



HAL
open science

Résonances sur les variétés asymptotiquement hyperboliques

Colin Guillarmou

► **To cite this version:**

Colin Guillarmou. Résonances sur les variétés asymptotiquement hyperboliques. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2004. Français. NNT: . tel-00006860

HAL Id: tel-00006860

<https://theses.hal.science/tel-00006860>

Submitted on 9 Sep 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2004

N° B.U. :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**RÉSONANCES SUR LES VARIÉTÉS
ASYMPTOTIQUEMENT HYPERBOLIQUES**

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques et applications

Présentée et soutenue publiquement par

Colin GUILLARMOU

le 16 juin 2004, devant le jury ci-dessous

Président	: Gilles CARRON	Professeur (Nantes)
Rapporteurs	: Peter PERRY	Professeur (Kentucky)
	Vesselin PETKOV	Professeur (Bordeaux)
Examineurs	: Nicolas BURQ	Professeur (Paris-sud)
	Laurent GUILLOPÉ	Professeur (Nantes)
	Vesselin PETKOV	Professeur (Bordeaux)
	Georgi VODEV	C.R. du CNRS (Nantes)
	Maciej ZWORSKI	Professeur (Berkeley)

Directeur de Thèse : Laurent GUILLOPÉ (Université de Nantes)
N° E.D. : 0366 - 142

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance envers Laurent Guillopé pour avoir su me guider depuis la maîtrise jusqu'à l'aboutissement de cette thèse. Travailler sous sa direction aura été une expérience très enrichissante.

Je voudrais ensuite remercier Peter Perry et Vesselin Petkov pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail ainsi que pour leurs commentaires.

Je suis aussi très honoré de la présence dans le jury de Nicolas Burq, Gilles Carron, Vesselin Petkov, Georgi Vodev et Maciej Zworski. Je les remercie tous pour leur disponibilité, leur sympathie et l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail.

Je pense aussi au soutien du département de Mathématiques de Nantes et du CIES Grand Ouest, sans qui cette thèse n'aurait peut-être pas abouti. Par ailleurs, les autres doctorants ont certainement joué un rôle important pendant ces quatre années, autant pour leurs conseils, leur curiosité et leur disponibilité que pour leur amitié.

Mes pensées vont enfin à ma famille pour m'avoir soutenu depuis le début.

Sommaire

1	Quelques rappels et cadre de travail	14
1.1	Introduction	14
1.2	Parité de la métrique	15
1.3	Densités, distributions	18
1.4	Théorie spectrale du laplacien	19
2	Prolongement méromorphe de la résolvante pour une métrique paire	22
2.1	Variétés éclatées	23
2.2	Petit calcul	27
2.3	Opérateur normal	30
2.4	Equations indicielles	40
2.5	Continuité et norme du reste	43
2.6	Prolongement méromorphe de la résolvante	46
2.7	Majoration du nombre de résonances dans des bandes	48
3	Etude de la résolvante près de $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$	50
3.1	Opérateur de Poisson, opérateur de diffusion	50
3.2	Equivalences entre méromorphies	55
3.3	Méromorphie et parité	58
3.4	Singularités essentielles de la résolvante	62
3.5	Exemples avec point d'accumulation de résonances	64
3.6	Un résultat inverse	67
4	Une formule de multiplicité	70
4.1	Lemmes préliminaires	70
4.2	La formule et son intérêt	75
5	Absence de résonance près de l'axe critique	78
5.1	Le résultat de Cardoso-Vodev	78
5.2	Deux modèles	79
5.3	Zones sans résonance	82
A	Fonctions méromorphes dans des espaces de Banach	90
A.1	Définitions et notations	90
A.2	Quelques propriétés utiles	90
A.3	Rappels sur la théorie de Gohberg-Sigal	93
B	Le modèle hyperbolique	96

Introduction

Sur une variété riemannienne lisse compacte (X, g) le spectre $\sigma(\Delta_g)$ du laplacien Δ_g est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicité finie tendant vers $+\infty$. La résolvante $(\Delta_g - s)^{-1}$ de Δ_g est donc une famille méromorphe dans \mathbb{C} d'opérateurs bornés sur $L^2(X, dvol_g)$ dont les pôles sont les valeurs propres de Δ_g et les rangs des résidus sont les multiplicités de ces valeurs propres.

Si la variété n'est pas compacte on voit en général apparaître du spectre essentiel, les premiers exemples géométriques étant l'espace euclidien (\mathbb{R}^{n+1}, g_e) et l'espace hyperbolique (\mathbb{H}^{n+1}, g_h) (avec $n \geq 1$) dont les laplaciens associés possèdent uniquement du spectre essentiel $\sigma(\Delta_{g_e}) = [0, +\infty)$ et $\sigma(\Delta_{g_h}) = [\frac{n^2}{4}, +\infty)$. Si on prend n pair pour simplifier, il est relativement direct de vérifier que pour tout $N > 0$, les résolvantes modifiées

$$R_e(z) := (\Delta_{g_e} - z^2)^{-1}, \quad R_h(z) := (\Delta_{g_h} - \frac{n^2}{4} - z^2)^{-1}$$

définies sur $\{\Im(z) < 0\}$ se prolongent dans les demi-plans complexes $\{\Im(z) < N\}$ en une famille holomorphe d'opérateurs bornés dans des espaces L^2 à poids (le poids dépend de N). On dit alors que la résolvante se prolonge holomorphiquement dans \mathbb{C} à travers le spectre essentiel, qui était représenté par la 'droite critique' $\{\Im(z) = 0\}$ pour le nouveau paramètre spectral z^2 . Une propriété remarquable du spectre essentiel est qu'une perturbation compacte de la métrique sur une variété riemannienne complète non-compacte ne change pas le spectre essentiel du laplacien riemannien. En appliquant ceci à nos deux variétés considérées au dessus, on peut montrer à l'aide du théorème de Fredholm analytique que pour une perturbation compacte g des métriques g_e et g_h , la résolvante modifiée de Δ_g se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C} avec pôles de multiplicité finie, au sens où la partie polaire du développement de Laurent en chaque pôle est constituée d'opérateurs de rang fini. Les pôles provenant de ce prolongement sont en quelque sorte les valeurs spectrales discrètes correspondant aux valeurs propres du cas compact, on les appelle *résonances*.

À l'instar des valeurs propres du laplacien sur une variété compacte, elles apparaissent dans des formules de trace et contiennent des informations géométriques et dynamiques. Il est par exemple établi que la présence de résonances, leur position et leur distribution asymptotique dans le plan complexe sont fortement liées à l'ensemble des géodésiques captées dans des compacts. Une fois le prolongement méromorphe obtenu, les premiers problèmes intéressants associés aux résonances sont de donner le comportement asymptotique de leur fonction de comptage $N(R)$ (i.e. le nombre de résonances dans un disque $D(0, R) \subset \mathbb{C}$ de rayon R) et d'étudier les résonances proches de l'axe critique, celles qui ont le plus de sens physiquement.

Si l'on ne considère ici que des résonances de nature géométrique, les notions que l'on vient d'introduire proviennent à l'origine de l'étude de l'opérateur de Schrodinger $\Delta_{g_e} + V$ pour un potentiel V borné à support compact et elles s'étendent à des perturbations compactes relativement générales de Δ_{g_e} . Pour de telles perturbations compactes, les résultats de Melrose [28], Zworski [43], Sjostrand-Zworski [38], Vodev [40] montrent en général la majoration optimale $N(R) = O(R^{n+1})$ mais il existe seulement quelques cas particuliers où une asymptotique, voire une minoration, de $N(R)$ est connu.

Il est naturel de se demander si le même type de prolongements méromorphes à travers le spectre essentiel est possible dans des cadres géométriques relativement généraux comme des perturbations non nécessairement compactes d'espaces symétriques. Les premiers exemples que l'on peut citer sont les quotients de \mathbb{H}^{n+1} par des groupes discrets d'isométries, ils ont été étudiés avec succès par Guillopé et Zworski [14, 15, 16] pour $n = 1$ puis pour $n > 1$

si le groupe d'isométries est convexe co-compact. Notons que cette étude est accompagnée d'une majoration de la fonction de comptage des résonances $N(R) = O(R^{n+2})$ (la majoration optimale $N(R) = O(R^{n+1})$ pour $n > 1$ étant due à Cuevas et Vodev [8]) ainsi que d'une minoration $N(R) \geq CR^2$ pour $n = 1$. D'un autre côté, Melrose a remarqué que dans beaucoup de cas géométriques la variété riemannienne complète non compacte (X, g) est l'intérieur d'une variété compacte à bord \bar{X} (le bord est l'infini de X) sur laquelle le laplacien Δ_g se prolonge en un opérateur à coefficients lisses mais dégénéré (non elliptique) sur le bord $\partial\bar{X}$. La nature de cette dégénérescence sur $\partial\bar{X}$ détermine les différents types de géométries près de l'infini et Mazzeo, Melrose, Mendoza [29, 24, 22, 23, 26, 27] ont développé un calcul pseudo-différentiel adapté à l'analyse de ces divers problèmes à bord.

Le cas qui nous intéresse modélise en quelque sorte des perturbations de quotients convexes co-compacts de l'espace hyperbolique réel, il s'agit de variétés complètes dont la courbure converge vers -1 à l'infini. Plus précisément, soit $\bar{X} = X \cup \partial\bar{X}$ une variété compacte lisse à bord de dimension $n + 1$ et x une fonction définissant le bord (i.e. $\partial\bar{X} = \{x = 0\}$ et $dx|_{\partial\bar{X}}$ ne s'annule pas), on dit qu'une métrique g sur X est *asymptotiquement hyperbolique* si x^2g se prolonge en une métrique lisse sur \bar{X} et si $|dx|_{x^2g} = 1$ sur $\partial\bar{X}$. Cette dernière condition assure en fait que la courbure de g converge vers -1 au bord et elle implique qu'il existe une fonction x définissant $\partial\bar{X}$, un voisinage collier du bord $U_x := [0, \epsilon) \times \partial\bar{X}$ associé à x et une famille lisse $h(x)$ de métriques sur $\partial\bar{X}$ pour $x \in [0, \epsilon)$ tels que

$$g = \frac{dx^2 + h(x)}{x^2} \tag{0.1}$$

dans le collier U_x . On peut vérifier que \mathbb{H}^{n+1} et ses quotients par des groupes convexes co-compacts sont asymptotiquement hyperboliques. Ces variétés sont l'objet de nombreuses études, en particulier celles qui vérifient asymptotiquement l'équation d'Einstein car elles jouent un rôle important en physique.

Une variété asymptotiquement hyperbolique est nécessairement complète et le spectre du laplacien Δ_g agissant sur les fonctions est constitué de spectre essentiel $\sigma_{ess}(\Delta_g) = [\frac{n^2}{4}, +\infty)$ puis d'un nombre fini de valeurs propres formant le spectre discret $\sigma_{pp}(\Delta_g) \subset (0, \frac{n^2}{4})$. Avec le nouveau paramètre spectral $\lambda(n - \lambda)$, la résolvante modifiée du laplacien

$$R(\lambda) := (\Delta_g - \lambda(n - \lambda))^{-1}$$

est donc une famille méromorphe sur $\{\Re(\lambda) > \frac{n}{2}\}$ d'opérateurs bornés sur $L^2(X, dvol_g)$, avec des pôles de multiplicité finie aux points λ_e tels que $\lambda_e(n - \lambda_e) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$.

En utilisant la théorie développée initialement par Melrose, Mazzeo et Melrose [24] sont parvenus à montrer l'existence du prolongement méromorphe avec pôles de multiplicité finie de $R(\lambda)$ dans $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$. Comme l'ont remarqué Borthwick et Perry [4], il semble a priori possible que les points $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$ soient des pôles de multiplicité infinie, voire des singularités essentielles, pour la résolvante prolongée. Cependant, Guillopé et Zworski [15] ont montré que $R(\lambda)$ se prolonge sur \mathbb{C} tout entier si la courbure de la variété est constante hors d'un compact et les exemples connus laissent penser que ces points $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$ ne sont pas plus singuliers que des pôles de multiplicité finie. La clé utilisée par Guillopé et Zworski pour les analyser n'est pas tant l'hypothèse de courbure mais plutôt la structure spéciale d'une telle variété près de l'infini, à savoir qu'il existe une fonction x définissant le bord de \bar{X} telle que la métrique x^2g reste lisse en la variable $\rho := x^2$ pour $\rho \in [0, \epsilon^2)$ (i.e. x^2g est 'paire en x '). Ceci nous conduit à définir la notion de *métrique paire* comme étant une métrique asymptotiquement hyperbolique telle que la famille $h(x)$ de (0.1) ait un développement de

Taylor en $x = 0$ qui ne contient que des puissances paires de x (on remarquera que cette définition ne dépend en fait pas du choix de x).

On montrera alors dans un premier temps (Théorème 2.5) que sous cette hypothèse de parité, la résolvante $R(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement avec pôles de multiplicité finie à \mathbb{C} tout entier, ceci en combinant les constructions de Mazzeo-Melrose [24] et de Guillopé-Zworski [15]. Notons que cette étude nous permet de donner une majoration polynômiale en R du nombre de résonances dans des bandes (Théorème 2.7)

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) > \frac{n}{2} - N, |\Im(\lambda)| \leq R\}$$

mais le degré du polynôme dépend de N et le résultat n'est par conséquent vraisemblablement pas optimal. A notre connaissance, aucune majoration des fonctions de comptage des résonances n'a cependant été démontrée sur une variété asymptotiquement hyperbolique quelconque.

Dans une seconde partie on peut se demander si ces hypothèses de parité sont nécessaires à l'existence d'un prolongement méromorphe de $R(\lambda)$ à \mathbb{C} . En réalité, ces problèmes de prolongements sont essentiellement équivalents à des problèmes de diffusion dont l'étude dans ce cadre général est d'abord due à Joshi et Sá Barreto [19] puis à Graham et Zworski [12], en rappelant que Perry [31, 32], Guillopé-Zworski [16], Mandouvalos [20] avaient déjà largement traité la diffusion sur les quotients hyperboliques. Le principe est de trouver, pour $f \in C^\infty(\partial\bar{X})$ fixée et $\Re(\lambda) = \frac{n}{2}$ (avec $\lambda \neq \frac{n}{2}$), une solution

$$F(\lambda) = x^{n-\lambda}F_1(\lambda) + x^\lambda F_2(\lambda), \quad F_i(\lambda) \in C^\infty(\bar{X}), \quad i = 1, 2$$

de $(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))F(\lambda) = 0$ telle que $F_1(\lambda)|_{\partial\bar{X}} = f$. On appellera alors $S(\lambda) : f \rightarrow F_2(\lambda)|_{\partial\bar{X}}$ l'opérateur de diffusion agissant sur $C^\infty(\partial\bar{X})$. Joshi et Sá Barreto [19] montrent que son noyau de Schwartz peut être exprimé à partir du noyau de Schwartz de $R(\lambda)$, impliquant donc un prolongement méromorphe au sens faible de l'opérateur $S(\lambda)$ à $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$. Par ailleurs, on vérifie que les propriétés de méromorphie de $R(\lambda)$ aux points $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$ sont retrouvées à partir de celles de $S(\lambda)$. Les résultats de [19] et [12] montrent que l'opérateur de diffusion pour cette géométrie est de nature différente de celui associé à la géométrie euclidienne puisque $S(\lambda)$ est ici une famille méromorphe d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $2\lambda - n$ qui possède toujours des pôles d'ordre 1 et de multiplicité infinie en $\lambda \in \frac{n}{2} + \mathbb{N}$ et dans certains cas en $\lambda \in \frac{n-1}{2} + \mathbb{N}$. Ces pôles qui apparaissent dans la partie physique $\{\Re(\lambda) > \frac{n}{2}\}$ sont en fait l'objet principal de l'article récent de Graham-Zworski [12] qui donne une présentation simple et explicite des opérateurs de Poisson et de diffusion tout en permettant de calculer les résidus de $S(\lambda)$ sur $\frac{1}{2}(n + \mathbb{N})$. Modulo le spectre discret, ce sont des opérateurs différentiels sur $\partial\bar{X}$ dont certains ont une signification particulière si la variété (X, g) est asymptotiquement Einstein puisqu'ils apparaissent essentiellement comme les puissances conformes du laplacien sur $(\partial\bar{X}, h_0)$ avec $h_0 := h(0)$ suivant (0.1). Quitte à factoriser par un opérateur pseudo-différentiel inversible convenable, $S(\lambda)$ devient une famille holomorphe d'opérateurs Fredholm d'indice nul pour $\Re(\lambda) \geq \frac{n}{2}$ et $\lambda \notin \frac{1}{2}(n + \mathbb{N})$ (modulo le spectre discret), l'équation fonctionnelle $S(n - \lambda) = S(\lambda)^{-1}$ et la théorie Fredholm nous permettent donc de retrouver le prolongement méromorphe de $S(\lambda)$ dans $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$ (cette méthode était utilisée par Perry [31, 32] et Patterson-Perry [30]). Etudier la méromorphie de $S(\lambda)$ et $R(\lambda)$ en $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$ revient finalement à analyser $S(\lambda)^{-1}$ près de $\frac{1}{2}(n + \mathbb{N})$ et cette analyse découle essentiellement du calcul des résidus de $S(\lambda)$ en $\frac{1}{2}(n + \mathbb{N})$ de [12] et de quelques lemmes d'analyse complexe dans des espaces de Banach. On obtient ainsi notre résultat principal

Théorème 1.

1. La résolvante modifiée $(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))^{-1}$ du laplacien sur une variété asymptotiquement hyperbolique (X, g) se prolonge méromorphiquement avec pôles de multiplicité finie de $\{\Re(\lambda) > \frac{n}{2}\}$ à $\mathbb{C} \setminus (\frac{n+1}{2} - \mathbb{N})$.
2. La résolvante modifiée $(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))^{-1}$ du laplacien sur une variété asymptotiquement hyperbolique (X, g) se prolonge méromorphiquement avec pôles de multiplicité finie de $\{\Re(\lambda) > \frac{n}{2}\}$ à \mathbb{C} si et seulement si g est une métrique paire.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $k \neq \frac{n+1}{2}$ il existe une variété asymptotiquement hyperbolique (X, g) de dimension $n + 1$ telle que le point $\frac{n+1}{2} - k$ soit limite d'une suite de résonances, ce point est donc une singularité essentielle de la résolvante prolongée.
4. Soit \bar{X} une variété lisse à bord de dimension $n + 1 > 2$ et x une fonction définissant son bord. Il existe alors un ouvert dense de métriques asymptotiquement hyperboliques g sur X pour lesquelles le prolongement de $(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))^{-1}$ a une singularité essentielle dans \mathbb{C} , l'ensemble des métriques asymptotiquement hyperboliques sur X étant muni de la topologie induite par $x^{-2}C^\infty(\bar{X}, T^*\bar{X} \otimes T^*\bar{X})$.

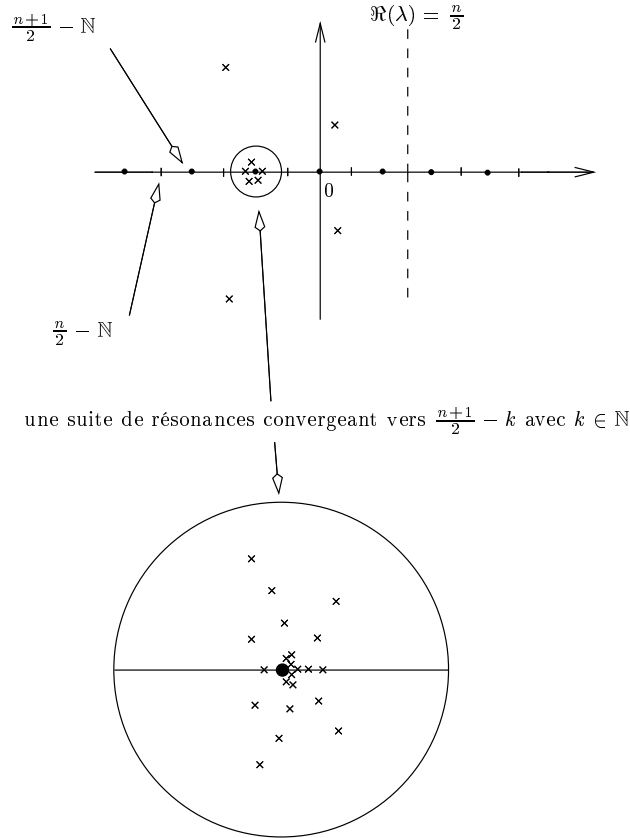


Figure 1: Les résonances de Δ_g dans un cas où g n'est pas paire

Ce théorème résume les résultats principaux des Propositions 3.5, 3.10 et du Théorème 3.9, on se rapportera à ceux-ci pour des énoncés plus précis.

L'apparition de singularités essentielles de la résolvente dans le feuillet non-physique $\{\Re(\lambda) < \frac{n}{2}\}$ est un phénomène relativement inattendu et semble être, à notre connaissance, le premier exemple de telles situations. On peut cependant le comparer au cas d'un opérateur ayant un point isolé dans le spectre essentiel et qui est limite d'une suite de valeurs propres de multiplicité finie, comme par exemple les niveaux de Landau de l'opérateur à champs magnétique constant perturbé par certains potentiels en dimension paire [34]. Sachant que les résonances pour notre problème peuvent être définies comme les valeurs propres d'opérateurs non auto-adjoints (d'après le travail d'Agmon [1]) on peut imaginer que les singularités essentielles de la résolvente prolongée soient des points isolés dans le spectre essentiel d'opérateurs non auto-adjoints.

Le caractère nécessaire et suffisant de la condition de parité de g pour l'existence du prolongement méromorphe de $R(\lambda)$ avec pôles de multiplicité finie montre bien l'instabilité de tels prolongements à des perturbations non-compactes et il serait intéressant d'observer ce qui se passe pour des perturbations singulières de la métrique (en ajoutant par exemple des termes en x^α ou $\log(x)^j$ dans la métrique).

Dans une troisième partie on donne une formule reliant la multiplicité des résonances à la multiplicité des pôles de l'opérateur de diffusion $S(\lambda)$. On pose d'abord l'opérateur de diffusion 'normalisé' introduit initialement par Perry [32]

$$\tilde{S}(\lambda) := 2^{2\lambda-n} \frac{\Gamma(\lambda - \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} - \lambda)} (1 + \Delta_{h_0})^{-\lambda + \frac{n}{2}} S(\lambda) (1 + \Delta_{h_0})^{-\lambda + \frac{n}{2}}$$

puis on définit la multiplicité d'une résonance puis d'un pôle de $\tilde{S}(\lambda)$ par

$$m(\lambda_0) := \text{rang}\left(\text{Res}_{\lambda_0}((n - 2\lambda)R(\lambda))\right), \quad \nu(\lambda_0) := -\text{Tr}\left(\text{Res}_{\lambda_0}(\tilde{S}^{-1}(\lambda)\tilde{S}'(\lambda))\right)$$

où Res_{λ_0} désigne le résidu au point λ_0 . En utilisant notre étude précédente ainsi que des résultats de Guillopé-Zworski [16] et de Gohberg-Sigal [10], on montre alors le

Théorème 2. *Soit (X, g) une variété asymptotiquement hyperbolique, alors $\lambda_0 \in \{\Re(\lambda) \leq \frac{n}{2}\}$ est une résonance si et seulement si c'est un pôle de $S(\lambda)$ et on a*

$$m(\lambda_0) = m(n - \lambda_0) + \nu(\lambda_0) - \mathbb{1}_{\frac{n}{2} - \mathbb{N}}(\lambda_0) \dim \ker \text{Res}_{n - \lambda_0} S(\lambda)$$

si $\lambda_0 \notin \frac{n}{2} - \mathbb{N}$ ou $\lambda_0(n - \lambda_0) \notin \sigma_{pp}(\Delta_g)$, $\mathbb{1}_{\frac{n}{2} - \mathbb{N}}(\cdot)$ étant la fonction caractéristique de l'ensemble $\frac{n}{2} - \mathbb{N} \subset \mathbb{C}$.

Cette formule étend un résultat de Borthwick et Perry [4] aux points $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$ et répond à une question posée par Patterson-Perry [30]. Notons que ce résultat devient intéressant si (X, g) est asymptotiquement Einstein car l'opérateur $\text{Res}_{\frac{n}{2}+k} S(\lambda)$ est essentiellement le k -ième laplacien conforme sur $(\partial\bar{X}, h_0)$ d'après [12]. En particulier le calcul récent du diviseur en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ de la fonction Zeta sur un quotient convexe co-compact par Patterson-Perry [30] et Bunke-Olbrich [5] fait apparaître (modulo le spectre discret) le terme $\nu(\lambda_0)$ qui est appelé 'terme spectral' et un 'terme topologique' si $\lambda_0 \in -\mathbb{N}_0$ qui est un multiple de la caractéristique d'Euler de \bar{X} . Si $\lambda_0 \in \frac{n}{2} - \mathbb{N}$ le terme spectral peut donc être non nul bien que $S(\lambda)$ et $R(\lambda)$ soient holomorphes en λ_0 (c'est le cas de \mathbb{H}^{2n+1}), ceci en raison des facteurs Gamma que contient $\tilde{S}(\lambda)$. On observe alors que le terme spectral du diviseur en un point $\frac{n}{2} - k$ se décompose en fait en un véritable terme spectral, à savoir la multiplicité $m(\lambda_0)$, plus

un ‘terme conforme’ qui correspond à la dimension du noyau du k -ième laplacien conforme sur $(\partial\bar{X}, h_0)$. Perry [33] déduit de cette étude des diviseurs une formule de type Poisson permettant de donner une minoration de la fonction de comptage des pôles de $\tilde{S}(\lambda)$ sur les quotients convexes co-compacts. Une majoration des dimensions des noyaux des laplaciens invariants conformes sur le bord de tels quotients apporterait par conséquent une véritable minoration du nombre de résonances dans ces cadres typiquement géométriques.

Pour finir on s’attachera à montrer que pour une variété asymptotiquement hyperbolique il n’y a pas résonance dans un voisinage exponentiel de la droite critique $\{\Re(\lambda) = \frac{n}{2}\}$. Ces problèmes initialement étudiés par Burq [3] pour la géométrie euclidienne ont été récemment complétés de manière significative par Cardoso-Vodev et Vodev [7, 41, 42] y compris pour le cas des quotients de \mathbb{H}^2 . On utilisera une de leurs estimées sur la norme de la résolvante sur l’axe critique pour obtenir le

Théorème 3. *Soit (X, g) une variété asymptotiquement hyperbolique, il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que $(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))^{-1}$ se prolonge de $\{\lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) > \frac{n}{2}, |\Im(\lambda)| > C_1\}$ à*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; |\Im(\lambda)| > C_1, \Re(\lambda) > \frac{n}{2} - C_2 e^{-C_2 |\lambda|}\}$$

en une famille holomorphe d’opérateurs bornés dans des espaces L^2 à poids.

Ce résultat est optimal dans le cas général puisque la construction de quasimodes exponentiellement proches de l’axe critique est possible s’il existe une trajectoire périodique elliptique. Le cas particulier des métriques non-captives à courbure constante hors d’un compact sera aussi étudié, on montrera l’existence d’une bande près de la droite critique contenant au plus un nombre fini de résonances.

On peut donc résumer l’organisation de la thèse de la manière suivante : dans la première section on introduit les définitions et rappels de base pour cette géométrie, puis on reprend dans la deuxième section une partie de la construction du prolongement méromorphe de la résolvante suivant Mazzeo-Melrose [24] dans le cas d’une métrique paire, tout en contrôlant les normes des restes pour donner une majoration du nombre de résonances dans des bandes ; on montre le Théorème 1 dans la troisième section après avoir résumé les résultats de Joshi-Sá Barreto et Graham-Zworski qui nous intéressent et on profitera des calculs effectués pour montrer un résultat de diffusion inverse concernant les points $\frac{1}{2}(n + \mathbb{N})$. Pour finir on donnera les démonstrations des Théorèmes 2 et 3 dans les deux sections suivantes et une annexe contient quelques résultats d’analyse complexe dans les espaces de Banach ainsi que des estimées de normes de la résolvante du laplacien sur \mathbb{H}^{n+1} qui nous sont utiles pour les sections 2 et 5.

Pour conclure, on peut espérer étendre à ces variétés différents résultats connus sur les quotients convexes co-compacts, le premier étant une majoration optimale de la fonction de comptage des résonances si la métrique est paire. Il est clair que cette question pose de multiples problèmes, que ce soit pour utiliser la distorsion analytique dans le cas d’une métrique analytique ou dans le choix de modèles satisfaisants pour appliquer des théories de perturbations. Notons enfin que Sjostrand [37] (dans des cadres semi-classiques) puis Zworski [44] et Guilloupé-Lin-Zworski [17] (sur des quotients convexes co-compacts de \mathbb{H}^{n+1}) donnent des bornes géométriques du nombre de résonances près de l’axe critique (dans des voisinages sous-coniques ou dans des bandes), ces bornes font apparaître la dimension de Hausdorff de l’ensemble des géodésiques captées. C’est probablement le type de résultats optimaux qui peuvent être obtenus sur une variété asymptotiquement hyperbolique.

Notations Par convention, nous noterons souvent C les constantes strictement positives qui ne dépendent pas des paramètres que l'on fait varier, puis $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ et $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pour $N \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\mathcal{O}_N := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) > \frac{n}{2} - N \right\}$$

$$Z_{\pm}^k := \frac{n}{2} \pm \left(\frac{k}{2} + \mathbb{N}_0 \right) \subset \mathbb{C}, \quad k = 1, 2$$

$$B_{n+1} := \{m \in \mathbb{R}^{n+1}; |m| < 1\}$$

Soit $(\mathcal{H}_i)_{i=0,1,2}$ des espaces de Hilbert et $(\mathcal{B}_i)_{i=0,1,2}$ des espaces de Banach. On note $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ (ou $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1)$ si $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$) l'espace des opérateurs linéaires continus de \mathcal{B}_1 dans \mathcal{B}_2 , puis pour $p \geq 1$, $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ (ou $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_1)$ si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$) désigne la classe de Schatten d'indice p , avec sa norme associée $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_p}$. On utilisera aussi la notation usuelle

$$\langle Z \rangle := (1 + |Z|^2)^{\frac{1}{2}}$$

pour $Z \in \mathbb{R}^n$ ou $Z \in \mathbb{C}$, puis \simeq désignera en général difféomorphe alors que \cong désignera isométrique.

Enfin, les notations et définitions concernant les applications méromorphes à valeurs dans des espaces de Banach sont données dans l'Annexe A.

1 Quelques rappels et cadre de travail

1.1 Introduction

Soit $\bar{X} = X \cup \partial\bar{X}$ une variété lisse compacte à bord de dimension $n + 1$ et x_0 une fonction lisse définissant son bord $\partial\bar{X}$, c'est-à-dire

$$x_0 \geq 0, \quad \partial\bar{X} = \{m \in \bar{X}, x_0(m) = 0\}, \quad dx_0|_{\partial\bar{X}} \neq 0$$

On dit qu'une métrique g lisse sur l'intérieur X est *conformément compacte* si

$$H_0 := x_0^2 g \tag{1.1}$$

se prolonge sur \bar{X} en une métrique lisse. On appellera aussi (X, g) (ou X quand il n'y a pas de confusion possible sur g) une variété conformément compacte. La classe conforme (notée $[H_0|_{T\partial\bar{X}}]$) de la métrique $H_0|_{T\partial\bar{X}}$ sur $\partial\bar{X}$ ne dépend donc pas du choix de la fonction x_0 , on l'appelle *l'infini conforme* de g . On peut observer que $(|dx_0|_{H_0})|_{\partial\bar{X}}$ est lui aussi indépendant du choix de x_0 et Mazzeo-Melrose [24] remarquent que les courbures sectionnelles de g en $m \in X$ tendent vers $-|dx_0|_{H_0}^2(y)$ si $y \in \partial\bar{X}$ et $m \rightarrow y$. Ceci nous amène à définir les *variétés asymptotiquement hyperboliques* comme les variétés conformément compactes vérifiant $(|dx_0|_{H_0})|_{\partial\bar{X}} = 1$. Ces métriques sont complètes et forment un cadre raisonnable pour espérer généraliser des résultats de théorie spectrale valables sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^{n+1} . Elles contiennent d'autre part l'ensemble des quotients convexes co-compacts de \mathbb{H}^{n+1} ainsi que leurs perturbations sur des compacts, mais le cas des 'cusps' n'entre pas dans cette étude.

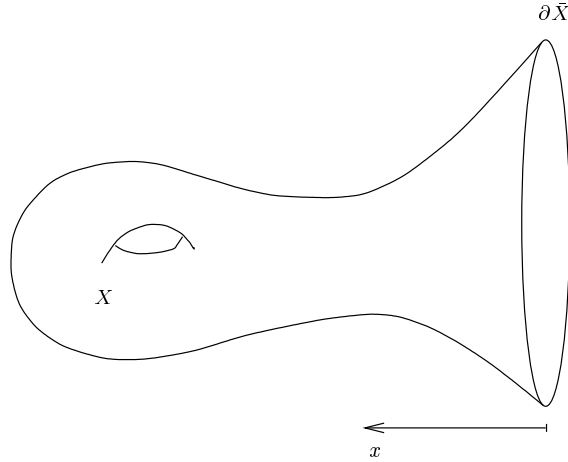


Figure 2: Variété conformément compacte

Si X est asymptotiquement hyperbolique, il est montré dans [11] ou [19] qu'il existe pour chaque métrique $h_0 \in [H_0|_{T\partial\bar{X}}]$, une unique fonction x définissant le bord de \bar{X} telle que $|dx|_{x^2 g} = 1$ dans un voisinage V_x de $\partial\bar{X}$ et $H_0|_{T\partial\bar{X}} = h_0$. Il existe donc un collier $U_x := [0, \epsilon_x) \times \partial\bar{X}$ tel qu'on ait le difféomorphisme

$$\phi : \begin{cases} U_x & \rightarrow \phi(U_x) \subset V_x \\ (t, y) & \rightarrow \phi_t(y) \end{cases} \tag{1.2}$$

avec ϕ_t le flot du gradient $\text{grad}_{x^2g}(x)$. La métrique g s'écrit dans ce collier sous la forme

$$\phi^*g = \frac{dt^2 + h(t, y, dy)}{t^2}, \quad h(0, y, dy) = h_0(y, dy), \quad h \in C^\infty(U_x, S^2(T^*U_x)) \quad (1.3)$$

avec $S^2(T^*U_x) \subset T^*U_x \otimes T^*U_x$ le fibré des 2-tenseurs symétriques. On dit que (1.3) est une *forme modèle* de la métrique et on écrira g et x à la place de ϕ^*g et t . On définit aussi l'ensemble des fonctions définissant le bord qui induisent une forme modèle pour la métrique

$$Z_g(\partial\bar{X}) := \{x \in C^\infty(\bar{X}); x \geq 0, \partial\bar{X} = x^{-1}(0), \exists \epsilon_x > 0, \forall m \in x^{-1}([0, \epsilon_x]), |dx|_{x^2g}(m) = 1\}$$

et Graham [11] a donc construit une bijection

$$[H|_{T\partial\bar{X}}] \longleftrightarrow Z_g(\partial\bar{X})$$

Le tenseur symétrique $h(t, y, dy)$ de (1.3) définit une famille de métriques $h(t)$ sur les hypersurfaces $\{x = t\}$, et cette famille dépend du choix de $x \in Z_g(\partial\bar{X})$.

Par exemple l'espace hyperbolique \mathbb{H}^{n+1} défini par

$$\mathbb{H}^{n+1} := \left(B_{n+1}; g_h = \frac{4|dm|^2}{(1-|m|^2)^2} \right)$$

s'écrit sous forme modèle en posant $x := 2\frac{1-|m|}{1+|m|}$

$$\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \left((0, 2) \times S^n; \frac{dx^2 + h(x)}{x^2} \right), \quad h(x) := \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 g_{S^n} \quad (1.4)$$

g_{S^n} étant la métrique canonique (de courbure 1) sur la sphère S^n de dimension n . En coordonnées polaires sur \mathbb{H}^{n+1} , on vérifie que $x = 2e^{-t}$ où $t(m) = d_{\mathbb{H}^{n+1}}(m, e)$ est la distance hyperbolique du point m au centre e de \mathbb{H}^{n+1} ($e = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$ dans ce modèle).

1.2 Parité de la métrique

On peut vérifier sans peine qu'à $k \in \mathbb{N}$ fixé, la condition

$$h(x) - h(0) = O(x^k)$$

est invariante par changement de fonction $x \in Z_g(\partial\bar{X})$. Pour traiter le problème qui nous intéresse, on choisira la condition un peu moins forte de parité modulo $O(x^{2k+1})$ au sens où il existe, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, une fonction $x \in Z_g(\partial\bar{X})$ telle que la métrique x^2g s'écrive sous la forme

$$x^2g = dx^2 + l(x^2, y, dy) + O(x^{2k+1}), \quad l \in C^\infty(U_x, S^2(T^*U_x)) \quad (1.5)$$

dans le collier U_x associé à x par (1.2) :

Définition 1.1. *Soit (X, g) une variété asymptotiquement hyperbolique et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit que g paire modulo $O(x^{2k+1})$ si il existe $\epsilon > 0$, une fonction x définissant le bord et des tenseurs symétriques $(h_{2i})_{i=0, \dots, k} \in C^\infty(\partial\bar{X}, S^2(T^*\partial\bar{X}))$ tels que*

$$\phi^*(x^2g) = dt^2 + \sum_{i=0}^k h_{2i} t^{2i} + O(t^{2k+1})$$

où ϕ est le difféomorphisme induit par le flot ϕ_t du gradient $\text{grad}_{x^2g}(x)$:

$$\phi : \begin{cases} [0, \epsilon) \times \partial\bar{X} & \rightarrow \phi([0, \epsilon) \times \partial\bar{X}) \\ (t, y) & \rightarrow \phi_t(y) \end{cases}$$

On démontre alors que cette condition ne dépend pas du choix de la fonction $x \in Z_g(\partial\bar{X})$.

Lemme 1.2. *Soit (X, g) une variété asymptotiquement hyperbolique. Supposons qu'il existe une fonction $x \in Z_g(\partial\bar{X})$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que la métrique x^2g s'écrive*

$$x^2g = dx^2 + l(x^2, y, dy) + O(x^{2k+1}), \quad l \in C^\infty(U_x, S^2(T^*U_x)), \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.6)$$

dans le collier $U = [0, \epsilon_x) \times \partial\bar{X}$ associé à x par (1.2). Alors pour toute fonction $t \in Z_g(\partial\bar{X})$, la métrique t^2g s'écrit sous la forme

$$t^2g = dt^2 + p(t^2, z, dz) + O(t^{2k+1}), \quad p \in C^\infty(U_t, S^2(T^*U_t))$$

dans le collier $U_t = [0, \epsilon_t) \times \partial\bar{X}$ associé à t par (1.2).

Preuve : reprenons d'abord les calculs de Graham [11, Lem. 2.1 et 2.2]. Soit $x \in Z_g(\partial\bar{X})$ telle qu'on ait (1.6) et $t \in Z_g(\partial\bar{X})$. On écrit

$$t = e^\omega x, \quad \omega \in C^\infty(U_x)$$

et d'après [11], ω vérifie l'équation non linéaire

$$2\partial_x\omega + x\left((\partial_x\omega)^2 + \sum_{ij} h^{ij}(x)\partial_{y_i}\omega\partial_{y_j}\omega\right) = 0 \quad (1.7)$$

On obtient immédiatement $\partial_x\omega|_{x=0} = 0$ et par récurrence, on montre en dérivant (1.7) par rapport à x un nombre pair de fois que $\partial_x^{2j+1}\omega|_{x=0} = 0$ pour $j \leq k$ (cf. [11] pour les détails). Rappelons maintenant que le collier associé à t est construit par le difféomorphisme

$$\phi : \begin{cases} U_t = [0, \epsilon_t) \times \partial\bar{X} & \rightarrow \phi(U_t) \\ (t, z) & \rightarrow \phi'_t(z) \end{cases}$$

avec $\phi'_t(z)$ le flot de $\text{grad}_{t^2g}t$. Notons

$$x(t, z) := x(\phi'_t(z)), \quad y(t, z) := y(\phi'_t(z))$$

et montrons par récurrence que pour tout $m \leq 2k+2$

$$\begin{aligned} \partial_t^{2j}x(t, z)|_{t=0} &= 0 \quad \forall j, 0 \leq 2j \leq m \\ \partial_t^{2j+1}y(t, z)|_{t=0} &= 0 \quad \forall j, 0 \leq 2j+1 \leq m \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dans un premier temps on note que

$$\begin{aligned} \text{grad}_{t^2g}t &= t^{-2}\text{grad}_g t = e^{-\omega}\text{grad}_{x^2g}x + e^{-\omega}x\text{grad}_{x^2g}\omega \\ &= (e^{-\omega} + te^{-2\omega}\partial_x\omega)\partial_x + e^{-2\omega}t \sum_{i,j} h^{ij}(x)\partial_{y_i}\omega\partial_{y_j} \end{aligned}$$

et $x(t, z)$, $y(t, z)$ sont définis par les équations du flot

$$\partial_t x(t, z) = e^{-\omega(x(t,z), y(t,z))} + te^{-2\omega(x(t,z), y(t,z))}\partial_x\omega(x(t, z), y(t, z)) \quad (1.9)$$

$$\partial_t y_j(t, z) = e^{-2\omega(x(t,z), y(t,z))}t \sum_{i=1}^n h^{ij}(x(t, z), y(t, z))\partial_{y_i}\omega(x(t, z), y(t, z)) \quad (1.10)$$

Pour montrer (1.8), on la vérifie au rang $m = 1$

$$x(0, z) = 0, \quad \partial_t y_j(0, z) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

puis on suppose qu'elle est vraie au rang m .

Si $m + 1$ est pair et inférieur ou égal à $2k + 2$, on a d'après (1.9)

$$\partial_t^{m+1}x(0, z) = \partial_t^m e^{-\omega}|_{t=0} + m\partial_t^{m-1}(e^{-2\omega}\partial_x\omega)|_{t=0}$$

Remarquons que si $f(x, y)$ est une fonction paire (resp. impaire) en x modulo $O(x^{2l+1})$ (resp. modulo $O(x^{2l})$), sa composée avec

$$(t, z) \rightarrow (x(t, z), y(t, z))$$

est paire (resp. impaire) en t modulo $O(t^{\min(2l+1, m+2)})$ (resp. modulo $O(t^{\min(2l, m+1)})$). On en déduit que

$$\partial_t^m e^{-\omega}|_{t=0} = 0$$

puisque m est impair et $e^{-\omega}$ est paire modulo $O(x^{2k+3})$. De plus, $m - 1$ est pair et les dérivées $\partial_t^{m-1}(e^{-2\omega}\partial_x\omega)|_{t=0}$ se séparent en une somme de produits de dérivées de $e^{-2\omega}$ et de $\partial_x\omega$. Si le nombre de dérivées à effectuer pour l'un des termes du produit est impair, le nombre de dérivées pour l'autre l'est aussi et l'argument précédent prouve que le produit s'annule puisque $e^{2\omega}$ est paire modulo $O(x^{2k+3})$. Si le nombre de dérivées pour l'un des termes est pair, l'autre l'est aussi et le produit s'annule puisque $\partial_x\omega$ est impaire modulo $O(x^{2k+2})$. On a donc

$$\partial_t^{m+1}x(0, z) = 0$$

Si $m + 1$ est impair et inférieur ou égal à $2k + 1$, on applique le même raisonnement sur l'équation (1.10) et on a à dériver un nombre impair ($= m - 1$) de fois un produit de fonctions paires en t modulo $O(t^{\min(2k+1, m+1)})$, ce qui prouve l'annulation

$$\partial_t^{m+1}y_i(0, z) = 0$$

et (1.8) est vrai jusqu'au rang $2k + 2$.

Il reste à vérifier que pour tout $\xi \in T_z\partial\bar{X}$

$$t^2g(\xi, \xi) = e^{2\omega}((\partial_zx.dz(\xi))^2 + h(x, y, \partial_zy.dz(\xi)))$$

est paire en t modulo $O(t^{2k+1})$, ce qui découle immédiatement des propriétés de parité-impairité de ω , x , y et h . \square

Interprétation géométrique Notons $[\bar{X}]^2 := (\bar{X} \sqcup \bar{X})/\partial\bar{X}$ le double de \bar{X} comme espace topologique et choisissons x une fonction qui définit le bord $\partial\bar{X}$ de \bar{X} . A partir du difféomorphisme (1.2), on peut construire un atlas C^∞ sur $[\bar{X}]^2$ en notant que $\partial\bar{X} \subset [\bar{X}]^2$ est contenu dans un ouvert $[V_x]^2 := (V_1 \sqcup V_2)/\partial\bar{X}$ (avec $V_1 = V_2 = \phi(U_x)$) difféomorphe à $(-\epsilon_x, \epsilon_x) \times \partial\bar{X}$ via

$$\begin{aligned} (-\epsilon_x, \epsilon_x) \times \partial\bar{X} &\simeq [V_x]^2 \\ (x, y) &\rightarrow \begin{cases} [\phi_{-x}(y)], & \phi_{-x}(y) \in V_1 \text{ si } x \leq 0 \\ [\phi_x(y)], & \phi_x(y) \in V_2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le reste des cartes provient de celles recouvrant l'intérieur X de \bar{X} et ne pose pas de problème. On remarque que cette structure C^∞ sur $[\bar{X}]^2$ dépend du choix de la fonction x définissant $\partial\bar{X}$. Si maintenant $[\bar{X}]_x^2$ désigne cette structure, on a le difféomorphisme global

$$[\bar{X}]_x^2 \simeq [\bar{X}]_{x'}^2$$

pour x, x' deux fonctions définissant $\partial\bar{X}$, cependant aucun choix de structure C^∞ sur l'espace topologique $[\bar{X}]^2$ n'est naturel par rapport à $C^\infty(\bar{X})$. On définit alors les fonctions paires en x modulo $O(x^{2k+1})$ sur \bar{X} comme les fonctions se prolongeant sur $[\bar{X}]^2_x$ en des fonctions C^{2k} invariantes par l'involution naturelle sur $[\bar{X}]^2$, on obtient une classe de fonctions qui dépend de la fonction x . Autrement dit, une fonction qui a un développement de Taylor en x pair modulo $O(x^{2k+1})$ n'aura pas nécessairement un développement en x' pair modulo $O(x'^{2k+1})$ où x' est une autre fonction qui définit le bord. Dans la preuve du Lemme 1.2, on voit que si la métrique vérifie (1.5) pour une fonction x , alors les changements de cartes sur $[0, \epsilon) \times \partial\bar{X}$ (où $\epsilon := \min(\epsilon_x, \epsilon_{x'})$) qui laissent la métrique sous forme modèle sont du type

$$x' = x \sum_{j=0}^{k+1} a_j(y) x^{2j} + O(x^{2k+4}), \quad y' = \sum_{j=0}^{k+1} b_j(y) x^{2j} + O(x^{2k+3})$$

et induisent donc des cartes C^{2k+2} compatibles sur $[\bar{X}]^2_x$. On obtient alors un choix naturel (par rapport à g) de structure C^{2k+2} sur $[\bar{X}]^2$, induit par les fonctions de $Z_g(\partial\bar{X})$. On note $[\bar{X}]^2_{Z_g}$ cette structure et on observe qu'elle est munie d'une classe conforme de métriques C^{2k} invariantes par l'involution de $[\bar{X}]^2$, il suffit pour cela de prolonger les métriques x^2g par symétrie pour chaque $x \in Z_g(\partial\bar{X})$.

Exemples Les variétés asymptotiquement hyperboliques à courbure constante hors d'un compact (dont font partie les quotients convexes co-compacts de \mathbb{H}^{n+1}) sont paires modulo $O(x^\infty)$, les métriques presque-produit $x^{-2}(dx^2 + h_0(y, dy)) + O(x^\infty)$ (cf. [19]) et de Schwartzschild-De sitter (cf. [35]) le sont aussi. Les métriques asymptotiquement Einstein de dimension $n+1$ (cf. [12]) sont toujours paires modulo $O(x^n)$ mais ont génériquement des termes impairs à partir de la puissance x^n .

