HAL
open science

Géométrie algébrique réelle de certaines variétés de dimension 2 et 3

Frédéric Mangolte

To cite this version:

Frédéric Mangolte. Géométrie algébrique réelle de certaines variétés de dimension 2 et 3. Mathématiques [math]. Université de Savoie, 2004. tel-00006900

HAL Id: tel-00006900

https://theses.hal.science/tel-00006900v1

Submitted on 16 Sep 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à Diriger des Recherches

Université de Savoie

Spécialité : Mathématiques

par Frédéric MANGOLTE

Géométrie algébrique réelle de certaines variétés de dimensions 2 et 3

soutenue le 4 juin 2004

Rapporteurs

Jacek BOCHNAK	Vrije Universiteit, Amsterdam
Fabrizio CATANESE	Universität Bayreuth, Allemagne
Michel COSTE	Université Rennes 1
Ilia ITENBERG	Université Strasbourg 1

Jury

Michel COSTE	Université Rennes 1
Viatcheslav KHARLAMOV	Université Strasbourg 1
Krzysztof KURDYKA	Université de Savoie
Christiaan PETERS	Université Grenoble 1
Claude VITERBO	École Polytechnique

À Jeanne

À Sarah

À Gustave

avec tout mon amour.

Je remercie vivement J. Bochnak, F. Catanese et I. Itenberg pour avoir rapporté sur mon travail de recherche ainsi que M. Coste pour son rôle de rapporteur et de jury.

Je remercie V. Kharlamov pour ses suggestions stimulantes tout au long de ces années ainsi que pour sa participation au jury.

Je remercie C. Viterbo et C. Peters pour l'interêt qu'ils ont manifesté pour mes récents travaux et pour leur participation au jury.

Je remercie J. Kollár pour ses belles conjectures.

Je remercie mes co-auteurs J. Huisman, N. Joglar et J. van Hamel pour nos résultats communs.

Je remercie S. Akbulut pour les explications et éclaircissements sur la topologie des variétés de dimension 3, W. Kucharz pour ses remarques et suggestions en particulier à propos de mon dernier article et P. Schmutz-Schaller pour son aide à propos des groupes fuchsiens.

Je tiens aussi à remercier J. Lafontaine pour son soutien indéfectible tout au long de mon évolution de chercheur.

Je veux remercier ici R. Silhol qui a guidé mes premiers pas dans cette specialité magnifique qu'est la géométrie algébrique réelle.

J'ai passé l'année 2002/2003 en délégation CNRS au sein du laboratoire GTA de Montpellier et je remercie les membres de l'équipe pour leur accueil qui m'a grandement aidé à profiter de ce court temps de recherche en liberté pour produire un joli article.

Je remercie B. Colbois pour son soutien et son amitié.

Je remercie K. Kurdyka qui m'a soutenu depuis que je suis membre du LAMA et avec qui j'apprends le metier de directeur de thèse ainsi que pour sa participation au jury.

Je ne sais pas si j'aurais pu faire de la recherche avec autant de plaisir si je ne passais pas autant de temps à assommer mes collègues du LAMA avec mes questions et mes doutes. Je remercie en particulier C. Raffalli, P. Verovic et S. Simon pour leur disponibilité et D. D'Accunto pour les soirées PHP sur le site Web du RAAG ;)

Je remercie M. Laoues pour les innombrables spéculations mathématiques qui nous ont réunis et continuent à nous réunir depuis la licence de mathématique...

Je remercie mes deux chercheurs non-mathématiciens préférés D. Eckert et S. Dulucq qui me font l'honneur de leur amitiés depuis mes débuts.

Je remercie ma famille et ma belle-famille pour leur écoute et leur precieux soutien.

Table des matières

Publications personnelles **3**

I Géométrie algébrique réelle de certaines variétés de dimensions 2 et 3 **5**

1 Cycles algébriques sur les surfaces **9**
Surfaces K3, surfaces abéliennes 11
Surfaces d'Enriques 12
Surfaces elliptiques régulières 14
Surfaces hyperelliptiques 16

2 Topologie des variétés algébriques réelles **19**
Surfaces elliptiques modulaires réelles 19
Variétés uniréglées de dimension 3, conjectures de Nash et de Kollár 22

3 Approximation des applications lisses par des applications régulières **25**
Surfaces géométriquement rationnelles, surfaces de del Pezzo . . . 25
Surfaces réglées, fibrations en coniques 27

II Participation à l'encadrement doctoral et expérience d'animation de la recherche **29**

III Activités d'enseignement et divers **33**

Références bibliographiques **35**

Publications personnelles

Publications dans des revues à comité de lecture

[M1] Une surface réelle de degré 5 dont l'homologie est entièrement engendrée par des cycles algébriques, *C. R. Acad. Sci.* **318**, 343–346 (1994)

[M2] Cycles algébriques sur les surfaces K3 réelles, *Math. Z.* **225**, 559–576 (1997)

