



**HAL**  
open science

# Séparation aveugle d'un mélange instantané de sources autorégressives par la méthode du vraisemblance exact

Abdelhamid Zaidi

► **To cite this version:**

Abdelhamid Zaidi. Séparation aveugle d'un mélange instantané de sources autorégressives par la méthode du vraisemblance exact. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2000. Français. NNT: . tel-00006754

**HAL Id: tel-00006754**

**<https://theses.hal.science/tel-00006754>**

Submitted on 25 Aug 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée par

**Abdelhamid ZAÏDI**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Joseph Fourier – Grenoble I**

arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992

spécialité **Mathématiques Appliquées**

## **Séparation aveugle d'un mélange instantané de sources autorégressives gaussiennes par la méthode du maximum de vraisemblance exact**

soutenue le 14 décembre 2000 devant la commission d'examen

Président	Christian JUTTEN
Rapporteurs	Jean-François CARDOSO Bernard GAREL
Examineur	Dinh-Tuan PHAM
Directeur	Serge DÉGERINE

Mis en page avec la classe thloria.

# Remerciements

Je remercie tout d'abord Monsieur Christian JUTTEN, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, et reconnu comme l'un des pionniers de la recherche en séparation sources, pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury.

Monsieur Jean-François CARDOSO, Chargé de Recherche au Centre National de la Recherche Scientifique, a accepté de rapporter sur cette thèse en tant que spécialiste de la séparation de sources. Je le remercie pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour les suggestions qu'il m'a transmises.

Monsieur Bernard GAREL, Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique, d'Informatique, et d'Hydrolique de Toulouse, a bien voulu rapporter sur les aspects de la thèse relevant plus particulièrement de la statistique. Je le remercie pour sa lecture attentive et ses conseils qui m'ont permis de clarifier certains points.

Je remercie également Monsieur Dinh Tuan PHAM, Directeur de Recherche au Centre National de la Recherche Scientifique, qui m'a co-encadré lors de mon stage de DEA, d'avoir accepté de participer au jury.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur Serge DÉGERINE, Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, pour la disponibilité, les conseils, l'aide et la gentillesse dont il a fait preuve tout au long de ces quelques années de recherche. Je ne saurai jamais lui exprimer toute ma gratitude pour avoir été non seulement mon directeur de thèse, mais aussi une personne sur laquelle j'ai toujours pu compter.

Je tiens à remercier Monsieur Jean-Louis SOLER, Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Informatiques et de Mathématiques Appliquées de Grenoble, pour son aide et les services qu'il m'a rendus. Son immense talent pédagogique m'a donné le goût de la statistique et incité à poursuivre dans cette voie.

Toute ma reconnaissance à mes chers parents, mon frère et mon oncle Samir pour leur soutien au long de mes études.

Enfin, je n'oublierai pas mes amis et collègues, en particulier Soulafa ALI et Jean François COEURJOLLY pour leur sympathie et sincérité.



# Remerciements



*Je dédie cette thèse à ma sœur.*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Présentation de la méthode MVE</b>	<b>17</b>
2.1	Hypothèses et notations . . . . .	18
2.1.1	Hypothèses . . . . .	18
2.1.2	Notations . . . . .	19
2.2	Indéterminations . . . . .	19
2.2.1	Facteur d'échelle . . . . .	20
2.2.2	Permutation et facteur signe . . . . .	20
2.2.3	Choix de la normalisation . . . . .	21
2.3	Maximum de Vraisemblance Exact . . . . .	21
2.3.1	Fonction de vraisemblance . . . . .	21
2.3.2	Principe de la maximisation . . . . .	23
2.3.3	Procédure de séparation MVE . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Étude du problème d'optimisation</b>	<b>27</b>
3.1	Estimation de la matrice de séparation . . . . .	27
3.1.1	Système de séparation . . . . .	27
3.1.2	Signe de la différentielle seconde . . . . .	31
3.1.3	Algorithme de relaxation . . . . .	32
3.1.4	Convergence de l'algorithme . . . . .	34
3.1.5	Cas bidimensionnel . . . . .	37
3.2	Estimation de la structure des sources . . . . .	39
3.2.1	Estimation des autocorrélations partielles d'un modèle auto-régressif normalisé . . . . .	39
3.2.2	Fonction ARMVE . . . . .	46

3.2.3	Calcul des formes quadratiques $\Lambda_k^T$ . . . . .	47
3.2.4	Estimation de l'ordre d'un modèle autorégressif . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Étude de l'estimateur MVE</b>	<b>51</b>
4.1	Existence, invariance et indice de performance . . . . .	51
4.1.1	Existence . . . . .	51
4.1.2	Invariance . . . . .	53
4.1.3	Indice de performance $I_{EPF}$ . . . . .	54
4.2	Propriétés asymptotiques . . . . .	55
4.2.1	Consistance . . . . .	55
4.2.2	Sur l'existence de maxima locaux . . . . .	64
4.2.3	Robustesse . . . . .	65
4.3	Borne de Cramér-Rao . . . . .	66
4.3.1	Matrice d'information de Fisher . . . . .	66
4.3.2	Borne inférieure de $I_{EPF}$ . . . . .	71
4.3.3	Indice d'efficacité . . . . .	74
4.4	Comparaison avec l'estimateur QMV . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Validation des propriétés de l'estimateur MVE</b>	<b>77</b>
5.1	Modèles et critères de performance . . . . .	77
5.1.1	Modèles . . . . .	77
5.1.2	Critères de performance . . . . .	78
5.2	Analyse des qualités de l'estimateur MVE . . . . .	79
5.2.1	Choix de l'ordre des modèles autorégressifs . . . . .	79
5.2.2	Nombre de cycles . . . . .	81
5.2.3	Convergence de l'estimateur . . . . .	81
5.2.4	Invariance de l'estimateur . . . . .	86
5.3	Robustesse de l'estimateur . . . . .	88
5.3.1	Estimation de la structure des sources . . . . .	88
5.3.2	Lois de probabilité des sources . . . . .	88
5.3.3	Présence d'un bruit additif . . . . .	89
5.4	Comparaison avec la procédure QMV . . . . .	91
5.4.1	Quelques exemples significatifs . . . . .	92
5.4.2	Effet de l'algorithme de résolution du système de séparation . . . . .	94

---

5.4.3	Comparaison des deux estimateurs . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Autres méthodes du second ordre</b>	<b>97</b>
6.1	Description des méthodes . . . . .	97
6.1.1	AMUSE . . . . .	98
6.1.2	SOBI . . . . .	99
6.1.3	CVP . . . . .	100
6.1.4	CPSR . . . . .	101
6.1.5	CPCR . . . . .	102
6.2	Estimation des matrices $\delta_X(\cdot)$ , $\beta_X(\cdot)_s$ et $\beta_X(\cdot)_c$ . . . . .	104
6.2.1	Estimation empirique . . . . .	104
6.2.2	Estimation directe . . . . .	105
6.3	Diagonalisation conjointe approchée . . . . .	107
6.4	Comparaison des méthodes par simulation . . . . .	111
6.4.1	Robustesse par rapport à l'ordre d'approximation . . . . .	113
6.4.2	Convergence . . . . .	113
6.4.3	Efficacité . . . . .	118
6.4.4	Robustesse par rapport à la présence d'un bruit additif . . . . .	120
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>



# Chapitre 1

## Introduction

La séparation aveugle de sources est un problème relativement récent. Son origine est liée à une modélisation d'un phénomène neurobiologique ([27], [28], [29]). Durant ces quinze dernières années, diverses applications se sont développées grâce à la mise en œuvre de nombreuses techniques de séparation, témoignant ainsi de l'intérêt scientifique et industriel de ce thème de recherche. À l'heure actuelle cette activité se poursuit dans plusieurs domaines : médecine [53], télécommunication [20], acoustique [5], imagerie [48], ...

Le problème de la séparation se modélise d'une manière générale, indépendamment du domaine d'application, de la façon suivante : des signaux (sources) émis par un nombre fini  $P$  d'émetteurs indépendants (qui n'échangent pas d'information entre eux) et immobiles sont reçus par un nombre fini  $K$  de capteurs également immobiles. Le mélange est dit *linéaire* lorsque les signaux reçus par les capteurs forment des combinaisons linéaires des signaux sources *i.e.*

$$X(t) = \sum_k A(k)S(t-k) + b(t),$$

où  $X(\cdot)$  est le processus d'observation,  $S(\cdot)$  est le processus source,  $A(\cdot)$  est l'opérateur de mélange et  $b(\cdot)$  est un bruit blanc indépendant de  $S(\cdot)$ . Le processus  $S(\cdot)$  (et par suite  $X(\cdot)$ ) est supposé stationnaire (au moins localement) et ses composantes  $S_i(\cdot)$  sont indépendantes entre elles (indépendance spatiale).

Le mélange est dit *instantané* si  $A(k) = 0$  pour  $k \neq 0$ , autrement il est dit *convolutif*. Lorsque la dépendance entre  $X(\cdot)$  et  $S(\cdot)$  ne vérifie pas le modèle ci-dessus, le mélange est dit *non linéaire*. Ce type de mélange est très peu abordé dans la littérature ([38], [49]). Enfin le mélange est dit sans *bruit additif* lorsque le processus  $b(\cdot)$  est nul ou négligeable devant  $X(\cdot)$ .

Considérons le cas simple d'un mélange linéaire instantané :

$$X(t) = AS(t) + b(t).$$

Le problème de la séparation *aveugle* est de restituer les signaux sources  $S(t), t = 1, \dots, T$  au vu des observations  $X(t), t = 1, \dots, T$  sans aucune information supplémentaire ni sur la *matrice de mélange*  $A$  ni sur les densités de probabilité des différentes sources.

Le principe de la séparation aveugle consiste à exploiter l'indépendance spatiale entre les différentes sources : on parle d'analyse en composantes indépendantes [14]. Il existe plusieurs approches statistiques qui permettent de traduire cette indépendance : divergence de Kullback-Leibler [42], relations entre les cumulants [22], maximum de vraisemblance [43], fonctions de contraste [14], arguments géométriques [45], ... Par ailleurs, on peut aussi envisager de n'exploiter que l'hypothèse de non corrélation. De ce fait, on distingue généralement deux classes de techniques de séparation : d'une part, celles qui se limitent aux statistiques du second ordre ([4],[6],[17], [21], [43], [50], ...) et d'autre part, celles qui utilisent les statistiques d'ordres supérieurs ([11], [13], [12], [14], [15], [18], [22], [34], [36], [42], ...). Notons que cette dernière est beaucoup plus riche et diversifiée que la précédente.

Selon la nature des sources composant le mélange, il est possible d'exclure l'une ou l'autre de ces deux classes. Par exemple, les techniques du second ordre nécessitent que les spectres normalisés des sources soient distincts. Ainsi, elles ne s'appliquent pas au cas de sources blanches. Par contre, les techniques basées sur les ordres supérieurs font souvent l'hypothèse de sources blanches. Dans ce cas le mélange ne doit pas comporter plus d'une source gaussienne.

Nous considérons dans cette thèse le problème de la séparation aveugle d'un mélange instantané de sources colorées gaussiennes, sans bruit additif, par des techniques du second ordre. De plus nous supposons, dans le modèle

$$X(t) = AS(t),$$

que la matrice de mélange  $A$  est carrée régulière d'ordre  $K$ . Le nombre de sources est donc égal au nombre de capteurs.

La méthode du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QMV), introduite par Pham et Garat[43], montre que la maximisation d'une vraisemblance approchée équivaut à la recherche de sources dont des versions filtrées soient décorrélées entre elles. Les filtres optimaux sont liés à la structure temporelle des sources. Celle-ci étant inconnue, ils sont remplacés par des filtres choisis *a priori*. Par ailleurs Burg a montré que le principe du maximum d'entropie [7] conduit à retenir la modélisation auto-régressive dans ce type de situation. Ce modèle a d'ailleurs été utilisé récemment par Amari [4] pour la construction d'un algorithme adaptatif. Nous proposons donc

de considérer la vraisemblance exacte associée à un mélange instantané de sources gaussiennes autorégressives. La maximisation est réalisée par des techniques de relaxation. On maximise la vraisemblance de façon alternative par rapport à chacun des deux paramètres, l'autre étant alors fixé, que constituent la matrice de séparation d'une part et la structure autorégressive des sources d'autre part. Chacune des deux étapes de maximisation est également réalisée par relaxation. La seconde est une simple adaptation de la méthode du Maximum de Vraisemblance Exact (MVE) de Pham [40] pour l'estimation des paramètres du modèle autorégressif. Par contre, la première équivaut au problème géométrique  $\mathcal{P}$  suivant : étant donnés  $K$  ellipsoïdes de  $\mathbb{R}^K$  cocentriques non homothétiques deux à deux,  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_K$ , trouver  $K$  vecteurs  $V_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, V_K \in \mathcal{E}_K$  qui maximisent le volume du parallélépipède que forment ces vecteurs. Ce problème apparemment simple, n'entre pas dans le cadre de l'optimisation convexe classique [52]. Nous donnons un algorithme de calcul de la solution pour lequel nous précisons les propriétés de convergence. Nous étudions également le problème de l'unicité et celui de l'existence de maxima locaux dans le cas particulier où les axes principaux des ellipsoïdes sont colinéaires aux vecteurs de base de  $\mathbb{R}^K$ . Cette situation correspond au comportement asymptotique de l'estimateur de la structure des sources.

Nous précisons maintenant notre démarche. Les sources  $S_k(\cdot)$ , composantes de  $S(\cdot)$ , sont gaussiennes autorégressives d'ordre  $p_k$ , mutuellement indépendantes. Chaque modèle  $AR(p_k)$  est paramétré par ses autocorrélations partielles  $\beta_k(i), i = 1, \dots, p_k$ , car la variance  $\sigma_{\varepsilon_k}^2$  de l'innovation est fixée égale à 1. Ce choix de normalisation laisse libre le paramètre  $A$ . On note  $\beta$  le paramètre de la structure des sources constitué par l'ensemble  $\{\beta_k(i), i = 1, \dots, p_k, k = 1, \dots, K\}$ . Rappelons que la seule contrainte sur  $\beta$  est que chaque  $\beta_k(i)$  est en module strictement inférieur à 1 et que  $\beta_k(\cdot) \neq \beta_j(\cdot)$  pour  $k \neq j$ , c'est-à-dire que les modèles  $AR(p_k)$  sont supposés distincts pour garantir l'identifiabilité de  $A$ . Chaque ordre  $p_k$  est fixé *a priori* ou estimé par le critère d'Akaike [2].

Si l'on note  $B = A^{-1}$  la *matrice de séparation*,  $T$  la longueur de la séquence observée,  $X_T$  la matrice des observations de dimension  $(K, T)$ ,  $R_k^T(\beta_k)$  la matrice d'autocovariance d'ordre  $T$  du vecteur  $(S_T)_k = [S_k(1), \dots, S_k(T)]^t$  et  $\{e_k, k = 1, \dots, K\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^K$ , alors l'expression de la log-vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} l_T(X_T; B, \beta) &= T \log |\det B| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K e_k^t B X_T (R_k^T(\beta_k))^{-1} X_T^t B^t e_k \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \log |\det R_k^T(\beta_k)| - \frac{KT}{2} \log(2\pi). \end{aligned}$$

La maximisation de  $l_T(X_T; B, \beta)$  par rapport à  $\beta$ , lorsque  $B$  est fixé, équivaut à

minimiser

$$(S_T)_k^t (R_k^T(\beta_k))^{-1} (S_T)_k + \log |\det R_k^T(\beta_k)|$$

par rapport à  $\beta_k$ , pour chaque  $k = 1, \dots, K$ . Ceci est réalisé par relaxation sur les  $\beta_k(i)$ ,  $i = 1, \dots, p_k$ , en adaptant la méthode MVE de Pham [40] pour tenir compte du fait que la variance de l'innovation du modèle  $AR(p_k)$  est égale à 1.

La maximisation de  $l_T(X_T; B, \beta)$  par rapport à  $B$ , lorsque  $\beta$  est fixé, est équivalente à maximiser

$$\log |\det B| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K e_k^t B \Lambda_k^T B^t e_k, \quad \Lambda_k^T = \frac{1}{T} X_T (R_k^T(\beta_k))^{-1} X_T^t, \quad k = 1, \dots, K.$$

Ceci équivaut aussi à maximiser le déterminant de  $B$  sous la contrainte  $\{\|B_k\|_{\Lambda_k^T} = 1, k = 1, \dots, K\}$ , c'est-à-dire le problème  $\mathcal{P}$  cité plus haut. Pour  $K = 2$ , la solution est explicite et est obtenue à partir de la diagonalisation conjointe des matrices  $\Lambda_k^T$ ,  $k = 1, 2$ . Pour  $K > 2$ , la solution est recherchée par relaxation sur les lignes de la matrice  $B$ . L'algorithme converge dès lors que les solutions des équations normales sont isolées. La situation asymptotique permet d'envisager qu'il en sera ainsi lorsque  $T$  est suffisamment grand. En effet la matrice  $\Lambda_k^T$  converge presque sûrement, avec  $T$ , vers  $AD_k A^t$  où  $D_k$  est une matrice diagonale satisfaisant  $D_k(k, k) = 1$  et  $D_k(j, j) > 1$  pour  $j \neq k$ . Dans ce cas  $B = A^{-1}$  est l'unique solution du problème  $\mathcal{P}$  et le critère est strictement convexe au voisinage de  $B$ . Notons que toute matrice obtenue par permutation des lignes de  $B$  est également solution des équations normales et que certaines peuvent correspondre à des maxima locaux.

Nous prouvons aussi l'existence de l'estimateur du maximum de vraisemblance, en étudiant le comportement de  $l_T(X_T; \theta)$  par rapport à  $\theta = (B, \beta)$  au bord de son domaine de définition. Notant  $\theta_0 = (B_0, \beta^0)$  la vraie valeur du paramètre, nous montrons ensuite que  $\frac{1}{T} l_T(X_T; \theta)$  converge presque sûrement vers

$$l_\infty(\theta_0; \theta) = \log |\det B| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K e_k^t B A_0 D_k(\beta^0, \beta_k) A_0^t B^t e_k - \frac{K}{2} \log(2\pi),$$

où, pour  $k = 1, \dots, K$ ,  $D_k(\beta^0, \beta_k) = \text{diag}(\sigma_{k1}^2(p_k), \dots, \sigma_{kK}^2(p_k))$  est la matrice diagonale définie par :

$$\sigma_{kl}^2(p_k) = \sum_{m,n=0}^{p_k} a_k(m) a_k(n) \gamma_l^0(m-n), \quad l = 1, \dots, K.$$

Dans cette expression  $\gamma_l^0(\cdot)$  est la fonction d'autocovariance de la source  $S_l(\cdot)$  et  $a_k(\cdot)$  représente les paramètres du modèle  $AR(p_k)$  défini par  $\beta_k$ . De plus la différence  $\frac{1}{T} l_T(X_T; \theta) - l_\infty(\theta_0; \theta)$  converge presque sûrement vers zéro de façon uniforme

par rapport à  $\theta$  sur tout compact  $\bar{\Theta}$  de la forme  $|b_{kl}| \leq \bar{b}$  pour  $B$  et  $|\beta_k(j)| \leq \bar{\beta} < 1$  pour  $\beta$ . Lorsque  $\beta_k^0 \neq \beta_l^0$ ,  $k \neq l$ , le maximum de  $l_\infty(\theta_0; \theta)$  est réalisé par l'ensemble des  $K!2^K$  valeurs de la forme  $\tilde{\theta}_0 = (\tilde{B}_0, \tilde{\beta}^0)$ , où  $\tilde{B}_0 = \mathcal{E}\Pi B_0$  ( $\mathcal{E}$  est une matrice signe et  $\Pi$  est une matrice de permutation) et où les paramètres  $\tilde{\beta}_k^0$ ,  $k = 1, \dots, K$ , composant  $\tilde{\beta}^0$  sont obtenus par permutation, selon  $\Pi$ , de l'ordre de ceux composant  $\beta^0$ . Cette indétermination est inhérente au problème puisque l'on a  $AS(t) = \tilde{A}\tilde{S}(t)$  avec  $\tilde{A} = A\Pi^t\mathcal{E}$  et  $\tilde{S}(t) = \mathcal{E}\Pi S(t)$ . On montre que  $l_\infty(\theta_0; \theta)$  est strictement concave, par rapport à  $\theta$ , au voisinage de chaque  $\tilde{\theta}_0$  lorsque les structures des sources, représentées par  $\beta^0$ , sont distinctes. Cela permet d'établir la consistance de l'estimateur de maximum de vraisemblance. De plus les deux premières dérivées de  $l_T$  convergent également uniformément, sur tout compact  $\bar{\Theta}(\bar{b}, \bar{\beta})$ , vers celles de  $l_T$ . Le maximum de  $l_\infty$  sera donc réalisé de façon unique pour  $T$  suffisamment grand.

Dans le problème de la séparation de sources, la structure des sources modélisée par  $\beta$  est un paramètre fantôme, car seule la matrice de mélange  $A$  est nécessaire pour l'inversion. On remplace  $\beta$  par  $a = \{a_k(j), j = 1, \dots, p_k, k = 1, \dots, K\}$ . On détermine alors l'expression de la matrice d'information de Fisher relative au paramètre  $(B, a)$ . On montre qu'elle est asymptotiquement bloc-diagonale, c'est-à-dire que les estimateurs de  $B$  et  $\beta$  sont asymptotiquement non corrélés.

Nous proposons également un nouveau critère pour mesurer les performances des méthodes de séparation. Ce critère, noté  $I_{EPF}$ , est défini comme l'erreur de prédiction finale introduite par Akaike [1]. Si l'on note  $\hat{B}$  l'estimateur de la matrice de séparation alors  $\hat{S}(\cdot) = \hat{B}X(\cdot)$  et

$$I_{EPF} = \mathbb{E}(\|\hat{S}(t) - S(t)\|^2).$$

Pour calculer cet indice, nous supposons que les sources sont de puissance unité (*i.e.*  $\text{cov}(S) = I_K$ ) et que  $\hat{B}$  est déterminé à partir d'une réalisation du processus  $S(\cdot)$  indépendante de l'élément aléatoire  $S(t)$  que l'on considère dans l'expression de  $I_{EPF}$  (*c.f.* Section 4.1.3). On montre alors que

$$I_{EPF} = \sum_{i,j=1}^K EQM((\hat{B}A)_{ij}),$$

où  $EQM((\hat{B}A)_{ij})$  est l'erreur quadratique moyenne de l'élément d'indices  $(i, j)$  de la matrice  $\hat{B}A$ . Nous montrons que cet indice est minoré par la quantité

$$\frac{I_{EPF}}{T} = \sum_{k < j} \frac{d(kj, kj) + d(jk, jk)}{d(kj, kj)d(jk, jk) - T^2} + \sum_k \frac{1}{T + d(kk, kk)},$$

où,

$$d(kj, kj) = \sum_{m,n=0}^{p_k} (T - m - n) a_k^0(m) a_k^0(n) \gamma_j^0(m - n),$$

et  $a^0$  est la vraie valeur du paramètre  $a$ . Asymptotiquement  $\underline{I_{EPF}}$  est inversement proportionnel à  $T$  :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} T \underline{I_{EPF}} = 2\pi \sum_{k < j} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_j^0(\lambda)}{f_k^0(\lambda)} d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_k^0(\lambda)}{f_j^0(\lambda)} d\lambda}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_j^0(\lambda)}{f_k^0(\lambda)} d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_k^0(\lambda)}{f_j^0(\lambda)} d\lambda - 4\pi^2} + \frac{K}{2},$$

où  $f_k^0(\cdot)$  est la densité spectrale associée à la source  $S_k$ .

On construit, à partir de l'indice de performance et de sa borne inférieure, un nouvel indice, appelé *indice d'efficacité*, et noté  $e$ , pour mesurer les performances intrinsèques d'une méthode de séparation. Cet indice est défini par :

$$e = \frac{I_{EPF}}{\underline{I_{EPF}}}.$$

Par ailleurs, nous montrons que la vraisemblance approchée de la méthode QMV, lorsque la structure des sources est fixée, est celle de la vraisemblance exacte avec préfenêtrage ( $X_k(t) = 0$  pour  $-p_k < t \leq 0$ ). Elle peut donc être résolue par relaxation plutôt que par la méthode de Newton, mal adaptée à la présence de solutions multiples aux équations normales. Les résultats de simulations montrent en effet que la méthode MVE améliore de façon très sensible les performances de la procédure QMV. Ceci est dû bien sûr à l'estimation de la structure des sources, mais aussi au fait d'éviter le piège de solutions parasites grâce à la méthode de relaxation. Il faut d'ailleurs souligner que la méthode MVE s'accommode très bien d'une estimation grossière de la structure des sources, par exemple en utilisant la méthode de Yule-Walker, ce qui lui conserve tout son intérêt sur le plan pratique.

Cette thèse apporte également des résultats théoriques concernant les méthodes de séparation issues du principe de la diagonalisation conjointe, par une matrice unitaire  $U$ , de plusieurs matrices  $\hat{M}_1^T, \dots, \hat{M}_p^T$ . L'exposant  $T$  est là pour indiquer que ces matrices dépendent de  $T$ . Ces méthodes se caractérisent par la minimisation du critère

$$C_T(M_1^T, \dots, M_p^T; U) = \sum_{i=1}^p \sum_{1 \leq k \neq l \leq K} [U \hat{M}_i^T U^t]_{k,l}^2,$$

par rapport à  $U$ . On montre que pour des processus strictement stationnaires et ergodiques, les matrices  $\hat{M}_i^T$ ,  $i = 1, \dots, p$ , convergent presque sûrement vers les éléments théoriques correspondants  $M_1, \dots, M_p$ . Il s'en suit la convergence *p.s.* de  $C_T(\hat{M}_1^T, \dots, \hat{M}_p^T)$  vers  $C_\infty(M_1, \dots, M_p; U)$ . Les matrices  $M_i$  sont simultanément diagonalisables et le minimum de  $C_\infty(M_1, \dots, M_p; U)$  est donc égal à zéro. Il est réalisé de façon unique, aux facteurs  $\mathcal{E}$  et  $\Pi$  près. Le critère  $C_\infty(M_1, \dots, M_p; U)$  est strictement convexe au voisinage de cette solution à condition que les composantes diagonales des matrices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  soient distinctes. Cela permet d'établir la

---

consistance de l'estimateur. Nous prouvons également la convergence uniforme de  $C_T$  et de ses deux premières dérivées vers celles correspondant au critère  $C_\infty$ . Le minimum de  $C_T$  sera donc réalisé de façon unique pour  $T$  suffisamment grand. Enfin nous montrons que l'algorithme de diagonalisation conjointe approchée converge sinon l'ensemble des solutions des équations normales du critère  $C_T$  a la puissance du continu.

En vertu des résultats de simulation présentés au Chapitre 6, la méthode MVE constitue une référence pour apprécier les performances des autres méthodes du second ordre. Cependant, l'estimation de la structure autorégressive des sources par la méthode du maximum de vraisemblance est complexe et lourde en temps de calcul. Afin de rendre la méthode utilisable en pratique, il est nécessaire de remplacer l'estimation de cette structure par une méthode rapide. Le choix de la procédure de Yule-Walker constitue une solution simple et très satisfaisante. Par ailleurs, l'étude théorique d'un mélange avec bruit additif n'a pas été abordée dans cette thèse. Les simulations ont montré que l'estimateur MVE n'est plus robuste face à la présence d'un bruit assez puissant. Par conséquent il serait nécessaire de prendre en compte le bruit additif dans la modélisation.

L'organisation de la thèse est la suivante. Le second chapitre est consacré à la présentation de la méthode du maximum de vraisemblance exact. L'étude détaillée du problème d'optimisation de la log-vraisemblance, dans la mise en œuvre de cette méthode, fait l'objet du troisième chapitre. Le quatrième chapitre sera réservé à l'étude des propriétés de l'estimateur MVE. Le cinquième chapitre analyse par simulation les performances et certaines propriétés de l'estimateur MVE. Le dernier chapitre rend compte des résultats d'une étude comparative entre les méthodes issues du principe du maximum de vraisemblance et celles issues du principe de la diagonalisation conjointe de plusieurs matrices.



# Chapitre 2

## Présentation de la méthode MVE

Reprenons le modèle de mélange instantané, sans bruit additif, présenté en introduction,

$$X(t) = AS(t). \tag{2.1}$$

L'objectif est de restituer les signaux sources  $S_k(t)$ , composantes de  $S(t)$ , au vu des observations  $X(t)$ ,  $t = 1, \dots, T$  en n'exploitant essentiellement que l'indépendance spatiale des sources. La Figure 2.1 ci-dessus illustre ce problème dans le cas de trois sources.

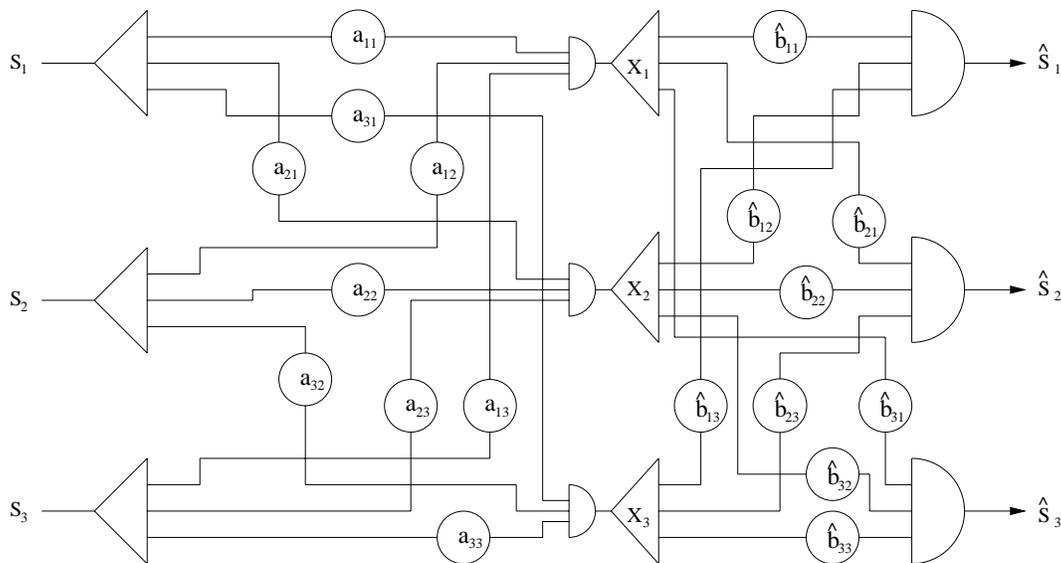


FIG. 2.1 – Schéma du système global, 3 sources / 3 capteurs.

Nous précisons, dans ce chapitre, les hypothèses de travail ainsi que les diverses notations. Nous traitons ensuite le problème de l'indétermination en justifiant notre

choix de normalisation. Puis nous établissons l'expression globale de la vraisemblance et nous montrons comment, par relaxation, sa maximisation se sépare en deux sous-problèmes d'optimisation. Nous terminons ce chapitre en présentant la trame de l'algorithme de la procédure MVE.

## 2.1 Hypothèses et notations

### 2.1.1 Hypothèses

La méthode du maximum de vraisemblance exact repose sur les hypothèses suivantes :

- La matrice de mélange  $A$  est carrée régulière d'ordre  $K$ .
- Les sources  $S_k(\cdot)$ ,  $k = 1, \dots, K$  sont stochastiquement indépendantes.
- Chaque source  $S_k(\cdot)$  est un processus réel gaussien stationnaire, centré, autorégressif d'ordre  $p_k$ .

L'hypothèse concernant la matrice de mélange  $A$  est à la fois réaliste et peu restrictive. En effet, sans hypothèse particulière sur la nature des sources, il n'est pas possible de restituer plus de sources qu'il n'y a de capteurs. Par contre, si le nombre  $K$  de capteurs est supérieur au nombre  $P$  de sources, il est possible de se ramener à la situation d'égalité  $K = P$  par un simple changement de base dans  $\mathbb{R}^K$ . En effet, le processus d'observation  $X(\cdot)$  est presque-sûrement (*p.s.*) à valeurs dans le sous-espace défini par l'orthogonal du noyau de la matrice de covariance  $R_X(0) = \mathbb{E}\{X(t)X(t)^t\}$ . En l'absence de bruit additif, et si  $A$  est de rang plein, la dimension de ce sous-espace est égale à  $P$ . Enfin le noyau de  $R_X(0)$  coïncide *p.s.* avec celui de la covariance empirique  $\hat{R}_X(0) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t)X(t)^t$  dès que  $T$  est supérieur ou égal à  $P$ .

L'indépendance stochastique des processus sources (indépendance spatiale) constitue le fondement des méthodes de séparation aveugle. S'agissant ici de processus gaussiens, elle équivaut à la non corrélation. Ainsi la méthode MVE proposée entre dans la classe des techniques du second ordre et pourrait ainsi s'étendre à des situations non gaussiennes.

L'utilisation d'un modèle autorégressif pour la structure des sources est justifié, en l'absence de connaissance *a priori*, par le principe du maximum d'entropie ([7], [8]). Par ailleurs, ce modèle est bien adapté aux signaux de parole. L'ordre du modèle peut être estimé pour chaque source, mais cela alourdit la procédure sans être d'un apport important.

### 2.1.2 Notations

Rappelons les principales notations présentées dans l'introduction.

- $A$  est la matrice de mélange de taille  $(K, K)$ .
- $B = A^{-1}$  est la matrice de séparation.
- $S(\cdot) = (S_1(\cdot), \dots, S_K(\cdot))^t$  est le processus source.
- $X(\cdot) = (X_1(\cdot), \dots, X_K(\cdot))^t$  est le processus observable.
- $T$  est la longueur de la séquence observée.
- $S_T$  est la matrice  $(K, T)$  dont les colonnes sont les vecteurs  $S(t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ .
- $X_T$  est la matrice  $(K, T)$  dont les colonnes sont les vecteurs  $X(t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ .
- $\{e_k, k = 1, \dots, K\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^K$ .
- $\beta_k(i)$ ,  $i = 1, \dots, p_k$  sont les autocorrélations partielles du modèle  $AR(p_k)$  de la source  $S_k(\cdot)$  et  $\sigma_{\varepsilon_k}^2$  est la variance de son innovation.
- $R_k^T$  est la matrice de covariance du vecteur colonne  $(S_T)_{k\cdot} = S_T^t e_k$  constitué par la  $k^{\text{ème}}$  ligne de  $S_T$ .
- $\Gamma_k^T$  est la matrice définie par la relation  $R_k^T = \sigma_{\varepsilon_k}^2 \Gamma_k^T$ .
- $\Lambda_k^T$  est la matrice  $\frac{1}{T} X_T (R_k^T(\beta_k))^{-1} X_T^t$ .

## 2.2 Indéterminations

Notons que la représentation (2.1) n'est pas unique au sens où le couple  $(A, S(\cdot))$  ne l'est pas. En effet, lorsqu'une composante  $S_k(\cdot)$  est multipliée par un scalaire, ceci est équivalent à multiplier la  $k^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  par ce même scalaire. De même, une permutation des sources conserve leur indépendance spatiale et est équivalente à appliquer la même permutation sur les colonnes de  $A$ . Nous renvoyons le lecteur à l'article de Tong [51] pour une étude complète des problèmes d'indétermination et d'identifiabilité inhérents à la séparation de sources.

Ainsi, si le couple  $(A, S(t))$  vérifie (2.1) et si  $\Pi$ ,  $D$  et  $\mathcal{E}$  désignent respectivement une matrice de permutation, une matrice diagonale à éléments strictement positifs et une matrice signe (matrice diagonale à éléments égaux à  $\pm 1$ ), le couple  $(A', S'(t))$  vérifie également le modèle (2.1), où

$$A' = AD\Pi\mathcal{E}, \quad S'(t) = \mathcal{E}\Pi^t D^{-1}S(t).$$

On en déduit que la matrice de mélange est identifiable à une permutation, un facteur d'échelle et un facteur signe près. L'ensemble des solutions du problème de la séparation forme une classe de la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  définie par :

$$ARA' \iff \exists (D, \Pi, \mathcal{E}) / A' = AD\Pi\mathcal{E}.$$

Afin de pallier à cette indétermination, il est nécessaire de choisir un représentant dans cette classe d'équivalence. Plusieurs règles de normalisation sont envisageables.

### 2.2.1 Facteur d'échelle

La normalisation liée au facteur d'échelle s'applique soit sur les sources soit sur la matrice de mélange ou celle de séparation. Elle prend parfois en compte le facteur signe, mais celui-ci est souvent ignoré.

*Normalisation des sources.* Il est possible de fixer la valeur d'un des moments de chaque source ou plus généralement de normaliser les sources à l'aide d'une fonction  $h$  satisfaisant la relation (cf. [3]) :

$$\mathbb{E}[h(s_k)] = 0, \quad k = 1, \dots, K.$$

Les praticiens de la séparation de sources choisissent souvent de normaliser les sources de telle façon que leur puissance soit réduite à l'unité (cf. [6]) *i.e.* poser

$$h(s) = s^2 - 1.$$

*Normalisation de la matrice de mélange ou celle de séparation.* Citons quelques règles de normalisation rencontrées dans la littérature.

- Fixer les éléments diagonaux de la matrice  $A$  à un [29].
- Fixer la norme des colonnes de la matrice  $A$  à un [23].
- Fixer les éléments diagonaux de la matrice  $B$  à un [36].
- Fixer la norme des lignes de la matrice  $B$  à un [23].

### 2.2.2 Permutation et facteur signe

Là encore la règle de permutation peut concerner les lignes de la matrice de séparation ou les colonnes de la matrice de mélange. Elle peut aussi dépendre du choix de normalisation pour le facteur d'échelle ou encore tenir compte du facteur signe.

- Permuter les lignes de la matrice  $B$  de telle sorte que la somme des éléments diagonaux, choisis positifs, soit maximale [23]. Notons que cette règle ne garantit pas, en toute généralité, l'unicité de la solution.
- Multiplier chaque colonne de la matrice  $A$  par  $\pm 1$  de sorte que le premier élément non nul soit positif, puis ranger ces colonnes par ordre décroissant de leur première composante ou des suivantes en cas d'égalité [17].

Il n'existe pas de règles précises pour choisir telle ou telle normalisation. Certains choix apparaissent de façon naturelle en analysant le problème, d'autres facilitent la mise en œuvre d'une méthode de calcul. Il peut être souhaitable, comme ici, d'utiliser une normalisation différente dans l'étude des propriétés d'un estimateur de celle retenue pour sa conception.

### 2.2.3 Choix de la normalisation

Nous avons opté pour la normalisation des sources plutôt que pour celle de la matrice de mélange ou celle de séparation. Ce choix n'est pas arbitraire mais justifié. En effet, le fait d'imposer certaines contraintes sur les coefficients de la matrice de mélange ou celle de séparation augmente la complexité du calcul des dérivées successives de la vraisemblance, alors que la normalisation d'un modèle autorégressif, en particulier lorsque l'on fixe la variance de son processus d'innovation à un, réduit la complexité du problème d'estimation des autocorrélations partielles par la méthode du maximum de vraisemblance.

Une façon moins rigoureuse d'aborder le problème est d'ignorer, dans un premier temps, la redondance de la paramétrisation dans l'écriture de la vraisemblance, en laissant libre la matrice de séparation  $B$  ainsi que les matrices d'autocovariance  $R_k^T = \sigma_{\varepsilon_k}^2 \Gamma_k^T$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Dans ce cas, pour chaque  $k = 1, \dots, K$ , l'annulation de la dérivée de la vraisemblance par rapport à  $\sigma_{\varepsilon_k}^2$  ou par rapport au  $k^{\text{ème}}$  terme diagonal de  $B$  fournit la même relation,

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2 = \frac{e_k^t \hat{B} X_T (\hat{\Gamma}_k^T)^{-1} X_T^t \hat{B}^t e_k}{T},$$

entre les estimateurs  $\hat{B}$ ,  $\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2$  et  $\hat{\Gamma}_k^T$  des paramètres  $B$ ,  $\sigma_{\varepsilon_k}^2$  et  $\Gamma_k^T$ . Notons que  $\Gamma_k^T$  ne dépend que des autocorrélations partielles  $\beta_k(i)$ ,  $i = 1, \dots, p_k$ . Nous supposons donc désormais que la variance de l'innovation de chaque processus source est égale à un *i.e.*

$$\sigma_{\varepsilon_k}^2 = 1, \forall k = 1, \dots, K. \quad (2.2)$$

Ceci règle le problème du facteur d'échelle  $D$ . Nous reviendrons sur ceux concernant les facteurs de permutation et de signe.

## 2.3 Maximum de Vraisemblance Exact

Nous présentons brièvement ci-dessous la méthode du maximum de vraisemblance exact dont l'étude détaillée sera donnée dans le chapitre suivant.

### 2.3.1 Fonction de vraisemblance

La matrice de covariance du vecteur  $T$ -dimensionnel  $(S_T)_k = S_T^t e_k$  est la matrice de Toeplitz symétrique,

$$R_k^T = \begin{pmatrix} \gamma_k(0) & \gamma_k(1) & \dots & \gamma_k(T-1) \\ \gamma_k(1) & \gamma_k(0) & \dots & \gamma_k(T-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_k(T-1) & \gamma_k(T-2) & \dots & \gamma_k(0) \end{pmatrix},$$

associée à la fonction d'autocovariance  $\gamma_k(\cdot)$  de la source  $S_k(\cdot)$ . Sous l'hypothèse gaussienne, la densité de probabilité de ce vecteur (centré) est donnée par :

$$(2\pi)^{-T/2}(\det R_k^T)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}e_k^t S_T (R_k^T)^{-1} S_T^t e_k\right\}.$$

En vertu de l'indépendance mutuelle des sources, la densité de probabilité du bloc  $S_T$  est alors :

$$(2\pi)^{-KT/2} \left(\prod_{k=1}^K \det R_k^T\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K e_k^t S_T (R_k^T)^{-1} S_T^t e_k\right\}.$$

La transformation linéaire  $A$  étant inversible, on en déduit la densité de probabilité du bloc  $X_T$  :

$$(2\pi)^{-KT/2} \left(\prod_{k=1}^K \det R_k^T\right)^{-1/2} |\det A|^{-T} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K e_k^t A^{-1} X_T (R_k^T)^{-1} X_T^t A^{-t} e_k\right\}.$$

Les paramètres inconnus qui apparaissent dans cette expression sont d'une part la matrice de séparation  $B = A^{-1}$  et d'autre part la structure au second ordre des différentes sources résumée par la matrice  $R^T = (R_1^T, \dots, R_K^T)$ . Or, pour un processus régulier et compte tenu de la normalisation (2.2), il existe une relation biunivoque entre la fonction d'autocorrélation partielle  $\beta_k(\cdot)$  et la fonction d'autocovariance  $\gamma_k(\cdot)$ . Cette dernière est de type positif *i.e.*

$$\forall T \in \mathbb{N}^*, \forall v \in \mathbb{R}^T, v^t R_k^T v \geq 0,$$

alors que la seule contrainte sur  $\beta_k(\cdot)$  est que chaque  $\beta_k(i)$  soit en module inférieur à un. De plus le modèle  $AR(p_k)$  est caractérisé par la condition  $\beta_k(i) = 0$  pour  $i > p_k$ . Ainsi le paramètre  $\theta = (B, \beta)$ , où  $\beta = \{\beta_k(i), i = 1, \dots, p_k, k = 1, \dots, K\}$ , est particulièrement bien adapté à la maximisation de la vraisemblance puisque toutes ses composantes sont libres. On dira que  $\tilde{\theta} = (\tilde{B}, \tilde{\beta})$  est équivalent à  $\theta = (B, \beta)$ , noté  $\tilde{\theta} \sim \theta$ , lorsqu'il existe une matrice de permutation  $\Pi$  et une matrice signe  $\mathcal{E}$  telles que  $\tilde{B} = \mathcal{E}\Pi B$  et que  $\tilde{\beta} = \Pi\beta$ , cette dernière égalité signifiant que les paramètres  $\beta_k, k = 1, \dots, K$  composant  $\tilde{\beta}$  sont obtenus par permutation, selon  $\Pi$ , de l'ordre de ceux composant  $\beta$ .