1.3 Densités, distributions

Soit $x \in Z_g(\partial\bar{X})$ une fonction qui définit le bord $\partial\bar{X}$ de \bar{X} telle que

$$g = x^{-2}H = x^{-2}(dx^2 + h(x, y, dy))$$

soit une forme modèle de la métrique g près du bord. L'ensemble $\mathcal{V}_0(\bar{X})$ des champs de vecteurs lisses sur \bar{X} qui s'annulent au bord est aussi l'espace vectoriel des sections lisses d'un fibré noté $T_0\bar{X}$ dont une base locale est donnée par $(x\partial_x, x\partial_{y_1}, \dots, x\partial_{y_n})$ où (x, y_1, \dots, y_n) est un système de coordonnées près du bord. $\mathcal{V}_0(\bar{X})$ a une structure d'algèbre de Lie avec

$$[xX, xY] = x^2[X, Y] + xdx(X)Y - xdx(Y)X, \quad X, Y \in C^\infty(\bar{X}, T\bar{X})$$

Le fibré $T_0^*\bar{X}$ dual de $T_0\bar{X}$ a pour base locale $(x^{-1}dx, x^{-1}dy_1, \dots, x^{-1}dy_n)$. On note $\Gamma(\bar{X})$ le fibré de densité 'naturel' de \bar{X} , dont chaque fibre $(\Gamma(\bar{X}))_m$ est une droite engendrée par la densité $|dx dy|$ sur $(T^*\bar{X})_m$. Il est clair que

$$|dvol_H| := \delta |dx dy|, \quad \delta := \sqrt{\det H(x, y)}$$

est une section trivialisante de ce fibré. Ensuite, soit $\Gamma_0(\bar{X})$ le 0-fibré de densité de \bar{X} dont chaque fibre $(\Gamma_0(\bar{X}))_m$ est une droite engendrée par la densité $x^{-n-1}|dx dy|$ sur $(T_0^*\bar{X})_m$. On peut vérifier que $\Gamma_0(\bar{X}) = x^{-n-1}\Gamma(\bar{X})$ et que

$$|dvol_g| := \delta \left| \frac{dx dy}{x^{n+1}} \right|$$

est une section trivialisante de ce fibré au sens où

$$\nu \in C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0(\bar{X})) \iff \exists a \in C^\infty(\bar{X}), \nu = a|dvol_g|$$

On construit de la même façon les fibrés $\Gamma^s(\bar{X})$ et $\Gamma_0^s(\bar{X}) := x^{-s(n+1)}\Gamma^s(\bar{X})$ de s-densité ($s > 0$) sur \bar{X} . Plus, généralement, sur une variété à coins ayant N hypersurfaces frontières définies par les fonctions lisses x_1, \dots, x_N , on peut aussi construire un 0-fibré de s-densité en posant

$$\Gamma_0^s := \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{-s(n+1)} \Gamma^s$$

où Γ^s est le fibré de s-densité naturel.

On note $\dot{C}^\infty(\bar{X})$ (resp. $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X}))$) l'ensemble des fonctions (resp. sections de $\Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X})$) lisses sur \bar{X} dont le développement de Taylor en chaque point du bord $\partial\bar{X}$ s'annule à tout ordre, puis $\dot{C}^\infty(X)$ leur restriction à X . Le produit de deux $\frac{1}{2}$ -densités est une 1-densité et l'on a donc un produit hermitien

$$\langle f, g \rangle := \int_{\bar{X}} f \bar{g}, \quad f, g \in \dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X}))$$

qui complète $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X}))$ en un espace de Hilbert appelé $L^2(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X}))$. Etant donné les isomorphismes entre $\dot{C}^\infty(X)$ et $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X}))$, il est clair qu'il existe un isomorphisme isométrique

$$L^2(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X})) \cong L^2(X, dvol_g)$$

où $L^2(X, dvol_g)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure riemannienne sur X . De plus, pour deux métriques conformément compactes $g_i = x^{-2}H_i$ ($i = 1, 2$) sur X , l'identité $L^2(X, dvol_{g_1}) \rightarrow L^2(X, dvol_{g_2})$ est continue car H_1 et H_2 sont quasi-isométriques.

Le dual topologique de $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X}))$ est appelé l'ensemble des distributions demi-densité prolongeables, noté $C^{-\infty}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X}))$. Pour $a \in \mathbb{C}$, l'inclusion de $x^a C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X}))$ dans $C^{-\infty}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X}))$ est donnée naturellement par le produit

$$(f, g) := \int_{\bar{X}} f g, \quad f \in C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X})), \quad g \in \dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X})) \quad (1.11)$$

De même pour une variété lisse à coins M , on notera $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(M))$ l'ensemble des fonctions qui s'annulent à tout ordre sur toutes les hypersurfaces frontières de M , et $C^{-\infty}(M, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(M))$ son dual. Par la suite on écrira pour simplifier (quand il n'y a pas de confusion possible) $\Gamma_0^{\frac{1}{2}}$ et $\Gamma^{\frac{1}{2}}$ à la place de $\Gamma_0^{\frac{1}{2}}(M)$ et $\Gamma^{\frac{1}{2}}(M)$ si M est une variété lisse à coins.

1.4 Théorie spectrale du laplacien

On note $\text{Diff}_0^k(X)$ l'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre k à coefficients $C^\infty(\bar{X})$ en les $x\partial_{y_i}, x\partial_x$ ($i = 1, \dots, n$)

$$\text{Diff}_0^k(\bar{X}) := \text{Vect } \mathcal{V}_0(\bar{X})^i, \quad \mathcal{V}_0(\bar{X})^0 = C^\infty(\bar{X})$$

L'une des propriétés dont on se servira souvent est que pour tout $D \in \text{Diff}_0^k(\bar{X})$ et $a \in \mathbb{C}$ on a

$$x^{-a} D x^a \in \text{Diff}_0^k(\bar{X}) \quad (1.12)$$

ce qui découle facilement de l'écriture locale

$$x \partial_x x^a = x^{a+1} \partial_x + a x^a, \quad x \partial_{y_i} x^a = x^{a+1} \partial_{y_i}$$

Un calcul en coordonnées locales montre par exemple que le laplacien associé à g vérifie

$$\Delta_g \in \text{Diff}_0^2(\bar{X})$$

Il est symétrique sur $\dot{C}^\infty(X)$ admettant l'extension auto-adjointe de Friedrichs sur $L^2(X, dvol_g)$, mais on peut aussi le voir comme un opérateur sur $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ par l'action naturelle de $\text{Diff}_0^*(\bar{X})$ sur $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$

$$P(\nu) := P\left(\nu |dvol_g|^{-\frac{1}{2}}\right) |dvol_g|^{\frac{1}{2}} \quad (1.13)$$

Soit ∇^g la connexion de Levi-Civita associée à g sur X et ∇^H celle associée à H sur \bar{X} , puis grad_g et grad_H les gradients associés à g et H . Un petit calcul montre que

$$\nabla_W^H Y = \nabla_W^g Y + x^{-1} dx(Y)W + x^{-1} dx(W)Y - x^{-1} H(W, Y) \text{grad}_H(x)$$

ce qui prouve que pour $W, Y \in \mathcal{V}_0(\bar{X})$, $\nabla_W Y \in \mathcal{V}_0(\bar{X})$. On peut alors définir, comme dans le cas des variétés compactes, les espaces de Sobolev entiers de la manière suivante

$$\mathcal{H}^k := \mathcal{H}^k(X) := \{f \in L^2(X, dvol_g); \sum_{j=0}^k |(\nabla^g)^j f|_g \in L^2(X, dvol_g)\}$$

où le membre de droite doit être compris comme le complété de $\dot{C}^\infty(X)$ dans $L^2(X, dvol_g)$ pour la norme

$$\|f\|_{\mathcal{H}^k} = \left(\sum_{j=0}^k \int_X |(\nabla^g)^j f|_g^2 dvol_g \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui le munit donc d'une structure d'espace Hilbertien. Pour $k < 0$ entier, on posera \mathcal{H}^k le dual de \mathcal{H}^{-k} . Là encore on peut définir les espaces de Sobolev à demi-densité $\mathcal{H}^k(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ puisque ∇^g agit aussi naturellement sur les demi-densités, et on a un isomorphisme isométrique

$$\mathcal{H}^k \cong \mathcal{H}^k(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

On remarque aussi que pour $f \in \dot{C}^\infty(X)$

$$|\nabla^g f|_g = |df|_g = x |df|_H \quad (1.14)$$

donc pour tout $v \in \mathcal{V}_0(\bar{X})$

$$\|vf\|_{\mathcal{H}^0}^2 \leq \int_X |df|_g^2 |v|_g^2 dvol_g \leq \int_X |\nabla^g f|_g^2 |x^{-1}v|_H^2 dvol_g \leq C_v \|f\|_{\mathcal{H}^1}^2$$

ce qui prouve que $v \in \text{Diff}_0^1(\bar{X})$ est un opérateur borné de \mathcal{H}^1 dans \mathcal{H}^0 . De plus, (1.14) montre qu'il existe une famille finie $(v_i)_i$ d'éléments de $\text{Diff}_0^1(\bar{X})$ telle que

$$|\nabla^g f|_g \leq \sum_i |v_i f|_H$$

Le produit (1.11) permet de définir, via l'intégration par partie, la transposée tD d'un opérateur $D \in \text{Diff}_0^*(\bar{X})$

$$(Df, g) = (f, {}^tDg), \quad f, g \in \dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

qui implique un prolongement naturel de l'action de $\text{Diff}_0^*(\bar{X})$ à $C^{-\infty}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$. Dans ce cas, la discussion précédente montre que pour $k = 0, 1$

$$\mathcal{H}^k(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) = \{f \in C^{-\infty}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}); \forall D \in \text{Diff}_0^k(\bar{X}), Df \in \mathcal{H}^0(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})\}$$

et on peut vérifier que ça reste vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ en montrant que $D \in \text{Diff}_0^1(\bar{X})$ est continu de \mathcal{H}^k dans \mathcal{H}^{k-1} si $k \in \mathbb{N}$, on a donc

$$D : \mathcal{H}^p \rightarrow \mathcal{H}^{p-k} \quad (1.15)$$

si $D \in \text{Diff}_0^k(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ pour $k, p \in \mathbb{N}$. D'autre part le domaine de $(1 + \Delta_g)^{\frac{1}{2}}$ est $\mathcal{D}((1 + \Delta_g)^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{H}^1$ et Δ_g est continu de \mathcal{H}^1 dans \mathcal{H}^{-1} . Comme pour le cas d'une variété compacte, il existe des estimations a priori pour $k \in \mathbb{N}_0$

$$\|f\|_{\mathcal{H}^{k+1}}^2 \leq C \|\Delta_g f\|_{\mathcal{H}^{k-1}}^2 + C \|f\|_{\mathcal{H}^k}^2$$

qui montrent alors que le domaine de $(1 + \Delta_g)^{\frac{k}{2}}$ est \mathcal{H}^k .

Le laplacien Δ_g a pour spectre $\sigma(\Delta_g) = \sigma_{pp}(\Delta_g) \cup \sigma_{ess}(\Delta_g)$ avec

$$\sigma_{pp}(\Delta_g) \subset (0, \frac{n^2}{4}), \quad \#\sigma_{pp}(\Delta_g) < \infty, \quad \sigma_{ess}(\Delta_g) = [\frac{n^2}{4}, \infty)$$

sans valeur propre plongée dans le spectre essentiel (cf. [21]).

On définit les espaces à poids suivants

$$\mathcal{H}_N^p := \{f \in \mathcal{H}_{loc}^p; x^{-N} f \in \mathcal{H}^p\} \quad (1.16)$$

avec x une fonction définissant le bord, $N \in \mathbb{R}$, et \mathcal{H}_{loc}^p l'espace des fonctions mesurables f sur X telles que $\chi f \in \mathcal{H}^p$ pour toute fonction $\chi \in C_0^\infty(X)$. Ces espaces munis de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{H}_N^p} := \|x^{-N} f\|_{\mathcal{H}^p}$$

sont des espaces de Banach. Le produit (\cdot, \cdot) symétrique non-dégénéré de (1.11) s'étend sur \mathcal{H}_N^0 pour $N \geq 0$ et on a classiquement le produit symétrique non-dégénéré sur $L^2(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})$

$$(u, v) := \int_{\partial\bar{X}} uv$$

Pour $N \in \mathbb{R}$, on peut vérifier que l'espace dual de \mathcal{H}_N^0 est naturellement isomorphe à \mathcal{H}_{-N}^0 par rapport au produit (1.11). On utilisera aussi les notations tensorielles suivantes pour $E = \mathcal{H}_N^0$ (resp. $E = L^2(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})$), $\psi, \phi \in E'$

$$\phi \otimes \psi : \begin{cases} E & \rightarrow E' \\ f & \rightarrow \phi(\psi, f) \end{cases}$$

2 Prolongement méromorphe de la résolvante pour une métrique paire

Dans cette partie on reprend essentiellement la construction du prolongement méromorphe de la résolvante du laplacien sur les variétés asymptotiquement hyperboliques, par Mazzeo et Melrose [24]. On va considérer le cas d'une métrique paire pour pouvoir obtenir un prolongement méromorphe-fini dans \mathbb{C} tout entier, mais puisqu'une grande partie de la construction est générale on ne fera intervenir l'hypothèse de parité qu'à partir du moment où elle devient nécessaire.

Pour pouvoir prolonger la résolvante $(\Delta_g - z)^{-1}$ à travers le spectre essentiel on utilise le nouveau paramètre $z = \lambda(n - \lambda)$ avec $\Re(\lambda) > \frac{n}{2}$. On a alors

$$R(\lambda) := (\Delta_g - \lambda(n - \lambda))^{-1}$$

qui est méromorphe-fini sur $\{\Re(\lambda) > \frac{n}{2}\}$ à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}^0)$, avec pour pôles les $\lambda_e \in \{\Re(\lambda) > \frac{n}{2}\}$ tels que $\lambda_e(n - \lambda_e) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$. La partie *physique* de \mathbb{C} est $\{\Re(\lambda) > \frac{n}{2}\}$, elle correspond à $z = \lambda(n - \lambda) \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\Delta_g)$. La droite *critique* est $\{\Re(\lambda) = \frac{n}{2}\}$ et correspond au spectre essentiel $\lambda(n - \lambda) \in \sigma_{ess}(\Delta_g)$. Pour espérer étendre $R(\lambda)$ à $\lambda \in \mathbb{C}$ il faudra restreindre l'espace sur lequel $R(\lambda)$ est défini et étendre celui dans lequel il va prendre ses valeurs, on travaillera alors naturellement dans les espaces (1.16).

La représentation des opérateurs linéaires continus de $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ dans $C^{-\infty}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ par leur noyau de distribution dans $C^{-\infty}(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ est valable dans ce cadre (théorème de Schwartz). L'étude de tels opérateurs se réduit donc à l'étude de leur noyau de Schwartz, qui sont des distributions prolongeables sur la variété lisse à coins $\bar{X} \times \bar{X}$. Le principe pour inverser $\Delta_g - \lambda(n - \lambda)$ est de trouver une distribution $q(\lambda; \omega, \omega')$ sur $\bar{X} \times \bar{X}$ qui est 'presque' solutions de

$$(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))_\omega q(\lambda; \omega, \omega') = \delta(\omega - \omega')$$

au sens où le reste doit être le noyau d'un opérateur compact sur un espace de Banach bien choisi.

La construction d'une parametrix de la résolvante par la méthode de Mazzeo-Melrose fait intervenir la notion d'éclatement réel pour désingulariser les noyaux de Schwartz. Le principe est de remplacer la variété $\bar{X} \times \bar{X}$ (sur laquelle vit le noyau de Schwartz) par une variété à coins 'plus grosse' et finalement mieux adaptée à la structure géométrique du noyau de Schwartz de la résolvante du laplacien. Pour donner une idée du problème, on peut imaginer la distribution (fonction) sur $[0, 1]_x \times [0, 1]_{x'}$ définie par

$$f(x, x') := \frac{(xx')^\lambda}{(x^2 + x'^2)^\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

au sens de $C^{-\infty}([0, 1] \times [0, 1], \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ introduit auparavant. On voit que le passage en coordonnées polaires est plus adapté à son étude près du coin $x = x' = 0$,

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \left(\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right)^\lambda$$

C'est ce procédé de passage en coordonnées polaires (ou éclatement) sur une variété que l'on va maintenant rappeler.

2.1 Variétés éclatées

On choisit un atlas $(U_i)_{i \in I} \cup (U_j)_{j \in J}$ de \bar{X} tel que

$$U_j \simeq [0, \epsilon) \times B_n, \quad U_i \simeq B_{n+1}$$

où la coordonnée $x \in [0, \epsilon)$ utilisée pour U_j est une fonction globale $x \in Z_g(\partial\bar{X})$ sur \bar{X} telle que la métrique g s'écrive dans $X \cap U_i$ sous la forme $g = x^{-2}(dx^2 + h(x, y, dy))$. La variété $\bar{X} \times \bar{X}$ est une variété lisse à coins (cf. [26]) munie de l'atlas $(U_\alpha \times U_{\alpha'})_{\alpha, \alpha' \in I \cup J}$. Si π_R, π_L sont les projections à droite et à gauche de $\bar{X} \times \bar{X}$ sur \bar{X} , on note encore x pour $\pi_L^*(x)$ et x' pour $\pi_R^*(x)$. $\bar{X} \times \bar{X}$ a donc deux hypersurfaces frontières difféomorphes à $\partial\bar{X} \times \bar{X}$ (définies par $x = 0$ et par $x' = 0$), puis un coin de codimension 2 difféomorphe à $\partial\bar{X} \times \partial\bar{X}$ (défini par $x = x' = 0$). Considérons la diagonale $\Delta_{\partial\bar{X}}$ de $\partial\bar{X} \times \partial\bar{X}$ et notons la

$$B := \Delta_{\partial\bar{X}} = \{(y, y) \in \partial\bar{X} \times \partial\bar{X}; y \in \partial\bar{X}\} \quad (2.1)$$

On a les plongements naturels suivants

$$B \rightarrow \partial\bar{X} \times \partial\bar{X} \rightarrow \partial\bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \bar{X} \times \bar{X} \quad (2.2)$$

que l'on traitera maintenant comme des inclusions. Soit \mathcal{C} l'espace des courbes

$$\mathcal{C} := \{c \in C^\infty([0, 1], \bar{X} \times \bar{X}); c(t) \in B \Leftrightarrow t = 0, c'(0) \notin T_{c(0)}B\}$$

munie de sa topologie de convergence uniforme (ainsi que les dérivées) sur les compacts. Sur cet espace, on met la relation d'équivalence

$$c_1 \sim c_2 \iff c_1(0) = c_2(0) = m, \exists a \in \mathbb{R}^+, c'_1(0) - ac'_2(0) \in T_p B$$

Si $N(B)$ est le fibré normal de B dans $\bar{X} \times \bar{X}$ dont les fibres sont

$$N_p B = T_p(\bar{X} \times \bar{X})/T_p B, \quad \forall p \in B$$

on définit le fibré normal sphérique pointant à l'intérieur par

$$S_+ N B := \bigsqcup_{p \in B} S_+ N_p B$$

$$S_+ N_p B := \{v \in N_p B \setminus \{0\}; dx(v) \geq 0, dx'(v) \geq 0\}/\mathbb{R}^+$$

avec la projection naturelle $\pi : S_+ N B \rightarrow B$. On voit que $S_+ N B$ peut être représenté aussi par

$$S_+ N_p(B) = \{c \in \mathcal{C}; c(0) = p\}/\sim$$

dont on note $[c]$ les classes d'équivalences. Si Q est le quart de sphère de dimension $n + 1$ défini par

$$Q := \{Y = (Y_0, \dots, Y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}; |Y| = 1, Y_0 \geq 0, Y_1 \geq 0\}$$

on a des 'cartes' locales induites par les cartes (x, y_α) sur U_α

$$S_+ N(B) \supset \pi^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times Q$$

$$(p; v) \rightarrow \left(p; \frac{(dx(v), dx'(v), dy_\alpha(v) - dy'_\alpha(v))}{((dx(v))^2 + (dx'(v))^2 + |dy_\alpha(v) - dy'_\alpha(v)|^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Il n'est pas compliqué de vérifier que cette expression ne dépend pas du représentant v et s'il ne s'agit pas de véritables cartes, on verra que Q a une structure de variété à coins qui

induit de véritables cartes munissant S_+NB d'une structure de t-variété lisse, c'est-à-dire une variété 'localement à coins' (cf. [26]). Ensuite le \mathcal{V}_0 -produit éclaté de \bar{X} par \bar{X} est l'ensemble

$$\bar{X} \times_0 \bar{X} := ((\bar{X} \times \bar{X}) \setminus B) \sqcup S_+NB$$

sur lequel on met une topologie qui recolle S_+NB à la place de B . Pour cela soit

$$\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow \bar{X} \times_0 \bar{X}, \quad \tilde{c}(t) = c(t), t > 0, \quad \tilde{c}(0) = [c]$$

alors on pose

$$U \text{ ouvert} \iff \begin{cases} U \cap S_+NB \text{ ouvert, } U \cap (\bar{X} \times \bar{X}) \setminus B \text{ ouvert} \\ \forall c \in \mathcal{C}, \tilde{c}(0) \in U, \exists \epsilon > 0, \exists V_c \subset \mathcal{C} \text{ voisinage de } c, \\ \forall x \in V_c, \forall t \in [0, \epsilon), \tilde{x}(t) \in U \end{cases}$$

On a une projection $\beta: \bar{X} \times_0 \bar{X} \rightarrow \bar{X} \times \bar{X}$ appelée application d'écrasement

$$\beta(m) = \begin{cases} \pi(m) & \text{si } m \in S_+NB \\ m & \text{si } m \in (\bar{X} \times \bar{X}) \setminus B \end{cases}$$

qui est continue. En notant $\tilde{U}_{\alpha, \alpha'} := \beta^{-1}(U_\alpha \times U_{\alpha'})$, on construit un recouvrement de $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ par $(\tilde{U}_{\alpha, \alpha'})$. On pose alors

$$\tilde{x} := \beta^*(x), \quad \tilde{x}' := \beta^*(x'), \quad \tilde{y}_\alpha := \beta^*(y_\alpha), \quad \tilde{y}'_{\alpha'} := \beta^*(y'_{\alpha'})$$

$$R_{\alpha, \alpha'} := (\tilde{x}^2 + \tilde{x}'^2 + |\tilde{y}_\alpha - \tilde{y}'_{\alpha'}|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho_{\alpha, \alpha'} := \frac{\tilde{x}}{R_{\alpha, \alpha'}}, \quad (2.3)$$

$$\rho'_{\alpha, \alpha'} := \frac{\tilde{x}'}{R_{\alpha, \alpha'}}, \quad \vartheta_{\alpha, \alpha'} := \frac{\tilde{y}_\alpha - \tilde{y}'_{\alpha'}}{R_{\alpha, \alpha'}}$$

On peut alors vérifier que ces fonctions sont continues ou se prolongent par continuité sur $\{R_{\alpha, \alpha'} = 0\}$ et si $\tilde{U}_{\alpha, \alpha'} \cap B \neq \emptyset$,

$$\tilde{U}_{\alpha, \alpha'} \longrightarrow \phi_{\alpha, \alpha'}(\tilde{U}_{\alpha, \alpha'}) \subset [0, +\infty) \times Q \times U_\alpha \quad (2.4)$$

$$\phi_{\alpha, \alpha'} := (R_{\alpha, \alpha'}, (\rho_{\alpha, \alpha'}, \rho'_{\alpha, \alpha'}, \vartheta_{\alpha, \alpha'}, \tilde{y}_\alpha))$$

définit une 'carte'. En réalité pour avoir la véritable définition de carte, il faut recouvrir Q par des ouverts homéomorphes à des ouverts du type $[0, \epsilon)^k \times \mathbb{R}^{n+1-k}$. On définit alors

$$\begin{aligned} s &:= \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}'}, \quad z_{\alpha, \alpha'} := \frac{\tilde{y}_\alpha - \tilde{y}'_{\alpha'}}{\tilde{x}'}, \quad t := \frac{\tilde{x}'}{\tilde{x}} \\ z'_{\alpha, \alpha'} &:= \frac{\tilde{y}'_{\alpha'} - \tilde{y}_\alpha}{\tilde{x}}, \quad \omega_{\alpha, \alpha'} := \frac{\tilde{y}_\alpha - \tilde{y}'_{\alpha'}}{|\tilde{y}_\alpha - \tilde{y}'_{\alpha'}|}, \quad r_{\alpha, \alpha'} := |\tilde{y}_\alpha - \tilde{y}'_{\alpha'}| \\ \varrho_{\alpha, \alpha'} &:= \frac{\tilde{x}}{|\tilde{y}_\alpha - \tilde{y}'_{\alpha'}|}, \quad \varrho'_{\alpha, \alpha'} := \frac{\tilde{x}'}{|\tilde{y}_\alpha - \tilde{y}'_{\alpha'}|} \end{aligned} \quad (2.5)$$

et les trois ouverts suivants

$$\tilde{U}_{\alpha, \alpha'}^1 := \tilde{U}_{\alpha, \alpha'} \cap \{\rho'_{\alpha, \alpha'} \neq 0\}, \quad \tilde{U}_{\alpha, \alpha'}^2 := \tilde{U}_{\alpha, \alpha'} \cap \{\rho_{\alpha, \alpha'} \neq 0\}$$

$$\tilde{U}_{\alpha, \alpha'}^3 := \tilde{U}_{\alpha, \alpha'} \cap \{\vartheta_{\alpha, \alpha'} \neq 0\}$$

qui recouvrent $\tilde{U}_{\alpha,\alpha'}$. Les trois cartes associées sont donc

$$\tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^1 \longrightarrow \phi_{\alpha,\alpha'}^1(\tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^1) \subset [0, \epsilon) \times B_n \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

$$\phi_{\alpha,\alpha'}^1 := (\tilde{x}', \tilde{y}'_{\alpha'}, s, z_{\alpha,\alpha'})$$

$$\tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^2 \longrightarrow \phi_{\alpha,\alpha'}^2(\tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^2) \subset [0, \epsilon) \times B_n \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \quad (2.7)$$

$$\phi_{\alpha,\alpha'}^2 := (\tilde{x}, \tilde{y}_{\alpha'}, t, z'_{\alpha,\alpha'})$$

$$\tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^3 \longrightarrow \phi_{\alpha,\alpha'}^3(\tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^3) \subset [0, +\infty)^3 \times S^{n-1} \times B_n \quad (2.8)$$

$$\phi_{\alpha,\alpha'}^3 := (r_{\alpha,\alpha'}, \varrho_{\alpha,\alpha'}, \varrho'_{\alpha,\alpha'}, \omega_{\alpha,\alpha'}, \tilde{y}_{\alpha'})$$

en sous-entendant pour la dernière que S^{n-1} est aussi recouvert par des cartes. Si d'autre part $\tilde{U}_{\alpha,\alpha'} \cap B = \emptyset$ on pose

$$\tilde{U}_{\alpha,\alpha'} \longrightarrow \phi_{\alpha,\alpha'}(\tilde{U}_{\alpha,\alpha'}) \simeq U_{\alpha} \times U_{\alpha'} \quad (2.9)$$

$$\phi_{\alpha,\alpha'} := (\tilde{x}, \tilde{y}_{\alpha'}, \tilde{x}', \tilde{y}'_{\alpha'})$$

complétant l'atlas de $\bar{X} \times_0 \bar{X}$, ce qui en fait une t-variété lisse (un calcul permet de voir que les changements de cartes sont lisses). Le produit éclaté $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ est une variété à coins si ses hypersurfaces frontières sont des sous-variétés, c'est-à-dire si il existe une fonction lisse qui définisse chaque hypersurface frontière. En reprenant le système de coordonnées (2.4), on peut construire, par partition de l'unité, une fonction R définissant S_+NB , puis si on pose $\rho := \frac{\tilde{x}}{R}$ et $\rho' := \frac{\tilde{x}'}{R}$ une étude dans les cartes montre que ces deux fonctions se prolongent de manière lisse à tout $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ (y compris sur S_+NB), définissent chacune une hypersurface frontière et ρ, ρ', R sont indépendantes. La variété $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ a donc une structure de variété lisse à coins, avec trois hypersurfaces frontières : la face frontale notée \mathcal{F} définie par $\{R = 0\}$, la face supérieure notée \mathcal{T} définie par $\{\rho = 0\}$, puis la face inférieure notée \mathcal{B} définie par $\{\rho' = 0\}$. Le produit éclaté est en quelque sorte un passage en coordonnées polaires autour de B , élargissant l'espace des fonctions lisses de $\bar{X} \times \bar{X}$. Par contre il est facile de vérifier que l'espace $\dot{C}^\infty(\bar{X} \times \bar{X})$ est en bijection (via β^*) avec l'espace $\dot{C}^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X})$, et il en va de même pour leur dual. En étudiant les systèmes de coordonnées, on peut aussi montrer que

$$\Gamma_0(\bar{X} \times \bar{X}) = \pi_L^*(\Gamma_0(\bar{X})) \otimes \pi_R^*(\Gamma_0(\bar{X})), \quad \Gamma_0(\bar{X} \times_0 \bar{X}) = \beta^*(\Gamma_0(\bar{X} \times \bar{X}))$$

et β^* définit un isomorphisme entre les espaces $L^2(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ et $L^2(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$.

Pour la suite, on simplifiera les notations en oubliant les indices de cartes (α, α') et les tildes, par exemple en notant z, y', \dots à la place de $\tilde{z}_{\alpha,\alpha'}, y'_{\alpha'}, \dots$.

Dans les coordonnées (2.6), (2.7) et (2.8) on a

$$\mathcal{F} \cap \tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^1 = \{x' = 0\}, \quad \mathcal{T} \cap \tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^1 = \{s = 0\}$$

$$\mathcal{F} \cap \tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^2 = \{x = 0\}, \quad \mathcal{B} \cap \tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^2 = \{t = 0\}$$

$$\mathcal{F} \cap \tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^3 = \{r = 0\}, \quad \mathcal{T} \cap \tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^3 = \{\varrho = 0\}, \quad \mathcal{B} \cap \tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^3 = \{\varrho' = 0\}$$

et les champs de vecteurs $x\partial_x, x\partial_{y_i}$ dans $U_{\alpha,\alpha'}$ (agissant donc sur le facteur de gauche) se relèvent sur $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ et s'expriment dans les trois cartes $(\tilde{U}_{\alpha,\alpha'}^i)_{i=1,2,3}$

$$\beta^*(x\partial_x) = s\partial_s, \quad \beta^*(x\partial_{y_i}) = s\partial_{z_i}$$

$$\beta^*(x\partial_x) = x\partial_x - t\partial_t - z'\partial_{z'}, \quad \beta^*(x\partial_{y_i}) = x\partial_{y_i} - \partial_{z'_i}$$

$$\beta^*(x\partial_x) = \varrho\partial_\varrho, \quad \beta^*(x\partial_{y_i}) = \varrho\omega_i(\varrho\partial_\varrho + \varrho'\partial_{\varrho'}) + \omega_i\varrho r\partial_r - \varrho(\partial_{\omega_i} - \omega_i(\omega \cdot \partial_\omega))$$

Ce sont donc des champs de vecteurs (locaux) lisses qui s'annulent sur la face \mathcal{F} et sont tangents à \mathcal{F}, \mathcal{B} . Les fonctions ρ, ρ', R sur $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ s'expriment dans les cartes $\tilde{U}_{\alpha, \alpha'}^i$ ($i = 1, 2, 3$) sous la forme

$$\rho = \frac{s}{(1 + s^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}} f, \quad \rho' = \frac{1}{(1 + s^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}} f, \quad R = x'(1 + s^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}} f$$

$$\rho = \frac{1}{(1 + t^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}} f, \quad \rho' = \frac{t}{(1 + t^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}} f, \quad R = x(1 + t^2 + |z|^2)^{\frac{1}{2}} f$$

$$\rho = \frac{\varrho}{(1 + \varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{1}{2}}} f, \quad \rho' = \frac{\varrho'}{(1 + \varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{1}{2}}} f, \quad R = r(1 + \varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{1}{2}} f$$

avec f une fonction lisse sur $\tilde{U}_{\alpha, \alpha'}$ strictement positive vérifiant $df_m(\xi) \neq 0$ pour tout $m \in \mathcal{T} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{F}$ et $\xi \in T_m(\bar{X} \times_0 \bar{X})$ tangent à l'une des hypersurfaces \mathcal{T}, \mathcal{B} ou \mathcal{F} .

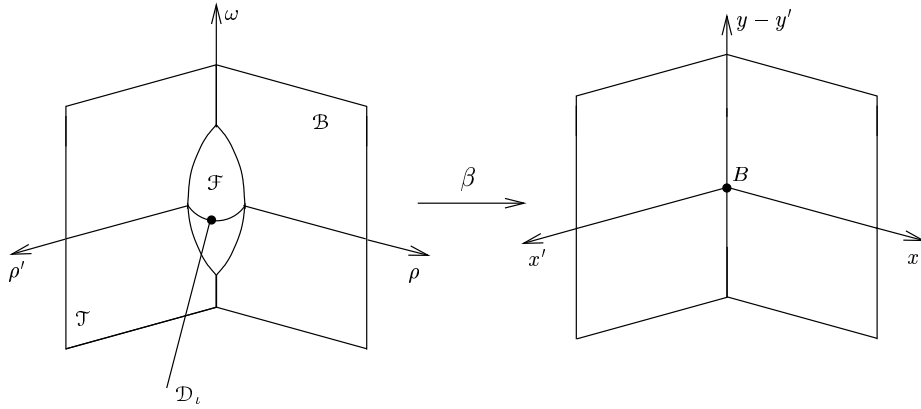


Figure 3: L'application d'écrasement

De même, on note $\partial\bar{X} \times_0 \bar{X}$ l'éclatement de $\partial\bar{X} \times \bar{X}$ sur B . Celui-ci se plonge naturellement par rapport à (2.2) dans $\bar{X} \times_0 \bar{X}$

$$\partial\bar{X} \times_0 \bar{X} \simeq (\bar{X} \times_0 \bar{X}) \cap \mathcal{T}$$

en remarquant que $\beta(\mathcal{T}) = \{x = 0\} \simeq \partial\bar{X} \times \bar{X}$. Via ces identifications, $\tilde{\beta} := \beta|_{\mathcal{T}}$ est la fonction d'écrasement

$$\tilde{\beta} : \partial\bar{X} \times_0 \bar{X} \rightarrow \partial\bar{X} \times \bar{X}$$

Cette variété à coins (sous-variété à coins de $\bar{X} \times_0 \bar{X}$) a deux hypersurfaces frontières $\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{F}}$ définies par les fonctions $\tilde{\rho}' := \rho'|_{\mathcal{T}}$ et $\tilde{R} := R|_{\mathcal{T}}$.

Enfin l'éclatement $\partial\bar{X} \times_0 \partial\bar{X}$ de $\partial\bar{X} \times \partial\bar{X}$ sur B s'injecte aussi naturellement par rapport à (2.2) dans $\partial\bar{X} \times_0 \bar{X}$

$$\partial\bar{X} \times_0 \partial\bar{X} \simeq (\partial\bar{X} \times_0 \bar{X}) \cap \tilde{\mathcal{B}}$$

et la fonction d'écrasement via cette identification est $\beta_\partial := \tilde{\beta}|_{\tilde{\mathcal{B}}}$. La fonction $r := \tilde{R}|_{\tilde{\mathcal{B}}}$ définit le bord de $\partial\bar{X} \times_0 \partial\bar{X}$, qui est exactement le relevé de B par β_∂ . Soit $(y_0, y_0) \in B$, V_{y_0} un voisinage ouvert de ce point et (y, y') un système de coordonnées dans V_{y_0} , on a alors

$$\beta_\partial^*(|y - y'|) = rf, \quad f \in C^\infty(\beta_\partial^{-1}(V_{y_0})), \quad f > 0, \quad \partial_r f|_{r=0} \neq 0$$

2.2 Petit calcul

On peut remarquer que la diagonale intérieure de $\bar{X} \times \bar{X}$ se relève via β en un sous-ensemble de $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ dont la fermeture notée \mathcal{D}_i est une sous-variété de la variété à coins $\bar{X} \times_0 \bar{X}$

$$\mathcal{D}_i := \overline{\beta^{-1}\{(m, m') \in X \times X; m = m'\}}$$

De plus, \mathcal{D}_i n'intersecte le bord de $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ que sur la face frontale \mathcal{F} et elle le fait transversalement. Ceci se vérifie aisément puisque dans la carte (2.3) citée au dessus, on a

$$\mathcal{D}_i \cap \tilde{U}_{\alpha, \alpha'} = \{m \in \tilde{U}_{\alpha, \alpha'}; \rho(m) = \rho'(m), \vartheta(m) = 0\}$$

Définition du petit calcul On introduit l'espace $I^m(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \mathcal{D}_i, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X} \times_0 \bar{X}))$ des distributions conormales à \mathcal{D}_i qui s'annulent à tout ordre sur $\mathcal{B} \cup \mathcal{F}$: par définition, ce sont les distributions κ vérifiant

$$\kappa|_{\bar{X} \times_0 \bar{X} \setminus \mathcal{D}_i} \in C^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X} \setminus \mathcal{D}_i, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X} \times_0 \bar{X})), \quad \kappa|_{\mathcal{B} \cup \mathcal{F}} \equiv 0$$

et s'écrivent dans les cartes $\tilde{U}_{\alpha, \alpha'}$ de type (2.9) sous la forme d'intégrales oscillantes

$$\kappa(w, w') = \int e^{i(w-w') \cdot \xi} \sigma^I(w, w', \xi) d\xi |dw dw'|^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

avec $\sigma^I \in S^m(\phi_{\alpha, \alpha'}(\tilde{U}_{\alpha, \alpha'}))$ un symbole d'ordre m , puis dans les cartes $\tilde{U}_{\alpha, \alpha'}^1$ de type (2.6) sous la forme

$$\kappa(s, z, x', y') = \int e^{i((s-1)\zeta + z \cdot \eta)} \sigma^J(s, z, x', y', \zeta, \eta) d\eta d\zeta \left| \frac{ds dz dx' dy'}{s^{n+1} x'^{m+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

avec $\sigma^J \in S^m(\phi_{\alpha, \alpha'}^1(\tilde{U}_{\alpha, \alpha'}^1))$ un symbole d'ordre m . Notons que la dépendance en w' de σ^I et en (s, z) de σ^J peut être supprimée par un procédé usuel d'intégration par parties. Rappelons que β induit les bijections

$$\beta^* : \dot{C}^\infty(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X} \times \bar{X})) \longleftrightarrow \dot{C}^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X} \times_0 \bar{X}))$$

$$\beta_* : C^{-\infty}(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X} \times_0 \bar{X})) \longleftrightarrow C^{-\infty}(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X} \times \bar{X}))$$

Les opérateurs dont le noyau de Schwartz relevé via β est dans $I^m(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \mathcal{D}_i, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X} \times_0 \bar{X}))$ avec $m \in \mathbb{R}$ forment un sous espace-vectoriel des opérateurs continus de $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ dans $C^{-\infty}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$, noté $\Psi_0^m(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$. On peut vérifier que

$$\Psi_0^*(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) := \bigcup_{m \in \mathbb{R}} \Psi_0^m(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

est une algèbre. Les opérateurs dont les symboles σ^I, σ^J définis en (2.10) et (2.11) ont un développement asymptotique

$$\sigma^I(w, \xi) \sim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sigma_k^I(w, \xi) |\xi|^{m-k}, \quad \sigma^J(x', y'; \xi) \sim \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sigma_k^J(x', y'; \xi) |\xi|^{m-k}$$

avec σ_k^I, σ_k^J homogènes de degré 0 en ξ forment une sous-algèbre $\Psi_{0,phg}^*(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ de Ψ_0^* dont les éléments sont dits polyhomogènes. Cette sous-algèbre est munie d'une application symbole principal

$$\sigma_0 : \Psi_{0,phg}^m(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \rightarrow S^m(T_0^* \bar{X}) / S^{m-1}(T_0^* \bar{X})$$

qui est un morphisme d'algèbre, $S^m(T_0^* \bar{X})$ désignant les symboles d'ordre m sur $T_0^* \bar{X}$. Ceci permet de construire un calcul pseudo-différentiel sur \bar{X} , appelé le 'petit calcul'. Il est semblable en beaucoup de points au calcul pseudo-différentiel sur une variété compacte et il contient les opérateurs différentiels $\text{Diff}_0^*(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ (le support de leur noyau relevé via β est inclus dans \mathcal{D}_i). Pour la suite, on négligera la notation 'phg' étant donné que la majorité des opérateurs pseudo-différentiels que l'on utilisera sont polyhomogènes.

Propriétés de continuité Notons que si $A \in \Psi_0^*(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ a pour noyau de Schwartz relevé κ_A à support près de \mathcal{F} (par exemple à support dans les cartes $\tilde{U}_{\alpha, \alpha'}$), on a l'écriture locale

$$A(f\mu)(x, y) = \int k\left(\frac{x}{s}, y - \frac{x}{s}z, s, z\right) f\left(\frac{x}{s}, y - \frac{x}{s}z\right) \frac{ds}{s} dz. \mu$$

$$\kappa_A := k(x', y', s, z) \left| \frac{ds dz dx dy}{s x^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad \mu := \left| \frac{dx dy}{x^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Cette écriture permet de montrer (voir [27] où le cadre est légèrement différent mais la preuve est identique) que A est continu comme opérateur

$$A : \dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \rightarrow \dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}), \quad A : C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \rightarrow C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

De plus, la conjugaison $x^{-a} A x^a$ (pour $a \in \mathbb{C}$) ne change pas le caractère conormal du noyau par rapport à \mathcal{D}_i et son noyau relevé $(\frac{\rho'}{\rho})^a \kappa_A$ s'annule encore à tout ordre sur les faces \mathcal{J}, \mathcal{B} donc

$$x^{-a} A x^a \in \Psi_0^m(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}), \quad a \in \mathbb{C} \tag{2.12}$$

si $A \in \Psi_0^m$. Enfin il est montré par Melrose et Mazzeo qu'un opérateur $A \in \Psi_0^m(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ avec $m \leq 0$ se prolonge en un opérateur borné de \mathcal{H}_0^0 dans \mathcal{H}_0^m et donc de \mathcal{H}_a^0 dans \mathcal{H}_a^m pour tout $a \in \mathbb{C}$ en utilisant (2.12).

Ellipticité Pour étudier l'ellipticité de Δ_g , on a besoin de calculer son symbole principal au sens de cette géométrie. Le symbole principal d'un opérateur $L \in \text{Diff}_0^m(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$

$$L := \sum_{i+|\nu| \leq m} a_{\nu, i}(x, y) (x \partial_y)^\nu (x \partial_x)^i$$

est donné par

$$\sigma_0(L)(Z) := \sum_{i+|\nu|=m} a_{\nu,i}(x,y)\eta^\nu \zeta^i, \quad Z = (x,y, \sum_j \eta_j \frac{dy_j}{x} + \zeta \frac{dx}{x}) \in T_0^* \bar{X}$$

correspondant à la quantification introduite en (2.10), (2.11). Le symbole principal du laplacien s'exprime donc comme la forme symétrique $H^{-1}(x,y;\zeta,\eta)$ si H^{-1} est la métrique induite par H sur le cotangent (suivant la notation (1.1) avec x à la place de x_0). C'est donc un opérateur elliptique au sens de cette définition de symbole principal.

Parametrix dans le petit calcul On peut donc maintenant construire une parametrix de Δ_g dans le petit calcul, essentiellement en imitant la théorie sur variété compacte. Rappelons que

$$g = \frac{H}{x^2} = \frac{dx^2 + h(x,y,dy)}{x^2}$$

Lemme 2.1. *Soit $\lambda_0 \in [\frac{n}{2} + 1, \infty) \subset \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$. Il existe des opérateurs*

$$Q_m(\lambda) \in \Psi_0^{-2}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}), \quad K_m(\lambda) \in \Psi_0^{-m}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

tels que

$$(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))Q_m(\lambda) = 1 + K_m(\lambda) \quad (2.13)$$

le noyau de Schwartz relevé κ_{K_m} de K_m est à support dans

$$\text{Supp}(\kappa_{K_m}) \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} \tilde{U}_{\alpha,\alpha} \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} \tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1 \right)$$

avec les notations de la section 2.1 et il s'écrit dans ces cartes sous la forme (2.10), (2.11) avec des symboles $\sigma_{K_m}^I, \sigma_{K_m}^J$ vérifiant respectivement pour $\alpha \in I$ et $\alpha \in J$

$$|\partial^\nu \sigma_{K_m}^I(w, w'; \xi)| \leq C_{\nu,m} \langle \xi \rangle^{-m-|\nu_3|} \langle \lambda - \lambda_0 \rangle^{m+1}, \quad (w, w') \in \tilde{U}_{\alpha,\alpha} \quad (2.14)$$

$$|\partial^\nu \sigma_{K_m}^J(s, z, x', y'; \xi)| \leq C_{\nu,m} \langle \xi \rangle^{-m-|\nu_3|} \langle \lambda - \lambda_0 \rangle^{m+1}, \quad (s, z, x', y') \in \tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1 \quad (2.15)$$

où $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in (\mathbb{N}^{n+1})^3$ et $C_{\nu,m} > 0$ constante dépendant de ν et m . Enfin $K_m(\lambda)$ est un polynôme de degré $m+1$ en λ dont le coefficient de plus haut degré appartient à $\Psi_0^{-m-1}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$.

Preuve : on construit une partition de l'unité $(\psi_\alpha)_{\alpha \in K}$ ($K = I \cup J$) associée au recouvrement $(U_i)_{i \in I} \cup (U_j)_{j \in J}$ de \bar{X} puis $(\phi_\alpha)_{\alpha \in K}$ des fonctions lisses à support dans les mêmes cartes telles que $\phi_\alpha = 1$ sur le support de ψ_α . Rappelons que la métrique est $g = x^{-2}H = x^{-2}(dx^2 + h(x,y,dy))$ comme en (1.3). Pour $m = 1$, on pose Q_1 l'opérateur dont le noyau de Schwartz est $\beta_*(\kappa_{Q_1})$ avec

$$\begin{aligned} \kappa_{Q_1} := & \sum_{\alpha \in I} \beta^*(\phi_\alpha(w)\psi_\alpha(w')) \int e^{i(w-w') \cdot \xi} \sigma_{Q_1}^I(w, w'; \xi) d\xi |dw dw'|^{\frac{1}{2}} \\ & + \sum_{\alpha \in J} \beta^*(\phi_\alpha(x,y)\psi_\alpha(x',y')) \int e^{i((s-1)\zeta + z \cdot \eta)} \sigma_{Q_1}^J(s, z, x', y'; \zeta, \eta) d\eta d\zeta \left| \frac{ds dz dx' dy'}{s^{n+1} x'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où les symboles sont définis par

$$\sigma_{Q_1}^I(w, w'; \xi) := (x^2 H^{-1}(w, \xi) - \lambda_0(n - \lambda_0))^{-1}, \quad w = (x, y)$$

$$\sigma_{Q_1}^J(s, z, x', y'; \xi) := \chi(s, z) (s^2 H^{-1}(sx', y' + x'z; \xi) - \lambda_0(n - \lambda_0))^{-1}, \quad \xi = (\zeta, \eta)$$

$\chi(s, z)$ étant une fonction lisse à support compact dans $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ valant 1 dans un voisinage de $(s, z) = (1, 0)$, et H^{-1} la métrique induite par H sur le cotangent $T^*\bar{X}$. En utilisant que l'action de Δ_g à gauche sur les distributions sur $U_{\alpha, \alpha}$ se relève respectivement dans $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}$ ($\alpha \in I$) et $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1$ ($\alpha \in J$) en l'action des opérateurs

$$\begin{aligned} & -x^2 \partial_x^2 - \sum_{i,j} h^{ij}(x, y) x \partial_{y_i} x \partial_{y_j} + P_1 \\ & -s^2 \partial_s^2 - \sum_{i,j} h^{ij}(sx', y' + x'z) s \partial_{z_i} s \partial_{z_j} + P_2 \end{aligned}$$

avec P_1, P_2 qui sont respectivement des opérateurs d'ordre 1 en $x \partial_x, x \partial_{y_i}$ et $s \partial_s, s \partial_{z_i}$ à coefficients lisses, on voit que (2.13) est satisfait avec $\sigma_{K_1}^I, \sigma_{K_1}^J$ qui s'expriment localement (dans les cartes $(\tilde{U}_{\alpha, \alpha})_{\alpha \in I}$ et $(\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1)_{\alpha \in J}$) sous la forme

$$F_\alpha^k(\lambda(n - \lambda) - \lambda_0(n - \lambda_0), \xi) \sigma_{Q_1}^k, \quad k = I, J, \quad \alpha \in k$$

où $F_\alpha^k(Z)$ est un polynôme de degré 1 en $Z \in \mathbb{C}^{n+2}$ à coefficients dans les opérateurs différentiels d'ordre 2 en $x \partial_x, x \partial_{y_i}$ supportés dans $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}$ si $k = I$ ou en $s \partial_s, s \partial_{z_i}$ supportés dans $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1$ si $k = J$. On déduit pour $m = 1$ les estimations (2.14) et (2.15) en remarquant que pour tout $r > 0$

$$|r - \lambda_0(n - \lambda_0)|^{-1} \leq (r + 1)^{-1}$$

Si $m \geq 2$, on procède par récurrence en posant pour $j \leq m$ et $k = I, J$

$$\sigma_{Q_j}^k := - \sum_{\alpha \in k} \sigma_{Q_1}^k \left(F_\alpha^k(0, \xi) \sigma_{Q_{j-1}}^k + F_\alpha^k(\lambda(n - \lambda) - \lambda_0(n - \lambda_0), 0) \sigma_{Q_{j-2}}^k \right)$$

où par convention $\sigma_{Q_0}^k := 0$. □

Ce procédé permet d'obtenir un reste aussi régulier que l'on veut sur la diagonale intérieure \mathcal{D}_i (si $m > n + 1$, K_m est à noyau relevé continu), mais si les opérateurs K_m sont bornés dans \mathcal{H}_0^0 , ils ne sont en fait pas compacts en général. Il va en effet nous falloir une annulation du noyau de Schwartz du reste sur les faces $\mathcal{J}, \mathcal{B}, \mathcal{F}$ pour que le reste devienne compact.

