L'irrégularité du complexe f+(Oeg)

Céline Roucairol

▶ **To cite this version:**

Céline Roucairol. L'irrégularité du complexe f+(Oeg). Mathématiques [math]. Université d'Angers, 2004. Français. NNT : . tel-00006796v1

HAL Id: tel-00006796

https://theses.hal.science/tel-00006796v1

Submitted on 2 Sep 2004 (v1), last revised 3 Sep 2004 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'ANGERS

Année : 2004
N° d'ordre : 619

L'IRREGULARITE DU COMPLEXE

$\mathbf{f}_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}\mathbf{e}^{\mathbf{g}})$.

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

Présentée et soutenue publiquement

le **25 Juin 2004**
à **l'université d'Angers**
par **Céline Roucairol**

Devant le jury ci-dessous :

Alexandru DIMCA,
Rapporteur, Professeur, Université de Bordeaux 1
Claude SABBAH,
Rapporteur, Directeur de recherche, Ecole polytechnique
Eric DELABAERE,
Examinateur, Professeur, Université d'Angers
Philippe MAISONOBE,
Examinateur, Professeur, Université de Nice Sophia-Antipolis
Adam PARUSINSKI,
Examinateur, Professeur, Université d'Angers

Directeur de thèse : Michel GRANGER, Professeur, Université d'Angers

Nom et coordonnées du laboratoire : U.M.R N° 6093 associée au CNRS
2 Bd Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France

Remerciements.

J'aimerais tout d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Michel Granger. Je le remercie de m'avoir proposé ce sujet passionnant et pour toute l'aide qu'il m'a apportée pendant ces années. J'ai été particulièrement sensible à sa très grande disponibilité et à sa patience sans faille face à mes diverses questions, qui m'ont permis d'apprendre ce que je sais aujourd'hui. Je le remercie également pour son soutien pour arriver à la fin de ce travail et lors de ma préparation à l'agrégation.

Merci à Alexandru Dimca d'avoir accepté la tache de rapporteur. Je lui suis très reconnaissante de son invitation au séminaire de géométrie de l'université de Bordeaux.

Je remercie Claude Sabbah d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Ses remarques et suggestions m'ont été très précieuses. Elles m'ont permis non seulement de simplifier la lecture de ma thèse mais surtout de prendre du recul sur mon sujet et d'accroître mes connaissances.

J'ai rencontré Claude Sabbah et Philippe Maisonobe lors de l'école d'été "Differential Modules" à l'université de Kaiserslautern. Je les remercie pour leurs cours dont les notes m'ont accompagné durant le reste de ma thèse.

Merci à Philippe Maisonobe et Adam Parusiński pour leur participation dans mon jury ainsi qu'à Eric Delabaere avec qui j'ai par ailleurs beaucoup apprécié la collaboration cours-TD lors de mon année d'ATER.

Merci à Mathias Schulze pour sa lecture attentive de ma thèse et ses remarques.

Je tenais également à remercier Faycal Maaref pour l'intéret qu'il porte à ma thèse. Je lui suis reconnaissante pour les discussions très intéressantes que nous avons eues sur les motivations de ma thèse ainsi que sur les futurs pistes de recherches.

J'aimerais maintenant parler des membres du laboratoire de mathématiques de l'université d'Angers. Etant dans cette université depuis 1995, la majeure partie d'entre eux ont été un jour mes professeurs (sauf Bertrand Morando qui me le reproche encore...). Ils ont contribué à me donner un gout certain pour les mathématiques. Pour cela et tout le reste, je les remercie infiniment.

Je veux aussi remercier tous les thésards, pré-doc et post-doc d'Angers. Plus que des collègues, ils sont des amis. Nous avons passé de très agréables moments ensemble. J'ai beaucoup appris auprès d'eux tant d'un point de vue mathématique que d'un point de vue personnel.

Merci à notre bibliothéquaire, Madame Bock, pour sa gentillesse et pour toutes les discussions (non mathématiques) que nous avons pu avoir ensemble.

Enfin mes dermiers remerciements, et non des moindres, iront à ma famille, à Roch, à Isabelle, à Remi et à Corinne. Leur soutien sans limite et leur confiance m'ont été d'une grande aide à chaque minute. Une petite mention spéciale au petit dernier, Richard, pour ses éclats de rire.

Table des matières

1 Introduction. 7

1.1 Connexion de Gauss-Manin et analogues irréguliers. 7
1.2 Complexes d'irrégularité. 13
1.3 Résultats. 14
1.4 La méthode par résolution à l'infini. 16
1.5 La méthode par réduction à des projections. 18
1.6 Plan de la thèse. 21

2 Préliminaires. 23

2.1 Introduction. 23
2.2 Image inverse et image directe de $\mathcal{D}$-modules. 23
2.3 Complexe d'irrégularité. 29
2.4 $\mathcal{D}$-module élémentaire. 32
2.5 Cycles caractéristiques. 34
2.6 Propriétés d'additivité. 37

3 Etude locale de complexes d'irrégularité pour les $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules à support singulier un croisement normal. 41

3.1 introduction. 41
3.2 Réduction à un calcul géométrique. 42
3.3 Enoncés des résultats locaux. 45
3.3.1 Le théorème **(A1)**. 45
3.3.2 Le théorème **(A2)**. 45
3.3.3 Le théorème **(A3)**. 45
3.3.4 Le théorème **(A4)**. 46
3.3.5 Le théorème **(B1)**. 46
3.3.6 Le théorème **(B2)**. 46
3.4 Démonstrations. 46

4 Résolution à l'infini de polynômes et complexe d'irrégularité. 49

4.1 Introduction. 49
4.2 Résolution à l'infini de deux polynômes. 50
4.2.1 Résolution d'une fonction méromorphe à deux variables. 50
4.2.2 Résolution à l'infini de deux polynômes. 51
4.3 Le complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ est essentiellement concentré en degré 0. 54

5 Calcul de l'irrégularité par résolution à l'infini. 59
5.1 Introduction. . . . 59
5.2 Passage aux caractéristiques d'Euler. . . . 60
5.3 Réunion d'arbres associée à une résolution à l'infini. . . . 61
5.4 Calcul de la cohomologie du complexe d'irrégularité. . . . 64
5.4.1 Préliminaires. . . . 64
5.4.2 Le résultat principal. . . . 67
5.5 Traduction du résultat en terme géométrique. . . . 72
5.5.1 Introduction. . . . 72
5.5.2 Lemme différenciant le cas à distance fini du cas à l'infini. . . . 73
5.5.3 Un théorème de fibration. . . . 74
5.5.4 Interprétation géométrique en terme de courbes polaires. . . . 80
5.5.5 Interprétation géométrique en terme de courbes discriminantes. . . . 85
5.5.6 Exemples. . . . 88

6 Calcul de l'irrégularité par réduction à des projections. 91
6.1 Introduction. . . . 91
6.2 Principe du calcul. . . . 92
6.2.1 Réduction à des projections. . . . 92
6.2.2 Réduction au cas d'une application propre. . . . 93
6.2.3 Calcul de la caractéristique d'Euler du complexe d'irrégularité. . . . 94
6.3 Lien entre cycle caractéristique et complexe d'irrégularité. . . . 95
6.3.1 Le cas où le lieu singulier du module est inclus dans $xz = 0$. . . . 96
6.3.2 Le cas où le support du module n'est pas inclus dans $z = 0$. . . . 97
6.3.3 Caractéristique d'Euler du complexe d'irrégularité de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g)$. . . . 101
6.4 Etude comparative des résultats des deux méthodes. . . . 102

Chapitre 1

Introduction.

1.1 Connexion de Gauss-Manin et analogues irréguliers.

Ce travail a pour but d'étudier certains analogues irréguliers de la connexion de Gauss-Manin.

Si $f : X \to S$ est un morphisme entre deux variétés algébriques complexes lisses, avec S de dimension un, f propre et de rang maximum, on peut lui associer des fibrés vectoriels plats dont les fibres sont les espaces vectoriels de cohomologie des fibres de f à valeur dans $\mathbb{C} : \bigcup_{t\in S} H^p(f^{-1}(t), \mathbb{C})$. Ils sont appelés les fibrés de Gauss-Manin. La platitude de ces fibrés permet alors de définir des connexions, appelées classiquement connexions transcendantes.

Lorsque certaines fibres de f ne sont pas lisses ou que le morphisme n'est pas propre, on définit de façon similaire les connexions transcendantes en dehors de certaines valeurs (en nombre fini) de S. A l'aide du prolongement de Deligne, elles se prolongent en des connexions méromorphes, les connexions de Gauss-Manin. Lorsque f est un morphisme régulier non propre, les valeurs au voisinage desquelles f n'est pas une fibration topologique localement triviale, sont les singularités des connexions de Gauss-Manin. Ces travaux sont dus, à l'origine, à A. Grothendieck ([16]) et à N.M. Katz et T. Oda ([21]).

Le résultat fondamental sur les connexions de Gauss-Manin est leur régularité (c.f. [33] et [15]). Les solutions de ces connexions peuvent être représentées par des intégrales de période. Il s'agit d'intégrales du type $\int_\gamma w$, où γ est une collection de classes d'homologie dans les fibres localement constante et w est une forme algébrique. Ces intégrales de période ont été étudiées par Varchenko ([40]), dans le cas local et par Katz ([20]), dans le cas global.

Dans la théorie des $\mathcal{D}$-modules, on étudie l'image directe par un morphisme $f : X \to S$ du faisceau structural $\mathcal{O}_X$, que l'on note $f_+(\mathcal{O}_X)$. Si U est l'ouvert de S sur lequel f est une fibration lisse localement triviale, la cohomologie de la restriction à U de l'analytisé de cette image directe, $f_+(\mathcal{O}_X)^{an}_{|U}$, coïncide avec les sections des fibrés de Gauss-Manin. Le localisé de $f_+(\mathcal{O}_X)^{an}$ correspond quant à lui aux connexions méromorphes de Gauss-Manin. Le complexe $f_+(\mathcal{O}_X)$ est appelé système de Gauss-Manin.

Il est naturel de se poser des questions sur l'image directe d'un $\mathcal{D}$-module irrégulier. Dans la situation qui nous occupe, on veut étudier l'image directe algébrique, $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$, où f et g sont des applications polynomiales à n variables et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g$ est le $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$-module irrégulier élémentaire définit de la façon suivante : $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g$ est égal à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$-module et est muni de l'action de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$ définie par $\xi(he^g) = \xi(h)e^g + \xi(g)he^g$, où h est une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ et

ξ un champ de vecteurs. La définition de ces $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$-modules élémentaires n'est pertinente que dans le cas algébrique. En effet, si l'on considère g application holomorphe et $\mathcal{H}_{\mathbb{C}^n}$ le faisceau des applications holomorphes, on peut définir de la même façon le $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$-module analytique $\mathcal{H}_{\mathbb{C}^n}e^g$. Mais ce dernier est isomorphe en tant que $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$-module à $\mathcal{H}_{\mathbb{C}^n}$.

Nous allons tout d'abord présenter les résultats de A. Dimca, C. Sabbah et M. Saito sur les $\mathcal{D}$-modules irréguliers élémentaires, $\mathcal{O}e^g$.

Dans [11], A. Dimca et M. Saito s'intéressent au calcul, de façon algébrique, de la cohomologie de la fibre générique d'une application polynomiale $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Soit G cette fibre générique et $\Omega^\bullet(\mathbb{C}^n)$ le complexe des formes différentielles algébriques sur $\mathbb{C}^n$, muni de la différentielle D_g, définie par $D_g(\omega) = d\omega - dg \wedge \omega$, pour $\omega \in \Omega^k(\mathbb{C}^n)$. Ils démontrent alors que l'on a un isomorphisme :

$$\tilde{H}^k(G, \mathbb{C}) \simeq H^{k+1}(\Omega^\bullet(\mathbb{C}^n), D_g),$$

où $\tilde{H}$ désigne la cohomologie réduite. Cet isomorphisme peut également s'écrire sous la forme :

$$\tilde{H}^k(G, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{H}^{k+1}(\mathbb{C}^n, DR(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^{-g})).$$

C. Sabbah généralise ce résultat dans [35]. Si U est une variété quasi-projective complexe, $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction régulière et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_U$-module holonome régulier, on définit $\mathcal{M}_g$ comme étant le $\mathcal{D}_U$-module $\mathcal{M}$ tordu par e^g. Par définition, $\mathcal{M}_g$ est égal à $\mathcal{M}$ en tant que $\mathcal{O}_U$-module et l'action d'un champs de vecteurs ξ sur une section me^g de $\mathcal{M}_g$ est donnée par $\xi(me^g) = \xi(m)e^g + \xi(g)me^g$. C. Sabbah démontre alors que l'hypercohomologie $\mathbb{H}^k(U, DR(\mathcal{M}_g))$ est isomorphe à l'hypercohomologie $\mathbb{H}^k_\Phi(U^{an}, DR^{an}(\mathcal{M}))$, où Φ est une famille de fermés sur lesquels e^{-g} décroit rapidement. Il démontre alors que $\mathbb{H}^k(U, DR(\mathcal{M}_g))$ est isomorphe à $\mathbb{H}^k(U^{an}, g^{-1}(t), DR^{an}(\mathcal{M}))$, où la partie réelle de $-t$ est suffisamment grande. Dans le cas où U^{an} est contractile, on retrouve le résultat de A. Dimca et de M. Saito.

Si $\mathcal{M}$ est holonome régulier, $\mathcal{M}_g$ est holonome mais irrégulier en général. Si X est une compactification de U telle qu'on ait le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle\eta}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

C. Sabbah démontre que l'irrégularité du module $\mathcal{M}_g$ a la même fonction caractéristique que le complexe des cycles proches, $\phi_{\frac{1}{G}}(R\eta_* DR^{an}(\mathcal{M}))$. Rappelons que le complexe d'irrégularité de $\mathcal{M}_g$ est le cône du morphisme :

$$DR^{an}(\eta_+(\mathcal{M})[*G^{-1}(\infty)]e^G) \to R\eta_*\eta^{-1}(DR^{an}(\eta_+(\mathcal{M})[*G^{-1}(\infty)]e^G)).$$

En utilisant la correspondance de Riemann-Hilbert, on peut étudier la fonction caractéristique de l'irrégularité à l'aide de cycles caractéristiques. On utilise pour cela le théorème d'indice de Kashiwara (c.f. [18]). Comme $R\eta_*\eta^{-1}(DR^{an}(\eta_+(\mathcal{M})[*G^{-1}(\infty)]e^G))$ est isomorphe au $DR(\eta_+(\mathcal{M})[*G^{-1}(\infty)])$, il faut étudier la différence entre les cycles caractéristiques des complexes $\eta_+(\mathcal{M}[*G^{-1}(\infty)])e^G$ et de $\eta_+(\mathcal{M}[*G^{-1}(\infty)])$. D'après le théorème de positivité de l'irrégularité de Z. Mebkhout(c.f. [31]), on sait que le cycle caractéristique associé au complexe d'irrégularité est à coefficients positifs. De plus, dans [5], J. Briançon et P. Maisonobe

démontrent que les supports des variétés caractéristiques coïncident dans le cas où $\mathcal{M}$ est holonome et régulier, y compris à l'infini.

Comme annoncé précédemment, on se propose de regarder le complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$, où f et g sont deux polynômes complexes à n variables. Dans [24], F. Maaref s'interesse au calcul de la fibre de ce complexe. Il s'agit d'un analogue relatif de la connexion de Gauss-Manin. En effet, si i_t désigne l'inclusion de $\{t\}$ dans $\mathbb{C}$, avec $t \in \mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points (il faut que $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$ soit une connexion holomorphe au voisinage de t et que t ne soit pas une valeur critique de f), il démontre que pour tout ρ_t, nombre complexe tel que la partie réelle de $-\rho_t$ soit suffisamment grande, on a un isomorphisme (avec les décalages correspondant au choix de la définition de l'image directe) :

$$i_t^+(\mathcal{H}^{k-n+1}(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g))) \simeq H^k(f^{-1}(t)^{an}, (f^{-1}(t) \cap g^{-1}(\rho_t))^{an}, \mathbb{C}).$$

Ce résultat est une version relative de celui de C. Sabbah appliqués à $U = f^{-1}(t)$.

Il démontre de plus la rationalité des exposants de monodromie.

Le but de cette thèse est d'étudier l'irrégularité (dans un sens que l'on précisera plus tard) du complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$ essentiellement dans le cas où f et g sont des polynômes à deux variables.

On se concentrera sur le cas où f et g sont des polynômes algébriquement indépendants. En effet, si f et g sont deux polynômes à deux variables algébriquement dépendants, le complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ est régulier. Pour cela, considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{(f,g)} & \mathbb{C}^2 & \xhookrightarrow{j} & \mathbb{C}\times\mathbb{P}^1 \\ & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle p} & \swarrow_{\pi} & \\ & & \mathbb{C}. & & \end{array}$$

On peut alors démontrer que $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g) = \pi_+(\mathcal{M}e^\pi)$, où $\mathcal{M} = j_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$. Comme f et g sont algébriquement dépendants, le support de $\mathcal{M}$ est inclus dans une courbe et il n'existe qu'un nombre fini de $t_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(t_0, \infty) \in supp(\mathcal{M})$. Si $(t_0, \infty) \notin supp(\mathcal{M})$, il existe alors un voisinage ouvert U de t_0 tel que $U \times \{\infty\} \cap supp(\mathcal{M}) = \emptyset$. Ainsi, comme π est borné sur le support de $\mathcal{M}$, on aura $(\mathcal{M}e^\pi)^{an}_{|U\times\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{M}^{an}_{|U\times\mathbb{P}^1}$. Comme π est propre, on aura alors $(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))^{an}_{|U} \simeq (f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}))^{an}_{|U}$. Ces deux complexes sont donc égaux en dehors d'un nombre fini de points. Comme $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ est régulier, $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ le sera également.

Dans une première méthode, nous exprimerons le résultat à l'aide de la géométrie de l'application $(f,g) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Dans une deuxième méthode, moins géométrique, nous donnerons le résultat en terme de cycles caractéristiques du complexe $(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$. Cette dernière méthode s'applique dans le cadre plus général des polynômes à n variables. Nous ferons alors une étude comparative des résultats obtenus dans le cas des polynômes à deux variables. Des résultats similaires sont possibles pour U surface affine lisse en considérant une compactification lisse $\overline{U}$ de U.

Pour la connexion de Gauss-Manin, on sait que ses solutions peuvent s'écrire sous forme d'intégrales de période du type $\int_\gamma w$, où γ est une collection de classes d'homologie localement constante et w une forme différentielle. Dans notre situation, les solutions du système $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$ s'écrivent également sous la forme d'une intégrale. Bien que les techniques développées dans les chapitres 4, 5 et 6 soient de natures différentes, les considérations suivantes apportent une vision heuristique sur le système $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$.

Revenons pour cela au résultat de F. Maaref. On sait qu'il existe un ensemble fini $\Sigma \subset \mathbb{C}$ tel que si i_t désigne l'inclusion de $\{t\}$ dans $\mathbb{C}$, avec $t \in \mathbb{C}\backslash\Sigma$, on ait un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels :

$$i_t^+(\mathcal{H}^{k-n+1}(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g))) \simeq H^k_{\phi_t}(f^{-1}(t)^{an},\mathbb{C}),$$

où ϕ_t est la famille de fermés définie de la façon suivante. Identifions $\mathbb{P}^1$ à $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Soit $\pi : \widetilde{\mathbb{P}^1} \to \mathbb{P}^1$ l'éclaté réel de l'infini. $\widetilde{\mathbb{P}^1}$ peut alors être identifié à $\mathbb{C}\cup S^1$, avec S^1 cercle des directions à l'infini. Alors A est un fermé de ϕ_t si :

– A fermé de $f^{-1}(t)$.

– Notons $\overline{g(A)}$ l'adhérence de $g(A)$ dans $\mathbb{C}\cup S^1$. On doit alors avoir $\overline{g(A)}\cap S^1 \subset]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Soit ψ_t la famille de fermés A tels que :

– A fermé de $f^{-1}(t)$,

– pour tout $\rho>0$, $A\setminus g^{-1}(\{t\in\mathbb{C} \mid Re(-t)>\rho\})$ est compact.

On peut alors définir le complexe des chaînes semi-algébriques à support dans ψ_t, introduit par F. Pham dans [34]. On notera H_{k,ψ_t} le k-ième groupe d'homologie associé à ce complexe.

L'intégration des formes dans $H^k_{\phi_t}$ sur des cycles de H_{k,ψ_t} est alors possible.

De plus, comme $f : f^{-1}(\mathbb{C}\setminus\Sigma) \to \mathbb{C}\setminus\Sigma$ est une submersion (les valeurs atypiques de f sont dans Σ), on a $\mathcal{H}^{k-n+1}(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g))_{|\mathbb{C}\setminus\Sigma} \simeq R^kf_*(\Omega^\bullet_{\mathbb{C}^n/\mathbb{C}}e^g)_{|\mathbb{C}\setminus\Sigma}$ (c.f. proposition 1.4 de [10]). L'intégration définie précédemment s'étend alors aux formes du type we^g, où w est une forme algébrique relative, puisque d'une part, la définition de ψ_t permet d'avoir e^g à décroissance rapide sur les cycles et d'autre part, la définition des chaines semi-algébriques à support dans ψ_t permet d'avoir un bon comportement à l'infini.

Ainsi, si $\gamma(t)$ est une collection de classes d'homologie de H_{k,ψ_t} localement constante, on peut lui associer une solution de $\mathcal{H}^{k-n+1}(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g))$ sous la forme $[we^g] \to \int_{\gamma(t)} we^g_{|f^{-1}(t)}$.

Illustrons ce qui précède par ces deux exemples pris dans le cas où $f(x,y)=x$ est une projection :

EXEMPLE . *Si g est un polynôme et f est une projection de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$, l'image directe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$ est canoniquement isomorphe au complexe de De Rham relatif : $Rf_*(\Omega^\bullet_{\mathbb{C}^n/\mathbb{C}}e^g)$, avec $d(we^g)=dwe^g+dg\wedge we^g$. Dans le cas où l'on suppose de plus $n=2$, si $f(x,y)=x$ et g n'est pas une application polynomiale constante, le complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 0.*

1. *$f(x,y)=x$ et $g(x,y)=(xy+1)y$ (polynôme de Broughton). On peut alors démontrer :*

$$\mathcal{H}^0(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)) \simeq \mathcal{D}_{\mathbb{C}}[e^gdy] \simeq \frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(4t^2\partial_t-1+2t)}.$$

Considérons alors $I(t)$, pour $t\neq 0$, définie par :

$$I(t)=\int_{\{t\}\times ie^{-i\frac{\theta}{2}}\mathbb{R}}(e^gdy)_{|f^{-1}(t)} = \int_{ie^{-i\frac{\theta}{2}}\mathbb{R}} e^{(ty+1)y}dy,$$

où $\theta = arg(t) \in [0,2\pi[$. Un calcul montre alors que $I(t)=\frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{1}{4t}}$, solution de l'équation différentielle définie par l'opérateur $4t^2\partial_t-1+2t$.

2. *$f(x,y)=x$ et $g(x,y)=xy^2$. On peut alors démontrer :*

$$\mathcal{H}^0(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)) \simeq \mathcal{D}_{\mathbb{C}}[e^g dy] \oplus \mathcal{D}_{\mathbb{C}}[ye^g dy] \simeq \frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(t\partial_t + \frac{1}{2})} \oplus \frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(t)}.$$

Considérons alors $I(t)$, pour $t \neq 0$, définie par :

$$I(t) = \int_{\{t\}\times ie^{-i\frac{\theta}{2}}\mathbb{R}} (e^g dy)_{|f^{-1}(t)} = \int_{ie^{-i\frac{\theta}{2}}\mathbb{R}} e^{ty^2} dy,$$

où $\theta = arg(t) \in [0, 2\pi[$. Un calcul montre alors que $I(t) = \frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}$, solution de l'équation différentielle définie par l'opérateur $t\partial_t + \frac{1}{2}$.

Le résultat de cette thèse détermine l'irrégularité du système $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ à l'aide de la courbe discriminante de f et g (image par (f,g) de la courbe polaire de f et g), dans le cas où f et g sont deux applications polynomiales à deux variables algébriquement indépendantes. Pour motiver ce résultat, on peut faire la remarque suivante.

Le faisceau $\mathcal{H}^0(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))^{an}_{|\mathbb{C}\setminus\Sigma}$ est isomorphe au faisceau des sections d'un fibré vectoriel $\bigcup_{t\in\mathbb{C}\setminus\Sigma} H^1_{\phi_t}(f^{-1}(t)^{an}, \mathbb{C})$.

Pour tout $t \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$, $H^1_{\phi_t}(f^{-1}(t)^{an}, \mathbb{C}) \simeq H^1(f^{-1}(t)^{an}, (f^{-1}(t)\cap g^{-1}(\rho))^{an}, \mathbb{C})$, où $Re(-\rho)$ est suffisamment grande. Cette isomorphisme n'est pas horizontal si l'on met sur le membre de droite la connexion naturelle à ρ fixé. On peut cependant dire que dans certains cas, la famille des fibrés définie à partir de ces cohomologies relatives à ρ fixé approche le système défini par $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$, quand la partie réelle de $-\rho$ tend vers l'infini. Ceci devient incorrect au voisinage des points singuliers évoqués ci-dessous en b, où le système est irrégulier. Regardons d'un peu plus près cette famille de fibrés.

Soit $\tilde{\Delta}$ la courbe de $\mathbb{C}^2$ telle que $(f,g) : (f,g)^{-1}(\mathbb{C}^2\setminus\tilde{\Delta}) \to \mathbb{C}^2\setminus\tilde{\Delta}$ est un revêtement. A ρ fixé, $\bigcup_{t\in\mathbb{C}\setminus\Delta_\rho} H^1(f^{-1}(t)^{an}, (f^{-1}(t)\cap g^{-1}(\rho))^{an}, \mathbb{C})$ est un fibré vectoriel plat, où $\Delta_\rho \times \{\rho\} = \tilde{\Delta} \cap (\mathbb{C}\times\{\rho\})$.

Nous allons donc regarder le comportement de cette famille de fibrés vectoriels. Soit $t_0 \in \mathbb{C}$. Deux cas sont alors possibles :

1. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert U de t_0 tel que pour tout $\rho \in \mathbb{C}$, avec $Re(-\rho)$ suffisamment grande, on ait $U \cap \Delta_\rho = \emptyset$.

   Dans ce cas, pour de tels ρ, $\bigcup_{t\in U} H^1(f^{-1}(t)^{an}, (f^{-1}(t)\cap g^{-1}(\rho))^{an}, \mathbb{C})$ est un fibré vectoriel plat. Il est donc associé à une connexion holomorphe sur U. On verra que $(\mathcal{H}^0(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))^{an}$ est une connexion holomorphe en t_0.

2. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert U de t_0 tel que pour tout $\rho \in \mathbb{C}$, avec $Re(-\rho)$ suffisamment grande, on ait $U \cap \Delta_\rho \neq \emptyset$.

   Dans ce cas, pour de tels ρ, $\bigcup_{t\in U\setminus\Delta_\rho} H^1(f^{-1}(t)^{an}, (f^{-1}(t)\cap g^{-1}(\rho))^{an}, \mathbb{C})$ est un fibré vectoriel plat. Il est donc associé à une connexion holomorphe sur $U\setminus\Delta_\rho$ qui se prolonge en une connexion méromorphe le long de Δ_ρ. D'après 1, $(\mathcal{H}^0(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))^{an}$ est une connexion méromorphe en t_0.

Les pôles de la connexion définie par $(\mathcal{H}^0(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))^{an}$ seront donc les $t_0 \in \mathbb{C}$ tels que (t_0, ∞) appartienne à l'adhérence de Zariski de $\tilde{\Delta}$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Remarquons que cette courbe $\tilde{\Delta}$ contient la courbe discriminante Δ de f et g. De plus, au voisinage des points (t_0, ∞), avec $t_0 \in \mathbb{C}$, l'adhérence de Zariski de $\tilde{\Delta} \setminus \Delta$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est incluse dans $\{c\} \times \mathbb{P}^1$ (c.f. lemme 5.5.1).

Le résultat de cette thèse apporte alors la distinction suivante :

a) S'il existe un voisinage U de t_0 tel que pour tout $\rho \in \mathbb{C}$, avec $Re(-\rho)$ suffisamment grande, on ait $U \cap \Delta_\rho = \{t_0\}$, alors $\mathcal{H}^0(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))$ est régulier en t_0.
On remarque également que dans ce cas, pour tout $\rho \in \mathbb{C}$, avec $Re(-\rho)$ suffisamment grande, $\bigcup_{t \in U \setminus \{t_0\}} H^1(f^{-1}(t)^{an}, (f^{-1}(t) \cap g^{-1}(\rho))^{an}, \mathbb{C})$ est un fibré vectoriel plat. On a ainsi une famille de connexion méromorphe en t_0.

b) S'il existe un voisinage U de t_0 tel que pour tout $\rho \in \mathbb{C}$, avec $Re(-\rho)$ suffisamment grande, on ait $U \cap \Delta_\rho \neq \{t_0\}$ (intervention de la courbe polaire de f et g), alors $\mathcal{H}^0(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))$ est irrégulier en t_0.
On remarque également que dans ce cas, pour tout $\rho \in \mathbb{C}$, avec $Re(-\rho)$ suffisamment grande, $\bigcup_{t \in U \setminus \Delta_\rho} H^1(f^{-1}(t)^{an}, (f^{-1}(t) \cap g^{-1}(\rho))^{an}, \mathbb{C})$ est un fibré vectoriel plat. On remarque ici que les points singuliers dépendent de ρ et tendent vers t_0 quand la partie réelle de $-\rho$ tend vers l'infini.

Voici deux exemples qui étayent ces considérations.

EXEMPLE . *1. $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = (xy+1)y$.*
(f,g) est alors un revêtement en dehors de la courbe $\tilde{\Delta} = \{t = 0\} \cup \{1 + 4t\rho = 0\}$.
Alors pour tout $\rho \in \mathbb{C}$, avec $Re(-\rho)$ suffisamment grande, on a le fibré vectoriel plat :

$$\bigcup_{t \in U \setminus \{0, \frac{-1}{4\rho}\}} H^1(f^{-1}(t)^{an}, (f^{-1}(t) \cap g^{-1}(\rho))^{an}, \mathbb{C}).$$

Fixons un tel ρ. Les solutions de la connexion associée sont alors : pour $t \neq 0, \frac{-1}{4\rho}$,

$$I_\rho(t) = \int_{\gamma_{t,\rho}} e^{(ty+1)y} dy = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{t}} \int_{[-\sqrt{\frac{1}{t}+4\rho}, \sqrt{\frac{1}{t}+4\rho}]} e^{y^2} dy,$$

avec $\gamma_{t,\gamma}$ chemin d'origine $\frac{-1-\alpha_{t\rho}}{2t}$ et d'extrémité $\frac{-1+\alpha_{t\rho}}{2t}$, où $\alpha_{t\rho}$ est une racine de $1+4t\rho$. On peut alors montrer que ces intégrales ne sont pas à croissance modérée au voisinage de 0. On remarque également que I_ρ n'est pas exactement une solution de l'équation différentielle associée à l'opérateur $4t^2\partial_t - 1 + 2t$.

2. $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = xy^2$.
(f,g) est alors un revêtement en dehors de la courbe $\tilde{\Delta} = \{t = 0\} \cup \{\rho = 0\}$.
Alors pour tout $\rho \in \mathbb{C}$, avec $Re(-\rho)$ suffisamment grande, on a le fibré vectoriel plat :

$$\bigcup_{t \in U \setminus \{0\}} H^1(f^{-1}(t)^{an}, (f^{-1}(t) \cap g^{-1}(\rho))^{an}, \mathbb{C}).$$

Fixons un tel ρ. Les solutions de la connexion associée sont alors : pour $t \neq 0$,

$$I_\rho(t) = \int_{\gamma_{t,\rho}} e^{ty^2} dy = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{[-\sqrt{\rho},\sqrt{\rho}]} e^{y^2} dy,$$

avec $\gamma_{t,\rho}$ chemin d'origine $-\alpha_{t\rho}$ et d'extrémité $\alpha_{t\rho}$, où $\alpha_{t\rho}$ est une racine de $\frac{\rho}{t}$.
On peut alors montrer que ces intégrales sont à croissance modérée au voisinage de 0.
On remarque également que I_ρ est une solution de l'équation différentielle associée à l'opérateur $t\partial_t + \frac{1}{2}$.

Dans les deux exemples précédents, on a calculé complètement le système différentiel définissant le complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$. On va étudier l'irrégularité de ces systèmes différentiels.

Rappelons la définition de l'irrégularité, au sens de Fuchs et de B. Malgrange, d'un opérateur différentiel $P = a_m \partial_x^m + \ldots + a_1 \partial_x + a_0$ en 0. Il s'agit de l'entier $i_0(P)$ donné par la formule :

$$i_0(P) = \sup_p (p - val(a_p)) - m + val(a_m).$$

(c.f. [27]). Ce nombre d'irrégularité correspond au rang de la partie irrégulière d'un système fondamental de solutions de l'équation différentielle définie par P au voisinage de 0. Dans le première exemple, l'équation obtenue admet une singularité irrégulière en 0. Son nombre d'irrégularité est 1. L'infini est quant à lui une singularité régulière. Dans le deuxième exemple, l'équation est régulière y compris à l'infini.

1.2 Complexes d'irrégularité.

Nous utiliserons la généralisation, due à Z. Mebkhout, du nombre d'irrégularité de Fuchs-Malgrange d'un système différentiel à une variable, aux complexes de $\mathcal{D}$-modules en dimension supérieure. Si $\mathcal{M}$ est une connexion méromorphe régulière au sens de Deligne ([8]) le long de Y, le théorème de comparaison de Grothendieck-Deligne affirme que le morphisme $DR(\mathcal{M}) \to Ri_* i^{-1}(DR(\mathcal{M}))$ est un isomorphisme, où i désigne l'inclusion de $X \setminus Y$ dans X. La définition des complexes d'irrégularité de Z. Mebkhout permet de décrire l'obstruction de ce morphisme à être un isomorphisme.

Dans le cas analytique, si X est une variété analytique complexe lisse, Z un fermé analytique de X et $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules, Z. Mebkhout définit le complexe d'irrégularité de $\mathcal{M}^\bullet$ le long de Z comme étant le cône du morphisme $DR(\mathcal{M}^\bullet[*Z]) \to Ri_* i^{-1}(DR(\mathcal{M}^\bullet)[*Z])$, où i désigne l'inclusion de $X \setminus Z$ dans X. Dans la suite, on notera ce complexe $IR_Z(\mathcal{M}^\bullet)$ et $IR_Z^k(\mathcal{M}^\bullet)$ son k-ième espace de cohomologie. Si Z est une hypersurface et $\mathcal{M}^\bullet$ est un complexe à cohomologies holonomes, $IR_Z(\mathcal{M}^\bullet)$ est un complexe de faisceaux constructibles à support dans Z. De plus, si Z est une hypersurface, le foncteur irrégularité le long de Z est un foncteur exact de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes dans la catégorie des complexes $\mathcal{F}^\bullet$ de $\underline{\mathbb{C}}_X$-espaces vectoriels à support dans Z tels que $\mathcal{F}^\bullet[-1]$ est pervers.

Dans le cas algébrique, on a encore la notion de complexe d'irrégularité. Si X est une variété algébrique complexe lisse, on considère une immersion j de X dans un espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$. Pour Z sous-variété localement fermée de $\mathbb{P}^n$, on définit le complexe d'irrégularité du complexe $\mathcal{M}^\bullet$ de $\mathcal{D}_X$-modules algébriques le long de Z comme étant le complexe $IR_{Z^{an}}((j_+(\mathcal{M}^\bullet))^{an})$. On dira alors que le complexe $\mathcal{M}^\bullet$ est régulier si son complexe d'irrégularité est nul le long de toutes sous-variétés de $\mathbb{P}^n$.

1.3 Résultats.

Dans le cas qui nous intéresse, $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$ est un complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-modules dont on veut étudier l'irrégularité. Si j désigne l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}\cup\{\infty\}\simeq\mathbb{P}^1$, on regardera alors l'irrégularité du complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-modules, $(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}))^{an}$ en $c\in\mathbb{P}^1$.

Nous regarderons plus particulièrement le cas où f et g sont deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants. A l'aide du résultat de F. Maaref ([24]) liant des cohomologies relatives aux cohomologies du complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$, on démontrera que ce complexe n'a de la cohomologie qu'en degré 0 en dehors d'un nombre fini de points. Il en résulte alors que pour tout $c\in\mathbb{P}^1$, le complexe d'irrégularité en c de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ n'a de la cohomologie qu'en degré 0 et, comme il est à support dans c, nous calculerons alors la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(IR^0_c((j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))^{an}))_c$ de deux manières différentes.

L'outil principal de la première méthode est la résolution à l'infini des polynômes f et g. Il nous permet de définir des applications méromorphes $F:\mathbb{X}\to\mathbb{P}^1$ et $G:\mathbb{X}\to\mathbb{P}^1$, où $\mathbb{X}$ est une variété complexe lisse, telles qu'on ait les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}\\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j}\\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1,\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc}\mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}\\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j}\\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1,\end{array}$$

avec i et j inclusions.

La deuxième méthode a été suggérée par C. Sabbah dans [36]. Elle consiste à se ramener aux calculs de complexe d'irrégularité d'un complexe, image directe par la première projection $p_1:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ d'un module holonome tordu par l'exponentielle de $p_2:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$, deuxième projection.

Résultats obtenus par résolution à l'infini.

Dans la première méthode, nous obtenons les résultats suivants :

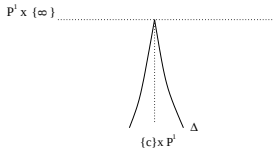
1. Dans le cas à distance fini ($c\in\mathbb{C}$) :

   Notons Γ la courbe polaire de f et g et Δ la courbe discriminante (image de Γ par (f,g)), comptée avec sa multiplicité. Notons $\overline{\Delta\setminus(\{c\}\times\mathbb{C})}$ l'adhérence de Zariski de $\Delta\setminus\{c\}\times\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$. La dimension de $(IR^0_c((j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))^{an}))_c$ est la multiplicité d'intersection de $\overline{\Delta\setminus(\{c\}\times\mathbb{C})}$ avec $\mathbb{P}^1\times\{\infty\}$ au point (c,∞).

   THEOREME (1).

   $$dim_{\mathbb{C}}(IR^0_c((j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))^{an}))_c = i_{(c,\infty)}(\overline{\Delta\setminus(\{c\}\times\mathbb{C})},\mathbb{P}^1\times\{\infty\}).$$

   (Voir chapitre 5 théorème 5.5.18.)



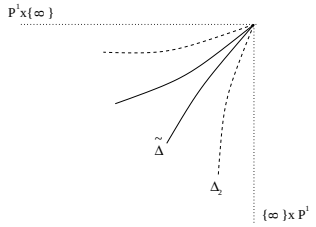
2. Dans le cas à l'infini :

   Notons $\tilde{\Gamma}$ la courbe polaire de F et G et $\tilde{\Delta}$ la trace dans $\mathbb{C}^2$ de la courbe discriminante de F et G (image par (F,G) de $\tilde{\Gamma}$) comptée avec multiplicité. Notons Δ_2 la trace dans $\mathbb{C}^2$ de l'image par (F,G) de D comptée avec multiplicité. Δ_2 est appelée la courbe de non propreté. La dimension de $(IR^0_\infty((j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))^{an}))_\infty$ est la multiplicité d'intersection en (∞,∞) de l'adhérence de Zariski de $\tilde{\Delta}\cup\Delta_2$ dans $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ avec $\mathbb{P}^1\times\{\infty\}$. Il faut remarquer que certaines branches de Δ_2 et de $\tilde{\Delta}$ peuvent être communes. Dans ce cas, on les compte avec les multiplicités adéquates.

   THEOREME (1').

$$dim_{\mathbb{C}}(IR^0_\infty((j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))^{an}))_\infty = i_{(\infty,\infty)}(\overline{\tilde{\Delta}},\mathbb{P}^1\times\{\infty\}) + i_{(\infty,\infty)}(\overline{\Delta_2},\mathbb{P}^1\times\{\infty\}).$$

   (Voir chapitre 5 théorème 5.5.19.)



Les résultats dans le cas à distance finie et dans le cas à l'infini diffèrent par le fait que, au voisinage de (c,∞), avec $c\in\mathbb{C}$, $\overline{\Delta_2}\setminus\{c\}\times\mathbb{C}$ est vide.

Résultats obtenus par réduction à des projections.

Dans la deuxième méthode, nous obtenons les résultats suivants :

Notons i l'inclusion de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$. Considérons le cycle caractéristique du complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}$-modules $i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ dans un voisinage $U=U_1\times U_2\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ de (c,∞) :

$$Cch_c(i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})) = mT^*_UU + m'T^*_{(c,\infty)}U + m''T^*_{\{c\}\times U_2}U + m'''T^*_{U_1\times\{\infty\}}U + \sum m_iT^*_{Z_i}U,$$

où les Z_i sont des germes de courbes irréductibles au voisinage de (c,∞) distinctes de $U_1\times\{\infty\}$ et de $\{c\}\times U_2$. On a alors :

THEOREME (2).

$$dim((IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c) = \sum m_ii_{(c,\infty)}(Z_i,U_1\times\{\infty\}).$$

(Voir chapitre 6 théorème 6.3.9.)

