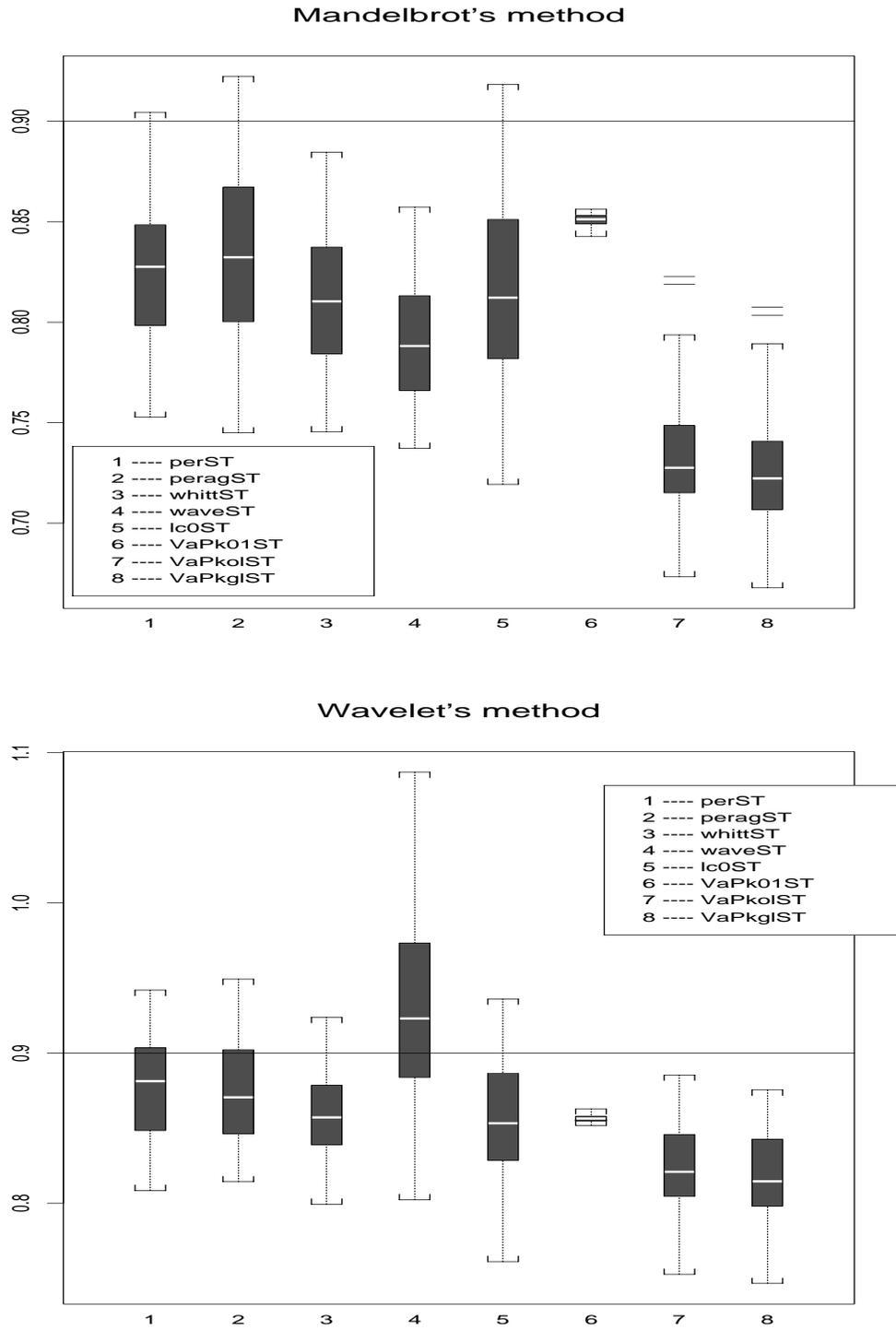


FIG. B.1 – Diagrammes à moustaches des estimateurs de H basés sur 50 trajectoires du mbf simulées par la méthode de Mandelbrot et par synthèse d'ondelettes.

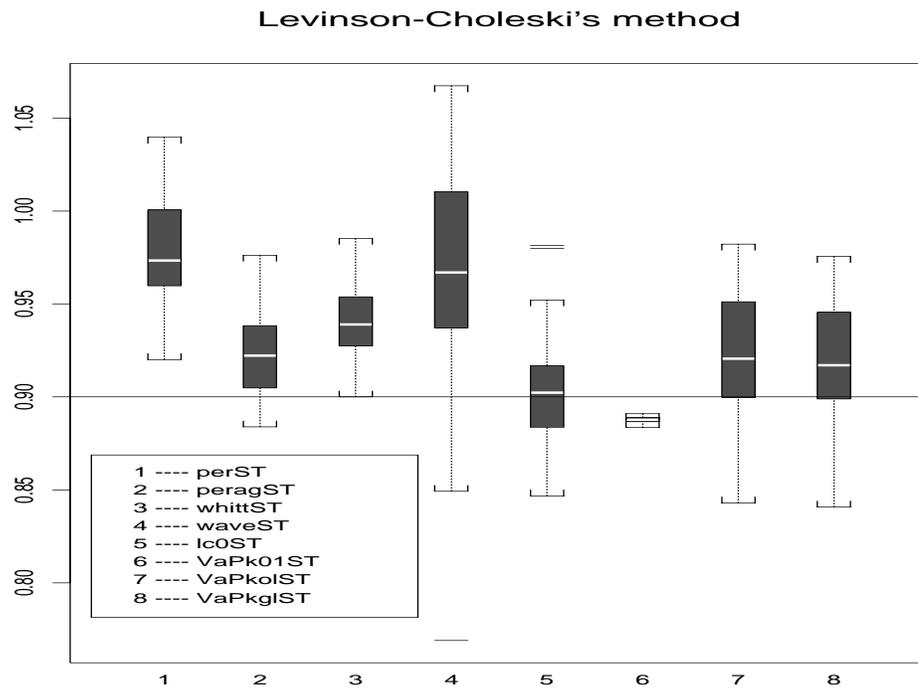
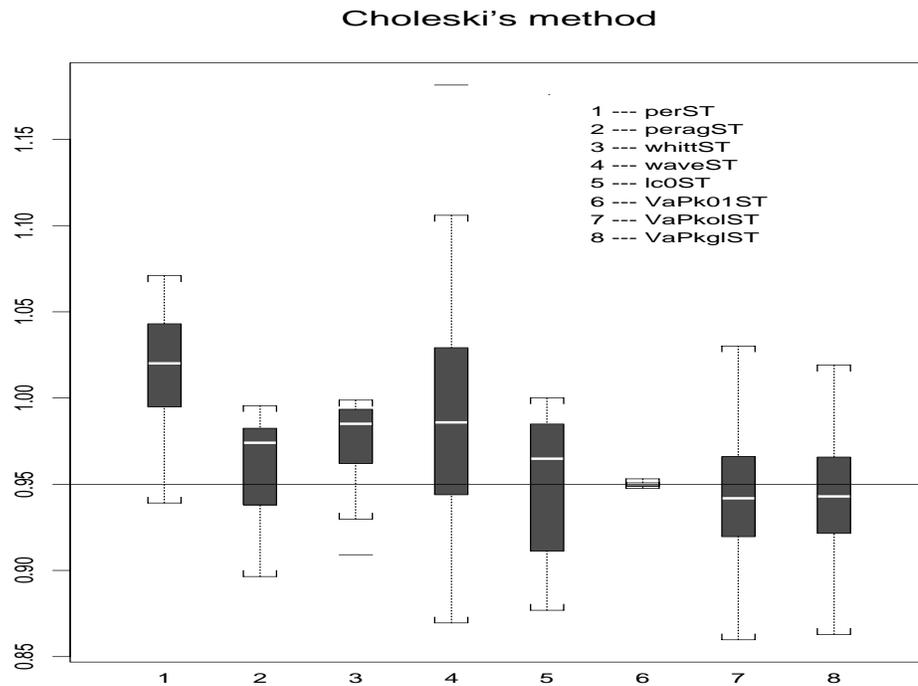