2.3 Opérateur normal

Cette section est consacrée à la résolution de la singularité du reste sur \mathcal{F} . Pour cela on définit l'opérateur normal d'un opérateur $L \in \Psi_0^*(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$.

Opérateur normal d'un opérateur différentiel La première étape est de considérer le cas de $L \in \text{Diff}_0^*(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$. Soit $p \in \partial \bar{X}$ contenu dans une carte $p \in U_\alpha$,

$$X_p := (0, \infty) \times T_p \partial \bar{X}$$

qui est difféomorphe à

$$\mathbb{R}_+^{n+1} := (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$$

et ϕ un difféomorphisme vérifiant

$$\phi : U_\alpha \rightarrow \phi(U_\alpha) \subset X_p, \quad \phi(p) = 0, \quad d\phi_p = Id$$

Soit R_r la dilatation de facteur r sur X_p , l'opérateur normal de $L \in \text{Diff}_0^*(\bar{X})$ en p est défini comme étant l'opérateur différentiel

$$N_p(L) : \begin{cases} C^\infty(X_p) & \rightarrow C^\infty(X_p) \\ u & \rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} R_r^*(\phi^{-1})^* L \phi^* R_{r^{-1}}^* u \end{cases}$$

On peut alors vérifier que si

$$L = \sum_{i+|\nu| \leq q} a_{\nu,i}(x,y) (x\partial_y)^\nu (x\partial_x)^i$$

dans un système de coordonnées (x,y) , alors $N_p(L)$ est l'opérateur sur $(0, \infty)_x \times (T_p \partial \bar{X})_y$

$$N_p(L) = \sum_{i+|\nu| \leq q} a_{\nu,i}(0,y') (x\partial_y)^\nu (x\partial_x)^i, \quad p = (0,y')$$

et que cette définition ne dépend pas de la fonction ϕ . De plus, si $h_0(p)$ est la métrique induite par h_0 sur $T_p \partial \bar{X}$, on a l'isométrie évidente

$$\left(X_p; \frac{dx^2 + h_0(p)}{x^2} \right) \cong \left((0, \infty)_u \times \mathbb{R}_v^n; \frac{du^2 + |dv|^2}{u^2} \right) = \mathbb{H}^{n+1}$$

qui montre que X_p est une variété asymptotiquement hyperbolique (en un sens c'est une approximation de (X,g) à l'infini). On peut alors considérer $N_p(L)$ comme un opérateur de $\text{Diff}_0^*(\bar{X}_p)$ (ou sur \mathbb{H}^{n+1}) à 'coefficients constants', et l'opérateur normal s'interprète comme un procédé invariant pour geler les coefficients en un point p du bord. L'opérateur normal de $L \in \text{Diff}_0^*(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ se définit de la même façon en conjuguant par une section trivialisant le fibré de demi-densité.

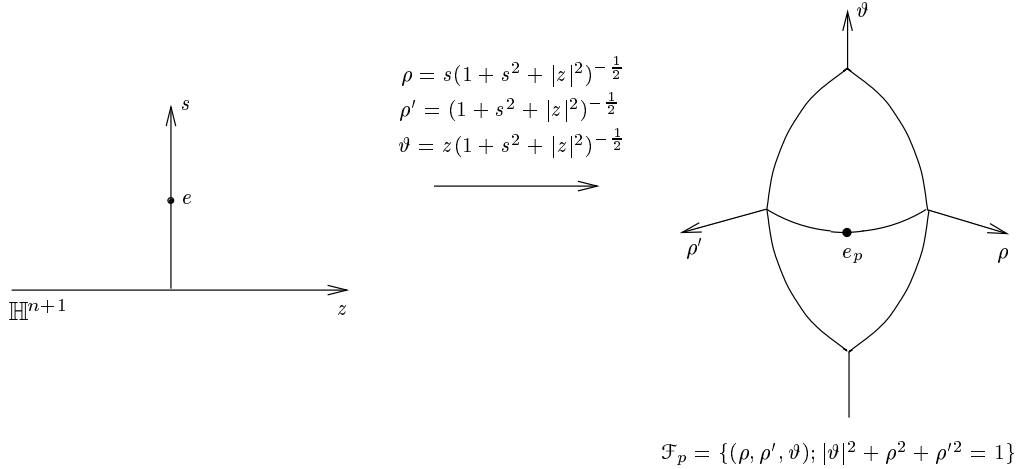


Figure 4: Une fibre \mathcal{F}_p diffeomorphe à \mathbb{H}^{n+1}

Cas du laplacien Le laplacien Δ_g s'écrit dans un système de coordonnées (x, y_1, \dots, y_n)

$$\Delta_g = -(x\partial_x)^2 + nx\partial_x + x^2 \Delta_{h(x)} - \frac{1}{2} x \text{Tr}(h^{-1}(x) \partial_x h(x)) x\partial_x \quad (2.16)$$

avec $\Delta_{h(t)}$ le laplacien sur l'hypersurface $\{x = t\}$ munie de la métrique $h(t)$. Le terme $\text{Tr}(h^{-1}(x)\partial_x h(x))$ est la trace de l'opérateur linéaire associé au tenseur symétrique $(\partial_x h)(x)$ via $h(x)$. On en déduit que pour $h_0 = h(0)$ on a

$$N_p(\Delta_g) = -(x\partial_x)^2 + nx\partial_x + x^2\Delta_{h_0(p)}$$

qui est exactement le laplacien sur

$$\left(X_p; \frac{dx^2 + h_0(p)}{x^2}\right) \cong \mathbb{H}^{n+1} \quad (2.17)$$

Cet opérateur étant essentiellement le laplacien sur \mathbb{H}^{n+1} , sa résolvante se calcule explicitement (voir par exemple [15] ou [24]) et admet un prolongement holomorphe (resp. méromorphe) à \mathbb{C} si n est pair (resp. n impair).

Opérateur normal d'un opérateur du petit calcul On peut remarquer que X_p porte une structure de groupe de Lie naturelle donnée par

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx', y + xy') \quad (2.18)$$

avec pour élément neutre $e_p := (1, 0)$ et pour l'inverse

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$$

On peut aussi le voir comme le sous groupe de $GL(T_p\bar{X})$ constitué des éléments qui fixent point par point $T_p\partial\bar{X}$ et laissent invariant $\{dx > 0\}$. Les champs de vecteur $x\partial_x, x\partial_{y_1}, \dots, x\partial_{y_n}$ sont invariants à gauche pour cette action et la mesure de Haar invariante à droite est $\frac{dx}{x}dy$. L'opérateur identité sur X_p s'interprète comme la distribution δ_{e_p} (la masse de Dirac en e_p) agissant par convolution à gauche

$$(f \star \delta_{e_p}) = f, \quad f \in C_0^\infty(X_p)$$

et il en va de même pour les opérateurs différentiels en $x\partial_x, x\partial_{y_i}$ à coefficients constants

$$\sum_{i+|\nu|\leq q} a_{\nu,i}(x\partial_y)^\nu(x\partial_x)^i f = \sum_{i+|\nu|\leq q} a_{\nu,i} \left(f \star (x\partial_y)^\nu (x\partial_x)^i \delta_{e_p} \right)$$

Rappelons maintenant que la fibre $\mathcal{F}_p := S_+ N_p B$ dans $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ est une variété à coins difféomorphe à un quart de sphère de dimension $n+1$. Son intérieur est difféomorphe à X_p via les coordonnées (s, z) de (2.6) (\mathcal{F}_p définit une autre compactification de X_p que $\bar{X}_p \simeq S^n$) et comme le remarquent Mazzeo et Melrose [24], l'opérateur $N_p(L)$ interprété comme opérateur de convolution a pour noyau de convolution $\beta^*(L)|_{\mathcal{F}_p}$ avec cette identification.

Cette distribution est à support dans le neutre e_p de $X_p \simeq \mathring{\mathcal{F}}_p$ qui est aussi l'intersection

$$e_p = \mathcal{F}_p \cap \mathcal{D}_i$$

Ceci conduit à définir l'opérateur normal en p d'un opérateur $A \in \Psi_0^m(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ par

$$N_p(A) := \kappa_A|_{\mathcal{F}_p} \quad (2.19)$$

où κ_A est le noyau de Schwartz de A relevé sur $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ via β . Dans (2.19), $N_p(A)$ doit être interprété comme une distribution agissant par convolution à gauche sur le groupe de

Lie X_p , c'est une distribution dans X_p avec un support singulier inclus dans e_p et qui est un $O(\cosh(d_{X_p}(m, e_p)))^{-\infty}$ quand $d_{X_p}(m, e_p) \rightarrow \infty$, $d_{X_p}(\cdot, \cdot)$ étant la distance 'hyperbolique' sur $(X_p, \frac{dx^2 + h_0(p)}{x^2})$. Notons que le fibré $\Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X} \times_0 \bar{X})$ se restreint en un fibré trivial canonique au dessus de \mathcal{F}_p et $N_p(A)$ agit donc par convolution à gauche sur les demi-densités sur \bar{X}_p suivant

$$(N_p(A)f)(x, y) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} k(0, y', s, z) f\left(\frac{x}{s}, y - \frac{x}{s}z\right) \frac{dsdz}{s} \cdot \mu$$

$$p = (0, y'), \quad \mu = \left| \frac{dx dy}{x^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad f = f(x, y)\mu, \quad \kappa_A = k(x', y', s, z) \left| \frac{dx' dy' ds dz}{x'^{n+1} s^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Composition Une propriété qui est fondamentale pour l'opérateur normal est la composition : si $L \in \text{Diff}_0^*(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ et $A \in \Psi_0^*(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$, alors

$$N_p(LA) = N_p(L)N_p(A) \quad (2.20)$$

Le problème pour résoudre la singularité de $K_m(\lambda, \lambda_0)$ sur \mathcal{F}_p revient donc à inverser $N_p(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))$ et trouver un opérateur dont l'opérateur normal est

$$(N_p(\Delta_g - \lambda(n - \lambda)))^{-1} N_p(K_m(\lambda)) \quad (2.21)$$

La première étape est possible puisque cela revient à construire la résolvante du laplacien sur \mathbb{H}^{n+1} . Le problème que l'on voit apparaître est que la distribution (2.21) ne s'annule pas rapidement sur les bords $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}_p$ et $\mathcal{T} \cap \mathcal{F}_p$ et on ne peut pas espérer trouver un opérateur dans Ψ_0^* dont l'opérateur normal est (2.21). En effet, la résolvante du laplacien hyperbolique se calcule explicitement (son noyau est donné en (B.1)) et elle ne laisse pas stable $\dot{C}^\infty(\mathbb{H}^{n+1})$.

Termes de bords Le double $[\bar{X} \times_0 \bar{X}]^2$ de $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ par rapport à l'hypersurface \mathcal{F} est une variété à coins avec 2 hypersurfaces frontières $[\mathcal{T}]^2, [\mathcal{B}]^2$ correspondant au double de \mathcal{T} et \mathcal{B} . Suivant Melrose, on définit les distributions conormales à \mathcal{T}, \mathcal{B} d'indice $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ comme l'ensemble

$$\mathcal{A}^{a,b}([\bar{X} \times_0 \bar{X}]^2) := \{u \in C^{-\infty}([\bar{X} \times_0 \bar{X}]^2); \mathcal{V}_b u \in \rho^{\Re(a)} \rho'^{\Re(b)} L^\infty([\bar{X} \times_0 \bar{X}]^2)\}$$

où \mathcal{V}_b est l'algèbre de Lie des vecteurs tangents à $[\mathcal{T}]^2$ et $[\mathcal{B}]^2$, ρ, ρ' sont des fonctions définissant $[\mathcal{T}]^2$ et $[\mathcal{B}]^2$. On pose ensuite

$$\mathcal{A}^{a,b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) := \mathcal{A}^{a,b}([\bar{X} \times_0 \bar{X}]^2)|_{\bar{X} \times_0 \bar{X}} \otimes \Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X} \times_0 \bar{X})$$

Notons que ces distributions sont lisses à l'intérieur de $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ et jusqu'à $\mathcal{F} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{T})$. On notera $\Psi_0^{m,a,b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ l'espace des opérateurs sur \bar{X} dont le noyau de Schwartz relevé κ se décompose en $\kappa = \kappa^1 + \kappa^2$ avec $\kappa^2 \in \mathcal{A}^{a,b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ et κ^1 le noyau relevé d'un opérateur de $\Psi_0^m(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$. On notera aussi $R^i \Psi_0^{m,a,b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ (avec $i \in \mathbb{N}$) le sous-espace de $\Psi_0^{m,a,b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ des opérateurs dont le noyau relevé s'annule sur \mathcal{F} à l'ordre i . En utilisant les propriétés de composition de $\Psi_0^*(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ et le fait que l'action de $\text{Diff}_0^*(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ à gauche sur $\bar{X} \times \bar{X}$ se relève en l'action de champs de vecteurs lisses sur $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ et tangents à $\mathcal{F} \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{B}$, on déduit la composition (voir aussi [24, Prop. 5.8])

$$\text{Diff}_0^k(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \cdot R^i \Psi_0^{l,a,b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \subset R^i \Psi_0^{l+k,a,b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \quad (2.22)$$

pour $i, k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{C}$. On peut citer aussi un résultat de continuité ([22, Prop. 2.15]) concernant un opérateur A de $\Psi_0^{-m, a, b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}_0$)

$$A : \mathcal{H}_r^0 \rightarrow \mathcal{H}_r^m \quad (2.23)$$

est continu si $r' \leq r$, $a - r > \frac{n}{2}$, $b + r' > \frac{n}{2}$, $a + b > n$. De plus on peut vérifier (en utilisant les arguments de [23, Th. 3.25]) que dans le cas particulier où $m > n + 1$, $a - r' \geq n + 1$, $b + r \geq n + 1$

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_r^0, \mathcal{H}_{r'}^0)} \leq C \|(\rho\rho')^{-n-1} \kappa_A\|_{L^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})} \quad (2.24)$$

avec κ_A le noyau relevé de A et la norme $L^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ définie en fixant une section du fibré $\Gamma_0^{\frac{1}{2}}(\bar{X} \times_0 \bar{X})$, il s'agit essentiellement du Lemme de Schur. On peut aussi ajouter que l'opérateur A est continu

$$A : \dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \rightarrow x^a C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \quad (2.25)$$

Il est clair que le procédé de restriction (2.19) sur les fibres \mathcal{F}_p de la face frontale \mathcal{F} se généralise au cas des distributions de $\mathcal{A}^{a, b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$, le résultat étant interprété comme une distribution de convolution sur X_p (en fait lisse sur X_p). La formule de composition (2.20) reste en fait valable si A est dans la classe $\Psi_0^{-m, a, b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ (cf. [24]). En utilisant les résultats de prolongement méromorphe de la résolvante sur l'espace hyperbolique, on va voir que la famille (dépendant de p) de distributions (2.21) est bien définie et on va donc construire un opérateur dans l'espace $\Psi_0^{-2, \lambda, \lambda}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ dont le noyau de Schwartz relevé a pour restriction (2.21) sur chaque fibre \mathcal{F}_p .

Résolution sur la face frontale Rappelons le modèle $\mathbb{H}^{n+1} \cong (\mathbb{R}_+^{n+1}, \frac{du^2 + |dv|^2}{u^2})$ de l'espace hyperbolique et soit

$$R_h(\lambda) := (\Delta_{g_h} - \lambda(n - \lambda))^{-1}$$

la résolvante hyperbolique étudiée dans l'annexe B. On rappelle l'expression suivante qui donne le prolongement méromorphe à $\lambda \in \mathbb{C}$ du noyau de Green (cf. [15])

$$G_h(\lambda; \omega, \omega') = \left(\frac{2uu'}{u^2 + u'^2 + |v - v'|^2} \right)^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(\lambda) \left(\frac{2uu'}{u^2 + u'^2 + |v - v'|^2} \right)^{2j}$$

$$\alpha_j(\lambda) = \frac{2^{-\lambda-2j-1} \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\lambda + 2j)}{\Gamma(\lambda - \frac{n}{2} + 1 + j) \Gamma(j + 1)}$$

agissant sur les fonctions. En coordonnées $R = (u^2 + u'^2 + |v - v'|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\rho = uR^{-1}$, $\rho' = u'R^{-1}$ introduites en (2.3) le noyau s'exprime sous la forme

$$G_h(\lambda) = (2\rho\rho')^\lambda k_\lambda(2\rho\rho'), \quad k_\lambda(\sigma) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(\lambda) \sigma^{2j}$$

En terme de noyau de convolution (avec la structure de groupe (2.18)), on a pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{H}^{n+1})$

$$(R_h(\lambda)f)(x, y) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left(\frac{2u}{1 + u^2 + |v|^2} \right)^\lambda k_\lambda \left(\frac{2u}{1 + u^2 + |v|^2} \right) f \left(\frac{x}{u}, y - \frac{x}{u}v \right) \frac{du}{u} dv \quad (2.26)$$

avec $k_\lambda \in C^\infty([0, 1])$. On montre dans l'annexe B que pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0$, $k_\lambda\left(\frac{2u}{u^2+|v|^2+1}\right)$ est localement intégrable dans \mathbb{H}^{n+1} , ce qui prouve que l'intégrale (2.26) converge pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0$. L'action de $R_h(\lambda)$ sur les demi-densités est facilement déduite de l'expression (2.26).

Avec les notations de (2.1) la face \mathcal{F} est recouverte par les cartes $(\tilde{U}_{\alpha,\alpha})_{\alpha \in J}$. Soit ϕ_α, ψ_α ($\alpha \in J$) les fonctions de troncature définies dans la preuve du lemme 2.1 et

$$\pi_L : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}, \quad \pi_R : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$$

les projections à gauche et à droite. On pose $Q'(\lambda)$ l'opérateur dont le noyau relevé est

$$\kappa_{Q'} := \sum_{\alpha \in J} \beta^*(\pi_L^*(\phi_\alpha)\pi_R^*(\psi_\alpha))F_\alpha(\lambda)\tilde{\delta}_0 \left| \frac{dsdzdx'dy'}{s^{n+1}x'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (2.27)$$

avec $\tilde{\delta}_0 := (\beta^*\pi_L^*(\det(h)^{\frac{1}{2}}))|_{x'=0} = \det(h_0(y'))^{\frac{1}{2}}$ et $F_\alpha(\lambda)$ la fonction

$$F_\alpha(\lambda; x', y', s, z) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{(2u)^\lambda}{(1+u^2+|v|_{y'}^2)^\lambda} k_\lambda\left(\frac{2u}{1+u^2+|v|_{y'}^2}\right) \kappa_{K_m}\left(x', y', \frac{s}{u}, z - \frac{s}{u}v\right) \frac{du}{u} dv \quad (2.28)$$

où $|\cdot|_{y'}$ est la norme sur \mathbb{R}^n induite par la métrique $h_0(y')$ sur $T_p\partial\tilde{X}$ avec l'identification $X_p \simeq \mathbb{R}_+^{n+1}$ provenant du choix des coordonnées (x, y) sur U_α , (x', y', s, z) sont les coordonnées dans $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$ décrites en (2.6) et

$$\kappa_{K_m} = \kappa_{K_m}(x', y', s, z) \left| \frac{dsdzdx'dy'}{s^{n+1}x'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}$$

l'expression du noyau relevé de $K_m(\lambda)$ dans cette carte. La convergence de l'intégrale pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0$ est assurée puisque $\kappa_{K_m}(x', y', \dots)$ est continue à support compact dans X_p si $m > n + 1$. Vue la discussion précédente sur l'opérateur normal, il est clair que

$$N_p(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))N_p(Q'(\lambda)) = N_p(K_m) \quad (2.29)$$

Notons que l'on peut aussi choisir les fonctions ψ_α, ϕ_α sous la forme

$$\psi_\alpha(x, y) = \psi^1(x)\psi_\alpha^2(y), \quad \phi_\alpha(x, y) = \phi^1(x^2)\phi_\alpha^2(y)$$

en prenant ψ^1, ϕ^1 deux fonctions dépendant seulement de x qui valent 1 près de $\partial\tilde{X}$ et $(\psi_\alpha^2)_{\alpha \in J}$ une partition de l'unité sur $\partial\tilde{X}$.

Hypothèse : dorénavant nous supposons que la métrique satisfait la condition de parité modulo $O(x^\infty)$ introduite dans la Définition 1.1

$$x^2g = dx^2 + h(x^2), \quad h \in C^\infty([0, \epsilon) \times \partial\tilde{X}, S^2(T^*\partial\tilde{X})) \quad (2.30)$$

Il sera démontré plus loin que cette condition sur g est nécessaire et suffisante pour que la résolvante de Δ_g se prolonge avec pôles de multiplicité finie à tout \mathbb{C} . Notons néanmoins que la construction qui va suivre permet de traiter le prolongement méromorphe-fini de $R(\lambda)$ dans $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$ si g n'est pas paire.

Remarque : l'étude des parametrix et des restes que l'on va faire sera essentiellement une étude locale dans les cartes $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}$ de $\tilde{X} \times_0 \tilde{X}$ recouvrant la face frontale \mathcal{F} . En utilisant que $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$ est dense dans $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}$, il suffira souvent de se restreindre aux cartes $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$ (i.e. aux coordonnées 'projectives' (x', y', s, z)) et d'utiliser des arguments de continuité pour étendre à $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}$ les propriétés ou les majorations de normes des fonctions supportées dans $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}$.

Lemme 2.2. *L'opérateur $Q'(\lambda)$ défini en (2.27) est dans*

$$Q'(\lambda) \in \Psi_0^{-m, \lambda, \lambda}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

et si $Q_m(\lambda)$ est l'opérateur construit dans le lemme 2.1, on a

$$(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))(Q_m(\lambda) - Q'(\lambda)) = 1 + K'(\lambda) \quad (2.31)$$

$$K'(\lambda) \in R\Psi_0^{-m+2, \lambda+2, \lambda}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0$. De plus, pour tout $N > n + 1$ les opérateurs $Q'(\lambda)$ et $K'(\lambda)$ sont méromorphe-finis dans $\mathcal{O}_{N'}$, à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)$ en posant $N' = N - n - 1$.

Preuve : dans un premier temps on pose $\theta(t)$ une fonction lisse sur $[0, 1]$ qui vaut 1 près de $t = 0$ et 0 pour $t \geq \frac{1}{2}$. Pour $N > n + 1$, on sépare l'intégrale (2.28) en deux en écrivant $k_\lambda = k_\lambda^1 + k_\lambda^2$ avec

$$k_\lambda^1(t) = \sum_{j \leq N} \alpha_j(\lambda) t^{2j} + \theta(t) \sum_{j > N} \alpha_j(\lambda) t^{2j}$$

$$k_\lambda^2(t) = (1 - \theta(t)) \sum_{j > N} \alpha_j(\lambda) t^{2j}$$

ce qui induit les décompositions $F_\alpha(\lambda) = F_\alpha^1(\lambda) + F_\alpha^2(\lambda)$ et $\kappa_{Q'} = \kappa_{Q'}^1 + \kappa_{Q'}^2$. Si $e = e_p = (1, 0)$ est le neutre de $X_p \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ (avec $p = (0, y')$) pour la structure de groupe introduite en (2.18), on a

$$\frac{2u}{1 + u^2 + |v|_{y'}^2} = (\cosh(d_{X_p}(\omega, e)))^{-1}, \quad \omega = (u, v)$$

$$\cosh(d_{X_p}(\omega^{-1}, \omega'^{-1})) = \cosh(d_{X_p}(\omega, \omega'^{-1}, e))$$

où $d_{X_p}(\cdot, \cdot)$ est la distance 'hyperbolique' sur $X_p \simeq \mathbb{R}_+^{n+1}$ (i.e. pour la métrique (2.17)). Puisque $\kappa_{K_m}(x', y', \cdot, \cdot)$ est à support dans un compact de \mathbb{R}_+^{n+1} indépendant de $(x', y') \in U_\alpha$, on en déduit que la fonction

$$(s, z, u, v) \rightarrow \frac{(2u)^\lambda}{(1 + u^2 + |v|_{y'}^2)^\lambda} k_\lambda^2 \left(\frac{2u}{1 + u^2 + |v|_{y'}^2} \right) \kappa_{K_m} \left(x', y', \frac{s}{u}, z - \frac{s}{u}v \right)$$

est à support dans un compact de $\mathbb{R}_+^{n+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1}$ du type

$$d_{X_p}(\omega, e) + d_{X_p}(\omega', e) \leq M, \quad \omega = (s, z), \quad \omega' = (u, v)$$

avec $M > 0$. Son intégrale en $(u, v) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ est donc une fonction à support compact en $(s, z) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ et elle a la régularité de κ_{K_m} . Ceci prouve que $\kappa_{Q'}^2$ est le noyau relevé d'un opérateur de $\Psi_0^{-m}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ à dépendance holomorphe dans $\mathcal{O}_{N'}$ ($\alpha_j(\lambda)$ est holomorphe dans $\{\Re(\lambda) > -2j\}$). De plus, on observe que $\beta^*((xx')^N) \kappa_{Q'}^2$ est une fonction $(\rho\rho')^{n+1} L^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ dépendant holomorphiquement de λ dans $\mathcal{O}_{N'}$, et (2.24) prouve donc l'holomorphie dans $\mathcal{O}_{N'}$ à valeur $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)$ de l'opérateur dont le noyau est $\beta_* \kappa_{Q'}^2$.

Pour traiter le noyau $\kappa_{Q'}^1$, on fait le changement de variable $(U, V) = (s, z) \cdot (u, v)^{-1}$ dans (2.28) et on garde le terme k_λ^1 pour obtenir pour $\lambda \notin -\mathbb{N}_0$

$$s^\lambda \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{(2U)^\lambda}{(s^2 + U^2 + |z - V|_{y'}^2)^\lambda} k_\lambda^1 \left(\frac{2sU}{s^2 + U^2 + |z - V|_{y'}^2} \right) \kappa_{K_m}(x', y', U, V) \frac{dU}{U^{n+1}} dV \quad (2.32)$$

Rappelons que les coordonnées (x', y', s, z) font référence à chaque carte $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1$. Puisque $\kappa_{K_m}(x', y', \cdot, \cdot)$ est à support compact dans \mathbb{R}_+^{n+1} on déduit que (2.32) est, pour chaque $\alpha \in J$, une fonction de $s^\lambda C^\infty(\phi_{\alpha, \alpha}^1(\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1))$ avec les notations (2.6). Dans les coordonnées $(r, \varrho, \varrho', \omega, y)$ de (2.8) l'intégrale (2.32) devient

$$(\varrho\varrho')^\lambda \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{(2U)^\lambda \kappa_{K_m}(r\varrho', y + r\omega, U, V)}{(\varrho^2 + \varrho'^2 U^2 + |\omega - \varrho'V|_{y+r\omega}^2)^\lambda} k_\lambda^1 \left(\frac{2\varrho\varrho'U}{\varrho^2 + \varrho'^2 U^2 + |\omega - \varrho'V|_{y+r\omega}^2} \right) \frac{dU}{U^{n+1}} dV$$

et cette fonction est dans $(\varrho\varrho')^\lambda C^\infty(\phi_{\alpha, \alpha}^3(\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^3))$. Enfin le système (x, y, t, z') de (2.7) donne

$$t^\lambda \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{(2U)^\lambda \kappa_{K_m}(x, y + xz', U, V)}{(1 + t^2 U^2 + |z' - tV|_{y+xz'}^2)^\lambda} k_\lambda^1 \left(\frac{2Ut}{1 + t^2 U^2 + |z' - tV|_{y+xz'}^2} \right) \frac{dU}{U^{n+1}} dV$$

qui est dans $t^\lambda C^\infty(\phi_{\alpha, \alpha}^2(\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^2))$. On a donc prouvé que $Q'(\lambda) \in \Psi_0^{-m, \lambda, \lambda}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$. De plus, en utilisant encore le fait que $\beta^*((xx')^N)\kappa_{Q'}^1 \in L^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ si $\lambda \in \mathcal{O}_{N'}$, on vérifie aisément que l'opérateur de noyau $\beta_* \kappa_{Q'}^1$ est méromorphe sur $\mathcal{O}_{N'}$ à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0^0)$.

Pour montrer que les pôles sont de rang fini, on remarque que les seuls pôles qui peuvent intervenir dans (2.32) proviennent des termes

$$\sum_{2j \leq N} \alpha_j(\lambda) t^{2j}$$

dans l'expression de $k_\lambda^1(t)$ et ils n'apparaissent que quand n est impair ($\alpha_j(\lambda)$ est toujours holomorphe dans $\{Re(\lambda) > -2M\}$ si $j < M$). En $-k \in -\mathbb{N}_0 \cap \mathcal{O}_{N'}$, le résidu de l'intégrale (2.32) est une somme de termes de la forme

$$C_{k,l} s^{2l-k} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left(\frac{s^2 + U^2 + |z - V|_{y'}^2}{U} \right)^{k-2l} \kappa_{K_m}(x', y', U, V) \frac{dU}{U^{n+1}} dV \quad (2.33)$$

avec $l \in \mathbb{N}_0$ tel que $2l \leq k$ et $C_{k,l} \in \mathbb{C}$. On en déduit que le résidu de $\beta_* \kappa_{Q'}^1$ s'exprime comme une somme (sur $\alpha \in J$ et $2l \leq k$) de distributions sur $\bar{X} \times \bar{X}$ de la forme

$$C_{k,l} \phi_\alpha(x, y) \psi_\alpha(x', y') (xx')^{2l-k} \sum_{i+j+|\mu|+|\nu| \leq 2k-4l} x^i x'^j y^\mu y'^\nu f_{i,j,\mu,\nu}^\alpha(x', y')$$

avec $f_{i,j,\mu,\nu}^\alpha$ lisses jusqu'au bord $\{x' = 0\}$. Ce sont donc les noyaux d'opérateurs de rang fini de \mathcal{H}_N^0 dans \mathcal{H}_{-N}^0 . On peut remarquer que cette situation est similaire à l'étude en courbure constante près du bord (traitée dans [15]).

Pour montrer (2.31), on remarque d'abord que la relation de composition (2.22) implique que $K'(\lambda) \in \Psi_0^{-m+2, \lambda, \lambda}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$. On va préciser le comportement de son noyau relevé $\kappa_{K'}$ près de \mathcal{F} et \mathcal{T} en montrant que $(\rho\rho')^{-\lambda} \kappa_{K'}$ s'annule à l'ordre 1 sur ces deux faces. Pour cela, il suffit de le vérifier dans les cartes $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1$ et la continuité de $(\rho\rho')^{-\lambda} \kappa_{K'}$ sur $\mathcal{T} \cup \mathcal{B}$ apportera le résultat.

Suivant (2.16), le laplacien agissant sur les fonctions s'écrit dans une carte U_α avec $\alpha \in J$ (près du bord)

$$\Delta_g = -(x\partial_x)^2 + nx\partial_x + x^2 \Delta_{h(x^2)} - \frac{1}{2} \text{Tr} \left(h^{-1}(x^2) x \partial_x (h(x^2)) \right) x \partial_x$$

en rappelant que h est fonction de x^2 (hypothèse (2.30)). Suivant (1.13), l'opérateur correspondant sur le 0-fibré de demi-densités est

$$f(x, y) \left| \frac{dxdy}{x^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \rightarrow \left(\delta(x^2, y)^{\frac{1}{2}} \Delta_g \delta(x^2, y)^{-\frac{1}{2}} f(x, y) \right) \left| \frac{dxdy}{x^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}$$

avec $\delta = \det(h(x))^{\frac{1}{2}}$, on le notera encore Δ_g . Par ailleurs on écrira

$$\tilde{f} := \beta^* \pi_L^*(f(x^2, y)) = f(x'^2 s^2, y' + x'z), \quad \tilde{f}_0 := \tilde{f}|_{x'=0} = f(0, y')$$

si f est une fonction ou un tenseur lisse sur U_α .

L'opérateur $\Delta_g Q'(\lambda)$ a un noyau de Schwartz dont le relevé sur $\bar{X} \times_0 \bar{X}$ s'écrit dans $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1$

$$\kappa_{\Delta_g Q'} = \tilde{\delta}^{\frac{1}{2}} \left(- (s\partial_s)^2 + ns\partial_s - \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{h}^{-1} s\partial_s \tilde{h}) s\partial_s - s^2 \tilde{\delta}^{-1} \sum_{i,j} \partial_{z_i} (\tilde{h}^{ij} \tilde{\delta} \partial_{z_j}) \right) \tilde{\delta}^{-\frac{1}{2}} \kappa_{Q'}$$

Utilisant que $\tilde{\delta}, \tilde{h}$ sont lisses en la variable s^2 , on fait le changement de variable $S = s^2$ et on obtient

$$\begin{aligned} \kappa_{\Delta_g Q'} &= \tilde{\delta}^{\frac{1}{2}} \left(- 4(S\partial_S)^2 + 2nS\partial_S - 2\text{Tr}(\tilde{h}^{-1} S\partial_S \tilde{h}) S\partial_S - S\tilde{\delta}^{-1} \sum_{i,j} \partial_{z_i} (\tilde{h}^{ij} \tilde{\delta} \partial_{z_j}) \right) \tilde{\delta}^{-\frac{1}{2}} \kappa_{Q'} \\ &= E_\alpha(x', y', S, z) \kappa_{Q'}(x', y', S^{\frac{1}{2}}, z) \end{aligned} \tag{2.34}$$

et $E_\alpha(x', y', S, z)$ est un opérateur différentiel en $S\partial_S, \partial_z$ à coefficients lisses en $S \in [0, \epsilon)$ (c'est le relèvement par β de Δ_g agissant à gauche dans $\bar{X} \times \bar{X}$). Rappelons que d'après (2.32), $S^{-\frac{1}{2}} F_\alpha(x', y', S^{\frac{1}{2}}, z)$ est lisse en $S \in [0, \epsilon)$. On peut réécrire le noyau relevé $\kappa_{\Delta_g Q'}$ de $\Delta_g Q'(\lambda)$

$$\left(\sum_{\alpha \in J} [E_\alpha, \beta^*(\pi_L^* \phi_\alpha)] \beta^*(\pi_R^* \psi_\alpha) F_\alpha(\lambda) + \beta^*(\pi_L^*(\phi_\alpha) \pi_R^*(\psi_\alpha)) E_\alpha F_\alpha(\lambda) \right) \tilde{\delta}_0 \left| \frac{dsdzdx'dy'}{s^{n+1} x'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \tag{2.35}$$

Le premier terme avec le commutateur est un noyau à support disjoint de $\mathcal{F} \cup \mathcal{D}_i$ vu le choix des fonctions de troncature (on a $[\Delta_g, \phi_\alpha] \psi_\alpha = 0$), son image directe par β est clairement un noyau dans $x^{\lambda+2} x'^\lambda C^\infty(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ en remarquant que

$$[\Delta_g, \phi^1(x^2) \phi_\alpha^2(y)] = x^2 \phi^1(x^2) [\Delta_{h(x^2)}, \phi_\alpha^2(y)] + O(x^\infty)$$

Concernant le deuxième terme de (2.35) on fait un développement de Taylor en $x' = 0$ (i.e. sur \mathcal{F}) de E_α pour faire apparaître l'opérateur normal de Δ_g en $(0, y')$:

$$E_\alpha(x', y', S, z) = -4(S\partial_S)^2 + 2nS\partial_S - S \sum_{i,j} h_0^{ij}(y') \partial_{z_i} \partial_{z_j} + E'_\alpha(x', y', S, z)$$

avec E'_α un opérateur différentiel en $S\partial_S, \partial_z$ à coefficients lisses. En remarquant que le laplacien agissant sur les demi-densités s'écrit dans U_α sous la forme

$$\Delta_g = -(x\partial_x)^2 + nx\partial_x - x^2 \sum_{i,j} h_0^{ij}(y') \partial_{y_i} \partial_{y_j} + x^2 \sum_{k=0}^1 a_k(x^2, y) (x\partial_x)^k + x^2 \sum_{|\nu| \leq 2} b_\nu(x^2, y - y', y') \partial_y^\nu$$

avec $y' \in U_\alpha$, a_k et b_ν lisses tels que

$$b_\nu(0, y - y', y') = b_\nu(x^2, 0, y') = 0 \tag{2.36}$$

En passant en coordonnées (x', y', S, z) , on déduit que

$$E'_\alpha(x', y', S, z) = x'^2 S \sum_{k=0}^1 a_k(x'^2 S, y)(S \partial_S)^k + S \sum_{|\nu| \leq 2} x'^{2-|\nu|} b_\nu(x'^2 S, x'z, y') \partial_z^\nu \quad (2.37)$$

Puisque E'_α et E_α sont les relèvements dans $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1$ par β d'opérateurs différentiels en $x \partial_x, x \partial_y$ à coefficients lisses agissant à gauche dans $U_{\alpha, \alpha} \subset \bar{X} \times \bar{X}$, ils se prolongent dans $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}$ en des opérateurs différentiels à coefficients lisses en les champs de vecteurs locaux $\beta^*(x \partial_x), \beta^*(x \partial_y)$ qui sont tangents à \mathcal{F}, \mathcal{B} et s'annulent sur \mathcal{J} . Ces champs de vecteurs laissent invariant l'ordre de la singularité conormale sur \mathcal{B}, \mathcal{J} et la régularité sur \mathcal{F} , ce qui nous permet de retrouver que $K'(\lambda) \in \Psi_0^{-m+2, \lambda, \lambda}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$. De plus d'après (2.36) et (2.37) les coefficients de E'_α s'annulent sur $\mathcal{F} \cap \tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1 = \{x' = 0\}$ à l'ordre 1 et sur $\mathcal{J} \cap \tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1 = \{s = 0\}$ à l'ordre 2, donc par continuité $E'_\alpha F_\alpha(\lambda)$ s'annule sur \mathcal{F} et a une singularité d'ordre $\lambda + 2$ sur \mathcal{J} . Par construction de $F_\alpha(\lambda)$ (voir l'équation (2.29)) on déduit que

$$\sum_{\alpha \in J} \left(\beta^*(\pi_L^*(\phi_\alpha) \pi_R^*(\psi_\alpha)) (E_\alpha - \lambda(n - \lambda)) F_\alpha(\lambda) \right) (x', y', S, z) =$$

$$\sum_{\alpha \in J} \beta^*(\pi_L^*(\phi_\alpha) \pi_R^*(\psi_\alpha)) \kappa_{K_m}(x', y', S^{\frac{1}{2}}, z) + \sum_{\alpha \in J} \left(\beta^*(\pi_L^*(\phi_\alpha) \pi_R^*(\psi_\alpha)) E'_\alpha F_\alpha(\lambda) \right) (x', y', S, z)$$

Finalement l'opérateur $K'(\lambda)$ défini en (2.31) a un noyau relevé qui se décompose en

$$\kappa_{K'} = (\kappa_{K'}^1 + \kappa_{K'}^2) \quad (2.38)$$

$$\kappa_{K'}^1 := \sum_{\alpha \in J} \left([E_\alpha, \beta^* \pi_L^* \phi_\alpha] + \beta^*(\pi_L^* \phi_\alpha) E'_\alpha \right) \beta^*(\pi_R^* \psi_\alpha) F_\alpha^1(\lambda) \left| \frac{ds dz dx' dy'}{s^{n+1} x'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\kappa_{K'}^2 := \sum_{\alpha \in J} \left([E_\alpha, \beta^* \pi_L^* \phi_\alpha] + \beta^*(\pi_L^* \phi_\alpha) E'_\alpha \right) \beta^*(\pi_R^* \psi_\alpha) F_\alpha^2(\lambda) \left| \frac{ds dz dx' dy'}{s^{n+1} x'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left(1 - \sum_{\alpha \in J} \beta^*(\pi_L^*(\phi_\alpha) \pi_R^*(\psi_\alpha)) \right) \kappa_{K_m}$$

La restriction sur \mathcal{F}_p (avec $p = (0, y')$)

$$\sum_{\alpha \in J} \beta^*(\pi_L^*(\phi_\alpha) \pi_R^*(\psi_\alpha))(0, y', s, z) = \sum_{\alpha \in J} \phi_\alpha(0, y') \psi_\alpha(0, y') = 1$$

et l'annulation de E'_α en $x' = 0$ montrent que $\kappa_{K'}^2$ s'annule sur \mathcal{F} et est un noyau du petit calcul Ψ_0^{-m+2} . Concernant les propriétés de $\kappa_{K'}^1$, la discussion précédente montre que $(\rho \rho')^{-\lambda} \kappa_{K'}^1$ s'annule à l'ordre 1 sur $\mathcal{F} \cap \tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1$ et à l'ordre 2 sur $\mathcal{J} \cap \tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1$ puis qu'il a un développement de Taylor pair en s sur $\mathcal{J} = \{s = 0\}$ dans chacune des cartes $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1$ (rappelons que $s = \frac{\rho}{\rho'} = \beta^*\left(\frac{x}{x'}\right)$ est une fonction globale sur $\bar{X} \times_0 \bar{X} \setminus \mathcal{B}$). On conclut que

$$\kappa_{K'}^1 \in R \rho^{\lambda+2} \rho'^{\lambda} C^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

$$\kappa_{K'}^2 \in R I^{-m+2}(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \mathcal{D}_l, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

et le lemme est démontré en utilisant la discussion sur les propriétés de méromorphie de l'opérateur $Q'(\lambda)$ (les résidus de $K'(\lambda)$ sur $-\mathbb{N}_0$ sont essentiellement obtenus en appliquant

des opérateurs différentiels aux résidus de $Q'(\lambda)$ et sont donc de rang fini). \square

Avec la décomposition (2.38), le noyau κ_K^2 , engendre un opérateur compact sur tout espace \mathcal{H}_N^0 , par contre ce n'est pas le cas de κ_K^1 , si $\Re(\lambda) < \frac{n}{2} - 1$. Il nous faut donc affiner encore la parametrix pour éliminer la singularité de ces noyaux sur la face \mathcal{J} .

2.4 Equations indicielles

Cette troisième étape dans la construction est beaucoup plus élémentaire que les deux autres, mais c'est celle-ci qui produit des pôles de rang infini sur la parametrix quand la métrique n'est pas paire. En outre, elle est plus particulièrement reliée à la construction de l'opérateur de diffusion donnée par Graham-Zworski [12] (on l'étudiera en détail dans la section suivante).

Si $\kappa_A \in \rho^a \rho^b R^i C^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$, est le noyau relevé d'un opérateur $A \in \Psi_0^{-\infty, a, b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $i \in \mathbb{N}_0$, la relation de composition (2.22) implique que le noyau relevé de $(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))A$ est dans $\rho^a \rho^b R^i C^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$. Le principe est de trouver, pour $B \in R^i \Psi_0^{-\infty, a, b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ fixé, un opérateur $A \in R^i \Psi_0^{-\infty, a, b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ tel que

$$(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))A - B \in R^i \Psi_0^{-\infty, a+1, b}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

et on va voir que ceci est possible si $a = \lambda + j$ avec $j \in \mathbb{N}_0$.

Pour commencer on considère le laplacien agissant sur les fonctions et on remarque que l'on peut écrire

$$x^{-a} \Delta_g x^a = -(x \partial_x)^2 + (n - 2a) x \partial_x - x^2 \text{Tr}(h^{-1}(x^2) h'(x^2)) (x \partial_x + a) + x^2 \Delta_{h(x^2)} + a(n - a) \quad (2.39)$$

dans une carte U_α avec $\alpha \in J$ et $h'(x^2) := (2x)^{-1} \partial_x (h(x^2))$ lisse en $x = 0$. Ceci montre par exemple que $\Delta_g - \lambda(n - \lambda)$ envoie une fonction $f \in x^a C^\infty(\bar{X})$ sur une fonction $f' \in x^a C^\infty(\bar{X})$ qui satisfait la relation indicielle

$$(x^{-a} f')|_{\partial \bar{X}} = (a(n - a) - \lambda(n - \lambda))(x^{-a} f)|_{\partial \bar{X}}$$

Il est alors facile de voir que pour tout $f \in C^\infty(\partial \bar{X})$ et $\lambda \notin \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$, on peut construire une série formelle $F(\lambda) = \sum_j f_j(y) x^j$ (et donc une fonction par le lemme de Borel) telle que

$$(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))x^\lambda F(\lambda) = O(x^\infty), \quad f_0 = f$$

c'est l'idée de la construction de l'opérateur de diffusion par Graham-Zworski [12]. Cette discussion montre que pour une fonction $k(\lambda) \in x^{\lambda+j} x'^\lambda C^\infty(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ donnée et $N \in \mathbb{N}$, on peut construire une solution $q(\lambda) \in x^{\lambda+j} x'^\lambda C^\infty(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ de

$$(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))q(\lambda) - k(\lambda) \in x^{\lambda+N} x'^\lambda C^\infty(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

si $\lambda \notin \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$. On ne peut pas directement appliquer ceci pour notre parametrix puisque le reste $K'(\lambda)$ n'a pas suffisamment de régularité sur \mathcal{F} , mais on va voir que ce procédé s'adapte à la résolution sur \mathcal{J} .

On pose $a = \lambda + 2j$ et puisque Δ_g 'commute' avec la fonction x' en tant qu'opérateur en la première variable (x, y) sur $U_{\alpha, \alpha}$, on a d'après (2.39)

$$\delta^{\frac{1}{2}} (\Delta_g - \lambda(n - \lambda)) \delta^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{x'^2} \right)^{\frac{\lambda}{2} + j} = 2j(n - 2\lambda - 2j) \left(\frac{x^2}{x'^2} \right)^{\frac{\lambda}{2} + j} + \left(\frac{x^2}{x'^2} \right)^{\frac{\lambda}{2} + j} L_\alpha(\lambda + 2j)$$

sur les demi-densités avec

$$L_\alpha(a) := \delta(x^2)^{\frac{1}{2}} \left(- (x\partial_x)^2 + (n-2a)x\partial_x - x^2 \text{Tr}(h^{-1}(x^2)h'(x^2))(x\partial_x + a) + x^2 \Delta_{h(x^2)} \right) \delta(x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

On en déduit que si A est un opérateur de noyau relevé $\kappa_A \in R\rho^{\lambda+2j}\rho'^\lambda C^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$, l'opérateur $(\Delta_g - \lambda(n-\lambda))A$ a pour noyau relevé

$$(E_\alpha - \lambda(n-\lambda))\kappa_A = -4j\left(\lambda - \frac{n}{2} + j\right)\kappa_A + E_\alpha^\sharp(\lambda+2j)\kappa_A \quad (2.40)$$

dans $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$ avec les notations de (2.34) et $E_\alpha^\sharp(\lambda+2j)$ défini de la manière suivante : on écrit dans $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$

$$\kappa_A = \frac{s^{\lambda+2j}}{(1+s^2+|z|^2)^{\lambda+j}} f(x', y', s, z) \left| \frac{dsdzdx'dy'}{s^{n+1}x'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}$$

avec f se prolongeant de manière lisse à $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}$ et s'annulant sur \mathcal{F} , on pose alors

$$E_\alpha^\sharp(\lambda+2j)\kappa_A := s^{\lambda+2j} \tilde{L}(\lambda+2j) \left(\frac{f(x', y', s, z)}{(1+s^2+|z|^2)^{\lambda+j}} \right) \left| \frac{dsdzdx'dy'}{s^{n+1}x'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

où $\tilde{L}_\alpha(a)$ est le 'relevé' de $L_\alpha(a)$:

$$\tilde{L}_\alpha(a) := \tilde{\delta}^{\frac{1}{2}} \left(- (s\partial_s)^2 + (n-2a)s\partial_s - s^2 x'^2 \text{Tr}(\tilde{h}^{-1} \cdot \tilde{h}') (s\partial_s + a) - s^2 x'^2 \tilde{\delta}^{-1} \sum_{i,j} \partial_{z_i} (\tilde{h}^{ij} \tilde{\delta} \partial_{z_j}) \right) \tilde{\delta}^{-\frac{1}{2}}$$

L'action de $\tilde{L}_\alpha(a)$ sur une distribution de $R\rho^{2\lambda+2j}C^\infty(\tilde{U}_{\alpha,\alpha}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ produit une distribution de $R\rho\rho'^{2\lambda+2j}C^\infty(\tilde{U}_{\alpha,\alpha}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ puisque $\tilde{L}_\alpha(a)$ est le relevé d'un opérateur sur $U_{\alpha,\alpha}$ en $x\partial_x, x\partial_{y_i}$ à coefficients lisses et que ces champs de vecteurs agissant à gauche se relèvent en des champs tangents à \mathcal{F} , \mathcal{B} et s'annulant sur \mathcal{T} , c'est-à-dire qu'ils laissent invariant l'ordre de la singularité conormale sur \mathcal{B} et l'ordre d'annulation sur \mathcal{F} mais ajoutent un ordre d'annulation sur \mathcal{T} . Si dans la carte $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$ ceci est clair, on peut aussi le vérifier dans les cartes $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^i$ pour $i = 2, 3$. On en déduit que dans l'ouvert $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}$

$$E_\alpha^\sharp(\lambda+2j)\kappa_A \in R\rho^{\lambda+2j+1}\rho'^\lambda C^\infty(\tilde{U}_{\alpha,\alpha}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

D'autre part si dans (2.41) f s'exprime comme une fonction lisse de s^2 on peut faire le changement de variable $S = s^2$ comme dans la preuve du Lemme 2.2 : dans ces coordonnées $\tilde{L}_\alpha(a)$ est un opérateur différentiel en $\partial_S, \partial_{z_i}$ à coefficients lisses (en S) et nuls en $S = 0$. Ceci implique que

$$E_\alpha^\sharp(\lambda+2j)\kappa_A \in R\rho^{\lambda+2j+2}\rho'^\lambda C^\infty(\tilde{U}_{\alpha,\alpha}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \quad (2.42)$$

et ce noyau est une fonction lisse de $S = s^2$ dans $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$.