**Proposition 2.3.1** *La fonction log-vraisemblance du bloc  $X_T$  est donnée par :*

$$\begin{aligned} l_T(X_T; \theta) &= T \log |\det B| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K e_k^t B X_T (R_k^T(\beta_k))^{-1} X_T^t B^t e_k \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \log(\det(R_k^T(\beta_k))) - \frac{KT}{2} \log(2\pi). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que  $l_T$  satisfait l'invariance  $l_T(X_T; \tilde{\theta}) = l_T(X_T; \theta)$  lorsque  $\tilde{\theta} \sim \theta$ .

### 2.3.2 Principe de la maximisation

Il est difficile de résoudre explicitement le système  $\overrightarrow{\text{grad}}_{\theta} l_T = 0$ . L'utilisation des techniques de recherche des maxima du type Newton est onéreuse en temps de calcul et mal adaptée à un tel problème non convexe. Il s'est avéré que le recours aux techniques de relaxation est beaucoup plus efficace. En effet, à  $B$  fixé, la maximisation de la log-vraisemblance est équivalente à la minimisation de  $K$  critères indépendants :

$$l_T(X_T; \beta_k) = (S_T)_k^t (R_k^T(\beta_k))^{-1} (S_T)_k + \log(\det(R_k^T(\beta_k))), \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.3)$$

La minimisation d'un tel critère a été étudiée par Pham [40]. Nous proposons une version adaptée de cette méthode, pour tenir compte du fait que la variance de l'innovation du modèle  $AR(p_k)$  est égale à 1 (*cf.* Section 3.2.1). En fait, la minimisation du critère (2.3) est réalisée par relaxation sur les  $\beta_k(i)$ ,  $i = 1, \dots, p_k$ . On montre qu'à  $\beta_k(j)$ ,  $j \neq i$ , fixés, le critère (2.3) admet un minimum unique sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .

D'autre part, à  $\beta$  fixé, la maximisation de la vraisemblance est équivalente à la maximisation du critère suivant :

$$l_T(X_T; B) = \log |\det B| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K e_k^t B \Lambda_k^T B^t e_k. \quad (2.4)$$

Soit  $B_k$  le vecteur colonne défini par la  $k^{\text{ème}}$  ligne de  $B$ . On montre (*cf.* Section 3.1.3) qu'à  $B_j$ ,  $j \neq k$  (et  $\beta$ ) fixés, le gradient du critère (2.4) par rapport au vecteur  $B_k$  s'annule en un seul point (à un facteur signe près) correspondant à un maximum. Ainsi nous proposons de réaliser la maximisation de ce critère par relaxation sur les lignes de la matrice  $B$ . Cet algorithme converge si l'ensemble des solutions des équations normales du critère (2.4) n'a pas la puissance du continu (*cf.* Théorème 3.1.1).

Afin de ne pas alourdir les notations, nous utilisons les arguments de la fonction  $l_T$  pour distinguer la log-vraisemblance  $l_T(X_T; \theta)$  des critères  $l_T(X_T; \beta_k)$  et  $l_T(X_T; B)$  associés à (2.3) et (2.4). En l'absence d'arguments,  $l_T$  désignera toujours la log-vraisemblance complète.

Pour  $K = 2$ , la maximisation du critère (2.4) est directe et la solution est obtenue à partir de la diagonalisation conjointe des matrices  $\Lambda_k^T$ ,  $k = 1, 2$  (*cf.* Section 3.1.5).

Pour  $K > 2$ , la situation générale n'est pas complètement résolue. Cependant la situation asymptotique permet d'apporter quelques précisions (*cf.* Chapitre 4). En effet la matrice  $\Lambda_k^T$  converge *p.s.*, avec  $T$ , vers  $AD_k A^t$  où  $D_k$  est une matrice diagonale satisfaisant  $d_k(k, k) = 1$  et  $d_k(j, j) > 1$  pour  $j \neq k$ . Dans ce cas  $B = A^{-1}$

est l'unique solution de la maximisation du critère (2.4). Mais toute matrice obtenue par permutation des lignes de  $B$  est également solution des équations normales et certaines peuvent correspondre à des maxima locaux. Ceci souligne la difficulté du problème global.

L'algorithme de séparation consiste à maximiser la vraisemblance de façon alternative par rapport à chacun des deux paramètres, l'autre étant alors fixé, que constituent  $B$  et  $\beta$ . Tel qu'il a été construit, la croissance de la log-vraisemblance  $l_T$  est garantie à chaque itération élémentaire.

### 2.3.3 Procédure de séparation MVE

Nous présentons ci-dessous la trame de la procédure de maximisation de la log-vraisemblance  $l_T(X_T; B, \beta)$ , en indiquant les sections du prochain chapitre dans lesquelles les différents points sont abordés.

*procédure mve(entrée:  $X_T, p_1, \dots, p_K$ ; sortie:  $\hat{B}$ )*

*étape 0: Initialisation*

- $B_{init} = I_K$
- $\hat{B}_{cour} = B_{init}$
- $\hat{B}_{prec} = I_K$
- stop=faux

*tant que stop=faux faire*

*étape 1: Restitution des sources*

- $\hat{S}_T = \hat{B}X_T$

*étape 2: Estimation des autocorrélations partielles*

*pour  $k = 1 \rightarrow K$*

- $\hat{\beta}_k = \text{armve}(\hat{S}_T(k, :), p_k)$  (cf. Section 3.2.2)

*fin pour*

*étape 3: Calcul des matrices  $\hat{\Lambda}_k$  (cf. Section 3.2.3)*

*pour  $k = 1 \rightarrow K$*

- $\hat{a}_k = \text{levinson-durbin}(\hat{\beta}_k)$
- $(\hat{R}_k^T)^{-1} = \text{tœplitz}(\hat{a}_k)$
- $\hat{\Lambda}_k = \frac{X_T (\hat{R}_k^T)^{-1} X_T^t}{T}$

*fin pour*

*étape 4: Estimation de la matrice de séparation (cf. Section 3.1.3)*

- $\hat{B}_{prec} = \hat{B}_{cour}$
- $\hat{B}_{cour} = \text{séparation}(\hat{B}_{cour}, \hat{\Lambda}_1, \dots, \hat{\Lambda}_K)$

*étape 5: Test d'arrêt*

- stop=comparer( $\hat{B}_{cour}, \hat{B}_{prec}, \varepsilon$ )

*fin tant que*

$$- \hat{B} = \hat{B}_{cour}$$

*fin procédure*

*fonction* séparation(*entrée*:  $B_{prec}, \Lambda_1, \dots, \Lambda_K$ )

*étape 0*: Initialisation

- stop=faux

$$- B = B_{prec}$$

*tant que* stop=faux *faire*

*étape 1*: Relaxation

*pour*  $k = 1 \rightarrow K$

$$- B_{(k)} = (B_{1..}, \dots, B_{k-1..}, B_{k+1..}, \dots, B_{K..})$$

$$- P_k = B_{(k)} \left( B_{(k)}^t \Lambda_k B_{(k)} \right)^{-1} B_{(k)}^t \Lambda_k$$

$$- \varepsilon = \text{signe}(B_{k,1} - e_1^t P_k B_{k..})$$

$$- B_{k..} = \varepsilon \frac{B_{k..} - P_k B_{k..}}{\|B_{k..} - P_k B_{k..}\|_{\Lambda_k}}$$

*fin pour*

*étape 2*: Test d'arrêt

- stop=comparer( $B, B_{prec}$ )

$$- B_{prec} = B$$

*fin tant que*

- retourne  $B$

*fin fonction*

*fonction* comparer(*entrée*:  $A, B, \varepsilon$ )

$$\text{somme} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K |A_{ij} - B_{ij}|$$

*si* somme  $< \varepsilon$  *alors*:

- retourne vrai

*sinon*

- retourne faux

*fin fonction*



# Chapitre 3

## Étude du problème d'optimisation

L'étude détaillée de la maximisation de la vraisemblance fait l'objet de ce chapitre. Nous étudions séparément la maximisation par rapport à chacun des deux paramètres, l'autre étant alors fixé, que constituent la matrice de séparation d'une part et la structure autorégressive des sources d'autre part.

### 3.1 Estimation de la matrice de séparation

Nous considérons, dans ce paragraphe, la maximisation de la log-vraisemblance  $l_T(X_T; B, \beta)$  par rapport à  $B$  lorsque la structure des sources, paramétrée par  $\beta$ , est fixée, c'est-à-dire l'optimisation du critère (2.4). Nous établissons, dans un premier temps, le système d'équations obtenu par l'annulation du gradient de  $l_T(X_T; B, \beta)$  par rapport à  $B$ . Nous prouvons l'existence d'une solution au problème d'optimisation et nous donnons une interprétation géométrique de ce problème. Nous considérons également une forme de la différentielle seconde. Nous construisons ensuite un algorithme de relaxation pour la recherche d'une solution dont nous étudions les propriétés de convergence. Le paragraphe se termine par l'étude du cas bidimensionnel pour lequel la solution est explicite et donnée par la diagonalisation conjointe de deux matrices.

#### 3.1.1 Système de séparation

Nous désignons par l'expression *système de séparation* l'ensemble des équations (3.1) ci-dessous obtenues en annulant les dérivées par rapport aux coefficients de la matrice de séparation de la log-vraisemblance donnée par la Proposition 2.3.1.

**Proposition 3.1.1** *L'annulation du gradient de  $l_T(X_T; B, \beta)$  par rapport à  $B$  équivaut au système de séparation suivant :*

$$e_k = B\Lambda_k^T B^t e_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.1)$$

où  $\Lambda_k^T = X_T(R_k^T(\beta_k))^{-1}X_T^t/T$ .

**Démonstration** La dérivée de la fonction  $l_T(X_T; B, \beta)$  par rapport au coefficient  $b_{kj} = B(k, j)$  est donnée par :

$$\frac{\partial l_T}{\partial b_{kj}} = T \text{trace} \left( A \frac{\partial B}{\partial b_{kj}} \right) - e_j^t X_T (R_k^T(\beta_k))^{-1} X_T^t B^t e_k. \quad (3.2)$$

Annuler cette dérivée conduit à l'équation :

$$a_{jk} = e_j^t \Lambda_k^T B^t e_k.$$

Le système d'équations qui en résulte, lorsque  $j$  varie de 1 à  $K$ , se réécrit sous la forme compacte :

$$A_{.k} = \Lambda_k^T B^t e_k.$$

D'où le résultat en multipliant à gauche cette équation par  $B$ .  $\diamond$

On se propose maintenant de prouver l'existence d'une solution au système de séparation (3.1). Pour cela on montre que le critère  $l_T(X_T; B)$  admet un maximum à l'intérieur de son domaine de définition qui est donc réalisé par une solution de (3.1). Rappelons qu'ici les matrices  $\Lambda_k^T$ ,  $k = 1, \dots, K$ , sont fixées. Elles sont par ailleurs supposées non singulières. Cette condition est satisfaite lorsque la matrice  $X_T$  est de rang plein et ceci est vérifié *p.s.* dès que la longueur  $T$  de la séquence est supérieure ou égale à  $K$ .

On note  $\|\cdot\|_\Lambda$  la norme dans  $\mathbb{R}^K$  associée au produit scalaire  $\langle x, y \rangle_\Lambda = x^t \Lambda y$  et  $\|\cdot\|$  celle usuelle correspondant à la matrice identité  $I_K$ .

**Proposition 3.1.2** *Pour  $\Lambda_1^T, \dots, \Lambda_K^T$  fixés, le critère  $l_T(X_T; B)$  admet un maximum réalisé par une matrice  $B$  non singulière.*

**Démonstration** Toute matrice carrée  $B$  se décompose de façon unique sous la forme du produit  $B = DC$  où  $C$  est une matrice carrée régulière satisfaisant les contraintes,

$$\|C_{k.}\|_{\Lambda_k^T} = 1, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.3)$$

et où  $D$  est la matrice diagonale définie par :

$$D = \text{diag} \left( \|B_{1.}\|_{\Lambda_1^T}, \dots, \|B_{K.}\|_{\Lambda_K^T} \right).$$

L'unicité est réalisée en convenant de poser  $C_{k.} = e_k / \|e_k\|_{\Lambda_k^T}$  lorsque  $d_{kk} = 0$ . Le critère s'écrit :

$$l_T(X_T; DC) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (\log d_{kk}^2 - d_{kk}^2) + \log |\det C|.$$

Posons  $\mathcal{D} = (d_{11}^2, \dots, d_{KK}^2)^t$ . Ce paramètre est un facteur d'échelle et n'est soumis à aucune contrainte. Le gradient et la hessienne de  $l_T(X_T; DC)$  par rapport à  $\mathcal{D}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\mathcal{D}} l_T(X_T; DC) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{d_{11}^2} - 1, \dots, \frac{1}{d_{KK}^2} - 1 \right)^t \\ \text{hess}_{\mathcal{D}} l_T(X_T; DC) &= -\frac{1}{2} \text{diag} \left( \frac{1}{d_{11}^4}, \dots, \frac{1}{d_{KK}^4} \right). \end{aligned}$$

Le gradient s'annule uniquement en  $D^2 = I_K$  et la hessienne est définie négative. On en déduit l'inégalité,

$$l_T(X_T; DC) \leq l_T(X_T; C),$$

avec égalité si et seulement si  $D = I_K$ . Ainsi maximiser le critère (2.4) équivaut à maximiser  $\det C$  sur l'ensemble des matrices  $C$  satisfaisant la contrainte (3.3). Cet ensemble est compact et la fonction  $\det(\cdot)$  est continue. Le maximum est donc atteint en une matrice non singulière  $C$  qui réalise également le maximum de (2.4).  $\diamond$

Le maximum de la log-vraisemblance  $l_T(X_T; B, \beta)$ , lorsque la structure  $\beta$  des sources est fixée, est donc réalisé par une matrice non singulière  $B$  qui est solution du système de séparation (3.1). Par ailleurs, ce problème de maximisation est équivalent aux deux problèmes suivants :

$\mathcal{P}$  : Étant donnés  $K$  ellipsoïdes de l'espace  $\mathbb{R}^K$ ,  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_K$ , cocentriques et deux à deux non homothétiques, trouver  $K$  vecteurs  $B_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, B_K \in \mathcal{E}_K$  qui maximisent le volume du parallélépipède que forment ces vecteurs.

$\mathcal{P}^*$  : Maximiser le déterminant de  $B$  sous la contrainte

$$\{\|B_k\|_{\Lambda_k^T} = 1, k = 1, \dots, K\}.$$

L'hypothèse de non homothétie, dans la formulation géométrique  $\mathcal{P}$ , équivaut à ce que les matrices  $\Lambda_k^T$ ,  $k = 1, \dots, K$  ne soient pas proportionnelles deux à deux. Cette condition, elle-même équivalente à la non proportionnalité des matrices  $R_k^T$ ,  $k = 1, \dots, K$ , est nécessaire pour espérer l'unicité de la solution, c'est-à-dire l'identifiabilité des sources (*cf.* Proposition 3.1.3 ci-après).

Notons aussi l'interprétation géométrique du système de séparation. Une matrice  $B$  est solution de (3.1) si et seulement si, pour tout  $k = 1, \dots, K$  fixé, le vecteur  $B_k$ , défini par la  $k^{\text{ème}}$  ligne est de norme 1 et orthogonal aux vecteurs que forment les autres lignes selon le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda_k^T}$ . Cette propriété est la base de l'algorithme de recherche d'une solution proposé à la section suivante.

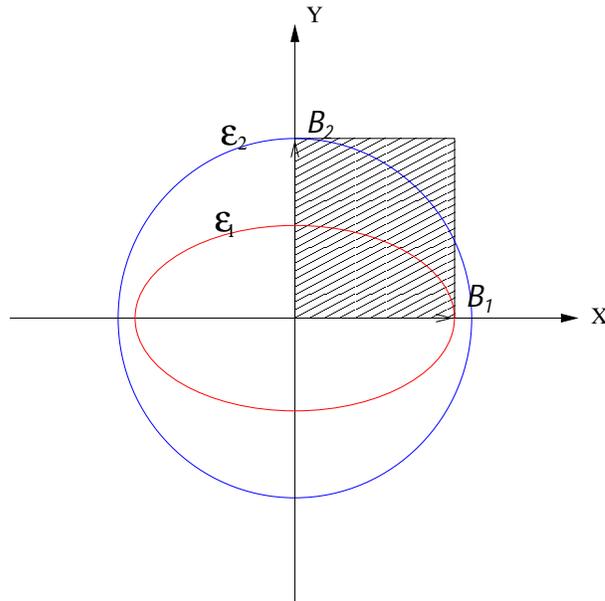


FIG. 3.1 –  $B_1^t$  et  $B_2^t$  forment les lignes de la matrice de séparation

Enfin la relation,

$$l_T(X_T; B) = l_T(MX_T; BM^{-1}) + \log |\det M|, \quad (3.4)$$

où  $M$  est une matrice régulière quelconque, sera souvent utilisée. Le changement de  $X_T$  en  $MX_T$  se traduit alors par celui de  $\Lambda_k^T$  en  $M\Lambda_k^T M^t$ .

Malgré tout, la maximisation du critère (2.4) reste un problème difficile. Il n'est entièrement résolu que pour  $K = 2$  (cf. Section 3.1.5) dont l'aspect géométrique est illustré par la Figure 3.1.

La proposition ci-dessous montre que deux sources ayant des spectres proportionnels ne peuvent pas être séparées par la méthode envisagée ici. Cette condition est bien connue pour les techniques du second ordre ([6], [17], [21], [51]) et par conséquent dans le cas gaussien [43]. Il est clair que la proportionnalité des spectres implique celle des matrices  $R_k^T$  correspondantes.

**Proposition 3.1.3** *S'il existe deux indices distincts  $k$  et  $j$  tels que les matrices  $R_k^T$  et  $R_j^T$  soient proportionnelles, alors le maximum de  $l_T(X_T; B)$  est atteint sur un ensemble de matrices  $B$  ayant la puissance du continu.*

**Démonstration** Sans perte de généralité, nous supposons que  $k = 1$ ,  $j = 2$  et que  $\Lambda_1^T = \alpha^2 \Lambda_2^T = I_K$  en vertu de la propriété (3.4). Soit  $v_1, \dots, v_K$  une solution du

système (3.1). Ces vecteurs vérifient :

$$\begin{aligned} v_1 &\perp_{I_K} v_k, \quad k = 2, \dots, K, \\ v_1 &\perp_{\Lambda_k} v_k, \quad k = 2, \dots, K, \\ v_2 &\perp_{I_K} v_k, \quad k = 1, 3, \dots, K, \\ v_2 &\perp_{\Lambda_k} v_k, \quad k = 1, 3, \dots, K. \end{aligned}$$

Par suite, pour tout  $(\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} \lambda v_1 + \gamma v_2 &\perp_{I_K} v_k, \quad k = 3, \dots, K, \\ \lambda v_1 + \gamma v_2 &\perp_{\Lambda_k^T} v_k, \quad k = 3, \dots, K. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux vecteurs orthogonaux de l'espace vectoriel engendré par  $v_1$  et  $v_2$  et de normes respectives 1 et  $\alpha$ , alors  $u_1, u_2, v_3, \dots, v_K$  est également solution de (3.1). De plus le volume du parallélépipède que forment ces vecteurs reste constant.  $\diamond$

### 3.1.2 Signe de la différentielle seconde

Nous nous proposons d'étudier dans ce paragraphe le signe de la différentielle seconde du critère  $l_T(X_T; B)$  par rapport à  $B$  en un point solution du système de séparation. Nous exhibons l'expression de cette différentielle dans la base des accroissements  $dW = dB B^{-1}$  plutôt que dans la base  $dB$ . Ce changement de base permet d'en simplifier l'écriture et de faciliter ainsi son étude.

La différentielle première de  $l_T(X_T; B)$  se déduit des dérivées partielles (3.2) :

$$\begin{aligned} dl_T(X_T; B) &= \text{trace}(dB B^{-1}) - \sum_{k=1}^K e_k^t dB \Lambda_k^T B^t e_k \\ &= \text{trace}(dW) - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^K e_k^t dW B X_T (R_k^T)^{-1} X_T^T B^t e_k. \end{aligned}$$

La différentielle seconde est alors donnée par :

$$\begin{aligned} d^2 l_T(X_T; B) &= \text{trace}(dB d(B^{-1})) - \sum_{k=1}^K e_k^t dB \Lambda_k^T dB^t e_k \\ &= -\text{trace}(dB B^{-1} dB B^{-1}) - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^K e_k^t dB B^{-1} B \Lambda_k^T B^t (dB B^{-1})^t e_k \\ &= -\text{trace}(dW^2) - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^K e_k^t dW B X_T (R_k^T)^{-1} X_T^T B^t dW^t e_k. \end{aligned}$$

Soit  $\hat{B}$  une solution du système de séparation (3.1) et soit  $\hat{S}(\cdot) = \hat{B}X(\cdot)$  le processus source ainsi restitué. L'annulation de la différentielle première équivaut à :

$$\sum_{k=1}^K e_k^t dW (I_K - \frac{1}{T} e_k^t \hat{S}_T (R_k^T)^{-1} \hat{S}_T^t) e_k = 0, \quad (3.5)$$

et la différentielle seconde s'écrit :

$$d^2 l_T(X_T; \hat{B}) = -\text{trace}(dW^2) - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^K e_k^t dW \hat{S}_T (R_k^T)^{-1} \hat{S}_T^t dW^t e_k. \quad (3.6)$$

Notons  $\sigma_{k,T}^2(i, j)$  l'élément  $(i, j)$  de la matrice  $\frac{1}{T} \hat{S}_T (R_k^T)^{-1} \hat{S}_T^t$ . La condition (3.5) se traduit par  $\sigma_{k,T}^2(\cdot, j) = e_k$  pour  $k = 1, \dots, K$ . La différentielle seconde de  $l_T(X_T; B)$ , évaluée au point  $\hat{B}$ , est alors donnée par :

$$\begin{aligned} d^2 l_T(X_T; \hat{B}) &= - \sum_{k,j} dw_{kj} dw_{jk} - \sum_{k,i,j} \sigma_{k,T}^2(i, j) dw_{ki} dw_{kj} \\ &= - \sum_{k=1}^K [-2dw_{kk}^2 + \sum_{k \neq j} \{dw_{kj} dw_{jk} + \sigma_{k,T}^2(j, j) dw_{kj}^2\}]. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une forme quadratique en les composantes de  $dW$  qui est définie négative si et seulement si :

$$\hat{\sigma}_{k,T}(j, j) \hat{\sigma}_{j,T}(k, k) > 1, \quad k \neq j. \quad (3.7)$$

Cette condition constitue un moyen simple pour vérifier la stabilité d'une solution obtenue à la convergence de l'algorithme de relaxation décrit à la section suivante. Dans le cas bidimensionnel (*cf.* Section 3.1.5), le système de séparation (3.1) admet deux solutions dont l'une correspond à un maximum et l'autre à un point selle. Il est facile de voir que la solution qui correspond au maximum vérifie la condition (3.7) alors que l'autre ne la vérifie pas. Cependant, le comportement asymptotique de la procédure globale (*cf.* Chapitre 4) tend à montrer que certains des éventuels maxima locaux de la procédure de séparation correspondent à une mauvaise affectation des sources par rapport aux structures autorégressives. Ceux-ci ne constituent donc pas un handicap pour le principe de la séparation qui n'a pas pour objectif l'estimation de la structure des sources. De plus ce type de piège devrait être évité grâce à l'étape d'estimation de cette structure.

### 3.1.3 Algorithme de relaxation

Les vecteurs  $B_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , définis par les lignes de  $B$ , constituent  $K$  paramètres vectoriels indépendants entre eux. Par ailleurs, la maximisation de  $l_T(X_T; B)$  par rapport à  $B_k$ , les autres lignes étant fixées, est un problème simple qui admet

une solution explicite. La méthode de relaxation est donc particulièrement indiquée ici.

Le gradient du critère (2.4), par rapport au vecteur  $B_{k.}$ , est donné par :

$$\frac{\partial l_T(X_T; B)}{\partial B_{k.}} = A_{.k} - \Lambda_k^T B_{k.}.$$

Il est nul si et seulement si  $e_k = B \Lambda_k^T B_{k.}$ . C'est-à-dire que  $B_{k.}$  est de norme 1 et orthogonal aux autres lignes de  $B$  selon le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda_k^T}$ . La hessienne,

$$\frac{\partial^2 l_T(X_T; B)}{(\partial B_{k.})^2} = -\frac{1}{\det(B)^2} U U^t - \Lambda_k^T,$$

où  $U = (|B_{k1}|, \dots, |B_{kK}|)^t$  est le vecteur formé par les cofacteurs d'ordre  $(k, j)_{j=1, \dots, K}$  de la matrice  $B$ , est définie négative.

Soient  $B$  une matrice carrée régulière d'ordre  $K$  et  $B_{(k)}$  la matrice de dimension  $(K-1, K)$  obtenue en supprimant la  $k^{\text{ème}}$  ligne de  $B$ . Alors le projecteur orthogonal dans  $\mathbb{R}^K$ , sur le sous-espace engendré par les autres lignes de  $B$  et selon le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda_k^T}$ , est donné par :

$$P_k = B_{(k)}^t (B_{(k)} \Lambda_k^T B_{(k)})^{-1} B_{(k)} \Lambda_k^T.$$

Le maximum de  $l_T(X_T; B)$  par rapport à  $B_{k.}$  est donc réalisé par :

$$\hat{B}_{k.} = \frac{B_{k.} - P_k B_{k.}}{\|B_{k.} - P_k B_{k.}\|_{\Lambda_k^T}}.$$

Il est clair que  $-\hat{B}_{k.}$  est également solution. On peut s'abstraire du problème de signe en décidant que la première composante non nulle de chaque ligne de  $B$  est positive. Cependant, pour l'étude de la convergence de l'algorithme, il est préférable de conserver l'expression de  $\hat{B}_{k.}$ , l'unicité de  $\hat{B}$  pouvant être établie, selon la règle indiquée, en fin de convergence. On appelle *transformation élémentaire* l'opération qui consiste à estimer une ligne de  $B$ , les autres étant fixées, par la procédure ci-dessus.

L'algorithme de relaxation est donc le suivant. Soit  $\hat{B}^0$  une matrice initiale non singulière. Ce sera  $I_K$  au démarrage de la procédure globale de maximisation de la log-vraisemblance  $l_T(X_T; B, \beta)$ , puis l'estimation  $\hat{B}$  obtenue, par cet algorithme, à l'étape précédant la phase d'estimation de  $\beta$  au cours de cette même procédure. L'algorithme construit une suite  $\{\hat{B}^n, n \geq 0\}$  par transformations élémentaires successives. La matrice  $\hat{B}^{n+1}$  ne diffère de  $\hat{B}^n$  que par une seule ligne et reste, par construction, non singulière. Le test d'arrêt porte sur la proximité entre  $\hat{B}^{nK}$  et  $\hat{B}^{(n+1)K}$ , c'est-à-dire après transformation de l'ensemble des lignes de la matrice.

### 3.1.4 Convergence de l'algorithme

Nous étudions ici les propriétés de convergence des suites  $\{\hat{B}^n, n \geq 0\}$  construites par l'algorithme précédent. Nous utiliserons la norme matricielle de Schur,  $\|B\|_S^2 = \text{trace}(B^t B)$ .

Nous savons que le critère  $l_T(X_T; B)$  est borné et strictement concave par rapport à  $B_k$ . Ainsi  $l_T(X_T; \hat{B}^{n+1}) \geq l_T(X_T; \hat{B}^n)$  avec égalité si et seulement si  $\hat{B}^{n+1} = \hat{B}^n$ . Notons que l'égalité ne signifie pas que  $\hat{B}^n$  est solution du système de séparation; pour cela il faut et il suffit que  $\hat{B}^{n+K} = \hat{B}^n$ . Nous pouvons cependant énoncer :

**Proposition 3.1.4** *La suite  $\{l_T(X_T; \hat{B}^n), n \geq 0\}$  est convergente.*

Ceci ne prouve évidemment pas la convergence de la suite  $\{\hat{B}^n, n \geq 0\}$ . L'étude de son comportement nécessite plusieurs résultats intermédiaires.

**Lemme 3.1.1** *Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, K\}$ , la projection  $P_k^n \hat{B}_k^n$ , utilisée à chaque transformation élémentaire, tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .*

**Démonstration** Supposons, pour simplifier la présentation, que la  $(n+1)^{\text{ème}}$  transformation concerne le changement de la première ligne. On a d'une part,

$$l_T(X_T; \hat{B}^{n+1}) - l_T(X_T; \hat{B}^n) = \log |\det \hat{B}^{n+1} \hat{A}^n|,$$

où  $\hat{A}^n = (\hat{B}^n)^{-1}$ , et d'autre part,

$$\hat{B}^{n+1} \hat{A}^n = \begin{pmatrix} \langle \hat{B}_1^{n+1}, \hat{A}_{.1}^n \rangle & \dots & \dots & \langle \hat{B}_1^{n+1}, \hat{A}_{.K}^n \rangle \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

La Proposition 3.1.4 montre que la différence  $l_T(X_T; \hat{B}^{n+1}) - l_T(X_T; \hat{B}^n)$  tend vers 0, par suite  $\langle \hat{B}_1^{n+1}, \hat{A}_{.1}^n \rangle$  tend vers  $\pm 1$  (en fait  $+1$  selon ce qui suit). D'après le procédé de construction de  $\hat{B}^n$  nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{B}_1^{n+1} &= \frac{\hat{B}_1^n - P_1^n \hat{B}_1^n}{\|\hat{B}_1^n - P_1^n \hat{B}_1^n\|_{\Lambda_1^T}}, \\ \langle \hat{B}_1^{n+1}, \hat{A}_{.1}^n \rangle &= \frac{\langle \hat{B}_1^n, \hat{A}_{.1}^n \rangle - \langle P_1^n \hat{B}_1^n, \hat{A}_{.1}^n \rangle}{\|\hat{B}_1^n - P_1^n \hat{B}_1^n\|_{\Lambda_1^T}} \\ &= \frac{1}{\|\hat{B}_1^n - P_1^n \hat{B}_1^n\|_{\Lambda_1^T}}. \end{aligned}$$

Par conséquent  $\|\hat{B}_1^n - P_1^n \hat{B}_1^n\|_{\Lambda_1^T}$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Or

$$\begin{aligned} \|P_1^n \hat{B}_1^n\|_{\Lambda_1^T}^2 &= \|\hat{B}_1^n\|_{\Lambda_1^T}^2 - \|\hat{B}_1^n - P_1^n \hat{B}_1^n\|_{\Lambda_1^T}^2 \\ &= 1 - \|\hat{B}_1^n - P_1^n \hat{B}_1^n\|_{\Lambda_1^T}^2. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\|P_1^n \hat{B}_1^n\|_{\Lambda_1^T}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .  $\diamond$

**Lemme 3.1.2** Pour tout  $(j, k)$  de  $\{1, \dots, K\}^2$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \hat{B}_j^n, \hat{B}_k^n \rangle_{\Lambda_j^T} = \delta_{jk},$$

où  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker,  $\delta_{jk} = 1$ , si  $k = j$ , 0 sinon.

**Démonstration** Soit  $\hat{B}_{i.}^n$  la ligne modifiée au cours de la  $(n+1)^{\text{ème}}$  itération,

$$\hat{B}_{i.}^{n+1} = \frac{\hat{B}_{i.}^n - P_i^n \hat{B}_{i.}^n}{\|\hat{B}_{i.}^n - P_i^n \hat{B}_{i.}^n\|_{\Lambda_i^T}}.$$

Par construction la propriété est satisfaite pour  $j = i$  car  $\langle \hat{B}_{i.}^{n+1}, \hat{B}_{i.}^{n+1} \rangle_{\Lambda_i^T} = \delta_{ik}$ . Pour la même raison on a  $\langle \hat{B}_j^n, \hat{B}_{i.}^n \rangle_{\Lambda_j^T} = 0$  pour  $j \neq i$  du fait des  $(K-1)$  étapes précédentes (pour  $n \geq K-1$ ). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \langle \hat{B}_j^{n+1}, \hat{B}_{i.}^{n+1} \rangle_{\Lambda_j^T} &= \langle \hat{B}_j^n, \hat{B}_{i.}^{n+1} \rangle_{\Lambda_j^T} \\ &= \frac{\langle \hat{B}_j^n, \hat{B}_{i.}^n - P_i^n \hat{B}_{i.}^n \rangle_{\Lambda_j^T}}{\|\hat{B}_{i.}^n - P_i^n \hat{B}_{i.}^n\|_{\Lambda_i^T}} \\ &= - \frac{\langle \hat{B}_j^n, P_i^n \hat{B}_{i.}^n \rangle_{\Lambda_j^T}}{\|\hat{B}_{i.}^n - P_i^n \hat{B}_{i.}^n\|_{\Lambda_i^T}}. \end{aligned}$$

Comme  $\|\hat{B}_{i.}^n\|_{\Lambda_i^T} = 1$  pour  $i = 1, \dots, K$  et que  $P_i^n \hat{B}_{i.}^n$  tend vers 0 d'après le lemme précédent, on en déduit que  $\langle \hat{B}_j^{n+1}, \hat{B}_{i.}^{n+1} \rangle_{\Lambda_j^T}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Lorsque  $j$  et  $k$  sont différents de  $i$ , on a  $\langle \hat{B}_j^{n+1}, \hat{B}_k^{n+1} \rangle_{\Lambda_j^T} = 0$  si la  $j^{\text{ème}}$  ligne a été modifiée après la  $k^{\text{ème}}$ , ce qui correspond aux situations  $i < k < j$ ,  $k < j < i$  ou  $j < i < k$ . Dans le cas contraire, on utilise la même propriété que ci-dessus en notant les égalités suivantes. Pour  $j < k < i$  ou  $k < i < j$  on a

$$\langle \hat{B}_j^{n+1}, \hat{B}_k^{n+1} \rangle_{\Lambda_j^T} = - \frac{\langle \hat{B}_j^{n-i+k+1}, P_k^{n-i+k+1} \hat{B}_k^{n-i+k+1} \rangle_{\Lambda_j^T}}{\|\hat{B}_k^{n-i+k+1} - P_k^{n-i+k+1} \hat{B}_k^{n-i+k+1}\|_{\Lambda_k^T}},$$

et pour  $i < j < k$ ,

$$\langle \hat{B}_j^{n+1}, \hat{B}_k^{n+1} \rangle_{\Lambda_j^T} = - \frac{\langle \hat{B}_j^{n-i+k-K+1}, P_k^{n-i+k-K+1} \hat{B}_k^{n-i+k-K+1} \rangle_{\Lambda_j^T}}{\|\hat{B}_k^{n-i+k-K+1} - P_k^{n-i+k-K+1} \hat{B}_k^{n-i+k-K+1}\|_{\Lambda_k^T}}. \diamond$$

**Lemme 3.1.3** La suite de matrices  $\{\hat{A}^n, n \geq 0\}$  est bornée.

**Démonstration** On considère la norme de Schur, mais le résultat est vrai pour la norme  $L^2$  qui lui est équivalente. Soit  $\lambda_k$  (resp.  $\mu_k$ ) la plus petite (resp. grande) valeur propre de  $\Lambda_k^T$ , alors on a

$$\|\hat{A}^n\|_S^2 = \sum_{k=1}^K \|\hat{A}_{\cdot,k}^n\|^2 \leq \sum_{k=1}^K \frac{\mu_k^2}{\lambda_k},$$

dès que  $n \geq K - 1$ . Supposons en effet que  $\hat{B}_{k\cdot}^n$  soit encore la ligne modifiée au cours de la  $(n + 1)^{\text{ème}}$  itération. Par construction,  $\hat{B}_{k\cdot}^{n+1}$  se caractérise par :

$$\hat{B}^{n+1} \Lambda_k^T \hat{B}_{k\cdot}^{n+1} = e_k \iff \hat{A}_{\cdot,k}^{n+1} = \Lambda_k^T \hat{B}_{k\cdot}^{n+1}.$$

La deuxième expression donne  $\|\hat{A}_{\cdot,k}^{n+1}\| \leq \mu_k \|\hat{B}_{k\cdot}^{n+1}\|$ . D'autre part  $\|\hat{B}_{k\cdot}^{n+1}\|_{\Lambda_k^T}^2 = 1$  implique  $\|\hat{B}_{k\cdot}^{n+1}\|^2 \leq 1/\lambda_k$ .  $\diamond$

**Lemme 3.1.4** *Le gradient de  $l_T(X_T; B)$  considéré en  $\hat{B}^n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  et tout point d'accumulation de la suite  $\{\hat{B}^n, n \geq 0\}$  est solution du système de séparation (3.1).*

**Démonstration** Le gradient de  $l_T(X_T; B)$  en  $\hat{B}^n$  est égal à celui de  $l_T$  au facteur  $T$  près. Il est formé par la juxtaposition des vecteurs (c.f. Proposition 3.1.1)

$$\{\hat{A}_{\cdot,k}^n - \Lambda_k^T (\hat{B}^n)^t e_k\} = \hat{A}^n \{e_k - \hat{B}^n \Lambda_k^T (\hat{B}^n)^t e_k\}, \quad k = 1 \dots, K.$$

La matrice  $\hat{A}^n$  étant bornée et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{B}^n \Lambda_k^T (\hat{B}^n)^t e_k = e_k, \quad \forall k = 1, \dots, K,$$

d'après le Lemme 3.1.2, la première partie du résultat annoncé est acquise. Soit maintenant  $\hat{B}^*$  un point d'accumulation de la suite  $\{\hat{B}^n, n \geq 0\}$ . Alors il existe  $\phi$  strictement croissante telle que la suite  $\{\hat{B}^{\phi(n)}, n \geq 0\}$  converge vers  $\hat{B}^*$ . Cette suite extraite satisfait la propriété limite du Lemme 3.1.2 ce qui, avec la continuité du produit scalaire, fournit la seconde partie du résultat.  $\diamond$

**Lemme 3.1.5**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\hat{B}^{n+1} - \hat{B}^n\|_S = 0.$$

**Démonstration** Supposons encore que  $\hat{B}^{n+1}$  diffère de  $\hat{B}^n$  par sa  $k^{\text{ème}}$  ligne, alors on a  $\|\hat{B}^{n+1} - \hat{B}^n\|_S = \|\hat{B}_{k\cdot}^{n+1} - \hat{B}_{k\cdot}^n\|$ . La différence,

$$\hat{B}_{k\cdot}^{n+1} - \hat{B}_{k\cdot}^n = \frac{\hat{B}_{k\cdot}^n (1 - \|\hat{B}_{k\cdot}^n - P_k^n \hat{B}_{k\cdot}^n\|_{\Lambda_k^T}) - P_k^n \hat{B}_{k\cdot}^n}{\|\hat{B}_{k\cdot}^n - P_k^n \hat{B}_{k\cdot}^n\|_{\Lambda_k^T}},$$

tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  puisque  $P_k^n \hat{B}_{k\cdot}^n$  tend vers 0 et  $\|\hat{B}_{k\cdot}^n\|_{\Lambda_k^T} = 1$ .  $\diamond$

Les deux lemmes précédents et le théorème 26.1 d'Ostrowski ([37], p. 173 ) permettent d'énoncer le théorème suivant.

**Théorème 3.1.1** *À structure autorégressive des sources fixée, l'algorithme de construction de la matrice de séparation converge sinon l'ensemble des solutions du système de séparation a la puissance du continu.*

### 3.1.5 Cas bidimensionnel

Dans le cas de deux sources, la maximisation de la vraisemblance par rapport à  $B$ , lorsque  $\beta$  est fixé, se résoud de façon explicite. En effet le système de séparation (3.1) admet deux solutions distinctes dont l'une correspond au maximum et l'autre représente un point selle. Ces solutions sont liées à la diagonalisation conjointe des matrices  $\Lambda_1^T$  et  $\Lambda_2^T$ . Cette diagonalisation correspond à la généralisation de la notion de vecteurs et valeurs propres (cf. [25], p. 467) que l'on peut résumer par le lemme suivant.

**Lemme 3.1.6** *Soient  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  deux matrices symétriques d'ordre  $K$ . On suppose que  $\Lambda_2$  est définie positive. Alors il existe une matrice  $W$  satisfaisant*

$$W\Lambda_1W^t = \Delta, \quad W\Lambda_2W^t = I,$$

où  $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_K)$  est une matrice diagonale.

Les lignes de  $W$  sont les vecteurs propres de  $\Lambda_1$  relatifs à  $\Lambda_2$  associés aux valeurs propres données par  $\Delta$  (racines du polynôme  $\det(\Lambda_1 - \delta\Lambda_2)$ ). Ces vecteurs sont en effet orthormés selon le produit scalaire défini par  $\Lambda_2$  et satisfont  $\Lambda_1W^t = \Lambda_2W^t\Delta$ . Lorsque les valeurs propres sont distinctes et qu'on les range par ordre croissant (ou décroissant), la matrice  $W$  est unique à un facteur signe près : toute autre solution est de la forme  $\mathcal{E}W$  où  $\mathcal{E}$  est une matrice signe. Cette indétermination correspond à celle de même type sur les lignes de  $B$  (ou les colonnes de  $A$ ). Cela ne constitue donc pas un problème pour la définition de l'estimateur (tout représentant est satisfaisant). Il conviendra cependant d'être prudent dans la façon de mesurer les performances de l'estimateur lors des simulations. Pour  $K = 2$ , il est clair que les valeurs propres sont distinctes si et seulement si les matrices ne sont pas proportionnelles.

**Proposition 3.1.5** *Soient  $R_1^T$  et  $R_2^T$  les matrices d'autocovariance d'ordre  $T$ , supposées non singulières et non proportionnelles, de deux sources stationnaires gaussiennes, centrées et indépendantes. Soit  $X_T$  la matrice  $(2, T)$  constituée de l'observation d'un mélange instantané non bruité  $X(t) = AS(t)$ . Alors l'estimateur de maximum de vraisemblance de la matrice de séparation  $B = A^{-1}$  est donné par*

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\delta_1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W,$$

où  $\delta_1$  et  $W$  sont les éléments de la diagonalisation conjointe des formes quadratiques

$$\Lambda_1^T = \frac{1}{T} X_T (R_1^T)^{-1} X_T^t, \quad \Lambda_2^T = \frac{1}{T} X_T (R_2^T)^{-1} X_T^t,$$

définie par :

$$W \Lambda_1 W^t = \Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad W \Lambda_2 W^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \delta_1 < \delta_2.$$

**Démonstration** Considérons le changement de variable  $B = MW$  avec

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Le critère  $l_T(X_T; B)$  donné par (2.4) s'écrit :

$$l_T(X_T; MW) = \log |\det M| + \log |\det W| - \frac{1}{2} (e_1^t M \Delta M^t e_1 + e_2^t M M^t e_2).$$

Maximiser ce critère par rapport à  $B$  équivaut à maximiser la fonction  $f$  définie par :

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \log |x_1 y_2 - x_2 y_1| - \frac{1}{2} (\delta_1 x_1^2 + \delta_2 y_1^2 + x_2^2 + y_2^2).$$

Le système de séparation (3.1), exprimé en fonction de  $M$ , se développe sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta_1 x_1^2 + \delta_2 y_1^2 &= 1 \\ x_2^2 + y_2^2 &= 1 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 &= 0 \\ \delta_1 x_1 x_2 + \delta_2 y_1 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Les solutions sont du type  $M = \mathcal{E} M_1$  ou  $M = \mathcal{E} M_2$  où  $\mathcal{E}$  désigne le facteur signe habituel et :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\delta_1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\delta_2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\delta = \det(M) = x_1 y_2 - y_1 x_2$ . La matrice des dérivées secondes de  $f$  par rapport à  $x_1, y_1, x_2, y_2$  est donnée par :

$$\frac{1}{\delta^2} \begin{pmatrix} -y_2^2 - \delta_1 \delta^2 & y_2 x_2 & y_2 y_1 & -y_1 x_2 \\ y_2 x_2 & -x_2^2 - \delta_2 \delta^2 & -x_1 y_2 & x_2 x_1 \\ y_2 y_1 & -x_1 y_2 & -y_1^2 - \delta^2 & y_1 x_1 \\ -y_1 x_2 & x_2 x_1 & y_1 x_1 & -x_1^2 - \delta^2 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique  $P_M(\lambda)$  satisfait :

$$\begin{aligned} P_{M_1}(\lambda) &= (2\delta_1 + \lambda)(2 + \lambda)(\lambda^2 + (\delta_2 + 1)\lambda + \delta_2 - \delta_1), \\ P_{M_2}(\lambda) &= (2\delta_2 + \lambda)(2 + \lambda)(\lambda^2 + (\delta_1 + 1)\lambda + \delta_1 - \delta_2). \end{aligned}$$

On en déduit que  $P_{M_1}(\lambda)$  a quatre racines négatives alors que  $P_{M_2}(\lambda)$  a trois racines négatives et une racine positive. Ainsi  $\hat{B} = M_1W$  est la seule matrice, au facteur signe près, réalisant le maximum de la vraisemblance.  $\diamond$

Le point selle  $\tilde{B} = M_2W$  est de la forme :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\delta_2}} \\ \sqrt{\delta_1} & 0 \end{pmatrix} \hat{B}.$$

Il correspond à une permutation des sources qui ne sont donc pas affectées à leur propre structure. Ceci ne constitue pas une solution parasite pour le problème global. De plus l'étape d'estimation de la structure des sources qui suit celle de  $B$  devrait corriger cet échange. Cependant l'accroissement de la vraisemblance n'est plus garanti et la convergence de la procédure globale peut être compromise ou pour le moins ralentie.

