

**THÉORIE  $L^p$  AVEC POIDS POUR LES  
EQUATIONS D'OSEEN DANS DES  
DOMAINES NON BORNÉS**

Ulrich RAZAFISON



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Cadre fonctionnel et propriétés</b>	<b>9</b>
2.1	Introduction et notations générales . . . . .	9
2.2	Rappels sur les espaces $W_\alpha^{m,p}$ . . . . .	10
2.3	Les espaces avec poids $\widetilde{W}_0^{1,p}$ et $\mathcal{M}_0^{1,p}$ . . . . .	14
2.4	Espaces avec poids anisotropes . . . . .	19
2.4.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	19
2.4.2	Inégalités de Hardy . . . . .	25
2.4.3	Inégalités avec des poids vérifiant la condition $A_\infty$ . . . . .	42
2.4.4	Propriétés fonctionnelles d'opérateurs . . . . .	45
2.4.5	Inégalités de Hardy avec poids logarithmiques . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Le problème stationnaire d'Oseen dans <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	61
3.2	Résultats préliminaires . . . . .	63
3.3	Le modèle scalaire . . . . .	68
3.3.1	Le noyau de l'opérateur $T$ . . . . .	68
3.3.2	Résultats d'existence pour le modèle scalaire . . . . .	69
3.3.3	Un résultat de régularité . . . . .	93
3.4	Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	95
3.4.1	Unicité de la solution . . . . .	96
3.4.2	Résultats d'existence . . . . .	97
3.4.3	Un résultat de régularité . . . . .	111

<b>4</b>	<b>Le problème stationnaire d'Oseen dans <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>115</b>
<b>5</b>	<b>Le problème stationnaire d'Oseen dans un domaine extérieur</b>	<b>145</b>
5.1	Introduction et notations . . . . .	145
5.2	Résultats préliminaires . . . . .	147
5.3	Le cas hilbertien . . . . .	151
5.4	Le cas général . . . . .	158
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>169</b>

# NOTATIONS

## Notations générales

$p'$	exposant conjugué de $p$ , c'est-à-dire $p' = \frac{p}{p-1}$
$r =  \mathbf{x} $	norme de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
$\rho = 1 + r$	poids
$s = r - x_1$	poids
$\eta_\beta^\alpha = (1 + r)^\alpha (1 + s)^\beta$	poids anisotrope
$[k]$	partie entière de $k$
$\mathbb{P}_j$	espaces des polynômes de degré inférieur à $j$
$\mathbb{P}_j = \{0\}$	si $j < 0$
$\mathbb{P}_j^\Delta$	polynômes harmoniques de $\mathbb{P}_j$
$B_R$	boule ouverte centrée à l'origine et de rayon $R$
$B'_R$	complémentaire de $\overline{B}_R$
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	ouvert
$\partial\Omega$	frontière de $\Omega$
$\Omega_R = \Omega \cap B_R$	
$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi \mathbf{x} }$	solution fondamentale du laplacien
$(\mathcal{O}, \mathcal{P})$	solution fondamentale d'Oseen
$\mathcal{O}$	solution fondamentale du modèle scalaire d'Oseen
$f * g$	produit de convolution des fonctions $f$ et $g$
$E'$	espace dual de $E$
$\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_n)$	champs de vecteurs
$\mathbf{E} = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$	champs de matrices
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E', E}$	produit de dualité $E', E$
$B' \perp X = X^\perp$	l'orthogonal de $X$ , sous-espace fermé de $B'$
$\text{Supp } u$	support de $u$
$f \sim g$	$c_1 g \leq f \leq c_2 g$ , $c_1, c_2$ deux constantes positives
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$	gradient de $u$
$\text{div } \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$	divergence de $\mathbf{u}$
$\text{rot } \mathbf{u} = (\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j})$	rotationnel de $\mathbf{u}$
$\partial^\lambda u = \frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} u}{\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_n^{\lambda_n}}$	$ \lambda  = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

---

$e_i, 1 \leq i \leq n$	$i$ ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$
$I$	matrice identité d'ordre $n$
$\mathbf{u}^t$	le transposé du vecteur $\mathbf{u}$
$S_2$	sphère unité de $\mathbb{R}^3$
$w_3$	aire de $S_2$
$\mathbf{n}$	la normale extérieure à l'ouvert $\Omega$

### Espaces fonctionnels

$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\Omega$
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	espace des fonctions à décroissance rapide dans $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espace des distributions sur $\Omega$
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	espace des distributions tempérées dans $\mathbb{R}^n$
$L^p(\Omega)$	ensemble des fonctions $u$ mesurables sur $\Omega$ telles que $\int_{\Omega}  u ^p d\mathbf{x} < \infty$
$L^p_{\text{loc}}(\Omega)$	ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega')$ pour tout ouvert borné $\Omega'$ avec $\overline{\Omega'} \subset \Omega$
$W^{m,p}(\Omega)$	espace de Sobolev d'ordre $m$ équipé de la norme $\ \cdot\ _{W^{m,p}(\Omega)}$
$H^m(\Omega)$	espace de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$
$W^{1,p}_0(\Omega')$	adhérence de $\mathcal{D}(\Omega')$ par rapport à la norme $\ \cdot\ _{W^{1,p}(\Omega')}$ , avec $\Omega'$ borné
$\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$	adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ par rapport à la norme $\ \cdot\ _{W^{1,p}(\Omega)}$ , avec $\Omega$ non borné

# Chapitre 1

## Introduction

L'étude des écoulements stationnaires de fluides incompressibles autour d'un obstacle, supposé fixe, occupe une place importante dans la mécanique des fluides. Depuis les travaux de C.L.M.H. Navier [43] et de C.G. Stokes [59], on sait que ce problème est décrit par un système d'équations non-linéaires, dit de Navier-Stokes, et s'écrit dans sa forme la plus simple :

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla\pi &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_* \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.1}$$

On se place ici dans le cas où  $\Omega$  est un ouvert extérieur de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire le complémentaire d'un compact que nous notons  $D$  représentant l'obstacle. La viscosité  $\nu$ , la densité  $\rho$  du fluide, les forces extérieures  $\mathbf{f}$  et la valeur au bord  $\mathbf{u}_*$  sont données. Le problème consiste à trouver le champ de vitesses  $\mathbf{u}$  et la pression  $\pi$ . Par commodité, l'origine du repère est placée à l'intérieur de l'obstacle. Puisque le domaine est non borné, nous devons ajouter au système une condition à l'infini

$$\lim_{|\mathbf{x}|\rightarrow\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\infty, \tag{1.2}$$

où  $\mathbf{u}_\infty$  est un vecteur constant de  $\mathbb{R}^3$ . Ces équations posent de nombreuses questions mathématiques qui restent jusqu'à aujourd'hui sans réponse (voir par exemple [61], [27] et [28]). Il est donc indispensable et naturel de commencer par analyser des

## 1. Introduction

---

problèmes linéaires les approchant. La linéarisation du système (1.1) se fait autour du vecteur constant  $\mathbf{u}_\infty$  et deux cas se présentent :

1) Si  $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{0}$ , on aboutit aux équations bien connues de Stokes :

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla\pi &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_* \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{u} &\rightarrow \mathbf{0} \quad \text{quand } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Mais dans le cas particulier où  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u}_* = \mathbf{0}$  et  $\Omega$  est le complémentaire de la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ , Stokes [59] a construit une solution explicite présentant une symétrie par rapport au centre de la sphère. De plus, si on s'intéresse à la solution fondamentale de Stokes  $(\mathbf{U}, \mathbf{P})$ , elle s'écrit en dimension 3 :

$$U_{ij}(\mathbf{x}) = \left( \delta_{ij}\Delta - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \Phi(\mathbf{x}), \quad P_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \tag{1.4}$$

où

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi r}, \quad r = |\mathbf{x}|.$$

Nous pouvons observer que la vitesse fondamentale satisfait  $\mathbf{U} = O(r^{-1})$ . Elle a donc le même comportement dans toutes les directions de  $\mathbb{R}^3$ . Or cette propriété n'est pas physiquement réaliste. Les expériences montrent, en effet, que durant l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle, apparaît à l'arrière de celui-ci, un sillage parabolique. Dans le souci de décrire cette importante propriété de l'écoulement, Oseen proposa en 1910 (voir [47] et aussi [48]) une linéarisation autour d'un vecteur  $\mathbf{u}_\infty$  non nul.

2) Si  $\mathbf{u}_\infty \neq \mathbf{0}$ , par un changement éventuel de repère, on suppose de plus que  $\mathbf{u}_\infty = h\mathbf{e}_1$  où  $h$  est un réel strictement positif. En posant  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}_\infty$ , on aboutit

## 1. Introduction

---

aux équations d'Oseen suivantes :

$$\begin{aligned}
 -\nu\Delta\mathbf{v} + k\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_1} + \nabla\pi &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\
 \operatorname{div}\mathbf{v} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\
 \mathbf{v} &= \mathbf{u}_* - \mathbf{u}_\infty \quad \text{sur } \partial\Omega, \\
 \mathbf{v} &\rightarrow \mathbf{0} \quad \text{quand } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

où  $k = \rho h > 0$ . Nous pouvons déjà observer que le terme  $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_1}$  est une des différences entre les modèles (1.3) et (1.5). Une autre différence vient de la solution fondamentale d'Oseen  $(\mathcal{O}, \mathcal{P})$  qui est de la forme

$$\mathcal{O}_{ij}(\mathbf{x}) = \left( \delta_{ij}\Delta - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \Phi(\mathbf{x}), \quad \mathcal{P}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial\mathcal{E}(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \tag{1.6}$$

mais maintenant,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi k} \int_0^{ks/2\nu} \frac{1 - e^{-t}}{t} dt, \quad s = r - x_1.$$

Le terme  $s$  représente la structure anisotrope des équations d'Oseen (1.5) et montre l'existence d'un sillage parabolique à l'arrière de l'obstacle. En effet, la région  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, 0 \leq s \leq 1\}$  représente une paraboïde symétrique par rapport à l'axe  $(0, x_1)$ . Par ailleurs, le comportement asymptotique de la vitesse fondamentale est  $\mathcal{O}(\mathbf{x}) = O(r^{-1}(1+s)^{-1})$ . Nous pouvons donc constater que dans la région paraboloidale,  $\mathcal{O}(\mathbf{x}) = O(r^{-1})$ , alors qu'à l'extérieur,  $\mathcal{O}(\mathbf{x}) = O(r^{-2})$ . Autrement dit, le comportement de la vitesse fondamentale diffère selon que l'on se situe à l'intérieur ou à l'extérieur du sillage. Les résultats de l'approximation d'Oseen sont ainsi plus satisfaisantes que ceux de Stokes.

L'objet de cette thèse est d'étudier le problème d'Oseen (1.5) avec la perspective d'utiliser les résultats obtenus pour l'analyse du modèle de Navier-Stokes (1.1), et ainsi, apporter notre modeste contribution à une meilleure compréhension de (1.1). Dans cette optique, l'étude de (1.5) repose sur une théorie  $L^p$ . En effet, dans un domaine non borné, une théorie hilbertienne ne suffit pas pour décrire complètement

## 1. Introduction

---

les différentes propriétés des solutions, dans le cas présent, le comportement à l'infini. Cette dernière propriété nous amène à choisir les espaces de Sobolev avec poids comme cadre fonctionnel de notre étude. Afin de prendre en compte le sillage, un poids anisotrope est aussi considéré et celui-ci est donné par le comportement asymptotique de la vitesse fondamentale d'Oseen  $\mathcal{O}$  dont nous rappelons qu'elle se comporte comme  $r^{-1}(1+s)^{-1}$ . Par ailleurs, pour ses dérivées successives on a :

$$\nabla \mathcal{O}(\mathbf{x}) = O(r^{-3/2}(1+s)^{-3/2}), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{O}(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = O(r^{-2}(1+s)^{-2}), \quad \frac{\partial \mathcal{O}(\mathbf{x})}{\partial x_1} = O(r^{-2}(1+s)^{-1}).$$

Il est ainsi naturel de considérer le poids anisotrope  $\eta_\beta^\alpha$  défini par

$$\eta_\beta^\alpha = (1+r)^\alpha (1+s)^\beta.$$

Faisons à présent un rapide survol des travaux consacrés au problème (1.5). Les premières études complètes sont dues à Faxén [24] qui généralise les méthodes introduites par Odqvist [45] pour le problème de Stokes. Plus récemment, en utilisant la méthode de Galerkin, Finn [25] établit l'existence de solutions pour le problème (1.5) incluant des estimations avec poids. Il montre, en particulier, que si  $r\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , alors le système (1.5) admet une vitesse  $\mathbf{u}$  qui tend vers zéro à l'infini, dans le sens  $r^{-1}\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  (pour la définition de la limite, voir chapitre 3, définition 3.3 et remarque 3.4). Dans [13], Babenko utilise le théorème des multiplicateurs de Lizorkin [40] pour établir l'existence de solutions au problème d'Oseen. Les résultats de Finn et de Babenko sont ensuite étendus et généralisés par Galdi dans [26] et [27]. Nous citons également Farwig [21], [20] qui étudie (1.5) dans des espaces  $L^2$  avec le poids anisotrope  $\eta_\beta^\alpha$ . Il considère l'espace :

$$L_{\alpha,\beta}^2(\Omega) = \{u \in L_{\text{loc}}^2(\Omega), \eta_\beta^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

et montre l'existence de solutions qui s'écrivent explicitement comme la convolée par la solution fondamentale. Il étudie pour cela les opérateurs  $\mathbf{f} \rightarrow \mathcal{O} * \mathbf{f}$  et  $\mathbf{f} \rightarrow \nabla \mathcal{O} * \mathbf{f}$  dans les espaces  $L_{\alpha,\beta}^2(\mathbb{R}^3)$  et les estimations obtenues sur le premier

## 1. Introduction

---

opérateur sont en fait améliorées par l'étude du modèle scalaire

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u + k\frac{\partial u}{\partial x_1} &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= u_* \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Les estimations sur les deux opérateurs ont été étendues aux espaces  $L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$  dans [36] (voir aussi [51]) avec  $1 < p < \infty$ . Dans [22] et [23], le problème d'Oseen posé dans tout l'espace  $\mathbb{R}^n$  est étudié dans les espaces  $L^p_{\alpha,0}(\mathbb{R}^n)$ , c'est-à-dire  $\beta = 0$ .

Le plan de notre travail est le suivant :

Dans le chapitre 2, nous présentons les espaces de Sobolev avec poids isotropes (c'est-à-dire  $\beta = 0$ ) et anisotropes que nous utiliserons. Dans un premier temps, on montre des résultats de densité. Dans un deuxième temps, on établit des inégalités de Hardy avec poids anisotropes qui sont les principaux résultats du chapitre. Elles jouent un rôle fondamental dans la recherche de solutions pour des forces  $\mathbf{f}$  appartenant à des espaces du type  $\mathbf{W}^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  avec poids anisotropes. Elles permettent aussi de démontrer des résultats d'isomorphisme des opérateurs gradient, divergence et laplacien.

Dans le chapitre 3, nous commençons l'étude des équations d'Oseen par le problème suivant :

$$-\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = g \text{ dans } \mathbb{R}^3. \tag{1.8}$$

Le fait de travailler d'abord sur  $\mathbb{R}^3$  nous permet de nous concentrer uniquement sur le comportement à l'infini. Nous verrons que le trait essentiel de notre analyse est la résolution, dans une première partie, du modèle scalaire :

$$-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \text{ dans } \mathbb{R}^3. \tag{1.9}$$

L'équation (1.9) peut être considérée comme le problème de base à étudier pour traiter les équations d'Oseen.

Dans le chapitre 4, qui constitue un travail fait en collaboration avec T. Z. Boulmezaoud, nous résolvons à nouveau les équations (1.8) posées dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Le cadre fonctionnel choisi se limite aux espaces avec poids isotropes. Le but de l'étude est

## 1. Introduction

---

d'étendre, dans ce cadre, les résultats d'existence et d'unicité du chapitre précédent. Dans une première partie nous analysons les relations qui lient le modèle scalaire (1.9) et le problème (1.8).

Enfin dans le dernier chapitre, nous étudions le problème d'Oseen général

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi &= \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= g \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_* \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.10}$$

où  $\Omega$  est un ouvert extérieur de  $\mathbb{R}^3$  que l'on supposera au moins lipschitzien. On résout (1.10) en associant les résultats établis dans  $\mathbb{R}^3$  avec ceux obtenus dans un domaine borné. Cette idée a été développée par Giroire dans [32]. Nous commencerons d'abord par démontrer l'existence et l'unicité d'une solution dans le cas hilbertien avant de terminer l'étude avec le cas général.

# Chapitre 2

## Cadre fonctionnel et propriétés

### 2.1 Introduction et notations générales

Dans ce chapitre, nous introduisons le cadre fonctionnel qui permet la résolution du problème d'Oseen dans des domaines non bornés. Dans de tels domaines, il est nécessaire de décrire le comportement à l'infini des fonctions. Nous introduisons pour cela les espaces de Sobolev avec poids qui sont un bon cadre pour les problèmes posés dans des domaines extérieurs. Sans être exhaustif, nous citons [34], [32], [6], [7], [16] et [54] pour le problème de Laplace, [31], [29], [30], [2], [3], [15], [56], [57] et [58] pour le problème de Stokes, enfin, [21], [20], [22], [23], [36] et [51] pour le problème d'Oseen. Nous citons aussi d'autres travaux tels que [37]. L'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle présentant une direction privilégiée, nous introduisons aussi des espaces de Sobolev avec poids anisotropes. Nous présentons des propriétés de ces espaces, en particulier les inégalités de Hardy qui sont les principaux résultats de ce chapitre.

Nous commençons par donner les premières notations et définitions. Dans ce mémoire, le réel  $p$  appartiendra toujours à l'intervalle  $]1, +\infty[$ . Nous notons  $p'$  le conjugué de  $p$ , c'est-à-dire  $p' = \frac{p}{p-1}$ . La dimension de l'espace sera notée  $n$ . Pour tout espace  $B$ , nous désignons en caractère gras  $\mathbf{B}$ , l'espace  $B^n = (B_1, \dots, B_n)$  ou l'espace  $B^{n^2} = (B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Nous notons par  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un point de  $\mathbb{R}^n$  et sa distance à l'origine par

$$r = |\mathbf{x}| = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{1/2}.$$

## 2.2. Rappels sur les espaces $W_\alpha^{m,p}$

---

Nous notons  $[k]$  la partie entière de  $k$ . Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{P}_j$  désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $j$ . L'espace  $\mathbb{P}_j^\Delta$  est constitué de polynômes de  $\mathbb{P}_j$  qui sont harmoniques. Nous notons par  $B_R$  la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon  $R$ . Si  $\Omega$  est un ouvert,  $\Omega_R$  désigne  $\Omega \cap B_R$ . Nous rappelons que  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est l'espace des distributions dans  $\Omega$  et que  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des distributions tempérées dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour un espace de Banach  $B$  donné et  $X$  un sous-espace fermé de  $B$ , nous notons par  $B' \perp X$  l'orthogonal de  $X$  dans le dual  $B'$  de  $B$ , c'est-à-dire

$$B' \perp X = X^\perp = \{f \in B', \forall v \in X, \langle f, v \rangle = 0\} = (B/X)'$$

Enfin  $C$  désigne une constante générique strictement positive.

## 2.2 Rappels sur les espaces $W_\alpha^{m,p}$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}$ , posons

$$k = k(m, n, p, \alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, \dots, m\} \\ m - \frac{n}{p} - \alpha & \text{si } \frac{n}{p} + \alpha \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

On définit la famille d'espaces avec poids  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{ & u \in \mathcal{D}'(\Omega); \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n, \\ & 0 \leq |\boldsymbol{\lambda}| \leq k, \rho^{\alpha-m+|\boldsymbol{\lambda}|} (\ln(1+\rho))^{-1} \partial^{\boldsymbol{\lambda}} u \in L^p(\Omega), \\ & k+1 \leq |\boldsymbol{\lambda}| \leq m, \rho^{\alpha-m+|\boldsymbol{\lambda}|} \partial^{\boldsymbol{\lambda}} u \in L^p(\Omega) \} \end{aligned}$$

et on note

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = & \left( \sum_{0 \leq |\boldsymbol{\lambda}| \leq k} \|\rho^{\alpha-m+|\boldsymbol{\lambda}|} (\ln(1+\rho))^{-1} \partial^{\boldsymbol{\lambda}} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right. \\ & \left. + \sum_{k+1 \leq |\boldsymbol{\lambda}| \leq m} \|\rho^{\alpha-m+|\boldsymbol{\lambda}|} \partial^{\boldsymbol{\lambda}} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

## 2.2. Rappels sur les espaces $W_\alpha^{m,p}$

---

la norme de  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  qui le munit d'une structure d'espace de Banach réflexif. Nous définissons aussi la semi-norme

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\lambda|=m} \|\rho^\alpha \partial^\lambda u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Donnons un exemple d'un tel espace. Si  $m = 1$  et  $\alpha = 0$ , alors l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est défini par

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &= \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \rho^{-1}u \in L^p(\Omega), \nabla u \in \mathbf{L}^p(\Omega)\}, \text{ si } p \neq n, \\ W_0^{1,n}(\Omega) &= \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), (\ln(1 + \rho))^{-1} \rho^{-1}u \in L^n(\Omega), \nabla u \in \mathbf{L}^n(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Nous considérons le cas où l'ouvert  $\Omega$  est l'espace entier  $\mathbb{R}^n$  ou le cas d'un domaine extérieur. Les poids contrôlent le comportement à l'infini des fonctions appartenant à  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ . Ils ont été choisis afin d'obtenir des inégalités de types Hardy que nous allons rappeler dans la suite. Nous pouvons remarquer que le poids logarithmique n'apparaît que pour les valeurs de  $m, n, p, \alpha$  telles que

$$\frac{n}{p} + \alpha \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.1)$$

Les valeurs de  $m, n, p$  et  $\alpha$  qui vérifient la condition (2.1) seront appelées valeurs critiques. Nous rappelons maintenant quelques propriétés de ces espaces. Les espaces  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  coïncident localement avec les espaces de Sobolev classiques. Ainsi les traces de ces fonctions sur  $\partial\Omega$  vérifient les théorèmes de traces classiques (voir [1], [17] ou [44]). Nous pouvons alors définir l'espace

$$\overset{\circ}{W}_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega), \gamma_0 u = 0, \gamma_1 u = 0, \dots, \gamma_{m-1} u = 0\}.$$

Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , nous avons l'égalité  $\overset{\circ}{W}_\alpha^{m,p}(\Omega) = W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ . Lorsque  $p = 2$ , les espaces  $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$  ont été utilisés par Giroire [32] pour résoudre le problème du laplacien. le cas général étant utilisé par Amrouche, Girault et Giroire [6, 7]. Pour le cas non critique et lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^2$  ou  $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ , ces espaces ont été employés par Hanouzet [34]. Pour  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , nous citons aussi les travaux de Cantor [18], de Kufner [38] ou d'Opic et Kufner [46]. L'espace  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense

## 2.2. Rappels sur les espaces $W_\alpha^{m,p}$

---

dans  $\overset{\circ}{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$ . Ces propriétés sont démontrées dans [6] pour le cas  $\Omega = \mathbb{R}^n$  et elles sont étendues à un domaine extérieur par une partition de l'unité (voir aussi [7]). L'espace dual de  $\overset{\circ}{W}_\alpha^{m,p}(\Omega)$  est noté  $W_{-\alpha}^{-m,p}(\Omega)$  et c'est un sous-espace de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Lorsque  $n/p + \alpha \notin \{1, \dots, m\}$ , nous avons les injections continues et denses suivantes

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \subset W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \subset \dots \subset W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega). \quad (2.2)$$

Par ailleurs, pour tout  $\lambda \in \mathbb{N}^n$ , l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \partial^\lambda u \in W_\alpha^{m-|\lambda|,p}(\Omega) \quad (2.3)$$

est continue. Pour tout réel  $\gamma$ , on a

$$|\partial^\lambda(\rho^\gamma)| \leq C\rho^{\gamma-|\lambda|}. \quad (2.4)$$

Dans le cas  $n/p + \alpha \notin \{1, \dots, m\}$  et  $n/p + \alpha - \gamma \notin \{1, \dots, m\}$ , (2.4) implique que l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \rho^\gamma u \in W_{\alpha-\gamma}^{m,p}(\Omega) \quad (2.5)$$

est un isomorphisme. Remarquons que si nous supposons uniquement  $n/p + \alpha \notin \{1, \dots, m\}$ , alors l'application (2.5) est continue. Si  $j \in \mathbb{N}$ , alors l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à  $j$ , noté  $\mathbb{P}_j$ , est inclus dans  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  avec

$$\begin{aligned} j &= \left\lfloor m - \frac{n}{p} - \alpha \right\rfloor, & \text{si } n/p + \alpha \notin \mathbb{Z}^- \\ j &= m - 1 - \frac{n}{p} - \alpha, & \text{sinon.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nous donnons à présent une propriété fondamentale des espaces  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ .

**Théorème 2.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert extérieur lipschitzien. Soient  $m \geq 1$  un entier et  $\alpha$  un réel, alors il existe une constante positive  $C = C(n, p, \alpha)$  telle que*

1)

$$\forall u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|u + \lambda\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} \leq C|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}, \quad (2.7)$$

où  $j' = \min(j, 0)$  et  $j$  est le plus haut degré des polynômes appartenant à  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ .

## 2.2. Rappels sur les espaces $W_\alpha^{m,p}$

---

2)

$$\forall u \in \overset{\circ}{W}_\alpha^{m,p}(\Omega), \quad \|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} \leq C|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}. \quad (2.8)$$

Ce sont les inégalités (2.7) et (2.8) qui justifient le choix des poids et, en particulier, l'introduction du poids logarithmique dans la définition de  $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$  pour les valeurs critiques (2.1). On peut trouver une preuve de ce théorème dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}^n$  dans [6] et l'extension à un domaine extérieur  $\Omega$  se fait par partition de l'unité (voir [7]). Définissons maintenant l'espace

$$\mathbf{H}_p = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n), \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

Le théorème 2.1 permet de montrer que les opérateurs gradient et divergence suivants sont des isomorphismes (voir [6]) :

$$\nabla : W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[1-n/p]} \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \perp \mathbf{H}_{p'}, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{div} : \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)/\mathbf{H}_{p'} \rightarrow W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/p]}. \quad (2.10)$$

Le prochain résultat découle du théorème 2.1 (voir la preuve dans [6]) :

**Proposition 2.2** *Soit un entier  $m \geq 1$  et une distribution  $u$  tel que*

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n : |\boldsymbol{\lambda}| = m, \quad \partial^{\boldsymbol{\lambda}} u \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

(i) *Si  $1 < p < n$ , alors il existe un polynôme  $K(u) \in \mathbb{P}_{m-1}$  tel que  $u + K(u) \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  et*

$$\inf_{\mu \in \mathbb{P}_{[m-n/p]}} \|u + K(u) + \mu\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.11)$$

(ii) *Si  $p \geq n$ , alors  $u \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  et nous avons*

$$\inf_{\mu \in \mathbb{P}_{m-1}} \|u + \mu\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.12)$$

Remarquons que lorsque  $m = 1$ , la constante  $K(u)$  donnée par la proposition 2.2 i) est unique. Par les injections de Sobolev et le théorème 2.1, nous avons l'injection continue et dense suivante :

### 2.3. Les espaces avec poids $\widetilde{W}_0^{1,p}$ et $\mathcal{M}_0^{1,p}$

---

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), \text{ si } 1 < p < n. \quad (2.13)$$

De sorte que nous avons alors la caractérisation de l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  suivante :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), \nabla v \in \mathbf{L}^p(\Omega)\}, \text{ avec } 1 < p < n. \quad (2.14)$$

En utilisant le théorème II.5.1 de [26], nous pouvons remarquer que si  $1 < p < n$  et  $\Omega$  est un ouvert lipschitzien, l'espace de Sobolev avec poids  $W_\alpha^{1,p}(\Omega)$  et l'espace de Sobolev homogène  $D^{1,p}(\Omega) = \{u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega), \nabla u \in \mathbf{L}^p(\Omega)\}$  coïncident algébriquement et topologiquement. Par dualité de l'injection (2.13) pour  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , nous obtenons aussi l'injection suivante :

$$L^{\frac{np'}{n+p'}}(\mathbb{R}^n) \subset W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n), \text{ avec } \frac{n}{n-1} < p' < \infty. \quad (2.15)$$

Enfin, si  $1 < p < n/2$ , nous avons aussi l'égalité topologique et algébrique suivante

$$W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in L^{\frac{np}{n-2p}}(\mathbb{R}^n), \nabla v \in \mathbf{L}^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n), i, j = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (2.16)$$

### 2.3 Les espaces avec poids $\widetilde{W}_0^{1,p}$ et $\mathcal{M}_0^{1,p}$

Nous allons à présent introduire une nouvelle famille d'espaces avec poids.

**Définition 2.3** Nous définissons les espaces suivants

$$\widetilde{W}_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\Omega) \right\},$$

et pour tout  $\sigma > 0$  que l'on fixera suffisamment petit

$$\mathcal{M}_0^{1,p}(\Omega) = \widetilde{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap W_{-\frac{1}{2}-\sigma}^{0,p}(\Omega).$$

### 2.3. Les espaces avec poids $\widetilde{W}_0^{1,p}$ et $\mathcal{M}_0^{1,p}$

Les espaces  $\widetilde{W}_0^{1,p}(\Omega)$  et  $\mathcal{M}_0^{1,p}(\Omega)$  sont des espaces de Banach pour les normes suivantes

$$\begin{aligned} \|u\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\Omega)} &= \|u\|_{W_{-1}^{0,p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\Omega)}, \quad \text{si } p \neq n, \\ \|u\|_{\widetilde{W}_0^{1,n}(\Omega)} &= \|(\ln(1+\rho))^{-1}u\|_{W_{-1}^{0,n}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^n(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,n}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

et

$$\|u\|_{\mathcal{M}_0^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{W_{-\frac{1}{2}-\sigma}^{0,p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\Omega)}. \quad (2.18)$$

Les normes (2.17) et (2.18) sont équivalentes aux normes naturelles. L'objet de la fin de cette section est de montrer des résultats de densités. Nous allons commencer par le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . La première étape consiste à caractériser les espaces duaux de  $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{M}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  respectivement notés  $\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{M}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemme 2.4** *Soit  $f \in \widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$ . Alors*

i) *Si  $p \neq n$ , il existe  $f_0 \in W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ ,  $h \in W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$  tels que pour tout  $v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,*

$$\begin{aligned} \langle f, v \rangle_{\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \times \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &= \langle f_0, v \rangle_{W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n) \times W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} + \langle \mathbf{F}, \nabla v \rangle_{\mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \left\langle h, \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\rangle_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

et

$$\|f\|_{\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)} = \max \left( \|f_0\|_{W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)}, \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \|h\|_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)} \right).$$

*De plus, lorsque  $p < n$ , on peut prendre  $f_0 = 0$ .*

ii) *Si  $p = n$ , le résultat de i) reste valable en remplaçant le poids  $\rho$  dans la définition des espaces  $W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)$  et  $W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$  par le poids  $\rho \ln(1+\rho)$ .*

**Preuve :** i) Le cas  $p \neq n$ . Notons  $\mathbf{E}$  l'espace  $\mathbf{E} = W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n) \times \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) \times W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$  muni de la norme

$$\|\psi\|_{\mathbf{E}} = \|\psi_0\|_{W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{i=n} \|\psi_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\psi_{n+1}\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

### 2.3. Les espaces avec poids $\widetilde{W}_0^{1,p}$ et $\mathcal{M}_0^{1,p}$

---

où  $\boldsymbol{\psi} = (\psi_0, \dots, \psi_{n+1})$ . L'application  $T : v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}, \frac{\partial v}{\partial x_1}) \in \mathbf{E}$  est une isométrie. Posons à présent  $\mathbf{G} = T(\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n))$  que l'on munit de la norme induite par celle de  $\mathbf{E}$  et  $S = T^{-1} : \mathbf{G} \rightarrow \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . L'application  $L : \mathbf{h} \in \mathbf{G} \rightarrow \langle f, S\mathbf{h} \rangle$  est linéaire continue sur  $\mathbf{G}$ . Ainsi, d'après le théorème de Hahn-Banach, on peut la prolonger en une application linéaire et continue sur  $\mathbf{E}$  notée  $\tilde{L}$ , avec  $\|\tilde{L}\|_{\mathbf{E}'} = \|f\|$ . Grâce au théorème de représentation de Riesz, il existe  $f_0 \in W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$  et  $h \in W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$  tels que

$$\begin{aligned} \forall v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \tilde{L}, v \rangle &= \langle f_0, v \rangle_{W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n) \times W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} + \langle \mathbf{F}, \nabla v \rangle_{\mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n) \times \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \langle h, \frac{\partial v}{\partial x_1} \rangle_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

et

$$\|\tilde{L}\|_{\mathbf{E}'} = \max \left( \|f_0\|_{W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)}, \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \|h\|_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)} \right).$$

Lorsque  $p < n$ , d'après le théorème 2.1, on a

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad \|u\|_{W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

On peut procéder de la même manière que précédemment avec  $\mathbf{E} = \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) \times W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$  et  $T : v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}, \frac{\partial v}{\partial x_1}) \in \mathbf{E}$ .

ii) Le cas  $p = n$  se traite de la même manière que le cas  $p \neq n$  mais en remplaçant le poids  $\rho$  dans la définition des espaces  $W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)$  et  $W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$  par le poids  $\rho \ln(1 + \rho)$ . Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Nous pouvons maintenant montrer le résultat suivant

#### Proposition 2.5

*L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .*

**Preuve :** i) Le cas  $p \neq n$ . Soit  $f \in \widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$  tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle f, \varphi \rangle_{\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \times \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

### 2.3. Les espaces avec poids $\widetilde{W}_0^{1,p}$ et $\mathcal{M}_0^{1,p}$

---

Puisque  $p \neq n$ , d'après (2.2), on a l'injection continue et dense  $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ . Par dualité, nous avons donc l'inclusion

$$W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n) \subset W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi, à l'aide du lemme 2.4, on a

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = f_0 - \operatorname{div} \mathbf{F} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n) \cap W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n).$$

Pour tout  $v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} & \langle f, v \rangle_{\widetilde{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times \widetilde{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \langle f_0, v \rangle_{W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} - \langle \operatorname{div} \mathbf{F}, v \rangle_{W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \langle \frac{\partial h}{\partial x_1}, v \rangle_{W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ce qui achève la preuve du cas  $p \neq n$ .

ii) Si  $p = n$ , il suffit de prendre  $\rho \ln(1+\rho) f_0 \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$  et on obtient  $f_0 \in W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$ , ce qui permet d'établir le résultat en procédant de la même manière que pour le cas  $p \neq n$ . ■

La proposition ci-dessous se démontre comme précédemment.