Par convention on notera

$$E^\sharp(\lambda+2j)\kappa_A := \sum_{\alpha \in J} E_\alpha^\sharp(\lambda+2j)\kappa_{A,\alpha}$$

si κ_A est un noyau qui s'écrit sous la forme $\kappa_A = \sum_{\alpha \in J} \kappa_{A,\alpha}$ avec $\kappa_{A,\alpha}$ à support dans $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}$.

On va donc utiliser la relation (2.40) pour affiner la parametrix et éliminer la singularité de $\kappa_{K'}^1, \kappa_{K'}^3$, sur \mathcal{J} . Posons pour $j = 0, \dots, N$

$$F_\alpha^{1,j}(\lambda) := \alpha_j(\lambda) S^{\frac{\lambda}{2}+j} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{(2U)^{\lambda+2j}}{(S+U^2+|z-V|_y^2)^{\lambda+2j}} \kappa_{K_m}(x', y', U, V) \frac{dU}{U^{n+1}} dV \quad (2.43)$$

définie dans $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$ puis

$$\kappa_{K'}^{1,j} := \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} ([E_\alpha, \beta^* \pi_L^* \phi_\alpha] + \beta^* (\pi_L^* \phi_\alpha) E'_\alpha) \pi_R^* \psi_\alpha F_\alpha^{1,j}(\lambda) \tilde{\delta}_0 \left| \frac{ds dz dx' dy'}{s^{n+1} x'^{m+1}} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Comme pour l'étude du Lemme 2.2, il est facile de voir que ces distributions sont dans $R\rho^{\lambda+2j+2} \rho'^\lambda C^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ et que

$$\kappa_{K'}^1 - \sum_{j=0}^N \kappa_{K'}^{1,j} \in R\rho^{\lambda+2N+4} \rho'^\lambda C^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

est holomorphe en λ dans $\mathcal{O}_{N'}$ (les $\alpha_j(\lambda)$ ont des pôles seulement en $\lambda = -2j, -2j-1, \dots$).

De manière essentiellement similaire à la construction de Guillopé-Zworski [15] dans le cas de la courbure constante près du bord, on définit alors par récurrence les opérateurs $Q_j''(\lambda)$ et $K_j''(\lambda)$ (pour $j = 0, \dots, N$) dont les noyaux relevés sont

$$\kappa_{Q_{-1}''} := 0, \quad \kappa_{Q_0''} := -\frac{\kappa_{K'}^{1,0}}{4(\lambda - \frac{n}{2} + 1)}, \quad \kappa_{K_j''} := E^\sharp(\lambda + 2j + 2)(\kappa_{Q_j''} - \kappa_{Q_{j-1}''}) \quad (2.44)$$

$$\kappa_{Q_j''} := \kappa_{Q_{j-1}''} - \frac{\kappa_{K'}^{1,j} - \kappa_{K_{j-1}''}}{4(j+1)(\lambda - \frac{n}{2} + j + 1)} \quad (2.45)$$

de sorte qu'en utilisant (2.40) et (2.42), on ait

$$(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))\beta_* \kappa_{Q_j''} = \sum_{k=0}^j \beta_* \kappa_{K'}^{1,k} + \beta_* \kappa_{K_j''}$$

avec $\kappa_{K_j''} \in R\rho^{\lambda+2j+4} \rho'^\lambda C^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$. On obtient alors le

Lemme 2.3. *L'opérateur $Q''(\lambda) := Q_N''(\lambda)$ défini en (2.45) avec $j = N$ vérifie*

$$Q''(\lambda) \in R\Psi_0^{-\infty, \lambda+2, \lambda}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

et si $Q'(\lambda)$ est l'opérateur défini en (2.27) et $Q(\lambda) := Q_m(\lambda)$ celui construit dans le lemme 2.1, alors on a

$$(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))(Q(\lambda) - Q'(\lambda) - Q''(\lambda)) = 1 + K''(\lambda) \quad (2.46)$$

$$K''(\lambda) \in R\Psi_0^{-m+2, \lambda+2N+4, \lambda}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

De plus, $Q''(\lambda)$ et $K''(\lambda)$ sont méromorphe-finis dans $\mathcal{O}_{N'}$ (avec $N' = N - n - 1$) à valeur respectivement dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0)$.

Preuve : la structure de $\kappa_{Q''}$ découle directement de la discussion précédant le lemme. De plus, on remarque que

$$\left(\prod_{k=l}^N (\lambda - \frac{n}{2} + k + 1)^{-1} \right) \alpha_l(\lambda)$$

n'a des pôles qu'en $-\mathbb{N}_0$ et ils sont d'ordre 1, ce qui implique la même propriété pour $\kappa_{Q''_j}, \kappa_{K''_j}$ en utilisant les définitions (2.44), (2.45). Leur résidu est de la forme (2.33) et l'image directe par β du résidu de $\kappa_{Q''_N}$ en $-k$ est une somme (sur $\alpha \in J$ et $2l \leq k$) de termes de la forme

$$P_{k,l}^\alpha(x, y, x\partial_x, x\partial_y) \left[(xx')^{2l-k} \sum_{i+j+|\mu|+|\nu| \leq 2k-4l} x^i x'^j y^\mu y'^\nu f_{i,j,\mu,\nu}^\alpha(x', y') \right]$$

avec $P_{l,k}^\alpha(x, y, x\partial_x, x\partial_y)$ des opérateurs différentiels lisses en $x\partial_x, x\partial_y$ et $f_{i,j,\mu,\nu}^\alpha$ des fonctions lisses sur \bar{X} à support dans U_α . On en déduit que $Q''_N(\lambda)$ est méromorphe-fini en utilisant le même genre d'arguments que dans le Lemme (2.2) (les noyaux associés dans les espaces $\mathcal{H}_{\pm N}^0$ sont méromorphes à valeur dans $L^\infty(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$). L'opérateur $K''(\lambda)$ défini par l'équation (2.46) a pour noyau relevé

$$\begin{aligned} \kappa_{K''} &:= \kappa_{K''}^1 + \kappa_{K''}^2 + \kappa_{K''}^3 \\ \kappa_{K''}^1 &:= \kappa_{K'}^1 - \sum_{j=0}^N \kappa_{K'}^{1,j}, \quad \kappa_{K''}^2 := \kappa_{K'}^2, \quad \kappa_{K''}^3 := -\kappa_{K''}^N \end{aligned}$$

et d'après la discussion précédant le lemme et l'étude du Lemme 2.2, ce noyau vérifie

$$\kappa_{K''} \in R \left(\rho^{\lambda+2N+4} \rho'^\lambda C^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) + I^{-m+2}(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \mathcal{D}_l, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \right)$$

On voit donc que $x^{-N} K''(\lambda) x^N$ a un noyau relevé dans

$$R \left(\rho^{\lambda+N+4} \rho'^{\lambda+N} C^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) + I^{-m+2}(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \mathcal{D}_l, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \right) \subset L^\infty(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

si $\lambda \in \mathcal{O}_{N'}$ et ses propriétés de méromorphie dans $\mathcal{O}_{N'}$ sont claires. \square

Le reste $K''(\lambda)$ est en fait un opérateur compact sur \mathcal{H}_N^0 , plus précisément on va voir qu'il est dans une classe de Schatten.

2.5 Continuité et norme du reste

La première chose que l'on peut remarquer est que $K''(\lambda)$ est continu de \mathcal{H}_N^0 dans \mathcal{H}_{N+1}^{m-2} pour $\lambda \in \mathcal{O}_{N'}$ en utilisant les propriétés de continuité (2.23) de

$$\Psi_0^{-m+2, \lambda+N, \lambda+N}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

et la continuité de la multiplication par x comme opérateur de \mathcal{H}_N^{m-2} dans \mathcal{H}_{N+1}^{m-2} .

Pour $x \in Z_g(\partial\bar{X})$ fixée, le double $[\bar{X}]^2$ de \bar{X} est une variété compacte munie de la structure C^∞ induite par x (discutée dans la partie 1.2). Puisque g est paire, on rappelle que si ι est l'involution échangeant les facteurs sur $[\bar{X}]^2$, la fonction x se prolonge en une fonction lisse sur $[\bar{X}]^2$ (notée encore x) telle que $x \circ \iota = -x$ et la métrique $x^2 g$ se prolonge en une métrique lisse \bar{g} sur $[\bar{X}]^2$ invariante par ι et dont la restriction à chaque facteur \bar{X} de $[\bar{X}]^2$ est $x^2 g$. On

définit l'inclusion $i : \bar{X} \rightarrow [\bar{X}]^2$ à droite de \bar{X} dans $[\bar{X}]^2$ et $\mathbb{1}_{\bar{X}}$ la fonction caractéristique du facteur \bar{X} à droite dans $[\bar{X}]^2$. On définit alors les opérateurs continus suivants

$$\mathcal{J} : \begin{cases} \mathcal{H}_0^0 & \rightarrow L^2([\bar{X}]^2, \Gamma^{\frac{1}{2}}) \\ f & \rightarrow x^{-\frac{n-1}{2}} \mathbb{1}_{\bar{X}} f \end{cases}, \quad \mathcal{R} : \begin{cases} L^2([\bar{X}]^2, \Gamma^{\frac{1}{2}}) & \rightarrow \mathcal{H}_0^0 \\ f & \rightarrow x^{\frac{n+1}{2}} f \circ i \end{cases}$$

tels que $\mathcal{R}\mathcal{J}f = f$ pour tout $f \in \mathcal{H}_0^0$. On peut remarquer que pour tout opérateur différentiel lisse D d'ordre 1 sur $[\bar{X}]^2$ et $f \in \dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ on a

$$D\mathcal{J}f = \mathcal{J}x^{\frac{n+1}{2}} D|_{\bar{X}} x^{-\frac{n-1}{2}} f$$

et puisque $xD|_{\bar{X}} \in \text{Diff}_0^1(\bar{X})$, on déduit en utilisant (1.12) et (1.15) que

$$D\mathcal{J} : \mathcal{H}_1^1 \rightarrow L^2([\bar{X}]^2, \Gamma^{\frac{1}{2}})$$

est borné. De plus, puisque $[\bar{X}]^2$ est compacte on définit $H^1([\bar{X}]^2, \Gamma^{\frac{1}{2}})$ comme le domaine de $(1 + \Delta_{\bar{g}})^{\frac{1}{2}}$ et cet espace est un espace de Hilbert dont la norme peut être donnée par

$$\|f\|_{H^1([\bar{X}]^2)}^2 = \|f\|_{L^2([\bar{X}]^2)}^2 + \sum_i \|D_i f\|_{L^2([\bar{X}]^2)}^2$$

pour une famille finie d'opérateurs différentiels lisses D_i d'ordre 1 sur $[\bar{X}]^2$. On a donc pour $\lambda \in \mathcal{O}_{N'}$

$$x^{-N} K''(\lambda) x^N = \mathcal{R}(1 + \Delta_{\bar{g}})^{-\frac{1}{2}} (1 + \Delta_{\bar{g}})^{\frac{1}{2}} \mathcal{J} x^{-N} K''(\lambda) x^N \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H}_0^0)$$

en rappelant que $x^{-N} K''(\lambda) x^N \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0^0, \mathcal{H}_1^1)$ si $\lambda \in \mathcal{O}_{N'}$, que $(1 + \Delta_{\bar{g}})^{-\frac{1}{2}}$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(L^2([\bar{X}]^2, \Gamma^{\frac{1}{2}}))$ si $p > n + 1$ car $[\bar{X}]^2$ est compacte. De plus les valeurs singulières de $K''(\lambda)$ dans \mathcal{H}_N^0 vérifient

$$\mu_j(K''(\lambda)) \leq C j^{-\frac{1}{n+1}} \|K''(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{N+1}^1)} \quad (2.47)$$

en utilisant $\mu_j(AB) \leq \mu_j(A)\|B\|$. On est donc ramené à estimer la norme de $K''(\lambda)$ dans des espaces de Sobolev à poids pour obtenir une majoration de ses valeurs singulières.

Lemme 2.4. *Soit $K''(\lambda)$ l'opérateur sur \mathcal{H}_N^0 défini dans le Lemme 2.3, alors il existe deux entiers positifs C_N, d_N tels que*

$$\mu_j(K''(\lambda)) \leq \frac{(C_N \langle \lambda \rangle)^{d_N} j^{-\frac{1}{n+1}}}{\text{dist}(\lambda, -\mathbb{N}_0)}$$

pour $\lambda \in \mathcal{O}_{N'}$ et $\lambda \notin -\mathbb{N}_0$.

Preuve : d'après (2.47) il suffit de majorer

$$\|x^{-N-1} K''(\lambda) x^N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0^0, \mathcal{H}_1^1)}$$

ce qui sera obtenu en majorant les noyaux relevés dans chaque carte $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}$ ou de manière équivalente dans chaque carte $\tilde{U}_{\alpha, \alpha}^1$

$$\|K''(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{N+1}^1)} \leq C \sum_{\alpha \in J} \left(\sup_{i+|\nu| \leq 1} \|(s\partial_s)^i (s\partial_z)^\nu x'^{-1} s^{-N-1} \kappa_{K''}\|_{L_\alpha^\infty} \right) \quad (2.48)$$

où la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ est la norme sur $(\rho\rho')^{n+1}L^\infty(\tilde{U}_{\alpha,\alpha},\Gamma_0^{\frac{1}{2}})$

Puisqu'on ne cherche pas à les connaître, C_N et d_N désigneront par la suite des constantes (non nécessairement toujours les mêmes) dépendant de N mais pas de λ .

D'abord, on tire de (2.36) et (2.37) que l'opérateur $(x's)^{-1}E'_\alpha$ est un opérateur différentiel d'ordre 2 sur $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$ à coefficients lisses et bornés en les champs de vecteurs $s\partial_s, s\partial_{z_i}, z_j\partial_{z_i}$. De plus, si D est un de ces champs de vecteurs, on a pour $(x', y', s, z) \in \tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$ et (u, v) dans un compact K de \mathbb{R}_+^{n+1}

$$\left| D \left(\frac{2su}{s^2 + u^2 + |z - v|^2} \right)^a \right| \leq C_K \langle a \rangle \left(\frac{2su}{s^2 + u^2 + |z - v|^2} \right)^{\Re(a)} \quad (2.49)$$

avec $C_K > 0$ dépendant de K .

Commençons par estimer le terme provenant de $\kappa_{K''}^2$. D'après la discussion précédente sur $(x's)^{-1}E'_\alpha$, il suffit de majorer les dérivées de $F_\alpha^1(\lambda)$ dans $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$ jusqu'à l'ordre 3, ce qui est obtenu en dérivant sous l'intégrale (2.28) le terme κ_{K_m} après avoir fait un changement de variable $v' = A_{y'}v$ ($A_{y'}$ est une matrice inversible sur \mathbb{R}^n à dépendance lisse en y') dans cette même intégrale de sorte que $|v'| = |v|_{y'}$. On obtient donc pour $\lambda \in \mathcal{O}_N$, la majoration dans $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}$ (avec les notations de (2.48))

$$\begin{aligned} \sup_{i+|\nu|\leq 1} \|(s\partial_s)^i (s\partial_z)^\nu x'^{-1} s^{-N-1} \kappa_{K''}^2\|_{L^\infty} &\leq C_N \|k_\lambda^1((\cosh(d_{\mathbb{H}^{n+1}}(\cdot, e)))^{-1})\|_{L^1(\mathbb{R}_+^{n+1}, dx dy)} \\ &\quad \times \sup_{i+|\nu|\leq 3} \|(s\partial_s)^i (s\partial_z)^\nu \kappa_{K_m}\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{(C_N \langle \lambda \rangle)^{d_N}}{\text{dist}(\lambda, -\mathbb{N}_0)} \end{aligned}$$

en utilisant le Lemme B.1 de l'annexe B, la majoration (obtenue par la formule de Stirling)

$$|\alpha_j(\lambda)| \leq \frac{C^N \langle \lambda \rangle^{CN}}{\text{dist}(\lambda, -\mathbb{N}_0)}, \quad j \leq N \quad (2.50)$$

et le fait que κ_{K_m} est un polynôme en λ , à coefficients dans $C^3(\tilde{U}_{\alpha,\alpha}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ et s'annulant à tout ordre sur $\{\rho = 0\} \cup \{\rho' = 0\}$ si $m \gg n$.

Ensuite vient la majoration du terme provenant de $\kappa_{K''}^1$ qui est obtenue en estimant les dérivées en $s\partial_s, s\partial_{z_i}, z_j\partial_{z_i}$ jusqu'à l'ordre 3 de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{s^{\lambda+N+2} (2U)^{\lambda+2N+2} \kappa_{K_m}(x', y', U, A_{y'}^{-1}V)}{(s^2 + U^2 + |A_{y'}z - V|^2)^{\lambda+2N+2}} k_\lambda^{2,N} \left(\frac{2sU}{s^2 + U^2 + |A_{y'}z - V|^2} \right) \frac{dU dV}{U^{n+1}} \quad (2.51)$$

$$k_\lambda^{2,N}(t) := \theta(t) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+N+1}(\lambda) t^{2j}$$

pour la norme de $(\rho\rho')^{n+1}L^\infty(\tilde{U}_{\alpha,\alpha},\Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ (on a repris l'intégrale (2.32) avec seulement le reste $k_\lambda^{2,N}$ du développement de Taylor de k_λ^2 à l'ordre N à la place de k_λ^2) En utilisant le fait que $(U, V) \rightarrow \kappa_{K_m}(x', y', U, A_{y'}^{-1}V)$ est à support dans un compact indépendant de (x', y')

((x', y') est dans un compact), on déduit de (2.49) que l'intégrale (2.51) et ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 se majorent par

$$(C_N \langle \lambda \rangle)^{d_N} \sup_{i \leq 3} \sup_{t \in [0,1]} |\partial_t^i k_\lambda^{2,N}(t)| \times \|\kappa_{K_m}\|_{L^\infty}$$

pour $\lambda \in \mathcal{O}_{N'}$. En utilisant encore le Lemme B.1 de l'annexe B, on en tire que pour $\lambda \in \mathcal{O}_{N'}$

$$\sup_{i+|\nu| \leq 1} \|(s\partial_s)^i (s\partial_z)^\nu x'^{-1} s^{-N-1} \kappa_{K''}^1\|_{L^\infty} \leq (C_N \langle \lambda \rangle)^{d_N}$$

Enfin il reste à contrôler le terme provenant de $\kappa_{K''}^3 = -\kappa_{K''}$. On rappelle d'abord que les $E^\sharp(\lambda + 2j)$ sont des polynômes en λ . Les normes à estimer sont des dérivées d'ordre au plus $2N + 5$ des fonctions $F_\alpha^{1,j}(\lambda)$. En reprenant leur définition (2.43), les majorations (2.50), on vérifie que

$$\sup_{i+|\nu| \leq 1} \|(s\partial_s)^i (s\partial_z)^\nu x'^{-2} s^{-N-2} \kappa_{K''}^3\|_{L^\infty}$$

est majoré par une somme de termes de la forme

$$C_N \langle \lambda \rangle^{d_N} S^{\frac{\lambda+l+|\nu|-N-1}{2}+j+i+k} x'^{2k+l} \int_K \left| \partial_S^i \partial_z^\nu \left(\frac{2U}{S+U^2+|z-V|_{y'}^2} \right)^{\lambda+2j} \right| dU dV \times \|\kappa_{K_m}\|_{L^\infty}$$

pour $i+|\nu| \leq 2N-2j+5$ et $\frac{l+|\nu|}{2}+i+k \geq N-j+1$, $K \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ étant un compact. Une étude attentive de cette intégrale ainsi que la majoration

$$x'(1+S+|z|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C$$

dans $\tilde{U}_{\alpha,\alpha}^1$ nous permet d'en déduire que

$$\sup_{i+|\nu| \leq 1} \|(s\partial_s)^i (s\partial_z)^\nu x'^{-2} s^{-N-1} \kappa_{K''}^3\|_{L^\infty} \leq \frac{(C_N \langle \lambda \rangle)^{d_N}}{\text{dist}(\lambda, -\mathbb{N}_0)}$$

pour $\lambda \in \mathcal{O}_{N'}$, le lemme est donc démontré. \square

2.6 Prolongement méromorphe de la résolvante

On a maintenant tous les ingrédients pour montrer le

Théorème 2.5. *Soit (X, g) une variété asymptotiquement hyperbolique paire de dimension $n+1$, alors la résolvante du laplacien*

$$R(\lambda) = (\Delta_g - \lambda(n-\lambda))^{-1} \in \text{Mer}_f(\mathcal{O}_0, \mathcal{L}(\mathcal{H}_0^0))$$

se prolonge pour tout $N > n+1$ en une famille méromorphe-finie d'opérateurs

$$R(\lambda) \in \text{Mer}_f(\mathcal{O}_{N-n-1}, \mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0))$$

Preuve : récapitulons l'approximation de $R(\lambda)$ obtenue

$$(\Delta_g - \lambda(n-\lambda))(Q(\lambda) - Q'(\lambda) - Q''(\lambda)) = 1 + K''(\lambda)$$

avec $K''(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0)$ compact méromorphe-fini sur $\mathcal{O}_{N'}$ et $Q(\lambda), Q'(\lambda), Q''(\lambda)$ méromorphe-finis sur $\mathcal{O}_{N'}$ à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)$. De plus, la structure de $Q(\lambda), Q'(\lambda)$ et $Q''(\lambda)$ implique que ces opérateurs sont bornés de \mathcal{H}_0^0 dans \mathcal{H}_0^2 si $\Re(\lambda) \gg \frac{n}{2}$ on a donc

$$R(\lambda) = Q(\lambda) - Q'(\lambda) - Q''(\lambda) - R(\lambda)K''(\lambda) \quad (2.52)$$

pour $\Re(\lambda) \gg \frac{n}{2}$ sur \mathcal{H}_0^0 . On rappelle l'équation de la résolvante dans le plan physique

$$R(\lambda) - R(z) = (\lambda(n - \lambda) - z(n - z))R(\lambda)R(z) \quad (2.53)$$

pour $\Re(\lambda) > \frac{n}{2}$ et $\Re(z) > \frac{n}{2}$. Fixons $\lambda_M = \frac{n+M}{2}$ avec $M > 2N$, alors (2.52) et (2.53) impliquent

$$R(\lambda)(1 + K(\lambda, \lambda_M)) = K_1(\lambda, \lambda_M)$$

$$K(\lambda, \lambda_M) := (\lambda(n - \lambda) - \lambda_M(n - \lambda_M))K''(\lambda)R(\lambda_M)$$

$$K_1(\lambda, \lambda_M) := R(\lambda_M) + (\lambda(n - \lambda) - \lambda_M(n - \lambda_M))(Q(\lambda) - Q'(\lambda) - Q''(\lambda))R(\lambda_M)$$

si $\Re(\lambda) \gg \frac{n}{2}$. On a alors besoin d'étudier la continuité de $R(\lambda_M)$ sur \mathcal{H}_r^0 avec $r > 0$ pour restreindre cette égalité à cet espace à poids. Il est en fait montré par Mazzeo-Vasy [25, Th. 3.3] que

$$R(\lambda_M) : \mathcal{H}_N^0 \rightarrow \mathcal{H}_N^0$$

est borné de norme majorée par C_N . On déduit donc que

$$K(\lambda, \lambda_M) : \mathcal{H}_N^0 \rightarrow \mathcal{H}_N^0, \quad K_1(\lambda, z) : \mathcal{H}_N^0 \rightarrow \mathcal{H}_{-N}^0$$

sont méromorphe-finis en λ dans $\mathcal{O}_{N'}$ avec $K(\lambda_M, \lambda_M) = 0$ et $K(\lambda, \lambda_M)$ compact, on peut donc utiliser le théorème de Fredholm analytique et obtenir le prolongement méromorphe-fini de $R(\lambda)$ sur $\mathcal{O}_{N'}$ à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)$

$$R(\lambda) = K_1(\lambda, \lambda_M)(1 + K(\lambda, \lambda_M))^{-1}$$

et le théorème est démontré. \square

On appelle alors *résonances* les pôles de ce prolongement et \mathcal{R}_g l'ensemble (discret) des résonances de Δ_g . Notons qu'en utilisant par exemple les arguments de Agmon [1], on peut vérifier que ces pôles ne dépendent pas de N , ni d'ailleurs leur multiplicité définie par

$$m(\lambda_0) := m_{\lambda_0}((n - 2\lambda)R(\lambda))$$

si λ_0 est une résonance (i.e. le rang du résidu de la résolvante comme fonction de $\lambda(n - \lambda)$).

Notons que la construction que l'on a utilisée, due à Mazzeo-Melrose [24], peut être poussée de manière à obtenir un reste régularisant. Ceci permet à Mazzeo et Melrose de préciser la nature du noyau de Schwartz de l'opérateur prolongé (voir aussi [4, Th. 2.1])

Théorème 2.6. *Si (X, g) est une variété asymptotiquement hyperbolique, la résolvante du laplacien $R(\lambda)$ se prolonge en une famille méromorphe-finie d'opérateurs*

$$R(\lambda) \in \text{Mer}_f(\mathcal{O}_N \setminus (Z_-^1 \cup Z_-^2), \mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)), \quad \forall N > 0$$

Son noyau de Schwartz $r(\lambda)$ se décompose en $r(\lambda) = r_0(\lambda) + r_1(\lambda) + r_2(\lambda)$ avec

$$\beta^*(r_0(\lambda)) \in I^{-2}(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \mathcal{D}_\iota, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

$$\beta^*(r_1(\lambda)) \in \rho^\lambda \rho'^\lambda C^\infty(\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \quad (2.54)$$

$$r_2(\lambda) \in x^\lambda x'^\lambda C^\infty(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \quad (2.55)$$

où $(\rho\rho')^{-\lambda}r_1(\lambda)$ et $(xx')^{-\lambda}r_2(\lambda)$ sont méromorphes dans $\mathbb{C} \setminus (Z_-^1 \cup Z_-^2)$ et $r_0(\lambda)$ est le noyau d'un opérateur holomorphe dans \mathbb{C} à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0^0)$.

2.7 Majoration du nombre de résonances dans des bandes

Pour cette majoration on utilise la construction précédente ainsi que les techniques habituelles faisant intervenir le déterminant. Comme avant C_N et d_N seront des entiers positifs dépendant de N , non nécessairement toujours les mêmes. On pose

$$D_N(\lambda) := \det_{\mathfrak{J}_N^0} (1 + K(\lambda, \lambda_M)^{n+2})$$

qui est bien défini et méromorphe dans $\mathcal{O}_{N'}$ avec pour seuls pôles possibles les λ tels que $\lambda \in -\mathbb{N}_0$ ou $\lambda(n - \lambda) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$, on note $Z_N = (z_i)_i$ l'ensemble de ces pôles. D'après la construction de $K(\lambda, z)$ et $K_1(\lambda, z)$, les pôles sur $-\mathbb{N}_0 \cap \mathcal{O}_{N'}$ sont d'ordre 1 et de rang majoré par une constante C_N et ceux de $R(\lambda)$ aux points λ tels que $\lambda(n - \lambda) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$ sont d'ordre 1 et de rang majoré par une constante C . En utilisant alors [15, Lem. A.1,A.2] on obtient que la multiplicité $m(\lambda_0)$ d'une résonance λ_0 de $R(\lambda)$ satisfait

$$m(\lambda_0) \leq v_{\lambda_0}(D_N(\lambda)) + C_N \mathbb{1}_{Z_N}(\lambda_0)$$

avec v_{λ_0} la valuation (voir les définitions de l'Annexe A). On multiplie alors $D_N(\lambda)$ par un polynôme $P_N(\lambda)$ qui a des zéros d'ordre C_N aux points $\lambda \in Z_N$ et on déduit que

$$m(\lambda_0) \leq v_{\lambda_0}(D_N(\lambda)P_N(\lambda)) \quad (2.56)$$

en utilisant la relation $v_{\lambda_0}(A(\lambda)B(\lambda)) \geq v_{\lambda_0}(A(\lambda)) + v_{\lambda_0}(B(\lambda))$.

Ensuite on va appliquer le théorème de Jensen à $D_N(\lambda)P_N(\lambda)$ dans le disque de centre $\lambda_M = \frac{n+M}{2}$ et de rayon $\frac{M+N'}{2}$. Notons que ce disque contient un rectangle

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) \in \left[\frac{n}{2} - \frac{N'}{2}, \frac{n}{2} \right], |\Im(\lambda)| \leq \frac{\sqrt{N'(M - N')}}{2} \right\}$$

En utilisant le Lemme 2.4 et les relations

$$|\det(1 + A^p)| \leq C \exp \left(C \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j(A)^p \right), \quad \mu_j(AB) \leq \|B\| \mu_j(A) \quad (2.57)$$

si $A \in \mathcal{S}_p(H)$ et $B \in \mathcal{L}(H)$ sur un espace de Hilbert H , on trouve que

$$|D_N(\lambda)| \leq e^{(C_N \langle \lambda \rangle)^{d_N}} \quad (2.58)$$

dans $\mathcal{O}_{N'} \cap \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{dist}(\lambda, Z_N) \geq \frac{1}{4}\}$. Le principe du maximum appliqué à la fonction holomorphe $D_N(\lambda)P_N(\lambda)$ dans chaque disque $D(z_i, \frac{1}{4})$ et on déduit de (2.57) et (2.58) que

$$|D_N(\lambda)P_N(\lambda)| \leq e^{(C_N \langle \lambda \rangle)^{d_N}} \quad (2.59)$$

dans $\mathcal{O}_{N'}$. On peut d'autre part remarquer que

$$|P_N(\lambda_M)D_N(\lambda_M)| = |P_N(\lambda_M)| \geq C_N M^{d_N} \quad (2.60)$$

et le lemme de Jensen appliqué à $D_N(\lambda)P_N(\lambda)$ dans le disque de centre $z = \frac{n}{2} + M$ et de rayon $M + \frac{N'}{2}$ combiné avec (2.59), (2.60), (2.56) prouve le

Théorème 2.7. *Soit (X, g) une variété asymptotiquement hyperbolique paire. Pour tout $N, M \geq 0$, il existe des entiers C_N, d_N tels que*

$$\sum_{\lambda \in \mathfrak{R}_g \cap T(N, M)} m(\lambda) \leq C_N M^{d_N}$$

si $T(N, M) \subset \mathbb{C}$ est le rectangle défini par

$$T(N, M) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) \in \left[\frac{n}{2} - N, \frac{n}{2} \right], |\Im(\lambda)| \leq M \right\}$$

Remarque : si la variété \bar{X} est analytique et que $x^2 g$ est analytique (avec x analytique), on peut reprendre les estimations en utilisant des fonctions de troncatures quasi-analytiques pour la parametrix et le fait que les normes des dérivées d'une fonction analytique réelle f (sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$) sont majorées uniformément en fonction des normes de f dans un voisinage complexe $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de U (il s'agit essentiellement des arguments utilisés dans [15]). Dans ce cas on peut vérifier que les constantes C_N, d_N du Théorème 2.7 sont majorées par

$$C_N \leq (CN)^{C_N}, \quad d_N \leq CN$$

et en posant $M = 4N$ on trouve que le nombre de résonances compris dans le disque $D(\frac{n}{2}, N)$ est majoré par $(CN)^{C_N}$.

3 Etude de la résolvante près de $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$

Dans cette partie, on va détailler le comportement (en λ) de la résolvante $R(\lambda)$ près de $Z_-^1 \cup Z_-^2 = \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$, et plus particulièrement près de Z_-^1 . En effet si l'on a vu dans le Théorème 2.5 que la condition de parité de la métrique implique un prolongement méromorphe-fini de $R(\lambda)$ à \mathbb{C} tout entier, il n'est pas clair qu'il en soit de même dans le cas général.

Pour traiter ce problème il est plus adapté d'étudier l'opérateur de diffusion $S(\lambda)$. En effet, Graham et Zworski [12] ont donné une présentation simple et explicite de cet opérateur permettant de caractériser précisément la nature de $S(\lambda)$ au voisinage de $\frac{1}{2}(n + \mathbb{N})$. Grâce à leurs calculs et la formule $S(n - \lambda) = S(\lambda)^{-1}$, on peut alors détailler le comportement de $S(\lambda)$ au voisinage des points de $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$, puis les relations entre $R(\lambda)$ et $S(\lambda)$ seront alors utilisées afin d'étudier les singularités de $R(\lambda)$ sur $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$.

3.1 Opérateur de Poisson, opérateur de diffusion

On rappelle la construction des opérateurs de Poisson et de diffusion par Graham-Zworski [12], ainsi que quelques autres résultats et propriétés utiles principalement dues à Joshi et Sá Barreto [19].

Quelques propriétés de la résolvante On se place pour l'instant dans le cas d'une variété asymptotiquement hyperbolique quelconque. Mazzeo [21] montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il n'existe pas de fonctions f non nulles de $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ telles que $(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))f = 0$. En utilisant la théorie spectrale, il est clair que les points $\lambda_e \in \{\Re(\lambda) > \frac{n}{2}\}$ tels que $\lambda_e(n - \lambda_e) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$ sont des pôles d'ordre 1 de $R(\lambda)$ dont le résidu est

$$\text{Res}_{\lambda_e} R(\lambda) = (2\lambda_e - n)^{-1} \sum_{k=1}^p \phi_k \otimes \phi_k, \quad \phi_k \in x^{\lambda_e} C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \quad (3.1)$$

où $(\phi_k)_{k=1, \dots, p}$ sont les fonctions propres normalisées de Δ_g pour la valeur propre $\lambda_e(n - \lambda_e)$. De plus, l'équation indicielle (reprenre (2.39) dans le cas $h(x, y, dy)$ non pair en x)

$$(\Delta_g - \lambda_e(n - \lambda_e))x^{\lambda_e + j} f = j(n - 2\lambda_e - j)x^{\lambda_e + j} f + O(x^{\lambda_e + j + 1}), \quad f \in C^\infty(\bar{X}), \quad j \in \mathbb{N}_0$$

prouve que si $\phi_k|_{\partial\bar{X}} = 0$ alors $\phi_k \in \dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$, ce qui est exclu d'après le résultat de Mazzeo. De plus, les arguments de Perry et Patterson [30, Lem. 4.9] montrent que $R(\lambda)$ n'a pas de pôles sur la droite critique $\{\Re(\lambda) = \frac{n}{2}\}$, sauf peut être en $\lambda = \frac{n}{2}$ (c'est encore une conséquence du résultat de Mazzeo [21]).

Enfin on peut remarquer que la symétrie ${}^tR(\lambda) = R(\lambda)$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0^0)$ pour $\lambda \in (n, +\infty)$ s'étend à $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)$ pour tout $N > 0$ et donc par prolongement analytique on a sur $\mathcal{O}_N \setminus (\mathcal{R}_g \cup Z_-^1)$

$$R(\lambda) = {}^tR(\lambda)$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)$ et $r(\lambda; m, m') = r(\lambda, m', m)$ pour $m \neq m'$ si $r(\lambda)$ est le noyau de Schwartz de $R(\lambda)$ décrit dans le Théorème 2.6.

Opérateur de Poisson Le problème de Poisson est de trouver une famille d'opérateurs continus

$$\mathcal{P}(\lambda) : C^\infty(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}} \otimes |N^* \partial\bar{X}|^{n-\lambda}) \rightarrow x^\lambda C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) + x^{n-\lambda} C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

méromorphe (faiblement) dans \mathcal{O}_0 avec pour uniques pôles les λ_e tels que $\lambda_e(n - \lambda_e) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$, continu jusqu'à $\{\Re(\lambda) = \frac{n}{2}\} \setminus \{\frac{n}{2}\}$ et satisfaisant

$$\begin{cases} (\Delta_g - \lambda(n - \lambda))\mathcal{P}(\lambda) = 0 \\ \mathcal{P}(\lambda)f = x^{n-\lambda}F_1(\lambda) + x^\lambda F_2(\lambda) \\ F_1(\lambda), F_2(\lambda) \in C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \\ (x^{\frac{n}{2}}F_1(\lambda))|_{\partial\bar{X}} = f|_{\partial\bar{X}}^{\lambda-n} \end{cases} \quad (3.2)$$

Les fibrés trivialisables $|N^*\partial\bar{X}|^a$ (avec $a \in \mathbb{C}$) sont les fibrés des a -densités conormales à $\partial\bar{X} \subset \bar{X}$, ils permettent d'obtenir des définitions indépendantes du choix de la fonction x qui définit le bord (voir [16] pour quelques détails). La construction de Graham-Zworski est relativement simple et n'utilise que l'équation indicelle et la propriété de continuité suivante de $R(\lambda)$

$$R(\lambda) : \dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \rightarrow x^\lambda C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \quad (3.3)$$

obtenue à partir du Théorème 2.6 et de (2.25). On va détailler cette construction puisqu'elle va fortement nous servir pour la suite.

Pour simplifier, on se restreint aux fonctions plutôt qu'aux densités, sachant que l'on retrouve l'un à partir de l'autre en conjuguant par une section du fibré. La première étape est de construire, à $f_0 \in C^\infty(\partial\bar{X})$ fixée, une solution $F_\infty = F_\infty(\lambda, f_0) \in C^\infty(\bar{X})$ de

$$(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))x^{n-\lambda}F_\infty = O(x^\infty), \quad F_\infty|_{x=0} = f_0 \quad (3.4)$$

il est donc clair qu'une solution dans le collier $U := U_x$ suffit, quitte à la multiplier par une fonction de troncature à support près de $\partial\bar{X}$ et valant 1 dans un voisinage de $\partial\bar{X}$. Dans U on a d'abord la relation

$$(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))x^{n-\lambda} = x^{n-\lambda}\mathcal{D}_\lambda$$

$$\mathcal{D}_\lambda := -x^2\partial_x^2 + \left(2\lambda - n - 1 - \frac{x}{2}\text{Tr}(h^{-1}(x)\partial_x h(x))\right)x\partial_x - \frac{(n-\lambda)x}{2}\text{Tr}(h^{-1}(x)\partial_x h(x)) + x^2\Delta_{h(x)}$$

et pour $f \in C^\infty(\partial\bar{X})$,

$$\mathcal{D}_\lambda(fx^j) = j(2\lambda - n - j)fx^j + x^j G(\lambda - j)f \quad (3.5)$$

$$(G(z)f)(x, y) := x^2\Delta_{h(x)}f(y) - \frac{(n-z)x}{2}\text{Tr}(h^{-1}(x)\partial_x h(x))f(y)$$

Supposons que $F \in C^\infty(\bar{X})$ soit une fonction telle que $\mathcal{D}_\lambda F = O(x^j)$ (avec $j \geq 1$), alors puisque $G(z)f = O(x)$ pour tout $f \in C^\infty(\partial\bar{X})$, (3.5) assure que

$$\mathcal{D}_\lambda F - \mathcal{D}_\lambda \left(x^j \frac{(x^{-j}\mathcal{D}_\lambda(F))|_{x=0}}{j(2\lambda - n - j)} \right) = O(x^{j+1})$$

Soit $f_0 \in C^\infty(\partial\bar{X})$ fixée ; puisque $\mathcal{D}_\lambda f_0 = O(x)$ d'après (3.5), la remarque précédente nous permet de construire les fonctions $F_j \in C^\infty(\bar{X})$ (pour $j \geq 0$) et $f_j \in C^\infty(\partial\bar{X})$ (pour $j \geq 1$) par la formule de récurrence

$$F_0 = f_0, \quad f_j = \frac{-(x^{-j}\mathcal{D}_\lambda(F_{j-1}))|_{x=0}}{j(2\lambda - n - j)}, \quad F_j = F_{j-1} + f_j x^j, \quad j \geq 1 \quad (3.6)$$

On a donc par construction

$$\mathcal{D}_\lambda(F_{j-1}) = O(x^j)$$

et d'après le lemme de Borel, il existe une fonction $F_\infty \in C^\infty(\bar{X})$ dont les coefficients de Taylor en $x = 0$ sont les f_j , ce qui implique que F_∞ est une solution de (3.4). Par ailleurs, on peut écrire les f_j sous la forme

$$f_j = p_{j,\lambda} f_0 \quad (3.7)$$

où $p_{j,\lambda}$ est un opérateur différentiel d'ordre inférieur ou égal à $2[j/2]$ sur $\partial\bar{X}$.

Le deuxième point est de poser

$$\mathcal{P}(\lambda)f_0 := F_\infty(\lambda, f_0) - R(\lambda)(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))F_\infty(\lambda, f_0)$$

et il est clair en utilisant (3.3) que $\mathcal{P}(\lambda)$ est solution de 3.2. Le fait que $F_\infty(\lambda, f_0)$ soit non-linéaire en f_0 (de par l'utilisation du lemme de Borel) n'est pas important puisqu'il est facile de vérifier (cf. [12, Prop. 3.4]) l'unicité d'un opérateur solution du problème de Poisson, qui implique nécessairement la linéarité de $\mathcal{P}(\lambda)$. L'opérateur $\mathcal{P}(\lambda)$ est appelé *opérateur de Poisson* ou *opérateur d'Eisenstein*.

En négligeant toujours la dépendance par rapport à la fonction x définissant le bord (qui est exprimée dans le terme $|dx|^{n-\lambda}$), on définit l'opérateur $E(\lambda)$ dont le noyau de Schwartz $e(\lambda)$ est la restriction pondérée du noyau de $R(\lambda)$ sur \mathcal{T}

$$e(\lambda) := \tilde{\beta}_* (\beta^*(x^{-\lambda + \frac{n}{2}} r(\lambda))|_{\mathcal{T}}) \in C^{-\infty}(\partial\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \quad (3.8)$$

D'après (2.54) et (2.55), la distribution $e(\lambda)$ a une singularité conormale sur B décrite par

$$\tilde{\beta}^*(e(\lambda)) \in \tilde{\rho}^\lambda \tilde{R}^{-\lambda + \frac{n}{2}} C^\infty(\partial\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) + \tilde{\beta}^*(x'^\lambda C^\infty(\partial\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})) \quad (3.9)$$

On en déduit facilement que $E(\lambda)$ est continu de $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ dans $C^\infty(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})$ et son transposé est bien défini de $C^{-\infty}(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})$ dans $C^{-\infty}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$. Suivant les propriétés d'holomorphie-méromorphie de (2.54) et (2.55), on a

$$\tilde{\beta}^*(x'^N e(\lambda)) \in \mathcal{H}ol(U_N, L^2(\partial\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}))$$

$$U_N := \{\lambda \in \mathbb{C}; \frac{n}{2} - N < \Re(\lambda) < N, \lambda \notin (\mathcal{R}_g \cup Z_-^1 \cup Z_-^2)\}$$

et en utilisant l'isomorphisme $\tilde{\beta}^*$ entre $L^2(\partial\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ et $L^2(\partial\bar{X} \times_0 \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$, on obtient que $E(\lambda)$ est Hilbert-Schmidt de $L^2(X)$ dans $L^2(\partial\bar{X})$, puis

$$E(\lambda) \in \mathcal{H}ol(U_N, \mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, L^2(\partial\bar{X}))) \quad (3.10)$$

Ceci implique par ailleurs que ${}^t E(\lambda)$ est holomorphe sur U_N à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(\partial\bar{X}), \mathcal{H}_{-N}^0)$. Enfin les seuls pôles de $E(\lambda)$, ${}^t E(\lambda)$ dans $\{\Re(\lambda) > \frac{n}{2}\}$ sont les $\lambda_e \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_e(n - \lambda_e) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$ et (3.1) implique que ce sont des pôles d'ordre 1 et de multiplicité finie.

Ce qui nous a amené à définir $E(\lambda)$ est que son transposé est l'opérateur de Poisson

$$\mathcal{P}(\lambda) = {}^t E(\lambda)$$

et c'est essentiellement le point de vue choisi par Joshi et Sá Barreto [19] pour définir l'opérateur de Poisson. Notons que cette représentation par son noyau de Schwartz permet de montrer que $\mathcal{P}(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C} \setminus (Z_-^1 \cup Z_-^2)$. De plus, on voit que $\mathcal{P}(\lambda)$ est holomorphe en $Z_+^1 \cup Z_+^2$ ou peut avoir un pôle de multiplicité finie en λ_e si $\lambda_e(n - \lambda_e) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$.

Opérateur de diffusion L'opérateur de diffusion $S(\lambda)$ est l'opérateur défini pour $\Re(\lambda) \geq \frac{n}{2}$, $\lambda \notin (Z_+^1 \cup Z_+^2)$ et $\lambda(n - \lambda) \notin \sigma_{pp}(\Delta_g)$ par

$$S(\lambda) : \begin{cases} C^\infty(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}} \otimes |N^*\partial\bar{X}|^{n-\lambda}) & \rightarrow C^\infty(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}} \otimes |N^*\partial\bar{X}|^\lambda) \\ f & \rightarrow (x^{\frac{n}{2}} F_2(\lambda))|_{\partial\bar{X}} |dx|^\lambda \end{cases}$$

avec les notations de (3.2). Là encore on va oublier la dépendance par rapport à x et le fibré conormal qui la contrôle puisque ça n'a pas d'incidence pour la suite.

Joshi et Sá Barreto [19] montrent que $S(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et a pour noyau de Schwartz

$$s(\lambda) := (2\lambda - n) (\beta_\partial)_* \left(\beta^* \left(x^{-\lambda + \frac{n}{2}} x'^{-\lambda + \frac{n}{2}} r(\lambda) \right) \Big|_{\mathcal{T} \cap \mathcal{B}} \right) \quad (3.11)$$

Notons que cette restriction est bien définie comme distribution L^1 dans $\Re(\lambda) \ll \frac{n}{2}$ et $\lambda \notin \mathcal{R}_g \cup Z_-^1 \cup Z_-^2$, mais elle admet aussi un prolongement holomorphe à $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{R}_g \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z})$. En effet, en utilisant (2.55) et (3.11), on a

$$s(\lambda) = (\beta_\partial)_* \left(r^{-2\lambda} k_1(\lambda) \right) + k_2(\lambda) \quad (3.12)$$

$$k_1(\lambda) := (2\lambda - n) ((\rho\rho')^{-\lambda + \frac{n}{2}} R^n r_1(\lambda)) \Big|_{\mathcal{T} \cap \mathcal{B}} \in C^\infty(\partial\bar{X} \times_0 \partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})$$

$$k_2(\lambda) := (2\lambda - n) ((xx')^{-\lambda + \frac{n}{2}} r_2(\lambda)) \Big|_{x=x'=0} \in C^\infty(\partial\bar{X} \times \partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})$$

$k_1(\lambda)$ et $k_2(\lambda)$ sont respectivement holomorphe et méromorphe dans $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (Z_-^1 \cup Z_-^2)$. Pour $\Re(\lambda) \ll \frac{n}{2}$ et $\lambda \notin (\mathcal{R}_g \cup Z_-^1 \cup Z_-^2)$, $s(\lambda)$ est alors une distribution conormale polyhomogène d'ordre -2λ associée à la diagonale B de $\partial\bar{X}$ et $S(\lambda)$ est un opérateur pseudo-différentiel polyhomogène d'ordre $2\lambda - n$ sur $\partial\bar{X}$. Suivant la définition [36, Def. 11.2] de Shubin, $S(\lambda)$ est une famille holomorphe dans

$$\left\{ \Re(\lambda) < \frac{n}{2} \right\} \setminus (\mathcal{R}_g \cup Z_-^1 \cup Z_-^2)$$

d'opérateur pseudo-différentiels d'ordre 0, par conséquent $S(\lambda)$ est holomorphe dans le même ouvert à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}}))$. Le prolongement de $r^{-2\lambda} k_1(\lambda)$ à $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{R}_g \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z})$ est donné par le prolongement des distributions du type $|Y|^{-2\lambda+j}$ (avec $j \in \mathbb{N}_0$) dans \mathbb{R}^n [18, Th. 3.2.4], ceci en localisant dans les cartes sur $\partial\bar{X}$.