## 3.2 Estimation de la structure des sources

Nous considérons, dans ce second paragraphe, la maximisation de la log-vraisemblance  $l_T(X_T; B, \beta)$  par rapport à  $\beta$  lorsque la matrice de séparation  $B$  est fixée, c'est-à-dire la minimisation des critères indépendants  $l_T(X_T; \beta_k)$ ,  $k = 1, \dots, K$  donnés par (2.3). Le problème est donc celui de l'estimation, par maximum de vraisemblance, des paramètres d'un modèle autorégressif dont la variance de l'innovation est connue. Nous adaptons tout d'abord la méthode de Pham [40] pour tenir compte de cette contrainte. Nous prouvons l'existence de l'estimateur du maximum de vraisemblance ainsi que sa consistance. Puis nous donnons l'algorithme qui en résulte. Nous indiquons ensuite la procédure de calcul des formes quadratiques  $\Lambda_k^T$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Le paragraphe se termine par une discussion sur l'estimation de l'ordre d'un modèle autorégressif.

### 3.2.1 Estimation des autocorrélations partielles d'un modèle autorégressif normalisé

Il existe de nombreuses méthodes d'estimation des paramètres d'un modèle autorégressif. La plus classique est celle de Yule-Walker utilisant les autocovariances empiriques. La méthode de Burg [8], basée sur le principe du maximum d'entropie, estime de façon récursive les autocorrélations partielles. La méthode de Kay [31] procède de la même façon en utilisant le maximum de vraisemblance. Une estimation empirique naturelle de ces paramètres a été proposée par Dégerine [16]. La méthode de Pham [40] est une extension de celle de Kay. Ainsi le maximum de vraisemblance exact est réalisé par relaxation sur les autocorrélations partielles. L'amélioration des performances est sensible, particulièrement dans le cas de séries courtes. Par ailleurs l'intérêt est ici de pouvoir mettre en œuvre une méthode de

maximum de vraisemblance globale pour le problème de la séparation de sources. Nous reprenons ci-dessous la méthode de Pham dans le détail afin de prendre en compte la contrainte sur l'innovation. Nous conservons également les notations de [40] et ne reprenons pas les démonstrations des points inchangés.

Considérons le modèle autorégressif d'ordre  $p$ ,

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^p a_k X(t-k), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad a_0 = 1,$$

dans lequel  $\varepsilon(t)$  désigne un bruit blanc gaussien, centré, de variance  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$  fixée et pour lequel les coefficients autorégressifs  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , satisfont les conditions de stabilité habituelles. Ils sont caractérisés par le paramètre  $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$  avec la seule contrainte  $|\beta_k| < 1$ ,  $k = 1, \dots, p$ . On suppose que l'on observe une séquence de longueur  $m$ , notée  $x(1), \dots, x(m)$ . La fonction de log-vraisemblance s'écrit :

$$L_m(X_m; \beta) = -\frac{1}{2}[m \log(2\pi) + \log(\det R_m(\beta)) + \text{trace}(R_m(\beta)^{-1} X_m)],$$

où  $R_m(\beta)$  est la matrice de covariance du vecteur  $(X(1), \dots, X(m))^t$  et  $X_m$  est la matrice de covariance empirique,

$$X_m = (x(1), \dots, x(m))^t (x(1), \dots, x(m)).$$

La matrice  $R_m(\beta)$  ne dépend que des autocorrélations partielles  $\beta_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Maximiser la log-vraisemblance équivaut donc à minimiser, par rapport à ces variables, la fonction :

$$L_m^*(X_m; \beta) = \log(\det R_m(\beta)) + \text{trace}(R_m(\beta)^{-1} X_m).$$

Sans la contrainte,  $\sigma_\varepsilon^2$  est estimé par  $\text{trace}(\hat{R}_m^{-1} X_m)/m$  où  $\hat{R}_m$  est la matrice qui minimise le critère  $\log(\det R_m(\beta)) + m \log[\text{trace}(R_m(\beta)^{-1} X_m)]$ . Les deux critères sont distincts. Cependant, à la convergence de la méthode globale, les autocorrélations partielles estimées sont bien celles que l'on aurait obtenues en plaçant la contrainte sur la matrice de séparation  $B$ , du moins si l'on admet avoir atteint le maximum de la vraisemblance et que ce maximum est réalisé de façon unique. Sinon on peut imaginer que le choix de la contrainte puisse conduire à des maxima locaux différents. Notons que dans notre approche on a  $\text{trace}(\hat{R}_m^{-1} X_m)/m = 1$ .

### Lemme 3.2.1

(i) La forme quadratique en les observations  $\text{trace}(R_m(\beta)^{-1} X_m)$  est aussi une forme quadratique en les paramètres  $a_j$ ,  $j = 0, \dots, p$  :

$$\text{trace}(R_m(\beta)^{-1} X_m) = \sum_{i,j=0}^p a_i a_j Q_{ij},$$

où la matrice  $Q$  satisfait  $Q_{ij} = Q_{ji} = -Q_{m-j, m-i}$  et est ainsi définie par :

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^{m-i-j} X_m(k+i, k+j), \quad i+j < m.$$

(ii) Le terme  $\log(\det R_m(\beta))$  s'exprime simplement à l'aide des autocorrélations partielles  $\beta_1, \dots, \beta_p$  :

$$\log(\det R_m(\beta)) = - \sum_{k=1}^p k \log(1 - \beta_k^2).$$

**Remarque 3.2.1** Seul le coin supérieur gauche d'ordre  $p+1$  de la matrice  $Q$  est nécessaire pour le calcul de la log-vraisemblance (statistique exhaustive du modèle  $AR(p)$ ).

La méthode de relaxation permet de contourner les problèmes que posent les méthodes du type gradient. Elle est basée sur le fait que la dérivée de la fonction  $L_m^*(X_m; \beta)$  par rapport à chaque  $\beta_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , les autres étant fixés, s'annule en un seul point de l'intervalle  $] -1, 1[$  correspondant à un *minimum*, qui de plus est solution explicite d'une équation du troisième degré. Bien que  $\text{trace}(R_m(\beta)^{-1} X_m)$  soit une fonction compliquée de  $\beta$ , que nous noterons  $T(\beta)$ , elle est, pour  $\beta_j$ ,  $j \neq k$ , fixés, une forme quadratique par rapport à  $\beta_k$ . Cela peut se voir de la façon suivante. À partir des relations issues de l'algorithme de Levinson-Durbin [33],

pour  $k = 1, \dots, p$  :

$$\begin{aligned} a_0[k] &= 1, \quad a_k[k] = -\beta_k, \\ a_j[k] &= a_j(k-1) - \beta_k a_{k-j}[k-1], \quad j = 1, \dots, k-1, \\ a_j &= a_j[p], \quad j = 0, \dots, p, \end{aligned} \quad (3.8)$$

les dérivées partielles des coefficients autorégressifs  $a_1, \dots, a_p$  par rapport à  $\beta_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , sont obtenues par la récurrence :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_j[k]}{\partial \beta_k} &= -a_{k-j}[k-1], \quad j = 1, \dots, k-1, \\ \frac{\partial a_k[k]}{\partial \beta_k} &= -1, \\ \text{pour } i = k+1, \dots, p : & \\ \frac{\partial a_j[i]}{\partial \beta_k} &= \frac{\partial a_j[i-1]}{\partial \beta_k} - \beta_i \frac{\partial a_{i-j}[i-1]}{\partial \beta_k}, \quad j = 1, \dots, i-1, \\ \frac{\partial a_i[i]}{\partial \beta_k} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les relations ci-dessus montrent que  $\frac{\partial a_j}{\partial \beta_k}$  ne dépend pas de  $\beta_k$ . Donc pour  $\beta_j$ ,  $j \neq k$ , fixés, les  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , et par suite  $T(\beta)$  sont des fonctions de  $\beta_k$  respectivement linéaires et quadratiques. Explicitement on pose :

$$T(\beta) = A\beta_k^2 - 2B\beta_k + C,$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  dépendent des  $\beta_j$ ,  $j \neq k$ . Notons que  $C$ ,  $-2B$  et  $2A$  représentent les valeurs de  $T(\beta)$  et de ses deux premières dérivées partielles par rapport à  $\beta_k$  évaluées au point  $(\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, 0, \beta_{k+1}, \dots, \beta_p)^t$ . Par identification, elles sont reliées à  $T(\beta)$ ,  $T_k^{(1)}(\beta) = \frac{\partial T}{\partial \beta_k}$  et  $T_k^{(2)}(\beta) = \frac{\partial^2 T}{\partial \beta_k^2}$  par les relations :

$$\begin{aligned} A &= T_k^{(2)}/2, \\ B &= (-T_k^{(1)} + T_k^{(2)}\beta_k)/2, \\ C &= T - T_k^{(1)} + T_k^{(2)}\beta_k^2/2, \end{aligned}$$

où, pour simplifier les notations, nous avons omis la variable  $\beta$  dans  $T$ ,  $T_k^{(1)}$  et  $T_k^{(2)}$ . Les dérivées ci-dessus sont données par :

$$\begin{aligned} T_k^{(1)} &= 2 \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^p Q_{ij} a_i \frac{\partial a_j}{\partial \beta_k}, \\ T_k^{(2)} &= 2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p Q_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial \beta_k} \frac{\partial a_j}{\partial \beta_k}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

où les termes  $\frac{\partial a_j}{\partial \beta_k}$  sont calculés à partir de (3.8) et (3.9). Ainsi, pour  $\beta_j$ ,  $j \neq k$ , fixés, la minimisation de  $L_m^*$  par rapport à  $\beta_k$  se réduit à celle de la fonction :

$$(A\beta_k^2 - 2B\beta_k + C) - k \log(1 - \beta_k^2),$$

qui a pour dérivée :

$$2(A\beta_k - B + k \frac{\beta_k}{1 - \beta_k^2}). \quad (3.11)$$

Celle-ci ne s'annule que pour  $\beta_k$  solution de l'équation :

$$z^3 + qz^2 + rz - q = 0,$$

où :

$$\begin{aligned} q &= -\frac{B}{A} = \frac{T_k^{(1)}}{T_k^{(2)}} - \beta_k, \\ r &= -\frac{A+k}{A} = -1 - \frac{2k}{T_k^{(2)}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cette équation se résoud de façon usuelle. Posant

$$a = \frac{1}{3}(\frac{q^2}{3} - r), \quad b = \frac{q}{2}(\frac{r}{3} - 2\frac{q^2}{27} + 1), \quad (3.13)$$

elle a une racine réelle,

$$[b + \sqrt{b^2 - a^3}]^{\frac{1}{3}} + [b - \sqrt{b^2 - a^3}]^{\frac{1}{3}} - \frac{q}{3},$$

si  $a^3 < b^2$ , sinon elle a trois racines réelles,

$$2\sqrt{a}\cos(\Phi + 2k\pi/3) - q/3, \quad k = 0, 1, 2, \quad \cos(3\Phi) = \frac{b}{a^{3/2}}.$$

**Lemme 3.2.2** Soient  $q, r$  donnés par (3.12). Alors pour  $A > 0$ , la cubique  $z^3 + qz^2 + rz - q$  a trois racines réelles dont une seule dans  $] - 1, 1[$ . Pour  $A < 0$ , cette cubique peut avoir une seule racine réelle, alors dans  $] - 1, 1[$ , ou trois racines réelles; dans ce dernier cas, soit une seule racine est dans  $] - 1, 1[$ , les autres étant simultanément à gauche ou à droite de l'intervalle, soit les trois racines sont dans  $] - 1, 1[$ , mais une seule a le signe de  $B$ , avec un choix arbitraire du signe si  $B = 0$ , les autres ayant le signe opposé ou étant nulles. Dans tous les cas, la seule racine dans  $] - 1, 1[$  ainsi caractérisée est celle en laquelle la fonction

$$Az^2 - 2Bz + C - k \log |1 - z^2|$$

atteint son minimum dans  $] - 1, 1[$ .

**Démonstration** Considérons la fonction définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(z) = Az^2 - 2Bz + C - k \log |1 - z^2|.$$

Sa dérivée est donnée par (3.11) avec  $z$  à la place de  $\beta_k$ . Par conséquent cette fonction ne peut avoir au plus que trois extréma locaux en les racines de la cubique :

$$z^3 + qz^2 + rz - q.$$

Notons que  $f$  est continue sur son domaine de définition, converge vers  $+\infty$  en  $\pm 1$ . De plus, elle converge vers  $\pm\infty$ , suivant le signe de  $A$ , lorsque  $z$  tend vers  $\pm\infty$ .

*Premier cas :  $A > 0$*

La fonction  $f$  est continue, dérivable sur chacun des intervalles  $] - \infty, -1[$ ,  $] - 1, 1[$ ,  $]1, +\infty[$ , et tend vers  $+\infty$  en  $\pm\infty$  et en  $\pm 1$ . Par conséquent il existe (d'après le théorème de Rolle)  $z_1 \in ] - \infty, -1[$ ,  $z_2 \in ] - 1, 1[$  et  $z_3 \in ]1, +\infty[$  tels que  $f'(z_1) = f'(z_2) = f'(z_3) = 0$ . Ainsi  $f'$  admet une seule racine dans l'intervalle  $] - 1, 1[$ .

*Deuxième cas :  $A < 0$*

Si la cubique a une seule racine réelle, celle-ci se situe dans  $] - 1, 1[$  et correspond au minimum de  $f$ . Supposons qu'elle ait trois racines réelles. Alors, puisque leur produit est égal à :

$$q = -\frac{B}{A},$$

qui a le même signe que  $B$ , soit une seule racine ou les trois racines ont le même signe que  $B$ , (si  $B = 0$ , par symétrie, il y a une racine nulle et deux racines de signes opposés en lesquelles est atteint le minimum). Puisque la somme des racines est égale à :

$$-q = \frac{B}{A},$$

qui a le signe opposé de  $B$ , nous en déduisons qu'il existe une seule racine qui a le même signe que  $B$ . Nous observons maintenant que, pour  $B \neq 0$  et  $z_0$  réalisant le minimum de  $f$  dans  $] -1, 1[$ ,  $z_0$  doit avoir le même signe que  $B$  sans quoi  $f(-z_0) < f(z_0)$ .  $\diamond$

Jusqu'ici nous avons implicitement supposé  $T_k^{(2)} \neq 0$ , ce qui est vrai *p.s.* Cependant, lorsque  $T_k^{(2)}$  est très proche de zéro, le calcul des racines de la cubique sera instable numériquement car  $q$  et  $r$  deviennent très grands. Il est donc préférable de poser  $T_k^{(2)} = 0$ , ce qui conduit à l'équation :

$$T_k^{(1)} z^2 - 2kz - T_k^{(1)} = 0.$$

Le discriminant de l'équation ci-dessus est positif, par conséquent elle admet deux racines réelles. Or le produit de ces racines est égal à  $-1$ , donc l'une est dans  $] -1, 1[$  et l'autre est en dehors de cet intervalle. La racine à l'intérieur de  $] -1, 1[$  est donnée par

$$\frac{k - \sqrt{k^2 + (T_k^{(1)})^2}}{T_k^{(1)}}.$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance, noté  $\hat{\beta}_m$ , désigne toute valeur de  $\beta$  qui minimise  $L_m^*(X_m; \beta)$ . Nous montrons ci-dessous son existence ainsi que sa consistance.

**Proposition 3.2.1** *Le minimum de  $L_m^*(X_m; \beta)$  est atteint dans  $] -1, 1[^p$ . Asymptotiquement il est réalisé de façon unique et l'estimateur de maximum de vraisemblance  $\hat{\beta}_m$  converge presque sûrement vers la vraie valeur  $\beta_0$  du paramètre.*

**Démonstration** La variance de l'innovation de  $X(\cdot)$  est supposée constante égale à 1. Soit  $R_m(\beta) = A_m^{-1} \Sigma_m^2 A_m^{-t}$  la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance du modèle. Les éléments de la matrice triangulaire,

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1[1] & 1 & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_p[p] & \dots & a_1[p] & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_p[p] & \dots & a_1[p] & 1 \end{pmatrix},$$

sont obtenus, en fonction de  $\beta$ , par la récurrence (3.8) de l'algorithme de Levinson-Durbin ( $a_k = a_k[p]$ ,  $k = 1, \dots, p$ ). Ceux de la matrice diagonale,

$$\Sigma_m^2 = \begin{pmatrix} \sigma^2(0) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma^2(p-1) & \dots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ont pour expression,

$$\sigma^2(i) = \prod_{k=i+1}^p (1 - \beta_k^2)^{-1},$$

compte tenu de la contrainte  $\sigma^2(p) = 1$ .

Soit  $\varepsilon(\cdot, i)$  l'erreur de prédiction linéaire de  $X(\cdot)$  sur son passé immédiat de longueur  $i$ , calculée selon le modèle, avec  $\varepsilon(\cdot, 0) = X(\cdot)$ , et  $\sigma^2(i)$  la variance associée. Alors on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, i) &= X(t) + \sum_{k=1}^i a_i[k] X(t-k), \\ \log |\det R| &= \sum_{i=0}^{p-1} \log(\sigma^2(i)) = - \sum_{k=1}^p k \log[1 - \beta_k^2]. \end{aligned}$$

Ainsi la minimisation de  $L_m^*(X_m; \beta)$  consiste à minimiser le critère ci-dessous :

$$\frac{1}{m} \left( - \sum_{k=1}^p \log[1 - \beta_k^2] + \sum_{i=0}^{p-1} \prod_{k=i+1}^p [1 - \beta_k^2] \varepsilon^2(i+1, i) + \sum_{t=p}^m \varepsilon^2(t, p) \right). \quad (3.14)$$

Ce critère tend vers  $+\infty$  lorsque l'un des  $\beta_k$  tend vers  $\pm 1$ . Le minimum est donc atteint pour  $\beta$  à l'intérieur de son domaine. Nous verrons dans l'étude du comportement asymptotique de la méthode globale (*c.f* Lemmes 4.2.2, 4.2.3 et 4.2.4) que ce critère (resp. ses deux dérivées premières par rapport à  $\beta$ ) converge *p.s.*, lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ , vers  $\text{var}(\varepsilon(t, p))$  (resp. ses deux dérivées premières par rapport à  $\beta$ ) et ce uniformément par rapport à  $\beta$  sur tout compact de la forme  $\{\beta : |\beta_k| \leq \bar{\beta} < 1, k = 1, \dots, p\}$ . Or la fonction

$$\text{var} \left( X(\cdot) + \sum_{k=1}^p a_k X(\cdot - k) \right)$$

admet un minimum unique, réalisé par  $(a_1, \dots, a_p)$  associé à la vraie valeur  $\beta_0$  du paramètre, et est strictement convexe au voisinage de ce point. Pour  $m$  suffisamment

grand il en sera de même, par continuité, pour le critère (3.14). L'estimateur de maximum de vraisemblance  $\hat{\beta}_m$  est alors réalisé de façon unique et converge *p.s.* vers  $\beta_0$ .  $\diamond$

Notons que cette démonstration montre que l'estimateur de maximum de vraisemblance est équivalent, de façon asymptotique, à celui des moindres carrés.

### 3.2.2 Fonction ARMVE

Nous donnons ci-dessous l'algorithme de mise en œuvre de l'estimation autorégressive sous contrainte.

*fonction armve(entrée:  $X, p$ )*

*étape 0: Initialisation*

- calculer les termes  $Q_{ij}$ ,  $i, j = 0, \dots, p$  (cf. Lemme 3.2.1)
- $a_j = \beta_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, p$
- $a_0 = 1$  et  $T = Q_{00}$
- stop=faux

*tant que stop=faux faire*

*étape 1: Cycle d'itération*

*pour  $k = 1 \rightarrow p$*

- calculer les dérivées  $\frac{\partial a_j}{\partial \beta_k}$ ,  $j = 1, \dots, p$  par (3.9) puis  $T_k^{(1)}$  et  $T_k^{(2)}$  par (3.10)

*si  $T_k^{(2)} \neq 0$  (ou non trop proche de zéro)*

- calculer  $q$ ,  $r$ ,  $a$  et  $b$  par (3.12) et (3.13)

*si  $b^2 > a^3$  alors*

$$- z = [b + \sqrt{b^2 - a^3}]^{\frac{1}{3}} + [b - \sqrt{b^2 - a^3}]^{\frac{1}{3}} - \frac{q}{3}$$

*sinon*

$$- \text{calculer } \Phi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{b}{a^{3/2}}\right)$$

*si  $T_k^{(2)} > 0$  alors :*

$$- z = 2\sqrt{a} \cos(\Phi + 4\pi/3) - q/3$$

*sinon*

$$- z = 2\sqrt{a} \cos(\Phi) - q/3$$

$$- z' = 2\sqrt{a} \cos(\Phi + 2\pi/3) - q/3$$

*si  $|z'| < 1$  et  $z'(-T_k^{(1)} + T_k^{(2)}\beta_k) > 0$  alors*

$$- z = z'$$

*fin si*

*fin si*

*fin si*

si non  $T_k^{(2)} = 0$  ou trop proche de zéro

$$- z = \frac{k - \sqrt{k^2 + (T_k^{(1)})^2}}{T_k^{(1)}}$$

*fin si*

$$- T + T_k^{(1)}(z - \beta_k) + \frac{1}{2}T_k^{(2)}(z - \beta_k)^2 \rightarrow T$$

$$- a_j + \frac{\partial a_j}{\partial \beta_k}(z - \beta_k) \rightarrow a_j \quad j = 1, \dots, p$$

$$- z \rightarrow \beta_k$$

- Calculer  $a_1(k), \dots, a_k(k)$  à partir de  $a_1(k-1), \dots, a_{k-1}(k-1)$  et  $\beta_k$  par (3.8)

*fin pour*

étape 2: Test d'arrêt

- il peut se faire selon divers critères. On peut, par exemple, considérer le changement en moyenne quadratique des  $\beta_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , au cours d'un cycle d'itération. Lorsque le test est négatif, on retourne à l'étape 1.

- remise à jour de la variable stop

*fin tant que*

- retourne  $\beta$

*fin fonction*

### 3.2.3 Calcul des formes quadratiques $\Lambda_k^T$

La mise à jour de l'inverse des matrices d'autocovariance, pour le calcul des formes quadratiques  $\Lambda_k^T$ , à partir de la nouvelle estimation  $\hat{B}$  de la matrice de séparation s'effectue de la façon suivante. Les sources sont restituées par  $\hat{S}_k^T = e_k^t \hat{B} X_T$ . Ensuite les autocorrélations partielles de chaque source  $S_k$  sont estimées à partir de la séquence  $\hat{S}_k^T$  par la méthode du maximum de vraisemblance exact ci-dessus. Les coefficients autorégressifs  $(a_k(i))_{i=1 \dots p_k}$  du modèle  $AR(p_k)$  sont alors déterminés par les relations (3.8) de l'algorithme de Levinson-Durbin. L'inverse de la matrice d'autocovariance  $R_k^T$  est enfin obtenue par la formule de Gohberg-Semencul [30] comme suit :

**Proposition 3.2.2** *Soient :*

$$- a = \underbrace{(a_k(0), a_k(1), \dots, a_k(p_k), 0, \dots, 0)}_T$$

$$- b = \underbrace{(0, \dots, 0, a_k(p_k), a_k(p_k - 1), \dots, a_k(1))}_T$$

$$\begin{aligned}
 -c &= \underbrace{(c_1, c_2, \dots, c_T)}_T \\
 -G(c) &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_T & c_{T-1} & \dots & c_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

alors l'inverse de la matrice  $R_k^T$  est

$$(R_k^T)^{-1} = (G(a)G^t(a) - G(b)G^t(b)).$$

On peut également envisager d'utiliser la décomposition de Cholesky  $R^{-1} = A^t \Sigma^{-2} A$  mentionnée dans la démonstration de la Proposition 3.2.1. Il s'avère en effet que cette procédure est moins coûteuse que celle ci-dessus. D'autre part le calcul des formes quadratiques sous la forme  $\Lambda_k^T = X_T A_k^t \Sigma_k^{-2} A_k X_T^t / T$  se déduit de celui de  $A_k X_T^t$ .

### 3.2.4 Estimation de l'ordre d'un modèle autorégressif

Nous avons constaté, lors de la phase de simulation, qu'il est préférable de sur-estimer l'ordre du modèle utilisé dans l'approximation autorégressive, plutôt que l'inverse, lorsque les sources sont elles-mêmes autorégressives. Par ailleurs, l'estimation d'un modèle  $AR(p)$  par la méthode du maximum de vraisemblance exacte a un coût important en temps de calcul, qui croît fortement avec  $p$ . On peut donc envisager d'estimer cet ordre plutôt que de le choisir grand de façon arbitraire. Pour ce faire, on dispose de nombreuses procédures basées, pour la plupart, sur un estimateur  $\hat{\sigma}_p^2$  de la variance de l'innovation du modèle  $AR(p)$  ajusté. Cet estimateur est obtenu par une méthode rapide telle que Yule-Walker, Burg, les moindres carrés ou encore ACPE [16]. En effet le choix de la méthode n'a pas d'influence sur le résultat des procédures lorsque  $T$  est grand devant  $p$  car ces méthodes sont asymptotiquement équivalentes.

L'estimation de l'ordre du processus consiste à retenir la valeur  $p^*$  qui minimise un certain critère. Akaike propose deux critères différents (*cf.* [2]). Le premier, noté *FPE* pour « Final Prediction Error », consiste à minimiser une estimation de la variance de l'erreur de prédiction à un pas et conduit à :

$$FPE(p) = \hat{\sigma}_p^2 \left( \frac{1 + p/T}{1 - p/T} \right).$$

Le second critère, *AIC* pour « Akaike Information Criterion », est basé sur le principe du maximum de vraisemblance sous hypothèse gaussienne. Il apparaît comme une estimation de la divergence de Kullback-Leibler entre le modèle ajusté et le vrai modèle :

$$AIC(p) = T \log(\hat{\sigma}_p^2) + 2p.$$

Le terme  $2p$  est interprété comme une pénalité due au choix de coefficients supplémentaires ne contribuant pas à la réduction de l'erreur quadratique moyenne. Ces deux critères sont asymptotiquement équivalents et fournissent des estimateurs qui ne sont pas consistants. L'ordre du modèle, lorsqu'il existe vraiment, est surestimé. Rissanen [47] remédie à ce problème avec le critère *BIC*, pour « Bayesian Information Criterion » :

$$BIC(p) = T \log(\hat{\sigma}_p^2) + p \log(T).$$

L'estimateur obtenu est alors consistant. Parzen [39] propose le critère *CAT*, pour « Criterion Autoregressive Transfer ». L'ordre  $p$  est choisi de telle façon que l'estimation de la différence entre l'erreur quadratique moyenne associée au vrai filtre prédicteur (qui pourrait être infini) et celle du filtre estimé soit minimale. Il montre que cette différence est calculable sans connaître explicitement le vrai filtre :

$$CAT(p) = \frac{\sum_{j=1}^p \tilde{\sigma}_j^{-2}}{T} - \tilde{\sigma}_p^{-2}, \quad \tilde{\sigma}_j^{-1} = \frac{T}{T-j} \hat{\sigma}_j^{-2}.$$

Tous ces estimateurs consistent à retenir l'ordre  $p$  qui minimise le critère sur l'intervalle  $[0, p_{max}]$  où  $p_{max}$  est fixé *a priori*.

Soit  $X(\cdot)$  un processus  $AR(p)$  dont on veut estimer l'ordre. Il est possible de tester l'hypothèse  $H_0, \{p = q\}$ , contre l'alternative  $\{p > q\}$  grâce au théorème suivant [46] :

**Théorème 3.2.1** *Soient  $X(\cdot)$  un processus  $AR(q)$  stationnaire à l'ordre quatre et  $\hat{\beta}(\cdot)$  un estimateur de sa fonction d'autocorrélation partielle, alors :*

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{\beta}(q+1) \\ \vdots \\ \hat{\beta}(p) \end{pmatrix} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}(0, I_{p-q}).$$

Ainsi, sous l'hypothèse  $H_0$ , la statistique  $S_{q,p}$  définie par :

$$S_{q,p} = T \sum_{i=q+1}^p \hat{\beta}(i)^2,$$

suit la loi du *chi-deux* à  $p - q$  degrés de liberté. Ce test est utilisé par De Luna [19] pour proposer une version Corrigée du critère *FPE*, notée *FPEC*. Cette dernière consiste à estimer  $p_{max}$  en minimisant le critère *FPE* et à retenir le plus petit entier  $p_\alpha$  pour lequel la statistique  $S_{p_\alpha, p_{max}}$  franchit le seuil du test du *chi-deux* à un niveau de signification  $\alpha$  donné. Ce critère a le mérite de réaliser un compromis entre une variance grande de l'estimateur (*FPE*) et une sous-estimation de l'ordre du modèle (*BIC*) [19].



# Chapitre 4

## Étude de l'estimateur MVE

L'étude de l'estimateur du maximum de vraisemblance et de ses propriétés asymptotiques fait l'objet de ce chapitre. Nous prouvons d'abord l'existence de l'estimateur MVE pour le problème global de la séparation de sources. Puis nous discutons l'invariance de ce dernier et nous proposons un nouvel indice pour mesurer les performances des méthodes de séparation. Nous montrons ensuite que cet estimateur est consistant mais aussi que la vraisemblance peut présenter des maxima locaux lorsque l'on fixe la structure des sources. Nous considérons également la robustesse de l'estimateur par rapport à l'hypothèse autorégressive et par rapport à la nature gaussienne des sources. Nous donnons l'expression de la matrice d'information de Fisher relative au paramètre global  $\theta$  et nous obtenons ainsi une borne inférieure pour l'indice de performance. Enfin nous situons notre approche par rapport à la méthode QMV.

### 4.1 Existence, invariance et indice de performance

#### 4.1.1 Existence

On appelle estimateur du maximum de vraisemblance, noté  $\hat{\theta}_T = (\hat{B}_T, \hat{\beta}_T)$ , toute valeur  $\theta = (B, \beta)$  du paramètre réalisant le maximum de la fonction log-vraisemblance  $l_T(X_T; \theta)$ . L'existence d'une telle valeur est assurée par le résultat suivant.

**Proposition 4.1.1** *Pour  $T \geq p + K(p + 1)/2$ , où  $p = \max\{p_k, k = 1, \dots, K\}$ , la fonction de log-vraisemblance  $l_T(X_T; \theta)$  tend p.s. vers  $-\infty$  dans chacune des circonstances suivantes :*

- (i) *L'une des composantes  $\beta_k(i)$  de  $\beta$  tend vers  $\pm 1$ .*
- (ii) *La matrice  $B$  tend vers une matrice singulière.*
- (iii) *La norme de  $B$  tend vers  $+\infty$ .*

Ainsi le maximum de  $l_T(X_T; \theta)$  est réalisé p.s. par une valeur  $\hat{\theta}_T = (\hat{B}_T, \hat{\beta}_T)$  pour laquelle  $\hat{B}_T$  est non singulière et où les composantes de  $\hat{\beta}_T$  sont dans  $] -1, 1[$ .

**Démonstration** Rappelons l'expression de  $l_T(X_T; \theta)$  donnée par la Proposition 2.3.1 :

$$\begin{aligned} l_T(X_T; \theta) &= T \log |\det B| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K e_k^t B X_T (R_k^T(\beta_k))^{-1} X_T^t B^t e_k \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \log(\det(R_k^T(\beta_k))) - \frac{KT}{2} \log(2\pi). \end{aligned}$$

On a la majoration :

$$l_T(X_T; \theta) \leq T \log |\det B| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{p_k} i \log(1 - \beta_k^2(i)),$$

dans laquelle on a utilisé l'expression de  $\log(\det(R_k^T(\beta_k)))$  du Lemme 3.2.1. Le résultat est donc acquis dans les deux premières circonstances lorsque la matrice  $B$  reste bornée car  $|\det B| \leq \prod_{k=1}^K \|B_k.\|$ . Soit  $\lambda_k$  la plus petite valeur propre de la forme quadratique  $[(T-p_k)X_{K(p_k+1)}]^t [(T-p_k)X_{K(p_k+1)}]$  où  $[(T-p_k)X_{K(p_k+1)}]$  est la matrice de dimension  $((T-p_k), K(p_k+1))$  formée par les lignes suivantes :

$$[X_1(t) \cdots X_1(t-p_k) \cdots X_K(t) \cdots X_K(t-p_k)], \quad t = p_k + 1, \dots, T.$$

Dans cette matrice, sont rangées toutes les séquences progressives de longueur  $p_k + 1$ . En négligeant les premiers termes (positifs) des formes quadratiques figurant dans  $l_T(X_T; \theta)$ , on a :

$$\begin{aligned} e_k^t B X_T (R_k^T(\beta_k))^{-1} X_T^t B^t e_k &\geq \sum_{t=p_k+1}^T \left( \sum_{j=0}^{p_k} a_k(j) \sum_{i=1}^K b_{ki} X_i(t-j) \right)^2 \\ &\geq \lambda_k \left( \sum_{j=0}^{p_k} a_k^2(j) \right) \|B_k.\|^2 \geq \lambda_k \|B_k.\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit la majoration suivante :

$$l_T(X_T; \theta) \leq T \sum_{k=1}^K \log \|B_k.\| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \lambda_k \|B_k.\|^2.$$

Ce majorant tend vers  $-\infty$  lorsque la norme de  $B$  tend vers  $+\infty$ , à condition que chaque  $\lambda_k$  soit strictement positif. Ce dernier point est satisfait lorsque la matrice  $[(T-p_k)X_{K(p_k+1)}]$  est de rang plein, ce qui est vrai p.s. si  $(T-p_k) \geq K(p_k+1)$ . La matrice  $(R_k^T(\beta_k))^{-1}$  est doublement symétrique et par suite les formes quadratiques

restent inchangées par inversion du temps. Ceci se traduit par l'adjonction des séquences retrogrades à la matrice  $[(T-p_k)X_{K(p_k+1)}]$  et par le changement de  $\lambda_k$  par  $\lambda_k/2$ . On obtient ainsi la contrainte  $2(T-p) \geq K(p+1)$  qui figure dans l'énoncé.  $\diamond$

L'existence de l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_T = (\hat{B}_T, \hat{\beta}_T)$  est nécessaire pour espérer la convergence de la méthode de relaxation mise en œuvre pour son calcul. Les résultats asymptotiques qui suivent renforcent également l'idée d'un bon comportement de la méthode lorsque  $T$  est assez grand.

### 4.1.2 Invariance

La notion d'*invariance* dans le cadre de la séparation de sources a été introduite par Cardoso [9]. Cette propriété importante conduit à des estimateurs ayant des performances uniformes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent plus de la matrice de mélange ou de séparation mais uniquement de la distribution des sources.

**Définition 4.1.1** Soit  $\mathcal{B}(X_T)$  un estimateur de la matrice de séparation  $B$  au vu des observations représentées par  $X_T$ .  $\mathcal{B}(\cdot)$  est dit *invariant* pour la multiplication à gauche s'il vérifie la propriété d'invariance suivante :

$$\forall M \text{ inversible de taille } K, \mathcal{B}(MX_T) = \mathcal{B}(X_T)M^{-1}. \quad (4.1)$$

**Proposition 4.1.2** Soit  $\hat{\theta} = (\hat{B}, \hat{\beta})$  l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre global  $\theta$  et soit  $\hat{B}_\beta$  l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $B$  lorsque la structure des sources est fixée a priori à  $\beta$ , alors  $\hat{B}$  et  $\hat{B}_\beta$  sont invariants.

**Démonstration** Soit  $M$  une matrice inversible de taille  $K$ , alors d'après la relation (3.4) on a :

$$l_T(MX_T; BM^{-1}, \beta) = l_T(X_T; B, \beta) - T \log |\det M|. \quad (4.2)$$

Lorsque l'on fixe a priori la structure autorégressive des sources, représentée par  $\beta$ , et si  $\hat{B}_\beta$  réalise le maximum de  $l_T(X_T; B)$ , alors  $\hat{B}_\beta M^{-1}$  réalise le maximum, par rapport à  $C$ , de  $l_T(MX_T; C)$ . Ce résultat est encore vrai lorsque l'on considère le paramètre global du problème de la séparation. En effet, si le couple  $(\hat{B}, \hat{\beta})$  réalise le maximum de  $l_T(X_T; B, \beta)$ , alors  $(\hat{B}M^{-1}, \hat{\beta})$  réalise le maximum de  $l_T(MX_T; C, \beta)$ .  $\diamond$

L'invariance est particulièrement intéressante dans l'étude des propriétés statistiques des méthodes de séparation. En effet, si  $A_0$  désigne la matrice de mélange inconnue, et si  $\hat{B}$  est un estimateur de  $B_0 = A_0^{-1}$ , on a :

$$\hat{S}(\cdot) = \hat{B}X(\cdot) = \hat{B}A_0S(\cdot) = \hat{C}_{A_0}S(\cdot).$$

La matrice  $\hat{C}_{A_0} = \hat{B}A_0$ , appelée *matrice du système global*, est un élément aléatoire inobservable dont la loi de probabilité dépend de celle de  $X_T$ , à travers  $\hat{B}$ , et de  $A_0$ .

Lorsque  $\hat{B}$  est un estimateur invariant, cette loi ne dépend plus que de celle de  $S_T$ . Ainsi les qualités d'une telle méthode de séparation ne font pas intervenir la matrice de mélange.

### 4.1.3 Indice de performance $I_{EPF}$

Nous introduisons ici un nouvel indice de performance pour mesurer la qualité des méthodes de séparation. Nous suivons la même démarche qu'Akaike [1] dans l'élaboration du critère, basé sur l'erreur de prédiction finale, dans l'estimation de l'ordre d'un modèle autorégressif. Cet indice, noté  $I_{EPF}$ , est défini en fonction de la matrice du système global  $\hat{C}_{A_0} = \hat{B}A_0$  par :

$$I_{EPF} = \sum_{i,j=1}^K \text{EQM}([\hat{C}_{A_0}]_{ij}),$$

où  $\text{EQM}[\hat{C}_{A_0}]_{ij}$  est l'erreur quadratique moyenne relative au coefficient d'indices  $(i, j)$  de la matrice  $\hat{C}_{A_0}$ . Il se justifie de la façon suivante. On suppose que  $\hat{B}$  a été estimé à partir des observations

$$X(t) = A_0 S(t), \quad t = 1, \dots, T.$$

On considère alors une nouvelle observation  $X(t_0) = A_0 S(t_0)$ , indépendante des précédentes, pour laquelle on calcule l'erreur quadratique moyenne commise en estimant  $S(t_0)$  par

$$\hat{S}(t_0) = \hat{B}X(t_0) = \hat{C}_{A_0}S(t_0).$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \|\hat{S}(t_0) - S(t_0)\|^2 \right) &= \mathbb{E} \left( \|(\hat{C}_{A_0} - I)S(t_0)\|^2 \right) \\ &= \text{trace} \left\{ \mathbb{E} \left( (\hat{C}_{A_0} - I)^t (\hat{C}_{A_0} - I) S(t_0) S(t_0)^t \right) \right\} \\ &= \text{trace} \left\{ \mathbb{E} \left( (\hat{C}_{A_0} - I)^t (\hat{C}_{A_0} - I) \right) \text{cov}(S(t_0)) \right\}. \end{aligned}$$

En supposant de plus que les sources ont la même puissance,  $\text{cov}(S) = I_K$ , on obtient :

$$\mathbb{E} \left( \|\hat{S}(t_0) - S(t_0)\|^2 \right) = \sum_{k,j} \text{EQM}([\hat{C}_{A_0}]_{kj}) = I_{EPF},$$

Il est clair que pour un estimateur invariant  $\hat{B}$ , l'indice  $I_{EPF}$  ne dépend pas de la matrice de mélange  $A_0$  mais uniquement du processus des sources  $S(\cdot)$ .

Le terme  $\text{EQM}([\hat{C}_{A_0}]_{kj})$ ,  $k \neq j$ , représente *le taux de contamination* de  $\hat{S}_k$  par  $S_j$ . L'indice  $I_{EPF}$  que nous proposons diffère de l'indice de performance  $I_{perf}$ , proposé par Cardoso et al [6], par l'injection dans  $I_{perf}$  des termes diagonaux  $\text{EQM}([\hat{C}_{A_0}]_{kk})$ ,  $k = 1, \dots, K$ :

$$I_{EPF} = I_{perf} + \sum_{k=1}^K \text{EQM}([\hat{C}_{A_0}]_{kk}).$$

## 4.2 Propriétés asymptotiques

### 4.2.1 Consistance

On utilisera la valeur 0 en indice ou exposant pour désigner les quantités correspondant aux vraies valeurs du paramètre. Ainsi  $\beta^0 = \{\beta_k^0(i), i = 1, \dots, p_k, k = 1, \dots, K\}$  représente le paramètre définissant les modèles  $AR(p_k)$  des sources (la variance de l'innovation est égale à 1) et  $A_0$  est la vraie matrice de mélange. Rappelons que  $\gamma_k^0(m) = \mathbb{E}\{S_k(t)S_k(t-m)\}$  est l'autocovariance d'ordre  $m$  de la source  $S_k(\cdot)$  et que  $a_k(m)$ ,  $m = 0, \dots, p_k$ , avec  $a_k(0) = 1$ , sont les paramètres du modèle  $AR(p_k)$  défini par  $\beta_k(\cdot)$ . On note  $\overline{\Theta}(\overline{b}, \overline{\beta})$  l'ensemble compact formé des paramètres  $\theta = (B, \beta)$  dont les composantes satisfont  $|b_{kj}| \leq \overline{b}$  et  $|\beta_k(i)| \leq \overline{\beta} < 1$ . Le comportement asymptotique de la log-vraisemblance est alors donné par le résultat suivant.

**Lemme 4.2.1** *Soient  $\theta_0 = (B_0, \beta^0)$  la vraie valeur du paramètre et  $\theta = (B, \beta)$  celle de la log-vraisemblance  $l_T(X_T; \theta)$ . Alors on a :*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} l_T(X_T; \theta) = l_\infty(\theta_0; \theta), \text{ p.s.},$$

avec

$$l_\infty(\theta_0; \theta) = \log |\det B| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K e_k^t B A_0 D_k(\beta^0, \beta_k) A_0^t B^t e_k - \frac{K}{2} \log(2\pi),$$

où, pour  $k = 1, \dots, K$ ,  $D_k(\beta^0, \beta_k) = \text{diag}(\sigma_{k1}^2(p_k), \dots, \sigma_{kK}^2(p_k))$  est la matrice diagonale définie par :

$$\sigma_{ki}^2(p_k) = \sum_{m,l=0}^{p_k} a_k(m) a_k(l) \gamma_i^0(m-l), \quad i = 1, \dots, K.$$

De plus la différence  $\Delta l(X_T; \theta) = \frac{1}{T} l_T(X_T; \theta) - l_\infty(\theta_0; \theta)$  converge p.s. vers zéro de façon uniforme par rapport à  $\theta$  sur tout compact de la forme  $\overline{\Theta}(\overline{b}, \overline{\beta})$ .

