



Analyse multirésolution non emboîtée : applications à la visualisation scientifique

Alexandre Gerussi

► To cite this version:

Alexandre Gerussi. Analyse multirésolution non emboîtée : applications à la visualisation scientifique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2000. Français. NNT : . tel-00006745

HAL Id: tel-00006745

<https://theses.hal.science/tel-00006745>

Submitted on 24 Aug 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER – GRENOBLE 1
SCIENCES & GÉOGRAPHIE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

Discipline : **Mathématiques Appliquées**

Présentée et soutenue publiquement

par

Alexandre Gerussi

le 15 décembre 2000

TITRE DE LA THÈSE

**Analyse Multirésolution Non Emboîtée
Applications à la Visualisation Scientifique**

Directeur de thèse

Georges-Pierre Bonneau

COMPOSITION DU JURY :

Mme.	Valérie Perrier	Professeur	Présidente
M.	Kadi Bouatouch	Professeur	Rapporteur
M.	Alain Le Méhauté	Professeur	Rapporteur
M.	Bernard Lacolle	Professeur	Examineur
M.	Georges-Pierre Bonneau	Chargé de Recherches	Examineur

Remerciements

Je voudrais remercier Madame Valérie Perrier pour l'honneur qu'elle m'a fait en présidant le jury.

Que soient évidemment remerciés également Messieurs Kadi Bouatouch et Alain Le Méhauté pour avoir accepté d'être mes rapporteurs de thèse, contribuant par leur expertise à sa finalisation. Merci tout autant à Bernard Lacolle d'avoir complété le jury.

Je remercie Georges-Pierre Bonneau d'avoir proposé puis dirigé cette thèse. J'ai beaucoup appris à son contact ; qu'il trouve dans ces quelques lignes le témoignage de ma reconnaissance.

Merci à tous les thésards qui sont passés par le bureau 25 en maintenant une atmosphère détendue mais travailleuse, comme je les apprécie. Je pense aux colocataires officiels (Valérie, Riadh, Sylvia) mais plus généralement à tous les membres actifs de CLEBAR ou du SIT (François, Guillaume, Sophie, Voïchita), sans oublier les thésards « légendaires » (Jean-Christophe, Khaled, Mohammed).

Enfin, bien sûr, une pensée spéciale revient à ma petite Céline, qui s'est si bien occupée de moi durant ces années de labeur.

Table des Matières

Notations	1
Introduction	3
Chapitre I. De la Première à la Deuxième Génération	7
I.1. Première génération	8
I.1.1. Analyse multirésolution	8
I.1.2. Cascade	9
I.1.3. Projection, dualité	11
I.1.4. Reconstruction, ondelettes	13
I.2. Notion d'espaces de subdivision	
Réalisation du processus numérique	16
I.3. Deuxième génération	19
I.3.1. La construction de Lounsbery	20
I.3.2. La construction de Sweldens	22
I.3.3. De la mise en œuvre des ondelettes de seconde génération	24
Chapitre II. Multirésolution Non Emboîtée : Aspects Algébriques	27
II.1. MNE : Le point de vue non emboîté	28
II.1.1. Approximation et reconstruction	28
II.1.2. Forme développée de la reconstruction	30
II.1.3. Bases, matrices d'analyse et de synthèse	32
II.2. MNE : Le point de vue subdivision	34
II.2.1. Espaces de subdivision et opérateurs	34
II.2.2. Espaces d'échelle, espaces de détail	34
II.2.3. Bases	37
II.3. Comparaison entre les deux points de vue	38

Chapitre III. Multirésolution Non Emboîtée : Aspects Analytiques	39
III.1. Stabilité	40
III.1.1. Stabilité du processus d'analyse	42
III.1.2. Stabilité du processus de synthèse	48
III.2. Mesure d'erreur	51
III.2.1. Cadre général	51
III.2.2. Le cas des similitudes	54
III.3. Conditionnement	56
III.3.1. Conditionnement d'une étape d'analyse	57
III.3.2. Conditionnement d'une étape de synthèse	58
III.4. DVS et décomposition multirésolution	60
III.5. Techniques de construction des opérateurs	65
III.5.1. Choix des opérateurs de synthèse connaissant les opérateurs de décimation	65
III.5.2. Choix des opérateurs de décimation connaissant les opérateurs de synthèse	67
Chapitre IV. Triangulations et Décimation	73
IV.1. Triangulations	73
IV.1.1. Définitions de base	73
IV.1.2. Relations d'Euler	75
IV.2. Techniques de décimation de maillages	76
IV.2.1. La suppression de sommets	76
IV.2.2. La suppression d'arêtes et la suppression de triangles	79
IV.3. Décimation régulière	80
Chapitre V. Multirésolution pour Fonctions Définies sur des Maillages Irréguliers	83
V.1. Approximation linéaire	84
V.1.1. Ondelettes de Haar dans le cas plan	84
V.1.2. Séquence d'approximation dans le cas irrégulier	86
V.1.2.1. Construction des maillages : espaces d'approximation	86
V.1.2.2. Opérateurs d'approximation	88
V.1.2.3. Réduction de la taille des matrices dans le cas linéaire	91
V.1.3. Exemples	94
V.1.4. Espaces auxiliaires dans le cas irrégulier	95
V.1.4.1. Surjectivité des opérateurs d'approximation	95
V.1.4.2. Choix des espaces auxiliaires	97
V.1.5. Calcul des matrices d'analyse et de synthèse	98
V.1.5.1. La méthode par élimination	98
V.1.5.2. La méthode de la DVS	100
V.1.5.3. Comparaison expérimentale du conditionnement des deux méthodes	102

V.1.5.4. Illustrations locales	102
V.1.6. Reconstruction par niveaux vs. reconstruction seuillée	103
V.1.6.1. La reconstruction par niveaux	103
V.1.6.2. La reconstruction adaptative	104
V.1.6.3. Comparaison avec d'autres algorithmes adaptatifs	108
V.1.7. Exemples de reconstruction	109
V.2. Approximation non linéaire	111
V.2.1. Description de la méthode	111
V.2.2. Exemples d'oracles	116
V.2.2.1. Oracles dans le cas constant	116
V.2.2.2. Oracles dans le cas linéaire	117
V.2.3. Exemples et comparaisons	120
V.3. Autres opérateurs d'approximation	122
V.3.1. Approximation isométrique	122
V.3.1.1. Calcul des opérateurs locaux	122
V.3.1.2. Du local au global	124
V.3.1.3. Exemples et applications	125
V.3.2. Approches basées sur l'opérateur de subdivision	128
V.3.2.1. Opérateurs de synthèse engendrant des fonctions « lisses »	129
V.3.2.2. Choix des espaces de détail	131
Chapitre VI. Applications aux Données Scalaires Surfiques dans un Modèle	
Décimatoire Multirésolution	133
VI.1. Cadre théorique	134
VI.1.1. Description formelle des données initiales	134
VI.1.2. Séquence d'approximation	135
VI.1.2.1. Espaces d'approximation	135
VI.1.2.2. Opérateurs d'approximation	136
VI.1.2.3. Espaces auxiliaires	136
VI.1.3. Comparaison avec l'approche ondelette classique	137
VI.2. Mise en oeuvre. Exemples	137
VI.2.1. Données initiales	137
VI.2.2. Décomposition locale	138
VI.2.3. Exemples	139
Conclusion et Perspectives	143
Mesure d'erreur	144
Fonctions définies sur des maillages surfiques	145
Fonctions définies sur un maillage volumique tétraédrique	146
Multirésolution pour maillages surfiques irréguliers	146
Annexe A. Convergence de l'opérateur localisé	149

Références	153
-------------------------	-----

Notations

$:=$	définition.
$\llbracket n, m \rrbracket,]n, m[, \text{ etc.}$	$[n, m] \cap \mathbb{Z},]n, m[\cap \mathbb{Z}, \text{ etc.}$
$\cup$	union disjointe.
$f.$	famille f_i , l'indice i variant dans un ensemble <i>ad hoc</i> .
$A = (a_{i,j})_{i,j}$	matrice dont l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne est $a_{i,j}$.
$u_i, A_{i,j}$	$i^{\text{ième}}$ élément du vecteur u , élément de A en $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne.
u^*, A^*	vecteur ou matrice transposée.
$u_b.$	(u vecteur) vecteur colonne des coordonnées de u dans la base $b.$.
$P_{e.;f.}$	(P application linéaire) matrice de l'application linéaire $P : E \rightarrow F$, relativement à la base $e.$ de E et $f.$ de F .
$P_{e.}$	(P application linéaire) abréviation pour $P_{e.;e.}$.
$\mathcal{M}_{[e.;f.]}$	matrice de passage de la base $e.$ à la base $f.$, de sorte que $g_{f.} = \mathcal{M}_{[e.;f.]} g_{e.}$. $\mathcal{M}_{[e.;f.]}$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $f_{.e.}$.
$\langle f, g \rangle$	produit scalaire de f et g .
$\mathcal{G}_{[u.;v.]}$	matrice « de Gram » du produit scalaire relativement aux bases $u.$ et $v.$: $\mathcal{G}_{[u.;v.]} := (\langle u_i, v_j \rangle)_{i,j}$. On a alors $\langle f, g \rangle = f_u^* \mathcal{G}_{[u.;v.]} g_v.$
$\mathcal{G}_{e.}$	abréviation pour $\mathcal{G}_{[e.;e.]}$.
$f'(x)$	valeur de la différentielle (ou « dérivée ») de l'application $f : E \rightarrow F$, au point $x \in E$. C'est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$, ensemble des applications linéaires continues de E dans F .
$f'(x;h), f'(x)(h)$	valeur de l'application linéaire $f'(x)$ en h .
$\text{Im}(P), \text{Ker}(P).$	image et noyau de l'application linéaire P .
$\text{Span}(f.)$	sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $f.$.
$V^\perp$	orthogonal du sous-espace V .

$\mathcal{P}_V^\perp$	projecteur orthogonal sur le sous-espace V .
$\mathcal{D}(f)$	ensemble de définition de f .
Id_V	identité de V dans lui-même.
Id_n	matrice identité de taille n^2 .
$0_{n,m}$	matrice nulle de taille $n \times m$: n lignes, m colonnes.
$f _V$	restriction de la fonction f à l'ensemble $V \subset \mathcal{D}(f)$.
$\mathcal{P}(E)$	ensemble des parties de l'ensemble E .
$\text{Inv}(f), f^{-1}$	application réciproque de $f : E \rightarrow F$, définie éventuellement à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ si f n'est pas injective.
$\text{Mat}_{n \times m}$	ensemble des matrices de n lignes et m colonnes.
$\overset{\perp}{\oplus}$	somme directe orthogonale entre sous-espaces vectoriels.
$\mathcal{V}_{\mathcal{M},k}, \mathcal{V}_k$	ensemble des indices des sommets formant le k -voisinage du sommet $\mathcal{M}$ (précisé ou implicite).
$\delta_{k,l}$	symbole de Kronecker : $\delta_{k,l} = 1$ si $k = l$, et 0 sinon.
PI	“Polygone d’Influence”
ADR	“Algorithme de Décimation Régulière”
DVS	“Décomposition en Valeurs Singulières”

Introduction

DANS LES VINGT DERNIÈRES ANNÉES, la notion de multirésolution, initiée puis nourrie par le développement spectaculaire de la théorie des ondelettes, a trouvé sa place dans des domaines très variés des mathématiques appliquées : traitement du signal, équations aux dérivées partielles, statistique, modélisation géométrique et infographie, pour ne citer que les principaux ([MWP]).

En proposant en 1989 son modèle d'analyse multirésolution ([Mal89]), Mallat apporte à la théorie des ondelettes, alors ancrée dans l'analyse fonctionnelle, un exposé clair de l'idée fondamentale de multirésolution contenue dans les bases d'ondelettes : la représentation d'une fonction sous la forme d'une approximation grossière et d'une suite de « corrections » d'ampleur décroissante. Ce qui n'est autre qu'un changement de base judicieux va ouvrir la porte à de nombreuses applications, dont les plus classiques sont la compression et le lissage. Le modèle d'analyse multirésolution apporte également un aspect algorithmique séduisant qui va contribuer à faire entrer la théorie des ondelettes dans des disciplines de l'informatique et par là naturellement développer ses applications en modélisation géométrique et plus généralement en infographie.

À cette époque, les ondelettes sont dites de « première génération » : pour l'essentiel, ce sont des bases pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^n$ par produit tensoriel. La caractéristique des ondelettes de première génération est d'être des translatées et dilatées d'une seule et même fonction « mère ». Ce cadre simple permet une modélisation mathématique très poussée menant à divers résultats élaborés sur les propriétés d'approximation des ondelettes, de base inconditionnelle pour certains espaces fonctionnels, sur l'appartenance d'une fonction à une certaine classe de régularité au seul vu de ses coefficients d'ondelettes, etc. Le principal handicap de cette théorie est que les signaux modélisables par le biais des ondelettes doivent toujours être réguliers, au sens où les échantillons doivent être régulièrement disposés sur la droite. Si beaucoup de données statistiques ou sonores par exemple vérifient dans leur forme naturelle ces hypothèses, la diversité des situations proposées notamment par la visualisation scientifique a rapidement motivé des extensions de la théorie originale.

On se réfère à ces extensions, dont les premières datent du début des années 90, par les termes « ondelettes de deuxième génération », dénomination *a priori* due à Sweldens. Les premiers exemples d'extensions concernent les bases d'ondelettes dites biorthogonales ([CDF92]), qui étendent les bases orthogonales ou semi-orthogonales, mais déjà au prix d'une analyse plus délicate de la stabilité des algorithmes de décomposition/reconstruction ([Kei95]). Viennent ensuite les bases d'ondelettes sur l'intervalle ([Dau94]), qui visiblement ne peuvent provenir des translatées (en nombre infini) d'une seule fonction ondelette mère. Les multi-ondelettes, translatées et dilatées d'un nombre fini de fonctions mères, permirent de développer des bases combinant plu-

sieurs propriétés intéressantes (orthogonalité, support compact, polynomiale par morceaux, ...) que l'on sait hors de portée des bases d'ondelettes de première génération ([DGH96]).

Avec les travaux fondamentaux de Lounsbery ([Lou94]), la théorie des ondelettes s'étend aux surfaces à topologie quelconque. Le lien entre l'analyse multirésolution et les schémas de subdivision est alors mis en évidence. Généralisant la technique de construction d'ondelettes employée par Lounsbery, Sweldens propose un modèle général de construction des ondelettes de seconde génération ([Swe98]), qu'il applique en particulier pour développer des ondelettes sur la sphère ([SS95]). Depuis cette époque, notamment avec les travaux de DeRose ([DSS96]) et Schröder, des modèles de plus en plus originaux sont apparus. Il n'est par ailleurs plus très clair qu'il soit toujours légitime d'utiliser le terme "ondelettes" pour s'y référer, tant les propriétés fondamentales des ondelettes de première génération (simplicité, efficacité algorithmique, propriétés mathématiques précises, *etc.*) sont à présent passées au second plan, notamment dans les applications de la visualisation scientifique.

À l'heure actuelle, le mécanisme de l'analyse multirésolution et des ondelettes est bien compris et les liens avec les schémas de subdivision renvoient essentiellement le problème de la construction de bases d'ondelettes à celui de la construction de schémas de subdivision adaptés. Le challenge n'est pas forcément plus simple : dans l'état actuel des recherches, on peut dire que seuls les schémas « réguliers » sont relativement bien connus. Un travail de référence sur les schémas stationnaires (en dimension 1) est [CDM91]. Pour les surfaces de subdivision, plusieurs schémas épars ont été proposés, parfois très tôt et sans preuve de leur convergence ([DS78, CC78]). On pourra voir [Sch96] et aussi [ZSD⁺00] pour une vue d'ensemble des connaissances actuelles. L'ensemble de ces schémas ont en commun la régularité de la subdivision, c'est-à-dire une stratégie constante dans l'insertion des points : on dit que les maillages (au sens large) ont une "connectivité de subdivision". Dans le cas des surfaces, de nombreux schémas partent d'un maillage quelconque puis le subdivisent régulièrement, ce qui donne lieu à des maillages réguliers à l'exception d'un petit nombre de sommets dits "exceptionnels". On parle alors de maillages semi-réguliers. Très peu de choses sont connues sur la subdivision irrégulière : dans ce type de subdivision, les nouveaux points sont insérés en une position et en nombre variables. Si des constructions sans preuve de convergence sont relativement aisées (voir par exemple le paragraphe V.3.2.1), des résultats théoriques n'ont pu être obtenus que sur des exemples particuliers ([DGS99]). Par ailleurs, une ébauche de théorie générale a été entamée dans [Gus98].

Parallèlement à la théorie des ondelettes, l'idée de multirésolution a fait son chemin propre, dans le domaine de la modélisation géométrique et de la visualisation scientifique notamment. Elle se retrouve en effet au coeur du développement important depuis une dizaine d'années maintenant des techniques dites « décimatoires ». Leur objectif initial, qui demeure le principal aujourd'hui, est la simplification de maillages complexes et denses, notamment ceux issus de techniques de subdivision ou d'acquisition par scanner 3D. Ces derniers, du fait de leur irrégularité, rendent impossible l'utilisation des techniques d'ondelettes. Les applications les plus immédiates sont le stockage, la possibilité d'affichage ou de manipulation interactive et l'affichage progressif.

Les algorithmes de décimation effectuent une simplification des maillages en appliquant une suite d'opérations de simplification élémentaire (par exemple la suppression d'un sommet, *cf* chapitre IV) gouvernée par un critère le plus souvent géométrique : minimiser une erreur d'approximation par rapport au modèle initial. Ces techniques relativement simples ont fait leur apparition avec les travaux de [SZL92] et ont atteint depuis un degré de perfectionnement assez important. Hoppe fut l'un des premiers à

améliorer les approches heuristiques employées jusque là en exprimant la simplification sous la forme d'un problème d'optimisation (complexe) ([HDD⁺ 93]). Les résultats sont remarquables mais au grand détriment du temps de calcul. Les nombreux autres travaux peuvent se classer suivant les différents objectifs qu'ils se sont fixés : interactivité, possibilité de reconstruction, présence de données sur le maillage initial, mesure de l'erreur d'approximation, possibilité de changement de la topologie sont les caractéristiques que la majorité des algorithmes de décimation tente d'accommoder. On pourra se référer à [HG97] pour un comparatif de la plupart des algorithmes disponibles.

L'édition multirésolution, encore appelée édition à différents niveaux de détails, est un autre exemple de l'influence de l'idée de multirésolution, appliquée en modélisation géométrique. Dans ce domaine également, on peut trouver des travaux affiliés aux techniques d'ondelettes mais également d'autres techniques « hybrides » mêlant les outils des algorithmes de décimation, les schémas d'ondelettes et la subdivision ([KCVS98, ZSS97, GSS99]). C'est d'ailleurs dans ce domaine que les théories d'ondelettes même les plus générales semblent céder du terrain face à des approches plus algorithmiques (voir à ce sujet les perspectives en fin de document). On pourra également regarder [Gri00] pour un exposé sur l'utilisation des ondelettes et de la multirésolution en général en modélisation géométrique.

Cette thèse propose un modèle multirésolution général pour les ondelettes de seconde génération, qui englobe en particulier la construction de Lounsbery et celle présentée par Sweldens. L'apport principal de cette formulation est qu'elle donne lieu à deux interprétations différentes. La première s'assimile à ce qui est déjà connu avec les schémas de subdivision ; aussi dans la thèse l'avons-nous appelée « le point de vue subdivision ». L'alternative, « le point de vue non emboîté », propose un modèle multirésolution dans lequel l'équivalent des espaces d'échelle de la théorie des ondelettes ne sont plus nécessairement emboîtés. Le gain en souplesse permet entre autre de proposer un cadre multirésolution pour fonctions définies sur des maillages irréguliers (*cf* chapitre V), mais aussi d'unifier dans une certaine mesure les approches ondelettes et les techniques de décimation, traditionnellement opposées. Le document est découpé en six chapitres dont nous présentons maintenant rapidement le contenu.

Le premier chapitre se propose de faire la transition entre les ondelettes de première et de deuxième génération, en reprenant dans les grandes lignes une construction des ondelettes de première génération permettant d'une part de rendre « naturelle » l'extension vers la seconde génération et d'autre part de dégager deux concepts importants : celui de *réalisation fonctionnelle* et d'*espaces de subdivision*. Ils forment la base de la construction proposée par la suite, qui est rapidement esquissée à la section I.2 afin de montrer alors comment elle permet de reformuler celle de Lounsbery et de Sweldens. On peut signaler que ce premier chapitre s'adresse aux lecteurs possédant déjà une connaissance préalable (modeste) des mécanismes des ondelettes.

Avec le deuxième chapitre commence la description formelle du cadre multirésolution. On a choisi de séparer le point de vue non emboîté du point de vue subdivision, bien qu'ils soient intimement liés. Cela permet de mieux en souligner les différences. Seule la partie algébrique de la construction est présentée dans ce chapitre. L'ensemble du vocabulaire et des notations propres aux deux points de vue s'y trouve.

Les aspects analytiques sont présentés au troisième chapitre. On y étudie de manière très générale les questions de stabilité des processus de décomposition et de reconstruction multirésolution. À cette occasion, plusieurs hypothèses naturelles vont apparaître qui compléteront les composantes introduites au chapitre précédent. Le conditionnement, aspect dérivé de la stabilité, est également étudié et fournira les premiers critères de choix des opérateurs multirésolution. Nous définissons d'autre part

le problème de la mesure d'erreur et montrons comment le résoudre moyennant certaines hypothèses. Le rôle particulier de la DVS sera également mis en évidence. Le chapitre se termine avec l'étude de plusieurs critères d'intérêt général guidant le choix des opérateurs multirésolution ; ils compléteront ceux aperçus lors de l'étude du conditionnement. La plupart de ces critères sont immédiatement utiles dès les premières démarches menant aux applications.

Le chapitre IV opère la transition entre la première partie de la thèse, relativement théorique, et la deuxième, plus appliquée. On y précise quelques notions sur les triangulations, les opérations de simplification de maillages et la décimation en général. Ces techniques sont utilisées dans les deux chapitres suivants.

Au chapitre V, on commence par effectuer pas à pas la construction d'un cadre multirésolution non emboité pour fonctions définies sur des maillages planaires ou sphériques irréguliers. Au delà de l'intérêt propre qu'elle représente, cette construction sert également de terrain d'investigation des potentialités réelles des ondelettes dans un cadre irrégulier. Dans ce contexte, l'intérêt du point de vue non emboité sur le point de vue traditionnel sera souvent mis en évidence. Le lien entre les méthodes de décimation et les ondelettes sera établi par le biais du point de vue non emboité avec l'étude de l'algorithme de décimation adaptative. En fin de chapitre, deux autres constructions d'opérateurs multirésolution sont proposées et discutées.

Le dernier chapitre présente l'application du point de vue non emboité à la visualisation de fonctions définies sur des maillages surfaciques irréguliers, dans le contexte des algorithmes de décimation. Une première partie expose la démarche générale utilisée, sur laquelle on s'appuie pour comparer et lier à nouveau les méthodes de décimation et l'approche ondelettes proposée par Lounsbery. La deuxième partie présente les applications à quelques modèles de pièces mécaniques.

Le document s'achève par une conclusion et l'exposé de plusieurs directions de recherche futures possibles pour ce travail.



De la Première à la Deuxième Génération

CE CHAPITRE a pour but de rappeler les mécanismes sous-jacents aux ondelettes dites « de première génération » ainsi qu'à leurs successeurs, les ondelettes dites « de deuxième génération », introduites essentiellement pour se libérer du cadre trop restrictif des premières. La théorie de la première génération est vaste et les travaux la concernant, tant du point de vue théorique (leur construction) qu'à celui de leur utilisation dans les domaines les plus variés, sont innombrables. Ici nous nous contenterons d'en revoir les principes essentiels, notre but premier étant d'introduire la notion d'espaces de subdivision (section I.2) et de montrer où elle intervient et ce qu'elle peut apporter dans les deux générations d'ondelettes. En comparaison de la première génération, relativement peu de travaux traitent des ondelettes de deuxième génération d'un point de vue théorique, une des raisons à cela étant qu'il est difficile d'approfondir leur théorie tout en restant général; on trouve ainsi plutôt des travaux portant sur des applications particulières. À la section I.3 seront rapidement exposées deux constructions générales d'ondelettes de seconde génération, qui seront ensuite reformulées dans le contexte des espaces de subdivision. On pourra par ailleurs trouver un exposé groupé sur les deux générations d'ondelettes dans [SS96].

Ce chapitre permet de situer les concepts des chapitres II et III par rapport à la présentation classique des ondelettes, et il aide à leur compréhension car les principes essentiels vont être aperçus dès maintenant.

Pour de plus amples informations sur les ondelettes et leurs applications, on pourra se reporter aux références des travaux cités dans ce chapitre, ainsi que sur l'internet, en particulier [MWP], où de nombreux articles sont disponibles en ligne, et surtout le « wavelet digest » [WD]. Une référence classique est [Dau92], et on trouvera par ailleurs dans [Coh98] et [Mal98] des exposés complets des tenants et des aboutissants

de l'analyse par ondelettes.

I.1. Première génération

Dans cette section on retrace les grandes lignes de la construction des ondelettes biorthogonales ; deux références classiques sont [CDF92] et [Coh92]. La présentation donnée ici est brève et des notions préalables sont requises. Nous plaçons l'algorithme en cascade au coeur de la construction — ce qui est rarement fait — car cela permet une transition « naturelle » vers les ondelettes de seconde génération et le concept d'espace de subdivision. On se bornera ici à la dimension 1, c'est-à-dire aux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Pour rester concret, un exemple particulier simple d'ondelettes est choisi et illustre la construction générale : il s'agit d'une ondelette pour splines de degré 1. Nous nous focaliserons essentiellement sur les aspects algébriques de la construction, laissant de côté toute la partie analytique, assez complexe, et n'apportant rien à la compréhension des mécanismes de base. Par conséquent certaines opérations faites ici doivent être considérées *formellement*, sachant qu'elles peuvent se justifier par l'adjonction de critères analytiques.

I.1.1. Analyse multirésolution

Le point de départ utilisé dans la majorité des constructions des ondelettes de première génération est le concept d'analyse multirésolution.

DÉFINITION I.1 Analyse multirésolution — Une analyse multirésolution est la donnée d'une suite de sous-espaces vectoriels fermés V^n de $L_2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{Z}$, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) les espaces sont emboîtés, c'est-à-dire

$$\dots \subset V^n \subset V^{n+1} \subset \dots;$$

(ii) $f \in V^n$ si et seulement si $f(2 \cdot) \in V^{n+1}$;

(iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V^n$ est dense dans $L_2(\mathbb{R})$;

(iv) $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V^n = \{0\}$;

(v) il existe une fonction $\varphi \in V^0$ telle que la famille $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz pour V^0 .

Notation. — Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ et k, n deux entiers relatifs, on note $f_{[n,k]}$ la fonction $2^{\frac{n}{2}} f(2^n \cdot - k)$.

La fonction φ est appelée *fonction d'échelle*. Des propriétés (ii) et (v) ci-dessus, on déduit immédiatement que la famille de fonctions $\{\varphi_{[n,k]}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base de Riesz de V^n , pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Comme $V^0 \subset V^1$ (propriété (i)), la fonction $\varphi \in V^0$ s'écrit comme combinaison linéaire des fonctions $(\varphi_{[1,k]})$, ce qui signifie qu'il existe des coefficients $(h_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, tels que

$$\varphi = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i \varphi(2 \cdot - i). \quad (\text{I.1})$$

On dira que φ est une fonction *raffinable* et que les h_i sont les *coefficients de raffinement*. Plus généralement, l'égalité (I.1) permet d'écrire que

$$\varphi_{[n,k]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_{i-2k} \varphi_{[n+1,i]} \quad n, k \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire qu'à un décalage près, les coefficients de raffinement sont les mêmes pour tout k (uniformité) et tout n (stationnarité).

Exemple. — Prenons pour fonction φ la fonction « chapeau » $H = \max(1 - |x|, 0)$. On peut montrer relativement facilement que les fonctions $(H_{[n,k]})_k$, $n \in \mathbb{Z}$ engendrent bien une suite d'espaces formant une analyse multirésolution. La fonction H ainsi que ses translatées ont été représentées à la figure I.1. Les coefficients de raffinement sont pour cet exemple

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_1 &= h_{-1} = \frac{1}{2} \\ h_i &= 0 \quad \text{si } |i| > 1 \end{aligned}$$

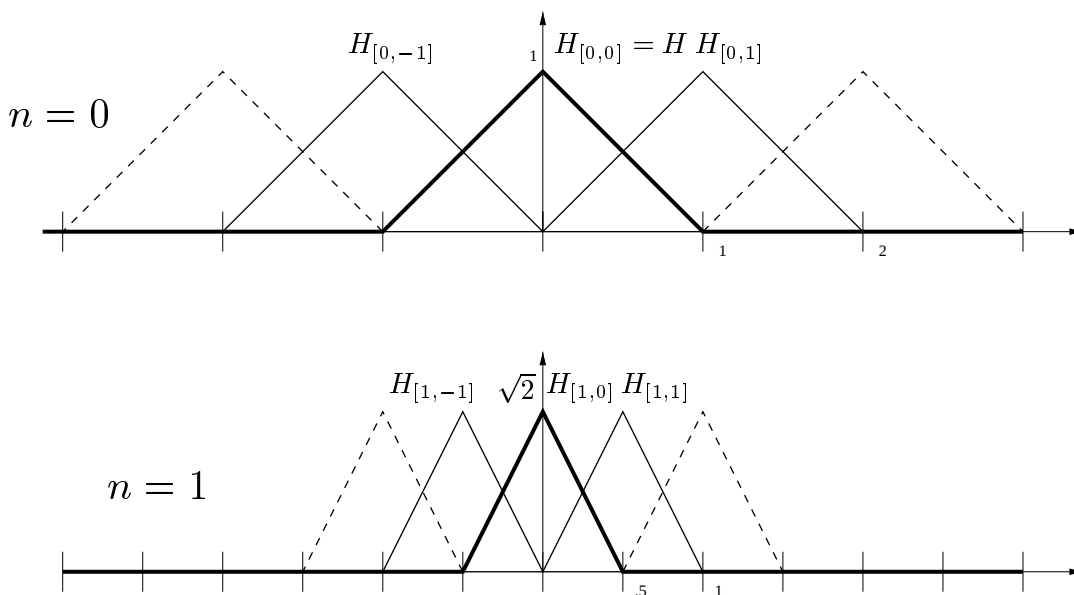


Figure I.1 — Fonction d'échelle et ses translatées à deux niveaux consécutifs.

I.1.2. Cascade

La présente section est habituellement introduite au moment où l'on cherche la manière explicite de calculer diverses grandeurs mettant en jeu la fonction d'échelle. Il s'agit d'une notion essentielle, aussi l'introduisons-nous dès maintenant, en réponse à la question suivante : comment trouver en pratique des fonctions d'échelle vérifiant les axiomes d'une analyse multirésolution ? En fait nous allons surtout nous intéresser aux propriétés (i) et (ii).

Observons pour commencer que si nous connaissons une fonction φ vérifiant une équation de raffinement de type (I.1), alors en posant

$$V^n := \overline{\text{Span}((\varphi_{[n,k]})_{k \in \mathbb{Z}})}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

les deux propriétés sont vérifiées. Cette observation ramène donc le problème :

- 1) aux choix de coefficients $(h_i)_{i \in \mathbb{Z}}$;
- 2) à la recherche d'une fonction φ vérifiant (I.1).

L'idée fondamentale utilisée pour résoudre 2) est de voir que φ est un point fixe de l'opérateur

$$R : L_2 \longrightarrow L_2$$

$$f \longmapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i f(2 \cdot -i)$$

L'algorithme en cascade consiste donc à déterminer φ itérativement en partant d'une fonction φ_0 et en calculant pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_{k+1} := R(\varphi_k)$. Si la suite φ_k est convergente vers φ_∞ , alors φ_∞ est solution de (I.1) puisque R est un opérateur continu. Notons que les coefficients de raffinement (h_i) de la fonction limite sont les mêmes que ceux utilisés pour la construire.

Posons $R^i := R \circ \dots \circ R$ (i fois, en convenant que $R^0(f) = f$), et cherchons à calculer $R^n(f)$ sous la forme

$$\sum_k a_k^n f_{[n,k]}.$$

On montre facilement en développant l'égalité $R^{n+1} = R^n \circ R$ que les coefficients a_k^n sont déterminés (de manière unique si les translatées entières de f sont linéairement indépendantes) par la récurrence $a_{\cdot}^0 = \delta_{0,\cdot}$, et

$$a_{\cdot}^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k a_k^n h_{\cdot - 2k}. \quad (\text{I.2})$$

Il va être pratique de formaliser ce processus de la manière suivante.

Notations. — Si $(a_{\cdot})$ est une suite numérique, f une fonction, on note :

- $\mathcal{R}_{(h_{\cdot})}^n(a_{\cdot}) := (a_{\cdot}^n)$, où $a_{\cdot}^n$ est obtenu par n itérations de (I.2) avec l'initialisation $a_{\cdot}^0 := a_{\cdot}$.
- $\mathcal{J}_f^n(a_{\cdot}) := \sum_k a_k f_{[n,k]}.$

On omettra la fonction f ou la suite $(h_{\cdot})$ dans ces notations, lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion.

Avec ces notations, on a donc $R^n(f) = \mathcal{J}^n \circ \mathcal{R}^n(\delta_{0,\cdot})$. Quelques calculs montrent que si $f = \lim_n R^n(g)$ alors les translatées et dilatées s'obtiennent encore à partir de g par la formule

$$f_{[p,l]} = \lim_n (\mathcal{J}^{n+p} \circ \mathcal{R}^n(\delta_{l,\cdot})). \quad (\text{I.3})$$

Dans ce qui suit nous supposons que la fonction d'échelle est effectivement obtenue à partir des coefficients par l'algorithme en cascade à partir d'une certaine fonction de départ ϕ . Tout est ainsi déterminé par la donnée des coefficients de raffinement. Nous reviendrons sur ce processus en section I.2 car il constitue l'idée clé de la construction des ondelettes de deuxième génération, ainsi que de la construction que nous proposerons dans les prochains chapitres.

Exemple. — La fonction d'échelle H s'obtient entre autre en itérant

$$R(f) := \frac{1}{2}f(2 \cdot +1) + f(2 \cdot) + \frac{1}{2}f(2 \cdot -1),$$

sur la fonction $H_0 := \chi_{[0,1]}$. Le processus est illustré en figure I.2.

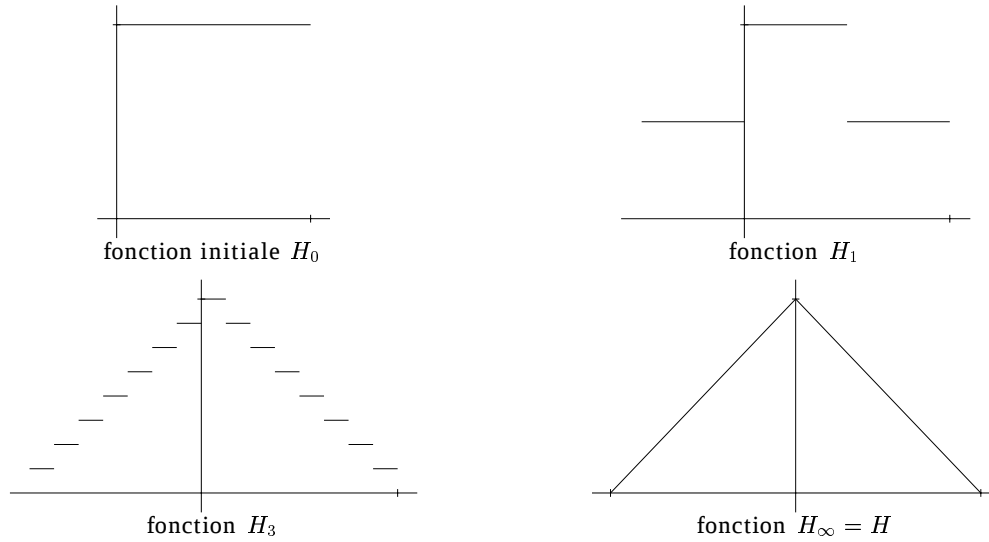


Figure I.2 — Construction de la fonction H via l'algorithme en cascade.

I.1.3. Projection, dualité

Une des opérations de base que l'on souhaite réaliser lorsque l'on dispose d'une analyse multirésolution est la *projection* d'une fonction $f_n \in V^n$ dans V^m , avec $m < n$. Comme $\cup_{n \in \mathbb{Z}} V^n$ est dense, pouvoir réaliser cette projection pour tous n et m revient à choisir pour chaque espace V^n un projecteur de $L_2(\mathbb{R})$ dans V^n .

Le choix naturel consistant à utiliser systématiquement les projections orthogonales se révèle handicapant dans les applications pratiques car la projection orthogonale ne possède généralement pas un effet local : par exemple, $\mathcal{P}_{V^0}^\perp(H(2 \cdot))$ a un support non borné. Ceci conduit dans la pratique à choisir des projecteurs non orthogonaux.

De façon générale, si $V = \text{Span}(e_i)$ est un espace vectoriel, choisir un projecteur sur V est équivalent à choisir une *base duale* de (e_i) , c'est-à-dire une famille de formes linéaires (e_i^*) vérifiant

$$\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{i,j},$$

la projection étant alors l'application $f \mapsto \sum_i \langle e_i^*, f \rangle e_i$. Tout revient donc à choisir pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ une base duale $(\tilde{\varphi}_i^n)$ de la base $(\varphi_{[n,\cdot]})$ de V^n . Notons $\tilde{V}^n := \overline{\text{Span}(\tilde{\varphi}_i^n)}$. Dans le cadre des ondelettes de première génération, on impose que la suite des espaces $\tilde{V}^n$ forme une analyse multirésolution. Cela signifie en particulier que l'on désire trouver une fonction $\tilde{\varphi}$ telle que $\tilde{\varphi}_i^n = \tilde{\varphi}_{[n,i]}$, et donc

$$\langle \varphi_{[n,k]}, \tilde{\varphi}_{[n,k']} \rangle = \delta_{k,k'}, \quad n, k, k' \in \mathbb{Z}.$$

On parlera de *fonction d'échelle duale* et d'*analyse multirésolution duale*. La fonction $\tilde{\varphi}$ vérifie une équation de raffinement avec des coefficients $(\tilde{h}_k)$. Regardons ce que la dualité impose sur ces coefficients :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{[0,k]}, \tilde{\varphi}_{[0,l]} \rangle &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{i-2k} \tilde{h}_{j-2l} \langle \varphi(2 \cdot -k), \tilde{\varphi}(2 \cdot -l) \rangle \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{i-2k} \tilde{h}_{j-2l} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2 \cdot -k) \tilde{\varphi}(2 \cdot -l) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_{i-2k} \tilde{h}_{i-2l} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la condition nécessaire

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i \tilde{h}_{i+2k} = 2\delta_{0,k}. \quad (\text{I.4})$$

En fait cette condition est « formellement » suffisante : si l'on suppose que φ et $\tilde{\varphi}$ ont été obtenues par l'algorithme en cascade, en partant respectivement des fonctions ϕ et $\tilde{\phi}$ telles que

$$\langle \phi_{[0,k]}, \tilde{\phi}_{[0,l]} \rangle = \delta_{k,l}, \quad (\text{I.5})$$

alors on peut écrire, d'après (I.3) et par continuité du produit scalaire,

$$\langle \varphi_{[n,k]}, \tilde{\varphi}_{[n,l]} \rangle = \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{J}_{\phi}^{n+m} \mathcal{R}_{(h,\cdot)}^m(\delta_{k,\cdot}), \mathcal{J}_{\tilde{\phi}}^{n+m} \mathcal{R}_{(\tilde{h},\cdot)}^m(\delta_{l,\cdot}) \rangle.$$

On vérifie alors que si ϕ et $\tilde{\phi}$ vérifient (I.5) et si les filtres vérifient (I.4), alors on a aussi pour tout m ,

$$\langle \mathcal{J}_{\phi}^{n+m} \mathcal{R}_{(h,\cdot)}^m(\delta_{k,\cdot}), \mathcal{J}_{\tilde{\phi}}^{n+m} \mathcal{R}_{(\tilde{h},\cdot)}^m(\delta_{l,\cdot}) \rangle = \delta_{k,l},$$

d'où le résultat.

Exemple. — La fonction H_0 qui a servi à générer H vérifie

$$\langle H_{0[0,k]}, H_{0[0,l]} \rangle = \delta_{k,l},$$

donc elle peut servir à générer une fonction duale $\tilde{H}$. On restreint le support de $(\tilde{h}_i)$ à $\llbracket -2, 2 \rrbracket$ (une des raisons d'utiliser un support plus étendu serait de vouloir utiliser les degrés de liberté supplémentaires pour imposer des contraintes additionnelles à la fonction duale) et on utilise l'équation (I.4) pour trouver les conditions que remplissent les coefficients. On obtient

$$(\tilde{h}_{-2}, \dots, \tilde{h}_2) = a(1, -2, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, -2, 1) + (0, 0, 2, 0, 0), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ces choix de filtres duaux fonctionnent « formellement », mais tous ne donnent pas lieu à une cascade convergente dans $L_2(\mathbb{R})$. Le choix $a = b = 0$ correspond à un cas dégénéré où la fonction duale est l'échantillon de Dirac en zéro : les projections correspondent à un sous-échantillonnage aux points dyadiques. Le choix $a = b = -\frac{1}{4}$ amènent les coefficients de raffinement $\frac{1}{4}(-1, 2, 6, 2, -1)$ dont la cascade converge dans tous les espaces $L_p(\mathbb{R})$. La fonction $\tilde{H}$ correspondante est montrée en figure I.3.

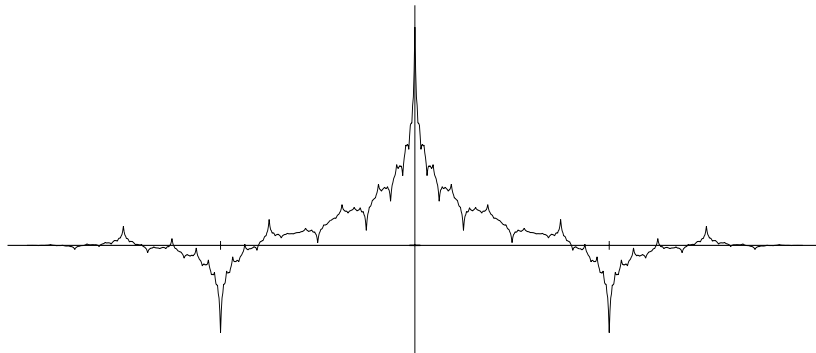


Figure I.3 — Fonction duale $\tilde{H} \in L_2(\mathbb{R})$ correspondant aux filtres $(\tilde{h}_{-2}, \dots, \tilde{h}_2) = \frac{1}{4}(-1, 2, 6, 2, -1)$

Notons $P^n(f) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle \tilde{\varphi}_{[n,i]}, f \rangle \varphi_{[n,i]}$ le projecteur sur V^n . Si $m < n$, alors $\tilde{V}^m \subset \tilde{V}^n$ (propriété (i) d'une analyse multirésolution), dont on déduit que $P^m P^n = P^m$, ce qui justifie d'utiliser $P^n(f)$ pour calculer $P^m(f)$. En pratique, si on pose pour tout n , $P^n(f) = \sum_i s_i^n \varphi_{[n,i]}$, alors les coefficients s_i^n s'obtiennent par récurrence *via* la formule

$$s_i^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j-2i} s_j^{n+1}, \quad (\text{I.6})$$

qui découle immédiatement de

$$\langle \tilde{\varphi}_{[n,j]}, \varphi_{[n+1,i]} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{k-2j} \delta_{i,k}.$$

Remarque. — Bien entendu le rôle de $\varphi_{[n,i]}$ et $\tilde{\varphi}_{[n,i]}$ peut être inversé : on effectue alors la projection sur les espaces duaux, parallèlement aux espaces primaux. Dans la suite, nous ne détaillerons pas systématiquement ce point de vue dual.

I.1.4. Reconstruction, ondelettes

Si on désire reconstruire la fonction originale ou une approximation f_n à partir d'une approximation plus grossière f_m , $m < n$, il faut sauvegarder les détails perdus par les projections successives. L'information perdue à chaque étape est $g_{n-1} = f_n - f_{n-1} = P^n(f) - P^{n-1}(f) = P^n(f) - P^{n-1}(P^n(f)) = (\text{Id} - P^{n-1})(P^n(f)) \in \text{Ker}(P^{n-1})$. L'idée est donc d'introduire $W^n := (\text{Ker } P^n) \cap V^{n+1}$; ces sous espaces vérifient

$$V^n \oplus W^n = V^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On considère alors les projecteurs $Q^n : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow W^n$, $f \mapsto P^n(f) - P^{n-1}(f)$ et on calcule la décomposition d'une fonction par projections successives selon le schéma

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{P^n} & V^n & \xrightarrow{P^{n-1}} & V^{n-1} & \xrightarrow{P^{n-2}} & V^{n-2} \xrightarrow{P^{n-3}} \dots \\ & & & \searrow Q^{n-1} & & \searrow Q^{n-2} & \\ & & & & W^{n-1} & & W^{n-2} \end{array}$$

En notant $g_n := Q^n(f)$, on peut reconstruire une approximation donnée par

$$f_n = f_m + \sum_{m \leq i < n} g_i \quad (\text{I.7})$$

Notons (ψ^n) une base de W^n . Au projecteur Q^n correspond une base duale $(\tilde{\psi}^n)$ telle que

$$Q^n(f) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle \tilde{\psi}_i^n, f \rangle \psi_i^n. \quad (\text{I.8})$$

Notons $\tilde{W}^n := \overline{\text{Span}(\tilde{\psi}^n)}$. De $P^n + Q^n = P^{n+1}$, on tire immédiatement $\text{Ker } P^n \cap \text{Ker } Q^n = \text{Ker } P^{n+1}$, c'est-à-dire $\tilde{V}^{n+1} \cap \tilde{W}^{n+1} = \tilde{V}^{n+2}$, et finalement

$$\tilde{V}^n \oplus \tilde{W}^n = \tilde{V}^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

du côté de l'analyse multirésolution duale. Tout ce qui vient d'être dit peut se symétriser du côté dual.

Regardons à présent comment on calcule effectivement les détails g_n . Dans le cadre des ondelettes de première génération, afin d'exploiter au maximum l'invariance par translation et par changement d'échelle, on cherche les fonctions ψ_i^n et $\tilde{\psi}_i^n$ respectivement de la forme $\psi_{[n,i]}$ et $\tilde{\psi}_{[n,i]}$, avec $\psi \in V^1$ et $\tilde{\psi} \in \tilde{V}^1$. Posons par conséquent

$$\begin{aligned}\psi &:= \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i \varphi(2 \cdot - i), \\ \tilde{\psi} &:= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_i \tilde{\varphi}(2 \cdot - i).\end{aligned}$$

On notera que les coefficients g et $\tilde{g}$ (on parlera aussi de *filtres*) ne sont pas des coefficients de raffinement. Cherchons les conditions que doivent remplir ces filtres afin que les fonctions $\psi_{[n,i]}$ et $\tilde{\psi}_{[n,i]}$ vérifient les conditions de dualité et de reconstruction.

- la dualité entre $\psi_{[0,\cdot]}$ et $\tilde{\psi}_{[0,\cdot]}$ s'exprime par

$$\begin{aligned}\langle \psi_{[0,i]}, \tilde{\psi}_{[0,j]} \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_k \tilde{g}_l \langle \varphi(2(\cdot - i) - k), \tilde{\varphi}(2(\cdot - j) - l) \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_k \tilde{g}_l \frac{1}{2} \delta_{2k+i, 2l+j} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \tilde{g}_{k+2(i-j)} = \delta_{i,j}\end{aligned}$$

d'où on tire la CNS pour la dualité

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \tilde{g}_{k+2i} = 2\delta_{0,i}, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (\text{I.9})$$

- On voit immédiatement que les deux conditions $\psi \in \text{Ker } P^0$ et $\tilde{\psi} \in \text{Ker } \tilde{P}^0$ sont équivalentes à

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \tilde{h}_{k+2i} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k h_{k+2i} = 0, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (\text{I.10})$$

Les conditions précédentes ne sont que nécessaires. La base $\psi_{[n,\cdot]}$ et sa duale $\tilde{\psi}_{[n,\cdot]}$ définissent un projecteur Q sur le noyau W , mais il reste à vérifier si ce projecteur permet la reconstruction des données, c'est-à-dire

$$P^n + Q^n = P^{n+1}. \quad (\text{I.11})$$

En écrivant dans un premier temps $P^n(f)$ et $Q^n(f)$ dans la base des $\varphi_{[n+1,i]}$, on montre que (I.11) est équivalent à

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \tilde{\varphi}_{[n,k]} + g_{l-2k} \tilde{\psi}_{[n,k]} = 2\tilde{\varphi}_{[n+1,l]}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

En développant alors $\tilde{\varphi}_{[n,k]}$ et $\tilde{\psi}_{[n,k]}$ dans la base des $\tilde{\varphi}_{[n+1,i]}$, on voit que c'est encore équivalent à

$$\sum_k h_{l+2k} \tilde{h}_{i+2k} + g_{l+2k} \tilde{g}_{i+2k} = 2\delta_{i,l} \quad i, l \in \mathbb{Z}. \quad (\text{I.12})$$

Pour mieux comprendre la relation entre (I.12) et les formules (I.9) et (I.10), il est pratique de considérer les matrices bi-infinies M et $\tilde{M}$ définies par

$$M_{2i,j} = h_{j-2i}, \quad M_{2i+1,j} = g_{j-2i}, \quad \tilde{M}_{i,2j} = \tilde{h}_{i-2j}, \quad \tilde{M}_{i,2j+1} = \tilde{g}_{i-2j}.$$

On vérifie ensuite que les relations (I.4), (I.9) et (I.10) signifient exactement que $M\tilde{M} = 2\text{Id}$, tandis que (I.12) signifie $\tilde{M}M = 2\text{Id}$. Les conditions nécessaires et suffisantes cherchées pour les coefficients g et $\tilde{g}$ peuvent donc se résumer à

$$M\tilde{M} = \tilde{M}M = 2\text{Id}.$$

On peut remarquer que si les matrices M et $\tilde{M}$ étaient finies, ces conditions se réduiraient à $M\tilde{M} = 2\text{Id}$ ou $\tilde{M}M = 2\text{Id}$.

Exemple. — On exploite la première partie de (I.10) avec les coefficients de raffinement de $\tilde{H}$ pour trouver les coefficients g_k possibles pour une ondelette. En s'autorisant un support de longueur 7, on arrive à

$$4(g_{-3}, \dots, g_3) = a(0, 0, -1, -2, 6, -2, -1) + b(-1, -2, 7, 0, -7, 2, 1), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Le cas $(a, b) = (1, 0)$ correspond à l'ondelette de plus petit support et est représenté en figure I.4 avec la fonction duale correspondante, de coefficients

$$2(\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2) = (-1, 2, -1),$$

obtenus en exploitant l'équation (I.9) et la deuxième partie de (I.10). Notons que ces coefficients auraient pu être obtenus directement en posant $g_n = (-1)^n \tilde{h}_{1-n}$ et $\tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n}$, dont il est facile de vérifier qu'ils remplissent systématiquement les conditions (I.9) et (I.10). Il reste ensuite à vérifier que (I.12) est vraie pour ces filtres. Rappelons enfin que les fonctions sont obtenues par une cascade de mêmes coefficients que pour la fonction d'échelle et sa fonction duale.

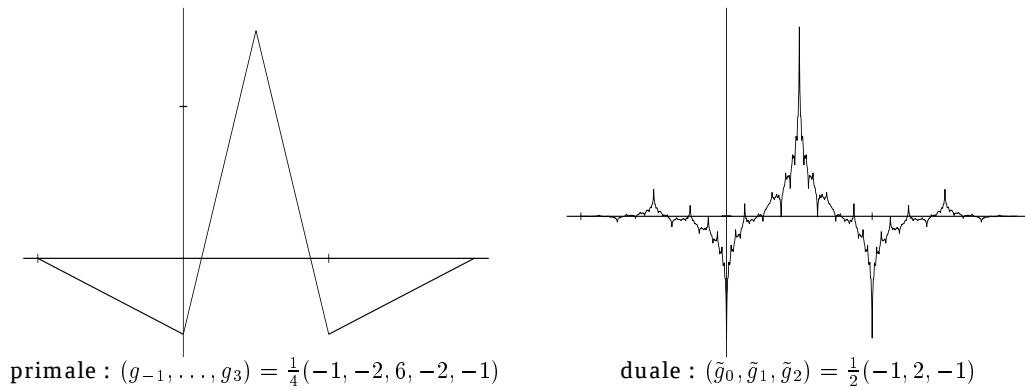


Figure I.4 — Ondelette primale et duale correspondant à H et $\tilde{H}$.

Rappelons que les coefficients de la projection d'une fonction f sur V^n sont donnés par $s_i^n = \langle \tilde{\varphi}_{[n,i]}, f \rangle$. En notant $d_i^n := \langle \tilde{\psi}_{[n,i]}, f \rangle$ et en utilisant (I.8) et (I.7), on obtient les formules de décomposition et de reconstruction en termes de coefficients (s_i^n) . Une étape de décomposition calcule s_i^{n-1} (définissant $P^{n-1}(P^n(f)) = P^{n-1}(f)$) par (I.6) et d_i^{n-1} (définissant $Q^{n-1}(P^n(f)) = Q^{n-1}(f)$) par la formule

$$d_i^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{k-2i} s_k^n. \quad (\text{I.13})$$

Une étape de reconstruction retrouve s_i^n par la formule

$$s_i^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{i-2k} s_k^{n-1} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{i-2k} d_k^{n-1} \right]. \quad (\text{I.14})$$

I.2. Notion d'espaces de subdivision

Réalisation du processus numérique

Faisons quelques remarques à propos de la construction des ondelettes de première génération que nous venons de parcourir :

- les formules de décomposition (I.6), (I.13) et de reconstruction (I.14) peuvent s'appliquer indépendamment de l'existence de fonctions d'échelle ou d'ondelette associées : c'est l'aspect *numérique* du processus. Cependant ces fonctions sont nécessaires si l'on veut associer une représentation fonctionnelle à ces coefficients.
- Le point précédent peut se reformuler dans le cadre de l'algorithme en cascade. On peut associer canoniquement des fonctions aux coefficients s^n par

$$\underline{f}_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^n \chi_{[0,1]_{[n,k]}} = \mathcal{J}_{\chi_{[0,1]}}^n \mathcal{R}^0(s^n),$$

et alors la décomposition/recomposition correspond à des opérateurs linéaires agissant sur ces fonctions : c'est une instance de ce que nous appelons une *réalisation fonctionnelle* du processus numérique. Pour avoir la représentation f_n dans la base des fonctions d'échelles, on « envoie $\underline{f}_n$ à l'infini » en itérant l'algorithme en cascade : d'après (I.3) et par linéarité,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{J}_{\chi_{[0,1]}}^{(n+m)} \mathcal{R}^m(s^n) = \sum_k s_k^n \varphi_{[n,k]} = f_n.$$

- En pratique c'est bien ce qui est fait lorsqu'il s'agit d'obtenir le graphe des fonctions f_n , ou des fonctions d'échelle dans les exemples précédents : on a subdivisé jusqu'à ce que le support des fonctions $\chi_{[0,1]_{[n,k]}}$ soit de taille inférieure à la résolution de l'imprimante.

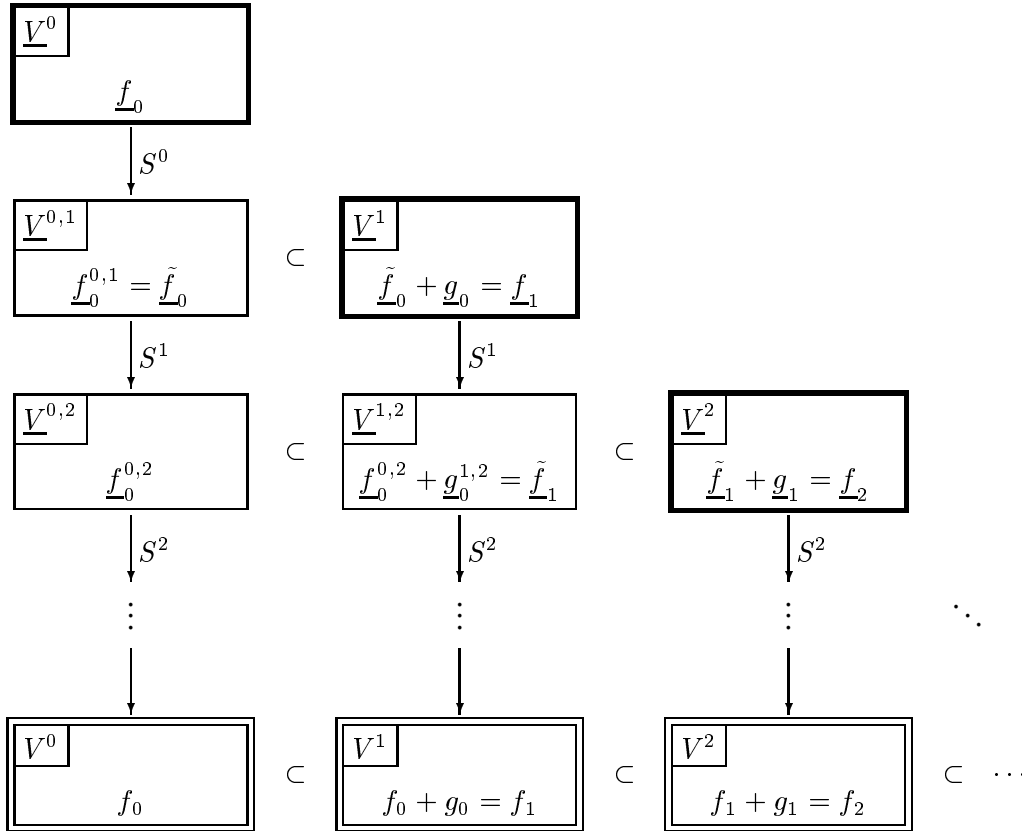


Figure I.5 — Espaces de subdivision (—) et espaces d'échelle (==).

Mettons les remarques précédentes en forme, en dégageant le principe général : notons $\underline{\varphi}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que ses translatées entières soient linéairement indépendantes et $\underline{\psi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \underline{\varphi}(2 \cdot -k)$. On introduit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les *espaces de subdivision* $\underline{V}^n$ et les *espaces complémentaires* $\underline{W}^n$ définis par

$$\begin{aligned}\underline{V}^n &:= \text{Span}(\underline{\varphi}_{[n,k]} \mid k \in \mathbb{Z}) \\ \underline{W}^n &:= \text{Span}(\underline{\psi}_{[n,k]} \mid k \in \mathbb{Z}) \subset \underline{V}^{n+1}\end{aligned}$$

et on leur associe les opérateurs de projection $\underline{P}^n$, $\underline{Q}^n$ et les opérateurs de subdivision $\underline{S}^n$ définis par

$$\begin{aligned}\underline{P}^n : \underline{V}^{n+1} &\longrightarrow \underline{V}^n, & \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^{n+1} \underline{\varphi}_{[n+1,i]} &\longmapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^n \underline{\varphi}_{[n,k]} \\ \underline{Q}^n : \underline{V}^{n+1} &\longrightarrow \underline{W}^n, & \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^{n+1} \underline{\varphi}_{[n+1,i]} &\longmapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^n \underline{\psi}_{[n,k]} \\ \underline{S}^n : \underline{V}^n &\longrightarrow \tilde{\underline{V}}^n, & \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^n \underline{\varphi}_{[n,i]} &\longmapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{s}_k^n \underline{\varphi}_{[n+1,k]}\end{aligned}$$

où les coefficients (s_k^n) , (d_k^n) et $(\tilde{s}_k^n)$ sont calculés respectivement par les formules (I.6), (I.13) et la première partie de (I.14), c'est-à-dire

$$\tilde{s}_k^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_{k-2i} s_i^n.$$

Les espaces $\tilde{\underline{V}}^n$ sont appelés espaces auxiliaires. D'après (I.2), on voit que S^n correspond à une étape de la cascade, de telle sorte que l'on a

$$\mathcal{J}_{\underline{\varphi}}^n \mathcal{R}_{(h.)}^n(s^0) = S^{n-1} \circ \dots \circ S^0 \left(\sum_k s_k^0 \underline{\varphi}_{[0,k]} \right). \quad (\text{I.15})$$

Soit maintenant $\underline{f}_n$ une fonction de $\underline{V}^n$. À partir de cette fonction, on calcule :

- sa *projection* vers le niveau immédiatement plus grossier $\underline{f}_{n-1} = \underline{P}^{n-1}(\underline{f}_n)$;
- la *composante de détail* $\underline{g}_{n-1} = \underline{Q}^{n-1}(\underline{f}_n)$; Grâce aux propriétés des filtres, on vérifie que $\underline{g}_{n-1} \in \text{Ker } \underline{P}^{n-1} = \underline{W}^{n-1}$.
- la *prédiction* de $\underline{f}_n$ à partir de $\underline{f}_{n-1}$: $\tilde{\underline{f}}_{n-1} := \underline{S}^{n-1}(\underline{f}_{n-1})$. Notons que l'on a aussi $\underline{f}_{n-1} = \underline{P}^{n-1}(\tilde{\underline{f}}_{n-1})$.

D'après les propriétés des filtres et en particulier (I.14), on a la relation de reconstruction

$$\underline{f}_n = \tilde{\underline{f}}_{n-1} + \underline{g}_{n-1} = \underline{S}^{n-1}(\underline{f}_{n-1}) + \underline{g}_{n-1}, \quad (\text{I.16})$$

et ceci étant vrai pour toute fonction $\underline{f}_n$, on voit que l'espace $\tilde{\underline{V}}^n := \text{Im}(\underline{S}^n)$ est un supplémentaire de $\underline{W}^n$ dans $\underline{V}^{n+1}$.

Remarque. — Un cas particulier que l'on rencontrera par la suite est celui où la fonction $\underline{\varphi}$ est elle-même raffnable de mêmes coefficients de raffinement $(h.)$. On a alors $\varphi = \underline{\varphi}$, les espaces de subdivision sont les espaces d'échelle et les opérateurs de subdivision se réduisent à l'identité, injectant formellement $\underline{V}^n$ dans $\underline{V}^{n+1}$. On

appellera cette situation le cas *complet*.

On peut maintenant *itérer* l'opération sur $\underline{f}_{n-1}, \underline{f}_{n-2}, \dots$ pour obtenir une décomposition de la fonction originale $\underline{f}_n$ sous la forme d'une série de fonctions de détail $\underline{g}_m$, $m < n$, et d'une approximation grossière $\underline{f}_0$, semblable dans son principe à celle résultant d'une analyse multirésolution. Cette « pseudo » analyse multirésolution est le reflet de l'analyse multirésolution originale au niveau numérique, *via* une réalisation fonctionnelle. On peut à tout moment retrouver la forme originale en subdivisant à l'infini par l'algorithme en cascade, c'est-à-dire d'après (I.15) en appliquant successivement tous les opérateurs de subdivision. La figure I.5 résume schématiquement la situation générale, et une étape de la décomposition (I.16) est illustrée à la figure I.6.