Le symbole principal de $S(\lambda)$ est donné par Joshi et Sá Barreto [19]:

$$\sigma_0(S(\lambda)) = c(\lambda) \sigma_0(\Upsilon^{2\lambda-n}) \quad (3.13)$$

$$\Upsilon := (1 + \Delta_{h_0})^{\frac{1}{2}}, \quad c(\lambda) := 2^{n-2\lambda} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - \lambda)}{\Gamma(\lambda - \frac{n}{2})}$$

ce qui nous amène à poser la factorisation (voir Perry [32], Perry-Patterson [30] ou Guillopé-Zworski [16] pour une approche similaire)

$$\tilde{S}(\lambda) := c(n - \lambda) \Upsilon^{-\lambda + \frac{n}{2}} S(\lambda) \Upsilon^{-\lambda + \frac{n}{2}}$$

et $\tilde{S}(\lambda)$ s'exprime sous la forme

$$\tilde{S}(\lambda) = 1 + K(\lambda)$$

où $K(\lambda)$ est une famille d'opérateurs compacts pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{R}_g \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z})$.

Rappelons de plus les équations fonctionnelles satisfaites par $S(\lambda)$ et $\tilde{S}(\lambda)$ sur l'axe $\{\Re(\lambda) = \frac{n}{2}\} \setminus \{\frac{n}{2}\}$ (cf. [12])

$$S^{-1}(\lambda) = S(n - \lambda) = S(\lambda)^*, \quad \tilde{S}^{-1}(\lambda) = \tilde{S}(n - \lambda) = \tilde{S}(\lambda)^* \quad (3.14)$$

ce qui montre que $S(\lambda)$ est régulière sur la droite critique $\{\Re(\lambda) = \frac{n}{2}\}$.

L'équation $S^{-1}(\lambda) = S(n - \lambda)$ va redonner le prolongement méromorphe de $S(\lambda)$ au feuillet non-physique si l'on sait inverser $1 + K(\lambda)$, et cette inversion peut être traitée par le théorème de Fredholm analytique. Cette méthode est utilisée par Perry [32], Perry-Patterson [30] ou Cuevas-Vodev [8] par exemple. Pour cela il nous faut étudier les propriétés de méromorphie de $K(\lambda)$, naturellement héritées de $S(\lambda)$, dans un voisinage du feuillet physique \mathcal{O}_0 . L'un des points particulièrement importants concernant l'opérateur de diffusion sur ces variétés est qu'il a des pôles dans le feuillet physique \mathcal{O}_0 qui ne proviennent pas des valeurs propres L^2 . On observe déjà ces pôles sur le symbole principal de $S(\lambda)$ en (3.13). Ces pôles proviennent en fait du prolongement de $r^{-2\lambda}k_1(\lambda)$ c'est-à-dire du prolongement des distributions $|Y|^{-2\lambda+j}$ sur \mathbb{R}^n (cf. [18, Th. 3.2.4]). Ils sont étudiés en détail par Graham et Zworski [12, Prop. 3.6] en utilisant la construction de l'opérateur de Poisson discutée auparavant. En notant

$$\lambda_j := \frac{n+j}{2} \quad (3.15)$$

Graham et Zworski montrent la

Proposition 3.1. *L'opérateur de diffusion $S(\lambda)$ a toujours des pôles d'ordre 1 sur Z_+^2 et au plus des pôles d'ordre 1 sur Z_+^1 , les résidus aux points $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ étant*

$$Res_{\lambda_j} S(\lambda) = \Pi_{\lambda_j} - p_j, \quad p_j := Res_{\lambda_j} (p_{j,\lambda}) \quad (3.16)$$

avec $p_{j,\lambda}$ défini en (3.7) et Π_{λ_j} est l'opérateur de rang fini ayant pour noyau de Schwartz

$$\pi_{\lambda_j} := (2\lambda_j - n) ((xx')^{-\lambda_j + \frac{n}{2}} Res_{\lambda_j} r(\lambda)) |_{\partial \bar{X} \times \partial \bar{X}} \quad (3.17)$$

Les p_j sont des opérateurs différentiels sur $\partial \bar{X}$ et sont donc de rang infini ou nuls. En fait, il est facile de voir que les p_{2j} ne sont jamais nuls, ce qui implique la présence de pôles d'ordre 1 de multiplicité infinie pour $S(\lambda)$ sur $(\lambda_{2j})_{j \in \mathbb{N}} = Z_+^2$.

Pour $i \in \mathbb{R}$, on note $H^i(\partial \bar{X}) := H^i(\partial \bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})$ l'espace de Sobolev d'indice i sur $\partial \bar{X}$.

Lemme 3.2. *Pour tout $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ et $\alpha > 0$:*

$$K(\lambda) \in \mathcal{H}ol(\mathcal{O}_\epsilon \setminus (Z_+^1 \cup \mathcal{R}_g), \mathcal{L}(L^2(\partial \bar{X}), H^{1-\alpha}(\partial \bar{X}))) \quad (3.18)$$

En chaque point $\lambda_{2j+1} \in Z_+^1$ avec $j \in \mathbb{N}_0$, $K(\lambda)$ est régulier ou a un pôle d'ordre 1.

Preuve: soit $\Psi^m(\partial \bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})$ l'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m sur $\partial \bar{X}$, agissant sur les demi-densités. La distribution $(\beta_\partial)_*(r^{-2\lambda}k_1(\lambda))$ est méromorphe dans \mathcal{O}_ϵ avec des pôles d'ordre 1 sur $\frac{1}{2}(n + \mathbb{N})$ dont le résidu peut engendrer un opérateur de rang infini (cf. [18, Th. 3.2.4] par exemple). En divisant par $\Gamma(\frac{n}{2} - \lambda)$, on tue les pôles situés sur $\frac{n}{2} + \mathbb{N}$ et suivant la définition de M.Shubin [36, Def. 11.2], les opérateurs $(\Gamma(\frac{n}{2} - \lambda))^{-1}S(\lambda)$ forment une famille holomorphe

$$\frac{S(\lambda)}{\Gamma(\frac{n}{2} - \lambda)} \in \mathcal{H}ol\left(\mathcal{O}_\epsilon \setminus (Z_+^1 \cup \mathcal{R}), \Psi^{2\Re(\lambda) + n + \alpha}(\partial \bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})\right), \quad \forall \alpha > 0$$

Cela se vérifie aisément dans chaque carte en calculant par transformation de Fourier locale le symbole total (local) de $(\Gamma(\frac{n}{2} - \lambda))^{-1}S(\lambda)$: les propriétés de (3.12) en font un symbole polyhomogène pour chaque λ , à dépendance holomorphe en λ au sens de M.Shubin.

On tire donc des propriétés de $\Upsilon^{2\lambda-n}$ (cf. [36, Th. 1.11]), de (3.13) et de la composition des opérateurs pseudo-différentiels holomorphes que $K(\lambda)$ vérifie

$$K(\lambda) \in \mathcal{H}ol\left(\mathcal{O}_\epsilon \setminus (Z_+^1 \cup \mathcal{R}), \Psi^{-1+\alpha}(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})\right), \quad \forall \alpha > 0$$

Enfin (3.18) en découle immédiatement en utilisant les critères de continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés compactes.

En ce qui concerne la nature des points de Z_+^1 , c'est une conséquence directe de la Proposition 3.1 mais on peut aussi le voir simplement sur la distribution $r^{-2\lambda}k_1(\lambda)$. \square

3.2 Equivalences entre méromorphies

Dans cette partie on montre comment les propriétés de méromorphies de $R(\lambda)$ et $S(\lambda)$ sont liées.

La première étape est de montrer que l'équation de Green obtenue par Agmon [2], Perry [31, Th. 5.3 et 6.3] et Guillopé [13] sur des variétés hyperboliques reste vraie dans notre cadre.

Lemme 3.3. *Pour $N > \frac{n}{2}$, on a dans l'ouvert*

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C}; n - N < \Re(\lambda) < \frac{n}{2}, \lambda, n - \lambda \notin (Z_-^1 \cup Z_-^2 \cup \mathcal{R}_g) \right\} \quad (3.19)$$

l'égalité holomorphe suivante sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)$

$$R(\lambda) - R(n - \lambda) = (2\lambda - n)^t E(n - \lambda) S(\lambda) E(n - \lambda) \quad (3.20)$$

Preuve : on prouve d'abord que pour $\lambda, n - \lambda \notin (\mathcal{R}_g \cup Z_-^1 \cup Z_-^2)$, $m, m' \in X$ et $m \neq m'$, on a

$$r(\lambda; m, m') - r(n - \lambda; m, m') = (n - 2\lambda) \int_{\partial\bar{X}} e(\lambda; \cdot, m) e(n - \lambda; \cdot, m') \quad (3.21)$$

En conjuguant par les sections des fibrés de demi-densités on va considérer les noyaux de Schwartz $r(\lambda), e(\lambda)$ comme des fonctions L_{loc}^1 sur $X \times X$ et $X \times \partial\bar{X}$ par rapport aux mesures $dvol_g \otimes dvol_g$ et $dvol_g \otimes dvol_{h_0}$. La formule de Green donne

$$\int_{\partial\Omega} r(\lambda; z, m) \partial_n r(n - \lambda; z, m') - \partial_n r(\lambda; z, m) r(n - \lambda; z, m') d\sigma(z) = 0$$

avec $\partial\Omega := S_\epsilon(m) \cup S_\epsilon(m') \cup \Sigma_t$ où $S_\epsilon(m)$ est la sphère de rayon ϵ centrée en m , $\Sigma_t = \{x = t\}$ et ∂_n est la dérivation par rapport au vecteur normal unitaire (pointant vers l'extérieur du contour). Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ les intégrales sur les sphères donnent

$$r(\lambda; m, m') - r(n - \lambda; m, m')$$

en utilisant que $(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))_z r(\lambda; z, m) = \delta(z - m)$ et $(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))_z r(n - \lambda; z, m) = \delta(z - m)$. Maintenant on remarque que sur Σ_t on a $\partial_n = x\partial_x$ car

$$|x\partial_x|_g = 1, \quad g(x\partial_x, \partial_{y_i}) = 0$$

avec $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ un système de coordonnées locales sur $\partial\bar{X}$. De plus sur Σ_t la mesure $d\sigma$ s'écrit $d\sigma = t^{-n} d\text{vol}_{h_t}$. Enfin, à $m' \in X$ fixé et $z = (x, y) \in U = [0, \epsilon) \times \partial\bar{X}$

$$z \rightarrow r(\lambda; x, y, m') - x^\lambda e(\lambda; y, m') \in x^{\lambda+1} C^\infty(U)$$

donc en passant à la limite $t \rightarrow 0$, la contribution de l'intégrale sur Σ_t est

$$(n - 2\lambda) \int_{\partial\bar{X}} e(\lambda; y, m) e(n - \lambda; y, m') d\text{vol}_{h_0}(y)$$

et (3.21) est vérifiée. Pour $\Re(\lambda) \ll \frac{n}{2}$, on reprend l'équation (3.21) que l'on multiplie par $x^{-\lambda}(m)$ en faisant tendre m vers $y \in \partial\bar{X}$. Etant donné que $x'^{-\lambda}e(\lambda)$ est continue sur $\partial\bar{X} \times \bar{X}$ pour $\Re(\lambda) \ll \frac{n}{2}$, on obtient à $m' \in X$ fixé et $y \in \partial\bar{X}$

$$e(\lambda; y, m') = - \int_{\partial\bar{X}} s(\lambda; \xi, y) e(n - \lambda; \xi, m') d\text{vol}_{h_0}(\xi) \quad (3.22)$$

En réinjectant les facteurs de demi-densité, on peut réécrire (3.21) et (3.22) sous la forme

$$R(\lambda) - R(n - \lambda) = (n - 2\lambda)^t E(\lambda) E(n - \lambda), \quad E(\lambda) = -{}^t S(\lambda) E(n - \lambda) \quad (3.23)$$

au sens des opérateurs continus de $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ dans $C^{-\infty}(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ et de $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ dans $C^{-\infty}(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})$. On combine alors (3.23), les propriétés méromorphes (3.10), (A.1) et le fait que $S(\lambda)$ soit une famille holomorphe d'opérateurs bornés sur $L^2(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})$ dans l'ouvert (3.19) pour en déduire (3.20) par le principe du prolongement analytique. \square

On peut maintenant énoncer la

Proposition 3.4. *Soit $U \subset \{\Re(\lambda) < \frac{n}{2}\}$ un ouvert, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $R(\lambda)$ est méromorphe dans U .
- (2) $S(\lambda)$ est méromorphe dans U .
- (3) $\tilde{S}(\lambda)$ est méromorphe dans U .

Si de plus $U \cap Z_-^2 = \emptyset$, on a les équivalences suivantes :

- (4) $R(\lambda)$ est méromorphe-finie dans U .
- (5) $S(\lambda)$ est méromorphe-finie dans U .
- (6) $\tilde{S}(\lambda)$ est méromorphe-finie dans U .
- (7) $\tilde{S}(n - \lambda)$ est méromorphe-finie dans U .

Par contre, si $U \cap Z_-^2 \neq \emptyset$ on a simplement

$$(7) \iff (6) \Rightarrow (5) \iff (4)$$

Preuve : (2) \Rightarrow (1) et (5) \Rightarrow (4) : soit $\lambda_0 \in \{\Re(\lambda) < \frac{n}{2}\}$ et $N > |\Re(\lambda_0)| + \frac{n}{2}$, l'égalité (3.20) est alors vérifiée près de λ_0 sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)$. Sur $\Re(\lambda) < \frac{n}{2}$ les opérateurs $R(n - \lambda)$, $E(n - \lambda)$ et ${}^t E(n - \lambda)$ sont méromorphe-finis ayant pour pôles les $\lambda_e \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_e(n - \lambda_e) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$. On déduit donc de (A.1) les implications (2) \Rightarrow (1) et (5) \Rightarrow (4).

(1) \Rightarrow (2) : soit λ_0 un pôle de $R(\lambda)$ dans $\{\Re(\lambda) < \frac{n}{2}\}$ et $U := B(\lambda_0, \epsilon)$ une boule ouverte centré en λ_0 de rayon ϵ qui ne contient aucun autre pôle de $R(\lambda)$. Les mêmes arguments que ceux du Lemme 3.2 montrent clairement que $S(\lambda)$ est holomorphe dans U à valeur dans $\mathcal{L}(L^2(\partial\bar{X}))$, plus précisément c'est une famille holomorphe d'opérateurs pseudo-différentiels

d'ordre négatif. Dans U , λ_0 est alors le seul pôle de $x^{-\lambda+\frac{n}{2}}R(\lambda)x^{-\lambda+\frac{n}{2}}$ défini comme élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{2\epsilon}^0, \mathcal{H}_{-2\epsilon}^0)$. On a donc dans U

$$x^{-\lambda+\frac{n}{2}}R(\lambda)x^{-\lambda+\frac{n}{2}} = \sum_{i=-p}^{-1} (\lambda - \lambda_0)^i A_i + H(\lambda) \quad (3.24)$$

$$A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{2\epsilon}^0, \mathcal{H}_{-2\epsilon}^0), \quad H(\lambda) \in \mathcal{H}ol(U, \mathcal{L}(\mathcal{H}_{2\epsilon}^0, \mathcal{H}_{-2\epsilon}^0))$$

De plus, les noyaux de Schwartz a_i et $h(\lambda)$ de A_i et $H(\lambda)$ s'expriment comme des intégrales sur le cercle $C(\lambda_0, \frac{\epsilon}{2})$

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\lambda_0, \frac{\epsilon}{2})} (\lambda - \lambda_0)^{-i-1} (xx')^{-\lambda+\frac{n}{2}} r(\lambda) d\lambda \\ h(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\lambda_0, \frac{\epsilon}{2})} (z - \lambda)^{-1} (xx')^{-z+\frac{n}{2}} r(z) dz, \quad |\lambda - \lambda_0| < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

La structure de $r(\lambda)$ implique que $\beta^*(a_i)$ est une distribution conormale (non nécessairement polyhomogène) à \mathcal{F} d'ordre $-2\Re(\lambda_0) + n - \epsilon$, lisse sur $(\mathcal{T} \cup \mathcal{B}) \setminus \mathcal{F}$, alors que $h(\lambda)$ est la somme de $(xx')^{-\lambda+\frac{n}{2}} r_0(\lambda)$ et d'une distribution $h_1(\lambda)$ dont le relèvement $\beta^*(h_1(\lambda))$ a la même structure que les $\beta^*(a_i)$ ($h_1(\lambda)$ est l'intégrale (3.25) avec $r_1(\lambda) + r_2(\lambda)$ à la place de $r(\lambda)$).

En utilisant maintenant la définition de $S(\lambda)$ par son noyau de Schwartz $s(\lambda)$ en (3.11) on trouve

$$\frac{s(\lambda)}{2\lambda - n} = \sum_{k=-p}^{-1} \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{2\pi i} \int_{C(\lambda_0, \frac{\epsilon}{2})} \frac{s(z)}{(2z - n)(z - \lambda_0)^{k+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\lambda_0, \frac{\epsilon}{2})} \frac{s(z)}{(2z - n)(z - \lambda)} dz$$

Puisque $S(\lambda)$ est holomorphe sur $\{\lambda \in \mathbb{C}; 0 < |\lambda - \lambda_0| < \frac{\epsilon}{2}\}$ à valeur dans $\mathcal{L}(L^2(\partial\bar{X}))$, on a

$$\frac{S(\lambda)}{2\lambda - n} = \sum_{k=-p}^{-1} \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{2\pi i} \int_{C(\lambda_0, \frac{\epsilon}{2})} \frac{S(z)}{(2z - n)(z - \lambda_0)^{k+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\lambda_0, \frac{\epsilon}{2})} \frac{S(z)}{(2z - n)(z - \lambda)} dz$$

sur le même ouvert à valeur dans $\mathcal{L}(L^2(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}}))$. La deuxième intégrale étant holomorphe près de λ_0 , on en tire que $S(\lambda)$ admet un développement de Laurent fini en λ_0 . On a donc prouvé (1) \Rightarrow (2).

(4) \Rightarrow (5) : d'après ce qu'on vient de voir il suffit de montrer que si la partie polaire de $R(\lambda)$ est de rang fini alors celle de $S(\lambda)$ l'est aussi. On reprend donc (3.24) en supposant que les A_i sont des opérateurs de rang fini. Le noyau de A_i s'écrit donc sous la forme

$$a_i(x, y, x', y') = \sum_{j=1}^{r_i} \psi_{ij}(x, y) \varphi_{ij}(x', y') \left| \frac{dx dy dx' dy'}{x^{n+1} x'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad \psi_{ij}, \varphi_{ij} \in x^{-\delta} L^2(X, dvol_g)$$

$$\dim \text{Vect}\{\varphi_{ij}; j = 1, \dots, r_i\} = \dim \text{Vect}\{\psi_{ij}; j = 1, \dots, r_i\} = r_i = \text{rang} A_i,$$

Par régularité elliptique, ψ_{ij} et φ_{ij} sont lisses à l'intérieur X de \bar{X} . Puisque les ψ_{ij} sont indépendants, il existe r_i points $m_1, \dots, m_{r_i} \in X$ tels que la matrice $(M_{jk})_{j,k} := (\psi_{ij}(m_k))_{j,k}$ soit de rang r_i . De plus, on a

$$\phi_{ij}(x', y') := \sum_{k=1}^{r_i} \psi_{ik}(m_j) \varphi_{ik}(x', y') \in x^{\frac{n}{2}} C^\infty(\bar{X})$$

étant donné que $a_i \in (xx')^{\frac{n}{2}} C^\infty(\bar{X} \times \bar{X} \setminus B, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$. Or $(\phi_{ij})_{j=1, \dots, r_i}$ est une base de $\text{Vect}\{\varphi_{ij}; j = 1, \dots, r_i\}$, donc

$$\varphi_{ij} \in x^{\frac{n}{2}} C^\infty(\bar{X}), \quad j = 1, \dots, r_i$$

Par le même raisonnement, on obtient le même résultat concernant ψ_{ij} mais avec des points m_j différents. La restriction de a_i sur $x = x' = 0$ est donc explicite et $S(\lambda)$ s'exprime sous la forme

$$S(\lambda) = \sum_{i=-p}^{-1} (\lambda - \lambda_0)^i \sum_{k=1}^{r_i} \psi_{ik}^\# \otimes \varphi_{ik}^\# + H_1^\#(\lambda)$$

où $\psi_{ik}^\#, \varphi_{ik}^\# \in C^\infty(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})$ sont définies par

$$\psi_{ik}^\# = \left(\psi_{ik} \left| \frac{dxdy}{x^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{x=0}, \quad \varphi_{ik}^\# = \left(\varphi_{ik} \left| \frac{dxdy}{x^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{x=0}$$

et $H_1^\#(\lambda)$ est holomorphe près de λ_0 dans $\mathcal{L}(L^2(\partial\bar{X}))$.

(2) \iff (3) : il suffit de remarquer que $c(n - \lambda)\Lambda^{-\lambda + \frac{n}{2}}$ et $\Lambda^{-\lambda + \frac{n}{2}}$ sont méromorphes ainsi que leurs inverses dans $\mathcal{L}(H^p(\partial\bar{X}), H^{p-N}(\partial\bar{X}))$ pour tout $p \in \mathbb{R}$ et $N > -\Re(\lambda) + \frac{n}{2}$, puis d'utiliser (A.1) et le Lemme A.1.

(6) \iff (7) : d'après (3.14), $\tilde{S}(\lambda)$ est unitaire sur $\{\Re(\lambda) = \frac{n}{2}\}$ (et $\lambda \neq \frac{n}{2}$) et donc inversible en un point de \mathbb{C} . Supposons que $\tilde{S}(\lambda) = 1 + K(\lambda)$ soit méromorphe-fini dans U , alors le théorème de Fredholm analytique prouve que $\tilde{S}^{-1}(\lambda) = \tilde{S}(n - \lambda)$ est méromorphe fini dans U . La réciproque est identique.

(6) \Rightarrow (5) : il suffit de remarquer que $c(\lambda)\Lambda^{\lambda - \frac{n}{2}}$ et $\Lambda^{\lambda - \frac{n}{2}}$ sont holomorphes dans U à valeur dans $\mathcal{L}(L^2(\partial\bar{X}))$ et d'utiliser (A.1).

(5) \Rightarrow (6) : si $U \cap Z_-^2 = \emptyset$, $c(n - \lambda)\Lambda^{-\lambda + \frac{n}{2}}$ et $\Lambda^{-\lambda + \frac{n}{2}}$ sont holomorphes dans U à valeurs dans des espaces de Sobolev, donc il suffit d'appliquer (A.1) et le Lemme A.1. \square

3.3 Méromorphie et parité

Pour compléter le Théorème 2.5, on obtient la

Proposition 3.5. *Avec les hypothèses du Théorème 2.6, la résolvante du laplacien se prolonge en une famille méromorphe-finie d'opérateurs*

$$R(\lambda) \in \text{Mer}_f(\mathcal{O}_N \setminus Z_-^1, \mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)), \quad \forall N \geq 0 \quad (3.26)$$

et si g est paire modulo $O(x^{2k+1})$, le prolongement vérifie

$$R(\lambda) \in \text{Mer}_f(\mathcal{O}_N, \mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)), \quad \forall N \in [0, k + \frac{1}{2}) \quad (3.27)$$

Réciproquement si on suppose (3.27) pour $k \geq 2$ alors g est paire modulo $O(x^{2k-1})$.

Avant d'en donner la preuve, on énonce son corollaire immédiat

Théorème 3.6. *Avec les hypothèses du Théorème 2.6, $R(\lambda)$ a un prolongement méromorphe-fini sur \mathbb{C} si et seulement si la métrique g est paire modulo $O(x^\infty)$.*

Preuve de la Proposition (3.5) : d'après (3.14) $\tilde{S}(\lambda)$ est unitaire sur $\{\Re(\lambda) = \frac{n}{2}\}$ (et $\lambda \neq \frac{n}{2}$), $1 + K(\lambda)$ est donc inversible en un point de \mathcal{O}_ϵ . Le théorème de Fredholm analytique permet alors de montrer que

$$\tilde{S}^{-1}(\lambda) = (1 + K(\lambda))^{-1}$$

est méromorphe-fini sur $\mathcal{O}_\epsilon \setminus (Z_+^1 \cup \mathcal{R})$. Enfin l'équation fonctionnelle $\tilde{S}(n - \lambda) = \tilde{S}(\lambda)^{-1}$ sur $\{\Re(\lambda) = \frac{n}{2}\}$ permet de prolonger méromorphiquement $\tilde{S}(\lambda)$

$$\tilde{S}(\lambda) := (1 + K(n - \lambda))^{-1} \in \text{Mer}_f \left(\{\Re(\lambda) < \frac{n}{2} + \epsilon\} \setminus (Z_-^1 \cup (n - \mathcal{R})), \mathcal{L}(L^2(\partial\bar{X})) \right)$$

De plus, il est clair que $(n - \mathcal{R}_g) \cap \{\Re(\lambda) < \frac{n}{2}\}$ est uniquement constitué du spectre discret, c'est-à-dire des λ_e tels que $\lambda_e(n - \lambda_e) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$. Soit λ_e une de ces "valeurs propres" supposée disjointe de $(Z_-^1 \cup Z_-^2)$, alors $(n - \lambda_e)$ est un pôle d'ordre 1 et de multiplicité finie de $R(\lambda)$ donc de $S(\lambda)$ d'après (3.1) et (3.12). On en tire que λ_e est un pôle d'ordre 1 et de multiplicité finie de $K(n - \lambda)$ si $n - \lambda_e \notin Z_+^2$ alors que c'est une valeur régulière de $K(n - \lambda)$ si $n - \lambda_e \in Z_+^2$ (le pôle de $S(\lambda)$ est tué par le facteur Gamma). On conclut donc que $\tilde{S}(\lambda)$ est méromorphe-finie dans $\{\Re(\lambda) < \frac{n}{2}\} \setminus Z_-^1$ et d'après la Proposition 3.4, il en va de même pour $R(\lambda)$.

En utilisant maintenant la Proposition 3.4, on obtient que $R(\lambda)$ est méromorphe-finie sur \mathcal{O}_N si et seulement si les points de $Z_-^1 \cap \mathcal{O}_N$ sont des pôles de rang polaire total fini de $\tilde{S}(n - \lambda)$, c'est-à-dire si et seulement si les points de $Z_+^1 \cap (n - \mathcal{O}_N)$ sont des pôles de rang polaire total fini de $K(\lambda)$. On montre donc le lemme suivant qui découle des résultats de R.Graham et M.Zworski [12] :

Lemme 3.7. *Soit $k \in \mathbb{N}$, (X, g) une variété asymptotiquement hyperbolique et g paire modulo $\mathcal{O}(x^{2k+1})$ que l'on écrit dans un collier $U := (0, \epsilon) \times \partial\bar{X}$ sous la forme*

$$g = x^{-2} \left(dx^2 + \sum_{i=0}^k h_{2i} x^{2i} + h_{2k+1} x^{2k+1} + \mathcal{O}(x^{2k+2}) \right) \quad (3.28)$$

avec $(h_{2i})_{i=0, \dots, k}$ et h_{2k+1} des tenseurs symétriques sur $\partial\bar{X}$. Alors pour $j = 0, \dots, k + 1$ les points $\lambda_{2j+1} = \frac{n+1}{2} + j$ sont au plus des pôles d'ordre 1 de $S(\lambda)$ dont le résidu est

$$\text{Res}_{\lambda_j} S(\lambda) = \Pi_{\lambda_{2j+1}}, \quad j = 0, \dots, k - 1$$

$$\text{Res}_{\lambda_{2k+1}} S(\lambda) = \Pi_{\lambda_{2k+1}} - \frac{(n - \lambda_{2k+1})}{4} \text{Tr}(h_0^{-1} h_{2k+1}) \quad (3.29)$$

$$\text{Res}_{\lambda_{2k+3}} S(\lambda) = \Pi_{\lambda_{2k+3}} - p_{2k+3}$$

où $\Pi_{\lambda_{2j+1}}$ est défini par son noyau de Schwartz en (3.17), h_0^{-1} est la métrique induite par h_0 sur $T^*\partial\bar{X}$ et p_{2k+3} est un opérateur différentiel d'ordre 2 sur $\partial\bar{X}$ dont le symbole principal s'annule seulement si

$$(2 - n(n - \lambda_{2k+1})) \text{Tr}(h_0^{-1} h_{2k+1}) = 0 \quad (3.30)$$

Preuve : rappelons dans un premier temps que pour $m \in \partial\bar{X}$ les tenseurs $h_i(m)$ sont considérés comme des matrices symétriques dans \mathbb{R}^n via le produit scalaire canonique dans la carte, c'est en ce sens là qu'il faut comprendre $\text{Tr}(h_0^{-1} h_{2k+1})$ et ce terme est exactement la trace de l'opérateur linéaire associé à h_{2k+1} via h_0 . Reprenons la construction de l'opérateur de Poisson selon [12], discutée dans la sous-partie 3.1. Dans le collier U on a les relations

$$(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))x^{n-\lambda} = x^{n-\lambda} \mathcal{D}_\lambda$$

$$\mathcal{D}_\lambda := -x^2 \partial_x^2 + \left(2\lambda - n - 1 - \frac{x}{2} \text{Tr}(h^{-1}(x) \partial_x h(x))\right) x \partial_x - \frac{(n-\lambda)x}{2} \text{Tr}(h^{-1}(x) \partial_x h(x)) + x^2 \Delta_{h(x)}$$

et pour $f \in C^\infty(\partial \bar{X})$,

$$\mathcal{D}_\lambda(fx^j) = j(2\lambda - n - j)fx^j + x^j G(\lambda - j)f$$

$$(G(z)f)(x, y) := x^2 \Delta_{h(x)} f(y) - \frac{(n-z)x}{2} \text{Tr}(h^{-1}(x) \partial_x h(x)) f(y)$$

On construit les fonctions $F_j \in C^\infty(\bar{X})$ (pour $j \geq 0$) et $f_j \in C^\infty(\partial \bar{X})$ (pour $j \geq 1$) par la formule de récurrence

$$F_0 = f_0, \quad f_j = \frac{-(x^{-j} \mathcal{D}_\lambda(F_{j-1}))|_{x=0}}{j(2\lambda - n - j)}, \quad F_j = F_{j-1} + f_j x^j, \quad j \geq 1 \quad (3.31)$$

On peut écrire les f_j sous la forme

$$f_j = p_{j,\lambda} f_0$$

où $p_{j,\lambda}$ est un opérateur différentiel sur $\partial \bar{X}$. Les résidus de $S(\lambda)$ sont donnés par 3.1 et il nous faut par conséquent calculer les résidus de $p_{2j+1,\lambda}$ en λ_{2j+1} .

On notera par convention D^k l'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre k sur $\partial \bar{X}$ et par abus de notation D^k désignera aussi tout opérateur différentiel d'ordre k sur $\partial \bar{X}$ dont on n'a pas besoin de connaître l'expression explicite. Posons maintenant

$$K := \text{Tr}(h_0^{-1} h_{2k+1})$$

Dans le développement de Taylor de $G(z)$ en $x = 0$, on utilise l'hypothèse (3.28) et on regroupe les puissances paires de x dans $G_2(z)$ et les puissances impaires dans $G_1(z)$, on a donc $G(z) = G_1(z) + G_2(z)$ avec

$$G_1(z) = -x^{2k+1} \frac{(n-z)(2k+1)}{2} K + x^{2k+3} Q + O(x^{2k+5}) \quad (3.32)$$

$$G_2(z) = x^2 \Delta_{h_0} + x^2 D^0 + O(x^4) \quad (3.33)$$

$$Q \in D^2, \quad \sigma_0(Q)(\xi) = -\langle h_0^{-1} h_{2k+1} h_0^{-1} \xi, \xi \rangle$$

où $\sigma_0(Q)$ désigne le symbole principal de Q . Une première application est que pour tout $f \in C^\infty(\partial \bar{X})$

$$\mathcal{D}_\lambda(x^{2j} f) \text{ est paire modulo } O(x^{2k+2j+1}) \quad (3.34)$$

Montrons par récurrence que F_j est paire en x pour $j = 0, \dots, 2k$. F_0 est paire, supposons maintenant que F_{j-1} est paire pour $j \leq 2k-1$. Si j est pair, (3.31) implique alors trivialement que F_j est paire. D'autre part, F_{j-1} étant paire, (3.34) prouve que $\mathcal{D}_\lambda(F_{j-1})$ est paire modulo $O(x^{2k+1})$. Si j est impair, $x^{-j} \mathcal{D}_\lambda(F_{j-1})$ est alors impaire modulo $O(x^{2k+1-j})$ donc s'annule en $x = 0$ puisque $2k+1-j \geq 2$ par hypothèse sur j . Des définitions de f_j et F_j en (3.6) on obtient finalement que $f_j = 0$ et que $F_j = F_{j-1}$ est paire. On en déduit que $p_{2l+1,\lambda} = p_{2l+1} = 0$ si $l \leq k-1$.

En ce qui concerne f_{2k+1} , la remarque (3.34) montre que le coefficient d'ordre $2k+1$ de $\mathcal{D}_\lambda F_{2k}$ est exactement le coefficient d'ordre $2k+1$ de $\mathcal{D}_\lambda f_0$, à savoir

$$-\frac{(n-\lambda)(2k+1)}{2} K x^{2k+1} f_0$$

Par conséquent $p_{2k+1,\lambda} = \frac{1}{4}(n-\lambda)(\lambda-\lambda_{2k+1})^{-1}K$ et son résidu en λ_{2k+1} vaut

$$p_{2k+1} = \frac{(n-\lambda_{2k+1})}{4}K$$

ce qui prouve (3.29).

Concernant le terme $p_{2k+3,\lambda}$, on ne va s'intéresser qu'à son symbole principal. Pour obtenir f_{2k+3} , il nous faut évaluer le facteur devant x^{2k+3} dans $\mathcal{D}_\lambda(\sum_{i=0}^{2k+2} x^i f_i)$. Mais en remarquant que $f_{2l+1} = 0$ pour $l < k$ et en utilisant (3.34), on voit que les seuls termes ayant une puissance de x^{2k+3} non nulle dans $\mathcal{D}_\lambda(F_{2k+2})$ proviennent de $\mathcal{D}_\lambda f_i$ où $i \in \{0, 2, 2k+1\}$. Considérons donc les trois cas. D'après (3.32), le terme d'ordre x^{2k+3} de $\mathcal{D}_\lambda f_0$ est

$$Qf_0x^{2k+3}$$

De même celui de $\mathcal{D}_\lambda f_2$ est

$$-\frac{1}{2}(n-\lambda+2)(2k+1)Kf_2x^{2k+3} = \frac{(n-\lambda+2)(2k+1)}{4(2\lambda-n-2)}K(\Delta_{h_0} + D^0)f_0x^{2k+3}$$

Enfin pour $\mathcal{D}_\lambda f_{2k+1}$, le terme d'ordre x^{2k+3} provient de $x^{2k+1}G_2(\lambda-2k-1)f_{2k+1}$, c'est donc

$$(\Delta_{h_0} + D^0)f_{2k+1}x^{2k+3} = \frac{(n-\lambda)}{4(\lambda-\lambda_{2k+1})}(\Delta_{h_0} + D^0)Kf_0$$

On obtient alors

$$f_{2k+3} = \frac{-(\lambda-\lambda_{2k+3})^{-1}}{2(2k+3)} \left(Q + \frac{(n-\lambda+2)(2k+1)}{4(2\lambda-n-2)}K\Delta_{h_0} + \frac{(n-\lambda)}{4(\lambda-\lambda_{2k+1})}\Delta_{h_0}K + D^0 \right) f_0$$

Ensuite on prend le résidu en λ_{2k+3} de cette expression et on trouve

$$p_{2k+3} = -\frac{1}{2(2k+3)} \left(Q + \frac{(n-\lambda_{2k+1})}{2}K\Delta_{h_0} + D^1 \right)$$

cet opérateur a donc pour symbole principal

$$\sigma_0(p_{2k+3})(\xi) = -\frac{1}{2(2k+3)} \left\langle -h_0^{-1}h_{2k+1}h_0^{-1}\xi + \frac{(n-\lambda_{2k+1})}{2}Kh_0^{-1}\xi, \xi \right\rangle \quad (3.35)$$

Si $\sigma_0(p_{2k+3}) = 0$ on a

$$h_0^{-1}h_{2k+1} - \frac{(n-\lambda_{2k+1})}{2}K = 0$$

donc en prenant la trace de cette expression on trouve (3.30). \square

Si g est paire modulo $O(x^{2k+1})$, le résidu de $S(\lambda)$ en λ_{2j+1} est de rang fini pour $j = 0, \dots, k-1$ d'après le Lemme 3.7, donc ça reste vrai pour $\tilde{S}(\lambda)$ et la Proposition 3.4 prouve alors $R(\lambda)$ est méromorphe-finie au voisinage des points $(n-\lambda_{2j+1})_{j=0,\dots,k-1}$.

Réciproquement, si $R(\lambda)$ est méromorphe-finie près de ces points (avec $k \geq 2$), la Proposition 3.4 nous dit que $\tilde{S}(\lambda)$ est méromorphe-finie au voisinage des points $(\lambda_{2j+1})_{j=0,\dots,k-1}$. Supposons que g soit paire modulo $O(x^{2l+1})$ avec $l \leq k-2$. Les résidus de $\tilde{S}(\lambda)$ en λ_{2l+1} et λ_{2l+3} doivent alors être de rang fini. Or d'après le Lemme 3.7, ceci implique que $(n-\lambda_{2l+1})\text{Tr}(h_0^{-1}h_{2l+1}) = 0$ et $(2-n(n-\lambda_{2l+1}))\text{Tr}(h_0^{-1}h_{2l+1}) = 0$, donc que $\text{Tr}(h_0^{-1}h_{2l+1}) = 0$. Reprenant alors l'expression du symbole principal de p_{2l+3} dans (3.35), on déduit que $h_{2l+1} = 0$ et donc que g est paire modulo $O(x^{2l+3})$. Puisque g est paire modulo $O(x)$, une récurrence évidente montre que g est paire modulo $O(x^{2k-1})$ et la Proposition 3.5 est démontrée. \square

3.4 Singularités essentielles de la résolvante

En utilisant le Lemme 3.7 on va montrer qu'il existe des métriques asymptotiquement hyperboliques telles que le résidu de $\tilde{S}(\lambda)$ en λ_{2k+1} soit un opérateur injectif (ou de noyau de dimension finie). D'après le Lemme A.2, ceci implique que $\tilde{S}^{-1}(\lambda)$ a une singularité essentielle en λ_{2k+1} .

Proposition 3.8. *Soit $k \in \mathbb{N}_0$ et (X, g) une variété asymptotiquement hyperbolique paire modulo $O(x^{2k+1})$ que l'on écrit sous la forme (3.28). Si $k \neq \frac{n-1}{2}$ et si*

$$\text{mes}\{Tr(h_0^{-1}h_{2k+1}) = 0\} = 0 \quad (3.36)$$

alors $n - \lambda_{2k+1} = \frac{n-1}{2} - k$ est une singularité essentielle de $R(\lambda)$.

Preuve : il s'agit simplement de combiner les Lemmes 3.7 et A.2 et remarquer que pour tout $R \geq 0$ la multiplication par une fonction lisse sur $H^R(\partial\bar{X})$ est injective si l'ensemble des zéros de la fonction est de mesure nulle. Pour montrer que le résidu de $\tilde{S}(\lambda)$ en λ_{2k+1} a un noyau de dimension finie, on utilise que la somme d'un opérateur borné injectif et d'un opérateur borné de rang fini a un noyau de dimension finie. On conclut avec la Proposition 3.4 pour passer de $\tilde{S}(\lambda)$ à $R(\lambda)$. \square

Pour $k = 0$, $m(x, g) := (2n)^{-1}\text{Tr}(h_0^{-1}h_1)$ est exactement la courbure moyenne de $\partial\bar{X}$ dans (\bar{X}, x^2g) , c'est une fonction lisse sur $\partial\bar{X}$ dépendant de x . Cependant elle peut être définie de manière invariante comme une section lisse $m(g)$ du fibré conormal $|N^*\partial\bar{X}|$. C'est-à-dire qu'un changement de fonction qui définit le bord $t = e^\omega x$ (avec $\omega \in C^\infty(\bar{X})$) donne $m(t, g) = e^{-\omega_0}m(x, g)$ où $\omega_0 := \omega|_{\partial\bar{X}}$. Si la courbure moyenne est presque partout non nulle et $n \neq 1$, la Proposition 3.8 montre que $\frac{n-1}{2}$ est une singularité essentielle de $R(\lambda)$.

Soit $\mathcal{M}_{ah}(X)$ l'espace des métriques asymptotiquement hyperboliques sur X . Si x_0 est une fonction qui définit le bord, l'application

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{ah}(X) & \rightarrow \{G \in C^\infty(\bar{X}, S_+^2(T^*\bar{X})); |dx_0|_G = 1 \text{ sur } \partial\bar{X}\} \\ g & \rightarrow x_0^2g \end{cases}$$

est bijective et on identifiera ces deux espaces. $\mathcal{M}_{ah}(X)$ hérite alors sa topologie C^∞ de celle de $C^\infty(\bar{X}, T^*\bar{X} \otimes T^*\bar{X})$ qui est définie comme d'habitude par des semi-normes $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mesurant les dérivées des tenseurs (\bar{X} est compact). Il n'est pas difficile de voir que la courbure moyenne $m(\cdot)$ est continue de $\mathcal{M}_{ah}(X)$ dans $C^\infty(\partial\bar{X}, |N^*\partial\bar{X}|)$.

Théorème 3.9. *Soit \bar{X} une variété compacte à bord de dimension $n+1 > 2$. Alors l'ensemble des métriques de $\mathcal{M}_{ah}(X)$ pour lesquelles $\frac{n-1}{2}$ est une singularité essentielle de $R(\lambda)$ contient un ouvert dense de $\mathcal{M}_{ah}(X)$.*

Preuve: d'après le théorème de Thom, l'ensemble des fonctions de Morse sur $\partial\bar{X}$ est ouvert et dense dans $C^\infty(\partial\bar{X})$ et il en va de même pour les sections de Morse de $C^\infty(\partial\bar{X}, |N^*\partial\bar{X}|)$. On note alors V ce sous-ensemble de $C^\infty(\partial\bar{X}, |N^*\partial\bar{X}|)$. Si $s \in V$ il est clair que $\text{mes}(s^{-1}(0)) = 0$, donc $m^{-1}(V)$ est un ensemble ouvert de $\mathcal{M}_{ah}(X)$ contenant l'ensemble des métriques de $\mathcal{M}_{ah}(X)$ telles que $R(\lambda)$ a une singularité essentielle en $\frac{n-1}{2}$. Il reste à montrer que $m^{-1}(V)$ est dense dans $\mathcal{M}_{ah}(X)$.

On vérifie d'abord que $m(\cdot)$ est surjective. Soit $g_0 \in \mathcal{M}_{ah}(X)$ que l'on écrit sous forme modèle

$$g_0 = x^{-2}(dx^2 + h_0 + h_1x + O(x^2))$$

avec $x \in Z_g(\partial\bar{X})$. Soit

$$g_{\epsilon, \varphi} := g_0 + x^{-1}h_0\varphi\chi(\epsilon^{-1}x) \quad (3.37)$$

avec $\epsilon > 0$, $\varphi \in C^\infty(\partial\bar{X})$ et $\chi \in C_0^\infty([0, 2])$ telle que $\chi(t) = 1$ si $t \leq \frac{1}{2}$ et $\chi(t) = 0$ si $t \geq 1$. $g_{\epsilon, \varphi}$ est une métrique asymptotiquement hyperbolique si ϵ est choisi suffisamment petit (mais dépendant de $\sup_{\partial\bar{X}} |\varphi|$). En fait, ϵ peut être pris indépendant de φ si $|\varphi| \leq 1$, on le notera ϵ_0 . On a donc

$$m(g_{\epsilon, \varphi}) = m(g_0) + \varphi|dx|$$

et chaque section $f|dx|$ de $C^\infty(\partial\bar{X}, |N^*\partial\bar{X}|)$ s'écrit $m(g_{\epsilon, \varphi})$ en prenant $\varphi := f - m(g_0)|dx|^{-1}$ (avec la notation (3.37)).

Soit $g_0 \in \mathcal{M}_{ah}(X)$, $\psi_0 := m(g_0)$, ϵ_0 défini comme avant et $B(g_0) := \cap_{i \in I} B_i(g_0, r_i)$ une intersection finie dans $\mathcal{M}_{ah}(X)$ de 'semi-boules ouvertes' centrées en g_0 de rayon r_i pour les semi-normes N_i . Soit I_0 le plus grand nombre de dérivées de la métrique mesurées par les semi-normes $(N_i)_{i \in I}$. Puisque V est dense dans $C^\infty(\partial\bar{X}, |N^*\partial\bar{X}|)$, on peut trouver une section de Morse s dans tout voisinage ouvert $W(\psi_0)$ de ψ_0 . On prend alors pour $W(\psi_0)$ une intersection finie de 'semi-boules ouvertes' centrées en ψ_0 pour des semi-normes de $C^\infty(\partial\bar{X}, |N^*\partial\bar{X}|)$ qui contrôlent les I_0 premières dérivées des sections sur $\partial\bar{X}$. Les rayons de ces semi-boules peuvent être choisis suffisamment petits (dépendant des $(r_i)_{i \in I}$) tels que pour toute section $s \in W(\psi_0)$ le tenseur $g_{\epsilon_0, \varphi}$ défini dans (3.37) avec $\varphi := (s - \psi_0)|dx|^{-1}$ soit dans $B(g_0)$. Il est clair que $g_{\epsilon_0, \varphi}$ est une métrique puisque nous sommes dans le cas où $\sup_{\partial\bar{X}} |\varphi|$ est petit (on peut donc supposer $|\varphi| \leq 1$). Puisque $m(g_{\epsilon_0, \varphi}) = s$, il existe une métrique dans $m^{-1}(V) \cap B(g_0)$. On conclut que $m^{-1}(V)$ est dense dans $\mathcal{M}_{ah}(X)$. \square

Concernant $n - \lambda_{2k+1} = \frac{n-1}{2} - k$ avec $k > 0$, le même résultat tient si l'on se restreint au sous-espace de $\mathcal{M}_{ah}(X)$ des métriques paires modulo $O(x^{2k+1})$, ceci en utilisant le calcul des résidus de $S(\lambda)$ en λ_{2k+1} dans le Lemme 3.7 et les mêmes arguments que pour $k = 0$.

Remarque: supposons que $\partial\bar{X}$ soit connexe et qu'il existe un voisinage analytique de $\partial\bar{X}$ dans \bar{X} , on peut alors prendre une fonction x définissant le bord qui est analytique près de $\partial\bar{X}$. Si x^2g est analytique pour une métrique $g \in \mathcal{M}_{ah}(X)$, alors $m(g)$ est analytique sur $\partial\bar{X}$ et

$$\text{mes}(\{m(g) = 0\}) > 0 \iff m(g) = 0$$

Si $n \geq 2$ et $m(g)$ n'est pas identiquement nul, $n - \lambda_1 = \frac{n-1}{2}$ est une singularité essentielle de $R(\lambda)$ en utilisant la Proposition 3.8. D'un autre côté si $m(g) = 0$, les arguments précédant le Lemme 3.7 prouvent que $R(\lambda)$ est méromorphe-finie près de $n - \lambda_1$. Par conséquent on obtient que

$$R(\lambda) \text{ est méromorphe près de } \frac{n-1}{2} \iff \partial\bar{X} \text{ est minimale dans } (\bar{X}, x^2g)$$

la minimalité de $\partial\bar{X}$ ne dépendant pas du choix de x .