Cette méthode s'applique dans un cadre plus général que celui des polynômes à deux variables algébriquement indépendants. Mais dans ce cas, le fait que le complexe d'irrégularité de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$ en $c\in\mathbb{P}^1$ est concentré en degré 0 n'est plus nécessairement vérifié. Comme il est toujours à support dans c, on peut cependant calculer la caractéristique d'Euler du germe en c de ce complexe. Ainsi, si f et g sont deux polynômes quelconques à n variables, nous noterons

$$Cch_c(i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})) = mT^*_UU + m'T^*_{(c,\infty)}U + m''T^*_{\{c\}\times U_2}U + m'''T^*_{U_1\times\{\infty\}}U + \sum m_iT^*_{Z_i}U,$$

le cycle caractéristique de $i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ (somme alternée des cycles caractéristiques des modules de cohomologie du complexe) dans un voisinage $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de (c,∞), où les Z_i sont des germes de courbes irréductibles au voisinage de (c,∞) distinctes de $U_1 \times \{\infty\}$ et de $\{c\} \times U_2$. On a alors :

$$\chi((IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)))_c) = \sum m_i i_{(c,\infty)}(Z_i, U_1 \times \{\infty\}).$$

(Voir chapitre 6 théorème 6.3.8.)

Etude comparative des deux résultats.

Une étude comparative des deux méthodes, dans le cas où f et g sont des polynômes à deux variables algébriquement indépendants, montre alors que les germes de courbes irréductibles Z_i de la deuxième méthode sont les branches irréductibles de $\overline{\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{C}}$, si $c \in \mathbb{C}$ et de $\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2}$, si $c = \infty$. Les multiplicités m_i de $i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})_{|U}$ sur $T^*_{Z_i}U$ sont les multiplicités des germes irréductibles Z_i dans $\overline{\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{C}}$, si $c \in \mathbb{C}$ et de $\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2}$, si $c = \infty$.

Nous allons maintenant expliquer la façon dont les résultats sont obtenus dans les deux méthodes.

1.4 La méthode par résolution à l'infini.

La première technique consiste à rendre f propre en résolvant simultanément f et g à l'infini. Le but est de trouver des applications méromorphes propres $F : \mathbb{X} \to \mathbb{P}^1$ et $G : \mathbb{X} \to \mathbb{P}^1$, $\mathbb{X}$ variété projective complexe lisse, telles qu'on ait les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

où i et j sont des inclusions. Leur existence est une adaptation au cas de deux polynômes de la résolution à l'infini d'un polynôme donnée par Lê Dung Trang et C. Weber ([22] et [23]). Elle consiste à plonger $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^2$ de manière canonique et à définir des applications rationnelles $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$, prolongeant f et g. Les points en lesquels $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ ne sont pas bien définies sont sur la droite à l'infini de $\mathbb{P}^2$. Par éclatements successifs de ces points, on obtient les applications F et G, en levant les indéterminations de $\tilde{f}$ et de $\tilde{g}$.

On se ramène ainsi au complexe d'irrégularité de $(F_+(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G))^{an}$, en $c \in \mathbb{P}^1$, où D est le diviseur exceptionnel $\mathbb{X} \setminus i(\mathbb{C}^2)$. A l'aide du résultat de Z. Mebkhout sur la commutation du foncteur irrégularité le long d'une hypersurface et du foncteur image directe analytique par une application propre ([30]), on montre que la dimension $dim((IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c)$ est égale à $-\chi(\mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})))$. Le calcul de cette caractéristique d'Euler se fait alors en étudiant le complexe d'irrégularité $IR_{F^{-1}(c)}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})$. Notons D^c_∞ l'ensemble des composantes irréductibles de D sur lesquelles F est constante et vaut c et G est constante et vaut ∞. On remarque alors que ce complexe est à support dans $\bigcup_{Z \in D^c_\infty} Z$, puisque

G est holomorphe en dehors. Pour pouvoir étudier $IR_{F^{-1}(c)}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})$ au voisinage des points de $\underset{Z\in D^c_\infty}{\cup} Z$, il nous faut une hypothèse supplémentaire : pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D$ est à croisement normal au voisinage de tout point de D. Il est toujours possible de trouver des applications méromorphes F et G, telles qu'on ait les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

avec pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D$ est à croisement normal au voisinage de tout point de D. On se ramène alors aux études locales des complexes d'irrégularité suivants :

- **(A1)** $IR_{x=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})$. On démontrera que ce complexe est concentré en degré 0 et que la restriction de son 0-ième espace de cohomologie à $x = 0$ est un système local de rang k.
- **(A3)** $IR_{xy=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k}})$.
- **(A4)** $IR_{x=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k}})$.
- **(B1)** $IR_{xy=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k y^l}})$.
- **(B2)** $IR_{x=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k y^l}})$.

Dans les quatres derniers cas, on montrera que la caractéristique d'Euler du germe en $(0, 0)$ de ces complexes est nulle. Finalement, on remarquera que le complexe $IR_{F^{-1}(c)}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})$ est un système local sur chaque composante irréductible $Z \in D^c_\infty$ en dehors de ses points d'intersection avec les autres composantes irréductibles de D et les transformées strictes de $F^{-1}(c)$ et que ces points d'intersection n'apportent aucune contribution à la caractéristique d'Euler $\chi(\mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})))$.

Pour $Z_i \in D^c_\infty$, on notera l_i la multiplicité de Z_i dans le diviseur $G^{-1}(\infty)$ et n_i le nombre de composantes irréductibles de D et de transformées strictes de $F^{-1}(c)$ intersectant Z_i. On démontrera alors :

$$\chi(\mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}))) = \sum_{Z_i\in D^c_\infty} l_i(2 - n_i).$$

Ainsi,

$$dim((IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c) = \sum_{Z_i\in D^c_\infty} l_i(n_i - 2).$$

On reliera alors cette formule à la caractéristique d'Euler de la fibre de la fibration par g, à l'infini, près de $f^{-1}(c)$ définie de la façon suivante. Nous noterons $D(c, \eta_1)$ le disque ouvert de $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ de centre c et de rayon η_1, si $c \in \mathbb{C}$ et $D(\infty, \eta_1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\eta_1}\} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{P}^1$. Pour $c \in \mathbb{P}^1$, $D(c, \eta_1)^*$ désignera alors le disque $D(c, \eta_1)$ privé de c. On démontre que pour η_1 suffisamment petit et R suffisamment grand,

$$g : f^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap g^{-1}(\{|\rho| > R\}) \to \{|\rho| > R\}$$

est une fibration lisse localement triviale. Le nombre d'irrégularité que l'on vient de calculer n'est autre que l'opposé de la caractéristique d'Euler de la fibre $f^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)$. En

effet, en utilisant une description par plombages d'un petit voisinage de $G^{-1}(\infty)$, dans un voisinage tubulaire de $F^{-1}(c)$, on démontrera :

$$\chi(f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) = -\sum_{Z_i \in D^c_\infty} l_i(n_i - 2).$$

On démontrera alors le théorème en terme de courbe discriminante en reliant la caractéristique d'Euler de la fibre $f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)$ avec des multiplicités d'intersection de la courbe discriminante. Pour cela, on effectuera une étude topologique de l'application $(f,g) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ et de son extension $(F,G) : \mathbb{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Comme (F,G) est propre, on démontrera que $(F,G) : F^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho) \to D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\}$ est un revêtement ramifié et que ses ramifications sont des points isolés de la courbe polaire de F et G.

Dans le cas à distance fini ($c \in \mathbb{C}$), le résultat clé est l'absence de point d'intersection de $F^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)$ avec D. L' application $(F,G) : F^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho) \to D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\}$ coïncide alors avec l'application $(f,g) : f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho) \to D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\}$ qui est ainsi un revêtement ramifié et ses points de ramifications sont des points de la courbe polaire de f et g. Si on considère alors Δ la courbe discriminante de f et g (i.e. l'image par (f,g) de la courbe polaire de f et g) comptée avec multiplicité (idéaux de Fitting), et $\overline{\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{C}}$ l'adhérence de Zariski dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de $\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{C}$, on obtient alors que la dimension du complexe d'irrégularité en c est égale à la multiplicité d'intersection de $\overline{\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{C}}$ avec $\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$ au point (c,∞).

Dans le cas où $c = \infty$, il peut y avoir des points d'intersection de $F^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)$ avec D. Ils sont sur les composantes irréductibles de D dicritiques pour F et G (i.e. les composantes sur lesquelles F et G sont non constantes et donc surjectives). Notons $\tilde{\Delta}$ la trace dans $\mathbb{C}^2$ de la courbe discriminante de F et G (image par (F,G) de la courbe polaire de F et G) comptée avec multiplicité. Notons Δ_2 la trace dans $\mathbb{C}^2$ de l'image par (F,G) de D comptée avec multiplicité. On trouve que la dimension de $(IR^0_\infty((j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))^{an}))_\infty$ est la multiplicité d'intersection en (∞,∞) de l'adhérence de Zariski de $\tilde{\Delta} \cup \Delta_2$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ avec $\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$ (c.f. paragraphe 5.5.4). Cela résulte d'un calcul tenant compte de la courbe Δ_2, qui empêche $f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)$ et $F^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)$ d'être égales.

L'apparition de Δ_2 provient des points d'intersection de $F^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)$ avec D. Au voisinage de l'un de ces points, P, $G^{-1}(\rho)$ et $F^{-1}(F(P))$ peuvent ne pas être transverses. P sera alors sur la courbe polaire de F et G. Dans ce cas, $\tilde{\Delta}$ et Δ_2 auront une branche commune.

1.5 La méthode par réduction à des projections.

Pour la deuxième méthode, on s'intéresse à l'irrégularité en $c \in \mathbb{C}$ de $(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g))^{an}$, avec $n \geq 2$, f et g polynômes à n variables. Dans le cas où f et g sont des polynômes à deux variables algébriquement indépendants, on rappelle qu'il s'agit d'un complexe concentré en degré 0 et à support $\{c\}$ et qu'il s'agit donc d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont on cherche la dimension. Dans le cas à n variables, avec $n \geq 3$, on calculera la caractéristique d'Euler du germe en c de ce complexe.

On commence par réduire le problème au calcul de l'irrégularité de l'image directe par une projection d'un module holonome tordu par e^{p_2}, où $p_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $p_2(x,y) = y$. Pour cela,

on considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{(f,g)} & \mathbb{C}^2 \\ & \searrow^{f} & \downarrow p_1 \\ & & \mathbb{C}, \end{array}$$

avec $p_1(x,y) = x$. On démontre alors que , $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g) = p_{1+}((f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})e^{p_2})$ et $(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ est un complexe à cohomologies holonomes régulières.

Par définition, le complexe d'irrégularité de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g)$ en $c \in \mathbb{P}^1$ est égal au complexe d'irrégularité du complexe $(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g))^{an}$ en c, où j est l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1$. Enfin, pour pouvoir utiliser le théorème de Z. Mebkhout sur la commutation du foncteur irrégularité le long d'une hypersurface et du foncteur image directe par une application propre, on rend p_1 propre en compactifiant par rapport à la deuxième variable. On considère alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

Notons $\pi_2 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ la projection par rapport au deuxième facteur, et $Z = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{C}^2$. On est alors amené à regarder le complexe d'irrégularité en c du complexe $(\pi_{1+}(i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})[*Z]e^{\pi_2}))^{an}$.

En utilisant le théorème de Z. Mebkhout sur la commutation du foncteur irrégularité le long d'une hypersurface et du foncteur image directe par une application propre, on démontrera que pour $c \in \mathbb{P}^1$:

$$\chi((IR_c(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g)))_c) = -\chi(IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2})_{(c,\infty)}),$$

où $\mathcal{N}^\bullet = i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ est un complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}$-modules à cohomologies holonomes et régulières. Pour cela, on montrera que le complexe d'irrégularité de $\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2}$ le long de $\{c\} \times \mathbb{P}^1$ est à support (c,∞). Ses espaces de cohomologie sont alors à support ponctuel. Il s'agit donc de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

On se placera alors dans un voisinage $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de (c,∞). On définit le cycle caractéristique généralisé du complexe $\mathcal{N}^{\bullet an}$ au voisinage de (c,∞), que l'on note $Cch_c(\mathcal{N}^{\bullet an})$, comme étant la somme alternée des cycles caractéristiques au voisinage de (c,∞) des modules de cohomologie de $\mathcal{N}^{\bullet an}$. Notons :

$$Cch_c(\mathcal{N}^{\bullet an}) = mT^*_U U + m^{'} T^*_{(c,\infty)} U + m^{''} T^*_{\{c\}\times U_2} U + m^{'''} T^*_{U_1\times\{\infty\}} U + \sum m_i T^*_{Z_i} U,$$

où les Z_i sont des germes de courbes irréductibles au voisinage de (c,∞) distinctes de $U_1 \times \{\infty\}$ et de $\{c\} \times U_2$. On démontre alors que :

$$\chi((IR_c(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g)))_c) = \sum_i m_i i_{(c,\infty)}(Z_i, U_1 \times \{\infty\}).$$

Dans le cas où f et g sont deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants, on a la formule :

$$dim_{\mathbb{C}}(IR^0_c(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)))_c = \sum_i m_i i_{(c,\infty)}(Z_i, U_1 \times \{\infty\}).$$

Pour démontrer cette formule, on se ramène, par un changement de variables au voisinage de (c,∞), au calcul de la caractéristique d'Euler $\chi(IR_{x=0}(\mathcal{M}^\bullet[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})_{(0,0)})$, avec $\mathcal{M}^\bullet$ complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules analytiques à cohomologies holonomes et régulières. Notons le cycle caractéristique de $\mathcal{M}^\bullet$ au voisinage de $(0,0)$ par :

$$Cch(\mathcal{M}^\bullet) = mT^*_{\mathbb{C}^2}\mathbb{C}^2 + m^{'}T^*_{(0,0)}\mathbb{C}^2 + m^{''}T^*_{x=0}\mathbb{C}^2 + m^{'''}T^*_{z=0}\mathbb{C}^2 + \sum_i m_i T^*_{Z_i}\mathbb{C}^2,$$

où les Z_i sont des germes de courbes irréductibles en $(0,0)$, distincts de $x=0$ et $z=0$. On démontrera alors le résultat suivant :

$$(*)\ \chi(IR_{x=0}(\mathcal{M}^\bullet[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})_{(0,0)}) = \sum_i m_i i_{(0,0)}(Z_i, z=0).$$

Comme on a affaire à des modules holonomes, les cycles caractéristiques ont une propriété d'additivité. Parallèlement, on voit que le membre de gauche de l'égalité $(*)$ vérifie les mêmes propriétés d'additivité que les cycles caractéristiques. On va pouvoir ainsi se réduire au calcul de la caractéristique d'Euler de $IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})_{(0,0)}$, avec $\mathcal{M}$, un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$–module holonome et régulier. On est alors amené à faire les calculs dans les deux cas suivants :

- Le cas où le lieu singulier de $\mathcal{M}$ est inclus dans $xz=0$ au voisinage de $(0,0)$ (les m_i sont tous nuls). Dans ce cas, on trouve, par un calcul local (**A2**) que la dimension de l'irrégularité est nulle.
- Le cas où le support de $\mathcal{M}$ n'est pas inclus dans $z=0$. Notons $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{C}^2$ un morphisme permettant de désingulariser $\cup Z_i \cup \{x=0\} \cup \{z=0\}$. De façon similaire à la première méthode, on se ramène à l'étude du complexe d'irrégularité $IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})$ et aux études locales de complexes d'irrégularité de modules dont le lieu singulier est un croisement normal :
  - **(A1)** $IR_{u=0}(\mathcal{N}[\frac{1}{u}]e^{\frac{1}{u^k}})$, avec $\mathcal{N}$ holonome, régulier dont le lieu singulier est inclus dans $u=0$. On démontrera que ce complexe est concentré en degré 0 et que la restriction de son 0-ième espace de cohomologie à $u=0$ est un système local de rang k.
  - **(A3)** $IR_{uv=0}(\mathcal{N}[\frac{1}{uv}]e^{\frac{1}{u^k}})$, avec $\mathcal{N}$ holonome, régulier dont le lieu singulier est inclus dans $uv=0$.
  - **(A4)** $IR_{u=0}(\mathcal{N}[\frac{1}{uv}]e^{\frac{1}{u^k}})$, avec $\mathcal{N}$ holonome, régulier dont le lieu singulier est inclus dans $uv=0$.
  - **(B1)** $IR_{uv=0}(\mathcal{N}[\frac{1}{uv}]e^{\frac{1}{u^kv^l}})$, avec $\mathcal{N}$ holonome, régulier dont le lieu singulier est inclus dans $uv=0$.
  - **(B2)** $IR_{u=0}(\mathcal{N}[\frac{1}{uv}]e^{\frac{1}{u^kv^l}})$, avec $\mathcal{N}$ holonome, régulier dont le lieu singulier est inclus dans $uv=0$.

  Dans les quatre derniers cas, on s'intéresse à la caractéristique d'Euler du germe en $(0,0)$ de ces complexes et on montre qu'elle est nulle sauf dans le cas **(A4)**.

Pour faire un lien entre les deux méthodes, dans le cas où f et g sont deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants, on montre en premier lieu que les Z_i sont les branches irréductibles de $\overline{\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{C}}$, si $c \in \mathbb{C}$ et de $\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2}$, si $c=\infty$. Il suffit pour cela de regarder le lieu singulier de $(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ et de voir qu'il est inclus dans la courbe en dehors de laquelle (f,g) n'est par un revêtement. Enfin, il faut montrer que les multiplicités de $i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ sur $T^*_{Z_i}U$ sont les multiplicités des germes irréductibles Z_i dans $\overline{\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{C}}$,

si $c \in \mathbb{C}$ et dans $\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2}$, si $c = \infty$. Pour cela, si $(c^{'}, \rho) \in Z_i$, avec $|\rho|$ suffisamment grand, on étudie le morphisme (F, G) au voisinage de chaque point P de $F^{-1}(c^{'}) \cap G^{-1}(\rho)$. On constate que (F, G) peut s'écrire simplement , dans des coordonnées au voisinage de P. Comme le morphisme (F, G) est fini, on se ramène, après des changements de coordonnées au but et à la source, au calcul du germe en $(0, 0)$ de la cohomologie de l'image directe par (x, y^k) du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$, si $P \notin D$ et du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{y}]$, si $P \in D$.

1.6 Plan de la thèse.

Dans le chapitre 2, on rappellera des résultats classiques sur les images inverses et les images directes de $\mathcal{D}$-modules, sur les complexes d'irrégularité, sur les $\mathcal{D}$-modules irréguliers associés à une application méromorphe et sur les cycles caractéristiques. Nous donnerons également des propriétés d'additivité sur les cycles caractéristiques et sur des caractéristiques d'Euler.

Le chapitre 3 répertorie les calculs locaux dont nous auront besoin dans les études du complexe d'irrégularité de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g)$ des chapitres 5 et 6. On considèrera les complexes d'irrégularité suivants :

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module holonome régulier dont le lieu singulier est inclus dans $xy = 0$. Soit $k, l > 0$.

- **(A1)** Si le lieu singulier de $\mathcal{M}$ est inclus dans $x = 0$, $IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})$ est concentré en degré 0 et la restriction de son 0-ième espace de cohomologie à $x = 0$ est un système local de rang k.
- **(A2)** $IR_{y=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}}) = 0$.
- **(A3)** $\chi(IR_{xy=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_{(0,0)} = 0$.
- **(A4)** $\chi(IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_{(0,0)}) = (rg(\mathcal{M}) - m)k$, où m est la multiplicité de $\mathcal{M}$ sur $T^*_{y=0}\mathbb{C}^2$.
- **(B1)** $\chi(IR_{xy=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k y^l}})_{(0,0)}) = 0$.
- **(B2)** $\chi(IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k y^l}})_{(0,0)}) = 0$.

Les démonstrations de ce chapitre consiste à calculer la fonction caractéristique de ces conplexes d'irrégularité à l'aide de celle d'un complexe de cycles proches. Elles utilisent un résultat de C. Sabbah ([35]) permettant d'expliciter la fonction caractéristique du complexe $IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]e^{\frac{1}{f}})$ comme étant la restriction à $f^{-1}(0)$ de celle du complexe $\Psi_f(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]))$. Le résultat quand f et g sont deux polynômes distincts m'a aussi été indiqué par C. Sabbah.

Dans le chapitre 4, on se place dans le cas particulier où f et g sont deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants. On définira alors la notion de résolution à l'infini de deux polynômes. Ensuite, on démontrera à l'aide du résultat de F. Maaref ([24]) que le complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$ est concentré en degré 0 en dehors d'un nombre fini de points et que pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, son complexe d'irrégularité en c est concentré en degré 0. Pour calculer la cohomologie du complexe d'irrégularité en c de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$, il restera donc à calculer la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(IR^0_c(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)))_c$.

Dans le chapitre 5, on détaillera le calcul par résolution à l'infini, de la dimension de ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel, pour obtenir une interprétation géométrique en terme de courbes discriminantes.

Enfin, dans le chapitre 6, on présentera la méthode par réduction à des projections dans le but de traduire l'irrégularité en terme de cycles caractéristiques. Pour finir, nous comparerons les résultats obtenus par les deux méthodes dans le cas de deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants.

Chapitre 2

Préliminaires.

2.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques définitions et résultats classiques.

Dans un premier temps, nous définirons l'image inverse et l'image directe des $\mathcal{D}$-modules. Dans le cas algébrique, nous rappellerons le théorème de composition des images directes. Nous montrerons que l'image directe analytique d'un $\mathcal{D}$-module algébrique cohérent par un morphisme propre coïncide avec l'analytisé de son image directe algébrique.

Dans un deuxième temps, en utilisant le complexe d'irrégularité d'un $\mathcal{D}$-module analytique, nous définirons le complexe d'irrégularité d'un $\mathcal{D}$-module algébrique. Nous donnerons alors le théorème de commutation du foncteur d'irrégularité le long d'une hypersurface et du foncteur image directe analytique par une application propre.

Ensuite, nous définirons un $\mathcal{D}$-module irrégulier associé à une application méromorphe. Cela consiste à tordre un $\mathcal{D}$-module par l'exponentielle de cette application. Nous étudierons alors l'effet sur ce module de l'image directe par une inclusion du complementaire d'une courbe et de l'image inverse.

Puis nous introduirons les cycles caractéristiques de $\mathcal{D}$-modules. Dans le chapitre 6, nous aurons besoin de connaître des renseignements sur le cycle caractéristique de l'image inverse par une modification d'un $\mathcal{D}$-module.

Enfin, nous donnerons des propriétés d'additivité utiles dans les chapitres 3 et 6, sur les cycles caractéristiques et sur la caractéristique d'Euler de complexes liés au complexe d'irrégularité.

2.2 Image inverse et image directe de $\mathcal{D}$-modules.

Image inverse de $\mathcal{D}$-modules analytiques.

Dans ce paragraphe, on ne considèrera que des $\mathcal{D}$-modules analytiques. Pour plus de détails, voir [26].

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés analytiques complexes lisses.

DEFINITION 2.2.1. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_Y$-module à gauche. On appelle image inverse de $\mathcal{M}$, le $\mathcal{D}_X$-module à gauche :*

$$f^*(\mathcal{M}) = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} f^{-1}(\mathcal{M}),$$

muni de la structure de $\mathcal{D}_X$-module à gauche définie en coordonnées locales par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a \otimes m) = \frac{\partial a}{\partial x_i} \otimes m + \sum_{j=1}^{p} a \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial y_j} m,$$

où a est une section de $\mathcal{O}_X$ et m une section de $f^{-1}(\mathcal{M})$.

REMARQUE 2.2.2. *Si f est un isomorphisme, $f^*(\mathcal{M})$ est naturellement isomorphe à $f^{-1}(\mathcal{M})$.*

La famille des $\mathcal{D}_Y$-modules plats étant une famille acyclique pour le foncteur f^* et la catégorie des $\mathcal{D}_Y$-modules ayant assez d'objet plats, on peut définir le foncteur dérivé :

DEFINITION 2.2.3. *$\mathbb{L}f^* : D^-(\mathcal{D}_Y^{an}) \to D^-(\mathcal{D}_X^{an})$, où $D^-(\mathcal{D}_Y^{an})$ (resp. $D^-(\mathcal{D}_X^{an})$) désigne la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{D}_Y$-modules (resp. $\mathcal{D}_X$-modules) à gauche bornés à droite.*

Si $\mathcal{M}^\bullet \in D^-(\mathcal{D}_Y^{an})$ et $\mathcal{P}^\bullet$ est une résolution plate de $\mathcal{M}^\bullet$, on pose alors :

$$\mathbb{L}f^*(\mathcal{M}^\bullet) = f^*(\mathcal{P}^\bullet).$$

REMARQUE 2.2.4. *Si f est un isomorphisme, $\mathbb{L}f^*(\mathcal{M}^\bullet)$ est naturellement isomorphe à $f^{-1}(\mathcal{M}^\bullet)$.*

PROPOSITION 2.2.5. *Si $\mathcal{M}^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules à cohomologies holonomes et $f : X \to Y$ est un morphisme propre de variétés algébriques complexes lisses, alors $\mathbb{L}f^*(\mathcal{M}^\bullet)$ est un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologies holonomes.*

(c.f. [1] page 292).

Image directe de $\mathcal{D}$-modules.

On trouvera les différents résultats de ce paragraphe dans [1], pour le cas algébrique et dans [25], pour le cas analytique.

Image directe de $\mathcal{O}$-modules.

On notera ici indifféremment $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes ou des fonctions régulières.

Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre deux variétés algébriques complexes lisses.

DEFINITION 2.2.6. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module. L'image directe de $\mathcal{M}$ est le $\mathcal{O}_Y$-module défini par :*

$$(f_*(\mathcal{M}))(V) = \mathcal{M}(f^{-1}(V)),$$

avec V ouvert de Y.

f_* est un foncteur exact à gauche. On peut définir le foncteur dérivé :

DEFINITION 2.2.7. *$\mathbb{R}f_* : D(\mathcal{O}_X) \to D(\mathcal{O}_Y)$, où $D(\mathcal{O}_X)$ (resp. $D(\mathcal{O}_Y)$) désigne la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{O}_X$-modules (resp. $\mathcal{O}_Y$-modules).*

Si $\mathcal{M}^\bullet \in D(\mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{I}^\bullet$ est une résolution injective de $\mathcal{M}^\bullet$, on pose alors :

$$\mathbb{R}f_*(\mathcal{M}^\bullet) = f_*(\mathcal{I}^\bullet).$$

Modules de transfert.

1. Version algébrique :
   Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques complexes lisses. Soit ω_X (resp. ω_Y) le faisceau des formes régulières de dimension maximale sur X (resp. Y).

   DEFINITION 2.2.8. *On définit le $(\mathcal{D}_X, f^{-1}(\mathcal{D}_Y))$-bimodule $\mathcal{D}_{X\to Y}$ par :*

   $$\mathcal{D}_{X\to Y} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} f^{-1}(\mathcal{D}_Y).$$

   On notera $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ le $(f^{-1}(\mathcal{D}_Y), \mathcal{D}_X)$-bimodule :

   $$\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} = \mathcal{H}om_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)}(\omega_Y, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}).$$

2. Version analyique : Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés analytiques complexes lisses. On définit de la même manière les modules de transfert $\mathcal{D}_{X\to Y}$ et $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ en utilisant les opérateurs différentiels analytiques et les fonctions holomorphes.

Image directe algébrique d'un complexe de $\mathcal{D}$-modules à droite.

DEFINITION 2.2.9. *Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à droite quasi-cohérents et $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques complexes lisses. On définit alors l'image directe par f du complexe $\mathcal{M}^\bullet$ par :*

$$f_+(\mathcal{M}^\bullet) = Rf_*(\mathcal{M}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y})).$$

PROPOSITION 2.2.10. *f_+ est un δ-foncteur de la catégorie $D^b(\mathcal{D}_X)$ des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$-modules à droite quasi-cohérents dans la catégorie $D^b(\mathcal{D}_Y)$ des complexes bornés de $\mathcal{D}_Y$-modules à droite quasi-cohérents. De plus, si $\mathcal{M}^\bullet$ est à cohomologies holonomes, $f_+(\mathcal{M}^\bullet)$ est également à cohomologies holonomes.*

(c.f. [1] page 292).

Image directe algébrique d'un complexe de $\mathcal{D}$-modules à gauche.

NOTATION 2.2.11. *On note ω_X le faisceau des formes régulières de dimension maximale sur X.*

- *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module à gauche algébrique. On lui associe un $\mathcal{D}_X$-module à droite défini par :*
  $$\mathcal{M}^{(d)} = \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}.$$
- *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module à droite algébrique. On lui associe un $\mathcal{D}_X$-module à gauche défini par :*
  $$\mathcal{M}^{(g)} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \mathcal{M}).$$

DEFINITION 2.2.12. *Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche quasi-cohérents et $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques complexes lisses. On définit alors l'image directe par f du complexe $\mathcal{M}^\bullet$ par :*

$$f_+(\mathcal{M}^\bullet) = (f_+(\mathcal{M}^{\bullet(d)}))^{(g)}.$$

PROPOSITION 2.2.13. *f_+ est un δ-foncteur de la catégorie $D^b(\mathcal{D}_X)$ des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche quasi-cohérents dans la catégorie $D^b(\mathcal{D}_Y)$ des complexes bornés de $\mathcal{D}_Y$-modules à gauche quasi-cohérents. De plus, si $\mathcal{M}^\bullet$ est à cohomologies holonomes, $f_+(\mathcal{M}^\bullet)$ est également à cohomologies holonomes.*

(c.f. [1] page 292).

PROPOSITION 2.2.14. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques complexes lisses.*

1. *Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche quasi-cohérents. On a alors : $f_+(\mathcal{M}) = Rf_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}^\bullet)$.*
2. *Notons n la dimension de X. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module à gauche quasi-cohérent. Alors $f_+(\mathcal{M})$ est le complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules à gauche associé au complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules à droite $Rf_*(\Omega_X^{n+\bullet}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}))$.*

Démonstration

1. Soit $\mathcal{I}^\bullet$ une résolution injective de $(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^\bullet) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}$.

   Le complexe $\mathcal{H}om_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}(\omega_Y), \mathcal{I}^\bullet)$ est alors une résolution flasque du complexe $\mathcal{H}om_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}(\omega_Y), (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^\bullet) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y})$. Ainsi,

   $$\begin{aligned}(f_+(\mathcal{M}^{\bullet(d)}))^{(g)} &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\omega_Y, Rf_*((\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^\bullet) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y})) \\ &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\omega_Y, f_*(\mathcal{I}^\bullet)) \\ &= f_*(\mathcal{H}om_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}(\omega_Y), \mathcal{I}^\bullet)) \\ &= Rf_*(\mathcal{H}om_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}(\omega_Y), (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^\bullet) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y})).\end{aligned}$$

   Soit $\mathcal{P}^\bullet$ une résolution $\mathcal{D}_X$-plate de $\mathcal{M}^\bullet$. Alors, $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^\bullet$ est une résolution $\mathcal{D}_X$-plate de $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^\bullet$. Ainsi,

   $$\begin{aligned}&\mathcal{H}om_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}(\omega_Y), (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^\bullet) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \\ &= \mathcal{H}om_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}(\omega_Y), (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^\bullet) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \\ &= \mathcal{H}om_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}(\omega_Y), \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{P}^\bullet \\ &= \mathcal{H}om_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}(\omega_Y), \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}^\bullet.\end{aligned}$$

   D'où $f_+(\mathcal{M}^\bullet) = Rf_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}^\bullet)$.
2. Ce deuxième isomorphisme est donné en exercice dans [25] dans le cas analytique (exercice 2.1.15). On y trouvera les définitions utiles dans la démonstration qui suit en les transposant au cas algébrique. On montre tout d'abord que l'on a l'isomorphisme suivant :

   $$\Omega_X^{n+\bullet}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \simeq \mathcal{M}^{(d)} \otimes_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} Sp_X^\bullet(\mathcal{D}_X)).$$

   Comme $\mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} Sp_X^\bullet(\mathcal{D}_X)$ est une résolution de $\mathcal{D}_{X\to Y}$ par des $f^{-1}(\mathcal{D}_Y)$-modules à droite localement libres sur $\mathcal{D}_X$, on a :

   $$\mathcal{M}^{(d)} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y} = \mathcal{M}^{(d)} \otimes_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} Sp_X^\bullet(\mathcal{D}_X)).$$

   D'où :

   $$\begin{aligned}f_+(\mathcal{M}^{(d)}) &= Rf_*(\mathcal{M}^{(d)} \otimes_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} Sp_X^\bullet(\mathcal{D}_X))) \\ &= Rf_*(\Omega_X^{n+\bullet}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{D}_{X\to Y}))\end{aligned}$$

   On a donc $f_+(\mathcal{M}) = (Rf_*(\Omega_X^{n+\bullet}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{D}_{X\to Y})))^{(g)}$.

□

Composition des images directes algébriques.

PROPOSITION 2.2.15. *Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes de variétés algébriques complexes lisses. On a alors, dans la catégorie des complexes de $\mathcal{D}_X$-modules algébriques à gauche quasi-cohérents, $(g \circ f)_+ = g_+ \circ f_+$.*

Démonstration

Nous allons faire la démonstration pour les complexes de $\mathcal{D}_X$-modules à droite. Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à droite quasi-cohérents.

$g_+f_+(\mathcal{M}^\bullet) = Rg_*(Rf_*(\mathcal{M}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to Z})$. Soit $\mathcal{L}^\bullet$ une résolution localement libre sur $\mathcal{D}_X$ de $\mathcal{M}^\bullet$. Alors, $\mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}$ est localement libre sur $f^{-1}(\mathcal{D}_Y)$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
g_+f_+(\mathcal{M}^\bullet) &= Rg_*(Rf_*(\mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to Z}) \\
&= Rg_*Rf_*((\mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}(\mathcal{D}_Y)} f^{-1}(\mathcal{D}_{Y\to Z})) \\
&\quad \text{(par la formule de projection.)} \\
&= Rg_*Rf_*((\mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{D}_Y)} f^{-1}(\mathcal{D}_{Y\to Z})) \\
&= R(g \circ f)_*(\mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Z}) \\
&= R(g \circ f)_*(\mathcal{M}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Z}) \\
&= (g \circ f)_+(\mathcal{M}^\bullet).
\end{aligned}$$

□

REMARQUE 2.2.16. *Considérons le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
\downarrow{\scriptstyle \tilde{g}} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\
\tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y}
\end{array} .$$

D'après la proposition précédente, on a pour tout complexe $\mathcal{M}^\bullet$ de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche quasi-cohérents, $g_+f_+(\mathcal{M}^\bullet) = (g \circ f)_+(\mathcal{M}^\bullet) = (\tilde{f} \circ \tilde{g})_+(\mathcal{M}^\bullet) = \tilde{f}_+ \circ \tilde{g}_+(\mathcal{M}^\bullet)$

Image directe analytique d'un $\mathcal{D}$-module.

Dans ce paragraphe, on ne considère que des $\mathcal{D}_X$-modules analytiques. On définit alors l'image directe analytique de la façon suivante :

DEFINITION 2.2.17. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés analytiques complexes lisses.*

1. *Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à droite. On définit alors l'image directe par f du complexe $\mathcal{M}^\bullet$ par :*

$$f_+(\mathcal{M}^\bullet) = Rf_*(\mathcal{M}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y})).$$

2. *Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche. On définit alors l'image directe par f du complexe $\mathcal{M}^\bullet$ par :*

$$f_+(\mathcal{M}^\bullet) = (f_+(\mathcal{M}^{\bullet(d)}))^{(g)}.$$

Image directe algébrique-Image directe analytique.

Dans la suite, on notera :
- $\mathcal{O}_X$ le faisceau algébrique des fonctions régulières sur X,
- $\mathcal{H}_X$ le faisceau analytique des fonctions holomorphes sur X,
- $\mathcal{A}_X$ le faisceau algébrique des opérateurs différentiels sur X,
- $\mathcal{D}_X$ le faisceau analytique des opérateurs différentiels sur X.

DEFINITION 2.2.18. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_X$-module. On définit l'analytisé de $\mathcal{M}$ de la façon suivante :*

$$\mathcal{M}^{an} = \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}'_X} \mathcal{H},$$

où $\mathcal{M}'$ (resp. $\mathcal{O}'_X$) est l'image réciproque de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{O}_X$) par l'application continue $X^{an} \to X$ (X^{an} munie de la topologie usuelle et X munie de la topologie de Zariski).

PROPOSITION 2.2.19. *Si $F : X \to Y$ est un morphisme propre, avec X variété projective et $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}_X$-module à gauche cohérent, on a $(F_+(\mathcal{M}))^{an} = F_+^{an}(\mathcal{M}^{an})$.*

Démonstration

On va faire le raisonnement pour les $\mathcal{A}_X$-modules à droite. Il suffira alors de faire le passage module à droite, module à gauche pour avoir le résultat.

1. Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, et $F : X \to Y$ un morphisme propre avec X variété projective. Démontrons que $(RF_*(\mathcal{G}))^{an} = RF_*^{an}(\mathcal{G}^{an})$. Soit $y \in Y$. Comme F est propre, d'après le théorème de changement de base, on a $(R^pF_*(\mathcal{G}))_y = H^p(F^{-1}(y), \mathcal{G})$ et $(R^pF_*^{an}(\mathcal{G}^{an}))_y = H^p(F^{-1}(y), \mathcal{G}^{an})$. Or $F^{-1}(y)$ est une variété projective et $\mathcal{G}$ est $\mathcal{O}_X$-cohérent. Ainsi, d'après GAGA (c.f. théorème 1 de [37]), on a $H^p(F^{-1}(y), \mathcal{G}) \simeq H^p(F^{-1}(y), \mathcal{G}^{an})$. D'où $(RF_*(\mathcal{G}))^{an} = RF_*^{an}(\mathcal{G}^{an})$.
2. Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, et $F : X \to Y$ un morphisme propre, avec X variété projective. Démontrons que $(F_+(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X))^{an} = F_+^{an}(\mathcal{G}^{an} \otimes_{\mathcal{H}_X} \mathcal{D}_X)$. On a tout d'abord $(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}_X} \mathcal{A}_{X\to Y} = \mathcal{G} \otimes_{F^{-1}\mathcal{O}_Y} F^{-1}\mathcal{A}_Y$. En effet :
   Comme $\mathcal{A}_X$ est $\mathcal{O}_X$-plat, si $\mathcal{P}^\bullet$ est une résolution $\mathcal{O}_X$-plate de $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{P}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X$ est une résolution $\mathcal{A}_X$-plate de $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}_X} \mathcal{A}_{X\to Y} &= \mathcal{G} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_{X\to Y} \\ &= \mathcal{G} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X \otimes_{F^{-1}\mathcal{O}_Y} F^{-1}\mathcal{A}_Y).\end{aligned}$$

   On sait de plus que $F^{-1}\mathcal{A}_Y$ est libre sur $F^{-1}\mathcal{O}_Y$. On a ainsi $(\mathcal{O}_X \otimes_{F^{-1}\mathcal{O}_Y} F^{-1}\mathcal{A}_Y)$ libre sur $\mathcal{O}_X$ donc $\mathcal{O}_X$-plat. On a alors :

$$(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}_X} \mathcal{A}_{X\to Y} = \mathcal{G} \otimes_{F^{-1}\mathcal{O}_Y} F^{-1}\mathcal{A}_Y.$$

   Par le même raisonnement dans le cadre analytique, on montre que :

$$(\mathcal{G}^{an} \otimes_{\mathcal{H}_X} \mathcal{D}_X) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y} = \mathcal{G}^{an} \otimes_{F^{-1}\mathcal{H}_Y} F^{-1}\mathcal{D}_Y.$$

   Ainsi, d'après la définition de l'image directe d'un module à droite, on a :

$$\begin{aligned}(F_+(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X))^{an} &= (RF_*(\mathcal{G} \otimes_{F^{-1}\mathcal{O}_Y} F^{-1}\mathcal{A}_Y))^{an} \\ &= (RF_*(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A}_Y)^{an} \\ &= (RF_*(\mathcal{G}))^{an} \otimes_{\mathcal{H}_Y} \mathcal{D}_Y \\ &= RF_*^{an}(\mathcal{G}^{an}) \otimes_{\mathcal{H}_Y} \mathcal{D}_Y, \text{ d'après 1.} \\ &= RF^{an}(\mathcal{G}^{an} \otimes_{F^{-1}(\mathcal{H}_Y)} F^{-1}(\mathcal{D}_Y)) \\ &= F_+^{an}(\mathcal{G}^{an} \otimes_{\mathcal{H}_X} \mathcal{D}_X).\end{aligned}$$

3. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_X$-module cohérent. Comme on est dans une situation algégrique, $\mathcal{M}$ admet globalement une bonne filtration (c.f. [1] lemme 2.3 page 220). On sait alors qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{L}_0$ qui engendre $\mathcal{M}$. Il existe donc un morphisme $\mathcal{L}^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ qui est surjectif. Comme $\mathcal{L}^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X$ admet globalement une bonne filtration, $ker(\pi)$ admet également une bonne filtration. On obtient ainsi une suite exacte :
$$\mathcal{L}^N \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X \to \ldots \to \mathcal{L}^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X \to \mathcal{M} \to 0.$$
avec $\mathcal{L}^i$ $\mathcal{O}_X$-modules cohérents. Notons $\mathcal{N}$ le noyau du morphisme $\mathcal{L}^N \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X \to \mathcal{L}^{N-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X$. On a alors la suite exacte de complexes :
$$0 \to \mathcal{N}[N] \to \mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X \to \mathcal{M} \to 0.$$
On a donc la suite exacte longue de cohomologie :
$$\ldots \to \mathcal{H}^{i+N} F_+\mathcal{N} \to \mathcal{H}^i F_+(\mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X) \to \mathcal{H}^i F_+\mathcal{M} \to \mathcal{H}^{i+N+1} F_+\mathcal{N} \to \ldots$$
De même, en raisonnant dans le cadre analytique, on a :
$$\ldots \to \mathcal{H}^{i+N} F_+^{an}\mathcal{N}^{an} \to \mathcal{H}^i F_+^{an}((\mathcal{L}^\bullet)^{an} \otimes_{\mathcal{H}_X} \mathcal{D}_X) \to \mathcal{H}^i F_+^{an}\mathcal{M}^{an} \to \mathcal{H}^{i+N+1} F_+^{an}\mathcal{N}^{an} \to \ldots$$
Or :
- $\mathcal{H}^i(F_+(\mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X))^{an} = \mathcal{H}^i F_+^{an}((\mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X)^{an})$, d'après 2.
- Notons $n = dim X$. Comme l'image directe algébrique et analytique d'un module vit en degrés $[-n, 2n]$, pour un N suffisamment grand, on aura :
  - $\mathcal{H}^{i+N} F_+\mathcal{N} = \mathcal{H}^{i+N+1} F_+\mathcal{N} = 0$,
  - $\mathcal{H}^{i+N} F_+^{an}\mathcal{N}^{an} = \mathcal{H}^{i+N+1} F_+^{an}\mathcal{N}^{an} = 0$.