[M3] (Avec J. van Hamel), Algebraic cycles and topology of real Enriques surfaces, *Compositio Math.* **110**, 215–237 (1998)

[M4] Surfaces elliptiques réelles et inégalité de Ragsdale-Viro, *Math. Z.* **235**, 213–226 (2000)

[M5] Cycles algébriques et topologie des surfaces bielliptiques réelles, *Comentarii Mathematici Helvetici* **78**, 385–393 (2003)

[M6] (Avec N. Joglar), Real algebraic morphisms and Del Pezzo surfaces of degree 2, *J. Algebraic Geometry* **13**, 269-285 (2004)

[M7] (Avec J. Huisman), Every orientable Seifert 3-manifold is a real component of a uniruled algebraic variety, *Topology* (accepté pour publication)

Prépublications et travaux en cours

[M8] Real algebraic morphisms and real conic fibrations, *Prépublication du LAMA 03-11a, Soumis*

[M9] (Avec C. Raffalli), Une question d'appuis, *Preprint* (2001)

[M10] (Avec D. Eckert), Des métriques pour le Monde : Cartographier les temps de déplacement entre lieux, *rapport de recherche* (2002)

I Géométrie algébrique réelle de certaines variétés de dimensions 2 et 3

Mes recherches sont centrées sur la géométrie et la topologie des variétés algébriques réelles. Jusqu'à une époque récente, j'ai consacré la plus grande partie de mon travail aux surfaces. J'ai mis à profit ma délégation CNRS en 2002/2003 pour commencer un nouveau programme portant sur les variétés de dimension 3.

J'ai regroupé mes résultats et mes projets selon trois axes principaux :

1. Cycles algébriques sur les surfaces
2. Topologie des variétés algébriques réelles
3. Approximation des applications lisses par des applications régulières

Avant de développer chacun de ces thèmes de manière plus approfondie dans les sections suivantes, en voici une rapide présentation.

1. Dans un premier temps, j'ai privilégié l'étude des cycles algébriques réels sur les surfaces. Cette étude est délicate et j'y reviendrai plus en détails dans la première section. Mais on peut déjà dire ici que chaque classe de surfaces exige une technique particulière, d'où un traitement au cas par cas. Les classes de surfaces en question sont les surfaces rationnelles, réglées, abéliennes, K3, d'Enriques, hyperelliptiques, elliptiques propres. C'est-à-dire l'ensemble des surfaces dites de type spécial. On cherche en particulier à déterminer les surfaces *totalement algébriques*, cf. Section 1, parmi les surfaces d'une famille donnée.

Lorsque j'ai commencé ma thèse, seul le cas des surfaces rationnelles était connu [41]. J'ai résolu dans la thèse le cas des surfaces K3 [M2] et celui des surfaces abéliennes [Thèse de doctorat, Montpellier (1994), Chap. V] en utilisant les bonnes propriétés de l'application des périodes.

Mon premier article post-thèse à été le fruit d'une collaboration avec J. van Hamel entamée après une rencontre à l'école d'hiver sur la géométrie algébrique réelle qui s'est tenue à Madrid en janvier 1993. Nous avons résolu le cas des surfaces d'Enriques [M3], rendu délicat par la présence de 2-torsion dans l'anneau de cohomologie. Pour ce faire, nous avons employé une théorie d'homologie équivariante développée par mon co-auteur dans sa thèse [43].

En l'an 2000, W. Kucharz à résolu le problème pour les surfaces réglées [28] et de mon côté, à partir d'une construction définie sur $\mathbb{R}$ des surfaces elliptiques modulaires et grâce à la classification des fibres singulières réelles d'un pinceau elliptique due à R. Silhol [40], j'ai construit, dans [M4], une suite de surfaces elliptiques qui sont totalement algébriques à partir d'une famillle de groupes arithmétiques.

J'ai achevé la détermination des surfaces totalement algébriques de dimension de Kodaira nulle avec le cas des surfaces hyperelliptiques [M5] en étudiant les relations d'incidence pour les fibres multiples de l'une des fibrations elliptiques que portent naturellement ces surfaces.

En dehors du type spécial, j'ai construit, dans mon premier article [M1], une surface de type général avec « beaucoup » de cycles algébriques en étudiant la résolution des singularités réelles d'un revêtement ramifié du plan.

Ce programme de recherche est en passe d'être achevé. Il reste néanmoins plusieurs questions intéressantes à propos des cycles algébriques.

2. Parallèlement aux cycles algébriques, je me suis naturellement intéressé à des questions plus générales et en particulier à la classification des types topologiques des variétés algébriques réelles. On trouvera dans les articles déjà cités plusieurs résultats de cette nature. Dans ce rapport, j'ai choisi de développer deux thèmes de façon plus approfondie : la classification topologique des surfaces elliptiques réelles (surfaces dont nous avons déjà parlé) et la classification des variétés uniréglées réelles de dimension 3.