Un cas particulier: supposons que $n = 1$, que $g \in \mathcal{M}_{ah}(X)$ est analytique près de $\partial\bar{X}$ avec $\partial\bar{X}$ connexe. Alors $S(\lambda)$ est holomorphe en $\lambda_1 = 1$ d'après le Lemme 3.7 et le fait que $0 \notin \sigma_{pp}(\Delta_g)$. De plus, il existe une fonction analytique près de $\partial\bar{X}$ qui définit le bord telle que

$$x^2g = dx^2 + \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i, \quad h_i \in C^\infty(\partial\bar{X}, S^2(T^*\partial\bar{X})) \quad (3.38)$$

près de $\partial\bar{X}$. Si g est paire modulo $O(x^{2k+1})$ avec $k \geq 1$, la remarque précédente et le Lemme 3.7 impliquent que $R(\lambda)$ est méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \cup_{i>k} \{n - \lambda_{2i+1}\}$ si et seulement si $h_{2k+1} = 0$. Si on considère l'espace des métriques paires modulo $O(x^3)$ (i.e. telles que $\partial\bar{X}$ soit géodesique de (\bar{X}, x^2g)) on obtient par récurrence que $R(\lambda)$ est méromorphe si et seulement si g est paire et dans ce cas les pôles sont de multiplicité finie.

3.5 Exemples avec point d'accumulation de résonances

Avant d'expliciter l'exemple, il est utile de remarquer que l'on peut facilement construire une variété asymptotiquement hyperbolique telle que (3.29) soit une constante non nulle. Dans ce cas le Lemme 3.7 implique que $S(\lambda)$ a un pôle de multiplicité infinie en $\lambda_k = \frac{n+1}{2} + k$ dont le résidu est une constante non nulle. Après 'renormalisation', $S(\lambda)$ s'écrit donc près de λ_k sous la forme

$$\tilde{S}(\lambda) = 1 + c_k \frac{\Lambda^{-1-2k}}{\lambda - \lambda_k} + H(\lambda)$$

avec $c_k \neq 0$ et $H(\lambda)$ holomorphe compact. Si $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de vecteurs propres de Λ sur $L^2(\partial\bar{X})$ associés aux valeurs propres $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $H(\lambda)\phi_j$ converge fortement vers 0 quand $j \rightarrow \infty$, donc à j fixé assez grand, $H(\lambda)\phi_j$ devient négligeable dans l'expression de $\tilde{S}(\lambda)\phi_j$ pour λ proche de λ_k . Si $H(\lambda)$ était nul, on aurait

$$\tilde{S}(\lambda)^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda - \lambda_k + c_k \alpha_j^{-1-2k}} \phi_j \langle \cdot, \phi_j \rangle$$

Autrement dit, la famille d'opérateurs $(1 + c_k \frac{\Lambda^{-1-2k}}{\lambda - \lambda_k})^{-1}$ a une suite de pôles $z_j = \lambda_k - c_k \alpha_j^{-1-2k}$ qui tend vers λ_k . La clé pour contrôler la 'petite' perturbation $H(\lambda)$ sera d'appliquer le théorème de Rouché.

Proposition 3.10. *Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $k \neq \frac{n-1}{2}$, il existe une variété asymptotiquement hyperbolique de dimension $n+1$ telle que le prolongement (3.26) ait une suite de pôles qui convergent vers $\frac{n-1}{2} - k$.*

Preuve : montrons que les singularités Z_-^1 peuvent être limite d'une suite de résonances. Pour cela on se donne $k \in \mathbb{N}_0$ vérifiant $2k \neq n-1$ et le collier $U := (0, 2) \times S^n$ muni de la métrique

$$g := x^{-2}(dx^2 + d(x)h_0)$$

$$d(x) := \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 + \chi(x)x^{2k+1}$$

où $h_0 := g_{S^n}$ est la métrique canonique sur S^n , puis $\chi \in C^\infty([0, 2])$ une fonction positive telle que $\chi(x) = 1$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\chi(x) = 0$ pour $x \in [1, 2]$. Soit $B_{n+1} := \{m \in \mathbb{R}^{n+1}; |m| < 1\}$ et le difféomorphisme

$$S^n \times (0, 2) \xrightarrow{\psi^{-1}} B_{n+1} \setminus \{0\}$$

$$(\omega, x) \rightarrow \frac{2-x}{2+x}\omega$$

On vérifie aisément que ψ^*g peut être prolongée à B_{n+1} de manière lisse (c'est la métrique hyperbolique $4|dm|^2(1 - |m|^2)^{-2}$ sur $\{|m| \leq \frac{1}{3}\}$). On note donc (X, G) la variété asymptotiquement hyperbolique obtenue, qui vérifie bien les hypothèses (3.28) : il s'agit en fait de \mathbb{H}^{n+1} perturbé par un $O(x^{2k+1})$ près du bord.

On obtient alors

$$\text{Tr}(h_0^{-1}h_{2k+1}) = n$$

et donc sur le collier U l'expression du laplacien

$$\Delta_g = -x^2 \partial_x^2 + (n-1)x \partial_x + \frac{x^2}{d(x)} \Delta_{h_0} - \frac{n}{2} \frac{d'(x)}{d(x)} x^2 \partial_x$$

Le Lemme 3.7 nous donne que l'opérateur de diffusion $S(\lambda)$ associé à Δ_G a un pôle d'ordre 1 en λ_k de résidu

$$\text{Res}_{\lambda_k} S(\lambda) = -\frac{n(n-\lambda_k)}{4} + \Pi_{\lambda_k} \quad (3.39)$$

où Π_{λ_k} est un opérateur de rang fini sur $L^2(S^n)$ dont on peut détailler la structure

$$\Pi_{\lambda_k} = \sum_{l=1}^m \varphi_l \otimes \varphi_l, \quad \varphi_l \in C^\infty(S^n) \subset L^2(S^n)$$

Soit $(v_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ les valeurs propres de Δ_{h_0} (répétées avec multiplicité) et $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ les vecteurs propres orthonormés associés. Etant donné que G est une métrique radiale sur B_{n+1} , le laplacien sur cette variété se décompose en une somme directe

$$\Delta_G \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} P_j, \quad P_j := -x^2 \partial_x^2 + (n-1)x \partial_x + \frac{x^2}{d(x)} v_j - \frac{n}{2} \frac{d'(x)}{d(x)} x^2 \partial_x$$

sur

$$L^2(X, \text{dvol}_G) \cong l^2 \left(\mathbb{N}_0, L^2 \left((0, 2], \frac{d(x)^{\frac{n}{2}}}{x^{n+1}} dx \right) \right)$$

avec condition de Dirichlet singulière en $x = 2$. On en déduit que la résolvante et l'opérateur de diffusion se décomposent en une somme directe

$$R(\lambda) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} (P_j - \lambda(n-\lambda))^{-1}, \quad S(\lambda) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} S_j(\lambda)$$

Rappelons d'autre part que l'expression du symbole principal de $S(\lambda)$ en (3.13) nous permet de factoriser

$$c(n-\lambda) \Lambda^{-\lambda + \frac{n}{2}} S(\lambda) \Lambda^{-\lambda + \frac{n}{2}} = 1 + K(\lambda)$$

avec $K(\lambda)$ une famille méromorphe d'opérateurs compacts sur $L^2(S^n)$. Etant donnée l'expression du résidu (3.39), on obtient pour λ dans un voisinage V_k de λ_k

$$1 + K(\lambda) = 1 + \frac{K_{\lambda_k}}{\lambda - \lambda_k} + H(\lambda)$$

$$K_{\lambda_k} := c(n-\lambda_k) \left(-\frac{n(n-\lambda_k)}{4} \Lambda^{-1-2k} + \Lambda^{-\frac{1}{2}-k} \Pi_{\lambda_k} \Lambda^{-\frac{1}{2}-k} \right)$$

$$H(\lambda) \in \mathcal{H}ol(V_k, \mathcal{L}(L^2(S^n), H^{1-\epsilon}(S^n))), \quad \forall \epsilon > 0 \quad (3.40)$$

En utilisant la décomposition de $S(\lambda)$ sur les modes de Fourier de S^n , on a

$$K(\lambda) \phi_j = K_j(\lambda) \phi_j, \quad K_j(\lambda) := \langle K(\lambda) \phi_j, \phi_j \rangle$$

$$H(\lambda) \phi_j = H_j(\lambda) \phi_j, \quad H_j(\lambda) := \langle H(\lambda) \phi_j, \phi_j \rangle$$

avec $H_j(\lambda)$ holomorphe sur V_k , et vérifiant sur V_k

$$\begin{aligned} |H_j(\lambda)| &\leq |\langle \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} H(\lambda) \phi_j, \phi_j \rangle| \\ &\leq \| \Lambda^{\frac{1}{2}} H(\lambda) \phi_j \| \alpha_j^{\frac{1}{2}} \leq C \alpha_j^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où $\alpha_j := (1+v_j)^{-\frac{1}{2}}$ converge vers 0 quand $j \rightarrow \infty$. Notons que (3.40) et la majoration de $\| \Lambda^{\frac{1}{2}} H(\lambda) \|$ sont une simple conséquence de (3.18).

De même Π_{λ_k} laisse invariant $\mathbb{C}\phi_j$ et on a

$$\Pi_{\lambda_k} \phi_j = \beta_j \phi_j, \quad \beta_j := \langle \Pi_{\lambda_k} \phi_j, \phi_j \rangle = \sum_{l=1}^m \langle \varphi_l, \phi_j \rangle \langle \phi_j, \bar{\varphi}_l \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

On en déduit que

$$1 + K_j(\lambda) = 1 + \frac{m_k}{\lambda - \lambda_k} \alpha_j^{1+2k} + H_j(\lambda)$$

$$m_k := c(n - \lambda_k) \left[\frac{n(n - \lambda_k)}{4} + \beta_j \right]$$

Remarquons que si $k > \frac{n-1}{2}$, $\Pi_{\lambda_k} = 0$ puisque $\lambda_k(n - \lambda_k) = \frac{n^2}{4} - (\frac{1}{2} + k)^2 \notin \sigma_{pp}(\Delta_G)$. On vérifie que si $\beta_j = 0$ alors $m_k \neq 0$, donc il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que pour $j \geq J$ on ait $m_k \neq 0$ puisque $\beta_j \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow \infty$. Ainsi on obtient l'expression explicite de l'inverse de $S_j(\lambda)$ pour $j \geq J$ et $\lambda \in V_k$

$$S_j(\lambda)^{-1} = c(n - \lambda) \alpha_j^{2\lambda - n} \frac{\lambda - \lambda_k}{(\lambda - \lambda_k)(1 + H_j(\lambda)) + m_k \alpha_j^{1+2k}}$$

à condition que le dénominateur existe.

Choisissons $\epsilon_0 > 0$ tel que le disque de centre λ_k et de rayon ϵ_0 soit inclus dans V_k et posons $z_j := \lambda_k - m_k \alpha_j^{1+2k}$. Il existe un entier $J_0 \geq J$ tel que le cercle $C(z_j, \frac{\epsilon_0}{2})$ de centre z_j et de rayon $\frac{\epsilon_0}{2}$ soit inclus dans V_k puisque $z_j \rightarrow \lambda_k$ quand $j \rightarrow \infty$. Quitte à changer J_0 , on peut aussi supposer que $|m_k| \alpha_j^{1+2k} \leq \epsilon_0$. Posons alors

$$\epsilon = \frac{|z_j - \lambda_k|}{2} = \frac{|m_k| \alpha_j^{1+2k}}{2}$$

et les deux fonctions holomorphes dans V_k

$$f(\lambda) = \lambda - z_j = \lambda - \lambda_k + m_k \alpha_j^{1+2k}, \quad g(\lambda) = (\lambda - \lambda_k) H_j(\lambda)$$

$f(\lambda)$ a pour unique zéro z_j , et on a sur le cercle $C(z_j, \epsilon)$ de centre z_j de rayon ϵ

$$|f(\lambda)| = \epsilon, \quad \forall \lambda \in C(z_j, \epsilon)$$

$$|g(\lambda)| \leq (|m_k| \alpha_j^{1+2k} + \epsilon) |H_j(\lambda)| \leq C \alpha_j^{\frac{1}{2}} \epsilon, \quad \forall \lambda \in C(z_j, \epsilon)$$

On en déduit qu'il existe un rang $J_1 \geq J_0$ tel que pour $j \geq J_1$

$$|g(\lambda)| < |f(\lambda)|, \quad \forall \lambda \in C(z_j, \epsilon)$$

ce qui nous assure par le théorème de Rouché que $f + g$ a exactement un zéro dans le disque bordé par $C(z_j, \epsilon)$. Or $(f + g)(\lambda_k) = m_k \alpha_j^{1+2k} \neq 0$ donc $S_j(\lambda)^{-1}$ a un unique pôle dans le disque bordé par $C(z_j, \epsilon)$ et $S(\lambda)^{-1}$ a une suite de pôles qui converge vers λ_k . Par la formule d'inversion $S(n - \lambda) = S(\lambda)^{-1}$, on en déduit qu'il existe une suite de résonances qui converge vers $\frac{n-1}{2} - k$. \square

3.6 Un résultat inverse

Dans cette sous-partie, on exploite le calcul des résidus de $S(\lambda)$ sur $\frac{1}{2}(n + \mathbb{N})$ pour montrer que l'ensemble de ces résidus détermine le développement de Taylor de la métrique x^2g .

Joshi-Sa Barreto [19] ont étudié la diffusion inverse sur les variétés asymptotiquement hyperboliques et ils montrent notamment que le développement de Taylor de x^2g sur $\partial\bar{X}$ peut être retrouvé à partir du développement complet du symbole (local) de l'opérateur pseudo-différentiel $S(\lambda)$ à une énergie fixée $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_g \cup \frac{n-\mathbb{Z}}{2})$. Tout d'abord il est clair, d'après (3.16), que le résidu de $S(\lambda)$ en $\frac{n+k}{2}$ dépend seulement des k premiers jets de x^2g sur $\partial\bar{X}$ et ce résidu ne peut donc pas déterminer le développement de Taylor de x^2g en $x = 0$. Par contre on va montrer que l'ensemble des résidus $(\text{Res}_{\frac{n+k}{2}}S(\lambda))_{k \in \mathbb{N}}$ le détermine.

Proposition 3.11. *Soit $\bar{X} = X \cup \partial\bar{X}$ une variété lisse compacte à bord de dimension $n+1$, x une fonction définissant le bord et g^1, g^2 deux métriques asymptotiquement hyperboliques sur X . On pose $S^1(\lambda), S^2(\lambda)$ les opérateurs de diffusion associés à g^1 et g^2 définis à partir de la fonction x . Si il existe $l \in \mathbb{N}_0$ tel que*

$$\text{Res}_{n/2+k/2}S^1(\lambda) - \text{Res}_{n/2+k/2}S^2(\lambda) = 0, \quad 1 \leq k \leq l+2 \quad (3.41)$$

alors $x^2(g^1 - g^2) = O(x^{l+1})$.

Preuve : dans [12] il est montré dans [12] que $\sigma_0(\text{Res}_{\lambda_2}S^i(\lambda)) = -2^{-2}\sigma_0(\Delta_{h_0^i})$ où $h_0^i = x^2g^i|_{\partial\bar{X}}$ et l'hypothèse (3.41) implique que g^1 et g^2 ont le même infini conforme. Il existe donc une fonction $t \in Z_g(\partial\bar{X})$ telle que pour $i = 1, 2$

$$g^i = \frac{dx^2 + h^i(x, y, dy)}{x^2}, \quad h_0^1 = h_0^2$$

dans un collier $U = (0, \epsilon) \times \partial\bar{X}$ près du bord. Comme avant, $h^i(x) := h^i(x, y, dy)$ sera considéré comme une famille de métriques sur $\partial\bar{X}$.

Reprenons la construction et les notations introduites dans la partie 3.1 en y ajoutant l'indice $*$ associé à la métrique g^i .

Supposons alors que

$$h^1(x) - h^2(x) = x^l h_l + O(x^{l+1}), \quad l \geq 1$$

avec h_l un tenseur symétrique sur $\partial\bar{X}$. On remarque alors que $\Delta_{g^1} - \Delta_{g^2} = O(x^l)$ donc $\mathcal{D}_\lambda^1 - \mathcal{D}_\lambda^2 = O(x^l)$ et

$$\mathcal{D}_\lambda^2(F_{l-1}^1) = (-\mathcal{D}_\lambda^1 + \mathcal{D}_\lambda^2)F_{l-1}^1 + \mathcal{D}_\lambda^1 F_{l-1}^1 = O(x^l)$$

Puisque F_{l-1}^i est déterminé de manière unique modulo $O(x^l)$ pour $\lambda \notin \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$, on déduit que $F_{l-1}^1 = F_{l-1}^2$. Rappelons que

$$f_l^1 - f_l^2 = -\frac{(\mathcal{D}_\lambda^1 - \mathcal{D}_\lambda^2)F_{l-1}^1}{l(2\lambda - n - l)x^l} \Big|_{x=0}$$

On va seulement étudier les symboles principaux des résidus de $S^i(\lambda)$, on note donc par D^j tout opérateur différentiel d'ordre j sur $\partial\bar{X}$ que l'on n'a pas besoin de calculer explicitement. Il est facile de voir que

$$G^1(z) - G^2(z) = -x^l \frac{(n-z)^l}{2} T_l + x^{l+1} D^0 + x^{l+2} Q + O(x^{l+3})$$

$$T_l := \text{Tr}(h_0^{-1}h_l)$$

où Q est un opérateur différentiel sur $\partial\bar{X}$ ayant pour symbole principal

$$\sigma_0(Q)(\xi) = -\langle h_0^{-1}h_l h_0^{-1}\xi, \xi \rangle$$

En utilisant (3.5) on obtient

$$f_l^1 - f_l^2 = -\frac{\sum_{j=0}^{l-1} x^j (G^1(\lambda - j) - G^2(\lambda - j)) f_j^1}{2l(\lambda - \lambda_l)x^l} \Big|_{x=0} = \frac{(n - \lambda)T_l f_0}{4(\lambda - \lambda_l)}$$

et (3.16) montre que

$$\text{Res}_{\lambda_l}(S^1(\lambda) - S^2(\lambda)) = -\frac{n-l}{8}T_l + \Pi_{\lambda_l}^1 - \Pi_{\lambda_l}^2 \quad (3.42)$$

On observe que

$$\mathcal{D}_\lambda^1 F_l^1 - \mathcal{D}_\lambda^2 F_l^2 = (\mathcal{D}_\lambda^1 - \mathcal{D}_\lambda^2)F_l^1 + \mathcal{D}_\lambda^2(f_l^1 x^l - f_l^2 x^l)$$

et son terme d'ordre x^{l+1} est donné par $D^0 f_0 + D^0 f_1^1 + D^0(f_l^1 - f_l^2)$, donc

$$f_{l+1}^1 - f_{l+1}^2 = D^0 f_0$$

puisque $f_1^1, f_l^1 - f_l^2$ sont des termes d'ordre 0 en f_0 . De même on a

$$\mathcal{D}_\lambda^1 F_{l+1}^1 - \mathcal{D}_\lambda^2 F_{l+1}^2 = (\mathcal{D}_\lambda^1 - \mathcal{D}_\lambda^2)F_{l+1}^1 + \mathcal{D}_\lambda^2((f_l^1 - f_l^2)x^l + (f_{l+1}^1 - f_{l+1}^2)x^{l+1})$$

et son terme d'ordre x^{l+2} est donné par

$$Q f_0 + D^0 f_1^1 - \frac{(n - \lambda + 2)l}{2}T_l f_2^1 + D^0(f_{l+1}^1 - f_{l+1}^2) + \Delta_{h_0}(f_l^1 - f_l^2)$$

ce qui implique

$$f_{l+2}^1 - f_{l+2}^2 = \frac{-1}{2(l+2)(\lambda - \lambda_{l+1})} \left(Q + \frac{l(n - \lambda + 2)}{4(2\lambda - n - 2)}T_l \Delta_{h_0} + \frac{n - \lambda}{4(\lambda - \lambda_l)}\Delta_{h_0}T_l + D^0 \right) f_0$$

en rappelant que $f_2^1 = -(2(2\lambda - n - 2))^{-1}(\Delta_{h_0} + D^0)f_0$ et $f_1^1 = D^0 f_0$. On conclut que

$$p_{l+2}^1 - p_{l+2}^2 = \frac{-1}{2(l+2)} \left(Q + \frac{n-l}{4}T\Delta_{h_0} + D^1 \right)$$

et le résidu de $S_1(\lambda) - S_2(\lambda)$ en λ_{l+2} a pour symbole principal

$$\sigma_0(\text{Res}_{\lambda_{l+2}}(S^1(\lambda) - S^2(\lambda))) = \frac{-1}{2(l+2)} \left\langle -h_0^{-1}h_l h_0^{-1}\xi + \frac{(n-l)}{4}T_l h_0^{-1}\xi, \xi \right\rangle \quad (3.43)$$

Si (3.42) et (3.43) sont nuls, on trouve alors que

$$(4 - n(n-l))T_l = 0, \quad (n-l)T_l = 0$$

en prenant la trace de (3.43) et en notant que $\Pi_{\lambda_l}^i$ sont des opérateurs régularisants. Ceci prouve que $T = 0$ et donc que $h_l = 0$ d'après (3.43). Une récurrence évidente complète la démonstration. \square

4 Une formule de multiplicité

Le propos de cette partie est de donner une preuve directe et un peu plus générale du résultat de Borthwick et Perry [4] concernant l'équivalence entre multiplicité des résonances et des pôles de diffusion, notamment dans le but de traiter les points de $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$ que leur méthode exclut. Le principe de leur démonstration est d'étudier le cas d'un pôle simple (un pôle d'ordre 1 et de multiplicité 1) et d'utiliser la théorie de perturbation introduite par Agmon [1] pour 'éclater' les pôles multiples en pôles simples. On choisira plutôt la méthode de Guillopé-Zworski [16] qui fait intervenir essentiellement les résultats de Gohberg et Sigal [10], la représentation de $S(\lambda)$ par son noyau (3.11) et la formule de Green (3.20).

4.1 Lemmes préliminaires

Pour simplifier les notations, on posera dorénavant $z(\lambda) = \lambda(n - \lambda)$ la fonction holomorphiquement inversible de $\Re(\lambda) < \frac{n}{2}$ dans $\mathbb{C} \setminus [\frac{n^2}{4}, \infty)$ et $z'(\lambda)$ sa dérivée. Les rappels et notations associés à l'article de Gohberg-Sigal [10] sont donnés dans l'annexe A.3, ainsi que les définitions des multiplicités m_{λ_0} et N_{λ_0} dont on va se servir.

Pour étudier les pôles de $R(\lambda)$ dans $\{\Re(\lambda) < \frac{n}{2}\}$, on utilise les lemmes 2.4 et 2.11 de [16] pour montrer le

Lemme 4.1. *Soit $\lambda_0 \in \mathcal{R}$ et N tel que $\frac{n}{2} > \Re(\lambda_0) > \frac{n}{2} - N$, alors dans un voisinage V_{λ_0} de λ_0 on a la factorisation*

$$R(\lambda) = {}^t\Phi F_1(\lambda) \left(\sum_{j=1}^m (z(\lambda) - z(\lambda_0))^{k_j} P_j \right) F_2(\lambda) \Phi + H(\lambda), \quad (4.1)$$

avec $m \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_m \in -\mathbb{N}$,

$$H(\lambda) \in \mathcal{H}ol(V_{\lambda_0}, \mathcal{L}(x^N L^2(X), x^{-N} L^2(X))), \quad F_i(\lambda) \in \mathcal{H}ol(V_{\lambda_0}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^q)),$$

où $q = -\sum_{j=1}^m k_j = m_{\lambda_0}(z'(\lambda)R(\lambda))$ est la multiplicité de la résonance λ_0 , $(P_j)_{j=1, \dots, m}$ sont des projecteurs orthogonaux sur \mathbb{C}^q tels que $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$ et $\text{rang}(P_j) = 1$, puis Φ est définie par

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{H}_N^0 & \rightarrow \mathbb{C}^q \\ f & \rightarrow ((\psi_l, f))_{l=1, \dots, q} \end{cases}$$

$(\psi_l)_{l=1, \dots, q}$ étant une base de $\text{Im}A$ avec $A := \text{Res}_{\lambda_0}(z'(\lambda)R(\lambda))$. De plus, on a

$$\text{Im}(A) \subset \sum_{j=0}^{p-1} x^{\lambda_0} \log^j(x) C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \quad (4.2)$$

avec p l'ordre du pôle λ_0 de $R(\lambda)$.

Preuve : il suffit de reprendre les lemmes 2.4 et 2.11 de [16] à la différence que l'on factorise la résolvante et non pas l'opérateur de diffusion. Les arguments utilisés sont essentiellement que la partie singulière de $R(\lambda)$ s'exprime sous la forme

$$\Xi_{\lambda_0}(R(\lambda)) = \Xi_{\lambda_0} \left(\sum_{i=1}^p \frac{(\Delta_g - z(\lambda_0))^{i-1} A}{(z(\lambda) - z(\lambda_0))^i} \right)$$

et que $(\Delta_g - z(\lambda_0))|_{\text{Im}A}$ est un endomorphisme p-nilpotent dont la matrice peut donc être mise sous forme de Jordan. Rappelons que par régularité elliptique, les éléments de $\text{Im}A$ sont lisses dans X .

Pour étudier la structure des noyaux de Schwartz a_j de A_j , on définit d'abord l'opérateur

$$\tilde{R}(\lambda) := x^{-\lambda + \frac{n}{2}} R(\lambda) x^{-\lambda + \frac{n}{2}} \quad (4.3)$$

dans un disque $D(\lambda_0, \epsilon)$ centré en λ_0 de rayon ϵ . Si ϵ est choisi assez petit, $\tilde{R}(\lambda)$ est méromorphe dans ce disque à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{2\epsilon}^0, \mathcal{H}_{-2\epsilon}^0)$ et λ_0 en est le seul pôle. Si $v_{\lambda_0}(R(\lambda)) = p$ alors c'est aussi un pôle d'ordre p de $\tilde{R}(\lambda)$. Le noyau de Schwartz $\tilde{r}(\lambda) = (xx')^{-\lambda + \frac{n}{2}} r(\lambda)$ de $\tilde{R}(\lambda)$ est méromorphe et sa partie singulière en λ_0 est celle de

$$(xx')^{-\lambda + \frac{n}{2}} (r_1(\lambda) + r_2(\lambda)) \in (xx')^{\frac{n}{2}} C^\infty(\bar{X} \times \bar{X} \setminus B, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

avec B la diagonale du bord (2.1) et $r_i(\lambda)$ définis dans le Théorème 2.6. On a donc dans V_{λ_0}

$$\Xi_{\lambda_0}(\tilde{R}(\lambda)) = \sum_{j=-p}^{-1} B_j (\lambda - \lambda_0)^j \quad (4.4)$$

où $B_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{2\epsilon}^0, \mathcal{H}_{-2\epsilon}^0)$ a pour noyau de Schwartz

$$b_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\lambda_0, \frac{\epsilon}{2})} \frac{(xx')^{-\lambda + \frac{n}{2}} (r_1(\lambda) + r_2(\lambda))}{(\lambda - \lambda_0)^{j+1}} d\lambda$$

et $C(\lambda_0, \frac{\epsilon}{2})$ est le cercle de centre λ_0 et de rayon $\frac{\epsilon}{2}$. La preuve de la Proposition 3.4 montre que l'on peut écrire le noyau de Schwartz b_j de B_j sous la forme

$$b_j(x, y, x', y') = \sum_{k=1}^{r_j} \psi_{jk}(x, y) \varphi_{jk}(x', y') \left| \frac{dx dy dx' dy'}{x^{n+1} x'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad \psi_{jk}, \varphi_{jk} \in x^{\frac{n}{2}} C^\infty(\bar{X})$$

$$\dim \text{Vect}\{\varphi_{jk}; k=1, \dots, r_j\} = \dim \text{Vect}\{\psi_{jk}; k=1, \dots, r_j\} = r_j = \text{rang} B_j,$$

Maintenant on observe que $x^{\lambda - \frac{n}{2}}$ a pour développement de Taylor en λ_0

$$x^{\lambda - \frac{n}{2}} = x^{\lambda_0 - \frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{p-1} \log^j(x) \frac{(\lambda - \lambda_0)^j}{j!} + O((\lambda - \lambda_0)^p)$$

au sens des opérateurs de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{2\epsilon}^0)$ et de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{-2\epsilon}^0, \mathcal{H}_{-N}^0)$ et donc que $z'(\lambda)R(\lambda)$ a un résidu A vérifiant

$$\text{Im}(A) \subset \sum_{j=0}^{p-1} x^{\lambda_0} \log^j(x) C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$$

ce qui complète la preuve. \square

En utilisant le Lemme 4.1 et (3.12), on obtient alors le

Lemme 4.2. *Soit $\lambda_0 \in \{\Re(\lambda) < \frac{n}{2}\}$ un pôle de $S(\lambda)$. Avec les notations du Lemme 4.1, on a la décomposition suivante près de λ_0*

$$S(\lambda) = (2\lambda - n)^t \Phi^\# F_1(\lambda) \left(\sum_{j=1}^m (z(\lambda) - z(\lambda_0))^{k_j} P_j \right) F_2(\lambda) \Phi^\# + H^\#(\lambda) \quad (4.5)$$

avec $H^\#(\lambda) \in \mathcal{H}ol(V_{\lambda_0}, \mathcal{L}(L^2(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})))$ et $\Phi^\#(\lambda) \in \mathcal{H}ol(V_{\lambda_0}, \mathcal{L}(L^2(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}})), \mathbb{C}^q)$.

Preuve : $\tilde{R}(\lambda)$ étant défini en (4.3), la preuve du Lemme 4.1 montre que la partie singulière de $\tilde{R}(\lambda)$ en λ_0 a un noyau de Schwartz $\Xi_{\lambda_0}(\tilde{r}(\lambda))$ vérifiant

$$\Xi_{\lambda_0}(\tilde{r}(\lambda)) \in (xx')^{\frac{n}{2}} C^\infty(\bar{X} \times \bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \quad (4.6)$$

Soit $\Phi(\lambda) := \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(\lambda-\lambda_0)^i}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} (\Phi x^{-\lambda+\frac{n}{2}})|_{\lambda=\lambda_0}$ au sens des opérateurs de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{2\epsilon}^0, \mathbb{C}^q)$:

$$\Phi(\lambda) : \begin{cases} \mathcal{H}_{2\epsilon}^0 & \rightarrow \mathbb{C}^q \\ f & \rightarrow \left(\sum_{j=0}^{p-1} \frac{(\lambda_0-\lambda)^j}{j!} (\log^j(x) x^{-\lambda_0+\frac{n}{2}} \psi_l, f) \right)_{l=1, \dots, q} \end{cases}$$

et le Lemme 4.1 implique que

$$\Xi_{\lambda_0}(\tilde{R}(\lambda)) = \Xi_{\lambda_0} \left({}^t\Phi(\lambda) F_1(\lambda) \left(\sum_{j=1}^m (z(\lambda) - z(\lambda_0))^{k_j} P_j \right) F_2(\lambda) \Phi(\lambda) \right) \quad (4.7)$$

Soit $C := \sum_{j=-p}^{-1} \text{Im}(B_j)$ avec B_j les opérateurs définis en (4.4) et soit Π_C la projection orthogonale de $x^{-2\epsilon} L^2(X)$ sur C . On multiplie (4.7) à gauche par Π_C et à droite par ${}^t\Pi_C$ ($(\mathbb{C}^q)^* = \mathbb{C}^q$ avec l'identification canonique) et en utilisant que $\Xi_{\lambda_0}(\tilde{R}(\lambda))$ est symétrique (puisque ${}^tR(\lambda) = R(\lambda)$) on déduit que (4.7) est vérifiée si $\Phi(\lambda)$ est remplacée par

$$\begin{cases} x^{2\epsilon} L^2(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) & \rightarrow \mathbb{C}^q \\ f & \rightarrow \left(\sum_{j=0}^{p-1} \frac{(\lambda_0-\lambda)^j}{j!} \langle \Pi_C (\log^j(x) x^{-\lambda_0+\frac{n}{2}} \psi_l), f \rangle \right)_{l=1, \dots, q} \end{cases}$$

de sorte que les termes logarithmiques disparaissent. Finalement, on peut utiliser la représentation de $S(\lambda)$ par son noyau de Schwartz (3.12) et on obtient

$$\Xi_{\lambda_0}(S(\lambda)) = \Xi_{\lambda_0} \left((2\lambda - n) {}^t\Phi^\sharp(\lambda) F_1(\lambda) \left(\sum_{j=1}^m (z(\lambda) - z(\lambda_0))^{k_j} P_j \right) F_2(\lambda) \Phi^\sharp(\lambda) \right)$$

avec

$$\Phi^\sharp(\lambda) : \begin{cases} L^2(\partial\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) & \rightarrow \mathbb{C}^q \\ f & \rightarrow \left(\sum_{j=0}^{p-1} \frac{(\lambda_0-\lambda)^j}{j!} \langle \Pi_C (\log^j(x) x^{-\lambda_0+\frac{n}{2}} \psi_l)|_{\partial\bar{X}}, f \rangle \right)_{l=1, \dots, q} \end{cases},$$

ce qui termine la preuve. \square

De ce lemme, on déduit le

Corollaire 4.3. *Si $\lambda_0 \in \{\Re(\lambda) < \frac{n}{2}\}$ est un pôle de $S(\lambda)$, c'est un pôle de $R(\lambda)$ tel que*

$$m_{\lambda_0}(z'(\lambda)R(\lambda)) \geq N_{\lambda_0} \left(c(n-\lambda) \tilde{S}(n-\lambda) \right) \quad (4.8)$$

avec N_{λ_0} la multiplicité d'annulation définie en (A.6).

Preuve : on peut d'abord réécrire (4.5) sous la forme

$$c(\lambda) \tilde{S}(\lambda) = F_3(\lambda) \left(\sum_{j=1}^m (z(\lambda) - z(\lambda_0))^{k_j} P_j \right) F_4(\lambda) + \tilde{H}^\sharp(\lambda)$$

$$F_3(\lambda) := (2\lambda - n)\Upsilon^{-\lambda + \frac{n}{2}} \Phi^\sharp(\lambda) F_1(\lambda), \quad F_4(\lambda) := F_2(\lambda) \Phi^\sharp(\lambda) \Upsilon^{-\lambda + \frac{n}{2}}$$

$$\tilde{H}^\sharp(\lambda) := (2\lambda - n)\Upsilon^{-\lambda + \frac{n}{2}} H^\sharp(\lambda) \Upsilon^{-\lambda + \frac{n}{2}}$$

Supposons que les k_j soient rangés par ordre croissant et soit $(\varphi_0^{(j)})_{j=1, \dots, M}$ un système canonique de vecteurs propres de $c(n - \lambda)\tilde{S}(n - \lambda)$ en λ_0 avec $(r_j)_{j=1, \dots, M}$ les multiplicités partielles d'annulation associées, rangées par ordre décroissant (notons qu'un système canonique est déduit de celui de $\tilde{S}(n - \lambda)$). Montrons que $M \leq m$, puis par récurrence que $r_j \leq -k_j$ pour tout $j = 1, \dots, M$.

Si $\varphi^{(j)}(\lambda)$ est une fonction racine de $c(n - \lambda)\tilde{S}(n - \lambda)$ en λ_0 correspondant à $\varphi_0^{(j)}$, alors

$$c(n - \lambda)\tilde{S}(n - \lambda)\varphi^{(j)}(\lambda) = (z(\lambda) - z(\lambda_0))^{r_j} \phi^{(j)}(\lambda)$$

avec $\phi^{(j)}(\lambda_0) \neq 0$ donc en faisant tendre λ vers λ_0 dans

$$\varphi^{(j)}(\lambda) = \sum_{l=1}^m (z(\lambda) - z(\lambda_0))^{r_j + k_l} F_3(\lambda) P_l F_4(\lambda) \phi^{(j)}(\lambda) + (z(\lambda) - z(\lambda_0))^{r_j} \tilde{H}^\sharp(\lambda) \phi^{(j)}(\lambda)$$

on trouve que $r_1 \leq -k_1$ et que $\varphi_0^{(j)}$ est dans l'espace vectoriel

$$E_j := \text{Vect}\{F_3(\lambda_0) P_l F_4(\lambda_0) L^2(\partial\bar{X}, \Gamma^{\frac{1}{2}}); r_j \leq -k_l\}$$

De plus, l'ordre sur $(r_j)_{j=1, \dots, M}$ implique que $E_j \subset E_M$ pour tout $j = 1, \dots, M$ mais $\dim E_M \leq m$ puisque P_l est de rang 1, on a donc nécessairement $M \leq m$ car les $\varphi_0^{(j)}$ sont indépendants par hypothèse. Maintenant soit $j \leq M$ et supposons que $r_i \leq -k_i$ pour tout $i \leq j$. Notons d'abord que $E_j \subset E_{j+1}$ puisque $r_{j+1} \leq r_j$. Si $r_{j+1} > -k_{j+1}$, alors $E_j = E_{j+1}$ et c'est un espace de dimension j qui contient les vecteurs indépendants $\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(j+1)}$, donc c'est impossible. On en conclut que $r_{j+1} \leq -k_{j+1}$ et finalement que

$$N_{\lambda_0} \left(c(n - \lambda)\tilde{S}(n - \lambda) \right) = \sum_{j=1}^M r_j \leq - \sum_{l=1}^m k_l = q = m_{\lambda_0}(z'(\lambda)R(\lambda))$$

et le corollaire est démontré. \square

Lemme 4.4. *Soit $\lambda_0 \in \{\Re(\lambda) < \frac{n}{2}\}$ un pôle de $R(\lambda)$ de multiplicité finie. Si $\lambda_0(n - \lambda_0) \notin \sigma_{pp}(\Delta_g)$ ou $\lambda_0 \notin \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$, alors λ_0 est un pôle de $S(\lambda)$ tel que*

$$m_{\lambda_0}(z'(\lambda)R(\lambda)) \leq N_{\lambda_0} \left(c(n - \lambda)\tilde{S}(n - \lambda) \right)$$

Preuve : supposons d'abord que λ_0 ne soit pas pôle de $c(\lambda)$ (i.e. $\lambda_0 \notin Z_-^2$). Près de λ_0 , on écrit donc $\tilde{S}(\lambda)$ sous sa forme factorisée (A.7)

$$c(\lambda)\tilde{S}(\lambda) = U_1(\lambda) \left(P_0 + \sum_{l=1}^m (\lambda - \lambda_0)^{k_l} P_l \right) U_2(\lambda) \quad (4.9)$$

avec $U_1(\lambda), U_2(\lambda)$ des opérateurs holomorphiquement inversibles près de λ_0 et

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_j, \quad \text{rang}(P_l) = 1 \text{ pour } l = 1, \dots, m, \quad 1 = \sum_{j=0}^m P_j, \quad k_l \in \mathbb{Z}^*$$

On reprend alors l'équation de Green reliant la résolvante et la matrice de diffusion (3.20) sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^0)$ avec $n - N < \Re(\lambda) < \frac{n}{2}$. Considérons les développements de Laurent suivants en λ_0 (pour $j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} (n-2\lambda)R(n-\lambda) &= \sum_{i=-1}^{p-1} R_i(\lambda - \lambda_0)^i + O((\lambda - \lambda_0)^p), \\ (2\lambda - n)U_2(\lambda)\Upsilon^{\lambda - \frac{n}{2}}E(n-\lambda) &= \sum_{i=-1}^{p-1} E_i^{(2)}(\lambda - \lambda_0)^i + O((\lambda - \lambda_0)^p), \\ (n-2\lambda)^t E(n-\lambda)\Upsilon^{\lambda - \frac{n}{2}}U_1(\lambda) &= \sum_{i=-1}^{p-1} E_i^{(1)}(\lambda - \lambda_0)^i + O((\lambda - \lambda_0)^p), \end{aligned} \quad (4.10)$$

où R_{-1} et $E_{-1}^{(j)}$ sont non nuls si et seulement si $\lambda_0(n - \lambda_0) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$ et dans ce cas

$$\begin{aligned} R_{-1} &= -\sum_{i=1}^k \phi_i \otimes \phi_i, \\ E_{-1}^{(2)} &= \sum_{i=1}^k U_2(\lambda_0)\Upsilon^{\lambda_0 - \frac{n}{2}}(x^{\lambda_0 - \frac{n}{2}}\phi_i)|_{\partial\bar{X}} \otimes \phi_i, \\ E_{-1}^{(1)} &= -\sum_{i=1}^k \phi_i \otimes {}^tU_1(\lambda_0)\Upsilon^{\lambda_0 - \frac{n}{2}}(x^{\lambda_0 - \frac{n}{2}}\phi_i)|_{\partial\bar{X}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec $\phi_i \in x^{n-\lambda_0}C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ les fonctions propres normalisées de Δ_g pour la valeur propre $\lambda_0(n - \lambda_0)$. On tire de (4.9), (3.20), et (4.10) que

$$A := \text{Res}_{\lambda_0}((n-2\lambda)R(\lambda)) = R_{-1} + \sum_{\substack{j+i+k_l=-1 \\ k_l \geq 0}} E_i^{(1)}P_l E_j^{(2)} + \sum_{\substack{j+i+k_l=-1 \\ k_l < 0}} E_i^{(1)}P_l E_j^{(2)} \quad (4.12)$$

avec par convention $k_l = 0 \iff l = 0$. Posons $V := \text{Im}(A_1) + \text{Im}(A_2)$ avec

$$\begin{aligned} A_1 &:= R_{-1} + E_{-1}^{(1)}P_0 E_0^{(2)} + E_{-1}^{(1)}\left(\sum_{k_l=1} P_l\right)E_{-1}^{(2)}, \\ A_2 &:= E_0^{(1)}P_0 E_{-1}^{(2)} + \sum_{\substack{j+i+k_l=-1 \\ k_l < 0}} E_i^{(1)}P_l E_j^{(2)}. \end{aligned}$$

D'après (4.11) on remarque que

$$\text{Im}(A_1) \subset x^{n-\lambda_0}C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}), \quad (\Delta - \lambda_0(n - \lambda_0))A_1 = 0$$

or grace au Lemme 4.1 on sait qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{Im}(A) \subset \sum_{j=0}^{p-1} x^{\lambda_0} \log^j(x)C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}), \quad (\Delta - \lambda_0(n - \lambda_0))^p A = 0,$$

on peut donc affirmer que

$$\forall u \in V, \quad (\Delta - \lambda_0(n - \lambda_0))^p u = 0.$$

Notons que si $\lambda_0 \notin \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$, alors

$$x^{n-\lambda_0}C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \cap \sum_{j=0}^{p-1} x^{\lambda_0} \log^j(x)C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \subset \dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}),$$

donc si V_1, V_2 sont définis par

$$V_1 = V \cap x^{n-\lambda_0}C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}), \quad V_2 = V \cap \sum_{j=0}^{p-1} x^{\lambda_0} \log^j(x)C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}),$$

on déduit du résultat de Mazeeo [21] que

$$V_1 \cap V_2 \subset \dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}}) \cap \ker_{L^2}(\Delta - \lambda_0(n - \lambda_0))^p = 0.$$

On peut donc décomposer $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ avec V_3 un supplémentaire de $V_1 \oplus V_2$ dans V . Soit Π_{V_2} le projection de V sur V_2 parallèlement à $V_1 \oplus V_3$, Π_V la projection orthogonale de $x^{-N}L^2(X)$ sur V et ι_V l'inclusion de V sur $x^{-N}L^2(X)$. On multiplie (4.12) à gauche par $\Pi'_{V_2} := \iota_V \Pi_{V_2} \Pi_V$ et à droite par ${}^t\Pi'_{V_2}$ pour obtenir

$$A = \sum_{\substack{j+i+k_l=-1 \\ k_l < 0}} \Pi'_{V_2} E_i^{(1)} P_l E_j^{(2)} {}^t\Pi'_{V_2}$$

par construction de V_2 et en utilisant la symétrie ${}^tA = A$ (puisque ${}^tR(\lambda) = R(\lambda)$). Remarquons maintenant que

$$\sum_{\substack{j+i+k_l=-1 \\ k_l < 0}} \Pi'_{V_2} E_i^{(1)} P_l E_j^{(2)} {}^t\Pi'_{V_2} = \sum_{k_l < 0} \sum_{i=0}^{-k_l-1} \Pi'_{V_2} E_i^{(1)} P_l E_{-k_l-1-i}^{(2)} {}^t\Pi'_{V_2}$$

et le rang de cet opérateur est majoré par $-\sum_{k_l < 0} k_l = N_{\lambda_0}(c(n - \lambda)\tilde{S}(n - \lambda))$ puisque $\text{rang}(P_l) = 1$. Le lemme est démontré quand $\lambda_0 \notin \frac{n}{2} - \mathbb{N}$.

Si $\lambda_0 \in \frac{n}{2} - \mathbb{N}$ et $\lambda_0(n - \lambda_0) \notin \sigma_{pp}(\Delta_g)$, on a $R_{-1} = 0$, $E_{-1}^{(1)} = 0$ et $E_{-1}^{(2)} = 0$ in (4.10), on reprend la même preuve en remplaçant (4.9) et (4.12) par

$$c(\lambda)\tilde{S}(\lambda) = U_1(\lambda) \left((\lambda - \lambda_0)P_0 + \sum_{l=1}^m (\lambda - \lambda_0)^{k_l+1} P_l \right) U_2(\lambda),$$

$$\text{Res}_{\lambda_0}((n - 2\lambda)R(\lambda)) = \sum_{\substack{j+i+k_l=-2 \\ k_l < -1}} E_i^{(1)} P_l E_j^{(2)}$$

la première égalité étant obtenue de la factorisation de Gohberg-Sigal (A.7) de $\tilde{S}(\lambda)$ en λ_0 . On observe alors que le rang de

$$\sum_{\substack{j+i+k_l=-2 \\ k_l < -1}} \Pi'_{V_2} E_i^{(1)} P_l E_j^{(2)} {}^t\Pi'_{V_2} = \sum_{k_l < -1} \sum_{i=0}^{-k_l-2} \Pi'_{V_2} E_i^{(1)} P_l E_{-k_l-2-i}^{(2)} {}^t\Pi'_{V_2}$$

est majoré par

$$- \sum_{k_l < -1} (k_l + 1) = - \sum_{k_l < 0} (k_l + 1) = N_{\lambda_0}(\tilde{S}(n - \lambda)) - \dim \ker \tilde{S}(n - \lambda_0) = N_{\lambda_0}(c(n - \lambda)\tilde{S}(n - \lambda))$$

ce qui conclut la preuve. \square

4.2 La formule et son intérêt

On peut enfin énoncer le résultat principal de la section :

Théorème 4.5. *Soit (X, g) une variété asymptotiquement hyperbolique avec g paire et $\lambda_0 \in \{\Re(\lambda) < \frac{n}{2}\}$ tel que $\lambda_0 \notin \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda(n - \lambda) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)\} \cap \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$. Alors λ_0 est un pôle de $R(\lambda)$ si et seulement si c'est un pôle de $S(\lambda)$ et on a*

$$m(\lambda_0) = m(n - \lambda_0) + \nu(\lambda_0) - \mathbb{1}_{\frac{n}{2} - \mathbb{N}}(\lambda_0) \dim \ker \tilde{S}(n - \lambda_0) \quad (4.13)$$

où la multiplicité $\nu(\lambda_0)$ est définie par

$$\nu(\lambda_0) := -\text{Tr}\left(\text{Res}_{\lambda_0} \tilde{S}^{-1}(\lambda) \tilde{S}'(\lambda)\right)$$

avec $\mathbb{1}_{\frac{n}{2} - \mathbb{N}}$ la fonction caractéristique de $\frac{n}{2} - \mathbb{N}$.

Preuve : en combinant les résultats du Corollaire 4.3 et du Lemme 4.4 avec (A.10) et (A.9), il reste alors à montrer que

$$N_{\lambda_0}(\tilde{S}(\lambda)) = m_{n-\lambda_0} \quad (4.14)$$

si $\lambda_0(n - \lambda_0) \notin \sigma_{pp}(\Delta_g)$ ou $\lambda_0 \notin \frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$. Le cas $\lambda_0(n - \lambda_0) \notin \sigma_{pp}(\Delta_g)$ est clair puisque $\tilde{S}(\lambda)^{-1} = \tilde{S}(n - \lambda)$ est holomorphe près de λ_0 donc $m_{n-\lambda_0} = 0$; le cas $\lambda_0(n - \lambda_0) \in \sigma_{pp}(\Delta_g)$ demande un plus d'attention. D'après (3.1) et (3.11), $\tilde{S}(\lambda)$ a une partie singulière en $n - \lambda_0$

$$C(\lambda_0)(\lambda - n + \lambda_0)^{-1} \sum_{j=1}^k \Upsilon^{\lambda_0 - \frac{n}{2}} \phi_j^\sharp \otimes \Upsilon^{\lambda_0 - \frac{n}{2}} \phi_j^\sharp$$

avec $C(\lambda_0)$ une constante non nulle, $k = m_{n-\lambda_0}$ et $\phi_j^\sharp := x^{\lambda_0 - \frac{n}{2}} \phi_j|_{\partial \bar{X}}$. Il est facile de voir que les ϕ_j^\sharp sont indépendants car sinon il existe une solution $u \in x^{n-\lambda_0+1} C^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$ de $(\Delta_g - \lambda_0(n - \lambda_0))u = 0$, et un développement de Taylor de cette équation en $x = 0$ montre que u est dans $\dot{C}^\infty(\bar{X}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$, ce qui est exclu d'après R. Mazzeo [21]. Puisque le pôle est d'ordre 1 la factorisation sous la forme (A.7) de $\tilde{S}(\lambda)$ près de $n - \lambda_0$ est claire en ce qui concerne les k_l négatifs : on a $m = k$ et $k_l = 1$ pour $l = 1, \dots, k$. Ceci prouve donc (4.14) et le théorème. \square

Notons que l'on peut étendre (4.13) à la droite $\{\Re(\lambda) = \frac{n}{2}\}$ en utilisant que $R(\lambda)$ et $\tilde{S}(\lambda)$ sont continus sur cette droite sauf en $\frac{n}{2}$ où seul $R(\lambda)$ peut avoir un pôle, et dans ce cas $\nu_{\lambda_0} = 0$ et (4.13) est trivialement satisfaite.