On a donc :
$$\begin{aligned}(\mathcal{H}^i F_+\mathcal{M})^{an} &= (\mathcal{H}^i F_+(\mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X))^{an} \\ &= \mathcal{H}^i F_+^{an}((\mathcal{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_X)^{an}) \\ &= \mathcal{H}^i F_+^{an}((\mathcal{L}^\bullet)^{an} \otimes_{\mathcal{H}_X} \mathcal{D}_X) \\ &= \mathcal{H}^i F_+^{an}\mathcal{M}^{an}.\end{aligned}$$

□

2.3 Complexe d'irrégularité.

Complexe d'irrégularité d'un complexe de $\mathcal{D}$-modules analytiques.

Nous allons donner ici des définitions équivalentes de l'irrégularité d'un $\mathcal{D}$-module analytique le long d'une hypersurface. Pour plus de détails, voir [30].

Soit X une variété analytique complexe lisse et Z un fermé analytique de X.

DEFINITION 2.3.1. *Pour $\mathcal{M}^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_X^{an})$, on définit le complexe d'irrégularité par :*
$$IR_Z(\mathcal{M}^\bullet) := cône\Big(DR(\mathcal{M}^\bullet[*Z]) \to Ri_* i^{-1}(DR(\mathcal{M}^\bullet[*Z]))\Big),$$
où $i : X \setminus Z \to X$ est l'inclusion ouverte de $X \setminus Z$ dans X.

Une autre façon de voir le complexe d'irrégularité le long d'une hypersurface consiste à utiliser le triangle distingué de cohomologie locale dans $D^b(\mathcal{D}_X^{an})$:

$$\begin{array}{ccc} & Ri_*i^{-1}(DR(\mathcal{M}^\bullet[*Z])) & \\ {\scriptstyle [+1]}\swarrow & & \nwarrow \\ R\Gamma_Z(DR(\mathcal{M}^\bullet[*Z])) & \longrightarrow & DR(\mathcal{M}^\bullet[*Z]), \end{array}$$

où $i : X \setminus Z \to X$ est l'inclusion ouverte de $X \setminus Z$ dans X.

On a alors :

DEFINITION 2.3.2. *Pour $\mathcal{M}^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_X^{an})$, on définit le complexe d'irrégularité par :*

$$IR_Z(\mathcal{M}^\bullet) := R\Gamma_Z(DR(\mathcal{M}^\bullet[*Z]))[+1]$$

Ce complexe est dans la catégorie $D^b(\underline{\mathbb{C}}_X)$ des complexes bornés de faisceaux de $\underline{\mathbb{C}}_X$-espaces vectoriels.

PROPOSITION 2.3.3. *Soit Z une hypersurface de X. IR_Z est un δ-foncteur de la catégorie des complexes de $D_h^b(\mathcal{D}_X^{an})$ dans la catégorie des complexes de $D^b_{const}(\underline{\mathbb{C}}_X)$ à support dans Z.*

On trouvera également dans [30], le résultat fondamental suivant :

THEOREME 2.3.4. *Soit Z une hypersurface de X. IR_Z est un foncteur exact de la catégorie abélienne $Mod_h(\mathcal{D}_X)$ dans la catégorie $Perv(\underline{\mathbb{C}}_Z)$, catégorie abélienne des complexes $\mathcal{F}^\bullet$ de $\underline{\mathbb{C}}_X$-espaces vectoriels à support dans Z tels que $\mathcal{F}^\bullet[-1] \in Perv(\underline{\mathbb{C}}_X)$.*

NOTATION 2.3.5. *On notera $IR_Z^k(\mathcal{M})$ le k-ième faisceau de cohomologie de $IR_Z(\mathcal{M})$.*

DEFINITION 2.3.6. *Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologies holonomes. On dit que $\mathcal{M}^\bullet$ est régulier si pour toute hypersurface Z de X, son complexe d'irrégularité le long de Z est nul.*

Complexe d'irrégularité d'un $\mathcal{D}$-module algébrique.

Soit X une variété algébrique affine complexe lisse. Dans le cas algébrique, il faut tenir compte du diviseur à l'infini.

Soit $j : X \to \mathbb{P}^n$ une immersion de X dans un espace projectif. Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologies holonomes et Z une sous variété localement fermée de $\mathbb{P}^n$.

DEFINITION 2.3.7. *On appelle complexe d'irrégularité de $\mathcal{M}^\bullet$ le long de Z et on note $IR_Z(j_+(\mathcal{M}^\bullet))$, le complexe $IR_{Z^{an}}(j_+(\mathcal{M}^\bullet)^{an})$, où Z^{an} est la variété analytique associée à Z.*

EXEMPLE : Si $X = \mathbb{C}$ et $\mathcal{M}^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-modules à cohomologies holonomes, on note $j : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ et on a, pour tout $c \in \mathbb{P}^1$,

$$IR_c(j_+(\mathcal{M}^\bullet)) = IR_c(j_+(\mathcal{M}^\bullet)^{an}).$$

DEFINITION 2.3.8. *On dit que $\mathcal{M}^\bullet$ est régulier si son complexe d'irrégularité est nul le long de toute sous-variété de $\mathbb{P}^n$.*

Complexe d'irrégularité et image directe.

Nous aurons besoin d'un autre résultat qui concerne la commutation du foncteur image directe analytique par une application propre et du foncteur irrégularité le long d'un sous-espace analytique fermé. Nous nous plaçons dans le cadre analytique.

THEOREME 2.3.9. *Si $\pi : X \to Y$ est un morphisme propre de variétés analytiques complexes lisses, alors pour toute hypersurface T de Y et tout complexe borné de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologies holonomes $\mathcal{M}^\bullet$, nous avons l'isomorphisme dans $D^b_{const}(\mathbb{C}_X)$:*

$$IR_T(\pi_+(\mathcal{M}^\bullet))[dimY] \simeq R\pi_*(IR_{\pi^{-1}(T)}(\mathcal{M}^\bullet))[dimX]$$

Démonstration

Cette démonstration a été donnée par Z. Mebkhout. Nous rappelons ici la démonstration donnée dans [3]. Cet isomorphisme vient des trois résultats suivants :

1. $R\pi_* \circ R\Gamma_{\pi^{-1}(T)} = R\Gamma_T \circ R\pi_*$.
2. Si $\mathcal{N}^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologies holonomes, $DR\pi_+(\mathcal{N}^\bullet)[dim\ Y] \simeq R\pi_* DR(\mathcal{N}^\bullet)[dim\ X]$(c.f. [32] II.5.5).
3. Si π est un morphisme propre, $(\pi_+(\mathcal{M}^\bullet))[*T] \simeq \pi_+(\mathcal{M}^\bullet[*\pi^{-1}(T)])$ (c.f. [29] page 88).

D'où :

$$\begin{aligned} R\pi_*(IR_{\pi^{-1}(T)}(\mathcal{M}^\bullet))[dim\ X] &= R\pi_*(R\Gamma_{\pi^{-1}(T)}(DR(\mathcal{M}^\bullet[*\pi^{-1}(T)])))[dim\ X] \\ &= R\Gamma_T(R\pi_*(DR(\mathcal{M}^\bullet[*\pi^{-1}(T)])))[dim\ X] \\ &= R\Gamma_T(DR(\pi_+(\mathcal{M}^\bullet[*\pi^{-1}(T)])))[dim\ Y] \\ &= R\Gamma_T(DR(\pi_+(\mathcal{M}^\bullet)[*T]))[dim\ Y] \\ &= IR_T(\pi_+(\mathcal{M}^\bullet))[dim\ Y]. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 2.3.10. *1. La catégorie $D^b_{hr}(\mathcal{D}^{an}_X)$ des complexes holonomes réguliers de $\mathcal{D}_X$-modules analytiques est stable par image directe propre.*

2. La catégorie $D^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$ des complexes holonomes réguliers de $\mathcal{D}_X$-modules algébriques est stable par image directe.

Une démonstration de ce corollaire est donnée dans [30] page 76.

Complexe d'irrégularité et image inverse par une modification.

Soit $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{C}^2$ une modification (i.e. une suite d'éclatement de l'origine dans $\mathbb{C}^2$). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module analytique holonome. Soit Z une hypersurface de $\mathbb{X}$ contenant le lieu exceptionnel $\pi^{-1}(0,0)$. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 2.3.11.

$$IR_Z(\mathbb{L}\pi^*(\mathcal{M})) = IR_Z(\pi^*(\mathcal{M})).$$

Démonstration

Pour démontrer cette égalité, il suffit de montrer que $\mathbb{L}\pi^*(\mathcal{M})[*Z] = \pi^*(\mathcal{M})[*Z]$.

On sait qu'il existe un morphisme de complexes $\mathbb{L}\pi^*(\mathcal{M}) \to \pi^*(\mathcal{M})$. Notons $\mathcal{C}^\bullet$ le cône de ce morphisme. Comme π est un isomorphisme en dehors de Z, $\mathcal{C}^\bullet$ est à support dans Z. Ainsi, $\mathcal{C}^\bullet[*Z] = 0$. Le foncteur de localisation par rapport à Z étant un δ-foncteur, on obtient $\mathbb{L}\pi^*(\mathcal{M})[*Z] = \pi^*(\mathcal{M})[*Z]$.

□

2.4 $\mathcal{D}$-module élémentaire.

Définition.

Soit X une variété algébrique complexe lisse et $h : X \to \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ une application méromorphe.

On définit le $\mathcal{D}_X$-module à gauche $\mathcal{O}_X[*h^{-1}(\infty)]e^h$ par :

– $\mathcal{O}_X[*h^{-1}(\infty)]e^h$ est égal à $\mathcal{O}_X[*h^{-1}(\infty)]$ en tant que $\mathcal{O}_X$-module.

– Si ξ est un champ de vecteurs sur U ouvert de X,

$$\xi(ge^h) = \xi(g)e^h + g\xi(h)e^h.$$

REMARQUE 2.4.1. *Si ξ est un champ de vecteurs sur U ouvert de X, tel que pour tout $x \in U$, $h(x) \neq \infty$, alors $\xi(h)$ est une fonction régulière sur U. Mais si il existe un x dans U tel que $h(x) = \infty$, h et $\xi(h)$ sont méromorphes sur U. Il s'agit d'une section sur U de $\mathcal{O}_X[*h^{-1}(\infty)]$.*

On a ainsi $\xi : \mathcal{O}_X[*h^{-1}(\infty)] \to \mathcal{O}_X[*h^{-1}(\infty)]$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module à gauche algébrique cohérent.

DEFINITION 2.4.2. *$\mathcal{M}e^h$ est le $\mathcal{D}_X$-module à gauche : $\mathcal{M}e^h = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[*h^{-1}(\infty)]e^h$.*

REMARQUE 2.4.3. *Ce complexe a bien une structure de $\mathcal{D}_X$-module à gauche puisqu'il s'agit du produit tensoriel sur $\mathcal{O}_X$ de deux $\mathcal{D}_X$-modules à gauche.*

La structure de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche est donnée par :

$$\xi(m \otimes ae^h) = \xi(m) \otimes ae^h + m \otimes (\xi(a) + a\xi(h))e^h,$$

où ξ est un champ de vecteurs sur U ouvert de X.

PROPOSITION 2.4.4. *1. Le foncteur $F : D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathcal{D}_X)$, tel que $F(\mathcal{M}^\bullet) = \mathcal{M}^\bullet e^h$ est un δ-foncteur.*

2. Si $\mathcal{M}^\bullet$ est un complexe à cohomologies holonomes, alors $\mathcal{M}^\bullet e^h$ est une complexe à cohomologies holonomes.

Démonstration

1. Pour montrer que F est un δ-foncteur, il suffit de remarquer que $\mathcal{O}_X[*h^{-1}(\infty)]e^h$ est un module $\mathcal{O}_X$-plat.
2. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. On sait que $\mathcal{O}_X[*h^{-1}(\infty)]e^h$ est également holonome (c.f. théorème 1 de [5]). Comme le produit tensoriel de deux modules holonomes est holonome (c.f. théorème 4.6. de [19]), on a $\mathcal{M}e^h$ holonome.

□

REMARQUE 2.4.5. *On donne une définition analogue à la définition 2.4.2 dans le cas d'un $\mathcal{D}_X$-module à gauche analytique.*

Image directe par une inclusion ouverte.

Soit X une variété algébrique complexe lisse et U un ouvert de Zariski de X tel que $X \setminus U$ est un diviseur D. Notons i l'inclusion ouverte de U dans X.

Soit $h : U \to \mathbb{C}$ une fonction régulière. Supposons qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle H} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{j} & \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \end{array}$$

avec H morphisme régulier et j l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 2.4.6. *Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_U$-modules. Alors :*

$$i_+(\mathcal{M}^\bullet e^h) = i_+(\mathcal{M}^\bullet)[*D]e^H.$$

Démonstration

Comme i est une inclusion ouverte, on a :

$$\begin{array}{rcl} i_+(\mathcal{M}^\bullet e^h) & = & Ri_*(\mathcal{M}^\bullet e^h) \\ & = & Ri_*(\mathcal{M}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_X} Ri_*(\mathcal{O}_U e^h) \\ & = & Ri_*(\mathcal{M}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_X} Ri_* i^{-1}(\mathcal{O}_X e^H) \\ & = & i_+(\mathcal{M}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[*D]e^H \\ & = & i_+(\mathcal{M}^\bullet)[*D]e^H. \end{array}$$

□

Image inverse.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & Y \\ {\scriptstyle h\circ\pi}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle h} & \\ \mathbb{P}^1. & & \end{array}$$

PROPOSITION 2.4.7. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_Y$-module quasi-cohérent. Alors :*

$$\pi^*(\mathcal{M}e^h) = (\pi^*(\mathcal{M}))e^{h\circ\pi}.$$

Démonstration

$$\begin{array}{rcl} \pi^*(\mathcal{M}e^h) & = & \mathcal{O}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \pi^{-1}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y[*h^{-1}(\infty)]e^h) \\ & = & \mathcal{O}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \left(\pi^{-1}(\mathcal{M}) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \pi^{-1}(\mathcal{O}_Y[*h^{-1}(\infty)]e^h)\right) \\ & \overset{(*)}{=} & (\mathcal{O}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \pi^{-1}(\mathcal{M})) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[*(h\circ\pi)^{-1}(\infty)]e^{h\circ\pi} \\ & = & \pi^*(\mathcal{M})e^{h\circ\pi}. \end{array}$$

Démontrons $(*)$.

Soit ψ le morphisme entre $\mathcal{O}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \left(\pi^{-1}(\mathcal{M}) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \pi^{-1}(\mathcal{O}_Y[*h^{-1}(\infty)]e^h)\right)$ et $(\mathcal{O}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \pi^{-1}(\mathcal{M})) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[*(h\circ\pi)^{-1}(\infty)]e^{h\circ\pi}$, défini par :

$$\psi(f \otimes (m \otimes ae^h)) = (f \otimes m) \otimes a \circ \pi e^{h\circ\pi}.$$

ψ est clairement bijective. Nous allons montrer qu'il s'agit d'un morphisme de $\mathcal{D}_X$-modules. Plaçons nous dans des coordonnées locales.

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial x_i}\psi(f \otimes (m \otimes ae^h)) &= \tfrac{\partial}{\partial x_i}((f \otimes m) \otimes a \circ \pi e^{h\circ\pi}) \\
&= (\tfrac{\partial f}{\partial x_i} \otimes m) \otimes a \circ \pi e^{h\circ\pi} + \textstyle\sum_{j=1}^p (\tfrac{\partial \pi}{\partial x_i} f \otimes \tfrac{\partial}{\partial y_j} m) \otimes a \circ \pi e^{h\circ\pi} \\
&\quad + (f \otimes m) \otimes \textstyle\sum_{j=1}^p \tfrac{\partial \pi}{\partial x_i} \tfrac{\partial (ae^h)}{\partial y_j} \circ \pi \\
&= \psi(\tfrac{\partial f}{\partial x_i} \otimes (m \otimes ae^h)) + \psi(\textstyle\sum_{j=1}^p \tfrac{\partial \pi}{\partial x_i} f \otimes (\tfrac{\partial}{\partial y_j} m \otimes ae^h)) \\
&\quad + \textstyle\sum_{j=1}^p (\tfrac{\partial \pi}{\partial x_i} f \otimes m) \otimes \tfrac{\partial (ae^h)}{\partial y_j} \circ \pi \\
&= \psi(\tfrac{\partial f}{\partial x_i} \otimes (m \otimes ae^h)) + \psi(\textstyle\sum_{j=1}^p \tfrac{\partial \pi}{\partial x_i} f \otimes (\tfrac{\partial}{\partial y_j} m \otimes ae^h)) \\
&\quad + \psi(\textstyle\sum_{j=1}^p \tfrac{\partial \pi}{\partial x_i} f \otimes (m \otimes \tfrac{\partial}{\partial y_j}(ae^h))) \\
&= \psi(\tfrac{\partial}{\partial x_i}(f \otimes (m \otimes ae^h))).
\end{aligned}$$

□

2.5 Cycles caractéristiques.

On trouvera les définitions et résultats de ce paragraphe dans [14]. Nous n'utiliserons ici que des $\mathcal{D}$-modules analytiques.

Variété caractéristique.

Soit X une variété analytique complexe lisse. Pour $m \in \mathbb{N}$, nous noterons $\mathcal{D}_X(m)$, le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre au plus m. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent.

DEFINITION 2.5.1. *Une bonne filtration de $\mathcal{M}$ est la donnée d'une famille $(\mathcal{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules de $\mathcal{M}$ telle que :*

1. *pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_k$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules cohérent.*
2. *$\mathcal{M} = \bigcup\limits_{k\geq 0} \mathcal{M}_k$.*
3. *Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_X(l)\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+l}$.*
4. *Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_X(l)\mathcal{M}_{k_0} = \mathcal{M}_{k_0+l}$.*

PROPOSITION 2.5.2. *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent, il admet localement une bonne filtration.*

DEFINITION 2.5.3. *On définit alors le $gr(\mathcal{D}_X)$-module gradué de $\mathcal{M}$:*

$$gr(\mathcal{M}) = \bigoplus_{k\geq 0} \frac{\mathcal{M}_k}{\mathcal{M}_{k-1}}, \text{ avec } \mathcal{M}_{-1} = 0.$$

Si $\mathcal{M}$ est $\mathcal{D}_X$-cohérent, $gr(\mathcal{M})$ est $gr(\mathcal{D}_X)$-cohérent.

REMARQUE 2.5.4. *$gr(\mathcal{D}_X) \simeq \mathcal{O}_{T^*X}$. Ainsi, le radical de l'annulateur $ann_{gr(\mathcal{D}_X)}(gr(\mathcal{M}))$ peut être vu comme un idéal de $\mathcal{O}_{T^*X}$. On peut démontrer que ce radical ne dépend pas de la bonne filtration de $\mathcal{M}$ choisie. On a ainsi la définition, indépendante de la bonne filtration :*

DEFINITION 2.5.5. *La variété caractéristique de $\mathcal{M}$ est le sous espace analytique fermé de T^*X définit par l'idéal $\sqrt{ann_{gr(\mathcal{D}_X)}(gr(\mathcal{M}))}$. Elle sera notée $Char(\mathcal{M})$.*

L'inégalité de Bernstein permet de dire que la dimension de la variété caractéristique est toujours supérieure ou égale à la dimension de X. Nous allons maintenant considérer le cas où elle est de dimension n, c'est à dire le cas où le module est holonome.

PROPOSITION 2.5.6. *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome, sa variété caractéristique est la réunion de conormaux :*

$$Char(\mathcal{M}) = \underset{\alpha}{\cup} T^*_{S_\alpha}X, \text{ avec } S_\alpha \text{ sous espace analytique irréductible de } X.$$

DEFINITION 2.5.7. *On définit enfin le lieu singulier d'un module holonome $\mathcal{M}$:*

$$Sing(\mathcal{M}) = \underset{dim\ S_\alpha < dim\ X}{\cup} S_\alpha.$$

Multiplicité.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome et $Char(\mathcal{M}) = \cup T^*_{S_\alpha}X$ sa variété caractéristique. On veut définir, pour chaque S_α, la multiplicité de $\mathcal{M}$ sur $T^*_{S_\alpha}X$.

Commençons pour cela par définir le degré et la multiplicité d'un $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$-module de type fini en $a \in \mathbb{C}^n$.

THEOREME 2.5.8. *Soit $a \in \mathbb{C}^n$. On note $Q_a = (x_1, \ldots, x_n, \xi_1 - a_1, \ldots, \xi_n - a_n)$ idéal maximal dans $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Soit M un $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$-module de type fini*

1. *L'application $H_{M,a} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, définie par $H_{M,a}(n) = dim_{\mathbb{C}} \frac{M}{Q_a^{n+1}M}$ est un polynôme $P_{M,a}$ à partir d'un n suffisamment grand.*
2. *Le terme de plus haut degré est de la forme $\frac{m}{d!}X^d$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}$.*
3. *– L'entier d est appelé la dimension de M en a et est noté $d_a(M)$.*
   – L'entier m est appelé la multiplicité de M en a et est noté $m_a(M)$.

PROPOSITION 2.5.9. *Soit $a \in \mathbb{C}^n$ et $0 \to E \to F \to G \to 0$ une suite exacte de $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$-module de type fini.*
Si $d_a(E) = d_a(G)$, alors $m_a(F) = m_a(E) + m_a(G)$.

Définissons maintenant la multiplicité de $\mathcal{M}$, $\mathcal{D}_X$-module cohérent, en $x^* \in T^*X$. Soit $(\mathcal{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une bonne filtration de $\mathcal{M}$ et $gr(\mathcal{M})$ son module gradué.

Au voisinage du point x^*, on peut choisir des coordonnées telles que $gr(\mathcal{D}_X)_{x^*}$ soit isomorphe à $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ et x^* s'identifie à (x, a).

Notons $M = gr(\mathcal{M})_x$. M est de type fini puisque $gr(\mathcal{M})$ est cohérent.

DEFINITION 2.5.10. *On définit alors :*

1. *le degré de $\mathcal{M}$ en x^* est : $d_{x^*}(\mathcal{M}) = d_a(M)$.*
2. *la multiplicité de $\mathcal{M}$ en x^* est : $m_{x^*}(\mathcal{M}) = m_a(M)$.*

PROPOSITION 2.5.11. *Le degré et la multiplicité de $\mathcal{M}$ en $x^* \in T^*X$ sont indépendants de la bonne filtration choisie.*

On va maintenant définir la multiplicité de $\mathcal{M}$, $\mathcal{D}_X$-module holonome, de variété caractéristique $\cup T^*_{S_\alpha}X$, sur $T^*_{S_\alpha}X$. Commençons par remarquer que dans le cas où $\mathcal{M}$ est holonome, le degré de $\mathcal{M}$ en x^* est toujours égal à la dimension de X.

DEFINITION 2.5.12. *La multiplicité de $\mathcal{M}$ sur $T^*_{S_\alpha}X$ est la multiplicité de $\mathcal{M}$ en x^*, avec $x^* \in T^*_{S_\alpha}X \setminus \bigcup_{\beta\neq\alpha} T^*_{S_\beta}X$.*

REMARQUE 2.5.13. *Si $S_\alpha = X$, notons $\Sigma_0 = X \setminus sing(\mathcal{M})$, ouvert de X. La variété caractéristique de $\mathcal{M}_{|\Sigma_0}$ est alors $T^*_{\Sigma_0}\Sigma_0$. On sait alors que $\mathcal{M}_{|\Sigma_0}$ est localement libre de rang r sur $\mathcal{O}_{\Sigma_0}$. On montre alors que la multiplicité de $\mathcal{M}$ sur T^*X est r, c'est à dire, le rang de $\mathcal{M}_{|\Sigma_0}$. Dans la suite, nous le noterons $rg(\mathcal{M})$.*

Cycles caractéristiques.

DEFINITION 2.5.14. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. On définit le cycle caractéristique de $\mathcal{M}$ comme étant la somme formelle :*

$$\sum m_\alpha T^*_{S_\alpha}X,$$

où

- *$Char(\mathcal{M}) = \cup T^*_{S_\alpha}X$, avec S_α sous espace analytique irréductible de X.*
- *m_α est la multiplicité de $\mathcal{M}$ sur $T^*_{S_\alpha}X$.*

DEFINITION 2.5.15. *Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologies holonomes. On définit le cycle caractéristique du complexe $\mathcal{M}^\bullet$ comme étant la somme formelle :*

$$Cch(\mathcal{M}^\bullet) = \sum (-1)^k Cch(\mathcal{H}^k(\mathcal{M})).$$

Cycles caractéristiques et image inverse par une modification.

Soit U un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathbb{C}^2$. Soit $\pi : \mathbb{X} \to U$ une modification (i.e. une suite d'éclatement de points telle que le lieu exceptionnel se projette sur $(0,0)$). Notons $D = \pi^{-1}(0,0)$ le lieu exceptionnel de la modification.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_U$-module holonome tel que :

$$Cch(\mathcal{M}) = rg(\mathcal{M})T^*_U U + \sum_{i=0}^{p} m_i T^*_{Z_i}U + mT^*_{(0,0)}U,$$

où les Z_i sont des courbes irréductibles distinctes avec éventuellement une singularité en $(0,0)$. Notons $\tilde{Z}_i$ les transformées strictes des Z_i.

PROPOSITION 2.5.16. *1. Le lieu singulier de $\pi^*(\mathcal{M})$ est inclus dans $D \bigcup \Big(\bigcup_{i=0}^{p} \tilde{Z}_i \Big)$.*

2. Le rang de $\pi^*(\mathcal{M})$ est égal au rang de $\mathcal{M}$.

3. La multiplicité de $\pi^*(\mathcal{M})$ sur $T^*_{\tilde{Z}_i}\mathbb{X}$ est égale à la multiplicité de $\mathcal{M}$ sur $T^*_{Z_i}U$.

Démonstration

1. π est un isomorphisme de $\mathbb{X} \setminus D$ dans $U \setminus \{(0,0)\}$. Donc, d'après la remarque 2.2.2,

$$\pi^*(\mathcal{M})_{|\mathbb{X}\setminus D} = \pi^{-1}(\mathcal{M})_{|\mathbb{X}\setminus D}.$$

Ainsi, il existe une bonne filtration de $\mathcal{M}_{|U\setminus\{(0,0)\}}$ induisant une bonne filtration de $\pi^*(\mathcal{M})_{|\mathbb{X}\setminus D}$ telles que :

$$gr(\pi^*(\mathcal{M}))_{\mathbb{X}\setminus D} = \pi^{-1}(gr(\mathcal{M}))_{|\mathbb{X}\setminus D}.$$

D'où

$$Char(\pi^*(\mathcal{M})_{|\mathbb{X}\setminus D}) = T^*_{\mathbb{X}\setminus D}(\mathbb{X}\setminus D) \bigcup \Big(\bigcup_{i=0}^{p} T^*_{\tilde{Z}_i{}^*}(\mathbb{X}\setminus D) \Big),$$

où $\tilde{Z}_i{}^* = \pi^{-1}(Z_i \setminus \{(0,0)\})$.

Ainsi, le lieu singulier de $\mathcal{M}$ est inclus dans $D \bigcup \Big(\bigcup_{i=0}^{p} \tilde{Z}_i \Big)$.

2. Par définition, le rang de $\pi^*(\mathcal{M})$ est le rang du $\mathcal{O}_{\mathbb{X}\setminus Sing(\mathcal{M})}$-module localement libre $\pi^*(\mathcal{M})_{|\mathbb{X}\setminus Sing(\mathcal{M})}$. Or,

$$\pi^*(\mathcal{M})_{|\mathbb{X}\setminus(Sing(\mathcal{M})\cup D)} = \pi^{-1}(\mathcal{M})_{|\mathbb{X}\setminus(Sing(\mathcal{M})\cup D)}.$$

D'où le rang de $\pi^*(\mathcal{M})$ est égal au rang de $\mathcal{M}$.

3. La multiplicité de $\pi^*(\mathcal{M})$ sur $T^*_{\tilde{Z}_i}\mathbb{X}$ est la multiplicité de $\pi^*(\mathcal{M})$ en x^*, avec $x^* \in T^*_{\tilde{Z}_i}\mathbb{X}$ suffisamment général. On choisit alors x^* tel que $p(x^*) = x \notin D$, où $p : T^*\mathbb{X} \to \mathbb{X}$. Alors, $\pi^*(\mathcal{M})_x = \mathcal{M}_{\pi(x)}$, car $x \notin D$. On peut donc choisir une bonne filtration telle que $gr(\pi^*(\mathcal{M}))_x = gr(\mathcal{M})_{\pi(x)}$. On voit ainsi que la multiplicité de $\pi^*(\mathcal{M})$ sur $T^*_{\tilde{Z}_i}\mathbb{X}$ est celle de $\mathcal{M}$ sur $T^*_{Z_i}U$.

□

2.6 Propriétés d'additivité.

Nous allons donner ici trois propositions portant sur l'additivité des cycles caractéristiques et de nombres liés aux complexes d'irrégularité le long d'hypersurfaces qui nous permettrons dans les prochains chapitres de simplifier les calculs en passant d'un complexe de modules à un seul module.

PROPOSITION 2.6.1. *Soit $0 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_2 \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules, avec $\mathcal{M}$ holonome. On a alors :*

$$Cch(\mathcal{M}) = Cch(\mathcal{M}_1) + Cch(\mathcal{M}_2).$$

En particulier :

– *Les lieux singuliers de $\mathcal{M}_1$ et de $\mathcal{M}_2$ sont inclus dans le lieu singulier de $\mathcal{M}$.*
– *$rg(\mathcal{M}) = rg(\mathcal{M}_1) + rg(\mathcal{M}_2)$.*
– *Si $T^*_{S_\alpha}X$ est inclus dans la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, la multiplicité de $\mathcal{M}$ sur $T^*_{S_\alpha}X$ est égale à la somme des multiplicités de $\mathcal{M}_1$ et de $\mathcal{M}_2$ sur $T^*_{S_\alpha}X$.*

Démonstration
Soit $(\mathcal{M}^k)_{k\in\mathbb{N}}$, une bonne filtration de $\mathcal{M}$. Soit $(\mathcal{M}_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la filtration définie par $\mathcal{M}_1^k = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}^k$ et $(\mathcal{M}_2^k)_{k\in\mathbb{N}}$, la filtration définie par $\mathcal{M}_2^k = \pi(\mathcal{M}_k)$. Ces filtrations sont bonnes et on a la suite exacte de $gr(\mathcal{D}_X)$-modules cohérents :

$$(1)\ 0 \to gr(\mathcal{M}_1) \to gr(\mathcal{M}) \to gr(\mathcal{M}_2) \to 0.$$

1. Commençons par montrer que $Char(\mathcal{M}) = Char(\mathcal{M}_1) \cup Char(\mathcal{M}_2)$. La suite exacte (1) nous donne :

$$\sqrt{ann_{gr(\mathcal{D}_X)}(gr(\mathcal{M}))} = \sqrt{ann_{gr(\mathcal{D}_X)}(gr(\mathcal{M}_1))} \cap \sqrt{ann_{gr(\mathcal{D}_X)}(gr(\mathcal{M}_2))}.$$

   Ainsi, $Char(\mathcal{M}) = Char(\mathcal{M}_1) \cup Char(\mathcal{M}_2)$.
   En particulier, $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont holonomes.

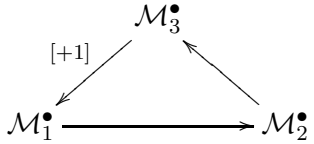
2. Montrons maintenant que les multiplicités s'ajoutent. Comme les trois modules sont holonomes, d'après la proposition 2.5.9, pour $x^* \in T^*X$, on a $m_{x^*}(\mathcal{M}) = m_{x^*}(\mathcal{M}_1) + m_{x^*}(\mathcal{M}_2)$. On a donc bien

$$Cch(\mathcal{M}) = Cch(\mathcal{M}_1) + Cch(\mathcal{M}_2).$$

□

Soit Z une hypersurface de X variété analytique complexe lisse. Soit $g : X \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ une application méromorphe.

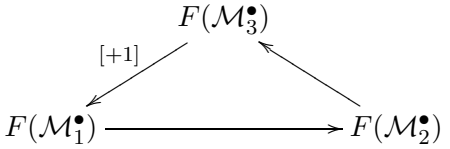
PROPOSITION 2.6.2. *Soit F le foncteur dans la catégorie triangulée $D^b_h(\mathcal{D}^{an}_X)$ définit par $F(\mathcal{M}^\bullet) = IR_Z((\mathcal{M}^\bullet)e^g)$. F est un δ-foncteur.*
En particulier, si



est un triangle distingué dans $D^b_h(\mathcal{D}^{an}_X)$, alors, pour tout $P \in Z$,

$$\chi((F(\mathcal{M}_2^\bullet))_P)) = \chi((F(\mathcal{M}_1^\bullet))_P)) + \chi((F(\mathcal{M}_3^\bullet))_P)).$$

Démonstration
Le foncteur F est la composée de deux δ-foncteurs (c.f. théorème 2.3.3 et proposition 2.4.4).
L'additivité des caractéristiques d'Euler provient alors de la suite exacte longue associée au triangle



.

□

La proposition précédente permet de démontrer :

PROPOSITION 2.6.3. *Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe borné de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologies holonomes. Soit $P \in Z$. Alors :*

$$\chi((IR_Z((\mathcal{M}^\bullet)e^g))_P) = \sum (-1)^k \chi((IR_Z((\mathcal{H}^k(\mathcal{M}_1^\bullet))e^g))_P).$$

Démonstration
On a la suite exacte de complexe :

$$0 \to \mathcal{H}^0(\mathcal{M}^\bullet) \to \mathcal{M}^\bullet \to \mathcal{M}'^\bullet \to 0.$$

avec $\mathcal{M}'^\bullet : 0 \to \frac{\mathcal{M}^0}{ker(d^0)} \to \mathcal{M}^1 \to \ldots$. En appliquant la proposition précédente, on a :

$$\chi((IR_Z((\mathcal{M}^\bullet)e^g))_P) = \chi((IR_Z((\mathcal{H}^0(\mathcal{M}^\bullet))e^g))_P) + \chi((IR_Z((\mathcal{M}'^\bullet)e^g))_P).$$

On conclut alors par récurrence sur la longueur en cohomologie du complexe.

□

Chapitre 3

Etude locale de complexes d'irrégularité pour les $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules à support singulier un croisement normal.

3.1 introduction.

Nous allons donner ici les théorèmes utiles dans les calculs des chapitres 5 et 6 portant sur l'étude de l'irrégularité de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$. Dans les deux méthodes, on se ramène aux études locales de complexes d'irrégularité de modules holonomes réguliers analytiques à deux variables dont le lieu singulier est un croisement normal. Nous aurons besoin de connaître la fonction caractéristique des complexes $IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{g}]e^g)$, où :

- $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module holonome régulier dont le lieu singulier est inclus dans $xy = 0$.
- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, telle que $f(x, y) = x$ ou $f(x, y) = y$ ou $f(x, y) = xy$.
- $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, telle que $g(x, y) = x^k y^l$, avec $k \geq 1$ et $l \geq 0$.

Une première méthode consiste à se ranener aux cas des $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules simples dont le lieu singulier est un croisement normal. Dans [13], A. Galligo, M. Granger et P. Maisonobe donnent une classification de ces $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules simples. En utilisant le triangle définissant le complexe d'irrégularité, on calcule les espaces de cohomologie des complexes d'irrégularité des $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules simples. On connait ainsi les fonctions caractéristiques cherchées. Cette méthode est très couteuse puisqu'elle nécessite le calcul des espaces de cohomologie des complexes d'irrégularité.

La démonstration que nous proposons ici est plus rapide. Nous utiliserons le résultat de C. Sabbah données dans [35] permettant de calculer la fonction caractéristique du complexe $IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]e^f)$ en calculant celle du complexe des cycles proches $\Psi_f(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]))$. Dans le cas où f et g sont deux polynômes distincts, on en déduira le résultat analogue donné aussi par C. Sabbah : la fonction caractéristique du complexe $IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{g}]e^g)$ est la restriction à $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ de celle de $\Psi_g(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]))$.

3.2 Réduction à un calcul géométrique.

Rappelons tout d'abord la définition du foncteur des cycles proches.

DEFINITION 3.2.1. *Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $t \in \mathbb{C}$. On définit le foncteur Ψ_{f-t} des cycles proches de la façon suivante :*

Soit $\mathcal{F}^\bullet$ un complexe borné constructible de $\underline{\mathbb{C}}_X$-espaces vectoriels. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1}(t) & \xhookrightarrow{j} & X & \xhookleftarrow{i} & f^{-1}(D_\eta)\setminus f^{-1}(t) & \xleftarrow{\tilde{\pi}} & E \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow \\ \{t\} & \hookrightarrow & \mathbb{C} & \hookleftarrow & D_\eta^* & \xleftarrow{rev.univ.} & \tilde{D}_\eta^*, \end{array}$$

où D_η est un disque dans $\mathbb{C}$ de centre t et de rayon η suffisamment petit de sorte que $f : f^{-1}(D_\eta) \setminus f^{-1}(t) \to D_\eta^*$ soit une fibration topologique localement triviale.

On pose alors $\Psi_{f-t}(\mathcal{F}^\bullet) = j^{-1}(R(i \circ \tilde{\pi})_*(i \circ \tilde{\pi})^{-1}(\mathcal{F}^\bullet))$.

Le théorème clé nous permettant de calculer la fonction caractéristique des complexes d'irrégularité est le suivant :

THEOREME 3.2.2. *Soit X une variété analytique complexe. Soit f et g deux fonctions holomorphes sur X non identiquement nulles. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome régulier sur X. Alors la fonction caractéristique du complexe d'irrégularité $IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{g}]e^{\frac{1}{g}})$ est la restriction à $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ de celle du complexe $\Psi_g(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]))$.*

Démonstration

Dans [35], C. Sabbah démontre ce théorème dans le cas où f et g sont des applications holomorphes identiques (c.f. corollaire 5-2).

Considérons maintenant deux applications holomorphes f et g distinctes.

1. Montrons tout d'abord que $IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{g}]e^{\frac{1}{g}}) = R\Gamma_{f=0}(IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}}))$.
   (a) Par définition, $IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{g}]e^{\frac{1}{g}}) = R\Gamma_{f=0}(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}}))$.
   (b) Notons $X^* = X \setminus g^{-1}(0)$ et η l'inclusion de X^* dans X.

$$\begin{aligned} IR_{g=0}(\mathcal{M}[\tfrac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}}) &= \text{cône}\Big(DR(\mathcal{M}[\tfrac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}}) \to R\eta_*(DR(\mathcal{M}[\tfrac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}})_{|X^*})\Big) \\ &= \text{cône}\Big(DR(\mathcal{M}[\tfrac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}}) \to R\eta_*(DR(\mathcal{M}[\tfrac{1}{f}])_{|X^*})\Big) \end{aligned}$$

Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xhookrightarrow{\eta} & X \\ \uparrow{\scriptstyle j} & & \uparrow{\scriptstyle j'} \\ X^* \setminus f^{-1}(0) & \xhookrightarrow{\eta'} & X \setminus f^{-1}(0). \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} R\eta_*(DR(\mathcal{M}[\tfrac{1}{f}])_{|X^*})) &= R\eta_* Rj_*(DR(\mathcal{M})_{|X^*\setminus f^{-1}(0)}), \quad \text{car } \mathcal{M} \text{ est régulier} \\ &= Rj'_* R\eta'_*(DR(\mathcal{M})_{|X^*\setminus f^{-1}(0)}). \end{aligned}$$

Ainsi, comme $R\Gamma_{f=0} Rj'_* = 0$, on a $R\Gamma_{f=0} R\eta_*(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}])_{|X^*})) = 0$. On en conclut alors que $R\Gamma_{f=0}(IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}})) = R\Gamma_{f=0}(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}})) = IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{g}]e^{\frac{1}{g}})$.