J'ai en effet décidé de concentrer mes efforts sur ces deux thèmes pour les prochaines années.

— Les surfaces elliptiques forment l'une des dernières classes de surfaces réelles de type spécial dont la classification topologique n'est pas achevée. Grâce à la construction que j'ai développée dans [M4], j'ai montré qu'une borne sur l'homologie en rang 1 est optimale et je dirige actuellement (en collaboration avec K. Kurdyka) la thèse de M. Akriche consacrée à la classification topologique de ces surfaces.

— Dans le but de réfuter la conjecture de Nash en dimension 3, J. Kollár à donné, en 1998, une liste des types topologiques possibles pour une composante connexe orientable d'une variété uniréglée de dimension 3. Cette liste contient en particulier les variétés de Seifert et J. Kollár a conjecturé que toute variété de Seifert pouvait être réalisée de cette manière. En collaboration avec J. Huisman [M7], nous avons démontré cette conjecture. Dans le prolongement de ce résultat, j'envisage de poursuivre la classification des variétés uniréglées réelles.

3. J'ai commencé récemment à m'intéresser à l'approximation des applications lisses par des applications régulières (c'est-à-dire, ici, rationnelles sans pôle réel). On peut poser plus précisément la question suivante :

Étant donné une application différentiable entre variétés algébriques réelles, peux-t-on l'approximer par une application régulière ?

Cette question à été abondemment étudiée, notamment par J. Bochnak, W. Kucharz, R. Silhol, N. Joglar, J. Kollár, cf. e.g. [8], [9], [20].

En collaboration avec N. Joglar [M6], nous avons achevé de résoudre ce problème dans le cas d'un morphisme entre une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle et la sphère standard. Nous avons utilisé une caractérisation originale d'un invariant classiquement utilisé pour ce type de question et nous avons mis en évidence le comportement surprenant de certaines surfaces de Del Pezzo réelles de degré 2.

Je viens de résoudre ce problème dans le cas d'un morphisme entre une surface algébrique réelle fibrée en coniques et la sphère [M8] et plus généralement lorsque la surface de départ est une surface réglée sur $\mathbb{C}$. Ceci a permis d'achever le cas des surfaces de dimension de Kodaira strictement négative.

1 Cycles algébriques sur les surfaces

Dans cette partie, une variété algébrique réelle est un couple (X, σ) où X est une variété complexe projective non singulière munie d'une involution anti-holomorphe σ_X. La partie réelle $X(\mathbb{R})$ de X est l'ensemble des points fixes de σ_X muni de la topologie euclidienne. Une surface algébrique réelle est alors une variété algébrique réelle avec $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$. Lorsque la surface possède au moins un point réel, on a alors $\dim_{\mathbb{R}} X(\mathbb{R}) = 2$.

Soit (X, σ) une surface algébrique réelle de partie réelle $X(\mathbb{R})$, on considère le sous-groupe

$$H_1^{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \subset H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

des classes d'homologie représentables par une courbe algébrique réelle. Le problème posé est la détermination de ce groupe et l'étude de ses applications en topologie et dans des problèmes de classification.

Plus précisément, on considère $Y \subset X$ une sous-variété algébrique géométriquement irréductible définie sur $\mathbb{R}$ de codimension r dans X. Si $Y(\mathbb{R})$ est de codimension r dans $X(\mathbb{R})$, on a une classe fondamentale en homologie $[Y(\mathbb{R})] \in H_{n-r}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ où n est la dimension de X [10]. Notons $H_{n-r}^{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ le sous-groupe de $H_{n-r}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ engendré par de telles classes fondamentales. On note aussi $H_{\mathrm{alg}}^r(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ le groupe formé des classes duales de Poincaré.

Lorsque X est une surface, les $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ et $H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ sont isomorphes. On note $h^1(X(\mathbb{R}))$ leur dimension commune. On note de la même façon $h_{\mathrm{alg}}^1(X(\mathbb{R})) = \dim_{\mathbb{Z}/2} H_{\mathrm{alg}}^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.

Une surface algébrique réelle X est *totalement algébrique* si $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et

$$h_{\mathrm{alg}}^1(X(\mathbb{R})) = h^1(X(\mathbb{R})) \ .$$

En dehors d'un intérêt intrinsèque : caractériser les classes d'homologie pouvant être représentées par des sous-variétés algébriques, ces groupes interviennent dans des questions de résolutions de singularités réelles et dans le problème d'approximation des hypersurfaces $\mathcal{C}^\infty$ par des hypersurfaces algébriques.

Des différents articles cités, j'ai extrait les théorèmes sur le groupe H_{alg}^1 qui permettent une comparaison facile des comportements selon les familles de surfaces.

Deux surfaces complexes appartiennent à la même famille complexe si elles sont équivalentes par déformation analytique complexe. Deux surfaces réelles (X, σ_X) et (Y, σ_Y) appartiennent à la même famille réelle si il existe une déformation équivariante dont la base est *connexe*.