Pour démontrer ce lemme , nous utilisons le résultat du lemme suivant :

**Lemme 4.2.2** *Pour tout  $k = 1, \dots, K$ , la matrice  $S_T(R_k^T(\beta_k))^{-1}S_T^t/T$  converge p.s. vers  $D_k(\beta^0, \beta_k)$  de façon uniforme par rapport à  $\theta$  sur tout compact de la forme  $\overline{\Theta}(\overline{b}, \overline{\beta})$ .*

**Démonstration** L'élément  $(i, j)$  de  $S_T(R_k^T(\beta_k))^{-1}S_T^t/T$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{(S_T)_i^t \cdot (R_k^T(\beta_k))^{-1} \cdot (S_T)_j}{T} &= \frac{\sum_{t=1}^{p_k} [\prod_{l=t}^{p_k} (1 - \beta_k^2(l))] \varepsilon_i^k(t, t-1) \varepsilon_j^k(t, t-1)}{T} \\ &+ \sum_{t=p_k+1}^T \frac{\varepsilon_i^k(t, p_k) \varepsilon_j^k(t, p_k)}{T}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dans cette expression, l'erreur d'ordre  $n$ ,  $\varepsilon_i^k(t, n) = \sum_{m=0}^n a_k(n, m) S_i(t-m)$ , est calculée avec le filtre  $\Phi_{k,n}(z) = \sum_{m=0}^n a_k(n, m) z^{-m}$  dont les coefficients sont donnés, en fonction de  $\beta_k(\cdot)$ , par l'algorithme de Levinson-Durbin. On a  $a_k(n, 0) = 1$  et  $a_k(p_k, m) = a_k(m)$ ,  $m = 0, \dots, p_k$ . La récurrence  $a_k(n, m) = a_k(n-1, m) - \beta_k(n) a_k(n-1, n-m)$  montre que  $|a_k(n, m)|$  est majoré par  $2^{(n-1)}$ . On obtient alors :

$$\left| \frac{\prod_{l=t}^{p_k} (1 - \beta_k^2(l)) \varepsilon_i^k(t, t-1) \varepsilon_j^k(t, t-1)}{T} \right| \leq \frac{2^{2(t-1)}}{T} \sum_{m=1}^t |S_i(m)| \sum_{m=1}^t |S_j(m)|.$$

Ainsi le premier terme du second membre de (4.3) converge p.s. vers zéro et ce uniformément par rapport à  $\beta_k(\cdot)$ . Pour le second terme, on a :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{t=p_k+1}^T \frac{\varepsilon_i^k(t, p_k) \varepsilon_j^k(t, p_k)}{T} - \delta_{ij} \sigma_{ki}^2(p_k) \right| \\ &= \left| \sum_{m,l=0}^{p_k} a_k(m) a_k(l) \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=p_k+1}^T S_i(t-m) S_j(t-l) - \delta_{ij} \gamma_i^0(m-l) \right\} \right| \\ &\leq 2^{2(p_k-1)} \sum_{m,l=0}^{p_k} \left| \frac{1}{T} \sum_{t=p_k+1}^T S_i(t-m) S_j(t-l) - \delta_{ij} \gamma_i^0(m-l) \right|. \end{aligned}$$

Le processus des sources  $S(\cdot)$  est gaussien à densité spectrale continue. Il est donc strictement stationnaire et ergodique. Par conséquent le dernier terme ci-dessus converge p.s. vers zéro ([26], p. 203). Il en est alors de même pour le premier terme et ce uniformément par rapport à  $\beta_k(\cdot)$ .  $\diamond$

**Démonstration du Lemme 4.2.1** L'expression de  $l_T(X_T; \theta)$  conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} l_T(X_T; \theta) &= \log |\det B| - \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^K e_k^t B A_0 S_T(R_k^T(\beta_k))^{-1} S_T^t A_0^t B^t e_k \\ &+ \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{p_k} i \log(1 - \beta_k^2(i)) - \frac{K}{2} \log(2\pi). \end{aligned}$$

On en déduit une majoration de la quantité  $|\frac{1}{T} l_T(\theta; X_T) - l_\infty(\theta; \theta_0)|$  :

$$\begin{aligned} |\frac{1}{T} l_T(\theta; X_T) - l_\infty(\theta; \theta_0)| &\leq \sum_{k=1}^K \left| \frac{1}{2T} \sum_{i=1}^{p_k} i \log(1 - \beta_k^2(i)) \right| \\ &+ \sum_{k=1}^K |e_k^t B A_0 [\frac{1}{2T} S_T(R_k^T(\beta_k))^{-1} S_T^t - D_k(\beta^0, \beta_k)] A_0^t B^t e_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^K \frac{1}{2T} \sum_{i=1}^{p_k} i |\log(1 - \bar{\beta})| \\ &+ \bar{b} \|A_0\|^2 \sqrt{K} \sum_{k=1}^K \left| \frac{1}{2T} S_T(R_k^T(\beta_k))^{-1} S_T^t - D_k(\beta^0, \beta_k) \right| \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre de l'égalité ci-dessus converge vers zéro, et même uniformément sur tout compact de la forme  $\{\beta_k(\cdot) : |\beta_k(i)| \leq \bar{\beta} < 1, k = 1, \dots, p_k\}$ . D'après le Lemme 4.2.2, le second terme de l'égalité ci-dessus converge *p.s.* vers zéro de façon uniforme par rapport à  $\beta \in \{\beta_k(\cdot) : |\beta_k(i)| \leq \bar{\beta} < 1, k = 1, \dots, p_k\}$ .  $\diamond$

Notons que  $l_\infty(\theta_0; \theta)$  est doublement « invariant » au sens où  $l_\infty(\theta_0; \tilde{\theta}) = l_\infty(\theta_0; \theta)$  lorsque  $\tilde{\theta} \sim \theta$  et  $l_\infty(\tilde{\theta}_0; \theta) = l_\infty(\theta_0; \theta)$  lorsque  $\tilde{\theta}_0 \sim \theta_0$ .

**Lemme 4.2.3** Soit  $\dot{\Delta} l(X_T; \theta)$  la dérivée de  $\Delta l(X_T; \theta)$  par rapport à  $\theta$ . Alors  $\dot{\Delta} l$  converge *p.s.* vers zéro de façon uniforme par rapport à  $\theta$  sur tout compact de la forme  $\bar{\Theta}(\bar{b}, \bar{\beta})$ .

**Démonstration** Pour démontrer ce lemme il suffit de prouver que  $\frac{\partial \Delta l}{\partial \theta_k}$  converge *p.s.* vers zéro de façon uniforme par rapport à  $\theta \in \bar{\Theta}(\bar{b}, \bar{\beta})$ . Afin d'alléger la présentation des calculs nous introduisons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_k(B, \beta_k) &= -\frac{1}{2T} e_k^t B A_0 S_T(R_k^T(\beta_k))^{-1} S_T^t A_0^t B^t e_k, \\ g_k(B, \beta_k) &= -\frac{1}{2} e_k^t B A_0 D_k(\beta^0, \beta_k) A_0^t B^t e_k, \\ h_k(\beta_k) &= \frac{1}{2T} \sum_{i=1}^{p_k} i \log(1 - \beta_k^2(i)). \end{aligned}$$

Alors la fonction  $\Delta l(X_T; \theta)$  se réécrit :

$$\Delta l(X_T; \theta) = \sum_{k=1}^K \{f_k(B, \beta_k) - g_k(B, \beta_k) + h_k(\beta_k)\}.$$

La dérivée de  $\Delta l$  par rapport à  $B$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Delta l}{\partial b_{kj}} \right| &= \left| \frac{\partial f_k}{\partial b_{kj}} - \frac{\partial g_k}{\partial b_{kj}} \right| \\ &= \frac{1}{2} |e_j^t A_0 \{ \frac{1}{T} S_T (R_k^T(\beta_k))^{-1} S_T - D_k(\beta^0, \beta_k) \} A_0^t B^t e_k| \\ &\leq \frac{1}{2} \|A_0\|^2 \|B\| \left\| \frac{1}{T} S_T (R_k^T(\beta_k))^{-1} S_T - D_k(\beta^0, \beta_k) \right\|. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.2.2, le second terme de l'inégalité ci-dessus converge *p.s.* vers zéro de façon uniforme par rapport à  $\theta \in \overline{\Theta}(\bar{b}, \bar{\beta})$ .

D'après le Lemme 3.2.1, les fonctions  $f_k$  et  $g_k$  sont des formes quadratiques en les paramètres  $a_k(j)$ ,  $j = 0, \dots, p_k$  :

$$\begin{aligned} f_k(B, \beta_k) &= \frac{1}{2} \sum_{l,m=0}^{p_k} a_k(m) a_k(l) Q_{ml}^k, \\ g_k(B, \beta_k) &= \frac{1}{2} \sum_{l,m=0}^{p_k} a_k(m) a_k(l) P_{ml}^k, \end{aligned}$$

où, pour  $m, l = 0, \dots, p_k$ , les quantités  $P_{ml}^k$  et  $Q_{ml}^k$  sont données par :

$$\begin{aligned} P_{ml}^k &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K c_{ki}^2 \gamma_i^0(m-l), \\ Q_{ml}^k &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-m-l} Y_k(t+m) Y_k(t+l) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-m-l} \sum_{i,j=1}^K c_{ki} c_{kj} S_i(t+m) S_j(t+l) \\ &= \sum_{i,j=1}^K c_{ki} c_{kj} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-m-l} S_i(t+m) S_j(t+l), \end{aligned} \tag{4.4}$$

et où  $C$  est la matrice  $BA_0$  et  $Y(\cdot) = CS(\cdot)$ . La quantité  $Q_{ml}^k$  converge *p.s.* vers  $P_{ml}^k$  et ce uniformément par rapport à  $B$ . En effet :

$$\begin{aligned} |Q_{ml}^k - P_{ml}^k| &= \left| \sum_{i,j=1}^K c_{ki} c_{kj} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-m-l} S_i(t+m) S_j(t+l) - \delta_{ij} \gamma_i^0(m-l) \right\} \right| \\ &\leq \bar{b} \sqrt{K} \|A_0\| \sum_{i,j=1}^K \left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-m-l} S_i(t+m) S_j(t+l) - \delta_{ij} \gamma_i^0(m-l) \right|. \end{aligned}$$

Or, le processus  $S(\cdot)$  est strictement stationnaire et ergodique, par conséquent le dernier terme ci-dessus converge *p.s.* vers zéro.

D'après la Section 3.2.1, pour tout  $j = 1, \dots, p_k$ , il existe des fonctions  $A_f, A_g, B_f, B_g, C_f$  et  $C_g$  dépendant uniquement des paramètres  $\beta_k(i)$ ,  $i \neq j$ , telles que :

$$\begin{aligned} f_k(B, \beta_k) &= A_f \beta_k(j)^2 - 2B_f \beta_k(j) + C_f, \\ g_k(B, \beta_k) &= A_g \beta_k(j)^2 - 2B_g \beta_k(j) + C_g. \end{aligned}$$

Si l'on note  $f_k^j, \dot{f}_k^j$  et  $\ddot{f}_k^j$  (resp.  $g_k^j, \dot{g}_k^j$  et  $\ddot{g}_k^j$ ) les valeurs de  $f_k(B, \beta_k)$  (resp.  $g_k(B, \beta_k)$ ) et de ses deux premières dérivées partielles par rapport à  $\beta_k(j)$ , alors, par identification,  $A_f, B_f$  et  $C_f$  (resp.  $A_g, B_g$  et  $C_g$ ) sont reliées à  $f_k^j, \dot{f}_k^j$  et  $\ddot{f}_k^j$  (resp.  $g_k^j, \dot{g}_k^j$  et  $\ddot{g}_k^j$ ) par les relations :

$$\begin{aligned} A_f &= \ddot{f}_k^j/2, & A_g &= \ddot{g}_k^j/2 \\ B_f &= (-\dot{f}_k^j + \ddot{f}_k^j \beta_k(j))/2, & B_g &= (-\dot{g}_k^j + \ddot{g}_k^j \beta_k(j))/2 \\ C_f &= f_k^j - \dot{f}_k^j \beta_k(j) + \ddot{f}_k^j \beta_k(j)^2, & C_g &= g_k^j - \dot{g}_k^j \beta_k(j) + \ddot{g}_k^j \beta_k(j)^2 \end{aligned}$$

Les dérivées ci-dessus sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{f}_k^j &= \sum_{m=0}^{p_k} \sum_{l=1}^{p_k} Q_{ml}^k a_k(m) \frac{\partial a_k(l)}{\partial \beta_k(j)}, & \ddot{f}_k^j &= \sum_{m=1}^{p_k} \sum_{l=1}^{p_k} Q_{ml}^k \frac{\partial a_k(m)}{\partial \beta_k(j)} \frac{\partial a_k(l)}{\partial \beta_k(j)} \\ \dot{g}_k^j &= \sum_{m=0}^{p_k} \sum_{l=1}^{p_k} P_{ml}^k a_k(m) \frac{\partial a_k(l)}{\partial \beta_k(j)}, & \ddot{g}_k^j &= \sum_{m=1}^{p_k} \sum_{l=1}^{p_k} P_{ml}^k \frac{\partial a_k(m)}{\partial \beta_k(j)} \frac{\partial a_k(l)}{\partial \beta_k(j)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

La dérivée de la fonction  $\Delta l$  par rapport à  $\beta_k(j)$  est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta l}{\partial \beta_k(j)} &= -\frac{j}{T} \frac{\beta_k(j)}{(1 - \beta_k(j)^2)^2} + \frac{\partial f_k}{\partial \beta_k(j)} - \frac{\partial g_k}{\partial \beta_k(j)} \\ &= -\frac{j}{T} \frac{\beta_k(j)}{(1 - \beta_k(j)^2)^2} + 2\{(A_f - A_g)\beta_k(j) - (B_f - B_g)\} \\ &= -\frac{j}{T} \frac{\beta_k(j)}{(1 - \beta_k(j)^2)^2} + \dot{f}_k^j - \dot{g}_k^j. \end{aligned} \quad (4.6)$$

On en déduit un majorant de la valeur absolue de  $\frac{\partial \Delta l}{\partial \beta_k(j)}$  :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Delta l}{\partial \beta_k(j)} \right| &\leq \frac{j}{T} \frac{\bar{\beta}}{(1 - \bar{\beta}^2)^2} + |\dot{f}_k^j - \dot{g}_k^j| \\ &\leq \frac{j}{T} \frac{1}{(1 - \bar{\beta}^2)^2} + \sum_{m=0}^{p_k} \sum_{l=1}^{p_k} |Q_{ml}^k - P_{ml}^k| |a_k(m)| \left| \frac{\partial a_k(l)}{\partial \beta_k(j)} \right|. \end{aligned}$$

La récurrence 3.9 de la Section 3.2.1 montre que  $\left| \frac{\partial a_k(m)}{\partial \beta_k(j)} \right|$  est majoré par  $2^{(p_k-1)}$ . On obtient alors :

$$\left| \frac{\partial \Delta l}{\partial \beta_k(j)} \right| \leq \frac{j}{T} \frac{1}{(1 - \bar{\beta}^2)^2} + 2^{(2p_k-2)} \sum_{m=0}^{p_k} \sum_{l=1}^{p_k} |Q_{ml}^k - P_{ml}^k|.$$

L'élément de droite de l'inégalité ci-dessus converge *p.s.* vers zéro et ce uniformément par rapport à  $B$ .  $\diamond$

**Lemme 4.2.4** Soit  $\ddot{\Delta}l(X_T; \theta)$  la dérivée seconde de  $\Delta l$  par rapport à  $\theta$ . Alors  $\ddot{\Delta}l$  converge *p.s.* vers zéro de façon uniforme par rapport à  $\theta$  sur tout compact de la forme  $\overline{\Theta}(\overline{b}, \overline{\beta})$ .

**Démonstration** Le terme général de la dérivée seconde de  $\Delta l$  par rapport à  $B$  est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta l}{\partial b_{kj} \partial b_{lm}} &= \delta_{kl} \left\{ \frac{\partial^2 f_k}{\partial b_{kj} \partial b_{km}} - \frac{\partial^2 g_k}{\partial b_{kj} \partial b_{km}} \right\} \\ &= \delta_{kl} e_j^t A_0 \{ S_T (R_k^T(\beta_k))^{-1} S_T^t - D_k(\beta^0, \beta_k) \} A_0^t e_m. \end{aligned}$$

On en déduit un majorant de la valeur absolue de  $\frac{\partial^2 \Delta l}{\partial b_{kj} \partial b_{lm}}$  :

$$\left| \frac{\partial^2 \Delta l}{\partial b_{kj} \partial b_{lm}} \right| \leq \delta_{kl} \|A_0\|^2 \|S_T (R_k^T(\beta_k))^{-1} S_T^t - D_k(\beta^0, \beta_k)\|.$$

D'après le Lemme 4.2.2, l'élément de droite de l'inégalité ci-dessus converge *p.s.* vers zéro et ce uniformément par rapport à  $\beta$  sur le compact  $\{|\beta_k(j)| \leq \overline{\beta}, k = 1, \dots, K, 1 \leq j \leq p_k\}$ .

Le terme général de la dérivée seconde croisée de  $\Delta l$  par rapport à  $B$  et  $\beta$  se déduit des dérivées partielles 4.6 et des relations 4.5 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta l}{\partial b_{kj} \partial \beta_l(m)} &= \delta_{kl} \left\{ \frac{\partial (f_k^m - g_k^m)}{\partial b_{kj}} \right\} \\ &= \delta_{kl} \left\{ \sum_{r=0, s=1}^{p_k} \frac{\partial (Q_{rs}^k - P_{rs}^k)}{\partial b_{kj}} a_k(r) \frac{\partial a_k(s)}{\partial \beta_k(m)} \right\} \\ &= \delta_{kl} \left\{ \sum_{r=0, s=1}^{p_k} a_k(r) \frac{\partial a_k(s)}{\partial \beta_k(m)} \sum_{n, u, v=1}^K b_{kn} [a_{nv}^0 a_{ju}^0 + a_{jv}^0 a_{nu}^0] \sum_{t=1}^{T-r-s} [S_u^v(t, r, s) - \delta_{uv} \gamma_u^0(s-r)] / T \right\}. \end{aligned}$$

On en déduit un majorant de la valeur absolue de  $\frac{\partial^2 \Delta l}{\partial b_{kj} \partial \beta_l(m)}$  :

$$\left| \frac{\partial^2 \Delta l}{\partial b_{kj} \partial \beta_l(m)} \right| \leq \delta_{kl} \overline{b} 2^{(2p_k-2)} \left\{ \sum_{r=0, s=1}^{p_k} \left( \sum_{n, u, v=1}^K |a_{nv}^0 a_{ju}^0 + a_{jv}^0 a_{nu}^0| \right) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-r-s} |S_u^v(t, r, s) - \delta_{uv} \gamma_u^0(s-r)| \right\}.$$

Or, l'élément de droite de l'inégalité ci-dessus converge *p.s.* vers zéro de façon uniforme par rapport à  $\theta \in \overline{\Theta}(\overline{b}, \overline{\beta})$ .

La dérivée seconde de  $\Delta l$  par rapport à  $\beta$  s'exprime en fonction des dérivées secondes des fonctions  $f_k$ ,  $g_k$  et  $h_k$  par rapport à  $\beta$  :

$$\frac{\partial^2 \Delta l}{\partial \beta_k^2} = \frac{\partial^2 (f_k - g_k)}{\partial \beta_k^2} + \frac{\partial^2 h_k}{\partial \beta_k^2}.$$

Le terme général de la dérivée seconde de  $h_k$ , par rapport à  $\beta_k$ , est donné par :

$$\frac{\partial^2 h_k}{\partial \beta_k(i) \partial \beta_k(j)} = -\delta_{ij} \frac{j}{T} \frac{1 + 3\beta_k(j)^2}{(1 - \beta_k(j)^2)^3},$$

dont la valeur absolue est majorée par :

$$\left| \frac{\partial^2 h_k}{\partial \beta_k(i) \partial \beta_k(j)} \right| \leq \delta_{ij} \frac{j}{T} \frac{4}{(1 - \beta^2)^3}.$$

Pour déterminer la dérivée seconde de  $f_k - g_k$  par rapport à  $\beta$ , nous calculons d'abord la dérivée seconde de cette fonction par rapport à  $a$  et ensuite nous utilisons les formules de changement de variables. Soit  $\frac{\partial a_k}{\partial \beta_k}$  et  $\frac{\partial^2 a_k(l)}{\partial \beta_k^2}$  les matrices de terme général  $\frac{\partial a_k(i)}{\partial \beta_k(j)}$  ou  $\frac{\partial^2 a_k(l)}{\partial \beta_k(i) \partial \beta_k(j)}$ , alors :

$$\frac{\partial^2 (f_k - g_k)}{\partial \beta_k^2} = \left( \frac{\partial a_k}{\partial \beta_k} \right)^t \frac{\partial^2 (f_k - g_k)}{\partial a_k^2} \frac{\partial a_k}{\partial \beta_k} + \sum_{l=1}^{p_k} \frac{\partial (f_k - g_k)}{\partial a_k(l)} \frac{\partial^2 a_k(l)}{\partial \beta_k^2}.$$

La dérivée seconde de  $f_k - g_k$  par rapport à  $a_k$  est donnée sous forme matricielle :

$$\frac{\partial^2 (f_k - g_k)}{\partial a_k^2} = Q^k - P^k,$$

où  $P^k$  et  $Q^k$  sont les matrices dont le terme général  $P_{ij}^k$  ou  $Q_{ij}^k$  est donné, pour  $1 \leq i \leq j \leq p_k$ , par les expressions (4.4). On en déduit un majorant de la norme de  $\frac{\partial^2 (f_k - g_k)}{\partial \beta_k^2}$  :

$$\left\| \frac{\partial^2 (f_k - g_k)}{\partial \beta_k^2} \right\| \leq \left\| \frac{\partial a_k}{\partial \beta_k} \right\|^2 \|Q^k - P^k\| + \sum_{l=1}^{p_k} \left| \frac{\partial (f_k - g_k)}{\partial a_k(l)} \right| \left\| \frac{\partial^2 a_k(l)}{\partial \beta_k^2} \right\|.$$

Or, pour tout  $1 \leq i, j \leq p_k$ , l'élément d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $\frac{\partial a_k}{\partial \beta_k}$  est majoré par  $2^{(p_k-1)}$ . D'autre part, les dérivées partielles secondes des coefficients autorégressifs  $a_1, \dots, a_p$ , (cf. Section 3.2.1) par rapport à  $\beta_k, \beta_l, k, l = 1, \dots, p$ , sont obtenues par

la récurrence :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 a_j[k]}{\partial \beta_l \partial \beta_k} &= -\frac{\partial a_{k-j}[k-1]}{\partial \beta_l}, \quad j, l = 1, \dots, k-1, \\
 \frac{\partial^2 a_j[k]}{\partial \beta_l \partial \beta_k} &= 0, \quad l \geq k, \\
 \frac{\partial^2 a_k[k]}{\partial \beta_l \partial \beta_k} &= 0, \quad l = 1, \dots, p, \\
 \text{pour } i = k+1, \dots, p : & \\
 \frac{\partial^2 a_j[i]}{\partial \beta_l \partial \beta_k} &= \frac{\partial^2 a_j[i-1]}{\partial \beta_l \partial \beta_k} - \beta_i \frac{\partial^2 a_{i-j}[i-1]}{\partial \beta_l \partial \beta_k}, \quad j, l = 1, \dots, i-1, \\
 \frac{\partial^2 a_j[i]}{\partial \beta_i \partial \beta_k} &= -\frac{\partial a_{i-j}[i-1]}{\partial \beta_k}, \quad j = 1, \dots, i-1, \\
 \frac{\partial^2 a_j[i]}{\partial \beta_l \partial \beta_k} &= 0, \quad j = 1, \dots, i-1, \quad l > i.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

On en déduit que  $|\frac{\partial^2 a_k(l)}{\partial \beta_k(i) \partial \beta_k(j)}|$  est majoré par  $2^{l-1}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial^2 (f_k - g_k)}{\partial \beta_k^2} \right\| &\leq 2^{(p_k-1)} \|\mathbb{1}_{p_k}\| \sum_{l=1}^{p_k} \left| \frac{\partial (f_k - g_k)}{\partial a_k(l)} \right| + 2^{(2p_k-2)} \|\mathbb{1}_{p_k}\| \|Q^k - P^k\| \\
 &\leq 2^{(p_k-1)} \sqrt{p_k} \sum_{l=1}^{p_k} \left| \frac{\partial (f_k - g_k)}{\partial a_k(l)} \right| + 2^{(2p_k-2)} \sqrt{p_k} \|Q^k - P^k\|,
 \end{aligned}$$

où,  $\mathbb{1}_{p_k}$  est la matrice carrée d'ordre  $p_k$  dont tous les éléments sont égaux à 1. Or la dérivée  $\frac{\partial (f_k - g_k)}{\partial a_k(l)}$  converge *p.s.* vers zéro et ce uniformément par rapport à  $\theta \in \Theta$ . En effet :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial (f_k - g_k)}{\partial a_k(l)} \right| &= \left| \sum_{m=0}^{p_k} a_k(m) \{Q_{ml}^k - P_{ml}^K\} \right| \\
 &\leq \sum_{m=0}^{p_k} |a_k(m)| |Q_{ml}^k - P_{ml}^K| \\
 &\leq 2^{p_k-1} \sum_{m=0}^{p_k} |Q_{ml}^k - P_{ml}^K|.
 \end{aligned}$$

La convergence *p.s.* de  $\frac{\partial^2 \Delta l}{\partial \beta_k^2}$  vers zéro est donc acquise.  $\diamond$

**Lemme 4.2.5** *Le maximum de  $l_\infty(\theta_0; \theta)$  est réalisé par  $\theta \sim \theta_0$  et cette classe d'équivalence est unique lorsque les paramètres  $\beta_k^0$ ,  $k = 1, \dots, K$ , sont distincts.*

**Démonstration** On pose  $B = CB_0$ . Maximiser  $l_\infty(\theta_0; \theta)$ , par rapport à  $B$ , équivaut à maximiser  $|\det C|$  sous les contraintes  $\|C_k\|_{D_k} = 1$ ,  $k = 1, \dots, K$ , avec  $D_k =$

$D_k(\beta^0, \beta_k)$ . On a les inégalités suivantes :

$$|\det C| \leq \prod_{k=1}^K \|C_k.\|,$$

$$\|C_k.\|^2 = \sum_{j=1}^K c_{kj}^2 \leq \sum_{j=1}^K D_k(j, j) c_{kj}^2 = \|C_k.\|_{D_k}^2.$$

En effet  $d_k(j, j) = \sigma_{kj}^2(p_k)$  est supérieur ou égal à 1, avec égalité si et seulement si  $\beta_k = \beta_j^0$ . Le maximum de  $|\det C|$ , compte tenu des contraintes, est égal à 1. Il est réalisé par  $\theta = \theta_0$ , c'est-à-dire  $C = I$  et  $\beta = \beta_0$ , ou par toute matrice  $C = \mathcal{E}\Pi$  formée par le produit d'une matrice signe  $\mathcal{E}$  et d'une matrice de permutation  $\Pi$ , lorsque cette permutation est également appliquée au paramètre  $\beta$  de façon que chaque « source » soit affectée à la bonne structure, c'est-à-dire  $\theta \sim \theta_0$ . En ce sens, la solution est unique lorsque les structures des sources sont distinctes. Cette dernière condition est nécessaire car, lorsque  $\beta_k^0 = \beta_j^0$  pour  $k \neq j$ , on sait que le maximum est atteint par un ensemble de matrices  $C$  ayant la puissance du continu (cf. Proposition 3.1.3).  $\diamond$

La matrice  $A_0$  étant fixée non singulière, ce résultat montre que  $l_\infty(\theta_0; \theta)$  est strictement concave, par rapport à  $\theta$ , au voisinage de  $\tilde{\theta}_0 \sim \theta_0$  lorsque les structures des sources, représentées par  $\beta^0$ , sont distinctes. Il est clair qu'un tel  $\tilde{\theta}_0$  est situé à l'intérieur d'un compact de la forme  $\overline{\Theta}(\bar{b}, \bar{\beta})$ . Il s'en suit, par continuité et compte tenu des résultats des Lemmes 4.2.1, 4.2.3 et 4.2.4, que pour  $T$  suffisamment grand, le maximum de  $l_T(X_T; \theta)$  est également réalisé par une seule classe d'équivalence. Une telle classe est composée de  $2^K K!$  éléments. Par la suite, lorsque cela ne présente pas d'ambiguïté, nous supposons avoir sélectionné un représentant unique dans chaque classe d'équivalence. Par exemple, le premier terme non nul de chaque ligne de  $B$  est positif, pour fixer le facteur signe  $\mathcal{E}$ , et la permutation  $\Pi$  est choisie de telle sorte que les lignes de  $B$  soient rangées par ordre décroissant de leur premier terme ou des suivants en cas d'égalités. Nous pouvons donc énoncer le résultat de consistance presque sûre de l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_T = (\hat{B}_T, \hat{\beta}_T)$  défini par la Proposition 4.1.1.

**Théorème 4.2.1** *Soit  $l_T(X_T; \theta)$  la fonction de log-vraisemblance associée à l'observation d'un mélange instantané,  $X(t) = A_0 S(t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ , de sources autorégressives stationnaires gaussiennes, centrées et indépendantes. Soit  $\theta_0 = (B_0, \beta^0)$  la vraie valeur du paramètre pour laquelle on suppose que  $B_0$  est non singulière et que les éléments  $\beta_k^0$ ,  $k = 1, \dots, K$ , composant  $\beta^0$  sont distincts. Lorsque  $T$  tend vers l'infini, toute suite  $\hat{\theta}_T = (\hat{B}_T, \hat{\beta}_T)$  satisfaisant  $\max_\theta l_T(X_T; \theta) = l_T(X_T; \hat{\theta}_T)$  converge presque sûrement vers  $\theta_0 = (B_0, \beta^0)$ .*

### 4.2.2 Sur l'existence de maxima locaux

Nous allons montrer que la fonction  $l_\infty(\theta_0; \theta)$  peut présenter des maxima locaux lorsque l'on fixe la structure des sources. Ceux-ci sont obtenus en permutant certaines lignes de  $B_0$  dans  $\theta_0 = (B_0, \beta^0)$  sans effectuer la permutation correspondante sur le paramètre  $\beta^0$ .

Considérons donc la restriction suivante de  $l_\infty(\theta_0; \theta)$ ,

$$\tilde{l}_\infty(C) = l_\infty(\theta_0; CB_0, \beta^0) = \log |\det C| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K e_k^t C D_k^0 C^t e_k^t - \frac{K}{2} \log(2\pi),$$

dans laquelle nous avons effectué le changement de variable  $B = CB_0$  et où  $D_k^0 = D_k(\beta^0, \beta_k^0)$ . Cette matrice diagonale satisfait  $d_k^0(k, k) = 1$  et  $d_k^0(j, j) > 1$  pour  $k \neq j$ . L'annulation du gradient de  $\tilde{l}_\infty(C)$  par rapport à  $C$  (cf. Proposition 3.1.1) conduit au système suivant :

$$e_k = C D_k^0 C^t e_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4.8)$$

La solution  $C = I$  correspond au maximum. D'autres sont de la forme  $D_\pi^{-1/2} \Pi$  où  $\Pi$  est la matrice de permutation associée à une permutation  $\pi$  de l'ensemble  $\{1, \dots, K\}$  défini par  $\Pi_k = e_{\pi(k)}$ ,  $k = 1, \dots, K$  et où

$$D_\pi = \text{diag}(d_1^0(\pi(1), \pi(1)), \dots, d_K^0(\pi(K), \pi(K))).$$

La dérivée seconde de  $\tilde{l}_\infty$  par rapport à  $C$  évaluée en  $I$  est donnée par :

$$H(D^0) = -(D^0 + P),$$

où  $P$  est la matrice de permutation qui échange la ligne  $kj$  avec la ligne  $jk$  et conserve la ligne  $kk$  et où  $D^0 = \text{bloc-diag}(D_1^0, \dots, D_K^0)$  est la matrice diagonale définie par les matrices  $D_k^0$ ,  $k = 1, \dots, K$ . La forme de la matrice  $P$  peut être obtenue par un calcul direct des dérivées partielles secondes ou plus simplement en utilisant la différentielle seconde établie à la Section 3.1.2 qui conduit à :

$$\frac{\partial^2 \log |\det B|}{\partial b_{ij} \partial b_{kl}} = -a_{jk} a_{li}.$$

La matrice  $H(D^0)$  est définie négative et traduit la stricte concavité de  $\tilde{l}_\infty(C)$  au voisinage de  $I$ . En effet, en notant  $x_{kj}$ ,  $k, j = 1, \dots, K$ , les composantes des vecteurs de  $\mathbb{R}^{K^2}$ , on a :

$$x^t (D^0 + P) x = 2 \sum_k x_{kk}^2 + \sum_{k \neq j} \{d_k^0(j, j) x_{kj}^2 + x_{kj} x_{jk}\}.$$

Cette forme quadratique est définie positive si et seulement si :

$$d_k^0(j, j)d_j^0(k, k) > 1, \quad k \neq j. \quad (4.9)$$

On reconnaît ici la condition (3.7) de la Section 3.1.2.

On se place maintenant en une solution de la forme  $D_\pi^{-1/2}\Pi$  et on effectue le changement de variable  $C = \tilde{C}D_\pi^{-1/2}\Pi$ . On retrouve alors la situation précédente avec la matrice diagonale  $\tilde{D}_k^0 = D_\pi^{-1/2}\Pi D_k^0\Pi^t D_\pi^{-1/2}$  vérifiant :

$$\tilde{d}_k^0(j, j) = \frac{\tilde{d}_k^0(\pi(j), \pi(j))}{\tilde{d}_j^0(\pi(j), \pi(j))}, \quad \tilde{d}_k^0(k, k) = 1.$$

Si par exemple  $\pi$  se réduit à la simple permutation échangeant  $k$  et  $j$ , la matrice  $\tilde{D}_k^0$  ne satisfait pas (4.9) et la solution correspond à un point-selle. C'est la situation que l'on rencontre dans le cas bidimensionnel. On donne maintenant un exemple de matrice  $D^0 = \text{bloc-diag}(D_1^0, D_2^0, D_3^0)$  qui, après permutation, conserve la propriété (4.9). Soient  $D_1^0 = \text{diag}(1, 2, 5)$ ,  $D_2^0 = \text{diag}(5, 1, 2)$  et  $D_3^0 = \text{diag}(2, 5, 1)$ , et soit  $\pi$  la permutation qui transforme le triplet  $(1, 2, 3)$  en  $(2, 3, 1)$ . Il est facile de vérifier que la matrice  $\tilde{D}^0$  satisfait (4.9) et ainsi la matrice  $\Pi/2$  correspond à un maximum local de  $\tilde{l}_\infty(C)$ . Cette exemple montre que la maximisation de la vraisemblance, lorsque la structure des sources est fixée, où encore le problème géométrique  $\mathcal{P}$  correspondant, peuvent présenter des maxima locaux. Un tel maximum local ne constitue pas un maximum local de  $l_\infty(\theta_0; \theta)$  car la maximisation relative à  $\beta$  n'est réalisée que par une bonne affectation des sources.

Ainsi l'estimation de la structure des sources permet d'éliminer, dans la procédure globale, l'existence de certains maxima locaux. Cependant nous ne sommes pas en mesure de montrer que les racines de (4.8) considérées ici sont les seules. La présence ou non de maxima locaux pour  $l_\infty(\theta_0; \theta)$  n'est donc pas résolue et par suite la question reste posée en ce qui concerne la vraisemblance.

### 4.2.3 Robustesse

La log-vraisemblance  $l_T(X_T; B, \beta)$  est établie sous l'hypothèse de sources autorégressives gaussiennes. Le critère qui en résulte ne fait intervenir que la structure au second ordre des sources à travers les matrices de covariance  $R_k^T(\beta_k)$ . La structure au second ordre d'un processus stationnaire  $S_k(\cdot)$  est caractérisée par sa fonction d'autocovariance  $\gamma_k(\cdot)$  ou de façon équivalente par sa fonction d'autocorrélation partielle  $\beta_k(\cdot)$  où  $\beta_k(0) = \gamma_k(0)$ . La donnée de  $\gamma_k(i)$ ,  $i = 0, \dots, p_k$  équivaut à celle de  $\beta_k(i)$ ,  $i = 0, \dots, p_k$  et la variance de l'innovation satisfait :

$$\sigma_{\varepsilon_k}^2 = \beta_k(0) \prod_{i=1}^{\infty} [1 - \beta_k^2(i)] \leq \beta_k(0) \prod_{i=1}^{p_k} [1 - \beta_k^2(i)].$$

Ainsi, lorsque l'on fixe les premières autocovariances, le modèle autorégressif obtenu en posant  $\beta_k(i) = 0$  pour  $i > p_k$  est celui pour lequel la variance de l'innovation est maximum. C'est le principe du maximum d'entropie introduit par Burg [7] pour justifier l'utilisation du modèle autorégressif en estimation spectrale. De plus ce principe, qui concerne en fait la loi de probabilité du processus  $S_k(\cdot)$ , conduit également à la loi gaussienne. Si  $\beta_k(\cdot)$  est dans  $\ell^1$ , la densité spectrale  $f_{p_k}(\lambda)$  du modèle autorégressif ainsi défini converge uniformément, lorsque  $p_k$  tend vers l'infini, vers la densité spectrale  $f_k(\lambda)$  du processus  $S_k(\cdot)$  avec la vitesse suivante [24] :

$$\prod_{i=p_k+1}^{\infty} \frac{1 - |\beta_k^2(i)|}{1 + |\beta_k^2(i)|} \leq \frac{f_k(\lambda)}{f_{p_k}(\lambda)} \leq \prod_{i=p_k+1}^{\infty} \frac{1 + |\beta_k^2(i)|}{1 - |\beta_k^2(i)|}.$$

C'est en particulier le cas des modèles *ARMA* inversibles (le polynôme moyenne mobile ne s'annule pas sur le cercle unité) pour lesquels  $\beta_k(i)$  tend vers zéro avec une vitesse exponentielle. En présence de zéros sur le cercle, la convergence de  $f_{p_k}(\lambda)$  vers  $f_k(\lambda)$  reste uniforme sur tout intervalle  $[a, b]$  où  $f_k(\lambda)$  ne s'annule pas. En fait l'efficacité d'une séparation basée sur  $l_T(X_T; B, \beta)$  dépend essentiellement de la non proximité entre elles des matrices  $R_k^T(\beta_k)$ .

Finalement l'estimation de  $B$  par maximisation de  $l_T(X_T; B, \beta)$  peut être envisagée dans un cadre très général. Il suffit que les modèles *AR*( $p_k$ ) sous-jacents aux sources soient distincts. La consistance de l'estimateur donnée dans le Théorème 4.2.1 nécessite cependant que les sources soient strictement stationnaires et ergodiques. De plus le choix des ordres  $p_k$  reste un point délicat qui sera discuté dans le cinquième chapitre.

## 4.3 Borne de Cramér-Rao

Nous déterminons, dans cette section, la matrice d'information de Fisher relative au paramètre global du problème de la séparation de sources ainsi que la borne inférieure de l'indice de performance  $I_{EPF}$ .

### 4.3.1 Matrice d'information de Fisher

Pour un estimateur sans biais, l'inverse de la matrice d'information de Fisher constitue une borne inférieure de la matrice de covariance de cet estimateur, appelée borne de Cramér-Rao. La matrice d'information de Fisher dépend uniquement de la valeur exacte du paramètre  $\theta$  ainsi que de la taille de la séquence. En fait, dans le problème de la séparation de sources, la structure des sources modélisée par  $\beta$  est un paramètre fantôme, car seule la matrice de mélange  $A$  est nécessaire pour l'inversion. Pour des raisons de simplicité, nous avons préféré donner l'expression de la matrice d'information de Fisher en fonction des coefficients du polynôme autorégressif associé à chaque source  $S_k(\cdot)$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Ainsi on remplace  $\beta$  par  $a = \{a_k(j), j =$

$1, \dots, p_k, k = 1, \dots, K\}$ . Rappelons qu'il existe une bijection entre  $a_k(\cdot)$  et  $\beta_k(\cdot)$ , et que l'on peut passer d'une fonction à l'autre grâce à l'algorithme de Levinson-Durbin dont la trame est donnée dans la Section 3.2.1. Dans cette section uniquement nous prenons  $\theta = (B, a)$  comme paramètre global du problème de la séparation. En tenant compte du nouveau paramètre  $\theta$ , la log-vraisemblance donnée par la Proposition 2.3.1 prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} l_T(X_T; B, a) &= T \log |\det B| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K e_k^t B X_T (R_k^T(a_k))^{-1} X_T^t B^t e_k \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \log(\det(R_k^T(a_k))) - \frac{KT}{2} \log(2\pi). \end{aligned} \quad (4.10)$$

La matrice d'information de Fisher relative au paramètre  $\theta$  est définie par :

$$I_T(\theta_0) = \mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial l_T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial l_T}{\partial \theta} \end{pmatrix}_{\theta_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial l_T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial l_T}{\partial \theta} \end{pmatrix}_{\theta_0}^t \right] = -\mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l_T}{\partial \theta^2} \end{pmatrix}_{\theta_0} \right],$$

où  $\frac{\partial l_T}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial^2 l_T}{\partial \theta^2}$  désignent respectivement le gradient et la hessienne de  $l_T(X_T; B, a)$  par rapport à  $\theta$ . On se propose de calculer l'expression de cette matrice. On montre alors que la matrice  $\bar{I}_T(\theta_0) = I_T(\theta_0)/T$  converge *p.s.* vers une matrice bloc-diagonale :  $\bar{I}_\infty(\theta_0) = \text{bloc-diag}(\bar{I}_\infty(B_0), \bar{I}_\infty(a^0))$ , c'est-à-dire que les estimateurs de maximum de vraisemblance de  $B$  et de  $a$  (et par conséquent de  $\beta$ ) sont asymptotiquement non corrélés.

**Proposition 4.3.1** *Les éléments de la matrice d'information de Fisher  $I_T(\theta_0)$  sont donnés par les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned} 1) \quad & -\mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l_T}{\partial b_{ij} \partial b_{kl}} \end{pmatrix}_{\theta_0} \right] = T a_{jk}^0 a_{li}^0 + \delta_{ki} \sum_{m,n=0}^{p_i} (T - m - n) a_i^0(m) a_i^0(n) \sum_{u=1}^K a_{ju}^0 a_{lu}^0 \gamma_u^0(m - n) \\ 2) \quad & -\mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l_T}{\partial b_{ij} \partial a_k(l)} \end{pmatrix}_{\theta_0} \right] = -2 \delta_{ik} a_{ji}^0 \sum_{n=0}^{p_i} n a_i^0(n) \gamma_i^0(n - i) \\ 3) \quad & -\mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l_T}{\partial a_i(k) \partial a_j(l)} \end{pmatrix}_{\theta_0} \right] = \delta_{ij} \left[ (T - k) \gamma_i^0(k - l) + \sum_{l=1}^{p_i} \left( \frac{\partial \gamma_i(k - l)}{\partial a_i(l)} \right)_{a_i^0} l a_i^0(l) \right] \end{aligned}$$

**Démonstration** Pour la démonstration de cette proposition, nous utilisons le développement de la forme quadratique

$$x^t(R)^{-1}x = \sum_{i,j=0}^p a(i)a(j)Q_{ij}$$

que nous avons déjà utilisé dans la Section 3.2.1, ainsi que l'expression de la dérivée seconde du déterminant de la matrice de covariance  $R^T$  du vecteur aléatoire

$(X(1), \dots, X(T))^t$ , où  $X(\cdot)$  est un processus  $AR(p)$  :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \log(\det R^T)}{\partial a(i) \partial a(j)} \right) = j\gamma(i-j) + \sum_{n=1}^p \frac{\partial \gamma(i-n)}{\partial a(j)} na(n),$$

dont la preuve se trouve dans [41].

La log-vraisemblance (4.10) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} l_T(X_T; B, a) &= T \log |\det B| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i,j=0}^{p_k} a_k(i) a_k(j) Q_{ij}^k \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \log(\det(R_k^T(a_k))) - \frac{KT}{2} \log(2\pi), \end{aligned} \quad (4.11)$$

où  $Q_{ij}^k = \sum_{t=1}^{T-i-j} \sum_{u,v=1}^K b_{ku} b_{kv} X_u(t+i) X_v(t+j)$ .