#### Proposition 2.6

*L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{M}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .*

Comme conséquences des propositions 2.5 et 2.6, les espaces duaux  $\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{M}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$  sont des espaces de distributions qu'on peut caractériser de la manière suivante :

### 2.3. Les espaces avec poids $\widetilde{W}_0^{1,p}$ et $\mathcal{M}_0^{1,p}$

---

**Corollaire 2.7** *Nous avons les identités algébriques et topologiques suivantes :*

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) &= \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), f = f_0 + \operatorname{div} \mathbf{F} + \frac{\partial h}{\partial x_1}, \right. \\ &\quad \left. f_0 \in W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n), \mathbf{F} \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n), h \in W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n) \right\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) &= \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), f = f_0 + \operatorname{div} \mathbf{F} + \frac{\partial h}{\partial x_1}, \right. \\ &\quad \left. f_0 \in W_{\frac{1}{2}+\sigma}^{0,p'}(\mathbb{R}^n), \mathbf{F} \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^n), h \in W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n) \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pour un domaine extérieur  $\Omega$ , nous introduisons maintenant l'espace suivant :

$$\overset{\circ}{\widetilde{W}}_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \overset{\circ}{W}_0^{1,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\Omega) \right\}. \quad (2.23)$$

Nous notons  $\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\Omega)$  son espace dual. En procédant de la même manière que dans la proposition 2.4, on peut montrer que, si  $f \in \widetilde{W}_0^{-1,p'}(\Omega)$ , alors :

1) si  $p \neq n$ , il existe  $f_0 \in W_1^{0,p'}(\Omega)$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$ ,  $h \in \overset{\circ}{W}_0^{1,p'}(\Omega)$  tels que pour tout  $v \in \overset{\circ}{\widetilde{W}}_0^{1,p}(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \langle f, v \rangle_{\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\Omega) \times \overset{\circ}{\widetilde{W}}_0^{1,p}(\Omega)} &= \langle f_0, v \rangle_{W_1^{0,p'}(\Omega) \times W_{-1}^{0,p}(\Omega)} + \langle \mathbf{F}, \nabla v \rangle_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times \mathbf{L}^p(\Omega)} \\ &\quad + \left\langle h, \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\rangle_{\overset{\circ}{W}_0^{1,p'}(\Omega) \times W_0^{-1,p}(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

et

$$\|f\|_{\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\Omega)} = \max \left( \|f_0\|_{W_1^{0,p'}(\Omega)}, \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)}, \|h\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \right).$$

2) Si  $p = n$ , la caractérisation (2.24) reste valable en remplaçant le poids  $\rho$  dans la définition des espaces  $W_1^{0,p'}(\Omega)$  et  $W_{-1}^{0,p}(\Omega)$  par le poids  $\rho \ln(1 + \rho)$ .

On peut ensuite montrer la

#### Proposition 2.8

*L'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $\overset{\circ}{\widetilde{W}}_0^{1,p}(\Omega)$ .*

**Preuve :** La démonstration est similaire à celle de la proposition 2.5. ■

## 2.4 Espaces avec poids anisotropes

Ce paragraphe est consacré aux espaces de Sobolev avec poids anisotropes et à leur principale propriété, les inégalités de Hardy.

### 2.4.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 2.9** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Nous posons

$$s = r - x_1,$$

et nous introduisons le poids anisotrope

$$\eta_\beta^\alpha = (1+r)^\alpha (1+s)^\beta.$$

**Remarque 2.10** i) Nous avons l'identité  $\eta_0^\alpha = \rho^\alpha$ .

ii) Un calcul rapide montre que

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = -\frac{s}{r} \leq 0, \quad |\nabla s|^2 = \frac{2s}{r},$$

ce qui permet d'obtenir les inégalités suivantes sur le poids  $\eta_\beta^\alpha$  :

$$|\nabla \eta_\beta^\alpha| \leq C \eta_{\beta-\frac{1}{2}}^{\alpha-\frac{1}{2}}, \quad \left| \frac{\partial \eta_\beta^\alpha}{\partial x_1} \right| \leq C \eta_{\beta-1}^{\alpha-1}, \quad \text{pour } r \neq 0 \quad (2.25)$$

et

$$\left| \frac{\partial^2 \eta_\beta^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq C \eta_{\beta-1}^{\alpha-1}, \quad \text{pour } r > 1. \quad (2.26)$$

Nous allons à présent introduire une nouvelle famille d'espaces avec poids.

**Définition 2.11** Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , nous définissons

$$\begin{aligned} L_{\alpha,\beta}^p(\Omega) &= \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \eta_\beta^\alpha u \in L^p(\Omega)\}, \\ X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega) &= \{u \in L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(\Omega), \nabla u \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\Omega)\}, \\ Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega) &= \{u \in L_{\alpha-1,\beta}^p(\Omega), \nabla u \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\Omega)\}. \end{aligned}$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Ce sont des espaces de Banach pour les normes respectives

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\Omega)} &= \|\eta_\beta^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \\ \|u\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)} &= \left( \|u\|_{L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \\ \|u\|_{Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)} &= \left( \|u\|_{L_{\alpha-1,\beta}^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Comme pour les espaces  $W_\alpha^{1,p}(\Omega)$ , les espaces  $L_{\alpha,\beta}^p(\Omega)$ ,  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$  et  $Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$  coïncident localement avec les espaces de Sobolev classiques. De plus, nous avons l'inclusion suivante

$$X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega) \subset Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega).$$

Dans la suite, nous montrerons que, sous certaines conditions sur  $\alpha$  et  $\beta$ , nous pouvons même avoir l'égalité. Lorsque  $n/p + \alpha \neq 1$ , nous avons l'identité

$$Y_{\alpha,0}^{1,p}(\Omega) = W_\alpha^{1,p}(\Omega).$$

**Remarque 2.12** L'application

$$u \in L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3) \rightarrow \eta_b^a u \in L_{\alpha-a,\beta-b}^p(\mathbb{R}^3)$$

est un isomorphisme.

Nous allons à présent nous intéresser aux polynômes qui appartiennent à ces espaces. Nous avons tout d'abord besoin du résultat suivant :

**Lemme 2.13** *On suppose  $n \geq 2$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\beta^\alpha d\mathbf{x} < \infty \Leftrightarrow -\alpha + \min\left(\frac{n-1}{2}, -\beta\right) > n. \quad (2.27)$$

**Preuve :** Soit  $R > 1$  un réel fixé. Pour montrer (2.27), il suffit d'étudier l'intégrale sur  $B'_R$ . Nous allons nous contenter du cas  $n \geq 3$ , la démonstration étant similaire si  $n = 2$ . Posons  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in ]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[$  et

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[, r > R\}.$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Introduisons les coordonnées sphériques généralisées

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1, \quad x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \dots, \quad x_{n-1} = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Notons  $I$  l'intégrale de (2.27) dans  $B'_R$ , on obtient donc

$$I = \int_D (1+r)^\alpha (1+r-r \cos \theta_1)^\beta r^{n-1} (\sin \theta_1)^{n-2} dr d\theta.$$

Intéressons nous à l'intégrale suivante

$$J = (1+r)^\alpha r^{n-2} \int_0^\pi (1+r-r \cos \theta_1)^\beta r (\sin \theta_1)^{n-2} d\theta_1.$$

En effectuant le changement de variables  $t = r - r \cos \theta_1$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} J &= (1+r)^\alpha r^{n-2} \int_0^{2r} (1+t)^\beta (2tr - t^2)^{(n-3)/2} r^{-(n-3)} dt \\ &= (1+r)^\alpha r \int_0^{2r} (1+t)^\beta (2tr - t^2)^{(n-3)/2} dt \end{aligned}$$

En découpant cette dernière intégrale en trois, on arrive à

$$\begin{aligned} J &\leq Cr^{\alpha+1} \left[ \int_0^1 (1+t)^\beta (2tr - t^2)^{(n-3)/2} dt + \int_1^r (1+t)^\beta (2tr - t^2)^{(n-3)/2} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_r^{2r} (1+t)^\beta (2tr - t^2)^{(n-3)/2} dt \right]. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale, on obtient

$$\int_0^1 (1+t)^\beta (2tr - t^2)^{(n-3)/2} dt \leq Cr^{(n-3)/2} \int_0^1 t^{(n-3)/2} dt \leq Cr^{(n-3)/2}.$$

Pour la deuxième, on a

$$\begin{aligned} \int_1^r (1+t)^\beta (2tr - t^2)^{(n-3)/2} dt &= 2^{(n-3)/2} r^{(n-3)/2} \int_1^r (1+t)^\beta t^{(n-3)/2} \left(1 - \frac{t}{2r}\right)^{(n-3)/2} dt \\ &\leq Cr^{(n-3)/2} \int_1^r t^{\beta+(n-3)/2} dt. \end{aligned}$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Maintenant, dans le cas où  $\beta + \frac{n-1}{2} \neq 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^r t^{\beta+(n-1)/2} dt &\leq C(r^{\beta+\frac{n-1}{2}} - 1) \\ &\leq Cr^{(n-1)/2-\min(-\beta, \frac{n-1}{2})}. \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\int_1^r (1+t)^\beta (2tr-t^2)^{(n-3)/2} dt \leq Cr^{n-2-\min(-\beta, \frac{n-1}{2})}.$$

Si  $\beta + \frac{n-1}{2} = 0$ , on a

$$\int_1^r (1+t)^\beta (2tr-t^2)^{(n-3)/2} dt \leq Cr^{(n-3)/2} \ln r.$$

Enfin on a facilement

$$\int_r^{2r} (1+t)^\beta (2tr-t^2)^{(n-3)/2} dt \leq Cr^{\beta+n-2}.$$

Grâce à ces estimations, on aboutit à

$$I < \infty \Leftrightarrow -\alpha + \min((n-1)/2, -\beta) > n,$$

ce qui achève la preuve. ■

Grâce à ce lemme, nous en déduisons les propriétés suivantes:

**Propriété 2.14** *Soit  $j \in \mathbb{Z}$ , alors*

$$\mathbb{P}_j \subset L_{\alpha,\beta}^p(\Omega) \text{ ssi } j < -\frac{n}{p} - \alpha + \frac{1}{p} \min\left(\frac{(n-1)}{2}, -\beta p\right), \quad (2.29)$$

$$\mathbb{P}_j \subset X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega) \text{ ssi } j < \frac{1}{2} - \frac{n}{p} - \alpha + \frac{1}{p} \min\left(\frac{(n-1)}{2}, -p\beta + p/2\right), \quad (2.30)$$

$$\mathbb{P}_j \subset Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega) \text{ ssi } j < 1 - \frac{n}{p} - \alpha + \frac{1}{p} \min\left(\frac{(n-1)}{2}, -p\beta\right). \quad (2.31)$$

Nous allons à présent établir des résultats de densité.

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

### Proposition 2.15

L'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $L_{\alpha,\beta}^p(\Omega)$ .

**Preuve :** D'après la définition de  $L_{\alpha,\beta}^p(\Omega)$ , étant donné un élément  $u \in L_{\alpha,\beta}^p(\Omega)$ , nous avons  $\eta_\beta^\alpha u \in L^p(\Omega)$ . Il existe donc une suite  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)$  qui tend vers  $\eta_\beta^\alpha u$  dans  $L^p(\Omega)$ . Posons  $\psi_k = \eta_{-\beta}^{-\alpha} \varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ , il est alors facile de voir que  $\psi_k$  tend vers  $u$  dans  $L_{\alpha,\beta}^p(\Omega)$ . ■

Pour les espaces  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$  et  $Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$ , nous allons commencer par montrer la densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Nous l'étendrons ensuite à un domaine extérieur.

### Proposition 2.16

L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et dans  $Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**Preuve :** La preuve étant identique pour les deux espaces, nous allons la faire pour  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Soit alors  $u \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= 1 \text{ si } |\mathbf{x}| < 1, \\ 0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1 &\text{ si } 1 \leq |\mathbf{x}| \leq 2, \\ \varphi(\mathbf{x}) &= 0 \text{ si } |\mathbf{x}| \geq 2. \end{aligned}$$

Posons à présent  $\varphi_k(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}/k)$  et  $u_k = u\varphi_k$ . On a

$$\begin{aligned} \|u_k - u\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p &= \|u_k - u\|_{L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^n)}^p + \|\nabla(u_k - u)\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)}^p \\ &\leq \|(\varphi_k - 1)u\|_{L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^n)}^p + C\|(\varphi_k - 1)\nabla u\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)}^p \\ &\quad + C\|u\nabla\varphi_k\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)}^p. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Puisque  $u \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , les deux premiers termes de (2.32) tendent vers 0. Le troisième terme s'écrit

$$\|u\nabla\varphi_k\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{\{k \leq r \leq 2k\}} \eta_{\beta p}^{\alpha p} |u\nabla\varphi_k|^p d\mathbf{x}.$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Par ailleurs, on sait que

$$|\nabla\varphi_k(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{k} |\nabla\varphi(\mathbf{x}/k)|.$$

En utilisant cette estimation, on obtient

$$\begin{aligned} \|u\nabla\varphi_k\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)}^p &\leq C \int_{\{k \leq r \leq 2k\}} \eta_{\beta p}^{(\alpha-1)p} |u|^p d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_{\{k \leq r \leq 2k\}} \eta_{(\beta-\frac{1}{2})p}^{(\alpha-\frac{1}{2})p} |u|^p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Puisque  $u \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , ce dernier terme tend vers 0. Nous avons donc montré que pour tout  $u \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u_k \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  à support compact tel que

$$\|u - u_k\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon/2. \quad (2.33)$$

De plus, puisque chaque  $u_k$  a un support compact et que les topologies de  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  coïncident sur ce support, il existe  $v_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  tel que

$$\|u_k - v_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|u_k - v_k\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon/2. \quad (2.34)$$

Les estimations (2.33) et (2.34) nous permettent alors de conclure. ■

En utilisant la même fonction de troncature  $\varphi_k$  et en utilisant la densité de  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , on peut généraliser le résultat précédent à tout ouvert extérieur  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Plus précisément, nous avons la

### Proposition 2.17

*L'espace  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  est dense dans  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$  et dans  $Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$ .*

Nous introduisons à présent les espaces  $\overset{\circ}{X}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$  et  $\overset{\circ}{Y}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$  qui désignent respectivement l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$  et dans  $Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$ . On peut montrer que

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{X}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega) &= \{u \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \\ \overset{\circ}{Y}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega) &= \{u \in Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Nous noterons  $X_{-\alpha,-\beta}^{-1,p'}(\Omega)$  et  $Y_{-\alpha,-\beta}^{-1,p'}(\Omega)$  leurs duaux respectifs. Comme pour le corollaire 2.7, on peut caractériser ces espaces duaux, en particulier nous avons l'identité suivante

$$Y_{-\alpha,-\beta}^{-1,p'}(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega), f = f_0 + \operatorname{div} \mathbf{F}, f_0 \in L_{-\alpha+1,-\beta}^{p'}(\Omega), \mathbf{F} \in \mathbf{L}_{-\alpha,-\beta}^{p'}(\Omega)\}. \quad (2.35)$$

### 2.4.2 Inégalités de Hardy

L'objet de ce paragraphe est d'établir des inégalités de Hardy avec poids anisotropes. Rappelons que lorsque  $\beta = 0$ , nous disposons déjà des inégalités (2.7) et (2.8). Dans [21], Farwig montre que si  $\beta > 0$  et  $\alpha + \beta + \frac{1}{2} > 0$ , alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall u \in \overset{\circ}{X}_{\alpha,\beta}^{1,2}(\Omega), \quad \|u\|_{L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\Omega)}. \quad (2.36)$$

Nous avons ici deux objectifs :

- 1) Généraliser l'inégalité (2.36) à tout réel  $p$  tel que  $1 < p < \infty$  tout en affaiblissant les hypothèses sur  $\alpha$  et  $\beta$ .
- 2) Prouver une inégalité de type (2.36) pour le cas  $\beta \leq 0$ .

Les principaux résultats de ce paragraphe sont annoncés dans [11] et font aussi l'objet d'un travail soumis [8] (voir aussi [12]).

#### Le cas $\beta > 0$

Soient deux réels  $R$  et  $\lambda$  tels que  $R > 0$  soit suffisamment grand et  $0 < \lambda < 1$ . Introduisons le cône de révolution infini

$$S = S_{R,\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^n, r > R, 0 < s < \lambda r\}. \quad (2.37)$$

Nous pouvons remarquer que dans  $\mathbb{R}^n \setminus S$ ,  $s$  est équivalent à  $r$ , les poids  $\eta_\beta^\alpha$  et  $\rho^{\alpha+\beta}$  sont équivalents. Ainsi, nous commencerons d'abord par établir des inégalités de Hardy dans le secteur  $S$ . Ensuite, par le biais d'une partition de l'unité, nous établissons des inégalités dans  $B'_R$  l'extérieur de la boule  $B_R$ . Enfin, en utilisant une autre partition de l'unité, nous étendrons le résultat dans tout l'espace  $\mathbb{R}^n$ . Nous avons besoin tout d'abord d'établir des inégalités unidimensionnelles.

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

**Lemme 2.18** Soient  $\gamma \in \mathbb{R}$  satisfaisant  $\gamma + \frac{n-1}{2} > 0$  et  $\theta^* \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Alors, pour toute fonction positive  $f$  définie et mesurable sur  $]0, \theta^*[$ , telle que

$$\int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{n}{2}} (\sin \theta)^{n-2} [f(\theta)]^p d\theta < +\infty,$$

nous avons

$$\int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^\gamma (\sin \theta)^{n-2} [F(\theta)]^p d\theta \leq C \int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{n}{2}} (\sin \theta)^{n-2} [f(\theta)]^p d\theta, \quad (2.38)$$

où

$$F(\theta) = \int_\theta^{\theta^*} f(t) dt. \quad (2.39)$$

**Preuve :** Remarquons tout d'abord que sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on a l'encadrement suivant

$$\frac{1}{2} \sin^2 \theta \leq 1 - \cos \theta \leq \sin^2 \theta. \quad (2.40)$$

En effet, sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on a

$$\cos \theta \geq \cos^2 \theta.$$

Il est alors facile de voir que

$$1 - \cos \theta \leq \sin^2 \theta.$$

Par ailleurs, on peut écrire

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) \leq 2(1 - \cos \theta).$$

Posons à présent

$$J = \int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^\gamma (\sin \theta)^{n-2} (F(\theta))^p d\theta.$$

Grâce à (2.40), on peut écrire

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^\gamma (\sin \theta)^{n-3} \sin \theta (F(\theta))^p d\theta \\ &\leq 2^{(n-3)/2} \int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{n-3}{2}} \sin \theta (F(\theta))^p d\theta. \end{aligned}$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

D'après la définition (2.39) de  $F(\theta)$  et comme  $\gamma + \frac{n-1}{2} > 0$ , une intégration par parties nous donne

$$J \leq C \int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{n-1}{2}} f(\theta) (F(\theta))^{p-1} d\theta.$$

En utilisant à présent une inégalité de Hölder, on obtient

$$J \leq C \int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{n-1}{2}p} (\sin \theta)^{-(n-2)(p-1)} (f(\theta))^p d\theta.$$

On peut réécrire cette dernière inégalité de la manière suivante

$$J \leq C \int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{p}{2}} (\sin \theta)^{(n-2)} (1 - \cos \theta)^{\frac{n-2}{2}p} (\sin \theta)^{-(n-2)p} (f(\theta))^p d\theta.$$

Grâce à (2.40), le terme  $(1 - \cos \theta)^{\frac{n-2}{2}p} (\sin \theta)^{-(n-2)p}$  est borné et l'inégalité (2.38) est donc prouvée. ■

**Remarque 2.19** De la même manière, nous pouvons prouver que si  $\gamma \in \mathbb{R}$  satisfait  $\gamma + \frac{1}{2} > 0$  et si  $\theta^* \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , alors, pour toute fonction positive  $f$  définie et mesurable sur  $] -\theta^*, 0[$ , telle que

$$\int_{-\theta^*}^0 (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{p}{2}} [f(\theta)]^p d\theta < +\infty,$$

on a

$$\int_{-\theta^*}^0 (1 - \cos \theta)^\gamma [F(\theta)]^p d\theta \leq C \int_{-\theta^*}^0 (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{p}{2}} [f(\theta)]^p d\theta, \quad (2.41)$$

avec

$$F(\theta) = \int_{-\theta^*}^{\theta} f(t) dt.$$

Nous allons à présent donner des conséquences immédiates du lemme 2.18 et de la remarque 2.19.

**Corollaire 2.20** (i) *Pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $\gamma + \frac{1}{2} > 0$  et pour toute fonction  $w \in \mathcal{D}(] -\theta^*, \theta^*])$ , on a*

$$\int_{-\theta^*}^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^\gamma |w(\theta)|^p d\theta \leq C \int_{-\theta^*}^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{p}{2}} |w'(\theta)|^p d\theta. \quad (2.42)$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

(ii) Pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $\gamma + \frac{n-1}{2} > 0$  et pour toute fonction  $w \in \mathcal{D}(]0, \theta^*])$ , on a

$$\int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^\gamma (\sin \theta)^{n-2} |w(\theta)|^p d\theta \leq C \int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{p}{2}} (\sin \theta)^{n-2} |w'(\theta)|^p d\theta. \quad (2.43)$$

**Preuve :** (i) Posons

$$J = \int_{-\theta^*}^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^\gamma |w(\theta)|^p d\theta.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\theta^*}^0 (1 - \cos \theta)^\gamma |w(\theta)|^p d\theta + \int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^\gamma |w(\theta)|^p d\theta \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Pour  $J_1$ , on pose  $f(\theta) = |w'(\theta)|$  et

$$|w(\theta)| = \left| \int_{-\theta^*}^{\theta} w'(\theta) d\theta \right| \leq \int_{-\theta^*}^{\theta} |w'(\theta)| d\theta = F(\theta).$$

On applique ensuite l'inégalité (2.41) pour obtenir

$$J_1 \leq C \int_{-\theta^*}^0 (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{p}{2}} |w'(\theta)|^p d\theta. \quad (2.44)$$

Pour  $J_2$ , il suffit de poser  $f(\theta) = |w'(\theta)|$ ,

$$|w(\theta)| = \left| \int_{\theta}^{\theta^*} w'(\theta) d\theta \right| \leq \int_{\theta}^{\theta^*} |w'(\theta)| d\theta = F(\theta)$$

et d'appliquer l'inégalité (2.38) pour  $n = 2$  afin d'obtenir

$$J_2 \leq C \int_0^{\theta^*} (1 - \cos \theta)^{\gamma + \frac{p}{2}} |w'(\theta)|^p d\theta. \quad (2.45)$$

En rassemblant les inégalités (2.44) et (2.45), on obtient (2.42).

(ii) La preuve de (2.43) est similaire à celle de (i). ■

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Nous allons à présent prouver une inégalité de Hardy dans le secteur  $S$  définie par (2.37).

**Lemme 2.21** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $\beta > \max(0, (1 - n + p)/2p)$ . Alors, on a*

$$\forall u \in \mathcal{D}(S), \quad \|u\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2}, \beta-\frac{1}{2}}(S)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p_{\alpha, \beta}(S)}. \quad (2.46)$$

**Preuve :** Soit une fonction  $u \in \mathcal{D}(S)$  donnée. Puisque  $\beta > 0$ , pour montrer (2.46), il suffit de montrer l'inégalité suivante

$$I = \int_S (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} s^{(\beta-\frac{1}{2})p} |u|^p d\mathbf{x} \leq C \int_S (1+r)^{\alpha p} s^{\beta p} |\nabla u|^p d\mathbf{x}. \quad (2.47)$$

En effet, supposons pour le moment (2.47) vérifiée. Alors, si  $0 < \beta < \frac{1}{2}$ , on a

$$\begin{aligned} \int_S (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} (1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p} |u|^p d\mathbf{x} &\leq \int_S (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} s^{(\beta-\frac{1}{2})p} |u|^p d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_S (1+r)^{\alpha p} s^{\beta p} |\nabla u|^p d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_S (1+r)^{\alpha p} (1+s)^{\beta p} |\nabla u|^p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Maintenant si  $\beta \geq \frac{1}{2}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_S (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} (1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p} |u|^p d\mathbf{x} &\leq C \int_S (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} (1+s^{(\beta-\frac{1}{2})p}) |u|^p d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_S (1+r)^{\alpha p} (s^{p/2} + s^{\beta p}) |\nabla u|^p d\mathbf{x} \end{aligned}$$

On peut remarquer que l'inégalité (2.47) a été utilisée deux fois dont une fois avec  $\beta = \frac{1}{2}$ . Il est ensuite facile de voir qu'on a

$$\int_S (1+r)^{\alpha p} (s^{p/2} + s^{\beta p}) |\nabla u|^p d\mathbf{x} \leq \int_S (1+r)^{\alpha p} (1+s)^{\beta p} |\nabla u|^p d\mathbf{x},$$

ce qui établit le résultat. Nous allons maintenant montrer (2.47) et nous distinguons deux cas.

1) Le cas  $n \geq 3$ .

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Soient  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \in ]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[$ ,  $R > 0$ ,  $\theta^* \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et posons

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[, r > R, \theta_1 \in ]0, \theta^*[\}$$

Nous introduisons les coordonnées sphériques généralisées définies par (2.28). En posant à présent  $u(\mathbf{x}) = v(r, \theta)$  et en remarquant que

$$\left| \frac{\partial v}{\partial \theta_1} \right| \leq r |\nabla u|,$$

il suffit de montrer l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Delta} (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} (r-r\cos\theta_1)^{(\beta-\frac{1}{2})p} r^{n-1} (\sin\theta_1)^{n-2} |v|^p dr d\theta \\ &\leq C \int_{\Delta} (1+r)^{\alpha p} (r-r\cos\theta_1)^{\beta p} r^{n-1} (\sin\theta_1)^{n-2} r^{-p} \left| \frac{\partial v}{\partial \theta_1} \right|^p dr d\theta. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Il est clair que

$$I \leq \int_{\Delta} (1+r)^{\alpha p} r^{\beta p} (1-\cos\theta_1)^{(\beta-\frac{1}{2})p} r^{n-1} (\sin\theta_1)^{n-2} r^{-p} |v|^p dr d\theta. \quad (2.49)$$

Posons

$$J = \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta_1)^{(\beta-\frac{1}{2})p} (\sin\theta_1)^{n-2} |v|^p d\theta_1.$$

Comme  $\beta > (1-n+p)/2p$ , on a  $(\beta-\frac{1}{2})p + \frac{n-1}{2} > 0$ . De plus,  $u$  appartenant à  $\mathcal{D}(S)$  entraîne que, pour  $(r, \theta) \in \Delta$ , la fonction  $\theta_1 \rightarrow v(r, \theta)$  appartient à  $\mathcal{D}([0, \theta^*])$ .

Ainsi, grâce à l'inégalité (2.43), il vient

$$J \leq C \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial \theta_1} \right|^p d\theta_1. \quad (2.50)$$

Il est alors facile de voir que (2.49) et (2.50) entraînent (2.48). Ceci termine la preuve pour le cas  $n \geq 3$ .

2) Le cas  $n = 2$ .

On définit à présent

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi[, r > R, \theta \in ]-\theta^*, \theta^*[\}$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

et on introduit les coordonnées polaires. En posant  $u(\mathbf{x}) = v(r, \theta)$ , il est alors suffisant de prouver l'inégalité

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\theta^*}^{\theta^*} \int_R^\infty (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} (r-r\cos\theta)^{(\beta-\frac{1}{2})p} r^2 |v|^p dr d\theta \\ &\leq C \int_{-\theta^*}^{\theta^*} \int_R^\infty (1+r)^{\alpha p} (r-r\cos\theta)^{\beta p} r^{2-p} \left| \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|^p dr d\theta. \end{aligned}$$

On montre cette inégalité en procédant de la même manière que pour prouver (2.48), mais cette fois-ci avec l'aide de l'inégalité (2.42). ■

Nous allons à présent établir une inégalité de Hardy dans  $B'_R$ , l'extérieur de la boule  $B_R$ . Pour cela, nous aurons besoin de l'inégalité de Hardy suivante (cf. [35] ou [38])

$$\forall f \in \mathcal{D}(]R, \infty[), \quad \int_R^{+\infty} |f(r)|^p r^\gamma dr \leq C \int_R^{+\infty} |f'(r)|^p r^{\gamma+p} dr, \quad \text{avec } \gamma + 1 \neq 0. \quad (2.51)$$

**Lemme 2.22** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$  et  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$ . Alors, nous avons*

$$\forall u \in \mathcal{D}(B'_R), \quad \|u\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2}, \beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p_{\alpha, \beta}(B'_R)}. \quad (2.52)$$

**Preuve :** Soit  $\lambda > 0$ , nous introduisons l'ouvert

$$D_{R, \lambda} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; r > R, \lambda r < s\},$$

ainsi que la partition de l'unité suivante

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(B'_R), \quad 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 1, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1 \text{ dans } B'_R,$$

vérifiant

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 \text{ dans } S_{R, \lambda/2}, \quad \text{supp } \varphi_1 \subset S_{R, \lambda} \\ \text{et } |\nabla \varphi_1(\mathbf{x})| &\leq \frac{C}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{x} \in S_{R, \lambda} \cap D_{R, \lambda/2}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Il est clair que

$$\|u\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq \|u\varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} + \|u\varphi_2\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)}.$$

Montrons que

$$\|u\varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \quad (2.54)$$

Comme  $u\varphi_1 \in \mathcal{D}(S_{R,\lambda})$  et  $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$ , grâce au lemme 2.21, il vient

$$\|u\varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(S_{R,\lambda})} \leq C\|\nabla(u\varphi_1)\|_{L^p_{\alpha,\beta}(S_{R,\lambda})}. \quad (2.55)$$

De plus, comme  $0 \leq \varphi_1 \leq 1$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\nabla(u\varphi_1)\|_{L^p_{\alpha,\beta}(S_{R,\lambda})}^p &= \int_{S_{R,\lambda}} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p} |\nabla(u\varphi_1)|^p d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_{S_{R,\lambda}} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p} |\nabla u|^p d\mathbf{x} \\ &\quad + C \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p} |u \nabla \varphi_1|^p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par suite, il est clair que

$$\|\nabla(u\varphi_1)\|_{L^p_{\alpha,\beta}(S_{R,\lambda})}^p \leq C\|\nabla u\|_{L^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}^p + C \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p} |u \nabla \varphi_1|^p d\mathbf{x}. \quad (2.56)$$

Il reste à estimer le dernier terme de (2.56). En remarquant que  $r$  et  $s$  sont équivalents dans  $S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}$  et grâce à (2.53), il vient

$$\begin{aligned} \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p} |u \nabla \varphi_1|^p d\mathbf{x} &\leq C \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{(\alpha+\beta-1)p} |u|^p d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p} |u|^p d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

On passe maintenant aux coordonnées sphériques généralisées (2.28) pour le cas  $n \geq 3$  ou aux coordonnées polaires pour le cas  $n = 2$ . On pose  $u(\mathbf{x}) = v(r, \theta)$  et, puisque

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

$\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$ , on applique (2.51) à la fonction  $r \rightarrow v(r, \theta)$ . On obtient donc

$$\int_R^{+\infty} |v|^p r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1} dr \leq C \int_R^{+\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p r^{(\alpha+\beta)p+n-1} dr.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p} |u|^p d\mathbf{x} &\leq C \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta)p} |\nabla u|^p d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p} (1+s)^{\beta p} |\nabla u|^p d\mathbf{x} \quad (2.58) \\ &\leq C \|\nabla u\|_{\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(B'_R)}^p. \end{aligned}$$

Alors, (2.55), (2.56), (2.57) et (2.58) entraînent (2.54). Nous allons maintenant montrer que

$$\|u\varphi_2\|_{L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(B'_R)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(B'_R)}. \quad (2.59)$$

Le support de  $\varphi_2$  étant inclus dans  $D_{R,\lambda/2}$  et puisque  $0 \leq \varphi_2 \leq 1$ , il vient

$$\begin{aligned} \|u\varphi_2\|_{L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(B'_R)}^p &= \int_{D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} (1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p} |u\varphi_2|^p d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} (1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p} |u|^p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Rappelons que  $r$  et  $s$  sont équivalents dans  $D_{R,\lambda/2}$ . Ainsi, on peut écrire

$$\int_{D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} (1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p} |u|^p d\mathbf{x} \leq C \int_{D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p} |u|^p d\mathbf{x}.$$

Comme  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$ , par passage aux coordonnées sphériques, pour le cas  $n \geq 3$ , ou aux coordonnées polaires pour  $n = 2$ , avec  $u(\mathbf{x}) = v(r, \theta)$ , et par application de (2.51), on montre que

$$\int_R^{+\infty} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1} |v|^p dr \leq C \int_R^{+\infty} r^{(\alpha+\beta)p+n-1} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr.$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

De cette dernière inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p} |u|^p d\mathbf{x} &\leq C \int_{D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta)p} |\nabla u|^p d\mathbf{x} \\
&\leq C \int_{D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p} (1+s)^{\beta p} |\nabla u|^p d\mathbf{x} \\
&\leq C \|\nabla u\|_{\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(B'_R)}^p.
\end{aligned}$$

L'inégalité (2.59) est ainsi démontrée ce qui achève la preuve du lemme. ■

**Remarque 2.23** L'inégalité (2.52) n'est pas vérifiée pour  $\beta \leq 0$ . Dans [21], Farwig donne un contre-exemple pour le cas  $p = 2$  et  $\alpha = \beta = 0$ . Nous allons montrer l'invalidité de l'inégalité (2.52) pour le cas  $p = 2$ ,  $\beta < 0$  et  $n = 3$  en prenant comme contre-exemple une fonction radiale  $u$ .