En général, il existe plusieurs familles réelles pour une même famille complexe. Par exemple les surfaces d'Enriques forment une unique famille

complexe mais les surfaces d'Enriques réelles forment plus de 200 familles réelles [14].

On a des majorations naturelles de h^1_{alg} qui proviennent de la géométrie complexe, par exemple lorsque $X(\mathbb{C})$ est simplement connexe, $h^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}))$ est majoré par le nombre de Hodge $h^{1,1}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \Omega^1_X)$. D'autres majorations proviennent de la structure réelle, par exemple la majoration évidente $h^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R})) \leq h^1(X(\mathbb{R}))$.

Le nombre de hodge $h^{1,1}$ est invariant par déformation complexe, le nombre de Betti h^1 est clairement invariant par déformation réelle, mais h^1_{alg} n'est pas invariant par déformation réelle en général.

En ce qui concerne les obstructions topologiques, la notion de $(M-a)$-variété est importante :

Pour toute variété algébrique réelle X, on a la majoration

$$\dim_{\mathbb{Z}/2} H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) \geq \dim_{\mathbb{Z}/2} H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

entre la somme des nombres de Betti de $X(\mathbb{C})$ et de $X(\mathbb{R})$ et la différence est toujours paire. Il existe donc un entier a tel que $\dim_{\mathbb{Z}/2} H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) - \dim_{\mathbb{Z}/2} H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = 2a$, on dit que X est une $(M-a)$-variété. Lorsque $a = 0$, X est une M-variété ou une variété *maximale*.

Sur une surface algébrique réelle (X, σ_X) de partie réelle non vide il existe un morphisme surjectif

$$\varphi\colon\ \mathrm{Pic}(X_{\mathbb{C}})^{\sigma} \to H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \tag{1.1}$$

défini essentiellement en associant à une courbe réelle la classe fondamentale de sa partie réelle, cf. eg. [41]. La décomposition

$$H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_{V \subset X(\mathbb{R})} H^1(V, \mathbb{Z}/2)$$

où V décrit l'ensemble des composantes connexes de $X(\mathbb{R})$ est orthogonale pour le degré du cup-produit.

On note $w_1(S)$ la première classe de Stiefel-Whitney du fibré tangent d'une surface lisse S. Soit $\mathcal{K}_X$ un diviseur canonique de X. Nous utiliserons les propriétés suivantes de φ :

$$\forall D \in \mathrm{Div}(X)^{\sigma},\ \forall D' \in \mathrm{Div}(X)^{\sigma}, \quad \varphi(D).\varphi(D') \equiv D.D' \mod 2\ ; \tag{1.2a}$$

$$w_1(X(\mathbb{R})) = \varphi(\mathcal{K}_X)\ . \tag{1.2b}$$

Dans (1.2a), on considère à gauche le degré du cup-produit sur l'espace vectoriel $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ et à droite l'intersection des diviseurs.

Surfaces K3, surfaces abéliennes

J'ai repris dans cette sous-section certains résultats de ma thèse de doctorat. Ensuite, tous les résultats sont postérieurs à la thèse.

Sur $\mathbb{C}$, une surface K3 est une surface simplement connexe de fibré canonique trivial. Les surfaces K3 complexes forment une unique famille complexe et les surfaces K3 réelles forment 75 familles réelles [14].

Soit X une surface K3 réelle, le nombre h^1_{alg} n'est pas invariant par déformation réelle. On a $h^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R})) \leq h^1(X(\mathbb{R})) \leq h^{1,1} = 20$.

Le théorème principal de [M2] est :

Théorème A. *Soit X une surface K3 réelle, qui n'est pas une M-surface, pour tout sous-groupe K de $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, il existe une déformation réelle Y de X et une isométrie*

$$u\colon H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \to H^1(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

telle que

$$u(K) = H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)\ .$$

Lorsque X est une surface K3 *générique*, on a

$$h^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R})) \leq 1$$

mais grâce au Théorème A, on peut spécialiser pour imposer n'importe quelle valeur de h^1_{alg} autorisée par les conditions topologiques :

Corollaire A'. *Soit X une surface K3 réelle, alors*

1. *pour tout entier $1 \leq k < h^1(X(\mathbb{R}))$, il existe une déformation réelle Y de X telle que*
$$h^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R})) = k\ .$$
2. *si X n'est pas une M-surface, il existe aussi une déformation réelle Y de X telle que*
$$h^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R})) = h^1(X(\mathbb{R}))\ .$$

Pour être complet, mentionnons que pour une M-surface K3, il ne peut exister de déformation réelle vers une surface totalement algébrique car pour une telle surface, l'inégalité $h^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R})) < h^1(X(\mathbb{R}))$ est toujours vraie.

Idée de preuve du Théorème A. Soit X une surface K3, on sait ([46], exposé IV), que $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ muni de la forme induite par le cup-produit est isométrique à un $\mathbb{Z}$-module libre L muni d'une forme bilinéaire entière symétrique non dégénérée paire Q de signature $(3, 19)$.