2. D'après le théorème 3.2.2 dans le cas où les deux fonctions holomorphes sont identiques (corollaire 5-2 de [35]), on sait que la fonction caractéristique du complexe $IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}})$ est égale à la restriction à $g^{-1}(0)$ de celle de $\Psi_g(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}])) = \Psi_g(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]))$.

3. Il reste donc à montrer que la fonction caractéristique de $R\Gamma_{f=0}(IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}}))$ est égale à la restriction à $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ de celle de $IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}})$.
   - Pour montrer que la caractéristique d'Euler de $(R\Gamma_{f=0}(IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}})))_P$ est égale à celle de $(IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}}))_P$, pour $P \in f^{-1}(0)$, il suffit de démontrer que la caractéristique d'Euler de $Rj'_* j'^{-1}(IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}}))_P$ est nulle en utilisant le triangle distingué suivant :

$$\begin{array}{ccc} & Rj'_* j'^{-1}(IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}})) & \\ {\scriptstyle [+1]}\swarrow & & \nwarrow \\ R\Gamma_{f=0}(IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}})) & \longrightarrow & IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}}), \end{array}$$

     avec $j' : X \setminus f^{-1}(0) \to X$ inclusion ouverte.
   - Notons $\mathcal{F}$ le complexe pervers $IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}})$ et $D\mathcal{F}$ le dual de Verdier de $\mathcal{F}$. On a alors $Rj'_* j'^{-1}(\mathcal{F}) = D(j'_! j'^{-1}(D\mathcal{F}))$ (c.f. [2], page 137).
     Or, pour $P \in f^{-1}(0)$, le germe en P de $j'_! j'^{-1}(D\mathcal{F})$ est nul. Ainsi :

$$\begin{aligned} \chi(Rj'_* j'^{-1}(\mathcal{F})_P) &= \chi(D(j'_! j'^{-1}(D\mathcal{F}))_P) \\ &= \chi(j'_! j'^{-1}(D\mathcal{F})_P) \\ &= 0 \end{aligned}$$

     La caractéristique d'Euler de $Rj'_* j'^{-1}(IR_{g=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{fg}]e^{\frac{1}{g}}))_P$ est donc bien nulle.

□

Démontrons maintenant la proposition permettant de relier le germe en $P \in g^{-1}(0)$ de $\Psi_g(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]))$ à l'hypercohomologie d'une fibre locale de Milnor de g en P privée des points de $f^{-1}(0)$ sur le complexe de De Rham de $\mathcal{M}$:

PROPOSITION 3.2.3. *Soit $P \in g^{-1}(0)$. Notons X_t une fibre locale de Milnor de g en x (i.e. $X_t = g^{-1}(t) \cap B(P,\epsilon)$, avec $B(P,\epsilon)$ boule de centre P de rayon ϵ suffisamment petit et $|t|$ suffisamment petit, $t \neq 0$). Notons j l'inclusion de $X_t \setminus (f^{-1}(0) \cap X_t)$ dans X_t. Alors :*

$$\Psi_g(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]))_P = R\Gamma(j^{-1}(X_t), j^{-1}(DR(\mathcal{M})_{|X_t})).$$

Démonstration

1. Comme $\mathcal{M}$ est régulier, remarquons tout d'abord que $DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]) = Rj'_*j'^{-1}(DR(\mathcal{M}))$, avec j' inclusion de $X \setminus f^{-1}(0)$ dans X.
2. Dans la suite, on notera $\mathcal{C}$ le complexe constructible $Rj'_*j'^{-1}(DR(\mathcal{M}))$. Considérons le diagramme permettant de définir le foncteur Ψ_g :

$$\begin{array}{ccccccc} g^{-1}(0) & \xhookrightarrow{j} & X & \xhookleftarrow{i} & g^{-1}(D_\eta)\setminus g^{-1}(0) & \xleftarrow{\tilde{\pi}} & E \\ & & & & \downarrow f & & \downarrow \\ \{0\} & \hookrightarrow & \mathbb{C} & \hookleftarrow & D^*_\eta & \xleftarrow{rev.univ.} & \tilde{D}^*_\eta, \end{array}$$

où D_η est un disque dans $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon η suffisamment petit de sorte que $f : g^{-1}(D_\eta) \setminus g^{-1}(0) \to D^*_\eta$ soit une fibration topologique localement triviale.
Pour $P \in g^{-1}(0)$, on a :

$$\begin{aligned} \Psi_g(DR(\mathcal{M}[\tfrac{1}{f}]))_P &= R(i\circ\tilde{\pi})_*(i\circ\tilde{\pi})^{-1}(\mathcal{C})_P \\ &= \varinjlim_{P\in U} R\Gamma((i\circ\tilde{\pi})^{-1}(U),(i\circ\tilde{\pi})^{-1}(\mathcal{C})). \end{aligned}$$

Notons $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille de tubes de Milnor de g au voisinage de P, c'est-à-dire $U_k = g^{-1}(D_{\eta_k}) \cap B(P, \frac{1}{k})$, avec η_k suffisamment petit devant $\frac{1}{k}$. Cette famille forme une base de voisinage de P. On a ainsi :

$$\Psi_g(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]))_P = \varinjlim_{k} R\Gamma((i\circ\tilde{\pi})^{-1}(U_k),(i\circ\tilde{\pi})^{-1}(\mathcal{C})).$$

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(i\circ\tilde{\pi})^{-1}(U_k) \simeq (g^{-1}(t)\cap B(P,\frac{1}{k}))\times\tilde{D}_\eta \xrightarrow{pr} X^k_t = g^{-1}(t)\cap B(P,\frac{1}{k})$, $t \in D_{\eta_k}$. De plus, par constructibilité de $\mathcal{C}$, on a $(i\circ\tilde{\pi})^{-1}(\mathcal{C}) \simeq pr^{-1}(\mathcal{C}_{|X^k_t})$. On obtient donc (c.f. proposition I.3.8 de [32]) :

$$\begin{aligned} \Psi_g(DR(\mathcal{M}[\tfrac{1}{f}]))_P &= \varinjlim_{k} R\Gamma(pr^{-1}(X^k_t), pr^{-1}(\mathcal{C}_{|X^k_t})) \\ &= \varinjlim_{k} R\Gamma(X^k_t, \mathcal{C}_{|X^k_t}). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{C}$ est constructible, on a alors :

$$\Psi_g(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]))_P = R\Gamma(X_t, \mathcal{C}_{|X_t}),$$

où $X_t = g^{-1}(t) \cap B(P,\epsilon)$ est une fibre générique locale de g au voisinage de P.
Ainsi, $\Psi_g(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]))_P = R\Gamma(j^{-1}(X_t), j^{-1}(DR(\mathcal{M})_{|X_t}))$.

□

3.3 Enoncés des résultats locaux.

Dans le paragraphe suivant, nous allons utiliser le théorème 3.2.2 et la proposition 3.2.3 pour calculer la fonction caractéristique des complexes $IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{g}]e^{\frac{1}{g}})$, dans les cas où :

- $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module holonome régulier dont le lieu singulier est inclus dans $xy = 0$.
- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, telle que $f(x, y) = x$ ou $f(x, y) = y$ ou $f(x, y) = xy$.
- $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, telle que $g(x, y) = x^k y^l$, avec $k \geq 0$ et $l \geq 1$.

Plus précisemment, nous auront besoin des théorèmes suivants :

3.3.1 Le théorème (A1).

THEOREME 3.3.1 (A1). *Soit $k > 0$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module holonome régulier dont le lieu singulier est inclus dans $x = 0$. Le complexe d'irrégularité de $\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}}$ le long de $x = 0$ est concentré en degré 0, à support dans $x = 0$ et la restriction à $x = 0$ de son 0-ième espace de cohomologie , $IR^0_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_{|x=0}$, est un faisceau constant sur $x = 0$ de rang $rg(\mathcal{M})k$.*

En particulier, on a :

COROLLAIRE 3.3.2 (A1). *Soit $k > 0$. $IR_{x=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})$ est un complexe concentré en degré 0 à support dans $x = 0$ et $(IR^0_{x=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}}))_{|x=0}$ est un faisceau constant sur $x = 0$ de rang k.*

3.3.2 Le théorème (A2).

THEOREME 3.3.3 (A2). *Soit $k > 0$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module holonome régulier dont le lieu singulier est inclus dans $xy = 0$. Le complexe d'irrégularité de $\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}}$ le long de $y = 0$ est nul.*

$$IR_{y=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}}) = 0.$$

En particulier, on a :

COROLLAIRE 3.3.4 (A2). *Soit $k > 0$. Les complexes d'irrégularité de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k}}$ et de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_2}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}}$ le long de $y = 0$ sont nuls.*

$$IR_{y=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k}}) = 0 \text{ et } IR_{y=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_2}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}}) = 0.$$

3.3.3 Le théorème (A3).

THEOREME 3.3.5 (A3). *Soit $k > 0$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module holonome régulier dont le lieu singulier est inclus dans $xy = 0$. On a alors :*

$$\chi(IR_{xy=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_{(0,0)}) = 0.$$

En particulier on a :

COROLLAIRE 3.3.6 (A3). *Soit $k > 0$.*

1. $\chi(IR_{xy=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_{(0,0)}) = 0.$
2. $\chi(IR_{xy=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k}})_{(0,0)}) = 0.$

3.3.4 Le théorème (A4).

THEOREME 3.3.7 (A4). *Soit $k > 0$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module holonome régulier dont le lieu singulier est inclus dans $xy = 0$. Notons m la multiplicité de $\mathcal{M}$ sur $T^*_{y=0}\mathbb{C}^2$. On a alors :*

$$\chi(IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_{(0,0)}) = (rg(\mathcal{M}) - m) * k.$$

En particulier on a :

COROLLAIRE 3.3.8 (A4). *Soit $k > 0$.*

$$\chi(IR_{x=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k}})_{(0,0)}) = 0.$$

3.3.5 Le théorème (B1).

THEOREME 3.3.9 (B1). *Soit $k, l > 0$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module holonome régulier dont le lieu singulier est inclus dans $xy = 0$. On a alors :*

$$\chi(IR_{xy=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k y^l}})_{(0,0)}) = 0.$$

En particulier on a :

COROLLAIRE 3.3.10 (B1). *Soit $k, l > 0$.*

$$\chi(IR_{xy=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k y^l}})_{(0,0)}) = 0.$$

3.3.6 Le théorème (B2).

THEOREME 3.3.11 (B2). *Soit $k, l > 0$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module holonome régulier dont le lieu singulier est inclus dans $xy = 0$. On a alors :*

$$\chi(IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k y^l}})_{(0,0)}) = 0.$$

En particulier on a :

COROLLAIRE 3.3.12 (B2). *Soit $k, l > 0$.*

$$\chi(IR_{x=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k y^l}})_{(0,0)}) = 0.$$

3.4 Démonstrations.

D'après le théorème 3.2.2, la fonction caractéristique du complexe $IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{g}]e^{\frac{1}{g}})$ est la restriction à $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ de celle du complexe $\Psi_g(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}]))$.

Ainsi, si $P \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$, $\chi((IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{g}]e^{\frac{1}{g}}))_P) = \chi((\Psi_g(DR(\mathcal{M}[\frac{1}{f}])))_P)$.

En utilisant la proposition 3.2.3, on obtient alors :

$$\chi((IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{g}]e^{\frac{1}{g}}))_P) = \chi(R\Gamma(j^{-1}(X_t), j^{-1}(DR(\mathcal{M})_{|X_t}))),$$

où $X_t = g^{-1}(t) \cap B(P,\epsilon)$, ϵ et $|t|$ suffisamment petit, $t \neq 0$ et j inclusion de $X_t \setminus (f^{-1}(0) \cap X_t)$ dans X_t.

Nous allons donc calculer cette caractéristique d'Euler dans les différents cas qui nous occupent.

On utilisera systématiquement l'égalité :

$$\chi(X, \mathcal{L}) = \chi(X) * rg(\mathcal{L}),$$

si $\mathcal{L}$ est un système local sur X.

1. Démonstration du théorème 3.3.1 **(A1)** : $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = x^k$, $k > 0$.
   Soit $P \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$. Avec les notations précédentes, $X_t = \{x^k = t\} \cap B(P,\epsilon)$ est la réunion de k disques disjoints et $j^{-1}(X_t) = X_t$. De plus, le lieu singulier de $\mathcal{M}$ est supposé inclus dans $x = 0$. Comme X_t ne rencontre pas $x = 0$, le complexe $DR(\mathcal{M})_{|X_t}$ est un système local de rang $rg(\mathcal{M})$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\chi(IR_{x=0}(\mathcal{M}[\tfrac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_P) &= \chi(R\Gamma(j^{-1}(X_t), j^{-1}(DR(\mathcal{M})_{|X_t}))) \\ &= \chi(R\Gamma(X_t, DR(\mathcal{M})_{|X_t})) \\ &= \chi(X_t) * rg(\mathcal{M}) \\ &= k * rg(\mathcal{M}).\end{aligned}$$

   Ainsi, la fonction caractéristique du complexe $IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})$ est constante égale à $rg(\mathcal{M})k$ sur $x = 0$. Comme $IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})$ est pervers, on peut lui associé un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module holonome régulier, $\mathcal{N}$, à l'aide de la correspondance de Riemann-Hilbert (c.f. [1] page 325). On a alors $Cch(\mathcal{N}) = rg(\mathcal{M})kT^*_{x=0}\mathbb{C}^2$. On sait alors que $\mathcal{N}$ est isomorphe à la somme directe de $rg(\mathcal{M})k$ copies de $\mathcal{B}_{x=0}(\mathbb{C}^2)$ (c.f. IV.2.1 de [14]). En revenant au complexe d'irrégularité à l'aide du foncteur de De Rham, on voit alors que $IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_{x=0}$ est un faisceau constant de rang $rg(\mathcal{M})k$.
2. Démonstration des théorèmes 3.3.3 **(A2)** et 3.3.5**(A3)** : $f(x,y) = y$ ou $f(x,y) = xy$ et $g(x,y) = x^k$.
   Avec les notations précédentes pour $P = (0,0)$, $X_t = \{x^k = t\} \cap B((0,0),\epsilon)$ est la réunion de k disques disjoints et $j^{-1}(X_t)$ est la réunion de k disques épointés disjoints. De plus, comme le lieu singulier de $\mathcal{M}$ est inclus dans $xy = 0$ et que $j^{-1}(X_t)$ n'intersecte pas $xy = 0$, $j^{-1}(DR(\mathcal{M})_{|X_t})$ est un système local de rang $rg(\mathcal{M})$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\chi(IR_{f=0}(\mathcal{M}[\tfrac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_{(0,0)}) &= \chi(R\Gamma(j^{-1}(X_t), j^{-1}(DR(\mathcal{M})_{|X_t}))) \\ &= \chi(j^{-1}(X_t)) * rg(\mathcal{M}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Le théorème 3.3.5 **(A3)** est ainsi démontré.

   Pour finir la démonstration du théorème 3.3.3 **(A2)**, rappelons que $IR_{y=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})$ est à support $(0,0)$ et que $\chi(IR_{y=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_{(0,0)}) = 0$. Comme $IR_{y=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})$ est pervers, ce complexe est nul.

3. Démonstration du théorème 3.3.7 **(A4)** : $f(x,y)=x$ et $g(x,y)=x^k$, $k>0$.

   Avec les notations précédentes pour $P=(0,0)$, $X_t=\{x^k=t\}\cap B((0,0),\epsilon)$ est la réunion de k disques disjoints et $j^{-1}(X_t)=X_t$. Notons $P_1,\ldots,P_k$ les points d'intersection de X_t avec $y=0$. Comme le lieu singulier de $\mathcal{M}$ est inclus dans $xy=0$, on sait que $DR(\mathcal{M})_{|X_t}$ est un complexe constructible associé à la stratification $\{X_t\setminus\{P_1,\ldots,P_k\},P_1,\ldots,P_k\}$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}\chi(IR_{f=0}(\mathcal{M}[\tfrac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_{(0,0)}) &= \chi(R\Gamma(j^{-1}(X_t),j^{-1}(DR(\mathcal{M})_{|X_t})))\\ &= \sum_{i=1}^{k}\chi(DR(\mathcal{M})_{P_i}).\end{aligned}$$

   Si m est la multiplicité de $\mathcal{M}$ sur $T^*_{y=0}\mathbb{C}^2$, d'après le théorème d'indice (c.f. [18] page 129), $\chi(DR(\mathcal{M})_{P_i})=rg(\mathcal{M})-m$. On a donc :

$$\chi(IR_{f=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})_{(0,0)})=\sum_{i=1}^{k}(rg(\mathcal{M})-m)=k(rg(\mathcal{M})-m).$$

4. Démonstration des théorèmes 3.3.9 **(B1)** et 3.3.11**(B2)** : $f(x,y)=xy$ ou $f(x,y)=x$ et $g(x,y)=x^ky^l$, $k,l>0$.

   Avec les notations précédentes pour $P=(0,0)$, $X_t=\{x^ky^l=t\}\cap B((0,0),\epsilon)$ est une réunion de $d=pgcd(k,l)$ couronnes donc de caractéristique d'Euler nulle et $j^{-1}(X_t)=X_t$. De plus, comme le lieu singulier de $\mathcal{M}$ est inclus dans $xy=0$ et que X_t n'intersecte pas $xy=0$, $j^{-1}(DR(\mathcal{M})_{|X_t})$ est un système local de rang $rg(\mathcal{M})$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\chi(IR_{f=0}(\mathcal{M}[\tfrac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^ky^l}})_{(0,0)}) &= \chi(R\Gamma(j^{-1}(X_t),j^{-1}(DR(\mathcal{M})_{|X_t})))\\ &= \chi(R\Gamma(X_t,DR(\mathcal{M})_{|X_t}))\\ &= \chi(X_t)*rg(\mathcal{M})\\ &= 0.\end{aligned}$$

Chapitre 4

Résolution à l'infini de polynômes et complexe d'irrégularité.

4.1 Introduction.

On considère f et g deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants. On montrera qu'avec cette hypothèse, le complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ est concentré en degré 0 en dehors d'un nombre fini de points. On peut ainsi lui associer un système différentiel qui peut être irrégulier. On cherche alors à étudier la cohomologie du complexe d'irrégularité de l'image directe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ en c. Ce complexe est concentré en degré 0 et à support c. Il s'agit donc d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Dans les chapitres 5 et 6, nous calculerons la dimension de cet espace vectoriel de deux façons différentes.

Dans un premier temps, nous définirons la notion de résolution à l'infini de deux polynômes. On considère pour cela les applications rationnelles associées à f et g définies par :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & \mathbb{P}^2 & --\to & \mathbb{P}^1 \\ & (x:y:z) & \mapsto & f(\frac{x}{z},\frac{y}{z}), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{g}: & \mathbb{P}^2 & --\to & \mathbb{P}^1 \\ & (x:y:z) & \mapsto & g(\frac{x}{z},\frac{y}{z}). \end{array}$$

Ces applications rationnelles ne sont pas définies en certains points de la droite à l'infini $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$. Ce sont les points $(x:y:0) \in \mathbb{P}^2$ tels que $f_d(x,y) = 0$ et $g_{d'}(x,y) = 0$, où f_d et $g_{d'}$ sont les parties homogènes de f et g de plus haut degré. On va donc éclater ces points pour ne plus avoir d'indétermination. Considérons une résolution de f et de g donnée par les diagrammes suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

où F et G sont des applications propres. On démontrera que l'on peut trouver une telle résolution telle que pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup (\mathbb{X} \setminus i(\mathbb{C}^2))$ est à croisement normal au voisinage de tout point de $\mathbb{X} \setminus i(\mathbb{C}^2)$. Cette propriété n'est pas nécessaire dans ce chapitre.

Elle sera largement utilisée dans le suivant. Nous ne nous servirons ici que de la propreté des applications F et G.

Dans un deuxième temps, si j désigne l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, nous démontrerons alors à l'aide d'un résultat de F. Maaref [24], qui lie le complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$ avec des cohomologies relatives, que $j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$ est essentiellement concentré en un seul degré et qu'il n'y a qu'un seul groupe de cohomologie du complexe d'irrégularité en c, dans le cas où f et g sont algébriquement indépendants.

4.2 Résolution à l'infini de deux polynômes.

4.2.1 Résolution d'une fonction méromorphe à deux variables.

On va donner ici des résultats sur la façon de résoudre les points d'indétermination d'une fonction méromorphe à deux variables. Pour plus de détails, voir [12], [22] et [23].
Soit

$$\begin{array}{rccc} h : & U & --\to & \mathbb{P}^1 \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{h_1(x,y)}{h_2(x,y)}, \end{array}$$

avec U domaine de $\mathbb{C}^2$ contenant l'origine et $(0,0)$ seul zéro commun à h_1 et h_2. $(0,0)$ est donc un point d'indétermination de h. On veut construire une résolution de h qui lève cette indétermination.
Une résolution de h est une suite d'éclatements de points telle que le lieu exceptionnel se projette sur $(0,0)$ (modification). $(0,0)$ étant un point d'indétermination de h, on va éclater ce point. L'application obtenue peut ne pas être définie en certains points du lieu exceptionnel. On va refaire des éclatements supplémentaires jusqu'à obtenir une application méromorphe définie partout.

PROPOSITION 4.2.1. *Il existe une résolution de h.*

Démonstration
On commence par éclater le point $(0,0)$. Notons π_1 le morphisme d'éclatement de centre $\Sigma = \{(0,0)\}$. On considère alors l'ensemble (fini) des points d'indétermination de $h \circ \pi_1$, Σ_1. On refait l'éclatement de centre Σ_1. On obtient ainsi une succession d'éclatements :

$$\begin{array}{ccccccccc} X_k & \stackrel{\pi_k}{\to} & \ldots & \stackrel{\pi_2}{\to} & X_1 & \stackrel{\pi_1}{\to} & \mathbb{C}^2 & \stackrel{h}{--\to} & \mathbb{P}^1, \\ \cup & & & & \cup & & \cup & & \\ \Sigma_k & & & & \Sigma_1 & & \Sigma & & \end{array}$$

avec :

- π_i est le morphisme d'éclatement de centre Σ_{i-1},
- Σ_i est l'ensemble des points d'indétermination de $h \circ \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_i$.

Il faut voir qu'au bout d'un nombre fini d'éclatements, il n'y a plus de points d'indétermination (il existe un i_0 tel que $\Sigma_{i_0} = \emptyset$). Ceci vient du fait que la multiplicité d'intersection en 0 du numérateur et du dénominateur d'une fraction rationnelle diminue strictement par éclatement. Notons $i_c(h) = i_c(h_1, h_2)$, si c est un point d'indétermination de h et $i_c(h) = 0$, sinon. Il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

LEMME. *Notons $E : \widetilde{\mathbb{C}^2} \to \mathbb{C}^2$ le morphisme d'éclatement de l'origine et Z le lieu exceptionnel de E. On a alors :*

$$si\ i_0(h) \neq 0,\ \forall c \in Z,\ i_c(h \circ E) < i_0(h).$$

Démonstration
Démontrons l'inégalité pour le point $(0,0)$ dans la carte de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ définie par $x = x$ et $y = xt$. Les autres cas se démontrent de la même façon. On a :

$$h \circ E(x,t) = \frac{x^{\mu}\widetilde{h_1}(x,t)}{x^{\nu}\widetilde{h_2}(x,t)},$$

où μ est l'ordre de h_1 et ν l'ordre de h_2. Nous allons supposer $\mu \geq \nu$. Si on est dans l'autre cas, on fait le même raisonnement avec $\frac{1}{h}$. On a alors :

$$h \circ E(x,t) = \frac{x^{\mu-\nu}\widetilde{h_1}(x,t)}{\widetilde{h_2}(x,t)}.$$

On a ainsi :

$$i_0(h \circ E) = (\mu - \nu) i_0(\frac{x}{\widetilde{h_2}(x,t)}) + i_0(\frac{\widetilde{h_1}}{\widetilde{h_2}}).$$

Notons ν_0 l'ordre de $\widetilde{h_2}(0,t)$. On a :

$$i_0(h \circ E) = (\mu - \nu)\nu_0 + i_0(\frac{\widetilde{h_1}}{\widetilde{h_2}}).$$

Or :

$$\begin{cases} i_0(\frac{\widetilde{h_1}}{\widetilde{h_2}}) \leq i_0(h) - \mu\nu, \\ \nu_0 \leq \nu. \end{cases}$$

La première inégalité provient de la formule $i_0(h_1, h_2) = \mu\nu + \sum_{j \in J} i_{O_j}(\widetilde{h_1}, \widetilde{h_2})$, où O_j sont les points infiniment voisins communs à h_1 et h_2. On en déduit :

$$i_0(h \circ E) \leq (\mu - \nu)\nu + i_0(h) - \mu\nu = i_0(h) - \nu^2.$$

Si $\nu = 0$, h est holomorphe et $i_0(h) = 0$. Sinon, on a $i_0(h \circ E) < i_0(h)$.

□

□

4.2.2 Résolution à l'infini de deux polynômes.

Dans ce paragraphe, on cherche une résolution de f et g qui lève les indéterminations de f et g et qui nous permettra d'étudier le complexe d'irrégularité du module $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$. On trouvera les démonstrations des différents résultats dans le cas d'un seul polynôme dans [12].

Soit deux polynômes :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = f_d(x,y) + \dots f_0(x,y), \qquad \text{avec } f_i \text{ homogène de degré i} \\ \text{et} & & & \\ g: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ & (x,y) & \mapsto & g(x,y) = g_{d'}(x,y) + \dots + g_0(x,y), \quad \text{avec } g_j \text{ homogène de degré j.} \end{array}$$

Plongeons $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^2$ de manière canonique, i.e. à $(x,y) \in \mathbb{C}^2$, on associe les coordonnées homogènes $(x:y:1) \in \mathbb{P}^2$. On considère tout d'abord les applications rationnelles :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & \mathbb{P}^2 & --\to & \mathbb{P}^1 \\ & (x:y:z) & \mapsto & \frac{f_d(x,y)+\dots+f_0(x,y)z^d}{z^d}, \\ \tilde{g}: & \mathbb{P}^2 & --\to & \mathbb{P}^1 \\ & (x:y:z) & \mapsto & \frac{g_{d'}(x,y)+\dots+g_0(x,y)z^{d'}}{z^{d'}}. \end{array}$$

On voit ainsi que sur la droite à l'infini $\mathbb{P}^1_\infty$, $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont égaux à ∞ sauf en $(x:y:0) \in \mathbb{P}^2$ tel que $f_d(x,y) = 0$ ou $g_{d'}(x,y) = 0$. En ces points, $\tilde{f}$ ou $\tilde{g}$ sont indéterminées.

On cherche une résolution $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{P}^2$ de f et g qui lève les indéterminations de $\tilde{f}$ et de $\tilde{g}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^2 & \overset{\tilde{f}}{--\succ} & \mathbb{P}^1 \\ \pi\uparrow & \nearrow_{F} & \\ \mathbb{X} & & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^2 & \overset{\tilde{g}}{--\succ} & \mathbb{P}^1, \\ \pi\uparrow & \nearrow_{G} & \\ \mathbb{X} & & \end{array}$$

telle que pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D$ est à croisement normal au voisinage de tout point de D, où $D = \pi^{-1}(\mathbb{P}^1_\infty)$.

Il suffit de suivre la méthode de la proposition 4.2.1 au voisinage de chaque point $(x:y:0)$ de $\mathbb{P}^1_\infty \subset \mathbb{P}^2$, tel que $f_d(x,y) = 0$ ou $g_{d'}(x,y) = 0$, pour trouver une résolution π_1 de f et g qui lève les points d'indétermination de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$.

Pour le calcul qui nous intéresse, il faudra également faire en sorte que pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D_1$ soit à croisement normal au voisinage de tout point de D_1, où $D_1 = \pi_1^{-1}(\mathbb{P}^1_\infty)$. Si à la suite de la modification précédente, ce n'est pas le cas, il suffit d'appliquer la théorie de réduction des singularités pour $(f \circ \pi_1)^{-1}(c) \cup D_1$ au voisinage de D_1.

On commence par les points critiques de $(f \circ \pi_1)^{-1}(c)$ appartenant à D_1. On obtient ainsi une résolution π_2 levant les indéterminations de $\tilde{f}$ et de $\tilde{g}$ telle que pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $(f \circ \pi_2)^{-1}(c)$ est à croisement normal au voisinage de tout point de D_2, où $D_2 = \pi_2^{-1}(\mathbb{P}^1_\infty)$.

Il faut enfin remarquer que certaines branches du diviseur exceptionnel peuvent être tangentes en des points isolés à des transformées strictes de $f \circ \pi_2$. On applique alors la théorie de réduction des singularités à $(f \circ \pi_2)^{-1}(c) \cup D_2$, au voisinage des points de D_2.

On obtient ainsi une résolution π qui lève les indéterminations de $\tilde{f}$ et de $\tilde{g}$ telle que, si $F = f \circ \pi$, pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c)$ est à croisement normal au voisinage de tout point de

D et telle que pour tout $c \in \mathbb{C}$, les transformées strictes de $F^{-1}(c)$ coupent transversalement D, où $D = \pi^{-1}(\mathbb{P}^1_\infty)$. On a ainsi :

PROPOSITION 4.2.2. *Il existe une résolution $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{P}^2$ de f et de g qui lève les indéterminations de $\tilde{f}$ et de $\tilde{g}$*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^2 & \overset{\tilde{f}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^1 \\ {\scriptstyle\pi}\uparrow & \nearrow_{F} & \\ \mathbb{X} & & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^2 & \overset{\tilde{g}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^1, \\ {\scriptstyle\pi}\uparrow & \nearrow_{G} & \\ \mathbb{X}, & & \end{array}$$

telle que pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D$ est à croisement normal au voisinage des points de D, où $D = \pi^{-1}(\mathbb{P}^1_\infty)$.

REMARQUE 4.2.3. *Dans la suite nous appelerons résolution à l'infini les diagrammes suivants :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

où i est l'inclusion de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{X}$ et j l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

On doit avoir, pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D$ à croisement normal au voisinage des points de D.

De tels diagrammes existent puisque l'on a éclaté des points qui sont sur le lieu exceptionnel de la résolution. On ne touche pas aux points de $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$.

On notera L_∞ la transformée stricte de la droite à l'infini $\mathbb{P}^1_\infty$ dans $\mathbb{X}$.

Soit Z une composante irréductible dans D. La restriction $G_{|Z}$ peut être de l'un des trois types suivants :

(i) La restriction $G_{|Z}$ est constante et a pour image le point $\infty \in \mathbb{P}^1$. On notera D_∞, l'ensemble de ces composantes.

(ii) La restriction $G_{|Z}$ est constante et a pour image une valeur c distincte de $\infty \in \mathbb{P}^1$. On notera D_c, l'ensemble des composantes dans D qui ont pour image la valeur c.

(iii) La restriction $G_{|Z}$ est non constante (et donc surjective). On dira alors que Z est une composante dicritique pour G et on notera D_{dic}, l'ensemble de ces composantes.

On a alors la proposition fondamentale suivante :

PROPOSITION 4.2.4. *1. $\bigcup_{Z \in D_\infty} Z$ est connexe et contient L_∞.*

2. Pour tout $Z_1 \in D_\infty$ et tout $Z_2 \in D_c$, Z_1 et Z_2 sont d'intersection vide.

3. Toute composante de D_{dic} intersecte une composante de D_∞.

Démonstration

1. La démonstration de la connexité est donnée dans [12] (lemme I 2.1). Elle consiste à montrer que $G^{-1}(\infty)$ est connexe. Il faut de plus remarquer que sur $\mathbb{P}^1_\infty \subset \mathbb{P}^2$, $\tilde{g}$ vaut l'infini sauf en un nombre fini de points (les points d'indétermination de $\tilde{g}$). Ainsi, en résolvant les indéterminations de $\tilde{g}$, G vaut l'infini sur L_∞.
2. Le deuxième point vient du fait que G est déterminée en tout point et ne peut donc pas prendre deux valeurs distinctes en un point.
3. Soit $E \in D_{dic}$. Si E n'intersecte aucune composantes irréductibles de D_∞, comme G est surjective sur E, il existerait alors un point isolé sur lequel G vaut l'infini. On aurait alors une contradiction avec le fait que $G^{-1}(\infty)$ est connexe.

□

NOTATION 4.2.5. *On a les mêmes propriétés pour F. On notera en indice les renseignements concernant G et en exposant ceux concernant F (ex : $Z \in D^c_\infty$ si $G_{|Z} \equiv \infty$ et $F_{|Z} \equiv c$).*

COROLLAIRE 4.2.6.
- $\bigcup_{Z \in D^\infty_\infty} Z$ *est connexe et contient L_∞.*
- $\bigcup_{Z \in D_\infty \cup D^\infty} Z$ *est connexe et contient L_∞.*

Démonstration

En échangeant les rôles de F et G dans la proposition 4.2.4, on voit que $\bigcup_{Z \in D^\infty} Z$ est connexe.

- On a affaire à deux arbres, l'un représentant D_∞ et l'autre D^∞. Pour montrer que $\bigcup_{Z \in D^\infty_\infty} Z$ est connexe, il suffit alors de remarquer que l'intersection de deux arbres est un arbre. On voit de plus clairement que L_∞ est inclus dans $\bigcup_{Z \in D^\infty_\infty} Z$.
- Pour démontrer la connexité de $\bigcup_{Z \in D_\infty \cup D^\infty} Z$, il suffit de voit qu'il s'agit de la réunion de deux connexes d'intersection non vide (il contient L_∞).

□

4.3 Le complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$ est essentiellement concentré en degré 0.

Soit f et g deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants. Donnons maintenant les résultats qui nous permettrons de calculer la cohomologie du complexe d'irrégularité de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$ en $c \in \mathbb{C}$ ainsi que celle à l'infini. Dans un premier temps, nous donnerons une proposition technique permettant de se ramener à une image directe par une application propre. Ensuite, nous démontrerons que le complexe $j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$, où j est l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, est concentré en degré 0 en dehors d'un nombre fini de points. On a ainsi affaire à un système différentiel dont on veut étudier l'irrégularité. On démontrera alors que le complexe d'irrégularité de $j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$ en $c \in \mathbb{P}^1$ est concentré en degré 0.

Considérons une résolution à l'infini de f et g comme dans le paragraphe 4.2.2. Nous aurons alors les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

avec F et G applications propres. Dans la suite, nous noterons D le lieu exceptionnel $\mathbb{X} \setminus i(\mathbb{C}^2)$. On a alors :

PROPOSITION 4.3.1. *1.* $j_+(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)) = F_+(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)$.

2. $(F_+(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G))^{an} = F_+^{an}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})$.

Démonstration

1. Montrons que $j_+(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)) = F_+(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

   D'où $j_+(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)) = F_+(i_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))$.
   En utilisant la proposition 2.4.6 et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

   on a $i_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g) = \mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G$. On a donc bien $j_+(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)) = F_+(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)$.
2. Pour démontrer que $(F_+(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G))^{an} = F_+^{an}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})$, il suffit de remarquer que F est propre et que $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G$ est holonome, donc cohérent. Ainsi, en utilisant la proposition 2.2.19, on a le résultat.

□

En général, l'image directe d'un $\mathcal{D}$-module est un complexe de $\mathcal{D}$-modules. Dans notre cas, on est dans une situation plus confortable puisqu'on a affaire à un complexe concentré en degré 0 en dehors d'un nombre fini de points. On a en effet la proposition :

PROPOSITION 4.3.2. *Soit f et g deux polynômes algébriquement indépendants.*

1. *Le complexe $j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ est un complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-modules concentré en degré 0 en dehors d'un nombre fini de points.*
2. *Pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))$ est un complexe de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels concentré en degré 0.*

Démonstration

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin d'un résultat de F. Maaref [24] :

THEOREME 4.3.3. *Pour $c \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, avec Σ ensemble fini, il existe ρ_c assez grand tel qu'on ait l'isomorphisme :*

$$i_c^+ \mathcal{H}^{k-1}(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)) \simeq H^k(f^{-1}(c)^{an}, g_c^{-1}(\rho_c)^{an}, \mathbb{C}),$$

où g_c est la restriction de g à $f^{-1}(c)$.

1. Pour $c, \rho \in \mathbb{C}$ on a la suite exacte longue de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(f^{-1}(c), g^{-1}(\rho) \cap f^{-1}(c)) \longrightarrow H^0(f^{-1}(c)) \xrightarrow{\alpha} H^0(g^{-1}(\rho) \cap f^{-1}(c))$$
$$\longrightarrow H^1(f^{-1}(c), g^{-1}(\rho) \cap f^{-1}(c)) \longrightarrow H^1(f^{-1}(c)) \xrightarrow{\beta} H^1(g^{-1}(\rho) \cap f^{-1}(c))$$
$$\longrightarrow H^2(f^{-1}(c), g^{-1}(\rho) \cap f^{-1}(c)) \longrightarrow 0.$$

On veut montrer que sous la condition f, g algébriquement indépendants, α est injective et β est surjective. Considérons une résolution à l'infini de f et g :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

avec F et G morphismes projectifs. Soit $(F, G) : \mathbb{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ morphisme projectif. On sait que l'image de (F, G) est un ensemble constructible (c.f. [28] chapitre 2, paragraphe 6). Deux cas sont alors possibles : soit l'image de (F, G) est incluse dans une courbe de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, soit l'image de (F, G) contient un ouvert dense de Zariski. Dans le premier cas, on a alors f et g algébriquement dépendants ce que l'on a exclu. On a donc l'image de (F, G) qui contient un ouvert dense de Zariski.

D'après le théorème de factorisation de Stein (c.f. [17] corollaire 11.5 page 280), il existe $F' : \mathbb{X} \to Y$ morphisme surjectif de variétés projectives à fibres connexes et $\psi : Y \to \mathbb{P}^1$ morphisme fini tel que $F = \psi \circ F'$. On a ainsi séparé les composantes connexes des fibres de F. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{(F,G)} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ & {\scriptstyle (F',G)} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle (\psi,id)} & \\ & Y \times \mathbb{P}^1 & \end{array} .$$

L'image de (F', G) est soit incluse dans une courbe de $Y \times \mathbb{P}^1$, soit contient un ouvert dense de Zariski. Comme Y est irréductible et que ψ est un morphisme fini, on aurait dans le premier cas une contradiction avec le fait que l'image de (F, G) contient un

ouvert dense de Zariski. Ainsi, on a toujours l'image de (F', G) qui contient un ouvert dense de Zariski de $Y \times \mathbb{P}^1$.

On a alors pour (c, ρ) dans un ouvert dense de Zariski de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $G^{-1}(\rho)$ rencontre toutes les composantes connexes de $F^{-1}(c)$, i.e. G restreint à chaque composante connexe de $F^{-1}(c)$ est d'image dense dans $\mathbb{P}^1$. On considère alors les $c \in \mathbb{C}$ tel que $F^{-1}(c)$ est lisse (i.e. c n'est pas une valeur atypique de f). Ainsi, $f^{-1}(c)$ est égal à $F^{-1}(c)$ privé d'un nombre fini de points. On a alors g restreint à chaque composante connexe de $f^{-1}(c)$ est d'image dense dans $\mathbb{C}$. Ainsi, pour tout $c \in \mathbb{C}$ sauf un nombre fini, et pour tout ρ sauf un nombre fini, $f^{-1}(c) \cap g^{-1}(\rho)$ est un ensemble fini de points rencontrant toutes les composantes connexes de $f^{-1}(c)$. On a ainsi clairement α injective et β surjective.

2. Ainsi, d'après le théorème 4.3.3, on a, pour tout $k \neq 0$ et pour tout $c \in \mathbb{C}$ sauf un nombre fini, $i_c^+ \mathcal{H}^k(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)) = 0$. Comme $i_c^+(\mathcal{M}) = \frac{\mathcal{M}_c}{(x-c)\mathcal{M}_c}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{H}^k(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))$ est une connexion intégrable, on a $\mathcal{M}_c = 0$, pour tout $c \in \mathbb{C}$ sauf un nombre fini (lemme de Nakayama). Ainsi, pour tout $k \neq 0$, $\mathcal{H}^k(f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))$ est à support ponctuel. Donc $\mathcal{H}^k(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))$ est également à support ponctuel. On a ainsi montré que le complexe $j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$ est concentré en degré 0 en dehors d'un nombre fini de points.
3. $\mathcal{H}^k(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))$ est à support ponctuel pour tout $k \neq 0$. Il est donc régulier, i.e. $\forall k \neq 0$ et $\forall c \in \mathbb{P}^1$,
$$IR_c(\mathcal{H}^k(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))) = 0.$$
On sait de plus que ${}^p\mathcal{H}^k(IR_Z(\mathcal{M}^\bullet)) = IR_Z(\mathcal{H}^k(\mathcal{M}^\bullet))$. D'où :
$$\begin{cases} {}^p\mathcal{H}^k(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))) = 0, & \forall k \neq 0, \\ {}^p\mathcal{H}^0(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))) = IR_c(\mathcal{H}^0(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))). \end{cases}$$
Or on a la suite exacte courte :
$$0 \to \mathcal{H}^0({}^p\mathcal{H}^k(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)))) \to \mathcal{H}^k(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))) \to \mathcal{H}^{-1}({}^p\mathcal{H}^{k+1}(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)))) \to 0.$$
(c.f. [9]).
D'où :
$$\begin{cases} \mathcal{H}^k(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))) = 0, & \forall k \neq 0, -1, \\ \mathcal{H}^0(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))) = \mathcal{H}^0({}^p\mathcal{H}^0(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)))), \\ \mathcal{H}^{-1}(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))) = \mathcal{H}^{-1}({}^p\mathcal{H}^0(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)))) = 0, \end{cases}$$
car ${}^p\mathcal{H}^0(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))) = IR_c(\mathcal{H}^0(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))) \in Perv(\mathbb{C}_{\{c\}})$ (théorème 2.3.4). Le 0-ième groupe de cohomologie de $IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))$ est donc le seul groupe de cohomologie non nul.