En utilisant les coordonnées sphériques définies par (2.28) pour  $n = 3$  avec  $u(\mathbf{x}) = v(r, \theta) = v(r)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}
I &= \int_{B'_R} (1+r)^{2(\alpha-\frac{1}{2})} (1+s)^{2(\beta-\frac{1}{2})} |u|^2 d\mathbf{x} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_R^{+\infty} \int_0^\pi (1+r)^{2(\alpha-\frac{1}{2})} (1+r-r\cos\theta_1)^{2(\beta-\frac{1}{2})} |v|^2 r^2 \sin\theta_1 d\theta_1 dr d\theta_2 \\
&= \int_0^{2\pi} \int_R^{+\infty} (1+r)^{2(\alpha-\frac{1}{2})} r^2 |v|^2 \times \left( \int_0^\pi (1+r-r\cos\theta_1)^{2(\beta-\frac{1}{2})} \sin\theta_1 d\theta_1 \right) dr d\theta_2.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale peut être calculée explicitement,

$$\int_0^\pi (1+r-r\cos\theta_1)^{2(\beta-\frac{1}{2})} \sin\theta_1 d\theta_1 = \frac{1}{2\beta r} [(1+2r)^{2\beta} - 1] \sim -\frac{1}{2\beta r}.$$

Ainsi, on a

$$I \sim \int_0^{2\pi} \int_R^{+\infty} -\frac{1}{2\beta r} (1+r)^{2(\alpha-\frac{1}{2})} |v|^2 r^2 dr d\theta_2.$$

Ensuite, on peut écrire

$$J = \int_R^{+\infty} r^{2\alpha} |v|^2 dr \leq \frac{4}{(\alpha+1)^2} \int_R^{+\infty} r^{2(\alpha+1)} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 dr,$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

avec  $\alpha + 1 \neq 0$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} I &\leq C \int_0^{2\pi} \int_R^{+\infty} -\frac{1}{2\beta r} (1+r)^{2(\alpha+\frac{1}{2})} r^2 \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 dr \\ &\leq C \int_{B'_R} (1+s)^{2(\beta-\frac{1}{2})} (1+r)^{2(\alpha+\frac{1}{2})} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

L'inégalité obtenue est optimale pour une fonction radiale  $u$  et ne permet pas d'obtenir une inégalité de type (2.52). Dans la suite, nous étendrons l'inégalité (2.60) à toute fonction  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Grâce au lemme 2.22, nous pouvons à présent énoncer le premier théorème principal de ce paragraphe.

**Théorème 2.24** *Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$  et  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$ . Soit  $j' = \min(j, 0)$ , où  $j$  est le plus haut degré des polynômes inclus dans  $X_{\alpha, \beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Alors, nous avons*

$$\forall u \in X_{\alpha, \beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|u + \lambda\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2}, \beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p_{\alpha, \beta}(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.61)$$

*Autrement dit, la semi-norme  $\|\nabla \cdot\|_{L^p_{\alpha, \beta}(\mathbb{R}^n)}$  définit sur  $X_{\alpha, \beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{j'}$  une norme équivalente à la norme induite par  $X_{\alpha, \beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .*

**Preuve :** Le principe est celui de la démonstration du théorème 8.3 p 598 de [6]. La preuve se fait en deux étapes . La première étape consiste à éliminer la norme quotient. Pour cela, on fixe un ouvert borné  $\Omega'$  de  $\mathbb{R}^n$ . On choisit  $q \in \mathbb{P}_{j'}$ , tel que  $U = u + q \in X_{\alpha, \beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  satisfait

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{j'}, \quad \int_{\Omega'} U \lambda d\mathbf{x} = 0. \quad (2.62)$$

On remarque que nous avons facilement

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|u + \lambda\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2}, \beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|U\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2}, \beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)}.$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

La deuxième étape consiste à montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $U \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  satisfaisant (2.62), on a

$$\|U\|_{L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla U\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour cela nous allons montrer par l'absurde l'inégalité suivante :

$$\|U\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla U\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.63)$$

Supposons qu'il existe une suite  $(U_k)$  satisfaisant (2.62) et vérifiant

$$\|U_k\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = 1 \text{ et } \|\nabla U_k\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{k}.$$

La suite  $(U_k)$  étant bornée dans  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , espace réflexif, on peut en extraire une sous-suite encore notée  $(U_k)$  qui converge faiblement vers un élément  $U_*$  de  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  satisfaisant (2.62). De plus, on a

$$\|\nabla U_*\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla U_k\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui implique  $\|\nabla U_*\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)} = 0$ . L'élément  $U_*$  est donc une constante satisfaisant (2.62), ce qui signifie que  $U_* = 0$ . On considère maintenant un réel  $R > 0$  et la partition de l'unité suivante :

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 1, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1 \text{ dans } \mathbb{R}^n,$$

$$\text{supp } \varphi_1 \subset \overline{B_{R+1}}, \quad \text{supp } \varphi_2 \subset B'_R.$$

Comme les espaces  $\mathbf{X}_{\alpha,\beta}^{1,p}(B_{R+1})$  et  $W^{1,p}(B_{R+1})$  coïncident algébriquement et topologiquement, on en déduit que la sous-suite  $U_k$  converge faiblement vers 0 dans  $W^{1,p}(B_{R+1})$ .

Par ailleurs, l'injection de  $W^{1,p}(B_{R+1})$  dans  $L^p(B_{R+1})$  étant compacte, il vient que

$$U_k \rightarrow 0 \text{ dans } L^p(B_{R+1}) \text{ fort.}$$

Comme on a aussi  $\|\nabla U_k\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)}$  qui tend vers 0, on en déduit que

$$U_k \rightarrow 0 \text{ dans } W^{1,p}(B_{R+1}) \text{ fort}$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

et donc

$$\varphi_1 U_k \rightarrow 0 \text{ dans } W^{1,p}(B_{R+1}) \text{ fort.}$$

Occupons nous à présent du terme  $\varphi_2 U_k$ . Grâce à la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , pour tout  $k$  fixé, il existe une suite  $(\psi_j)$  qui tend vers  $\varphi_2 U_k$  dans  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Maintenant, comme  $\varphi_2 \psi_j$  appartient à  $\mathcal{D}(B'_R)$ , d'après le lemme 2.22, il vient

$$\|\varphi_2 \psi_j\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla(\varphi_2 \psi_j)\|_{L_{\alpha,\beta}^p(B'_R)}.$$

En faisant tendre  $j$  vers l'infini, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi_2 U_k\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|\nabla(\varphi_2 U_k)\|_{L_{\alpha,\beta}^p(B'_R)} \\ &\leq C \left( \|\nabla(\varphi_2 U_k)\|_{L_{\alpha,\beta}^p(B'_R \cap B_{R+1})}^p + \|\nabla U_k\|_{L_{\alpha,\beta}^p(B'_{R+1})}^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

L'ensemble  $B'_R \cap B_{R+1}$  est borné et donc les espaces  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(B'_R \cap B_{R+1})$  et  $W^{1,p}(B'_R \cap B_{R+1})$  coïncident algébriquement et topologiquement. Ceci nous permet de dire que  $\varphi_2 U_k$  tend fortement vers 0 dans  $W^{1,p}(B'_R \cap B_{R+1})$ . Ainsi,

$$\varphi_2 U_k \rightarrow 0 \text{ dans } X_{\alpha,\beta}^{1,p}(B'_R).$$

Comme  $U_k = \varphi_1 U_k + \varphi_2 U_k$ , on en déduit que

$$U_k \rightarrow 0 \text{ dans } X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

ce qui contredit l'hypothèse

$$\|U_k\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = 1$$

et achève la preuve. ■

Ce résultat s'étend par partition de l'unité à un domaine extérieur  $\Omega$ . Plus précisément, nous avons le

**Théorème 2.25** *Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\beta > \max(0, (1 - n + p)/2p)$  et  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$ . Soit  $j' = \min(j, 0)$ , où  $j$  est le plus haut degré des polynômes inclus dans*

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

$X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$ . Alors, nous avons

$$\forall u \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|u + \lambda\|_{L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\Omega)}. \quad (2.64)$$

Autrement dit, la semi-norme  $\|\nabla \cdot\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\Omega)}$  définit sur  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_{j'}$  une norme équivalente à la norme induite par  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\Omega)$ .

**Le cas  $\beta \leq 0$**

Comme nous l'avons annoncé précédemment, nous allons étendre (2.60) à toute fonction  $u \in \mathcal{D}(B'_R)$ .

**Lemme 2.26** Soient  $R > 0$  un réel fixé,  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $\beta \leq 0$ . On suppose de plus que  $\alpha + \frac{n}{p} - 1 < 0$  ou  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 > 0$ . Alors, nous avons

$$\forall u \in \mathcal{D}(B'_R), \quad \|u\|_{L_{\alpha-1,\beta}^p(B'_R)} \leq C \|\nabla u\|_{L_{\alpha,\beta}^p(B'_R)}. \quad (2.65)$$

**Preuve :** Soit une fonction  $u \in \mathcal{D}(B'_R)$ .

1) Le cas  $n \geq 3$ .

Soit  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ , et considérons le domaine suivant

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[, r > R\}.$$

Utilisant les coordonnées sphériques généralisées (2.28) avec  $u(\mathbf{x}) = v(r, \theta)$ , il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} I &= \int_D r^{(\alpha-1)p+n-1} (1+r-r\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} |v|^p dr d\theta \\ &\leq C \int_D r^{\alpha p+n-1} (1+r-r\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Nous allons à présent découper le domaine  $D$  en trois sous-domaines. Pour cela, on définit  $\tilde{r}(\theta_1) = \frac{1}{1-\cos\theta_1}$  et le réel  $\tilde{\theta} \in ]0, \pi[$  tel que  $R = \frac{1}{1-\cos\tilde{\theta}}$ . On définit les trois

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

sous-domaines suivants

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(r, \theta) \in D, R < r < \tilde{r}(\theta_1), 0 < \theta_1 < \tilde{\theta}\}, \\ D_2 &= \{(r, \theta) \in D, r > \tilde{r}(\theta_1), 0 < \theta_1 < \tilde{\theta}\}, \\ D_3 &= \{(r, \theta) \in D, r > R, \tilde{\theta} < \theta_1 < \pi\}. \end{aligned}$$

Sur  $D_1$ , on a  $r(1 - \cos \theta_1) \leq \tilde{r}(\theta_1)(1 - \cos \theta_1) \leq 1$ . Ainsi,

$$1 + r - r \cos \theta_1 \sim 1 \text{ sur } D_1.$$

Par un raisonnement analogue, on obtient

$$1 + r - r \cos \theta_1 \sim r - r \cos \theta_1 \text{ sur } D_2 \cup D_3.$$

D'où on en déduit

$$I \sim I_1 + I_2 + I_3,$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{D_1} r^{(\alpha-1)p+n-1} (\sin \theta_1)^{n-2} |v|^p dr d\theta, \\ I_2 &= \int_{D_2} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1} (1 - \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} |v|^p dr d\theta, \\ I_3 &= \int_{D_3} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1} (1 - \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} |v|^p dr d\theta. \end{aligned}$$

Il s'agit à présent d'estimer ces trois intégrales et nous commençons par  $I_1$ . Comme  $\alpha + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$ , une intégration par parties et l'application de l'inégalité de Hölder nous donnent immédiatement

$$\begin{aligned} \int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} r^{(\alpha-1)p+n-1} |v|^p dr &\leq \frac{1}{(\alpha-1)p+n} (\tilde{r}(\theta_1))^{(\alpha-1)p+n} |v(\tilde{r}(\theta_1), \theta)|^p + \\ &+ \frac{p}{|(\alpha-1)p+n|} \left( \int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} r^{(\alpha-1)p+n-1} |v|^p dr \right)^{1/p'} \left( \int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} r^{\alpha p+n-1} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq \frac{1}{(\alpha-1)p+n} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{\tilde{\theta}} (\tilde{r}(\theta_1))^{(\alpha-1)p+n} (\sin \theta_1)^{n-2} |v(\tilde{r}(\theta_1), \theta)|^p d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
 &\quad + C \int_{D_1} r^{\alpha p+n-1} (\sin \theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta.
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Puisque  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$ , de la même manière, on obtient

$$I_2 \leq -\frac{1}{(\alpha + \beta - 1)p + n} I'_2 + C \int_{D_2} r^{(\alpha+\beta)p+n-1} (1 - \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta, \tag{2.68}$$

où

$$I'_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{\tilde{\theta}} (\tilde{r}(\theta_1))^{(\alpha+\beta-1)p+n} (1 - \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} |v(\tilde{r}(\theta_1), \theta)|^p d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}.$$

On obtient aussi

$$I_3 \leq C \int_{D_3} r^{(\alpha+\beta)p+n-1} (1 - \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta. \tag{2.69}$$

D'après la définition de  $\tilde{r}(\theta_1)$ , nous pouvons remarquer que  $(\tilde{r}(\theta_1)(1 - \cos \theta_1))^{\beta p} = 1$ .

D'où on a

$$I'_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{\tilde{\theta}} (\tilde{r}(\theta_1))^{(\alpha-1)p+n} (\sin \theta_1)^{n-2} |v(\tilde{r}(\theta_1), \theta)|^p d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}. \tag{2.70}$$

Grâce à (2.67), (2.68), (2.69) et (2.70), on obtient

$$\begin{aligned}
 I &\leq C \int_D r^{\alpha p+n-1} (1 + r - r \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta \\
 &\quad + \left( \frac{1}{(\alpha-1)p+n} - \frac{1}{(\alpha + \beta - 1)p + n} \right) I'_2.
 \end{aligned}$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

D'après les hypothèses, on a  $\beta \leq 0$  et soit  $\alpha + \frac{n}{p} - 1 < 0$ , soit  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 > 0$ . On en déduit donc que

$$\frac{1}{(\alpha - 1)p + n} - \frac{1}{(\alpha + \beta - 1)p + n} \leq 0,$$

ce qui nous permet d'obtenir (2.65).

2) Le cas  $n = 2$ .

Il se traite de la même manière que le cas précédent. On utilise les coordonnées polaires et on définit le domaine

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ] - \pi, \pi[, r > R\}.$$

De plus on pose  $\tilde{r}(\theta) = \frac{1}{1 - \cos \theta}$  et  $\tilde{\theta}$  tel que  $R = \frac{1}{1 - \cos \tilde{\theta}}$ . Les trois sous-domaines de  $D$  se définissent de la manière suivante

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(r, \theta) \in D, R < r < \tilde{r}(\theta), -\tilde{\theta} < \theta < \tilde{\theta}\} \\ D_2 &= \{(r, \theta) \in D, r > \tilde{r}(\theta), -\tilde{\theta} < \theta_1 < \tilde{\theta}\} \\ D_3 &= \{(r, \theta) \in D, r > R, \theta \in ] - \pi, -\tilde{\theta}[ \cup ]\tilde{\theta}, \pi[\}. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. ■

Ce lemme nous permet d'obtenir le deuxième résultat principal de ce paragraphe dont la preuve est similaire à celle du théorème 2.24.

**Théorème 2.27** *Soient deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\beta \leq 0$ . On suppose de plus que  $\alpha + \frac{n}{p} - 1 < 0$  ou  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 > 0$ . Soit  $j' = \min(j, 0)$  où  $j$  est le degré le plus grand des polynômes appartenant à  $Y_{\alpha, \beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Alors nous avons*

$$\forall u \in Y_{\alpha, \beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|u + \lambda\|_{L_{\alpha-1, \beta}^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L_{\alpha, \beta}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.71)$$

**Remarque 2.28** Si  $\beta = 0$  et  $\alpha + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$ , nous retrouvons les inégalités (2.7) et (2.8).

**Remarque 2.29** Sous les hypothèses du théorème 2.27, on peut prendre  $f_0 = 0$  dans la caractérisation (2.35) dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Plus précisément, si  $f \in$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

$Y_{-\alpha, -\beta}^{-1, p'}(\mathbb{R}^3)$ , il existe  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_{-\alpha, -\beta}^{p'}(\mathbb{R}^3)$  telle que

$$f = \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Nous pouvons étendre le théorème 2.27 à un domaine extérieur  $\Omega$ .

**Théorème 2.30** *Soient deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\beta \leq 0$ . On suppose de plus que  $\alpha + \frac{n}{p} - 1 < 0$  ou  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 > 0$ . Soit  $j' = \min(j, 0)$  où  $j$  est le degré le plus grand des polynômes appartenant à  $Y_{\alpha, \beta}^{1, p}(\Omega)$ . Alors nous avons*

$$\forall u \in Y_{\alpha, \beta}^{1, p}(\Omega), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{F}_{j'}} \|u + \lambda\|_{L_{\alpha-1, \beta}^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L_{\alpha, \beta}^p(\Omega)}. \quad (2.72)$$

### 2.4.3 Inégalités avec des poids vérifiant la condition $A_\infty$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que des inégalités du type (2.61) et (2.71) peuvent être obtenues si les poids anisotropiques utilisés appartiennent à une certaine classe de fonctions. Nous avons d'abord besoin de quelques définitions (voir B. Muckenhoupt [41]).

**Définition 2.31** 1) On dit qu'une fonction  $w$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$  et localement intégrable, satisfait la condition  $A_q$ , avec  $1 < q < \infty$ , si elle est positive et si pour tout cube  $\mathbf{Q}$ , nous avons

$$\left( \int_{\mathbf{Q}} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \left( \int_{\mathbf{Q}} [w(\mathbf{x})]^{-1/(q-1)} d\mathbf{x} \right)^{q-1} \leq C |\mathbf{Q}|^q.$$

2) La fonction  $w$  satisfait la condition  $A_\infty$ , si il existe deux réels  $a, b \in ]0, 1[$  tels que pour tout cube  $\mathbf{Q}$  et pour tout ensemble  $\mathbf{E} \subset \mathbf{Q}$  vérifiant  $|\mathbf{E}| < a|\mathbf{Q}|$ , nous avons

$$\int_{\mathbf{E}} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq b \int_{\mathbf{Q}} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Pour se fixer les idées, dans la suite de ce paragraphe, nous allons supposer  $p = 2$  et  $n = 3$ . Nous allons aussi rappeler quelques résultats que nous utiliserons.

(i) Une fonction satisfait la condition  $A_\infty$  si et seulement si il existe  $q \in ]1, \infty[$  tel que  $u$  satisfait la condition  $A_q$  (voir B. Muckenhoupt [42]).

(ii) Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels telles que  $-1 < \beta < q - 1$  et  $-3 < \alpha + \beta < 3(q - 1)$ . Alors le poids  $\eta_\beta^\alpha$  satisfait la condition  $A_q$  pour tout  $1 < q < \infty$  (voir Kračmar Novotný

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

et Pokorný [36]).

(iii) Soit  $w$  un poids appartenant à  $A_\infty$ . Alors nous avons (voir Perez [50])

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{x})|^2 w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad (2.73)$$

si et seulement si

$$\sup_{R>0} R^2 \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty.$$

(iv) Soient  $v$  et  $w$  deux poids tels que  $w$  et  $\frac{1}{v}$  appartiennent à  $A_\infty$ . Alors, nous avons (voir Sawyer et Wheeden [52]) :

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{x})|^2 w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f(\mathbf{x})|^2 v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.74)$$

si et seulement si

$$\sup_{R>0} |B_R|^{-2/3} \left( \int_{B_R} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left( \int_{B_R} \frac{1}{v(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \infty.$$

Rappelons que l'inégalité (2.61) n'est pas vérifiée pour  $\alpha = \beta = 0$ . Mais, néanmoins nous avons le résultat suivant

**Proposition 2.32** *Soit  $\sigma$  un réel strictement positif. Alors*

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} |u|^2 d\mathbf{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.75)$$

**Preuve :** D'après (i) et (ii), le poids  $\eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma}$  appartient à  $A_\infty$  pour tout  $\sigma > 0$ . Ainsi, en utilisant (iii), l'inégalité (2.75) est satisfaite si et seulement si

$$\sup_{R>0} R^2 \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} d\mathbf{x} < \infty.$$

En utilisant les coordonnées sphériques (2.28), pour  $n = 3$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} d\mathbf{x} &= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi (1+r)^{-1-\sigma} (1+r-r\cos\theta)^{-1+\sigma} r^2 \sin\theta d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^\pi r^2 (1+r)^{-1-\sigma} \left( \int_0^\pi (1+r-r\cos\theta)^{-1+\sigma} \sin\theta d\theta \right) dr. \end{aligned}$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

D'où, il vient

$$\int_{B_R} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} d\mathbf{x} = 2\pi \int_0^R (1+r)^{-1-\sigma} r[(1+2r)^\sigma - 1] dr.$$

Il est ensuite facile de voir que

$$R^2 \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} d\mathbf{x} = O(1),$$

qui achève la preuve. ■

**Remarque 2.33** D'après le théorème 2.1, nous avons

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} (1+r)^{-2} |u|^2 d\mathbf{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}.$$

Ainsi, en remarquant que, pour  $0 < \sigma < 1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1+r)^{-2} |u|^2 d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} |u|^2 d\mathbf{x},$$

nous pouvons facilement voir que l'inégalité (2.75) améliore celle donnée par le théorème 2.1.

**Proposition 2.34** 1) Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $0 < \beta < \frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2} < \alpha + \beta < \frac{3}{2}$ . Alors nous avons

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1} |u|^2 d\mathbf{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta}^{2\alpha} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.76)$$

2) Si  $\alpha$  et  $\beta$  satisfont  $-\frac{1}{2} < \beta \leq 0$  et  $-\frac{1}{2} < \alpha + \beta < \frac{3}{2}$ , alors nous avons

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta}^{2\alpha-2} |u|^2 d\mathbf{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta}^{2\alpha} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.77)$$

**Preuve :** 1) Les poids  $\eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1}$  et  $\eta_{2\beta}^{2\alpha}$  appartiennent à  $A_\infty$  si et seulement si

$$0 < \beta < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} < \alpha + \beta < \frac{3}{2}.$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

En procédant maintenant de la même manière que dans la preuve de la proposition 2.32 et en utilisant (iv), on obtient

$$|B_R|^{-2/3} \left( \int_{B_R} \eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1} \right)^{1/2} \left( \int_{B_R} \eta_{-2\beta}^{-2\alpha} \right)^{1/2} = O(1),$$

qui entraîne (2.76).

2) la preuve de (2.77) est similaire à la précédente. ■

**Remarque 2.35** Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels qui satisfont

$$\beta > 0 \text{ et } \alpha + \beta + \frac{1}{2} > 0,$$

alors les poids  $\eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1}$  et  $\eta_{-2\beta}^{-2\alpha}$  n'appartiennent pas nécessairement à  $A_\infty$ . Dans ce cas, le résultat (iv) ne peut être utilisé. Mais d'après le théorème 2.24, pour tout  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1} |u|^2 d\mathbf{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta}^{2\alpha} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}.$$

Par ailleurs, si  $\beta > 0$  et  $\alpha + \beta + \frac{1}{2} < 0$ , alors, toujours d'après le théorème 2.24, pour toute fonction  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , nous avons

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1} |u + \lambda|^2 d\mathbf{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta}^{2\alpha} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.78)$$

Nous pouvons ainsi constater que l'application du résultat de Sawyer et Wheeden (iv) ne donne que des résultats partiels et ne permet pas d'obtenir des inégalités de type (2.78). Nous pouvons donc en déduire que le théorème 2.24 étend le résultat de la proposition 2.34 1). De même, le théorème 2.27 étend le résultat de la proposition 2.34 2).

### 2.4.4 Propriétés fonctionnelles d'opérateurs

Dans ce paragraphe, nous montrons que les inégalités de Hardy obtenues et données dans les théorèmes 2.24 et 2.27 nous permettent d'étendre les propriétés d'isomorphismes des opérateurs gradient, divergence et laplacien dans les espaces avec poids anisotropes.

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Grâce à ces résultats, nous pouvons aussi établir des résultats de décomposition de Helmholtz dans ces espaces. Introduisons l'espace

$$\mathbf{H}_{\alpha,\beta}^p = \{\mathbf{v} \in L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3), \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

**Proposition 2.36** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels satisfaisant  $\beta > \max(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p})$  et  $\alpha + \beta + \frac{3}{p} - 1 \neq 0$ . Les opérateurs suivants sont des isomorphismes :*

$$\nabla : X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)/\mathbb{P}_{j'} \rightarrow \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3) \perp \mathbf{H}_{-\alpha,-\beta}^{p'} \quad (2.79)$$

$$\operatorname{div} : \mathbf{L}_{-\alpha,-\beta}^{p'}(\mathbb{R}^3)/\mathbf{H}_{-\alpha,-\beta}^{p'} \rightarrow X_{-\alpha,-\beta}^{-1,p'}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{j'}, \quad (2.80)$$

avec  $j' = \min(j, 0)$  et  $j < \frac{1}{2} - \frac{3}{p} + \frac{1}{p} \min(1, -\beta p + p/2)$ .

**Preuve :** L'opérateur gradient est clairement linéaire et continu. Il est aussi injectif car si  $u \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  vérifie  $\nabla u = 0$ , alors,  $u$  est au plus une constante de  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ , c'est-à-dire,  $u \in \mathbb{P}_{j'}$  (voir (2.30)). Il nous reste à montrer la surjectivité. D'après le théorème 2.24, on a

$$\|u\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)/\mathbb{P}_{j'}} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)}.$$

Ainsi, l'opérateur gradient est un isomorphisme de  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)/\mathbb{P}_{j'}$  sur son image  $R_g$  qui est un sous-espace fermé de  $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)$ . Nous pouvons donc écrire

$$R_g = (\ker(\operatorname{div}))^\perp,$$

où l'opérateur divergence est défini par

$$\operatorname{div} : \mathbf{L}_{-\alpha,-\beta}^{p'}(\mathbb{R}^3) \rightarrow X_{-\alpha,-\beta}^{-1,p'}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{j'}.$$

Nous en déduisons que

$$R_g = \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3) \perp \mathbf{H}_{-\alpha,-\beta}^{p'}.$$

Par conséquent, l'opérateur (2.79) est bien un isomorphisme et, par dualité et transposition nous en déduisons aussi que l'opérateur (2.80) est un isomorphisme. ■

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Nous allons maintenant montrer des résultats d'isomorphisme dans les espaces avec poids anisotropes pour l'opérateur laplacien. Rappelons tout d'abord que  $(\mathcal{O}, \mathcal{P})$  désigne la solution fondamentale des équations d'Oseen où  $\mathcal{P}$  est définie par

$$\mathcal{P}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \right)$$

et  $\mathcal{E}$  désigne la solution fondamentale du laplacien.

**Proposition 2.37** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $0 < \beta < 1 - \frac{1}{p}$  et  $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$ . Alors l'opérateur laplacien*

$$\Delta : Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3) \rightarrow Y_{\alpha,\beta}^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \quad (2.81)$$

*est un isomorphisme.*

**Preuve :** L'opérateur défini par (2.81) est clairement linéaire et continu. De plus, si  $u \in Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  vérifie  $\Delta u = 0$ , alors  $u$  est un polynôme de  $\mathbb{P}_k$  avec  $k < 1 - \frac{3}{p} - (\alpha + \beta) < 0$ . D'après (2.31) et les hypothèses sur  $\alpha$  et  $\beta$ , on a  $k < 0$ . On en déduit que  $u = 0$  et l'opérateur est donc injectif. Il reste à montrer la surjection. Soit  $f \in Y_{\alpha,\beta}^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Comme  $\alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$ , on a  $-\alpha - \beta + \frac{3}{p} - 1 > 0$  et la remarque 2.29 nous permet d'écrire

$$f = \operatorname{div} \mathbf{F},$$

avec  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)$ . En utilisant les résultats sur la convolution par la solution fondamentale démontrés dans [36], sous les hypothèses sur  $\alpha$  et  $\beta$ , il vient, pour tout  $i = 1, 2, 3$ ,  $\mathcal{P}_i * F_i \in Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Posons  $\pi = \mathcal{P}_i * F_i$ , on a

$$\Delta \pi = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\mathcal{P}_i * F_i) = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} * F_i \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\mathcal{E} * F_i) = \operatorname{div} \mathbf{F} = f.$$

Nous avons donc trouvé une fonction  $\pi \in Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  qui vérifie  $\Delta \pi = f$ , ce qui signifie que l'opérateur est surjectif. ■

Par dualité et transposition, nous avons le résultat suivant

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

**Proposition 2.38** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $-\frac{1}{p} < \beta < 0$  et  $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$ . Alors l'opérateur laplacien*

$$\Delta : Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3) \rightarrow Y_{\alpha,\beta}^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \quad (2.82)$$

*est un isomorphisme.*

Grâce à ces trois propositions, nous allons montrer que sous certaines conditions sur  $\alpha$  et  $\beta$ , les espaces  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  et  $Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  coïncident. Nous allons tout d'abord montrer un résultat de densité. Introduisons l'espace

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \operatorname{div} \varphi = 0\}.$$

**Lemme 2.39** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $0 < \beta < 1 - \frac{1}{p}$  ou  $-\frac{1}{p} < \beta < 0$ . On suppose de plus que  $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$ . Alors*

*l'espace  $\mathcal{V}$  est dense dans  $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}^p$ .*

**Preuve :** Soit une fonction  $\mathbf{v}$  appartenant à  $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}^p$ . Alors  $\operatorname{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{Y}_{\alpha,\beta}^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  et d'après les propositions 2.37 et 2.38, il existe un unique vecteur  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{Y}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  telle que

$$\Delta \boldsymbol{\psi} = \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

En prenant le rotationnel de cette dernière équation, on obtient

$$-\Delta \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\Delta \mathbf{v}.$$

Ainsi  $\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} - \mathbf{v}$  est un vecteur dont chaque composante est un polynôme harmonique de  $L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)$ . Mais les hypothèses sur  $\alpha$  et  $\beta$  et (2.29) entraînent que  $\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} = \mathbf{v}$ . Maintenant, la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  dans  $\mathbf{Y}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  nous assure l'existence d'une suite  $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  qui tend vers  $\boldsymbol{\psi}$  dans  $\mathbf{Y}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Cela implique que la suite  $\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_k$ , qui appartient à  $\mathcal{V}$ , tend vers  $\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} = \mathbf{v}$  dans  $L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)$ . ■

Ce lemme et la proposition 2.36 nous donne le résultat suivant.

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

**Proposition 2.40** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $\max(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < \beta < 1 - \frac{1}{p}$  et  $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$ . Alors nous avons l'inclusion*

$$Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3) \subset L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3).$$

*En d'autres termes les espaces  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  et  $Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  coïncident algébriquement et topologiquement.*

**Preuve :** Soit  $\pi \in Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{V}$ , on a

$$\langle \nabla \pi, \varphi \rangle_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3) \times L_{-\alpha,-\beta}^{p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

D'après les hypothèses sur  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\mathcal{V}$  est dense dans  $\mathbf{H}_{-\alpha,-\beta}^{p'}$ . Nous avons donc  $\nabla \pi \in L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3) \perp \mathbf{H}_{-\alpha,-\beta}^{p'}$  et la proposition 2.36 nous assure l'existence d'une unique fonction  $\psi \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3) \subset Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla \psi = \nabla \pi$ . On en déduit que  $\psi - \pi$  est une constante de  $Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Mais les hypothèses sur  $\alpha$  et  $\beta$  montrent qu'il n'y a pas de constantes non nulles dans  $Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Nous pouvons donc conclure que  $\pi = \psi \in L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ . ■

Cette proposition nous permet d'améliorer le résultat d'isomorphisme du laplacien défini par (2.81). Par dualité et transposition, nous améliorons aussi (2.82).

**Théorème 2.41** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$ .*

(i) *Si  $\max(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < \beta < 1 - \frac{1}{p}$ , alors l'opérateur*

$$\Delta : X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3) \rightarrow Y_{\alpha,\beta}^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \tag{2.83}$$

*est un isomorphisme.*

(ii) *Si  $-\frac{1}{p} < \beta < \max(0, \frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ , alors l'opérateur*

$$\Delta : Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3) \rightarrow X_{\alpha,\beta}^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \tag{2.84}$$

*est un isomorphisme.*

Nous terminons ce paragraphe par des résultats sur les potentiels vecteurs et par des résultats qui étendent la décomposition de Helmholtz dans des espaces avec poids

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

anisotropiques. Rappelons que le cas particulier  $\beta = 0$  a été étudié par Girault [29]. Rappelons qu'un champs de vecteur  $\boldsymbol{\psi}$  est appelé potentiel vecteur d'un champs de vecteur  $\mathbf{u}$  donné si il satisfait

$$\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi} = \mathbf{u}.$$

**Théorème 2.42** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$ . Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant*

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

(i) *Si  $\max(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < \beta < 1 - \frac{1}{p}$ , alors il existe un unique potentiel vecteur  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  tel que*

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0, \quad (2.85)$$

et

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{X}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.86)$$

(ii) *Si  $-\frac{1}{p} < \beta < \max(0, \frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ , alors il existe un unique potentiel vecteur  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{Y}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant (2.85) et tel que*

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{Y}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.87)$$

**Preuve :** La preuve de (i) et de (ii) sont analogues. Nous allons donc la faire uniquement pour (i). Comme  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)$ , on a  $\mathbf{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{Y}_{\alpha,\beta}^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  et d'après le théorème 2.41 (i), il existe un unique vecteur  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  solution de

$$-\Delta \boldsymbol{\psi} = \mathbf{rot} \mathbf{u}, \quad (2.88)$$

et satisfaisant l'estimation (2.86). Maintenant, comme  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , en prenant le rotationnel de l'équation précédente, on obtient

$$-\Delta(\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi} - \mathbf{u}) = 0.$$

Cela qui implique que  $\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi} - \mathbf{u}$  est un vecteur dont chaque composante est un polynôme harmonique de  $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)$ . Les hypothèses sur  $\alpha$  et  $\beta$  nous permettent de conclure que  $\mathbf{u} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}$ . En prenant, à présent la divergence de (2.88), nous observons que  $\Delta(\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}) = 0$ . De la même manière que précédemment, nous en concluons

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

que  $\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0$ . ■

Le prochain et dernier résultat de ce paragraphe concerne la décomposition de Helmholtz.