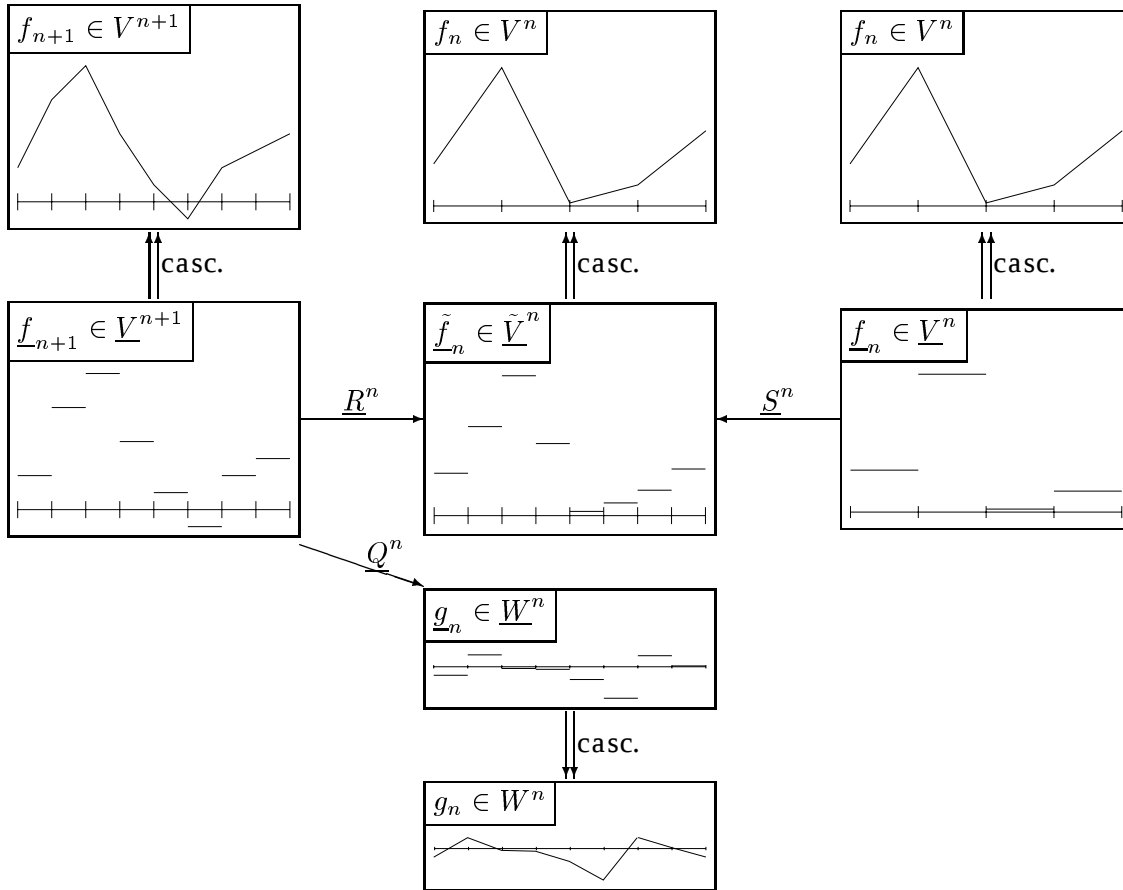


Figure I.6 — Une étape de décomposition dans les espaces de subdivision : on a $\tilde{f}_n + g_n = f_{n+1}$.

Terminons par une remarque qui est à la base des applications que l'on verra aux chapitres ultérieurs : les espaces de subdivision que nous avons introduits sont eux-mêmes emboîtés et proviennent des translatées et dilatées d'une seule et même fonction ; en revanche la même construction fonctionne également sans cette propriété : l'emboîtement des espaces d'échelle aurait lieu uniquement « à la limite ». Dans la prochaine partie, nous allons voir à travers deux exemples que ce formalisme permet d'englober les constructions d'ondelettes de seconde génération.

I.3. Deuxième génération

Les ondelettes de première génération sont un outil puissant et les domaines d'application sont nombreux. Néanmoins elles sont formulées comme on l'a vu dans le « moule » d'une analyse multirésolution, bien adapté dans un cadre théorique d'analyse fonctionnelle (bases inconditionnelles d'espaces fonctionnels, caractérisation d'espaces fonctionnels basée sur les coefficients de détail, *etc.*) mais trop restrictif dans certaines applications pratiques. Ces limitations proviennent essentiellement de :

- l'invariance par translation (uniformité), qui rend difficile ou impossible la création d'ondelettes sur des domaines autres que la droite réelle, comme par exemple la sphère, ou même tout simplement un intervalle de $\mathbb{R}$;
- l'invariance par changement d'échelle, qui revient à utiliser les mêmes filtres à tous les niveaux (stationnarité).

La notion d'*ondelettes de seconde génération* a été introduite pour palier ces problèmes et étendre le domaine d'application des techniques multirésolution. On ne trouve pas de définition précise de ce que sont les ondelettes de deuxième génération, mais la caractéristique fondamentale est de ne plus supposer que les fonctions d'échelle soient issues d'une seule et même fonction « mère ». On se retrouve alors avec :

- une suite d'espaces fonctionnels emboîtés

$$\dots \subset V^n \subset V^{n+1} \subset \dots$$

en nombre fini, infini ($n \in \mathbb{N}$), ou bi-infini ($n \in \mathbb{Z}$)

- des bases (φ_k^n) des espaces V^n , appelées « fonctions d'échelle »
- des espaces de détail W^n tels que

$$V^n \oplus W^n = V^{n+1}$$

- des bases (ψ_k^n) des espaces W^n , appelées « ondelettes »

L'idée essentielle que l'on exploite alors est qu'en écrivant

$$V^n = V^m \oplus \bigoplus_{k=m}^{n-1} W^k,$$

et en décomposant une fonction $f^n \in V^n$ selon cette somme directe en

$$f^n = f^m + \sum_{k=m}^{n-1} g_k,$$

on obtient une représentation *efficace* de la fonction f^n en termes d'une approximation grossière et de composantes de détail. Une présentation simple et claire de ce cadre multirésolution, ainsi que des applications à l'informatique graphique et la modélisation géométrique est effectuée dans [DSS96]. On peut signaler que des extensions simples des ondelettes de première génération ont été développées, telles les bases d'ondelettes sur un intervalle (voir par exemple [Dau94] et ses références) pour lesquelles on ne considère qu'un nombre fini de translatées ainsi qu'une modification *ad hoc* des filtres pour s'adapter aux bords de l'intervalle, et également les multi-ondelettes, où on ne considère non plus une seule fonction d'échelle mais un nombre fini. Le gain de souplesse apporté par les multi-ondelettes permet notamment d'obtenir des bases d'ondelettes régulières, orthogonales, à support compact, symétriques et polynomiales par morceaux [DGH96], ce qui est impossible dans le cadre classique.

Regardons à présent comment on construit en pratique des ondelettes de seconde génération « générales ». Il existe peu de travaux traitant d'une méthode générique de construction de ces ondelettes. Une des raisons est qu'il est difficile de développer la théorie sans se concentrer sur un cas particulier. Dans les ondelettes de première génération, tout est contrôlé par les filtres, et on est aidé pour leur étude par la transformée de Fourier. Cela provient du fait que la transformée de Fourier d'expressions du type

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(\cdot - k)$$

s'écrit

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik} \right) \hat{\varphi},$$

ce qui en facilite la manipulation. Dans le cadre de la deuxième génération, la plupart de ces techniques deviennent inutilisables.

L'idée de base pour la construction des ondelettes de deuxième génération est d'utiliser un processus de subdivision (une cascade), de façon similaire au cadre décrit à la section I.2 : l'essentiel a donc en fait déjà été vu. Nous allons rapidement parcourir deux constructions d'ondelettes de seconde génération, et voir comment elles s'intègrent dans le formalisme des espaces de subdivision. La première construction est due à Lounsbery ([Lou94]), et concerne des ondelettes pour surfaces à topologie quelconque, la deuxième est celle de Sweldens ([Swe98]). Cette dernière est la seule construction théorique générale à notre connaissance.

I.3.1. La construction de Lounsbery

On se reportera à [Lou94] pour de plus amples détails et profiter des nombreuses illustrations. Cette construction permet d'obtenir des ondelettes pour les surfaces de subdivision, à topologie quelconque. Celles considérées sont construites par une subdivision de maillages triangulaires, que l'on peut grossièrement schématiser de la manière suivante :

- 1) On démarre avec maillage triangulaire de base M^0 ; la surface finale aura la même topologie que ce maillage.
- 2) On subdivise le maillage par un découpage $1 \rightarrow 4$: un nouveau sommet est introduit au milieu de chaque arête. Le maillage correspondant est noté $\widehat{M}^1$, et ses sommets $\hat{v}^1$.
- 3) On calcule une nouvelle position pour chaque sommet, par une combinaison affine *ad hoc* des positions des sommets alentours, définissant le maillage M^1 .
- 4) On réitère 2) et 3) jusqu'à obtenir une surface limite M^∞ .

Le point fondamental pour développer des ondelettes, y compris de deuxième génération, est de disposer d'une suite d'espaces fonctionnels emboîtés. Nous allons voir comment on peut en obtenir dans le cadre du schéma de subdivision que nous venons d'esquisser. Pour la clarté de l'exposé, nous commençons par reprendre les arguments de Lounsbery, voir [Lou94, p. 27 à 30], en changeant cependant certaines notations pour rester cohérent avec celles de la section I.2.

On commence par montrer que la surface finale peut être paramétrée à partir du maillage de base au sens d'une correspondance $T : M^0 \rightarrow M^\infty$ (originellement notée S dans [Lou94]). Voici comment on construit cette paramétrisation :

P1) On pose $T^0(x) := x$, pour tout $x \in M^0$.

P2) Supposons qu'après k étapes de subdivision $1 \rightarrow 4$, le point x soit un point du triangle $(\hat{v}_a^k, \hat{v}_b^k, \hat{v}_c^k)$ de $\widehat{M}^k$, de coordonnées barycentriques (α, β, γ) . On pose alors

$$T^k(x) := \alpha v_a^k + \beta v_b^k + \gamma v_c^k, \quad (\text{I.17})$$

où v_a^k, v_b^k, v_c^k sont les sommets de M^k correspondant à $\hat{v}_a^k, \hat{v}_b^k, \hat{v}_c^k$ (cf étape 3 ci-dessus).

P3) On pose $T(x) := \lim_{k \rightarrow +\infty} T^k(x)$, limite qui existe sous des hypothèses convenables sur le schéma de subdivision.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons (v^k) le vecteur colonne formé des sommets v_i^k du maillage M^k . D'après l'étape 3 du processus de subdivision, il existe des matrices A^k telles que $(v^{k+1}) = A^k(v^k)$, et par conséquent

$$(v^k) = A^{k-1} \cdots A^j(v^j), \quad \forall j < k.$$

Remarquons également que l'on peut récrire (I.17) sous la forme

$$T^k(x) = b^k(x)(v^k),$$

où $b^k(x)$ est un vecteur ligne dont toutes les composantes sont nulles, sauf éventuellement aux emplacements des trois coordonnées barycentriques de x dans M^k . Notons que la fonction b^k , bien qu'*a priori* définie sur $\widehat{M}^k$, peut être considérée comme définie sur M^0 car d'après P2, les coordonnées barycentriques de x sur $\widehat{M}^k$ sont les mêmes que celles lues sur M^0 subdivisé k fois, que l'on notera $\widehat{M}^{0,k}$ (notation similaire pour les sommets : $\hat{v}^{0,k}$). En passant à la limite dans

$$T^k(x) = b^k(x)A^{k-1} \cdots A^j(v^j), \quad (\text{I.18})$$

on obtient la surface finale sous la forme

$$T(x) = \sum_i v_i^j \phi_i^j(x),$$

quel que soit j , où l'on a posé

$$\begin{aligned} \phi_i^j : M^0 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} b^k(x) A^{k-1} \cdots A^j \right)_i. \end{aligned}$$

Posons alors $V^j := \text{Span}(\{\phi^j\})$. La relation

$$\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} b^k(x) A^{k-1} \cdots A^j \right)_i = \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} b^k(x) A^{k-1} \cdots A^{j+1} \right) (A^j)_{\cdot, i}$$

amène

$$\phi_i^j = \sum_k A_{k,i}^j \phi_k^{j+1},$$

ce qui montre en particulier que $V^j \subset V^{j+1}$.

Nous ne détaillons pas la suite et renvoyons le lecteur au travail d'origine concernant le choix d'une base d'ondelettes pour cette suite d'espaces emboîtés. Nous allons simplement montrer comment la construction que nous venons d'effectuer peut être « re-formulée » en termes d'espaces de subdivision. Pour cela, il nous faut définir des espaces de subdivision et des opérateurs de subdivision associés.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $\underline{\phi}_i^k$ la fonction « chapeau » centrée au sommet $\hat{v}_i^{0,k}$ d'indice i du maillage $\widehat{M}^{0,k}$, c'est-à-dire la fonction valant 1 en $\hat{v}_i^{0,k}$, puis décroissant linéairement à zéro sur les triangles adjacents, et valant 0 à l'« extérieur ». Observons que la définition des fonctions chapeaux permet d'écrire $b^k(x)$ en tout point x de $\widehat{M}^{0,k}$ sous la forme

$$b^k = (\underline{\phi}^k)^* := (\cdots, \underline{\phi}_i^k, \cdots).$$

On définit les espaces de subdivision par

$$\underline{V}^k := \text{Span}(\{\underline{\phi}^k\}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Les opérateurs de subdivision $\underline{S}^k : \underline{V}^k \rightarrow \underline{V}^{k+1}$ sont définis *via* leur action sur les fonctions de base $\underline{\phi}_i^k$ de $\underline{V}^k$ par

$$\underline{S}^k(\underline{\phi}_i^k) := \sum_j A_{j,i}^k \underline{\phi}_j^{k+1},$$

c'est-à-dire que les coordonnées de $\underline{S}^k(\underline{\phi}_i^k)$ dans la base des $(\underline{\phi}^{k+1})$ sont les $A_{\cdot,i}^k$. Si on note pour tout $j < k$, $\underline{\phi}_i^{j,k} := \underline{S}^{k-1} \circ \cdots \circ \underline{S}^j(\underline{\phi}_i^j)$, on a alors

$$(\underline{\phi}^{j,k})^* = (\underline{\phi}^k)^* A^{k-1} \cdots A^j,$$

et (I.18) montre que

$$T^k = \sum_i \underline{\phi}_i^{j,k} v_i^j. \quad (\text{I.19})$$

Ceci place donc cette construction d'ondelettes de seconde génération dans un contexte d'espaces de subdivision composés de fonctions *linéaires par morceaux*, par contraste avec ceux utilisés « implicitement » à la section I.2, qui étaient des espaces de fonctions constantes par morceaux.

I.3.2. La construction de Sweldens

Dans [Swe98], Sweldens présente les aspects algébriques d'une méthode de construction d'ondelettes de seconde génération, terminologie qu'il fut d'ailleurs un des premiers auteurs à introduire. Le travail, relativement proche de la présentation des ondelettes de première génération que nous avons faite, se divise en deux parties : la mise en place d'un cadre algébrique pour les ondelettes, c'est-à-dire définition des différents filtres, opérateurs, fonctions d'échelles et ondelettes, puis la description d'une méthode de « design » des filtres, appelée *lifting scheme*. Cette deuxième partie ne nous intéresse pas dans l'immédiat.

L'idée centrale utilisée pour la construction des ondelettes est une généralisation de l'algorithme en cascade ; l'objectif de ce paragraphe est de décrire cette généralisation comme un cas particulier d'espaces de subdivision.

L'algorithme en cascade généralisé est directement inspiré de l'opérateur R (cf section I.1.2). Il est formé d'un *filtre fini* et d'un *ensemble de partitionnements* (set of partitionnings) ([Swe98]).

- Un *filtre fini* est la donnée d'ensembles d'indices $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}(j)$ avec $j \in \mathcal{J}$, et de réels $(h_{j,k,l})$, $j \in \mathcal{J}$, $k \in \mathcal{K}(j)$, $l \in \mathcal{K}(j+1)$ tels qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \text{Card}(\{l \in \mathcal{K}(j+1) \mid h_{j,k,l} \neq 0\}) &< N, \quad j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}(j) \\ \text{Card}(\{k \in \mathcal{K}(j) \mid h_{j,k,l} \neq 0\}) &< N, \quad j \in \mathcal{J}, l \in \mathcal{K}(j+1). \end{aligned}$$

- Un ensemble de partitionnements de $L_2(X, \Sigma, \mu)$, où Σ est une tribu sur X et μ une mesure sur Σ , est une famille de sous-ensembles mesurables $\Gamma_{j,k} \subset \Sigma$, $j \in \mathcal{J}$, $k \in \mathcal{K}(j)$, tels que :
 - (i) $X = \bigcup_{k \in \mathcal{K}(j)} \Gamma_{j,k}$, pour tout $j \in \mathcal{J}$, et l'union est disjointe ;
 - (ii) $\mathcal{K}(j) \subset \mathcal{K}(j+1)$;
 - (iii) $\Gamma_{j+1,k} \subset \Gamma_{j,k}$;
 - (iv) pour tout $k \in \mathcal{K}(j_0)$, $\bigcap_{j > j_0} \Gamma_{j,k} = x_k$.

Le filtre et l'ensemble de partitionnements sont à présent utilisés pour construire les fonctions d'échelle, et par conséquent obtenir une suite d'espaces emboîtés formant la base d'une analyse multirésolution de $L_2(X, \Sigma, \mu)$. où Σ est une tribu sur X et μ une mesure. On procède de la manière suivante ([Swe98]) :

L'algorithme en cascade avec lequel la fonction d'échelle φ_{j_0, k_0} est synthétisée démarre avec la séquence de coefficients $\lambda_{j_0, k} := \delta_{j_0, k}$, avec $k \in \mathcal{K}(j_0)$, puis définit récursivement les séquences de coefficients $\lambda_{j, k}$, $k \in \mathcal{K}(j)$, par

$$\lambda_{j+1, l} = \sum_{k \in \mathcal{K}(j)} h_{j, k, l} \lambda_{j, k}, \quad j > j_0. \quad (\text{I.20})$$

À ces séquences de coefficients sont associées des fonctions par l'intermédiaire de l'ensemble de partitionnements, en écrivant

$$\underline{f}_{j_0, k_0}^j = \sum_{k \in \mathcal{K}(j)} \lambda_{j, k} \chi_{\Gamma_{j, k}}, \quad j > j_0. \quad (\text{I.21})$$

La limite quand j tend vers l'infini de $\underline{f}_{j_0, k_0}^j$ (lorsqu'elle existe dans $L_2(X, \Sigma, \mu)$) est par définition la fonction d'échelle φ_{j_0, k_0} . On pose alors $V^j := \text{Span}(\{\varphi_{j, k} \mid k \in \mathcal{K}(j)\})$. On voit que ces espaces sont emboîtés car les fonctions d'échelle vérifient une équation de raffinement (de deuxième génération) : on le montre en faisant tendre j vers l'infini dans l'égalité

$$\underline{f}_{j_0, k_0}^j = \sum_l h_{j_0, k_0, l} \underline{f}_{j_0+1, l}^j. \quad (\text{I.22})$$

Notons que les propriétés de filtre fini assurent que le nombre de termes non nuls dans les sommations (I.20) et (I.22) sont finis. Le lecteur pourra se reporter à [Swe98] pour les détails concernant la construction des ondelettes associées à ces fonctions d'échelle, qui suit d'ailleurs une logique proche de celle vue à la section I.1.

La transcription de ce qui précède en termes d'espaces de subdivision est simple : on définit $\underline{V}^j$, $j \in \mathcal{J}$, comme étant l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les ensembles $\Gamma_{j, k}$, $k \in \mathcal{K}(j)$, c'est-à-dire les fonctions de la forme (I.21), avec $\lambda_{j, k}$ tels que la fonction appartienne à $L_2(X, \Sigma, \mu)$. Les opérateurs de subdivision sont définis par leur action sur les fonctions de $\underline{V}^j$:

$$\underline{S}^j : \underline{V}^j \longrightarrow \underline{V}^{j+1}$$

$$\underline{f} = \sum_{k \in \mathcal{K}(j)} \lambda_k \chi_{\Gamma_{j, k}} \longmapsto \sum_{k \in \mathcal{K}(j+1)} \lambda'_k \chi_{\Gamma_{j+1, k}}$$

avec $\lambda'_l := \sum_{k \in \mathcal{K}(j)} h_{j, k, l} \lambda_k$, c'est-à-dire comme en (I.20).

Nous avons donc ici un nouvel exemple d'espaces de subdivision basés sur des fonctions constantes par morceaux. Les différences essentielles avec la cascade de première génération sont :

- la généralité des supports : on dispose d'une grande liberté dans le choix des ensembles $\Gamma_{j,k}$, donnant lieu à des espaces de subdivision non nécessairement emboîtés ;
- la généralité des filtres : ceux-ci varient à la fois spatialement (non uniformité) et d'un niveau à l'autre (non stationnarité).

Dans [SS95], on trouvera une application de ce cadre à la construction d'ondelettes pour des fonctions numériques définies sur la sphère. Une classe particulière d'ensembles de partitionnements est utilisée dans ces travaux, les ensembles de partitionnements *emboîtés* (nested set of partitionings, [Swe98]), qui correspondent en fait à des espaces de subdivision emboîtés.

I.3.3. De la mise en œuvre des ondelettes de seconde génération

Dans ce paragraphe nous discutons de certains aspects de l'implémentation et de l'utilisation *pratique* des ondelettes de seconde génération.

Comme nous l'avons vu, dans le cas des ondelettes de première génération, l'ensemble de l'algorithme est purement numérique : les données de départ sont les coefficients de la fonction à analyser dans la base d'un certain espace d'échelle V^n , puis on applique les formules d'analyse/synthèse utilisant uniquement les coefficients de raffinement h_i . Lorsqu'il s'agit de *visualiser* une des fonctions, on applique l'algorithme en cascade jusqu'à obtenir des valeurs spatialement suffisamment « denses » pour attribuer de manière *ad hoc* une couleur à chaque pixel dans le cas d'une image, par exemple. Ainsi, dans les ondelettes de première génération, *la structure des espaces de subdivision n'a pas d'influence sur le résultat final*.

Il n'en est pas de même pour les ondelettes de deuxième génération. Cela tient au fait qu'en pratique on ne peut pas en général pousser la subdivision à l'infini, parce que la structure des espaces de subdivision ne peut pas être ramenée à une description « logique » compacte, comme peuvent l'être par exemple les intervalles dyadiques. Ainsi, les surfaces de [Lou94] sont visualisées sous la forme de fonctions des espaces de subdivision sous-jacents, *i.e.* sous la forme maillages triangulaires surfaciques.

Dans [SS95], les espaces de subdivision sont des espaces de fonctions constantes par morceaux sur des triangles sphériques, que l'on subdivise $1 \rightarrow 4$. Grâce à cette logique de subdivision et la forme simple de la surface de base (la sphère), il est possible de considérer des subdivisions à l'infini. Mais l'utilisation d'ensembles de partitionnements quelconques, en dehors d'un intérêt théorique, ne pourra jamais être mise en œuvre au-delà d'un nombre fini d'indices j ; il faut alors éventuellement appliquer une méthode générique de subdivision « régulière » pour obtenir un résultat à l'infini.

Des observations précédentes nous voulons retenir ceci : dans le cas des ondelettes de seconde génération, la structure des espaces de subdivision a son importance dans la mesure où l'on en manipule effectivement les fonctions. C'est justement *un des intérêts du formalisme des espaces de subdivision* que de mettre cela en avant.

En ne considérant plus uniquement la situation « à l'infini », plusieurs problèmes nouveaux entrent en jeu : par exemple dans les problèmes de mesure d'erreur, les résultats sont habituellement formulés en termes de fonctions d'échelle ou d'ondelettes, c'est-à-dire « à l'infini ».

Dans les deux prochains chapitres, nous présentons une formulation théorique des ondelettes de deuxième génération centrée sur la notion d'espaces de subdivision, prenant pleinement en considération le fait qu'ils ne sont en général *pas* emboîtés, ce qui permet d'envisager la notion d'analyse multirésolution non emboîtée, intéressante

pour elle-même, sans considération du passage à limite. Nous négligeons, bien sûr, la richesse du « cas particulier » où l'emboîtement a lieu, qui nous emmènerait trop loin et ne nous serait d'aucune utilité dans les applications pratiques auxquelles nous nous intéressons.



Multirésolution Non Emboîtée

Aspects Algébriques

DANS CE CHAPITRE, le cadre multirésolution théorique est introduit. On en décrit les aspects algébriques, c'est-à-dire essentiellement les mécanismes formels de décomposition des données sous forme multirésolution. Les aspects de convergence, de stabilité, *etc.*, sont l'objet du prochain chapitre. Le chapitre est découpé en trois parties. Les deux premières parties, bien que contenant diverses notions communes, ont été rédigées de manière indépendante l'une de l'autre. La raison à cela est que chacune d'entre elles, comme nous allons le voir, correspond un *point de vue* différent ; l'exposition séparée de ces points de vue par ailleurs strictement équivalents gagne en clarté et permet d'en souligner les différences. Ainsi par exemple certaines notations sont rappelées de manière redondante et d'autres ne se distinguent que par le vocabulaire employé.

Le premier point de vue introduit un cadre d'analyse multirésolution réellement NON emboîté, en ce sens que les espaces d'approximation, qui tiennent le rôle des espaces d'échelle de la formulation classique, ne sont pas nécessairement contenus les uns dans les autres. Ce point de vue est particulièrement adapté à une logique de *simplification* des données.

Le deuxième point de vue est conçu pour accueillir une notion générale de subdivision, basée sur les espaces de subdivision, qui donne lieu à des espaces d'échelle emboîtés. Il correspond à une logique *constructive*.

Signalons que les analyses duales correspondant aux deux multirésolutions ne seront pas présentées : elles seraient obtenues en exprimant les différents projecteurs dans une base (duale), comme on l'a fait au chapitre précédent. On passerait alors d'une description de la forme [bases + projections associées] à la forme [bases primales + base duales associées].

Enfin, la troisième partie récapitule le lien entre les deux notions, et en montre également les particularités.

Les résultats de ce chapitre sont valables dans des espaces vectoriels généraux, et ceux de la partie analytique seront valables la plupart du temps dans des espaces de Banach. Néanmoins, nous aurons besoin tôt ou tard d'un produit scalaire, et pour éviter d'avoir à restreindre petit à petit le type d'espace considéré, on se place directement dans un espace de Hilbert. Dans la suite donc, E désigne un espace de Hilbert. Typiquement, ce sera l'espace fonctionnel $L_2(\Omega)$ pour une analyse de fonctions, c'est pourquoi ses éléments seront appelés « fonctions » et non « vecteurs », mais E pourrait aussi être par exemple ℓ_2 si l'on s'intéresse à la décomposition de données.

Certaines notations utilisées au chapitre précédent vont être redéfinies ici, mais dans la mesure du possible, les nouvelles notations seront dorénavant conservées.

II.1. MNE : Le point de vue non emboîté

On présente ici un concept d'analyse multirésolution général dans lequel les équivalents des espaces d'échelle sont « à peu près quelconque ». Des ondelettes de seconde génération, il reste le principe de décomposition, dont il s'inspire : une représentation « grossière » complétée par des détails de plus en plus « fins ». En particulier, le lien avec la notion de subdivision n'existe pas *a priori*, c'est ce qui motive la théorie exposée à la section suivante.

II.1.1. Approximation et reconstruction

La définition suivante introduit le mécanisme d'approximation d'une fonction.

DÉFINITION II.1 Séquence d'approximation — On appelle séquence d'approximation une suite de sous-espaces V^k de dimension finie de E , $k \in \mathbb{N}$, appelés espaces d'approximation, et associés à des opérateurs linéaires

$$P^k : V^{k+1} \longrightarrow V^k,$$

appelés opérateurs d'approximation.

Remarque. — L'hypothèse de la dimension finie est utilisée pour des raisons de commodité. Cela évite de nombreuses précautions vis-à-vis de la notion de base. L'hypothèse pourrait être changée au profit de la notion de base inconditionnelle d'un espace de Hilbert. Cependant l'ensemble des applications que nous avons en vue pourront être formulées dans des espaces de dimension finie.

Étant fixées une séquence d'approximation et une fonction $f \in E$ que l'on désire analyser, on commence par projeter celle-ci sur un certain espace d'approximation, disons V^n , puis on calcule itérativement les approximations f_k dans tous les espaces V^k , $k < n$, par

$$f_k = P^k(f_{k+1}).$$

Ce processus s'arrête avec une fonction $f_0 \in V^0$, dite approximation *grossière* de f_n .

Intéressons nous à présent à la reconstruction des données. Les opérateurs d'approximation sont par principe *non* bijectifs, il faut donc sauvegarder les détails perdus

au cours de l'analyse si l'on désire pouvoir reconstruire la fonction originale. Dans le cas classique, les espaces d'échelle sont emboîtés, donc pour tout k , les espaces V^k admettent un supplémentaire dans V^{k+1} , c'est-à-dire

$$V^{k+1} = V^k \oplus W^k,$$

d'où l'introduction de la fonction de détail $g_k = f_{k+1} - f_k \in W^k$. En remarquant que $g_k \in \text{Ker}(P^k)$, on peut transposer cette technique dans notre cas, grâce au résultat simple suivant.

LEMME II.1 — Soient U et V deux espaces vectoriels et $P : U \rightarrow V$ un homomorphisme. Alors pour tout sous-espace $G \subset U$ supplémentaire de $\text{Ker}(P)$, la restriction de P à G est injective et de même image que P .

Démonstration. — Soient f et g deux éléments de G tels que $P(f) = P(g)$. Alors $f - g \in \text{Ker}(P) \cap G = \{0\}$ donc $f = g$, ce qui prouve l'injectivité de $P|_G$.

D'autre part, tout $h \in U$ peut s'écrire sous la forme $h_G + h_0$ avec $h_G \in G$ et $h_0 \in \text{Ker}(P)$, et $P(h) = P(h_G + h_0) = P(h_G) = P|_G(h_G)$ montre l'égalité des images. $\square$

Posons $W^k := \text{Ker}(P^k)$ et soit $\tilde{V}^k$ un supplémentaire de W^k dans V^{k+1} . Si f_{k+1} est décomposée selon la somme directe $\tilde{V}^k \oplus W^k$ en $\tilde{f}_k + g_k$, alors d'après le lemme, on a la relation

$$f_{k+1} = \text{Inv}(P|_{\tilde{V}^k})(f_k) + g_k \quad (\text{II.1})$$

qui reconstruit f_{k+1} à partir de son approximation f_k et de la composante de détail g_k .

Remarque. — Bien que l'espace W^k soit entièrement déterminé par l'opérateur d'approximation P^k , la composante de détail $g_k \in W^k$ dépend du choix de l'espace $\tilde{V}$ de par son influence sur la décomposition en somme directe.

Afin de reconstruire la fonction, on réitère cette décomposition pour chaque niveau :

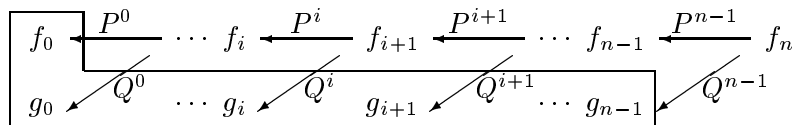
DÉFINITIONS II.2 — Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit :

- les espaces de détail $W^k := \text{Ker}(P^k)$;
- les espaces auxiliaires $\tilde{V}^k$, tels que

$$V^{k+1} = \tilde{V}^k \oplus W^k;$$

- les opérateurs $Q^k : V^{k+1} \rightarrow W^k$, projecteurs sur W^k parallèlement à $\tilde{V}^k$;
- les opérateurs $R^k : V^{k+1} \rightarrow \tilde{V}^k$, projecteurs sur $\tilde{V}^k$ parallèlement à W^k : on a $f = R^k(f) + Q^k(f)$;
- les opérateurs de synthèse $S^k := \text{Inv}(P|_{\tilde{V}^k})$.

Les opérateurs de synthèse sont bien définis en vertu du lemme II.1. Le processus complet de décomposition d'une fonction $f_n \in V^n$ peut se schématiser de la manière suivante :



Ce schéma est bien entendu à mettre en parallèle avec la décomposition multirésolution classique par la Fast Wavelet Transform. Partant de f_n , on obtient les composantes de détail g_k en calculant successivement des approximations f_k . La partie encadrée représente la fonction f_n sous forme multirésolution : une approximation grossière et des fonctions de détail.

Le processus de reconstruction se présente alors de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} f_0 & \xrightarrow{S^0} & \cdots & f_i & \xrightarrow{S^i} & f_{i+1} & \xrightarrow{S^{i+1}} & \cdots & f_{n-1} & \xrightarrow{S^{n-1}} & f_n \\ & \nearrow + & & & \nearrow + & & \nearrow + & & \nearrow + & & \\ g_0 & & \cdots & g_i & & g_{i+1} & & \cdots & g_{n-1} & & \end{array}$$

II.1.2. Forme développée de la reconstruction

On va mettre en évidence la contribution de chaque composante de détail dans la reconstruction finale en décrivant plus précisément le processus. Commençons par quelques notations.

Notations. — $\forall k \in \mathbb{N}, n \geq k$, on note :

- $P^{n,k} : V^n \rightarrow V^k, \quad f \mapsto P^k \circ \cdots \circ P^{n-1}(f) ;$
- $S^{k,n} : f \mapsto S^{n-1} \circ \cdots \circ S^{k+1} \circ S^k(f) \in V^n ;$
- $f^{k,n} := S^{k,n}(f) \in V^n, \forall f \in V^k ;$
- $V^{k,n} := \{f^{k,n} \mid f \in V^k\} \subset V^n.$

Il y a une difficulté dans la définition des opérateurs $S^{k,n}$ car on a $\mathcal{D}(S^k) = \text{Im}(P^k)$, et par conséquent on n'a pas $\text{Im}(S^k) \subset \mathcal{D}(S^{k+1})$ en général. C'est pourquoi on ne peut pas prendre tout V^k comme espace de définition de $S^{k,n}$; il faut se restreindre aux fonctions $f \in V^k$ pour lesquelles l'application successive des S^k est effectivement définie.

Dans le même ordre d'idée, un autre point doit être souligné par rapport au schéma de reconstruction précédent : on part de la fonction grossière f_0 , puis on applique S^0 pour obtenir $S^0(f_0)$, à laquelle on ajoute g_0 , puis on applique S^1 , etc. Mais bien qu'on ait $S^0(f_0) + g_0 \in \mathcal{D}(S^1)$, on aura en général ni $S^0(f_0) \in \mathcal{D}(S^1)$, ni $g_0 \in \mathcal{D}(S^1)$.

Dans la proposition suivante, on va supposer les opérateurs P^k surjectifs ; de cette manière $\mathcal{D}(S^k) = V^k$, et les problèmes de composition disparaissent. Le « cas général » sera traité dans le lemme II.2.

PROPOSITION II.1 — *Sous l'hypothèse de surjectivité précédente, le processus de reconstruction s'écrit, pour tout $0 \leq k \leq n$, des manières équivalentes suivantes :*

$$f_n = S^{n-1} \circ \cdots \circ S^k(f_k) + S^{n-1} \circ \cdots \circ S^{k+1}(g_k) + \cdots + S^{n-1}(g_{n-2}) + g_{n-1}$$

ou

$$f_n = S^{k,n}(f_k) + S^{k+1,n}(g_k) + \cdots + S^{n-1,n}(g_{n-2}) + g_{n-1}$$

ou finalement

$$f_n = f_k^{k,n} + g_k^{k+1,n} + g_{k+1}^{k+2,n} + \cdots + g_{n-2}^{n-1,n} + g_{n-1}$$

Démonstration. — On utilise la relation de reconstruction (II.1) et la linéarité des opérateurs de synthèse pour écrire :

$$\begin{aligned} f_n &= S^{n-1}(f_{n-1}) + g_{n-1} \\ &= S^{n-1}(S^{n-2}(f_{n-2}) + g_{n-2}) + g_{n-1} \\ &= S^{n-1} \circ S^{n-2}(f_{n-2}) + S^{n-1}(g_{n-2}) + g_{n-1} \\ &\vdots \\ &= S^{n-1} \circ \dots \circ S^k(f_k) + S^{n-1} \circ \dots \circ S^{k+1}(g_k) + \dots + S^{n-1}(g_{n-2}) + g_{n-1} \end{aligned}$$

Les différents termes ci-dessus sont bien définis car $\mathcal{D}(S^k) = V^k$, pour tout k . $\square$

L'hypothèse de surjectivité est naturelle. Il est clair qu'il vaut mieux éviter les opérateurs d'approximation non surjectifs puisqu'ils conduisent sur la fonction analysée f_n à une perte d'information supplémentaire par rapport à l'appauvrissement des espaces d'approximation eux-mêmes. Cependant, on peut conserver dans une certaine mesure la validité des calculs précédents sans cette hypothèse :

LEMME II.2 et définition — Pour tout indice $N \in \mathbb{N}$, quelle que soit la séquence d'approximation, il existe une séquence d'espaces auxiliaires telle que les compositions du type

$$\begin{aligned} S^{n-1} \circ \dots \circ S^k(f_k), \\ S^{n-1} \circ \dots \circ S^{k+1}(g_k) \end{aligned} \tag{II.2}$$

soient bien définies, pour tout $k \leq n \leq N$. Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le cadre multirésolution est séparé, d'ordre N .

Démonstration. — On commence par se ramener au cas surjectif en posant

$$\widehat{V}^k := \text{Im}(P^{N,k}), \quad \widehat{P}^k := P^k_{|\widehat{V}^{k+1}}, \quad \forall k = 0, \dots, N.$$

En analysant dans cette « nouvelle » séquence d'approximation une fonction $f_n = \widehat{f}_n \in \widehat{V}^n$, on obtient les approximations successives $\widehat{f}^k$ et les détails $\widehat{g}^k$. Il lui correspond également des espaces de détail $\widehat{W}^k$, des espaces auxiliaires $\widehat{\widetilde{V}}^k$, des opérateurs de synthèse $\widehat{S}^k$ et des opérateurs $\widehat{Q}^k$.

Les opérateurs d'approximation sont surjectifs, donc les compositions du type

$$\begin{aligned} \widehat{S}^{n-1} \circ \dots \circ \widehat{S}^k(\widehat{f}_k), \\ \widehat{S}^{n-1} \circ \dots \circ \widehat{S}^{k+1}(\widehat{g}_k) \end{aligned}$$

sont bien définies.

Maintenant, comme P^k prolonge $\widehat{P}^k$, on a $\widehat{W}^k \subset W^k$. D'autre part, on a $W^k \cap \widehat{\widetilde{V}}^k = \{0\}$, car si $f \in W^k \cap \widehat{\widetilde{V}}^k$, alors $P^k(f) = 0 = \widehat{P}^k(f)$, d'où $f = 0$ car $\widehat{W}^k \cap \widehat{\widetilde{V}}^k = \{0\}$. On peut donc choisir des espaces auxiliaires $\widetilde{V}^k$ tels que :

$$\widehat{\widetilde{V}}^k \subset \widetilde{V}^k, \quad \widetilde{V}^k \oplus W^k = V^{k+1}.$$

Il reste à vérifier que les opérateurs correspondant prolongent bien les opérateurs « restreints ».

- P^k prolonge $\widehat{P}^k$, donc $f^k = \widehat{f}^k$.
- Q^k prolonge $\widehat{Q}^k$. En effet soit $f \in \widehat{V}^k$. Alors

$$(i) \widehat{Q}^k(f) \in \widehat{W}^k \subset W^k$$

$$(ii) f - \widehat{Q}^k(f) \in \widehat{V} \subset V^k,$$

donc $\widehat{Q}^k(f) = Q^k(f)$, ou encore $g_k = \widehat{g}_k$.

- S^k prolonge $\widehat{S}^k$, car si $f \in \widehat{V}^k$, alors

$$f = \widehat{P}^k(\widehat{S}^k(f)) = P^k(\widehat{S}^k(f)) = P^k(S^k(f)),$$

donc $S^k(f) = \widehat{S}^k(f)$.

Par conséquent, les compositions (II.2) sont valables. $\square$

Bien entendu, les résultats de la proposition II.1 sont valables dans un cadre séparé. Cependant, un cadre séparé n'est pas aussi agréable que l'hypothèse de surjectivité :

- La surjectivité entraîne la séparation à tout ordre (la réciproque est clairement fausse).
- Parmi les applications que nous avons en vue, la séparation permet les reconstructions partielles, c'est-à-dire n'utilisant que certaines fonctions de détails (technique utilisée pour la compression, ou le lissage). En revanche elle ne permet pas la *modification* libre des approximations grossières ou des composantes de détail, puisque celles-ci sont toujours contraintes à rester dans le domaine des opérateurs de synthèse.

II.1.3. Bases, matrices d'analyse et de synthèse

On introduit à présent les bases des différents espaces. L'essentiel concerne les notations, que l'on conservera dans les chapitres ultérieurs.

Notations. — On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- n_k la dimension de V^k , et $(\phi_i^k)_{i=1,\dots,n_k}$ une base de V^k ;
- m_k la dimension de $\tilde{V}^k$, et $(\tilde{\phi}_i^k)_{i=1,\dots,m_k}$ une base de $\tilde{V}^k$;
- r_k la dimension de W^k , et $(\psi_i^k)_{i=1,\dots,r_k}$ une base de W^k ;
- (a_i^k) , $(\tilde{a}_i^k)$ et (b_i^k) représenteront systématiquement les coefficients de fonctions $f_k \in V^k$, $\tilde{f}_k \in \tilde{V}^k$ et $g_k \in W^k$, respectivement, dans les bases précédentes. Les coefficients (b_i^k) sont également appelés « coefficients d'ondelettes » de la fonction f_k .

Les processus de décomposition et reconstruction fonctionnels vus précédemment se traduisent directement en flot de données une fois exprimés en termes de bases et de coefficients dans ces bases. L'hypothèse de surjectivité présente ici encore un avantage sur la séparation :

PROPOSITION II.2 — *La représentation d'une fonction $f_N \in V^N$ sous forme multiré-*

solution nécessaire

$$n_0 + \sum_{k=0}^{N-1} r_k$$

coefficients. Si les opérateurs d'approximation sont surjectifs, alors cette quantité est minimale et égale à n_N .

Démonstration. — On utilise le fait que $\dim(\text{Ker}(P^k)) + \dim(\text{Im}(P^k)) = \dim(V^{n+1})$, c'est-à-dire $r_k + m_k = n_{k+1}$, et $m_k = n_k$ si on a surjectivité. $\square$

• **Pratique d'une étape de décomposition.** On dispose des n_{k+1} coefficients (a^{k+1}) d'une fonction $f_{k+1} \in V^{k+1}$ relativement à une base ϕ^{k+1} , et l'on cherche à obtenir d'une part les n_k coefficients de $P^k(f_{k+1})$ relativement à ϕ^k et d'autre part les m_k coefficients de $Q^k(f_{k+1})$ relativement à ψ^k . La matrice réalisant cette opération est par définition la *matrice d'analyse* A^k . On a donc la situation suivante :

$$\begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix} = A^k [a^{k+1}] = \begin{bmatrix} P^k_{\phi^{k+1}, \phi^k} \\ Q^k_{\phi^{k+1}, \psi^k} \end{bmatrix} [a^{k+1}]$$

A^k est une matrice $(n^k + r^k) \times n^{k+1}$, donc elle n'est carrée que lorsque P^k est surjectif.

• **Pratique d'une étape de reconstruction.** L'opération inverse $(f_k, g_k) \mapsto S^k(f_k) + g_k$ est réalisée par la *matrice de synthèse* B^k suivant

$$[a^{k+1}] = B^k \begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix} = [\Phi^k \quad \Psi^k] \begin{bmatrix} a^k \\ b^k \end{bmatrix}$$

où Ψ^k est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les ψ^k exprimés dans la base ϕ^{k+1} , et Φ^k est la matrice d'une surjection de V^k dans $\tilde{V}^k$. Cette surjection est de la forme $\bar{S}^k = S^k \circ p^k$, où p^k est une projection *quelconque* de V^k sur $\text{Im}(P^k) \subset V^k$. En effet si tel est le cas on a bien $\bar{S}^k \circ P^k_{|\tilde{V}^k} = \text{Id}_{\tilde{V}^k}$. Réciproquement, si $\bar{S}^k \circ P^k_{|\tilde{V}^k} = \text{Id}_{\tilde{V}^k}$, alors $P^k_{|\tilde{V}^k} \circ \bar{S}^k \circ P^k_{|\tilde{V}^k} \circ \bar{S}^k = P^k_{|\tilde{V}^k} \circ \text{Id}_{\tilde{V}^k} \circ \bar{S}^k = P^k_{|\tilde{V}^k} \circ \bar{S}^k$, donc $P^k_{|\tilde{V}^k} \circ \bar{S}^k$ est un projecteur p^k sur $\text{Im}(P^k)$. Enfin $\bar{S}^k = \text{Id}_{\tilde{V}^k} \circ \bar{S}^k = S^k \circ P^k_{|\tilde{V}^k} \circ \bar{S}^k = S^k \circ p^k$.

En cas de surjectivité, les vecteurs colonnes de Φ forment la base "implicite" de $\tilde{V}^k$, c'est-à-dire celle constituée des fonctions $S^k(\phi^k)$ (si on considère « fixes » les bases des espaces d'approximation).

La relation fondamentale liant les matrices d'analyse et de synthèse est

$$B^k \cdot A^k = \text{Id}_{n_{k+1}},$$

exprimant que B^k est un inverse à gauche de A^k (les choix multiples pour B^k proviennent des choix pour p^k). Dans le cas surjectif, les matrices sont simplement carrées et inverses l'une de l'autre (on retrouve alors la « formulation matricielle » des équations d'analyse/reconstruction dans le cas classique)

Dans la pratique de la décomposition lorsqu'il n'y a pas surjectivité, on sauvegarde l'ensemble des coefficients d'ondelette, mais uniquement $m_k < n_k$ coefficients « gros-siers » a^k . Ceci revient à *sélectionner certaines lignes de la partie supérieure de la matrice d'analyse*, de telle façon que la sous-matrice $\tilde{A}^k$ soit alors carrée inversible ; son inverse permettra de reconstituer les données lors de la reconstruction.

II.2. MNE : Le point de vue subdivision

Le schéma d'analyse multirésolution présenté maintenant est centré sur la notion d'espaces de subdivision, introduite au chapitre précédent à partir de l'algorithme en cascade. C'est un cadre très général pour la construction d'ondelettes de seconde génération. L'utilisation des espaces de subdivision présente l'avantage de mettre en avant la construction et l'algorithmique sous-jacente à une certaine base d'ondelettes, ce qui est partiellement caché lorsqu'on démarre par « l'autre bout » : fonctions d'échelle, espaces emboîtés, *etc.*

II.2.1. Espaces de subdivision et opérateurs

DÉFINITION II.3 Séquence d'espaces de subdivision — *On appelle séquence d'espaces de subdivision une suite de sous-espaces V^k de dimension finie de E , $k \in \mathbb{N}$, telle que*

$$\dim(V^k) \leq \dim(V^{k+1}).$$

Remarque. — Comme pour la définition II.1, l'hypothèse de la dimension finie est imposée par commodité.

Les espaces de subdivision abritent les fonctions se faisant subdiviser. La manière de subdiviser, ou schéma de subdivision, est définie par des opérateurs.

DÉFINITION II.4 Opérateurs de subdivision — *On appelle séquence d'opérateurs de subdivision associée à la séquence d'espaces de subdivision V^k une suite d'applications linéaires injectives*

$$S^k : V^k \longrightarrow V^{k+1}.$$

L'accroissement de la dimension des espaces de subdivision est demandé pour permettre aux opérateurs de subdivision d'être injectifs. La notion de subdivision ainsi définie est très générale. A l'aide de ces opérateurs, on démarre avec une fonction $f \in V^k$ et on la subdivise $n \geq 1$ fois pour obtenir une fonction $g \in V^{k+n}$, définie par

$$g = S^{k+n-1} \circ \dots \circ S^{k+1} \circ S^k(f).$$

Pour simplifier ce type d'écritures, introduisons les

Notations. — $\forall k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, $f^k \in V^k$, on note

- $S^{k,n} : V^k \rightarrow V^n$, $f \mapsto g := S^{n-1} \circ \dots \circ S^{k+1} \circ S^k(f)$, avec la convention que $S^{k,k} := \text{Id}_{V^k}$;
- $f^{k,n} := S^{k,n}(f^k) \in V^n$;
- $V^{k,n} := S^{k,n}(V^k) \subset V^n$.

II.2.2. Espaces d'échelle, espaces de détail

Fixons à présent un indice $N \in \mathbb{N}$, que l'on fera éventuellement tendre vers $+\infty$; on suppose toujours que $k \leq N$. On peut maintenant définir les espaces d'échelle :

DÉFINITION II.5 Espaces d'échelle — *On appelle espaces d'échelle de niveau N*

les espaces $\bar{V}^k := V^{k,N} \subset V^N$.

La dénomination d'espace *d'échelle* est utilisée pour rappeler la terminologie des ondelettes de première génération, bien que nos espaces ne soient pas nécessairement des dilatations d'un facteur 2^{-k} d'un seul et même espace. Comme on peut s'y attendre, nous avons la

PROPOSITION II.3 Emboîtement — *Les espaces d'échelle sont emboîtés :*

$$\bar{V}^0 \subset \bar{V}^1 \subset \dots \subset \bar{V}^N = V^N.$$

Démonstration. — Soit $\bar{f}^k \in \bar{V}^k$ et montrons que $\bar{f}^k \in \bar{V}^{k+1}$.

Par définition, comme $\bar{f}^k \in \bar{V}^k$, il existe $f^k \in V^k$ telle que $\bar{f}^k = S^{k,N}(f^k)$. On peut donc écrire

$$\bar{f}^k = S^{k+1,N} \circ (S^k(f^k)),$$

et puisque $S^k(f^k) \in V^{k+1}$, on a bien $\bar{f}^k \in \bar{V}^{k+1}$. $\square$

Ainsi nous voyons qu'à « la limite », les espaces de subdivision donnent naissance à une analyse multirésolution emboîtée.

DÉFINITIONS II.6 — *Pour tout $k \leq N$, on appelle espaces auxiliaires les espaces*

$$\tilde{V}^k := \text{Im}(S^k) \subset V^{k+1}.$$

On appelle espaces complémentaires associés aux espaces de subdivision des espaces W^k tels que

$$V^{k+1} = \tilde{V}^k \oplus W^k.$$

Finalement, on définit les opérateurs de décimation P^k par

$$\begin{aligned} P^k : V^{k+1} &\longrightarrow V^k \\ f &\longmapsto \text{Inv}(S^k) \circ (\text{Id}_{V^{k+1}} - Q^k)(f) \end{aligned}$$

où $Q^k : V^{k+1} \rightarrow W^k$, est le projecteur sur W^k parallèlement à $\tilde{V}^k$. Les opérateurs de décimation sont linéaires et sont des inverses à droite des opérateurs de synthèse.

Pour prendre l'inverse de S^k , on considère S^k comme l'opérateur bijectif $S^k : V^k \rightarrow \text{Im}(S^k)$, les opérateurs de subdivision étant supposés injectifs. Notons qu'il y a correspondance entre les inverses à droite linéaires de S^k et les espaces complémentaires W^k .

Les espaces complémentaires nous permettent d'introduire les espaces de détail.

PROPOSITION II.4 Espaces de détail — *Pour tout $k \leq N$, on définit les espaces de détail par :*

$$\bar{W}^k := W^{k,N} = S^{k,N}(W^k) \subset V^N.$$

Les espaces de détail vérifient les propriétés suivantes :

(i) $\bar{V}^{k+1} = \bar{V}^k \oplus \bar{W}^k$;

(ii) Pour tout sous-espace $\widehat{W}$ tel que $\bar{V}^{k+1} = \bar{V}^k \oplus \widehat{W}$, il existe un unique sous-espace $W \subset V^{k+1}$ tel que $\widehat{W} = S^{k,N}(W)$. De plus $V^{k+1} = V^k \oplus W$. Enfin, pour tout $n = 0, \dots, N-1$, on a :

$$\bar{V}^N = \bar{V}^n \oplus \bigoplus_{k=n}^{N-1} \bar{W}^k.$$

Démonstration. — Composition d'applications injectives, les $S^{k,N}$ sont injectives, pour tout $k \leq N$. Par conséquent les espaces V^k et $\bar{V}^k$ sont isomorphes par $S^{k,N} : V^k \rightarrow \bar{V}^k$, et les deux propriétés en découlent. La dernière égalité est triviale. $\square$

Arrêtons-nous un instant sur l'interprétation des différents espaces et opérateurs que nous venons d'introduire. Lorsqu'on prend une fonction $\bar{f} \in \bar{V}^k$, nous savons qu'il lui correspond une unique fonction $f \in V^k$. Ceci signifie que l'information « intrinsèque » définissant $\bar{f}$ (fonction *a priori* complexe) est contenue dans la donnée de f (fonction *a priori* simple) et d'un processus de subdivision $S^{k,N}$, c'est-à-dire une « règle » choisie une fois pour toutes.

Remarque. — Il est intuitivement clair que la quantité d'information intrinsèque dépend fortement du choix du processus de subdivision. Par exemple, si l'on s'intéresse à des fonctions que l'on sait par avance régulières, on aura intérêt à tenter de « factoriser » le maximum de renseignements dans une subdivision produisant des fonctions ayant la régularité cherchée.

D'un autre côté, la décomposition de $\bar{V}^N$ en sommes directes montre qu'une fonction $\bar{f} \in \bar{V}^N$ peut s'écrire de manière unique comme une approximation $\bar{f}_n \in V^k$ et une somme de détails additionnels $\bar{g}_k \in V^i$, $n \leq k < N$. Ces fonctions de détail sont elles-mêmes issues de la subdivision de fonctions $g_k \in W^k$. Les égalités

$$\begin{aligned} \bar{f}_N &= \bar{f}_n + \sum_{k=n}^{N-1} \bar{g}_k \\ &= S^{n,N}(f_n) + \sum_{k=n}^{N-1} S^{k+1,N}(g_k) \\ &= S^{N-1}(S^{n,N-1}(f_n) + \sum_{k=n+1}^{N-2} S^{k+1,N-1}(g_k)) + g_{N-1} \\ &= S^{N-1}\left(S^{N-2}(S^{n,N-2}(f_n) + \sum_{k=n+1}^{N-3} S^{k+1,N-2}(g_k)) + g_{N-2}\right) + g_{N-1} \\ &\vdots \\ &= S^{N-1}\left(S^{N-2}\left(\dots\left(S^{n+1}(S^n(f_n) + g_n) + g_{n+1}\right) + \dots\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\dots + g_{N-3}\right) + g_{N-2}\right) + g_{N-1} \end{aligned}$$

montrent que la construction (ou *synthèse*) de $\bar{f}$ peut se schématiser de la manière

suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & S^n & & S^k & & S^{k+1} & & S^{N-1} \\
 f_n & \xrightarrow{\oplus} & \cdots & f_k & \xrightarrow{\oplus} & f_{k+1} & \xrightarrow{\oplus} & \cdots & f_{N-1} & \xrightarrow{\oplus} & f_N \\
 g_n & \nearrow & & g_k & \nearrow & g_{k+1} & \nearrow & & g_{N-1} & \nearrow &
 \end{array}$$

Ceci permet d'interpréter la construction de $\bar{f}$ comme une alternance de *prédictions* effectuées par les opérateurs de subdivision — qui estiment f^{k+1} connaissant f^k — et de *corrections* à ces prédictions, apportées par les fonctions de détail g^k .

Le schéma de synthèse que nous venons de voir possède sa contrepartie, le schéma d'analyse. Ce dernier utilise les opérateurs P^k et Q^k introduits dans la définition II.5 pour trouver les composantes g_k et f_n à partir de la fonction f_N de départ, de façon hiérarchique.

En effet, en revenant aux définitions, on voit que si $f_N = S^{N-1}(f_{N-1}) + g_{N-1}$, alors

$$\begin{aligned}
 Q^{N-1}(f_N) &= g_{N-1}, \quad \text{et} \\
 P^{N-1}(f_N) &= \text{Inv}(S^{N-1})(f_N - Q^{N-1}(f_N)) = f_{N-1}.
 \end{aligned}$$

Il suffit alors de réitérer la décomposition pour la fonction f_{N-1} , f_{N-2} , etc. L'algorithme est représenté sur le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f_n & \xleftarrow{P^n} & \cdots & f_i & \xleftarrow{P^i} & f_{i+1} & \xleftarrow{P^{i+1}} & \cdots & f_{N-1} & \xleftarrow{P^{N-1}} & f_N \\
 g_n & \nwarrow & & g_i & \nwarrow & g_{i+1} & \nwarrow & & g_{N-1} & \nwarrow &
 \end{array}$$

II.2.3. Bases

Pour finir, nous allons introduire les bases des différents espaces.

Notations. — On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- n_k la dimension de V^k , et $(\phi_i^k)_{i=1, \dots, n_k}$, une base de V^k .
- $(\tilde{\phi}_i^k)_{i=1, \dots, n_{k-1}}$, une base de $\tilde{V}^k$.
- r_k la dimension de W^k , et $(\psi_i^k)_{i=1, \dots, r_k}$, une base de W^k .
- (a^k) , $(\tilde{a}^k)$, et (b^k) représenteront systématiquement les coefficients de fonctions $f_k \in V^k$, $\tilde{f}_k \in \tilde{V}^k$ et $g_k \in W^k$, respectivement. Les (b^k) sont également appelés « coefficients d'ondelettes » (de la fonction f_k).

PROPOSITION II.5 Bases hiérarchiques — Pour tout $k \leq N$, on note $\bar{\phi}_j^k := \phi_j^{k,N}$, $\bar{\psi}_j^k := \psi_j^{k,N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 (\bar{\phi}_j^k)_{j=1, \dots, n_k} &\text{ est une base de } \bar{V}^k, \quad \forall k \leq N \\
 (\bar{\psi}_j^k)_{j=1, \dots, r_k} &\text{ est une base de } \bar{W}^k, \quad \forall k < N \\
 (\bar{\phi}^n), (\bar{\psi}^n), \dots, (\bar{\psi}^{N-1}) &\text{ est une base de } \bar{V}^N, \quad \forall n \leq N.
 \end{aligned}$$

Lorsque $n = 0$, cette dernière base est appelée base hiérarchique de V^N .

Démonstration. — C'est une conséquence claire de l'isomorphisme existant entre V^k et $\bar{V}^k$, pour tout $k \leq N$. $\square$

Cette proposition montre que le calcul des coefficients (a^k) , $(\tilde{a}^k)$, et (b^k) dans l'analyse ou la synthèse se font de manière exactement identique au point de vue non emboîté décrite à la section II.1.3.

II.3. Comparaison entre les deux points de vue

Comme on l'a annoncé dans l'introduction de ce chapitre, le point de vue non emboîté et le point de vue subdivision possèdent de nombreux points communs. Dans la présentation qui a été faite du non emboîté, on a fait la part belle à la phase d'analyse, car c'est souvent le choix des opérateurs d'analyse qui est le plus direct lors de l'emploi de ce cadre, comme on le verra au chapitre V. Cela s'est traduit par la possibilité d'avoir des opérateurs d'approximation très généraux ; la délicate situation de la non surjectivité n'a par exemple pas été exclue. À l'opposé, le point de vue subdivision est constructif : on tente de créer des fonctions qui seront automatiquement plongées dans un cadre multirésolution. C'est donc la phase de synthèse qui est mise en avant.

Dans le point de vue non emboîté, les fonctions intéressantes sont les fonctions des espaces d'approximation. Celles-ci pourront donc être relativement complexes, par exemple polynomiales par morceaux. Typiquement, conformément à une logique de simplification des données, elles doivent permettre une représentation *économique* (en termes du nombre de coefficients utilisés, mais aussi de structures auxiliaires éventuelles) tout en restant de la meilleure qualité possible.

Dans le point de vue subdivision, les fonctions intéressantes sont les fonctions des espaces d'échelle — celles des espaces de subdivision ne sont là que pour leur construction et leur manipulation, et elles auront donc en général l'expression la plus simple possible¹. Il en résulte qu'il convient de bien distinguer les deux points de vue vis-à-vis de plusieurs caractéristiques d'un cadre multirésolution : lorsque l'on parle par exemple de mesure d'erreur entre une fonction et son approximation, on s'intéressera à $\|f_N - f_k\|$ dans le cas non emboîté, tandis que du point de vue subdivision, on cherchera le plus souvent à mesurer $\|f_N - \tilde{f}_k\|$. La même distinction s'applique à d'autres notions comme les produits scalaires entre fonctions, les propriétés d'approximation, *etc.* À la fin du chapitre V on verra un exemple d'opérateurs donnant lieu à un cadre multirésolution convenable du point de vue subdivision, mais inutilisable en tant que non emboîté, car les fonctions grossières dans les espaces d'approximation n'approchent pas suffisamment bien la fonction originale, ce qui en limite l'intérêt notamment dans une application de visualisation scientifique.

1. En fait, dans les cas classiques où des valeurs sont déterminées sur un sous-ensemble *dense*, la structure précise des espaces de subdivision n'influence pas le résultat *ad infinitum*.



Multirésolution Non Emboîtée

Aspects Analytiques

ON ÉTUDIE à présent les aspects analytiques du cadre multirésolution présenté au chapitre précédent. Quatre thèmes principaux vont nous préoccuper. La *stabilité* du schéma multirésolution, dans un sens (analyse) comme dans l'autre (synthèse), sera l'objet d'un premier paragraphe. Dans un second temps, on verra différents aspects de la *mesure d'erreur* entre une fonction initiale donnée et les diverses approximations fournies par une décomposition multirésolution. On s'intéressera également à la notion de *conditionnement*, qui est plus significative que la stabilité dans certaines applications pratiques. Une troisième partie est consacrée à l'interprétation et l'utilisation de la DVS dans les processus d'analyse et de synthèse multirésolution. Enfin on donnera un certain nombre de principes généraux pour la construction d'un cadre multirésolution.

Dans ce chapitre nous désirons rester le plus général possible. Cependant, plusieurs hypothèses vont apparaître de manière naturelle vis à vis des différentes caractéristiques étudiées. Ces hypothèses, qui viennent compléter le cadre algébrique, constituent en quelque sorte un minimum.

Nous précisons d'emblée que les résultats de ce chapitre, techniques, ne seront pas tous applicables dans la seconde partie de la thèse. Cette remarque concerne essentiellement les résultats de la section III.1.1 : on pourra donc, au moins en première lecture, se contenter d'une connaissance superficielle des définitions et résultats qui y figurent. Cependant, dans l'optique de donner une présentation solide du cadre multirésolution non emboîté, il nous a paru intéressant d'en esquisser sans omission les mécanismes les plus immédiats, qui s'avèreront par ailleurs utiles dans la plupart des applications « classiques » de la multirésolution et notamment celles basées sur des espaces d'approximation emboîtés.

Sauf contre-indication, on adopte dans toute cette partie le point de vue non emboîté, et le vocabulaire qui l'accompagne. Les aspects propres à la subdivision peuvent sans difficulté se traduire du cas non emboîté.

III.1. Stabilité

Pour introduire la notion de stabilité du schéma multirésolution, on va commencer par formaliser le processus de décomposition. Tant que le nombre d'opérations impliquées dans l'analyse ou la synthèse est fini, tout est « stable ». Pour commencer à parler de stabilité il faut abandonner le cas fini.

On va donc considérer les espaces V^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, et on supposera de plus que

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} V^k} = E$$

Rappelons que E est un espace de Hilbert et que les espaces d'approximation sont de dimension finie. Au début de la section II.1, on indique que pour analyser une fonction, il faut dans un premier temps lui associer une fonction dans un espace d'approximation. Précisons :

DÉFINITION III.1 Opérateurs de liaison — On appelle opérateurs de liaison associés aux espaces d'approximation des projections linéaires continues

$$\mathcal{P}^k : E \longrightarrow V^k.$$

telles que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{P}^k(f) = f, \quad \forall f \in E, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La dernière condition concernant la limite est bien naturelle : on veut débiter l'analyse avec une fonction f_n si possible proche de f .

Les opérateurs de liaison permettent de formaliser la décomposition d'une fonction de E .