FIG. B.2 – Diagrammes à moustaches des estimateurs de H basés sur 50 trajectoires du mbf simulées par les méthodes de Choleski et de Levinson.

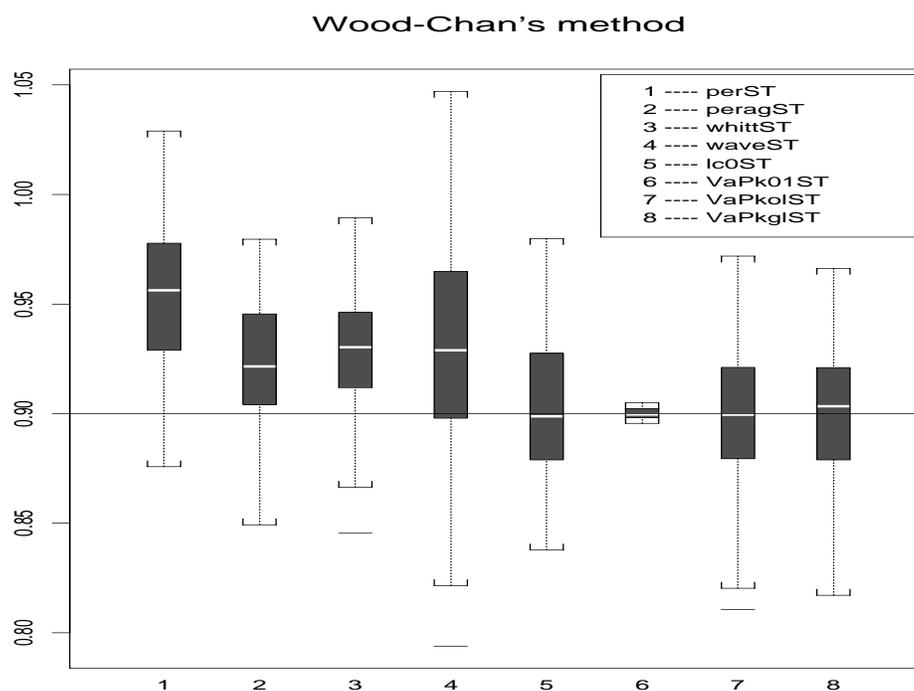


FIG. B.3 – Diagrammes à moustaches des estimateurs de H basés sur 50 trajectoires du mbf simulées par la méthode de Wood et Chan

	Nom d'appel S-plus	Objet
Générateurs du mbf	<code>mvnFBM(n= ,H= ,plotfBm=)</code>	Méthode de Mandelbrot
	<code>waveFBM(n= ,H= ,J= ,plotfBm=)</code> subroutine : <code>convol(x,y)</code>	Synthèse d'ondelettes : intégration fractionnaire d'une AMR
	<code>cholFBM(n= ,H= ,plotfBm=)</code>	Décomposition de Choleski de la matrice de covariance.
	<code>levFBM(n= ,H= ,plotfBm=)</code>	Algorithme de Levinson pour les matrices de Toeplitz
	<code>circFBM(n= ,H= ,plotfBm=)</code>	Méthode de la matrice circulante de Wood et Chan
Estimateurs de H	<code>perST(fBm= ,m1= ,m2= ,llplot=)</code>	Log-périodogramme
	<code>peraggST(fBm= ,q= ,m1= ,m2=)</code>	Variante de Lobato et Robinson
	<code>whittST(fBm= ,Hprel=)</code> subroutine : <code>spdFGN(Htry= ,n=)</code>	Estimateur de Whittle
	<code>waveST(fBm= ,j1= ,j2= ,llplot=)</code>	Décomposition en ondelette
	<code>lcOST(fBm= ,sign=)</code>	Franchissements de 0 du bgf
	<code>VaPk01ST(fBm= ,k= ,a= ,Hprel=)</code> subroutine : <code>piaH(a= ,H= ,i=)</code>	k-ème moment absolu empirique des variations discrètes du mbf standard
	<code>VaPk01ST(fBm= ,k= ,a= ,M= ,llplot=)</code> subroutine : <code>piaH(a= ,H= ,i=)</code>	k-ème moment absolu empirique des variations discrètes du mbf : moindres carrés ordinaires
<code>VaPkg1ST(fBm= ,k= ,a= ,M= ,llplot=)</code> subroutine : <code>piaH(a= ,H= ,i=)</code> <code>rhoadil(a,H,j,m1,m2)</code>	k-ème moment absolu empirique des variations discrètes du mbf : moindres carrés généralisés	

TAB. B.1 – Résumé des méthodes de synthèse et d'analyse implémentées sous le logiciel S-plus pour le mbf.