**Théorème 2.43** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels satisfaisant  $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$ . Soit  $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)$ .*

(i) *Si  $\max(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < \beta < 1 - \frac{1}{p}$ , alors  $\boldsymbol{f}$  a la décomposition unique suivante*

$$\boldsymbol{f} = \nabla\varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \quad (2.89)$$

où  $\varphi \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  et  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons l'estimation

$$\|\varphi\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{X}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.90)$$

(ii) *Si  $-\frac{1}{p} < \beta < \max(0, \frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ , alors  $\boldsymbol{f}$  a la décomposition unique (2.89), où  $\varphi \in Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  et  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{Y}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons*

$$\|\varphi\|_{Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{Y}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.91)$$

**Preuve :** (i) Comme  $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)$ , on a  $\operatorname{div} \boldsymbol{f} \in Y_{\alpha,\beta}^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Le théorème 2.41 (i) assure l'existence d'une unique fonction  $\varphi \in X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  telle que

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \boldsymbol{f},$$

satisfaisant aussi

$$\|\varphi\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\operatorname{div} \boldsymbol{f}\|_{Y_{\alpha,\beta}^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.92)$$

Par ailleurs, comme  $\boldsymbol{f} - \nabla\varphi \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\operatorname{div}(\boldsymbol{f} - \nabla\varphi) = 0$ , le théorème 2.42 assure l'existence d'un unique vecteur potentiel  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  tel que

$$\boldsymbol{f} - \nabla\varphi = \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi},$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

satisfaisant aussi

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{X}_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\mathbf{f} - \nabla\varphi\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\mathbf{f}\|_{L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.93)$$

Les estimations (2.92) et (2.93) nous donnent (2.90).

(ii) La preuve est analogue à la précédente. ■

### 2.4.5 Inégalités de Hardy avec poids logarithmiques

Comme nous avons pu le constater, l'inégalité (2.61) du théorème 2.24 n'est obtenue que pour les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  ne vérifiant pas la condition

$$\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0. \quad (2.94)$$

De même, l'inégalité (2.71) du théorème n'est pas valable pour les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  satisfaisant

$$\alpha + \frac{n}{p} - 1 = 0 \text{ ou } \alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0. \quad (2.95)$$

Les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  et  $n$  vérifiant (2.94) et (2.95) sont appelées valeurs critiques. L'objectif de ce paragraphe est de montrer qu'en introduisant des poids logarithmiques dans les définitions de  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}$  et  $Y_{\alpha,\beta}^{1,p}$ , nous pouvons obtenir des inégalités de Hardy vérifiées par les fonctions de ces espaces. Ces définitions sont inspirées de la définition générale de l'espace  $W_{\alpha}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . On introduit les espaces :

Si  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$ ,

$$X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^n), \nabla u \in L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)\},$$

si  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$ ,

$$X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{(\ln(1 + \rho))^{-1}u \in L_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^n), \nabla u \in L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Si  $\alpha + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$  et  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$

$$Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L_{\alpha-1,\beta}^p(\mathbb{R}^n), \nabla u \in L_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)\},$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

dans le cas contraire

$$Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{(\ln(1 + \rho))^{-1}u \in L_{\alpha-1,\beta}^p(\mathbb{R}^n), \nabla u \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

De la même manière que pour l'espace  $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , le poids logarithmique n'apparaît que pour les valeurs critiques (2.94) et (2.95). Nous allons montrer à présent montrer un résultat de densité.

### Proposition 2.44

L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et dans  $Y_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**Preuve :** Comme la preuve est similaire pour les deux espaces, nous allons uniquement la faire pour  $X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Le cas non critique  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$  a déjà été prouvé dans la proposition 2.16. Nous procédons de la même manière pour le cas critique  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$ . La différence est dans le choix de la fonction de troncature. Soit  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(]0, \infty[)$  telle que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq \phi(t) &\leq 1 \text{ si } 1 \leq t \leq 2 \\ \phi(t) &= 0 \text{ si } t \geq 2. \end{aligned}$$

Nous introduisons la fonction  $\phi_k$  telle que

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \phi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \phi\left(\frac{k}{\ln r}\right), & r > 1, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= 1 \text{ si } 0 \leq |\mathbf{x}| \leq e^{k/2} \\ 0 \leq \phi(\mathbf{x}) &\leq 1 \text{ si } e^{k/2} \leq |\mathbf{x}| \leq e^k \\ \phi(\mathbf{x}) &= 0 \text{ si } |\mathbf{x}| \geq e^k. \end{aligned}$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Nous avons aussi l'inégalité (voir [6] ou [32])

$$|\nabla \phi_k(\mathbf{x})| \leq Cr^{-1}(\lg r)^{-1}.$$

En posant maintenant  $u_k = u\varphi_k$  et en procédant comme pour la preuve de la proposition 2.16, on montre facilement que  $\|u - u_k\|_{X_{\alpha,\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini. ■

Nous allons donc maintenant établir des inégalités de Hardy incluant les valeurs critiques (2.94) et (2.95). Deux cas seront à distinguer. Les cas  $\beta > 0$  et  $\beta \leq 0$ .

**Le cas  $\beta > 0$**

La preuve du lemme suivant est analogue à celle du lemme 2.21.

**Lemme 2.45** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels satisfaisant  $\beta > \max(0, (1 - n + p)/2p)$ . Alors, si  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$ , nous avons*

$$\forall u \in \mathcal{D}(S), \quad \|(\lg r)^{-1}u\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(S)} \leq C\|(\lg r)^{-1}\nabla u\|_{L^p_{\alpha,\beta}(S)}. \quad (2.96)$$

Nous allons à présent rappeler une inégalité de Hardy généralisée dont la preuve peut se trouver dans [14]. Soit une fonction  $f \in \mathcal{D}(]R, +\infty[)$ ,

a) si  $\sigma, \gamma \in \mathbb{R}$ , avec  $\sigma \neq 1$  et  $R > \exp\left(\frac{2|\gamma|}{|\sigma+1|}\right)$ , nous avons

$$\int_R^{+\infty} r^\sigma (\ln r)^\gamma |f(r)|^p dr \leq C \int_R^{+\infty} r^{\sigma+p} (\ln r)^\gamma |f'(r)|^p dr. \quad (2.97)$$

b) Si  $\gamma \in \mathbb{R}$ , avec  $\gamma \neq -1$  et  $R > 1$ , nous avons

$$\int_R^{+\infty} r^{-1} (\ln r)^\gamma |f(r)|^p dr \leq C \int_R^{+\infty} r^{-1+p} (\ln r)^{\gamma+p} |f'(r)|^p dr. \quad (2.98)$$

Grâce à l'inégalité (2.98), nous pouvons prouver le lemme suivant :

**Lemme 2.46** *Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , avec  $\beta > \max(0, (1 - n + p)/2p)$ . Alors, si  $\alpha + \beta +$*

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

$+\frac{n}{p} - 1 = 0$ , nous avons

$$\forall u \in \mathcal{D}(B'_R), \quad \|(\lg r)^{-1}u\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \quad (2.99)$$

**Preuve :** Les idées de la preuve sont les mêmes que celles de la preuve du lemme 2.22. Nous rappelons le domaine

$$D_{R,\lambda} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, r > R, \lambda r < s\}$$

et nous introduisons la partition de l'unité définie par (2.53). Soit maintenant  $u \in \mathcal{D}(B'_R)$  et commençons par prouver

$$\|(\lg r)^{-1}u\varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \quad (2.100)$$

Par le lemme 2.45, nous avons

$$\begin{aligned} \|(\lg r)^{-1}u\varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} &= \|(\lg r)^{-1}u\varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(S_{R,\lambda})} \\ &\leq C\|(\lg r)^{-1}\nabla(u\varphi_1)\|_{L^p_{\alpha,\beta}(S_{R,\lambda})}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Nous pouvons ensuite écrire

$$\begin{aligned} \|(\lg r)^{-1}\nabla(u\varphi_1)\|_{L^p_{\alpha,\beta}(S_{R,\lambda})}^p &\leq C \int_{S_{R,\lambda}} (1+r)^{\alpha p} (1+s)^{\beta p} (\lg r)^{-p} |\nabla u|^p d\mathbf{x} \\ &\quad + C \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p} (1+s)^{\beta p} (\lg r)^{-p} |u\nabla\varphi_1|^p d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Comme  $0 \leq \varphi_2 \leq 1$ , pour le second terme du membre de droite de (2.102), on a

$$\begin{aligned} &\int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p} (1+s)^{\beta p} (\lg r)^{-p} |u\nabla\varphi_1|^p d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p} (\ln r)^{-p} |u|^p d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Nous utilisons à présent les coordonnées sphériques généralisées (2.28) pour  $n \geq 3$  et les coordonnées polaires pour  $n = 2$ , avec  $u(\mathbf{x}) = v(r, \theta)$ . Comme  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$ ,

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

l'inégalité (2.98) nous donne

$$\int_R^{+\infty} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1} (\ln r)^{-p} |v|^p dr \leq C \int_R^{+\infty} r^{(\alpha+\beta)p+n-1} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr.$$

D'où, en intégrant par rapport à  $\theta$ , on montre que

$$\int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p} (\ln r)^{-p} |u|^p d\mathbf{x} \leq \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta)p} |\nabla u|^p d\mathbf{x}. \quad (2.104)$$

Les estimations (2.102) (2.103) et (2.104) nous permettent d'obtenir (2.100). Montrons maintenant l'estimation suivante

$$\|(\lg r)^{-1} u \varphi_2\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2}, \beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p_{\alpha, \beta}(B'_R)}. \quad (2.105)$$

Il vient

$$\begin{aligned} \|(\lg r)^{-1} u \varphi_2\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2}, \beta-\frac{1}{2}}(B'_R)}^p &= \int_{D_{R,\lambda/2}} (\lg r)^{-p} (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} (1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p} |u \varphi_2|^p d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{D_{R,\lambda/2}} (\lg r)^{-p} (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} (1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p} |u|^p d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_{D_{R,\lambda/2}} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha+\beta-1)p} |u|^p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

De même que précédemment, en utilisant (2.98), nous pouvons démontrer que

$$\int_{D_{R,\lambda/2}} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha+\beta-1)p} |u|^p d\mathbf{x} \leq C \int_{D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta)p} |\nabla u|^p d\mathbf{x}. \quad (2.106)$$

L'inégalité (2.106) entraîne (2.105), ce qui conclut la preuve. ■

Ce lemme nous permet d'obtenir l'inégalité de Hardy pour le cas critique (2.94).

**Théorème 2.47** *Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , avec  $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$  et  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$ . Soit  $j' = \min(j, 0)$  où  $j$  est le plus haut degré des polynômes appartenant à  $X_{\alpha, \beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Alors, nous avons*

$$\forall u \in X_{\alpha, \beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|(\lg r)^{-1} (u + \lambda)\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2}, \beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p_{\alpha, \beta}(\mathbb{R}^n)}.$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

**Le cas  $\beta \leq 0$**

Le lemme suivant est l'équivalent du lemme 2.26 pour le cas critique (2.95).

**Lemme 2.48** *Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tel que  $\beta \leq 0$ . On suppose de plus  $\alpha + \frac{n}{p} - 1 \leq 0$  ou  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \geq 0$ . Alors, pourvu que l'on ait pas simultanément*

$$\beta < 0 \text{ et } \alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0,$$

*nous avons*

$$\forall u \in \mathcal{D}(B'_R), \quad \|(\lg r)^{-1}u\|_{L^p_{\alpha-1,\beta}(B'_R)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \quad (2.107)$$

**Preuve :** Soit  $u \in \mathcal{D}(B'_R)$  et posons

$$I = \int_{B'_R} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha-1)p} (1+s)^{\beta p} |u|^p d\mathbf{x}.$$

Nous ne faisons la preuve que pour  $n \geq 3$ . Le cas  $n = 2$  se traite d'une manière similaire. Rappelons le domaine défini par

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[, r > R\}.$$

En utilisant les coordonnées sphériques généralisées définies par (2.28) avec  $u(\mathbf{x}) = v(r, \theta)$ , nous pouvons écrire

$$I = \int_D (\ln r)^{-p} r^{(\alpha-1)p+n-1} (1+r-r\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} |v|^p dr d\theta.$$

Nous reprenons à présent les mêmes notations ainsi que les mêmes sous-domaines que dans la preuve du lemme 2.26. Nous avons par conséquent

$$I_1 \sim I_1 + I_2 + I_3,$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{D_1} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha-1)p+n-1} (\sin \theta_1)^{n-2} |v|^p dr d\theta, \\ I_2 &= \int_{D_2} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1} (1 - \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} |v|^p dr d\theta, \\ I_3 &= \int_{D_3} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1} (1 - \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} |v|^p dr d\theta. \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à estimer ces trois intégrales. Il y a trois cas à considérer.

1) Le cas  $\alpha + \frac{n}{p} - 1 < 0$  ou  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 > 0$ .

Comme dans la démonstration du lemme 2.26, nous pouvons montrer que

$$I \leq C \int_D r^{\alpha p+n-1} (1+r-r \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| dr d\theta.$$

2) Le cas  $\alpha + \frac{n}{p} - 1 = 0$  et  $\beta \leq 0$ .

Si  $\beta = 0$ , nous retrouvons les inégalités de Hardy présentées dans le théorème 2.1. Nous pouvons donc supposer  $\beta < 0$ . Dans ce cas, on en déduit que  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 < 0$ . Ainsi, une intégration par parties et l'inégalité de Hölder nous donnent

$$I_2 \leq -\frac{2}{\beta p} I'_2 + C \int_{D_2} (\ln r)^{-p} r^{-1+p+\beta p} (1 - \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta, \quad (2.108)$$

avec

$$I'_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{\tilde{\theta}} (\ln \tilde{r}(\theta_1))^{-p} (\sin \theta_1)^{n-2} |v(\tilde{r}(\theta_1), \theta)|^p d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}.$$

Grâce à (2.98), on obtient

$$I_3 \leq C \int_{D_3} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha+\beta)p+n-1} (1 - \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta. \quad (2.109)$$

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

Il nous reste à présent à estimer  $I_1$ . Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha-1)p+n-1} |v|^p dr \\ &= \int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} (\ln r)^{-p} r^{-1} |v|^p dr. \end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties et en utilisant une inégalité de Hölder, il vient

$$J_1 \leq \frac{1}{1-p} |v(\tilde{r}(\theta_1), \theta)|^p (\ln \tilde{r}(\theta_1))^{1-p} + C \int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} r^{-1+p} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr.$$

Ce qui donne

$$I_1 \leq \frac{\ln \tilde{r}(\theta_1)}{1-p} I_2' + C \int_{D_1} r^{-1+p} (\sin \theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta. \quad (2.110)$$

Maintenant par (2.108) (2.109) (2.110), on obtient

$$\begin{aligned} I &\leq \left( \frac{\ln \tilde{r}(\theta_1)}{1-p} - \frac{2}{\beta p} \right) I_2' \\ &\quad + \int \int_D r^{-1+p} (1+r-r \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Comme  $R$  est suffisamment grand et que  $\tilde{r}(\theta_1) > R$  dans  $D_1$ , on en déduit que

$$\frac{\ln \tilde{r}(\theta_1)}{1-p} - \frac{2}{\beta p} \leq 0,$$

ce qui prouve (2.107).

3) Le cas  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$  et  $\beta = 0$ .

Si  $\beta = 0$ , l'inégalité (2.107) fait partie des inégalités données par le théorème 2.1 et démontrées dans [6]. ■

**Remarque 2.49** La validité de l'inégalité (2.107) pour les réels  $\alpha$  et  $\beta$  satisfaisant  $\beta < 0$  et  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$  est une question ouverte.

Le lemme précédent nous permet d'avoir le résultat suivant

## 2.4. Espaces avec poids anisotropes

---

**Théorème 2.50** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tel que  $\beta \leq 0$ . On suppose de plus  $\alpha + \frac{n}{p} - 1 \leq 0$  ou  $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \geq 0$  pourvu que l'on ait pas simultanément

$$\beta < 0 \text{ et } \alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0.$$

Soit  $j' = \min(j, 0)$ , où  $j$  est le plus haut degré des polynômes appartenant à  $Y_{\alpha, \beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Alors nous avons

$$\forall u \in Y_{\alpha, \beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|(\lg r)^{-1}(u + \lambda)\|_{L_{\alpha-1, \beta}^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L_{\alpha, \beta}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

# Chapitre 3

## Le problème stationnaire d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème d'Oseen suivant. Étant donné  $\mathbf{f}$  et  $g$ , nous cherchons un couple  $(\mathbf{u}, \pi)$  solution de

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= g \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{3.1}$$

De plus nous ajoutons au système précédent la condition à l'infini

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\infty, \tag{3.2}$$

où  $\mathbf{u}_\infty$  est un vecteur constant donné de  $\mathbb{R}^3$ . Le cadre fonctionnel choisi est donc celui des espaces de Sobolev avec poids présentés dans le chapitre précédent. Rappelons les poids considérés est la fonction

$$\eta_\beta^\alpha = (1+r)^\alpha (1+s)^\beta.$$

Nous allons étudier le problème (3.1) dans deux cas distincts : le cas  $\beta = 0$  et le cas  $\beta \neq 0$  (en fait, on se limitera à  $\beta = \frac{1}{2}$ ). Notre étude est basée sur la résolution du

### 3.1. Introduction

---

modèle scalaire suivant :

$$-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (3.3)$$

En effet, nous pouvons remarquer qu'en prenant la divergence de la première équation de (3.1), la pression  $\pi$  vérifie

$$\Delta \pi = \operatorname{div} \mathbf{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (3.4)$$

Ainsi, pour résoudre le problème (3.1), il suffit de résoudre le système découpé suivant :

$$\begin{aligned} \Delta \pi &= \operatorname{div} \mathbf{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} &= \mathbf{f} - \nabla \pi \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= g \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Résoudre la deuxième équation de (3.5) revient à étudier (3.3). Cette approche présente deux avantages :

- Le modèle scalaire (3.3) est plus simple à étudier que le système (3.1).
- Nous disposons des résultats d'isomorphismes de l'opérateur de Laplace dans des espaces de Sobolev avec poids (le poids étant  $\eta_0^\alpha$ ) prouvés dans [6] qui nous permettent de résoudre l'équation (3.4).

Ainsi, cette approche est très bien adaptée pour la résolution de (3.1) dans le cas  $\beta = 0$ . Nous procéderons d'une autre manière pour le cas  $\beta = \frac{1}{2}$ . Les résultats d'isomorphismes de l'opérateur de Laplace dans les espaces avec poids anisotropes, obtenus dans le paragraphe 2.4.4 du premier chapitre, ne sont en effet pas suffisants pour résoudre l'équation (3.4) dans le cas  $\beta = \frac{1}{2}$ . Nous suivrons alors l'approche que Farwig a utilisé dans [20] et [21] : nous chercherons des solutions du problème (3.1) obtenues à l'aide de la solution fondamentale  $(\mathcal{O}, \mathcal{P})$ . Nous utiliserons pour cela les résultats prouvés dans [36] (voir aussi [51]). Grâce à l'étude de l'équation (3.3) certains de ces résultats peuvent être améliorés. Précisons que la vitesse fondamentale

### 3.2. Résultats préliminaires

---

$\mathcal{O}$  et la solution fondamentale  $\mathcal{O}$  de l'équation (3.1) qui s'écrit

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-s/2}, \quad (3.6)$$

ont le même comportement localement et à l'infini. Les résultats sur la convolution par  $\mathcal{O}$  obtenus dans [36] peuvent ainsi être appliqués à  $\mathcal{O}$ . Dans le prochain chapitre, nous verrons d'autres liens qui lient les deux solutions fondamentales. Nous citons aussi [55] pour d'autres travaux sur ces deux solutions fondamentales. Les principaux résultats de ce chapitre font l'objets de deux articles soumis ([9], [10]).

### 3.2 Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe, nous allons préciser le sens que nous donnons à la condition à l'infini

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = u_\infty.$$

Nous rappelons tout d'abord quelques propriétés du comportement à l'infini des fonctions de  $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Ces résultats sont démontrés dans [2]. On suppose  $p \neq 3$  et soit  $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Alors pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  tel que  $|\mathbf{x}| > 1$ , on a

$$|u(\mathbf{x})| \leq C|\mathbf{x}|^{1-3/p} \|u\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \text{ et } |\mathbf{x}|^{3/p-1} |u(\mathbf{x})| \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} 0, \text{ si } p > 3. \quad (3.7)$$

$$\|u(|\mathbf{x}|, \cdot)\|_{L^p(S_2)} \leq C|\mathbf{x}|^{1-3/p} \|u\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \text{ et } |\mathbf{x}|^{3/p-1} \|u(|\mathbf{x}|, \cdot)\|_{L^p(S_2)} \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} 0, \text{ si } p < 3, \quad (3.8)$$

où  $S_2$  désigne la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . Le lemme qui suit améliore, dans le cas  $n = 3$ , des résultats obtenus par Galdi dans [27] (lemme 5.2 p 60 et théorème 5.1 p 61). Il est partiellement inspiré de l'article de Payne et Weinberger [49].

**Lemme 3.1** *On suppose que  $1 < p < 3$  et  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ . Alors il existe une unique constante  $u_\infty$  définie par*

$$u_\infty = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} u(\sigma|\mathbf{x}|) d\sigma, \quad (3.9)$$

telle que  $u - u_\infty \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . La notation  $w_3$  désignant la surface de  $S_2$ . De plus,

### 3.2. Résultats préliminaires

---

nous avons les propriétés suivantes :

$$u - u_\infty \in L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3), \quad (3.10)$$

avec l'estimation

$$\|u - u_\infty\|_{L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, \quad (3.11)$$

et

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \int_{S_2} |u(\sigma|\mathbf{x}|) - u_\infty| d\sigma = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \int_{S_2} |u(\sigma|\mathbf{x}|) - u_\infty|^p d\sigma = 0, \quad (3.12)$$

$$\int_{S_2} |u(r\sigma) - u_\infty|^p d\sigma \leq C r^{p-3} \int_{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| > r\}} |\nabla u|^p d\mathbf{x}. \quad (3.13)$$

**Preuve :** Comme  $1 < p < 3$ ,  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  et  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ , d'après la proposition 2.2 i), il existe une unique constante  $u_\infty$  telle que  $u - u_\infty \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . L'injection continue (2.13) nous permet d'obtenir (3.10) et (3.11). Grâce à (3.8), on a

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^{3/p-1} \int_{S_2} |u(\sigma|\mathbf{x}|) - u_\infty|^p d\sigma = 0. \quad (3.14)$$

Maintenant, puisque  $3/p - 1 > 0$ , l'inégalité de Hölder nous donne (3.12). Il nous reste à montrer (3.9) et (3.13). On pose

$$D_R(r) = \int_{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, r < |\mathbf{x}| < R\}} |\nabla u|^p d\mathbf{x}.$$

En procédant de la manière que dans [49], nous avons

$$D_R(r) \geq \int_{S_2} \left( \int_r^R \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^p \rho^2 d\rho \right) d\sigma + \int_r^R \rho^{2-p} \left[ \int_{S_2} |\nabla^* u|^p d\sigma \right]^p d\rho,$$

où  $\nabla^* u$  désigne la projection du gradient de  $u$  sur la sphère unité  $S_2$  :

$$|\nabla^* u|^2 = r^2 \left[ |\nabla u|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \right].$$

### 3.2. Résultats préliminaires

---

L'inégalité de Hölder et celle de Wirtinger nous donnent

$$D_r(R) \geq \int_{S_2} \left[ \frac{\left| \int_r^R \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho \right|^p}{\left| \int_r^R \rho^{-2/(p-1)} d\rho \right|^{p-1}} \right] d\sigma \\ + C \int_r^R \left( \int_{S_2} \left| u(|\mathbf{x}|\sigma) - \frac{1}{w_3} \int_{s_2} u(|\mathbf{x}|\sigma) d\sigma \right|^p d\sigma \right) \rho^{2-p} d\rho.$$

Par conséquent, on a

$$D_R(r) \geq C r^{3-p} \int_{S_2} |u(R\sigma) - u(r\sigma)|^p d\sigma \\ + C \int_r^R \left( \int_{S_2} \left| u(|\mathbf{x}|\sigma) - \frac{1}{w_3} \int_{s_2} u(|\mathbf{x}|\sigma) d\sigma \right|^p d\sigma \right) \rho^{2-p} d\rho. \quad (3.15)$$

Les deux termes de (3.15) sont positifs et bornés par  $D_R(r)$ . Ainsi, il existe une fonction  $u^* \in L^p(S_2)$  telle que

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \int_{S_2} |u(|\mathbf{x}|\sigma) - u^*(|\mathbf{x}|\sigma)|^p d\sigma = 0$$

et

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \int_{S_2} u(|\mathbf{x}|\sigma) d\sigma = \int_{S_2} u^*(\sigma) d\sigma.$$

Grâce à (3.12), nous en déduisons que  $u^* = u_\infty$  et l'égalité précédente nous donne (3.9). Maintenant, de l'inégalité (3.15), on peut écrire

$$D_R(r) \geq C r^{3-p} \int_{S_2} |u(R\sigma) - u(r\sigma)|^p d\sigma \\ \geq C r^{3-p} \int_{S_2} |u(r\sigma) - u_\infty|^p d\sigma - C r^{3-p} \int_{S_2} |u(R\sigma) - u_\infty|^p d\sigma.$$

En faisant tendre  $R$  vers l'infini, on obtient

$$D(r) = \lim_{R \rightarrow \infty} D_R(r) \geq C r^{3-p} \int_{S_2} |u(r\sigma) - u_\infty|^p d\sigma,$$

### 3.2. Résultats préliminaires

---

ce qui entraîne (3.13). ■

Ce lemme permet de caractériser la constante donnée par la proposition 2.2 pour une distribution à gradient appartenant à  $L^p(\mathbb{R}^3)$ . Le prochain résultat est une autre conséquence du lemme. Il permet cette fois-ci de caractériser le polynôme, de degré au plus un, donné par la même proposition pour une distribution dont les dérivées secondes appartiennent à  $L^p(\mathbb{R}^3)$ .

**Corollaire 3.2** *On suppose  $1 < p < 3$  et soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  telle que, pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . Alors il existe un unique vecteur  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\nabla u + \mathbf{A} \in \mathbf{L}^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$ , où  $\mathbf{A}$  est défini par*

$$\mathbf{A} = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} \nabla u(\sigma|\mathbf{x}|) d\sigma.$$

*De plus, nous avons les propriétés suivantes :*

- i) *Si  $3/2 \leq p < 3$ , alors  $u + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ .*
- ii) *Si  $1 < p < 3/2$ , alors, il existe une unique constante  $b$  telle que  $u + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + b \in L^{\frac{3p}{3-2p}}(\mathbb{R}^3)$ , où  $b$  est définie par*

$$b = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} (u(\sigma|\mathbf{x}|) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) d\sigma.$$

*Par conséquent, nous avons aussi  $u + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ .*

**Preuve :** L'existence du vecteur  $\mathbf{A}$  et sa caractérisation est une conséquence immédiate du lemme précédent.

- i) Posons à présent  $\boldsymbol{\ell} = \nabla u + \mathbf{A}$ . D'après la caractérisation (2.14), nous avons  $\boldsymbol{\ell} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Puisque  $\operatorname{div} \boldsymbol{\ell} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , il existe une fonction  $z \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$  telle que (voir [6]),

$$\Delta z = \operatorname{div} \boldsymbol{\ell} = \Delta u.$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire

$$\Delta(\nabla z) = \Delta(\nabla u + \mathbf{A}).$$

### 3.2. Résultats préliminaires

---

Puisque  $3/2 < p < 3$ , l'espace  $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  ne contient pas de polynômes. Nous en déduisons que  $\nabla z = \nabla u + \mathbf{A}$ , ce qui entraîne l'existence d'une constante  $c$  telle que  $z + c = u + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ . Mais lorsque  $3/2 < p < 3$ , les constantes appartiennent à l'espace  $W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ , et par conséquent  $u + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  appartient à  $W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ .

ii) Le vecteur  $\mathbf{A}$  peut s'écrire sous la forme  $\mathbf{A} = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})$ . Cela implique que  $\nabla u + \mathbf{A} = \nabla(u + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \in \mathbf{L}^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$ . Puisque  $1 < p < 3/2$ , nous pouvons observer que  $\frac{3p}{3-p} < 3$ . Nous pouvons donc appliquer le lemme 3.1 qui nous donne l'existence et la caractérisation de l'unique constante  $b$ . La caractérisation (2.16) nous permet ensuite de conclure que  $u + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  appartient à  $W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ . ■

Nous pouvons à présent préciser le sens que nous donnons à la limite à l'infini.

**Définition 3.3** Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ . Nous dirons que  $u$  tend vers une constante  $u_\infty$  à l'infini, et on écrira

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = u_\infty,$$

si

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \int_{S_2} |u(\sigma|\mathbf{x}) - u_\infty| d\sigma = 0.$$

**Remarque 3.4** Soit  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ . Si  $1 < p < 3$ , alors le lemme 3.1 montre que la définition 3.3 est équivalente à

$$u - u_\infty \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3).$$

Nous rappelons maintenant un résultat dont la preuve est standard.

**Lemme 3.5** Soient  $r$  et  $p$  deux réels tels que  $1 < r < \infty$  et  $3 < p < \infty$ . Soit  $u \in L^r(\mathbb{R}^3)$  et  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ . Alors  $u$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^3$  et

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0.$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

## 3.3 Le modèle scalaire

Dans ce paragraphe, nous abordons donc le point central de la thèse qui est la résolution du modèle scalaire suivant :

$$-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (3.16)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = u_\infty. \quad (3.17)$$

Soit  $T$  l'opérateur :

$$T : u \rightarrow -\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1}. \quad (3.18)$$

### 3.3.1 Le noyau de l'opérateur $T$

Considérons le noyau de l'opérateur  $T$  quand celui-ci est défini sur l'espace des distributions tempérées  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ . Soit  $u$  un élément du noyau, alors en appliquant la transformée de Fourier, nous pouvons écrire

$$4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi) + 2i\pi\xi_1\hat{u}(\xi) = 0.$$

En posant

$$\hat{u}(\xi) = v(\xi) + iw(\xi),$$

il vient

$$\begin{cases} 4\pi^2|\xi|^2v(\xi) - 2\pi\xi_1w(\xi) = 0 \\ 2\pi\xi_1v(\xi) + 4\pi^2|\xi|^2w(\xi) = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Le déterminant de (3.19) étant  $16\pi^4|\xi|^4 + 4\pi^2\xi_1^2$ , nous en déduisons que, pour  $\xi \neq 0$ , le support de  $\hat{u}$  est inclus dans  $\{0\}$ . On a donc

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{\alpha \in J} c_\alpha \delta^{(\alpha)}, \quad c_\alpha \in \mathbb{C},$$

avec  $J$  fini. Par transformée de Fourier inverse, on obtient

$$u(x) = \sum_{\alpha \in J} d_\alpha x^\alpha, \quad d_\alpha \in \mathbb{C},$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

Cela signifie que  $u$  est un polynôme. Pour tout entier  $k$ , nous introduisons donc l'espace des polynômes

$$S_k = \left\{ q \in \mathbb{P}_k; -\Delta q + \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0 \right\}.$$

Remarquons que

$$S_0 = \mathbb{R}^3 \text{ et } S_1 = \{q \in \mathbb{P}_1, q(\mathbf{x}) = a_0 + a_2x_2 + a_3x_3\}.$$

Autrement dit, les polynômes de  $S_1$  sont des polynômes qui sont indépendants de  $x_1$ . Nous pouvons à présent énoncer le résultat d'unicité suivant.

**Proposition 3.6** *Soit  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  une solution de (3.16) avec  $f = 0$ . Alors  $u$  est un polynôme de  $S_k$ .*

#### 3.3.2 Résultats d'existence pour le modèle scalaire

Nous avons tout d'abord besoin de définir deux réels.

**Définition 3.7** Soit  $p$  un réel tel que  $1 < p < \infty$ . Soient  $\gamma$  et  $\delta$  les réels tels que  $\delta \in [\frac{3}{2}, 2]$ ,  $\delta > p$  et  $\gamma \in [3, 4]$ ,  $\gamma > p$ . Nous définissons les réels  $r_1 = r_1(p, \delta)$  et  $r_2 = r_2(p, \gamma)$  comme suit :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\delta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}.$$

**Remarque 3.8** Nous pouvons remarquer que

$$\begin{aligned} \text{si } 1 < p < 3/2, \quad \text{alors } \frac{2p}{2-p} \leq r_1 \leq \frac{3p}{3-2p}, \\ \text{si } 3/2 \leq p < 2, \quad \text{alors } \frac{2p}{2-p} \leq r_1 < \infty. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \text{si } 1 < p < 3, \quad \text{alors } \frac{4p}{4-p} \leq r_2 \leq \frac{3p}{3-p}, \\ \text{si } 3 \leq p < 4, \quad \text{alors } \frac{4p}{4-p} \leq r_2 < \infty. \end{aligned}$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

Nous allons à présent rappeler un résultat d'existence d'une solution de l'équation (3.16) lorsque  $f$  appartient à  $L^p(\mathbb{R}^3)$ . Dans ce cas, (3.16) admet une solution  $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$  tel que, pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  avec les propriétés suivantes :

(i) Il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.20)$$

(ii) Si  $1 < p < 4$ , il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$\|\nabla u\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.21)$$

(iii) Si  $1 < p < 2$ , il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$\|u\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.22)$$

Ce résultat se démontre en utilisant les transformées de Fourier et le théorème de Multiplicateur de Lizorkin ([40]). Ces arguments ont été utilisés pour le problème d'Oseen et le lecteur pourra consulter les démonstrations qui se trouvent dans [27], [22] et [23]. Comme nous pouvons le constater, ce résultat n'est pas complet puisque, par exemple, pour  $p \geq 4$ , nous n'avons que des propriétés locales de la solution ( $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ ). En utilisant les propriétés des espaces avec poids, nous allons compléter le résultat précédent.

**Proposition 3.9** *Soient  $r_1$  et  $r_2$  les réels définis dans la définition 3.7 et  $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ .*

(i) *Si  $1 < p < 2$ , alors l'équation (3.16) admet une unique solution  $u \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$  et pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . De plus nous avons l'estimation*

$$\|u\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.23)$$

(ii) *Si  $2 \leq p < 4$ , alors (3.16) admet une solution  $u \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$ , unique à une constante additive près, telle que pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in$*

### 3.3. Le modèle scalaire

---

$L^p(\mathbb{R}^3)$ . De plus nous avons

$$\inf_{K \in \mathbb{R}} \|u + K\|_{W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.24)$$

(iii) Si  $p \geq 4$ , alors (3.16) admet une solution  $u \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ , unique à un polynôme de  $S_1$  près, telle que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et satisfaisant

$$\inf_{\lambda \in S_1} \|u + \lambda\|_{W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.25)$$

**Preuve :** Rappelons que le noyau de l'opérateur  $T$  est l'espace des polynômes  $S_k$ .

(i) L'existence, la régularité de la solution et l'estimation (3.23) sont données par le résultat d'existence et les estimations (3.20), (3.21) et (3.22) rappelés au début du paragraphe.