PROPOSITION III.1 Définition de ΠE^l — Pour $l \in \mathbb{N}$ fixé, on définit l'espace

$$\Pi E^l := V^l \times W^l \times W^{l+1} \times \dots$$

Un élément $f \in \Pi E^l$ sera généralement noté

$$f = (f_{V^l}, f_{W^l}, f_{W^{l+1}}, \dots).$$

On définit également 3 sous-espaces de ΠE^l :

$$\Pi E_{\infty}^l = \{f \in \Pi E^l \mid \sup_{k=l, \dots, \infty} \|f_{W^k}\| < \infty\},$$

$$\Pi E_0^l = \{f \in \Pi E^l \mid \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{W^k}\| = 0\}.$$

Si $(d_i)_{i \geq l}$ est une suite de nombres ≥ 1 , on note :

$$\Pi E_{(d.)}^l = \{f \in \Pi E^l \mid \sum_{k=l}^{\infty} d_k \|f_{W^k}\| < \infty\}.$$

Les ensembles $\Pi E_{(d.)}^l$ avec $(d.)$ bornée sont tous égaux et notés ΠE_1^l . On a

$$\Pi E_{(d.)}^l \subset \Pi E_0^l \subset \Pi E_{\infty}^l \subset \Pi E^l.$$

Les espaces ΠE_{∞}^l et ΠE_0^l sont des espaces de Banach munis de la norme

$$\|f\|_{\Pi E_0^l} := \|f\|_{\Pi E_{\infty}^l} := \max\left(\sup_{k \geq l} \|f_{W^k}\|, \|f_{V^l}\|\right).$$

L'espace $\Pi E_{(d.)}^l$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{\Pi E_{(d.)}^l} := \|f_{V^l}\| + \sum_{k=l}^{\infty} d_k \|f_{W^k}\|.$$

La démonstration n'est pas détaillée ici : cf la démonstration que le produit quelconque d'espaces de Banach est un espace de Banach, figurant dans de nombreux livres d'analyse de second cycle.

Remarque. — Il est bien entendu possible de définir $\Pi E_{(d.)}^l$ sans supposer $d_i \geq 1$, pour tout i . Mais pour ce qui nous intéresse, on aura toujours $d_i \geq 1$ et cela permet d'affirmer que $\Pi E_{(d.)}^l \subset \Pi E_0^l$.

DÉFINITION III.2 Opérateur TMR — Pour $n, l \in \mathbb{N}$, $l \leq n$, on note $\text{TMR}^{l,n}(f)$ l'opérateur qui à $f \in E$ associe la décomposition multirésolution de $f_n = \mathcal{P}^n(f)$ jusqu'à l'ordre l :

$$\begin{aligned} \text{TMR}^{l,n} : E &\longrightarrow \Pi E_1^l \\ f &\longmapsto (f_l^n, g_l^n, \dots, g_{n-1}^n, 0, \dots) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f_l^n &:= P^{n,l} \circ \mathcal{P}^n(f), \\ g_k^n &:= Q^k \circ P^{n,k+1} \circ \mathcal{P}^n(f), \quad \forall k = l, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Pour finir, définissons l'opérateur de reconstruction :

DÉFINITION III.3 Opérateur TMRi — Pour des entiers $l, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq l \leq n$, on définit

$$\begin{aligned} \text{TMRi}^{l,n} : \Pi E^l &\longrightarrow V^n \\ (f_{V^l}, f_{W^l}, \dots) &\longmapsto h_n \end{aligned}$$

où h_n est défini par la récurrence

$$\begin{aligned} h_l &:= f_{V^l} \\ h_{k+1} &= S^k(h_k) + f_{W^k} \quad \text{pour tout } k \geq l. \end{aligned}$$

On définit également formellement l'opérateur

$$\begin{aligned} \overline{\text{TMRi}}^l : \Pi E^l &\longrightarrow E \\ (f_{V^l}, f_{W^l}, \dots) &\longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n \end{aligned}$$

lorsque la limite existe.

Des résultats algébriques du chapitre précédent on déduit immédiatement la proposition suivante.

PROPOSITION III.2 — Pour tous les entiers $l, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq l \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} \text{TMRi}^{l,n}(\text{TMR}^{l,n}(f)) &= f, \quad \forall f \in V^n \\ \text{TMR}^{l,n}(\text{TMRi}^{l,n}(f)) &= f, \quad \forall f \in \Pi E^l. \end{aligned}$$

III.1.1. Stabilité du processus d'analyse

On peut à présent définir ce qu'est un processus d'analyse stable.

DÉFINITION III.4 Analyse stable — On dit que le processus d'analyse est stable s'il existe des constantes $C, C_n, n \in \mathbb{N}$, telles que, pour toute fonction $f \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\|f_0\| \leq C\|f\|, \quad \|g_k\| \leq C_k\|f\|, \quad \forall k = l, \dots, n-1,$$

où $(f_0, g_0, \dots, g_{n-1}) = \text{TMR}^{0,n}(f)$.

Le processus d'analyse est dit uniformément stable si les constantes ci-dessus sont majorées par une constante $\bar{C}$.

Cette définition appelle plusieurs commentaires. Rappelons que les opérateurs $P^{n,l} \circ \mathcal{P}^n$ et $Q^k \circ P^{n,k+1} \circ \mathcal{P}^n$ sont linéaires, par conséquent la condition de stabilité « à l'origine » se translate en tout point de E : la définition signifie donc qu'une perturbation ε de la fonction analysée f engendre sur $\text{TMR}^{0,n}(f)$ une erreur qui reste bornée. D'autre part, il semble que l'on ait privilégié l'indice 0 dans la définition de la stabilité ; on verra qu'en fait ce n'est pas le cas.

Nous allons établir quelques résultats permettant de mieux comprendre la nature des propriétés de stabilité. On va s'efforcer de « dépouiller » la définition pour voir plus précisément à quoi tient le fait d'être (uniformément) stable ou non. Comme le montre la structure des opérateurs de décomposition, le processus d'analyse se compose de trois parties distinctes :

- (i) la projection de E dans V^n ;
- (ii) la composition des projections jusqu'à V^k , $0 \leq k \leq n-1$;

(iii) dans le cas des composantes de détail, la projection sur W^k , $k > 0$.

Bien que ces trois parties jouent un rôle dans les bornes de stabilité, la partie problématique est, comme on va le voir, essentiellement la composition de projections (ii), dans laquelle il existe un risque d'amplification des erreurs.

On commence par s'intéresser à l'étape (i).

LEMME III.1 — *Les opérateurs de liaison sont équicontinus à l'origine (donc en tout point par linéarité), i.e.*

$$\exists M > 0 \text{ telle que } \|\mathcal{P}^k(f)\| \leq M \|f\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall f \in E.$$

Démonstration. — D'après la définition, on a pour toute fonction $f \in E$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{P}^k(f) = f,$$

ce qui entraîne en particulier que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathcal{P}^k(f)\| = \|f\|,$$

car la norme est une application continue. On en déduit qu'il existe $N(f) \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\|\mathcal{P}^k(f)\| \leq (1 + \varepsilon) \|f\|, \quad \forall k > N(f).$$

Pour conclure, il reste à appliquer le théorème de Banach-Steinhaus à la suite d'applications linéaires continues $(\mathcal{P}^k)$. $\square$

COROLLAIRE III.1 — *L'analyse est stable (resp. uniformément stable) ssi il existe des constantes C' , $C'_0, C'_1, \dots$, telles que*

$$\|P^{n,0}(f)\| \leq C' \|f\|, \quad \|Q^k \circ P^{n,k+1}(f)\| \leq C'_k \|f\|, \quad \forall k \leq n \in \mathbb{N}, \forall f \in V^{n+1},$$

(resp. ssi les constantes sont majorées par $\bar{C}'$).

Démonstration. — $(\Rightarrow)$ Comme $\mathcal{P}^{n+1}$ est un projecteur, on a $\mathcal{P}^{n+1}(f) = f$, pour tout $f \in V^{n+1}$, donc

$$\|P^{n,0}(f)\| = \|P^{n,0} \circ \mathcal{P}^{n+1}(f)\| \leq C \|f\|,$$

puisque l'analyse est stable. On procède de même pour la deuxième inégalité.

$(\Leftarrow)$ On écrit simplement

$$\|P^{n,0} \circ \mathcal{P}^{n+1}\| \leq \|P^{n,0}\| \cdot \|\mathcal{P}^{n+1}\| \cdot \|f\| \leq C' M \|f\|,$$

où M est la borne définie dans le lemme III.1. Idem pour les autres inégalités.

Enfin, la version « uniforme » s'en déduit aisément. $\square$

Regardons à présent si l'on peut supprimer le rôle des opérateurs Q^k (cf étape (iii)). Nous aurons besoin d'un résultat préliminaire. On rappelle que les opérateurs R^k sont définis à la définition II.2.

LEMME III.2 — Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des constantes positives K_k et ε_k telles que

$$\begin{aligned} \|R^k(f)\| + \|Q^k(f)\| &\geq K_k \|f\|, \quad \forall f \in V^{k+1} \\ \|P^k(f)\| &\geq \varepsilon_k \|f\|, \quad \forall f \in \tilde{V}^k. \end{aligned}$$

Démonstration. — Il est facile de vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V^{k+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|R^k(f)\| + \|Q^k(f)\| \end{aligned}$$

est une norme sur V^{k+1} . En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc en particulier, il existe une constante K_k telle que

$$\|f\| \geq K_k \|f\|, \quad \forall f \in V^{k+1}.$$

Pour la deuxième propriété on procède de même avec la norme $\|f\| := \|P^k(f)\|$ sur $\tilde{V}^k$ (qui est une norme car $P^k|_{\tilde{V}^k}$ est un isomorphisme). $\square$

PROPOSITION III.3 — L'analyse est stable ssi il existe des constantes $C''_0, C''_1, \dots$, telles que

$$\|P^{n,k}(f)\| \leq C''_k \|f\|, \quad \forall k \leq n \in \mathbb{N}, f \in V^n.$$

Démonstration. — On se base sur le résultat du corollaire III.1.

($\Rightarrow$) On va procéder par récurrence sur k . Pour $k = 0$, c'est exactement une des conditions de stabilité. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à l'indice k , et qu'elle soit fausse pour l'indice $k + 1$. Alors

$$\forall D > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \exists f \in V^n, \text{ tels que } \|P^{n,k+1}(f)\| > D \|f\|.$$

D'après le lemme III.2 et l'hypothèse de stabilité, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} DK_k \|f\| &\leq K_k \|P^{n,k+1}(f)\| \leq \|R^k(P^{n,k+1}(f))\| + \|Q^k(P^{n,k+1}(f))\| \\ &\leq \|R^k(P^{n,k+1}(f))\| + C'_k \|f\|, \end{aligned}$$

d'où

$$\|R^k(P^{n,k+1}(f))\| \geq (DK_k - C'_k) \|f\|.$$

D'après la deuxième inégalité du lemme,

$$\|P^{n,k}(f)\| = \|P^k(R^k(P^{n,k+1}(f)))\| \geq \varepsilon_k (DK_k - C'_k) \|f\|,$$

ce qui contredit l'hypothèse de récurrence, pour D assez grand.

($\Leftarrow$) Cela résulte immédiatement des inégalités

$$\|Q^k \circ P^{n,k+1}(f)\| \leq \|Q^k\| \|P^{n,k+1}(f)\|, \quad \forall k < n \in \mathbb{N}, \forall f \in V^n.$$

$\square$

On voit donc que la principale source d'instabilité dans le processus d'analyse provient des projections successives. Pour contrer le risque d'amplification dans cette étape (ii), on impose une condition, somme toute logique, aux opérateurs d'approximation.

DÉFINITION III.5 Cohérence — Les opérateurs de liaison et les opérateurs d'approximation sont dits cohérents si

$$P^k \circ \mathcal{P}^{k+1} = \mathcal{P}^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La cohérence apparaît de manière logique dans ce contexte de stabilité, mais c'est une notion bien plus riche, qui est notamment indispensable pour formaliser correctement l'opérateur de transformée multirésolution dans le cas d'un nombre infini d'espace d'approximation (cf plus loin). Donnons quelques propriétés résultant de la cohérence.

PROPOSITION III.4 — Soient k, n des entiers vérifiant $0 \leq k \leq n$. On a

$$\text{opérateurs cohérents} \Leftrightarrow \begin{cases} P^k := \mathcal{P}_{|V^{k+1}}^k \\ \text{Ker}(\mathcal{P}^{k+1}) \subset \text{Ker}(\mathcal{P}^k) \end{cases} \quad (\text{C1})$$

Si les opérateurs sont cohérents, alors :

$$\mathcal{P}^k \circ \mathcal{P}^n = P^{n,k} \circ \mathcal{P}^n = \mathcal{P}^k. \quad (\text{C2})$$

Démonstration. — Supposons les opérateurs cohérents. On a clairement $P^k = \mathcal{P}_{|V^{k+1}}^k$ et d'autre part

$$\mathcal{P}^{k+1}(f) = 0 \implies \mathcal{P}^k(f) = P^k(\mathcal{P}^{k+1}(f)) = 0,$$

d'où l'inclusion des noyaux. Réciproquement, si on a l'inclusion des noyaux alors il faut montrer que $P^k := \mathcal{P}_{|V^{k+1}}^k$ constitue un opérateur cohérent avec les opérateurs de liaison. Or, puisque $\mathcal{P}^{k+1}$ est une projection,

$$\mathcal{P}^{k+1}(\mathcal{P}^{k+1}(f) - f) = 0,$$

donc $f = \mathcal{P}^{k+1}(f) + g$, avec $g \in \text{Ker}(\mathcal{P}^{k+1}) \subset \text{Ker}(\mathcal{P}^k)$, d'où la cohérence et (C1).

Pour (C2), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^k \circ \mathcal{P}^n &= P^k \circ \mathcal{P}^{k+1} \circ \mathcal{P}^n \\ &= P^k \circ P^{k+1} \circ \mathcal{P}^{k+2} \circ \mathcal{P}^n \\ &\vdots \\ &= P^k \circ \dots \circ P^{n-1} \circ \mathcal{P}^n = P^{n,k} \circ \mathcal{P}^n \\ &= P^k \circ \dots \circ P^{n-2} \mathcal{P}^{n-1} \\ &\vdots \\ &= P^k \circ \mathcal{P}^{k+1} = \mathcal{P}^k. \end{aligned}$$

□

La cohérence, et plus particulièrement la propriété (C2) signifie qu'il n'y a pas d'intérêt à projeter initialement sur un espace V^n plutôt qu'un autre.

Remarque. — On a déjà rencontré la propriété de cohérence lors de la construction de l'analyse multirésolution duale des ondelettes de première génération (voir p. 13). En termes d'espaces V^{k*} duaux des espaces d'approximation (correspondant aux opérateurs de liaison), la propriété (C1) signifie

$$V^{k*} \subset V^{k+1*},$$

i.e. l'emboîtement des espaces duaux.

La donnée des opérateurs de liaison et d'approximation est donc *redondante*, et plus précisément les opérateurs de liaison définissent complètement les opérateurs d'approximation. La propriété (C2) montre qu'il ne peut y avoir de phénomène d'amplification avec des opérateurs cohérents.

PROPOSITION III.5 Stabilité — *Si les opérateurs de liaison et d'approximation sont cohérents, le processus d'analyse est stable. Il est uniformément stable si de plus les opérateurs Q^k sont équicontinus.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement des égalités (C2), du lemme III.1 et du corollaire III.1. $\square$

Remarque. — En pratique, on supposera toujours les opérateurs Q^k équicontinus, le contraire étant en quelque sorte un cas « dégénéré » (la problématique de l'uniforme stabilité ne réside pas dans ces opérateurs, comme on l'a vu).

La cohérence permet alors d'« étendre » la définition des opérateurs de décomposition multirésolution, qui pour le moment supposait que l'on se limite à considérer un nombre fini d'espaces d'approximation. Cette extension rend non évidentes des propriétés telles que la reconstruction ou l'existence de la forme développée de la fonction reconstruite, qui sont des résultats habituels dans le cas classique. Ces problèmes sont traités par les proposition III.6 et proposition III.9 ci-après.

DÉFINITION III.6 — *Sous les hypothèses précédentes, on définit, $\forall l \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \overline{\text{TMR}}^l : E &\longrightarrow \Pi E_\infty^l \\ f &\longmapsto (\mathcal{P}^l(f), Q^l(\mathcal{P}^{l+1}(f)), Q^{l+1}(\mathcal{P}^{l+2}(f)), \dots). \end{aligned}$$

Remarquons qu'une telle extension n'a effectivement de sens *que* grâce à la propriété de cohérence qui ne privilégie pas un espace plutôt qu'un autre pour effectuer la « première » projection. Le résultat suivant prolonge celui de la proposition III.2.

PROPOSITION III.6 — *On suppose les opérateurs cohérents.*

(i) *Soit f une fonction de E et $\hat{f} := \overline{\text{TMR}}^l(f)$. Alors $\overline{\text{TMRi}}(\hat{f})$ est défini et*

$$\overline{\text{TMRi}}(\hat{f}) = f.$$

(ii) Soit $\hat{f}$ une fonction de ΠE^l telle que $\overline{\text{TMRi}}^l(\hat{f})$ soit défini. Alors

$$\overline{\text{TMR}}^l(\overline{\text{TMRi}}^l(\hat{f})) = \hat{f}.$$

Démonstration. — Notons $\hat{f}_k$ la fonction $\mathcal{P}^k(f)$, de sorte que

$$\overline{\text{TMR}}^l(f) = (\hat{f}_l, Q^l(\hat{f}_{l+1}), \dots) = \hat{f}.$$

D'après la proposition III.2, on sait que $\text{TMRi}^{l,k}(\hat{f}) = \hat{f}_k$. Alors

$$\overline{\text{TMRi}}^l(\hat{f}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{TMRi}^{l,k}(\hat{f}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{f}_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{P}^k(f) = f,$$

ce qui démontre (i).

Grâce à la continuité des opérateurs de liaison, on peut écrire, pour un entier $q \geq l$,

$$\mathcal{P}^q(\overline{\text{TMRi}}^l(\hat{f})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}^q(\text{TMRi}^{l,n}(\hat{f})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}^q\left(\hat{f}_{V^l}^{l,n} + \sum_{k=l}^n \hat{f}_{W^k}^{k+1,n}\right).$$

On peut supposer que $q < n$, et en utilisant la propriété (C2), on a (dans le cas où $q = l$ ou $q = l + 1$, certains termes dans les égalités ci-dessous disparaissent) :

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}^q\left(\hat{f}_{V^l}^{l,n} + \sum_{k=l}^n \hat{f}_{W^k}^{k+1,n}\right) \\ &= \mathcal{P}^q(\hat{f}_{V^l}^{l,n}) + \sum_{k=l}^n \mathcal{P}^q(\hat{f}_{W^k}^{k+1,n}) \\ &= \mathcal{P}^q(S^{l,n}(\hat{f}_{V^l})) + \sum_{k=l}^{q-2} \mathcal{P}^q(S^{k+1,n}(\hat{f}_{W^k})) + \mathcal{P}^q(S^{q,n}(\hat{f}_{W^{q-1}})) + \sum_{k=q}^n \mathcal{P}^q(S^{k+1,n}(\hat{f}_{W^k})) \\ &= P^{n,q}(S^{l,n}(\hat{f}_{V^l})) + \sum_{k=l}^{q-2} P^{n,q}(S^{k+1,n}(\hat{f}_{W^k})) + P^{n,q}(S^{q,n}(\hat{f}_{W^{q-1}})) + \\ &= S^{l,q}(\hat{f}_{V^l}) + \sum_{k=l}^{q-2} S^{k+1,q}(\hat{f}_{W^k}) + \hat{f}_{W^{q-1}} + 0. \quad + \sum_{k=q}^n P^{n,q}(S^{k+1,n}(\hat{f}_{W^k})) \end{aligned}$$

Puisque les opérateurs $S^{k,q}$ sont à image dans $\tilde{V}^q$, on voit immédiatement que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^l(\hat{f}) &= \hat{f}_{V^l} \\ Q^q \mathcal{P}^{q+1}(\hat{f}) &= \hat{f}_{W^q}, \quad \text{pour tout } q \geq l, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du point (ii). $\square$

La propriété (C2) pour $n = k + 1$ signifie que dans un cadre cohérent, *un choix possible pour un opérateur de synthèse S^k est l'opérateur $\mathcal{P}_{|V^k}^{k+1}$* , d'où la définition suivante :

DÉFINITION III.7 C-cohérence — *Un cadre cohérent est dit complètement cohérent (en abrégé : C-cohérent) si l'on a*

$$S^k = \mathcal{P}_{|V^k}^{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a alors

$$Q^k \circ \mathcal{P}^{k+1} = \mathcal{P}^{k+1} - \mathcal{P}^{k+1} \circ \mathcal{P}^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{III.1})$$

Dans un tel cadre, l'ensemble des opérateurs d'analyse et de synthèse multirésolution est donc déterminé par les opérateurs de liaison. Il faut signaler que les hypothèses de (C-)cohérence sont très fortes dans le sens où elles réduisent significativement l'éventail de choix possibles pour les opérateurs d'approximation ou de synthèse. C'est notamment pour cette raison que nous n'avons pu les utiliser pour traiter les exemples très généraux que présente la partie appliquée de cette thèse.

PROPOSITION III.7 — *Dans un cadre C-cohérent, le processus d'analyse est uniformément stable et de plus*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Q^k \mathcal{P}^{k+1}(f)\| = 0, \quad \forall f \in E,$$

donc l'opérateur $\overline{\text{TMR}}^l$ est à valeurs dans ΠE_0 .

Démonstration. — En utilisant (III.1) on a, pour $f \in V^{k+1}$,

$$\|Q^k(f)\| = \|Q^k \circ \mathcal{P}^{k+1}(f)\| = \|(\mathcal{P}^{k+1} - \mathcal{P}^{k+1} \circ \mathcal{P}^k)(f)\| \leq M(1 + M)\|f\|.$$

La famille des opérateurs Q^k est donc équicontinue, et par conséquent l'analyse est uniformément stable. Pour la limite, on écrit

$$\|Q^k(\mathcal{P}^{k+1}(f))\| \leq M\|f - \mathcal{P}^k(f)\|,$$

qui tend vers 0 puisque $\mathcal{P}^k(f)$ tend vers f . $\square$

Remarque. — Dans la dernière démonstration, on voit apparaître le rôle que joue la vitesse de convergence de la suite $(\mathcal{P}^k(f))_k$ vers f dans la question de savoir si l'opérateur de décomposition prend ses valeurs dans un espace $\Pi E_{(d.)}^l$.

III.1.2. Stabilité du processus de synthèse

On prendra garde qu'à ce stade, on ne suppose *a priori* plus aucune hypothèse sur les opérateurs d'approximation ou de synthèse, et notamment pas la cohérence. La définition de la stabilité dans le cas de la synthèse est l'analogue de l'analyse.

DÉFINITION III.8 Synthèse stable — *Le processus de reconstruction est dit stable s'il existe des constantes D_k , $k \in \mathbb{N}$, telles que*

$$\|S^{k,n}(f)\| \leq D_k \|f\|, \quad \forall f \in V^k, \quad 0 \leq k \leq n.$$

La synthèse est dite uniformément stable si de plus il existe une constante $\bar{D}$ telle que

$$D_k \leq \bar{D}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Remarque. — On a défini au paragraphe précédent la notion de cohérence puis de cohérence complète. Dans un tel cadre, les opérateurs de synthèse sont les restrictions aux espaces de synthèse des opérateurs de liaison. Ceci implique en particulier que

$$S^{k,n} \circ \mathcal{P}^k = \mathcal{P}^n \circ \dots \circ \mathcal{P}^k.$$

Mais la propriété (C2) montre également que des opérateurs tels que $\mathcal{P}^n$, $\mathcal{P}^n \circ \mathcal{P}^m$ ou encore $\mathcal{P}^n \circ \mathcal{P}^m \circ \mathcal{P}^i$, avec $k < i < m < n$ sont d'autres candidats potentiels pour $S^{k,n}$, dans la mesure où ils sont également des inverses à droite de $P^{k,n} = \mathcal{P}_{|V^n}^k$.

On peut alors penser à rendre les choses « encore plus cohérentes » en considérant l'hypothèse

$$\mathcal{P}^n \circ \dots \circ \mathcal{P}^k = \mathcal{P}^n \circ \mathcal{P}^k, \quad 0 \leq k < n, \quad (\text{III.2})$$

qui rend tous les opérateurs de reconstruction potentiels *égaux* et de plus amène l'uniforme stabilité du processus de synthèse. Néanmoins cette condition est très forte : elle équivaut à l'emboîtement des espaces d'approximation. En effet, de (III.2) on tire immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}^n \circ \dots \circ \mathcal{P}^k(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}^n(\mathcal{P}^k(f)) = \mathcal{P}^k(f),$$

d'où on voit que

$$\mathcal{P}^{k+1} \circ \mathcal{P}^k(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{P}^n \circ \dots \circ \mathcal{P}^{k+1}) \circ \mathcal{P}^k(f) = \mathcal{P}^k(f),$$

ce qui signifie bien que $V^k \subset V^{k+1}$. Pour les raisons qui ont été évoquées dans l'introduction de ce chapitre, nous ne considérerons donc pas plus avant l'hypothèse (III.2) et ses conséquences.

Si on utilise le point de vue subdivision, le but est de synthétiser des fonctions en subdivisant *ad infinitum* les fonctions des espaces de subdivision, d'où la définition naturelle suivante :

PROPOSITION III.8 et définition de la constructivité — La synthèse est dite constructive si la suite de fonctions $(S^{k,n}(f))_n$ converge lorsque n tend vers l'infini, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in V^k$. On note alors

$$\begin{aligned} \bar{S}^k : V^k &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto \bar{f} := \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{k,n} \end{aligned}$$

Les opérateurs ainsi définis sont linéaires et continus, et en particulier le processus de synthèse est stable.

Démonstration. — Supposons la synthèse constructive. Les opérateurs $S^{k,n}$ étant continus et la suite $(S^{k,n}(f))_n$ convergente, on voit en particulier que $(\|S^{k,n}(f)\|)_n$ est une suite bornée, et d'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe alors une constante D_k telle que

$$\|S^{k,n}\| \leq D_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

À la limite, on obtient $\|\bar{S}^k\| \leq D_k$. $\square$

Voici une autre conséquence intéressante de l'hypothèse de constructivité, non triviale dans le sens où l'égalité (III.3) n'est pas vérifiée en général, même pour une fonction $\hat{f}$ pour laquelle $\overline{\text{TMRI}}^l(\hat{f})$ est défini.

PROPOSITION III.9 Forme développée de $\overline{\text{TMRI}}^l$ — On suppose la synthèse constructive : elle est alors stable avec des coefficients $(D_i)_{i \geq 0}$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$ et pour toute fonction $\hat{f} \in \Pi E_{(D_{+1})}^l$, $\overline{\text{TMRI}}^l(\hat{f})$ est défini et de plus

$$\overline{\text{TMRI}}^l(\hat{f}) = \bar{f}_{V^l} + \sum_{k=l}^{\infty} \bar{f}_{W^k}. \quad (\text{III.3})$$

Démonstration. — Par définition, on a

$$\begin{aligned} \overline{\text{TMRI}}^l(\hat{f}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{TMRI}^{l,n}(\hat{f}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\hat{f}_{V^l}^{l,n} + \sum_{k=l}^{n-1} \hat{f}_{W^k}^{k+1,n} \right) \\ &= \bar{f}_{V^l} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=l}^{n-1} \hat{f}_{W^k}^{k+1,n} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, tout revient à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=l}^{n-1} \hat{f}_{W^k}^{k+1,n} \right) = \sum_{k=l}^{\infty} \bar{f}_{W^k},$$

et que l'un des membres existe. En posant par convention $h^{k,n} = 0$ dès que $k > n$, pour toute fonction h , l'égalité précédente peut-être réécrite sous la forme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=l}^N \hat{f}_{W^k}^{k+1,n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=l}^N \hat{f}_{W^k}^{k+1,n}. \quad (\text{III.4})$$

Posons $F_N(n) := \sum_{k=l}^N \hat{f}_{W^k}^{k+1,n}$, de sorte que F_N soit une fonction de $\llbracket l, +\infty \rrbracket$ dans E complet. D'après le théorème de la double limite, les deux doubles limites (III.4) existent et sont égales si

$$\begin{cases} \text{(i)} & F_N \text{ converge uniformément sur } \llbracket l, +\infty \rrbracket ; \\ \text{(ii)} & \lim_{n \rightarrow +\infty} F_N(n) \text{ existe pour tout } N \geq l. \end{cases}$$

On voit immédiatement que la condition (ii) est remplie grâce à l'hypothèse de constructivité. Comme E est complet, remplir la condition i) revient pour F_N à vérifier un critère de Cauchy uniforme :

$$\forall \varepsilon, \exists \bar{N}(\varepsilon) \text{ tel que } \forall N > M \geq \bar{N}(\varepsilon), \forall n \geq l, \|F_N(n) - F_M(n)\| \leq \varepsilon.$$

En utilisant la stabilité de la synthèse (conséquence de la constructivité), et en supposant $n \geq N$ (du fait de la convention ci-dessus sur $f^{k,n}$), on écrit

$$\begin{aligned} \|F_N(n) - F_M(n)\| &= \left\| \sum_{k=l}^N \hat{f}_{W^k}^{k+1,n} - \sum_{k=l}^M \hat{f}_{W^k}^{k+1,n} \right\| = \left\| \sum_{k=M+1}^N \hat{f}_{W^k}^{k+1,n} \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=M+1}^N S^{k+1,n}(f_{W^k}) \right\| \leq \sum_{k=M+1}^N D_{k+1} \|f_{W^k}\|, \end{aligned}$$

Si $\hat{f} \in \Pi E_{(D,+1)}$ alors le dernier terme est effectivement $\leq \varepsilon$ dès que $N > M \geq \bar{N}(\varepsilon)$ pour $\bar{N}(\varepsilon)$ assez grand. Les conditions du théorème de la double limite sont vérifiées, et cela prouve (III.4) et donc (III.3) lorsque $\hat{f} \in \Pi E_{(D,+1)}$. $\square$

III.2. Mesure d'erreur

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la mesure de l'erreur entre la fonction originale et son approximation. Comme il a déjà été signalé à la section II.3, on va introduire deux notions distinctes de mesure d'erreur, qui en un certain sens correspondent au cadre non emboîté ou au cadre de subdivision. La première mesure l'erreur entre la fonction reconstruite et une approximation dans un espace d'approximation donné, tandis que la deuxième le fait par rapport à une approximation dans un espace d'échelle, c'est-à-dire après subdivision « à l'infini ».

III.2.1. Cadre général

Notation. — Si $\hat{f}$ est un élément de ΠE^l et $(d.)$ une suite de réels alors on notera $\hat{f}_{(d.)}$ l'élément $(\hat{f}_{V^l}, d_l \hat{f}_{W^l}, d_{l+1} \hat{f}_{W^{l+1}}, \dots)$ de ΠE^l .

DÉFINITIONS III.9 — *Étant donné un entier $l \in \mathbb{N}$ on définit, pour tout $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \geq l$, tout entier $k \in \llbracket l, N \rrbracket$, toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=l, \dots, N-1}$ de $\{0, 1\}$, et tout élément $\hat{f} \in \Pi E^l$,*

$$\delta_{k,\varepsilon}^N(\hat{f}) := \|f_{N,1} - f_{k,\varepsilon}\|, \quad \bar{\delta}_\varepsilon^N(\hat{f}) := \|f_{N,1} - f_{N,\varepsilon}\|,$$

où $f_{k,\varepsilon} := \text{TMRi}^{l,k}(\hat{f}_{(\varepsilon)})$. Dans le cas particulier où $\varepsilon = \overbrace{(1, \dots, 1)}^{k \text{ fois}}, 0, \dots$, on omettra ε dans les notations ci-dessus.

Remarques. — • Bien entendu, lorsque $N = +\infty$, on suppose que la synthèse est constructive, et on pose $\text{TMRi}^{l,\infty} = \overline{\text{TMRi}}^l$, etc.

• On notera que $\delta_\varepsilon^N(\hat{f})$ compare deux fonctions de deux espaces différents, tandis que $\bar{\delta}_\varepsilon^N(\hat{f})$ compare deux fonctions du même espace V^N .

Le problème de la mesure d'erreur consiste à déterminer la valeur des δ_ε^N et $\bar{\delta}_\varepsilon^N$ en fonction des coefficients d'ondelettes, c'est-à-dire grosso modo en fonction de la norme des composantes de détails $\|\hat{f}_{W^k}\|$. Dans le cas de $\bar{\delta}_\varepsilon^N$, on parlera de mesure d'erreur supérieure. Cette dernière correspond au point de vue subdivision et c'est celle qui

est le plus souvent mesurée dans les cadres multirésolutions basés sur les ondelettes (par exemple dans [Lou94]), c'est aussi la plus facile à obtenir (ou au moins à majorer convenablement), et d'ailleurs les résultats de ce paragraphe ne portent que sur elle. Malheureusement, pour les applications que nous avons en vue, c'est principalement la première qui est intéressante ; on aura des précisions à ce sujet dans les prochains chapitres.

Ces mesures d'erreur sont utiles à plus d'un titre dans les applications ; elles permettent en particulier :

- la compression de données avec perte contrôlée,
- l'affichage partiel de données avec erreur pré-définie,

simplement en se basant sur les fonctions de détails utilisées ou non dans la reconstruction.

Commençons par un premier résultat, conséquence directe de la proposition III.9.

COROLLAIRE III.2 — *Sous les hypothèses et les notations de la proposition III.9, on a :*

$$\bar{\delta}_\varepsilon^N(\hat{f}) \leq \sum_{k=l}^{N-1} \varepsilon_k^c D_k \|\hat{f}_{W^k}\|, \quad (\text{III.5})$$

avec $\varepsilon_k^c := 1 - \varepsilon_k$.

On peut critiquer cette majoration sur deux points au moins :

- elle est *grossière* en général, et même deux fois grossière : d'abord parce qu'elle utilise l'inégalité triangulaire, ensuite parce que l'on majore $\|\hat{f}_{W^k}\|$ par $D_k \|\hat{f}_{W^k}\|$, ce qui n'est pas très précis non plus ;
- les constantes de stabilité D_k sont inconnues en pratique.

Pour tenter d'améliorer cette majoration, on introduit la notion de cadre semi-orthogonal, qui comme on va le voir, procure de nombreux avantages.

DÉFINITION III.10 Semi-orthogonalité — *On dira qu'un cadre multirésolution est semi-orthogonal lorsque les espaces de détail sont orthogonaux à leur espace auxiliaire, c'est-à-dire*

$$W^k \perp \tilde{V}^k, \quad 0 \leq k \leq N.$$

PROPOSITION III.10 — *On suppose $N < +\infty$. Dans un cadre semi-orthogonal, on a*

$$(\bar{\delta}_\varepsilon^N(\hat{f}))^2 \leq \sum_{k=l}^{N-1} \varepsilon_k^c (\|S^{N-1}\| \times \cdots \times \|S^k\|)^2 \|\hat{f}_{W^k}\|^2. \quad (\text{III.6})$$

Démonstration. — On part de

$$f_{N,\varepsilon} = S^{l,N}(\hat{f}_{V^l}) + \varepsilon_l S^{l+1,N}(\hat{f}_{W^l}) + \cdots + \varepsilon_{N-2} S^{N-1,N}(\hat{f}_{W^{N-2}}) + \varepsilon_{N-1} \hat{f}_{W^{N-1}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|f_N - f_{N,\varepsilon}\|^2 &= \|\varepsilon_l^c S^{l+1,N}(\hat{f}_{W^l}) + \cdots + \varepsilon_{N-2}^c S^{N-1,N}(\hat{f}_{W^{N-2}}) + \varepsilon_{N-1}^c \hat{f}_{W^{N-1}}\|^2 \\ &= \|S^{N-1}(\varepsilon_l^c S^{l+1,N-1}(\hat{f}_{W^l}) + \cdots + \varepsilon_{N-2}^c \hat{f}_{W^{N-2}}) + \varepsilon_{N-1}^c \hat{f}_{W^{N-1}}\|^2. \end{aligned}$$

Comme $\text{Im}(S^{N-1}) = \tilde{V}^{N-1}$ et que $\hat{f}_{W^{N-1}} \in W^{N-1}$, on a d'après l'hypothèse de semi-orthogonalité

$$\|f_N - f_{N,\varepsilon}\|^2 = \|S^{N-1}(\varepsilon_l^c S^{l+1,N}(\hat{f}_{W^l}) + \dots + \varepsilon_{N-2}^c S^{N-1,N}(\hat{f}_{W^{N-2}}))\|^2 + \varepsilon_{N-1}^c \|\hat{f}_{W^{N-1}}\|^2,$$

puis

$$\|f_N - f_{N,\varepsilon}\|^2 \leq \|S^{N-1}\|^2 \|\varepsilon_l^c S^{l+1,N}(\hat{f}_{W^l}) + \dots + \varepsilon_{N-2}^c S^{N-1,N}(\hat{f}_{W^{N-2}})\|^2 + \|\varepsilon_{N-1}^c \hat{f}_{W^{N-1}}\|^2,$$

ce qui permet de recommencer le raisonnement pour aboutir à

$$\|f_N - f_{N,\varepsilon}\|^2 \leq \varepsilon_l^c \|S^{N-1}\|^2 \times \dots \times \|S^l\|^2 \|\hat{f}_{W^l}\|^2 + \dots + \varepsilon_{N-2}^c \|S^{N-1}\|^2 \|\hat{f}_{W^{N-2}}\|^2 + \varepsilon_{N-1}^c \|\hat{f}_{W^{N-1}}\|^2,$$

ce qui est le résultat annoncé. $\square$

Cette nouvelle majoration présente par rapport (III.5) un avantage et un inconvénient :

- L'avantage est que le cadre semi-orthogonal permet de remplacer une majoration par l'inégalité du triangle par une égalité de type « Pythagore ».
- L'inconvénient est que l'on a dû majorer

$$D_k \leq \|S^{N-1} \circ \dots \circ S^k\|$$

par

$$\|S^{N-1}\| \times \dots \times \|S^k\| \quad (\text{III.7})$$

ce qui est *très* grossier.

Remarque. — La majoration (III.7) est d'autant plus mauvaise que N est grand. Si on a supposé $N < +\infty$ c'est parce que en général le produit (III.7) tend vers l'infini quand N augmente.

Dans les applications pratiques auxquelles est destiné le cadre multirésolution non emboîté, cet inconvénient rend *inutilisable* la majoration (III.6), car on aura affaire à un N *très élevé*², contrairement à ce que l'on rencontre dans le cas « classique ». En effet, bien que théoriquement N tende vers l'infini, en pratique pour $N > 10$ la « résolution » atteinte par les espaces V^N est suffisante pour les applications visuelles, car celle-ci est typiquement augmentée d'un facteur 2 quand N augmente d'une unité.

Avant d'aller plus loin, montrons immédiatement une deuxième propriété du cadre semi-orthogonal, clairement avantageuse dans le cadre de la mesure d'erreur.

PROPOSITION III.11 — *Pour des opérateurs d'analyse fixés, un cadre semi-orthogonal minimise la norme des composantes de détail.*

Démonstration. — En effet, pour $f_k \in V^k$, minimiser $\|Q^{k-1}(f_k)\| = \|R^{k-1}(f_k) - f_k\|$ revient à ce que R^{k-1} soit le projecteur orthogonal sur $\tilde{V}^{k-1}$, c'est-à-dire que W^{k-1} soit orthogonal à $\tilde{V}^{k-1}$. $\square$

Jusqu'à la fin de cette section, nous allons considérer des hypothèses particulières sur les opérateurs de synthèse, peut-être contraignantes, mais qui ont l'avantage de régler complètement le problème de la mesure d'erreur supérieure.

2. Voir le chapitre V, notamment la stratégie de décimation adaptative.

III.2.2. Le cas des similitudes

On suppose à présent que les opérateurs de synthèse S^k sont des *similitudes*³ de rapport α_k . Notons que $\alpha_k > 0$ pour tout k puisque les opérateurs de synthèse sont injectifs, et pour simplifier les écritures introduisons la

Notation. — Pour tous les entiers $0 \leq k < n$, on définit

$$\alpha_k^n = \prod_{i=k}^{n-1} \alpha_i.$$

Les premières propriétés sont regroupées dans la proposition suivante :

PROPOSITION III.12 — *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

- (i) *Pour tout $0 \leq k < n$, $\|S^{k,n}\| = \alpha_k^n$.*
- (i') *La synthèse est stable (resp. uniformément stable) si et seulement si pour tout k , il existe B_k (resp. $B_k \leq \bar{B}$) tel que $\alpha_k^n \leq B_k$, pour tout $n > k$.*
- (ii) *Pour tout $0 \leq k < n$, $\|P^{n,k}\| \geq \frac{1}{\alpha_k^n}$, et il y a égalité dans le cas semi-orthogonal.*
- (iii) *Si l'analyse est stable (resp. uniformément stable) alors pour tout k , il existe ε_k (resp. $\varepsilon_k \leq \bar{\varepsilon}$) tel que $\alpha_k^n \geq \varepsilon_k$, pour tout $n > k$. Dans un cadre semi-orthogonal, la condition précédente est également suffisante.*
- (iv) *Si la synthèse est constructive, alors la suite $(\alpha_i^n)_n$ converge.*

Remarque. — Grosso modo, (iii) signifie pour avoir une analyse stable, il faut choisir des rapports suffisamment grands, tandis que (ii) indique qu'il ne faut pas les prendre trop grands sous peine de déstabiliser la synthèse. Ce comportement de compromis entre analyse et synthèse stable se comprend intuitivement également en dehors du cas des similitudes.

Démonstration. — (i) est clair puisque si S^k est une similitude de rapport α_k , alors $\|S^k(f)\| = \alpha_k \|f\|$. On en déduit immédiatement (i') via la définition de la stabilité (uniforme).

Pour prouver (ii), on écrit, pour une fonction $f \in V^k$,

$$\|P^{n,k}\| \geq \frac{\|P^{n,k}(S^{k,n}(f))\|}{\|(S^{k,n}(f))\|} = \frac{\|f\|}{\alpha_k^n \|f\|} = \frac{1}{\alpha_k^n}. \quad (\text{III.8})$$

De plus, si on a semi-orthogonalité, alors $\|P^{n,k}\| \leq \frac{1}{\alpha_k^n}$. En effet, si $f_n \in V^n$ alors

$$\|P^{n-1}(f_n)\| = \|P^{n-1}(R^{n-1}(f_n))\| = \frac{1}{\alpha_{n-1}} \|R^{n-1}(f_n)\| \leq \frac{1}{\alpha_{n-1}} \|f_n\|, \quad (\text{III.9})$$

puisque dans un cadre semi-orthogonal, R^{n-1} est une projection orthogonale, donc sa norme vaut 1. On termine en appliquant le même raisonnement à $f_{n-1} = P^{n-1}(f_n)$, puis f_{n-2} , etc.

3. Rappelons que par définition, une similitude est une application linéaire qui conserve l'orthogonalité. En fait ceci est équivalent à conserver le produit scalaire à un facteur α près, c'est-à-dire $\langle s(f), s(g) \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$, pour tout f et g .

Pour (iii) on part des conditions nécessaires données par le corollaire III.1, et on remarque que d'après (III.8), on a aussi $\|Q^k \circ P^{n,k+1}\| \geq \frac{1}{\alpha_{k+1}^n}$ (prendre $f = g^{k+1,n}$ avec $g \in W^k$); de plus dans le cas semi-orthogonal, il y a égalité car on peut appliquer le même raisonnement qu'en (III.9) et conclure car $\|Q^k\| = 1$. Enfin (iv) est évident puisque si $(S^{l,n}(f))_n$ converge pour une fonction $f \in V^n$, alors $\alpha_l^n \|f\| = \|S^{l,n}(f)\|$ converge aussi. $\square$

Indiquons également sans démonstration un lemme simple sur les produits infinis :

LEMME III.3 — Soit $l \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_k)_{k \geq l}$ une suite de réels non nuls. Alors

- (i) $0 < \varepsilon \leq \alpha_l^n \leq B$ pour tout $n > l$ si et seulement si $0 < \varepsilon' \leq \alpha_k^n \leq B'$ pour tout $l \leq k < n$.
- (ii) Si la suite $(\alpha_l^n)_n$ converge vers ℓ alors $(\alpha_k)_k$ tend vers 1 et toutes les suites $(\alpha_k^n)_n$ convergent également. Si de plus $\ell \neq 0$, alors les conditions équivalentes de (i) sont réalisées.

Les résultats de la proposition III.12 et de ce lemme suggèrent d'exiger les hypothèses suivantes sur les α_k :

$$\text{Il existe } b > 0 \text{ et } B \geq b \text{ tels que } b \leq \alpha_l^n \leq B, \text{ pour tout } n \geq l. \quad (\text{HS}).$$

COROLLAIRE III.3 — Dans un cadre semi-orthogonal où les hypothèses (HS) sont vérifiées, l'analyse est uniformément stable avec une borne $\bar{C} \leq \frac{1}{b}$, et la synthèse est également uniformément stable avec une borne $\bar{D} \leq B$.

Examinons à présent les conséquences sur la mesure d'erreur supérieure.

PROPOSITION III.13 — On reprend les notations de la définition III.9. On se place dans un cadre semi-orthogonal et si $N = +\infty$, on suppose la synthèse constructive et non dégénérée, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_l^n = \ell \neq 0$. Alors pour toute fonction $\hat{f} \in \Pi E_1^l$ et toute suite (ε_k) , la fonction $f_{N,\varepsilon}$ est définie, de plus

$$f_{N,\varepsilon} = \bar{\hat{f}}_{V^l} + \sum_{k=l}^{N-1} \varepsilon_k \bar{\hat{f}}_{W^k},$$

et la somme est orthogonale, c'est-à-dire

$$\langle \bar{\hat{f}}_{W^k}, \bar{\hat{f}}_{W^{k'}} \rangle = 0, \quad \text{si } k \neq k'.$$

En particulier, on a

$$(\bar{\delta}_\varepsilon^N(\hat{f}))^2 = \sum_{k=l}^{N-1} \varepsilon_k^c (\alpha_{k+1}^N)^2 \|\hat{f}_{W^k}\|^2.$$

Démonstration. — Traitons directement le cas $N = +\infty$. Si $\hat{f} \in \Pi E_1^l$, alors $\hat{f}_{(\varepsilon)} \in \Pi E_1^l$ quelle que soit (ε_k) . La synthèse est constructive et non dégénérée, donc d'après le lemme III.3, les hypothèses (HS) sont vérifiées et en particulier la synthèse est uniformément stable. En appliquant alors la proposition III.9 on voit que $f_{\infty, \varepsilon}$ est définie et qu'elle admet la forme développée indiquée.

Montrons que la somme est orthogonale : on peut supposer $k' > k$. Comme le cadre est semi-orthogonal, $S^{k+1, k'}(\hat{f}_{W^k}) \perp \hat{f}_{W^{k'}}$. Par suite, comme les similitudes conservent l'orthogonalité, on a

$$S^{k+1, n}(\hat{f}_{W^k}) \perp S^{k'+1, n}(\hat{f}_{W^{k'}}), \quad \forall n > k' > k.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \hat{f}_{W^k}^{k+1, n}, \bar{\hat{f}}_{W^{k'}} \right\rangle \right| &\leq \left| \left\langle \hat{f}_{W^k}^{k+1, n}, \bar{\hat{f}}_{W^{k'}} - \hat{f}_{W^{k'}}^{k'+1, n} \right\rangle \right| + \left| \left\langle \hat{f}_{W^k}^{k+1, n}, \hat{f}_{W^{k'}}^{k'+1, n} \right\rangle \right| \\ &\leq \|\hat{f}_{W^k}^{k+1, n}\| \|\bar{\hat{f}}_{W^{k'}} - \hat{f}_{W^{k'}}^{k'+1, n}\|, \end{aligned}$$

et puisque $\|\hat{f}_{W^k}^{k+1, n}\|$ converge et est donc bornée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left\langle \hat{f}_{W^k}^{k+1, n}, \bar{\hat{f}}_{W^{k'}} \right\rangle \right| = \left\langle \bar{\hat{f}}_{W^k}, \bar{\hat{f}}_{W^{k'}} \right\rangle = 0.$$

La mesure d'erreur est alors immédiate, avec

$$\|\bar{\hat{f}}_{W^k}\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{k+1}^n \|\hat{f}_{W^k}\|.$$

□

Remarque. — On peut regarder les choses un peu plus finement : si l'on choisit pour chaque espace $V^l, W^l, W^{l+1}, \dots$ une base orthogonale $(\phi^l), (\psi^l), (\psi^{l+1}), \dots$, avec des normes appropriées pour chacune de ces fonctions de base, on obtient d'après la proposition précédente une base orthonormée de E en la base $(\bar{\phi}^l, \bar{\psi}^l, \bar{\psi}^{l+1}, \dots)$.

On voit ainsi les avantages que représente le fait d'avoir un processus de subdivision basé sur des similitudes. En pratique, on peut se demander comment ces similitudes peuvent être obtenues. Une des stratégies possibles est *d'approcher par des similitudes des opérateurs de subdivision donnés*. On renvoie le lecteur à la fin de la section III.3.2 (p. 63), où l'on montre comment la décomposition en valeurs singulières peut être utilisée à cet effet.

III.3. Conditionnement

La stabilité étudiée à la section précédente s'intéressait essentiellement à l'*existence* de constantes assurant que les processus itératifs utilisés ne divergent pas. Nous cherchons à présent à *minimiser* ces constantes. En effet, *stable ne veut pas dire bien conditionné*, c'est-à-dire que les constantes entrant en jeu dans les diverses notions de stabilité peuvent être grandes, ce qui rend l'utilisation délicate. Un cas typique de mauvais conditionnement se produit souvent lorsqu'on utilise à échelle finie des techniques instables « à l'infini ». Même en restant dans le domaine de l'applicable sur ordinateur, donc du fini, il faut rester vigilant quant au conditionnement des processus mis en jeu.

Cette section expose quelques résultats généraux concernant le conditionnement, sans hypothèses particulières sur les opérateurs utilisés. A nouveau, le cadre semi-orthogonal va se révéler « suffisant ». La première question que nous allons considérer

est la suivante : en se plaçant dans un cadre de subdivision et étant donnés les opérateurs de subdivision, comment choisir les opérateurs de décimation leur correspondant et ayant une norme minimale (ce qui est clairement avantageux pour le conditionnement du processus d'analyse)? La deuxième question est la réciproque de la première : en se plaçant dans un cadre non emboîté et étant donnés les opérateurs d'approximation, comment choisir les opérateurs de synthèse leur correspondant et ayant une norme minimale (cf conditionnement de la synthèse)?

III.3.1. Conditionnement d'une étape d'analyse

Rappelons que pour un opérateur de subdivision fixé

$$S^k : V^k \longrightarrow V^{k+1},$$

c'est le choix d'un espace complémentaire $W^k \in V^{k+1}$ qui définit l'opérateur de décimation correspondant par

$$P^k := \text{Inv}(S) \circ R^k,$$

où R^k est le projecteur sur $\tilde{V}^k := \text{Im}(S^k)$, parallèlement à W^k .

LEMME III.4 — *On conserve les notations précédentes. Si W^k est orthogonal à $\tilde{V}^k$, alors $\|P^{k+1}\| = \|\tilde{P}^k\|$, avec $\tilde{P}^k := P^k|_{\tilde{V}^k}$.*

Démonstration. — Remarquons que puisque $W^k \perp \tilde{V}^k$, on a $\|R^k\| = 1$. Par conséquent

$$\|P^k\| = \|\tilde{P}^k \circ R^k\| \leq \|\tilde{P}^k\|.$$

D'autre part il est clair que $\|\tilde{P}^k\| \leq \|P^k\|$ (restriction). $\square$

PROPOSITION III.14 Conditionnement de l'analyse — *Soit $S^k : V^k \rightarrow V^{k+1}$ un opérateur de subdivision donné, et P^k un opérateur de décimation associé. Alors*

$$\|P\| \geq \frac{1}{\varrho_{\min}(S^k)},$$

où $\varrho_{\min}(S^k)$ désigne la plus petite valeur singulière de S^k . De plus, cette borne est atteinte dans le cas semi-orthogonal, c'est-à-dire lorsque

$$W \perp \text{Im}(S^k).$$

Démonstration. — Dans toute cette démonstration on omet l'indice supérieur k (fixé) dans la notation des opérateurs et de certains espaces.

Commençons par montrer que le minimum est atteint dans un cadre semi-orthogonal. On a

$$\begin{aligned} \|P\|^2 &= \sup_{f \in V^{k+1}} \frac{\|P(f)\|^2}{\|f\|^2} = \sup_{f \in V^{k+1}} \frac{\|S^{-1}(R(f))\|^2}{\|R(f) + Q(f)\|^2} \\ &= \sup_{\substack{\tilde{f} \in \tilde{V} \\ g \in W}} \frac{\|S^{-1}(\tilde{f})\|^2}{\|\tilde{f} + g\|^2}. \end{aligned}$$

Remarquons à présent que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$ fixé, il existe $g \in W$, avec $\|g\|^2 = \alpha$, et tel que $\|\tilde{f} + g\|^2 \leq \|\tilde{f}\|^2 + \|g\|^2$ (si un g avec $\|g\|^2 = \alpha$ ne convient pas, alors $-g$ convient). Par conséquent, on a

$$\|P\|^2 \geq \sup_{\substack{\tilde{f} \in \tilde{V} \\ g \in W}} \frac{\|S^{-1}(\tilde{f})\|^2}{\|\tilde{f}\|^2 + \|g\|^2}.$$

Or si W est orthogonal à $\tilde{V}$

$$\|P\|^2 = \sup_{\substack{\tilde{f} \in \tilde{V} \\ g \in W}} \frac{\|S^{-1}(\tilde{f})\|^2}{\|\tilde{f}\|^2 + \|g\|^2},$$

ce qui montre que le cadre semi-orthogonal minimise la norme de P .

Le lemme III.4 montre alors que $\|P\| = \|\tilde{P}\|$, et on a

$$\|\tilde{P}\| \stackrel{\text{déf}}{=} \varrho_{\max}(\tilde{P}) = \frac{1}{\varrho_{\min}(S)},$$

où $\varrho_{\max}$ désigne la plus grande valeur singulière. $\square$

Remarque. — Les hypothèses du lemme III.4 et de la proposition précédente ne sont pas nécessaires : en particulier $\|P\|$ peut être minimale même si le cadre n'est pas semi-orthogonal. Une étude plus fine montre qu'il suffit que W soit orthogonal à certains vecteurs image correspondant aux plus petites valeurs singulières dans la DVS de S .

III.3.2. Conditionnement d'une étape de synthèse

On s'intéresse à présent à la deuxième question, qui est le problème inverse : comment minimiser $\|S^k\|$ pour un opérateur P^k donné ? Nous aurons besoin du théorème classique suivant ; pour la démonstration voir par exemple [Cia90, page 12].

THÉORÈME III.1 (Courant–Fisher) — Soit A une matrice hermitienne d'ordre n , de valeurs propres

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n,$$

les vecteurs propres associés $p_1, p_2, \dots, p_n$ vérifiant

$$p_i^* p_j = \delta_{ij}.$$

Pour $k = 1, \dots, n$, on note U_k le sous-espace engendré par les vecteurs p_i , $1 \leq i \leq k$, et on note $\mathcal{U}_k$ l'ensemble des sous-espaces de dimension k de $\mathbb{C}^n$. On pose par ailleurs

$$U_0 = \{0\}, \quad \mathcal{U}_0 = U_0.$$

Enfin, on rappelle que le quotient de Rayleigh de la matrice A est l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_A : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \frac{u^* A u}{u^* u}.\end{aligned}$$

Les valeurs propres admettent alors les caractérisations suivantes, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\lambda_k = \mathcal{R}_A(p_k), \quad (\text{CF1})$$

$$\lambda_k = \max_{u \in U_k} \mathcal{R}_A(u), \quad (\text{CF2})$$

$$\lambda_k = \min_{u \perp U_{k-1}} \mathcal{R}_A(u), \quad (\text{CF3})$$

$$\lambda_k = \min_{U \in \mathcal{U}_k} \max_{u \in U} \mathcal{R}_A(u), \quad (\text{CF4})$$

$$\lambda_k = \max_{U \in \mathcal{U}_{k-1}} \min_{u \perp U} \mathcal{R}_A(u). \quad (\text{CF5})$$

PROPOSITION III.15 Conditionnement de la reconstruction — Soit

$$P^k : V^{k+1} \longrightarrow V^k$$

un opérateur d'approximation, S^k un opérateur de synthèse associé. On a

$$\min_{S^k \text{ associé à } P^k} \|S^k\| = \frac{1}{\varrho_{\min}(P^k)},$$

où $\varrho_{\min}$ désigne la plus petite valeur singulière non nulle. Cette borne inférieure est atteinte dans un cadre semi-orthogonal.

Démonstration. — On introduit une base orthonormée $(v_j^k)_{1 \leq j \leq m_k}$ de $\mathcal{D}(S^k)$, et une base orthonormée $(v_i^{k+1})_{1 \leq i \leq n_{k+1}}$ de V^{k+1} . Dans la suite de la démonstration et pour alléger les notations, on confond les applications avec leur écriture matricielle par rapport à ces bases, en remarquant bien que

$$\|S^k\| = \|S_{v^k; v^{k+1}}^k\|,$$

puisque les bases sont orthonormées.

Pour un espace $\tilde{V}^k$ tel que $\tilde{V}^k \oplus W^k = V^{k+1}$, on a

$$\|S^k\| = \varrho_{\max}(S^k) = \frac{1}{\varrho_{\min}(\tilde{P}^k)}.$$

On cherche par conséquent à établir que

$$\min_{\{\tilde{V}^k \mid \tilde{V}^k \oplus W^k = V^{k+1}\}} \frac{1}{\varrho_{\min}(\tilde{P}^k)} = \frac{1}{\varrho_{\min}(P^k)}.$$

Il est équivalent de montrer que

$$\max_{\{\tilde{V}^k \mid \tilde{V}^k \oplus W^k = V^{k+1}\}} \varrho_{\min}(\tilde{P}^k) = \varrho_{\min}(P^k).$$

Le noyau de P^k est de dimension r_k , donc P^k possède r_k valeurs singulières nulles. D'après l'égalité (CF5) du théorème de Courant–Fisher, on a donc

$$\varrho_{\min}(P^k) = \max_{\substack{U \subset V^{k+1} \\ \dim(U)=r_k}} \min_{u \in U^\perp} \mathcal{R}_{P^k * P^k}(u).$$

Mais comme $\dim(U^\perp) = m_k$, et que $(U^\perp)^\perp = U$ (la dualité étant prise dans V^{k+1}), on a aussi

$$\varrho_{\min}(P^k) = \max_{\substack{U \subset V^{k+1} \\ \dim(U)=m_k}} \min_{u \in U} \mathcal{R}_{P^k * P^k}(u) \geq \max_{\{\tilde{V}^k | \tilde{V}^k \oplus W^k = V^{k+1}\}} \min_{u \in \tilde{V}^k} \mathcal{R}_{P^k * P^k}(u).$$

Or d'après l'égalité (CF3), on voit que si l'on note $\tilde{U}_l$ le sous-espace de $\tilde{V}^k$ engendré par les l premiers vecteurs propres de $P^{k*}P^k$ (considéré comme application de $\tilde{V}^k$ dans V^k), on peut écrire

$$\varrho_{\min}(\tilde{P}^k) = \min_{u \in \tilde{U}_0} \mathcal{R}_{P^k * P^k}(u) = \min_{u \in \tilde{V}^k} \mathcal{R}_{P^k * P^k}(u),$$

d'où la majoration

$$\min_{\{\tilde{V}^k | \tilde{V}^k \oplus W^k = V^{k+1}\}} \frac{1}{\varrho_{\min}(\tilde{P}^k)} \geq \frac{1}{\varrho_{\min}(P^k)}.$$

Il reste à vérifier que cette borne inférieure est atteinte pour le cas semi-orthogonal. Cela peut être montré aisément en interprétant la décomposition en valeur singulières de la matrice P^{k+1} . Cette interprétation étant précisée ci-après, les détails sont laissés de coté ici. $\square$

La proposition précédente fournit non seulement la borne inférieure de la norme d'un opérateur de synthèse, mais aussi un moyen constructif pour l'obtenir : la décomposition en valeur singulières. Cette dernière admet une interprétation remarquable en rapport direct avec la construction algébrique du cadre multirésolution. Cette interprétation va être détaillée maintenant.

III.4. DVS et décomposition multirésolution

On rappelle le résultat suivant :

THÉORÈME III.2 DVS — Si A est une matrice réelle de taille $l \times c$, il existe une matrice orthogonale U de taille $c \times c$, une matrice orthogonale V de taille $l \times l$ et une matrice « diagonale » D de taille $l \times c$, telles que

$$A = U D V^*,$$

et la diagonale de D est formée des valeurs singulières de la matrice A . Cette décomposition est unique dans le sens où les espaces singuliers à gauche et à droite sont uniques.

Démonstration. — L'existence de la DVS est un résultat classique, voir par exemple [Cia90, page 10]. Nous détaillons simplement l'unicité. On écrit

$$\mathbb{R}^c = E_0 \overset{\perp}{\oplus} E_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_p,$$

où E_i désignent les *espaces singuliers à droite*, engendrés par les colonnes de V correspondant aux mêmes valeurs sur la diagonale de D (E_0 désigne le noyau de A). De l'égalité $A = UDV^*$, on obtient immédiatement $A^*AV = VD^*D$, d'où on conclut que les espaces singuliers à droite sont les espaces propres de la matrice A^*A , d'où leur unicité et celle de D . On a de même

$$\mathbb{R}^l = F_0 \overset{\perp}{\oplus} F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_p,$$

où les F_i désignent les *espaces singuliers à gauche*, et leur unicité provient du fait que

$$\begin{aligned} F_0 &= (F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p)^\perp \\ F_i &= A(E_i) \quad \text{pour } i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

□

Remarque. — En pratique, si $A = UDV^* = U'D'V'^*$ sont deux DVS de A , alors $V' = VM$, $D = D'$ et $U' = U\overline{M}$, avec

$$M = \text{Diag}(M_p, \dots, M_1, M_0), \quad \text{et} \quad \overline{M} = \text{Diag}(\overline{M}_p, \dots, \overline{M}_1, \overline{M}_0),$$

(aux permutations près : on supposera que les valeurs sur la diagonale de D sont classées par ordre décroissant), où les matrices M_i et $\overline{M}_0$ sont unitaires de taille $\dim(E_i)$ et $\dim(F_0)$, respectivement.

Fixons à présent l'indice k et considérons un opérateur d'approximation

$$P^k : V^{k+1} \longrightarrow V^k.$$

Choisissons une base orthonormée $(e_i^{k+1})_{1 \leq i \leq n_k}$ de V^{k+1} et une autre $(e_j^k)_{1 \leq j \leq n_k}$ de V^k . Dans la suite de ce paragraphe on confond les opérateurs et les fonctions avec leurs matrices et vecteurs relativement à ces bases. Soit UDV^* la DVS de la matrice P^k . La figure III.1 schématise cette décomposition.

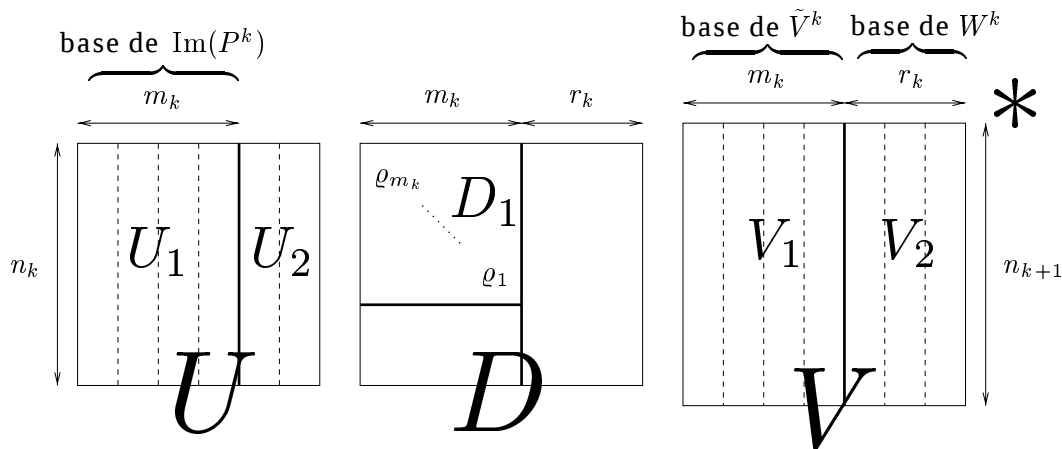


Figure III.1 — Schéma de la DVS d'un opérateur d'approximation.