□

Chapitre 5

Calcul de l'irrégularité par résolution à l'infini.

5.1 Introduction.

Soit f et g deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants. Notons j l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On cherche à étudier le complexe d'irrégularité en $c \in \mathbb{P}^1$ de l'image directe $j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$. D'après le chapitre précédent, ce complexe est concentré en degré 0 et à support c. Il s'agit donc d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont on calculera la dimension. Le comportement de f et g à l'infini joue un rôle dans ce complexe d'irrégularité. Il est donc naturel de considérer une résolution à l'infini de ces deux polynômes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

avec pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D$ à croisement normal au voisinage de tout point de D, où $D = \mathbb{X} \setminus i(\mathbb{C}^2)$.

Dans un premier temps, nous montrerons que la dimension du complexe d'irrégularité n'est autre que :

$$-\chi(\mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}))).$$

Nous associerons alors à une résolution à l'infini de f et g et à $c \in \mathbb{P}^1$, un sous graphe de l'arbre de résolution à l'infini de f et g, augmenté des transformées strictes de $F^{-1}(c)$, contenant les composantes irréductibles de D sur lesquelles $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}$ est non nul et pondéré par la multiplicité de G. Nous serons alors ramenés aux calculs locaux de complexes d'irrégularité le long de $x = 0$ ou $y = 0$ ou $xy = 0$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules du type $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}}$, avec $k \geq 1$ ou $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k y^l}}$, avec $k \geq 1$ et $l \geq 0$. Nous utiliserons alors les corollaires du chapitre 3. Finalement, si Z_i est une composante irréductible de D sur laquelle F est constante et vaut c et G est constante et vaut l'infini, nous noterons l_i la multiplicité de Z_i dans le diviseur $G^{-1}(\infty)$ et n_i le nombre de composantes irréductibles de D et de transformées strictes de $F^{-1}(c)$ l'intersectant. On montrera que la dimension de l'irrégularité en $c \in \mathbb{P}^1$ est la somme sur tous ces Z_i des produits $(n_i - 2)l_i$.

Nous donnerons enfin une interprétation géométrique de ce résultat. Pour $c \in \mathbb{C}$, nous noterons $D(c,\eta_1)^*$ le disque ouvert épointé de centre c et de rayon η_1, inclus dans $\mathbb{C} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Nous noterons également $D(\infty,\eta_1)^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\eta_1}\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, nous avons une fibration lisse localement triviale du type fibration de Milnor partielle pour g dans un voisinage tubulaire de $f^{-1}(c)$:

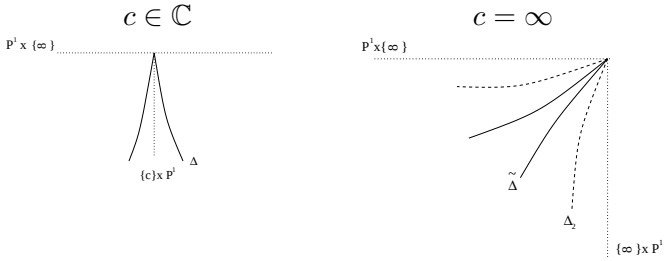
$$g : f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\{|\rho| \geq R\}) \to \{|\rho| \geq R\},$$

où R est suffisamment grand et η_1 suffisamment petit. La dimension cherchée est l'opposé de la caractéristique d'Euler de la fibre générique $f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)$.

Nous étudierons alors la topologie de cette fibre.

Commençons par le cas de l'irrégularité en $c \in \mathbb{C}$. Notons Γ la courbe polaire de f et g et Δ la courbe discriminante de f et g (image de Γ par (f,g)) comptée avec sa multiplicité. Notons $\overline{\Delta \setminus (\{c\} \times \mathbb{C})}$ l'adhérence de Zariski de $\Delta \setminus (\{c\} \times \mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On démontrera que la dimension cherchée est la multiplicité d'intersection de $\overline{\Delta \setminus (\{c\} \times \mathbb{C})}$ avec $\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$ au point (c,∞).

Dans le cas de l'irrégularité à l'infini, l'existence de composantes irréductibles dicritiques pour F et G augmente la dimension de l'irrégularité. Notons Γ' la courbe polaire de F et G et $\tilde{\Delta}$ la trace dans $\mathbb{C}^2$ de la courbe discriminante de F et G (image par (F,G) de Γ') comptée avec multiplicité. Notons Δ_2 la trace dans $\mathbb{C}^2$ de l'image par (F,G) de D comptée avec multiplicité. On démontrera alors que la dimension de l'irrégularité à l'infini est la multiplicité d'intersection en (∞,∞) de l'adhérence de Zariski de $\tilde{\Delta} \cup \Delta_2$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ avec $\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$. Il faut remarquer que certaines branches de Δ_2 et de $\tilde{\Delta}$ peuvent être communes. Dans ce cas, on les compte avec les multiplicités adéquates.



5.2 Passage aux caractéristiques d'Euler.

On veut démontrer la proposition suivante permettant de lier le complexe d'irrégularité en $c \in \mathbb{P}^1$ de $j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ avec une caractéristique d'Euler :

PROPOSITION 5.2.1. *Pour $c \in \mathbb{P}^1$, $IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))$ est un complexe concentré en degré 0 et à support c. On a de plus :*

$$dim_{\mathbb{C}}(IR_c^0(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c = -\chi(\mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})).$$

Démonstration

D'après la définition 2.3.7 et la proposition 4.3.1,

$$\begin{aligned} IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)) &= IR_c((j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))^{an}) \\ &= IR_c((F_+(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G))^{an}) \\ &= IR_c(F_+^{an}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})). \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.3.9 de commutation du foncteur irrégularité le long d'une hypersurface et du foncteur image directe analytique par une application propre, on a :

$$\begin{aligned}(IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c &= (RF_*^{an}(IR_{F^{-1}(c)}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})))_c[+1]\\ &= \mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}((\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}))[+1].\end{aligned}$$

Si f et g sont algébriquement indépendants, d'après le théorème 4.3.2, $IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))$ est un complexe concentré en degré 0. Ainsi,

$$dim((IR_c^0(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c) = \chi((IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c).$$

On a alors :

$$dim((IR_c^0(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c) = -\chi(\mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})).$$

□

REMARQUE 5.2.2. *Algorithme pour le calcul de la cohomologie du complexe d'irrégularité de $(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))$ en $c \in \mathbb{P}^1$:*

- *Calcul d'une résolution à l'infini de f et g en suivant pas à pas les comportements de F et de G. Il faut que pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D$ soit à croisement normal au voisinage de tout point de D.*
- *Calcul de la caractéristique d'Euler $\chi(\mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}))$. Grâce au théorème de Mayer-Vietoris, on est ramené aux calculs de la caractéristique d'Euler des complexes $\mathbb{R}\Gamma(Z_i, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})$, où les Z_i sont les composantes irréductibles de D sur lesquelles F est constant et vaut c et G est constant et vaut l'infini. Le fait que pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D$ est à croisement normal au voisinage de tout point dans D, permet alors d'utiliser les résultats locaux sur les complexes d'irrégularité le long de $x = 0$ ou $y = 0$ ou $xy = 0$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules du type $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}}$, avec $k \geq 1$ ou $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k y^l}}$, avec $k \geq 1$ et $l \geq 0$ (c.f. les corollaires du chapitre 3).*

5.3 Réunion d'arbres associée à une résolution à l'infini.

Soit une résolution à l'infini de f et g :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}\\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j}\\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1\end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc}\mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}\\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j}\\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1,\end{array}$$

telle que, pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D$ est à croisement normal au voisinage des points de D, où $D = \mathbb{X} \setminus i(\mathbb{C}^2)$.

Fixons $c \in \mathbb{P}^1$. On veut définir une réunion d'arbre nous permettant d'avoir des informations sur les dimensions des groupes de cohomologie du complexe $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}$. Il s'agit d'un sous graphe de l'arbre de résolution à l'infini de f et g, augmenté des transformées strictes de $F^{-1}(c)$ et contenant les composantes irréductibles de D sur lesquelles $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_X[*D]e^G)$ est non nul, pondéré par la multiplicité de G.

NOTATION 5.3.1. – *On note D^c_∞ l'ensemble des composantes irréductibles de D sur lesquelles G est constante et vaut l'infini et F est constante et vaut c.*
– *On note D^c_{dic} l'ensemble des composantes irréductibles de D dicritiques pour G et sur lesquelles F est constante et vaut c auquel on ajoute les transformées strictes de $F^{-1}(c)$ intersectant une composante irréductible de D_∞.*
– *On note D^{dic}_∞ l'ensemble des composantes irréductibles de D dicritiques pour F et sur lesquelles G est constante et vaut l'infini.*
– *On note D^{dic}_{dic} l'ensemble des composantes irréductibles de D dicritiques pour F et G.*

Commençons par démontrer le lemme suivant :

LEMME 5.3.2. *1. Si $Z \in D^c_\infty$, avec $c \in \mathbb{C}$, les seules composantes irréductibles de D l'intersectant sont celles de D^c_∞, D^{dic}_∞ et D^c_{dic}.*

2. Si $Z \in D^\infty_\infty$, les seules composantes irréductibles de D l'intersectant sont celles de D^∞_∞, D^{dic}_∞, D^∞_{dic} et D^{dic}_{dic}.

Démonstration

Supposons $c \in \mathbb{P}^1$. Soit $Z \in D^c_\infty$ et Z' une composante irréductible de D intersectant Z. Comme F est constante et vaut c sur Z, soit F est constante et vaut c sur Z', soit Z' est dicritique pour F (sinon, on aurait un point d'indétermination). De même, comme G est constante et vaut l'infini sur Z, soit G est constante et vaut l'infini sur Z', soit Z' est dicritique pour G. Le deuxième point est donc démontré.

Pour démontrer le premier point, il faut montrer que si $Z \in D^c_\infty$, avec $c \in \mathbb{C}$, Z ne peut pas intersecter une composante irréductible de D à la fois dicritique pour F et G. Supposons qu'il existe une composante irréductible Z' de D qui soit dicritique pour F et G, intersectant Z. Alors il existe une conposante irréductible Z'' de D, intersectant Z', sur laquelle F est constante et vaut ∞. Or F est constante et vaut c sur Z, donc $Z \neq Z''$. Comme on a affaire à un arbre d'éclatements, on aurait alors que la réunion des composantes sur lesquelles F ou G est constante et vaut ∞ n'est pas connexe. Ceci est absurde car cette réunion est connexe (c.f. proposition 4.2.4).

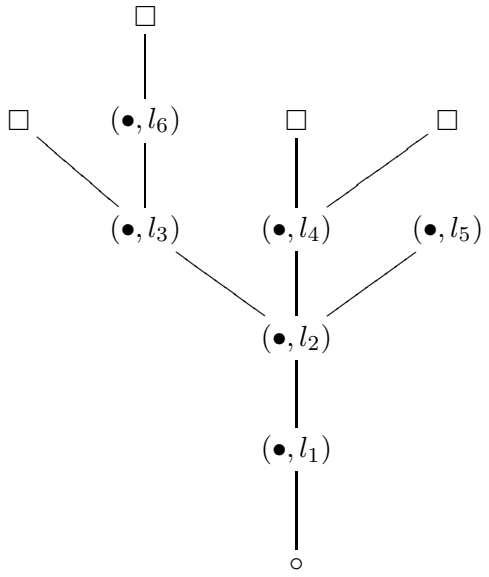
□

DEFINITION 5.3.3. *On définit la réunion d'arbres associée à un $c \in \mathbb{P}^1$ et à une résolution à l'infini de f et g de la manière suivante :*

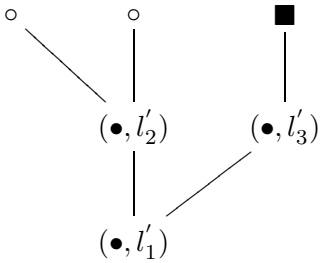
1. *Un sommet sera noté par $(\bullet, l)$ si il correspond à une composante irréductible Z de D^c_∞, avec $l = mult_Z(G^{-1}(\infty))$.*
2. *Un sommet sera noté par $\square$ si il correspond à une composante irréductible de D^c_{dic} intersectant une composante irréductible de D^c_∞. On compte ici les composantes irréductibles de D et les transformées strictes de $F^{-1}(c)$ intersectant D^c_∞.*
3. *Si $c = \infty$, un sommet sera noté par $\blacksquare$ si il correspond à une composante irréductible de D^{dic}_{dic} intersectant une composante irréductible de D^∞_∞.*
4. *Un sommet sera noté $\circ$ si il correspond à une composante irréductible de D^{dic}_∞ intersectant une composante irréductible de D^c_∞.*
5. *Les autres composantes irréductibles de D ne sont pas représentées.*
6. *Une arète joint deux sommets si les composantes correspondantes se coupent.*

EXEMPLE :

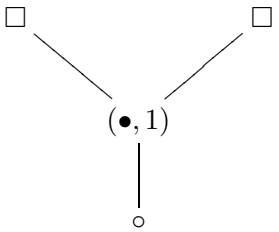
1. Un arbre sera de ce type :



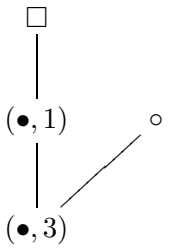
ou



2. (Polynôme de Broughton) arbre associé au cas où $f(x, y) = x$, $g(x, y) = (xy + 1)y$ et :
   - $c = 0$:



   - $c = \infty$:

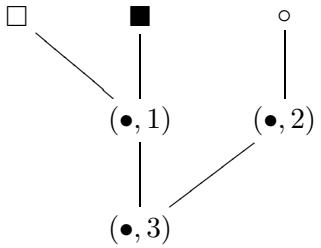


3. arbre associé au cas où $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y^d + a_{d-1}(x)y^{d-1} + \ldots + a_0(x)$ et $c \in \mathbb{C}$:

4. arbre associé au cas où $f(x, y) = (x - 1)y$, $g(x, y) = (x^2 - 1)y$ et :

– $c = 0$:

– $c = \infty$:



5.4 Calcul de la cohomologie du complexe d'irrégularité.

Soit j l'inclusion canonique de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1$. Soit f et g deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants. On s'intéresse au calcul de la cohomologie du complexe $IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))$, $c \in \mathbb{P}^1$. On considère une résolution à l'infini de f et g au sens du paragraphe 4.2.2 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

avec pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D$ à croisement normal au voisinage de tout point de D, où $D = \mathbb{X} \setminus i(\mathbb{C}^2)$.

On sait alors que le complexe $IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))$, $c \in \mathbb{P}^1$, est concentré en degré 0 et à support c. On calculera alors la dimension de cet espace vectoriel grâce à la formule :

$$dim((IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c) = -\chi(\mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})).$$

(c.f. proposition 5.2.1).

Pour cela, on utilisera la définition des réunions d'arbres de résolution à l'infini et le théorème de Mayer-Vietoris.

5.4.1 Préliminaires.

Soit f et g deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants. On considère une résolution à l'infini de f et g :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

telle que pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $F^{-1}(c) \cup D$ est à croisement normal au voisinage de tout point dans D (c.f. paragraphe 4.2.2).

REMARQUE 5.4.1. *1. Soit $Z \in D_\infty$. Au voisinage de $P \in Z$, supposons Z d'équation $x = 0$. Alors :*

(a) Si P est un point d'intersection de Z avec une composante irréductible de D_∞ d'équation $y = 0$, G sera équivalent au voisinage de ce point à $\frac{1}{x^k y^l}$, avec $k, l \geq 1$.

(b) Si P est un point d'intersection de Z avec une composante dicritique d'équation $y = 0$, G sera équivalent au voisinage de ce point à $\frac{1}{x^k}$, avec $k \geq 1$.

(c) Si P n'est pas un point d'intersection de Z avec une autre composante irréductible de D_∞ , G sera équivalent au voisinage de P à $\frac{1}{x^k}$, avec $k \geq 1$. On remarque que ce cas contient le cas où P est un point d'intersection de Z avec une transformée stricte de $F^{-1}(c)$ et que l'on peut choisir des coordonnées (x, y) telle que cette transformée stricte soit d'équation $y = 0$.

2. Si $P \in \mathbb{X}$ n'appartient à aucunes composantes irréductibles de D sur lesquelles G est constante et vaut l'infini, alors G sera holomorphe au voisinage de P.

Démonstration

On a $G^{-1}(\infty) \subset D$. Comme D est à croisements normaux, $G^{-1}(\infty)$ l'est également.

1. Si $Z \in D_\infty$, par définition, $G_{|Z} = \infty$. Comme $G^{-1}(\infty)$ est à croisements normaux, on a nécessairement G équivalent à $\frac{1}{x^k y^l}$, $k \geq 1$ et $l \geq 0$, au voisinage de chaque point P de Z (Z d'équation $x = 0$).
   - Si P est un point d'intersection avec une autre composante irréductible de D_∞ d'équation $y = 0$, on a nécessairement $G \sim \frac{1}{x^k y^l}$, avec $k, l \geq 1$.
   - Si P est un point d'intersection de Z avec un diviseur dicritique pour G d'équation $y = 0$, on a $G \sim \frac{1}{x^k}$, avec $k \geq 1$, car sinon, $G = \infty$ sur un petit ouvert du diviseur dicritique, ce qui est impossible.
   - Si P n'est pas un point d'intersection de Z avec une autre composante irréductible de D, on a nécessairement $G \sim \frac{1}{x^k}$, avec $k \geq 1$, car $G^{-1}(\infty)$ est inclus dans D.
2. Pour le deuxième point, il suffit de remarquer que si $P \in \mathbb{X}$ n'appartient à aucunes composantes irréductibles de D sur lesquelles G est constant et vaut l'infini, alors $G(P) \in \mathbb{C}$.

□

Soit $c \in \mathbb{P}^1$ tel qu'il existe une composante irréductible de D sur lequel F est constant et vaut c et G est constant et vaut l'infini (i.e. $D_\infty^c \neq \emptyset$). Il existe un nombre fini de tel c. Notons Δ l'ensemble de ces c.

On démontrera que si $c \notin \Delta$, $j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$ est régulier en c. Dans le paragraphe suivant, on donnera une formule de la dimension caractérisant le complexe d'irrégularité en c de $j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$. On remarquera alors que dans le cas où la réunion d'arbre associé à c et à une résolution à l'infini de f et g est une réunion de bambous, $j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)$ est régulier en c.

PROPOSITION 5.4.2. *Si $c \notin \Delta = \{c' \in \mathbb{P}^1 \mid D_\infty^{c'} \neq \emptyset\}$, $IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)) = 0$.*

Démonstration
D'après la proposition 4.3.1 et le théorème 2.3.9 de commutation du foncteur image directe analytique par une application propre avec le foncteur irrégularité le long d'une hypersurface, on a :

$$IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)) = RF_*^{an}(IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}).$$

Il suffit donc de voir que $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an} = 0$. Comme $c \notin \Delta$, $D_\infty^c = \emptyset$. Soit $P \in F^{-1}(c)$. Etudions le complexe d'irrégularité $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}$ au voisinage du point P. On a alors les cas suivants :

1. Si $P \in F^{-1}(c) \cap i(\mathbb{C}^2)$. D'après la remarque 5.4.1, au voisinage de P, G est une fonction holomorphe. Le complexe d'irrégularité $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}$ est donc nul au voisinage du point P.
2. Si $P \in Z$, avec $Z \in D^c$. Comme $D_\infty^c = \emptyset$, on a alors $Z \in D_{dic}^c$ ou $Z \in D_t^c$, avec $t \in \mathbb{C}$.
   (a) Si $Z \in D_t^c$. D'après la remarque 5.4.1, au voisinage de P, G est une fonction holomorphe. Le complexe d'irrégularité $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}$ est donc nul au voisinage du point P.
   (b) Si $Z \in D_{dic}^c$. Soit $Z' \in D_\infty$ intersectant Z. Comme $D_\infty^c = \emptyset$, on a nécessairement $Z' \in D_\infty^{dic}$. Deux cas sont alors possible :
      i. Si $P \notin Z \cap Z'$. D'après la remarque 5.4.1, au voisinage de P, G est une fonction holomorphe. Le complexe d'irrégularité $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}$ est donc nul au voisinage du point P.
      ii. Si $P \in Z \cap Z'$. D'après la remarque 5.4.1, on a alors, au voisinage de P, dans des coordonnées convenables (x, y) :
      – D a pour équation $x = 0$ ou $xy = 0$.
      – $F^{-1}(c)$ a pour équation $y = 0$.
      – G est équivalent au voisinage de P à $\frac{1}{x^k}$, avec $k \geq 1$.
      Le complexe $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}$ est donc égal, au voisinage du point P, au complexe $IR_{y=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^k}})$ ou au complexe $IR_{y=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^k}})$. Or, d'après le corollaire 3.3.4 **(A2)** du chapitre 3, ce complexe est nul.

Finalement, on a démontré que $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an} = 0$.

□

REMARQUE 5.4.3. *1. D'après le corollaire 4.2.6, D_∞^∞ est non vide. On a donc $\infty \in \Delta$.*

2. Certaines valeurs atypiques pour f proviennent des composantes irréductibles de D sur lesquelles F est constantes et vaut c. Si sur certaines de ces composantes irréductibles, G est constantes et vaut l'infini, alors c appardiendra à Δ.

3. Les éléments de Δ ne sont pas nécéssairement des valeurs atypiques de f. Si lors de la succession d'éclatements, G est indéterminée en un point P qui est sur une composante dicritique pour F, on pourra également avoir $F(P) \in \Delta$.

EXEMPLE : Dans le cas où $f = x$, f n'a pas de valeur atypique et pourtant, on obtient de l'irrégularité en certains $c \in \mathbb{C}$. Notons $g(x, y)$ sous la forme $a_d(x)y^d + \ldots + a_0(x)$. En

plongeant $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^2$ de manière canonique, on obtient les fonctions rationnelles :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}: & \mathbb{P}^2 & \to & \mathbb{P}^1 \\ & (x:y:z) & \mapsto & \frac{x}{z}, \\ \tilde{g}: & \mathbb{P}^2 & \to & \mathbb{P}^1 \\ & (x:y:z) & \mapsto & \frac{a_d(\frac{x}{z})y^d+\ldots+a_0(\frac{x}{z})z^d}{z^d}. \end{array}$$

On fait alors l'éclatement π de $(0:1:0)$. Dans la première carte, $\tilde{f}\circ\pi$ vaut l'infini à l'origine. Pour calculer la cohomologie du complexe d'irrégularité le long de $c \in \mathbb{C}$, il suffit donc de regarder les changements dans la deuxième carte de l'éclatement. Posons $\pi(u,z) = (uz, z)$. Alors :

$$\begin{cases} \tilde{f}\circ\pi(u,z) = u, \\ \tilde{g}\circ\pi(u,z) = \frac{a_d(u)+\ldots+a_0(u)z^d}{z^d}. \end{cases}$$

On remarque que $\tilde{f}\circ\pi$ est bien définie partout et que le diviseur E obtenu est dicritique pour $\tilde{f}\circ\pi$. Ainsi pour calculer l'irrégularité en $c \in \mathbb{C}$, il suffit de regarder le comportement de $\tilde{g}\circ\pi$ au point $(u,z) = (c,0)$.

- Si $a_d(c) \neq 0$, $a_d(u) + \ldots + a_0(u)z^d$ est une unité dans $\mathbb{C}\{u-c, z\}$ et ainsi $g \sim_{(c,0)} \frac{1}{z^d}$. On aura alors $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an} = IR_{u=c}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z^d}})^{an} = 0$, d'après le corollaire 3.3.4 **(A2)** du chapitre 3.
- Si $a_d(c) = 0$, g est indéterminée en $(u,z) = (c,0)$. Il faudra alors résoudre $\tilde{g}\circ\pi$ en ce point et calculer la cohomologie du complexe d'irrégularité en c.

5.4.2 Le résultat principal.

D'après le paragraphe précédent, il suffit de calculer l'irrégularité de $j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ en $c \in \Delta$.

Soit $c \in \Delta$.

NOTATION 5.4.4. – *On note D^c_∞ l'ensemble des composantes irréductibles de D sur lesquelles G est constante et vaut l'infini et F est constante et vaut c.*

- *Pour $Z_i \in D^c_\infty$, on note :*
  - *$l_i = mult_{Z_i}(G^{-1}(\infty))$ (multiplicité de Z_i dans $G^{-1}(\infty)$).*
  - *n_i le nombre de composantes irréductibles de D et de transformée stricte de $F^{-1}(c)$ intersectant Z_i. Ce nombre correspond au nombre de segments liant le sommet correspondant à Z_i avec un autre sommet de l'arbre.*

THEOREME 5.4.5.

$$dim\ (IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c = \sum_{Z_i\in D^c_\infty}(n_i-2)l_i.$$

Démonstration

D'après la proposition 5.2.1,

$$dim\ (IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c = -\chi(\mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})).$$

Il suffit de montrer que :

$$\chi(\mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) = \sum_{Z_i \in D^c_\infty} (2-n_i)l_i.$$

1. Montrons tout d'abord que le complexe $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})$ est à support dans $\bigcup_{Z_i \in D^c_\infty} Z_i$. Comme ce complexe est à support $F^{-1}(c)$, il faut montrer que si $P \in F^{-1}(c)$ et $P \notin \bigcup_{Z_i \in D^c_\infty} Z_i$, alors le complexe d'irrégularité $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})$ est nul au voisinage de P. Ceci vient du fait qu'avec ces conditions sur P, on a G holomorphe au voisinage de P. Ainsi :

$$\chi(\mathbb{R}\Gamma(F^{-1}(c), IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) = \chi(\mathbb{R}\Gamma(\bigcup_{Z_i \in D^c_\infty} Z_i, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})).$$

2. On va maintenant étudier localement le complexe $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}$.
   Soit Z_i une composante irréductible de D^c_∞. Il intersecte un certain nombre de composantes irréductibles de D et de transformées strictes de $F^{-1}(c)$, $Z_{j_1}, \ldots, Z_{j_{n_i}}$. Dans le cas où $c \in \mathbb{C}$, ces composantes sont soit dans D^c_∞, soit dans D^c_{dic}, soit dans D^{dic}_∞. Dans le cas où $c = \infty$, il faut ajouter le cas où certaines de ces composantes sont dans D^{dic}_{dic} (c.f. lemme 5.3.2). Nous noterons $P^i_{j_k}$ le point d'intersection de Z_i avec Z_{j_k}.

   (a) Au voisinage d'un point P de Z_i qui n'est pas un de ces points d'intersection, on a, dans des coordonnées convenables (x, y) au voisinage de P :
   - Z_i d'équation $x = 0$.
   - D d'équation $x = 0$.
   - $F^{-1}(c)$ d'équation $x = 0$.
   - G est équivalent au voisinage de P à $\frac{1}{x^{l_i}}$ ($l_i = mult_{Z_i}(G^{-1}(\infty))$).

   Ainsi, au voisinage de P le complexe $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}$ se calcule à l'aide du complexe $IR_{x=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^{l_i}}})$. En utilisant le corollaire 3.3.2 **(A1)** du chapitre 3, on voit que la restriction du complexe $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}$ à Z_i privé des n_i points d'intersection $P^i_{j_k}$ est un système local de rang l_i.

   (b) Etudions alors le complexe $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}$ au voisinage des points d'intersection. Regardons pour cela l'écriture locale de D, $F^{-1}(c)$ et G au voisinage des points d'intersection. Nous supposerons toujours que localement Z_i est d'équation $x = 0$. Soit $P^i_{j_k}$ le point d'intersection de Z_i avec Z_{j_k}. Quatre cas sont alors possibles :

      i. $Z_{j_k} \in D^c_\infty$. Au voisinage du point $P^i_{j_k}$, G est équivalent à $\frac{1}{x^{l_i}y^{l_{j_k}}}$. D a pour équation $xy = 0$ et $F^{-1}(c)$ a pour équation $xy = 0$. Il faudra alors regarder $IR_{xy=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^{l_i}y^{l_{j_k}}}})$ **(B1)**.

      ii. $Z_{j_k} \in D^{dic}_\infty$. Au voisinage du point $P^i_{j_k}$, G est équivalent à $\frac{1}{x^{l_i}y^{l_{j_k}}}$. D a pour équation $xy = 0$ et $F^{-1}(c)$ a pour équation $x = 0$. Il faudra alors regarder $IR_{x=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^{l_i}y^{l_{j_k}}}})$ **(B2)**.

iii. $Z_{j_k} \in D^c_{dic}$. Au voisinage du point $P^i_{j_k}$, G est équivalent à $\frac{1}{x^{l_i}}$. D a pour équation $x = 0$ ou $xy = 0$ et $F^{-1}(c)$ a pour équation $xy = 0$. Il faudra alors regarder $IR_{xy=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{x}]e^{\frac{1}{x^{l_i}}})$ ou $IR_{xy=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^{l_i}}})$ **(A3)**.

iv. $Z_{j_k} \in D^{dic}_{dic}$. Au voisinage du point $P^i_{j_k}$, G est équivalent à $\frac{1}{x^{l_i}}$. D a pour équation $xy = 0$ et $F^{-1}(c)$ a pour équation $x = 0$. Il faudra alors regarder $IR_{x=0}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{xy}]e^{\frac{1}{x^{l_i}}})$ **(A4)**.

3. Calculons maintenant $\chi(\mathbb{R}\Gamma(\bigcup_{Z_i \in D^c_\infty} Z_i, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}))$.

En utilisant le théorème de Mayer-Vietoris pour chaque composante irréductible de D^c_∞ en partant toujours d'une composante irréductible en fin de branche, on obtient :

$$\begin{aligned}\chi(\mathbb{R}\Gamma(\bigcup_{Z_i \in D^c_\infty} Z_i, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) &= \sum_{Z_i \in D^c_\infty} \chi(\mathbb{R}\Gamma(Z_i, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) \\ &\quad - \sum_{S^i_j} \chi(\mathbb{R}\Gamma(P^i_j, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})),\end{aligned}$$

où S^i_j est le segment de l'arbre liant les sommets associés à Z_i et Z_j de D^c_∞ et P^i_j est le point d'intersection de Z_i et Z_j.
Or d'après le corollaire 3.3.10 **(B1)** et le point 2.(b)i.,

$$\begin{aligned}\chi(\mathbb{R}\Gamma(P^i_j, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) &= \chi((IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})_{P^i_j}) \\ &= 0\end{aligned}$$

D'où :

$$\chi(\mathbb{R}\Gamma(\bigcup_{Z_i \in D^c_\infty} Z_i, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) = \sum_{Z_i \in D^c_\infty} \chi(\mathbb{R}\Gamma(Z_i, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})).$$

Il reste donc à montrer que pour $Z_i \in D^c_\infty$,

$$\chi(\mathbb{R}\Gamma(Z_i, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) = (2 - n_i)l_i.$$

Soit $U_1, \ldots, U_{n_i}$ des ouverts de Z_i tel que :

(a) U_k boule ouverte dans Z_i de centre P_k et de rayon suffisamment petit.

(b) Les U_k sont disjoints deux à deux.

(c) On a les écritures locales sur chaque U_k de 2.(b).

(d) Comme $(IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})_{|U_k}$ est un complexe constructible, on choisit U_k suffisamment petit pour que

$$\mathbb{R}\Gamma(U_k, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}_{|U_k}) = (IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})_{P_k}$$

(c.f. corollaire I.4.17 de [32]).

Notons U la réunion disjointe des U_i et V l'adhérence du complémentaire dans $\mathbb{P}^1$ de boules de centre P_k incluses dans U_i. On a alors $U \cap V$ réunion disjointe de n_i couronnes ouvertes. Alors :

– Comme $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}_{|V}$ est un système local de rang l_i (c.f. 2.(a)) et que $\chi(V) = (2 - n_i)$, on a $\chi(\mathbb{R}\Gamma(V, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) = (2 - n_i)l_i$.
– Comme $IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}_{|U\cap V}$ est un système local de rang l_i et que $\chi(U \cap V) = 0$, on a $\chi(\mathbb{R}\Gamma(U \cap V, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) = 0$.
–

$$\begin{array}{rcl}\chi(\mathbb{R}\Gamma(U, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) & = & \sum_{k=1}^{n_i} \chi(\mathbb{R}\Gamma(U_i, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an}_{|U_i})) \\ & = & \sum_{k=1}^{n_i} \chi((IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})_{P_i}).\end{array}$$

Or d'après les écritures locales de 2.(b) et les corollaires 3.3.10 **(B1)**, 3.3.12 **(B2)**, 3.3.6 **(A3)** et 3.3.8 **(A4)**,

$$\chi((IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})_{P_i}) = 0.$$

Donc

$$\chi(\mathbb{R}\Gamma(U, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) = 0.$$

Par le théorème de Mayer-Vietoris, on a alors :

$$\begin{array}{rcl}\chi(\mathbb{R}\Gamma(Z_i, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) & = & \chi(\mathbb{R}\Gamma(U, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) \\ & & +\chi(\mathbb{R}\Gamma(V, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) \\ & & -\chi(\mathbb{R}\Gamma(U \cap V, IR_{F^{-1}(c)}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D]e^G)^{an})) \\ & = & (2 - n_i)l_i.\end{array}$$

□

REMARQUE 5.4.6. *On peut vérifier que la formule obtenue ne dépend pas de la résolution à l'infini choisie pour f et g. Il suffit de remarquer qu'elle reste inchangée si on effectue un éclatement supplémentaire. Si à la suite de cet éclatement, on fait apparaître une composante irréductible Z de D^c_∞ :*

– *soit Z est représentée à la fin d'une branche, sur la réunion d'arbre associé à c et à la nouvelle résolution à l'infini. Alors la multiplicité de $G^{-1}(\infty)$ sur Z est la même que sur la composante irréductible de D^c_∞ liée à Z. On montre alors que la formule ne change pas.*
– *Soit Z s'intercale entre deux composantes de D^c_∞ et alors on doit ajouter à la formule $(2 - 2)l_Z = 0$. La formule reste donc encore inchangée.*

Cette remarque est en principe superflu, mais cet argument sera utilisé dans la démonstration du lemme 6.3.6.

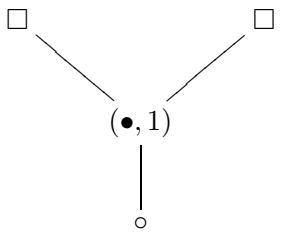
COROLLAIRE 5.4.7. *Soit $c \in \mathbb{P}^1$. Si la réunion d'arbre associé à c et à une résolution à l'infini de f et g est une réunion de bambou, on a :*

$$(IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c = 0.$$

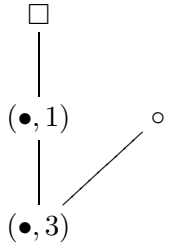
EXEMPLE :

1. (Polynôme de Broughton) $f(x, y) = x$ et $g(x, y) = (xy + 1)y$. On a $\Delta = \{0, \infty\}$.

– arbre associé à $c = 0$:



– arbre associé à $c = \infty$:



On a ainsi :

$$dim\ ((IR_c^0(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c) = \begin{cases} 0 & \text{pour } c \neq 0, \infty \\ (2-2)3 + (2-2)1 = 0 & \text{pour } c = \infty \\ (3-2)1 = 1 & \text{pour } c = 0. \end{cases}$$

2. $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = y^d + a_{d-1}(x)y^{d-1} + \ldots + a_0(x)$. On a alors $\Delta = \{\infty\}$. Ainsi, $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ est régulier sauf éventuellement à l'infini. On ne peut rien dire sur l'irrégularité de $j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ à l'infini dans cet exemple. Plus généralement, on a :

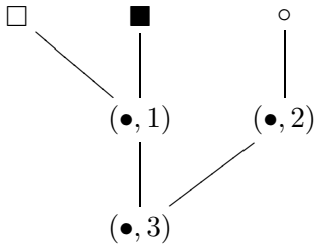
   COROLLAIRE 5.4.8. *Si f est lisse et que les points d'indétermination de g sont disjoints de ceux de f, $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ est régulier sauf éventuellement à l'infini.*

   En effet, Δ est inclus dans l'ensemble des c tel que :
   – $c = \infty$.
   – c valeurs atypiques pour f. Dans notre cas, il n'y en a pas.
   – Les $c \in \mathbb{C}$ tel que $f(P) = c$ avec g indéterminée au point P et $P \in Z$ avec $Z \in D_0^F \cup D_c^F$. Or dans notre cas, aucune de ces valeurs ne peut apparaitre car les points d'indétermination de f et de g sont disjoints.

3. Si $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = x^\alpha(a_d(x)y^d + \ldots + a_0(x))$, avec $a_d(0) \neq 0$ on aura $\tilde{g}(x : y : z) = \frac{x^\alpha(a_d(\frac{x}{z})y^d + \ldots + a_0(\frac{x}{z})z^d)}{z^{\alpha+d}}$ et ainsi, dans la carte $y = 1$, $\tilde{g}(x,z) = \frac{x^\alpha(a_d(\frac{x}{z}) + \ldots + a_0(\frac{x}{z})z^d)}{z^{\alpha+d}}$. On regarde alors le résultat de l'éclatement π de $(x,z) = (0,0)$ dans la deuxième carte. Posons $\pi(u,z) = (uz,z)$. On a alors $\tilde{g} \circ \pi(u,z) = \frac{u^\alpha(a_d(u) + \ldots + a_0(u)z^d)}{z^d} = \frac{u^\alpha * h(u,z)}{z^d}$ avec $h(u,z)$ unité au voisinage de $(0,0)$. L'arbre de résolution d'une telle fraction rationnelle est un bambou. Ainsi, $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ est régulier en 0.

4. $f(x,y) = (x-1)y$ et $g(x,y) = (x^2-1)y$. On a $\Delta = \{0, \infty\}$.
   – arbre associé à $c = 0$:

– arbre associé à $c = \infty$:



On a ainsi :

$$dim\ ((IR_c^0(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c) = \begin{cases} 0 & \text{pour } c \neq 0, \infty \\ 0 & \text{pour } c = 0 \\ (3-2)*1 = 1 & \text{pour } c = \infty. \end{cases}$$

5.5 Traduction du résultat en terme géométrique.

5.5.1 Introduction.

On suppose toujours que f et g sont deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants. Nous allons commencer par donner un théorème de fibration pour tout $c \in \mathbb{P}^1$. Il s'agit d'une version locale de la fibration de Milnor pour g. Pour η_1 suffisamment petit et R suffisamment grand,

$$g : f^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap g^{-1}(|\rho| > R) \to \{|\rho| > R\}$$

est une fibration lisse localement triviale. La caractéristique d'Euler de la fibre générique est l'opposé de la dimension de la cohomologie du complexe d'irrégularité en c calculée dans le paragraphe précédent.

Nous étudierons ensuite la topologie de cette fibre. Le cas où c est à distance fini ($c \in \mathbb{C}$) et le cas où c vaut l'infini diffèrent. Considérons une résolution à l'infini de f et g :

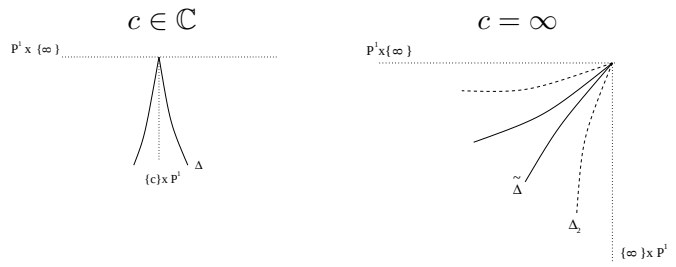
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

On note $D = \mathbb{X} \setminus i(\mathbb{C}^2)$. L'existence de composantes irréductibles dicritiques pour F et G augmente la dimension de l'irrégularité à l'infini. Ils n'ont aucun effet sur l'irrégularité à distance fini. Ce phénomène est lié au fait que la fibre générique $F^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)$, pour $c \in \mathbb{C}$, ne rencontre pas D, ou encore que $F^{-1}(D(c, \eta_1)) \cap G^{-1}(\rho)$ coupe uniquement des composantes irréductibles de D dicritiques pour G sur lesquelles F est constante et vaut c. Dans le cas à l'infini, la fibre $F^{-1}(D(\infty, \eta_1)) \cap G^{-1}(\rho)$ coupe des composantes irréductibles de D dicritique pour G sur lesquelles F est constante et vaut l'infini mais aussi des composantes irréductibles de D dicritiques pour F et G.

Voici le résultat obtenu dans le cas à distance fini ($c \in \mathbb{C}$). Notons Γ la courbe polaire de f et g et Δ la courbe discriminante (image de Γ par (f, g)), comptée avec sa multiplicité.

Notons $\overline{\Delta \setminus (\{c\} \times \mathbb{C})}$ l'adhérence de Zariski de $\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On démontrera que la dimension cherchée est la multiplicité d'intersection de $\overline{\Delta \setminus (\{c\} \times \mathbb{C})}$ avec $\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$ au point (c, ∞).

Dans le cas où $c = \infty$, notons Γ' la courbe polaire de F et G et $\tilde{\Delta}$ la trace dans $\mathbb{C}^2$ de la courbe discriminante de F et G (image par (F, G) de Γ') comptée avec multiplicité. Notons Δ_2 la trace dans $\mathbb{C}^2$ de l'image par (F, G) de D comptée avec multiplicité. On démontrera alors que la dimension de l'irrégularité à l'infini est la multiplicité d'intersection en (∞, ∞) de l'adhérence de Zariski de $\tilde{\Delta} \cup \Delta_2$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ avec $\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$. Il faut remarquer que certaines branches de Δ_2 et de $\tilde{\Delta}$ peuvent être communes. Dans ce cas, on les compte avec les multiplicités adéquates.