(ii) si  $2 \leq p < 4$ , la solution  $u \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^3)$  donnée par le résultat d'existence précédent satisfait  $\nabla u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ . D'après la remarque 3.8, nous pouvons constater que  $r_2 > 3$ . Ainsi, la proposition 2.2 ii) nous donne que  $u \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$ . L'estimation (3.24) est une conséquence de (3.21) et de (2.12).

(iii) Si  $p \geq 4$ , la solution  $u \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^3)$  donnée par le résultat d'existence précédent satisfait pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et l'estimation (3.20). Utilisant à nouveau la proposition 2.2 ii), nous en déduisons que  $u \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ . L'estimation (3.25) se déduit de (3.20) et de (2.12). ■

**Remarque 3.10** Remarquons que si  $3 \leq p < 4$ , alors la solution donnée par le théorème 3.16 ii) appartient aussi à  $W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ . En effet, comme pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , alors le résultat est une conséquence immédiate de la proposition 2.2 ii).

**Remarque 3.11** (i) On suppose que  $1 < p < 3$  et  $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . Alors d'après la proposition précédente, la solution  $u$  de l'équation (3.16) satisfait  $\nabla u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . D'après la définition 3.7, nous avons, en particulier  $\nabla u \in L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$ . La caractérisation (2.14) nous donne  $\nabla u \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Grâce au lemme 3.1, nous en déduisons que

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \nabla u(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

au sens de la définition 3.3.

(ii) Si  $3 < p < 4$  et  $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , alors d'après la proposition précédente et le lemme 3.5, le gradient de la solution  $u$  est continue sur  $\mathbb{R}^3$  et

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \nabla u(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

De la proposition 3.9 découle notre prochain résultat.

**Corollaire 3.12** *Soient  $r_1$  et  $r_2$  les réels définis dans la définition 3.7. Soit une distribution  $u$  telle que pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ .*

*Alors*

(i) *Si  $1 < p < 2$ , il existe un unique polynôme  $q \in S_1$ , tel que  $u + q \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\nabla(u + q) \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant l'estimation suivante :*

$$\|u + q\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla(u + q)\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left( \|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right). \quad (3.26)$$

*De plus, on a  $\nabla q = \mathbf{A}$  où  $\mathbf{A}$  est défini dans le corollaire 3.2. Si  $1 < p < 3/2$ , alors  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}' + b$ , où  $b$  est défini dans le corollaire 3.2 et  $\mathbf{x}' = (0, x_2, x_3)$ .*

(ii) *Si  $2 \leq p < 4$ , alors il existe un unique polynôme  $q \in S_1$  satisfaisant  $q(0) = 0$ , tel que  $u + q \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$ . De plus nous avons l'estimation suivante :*

$$\inf_{K \in \mathbb{R}} \|u + q + K\|_{W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left( \|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right). \quad (3.27)$$

*Si  $2 \leq p < 3$ , alors  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}'$*

**Preuve :** D'après les hypothèses sur la distribution  $u$ , il est immédiat de voir que  $-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . Nous allons à présent utiliser la proposition 3.9. Nous distinguons donc deux cas :

(i) Si  $1 < p < 2$ , alors il existe une unique fonction  $v \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla v \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial v}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , satisfaisant

$$-\Delta(v - u) + \frac{\partial(v - u)}{\partial x_1} = 0. \quad (3.28)$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

De plus, nous avons l'estimation

$$\begin{aligned} & \|v\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla v\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C \left( \|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

En posant maintenant  $w = v - u$ , il vient que, pour tout,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$  appartient à  $L^p(\mathbb{R}^3)$  et satisfait

$$-\Delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0.$$

Grâce à la proposition 3.6, nous en déduisons que  $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = 0$  ce qui montre l'existence d'un polynôme  $q \in \mathbb{P}_1$  tel que  $v = u + q$  (voir par exemple [53]). Mais comme nous avons aussi  $\frac{\partial w}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant

$$-\Delta \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = 0,$$

Nous en déduisons aussi que  $\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$ . D'où  $q$  est un polynôme indépendante de  $\mathbf{x}_1$ , c'est-à-dire que  $q \in S_1$ . L'estimation (3.26) se déduit de (3.29). Supposons à présent qu'il existe deux polynômes  $q_1, q_2 \in S_1$  tels que  $u + q_1 \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$  et  $u + q_2 \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ . Par différence, nous en déduisons que  $q_1 - q_2 \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$  et, par conséquent,  $q_1 = q_2$ . L'unicité du polynôme  $q$  est donc prouvée. Maintenant, d'après la définition de  $r_1$ , nous avons, en particulier,  $u + q \in L^{\frac{3p}{3-2p}}(\mathbb{R}^3)$ . Le corollaire 3.2 et l'unicité du polynôme  $q$  nous permet d'affirmer que  $\nabla q = \mathbf{A}$  où

$$\mathbf{A} = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} \nabla u(\sigma|\mathbf{x}) d\sigma.$$

Si  $1 < p < 3/2$ , alors nous en déduisons aussi que  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + b$ , où

$$b = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} (u(\sigma|\mathbf{x}) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) d\sigma.$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

(ii) Si  $2 \leq p < 4$ , alors il existe une fonction  $v \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$  telle  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial v}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant (3.28) avec l'estimation

$$\inf_{K \in \mathbb{R}} \|v + K\|_{W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left( \|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right).$$

En procédant comme précédemment, on montre l'existence d'un polynôme  $p \in S_1$  tel que  $v = u + p$ . De plus, nous pouvons écrire  $p = q + a_0$ , où  $q \in S_1$  est un polynôme satisfaisant  $q(0) = 0$  et  $a_0 \in \mathbb{R}$ . Mais comme  $r_2 > 3$ , les constantes appartiennent à l'espace  $W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$ . Ainsi, par différence, nous avons  $u + q \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$ . L'espace  $W_0^{1,r}(\mathbb{R}^3)$  ne contenant pas les polynômes de  $\mathbb{P}_1$  et donc *a fortiori* les polynômes de  $S_1$ , nous en déduisons l'unicité du polynôme  $q$ . L'estimation (3.27) se déduit de l'estimation précédente. Finalement, le corollaire 3.2 et l'unicité du polynôme  $q$  nous montre que  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}'$ . ■

**Remarque 3.13** Nous pouvons constater que l'hypothèse supplémentaire  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , améliore les propriétés d'une distribution  $u$  telle que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . En effet, supposons par exemple  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . Alors le corollaire précédent nous montre l'existence d'un unique polynôme  $q$ , que l'on sait caractériser, tel que  $u + q \in W_0^{1,4}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{1,6}(\mathbb{R}^3)$ . Sans l'information sur la dérivée première, nous aurions seulement  $u + q \in W_0^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ . C'est est une des différences entre l'équation (3.16) et l'équation de Laplace

$$\Delta u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Nous nous intéressons à présent aux propriétés de l'opérateur  $f \rightarrow \mathcal{O} * f$ , où nous rappelons que  $\mathcal{O}$  est la solution fondamentale de (3.16). Si  $\mathcal{O} * f$  est définie, alors c'est une solution explicite de l'équation (3.16). Soit alors  $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . Comme pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ , l'opérateur  $\frac{\partial^2 \mathcal{O}}{\partial x_i \partial x_j}$  est un opérateur singulier, nous pouvons prouver que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\mathcal{O} * f) = v.p. \left( \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i \partial x_j} * f \right) + c_{ij} f, \quad (3.30)$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

où  $c_{ij}$  sont des constantes et

$$v.p. \left( \frac{\partial^2 \mathcal{O}}{\partial x_i \partial x_j} * f \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| > \varepsilon} \frac{\partial^2 \mathcal{O}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Nous allons maintenant utiliser des estimations sur la convolution par la solution fondamentale d'Oseen  $\mathcal{O}$  dans les espaces  $L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$  prouvées dans [36] (voir aussi [51]). Nous rappelons que ces estimations peuvent être appliquées à la solution fondamentale  $\mathcal{O}$  du modèle scalaire (3.16). Dans [36], Il est prouvé que si  $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , alors  $v.p. \left( \frac{\partial^2 \mathcal{O}}{\partial x_i \partial x_j} * f \right) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} W_{-\varepsilon}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$  et nous avons l'estimation suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \left\| v.p. \left( \frac{\partial^2 \mathcal{O}}{\partial x_i \partial x_j} * f \right) \right\|_{W_{-\varepsilon}^{0,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C_\varepsilon \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

Il est alors facile de voir que si  $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , nous avons  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\mathcal{O} * f) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} W_{-\varepsilon}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$  ainsi que l'estimation

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\mathcal{O} * f) \right\|_{W_{-\varepsilon}^{0,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C_\varepsilon \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

A ce stade, il n'est pas clair que  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\mathcal{O} * f)$  appartient à  $L^p(\mathbb{R}^3)$ . Mais en utilisant les propositions 3.9 et 3.6, nous allons prouver cette estimation.

**Lemme 3.14** *On suppose  $p > 1$  et  $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . Alors, pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ , nous avons*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3).$$

*De plus, nous avons l'estimation*

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\mathcal{O} * f) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{O} * f) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.31)$$

**Preuve :** Pour une fonction  $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$  donnée, nous savons, d'après la proposition 3.9, que l'équation (3.16) admet une solution  $v$  telle que, pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,

### 3.3. Le modèle scalaire

---

$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial v}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons

$$\left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.32)$$

D'autre part, puisque  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} W_{-\varepsilon}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ , nous en déduisons que la fonction  $z = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(v - \mathcal{O} * f) \bigcap_{\varepsilon > 0} W_{-\varepsilon}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfait

$$-\Delta z + \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0.$$

D'après la proposition 3.6,  $z$  est donc un polynôme. En prenant  $\varepsilon$  suffisamment petit, nous en déduisons que  $z = 0$  et par conséquent  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . Par l'équation (3.16), il vient que  $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . L'estimation (3.31) est une conséquence immédiate de l'estimation (3.32). ■

Notre prochain résultat, qui est une conséquence immédiate du lemme 3.14 et de la proposition 3.12, complète les résultats de la proposition 3.9 en donnant des solutions explicites.

**Corollaire 3.15** *Soient  $r_1$  et  $r_2$  les réels définis dans la définition 3.7. On suppose  $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ .*

(i) *Si  $1 < p < 2$ , alors il existe un unique polynôme  $q \in S_1$  tel que  $\mathcal{O} * f + q \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\nabla(\mathcal{O} * f + q) \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$  et pour tout,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{O} * f + q\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla(\mathcal{O} * f + q)\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \\ & + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

De plus, on a  $\nabla q = \mathbf{A}$  où

$$\mathbf{A} = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} \nabla(\mathcal{O} * f)(\sigma | \mathbf{x}) d\sigma.$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

Si  $1 < p < 3/2$ , alors  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}' + b$ , où  $\mathbf{x}' = (0, x_2, x_3)$  et

$$b = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} ((\mathcal{O} * f)(\sigma|\mathbf{x}|) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) d\sigma.$$

(ii) Si  $2 \leq p < 4$ , alors il existe un unique polynôme  $q \in S_1$  satisfaisant  $q(0) = 0$ , tel que  $\mathcal{O} * f + q \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$  et pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . De plus nous avons l'estimation suivante :

$$\inf_{K \in \mathbb{R}} \|\mathcal{O} * f + q + K\|_{W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.34)$$

Si  $2 \leq p < 3$ , alors  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}'$

(iii) Si  $p \geq 4$ , alors  $\mathcal{O} * f \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . De plus nous avons

$$\inf_{\lambda \in S_1} \|\mathcal{O} * f + \lambda\|_{W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.35)$$

Nous établissons maintenant des résultats d'existence pour des données appartenant à  $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ .

**Théorème 3.16** Soit  $r_2$  le réel défini dans la définition 3.7 et soit  $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant la condition de compatibilité

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/p']}, \quad \langle f, \lambda \rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.36)$$

(i) Si  $1 < p < 4$ , alors l'équation (3.16) admet une unique solution  $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . De plus on a

$$\|u\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.37)$$

(ii) si  $p \geq 4$ , alors l'équation (3.16) admet une solution  $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ , unique à une constante additive près. De plus, on a

$$\inf_{K \in \mathbb{R}} \|u + K\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.38)$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

**Preuve :** La proposition 3.6 nous montre que le noyau de l'opérateur  $T$  défini par (3.18) est réduit à  $\{0\}$  si  $1 < p < 4$  et est égal à  $\mathbb{R}$  si  $p \geq 4$ . Soit maintenant  $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant la condition de compatibilité (3.36). Alors, d'après l'isomorphisme 2.10, il existe un vecteur  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  tel que

$$f = \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Nous allons à présent utiliser la proposition 3.9 et nous avons deux cas :

(i) Si  $1 < p < 4$ , il existe un vecteur  $\mathbf{v}$  tel que, pour tout  $i, j, k = 1, 2, 3$ ,  $\nabla v_k \in \mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial v_k}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant

$$-\Delta v_k + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} = F_k. \quad (3.39)$$

De plus, pour tout  $k = 1, 2, 3$ , nous avons

$$\|\nabla v_k\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|F_k\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

En posant  $u = \operatorname{div} \mathbf{v}$ , nous en déduisons que  $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$  est solution de (3.16), telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . L'estimation (3.36) est une conséquence de l'estimation précédente.

(ii) Si  $p \geq 4$ , il existe un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant (3.39) ainsi que l'estimation

$$\forall k = 1, 2, 3, \quad \inf_{\lambda \in S_1} \|v_k + \lambda\|_{W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|F_k\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

La fonction  $u = \operatorname{div} \mathbf{v} \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  est alors solution de l'équation (3.16). Enfin, l'estimation (3.38) se déduit de la précédente. ■

**Remarque 3.17** i) Si  $1 < p < 3$ , alors la solution  $u$  de l'équation (3.16) donnée par le théorème 3.16 i) appartient en particulier à  $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  (voir la remarque 3.8 et la caractérisation (2.14)). Nous en déduisons que

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

au sens de la définition 3.3. Ainsi, pour une constante  $u_\infty$  donnée, la distribution  $v = u - u_\infty$  est l'unique solution de l'équation (3.16) vérifiant

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} v(\mathbf{x}) = u_\infty$$

au sens de la définition 3.3.

ii) Si  $3 < p < 4$ , alors le lemme 3.5 nous montre que la solution  $u$  de l'équation (3.16) est continue sur  $\mathbb{R}^3$  et vérifie

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0.$$

**Corollaire 3.18** *Soit  $r_2$  le réel donné par la définition 3.7. On suppose de plus que  $1 < p < 4$ . Si  $u$  est une distribution telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant*

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/p']}, \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, \lambda \right\rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad (3.40)$$

alors il existe une unique constant  $K$  telle que  $u + K \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$  avec l'estimation

$$\|u + K\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left( \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \quad (3.41)$$

De plus, si  $1 < p < 3$ , alors

$$K = - \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) \quad (3.42)$$

au sens de la définition 3.3.

Si  $3 < p < 4$ , alors  $u$  est continue et

$$K = - \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}). \quad (3.43)$$

**Preuve :** Soit une distribution  $u$  telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Maintenant, en remarquant que les polynômes de  $\mathbb{P}_{[1-3/p']}$  sont au plus des constantes et d'après la condition (3.40), on vérifie facilement que pour tout  $\lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/p']}$ ,

$$\left\langle -\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1}, \lambda \right\rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

Le théorème 3.16 nous montre l'existence d'une unique fonction  $v \in L^r(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla v \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial v}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ , satisfaisant

$$-\Delta(v - u) + \frac{\partial(v - u)}{\partial x_1} = 0.$$

De plus, on a

$$\|v\|_{L^r(\mathbb{R}^3)} \leq C \left( \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \quad (3.44)$$

Maintenant, en posant  $w = v - u$ , alors pour chaque  $i = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et

$$-\Delta \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) = 0.$$

D'après la proposition 3.6, pour chaque  $i = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x_i}$  est un polynôme de  $L^p(\mathbb{R}^3)$  d'où  $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0$ . Nous en déduisons que  $\nabla v = \nabla u$  et par conséquent  $v = u + K$ , où  $K$  est une constante dont l'unicité vient du fait que l'espace  $L^{r^2}(\mathbb{R}^3)$  ne contient pas les polynômes. Lorsque  $1 < p < 3$ , le lemme 3.1 nous montre que la constante  $K$  est défini par (3.42) et lorsque  $3 < p < 4$ , la relation (3.43) découle du lemme 3.5.

■

**Remarque 3.19** En comparant avec le résultat du lemme 3.1, nous pouvons remarquer que le terme  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  améliore les estimations sur  $u$ . Prenons, par exemple, une distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ . Remarquons d'abord que comme  $\mathbb{P}_{[1-3/2]} = \{0\}$ , la condition (3.40) est automatiquement vérifiée. Le corollaire précédent nous donne  $u \in L^4(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$ . Sans l'hypothèse  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ , le lemme 3.1 donne simplement  $u - K \in L^6(\mathbb{R}^3)$ .

De la même manière que pour une donnée  $f$  appartenant à  $L^p(\mathbb{R}^3)$ , nous allons compléter le théorème 3.16 par des résultats sur la convolution par la solution fondamentale.

**Proposition 3.20** Soit  $r_2$  le réel donné par la définition 3.7 et soit  $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant la condition de compatibilité

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/p]}, \quad \langle f, \lambda \rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

(i) Si  $1 < p < 4$ , il existe une unique constante  $K(f)$  telle que  $\mathcal{O} * f + K(f) \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\nabla(\mathcal{O} * f) \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  avec l'estimation

$$\|\mathcal{O} * f\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla(\mathcal{O} * f)\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.45)$$

De plus si  $1 < p < 3$ , alors

$$K(f) = - \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathcal{O} * f(\mathbf{x}) \quad (3.46)$$

au sens de la définition 3.3.

Si  $3 < p < 4$ , alors  $\mathcal{O} * f$  est continue et

$$K(f) = - \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathcal{O} * f(\mathbf{x}). \quad (3.47)$$

(ii) Si  $p \geq 4$ , alors  $\mathcal{O} * f \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  et on a l'estimation

$$\inf_{K \in \mathbb{R}} \|\mathcal{O} * f + K\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.48)$$

**Preuve :** Soit  $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant la condition de compatibilité, alors il existe un vecteur  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  telle que  $f = \operatorname{div} \mathbf{F}$ . Nous allons à présent utiliser le corollaire 3.15.

(i) Si  $1 < p < 4$ , alors il existe un unique vecteur constant  $\mathbf{A} = (0, a_2, a_3)$ , tel que pour tout  $k = 1, 2, 3$ ,  $\nabla(\mathcal{O} * F_k) + \mathbf{A} \in \mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * F_k) \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * F_k) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . On pose  $K = \operatorname{div} \mathbf{A}$ . On obtient

$$\mathcal{O} * f + K = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{O} * F_i) + K \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3),$$

avec la convention implicite sur les indices répétés. Par ailleurs, nous avons aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{O} * f) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * F_j) \in L^p(\mathbb{R}^3), \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * F_j) \right) \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

Si  $1 < p < 3$ , alors d'après la définition de  $r_2$  et grâce à la caractérisation (2.14), nous avons en particulier  $\mathcal{O} * f + K \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Le Lemme 3.1 nous donne par conséquent (3.46). Si  $3 < p < 4$ , le lemme 3.5 nous donne (3.47). L'estimation (3.45) se déduit des estimations (3.33) et (3.34).

(ii) La preuve du cas  $p \geq 4$  est similaire au cas précédent avec l'utilisation du corollaire 3.15 iii). ■

Pour des valeurs de  $p$  tels que  $1 < p \leq 2$ , nous pouvons obtenir des estimations supplémentaires.

**Théorème 3.21** *Soit  $r_2$  le réel donné par la définition 3.7. On suppose de plus  $1 < p \leq 2$  et  $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant la condition de compatibilité*

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/p']}, \quad \langle f, \lambda \rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Alors  $\mathcal{O} * f \in \mathcal{M}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \cap L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$  et

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathcal{O} * f(\mathbf{x}) = 0$$

au sens de la définition 3.3. De plus, nous avons l'estimation

$$\|\mathcal{O} * f\|_{\mathcal{M}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathcal{O} * f\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.49)$$

**Preuve :** D'après les hypothèses sur  $f$ , nous pouvons écrire  $f = \operatorname{div} \mathbf{F}$  ( voir l'isomorphisme (2.10)). Par conséquent, pour chaque  $\ell = 1, 2, 3$ ,  $F_\ell \in L^p(\mathbb{R}^3)$  ce qui implique aussi  $F_\ell \in \bigcap_{\varepsilon > 0} L_{-\varepsilon, \varepsilon}^p(\mathbb{R}^3)$ . Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons  $\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i} * F_\ell \in L_{-\frac{1}{2}-\varepsilon, \varepsilon}^p(\mathbb{R}^3)$  (voir [36] pour le cas  $1 < p < 2$  et [20] pour le cas  $p = 2$ ) avec l'estimation

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i} * F_\ell \right\|_{L_{-\frac{1}{2}-\varepsilon, \varepsilon}^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|F_\ell\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.50)$$

Nous avons donc aussi  $\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i} * F_\ell \in W_{-\frac{1}{2}-\varepsilon}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$  et par conséquent

$$\mathcal{O} * f = \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i} * F_i \in \bigcap_{\varepsilon > 0} W_{-\frac{1}{2}-\varepsilon}^{0,p}(\mathbb{R}^3).$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

Cela entraîne, en particulier, que  $\mathcal{O} * f \in W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ . Par ailleurs, la proposition 3.20 donne l'existence d'une unique constante  $K(f)$  telle que  $\mathcal{O} * f + K(f) \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\nabla(\mathcal{O} * f) \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_1} * f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . D'après la définition de  $r_2$ , nous avons en particulier  $\mathcal{O} * f + K(f) \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ , ce qui implique que  $\mathcal{O} * f + K(f) \in W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$  (voir (2.2)). Par différence, nous avons donc  $K(f) \in \mathbb{P}_{[1-3/p]}$ . Comme  $1 < p \leq 2$ , alors nous avons  $K(f) = 0$ . En conclusion, nous obtenons  $\mathcal{O} * f \in \mathcal{M}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \cap L^r(\mathbb{R}^3)$  et vérifie (voir (3.45)) :

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathcal{O} * f(\mathbf{x}) = 0.$$

Des estimations (3.50) et (3.45), nous obtenons l'estimation (3.49) ce qui achève la preuve. ■

Dans le cas particulier d'une donnée  $f \in W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ , la solution  $u$  vérifie une équation d'énergie.

**Proposition 3.22** *Soit  $f \in W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ . Alors l'unique solution  $u = \mathcal{O} * f \in \mathcal{M}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$  de l'équation (3.16) satisfait l'équation d'énergie*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} = \langle f, u \rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.51)$$

**Preuve :** Pour toute fonction  $u \in \mathcal{M}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$  et pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , nous avons

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle_{W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)}.$$

Grâce à la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  dans  $\mathcal{M}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ , pour tout  $u, v \in \mathcal{M}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ , nous obtenons

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, v \right\rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \left\langle -u, \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\rangle_{W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)}.$$

Il vient donc

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, u \right\rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.52)$$

Par (3.16) and (3.52), nous en déduisons

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} = \langle -\Delta u, u \rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \langle f, u \rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)},$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

ce qui achève la démonstration. ■

Nous allons à présent chercher des solutions de (3.16) pour des données  $f$  appartenant à  $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ .

**Proposition 3.23** *Soient  $p$  et  $q$  deux réels tel que  $1 < p, q < \infty$ . Soient  $r_2 = r_2(p, \gamma)$  et  $r_2^* = r_2^*(q, \gamma)$  les réels définis dans la définition 3.7. On suppose que  $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  vérifie les conditions de compatibilité*

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/p]}, \forall \mu \in \mathbb{P}_{[1-3/q]} \\ \langle f, \lambda \rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = \langle f, \mu \rangle_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

(i) *Si  $1 < p, q < 4$ , alors l'équation (3.16) admet une unique solution  $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ . De plus on a l'estimation*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|u\|_{L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)} + \\ + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left( \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

(ii) *Si  $1 < p < 4 \leq q < \infty$ , alors l'équation (3.16) admet une unique solution  $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . De plus on a*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \inf_{K \in \mathbb{R}} \|u + K\|_{\widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ \leq C \left( \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

(iii) *Si  $4 \leq p, q < \infty$ , alors l'équation (3.16) admet une solution  $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ , unique à une constante additive près. De plus on a*

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|u + \lambda\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \|u + \mu\|_{\widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left( \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} \right). \quad (3.56)$$

**Preuve :** (i) Soit  $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant la condition de compatibilité (3.53). Alors d'après le théorème 3.16, d'une part, l'équation (3.16) admet une unique solution  $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ ,

### 3.3. Le modèle scalaire

---

d'autre part, l'équation (3.16) admet une unique solution  $w \in L^{r^*}(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $\nabla w \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x_1} \in W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ . D'après la proposition (3.6), la différence  $u - w$  est donc un polynôme. Mais comme  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\nabla w \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$ , un argument d'intégration montre que nécessairement  $\nabla u - \nabla w = 0$ . Il existe donc une constante  $K$  telle que  $u = w + K$ . Puisque les espaces  $L^{r^2}(\mathbb{R}^3)$  et  $L^{r^*}(\mathbb{R}^3)$  ne contiennent pas les constantes, nous en déduisons que  $K = 0$  et  $u = w$ . L'estimation (3.54) est une conséquence des estimations du théorème 3.16.

ii) En utilisant à nouveau le théorème 3.16, nous avons l'existence d'une unique solution  $u$  comme précédemment et d'une solution  $w \in \widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ , unique à une constante additive près. En procédant comme dans (i), on montre l'existence d'une constante  $K$  telle que  $u = w + K$ . Mais comme  $q \geq 4$ , la constante  $K$  appartient à  $\widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ . Ainsi, nous avons  $u = w + K \in \widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ .

(iii) La preuve du cas  $1 \leq p, q < \infty$  est similaire aux deux cas précédents. ■

Ce résultat achève la recherche de solutions de l'équation (3.16) dans les espaces de Sobolev avec le poids  $\eta_0^\alpha$ . Nous nous intéressons à présent à des solutions qui appartiennent à des espaces avec poids anisotropes :  $\eta_\beta^\alpha$ . Nous allons fixer  $\beta = \frac{1}{2}$  et nous supposons que la donnée  $f$  appartient à  $L_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ . Nous cherchons des solutions qui s'écrivent comme la convolution par la solution fondamentale. Rappelons pour cela quelques estimations sur  $\mathcal{O} * f$  et ses dérivées successives. Le lecteur pourra se référer à [36] ou à [51]. Si  $p \geq 2$  et  $f \in L_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ , alors on a  $\mathcal{O} * f \in \bigcap_{\varepsilon > 0} L_{-\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i} * f \in L_{0, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $v.p.(\frac{\partial^2 \mathcal{O}}{\partial x_i \partial x_j} * f) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} L_{\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ . Avec l'aide de (3.30), on en déduit que  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} L_{\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$  et on a l'estimation

$$\|\mathcal{O} * f\|_{L_{-\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{O} * f) \right\|_{L_{0, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \right\|_{L_{\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.57)$$

A ce stade, il n'est pas encore clair que  $\mathcal{O} * f \in L_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \in L_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ . Pour cela, nous introduisons tout d'abord un problème auxiliaire : soit un  $R > 0$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

un réel et  $g \in W_{\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)$ , on cherche une fonction  $z$  solution de

$$\begin{aligned} -\Delta z + \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_0 z &= g \quad \text{dans } B'_R \\ z &= 0 \quad \text{sur } \partial B'_R, \end{aligned} \quad (3.58)$$

où

$$a_0 = \frac{2 + 2s + s^2}{2r(1+s)^2}. \quad (3.59)$$

Rappelons que  $s = r - x_1$ . Nous pouvons remarquer que

$$\frac{1}{2r} \leq a_0 \leq \frac{1}{r} \quad \text{dans } B'_R.$$

Nous introduisons le réel  $R^* > 0$  tel que

$$R^* = \frac{|(p/2 - 1)(p/2 - 2)|}{p(1/2 - |1/p - 1/2|)}.$$

**Lemme 3.24** *Soit  $g \in W_{\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)$ , avec  $R > R^*$ . Alors le problème (3.58) admet une unique solution  $z \in W_{-\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)$ , telle que*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(B'_R), \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} \in L^p(B'_R).$$

*De plus, nous avons*

$$\|z\|_{W_{-\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)} + \left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B'_R)} + \left\| \frac{\partial z}{\partial x_1} \right\|_{L^p(B'_R)} \leq C \|g\|_{W_{\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)}. \quad (3.60)$$

**Preuve :** On commence par introduire le problème suivant

$$\begin{aligned} -\Delta z_\varepsilon + \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_1} + a_0 z_\varepsilon + \varepsilon z_\varepsilon &= g \quad \text{dans } B'_R \\ z_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \partial B'_R, \end{aligned} \quad (3.61)$$

où  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , le problème (3.61) admet une unique solution  $z_\varepsilon \in W^{2,p}(B'_R) \cap \mathring{W}^{1,p}(B'_R)$ . On peut donc multiplier la première équation de (3.61) par

### 3.3. Le modèle scalaire

---

$r^{1-p/2}|z_\varepsilon|^{p-2}z_\varepsilon$  et intégrer par parties. On obtient

$$\begin{aligned} & (p-1) \int_{B'_R} r^{1-p/2}|z_\varepsilon|^{p-2}|\nabla z_\varepsilon|^2 d\mathbf{x} + \int_{B'_R} a_0 r^{1-p/2}|z_\varepsilon|^p d\mathbf{x} + \varepsilon \int_{B'_R} r^{1-p/2}|z_\varepsilon|^p d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{p}{2}\right) \left(2 - \frac{p}{2}\right) \int_{B'_R} r^{-1-p/2}|z_\varepsilon|^p d\mathbf{x} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) \int_{B'_R} |z_\varepsilon|^p \frac{x_1}{r} r^{-p/2} d\mathbf{x} \\ &+ \int_{B'_R} r^{1-p/2} g |z_\varepsilon|^{p-2} z_\varepsilon d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|\right) \int_{B'_R} r^{-p/2}|z_\varepsilon|^p d\mathbf{x} \\ & \leq \frac{1}{p} \left|1 - \frac{p}{2}\right| \left|2 - \frac{p}{2}\right| \int_{B'_R} r^{-1-p/2}|z_\varepsilon|^p d\mathbf{x} + \int_{B'_R} r^{1-p/2}|g||z_\varepsilon|^{p-1} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{p} \left|1 - \frac{p}{2}\right| \left|2 - \frac{p}{2}\right| \int_{B'_R} r^{-1-p/2}|z_\varepsilon|^p d\mathbf{x} \leq \frac{1}{pR} \left|1 - \frac{p}{2}\right| \left|2 - \frac{p}{2}\right| \int_{B'_R} r^{-p/2}|z_\varepsilon|^p d\mathbf{x}. \quad (3.63)$$

Par (3.62) et (3.63), on trouve

$$\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| - \frac{1}{pR} \left|1 - \frac{p}{2}\right| \left|2 - \frac{p}{2}\right|\right) \int_{B'_R} r^{-p/2}|z_\varepsilon|^p d\mathbf{x} \leq \int_{B'_R} r^{1-p/2}|g||z_\varepsilon|^{p-1} d\mathbf{x}.$$

Comme  $R > R^*$ , on a

$$\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| - \frac{1}{pR} \left|1 - \frac{p}{2}\right| \left|2 - \frac{p}{2}\right|\right) > 0.$$

Nous obtenons donc l'estimation

$$\int_{B'_R} r^{-p/2}|z_\varepsilon|^p d\mathbf{x} \leq C \int_{B'_R} r^{p/2}|g|^p d\mathbf{x}, \quad (3.64)$$

où la constante  $C > 0$  est indépendante de  $\varepsilon$ . Ceci montre que la suite  $(z_\varepsilon)$  est borné dans  $W_{-\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)$  qui est un espace réflexif. Nous pouvons donc en extraire une sous-suite, que nous noterons encore  $(z_\varepsilon)$ , qui converge faiblement vers un élément

### 3.3. Le modèle scalaire

---

$z$  de  $W_{-\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)$ . De plus nous avons aussi

$$\|z\|_{W_{-\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)} \leq \liminf \|z_\varepsilon\|_{W_{-\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)} \leq C\|g\|_{W_{\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)}.$$

Nous en déduisons que  $z_\varepsilon$  converge vers  $z$  au sens des distributions et  $z$  vérifie donc

$$-\Delta z + \frac{\partial z}{\partial x_1} = g - a_0 z \quad \text{dans } B'_R,$$

au sens des distributions. De plus, nous avons aussi l'estimation

$$\|z\|_{W_{-\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)} \leq C\|g\|_{W_{\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)}. \quad (3.65)$$

Montrons que  $z = 0$  sur le bord  $\partial B'_R$ . D'une part,  $g - a_0 z_\varepsilon$  est borné dans  $W_{\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)$  et donc borné dans  $L^p(B'_R)$ . Ceci implique que  $\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}$  est borné dans  $L^p(B'_R)$ . D'autre part,  $z_\varepsilon$  est aussi bornée dans  $W_{-\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)$ . Ainsi, si  $\Omega'$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\overline{B'_R} \subset \Omega'$ , nous pouvons écrire

$$z_\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{dans } W^{2,p}(\Omega') \text{ faible.}$$

Puisque  $z_\varepsilon = 0$  sur  $\partial B'_R$ , alors nous avons  $w = 0$  sur  $\partial B'_R$ . De plus comme  $z_\varepsilon$  tend faiblement vers  $z$  dans  $W_{-\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)$ , alors  $w = z|_{\overline{\Omega'}}$  et, par conséquent,  $z = 0$  on  $\partial B'_R$ . Il nous reste à montrer que  $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(B'_R)$  et  $\frac{\partial z}{\partial x_1} \in L^p(B'_R)$ . D'une part, comme  $z_\varepsilon$  tend vers  $z$  au sens des distributions, on en déduit immédiatement que  $\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}$  tend vers  $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$  au sens des distributions. D'autre part,  $(\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j})$  étant borné dans  $L^p(B'_R)$ , nous pouvons en extraire une sous-suite, que nous noterons encore  $(\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j})$ , qui converge vers un élément  $y$  de  $L^p(B'_R)$ . De plus nous avons l'estimation

$$\|y\|_{L^p(B'_R)} \leq \liminf \left\| \frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B'_R)} \leq C\|g\|_{W_{\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)}. \quad (3.66)$$

Par conséquent,  $y = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(B'_R)$ , et  $\frac{\partial z}{\partial x_1} \in L^p(B'_R)$ . Par les estimations (3.65) et (3.66) nous obtenons (3.60). ■

**Remarque 3.25** Soit  $\sigma$  est un réel tel que  $0 < \sigma < \frac{1}{p}$ . Soit  $z \in W_{-\frac{1}{2}-\sigma}^{0,p}(B'_R)$  une solution de (3.58) pour une donnée  $g \in W_{\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)$ . Alors si  $w \in W_{-\frac{1}{2}-\sigma}^{0,p}(B'_R)$  est

### 3.3. Le modèle scalaire

---

une autre solution de (3.58) pour la même donnée  $g$ , alors  $z = w$ . De plus, on a l'estimation

$$\forall 0 < \sigma < \frac{1}{p}, \quad \|z\|_{W_{-\frac{1}{2}-\sigma}^{0,p}(B'_R)} \leq C \|g\|_{W_{\frac{1}{2}}^{0,p}(B'_R)}.$$

Nous pouvons maintenant établir notre résultat.