Interprétons-la relativement au schéma multirésolution :

- La matrice V est celle d'un opérateur isométrique (puisque les bases sont ortho-normales) de V^{k+1} dans lui-même. Il est composé d'un opérateur de projection sur l'espace auxiliaire $\tilde{V}^k$, de matrice V_1^* , et d'une autre projection sur le noyau W^k , de matrice V_2^* . Comme la matrice V est unitaire, les vecteurs lignes sont duaux des vecteurs colonnes, ce qui permet d'interpréter les colonnes de V_1 (resp. V_2) comme une base de l'espace $\tilde{V}^k$ (resp. W^k). On notera que cette décomposition correspond à un cadre semi-orthogonal.
- La matrice D_1 , matrice diagonale et inversible est celle de $P^k|_{\tilde{V}^k}$, relativement aux bases données par les vecteurs colonnes de V_1 et U_1 . Son inverse est la matrice de l'opérateur de synthèse S^k , relativement aux mêmes bases. À cause de l'orthonormalité des bases (e_i^{k+1}) et (e_i^k) , on voit donc que

$$\|S^k\| = \frac{1}{\varrho_1},$$

ce qui montre que la borne inférieure pour $\|S^k\|$ est atteinte pour le choix de $\tilde{V}^k$ donné par la DVS (cf aussi la démonstration de la proposition III.15), qui définit en particulier le cadre semi-orthogonal.

- La matrice U est celle d'un opérateur isométrique de V^k dans lui-même. Les colonnes de la matrice U_1 forment une base orthonormale de l'image de P^k ($=\mathcal{D}(S^k)$). Celles de la matrice U_2 forment une base orthonormale de $(\text{Im}(P^k))^\perp$ (pris dans V^k). Toujours à cause de l'orthonormalité, la matrice U_1^* est celle du projecteur orthogonal sur $\text{Im}(P^k)$.

Par conséquent, on voit que le mécanisme de décomposition multirésolution peut aisément se « lire » à partir de la DVS.

Symétriquement, la DVS de la matrice d'un opérateur de synthèse S^k (voir figure III.2) admet le même type d'interprétation, que nous détaillons immédiatement :

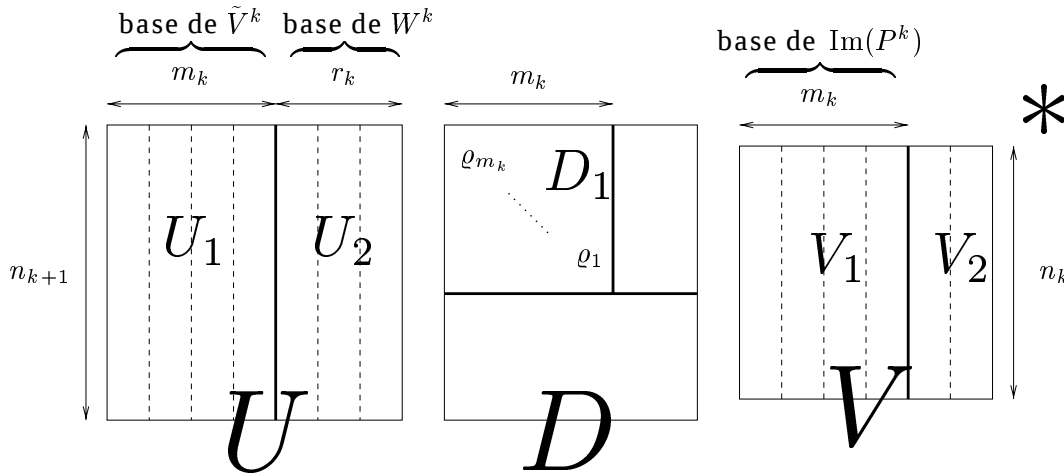


Figure III.2 — Schéma de la DVS d'un opérateur de synthèse.

- La matrice V est la matrice d'un opérateur isométrique de V^k dans lui-même. Les vecteurs colonnes des matrices V_1 et V_2 forment à la fois (puisque la matrice V est unitaire) les vecteurs de base et les vecteurs duaux de l'image de n'importe quel opérateur d'approximation associé à S^k , et d'un espace supplémentaire qui se réduit à $\{0\}$ dans le cas « surjectif ».

- La matrice D_1 , diagonale et inversible est celle de l'opérateur de synthèse S^k relativement aux bases données par les vecteurs colonnes de V_1 et U_1 . À cause de l'orthonormalité des bases (e_i^{k+1}) et (e_i^k) , on a donc :

$$\|S^k\| = \varrho_{m_k}, \quad \|P^k\| = \frac{1}{\varrho_1},$$

si toutefois on conserve le cadre orthogonal. Dans le cas contraire on peut avoir $\|P^k\| > \frac{1}{\varrho_1}$ (cf proposition III.14).

- La matrice U est celle d'un opérateur isométrique de V^{k+1} dans lui-même. Les vecteurs colonnes de U_1 et U_2 forment respectivement une base orthonormée de l'espace auxiliaire correspondant à S^k et une base orthonormée d'un espace complémentaire, candidat possible pour un espace de détail.

On voit le rôle central que peut jouer la DVS dans la *construction* et la manipulation des différents opérateurs.

Comme il a été signalé à la fin de la section III.2, nous allons terminer cette étude de la DVS en montrant comment s'en servir pour résoudre le problème suivant :

Problème — Étant donnée une application linéaire quelconque entre deux espaces de dimension finie, comment l'approcher au mieux par une similitude ? Dans notre cas, "au mieux" signifie que l'on cherche à minimiser la norme L_2 de la différence entre les deux applications.

La DVS permet « presque » de répondre à la question. Pour simplifier et parce que c'est le seul cas qui nous intéresse, on suppose que les deux espaces ont même dimension. L'« algorithme » qui suit permet alors de déterminer une similitude de rapport $\alpha \geq 0$ approchant l'application initiale.

Algorithme

Notons F et G deux sous-espaces vectoriels de même dimension n finie d'un espace euclidien, et

$$A : F \longrightarrow G$$

une application linéaire. On suppose A connue par l'intermédiaire de sa matrice $A_{f;g}$ par rapport à une base $(f_1, \dots, f_n)$ de F et $(g_1, \dots, g_n)$ de G .

Étape 1) Choisir une base orthonormée $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$ de F et $(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n)$ de G , et calculer la matrice de A relativement à ces nouvelles bases :

$$A_{\tilde{f};\tilde{g}} = \mathcal{M}_{[g;\tilde{g}]} A_{f;g} \mathcal{M}_{[\tilde{f};f]}.$$

Étape 2) Calculer la DVS de $A_{\tilde{f};\tilde{g}}$:

$$A_{\tilde{f};\tilde{g}} = \tilde{U} \tilde{D} \tilde{V}^*.$$

Étape 3) Poser $A'_{\tilde{f};\tilde{g}} := \sqrt{\alpha} \tilde{U} \tilde{V}^*$.

Étape 4) Retour à la base initiale :

$$A'_{f,g} = \mathcal{M}_{[\tilde{g};g]} A'_{\tilde{f};\tilde{g}} \mathcal{M}_{[f;\tilde{f}]}$$

est, dans la base $(f.)$ et $(g.)$, une similitude de rapport α approchant l'application A .

L'approximation ainsi calculée n'est malheureusement pas la meilleure possible au sens de la norme L_2 des applications linéaires, et déterminer cette approximation semble être un problème difficile ; cependant on a le résultat suivant :

PROPOSITION III.16 Approximation par une similitude — *L'application A' déterminée par l'algorithme précédent possède les propriétés suivantes :*

- (i) A' ne dépend pas du choix particulier de bases orthonormales utilisées à l'étape 1.
- (ii) $\|A - A'\|_{L_2}^2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\sqrt{\alpha} - \varrho_i|^2$, où ϱ_i désignent les valeurs singulières de A .
- (iii) A' est la meilleure approximation de A par une similitude de rapport α au sens de la norme de Frobenius.

Démonstration. — Pour montrer (i), désignons momentanément par $\tilde{A}'$ l'approximation obtenue et choisissons deux autres bases orthonormées $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$ de F et $(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n)$ de G , et soit $A_{\tilde{f};\tilde{g}} = \tilde{U} \tilde{D} \tilde{V}^*$ la DVS de $A_{\tilde{f};\tilde{g}}$.

$$A_{\tilde{f};\tilde{g}} = \mathcal{M}_{[\tilde{g};\tilde{g}]} A_{\tilde{f};\tilde{g}} \mathcal{M}_{[\tilde{f};\tilde{f}]} = (\mathcal{M}_{[\tilde{g};\tilde{g}]} \tilde{U}) \tilde{D} (\mathcal{M}_{[\tilde{f};\tilde{f}]}^* \tilde{V})^*$$

donne une deuxième DVS de la même matrice $A_{\tilde{f};\tilde{g}}$, car les matrices de changement de base $\mathcal{M}_{[\tilde{f};\tilde{f}]}$ et $\mathcal{M}_{[\tilde{g};\tilde{g}]}$ sont orthogonales. D'après la remarque p. 61, il existe donc une matrice $\tilde{M}$ orthogonale telle que

$$\begin{cases} \tilde{U} = \mathcal{M}_{[\tilde{g};\tilde{g}]} \tilde{U} \tilde{M} \\ \tilde{V} = \mathcal{M}_{[\tilde{f};\tilde{f}]}^* \tilde{V} \tilde{M}, \end{cases}$$

donc on a

$$\begin{aligned} \tilde{A}'_{f,g} &:= \mathcal{M}_{[\tilde{g};g]} \sqrt{\alpha} \tilde{U} \tilde{V}^* \mathcal{M}_{[f;\tilde{f}]} = \mathcal{M}_{[\tilde{g};g]} \mathcal{M}_{[\tilde{g};\tilde{g}]} \sqrt{\alpha} \tilde{U} \tilde{M} \tilde{M}^* \tilde{V}^* \mathcal{M}_{[\tilde{f};\tilde{f}]} \mathcal{M}_{[f;\tilde{f}]} \\ &= \mathcal{M}_{[\tilde{g};g]} \sqrt{\alpha} \tilde{U} \tilde{V}^* \mathcal{M}_{[f;\tilde{f}]} = \tilde{A}'_{f,g}, \end{aligned}$$

ce qui montre que les applications $\tilde{A}'$ et $\tilde{A}'$ sont égales.

L'égalité (ii) est triviale puisque, les bases $(\tilde{f})$ et $(\tilde{g})$ étant orthonormées, on a

$$\|A - A'\|_{L_2}^2 = \|A_{\tilde{f};\tilde{g}} - A'_{\tilde{f};\tilde{g}}\|_2^2 = \|\sqrt{\alpha} I_n - \tilde{D}\|_2^2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\sqrt{\alpha} - \tilde{D}_{ii}|,$$

et les $\tilde{D}_{ii}$ sont les carrés des valeurs singulières de A .

Montrons à présent (iii). Il est clair que A' est une similitude de rapport α , et que d'autre part toutes les similitudes de rapport α admettent dans une base orthonormée une DVS de la forme $\sqrt{\alpha} UV^*$. Pour simplifier les notations on fixe une base orthonormée pour F et G et on confond les applications avec leur matrice dans ces bases. Si A est une application donnée et B une similitude de rapport α , l'égalité

$$\|A - B\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 - 2 \operatorname{Trace}(A^* B) = \|A\|_F^2 + n\sqrt{\alpha} - 2 \operatorname{Trace}(A^* B)$$

montre que minimiser $\|A - B\|_F^2$ revient à maximiser $\text{Trace}(A^*B)$. Soit $A = U_A D_A V_A^*$ la DVS de A et $\sqrt{\alpha}UV^*$ celle de B . Alors

$$\begin{aligned}\text{Trace}(A^*B) &= \sqrt{\alpha} \text{Trace}(V_A D_A U_A^* UV^*) \\ &= \sqrt{\alpha} \text{Trace}(V^* V_A \sqrt{D_A} \sqrt{D_A} U_A^* U) \leq \sqrt{\alpha} \|\sqrt{D_A} V_A^* V\|_F \|\sqrt{D_A} U_A^* U\|_F.\end{aligned}$$

Or

$$\|\sqrt{D_A} V_A^* V\|_F = \|\sqrt{D_A}\|_F = \|\sqrt{D_A} U_A^* U\|_F,$$

donc

$$\text{Trace}(A^*B) \leq \sqrt{\alpha} \|\sqrt{D_A}\|_F^2.$$

Mais si l'on choisit $U = U_A$ et $V = V_A$, alors

$$\text{Trace}(A^*B) = \sqrt{\alpha} \text{Trace}(D_A) = \sqrt{\alpha} \|\sqrt{D_A}\|_F^2,$$

ce qui montre que l'algorithme construit bien la meilleure approximation au sens de la norme de Frobenius. $\square$

Pour des rappels sur la DVS et la norme de Frobenius, on pourra consulter [Cha88] ou [Ste73]. En particulier dans [Ste73, page 322, th. 6.7], on utilise la DVS pour résoudre un autre problème d'approximation selon la norme de Frobenius.

III.5. Techniques de construction des opérateurs

Nous reprenons et complétons ici la démarche employée à la section III.3 : sur quels critères choisir l'opérateur de décimation connaissant l'opérateur de synthèse, et réciproquement ? Cette situation se rencontre très souvent dans la pratique, un des deux opérateurs étant déterminé pour remplir des conditions spécifiques désirées dans la décomposition, il arrive que l'on dispose de certains degrés de liberté pour choisir l'opérateur associé.

III.5.1. Choix des opérateurs de synthèse connaissant les opérateurs de décimation

Nous supposons ici qu'une séquence d'approximation a été déterminée. Pour tout indice $k \in \mathbb{N}$ fixé, nous connaissons donc

$$P^k : V^{k+1} \longrightarrow V^k,$$

et par conséquent les espaces de détail $W^k := \text{Ker}(P^k) \subset V^{k+1}$. Choisir un opérateur de synthèse S^k associé à P^k revient à choisir un espace auxiliaire $\tilde{V}^k$. Nous donnons quelques critères pour le choix de cet espace.

- Un premier critère est de vouloir minimiser la norme de S^k , dans le but d'améliorer le conditionnement de la reconstruction. D'après la section précédente (proposition III.15), cela revient à choisir un cadre semi-orthogonal.

- On peut également chercher à minimiser la norme des coefficients de détail. Ceci a également été traité par la proposition III.11. Cela revient encore à choisir le cadre semi-orthogonal. Signalons au passage que ce choix est même une solution *ponctuelle* au problème de minimisation, au sens où pour ce choix d'espace auxiliaire, la norme de

la composante de détail $Q^k(f)$ est minimale pour tout $f \in V^k$. Ceci est à comparer avec un résultat plus faible qui serait de ne minimiser « que » la norme de l'application Q^k .

- Une troisième possibilité est de chercher à minimiser la norme de l'application

$$\begin{aligned} F^k : V^{k+1} &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto P^k(f) - R^k(f), \end{aligned}$$

dans le but d'avoir une fonction « auxiliaire » $R^k(f)$ la plus proche possible de l'approximation grossière, ce qui permet de donner plus de sens à la norme des coefficients de détail en tant que mesure d'erreur entre deux approximations successives, dans le *point de vue non emboîté*. Dans un certain sens cela devrait aussi améliorer la qualité du processus global de reconstruction dans la mesure où les synthèses *sans correction* ne s'écartent pas « trop » de la fonction grossière.

De façon assez surprenante, il est possible pour ce problème d'avoir une minimisation ponctuelle *globale*.

PROPOSITION III.17 — Soit $P^k : V^{k+1} \rightarrow V^k$ un opérateur d'approximation, et W^k son noyau. Notons $\text{Suppl}(W)$ l'ensemble des supplémentaires à W dans V^{k+1} , et pour $U \in \text{Suppl}(W)$, notons R_U^k la projection sur U parallèlement à W . Alors

$$\tilde{V}^k := (\text{Id}_{V^{k+1}} + \mathcal{P}_W^\perp \circ P^k)(W^\perp \cap V^{k+1})$$

est un supplémentaire de W dans V^{k+1} tel que

$$R_{\tilde{V}^k}^k(f) = \underset{\tilde{f} \in U, U \in \text{Suppl}(W)}{\text{Argmin}} \quad \|P^k(f) - \tilde{f}\|, \quad \forall f \in V^{k+1}.$$

En particulier, la norme de l'application $P^k - R_{\tilde{V}^k}^k$ est minimale.

Démonstration. — On omet les indices k supérieurs dans l'écriture des opérateurs. Soit $U \in \text{Suppl}(W)$ et soient R_U et $Q_U := \text{Id} - R_U$ les projections correspondantes. Pour tout $f \in V^{k+1}$, on écrit

$$F(f) = P(f) - R_U(f) = P(f) - f + Q_U(f).$$

Quel que soit le choix de U , Q_U est d'image W et donc

$$\|F(f)\| \geq \|P(f) - f + \mathcal{P}_W^\perp(f - P(f))\|.$$

Le problème est par conséquent résolu s'il existe $\tilde{V} \in \text{Suppl}(W)$ tel que $Q_{\tilde{V}} = \mathcal{P}_W^\perp(\text{Id} - P)$. Or $\bar{Q} := \mathcal{P}_W^\perp(\text{Id} - P)$ est d'image W et c'est un projecteur puisque

$$\bar{Q} \circ \bar{Q} = \mathcal{P}_W^\perp(\mathcal{P}_W^\perp(\text{Id} - P) - P \circ \mathcal{P}_W^\perp(\text{Id} - P)) = \mathcal{P}_W^\perp(\text{Id} - P) - 0 = \bar{Q},$$

et par conséquent il existe $\tilde{V} \in \text{Suppl}(W)$ *unique* tel que $\bar{Q} = Q_{\tilde{V}}$ car tous les projecteurs sur W sont de cette forme.

Cherchons à présent la direction de projection. On a

$$R_{\tilde{V}} = \text{Id} - Q_{\tilde{V}} = \text{Id} - \mathcal{P}_W^\perp(\text{Id} - P) = \text{Id} - \mathcal{P}_W^\perp + \mathcal{P}_W^\perp \circ P = \mathcal{P}_{W^\perp \cap V^{k+1}}^\perp + \mathcal{P}_W^\perp \circ P.$$

Or $\tilde{V} = \text{Im}(R_{\tilde{V}})$, $W = \text{Ker}(R_{\tilde{V}})$ et $W^\perp \cap V^{k+1} \in \text{Suppl}(W)$, donc on a finalement

$$\tilde{V} = (\mathcal{P}_{W^\perp \cap V^{k+1}}^\perp + \mathcal{P}_W^\perp \circ P)(V^{k+1}) = (\text{Id}_{V^{k+1}} + \mathcal{P}_W^\perp \circ P)(W^\perp \cap V^{k+1}).$$

□

III.5.2. Choix des opérateurs de décimation connaissant les opérateurs de synthèse

C'est la situation diamétralement opposée. On suppose connue une injection $S^k : V^k \rightarrow V^{k+1}$, et donc $\tilde{V}^k := \text{Im}(S^k)$. En gardant les notations précédentes, déterminer un opérateur de décimation associé revient donc à choisir un élément W^k dans $\text{Suppl}(\tilde{V}^k)$. L'opérateur de décimation associé est alors $P^k := \text{Inv}(S^k) \circ R_{\tilde{V}^k}$. Regardons les choix qui s'imposent selon divers critères.

- Une possibilité est de chercher à minimiser la norme de P^k , pour favoriser un bon conditionnement de l'analyse. Ce cas est réglé par la proposition III.14 et revient à adopter un cadre semi-orthogonal.
- La deuxième possibilité, comme dans le cas précédent, est de minimiser les coefficients d'ondelette. Un cadre semi-orthogonal réalise cela.
- Enfin on peut chercher à minimiser la norme de l'application

$$\begin{aligned} G^k : V^{k+1} &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f - P^k(f), \end{aligned}$$

ce qui est particulièrement utile et nécessaire dans le cas non emboîté, car on souhaite qu'à opérateur de synthèse fixé, les approximations grossières soient de la meilleure qualité possible puisqu'elles seules seront utilisées.

Pour ce problème, il nous a uniquement été possible de trouver la solution optimale relativement à la norme de Frobenius ; mais ceci reste intéressant car cette dernière fournit une majoration (et reste « proche ») de la norme L_2 des applications linéaires.

PROPOSITION III.18 — Soit $S^k : V^k \rightarrow V^{k+1}$ un opérateur de synthèse, et $\tilde{V}^k$ son image. Pour tout $W \in \text{Suppl}(\tilde{V}^k)$, notons $P_W := \text{Inv}(S^k) \circ R_{\tilde{V}^k}$, $R_{\tilde{V}^k}$ étant le projecteur sur $\tilde{V}^k$ parallèlement à W . Alors

$$\overline{W} := (\text{Id}_{V^{k+1}} - S^k \circ \mathcal{P}_{V^k}^\perp)(\tilde{V}^k{}^\perp \cap V^{k+1}) \quad (\text{III.10})$$

minimise l'application

$$\begin{aligned} \text{Suppl}(\tilde{V}^k) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ W &\longmapsto \|\text{Id}_{V^{k+1}} - P_W\|_F. \end{aligned}$$

Remarque. — Des expérimentations numériques montrent que la solution donnée par la proposition précédente pour la norme de Frobenius ne convient pas pour la norme L_2 (mais semble cependant très proche : voir aussi la proposition III.19).

Démonstration. — En l'absence d'un raisonnement « direct », on va choisir des bases pour résoudre le problème « numériquement ». En conséquence, la démonstration est longue et calculatoire ; elle se décompose en 5 étapes :

(i) Traduction du problème en son expression matricielle — On remplace les indices k et $k+1$ pour les espaces et les opérateurs par les indices 0 et 1 respectivement, pour simplifier les écritures. Notons, en plus des bases « canoniques » des espaces d'approximation (revoir au besoin les notations p. 32) : $\tilde{\eta}^0$ une base orthonormale de $\tilde{V} := \tilde{V}^0$ ($m = m_0$ vecteurs), η^0 la base de V^0 réciproque, c'est-à-dire telle que $S(\eta_i^0) = \tilde{\eta}_i^0$ pour tout i (m vecteurs), η^1 une base orthonormée de $\tilde{V}^\perp \cap V^1$ ($n - m$ vecteurs, $n = m_1$),

et enfin $\bar{\eta}_\cdot$ une base orthonormée de $V^{1\perp} \cap (V^0 + V^1)$ (p vecteurs, avec $p \leq n + m$). On notera simplement $\mathcal{B}$ la base orthonormée de $V^0 + V^1$ formée des 3 bases précédentes $\eta^0_\cdot$, $\eta^1_\cdot$ et $\bar{\eta}_\cdot$. Enfin on note f^1 une fonction de V^1 , $\tilde{f} := R_{\tilde{V}}(f^1)$ et $f^0 := S^{-1}(\tilde{f})$. On a

$$f^1_{\mathcal{B}} = U^1 f^1_{\tilde{\eta}^0, \eta^1}, \quad \text{avec } U^1 = \begin{bmatrix} \text{Id}_n \\ 0_{p-n, n} \end{bmatrix},$$

et, en notant U^0 la matrice $\mathcal{M}_{[\eta^0; \mathcal{B}]}$,

$$\begin{aligned} f^0_{\mathcal{B}} &= U^0 f^0_{\eta^0} = U^0 K f^1_{\tilde{\eta}^0, \psi} = U^0 K \mathcal{M}_{[\tilde{\eta}^0, \eta^1; \tilde{\eta}^0, \psi]} f^1_{\tilde{\eta}^0, \eta^1} \\ &= U^0 K \begin{bmatrix} \text{Id}_m & \Psi_1 \\ 0_{n-m, m} & \Psi_2 \end{bmatrix}^{-1} f^1_{\tilde{\eta}^0, \eta^1} = U^0 K \begin{bmatrix} \text{Id}_m & -\Psi_1 \Psi_2^{-1} \\ 0_{n-m, m} & \Psi_2^{-1} \end{bmatrix} f^1_{\tilde{\eta}^0, \eta^1}, \end{aligned}$$

où $K := [\text{Id}_m \quad 0_{m, n-m}] = R_{\tilde{V}} \tilde{\eta}^0, \psi$ et $\Psi := \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $\psi_{\cdot \tilde{\eta}^0, \eta^1}$. En introduisant encore la matrice $L := [0_{n-m, m} \quad \text{Id}_{n-m}]$, on a finalement

$$f^0_{\mathcal{B}} = U^0 (K - \Psi_1 \Psi_2^{-1} L) f^1_{\tilde{\eta}^0, \eta^1}.$$

La base de « départ » $\tilde{\eta}^0, \eta^1$ et la base « d'arrivée » $\mathcal{B}$ étant orthonormées, on a

$$\|G^k\|_F = \text{Trace}(A^* A), \quad A := U^1 - U^0 (K - \Psi_1 \Psi_2^{-1} L).$$

Remarquons que Ψ fournit une base du complémentaire de $\tilde{V}$ si et seulement si Ψ_2 est inversible.

(ii) Calcul des dérivées de l'application $(\Psi_1, \Psi_2) \rightarrow \text{Trace}(A^* A)$ — Les premières étapes du calcul des dérivées sont les mêmes que l'on dérive « selon » Ψ_1 ou Ψ_2 . On considère donc, pour $i = 1, 2$, l'application partielle

$$f_i : \Psi_i \rightarrow \text{Trace}(M_1(\Psi_i)), \quad M_1(\Psi_i) = A^* A.$$

L'opérateur Trace étant linéaire, sa dérivée est encore l'opérateur Trace , d'où

$$f'_i(\Psi_i; H_i) = \text{Trace}'(M_1(\Psi_i); M'_1(\Psi_i; H_i)) = \text{Trace}(M'_1(\Psi_i; H_i)).$$

On peut ensuite écrire $M_1(\Psi_i) = B(M_2(\Psi_i))$, B étant l'application bilinéaire qui à une matrice $p \times n$ A associe la matrice $n \times n$ $A^* A$, et $M_2(\Psi_i) = U^1 - U^0 (K - \Psi_1 \Psi_2^{-1} L)$. On sait que $B'(A; H) = A^* H + H^* A$, d'où

$$M'_1(\Psi_i; H_i) = M_2(\Psi_i)^* M'_2(\Psi_i; H_i) + M'_2(\Psi_i; H_i)^* M_2(\Psi_i).$$

On a ensuite d'une part

$$M'_2(\Psi_1; H_1) = U^0 H_1 \Psi_2^{-1} L,$$

et d'autre part, en notant que si $M_3(\Psi_2) = \Psi_2^{-1}$ alors $M'_3(\Psi_2; H_2) = -\Psi_2^{-1} H_2 \Psi_2^{-1}$, on a

$$M'_2(\Psi_2; H_2) = -U^0 \Psi_1 \Psi_2^{-1} H_2 \Psi_2^{-1} L.$$

Finalement, la recherche des extremums de $\text{Trace}(A^* A)$ revient à trouver Ψ telle que

$$\begin{aligned} \text{Trace}((U^0 H_1 \Psi_2^{-1} L)^* (U^1 - U^0 (K - \Psi_1 \Psi_2^{-1} L))) &= 0 \\ \text{Trace}((U^0 \Psi_1 \Psi_2^{-1} H_2 \Psi_2^{-1} L)^* (U^1 - U^0 (K - \Psi_1 \Psi_2^{-1} L))) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

pour toutes les matrices H_1 de taille $m \times (n - m)$ et H_2 , inversible de taille $(n - m)^2$. Quitte à poser $H_1 := \Psi_1 \Psi_2^{-1} H_2$ dans la première équation, on voit que la *deuxième équation est en fait redondante*.

(iii) Résolution de l'équation (III.11) — Puisque Ψ_2^{-1} est inversible, quitte à poser $H_1 = H_1' \Psi_2$ on peut ramener (III.11) à

$$\text{Trace}((U^0 H_1 L)^* (U^1 - U^0 (K - \Psi_1 \Psi_2^{-1} L))) = 0.$$

On a ensuite $U^0 H_1 L = [0_{p,m} \quad U^0 H_1]$, puis $(U^0 H_1 L)^* U^1 = \begin{bmatrix} 0_{m,p} \\ H_1^* \bar{U}^0 \end{bmatrix}$, où $\bar{U}^0$ est la matrice formée des n premières lignes de U^0 . Il s'en suit que

$$\text{Trace}((U^0 H_1 L)^* U^1) = \text{Trace}(H_1^* \hat{U}^0),$$

où $\hat{U}^0$ est la matrice formée des $n - m$ dernières lignes de $\bar{U}^0$, car les autres composantes n'entrent pas en compte dans le calcul de la trace. Un calcul similaire amène

$$\text{Trace}((U^0 H_1 L)^* U^0 (K - \Psi_1 \Psi_2^{-1} L)) = \text{Trace}(-(U^0 H_1)^* U^0 \Psi_1 \Psi_2^{-1}),$$

d'où finalement, on voit que (III.11) est équivalente à

$$\text{Trace}(H_1^* (\hat{U}^0 + U^0{}^* U^0 \Psi_1 \Psi_2^{-1})) = 0, \quad \forall H_1 \in \text{Mat}_{m \times (n-m)}.$$

Or ceci implique que $\hat{U}^0 + U^0{}^* U^0 \Psi_1 \Psi_2^{-1} = 0$, car si un coefficient de cette matrice est non nul, on peut choisir H_1 de façon à « amener » ce coefficient seul sur la diagonale, d'où une trace non nulle. Finalement, on voit que l'ensemble des solutions de (III.11) est donné par les matrices Ψ de la forme

$$\Psi = \begin{bmatrix} -(U^0{}^* U^0)^{-1} \hat{U}^0 \\ \text{Id}_{n-m} \end{bmatrix} \Psi_2, \quad \text{avec } \Psi_2 \text{ inversible.} \quad (\text{III.12})$$

La matrice Ψ donne une base de l'espace W ; on voit par conséquent que le choix de Ψ_2 change uniquement la base et laisse W inchangé : on peut prendre simplement $\Psi_2 = \text{Id}_{n-m}$. En termes d'espaces, le problème d'extremums initial admet donc une solution *unique* et c'est donc un *extremum global*; c'est de plus un *minimum* puisqu'on voit assez facilement que le problème ne peut admettre de maximum global.

(iv) Expression d'une base de W dans les bases canoniques — L'équation (III.12) donne l'expression d'une base de W dans la base $\tilde{\eta}^0, \eta^1$ construite pour le problème. Cependant en général cette base est inconnue : nous cherchons donc maintenant l'expression « générale » de la solution par rapport aux bases ϕ^0 et ϕ^1 de V^0 et V^1 respectivement.

On confondra l'application S avec sa matrice $S_{\phi^0; \phi^1}$. Soit $\tilde{\Lambda}^0$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $\tilde{\eta}^0_{\phi^1}$. On peut écrire $\tilde{\Lambda}^0 = SM$, avec M matrice carrée inversible. Soit Λ^0 la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $\eta^0_{\phi^0}$. D'après ce qui précède, on voit que $\Lambda^0 = M$. Soit enfin Λ^1 la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $\eta^1_{\phi^1}$. On a

$$U^0 = \mathcal{M}_{[\phi^0; \mathcal{B}]} \Lambda^0,$$

donc

$$U^0{}^* U^0 = \Lambda^0{}^* \mathcal{M}_{[\phi^0; \mathcal{B}]}^* \mathcal{M}_{[\phi^0; \mathcal{B}]} \Lambda^0 = \Lambda^0{}^* \mathcal{G}_{\phi^0} \Lambda^0 = M^* \mathcal{G}_{\phi^0} M,$$

car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. D'autre part, on peut écrire aussi

$$\hat{U}^0 = TU^0 = T\mathcal{M}_{[\phi^0; \mathcal{B}]} \Lambda^0, \quad \text{avec } T = \text{Diag}(0_m, \text{Id}_{n-m}, 0_{p-n}).$$

Notons Ψ_{can} la matrice dont les vecteurs colonnes sont les $\psi_{\cdot, \phi^1}$. D'après (III.12), on a

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{can}} &= \mathcal{M}_{[\tilde{\eta}^0, \eta^1; \phi^1]} \begin{bmatrix} -(U^0{}^* U^0)^{-1} \hat{U}^0{}^* \\ \text{Id}_{n-m} \end{bmatrix} = [SM \quad \Lambda^1] \begin{bmatrix} -(U^0{}^* U^0)^{-1} \hat{U}^0{}^* \\ \text{Id}_{n-m} \end{bmatrix} \\ &= -SM(M^* \mathcal{G}_{\phi^0} M)^{-1} M^* \mathcal{M}_{[\phi^0; \mathcal{B}]} T^* + \Lambda^1 = -S\mathcal{G}_{\phi^0}^{-1} \mathcal{M}_{[\phi^0; \mathcal{B}]} T^* + \Lambda^1 \end{aligned}$$

Les vecteurs colonnes de $T\mathcal{M}_{[\phi^0; \mathcal{B}]}$ sont les composantes de la projection orthogonale des ϕ^0 sur $\tilde{V}^\perp \cap V^1$ dans la base η^1 . Par conséquent, on a

$$T\mathcal{M}_{[\phi^0; \mathcal{B}]} = \mathcal{G}_{\eta^1}^{-1} \mathcal{G}_{[\eta^1; \phi^0]} = \mathcal{G}_{[\eta^1; \phi^0]} = \Lambda^1{}^* \mathcal{G}_{[\phi^1; \phi^0]},$$

d'où finalement

$$\Psi_{\text{can}} = (\text{Id}_n - S\mathcal{G}_{\phi^0}^{-1} \mathcal{G}_{[\phi^0; \phi^1]}) \Lambda^1, \quad (\text{III.13})$$

où on rappelle que Λ^1 représente une base orthonormée de $\tilde{V}^\perp \cap V^1$. Cependant, l'orthonormalité est *inutile* puisque la multiplication éventuelle à droite de Ψ_{can} par une matrice inversible ne modifie que la base de W . Il suffit donc de supposer que les vecteurs colonnes de Λ^1 forment une base de $\tilde{V}^\perp \cap V^1$.

(v) Interprétation « intrinsèque » de (III.13) — Il suffit de remarquer que $\mathcal{G}_{\phi^0}^{-1} \mathcal{G}_{[\phi^0; \phi^1]}$ est la matrice $\mathcal{P}_{V^0}^\perp_{\phi^1; \phi^0}$ pour conclure à l'expression générale (III.10) que l'on se proposait de démontrer. $\square$

La proposition suivante montre que cette solution est, en un sens légèrement différent, optimale également pour la norme L_2 .

PROPOSITION III.19 — Avec les notations de la proposition III.18, $\overline{W}$ défini par (III.10) minimise l'application

$$\begin{aligned} \text{Suppl}(\tilde{V}^k) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ W &\longmapsto \|\mathcal{P}_{\tilde{V}^k}^\perp - P_W\|_2. \end{aligned}$$

Démonstration. — On sait déjà que $\overline{W} \in \text{Suppl}(\tilde{V}^k)$, montrons que le minimum est atteint. Soit $\tilde{f} \in \tilde{V}^k{}^\perp \cap V^{k+1}$. On écrit

$$\begin{aligned} P_{\overline{W}}(\tilde{f}) &= P_{\overline{W}}(f - S^k(\mathcal{P}_{\tilde{V}^k}^\perp(f)) + S^k(\mathcal{P}_{\tilde{V}^k}^\perp(f))) \\ &= P_{\overline{W}}(f - S^k(\mathcal{P}_{\tilde{V}^k}^\perp(f))) + P_{\overline{W}}(S^k(\mathcal{P}_{\tilde{V}^k}^\perp(f))) \\ &= 0 + \mathcal{P}_{\tilde{V}^k}^\perp(f). \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

On en déduit que $\tilde{V}^{k\perp} \cap V^{k+1} = \text{Ker}(\mathcal{P}_{V^k}^\perp - P_{\overline{W}})$. On voit alors que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_{V^k}^\perp - P_{\overline{W}}\|_2^2 &= \sup_{f \in V^{k+1}} \frac{\|(\mathcal{P}_{V^k}^\perp - P_{\overline{W}})(f)\|^2}{\|f\|^2} \\
&= \sup_{\left\{ \substack{\tilde{f} \in \tilde{V}^k \\ h \in \tilde{V}^{k\perp} \cap V^{k+1}} \right\}} \frac{\|(\mathcal{P}_{V^k}^\perp - P_{\overline{W}})(\tilde{f} + h)\|^2}{\|\tilde{f} + h\|^2} \\
&= \sup_{\left\{ \substack{\tilde{f} \in \tilde{V}^k \\ h \in \tilde{V}^{k\perp} \cap V^{k+1}} \right\}} \frac{\|(\mathcal{P}_{V^k}^\perp - P_{\overline{W}})(\tilde{f})\|^2}{\|\tilde{f}\|^2 + \|h\|^2} = \sup_{\tilde{f} \in \tilde{V}^k} \frac{\|(\mathcal{P}_{V^k}^\perp - P_{\overline{W}})(\tilde{f})\|^2}{\|\tilde{f}\|^2} \\
&= \|(\mathcal{P}_{V^k}^\perp - P_{\overline{W}})|_{\tilde{V}^k}\|_2^2,
\end{aligned}$$

ce qui est nécessairement minimal. $\square$

Ainsi, $P_{\overline{W}}$ est la meilleure approximation de la projection orthogonale sur V^k selon la norme L_2 (elle l'est aussi selon la norme de Frobenius, mais la démonstration est laissée au lecteur).

Nous arrêtons ici le développement théorique du cadre non emboîté. Avec le chapitre suivant débute la partie appliquée de cette thèse, traitant de la mise en oeuvre pratique des idées décrites jusqu'à présent. Même si les algorithmes qui vont être présentés semblent particulier au problème posé, il sera intéressant de constater qu'ils donnent en retour énormément d'informations sur le *potentiel* véritable des points de vue non emboîté et de subdivision.

IV

Triangulations et Décimation

DANS LES CHAPITRES à venir la notion de triangulation va être utilisée de manière importante. Dans les deux chapitres suivant, seules les triangulations planes et sphériques sont utilisées. En revanche, pour les maillages surfaciques utilisés au dernier chapitre se présentent parfois des problèmes délicats qu'il nous a paru nécessaire de traiter clairement. Aussi avons nous choisi de regrouper quelque part l'ensemble des notions et techniques utiles concernant les triangulations. Le lecteur déjà familier avec le sujet peut passer ce chapitre pour ne s'y référer qu'en temps utile.

Il se présente en trois parties. Dans la première nous donnons les définitions des triangulations et des concepts qui y sont rattachés. La deuxième partie traite de décimation de maillage, et plus particulièrement approfondit la technique de suppression de sommets. Enfin la dernière section détaille un algorithme de décimation « uniforme » pour maillages, originellement dû à Kirkpatrick ([Kir83]).

IV.1. Triangulations

On peut simplement voir une triangulation comme une collection de triangles, mais une définition plus précise passe par la notion de complexe simplicial, et c'est le point de vue que nous adoptons ici.

IV.1.1. Définitions de base

Dans la suite, $N \in \mathbb{N}$ est fixé. La plupart des notions présentées ici sont dérivées de [BY95, chapitre 11], où l'on trouvera plus de détails si nécessaire. Le cas sphérique est traité à part à l'aide de remarques, lorsque cela est utile.

DÉFINITION IV.1 Triangulation — On appelle triangulation (ou maillage) un couple $\mathcal{T} = (\mathcal{M}, \mathcal{C})$, où $\mathcal{M}$ est un ensemble de N points M_i (de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) et $\mathcal{C}$ est un 2-complexe simplicial, connexe, pur et non singulier. Dans $\mathbb{R}^3$, on supposera de plus la triangulation orientable, et on parlera alors aussi (improprement) de triangulation surfacique.

Rappelons que $\mathcal{C}$ est donc une collection d'éléments $s \in \mathcal{P}(\llbracket 1, N \rrbracket)$, avec $1 \leq |s| \leq 3$. Pour des compléments théoriques sur la notion de complexe simplicial on pourra regarder [Spa66]. L'intérêt de cette définition est qu'elle sépare entièrement l'information topologique de la triangulation, contenue uniquement dans $\mathcal{C}$, de l'information géométrique, qui est propre à une réalisation géométrique du complexe, passant par la connaissance de $\mathcal{M}$.

DÉFINITION IV.2 Réalisation de $\mathcal{C}$ — À tout élément $s \in \mathcal{C}$, on associe sa réalisation géométrique définie comme :

- le sommet M_i si $s = \{i\}$;
- l'arête $[M_i, M_j]$ si $s = \{i, j\}$;
- le triangle de sommets M_i, M_j et M_k si $s = \{i, j, k\}$.

La réalisation de $\mathcal{C}$ est dite admissible si sa topologie est conforme à celle de $\mathcal{C}$.

Par « topologie conforme », nous entendons que l'intersection de la réalisation géométrique de deux simplexes de $\mathcal{C}$ doit être ou vide, ou la réalisation d'un simplexe de $\mathcal{C}$. Dans la suite on ne distinguera pas nécessairement un simplexe de $\mathcal{C}$ de sa réalisation géométrique, que l'on supposera admissible.

En pratique, les conditions imposées au complexe $\mathcal{C}$ se traduisent géométriquement par une triangulation « régulière », c'est-à-dire ne présentant aucune des caractéristiques illustrées à la figure IV.1.

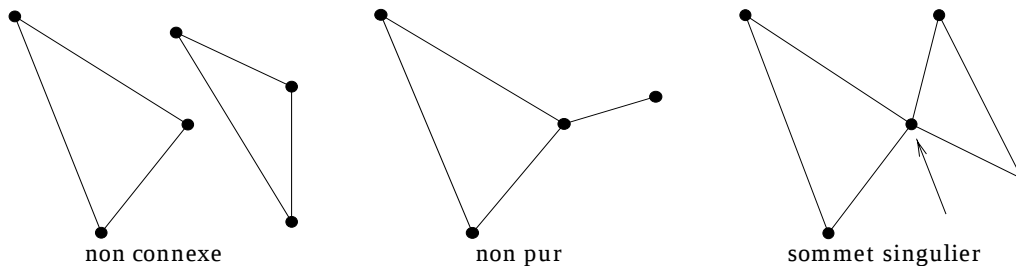


Figure IV.1 — Exemples de triangulations illicites.

Remarque. — Dans le cas sphérique, les points appartiennent à la sphère et seule la réalisation géométrique des arêtes et des faces de $\mathcal{C}$ change :

- $\{i, j\}$ se réalise en l'arc géodésique reliant M_i à M_j (ce dernier est porté par l'unique grand cercle passant par les deux points) ;
- $\{i, j, k\}$ se réalise en le triangle sphérique délimité par ses trois arêtes géodésiques.

On définit maintenant diverses notions associées à une triangulation.

DÉFINITIONS IV.3 — Dans ce qui suit, k et d désignent des entiers.

- deux simplexes s_1 et s_2 de $\mathcal{C}$ sont dits incidents si l'un est contenu dans l'autre et $||s_1| - |s_2|| = 1$;
- deux simplexes incidents à un troisième sont dits adjacents ;

- une arête est dite de bord si elle n'appartient qu'à un seul triangle ; elle est interne sinon ;
- un sommet est dit de bord s'il est incident à deux arêtes de bord ; il est interne sinon ;
- deux sommets P_i et P_j sont dits voisins si $\{i, j\} \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire s'ils appartiennent à la même arête ;
- un sommet est 0-voisin de lui-même ; deux sommets P_i et P_j sont k -voisins s'ils ne sont pas $(k-1)$ -voisins et que P_i est voisin d'un $(k-1)$ -voisin de P_j ;
- deux sommets sont à une distance d s'ils sont d -voisins et pas k -voisins pour tout $k < d$;
- deux sommets sont d -indépendants s'ils sont k -voisins avec $k > d$;
- le d -voisinage d'un sommet P_i est l'ensemble des triangles dont les sommets sont k -voisins de P_i , avec $k \leq d$; le 1-voisinage est appelé polygone d'influence ;
- le degré d'un sommet s , noté $\deg(s)$, est le nombre de ses 1-voisins.

IV.1.2. Relations d'Euler

Donnons à présent un résultat de combinatoire qui nous sera utile.

PROPOSITION IV.1 Relation d'Euler pour triangulations orientables — Soit $\mathcal{T}$ une triangulation orientable de genre h dont le bord est formé par k polygones disjoints. Notons n le nombre de sommets, m le nombre d'arêtes et f le nombre de triangles, et n_e le nombre de sommets externes. Alors on a

$$\begin{aligned} n - m + f &= 2 - k - 2h, \\ f &= 2(n - 2 + k + 2h) - n_e, \\ m &= 3(n - 2 + k + 2h) - n_e. \end{aligned} \tag{IV.1}$$

Démonstration. — On va se ramener au cas d'un polyèdre, c'est-à-dire une triangulation orientable sans bord. Notons $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ les polygones formant le bord de la triangulation, et notons $n_1, \dots, n_k$ le nombre de leurs sommets respectifs. On « bouche » chaque trou en étoilant le polygone correspondant. Le $i^{\text{ème}}$ polygone étoilé rajoute à la triangulation d'origine

$$\begin{aligned} &1 \text{ sommet,} \\ &n_i \text{ arêtes,} \\ &n_i \text{ faces.} \end{aligned}$$

L'insertion des polygones ne change pas le genre et l'ensemble reste orientable. Après cette opération, on se retrouve avec un polyèdre de genre h , ayant n' sommets, m' arêtes et f' faces avec

$$\begin{aligned} n' &= n + k \\ m' &= m + n_1 + \dots + n_k = m + n_e \\ f' &= f + n_1 + \dots + n_k = f + n_e. \end{aligned}$$

D'après [BY95, théorème 11.2.4], on a

$$n' - m' + f' = 2 - 2h$$

d'où finalement

$$n - m + f = 2 - k - 2h.$$

Puisque dans un polyèdre chaque arête est incidente à exactement deux triangles, on a de plus

$$2m' = 3f',$$

ce qui permet d'obtenir les deux autres formules par simple remplacement. $\square$

Remarque. — Cette proposition est valable dans le cas d'une triangulation planaire qui est une triangulation surfacique de genre $h = 0$. Le cas sphérique peut toujours se ramener à la dimension 3 en associant à chaque triangle *sphérique* le triangle *plat* de mêmes sommets. On supposera que l'origine et le triangle sphérique ne sont pas dans le même demi-espace délimité par le plan contenant le triangle plat. Ceci définit alors une triangulation surfacique $\mathcal{T}_{sur}$ *homéomorphe* à la triangulation sphérique $\mathcal{T}_{sph}$ par l'application

$$\begin{aligned} h : \mathcal{T}_{sur} &\longrightarrow \mathcal{T}_{sph} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

En particulier, la relation d'Euler précédente est valable pour les triangulations sphériques.

IV.2. Techniques de décimation de maillages

Le but de la simplification de maillages est de définir à partir d'une triangulation de départ $(\mathcal{M}_1, \mathcal{C}_1)$ une autre triangulation $(\mathcal{M}_2, \mathcal{C}_2)$ plus simple dans le sens où $|\mathcal{M}_2| < |\mathcal{M}_1|$, parfois $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$. Cette opération va être utile dans la suite pour définir les espaces d'approximation ; par ailleurs, dans le cas de la dimension 3, la simplification de maillages est à la base de toutes les techniques « multirésolution » existantes (cf chapitre VI).

Dans ce paragraphe nous examinons brièvement les techniques les plus utilisées mais en nous intéressant de plus près à l'une d'entre elles, la *suppression de sommets*, qui a été utilisée dans tous les exemples présentés dans cette thèse.

La quasi-totalité des techniques de simplification de maillages sont basées sur une *opération de simplification élémentaire* qui est itérée jusqu'à l'obtention d'une triangulation suffisamment appauvrie.

Les trois opérations élémentaires les plus utilisées visent chacune la suppression d'un type d'éléments précis d'une triangulation : le triangle, l'arête ou le sommet.

IV.2.1. La suppression de sommets

L'opération de suppression de sommet vient naturellement à l'esprit lorsqu'il s'agit de simplifier une triangulation. On la rencontre abondamment dans la littérature, que ce soit dans des travaux à caractères « multirésolution » ([LSS⁺98, KCVS98, Kle97, BS96]) ou non ([DF89, Kir83]).

Nous ne considérerons que la suppression de sommets *intérieurs* ; celle-ci se présente en deux étapes :

- 1) Suppression du sommet et des arêtes incidentes. D'après les propriétés d'une triangulation, cela laisse place à un « trou » *polygonal*, qui est le bord du polygone d'influence (d'où le nom de ce dernier).
- 2) Choix puis insertion des arêtes qui vont trianguler ce polygone.

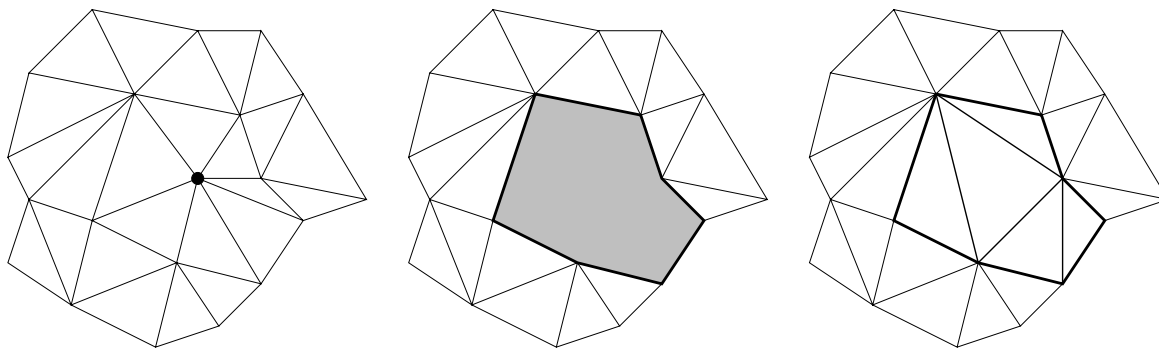


Figure IV.2 — L'opération de suppression de sommet.

La figure IV.2 illustre le procédé. La partie de la triangulation affectée par la suppression se limite au polygone d'influence.

Examinons à présent de plus près la deuxième étape. Dans le cas plan, le problème est réglé, au moins en théorie, par le résultat connu affirmant que tout polygone plan est triangulable (voir par exemple [BY95, chapitre 12]). Nous fixons les degrés de liberté pour le choix de la triangulation en imposant qu'elle soit de Delaunay, *i.e.* qu'elle vérifie le critère des cercles vides.

Dans le cas surfacique, le polygone est dans $\mathbb{R}^3$ et la situation se complique singulièrement. Dans le plan on comprend intuitivement bien ce que l'on entend par trianguler le polygone ; dans l'espace, il est nécessaire de préciser cette notion : c'est trouver une *triangulation* dont la réalisation géométrique soit homéomorphe à la surface étoilée avant suppression. En particulier, elle possède le même bord et la réalisation géométrique est admissible.

Pour résoudre ce problème, on peut distinguer deux approches :

- L'approche « force brute » qui recherche parmi toutes les solutions topologiques (*i.e.* vérifiant le fait d'être une triangulation avec le bon bord) une solution dont la réalisation géométrique est admissible. Tester l'admissibilité est cependant un problème coûteux.
- L'approche qui « ramène le problème dans le plan », le résout géométriquement (*i.e.* de manière admissible dans le plan) puis « remonte » géométriquement dans l'espace.

La grande majorité des approches utilisées dans la littérature font partie de la deuxième catégorie et c'est également la voie que nous avons empruntée. Cette approche se décompose plus précisément en trois parties :

- 1) trouver un *homéomorphisme* f permettant de paramétrer la *surface* étoilée sur un polygone étoilé plan ;
- 2) supprimer le sommet central et trianguler le trou polygonal dans le plan ;

Après cette étape, on triangule le trou 3D à l'aide des arêtes utilisées dans le plan. Ceci revient, du point de vue des surfaces, à transformer par une application g le polygone plan en la surface de $\mathbb{R}^3$, d'où la dernière étape :

- 3) s'assurer que g soit un homéomorphisme.

Cette dernière étape est cruciale, bien que certains travaux ne la vérifient pas (notamment [LSS⁺98]) : sans elle on ne peut être assuré que les opérations faites dans le plan aient un sens dans l'espace ; s'il faut le vérifier systématiquement, le détour par le plan ne présente qu'un seul avantage sur la méthode « force brute » : essayer de proposer un premier choix d'arêtes retriangulantes meilleur qu'un choix au hasard.

Dans le présent contexte, vérifier la propriété d'homéomorphisme revient simplement à vérifier la continuité et l'injectivité des applications : ce sont alors automatiquement des homéomorphismes (la topologie de la surface étoilée étant celle induite par $\mathbb{R}^3$) puisque les espaces « de départ » (la surface étoilée à l'étape 1 et le polygone plan à l'étape 3) sont *compacts*.

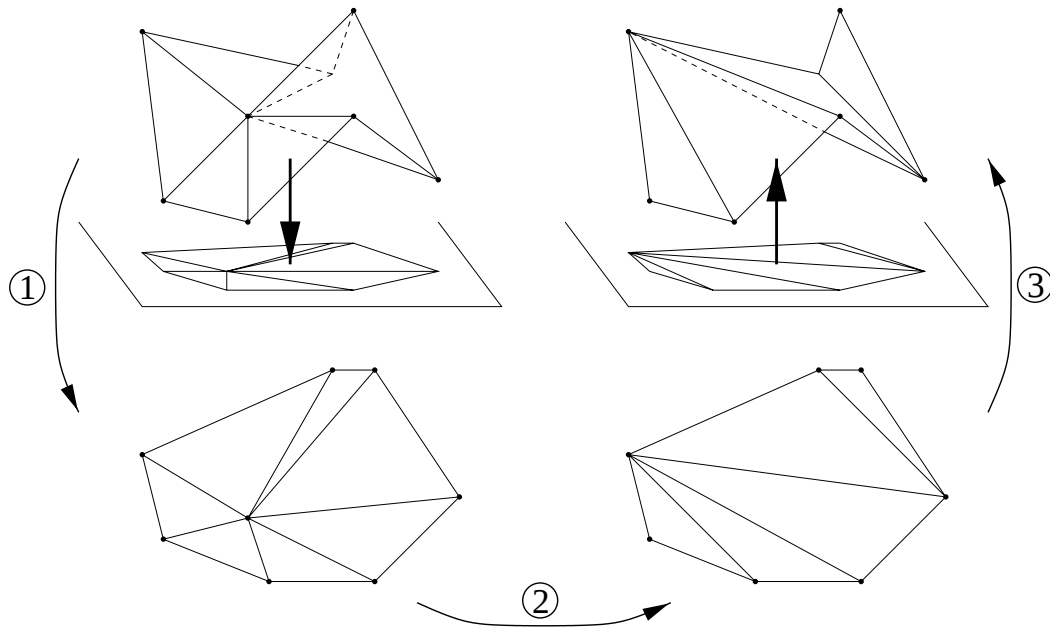


Figure IV.3 — Triangulation du trou polygonal dans le cas surfacique.

Dans la thèse, nous utilisons une approche classique : on cherche un plan sur lequel la surface étoilée se projette (orthogonalement) de façon bijective (voir figure IV.3). Un tel plan n'existe pas toujours ; dans [CMO97], on trouvera un critère permettant de tester la validité d'une direction de projection, ainsi qu'un algorithme pour trouver une direction valide, lorsqu'il en existe une. En général cependant on ne la recherche pas systématiquement mais on teste plutôt une direction *heuristique* et, en cas d'échec, on ne supprime pas le sommet. C'est également l'approche que nous avons adoptée, en utilisant comme heuristique le plan aux moindres carrés (généralement unique) défini par les points du polygone.

Supposons donc une direction de projection valide connue. Il est clair que l'image par la projection de la surface étoilée est un polygone étoilé, sur lequel la surface est paramétrée comme une fonction linéaire par morceaux continue de la forme $(x, y, f(x, y))$, qui est dans ce cas un homéomorphisme. Après triangulation du polygone plan, la fonction g du point 3 ci-dessus est alors de la forme

$$g(x, y) = (x, y, \tilde{f}(x, y))$$

avec $\tilde{f}$ linéaire par morceaux et continue, par construction. Ceci fait de g (application injective) un homéomorphisme, assurant la validité de la triangulation surfacique résultante. On aura l'occasion de voir ces fonctions linéaires par morceaux plus en détail dans le chapitre V.

Remarque. — (i) Une autre approche valide est d'utiliser une projection *centrale* sur un plan. Il s'agit alors de trouver ce repère projectif local, c'est-à-dire un centre

et un plan tels que la surface étoilée se projette bijectivement. En particulier, la « déprojection » g sera à nouveau injective et continue, donc un homéomorphisme.

(ii) Quelle que soit la méthode utilisée pour trianguler le polygone dans le cas surfacique, elle ne peut assurer que l'admissibilité *locale* de la réalisation géométrique : autrement dit, il peut arriver que la surface triangulant le trou polygonal s'intersecte avec un morceau de surface *extérieure* au trou. Éviter ce genre de conflit est un problème algorithmique difficile qui nécessite la mise en place de structures de données auxiliaires dédiées à la recherche rapide d'éventuelles auto-intersections. Nous ignorerons ces problèmes, à l'instar de la très grande majorité des travaux.

IV.2.2. La suppression d'arêtes et la suppression de triangles

- L'opération de suppression d'arête (« edge-collapse » en anglais) est peut-être celle qui est *de facto* la plus utilisée à l'heure actuelle. Un des premiers travaux l'utilisant est [HDD⁺93], qui l'a rendue populaire. Depuis, de nombreux algorithmes de simplification de maillages sont basés dessus ; voir par exemple [Hop96, GH97, ALS98, CMO97].

Une opération de suppression d'arête peut se schématiser ainsi :

- 1) Sélection de l'arête $[s_1, s_2]$ à supprimer et d'un *sommet cible* s_c .
- 2) Déplacement conjoint uniforme des sommets s_1 et s_2 vers s_c . Ceci a pour effet de « transformer » l'arête en le sommet cible et les deux triangles incidents à l'arête en deux arêtes de sommet commun s_c . Cette opération est *valide* uniquement si ces deux triangles sont les seuls à être dégénérés *au cours* du déplacement.

Notons que le point 2) détermine automatiquement la forme précise de la triangulation après la suppression : les sommets voisins de s_c sont ceux qui étaient voisins de s_1 et s_2 .

Le sommet cible est soit un nouveau sommet, choisi par exemple pour donner une triangulation finale la plus régulière possible, soit plus souvent est simplement l'un des sommets de l'arête à supprimer ; on parle alors de *demi-suppression d'arête* (« half edge-collapse »). La demi-suppression d'arête est un cas particulier de suppression de sommet. Les arêtes retriangulantes étant alors imposées, la forme des triangles résultant est souvent peu satisfaisante. La figure IV.4 illustre ces différentes possibilités. En traits épais on a indiqué la *zone d'influence* d'une suppression : dans le cas général c'est l'union des polygones d'influence des sommets de l'arête.

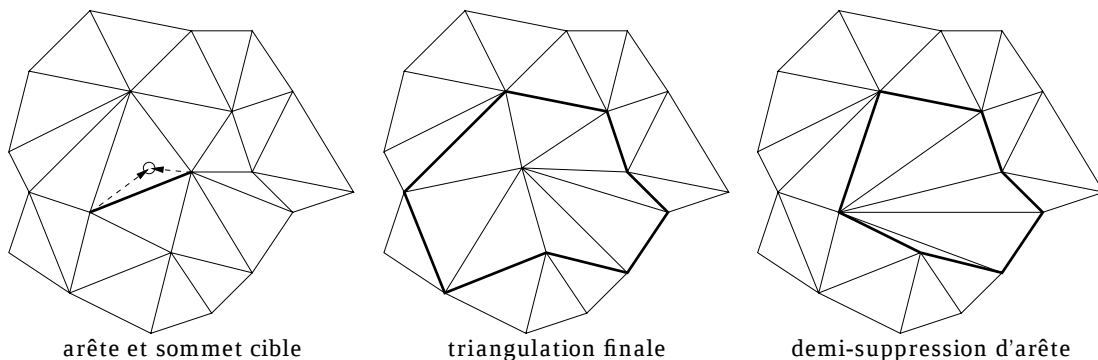


Figure IV.4 — Une opération de suppression et demi-suppression d'arête.

- L'opération de suppression de triangle ([HJST98]) est basée sur des principes similaires.

- 1) Sélection d'un triangle (s_1, s_2, s_3) à supprimer et d'un sommet cible s_c .
- 2) Déplacement conjoint uniforme des trois sommets vers s_c . Le triangle est donc transformé en le sommet cible et les triangles adjacents se réduisent en des arêtes incidentes à s_c . Ici encore l'opération n'est valide que si aucun autre élément ne devient dégénéré *pendant* le déplacement.

Dans le cas où le sommet cible est un des sommets du triangle à supprimer, par exemple s_1 , l'opération se résume à deux demi-suppressions d'arêtes $[s_1, s_2]$ et $[s_1, s_3]$, c'est-à-dire deux suppressions de sommet s_2 et s_3 . Dans le cas général, la zone d'influence est l'union des polygones d'influence des sommets du triangle. Deux problèmes notables dans la suppression de triangles est le grand nombre de voisins du sommet cible après suppression (égal au nombre de sommets du polygone formant le bord de la zone d'influence), et la taille souvent importante de la zone d'influence. Une illustration est donnée en figure IV.5.

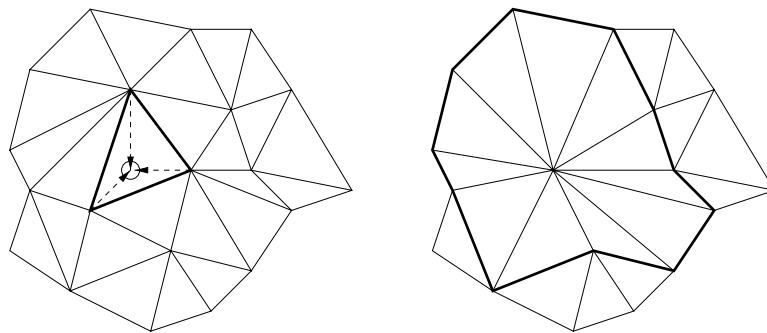


Figure IV.5 — Une opération de suppression de triangle dans le cas général.

Une caractéristique intéressante des deux opérations que nous venons de voir est la possibilité « naturelle » de *transition progressive* entre la triangulation avant et après la suppression (*cf* deuxième étape). Cette transition est appréciable pour éviter des « à-coups » lorsque des maillages de plus en plus complexes doivent être visualisés quand un utilisateur « s'approche » d'un objet, dans un environnement de visualisation virtuelle par exemple. C'est en partie pour cette raison que la suppression d'arêtes est préférée à la suppression de sommets en informatique graphique.

D'un autre côté, l'opération de suppression de sommets est celle qui possède la plus petite zone d'influence, ce qui augmente ses chances d'être valide notamment dans le cas 3D ; par ailleurs la taille de la zone d'influence est une caractéristique importante vis-à-vis des algorithmes que nous allons développer au chapitre V. Enfin, la suppression de sommets est la seule opération n'introduisant pas de nouveaux sommets dans la triangulation⁴.

IV.3. Décimation régulière

La section précédente a donné des outils de simplification de maillages, à savoir dans notre cas l'application itérée d'une opération de suppression de sommet. Nous voulons à présent étendre aux maillages la notion de décimation régulière. Dans le cas d'une suite de points sur la droite, décimer régulièrement revient à supprimer les

4. Ceci n'est pas nécessairement un avantage : la liberté de choisir d'autres sommets peut s'avérer utile pour mieux « coller » à diverses conditions supplémentaires lors de la simplification.

sommets impairs, soit un sur deux, ou plus généralement supprimer un sommet tout les $k > 1$ sommets. On retrouve cette notion dans le cas des maillages à mailles carrées, ou de manière générale pour tout maillage « produit tensoriel ».

L'algorithme suivant s'applique aux triangulations irrégulières et s'inspire de celui qui fut initialement introduit par Kirkpatrick dans [Kir83] :

Algorithme de Décimation Régulière (ADR) à pas $p \geq 1$

```

pour chaque sommet  $s \in \mathcal{T}$ 
    si  $s$  sélectionnable et  $s$  vérifie  $\mathcal{H}$ 
        marquer  $s$  [à supprimer]
        pour chaque sommet  $s'$  du  $p$ -voisinage de  $s$ 
            marquer  $s'$  [non sélectionnable]
    
```

Cet algorithme sélectionne pour suppression un ensemble de sommets séparés par une distance d'au moins $p + 1$. En particulier, le choix $p = 2K$ ($K \geq 1$) assure que les K -voisinages sont *disjoints*. Dans le cas minimal $p = 1$, cela signifie que les polygones d'influence sont disjoints. La triangulation après suppression est donc indépendante de l'ordre dans lequel les suppressions de sommets sont effectuées.