C Simulation d'un mouvement brownien multifractionnaire

C.1 Introduction et position du problème

Cette annexe vise à extraire une méthode correcte pour simuler un mouvement brownien multifractionnaire (nous préciserons un peu après le sens de méthode correcte). L'objectif est d'obtenir la trace d'un mbm de fonction de Hurst $H \in \mathcal{C}^\eta([0, 1])$ (vérifiant $\sup_t H(t) < \min(1, \eta)$), aux instants i/N pour $i = 0, \dots, N - 1$. Nous noterons W la discrétisation du mbm sur une grille uniforme de $[0, 1[$ de taille N et dont la structure de covariance est donnée par (5.3), et \widetilde{W} une trajectoire discrétisée simulée aux mêmes instants. La difficulté d'un tel problème provient de la non-stationnarité du mbm à n'importe quel ordre, cf. (5.3), contrairement au mbf (pour ce dernier processus, il est bien connu que les accroissements sont stationnaires). Nous renvoyons à Beran [20], Jenane et *al.* [59] ou aux Annexes A et B pour un tour d'horizon des méthodes de simulation du mbf. En ce qui concerne notre modèle, du fait de la non-stationnarité du processus, la matrice de covariance n'est plus à caractère Toeplitz. Il nous est donc impossible d'utiliser directement des méthodes adaptées aux processus gaussiens stationnaires, telles que la méthode de Levinson, *e.g.* Peltier [77] ou la méthode de la matrice circulante initialement proposée par Davis et Harte [36] et améliorée récemment par Wood et Chan [97]. Un processus gaussien centré étant entièrement déterminé par sa structure au second ordre, il n'existe à notre connaissance qu'une seule méthode exacte en théorie; il s'agit de la méthode de Choleski, nécessitant comme son nom l'indique la décomposition de Choleski de la matrice de covariance. Cette procédure nécessite un coût de calculs très élevé en $\mathcal{O}(N^3)$, ce qui la rend particulièrement lente dès que $N > 1000$, ce qui paraît une taille d'échantillon moyenne au regard de la complexité du modèle. C'est pourquoi nous avons voulu examiner deux approches plus rapides, l'une proposée par Peltier et Lévy-Véhel [77] l'autre par Wood et Chan [99]. Ces approches constituent des approximations, il nous a donc semblé important de mesurer théoriquement l'erreur commise sur la structure de covariance sur quelques exemples afin de pouvoir éventuellement valider l'une ou l'autre méthode. Il s'agit donc de regarder les valeurs de la fonction E définie sur $\{0, \dots, N - 1\} \times \{0, \dots, N - 1\}$ par

$$E(i, j) = \left| \frac{\mathbb{E}\left(W\left(\frac{i}{N}\right)W\left(\frac{j}{N}\right)\right) - \mathbb{E}\left(\widetilde{W}\left(\frac{i}{N}\right)\widetilde{W}\left(\frac{j}{N}\right)\right)}{\mathbb{E}\left(\widetilde{W}\left(\frac{i}{N}\right)\widetilde{W}\left(\frac{j}{N}\right)\right)} \right|.$$

Ces méthodes ont été étudiées sous les logiciels **S-plus** et **Matlab** (pour la méthode de Choleski). Commençons par décrire ces méthodes ainsi que le calcul théorique de l'erreur commise dans le cas des approximations.

C.2 Méthode de Choleski

Désignons par G_H la matrice de covariance du mbm standard aux instants i/N pour $i = 0, \dots, N-1$, et G'_H la même matrice privée de sa première ligne et de sa première colonne. Puisque $\mathbb{E}(W(t)W(0)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$, nous pouvons nous ramener à simuler un vecteur gaussien de matrice de covariance G'_H . G'_H étant symétrique définie positive, nous pouvons facilement générer un mbm en calculant la décomposition de Choleski d'une part, $G'_H = LL^t$ (L triangulaire inférieure), en simulant un vecteur de $N-1$ variables aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et en effectuant au final le produit matriciel LZ . En définissant \tilde{W} par ce produit, il vient immédiatement que $\mathbb{E}(\tilde{W}\tilde{W}^t) = \mathbb{E}((LZ)(LZ)^t) = G'_H$. Nous obtenons une trajectoire discrétisée d'un mbm aux instants j/N , $j = 0, \dots, N-1$ en complétant \tilde{W} avec la valeur $\tilde{W}(0) = 0$.

Cette méthode a été implémentée sous le logiciel **Matlab**, logiciel particulièrement stable pour les problèmes numériques d'algèbre linéaire. Pour certaines fonctions de Hurst, le conditionnement de la matrice de covariance est très élevé, à tel point que le logiciel **S-plus** estime que la matrice de covariance n'est pas de rang plein, et même possède des valeurs propres négatives, ce qui contredit le fait que la fonction de covariance du mbm constitue un noyau hermitien de type positif ([75] p.34).

C.3 Approximation de Peltier et Lévy-Véhel

Peltier et Lévy-Véhel [77] s'appuient sur la propriété (5.5) : localement le mbm est un mbf, et proposent de simuler une trajectoire de mbm en simulant N mbfs de paramètre $H(i/N)$ pour $i = 0, \dots, N-1$, ayant les mêmes entrées gaussiennes, puis de poser

$$\tilde{W}\left(\frac{i}{N}\right) = B_{H\left(\frac{i}{N}\right)}\left(\frac{i}{N}\right), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

En ce qui concerne la méthode de simulation du mbf, nous préconisons la méthode développée par Wood et Chan [97] dite méthode de la matrice circulante. En effet, cette méthode est exacte, particulièrement rapide, stable et la plus performante parmi l'ensemble des méthodes classiques (nous renvoyons le lecteur aux Annexes A et B pour une étude comparative). En outre, nous disposons d'une expression analytique pour la fonction E . Rappelons brièvement cette méthode : il s'agit de simuler un mbf de paramètre H via les sommes cumulées d'un bruit gaussien fractionnaire (bgf), noté \tilde{X}_H . Et pour générer ce dernier, l'idée est de plonger la matrice d'autocovariance du mbf (i.e. la matrice de covariance de \tilde{X}_H) dans une matrice circulante C_H , de taille m une puissance de 2, diagonalisable dans la base de Fourier. Pour résumer les différentes étapes, détaillées dans [97], le vecteur simulé est défini par :

$$\tilde{X}_H\left(\frac{j}{N}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{\lambda_H(k)} Z_k e^{-2i\pi \frac{jk}{m}},$$

où

$$Z_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m}} U, & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{m}} V, & \text{si } k = m/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} (U_k + iV_k), & \text{si } 0 < k < m/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} (U_k - iV_k), & \text{si } m/2 < k < m \end{cases},$$

avec $U, V, \{U_k, V_k, k = 1, \dots, m/2 - 1\}$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Le réel $\lambda_H(k)$ désigne la k -ème valeur propre de la matrice circulante C_H évaluée à l'aide de la fft :

$$\lambda_H(k) = \sum_{\ell=0}^{m-1} c_H(\ell) e^{-2i\pi \frac{k\ell}{m}},$$

où

$$c_H(\ell) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{\ell}{N}\right) & \text{si } 0 \leq \ell \leq m/2 \\ \gamma\left(\frac{m-\ell}{N}\right) & \text{si } m/2 < \ell \leq m-1 \end{cases}, \text{ et } \gamma(k) = \frac{1}{2} (|k-1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k+1|^{2H}).$$

En utilisant ces notations, on montre que la structure de covariance de deux bgfs de paramètres $H_i = H\left(\frac{i}{N}\right)$ et $H_j = H\left(\frac{j}{N}\right)$, pour $i, j \in \{0, \dots, N-1\}$, est donnée par :

$$\mathbb{E} \left(\tilde{X}_{H_i} \left(\frac{i'}{N} \right) \tilde{X}_{H_j} \left(\frac{j'}{N} \right) \right) = \hat{v}_{ij} (|j' - i'|), \quad \text{pour } i', j' \in \{0, \dots, N-1\},$$

où \hat{v}_{ij} désigne la fft discrète du vecteur v_{ij} défini par $v_{ij}(k) = \lambda_{H_i}(k)^{1/2} \lambda_{H_j}(k)^{1/2}$. En conséquence, la structure de covariance du vecteur simulé est explicitement donnée par :

$$\mathbb{E} \left(\tilde{W} \left(\frac{i}{N} \right) \tilde{W} \left(\frac{j}{N} \right) \right) = \sum_{i'=0}^i \sum_{j'=0}^j \hat{v}_{ij} (|j' - i'|), \quad \text{pour } i, j \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (\text{C.1})$$