**Théorème 3.26** *On suppose  $p \geq 2$  et soit  $f \in L_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ . Alors  $u = \mathcal{O} * f \in L_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\nabla u \in \mathbf{L}_{0,\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$  et pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons l'estimation*

$$\|u\|_{L_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\mathbf{L}_{0,\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.67)$$

**Preuve :** Nous savons déjà que

$$u \in \bigcap_{\varepsilon > 0} L_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3) \text{ et } \nabla u \in \mathbf{L}_{0,\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3). \quad (3.68)$$

En particulier, nous avons l'estimation

$$\|\nabla u\|_{\mathbf{L}_{0,\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.69)$$

Il nous reste donc à montrer que

$$u \in L_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3).$$

Introduisons la partition de l'unité suivante

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3), \quad 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 1, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1 \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$\varphi_1 = 1 \text{ dans } \overline{B}_R, \quad \text{supp } \varphi_1 \subset \overline{B}_{R+1}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$u = u_1 + u_2 \text{ où } u_1 = u\varphi_1 \text{ et } u_2 = u\varphi_2.$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

Puisque  $\text{supp } u_1 \subset B_{R+1}$ , nous avons  $u_1 \in L^p_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et

$$\|u_1\|_{L^p_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.70)$$

Par ailleurs, nous pouvons constater que  $u_2$  est solution de l'équation

$$-\Delta u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \tilde{f} \text{ dans } \mathbb{R}^3,$$

où  $\tilde{f} = \varphi_2 f + u \Delta \varphi_1 + 2 \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 - u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ . La régularité de  $\tilde{f}$  est déterminée par celle de  $\varphi_2 f$ , ce qui implique que  $\tilde{f} \in L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(B'_R)$ . Posons  $v = (1+s)^{1/2} u_2$ , alors de (3.68) et de la remarque 2.12,  $v \in \bigcap_{\varepsilon > 0} W^{0,p}_{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$  et satisfait l'équation

$$-\Delta v + \frac{\partial v}{\partial x_1} = (1+s)^{1/2} \tilde{f} - 2 \nabla u_2 \nabla [(1+s)^{1/2}] - u_2 \Delta [(1+s)^{1/2}] + u_2 \frac{\partial}{\partial x_1} [(1+s)^{1/2}].$$

Maintenant un simple calcul donne

$$\Delta [(1+s)^{1/2}] = \frac{2+s}{2r} (1+s)^{-3/2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} [(1+s)^{1/2}] = -\frac{s}{2r} (1+s)^{-1/2}.$$

Il vient donc

$$-u_2 \Delta [(1+s)^{1/2}] + u_2 \frac{\partial}{\partial x_1} [(1+s)^{1/2}] = -a_0 v,$$

où  $a_0$  est défini par (3.59). Par conséquent la fonction  $v$  est solution du problème (3.58) avec une donnée  $g = (1+s)^{1/2} \tilde{f} - 2 \nabla u_2 \nabla [(1+s)^{1/2}] \in W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)$ . Le lemme 3.24 nous donne l'existence d'une fonction  $z \in W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  solution de (3.58) et satisfait l'estimation (3.60). En posant  $w = v - z$ , alors  $w \in \bigcap_{\varepsilon > 0} W^{0,p}_{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(B'_R)$  et satisfait

$$-\Delta w + \frac{\partial w}{\partial x_1} + a_0 w = 0 \text{ dans } B'_R \text{ et } w = 0 \text{ sur } \partial B_R.$$

La remarque 3.25 nous montre que  $w = 0$  ce qui implique que  $v \in W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)$  et

$$\|v\|_{W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C \|g\|_{W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C \|f\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}.$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

Par conséquent,  $u_2 \in L^p_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et

$$\|u_2\|_{L^p_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.71)$$

Cela montre que  $u \in L^p_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et les estimations (3.70), (3.71) nous donnent

$$\|u\|_{L^p_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.72)$$

Maintenant, en multipliant l'équation (3.16) par  $\varphi_2\eta_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ , on obtient

$$-\Delta(\eta_{1/2}^{1/2}u_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\eta_{1/2}^{1/2}u_2) = F,$$

où  $F = \varphi_2\eta_{1/2}^{1/2}f - u\Delta(\varphi_2\eta_{1/2}^{1/2}) - 2\nabla u \cdot \nabla(\varphi_2\eta_{1/2}^{1/2}) + u\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi_2\eta_{1/2}^{1/2})$ , alors par (2.25), (2.26) et la remarque 2.12, on a  $F \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . Ainsi la proposition 3.9 nous donne l'existence d'une fonction  $w$  telle que  $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial w}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , solution de

$$-\Delta w + \frac{\partial w}{\partial x_1} = -\Delta(\eta_{1/2}^{1/2}u_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\eta_{1/2}^{1/2}u_2).$$

De plus on a

$$\left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.73)$$

On pose  $z = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\eta_{1/2}^{1/2}u_2)$  et comme  $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i \partial x_j} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} L^p_{\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ , alors  $z \in \bigcap_{\varepsilon > 0} W_{-\varepsilon}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$  et satisfait

$$-\Delta z + \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

D'après la proposition 3.6, ceci entraîne que  $z = 0$  et

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\eta_{1/2}^{1/2}u_2) \in L^p(\mathbb{R}^3).$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

On obtient donc

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3).$$

Par ailleurs, il est facile de vérifier que

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3).$$

Ainsi, en conclusion, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3),$$

avec l'estimation

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.74)$$

Des estimations (3.69), (3.72), (3.74) on trouve (3.67). ■

Nous pouvons à présent établir un résultat d'existence pour des données moins régulière dans des espaces de Sobolev avec poids anisotropiques.

**Théorème 3.27** *On suppose  $p > 3$  et soit  $f \in Y^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . Alors l'équation (3.16) admet une unique solution  $u \in L^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla u \in L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in Y^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . De plus on a l'estimation*

$$\|u\|_{L^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{Y^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{Y^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.75)$$

**Preuve :** Comme  $f \in Y^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et  $p > 3$ , d'après la remarque 2.29, on peut écrire

$$f = \operatorname{div} \mathbf{F},$$

où  $\mathbf{F} \in L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . Ainsi, pour chaque  $\ell = 1, 2, 3$ , il existe une unique fonction  $v_\ell \in L^p_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla v_\ell \in L^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial^2 v_\ell}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial v_\ell}{\partial x_1} \in L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ ,

### 3.3. Le modèle scalaire

---

solution de

$$-\Delta v_\ell + \frac{\partial v_\ell}{\partial x_1} = F_\ell.$$

De plus nous avons l'estimation

$$\|v_\ell\|_{L^p_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla v_\ell\|_{L^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 v_\ell}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial v_\ell}{\partial x_1} \right\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|F_\ell\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.76)$$

Soit maintenant  $u = \operatorname{div} \mathbf{v}$ , alors  $u \in L^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  avec  $\nabla u \in L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  est l'unique solution of (3.16). De plus, de l'estimation (3.76), nous obtenons

$$\|u\|_{L^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\mathbf{F}\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{Y^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.77)$$

Comme  $\nabla u \in L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ , alors  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$  appartient à  $Y^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et par conséquent  $\Delta u \in Y^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . Nous en déduisons que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in Y^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  avec

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{Y^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{Y^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.78)$$

Des estimations (3.77) et (3.78), on obtient (3.75). ■

#### 3.3.3 Un résultat de régularité

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que si la donnée  $f$  est plus régulière que dans le théorème 3.16, il en est de même de la solution de l'équation (3.16).

**Théorème 3.28** *soient  $p$  et  $q$  deux réels tels que  $1 < q < \infty$ ,  $p > \frac{3}{2}$  et  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$ . Soient  $r_2 = r_2(p, \gamma)$  et  $r_2^* = r_2^*(q, \gamma)$  les réels définis dans la définition 3.7. Alors pour toute fonction  $f \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant la condition de compatibilité*

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/q]}, \quad \langle f, \lambda \rangle_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad (3.79)$$

*l'unique solution  $u$  donnée par la proposition 3.23 satisfait,*

$$\forall i, j = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3), \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3),$$

### 3.3. Le modèle scalaire

---

avec les propriétés suivantes :

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left( \|f\|_{W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} \right). \quad (3.80)$$

- 1) Si  $1 < q < p < 4$ , alors  $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ .
- 2) Si  $1 < q < 4 \leq p < \infty$ , alors  $u \in L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\nabla u \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ .

**Preuve :** Remarquons tout d'abord que  $1 < q < 3$  et

$$\mathbb{P}_{[1-3/p']} = \mathbb{P}_{[1-3/q]} = \{0\}.$$

Soit maintenant  $f \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant (3.79). Alors d'après (2.3), nous avons

$$f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3).$$

Nous allons à présent utiliser la proposition 3.23.

- 1) Si  $1 < q < p < 4$ , alors l'équation (3.16) admet une unique solution  $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant aussi (3.53). Il nous faut maintenant montrer que, pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ . Supposons d'abord  $p \neq 3$ . Pour tout  $i = 1, 2, 3$ , nous avons

$$-\Delta \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \rho \frac{\partial f}{\partial x_i} - \Delta \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} - 2\nabla \rho \nabla \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

En utilisant (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5), les termes  $\rho \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $\Delta \rho \frac{\partial u}{\partial x_i}$  et  $\nabla \rho \nabla \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$  appartiennent à  $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Il reste à montrer que  $\frac{\partial \rho}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Mais comme  $\nabla u \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$  et  $p > \frac{3}{2}$ , alors d'après la définition de  $q$ , grâce à (2.15),  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Il vient alors que

$$-\Delta \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3).$$

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

Ainsi d'après le théorème 3.16 i), pour chaque  $i = 1, 2, 3$ , il existe une fonction  $v_i \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla v_i \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  est solution de

$$-\Delta v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_1} = -\Delta \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

et vérifie l'estimation

$$\begin{aligned} & \|v_i\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla v_i\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C \left\| -\Delta \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Par la définition de  $r_2$ , nous avons en particulier  $v_i \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Par (2.2) et comme  $p \neq 3$ ,  $v_i \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \subset W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ . La proposition 3.6 nous donne alors  $\rho \frac{\partial u}{\partial x_i} - v_i \in \mathbb{P}_{[1-3/p]}$ . D'où  $\rho \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ , ce qui entraîne que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$  et par conséquent  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ . Des estimations (3.53), (3.81) et (3.16), nous obtenons (3.80).

Si  $p = 3$ , la preuve reste valable en remplaçant le poids  $\rho$  dans les espaces  $W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$  et  $W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^3)$  est remplacé par le poids  $\rho \ln(1 + \rho)$ .

2) Pour le cas  $1 < q < 4 \leq p < \infty$ , nous procédons de la même manière. ■

**Remarque 3.29** (i) Remarquons que  $W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3) \subset L_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ . Par conséquent si  $p \geq 2$ , la solution donnée par le théorème précédent vérifie  $u \in L_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\nabla u \in \mathbf{L}_{0, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ .

(ii) La question de la régularité pour une donnée  $f$  appartenant simplement à  $W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$  est ouverte.

## 3.4 Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

Nous considérons maintenant le problème non homogène d'Oseen :

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= g \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Nous ajoutons à ce système la condition à l'infini

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\infty,$$

où  $\mathbf{u}_\infty$  est un vecteur constant de  $\mathbb{R}^3$ .

#### 3.4.1 Unicité de la solution

Considérons tout d'abord une solution  $(\mathbf{u}, \pi)$  qui appartient à  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  et qui correspond à des données  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  et  $g = 0$ . En prenant la divergence de la première équation de (3.82), nous obtenons  $\Delta \pi = 0$ . Cela entraîne que  $\pi$  est un polynôme harmonique (voir [53]). Par ailleurs, nous pouvons écrire

$$\Delta \left( -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) = -\Delta(\nabla \pi) = \mathbf{0}. \tag{3.83}$$

Cela implique que, pour tout  $j = 1, 2, 3$ ,  $-\Delta u_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_1}$  est un polynôme harmonique. La transformée de Fourier appliquée à (3.83) nous permet d'obtenir

$$\forall j = 1, 2, 3, \quad 2\pi|\xi|^4 \hat{u}_j(\xi) + i|\xi|^2 \xi_1 \hat{u}_j(\xi) = 0.$$

En posant  $\hat{u}_j(\xi) = v_j(\xi) + iw_j(\xi)$ , il vient,

$$\begin{cases} 2\pi|\xi|^4 v_j(\xi) - |\xi|^2 \xi_1 w_j(\xi) = 0 \\ |\xi|^2 \xi_1 v_j(\xi) + 2\pi|\xi|^4 w_j(\xi) = 0. \end{cases}$$

Le déterminant du système est  $4\pi^2|\xi|^8 + |\xi|^4 \xi_1^2$ . Ainsi, pour  $\xi \neq 0$ , le support de  $\hat{u}_j$  est inclus dans  $\{0\}$ . Nous en déduisons que  $u_j$  est un polynôme. Nous avons donc prouvé la proposition suivante

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

**Proposition 3.30** *Si  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  est une solution du problème (3.82), correspondant à  $\mathbf{f} = g = 0$ , alors  $\mathbf{u}$  et  $\pi$  sont des polynômes .*

Dans la suite, nous aurons besoin de l'espace des polynômes suivant

$$\mathcal{N}_k = \left\{ (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in \mathbb{P}_k \times \mathbb{P}_{k-1}^\Delta, -\Delta \boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial x_1} + \nabla \mu = \mathbf{0}, \operatorname{div} \boldsymbol{\lambda} = 0 \right\}.$$

Remarquons que

$$\mathcal{N}_0 = \mathbb{R}^3 \times \{0\} \text{ et } \mathcal{N}_1 = \mathbf{S}_1 \times \mathbb{R}.$$

Nous rappelons que  $S_1$  est l'espace des polynômes de  $\mathbb{P}_1$  indépendante de  $x_1$ .

#### 3.4.2 Résultats d'existence

Rappelons deux résultats sur le problème (3.82). Le premier concerne des données régulières,  $(\mathbf{f}, g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Le problème possède alors une solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$  que l'on peut écrire explicitement

$$\begin{aligned} u_i &= \mathcal{O}_{ij} * f_j + \mathcal{P}_i * g, \\ \pi &= \mathcal{P}_j * f_j + g - \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{E} * g) = \mathcal{P}_j * f_j + g - \mathcal{P}_1 * g. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Le second résultat concerne des données  $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Dans ce cas, le problème (3.82) possède une solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^3) \times L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^3)$  telle que, pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\nabla \pi \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons les propriétés suivantes :

(i) Il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \pi\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}).$$

(ii) Si  $1 < p < 4$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{p_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}).$$

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

où  $r_2$  est le réel donné dans la définition 3.7.

(iii) Si  $1 < p < 2$ , il existe une constante  $C > 0$  telle

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{r_1}(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}).$$

où  $r_1$  est le réel donné dans la définition 3.7.

On peut trouver une preuve de ce résultat dans [23] et [22]. Le cas particulier où  $r_1 = \frac{2p}{2-p}$  et  $r_2 = \frac{4p}{4-p}$  est aussi démontré dans [27]. Nous allons améliorer le résultat d'existence précédent en supposant que la donnée  $g$  appartient à un espace contenant  $W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ .

**Théorème 3.31** *Soient  $r_1$  et  $r_2$  les réels donnés dans la définition 3.7. Soit  $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \times \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ .*

(i) *Si  $1 < p < 2$ , alors le problème (3.82) possède une solution unique  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{L}^{r_1}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ , pour tout  $i, j = 1, 2, 3$   $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

(ii) *Si  $2 \leq p < 3$ , alors (3.82) possède une solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ , unique à un élément de  $\mathcal{N}_0$  près, telle que pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  vérifiant aussi*

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3} \|\mathbf{u} + \mathbf{K}\|_{\mathbf{W}_0^{1,r}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

(iii) *Si  $p \geq 3$ , alors (3.82) possède une solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ ,*

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

unique à un élément de  $\mathcal{N}_1$  près, telle que  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \inf_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{N}_1} \left( \|\mathbf{u} + \lambda\|_{\mathbf{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi + \mu\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \right) + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} \\ \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

**Preuve :** Rappelons que si  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  est une solution du problème d'Oseen (3.82) avec des données nulles, alors  $\mathbf{u}$  et  $\pi$  sont des polynômes. Dans un premier temps, nous allons montrer l'existence de la pression. Soit  $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \times \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ , nous avons alors

$$\operatorname{div} \mathbf{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3).$$

De plus, pour tout polynôme  $\mu \in \mathbb{P}_{[1-3/p']} \subset \widetilde{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} \mathbf{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1}, \mu \rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} \\ = -\langle \mathbf{f}, \nabla \mu \rangle_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^3)} + \langle g, \Delta \mu \rangle_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)} + \\ + \langle g, \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \rangle_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que  $\operatorname{div} \mathbf{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[1-3/p']}$ . Par ailleurs, d'après le théorème 9.5 de [6], l'opérateur de Laplace suivant est un isomorphisme

$$\Delta : W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) / \mathbb{P}_{[1-\frac{3}{p}]} \rightarrow W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[1-\frac{3}{p}]}$$

Ainsi, il existe une fonction  $\pi \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  telle que

$$\Delta \pi = \operatorname{div} \mathbf{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

et satisfaisant l'estimation

$$\begin{aligned} \inf_{\mu \in \mathbb{P}_{[1-3/p]}} \|\pi + \mu\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left\| \operatorname{div} \mathbf{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \quad (3.88)$$

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

Il est alors facile de voir que  $\mathbf{f} - \nabla\pi$  appartient à  $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ . Nous allons maintenant appliquer le théorème 3.16 pour montrer l'existence de la vitesse  $\mathbf{u}$ . Nous avons, pour cela, trois cas à considérer.

(i) Si  $1 < p < 2$ , alors il existe un unique vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r_1}(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $\nabla\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ , et pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x_i\partial x_j} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ . De plus

$$-\Delta\mathbf{u} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} = \mathbf{f} - \nabla\pi \quad (3.89)$$

et

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i\partial x_j} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C (\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\pi\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)}) \\ & \leq C\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Les estimations (3.88) et (3.90) nous donnent l'estimation (3.85). Il nous reste à prouver que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = g$ . Remarquons que  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  appartient à  $L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$  et que  $1 < p < 2$ . Alors d'après la définition 3.7 et la remarque 3.8,  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  appartient en particulier à  $L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$ . Par ailleurs, la propriété (2.13) nous fournit l'injection continue  $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$ . Par conséquent la fonction  $g$  appartient aussi à  $L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$ . Alors  $\operatorname{div} \mathbf{u} - g \in L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$  et vérifie

$$-\Delta(\operatorname{div} \mathbf{u} - g) + \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{u} - g)}{\partial x_1} = 0. \quad (3.91)$$

D'après la proposition 3.6,  $\operatorname{div} \mathbf{u} - g$  est un polynôme de  $L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$ , c'est-à-dire que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = g$ .

(ii) Si  $2 \leq p < 3$ , alors il existe un vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$  telle que pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x_i\partial x_j} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et vérifie (3.89). Les mêmes arguments que précédemment sont utilisés ensuite pour prouver que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = g$ .

(iii) si  $p \geq 3$ , alors en utilisant la remarque 3.10, il existe un vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant (3.89). Il vient que  $\operatorname{div} \mathbf{u} - g \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  vérifie (3.91). Par conséquent,  $\operatorname{div} \mathbf{u} - g$  est un polynôme de  $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Comme  $p \geq 3$ , cela entraîne que  $\operatorname{div} \mathbf{u} - g = K \in \mathbb{R}$ . En posant  $\boldsymbol{\lambda} = (0, \frac{1}{2}Kx_2, \frac{1}{2}Kx_3)$ , nous constatons

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

que  $\lambda \in \mathbf{S}_1 \subset \mathbf{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$  et nous pouvons écrire

$$K = \operatorname{div} \lambda.$$

Ainsi,  $\operatorname{div}(\mathbf{u} - \lambda) = g$  et nous en déduisons que  $(\mathbf{u} - \lambda, \pi) \in \mathbf{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  est une solution de (3.82). ■

**Remarque 3.32** 1) Si  $1 < p < 3$  et  $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \times \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ , alors d'après le théorème précédent, la solution  $(\mathbf{u}, \pi)$  du problème d'Oseen satisfait,  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\pi \in W_0^{1,p}$ . La définition 3.7 et la remarque 3.8 montrent, qu'en particulier,  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$ . Ainsi grâce à la caractérisation (2.14), nous en déduisons que  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . La remarque 3.4 entraîne alors que

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ et } \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \pi(\mathbf{x}) = 0,$$

au sens de la définition 3.3.

2) Si  $3 \leq p < 4$  et si, dans le théorème précédent, nous supposons de plus  $g = 0$  ou  $g$  appartient à  $L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ , alors le problème (3.82) possède une solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ , unique à un vecteur constant près de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , satisfaisant pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ . Par le lemme 3.5, nous en déduisons que  $\nabla \mathbf{u}$  est continue et

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Nous nous intéressons maintenant à des solutions  $(\mathbf{u}, \pi)$  qui appartiennent à l'espace  $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ . Nous avons tout d'abord besoin d'un résultat qui est une condition nécessaire pour prouver l'existence d'une telle solution.

**Lemme 3.33** *Pour tout  $(\mathbf{u}, \pi) \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$  et pour tout  $\lambda \in \widetilde{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)$ , nous avons*

$$\begin{aligned} & \left\langle -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi, \lambda \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} \\ &= \left\langle \mathbf{u}, -\Delta \lambda - \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)} - \langle \pi, \operatorname{div} \lambda \rangle_{L^p(\mathbb{R}^3) \times L^{p'}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

En particulier, si  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{IP}_{[1-3/p']}$ , nous avons

$$\left\langle -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi, \boldsymbol{\lambda} \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

**Preuve :** Comme  $(\mathbf{u}, \pi) \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$  nous avons  $-\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . D'où pour tout  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left\langle -\Delta \mathbf{u} + \nabla \pi, \boldsymbol{\lambda} \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} \\ &= \left\langle \mathbf{u}, -\Delta \boldsymbol{\lambda} \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)} - \left\langle \pi, \operatorname{div} \boldsymbol{\lambda} \right\rangle_{L^p(\mathbb{R}^3) \times L^{p'}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Maintenant, la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  dans  $\widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ , fournit l'existence d'une suite  $(\mathbf{u}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  qui converge vers  $\mathbf{u}$  dans  $\widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Par conséquent,  $\mathbf{u}_k$  converge vers  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_1}$  converge vers  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}$  dans  $\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Ainsi, pour tout  $\boldsymbol{\lambda} \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \boldsymbol{\lambda} \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_1}, \boldsymbol{\lambda} \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} \\ &= - \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\langle \mathbf{u}_k, \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial x_1} \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)} \\ &= - \left\langle \mathbf{u}, \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial x_1} \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $(\mathbf{u}, \pi) \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$  et pour tout  $\boldsymbol{\lambda} \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)$ , nous obtenons (3.92). Comme les polynômes de  $\mathbf{IP}_{[1-3/p]}$  sont au plus des constantes, (3.92) entraîne que

$$\left\langle -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi, \boldsymbol{\lambda} \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad \blacksquare$$

**Théorème 3.34** Soit  $r_2$  le réel donné dans définition 3.7. Soit  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant la condition de compatibilité

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{IP}_{[1-3/p]}, \quad \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.93)$$

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

Soit  $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)$ , satisfaisant

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p']}, \quad \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \lambda \right\rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.94)$$

(i) Si  $1 < p < 4$ , alors le problème d'Oseen (3.82) admet une solution unique  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{L}^{r^2}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|_{L^{r^2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \quad (3.95)$$

(ii) Si  $p \geq 4$ , alors le problème (3.82) admet une solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ , unique à un élément de  $\mathcal{N}_0$  près. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} & \inf_{\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3} \|\mathbf{u} + \mathbf{K}\|_{\widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \quad (3.96)$$

**Preuve :** Le principe de la preuve est le même que pour le théorème 3.31. Soient  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  et  $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)$ . Alors, par (2.3), (3.93) et (3.94), nous pouvons observer que

$$\operatorname{div} \mathbf{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[2-3/p']}.$$

Par ailleurs, d'après le théorème 9.6 de [6], l'opérateur de Laplace suivant est un isomorphisme

$$\Delta : W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3) / \mathbb{P}_{[2-\frac{3}{p}]} \rightarrow L^p(\mathbb{R}^3).$$

Par dualité et transposition, nous obtenons l'isomorphisme suivant

$$\Delta : L^{p'}(\mathbb{R}^3) \rightarrow W_0^{-2,p'}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[2-\frac{3}{p}]}. \quad (3.97)$$

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

Ainsi, il existe une unique fonction  $\pi \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , telle que,

$$\Delta\pi = \operatorname{div} \mathbf{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1},$$

et vérifiant l'estimation

$$\|\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \right).$$

Ainsi  $\mathbf{f} - \nabla\pi$  appartient à  $\in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbf{IP}_{[1-3/p]}$  et nous avons deux cas.

(i) Si  $1 < p < 4$ , alors le théorème 3.16 i) fournit l'existence de  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^r(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $\nabla\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ , satisfaisant (3.89) et l'estimation

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} &\leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\pi\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \right) \\ &\leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que  $\operatorname{div} \mathbf{u} - g \in L^p(\mathbb{R}^3)$  vérifie (3.91). La proposition 3.6 montre que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = g$ .

(ii) Si  $p \geq 4$ , alors, d'après le théorème 3.16 ii), il existe  $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant (3.89) et vérifiant

$$\inf_{\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3} \|\mathbf{u} + \mathbf{K}\|_{\widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \right).$$

**Remarque 3.35** Dans ce théorème, l'hypothèse sur la donnée  $g$  est plus faible que celle du théorème 4.2 p 388 de [27] qui est, pour  $n = 3$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap D_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Comme pour  $p > 3/2$  les espaces  $D_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  et  $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  coïncident, cela signifie donc  $g \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ .

**Remarque 3.36** 1) Si  $1 < p < 3$ , alors, d'après la définition de  $r_2$  et la caractérisation (2.14), le champs de vitesses  $\mathbf{u}$  appartient en particulier à  $\widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ .

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

Ainsi, la remarque 3.4 nous montre que

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

au sens de la définition 3.3. En particulier, pour tout vecteur constant  $\mathbf{u}_\infty$ , le couple  $(\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_\infty, \pi)$  est l'unique solution de (3.82) vérifiant  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\pi \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\infty$$

au sens de la définition 3.3.

2) Si  $3 < p < 4$ , alors d'après le lemme 3.5, la vitesse  $\mathbf{u}$  est continue sur  $\mathbb{R}^3$  et

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

**Remarque 3.37** La remarque précédente et la proposition 2.2 montrent que finalement si  $1 < p < 4$ , la vitesse  $\mathbf{u}$  appartient à  $\mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ .

Nous allons maintenant montrer que certaines solutions trouvées dans le théorème 3.34 ont une expression explicite. Observons que si  $(\mathbf{f}, g) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  et  $f_j = \operatorname{div} \mathbf{F}_j$ , alors (3.82) admet une solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$  qui peut s'écrire explicitement,

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{\partial \mathcal{O}_{ij}}{\partial x_k} * F_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{E} * g), \\ \pi &= \frac{\partial \mathcal{P}_j}{\partial x_k} * F_{jk} + g - \mathcal{P}_1 * g + c_{jk} F_{jk} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (\mathcal{E} * F_{jk}) + g - \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{E} * g) + c_{jk} F_{jk}, \end{aligned} \tag{3.98}$$

où  $c_{jk}$  sont des réels.

**Proposition 3.38** *Supposons que  $1 < p \leq 2$  et soit  $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant  $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)$ . Nous supposons, de plus que les conditions de compatibilités (3.93) et (3.94) sont satisfaites. Alors le couple  $(\mathbf{u}, \pi)$  défini par (3.98) est un élément de  $\mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ .*

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

**Preuve :** Puisque  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfait (3.93), alors grâce à l'isomorphisme (2.10), pour tout  $j = 1, 2, 3$ , il existe un vecteur  $\mathbf{F}_j \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  telle que

$$f_j = \operatorname{div} \mathbf{F}_j.$$

Ainsi, en utilisant un résultat prouvé dans [4], pour tout  $j, k = 1, 2, 3$ , nous avons  $\mathcal{E} * F_{jk} \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ . Ceci entraîne que  $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (\mathcal{E} * F_{jk}) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . Montrons que  $\frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{E} * g) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{E} * g), \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} \right| &= \left| \left\langle \mathcal{E} * g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} \right| \\ &= \left| \left\langle g, \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{E} * \varphi) \right\rangle_{L^p(\mathbb{R}^3) \times L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \right| \\ &= \left| \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \mathcal{E} * \varphi \right\rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} \right|. \end{aligned}$$

La condition de compatibilité (3.94) nous permet d'écrire

$$\left| \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \mathcal{E} * \varphi \right\rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} \right| = \left| \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \mathcal{E} * \varphi + \lambda \right\rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} \right|.$$

Il vient alors

$$\left| \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{E} * g), \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} \right| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p']}} \|\mathcal{E} * \varphi + \lambda\|_{W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)}.$$

Dans [4], il est prouvé que

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p']}} \|\mathcal{E} * \varphi\|_{W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)}.$$

Nous en déduisons alors que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{E} * g) \right\|_{L^p} \leq C \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)}.$$

La fonction  $\pi$  donnée dans l'expression (3.98) est donc bien définie et appartient à  $L^p(\mathbb{R}^3)$ . Occupons nous maintenant de l'expression de  $\mathbf{u}$ . Puisque  $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$ , alors  $\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{E} * g) \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \subset W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ . Par ailleurs, pour tout  $j, k = 1, 2, 3$ , nous avons

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

$F_{jk} \in L^p(\mathbb{R}^3) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} L^p_{-\varepsilon,\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ . Utilisant un résultat prouvé dans [36] pour le cas  $1 < p < 2$  et dans [20] pour le cas  $p = 2$ , nous avons  $\frac{\partial \mathcal{O}_{ij}}{\partial x_k} * F_{jk} \in \bigcap_{\varepsilon>0} L^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ . En particulier,  $\frac{\partial \mathcal{O}_{ij}}{\partial x_k} * F_{jk}$  appartient à  $W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ . Nous en déduisons que le vecteur  $\mathbf{u}$  donné dans (3.98) est bien défini et appartient à  $W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ . Le résultat d'existence et d'unicité donné par le théorème 3.34 i) nous montre que  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . ■

La prochaine proposition sera utile pour établir un résultat de régularité. Elle nous servira aussi pour l'étude du problème d'Oseen dans un domaine extérieur (voir Chapitre 5).

**Proposition 3.39** *Soient  $p$  et  $q$  deux réels tel que  $1 < p, q < \infty$ . Soient  $r_2 = r_2(p, \gamma)$  et  $r_2^* = r_2^*(q, \gamma)$  les réels définis dans la définition 3.7. On suppose  $g = 0$  et  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  vérifiant les conditions de compatibilité*

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{IP}_{[1-3/p]}, \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{IP}_{[1-3/q]} \\ \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\mu} \rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \end{aligned} \quad (3.99)$$

- (i) Si  $1 < p, q < 4$ , alors le problème (3.82) admet une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3))$ , telle que  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ .
- (ii) Si  $1 < p < 4 \leq q < \infty$ , alors le problème (3.82) admet une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3))$  telle que  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ .
- (iii) Si  $4 \leq p, q < \infty$ , alors le problème (3.82) admet une solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3))$ , unique à un élément de  $\mathcal{N}_0$  près.

**Preuve :** Les idées de la preuve sont les mêmes que celles des preuves des théorèmes 3.31 et 3.34. Si  $\mathbf{f}$  appartient à  $\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  alors  $\operatorname{div} \mathbf{f} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-2,q}(\mathbb{R}^3)$ . Par (3.99), pour tout  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{IP}_{[2-3/p]}$  et pour tout  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{IP}_{[2-3/q]}$  nous avons

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} = \langle \operatorname{div} \mathbf{f}, \boldsymbol{\mu} \rangle_{W_0^{-2,q}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

L'isomorphisme de l'opérateur de Laplace (3.97), nous donne l'existence d'une unique fonction  $\pi \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et d'une unique fonction  $\psi \in L^q(\mathbb{R}^3)$  telles que

$$\Delta\pi = \Delta\psi = \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

La fonction  $\pi - \psi$  étant harmonique est donc un polynôme. Mais le fait que  $\pi \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\psi \in L^q(\mathbb{R}^3)$  entraîne que  $\pi = \psi$  et, par conséquent,  $\pi \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ . Ainsi  $\mathbf{f} - \nabla\pi \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  et satisfait

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{P}_{[1-3/p]}, \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{P}_{[1-3/q]}, \\ \langle \mathbf{f} - \nabla\pi, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = \langle \mathbf{f} - \nabla\pi, \boldsymbol{\mu} \rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \end{aligned}$$

Nous allons à présent utiliser la proposition 3.23 et nous avons pour cela trois cas.

(i) Si  $1 < q < p < 4$ , alors il existe un unique  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r^2} \cap \mathbf{L}^{r^2*}(\mathbb{R}^3)$ , tel que  $\nabla\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$-\Delta\mathbf{u} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} = \mathbf{f} - \nabla\pi. \quad (3.100)$$

(ii) Si  $1 < q < 4 \leq p < \infty$ , il existe un unique  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r^2*}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  vérifiant (3.100).