Dans l'algorithme on voit apparaître un *ensemble de conditions* $\mathcal{H}$, qui permet d'imposer certaines propriétés aux sommets supprimés. Parmi ces propriétés, on aura toujours celle d'être un sommet interne.

Une autre condition qui va s'avérer utile et que l'on impose également systématiquement concerne le degré des sommets : on ne sélectionnera que les sommets *ayant un degré inférieur ou égal à un entier l fixé* (on verra au chapitre suivant les répercussions de cette condition).

Notons n_l le nombre de sommets s tels que $\deg(s) \leq l$. Rappelons que m désigne le nombre d'arêtes et notons que

$$\sum_{\{s\} \in \mathcal{C}} \deg(s) = 2m,$$

puisque chaque arête est comptée deux fois dans la somme. Par ailleurs, puisqu'un trou est au moins bordé par 3 sommets externes, on a d'après la formule d'Euler (IV.1)

$$m \leq 3(n - 2 + 2h),$$

ce qui permet d'écrire

$$6(n - 2 + 2h) \geq \sum_{\{s\} \in \mathcal{C}} \deg(s) \geq \sum_{s | \deg(s) > l} \deg(s) \geq (l + 1)(n - n_l),$$

d'où finalement

$$n_l \geq n - \left\lfloor \frac{6(n - 2 + 2h)}{l + 1} \right\rfloor.$$

Le second membre est supérieur ou égal à 1 si et seulement si

$$l + 1 \geq \frac{6(n - 2 + 2h)}{n - 1},$$

c'est-à-dire que si n est raisonnablement grand (suivant le genre), il suffit de prendre $l \geq 6$. En ignorant le fait que ces sommets puissent être des sommets externes (donc non supprimables), on peut donc énoncer :

LEMME IV.1 — *Il suffit de prendre $l \geq 6$ pour être sûr de décimer l'ensemble de la triangulation par applications successives de l'algorithme de décimation.*

Appliquons une étape de l'algorithme de décimation à pas 1. On a donc au moins n_l sommets vérifiant la condition du degré, parmi lesquels seront éliminés ceux qui sont 1-voisins. Puisque chacun de ces sommets possède au plus l voisins, il restera après élimination des sommets liés au moins

$$\left\lceil \frac{n}{l+1} - \frac{6(n-2+2h)}{(l+1)^2} \right\rceil$$

sommets, ce qui représente à peu près une fraction

$$\alpha = \frac{l-5}{(l+1)^2}$$

du nombre de sommets initial. On voit que le fait de prendre $l = 11$ maximise cette fraction, c'est-à-dire minimise le nombre d'itération de l'algorithme nécessaires pour décimer l'ensemble du maillage. Nous résumons cela dans la proposition suivante :

PROPOSITION IV.2 Itérations de l'algorithme de décimation à pas 1 — *Une itération de l'algorithme de décimation à pas 1 sur un maillage comportant n sommets supprime au moins $\alpha \cdot n$ sommets. Le nombre d'itérations nécessaires pour décimer l'ensemble d'un maillage de N sommets appartient donc à $O(\log(N))$, et il est (son espérance)) minimal pour $n = 11$.*

Dans le cas où le pas de l'algorithme est supérieur à 1, il n'est plus possible de quantifier aussi précisément les choses, mais on peut cependant s'attendre à ce que le comportement général soit le même : nombre d'itérations logarithmique en le nombre initial de sommets, nombre de niveaux minimal pour $n = 11$.

Multirésolution pour Fonctions Définies sur des Maillages Irréguliers

ON S'INTÉRESSE dans les deux prochains chapitres au problème de la représentation multirésolution de fonctions définies sur des maillages triangulaires. Plus précisément on considère des fonctions numériques définies par l'intermédiaire d'une triangulation arbitraire d'un domaine de définition donné. Devant la variété des domaines possibles, nous nous focalisons sur deux exemples précis : un carré du plan (qui constitue le « cas planaire ») et la sphère unité (constituant le « cas sphérique »), mais seules des modifications mineures resteraient à faire pour s'adapter à d'autres surfaces. Plus particulièrement encore, le cas planaire sera souvent implicitement supposé dans la majorité des exemples et discussions, et des remarques traiteront les rares aspects spécifiques au cas sphérique.

Les fonctions définies sur des triangulations se rencontrent en particulier dans les méthodes d'éléments finis et aussi dans les travaux de modélisation de terrains, qui sont souvent représentés par des fonctions linéaires par morceaux sur une triangulation d'un domaine plan ([Hop98, LKR⁺96, GGS95]). Conséquence de la densité des maillages utilisés, la complexité de ces fonctions pose alors entre autres le problème de leur visualisation, manipulation, stockage ou transmission.

Lorsque les maillages sous-jacents sont réguliers, les techniques classiques par ondelettes sont toutes indiquées pour répondre à ces questions ([GGS95]). Dans [LM97] et [LM98] sont notamment décrites des familles d'espaces d'« éléments finis » *emboîtés*, bâtis sur des subdivisions régulières d'un maillage initial irrégulier, ouvrant ainsi la voie aux approches ondelettes.

L'objectif de ce chapitre est de généraliser les techniques multirésolution à des fonctions définies sur des maillages irréguliers. On va voir qu'en substituant par rapport au cas classique les espaces d'approximation aux espaces d'échelle, la théorie décrite aux

chapitres précédents fournit un cadre naturel pour la représentation multirésolution de telles fonctions, qui bénéficient alors de la description à plusieurs niveaux de détails.

Dans ce chapitre et le suivant, seules les fonctions constantes ou linéaires par morceaux seront envisagées. Ces deux cas simples sont relativement représentatifs des problèmes que l'on peut rencontrer : le cas constant est un exemple type de ce que nous appelons un cas « local » tandis que le cas linéaire ne l'est pas ; les problèmes relatifs à la non localité sont virtuellement les mêmes pour tout type de fonctions « non-locales ». Enfin le cas linéaire est important car il est de loin le plus rencontré, que ce soit dans les travaux sur les champs de hauteurs ou du fait qu'il soit intimement lié aux maillages surfaciques 3D.

Ce chapitre est grossièrement découpé en trois parties. Dans la première, la multirésolution est introduite d'une manière naturelle directement inspirée des techniques classiques pour maillages réguliers. On verra que cette solution naturelle est également *naïve*, ce qui motivera les techniques décrites dans la deuxième section, qui mettront à jour le lien existant avec les algorithmes dits « de décimation ». Dans le cas de maillages irréguliers, nous allons voir que les contraintes *pratiques* (notamment du point de vue de l'implémentation) sont fortes et par conséquent gouvernent de fait les développements envisageables. Une fois ces aspects algorithmiques fondamentaux dégagés, la troisième partie discute de quelques solutions alternatives pour choisir les opérateurs d'approximation.

Certains des résultats et méthodes exposés dans ce chapitre ont fait l'objet des publications suivantes : [BG98a, BG98b, Bon98], ainsi que [GB99] pour la section V.3 plus spécifiquement.

V.1. Approximation linéaire

Dans cette section nous nous inspirons du cadre multirésolution des ondelettes de Haar pour mettre en oeuvre le mécanisme *non emboîté* décrit aux chapitres II et III. Commençons donc par rappeler la construction des ondelettes de Haar pour des fonctions définies sur un carré du plan.

V.1.1. Ondelettes de Haar dans le cas plan

Pour nous rapprocher le plus possible de notre objectif, nous envisageons la construction des ondelettes de Haar correspondant à un partitionnement par triangles⁵. Rappelons que nous devons définir essentiellement deux composantes : une séquence d'approximation, composée d'espaces d'approximation et d'opérateurs d'approximation associés, et une séquence d'espaces auxiliaires.

Dans le cas des ondelettes de Haar, les espaces d'approximation V^i sont définis comme les espaces des *fonctions constantes par morceaux* sur un maillage triangulaire hiérarchique $\mathcal{M}^i$ du domaine plan. Plus précisément, le maillage hiérarchique est obtenu en posant

$$\mathcal{M}^0 = \{T_1^0, T_2^0\},$$

où T_i^0 sont deux triangles partitionnant le carré plan, puis en découpant récursivement chaque triangle en quatre sous-triangles dont les sommets sont les milieux des cotés

5. Le cas classique est un partitionnement par carrés, qui apparaît de façon naturelle lorsque l'on opère par produit tensoriel à partir des ondelettes de Haar sur l'intervalle : voir [SDS95a, SDS95b] pour une présentation particulièrement claire.

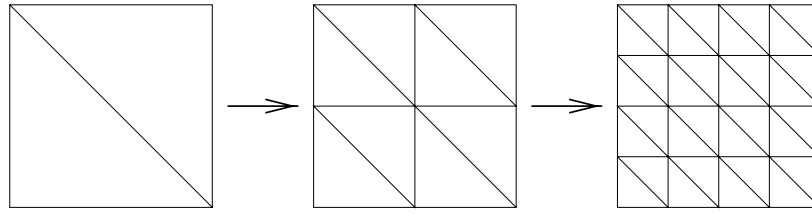


Figure V.1 — Subdivision régulière des triangles.

des triangles (voir figure V.1). On remarquera que cela donne lieu à des espaces d'approximation emboîtés. Les opérateurs d'approximation P^i associés sont définis comme les projecteurs orthogonaux de l'espace V^{i+1} dans V^i . Il en résulte des espaces de détail W^i orthogonaux aux espaces V^i , et il résulte de l'emboîtement que les espaces auxiliaires sont confondus avec les espaces d'approximation : c'est un cas complet, cf remarque p. 17.

Pour un niveau n fixé, on peut choisir les fonctions ϕ^n indicatrices des triangles de $\mathcal{M}^n$ comme fonctions de base. On voit aisément que relativement à ces bases, les opérateurs d'approximation possèdent une propriété de *localité* : la valeur de la projection orthogonale d'une fonction f^{n+1} sur un triangle $\mathcal{T}_i^n$ ne dépend que de la valeur de ses quatre triangles « fils » au niveau $n+1$. Ainsi l'opération de P^n se résume à l'application séquentielle d'opérateurs de projection restreints au support des triangles de niveau n . Ceci se traduit par une représentation matricielle simple (« diagonale » par blocs). La figure V.2 représente localement à un triangle et ses fils un choix de bases pour les différents espaces, correspondant à des ondelettes orthogonales.

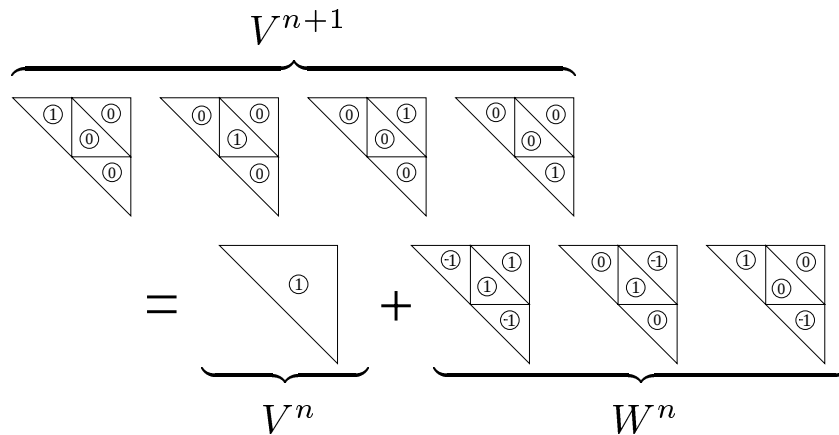


Figure V.2 — Bases « locales » pour les ondelettes de Haar.

Si la subdivision des triangles n'est pas faite de manière uniforme (ou bien, vu dans l'autre sens, la décimation n'est pas régulière), on obtient des suites d'espaces non imbriqués puisque les supports des fonctions ne s'intersectent pas proprement. Par rapport à notre cadre multirésolution, on perd donc l'aspect « complet », mais on peut toujours considérer une multirésolution non emboîtée basée sur ces espaces fonctionnels. C'est ce que nous examinons jusqu'à la fin de cette partie.

V.1.2. Séquence d'approximation dans le cas irrégulier

Dans le cas irrégulier, nous partons en sens inverse : on suppose donnée une triangulation arbitraire du domaine (plan ou sphère), puis on décime celle-ci à l'aide de l'opération élémentaire de suppression de sommet (cf chapitre IV).

V.1.2.1. Construction des maillages : espaces d'approximation

Notons $\mathcal{T}^N$ la triangulation irrégulière initiale. Pour le choix des sommets à supprimer, une première idée est de supprimer n_1 sommets choisis aléatoirement, donnant le maillage $\mathcal{T}^{N-1}$ sous-jacent au premier espace d'approximation, puis de supprimer toujours aléatoirement un nouvel ensemble de n_2 sommets, etc. Les différences entre deux maillages successifs $\mathcal{T}^{n+1}$ et $\mathcal{T}^n$ sont alors décrites par une suite de *polygones d'influence cumulés* définis à partir des polygones d'influence Γ_i^n de chaque sommet supprimé de la manière suivante :

$$\Lambda_k^n = \text{Frontière}(\Gamma_{k_1}^n \cup \dots \cup \Gamma_{k_l}^n),$$

avec $\Lambda_k^n \cap \Gamma_i^n = \emptyset$, $\forall i \notin \{k_1, \dots, k_l\}$ (par " $\emptyset$ ", nous entendons *triviale*). La définition est sans doute plus claire sur la figure V.3, où l'on montre la construction des polygones d'influence cumulés sur un exemple de séquence de décimation.

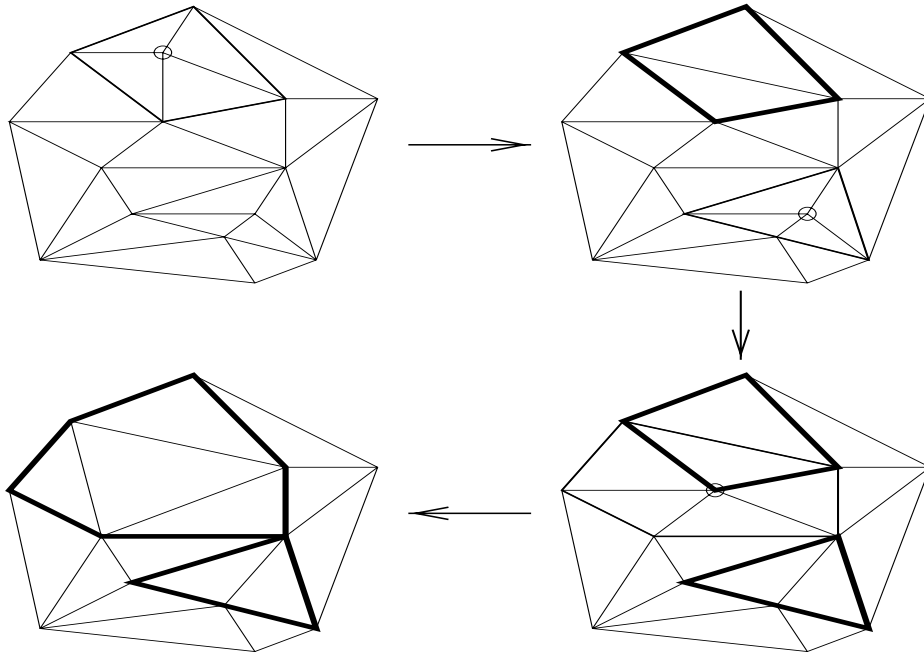


Figure V.3 — Polygones d'influence cumulés (—) résultant de la suppression de 3 sommets.

Le passage d'une triangulation à la suivante est par conséquent composé de changement sur l'union *disjointe* des polygones d'influence cumulés. Si nous nous plaçons dans l'optique de modéliser des fonctions constantes par morceaux associées à des opérateurs de projection orthogonale, nous observerons comme à la section précédente un phénomène de localité des opérateurs d'approximation.

Cette approche « aléatoire » comporte cependant deux problèmes :

- Contrairement au cas régulier, la manipulation de triangulations irrégulières nécessite l'emploi d'une structure de donnée représentant la triangulation. La gestion de la notion de polygone d'influence cumulé demande des structures dédiées

ajoutant encore à la complexité et la taille de l'ensemble des données liées à la triangulation.

- On perd le caractère *uniforme* de la décimation des triangulations régulières.

On peut remédier à ces deux handicaps en renonçant à la décimation aléatoire pour la stratégie de décimation régulière qui a été présentée au chapitre IV. Dans ce cas les polygones d'influence cumulés sont exactement les polygones d'influence des sommets supprimés ; aucune structure additionnelle n'est par conséquent requise et on peut ajuster la « densité » de la décimation *via* le pas p de l'algorithme de la p. 81.

Nous définissons à présent les espaces d'approximation. Comme annoncé en introduction, nous considérons le cas de fonctions constantes ou linéaires.

DÉFINITIONS V.1 Espaces d'approximation — Soit $\mathcal{T}$ une triangulation arbitraire d'un domaine Ω plan ou sphérique fixé. On note $\mathcal{T}^i$, $i = 0, \dots, N$ les triangulations obtenues par applications successives de l'algorithme de décimation à pas p (fixé) à la triangulation $\mathcal{T}^N := \mathcal{T}$.

On note $\mathcal{C}^i$, $i = 0, \dots, N$, les espaces d'approximation formés des fonctions constantes par morceaux (en abrégé : CPM) sur la triangulation $\mathcal{T}^i$, appelée triangulation sous-jacente.

On note $\mathcal{L}^i$, $i = 0, \dots, N$, les espaces d'approximation formés des fonctions linéaires et continues par morceaux (en abrégé : LCPM) sur la triangulation $\mathcal{T}^i$.

On substituera indifféremment la lettre $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{L}$ à la lettre $\mathcal{K}$. Les espaces $\mathcal{K}^i$ sont considérés comme des sous-espaces de l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$.

Examinons les bases « canoniques » de ces différents espaces. On appelle *fonction chapeau* centrée en un sommet $\mathcal{M}$ d'une triangulation $\mathcal{T}$ l'unique fonction LCPM sur $\mathcal{T}$ valant 1 en $\mathcal{M}$ et 0 en les autres sommets.

DÉFINITIONS V.2 Bases de $\mathcal{K}^i$ — On utilise indifféremment la notation $\mathcal{T}_j^i$ pour désigner un triangle de $\mathcal{T}^i$ ou sa fonction indicatrice. Les fonctions $\mathcal{T}_j^i$ forment une base orthogonale de $\mathcal{C}^i$.

La notation $\mathcal{M}_j^i$ désigne un sommet de $\mathcal{T}^i$ ou la fonction chapeau centrée en ce sommet dans la triangulation. Les fonctions $\mathcal{M}_j^i$ forment une base interpolante de $\mathcal{L}^i$.

Suivant le contexte, les fonctions de l'une ou l'autre de ces bases seront désignées par ϕ_k^i .

La figure V.4 illustre la décomposition d'une fonction LCPM sur une triangulation en la base des fonctions chapeaux.

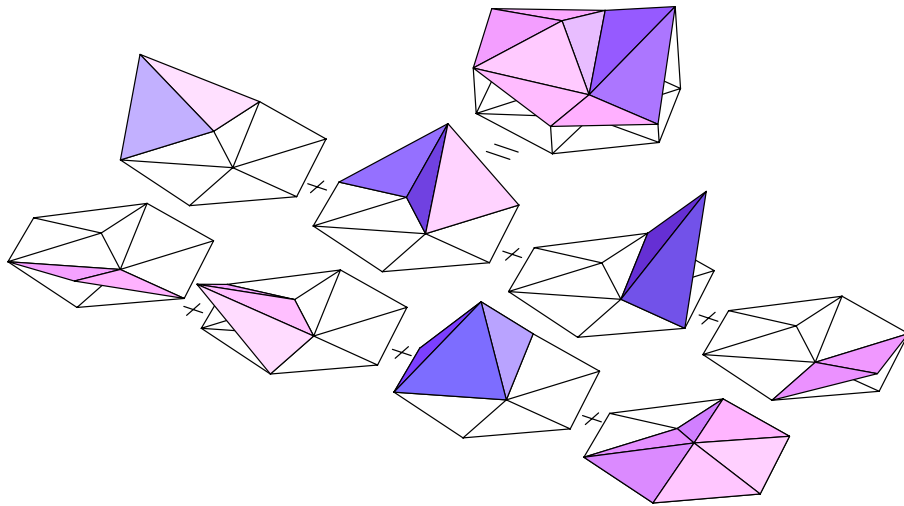


Figure V.4 — Une fonction LCPM et sa décomposition dans la base canonique.

Remarque. — Dans le cas sphérique, la notion de fonction linéaire n'est pas immédiatement claire. Nous adoptons d'une manière générale la définition suivante [ANS96] : une fonction polynomiale de degré d sur la sphère est la restriction à la sphère d'une fonction polynomiale de degré d définie dans $\mathbb{R}^3$. La notion de fonction linéaire est étroitement liée à celle de *coordonnées barycentriques*, qui sont non triviales à définir sur la sphère. Sur ces questions, on pourra consulter [ANS96, BF85, ANS95, BW92] pour de plus amples détails.

V.1.2.2. Opérateurs d'approximation

Il nous faut à présent adjoindre des opérateurs pour compléter la séquence d'approximation. Dans ce chapitre nous nous focalisons sur un exemple précis toujours en nous inspirant des ondelettes de Haar : nous basons les opérateurs d'approximation sur la projection orthogonale d'un espace d'approximation sur le suivant. Ce choix particulier va fournir les premiers exemples et l'analyse des difficultés rencontrées permettra de situer ce qu'il est raisonnable d'envisager avec la multirésolution non emboîtée de ce qui ne l'est pas, et avec quelles stratégies y arriver.

DÉFINITION V.3 Opérateurs d'approximation — Pour tout $k = 0, \dots, N - 1$, les opérateurs d'approximation sont définis par

$$\begin{aligned} P^k : \mathcal{K}^{k+1} &\longrightarrow \mathcal{K}^k \\ f^{k+1} &\longmapsto \mathcal{P}_{\mathcal{K}^k}^\perp(f^{k+1}). \end{aligned}$$

Dans des bases, la matrice de l'opérateur d'approximation est donnée par la formule classique

$$P_{\phi^{k+1}; \phi^k}^k = \mathcal{G}_{\phi^k}^{-1} \mathcal{G}_{[\phi^k; \phi^{k+1}]}. \quad (\text{V.1})$$

Nous examinons à présent de plus près le calcul effectif de l'opérateur d'approximation.

- Commençons par **le cas constant**. La base canonique $\mathcal{T}^k$ est orthogonale ; par conséquent la matrice $\mathcal{G}_{\phi^k}$ est simplement diagonale, et le calcul de son inverse est trivial.

D'autre part, puisque les changements dans la triangulation ont uniquement lieu dans les polygones d'influence des points supprimés, on voit que la matrice $\mathcal{G}_{[\phi^k; \phi^{k+1}]}$ est également diagonale par blocs (avec une numérotation adéquate des triangles). Les blocs sont de taille 1 pour un triangle $\mathcal{T}_i^{k+1}$ encore présent dans $\mathcal{T}^k$; par contre on a des blocs de taille $(n - 2) \times n$ pour chaque polygone d'influence correspondant à un sommet de degré n supprimé (formule d'Euler dans le PI). On vérifie facilement que ces blocs sont les matrices des projecteurs orthogonaux locaux à chaque polygone d'influence (voir également la paragraphe V.1.4.2). Entre les fonctions basées sur les triangles couvrant le polygone avant et après suppression, le produit scalaire est égal à l'aire de l'intersection des triangles en question. En particulier il est nécessaire de calculer l'intersection des triangles « fins » (avant suppression) et les triangles « grossiers » (après suppression).

Le calcul d'un bloc de la matrice $\mathcal{G}_{[\phi^k; \phi^{k+1}]}$ correspondant à un polygone d'influence est schématisé en figure V.5.

On remarquera que la taille des blocs est directement contrôlable en ajustant le degré maximal des sommets supprimés dans l'ADR. En particulier, le lemme IV.1

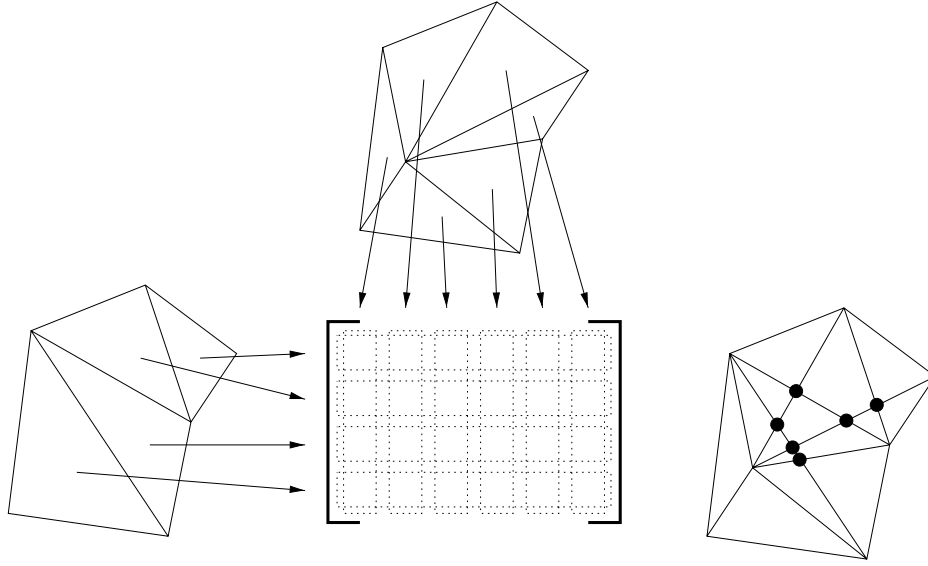


Figure V.5 — Calcul du produit scalaire entre les fonctions d'un polygone d'influence.

assure qu'il est possible d'avoir des blocs de taille maximale 4×6 , ce qui est très raisonnable.

• **Le cas linéaire.** La situation est radicalement différente puisque cette fois, l'application de la formule (V.1) donne pour l'opérateur $\mathcal{P}^\perp$ une matrice *pleine*, car les fonctions de base $\mathcal{M}^i$ ne sont pas orthogonales entre elles. On perd donc le caractère local de l'approximation : même la suppression d'un seul sommet (donc une modification très localisée du maillage) requiert la modification de *toutes* les valeurs aux sommets restants afin d'avoir la meilleure approximation au sens de la norme L^2 . Du point de vue des coûts de calcul, cela est inacceptable.

Dans le but de résoudre ce problème, observons que puisque dans le cas de la suppression d'un seul sommet $\mathcal{M}_j^{i+1}$, le maillage est modifié uniquement localement, il est raisonnable de penser que la meilleure approximation $f^i := \mathcal{P}^\perp(f^{i+1})$ ne diffère que très peu de la fonction initiale f^{i+1} *en-dehors d'un voisinage de $\mathcal{M}_j^{i+1}$* de taille suffisante.

Plus précisément, nous introduisons un *paramètre de localité* $K \geq 0$ entier fixé. Appliquons alors à la triangulation $\mathcal{T}^{i+1}$ une étape de l'algorithme de décimation régulière avec un pas supérieur ou égal au $\max(1, 2K)$, puis notons

$$\mathcal{S} = \{j_1, \dots, j_n\},$$

les indices des n sommets supprimés, et $\mathcal{V}_{j_k, K}$ l'ensemble des indices des sommets formant le K -voisinage de $\mathcal{M}_{j_k}^{i+1}$ dans $\mathcal{T}^{i+1}$, pour $k = 1, \dots, n$. Le pas de décimation a été choisi suffisamment grand pour que les ensembles $\mathcal{V}_{j_k, K}$ soient *disjoints*. Par conséquent, l'ensemble $\llbracket 1, n_i \rrbracket$ des indices des sommets de $\mathcal{T}^i$ est partitionné en

$$R \cup \bigcup_{k=1}^n \mathcal{V}_{j_k, K},$$

où R est l'ensemble des indices des sommets qui ne sont pas dans un des K -voisinages. Supposons maintenant que $K \geq 1$; alors au partitionnement précédent nous pouvons

associer deux *sommes directes* de sous-espaces, en définissant d'abord

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^{i+1} &= \mathcal{L}_0^i = \text{Span}\{\mathcal{M}_k^i \mid k \in R\}, \\ \mathcal{L}_j^i &= \text{Span}\{\mathcal{M}_k^i \mid k \in \mathcal{V}_j\}, \quad \forall j \in \mathcal{S}, \\ \mathcal{L}_j^{i+1} &= \text{Span}\{\mathcal{M}_k^{i+1} \mid k \in \mathcal{V}_j \cup \{j\}\}, \quad \forall j \in \mathcal{S},\end{aligned}$$

pour avoir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^i &= \mathcal{L}_0^i \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{S}} \mathcal{L}_j^i, \\ \mathcal{L}^{i+1} &= \mathcal{L}_0^{i+1} \oplus \bigoplus_{j \in \mathcal{S}} \mathcal{L}_j^{i+1}.\end{aligned}$$

Notons $R_j : \mathcal{L}^{i+1} \rightarrow \mathcal{L}_j^{i+1}$, $j \in \{0\} \cup \mathcal{S}$ les $n+1$ projecteurs associés à cette dernière somme directe. Le *projecteur localisé* P_{loc}^i est alors défini par

$$\begin{aligned}P_{\text{loc}}^i : \mathcal{L}^{i+1} &\longrightarrow \mathcal{L}^i \\ f^{i+1} &\longmapsto f^i := (R_0 + \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{j_1}^i}^\perp \circ R_{j_1} + \cdots + \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{j_n}^i}^\perp \circ R_{j_n})(f^{i+1}).\end{aligned}$$

Autrement dit, la projection orthogonale *globale* est remplacée par des projections orthogonales *locales* sur des espaces « centrés » autour des sommets supprimés. Lorsque $K = 0$ nous convenons que P_{loc}^i soit simplement l'opérateur de *sous-échantillonnage* défini par

$$\begin{aligned}P_{\text{loc}}^i : \mathcal{L}^{i+1} &\longrightarrow \mathcal{L}^i \\ f^{i+1} = \sum_j v_j^{i+1} \mathcal{M}_j^{i+1} &\longmapsto f^i = \sum_{j \notin \mathcal{S}} v_j^{i+1} \mathcal{M}_j^i.\end{aligned}$$

Intuitivement, il paraît clair que le projecteur localisé approche correctement le projecteur orthogonal. Cependant, le démontrer et quantifier plus précisément l'approximation est assez délicat, compte tenu de la généralité du cadre : des triangulations totalement irrégulières. Pour éviter de trop s'écarter du sujet de ce chapitre, nous avons placé l'étude en annexe A. Retenons-en simplement le résultat essentiel : l'approximation est effectivement de bonne qualité, avec convergence exponentielle lorsque K augmente. À la section V.1.3 des exemples confirmeront que de très bons résultats sont obtenus avec $K = 2$ et même $K = 1$.

Remarque. — En ce qui concerne la qualité d'approximation de l'opérateur localisé du point de vue de l'erreur $\|f^N - f^k\|$ entre la fonction originale et son approximation à un niveau k (point de vue non emboîté, cf définition III.9), le paramètre de localité K n'est pas le seul critère entrant en jeu. En effet le choix du pas de décimation utilisé dans l'ADR conditionne le nombre total N de niveaux, et par là agit sur $f^k = P^{N,k}(f^N)$. On peut s'attendre à ce que l'augmentation du nombre de niveaux, c'est-à-dire l'augmentation du nombre d'approximations successives, détériore la qualité d'approximation de $P^{N,k}$, malgré des opérateurs « élémentaires » P^k meilleurs. Voir la section V.1.3 pour les premiers exemples.

La localisation donne à nouveau à l'opérateur d'approximation P_{loc}^i une matrice diagonale par blocs, chacun de ces blocs étant la matrice de la projection orthogonale de $\mathcal{L}_j^{i+1}$ sur $\mathcal{L}_j^i$, relativement aux bases canoniques de ces espaces. Par conséquent, ces matrices sont de taille $(n_j + 1) \times n_j$; on notera le contrôle que l'on peut exercer sur n_j en jouant sur le degré maximal autorisé pour les sommets sélectionnés pour suppression par l'ADR⁶.

6. Ce contrôle est toutefois moins « direct » que dans le cas constant si $K > 1$; en guise d'alternative,

Remarque. — La structure diagonale par blocs de la matrice de projection dans le cas constant provient exactement du même type de décomposition de $\mathcal{T}^{k+1}$ et $\mathcal{T}^k$ en sommes directes de sous-espaces que celles qui ont servi à définir l'opérateur P_{loc}^k dans le cas linéaire. La différence étant que dans le cas constant, ces sommes sont orthogonales et il en résulte que l'opérateur « local » est en fait « global ».

Terminons en disant quelques mots sur le calcul des produits scalaires entre fonctions chapeaux. Entre fonctions de même « niveau », trois cas sont possibles :

- Produit scalaire d'une fonction avec elle-même : il s'agit d'intégrer le produit de deux fonctions linéaires sur chacun des triangles formant le support de la fonction.
- Produit scalaire entre deux fonctions voisines : l'intégration porte alors uniquement sur les deux triangles communs.
- Produit scalaire entre fonctions non voisines : résultat nul.

Plus délicat est le calcul des produits scalaires du type $\langle \mathcal{M}_k^{i+1}, \mathcal{M}_l^i \rangle$ lorsque $\{k, l\} \subset \mathcal{V}_{j_k, 1}^{i+1}$. Comme dans le cas constant, il faut calculer l'intersection des triangles, puis intégrer le produit des fonctions linéaires sur les polygones formant l'intersection. Pour ce faire, il est pratique d'utiliser la formule de Stokes, qui permet de ramener l'intégration sur la frontière des polygones, celle-ci ayant l'avantage d'être facilement paramétrable (contrairement à la surface intérieure des polygones).

V.1.2.3. Réduction de la taille des matrices dans le cas linéaire

Remarque. — On pourra sans problème passer en première lecture ce paragraphe relativement technique qui ne présente d'intérêt que dans des cas bien précis.

Nous venons de voir que la taille des matrices de projection « localisées » sont de taille $(n+1) \times n$ relativement aux bases canoniques, n étant le nombre de K -voisins du sommet supprimé. Nous allons montrer qu'en exploitant la localité des changements de la triangulation lors de la suppression d'un sommet, qui se répercute dans le fait qu'un faible nombre de fonctions de bases sont altérées (figure V.6), on peut réduire la taille de ces matrices à $(m+1) \times m$, où m est le nombre de 1-voisins du sommet supprimé, indépendamment du paramètre $K \geq 1$.

Il faut naturellement nuancer ce résultat : il passe par un choix de bases judicieux, et la détermination de ces bases nécessite un « pré-traitement » qui a un coût non négligeable. Cependant, une fois ces bases trouvées, on a affaire dans la formule (V.1) à des matrices de taille réduite, ce qui présente deux avantages :

- un calcul plus rapide de la matrice de projection, notamment l'inversion de matrice dans (V.1) ;
- une matrice de projection de petite taille, ce qui permet d'envisager efficacement d'autres traitements postérieurs (voir paragraphe V.3.1.1 avec la subdivision isométrique).

À titre d'exemple, dans le cas d'une triangulation régulière, le nombre de 3-voisins est de 36 contre 6 1-voisins seulement.

On conserve les notations du paragraphe précédent, en se plaçant dans un cadre local correspondant à un des couples d'espaces $\mathcal{L}_j^{i+1}$ et $\mathcal{L}_j^i$, dont nous omettrons l'indice j pour alléger l'écriture. La triangulation sous-jacente est le K -voisinage du sommet

on peut imposer une condition directement sur le nombre total de sommets dans le voisinage, mais on ne peut être sûr alors de pouvoir décimer tous les sommets.

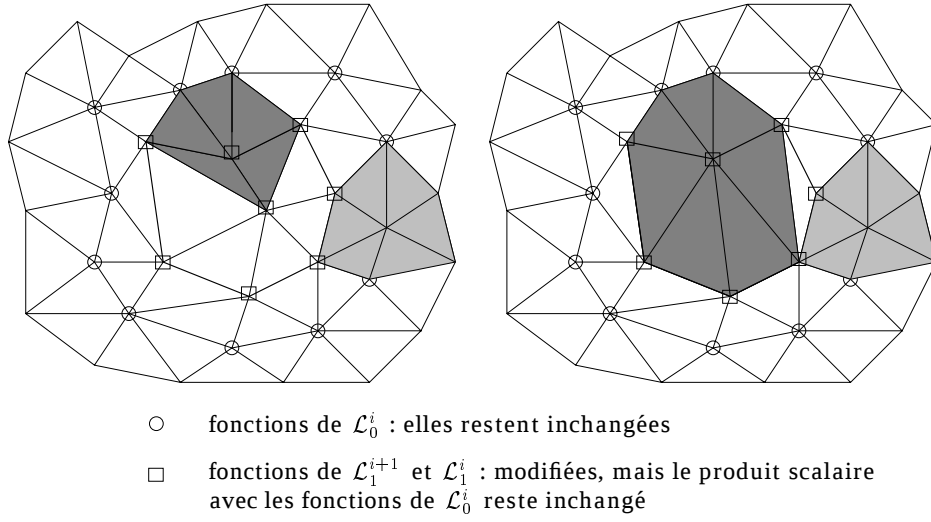


Figure V.6 — Cadre local : bases canoniques avant et après suppression.

supprimé, avant et après suppression de celui-ci, respectivement. Comme illustré à la figure V.6, les fonctions de bases $\mathcal{M}^{i+1}$ peuvent se classer en trois groupes :

- 1) la fonction $\mathcal{M}_0^{i+1}$ qui correspond au sommet supprimé, et qui n'est plus présente dans $\mathcal{L}^i$;
- 2) les fonctions centrées sur les sommets 1-voisins du sommet supprimé, qui disparaissent mais peuvent être associées aux fonctions centrées sur le même sommet dans $\mathcal{L}^i$;
- 3) les fonctions restantes, k -voisines avec $2 \leq k \leq K$, qui se retrouvent inchangées dans $\mathcal{L}^i$.

Aux fonctions de ce dernier groupe, nous associons l'espace $\mathcal{L}_0$ qu'elles engendrent. $\mathcal{L}_0$ étant un sous-espace commun de $\mathcal{L}^{i+1}$ et $\mathcal{L}^i$, nous pouvons écrire

$$\mathcal{L}^{i+1} = \mathcal{L}_0 \oplus^\perp \mathcal{L}_1^{i+1}, \quad \mathcal{L}^i = \mathcal{L}_0 \oplus^\perp \mathcal{L}_1^i.$$

L'avantage de ce « découpage » est que l'opérateur de projection orthogonale se factorise :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}^i}^\perp = \mathcal{P}_{\mathcal{L}_0}^\perp + \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1^i}^\perp.$$

Si on écrit $f^{i+1} = f_0^{i+1} + f_1^{i+1}$ selon la somme directe ci-dessus, on voit que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{L}^i}^\perp(f^{i+1}) &= \mathcal{P}_{\mathcal{L}_0}^\perp(f^{i+1}) + \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1^i}^\perp(f^{i+1}) \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{L}_0}^\perp(f_0^{i+1}) + \mathcal{P}_{\mathcal{L}_0}^\perp(f_1^{i+1}) + \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1^i}^\perp(f_0^{i+1}) + \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1^i}^\perp(f_1^{i+1}) \\ &= f_0^{i+1} + \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1^i}^\perp(f_1^{i+1}), \end{aligned}$$

ce qui ramène essentiellement le calcul de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}^i}^\perp(f^{i+1})$ à celui de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1^i}^\perp(f_1^{i+1})$. Or nous avons

$$\dim(\mathcal{L}_1^{i+1}) = m + 1 \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{L}_1^i) = m,$$

d'où la taille réduite annoncée pour la matrice de l'opérateur de projection.

Nous regardons à présent de plus près comment utiliser les remarques précédentes *en pratique* ; au passage cela permettra d'évaluer la quantité de calculs effectivement nécessaire.

Nous supposons évaluées les matrices du produit scalaire relativement aux différentes bases canoniques. Connaissant déjà une base de l'espace $\mathcal{L}^0$, la première étape est de déterminer une base pour les espaces $\mathcal{L}_1^{i+1}$ et $\mathcal{L}_1^i$, et à cet effet on pourra procéder comme suit :

- Une première fonction de base pour $\mathcal{L}_1^{i+1}$ est $\mathcal{M}_0^{i+1}$: en effet elle est orthogonale à $\mathcal{L}^0$ puisque son support est disjoint de ceux des fonctions de $\mathcal{L}^0$.
- Les autres fonctions de base de $\mathcal{L}_1^{i+1}$ (resp. $\mathcal{L}_1^i$) sont obtenues en partant de chacune des fonctions $\mathcal{M}_j^{i+1}$ (resp. $\mathcal{M}_j^i$), 1-voisines du sommet supprimé, et en les orthogonalisant par rapport à la base de $\mathcal{L}^0$. On peut noter en observant la figure V.6 que le résultat est exactement *le même* dans le cas des $\mathcal{M}_j^i$ et des $\mathcal{M}_j^{i+1}$: on obtient des fonctions dont le support est l'ensemble du domaine et qui ne diffèrent que par leur « partie intérieure » au polygone d'influence. Reste à effectuer cette orthogonalisation, par exemple dans le cas de $\mathcal{L}_1^i$. Notons U la matrice $n \times m$ dont les colonnes sont les coordonnées des m fonctions recherchées dans la base canonique. On voit que U est solution du système

$$G_1 U = 0$$

avec $\mathcal{G}_{\mathcal{M}_1^i} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix}$, G_0 correspondant aux fonctions 1-voisines du sommet supprimé. Notons que de par la disposition des fonctions, la matrice G_1 est essentiellement *creuse*. Une fois ces fonctions déterminées, on obtient une base b_1^1 de $\mathcal{L}^{i+1}$ et une base b_1^0 de $\mathcal{L}^i$, relativement auxquelles la matrice de projection est de la forme

$$P_{b_1^1; b_1^0} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-m} \end{bmatrix},$$

où A est la matrice $(m+1) \times m$ de la projection orthogonale sur $\mathcal{L}_1^i$. En pratique, il faut encore calculer les matrices de passage $\mathcal{P}_{b_1^i; \mathcal{M}_1^i}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{M}_1^{i+1}; b_1^{i+1}}$ des bases canoniques vers les bases « localisées ». D'après le procédé de construction donné plus haut, en plaçant les fonctions de bases issues des 1-voisins en premier, on a

$$\mathcal{P}_{b_1^i; \mathcal{M}_1^i} = \left[U \quad \begin{array}{c} 0_{m, n-m} \\ \text{Id}_{n-m} \end{array} \right],$$

et $\mathcal{P}_{\mathcal{M}_1^{i+1}; b_1^{i+1}} = \text{Inv}(\mathcal{P}_{b_1^{i+1}; \mathcal{M}_1^{i+1}})$, avec

$$\mathcal{P}_{b_1^{i+1}; \mathcal{M}_1^{i+1}} = \begin{bmatrix} U_1 & 0_{m, n-m+1} \\ U_2 & \text{Id}_{n-m+1} \end{bmatrix},$$

avec $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$, U_1 matrice $m \times m$, et où l'on a placé la fonction $\mathcal{M}_0^{i+1}$ en dernière position dans la base b_1^{i+1} . Fort heureusement (faute de quoi nos efforts seraient presque entièrement vains), l'inversion de cette matrice s'effectue aisément puisque l'on vérifie immédiatement que son inverse est donnée par

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}_1^{i+1}; b_1^{i+1}} = \begin{bmatrix} U_1^{-1} & 0_{m, n-m+1} \\ -U_2 U_1^{-1} & \text{Id}_{n-m+1} \end{bmatrix}.$$

Remarque. — Il est possible d'exploiter d'avantage encore les relations entre les fonctions chapeaux avant et après suppression, notamment en ce qui concerne les matrices du produit scalaire, pour réduire au minimum le coût des calculs lors de l'implémentation. De ce point de vue, les méthodes que nous décrivons ici uniquement dans les grandes lignes demandent beaucoup de soins afin d'être implémentées correctement. Nous n'entrerons pas plus avant dans ces aspects, mais signalons qu'ils ont leur importance dans un algorithme pyramidal où ces décompositions sont effectuées un très grand nombre de fois. C'est une des difficultés à surmonter quand on désire traiter des triangulations totalement irrégulières ne laissant place à aucune forme de pré-traitement.

V.1.3. Exemples

Nous donnons sans plus attendre quelques exemples de hiérarchies d'approximation.

La triangulation sous-jacente initiale est une triangulation de Delaunay construite par insertion aléatoire de 25 000 points dans une triangulation d'un carré plan (2 triangles). La planche V.1 montre les résultats dans le cas constant et linéaire pour différents choix du paramètre de localité K et du pas de décimation. Les chiffres accompagnant chaque image sont de la forme nombre_de_sommets/niveau de la triangulation dans la hiérarchie. Le degré maximal des sommets a été fixé à 11 conformément au lemme IV.1, afin de minimiser le nombre de niveaux.

La première ligne montre les résultats dans le cas constant, avec le pas de décimation « naturel », égal à 1. Les trois lignes restantes concernent le cas linéaire. Le pas a été choisi minimal par rapport au paramètre de localité, c'est-à-dire 1 pour $K = 0$ (sous-échantillonnage), 2 pour $K = 1$ et 6 pour $K = 3$. On observe un phénomène de lissage plus important à mesure que K croît. Cela est dû d'une part aux projecteurs localisés de support plus important mais aussi à l'accroissement du nombre de niveaux provenant de l'augmentation du pas de décimation. Le tableau suivant donne le nombre de niveaux pour quelques valeurs du pas.

Pas de décimation	1	2	4	6
Nombre de niveaux N	29	76	452	604

Afin de jauger plus précisément la qualité d'approximation des opérateurs $P^{N,k}$ selon la valeur de K et d'illustrer les idées évoquées dans la remarque p.90, nous avons comparé l'erreur L_2 relative

$$\frac{\|f^N - f^k\|}{\|f^N\|}$$

dans deux configurations « extrêmes » :

- 1) pour un pas de décimation suffisamment grand, ici 6, identique pour toutes les valeurs de K ;
- 2) pour le pas de décimation minimal selon K (cf planche V.1).

Les résultats sont présentés à la figure V.7. Dans le premier cas, ils confirment la convergence très rapide de l'opérateur de projection localisé lorsque K augmente : seule une différence minime est observée même pour un faible nombre de sommets entre $K = 1$ et $K = 3$ ($K = 2$ n'a pas été représenté car il est confondu avec $K = 3$). En revanche la différence est nette avec le sous-échantillonnage.

La deuxième configuration montre comment l'augmentation du nombre de niveaux nuit à la qualité d'approximation, malgré de meilleurs projecteurs locaux : $K = 3$ est parfois plus mauvais que $K = 0$, tandis que $K = 1$ et 2 restent équivalents.

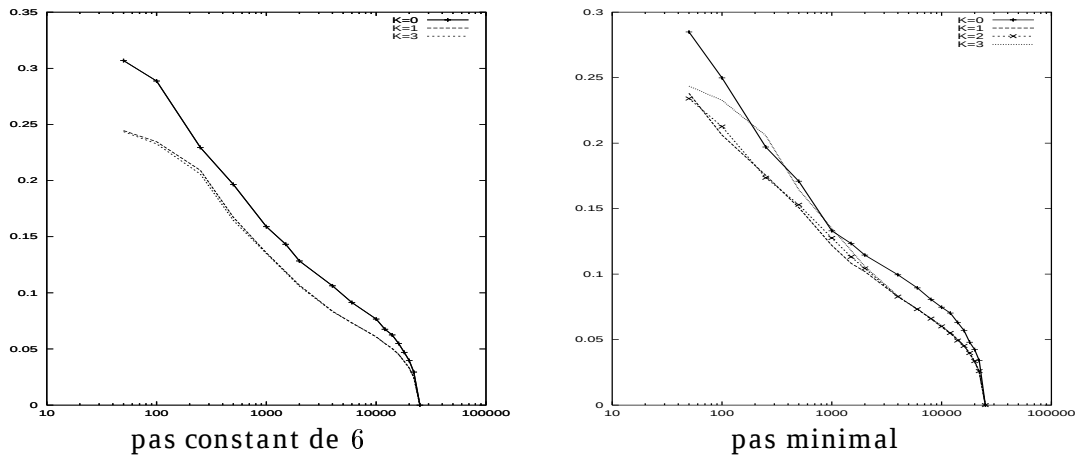


Figure V.7 — Erreur L_2 relative selon la localité, dans le cas linéaire.

V.1.4. Espaces auxiliaires dans le cas irrégulier

Pour compléter le cadre multirésolution, il faut à présent choisir les espaces auxiliaires ou, de façon équivalente, les opérateurs de synthèse.

V.1.4.1. Surjectivité des opérateurs d'approximation

Comme nous l'avons remarqué à la section II.1.2 lors de la construction algébrique de la multirésolution non emboîtée, la surjectivité des opérateurs d'approximation est une question essentielle si l'on désire faire de la reconstruction partielle. Nous discutons ici de la surjectivité des opérateurs d'approximation de projection (quasi-)orthogonale définis précédemment.

- Dans le **cas constant**, il n'y a *pas* surjectivité en général. Les situations de non surjectivité sont d'ailleurs relativement fréquentes. Fondamentalement, cela est dû au fait suivant : dans un quadrilatère $ABCD$ dont les diagonales AC et BD se coupent en I , on a $\mathcal{A}(ADI)\mathcal{A}(BCI) = \mathcal{A}(CDI)\mathcal{A}(ABI)$, où $\mathcal{A}$ désigne l'aire des triangles. Grâce à cette observation et à la formule (V.1) donnant l'expression de la matrice de projection, on montre par exemple qu'à toutes les situations topologiquement équivalentes à celle illustrée à la figure V.8 va correspondre une projection non surjective : il suffit d'appliquer la propriété de proportionnalité des aires aux trois quadrilatères semblables à celui représenté en traits épais.

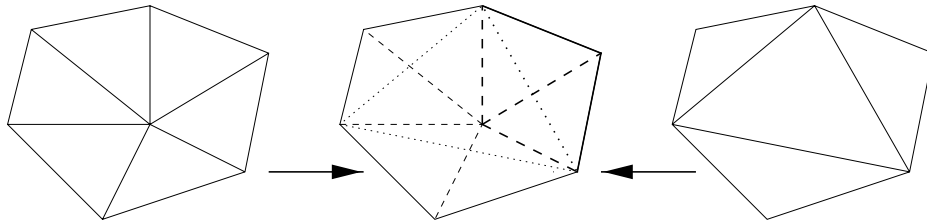
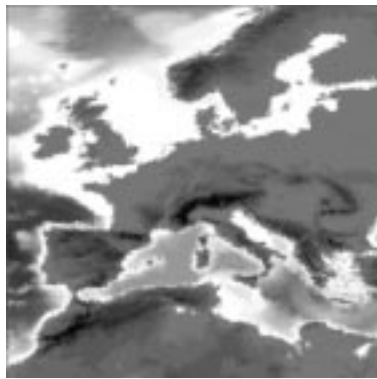


Figure V.8 — Exemple de configuration menant à une projection non surjective dans le cas constant.

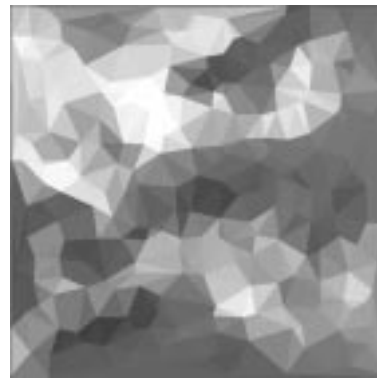
- Dans le **cas linéaire**, nous avons été amené à conjecturer que la projection est *toujours surjective*, n'ayant jamais rencontré d'exemple de non surjectivité dans les nombreux exemples traités. Cette propriété est relativement simple à montrer dans



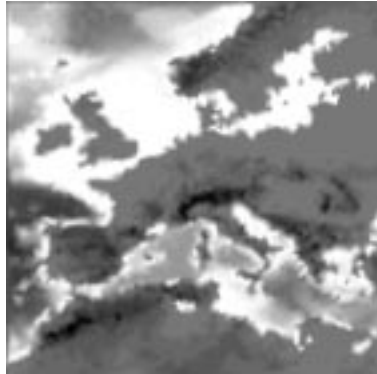
données initiales : 25 000 s.



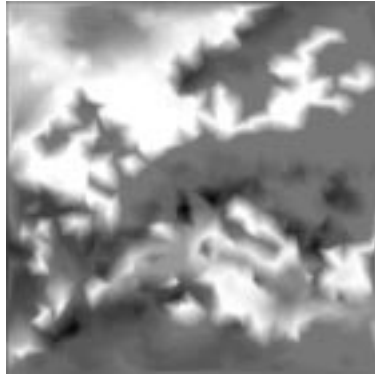
constant : 2664/21



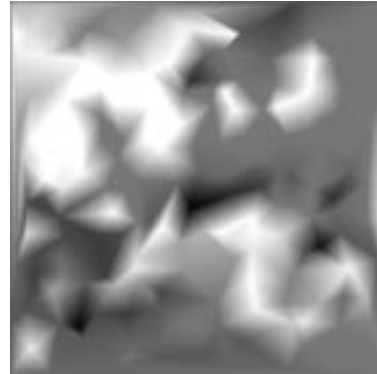
constant : 220/12



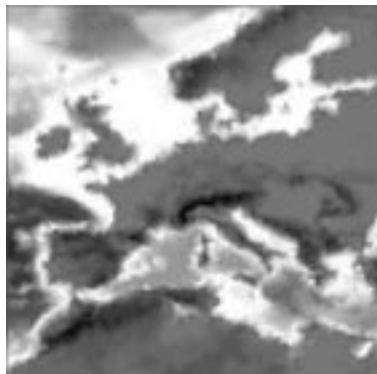
linéaire : $K = 0$, 4676/23



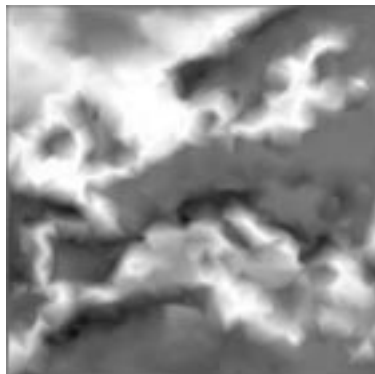
linéaire : $K = 0$, 1176/18



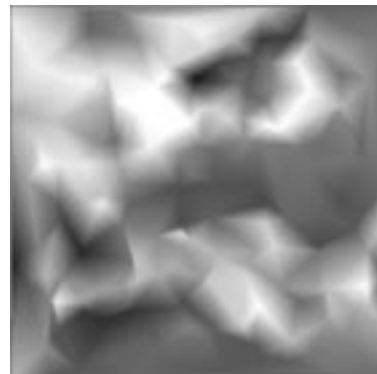
linéaire : $K = 0$, 220/12



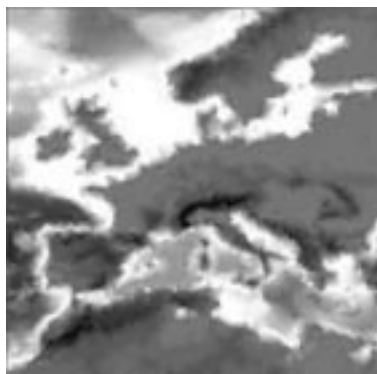
linéaire : $K = 1$, 4934/60



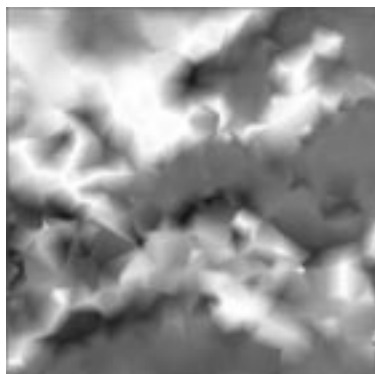
linéaire : $K = 1$, 1057/45



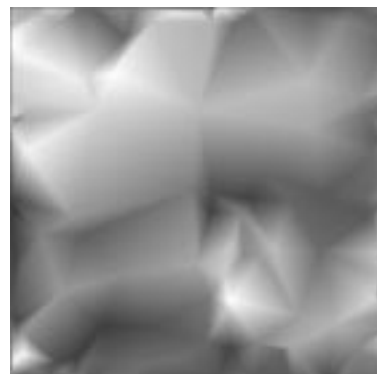
linéaire : $K = 1$, 193/28



linéaire : $K = 3$, 5009/478



linéaire : $K = 3$, 1006/342



linéaire : $K = 3$, 200/171

Planche V.1 — Exemples d'analyse dans le cas constant et linéaire planaire.

des maillages réguliers où tous les sommets sont de degré 6. Malheureusement, la démonstration dans le cas général nous est inconnue à l'heure actuelle.

V.1.4.2. Choix des espaces auxiliaires

Nous sommes guidés dans ce choix par les résultats de la section III.5.1. A priori, un cadre semi-orthogonal possède de nombreux avantages, exception faite du cas où l'on désire avoir des fonctions auxiliaires $\tilde{f}^n$ qui approchent au mieux les fonctions « grossières » f^n , cf proposition III.17. Dans ce cas, il convient de prendre comme espaces auxiliaires les $\tilde{V}^k$ donnés par

$$\tilde{V}^k := (\text{Id}_{V^{k+1}} + \mathcal{P}_W^\perp \circ P^k)(W^\perp \cap V^{k+1}). \quad (\text{V.2})$$

Lorsque les opérateurs d'approximation P^k sont les projections orthogonales sur V^k , on a $W^k = V^{k\perp} \cap V^{k+1} \subset V^{k\perp}$, donc il est clair que pour tout $f \in V^{k+1}$, $\mathcal{P}_W^\perp \circ P^k(f) = 0$ et par conséquent $\tilde{V}^k = W^\perp \cap V^{k+1}$, i.e. on retrouve encore une fois un cadre semi-orthogonal.

• Dans le **cas constant**, les opérateurs d'approximation sont les projections orthogonales, et par conséquent le cadre semi-orthogonal s'impose. Prolongeant la remarque p. 91, nous avons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}^{i+1} & = & \mathcal{C}_0^{i+1} & \oplus & \mathcal{C}_{j_1}^{i+1} & \oplus & \dots \oplus \mathcal{C}_{j_n}^{i+1} \\ \downarrow P^i & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{C}_{j_1}^i}^\perp & & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{C}_{j_n}^i}^\perp \\ \mathcal{C}^i & = & \mathcal{C}_0^i & \oplus & \mathcal{C}_{j_1}^i & \oplus & \dots \oplus \mathcal{C}_{j_n}^i \end{array} \quad (\text{V.3})$$

avec des notations similaires à celles du cas linéaire, c'est-à-dire que les j . désignent les indices des sommets supprimés, $\mathcal{C}_{j.}^{i+1}$ et $\mathcal{C}_{j.}^i$ représentent les espaces « locaux » à chaque polygone d'influence des sommets supprimés, et $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_{j.}^i}^\perp$ les projections orthogonales locales correspondantes. Si on note $W_{j_k}^i$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les noyaux locaux $\text{Ker}(\mathcal{P}_{\mathcal{C}_{j_k}^i}^\perp) \cap \mathcal{C}_{j_k}^{i+1}$, et $\tilde{V}_{j_k}^i$ les complémentaires orthogonaux locaux correspondant, on a la situation suivante

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}^{i+1} & = & \mathcal{C}_0^{i+1} & \oplus & [W_{j_1}^i \oplus \tilde{V}_{j_1}^i] & \oplus & \dots \oplus [W_{j_n}^i \oplus \tilde{V}_{j_n}^i] \\ \downarrow P^i & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{C}_{j_1}^i}^\perp & & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{C}_{j_n}^i}^\perp \\ \mathcal{C}^i & = & \mathcal{C}_0^i & \oplus & \mathcal{C}_{j_1}^i & \oplus & \dots \oplus \mathcal{C}_{j_n}^i \end{array}$$

qui montre clairement que

$$\begin{aligned} W^i &:= \text{Ker}(P^i) = W_{j_1}^i \oplus \dots \oplus W_{j_n}^i \\ \tilde{V}^i &:= W^{i\perp} \cap V^{i+1} = \mathcal{C}_0^{i+1} \oplus \tilde{V}_{j_1}^i \oplus \dots \oplus \tilde{V}_{j_n}^i \end{aligned}$$

et par conséquent l'ensemble de la décomposition multirésolution se résume à des décompositions locales à chaque polygone d'influence.

• Dans le **cas linéaire**, la définition de P_{loc}^i nous a déjà amené à considérer le diagramme (cf notations du paragraphe V.1.2.2)

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}^{i+1} & = & \mathcal{L}_0^{i+1} & \oplus & \mathcal{L}_{j_1}^{i+1} & \oplus & \dots \oplus \mathcal{L}_{j_n}^{i+1} \\ \downarrow P_{\text{loc}}^i & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{j_1}^i}^\perp & & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{j_n}^i}^\perp \\ \mathcal{L}^i & = & \mathcal{L}_0^i & \oplus & \mathcal{L}_{j_1}^i & \oplus & \dots \oplus \mathcal{L}_{j_n}^i \end{array} \quad (\text{V.4})$$

Puisque les $\mathcal{L}^i$ sont en somme *directe*, il est clair que $f = f_0 + f_{j_1} + \dots + f_{j_n}$ est dans le noyau du projecteur localisé si et seulement si $f_0 = 0$ et $f_{j_k} \in \text{Ker}(\mathcal{P}_{\mathcal{L}^i_{j_k}}^\perp \circ R_{j_k})$, ce qui montre qu'ici encore le noyau W^i admet une décomposition locale simple selon les sous-espaces locaux déjà introduits. *En revanche*, les sommes directes n'étant pas orthogonales, l'espace $W^{i+1} \cap \mathcal{L}^{i+1}$ n'est pas somme directe des orthogonaux locaux contrairement au cas constant. Pour le déterminer, on a affaire à un problème *global*. Alternativement, si l'on décide de définir l'espace auxiliaire par (V.2) (qui n'est pas équivalente à la semi-orthogonalité ici, puisque P_{loc}^i n'est pas un projecteur orthogonal et donc $W^i \not\perp \mathcal{L}^i$), on se retrouve dans une situation globale également.

Il faut donc à nouveau trouver un compromis. Pour conserver une logique similaire au cas constant, nous définissons les espaces auxiliaires comme la somme (directe) de $\mathcal{L}_0^{i+1}$ et des complémentaires orthogonaux locaux $\tilde{V}_{j_k}^i := W_{j_k}^{i+1} \cap \mathcal{L}_{j_k}^{i+1}$, de manière à ce retrouver également dans un schéma local du type

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}^{i+1} & = & \mathcal{L}_0^{i+1} & \oplus & [W_{j_1}^i \oplus \tilde{V}_{j_1}^i] & \oplus \dots \oplus & [W_{j_n}^i \oplus \tilde{V}_{j_n}^i] \\ \downarrow P_{\text{loc}}^i & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{L}^i_{j_1}}^\perp & & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{L}^i_{j_n}}^\perp \\ \mathcal{L}^i & = & \mathcal{L}_0^i & \oplus & \mathcal{L}_{j_1}^i & \oplus \dots \oplus & \mathcal{L}_{j_n}^i \end{array}$$

Comme l'opérateur localisé est *a priori* quasi-orthogonal, ce choix reste cohérent et fournit un cadre semi-orthogonal approché.

V.1.5. Calcul des matrices d'analyse et de synthèse

Nous expliquons ici comment sont effectués les calculs des matrices d'analyse et de synthèse *dans la pratique*. D'après la section précédente, nous sommes pour une étape donnée de décomposition/reconstruction dans un cadre local entre les espaces $V^f = \tilde{V} \oplus W$ et V^g , où nous omettons à la fois les indices inférieurs j_k « de localité » et les indices supérieurs « de niveau ». La forme générale des matrices d'analyse et de synthèse dans une telle situation a déjà été précisée à la section II.1.3. Nous donnons deux méthodes de calcul pour ces matrices, chacune d'elles ayant des avantages et des inconvénients.