5.5.2 Lemme différenciant le cas à distance fini du cas à l'infini.

LEMME 5.5.1. *Pour $c \in \mathbb{C}$, η_1 suffisamment petit et R suffisamment grand, on a :*

$$\forall |\rho| > R,\ (F^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)) \cap D = \emptyset.$$

Démonstration
On sait que $D^{c'} \neq \emptyset$ pour un nombre fini de $c' \in \mathbb{P}^1$. Choisissons η_1 suffisamment petit tel que pour tout $c' \in D(c, \eta_1)^*$ et tout Z composante irréductible de D, $F_{|Z} \not\equiv c'$. Si il existe $P \in F^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap D$, alors P est sur une composante irréductible Z de D dicritique pour F.

De même, choisissons R suffisamment grand tel que pour tout $|\rho| > R$ et tout Z composante irréductible de D, $G_{|Z} \not\equiv \rho$. Si il existe $P \in G^{-1}(\rho) \cap D$, alors P est sur une composante irréductible Z' de D dicritique pour G.

Montrons alors que si $P \in (F^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)) \cap D$ alors P est dans une composante irréductible de D dicritique pour F et G. Il suffit de montrer, avec les notations précédentes, que $Z = Z'$. Supposons $Z \neq Z'$. Alors P est le point d'intersection de Z et Z'. Comme $G_{|Z} \not\equiv \rho$, on a nécéssairement Z dicritique pour G. On aurait alors deux composantes irréductibles de D dicritiques pour G d'intersection non vide. Comme D_∞ est connexe, ceci est impossible. Ainsi, si $P \in (F^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)) \cap D$ alors P est sur une composante irréductible de D dicritique pour F et G.

Il reste donc à montrer que pour toute composante irréductible Z de D dicritique pour F et G (en nombre fini), pour η_1 suffisamment petit et pour R suffisamment grand, on a :

$$\forall |\rho| > R,\ (F^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)) \cap Z = \emptyset.$$

Raisonnons par l'absurde. Fixons η_1 et supposons que pour tout $R > 0$, il existe ρ, $|\rho| > R$ tel que $(F^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)) \cap Z \neq \emptyset$. On peut alors construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans Z

telle que $0 < |F(x_n) - c| < \eta_1$ et $G(x_n) = \rho_n$, avec $\lim_{n\to\infty} |\rho_n| = \infty$. Comme Z est compact, il existe alors un point d'accumulation $a_{\eta_1} \in Z$ tel que $0 < |F(a_{\eta_1}) - c| < \eta_1$ et $G(a_{\eta_1}) = \infty$. On a donc une suite $(a_{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ dans Z telle que $0 < |F(a_{\frac{1}{n}}) - c| < \frac{1}{n}$ et $G(a_{\frac{1}{n}}) = \infty$. Par compacité, il existe un $a \in Z$ tel que $F(a) = c$ et $G(a) = \infty$.

Z est dicritique pour G et $G(a) = \infty$. Comme $D_\infty \neq \emptyset$ et que $\underset{Z\in D_\infty}{\cup} Z$ est connexe, a est le point d'intersection de Z avec une composante irréductible dans D_∞.

Comme Z est dicritique pour F est $F(a) = c$, il existe $a^{'} \in Z \setminus \{a\}$ tel que $F(a^{'}) = \infty$ et $F_{|Z} \not\equiv \infty$.

On a alors une contradiction car $\underset{Z\in D_\infty \cup D^\infty}{Z}$ est connexe.

□

5.5.3 Un théorème de fibration.

Nous allons définir une fibration lisse localement triviale puis nous montrerons que la caractéristique d'Euler de la fibre est l'opposé de la dimension de $(IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c$.

Théorème de fibration.

Commençons par définir la fibration lisse localement triviale.
Soit une résolution à l'infini de f et g comme dans le paragraphe 4.2.2 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

On note $D = \mathbb{X} \setminus i(\mathbb{C}^2)$. On considère l'application $\Phi = (F, G) : \mathbb{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Soit $\Gamma^{'}$ la courbe polaire de F et G ($J(F, G) = 0$). Notons $\Delta^{'} = \Phi(\Gamma^{'})$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \overset{(f,g)}{\to} & \mathbb{C}^2 \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{X} & \overset{\Phi}{\to} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ \cup & & \cup \\ \Gamma^{'} & & \Delta^{'} \end{array}$$

Comme f et g sont algébriquement indépendants, $\Delta^{'}$ est une courbe dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Soit $c \in \mathbb{P}^1$. L'inclusion $j : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ permet d'identifier $\mathbb{P}^1$ à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dans la suite, si $c \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$, nous noterons $D(c, \eta_1)$ le disque ouvert de centre c et de rayon η_1 dans $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$. Nous noterons également $D(\infty, \eta_1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\eta_1}\} \cup \{\infty\}$. Pour $c \in \mathbb{P}^1$, on posera $D(c, \eta_1)^* = D(c, \eta_1) \setminus \{c\}$.

LEMME 5.5.2. *1. Il existe η_1 suffisamment petit et η_2 suffisamment petit devant η_1, tels que pour tout $\rho \in D(\infty, \eta_2)^*$, $G^{-1}(\rho)$ est transverse au bord de $F^{-1}(\overline{D}(c, \eta_1))$.*

2. Il existe η_2 suffisamment petit tel que pour tout $\rho \in D(\infty, \eta_2)^*$, $G^{-1}(\rho)$ est transverse à $F^{-1}(c)$.

Démonstration

1. Il suffit de montrer qu'il existe η_1 suffisamment petit et η_2 suffisamment petit devant η_1 tels que pour tout ρ, $0 < |\rho| \leq \eta_2$, $G^{-1}(\rho)$ est transverse à $F^{-1}(S(c,\eta_1))$, où $S(c,\eta_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| = \eta_1\}$. Raisonnons par l'absurde.
   Remarquons tout d'abord que $\Delta' \setminus (\mathbb{P}^1 \times \{\infty\})$ est une courbe et que son adhérence de Zariski rencontre $\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$ en des points isolés. Nous noterons $\overline{\Delta' \setminus (\mathbb{P}^1 \times \{\infty\})}$ cette adhérence de Zariski.
   Fixons un η_1 tel que pour tout η_2, il existe un ρ, $|\rho| > \frac{1}{\eta_1}$ tel que $G^{-1}(\rho)$ n'est pas transverse à $F^{-1}(S(c,\eta_1))$. Alors, il existe $c' = c + \eta_1 e^{i\alpha} \in S(c,\eta_1)$, $G^{-1}(\rho)$ n'est pas transverse à $F^{-1}(c')$. Il existe alors une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $|G(x_n)| > n$, $F(x_n) = c + \eta_1 e^{i\alpha}$ et $(F(x_n), G(x_n)) \in \Delta' \setminus (\mathbb{P}^1 \times \{\infty\})$. Comme $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est compact $(c + \eta_1 e^{i\alpha}, \infty) \in \overline{\Delta' \setminus (\mathbb{P}^1 \times \{\infty\})}$. Or ceci est impossible pour η_1 suffisamment petit puisque $\overline{\Delta' \setminus (\mathbb{P}^1 \times \{\infty\})}$ rencontre $\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$ en des points isolés.
2. Soit $H^{-1}(0)$ une équation réduite de $F^{-1}(c)$ au voisinage des points de $F^{-1}(c) \cap D$. Alors, $H^{-1}(0)$ est à singularité isolée. On choisit η_2 suffisamment petit pour que quelque soit $\rho \in B(\infty,\eta_2)^*$, $G^{-1}(\rho) \cap H^{-1}(0)$ évite le lieu singulier de H. Il faut alors montrer qu'il existe un η_2 suffisamment petit tel que pour tout $\rho \in B(\infty,\eta_2)^*$, $G^{-1}(\rho)$ est transverse à $H^{-1}(0)$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout η_2, il existe $\rho \in B(\infty,\eta_2)^*$, tel que $G^{-1}(\rho)$ n'est pas transverse à $H^{-1}(0)$. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|G(x_n)| > \frac{1}{n}$, $H(x_n) = 0$ et $J(H,G)(x_n) = 0$. Posons :

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{X} \ : \ J(H,G)(x) = 0\}$$
$$V = \{x \in \mathbb{X} \ : \ |\tfrac{1}{G(x)}| > 0 \text{ et } H(x) = 0\}$$

   D'après ce qui précède, il existe $a \in \overline{\Gamma \cap V}$, avec $G(a) = \infty$. D'après le lemme des petits chemins, il existe un chemin différentiable $p : [0,\epsilon[\to \mathbb{X}$ tel que $p(0) = a$ et pour tout $t \in]0,\epsilon[$, $p(t) \in \Gamma \cap V$. Or $J(H,G)(p(t)) = 0$ et le fait que pour tout ρ suffisamment grand, $G^{-1}(\rho) \cap H^{-1}(0)$ évite le lieu singulier de H nous donne :

$$\frac{d}{dt}G(p(t)) = \lambda(t)\frac{d}{dt}H(p(t)), \text{ avec pour tout } t, \ \lambda(t) \in \mathbb{C}.$$

   Comme $H(p(t)) = 0$, on obtient $G(p(t))$ est constant. De plus, $G(p(0)) = \infty$ et pour $t \in]0,\epsilon[$, $G(p(t)) \neq \infty$. On a donc une contradiction.

□

PROPOSITION 5.5.3. *Pour $c \in \mathbb{P}^1$, il existe η_1 suffisamment petit et R suffisamment grand tels que :*

$$g : f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\{|\rho| > R\}) \to \{|\rho| > R\}$$

est une fibration lisse localement triviale.

Démonstration

Supposons $c \in \mathbb{P}^1$. Pour η_1 suffisamment petit et R suffisamment grand, on a :

- $G : F^{-1}(\overline{D}(c,\eta_1)) \cap G^{-1}(|\rho| > R) \to \{|\rho| > R\}$ est une submersion propre.
- Pour tout ρ, $|\rho| > R$, $G^{-1}(\rho)$ est transverse au bord de $F^{-1}(\overline{D}(c,\eta_1))$ et à $F^{-1}(c)$.

Donc

$$G : F^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(|\rho| > R) \to \{|\rho| > R\}$$

est une fibration lisse localement triviale.

1. Si $c \in \mathbb{C}$. Il suffit alors de montrer que pour $|\rho| > R$:

$$f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho) = F^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho).$$

   Pour cela, on utilise le lemme 5.5.1.

2. Pour $c = \infty$, on peut avoir une composante irréductible de D qui est à la fois dicritique pour F et G. $F^{-1}(D(\infty,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)$ ne sera alors pas dans $i(\mathbb{C}^2)$. Des points des diviseurs doublement dicritiques peuvent être dans $F^{-1}(D(\infty,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)$ et dans D. Cependant, $G^{-1}(\rho)$ est transverse aux diviseurs dicritiques pour $|\rho|$ suffisamment grand. On a donc $g : f^{-1}(D(\infty,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\{|\rho| > R\}) \to \{|\rho| > R\}$ est une fibration lisse localement triviale.

□

Lien entre complexe d'irrégularité et caractéristique d'Euler de la fibre.

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 5.5.4. *Pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, la caractéristique d'Euler de la fibre de la fibration localement triviale précédente (c.f. proposition 5.5.3) est égale à l'opposé de la dimension de l'espace vectoriel $(IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c$.*

$$\chi(f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) = -dim(IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c.$$

Démonstration

On rappelle que D^c_∞ est l'ensemble des composantes irréductibles de D sur lesquelles G prend la valeur ∞ et F, la valeur c. Pour chaque $Z_i \in D^c_\infty$, on a défini l_i la multiplicité de $G^{-1}(\infty)$ le long de Z_i et n_i le nombre de composantes irréductibles de D et de transformées strictes de $F^{-1}(c)$ intersectant Z_i. D'après le théorème 5.4.5,

$$dim\ (IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c = \sum_{Z_i \in D^c_\infty} (n_i - 2)l_i.$$

Avec les notations de la proposition 5.5.3, il faut montrer, pour $|\rho|$ suffisamment grand,

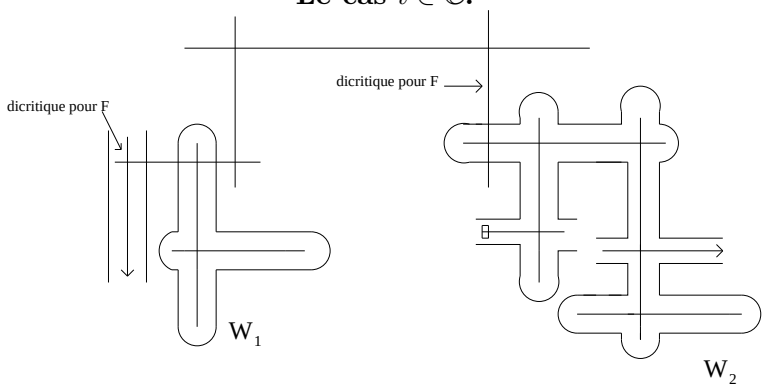
$$\chi(f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) = \sum_{Z_i \in D^c_\infty} (2 - n_i)l_i.$$

Soit $P_1, \ldots, P_s$ les points d'intersection de $F^{-1}(D(c,\eta_1)) \cap G^{-1}(\rho)$ avec D. Comme $|\rho|$ est suffisamment grand, ils correspondent aux points d'intersection de $G^{-1}(\rho)$ avec des composantes dicritiques pour G. On a ainsi $f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho) = F^{-1}(D(c,\eta_1)) \cap G^{-1}(\rho) \setminus \{P_1, \ldots, P_s\}$. On va maintenant calculer la caractéristique d'Euler de $F^{-1}(D(c,\eta_1)) \cap G^{-1}(\rho) \setminus \{P_1, \ldots, P_s\}$.

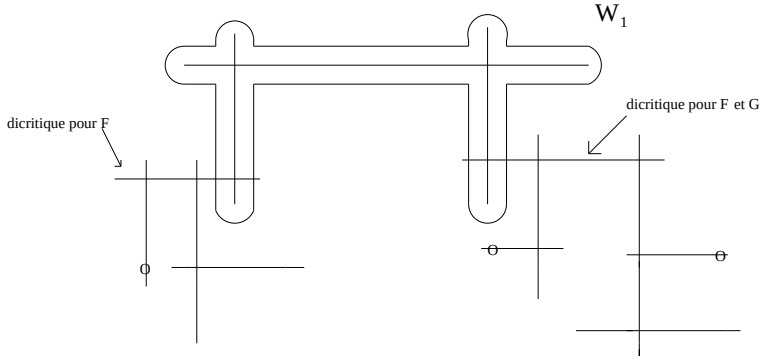
Première étape

Notons $W_1, \ldots, W_k$ les composantes connexes de $F^{-1}(\overline{D}(c,\eta_1))$. Les W_j sont des voisinages compacts des composantes connexes de $F^{-1}(c)$.

Le cas $t \in \mathbb{C}$.



Le cas $t = \infty$.



Deuxième étape

On va maintenant construire un voisinage de $G^{-1}(\infty) \cap W_j$.

– Si $\infty \notin G(W_j)$, $G(W_j)$ est un compact de $\mathbb{P}^1$ ne contenant pas ∞. Donc pour $|\rho|$ suffisamment grand, $G^{-1}(\rho) \cap W_j = \emptyset$. De plus, il n'y a pas de composantes irréductibles de D_∞^c incluse dans W_j. Ce voisinage ne changera donc pas la formule à démontrer.

– Si $\infty \in G(W_j)$, on considère un η_2 suffisamment petit pour que la proposition 5.5.3 soit vérifiée avec $R = \frac{1}{\eta_2}$.

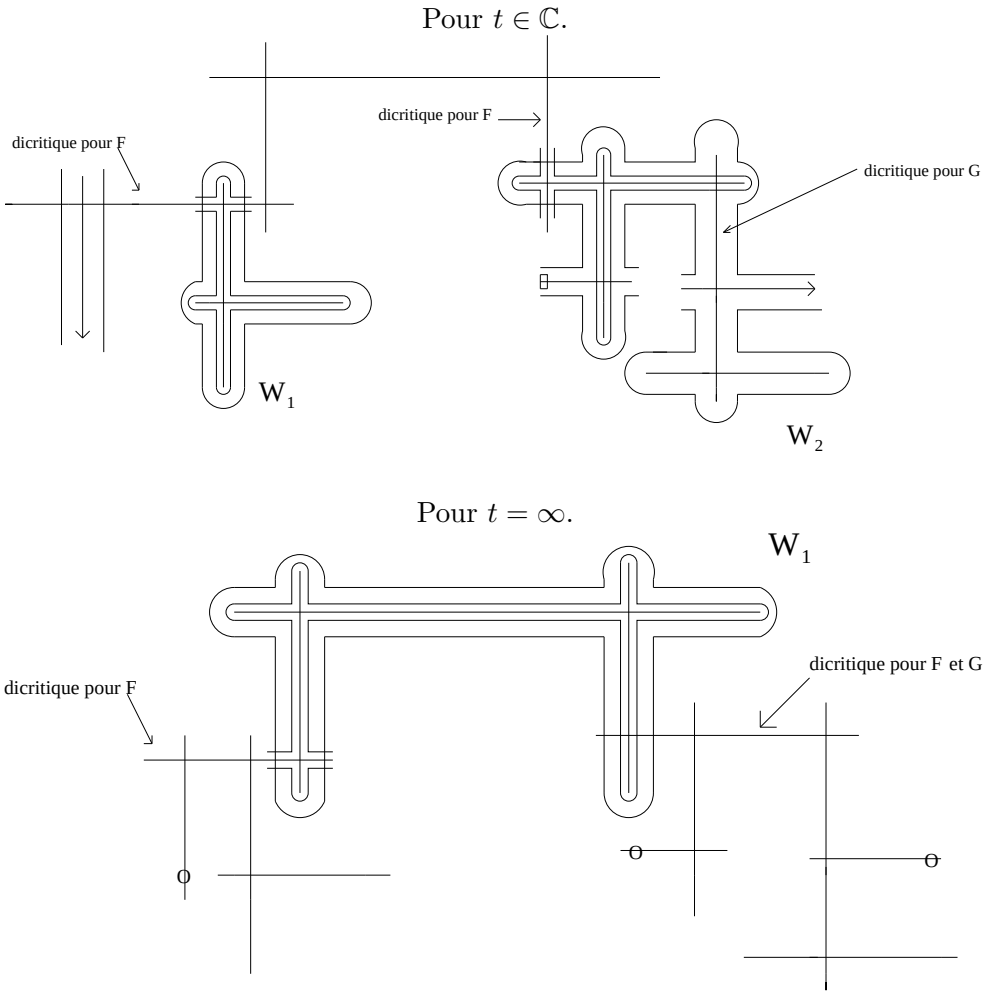
- $G^{-1}(\infty)$ est la réunion des composantes irréductibles de D_∞. Il n'y a pas de transformée stricte.

  Si $Z \in D_\infty$ et $F_{|Z} = c$, on aura $Z \subset F^{-1}(c)$ et donc $Z \cap \partial W_j = \emptyset$.

  Si $Z \in D_\infty$ et $F_{|Z}$ est constant et différent de c, quitte à choisir η_1 suffisamment petit, on aura $Z \cap W_j = \emptyset$ et donc $Z \cap \partial W_j = \emptyset$.

  Si $Z \in D_\infty$ et Z est dicritique pour F, il y a des points d'intersections. Mais quitte à choisir η_1 suffisamment petit, on peut supposer que $G^{-1}(\infty)$ est transverse à $F^{-1}(\{|z| = \eta_1\})$ (c.f. proposition 4.2.2). Il suffit d'éviter les valeurs $c' \neq c$ telle qu'il existe une composante irréductible de D sur laquelle F vaut c').

- On choisit alors η_2 suffisamment petit tel que pour tout $\rho \in B(\infty, \eta_2)$, $G^{-1}(\rho)$ ne rencontre le bord de W_j qu'au voisinage d'un diviseur dicritique de F relié à D_∞^c. Un tel η_2 existe par compacité de W_j et par le point précédent. On a vu alors dans le lemme 5.5.2 que pour tout $\rho \in D(\infty, \eta_2) \backslash \{\infty\}$, $G^{-1}(\rho)$ est transverse à $F^{-1}(S(c, \eta_1))$. On aura donc la transversalité de $G^{-1}(\rho)$ avec ∂W_j.

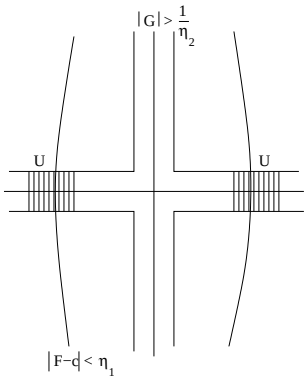


Troisième étape

On va maintenant calculer la caractéristique d'Euler de $G^{-1}(\rho) \setminus \{P_1, \ldots, P_s\} \cap W_j$. Dans la suite, nous noterons $G_j := G^{-1}(\rho) \setminus \{P_1, \ldots, P_s\} \cap W_j$. On peut alors démontrer que $G^{-1}(D(\infty, \eta_2)) \cap W_j$ est homéomorphe à un voisinage tubulaire construit par plombage au dessus de $G^{-1}(\infty) \cap W_j$ (c.f. [6]).

REMARQUE 5.5.5. *On sait que $G^{-1}(D(\infty, \eta_2))$ est homéomorphe à un voisinage tubulaire construit par plombage au dessus de $G^{-1}(\infty)$. Remarquons qu'une composante irréductible de $G^{-1}(\infty) \cap W_j$ est dans D^c_∞ ou est une partie d'une composante irréductible de D^{dic}_∞ intersectant le bord de W_j.*

1. *Si U est une composante élémentaire du voisinage tubulaire construit par plombage au dessus de $G^{-1}(\infty)$ au dessus d'une composante irréductible de D^c_∞, on utilisera l'homéomorphisme entre ce voisinage tubulaire et $G^{-1}(D(\infty, \eta_2))$.*
2. *Par contre, pour chaque U composante élémentaire du voisinage tubulaire construit par plombage au dessus d'une partie $Y \simeq D^*$ d'une composante irréductible de D^{dic}_∞ intersectant le bord de W_j, on sait que pour tout $\rho \in D(\infty, \eta_2)^*$, $G^{-1}(\rho)$ est un revêtement de degré l et que $G^{-1}(\rho)$ est transverse au bord de W_j.*



On peut donc déformer cette composante élémentaire U pour obtenir un homéomorphisme d'un voisinage tubulaire construit par plombage au dessus de $G^{-1}(\infty) \cap W_j$ avec $G^{-1}(D(\infty, \eta_2)) \cap W_j$.

Les composantes irréductibles de $G^{-1}(\infty) \cap W_j$ sont celles de D_∞^c et une partie des composantes dicritiques pour F attachée à D_j. On est donc ramené à calculer la caractéristique d'Euler de l'intersection de G_j avec chaque composante élémentaire U de ce plombage.

1. Si U est un fibré en disques de base une sphère privée de n_i points (correspond à une composante de D_∞^c privée des points d'intersection avec les autres composantes de D et les transformées strictes de $F^{-1}(c)$), $G_j \cap U$ est un revêtement à l_i feuillets. Sa caractéristique d'Euler est donc $l_i(2 - n_i)$.
2. Si U est un polycylindre de "coin" (correspond à l'intersection de deux composantes de $D_\infty^c \cup D_\infty^{dic}$), $G_j \cap U$ est un entrelacs et donc sa caractéristique d'Euler est nulle.
3. Si U est un fibré en disque de base un disque épointé (correspond à un voisinage d'un des P_i dans une composante irréductibles dans D_∞^c), $G_j \cap U$ est un revêtement au dessus d'un disque épointé et donc, sa caractéristique d'Euler est nulle.

En utilisant le théorème de Mayer-Vietoris, on a alors :

$$\chi(G_j) = \sum_{Z_i \in D_\infty^c \cap D_j} l_i(2 - n_i).$$

Ainsi :

$$\chi(F^{-1}(D(c, \eta_1)) \cap G^{-1}(\rho) \setminus \{P_1, \ldots, P_s\}) = \sum_{Z_i \in D_\infty^c} l_i(2 - n_i).$$

On a finalement :

$$\chi(f^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) = -dim(IR_c(j_+ f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)))_c.$$

□

5.5.4 Interprétation géométrique en terme de courbes polaires.

On va maintenant lier la caractéristique d'Euler de la fibre $f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)$ avec certaines multiplicités d'intersection. Considérons une résolution à l'infini de f et g :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

On note $D = \mathbb{X} \setminus i(\mathbb{C}^2)$. Nous allons maintenant étudier l'application $(F,G) : \mathbb{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Etude topologique.

On note $J(F,G)$ le déterminant Jacobien de F et G. On note Γ', la courbe polaire de F et G (i.e. les zeros du déterminant Jacobien $J(F,G)$) et Δ' la courbe discriminante, c'est-à-dire l'image de la courbe polaire de F et G par (F,G). Comme F et G sont algébriquement indépendants, Δ' est une courbe de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Notons W le complémentaire de Δ' dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Par propreté de (F,G), on sait alors que $(F,G) : (F,G)^{-1}(W) \to W$ est un revêtement de degré k. Notons alors $U = (W \setminus (F,G)(D)) \cap \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2 \setminus ((\Delta' \cup (F,G)(D)) \cap \mathbb{C}^2)$. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (F,G)^{-1}(W) & \xrightarrow{(F,G)} & W \\ \cup & & \cup \\ (f,g)^{-1}(U) & \xrightarrow{(f,g)} & U \end{array}$$

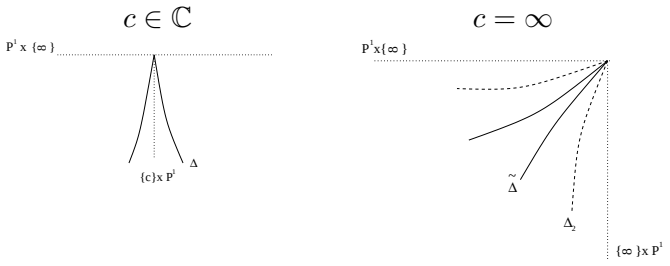
et ces deux applications sont des revêtements de degré k. Dans la suite, nous noterons

- Γ la courbe polaire de f et g dans $\mathbb{C}^2$, i.e. $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid J(f,g)(x,y) = 0\}$.
- $\Delta = (f,g)(\Gamma)$ la courbe discriminante de f et g.
- $\tilde{\Delta} = \Delta' \cap \mathbb{C}^2$ la trace dans $\mathbb{C}^2$ de la courbe discriminante de F et G.
- $\Delta_2 = (F,G)(D) \cap \mathbb{C}^2$.

Fixons $c \in \mathbb{P}^1$. Soit η_1 suffisamment petit et ρ en module suffisamment grand pour être dans les conditions de la fibration 5.5.3 du paragraphe précédent. On veut calculer la caractéristique d'Euler de la fibre $f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)$. Notons :

$$\Delta_{c,\rho} = (\tilde{\Delta} \cup \Delta_2) \cap (D(c,\eta_1)^*) \times \{\rho\}.$$

Nous montrerons que dans le cas à distance finie, on a $\Delta_{c,\rho} = \Delta \cap (D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\})$.



D'après ce qui précède,

$$(f,g) : (f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) \setminus (f,g)^{-1}(\Delta_{c,\rho}) \to (D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\}) \setminus \Delta_{c,\rho}$$

est un revêtement de degré k.

Le cas à distance fini.

Supposons $c \in \mathbb{C}$. On a alors le lemme suivant :

LEMME 5.5.6. *Pour η_1 suffisamment petit et $|\rho|$ suffisamment grand,*

$$\Delta_{c,\rho} = \Delta \cap (D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\}).$$

Démonstration

1. Montrons tout d'abord que $\Delta_2 \cap (D(c,\eta_1)^*) \times \{\rho\} = \emptyset$. On a déja montré dans le lemme 5.5.1 que $F^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(\rho)$ ne rencontre pas D. En appliquant (F,G), on a le résultat.
2. Il reste donc à montrer que $\tilde{\Delta} \cap (D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\}) = \Delta \cap (D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\})$. D'après le lemme 5.5.1, $\Gamma^{'} \cap (F,G)^{-1}(D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\}) = \Gamma \cap (f,g)^{-1}(D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\})$. Il suffit alors d'appliquer (F,G) à cette égalité.

Ainsi, dans le cas à distance fini, $\Delta_{c,\rho} = \Delta \cap (D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\})$.

□

De plus, comme Δ est une courbe, $\Delta_{c,\rho}$ est un ensemble fini de points. Dans la suite, on notera $\Delta_{c,\rho} = \{(c_1,\rho),\ldots,(c_r,\rho)\}$.

On va alors démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 5.5.7. *Soit $c \in \mathbb{C}$. Notons $\Delta_{c,\rho} = \Delta \cap (D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\})$. La dimension de $(IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c$ est égale à la somme des multiplicités d'intersection de Γ et $g^{-1}(\rho)$ aux points dans $\Gamma \cap (f,g)^{-1}(\Delta_{c,\rho})$.*

$$dim_{\mathbb{C}}(IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c = \sum_{P \in \Gamma \cap (f,g)^{-1}(\Delta_{c,\rho})} i_P(\Gamma, g^{-1}(\rho)).$$

Démonstration

D'après la proposition 5.5.4, il suffit de montrer le lemme suivant :

□

LEMME 5.5.8. *La caractéristique d'Euler de $f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)$ est égale à l'opposé de la somme des multiplicités d'intersection de Γ et $g^{-1}(\rho)$ aux points dans $\Gamma \cap (f,g)^{-1}(\Delta_{c,\rho})$.*

$$\chi(f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) = -\sum_{P \in \Gamma \cap (f,g)^{-1}(\Delta_{c,\rho})} i_P(\Gamma, g^{-1}(\rho)).$$

Démonstration

1. $(f,g) : (f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) \setminus (f,g)^{-1}(\Delta_{c,\rho}) \to (D(c,\eta_1)^* \times \{\rho\}) \setminus \Delta_{c,\rho}$ est un revêtement de degré k. On a donc :

$$\chi(f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho) \setminus (f,g)^{-1}(\Delta_{c,\rho})) = k\chi(D(c,\eta_1) \setminus \{c,c_1,\ldots,c_r\}) = -kr.$$

2. Soit $D_1, \ldots, D_r$ des disques disjoints dans $D(c, \eta_1)^*$ contenant respectivement $c_1, \ldots, c_r$. On cherche maintenant à calculer la caractéristique d'Euler de $f^{-1}(D_i) \cap g^{-1}(\rho)$. On concluera alors en remarquant que :

$$\begin{aligned}\chi(f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) &= \chi((f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) \setminus (f,g)^{-1}(\Delta_{c,\rho})) \\ &\quad + \sum_i \chi(f^{-1}(D_i) \cap g^{-1}(\rho)).\end{aligned}$$

$\tilde{f} : f^{-1}(D_i) \cap g^{-1}(\rho) \to D_i$ est un revêtement ramifié. Pour $|\rho|$ suffisamment grand, $f^{-1}(c_i) \cap g^{-1}(\rho)$ est un nombre fini de points. Notons les $P_1^i, \ldots P_{s_i}^i$.

LEMME 5.5.9.

$$\chi(f^{-1}(D_i) \cap g^{-1}(\rho)) = k - \sum_{P_j^i \in \Gamma} i_{P_j^i}(\Gamma, g^{-1}(\rho)).$$

Démonstration
On choisit η_1 suffisamment petit et $|\rho|$ suffisamment grand pour que au voisinage de chaque P_j^i, $j = 1, \ldots, s$, $f^{-1}(c_i)$ et $g^{-1}(\rho)$ soient lisses. Au voisinage de P_j^i, on peut alors choisir des coordonnées (u, v) telles que :
– P_j^i soit de coordonnées $(0, 0)$.
– $g = \rho + u$.
– Notons alors $k_j^i = val_v(f(0, v) - c_i) \geq 1$. On peut alors écrire $f - c_i$ sous la forme $\alpha(u, v)u + \beta(u, v)v^{k_j^i}$, avec β fonction holomorphe inversible. Quitte à refaire un changement de cordonnées, on peut donc supposer $f(u, v) - c_i = \alpha(u, v)u + v^{k_j^i}$.

(a) Si P_j^i n'est pas sur la courbe polaire, on a $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) \neq 0$. On a alors $k_j^i = 1$ et ainsi, $i_{P_j^i}(f^{-1}(c_i), g^{-1}(\rho)) = 1$. Donc P_j^i n'est pas un point de ramification de $\tilde{f}$.

(b) Si P_j^i est un point de la courbe polaire, comme $f^{-1}(c_i)$ est lisse au voisinage de P_j^i, on peut démontrer que α est une fonction holomorphe inversible. Ainsi, dans des coordonnées (u, v) au voisinage de P_j^i, $f = c_i + \alpha(u, v)u + v^{k_j^i}$, avec α inversible. On a alors :

$$i_{P_j^i}(f^{-1}(c_i), g^{-1}(\rho)) = val_v(f(0, v) - c_i) = k_j^i.$$

P_j^i est donc un point de ramification de $\tilde{f}$ de degré k_j^i.

Ainsi, $\chi(f^{-1}(D_i) \cap g^{-1}(\rho)) = k - \sum_{P_j^i \in \Gamma} (k_j^i - 1)$.

Il suffit alors de remarquer que $i_{P_j^i}(\Gamma, g^{-1}(\rho)) = val_v(\frac{\partial f}{\partial v}(0, v)) = k_j^i - 1$. D'où :

$$\chi(f^{-1}(D_i) \cap g^{-1}(\rho)) = k - \sum_{P_j^i \in \Gamma} i_{P_j^i}(\Gamma, g^{-1}(\rho)).$$

□

En utilisant ce lemme, on a alors :

$$\begin{aligned}\chi(f^{-1}(D(c,\eta_1)^*)\cap g^{-1}(\rho)) &= -\sum_{i=1}^{r}\sum_{P_j^i\in\Gamma} i_{P_j^i}(\Gamma, g^{-1}(\rho)) \\ &= -\sum_{P\in\Gamma\cap(f,g)^{-1}(\Delta_{c,\rho})} i_P(\Gamma, g^{-1}(\rho)).\end{aligned}$$

□

Le cas à l'infini.

La formule de l'irrégularité à l'infini est donnée par la formule suivante :

PROPOSITION 5.5.10. *Notons $\Delta_{\infty,\rho} = (\tilde{\Delta}\cup\Delta_2)\cap(D(\infty,\eta_1)^*\times\{\rho\})$. La dimension de $(IR^0_\infty(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_\infty$ est égale à la somme des multiplicités d'intersection de Γ et $g^{-1}(\rho)$ aux points dans $\Gamma\cap(f,g)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})$ et de la somme des multiplicités d'intersection de Γ' et de $G^{-1}(\rho)$ aux points dans $(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})\cap D$ augmentées de 1.*

$$\begin{aligned}dim_{\mathbb{C}}(IR^0_\infty(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_\infty &= \sum_{P\in\Gamma\cap(f,g)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})} i_P(\Gamma, g^{-1}(\rho)) \\ &\quad + \sum_{Q\in(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})\cap D} (i_Q(\Gamma', G^{-1}(\rho))+1).\end{aligned}$$

Démonstration
D'après la proposition 5.5.4, il faut montrer le lemme suivant :

□

LEMME 5.5.11. *La caractéristique d'Euler de $f^{-1}(D(\infty,\eta_1)^*)\cap g^{-1}(\rho)$ est égale à l'opposé de la somme des multiplicités d'intersection de Γ et $g^{-1}(\rho)$ aux points de $\Gamma\cap(f,g)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})$ et de la somme des multiplicités d'intersection de Γ' et de $G^{-1}(\rho)$ aux points de $(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})\cap D$ augmentées de 1.*

$$\begin{aligned}\chi(f^{-1}(D(\infty,\eta_1)^*)\cap g^{-1}(\rho)) &= -\sum_{P\in\Gamma\cap(f,g)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})} i_P(\Gamma, g^{-1}(\rho)) \\ &\quad - \sum_{Q\in(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})\cap D} (i_Q(\Gamma', G^{-1}(\rho))+1).\end{aligned}$$

Démonstration
Comme $\tilde{\Delta}\cup\Delta_2$ est une courbe, $\Delta_{\infty,\rho}$ est un ensemble fini de points. Dans la suite, nous noterons ces points $(c_1,\rho),\ldots,(c_r,\rho)$.

1. $(f,g) : (f^{-1}(D(\infty,\eta_1)^*)\cap g^{-1}(\rho))\setminus(f,g)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho}) \to (D(\infty,\eta_1)^*\times\{\rho\})\setminus\Delta_{\infty,\rho}$ est un revêtement de degré k. On a donc :

$$\chi(f^{-1}(D(\infty,\eta_1)^*)\cap g^{-1}(\rho)\setminus(f,g)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})) = k\chi(D(\infty,\eta_1)\setminus\{\infty,c_1,\ldots,c_r\}) = -kr.$$

2. Notons $D_1, \ldots, D_r$ des disques disjoints dans $D(\infty, \eta_1)^*$ contenant $c_1, \ldots, c_r$. On cherche maintenant à calculer la caractéristique d'Euler de $f^{-1}(D_i) \cap g^{-1}(\rho)$. On concluera alors en remarquant que :

$$\begin{aligned}\chi(f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) &= \chi((f^{-1}(D(c,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) \setminus (f,g)^{-1}(\Delta_{c,\rho})) \\ &\quad + \sum_i \chi(f^{-1}(D_i) \cap g^{-1}(\rho)).\end{aligned}$$

Pour $|\rho|$ suffisamment grand, $f^{-1}(c_i) \cap g^{-1}(\rho)$ est un nombre fini de points. Notons les $P_1^i, \ldots P_{s_i}^i$. Nous noterons alors $Q_1^i, \ldots, Q_t^i$ les points de $F^{-1}(c_i) \cap G^{-1}(\rho) \cap D$. On remarque que $\{P_1^i, \ldots, P_s^i, Q_1^i, \ldots, Q_t^i\} = F^{-1}(c_i) \cap G^{-1}(\rho)$.
$\tilde{F} : F^{-1}(D_i) \cap G^{-1}(\rho) \to D_i$ est un revêtement ramifié. Nous allons étudier $F^{-1}(D_i) \cap G^{-1}(\rho)$ au voisinage des points $P_1^i, \ldots, p_s^i, Q_1^i, \ldots, Q_t^i$ et démontrer le lemme suivant :

LEMME 5.5.12.

$$\chi(f^{-1}(D_i) \cap g^{-1}(\rho)) = k - \sum_{P_j^i \in \Gamma} i_{P_j^i}(\Gamma, g^{-1}(\rho)) - \sum_{j=1}^{t} (i_{Q_j^i}(\Gamma', G^{-1}(\rho)) + 1).$$

Démonstration
On choisit η_1 suffisamment petit et $|\rho|$ suffisamment grand pour que au voisinage de chaque P_j^i, $j = 1, \ldots, s$ et chaque Q_j^i, $j = 1, \ldots, t$, $f^{-1}(c_i)$ et $g^{-1}(\rho)$ soient lisses.

- En refaisant la même étude que dans le cas à distance fini, on montre que si $P_j^i \in \Gamma$, il est un point de ramification de $\tilde{F}$ de degré $i_{P_j^i}(\Gamma, g^{-1}(\rho)) + 1$ et que si $P_j^i \notin \Gamma$, ce n'est pas un point de ramification de $\tilde{F}$.
- De même, si $Q_j^i \in \Gamma'$, il est un point de ramification de $\tilde{F}$ de degré $i_{Q_j^i}(\Gamma', G^{-1}(\rho)) + 1$ et que si $Q_j^i \notin \Gamma'$, ce n'est pas un point de ramification de $\tilde{F}$.

On a ainsi :

$$\chi(F^{-1}(D_i) \cap G^{-1}(\rho)) = k - \sum_{P_j^i \in \Gamma} i_{P_j^i}(\Gamma, g^{-1}(\rho)) - \sum_{j=1}^{t} i_{Q_j^i}(\Gamma', G^{-1}(\rho)),$$

et

$$\begin{aligned}\chi(f^{-1}(D_i) \cap g^{-1}(\rho)) &= \chi(f^{-1}(D_i) \cap g^{-1}(\rho)) - \chi(\{Q_1^i, \ldots, Q_t^i\}) \\ &= k - \textstyle\sum_{P_j^i \in \Gamma} i_{P_j^i}(\Gamma, g^{-1}(\rho)) - \sum_{j=1}^{t} (i_{Q_j^i}(\Gamma', G^{-1}(\rho)) + 1).\end{aligned}$$

□

En utilisant ce lemme, on a alors :

$$\begin{aligned}\chi(f^{-1}(D(\infty,\eta_1)^*) \cap g^{-1}(\rho)) &= -\sum_{i=1}^{r} (\sum_{P_j^i \in \Gamma} i_{P_j^i}(\Gamma, g^{-1}(\rho)) - \sum_{j=1}^{t} (i_{Q_j^i}(\Gamma', G^{-1}(\rho)) + 1)) \\ &= -\sum_{P \in \Gamma \cap (f,g)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})} i_P(\Gamma, g^{-1}(\rho)) \\ &\quad - \sum_{Q \in (F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho}) \cap D} (i_Q(\Gamma', G^{-1}(\rho)) + 1).\end{aligned}$$

□

5.5.5 Interprétation géométrique en terme de courbes discriminantes.

Rappelons tout d'abord quelques notions sur le 0-ième idéal de Fitting d'un module cohérent. Pour plus de détails, voir [38].