(iii)  $4 \leq p, q < \infty$ , alors il existe  $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ , unique à un vecteur  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3$  près, solution de (3.100).

Maintenant, dans tous les cas,  $\operatorname{div} \mathbf{u} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  vérifie

$$-\Delta(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

D'où  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  est un polynôme de  $L^p(\mathbb{R}^3)$ , c'est-à-dire  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . ■

**Remarque 3.40** Si nous supposons  $g \neq 0$ , la proposition précédente reste vraie en prenant  $g \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-2,q}(\mathbb{R}^3)$  et satisfaisant

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

les conditions de compatibilité

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/q]}, \quad \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \lambda \right\rangle_{W_0^{-2,q}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,q'}(\mathbb{R}^3)} &= 0, \\ \forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p]}, \quad \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \lambda \right\rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} &= 0. \end{aligned}$$

Nous abordons maintenant la résolution du problème d'Oseen dans des espaces de Sobolev avec poids anisotropes. Comme nous ne disposons pas d'une famille complète d'isomorphismes de l'opérateur laplacien dans des espaces avec poids anisotropes, nous recherchons des solutions explicites. Rappelons pour cela quelques résultats sur la solution fondamentale. On suppose  $p > 2$  et  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ . Alors pour tout  $\ell = 1, 2, 3$ ,  $\mathcal{P}_\ell * f_\ell \in L_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\nabla(\mathcal{P}_\ell * f_\ell) \in \mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ . En d'autres termes, la fonction  $\pi = \mathcal{P}_\ell * f_\ell$  appartient à  $Y_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons l'estimation

$$\|\pi\|_{L_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\pi\|_{\mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.101)$$

Rappelons que  $\pi$  satisfait

$$\Delta\pi = \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

Grâce à la proposition 2.40, nous pouvons améliorer les estimations de (3.101).

**Proposition 3.41** *On suppose  $p > 2$  et  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ . Alors  $\pi = \mathcal{P}_\ell * f_\ell$  est bien défini et appartient à  $L^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\nabla\pi$  appartient à  $\mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$  et nous avons l'estimation*

$$\|\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\pi\|_{\mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.102)$$

En d'autres termes,  $\pi$  appartient à  $X_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ .

Nous pouvons maintenant établir le résultat suivant :

**Théorème 3.42** *On suppose  $p > 2$  et soit  $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3) \times L_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$  tel que  $\nabla g \in \mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ . Alors le problème d'Oseen (3.82) admet une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{L}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3) \times X_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ , défini par (3.84), telle que  $\nabla\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{0, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^p(\mathbb{R}^3)$*

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

et  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons l'estimation

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{X^{1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla g\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \quad (3.103)$$

**Preuve :** D'après (2.29) et (2.30), l'espace,  $\mathbf{L}^p_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times X^{1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  ne contient pas de polynômes. L'unicité de la solution est donc prouvée. Soit maintenant  $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla g \in \mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . D'après la proposition 3.41,  $\pi = \mathcal{P}_\ell * f_\ell + g - \mathcal{P}_1 * g$  appartient à  $X^{1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . Nous savons aussi (voir [36]) que, pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ , nous avons  $\mathcal{O}_{ij} * f_j \in \bigcap_{\varepsilon > 0} L^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . Il vient alors que  $u_i = \mathcal{O}_{ij} * f_j + \mathcal{P}_i * g$  appartient à  $\bigcap_{\varepsilon > 0} L^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . Par ailleurs, le fait que  $\pi \in X^{1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  entraîne que  $\mathbf{f} - \nabla \pi \in \mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . Le théorème 3.26 nous donne l'existence d'un unique  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^p_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  tel que,  $\nabla \mathbf{v} \in \mathbf{L}^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ , pour tout  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$-\Delta \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = \mathbf{f} - \nabla \pi.$$

Cela implique que  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbf{L}^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et

$$-\Delta \mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

D'après la proposition 3.6,  $\mathbf{w}$  est un polynôme de  $\mathbf{L}^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ , avec  $\varepsilon > 0$  fixé. En choisissant  $\varepsilon$  suffisamment petit, par (2.29), nous en concluons que  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ . L'estimation (3.103) se déduit facilement des estimations (3.102) et (3.67). ■

Ce théorème et les inégalités de Hardy établies dans le chapitre 2, nous permettent de résoudre le problème d'Oseen pour des données moins régulières.

**Théorème 3.43** *On suppose  $p > 3$  et  $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times L^p_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . Alors, le problème (3.82) admet une solution unique  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{L}^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ , telle que,*

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

pour tout  $i = 1, 2, 3$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . De plus, nous avons

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right\|_{\mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned}$$

**Preuve :** L'espace  $\mathbf{L}^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  ne contient pas de polynômes et donc l'unicité de la solution est prouvée. Supposons maintenant  $p > 3$  et  $\mathbf{f} \in \mathbf{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . Alors, d'après la remarque 2.29, pour tout  $\ell = 1, 2, 3$ , il existe  $\mathbf{F}_\ell \in \mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  tel que

$$f_\ell = \operatorname{div} \mathbf{F}_\ell.$$

Définissons alors le couple  $(\mathbf{u}, \pi)$  par l'expression (3.98). Puisque  $p > 3$  et  $g \in L^p_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ , alors pour tout  $i = 1, 2, 3$ , (voir [36])  $\mathcal{P}_i * g$  appartient à  $L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  avec l'estimation

$$\|\mathcal{P}_i * g\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|g\|_{L^p_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}.$$

En utilisant aussi la proposition 3.41, la fonction  $\pi$  appartient à  $L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . Par ailleurs, d'après [36], nous savons aussi que  $\frac{\partial \mathcal{O}_{ij}}{\partial x_k} * F_{jk}$  appartient à  $L^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et satisfait

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{O}_{ij}}{\partial x_k} * F_{jk} \right\|_{L^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|F_{jk}\|_{L^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}.$$

Nous en déduisons que  $\mathbf{u}$  appartient à  $\mathbf{L}^p_{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . Ensuite, le résultat d'existence et d'unicité du théorème 3.27 nous permet de conclure que  $\nabla \mathbf{u}$  appartient à  $\mathbf{L}^p_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}$  appartient à  $\mathbf{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ . ■

#### 3.4.3 Un résultat de régularité

Le but de ce paragraphe est d'établir un résultat de régularité. Dans un souci de clarté, nous nous contentons du cas homogène, c'est-à-dire,  $g = 0$ . Nous allons supposer que la donnée  $\mathbf{f}$  est plus régulière que dans le théorème 3.34.

**Théorème 3.44** Soient  $p$  et  $q$  deux réels tels que  $1 < q < \infty$ ,  $p > \frac{3}{2}$  et  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$ . Soient  $r_2 = r_2(p, \gamma)$  et  $r_2^* = r_2^*(q, \gamma)$  les réels donnés dans la définition 3.7 et

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

supposons  $g = 0$ . Alors, pour toute fonction  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{IP}_{[1-3/q]}, \quad \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad (3.104)$$

le problème (3.82) admet une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{L}^{r^*}(\mathbb{R}^3) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3))$ , telle que  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ . De plus

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \text{ et } \nabla \pi \in \mathbf{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3), \quad (3.105)$$

et on a l'estimation

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\mathbf{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} \\ & + \|\pi\|_{W_1^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)}). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Enfin, nous avons les propriétés suivantes :

(i) Si  $1 < p < 4$ , alors  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r^2}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$  avec l'estimation

$$\|\mathbf{u}\|_{L^{r^2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)}). \quad (3.107)$$

(ii) Si  $4 \leq p < \infty$ , alors  $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ , avec l'estimation

$$\inf_{\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3} \|\mathbf{u} + \mathbf{K}\|_{\widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)}). \quad (3.108)$$

**Preuve :** Remarquons tout d'abord que, puisque  $p > \frac{3}{2}$ , alors

$$\mathbf{IP}_{[1-3/p]} = \{\mathbf{0}\}.$$

De plus, d'après la définition de  $q$ , nous avons  $1 < q < 3$ . Maintenant, si  $\mathbf{f}$  appartient à  $\mathbf{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  alors

$$\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3).$$

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

Par conséquent, d'après la proposition 3.39 il existe un unique  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{L}^{r^*}(\mathbb{R}^3) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3))$ , telle que  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ . De plus, cette solution vérifie :

- (i) Si  $1 < p < 4$ , alors  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r^2} \cap \mathbf{L}^{r^*}(\mathbb{R}^3)$ , tel que  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ .
- (ii) Si  $4 \leq p < \infty$ , alors  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r^*}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3)$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ .

Il nous reste maintenant à montrer (3.105) dans les deux cas. Puisque  $\mathbf{f}$  appartient à  $\mathbf{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ , alors  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  appartient à  $W_1^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Par ailleurs, comme  $p > \frac{3}{2}$ , les polynômes de  $\mathbb{P}_{[2-3/p']}$  sont au plus des constantes, ce qui implique que

$$\operatorname{div} \mathbf{f} \in W_1^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[2-3/p]}.$$

De plus, remarquons que  $\frac{3}{p} \neq 1$ . Dans ce cas, l'opérateur de Laplace suivant est un isomorphisme (voir théorème 9.9 de [6])

$$\Delta : W_1^{1,p}(\mathbb{R}^3) \rightarrow W_1^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[2-3/p]}.$$

Il existe alors une fonction unique  $\psi \in W_1^{1,p}(\mathbb{R}^3) \subset L^p(\mathbb{R}^3)$  telle que

$$\Delta \psi = \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

La fonction  $\pi - \psi$  est donc un polynôme harmonique de  $L^p(\mathbb{R}^3)$ , c'est-à-dire  $\pi = \psi$ . Ceci implique que  $\nabla \pi \in \mathbf{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$  et  $\mathbf{f} - \nabla \pi$  est un élément de  $\mathbf{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$  qui satisfait

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{P}_{[1-3/q]}, \quad \langle \mathbf{f} - \nabla \pi, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{W}_0^{1,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Le théorème 3.28 nous montre alors que  $\mathbf{u}$  satisfait (3.105). ■

**Remarque 3.45** Si nous supposons  $g \neq 0$ , le théorème précédent reste vrai en prenant  $g \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-2,q}(\mathbb{R}^3)$  et satisfaisant

### 3.4. Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

---

les conditions de compatibilité

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/q]}, \quad \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \lambda \right\rangle_{W_0^{-2,q}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0,$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p]}, \quad \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \lambda \right\rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

## Chapitre 4

# Le problème stationnaire d'Oseen dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, nous étudions à nouveau le problème d'Oseen, mais nous le posons maintenant dans  $\mathbb{R}^n$ . Il s'agit alors de résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= h \quad \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.1}$$

L'objectif ici est d'étendre les résultats des théorèmes 3.31 et 3.34. Plus précisément, nous considérons des forces extérieures  $\mathbf{f}$  appartenant à  $\mathbf{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Comme dans le chapitre précédent, nous commençons d'abord par résoudre le modèle scalaire et nous utilisons ensuite les résultats obtenus pour résoudre (4.1). Dans une première partie, nous analysons les relations qui lient le modèle scalaire et le système (4.1).



# Chapitre 5

## Le problème stationnaire d'Oseen dans un domaine extérieur

### 5.1 Introduction et notations

Soit  $\Omega$  un domaine extérieur de  $\mathbb{R}^3$  que l'on supposera connexe et de frontière au moins lipschitzienne. L'objectif de ce chapitre est d'étudier le problème d'Oseen suivant : étant donnés  $\mathbf{f}$  et  $g$ , on cherche un couple  $(\mathbf{u}, \pi) \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$  vérifiant

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= g \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_* \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Cela revient à étendre le résultat d'existence du théorème 3.34 dans le cas d'un domaine extérieur. Notre approche est basée sur l'idée suivante : pour résoudre un problème linéaire dans un domaine extérieur, il suffit de combiner les résultats obtenus dans l'espace tout entier avec ceux obtenus dans un domaine borné. Cette idée a été proposée par Giroire dans [32], reprise ensuite dans [7] et [3]. Nous commençons donc par étudier le problème d'Oseen dans un domaine borné. Nous analysons ensuite le problème (5.1) d'abord dans le cas hilbertien puis dans le cas

## 5.1. Introduction et notations

---

général. Nous introduisons l' espace

$$\tilde{L}^p(\mathbb{R}^3) = \left\{ \tilde{g} \in L^p(\mathbb{R}^3), \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \right\},$$

muni de la norme

$$\|\tilde{g}\|_{\tilde{L}^p(\mathbb{R}^3)} = \|\tilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)},$$

et on pose

$$Z_p(\Omega) = \left\{ \tilde{g}|_{\Omega}, \tilde{g} \in \tilde{L}^p(\mathbb{R}^3), \forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p']}, \left\langle \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}, \lambda \right\rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0 \right\} \subset L^p(\Omega).$$

L'espace  $Z_p(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|g\|_{Z_p(\Omega)} = \inf_{\{\tilde{g} \in \tilde{L}^p(\mathbb{R}^3), \tilde{g}|_{\Omega} = g\}} \|\tilde{g}\|_{\tilde{L}^p(\mathbb{R}^3)}.$$

Nous introduisons aussi l'espace suivant

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \}.$$

Nous définissons à présent l'opérateur

$$\mathbf{T} : (\mathbf{u}, \pi) \longrightarrow \left( -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi, -\operatorname{div} \mathbf{u} \right).$$

**Définition 5.1** On pose,

1) si  $1 < p < 4$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0^p(\Omega) = \{ (\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^{r_2}(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega)) \times L^p(\Omega), \\ -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \mathbf{0}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

où  $r_2$  est donné par la définition 3.7.

## 5.2. Résultats préliminaires

---

2) Si  $p \geq 4$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0^p(\Omega) = \{(\mathbf{u}, \pi) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega), \\ -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \mathbf{0}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

On suppose que  $R$  est un réel strictement positif fixé. Nous introduisons la partition de l'unité suivante : soient deux fonctions  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$  telle que :

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 1, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \varphi_2 = 1 \text{ dans } B_R, \quad \operatorname{Supp} \varphi_2 \subset B_{R+1}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

## 5.2 Résultats préliminaires

Ce paragraphe est consacré au problème (5.1) lorsque celui-ci est posé dans un domaine borné. Par une application directe du théorème de Lax-Migran, nous obtenons facilement le résultat suivant :

**Proposition 5.2** *Soit  $\Omega'$  un ouvert borné. On suppose  $g = 0$ ,  $\mathbf{u}_* = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega')$ . Alors le problème (5.1) possède une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{H}^1(\Omega') \times (L^2(\Omega')/\mathbb{R})$  satisfaisant la relation*

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega')} + \inf_{K \in \mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^2(\Omega')} \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega')}.$$

Nous rappelons à présent un résultat sur le problème de Stokes. Le lecteur pourra consulter une preuve dans [5].

**Théorème 5.3** *Soit  $\Omega'$  un ouvert borné à frontière  $\mathcal{C}^{1,1}$ . Soient  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')$ ,  $g \in L^p(\Omega)$  et  $\mathbf{u}_* \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')$  satisfaisant la condition de compatibilité suivante*

$$\int_{\Omega'} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega'} \mathbf{u}_* \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (5.5)$$

Alors, le problème de Stokes suivant

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = g \text{ dans } \Omega', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_* \text{ sur } \partial\Omega',$$

## 5.2. Résultats préliminaires

---

possède une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$ . De plus nous avons l'estimation suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega')} + \inf_{K \in \mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^p(\Omega')} \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')} + \|g\|_{L^p(\Omega')} + \|\mathbf{u}_*\|_{\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')} \right).$$

Grâce au théorème 5.3 et à la proposition 5.2, nous pouvons montrer la proposition suivante :

**Proposition 5.4** *Soit  $\Omega'$  un ouvert borné à frontière  $\mathcal{C}^{1,1}$ . On suppose  $p > 2$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')$ ,  $g = 0$  et  $\mathbf{u}_* = \mathbf{0}$ . Alors, le problème (5.1) possède une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$  satisfaisant la relation*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega')} + \inf_{K \in \mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^p(\Omega')} \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')},$$

où  $C > 0$  dépend de  $\Omega'$  et  $p$ .

**Preuve :** Comme  $p > 2$  et  $\mathbf{f}$  appartenant à  $\mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')$ , alors  $\mathbf{f}$  appartient à  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega')$ . Par la proposition 5.2, le problème (5.1) possède alors une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{H}^1(\Omega') \times (L^2(\Omega')/\mathbb{R})$ . Cela implique donc que  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^2(\Omega')$ . Par les injections de Sobolev, nous obtenons

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^2(\Omega') \subset \mathbf{W}^{-1,q}(\Omega'), \quad \forall q \in ]1, 6].$$

(i) si  $2 < p \leq 6$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}$  appartient à  $\mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')$  et par conséquent  $\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}$  appartient aussi à  $\mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')$ . D'après le théorème 5.3, Il existe donc un unique couple  $(\mathbf{v}, \eta) \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$  solution de

$$-\Delta \mathbf{v} + \nabla \eta = \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega', \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega'.$$

Nous en déduisons que  $\mathbf{u} = \mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega')$  et  $\pi = \eta \in L^p(\Omega')/\mathbb{R}$  ce qui établit le résultat.

(ii) Si  $6 < p < \infty$ , comme  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')$ , alors  $\mathbf{f}$  appartient aussi à  $\mathbf{W}^{-1,6}(\Omega')$ . On utilise alors le résultat précédent pour en déduire qu'il existe un unique couple  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,6}(\Omega') \times (L^6(\Omega')/\mathbb{R})$  solution de (5.1). Cela entraîne que  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^6(\Omega')$ ,

## 5.2. Résultats préliminaires

---

et, par les injections de Sobolev, nous en déduisons que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{L}^6(\Omega') \subset \mathbf{W}^{-1,q}(\Omega') \quad 1 < q < \infty.$$

Nous procédons ensuite comme précédemment pour finir la preuve. ■

En utilisant le lemme 3.3 de [5], le problème non homogène est immédiatement résolvable.

**Proposition 5.5** *Soit  $\Omega'$  un ouvert borné à frontière  $\mathcal{C}^{1,1}$ . On suppose  $p \geq 2$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')$ ,  $g \in L^p(\Omega)$  et  $\mathbf{u}_* \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')$  satisfaisant la condition de compatibilité (5.5). Alors, le problème (5.1) possède une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$ . De plus nous avons l'estimation suivante :*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega')} + \inf_{K \in \mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^p(\Omega')} \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')} + \|g\|_{L^p(\Omega')} + \|\mathbf{u}_*\|_{\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')} \right).$$

En particulier cette proposition montre que si  $p \geq 2$ , l'opérateur  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} : \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega') \perp \mathbb{R})$$

est un isomorphisme. Maintenant par dualité, nous en déduisons que si  $1 < p \leq 2$ , l'opérateur  $\mathbf{T}^*$

$$\mathbf{T}^* : \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega') \perp \mathbb{R})$$

est un isomorphisme. Ce résultat nous permet d'établir l'équivalent de la proposition 5.4 pour le cas  $1 < p < 2$ .

**Proposition 5.6** *Soit  $\Omega'$  un ouvert borné à frontière  $\mathcal{C}^{1,1}$ . On suppose  $1 < p < 2$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')$ ,  $g = 0$  et  $\mathbf{u}_* = \mathbf{0}$ . Alors, le problème (5.1) possède une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$  satisfaisant la relation*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega')} + \inf_{K \in \mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^p(\Omega')} \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')}.$$

**Preuve :** On définit  $\Omega''$  le symétrique de  $\Omega$  par rapport à l'origine des coordonnées. Maintenant, si  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')$  alors pour tout  $\ell = 1, 2, 3$ , on peut écrire  $f_\ell = \operatorname{div} \mathbf{F}_\ell$

## 5.2. Résultats préliminaires

---

avec  $\mathbf{F}_\ell \in \mathbf{L}^p(\Omega')$ . Pour tout  $\ell = 1, 2, 3$  et pour presque tout  $\mathbf{x} \in \Omega'$ , on pose  $\mathbf{H}_\ell(-\mathbf{x}) = -\mathbf{F}_\ell(\mathbf{x})$  et  $h_\ell = \operatorname{div} \mathbf{H}_\ell$ . Nous avons alors  $\mathbf{h} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega'')$ . De plus, pour tout  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega')$ ,  $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega'')$  telles que  $\forall \mathbf{x} \in \Omega'$ ,  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}(-\mathbf{x})$ , nous avons  $\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega') \times \mathcal{D}(\Omega')} = \langle \mathbf{h}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega'') \times \mathcal{D}(\Omega'')}$ . D'après l'isomorphisme de l'opérateur  $\mathbf{T}^*$ , ci-dessus, il existe un unique couple  $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega'') \times (L^p(\Omega'')/\mathbb{R})$  solution de

$$-\Delta \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + \nabla q = \mathbf{h}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega'', \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega''.$$

Il suffit ensuite de poser, pour presque tout  $\mathbf{x} \in \Omega'$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(-\mathbf{x})$  et  $\pi(\mathbf{x}) = -q(-\mathbf{x})$ . Le couple  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$  satisfait alors (5.1). ■

Nous pouvons donc établir le résultat suivant

**Proposition 5.7** *Soit  $\Omega'$  un ouvert borné à frontière  $\mathcal{C}^{1,1}$ . On suppose de plus que  $1 < p < \infty$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')$ ,  $g \in L^p(\Omega')$  et  $\mathbf{u}_* \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')$  satisfaisant la condition de compatibilité (5.5). Alors, le problème (5.1) possède une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$ . De plus nous avons l'estimation*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega')} + \inf_{K \in \mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^p(\Omega')} \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{-1,p}(\Omega')} + \|g\|_{L^p(\Omega')} + \|\mathbf{u}_*\|_{\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')} \right).$$

**Remarque 5.8** Il est bien sûr immédiat que tous les arguments utilisés pour obtenir le résultat général de la proposition 5.7 peuvent être utilisés pour le modèle scalaire. Cette fois-ci, ce sont les résultats sur le problème de Dirichlet pour le laplacien (voir par exemple [33] ou [39]) qu'on utilise. Plus précisément on peut montrer que si  $1 < p < \infty$ ,  $f \in W^{-1,p}(\Omega')$  et  $u_* \in W^{1/p',p}(\partial\Omega')$ , le problème

$$-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \text{ dans } \Omega', \quad u = u_* \text{ sur } \partial\Omega'$$

possède une unique solution  $u \in W^{1,p}(\Omega')$  satisfaisant l'estimation

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega')} \leq C \left( \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega')} + \|u_*\|_{W^{1/p',p}(\partial\Omega')} \right).$$

## 5.3 Le cas hilbertien

Nous commençons tout d'abord par montrer l'existence de solutions faibles du problème (5.1). Cette notion de solutions faibles a déjà été introduite par Finn [25] et reprise ensuite par Galdi [27].

**Définition 5.9** Un champ de vecteurs  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  est appelé solution faible du problème d'Oseen (5.1) si

1.  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ , tel que  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\partial\Omega$  ;
2.  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega$  ;
3. Pour tout  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V}(\Omega) = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega), \text{div } \boldsymbol{\varphi} = 0\}$  :

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{u} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_1} d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}. \quad (5.6)$$

**Proposition 5.10** Soit  $\Omega$  un domaine extérieur de frontière lipschitzienne. On suppose  $g = 0$ ,  $\mathbf{u}_* = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ . Alors (5.1) possède une solution faible  $\mathbf{u} \in \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$ . De plus, nous avons

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)}.$$

**Preuve :** On considère une suite croissante de réels  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , avec  $R_0 > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = +\infty$ . Comme  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ , alors sa restriction à  $\Omega_{R_n}$  appartient à  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{R_n})$ . De plus, nous avons

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{R_n})} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \quad (5.7)$$

Nous approchons le problème (5.1) par une suite de problèmes posés dans les domaines bornés  $\Omega_{R_n}$  : Chercher  $\mathbf{u}_n \in \mathbf{V}(\Omega_{R_n})$  telle que

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V}(\Omega_{R_n}), \int_{\Omega_{R_n}} \nabla \mathbf{u}_n \nabla \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{R_n}} \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial x_1} \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{R_n}) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega_{R_n})}. \quad (5.8)$$

### 5.3. Le cas hilbertien

---

Le théorème de Lax-Milgram nous fournit l'existence d'un unique vecteur  $\mathbf{u}_n$  appartenant à  $\mathbf{V}(\Omega_{R_n})$  solution de (5.8) et vérifiant

$$\|\nabla \mathbf{u}_n\|_{L^2(\Omega_{R_n})} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{R_n})}. \quad (5.9)$$

Soit maintenant  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  l'extension par zéro de  $\mathbf{u}_n$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_{R_n}}$ . Alors  $\tilde{\mathbf{u}}_n \in \mathbf{V}(\Omega)$  et de (5.7), (5.9), on obtient

$$\|\nabla \tilde{\mathbf{u}}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \quad (5.10)$$

La suite  $(\tilde{\mathbf{u}}_n)$  est donc bornée dans  $\mathbf{V}(\Omega)$  qui est un espace de Hilbert, donc réflexif. Nous pouvons donc en extraire une sous-suite, que nous noterons encore  $\tilde{\mathbf{u}}_n$ , qui converge faiblement vers un élément  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbf{V}(\Omega)$ . De plus, nous avons

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \quad (5.11)$$

Il nous reste maintenant à montrer que  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\Omega)$  est bien solution faible de (5.1), autrement dit, que  $\mathbf{u}$  satisfait (5.6). Soit un entier  $N > 0$  et  $\varphi \in \mathcal{V}(\Omega)$  telle que son support soit inclus dans  $\Omega_{R_N}$ . De (5.8), pour tout  $n \geq N$ , nous avons

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathbf{u}}_n \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_n}{\partial x_1} \varphi \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)}. \quad (5.12)$$

Puisque  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  tend faiblement vers  $\mathbf{u}$  dans  $\mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$ , nous pouvons passer à la limite dans (5.12). Ainsi  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\Omega)$  satisfait

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \varphi \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

**Remarque 5.11** A partir de la proposition 5.10 et par un théorème de G. de Rham [19], nous en déduisons l'existence d'une pression  $\pi \in \mathcal{D}'(\Omega)$  telle que  $(\mathbf{u}, \pi)$  soit solution de (5.1) au sens des distributions. De plus, comme  $\Omega$  est connexe,  $\pi$  est unique à une constante additive près. Maintenant, comme  $\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^{-1}(\Omega)$ , grâce à un résultat de Tartar [60], nous pouvons montrer que, finalement,  $\pi \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . Ainsi, le couple  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega) \times L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  est une solution de (5.1) au sens des distributions.

### 5.3. Le cas hilbertien

Notre prochain objectif est de montrer l'équivalent des estimations du théorème 3.34. Autrement dit, nous allons montrer que  $(\mathbf{u}, \pi)$  appartient à  $(\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ . Nous allons, tout d'abord, caractériser l'espace  $\mathcal{N}_0^2(\Omega)$ .

**Proposition 5.12** *Soit  $\Omega$  un ouvert extérieur de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On a la caractérisation*

$$\mathcal{N}_0^2(\Omega) = \{(\mathbf{0}, 0)\}.$$

**Preuve :** Soit  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathcal{N}_0^2(\Omega)$ . Remarquons que d'après le théorème VII.1.1 page 353 de [27], le couple  $(\mathbf{u}, \pi)$  appartient à  $\mathbf{H}_{\text{loc}}^2(\overline{\Omega}) \times H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega})$ . Par conséquent la trace normale  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}$  existe et appartient à  $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$  et la restriction de  $\pi$  sur  $\partial\Omega$  est un élément de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Maintenant, pour tout  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$ , nous avons

$$\langle -\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)} + \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \mathbf{v} \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)} + \langle \nabla \pi, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)} = 0.$$

C'est-à-dire, pour tout  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$ , nous avons

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \mathbf{v} \right\rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)} - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Comme  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $\mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$  (voir la proposition 2.8), la relation précédente est donc vraie pour tout  $\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$ . En prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ , nous obtenons

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} = 0.$$

Comme  $\mathbf{u}$  appartient à  $\mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$ , nous en déduisons que  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . De plus, comme  $\Omega$  est connexe, cela entraîne que  $\nabla \pi = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire  $\pi$  est une constante de  $L^2(\Omega)$ , donc  $\pi = 0$ , ce qui termine la preuve. ■

**Théorème 5.13** *Soit  $\Omega$  un ouvert extérieur de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose  $g = 0$ ,  $\mathbf{u}_* = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ . Alors, le problème (5.1) admet une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ . De plus nous avons*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)} + \|\pi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \quad (5.13)$$

### 5.3. Le cas hilbertien

---

**Preuve :** Il suffit de montrer que l'opérateur  $\mathbf{T}$  :

$$\mathbf{T} : (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \{0\}$$

est un isomorphisme. L'opérateur  $\mathbf{T}$  est clairement linéaire et continu. D'après la proposition 5.12, il est aussi injectif. Montrons sa surjection. Soit  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ , alors d'après la remarque 5.11, le problème (5.1) possède une solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega) \times L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . On étend  $\mathbf{u}$  et  $\pi$  par zéro dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  et on note encore  $\mathbf{u}$  et  $\pi$  les extensions. Nous avons alors  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \times L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ . Montrons à présent que  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ . Nous allons, pour cela, utiliser le théorème 3.34 et il nous faut donc nous ramener à tout l'espace. On suppose que  $R$  est un réel suffisamment grand pour que  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  soit inclus dans  $B_R$  et nous introduisons la partition de l'unité (5.4). Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}\varphi_1 + \mathbf{u}\varphi_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \pi &= \pi\varphi_1 + \pi\varphi_2 = \pi_1 + \pi_2. \end{aligned}$$

Le support de  $\varphi_2$  étant inclus dans  $\Omega_{R+1}$  et puisque  $\mathbf{u}_2$  est étendu par zéro dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ ,  $\mathbf{u}_2$  appartient à  $\mathbf{H}_0^1(\Omega_{R+1})$ . Par les injections de Sobolev,  $\mathbf{u}_2$  appartient à  $\mathbf{L}^6(\Omega_{R+1})$  et nous pouvons conclure que

$$\mathbf{u}_2 \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega)) \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega).$$

De même, comme  $\pi \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ , nous avons immédiatement

$$\pi_2 \in L^2(\Omega).$$

A présent, un calcul immédiat nous montre qu'au sens des distributions, le couple  $(\mathbf{u}_1, \pi_1)$  vérifie

$$-\Delta \mathbf{u}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1} + \nabla \pi_1 = \tilde{\mathbf{f}}, \quad \text{div } \mathbf{u}_1 = \tilde{g} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (5.14)$$

où

$$\tilde{\mathbf{f}} = \varphi_1 \mathbf{f} + \mathbf{u} \Delta \varphi_2 + 2\nabla \mathbf{u} \nabla \varphi_2 - \mathbf{u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \pi \nabla \varphi_2$$

### 5.3. Le cas hilbertien

---

et

$$\tilde{g} = -\mathbf{u}_2 \nabla \varphi_2.$$

Puisque  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$  et  $0 \leq \varphi_1 \leq 1$ , nous en déduisons que  $\varphi_1 \mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ . Par ailleurs, puisque  $\mathbf{u} \in \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $\pi \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  et que le support de  $\varphi_2$  est inclus dans  $B_{R+1}$ , les termes  $\mathbf{u} \Delta \varphi_2$ ,  $\nabla \mathbf{u} \nabla \varphi_2$ ,  $\mathbf{u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}$  et  $\pi \nabla \varphi_2$  appartiennent à  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ . Nous pouvons donc conclure que  $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ . Maintenant, par un raisonnement similaire, nous avons  $\tilde{g} = -\mathbf{u}_2 \nabla \varphi_2 \in L^2(\Omega_{R+1})$ . Il est ensuite facile de voir que  $\tilde{g} \in L^2(\Omega_{R+1}) \cap H^{-1}(\Omega_{R+1})$  et donc  $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ . Cela implique que  $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1} \in W_0^{-2,2}(\mathbb{R}^3)$  et

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}, 1 \right\rangle_{W_0^{-2,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,2}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Le théorème 3.34 nous donne alors l'existence d'un unique couple  $(\mathbf{v}, \eta) \in (\mathbf{L}^4(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^6(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)) \times L^2(\mathbb{R}^3)$  solution de

$$-\Delta \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + \nabla \eta = \tilde{\mathbf{f}}, \quad \text{div } \mathbf{v} = \tilde{g}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

En posant à présent  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  et  $\tau = \eta - \pi_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ , il vient

$$-\Delta \mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} + \nabla \tau = 0, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (5.15)$$

En prenant la divergence de la première équation de (5.15), nous obtenons  $\Delta \tau = 0$ . Cela entraîne que  $-\Delta \mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1}$  est harmonique. Par un raisonnement analogue à la preuve de la proposition 3.30, nous obtenons que  $\mathbf{w}$  est un champ de vecteurs dont chaque composante est un polynôme. Mais l'espace  $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$  ne contenant pas de polynômes nous en déduisons que  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ . D'où,  $\mathbf{u}_1$  appartient à  $\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$ . De plus nous en déduisons aussi  $\nabla \tau = \mathbf{0}$ . Ainsi  $\tau = c \in \mathbb{R}$  et  $\pi_1 = \eta + c$ . Nous pouvons donc prendre comme représentant  $\pi = \pi_2 + \eta \in L^2(\Omega)$ . Nous avons donc montrer que la solution  $(\mathbf{u}, \pi)$  appartient à  $(\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ . Par ailleurs, de la première équation de (5.1) et par différence nous en déduisons que  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ . D'où,  $(\mathbf{u}, \pi)$  appartient à  $(\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$  vérifie  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \pi) = (\mathbf{f}, 0)$ . ■

### 5.3. Le cas hilbertien

---

**Remarque 5.14** Pour la fin de la preuve du théorème 5.13, nous ne pouvons pas utiliser directement la proposition 3.30 car  $\tau$  appartient à  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  et non à  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ .

Pour étudier le problème non homogène d'Oseen, nous commençons par montrer l'existence d'un relèvement du terme de bord. Ce résultat s'inspire de celui obtenu par Finn [25]. Le lecteur pourra aussi consulter Galdi [27].