V.1.5.1. La méthode par élimination

Commençons par le cas où l'opérateur d'approximation est surjectif. Dans ce cas, les matrices d'analyse et de synthèse sont carrées et inverses l'une de l'autre. La matrice de synthèse B est de la forme $[\Phi \ \Psi]$, les vecteurs colonnes de la matrice Φ (resp. Ψ) forment une base de $\tilde{V}$ (la base dite « implicite ») (resp. une base de W) exprimés dans la base ϕ^f de V^f . Le choix d'un cadre semi-orthogonal se traduit par le fait que $\Phi^* G \Psi = 0$ (on note temporairement G la matrice $\mathcal{G}_{\phi^f}$). Notons $A = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ la matrice d'analyse. Le résultat simple suivant se révèle très commode à l'usage :

LEMME V.1 — Dans la situation et précédente, on a :

- 1) $PG^{-1}Q^* = 0$;
- 2) $P = (\Phi^* G \Phi)^{-1} \Phi^* G$;

$$\begin{aligned}
Q &= (\Psi^* G \Psi)^{-1} \Psi^* G ; \\
3) \quad \Phi &= G^{-1} P^* (P G^{-1} P^*)^{-1}, \\
\Psi &= G^{-1} Q^* (Q G^{-1} Q^*)^{-1}.
\end{aligned}$$

Démonstration. — Pour montrer 1), on utilise les hypothèses d'orthogonalité pour écrire

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} G^{-1} \begin{bmatrix} P^* & Q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \end{bmatrix}^* G \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\Phi^* G \Phi)^{-1} & 0 \\ 0 & (\Psi^* G \Psi)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.5})$$

d'où le résultat. La dernière égalité donne

$$\begin{bmatrix} (\Phi^* G \Phi)^{-1} & 0 \\ 0 & (\Psi^* G \Psi)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \end{bmatrix}^* G \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Phi^* G \Phi)^{-1} \Phi^* G \\ (\Psi^* G \Psi)^{-1} \Psi^* G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & \Psi \end{bmatrix} = \text{Id}$$

d'où les égalités 2). Celles de 3) s'obtiennent par des arguments similaires. $\square$

Le point 1 du lemme est très pratique pour calculer la matrice d'analyse. En effet, nous disposons déjà de l'expression du projecteur orthogonal, c'est-à-dire la matrice P . *A priori*, pour construire la matrice Q , on devrait utiliser le schéma suivant : la connaissance de P entraîne celle de son noyau, et Q est le projecteur orthogonal sur le noyau. Nous voyons qu'en fait il suffit de choisir Q tel que $P G^{-1} Q^* = 0$. Il subsiste pour Q des degrés de liberté que l'on peut fixer en choisissant la normalisation $Q G^{-1} Q^* = \text{Id}$, ce qui revient à choisir une base orthonormale pour W , car des égalités (V.5), on tire immédiatement $Q G^{-1} Q^* = (\Psi^* G \Psi)^{-1}$.

Les autres égalités du lemme montrent en particulier que la connaissance de deux quelconques des matrices P , Q , Φ ou Ψ suffit à calculer les matrices A et B . Plus particulièrement encore, elles donnent deux techniques pour calculer la matrice de synthèse maintenant que la matrice d'analyse est connue : on peut soit inverser directement A , soit l'inverser « en deux temps » *via* les formules 3 du lemme. Notons que cette dernière méthode n'est avantageuse que dans les cas où les matrices $P G^{-1} P^*$ et $Q G^{-1} Q^*$ sont toutes les deux « beaucoup » plus petites que la matrice A ⁷.

Revenons au calcul de la matrice d'analyse, mais cette fois dans le cas général où il peut y avoir non surjectivité. Pour l'étape d'analyse, cela ne pose pas de problème particulier : il suffit de procéder comme ci-avant. Pour reconstruire les données, on commence par sélectionner un nombre maximal de lignes de P indépendantes⁸. Si P' est la matrice extraite résultante, la matrice $A' := \begin{bmatrix} P' \\ Q \end{bmatrix}$ est alors inversible. La sélection des lignes de P revient à sélectionner certains coefficients grossiers a^g . Ceux-là uniquement sont utilisés, avec les coefficients de détail b , pour reconstruire les données grâce à A'^{-1} .

La méthode que nous venons de décrire est simple et relativement efficace, notamment parce que l'on peut jouer sur les nombreuses propriétés des matrices entrant en jeu : par exemple, la plupart des matrices à inverser sont *définies et positives*, ce qui

7. Ceci n'est précisément pas vrai dans le cas linéaire, où Q n'est formée que d'un seul vecteur ligne, d'après le paragraphe V.1.4.1.

8. En fait ce procédé peut être vu comme un moyen particulier implicite de choisir le projecteur p de V^g sur $\text{Im}(P) \subset V^g$ dont dépend la matrice Φ (cf section II.1.3).

permet l'utilisation d'algorithmes efficaces. Cependant la méthode présente un point faible dans le cas non surjectif : la sélection des lignes indépendantes de P .

En effet, c'est un exemple typique de problème *théoriquement simple* mais *difficile en pratique*, car il y a toujours quelque part un seuil à déterminer pour choisir si oui ou non deux vecteurs sont liés. Or il n'est pas certain que le seuil se révèle suffisant pour des calculs ultérieurs — par exemple l'inversion de la matrice A' — ni que relativement à la méthode utilisée, ce seuil soit réellement significatif. Nous avons tenté d'utiliser une technique élémentaire : le pivot de Gauss sur les lignes de P . Mais souvent, les *colonnes* de la matrice extraite nécessitent un deuxième pivot. Même après ce deuxième pivot, des cas subsistent où des pivots supplémentaires sont nécessaires. D'un autre côté, on ne peut pas simplement imposer un seuil élevé, sous peine de classer “non surjectifs” beaucoup d'opérateurs qui sont en fait surjectifs, et par là même augmenter parfois considérablement le nombre de coefficients de détail nécessaires à la reconstruction.

Une autre technique plus élaborée, et basée sur une décomposition QR de la matrice P , n'a pas donné de résultats significativement meilleurs. En conclusion, la méthode décrite ci-avant fonctionne relativement bien, mais *son implémentation reste délicate*. Sa vitesse, même pour des matrices de taille respectable, reste son principal avantage. Ceci nous amène à présenter maintenant une autre méthode de calcul pour les matrices d'analyse et de synthèse.

V.1.5.2. La méthode de la DVS

Comme le remarque Stewart ([Ste73, p. 318]), utiliser la DVS d'une matrice pour déterminer son rang, ou encore extraire des vecteurs indépendants, est une méthode très fiable, d'autant plus qu'il existe des algorithmes robustes pour calculer la DVS. Cette propriété, combinée à l'interprétation remarquable vue à la section III.3.2, fait de la DVS une méthode de choix dans le cas non surjectif.

Les données de départ étant la matrice de projection P , la matrice $\mathcal{G}_{\phi^f}$ du produit scalaire dans V^f et la matrice $\mathcal{G}_{\phi^g}$ du produit scalaire dans V^g , nous décrivons maintenant la méthode étape par étape.

- **Étape 1** — Pour donner un sens aux matrices issues de la DVS du point de vue des opérateurs linéaires qu'elles représentent, il est indispensable de travailler relativement à des bases orthonormées. Les fonctions de base d'échelle ϕ^f et ϕ^g ne sont pas orthonormées, il est donc nécessaire d'effectuer au préalable un changement de base sur la matrice P . Voici une façon très efficace de procéder.

On connaît la matrice $\mathcal{G}_{\phi^f}$ du produit scalaire et celle-ci est symétrique définie positive. Il existe alors une matrice D^f diagonale dont tous les termes diagonaux sont strictement positifs et une matrice orthogonale U^f telles que

$$D^f = U^{f*} \mathcal{G}_{\phi^f} U^f,$$

le calcul de ces matrices pouvant s'effectuer par des algorithmes robustes. Si $\bar{\phi}^f$ désigne une base orthonormée (recherchée) de V^f , on peut alors poser

$$\mathcal{M}_{[\bar{\phi}^f; \phi^f]} := U^f \sqrt{D^f}^{-1}.$$

En effet, la base $\bar{\phi}^f$ sera bien orthonormée puisque

$$\mathcal{M}_{[\bar{\phi}^f; \phi^f]}^* \mathcal{G}_{\phi^f} \mathcal{M}_{[\bar{\phi}^f; \phi^f]} = \sqrt{D^f}^{-1} U^{f*} \mathcal{G}_{\phi^f} U^f \sqrt{D^f}^{-1} = \sqrt{D^f}^{-1} D^f \sqrt{D^f}^{-1} = \text{Id}.$$

On procède de même avec $\mathcal{G}_{\phi^g}$ pour obtenir une matrice de passage de la forme $\mathcal{M}_{[\bar{\phi}^g; \phi^g]} := U^g \sqrt{D^g}^{-1}$. Ces matrices de passage sont agréables à utiliser puisque leur inverse se calcule instantanément grâce à l'orthogonalité de U^f et U^g . La matrice du projecteur relativement à ces nouvelles bases orthonormées est donc

$$\bar{P} := \mathcal{M}_{[\bar{\phi}^g; \phi^g]} P \mathcal{M}_{[\phi^f; \bar{\phi}^f]} = U^g \sqrt{D^g}^{-1} P \sqrt{D^f} U^{f*}.$$

• **Étape 2** — Soit à présent $\bar{P} = UDV^*$ la DVS de $\bar{P}$. Pour l'interprétation, nous reprenons temporairement les notations de la figure III.1. On a déjà indiqué que cette décomposition correspondait « automatiquement » à un cadre semi-orthogonal, avec de plus des bases orthonormées de $\tilde{V}$ et W , ce qui est un avantage intéressant de cette méthode.

Pour la pratique d'une étape de décomposition/recomposition, il convient tout d'abord de choisir la taille du noyau de $\bar{P}$. Ceci est une *simple lecture* de la diagonale de D : les éléments exactement nuls correspondant à la partie du noyau « imposée » par l'écart de dimension entre V^f et V^g ; puis, dans la matrice D_1 peuvent apparaître des valeurs singulières $\varrho_1, \dots, \varrho_l$ toutes $\leq \delta$, pour un seuil δ fixé. C'est ici que se décide la surjectivité de $\bar{P}$, donc de P .

• **Étape 3** — [Analyse] Partant de $f = (\bar{a}^f)$ représentant la fonction à analyser dans la base $\bar{\phi}^f$ (donc après changement de base par $\mathcal{M}_{[\phi^f; \bar{\phi}^f]}$), les coefficients de détail (b .) sont donnés par les $\tilde{m}_k = r_k + l$ dernières composantes de vecteur $V^* f$. Les (premières) composantes restantes sont utilisées pour calculer les coefficients grossiers $(\bar{a}^g)$, qui donnent les coefficients (a^g) après changement de base par $\mathcal{M}_{[\bar{\phi}^g; \phi^g]}$.

[Synthèse] Partant de $(\bar{a}^g)$, la multiplication par les $\tilde{m}_k$ premières lignes de U^* puis par la matrice D_1^{-1} (convenablement tronquée en une matrice de taille $\tilde{m}_k$) donnent les coefficients $\tilde{a}$ de $\tilde{f}$ dans $\tilde{V}$, auxquels on adjoint les coefficients de détail. La multiplication par V termine la reconstruction des coefficients $\bar{a}^f$.

Cette méthode, dans le cadre d'une décomposition semi-orthogonale, présente de nombreux avantages : elle est simple, robuste et surtout elle règle proprement le problème des opérateurs non surjectifs, puisque par le jeu des transformations *orthogonales* U et V de la DVS, le seuillage appliqué à la matrice D_1 est significatif du point de vue du rang de P (voir [Ste73]). Son inconvénient est qu'elle utilise deux algorithmes complexes (la DVS et la recherche des vecteurs propres d'une matrice symétrique) dont les vitesses de traitement ne sont acceptables que pour des matrices de taille raisonnable. Dans le cas constant, la méthode convient donc parfaitement, d'autant plus que les bases des fonctions $\mathcal{M}^k$ sont naturellement orthonormales à un facteur de normalisation près. Dans le cas linéaire, elle convient également dans le cas où $K = 1$. Pour $K > 1$, la méthode devient trop lourde sauf éventuellement à réduire au préalable la taille « naturelle » du problème comme indiqué au paragraphe V.1.2.3. Ceci étant, pour le cas linéaire, il n'y a pas de problème de projecteur non surjectif et la méthode par élimination convient parfaitement.

Enfin, si l'on désire un cadre non semi-orthogonal, l'utilisation de la DVS est moins commode car on ne peut pas utiliser la décomposition de manière aussi directe ; elle n'est alors réellement utile que pour déterminer le noyau de P .

V.1.5.3. Comparaison expérimentale du conditionnement des deux méthodes

Pour illustrer les différences de comportement des deux méthodes qui viennent d'être exposées, nous avons cherché à déterminer une mesure du conditionnement de l'opération d'analyse puis synthèse complète. Les cas intéressants étant les cas non surjectifs, nous avons repris le jeu de données de la fonction constante par morceaux déjà utilisée pour la planche V.1, avec la même triangulation sous-jacente. Puis nous avons pratiqué une décomposition suivie d'une reconstruction complète des données avec un pas de décimation de 1 (le pas naturel dans le cas constant) et calculé l'erreur L_∞ entre la fonction originale et la fonction reconstruite. Cette erreur, modulo les erreurs d'arrondis, est *a priori* nulle. Cette opération a été effectuée pour divers choix de seuils — utilisés pour la détermination du noyau des P^k — pour la méthode par élimination et la méthode utilisant la DVS. Ces seuils n'étant pas directement comparables entre les deux méthodes, nous avons utilisé le nombre de coefficients de détail supplémentaires retenus pour la reconstruction (*cf* la proposition II.2) comme base de comparaison. Ces coefficients de détail sont donc ceux résultant uniquement des opérateurs non surjectifs rencontrés.

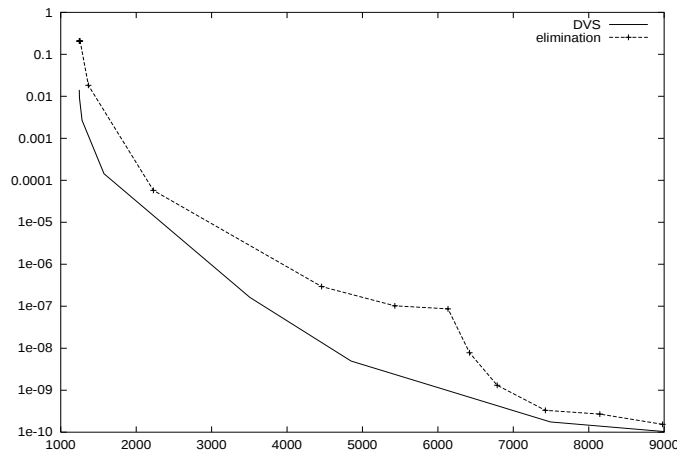


Figure V.9 — Erreur L_∞ selon le nombre de coefficients de détail supplémentaires.

Les résultats sont présentés sur la figure V.9. Ils montrent d'une part qu'en dehors des cas extrêmes, où le seuil est soit trop petit et provoque des instabilités importantes, soit trop grand et retient un grand nombre de coefficients de détail inutiles, l'algorithme de la DVS produit des résultats meilleurs d'un facteur variant entre 10 et 100. D'autre part, la discontinuité de la courbe dans le cas de la méthode par élimination tend à montrer que pour cette dernière le seuil n'est pas entièrement significatif du point de vue du noyau des opérateurs P^k .

À titre indicatif, dans le cas linéaire avec $K = 1$ et un pas de 2, sans aucun coefficient de détail supplémentaire (puisque les opérateurs sont toujours surjectifs), les deux méthodes font jeu égal (erreur de 1.04×10^{-9} pour la DVS contre 1.39×10^{-9} pour la méthode par élimination). Il est d'ailleurs étonnant que même pour des seuils déjà élevés, *aucun* opérateur ne soit déclaré « non surjectif ». De ce point de vue, le cas linéaire se comporte *beaucoup* mieux que le cas constant.

V.1.5.4. Illustrations locales

Terminons par quelques illustrations des procédures de décomposition et reconstruction *locales*.

La figure V.10 concerne le cas constant. On peut y voir l'ensemble des fonctions intervenant dans une décomposition locale : la fonction « fine » $f^{k+1} \in V^{k+1}$, la fonction intermédiaire $\tilde{f}^k \in \tilde{V}^K$, l'approximation « grossière » $f^k \in V^k$ et la composante de détail $g^k \in W^k$. Par construction, f^k est la meilleure approximation de f^{k+1} dans V^{k+1} , et $\tilde{f}^k$ est la meilleure approximation de f^k dans *un supplémentaire* de W^k dans V^{k+1} (proposition III.17). Ici les fonctions de détail, construites *via* la méthode par élimination, ont de plus été choisies à support minimal (2 triangles).

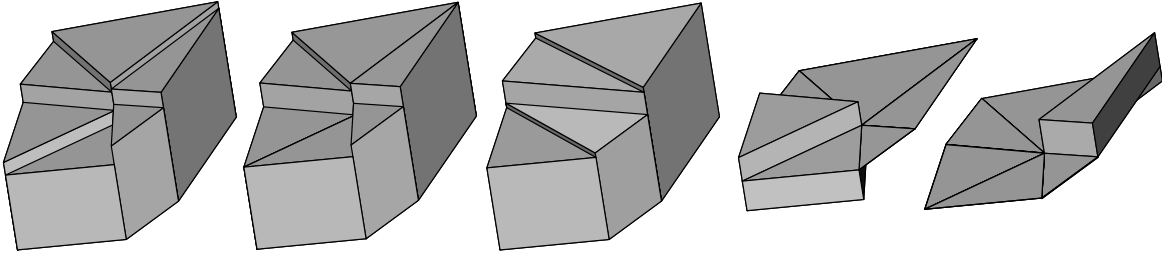


Figure V.10 — Décomposition locale constante : f^{k+1} , $\tilde{f}^k$, f^k , ψ_1^k et ψ_2^k .

Le cas linéaire est illustré à la figure V.11. Il s'agit d'une analyse avec paramètre de localité $K = 2$. On y trouve une vue de la fonction fine (le sommet supprimé est cerclé), une vue de la fonction grossière et deux vues de l'ondelette, centrée sur le sommet supprimé. On remarquera son fameux caractère ondulant, dû à son orthogonalité avec les constantes (en particulier).

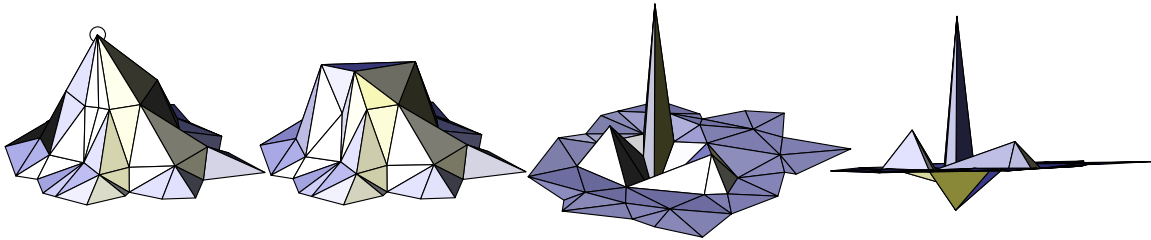


Figure V.11 — Décomposition locale linéaire $K = 2$: f^{k+1} , f^k et ψ^k (2 vues).

V.1.6. Reconstruction par niveaux vs. reconstruction seuillée

Dans cette section on s'intéresse aux techniques de reconstruction des données mises sous forme multirésolution.

V.1.6.1. La reconstruction par niveaux

Un premier moyen de reconstruire les données est simplement d'inverser le processus d'analyse : étant données l'approximation « grossière » $f_0 \in \mathcal{K}^0$ et les fonctions de détail, on reconstruit progressivement les fonctions $f_i \in \mathcal{K}^i$, $i = 1, 2, \dots$, jusqu'à la reconstruction de la fonction initiale. Ce type de reconstruction est appelé *reconstruction par niveaux*. Le mécanisme de reconstruction étant exactement similaire à celui de l'analyse ; nous ne revenons pas dessus, ce dernier ayant été largement détaillé dans

les sections précédentes. En particulier, l'ensemble du processus s'effectue en temps linéaire par rapport au nombre de sommets de la triangulation.

En général, un grand nombre de coefficients de détail sont nuls ou très voisins de 0. Cela permet donc de faire de la compression sans perte dès lors que l'on dispose d'un moyen pour compacter les coefficients de détail. De la compression avec pertes peut être envisagée lorsque l'on dispose d'un moyen de sélectionner les coefficients de détail les moins significatifs sur le résultat de la recomposition finale : on les réduit alors également à 0. Ce problème est équivalent à celui de la mesure d'erreur tel qu'il a été défini au chapitre III. Dans le majeure partie des cas, la technique de sélection utilisée est simplement le seuillage : sont mis à zéro les coefficients de valeur absolue inférieure à un seuil donné.

Dans le cas présent, plusieurs remarques sont à faire :

- Dans le cas constant il n'y a pas surjectivité, ce qui rend impossible les modifications (mises à 0 par exemple) des coefficients de détail : la construction effectuée *via* l'opérateur de projection orthogonale n'est pas séparée (voir section II.1.2 et lemme II.2).
- Contrairement aux ondelettes classiques construites sur des maillages réguliers, ici la triangulation est « réelle » dans le sens où une structure sous-jacente est nécessaire pour la représenter. Cette structure, qui contient une partie de l'information géométrique, *fait partie intégrante des données et de la fonction manipulée*, et sa taille est en pratique bien plus grande que les données purement numériques qui lui sont associées, et qui sont représentées par les coefficients de détail. À titre indicatif, dans le cas d'une triangulation plane supportant une fonction linéaire, la taille d'une structure « edge-list » décrivant la triangulation a une taille de l'ordre de 4 fois supérieure à celle des coefficients numériques. Ainsi, *compresser les coefficients de détail n'a que peu de signification relativement à la place occupée par la fonction dans son ensemble*.
- Dans le même ordre d'idée, lorsque la fonction est reconstruite à son niveau le plus fin, elle utilise exactement le même nombre de triangles indépendamment des coefficients de détail utilisés dans la reconstruction. Donc du point de vue visualisation, *la fonction « compressée » est aussi lourde à afficher que la fonction initiale*.

En pratique, la reconstruction par niveaux, outre le fait de reconstruire les données initiales, permet aussi de générer une séquence de niveaux de détails de la fonction, à savoir les fonctions partielles f_k , qui sont définies sur les triangulations partiellement décimées $\mathcal{T}^k$, mettant ici en valeur la caractéristique fondamentale du point de vue non emboîté : *la fonction d'intérêt est celle des espaces d'approximation*, et non pas, comme on vient de le voir, la fonction totalement reconstruite avec un sous-ensemble des coefficients de détail. On reviendra cependant sur la compression par seuillage dans la section V.3, avec le point de vue subdivision et des ondelettes construites pour disposer d'une mesure d'erreur précise. On y trouvera aussi des exemples d'édition multirésolution.

V.1.6.2. La reconstruction adaptative

Partant des remarques précédentes, l'idée de la *reconstruction adaptative* est d'afficher la fonction en utilisant un maillage sous-jacent aussi réduit que possible, guidé par la valeur des coefficients de détail. Signalons d'entrée de jeu que cette technique de reconstruction ne correspond à aucun des cadres théoriques vus jusqu'à présent, et qu'en pratique on ne peut la justifier rigoureusement qu'en supposant que le cadre multirésolution est *complet*, *i.e.* les opérateurs de synthèse sont réduits à l'identité. En particulier les espaces d'approximation sont alors emboîtés, ce qui n'est bien-sûr

pas vrai ici. Néanmoins nous allons momentanément supposer que c'est le cas afin de décrire correctement la méthode, puis nous commenterons son utilisation dans le présent contexte.

La fonction complètement reconstruite s'écrit sous la forme (section II.1.2)

$$f_N = f_0^{0,N} + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_j b_j^i \psi_j^{i,N}$$

mais si le cadre est complet alors

$$f_N = f_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_j b_j^i \psi_j^i.$$

Supposons sélectionnés certains coefficients b_j^i ; le but est à présent d'afficher la fonction résultant de la somme partielle, avec le minimum de triangles. Cependant on désire faire cela sous la contrainte que l'ensemble des triangles finalement utilisés *forme encore une triangulation*.

Considérons la formation des triangulations successives non plus par suppression des sommets mais par réinsertion de ceux-ci. Chaque fonction de détail ψ_j^i à un support constitué de triangles de $\mathcal{T}^i$: $\mathcal{T}_1^i, \dots, \mathcal{T}_n^i$. Chaque triangle $\mathcal{T}_j^i$ est un triangle retriangulant le polygone d'influence correspondant à l'insertion d'un certain point $\mathcal{M}_j$ dans la triangulation $\mathcal{T}^{i-1}$. Une fonction ψ_j^i détermine donc un ensemble de sommets à insérer dans $\mathcal{T}^{i-1}$. Mais récursivement, chacun de ces sommets possède un polygone d'influence constitué, avant retriangulation, de triangles de $\mathcal{T}^{i-1}$ qui sont eux aussi les triangles de polygones d'influence de sommets précédemment insérés, etc.

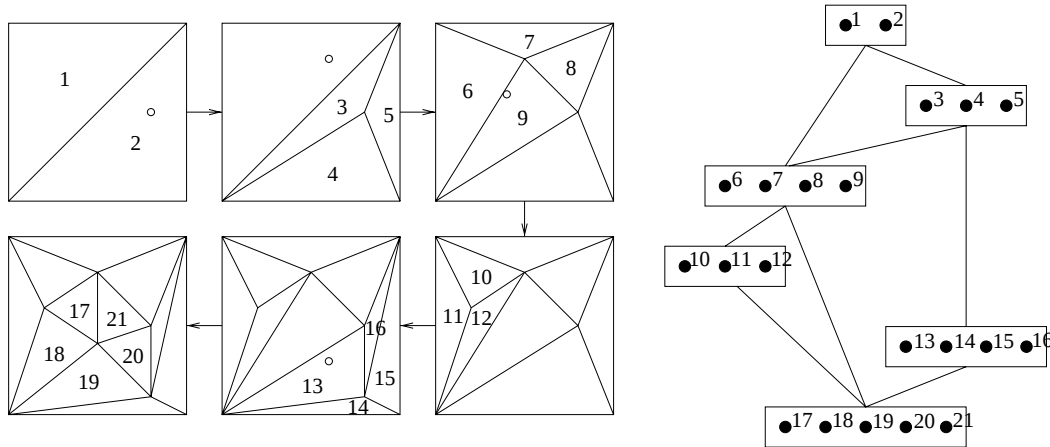


Figure V.12 — Séquence de décimation et pyramide associée.

Ce phénomène est schématisé sur la figure V.12. La structure d'arbre, appelée *pyramide*, contient l'ensemble des relations parent/enfant des triangles d'une séquence de décimation. Chaque point représente un triangle, les triangles provenant de la même insertion de point sont regroupés dans un même rectangle formant ce qu'on appellera un *bloc* : la présence d'un des triangles entraîne donc celle des autres triangles du bloc. Enfin, deux blocs sont liés dans l'arbre si et seulement si les triangles de l'un sont issus d'une insertion de sommet dans au moins un des triangles de l'autre.

Soit alors à afficher les fonctions de détail nécessaires à la visualisation de f_N . Les triangles formant le support des fonctions (donc également les triangles de leur bloc)

sont sélectionnés puis, dans le but d'obtenir une séquence d'insertion de sommets créant effectivement les triangles requis, la sous-hiérarchie minimale contenant les blocs est déterminée dans la pyramide.

La figure V.13 propose l'illustration du mécanisme : on a supposé à titre d'exemple que seuls les triangles 13 et 14 étaient initialement requis.

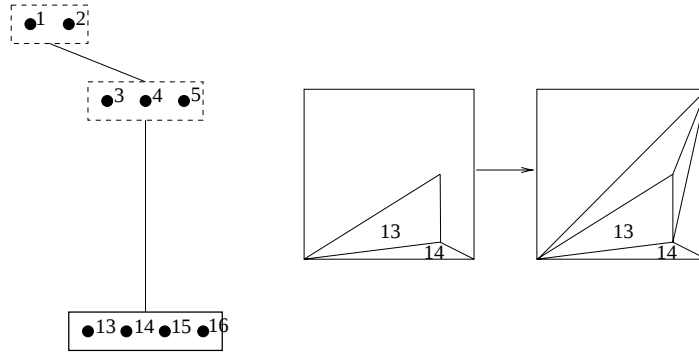


Figure V.13 — Hiérarchie simplifiée en fonction des triangles sélectionnés.

On y voit également la triangulation finale correspondante, où *un certain nombre de triangles auxiliaires* « inutiles » à l'approximation ont dû être ajoutés pour assurer l'admissibilité de la triangulation finale.

On peut remarquer que la triangulation « adaptée » qui est obtenue n'est pas la plus économique en termes de nombre de sommets nécessaires pour la soutenir. En revanche, puisqu'on a affaire à une sous-hiérarchie judicieusement sélectionnée de la pyramide complète, chaque insertion de sommet donne lieu aux mêmes espaces locaux $\mathcal{K}_{j_k}^i$ (paragraphe V.1.4.2) que lors de l'analyse ou de la synthèse par niveaux : la synthèse adaptative revient donc à appliquer *un certain sous-ensemble de l'ensemble des reconstructions locales*. Voici la structure générale de l'algorithme de reconstruction adaptative :

Algorithme de reconstruction adaptative

```

pour chaque bloc  $B$ 
|   si  $B$  racine ou  $B$  vérifie  $\mathcal{H}$ 
|   |   sélectionner  $B$ 
pour chaque bloc  $B$  sélectionné
|   synthétiser-bloc( $B$ )

procédure synthétiser-bloc( $B$ )
|   si coefficients( $B$ ) connus, fin procédure
|   pour chaque bloc parent  $B_p$ 
|   |   synthétiser-bloc( $B_p$ )
|   |    $a^0 := \text{coefficients}(B_p)$ 
|   |    $[\Phi \quad \Psi] := \text{matrice de synthèse locale}$ 
|   |   coefficients( $B$ ) :=  $a^1 = \Phi a^0 + \Psi d$ 

```

Quelques commentaires sur l'algorithme :

- Les critères de sélection représentés par $\mathcal{H}$ dépendent des applications : le plus classique sera une logique de seuillage du type « le bloc contient un coefficient de détail d_i supérieur au seuil », ou de manière générale n'importe quel oracle permettant de déterminer l'importance des coefficients de détail pour le résultat final. On pourra aussi sélectionner les blocs d'une région bien déterminée présentant un intérêt particulier, et demandant donc à être visualisée à sa résolution maximale.
- Les “coefficients” d'un bloc sont les valeurs numériques définissant la fonction au niveau du bloc et sur le support des triangles du bloc, et “synthétiser un bloc” signifie calculer ses coefficients : dans le cas constant, les valeurs aux triangles, dans le cas linéaire, les valeurs aux sommets.
- Les blocs racines sont toujours sélectionnés, ainsi on est assuré que la fonction reconstruite couvre toujours l'ensemble du domaine (si aucun autre bloc n'est sélectionné, l'algorithme ne fait rien et c'est la fonction grossière f_0 qui est « reconstruite »).
- Comme on peut s'y attendre, gérer les blocs et leurs relations demande une structure dédiée, dans laquelle la structure de triangulation s'intègre plus ou moins bien : dans le cas constant, on peut utiliser une structure basée sur les triangles qui rend l'ensemble assez compact. Dans le cas linéaire avec une structure edge-list, la gestion des blocs est assez fastidieuse. Nous ne voulons pas entrer dans les détails de ces structures ; elles s'approchent d'autres structures existantes et conçues pour des objectifs équivalents. Le lecteur pourra regarder notamment [Kle97] et de façon générale les travaux de Floriani, en particulier [DF89] et [DFP95].

Nous l'avons signalé au début de cette section, la reconstruction adaptative ne s'applique à strictement parler que dans le cas complet, en ce sens que la fonction construite par l'algorithme adaptatif est alors *égale* à celle que l'on obtiendrait « par niveaux » en n'utilisant que les coefficients d'ondelette sélectionnés (à ceci près qu'elle est définie sur une triangulation comportant moins de triangles). Cela n'est plus vrai pour le cadre non complet que nous présentons dans ce chapitre. Examinons le sens que l'on peut alors donner à la reconstruction adaptative :

(i) L'hypothèse fondamentale manquante est que les opérateurs de synthèse ne se réduisent pas à l'identité. Autrement dit, en pratiquant la reconstruction adaptée dans un cadre non complet, on *assimile* implicitement une fonction $f_k \in \mathcal{K}^k$ à sa « subdivisée » $f_k^{k,N} \in \mathcal{K}^N$. Néanmoins nous avons construit, au moins dans le cas constant, des opérateurs de synthèse les plus proches que possible de l'identité, cf paragraphe V.1.4.2.

(ii) On notera en particulier que la fonction reconstruite de façon adaptative n'appartient en général à aucun des espaces de la séquence d'approximation initiale.

(iii) Puisque nous sommes ici intéressés essentiellement par le nombre de triangles nécessaires, et non pas par le nombre de coefficients de détail utilisés, l'algorithme *utilise tous les coefficients de détail rattachés à un bloc dès lors que sa synthèse est demandée*. Ainsi, la fonction reconstruite est un assemblage de restrictions de fonctions $f^k \in V^k$ à une partie de leur support (des blocs de la pyramide).

(iv) Nous avons déjà vu que dans la synthèse d'un bloc donné, nous étions dans un cadre local semi-orthogonal. En conséquence, puisque nous décidons d'identifier f^k et $\tilde{f}^k = S^k(f^k)$, on peut prendre comme *mesure d'importance* des coefficients de détail b^k rattachés à un bloc simplement la norme de la composante de détail $g = \sum b^k \psi^k$. Comme en outre les deux méthodes de construction des fonctions ψ^k (par élimination et DVS) permettent facilement de construire une base orthonormée, on a une expression simple pour $\|g\|$. Ainsi on peut pratiquer une sélection des blocs par seuillage basé sur cette « mesure d'erreur ». L'observation des résultats des reconstructions adaptatives sur divers exemples (section V.1.7) permettra la confirmation *a posteriori* de la validité de ce critère de sélection, étant donné que la qualité des résultats est liée de manière

essentielle à la véracité de l'hypothèse exposée en (i).

Les points (iii) et (iv) ci-dessus permettent une interprétation différente — et plus satisfaisante dans le cas non complet — de la reconstruction adaptative, en termes d'algorithme de décimation. Voir la section V.2.1, p. 115.

V.1.6.3. Comparaison avec d'autres algorithmes adaptatifs

Nous nous limitons aux algorithmes adaptatifs qui correspondent à une approche « ondelettes ».

[Lou94] Dans sa construction d'ondelettes de seconde génération, Lounsbery est également amené à distinguer les deux notions de reconstruction. La reconstruction par niveaux y est appelée reconstruction naïve ; il propose d'autre part un algorithme similaire au nôtre pour permettre un affichage utilisant un minimum de triangles, dans le cas complet. En pratique, le seul cas complet considéré par Lounsbery (bien que cette notion de « complétude » ne soit pas clairement mise en évidence dans ces travaux) ainsi que les travaux qui ont suivi sa thèse ([EDD⁺95, CPD⁺96]) est celui de la *subdivision linéaire* basée sur des triangulations régulières $1 \rightarrow 4$. Les espaces de subdivision sont alors les espaces de fonctions linéaires par morceaux sur les triangulations subdivisées (revoir au besoin la section I.3.1), et les opérateurs de subdivision sont alors triviaux : c'est bien un cadre complet.

Une différence importante est cependant que l'algorithme « adaptatif » de Lounsbery ne produit pas une *triangulation* comme résultat final, mais simplement une collection de triangles qui, partant du maillage grossier initial, puisse être obtenue par subdivision $1 \rightarrow 4$ successive de certains triangles *ad hoc*.

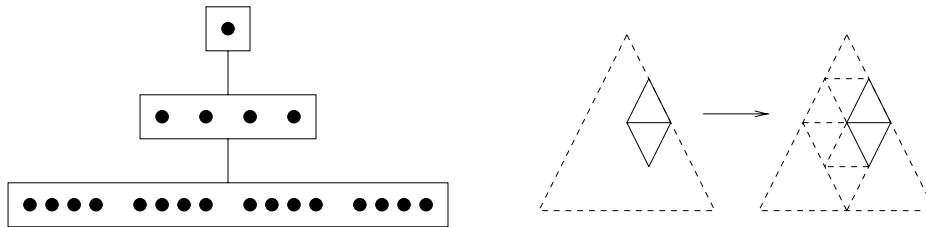


Figure V.14 — [Gauche] La forme de la pyramide dans le cas d'une subdivision régulière $1 \rightarrow 4$.
[Droite] Le résultat de l'algorithme adaptatif de Lounsbery.

En fait, générer une triangulation « économique » à partir de cette collection nécessiterait (contrairement à notre cas) d'introduire des arêtes ne faisant partie d'aucun des maillages hiérarchiques. En effet, la forme de la pyramide dans le cas de la subdivision régulière montre que l'utilisation directe de l'algorithme de reconstruction adaptative proposé plus haut *obligerait à afficher l'ensemble de la triangulation dès lors qu'un seul triangle du niveau le plus fin serait requis* (voir figure V.14).

[GGS95] L'approche utilisée par Gross *et al.* répond à la même problématique, bien que le cadre soit relativement différent. L'objectif est de visualiser des « champs de hauteurs » à différents niveaux de détails. Des ondelettes sont développées par produit tensoriel sur un carré du plan, fournissant comme on l'a vu au chapitre I des valeurs aux sommets d'une grille régulière à mailles carrées, de plus en plus dense par subdivision $1 \rightarrow 4$. Ici encore, on souhaite avoir un résultat sous la forme de fonctions linéaires par morceaux sur des triangulations. L'idée utilisée consiste à appliquer un algorithme similaire à celui de Lounsbery mais cette fois sur le maillage carré, afin de sélectionner

une sous-hiérarchie. Dans le but de produire alors rapidement une triangulation à partir de cette sous-hiérarchie de mailles carrées, l'algorithme adaptatif se débrouille pour que les mailles qui se côtoient après sélection possèdent au maximum deux niveaux de différence. Cela permet alors de faire appel à une table pré-calculée donnant localement la forme de la triangulation selon la disposition des mailles (figure V.15). L'ensemble est bien sûr extrêmement rapide. Sur ces questions de maillages adaptatifs, spécifiquement pour des données topographiques, on pourra regarder par exemple [DFMP96].

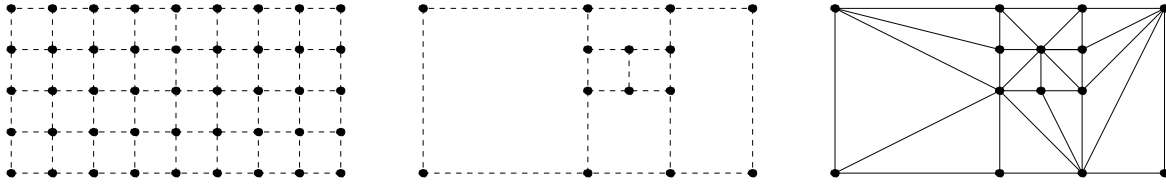


Figure V.15 — [Gauche] le maillage à sa résolution maximale. [Centre] la hiérarchie sélectionnée en fonction des coefficients d'ondelettes. [Droite] la triangulation générée par les tables locales pré-calculées.

Les ondelettes utilisées sont des ondelettes semi-orthogonales splines cubiques, par conséquent la visualisation des approximations en tant que fonctions linéaires par morceaux laisse place à un cadre non complet. Il en résulte une ambiguïté sur la signification précise de cette technique adaptative, d'autant que l'article reste circonspect à ce sujet.

Plutôt que chercher à interpréter la fonction reconstruite comme une « imitation » (pauvre en triangles) de la reconstruction par niveaux avec seuillage des coefficients, l'idée est de se placer dans un contexte de décimation de maillage, guidée par les coefficients d'ondelettes apportant une information multirésolution sur l'importance des détails. On aura des compléments sur ce point de vue dans la suite du chapitre.

V.1.7. Exemples de reconstruction

Nous présentons quelques exemples de reconstruction afin de comparer la reconstruction par niveaux et la reconstruction adaptative.

La planche V.2 présente deux images dans le cas planaire constant, la triangulation sous-jacente générée par la reconstruction adaptative est également montrée. On observe que le maillage est irrégulier avec un plus grand nombre de triangles utilisés là où la fonction présente de fortes variations. Ceci confirme *a posteriori* que l'amplitude des coefficients de détail est bien une estimation locale de l'importance de la contribution de la composante de détail, dans un cadre non emboîté ; rappelons qu'ici nous visualisons des fonctions de $\mathcal{C}^i$ et non $\bar{\mathcal{C}}^i$. Le phénomène est confirmé également par les images montrant la distribution des coefficients de détail. Chaque coefficient a été symbolisé par une boule de rayon proportionnel à sa taille. On montre aussi la distribution niveau par niveau pour les dix derniers niveaux de la séquence d'approximation (les niveaux précédents contiennent peu de triangles). Ici tout spécialement, on voit que les zones présentant de fortes variations sont bien marquées.

Il résulte de cela une meilleure approximation de la fonction, à nombre de triangle comparable, comme le confirme le graphique présenté à la figure V.16 qui montre l'évolution de l'erreur L_2 relative pour les deux types de reconstruction (jeu de donnée "europe"). Néanmoins, hormis pour des reconstructions utilisant de l'ordre de 20 000 triangles, soit près de la moitié du nombre de triangles initial, la différence reste

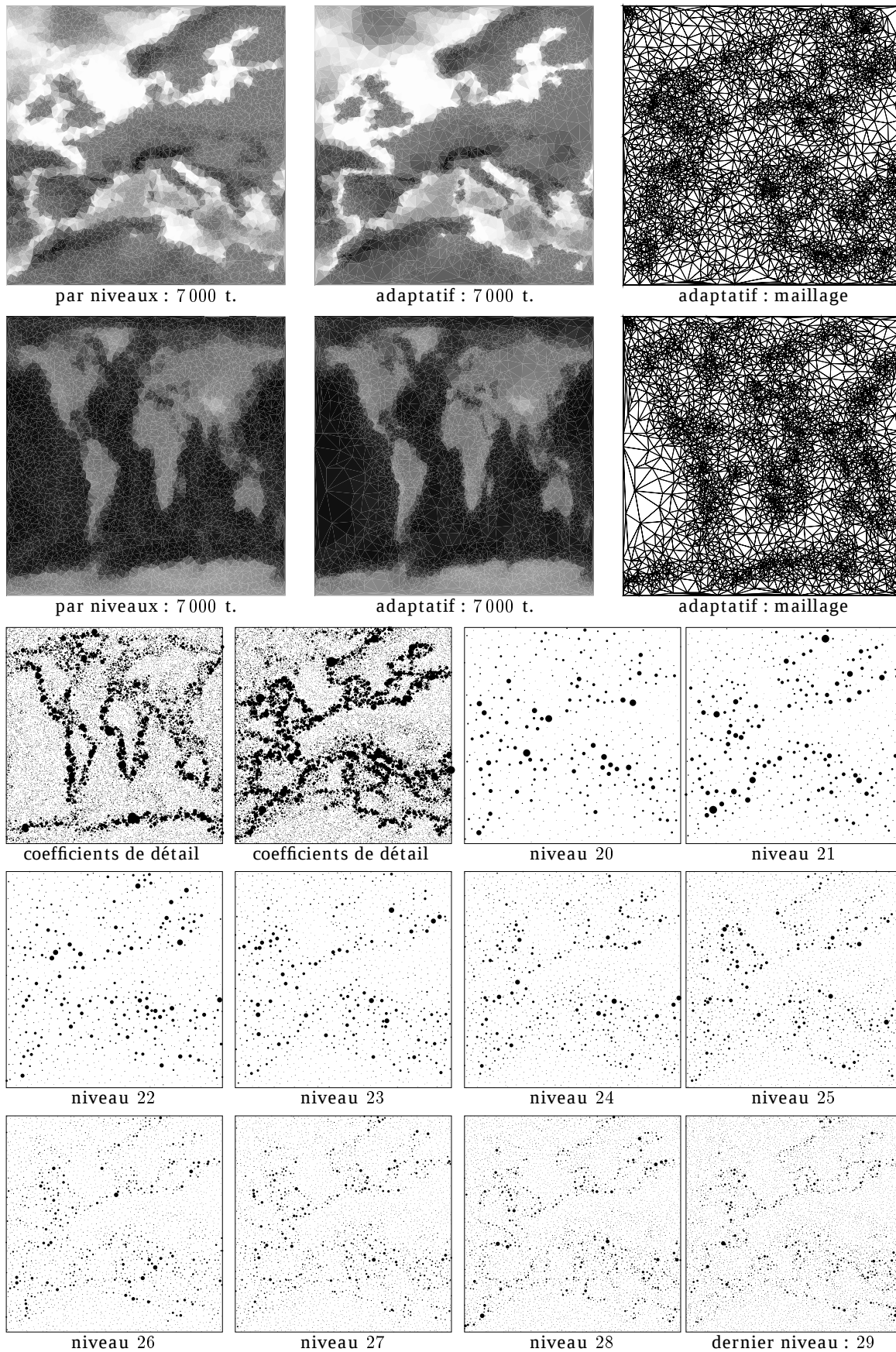


Planche V.2 — Adaptatif vs. uniforme, cas constant. Maillage initial : 50 000 t.

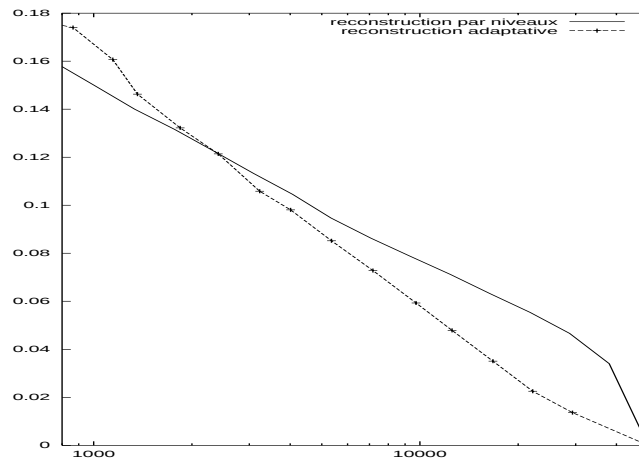


Figure V.16 — Évolution de l'erreur L_2 relative.

faible. Ceci tend à montrer que le nombre de triangles « complémentaires » introduits par l'algorithme adaptatif lors de la simplification de la pyramide reste important. L'examen des maillages adaptatifs dans les deux exemples indique également la présence de « paquets », des zones où le maillage est localement plus fin. Ceci est sûrement le résultat de deux phénomènes conjugués :

- (i) la présence à un niveau élevé d'un grand coefficient de détail ;
- (ii) une configuration du maillage particulièrement malheureuse du point de vue de la simplification de la pyramide, ce qui entraîne l'insertion de beaucoup de triangles supplémentaires.

Nous touchons ici au but que nous nous étions fixé au début de la section V.1 : transposer la construction des ondelettes de Haar classiques à des maillages irréguliers. Bien que nous reviendrons sur ce point à la section V.3.1, nous pouvons dresser un premier bilan.

Les algorithmes qui étaient auparavant triviaux demandent à présent une implémentation délicate, notamment avec la présence d'opérateurs d'approximation non surjectifs. L'importance du point de vue non emboîté a été mise en évidence, et avec elle la nécessité de recourir à un algorithme de reconstruction différent de la simple reconstruction par niveaux (que ce soit avec ou sans seuillage des coefficients).

Dans la reconstruction adaptative, les résultats sont d'autant meilleurs que les blocs possédant des coefficients de détail importants sont situés *bas* dans la pyramide. C'est ce qui motive l'approche développée dans la section qui suit, où l'on va chercher à adapter la pyramide à la fonction analysée. Ceci contraste avec le cadre *linéaire* développé jusqu'à présent, dans lequel les opérateurs d'analyse et de synthèse sont les mêmes quelle que soit la fonction analysée.

V.2. Approximation non linéaire

L'idée fondamentale de l'approximation non linéaire est de décimer le maillage en fonction des données définies initialement au niveau le plus fin.

V.2.1. Description de la méthode

Nous adoptons ici complètement le point de vue non emboîté, au sens où nous sommes purement intéressés par des approximations comportant un nombre faible de triangles.

On va pratiquer une décimation adaptative de la triangulation originale, sommet par sommet, définissant à chaque sommet supprimé un espace d'approximation différent. Une séquence d'approximation est alors constituée par l'adjonction des mêmes opérateurs d'approximation que précédemment : les projections orthogonales. On retrouvera donc les mêmes cadres locaux et les mêmes choix peuvent être faits pour les espaces complémentaires.

Puisque nous voulons obtenir les meilleures approximations possibles, la décimation est guidée par un oracle qui essaie de prévoir l'erreur d'approximation qui va résulter de la projection pour chaque sommet.

Formulons rapidement cela concrètement, en nous basant sur le travail fait à la section précédente.

DÉFINITION V.4 Séquence d'approximation adaptative — On appellera séquence de décimation, que l'on notera k_i , $i = N, N-1, \dots$, la suite définie par les indices des sommets de la triangulation initiale $\mathcal{T}$ successivement choisis par l'oracle de décimation, et soient $\mathcal{T}^i$ les triangulations successivement obtenues de $\mathcal{T}$ par suppression des sommets $k_N, \dots, k_{i+1}$ (et $\mathcal{T}^N := \mathcal{T}$).

On note $\mathcal{C}^i$ (resp. $\mathcal{L}^i$) les espaces des fonctions constantes (resp. linéaires et continues) par morceaux basés sur la triangulation $\mathcal{T}^i$.

Les opérateurs d'approximation associés aux espaces $\mathcal{C}^i$ sont définis par $P_{\mathcal{C}}^i : \mathcal{C}^{i+1} \rightarrow \mathcal{C}^i$, $f \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{C}^i}^\perp(f)$; les opérateurs d'approximation associés aux espaces $\mathcal{L}^i$ sont définis par $P_{\mathcal{L}}^i : \mathcal{L}^{i+1} \rightarrow \mathcal{L}^i$, $f \mapsto \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{loc}}^i}^\perp(f)$, où l'opérateur de projection localisé est défini de manière similaire au paragraphe V.1.2.2.

Dans le cas linéaire, les opérateurs d'approximation sont donc à nouveau paramétrés par K , qui détermine le « rayon » (topologique) de l'espace local $\mathcal{L}_{\text{loc}}^i$ autour du sommet supprimé $M_{k_{i+1}}$. Les espaces complémentaires sont choisis de manière similaire, c'est-à-dire de façon à fournir un cadre semi-orthogonal (du point de vue local). Nous avons donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^{i+1} = \mathcal{L}_0^{i+1} \oplus [W^i \overset{\perp}{\oplus} \tilde{V}^i] & & \\ \downarrow P_{\mathcal{L}}^i & \downarrow \text{Id} & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{loc}}^i}^\perp \\ \mathcal{L}^i = \mathcal{L}_0^i \oplus & & \mathcal{L}_{\text{loc}}^i \end{array}$$

qui illustre la localité de l'opération de décomposition/recomposition.

Dans le cas constant, l'orthogonalité naturelle des fonctions de base des espaces d'approximation donne un cadre local de même type :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{i+1} = \mathcal{C}_0^{i+1} \overset{\perp}{\oplus} [W^i \overset{\perp}{\oplus} \tilde{V}^i] & & \\ \downarrow P_{\mathcal{C}}^i & \downarrow \text{Id} & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{C}_{\text{loc}}^i}^\perp \\ \mathcal{C}^i = \mathcal{C}_0^i \overset{\perp}{\oplus} & & \mathcal{C}_{\text{loc}}^i \end{array}$$

Les espaces locaux $W^i \overset{\perp}{\oplus} \tilde{V}^i$ et $\mathcal{C}_{\text{loc}}^i$ sont simplement les sous-espaces engendrés par les fonctions dont les supports forment le PI avant et après suppression du sommet central $M_{k_{i+1}}$.

L'oracle utilisé doit minimiser l'erreur d'approximation résultante. Si, comme à la section précédente, nous choisissons des fonctions de détail orthonormales, cette erreur est simplement la norme des coefficients de détail associés à la décomposition locale. L'oracle va donc chercher à supprimer d'abord les sommets dont les coefficients de détail sont les plus petits. D'un autre côté, idéalement, les blocs de la pyramide correspondant à une séquence d'approximation devraient posséder des coefficients de détail décroissant pour permettre une reconstruction adaptative « optimale ». Cependant cet objectif n'est atteignable en pratique :

- d'une part rien ne prouve qu'une telle séquence de décimation existe ;
- d'autre part la déterminer serait nécessairement très coûteux ; après suppression d'un sommet, la fonction est projetée, les valeurs associées aux triangles ou aux sommets changent, et avec elles les coefficients de détail associés à la suppression potentielle des sommets restants : à ce moment peuvent apparaître des coefficients *plus petits* que ceux des sommets déjà supprimés, *etc.*

Pour ces raisons, on ne cherchera pas à baser le choix de la séquence de décimation directement sur les coefficients de détail (ou la norme exacte de l'erreur L_2) car cette stratégie se révélerait inutilement coûteuse : en effet, pour choisir le premier sommet à supprimer, il faudrait calculer les coefficients de détail résultant de la suppression (virtuelle) de tous les sommets de la triangulation, ce qui représente déjà un travail équivalent à une phase d'analyse *complète*. Puis après chaque suppression de sommet il faudrait ensuite remettre à jour ces coefficients pour tous les sommets concernés par la phase de projection : au total on aurait donc à faire un effort équivalent à *plusieurs* (dizaines de) phases d'analyse complètes.

Le rôle de l'oracle sera donc d'estimer l'erreur de suppression, par des moyens nettement moins coûteux que son calcul explicite. À la section V.2.2 sont présentées plusieurs stratégies d'estimation.

Nous présentons maintenant les algorithmes d'analyse et de reconstruction des données. "LP" désigne la « liste des priorités », un mécanisme pour archiver, reclasser et extraire des entités (ici les indices des sommets) dans l'ordre croissant d'une valeur numérique (ici l'estimation d'erreur) qui leur est attachée, avec une complexité en $\log(N)$, où N est la longueur de LP. Dans la pratique, ce mécanisme ne rajoute qu'une surcharge de travail très modeste.

Algorithme d'approximation adaptative

```

pour  $M$  sommet de  $\mathcal{T}$  vérifiant  $\mathcal{H}$ 
|
|    $\delta = \text{estimation}(M)$ 
|   insertion-LP( $M, \delta$ )
|
tant que  $\text{LP} \neq \emptyset$ 
|
|    $M = \text{extraction-minimal-LP}$ 
|   supprimer-sommet( $M$ )
|    $P = \text{opérateur-d'approximation}(M)$ 
|    $W = \text{noyau}(P)$ 
|    $f_i = P(f_{i+1})$ 
|    $g_i = \mathcal{P}_W^\perp(f_{i+1})$ 
|   /*  $L$  dépend de l'oracle utilisé */
|   pour  $M'$  sommet du  $L$ -voisinage de  $M$ 
```

```

si  $M'$  vérifie  $\mathcal{H}$ 
|
|  $\delta = \text{estimation}(M')$ 
|
| si  $M' \in \text{LP}$ 
| | mise-a-jour-LP( $M', \delta$ )
|
| sinon
| | insertion-LP( $M', \delta$ )
|
| sinon
| | extraire-LP( $M'$ )

```

L'entier L qui apparaît dans l'algorithme détermine une taille de voisinage telle que les sommets s'y trouvant soient ceux dont l'estimation d'erreur se trouve potentiellement modifiée par les changements des valeurs de la fonction dûs à la projection. Par exemple, si dans le cas constant l'estimation d'erreur pour un sommet donné est basée sur la valeur des triangles adjacents, la suppression d'un sommet entraînera la modification des estimations des sommets de son PI, soit $L = 1$.

L'ensemble des conditions $\mathcal{H}$ permet d'imposer diverses contraintes aux sommets placés dans LP, c'est-à-dire aux sommets candidats à la suppression. On placera dans $\mathcal{H}$ le fait d'avoir un degré inférieur à une valeur limite donnée, ce qui permet de contrôler la taille des matrices d'analyse et de synthèse (cf paragraphe V.1.2.2). Si on connaît par avance certaines caractéristiques fondamentales de la fonction, que l'on désire préserver, on peut le demander explicitement par l'intermédiaire de $\mathcal{H}$. Ceci apporte une souplesse considérable à la décimation adaptative. Notons qu'un sommet peut vérifier $\mathcal{H}$ à une étape donnée et ne plus le vérifier plus tard, et réciproquement.

Quelques mots sur la taille et le format des données : sauf dans le cas non surjectif, la taille de la fonction sous forme multirésolution (c'est-à-dire après analyse) est la même que celle de la fonction initiale.

- La séquence de décimation est « sauvegardée » en plaçant les sommets dans l'ordre où ils ont été supprimés.

- Chaque sommet est accompagné des indices des sommets formant son PI, ce qui permet sa réinsertion dans la triangulation. La taille globale de la triangulation sous cette forme « progressive » est la même que celle décrivant la triangulation $\mathcal{T}$ donnée au départ.

- Dans le cas constant, une étape d'analyse donne deux coefficients de détail qui pourront être sauvegardés à la place des deux coefficients de la fonction qui ont disparus ($\dim(\mathcal{C}^{i+1}) = \dim(\mathcal{C}^i) + 2$), sauf dans le cas non surjectif où il y a des coefficients de détail supplémentaires (en moyenne de l'ordre de 5% pour des triangulations aléatoires). Dans le cas linéaire (toujours surjectif), l'unique coefficient de détail prend la place du coefficient donnant la valeur de la fonction au sommet supprimé.

Algorithme de reconstruction progressive

```

lire maillage grossier  $\rightarrow \mathcal{T}^{n_0}$ 
lire coefficients grossiers  $a^{n_0} \rightarrow f_{n_0}$ 
tant que liste-sommets  $\neq \emptyset$ 
|
| lire prochain sommet  $\rightarrow M$ 
| lire voisinage de  $M \rightarrow m.$ 
| insérer-sommet( $M, m.$ )

```

lire coefficients de détail $\rightarrow b^i$

$S^i = \text{opérateur-synthèse}(M)$

$f_{i+1} := S^i(f_i) + \sum b^i \psi^i$

L'algorithme de reconstruction n'est autre qu'une simple reconstruction par niveaux, le coté « adaptatif » est fourni implicitement par la séquence de décimation dédiée.

L'algorithme adaptatif est bien sûr toujours praticable, mais utilisé comme précédemment, il fournit des résultats indistinguables de la reconstruction par niveaux. Il garde encore de l'intérêt lorsque l'on désire faire de l'affichage localisé : on sélectionne alors les blocs selon qu'un de leur triangle soit visible ou non, plutôt que d'après la taille des coefficients de détail, puis on extrait la sous-hiérarchie minimale comme auparavant.

Bien entendu, nous pouvons regarder le mécanisme fondamental de l'algorithme d'approximation adaptatif, dans le cas linéaire essentiellement, comme un exemple d'algorithme de décimation de maillage classique ([BS96]) : la différence fondamentale étant que l'algorithme d'approximation, par le mécanisme de projection et d'extraction de coefficients de détail *modifie* en parallèle les valeurs de la fonction afin d'obtenir de meilleures approximations, tout en permettant la reconstruction exacte des données, avec une taille mémoire constante.

L'ensemble des travaux sur les algorithmes de décimation concentrent leurs efforts sur la sélection des sommets (oracle) mais négligent l'approximation des données, se contentant de faire du sous-échantillonnage. Nous verrons à la section V.2.3 que cette stratégie simple fournit des résultats médiocres dès que la fonction analysée n'est pas suffisamment régulière.

Ici, l'algorithme présenté, et au-delà des choix particuliers qui ont été fait la technique de multirésolution non emboîtée, montrent les liens étroits existant entre les analyses multirésolution basées sur les ondelettes et les techniques multirésolution construites autour d'un algorithme de décimation de maillages. On peut ainsi espérer que le savoir-faire existant sur les ondelettes puisse fournir des techniques élaborées pour les algorithmes de décimation. La pratique de l'approximation en parallèle de la décimation en est un premier exemple. L'estimation d'erreur dans un algorithme de décimation se traduit immédiatement en termes de mesure d'erreur pour le cadre non emboîté, telle qu'on l'a définie au chapitre II. On peut donc envisager une estimation d'erreur fondée sur les coefficients d'ondelettes obtenus par l'algorithme d'analyse adaptative, plutôt que d'utiliser les techniques « par accumulation » proposées à l'heure actuelle ; voir les perspectives pour une discussion à ce sujet.

Le « point de vue décimation » dont nous venons de parler permet également d'interpréter l'algorithme de reconstruction adaptative différemment. En effet, puisque les coefficients d'ondelettes de tous les blocs de niveaux inférieurs sont tous utilisés, la fonction partiellement reconstruite est *égale* à celle obtenue par l'algorithme d'approximation adaptative pour une certaine séquence de décimation *ad hoc*. Ceci donne une interprétation peut-être plus satisfaisante de la reconstruction adaptative dans un cas non complet : *les coefficients d'ondelette sont une forme particulière d'oracle dans une situation de décimation adaptative*. La même interprétation peut être faite pour les fonctions générées par l'algorithme développé dans [GG95] (*cf* paragraphe V.1.6.3).

Terminons en décrivant quelques-unes des caractéristiques de l'approximation adaptative :

- Les processus d'analyse et de reconstruction sont en temps linéaire par rapport au nombre de sommets de la triangulation de départ, puisque chaque approximation/décomposition est locale donc s'effectue en temps constant.
- Les algorithmes sont simples à implémenter et les structures nécessaires ne demandent pas un surcoût mémoire important (contrairement à celles pour la reconstruction adaptative dans le cas linéaire).
- Puisque le maillage peut être quelconque, on dispose de beaucoup de souplesse pour le choix des sommets à décimer permettant par exemple de respecter certaines caractéristiques importantes de la fonction si celles-ci sont connues à l'avance : voir par exemple l'exemple de la terre avec conservation des sommets côtiers à la section V.2.3.
- Elle fait la transition entre les algorithmes de décimation « purs » et les techniques de multirésolution par ondelettes.

V.2.2. Exemples d'oracles

Nous présentons dans cette section quelques exemples d'oracles dans le cas constant et linéaire. L'objectif n'est pas l'exhaustivité. Rappelons que le but d'un oracle est d'estimer l'erreur d'approximation locale qui résultera de la suppression d'un sommet. Cette estimation doit se faire autant que possible à peu de frais, étant donné que le nombre d'estimations au cours d'une analyse est très supérieur au nombre de sommets dans la triangulation initiale. C'est pourquoi en particulier on ne calcule pas directement la valeur exacte de l'erreur. Pour estimer visuellement la qualité de l'estimateur, on accompagne chaque oracle d'un graphe représentant l'erreur L_2 locale *effective* pour chaque sommet supprimé. Celle-ci devrait idéalement être croissante (mais c'est impossible).

À titre de comparaison, on pourra trouver dans [LM95] [LML91] et [LML89] des techniques fines de sélection des noeuds à supprimer dans le cadre de l'approximation par fonctions polynomiales par morceaux définies sur une triangulation de Delaunay, avec respect d'une tolérance maximale.

V.2.2.1. Oracles dans le cas constant

Dans le cas constant, nous savons que les espaces locaux sont restreints au PI du sommet supprimé.

• L'idée de base est de sélectionner les sommets sur le PI desquels la fonction varie le moins possible. Une première solution est donc de calculer la variation de la fonction au sens de la norme L_∞ par la formule

$$\text{OC}_\infty(M) := \max_{\mathcal{T} \in \text{PI}(M)} f(\mathcal{T}) - \min_{\mathcal{T} \in \text{PI}(M)} f(\mathcal{T}),$$

où $f(\mathcal{T})$ est la valeur de la fonction sur le triangle $\mathcal{T}$. Cette méthode possède toutefois le désavantage de ne pas tenir compte de la taille des triangles, ce qui peut poser problème puisque nous effectuons une approximation L_2 .