Soit $f\colon H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \to L$ une isométrie. On dit que le couple (X, f) est une surface K3 marquée. Soit la décomposition de Hodge

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)\ .$$

On a $h^{2,0} = \dim H^{2,0}(X) = 1$ et $h^{1,1} = \dim H^{1,1}(X) = 20$.

Soit (X, f) une surface K3 réelle marquée. On considère $P \subset L_{\mathbb{R}} = L \otimes \mathbb{R}$ l'image par $f_{\mathbb{R}}$ du sous-espace $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \cap (H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X))$ de $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$. Du fait que $H^{2,0}(X)$ est de dimension complexe 1, P est un 2-plan de $L_{\mathbb{R}}$. On choisit une orientation de P de telle sorte que pour toute 2-forme holomorphe $\omega \in H^{2,0}(X)$, la base $(\Re(\omega), \Im(\omega))$ soit directe. Ce plan orienté P est la période de (X, f).

La structure réelle de X induit une involution σ de (L, Q). Pour simplifier, considérons le cas où X n'est pas une M-surface et prenons $K = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$. On montre qu'il existe dans ce cas un sous-module primitif $M \subset L^{-\sigma}$ tel que $M/((1-\sigma)L \cap M)$ soit de rang $h^1(X(\mathbb{R}))$ et dont l'orthogonal $M_{\mathbb{R}}^{\perp}$ rencontre le cône des périodes des surfaces K3 réelles déformations équivalentes à X. Pour une surface K3 réelle (Y, g) dont la période est orthogonale à M, on a alors $g^{-1}(M) \subset H^2_{\text{alg}}(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ d'après le Théorème de Lefschetz sur les $(1, 1)$ cycles.

Soit $\gamma \in g^{-1}(M)$. Par construction, γ est anti-invariante pour la structure réelle de Y, et comme $Y(\mathbb{C})$ est simplement connexe, elle est représentable par un diviseur réel [43]. La première classe de Chern induit alors un isomorphisme $\text{Pic}(X_{\mathbb{C}})^{\sigma} \longrightarrow H^2_{\text{alg}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{-\sigma}$. Finalement, on montre que $H^1(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ est égal à $\varphi \circ c_1^{-1} \circ g^{-1}(M)$. $\square$

Une surface abélienne est un tore complexe algébrique de dimension 2. De même que les surfaces K3, les surfaces abéliennes forment une unique famille de déformation sur $\mathbb{C}$, plusieurs familles sur $\mathbb{R}$ et h^1_{alg} n'est pas invariant par déformation réelle.

Pour une surface abélienne X, on a $h^1(X(\mathbb{R})) \leq 8$ et $h^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R})) \leq 6$.

A l'aide de techniques comparables au cas des surfaces K3, j'ai mis en évidence des obstructions de nature topologique et montré qu'en dehors de ces obstructions, on pouvait toujours déformer une surface abélienne pour réaliser un $h^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}))$ donné.

En particulier, une surface abélienne totalement algébrique a une partie réelle nécessairement connexe et une surface abélienne de partie réelle connexe peut être déformée sur $\mathbb{R}$ vers une surface abélienne réelle totalement algébrique.

Surfaces d'Enriques

Une surface d'Enriques est le quotient d'une surface K3 par une involution holomorphe sans point fixe. Les surfaces d'Enriques forment une unique famille complexe mais plusieurs centaines de familles réelles [14]. Soit X une surface d'Enriques réelle, on a $h^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R})) \leq h^1(X(\mathbb{R})) \leq 12$.

Contrairement aux cas précédents, le nombre h^1_{alg} est invariant par déformation réelle et, avec J. van Hamel, nous avons donné une caractérisation topologique du groupe des cycles algébriques [M3].

Théorème B. *Soit X une surface d'Enriques réelle avec $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Si toutes les composantes connexes de la partie réelle $X(\mathbb{R})$ sont orientables, on a*

$$H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \ .$$

Dans le cas contraire,

$$\dim H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \dim H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) - 1 \ .$$

Corollaire B'. *Il existe des familles réelles de surfaces d'Enriques pour lesquelles on a $h^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R})) < h^1(X(\mathbb{R}))$ pour toute les surfaces de la famille. En particulier, lorsque X est une surface d'Enriques réelle de premier nombre de Betti maximal, $h^1(X(\mathbb{R})) = 12$, il n'existe aucune déformation réelle de X qui soit totalement algébrique.*

Preuve de la première partie du théorème. Pour des raisons techniques, on effectue la preuve au niveau de l'homologie, c'est-à-dire qu'on va montrer l'équivalence (voir début de la Section 1) :

$$H_1^{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \Longleftrightarrow X(\mathbb{R}) \text{ est orientable.}$$