C.4 Approximation de Wood et Chan

Dans [98], Wood et Chan généralisent leurs travaux exposés dans [97] et parviennent à simuler de manière exacte des champs de vecteurs gaussiens stationnaires. Les auteurs se basent sur cette approche pour proposer dans [99] une approximation du mbm. L'idée est de simuler U bgfs Y_1, \dots, Y_U aux instants $0, \dots, N-1$, de paramètres déterminés h_1, \dots, h_U (tels que $0 < h_1 < \dots < h_U < 1$) corrélés, de structure de corrélation

$$\mathbb{E} (Y_u(j) Y_v(k)) = \frac{g(h_u, h_v)}{2} (|j-k-1|^{h_u+h_v} - 2|j-k|^{h_u+h_v} + |j-k+1|^{h_u+h_v}),$$

pour $j, k = 0, \dots, N-1$ et $u, v = 1, \dots, U$ (g étant donnée par (5.4)). Ceci est réalisé par l'algorithme présenté dans [98]. L'étape suivante se résout à construire les mbfs associés via les sommes cumulées :

$$\tilde{B}_{h_u} \left(\frac{j}{N} \right) = \frac{1}{N^{h_u}} \{ Y_1(j) + \dots + Y_u(j) \}.$$

L'étape finale consiste à estimer les valeurs du mbm en j/N par une pondération des mbfs corrélés pris dans un certain voisinage de j/N , soit

$$\tilde{W} \left(\frac{j}{N} \right) = \sum_{(v,k) \in N_j} \delta_{j,(v,k)} \tilde{B}_{h_v} \left(\frac{k}{N} \right) = \delta_j Z_j^t, \quad (\text{C.2})$$

avec $Z_j = \left\{ \widetilde{B}_{h_v} \left(\frac{k}{N} \right), (v, k) \in N_j \right\}$. En pratique, les auteurs préconisent le choix du voisinage suivant $N_j = \{(v, k), \text{ pour } v = u_j, u'_j \text{ et } k = j - 1, j, j + 1\}$, avec les éventuelles modifications aux bords de l'intervalle $[0, 1]$. Les entiers u_j et u'_j sont choisis de telle manière que $h_{u_j}, h_{u'_j}$ soient les deux valeurs les plus proches de $H(j/N)$ parmi (h_1, \dots, h_U) . Enfin, on choisit δ_j de manière à minimiser l'erreur quadratique moyenne en j/N , i.e.

$$\delta_j = \mathbb{E} (Z_j Z_j^t)^{-1} \mathbb{E} (Z_j W(j/N)) .$$

La structure de covariance du vecteur final est donc explicitement donnée par

$$\mathbb{E} \left(\widetilde{W} \left(\frac{i}{N} \right) \widetilde{W} \left(\frac{j}{N} \right) \right) = \delta_i \mathbb{E} (Z_i Z_i^t) \delta_j . \quad (\text{C.3})$$

C.5 Qualité des approximations

Afin d'évaluer la qualité des approximations, nous avons, dans un souci d'objectivité, choisi des cas tests, i.e. des choix particuliers de la fonction de Hurst, présents dans les papiers de Peltier et Lévy-Vehel [77] d'une part, et Wood et Chan [99] d'autre part. Trois fonctions ont été étudiées : une fonction linéaire (H_1), une fonction à caractère périodique (H_2) et une fonction dite logistique (H_3), définies sur $[0, 1[$ par :

$$\begin{aligned} H_1(t) &= 0.1 + (0.9 - 0.1)t \\ H_2(t) &= 0.5 + 0.3 \sin(4\pi t) \\ H_3(t) &= 0.3 + 0.3 / (1 + \exp(-100(t - 0.7))) \end{aligned}$$

Ces trois fonctions ont déjà été introduites dans le Chapitre 5.

La figure Fig.C.1 présente un exemple de trajectoires simulées pour chacun des cas-tests et chacune des méthodes présentées. La taille de chaque série est 1000. A l'oeil, toutes les trajectoires rendent bien compte de la régularité prescrite. La figure Fig.C.2 résume quant à elle la qualité des approximations sur la structure au second ordre du mbm : pour chaque cas test nous avons représenté la covariance théorique du mbm, puis successivement les erreurs *relatives* sur la structure au second ordre pour la méthode des mbfs et la méthode de Wood et Chan. Ces calculs ont été encore effectués pour la valeur $N = 1000$. Il ressort de ce graphique que les deux méthodes citées précédemment sont de bonnes approximations, au sens où l'erreur relative commise sur la structure au second ordre est assez faible (< 0.3 pour les trois cas tests).

C.6 Conclusions

Pour les trois cas tests étudiés, nous conseillons d'utiliser la décomposition de Choleski lorsque la taille d'échantillon n'est pas trop importante (de l'ordre de 1000), et indifféremment l'une ou l'autre méthode approximative lorsque la taille de l'échantillon devient plus élevée. Ce choix est guidé par le fait que la décomposition de Choleski nécessite le stockage d'une matrice carrée de taille N (taille de l'échantillon), ce qui n'est pas raisonnable lorsque N est élevé.

Ajoutons que les procédures ont été implémentées sous Matlab pour la méthode de Choleski et sous S-plus pour la méthode des mbfs et la méthode de Wood et Chan. Elles constituent une boîte à outils disponible à l'adresse suivante :

`ftp.imag.fr/pub/lab0-LMC/SMS/SimulMBM.tar.gz`

D'autres adresses WEB traitant de la simulation du mouvement brownien multifractionnaire :

- <http://www-syntim.inria.fr/fractales> , boîte à outils d'analyse fractale et multifractale pour le traitement du signal sous matlab.
- <http://www.maths.unsw.edu.au/~grace>, procédure en FORTRAN de simulation du mbm par approximation de champs gaussiens stationnaires (page personnelle de G.Chan).