La dérivée première de  $l_T(X_T; B, \beta)$  par rapport à  $B$  est :

$$\frac{\partial l_T}{\partial b_{kl}} = -T a_{lk} - \frac{1}{2} \sum_{m,n=0}^{p_k} a_k(m) a_k(n) \left( \sum_{t=1}^{T-n-m} \sum_{v=1}^K b_{kv} \{X_l^v(t, m, n) + X_v^l(t, m, n)\} \right),$$

et sa dérivée seconde est donnée par :

$$\frac{\partial^2 l_T}{\partial b_{ij} \partial b_{kl}} = -T a_{jk} a_{li} - \delta_{ki} \frac{1}{2} \sum_{m,n=0}^{p_k} a_k(m) a_k(n) \left( \sum_{t=1}^{T-n-m} \{X_j^l(t, m, n) + X_l^j(t, m, n)\} \right),$$

où  $X_j^l(t, m, n) = X_j(t+m) X_l(t+n)$ .

1) Les éléments de l'espérance de la dérivée seconde de  $l_T$  par rapport à  $B$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[ \frac{\partial^2 l_T}{\partial b_{ij} \partial b_{kl}} \right] &= -T a_{jk}^0 a_{li}^0 - \delta_{ki} \frac{1}{2} \sum_{m,n=0}^{p_k} a_k^0(m) a_k^0(n) \mathbb{E} \left( \sum_{t=1}^{T-n-m} X_j^l(t, m, n) + X_l^j(t, m, n) \right) \\ &= -T a_{jk}^0 a_{li}^0 - \frac{\delta_{ki}}{2} \sum_{m,n=0}^{p_k} a_k^0(m) a_k^0(n) \mathbb{E} \left( \sum_{t=1}^{T-n-m} \sum_{u,v=1}^K a_{ju}^0 a_{lv}^0 (S_u^v + S_v^u)(t, n, m) \right) \\ &= -T a_{jk}^0 a_{li}^0 - \delta_{ki} \sum_{m,n=0}^{p_k} a_k^0(m) a_k^0(n) \mathbb{E} \left( \sum_{t=1}^{T-n-m} \sum_{u=1}^K a_{ju}^0 a_{lu}^0 S_u(t+m) S_u(t+n) \right) \\ &= -T a_{jk}^0 a_{li}^0 - \delta_{ki} \sum_{m,n=0}^{p_k} a_k^0(m) a_k^0(n) \sum_{t=1}^{T-n-m} \sum_{u=1}^K a_{ju}^0 a_{lu}^0 \gamma_u^0(m-n) \\ &= -T a_{jk}^0 a_{li}^0 - \delta_{ki} \sum_{m,n=0}^{p_k} (T-m-n) a_k^0(m) a_k^0(n) \sum_{u=1}^K a_{ju}^0 a_{lu}^0 \gamma_u^0(m-n). \end{aligned}$$

2) La dérivée seconde croisée de  $l_T$  par rapport à  $(B, a)$  prend la forme :

$$\frac{\partial^2 l_T}{\partial b_{kl} \partial a_k(i)} = - \sum_{n=0}^{p_k} a_k(n) \left( \sum_{t=1}^{T-n-i} \sum_{v=1}^K b_{kv} \{X_l^v(t, i, n) + X_v^l(t, i, n)\} \right).$$

On en déduit l'espérance de cette dernière :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[ \frac{\partial^2 l_T}{\partial b_{kl} \partial a_k(i)} \right] &= - \sum_{n=0}^{p_k} a_k^0(n) \mathbb{E} \left( \sum_{t=1}^{T-n-i} \sum_{v=1}^K b_{kv}^0 \{X_l^v(t, i, n) + X_v^l(t, i, n)\} \right) \\ &= - \sum_{n=0}^{p_k} a_k^0(n) \mathbb{E} \left( \sum_{t=1}^{T-n-i} \{S_k(t+n)X_l(t+i) + S_k(t+i)X_l(t+n)\} \right) \\ &= - \sum_{n=0}^{p_k} a_k^0(n) \mathbb{E} \left( \sum_{t=1}^{T-n-i} \sum_{u=1}^K a_{lk}^0 \{S_u^k(t, i, n) + S_k^u(t, i, n)\} \right) \\ &= -2 \sum_{n=0}^{p_k} a_k^0(n) \mathbb{E} \left( \sum_{t=1}^{T-n-i} a_{lk}^0 S_k(t+n)S_k(t+i) \right) \\ &= -2 \sum_{n=0}^{p_k} a_k^0(n) \sum_{t=1}^{T-n-i} a_{lk}^0 \gamma_k^0(n-i) \\ &= -2a_{lk}^0 \sum_{n=0}^{p_k} a_k^0(n) (T-n-i) \gamma_k^0(n-i). \end{aligned}$$

En utilisant la relation de Yule-Walker

$$\sum_{j=0}^{p_k} \gamma_k^0(i-j) a_k^0(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}, \quad (4.12)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[ \frac{\partial^2 l_T}{\partial b_{kl} \partial a_k(i)} \right] &= -2a_{lk}^0 (T-i) \sum_{n=0}^{p_k} a_k^0(n) \gamma_k^0(n-i) + 2a_{lk}^0 \sum_{n=0}^{p_k} n a_k^0(n) \gamma_k^0(n-i) \\ &= 2a_{lk}^0 \sum_{n=0}^{p_k} n a_k^0(n) \gamma_k^0(n-i). \end{aligned}$$

3) Nous reprenons ici la démonstration du calcul de la borne de Cramér-Rao de l'estimateur des paramètres d'un modèle autorégressif proposée par Pham [41]. En effet, nous ne pouvons pas appliquer directement le résultat de cette démonstration au problème de la séparation de sources car les deux fonctions de vraisemblance ne sont pas identiques. Par contre, on retrouve la même expression de la matrice d'information de Fisher lorsque cette dernière est évaluée en  $(B, a) = (B_0, a^0)$ , c'est-à-dire que cette matrice ne dépend pas du paramètre  $B_0$ . Ce résultat n'est plus

valable lorsque  $B$  est différent de  $B_0$ .

On constate que  $l_T(X_T; B, a)$  dépend de  $a_k(\cdot)$  uniquement par le terme :

$$l_T^k(X_T; B, a_k) = -\frac{1}{2}e_k^t B X_T (R_k^T(a_k))^{-1} X_T^t B^t e_k - \frac{1}{2} \log(\det(R_k^T(a_k))).$$

En fait,  $l_T^k(X_T; B, a_k)$  se réécrit :

$$\begin{aligned} l_T^k(X_T; B, a_k) &= -\frac{1}{2} \text{trace} \left( (R_k^T(a_k))^{-1} (S_T)_k^t (S_T)_k \right) - \frac{1}{2} \log(\det(R_k^T(a_k))) \\ &= -\sum_{i,j=0}^{p_k} a_k(i) Q_{ij}^k a_k(j) - \frac{1}{2} \log(\det(R_k^T(a_k))), \end{aligned} \quad (4.13)$$

où  $Q_{ij}^k = \sum_{t=1}^{T-i-j} S_k(t+i) S_k(t+j)$ ,  $i+j < T$  et  $S_k(\cdot) = e_k^t B X(\cdot)$ .

Notons que  $Q_{ij}^k$  dépend de  $B$  et non de  $a_k$ . De plus, son espérance, évaluée en  $\theta_0 = (B_0, a^0)$ , ne dépend pas de  $B_0$  :

$$\mathbb{E}_{\theta_0} (Q_{ij}^k) = (T-i-j) \gamma_k^0(i-j).$$

On en déduit l'espérance de la dérivée seconde de  $l_T$  par rapport à  $a$  :

$$\begin{aligned} -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial^2 l_T}{\partial a_k(i) \partial a_k(j)} \right)_{\theta_0} \right] &= (T-i-j) \gamma_k^0(i-j) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \log(\det R_k^T)}{\partial a_k(i) \partial a_k(j)} \right)_{a_0} \\ &= (T-i) \gamma_k^0(i-j) + \sum_{n=1}^{p_k} n a_k^0(n) \left( \frac{\partial \gamma_k(i-n)}{\partial a_k(j)} \right)_{a_0}. \diamond \end{aligned}$$

Ainsi nous aboutissons à la même expression que la matrice d'information de Fisher relative aux coefficients du polynôme autorégressif d'un modèle  $AR$ . Par conséquent, en utilisant la forme compacte de cette matrice donnée dans [41], on obtient :

$$I_T(a_k^0) = T R_k^{p_k}(a_k^0) - \left( D_k R_k^{p_k}(a_k^0) + \tilde{M}_{a_k^0} M_{a_k^0}^{-1} \tilde{R}_k^{p_k}(a_k^0) \right),$$

où  $\tilde{R}_k^{p_k}$  est la matrice d'ordre  $(p_k-1, p_k)$  formée par les  $p_k$  dernières lignes de  $R_k^{1+p_k}$ ,  $D_k = \text{diag}(1, \dots, p_k)$  et

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{a_k} &= \begin{pmatrix} a_k(1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2a_k(2) & a_k(1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ p_k a_k(p_k) & (p_k-1)a_k(p_k-1) & \dots & a_k(1) & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} a_k(1) & \dots & (p_k-1)a_k(p_k-1) & p_k a_k(p_k) & 0 \\ 2a_2 & \dots & p_k a_k(p_k) & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_k a_k(p_k) & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M_{a_k} = \begin{pmatrix} a_k(0) & 0 & \dots & 0 \\ a_k(1) & a_k(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_k(p_k) & a_k(p_k - 1) & \dots & a_k(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_k(0) & \dots & a_k(p_k - 1) & a_k(p_k) \\ a_k(1) & \dots & a_k(p_k) & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_k(p_k) & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 4.3.2** Lorsque  $T$  tend vers  $+\infty$  la matrice  $\bar{I}_T(\theta_0) = I_T(\theta_0)/T$  converge p.s. vers une matrice bloc-diagonale  $\bar{I}_\infty(\theta_0)$  dont l'expression est donnée par les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{1}{T} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial^2 l_T}{\partial b_{ij} \partial b_{kl}} \right)_{\theta_0} \right] &= a_{jk}^0 a_{li}^0 + \delta_{ki} \sum_{m,n=0}^{p_i} a_i^0(m) a_i^0(n) \sum_{u=1}^K a_{ju}^0 a_{lu}^0 \gamma_u^0(m-n), \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{1}{T} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial^2 l_T}{\partial b_{ij} \partial a_k(l)} \right)_{\theta_0} \right] &= 0, \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{1}{T} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial^2 l_T}{\partial a_i(k) \partial a_j(l)} \right)_{\theta_0} \right] &= \delta_{ij} \gamma_i^0(k-l). \end{aligned}$$

Les estimateurs  $\hat{B}_T$  et  $\hat{\beta}_T$  sont alors asymptotiquement non corrélés.

### 4.3.2 Borne inférieure de $I_{EPF}$

Nous déterminons, dans ce paragraphe, la borne inférieure de l'indice de performance  $I_{EPF}$  d'un estimateur sans biais de la matrice de séparation en fonction des paramètres des modèles autorégressifs associés aux différentes sources. Asymptotiquement, cette borne inférieure est inversement proportionnelle à  $T$  et s'exprime uniquement à l'aide des densités spectrales des sources.

Si l'estimateur de la matrice de séparation est sans biais (ce qui est asymptotiquement le cas pour l'estimateur MVE), alors

$$I_{EPF} = \sum_{i,j=1}^K \text{cov}((\hat{C})_{ij}). \quad (4.14)$$

Soit  $C$  une matrice carrée de taille  $K$ . On définit le vecteur  $[C]$  de  $\mathbb{R}^{K^2}$  par les lignes de la matrice  $C$  :

$$[C] = (C_1^t, \dots, C_K^t)^t.$$

Soit  $\langle C \rangle_K$  la matrice bloc-diagonale de  $\mathbb{R}^{K^2}$  dont les blocs sont réduits à la matrice  $C$ . Alors

$$[\hat{C}] = \langle A_0^t \rangle_K [\hat{B}].$$

Sous l'hypothèse de sources de puissance unité, l'expression de la log-vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} l_T^*(X_T; B, a) &= T \log |\det B| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_k}^2} e_k^t B X_T (R_k^T(a_k))^{-1} X_T^t B^t e_k \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \{ \log(\det(R_k^T(a_k))) + K \log \sigma_{\varepsilon_k}^2 \} - \frac{KT}{2} \log(2\pi), \end{aligned}$$

et la matrice d'information de Fisher relative au paramètre  $\theta$  est définie par :

$$I_T^*(\theta_0) = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial l_T^*}{\partial \theta} \right)_{\theta_0} \left( \frac{\partial l_T^*}{\partial \theta} \right)_{\theta_0}^t \right] = -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial^2 l_T^*}{\partial \theta^2} \right)_{\theta_0} \right].$$

Le bloc supérieur gauche d'ordre  $K^2$  de l'inverse de la matrice  $I_T^*(\theta_0)$ , noté  $I_T^{-1*}(B_0)$ , constitue la borne inférieure de la matrice de covariance du vecteur  $[\hat{B}]$ . Ce bloc est « minoré » par l'inverse du coin supérieur gauche d'ordre  $K^2$  de la matrice  $I_T^*$ , noté  $[I_T^*(B_0)]^{-1}$  :

$$\text{cov}([\hat{B}]) \geq I_T^{-1*}(B_0) \geq [I_T^*(B_0)]^{-1}.$$

Par conséquent la matrice de covariance du vecteur  $[\hat{C}]$  est « minorée » par :

$$J_T = \langle A_0^t \rangle_K [I_T^*(B_0)]^{-1} \langle A_0 \rangle_K.$$

On en déduit l'expression de la borne inférieure de l'indice  $I_{EPF}$  :

$$\underline{I}_{EPF} = \sum_{i,j=1}^K (J_T)_{ij,ij}.$$

Par un calcul analogue à celui effectué pour déterminer l'expression de la matrice  $I_T(\theta_0)$  (c.f Proposition 4.3.1), on déduit la forme des éléments de la matrice  $I_T^*(B_0)$  :

**Proposition 4.3.3** *L'expression de la matrice  $I_T^*(B_0)$  est donnée par :*

$$-\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial^2 l_T^*}{\partial b_{ij} \partial b_{kl}} \right)_{\theta_0} \right] = T a_{jk}^0 a_{li}^0 + \frac{\delta_{ki}}{\sigma_{\varepsilon_k}^2} \sum_{m,n=0}^{p_i} (T - m - n) a_i^0(m) a_i^0(n) \sum_{u=1}^K a_{ju}^0 a_{lu}^0 \gamma_u^0(m-n),$$

où  $\gamma_k^0(m)$  est l'autocovariance d'ordre  $m$  du processus  $AR(p_k)$  de puissance unité.

Il est facile de vérifier que la matrice  $J_T^{-1}$  coïncide avec la matrice  $I_T^*(I_K)$ .

**Proposition 4.3.4** *La matrice  $J_T^{-1}$  se réécrit sous la forme  $T\Pi + D$ , où  $\Pi$  est la matrice de permutation qui échange la ligne  $kj$  avec la ligne  $jk$  et conserve la ligne  $kk$  et où  $D$  est la matrice diagonale définie par :*

$$d(kj, kj) = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_k}^2} \sum_{m,n=0}^{p_k} (T - m - n) a_k^0(m) a_k^0(n) \gamma_j^0(m - n). \quad (4.15)$$

Nous allons donner maintenant l'expression des coefficients de la matrice  $J_T^{-1}$  à l'aide de la densité spectrale  $f_k^0$  associée à la  $k^{\text{ème}}$  source et de la fonction  $g_k^0$  définie par :

$$g_k^0(\lambda) = \phi_k(e^{-i\lambda}),$$

où  $\phi_k^0(\cdot)$  est le filtre linéaire définie par le modèle  $AR(p_k)$  :

$$\phi_k^0(z) = \sum_{i=0}^{p_k} a_k^0(i) z^i.$$

La densité spectrale  $f_k^0(\cdot)$  est liée à la fonction  $g_k^0(\cdot)$  par la relation :

$$f_k^0(\lambda) = \frac{\sigma_{\varepsilon_k}^2}{2\pi} |g_k^0(\lambda)|^{-2}.$$

De plus, la fonction d'autocovariance  $\gamma_k^0(\cdot)$  est la transformée de Fourier de la densité spectrale  $f_k^0(\cdot)$  :

$$\gamma_k^0(j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda j} f_k^0(\lambda) d\lambda.$$

Le  $kj^{\text{ème}}$  terme diagonal de la matrice  $D$ , introduite dans la Proposition 4.3.4, s'exprime en fonction de  $f_k^0$  et  $g_k^0$ . En effet,

$$\begin{aligned} d(kj, kj) &= \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_k}^2} \sum_{m,n=0}^{p_k} (T - m - n) a_k^0(m) a_k^0(n) \gamma_j^0(m - n) \\ &= \frac{T}{\sigma_{\varepsilon_k}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m,n=0}^{p_k} a_k^0(m) a_k^0(n) e^{i\lambda(m-n)} f_j^0(\lambda) d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_k}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m,n=0}^{p_k} (m + n) a_k^0(m) a_k^0(n) e^{i\lambda(m-n)} f_j^0(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_j^0(\lambda)}{f_k^0(\lambda)} d\lambda - \frac{1}{\sigma_{\varepsilon_k}^2} \int_{-\pi}^{\pi} |g_k^0(\lambda)|^2 f_j^0(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 4.3.4, la matrice  $J_T^{-1}$  est bloc-diagonale dont les blocs sont réduits à l'élément  $T + d(kk, kk)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , ou à la matrice

$$\begin{pmatrix} d(kj, kj) & T \\ T & d(jk, jk) \end{pmatrix}, \quad k \neq j.$$

On en déduit l'expression de  $\underline{I}_{EPF}$  en fonction de  $f_k^0$  et  $g_k^0$  :

$$\underline{I}_{EPF} = \sum_{k < j} \frac{d(kj, kj) + d(jk, jk)}{d(kj, kj)d(jk, jk) - T^2} + \sum_k \frac{1}{T + d(kk, kk)}. \quad (4.16)$$

Notons que lorsque  $T$  tend vers  $+\infty$ , la matrice  $J_T^{-1}/T$  tend vers une matrice bloc-diagonale dont les blocs sont réduits à 2 ou à la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_j^0(\lambda)}{f_k^0(\lambda)} d\lambda & 1 \\ 1 & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_k^0(\lambda)}{f_j^0(\lambda)} d\lambda \end{pmatrix}, \quad k \neq j.$$

La limite de la matrice  $J_T^{-1}/T$  coïncide avec la limite de la borne supérieure de l'inverse de la matrice de covariance de l'élément  $\tilde{C} = \tilde{B}A_0$ , où  $\tilde{B}$  est l'estimateur de la matrice  $B$  obtenu par la méthode QMV utilisant des filtres séparateurs optimaux [43]. Asymptotiquement  $\underline{I}_{EPF}$  est inversement proportionnel à  $T$ . En effet :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} T \underline{I}_{EPF} = 2\pi \sum_{k < j} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_j^0(\lambda)}{f_k^0(\lambda)} d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_k^0(\lambda)}{f_j^0(\lambda)} d\lambda}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_j^0(\lambda)}{f_k^0(\lambda)} d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_k^0(\lambda)}{f_j^0(\lambda)} d\lambda - 4\pi^2} + \frac{K}{2}.$$

### 4.3.3 Indice d'efficacité

On désigne par le terme indice d'efficacité le rapport, à valeurs dans  $[0, 1]$ , de la borne inférieure de l'indice de performance  $\underline{I}_{EPF}$  sur l'indice  $I_{EPF}$  :

$$e = \frac{\underline{I}_{EPF}}{I_{EPF}}. \quad (4.17)$$

Cet indice représente une mesure intrinsèque des performances d'une méthode de séparation. Ainsi, une méthode est d'autant plus efficace que son indice d'efficacité est proche de un. Une estimation de cet indice est obtenue à partir d'une évaluation empirique de  $I_{EPF}$  et de la valeur exacte de  $\underline{I}_{EPF}$  donnée par les relations (4.16) et (4.15).

## 4.4 Comparaison avec l'estimateur QMV

Le critère du maximum de vraisemblance, invoqué par Pham et Garat [43] dans la construction de la procédure QMV, repose sur le caractère asymptotiquement gaussien de la transformée de Fourier discrète d'une séquence d'observations d'un processus stationnaire au second ordre. Il ne fait pas référence, directement comme ici, à une hypothèse gaussienne des sources. Cependant les auteurs soulignent que cela revient à supposer que les observations sont elles-mêmes gaussiennes, puisque le passage du domaine spectral au domaine temporel se fait par une transformation

linéaire. Il n'est donc pas surprenant de constater un lien étroit avec notre approche. Ainsi les équations normales de la procédure QMV sont établies à partir d'une vraisemblance approchée et pour une structure des sources fixée *a priori*. Nous montrons dans cette section que cette forme approchée correspond à une vraisemblance exacte avec préfenêtrage :  $X_k(t) = 0$  pour  $-p_k < t \leq 0$ .

Soit  $p = \max\{p_k, k = 1, \dots, K\}$ . On note  ${}_pX_T$  et  ${}_pS_T = B_p X_T$  les deux matrices de taille  $(K, T+p)$  obtenues en faisant précéder chaque séquence de  $p$  zéros (préfenêtrage). Soit  $R_k^{T+p}(\beta_k)$  la matrice de covariance d'ordre  $T+p$  du modèle  $AR(p_k)$  supposé pour la source  $S_k(\cdot)$  avec la contrainte  $\sigma_{\varepsilon_k}^2 = 1$ . Le système de séparation (3.1) obtenu en maximisant le critère  $l_{T+p}({}_pX_T; B, \beta)$  par rapport à  $B$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{({}_pS_T)_k^t \left(R_k^{T+p}(\beta_k)\right)^{-1} ({}_pS_T)_j}{T+p} &= \sum_{i=1}^T \frac{\varepsilon_k^k(t, p_k) \varepsilon_j^k(t, p_k)}{T+p} \\ &= \frac{T}{T+p} \mathbb{E}_T[(\phi_k * S_k)(\phi_k * S_j)] \\ &= \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, K, \end{aligned}$$

où  $\mathbb{E}_T$  désigne la moyenne empirique et où  $\phi_k$  est le filtre linéaire défini par le modèle  $AR(p_k)$  :

$$(\phi_k * S)(t) = S(t) + \sum_{i=1}^{p_k} a_k(i)S(t-i), \quad t = 1, \dots, T.$$

Ce sont les équations de séparation de la procédure QMV qui est donc équivalente au problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}' &: \max\{\det(B), \|B_k\|_{\tilde{\Lambda}_k^T} = 1, k = 1, \dots, K\} \\ \tilde{\Lambda}_k^T &= \frac{{}_pX_T (R_k^{T+p}(\beta_k))^{-1} {}_pX_T^t}{T+p}. \end{aligned}$$

Notons que le terme  $(j, l)$  de la forme quadratique  $\tilde{\Lambda}_k^T$  est donné par :

$$\tilde{\Lambda}_k^T(j, l) = \frac{T}{T+p} \mathbb{E}_T[(\phi_k * X_j)(\phi_k * X_l)],$$

avec

$$(\phi_k * X_j)(t) = X_j(t) + \sum_{i=1}^{p_k} a_k(i)X_j(t-i), \quad t = 1, \dots, T.$$

Les deux problèmes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont asymptotiquement équivalents. Cependant, dans la procédure QMV, les filtres sont choisis *a priori* et non estimés. Ils ne correspondent

pas nécessairement à ceux de modèles autoregressifs. En fait, la procédure initiale conduit au système :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_T[(\Phi_k * S_k)S_j] &= 0, \quad k \neq j = 1, \dots, K, \\ (\Phi_k * S_k)(t) &= \sum_{i=-p_k}^{p_k} c_k(i)S_k(t-i). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Elle équivaut à la formulation géométrique  $\mathcal{P}'$  lorsque le filtre  $\Phi_k$  est symétrique de la forme :

$$c_k(-i) = c_k(i) = \sum_{j=i}^{p_k} a_k(j)a_k(j-i), \quad i = 1, \dots, p_k. \quad (4.19)$$

Il est alors montré que les filtres optimaux sont ceux ainsi associés aux modèles autorégressifs sous-jacents aux sources. Ceci conforte l'idée de mettre en œuvre la procédure MVE considérée ici.

Un autre point important concernant la différence entre les deux procédures est celui de la résolution du système de séparation. L'algorithme QMV consiste à résoudre les équations par une technique du type Newton. La matrice de séparation  $\hat{B}$  est obtenue à la convergence de l'itération  $B^{n+1} = (I - \Delta^n)B^n$  dans laquelle les termes  $\Delta^n(k, j)$  de la matrice de perturbation  $\Delta^n$  sont calculés par paires à partir du système :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_T[S_j^n(\Phi_k * S_j^n)]\Delta^n(k, j) + \mathbb{E}_T[S_k^n(\Phi_k * S_k^n)]\Delta^n(j, k) \\ = \mathbb{E}_T[S_j^n(\Phi_k * S_k^n)], \quad k \neq j = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Ce dernier est obtenu en reportant

$$S_k^{n+1}(\cdot) = S_k^n(\cdot) - \sum_{i=1}^K \Delta^n(k, i)S_i^n(\cdot), \quad k = 1, \dots, K,$$

dans (4.18). On néglige alors les termes du second ordre par rapport aux éléments de  $\Delta^n$  ainsi que ceux de la forme :

$$\begin{aligned} \Delta^n(k, i)\mathbb{E}_T[(\Phi_k * S_i^n)S_j^n], \quad i \neq j, \\ \Delta^n(j, i)\mathbb{E}_T[S_i^n(\Phi_k * S_k^n)], \quad i \neq k. \end{aligned}$$

Il est clair que la différence essentielle entre les procédures QMV et MVE provient du choix des filtres utilisés dans les systèmes de séparation. Ceci sera confirmé par les simulations du chapitre suivant. Mais, lorsque les filtres sont fixés, on constate malgré tout une différence sensible dans la résolution du problème  $\mathcal{P}'$  entre la méthode de relaxation sur les lignes de  $B$  et l'utilisation de la méthode de Newton. Par contre l'approximation traduite par le préfenêtrage semble négligeable.

# Chapitre 5

## Validation des propriétés de l'estimateur MVE

Ce chapitre est consacré à l'étude par simulation des propriétés de l'estimateur MVE. Nous présentons tout d'abord les modèles retenus ainsi que les critères de performance utilisés. Nous considérons ensuite les qualités de cet estimateur en discutant surtout du choix de l'ordre des modèles autorégressifs. Puis nous étudions sa robustesse, en particulier face à la présence d'un bruit additif. Enfin nous effectuons une comparaison avec l'estimateur QMV en analysant les gains de performance dus à l'estimation des filtres d'une part et à la méthode de résolution du système de séparation d'autre part.

### 5.1 Modèles et critères de performance

#### 5.1.1 Modèles

Tous les processus sources simulés au cours de cette étude sont gaussiens, centrés et réduits, à l'exception bien sûr des lois utilisées dans l'étude de la robustesse. Ils sont réalisés à partir du générateur de nombres aléatoires issu de la version 5.3.0. du logiciel MATLAB. Le fait de considérer des sources de variance unité ne remet pas en cause la procédure MVE dans laquelle ce sont les variances des innovations des modèles autorégressifs ajustés qui sont supposées égales à un. En effet le critère de performance introduit ci-dessous ne prend pas en compte l'estimation de la structure des sources. Il s'exprime à travers une version normalisée de la matrice de mélange  $A$  qui élimine le facteur échelle. Cette normalisation est alors appliquée à l'estimateur  $\hat{A}$  donné par MVE.

Les trois premiers modèles sont autorégressifs alors que le quatrième est une moyenne mobile. Les modèles M1 et M2 correspondent au cas de deux sources autorégressives ayant le même ordre :  $p_1 = p_2 = 2$  pour M1 et 3 pour M2. Le

modèle M3 correspond au cas de trois sources autorégressives d'ordres respectifs 2, 3 et 4. Ces trois modèles sont caractérisés par leurs autocorrélations partielles,  $\beta_k^m(j)$ ,  $m = 1, 2, 3$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $j = 1, \dots, p_k$ . Enfin, le modèle M4 correspond à deux sources moyennes mobiles d'ordre 2 caractérisées par leurs paramètres  $b_k^A(j)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$ . La matrice de mélange  $A$  est commune aux situations à deux sources. Celle du modèle M3 est notée  $A_1$ . Nous résumons et précisons ces différents points dans les tables ci-dessous.

modèle	nature	nombre de sources	ordre	paramètre	matrice de mélange
M1	AR	2	[2,2]	$\beta^1$	$A$
M2	AR	2	[3,3]	$\beta^2$	$A$
M3	AR	3	[2,3,4]	$\beta^3$	$A_1$
M4	MA	2	[2,2]	$b^4$	$A$

TAB. 5.1 – Modèles simulés.

$\beta_1^1(\cdot)$	0.40	0.25	$\beta_1^2(\cdot)$	0.30	0.20	0.10	$b_1^4(\cdot)$	-0.30	-0.25
$\beta_2^1(\cdot)$	0.60	0.80	$\beta_2^2(\cdot)$	0.40	0.60	0.80	$b_2^4(\cdot)$	-0.12	-0.80
			$\beta_1^3(\cdot)$	0.40	0.25	0	0		
			$\beta_2^3(\cdot)$	0.60	0.80	-0.50	0		
			$\beta_3^3(\cdot)$	0.50	0.70	-0.50	0.40		

TAB. 5.2 – Paramètres des différents modèles.

$$A = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.2 \\ -0.4 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1.20 & 1.00 & 0.60 \\ 0.45 & 0.80 & 1.00 \\ 0.78 & 1.54 & 1.68 \end{pmatrix}.$$

TAB. 5.3 – Matrices de mélange.

### 5.1.2 Critères de performance

Nous notons  $T$  la taille des échantillons simulés et  $r$  le nombre de répétitions. Pour toute matrice  $M$ ,  $\bar{M}$  désigne la matrice associée à  $M$  par l'application des règles de normalisation suivantes :

- Les colonnes de  $\bar{M}$  sont normées :  $\|\bar{M}_{\cdot k}\| = 1, j = 1, \dots, K$ .
- Les coefficients de la première ligne de  $\bar{M}$  sont positifs :  $\bar{M}_{1k} \geq 0, k = 1, \dots, K$ .
- Les colonnes de  $\bar{M}$  sont rangées par ordre décroissant de leur première composante (ou des suivantes en cas d'égalité) :  $\bar{M}_{11} > \bar{M}_{12} > \dots > \bar{M}_{1K}$ .

Les matrices  $\bar{A}$  et  $\bar{A}_1$  ainsi normalisées sont :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0.9285 & 0.2425 \\ -0.3714 & 0.9701 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.8000 & 0.5000 & 0.2928 \\ 0.3000 & 0.4000 & 0.4880 \\ 0.5196 & 0.7681 & 0.8223 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Notons que les termes de la première ligne, pour chaque matrice, sont très différents. Ceci est important pour la crédibilité des critères de performance. On considère en effet que cette normalisation est suffisante pour sélectionner, parmi les  $2^K K!$  représentants (signes et permutations) associés à chaque estimation, celui qui est le plus proche de la matrice du modèle normalisée. On évite ainsi d'alourdir les temps de calcul et la synthèse de l'écart quadratique moyen reportée ici devrait constituer une bonne approximation de celle qui serait obtenue par une telle sélection. Ce n'est pas un majorant dans la mesure où l'on ne prend pas en compte les termes diagonaux.

La matrice  $\hat{A}^n$  désigne l'estimation de la matrice de mélange obtenue à partir de la  $n^{\text{ème}}$  séquence simulée. Pour chaque coefficient  $\bar{A}_{ij}$ ,  $i \neq j$ , de la matrice  $\bar{A}$ , nous déterminons le biais et la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne empiriques. Une synthèse de ces deux critères est utilisée afin de faciliter la présentation des résultats :

$$Biais_{ij} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^r (\bar{A}_{ij}^n - \bar{A}_{ij}), \quad \sqrt{EQM}_{ij} = \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{n=1}^r (\bar{A}_{ij}^n - \bar{A}_{ij})^2},$$

$$SYN_{Biais} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j \neq i=1}^K Biais_{ij}^2}{K(K-1)}}, \quad SYN_{EQM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j \neq i=1}^K EQM_{ij}}{K(K-1)}}.$$

## 5.2 Analyse des qualités de l'estimateur MVE

### 5.2.1 Choix de l'ordre des modèles autorégressifs

L'estimateur MVE est défini sous l'hypothèse de sources autorégressives d'ordres connus. Ceci n'est évidemment pas réaliste dans le cadre de la séparation aveugle. Pour une méthode au second ordre, le maximum d'entropie justifie cependant l'approximation autorégressive. L'ordre des modèles doit être choisi *a priori* ou estimé de telle façon que les modèles correspondants soient distincts. Notons que la méthode permet de vérifier cette hypothèse *a posteriori* en comparant les autocorrélations partielles estimées. Par ailleurs les exemples traités ici montrent qu'une surestimation de l'ordre ne nuit pas aux qualités de l'estimateur.

Nous utilisons  $r = 200$  répétitions de séquences de longueur  $T = 250$ . La Figure 5.1 représente la variation de la synthèse de l'EQM en fonction de l'ordre autorégressif  $p$ , choisi commun à toutes les sources dans chacun des quatre exemples. On constate les points suivants :

- Pour les sources autorégressives pures, la synthèse de l'EQM atteint son minimum lorsque l'ordre d'approximation  $p$  est égal au maximum des ordres  $p_i$

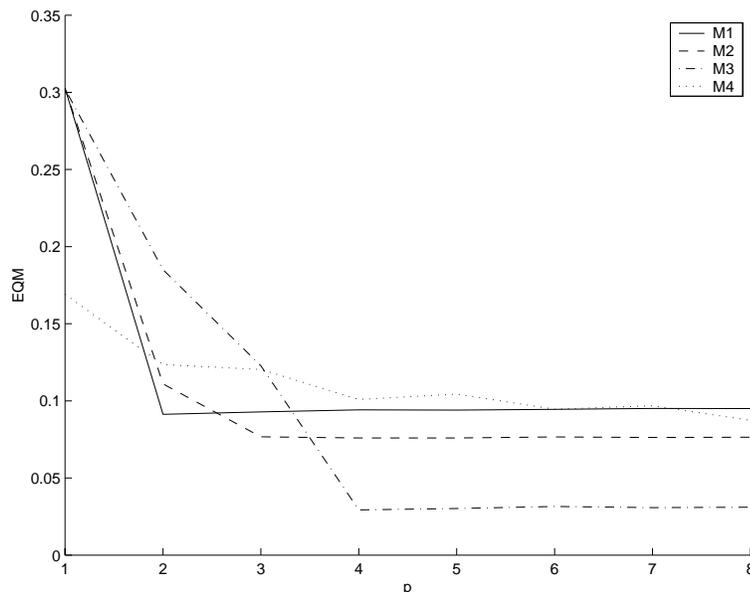


FIG. 5.1 – Synthèse de l'EQM par rapport à l'ordre d'approximation autorégressive

des modèles simulés. Elle se détériore peu au delà. Elle est importante lorsque ces ordres sont sous-estimés, mais cela correspond aussi à des petites valeurs de  $p$  car les ordres considérés ici sont faibles.

- Pour les sources moyennes mobiles, la synthèse de l'EQM décroît lorsque l'ordre d'approximation  $p$  augmente et se stabilise assez rapidement.

Les valeurs obtenues pour  $p = 20$ , non représentées, confirment la relative stabilité de l'EQM : 0,1014, 0,0816, 0,0541, 0,1044. Elles sont cependant supérieures à celles obtenues pour  $p = 8$  : 0,0950, 0,0765, 0,0311, 0,0874. En conclusion, il semble que  $p = 6$  devrait être un choix *a priori* raisonnable pour toute situation non particulière. Il est clair que si les modèles autorégressifs sous-jacents aux sources sont presque identiques jusqu'à un ordre élevé, la méthode sera défailante. Cette situation peut toujours être vérifiée et donc corrigée en augmentant l'ordre.

Nous incluons maintenant l'estimation de l'ordre du modèle autorégressif pour chaque source dans la procédure MVE. Nous utilisons la procédure *FPE* d'Akaike ainsi que la version corrigée *FPEC* de De Luna. La Table 5.4 donne les synthèses du biais et de l'EQM. La colonne MVE correspond à l'ordre exact pour les modèles autorégressifs et à  $p = 8$  pour M4. La colonne  $p = 6$  consiste à fixer l'ordre *a priori*.

L'ordre estimé par *FPEC* est par construction inférieur ou égal à celui que donne *FPE*. Cependant on a déjà constaté qu'il vaut mieux surestimer l'ordre plutôt que l'inverse. Les résultats de la Table 5.4 confirment cela, surtout pour le modèle M3. Le choix *a priori* d'un ordre assez grand,  $p = 6$ , mais pas trop (*cf.*  $p = 20$ ), constitue une solution simple très satisfaisante.

Méthode	MVE		FPE		FPEC		$p = 6$	
	Biais	EQM	Biais	EQM	Biais	EQM	Biais	EQM
M1	0.0043	0.0913	0.0051	0.0956	0.0050	0.0947	0.0052	0.0945
M2	0.0023	0.0767	0.0038	0.0765	0.0031	0.0783	0.0043	0.0766
M3	0.0031	0.0283	0.0034	0.0367	0.0058	0.0512	0.0025	0.0316
M4	0.0047	0.0874	0.0027	0.0854	0.0026	0.0857	0.0058	0.0946

TAB. 5.4 – Effet de l'estimation de l'ordre des modèles autorégressifs

### 5.2.2 Nombre de cycles

Nous donnons ici un bref aperçu de la vitesse de convergence de la procédure MVE par rapport à l'adaptation des filtres. Pour cela nous considérons uniquement le nombre de cycles. Chaque cycle représente l'estimation de la structure des sources suivi de l'estimation de la matrice de séparation. Rappelons que l'initialisation est faite avec  $B = I$  et  $\beta_k(i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Nous ne prenons donc pas en compte le nombre d'itérations présentes à l'intérieur de chaque étape d'estimation. Le nombre de répétitions  $r$  utilisées est variable selon la longueur  $T$  des séquences simulées. Il est donné dans la Table 5.5 et cette correspondance sera systématique par la suite.

$T$	50	100	250	500	1000	2500	5000	10000
$r$	500	500	200	200	100	100	75	50

TAB. 5.5 – Nombre de répétitions  $r$  selon la taille  $T$ 

Le nombre moyen de cycles est représenté en fonction de  $\log(T)$  (logarithme à base 10) pour chaque modèle dans la Figure 5.2. Le nombre de cycles est relativement important pour des séries courtes ( $T \leq 100$ ) et se stabilise rapidement ( $T \geq 1000$ ) vers des valeurs raisonnables. Il dépend du modèle et surtout augmente avec le nombre de sources traitées. Sa valeur limite ( $T = 10000$ ) est égale à 3 pour 2 sources et 4 pour 3 sources. Ceci prouve l'intérêt de l'estimation des filtres car le critère d'arrêt de la procédure MVE porte sur la proximité des estimations successives de  $B$ . Ici l'ordre d'approximation  $p$  est fixé à 4. La Figure 5.3 donne le nombre de cycles en fonction de  $\log(T)$  dans le cas du modèle M2 pour  $p = 2, \dots, 5$ . Il varie peu et est minimum pour la vraie valeur de  $p$ . Il augmente cependant avec  $p$ , ce qui est naturel, et vaut 7,5 pour  $T = 250$  lorsque  $p = 20$ .

### 5.2.3 Convergence de l'estimateur

La convergence de l'estimateur MVE sera analysée à travers les synthèses du biais et de l'EQM d'une part et en fonction de l'indice de performance d'autre part.

#### Synthèses

Dans un premier temps, nous considérons l'estimateur dans la situation idéale en utilisant les ordres connus des modèles autorégressifs. L'ordre  $p$  est fixé à 4 pour

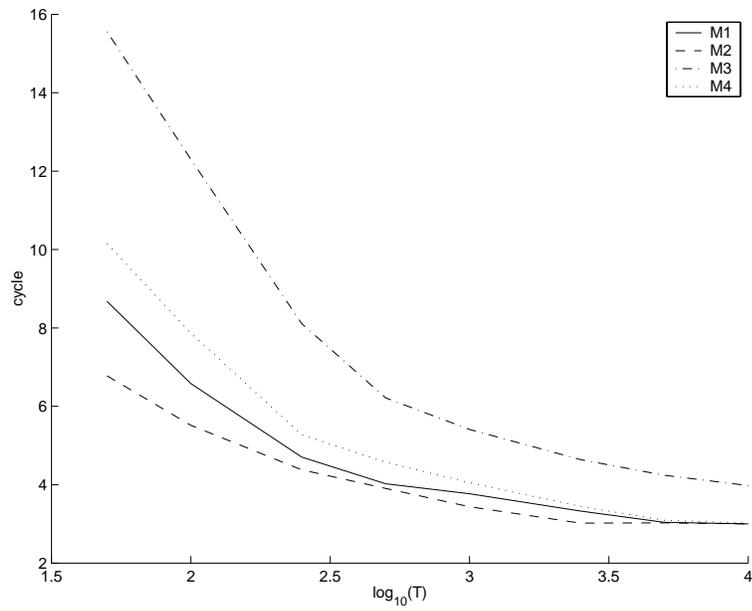


FIG. 5.2 – Nombre moyen de cycles en fonction de  $T$

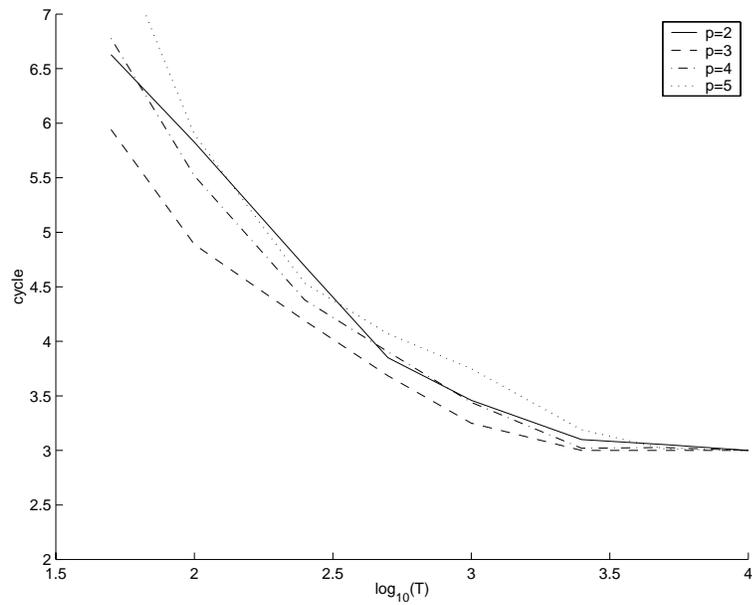
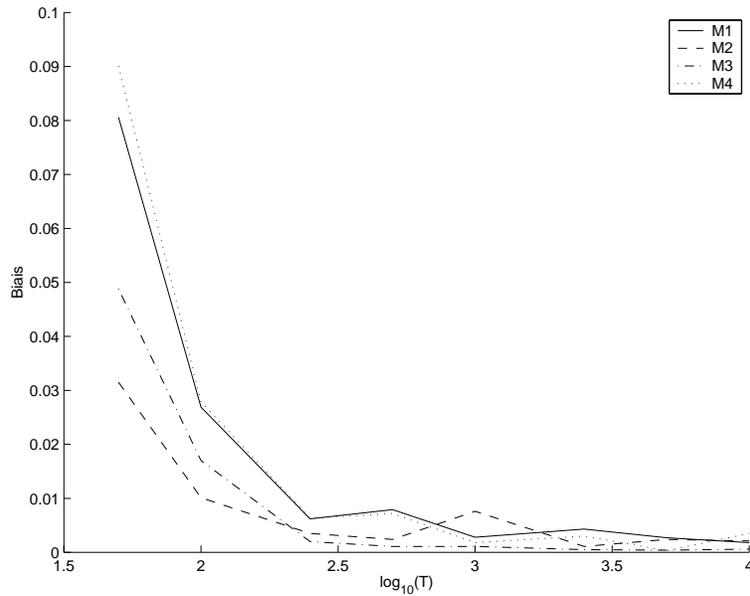


FIG. 5.3 – Nombre moyen de cycles en fonction de  $T$  et  $p$ , modèle M2

FIG. 5.4 – Synthèse du biais en fonction de  $T$ 

les sources moyennes mobiles du modèle M4. Les Figures 5.4 et 5.5 représentent respectivement les synthèses du biais et de l'EQM en fonction de  $\log(T)$  pour les quatre modèles. Elles confirment la convergence de l'estimateur. On constate aussi que le biais devient négligeable à partir de  $T = 250$ , en particulier par rapport à l'EQM qui décroît régulièrement.