Le diviseur canonique d'une surface d'Enriques étant de 2-torsion, on déduit du Théorème C ci-dessous la condition nécessaire pour qu'une surface d'Enriques réelle soit totalement algébrique. C'est la réciproque qui est délicate. Lorsque Y est une surface K3, la surface complexe $Y(\mathbb{C})$ est simplement connexe et on a un morphisme surjectif

$$H_2(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{-\sigma} \longrightarrow H_1(Y(\mathbb{R})\mathbb{Z}/2) \ .$$

Ce morphisme n'existe pas pour une surface d'Enriques X dont le groupe fondamental est $\pi_1(X(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}/2$. En revanche, on peut toujours définir un morphisme à partir de l'homologie équivariante [M3, Sec. 4]

$$\alpha^X \colon H_2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(1)) \longrightarrow H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

dont l'image est précisément le groupe $H_1^{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ lorsque X est une surface d'Enriques.

Notons Y une surface K3 complexe dont X est le quotient par une involution holomorphe sans point fixe τ. La structure réelle de X se relève naturellement en deux structures réelles σ_1 et $\sigma_2 = \tau \circ \sigma_1$ sur Y. La partie réelle $X(\mathbb{R})$ est revêtue par la réunion des parties réelles $Y_1(\mathbb{R}) = Y(\mathbb{C})^{\sigma_1}$ et $Y_2(\mathbb{R}) = Y(\mathbb{C})^{\sigma_2}$. Pour $j \in \{1, 2\}$, on note X_j la réunion disjointe des composantes de $X(\mathbb{R})$ revêtues par $Y_j(\mathbb{R})$. On obtient ainsi une décomposition naturelle de la partie réelle d'une surface d'Enriques en « moitiés »

$$X(\mathbb{R}) = X_1 \cup X_2 \ .$$

Plus précisément, toutes les composantes connexes d'unes surface K3 sont orientables. Soit M une composante connexe d'une moitié X_j. Si M est orientable, M est revêtue par deux composantes de $Y_j(\mathbb{R})$ qui sont échangées par τ. Si M est non orientable, M est revêtue par une seule composante de $Y_j(\mathbb{R})$ qui est alors le revêtement d'orientation de M. On en tire un morphisme

$$H_1(Y_1(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H_1(Y_2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

qui est surjectif lorsque $X(\mathbb{R})$ est orientable. Ce morphisme conduit à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_2(Y_1(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(1)) \oplus H_2(Y_2(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(1)) & \longrightarrow & H_2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(1)) \\ \alpha^{Y_1} \oplus \alpha^{Y_2} \big\downarrow & & \alpha^X \big\downarrow \\ H_1(Y_1(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H_1(Y_2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \end{array} \tag{1.3}$$

Les morphismes α^{Y_1} et α^{Y_2} sont surjectifs parce que $Y(\mathbb{C})$ est simplement connexe et finalement α^X est surjective lorsque $X(\mathbb{R})$ est orientable. □

Théorème C. *Soit $d \geqslant 2$ un entier. Une surface algébrique réelle X dont le diviseur canonique $\mathcal{K}_X$ est de d-torsion ne peut être totalement algébrique que si sa partie réelle $X(\mathbb{R})$ est vide ou orientable.*

Preuve. Soit X une surface algébrique réelle telle que

$$H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

On utilise les propriétés de $\varphi\colon \operatorname{Pic}(X_{\mathbb{C}})^\sigma \to H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ vues en 1.2. Soit D un diviseur dont la classe dans le groupe de Néron-Severi $\operatorname{NS}(X_{\mathbb{C}})$ possède un multiple trivial, alors $D.D' = 0$ pour tout diviseur D'. Lorsque D est réel, on a $\varphi(D) = 0$ dans $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. En effet, par hypothèse, toute classe de cohomologie $u \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ est l'image par φ d'un diviseur réel D' donc $\varphi(D).u = 0$. Comme le degré du cup-produit est une forme non dégénérée sur $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, on a $\varphi(D) = 0$. Maintenant, si $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, on peut supposer $\mathcal{K}_X$ réel, cf. [41, I.4.5]. Comme $\mathcal{K}_X$ est de torsion dans $\operatorname{NS}(X_{\mathbb{C}})$ on a $\varphi(\mathcal{K}_X) = 0$ d'où $w_1(X(\mathbb{R})) = 0$ et $X(\mathbb{R})$ est orientable [M5]. □

Surfaces elliptiques régulières

Une surface est dite elliptique s'il existe une application holomorphe surjective $\pi : X \to \Delta$ où Δ est une courbe lisse compacte et la fibre générique de π est une courbe de genre 1. Une telle surface est dite elliptique réelle lorsque X et Δ sont définies sur $\mathbb{R}$ et $\pi \circ \sigma_X = \sigma \circ \pi$ où σ est la structure réelle de Δ. Une surface algébrique est dite *régulière* si $H^1(X, \mathcal{O}_X) = \{0\}$.