**Lemme 5.15** *Soit  $\Omega$  un ouvert extérieur de frontière lipschitzienne. Soit  $\mathbf{u}_* \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ . Alors, il existe un vecteur  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  telle que*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{u}_* \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.16}$$

et

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}_*\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)}. \tag{5.17}$$

**Preuve :** Pour tout  $i = 1, 2, 3$ , nous posons

$$\begin{aligned} \sigma_i(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_* \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{x_i}{|\mathbf{x}|^3} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_* \cdot \mathbf{n} \, ds, \end{aligned}$$

Où nous rappelons que  $\mathcal{E}$  est la solution fondamentale du Laplacien. Remarquons que nous avons  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$ ,  $\Delta \boldsymbol{\sigma} = 0$  dans  $\Omega$  et

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_* \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

De plus, comme  $\boldsymbol{\sigma} = O(1/r^2)$ , il est facile de voir que  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Par conséquent, la restriction de  $\boldsymbol{\sigma}$  sur la frontière  $\partial\Omega$  appartient à  $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ . Posons à présent  $\mathbf{v}_* = \mathbf{u}_* - \boldsymbol{\sigma}$ . Nous avons alors

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n} \, ds = 0.$$

### 5.3. Le cas hilbertien

---

D'après le lemme 3.1 de [31], il existe un vecteur  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  à support compact satisfaisant

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_* \text{ sur } \partial\Omega \quad (5.19)$$

et

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|\mathbf{v}_*\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}_*\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)}$$

Soit maintenant  $\mathbf{w} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\sigma}$ , alors  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  vérifie (5.16) et (5.17). ■

**Remarque 5.16** Par ce relèvement qui appartient à  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , nous pouvons facilement montrer que si  $\Omega$  est un ouvert extérieur de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ ,  $\mathbf{u}_* \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$  et  $g = 0$ , alors le problème (5.1) possède une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ . De plus nous avons

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)} + \|\pi\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)} + \|\mathbf{u}_*\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème d'Oseen (5.1) dans le cas hilbertien.

**Théorème 5.17** *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert extérieur de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soient  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ ,  $g \in Z_2(\Omega)$  et  $\mathbf{u}_* \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ . Alors le problème (5.1) possède une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ . De plus nous avons l'estimation*

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right\|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)} + \|\pi\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)} + \|g\|_{Z_2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_*\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

**Preuve :** Soient  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ ,  $g \in Z_2(\Omega)$  et  $\mathbf{u}_* \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ . Nous allons tout d'abord résoudre le problème dans  $\mathbb{R}^3$  et, pour cela, nous allons étendre les données. Grâce au théorème 2.1 2) et du théorème du graphe fermé, pour tout  $\ell = 1, 2, 3$ , nous pouvons écrire  $f_\ell = \operatorname{div} \mathbf{F}_\ell$ , où  $\mathbf{F}_\ell \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Nous étendons  $\mathbf{F}_\ell$  par zéro dans

## 5.4. Le cas général

---

$\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  et l'extension  $\tilde{\mathbf{F}}_\ell$  appartient à  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ . Nous obtenons ainsi une extension  $\tilde{\mathbf{f}}$  de  $\mathbf{f}$  qui appartient à  $\mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ . Par définition de l'espace  $Z_2(\Omega)$ , il existe une extension  $\tilde{g} \in \tilde{L}^2(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}, 1 \right\rangle_{W_0^{-2,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,2}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Le théorème 3.34 nous donne alors l'existence d'un unique couple  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\pi}) \in (\mathbf{L}^4(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^6(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ , solution de

$$-\Delta \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_1} + \nabla \tilde{\pi} = \tilde{\mathbf{f}}, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{g} \text{ dans } \mathbb{R}^3. \quad (5.22)$$

Nous avons alors  $\tilde{\mathbf{u}}|_{\partial\Omega} - \mathbf{u}_* \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$  et d'après la remarque 5.16, il existe un unique couple  $(\mathbf{v}, \eta) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$  solution de

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + \nabla \eta &= \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{v} &= \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_* \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

En posant à présent  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v}$  et  $\pi = \tilde{\pi} - \eta$ , le couple  $(\mathbf{u}, \pi)$  appartient à  $(\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$  et est solution(5.1). L'estimation (5.21) est une conséquence de théorème 3.34 et de (5.20). ■

## 5.4 Le cas général

Nous allons étendre le résultat du théorème 5.17 au cas  $p \neq 2$ . Nous commençons pour cela par le cas homogène et lorsque les données ont un support compact.

**Lemme 5.18** *Soient  $\Omega$  un ouvert extérieur de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $p > 2$  et  $r_2$  le réel donné dans la définition 3.7. On suppose  $\mathbf{u}_* = \mathbf{0}$ . Soient  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega)$  à support compact et  $g \in Z_p(\Omega)$  à support compact. Alors le problème (5.1) admet une unique solution*

$$(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \overset{\circ}{\widetilde{\mathbf{W}}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega). \quad (5.23)$$

## 5.4. Le cas général

---

De plus,

(i) Si  $2 < p < 4$ , alors  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^{r_2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega)) \times L^p(\Omega)$ .

(ii) Si  $p \geq 4$ , alors  $(\mathbf{u}, \pi) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ .

**Preuve :** Puisque  $p > 2$  et  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega)$  a un support compact, nous en déduisons que  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ . De même, puisque  $g \in Z_p(\Omega)$  a un support compact, alors il existe une extension  $\tilde{g} \in \tilde{L}^p(\mathbb{R}^3)$  de  $g$  qui soit à support compact. Nous avons alors  $\tilde{g} \in \tilde{L}^2(\mathbb{R}^3)$  et  $g \in Z_2(\Omega)$ . Le théorème 5.17 nous donne alors l'existence d'un unique couple  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ , solution de

$$-\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = g \quad \text{dans } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (5.24)$$

Il nous reste à montrer (i) et (ii) en utilisant le théorème 3.34. Nous étendons pour cela  $\mathbf{u}$  et  $\pi$  par zéro en dehors de  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  et nous continuons à noter  $\mathbf{u}$  et  $\pi$  les extensions. Nous définissons aussi les deux distribution suivantes :

$$\tilde{\mathbf{f}} = -\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi \quad \text{et} \quad \tilde{g} = \operatorname{div} \mathbf{u} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Le couple  $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{g})$  appartient à  $\mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times \tilde{L}^2(\mathbb{R}^3)$ . Soit maintenant un réel  $R > 0$  suffisamment grand pour que les supports de  $\tilde{\mathbf{f}}$  et  $\tilde{g}$  ainsi que  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  soient inclus dans  $B_R$ . Nous introduisons la partition de l'unité (5.4) et nous pouvons donc écrire

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}\varphi_1 + \mathbf{u}\varphi_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad \text{et} \quad \pi = \pi\varphi_1 + \pi\varphi_2 = \pi_1 + \pi_2.$$

Puisque les supports de  $\tilde{\mathbf{f}}$  et  $\tilde{g}$  sont inclus dans  $B_R$ , nous pouvons observer que  $\varphi_1 \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$  et  $\varphi_1 \tilde{g} = 0$ . Ainsi, un simple calcul au sens des distributions montre alors que le couple  $(\mathbf{u}_1, \pi_1)$  vérifient

$$-\Delta \mathbf{u}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1} + \nabla \pi_1 = \mathbf{F}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = G \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad (5.25)$$

où  $\mathbf{F} = \mathbf{u}\Delta\varphi_2 + 2\nabla\mathbf{u}\nabla\varphi_2 - \mathbf{u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} - \pi\nabla\varphi_2$  et  $G = -\mathbf{u}\nabla\varphi_2$ . Il est facile de vérifier que  $(\mathbf{F}, G) \in \mathbf{L}^2(B_{R+1}) \times H^1(B_{R+1})$ . Par les injections de Sobolev, nous en déduisons que  $(\mathbf{F}, G) \in \mathbf{W}^{-1,q}(B_{R+1}) \times L^q(B_{R+1})$  pour tout  $q \in ]1, 6]$ . Nous allons supposer,

## 5.4. Le cas général

---

dans un premier temps,  $p \in ]2, 6]$ .

Si  $2 < p \leq 6$ .

Nous avons alors

$$(\mathbf{F}, G) \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)).$$

Cela entraîne que  $\frac{\partial G}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)$  et satisfait

$$\left\langle \frac{\partial G}{\partial x_1}, 1 \right\rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Nous allons distinguer deux cas.

- Si  $2 < p < 4$ , d'après le théorème 3.34, il existe un unique couple  $(\mathbf{v}, \eta) \in (\mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ , solution de

$$-\Delta \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + \nabla \eta = \mathbf{F}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = G \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (5.26)$$

Par (5.25), (5.26) et grâce à la proposition 3.30, nous en déduisons que  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}$  et  $\pi_1 - \eta$  sont des polynômes. Mais comme  $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{L}^4(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^6(\mathbb{R}^3)$  et  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ , alors nécessairement  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ , et donc  $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Par un même raisonnement,  $\pi_1 = \eta \in L^p(\mathbb{R}^3)$ . Maintenant, comme  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus B_{R+1}$ , la restriction de  $\mathbf{u}$  sur  $\partial B_{R+1}$  est dans  $\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial B_{R+1})$  et le couple  $(\mathbf{u}, \pi)$  satisfait

$$-\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = g \quad \text{dans } B_{R+1}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \quad \text{sur } \partial B_{R+1}.$$

La proposition 5.7 montre que  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{1,p}(B_{R+1}) \times L^p(B_{R+1})$ . Par les injections de Sobolev, si  $1 < p < 3$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^q(B_{R+1})$  pour tout  $1 \leq q < \frac{3p}{3-p}$  et, si  $3 \leq p < 4$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^q(B_{R+1})$  pour tout  $1 \leq q < \infty$ . Nous en déduisons donc que  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{r_2}(B_{R+1})$ . Par conséquent,  $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{L}^{r_2}(B_{R+1})$ ,  $\nabla \mathbf{u}_2 \in \mathbf{L}^p(B_{R+1})$ . De plus nous avons aussi  $\pi_2 \in L^p(B_{R+1})$ . Ce qui implique que  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{L}^{r_2}(\Omega) \times L^p(\Omega)$  et  $\nabla \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ . Comme  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} = \mathbf{f} + \Delta \mathbf{u} - \nabla \pi$ , nous en déduisons que  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega)$ .

- Si  $4 \leq p \leq 6$ , alors, en utilisant le théorème 3.34, il existe un couple  $(\mathbf{v}, \eta) \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$  solution de (5.26). Nous en déduisons que chaque composante de  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}$  est un polynôme. Mais comme  $\nabla \mathbf{u}_1 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$  et  $\nabla \mathbf{v} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ , alors nécessairement,  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v} = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ . Par ailleurs les constantes appartiennent à

## 5.4. Le cas général

---

$\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  lorsque  $p \geq 4$ . Cela implique donc que  $\mathbf{u}_1 \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . En procédant de la manière que pour le cas  $2 < p < 4$ , nous pouvons montrer que  $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{W}^{1,p}(B_{R+1})$  et, par conséquent,  $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ .

Si  $p > 6$ .

Alors  $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{W}_0^{-1,6}(\Omega) \times Z_6(\Omega)$  et le cas précédent nous montre qu'il existe un unique couple  $(\mathbf{u}, \pi) \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,6}(\Omega) \times L^6(\Omega)$  solution de (5.1). Ensuite, en procédant comme précédemment, nous avons  $(\mathbf{F}, G) \in \mathbf{L}^6(B_{R+1}) \times W^{1,6}(B_{R+1})$ . Grâce aux injections de Sobolev,  $(\mathbf{F}, G)$  appartient à  $\mathbf{W}^{-1,q}(B_{R+1}) \times L^q(B_{R+1}) \cap W^{-1,q}(B_{R+1})$  pour tout  $1 \leq q \leq \infty$ . Ainsi pour tout  $p > 6$ , nous avons

$$(\mathbf{F}, G) \in \mathbf{W}^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times (L^p(B_{R+1}) \cap W^{-1,p}(\mathbb{R}^3)).$$

Nous terminons la preuve de façon analogue au cas  $2 < p \leq 6$ . ■

**Corollaire 5.19** *On suppose que  $\Omega$  est un ouvert extérieur de  $\mathbb{R}^3$  à frontière  $\mathcal{C}^2$ ,  $p > 2$  et  $r_2$  le réel donné dans la définition 3.7. Soit  $\mathbf{u}_* \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ . Alors le problème*

$$-\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_* \text{ sur } \partial\Omega \quad (5.27)$$

admet une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ . De plus

(i) Si  $2 < p < 4$ , alors  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^{r_2}(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega)) \times L^p(\Omega)$ .

(ii) Si  $p \geq 4$ , alors  $(\mathbf{u}, \pi) \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^p(\Omega)$ .

**Preuve :** Soit un réel  $R > 0$  suffisamment grand tel que  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  soit inclus dans  $B_R$ . D'après la remarque 5.8, il existe un unique vecteur  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega_R)$  tel que

$$-\Delta \mathbf{u}_0 + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x_1} = 0 \text{ dans } \Omega_R, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_* \text{ sur } \partial\Omega, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \text{ sur } \partial B_R.$$

Soit maintenant  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  l'extension par zéro de  $\mathbf{u}_0$  en dehors de  $\overline{B}_R$  alors  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  appartient à  $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ . Comme  $p > 2$ , alors  $\tilde{\mathbf{u}}_0 \in \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$  et, par les injections de Sobolev,  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  appartient à  $\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)$ . De plus, si  $2 < p < 4$ , alors  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  appartient à

## 5.4. Le cas général

---

$L^{r_2}(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega)$  et si  $4 \leq p < \infty$ , alors  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  appartient à  $\widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega)$ . Par ailleurs,

$$-\Delta \tilde{\mathbf{u}}_0 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_0}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega) \text{ et a un support compact dans } \Omega.$$

De la même manière, nous avons

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_0 \in L^p(\Omega) \cap W_0^{-1,p}(\Omega) \text{ et a un support compact dans } \Omega.$$

Alors le lemme précédent nous montre l'existence d'un unique couple  $(\mathbf{v}, \pi) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$  solution de

$$-\Delta \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + \nabla \pi = -\Delta \tilde{\mathbf{u}}_0 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_0}{\partial x_1}, \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_0 \text{ dans } \Omega, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega.$$

De plus, si  $2 < p < 4$ , alors  $(\mathbf{v}, \pi)$  appartient à  $\mathbf{L}^{r_2}(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$  et si  $p \geq 4$ , alors  $(\mathbf{v}, \pi)$  appartient à  $\widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ . Il suffit alors de poser  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{v}$ , et le couple  $(\mathbf{u}, \pi)$  est l'unique solution de (5.27) recherchée. ■

Nous allons maintenant caractériser le noyau  $\mathcal{N}_0^p(\Omega)$ . Nous avons besoin pour cela d'un résultat préliminaire.

**Lemme 5.20** Soit  $u \in \overset{\circ}{\widetilde{W}}_0^{1,p}(\Omega)$ . On pose

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Alors  $\tilde{u} \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$  et

$$\|\tilde{u}\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|u\|_{\overset{\circ}{\widetilde{W}}_0^{1,p}(\Omega)}.$$

**Preuve :** Remarquons tout d'abord que comme  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\Omega) \cap W_0^{-1,p}(\Omega)$ , on peut écrire :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle_{W_0^{-1,p}(\Omega), \overset{\circ}{W}_0^{1,p'}(\Omega)} = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (5.28)$$

D'autre part, il est facile de voir que  $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Il reste donc à montrer que  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Soit  $R > 0$  un réel fixé, en introduisant la partition de l'unité

## 5.4. Le cas général

---

(5.4), on peut écrire

$$\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 = \tilde{u}\varphi_1 + \tilde{u}\varphi_2.$$

Comme  $\tilde{u}_2 \in L^p(B_{R+1})$ , on a facilement  $\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Par ailleurs, pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1}, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} &= - \int_{B'_R} \tilde{u}\varphi_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} d\mathbf{x} \\ &= - \int_{B'_R} \tilde{u} \frac{\partial(\varphi_1 \psi)}{\partial x_1} d\mathbf{x} + \int_{B'_R \cap B_{R+1}} \tilde{u}\psi \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \varphi_1 \psi d\mathbf{x} + \int_{B'_R \cap B_{R+1}} u\psi \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Comme  $\varphi_1 \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , en utilisant (5.28), on aboutit à

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1}, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, \varphi_1 \psi \right\rangle_{W_0^{-1,p}(B'_R) \times \dot{W}_0^{1,p'}(B'_R)} - \int_{B'_R \cap B_{R+1}} \tilde{u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \psi d\mathbf{x}.$$

on obtient donc

$$\left| \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1}, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} \right| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\Omega)} \|\nabla(\varphi_1 \psi)\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(B'_R \cap B_{R+1})} \|\psi\|_{L^{p'}(B'_R \cap B_{R+1})}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \|\nabla(\varphi_1 \psi)\|_{L^{p'}(\Omega)} &\leq \|\nabla(\varphi_1 \psi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|\nabla \psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} + C\|\psi\|_{L^{p'}(B'_R \cap B_{R+1})} \\ &\leq C\|\psi\|_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left| \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1}, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} \right| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\Omega)} \|\psi\|_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)},$$

ce qui achève la preuve. ■

**Proposition 5.21** Soient  $\Omega$  un ouvert extérieur de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $r_2$  le réel

#### 5.4. Le cas général

---

donné dans la définition 3.7.

(i) Si  $2 < p < 4$ , alors  $\mathcal{N}_0^p(\Omega) = \{(\mathbf{0}, 0)\}$ .

(ii) Si  $p \geq 4$ , alors  $\mathcal{N}_0^p(\Omega) = \{(\mathbf{v}(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda}, \eta(\boldsymbol{\lambda})), \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3\}$  où le couple  $(\mathbf{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda}))$  est l'unique solution de

$$-\Delta \mathbf{v}(\boldsymbol{\lambda}) + \frac{\partial \mathbf{v}(\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1} + \nabla \eta(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \mathbf{v}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda} \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (5.29)$$

donnée par le corollaire 5.19.

**Preuve :** Notons tout d'abord que le couple  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathcal{N}_0^p(\Omega)$  satisfait la formule de Green : pour tout  $(\boldsymbol{\psi}, \xi) \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ,

$$\int_{\Omega} \left\{ \left( -\Delta \boldsymbol{\psi} - \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_1} + \nabla \xi \right) \mathbf{u} - \pi \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \right\} dx = \langle (\nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{e}_1^t - \pi I) \cdot \mathbf{n}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\partial\Omega}, \quad (5.30)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$  représente le crochet de dualité entre  $\mathbf{W}^{-1/p,p}(\partial\Omega)$  et  $\mathbf{W}^{1/p,p}(\partial\Omega)$ . On étend à présent  $\mathbf{u}$  et  $\pi$  par zéro en dehors de  $\Omega$ . En notant toujours  $\mathbf{u}$  et  $\pi$  ces extensions, nous obtenons alors (voir le lemme 5.20)  $(\mathbf{u}, \pi) \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ . Nous avons donc

$$-\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Soit  $\mathbf{h}$  la distribution définie par  $-\Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi$ . Par la relation (5.30), pour tout  $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , on a

$$\langle \mathbf{h}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = \langle (\nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{e}_1^t - \pi I) \cdot \mathbf{n}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\partial\Omega}.$$

Ainsi,  $\mathbf{h}$  a son support compact contenu dans  $\partial\Omega$ . La distribution  $\mathbf{h}$  appartient donc à  $\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$  et la proposition 3.39 nous donne alors l'existence d'un unique couple  $(\mathbf{w}, \eta) \in (\mathbf{L}^4(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^6(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)) \times L^2(\mathbb{R}^3)$  solution de

$$-\Delta \mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} + \nabla \eta = \mathbf{h}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

De plus

(i) Si  $2 < p < 4$ , alors  $(\mathbf{w}, \eta) \in (\mathbf{L}^{r^2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ . Nous en déduisons

## 5.4. Le cas général

---

que le couple  $(\mathbf{w} - \mathbf{u}, \pi - \eta)$  est un polynôme de  $\mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ , donc  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  sur  $\partial\Omega$  et  $\pi = \eta$ . Par ailleurs, la restriction de  $(\mathbf{w}, \eta)$  sur  $\Omega$  satisfait

$$-\Delta \mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} + \nabla \eta = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Le lemme 5.18 nous permet de conclure que  $(\mathbf{w}, \eta) = (\mathbf{0}, 0)$  et, par conséquent  $(\mathbf{u}, \pi) = (\mathbf{0}, 0)$ .

(ii) Si  $p \geq 4$ , alors  $(\mathbf{w}, \eta) \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ . En procédant comme dans le cas (i), on en déduit que chaque composante de  $\mathbf{w} - \mathbf{u}$  est un polynôme et que  $\pi = \eta$ . Mais comme  $\nabla \mathbf{u} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  et  $\nabla \mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^3)$ , nous en concluons que nécessairement  $\mathbf{w} - \mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3$ . Ainsi, le couple  $(\mathbf{w}, \eta)$  est l'unique solution de (5.29). ■

Nous sommes maintenant en mesure d'établir un résultat d'existence pour le problème extérieur d'Oseen dans le cas général.

**Théorème 5.22** *Soient  $\Omega$  un ouvert extérieur de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $r_2$  le réel donné dans la définition 3.7. Soient  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega)$ ,  $g \in Z_p(\Omega)$  et  $\mathbf{u}_* \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ .*

(i) *Si  $2 < p < 4$ , alors le problème (5.1) admet une unique solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \mathbf{L}^{r_2}(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ . De plus nous avons l'estimation*

$$\|\mathbf{u}\|_{L^{r_2}(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{\widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega)} + \|\pi\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega)} + \|g\|_{Z_p(\Omega)} + \|\mathbf{u}_*\|_{\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)} \right). \quad (5.31)$$

(ii) *Si  $p \geq 4$ , alors le problème (5.1) admet une solution  $(\mathbf{u}, \pi) \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ , unique à un élément de  $\mathcal{N}_0^p(\Omega)$  près. De plus, nous avons*

$$\begin{aligned} & \inf_{(\mathbf{v}, \eta) \in \mathcal{N}_0^p(\Omega)} \left( \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_{\widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega)} + \|\pi + \eta\|_{L^p(\Omega)} \right) \\ & \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega)} + \|g\|_{Z_p(\Omega)} + \|\mathbf{u}_*\|_{\mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

**Preuve :** 1) On suppose d'abord  $\mathbf{u}_* = \mathbf{0}$ . Alors, par les mêmes méthodes que précédemment, nous pouvons étendre  $\mathbf{f}$  en dehors de  $\Omega$  et l'extension  $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ . Par ailleurs, par définition de l'espace  $Z_p(\Omega)$ , il existe une extension  $\tilde{g} \in L^p(\mathbb{R}^3)$  de

## 5.4. Le cas général

---

$g$  telle que  $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)$  satisfaisant

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p']}, \quad \left\langle \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}, \lambda \right\rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Nous séparons la discussion en deux cas :

(i) Si  $2 < p < 4$ , alors d'après le théorème 3.34, il existe un unique couple  $(\mathbf{w}, \eta) \in (\mathbf{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)) \times L^p(\mathbb{R}^3)$  solution de

$$-\Delta \mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} + \nabla \eta = \tilde{\mathbf{f}}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = \tilde{g} \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

Par conséquent, nous avons  $\mathbf{w}|_{\partial\Omega} \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ . Le corollaire 5.19 nous donne l'existence d'un unique couple  $(\mathbf{z}, \tau) \in (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times (L^2(\Omega))$  solution de

$$-\Delta \mathbf{z} + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} + \nabla \tau = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{z} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \mathbf{z} = -\mathbf{w} \text{ sur } \partial\Omega.$$

De plus  $(\mathbf{z}, \tau)$  est aussi un élément de  $(\mathbf{L}^{r_2}(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega)) \times L^p(\Omega)$ . On pose  $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$  et  $\pi = \eta + \tau$ , alors le couple  $(\mathbf{u}, \pi) \in (\mathbf{L}^{r_2}(\Omega) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega)) \times L^p(\Omega)$  est solution du problème (5.1).

(ii) Si  $p \geq 4$ , nous procédons de la même manière.

2) On suppose maintenant  $\mathbf{u}_* \neq \mathbf{0}$ . Soit un réel  $R > 0$  fixé tel que  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  soit inclus dans  $B_R$ . Grâce à la remarque 5.8, comme  $\mathbf{u}_* \in \mathbf{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$ , il existe un unique vecteur  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega_R)$  solution de

$$-\Delta \mathbf{u}_0 + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x_1} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_R, \quad \mathbf{u}_0 = -\mathbf{u}_* \text{ sur } \partial\Omega, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \text{ sur } \partial B_R.$$

Nous étendons  $\mathbf{u}_0$  par zéro dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_R$  et on continue à noter  $\mathbf{u}_0$  l'extension. Ainsi,  $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}_0 - \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x_1} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega)$  ce qui implique que  $(\mathbf{f}_0, g + \operatorname{div} \mathbf{u}_0) \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\Omega) \times Z_p(\Omega)$ . En utilisant 1) il existe un unique couple  $(\mathbf{w}, \pi) \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$  satisfaisant

$$-\Delta \mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \mathbf{f}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = g + \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \text{ dans } \Omega, \quad \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega.$$

#### 5.4. Le cas général

---

En posant  $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{u}_0 \in \widetilde{\mathbf{W}}_0^{1,p}(\Omega)$ , alors le couple  $(\mathbf{u}, \pi)$  est l'unique solution de (5.1). ■



# Références bibliographiques

- [1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.
- [2] F. Alliot and C. Amrouche. The Stokes problem in  $\mathbb{R}^n$ : an approach in weighted Sobolev spaces. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **9**(5):723–754, 1999.
- [3] F. Alliot and C. Amrouche. Weak solutions for the exterior Stokes problem in weighted Sobolev spaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, **23**(6):575–600, 2000.
- [4] C. Amrouche. Inégalités de Caldéron-Zygmund, potentiels et transformées de Riesz dans des espaces de Sobolev avec poids. (*submitted*).
- [5] C. Amrouche and V. Girault. Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension. *Czechoslovak Math. J.*, **44**(119)(1):109–140, 1994.
- [6] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Weighted Sobolev spaces for Laplace’s equation in  $\mathbb{R}^n$ . *J. Math. Pures Appl. (9)*, **73**(6):579–606, 1994.
- [7] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Dirichlet and Neumann exterior problems for the  $n$ -dimensional Laplace operator: an approach in weighted Sobolev spaces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, **76**(1):55–81, 1997.
- [8] C. Amrouche and U. Razafison. Anisotropically weighted Hardy inequalities; Application to the Oseen problem. (*submitted*).
- [9] C. Amrouche and U. Razafison. The stationary Oseen equations in  $\mathbb{R}^3$ . An approach in weighted Sobolev spaces. (*submitted*).

- [10] C. Amrouche and U. Razafison. Weighted Sobolev spaces for a scalar model of the stationary Oseen equations in  $\mathbb{R}^3$ . (*submitted*).
- [11] C. Amrouche and U. Razafison. Espaces de Sobolev avec poids et équation scalaire d'Oseen dans  $\mathbb{R}^n$ . *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **337**(12):761–766, 2003.
- [12] C. Amrouche and U. Razafison. Study of the scalar Oseen equation. In *VII Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada y Estadística (Jaca, 2001)*, volume 27 of *Monogr. Semin. Mat. García Galdeano*, pages 57–64. Univ. Zaragoza, Zaragoza, 2003.
- [13] K.I. Babenko. On stationary solutions of the problem of flow past a body of a viscous incompressible fluid. *Math. USSR, Sb.*, **20**:1–25, 1973.
- [14] P. Bolley and J. Camus. Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids. In *Publications des Séminaires de Mathématiques (Univ. Rennes, Rennes, année 1968-1969), Fasc. 1: Séminaires d'analyse fonctionnelle, Exp. No. 1*, page 70. Dép. Math. et Informat., Univ. Rennes, Rennes, 1969.
- [15] T. Z. Boulmezaoud. On the Stokes system and on the biharmonic equation in the half-space: an approach via weighted Sobolev spaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, **25**(5):373–398, 2002.
- [16] T. Z. Boulmezaoud. On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half-space: an approach using weighted spaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, **26**(8):633–669, 2003.
- [17] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Paris etc.: Masson. XIV, 233 p. FF 125. 00, 1983.
- [18] M. Cantor. Spaces of functions with asymptotic conditions on  $R^n$ . *Indiana Univ. Math. J.*, **24**:897–902, 1974/75.
- [19] G. de Rham. *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*. Actualités Sci. Ind., no. 1222 = Publ. Inst. Math. Univ. Nancago III. Hermann et Cie, Paris, 1955.

- [20] R. Farwig. The stationary exterior 3D-problem of Oseen and Navier-Stokes equations in anisotropically weighted Sobolev spaces. *Math. Z.*, **211**(3):409–447, 1992.
- [21] R. Farwig. A variational approach in weighted Sobolev spaces to the operator  $-\Delta + \partial/\partial x_1$  in exterior domains of  $\mathbb{R}^3$ . *Math. Z.*, **210**(3):449–464, 1992.
- [22] R. Farwig. The stationary Navier-Stokes equations in a 3D-exterior domain. In *Recent topics on mathematical theory of viscous incompressible fluid (Tsukuba, 1996)*, volume 16 of *Lecture Notes Numer. Appl. Anal.*, pages 53–115. Kinokuniya, Tokyo, 1998.
- [23] R. Farwig and H. Sohr. Weighted estimates for the Oseen equations and the Navier-Stokes equations in exterior domains. In *Theory of the Navier-Stokes equations*, volume 47 of *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.*, pages 11–30. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998.
- [24] H. Faxén. Fredholm'sche Integralgleichungen zu der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. *Ark. Mat. Astr. Fys. (14)*, **21**:1–20, 1929.
- [25] R. Finn. On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **19**:363–406, 1965.
- [26] G. P. Galdi. On the Oseen boundary value problem in exterior domains. In *The Navier-Stokes equations II—theory and numerical methods (Oberwolfach, 1991)*, volume 1530 of *Lecture Notes in Math.*, pages 111–131. Springer, Berlin, 1992.
- [27] G. P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I*, volume 38 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [28] G. P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. II*, volume 39 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New York, 1994.

- [29] V. Girault. The gradient, divergence, curl and Stokes operators in weighted Sobolev spaces of  $\mathbb{R}^3$ . *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **39**(2):279–307, 1992.
- [30] V. Girault. The Stokes problem and vector potential operator in three-dimensional exterior domains: an approach in weighted Sobolev spaces. *Differential Integral Equations*, **7**(2):535–570, 1994.
- [31] V. Girault and A. Sequeira. A well-posed problem for the exterior Stokes equations in two and three dimensions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **114**(4):313–333, 1991.
- [32] J. Giroire. *Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales*. Thèse de Doctorat d’Etat. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1987.
- [33] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [34] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **46**:227–272, 1971.
- [35] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge, at the University Press, 1952.
- [36] S. Kračmar, A. Novotný, and M. Pokorný. Estimates of Oseen kernels in weighted  $L^p$  spaces. *J. Math. Soc. Japan*, **53**(1):59–111, 2001.
- [37] L. D. Kudryavcev. Direct and inverse imbedding theorems. Applications to the solution of elliptic equations by variational methods. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, **55**:182 pp. (Russian), 1959.
- [38] A. Kufner. *Weighted Sobolev spaces*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc., New York, 1985.
- [39] J.-L. Lions and E. Magenes. Problemi ai limiti non omogenei. V. *Ann. Scuola Norm Sup. Pisa (3)*, **16**:1–44, 1962.

- [40] P. I. Lizorkin.  $(L_p, L_q)$ -multipliers of Fourier integrals. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **152**:808–811, 1963.
- [41] B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **165**:207–226, 1972.
- [42] B. Muckenhoupt. The equivalence of two conditions for weight functions. *Studia Math.*, **49**:101–106, 1973/74.
- [43] C.L.M.H. Navier. Mémoire sur les Lois du Mouvement des fluides. *Mem. Acad. Sci. Inst. de France (2)*, **6**:389–440, 1827.
- [44] J. Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.
- [45] F.K.G. Odqvist. Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik Zäher Flüssigkeiten. *Math. Z.*, **32**:329–375, 1930.
- [46] B. Opic and A. Kufner. *Hardy-type inequalities*, volume 219 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.
- [47] C. W. Oseen. Über die Stokessesche Formel und Über eine Verwandte aufgabe in der Hydrodynamik. *Ark. Mat. Astron. Fys.(29)*, **6**:1–20, 1910.
- [48] C. W. Oseen. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. XXIV + 337 S. mit 7 Fig. Leipzig, Akadem. Verlagsgesellschaft (Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern Bd. 1). , 1927.
- [49] L. E. Payne and H. F. Weinberger. Note on a lemma of Finn and Gilbarg. *Acta Math.*, **98**:297–299, 1957.
- [50] C. Pérez. Two weighted norm inequalities for Riesz potentials and uniform  $L^p$ -weighted Sobolev inequalities. *Indiana Univ. Math. J.*, **39**(1):31–44, 1990.
- [51] M. Pokorný. *Asymptotic behaviour of some equations describing the flow of fluids in unbounded domains*. PhD thesis, Charles University Prague and University of Toulon, 1999.

- [52] E. Sawyer and R.L. Wheeden. Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces. *Am. J. Math.*, **114**(4):813–874, 1992.
- [53] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966.
- [54] C. G. Simader and H. Sohr. *The Dirichlet problem for the Laplacian in bounded and unbounded domains*, volume 360 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1996.
- [55] V.A. Solonnikov. Estimates of Oseen’s potentials in weighted Hölder spaces. *Math. Nachr.*, **177**:307–321, 1996.
- [56] M Specovius-Neugebauer. Exterior Stokes problems and decay at infinity. *Math. Methods Appl. Sci.*, **8**(3):351–367, 1986.
- [57] M Specovius-Neugebauer. Weak solutions of the Stokes problem in weighted Sobolev spaces. *Acta Appl. Math.*, **37**(1-2):195–203, 1994.
- [58] M Specovius-Neugebauer. The two-dimensional exterior Stokes problem, existence, regularity and decay properties. *Math. Methods Appl. Sci.*, **19**(7):507–528, 1996.
- [59] G. G. Stokes. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **9**:8–106, 1851.
- [60] L. Tartar. *Topics in nonlinear analysis*, volume 13 of *Publications Mathématiques d’Orsay 78*. Université de Paris-Sud Département de Mathématique, Orsay, 1978.
- [61] R. Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977.