L'estimateur  $\hat{A}$  que donne la procédure MVE est convergent quelque soit le choix de l'ordre  $p$ . Ceci est confirmé par les représentations de la synthèse de l'EQM en fonction de  $T$  donnée en Figures 5.7 et 5.8. Cette dernière illustre la vitesse de convergence en  $1/\sqrt{T}$  : la courbe en pointillés, ajustée par la méthode des moindres carrés, a pour équation  $EQM(T) = 1.626/\sqrt{T}$ . Les Figures 5.6 et 5.7 traduisent cependant l'influence du choix de l'ordre  $p$  dans le cas de deux sources autorégressives d'ordre 3 (Modèle M2). On constate que les courbes donnant les synthèses du biais et de l'EQM en fonction de  $T$  pour  $p = 3, 4$  ou  $5$  sont sensiblement identiques. Suresimer l'ordre ne détériore pas l'estimateur. Par contre la convergence est clairement plus lente pour  $p = 2$ .

### Indice de performance

La Figure 5.9 représente la quantité  $I_{EPF}^T = TI_{EPF}$  ainsi que sa borne inférieure (représentée par  $I_{EPF}^*$ ) en fonction de  $\log(T)$  pour les quatre modèles. Pour le modèle M4, cette borne est obtenu en ajustant un modèle autorégressif  $AR(p^*)$  à la moyenne mobile. L'ordre  $p^*$  est choisi de telle sorte que la valeur de l'indice  $\underline{I}_{EPF}$  associé à ce modèle ne varie pas au-delà de  $p^*$ . L'ordre autorégressif  $p$  est fixé *a priori* à 6

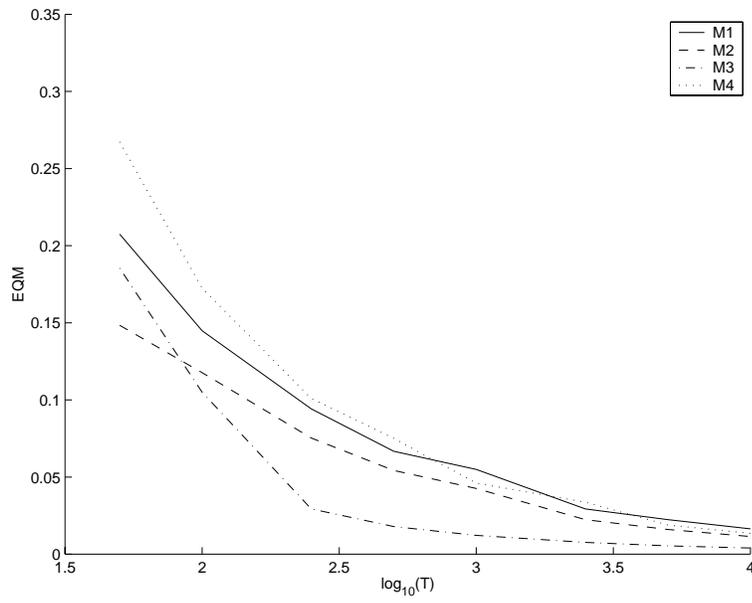


FIG. 5.5 – Synthèse del'EQM en fonction de  $T$

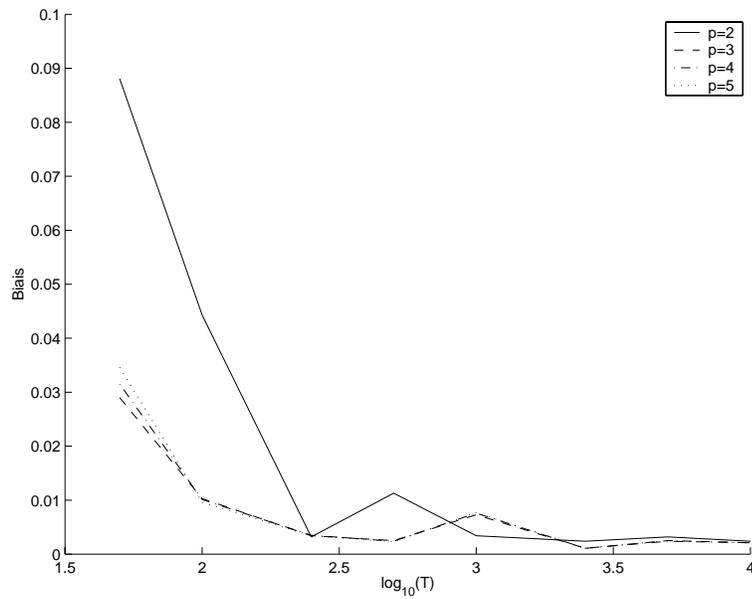
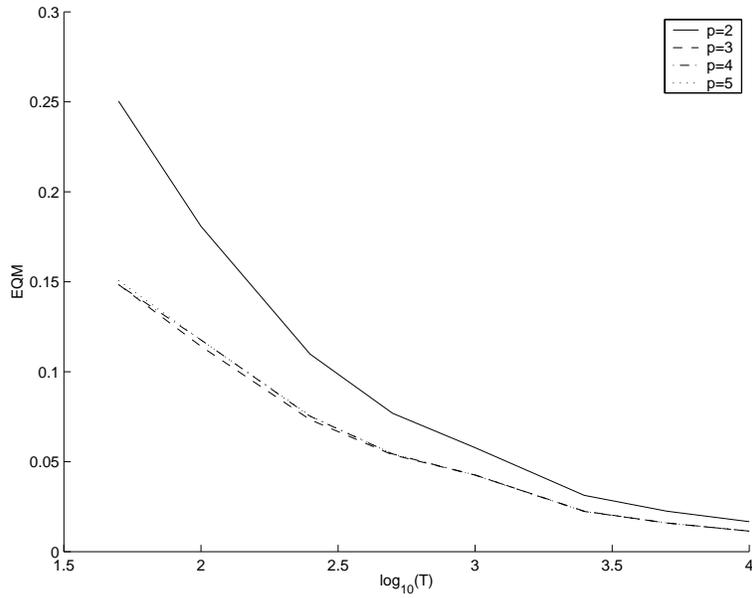
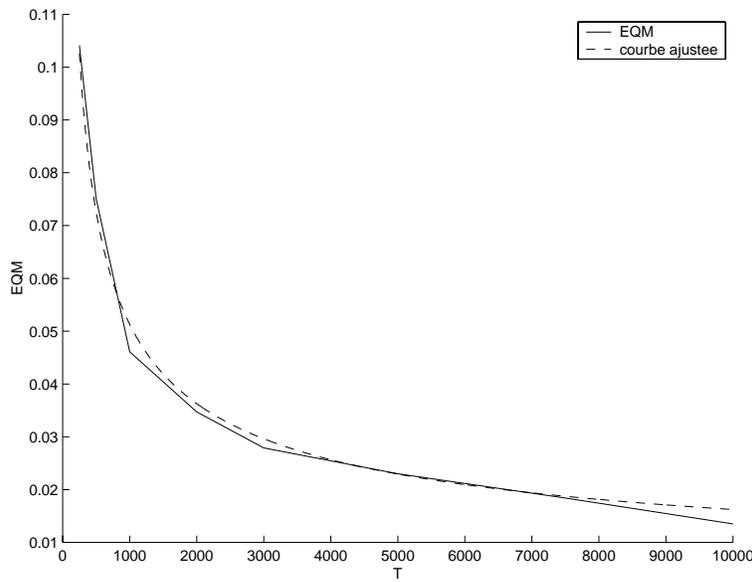
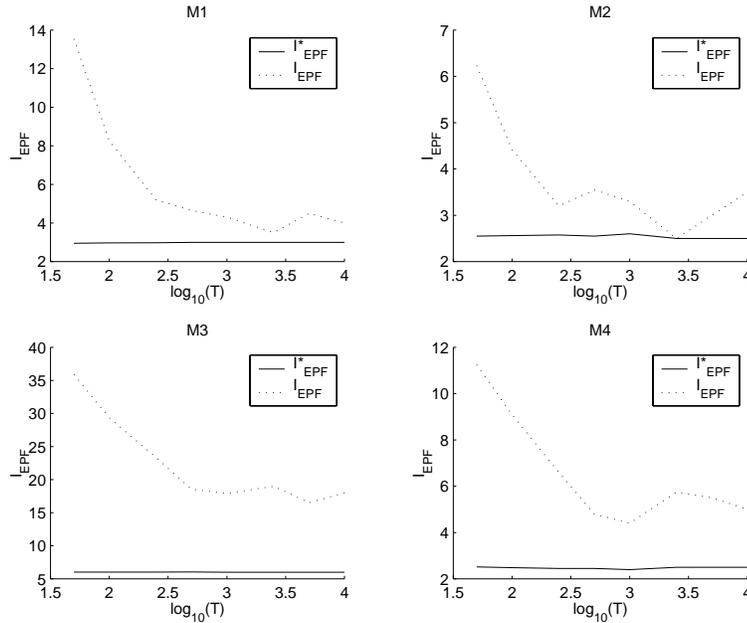


FIG. 5.6 – Synthèse du biais en fonction de  $T$  et  $p$ , modèle M2

FIG. 5.7 – Synthèse de l'EQM en fonction de  $T$  et  $p$ , modèle  $M2$ FIG. 5.8 – Synthèse de l'EQM en fonction de  $T$ ,  $p = 4$ , modèle  $M4$


 FIG. 5.9 –  $I_{EPF}^T$  en fonction de  $T$  ;  $p = 6$ 

pour toutes les sources de chaque modèle. Cette figure confirme la convergence de l'estimateur. Par ailleurs on constate que la quantité  $I_{EPF}^T$  se stabilise autour d'une valeur limite pour  $T \geq 500$ . Cette valeur est assez proche de la borne inférieure de l'indice pour les modèles  $M1$  et  $M2$ . Par contre, pour les modèles  $M3$  et  $M4$ , elle s'écarte davantage de la borne inférieure.

### 5.2.4 Invariance de l'estimateur

L'invariance théorique de l'estimateur du maximum de vraisemblance a été prouvée dans la Section 4.1.2. L'objectif de ce paragraphe est de vérifier, par simulation, l'invariance de la méthode MVE. Pour cela, nous considérons deux mélanges différents ( $X(\cdot)$  et  $X^*(\cdot)$ ) issus d'un même processus source  $S(\cdot)$  et de deux matrices de mélange différentes ( $A$  et  $A^*$ ):

$$X(\cdot) = AS(\cdot) ; X^*(\cdot) = A^*S(\cdot).$$

On note  $\hat{C} = \hat{B}A$  (resp.  $\hat{C}^* = \hat{B}^*A^*$ ) la matrice du système global, où  $\hat{B}$  (resp.  $\hat{B}^*$ ) est l'estimateur de  $B$  (resp.  $B^*$ ) au vu des observations  $X_T$  (resp.  $X_T^*$ ). Pour le mélange  $X(\cdot)$ , nous utilisons les matrices ( $A$  et  $A_1$ ) données dans la Section 5.1.1. Pour le second mélange  $X^*$ , nous désignons par  $A^*$  la matrice commune aux situations à deux sources et par  $A_1^*$  celle du modèle  $M3$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.5000 \\ 0.3000 & 1.0000 \end{pmatrix}, A_1^* = \begin{pmatrix} 1.2000 & 1.0000 & 0.6000 \\ -0.2222 & 0.4000 & 1.0000 \\ 0.1000 & -0.7000 & 0.6852 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque modèle et pour chaque mélange nous calculons la valeur moyenne  $\overline{\hat{C}}$  de la matrice  $\hat{C}$ . Nous utilisons  $r = 200$  répétitions de séquences de longueur  $T = 250$ . L'ordre autorégressif des sources étant fixé *a priori* à  $p = 6$ .

Modèle M1

$$\overline{\hat{C}} = \overline{\hat{C}^*} = \begin{pmatrix} 1.0141 & 0.0059 \\ 0.0050 & 1.0092 \end{pmatrix}$$

Modèle M2

$$\overline{\hat{C}} = \overline{\hat{C}^*} = \begin{pmatrix} 1.0147 & 0.0020 \\ 0.0048 & 1.0104 \end{pmatrix}$$

Modèle M3

$$\overline{\hat{C}} = \overline{\hat{C}^*} = \begin{pmatrix} 1.0154 & 0.0020 & 0.0001 \\ 0.0007 & 1.0091 & 0.0037 \\ -0.0038 & -0.0003 & 1.0092 \end{pmatrix}$$

Modèle M4

$$\overline{\hat{C}} = \begin{pmatrix} 1.0124 & -0.0061 \\ 0.0046 & 0.9619 \end{pmatrix}, \overline{\hat{C}^*} = \begin{pmatrix} 1.0485 & -0.0092 \\ 0.0017 & 0.9343 \end{pmatrix}$$

Nous constatons que la méthode MVE vérifie la propriété d'invariance pour les trois modèles M1, M2 et M3, par contre nous observons un léger écart entre les matrices  $\overline{\hat{C}}$  et  $\overline{\hat{C}^*}$  pour le modèle M4. L'invariance « numérique » n'est pas systématique pour les modèles autorégressifs. Elle ne dépend pas de la nature du modèle simulé mais plutôt de sa réalisation à travers les trajectoires observées. Ainsi pour certains modèles il est plus probable de ne pas observer l'invariance que pour d'autres. Cette probabilité est liée au choix des paramètres du modèle en question. En effet, nous avons appliqué la méthode à un mélange de deux sources autorégressives issues du modèle suivant :

$\beta_1^1(\cdot)$	1	0.4521	-0.1661	-0.3746	0.0558	-0.0979	-0.2183
$\beta_2^1(\cdot)$	1	-0.4548	0.1477	0.1789	-0.1687	0.0618	-0.1758

Nous avons obtenu le résultat qui suit :

$$\overline{\hat{C}} = \begin{pmatrix} 1.0149 & 0.0016 \\ 0.0036 & 1.0105 \end{pmatrix}, \overline{\hat{C}^*} = \begin{pmatrix} 1.0133 & 0.0016 \\ 0.0037 & 1.0125 \end{pmatrix}$$

D'autres résultats de simulation, non présentés dans ce document, ont montré que cet écart provient de la présence de maxima locaux relatifs au problème global de la séparation et que l'invariance numérique de l'estimateur MVE est assurée dès lors que la taille des séquences observées est suffisamment grande.

## 5.3 Robustesse de l'estimateur

### 5.3.1 Estimation de la structure des sources

Nous avons déjà pressenti, par la présence de plusieurs cycles dans la procédure MVE, que l'estimation de la structure des sources améliore celle de la matrice de mélange. Cependant l'estimation de cette structure par MVE est de mise en œuvre complexe et lourde en temps de calcul. Il existe de nombreuses méthodes d'estimation autorégressive. Celle de Yule-Walker est la plus simple et la plus rapide, mais également la moins performante dans le cas de séries courtes ou de modèles proches de la singularité [16].

Nous nous plaçons donc dans la situation la plus défavorable de séries courtes,  $T = 50$ , pour comparer les performances de MVE avec celles de la méthode, notée MVE-YW, consistant à remplacer la procédure ARMVE par l'estimateur de Yule-Walker. Les ordres des modèles autorégressifs d'approximation sont ceux des modèles simulés. La table 5.6 montre que ce changement affaiblit peu les qualités de l'estimateur de la matrice de mélange  $A$ . Par conséquent, il sera raisonnable en pratique d'effectuer cette substitution.

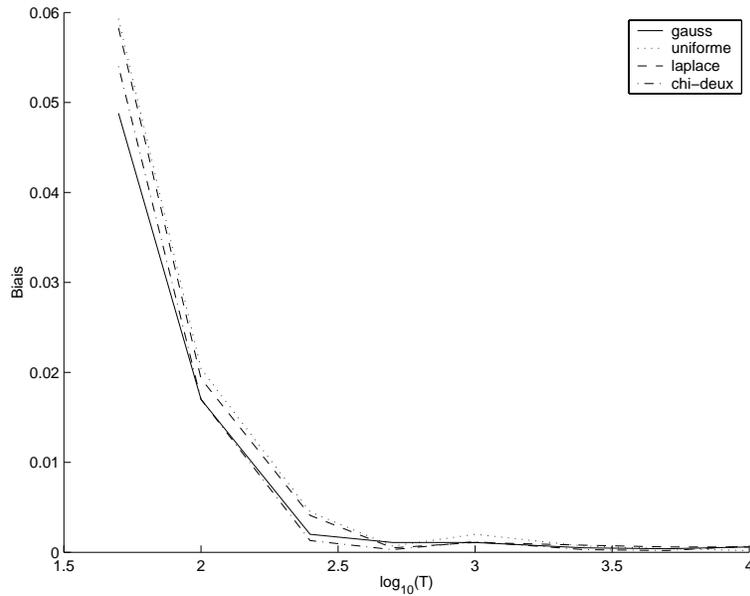
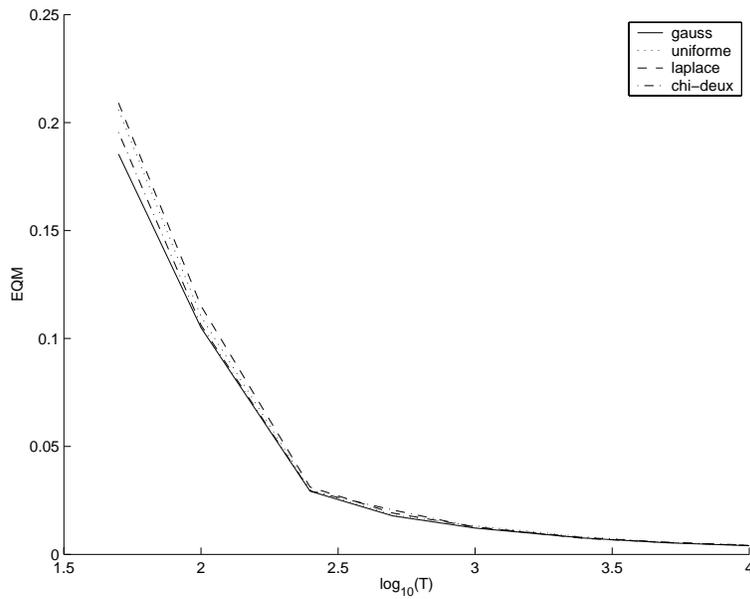
	M1		M2		M3	
	MVE	MVE-YW	MVE	MVE-YW	MVE	MVE-YW
Biais	0.0650	0.0687	0.0290	0.0310	0.0446	0.0535
EQM	0.1921	0.2047	0.1485	0.1510	0.1729	0.1909

TAB. 5.6 – Utilisation de Yule-Walker pour l'estimation de la structure des sources

### 5.3.2 Lois de probabilité des sources

On étudie ici l'influence de la loi de probabilité des sources sur l'estimateur. Pour cela on considère deux lois symétriques d'aspects très différents, la loi uniforme sur  $[-1, 1]$  et la loi de Laplace (densité  $e^{-|x|}/2$ ), ainsi qu'une loi asymétrique, la loi du chi-deux à 1 degré de liberté recentrée. On se place dans le cas du modèle M3 en utilisant les ordres connus des modèles autorégressifs. Ainsi la loi gaussienne correspond au maximum de vraisemblance exact et devrait fournir le meilleur résultat. Les Figures 5.10 et 5.11 représentent les synthèses du biais et de l'EQM en fonction de  $T$  et de la loi des sources.

On constate que la méthode est très robuste par rapport à la loi de probabilité des sources et que la loi gaussienne donne effectivement le minimum de l'EQM. D'autre part le biais est négligeable, par rapport à l'EQM, pour  $T \geq 250$ .

FIG. 5.10 – Synthèse du biais en fonction de  $T$  et de la loi des sourcesFIG. 5.11 – Synthèse de l'EQM en fonction de  $T$  et de la loi des sources

### 5.3.3 Présence d'un bruit additif

L'étude théorique d'un mélange avec bruit additif n'est pas abordée dans cette thèse. Nous examinons, simplement par simulation, la robustesse de l'estimateur face à la présence d'un bruit. Pour un processus stationnaire scalaire  $Y(\cdot)$ , de variance  $\sigma_Y^2$ , auquel on ajoute un bruit blanc  $b(\cdot)$  de variance  $\sigma_b^2$ , le rapport signal sur bruit,

noté  $R_{sb}$  et exprimé en décibels, est donné par :

$$R_{sb} = -10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_b^2} \right).$$

Dans le cas vectoriel du mélange  $X(\cdot) = AS(\cdot) + b(\cdot) = Y(\cdot) + b(\cdot)$ , ce rapport est ainsi fixé, composante par composante, entre  $Y(\cdot)$  et  $b(\cdot)$ . Le bruit est gaussien, à composantes indépendantes, et indépendant de  $S(\cdot)$ .

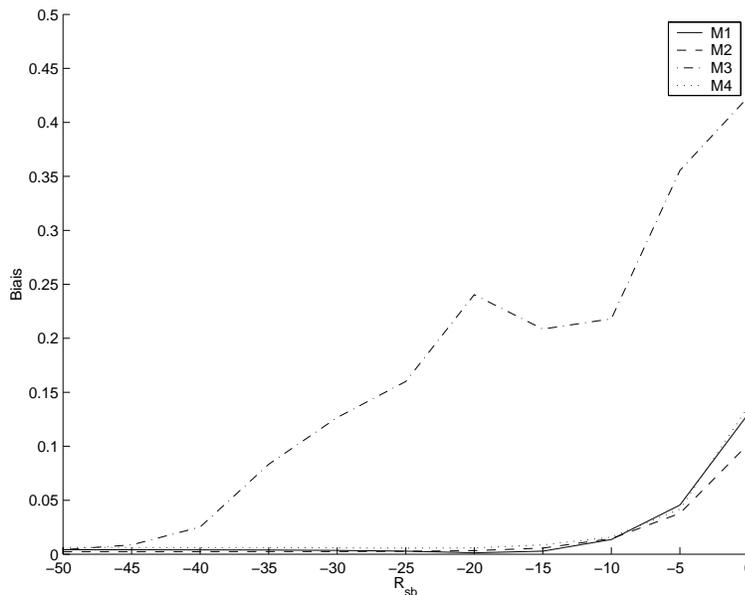


FIG. 5.12 – Synthèse du biais en fonction du rapport signal bruit

Les Figures 5.12 et 5.13 illustrent, pour des séquences de longueur  $T = 250$ , l'évolution des synthèses du biais et de l'EQM en fonction du rapport signal sur bruit. Les ordres d'approximation sont ceux des modèles simulés dans le cas autorégressif, ils sont fixés à  $p = 4$  pour les moyennes mobiles. Pour les mélanges de deux sources, nous constatons que les performances de l'estimateur ne se détériorent pas, indépendamment de la nature des sources, tant que le rapport signal sur bruit reste inférieur à  $-10$ db. Ceci n'est plus vrai dans le cas de trois sources. Dès  $-40$ db, le biais et l'EQM augmentent de façon très importante. On peut vérifier que le biais est du même ordre et souvent plus grand que l'écart-type. On peut penser que cela provient de la présence de solutions parasites (maxima locaux). Nous avons alors repris les mêmes simulations, dans le cas de ce modèle, en prenant les vraies valeurs  $(B_0, \beta^0)$  du paramètre comme valeurs initiales de la procédure. Les Figures 5.14 et 5.15 confirment la présence de maxima locaux, puisque les courbes ne sont pas identiques. Cependant l'initialisation  $(B_0, \beta^0)$  ne constitue pas une amélioration systématique des résultats. La méthode n'est donc pas adaptée à la séparation de plus de deux sources en présence de bruit.

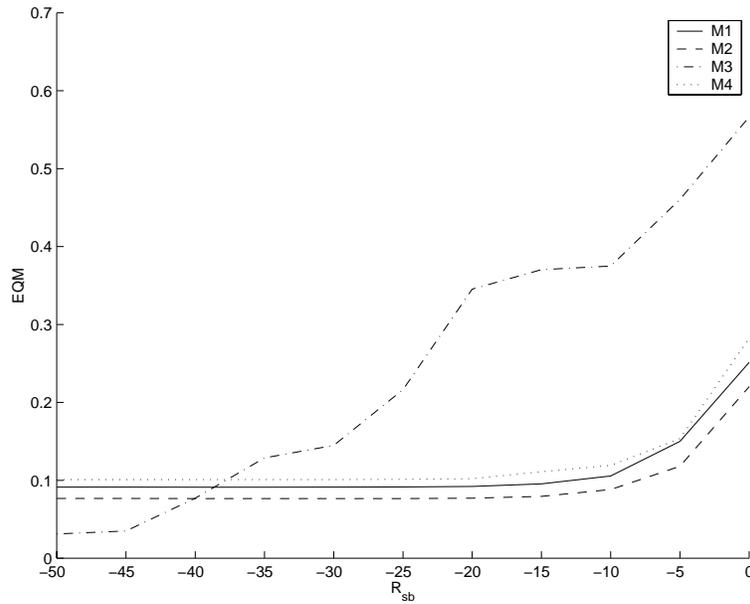


FIG. 5.13 – Synthèse de l'EQM en fonction du rapport signal sur bruit

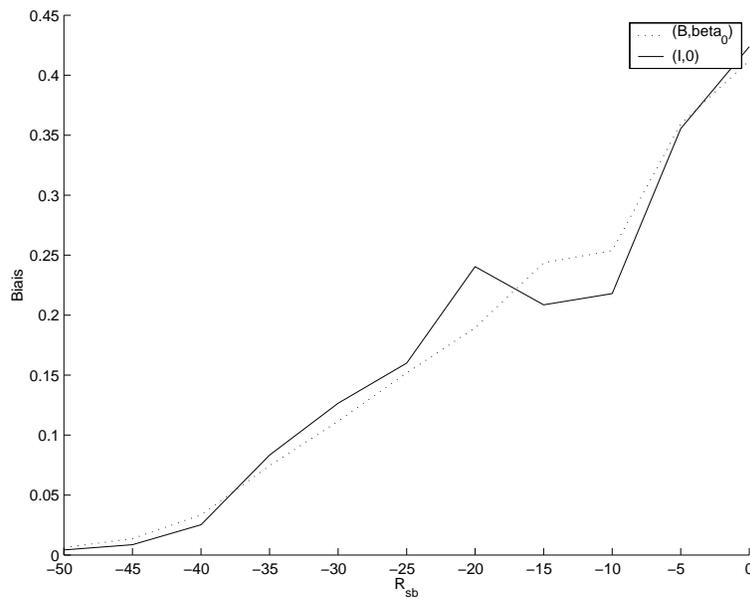


FIG. 5.14 – Synthèse du biais en fonction du rapport signal sur bruit: comparaison selon les conditions initiales, modèle M3

## 5.4 Comparaison avec la procédure QMV

L'objectif de ce paragraphe est d'analyser, par simulation, l'importance de chacun des points qui différencient les procédures MVE et QMV présentés dans le Paragraphe 4.4.

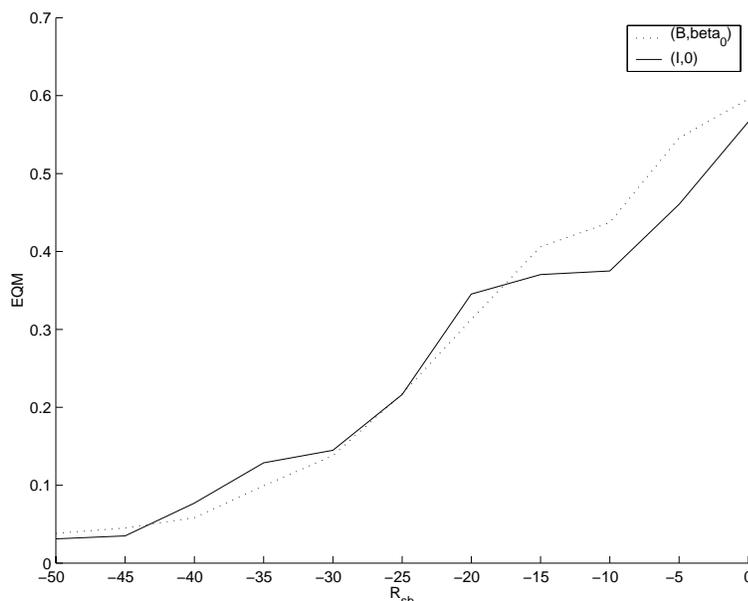


FIG. 5.15 – Synthèse de l'EQM en fonction du rapport signal sur bruit : comparaison selon les conditions initiales, modèle M3

### 5.4.1 Quelques exemples significatifs

Nous exhibons tout d'abord, à l'aide de trois exemples appropriés, les différences importantes qui peuvent surgir entre les deux estimations, soit du fait de l'estimation des filtres soit de celui de la méthode de résolution du système de séparation. Chaque exemple se place dans le cadre d'une seule séquence de longueur  $T = 250$  du modèle à trois sources autorégressives M3. Les filtres dits optimaux sont ceux du modèle simulé. Les filtres symétriques  $\Phi_i$ , choisis *a priori* pour la procédure QMV, sont construits par la convolution (4.19) appliquée aux filtres  $\phi_i$  donnés par les lignes des matrices  $\phi$  ou  $\phi'$  ci-dessous. Dans le cas de  $\phi$ , les ordres sont ceux des modèles simulés. Ils sont fixés à 4 pour  $\phi'$ .

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On compare les estimations  $\hat{A}$  de  $A$  sous leur forme normalisée, correspondant à  $\bar{A}_1$  donnée en (5.1). On omet l'indice <sub>1</sub> et la barre  $\bar{\phantom{x}}$  afin d'alléger les notations. De plus dans  $\hat{A}_{MVE}^I$ , l'indice *MVE* indique la procédure utilisée et l'exposant  $I$  représente la matrice initiale de cette procédure. On remplace aussi  $\hat{A}_{QMV}$  par  $\tilde{A}_{QMV}$  pour indiquer l'utilisation des filtres optimaux, donc identiques à ceux de MVE, dans le cas de QMV.

**Exemple 1** Ce premier exemple utilise les filtres issus de  $\phi$  pour  $\hat{A}_{QMV}^I$ . Cette estimation est très mauvaise alors que l'utilisation des filtres optimaux conduit à une estimation  $\tilde{A}_{QMV}^I$  très proche de  $\hat{A}_{MVE}^I$ . De fait, la différence est due au choix des filtres, mais la présence de maxima locaux, ou pour le moins de solutions parasites dans le système de séparation, est sans doute la raison d'un tel écart, comme le montre l'exemple qui suit.

$$\hat{A}_{QMV}^I = \begin{pmatrix} 0.5797 & 0.5321 & 0.0139 \\ 0.4119 & 0.3924 & -0.5070 \\ 0.7030 & 0.7503 & -0.8618 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_{QMV}^I = \begin{pmatrix} 0.8067 & 0.5515 & 0.2721 \\ 0.3004 & 0.3865 & 0.4873 \\ 0.5089 & 0.7392 & 0.8297 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{MVE}^I = \begin{pmatrix} 0.8072 & 0.5725 & 0.3041 \\ 0.2973 & 0.3723 & 0.4807 \\ 0.5099 & 0.7305 & 0.8225 \end{pmatrix}$$

**Exemple 2** Dans les mêmes conditions que précédemment, mais avec une autre séquence, le changement de matrice initiale conduit à deux résultats différents pour la procédure QMV alors que ce n'est pas le cas pour MVE. Le fait d'estimer les filtres doit permettre d'échapper au piège des solutions parasites.

$$\hat{A}_{QMV}^I = \begin{pmatrix} 0.7795 & 0.5704 & 0.3695 \\ 0.2937 & 0.3322 & 0.4674 \\ 0.5533 & 0.7512 & 0.8032 \end{pmatrix} \quad \hat{A}_{QMV}^A = \begin{pmatrix} 0.6922 & 0.6286 & 0.2876 \\ 0.3595 & 0.3262 & 0.4827 \\ 0.6257 & 0.7060 & 0.8272 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{MVE}^I = \hat{A}_{MVE}^A = \begin{pmatrix} 0.7945 & 0.5605 & 0.2834 \\ 0.3007 & 0.3665 & 0.4865 \\ 0.5275 & 0.7426 & 0.8264 \end{pmatrix}$$

**Exemple 3** Dans ce dernier exemple, on utilise les filtres issus de  $\phi'$  pour les estimations  $\hat{A}_{QMV}$ . On retrouve les défauts de la procédure QMV déjà illustrés par les exemples précédents. Des filtres arbitraires peuvent donner lieu à des solutions très erronées, même en initialisant la procédure par la vraie matrice de mélange.

$$\hat{A}_{QMV}^I = \begin{pmatrix} 0.6106 & 0.3155 & 0.0956 \\ 0.3951 & 0.4507 & -0.5396 \\ 0.6863 & 0.8351 & -0.8365 \end{pmatrix} \quad \hat{A}_{QMV}^A = \begin{pmatrix} 0.9220 & 0.8728 & 0.4168 \\ -0.3394 & 0.2534 & 0.4451 \\ -0.1863 & 0.4172 & 0.7926 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_{QMV}^I = \begin{pmatrix} 0.8163 & 0.4878 & 0.3214 \\ 0.2879 & 0.3914 & 0.4812 \\ 0.5008 & 0.7803 & 0.8156 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_{QMV}^A = \begin{pmatrix} 0.8140 & 0.4599 & 0.3030 \\ 0.2897 & 0.4087 & 0.4886 \\ 0.5034 & 0.7883 & 0.8182 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{MVE}^I = \hat{A}_{MVE}^A = \begin{pmatrix} 0.7981 & 0.5079 & 0.2875 \\ 0.3015 & 0.3896 & 0.4884 \\ 0.5217 & 0.7682 & 0.8239 \end{pmatrix}$$

### 5.4.2 Effet de l'algorithme de résolution du système de séparation

Il est clair que la différence essentielle entre MVE et QMV provient de l'estimation de la structure des sources. L'écart, lorsqu'il est important, entre deux solutions associées à deux initialisations différentes de la procédure QMV est vraisemblablement dû à la présence de solutions parasites au système de séparation plutôt qu'à la méthode de résolution. Nous avons vu que ce système équivaut à celui de la procédure MVE avec préfenêtrage. Nous pouvons donc mesurer l'effet des approximations utilisées dans la procédure QMV. Nous nous plaçons dans la situation la plus défavorable en considérant des séquences de longueur  $T = 50$ . Par contre nous utilisons les filtres optimaux. Ces filtres sont fixés dans les deux procédures et satisfont (4.19), la différence provient donc uniquement de la méthode de résolution du système de séparation (4.18). La Table 5.7 donne les synthèses du biais et de l'EQM pour les trois modèles de sources autorégressives. L'algorithme MVE-PF correspond à la technique de relaxation de la procédure MVE appliquée sur les données avec préfenêtrage (sans estimation des filtres). Dans le cas de deux sources (M1 et M2), on sait que le système n'admet qu'une seule solution normalisée. Les approximations consenties pour la technique de type Newton de la procédure QMV sont donc les seules causes de la perte de qualité observée. Dans le cas de trois sources (M3), il y a le risque supplémentaire de solutions parasites. Cependant, en considérant les pertes relatives dans les trois situations, les résultats sont en accord avec la complexité croissante (de M1 à M3) du système de séparation à résoudre.

Modèle	M1		M2		M3	
Algorithme	MVE-PF	QMV	MVE-PF	QMV	MVE-PF	QMV
Biais	0.0572	0.0728	0.0345	0.0482	0.0446	0.0702
EQM	0.1891	0.2041	0.1421	0.1686	0.1729	0.2313

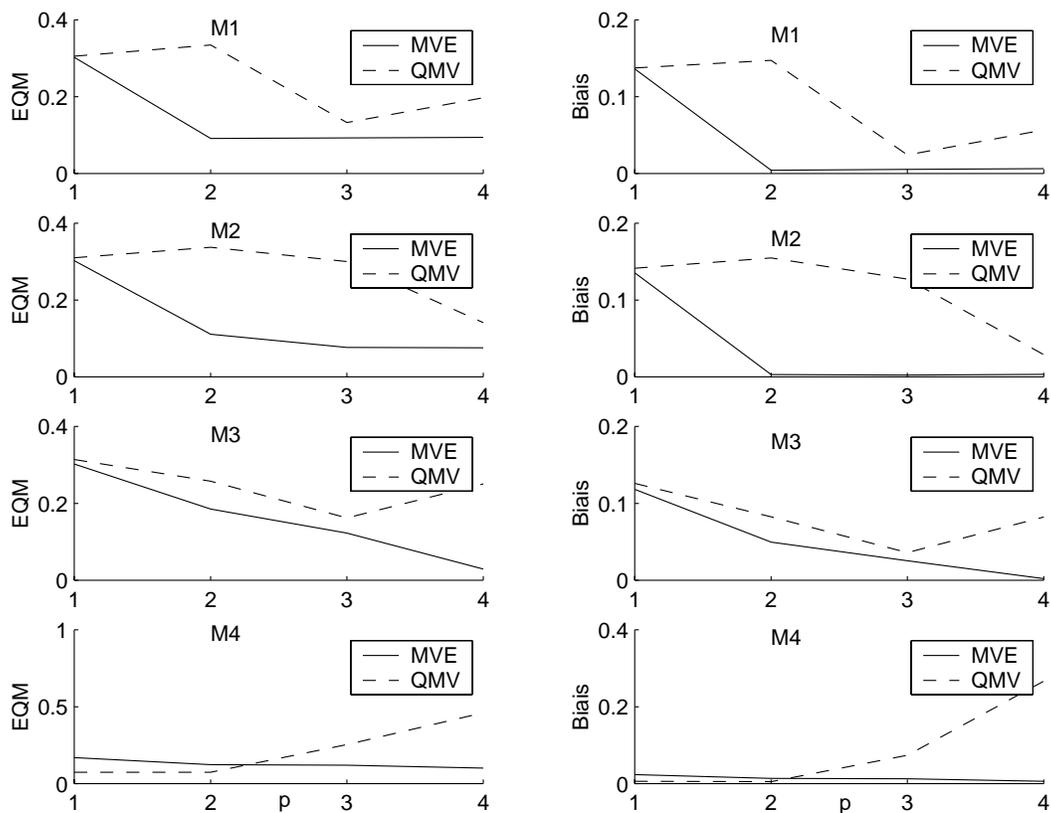
TAB. 5.7 – *Effet de l'algorithme de résolution du système de séparation*

### 5.4.3 Comparaison des deux estimateurs

Nous comparons les performances des deux estimateurs à l'aide des quatre modèles et pour des séquences de longueur  $T = 250$ . Nous utilisons le même ordre d'approximation pour les différentes sources que nous faisons varier de  $p = 1$  à  $p = 4$ . Les filtres de la procédure QMV sont construits par la convolution (4.19) appliquée à ceux figurant dans les lignes, notées  $\phi_p, p = 1, \dots, 4$ , de la Table 5.8.

La Figure 5.16 permet de visualiser les synthèses du biais et de l'EQM pour cet ensemble de simulations. L'estimation de la structure des sources améliore de façon très nette les performances du maximum de vraisemblance. La différence de comportement des deux estimateurs, par rapport à l'ordre des filtres utilisés, est également remarquable. Il est imprévisible pour la procédure QMV, mais cela tient

	$S_1$				$S_2$				$S_3$						
$\phi_1$	1	1			-1	1			-0.5	1					
$\phi_2$	1	1	1		1	-1	1		-0.5	1	0.5				
$\phi_3$	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-0.5	0.5	1			
$\phi_4$	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	0.5	-1	0.5	1

TAB. 5.8 – *Filtres utilisés par la procédure QMV.*FIG. 5.16 – *Synthèses du biais et de l'EQM pour MVE et QMV en fonction de  $p$*

sans doute plus du choix du filtre plutôt que de son ordre. Notons que les écarts se manifestent dans le biais, mais aussi dans la variance (les échelles sont distinctes).

# Chapitre 6

## Autres méthodes du second ordre

Nous considérons dans ce chapitre d'autres méthodes, du second ordre issues pour la plupart du principe de la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices symétriques. Elles se distinguent les unes des autres par la nature des matrices à diagonaliser ou par leur nombre. Contrairement aux méthodes issues du principe du maximum de vraisemblance (MVE et QMV), ces dernières peuvent prendre en compte la présence d'un bruit additif dans le mélange. Dans ce cas, le nombre de capteurs doit être supérieur au nombre de sources afin de pouvoir estimer la puissance du bruit.

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première, nous décrivons brièvement ces méthodes. Ensuite, nous montrons l'existence des estimateurs correspondants dont nous prouvons la consistance et l'unicité asymptotique. Enfin nous présentons l'algorithme de la diagonalisation conjointe approchée pour lequel nous précisons les conditions de convergence. La seconde partie sera consacrée à une étude comparative, par simulation, des différentes méthodes en utilisant l'indice de performance  $I_{EPF}$ . Nous examinons d'abord le comportement de chacune des méthodes en fonction de *l'ordre d'approximation*. Ensuite, nous comparons la vitesse de convergence et la robustesse, relative à la présence d'un bruit additif, de ces méthodes par rapport à celles issues du principe du maximum de vraisemblance.

### 6.1 Description des méthodes

Les méthodes de séparation que nous évoquons dans cette section conduisent à une estimation de la matrice de mélange comportant deux phases. La première, commune à toutes ces méthodes, appelée *étape de blanchiment*, consiste à appliquer une transformation linéaire  $W$  sur le processus d'observation de sorte que les

composantes du nouveau processus  $Y(\cdot) = WX(\cdot)$  soient mutuellement décorréélées :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(YY^t) &= W\mathbb{E}(XX^t)W^t \\ &= WR_X(0)W^t \\ &= WAR_S(0)A^tW^t = I.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Si  $(U, \Delta)$  est une décomposition en valeurs propres de la matrice  $R_X(0)$ , alors

$$UR_X(0)U^t = \Delta.$$

Par conséquent,  $W = \Delta^{-\frac{1}{2}}U$ , où  $\Delta^{-\frac{1}{2}}$  désigne une racine carrée de la matrice diagonale  $\Delta$ , est une matrice de blanchiment du processus d'observation. Une estimation de la matrice  $W$  est obtenue à partir de la décomposition spectrale de l'estimation  $\hat{R}_X(0) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t)X(t)^t$  de la matrice  $R_X(0)$ .

Nous déduisons de la relation (6.1) que la matrice  $U = WA$  est unitaire. De plus, pour tout retard positif  $\nu$  on a :

$$R_Y(\nu) = WAR_S(\nu)^tA^tW^t.$$

Par conséquent, la matrice  $U$  diagonalise simultanément l'ensemble des matrices  $\{R_Y(\nu), \nu \geq 1\}$ . Ce résultat constitue le fondement des méthodes de séparation basées sur le principe de la diagonalisation conjointe.

### 6.1.1 AMUSE

La méthode AMUSE (*Algorithm for Multiple Unknown Signals Extraction*), introduite par Tong et al [50], est réalisée par la diagonalisation conjointe de deux matrices symétriques, dont l'une est définie positive.

Soient  $\hat{W}$  une estimation de la matrice de blanchiment,  $Y(\cdot) = \hat{W}X(\cdot)$  le processus obtenu à partir de  $X(\cdot)$  après l'étape de blanchiment,  $\nu$  un retard positif,  $\hat{R}_Y(\nu) = \frac{1}{2T} \sum_{t=\nu+1}^T \{Y(t)Y(t-\nu)^t + Y(t-\nu)Y(t)\}$  une estimation symétrique de la matrice d'autocovariance  $R_Y(\nu)$  et  $(\hat{U}, \hat{\Delta})$  une décomposition en éléments propres de la matrice  $\hat{R}_Y(\nu)$ , alors  $\hat{A} = \hat{W}^{-1}\hat{U}$  est un estimateur de la matrice de mélange.