Lorsque X est une surface elliptique, ceci impose que la courbe de base est de genre 0 et que la fibration admet au moins une fibre singulière.

Contrairement aux trois classes de surfaces précédentes, il existe une infinité de familles complexes de surfaces elliptiques régulières et pour chaque famille complexe, plusieurs familles réelles.

Pour chaque famille complexe de surface elliptique régulière sans fibre multiple, on a $h^1 \leq h^{1,1}$, cf. 2.1. J'ai montré dans [M4] que dans chaque famille complexe de surfaces elliptiques régulières sans fibre multiple, il existe au moins une sous-famille de surfaces réelles telle que $h^1 = h^{1,1}$. De plus, dans chacune des familles réelles trouvées, il existe au moins une surface réelle telle que $h^1_{\mathrm{alg}} = h^1$. Ces deux résultats sont obtenus à l'aide d'une même construction. Je les ai séparés pour ce rapport et j'ai reporté la partie topologique à la Section 2.

Théorème D. *Toute surface elliptique régulière sans fibre multiple $Y \to \mathbb{P}^1$ peut être déformée sur $\mathbb{C}$ en une surface elliptique X admettant une structure réelle telle que*

$$h^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R})) = h^1(X(\mathbb{R})) = h^{1,1}(X) \ .$$

Preuve. Soit $Y \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une surface elliptique régulière sans fibre multiple. On considère un modèle relativement minimal $Y' \longrightarrow \mathbb{P}^1$ de Y. Les surfaces elliptiques régulières sans fibre multiple relativement minimales sont classifiées par leur caractéristique d'Euler holomorphe [22]. Je rappelle dans la Section 2 la construction d'une suite de surfaces elliptiques qui sont totalement algébriques [M4]. En particulier, il existe une surface elliptique régulière sans fibre multiple relativement minimale X' telle que $\chi(\mathcal{O}_{X'}) = \chi(\mathcal{O}_{Y'})$ et $h^1_{\mathrm{alg}}(X'(\mathbb{R})) = h^1(X'(\mathbb{R})) = h^{1,1}(X')$, cf. Théorème G.

Soit V une surface réelle et $W \to V$ un éclatement centré en un point de $V(\mathbb{R})$, alors W est une surface réelle et

$$h^{1,1}(W) = h^{1,1}(V) + 1, \quad h^1_{\mathrm{alg}}(W(\mathbb{R})) = h^1_{\mathrm{alg}}(V(\mathbb{R})) + 1 \ .$$

Toute surface elliptique régulière sans fibre multiple Y admet un modèle relativement minimal Y' qui est une surface elliptique. La surface Y est obtenue à partir de Y' par un nombre fini η_Y d'éclatements centrés en des points. On conclut grâce au :

Théorème (Kodaira). *Deux surfaces elliptiques régulières sans fibre multiple X et Y sont équivalentes par déformation si et seulement si*

1. *les modèles minimaux X' et Y' sont équivalents par déformation ;*
2. *$\eta_X = \eta_Y$.*

□

Surfaces hyperelliptiques

Sur $\mathbb{C}$, une surface hyperelliptique (appelée aussi bielliptique) peut être définie comme le quotient d'un produit $E \times F$ de courbes elliptiques par l'action produit d'un groupe fini G de translations de F dont l'action sur E admet $\mathbb{P}^1$ pour quotient. Pour une surface hyperelliptique X, la fibration d'Albanese

$$\alpha\colon X = (E \times F)/G \to \mathrm{Alb}(X) = F/G$$

est une fibration elliptique localement triviale non triviale.

Le diviseur canonique $\mathcal{K}_X$ d'une surface hyperelliptique est de torsion, on note d_X cette torsion.

Il y a exactement sept familles complexes de surfaces hyperelliptiques et pour chacune d'entre elles, plusieurs familles réelles. Le nombre h^1_{alg} est encore invariant par déformation et j'ai donné dans [M5], une caractérisation topologique des surfaces hyperelliptiques totalement algébriques.

Théorème E. *Soit X une surface hyperelliptique réelle avec un point réel.*

1. *Si $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, alors $X(\mathbb{R})$ est homéomorphe à un tore. Si de plus d_X est pair, α admet une section réelle.*
2. *Supposons que $X(\mathbb{R})$ soit homéomorphe à un tore. Si d_X est impair ou si α admet une section réelle, alors*

$$H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)\ .$$

Preuve partielle. Soit X une surface bielliptique réelle. On note

$$\pi\colon X \to E/G \cong \mathbb{P}^1$$

la deuxième fibration elliptique dont les seules fibres singulières sont des fibres multiples $m_t L_t$ où L_t est une courbe elliptique lisse. Le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}})$ est engendré par une fibre X_x de α et par les courbes L_t réduites des fibres multiples de π. Soient $m_t L_t$ et $m_{t'} L_{t'}$ deux fibres multiples réelles de π, notons d le pgcd de m_t et $m_{t'}$. Supposons que $d \geqslant 2$, le diviseur $D = (m_t/d)L_t - (m_{t'}/d)L_{t'}$ est de d-torsion dans $\mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}})$. D'après la preuve du Théorème C, $\varphi(D) = 0$. Quitte à permuter t et t', on peut supposer que m_t/d est impair. On a alors

$$\varphi((m_t/d)L_t) = \varphi(L_t)\ .$$

On a donc une alternative : $\varphi(L_t) = \varphi(L_{t'})$ ou $\varphi(L_t) = 0$. En étudiant les sept configurations de fibres multiples possibles, on déduit que l'image par φ du sous-groupe de $\mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}})$ engendré par les courbes L_t réelles est de dimension ≤ 1.