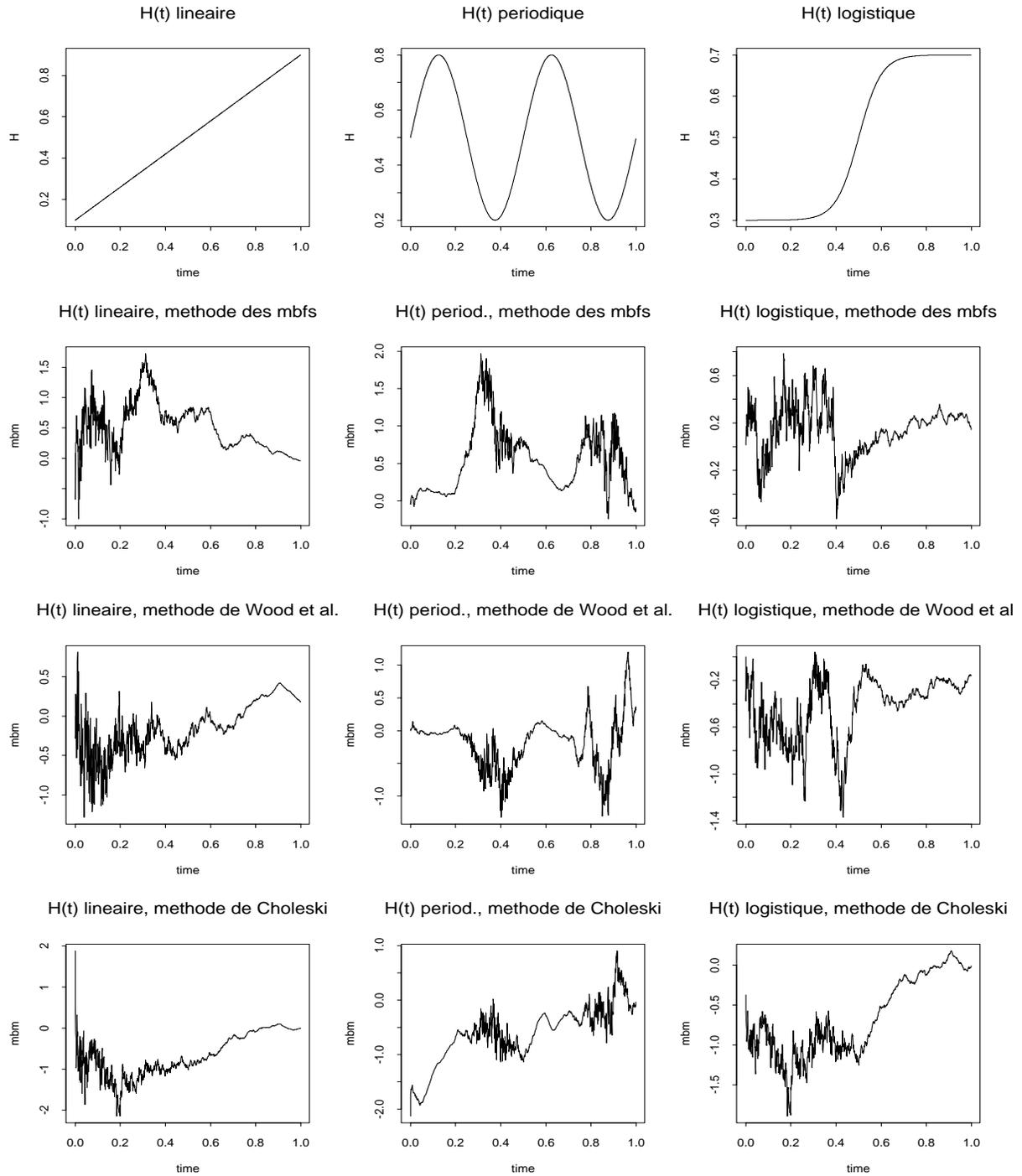


FIG. C.1 – Exemple de trajectoires de mouvements browniens multifractionnaires (de taille $N = 1000$) pour trois types de fonction de Hurst

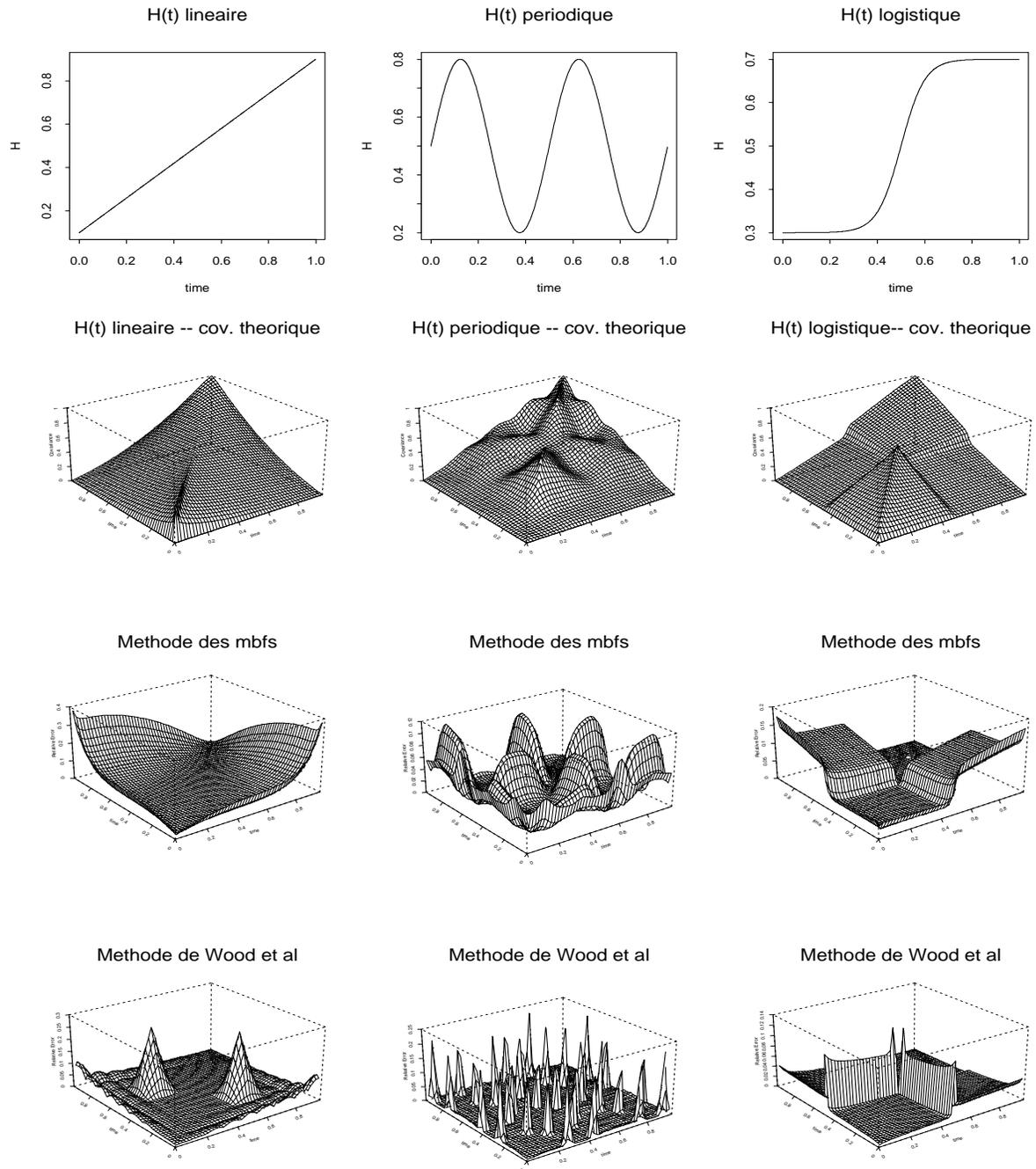


FIG. C.2 – Covariances théoriques et erreurs relatives des approximations de la méthode des mbfs et de la méthode de Wood et al. sur la structure au second ordre. Les mbfs sont de longueur 1000 et le pas de discrétisation 0.05.