Afin de garantir l'identifiabilité de la matrice  $A$ , il est nécessaire de choisir le retard  $\nu$  de telle sorte que les valeurs propres de la matrice  $R_Y(\nu)$  soient distincts. Cette condition est équivalente à ce que les éléments diagonaux de la matrice  $R_S(\nu)$  soient distincts puisque la matrice  $WA$  est unitaire. Or, dans la pratique, il n'existe aucun moyen de choisir un retard  $\nu$  garantissant la propriété de l'identifiabilité si ce n'est de s'assurer que les valeurs propres de la matrice  $\hat{W}\hat{R}_X(\nu)\hat{W}^t$  sont distinctes. L'auteur ne préconise aucune stratégie pour le choix de ce retard. Par ailleurs, les résultats de simulation (*cf.* Figures 6.4, 6.5, 6.6 et 6.7) montrent que les performances

de la méthode sont affectées par le choix de  $\nu$ . Afin de pallier à ce problème, on peut envisager de se fixer *a priori* un intervalle  $[1 : \nu_{max}]$  et de retenir le retard qui maximise l'écart entre deux valeurs propres consécutives de la matrice  $\hat{R}_Y(\nu)$  lorsque celles-ci sont rangées par ordre croissant ou décroissant. Nous montrons que cette stratégie remédie au problème du choix du retard mais alourdit de façon considérable la méthode puisqu'elle est  $\nu_{max}$  fois plus coûteuse que la version originale. La version d'AMUSE utilisant la nouvelle stratégie du choix du retard sera notée AMUSE\*.

### 6.1.2 SOBI

La méthode SOBI (*Second Order Blind Identification*) introduite par Belouchrani et al [6] est une généralisation de la méthode AMUSE et permet d'améliorer ses performances.

Soit  $[\nu]_p = \{\nu_1, \dots, \nu_p\}$  un ensemble de  $p$  retards, alors  $U = WA$  est une matrice unitaire qui diagonalise simultanément l'ensemble des matrices

$$R_Y([\nu]_p) = \{R_Y(\nu_i), \nu_i \in [\nu]_p\}.$$

Si l'ensemble des retards permet de distinguer les composantes de  $R_S(\cdot)$ , au sens où pour tout couple d'indices différents  $(i, j)$  il existe un retard  $\nu_k \in [\nu]_p$  tel que  $R_{S_i}(\nu_k) \neq R_{S_j}(\nu_k)$ , alors la matrice  $U$  est unique à un facteur signe et une permutation près et se caractérise par l'annulation du critère

$$\mathcal{C}(R_Y([\nu]_p); U) = \sum_{i=1}^p \sum_{k \neq l} [UR_Y(\nu_i)U^t]_{kl}^2.$$

Remarquons que lorsque l'ensemble  $[\nu]_p$  est réduit à un élément, la méthode SOBI coïncide avec la méthode AMUSE.

Soient  $\hat{W}$  une estimation de la matrice de blanchiment et  $\hat{R}_Y([\nu]_p) = \{\hat{R}_Y(\nu_i), \nu_i \in \nu\}$ , où

$$\hat{R}_Y(\nu_i) = \frac{1}{2T} \sum_{t=\nu_i+1}^T \{Y(t)Y(t-\nu_i)^t + Y(t-\nu_i)Y(t)^t\}$$

est une estimation symétrique de la matrice d'autocovariance  $R_Y(\nu_i)$ . La matrice  $U$  est alors estimée par l'argument  $\hat{U}$  qui minimise le critère

$$\mathcal{C}(\hat{R}_Y([\nu]_p); U) = \sum_{i=1}^p \sum_{k \neq l} [U\hat{R}_Y(\nu_i)U^t]_{kl}^2$$

par rapport à  $U$ . Les auteurs de cette méthode proposent de se fixer *a priori* un retard  $\nu_{max}$  et d'estimer la matrice  $U$  à partir de la diagonalisation conjointe des matrices

$$\hat{R}_Y([1 : \nu_{max}]) = \{\hat{R}_Y(\nu), 1 \leq \nu \leq \nu_{max}\}.$$

### 6.1.3 CVP

La méthode CVP (CoVariance Partielle), introduite dans [17], est définie à partir de la méthode SOBI en remplaçant les matrices d'autocovariance par celles d'autocovariance partielle.

On note  $\varepsilon_X(t, \nu)$  l'erreur de prédiction linéaire (progressive) de  $X(t)$  par son passé immédiat de longueur  $\nu$ ,

$$\varepsilon_X(t, \nu) = \sum_{j=0}^{\nu} A_X(j, \nu) X(t-j), \quad A_X(0, \nu) = I_K, \quad \nu \geq 0,$$

et  $\sigma_X^2(\nu)$  la matrice de covariance de cette erreur. Compte tenu de la réversibilité en temps de la structure au second ordre du processus  $X(\cdot)$ , l'erreur de prédiction linéaire rétrograde  $\varepsilon_X^*(t, \nu)$ , obtenue par inversion du temps, est donnée par les mêmes coefficients  $A_X(j, \nu)$  et sa matrice de covariance est égale à  $\sigma_X^2(\nu)$ . La fonction d'autocovariance partielle  $\delta_X(\cdot)$  est définie par :

$$\delta_X(0) = \mathbb{E}\{X(t)X(t)^t\}, \quad \delta_X(\nu) = \mathbb{E}\{\varepsilon_X(t, \nu-1)\varepsilon_X^*(t-\nu, \nu-1)^t\}, \quad \nu \geq 1.$$

Elle constitue une autre paramétrisation de la structure au second ordre de  $X(\cdot)$ . Elle est en correspondance biunivoque avec  $R_X(\cdot)$  selon l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} \delta_X(0) &= R_X(0) = \sigma_X^2(0) \\ \delta_X(\nu) &= R_X(\nu) + \sum_{j=1}^{\nu-1} A_X(j, \nu-1)R_X(\nu-j), \quad \nu \geq 1, \end{aligned} \tag{6.2}$$

où la mise à jour des coefficients est donnée par  $A_X(\nu, \nu) = -\delta_X(\nu)\sigma_X^2(\nu-1)^{-1}$  et les relations :

$$\begin{aligned} A_X(j, \nu) &= A_X(j, \nu-1) + A_X(\nu, \nu)A_X(\nu-j, \nu-1), \quad j = 1, \dots, \nu-1, \\ \sigma_X^2(\nu) &= \sigma_X^2(\nu-1) - \delta_X(\nu)\sigma_X^2(\nu-1)^{-1}\delta_X(\nu). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Les matrices  $\delta_X(\nu)$  sont symétriques et les seules contraintes que doit satisfaire  $\delta_X(\cdot)$  sont que les matrices  $\sigma_X^2(\nu)$ , construites par la récurrence ci-dessus à partir de la condition initiale  $\sigma_X^2(0) = \delta_X(0)$ , soient définies positives.

Dans le cas du mélange instantané  $X(\cdot) = AS(\cdot)$ , on vérifie facilement les égalités :

$$\varepsilon_X(t, \nu) = A\varepsilon(t, \nu), \quad \varepsilon_X^*(t, \nu) = A\varepsilon_S^*(t, \nu), \quad \nu \geq 0.$$

On a alors les relations  $\delta_X(\nu) = A\delta_S(\nu)A^t$ ,  $\nu \geq 0$ , dans lesquelles les matrices d'autocovariance partielle  $\delta_S(\nu)$  du processus source sont diagonales. La mise en

œuvre de la méthode peut être réalisée à partir de la version empirique  $\hat{\delta}_X(\nu)$  associée à  $\hat{R}_X(\cdot)$  (c.f Section 6.2.1) ou en utilisant une estimation directe  ${}_{\epsilon}\delta_X(\nu)$  de  $\delta_X(\nu)$  selon le critère des moindres carrés et  ${}_{\epsilon}\delta_X(0) = \hat{R}_X(0)$  (c.f Section 6.2.2). Bien que la fonction  ${}_{\epsilon}\delta_X(\cdot)$  qui en résulte ne satisfasse pas nécessairement les contraintes de  $\delta_X(\cdot)$ , la matrice orthogonale  $\hat{U}$  est obtenue en minimisant  $\mathcal{C}({}_{\epsilon}\delta_Y(\nu_1), \dots, {}_{\epsilon}\delta_Y(\nu_p); U)$  par rapport à  $U$ , où  ${}_{\epsilon}\delta_Y(\nu_i) = \hat{W}_{\epsilon}\delta_X(\nu_i)\hat{W}^t, i = 1, \dots, p$  sont définis à partir d'une matrice de blanchiment  $\hat{W}$ . La méthode directe est très onéreuse par rapport à la méthode empirique. La Figure 6.1 montre que les performances de la version empirique sont aussi bonnes que celles de la version directe. Il est recommandé dans ce cas d'utiliser la méthode empirique.

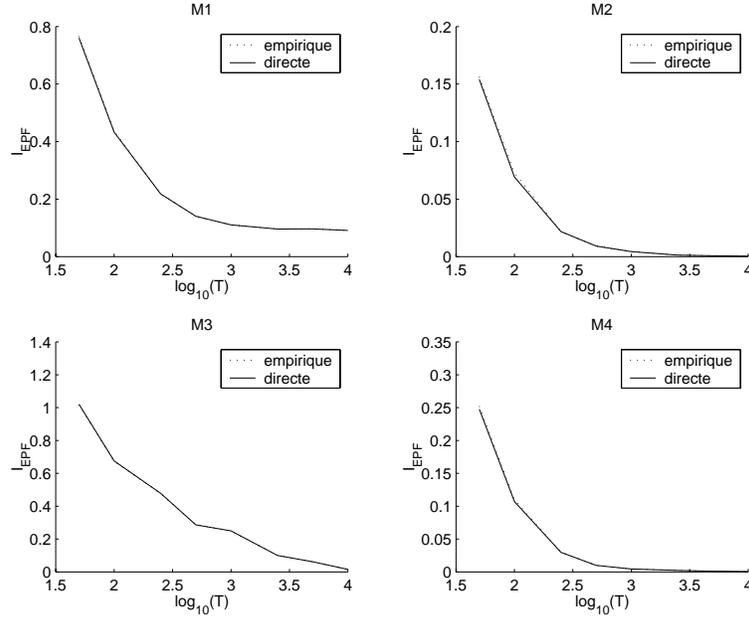


FIG. 6.1 –  $I_{EPF}$  en fonction de  $T$ , méthode CVP

### 6.1.4 CPSR

La méthode CPSR (autoCorrélation Partielle Symétrique Réursive), introduite dans [17], est associée à une forme particulière des fonctions d'autocorrélation partielle  $\beta_X(\cdot)$ . Ces fonctions sont obtenues par normalisation de  $\delta_X(\cdot)$ :

$$\beta_X(0) = \delta_X(0), \quad \beta_X(\nu) = \sigma_X(\nu - 1)^{-1} \delta_X(\nu) \sigma_X(\nu - 1)^{-t}, \quad \nu \geq 1, \quad (6.4)$$

où,  $\sigma_X(\nu)$  désigne une racine carrée de  $\sigma_X^2(\nu)$ . Comme  $R_X(\cdot)$  ou  $\delta_X(\cdot)$ , une telle fonction  $\beta_X(\cdot)$  caractérise la structure au second ordre de  $X(\cdot)$ . L'intérêt de cette paramétrisation réside dans l'absence de contraintes entre les différentes matrices  $\beta_X(\nu)$ . Pour un processus réversible en temps et ne présentant pas de singularités (les matrices  $\sigma_X^2(\nu)$  sont non singulières),  $\beta_X(\nu)$  est une matrice symétrique quelconque

dont les valeurs singulières sont strictement inférieures à un. La correspondance avec  $\delta_X(\cdot)$ , et par suite avec  $R_X(\cdot)$ , est immédiate à partir des expressions ci-dessus et de la récurrence,

$$\sigma_X^2(\nu) = \sigma_X(\nu - 1)[I_K - \beta_X^2(\nu)]\sigma_X(\nu - 1)^t, \nu \geq 1, \sigma_X^2(0) = \delta_X(0),$$

où, pour une matrice symétrique  $M$ ,  $M^2 = MM^t$ . Cependant, il existe autant de définitions possibles de  $\beta_X(\cdot)$  que de choix de racines carrées des matrices  $\sigma_X^2(\nu)$ . Dans le cas du mélange instantané  $X(\cdot) = AS(\cdot)$ , les matrices  $\beta_S(\nu)$  sont diagonales, mais la correspondance entre  $\beta_X(\cdot)$  et  $\beta_S(\cdot)$  est souvent complexe. En particulier la relation  $\beta_X(\cdot) = A\beta_S(\cdot)A^t$  est généralement fautive. Néanmoins il est possible d'exploiter cette paramétrisation pour certaines définitions bien adaptées à cette situation. C'est le cas de la fonction d'autocorrélation partielle symétrique récursive  $\beta_X(\cdot)_s$ . Dans ce cas les matrices  $\sigma_X(\nu)_s$  sont construites récursivement par :

$$\sigma_X(\nu)_s = \sigma_X(\nu - 1)_s[I_K - \beta_X^2(\nu)_s]^{1/2}, \nu \geq 1, \quad (6.5)$$

à partir de la racine symétrique  $\sigma_X(0)_s$  de  $\sigma_X^2(0)$ , ou de toute autre racine, et où  $[I_K - \beta_X^2(\nu)_s]^{1/2}$  est la racine carrée symétrique de  $[I_K - \beta_X^2(\nu)_s]$ . Pour cette paramétrisation on obtient :

$$\beta_X(0)_s = AA^t, A = \sigma_X(0)_s U^t, \beta_X(\nu)_s = U^t \beta_S(\nu)_s U, \nu \geq 1.$$

La mise en œuvre de la méthode peut être réalisée à partir de la version empirique  $\hat{\beta}_X(\cdot)_s$  associée à  $\hat{R}_X(\cdot)$  (*c.f* Section 6.2.1) ou en utilisant une estimation directe de  $\beta_X(\cdot)_s$  (*c.f* Section 6.2.2). Notons que dans cette méthode, la matrice de blanchiment est estimée par  $\hat{W} = \hat{\sigma}(0)_s^{-1}$ , la matrice  $\hat{U}$  minimisant alors le critère  $\mathcal{C}(\hat{\beta}_X(\nu_1)_s, \dots, \hat{\beta}_X(\nu_p)_s; U)$ . La méthode directe est très onéreuse par rapport à la méthode empirique. La Figure 6.2 montre que les performances de la version empirique se dégradent par rapport à celle de la version directe dans le cas du modèle *M3*. La méthode directe est alors recommandée dans le cas d'un mélange de plus de deux sources.

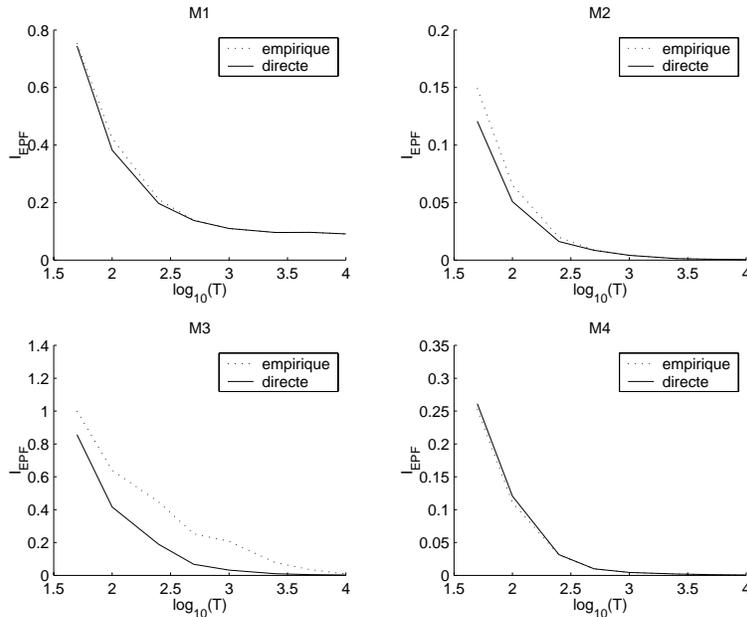
### 6.1.5 CPR

La méthode CPR (autoCorrélation Partielle Canonique Récursive), introduite dans [17], est basée sur le principe de la décomposition spectrale d'une version particulière de la fonction d'autocorrélation partielle  $\beta_X(\cdot)$ , appelée version canonique récursive symétrique. D'une manière générale, les innovations partielles désignent les versions normalisées des erreurs de prédiction linéaire :

$$\eta_X(t, \nu) = \sigma_X(\nu)^{-1} \varepsilon_X(t, \nu), \eta_X^*(t, \nu) = \sigma_X(\nu)^{-1} \varepsilon_X^*(t, \nu), \nu \geq 0.$$

Les fonctions d'autocorrélation partielle  $\beta_X(\cdot)$  s'expriment alors directement en fonction de ces variables :

$$\beta_X(0) = \mathbb{E}\{XX^t\}, \beta_X(\nu) = \mathbb{E}\{\eta_X(t, \nu - 1)\eta_X^*(t - \nu, \nu - 1)^t\}, \nu \geq 1.$$

FIG. 6.2 –  $I_{EPF}$  en fonction de  $T$ , méthode CPSR

Les relations entre  $\eta_X(t, \nu)$  et  $\eta_S(t, \nu)$  sont souvent complexes. Dans le cas de la version symétrique récursive  $\beta_X(\cdot)_s$  ci-dessus, on conserve cependant une relation simple:  $\eta_X(t, \nu)_s = U^t \eta_S(t, \nu)_s$  avec  $A = \sigma_X(0)_s U^t$ . La version canonique récursive symétrique, notée  $\beta_X(\cdot)_c$ , est la seule pour laquelle on ait les égalités  $\eta_X(t, \nu)_c = \eta_S(t, \nu)_c$  pour  $\nu \geq p$ , où  $p$  désigne le plus petit retard  $\nu$  pour lequel les restrictions des composantes de  $\beta_X(\cdot)_c$  à  $\{1, \dots, \nu\}$  sont distinctes. La méthode consiste à exploiter cette propriété.

La fonction canonique  $\beta_X(\cdot)_c$  est construite selon le même principe que la fonction symétrique  $\beta_X(\cdot)_s$ , en remplaçant les racines symétriques par des racines basées sur les décompositions en éléments propres des matrices  $\beta_X(\nu)_c$ . La décomposition spectrale  $\beta = L\Lambda L^t$  d'une matrice symétrique  $\beta$  est définie de façon unique par les conventions suivantes. Les valeurs propres de  $\beta$  sont rangées dans la matrice diagonale  $\Lambda$  par ordre croissant de leur module et les valeurs négatives précèdent les valeurs positives de même module. Pour une valeur propre multiple, le premier vecteur propre est tel que le nombre de composantes nulles, à partir de la première, est maximum. Les vecteurs propres suivants sont sélectionnés de la même manière tout en préservant l'orthogonalité. Alors, les colonnes de  $L$  sont uniques si leur première composante non nulle est positive. Dans le cas particulier de la matrice symétrique définie positive  $\beta(0)$ , la décomposition spectrale est notée  $L(0)\Delta^2(0)L(0)^t$  et les valeurs propres sont rangées dans l'ordre décroissant. Les matrices diagonales  $\Delta(0)$  et  $[I_K - \Lambda^2]^{1/2}$  sont simplement définies à partir de  $\Delta^2(0)$  et  $[I_K - \Lambda^2]$  en prenant les racines carrées des éléments diagonaux. Moyennant ces conventions,  $\beta_X(\cdot)_c$  est

définie en fonction de  $\delta_X(\cdot)$  par le procédé récursif suivant. La décomposition

$$\beta_X(0)_c = \delta_X(0) = L(0)\Delta^2(0)L(0)^t$$

fournit la matrice initiale  $\sigma_X(0)_c = L(0)\Delta(0)$  qui permet de poursuivre pour  $\nu \geq 1$  avec :

$$\beta_X(\nu)_c = \sigma_X(\nu-1)_c^{-1} \delta_X(\nu) \sigma_X(\nu-1)_c^{-t} = L(\nu)\Lambda(\nu)L(\nu)^t, \quad (6.6)$$

et

$$\sigma_X(\nu)_c = \sigma_X(\nu-1)_c L(\nu) [I_K - \Lambda^2(\nu)]^{1/2}. \quad (6.7)$$

L'égalité  $\eta_X(t, \nu)_c = \eta_S(t, \nu)_c$  pour  $\nu \geq p$  s'explique par la nature des composantes des innovations canoniques, bien que la preuve soit beaucoup plus technique. On montre en effet que les composantes de  $\eta_X(t, \nu)_c$  et  $\eta_X^*(t - \nu, \nu)_c$  sont les variables canoniques dans l'analyse canonique de  $\varepsilon_X(t, \nu)$  et  $\varepsilon_X^*(t - \nu, \nu)$ , les corrélations canoniques étant données par le module des éléments diagonaux de  $\Lambda(\nu)$ . Les transformations linéaires  $\varepsilon_X(t, \nu) = A\varepsilon_S(t, \nu)$  et  $\varepsilon_X^*(t - \nu, \nu) = A\varepsilon_S^*(t - \nu, \nu)$  ne changent pas les variables canoniques ou plus exactement les sous-espaces canoniques associés aux corrélations canoniques distinctes. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'attendre  $\nu \geq p$  pour obtenir l'unicité des composantes canoniques. La matrice de mélange  $A$  est alors associée à  $\beta_X(\cdot)_c$  par :

$$A \sim A(\nu) = L(0)\Delta(0)L(1) \dots L(\nu), \quad \nu \geq p.$$

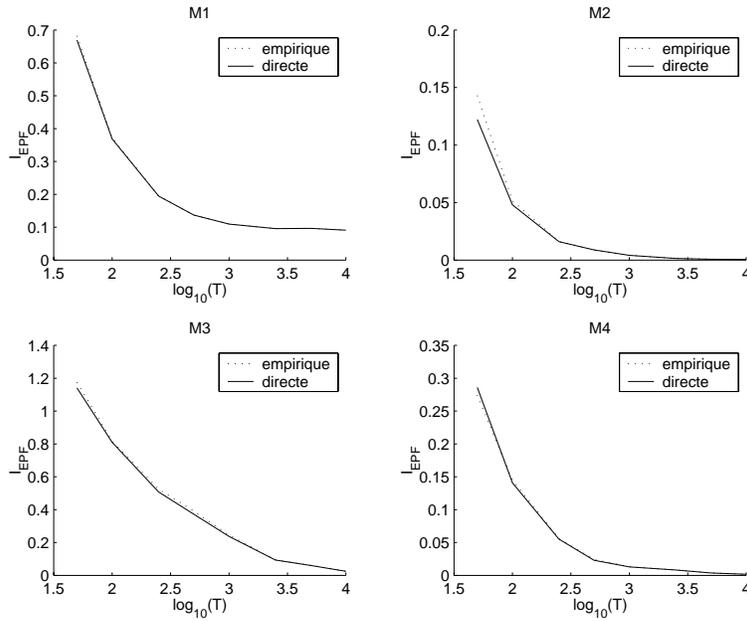
Notons que les matrices  $L(\nu)$ , pour  $\nu > p$ , sont des matrices de permutation. Pour la mise en œuvre de la méthode, on peut utiliser la version empirique  $\hat{\beta}_X(\cdot)_c$  associée à  $\hat{R}_X(\cdot)$  (*c.f* Section 6.2.1) ou une estimation directe (*c.f* Section 6.2.2). On retrouve la matrice de blanchiment estimée par  $\hat{W} = \Delta(0)^{-1}L(0)^t$  et  $\hat{U}^t = \hat{L}(1) \dots \hat{L}(p)$ . Par contre, selon le choix de  $p$ , l'estimateur peut être très mauvais. Il convient donc de retenir l'ordre  $p = \nu$ , dans la plage  $[1 : \nu_{max}]$  fixée *a priori*, pour lequel les valeurs propres de  $\hat{\beta}_X(\nu)_c$  sont le plus dispersées possible. On notera CPCr\* la version de la méthode CPCr utilisant cette stratégie. La méthode directe est très onéreuse par rapport à la méthode empirique. La Figure 6.3 montre que les performances de la version empirique sont aussi bonnes que celles de la version directe. Il est recommandé dans ce cas d'utiliser la méthode empirique.

## 6.2 Estimation des matrices $\delta_X(\cdot)$ , $\beta_X(\cdot)_s$ et $\beta_X(\cdot)_c$

### 6.2.1 Estimation empirique

L'estimation usuelle de la structure au second ordre d'un processus stationnaire réversible  $X(\cdot)$  consiste à considérer les autocovariances empiriques symétriques biaisées :

$$\hat{R}_X(\nu) = \frac{1}{2T} \sum_{t=\nu}^T \{X(t)X(t-\nu)^t + X(t-\nu)X(t)^t\}, \quad \nu = 0, \dots, T-1.$$


 FIG. 6.3 –  $I_{EPF}$  en fonction de  $T$ , méthode CPC

Une estimation empirique ( $\hat{\delta}_X(\cdot)$ ,  $\hat{\sigma}_X^2(\cdot)$ ) des matrices ( $\delta_X(\cdot)$ ,  $\sigma_X^2(\cdot)$ ) est obtenue à partir des matrices  $\hat{R}_X(\cdot)$  et des relations (6.2) et (6.3). Nous en déduisons une estimation empirique des fonctions d'autocorrélation partielle symétrique récursive  $\hat{\beta}_X(\cdot)_s$  (resp. canonique récursives  $\hat{\beta}_X(\cdot)_c$ ) à partir des matrices  $\hat{\delta}_X(\cdot)$  et des relations (6.4) et (6.5) (resp. (6.6) et (6.7)).

### 6.2.2 Estimation directe

La réversibilité en temps du processus  $X(\cdot)$  amène à introduire pour  $n = 0, \dots, N < 2T/3$  l'espace vectoriel, indexé par  $n$ , et engendré par l'ensemble des matrices de taille  $(K, 2(T - n))$

$${}_n\vec{X}(t) = [X(t) \dots X(t + T - n - 1) X(t - t + 1) \dots X(n + 2 - t)],$$

muni du produit intérieur,

$$\langle {}_n\vec{X}(t), {}_n\vec{X}(t - k) \rangle = \frac{1}{2(T - k)} {}_n\vec{X}(t) {}_n\vec{X}(t - k)^t, \quad t = 1, \dots, n + 1.$$

La condition  $n < 2T/3$ , équivalente à  $(n + 1) \leq 2(T - n)$ , permet de garantir *p.s.* l'indépendance linéaire de la séquence  ${}_n\vec{X}(1), \dots, {}_n\vec{X}(n + 1)$  dès que la loi de  $\{X(1), \dots, X(T)\}$  est suffisamment régulière. La séquence  ${}_n\vec{X}(1), \dots, {}_n\vec{X}(n + 1)$  reproduit de façon empirique la structure de  $X(1), \dots, X(n + 1)$  au sens où

$$\mathbb{E}\{\langle {}_n\vec{X}(t), {}_n\vec{X}(t - k) \rangle\} = \mathbb{E}\{X(t)X(t - k)^t\} = R_X(k).$$

Soit  ${}_n\vec{\varepsilon}_X(n+1, n-1)$  l'erreur de prédiction progressive de  ${}_n\vec{X}(n+1)$  sur son passé immédiat de longueur  $n-1$  :

$${}_n\vec{\varepsilon}_X(n+1, n-1) = \sum_{j=0}^{n-1} A_n(j, n-1) {}_n\vec{X}(n+1-j), \quad A_n(0, n-1) = I_K.$$

Son homologue dans le sens rétrograde est donné par le même filtre  $A_n(\cdot, n-1)$  compte tenu de la réversibilité en temps de la structure au second ordre du processus  ${}_n\vec{X}(\cdot)$  :

$${}_n\vec{\varepsilon}^*(1, n-1) = \sum_{j=0}^{n-1} A_n(j, n-1) {}_n\vec{X}(1+j), \quad A_n(0, n-1) = I_K.$$

Le filtre  $A_n(\cdot, n-1)$  est obtenu par la minimisation, par rapport à  $A(1), \dots, A(n-1)$ , du critère :

$$\sum_{t=n+1}^T \left\| \sum_{j=0}^{n-1} A(j)X(t-j) \right\|^2 + \sum_{t=1}^{T-n} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} A(j)X(t+j) \right\|^2, \quad A(0) = I_K.$$

Un algorithme rapide de calcul de ce filtre est donné dans [35]. Une estimation empirique symétrique des matrices  $\delta(\cdot)$  et  $\sigma_X^2(\cdot)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \check{\delta}_X(0) &= \langle {}_0\vec{X}(1), {}_0\vec{X}(1) \rangle = \hat{R}_X(0), \quad \check{\delta}_X(n) = \langle {}_n\vec{\varepsilon}(n+1, n-1), {}_n\vec{\varepsilon}^*(1, n-1) \rangle, \\ \check{\sigma}_X^2(n-1) &= \langle {}_n\vec{\varepsilon}^*(1, n-1), {}_n\vec{\varepsilon}^*(1, n-1) \rangle, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

L'estimation empirique directe  $\tilde{\beta}_X(n)$  de la matrice  $\beta_X(n)$  est la solution en  $\beta$  de l'équation de Lyapunov :

$$B\beta + \beta B = 2C,$$

où,  $B$  et  $C$  sont deux matrices symétriques définies par :

$$B = \tilde{\sigma}_X(n-1)^{-1} \check{\sigma}^2(n-1) \tilde{\sigma}_X(n-1)^{-t}, \quad C = \tilde{\sigma}_X(n-1)^{-1} \check{\delta}^2(n-1) \tilde{\sigma}_X(n-1)^{-t}.$$

Les estimations symétrique récursive  $\tilde{\beta}_X(\cdot)_s$  et canonique récursive  $\tilde{\beta}_X(\cdot)_c$  diffèrent alors par le choix de la racine  $[I - \beta_X(n)^2]^{1/2}$  dans la récurrence :

$$\tilde{\sigma}_X(\nu) = \tilde{\sigma}_X(\nu-1) [I_K - \tilde{\beta}_X^2(\nu)]^{1/2}.$$

Ce choix est donné par la relation (6.5) pour la version symétrique récursive et par la relation (6.7) pour la version canonique récursive.

## 6.3 Diagonalisation conjointe approchée

La diagonalisation conjointe approchée de plusieurs matrices  $\hat{M}_1, \dots, \hat{M}_p$  par une matrice orthogonale  $U$  est définie par la minimisation du critère

$$\mathcal{C}_T(\hat{M}_1, \dots, \hat{M}_p; U) = \sum_{i=1}^p \sum_{1 \leq k \neq l \leq K} [U \hat{M}_i U^t]_{k,l}^2, \quad (6.8)$$

par rapport à  $U$  [10]. La minimisation de ce critère équivaut à la maximisation de

$$\underline{\mathcal{C}}_T(\hat{M}_1, \dots, \hat{M}_p; U) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^K [U \hat{M}_i U^t]_{k,k}^2. \quad (6.9)$$

L'indice  $T$  est là pour indiquer que les matrices  $\hat{M}_i$  dépendent de  $T$ . Rappelons qu'il s'agit des matrices  $\hat{R}_Y(\nu_i)$ ,  ${}_\epsilon \delta_Y(\nu_i)$  ou  $\beta_X(\nu_i)_s$  selon la méthode envisagée et que ces matrices sont réelles symétriques. L'existence d'une solution  $\hat{U}$  est évidente. Le critère 6.8 est minoré par zéro et continu par rapport à  $U$  qui évolue sur un ensemble compact. En ce qui concerne l'unicité, la situation est analogue à celle rencontrée dans la maximisation de la vraisemblance. Il est clair que si  $\hat{U}$  est solution, il en est de même pour  $\Pi^t \mathcal{E} \hat{U}$  puisque ce changement laisse le critère invariant. Par ailleurs, pour une matrice orthogonale  $\tilde{U}$  quelconque, on a  $\mathcal{C}_T(\tilde{U} \hat{M}_1 \tilde{U}^t, \dots, \tilde{U} \hat{M}_p \tilde{U}^t; U \tilde{U}^t) = \mathcal{C}_T(\hat{M}_1, \dots, \hat{M}_p; U)$ . Ainsi le changement de la matrice de blanchiment  $\hat{W}$  par  $\tilde{U} \hat{W}$  n'aura pas d'incidence sur la méthode globale si l'on peut garantir l'unicité, aux facteurs  $\mathcal{E}$  et  $\Pi$  près, de la matrice  $\hat{U}$ . Cette unicité n'est envisageable que d'un point de vue asymptotique. Si les sources sont des processus strictement stationnaires et ergodiques, toutes les statistiques du second ordre convergent *p.s.* vers les éléments théoriques correspondants. Ainsi, lorsque  $T$  tend vers l'infini, les matrices  $\hat{W}$ ,  $\hat{R}_Y(\nu_i)$ ,  ${}_\epsilon \delta_Y(\nu_i)$  et  $\beta_X(\nu_i)_s$  convergent *p.s.* vers  $W$ ,  $R_Y(\nu_i)$ ,  $\delta_Y(\nu_i)$  et  $\beta_X(\nu_i)_s$ . Il s'en suit la convergence *p.s.* de  $\mathcal{C}_T(\hat{M}_1, \dots, \hat{M}_p; U)$  vers  $\mathcal{C}_\infty(M_1, \dots, M_p; U)$  où  $M_i$  désigne, selon le cas, l'une des matrices  $R_Y(\nu_i)$ ,  $\delta_Y(\nu_i)$  ou  $\beta_X(\nu_i)_s$ . Les matrices  $M_i$  sont simultanément diagonalisables et le minimum de  $\mathcal{C}_\infty(M_1, \dots, M_p; U)$  est donc égal à zéro. Il est réalisé de façon unique, aux facteurs  $\mathcal{E}$  et  $\Pi$  près, à condition que les restrictions des composantes diagonales de  $R_S(\cdot)$ ,  $\delta_S(\cdot)$  ou  $\beta_S(\cdot)_s$  à  $\nu_1, \dots, \nu_p$  soient distinctes. Dans ce cas  $\mathcal{C}_\infty(M_1, \dots, M_p; U)$  est strictement convexe au voisinage de cette solution. Il suffit alors de vérifier que la convergence de  $\mathcal{C}_T$  vers  $\mathcal{C}_\infty$  est uniforme par rapport à  $U$ , au moins localement, pour obtenir la consistance de ce type d'estimateurs. De plus les deux premières dérivées convergent également uniformément, le minimum de  $\mathcal{C}_T$  est donc réalisé de façon unique pour  $T$  suffisamment grand. Par contre l'existence de minima locaux est probable et constitue là aussi une difficulté incontournable.

Nous nous proposons de démontrer, à travers les quatre lemmes suivants, la convergence uniforme de  $\underline{\mathcal{C}}_T$  et de ses deux premières dérivées. Pour cela nous introduisons une paramétrisation libre des matrices unitaires à l'aide d'angles de rotations



où  $\Theta$  est le vecteur formé par les  $\theta_{ij}$ ,  $1 \leq j < i \leq K$ .

**Lemme 6.3.2** Soit  $\Delta \underline{\mathcal{C}}_T(\Theta) = \underline{\mathcal{C}}_T(\hat{M}_1, \dots, \hat{M}_p; \Theta) - \underline{\mathcal{C}}_\infty(M_1, \dots, M_p; \Theta)$ . Alors  $\Delta \underline{\mathcal{C}}_T(\Theta)$  converge p.s. vers zéro, de façon uniforme par rapport à  $\Theta$ .

**Démonstration** Les matrices  $G_{ij}$  et  $\mathcal{E}$  sont normées. On en déduit la majoration ci-dessous à partir des propriétés de la norme matricielle induite :

$$\begin{aligned} |\Delta \underline{\mathcal{C}}_T(\Theta)| &= \left| \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^K \left( e_k \left[ \prod_{1 \leq j < i \leq K} G_{ij}(\theta_{ij}) \mathcal{E} \{ \hat{M}_i - M_i \} \left( \prod_{1 \leq j < i \leq K} G_{ij}(\theta_{ij}) \mathcal{E} \right)^t \right] e_k^t \right)^2 \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^p \|\hat{M}_i - M_i\|^2. \end{aligned}$$

La démonstration du lemme est acquise puisque  $\hat{M}_i$  converge p.s. vers  $M_i$ .  $\diamond$

**Lemme 6.3.3** Soit  $\dot{\Delta} \underline{\mathcal{C}}_T(\Theta)$  la dérivée de  $\Delta \underline{\mathcal{C}}_T(\Theta)$  par rapport à  $\Theta$ . Alors  $\dot{\Delta} \underline{\mathcal{C}}_T(\Theta)$  converge p.s. vers zéro, de façon uniforme par rapport à  $\Theta$ .

**Démonstration** La dérivée de la matrice  $G_{ij}(\theta_{ij})$  par rapport à  $\theta_{ij}$  est la matrice

$$\begin{pmatrix} \sin \theta_{ij} & -\cos \theta_{ij} \\ \cos \theta_{ij} & \sin \theta_{ij} \end{pmatrix},$$

dont la norme est aussi égale à un. On en déduit une majoration de la valeur absolue de la dérivée de  $\Delta \underline{\mathcal{C}}_T(\Theta)$  par rapport à  $\theta_{ij}$

$$\left| \frac{\partial \Delta \underline{\mathcal{C}}_T}{\partial \theta_{ij}} \right| \leq 2 \sum_{i=1}^p \|\hat{M}_i - M_i\|^2.$$

Le terme de droite de l'inéquation ci-dessus converge p.s. vers zéro.  $\diamond$

**Lemme 6.3.4** Soit  $\ddot{\Delta} \underline{\mathcal{C}}_T(\Theta)$  la dérivée seconde de  $\Delta \underline{\mathcal{C}}_T(\Theta)$  par rapport à  $\Theta$ . Alors  $\ddot{\Delta} \underline{\mathcal{C}}_T(\Theta)$  converge p.s. vers zéro, de façon uniforme par rapport à  $\Theta$ .

**Démonstration** La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme précédent.  $\diamond$

Nous présentons ci-dessous l'algorithme de diagonalisation conjointe approchée des matrices  $\hat{M}_1, \dots, \hat{M}_p$ , introduit par Cardoso et al [10], pour lequel nous précisons les conditions de convergence.

La recherche du maximum est effectuée par rotations planes successives. La maximisation de  $\underline{\mathcal{C}}_T(\hat{M}_1, \dots, \hat{M}_p; G_{kl}(\theta))$  par rapport à  $\theta$  se réduit à celle de

$$a \cos^2 2\theta + b \sin^2 2\theta - 2c \cos 2\theta \sin 2\theta,$$

avec :

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^p [\hat{m}_i(k, k) - \hat{m}_i(l, l)]^2, & b &= 4 \sum_{i=1}^p \hat{m}_i(k, l)^2, \\ c &= 2 \sum_{i=1}^p \hat{m}_i(k, l) [\hat{m}_i(k, k) - \hat{m}_i(l, l)]. \end{aligned}$$

Le maximum est réalisé par l'angle  $\hat{\theta}$  satisfaisant

$$\tan 2\hat{\theta} = \frac{a - b - \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2}}{2c},$$

si  $c \neq 0$  et  $\hat{\theta} = 0$  sinon en supposant  $a \geq b$ . Cette dernière hypothèse n'est pas restrictive car la rotation associée à  $\theta = \pi/4$  échange  $a$  et  $b$  et remplace  $c$  par  $-c$ . Par contre,  $(a - b)^2 + c^2 > 0$  est nécessaire pour garantir l'unicité de la solution. Cette condition correspond, d'un point de vue asymptotique, à l'identifiabilité de  $A$ .

Soit  $\hat{U}_0$  une matrice orthogonale réalisant la diagonalisation d'une des matrices  $\hat{M}_i$  et  $\bar{\mathcal{C}}_T(0) = \underline{\mathcal{C}}_T(\hat{M}_1, \dots, \hat{M}_p; \hat{U}_0)$ . L'algorithme construit une suite  $\{\hat{U}_m, m \geq 0\}$  par  $\hat{U}_m = U(\hat{\theta}_m) \hat{U}_{m-1}$ , où  $U(\hat{\theta}_m)$  est la matrice  $G_{k,l}(\theta)$  réalisant le maximum de  $\underline{\mathcal{C}}_T(\hat{U}_{m-1} \hat{M}_1 \hat{U}_{m-1}^t, \dots, \hat{U}_{m-1} \hat{M}_p \hat{U}_{m-1}^t; G_{k,l}(\theta))$ , noté  $\bar{\mathcal{C}}_T(m)$ , obtenue en faisant varier  $k$  et  $l$  dans  $1 \leq l < k \leq K$  jusqu'à la convergence. La suite  $\{\bar{\mathcal{C}}_T(m), m \geq 0\}$  est croissante et majorée par le maximum  $\bar{\mathcal{C}}_T$  du critère [6.9]. Elle converge donc vers une limite  $\bar{\mathcal{C}}_N(\infty) \leq \bar{\mathcal{C}}_T$ . À chaque étape,  $\hat{\theta}_m$  maximise une expression de la forme

$$a_m \cos^2 2\theta + b_m \sin^2 2\theta - 2c_m \cos 2\theta \sin 2\theta.$$

**Lemme 6.3.5** *La suite  $\bar{\mathcal{C}}_T(m)$  vérifie la relation suivante :*

$$\bar{\mathcal{C}}_T(m) - \bar{\mathcal{C}}_T(m-1) \geq \frac{c_m^2}{2\bar{\mathcal{C}}_N}$$

**Démonstration** La variation du critère  $\bar{\mathcal{C}}_T$  de l'étape  $m-1$  à l'étape  $m$  est donnée

par :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} [\bar{\mathcal{C}}_T(m) - \bar{\mathcal{C}}_T(m-1)] &= a_m \cos^2 2\hat{\theta}_m + b_m \sin^2 2\hat{\theta}_m - 2c_m \cos 2\hat{\theta}_m \sin 2\hat{\theta}_m - a_m \\
 &= \frac{a_m + b_m + \sqrt{(a_m - b_m)^2 + 4c_m^2}}{2} - a_m \\
 &= \frac{2c_m^2}{a_m - b_m + \sqrt{(a_m - b_m)^2 + 4c_m^2}} \\
 &\geq \frac{c_m^2}{a_m} \text{ car } |c_m| \leq \sqrt{a_m b_m} \\
 &\geq \frac{c_m^2}{\mathcal{C}_N} \text{ car } a_m \leq \mathcal{C}_N. \diamond
 \end{aligned}$$

On déduit du lemme précédent que  $c_m$  tend vers 0. En admettant que  $a_m$  reste supérieur à  $b_m$  à partir d'un certain rang (ce qui est vrai en situation asymptotique), on en déduit que  $\hat{\theta}_m$  tend aussi vers 0 et

$$\|\hat{U}_m - \hat{U}_{m-1}\|^2 = \text{trace}\{(\hat{U}_m - \hat{U}_{m-1})(\hat{U}_m - \hat{U}_{m-1})^t\} = 4(1 - \cos \hat{\theta}_m)$$

tend alors vers 0. Soit  $\hat{U}(\hat{\Theta}) = \prod_{1 \leq l < k \leq K} G_{kl}(\hat{\theta}_{kl})\mathcal{E}$  une matrice unitaire réalisant la diagonalisation conjointe des matrices  $\hat{M}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Posant  $\hat{D}_i = \hat{U} \hat{M}_i \hat{U}^t$ ,  $i = 1, \dots, p$ , l'annulation du gradient en  $\hat{U}$  équivaut à

$$\sum_{i=1}^p \hat{d}_i(k, l) [\hat{d}_i(k, k) - \hat{d}_i(l, l)] = 0, \quad 1 \leq k < l \leq K. \quad (6.10)$$

Enfin la convergence vers 0 de  $c_{kl}$  dans les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \underline{\mathcal{C}}_T(\hat{M}_1, \dots, \hat{M}_p; G_{k,l}(\theta) \hat{U}_m) = (b_{kl} - a_{kl}) \sin 4\theta - 2c_{kl} \cos 4\theta,$$

montrent que le gradient du critère considéré en  $\hat{U}_m$ , c'est-à-dire  $\theta = 0$ , tend vers 0 et tout point d'accumulation  $\hat{U}^*$  de la suite  $\{\hat{U}_m, m \geq 0\}$  satisfait [6.10]. Les hypothèses du Théorème 26.1 d'Ostrowski ([37], p. 173) sont donc satisfaites, alors l'algorithme converge sinon l'ensemble des solutions de [6.10] a la puissance du continu.