• Nous proposons un exemple d'oracle prenant en compte la taille des triangles. Si la projection de f sur l'espace grossier nécessite le calcul des produits scalaires et donc de l'intersection des triangles (coûteuse), en revanche il est aisé de calculer la meilleure approximation de f par une constante. Nous définissons donc l'estimation comme la distance de f aux fonctions constantes, au sens de la norme L_2 . Puisque l'espace des

fonctions constantes (sur le PI) est inclus dans l'espace grossier, nous obtenons ainsi une majoration de l'erreur d'approximation réelle. Précisément, on a donc :

$$\text{OC}_{\text{const}}(M) := \sum_{\mathcal{T} \in \text{PI}(M)} \text{Aire}(\mathcal{T}) (f(\mathcal{T}) - I)^2$$

où $I = \sum_{\mathcal{T} \in \text{PI}(M)} \text{Aire}(\mathcal{T}) f(\mathcal{T})$ est la moyenne de f sur le PI.

Remarque. — Dans le cas sphérique, tout ce qui vient d'être vu reste valable en remplaçant l'aire plane par l'aire des triangles sphériques.

La figure V.17 présente les graphes correspondant (jeu de données : europe). Le nuage de points est sensiblement moins « épais » dans le cas de OC_{const} , indiquant une plus grande régularité de la croissance des erreurs. D'autre part la propriété de majoration de l'erreur réelle est illustrée par la régularité de la partie supérieure du nuage. La forme globale du nuage est classique : sont supprimés d'abord les sommets autour desquels la fonction est constante, d'où une erreur nulle (aux imprécisions numériques près : de l'ordre de 10^{-8}), puis un saut après lequel on trouve un accroissement exponentiel de l'erreur (l'axe des ordonnées utilise une échelle logarithmique).

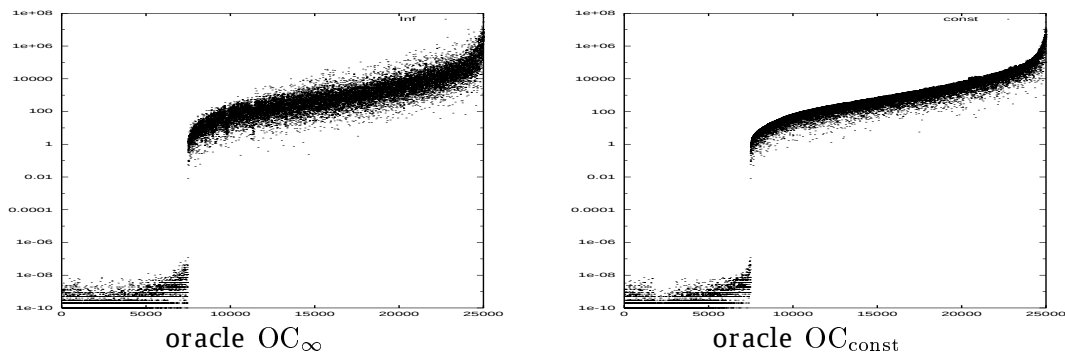


Figure V.17 — Erreurs L_2 locales a posteriori de la séquence de décimation.

V.2.2.2. Oracles dans le cas linéaire

Ici encore nous proposons une solution simple et rapide et une autre plus élaborée. Nous en donnons également une troisième qui s'inspire des travaux de décimation de maillages 3D. En effet, dans le cas planaire, l'image de la fonction linéaire par morceaux peut être considérée comme une triangulation surfacique.

- L'oracle suivant favorise la suppression de sommets présentant une faible variation de la fonction au voisinage (en norme L_∞) :

$$\text{OL}_{\infty,k}(M_0) := \max_{M \in \mathcal{V}_k(M_0)} f(x) - \min_{M \in \mathcal{V}_k(M_0)} f(x),$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{V}_k$ désigne le k -voisinage. On dispose ainsi d'un paramètre de localité, qui doit *a priori* évaluer la localité K de la projection.

- Pour obtenir une estimation meilleure reliée plus significativement à la projection L_2 nous pouvons essayer de procéder comme dans le cas plan, en cherchant à projeter la fonction sur un sous-espace appartenant à l'intersection de $\mathcal{L}^i$ et $\mathcal{L}^{i+1}$, de manière à obtenir une majoration de l'erreur réelle. Plus précisément, si $\mathcal{M}_i$ désignent

les sommets du k -voisinage d'un sommet $\mathcal{M}_0$, on peut chercher la fonction *linéaire* f_0 minimisant (par exemple)

$$\sum_i (f(\mathcal{M}_i) - f_0(\mathcal{M}_i))^2,$$

et alors la fonction $g := \sum_i f_0(\mathcal{M}_i) \mathcal{M}_i$ appartient à $\mathcal{L}^{i+1}$, donc $f - g$ aussi et calculer $\|f - g\|$ ne demande donc pas l'évaluation (coûteuse) des produits scalaires entre les fonctions de base de $\mathcal{L}^i$ et $\mathcal{L}^{i+1}$. Cependant même le calcul de cette norme se révèle lourd, notamment si $k > 1$ (chaque suppression de point demande alors plusieurs dizaines d'évaluations de ce type !).

C'est pourquoi nous proposons une approche heuristique similaire mais basées uniquement sur les *aires* des triangles entrant en jeu. Nous considérons la norme discrète pondérée

$$\|g\|^2 := \sum_i p_i g(\mathcal{M}_i)^2,$$

où p_i est égal à l'aire du 1-voisinage de $\mathcal{M}_i$, et cherchons comme auparavant la fonction f_0 linéaire approchant au mieux f selon cette nouvelle norme. On définit alors

$$\text{OL}_{\text{pond},k}(\mathcal{M}_0) := \|f - f_0\|.$$

Le problème de minimisation précédant étant classique, on donne l'expression de sa solution sans justification :

LEMME V.2 — Notons (x_i, y_i) les coordonnées de $\mathcal{M}_i$, A_i le vecteur ligne $[1 \ x_i \ y_i]$ et A la matrice de lignes A_i . Notons $P := \text{diag}(p_i)$ et V le vecteur colonne $f(\mathcal{M}_i)$. Alors la fonction linéaire minimisant le problème précédent est $(x, y) \mapsto ax + by + c$, où $L := [a \ b \ c]^*$ est donné par

$$L = (A^* P A)^{-1} A^* P V.$$

On notera que la matrice à inverser n'est que de taille 3×3 .

Remarque. — Dans le cas de la sphère, le problème est similaire : on cherchera une fonction linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ avec des poids donnés par les aires *sphériques*.

- La quasi-totalité des algorithmes de simplification de maillages (surficiels) sont basés sur une queue de priorités gouvernées par un oracle évaluant chaque suppression de sommet ([Kle97, HJT98, CMO97, ALS98, GH97, COM98, BS96, FRL00]). Il est donc tentant d'utiliser les oracles décrits dans ces travaux puisque dans le cas planaire, l'image de f est une triangulation surfacique. Cependant, les résultats tendent à être décevants, ce qui peut se comprendre pour deux raisons :

- 1) les critères employés ne sont pas adaptés à une approche d'approximation L^2 mais souvent à une approche en sous-échantillonnage, avec prise en compte d'une erreur « géométrique » comme la distance de Hausdorff ou d'autres mesures dérivées ;
- 2) les maillages sujets à ce genre de simplifications représentent souvent des objets géométriques « réels » (pièces mécaniques par exemple) qui malgré leur grande complexité potentielle jouissent d'une certaine régularité. Or les fonctions que nous manipulons ici fournissent des maillages *beaucoup plus complexes*, notamment en termes de régularité de la surface.

Il en résulte que les méthodes employées en simplification de maillages se révèlent grossières lorsqu'elles sont utilisées dans notre contexte.

Nous nous contentons simplement d'illustrer ces remarques en proposant un oracle basé sur des formules d'estimations discrètes de la courbure. Plusieurs travaux utilisent des estimations de la courbure aux sommets d'un maillage comme critère géométrique de décimation ([FRL00, HJST98, GSS99],...). Ici nous utilisons directement les résultats de [FRL00], qui présente un oracle donnant des approximations de qualité notamment dans le cadre des maillages surfaciques de pièces mécaniques.

Notons $\mathcal{M}$ un sommet et $\mathcal{M}_i$ les sommets 1-voisins, ordonnés. On note α_i l'angle $\widehat{MM_iM_{i+1}}$ et β_i l'angle formé par les triangles (M, M_{i-1}, M_i) et (M, M_i, M_{i+1}) , on définit la courbure gaussienne discrète invariante K_{inv} et la courbure moyenne invariante H_{inv} ([FRL00]) par

$$K_{\text{inv}} := \frac{2\pi - \sum_i \alpha_i}{\frac{1}{4}(\sum_i \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_i \cot(\alpha_i) \alpha_i^2)}, \quad \text{et} \quad H_{\text{inv}} := \frac{\sum_i \beta_i}{\frac{2}{3} \sum_i \alpha_i},$$

pour enfin définir l'oracle de la « courbure absolue » par

$$\text{OL}_{\text{curv}}(\mathcal{M}) := 4H_{\text{inv}}^2 - 2K_{\text{inv}}. \tag{V.6}$$

On favorisera ainsi la suppression de sommets dans les zones de courbure faible ou nulle.

Les graphes d'évaluation des différentes méthodes sont présentés à la figure V.18. Comme prévu la méthode issue des techniques de décimation de maillages est de qualité nettement moins bonne. L'oracle $\text{OL}_{\infty,1}$, bien que très simple, fait à peine moins bien que l'oracle utilisant l'optimisation pondérée. Cependant on peut observer que l'enveloppe supérieure du nuage est plus régulière dans ce dernier cas, traduisant une bonne estimation de l'erreur d'approximation locale réelle *maximale*. Par ailleurs les erreurs L_2 des approximations globales résultantes (voir la section suivante) sont également sensiblement meilleures avec $\text{OL}_{\text{pond},k}$. L'oracle basé sur la courbure est nettement en deçà des autres. Dans le cadre présent, on peut penser que les formules (V.6) estimant la courbure absolue ne sont pas très précises sur des maillages présentant des variations aussi complexes.

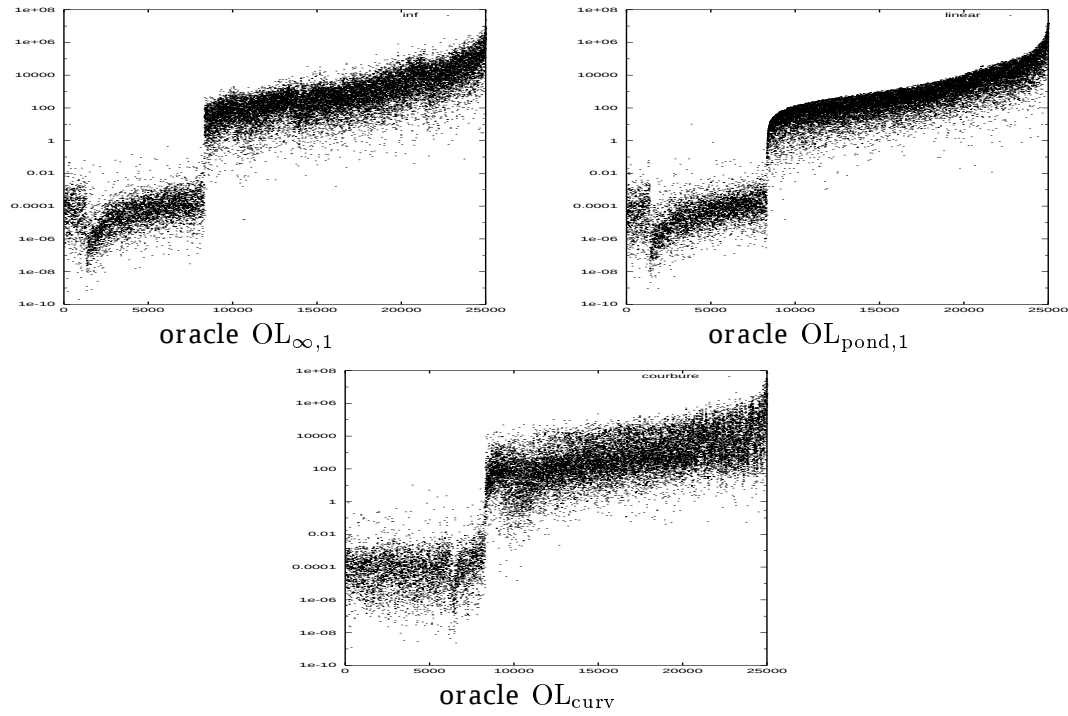


Figure V.18 — Erreurs L_2 locales a posteriori de la séquence de décimation.

V.2.3. Exemples et comparaisons

La figure V.19 illustre la comparaison entre la reconstruction adaptative et la reconstruction progressive après une décimation adaptative, dans le cas constant.

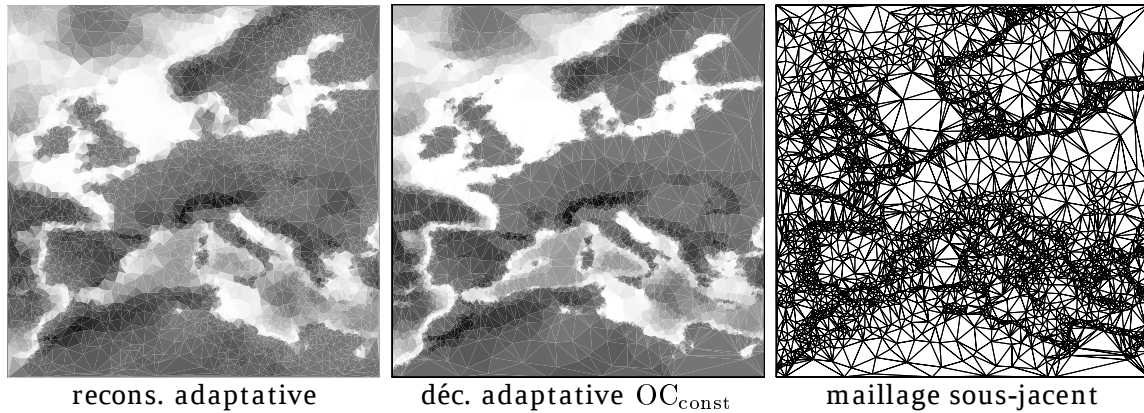


Figure V.19 — Reconstruction vs. décimation adaptative : 7 000 t.

L'oracle utilisé est OC_{const} . La triangulation de départ est encore la triangulation test de 25 000 sommets choisis aléatoirement. Le maillage pourra être comparé avec celui de la planche V.2. Il est clair que la qualité d'approximation est nettement meilleure : la pyramide correspondante est quasi-optimale en ce sens que les blocs possédant les coefficients de détail les plus grands sont placés en haut.

La figure V.20 donne l'évolution de l'erreur L_2 relative dans les deux cas. La différence est conséquente, illustrant un fait que beaucoup d'auteurs ont relevé : de façon générale, les techniques de décimation de maillages permettent d'obtenir de

meilleures approximations que les techniques basées sur les ondelettes, à nombre de triangles équivalent. Ici, nous couplons les avantages des deux approches pour obtenir des résultats meilleurs encore.

Toujours à la figure V.20, on compare les trois oracles proposés au paragraphe précédent dans le cas linéaire, en termes de qualité d'approximation effective. La hiérarchie donnée *a priori* par les graphes de croissance de l'erreur locale est respectée.

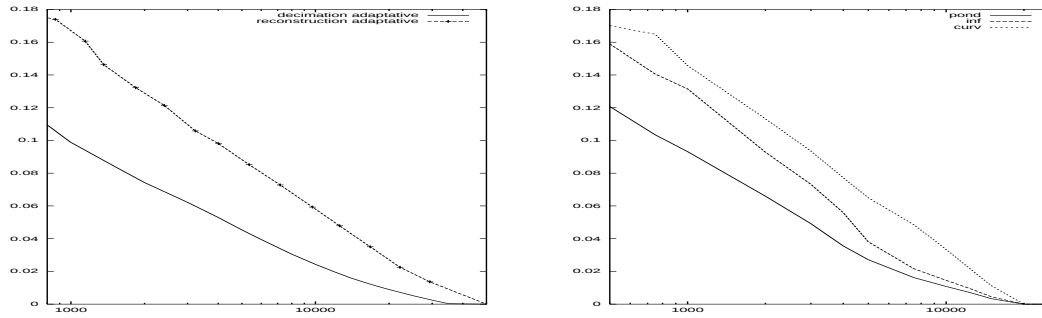


Figure V.20 — [Gauche] Erreur L_2 relative de la reconstruction et la décimation adaptative. [Droite] Erreur L_2 relative pour les oracles $OL_{\infty,1}$, $OL_{pond,1}$ et OL_{curv} .

Dans le cas linéaire, nous comparons l'approximation par l'opérateur de projection locale avec $K = 1$ et $K = 0$, c'est-à-dire le sous-échantillonnage. Dans ce dernier cas l'algorithme est donc similaire à une décimation de maillage classique. Pour montrer l'intérêt de l'approximation, nous avons décimé en sous échantillonnage en nous basant sur l'oracle $OL_{\infty,1}$. La séquence de décimation correspondante a été récupérée puis utilisée avec cette fois une approximation non triviale $K = 1$. La séquence de décimation est donc la même dans les deux cas, et de plus elle est originalement « dédiée » au sous-échantillonnage. Enfin nous avons pratiqué une analyse avec $K = 1$ et l'oracle $OL_{pond,1}$.

Les résultats sont présentés à la figure V.21. La différence avec le sous-échantillonnage est nette, comme l'indiquait déjà la figure V.7. Ceci montre que même une décimation judicieuse n'est pas suffisante lorsque la fonction présente un certain degré de complexité.

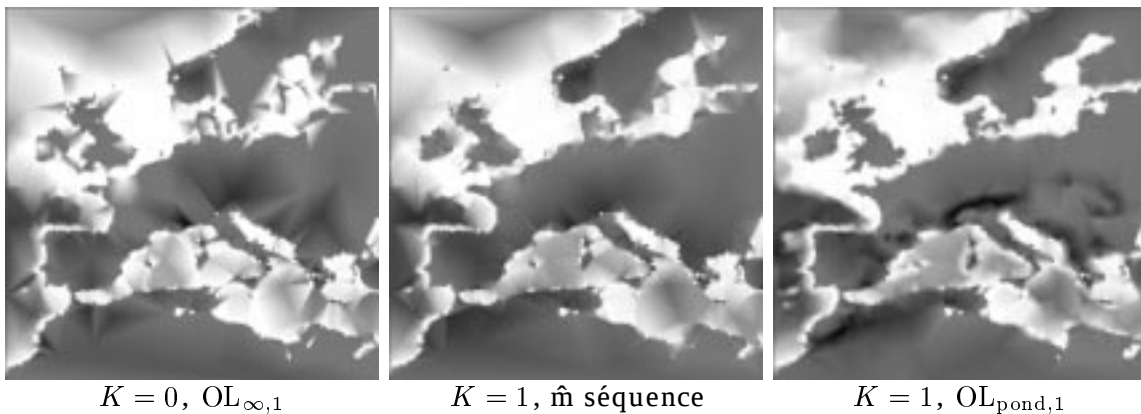


Figure V.21 — Approximation L_2 vs. sous-échantillonnage : 2 000 s.

Pour terminer nous présentons quelques exemples sur la sphère. La triangulation initiale est une triangulation de 660 000 sommets provenant de la subdivision uniforme d'un icosaèdre. Le jeu de données est ETOPO5 ; il provient du National Geographical

Data Center (<http://www.ngdc.noaa.gov/>) et représente l'élévation ou la bathymétrie de la terre : les échantillons sont pris sur une grille uniforme de taille 2160×4320 . Pour plus de renseignements sur ces données, on pourra consulter <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/etopo5.HTML>.

La transition terre/mer est parfois très douce le long de certaines côtes, par exemple entre la France et l'Angleterre. Il en résulte que *via* l'approximation L_2 , les contours des continents tendent à disparaître rapidement au cours de la décimation. Or il s'agit de caractéristiques visuellement importantes. Pour en assurer la conservation, nous allons au préalable sélectionner les « sommets côtiers » et en interdire la suppression (voir l'ensemble de critères $\mathcal{H}$ dans l'algorithme de décimation adaptative). Nous définissons un sommet comme étant *côtier* si la fonction change de signe à son 1-voisinage (soit sur les triangles du 1-voisinage, soit sur les sommets). Dans l'exemple qui nous intéresse, environ 20 000 sommets sont ainsi sélectionnés.

La planche V.3 présente divers exemples, dans le cas constant et linéaire ($K = 1$), créés en utilisant les meilleurs oracles développés dans les deux cas. La comparaison avec le sous-échantillonnage ($K = 0$) est effectuée : sur la vue proposée, on voit comme l'approximation L_2 permet de conserver des caractéristiques importantes comme la ligne de niveau au milieu de l'océan atlantique, même avec un nombre de sommets faible. Avec le sous-échantillonnage, cette caractéristique a pratiquement disparu.

V.3. Autres opérateurs d'approximation

Dans cette section, nous proposons d'autres stratégies que la projection orthogonale pour définir des opérateurs d'approximation associés aux espaces d'approximation dans le cas constant ou linéaire. Toutes ces techniques sont développées dans les mêmes contextes (localité, algorithmes...) que précédemment : au final, seules changent les matrices d'analyse/synthèse utilisées.

V.3.1. Approximation isométrique

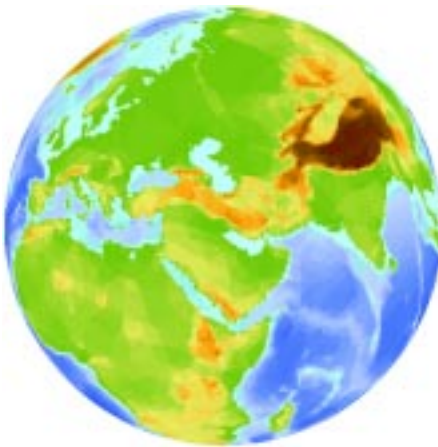
Nous nous proposons ici d'appliquer les résultats de la section III.2.2 et de la section III.3.2 dans le but de développer un cadre multirésolution dans lequel la mesure d'erreur supérieure soit possible. Ce cadre conviendra donc également pour l'édition à différents niveaux de détails, comme le montreront les exemples en fin de section.

Il s'agit donc de développer des opérateurs de synthèse qui soient des similitudes. Ceci va être fait à partir de l'opérateur d'approximation « projection orthogonale » déjà étudié, grâce à l'algorithme présenté à la section III.3.2 et basé sur la DVS.

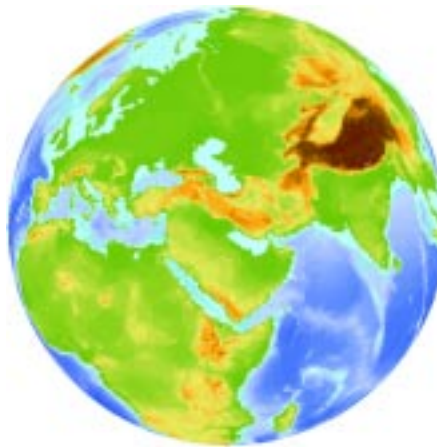
V.3.1.1. Calcul des opérateurs locaux

Nous nous plaçons pour débiter dans la décomposition locale décrite par le diagramme (V.3) dans le cas constant et (V.4) dans le cas linéaire. Remplaçant comme à l'accoutumée $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{L}$ par $\mathcal{K}$, nous désignons pour simplifier par $\mathcal{K}^f$ et $\mathcal{K}^c$ l'un des sous-espaces *locaux* $\mathcal{K}_{j_k}^{i+1}$ et $\mathcal{K}_{j_k}^i$, et considérons connu l'opérateur $\mathcal{P}_{\mathcal{K}^c}^\perp : \mathcal{K}^f \rightarrow \mathcal{K}^c$, et plus précisément sa matrice $\mathcal{P}_{\mathcal{K}^c}^\perp_{\phi^f, \phi^c}$ par rapport aux bases canoniques (« locales »).

Nous pouvons alors presque reprendre mot pour mot l'algorithme détaillé au paragraphe V.1.5.2 pour le calcul des matrices d'analyse et de synthèse. Il convient cependant d'ajouter à présent dans cet algorithme l'



constant : 80 K triangles



constant : 200 K



200 K avec maillage



linéaire : 80 K sommets



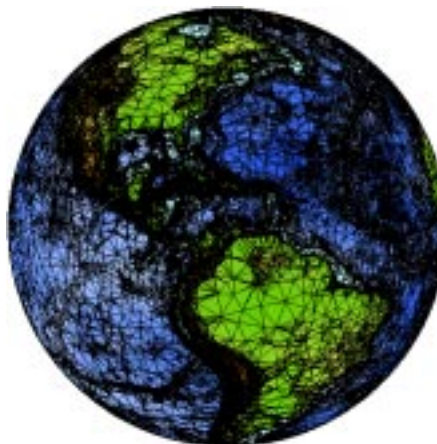
linéaire : 200 K



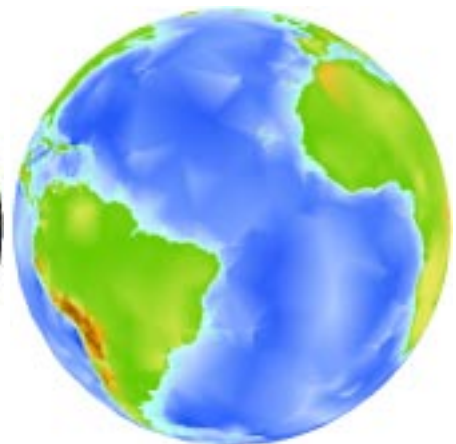
linéaire : 40 K



80 K avec maillage



200 K avec maillage



sous-échantillonnage : 40 K

Planche V.3 — Décimation adaptative sur la sphère, cas constant (1.3M de triangles) avec OC_{const} et linéaire (660K sommets) avec $OL_{pond,1}$.

• **Étape 2'** — Après avoir sélectionné les valeurs singulières supérieures à δ pour décider de la surjectivité de P , on se retrouve dans un cadre semi-orthogonal où l'opérateur de synthèse a une matrice dont la DVS est $V_1 D_1 U_1^*$. Nous sommes alors dans le contexte de l'algorithme d'approximation par une similitude exposé p. 63, dont nous appliquons l'étape 3, avec $\alpha = 1$: nous définissons par conséquent $S := V_1 U_1^*$ comme étant le « nouvel » opérateur de synthèse. *En pratique* il suffit donc de « remplacer » par 1 les valeurs singulières $\geq \delta$ dans la DVS de $\mathcal{P}_{\mathcal{K}^c \bar{\phi}^f; \bar{\phi}^c}^\perp$.

Remarques. — (i) Si K devait être > 2 , il serait utile de pratiquer au préalable le changement de base indiqué au paragraphe V.1.2.3, pour avoir une matrice $\mathcal{P}_{\mathcal{K}^c \phi^f; \phi^c}^\perp$ de taille réduite au minimum.

(ii) Les valeurs singulières trouvées dans la DVS de l'opérateur de projection sont par définition les cosinus des angles entre les sous-espaces $\mathcal{K}^f$ et $\mathcal{K}^c$ (voir [Cha88]). Ces derniers constituent une mesure de la distance entre deux sous-espaces vectoriels.

(iii) Dans le cas linéaire, les valeurs singulières non nulles sont relativement proches de 1 : l'approximation par l'isométrie est donc de bonne qualité. On peut conjecturer, en accord avec la remarque (ii) ci-dessus, que le mécanisme d'approximation par une isométrie serait de plus en plus fidèle si on considérait des fonctions de degré plus élevé qui engendreraient des espaces d'approximation toujours plus « proches ».

Nous conservons le cadre semi-orthogonal donné « automatiquement » par la DVS. L'opérateur P finalement défini possède le même noyau et la même image que $\mathcal{P}_{\mathcal{K}^c}^\perp$. Par construction, l'opérateur de synthèse associé est une *isométrie*. D'après la proposition III.16, $P|_{\tilde{V}}$ est la meilleure approximation de $\mathcal{P}_{\tilde{V}}^\perp$ selon la norme de Frobenius. Nous pouvons donc nous attendre à ce que les approximations « grossières » restent de bonne qualité, ce qui est, rappelons-le, de première importance dans le point de vue non emboîté. Ceci sera confirmé par les expérimentations numériques, voir paragraphe V.3.1.3.

V.3.1.2. Du local au global

Ce qui précède est uniquement le point de vue *local* définissant les opérateurs locaux $S_{j_k}^i : \mathcal{K}_{j_k}^i \rightarrow \mathcal{K}_{j_k}^{i+1}$, $i = 1, \dots, n$. Examinons à présent le passage du local au global.

• Dans le **cas constant**, l'opérateur de synthèse global $S^i : \mathcal{C}^i \rightarrow \mathcal{C}^{i+1}$ reste une isométrie, puisque si $f^i \in \mathcal{C}^i$ se décompose en $f_0^i + f_{j_1}^i + \dots + f_{j_n}^i$ selon les sous-espaces locaux (cf diagramme (V.3)), alors

$$\begin{aligned} \|S^i(f^i)\|^2 &= \|f_0^i + S_{j_1}^i f_{j_1}^i + \dots + S_{j_n}^i f_{j_n}^i\|^2 \\ &= \|f_0^i\|^2 + \|S_{j_1}^i f_{j_1}^i\|^2 + \dots + \|S_{j_n}^i f_{j_n}^i\|^2 \\ &= \|f_0^i\|^2 + \|f_{j_1}^i\|^2 + \dots + \|f_{j_n}^i\|^2 \\ &= \|f^i\|^2, \end{aligned}$$

d'après les propriétés d'orthogonalité des sous-espaces d'approximation locaux.

• En revanche, dans le **cas linéaire**, l'argument précédent ne tient plus : S^i n'est plus une isométrie. Pour avoir une isométrie il faudrait passer par un calcul global nécessitant la prise en compte de toutes les fonctions de base.

Cependant, dans la pratique S^i reste très proche d'une isométrie. On peut s'en convaincre de la manière suivante. D'abord on constate qu'en pratiquant un ADR de pas $2K + 1$, les espaces locaux $\mathcal{L}_{j_k}^i$ sont orthogonaux entre eux (car « disjoints ») : seul

$\mathcal{L}_0^i$ n'est pas orthogonal à la somme des $\mathcal{L}_j^i$. Une partie du calcul ci-dessus reste donc valable, et plus précisément on arrive à

$$\|S^i(f)\|^2 - \|f^2\|^2 = 2 \langle f_0^i, (S_{j_1}^i(f_{j_1}^i) - f_{j_1}^i) + \cdots + (S_{j_n}^i(f_{j_n}^i) - f_{j_n}^i) \rangle,$$

et les $\|S_{j_k}^i(f_{j_k}^i) - f_{j_k}^i\|$ sont *a priori* petites d'après les propriétés d'approximation des opérateurs de synthèse locaux. Cette observation montre également au passage que les opérateurs globaux tendent à devenir isométriques lorsque le paramètre de localité K augmente.

Au lieu de développer des opérateurs isométriques, on aurait également pu obtenir des *similitudes*, en ajustant pour chacune d'elles son rapport α_i de façon à optimiser l'approximation de $\mathcal{P}_{\mathcal{K}^c}^\perp$ (voir proposition III.16, (ii)). Cependant il y aurait deux inconvénients majeurs, malgré le gain théorique en qualité d'approximation :

- 1) L'opérateur d'approximation résultant ne conserverait plus les constantes (entre autres). Les résultats des approximations ne sont alors pas visuellement satisfaisants.
- 2) Puisque les valeurs singulières de la projection orthogonale sont toutes ≤ 1 , on aurait nécessairement $\alpha_i < 1 - \varepsilon$, pour « presque tout » les espaces locaux⁹. Il s'en suivrait que

$$\prod_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et donc les hypothèses (HS) (voir p. 55) ne seraient pas vérifiées.

Avec les isométries, (HS) est vérifiée et par conséquent, le corollaire III.3 montre que les processus d'analyse et de synthèse sont uniformément stables. La proposition III.13 est également vérifiée : dans le point de vue subdivision, on dira que la base d'ondelettes est orthogonale. Ceci est un argument pour affirmer que le cadre multirésolution que nous venons de développer est, dans le cas constant, la complète généralisation des ondelettes de Haar à des triangulations quelconques.

V.3.1.3. Exemples et applications

Nous commençons par donner les résultats de quelques expérimentations pratiques dans le but d'évaluer les propriétés d'approximation des opérateurs isométriques P_{iso}^n que nous venons de définir. Nous savons déjà qu'en théorie ils approchent l'opérateur de projection orthogonale $P_\perp^n$ de manière optimale selon la norme de Frobenius. Nous avons donc comparé les quantités

$$\frac{\|f_N - P_\perp^{N,n}(f_N)\|}{\|f_N\|}, \quad \frac{\|f_N - P_{\text{iso}}^{N,n}(f_N)\|}{\|f_N\|}, \quad \text{et} \quad \frac{\|P_\perp^{N,n}(f_N) - P_{\text{iso}}^{N,n}(f_N)\|}{\|f_N\|},$$

pour $n = n_0, \dots, N$, dans le cas constant et le cas linéaire, avec le jeu de données classique (résultats en figure V.22). On voit que les deux opérateurs ont des qualités d'approximation comparables, *ce qui rend les opérateurs isométriques utilisables dans le point de vue non emboîté également*. Comme on l'avait prévu, les résultats dans le cas linéaire sont très bons, et le seraient d'avantage encore pour des fonctions de degré plus élevé.

Nous avons vu à la section précédente que dans le cas linéaire, les opérateurs n'étaient que « presque » isométriques. Pour évaluer cela, nous avons comparé l'erreur supérieure

$$\|f_N - f_n^{n,N}\|^2, \quad \forall n = n_0, \dots, N,$$

9. au moins dans le cas d'une décimation aléatoire.

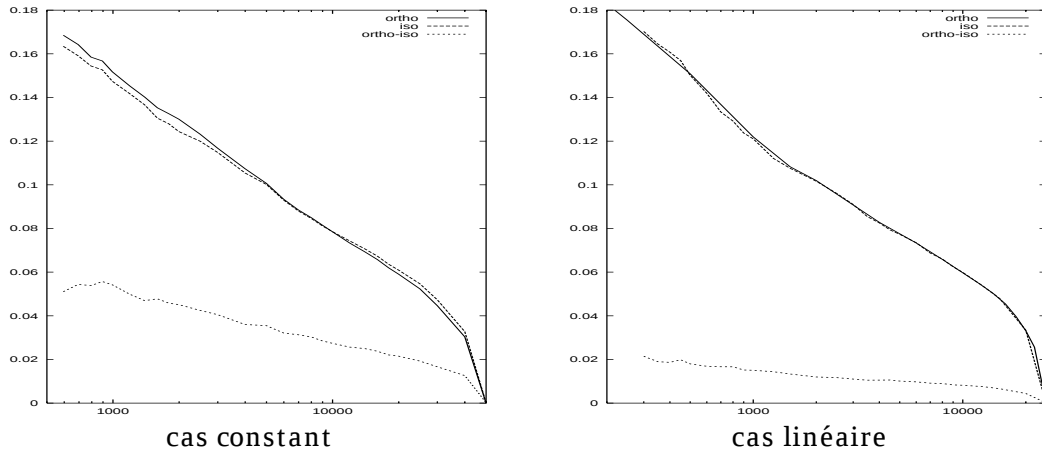


Figure V.22 — Évaluation des qualités d'approximation des opérateurs isométriques.

avec sa valeur théorique prédite par les coefficients d'ondelettes s'il y avait isométrie exacte (comme dans le cas constant), c'est-à-dire

$$\sum_{i=n+1}^N \|g_i\|^2,$$

où les g_i sont les composantes de détail dans la décomposition de $f = f_N$. Le résultat est présenté à la figure V.23. On voit que le comportement reste très satisfaisant ce qui permet en pratique d'utiliser les opérateurs comme s'ils étaient isométriques.

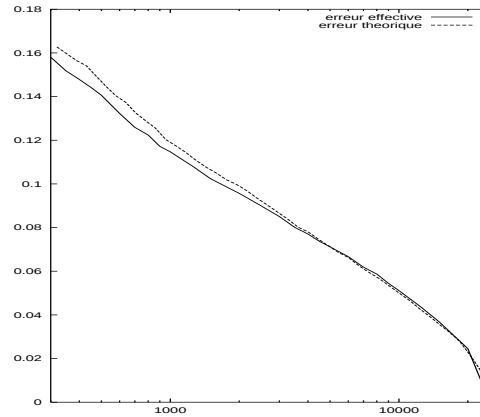


Figure V.23 — Estimation de la qualité de mesure d'erreur supérieure dans le cas linéaire.

Nous présentons maintenant trois applications classiques des ondelettes, que les opérateurs isométriques permettent d'effectuer à présent sur des maillages irréguliers. Toutes ces applications se placent dans le point de vue subdivision.

La première application (figure V.24), et sans doute la plus connue, est la compression de données. Le principe est simplement de reconstruire la fonction après analyse avec un sous-ensemble sélectionné de coefficients d'ondelette. Nous l'illustrons ici dans le cas constant. Étant donné la propriété de mesure d'erreur supérieure dont nous disposons, il suffit de sélectionner les plus gros coefficients d'ondelette. La somme quadratique de ceux omis dans la reconstruction nous fournit l'erreur d'approximation résultante. Cependant, comme nous l'avons déjà observé, l'ensemble de la structure

sous-jacente à la triangulation la plus fine est conservée et occupe en pratique bien plus de place que les coefficients scalaires définissant la fonction. Pour une « compression » plus effective, il faut adopter le point de vue non emboîté, par exemple avec l'approche présentée à la section V.2.

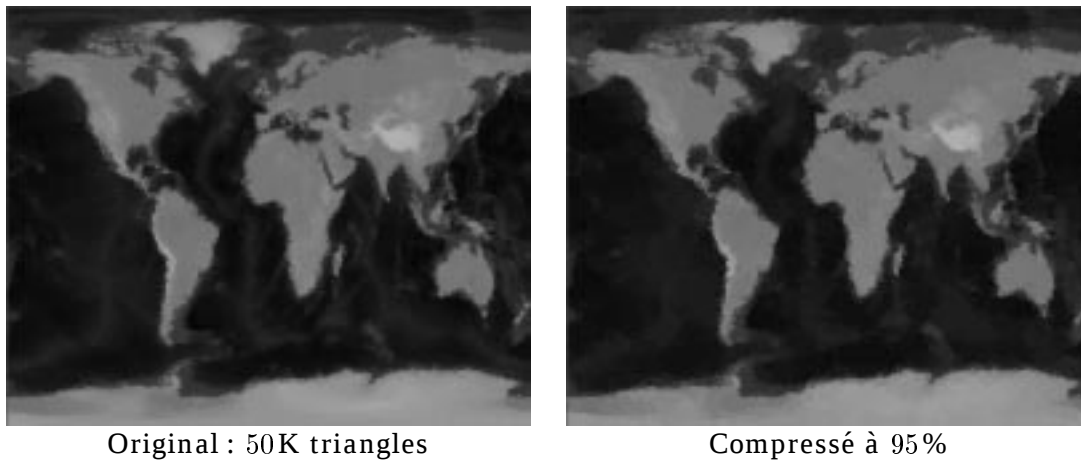


Figure V.24 — Compression d'une fonction constante par morceaux : 6% d'erreur relative.

Nous montrons ensuite dans le cas linéaire un exemple d'édition à différents niveaux de détails (figure V.25). La fonction initiale est décomposée et visualisée (dans les espaces d'approximation) à un niveau grossier. Cette fonction est alors éditée en relevant les valeurs en quelques sommets aux bords, puis reconstruite au niveau fin. Les propriétés d'isométries assurent que l'amplitude de la modification finale est la même que celle apportée au niveau grossier.

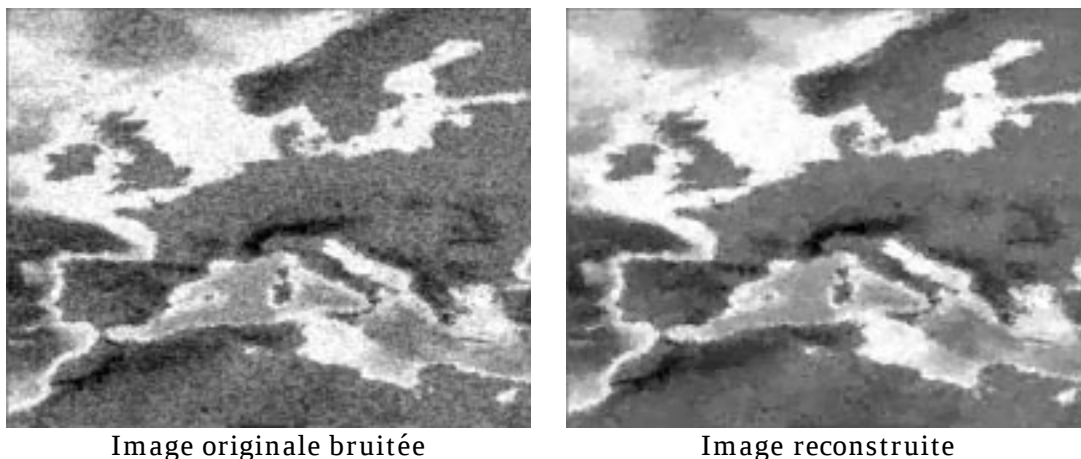


Figure V.26 — Débruitage d'une fonction par seuillage des coefficients d'ondelettes.

Enfin nous présentons un exemple de débruitage, dans le cas constant. Le principe est similaire à celui utilisé pour la compression. L'image est décomposée en ondelettes puis reconstruite avec les plus gros coefficients seulement. Ceux-ci correspondent aux grandes caractéristiques du signal, et le bruit est ainsi atténué. Pour l'exemple présenté à la figure V.26, un bruit gaussien d'amplitude 80 a été ajouté à l'image europe (dont les valeurs sont initialement dans l'intervalle $\llbracket 0, 255 \rrbracket$). La fonction reconstruite utilise 7% des coefficients d'ondelettes.

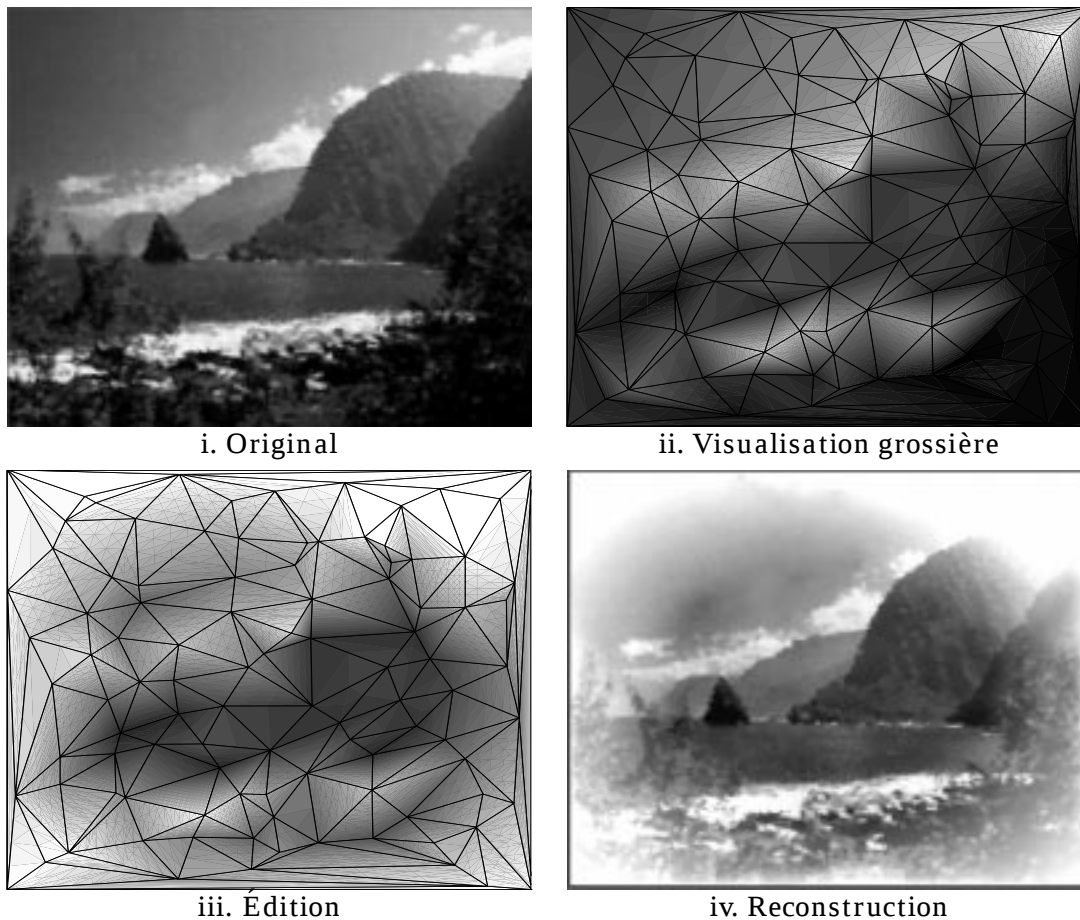


Figure V.25 — Design d'image utilisant l'édition à différents niveaux de détails.

V.3.2. Approches basées sur l'opérateur de subdivision

Jusqu'à présent nous avons toujours construit le cadre multirésolution en nous basant sur l'opérateur d'approximation, puis choisi les espaces auxiliaires (par un cadre semi-orthogonal par exemple) pour obtenir les opérateurs de synthèse. Nous illustrons maintenant la démarche inverse : déterminer d'abord des opérateurs de synthèse ayant des propriétés précises puis choisir les espaces de détail pour compléter le cadre multirésolution.

Notre objectif est de développer une subdivision qui engendre des fonctions régulières. Dans le cadre des méthodes de subdivision classiques, il existe plusieurs schémas dont la convergence vers des fonctions différentiables a été démontrée (voir par exemple [Sch96]). Beaucoup moins de choses sont connues dans le cas de subdivisions irrégulières : dans [DGS99], on trouve des résultats de convergence pour un schéma en dimension 1. On peut également citer [LMU94] et [LMU90], où un schéma de subdivision irrégulier est utilisé pour générer des courbes C^1 interpolantes préservant la convexité des données initiales et possédant des paramètres de forme. En dimension supérieure, comme dans notre cas par exemple, aucun résultat abouti n'existe à notre connaissance malgré des avancées intéressantes ([Gus98]). Ce n'est pas notre but ici de nous attaquer à ces problèmes difficiles. Dans ce qui suit, nous nous contentons de donner un mécanisme de construction simple fournissant des opérateurs de synthèse qui engendrent des fonctions *visuellement* lisses. Nous ne considérons pour simplifier que le cas linéaire planaire, mais on pourrait adapter facilement la construction au cas sphérique et/ou constant.

Dans l'idée de construire un cadre *non emboîté* nous appliquerons ensuite les résultats du chapitre III pour choisir les espaces de détail associés aux opérateurs de synthèse.

V.3.2.1. Opérateurs de synthèse engendrant des fonctions « lisses »

La technique de construction s'inspire de celles utilisées dans le cas 1D ([DGS99]) : interpolation polynomiale locale. Nous nous plaçons donc comme à la section précédente dans le cadre local (résumé par le diagramme (V.4)), les espaces locaux étant donnés par un ADR de paramètre $K + 1$. La construction est paramétrée par un *degré* $d \geq 1$ et un *coefficient de « relaxation »* $0 \leq \alpha \leq 1$; elle s'effectue en 3 étapes :

- 1) calcul du polynôme $\bar{P}$ de degré d aux moindres carrés discrets sur l'ensemble des sommets de l'espace local ;
- 2) prédiction de la valeur au sommet central par évaluation du polynôme en ce sommet ;
- 3) relaxation des valeurs aux sommets 1-voisins, c'est-à-dire

$$f_{\text{new}}(\mathcal{M}_i) := \alpha \bar{P}(\mathcal{M}_i) + (1 - \alpha) f_{\text{old}}(\mathcal{M}_i), \quad \forall i \in \mathcal{V}_1. \quad (\text{V.7})$$

Quelle que soit la valeur de $K \geq 1$, on voit que seules les valeurs en les 1-voisins sont modifiées. Pour cette raison, l'opération au niveau global sera indépendante de l'ordre des opérations dans les espaces locaux dès que le pas de l'ADR est $\geq K + 1$. Reprenons à présent point par point la construction esquissée plus haut.

1) Soit N_d la dimension de l'espace des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de dimension d et soit $(p_1, \dots, p_{N_d})$ une base de cet espace (par exemple la base des monômes). Nous considérons ensuite la norme discrète

$$\|f\|^2 := \sum_{i \in \mathcal{V}_K} f(\mathcal{M}_i)^2,$$

selon laquelle on va ajuster le polynôme. On suppose que $|\mathcal{V}_K| \geq N_d$. On donne sans démonstration le résultat suivant :

LEMME V.3 — Pour tout $i \in \mathcal{V}_K$, soit A_i le vecteur ligne de composantes $(p_k(\mathcal{M}_i))$, $k = 1, \dots, N_d$. Soit A la matrice de lignes A_i , et V le vecteur colonne de composantes $(f(\mathcal{M}_i))$. Si A^*A est inversible, alors le polynôme $\bar{P}$ de degré d minimisant $P \rightarrow \|P - f\|$ est unique et dans la base des p , ses coefficients $L := [l_1 \ \dots \ l_{N_d}]^*$ sont donnés par

$$L = (A^*A)^{-1} A^*V.$$

La condition A^*A inversible a lieu dès que les points $\mathcal{M}_i$ sont en position suffisamment « générale ». Si ce n'est pas le cas, et notamment si $|\mathcal{V}_K| < N_d$, on refuse la suppression du sommet. Il s'agit en pratique de trouver un compromis entre d et K de manière à ce que le polynôme aux moindres carrés soit calculable dans un grand nombre de cas, sans pour autant avoir trop de points par rapport au degré utilisé, faute de quoi l'approximation n'est pas de bonne qualité. Le cas $d = 1$ nécessite $N_1 = 3$ sommets, ce qui est toujours le cas pour $K = 1$. Néanmoins le degré 1 n'est pas suffisant pour avoir des résultats de qualité. Prendre $d = 2$ est délicat car souvent $K = 1$ n'apporte pas les $N_2 = 6$ sommets nécessaires et $K = 2$ en apporte de trop. En pratique, nous avons

utilisé $d = 3$ ($N_3 = 10$) avec $K = 2$. La matrice à inverser A^*A est alors 10×10 , ce qui reste raisonnable.

2) À partir de la fonction « grossière », nous voulons maintenant définir une nouvelle fonction « subdivisée ». Au point central $\mathcal{M}_0$, la valeur est simplement celle du polynôme $\bar{P}$:

$$f_{\text{new}}(\mathcal{M}_0) := \sum_i l_i p_i(\mathcal{M}_0).$$

3) Aux sommets 1-voisins, on effectue une relaxation *via* la formule (V.7). Le paramètre α joue ici un rôle de lissage : lorsque $\alpha = 0$, les valeurs restent inchangées, et l'opérateur de subdivision qui en résulte est alors *interpolant*, puisqu'il ne modifie à chaque étape aucune des valeurs précédentes. Inversement, si $\alpha = 1$, les valeurs deviennent exactement celles de $\bar{P}$: on a alors affaire à un très fort lissage des données.

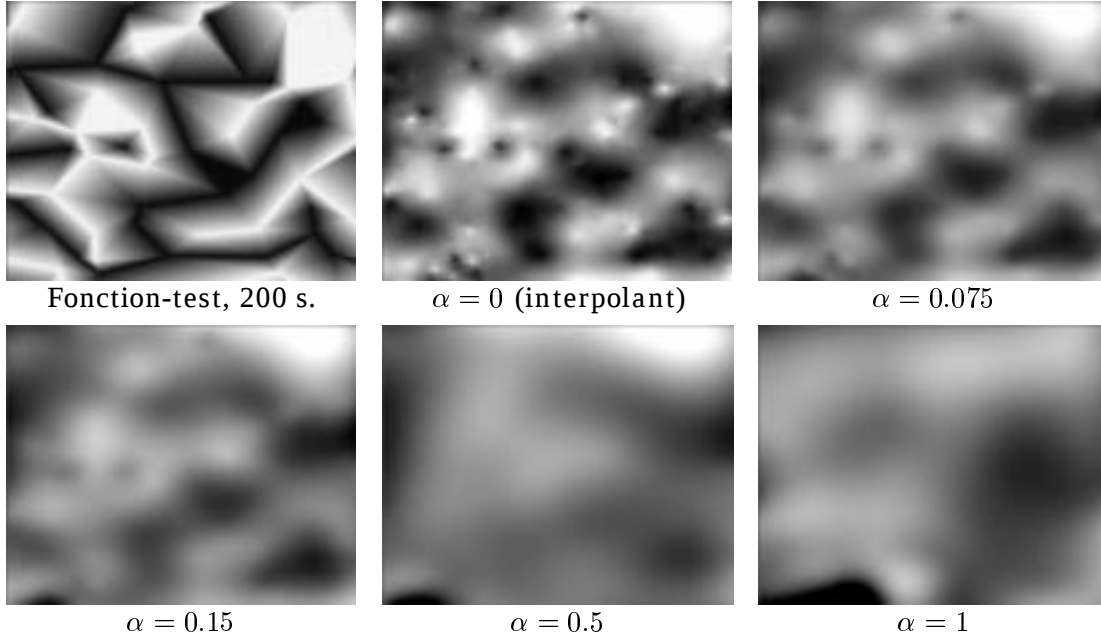


Figure V.27 — Résultats de la synthèse d'une fonction test pour diverses valeurs de α .

La figure V.27 présente les résultats de la subdivision d'une fonction-test pour cinq valeurs du paramètre de relaxation. La triangulation sous-jacente est la triangulation aléatoire de 25K sommets. La fonction-test est définie sur une triangulation d'environ 200 sommets obtenue par décimation régulière de pas 3, puis subdivisée à travers 115 étapes de subdivision.

Dans le cas interpolant ($\alpha = 0$) le résultat n'est pas réellement lisse. Ceci corrobore le fait qu'en général les subdivisions interpolantes ne donnent pas des résultats très réguliers ([Gus98]). En revanche, pour des subdivisions quasi-interpolantes ($\alpha = 0.075, 0.15$), les résultats sont (visuellement) satisfaisants. Les grandes valeurs de α sont données à titre d'illustration mais lissent de trop pour être utiles.

On peut signaler que la démarche employée ici peut également être mise en oeuvre en se basant sur d'autres approximants que les fonctions polynomiales, par exemple les méthodes d'interpolation utilisant des fonctions radiales ([Sch95]). Ces méthodes pourraient notamment servir à construire un schéma de subdivision défini *globalement*, en contraste avec celui utilisé ici qui est basé sur des corrections *locales* ([FI96]). L'approche globale devrait permettre une analyse plus simple des propriétés de convergence du schéma, ainsi que de la régularité effective des fonctions limites. On donne

par exemple dans [BLM95] des estimations d'erreur lors de l'ajout ou la suppression d'un noeud dans un interpolant.

V.3.2.2. Choix des espaces de détail

Pour compléter le cadre multirésolution, il reste à définir des opérateurs d'approximation associés aux opérateurs de synthèse que nous venons de construire. Dans le point de vue non emboîté dans lequel nous voulons nous placer, l'enjeu est d'obtenir des approximations grossières définies sur les triangulations appauvries qui soient visuellement plaisantes, et de préférence *proches* de la fonction fine (subdivisée).

Dans le cas interpolant, on peut raisonnablement s'attendre à ce que les choses se passent bien.

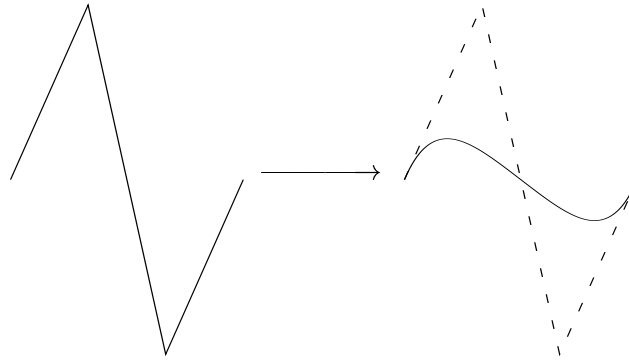


Figure V.28 — Algorithme de de Casteljau : le polygone de contrôle et la courbe subdivisée.

D'un autre côté, pour les opérateurs non interpolants, des problèmes sont à craindre : penser par exemple au cas de l'algorithme de de Casteljau pour les courbes de Bezier. La figure V.28 montre dans un cas très simple combien le polygone de contrôle (équivalent des approximations grossières) peut être éloigné de la courbe finale. Un cadre multirésolution non emboîté basé sur la subdivision de de Casteljau serait sûrement délicat à mettre en oeuvre.

La proposition III.18 tente de répondre au présent problème puisqu'elle montre comment choisir les espaces de détail de manière à ce que l'opérateur d'approximation résultant ait de bonnes propriétés d'approximation. En particulier la proposition III.19 montre que cet opérateur est le plus proche au sens L_2 de l'opérateur de projection orthogonale. Nous utilisons donc ce résultat pour optimiser sur chaque espace local l'opérateur d'approximation. À la figure V.29 sont présentés les résultats des analyses pour les différentes valeurs de α déjà utilisées dans l'exemple précédent. La triangulation sous-jacente possède 2 000 sommets. Nous voyons que mis à part le cas interpolant, où les résultats sont tout juste corrects, la qualité d'approximation de l'analyse est très mauvaise, rendant ces opérateurs *inutilisables* dans un point de vue non emboîté.

Les résultats négatifs que nous venons de présenter montrent que le développement d'un cadre multirésolution et plus précisément d'ondelettes pour données irrégulières soulève des problèmes au delà de la connaissance (encore faible dans l'état actuel des recherches) de schémas de subdivision convergents. Si les schémas interpolants ou quasi-interpolants peuvent convenir ([DGS98]), il reste à développer des ondelettes associées à des schémas non interpolants qui soient utilisables dans un point de vue non emboîté. Visiblement, tous les schémas ne peuvent convenir, puisque nous utilisons un résultat déjà optimal. Cependant, on peut penser qu'il serait possible d'améliorer un

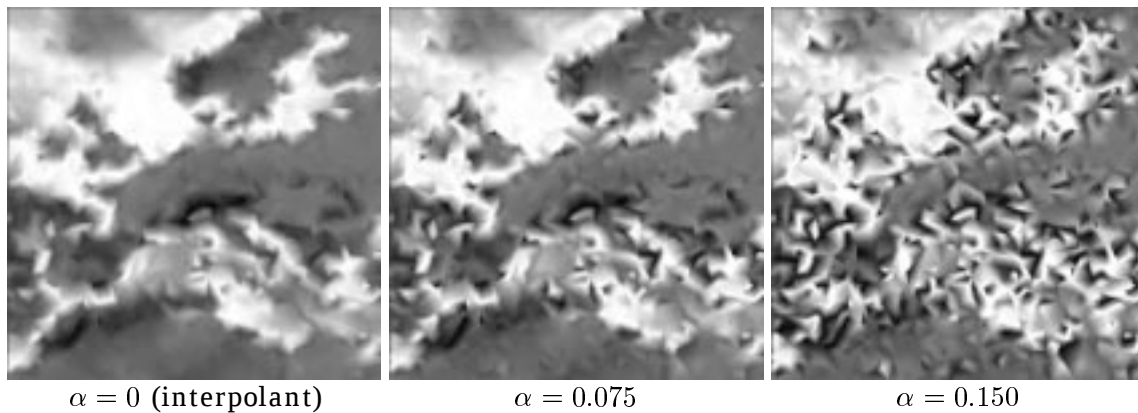


Figure V.29 — Résultats d'analyse pour différentes valeurs de α (2 000 sommets).

peu les choses en prenant en compte des informations *a priori* sur les fonctions analysées : on pourra alors proposer une optimisation « sur mesure », à opposer avec le résultat de la proposition III.19 qui minimise le plus mauvais cas. On remarquera au passage tout l'intérêt des opérateurs isométriques (section V.3.1), qui *conjuguent* propriétés d'approximation, propriétés de stabilité et de mesure d'erreur.

VI

Applications aux Données Scalaire Surfaciques dans un Modèle Décimatoire Multirésolution

LA DERNIÈRE DÉCENNIE a vu apparaître de très nombreux travaux concernant la simplification de maillages surfaciques irréguliers de topologie quelconque dans le but de réduire leur taille souvent considérable ainsi que d'accélérer d'autres traitements postérieurs comme la visualisation, les calculs d'intersection, de visibilité, le stockage ou la transmission ([COM98, Kle97, BS96, ALS98, CMO97, GH97, HJST98, Gue97, Hop96], et voir également [HG97] pour un état de l'art). L'ensemble de ces approches ont en commun de simplifier le maillage par applications successives d'une opération élémentaire de simplification (voir chapitre IV) dans un ordre gouverné par une liste de priorité : c'est ce que nous appelons l'approche *décimation*. Si dans la structure de données utilisée on sauvegarde les renseignements nécessaires à l'inversion des opérations de simplification, on aboutit à un *modèle multirésolution* qui permet de voyager de manière progressive entre le maillage le plus fin et ses approximations de plus en plus grossières. L'ensemble de la structure occupe en général strictement la *même* place que les données initiales.

Un certain nombre de ces travaux ([COM98, BS96, CMO97, GH98, Hop99, Hop96]) considèrent également le cas où des données sont définies sur le maillage initial. Se pose alors la question de savoir comment « propager » ces données sur les approximations grossières au fur et à mesure de la simplification. Dans [COM98] et [CMO97] les données sont définies par l'intermédiaire de textures ; nous ne nous intéresserons pas à cette approche ici. Bajaj ([BS96]) propose une approche bijective — c'est-à-dire ne demandant pas de données supplémentaires — simple : le sous-échantillonnage des données aux sommets. Nous avons déjà vu au chapitre précédent que si cette approche peut suffire dans le cas de données suffisamment régulières, elle échoue lorsque si celles-ci présentent de fortes variations. Hoppe ([Hop96]) présente une approche de

type « optimisation » donnant des résultats de qualité (nécessitant une forte charge de calculs). Cependant, le volume d'informations nécessaires pour inverser l'opération n'est pas clairement discuté. Une approche prometteuse, alliant vitesse et qualité d'approximation est celle développée par Garland et Heckbert ([GH98]) puis améliorée ([Hop99]). Ici encore cependant, l'objectif est essentiellement la *simplification* ; les aspects *reconstruction* ne sont pas abordés.

Dans ce chapitre nous montrons comment utiliser le point de vue non emboîté pour développer une approche *bijective* d'approximation non triviale des données. Dans la première partie nous exposons précisément le cadre mathématique qui décrit le problème et sa solution. Cela permet notamment de faire le lien entre les techniques de décimation et l'approche « ondelettes » ([CPD⁺96]) développée initialement par Lounsbery, que nous rappelons brièvement. La deuxième partie expose la mise en oeuvre de ces techniques et présente quelques exemples. Certains de ces résultats ont été exposés dans [GB99].

VI.1. Cadre théorique

Dans cette section nous présentons la démarche générale qui peut être utilisée dans la plupart des approches décimatoires pour mettre en oeuvre le cadre multirésolution non emboîté.

VI.1.1. Description formelle des données initiales

Un modèle multirésolution basé sur la décimation fournit à partir d'un maillage surfacique $\mathcal{T}^N$ initial une suite $\mathcal{T}^i$ de maillages appauvris jusqu'à un maillage de base $\mathcal{T}^0$. Nous supposons que le modèle *préserve la topologie* du maillage initial. Quand nous parlons de topologie, ici, nous parlons de la topologie de la *réalisation géométrique* du maillage ; sauf mention du contraire, nous confondons dans la suite le maillage et sa réalisation fonctionnelle. En conséquence, on peut définir :

DÉFINITION VI.1 Opérateurs de paramétrisation — Pour tout $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on appelle opérateur de paramétrisation un homéomorphisme

$$H^i : \mathcal{T}^i \longrightarrow \mathcal{T}^{i+1}$$

entre deux maillages consécutifs.

Les opérateurs de paramétrisation ne sont bien sûr pas uniques, et leur choix précis a son importance. De manière générale, ils devraient être choisis dans l'optique de minimiser une fonctionnelle du genre

$$H^i \longmapsto \int_{\mathcal{T}^i} \|\mathcal{M} - H^i(\mathcal{M})\| d\mathcal{M}$$

de façon à ce qu'il y ait dans une certaine mesure une correspondance « naturelle » entre $\mathcal{M} \in \mathcal{T}^i$ et $H^i(\mathcal{M}) \in \mathcal{T}^{i+1}$. Cependant, une telle correspondance a toujours quelque chose d'arbitraire, et dépend essentiellement du contexte d'application (cf par exemple section VI.2.1).