Bibliographie

- [1] Abry P.,Gonçalvès P., Flandrin P. (1995), *Wavelets, spectrum analysis and 1/f processes*, Wavelets and Statistics, Lectures Note in Statistics, Vol.103, p.15-29.
- [2] Abry P. and Sellan F. (1996), *The wavelet-based synthesis for fractional Brownian motion*, Applied and computational harmonic analysis, Vol.3, p.377-383.
- [3] Abry P., Veitch D. (1998), *Wavelet Analysis of Long-Range-Dependent Traffic* , IEEE Transactions on Information Theory, Vol.44, No.1, p.2-15.
- [4] Adler R.J., Feldman R.E. and Taqqu M. (1998), *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications*, Birkhäuser, Boston.
- [5] Antoniadis A., Berruyer J. et Carmona R. (1992), *Régression non linéaire et applications*, Economica, Paris.
- [6] Ayache A, and Lévy Véhel J. (1999), *Generalized Multifractional Brownian Motion: definition and preliminary results*, Fractals: Theory and Applications in Engineering, M. Dekking, J. Lévy Véhe, E. Lutton, and C. Tricot Eds, Springer.
- [7] Azaïs J.M. (1990), *Conditions for convergence of number of crossings to the local time. Application to stable processes with independent increments and to Gaussian processes*, Probability and mathematical statistics, Vol.11, p.19-36.
- [8] Bahr B., and Essen C.G. (1965), *Inequalities for the rth moment of a sum of random variables $1 \leq r \leq 2$* , Ann. Math. Stat., Vol.36, p.299-303.
- [9] Bardet, J.M. (1997), *Test d'auto-similarité pour des processus Gaussiens. Dimension fractale et dimension de corrélation*, Thèse de doctorat, Université Paris-Sud.
- [10] Barret W.W., Feinsilver P.J. (1981), *Inverses of band matrices*, Linear Algebra and its applications, Vol.41, p.111-130.
- [11] Baskakov A.G. (1990), *Wiener's theorem and the asymptotic estimates of the elements of inverse matrices*, Funktsionalnyi Analiz i ego Prilozheniya, Vol.24, No.33, p.64-64.
- [12] Becker, Chambers and Wilks (1988), *The new S-language*, Computer Science Series.
- [13] Benassi, A., Jaffard S. and Roux D. (1997), *Gaussian processes and Pseudodifferential Elliptic operators*, Revista Mathematica Iberoamericana, Vol.13, p.19-89.
- [14] Benassi, A., Cohen, S., Istas, J. and Jaffard, S. (1998), *Identification of filtered white noises*, J. Stochastic Processes and Applications, Vol.75, p.31-49.
- [15] Benassi A., Bertrand P., Cohen S., and Istas J. (2000), *Identification of the Hurst exponent of a step multifractional Brownian motion*, à paraître dans Statistical Inference for Stochastic Processes.
- [16] Benassi A., Cohen S., Istas J. (1998), *Identifying the multifractional function of a Gaussian process*, Statistics and Probability Letters, Vol.39, p.337-345.
- [17] Beran, J. and Gosh, S. (1991), *Slowly decaying correlations, testing normality, nuisance parameters*, JASA, Vol.86, No.415, p.785-791.

- [18] Beran, J (1992), *A goodness of fit test for time series with long range dependence*, J. Roy. Statist. Soc., Series B, Vol.54, No.3, p.749-760.
- [19] Beran J. (1992), *Statistical Methods for Data with Long-Range Dependence*, Statistical Science, Vol.7, No.4, p.404-427.
- [20] Beran J. (1994), *Statistics for long memory processes*, Chapman and Hall.
- [21] Beran J. (1996), *Testing for a change of the long memory parameter*, Biometrika, Vol.83, No.3, p.627-638.
- [22] Breuer P., and Major P. (1983), *Central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields*, J. Multivariate Analysis, Vol.13, p.425-441.
- [23] Chambers J.M and Hastie T.J. (1992), *Statistical models in S*, Computer Science Series.
- [24] Chew K.H. (1976), *Bounds for inverse elements of matrices*, Utilitas Mathematica, Vol.9, p.39-48.
- [25] Coeurjolly J.F. (1999), *Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its sample paths*, en révision.
- [26] Coeurjolly J.F. (1999), *Identification du mouvement brownien fractionnaire par variations discrètes*, Rapport de Recherche 1016-M-LMC, Univ. J. Fourier, Grenoble.
- [27] Coeurjolly J.F., Istas J. (2001), *Cramèr-Rao bounds for fractional Brownian motions*, à paraître dans Statistics and Probability Letters.
- [28] Coeurjolly J.F. (2000), *Simulation and identification of the fractional Brownian motion: a bibliographical and comparative study*, Journal of Statistical Software, Vol.5.
- [29] Coeurjolly P., Coeurjolly S. (2000), *Comment réussir son pot de thèse*, Communication privée.
- [30] Cohen S. (1999), *From self-similarity to local self-similarity: the estimation problem*, Fractals: Theory and Applications in Engineering, Dekking M., Lévy Véhel J., Lutton E. and Tricot C. Eds, Springer Verlag, p.3-16.
- [31] Collins J.J., De Luca C.J. (1994), *Upright, correlated random walks: A statistical-biomechanics approach to the human postural control system*, Chaos, Vol.5, No1, p.57-63.
- [32] Cox D., Koh E., Wahba G., Yandell B. (1988), *Testing the (parametric) null model hypothesis in (semiparametric) partial and generalized spline models*, Annals of Statistics, Vol.16, No1, p.113-119.
- [33] Dacunha-Castelle, D., Duflo, M. (1994), *Probabilités et statistiques, volume 1* Masson, Paris.
- [34] Dahlhaus, R. (1989), *Efficient parameter estimation for self-similar processes*, Annals of Statistics, Vol.17, p.1749-1766.
- [35] Daubechies I. (1992), *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics.
- [36] Davis R.B. and Harte D.S. (1987) *Tests for Hurst effect*, Biometrika, Vol.74, p.95-101.
- [37] Delgado M., and Robinson P.M. (1994), *New methods for the analysis of long memory time series: application to Spanish inflation*, Journal of Forecasting, Vol.13, p.97-107.
- [38] Demko S., Moss W.F. and Smith P. (1984), *Decay rates for inverse of band matrices*, Mathematics of computation, Vol.43, No.168, p.491-499.
- [39] Demko S. (1979), *On bounding $\|A^{-1}\|_{\infty}$ for banded A*, Mathematics of Computation, Vol.33, No.148, p.1283-1288.
- [40] Doob J.L. (1953), *Stochastic processes*, Wiley Classics Library, USA.