Cette formule répond à une question posée par Perry-Patterson dans [30], à savoir si la formule qu'il donnait avec Borthwick [4] restait valide pour les points de $\frac{1}{2}(n - \mathbb{N})$, notamment dans le cas des quotients hyperboliques convexes co-compacts : la réponse est donc négative puisqu'on voit apparaître un terme correctif pour $\frac{n}{2} - \mathbb{N}$. Si $\lambda_0(n - \lambda_0) \notin \sigma_{pp}(\Delta_g)$, ce terme correctif en $\lambda_0 = \frac{n}{2} - k$ est exactement la dimension du noyau de l'opérateur p_{2k} défini dans (3.16). Autrement dit ce terme correctif en chaque point $\frac{n}{2} - k$ ne dépend que des $2k$ premiers jets de la métrique au bord. Dans le cas particulier d'une variété asymptotiquement Einstein, c'est

$$\dim \ker \tilde{S}\left(\frac{n}{2} + k\right) = \dim \ker P_k$$

P_k étant la k -ième puissance invariante conforme du laplacien sur $(\partial \bar{X}, h_0)$ (cf. [12]).

Le calcul récent du diviseur en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ de la fonction Zeta sur un quotient convexe co-compact par Patterson-Perry [30] et Bunke-Olbrich [5] fait apparaître (modulo le spectre

discret) le terme $\nu(\lambda_0)$ qui est appelé ‘terme spectral’ et un ‘terme topologique’ si $\lambda_0 \in -\mathbb{N}_0$ qui est un multiple entier (dépendant de λ_0) de la caractéristique d’Euler de \tilde{X} . Si $\lambda_0 \in \frac{n}{2} - \mathbb{N}$ le terme spectral peut donc être non nul bien que $S(\lambda)$ et $R(\lambda)$ soient holomorphes en λ_0 (c’est le cas de \mathbb{H}^{2n+1}), ceci en raison des facteurs Gamma que contient $\tilde{S}(\lambda)$. On observe alors que le terme spectral du diviseur en un point $\frac{n}{2} - k$ se décompose en fait en un véritable terme spectral, à savoir la multiplicité $m(\lambda_0)$, plus un ‘terme conforme’ qui correspond à la dimension du noyau du k -ième laplacien conforme sur $(\partial\tilde{X}, h_0)$.

Pour conclure, il est important de noter que la formule de type Poisson obtenue par Perry [33] dans le cas de ces mêmes quotients permet de minorer le nombre de pôles (avec multiplicité) de $\tilde{S}(\lambda)$ dans un disque $D(\frac{n}{2}, R) \subset \mathbb{C}$ de rayon R , où la multiplicité d’un pôle est

$$\nu(\lambda_0) = -\text{Tr} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(\lambda_0, \epsilon)} \tilde{S}^{-1}(\lambda) \tilde{S}'(\lambda) d\lambda \right)$$

Il est clair que ces pôles sont en nombre supérieur au nombre de résonances d’après le Théorème 4.5. On peut notamment ne pas avoir de résonance alors que le nombre de pôles de $\tilde{S}(\lambda)$ dans le disque $D(\frac{n}{2}, R)$ de \mathbb{C} est un $O(R^{n+1})$, c’est le cas de \mathbb{H}^{n+1} avec $n + 1$ impair. Il serait donc intéressant d’étudier la dimension des noyaux des opérateurs invariants conformes, en particulier dans le cas des quotients convexes co-compacts, pour appliquer le résultat de Perry et donner une ‘vraie minoration’ du nombre de résonances dans un disque. Réciproquement, ces opérateurs étant encore peu connus, on peut espérer en savoir un peu plus via l’étude des résonances. Par exemple pour n pair et (X, g) asymptotiquement Einstein, la Q courbure est redéfinie dans Graham-Zworski [12] par la formule

$$Q = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \frac{n}{2}! (\frac{n}{2} - 1)! S(n) 1$$

en notant que le résidu p_{2n} est un opérateur différentiel dont le noyau contient les constantes. Si $Q = 0$ on déduit que le noyau de $\tilde{S}(n)$ contient un vecteur propre de rang 2 et donc $S(n - \lambda)$ a un pôle en $\lambda = n$, c’est-à-dire que 0 est une résonance.

5 Absence de résonance près de l'axe critique

Le propos de cette partie est l'étude de zones sans résonances près de l'axe critique.

Physiquement, les résonances les plus intéressantes sont celles proches de l'axe critique $\{\Re(\lambda) = \frac{n}{2}\}$ pour leur durée de vie plus longue. Il est montré (par exemple par Burq [6] dans les cadres euclidiens ou Vodev [41] sur des variétés) que dans beaucoup de situations il existe une région sans résonance de la forme

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \Im(\lambda) \leq e^{-C_1|\lambda|}, |\Re(\lambda)| \geq C_2\}, \quad C_1, C_2 > 0$$

où la droite critique dans ce cas est $\Im(\lambda) = 0$. On va voir que de tels résultats tiennent aussi pour les variétés asymptotiquement hyperboliques.

Les ingrédients essentiels que l'on va utiliser sont une borne uniforme de la norme de la résolvante pondérée sur l'axe critique et l'utilisation d'une parametrix astucieuse, à la manière de l'article de Vodev [41].

Pour prolonger analytiquement $R(\lambda)$ dans un voisinage de l'axe critique, le principe sera de le voir comme une perturbation de la résolvante du laplacien sur un espace modèle X_0 qui est suffisamment proche de notre variété. Un bon candidat pour X_0 est le produit tordu $((0, \epsilon) \times \partial\bar{X}, x^{-2}(dx^2 + h_0))$ où h_0 est une métrique de l'infini conforme de g mais pour des raisons techniques on prendra $\mathbb{R}^+ \times \partial\bar{X}$ avec la même métrique et on localisera la résolvante près de $x = 0$ avec des fonctions de troncature (c'est l'approche de Vodev dans [41]). Il faudra bien-sûr vérifier que le modèle possède déjà cette propriété de prolongement analytique près de l'axe critique et contrôler sa norme dans cette zone.

Le cas des métriques non-captives (sans géodésique restant bloquée dans un compact) sera aussi étudié, notamment quand la courbure est constante hors d'un compact où on va montrer qu'il existe une bande contenant l'axe critique avec seulement un nombre fini de résonances à l'intérieur.

5.1 Le résultat de Cardoso-Vodev

Dans [7], Cardoso et Vodev considèrent une variété riemannienne X dont la structure est contrôlée près de l'infini et ils obtiennent une borne exponentielle pour la norme de la résolvante pondérée sur la droite critique. La variété X vérifie en dehors d'un compact Z

$$X \setminus Z \cong ([R, \infty) \times S, g := dr^2 + \sigma(r)), \quad R \gg 1 \quad (5.1)$$

avec S une variété lisse compacte de dimension n , \cong signifie 'isométrique' et $\sigma(r) = \sigma(r, y, dy)$ est une famille de métriques sur $S_r := \{r\} \times S$ telles que

$$|q(r, y)| \leq C, \quad |\partial_r q(r, y)| \leq Cr^{-1-\delta}, \quad \delta > 0, \quad r > R \quad (5.2)$$

$$-\partial_r(\sigma^{-1})(r, y, \xi) \geq \frac{C}{r}\sigma^{-1}(r, y, \xi), \quad \forall (y, \xi) \in T^*S_r \quad (5.3)$$

$\sigma^{-1}(r) = (\sigma^{ij}(r))_{i,j}$ étant la métrique induite par $\sigma(r)$ sur T^*S_r et $q(r, y)$ défini par

$$q(r, y) := (2^{-1}\partial_r \log \nu)^2 + (2\nu)^{-2} \sum_{i,j} \sigma^{ij} \partial_{y_i} \nu \partial_{y_j} \nu + 2^{-1} \nu \Delta_g(\nu^{-1})$$

avec $\nu := (\det(\sigma_{ij}))^{\frac{1}{2}}$. Une variété asymptotiquement hyperbolique avec métrique $g = x^{-2}(dx^2 + h(x))$ se décompose clairement sous la forme (5.1) en posant $x = e^{-r}$ et on a

$$\sigma(r, y, dy) = e^{2r} h(e^{-r}, y, dy)$$

avec $h(x, y, dy)$ lisse jusqu'à $x = 0$. Utilisant la coordonnée x , on obtient $\nu \in x^{-n}C^\infty(\bar{X})$, $\partial_r = -x\partial_x$ et $h^{ij} \in C^\infty(\bar{X})$ donc

$$x\partial_x \log \nu + \nu^{-2} \sum_{i,j} x^2 h^{ij} \partial_{y_i} \nu \partial_{y_j} \nu \in C^\infty(\bar{X})$$

$$\nu \Delta_g \nu^{-1} = \nu \left(- (x\partial_x)^2 - (x\partial_x \log \nu) x\partial_x - \nu^{-1} \sum_{i,j} \partial_{y_i} (\nu x^2 h^{ij} \partial_{y_j}) \right) \nu^{-1} \in C^\infty(\bar{X})$$

et (5.2) est satisfait pour tout $\delta > 0$. De plus, on a pour $(y, \xi) \in T^*\partial\bar{X}$

$$\frac{x\partial_x(x^2 h^{-1})(x, y, \xi)}{x^2 h^{-1}(x, y, \xi)} = 2 + x \frac{\partial_x(h^{-1})(x, y, \xi)}{h^{-1}(x, y, \xi)} \geq 1$$

si $x \leq \epsilon$ avec ϵ petit, on déduit que (5.3) est vérifié. En conclusion, les variétés asymptotiquement hyperboliques font partie des variétés étudiées par Cardoso et Vodev [7] puis Vodev [42]. Leurs résultats se résument dans ce cas en le

Théorème 5.1. *Soit (X, g) une variété asymptotiquement hyperbolique de dimension $n + 1$. Il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que la résolvante $R(\lambda) := (\Delta_g - \lambda(n - \lambda))^{-1}$ se prolonge continument de $W := \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) > \frac{n}{2}, \lambda(n - \lambda) \notin \sigma_{pp}(\Delta_g)\}$ à*

$$W \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) \geq \frac{n}{2}, \Im(\lambda) > C_1\}$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^0, \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}^1)$ avec une norme majorée par

$$\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^0, \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}^p)} \leq C_2 e^{C_2 |\lambda - \frac{n}{2}|}$$

pour $p = 0, 1$, $|\Im(\lambda)| \gg 0$ et $0 \leq \Re(\lambda) - \frac{n}{2} \leq 1$. Si de plus, g est non-captive on a

$$\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^0, \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}^p)} \leq C_2 |\Im(\lambda)|^{-1+p}$$

pour $p = 0, 1$, $|\Im(\lambda)| \gg 0$ et $0 \leq \Re(\lambda) - \frac{n}{2} \leq 1$

5.2 Deux modèles

Soit (M, h_0) une variété riemannienne compacte de dimension n et

$$X_0 := (0, +\infty)_x \times M, \quad g_0 := x^{-2}(dx^2 + h_0) \quad (5.4)$$

Bien que la variété (X_0, g_0) ne soit pas conformément compacte, elle a une structure conformément compacte près de $x = 0$. On pourrait prendre comme opérateur modèle le laplacien sur $((0, 1] \times \partial\bar{X}, g_0)$ avec condition de Dirichlet en $x = 1$ pour avoir une véritable variété conformément compacte (avec bord) mais il est plus facile de traiter X_0 car elle porte plus de symétrie.

Tout d'abord, on note $\bar{X}_0 := [0, +\infty) \times M$ et $\text{Diff}_0^k(\bar{X}_0)$ l'espace des opérateurs différentiels d'ordre k sur \bar{X}_0 à support dans $[0, 1] \times M$ et qui s'écrivent localement sous la forme

$$\sum_{i+|\alpha| \leq k} a_{i,\alpha}(x, y) (x\partial_x)^i x^{|\alpha|} \partial_{y_i}^\alpha, \quad a_{i,\alpha} \in C^\infty(\bar{X}_0)$$

où $(y_i)_{i=1, \dots, n}$ sont des coordonnées locales sur M .

En posant la nouvelle variable $r = \log x$, il est facile de voir que le laplacien Δ_{g_0} est unitairement équivalent à

$$P_0 = -\partial_r^2 + e^{2r}\Delta_{h_0} + \frac{n^2}{4} \quad (5.5)$$

sur $L^2(\mathbb{R} \times M, drdvol_{h_0})$. Si $H^k := H^k(X_0)$ sont les domaines de $(1 + \Delta_{g_0})^{\frac{k}{2}}$, on remarque que les arguments donnés par Froese et Hislop dans [9, appendice] montrent que pour $k = 0, 1, 2$ et $s \in [0, 2]$

$$\forall D \in \text{Diff}_0^k(\bar{X}_0), \quad D \in \mathcal{L}(H^s(X_0), H^{s-k}(X_0)) \quad (5.6)$$

bien qu'ils ne considèrent pas la partie 'cusp' $\{r \in \mathbb{R}^+\}$. Bien-sûr le cas $k = 1, s = 1$ est obtenu à partir de l'égalité

$$\|(1 + P_0)^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2}^2 = \|\partial_r u\|_{L^2}^2 + \|e^r \Delta_{h_0}^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2}^2 + \left(\frac{n^2}{4} + 1\right) \|u\|_{L^2}^2 \quad (5.7)$$

Dans un premier temps, on montre que la résolvante pondérée de Δ_{g_0} se prolonge à un voisinage de l'axe critique et on donne une majoration de sa norme.

Lemme 5.2. *Soit $\epsilon < \frac{1}{2}$, $x_0 < 1$, (X_0, g_0) défini en (5.4) et ρ une fonction lisse sur X_0 à support dans $\{x \leq 1\}$ et telle que $\rho(x, y) = x^{\frac{1}{2}}$ pour $x \leq x_0$. Alors la résolvante pondérée*

$$\rho R_0(\lambda) \rho := \rho(\Delta_{g_0} - \lambda(n - \lambda))^{-1} \rho$$

se prolonge analytiquement de \mathcal{O}_0 à $\mathcal{O}_\epsilon \setminus \{\frac{n}{2}\}$ dans $\mathcal{L}(L^2(X_0))$ et on a la majoration

$$\|\partial_\lambda^q D^p \rho R_0(\lambda) \rho\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \left| \lambda - \frac{n}{2} \right|^{p+2\epsilon}$$

dans $\{\lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) > \frac{n}{2} - \epsilon, |\Im(\lambda)| > 1\}$ pour tout $D^p \in \text{Diff}_0^p(\bar{X}_0)$, $q = 0, 1$ et $p = 0, 1, 2$. La constante $C > 0$ dépend de ϵ , x_0 et D^p .

Preuve: d'abord pour $p = 2$ la remarque (5.6) implique que $D^2(1 + \Delta_{g_0})^{-1}$ est borné pour tout $D^2 \in \text{Diff}_0^2(\bar{X}_0)$, donc l'équation

$$(\Delta_{g_0} + i)\rho R_0(\lambda)\rho = [\Delta_{g_0}, \rho]R_0(\lambda)\rho + \rho^2 + (\lambda(n - \lambda) + i)\rho R_0(\lambda)\rho$$

(1.12) et (5.6) montrent que les cas $p = 0, 1$ suffisent pour obtenir la cas $p = 2$.

Nous avons une décomposition pour l'opérateur P_0 de (5.5) induite par la résolution spectrale de Δ_{h_0}

$$P_0 = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} P_0^{(j)}, \quad P_0^{(j)} := -\partial_r^2 + e^{2r}\mu_j^2 + \frac{n^2}{4}$$

où $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ sont les valeurs propres de Δ_{h_0} (répétées avec multiplicité) associées à une base orthonormale de $L^2(M)$ de vecteurs propres $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$. En notant la résolvante de $P_0^{(j)}$ sur $L^2(\mathbb{R}, dr)$ par

$$R_0^{(j)}(\lambda) := (P_0^{(j)} - \lambda(n - \lambda))^{-1}$$

on a clairement pour $f \in L^2(X)$ et $f_j := \langle f, \psi_j \rangle_{L^2(M)}$

$$\rho(\Delta_{g_0} - \lambda(n - \lambda))^{-1} \rho f = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} (\rho R_0^{(j)}(\lambda) \rho f_j) \psi_j \quad (5.8)$$

Notons que pour $\mu_j \neq 0$ la translation

$$U_j : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, dr) & \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dr) \\ f & \rightarrow f(\log(\mu_j) + \bullet) \end{cases}$$

est une isometrie et que $U_j^{-1}P_0^{(j)}U_j = Q$ avec $Q := -\partial_r^2 + e^{2r} + \frac{n^2}{4}$. Posons $k := \lambda - \frac{n}{2}$ pour simplifier, le noyau de Green de Q est alors facile à calculer pour $\Re(k) > 0$ (cf. [39, Ex. 4.15])

$$R_Q(\lambda)(r, t) := (Q - \lambda(n - \lambda))^{-1}(r, t) = -K_{-k}(e^r)I_k(e^t)H(r - t) - I_k(e^r)K_{-k}(e^t)H(t - r)$$

avec H la fonction de Heaviside et I_k, K_k les fonctions de Bessel modifiées. De plus, pour $\mu_j = 0$ il est bien connu que

$$R_0^{(j)}(\lambda)(r, t) = -(2k)^{-1}e^{-k|r-t|}$$

et que pour $\lambda \in \mathcal{O}_\epsilon \setminus \{0\}$

$$\|\partial_r^p \rho R_0^{(j)}(\lambda)\rho\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \left| \lambda - \frac{n}{2} \right|^{-1+p} \quad (5.9)$$

Ces expressions se prolongent dans \mathbb{C} et on peut remarquer qu'il n'y a pas de résonance excepté $\frac{n}{2}$ pour ce problème. En utilisant la relation

$$K_k = -\frac{\pi}{2 \sin(k\pi)}(I_k - I_{-k})$$

un petit calcul montre que

$$R_Q(\lambda)(r, t) - R_Q(n - \lambda)(r, t) = \frac{2}{\pi} \sin(k\pi) K_k(e^t) K_k(e^r) \quad (5.10)$$

Rappelons maintenant la formule

$$K_k(z) = \frac{\Gamma(-k + \frac{1}{2})2^{-k}}{\Gamma(\frac{1}{2})} z^k \int_0^\infty \cos(tz)(t^2 + 1)^{k - \frac{1}{2}} dt \quad (5.11)$$

pour $\Re(k) = -\epsilon$ avec $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$ et posons $\rho(r) = e^{\frac{r}{2}}\chi(r)$ où χ est une fonction lisse sur \mathbb{R} telle que $\chi(r) = 1$ quand $r \leq -1$ et $\chi(r) = 0$ quand $r \geq 0$. Dans $\{|k| > 1\} \cup \{\Re(k) = -\epsilon\}$ on a les estimations suivantes (en utilisant (5.11) et la formule de Stirling)

$$|\sin(k\pi)| \cdot \left| \Gamma(-k + \frac{1}{2}) \right|^2 \leq C|k|^{2\epsilon}$$

$$\left| \frac{\rho(r - \log \mu_j) K_k(e^r)}{\Gamma(-k + \frac{1}{2})} \right| \leq C e^{r(\frac{1}{2} - \epsilon)} \mu_j^{-\frac{1}{2}} \chi(r - \log \mu_j) \int_0^\infty (t^2 + 1)^{-\epsilon - \frac{1}{2}} dt$$

qui donnent pour $\mu_j \neq 0$

$$\int |U_j^{-1}(\rho)(r)U_j^{-1}(\rho)(t)(R_Q(\lambda)(r, t) - R_Q(n - \lambda)(r, t))|^2 dr dt \leq C|k|^{4\epsilon}$$

d'après (5.10). On combine ceci avec la borne usuelle de la résolvante dans le feuillet physique et on obtient pour $|k| \geq 1$ et $\Re(k) = -\epsilon$

$$\|U_j^{-1}(\rho)R_Q(\lambda)U_j^{-1}(\rho)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C|k|^{2\epsilon}$$

Mais puisque $U_j^{-1}(\rho) = U_j^{-1}\rho U_j$ au sens opérateur et que U_j est une isométrie, on utilise

$$R_0^{(j)}(\lambda) = U_j R_Q(\lambda) U_j^{-1}$$

pour conclure que dans $\{|\Im(\lambda - \frac{n}{2})| \geq 1\} \cap \{\Re(\lambda - \frac{n}{2}) = -\epsilon\}$ on a

$$\|\rho R_0^{(j)}(\lambda)\rho\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \left| \lambda - \frac{n}{2} \right|^{2\epsilon} \quad (5.12)$$

La norme de Sobolev H^1 est donnée par (5.7), mais $\partial_r U_j = U_j \partial_r$ et $e^{r+\log \mu_j} = U_j e^r U_j^{-1}$, donc

$$\partial_r R_0^{(j)}(\lambda) = U_j \partial_r R_Q(\lambda) U_j^{-1}, \quad e^{r+\log \mu_j} R_0^{(j)}(\lambda) = U_j e^r R_Q(\lambda) U_j^{-1}$$

une intégration par parties donne

$$\int_0^\infty \cos(te^r)(1+t^2)^{k-\frac{1}{2}} dt = - \left(k - \frac{1}{2}\right) \int_0^\infty 2t \sin(te^r) e^{-r} (1+t^2)^{k-\frac{3}{2}} dt$$

et en le multipliant par e^r ou en le dérivant par rapport à r , ce terme reste borné par

$$\left| k - \frac{1}{2} \right| \int_0^\infty 2(t+t^2)(1+t^2)^{-\epsilon-\frac{3}{2}} dt$$

On déduit que $\|\rho e^{r+\log \mu_j} R_0^{(j)}(\lambda)\rho\|$ et $\|\rho \partial_r R_0^{(j)}(\lambda)\rho\|$ sont bornés comme dans (5.12) mais avec la puissance $2\epsilon + 1$ en utilisant (5.10) et la borne usuelle sur la résolvante dans la partie physique. Pour achever la démonstration, il reste à combiner ceci avec (5.8), (5.7) et le principe de Phragmen-Lindelof appliqué à $(\lambda - \frac{n}{2})\rho R_0(\lambda)\rho$ dans la bande $|\Re(\lambda) - \frac{n}{2}| \leq \epsilon$. La borne pour $q = 1$ (une dérivée par rapport à λ) est obtenue directement du cas $q = 0$ et de la formule de Cauchy. \square

Le second modèle est l'espace hyperbolique (\mathbb{H}^{n+1}, g_h) , qui peut-être vu comme une variété conformément compacte (voir (1.4)), avec $x = 2(1 - |m|)(1 + |m|)^{-1}$ comme fonction définissant le bord si $m \in B_{n+1}$. On donne l'estimation suivante qui sera démontrée dans l'annexe B :

Proposition 5.3. *Soit $\frac{1}{4} > \epsilon_0 > \epsilon > 0$, la résolvante hyperbolique $R_h(\lambda) := (\Delta_{g_h} - \lambda(n - \lambda))^{-1}$ se prolonge holomorphiquement de \mathcal{O}_0 à \mathcal{O}_ϵ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^0, \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}^1)$ et on a pour $p, q = 0, 1$*

$$\|\partial_\lambda^q R_h(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^0, \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}^p)} \leq C \left| \lambda - \frac{n}{2} \right|^{-1+p}$$

dans $\{\lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) > \frac{n}{2} - \epsilon, |\Im(\lambda)| > 1\}$, avec C dépendant de ϵ_0 .

5.3 Zones sans résonance

On a maintenant tous les outils pour montrer le

Théorème 5.4. *Soit (X, g) une variété asymptotiquement hyperbolique, alors il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que la résolvante $R(\lambda) := (\Delta_g - \lambda(n - \lambda))^{-1}$ se prolonge analytiquement de $\{\lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) > \frac{n}{2}, |\Im(\lambda)| > C_1\}$ à*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; |\Im(\lambda)| > C_1, \Re(\lambda) > \frac{n}{2} - C_2 e^{-C_2|\lambda|}\}$$

dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^0, \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}^0)$. De plus, si g est non-captive, $R(\lambda)$ se prolonge analytiquement à

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C}; |\Im(\lambda)| > C_1, \Re(\lambda) > \frac{n}{2} - C_2 |\lambda|^{-6} \right\}$$

dans le même espace.

Preuve : notons d'abord $R(\lambda) := (\Delta_g - \lambda(n - \lambda))$ la résolvante de Δ_g dans la partie physique et prenons $x \in Z_g(\partial\bar{X})$ de manière à ce que la métrique s'écrive sous forme modèle (voir (1.3))

$$g = x^{-2}(dx^2 + h(x))$$

On a donc un ouvert V de (X, g) isométrique au collier $U := (0, \delta) \times \partial\bar{X}$ (avec $\delta > 0$) muni de la métrique $x^{-2}(dx^2 + h(x))$ et on note $i : V \rightarrow U$ cette isométrie. On observe qu'il est toujours possible de renormaliser x (prendre $x' = x\delta^{-1}$) pour avoir $\delta = 1$ sans changer la structure modèle de la métrique, on suppose donc $\delta = 1$. Considérons maintenant (X_0, g_0) la variété définie en (5.4) avec

$$(M, h_0) := (\partial\bar{X}, h(0)) \quad (5.13)$$

Soit \mathcal{J}_U et \mathcal{R}_U les opérateurs bornés suivants

$$\mathcal{R}_U : \begin{cases} L^2(X_0, dvol_{g_0}) & \rightarrow L^2(U, dvol_{g_0}) \\ f & \rightarrow f(\iota_U(\bullet)) \end{cases}$$

$$\mathcal{J}_U : \begin{cases} L^2(U, dvol_{g_0}) & \rightarrow L^2(X_0, dvol_{g_0}) \\ f & \rightarrow \mathbb{1}_U f \end{cases}$$

avec ι_U l'inclusion $U \subset X_0$ et $\mathbb{1}_U$ la fonction caractéristique de U . De même on peut définir les opérateurs \mathcal{J}_V et \mathcal{R}_V induits par l'inclusion $V \subset X$. Puisque i^*g_0 et g sont quasi-isométriques sur V , on obtient que $i^* : L^2(U, dvol_{g_0}) \rightarrow L^2(V, dvol_g)$ et $i_* : L^2(V, dvol_g) \rightarrow L^2(U, dvol_{g_0})$ sont bornés. On pose alors

$$I^* := \mathcal{J}_V i^* \mathcal{R}_U \in \mathcal{L}(L^2(X_0, dvol_{g_0}), L^2(X, dvol_g))$$

$$I_* := \mathcal{J}_U i_* \mathcal{R}_V \in \mathcal{L}(L^2(X, dvol_g), L^2(X_0, dvol_{g_0}))$$

Pour $j = 1, 2, 3, 4$, soit ψ_j une fonction lisse sur \mathbb{R}^+ qui vaut 1 sur $[0, \frac{j}{5}]$ et 0 sur $[\frac{j+1}{5}, +\infty)$, puis ψ_j est ensuite considérée comme une fonction sur U dépendant seulement de la variable x . Posons $\tilde{\psi}_j := i^*(\psi_j)$, on a alors au sens opérateur

$$I_* I^* \psi_j = \psi_j, \quad I^* I_* \tilde{\psi}_j = \tilde{\psi}_j$$

D'autre part, il est facile de vérifier (avec l'expression (2.16) par exemple) qu'il existe $D_R, D_L \in \text{Diff}_0^2(\bar{X})$ tels que

$$\Delta_g - I^* \Delta_{g_0} \psi_3 I_* = x D_R, \quad \Delta_g - I^* \psi_3 \Delta_{g_0} I_* = x D_L$$

On se place d'abord dans le feuillet physique \mathcal{O}_0 et on pose $R_0(\lambda)$ la résolvante considérée dans le Lemme 5.2 avec le choix (5.13). Notons que

$$(\Delta_{g_0} \psi_3 - \lambda(n - \lambda)) \psi_2 R_0(\lambda) \psi_1 = \psi_1 + [\Delta_{g_0}, \psi_2] R_0(\lambda) \psi_1 \quad (5.14)$$

puisque $\psi_2 \psi_3 = \psi_2$ et $\psi_2 \psi_1 = \psi_1$. Soit $\chi_1 := 1 - \tilde{\psi}_1$ et χ_0 une fonction lisse à support compact dans X qui vaut 1 sur le support de χ_1 . Pour $\lambda_0 \in \mathcal{O}_0$ fixé, $\Lambda := \lambda(n - \lambda)$ et $\Lambda_0 := \lambda_0(n - \lambda_0)$ on pose

$$\tilde{R}_{0R}(\lambda) := I^* \psi_2 R_0(\lambda) \psi_1 I_*, \quad E_R(\lambda) := \tilde{R}_{0R}(\lambda) + \chi_0 R(\lambda_0) \chi_1$$

$$L_R(\lambda) := [\Delta_g, \chi_0]R(\lambda_0)\chi_1 + (\Lambda_0 - \Lambda)\chi_0R(\lambda_0)\chi_1 + I^*[\Delta_{g_0}, \psi_2]R_0(\lambda)\psi_1I_* + xD_R\tilde{R}_{0R}(\lambda)$$

et on déduit de (5.14)

$$(\Delta_g - \Lambda)E_R(\lambda) = 1 + L_R(\lambda) \quad (5.15)$$

De même, on donne une parametrix à gauche pour $\Delta_g - \Lambda$

$$\tilde{R}_{0L}(\lambda) := I^*\psi_1R_0(\lambda)\psi_2I_*, \quad E_L(\lambda) = \tilde{R}_{0L}(\lambda) + \chi_1R(\lambda_0)\chi_0$$

$$L_L(\lambda) = \tilde{R}_{0L}(\lambda)xD_L + I^*\psi_1R_0(\lambda)[\psi_2, \Delta_{g_0}]I_* + \chi_1R(\lambda_0)[\Delta_g, \chi_0] + (\Lambda_0 - \Lambda)\chi_1R(\lambda_0)\chi_0$$

et on a

$$E_L(\lambda)(\Delta_g - \Lambda) = 1 + L_L(\lambda) \quad (5.16)$$

Soit $z, \lambda \in \mathcal{O}_0$, $Z := z(n - z)$; de (5.15) et (5.16) on tire

$$R(\lambda) = E_R(\lambda) - R(\lambda)L_R(\lambda), \quad R(z) = E_L(z) - L_L(z)R(z) \quad (5.17)$$

D'un autre côté, on a l'équation de la résolvante

$$R(\lambda) - R(z) = (\Lambda - Z)R(\lambda)R(z)$$

qui, combinée avec la première égalité de (5.17), implique

$$x^{\frac{1}{2}}R(\lambda)x^{\frac{1}{2}}(1 + K(\lambda, z)) = K_1(\lambda, z) \quad (5.18)$$

$$K(\lambda, z) := (\Lambda - Z)x^{-\frac{1}{2}}L_R(\lambda)R(z)x^{\frac{1}{2}}, \quad K_1(\lambda, z) := x^{\frac{1}{2}}R(z)x^{\frac{1}{2}} + (\Lambda - Z)x^{\frac{1}{2}}E_R(\lambda)R(z)x^{\frac{1}{2}}$$

Pour simplifier, on notera D^p (resp. D_0^p) tout opérateur différentiel de $\text{Diff}_0^p(\bar{X})$ à support dans $\text{supp}\tilde{\psi}_3$ (resp. de $\text{Diff}_0^p(\bar{X}_0)$ à support dans $\text{supp}\psi_3$) et avec cette notation (1.12) se résume en

$$D^p x^\alpha = x^\alpha D^p$$

On obtient donc (puisque χ_i et $I^*[\Delta_{g_0}, \psi_2]I_*$ sont à support compact) que

$$x^{-\frac{1}{2}}L_R(\lambda) = (D^1 + (\Lambda_0 - \Lambda)x^{-1}\chi_0)x^{\frac{1}{2}}R(\lambda_0)\chi_1 + x^{\frac{1}{2}}I^*D_0^2R_0(\lambda)\psi_1I_* \quad (5.19)$$

$$x^{\frac{1}{2}}E_R(\lambda) = x^{\frac{1}{2}}\tilde{R}_{0R}(\lambda) + x^{\frac{1}{2}}\chi_0R(\lambda_0)\chi_1 \quad (5.20)$$

De même, la seconde égalité de (5.17) et la définition de $E_L(\lambda), L_L(\lambda)$ impliquent

$$\begin{aligned} R(z)x^{\frac{1}{2}} &= I^*\psi_1R_0(z)(D_0^2I_*x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}R(z)x^{\frac{1}{2}} + D_0^0I_*x^{\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \chi_1R(\lambda_0)x^{\frac{1}{2}} \left(\chi_0 + D^1x^{\frac{1}{2}}R(z)x^{\frac{1}{2}} + (Z - \Lambda_0)x^{-\frac{1}{2}}\chi_0R(z)x^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

En combinant cette dernière expression avec (5.19), on a

$$\begin{aligned} \frac{K(\lambda, z)}{\Lambda - Z} &= (D^1 + (\Lambda_0 - \Lambda)x^{-1}\chi_0)x^{\frac{1}{2}}R(\lambda_0)\chi_1R(z)x^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + x^{\frac{1}{2}}I^*D_0^2R_0(\lambda)\psi_1I_*\chi_1R(\lambda_0)x^{\frac{1}{2}} \left(\chi_0 + D^1x^{\frac{1}{2}}R(z)x^{\frac{1}{2}} + (Z - \Lambda_0)x^{-\frac{1}{2}}\chi_0R(z)x^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + x^{\frac{1}{2}}I^*D_0^2R_0(\lambda)\psi_1^2R_0(z)(D_0^2I_*x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}R(z)x^{\frac{1}{2}} + D_0^0I_*x^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Les deux premières lignes de cette expression se prolongent pour λ dans $\mathcal{O}_\epsilon \cap \{|\Im(\lambda)| \geq 1\}$ et z dans $\{\Re(z) \geq \frac{n}{2}\} \cap \{|\Im(z)| \geq C\}$ comme opérateurs bornés sur \mathcal{H}_0^0 en utilisant le Lemme

5.2 avec $\rho = x^{\frac{1}{2}}\psi_4$, (1.15) et le Théorème 5.1. De plus, ces termes ont une norme $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0^0)$ bornée par $Ce^{C(|\lambda|+|z|)}$.

Il reste à traiter la dernière ligne dans l'expression de $(\Lambda - Z)^{-1}K(\lambda, z)$. On utilise alors (1.15) et le Théorème 5.1 pour montrer que

$$D^2 x^{\frac{1}{2}} R(z) x^{\frac{1}{2}} = D^2 (P + i)^{-1} (D^1 x^{\frac{1}{2}} R(z) x^{\frac{1}{2}} + x + (i + Z) x^{\frac{1}{2}} R(z) x^{\frac{1}{2}})$$

se prolonge continument à $\Re(z) = \frac{n}{2}$ et $|\Im(z)| \gg 0$ avec une norme $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0^0)$ majorée par $Ce^{C|z|}$. Soit $\rho_j := x^{\frac{1}{2}}\psi_j$ définie sur $(0, 1) \times \partial\bar{X}$, on a

$$\begin{aligned} \psi_4 R_0(\lambda) \psi_1^2 R_0(z) \psi_4 &= \psi_4 R_0(\lambda) \psi_1 (\Delta_{g_0} - \Lambda) R_0(\lambda) R_0(z) (\Delta_{g_0} - Z) \psi_1 R_0(z) \psi_4 \\ &= \psi_4 (\psi_1 + R_0(\lambda) [\psi_1, \Delta_{g_0}]) R_0(\lambda) R_0(z) (\psi_1 - [\psi_1, \Delta_{g_0}] R_0(z)) \psi_4 \end{aligned}$$

qui peut être réécrit

$$x^{-\frac{1}{2}} (\psi_1 + \rho_4 R_0(\lambda) [\psi_1, \Delta_{g_0}] x^{-\frac{1}{2}}) \frac{\rho_4 R_0(\lambda) \rho_4 - \rho_4 R_0(z) \rho_4}{\Lambda - Z} (\psi_1 - x^{-\frac{1}{2}} [\psi_1, \Delta_{g_0}] R_0(z) \rho_4) x^{-\frac{1}{2}}$$

où par abus de notation $x = i_*(x)$. Rappelons que $x^{-\frac{1}{2}} [\psi_1, \Delta_{g_0}] x^{-\frac{1}{2}} \in \text{Diff}_0^1(\bar{X}_0)$ puisque $[\psi_1, \Delta_{g_0}]$ a un support compact dans X_0 . Grace à cette expression, le Lemme 5.2, le fait que $x^{\frac{1}{2}} I^* D_0^2 x^{-\frac{1}{2}} = I^* D_0^2$ et $x^{-\frac{1}{2}} D_0^2 I_* x^{\frac{1}{2}} = I_* D^2$, on obtient que

$$x^{\frac{1}{2}} I^* D_0^2 R_0(\lambda) \psi_1^2 R_0(z) (D_0^2 I_* x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} R(z) x^{\frac{1}{2}} + D_0^0 I_* x^{\frac{1}{2}})$$

se prolonge à $\mathcal{O}_\epsilon \cap \{|\Im(\lambda)| \geq 1\}$ et $\{\Re(z) \geq \frac{n}{2}\} \cap \{|\Im(z)| \geq C\}$ comme opérateurs bornés sur \mathcal{H}_0^0 avec une norme majorée par $Ce^{C(|\lambda|+|z|)}$. Fixons $z = \frac{n}{2} + is$ avec $|s|$ grand, alors toutes ces estimations montrent que

$$\|K(\lambda, z)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0^0)} \leq \left| \Re(\lambda) - \frac{n}{2} \right| Ce^{C|s|}$$

quand $\Im(\lambda) = s$ et $\Re(\lambda) > \frac{n}{2} - \epsilon$, de plus ce terme est borné par $\frac{1}{2}$ si

$$\left| \Re(\lambda) - \frac{n}{2} \right| \leq \frac{1}{2} C^{-1} e^{-4C|\Im(\lambda)|}, \quad \Im(\lambda) = s. \quad (5.22)$$

Puisque $K(\lambda, z)$ est holomorphe en λ dans $\mathcal{O}_\epsilon \cap \{|\Im(\lambda)| > 1\}$ on peut inverser $(1 + K(\lambda, z))$ holomorphiquement si λ satisfait la condition (5.22).

Enfin le terme $K_1(\lambda, z)$ peut être traité exactement de la même façon en utilisant (5.20) et (5.21). La démonstration est achevée. Pour le cas non-captif c'est similaire mais seulement des polynômes en (λ, z) apparaissent dans $K(\lambda, z)(\Lambda - Z)^{-1}$, et en suivant attentivement les calculs précédents on voit que leur degré est borné par $4 + 3\epsilon$. \square

Notons que la zone exponentielle est optimale pour le cas général puisque l'existence de géodésiques fermées elliptiques implique l'existence de résonances exponentiellement proches de l'axe critique par la méthode des quasimodes. Pour le cas non-captif et quand la courbure est constante hors d'un compact, on peut utiliser un autre modèle pour la construction du parametrix, à savoir des 'morceaux' de \mathbb{H}^{m+1} qui apporteront une meilleure approximation de la résolvante et vont nous permettre de montrer le

Théorème 5.5. *Soit (X, g) une variété conformément compacte dont la courbure sectionnelle est constante hors d'un compact et x une fonction définissant le bord. Si g est non-captive, il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que $x^{\frac{1}{2}}(\Delta_g - \lambda(n - \lambda))^{-1}x^{\frac{1}{2}}$ se prolonge analytiquement de $\{\lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) > \frac{n}{2}, |\Im(\lambda)| > C_1\}$ à*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; |\Im(\lambda)| > C_1, \Re(\lambda) > \frac{n}{2} - C_2\}$$

Preuve : la preuve est presque identique, on va donc la résumer. Si la métrique g a une courbure constante près de l'infini il existe (voir [15]) des cartes $V_j \subset \bar{X}$ (avec $j = 1, \dots, M$) recouvrant un voisinage du bord $\partial\bar{X}$ qui, munies de g , sont isométriques (notons I_j cette isométrie) à l'ouvert

$$B_{n+1}^+ := \{m = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; y_{n+1} > 0, \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 < 1\} \quad (5.23)$$

munie de la métrique hyperbolique $y_{n+1}^{-2}(\sum_i dy_i^2)$. En fait, une parametrix qui sera suffisante pour notre problème est donnée dans [15, Prop. 3.1]. Fixons $\lambda_0 \in \mathcal{O}_0$, rappelons que Δ_{g_n} est le laplacien sur \mathbb{H}^{n+1} et $R_h(\lambda)$ sa résolvente étudiée dans le Lemme 5.3. Soit χ_i^j des fonctions à support dans (5.23) telles que $\chi_1^j = 1$ sur le support de χ_2^j et suivant [15] ou [30, Lem. 3.2], on peut prendre

$$\chi_i^j(y_1, \dots, y_{n+1}) = \phi_i^j(y_1, \dots, y_n) \psi_i^j(y_{n+1})$$

avec $\phi_i^j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\sum_j^M I_j^* \phi_2^j = 1$ sur $\partial\bar{X}$ et $\psi_i^j \in C^\infty([0, 1])$ qui vaut 1 pour $y_{n+1} \leq \delta$ avec $\delta < 1$ petit. Soit $\chi := 1 - \sum_{j=1}^M I_j^*(\chi_2^j)$, et $\chi_0 \in C_0^\infty(X)$ tel que $\chi_0 = 1$ sur le support de χ ; enfin I_j^* et I_{j*} sont définis comme dans la preuve du théorème précédent mais avec les isométries $V_j \rightarrow B_{n+1}^+$. On reprend la preuve du théorème précédent mais on remplace E_R, E_L par

$$E_R(\lambda) := \chi_0 R(\lambda_0) \chi + \sum_{j=1}^M I_j^* \chi_1^j R_h(\lambda) \chi_2^j I_{j*}, \quad E_L(\lambda) := \chi R(\lambda_0) \chi_0 + \sum_{j=1}^M I_j^* \chi_2^j R_h(\lambda) \chi_1^j I_{j*}$$

et les termes d'erreur sont

$$L_R(\lambda) := [\Delta_g, \chi_0] R(\lambda_0) \chi + (\Lambda_0 - \Lambda) \chi_0 R(\lambda_0) \chi + \sum_{j=1}^M I_j^* [\Delta_{g_n}, \chi_1^j] R_h(\lambda) \chi_2^j I_{j*}$$

$$L_L(\lambda) := \chi R(\lambda_0) [\chi_0, \Delta_g] + (\Lambda_0 - \Lambda) \chi R(\lambda_0) \chi_0 + \sum_{j=1}^M I_j^* \chi_2^j R_h(\lambda) [\chi_1^j, \Delta_{g_n}] I_{j*}$$

avec toujours $\Lambda := \lambda(n - \lambda)$ et $\Lambda_0 := \lambda_0(n - \lambda_0)$. x étant une fonction définissant le bord $\partial\bar{X}$, $x_j := I_{j*} x$ est alors une fonction définissant $\{y_{n+1} = 0\}$ dans B_{n+1}^+ . De plus, il est facile de vérifier (voir [15]) que

$$x^{-\frac{1}{2}} [\Delta_{g_n}, \chi_i^j] x^{-\frac{1}{2}} \in \text{Diff}_0^1(\overline{\mathbb{H}^{n+1}}), \quad i = 1, 2 \quad (5.24)$$

où on considère $B_{n+1}^+ \subset \mathbb{H}^{n+1}$. On a donc la même formule que (5.18) avec

$$\begin{aligned} \frac{K(\lambda, z)}{\Lambda - Z} &= x^{-\frac{1}{2}} \left([\Delta_g, \chi_0] R(\lambda_0) \chi + (\Lambda_0 - \Lambda) \chi_0 R(\lambda_0) \chi + \sum_{j=1}^M I_j^* [\Delta_{g_n}, \chi_1^j] R_h(\lambda) \chi_2^j I_{j*} \right) \\ &\quad \times \left(\chi R(\lambda_0) \chi_0 + \sum_{j=1}^M I_j^* \chi_2^j R_h(z) (\chi_1^j I_{j*} + [\Delta_{g_n}, \chi_1^j] I_{j*} R(z)) \right) \\ &\quad + \chi R(\lambda_0) [\Delta_g, \chi_0] R(z) - (\Lambda_0 - Z) \chi R(\lambda_0) \chi_0 R(z) \Big) x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

pour λ, z dans la partie physique. Notons que le Théorème 5.1, le Lemme 5.3 et (5.24) montrent que tous ces produits se prolongent à $\Re(z) = \frac{n}{2}$ et $\Re(\lambda) > \frac{n-1}{2}$ excepté peut-être

$$x^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^M I_j^* [\Delta_{g_h}, \chi_1^j] R_h(\lambda) \chi_2^j I_{j*} \right) \left(\sum_{j=1}^M I_j^* \chi_2^j R_h(\lambda) (\chi_1^j I_{j*} + [\Delta_{g_h}, \chi_1^j] I_{j*} R(z)) \right) x^{\frac{1}{2}} \quad (5.25)$$

Fixons $\lambda_0 = \frac{n+1}{2} + is_0$ avec $s_0 > 0$ grand et soit (λ, z) dans

$$\mathcal{U} := \left\{ (\lambda, z) \in \mathbb{C}^2; |\lambda - \lambda_0| < 1, |z - \lambda_0| < 1, \Re(z) \geq \frac{n}{2} \right\}$$

Le Théorème 5.1 implique que pour $\alpha = -\frac{1}{2}, 0$

$$\left\| x^{-\frac{1}{2}} [\Delta_g, \chi_0] R(\lambda_0) \chi x^\alpha + (\Lambda_0 - \Lambda) x^{-\frac{1}{2}} \chi_0 R(\lambda_0) \chi x^\alpha \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \quad (5.26)$$

$$\left\| x^\alpha \chi R(\lambda_0) \chi_0 x^{\frac{1}{2}} - (\Lambda_0 - Z) x^\alpha \chi R(\lambda_0) \chi_0 R(z) x^{\frac{1}{2}} + x^\alpha \chi R(\lambda_0) [\Delta_g, \chi_0] R(z) x^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C s_0^{-1} \quad (5.27)$$

et C ne dépend pas de s_0 . Remarquons maintenant que le Lemme 5.3 et (5.24) montrent que

$$\left\| \sum_{j=1}^M x^{-\frac{1}{2}} I_j^* [\Delta_{g_h}, \chi_1^j] R_h(\lambda) \chi_2^j I_{j*} x^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C \quad (5.28)$$

$$\left\| \sum_{j=1}^M x^{\frac{1}{2}} I_j^* \chi_2^j R_h(z) (\chi_1^j I_{j*} x^{\frac{1}{2}} + [\Delta_{g_h}, \chi_1^j] I_{j*} R(z) x^{\frac{1}{2}}) \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C s_0^{-1} \quad (5.29)$$

et il reste à considérer (5.25), qui à priori n'existe pas dans \mathcal{U} . Quand $V_j \cap V_i = \emptyset$ il est clair que $\chi_2^j I_{j*} I_i^* \chi_2^i = 0$, donc supposons que $V_j \cap V_i \neq \emptyset$. Suivant les calculs de la preuve du théorème précédent on obtient que

$$x^{\frac{1}{2}} R_h(\lambda) \chi_2^j I_{j*} I_i^* \chi_2^i R_h(z) x^{\frac{1}{2}}$$

peut s'exprimer pour $\lambda, z \in \mathcal{O}_0$ sous la forme

$$(\chi_2^j + x^{\frac{1}{2}} R_h(\lambda) [\chi_2^j, \Delta_{g_h}] x^{-\frac{1}{2}}) \frac{x^{\frac{1}{2}} R_h(\lambda) x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} R_h(z) x^{\frac{1}{2}}}{\Lambda - Z} (x^{-\frac{1}{2}} [\chi_2^i, \Delta_{g_h}] R_h(z) x^{\frac{1}{2}} + \chi_2^i)$$

On observe que cet opérateur sur $L^2(\mathbb{H}^{n+1})$ se prolonge à $(\lambda, z) \in \mathcal{U}$ et vérifie dans \mathcal{U}

$$\|x^{\frac{1}{2}} R_h(\lambda) \chi_2^j I_{j*} I_i^* \chi_2^i R_h(z) x^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(L^2, H^1)} \leq C s_0^{-1} \quad (5.30)$$

d'après le Lemme 5.3 et le théorème des accroissements finis (implicitement utilisé dans la preuve du théorème précédent)

$$\left\| \frac{x^{\frac{1}{2}} R_h(\lambda) x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} R_h(z) x^{\frac{1}{2}}}{\Lambda - Z} \right\|_{\mathcal{L}(L^2, H^1)} \leq C s_0^{-1} \sup_{|\lambda - \lambda_0| < 1} \|\partial_\lambda x^{\frac{1}{2}} R_h(\lambda) x^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(L^2, H^1)}$$

On combine (5.26)-(5.30), le Théorème 5.1 et le fait que I_j^*, I_{j*} sont des isométries $L^2(V_j) \leftrightarrow L^2(B_{n+1}^+)$, et on conclut que

$$\|K(\lambda, z)\| \leq C |\lambda - z|$$

pour $(\lambda, z) \in \mathcal{U}$, donc en posant $z = \frac{n}{2} + is_0$ on voit que $1 + K(\lambda, z)$ est holomorphiquement inversible pour

$$\lambda \in \{ \lambda \in \mathbb{C}; \Re(\lambda) > \frac{n}{2} - C^{-1}, |\lambda - \lambda_0| < 1 \}$$

Puisque C ne dépend pas de λ_0 , il existe une bande $\{|\Re(\lambda) - \frac{n}{2}| < \epsilon\}$ où $K(\lambda, z)$ est inversible excepté peut-être en un nombre fini de points. Enfin, le terme $K_1(\lambda, z)$, défini comme dans (5.18) avec notre nouveau parametrix, se traite de la même manière. \square

Notons que cette hypothèse de non-capture est essentiellement satisfaite pour des perturbations de métriques sur \mathbb{H}^{n+1} et ne contient pas les cas non triviaux de quotients convexes co-compacts.