Nous notons $\mathcal{F}(\mathcal{T}^i)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques (ou à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) définies sur $\mathcal{T}^i$. Les données définies sur le maillage initial et « propagées » ensuite sur les maillages simplifiés sont supposées appartenir à une certaine classe :

DÉFINITION VI.2 Espaces d'approximation supérieurs — Pour tout $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on définit l'espace d'approximation supérieur noté $\hat{V}^i$. C'est un SEV de $\mathcal{F}(\mathcal{T}^i)$, que l'on suppose de dimension finie.

Une remarque importante est que les fonctions des espaces d'approximation supérieurs sont définies sur des domaines *différents* puisqu'en général, la simplification d'un maillage modifie sa réalisation géométrique. Il est donc clair que pour pouvoir définir un quelconque problème d'approximation entre de telles fonctions, il faut décider d'un moyen pour les mettre en correspondance, et plus exactement trouver un domaine de paramétrisation commun. C'est justement le rôle des opérateurs de paramétrisation.

VI.1.2. Séquence d'approximation

Nous définissons maintenant les éléments d'un cadre multirésolution non emboîté.

VI.1.2.1. Espaces d'approximation

On commence par quelques notations.

Notations. — Pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2$, on note

- $H^{i,j} : \mathcal{T}^i \rightarrow \mathcal{T}^j$, avec

$$H^{i,j}(\mathcal{M}) = \begin{cases} (H^{j-1} \circ \dots \circ H^i)(\mathcal{M}) & \text{si } i < j, \\ \mathcal{M} & \text{si } i = j, \\ (\text{Inv}(H^j) \circ \dots \circ \text{Inv}(H^{i-1}))(\mathcal{M}) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

- Si $f \in \mathcal{F}(\mathcal{T}^i)$, on note $f^{i,j}$ la fonction $f \circ H^{j,i}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{T}^j)$, définie par « changement de paramétrisation ».
- De même on notera $\hat{V}^{i,j}$ l'ensemble des fonctions $f^{i,j}$, avec $f \in \hat{V}^i$. C'est un SEV de $\mathcal{F}(\mathcal{T}^j)$.

On peut alors définir les espaces d'approximation en choisissant comme terrain de reparamétrisation commun à tous les espaces d'approximation supérieurs le maillage grossier $\mathcal{T}^0$.

DÉFINITION VI.3 Espaces d'approximation — Pour $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, les espaces d'approximation sont définis par

$$V^i := \hat{V}^{i,0} \subset \mathcal{F}(\mathcal{T}^0).$$

Les espaces V^i forment une suite de sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{F}(\mathcal{T}^0)$. Par la correspondance $H^{0,i}$ entre V^i et $\hat{V}^i$, on a donc ramené le problème d'approximation des fonctions de $\hat{V}^N$ sur les $\hat{V}^i$ à un cadre multirésolution non emboîté (en général) sur les espaces d'approximation.

VI.1.2.2. Opérateurs d'approximation

Le choix des opérateurs d'approximation peut bien sûr s'effectuer en considérant uniquement la situation dans $\mathcal{F}(\mathcal{T}^0)$. Cependant, dans la pratique, les fonctions des espaces d'approximation sont mal connues et ont une structure compliquée due au changement de paramétrisation. D'autre part il ne faut pas perdre de vue que pour $f \in V^i$ donnée, c'est $f^{0,i} \in \hat{V}^i$ qui est visualisée.

Il est par conséquent plus judicieux (et parfaitement équivalent) de fonder la transition entre V^{i+1} et V^i sur celle entre $\hat{V}^{i+1,i}$ et $\hat{V}^i$, qui leur correspondent.

DÉFINITION VI.4 Opérateurs d'approximation supérieurs — Pour $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on définit les opérateurs d'approximation supérieurs comme des applications linéaires

$$\hat{P}^i : \hat{V}^{i+1,i} \longrightarrow \hat{V}^i.$$

Ces opérateurs sont donc choisis en fonction de l'application. Dans la section VI.2.3, on choisira la projection orthogonale, dans l'esprit du travail effectué au chapitre précédent.

Nous définissons « accessoirement » les opérateurs d'approximation :

DÉFINITION VI.5 Opérateurs d'approximation — Pour $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, les opérateurs d'approximation sont définis à partir des opérateurs d'approximation supérieurs par

$$\begin{aligned} P^i : V^{i+1} &\longrightarrow V^i \\ f &\longmapsto H^{i,0} \circ \hat{P}^i (f \circ H^{i,0}). \end{aligned}$$

Explicitons : une fonction $f \in V^{i+1}$ est d'abord redéfinie sur $\hat{V}^{i+1}$ par $f \circ H^{i+1,0}$. Cette fonction est alors reparamétrisée sur $\mathcal{T}^i$ par $f \circ H^{i+1,0} \circ H^{i,i+1} = f \circ H^{i+1,0} \circ H^i = f \circ H^{i,0}$ qui appartient donc bien à $\hat{V}^{i+1,i}$. Le résultat après approximation par $\hat{P}^i$ est redéfini sur $\mathcal{T}^0$ dans $\hat{V}^{i,0} = V^i$.

VI.1.2.3. Espaces auxiliaires

Pour choisir les espaces auxiliaires et compléter le cadre multirésolution, nous utilisons la même technique que précédemment.

Il s'agit donc de choisir les *espaces auxiliaires supérieurs* $\tilde{\hat{V}}^i \subset \hat{V}^{i+1,i}$ tels que

$$\tilde{\hat{V}}^i \oplus \hat{W}^i = \hat{V}^{i+1,i},$$

avec $\hat{W}^i := \text{Ker}(\hat{P}^i)$. Les espaces auxiliaires et de détail « réels » sont ensuite définis par la reparamétrisation $H^{0,i}$ sur $\mathcal{T}^0$.

On voit donc que l'ensemble du processus de décomposition s'effectue par une suite de décompositions « supérieures » entre $\hat{V}^{i+1,i}$ et $\hat{V}^i$, pour $i = N - 1, \dots, 0$. À aucun moment la structure (complexe) des fonctions des espaces d'approximation n'est requise.

VI.1.3. Comparaison avec l'approche ondelette classique

Dans [CPD⁺96], on utilise une approche ondelette pour la visualisation multirésolution d'un maillage et ses attributs scalaires rattachés (couleur). Nous avons déjà décrit au chapitre I l'essentiel de la théorie concernant la partie « géométrie » du maillage. L'idée fondamentale était de constater qu'en subdivisant n fois $1 \rightarrow 4$ le maillage grossier, on obtient un maillage topologiquement (au sens du complexe simplicial) identique au maillage final et qu'alors les *coordonnées barycentriques* définies sur chacun des triangles des deux maillages définissent implicitement *une paramétrisation* du maillage final sur le maillage de base.

C'est exactement ce même principe qui est utilisé pour la manipulation de la fonction scalaire définie sur le maillage initial. Les données scalaires considérées sont représentées par des fonctions linéaires par morceaux sur les triangles du maillage. Ainsi le maillage et la fonction se représente encore par (I.19) en ajoutant simplement une quatrième composante aux coefficients v_i^j : la valeur de la fonction en ce sommet. Bien que présentée dans un point de vue différent, cette méthode est donc similaire à la nôtre, à ceci près que nous n'avons plus besoin de supposer que le maillage initial provienne d'un processus de subdivision¹⁰. Nous pourrions également définir des ondelettes pour manipuler la géométrie, mais nous laisserons cette possibilité de côté ici¹¹. Il est intéressant de constater comme le point de vue non emboîté apparaît naturel dans ce problème et démontre par là même son intérêt : les fonctions des espaces d'échelle ne jouent aucun rôle. Le point de vue subdivision, au-delà d'être inapproprié ici, rendrait de plus la description de l'idée fondamentale de l'algorithme particulièrement absconse.

Observé du point de vue des espaces d'approximation, la technique que nous avons proposée a donc tout d'une approche multirésolution par ondelettes. D'un autre côté, du point de vue des espaces d'approximation supérieurs, chaque étape de décomposition peut « simplement » être considérée comme un algorithme itératif d'approximation, typique des techniques de décimation. Au final, distinguer le point de vue non emboîté du point de vue subdivision découvre un terrain d'approche unifié et montre que les approches ondelettes et décimatoires, souvent opposées dans la littérature, relèvent dans la pratique des mêmes techniques fondamentales.

VI.2. Mise en oeuvre. Exemples

Nous regardons dans un premier temps point par point comment se traduisent les hypothèses de la section VI.1.1 dans le cas qui nous intéresse. Quelques exemples d'applications sur des modèles géométriques de pièces mécaniques sont alors donnés.

VI.2.1. Données initiales

Le modèle décimatoire que nous utilisons est très semblable à celui utilisé dans le cas planaire ou sphérique dans le cadre de la décimation adaptative, en section V.2. Il se compose donc :

10. Dans [CPD⁺96], les espaces d'approximation sont emboîtés, c'est en fait même un cas *complet*. On notera que l'hypothèse d'un maillage régulier permet de définir les opérateurs de paramétrisation de façon implicite sans passer par des projections successives, dont l'un des problèmes est justement l'*existence*.

11. Voir cependant les perspectives en fin de thèse pour une discussion sur les enjeux de cette voie de recherche.

- d'une liste des priorités basée sur un oracle géométrique déterminant les sommets du maillage présentant le moins de « courbure » ;
- d'une opération de suppression de sommet gouvernée par la LP pour simplifier le maillage.

Nous considérons deux types de données scalaires rattachées au maillage : une donnée par face ou une donnée par sommet. Ceci nous amène à définir les espaces d'approximation supérieurs $\hat{\mathcal{K}}^i$ comme les fonctions constantes ($\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$) ou linéaires par morceaux ($\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$) sur le maillage $\mathcal{T}^i$ déduit de $\mathcal{T}^N$ après $N - i$ suppressions de sommet.

Un autre ingrédient important sont les opérateurs de paramétrisation. Ceux-ci sont définis en même temps que les opérations de suppression de sommets. Cette opération, y compris dans le cas 3D, a déjà été décrite en détail à la section IV.2.1. La technique utilisée nécessite de trouver un plan S sur lequel le PI (en tant que surface) du point à supprimer se projette orthogonalement de façon bijective. Nous avons alors vu que, toujours localement au PI, cette projection définit un homéomorphisme F de $\mathcal{T}^{i+1}$ sur S et d'autre part l'opération de « déprojection » est un homéomorphisme G de S sur $\mathcal{T}^i$. On peut par conséquent définir localement $H^i := (G \circ F)|_{\text{PI}}^{-1}$. D'après l'expression de F et de G discutée à la section IV.2.1, on peut également caractériser H^i par

$$\mathcal{P}_S^\perp(\mathcal{M}) = \mathcal{P}_S^\perp(H^{i-1}(\mathcal{M})), \quad \forall \mathcal{M} \in \text{PI}$$

où $\mathcal{P}_S^\perp$ est la projection orthogonale sur S . H^i est étendu à l'ensemble de $\mathcal{T}^i$ par l'identité, puisque le maillage surfacique reste inchangé en dehors du PI.

Rappelons que le plan de projection est le plan aux moindres carrés des sommets du PI. Ce choix paraît raisonnable mais une étude précise sur un choix « optimal » du point de vue de l'approximation subordonnée resterait à faire.

VI.2.2. Décomposition locale

Comme exposé au paragraphe VI.1.2.2 nous construisons les opérateurs d'approximation par l'intermédiaire des opérateurs d'approximation supérieurs. En pratique l'essentiel a déjà été vu au chapitre précédent, seuls les espaces changent : ici il s'agit de faire la transition entre $\hat{\mathcal{K}}^{i+1,i}$ et $\hat{\mathcal{K}}^i$.

$\hat{\mathcal{K}}^i$ est un espace de fonctions constantes ou linéaires par morceaux sur $\mathcal{T}^i$, le fait que cette triangulation soit surfacique ne change absolument rien.

Les fonctions de base de $\hat{\mathcal{K}}^{i+1,i}$ sont en revanche légèrement plus complexes, puisqu'elles sont l'image par $\text{Inv}(H^i)$ des fonctions de base de $\hat{\mathcal{K}}^{i+1}$. Examinons leur structure. D'abord, à l'extérieur du PI, la fonction comme la surface reste inchangée. À l'intérieur du PI, on observe que la projection $\mathcal{P}_S^\perp = F$ est linéaire. Si $f \in \mathcal{K}^{i+1}$ est une fonction constante (resp. linéaire) par morceaux, alors la fonction $f \circ F^{-1}$ définie sur le PI projeté (qui est encore un polygone étoilé) est la fonction constante (resp. linéaire) par morceaux prenant les mêmes valeurs que f sur les triangles (resp. en les sommets) correspondants. L'homéomorphisme G est linéaire par morceaux sur chacun des triangles retriangulant le polygone plan. En notant p_{ij} les polygones formant les intersections des triangles avant et après retriangulation, on voit que la fonction finale $f \circ H^i = f \circ F^{-1} \circ G^{-1}$ est encore constante (resp. linéaire) par morceaux sur les polygones $G(p_{ij})$. Dans le cas linéaire en particulier les valeurs de la fonction sont donc entièrement déterminées par les valeurs de $f \circ F^{-1}$ en les sommets des p_{ij} . La figure VI.1 reprend la figure IV.2 et la complète pour illustrer le mécanisme.

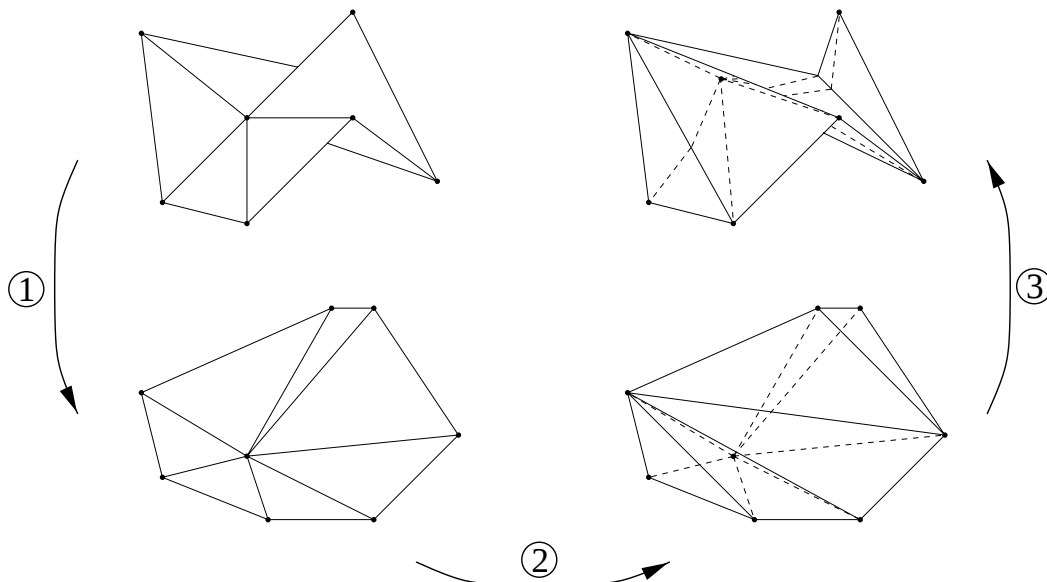


Figure VI.1 — Reparamétrisation de $\hat{V}^{i+1}$ sur $\hat{V}^i$: 1. la projection dans le plan est linéaire.
 2. Le polygone plan est retriangulé.
 3. La remontée est linéaire par morceaux sur les nouveaux triangles.

Ainsi, grâce aux propriétés particulières des opérateurs de reparamétrisation, les fonctions de $\hat{\mathcal{K}}^{i+1,i}$ gardent une structure relativement simple. Il suffit de calculer les nouvelles matrices du produit scalaire dans ces espaces pour pouvoir appliquer *tel quel* tout ce qui a été vu au chapitre précédent. Dans un but de visualisation, on pourra définir les opérateurs d'approximation supérieurs par les opérateurs de projection orthogonale. C'est le choix qui est présenté à la section suivante. Puisqu'ici seule la décomposition/reconstruction des données importe, on est libre dans le choix des espaces auxiliaires (supérieurs). À noter que les opérateurs isométriques peuvent également être employés : si la fonction considérée représente une certaine énergie, par exemple dans un contexte de modélisation mécanique, ce choix garantit la conservation de cette dernière au fur et à mesure des approximations.

Finalement, les algorithmes globaux d'analyse ou de reconstruction des données sont en tout point identiques à ceux utilisés dans le contexte de décimation adaptative/reconstruction progressive, voir p. 113 et p. 114.

VI.2.3. Exemples

La planche VI.1 présente les résultats de divers simplifications de deux pièces mécaniques¹². Un jeu de données (artificiel) complexe a été appliqué sur les faces ou les sommets des maillages initiaux pour définir une fonction constante ou linéaire par morceaux.

Les opérateurs d'approximation supérieurs utilisés sont issus de l'opérateur de projection orthogonale, afin de garantir les meilleures approximations possibles sur les pièces simplifiées.

Dans les exemples des trois premières lignes, la liste des priorités guidant la décimation du maillage est basée sur un critère purement géométrique : une somme

12. Nous tenons à remercier Jean-Claude Léon et Lionel Fine du L3S de Grenoble pour nous avoir fourni ces modèles géométriques.

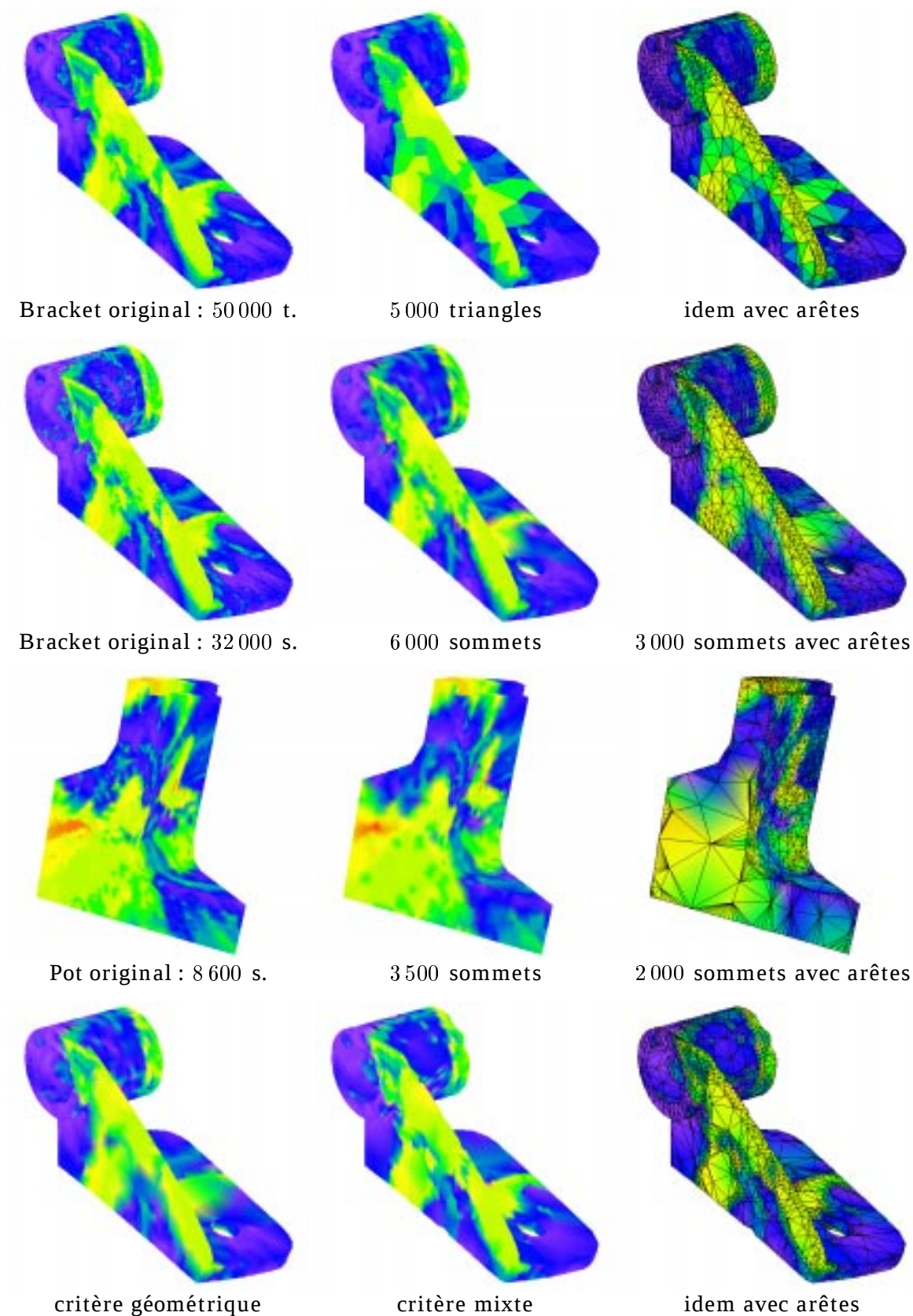


Planche VI.1 — Simplification de données scalaires surfiques.
 Cas linéaire par morceaux sauf 1^{ière} ligne, cas constant par morceaux.
 [En bas] critère géométrique vs. critère mixte (3 000 sommets).

pondérée des distances des sommets du PI à leur plan aux moindres carrés. Il en résulte que dans certaines régions quasi-planes, la triangulation est très grossière après simplification laissant peu de liberté pour l'approximation des données, ce qui renforce encore l'intérêt de disposer d'un algorithme d'approximation de la meilleure qualité possible.

La dernière ligne montre les résultats obtenus en utilisant un critère mixte basé sur la géométrie et couplé avec un oracle fonctionnel du type de ceux utilisés au chapitre précédent. Nous avons ici mis un poids fort sur le critère fonctionnel ; l'approximation des données est alors de qualité (comparer avec l'original) mais en revanche un nombre insuffisant de sommets a été « alloué » à la préservation de la géométrie, qui se retrouve déformée. En pratique il s'avère délicat de doser les poids d'une manière automatique quel que soit l'objet en entrée. Ceci n'est d'ailleurs pas forcément souhaitable : par exemple, si la simplification n'est qu'une étape parmi d'autres dans une chaîne de calculs, il est possible que la précision d'approximation des données scalaires soit le but premier¹³.

13. D'ailleurs, les géométries sont parfois idéalisées, c'est-à-dire remplacées par un équivalent générique qui peut être très grossier.

Conclusion et Perspectives

CETTE THÈSE a été consacrée à l'étude tant théorique qu'appliquée d'un cadre très général d'ondelettes de seconde génération dans lequel ont été distingués deux points de vues différents : le point de vue non emboîté et le point de vue de subdivision, plus classique.

La partie théorique de la thèse s'est attachée à décrire avec précision le cadre mathématique englobant ces deux points de vue, à définir un vocabulaire approprié et à donner quelques résultats ou techniques d'intérêt général et souvent immédiatement utiles dans les applications.

Le chapitre I, destiné principalement à des lecteurs déjà familiers avec le sujet, s'est basé sur une ébauche rapide de la théorie des ondelettes de première génération pour introduire les deux concepts fondamentaux permettant d'aboutir à la théorie générale présentée par la suite : le concept de *réalisation fonctionnelle* et celui d'*espaces de subdivision*. Pour illustrer la puissance de ces concepts, on a ensuite rapidement exposé comment ils permettent de reformuler deux constructions « classiques » d'ondelettes de seconde génération.

Le deuxième chapitre a décrit dans leurs aspects algébriques les points de vue non emboîté et de subdivision. Le vocabulaire, les différents espaces et opérateurs associés ont été définis, ainsi que les mécanismes de décomposition et de reconstruction multirésolution.

Le chapitre III a complété la description commencée au chapitre précédent en précisant divers aspects analytiques de la multirésolution. Des aspects « traditionnels » tout d'abord, avec des résultats basiques sur la stabilité et le conditionnement des processus d'analyse et de synthèse. La définition de différentes mesures d'erreur a ensuite été donnée et discutée. Moyennant des hypothèses convenables sur les opérateurs de synthèse, le problème de la mesure d'erreur supérieure a pu être résolu. D'autres résultats du chapitre, bien que théoriques, sont quasi-indispensables dans la mise en oeuvre pratique de la multirésolution non emboîtée. Ainsi, la section III.3.2 a détaillé l'interprétation remarquable ainsi que les applications de la DVS dans ce contexte. Enfin la section III.5 a proposé plusieurs solutions pour développer des opérateurs d'approximation ou de synthèse vérifiant des propriétés « optimales ».

La deuxième partie de la thèse, plus appliquée, a alors présenté en détail l'application de ces techniques à des problèmes typiques de la visualisation scientifique : la visualisation et la manipulation de fonctions définies sur des maillages.

Le chapitre IV, après avoir rappelé les principales techniques de simplification de maillages, a présenté plus précisément la simplification de sommet et l'algorithme de décimation régulière, outils utilisés dans les chapitres suivants.

Avec pour idée directrice la généralisation des ondelettes de Haar à des maillages

irréguliers, le chapitre V a commencé par exposer pas à pas la construction d'une analyse multirésolution non emboîtée pour fonctions constantes ou linéaires par morceaux sur des triangulations quelconques du plan ou de la sphère, ainsi que les algorithmes associés : analyse, reconstruction par niveaux et adaptative. Au travers de cette construction la nécessité d'obtenir des fonctions définies sur des triangulations possédant peu de sommets a donné tout son intérêt au point de vue non emboîté. On a montré également que des algorithmes précédemment triviaux devenaient délicats à implémenter dans le contexte irrégulier. La technique de la décimation adaptative a alors été présentée. Le point de vue non emboîté a permis ici de révéler sous un aspect « ondelettes » un algorithme traditionnellement rattaché aux techniques dites « de décimation ». Enfin, deux autres choix d'opérateurs d'approximation ont été présentés. Le premier est basé sur des opérateurs isométriques et permet de disposer d'une mesure d'erreur supérieure ; ces opérateurs conviennent également pour diverses applications classiques, en particulier la compression et l'édition à différents niveaux de détails. Une tentative d'utiliser des opérateurs de synthèse engendrant des fonctions lisses *via* un schéma non interpolant a ensuite été présentée, notamment pour mettre l'accent sur la difficulté de développer un cadre *non emboîté* avec de tels opérateurs.

Finalement, le chapitre VI a brièvement montré la démarche permettant d'appliquer la théorie non emboîtée au problème de l'approximation des fonctions définies sur des maillages surfaciques, au coeur d'un environnement multirésolution décimatoire. Là encore, le point de vue non emboîté permet non seulement de faire le lien entre les techniques « ondelettes » et celles plus algorithmiques fondées sur la décimation, mais permet également d'en donner une description à la fois concise et mathématiquement fondée.

En conclusion, dans un contexte de subdivision régulière les méthodes basées sur les ondelettes, reprises ici par le point de vue subdivision, forment des outils efficaces dont la théorie est mathématiquement très avancée, et qui sont aujourd'hui utilisés dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées et de l'infographie. En revanche, dans un contexte irrégulier, l'impossibilité d'« aller à la limite », le besoin d'obtenir une description des fonctions occupant peu de place rend obsolète le point de vue subdivision mais donne son intérêt au non emboîté. Par ce dernier, les approches décimatoires, majoritairement utilisées dans les problèmes de visualisation utilisant des maillages irréguliers, sont conceptuellement reliées aux techniques d'ondelettes.

Nous terminons ce document en donnant plusieurs voies d'approfondissement ou d'élargissement des travaux de cette thèse.

Mesure d'erreur

La mesure d'erreur dans le contexte non emboîté est un problème difficile, dont aucune solution satisfaisante n'a pu être trouvée dans le cadre de ce travail. Précisons encore une fois ce que nous entendons par « solution satisfaisante » (*cf* définition III.9) : il s'agit de calculer, de majorer ou d'estimer précisément $\|f_N - f_k\|$ pour toutes les valeurs de $k < N$, en fonction des coefficients d'ondelettes utilisés pour reconstruire f_k à partir de f_{N_0} (et de ceux restant). Le but essentiel est de pouvoir arrêter le processus de reconstruction lorsqu'une certaine erreur seuil est atteinte, sans avoir à sauvegarder un surplus important d'informations (des indicateurs d'erreur par exemple) dans la structure multirésolution.

Beaucoup d'algorithmes de décimation de maillages surfaciques proposent un moyen de simplifier sans dépasser une certaine erreur prédéfinie. Nous pouvons donc essayer de nous inspirer de ces techniques, au moins dans le cas des fonctions linéaires par morceaux. Cependant, plusieurs difficultés apparaissent :

1) D'abord, un tel moyen ne répond que partiellement à la question, car il mesure l'erreur dans le sens de la simplification des données uniquement : lorsque le modèle est simplifié à une tolérance près, le résultat est sauvegardé et la simplification terminée.

Il ne s'agit donc pas d'un modèle multirésolution du maillage initial à partir duquel on peut demander des reconstructions (adaptatives ou non) à une tolérance près. Pour arriver à cela, il faudrait rajouter des structures contenant les erreurs pré-calculées, ce qui peut rajouter un volume de données non négligeable, suivant la flexibilité souhaitée pour le mécanisme.

2) Les erreurs mesurées sur ces modèles sont des erreurs géométriques de type Hausdorff ou L_∞ . Dans les applications que nous avons vues, nous effectuons de l'approximation au sens de la norme L_2 pour laquelle, souvent, l'erreur L_∞ n'est pas significative.

3) La méthode utilisée dans ces travaux est toujours du type « accumulation », c'est-à-dire que l'erreur globale est obtenue en accumulant selon des principes plus ou moins sophistiqués les erreurs « locales » résultant de chaque opération élémentaire de simplification du maillage. Deux difficultés surviennent dans ce contexte :

- (i) ces techniques sont relativement *grossières* et l'expérience montre qu'elles ne conviennent pas à des géométries possédant la complexité des exemples présentés dans le plan ou la sphère : les résultats deviennent non significatifs ;
- (ii) l'« accumulation » des erreurs L_2 locales ne se comporte pas aussi bien que l'accumulation des erreurs L_∞ .

En effet, soient E_1 et E_2 deux ensembles mesurables du plan, contenus dans le domaine des fonctions f . Supposons que nous connaissions sur chacun de ces ensembles une majoration $\delta_{E_1}^{k+1}$ et $\delta_{E_2}^k$ de l'erreur de deux étapes de simplification successives, c'est-à-dire de

$$\left(\int_{E_1} (f_{k+2}(x) - f_{k+1}(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{et} \quad \left(\int_{E_2} (f_{k+1}(x) - f_k(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, ne connaissant pas la *répartition* de l'erreur sur les ensembles E_1 et E_2 , nous ne pouvons majorer $\|f_{k+2} - f_k\|$ sur $E_1 \cap E_2$ mieux que par $\delta_{E_1}^{k+1} + \delta_{E_2}^k$, ce qui est souvent très grossier.

Dans le cas particulier des opérateurs isométriques (cf section V.3.1), nous avons pu constater que l'erreur est proche de l'erreur supérieure (tout spécialement dans le cas linéaire), pour laquelle la question est justement résolue. N'ayant pu quantifier plus précisément la différence, nous avons préféré ne pas en parler dans ce travail. Il reste que les résultats obtenus dans ce cas sont sans comparaison avec ceux obtenus par toutes les méthodes d'accumulation que nous avons expérimentées. Ceci nous amène à croire que seule la construction d'opérateurs possédant des propriétés mathématiques précises permettra, à la manière des opérateurs isométriques, de répondre de manière satisfaisante au problème de la mesure d'erreur.

Fonctions définies sur des maillages surfaciques

Voici quelques directions de recherche possibles pour compléter les méthodes exposées brièvement au chapitre VI :

- 1) Trouver des techniques permettant de mieux doser le compromis entre l'approximation de la géométrie et celle de la fonction supportée par celle-ci.
- 2) Résoudre le problème de la mesure d'erreur dans ce contexte.

Remarquons que le formalisme introduit permet déjà de définir une mesure d'erreur ayant un sens. On peut en effet définir

$$\delta_k(f) := \|f^{k,0} - f^{N,0}\|_{L_2(\mathcal{T}^0)}, \quad (1)$$

c'est-à-dire exactement la mesure d'erreur dans le cadre non emboîté introduit sur $\mathcal{F}(\mathcal{T}^0)$, ou également

$$\delta'_k(f) := \|f^k - f^{N,k}\|_{L_2(\mathcal{T}^k)}. \quad (2)$$

On peut noter que le problème est sûrement plus ardu que dans le cas planaire ou sphérique puisqu'ici l'accumulation des erreurs L_2 locales mesurées dans les espaces d'approximation supérieurs (*i.e.*, celles qui sont aisées à obtenir) n'a pas de signification précise par rapport à l'erreur définie par (1) ou (2).

3) Du point de vue de l'approximation effectuée, les directions de projections possibles pour les PIs ne sont pas équivalentes car elles influent sur les opérateurs de paramétrisation. Évaluer plus précisément cette influence et éventuellement trouver d'autres stratégies de paramétrage constitue donc un domaine de recherche important¹⁴.

Fonctions définies sur un maillage volumique tétraédrique

Une application potentiellement intéressante du cadre non emboîté est la décomposition multirésolution de fonctions définies dans un domaine de $\mathbb{R}^3$ par le biais d'une triangulation volumique (composée de tétraèdres). Ici encore on peut définir des fonctions constantes ou linéaires par morceaux sur les tétraèdres de la triangulation, qui serait décimée à l'aide de techniques similaires au cas 2D. *A priori* les méthodes du chapitre V peuvent donc s'adapter directement.

Multirésolution pour maillages surfaciques irréguliers

L'extension des méthodes multirésolution à des maillages surfaciques irréguliers est bien sûr un sujet de recherche particulièrement intéressant. Cependant il convient de rester prudent sur ses enjeux applicatifs véritables, compte tenu des connaissances actuelles.

Une manière simple de résumer les objectifs à atteindre nous semble donnée par le travail récent [GSS99], dans lequel les techniques classiques de traitement du signal sont étendues aux maillages irréguliers. L'enjeu par rapport à ce travail de référence serait de proposer une technique bijective permettant les mêmes résultats. Par "technique bijective" nous entendons des algorithmes basés sur des structures de données occupant la *même place* que les données originales — cas typique des techniques d'ondelettes, en particulier celles proposées dans cette thèse — c'est-à-dire définir une véritable *représentation* multirésolution des données initiales. À l'opposé, les techniques utilisées dans [GSS99], basées sur un schéma pyramidal de type Burt-Adelson, effectuent un *sur-échantillonnage* des données (d'un facteur moyen de 7 d'après les auteurs).

Une méthode bijective¹⁵ dédiée à l'édition à plusieurs niveaux de détail a déjà été proposée dans [KCVS98]. Il s'avère ([GSS99]) que les résultats de la reconstruction

14. On peut notamment espérer que certaines stratégies de paramétrage facilitent la mise en place d'une procédure de mesure d'erreur.

15. Cette technique ne relève d'ailleurs pas exactement des techniques d'ondelettes.

après édition d'un niveau grossier présentent parfois des instabilités et ne soient pas de la qualité de ceux que l'on peut obtenir par la méthode sur-échantillonnée.

Une objection d'ordre général que l'on peut faire aux techniques basées sur des maillages irréguliers, en vue de l'édition, est que l'intérêt de conserver le maillage original ne soit pas évident dans ce contexte. En effet, il s'avère souvent utile de subdiviser plus finement certaines zones initialement peu échantillonnées du maillage afin de permettre par exemple une édition plus localisée (voir [FS94] pour le cas 1D). Il en résulte que mélanger l'édition du maillage à la conservation de sa topologie (de maillage) est nécessairement limitatif, donc rarement demandé en pratique. Pour une présentation des algorithmes d'édition multirésolution dans le cas d'une subdivision régulière, voir [ZSS97]. Il s'agit là aussi d'une technique basée sur le sur-échantillonnage. Une première étape possible vers un cadre totalement général serait d'essayer d'obtenir des résultats similaires avec une technique purement bijective.

Pour ce qui est de la compression de maillages, des résultats récents ([KSS00, GVSS00, KG00]) proposent des techniques très performantes. Elles sont basées sur la distinction entre l'information géométrique et paramétrique implicitement contenue dans un maillage surfacique, du point de vue de la surface qu'il représente. Schématiquement, lorsque le maillage est suffisamment dense, le remplacement du maillage initial par un maillage régulier approchant ne modifie que l'information paramétrique, pas la géométrie. Ces maillages réguliers peuvent ensuite être compressés beaucoup plus efficacement, car l'information paramétrique y est réduite, et les schémas de subdivision sont mieux connus. En particulier, dans [GVSS00] est proposée une représentation des maillages dans laquelle l'information paramétrique est minimale.

Il nous semble que la leçon globale à tirer de [GSS99], [KSS00] et [GVSS00] est qu'il est nécessaire de disposer d'une certaine information paramétrique pour être capable de construire un schéma de subdivision irrégulier convergeant vers des surfaces lisses. Ainsi dans un cadre multirésolution basé sur les ondelettes, le schéma de subdivision ne pourrait exister indépendamment de la connaissance du maillage final, ou de façon équivalente de celle des coefficients de détail. Ceci impliquerait nécessairement un certain facteur de sur-échantillonnage des données, ce qui rend donc douteuse l'existence d'une technique bijective convenable.

Nous mettons ces réflexions au conditionnel car il apparaît que beaucoup de travail reste à faire vers la compréhension de ces mécanismes identifiés seulement très récemment. Il est vraisemblable qu'il s'agisse là du véritable enjeu des techniques d'ondelettes pour maillages surfaciques irréguliers.

Annexe A

Convergence de l'opérateur localisé

CETTE ANNEXE ÉTUDIE L'APPROXIMATION des opérateurs de projection orthogonale par les opérateurs de projection localisé, cf chapitre V, paragraphe V.1.2.2.

Rappelons que le contexte est le suivant : on considère les fonctions chapeaux $\mathcal{M}^f$ constituant le q -voisinage (q entier et « grand ») d'un sommet $\mathcal{M}_0^f$ d'une triangulation $\mathcal{T}^f$, et les fonctions chapeaux $\mathcal{M}^g$ correspondantes, dans la triangulation $\mathcal{T}^g$ déduite de $\mathcal{T}^f$ par la suppression de $\mathcal{M}_0^f$ ($f = \text{“fin”}$, $g = \text{“grossier”}$). Notant n_i , $i = 1, \dots, q$, le nombre de fonctions i -voisines, $n := n_1 + \dots + n_q$, et $1 \leq p \leq q$ un entier, on définit

$$\begin{aligned} V_q^f &:= \text{Span}\{\mathcal{M}_i^f \mid 0 \leq i \leq n\} \\ V_p^f &:= \text{Span}\{\mathcal{M}_i^f \mid 0 \leq i \leq (n_1 + \dots + n_p)\} \\ V_q^g &:= \text{Span}\{\mathcal{M}_i^g \mid 1 \leq i \leq n\} \\ V_p^g &:= \text{Span}\{\mathcal{M}_i^g \mid 1 \leq i \leq (n_1 + \dots + n_p)\} \\ V_p^0 &:= \text{Span}\{\mathcal{M}_i^f \mid n_p + 1 \leq i \leq n_q\} = \text{Span}\{\mathcal{M}_i^g \mid n_p + 1 \leq i \leq n_q\}. \end{aligned}$$

Étant donnée une fonction f de V_q^f (resp. V_q^g) on notera f' et f'' la décomposition de f relativement à la somme directe $V_p^f \oplus V_p^0$ (resp. $V_p^f \oplus V_p^0$). Soit $f \in V_q^f$, on veut comparer les qualités d'approximation de l'opérateur de projection orthogonale

$$\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp : V_q^f \longrightarrow V_q^g$$

et de l'opérateur « localisé » (paragraphe V.1.2.2)

$$\begin{aligned} P_{\text{loc}} : V_q^f &\longrightarrow V_q^g \\ f &\longmapsto \mathcal{P}_{V_p^g}^\perp(f') + f'' \end{aligned}$$

lorsque p grandit.

Une première possibilité pour ce faire est de considérer la quantité

$$\|\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f) - P_{\text{loc}}(f)\|$$

mais l'étude de cette dernière semble délicate. Une autre moyen, qui est d'ailleurs plus significatif pour juger des qualités d'approximation, est de comparer

$$\|\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f) - f\| \quad \text{et} \quad \|P_{\text{loc}}(f) - f\|.$$

Dans cet objectif, calculons

$$\begin{aligned}
\|P_{\text{loc}}(f) - f\| &= \|\mathcal{P}_{V_p^g}^\perp(f') + f'' - f\| = \|\mathcal{P}_{V_p^g}^\perp(f') - f'\| \\
&\leq \|(\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f))' - f'\| = \|\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f) - (\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f))'' - (f - f'')\| \\
&\leq \|\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f) - f\| + \|(\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f))'' - f''\|,
\end{aligned}$$

d'où finalement

$$0 \leq \|P_{\text{loc}}(f) - f\| - \|\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f) - f\| \leq \|(\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f) - f)''\|, \quad (3)$$

ce qui ramène le problème à l'étude de la quantité de droite. Nous procédons maintenant en deux étapes :

- 1) obtention d'une expression simple, dans les bases canoniques, de $(\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f) - f)''$;
- 2) utilisation d'un résultat de décroissance des coefficients de l'inverse d'une matrice bande pour obtenir une majoration de la norme.

Décomposons encore V_p^f en $V_{p,1}^f \oplus V_{p,2}^f$ avec

$$V_{p,1}^f := \text{Span}\{\mathcal{M}_i^f \mid 0 \leq i \leq n_1\}, \quad \text{et}$$

$$V_{p,2}^f := \text{Span}\{\mathcal{M}_i^f \mid n_1 + 1 \leq i \leq n_p\} \subset V_p^g,$$

pour observer, avec $f' = f'_1 + f'_2$ selon la décomposition ci-dessus, que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f) - f)'' &= (\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f'_1) + \mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f'_2 + f'') - (f'_1 + f'_2 + f''))'' \\
&= (\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f'_1) - f'_1)'' = (\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f'_1))''.
\end{aligned}$$

La matrice de $\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp$, considéré comme opérateur de $V_{p,1}^f$ dans V_q^g , par rapport aux bases canoniques, s'écrit $A = G^{g-1}G^{gf}$, avec

$$\begin{aligned}
G^{g-1} &= [\langle \mathcal{M}_i^g, \mathcal{M}_j^g \rangle]^{-1} = [G_{ij}^{g-1}]^{-1}, \\
\text{et } G^{gf} &= \begin{bmatrix} G_0 & G_1 \\ 0 & G_2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

où les G_{ij}^{g-1} sont les blocs $n_i \times n_j$ formés par les lignes (resp. colonnes) de G^{g-1} correspondant aux i -voisins (resp. j -voisins), G_0 est le vecteur $[\langle \mathcal{M}_0^f, \mathcal{M}_i^g \rangle]_{i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket}$ et G_k , $k = 1, 2$, les matrices $[\langle \mathcal{M}_i^f, \mathcal{M}_j^g \rangle]_{i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket, j \in \llbracket n_{k-1}+1, n_k \rrbracket}$. De même, notons G_{ij}^g les matrices $n_i \times n_j$ formées par les produits scalaires entre les fonctions i - et j -voisins dans T^g ; ils forment une décomposition en blocs de la matrice du produit scalaire de $V_q^g : G^g$. Notons également que $G_2 = G_{21}^g$.

En exploitant la propriété d'inverse de G^{g-1} et le fait que G^g soit une matrice tri-diagonale selon les blocs G_{ij}^g , on montre que

$$\begin{cases} G_{11}^{g-1}G_{11}^g + G_{12}^{g-1}G_{21}^g = \text{Id}_{n_1}, & \text{et} \\ G_{i1}^{g-1}G_{11}^g + G_{i2}^{g-1}G_{21}^g = 0, & \text{pour } i \geq 2. \end{cases}$$

On en déduit facilement l'expression

$$(\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f'_1))''_{\text{can}} = \begin{bmatrix} G_{(p+1)1}^{g-1} \\ G_{(p+2)1}^{g-1} \\ \vdots \end{bmatrix} [G_0 \quad G_1 - G_{11}^g] f'_{1\text{can}}. \quad (4)$$

Nous pouvons à présent passer à la deuxième étape (la majoration). Elle est essentiellement basée sur le résultat suivant :

LEMME A.1 — Il existe des constantes $C \geq 0$ et $0 \leq \lambda < 1$ telles que

$$|G_{(i,j)}^{g-1}| \leq C\lambda^{|i-j|}, \quad \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2.$$

Démonstration. — Nous utilisons un des nombreux résultats concernant la décroissance des éléments de l'inverse d'une matrice bande et/ou définie positive. Ceux de [DMS84] s'adaptent immédiatement à nos besoins ; nous y renvoyons le lecteur.

La matrice du produit scalaire G^g est définie, positive et tri-diagonale par blocs. Reprenant les définitions de [DMS84], elle est donc centrée et m -bande (m entier ≥ 0 , et « vraisemblablement » $m \leq n_{q-1} + n_q$, au vu de la croissance des entiers n_i , mais la valeur exacte importe peu ici). Ces hypothèses permettent d'utiliser la proposition 2.2 de [DMS84], qui donne exactement le résultat annoncé. $\square$

Notons A la matrice $[G_{(p+1)1}^{g-1} \ G_{(p+2)1}^{g-1} \ \cdots]^*$ qui apparaît dans (4). D'après le lemme, on a une majoration des coefficients de A de la forme

$$|A_{(i,j)}| \leq C\lambda^{n_1 + \cdots + n_p + i - j},$$

d'où on déduit immédiatement de (4) qu'il existe une constante C' ne dépendant pas de p , telle que

$$\|(\mathcal{P}_{V_q^g}^\perp(f'_1))''\| \leq C'\lambda^{n_2 + \cdots + n_p}$$

avec $0 \leq \lambda < 1$. Cela permet de conclure sur les qualités d'approximation de l'opérateur localisé, étant donné l'encadrement (3) : il y a convergence exponentielle vers 0 lorsque p augmente.

Références

- [ALS98] Pierre Alliez, Nathalie Laurent, and Henri Sanson. Approximation de maillages 3D utilisant une métrique basée volume. In *6^e journées de l'AFIG*, pages 77–87, Décembre 1998.
- [ANS95] Peter Alfeld, Marian Neamtu, and Larry L. Schumaker. Circular Bernstein-Bezier polynomials. In M. Dælhen, T. Lyche, and L. L. Schumaker, editors, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pages 11–20. Vanderbilt University Press, 1995.
- [ANS96] Peter Alfeld, Marian Neamtu, and Larry L. Schumaker. Bernstein-Bezier polynomials on spheres and sphere-like surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 13(4):333–349, 1996.
- [BF85] John R. Baumgardner and Paul O. Frederickson. Icosahedral discretization of the two-sphere. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 22:1107–1115, 1985.
- [BG98a] Georges-Pierre Bonneau and Alexandre Gerussi. Hierarchical decomposition of datasets on irregular surface meshes. In *Computer Graphics International Conference Proceedings*, pages 59–63. IEEE Computer Society Press, 1998.
- [BG98b] Georges-Pierre Bonneau and Alexandre Gerussi. Level of detail visualization of scalar datasets on irregular surface meshes. In *IEEE Visualization'98 Conference Proceedings*, pages 73–77. IEEE Computer Society Press, 1998.
- [BLM95] Martin D. Buhmann and Alain Le Méhauté. Knot removal with radial function interpolation. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, pages 501–506, 1995.
- [Bon98] Georges-Pierre Bonneau. Multiresolution analysis on irregular surface meshes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 4(4):365–378, 1998.
- [BS96] Chandrajit L. Bajaj and Daniel R. Schikore. Error-bounded reduction of triangle meshes with multivariate data. *SPIE*, 2656:34–45, 1996.
- [BW92] J. L. Brown and A. J. Worsey. Problems with defining barycentric coordinates for the sphere. *M²AN: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 26(1):37–49, 1992.

- [BY95] Jean-Daniel Boissonnat and Mariette Yvinec. *Géométrie Algorithmique*. Collection Informatique. Ediscience, 1995.
- [CC78] Edwin Catmull and J. Clark. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*, 10(6):350–355, November 1978.
- [CDF92] Albert Cohen, Ingrid Daubechies, and Jean-Christophe Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLV:485–560, 1992.
- [CDM91] Alfred S. Cavaretta, Wolfgang Dahmen, and Charles A. Michelli. *Stationary Subdivision*, volume 93/453 of *Memoirs of the AMS*. AMS, September 1991.
- [Cha88] Françoise Chatelin. *Valeurs propres de matrices*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, 1988.
- [Cia90] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, 1990.
- [CMO97] Jonathan Cohen, Dinesh Manocha, and Marc Olano. Simplifying polygonal models using successive mappings. In *IEEE Visualization'97 Conference Proceedings*, pages 395–402. IEEE Computer Society Press, 1997.
- [Coh92] Albert Cohen. *Ondelettes et Traitement Numérique du Signal*. Collection Recherches en Mathématiques Appliquées, n° 25. Masson, 1992.
- [Coh98] Albert Cohen. Wavelet methods in numerical analysis. 1998.
- [COM98] Jonathan Cohen, Marc Olano, and Dinesh Manocha. Appearance-preserving simplification. In *ACM SIGGRAPH'98 Conference Proceedings*, pages 115–122, 1998.
- [CPD⁺96] Andrew Certain, Jovan Popović, Tony DeRose, Tom Duchamp, David Salesin, and Werner Stuetzle. Interactive multiresolution surface viewing. In *ACM SIGGRAPH'96 Conference Proceedings*, pages 91–98, 1996.
- [Dau92] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NFS Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, 1992.
- [Dau94] Ingrid Daubechies. Two recent results on wavelets: Wavelet bases for the interval, and biorthogonal wavelets diagonalizing the derivative operator. In Larry L. Schumaker and Glenn Webb, editors, *Recent Advances in Wavelet Analysis*, pages 237–258. Academic Press, 1994.
- [DF89] Leila De Floriani. A pyramidal data structure for triangle based surface description. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 9(2):67–78, March 1989.
- [DFMP96] Leila De Floriani, Paola Marzano, and Enrico Puppo. Multiresolution models for topographic surface description. *The Visual Computer*, 12(7):317–345, 1996.
- [DFP95] Leila De Floriani and Enrico Puppo. Hierarchical triangulation for multi-resolution surface description. *ACM Transactions on Graphics*, 14(4):363–411, October 1995.

- [DGH96] George C. Donovan, Jeffrey S. Geronimo, and Douglas P. Hardin. Intertwining multiresolution analyses and the construction of piecewise-polynomial wavelets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 27(6):1791–1815, 1996.
- [DGS98] Ingrid Daubechies, Igor Guskov, and Wim Sweldens. Commutation for irregular subdivision. Technical report, Bell Laboratories, Lucent Technologies, 1998.
- [DGS99] Ingrid Daubechies, Igor Guskov, and Wim Sweldens. Regularity of irregular subdivision. *Constructive Approximation*, 15:381–426, 1999.
- [DMS84] Stephen Demko, William F. Moss, and Philip W. Smith. Decay rates for inverses of band matrices. *Mathematics of Computation*, 43(168):491–499, October 1984.
- [DS78] D. Doo and Malcolm Sabin. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer Aided Design*, 10(6):356–360, November 1978.
- [DSS96] Tony D. Deroose, David H. Salesin, and Eric J. Stollnitz. *Wavelets for Computer Graphics, Theory and Applications*. Computer Graphics and Geometric Modeling. Morgan Kaufmann, 1996.
- [EDD⁺95] Matthias Eck, Tony DeRose, Tom Duchamp, Hugues Hoppe, Michael Lounsbery, and Werner Stuetzle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. In *ACM SIGGRAPH'95 Conference Proceedings*, pages 173–182, 1995.
- [FI96] Michael S. Floater and Armin Iske. Multistep scattered data interpolation using compactly supported radial basis functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 73:65–78, 1996.
- [FRL00] Lionel Fine, Laurent Remondini, and Jean-Claude Leon. Automated generation of F.E.A models through idealization operators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49, 2000.
- [FS94] Adam Finkelstein and David H. Salesin. Multiresolution curves. In *ACM SIGGRAPH'94 Conference Proceedings*, pages 261–268, 1994.
- [GB99] Alexandre Gerussi and Georges-Pierre Bonneau. Analysis of scalar datasets on multiresolution geometric models. In Albert Cohen, Christophe Rabut, and Larry L. Schumaker, editors, *Curve and Surface Fitting: Saint-Malo 99*, pages 209–218. Vanderbilt University Press, 1999.
- [GGS95] M. H. Gross, R. Gatti, and O. Staadt. Fast multiresolution surface meshing. In *IEEE Visualization'95 Conference Proceedings*, pages 135–142. IEEE Computer Society Press, 1995. Also available as Computer Science Department internal report no. 230, Swiss Federal Institute of Technology, ETH-Zentrum, Zürich.
- [GH97] Michael Garland and Paul S. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. In *ACM SIGGRAPH'97 Conference Proceedings*, pages 209–216, 1997.
- [GH98] Michael Garland and Paul S. Heckbert. Simplifying surfaces with color and texture using quadric error metrics. In *IEEE Visualization'98 Conference Proceedings*, pages 263–269. IEEE Computer Society Press, 1998.

- [Gri00] Laurent Grisoni. *Éléments de Multirésolution en Modélisation Géométrique*. PhD thesis, Université de Bordeaux I, 2000.
- [GSS99] Igor Guskov, Wim Sweldens, and Peter Schröder. Multiresolution signal processing for meshes. In *ACM SIGGRAPH'99 Conference Proceedings*, pages 325–334, 1999.
- [Gue97] André Guezic. Surface simplification inside a tolerance volume. Technical Report RC20440(90191), IBM Research Division, May 1997.
- [Gus98] Igor Guskov. Multivariate subdivision schemes and divided differences. Technical report, Princeton University, November 1998. Available at <http://www.cs.caltech.edu/~ivguskov/papers.html>.
- [GVSS00] Igor Guskov, Kiril Vidimič, Wim Sweldens, and Peter Schröder. Normal meshes. In *ACM SIGGRAPH'00 Conference Proceedings*, 2000.
- [HDD⁺93] Hugues Hoppe, Tony DeRose, Tom Duchamp, John McDonald, and Werner Stuetzle. Mesh optimization. In *ACM SIGGRAPH'93 Conference Proceedings*, pages 19–26, 1993.
- [HG97] Paul S. Heckbert and Michael Garland. Survey of polygonal surface simplification algorithms. Technical report, Carnegie Mellon University, 1997.
- [HJST98] Bernd Hamann, Kenneth I. Joy, Gregory L. Schussman, and Issac J. Trotts. Constructing hierarchies for triangle meshes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 4(2):145–161, 1998.
- [Hop96] Hugues Hoppe. Progressive meshes. In *ACM SIGGRAPH'96 Conference Proceedings*, pages 99–108, 1996.
- [Hop98] Hugues Hoppe. Smooth view dependant level-of-detail control and its application to terrain rendering. In *IEEE Visualization'98 Conference Proceedings*, pages 35–41. IEEE Computer Society Press, 1998.
- [Hop99] Hugues Hoppe. New quadric metric for simplifying meshes with appearance attributes. In *IEEE Visualization'99 Conference Proceedings*, pages 59–65. IEEE Computer Society Press, 1999.
- [KCVS98] Leif Kobbelt, Swen Campagna, Jens Vorsatz, and Hans-Peter Seidel. Interactive multi-resolution modeling on arbitrary meshes. In *ACM SIGGRAPH'98 Conference Proceedings*, pages 105–114, 1998.
- [Kei95] Fritz Keinert. Numerical stability of biorthogonal wavelet transforms. *Advances in Computational Mathematics*, 4:1–26, 1995.
- [KG00] Andrei Khodakovsky and Igor Guskov. Normal mesh compression. Submitted for publication, 2000. Available at: <http://www.multires.caltech.edu/pubs>.
- [Kir83] David Kirkpatrick. Optimal search in planar subdivisions. *SIAM Journal on Computing*, 12(1):28–34, 1983.
- [Kle97] Reinhard Klein. Multiresolution representations for surfaces meshes. Available as HTML and Postscript document at <http://www.gris.uni-tuebingen.de/people/staff/reinhard/publications.html>, June 1997.
- [KSS00] Andrei Khodakovsky, Peter Schröder, and Wim Sweldens. Progressive geometry compression. In *ACM SIGGRAPH'00 Conference Proceedings*, 2000.

- [LKR⁺96] Peter Lindstrom, David Koller, William Ribarsky, Larry F. Hodges, Nick Faust, and Gregory A. Turner. Real-time, continuous level of detail rendering of height-fields. In *ACM SIGGRAPH'96 Conference Proceedings*, pages 109–118, 1996.
- [LM95] Alain Le Méhauté. Knot removal for scattered data. In S. P. Singh, editor, *Approximation Theory, Wavelets and Applications*, pages 197–212. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [LM97] Alain Le Méhauté. Nested sequences of triangular finite element spaces. In W. Haussmann, K. Jetter, and M. Reimer, editors, *Multivariate Approximation: Recent Trends and Results*, volume 101 of *Mathematical Research*, pages 133–145. Akademie-Verlag, 1997.
- [LM98] Alain Le Méhauté. Some families of triangular finite elements which can provide sequences of nested spaces. In Morten Daelen, Tom Lyche, and Larry L. Schumaker, editors, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pages 311–318. Vanderbilt University Press, 1998.
- [LML89] Alain Le Méhauté and Yvon Lafranche. A knot removal strategy for scattered data in $\mathbb{R}^2$. In Tom Lyche and Larry L. Schumaker, editors, *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, pages 419–426. Academic Press, 1989.
- [LML91] Alain Le Méhauté and Yvon Lafranche. Knot removal for scattered data. In *SPIE Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics II*, volume 1610, pages 161–164, 1991.
- [LMU90] Alain Le Méhauté and Florencio I. Utretas. Shape-preserving interpolatory subdivision. In *SPIE Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics*, volume 1251, pages 74–81, 1990.
- [LMU94] Alain Le Méhauté and Florencio I. Utretas. Convexity-preserving interpolatory subdivision. *Computer Aided Geometric Design*, 11:17–37, 1994.
- [Lou94] Michael Lounsbery. *Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type*. PhD thesis, University of Washington, 1994.
- [LSS⁺98] Aaron W.F. Lee, Wim Sweldens, Peter Schröder, Lawrence Cowsar, and David Dobkin. MAPS: Multiresolution Adaptive Parameterization of Surfaces. In *ACM SIGGRAPH'98 Conference Proceedings*, pages 95–104, 1998.
- [Mal89] Stéphane Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The Wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674–692, July 1989.
- [Mal98] Stéphane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1998.
- [MWP] MathSoft wavelet resources page: <http://www.mathsoft.com/wavelets.html>.
- [Sch95] Robert Schaback. Creating surfaces from scattered data using radial basis functions. In Morgen Dæhlen, Tom Lyche, and Larry L. Schumaker, editors, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pages 477–496. Vanderbilt University Press, 1995.

- [Sch96] Jean E. Schweitzer. *Analysis and Application of Subdivision Surfaces*. PhD thesis, University of Washington, August 1996.
- [SDS95a] Eric J. Stollnitz, Tony D. DeRose, and David H. Salesin. Wavelets for computer graphics: a primer, part 1. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 15(3):76–84, May 1995.
- [SDS95b] Eric J. Stollnitz, Tony D. DeRose, and David H. Salesin. Wavelets for computer graphics: a primer, part 2. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 15(4):75–84, July 1995.
- [Spa66] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill, 1966.
- [SS95] Peter Schröder and Wim Sweldens. Spherical wavelets: efficiently representing functions on the sphere. In *ACM SIGGRAPH'95 Conference Proceedings*, pages 161–195, 1995.
- [SS96] Wim Sweldens and Peter Schröder. Building your own wavelets at home. In *Wavelets in Computer Graphics*, pages 15–87. ACM SIGGRAPH Course notes, 1996.
- [Ste73] G. W. Stewart. *Introduction to matrix computations*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, 1973.
- [Swe98] Wim Sweldens. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29(2):511–546, 1998.
- [SZL92] William J. Schroeder, Jonathan A. Zarge, and William E. Lorensen. Decimation of triangle meshes. In *ACM SIGGRAPH'92 Conference Proceedings*, pages 65–70, July 1992.
- [WD] The Wavelet Digest: <http://www.wavelet.org/>.
- [ZSD⁺00] Denis Zorin, Peter Schröder, Tony DeRose, Leif Kobbelt, Adi Levin, and Wim Sweldens. Subdivision for modelling and animation. SIGGRAPH'00 Course Notes, 2000.
- [ZSS97] Denis Zorin, Peter Schröder, and Wim Sweldens. Interactive multiresolution mesh editing. In *ACM SIGGRAPH'97 Conference Proceedings*, pages 259–268, 1997.

Résumé: Cette thèse présente une construction générale d'ondelettes de seconde génération dont l'originalité est de distinguer deux points de vue complémentaires: le point de vue de *subdivision*, qui souligne le lien bien connu entre les schémas de subdivision et l'analyse multirésolution, et d'autre part le point de vue *non emboîté*, dans lequel les espaces d'approximation, qui remplacent les espaces d'échelle traditionnels, ne sont plus nécessairement imbriqués.

Dans la première partie de la thèse, le cadre multirésolution est présenté puis divers aspects théoriques, essentiellement relatifs au point de vue non emboîté, sont étudiés. En particulier, plusieurs techniques de constructions des opérateurs d'analyse ou de synthèse sont présentées.

La deuxième partie de la thèse est consacrée aux applications. Le point de vue non emboîté est utilisé pour développer un cadre multirésolution pour fonctions constantes ou linéaires par morceaux définies sur des triangulations irrégulières d'un domaine planaire ou sphérique, permettant notamment la visualisation progressive de grands volumes de données. Les algorithmes de décomposition et de reconstruction des données sont discutés en détails notamment du point de vue de leur implémentation effective, plus délicate que dans le cas des ondelettes classiques. Des applications traditionnelles telles que la compression ou l'édition à différents niveaux de détails sont également généralisées à ces fonctions. D'autre part, est également discutée l'utilisation du cadre non emboîté pour l'approximation et la reconstruction de fonctions définies sur des maillages surfaciques construits via des modèles multirésolution basés sur les techniques de décimation de maillages.

Enfin, on montre à diverses reprises que le point de vue non emboîté permet un abord unifié des algorithmes basés sur les ondelettes et des techniques décimatoires, traditionnellement opposées.

Titre: Analyse Multirésolution Non Emboîtée: applications à la visualisation scientifique.

Discipline: Mathématiques Appliquées

Mots-clés: visualisation, multirésolution, ondelettes, triangulations irrégulières, compression.

Abstract: A flexible construction of second generation wavelets allowing two distinct interpretations is presented. The first one, called the *subdivision framework*, focuses on the well-known relationship between subdivision schemes and multiresolution analysis. The second one, called the *non-nested framework*, introduces so-called approximating spaces, which play the role of the traditional scaling spaces but with the nestedness property relaxed.

The first part of the manuscript describes the algebraic construction of the multiresolution framework, as well as several analytical results, most of them related to the non-nested framework. In particular, various techniques for the design of the analysis or synthesis operators are presented and discussed.

The second part of the thesis is devoted to applications. The non-nested framework is used to design a multiresolution description for piecewise constant or linear functions defined over irregular planar or spherical triangulations, thus enabling progressive visualization of huge such datasets. Decomposition and reconstruction algorithms are presented in detail, especially those aspects related to their effective implementation, which turns out to be significantly more complicated than in the classical case. Traditional wavelet-based applications such that data compression or level-of-detail editing are also extended to these functions. On top of that, the use of the non-nested framework to deal with the analysis and reconstruction of functions defined over 3D meshes in a decimation-based multiresolution representation is also discussed.

Eventually, it is shown on several occasions how the non-nested framework allows an unified approach of wavelet-based and decimation-based algorithms, which are two techniques usually opposed.

Title: Non-Nested Multiresolution Analysis and its applications to scientific visualization.

Topic: Applied Mathematics

Keywords: visualization, multiresolution, wavelets, irregular triangulations, compression.

Établissement: U.F.R de Mathématiques et d'Informatique, IMAG. Laboratoire de Modélisation et de Calcul (LMC), 51, rue des Mathématiques, 38041 Grenoble, France.