- [41] Feuerverger A., Hall P., Wood A.T.A. (1994), *Estimation of fractal index and fractal dimension of a Gaussian process by counting the number of level crossings*, Journal of times series analysis, Vol.15, No.6, p.587-606.
- [42] Flandrin P. (1992), *Wavelet analysis of fractional Brownian motion*, IEE Trans. on Inf. Th., Vol.38, No.2, p.910-917.
- [43] Frisch U. (1997), *Turbulence*, Cambridge University Press.
- [44] Geweke J. and Porter-Hudak S. (1983), *The estimation and application of long-memory time-series models*, Journal of Time Series Analysis, Vol.4, p.221-238.
- [45] Giratis L. and Taqqu M. (1999), *Whittle estimator for non-Gaussian long-memory time series*, Annals of Statistics, Vol.27, p.178-203.
- [46] Gleser, L.J. and Moore, D.S. (1983), *The effect of dependence on chi-squared test and empiric distribution tests of fit*, Ann. Stat., Vol.11, p.1100-1108.
- [47] Granger C.W.J (1966), *The typical spectral shape of an economic variable*, Econometrica, Vol.34, p.150-161.
- [48] Grimmet, G.R., Stirzaker D.R. (1992) *Probability and Random Processes*, Clarendon Press, Oxford.
- [49] Guyon X., Leon J. (1989), *Convergence en loi des H-variations d'un processus Gaussien stationnaire sur \mathbb{R}* , Ann. Inst. H. Poincaré, Vol.25, No.3, p.265-282.
- [50] Higuchi T. (1988), *Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory*, Physica D, Vol.31, p.277-283.
- [51] Ho H.C., Sun T.C. (1987), *A central limit theorem for non-instantaneous filters of Gaussian stationary process*, Journal of Multiv. Anal., Vol.22, p.144-155.
- [52] Hurst, H. (1951), *Long-term storage capacity of reservoirs*, Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol.116, p.770-799.
- [53] Hurst H., Black R.P., and Simaika, Y.M. (1965), *Long-term storage: An experimental study*, Constable Press, London.
- [54] Isserlis (1918), *On a formula for the product moment coefficient of any order normal frequency distribution in any number of variables*, *Biometrika*, Vol.12, p.134-139.
- [55] Istas J., and Lang G. (1997), *Quadratic variations and estimation of the Hölder index of a Gaussian process*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.33, No.4, p.407-436.
- [56] Jacquet G., Ohley W.J., Mont M., Siffert R. and Schmuckler R., *Measurement of bone Structure by use of Fractal Dimension*, Proc. of the 12th Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Vol.12, p.1402-1403.
- [57] Jaffard S. (1990), *Propriétés des matrices "bien" localisées près de leur diagonale et quelques applications*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.7, No5, p.461-476.
- [58] Jennane R., and Harba R. (1994), *Fractional Brownian Motion: a model for Image Texture*, EUSIPCO, Signal Processing, Vol.3, p.1389-1392.
- [59] Jennane R., Harba R., Jacquet G. (1996), *Estimation de la qualité des méthodes de synthèse du mouvement brownien fractionnaire*, Traitement du Signal, Vol.13, No4.
- [60] Kent J.T. and Wood A.T.A. (1997), *Estimating the fractal dimension of a locally self-similar Gaussian process using increments*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol.59, No.3, p.679-700.
- [61] Kokoszka, P. and Leipus R. (1998), *Rescaled variance test of long memory*, à paraître dans Statistical Inference for Stochastic Processes.
- [62] Kolmogorov A.N. (1940), *Winersche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum*, S.R. (Doklady) Acad. Sci. USSR (N.S.), Vol.26, p.115-118.

- [63] Kuklinski W.S., Chandra K., Ruttimann U.E., and Webber R.L. (1989), Application of Fractal Texture Analysis to Segmentation of Dental Radiographs, SPIE, Medical Imaging III: Image Processing, Vol. 1092, p.111-117.
- [64] Kwiatowski, D., Phillips P.C.B., Schmidt, P. and Shin, Y. (1992), *Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: how sure are we that economic time series have a unit root?*, Journal of Econometrics, Vol.54, p.159-178.
- [65] Lévy-Véhel, J., Lutton, E. and Tricot, C. Eds. (1997), *Fractals in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin.
- [66] Lo, A. (1991), *Long-term memory in stock market prices*, Econometrica, Vol.59, p.1279-1313.
- [67] Lobato I., Robinson P.M. (1996), *Averaged periodogram estimation of long memory*, Journal of Econometrics, Vol. 73, p.303-324.
- [68] McLeod A.I., Hipel K.W. (1978), *Preservation of the Rescaled Adjusted Range: a reassessment of the Hurst exponent*, Water Resources Research, Vol.14, No.3, p.491-508.
- [69] Mandelbrot B., Van Ness, Wallis J. (1968), *Fractional brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM review Vol.10, p.422-437.
- [70] Mandelbrot B., and Wallis, J. (1968), *Noah, Joseph and operational hydrology*, Water Resources Research, Vol.4, p.909-918.
- [71] Marinucci D., Robinson P.M. (1999), *Alternative forms of fractional Brownian motion*, Journal of Statistical Planning and Inference, Vol.80, p.111-122.
- [72] Misiti M., Misiti Y., Oppenheim G., Poggi J.M., Deniau C., and Viano M.C. (1992), *Modélisation brownienne fractionnaire d'une courbe de charge électrique*, Technical Report, Univ. Paris-Sud, Orsay, p.1-24.
- [73] Moulines E. et Soulier Philippe (2000), *Data driven order selection for projection estimator of the spectral density of times eries with long range dependence*, Journal of Time Series Analysis, Vol.21, No.2, p.193-218.
- [74] Nason G.P. et Silverman B.W. (1994), *The Discrete Wavelet Transform in S*, Journal of computational and graphical statistics, Vol.3, p.163-191.
- [75] Neveu J. (1968), *Processus aléatoires Gaussiens*, séminaire de Mathématiques Supérieures, Cours Montréal.
- [76] Peltier R.F. et Lévy-Véhel J. (1994), *A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion*, Rapport de recherche de l'INRIA, n.2396, p.1-40.
- [77] Peltier R.F. et Lévy-Véhel J. (1995), *Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results*, Rapport de recherche de l'INRIA, n.2645.
- [78] Peltier R.F. (1998) *Processus stochastiques fractals avec applications en finance*, Thèse de doctorat, Univ. Paris VI.
- [79] Poggi J.M. (1995), *Statistiques quadratiques pour le brownien fractionnaire*, Univ. Paris-Sud Orsay, preprint.
- [80] Poggi J.M. et Viano M.C. (1998) *An estimate of the fractal index using multiscale aggregates*, Journal of Time Series Analysis, Vol.19, No.2, p.221-233.
- [81] Rao, A.R. (1991), *A Taxonomy for Texture Description and Identification*, Springer-Verlag, Berlin.
- [82] Robinson P.M. (1994), *Semiparametric analysis of long-memory time series*, Annals of Statistics, Vol.22, No.1, p.515-539.