DEFINITION 5.5.13. *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique complexe. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. On considère une présentation de $\mathcal{M}$: $\mathcal{O}_X^p \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_X^q \to \mathcal{M} \to 0$. On appelle 0-ième idéal de Fitting, l'idéal engendré par les mineurs de ψ de taille $q \times q$. On le note $\mathcal{F}_0(\mathcal{M})$.*

Cet idéal ne dépend pas de la présentation de $\mathcal{M}$ choisie (c.f. [39] page 5). On a de plus une formule de changement de bases :

PROPOSITION 5.5.14 (Formule de changement de bases). *Soit $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'espaces analytiques complexes. Alors $\mathcal{F}_0(f^*\mathcal{M}) = \mathcal{F}_0(\mathcal{M}).\mathcal{O}_Y$.*

Démonstration
Il suffit de remarquer que f^* est un foncteur exact à droite et que $f^*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. Ainsi, si $\mathcal{O}_X^p \to \mathcal{O}_X^q \to \mathcal{M} \to 0$ est une présentation de $\mathcal{M}$, $\mathcal{O}_Y^p \to \mathcal{O}_Y^q \to f^*\mathcal{M} \to 0$ est une présentation de $f^*\mathcal{M}$.

□

DEFINITION 5.5.15. *Soit $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espaces analytiques complexes. On appelle image de f au sens des idéaux de Fitting, la variété analytique complexe dans Y définie par l'idéal $\mathcal{F}_0(f_*(\mathcal{O}_X))$.*

Le cas à distance finie.

NOTATION 5.5.16. *Dans la suite, nous adopterons les notations suivantes :*
- $X = f^{-1}(D(c, \eta_1)^*) \cap g^{-1}(|\rho| > R) \subset \mathbb{C}^2$,
- $Y = D(c, \eta_1)^* \times \{|\rho| > R\} \subset \mathbb{C}^2$,
- *on notera (Z_1, Z_2), les coordonnées canoniques sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,*
- $X_\rho = X \cap g^{-1}(\rho)$, *pour un ρ tel que $|\rho| > R$,*
- $Y_\rho = D(c, \eta_1)^* \times \{\rho\}$,
- $\Gamma = \{(x, y) \in X \mid J(f, g)(x, y) = 0\}$,
- $\Delta = (f, g)(\Gamma)$ *image de $\phi_2 : (\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ au sens des idéaux de Fitting.*

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X_\rho \cap \Gamma & \hookrightarrow & \Gamma & \hookrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} & & \downarrow{\scriptstyle (f,g)} \\ Y_\rho & \xrightarrow{\alpha} & Y & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont les restrictions de (f, g) à $X_\rho \cap \Gamma$ et Γ. On peut alors calculer la dimension de l'irrégularité en c de $j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ comme étant la somme des multiplicités d'intersection de Δ (comptée avec multiplicité) et de $Z_2 - \rho$ pour un ρ de module suffisamment grand au voisinage des points (c', ρ), c' suffisamment proches et différents de c. Il suffit pour cela de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 5.5.17. *Pour ρ de module suffisamment grand et $c^{'} \in Y_\rho$,*

$$\sum_{P\in\phi_1^{-1}(c^{'},\rho)} i_P(\Gamma, X_\rho) = dim\big(\frac{\mathcal{O}_Y}{(\mathcal{F}_0(\phi_{2*}\mathcal{O}_\Gamma) + (Z_2 - \rho))}\big)_{(c^{'},\rho)}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\phi_1^{-1}(c^{'},\rho)} i_P(\Gamma, X_\rho) &= \sum_{P\in\phi_1^{-1}(c^{'},\rho)} dim\big(\mathcal{O}_{\Gamma\cap X_\rho}\big)_P \\ &= dim\big(\phi_{1*}\big(\mathcal{O}_{\Gamma\cap X_\rho}\big)\big)_{(c^{'},\rho)} \\ &= dim\big(\frac{\mathcal{O}_{Y_\rho}}{\mathcal{F}_0(\phi_{1*}(\mathcal{O}_{\Gamma\cap X_\rho}))}\big)_{(c^{'},\rho)}\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que $(\mathcal{O}_{Y_\rho})_{(c^{'},\rho)} \simeq \mathbb{C}\{t\}$ (c.f. [38] lemme 2 page 576). De plus, on a le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X_\rho \cap \Gamma & \hookrightarrow & \Gamma \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} \\ Y_\rho & \xrightarrow{\alpha} & Y. \end{array}$$

D'après la formule de changement de base, on a alors :

$$\mathcal{F}_0(\phi_{1*}(\mathcal{O}_{\Gamma\cap X_\rho})) = \mathcal{F}_0(\alpha^*\phi_{2*}(\mathcal{O}_\Gamma)) = \mathcal{F}_0(\phi_{2*}(\mathcal{O}_\Gamma)).\mathcal{O}_{Y_\rho}.$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\phi_1^{-1}(c^{'},\rho)} i_P(\Gamma, X_\rho) &= dim\big(\frac{\mathcal{O}_{Y_\rho}}{\mathcal{F}_0(\phi_{2*}(\mathcal{O}_\Gamma)).\mathcal{O}_{Y_\rho}}\big)_{(c^{'},\rho)} \\ &= dim\big(\frac{\mathcal{O}_Y}{(\mathcal{F}_0(\phi_{2*}\mathcal{O}_\Gamma))+(Z_2-\rho))}\big)_{(c^{'},\rho)}\end{aligned}$$

□

Dans la suite, nous noterons $\overline{\Delta \setminus (\{c\}\times\mathbb{C})}$ l'adhérence de Zariski de $\Delta\setminus(\{c\}\times\mathbb{C})$ (comptée avec les multiplicités des idéaux de Fitting). En utilisant la proposition 5.5.7 liant la dimension de l'irrégularité aux multiplicités d'intersection de Γ avec $g^{-1}(\rho)$, on obtient :

THEOREME 5.5.18. *Pour $c \in \mathbb{C}$,*

$$dim(IR_c^0(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c = i_{(c,\infty)}(\overline{\Delta \setminus (\{c\}\times\mathbb{C})}, \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}).$$

Démonstration
D'après le corollaire 5.5.7,

$$dim(IR_c^0(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c = \sum_{P\in(f,g)^{-1}(\Delta_{c,\rho})} i_P(\Gamma, g^{-1}(\rho)).$$

D'après la proposition précédente, on a donc :

$$\begin{aligned}dim(IR_c^0(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c &= \textstyle\sum_{(c^{'},\rho)\in\Delta_{c,\rho}} i_{(c^{'},\rho)}(\Delta, \mathbb{C}\times\{\rho\}) \qquad (c \notin \Delta_{c,\rho}) \\ &= i_{(c,\infty)}(\overline{\Delta \setminus (\{c\}\times\mathbb{C})}, \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}).\end{aligned}$$

□

Le cas à l'infini.

Dans la suite, nous noterons :
- $\Delta^{'}$ l'image par (F,G) de $(\Gamma^{'},\mathcal{O}_{\Gamma'})$ au sens des idéaux de Fitting.
- $\tilde{\Delta}$ la trace dans $\mathbb{C}^2$ de $\Delta^{'}$.
- $\overline{\tilde{\Delta}}$ l'adhérence de Zariski dans $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ de $\tilde{\Delta}$.
- $\Delta_2^{'}$ l'image par (F,G) de $(D,\mathcal{O}_D)$ au sens des idéaux de Fitting.
- Δ_2 la trace de $\Delta_2^{'}$ dans $\mathbb{C}^2$.
- $\overline{\Delta_2}$ l'adhérence de Zariski de Δ_2 dans $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$.

En utilisant la proposition 5.5.10 liant la dimension de l'irrégularité à l'infini aux multiplicités d'intersection de $\Gamma^{'}$ avec $G^{-1}(\rho)$, on obtient :

THEOREME 5.5.19. *Pour $c=\infty$,*

$$dim(IR^0_\infty(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_\infty = i_{(\infty,\infty)}(\overline{\tilde{\Delta}},\mathbb{P}^1\times\{\infty\})+i_{(\infty,\infty)}(\overline{\Delta_2},\mathbb{P}^1\times\{\infty\}).$$

Démonstration
On rappelle que d'après la proposition 5.5.10, on a :

$$dim_{\mathbb{C}}(IR^0_\infty(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_\infty = \sum_{P\in\Gamma\cap(f,g)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})} i_P(\Gamma,g^{-1}(\rho)) + \sum_{Q\in(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})\cap D}(i_Q(\Gamma^{'},G^{-1}(\rho))+1).$$

1. On a :

$$\sum_{P\in\Gamma\cap(f,g)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})} i_P(\Gamma,g^{-1}(\rho)) + \sum_{Q\in(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})\cap D} i_Q(\Gamma^{'},G^{-1}(\rho)) = \sum_{P\in\Gamma'\cap(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})} i_P(\Gamma^{'},G^{-1}(\rho))$$

   En refaisant la démonstration de la proposition 5.5.17 avec $\Gamma^{'}$ et $G^{-1}(\rho)$, on montre que :

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\Gamma'\cap(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})} i_P(\Gamma^{'},G^{-1}(\rho)) &= \sum_{(c',\rho)\in\Delta_{\infty,\rho}} i_{(c',\rho)}(\Delta^{'},\mathbb{C}\times\{\rho\})\\ &= \sum_{(c',\rho)\in\Delta_{\infty,\rho}} i_{(c',\rho)}(\tilde{\Delta},\mathbb{C}\times\{\rho\})\\ &= i_{(\infty,\infty)}(\overline{\tilde{\Delta}},\mathbb{P}^1\times\{\infty\}).\end{aligned}$$

2. Il reste donc à montrer que $\sum_{Q\in(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})\cap D} 1 = i_{(\infty,\infty)}(\overline{\Delta_2},\mathbb{P}^1\times\{\infty\})$. Comme $G^{-1}(\rho)$ est lisse et transverse à D, on remarque que :

$$\sum_{Q\in(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})\cap D} 1 = \sum_{Q\in(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})\cap D} i_Q(D,G^{-1}(\rho)).$$

   On va réutiliser la méthode de la proposition 5.5.17 pour montrer que :

$$\sum_{Q\in(F,G)^{-1}(\Delta_{\infty,\rho})\cap D} i_Q(D,G^{-1}(\rho)) = i_{(\infty,\infty)}(\overline{\Delta_2},\mathbb{P}^1\times\{\infty\}).$$

NOTATION. *Dans la suite, nous adopterons les notations suivantes :*
- $X = F^{-1}(D(\infty,\eta_1)^*) \cap G^{-1}(|\rho| > R) \subset \mathbb{X}$,
- $Y = D(\infty,\eta_1)^* \times \{|\rho| > R\} \subset \mathbb{C}^2$,
- *on notera* (Z_1, Z_2), *les coordonnées canoniques sur* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,
- $X_\rho = X \cap G^{-1}(\rho)$ *pour un* ρ *tel que* $|\rho| > R$,
- $Y_\rho = D(\infty,\eta_1)^* \times \{\rho\}$,
- $\tilde{D} = D \cap X$,
- $\Delta_2 = (F,G)(\tilde{D})$ *image de* $\phi_2 : (\tilde{D}, \mathcal{O}_{\tilde{D}}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *au sens des idéaux de Fitting.*

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X_\rho \cap \tilde{D} & \hookrightarrow & \tilde{D} & \hookrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} & & \downarrow{\scriptstyle (F,G)} \\ Y_\rho & \xhookrightarrow{\alpha} & Y & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont les restrictions de (F,G) à $X_\rho \cap \tilde{D}$ et $\tilde{D}$. En refaisant la démonstration de la proposition 5.5.17 avec D et $G^{-1}(\rho)$, on trouve finalement :

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in (F,G)^{-1}(\Delta_\infty,\rho) \cap D} i_Q(D, G^{-1}(\rho)) &= \sum_{(c',\rho) \in \Delta_{\infty\rho}} i_{(c',\rho)}(\Delta_2, \mathbb{C} \times \{\rho\}) \\ &= i_{(\infty,\infty)}(\overline{\Delta_2}, \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}). \end{aligned}$$

□

5.5.6 Exemples.

Soit f et g deux polynômes algébriquement indépendants à deux variables. Ils définissent une application $(f,g) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Dans la suite, on notera les coordonnées à la source (x,y) et au but (X,Y). Dans tout ces exemples, on étudie l'application (f,g). On calcule tout d'abord la courbe Jacobienne Γ, puis la courbe discriminante Δ. On regarde alors au dessus de quel ensemble, (f,g) est un revêtement. On peut ainsi déterminer Δ_2. On ne peut pas savoir, en général, si les points de cette courbe appartiennent à la courbe discriminante de F et G. Il faudrait pour cela calculer ces applications. On donnera cependant un exemple où ce calcul est possible.

1. $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = (xy+1)y$.
   Γ a pour équation $2xy + 1 = 0$ et Δ a pour équation $4XY + 1 = 0$.
   De plus, (f,g) est un revêtement de degré 2 au dessus de $\mathbb{C}^2$ privé de la courbe d'équation $4XY + 1 = 0$ (on retrouve ici la courbe discriminante). Les points de ramification sont de degré 1. On en conclut que $\Delta_2 = \emptyset$ et ainsi,

$$dim((IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c) = \begin{cases} 0, & \text{si } c \neq 0, \\ i_{(0,\infty)}(\overline{\Delta \setminus \{0\} \times \mathbb{C}}, \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}) = 1, & \text{si } c = 0. \end{cases}$$

2. $f(x,y) = x^2$ et $g(x,y) = (x^2-1)y^2$.
   Γ a pour équation $4x(x^2-1)y = 0$ et $\Delta = \{X = 0\} \cup \{Y = 0\} \cup \{(1,0)\}$.

De plus, (f,g) est un revêtement de degré 4 au dessus de $\mathbb{C}^2$ privé de la courbe d'équation $X(X-1)Y=0$. Donc $\tilde{\Delta}\cup\Delta_2\subset\{X(X-1)Y=0\}$ et ainsi,

$$dim((IR_c^0(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c)=0.$$

$f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ est régulier, y compris à l'infini.

3. $f(x,y)=(x-1)y$ et $g(x,y)=(x^2-1)y$.
   Γ a pour équation $(x-1)^2y=0$ et $\Delta=\{(0,0)\}$.
   De plus, (f,g) est un revêtement de degré 1 au dessus de $\mathbb{C}^2$ privé de la courbe d'équation $X(Y-2X)=0$. On a ainsi,

$$dim((IR_c^0(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)))_c)=\begin{cases}0, & \text{si } c\neq\infty,\\ i_{(\infty,\infty)}(\overline{\Delta_2},\mathbb{P}^1\times\{\infty\})=1, & \text{si } c=\infty.\end{cases}$$

   (Δ_2 a pour équation $X(Y-2X)=0$ et sa multiplicité ne peut être que 1 puisque le degré du revêtement est 1).

Chapitre 6

Calcul de l'irrégularité par réduction à des projections.

6.1 Introduction.

Soit f et g deux polynômes à n variables. On se propose ici de calculer la caractéristique d'Euler du germe en c du complexe d'irrégularité de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$ en c, y compris à l'infini. Dans le cas où f et g sont deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants, le complexe d'irrégularité de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g)$ en $c \in \mathbb{P}^1$ est concentré en degré 0, à support c. On calculera alors sa dimension.

On se ramène pour cela au calcul de l'irrégularité en c de l'image directe par p_1 du complexe $(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules à cohomologies holonomes régulières tordu par e^{p_2}, où $p_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ et $p_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ sont les deux projections.

Pour étudier l'irrégularité, on compactifie par rapport à la première variable et pour avoir une image directe par une application propre, on compactifie par rapport à la deuxième variable. On peut ainsi se ramener à l'image directe par π_1 d'un complexe $\mathcal{N}^\bullet$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}$-modules à cohomologies holonomes et régulières tordu par e^{π_2}, où $\pi_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ et $\pi_2 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ sont les deux projections. On démontrera alors que la caractéristique d'Euler du complexe d'irrégularité en $c \in \mathbb{P}^1$ est liée aux cycles caractéristiques du complexe $\mathcal{N}^\bullet$ au voisinage de (c,∞). Plus précisemment, si le cycle caractéristique de $\mathcal{N}^\bullet$ dans un voisinage $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de (c,∞) est de la forme :

$$mT^*_U U + m' T^*_{(c,\infty)} U + m'' T^*_{\{c\}\times U_2} U + m''' T^*_{U_1\times\{\infty\}} U + \sum_i m_i T^*_{Z_i} U,$$

où les Z_i sont des germes de courbes irréductibles en (c,∞), distincts de $U_1 \times \{\infty\}$ et de $\{c\} \times U_2$, on démontrera que la caractéristique d'Euler cherchée est égale à

$$\sum_{Z_i} m_i i_{(c,\infty)}(Z_i, U_1 \times \{\infty\}),$$

où $i_{(c,\infty)}(Z_i, U_1 \times \{\infty\})$ est la multiplicité d'intersection du germe de courbe Z_i avec $U_1 \times \{\infty\}$ en (c,∞).

Si f et g sont deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants, on fera alors une étude comparative des résultats obtenus dans les deux méthodes.

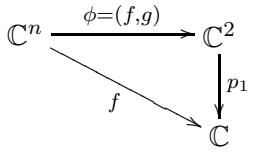
6.2 Principe du calcul.

6.2.1 Réduction à des projections.

Notons $p_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ et $p_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ les deux projections. Pour étudier le complexe $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g)$, on va commencer par se ramener à des projections.

PROPOSITION 6.2.1. *$f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g) = p_{1+}(\mathcal{N}^\bullet e^{p_2})$, où $\mathcal{N}^\bullet = (f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ est un complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules à cohomologies holonomes régulière, y compris à l'infini.*

Démonstration
Considérons le diagramme commutatif :



Notons (x,y) les coordonnées sur $\mathbb{C}^2$. On a alors :

$$f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g) = p_{1+}\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g).$$

Or, on a le lemme suivant :

LEMME 6.2.2.

$$\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g) = \phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) e^{p_2}.$$

Démonstration
Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$-module. Montrons que $\phi_+(\mathcal{M}e^g) = \phi_+(\mathcal{M})e^{p_2}$. Dans notre cas, $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$. D'après la proposition 2.2.14,

- $\phi_+(\mathcal{M}e^g) = R\phi_*(\Omega^{n+\bullet}_{\mathbb{C}^n}(\mathcal{M}e^g \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^2}))^{(g)}$.
- $\phi_+(\mathcal{M})e^{p_2} = (R\phi_*(\Omega^{n+\bullet}_{\mathbb{C}^n}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^2}))^{(g)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^{p_2}$.

1. Démontrons tout d'abord que :

$$\Psi : \Omega^{n+\bullet}_{\mathbb{C}^n}\big(\mathcal{M}e^g \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^2}\big) \to \Omega^{n+\bullet}_{\mathbb{C}^n}\big(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^2}\big) \otimes_{\phi^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})} \phi^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^{p_2})$$

est un morphisme de complexes de $\phi^{-1}(\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2})$-modules à droite. Ψ est défini par :

$$\Psi(w \otimes (me^g \otimes (1 \otimes \partial_x^\alpha \partial_y^\beta))) = (w \otimes (m \otimes (1 \otimes \partial_x^\alpha (\partial_y - 1)^\beta))) \otimes e^{p_2}.$$

Ψ est un morphisme de $\phi^{-1}(\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2})$-modules à droite :

$$\begin{array}{rcl}
\psi(w \otimes (me^g \otimes (1 \otimes \partial_x^\alpha \partial_y^\beta)).\partial_x) & = & \psi(w \otimes (me^g \otimes (1 \otimes \partial_x^{\alpha+1} \partial_y^\beta))) \\
& = & (w \otimes (m \otimes 1 \otimes \partial_x^{\alpha+1}(\partial_y - 1)^\beta)) \otimes e^{p_2} \\
& = & ((w \otimes (m \otimes 1 \otimes \partial_x^\alpha (\partial_y - 1)^\beta)) \otimes e^{p_2}).\partial_x \\
& = & \psi(w \otimes (me^g \otimes (1 \otimes \partial_x^\alpha \partial_y^\beta))).\partial_x \\
\psi(w \otimes (me^g \otimes (1 \otimes \partial_x^\alpha \partial_y^\beta)).\partial_y) & = & \psi(w \otimes (me^g \otimes (1 \otimes \partial_x^\alpha \partial_y^{\beta+1}))) \\
& = & (w \otimes (m \otimes 1 \otimes \partial_x^\alpha (\partial_y - 1)^{\beta+1})) \otimes e^{p_2} \\
& = & ((w \otimes (m \otimes 1 \otimes \partial_x^\alpha (\partial_y - 1)^\beta)) \otimes e^{p_2}).\partial_y \\
& = & \psi(w \otimes (me^g \otimes (1 \otimes \partial_x^\alpha \partial_y^\beta))).\partial_y
\end{array}$$

Ψ est un morphisme de complexes :

$$\begin{aligned}
&\Psi(d(w\otimes(me^g\otimes(1\otimes\partial_x^\alpha\partial_y^\beta))))\\
&=\Psi(dw\otimes(me^g\otimes(1\otimes\partial_x^\alpha\partial_y^\beta)))\\
&+\textstyle\sum_{i=1}^n\Psi(dx_i\wedge w\otimes\partial_{x_i}(me^g\otimes(1\otimes\partial_x^\alpha\partial_y^\beta)))\\
&=\Psi(dw\otimes(me^g\otimes(1\otimes\partial_x^\alpha\partial_y^\beta)))\\
&+\textstyle\sum_{i=1}^n\Psi(dx_i\wedge w\otimes(\partial_{x_i}m)e^g\otimes(1\otimes\partial_x^\alpha\partial_y^\beta))\\
&+\textstyle\sum_{i=1}^n\Psi(dx_i\wedge w\otimes me^g\otimes(\frac{\partial f}{\partial x_i}\otimes\partial_x^{\alpha+1}\partial_y^\beta))\\
&+\textstyle\sum_{i=1}^n\Psi(dx_i\wedge w\otimes me^g\otimes(\frac{\partial g}{\partial x_i}\otimes\partial_x^\alpha(\partial_y+1)\partial_y^\beta))\\
&=(dw\otimes(m\otimes(1\otimes\partial_x^\alpha(\partial_y-1)^\beta)))\otimes e^{p_2}\\
&+\textstyle\sum_{i=1}^n(dx_i\wedge w\otimes((\partial_{x_i}m)\otimes(1\otimes\partial_x^\alpha(\partial_y-1)^\beta)))\otimes e^{p_2}\\
&+\textstyle\sum_{i=1}^n(dx_i\wedge w\otimes m\otimes(\frac{\partial f}{\partial x_i}\otimes\partial_x^{\alpha+1}(\partial_y-1)^\beta))\otimes e^{p_2}\\
&+\textstyle\sum_{i=1}^n(dx_i\wedge w\otimes m\otimes(\frac{\partial g}{\partial x_i}\otimes\partial_x^\alpha\partial_y(\partial_y-1)^\beta))\otimes e^{p_2}\\
&=d((w\otimes(m\otimes(1\otimes\partial_x^\alpha(\partial_y-1)^\beta)))\otimes e^{p_2})\\
&=d(\Psi(w\otimes(me^g\otimes(1\otimes\partial_x^\alpha\partial_y^\beta))))
\end{aligned}$$

Par construction, Ψ est bijective.

2. On applique la formule de projection à l'isomorphisme précédent. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
R\phi_*(\Omega^{n+\bullet}_{\mathbb{C}^n}(\mathcal{M}e^g\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^2}))&\simeq R\phi_*(\Omega^{n+\bullet}_{\mathbb{C}^n}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^2})\otimes_{\phi^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})}\phi^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^{p_2}))\\
&\simeq R\phi_*(\Omega^{n+\bullet}_{\mathbb{C}^n}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^2}))\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^{p_2}.
\end{aligned}$$

3. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\phi_+(\mathcal{M}e^g)&=(R\phi_*(\Omega^{n+\bullet}_{\mathbb{C}^n}(\mathcal{M}e^g\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^2})))^{(g)}\\
&=(R\phi_*(\Omega^{n+\bullet}_{\mathbb{C}^n}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^2}))\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^{p_2})^{(g)}\\
&=(R\phi_*(\Omega^{n+\bullet}_{\mathbb{C}^n}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^2})))^{(g)}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^{p_2}\\
&=\phi_+(\mathcal{M})e^{p_2}.
\end{aligned}$$

□

Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ est holonome régulier, $\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ est à cohomologies holonomes régulières y compris à l'infini (c.f. [1] page 302). On est donc ramené à étudier l'irrégularité du complexe $p_{1+}(\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})e^{p_2})$ avec $p_1:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ et $p_2:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ les deux projections et $\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules à cohomologies holonomes, régulières y compris à l'infini.

□

6.2.2 Réduction au cas d'une application propre.

On veut tout d'abord pouvoir étudier le complexe d'irrégularité de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$ y compris à l'infini. Par définition du complexe d'irrégularité dans le cas algébrique, il faut regarder le complexe $j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$, où j est l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1$. Soit le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^2 & \xrightarrow{p_1} & \mathbb{C}\\
& \searrow^{p_1'} & \downarrow j\\
& & \mathbb{P}^1.
\end{array}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g) &= j_+p_{1+}(\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})e^{p_2}) \\ &= p'_{1+}(\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})e^{p_2}). \end{aligned}$$

On cherchera donc à calculer le complexe d'irrégularité en $c \in \mathbb{P}^1$ de $p'_{1+}(\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})e^{p_2})$. Comme p'_1 n'est pas propre, on va compactifier par rapport à la deuxième variable.

PROPOSITION 6.2.3. *Soit $\pi_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ et $\pi_2 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ les deux projections. Notons $i : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $Z = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{C}^2$. On a alors :*

$$j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g) = \pi_{1+}(\mathcal{N}^\bullet[*Z]e^{\pi_2}),$$

où $\mathcal{N}^\bullet = i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ est un complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}$-modules à cohomologies holonomes et régulières.

Démonstration
Soit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ & \searrow^{p'_1} & \downarrow \pi_1 \\ & & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

On a alors : $p'_{1+}(\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})e^{p_2}) = \pi_{1+}(i_+(\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})e^{p_2}))$. On a de plus la proposition :

LEMME 6.2.4.

$$i_+(\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})e^{p_2}) = i_+(\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}))[*Z]e^{\pi_2}.$$

avec $\pi_2 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ projection par rapport au deuxième facteur et $Z = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{C}^2$.

Démonstration
Il suffit d'utiliser la proposition 2.4.6 à la situation :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \uparrow{\scriptstyle p_2} & & \uparrow{\scriptstyle \pi_2} \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1. \end{array}$$

□

Ainsi, $j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g) = \pi_{1+}(i_+\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})[*Z]e^{\pi_2})$. On pose alors $\mathcal{N}^\bullet = i_+\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ est holonome et régulier, $i_+\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ est à cohomologies holonomes et régulières.

□

6.2.3 Calcul de la caractéristique d'Euler du complexe d'irrégularité.

Soit j l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Remarquons dans un premier temps que, dans le cas à deux variables, avec f et g polynômes algébriquement indépendants, le complexe d'irrégularité $IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}e^g))$ est concentré en degré 0 et à support $\{c\}$ (c.f. proposition 4.3.2). Il s'agit donc d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On calculera alors sa dimension. Dans le cas à

n variables, $n \geq 3$, on a affaire à un complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On calculera alors sa caractéristique d'Euler $\chi(IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g))_c)$.

Grâce aux paragraphes précédents, on s'est ramené à l'étude du complexe d'irrégularité en $c \in \mathbb{C}$ d'un complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-modules du type : $\pi_{1+}(\mathcal{N}^\bullet[*Z]e^{\pi_2})$, où $\pi_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ et $\pi_2 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ sont les deux projections, $\mathcal{N}^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}$-modules à cohomologies holonomes et régulières et $Z = \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\backslash\mathbb{C}^2$. On va alors démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 6.2.5. *Pour tout $c \in \mathbb{P}^1$,*

$$\chi(IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g))_c) = -\chi(IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2})_{(c,\infty)}).$$

Démonstration
Comme π_1 est une application propre et $\mathcal{N}^\bullet$ est un complexe à cohomologies holonomes, on a : $(\pi_{1+}(\mathcal{N}^\bullet[*Z]e^{\pi_2}))^{an} = \pi_{1+}^{an}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2})$ (c.f. proposition 2.2.19). Ainsi, pour $c \in \mathbb{P}^1$, on a :

$$\begin{aligned} IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)) &= IR_c(\pi_{1+}(\mathcal{N}^\bullet[*Z]e^{\pi_2})) \\ &= IR_c((\pi_{1+}(\mathcal{N}^\bullet[*Z]e^{\pi_2}))^{an}) \\ &= IR_c(\pi_{1+}^{an}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2})) \\ &= R\pi_{1*}^{an}(IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2}))[+1] \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.3.9 de commutation du foncteur irrégularité le long d'une hypersurface et du foncteur image directe analytique par une application propre.

Nous allons donc étudier le complexe $IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2})$.

LEMME 6.2.6. *Pour tout $c \in \mathbb{P}^1$, $IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2})$ est à support $\{(c,\infty)\}$.*

Démonstration
Cela vient du fait que $\mathcal{N}^{\bullet an}$ est à cohomologies régulières et que e^{π_2} est holomorphe à valeur dans $\mathbb{C}$ sur $\{c\}\times\mathbb{C}$. Ainsi, pour tout $x_0 \in \mathbb{C}$, $(IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2}))_{(c,x_0)} = 0$.

□

On a ainsi :

$$\begin{aligned} IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g))_c &= R\pi_{1*}^{an}(IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2}))_c[+1] \\ &= \mathbb{R}\Gamma(\{c\}\times\mathbb{P}^1, IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2}))[+1] \\ &= \mathbb{R}\Gamma((c,\infty), IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2}))[+1] \\ &= (IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2}))_{(c,\infty)}[+1], \end{aligned}$$

D'où :

$$\chi((IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)))_c) = -\chi((IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2}))_{(c,\infty)})$$

□

6.3 Lien entre cycle caractéristique et complexe d'irrégularité.

On veut calculer la caractéristique d'Euler du germe en (c,∞) du complexe d'irrégularité $IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2})$. Pour cela, on choisit des coordonnées locales (x,z) au voisinage de (c,∞) telles que :

– (c,∞) a pour coordonnées $(0,0)$,
– $\{c\}\times\mathbb{P}^1$ a pour équation $x=0$ au voisinage de (c,∞),
– $\mathbb{P}^1\times\{\infty\}$ a pour équation $z=0$ au voisinage de (c,∞).

Dans ces coordonnées, π_2 est égal à $\frac{1}{z}$ au voisinage de (c,∞). On est donc ramené au calcul de la caractéristique d'Euler du germe en $(0,0)$ du complexe d'irrégularité $IR_{x=0}(\mathcal{M}^\bullet[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})$, où $\mathcal{M}^\bullet$ un complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules analytiques à cohomologies holonomes et régulières. Nous noterons le cycle caractéristique de $\mathcal{M}^\bullet$ au voisinage de $(0,0)$ par :

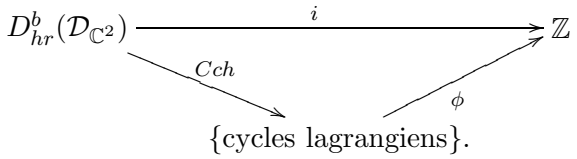
$$Cch(\mathcal{M}^\bullet)=mT^*_{\mathbb{C}^2}\mathbb{C}^2+m^{'}T^*_{(0,0)}\mathbb{C}^2+m^{''}T^*_{x=0}\mathbb{C}^2+m^{'''}T^*_{z=0}\mathbb{C}^2+\sum_i m_iT^*_{Z_i}\mathbb{C}^2,$$

avec Z_i germes de courbes irréductibles en $(0,0)$, distincts de l'axe des x et de l'axe des z. Notons $i(\mathcal{M}^\bullet)=\chi(IR_{x=0}(\mathcal{M}^\bullet[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})_{(0,0)})$. On veut alors démontrer le résultat suivant :

THEOREME 6.3.1.

$$i(\mathcal{M}^\bullet)=-\sum_i m_ii_{(0,0)}(Z_i,z=0).$$

Notons $\phi(Cch(\mathcal{M}^\bullet))=-\sum_i m_ii_{(0,0)}(Z_i,z=0)$. ϕ est une application additive sur l'espace des cycles lagrangiens. Démontrer le théorème revient à démontrer que le diagramme suivant est commutatif :



On se ramène, par additivité, au cas d'un seul module $\mathcal{M}$. Pour cela, il suffit de remarquer :

1. $Cch(\mathcal{M}^\bullet)=\sum_k(-1)^kCch(\mathcal{H}^k(\mathcal{M}^\bullet))$ (c.f. définition 2.5.15).
2. $i(\mathcal{M}^\bullet)=\sum_k(-1)^ki(\mathcal{H}^k(\mathcal{M}^\bullet))$ (c.f. proposition 2.6.3).

Nous allons donc démontrer le résultat dans les deux cas suivants :
– le lieu singulier de $\mathcal{M}$ au voisinage de $(0,0)$ est inclus dans $xz=0$.
– le support de $\mathcal{M}$ au voisinage de $(0,0)$ n'est pas inclus dans $z=0$.

6.3.1 Le cas où le lieu singulier du module est inclus dans $xz=0$.

PROPOSITION 6.3.2. *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module tel que son lieu singulier au voisinage de $(0,0)$ est inclus dans $xz=0$ ($Cch(\mathcal{M})=mT^*_{\mathbb{C}^2}\mathbb{C}^2+m^{'}T^*_{(0,0)}\mathbb{C}^2+m^{''}T^*_{x=0}\mathbb{C}^2+m^{'''}T^*_{z=0}\mathbb{C}^2$), alors :*

$$i(\mathcal{M})=0.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module holonome régulier tel que son lieu singulier au voisinage de $(0,0)$ est inclus dans $xz=0$. On veut montrer que $i(\mathcal{M})=0$. Pour cela, montrons que $IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})=0$. Comme $\mathcal{M}$ est régulier, ce complexe est à support $(0,0)$. Pour le germe en $(0,0)$, on utilise le résultat local du théorème 3.3.3 **(A2)** du chapitre 3 qui nous donne $IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})_{(0,0)}=0$.

□

6.3.2 Le cas où le support du module n'est pas inclus dans $z = 0$.

PROPOSITION 6.3.3. *Si $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module tel que, au voisinage de $(0,0)$, son support n'est pas inclus dans $z = 0$. Notons le cycle caractéristique de $\mathcal{M}$ au voisinage de $(0,0)$: $Cch(\mathcal{M}) = mT^*_{\mathbb{C}^2}\mathbb{C}^2 + m'T^*_{(0,0)}\mathbb{C}^2 + m''T^*_{x=0}\mathbb{C}^2 + m'''T^*_{z=0}\mathbb{C}^2 + \sum m_i T^*_{Z_i}\mathbb{C}^2$, avec Z_i germes de courbes irréductibles en $(0,0)$, distincts de l'axe des x et de l'axe des z. Alors :*

$$i(\mathcal{M}) = -\sum m_i * i_{(0,0)}(Z_i, z = 0).$$

Démonstration

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module tel que, au voisinage de $(0,0)$, son support n'est pas inclus dans $z = 0$ et $Cch(\mathcal{M}) = mT^*_{\mathbb{C}^2}\mathbb{C}^2 + m'T^*_{(0,0)}\mathbb{C}^2 + m''T^*_{x=0}\mathbb{C}^2 + m'''T^*_{z=0}\mathbb{C}^2 + \sum m_i T^*_{Z_i}\mathbb{C}^2$.

Soit $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{C}^2$ un morphisme propre permettant de désingulariser $\{x = 0\} \cup \{z = 0\} \cup (\cup Z_i)$.

LEMME 6.3.4.

$$IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}}) = IR_{x=0}(\pi_+\mathbb{L}\pi^*(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})).$$

Démonstration

Il suffit de montrer que $\pi_+\mathbb{L}\pi^*(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})$ est isomorphe à $\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}}$. Pour cela, on applique la proposition 7.4.5 page 97 de [29] au module $\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}}$:

PROPOSITION 6.3.5. *Soit $f : \tilde{X} \to X$ un morphisme de variétés analytiques complexes. Soit $\mathcal{M}$ un complexe de $D^b_c(\mathcal{D}_X)$ tel que au dessus de supp$(\mathcal{M})$, f soit un isomorphisme en dehors d'un sous espace analytique Z de supp$(\mathcal{M})$. Alors le morphisme d'adjonction*

$$(Ad)_f(\mathcal{M}) : f_+\mathbb{L}f^*\mathcal{M}[dim(\tilde{X})] \to \mathcal{M}[dim(X)]$$

est un isomorphisme si l'on suppose de plus que $f_+\mathbb{L}f^*\mathcal{M}$ est cohérent et $R\mathcal{M}(*Z) \simeq \mathcal{M}$.

Comme $\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}}$ est holonome (c.f. proposition 2.4.4), on a bien $\pi_+\mathbb{L}\pi^*(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})$ holonome donc cohérent (c.f. [1] théorème 10-1, page 292). De plus, $\mathbb{R}(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})(*(z = 0)) = \mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}}$. Enfin, π est un isomorphisme au dessus du support de $\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}}$ en dehors du sous espace analytique $z = 0$ ($supp(\mathcal{M}) \not\subset \{z = 0\}$ par hypothèse). Toutes les hypothèses de la proposition sont donc vérifiées et on a donc bien que le morphisme d'adjonction est un isomorphisme.

□

Comme π est une application propre, on a, d'après le théorème 2.3.9 de commutation du foncteur irrégularité le long d'une hypersurface et du foncteur image directe analytique par une application propre :

$$IR_{x=0}(\pi_+\mathbb{L}\pi^*(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})) = R\pi_*(IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\mathbb{L}\pi^*(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}}))).$$

De plus, π étant un isomorphisme en dehors de $\pi^{-1}(0)$, on a, d'après la proposition 2.3.11 :

$$IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\mathbb{L}\pi^*(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})) = IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})).$$

Ainsi,

$$(IR_{x=0}(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}}))_{(0,0)} = \mathbb{R}\Gamma(\pi^{-1}(0,0), IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M}[\frac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}}))).$$

D'où

$$\begin{aligned} i(\mathcal{M}) &= \chi(\mathbb{R}\Gamma(\pi^{-1}(0,0), IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M}[\tfrac{1}{z}]e^{\frac{1}{z}})))) \\ &= \chi(\mathbb{R}\Gamma(\pi^{-1}(0,0), IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\tfrac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}}))), \text{ (proposition 2.4.7).} \end{aligned}$$

Nous allons calculer $\chi(\mathbb{R}\Gamma(\pi^{-1}(0,0), IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})))$. Pour cela, étudions localement le complexe $IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})$.

Soit E_p une composante irréductibles de $\pi^{-1}(0,0)$. Elle intersecte un certain nombre de composantes irréductibles de $\pi^{-1}(0,0)$ et de transformées strictes de $x=0$, $z=0$ et Z_i. Notons $P_1, \ldots, P_{n'_p}$ les points d'intersection.

1. Au voisinage d'un point $P \in E_p$ qui n'est pas l'un de ces points d'intersection, on a, dans des coordonnées (u,v) au voisinage de P :
   - $\pi^{-1}(x=0)$ et $\pi^{-1}(0,0)$ d'équation $u=0$.
   - $z\circ\pi$ est équivalent au voisinage de P à u^{k_p}, $k_p \geq 1$.
   - Le lieu singulier de $\pi^*(\mathcal{M})$ est inclus dans $u=0$ et le rang de $\pi^*(\mathcal{M})$ est le même que celui de $\mathcal{M}$ (c.f. proposition 2.5.16).

   Ainsi, au voisinage de P, le complexe d'irrégularité $IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})$ se calcule à l'aide du complexe $IR_{u=0}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{u}]e^{\frac{1}{u^{k_p}}})$. En utilisant le théorème 3.3.1 **(A1)** du chapitre 3, on voit que la restriction du complexe $IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})$ à E_p privé des n'_p points d'intersection P_k est un système local de rang $rg(\mathcal{M})k_p$.

2. Etudions alors le complexe $IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})$ au voisinage des points d'intersection P_k. Quatre cas sont alors possibles :
   (a) P_k est le point d'intersection de E_p avec une autre composante irréductible E_q de $\pi^{-1}(0,0)$. On a alors, dans un voisinage U_k de P_k, avec des coordonnées convenables (u,v) :
   - E_p d'équation $u=0$ et E_q d'équation $v=0$.
   - $\pi^{-1}(0,0)$ et $\pi^{-1}(x=0)$ d'équation $uv=0$.
   - $z\circ\pi$ équivalent au voisinage de P à $u^{k_p}v^{k_q}$, $k_p, k_q \geq 1$.
   - Le lieu singulier de $\pi^*(\mathcal{M})_{|U_k}$ est inclus dans $uv=0$ (c.f. proposition 2.5.16).

   Il faudra alors regarder $IR_{uv=0}(\pi^*(\mathcal{M})_{|U_k}[\frac{1}{uv}]e^{\frac{1}{u^{k_p}v^{k_q}}})$ **(B1)**.