A Fonctions méromorphes dans des espaces de Banach

A.1 Définitions et notations

Soit $(\mathcal{B}_i)_{i=0,1,2}$ des espaces de Banach. Si U est un ouvert de \mathbb{C} , $\mathcal{H}ol(U, \mathcal{B}_0)$ (resp. $\mathcal{M}er(U, \mathcal{B}_0)$) est l'ensemble des applications holomorphes (resp. méromorphes) sur U à valeurs dans \mathcal{B}_0 . Rappelons que $M(\lambda)$ est dite méromorphe sur U à valeurs dans \mathcal{B}_0 si pour tout $\lambda_0 \in U$ il existe un voisinage V_{λ_0} de λ_0 , un entier $p > 0$ et des éléments $(M_i)_{i=1,\dots,p}$ de \mathcal{B}_0 tels que pour tout $\lambda \in V_{\lambda_0} \setminus \{\lambda_0\}$ on ait the développement de Laurent suivant

$$M(\lambda) = \sum_{i=1}^p M_i(\lambda - \lambda_0)^{-i} + H(\lambda), \quad H(\lambda) \in \mathcal{H}ol(V_{\lambda_0}, \mathcal{B}_0)$$

Il est facile de voir que $M(\lambda)$ est holomorphe dans $U \setminus S$ où S est un ensemble discret de U dont les éléments sont appelés pôles de $M(\lambda)$. On appellera $\Xi_{\lambda_0}(M(\lambda)) := M(\lambda) - H(\lambda)$ la partie polaire de $M(\lambda)$ en λ_0 . De plus la valuation $v_{\lambda_0}(M(\lambda))$ est définie comme la plus petite puissance dans le développement de Laurent, par exemple ici $v_{\lambda_0}(M(\lambda)) = -p$ est l'ordre du pôle λ_0 mais $v_z(M(\lambda)) \geq 0$ si $M(\lambda)$ est holomorphe près de z . On notera $M_1 = \text{Res}_{\lambda_0} M(\lambda)$ le résidu de $M(\lambda)$ en λ_0 et si $\mathcal{B}_0 = \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est un espace d'applications linéaire continues, $m_{\lambda_0}(M(\lambda)) := \text{rang} M_1$ est appelé la multiplicité de λ_0 et $\text{Rang}_{\lambda_0} M(\lambda) := \sum_{i=1}^p \text{rang} M_i$ le rang total polaire de $M(\lambda)$ en λ_0 . Si maintenant le rang total polaire est fini en chaque pôle de $M(\lambda)$, on dit que $M(\lambda)$ est méromorphe-finie et on note $\mathcal{M}er_f(U, \mathcal{B}_0)$ l'espace des fonctions méromorphe-finies dans U à valeurs dans \mathcal{B}_0 . Pour finir, si $\lambda_0 \in U$ et $M(\lambda)$ est méromorphe dans $U \setminus \{\lambda_0\}$ mais pas dans U , on dira que λ_0 est une singularité essentielle de $M(\lambda)$.

On peut aussi remarquer que ces définitions s'étendent au cadre des espaces localement convexes (cf. Bunke-Olbrich [5] par exemple).

A.2 Quelques propriétés utiles

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $(\mathcal{B}_i)_{i=0,1,2}$ des espaces de Banach. Alors la multiplication ponctuelle $(A(\lambda), B(\lambda)) \rightarrow A(\lambda)B(\lambda)$ sur les espaces

$$\mathcal{H}ol(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)) \subset \mathcal{M}er_f(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)) \subset \mathcal{M}er(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j))$$

a les propriétés de stabilité suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{M}er(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)) \times \mathcal{M}er(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_k)) &\rightarrow \mathcal{M}er(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_k)) \\ \mathcal{M}er_f(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)) \times \mathcal{M}er_f(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_k)) &\rightarrow \mathcal{M}er_f(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_k)) \\ \mathcal{H}ol(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)) \times \mathcal{H}ol(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_k)) &\rightarrow \mathcal{H}ol(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_k)) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

De plus si $\mathcal{B}'_i := \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathbb{C})$ est le dual de \mathcal{B}_i , la transposition

$${}^t : \begin{cases} \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_1) \\ A &\rightarrow {}^t A : (f' \rightarrow f'(A(\cdot))) \end{cases}$$

agissant ponctuellement $({}^t A)(\lambda) := {}^t(A(\lambda))$ a les propriétés de stabilité suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{M}er(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)) &\rightarrow \mathcal{M}er(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}'_j, \mathcal{B}'_i)) \\ \mathcal{M}er_f(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)) &\rightarrow \mathcal{M}er_f(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}'_j, \mathcal{B}'_i)) \\ \mathcal{H}ol(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)) &\rightarrow \mathcal{H}ol(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}'_j, \mathcal{B}'_i)) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Notons aussi le résultat général suivant qui sera utile pour la suite.

Lemme A.1. Soit $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1$ des espaces de Banach et $j : \mathcal{B}_0 \hookrightarrow \mathcal{B}_1$ l'inclusion continue. Soit U un ouvert de \mathbb{C} et $\lambda_0 \in U$, si $M(\lambda)$ est continue dans $U \setminus \{\lambda_0\}$ à valeurs dans \mathcal{B}_0 et $j \circ M(\lambda) \in \text{Mer}(U, \mathcal{B}_1)$, alors $M(\lambda) \in \text{Mer}(U, \mathcal{B}_0)$. De plus, si $(\mathcal{B}_i)_{i=0,1}$ sont des espaces d'applications linéaires continues sur des espaces de Banach et $j \circ M(\lambda) \in \text{Mer}_f(U, \mathcal{B}_1)$, alors $M(\lambda) \in \text{Mer}_f(U, \mathcal{B}_0)$.

Preuve : On montre d'abord que $M(\lambda) \in \mathcal{H}ol(U \setminus \{\lambda_0\}, \mathcal{B}_0)$; il suffit de montrer que pour tout $\lambda_1 \in U \setminus \{\lambda_0\}$ il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\int_T M(\lambda) d\lambda = 0 \quad (\text{A.3})$$

pour tout triangle T inclus dans le disque ouvert $\{|\lambda - \lambda_1| < \epsilon\}$. Notons que (A.3) est satisfait quand on remplace $M(\lambda)$ par $j \circ M(\lambda)$. Mais puisque j est continue, l'intégrale de $j \circ M(\lambda)$ sur T , définie comme la limite d'une somme de Riemann, est exactement

$$j \circ \int_T M(\lambda) d\lambda = \int_T j \circ M(\lambda) d\lambda$$

On a donc l'égalité cherchée (A.3) puisque j est injective. En utilisant les mêmes arguments et l'hypothèse de méromorphie de $j \circ M(\lambda)$ on obtient le développement de Laurent

$$j \circ M(\lambda) = \sum_{k=-p}^{-1} j \circ M_k(\lambda - \lambda_0)^k + j \circ H(\lambda)$$

$$M_k := \frac{1}{2\pi i} \int_T (\lambda - \lambda_0)^{-k-1} M(\lambda) d\lambda, \quad H(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_T (z - \lambda)^{-1} M(z) dz$$

pour λ près de λ_0 et T un triangle entourant λ_0 . Mais j étant injective on a

$$M(\lambda) = \sum_{k=-p}^{-1} M_k(\lambda - \lambda_0)^k + H(\lambda)$$

et $H(\lambda)$ est holomorphe près de λ_0 à valeurs dans \mathcal{B}_0 . Il reste à remarquer que si $j \circ M_k$ est de rang fini alors M_k aussi, en utilisant encore l'injectivité de j . \square

On énonce maintenant un Lemme qui sera important pour prouver l'apparition de singularités essentielles de la résolvante.

Lemme A.2. Soit \mathcal{B} un espace de Banach de dimension infinie, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et U un voisinage de λ_0 . Soit $M(\lambda) \in \mathcal{H}ol(U \setminus \{\lambda_0\}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ une famille méromorphe dans U d'opérateurs bornés qui vérifie

$$M(\lambda) = 1 + \frac{K_{-1}}{\lambda - \lambda_0} + K(\lambda), \quad K(\lambda) \in \mathcal{H}ol(U, \mathcal{L}(\mathcal{B})) \quad (\text{A.4})$$

où K_{-1} et $K(\lambda)$ sont des opérateurs compacts et on suppose que

$$\dim \ker K_{-1} < \infty$$

Si $M(\lambda)$ est inversible en un point de U , alors $M(\lambda)$ est inversible pour presque tout $\lambda \in U$, d'inverse $M^{-1}(\lambda)$ méromorphe-fini dans $U \setminus \{\lambda_0\}$ et le point λ_0 est une singularité essentielle de $M^{-1}(\lambda)$.

Preuve : pour simplifier, nous prendrons $\lambda_0 = 0$, ce qui ne change rien à la preuve. Le fait que $M(\lambda)$ soit inversible dans $U \setminus \{0\}$ d'inverse méromorphe-fini provient simplement du théorème de Fredholm analytique. Supposons maintenant que $M^{-1}(\lambda)$ admette un développement de Laurent fini en 0

$$M^{-1}(\lambda) = \sum_{i=-p}^{\infty} N_i \lambda^i, \quad p \geq 0$$

On développe alors $M(\lambda)$ en série de Laurent en 0

$$M(\lambda) = \sum_{i=-1}^{\infty} M_i \lambda^i = K_{-1} \lambda^{-1} + 1 + K_0 + \sum_{i=1}^{\infty} K_i \lambda^i$$

où les K_i sont compacts, puis on effectue le produit

$$M(\lambda)M^{-1}(\lambda) = \sum_{i=-p-1}^{\infty} \lambda^i \sum_{j+k=i} M_j N_k = 1$$

ce qui donne le système

$$\sum_{j=-1}^{i+p} M_j N_{i-j} = \delta_{i0}, \quad i \geq -p-1 \quad (\text{A.5})$$

Montrons par récurrence que les opérateurs N_i sont de rang fini pour $i \leq 0$. En regardant pour $i = -p-1$ l'équation (A.5), on obtient $K_{-1}N_{-p} = 0$, et par hypothèse sur K_{-1} on trouve que N_{-p} est de rang fini. Soit $I \leq -1$, supposons maintenant que N_i est de rang fini pour tout $i \leq I$ et montrons que N_{I+1} est de rang fini. Pour $i = I$, l'équation (A.5) donne que

$$K_{-1}N_{I+1} = - \sum_{j=0}^{I+p} M_j N_{I-j}$$

est de rang fini par hypothèse de récurrence (car $I-j \leq I$). Soit r un entier tel que

$$r > \dim \ker K_{-1} + \dim \text{Im} K_{-1} N_{I+1}$$

Si N_{I+1} est de rang infini, il existe une famille de vecteurs linéairement indépendants $(\varphi_i)_{i=1, \dots, r}$ dans $\text{Im}(N_{I+1})$ et K_{-1} restreinte à $E := \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}\varphi_i$ est donc une application linéaire sur un espace de dimension finie vérifiant

$$\dim \ker K_{-1}|_E + \text{rang} K_{-1}|_E < \dim E = r$$

ce qui est impossible. On en déduit que le rang de N_{I+1} est fini.

Prenons donc (A.5) avec $i = 0$: K_{-1} et $(N_i)_{i \leq 0}$ étant compacts, on conclut que

$$1 = K_{-1}N_1 + \sum_{j=0}^p M_j N_{-j}$$

est compact, ce qui est impossible. \square

Exemple : considérer $M(\lambda) = 1 + \lambda^{-1}(1 + \Delta_M)^{-\frac{1}{2}}$ si M est une variété compacte. En diagonalisant $M(\lambda)$ sur la base de vecteurs propres de Δ_M on voit facilement que $M(\lambda)^{-1}$ a une suite de pôles convergeant vers 0.

A.3 Rappels sur la théorie de Gohberg-Sigal

On rappelle globalement quelques résultats et définitions de Gohberg et Sigal [10] qui nous serviront pour l'étude des multiplicités des résonances.

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, $M(\lambda)$ une fonction méromorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\lambda_0 \in U$. Reprenant essentiellement les notations de Gohberg-Sigal [10], on appelle fonction racine de $M(\lambda)$ en λ_0 une fonction $\varphi(\lambda) \in \mathcal{H}ol(V_{\lambda_0}, \mathcal{H})$ telle que $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} M(\lambda)\varphi(\lambda) = 0$ et $\varphi(\lambda_0) \neq 0$, l'ordre d'annulation de $M(\lambda)\varphi(\lambda)$ étant appelé la multiplicité de $\varphi(\lambda)$. Le vecteur $\varphi_0 := \varphi(\lambda_0)$ est appelé vecteur propre de $M(\lambda)$ en λ_0 et l'ensemble des vecteurs propres de $M(\lambda)$ en λ_0 forme un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} noté $\ker_{\lambda_0} M(\lambda)$ (c'est une généralisation de $\ker M(\lambda_0)$ quand $M(\lambda)$ a un pôle en λ_0). Le rang d'un vecteur propre φ_0 est défini comme étant la borne supérieure des multiplicités des fonctions racines $\varphi(\lambda)$ de $M(\lambda)$ en λ_0 telles que $\varphi(\lambda_0) = \varphi_0$. Si $\dim \ker_{\lambda_0} M(\lambda) = \alpha < \infty$ et que les rangs de tous les vecteurs propres sont finis, un système canonique de vecteurs propres est une base $(\varphi_0^{(i)})_{i=1, \dots, \alpha}$ de $\ker_{\lambda_0} M(\lambda)$ dont les rangs de $\varphi_0^{(i)}$ ont la propriété suivante : le rang de $\varphi_0^{(1)}$ est le maximum des rangs des vecteurs propres de $M(\lambda)$ en λ_0 et le rang de $\varphi_0^{(i)}$ est le maximum des rangs des vecteurs propres appartenant à un supplémentaire de $\text{Vect}(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(i-1)})$ dans $\ker_{\lambda_0} M(\lambda)$. Un système canonique de vecteurs propres n'est pas unique mais la famille des rangs des vecteurs propres ne dépend pas du choix du système canonique. On note alors $r_i = \varphi_0^{(i)}$ les multiplicités partielles d'annulation de $M(\lambda)$ en λ_0 et

$$N_{\lambda_0}(M(\lambda)) = \sum_{i=1}^{\alpha} r_i \quad (\text{A.6})$$

est la multiplicité d'annulation de $M(\lambda)$ en λ_0 .

Supposons que $M(\lambda)$ soit une famille méromorphe d'opérateurs Fredholm dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et λ_0 un pôle de rang polaire total fini. Si l'indice de $(M(\lambda) - \Xi_{\lambda_0}(M(\lambda)))|_{\lambda=\lambda_0}$ est nul, Gohberg et Sigal [10] montrent qu'il existe des opérateurs holomorphiquement inversibles $U_1(\lambda)$ et $U_2(\lambda)$ près de λ_0 , des projecteurs orthogonaux $(P_l)_{l=0, \dots, m}$ et des entiers $(k_l)_{l=1, \dots, m}$ non nuls tels que

$$M(\lambda) = U_1(\lambda) \left(P_0 + \sum_{l=1}^m (\lambda - \lambda_0)^{k_l} P_l \right) U_2(\lambda) \quad (\text{A.7})$$

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_j, \quad \text{rang}(P_l) = 1 \text{ pour } l = 1, \dots, m, \quad \dim(1 - P_0) < \infty$$

Si de plus $M(\lambda)$ a un inverse $M^{-1}(\lambda)$ méromorphe (ce qui correspond au cas où $P_0 + \sum_{l=1}^m P_l = 1$), dont λ_0 est un pôle de rang polaire total fini, il s'écrit

$$M^{-1}(\lambda) = U_2^{-1}(\lambda) \left(P_0 + \sum_{l=1}^m (\lambda - \lambda_0)^{-k_l} P_l \right) U_1^{-1}(\lambda) \quad (\text{A.8})$$

Il est important de noter (cf. [10]) que l'ensemble des multiplicités partielles d'annulation est invariant par multiplication par une famille holomorphiquement inversible d'opérateurs, on déduit donc de (A.8) et (A.7) que

$$m_+ := \dim \ker M(\lambda_0) = \#\{l; k_l > 0\}, \quad m_- := \dim \ker M^{-1}(\lambda_0) = \#\{l; k_l < 0\}$$

puis que l'ensemble des multiplicités partielles d'annulation de $M(\lambda)$ (resp. $M^{-1}(\lambda)$) en λ_0 est $\{k_l; k_l > 0\}$ (resp. $\{k_l; k_l < 0\}$). On en déduit alors

$$N_{\lambda_0}(M(\lambda)) = \sum_{k_l > 0} k_l, \quad N_{\lambda_0}(M^{-1}(\lambda)) = \sum_{k_l < 0} k_l$$

De la factorisation (A.7), Gohberg-Sigal [10] tirent ensuite la généralisation du théorème des résidus logarithmiques

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Res}_{\lambda_0}(M^{-1}(\lambda)M'(\lambda))) = N_{\lambda_0}(M(\lambda)) - N_{\lambda_0}(M^{-1}(\lambda)) \quad (\text{A.9})$$

Cet entier est essentiellement l'ordre du zéro ou du pôle de $\det(M(\lambda))$ quand le déterminant est défini.

Soit maintenant $M(\lambda)$ une famille méromorphe d'opérateurs Fredholm d'indice 0 dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et λ_0 un pôle de rang polaire total fini. On l'écrit sous la forme (A.7) et on déduit que pour $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-1}M(\lambda)$ on a $\dim \ker_{\lambda_0} L(\lambda) = \#\{l; k_l > 1\}$, l'ensemble des multiplicités partielles d'annulation de $L(\lambda)$ en λ_0 est $\{k_l - 1; k_l > 1\}$ et

$$N_{\lambda_0}(L(\lambda)) = \sum_{k_l > 1} (k_l - 1) = \sum_{k_l > 0} (k_l - 1) = N_{\lambda_0}(M(\lambda)) - \dim \ker_{\lambda_0} M(\lambda) \quad (\text{A.10})$$

B Le modèle hyperbolique

Prenons le modèle $\mathbb{H}^{n+1} \cong (\mathbb{R}_+^{n+1}, \frac{du^2 + |dv|^2}{u^2})$ de l'espace hyperbolique muni naturellement de la structure de groupe (2.18) avec le neutre $e = (1, 0_{\mathbb{R}^n})$. Soit

$$R_h(\lambda) := (\Delta_{g_h} - \lambda(n - \lambda))^{-1}$$

la résolvante du laplacien hyperbolique. Dans un premier temps, $R_h(\lambda)$ a pour noyau de Schwartz $r_h(\lambda) = G_h(\lambda)\mu$ dans ce modèle avec

$$G_h(\lambda; \omega, \omega') = \frac{\pi^{-\frac{n+1}{2}} 2^{1-n} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda - \frac{n-1}{2})} \int_0^1 (t(1-t))^{\lambda - \frac{n+1}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma(\omega, \omega')} - t \right)^{-\lambda} dt \quad (\text{B.1})$$

$$\sigma(\omega, \omega') := \left(\cosh(d_{\mathbb{H}^{n+1}}(\omega, \omega')) \right)^{-1} = \frac{2uu'}{u^2 + u'^2 + |v - v'|^2}$$

$$\omega = (u, v), \quad \omega' = (u', v'), \quad \mu := \left| \frac{dudv'dvdv'}{u^{n+1}u'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}$$

pour $\Re(\lambda) > \frac{n}{2}$. D'après [15], on a l'expression suivante qui donne le prolongement méromorphe à $\lambda \in \mathbb{C}$ du noyau de Schwartz

$$G_h(\lambda; \omega, \omega') = \sigma(\omega, \omega')^\lambda k_\lambda(\sigma(\omega, \omega')) \quad (\text{B.2})$$

$$k_\lambda(\sigma) := \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(\lambda) \sigma^{2j}, \quad \alpha_j(\lambda) := \frac{2^{-\lambda-2j-1} \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\lambda + 2j)}{\Gamma(\lambda - \frac{n}{2} + 1 + j) \Gamma(j + 1)}$$

De cette expression on obtient directement que $R_h(\lambda)$ se prolonge analytiquement à \mathbb{C} (au sens faible) si n est pair et méromorphiquement à \mathbb{C} avec des pôles d'ordre 1 sur $-\mathbb{N}_0$ si n est impair. De plus, les résidus du noyau (B.2) en ces pôles engendrent des opérateurs de rang fini (cf. [15]).

En terme de noyau de convolution, on a pour $f = f(u, v) \left| \frac{dudv}{u^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \in C_0^\infty(\mathbb{H}^{n+1}, \Gamma_0^{\frac{1}{2}})$

$$(R_h(\lambda)f)(s, z) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G_h(\lambda; u, v, e) f\left(\frac{s}{u}, s - \frac{z}{u}v\right) \frac{du}{u} dv \left| \frac{dsdz}{s^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.3})$$

et on va voir que $G_h(\lambda; \omega, e)$ est localement intégrable en $\omega \in \mathbb{R}_+^{n+1}$.

Rappelons que la fonction définissant le bord introduite en (1.4) est $x = 2e^{-t}$ avec $t(\omega) = d_{\mathbb{H}^{n+1}}(\omega, e)$ la distance hyperbolique au neutre e . En posant encore $\omega = (u, v) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ on a donc

$$\left(\cosh(d_{\mathbb{H}^{n+1}}(\omega, e)) \right)^{-1} = \frac{2u}{1 + u^2 + |v|^2} = x(\omega) \left(1 + \frac{x^2(\omega)}{4} \right)^{-1}$$

qui est une fonction définissant le bord de \mathbb{H}^{n+1} . En utilisant (B.2), on en déduit que dans ce modèle, l'opérateur $E(\lambda)$ défini par (3.8) a pour noyau de Schwartz

$$e(\lambda; V, \omega') = \alpha_0(\lambda) \left(\frac{2u'}{u'^2 + |V - v'|^2} \right)^\lambda \left(\frac{2}{1 + |V|^2} \right)^{-\lambda + \frac{n}{2}} \left| \frac{dV du' dv'}{u'^{n+1}} \right|^{\frac{1}{2}}$$

avec $\omega' = (u', v')$ et la formule (3.21) s'écrit dans ce contexte

$$G_h(\lambda; \omega, e) = G_h(n - \lambda; \omega, e) + d(\lambda) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^\lambda (1 + |V|^2)^{\lambda - n}}{(u^2 + |V - v|^2)^\lambda} dV \quad (\text{B.4})$$

$$d(\lambda) = 2^n(n-2\lambda)\alpha_0(\lambda)\alpha_0(n-\lambda), \quad \omega = (u, v)$$

Dans un premier temps on donne une estimation des normes du noyau de convolution $G_h(\lambda; \omega, e)$ et de la fonction k_λ .

Lemme B.1. *Avec les notations de (B.1) et (B.2), on a pour tout compact K de \mathbb{H}^{n+1} et pour $\lambda \in \mathcal{O}_N$, $\lambda \notin -\mathbb{N}_0$:*

$$\int_K |G_h(\lambda; u, v, e)| \frac{dudv}{u} \leq \frac{(C_K)^N \langle \lambda \rangle^{n-1}}{\text{dist}(\lambda, -\mathbb{N}_0)} \quad (\text{B.5})$$

avec $C_K > 0$ une constante dépendant de K . D'autre part, si k_λ^N est définie par

$$k_\lambda^N(\sigma) := \sigma^{-2N-1} \left(k_\lambda(\sigma) - \sum_{j=1}^N \alpha_j(\lambda) \sigma^{2j} \right)$$

on a pour $\lambda \in \mathcal{O}_N$

$$\sup_{i \leq 4} \sup_{\sigma \in [0, \frac{1}{2}]} |\partial_\sigma^i k_\lambda^N(\sigma)| \leq C^N \langle \lambda \rangle^{d_N} \quad (\text{B.6})$$

avec d_N un entier dépendant de N .

Preuve : tout d'abord la formule de Stirling montre que

$$\left| \frac{\pi^{-\frac{n+1}{2}} 2^{1-n} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda - \frac{n+1}{2} + 1)} \right| \leq C^N \langle \lambda \rangle^{\frac{n}{2}}$$

dans \mathcal{O}_N . On commence ensuite par remarquer que pour $\lambda \in \mathcal{O}_{\frac{1}{4}}$ et $\alpha \geq 0$

$$\left| \int_0^{\frac{1}{2}} (t(1-t))^{\lambda - \frac{n+1}{2}} (1-t+\alpha)^{-\lambda} dt \right| \leq C$$

En utilisant ces estimations et un changement de variable $t \rightarrow 1-t$ on a pour $\lambda \in \mathcal{O}_{\frac{1}{4}}$

$$\int_K |G_h(\lambda; u, v, e)| \frac{dudv}{u} \leq C^N \langle \lambda \rangle^{\frac{n}{2}} \left(C_K + \int_K \int_0^{\frac{1}{2}} (2t)^{\Re(\lambda) - \frac{n+1}{2}} (2t + \delta(\omega))^{-\Re(\lambda)} dt \frac{dudv}{u} \right)$$

$$\delta(\omega) := \cosh(d_{\mathbb{H}^{n+1}}(\omega, e)) - 1$$

Posons alors pour $A > \delta > 0$ avec A fixée

$$I(\delta) := \int_0^{\frac{1}{2}} (2t)^{\Re(\lambda) - \frac{n+1}{2}} (2t + \delta)^{-\Re(\lambda)} dt$$

et un changement de variable $t \rightarrow \delta t$ donne pour $\lambda \in \mathcal{O}_{\frac{1}{4}}$

$$\begin{aligned} I(\delta) &\leq C \delta^{-\frac{n-1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\delta^{-1}} (2t)^{\Re(\lambda) - \frac{n+1}{2}} (2t+1)^{-\Re(\lambda)} dt \\ &\leq C \delta^{-\frac{n-1}{2}} \left(\int_0^\epsilon (2t)^{\Re(\lambda) - \frac{n+1}{2}} dt + \int_\epsilon^{\frac{1}{2}\delta^{-1}} t^{-\frac{n+1}{2}} dt \right) \\ &\leq C \delta^{-\frac{n-1}{2}} ((2\epsilon)^{\Re(\lambda)} + C_{A,\epsilon} \log \delta) \end{aligned}$$

si $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}A^{-1})$. Notons que l'on peut donc choisir A de sorte que la boule hyperbolique centrée en e et de rayon R défini par $\cosh(R) - 1 = A$ contienne K , puis on prend $\epsilon = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}A^{-1})$ pour avoir

$$I(\delta) \leq C_K \delta^{-\frac{n-1}{2}} \log \delta$$

et un passage en coordonnées polaires donne

$$\int_K I(\delta(\omega)) \frac{dudv}{u} \leq C_K$$

L'estimation (B.5) est montrée pour $\lambda \in \mathcal{O}_{\frac{1}{4}}$. Pour traiter le cas $\lambda \in \mathcal{O}_N$, il suffit d'utiliser la majoration obtenue dans $\mathcal{O}_{\frac{1}{4}}$ avec (B.4) en notant que

$$|d(\lambda)| = \frac{C|n-1-\lambda| \dots |1-\lambda|}{|\tan(\pi\lambda)|}$$

d'après la formule du complément

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi(\sin(\pi z))^{-1} \quad (\text{B.7})$$

puis que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^{\Re(\lambda)}(1+|V|^2)^{\Re(\lambda)-n}}{(u^2+|V-v|^2)^{\Re(\lambda)}} dV \leq (C_K)^N$$

si $\Re(\lambda) \in [\frac{n}{2} - N, \frac{n}{2} - \frac{1}{4}]$ et $(u, v) \in K$. On a finalement montré (B.5).

Pour obtenir (B.6), on écrit d'abord pour $\lambda \in \mathcal{O}_{\frac{1}{4}}$

$$\begin{aligned} k_\lambda(\sigma) &= \frac{2^{\frac{3-n}{2}} \pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda - \frac{n+1}{2} + 1)} \int_0^1 (2t(1-t))^{\lambda - \frac{n+1}{2}} (1 + \sigma(1-2t))^{-\lambda} dt \\ &= \sum_{j=0}^{2N} \frac{2^{\frac{3-n}{2}} \pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma(\lambda + j)}{\Gamma(\lambda - \frac{n+1}{2}) j!} (-\sigma)^j \int_0^1 (2t(1-t))^{\lambda - \frac{n+1}{2}} (1-2t)^j dt \\ &\quad - C_N(\lambda) \sigma^{2N+1} \int_0^1 (2t(1-t))^{\lambda - \frac{n+1}{2}} R_N(t, \sigma) dt \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha_j(\lambda) \sigma^{2j} + \sigma^{2N+1} k_\lambda^N(\sigma) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} R_N(t, \sigma) &:= (1-2t)^{2N+1} \int_0^1 (1-w)^{2N} (1+w\sigma(1-2t))^{-\lambda-2N-1} dw \\ C_N(\lambda) &:= \frac{2^{\frac{3-n}{2}} \pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma(\lambda + 2N + 1)}{\Gamma(\lambda - \frac{n+1}{2}) (2N)!} \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Taylor (en $\sigma = 0$) avec reste intégral. Par un changement de variable on obtient

$$k_\lambda^N(\sigma) = -C_N(\lambda) \int_0^{\frac{1}{2}} (2t(1-t))^{\lambda - \frac{n+1}{2}} (R_N(t, \sigma) + R_N(1-t, \sigma)) dt$$

et on refait un développement de Taylor avec reste intégral de $R_N(t, \sigma)$ en $t = 0$:

$$R_N(t, \sigma) = \sum_{j=0}^N \frac{\partial_t^j R_N(0, \sigma)}{j!} t^j + t^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-w)^N}{N!} (\partial_t^{N+1} R_N)(tw, \sigma) dw$$

On a alors

$$\begin{aligned} k_\lambda^N(\sigma) &= - \sum_{j=0}^N C_{j,N}(\lambda) \left(\partial_t^j R_N(0, \sigma) + (-1)^j \partial_t^j R_N(1, \sigma) \right) \\ &+ C_N(\lambda) \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^1 t^{\lambda - \frac{n-1}{2} + N} (2(1-t))^{\lambda - \frac{n+1}{2}} \frac{(1-w)^N}{N!} (\partial_t^{N+1} R_N)(tw, \sigma) dw dt \\ &- C_N(\lambda) \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^1 t^{\lambda - \frac{n-1}{2} + N} (2(1-t))^{\lambda - \frac{n+1}{2}} \frac{(w-1)^N}{N!} (\partial_t^{N+1} R_N)(1-tw, \sigma) dw dt \end{aligned}$$

en posant

$$C_{j,N}(\lambda) := C_N(\lambda) \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\lambda - \frac{n+1}{2} + j} (2(1-t))^{\lambda - \frac{n+1}{2}} dt$$

On peut vérifier que cette intégrale se prolonge holomorphiquement dans \mathcal{O}_N en faisant un développement de Taylor à l'ordre N avec reste intégral de $(1-t)^{\lambda - \frac{n+1}{2}}$ en $t = 0$ et en remarquant le prolongement méromorphe suivant pour $k \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\lambda - \frac{n+1}{2} + k} dt = \left(\lambda - \frac{n+1}{2} + k + 1 \right)^{-1} 2^{-\lambda + \frac{n+1}{2} - k - 1}$$

On conclut en observant que toutes les intégrales dans la dernière expression de k_λ^N sont convergentes pour $\sigma \leq A$ et $\lambda \in \mathcal{O}_N$, puis que

$$|\partial_t^j \partial_\sigma^i R_N(t, \sigma)| \leq C^N \langle \lambda \rangle^{j+i} 2^{\Re(\lambda)}, \quad j \leq N+1, \quad i \leq 4$$

pour $\sigma \leq \frac{1}{2}$, $t \leq \frac{1}{2}$, $\lambda \in \mathcal{O}_N$ et enfin que

$$|C_N(\lambda)| \leq C^N \langle \lambda \rangle^{CN}, \quad |C_{j,N}(\lambda)| \leq C^N \langle \lambda \rangle^{CN} 2^{-\Re(\lambda)}$$

pour $\lambda \in \mathcal{O}_N$ en utilisant la formule de Stirling. La majoration (B.6) est donc satisfaite. \square

On étudie maintenant les normes du prolongement de $R_h(\lambda)$ en tant qu'opérateurs bornés dans les espaces à poids introduits en (1.16).

Proposition B.2. *La résolvante hyperbolique $R_h(\lambda) := (\Delta_{g_h} - \lambda(n - \lambda))^{-1}$ se prolonge analytiquement de \mathcal{O}_0 à $\mathcal{O}_{\frac{N-\delta}{2}}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^2)$ pour tout $N \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ si n est pair (resp. pour tout $N \leq n$ si n est impair) et on a dans $\mathcal{O}_{\frac{N-\delta}{2}}$*

$$\|\partial_\lambda^q R_h(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_N^0, \mathcal{H}_{-N}^2)} \leq C_\delta^{2N} \left| \lambda - \frac{n}{2} \right|^{-1+p} \quad (\text{B.8})$$

avec $p, q = 0, 1$ et $C_\delta > 0$.

Preuve : on utilise le modèle de Beltrami pour \mathbb{H}^{m+1} et sa métrique modèle (1.4) asymptotiquement hyperbolique. Pour montrer ces estimations, on considère les opérateurs d'onde

$$U_0(t) := \cos \left(t \sqrt{\Delta_{g_h} - \frac{n^2}{4}} \right), \quad U_1(t) := \left(\Delta_{g_h} - \frac{n^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \sin \left(t \sqrt{\Delta_{g_h} - \frac{n^2}{4}} \right)$$

En dimension impaire nous avons, par le principe de Huygens,

$$\chi_t U_0(t) \chi_t = 0, \quad t > 0 \quad (\text{B.9})$$

où χ_t est la fonction caractéristique de la boule hyperbolique ouverte de centre 0 et de rayon $\frac{t}{2}$. On a alors pour $t > 0$

$$x^N U_0(t) x^N = (1 - \chi_t) x^N U_0(t) (1 - \chi_t) x^N + (1 - \chi_t) x^N U_0(t) \chi_t x^N + \chi_t x^N U_0(t) (1 - \chi_t) x^N \quad (\text{B.10})$$

Il est clair que

$$\|\chi_t x^N\| \leq 2^N, \quad \|U_0(t)\| \leq 1 \quad (\text{B.11})$$

et on remarque aussi que $m \in \text{Supp}(1 - \chi_t)$ si et seulement si $|m| \geq \tanh\left(\frac{t}{4}\right)$, c'est-à-dire que

$$x = 2 \frac{1 - |m|}{1 + |m|} \leq 2 \frac{1 - \tanh\left(\frac{t}{4}\right)}{1 + \tanh\left(\frac{t}{4}\right)} = 2e^{-\frac{t}{2}}$$

On a donc

$$\|(1 - \chi_t) x^N\| \leq 2^N e^{-\frac{Nt}{2}} \quad (\text{B.12})$$

Maintenant on déduit de (B.10), (B.11) et (B.12) que

$$\|x^N U_0(t) x^N\| \leq 2^{2N} e^{-\frac{Nt}{2}} \quad (\text{B.13})$$

Il reste à voir que

$$\left(\frac{n}{2} - \lambda\right) x^N R_h(\lambda) x^N = \int_0^\infty e^{t\left(\frac{n}{2} - \lambda\right)} x^N U_0(t) x^N dt \quad (\text{B.14})$$

et (B.8) est prouvé quand $p = 0$ et $n+1$ impair. Pour traiter le cas de $n+1$ pair, on va étudier $x^N \partial_t U_1(t) x^N$, puisque $U_0(t) = \partial_t U_1(t)$. Pour $\epsilon > 0$ petit, soit $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ à support dans $[0, 1[$ et valant 1 sur $[0, 1 - \epsilon]$. On pose alors

$$\Psi_t(m) := \Psi\left(\frac{4 \operatorname{arctanh}|m|}{t}\right)$$

qui est à support dans la boule hyperbolique de rayon $\frac{t}{2}$ et vaut 1 dans la boule hyperbolique de rayon $\frac{t(1-\epsilon)}{2}$. On a alors

$$\Psi_t \partial_t U_1(t) \Psi_t = \partial_t (\Psi_t U_1(t) \Psi_t) - (\partial_t \Psi_t) U_1(t) \Psi_t - \Psi_t U_1(t) (\partial_t \Psi_t) \quad (\text{B.15})$$

Le noyau de $U_1(t)$ s'écrit

$$U_1(t; x, y) = C \left(\sinh^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{d(x, y)}{2}\right) \right)_+^{-\frac{n}{2}}$$

donc par construction de Ψ_t , les opérateurs dans (B.15) ont un noyau lisse à support compact (dépendant de t), ce qui prouve facilement qu'il existe $T > 0$ tel que

$$\|\Psi_t \partial_t U_1(t) \Psi_t\| \leq C_\epsilon e^{-\frac{Nt}{2}} \quad (\text{B.16})$$

pour $t \geq T$. On procède enfin comme dans le cas impair, en décomposant x^N sur le support de Ψ_t puis en dehors, ce qui prouve (B.8) pour $p = 0$.

Pour le cas $p = 1$, on remarque d'après (1.14) et (1.12) qu'il suffit de donner un prolongement de $x^N DR_h(\lambda)x^N$ pour un nombre fini d'opérateurs $D \in \text{Diff}_0^1(\overline{\mathbb{H}}^{n+1})$ et de majorer sa norme. On remarque que pour $\Re(\lambda) > \frac{n}{2}$ et $D \in \text{Diff}_0^1(\overline{\mathbb{H}}^{n+1})$

$$x^N DR_h(\lambda)x^N = \int_0^\infty e^{t(\frac{n}{2}-\lambda)} x^N DU_1(t)x^N dt \quad (\text{B.17})$$

avec $\|DU_1(t)\| \leq C$ d'après (1.15). De plus

$$\Psi_t DU_1(t)\Psi_t = D\Psi_t U_1(t)\Psi_t - [D, \Psi_t]U_1(t)\Psi_t$$

a donc un noyau lisse à support compact, on vérifie qu'il existe $T > 0$ tel que pour $t \geq T$

$$\|\Psi_t DU_1(t)\Psi_t\| \leq C_\epsilon e^{-n\frac{t}{2}} \quad (\text{B.18})$$

En décomposant $x^N DU_1(t)x^N$ de la même façon qu'en (B.10) et en utilisant (B.18), (B.17), on en déduit (B.8) quand $p = 1$. \square

References

- [1] S. Agmon, *A perturbation theory for resonances*, Comm. Pure. Appl. Math. **51** (1998), nb (11-12), 1255-1309.
- [2] S. Agmon, *On the spectral theory of the Laplacian on non-compact hyperbolic manifolds*, In Journées 'Equations aux dérivées partielles', Saint-Jean de Monts, 1987 (Exp. No. XVII, Ecole polytechnique, Palaiseau, 1987).
- [3] D. Borthwick, *Scattering theory and deformations of asymptotically hyperbolic manifolds*, preprint (Arxiv:math.DG-GA/9711016).
- [4] D. Borthwick, P. Perry *Scattering poles for asymptotically hyperbolic manifolds*, Trans. A.M.S. **354** (2002) 1215-1231.
- [5] U. Bunke, M. Olbrich *Group cohomology and the singularities of the Selberg zeta function associated to a Kleinian group*, Ann. Math **149** (1999), 627-689.
- [6] N. Burq *Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonances au voisinage du réel*, Acta. Math. **180** (1998), 1-29.
- [7] F. Cardoso, G. Vodev *Uniform estimates of the Laplace-Beltrami operator on infinite volume Riemannian manifolds II*, Ann. H. Poincaré **3** (2002) 673-691.
- [8] C. Cuevas, G. Vodev, *Sharp bounds on the number of resonances for conformally compact manifolds with constant negative curvature near infinity*, Commun. Partial Diff. Equations, **28** (2003), 1685-1705.
- [9] R. Froese, P. Hislop, *Spectral analysis of second order elliptic operators on noncompact manifolds*, Duke Math. J. **58**, 103-129.
- [10] I. Gohberg, I. Sigal *An Operator Generalization of the Logarithmic Residue Theorem and the Theorem of Rouché*, Math. U.S.S.R. Sbornik, **13** (1970), 603-625.
- [11] R. Graham *Volume and area renormalizations for conformally compact Einstein metrics*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser.II, Suppl. **63** (2000), 31-42.
- [12] R. Graham, M. Zworski *Scattering matrix in conformal geometry*, Invent. Math. **152** (2003), 89-118.
- [13] L. Guillopé *Fonctions Zêta de Selberg et surfaces de géométrie finie*, Adv. Stud. Pure Math. **21** (1992), 33-70.
- [14] L. Guillopé, M. Zworski *Upper bounds on the number of resonances for non-compact complete Riemann surfaces*, J. Funct. Anal. **129** (1995), 364-389.
- [15] L. Guillopé, M. Zworski *Polynomial bounds on the number of resonances for some complete spaces of constant negative curvature near infinity*, Asymp. Anal. **11** (1995), 1-22.
- [16] L. Guillopé, M. Zworski, *Scattering asymptotics for Riemann surfaces*, Ann. Math. **145** (1997), 597-660.
- [17] L. Guillopé, K. Lin, M. Zworski, *The Selberg Zeta function for convex co-compact Schottky groups*, Comm. Math. Phys. **245** (1), 2004, 149 - 176.

- [18] L. Hörmander, *The analysis of partial differential operators III*, Springer-Verlag, Berlin, (1985).
- [19] M. Joshi, A. Sá Barreto, *Inverse scattering on asymptotically hyperbolic manifolds*, Acta Math. **184** (2000), 41-86.
- [20] N. Mandouvalos, *Scattering operator, Eisenstein series inner product formula and Maass-Selberg relations for Kleinian groups*, Mem. A.M.S. **78** (1989) no. 400.
- [21] R. Mazzeo, *Unique continuation at infinity and embedded eigenvalues for asymptotically hyperbolic manifolds*, American J. Math. **113** (1991), 25-56.
- [22] R. Mazzeo, *The Hodge cohomology of a conformally compact metric*, J. Diff. Geom. **28** (1988), 309-339.
- [23] R. Mazzeo, *Elliptic theory of differential edge operators. I*, Commun. Partial Diff. Equations **16** (1991), 1615-1664.
- [24] R. Mazzeo, R. Melrose *Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature*, J. Funct. Anal. **75** (1987), 260-310.
- [25] R. Mazzeo, A. Vasy *Resolvents and Martin boundaries on product spaces*, Geom. and Funct. Anal. **12** (2002), 1018-1079.
- [26] R. Melrose, *Manifolds with corners*, book in preparation (<http://www-math.mit.edu/~rbm/>).
- [27] R. Melrose, *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem* (AK Peters, Wellesley, 1993).
- [28] R. Melrose, *Polynomial bounds on the number of scattering poles*, J. Funct. Anal. **53** (1983), 287-303.
- [29] R. Melrose, G. Mendoza, *Elliptic pseudodifferential operators of totally characteristic type*, MSRI preprint, 1983.
- [30] S. Patterson, P. Perry *The divisor of Selberg's zeta function for Kleinian groups. Appendix A by Charles Epstein.*, Duke Math. J. **106** (2001) 321-391.
- [31] P. Perry, *The Laplace operator on a hyperbolic manifold II, Eisenstein series and the scattering matrix*, J. Reine Angew. Math. **398** (1989) 67-91.
- [32] P. Perry, *The Selberg Zeta function and a local trace formula for Kleinian groups*, J. Reine Angew. Math. **410** (1990) 116-152.
- [33] P. Perry, *A poisson formula and lower bounds for resonances in hyperbolic manifolds*, Int. Math. Res. Not. **34**, (2003) 1837-1851.
- [34] G. Raikov, *Eigenvalue asymptotics for the Schrodinger operator with homogeneous magnetic potential and decreasing electric potential. I. Behaviour near the essential spectrum tips*, Commun. Partial Diff. Equations, **1990**, 15 no. 3, 407-434.
- [35] A. Sá Barreto, M. Zworski *Distribution of resonances for spherical black holes*, Math. Res. Letters **4** (1997) 103-121.
- [36] M. Shubin, *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Springer Ser. Soviet Math., Springer, Berlin, 1987.

- [37] J. Sjöstrand, *Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems*, Duke Math. J. **60** (1990), 1-57.
- [38] J. Sjöstrand, M. Zworski, *Complex scaling and the distribution of scattering poles*, Journal A.M.S. **4**(4) (1991).
- [39] E. Titchmarsh, *Eigenfunction expansions, Part 1*, Oxford University Press (1962).
- [40] G. Vodev, *Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles for metric perturbations of the Laplacian in R^n* , Math. Ann. **291** (1991), 39-46.
- [41] G. Vodev, *Uniform estimates of the Laplace-Beltrami operator on infinite volume Riemannian manifolds with cusps*, Commun. Partial Diff. Equations **27** (2002), 1437-1465.
- [42] G. Vodev, *Local energy decay of solutions to the wave equation for non trapping metrics*, to appear in Arkiv För Math.
- [43] M. Zworski, *Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles*, Duke Math. J., **59** (1989), 311-323.
- [44] M. Zworski, *Dimension of the limit set and the distribution of resonances for convex co-compact hyperbolic surfaces*, Invent. Math. **136** (1999), 353-409.

RÉSONANCES SUR LES VARIÉTÉS ASYMPTOTIQUEMENT HYPERBOLIQUES

On étudie le prolongement méromorphe de la résolvante du laplacien sur une classe de variétés riemanniennes complètes non-compactes à courbure asymptotiquement -1 . On montre que la résolvante se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C} avec pôles de multiplicité finie (appelés résonances) si et seulement si la métrique vérifie une certaine condition de parité asymptotique, puis on construit des exemples pour lesquels il existe une suite de résonances convergeant vers un point du feuillet non-physique, prouvant que des singularités essentielles peuvent apparaître sans cette condition. Dans un deuxième temps, on montre que les résonances coïncident, avec multiplicités, avec les pôles de l'opérateur de diffusion renormalisé à l'exception d'un ensemble discret de points pour lesquels on explicite géométriquement la différence des multiplicités. Enfin, on montre l'existence d'une zone sans résonance exponentiellement proche de l'axe critique.

Mots clés. laplacien, prolongement méromorphe, résolvante, résonance, diffusion, variété hyperbolique.

...

RESONANCES ON ASYMPTOTICALLY HYPERBOLIC MANIFOLDS

We study the meromorphic extension of the resolvent for the Laplacian on a class of non-compact complete Riemannian manifolds whose curvatures approach -1 at infinity. We show that the resolvent extends meromorphically to \mathbb{C} with poles of finite multiplicity (called resonances) if and only if the metric satisfies a certain condition of asymptotic evenness, then we construct examples for which there exists a sequence of resonances converging to a point of the non-physical sheet, proving that some essential singularities can appear without this condition. Secondly, we show that the resonances coincide, with multiplicities, with the poles of the renormalized scattering operator, except for a discrete set of points for which an explicit geometric formula between the multiplicities is given. We finally prove the existence of a free of resonance region exponentially close to the critical line.

Key words. Laplacian, meromorphic extension, resolvent, resonance, scattering, hyperbolic manifold.