- [83] Rougier P. (1999), *Automatic determination of the transition between successive control mechanisms in upright stance assessed by modelling of the centre of pressure*, Archives of Physiology and Biochemistry, Vol.107, No.1, p.35-42.
- [84] Rougier P. (1999), *Influence of visual feedback on successive control mechanisms in upright quiet stance in humans assessed by fractional Brownian motion modelling*, Neuroscience Letters, Vol.266, p.157.
- [85] Sellan F. (1995), *Synthèse de mouvements browniens fractionnaires à l'aide de la transformation par ondelettes*, C.R. Académie des sciences de Paris, T.321, Sér.I, p.351-358.
- [86] Shivakumar P.N., Ji C. (1996), *Upper and lower-bounds for inverse elements of tridiagonal matrices*, Linear Algebra and its applications, Vol.247, p.297-316.
- [87] Sreenivasan K.R. (1992), *Fractals in Fluid Mechanics*, Fractals, Vol.2, No.2, p.253-263.
- [88] Taqqu M.S. (1975), *Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, Vol.40, p.203-238.
- [89] Taqqu M., Teverovsky V. (1995), *Estimators for long-range dependence: an empirical study*, Fractals, Vol.3, No.4, p.785-798.
- [90] Taqqu M., Teverovsky V. and Willinger W. (1997), *Is network traffic self-similar or multifractal?*, Fractals, Vol.5, p.63-73.
- [91] Taqu M. and Teverovsky V. (1997), *Robustness of Whittle-type estimators for time series with long-range dependence*, Stochastic Models, Vol.13, p.723-757.
- [92] Tousson, O. (1925), *Mémoire sur l'histoire du Nil*, Mémoires de l'institut d'Egypte, Caire, Vol.9.
- [93] Varga R.S. (1976), *On diagonal dominance arguments for bounding $\|A^{-1}\|_{\infty}$* , Linear Algebra and its applications, Vol.14, p.211-217.
- [94] Vassilevski P.S. (1989), *On some ways of approximating inverses of banded matrices in connection with deriving preconditioners based on incomplete block factorizations*, Computing, Vol.43, p.277-296.
- [95] Vidakovic, B., Katul, G., et Albertson, J. (2000) *Multiscale Denoising of Self-Similar processes*, Journal of Geophysical Research, Climate and Physics of the Atmosphere.
- [96] Willinger W., Taqqu M.S., Leland W.E., and Wilson D.V. (1995), *Self-similarity in high speed packet traffic: analysis and modelisation of ethernet traffic measurements*, Statistical Science, Vol.10, p.67-85.
- [97] Wood A. and Chan G. (1994), *Simulation of stationary Gaussian processes in $[0, 1]^d$* , Journal of computational and graphical statistics, Vol.3, No.4, p.409-432.
- [98] Wood A.T.A. and Chan G. (1997) *An Algorithm for Simulating Stationary Gaussian Random Fields*, J. of Applied Statistics, Vol.46, p.171-181.
- [99] Wood A. and Chan G. (1998), *Simulation of Multifractional Brownian Motion*, Technical Report, S-98-3, Univ. of New South Wales, Sydney.
- [100] Wornell G.W. (1993), *Wavelet-based representations for the 1/f family of fractal processes*, Proc. of the IEEE, Vol.81, No.10, p.1428-1450.
- [101] Zygmund, A. (1953), *Trigonometric series*, Chap. V.2, Cambridge University Press, London.

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions divers problèmes statistiques liés à deux modèles paramétriques stochastiques que sont le mouvement brownien fractionnaire (mbf) et le mouvement brownien multifractionnaire (mbm). Le mbf a été introduit en statistique à partir de 1968 pour modéliser des phénomènes autosimilaires (i.e. invariants par changements d'échelle) et des séries chronologiques exhibant une structure de dépendance uniforme qui décroît de manière hyperbolique avec le temps. Le mbm, apparu beaucoup plus récemment, constitue une extension du mbf au sens où la structure de dépendance peut évoluer au cours du temps: l'autosimilarité n'est alors vérifiée qu' "asymptotiquement localement". L'objectif initial de ce travail de recherche a été l'identification de ce dernier modèle. Néanmoins, ce travail a nécessité des connaissances théoriques constituées par un traitement approfondi et pertinent du mbf, tant sur la compréhension des résultats obtenus jusqu'alors que sur leurs extensions.

Nous commençons donc par développer des méthodes pour identifier le mbf. Ces méthodes sont basées sur le k -ème moment absolu empirique de variations discrètes d'une seule trajectoire discrétisée d'un mbf. Nous généralisons ce travail en développant une estimation robuste (vis-à-vis d'un bruit gaussien additif) des paramètres, et présentons quelques tests permettant de valider le modèle. Nous démontrons ensuite un résultat d'algèbre linéaire concernant l'inverse de matrices dont les coefficients décroissent hyperboliquement en s'éloignant de la diagonale. Ce résultat s'avère fondamental pour exhiber le comportement asymptotique des bornes de Cramèr-Rao des paramètres du mbf. Dans une dernière partie, nous proposons une approche locale des résultats des premiers chapitres, et cela afin d'identifier le mbm.

Les résultats de cette thèse sont illustrés par des études numériques et de nombreuses simulations. Enfin, trois annexes permettent au lecteur de se familiariser avec le problème d'identification du mbf ainsi que le problème de simulation de trajectoires discrétisées de processus gaussiens.

Mots-clés: processus fractionnaires, processus multifractionnaires, autosimilarité, identification robuste, bornes de Cramèr-Rao, inversion de matrices localisées, simulation de trajectoires discrétisées d'un processus gaussien.

Abstract

This thesis deals with statistical problems related to two parametric models: the fractional Brownian motion (fBm) and the multifractional Brownian motion (mBm). Firstly, we develop methods for identifying a fBm. These methods are based on the k -th absolute empirical moment of discrete variations of a discretized path of a fBm. We then extend this work by developing a robust method (with respect to an additive Gaussian noise) estimation of parameters, and present few tests for validating the model.

We also prove a linear algebra result concerning inverses of matrices with terms decreasing hyperbolically far away from the diagonal. This result is fundamental to exhibit the asymptotic behavior of Cramèr-Rao bounds for the parameters of a fBm.

Finally, we propose a local approach of the results of the first chapters, in order to identify the mBm, viewed as an extension of the fBm in the sense that the regularity of the process varies with time.

Numerical studies and many simulations are provided to illustrate the results of this thesis. Moreover, three appendices allow the reader to familiarize himself with the problem of fBm's identification and the simulation of discretized paths of Gaussian processes.

Keywords: fractional and multifractional processes, self-similarity, stable identification, Cramèr-Rao bounds, inverses of localized matrices, simulation of sample path of a Gaussian process.