## 6.4 Comparaison des méthodes par simulation

Une étude comparative, par simulation, des qualités des différentes méthodes du second ordre, évoquées dans cette thèse, fait l'objet de cette partie. La comparaison entre ces méthodes sera effectuée à travers l'indice de performance  $I_{EPF}$ . Nous examinons d'abord la robustesse de ces méthodes par rapport à l'ordre d'approximation  $p$ . Cet ordre est interprété différemment selon la méthode à laquelle il est associé :

- MVE :  $p$  est l'ordre d'approximation des modèles autorégressifs associés aux différentes sources.

- QMV :  $p$  détermine l'ordre des filtres séparateurs.
- SOBI :  $p$  représente l'ensemble des retards  $[1 : p]$  des matrices d'autocovariance à diagonaliser simultanément.
- AMUSE :  $p$  est le retard de la matrice d'autocovariance à diagonaliser.
- AMUSE\* :  $p$  détermine le support  $[1 : p]$  de recherche du retard pour lequel les valeurs propres de la matrice d'autocovariance à diagonaliser sont le plus dispersées possible.
- CVP :  $p$  représente l'ensemble des retards  $[1 : p]$  des matrices d'autocovariance partielle à diagonaliser simultanément.
- CPSR :  $p$  détermine l'ensemble des retards  $[1 : p]$  des matrices d'autocorrélation partielle à diagonaliser simultanément.
- CPR\* :  $p$  représente le support  $[1 : p]$  de recherche du retard pour lequel les valeurs propres de la matrice d'autocorrélation partielle à diagonaliser sont le plus dispersées possible.

Les filtres symétriques  $\Phi_i$ , choisis *a priori* pour la procédure QMV, sont construits par la convolution (4.19) appliquée aux filtres  $\phi_i$  donnés par les lignes des matrices  $\phi_{S_k}$ ,  $k = 1, \dots, 3$ , ci-dessous.

$$\phi_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_{S_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_{S_3} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0.5 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 & 0.5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 & 0.5 & 1 & -1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 & 0.5 & 1 & -1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 & 0.5 & 1 & -1 & 0.5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

À l'issue des résultats de cette expérience, nous fixons la valeur de l'ordre d'approximation  $p$  à 6, que nous utiliserons dans la suite. Ensuite nous comparons la vitesse de convergence des différentes méthodes en dressant les graphes représentant l'indice de performance  $I_{EPF}$  en fonction de la taille des séquences  $T$ . Puis nous comparons l'efficacité de ces méthodes à travers l'indice d'efficacité donné par (4.17). Enfin, nous analysons le comportement des différents estimateurs en présence d'un bruit additif dans le mélange pour différentes valeurs du rapport signal sur bruit.

### 6.4.1 Robustesse par rapport à l'ordre d'approximation

On étudie ici l'influence de l'ordre d'approximation sur les qualités de l'estimateur. Pour cela nous utilisons  $r = 200$  répétitions de séquences de longueur  $T = 250$ . Les Figures 6.4, 6.5, 6.6 et 6.7 représentent la variation de l'indice de performance  $I_{EPF}^T$  en fonction de l'ordre d'approximation  $p$ , choisi commun à toutes les méthodes dans chacun des quatre exemples.

On constate que les méthodes QMV et AMUSE sont très sensibles au choix de l'ordre  $p$ . La robustesse de la méthode QMV, par rapport au choix de  $p$ , dépend considérablement du choix des filtres séparateurs. La méthode SOBI présente une légère sensibilité par rapport au choix de  $p$ . La méthode AMUSE\* est assez sensible au choix de  $p$  dans le cas de trois sources. Les méthodes MVE, CPCR\*, CPSR et CVP garantissent une stabilité assez satisfaisante sur tous les modèles. Pour les modèles autorégressifs purs, les méthodes « robustes » atteignent leur stabilité lorsque  $p$  surestime le vrai ordre des sources. Le choix *a priori* d'un ordre assez grand ( $p = 6$ ) constitue une solution simple et satisfaisante pour toutes les méthodes. On constate également que la méthode AMUSE\* corrige d'une façon considérable les défauts d'instabilité de sa version originale AMUSE. Dans la suite, nous supprimons la méthode AMUSE de l'étude comparative.

### 6.4.2 Convergence

Nous comparons ici la vitesse de convergence des différents estimateurs à travers l'indice de performance  $I_{EPF}$ . La Figure 6.8 (resp. 6.9, 6.10 et 6.11) représente la variation de l'indice de performance de chaque estimateur en fonction de  $\log(T)$

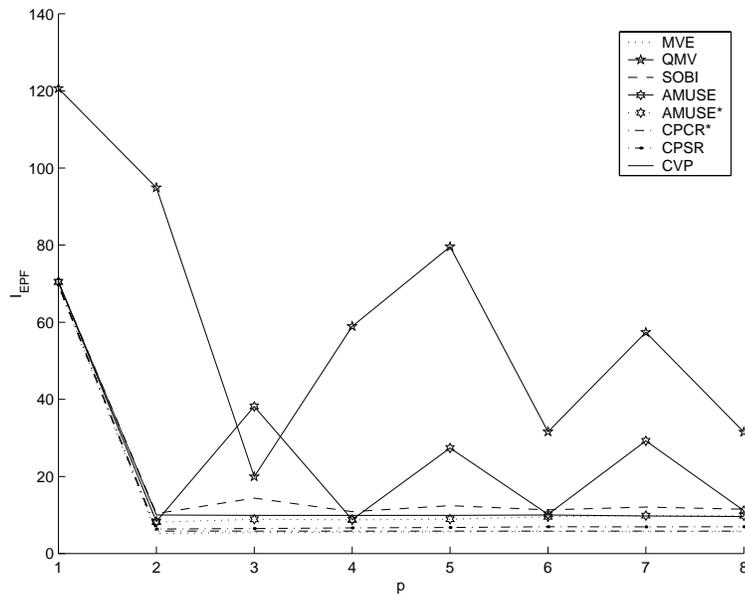


FIG. 6.4 -  $I_{EPF}^T$  en fonction de  $p$ ,  $M1$ ,  $T = 250$ ,  $r = 200$

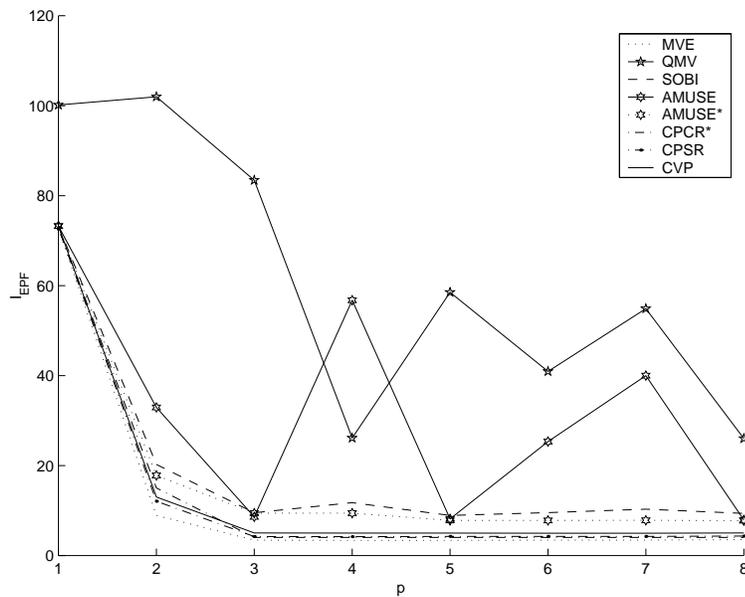
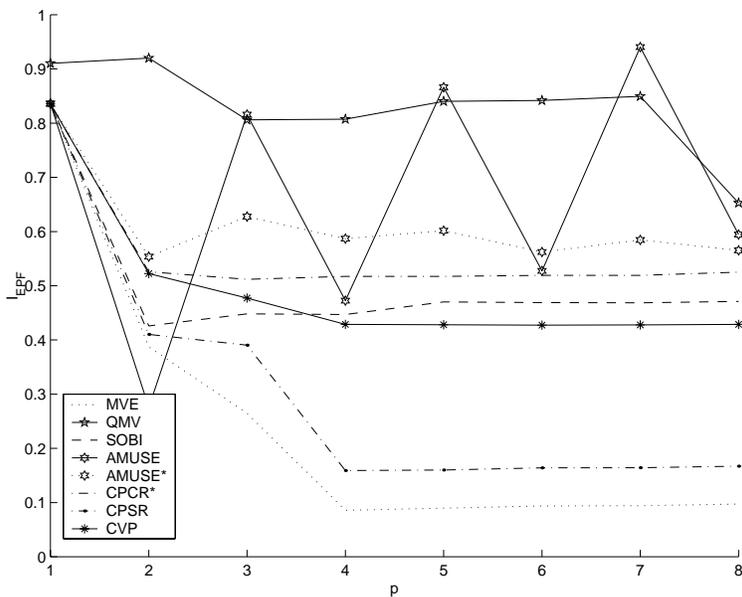
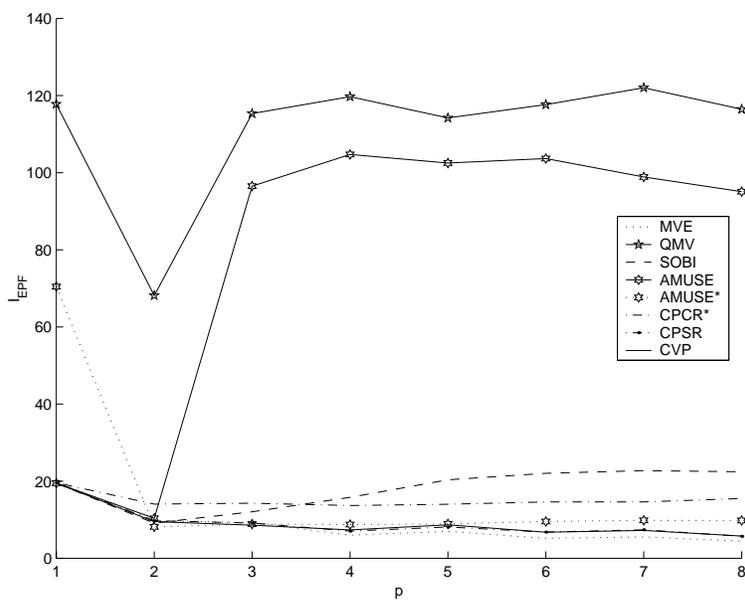


FIG. 6.5 -  $I_{EPF}^T$  en fonction de  $p$ ,  $M2$ ,  $T = 250$ ,  $r = 200$

FIG. 6.6 -  $I_{EPF}^T$  en fonction de  $p$ ,  $M_3$ ,  $T = 250$ ,  $r = 200$ FIG. 6.7 -  $I_{EPF}^T$  en fonction de  $p$ ,  $M_4$ ,  $T = 250$ ,  $r = 200$

pour le modèle M1 (resp. M2, M3 et M4).

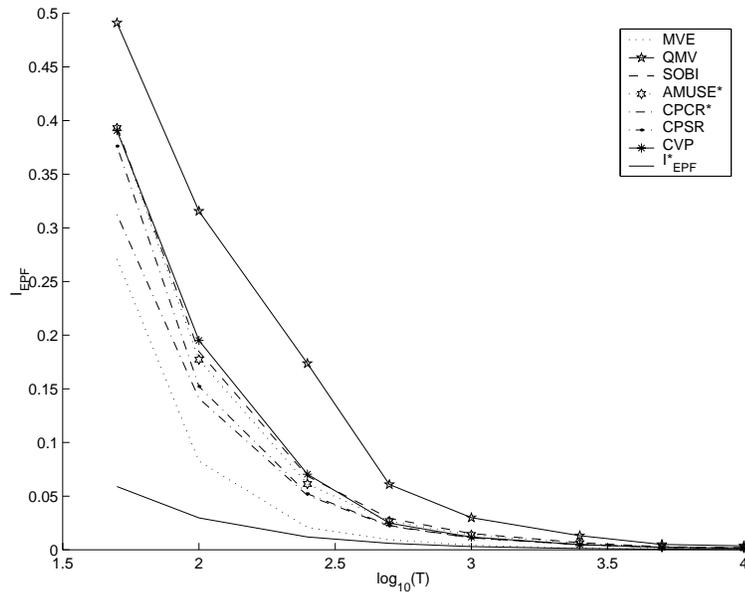


FIG. 6.8 –  $I_{EPF}$  en fonction de  $T$ , M1,  $p = 6$

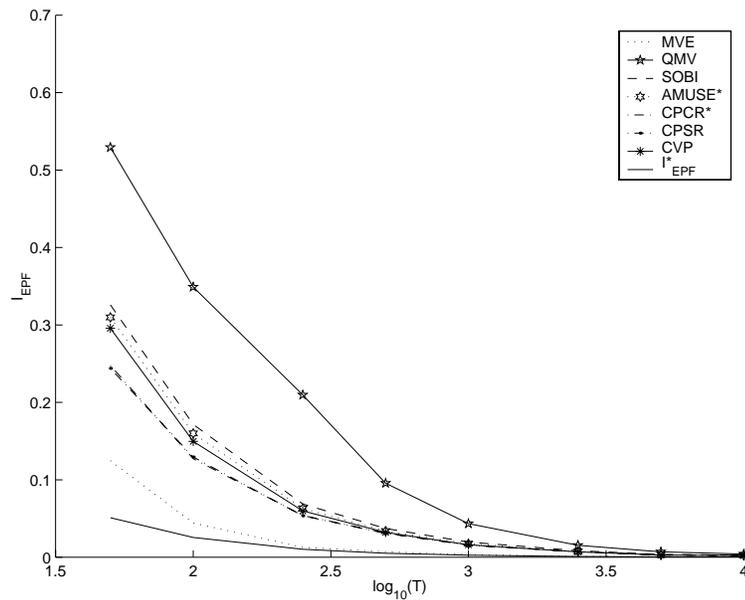
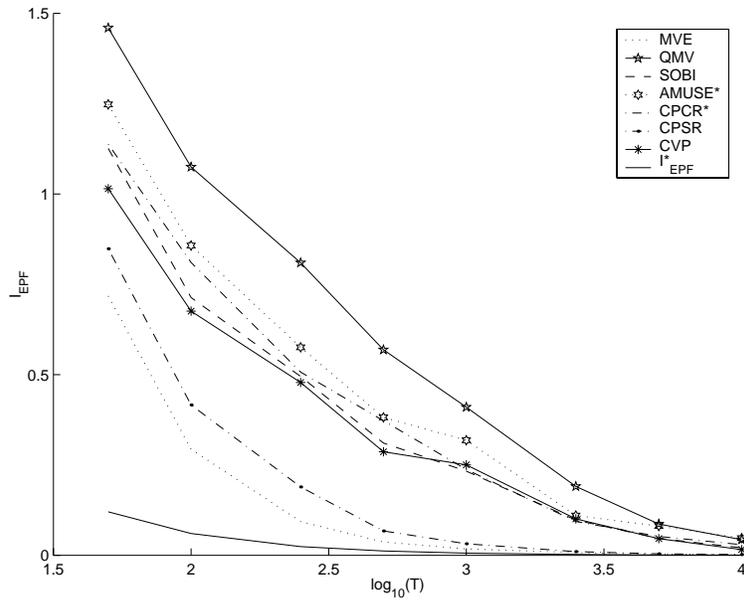
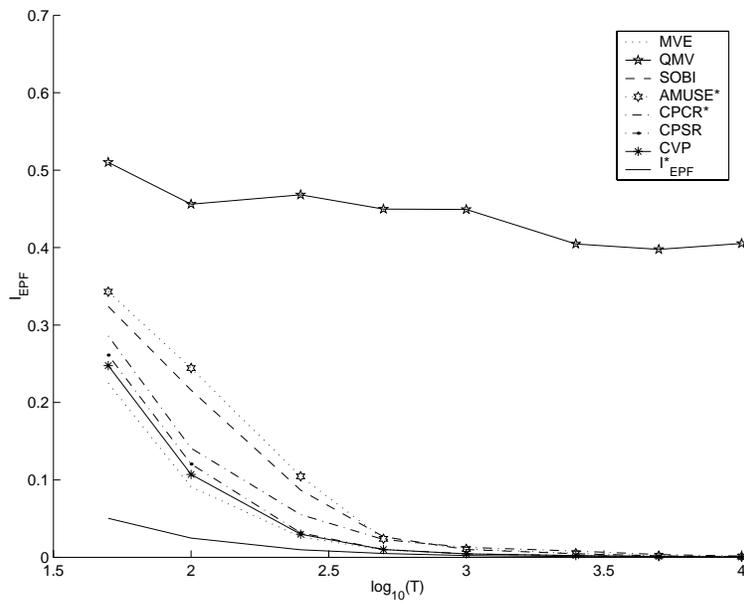


FIG. 6.9 –  $I_{EPF}$  en fonction de  $T$ , M2,  $p = 6$

La méthode MVE est incontestablement la plus rapide à converger. Les méthodes basées sur le principe de la diagonalisation conjointe sont équivalentes dans le cas de deux sources. Ces méthodes se détériorent nettement dans le cas de trois sources à

FIG. 6.10 –  $I_{EPF}$  en fonction de  $T$ ,  $M3$ ,  $p = 6$ FIG. 6.11 –  $I_{EPF}$  en fonction de  $T$ ,  $M4$ ,  $p = 6$

l'exception de CPSR dont les performances restent proches de celles de la méthode MVE. La méthode QMV est la plus lente et semble être divergente dans le cas d'un mélange de sources moyennes mobiles. Cela provient du choix des filtres séparateurs, qui représente une étape assez délicate, pour cette méthode, dans le cas de plus de deux sources. La méthode AMUSE\* converge plus vite que la méthode SOBI dans le cas d'un mélange de deux sources autorégressives, ce qui n'était pas vrai avec la version originale AMUSE dont les performances dépendent considérablement du choix du retard.

### 6.4.3 Efficacité

Les Figures 6.12, 6.13, 6.14 et 6.15 illustrent l'évolution de l'efficacité en fonction de la taille  $T$  des séquences. On constate que la méthode MVE est la plus efficace quel que soit le modèle. Son efficacité atteint des valeurs proches de 1 dans le cas de deux sources autorégressives pures et se détériore dans le cas de trois sources ( $e = 0.35$ ) ou de sources moyennes mobiles ( $e = 0.45$ ). La méthode CPSR se distingue, pour le modèle M3, des autres méthodes issues du principe de la diagonalisation conjointe. Ceci est dû à la méthode d'estimation des matrices  $\beta_X(\cdot)_s$  et non pas à la nature du paramètre puisque la version empirique de cette méthode donne un estimateur aussi efficace que les autres méthodes (*c.f* Figure 6.2). Les méthodes CVP et CPSR s'approchent de l'efficacité de la méthode MVE dans le cas de sources moyennes mobiles.

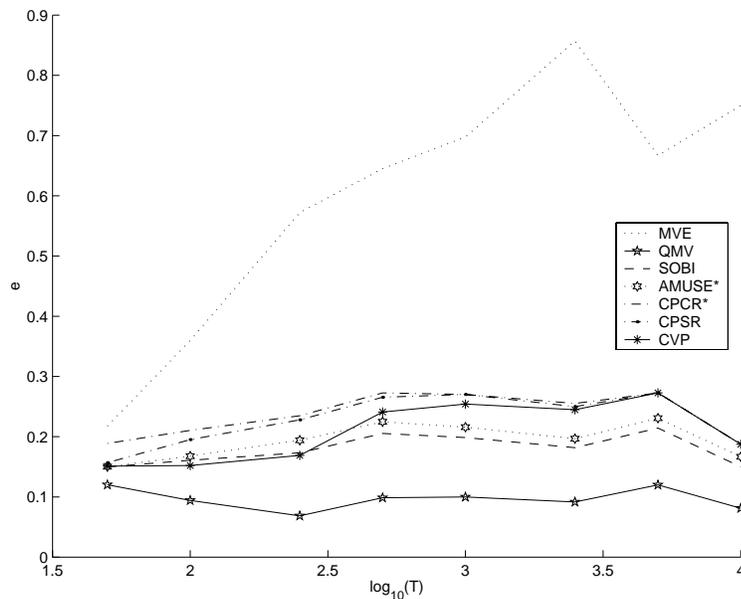
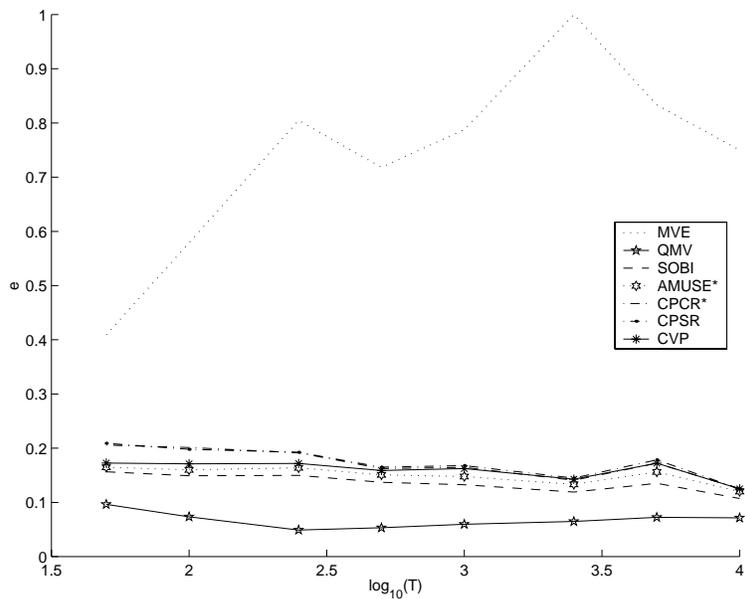
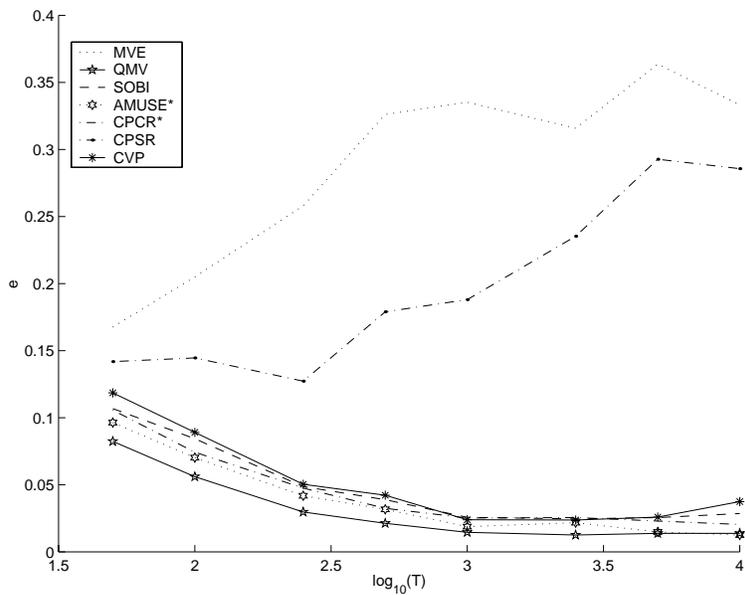
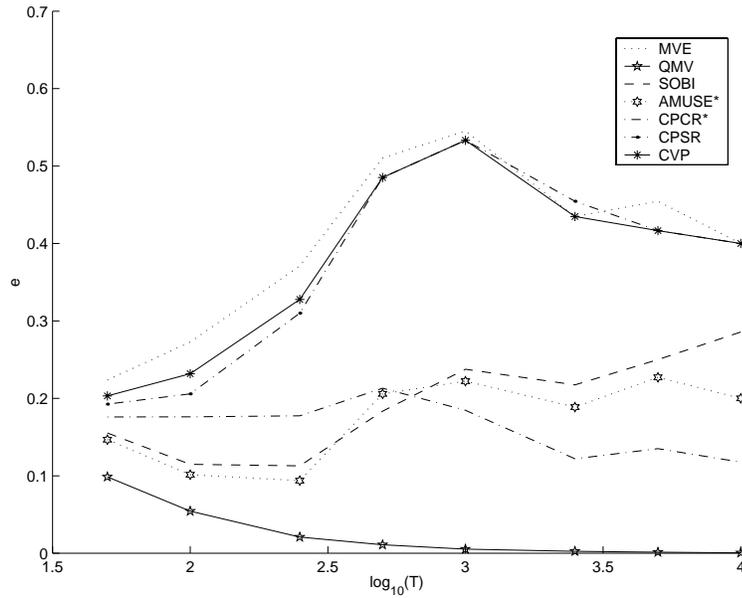


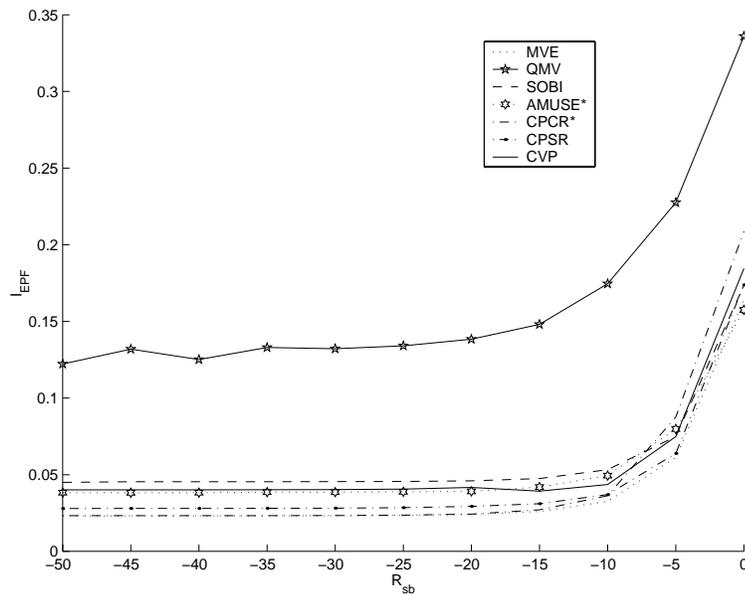
FIG. 6.12 –  $e$  en fonction de  $T$ ,  $M1$ ,  $p = 6$

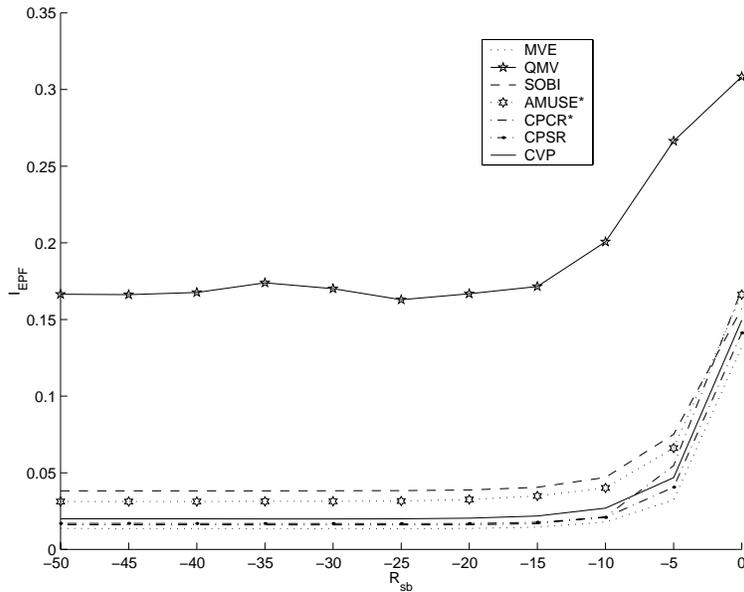
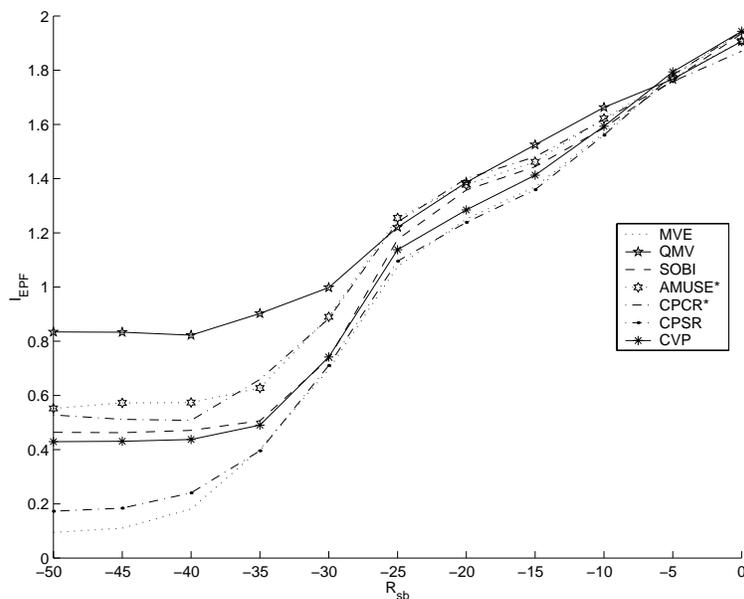
FIG. 6.13 –  $e$  en fonction de  $T$ ,  $M2$ ,  $p = 6$ FIG. 6.14 –  $e$  en fonction de  $T$ ,  $M3$ ,  $p = 6$


 FIG. 6.15 –  $e$  en fonction de  $T$ ,  $M_4$ ,  $p = 6$ 

#### 6.4.4 Robustesse par rapport à la présence d'un bruit additif

Nous examinons dans cette section la robustesse des différents estimateurs face à la présence d'un bruit additif dans le mélange. Les Figures 6.16, 6.17, 6.18 et 6.19 illustrent, pour des séquences de longueur  $T = 250$ , l'évolution de l'indice de performance  $I_{EPF}^T$  en fonction du rapport signal sur bruit.


 FIG. 6.16 –  $I_{EPF}$  en fonction de  $R_{sb}$ ,  $M_1$ ,  $p = 6$ ,  $T = 250$ ,  $r = 200$

FIG. 6.17 –  $I_{EPF}$  en fonction de  $R_{sb}$ ,  $M2$ ,  $p = 6$ ,  $T = 250$ ,  $r = 200$ FIG. 6.18 –  $I_{EPF}$  en fonction de  $R_{sb}$ ,  $M3$ ,  $p = 6$ ,  $T = 250$ ,  $r = 200$ 

Pour les mélanges de deux sources, nous constatons que les performances des différents estimateurs ne se détériorent pas, indépendamment de la nature des sources, tant que le rapport signal sur bruit reste inférieur à  $-10\text{db}$ . Ceci n'est plus vrai dans le cas de trois sources. Dès  $-40\text{db}$ , l'indice de performance augmentent de façon importante. La variation de l'indice de performance en fonction du rapport signal sur bruit devient quasiment linéaire (de pente égale à 0.04) pour  $R_{sb} \geq -25\text{db}$ . Comme

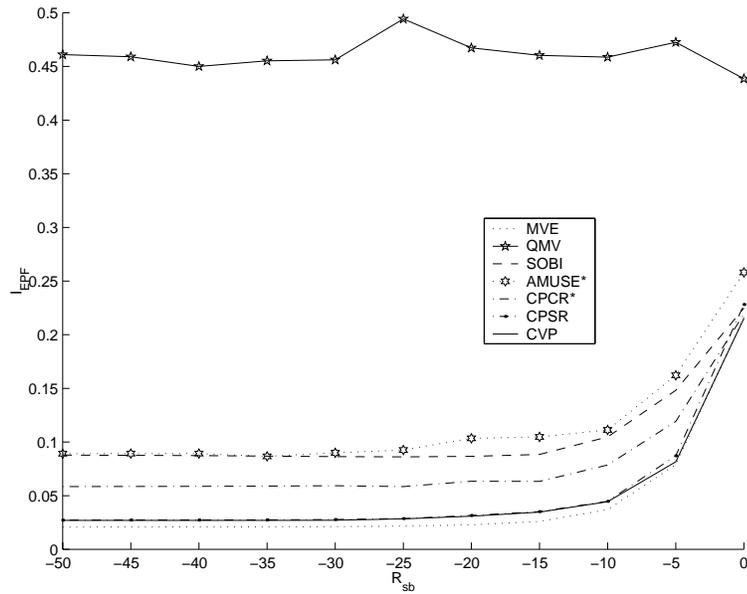


FIG. 6.19 –  $I_{EPF}$  en fonction de  $R_{sb}$ ,  $M_4$ ,  $p = 6$ ,  $T = 250$ ,  $r = 200$

nous l'avons déjà vérifié dans la Section 5.3.3, cela provient de la présence de solutions parasites. Ces méthodes ne sont donc pas adaptées à la séparation de plus de deux sources en présence d'un bruit assez puissant.

# Bibliographie

- [1] Akaike, H., *Statistical predictor identification*, Ann. Inst. Math, 22, pp.203-217, 1970.
- [2] Akaike, H., *A New Look at the Statistical Model Identification*, IEEE, Trans. on Automatic Control, Vol. AC-19, N° 6, pp.716-723, Dec. 1974.
- [3] Amari, S-I. and J-F. Cardoso, *Blind Source Separation - Semiparametric Statistical Approach*, IEEE, Trans. on Signal Processing, Vol.SP-45, N° 11, pp.2692-2700, Dec. 1997.
- [4] Amari, S-I., *ICA of temporally correlated signals-learning algorithm*, First International Workshop on Independent Component Analysis and Signal Separation, Aussois, France, pp. 13-18, Janvier 1999.
- [5] Anemueller, J. and T. Gramss, *On-line blind separation of moving sound sources*, First International Workshop on Independent Component Analysis and Signal Separation, Aussois, France, pp. 331-334, Janvier 1999.
- [6] Belouchrani, A., K. Abed-Meriam, J-F. Cardoso and E. Moulines, *A blind Source Separation Technique Using Second-Order Statistics*, IEEE, Trans. on Signal Processing, Vol. SP-45, N° 2, pp. 434-444, Feb. 1997.
- [7] Burg, J-P., *Maximum entropy spectral analysis*, Presented at the 37<sup>th</sup> Annual International SEG Meeting, Oklahoma City, Oklahoma, 1967.
- [8] Burg, J-P., *A new analysis technique for time series data*, Presented at NATO Advanced Study Institute on Signal Processing, Enschede, Netherlands, 1968.
- [9] Cardoso, J-F., *The equivariant approach to source separation*, in Proc, pp. 55-60, Nolta, 1995.
- [10] Cardoso, J-F. and A. Souloumiac, *Jacobi angles for simultaneous diagonalization*, SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications, Vol. 17, N° 1, pp. 161-164, January. 1996
- [11] Comon, P., *Séparation de mélanges de signaux*, 12<sup>ème</sup> colloque GRETSI, pp. 137-140, Juan-Les-Pins, France, Juin 1989.
- [12] Comon, P., *Separation of stochastic processes whose a linear mixture is observed*, Workshop on Higher-ordre Spectral Analysis, pp. 174-179, Vail (CO), USA, June 1989.
- [13] Comon, P., *Separation of sources using higher-order cumulants*, SPIE, Vol. 1152, Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing IV, San Diego (CA), USA, August 8-10, 1989.

- 
- [14] Comon, P., *Analyse en composantes indépendantes et identification aveugle*, Traitement du Signal, 7(5):435-450, Décembre 1990.
- [15] Comon, P. et J-L. Lacoume, *Statistiques d'ordres supérieurs pour le traitement du signal*, Traitement du Signal-Développements récents, Les Houches, France, Août-Septembre 1993.
- [16] Dégerine, S., *Sample Partial Autocorrelation Function*, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. SP-41, N° 1, pp. 403-407, Jan. 1993.
- [17] Dégerine, S., et R. Malki, *Second-Order Blind Separation of Sources Based on Canonical Partial Innovations*, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. SP-48, N° 3, Mar. 2000.
- [18] Delfosse, N. et P. Labouton, *Séparation adaptative de sources indépendantes par une approche de déflation*, 14<sup>ème</sup> colloque GRETSI, Juan-les-Pins, France, pp. 313-316, 1993.
- [19] De Luna, X., *An improvement of Akaike's PFE criterion to reduce its variability*, Journal of Time Series Analysis, 19(4), pp. 457-471, 1995.
- [20] Feng, M. and K. Kammeyer, *Application of source separation algorithms for mobile communication environment*, First International Workshop on Independent Component Analysis and Signal Separation, Aussois, France, pp. 431-436, Janvier 1999.
- [21] Fety, L., *Méthodes de traitement d'antenne adaptées aux radio-communications*, Thèse de Docteur Ingénieur de l'ENST Paris, 1988.
- [22] Gaeta, M., *Les statistiques d'ordre supérieur appliquées à la séparation de sources*, Thèse de Doctorat, CEPHAG-ENSIEG Grenoble, Juillet 1991.
- [23] Garat, P., *Approche statistique pour la séparation aveugle de sources*, Thèse de Doctorat, Univ. J. Fourier, Grenoble, 1994.
- [24] Geronimus, Y. L., *Polynomials orthogonal on a circle and interval*, Pergamon Press, 1960.
- [25] Golub, G-H. and F-V. Loan, *Matrix computation*, The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [26] Hannan, E-J., *Multiple Time Series*, Wiley series in probability and mathematical statistics, 1970.
- [27] Héroult, J. et C. Jutten, and B. Ans, *Détection de grandeurs primitives dans un message composite par une architecture de calcul neuromimétique en apprentissage non supervisé*, 10<sup>ème</sup> colloque GRETSI, pp. 1017-1022, Nice, France, 20-24 Mai 1985.
- [28] Héroult, J. et C. Jutten, *Une solution neuromimétique au problème de séparation de sources*, Traitement du Signal, Vol. 5, N° 6, pp. 389-403, 1988.
- [29] Jutten, C. and J. Héroult, *Blind separation of sources, Part I: An adaptive algorithm based on neuromimetic architecture*, Signal Processing, Vol. 24, N° 1, pp. 1-10, 1991.
- [30] Kailath, T., A. Vieira, and M. Morf, *Inverses of Tœplitz operators, innovations, and orthogonal polynomials*, SIAM J, 20(1), pp. 106-119, 1978.

- 
- [31] Kay, S-M., *Recursive maximum likelihood estimation of autoregressive processes*, IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-31, N<sup>o</sup> 1, pp. 56-65, 1983.
- [32] Lascaux, P., R. Theodor, *Analyse numerique matricielle appliquee à l'art de l'ingénieur*, Masson, 1987.
- [33] Levinson, N., *The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction*, J. Math. Phys., 25, pp.261-278, 1947.
- [34] Macchi, O. and E. Moreau, *Self adaptive source separation using correlated signals and cross-cumulants*, Workshop Athos Working group, Girona, Spain, June 1995.
- [35] Malki, R., *Autocorrélations partielles empiriques d'une série vectorielle et application à la séparation de sources*, Thèse de Doctorat, Univ. J.Fourier, Grenoble, 1997.
- [36] Moreau, E. and O. Macchi, *New self-adaptive algorithms for source separation based on contrast functions*, IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order statistics, pp. 215-219, South Lac Tahoe, USA (CA), June 1993.
- [37] Ostrowski, A-M., *Solution of equations in Euclidean and Banach spaces*, 3<sup>rd</sup> edition, Academic Press, NewYork, 1973.
- [38] Pajunen, P. and A. Hyvarinen, and J. Karhunen. *Non linear blind source separation by self-organizing maps*, ICONIP 96, volume 2, pp. 1207-1210, Hong-Kong, Sept 1996.
- [39] Parzen, E., *Some Recent Advances in Time Series Modeling*, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-19, pp. 723-730, dec. 1974.
- [40] Pham, D-T., *Maximum likelihood estimation of autoregressive model by relaxation on the reflection coefficients*, IEEE, Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-36, N<sup>o</sup> 1, pp. 175-177, Jan. 1988.
- [41] Pham, D-T., *Cramér-Rao bounds for AR parameter and reflection coefficient estimators*, IEEE, Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-37, N<sup>o</sup> 5, pp. 769-772, May. 1989.
- [42] Pham, D-T., *Séparation aveugle de sources via une analyse en composantes indépendantes*, 15<sup>ème</sup> colloque GRETSI, Juan-les-Pins, France, p. 229-292, 1995.
- [43] Pham, D-T. and P. Garat, *Blind separation of mixture of independent sources through a quasi-maximum likelihood approach*, IEEE, Trans. on Signal Processing, vol. 45, N<sup>o</sup> 7, pp. 1712-1725, july 1997.
- [44] Pham, D-T., *Blind separation of instantaneous mixture of sources based on order statistics*, Rapport de recherche, EDICS Classification : SP 3.5, SP 2.5.4, 1998.
- [45] Puntonet, C., A. Mansour and C. Jutten, *A geometrical algorithm for blind separation of sources*, 15<sup>ème</sup> colloque GRETSI, Juan-les-pins, France, pp. 289-292, 1995.
- [46] Quenouille, M. H., *Approximate tests of correlation in time series*, J. Roy. Statist. Soc. B11, pp. 68-84, 1949.

- [47] Rissanen, J. *Modeling by shortest data description*, Automatica 14, pp. 465-471, 1978.
- [48] Szu, H., T. Yamakawa and C. Hsu, *Visual image communication using advanced neural networks*, First International Workshop on Independent Component Analysis and Signal Separation, Aussois, France, pp. 121-126, Janvier 1999.
- [49] Taleb, A., *Séparation de sources dans les mélanges non linéaires*, Thèse de Doctorat, LIS-INPG, 1999.
- [50] Tong, L., V-C. Soon, Y-F. Huang and R. LIU, *AMUSE: A new blind identification algorithm*, in Proc. IEEE ISCAS, New Orleans, LA., pp. 1784-1786, May 1990.
- [51] Tong, L., R.liu, V. C. Soon, *Indeterminacy and identifiability of blind identification*, IEEE, Trans. on Circuits and Systems, vol. CS-38, pp. 499-509, May 1991.
- [52] Vandenberghe,L., S. Boyd and S-P. WU, *Determinant maximization with linear matrix inequality constraints*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 19, N° 2, pp. 499-553, 1997.
- [53] Vetter, R., J. Vesin, P. Celka and U. Scherrer, *Observer of the autonomic cardiac blind source separation*, First International Workshop on Independent Component Analysis and Signal Separation, Aussois, France, pp. 161-166, Janvier 1999.

---

## Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude du problème de la séparation aveugle d'un mélange instantané de sources gaussiennes autorégressives, sans bruit additif, par la méthode du maximum de vraisemblance exact. La maximisation de la vraisemblance est décomposée, par relaxation, en deux sous-problèmes d'optimisation, également traités par des techniques de relaxation. Le premier consiste en l'estimation de la matrice de séparation à structure autorégressive des sources fixée. Le second est d'estimer cette structure lorsque la matrice de séparation est fixée. Le premier problème est équivalent à la maximisation du déterminant de la matrice de séparation sous contraintes non linéaires. Nous donnons un algorithme de calcul de la solution de ce problème pour lequel nous précisons les conditions de convergence. Nous montrons l'existence de l'estimateur du maximum de vraisemblance dont nous prouvons la consistance. Nous déterminons également la matrice d'information de Fisher relative au paramètre global et nous proposons un indice pour mesurer les performances des méthodes de séparation. Puis nous analysons, par simulation, les performances de l'estimateur ainsi défini et nous montrons l'amélioration qu'il apporte à la procédure de quasi-maximum de vraisemblance ainsi qu'aux autres méthodes du second ordre.

**Mots-clés:** séparation de sources, mélange instantané, maximum de vraisemblance, processus autorégressif, méthode de relaxation.

## Abstract

This thesis deals with the problem of blind separation of an instantaneous mixture of Gaussian autoregressive sources, without additive noise, by the exact maximum likelihood approach. The maximization of the likelihood is divided, using relaxation, into two sub-optimization problems, still solved by relaxation techniques. The first one consists in the estimation of the separating matrix when the autoregressive structure of the sources is fixed. The second one aims to estimate this structure when the separating matrix is fixed. We show that the first problem is equivalent to the determinant maximization of the separating matrix under nonlinear constraints. We propose in this paper an algorithm to compute the solution of such a problem and we look at its convergence properties. We show that the maximum likelihood estimator exists and is consistent. We also give the expression of Fisher's information matrix and we propose a new index to measure the performances of separating methods. Then we study, by computer simulation, the performance of our estimator and show the improvement of its achievements with respect to the quasi-maximum likelihood estimator as well as other second order methods.

**Keywords:** sources separation, instantaneous mixture, maximum likelihood, autoregressive process, relaxation method.