   (b) P_k est le point d'intersection de E_p avec la transformée stricte $\tilde{Z}_i$ de Z_i (Z_i est irréductible). On a alors, dans un voisinage U_k de P_k, avec des coordonnées convenables (u,v) :
   - E_p d'équation $u=0$ et $\tilde{Z}_i$ d'équation $v=0$.
   - $\pi^{-1}(0,0)$ et $\pi^{-1}(x=0)$ d'équation $u=0$.
   - $z\circ\pi$ équivalent au voisinage de P à u^{k_p}, $k_p \geq 1$.
   - Le lieu singulier de $\pi^*(\mathcal{M})_{|U_k}$ est inclus dans $uv=0$, $rg(\pi^*(\mathcal{M})_{|U_k}) = rg(\mathcal{M})$ et la multipicité de $\pi^*(\mathcal{M})_{|U_k}$ sur $T^*_{\tilde{Z}_i}\mathbb{C}^2$ est la même que celle de $\mathcal{M}$ sur $T^*_{Z_i}\mathbb{C}^2$, c'est à dire m_i (c.f. proposition 2.5.16).

   Il faudra alors regarder $IR_{u=0}(\pi^*(\mathcal{M})_{|U_k}[\frac{1}{u}]e^{\frac{1}{u^{k_p}}})$ **(A4)**.

(c) P_k est le point d'intersection de E_p avec la transformée stricte $\widetilde{\{x=0\}}$ de $\{x=0\}$. On a alors, dans un voisinage U_k de P_k, avec des coordonnées convenables (u,v) :
- E_p d'équation $u=0$ et $\widetilde{\{x=0\}}$ d'équation $v=0$.
- $\pi^{-1}(0,0)$ d'équation $u=0$ et $\pi^{-1}(x=0)$ d'équation $uv=0$.
- $z\circ\pi$ équivalent au voisinage de P à u.
- Le lieu singulier de $\pi^*(\mathcal{M})_{|U_k}$ est inclus dans $uv=0$ (c.f. proposition 2.5.16).

Il faudra alors regarder $IR_{uv=0}(\pi^*(\mathcal{M})_{|U_k}[\frac{1}{u}]e^{\frac{1}{u}})$ **(A3)**.

(d) P_k est le point d'intersection de E_p avec la transformée stricte $\widetilde{\{z=0\}}$ de $\{z=0\}$. On a alors, dans un voisinage U_k de P_k, avec des coordonnées convenables (u,v) :
- E_p d'équation $u=0$ et $\widetilde{\{z=0\}}$ d'équation $v=0$.
- $\pi^{-1}(0,0)$ et $\pi^{-1}(x=0)$ d'équation $u=0$.
- $z\circ\pi$ équivalent au voisinage de P à $u^{k_p}v$, $k_p\geq 1$.
- Le lieu singulier de $\pi^*(\mathcal{M})_{|U_k}$ est inclus dans $uv=0$ (c.f. proposition 2.5.16).

Il faudra alors regarder $IR_{u=0}(\pi^*(\mathcal{M})_{|U_k}[\frac{1}{uv}]e^{\frac{1}{u^{k_p}v}})$ **(B2)**.

3. Calculons maintenant $\chi(\mathbb{R}\Gamma(\pi^{-1}(0,0), IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})))$.
En utilisant le théorème de Mayer-Vietoris pour chaque composante irréductible de $\pi^{-1}(0,0)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\chi(\mathbb{R}\Gamma(\pi^{-1}(0,0), IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\tfrac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})))\\
&=\sum_{E_p\subset\pi^{-1}(0,0)}\chi(\mathbb{R}\Gamma(E_p, IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})))\\
&-\sum_{P_k}\chi(\mathbb{R}\Gamma(P_k, IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}}))),
\end{aligned}$$

où $\{P_k\}$ est l'ensemble des points d'intersection de deux composantes irréductibles de $\pi^{-1}(0,0)$. Or, d'après le point 2.(a) et le théorème 3.3.9 **(B1)**, on a :

$$\begin{aligned}
\chi(\mathbb{R}\Gamma(P_k, IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\tfrac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}}))) &= \chi((IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\tfrac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}}))_{P_k})\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Il faut donc calculer $\sum_{E_p\subset\pi^{-1}(0,0)}\chi(\mathbb{R}\Gamma(E_p, IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})))$. Pour cela, on va calculer pour chaque E_p, $\chi(\mathbb{R}\Gamma(E_p, IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})))$.
Soit $U_1,\ldots,U_{n'_p}$ des ouverts de E_p tels que :
- U_k boule ouverte dans E_p de centre P_k et de rayon suffisamment petit.
- Les U_k sont disjoints deux à deux.
- On a les écritures locales sur chaque U_k de 2.
- Comme $IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})_{|U_k}$ est un complexe constructible, on choisit U_k suffisamment petit pour que

$$\mathbb{R}\Gamma(U_k, IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})_{|U_k}) = (IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}}))_{P_k}.$$

(c.f. corollaire I.4.17 de [32]).

Notons U la réunion disjointe des U_k et V l'adhérence du complémentaire dans $\mathbb{P}^1$ de boule centrée en P_k incluse dans U_k. On a alors $U \cap V$ union disjointe de $n_p^{'}$ couronnes. Alors :

– Comme $(IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}}))_V$ est un système local de rang $rg(\mathcal{M})k_p$ (c.f. 1.) et que $\chi(V) = (2 - n_p^{'})$, on a :

$$\chi(\mathbb{R}\Gamma(V, IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}}))) = (2 - n_p^{'})rg(\mathcal{M})k_p.$$

– Comme $(IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}}))_{U\cap V}$ est un système local de rang $rg(\mathcal{M})k_p$ (c.f. 1.) et que $\chi(U \cap V) = 0$, on a :

$$\chi(\mathbb{R}\Gamma(U \cap V, IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}}))) = 0.$$

– On a :

$$\begin{aligned}
&\chi(\mathbb{R}\Gamma(U, IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\tfrac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})))\\
&= \sum_{k=1}^{n_p^{'}} \chi(\mathbb{R}\Gamma(U_k, IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}})))\\
&= \sum_{k=1}^{n_p^{'}} \chi((IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}}))_{P_k})\\
&= \sum_{\tilde{Z}_i\cap E_p\neq\emptyset} (rg(\mathcal{M}) - m_i)k_p,
\end{aligned}$$

d'après le point 2. et les théorèmes 3.3.9 **(B1)**, 3.3.11 **(B2)**, 3.3.5 **(A3)** et 3.3.7 **(A4)** Par le théorème de Mayer-Vietoris, on trouve donc :

$$\chi(\mathbb{R}\Gamma(E_p, IR_{\pi^{-1}(x=0)}(\pi^*(\mathcal{M})[\frac{1}{z\circ\pi}]e^{\frac{1}{z\circ\pi}}))) = (2-n_p^{'})rg(\mathcal{M})k_p + \sum_{\tilde{Z}_i\cap E_p\neq\emptyset} (rg(\mathcal{M})-m_i)k_p.$$

Notons n_p le nombre de composantes irréductibles de $\pi^{-1}(0)$ intersectant E_p auquel on ajoute 1 si E_p intersecte la transformée stricte de $z = 0$ et k_{p_i} l'entier tel que si E_p est la composante irréductible de $\pi^{-1}(0,0)$ intersectant $\tilde{Z}_i$, $k_{p_i} = mult_{E_p}(z \circ \pi)$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
i(\mathcal{M}) &= \sum_{E_p\subset\pi^{-1}(0) \text{ irréd.}} \left((2 - n_p^{'})rg(\mathcal{M})k_p + \sum_{\tilde{Z}_i\cap E_p\neq\emptyset} (rg(\mathcal{M}) - m_i)k_p\right)\\
&= \sum_{E_p\subset\pi^{-1}(0) \text{ irréd.}} (2 - n_p^{'})rg(\mathcal{M})k_p + \sum_{\tilde{Z}_i}(rg(\mathcal{M}) - m_i))k_{p_i}\\
&= \sum_{E_p\subset\pi^{-1}(0) \text{ irréd.}} (2 - n_p)rg(\mathcal{M})k_p - \sum_{\tilde{Z}_i} m_i k_{p_i} - rg(\mathcal{M})
\end{aligned}$$

car sur la composante irréductible E_p de $\pi^{-1}(0,0)$ intersectant la transformée stricte de $x = 0$, $k_p = 1$. On a de plus les deux lemmes suivants : :

LEMME 6.3.6. $\displaystyle\sum_{E_p\subset\pi^{-1}(0,0) \ irréd.} (2 - n_p)k_p = 1.$

Démonstration
On rappelle que n_p est le nombre de composantes irréductibles de $\pi^{-1}(0)$ intersectant E_p auquel on ajoute 1 si E_p intersecte la transformée stricte de $z=0$. Décomposons π comme une succession d'éclatement. On avait vu dans la remarque 5.4.6, que la formule

$$\sum_{E_p \subset \pi^{-1}(0,0) \text{ irréd.}} (2-n_p)k_p$$

était inchangée quand on effectuait un éclatement supplémentaire. Il suffit donc de montrer que lors du premier éclatement, on a bien la formule cherchée. Or, après le premier éclatement, on a un seul diviseur E. Le nombre n attaché à ce diviseur est 1 (correspond à la transformée stricte de $z=0$) et le nombre k qui lui est associé est 1. L'égalité est donc vrai après le premier éclatement. On a donc bien : $\sum_{E_p \subset \pi^{-1}(0,0) \text{ irréd.}} (2-n_p)k_p = 1.$

□

LEMME 6.3.7. $i_{(0,0)}(Z_i, z=0) = k_{p_i}$.

Démonstration
Rappelons que l'on a définit k_{p_i} comme étant la multiplicité sur E_p de $z \circ \pi$, où E_p est la composante irréductible de $\pi^{-1}(0)$ intersectant la transformée stricte de E_p. Notons $(x(t), z(t))$ une paramétrisation de Z_i. On a alors :

$$i_{(0,0)}(Z_i, z=0) = mult_t(z(t)).$$

Or si $\begin{array}{rccc} \gamma: & (\mathbb{C},0) & \to (\mathbb{C}^2,(0,0)) \\ & t & \mapsto (\phi(t),t) \end{array}$, est une paramétrisation de la transformée stricte de Z_i, $\begin{array}{rccc} \tilde{\gamma}: & (\mathbb{C},0) & \to (\mathbb{C}^2,(0,0)) \\ & t & \mapsto \pi(\phi(t),t) \end{array}$ sera une paramétrisation de Z_i. On a de plus par définition de k_i, $\pi(u,v) = (\pi_1(u,v), u^{k_{p_i}}\alpha(u,v))$ avec $\alpha(u,v)$ unité. Ainsi, $\tilde{\gamma}(t) = (\pi_1(\phi(t),t), \phi(t)^{k_{p_i}}\alpha(\phi(t),t))$. Or la multiplicité de ϕ est 1 puisqu'on a désingularisé Z_i. Donc $mult_t(\phi(t)^{k_i}\alpha(\phi(t),t) = k_i$. Dès lors, $i_{(0,0)}(Z_i, z=0) = k_i$.

□

D'où

$$\begin{aligned} i(\mathcal{M}) &= -\sum_{\tilde{Z}_i} m_i k_{p_i} \\ &= -\sum_{\tilde{Z}_i} m_i i_{(0,0)}(Z_i, z=0) \end{aligned}$$

□

6.3.3 Caractéristique d'Euler du complexe d'irrégularité de $f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$.

Soit f et g deux polynômes à n variables. Fixons $c \in \mathbb{P}^1$. On veut calculer la caractéristique d'Euler du germe en c du complexe d'irrégularité de $j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)$ en c, où j est l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1$. D'après la proposition 6.2.5,

$$\chi((IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}e^g)))_c) = -\chi((IR_{\{c\}\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{N}^{\bullet an}[*Z]e^{\pi_2}))_{(c,\infty)},$$

où :

– $\pi_2 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est la projection par rapport au deuxième facteur,
– $Z = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{C}^2$,
– $\mathcal{N}^\bullet = i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$, avec $i : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Regardons alors le cycle cractéristique de $\mathcal{N}^{\bullet an}$ dans un voisinage $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de (c, ∞) :

$$Cch_c(\mathcal{N}^\bullet) = mT^*_U U + m^{'} T^*_{(c,\infty)} U + m^{''} T^*_{\{c\}\times U_2} U + m^{'''} T^*_{U_1 \times \{\infty\}} U + \sum m_i T^*_{Z_i} U,$$

où les Z_i sont des germes de courbes irréductibles au voisinage de (c, ∞). On déduit alors du théorème 6.3.1 le théorème suivant :

THEOREME 6.3.8. *Soit f et g deux polynômes à n variables et $c \in \mathbb{P}^1$. Le complexe $IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g))$ est à support c et on a :*

$$\chi((IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} e^g)))_c) = \sum m_i i_{(c,\infty)}(Z_i, U_1 \times \{\infty\}).$$

D'après le théorème 4.3.2, on sait que $IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))$ est un complexe concentré en degré 0, à support c, si f et g sont deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants. On a donc :

COROLLAIRE 6.3.9. *Soit $c \in \mathbb{P}^1$. Si f et g sont deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants, $IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))$ est un complexe à support c concentré en degré 0 et on a :*

$$dim((IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)))_c) = \sum m_i i_{(c,\infty)}(Z_i, U_1 \times \infty).$$

6.4 Etude comparative des résultats des deux méthodes.

Soit f et g deux polynômes à deux variables algébriquement indépendants. Notons j l'inclusion de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C} \times \{\infty\}$. On sait que le complexe d'irrégularité en $c \in \mathbb{P}^1$, $IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))$ est un complexe concentré en degré 0 et à support c. Dans les chapitres 5 et 6, on a calculé, de deux façons différentes, la dimension du germe en c de $IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g))$. Rappelons les résultats obtenus :

1. Résultats obtenus par la première méthode :
   – La cas où $c \in \mathbb{C}$. Notons Δ la courbe discriminante de f et g comptée avec multiplicités (image par (f,g) de la courbe polaire de f et g au sens des idéaux de Fitting). D'après le théorème 5.5.18, on a :

   $$dim((IR_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)))_c) = i_{(c,\infty)}(\overline{\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{C}}, \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}),$$

   où $\overline{\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{C}}$ est l'adhérence de Zariski de $\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.
   – Le cas où $c = \infty$. Considérons des applications $F, G : \mathbb{X} \to \mathbb{P}^1$ données par une résolution à l'infini de f et g et notons D le lieu exceptionnel de cette résolution. Notons $\tilde{\Delta}$ la trace dans $\mathbb{C}^2$ de la courbe discriminante de F et G (image par (F,G) de la courbe polaire de F et G au sens des idéaux de Fitting). Notons Δ_2 la courbe de non propreté (trace dans $\mathbb{C}^2$ de l'image par (F,G) de D au sens des idéaux de Fitting). D'après le théorème 5.5.19, on a :

   $$dim((IR_\infty(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)))_\infty) = i_{(\infty,\infty)}(\overline{\tilde{\Delta}}, \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}) + i_{(\infty,\infty)}(\overline{\Delta_2}, \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}),$$

   où $\overline{\tilde{\Delta}}$ (resp. $\overline{\Delta_2}$) est l'adhérence de Zariski de $\tilde{\Delta}$ (resp. Δ_2) dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

2. Résultats obtenus par la deuxième méthode :
   Soit $c \in \mathbb{P}^1$. Notons i l'inclusion de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $Z = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus i(\mathbb{C}^2)$. Considérons le cycle caractéristique de $i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ dans un voisinage $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de (c, ∞) :

$$Cch_c(\mathcal{N}^\bullet) = mT^*_U U + m^{'} T^*_{(c,\infty)} U + m^{''} T^*_{\{c\}\times U_2} U + m^{'''} T^*_{U_1 \times \{\infty\}} U + \sum m_i T^*_{Z_i} U,$$

   où les Z_i sont des germes de courbes irréductibles au voisinage de (c, ∞). D'après le corollaire 6.3.9, on a :

$$dim((IR^0_c(j_+f_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} e^g)))_c) = \sum m_i i_{(c,\infty)}(Z_i, U_1 \times \infty).$$

Démontrons le théorème suivant :

THEOREME 6.4.1. *1. Dans le cas où $c \in \mathbb{C}$:*
- *Les branches irréductibles de $\overline{\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{P}^1}$ au voisinage de (c, ∞) sont les Z_i.*
- *La multiplicité de Z_i dans $\overline{\Delta \setminus \{c\} \times \mathbb{P}^1}$ est égale à m_i.*

2. Dans le cas où $c = \infty$:
- *Les branches irréductibles de $\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2}$ au voisinage de (∞, ∞) sont les Z_i.*
- *La multiplicité de Z_i dans $\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2}$ est égale à m_i.*

Démonstration

1. Etudions tout d'abord le lieu singulier de $i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$. Notons $W = \mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{\Delta} \cup \Delta_2)$. On sait alors que $(f,g) : (f,g)^{-1}(W) \to W$ est un revêtement de degré k. Ainsi, $(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})_{|W}$ est un $\mathcal{O}_W$-module libre de rang k. Comme $(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})_{|W}$ est une connexion, le lieu singulier de $(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})_{|W}$ est vide. Donc le lieu singulier de $(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ est inclus dans $\tilde{\Delta} \cup \Delta_2$. Ainsi, le lieu singulier de $i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ est inclus dans $\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2} \cup Z$. Le cycle caractéristique de $i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ dans un voisinage $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de (c, ∞) est donc de la forme :

$$Cch_c(\mathcal{N}^\bullet) = mT^*_U U + m^{'} T^*_{(c,\infty)} U + m^{''} T^*_{\{c\}\times U_2} U + m^{'''} T^*_{U_1 \times \{\infty\}} U + \sum m_i T^*_{Z_i} U,$$

   où les Z_i sont des courbes irréductibles au voisinage de (c, ∞) incluses dans $(\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2}) \cap U$ et disinctes de $\{c\} \times U_2$ et de $U_1 \times \{\infty\}$. De plus, quitte à choisir U suffisamment petit, on peut supposer que $\cup Z_i \cup (\{c\} \times U_2) \cup (U_1 \times \{\infty\})$ admet pour seule singularité (c, ∞).
   - Dans le cas où $c \in \mathbb{C}$, on a $((\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2}) \cap U) \setminus \{c\} \times U_2 = (\overline{\Delta} \cap U) \setminus \{c\} \times U_2$. Ainsi, les courbes Z_i sont des branches irréductibles de $(\overline{\Delta} \cap U) \setminus \{c\} \times U_2$. De plus, quitte à poser $m_i = 0$, on suppose que toutes les branches irréductibles de $(\overline{\Delta} \cap U) \setminus \{c\} \times U_2$ apparaîssent dans le cycle caractéristique. On notera $\tilde{Z}_i$ les courbes Z_i comptées avec leur multiplicités, au sens des idéaux de Fitting, dans $(\overline{\Delta} \cap U) \setminus \{c\} \times U_2$. On a ainsi $(\overline{\Delta} \cap U) \setminus \{c\} \times U_2 = \cup \tilde{Z}_i$.
   - Dans le cas où $c = \infty$, quitte à poser $m_i = 0$, on suppose que toutes les branches irréductibles de $(\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2}) \cap U$ apparaîssent dans le cycle caractéristique. On notera $\tilde{Z}_i$ les courbes Z_i comptées avec leur multiplicités, aux sens des idéaux de Fitting, dans $(\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2}) \cap U$. On a ainsi $(\overline{\tilde{\Delta}} \cup \overline{\Delta_2}) \cap U = \cup \tilde{Z}_i$.

2. Considérons une résolution à l'infini de f et g :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow I & & \downarrow j \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \downarrow I & & \downarrow j \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{G} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

comme dans le paragraphe 4.2.2. Notons $D = \mathbb{X} \setminus i(\mathbb{C}^2)$. On a alors $i_+(f,g)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}) = (F,G)_+I_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}) = (F,G)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D])$. Il faut ainsi montrer que la multplicité de $\tilde{Z}_i$ en un point $(c^{'},\rho)$ est égale à la multiplicité de $(F,G)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D])_{|U}$ en un point $x^* \in T^*_{Z_i}U$ avec $x^* = (c^{'},\rho,\xi_1,\xi_2)$. Commençons par étudier l'application (F,G) au voisinage des points de $(F,G)^{-1}(c^{'},\rho)$. Z_i est distinctes de $\{c\} \times U_1$ et de $U_2 \times \{\infty\}$. On peut donc choisir $(c^{'},\rho)$ tel que $c^{'} \neq c$, $\rho \neq \infty$ et tel que $F^{-1}(c^{'})$ et $G^{-1}(\rho)$ soient lisses. On peut également supposer que la courbe jacobienne $\Gamma^{'}$ de F et G est lisse au voisinage de chacun des points de $(F,G)^{-1}(c^{'},\rho)$ et que la multiplicité d'intersection de $\Gamma^{'}$ avec une fibre de F voisine de $F^{-1}(c^{'})$ est constante au voisinage des points de $(F,G)^{-1}(c^{'},\rho)$. Soit $P \in (F,G)^{-1}(c^{'},\rho)$.

- Comme $F^{-1}(c^{'})$ est lisse, on peut choisir des coordonnées (x,y) au voisinage de P telles que P soient de coordonnées $(0,0)$ et $F = c^{'} + x$.
- Notons $k = val_y(G(0,y)_\rho) \geq 1$.
  - Si $k = 1$, P n'est pas sur la courbe polaire $\Gamma^{'}$. D'après le théorème d'inversion local, on peut donc supposer que dans des coordonnées locales (x,y) de P, $F = c + x$ et $G = c^{'} + y$.
  - Supposons $k \geq 2$. Dans ce cas, P est sur la courbe polaire $\Gamma^{'}$. On peut écrire $G - \rho$ sous la forme $\alpha(x,y)x + \beta(x,y)y^k$, avec β fonction holomorphe inversible. Quitte à refaire un changement de coordonnées, on peut donc supposer que $G = \rho + \alpha(x,y)x + y^k$. Dans ces coordonnées, $\Gamma^{'}$ a pour équation $\frac{\partial G}{\partial y} = 0$, i.e. $x\frac{\partial \alpha}{\partial y} + ky^{k-1} = 0$. Comme $\Gamma^{'}$ est lisse au voisinage de P et que la multiplicité d'intersection de $\Gamma^{'}$ avec une fibre de F voisine de $F^{-1}(c^{'})$ est constante au voisinage de P, on considère une paramétrisation $(x,\mu(x))$ de $\Gamma^{'}$ au voisinage de P. On a alors $\frac{\partial G}{\partial y} = k(y-\mu(x))^{k-1}$. En intégrant cette équation, on trouve alors $G(x,y) = \rho + C(x) + (y-\mu(x))^k$. Donc, quitte à faire un nouveau changement de variables, on peut supposer que dans des coordonnées locales (x,y), G peut s'écrire $\rho + C(x) + y^k$, avec $C(x) = xC^{'}(x)$ et $C^{'}(x)$ inversible.

Dans la suite, nous noterons $P_1,\ldots,P_s$ les points dans $(f,g)^{-1}(c^{'},\rho)$ et $Q_1,\ldots,Q_t$ les points dans $(F,G)^{-1}(c^{'},\rho) \cap D$. Au voisinage de chacun de ces points, on a une écriture locale de F et G de la forme ci-dessus et on notera par k_{P_j} ou k_{Q_j} l'entier k intervenant dans cette écriture.

3. La multiplicité de $\tilde{Z}_i$ est égale à la somme des multiplicités au point $(c^{'},\rho)$ de l'image par (F,G) au sens des idéaux de Fitting de $\tilde{\Gamma}$ et de la multiplicité au point $(c^{'},\rho)$ de l'image par (F,G) au sens des idéaux de Fitting de D.

   Or la multiplicité en $(c^{'},\rho)$ de l'image par (F,G) au sens des idéaux de Fitting de $\tilde{\Gamma}$ est égale à

$$\sum_{P \in (F,G)^{-1}(c^{'},\rho) \cap \tilde{\Gamma}} mult_P(\tilde{\Gamma}) = \sum_{P \in (F,G)(c^{'},\rho) \cap \tilde{\Gamma}} (k_P - 1),$$

d'après les écritures locales du point précédent.

La multiplicité en $(c^{'},\rho)$ de l'image par (F,G) au sens des idéaux de Fitting de D est égale à

$$\sum_{Q\in(F,G)^{-1}(c^{'},\rho)\cap D} mult_Q(D) = \sum_{Q\in(F,G)^{-1}(c^{'},\rho)\cap D} 1.$$

Ainsi, la multiplicité de $\tilde{Z}_i$ est égale à

$$\sum_{j=1}^{s}(k_{P_j}-1)+\sum_{j=1}^{t}k_{Q_j}.$$

4. On veut montrer que la multiplicité de $(F,G)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D])_{|U}$ sur $T^*_{Z_i}U$ est égale à

$$\sum_{j=1}^{s}(k_{P_j}-1)+\sum_{j=1}^{t}k_{Q_j}.$$

Comme (F,G) est un morphisme fini, on a $(F,G)^{-1}(U)=\bigsqcup_{P\in(F,G)^{-1}(c^{'},\rho)}V_P$, où V_P est un voisinage ouvert de P. La multiplicité de $(F,G)_+(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}[*D])_{|U}$ sur $T^*_{Z_i}U$ est alors égale à la somme des multiplicités de $((F,G)_{|V_P})_+(\mathcal{O}_{V_P}[*(D\cap V_P)])$.

- Si $P\in\{P_1,\ldots,P_s\}$, dans des coordonnées locales au voisinage de P, on a $F=c^{'}+x$ et $G=\rho+x\alpha_0(x)+y^{k_P}$, avec $\alpha_0(x)\in\mathbb{C}\{x\}$, inversible, et $k_P\geq 1$. De plus $P\notin D$. On peut donc supposer que $D\cap V_P=\emptyset$. Il faut donc calculer la multiplicité de $(c^{'}+x,\rho+x\alpha_0(x)+y^{k_P})_+(\mathcal{O}_{V_P})$ sur $T^*_{Z_i}U$. Quitte à faire un changement de coordonnées dans V_P et U, on se ramène au calcul de la multiplicité de $(x,y^{k_P})_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ sur $T^*_{v=0}\mathbb{C}^2$, où (u,v) sont les coordonnées dans $\mathbb{C}^2$.
- Si $P\in\{Q_1,\ldots,Q_t\}$, dans des coordonnées locales au voisinage de P, on a $F=c^{'}+x$ et $G=\rho+x\alpha_0(x)+y^{k_P}$, avec $\alpha_0(x)\in\mathbb{C}\{x\}$, inversible, et $k_P\geq 1$. De plus $Q\in D$ et D a pour équation $y=0$ au voisinage de P. Il faut donc calculer la multiplicité de $(c^{'}+x,\rho+x\alpha_0(x)+y^{k_P})_+(\mathcal{O}_{V_P}[*(y=0)])$ sur $T^*_{Z_i}U$. Quitte à faire un changement de coordonnées dans V_P et U, on se ramène au calcul de la multiplicité de $(x,y^{k_P})_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{y}])$ sur $T^*_{v=0}\mathbb{C}^2$, où (u,v) sont les coordonnées dans $\mathbb{C}^2$..

On conclut alors à l'aide du lemme suivant :

LEMME 6.4.2. *Notons $\phi:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, telle que $\phi(x,y)=(x,y^k)$. On notera (u,v) les coordonnées dans $\mathbb{C}^2$ au but.*

1. *$(\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}))_{(0,0)}\simeq\mathbb{C}\{u,v\}\bigoplus(\mathbb{C}\{u,v\}[\frac{1}{v}])^{k-1}$. En particulier, sa multiplicité sur $T^*_{v=0}\mathbb{C}^2$ est égale à $(k-1)$.*
2. *La multiplicité de $(\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{y}]))$ sur $T^*_{v=0}\mathbb{C}^2$ est égale à k.*

Démonstration

Nous allons utiliser la définition de l'image directe comme étant le complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-modules à gauche associé au complexe de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}$-module à droite :

$$R\phi_*(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2})).$$

Comme ϕ est un morphisme fini, on a :

$$\begin{aligned}\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})^{(d)} &= \phi_*(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2}))\\ &= \phi_*(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2}[\partial_u,\partial_v]).\end{aligned}$$

Ainsi, $(\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})^{(d)})_{(0,0)} = \Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[\partial_u,\partial_v]$, avec

$$d(w\partial_u^\alpha\partial_v^\beta) = d(w)\partial_u^\alpha\partial_v^\beta + dx\wedge w\partial_u^{\alpha+1}\partial_v^\beta + dy\wedge wky^{k-1}\partial_u^\alpha\partial_v^{\beta+1}.$$

1. Calcul de $H^{-2}(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[\partial_u,\partial_v])$.

   Soit $\sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}\partial_u^\alpha\partial_v^\beta \in \mathbb{C}\{x,y\}[\partial_u,\partial_v]$ tel que $d(\sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}\partial_u^\alpha\partial_v^\beta) = 0$. On a alors :

   $$\sum_{\alpha\beta}(\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x}dx\partial_u^\alpha\partial_v^\beta + \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial y}dy\partial_u^\alpha\partial_v^\beta + f_{\alpha\beta}dx\partial_u^{\alpha+1}\partial_v^\beta + ky^{k-1}f_{\alpha\beta}dy\partial_u^\alpha\partial_v^{\beta+1}) = 0$$

   $$\Longrightarrow \begin{cases}\sum_{\alpha\beta}(\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x}\partial_u^\alpha\partial_v^\beta + f_{\alpha\beta}\partial_u^{\alpha+1}\partial_v^\beta) = 0\\ \sum_{\alpha\beta}(\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial y}\partial_u^\alpha\partial_v^\beta + ky^{k-1}f_{\alpha\beta}\partial_u^\alpha\partial_v^{\beta+1}) = 0\end{cases}$$

   Si $\beta_0 = deg_{\partial_v}(\sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}\partial_u^\alpha\partial_v^\beta)$, alors, pour tout α, $f_{\alpha\beta_0} = 0$ (d'après la deuxième équation).

   On a ainsi $\sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha\beta}\partial_u^\alpha\partial_v^\beta = 0$. D'où :

   $$H^{-2}(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[\partial_u,\partial_v]) = 0.$$

2. Calcul de $H^{-1}(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[\partial_u,\partial_v])$.

   Soit $\eta = \sum_{\alpha,\beta}(f_{\alpha\beta}dx + g_{\alpha\beta}dy)\partial_u^\alpha\partial_v^\beta \in \Omega^1_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[\partial_u,\partial_v]$, telle que $d(\eta) = 0$. On a alors :

   $$\sum_{\alpha,\beta}((\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x} - \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial y})\partial_u^\alpha\partial_v^\beta + g_{\alpha\beta}\partial_u^{\alpha+1}\partial_v^\beta - ky^{k-1}f_{\alpha\beta}\partial_u^\alpha\partial_v^{\beta+1})dx\wedge dy = 0.$$

   Soit (α_0,β_0) tel que $\alpha_0 = max\{\alpha \mid \exists\beta,\ f_{\alpha\beta}\neq 0\}$ et $\beta_0 = max\{\beta \mid f_{\alpha_0\beta}\neq 0\}$. Comme $d(\eta) = 0$, on a $g_{\alpha_0\beta_0} = 0$. Si $\alpha_0 > 0$, on peut alors écrire $f_{\alpha_0\beta_0}dx\partial_u^{\alpha_0}\partial_v^{\beta_0}$ sous la forme :

   $$d(f_{\alpha_0\beta_0}\partial_u^{\alpha_0-1}\partial_v^{\beta_0}) - \frac{\partial f_{\alpha_0\beta_0}}{\partial x}dx\partial_u^{\alpha_0-1}\partial_v^{\beta_0} - \frac{\partial f_{\alpha_0\beta_0}}{\partial y}dy\partial_u^{\alpha_0-1}\partial_v^{\beta_0} - ky^{k-1}f_{\alpha_0\beta_0}dy\partial_u^{\alpha_0-1}\partial_v^{\beta_0+1}.$$

   On se ramène ainsi à une forme $\eta' = \sum_\beta(f'_\beta dx + g'_\beta dy)\partial_v^\beta$. Notons $\beta_0 = deg_{\partial_v}(\eta')$.

   En utilisant le fait que $d(\eta') = 0$, on montre alors que $f'_{\beta_0} = g'_{\beta_0} = 0$. En itérant ce processus, on montre que $\eta' = 0$. D'où :

   $$H^{-1}(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[\partial_u,\partial_v]) = 0.$$

3. Calcul de $H^0(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[\partial_u,\partial_v])$.

   Dans $H^0(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[\partial_u,\partial_v])$, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial b}{\partial x}dx\wedge dy\partial_u^\alpha\partial_v^\beta + bdx\wedge dy\partial_u^{\alpha+1}\partial_v^\beta\right] = [0] \\ \left[\frac{\partial a}{\partial y}dx\wedge dy\partial_u^\alpha\partial_v^\beta + ky^{k-1}adx\wedge dy\partial_u^\alpha\partial_v^{\beta+1}\right] = [0], \end{cases}$$

   avec $a, b \in \mathbb{C}\{x,y\}$.

   Ces deux équations permettent d'écrire un élément de $H^0(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[\partial_u,\partial_v])$ sous la forme $[g_0dx\wedge dy + \sum_\beta g_\beta dx\wedge dy\partial_v^\beta]$, avec $g_0 \in \mathbb{C}\{x,y\}$ et $g_\beta \in \mathbb{C}\{x\}[y]_{\geq k-2}$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} H^0(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[\partial_u,\partial_v]) &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{C}\{x,y^k\}.y^i + \sum_{i=0}^{k-2}\mathbb{C}\{x\}y^i\partial_v[\partial_v] \\ &= \mathbb{C}\{x,y^k\}.y^{k-1} + \textstyle\sum_{i=0}^{k-2}\Big(\mathbb{C}\{x,y^k\}.y^i + \mathbb{C}\{x\}y^i\partial_v[\partial_v]\Big). \end{aligned}$$

   Notons :
   – $\mathcal{M}_i = \mathbb{C}\{x,y^k\}.y^i + \mathbb{C}\{x\}y^i\partial_v[\partial_v]$, pour $i = 0,\dots,k-2$.
   – $\mathcal{M}_{k-1} = \mathbb{C}\{x,y^k\}.y^{k-1}$.

   On peut alors montrer que, pour $i = 0,\dots,k-1$, $\mathcal{M}_i$ est un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}$-module et qu'ils forment une somme directe. On a ainsi $H^0(\Omega^{2+\bullet}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[\partial_u,\partial_v]) = \bigoplus_{k=0}^{k-1}\mathcal{M}_i$. Il reste alors à remarquer que :
   – $\mathcal{M}_{k-1} \simeq \mathbb{C}\{u,v\}$ en tant que $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}$-module.
   – Pour $i = 0,\dots,k-2$, $\mathcal{M}_i \simeq \mathbb{C}\{u,v\}[\frac{1}{v}]$ en tant que $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}$-module.

La première partie du lemme est donc démontré. La multiplicité de $\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ sur $T^*_{v=0}\mathbb{C}^2$ est donc $(k-1)$.

Pour montrer le deuxième point, on va utiliser la suite exacte suivante :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{y}] \to \frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}(\partial_x, y)} \to 0.$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C}^2 \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (x,y^k)} \\ \mathbb{C}\times\{0\} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C}^2. \end{array}$$

On a alors $\phi_+(\frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}(\partial_x,y)}) = \phi_+\alpha_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}\times\{0\}}) = \alpha_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}\times\{0\}}) = \frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}(\partial_u,v)}$. Donc la multiplicité de $\phi_+(\frac{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}}{\mathcal{D}_{\mathbb{C}^2}(\partial_x,y)})$ sur $T^*_{v=0}\mathbb{C}^2$ est 1. Comme ϕ_+ est un δ-foncteur, on démontre, par additivité des cycles caractéristiques, que la multiplicité de $\phi_+(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}[\frac{1}{y}])$ sur $T^*_{v=0}\mathbb{C}^2$ est k.

□

□

Bibliographie

[1] A. BOREL : *Algebraic D-modules*, Perspectives in Math., vol. 2, Academic Press, Boston, 1987.

[2] A. BOREL : *Intersection cohomology*, Progress in Math., Birkhäuser, Boston, 1984.

[3] G BREVET : *Sur l'irrégularité d'un système différentiel holonome le long d'une courbe plane*, Thèse, Université d'Angers, 1999, n. 468.

[4] J. BRIANCON et P. MAISONOBE : *Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable*, Ens . Math., t. 30, 1984, p. 7-38.

[5] J. BRIANCON et P. MAISONOBE : *Sur la variété caractéristique de systèmes différentiels irréguliers le long d'une hypersurface*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I, 1995, p. 285-288.

[6] E. BRIESKORN et H. KNORRER : *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, Boston, 1981.

[7] S.A. BROUGHTON : *Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces*, Invent. Math. 92, 1988, p. 217-241.

[8] P. DELIGNE : *Equations différentielles à points singuliers réguliers.*, Lecture notes in Math., 163, springer-Verlag, 1970.

[9] A. DIMCA : *Sheaves in topology*, Springer, 2004.

[10] A. DIMCA, F. MAAREF, C. SABBAH et M. SAITO : *Dwork cohomology and algebraic $\mathcal{D}$-modules*, Math. Ann., 318, no. 1, 2000, p. 107-125.

[11] A. DIMCA et M. SAITO : *On the cohomology of a general fiber of a polynomial map*, Compositio Math., 85, 1993, p. 299-309.

[12] L. FOURRIER : *Entrelas à l'infini et types topologiques des polynômes de deux variables complexes*, Thèse, université P. Sabatier de Toulouse, 1993, n. 1414.

[13] A. GALLIGO, M. GRANGER et P. MAISONOBE : *$\mathcal{D}$-modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal II*, Differential systems and singularities (Luminy, 1983), Astérisque No. 130, 1985, p. 240-259.

[14] M. GRANGER et P. MAISONOBE : *A basic course on differential modules*, in $\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes, Les cours du CIMPA, 1993, p. 103-168.

[15] P.A. GRIFFITHS : *Periods of integrals on algebraic manifolds I, II*, Amer. J. Math., 90, 1968, p. 568-626 et p. 805-865.

[16] A. GROTHENDIECK : *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES, 29, 1966, p. 351-359.

[17] R. HARTSHORNE : *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math., 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

[18] M. KASHIWARA : *Systems of microdifferential equation*, Progress in Math., vol. 34, Birkhäuser, Boston, 1983.

[19] M. KASHIWARA : *On the Holonomic Systems of Linear Differential Equations, II*, Invent. Math. 49, 1988, p. 121-135.

[20] N.M. KATZ : *On the differential equations satisfied by period matrices*, Publ. Math. IHES, 35, 1968, p. 71-106.

[21] N.M. KATZ et T. ODA : *On the differentiation of de Rham cohomology classes with respect to parameters*, J. Math. Kyoto Univ., 8", 1968, p. 199-213.

[22] LÊ D. T. et C. WEBER : *Equisingularité dans les pinceaux de germes de courbes planes et C^0-suffisance*, Ens. Math., t. 43, 1977, p. 355-380.

[23] LÊ D. T. et C. WEBER : *Polynômes à fibres rationnelles et conjecture jacobienne à 2 variables*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I, 1995, p. 581-584.

[24] F. MAAREF : *Sur un analogue irrégulier de la connexion de Gauss-Manin*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. VIII, n 1, 1999, p. 117-124.

[25] P. MAISONOBE et C. SABBAH : *Aspects of the theory of $\mathcal{D}$-modules*, Lecture notes, Kaiserslautern, 2002.

[26] P. MAISONOBE et T. TORRELLI : *Image inverse en théorie des $\mathcal{D}$-modules.*, Cours de l'école d'été du CIMPA-CIMI-UNESCO Differential systems, Séville, 1996.

[27] B. MALGRANGE : *Sur les points singuliers des équations différentielles*, Ens. Math.(2), 20, 1974, p. 147-176.

[28] H. MATSUMURA : *Commutative Algebra*, W. A. Benjamin Co., New York, 1970.

[29] Z. MEBKHOUT : *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents*, Travaux en cours 35. Hermann, 1989.

[30] Z. MEBKHOUT : *Le théorème de positivité, le théorème de comparaison, le théorème d'existence de Riemann*, Séminaires et Congrès 8, 2004, p. 165-307, à paraître.

[31] Z. MEBKHOUT : *Le théorème de positivité de l'irrégularité pour les $\mathcal{D}_X$-modules*, Grothendieck festschrift III. Progress in Math. 88, 1990, p. 84-131.

[32] Z. MEBKHOUT et L. NARVAEZ-MACARRO : *Le théorème de constructibilité de Kashiwara*, dans images directes et constructibilité, Les cours du CIMPA, 1993, p. 47-98.

[33] N. NILSON : *Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds*, Arkiv för Mat., 5, 1963-1965, p. 527-540.

[34] F. PHAM : *La descente des cols par les onglets de Lefschetz avec vue sur Gauss-Manin*, dans systèmes différentiels et singularités, Astérisque n. 130, 1985, p. 11-47.

[35] C. SABBAH : *On the comparaison theorem for elementary irregular $\mathcal{D}$-modules*, Nagoya J. Math., 141, 1996, p. 107-124.

[36] C. SABBAH : *lettre à F. Maaref*, 2002.

[37] J.P. SERRE : *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourrier, Grenoble 6, 1955-1956, p. 1-42.

[38] B. TEISSIER : *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*, in Real and complex singularities, Oslo 1976, (ed. P. Holm), Sijthoff and Noordhoff International Publishers, 1977.

[39] J.C. TOUGERON : *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse der Mathematik No. 71., Springer-Verlag, 1972.

[40] A.N. VARCHENKO : *Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology*, Math. USSR Izv., 18, 1982, p. 469-512.