Supposons maintenant que X soit totalement algébrique. Dans ce cas, on a $\varphi(\mathrm{Pic}^0(X_{\mathbb{C}})^\sigma) = \{0\}$ dans $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ [26, Th. 2.1]. On en déduit un morphisme

$$\mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}})^\sigma \to H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

bien défini sur $\mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}})^{\sigma}$ et surjectif sur $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. Ceci nous donne une majoration $\dim H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq 2$. Par hypothèse, la dimension de l'espace $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ vérifie la même inégalité donc $X(\mathbb{R})$ est connexe. Par ailleurs, le diviseur canonique $\mathcal{K}_X$ d'une surface bielliptique est de d_X-torsion avec $d_X \in \{2, 3, 4, 6\}$. D'après le Théorème C, si la partie réelle $X(\mathbb{R})$ est non vide, elle est orientable, et donc finalement, homéomorphe à un tore. Pour la réciproque, je renvoie à l'article original [M5]. $\square$

En regroupant les résultats déjà obtenus, on constate que lorsque X est une surface algébrique appartenant à l'une des classes suivantes : rationnelle, réglée, abélienne, K3, d'Enriques ou elliptique régulière, on peut toujours trouver une surface algébrique Y dans la même famille complexe que X et une structure réelle non vide sur Y qui soit totalement algébrique. A contrario, on a trouvé deux familles complexes de surfaces hyperelliptiques qui contiennent des surface réelles dont la partie réelle est difféomorphe à un tore mais qui ne sont jamais totalement algébriques.

Théorème F. *Il existe des surfaces hyperelliptiques X telles que pour toute surface algébrique Y déformation équivalente à X sur $\mathbb{C}$ et pour toute structure réelle sur Y ayant des points réels, on ait*

$$H^1_{\mathrm{alg}}(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \neq H^1(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \ .$$

Dans chacune des cinq autres familles complexes de surfaces hyperelliptiques, il existe une surface réelle X telle que $X(\mathbb{R})$ est homéomorphe à un tore et $H^1_{\mathrm{alg}}(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.

Corollaire F'. *A l'exception des surfaces du Théorème F, toute famille complexe de surfaces de dimension de Kodaira non positive contient une surface réelle X avec un point réel telle que $H^1_{\mathrm{alg}}(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.*

Conclusion

Ce programme de recherche est en passe d'être achevé. Il reste plusieurs questions intéressantes à propos des cycle algébriques, notamment le cas des fibrations en genre 2 et celui des variétés semi-abéliennes. Je pense à l'avenir en faire un sujet de thèse.

2 Topologie des variétés algébriques réelles

Considérons un ensemble fini de polynômes homogènes à coefficients *réels*

$$f_i(x_0 : x_1 : \ldots : x_n), \quad i \in I \ .$$

De la variété algébrique projective X déterminée par les f_i on déduit deux espaces topologiques :

$$X(\mathbb{R}) := \{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \text{ tel que } f_i(x) = 0, \quad \forall i \in I\}$$
$$X(\mathbb{C}) := \{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \text{ tel que } f_i(x) = 0, \quad \forall i \in I\}$$

qui sont des sous-espaces topologiques de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ respectivement. Lorsque la variété X est non singulière, les espaces $X(\mathbb{R})$ et $X(\mathbb{C})$ sont naturellement des sous-variétés différentielles.

Une question classique et difficile est d'établir des connexions entre les propriétés algébriques de X et les propriétés topologiques de $X(\mathbb{R})$. Par exemple, dans son fameux XVIème problème, Hilbert demande quels sont les types topologiques réalisés par $X(\mathbb{R})$ lorsque X est une hypersurface lisse de degré 4 dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. La réponse a été achevée en 1975 par Kharlamov et Nikulin : il existe 66 types topologiques pour $X(\mathbb{R})$. Rappelons que pour deux hypersurfaces quartiques non singulières X et X' de $\mathbb{P}^3$, les espaces $X(\mathbb{C})$ et $X'(\mathbb{C})$ sont difféomorphes.

On généralise naturellement ce problème en cherchant à déterminer, pour un type de variété complexe donné, les types topologiques de variétés réelles que l'on peut obtenir.

Les résultats les plus récents à ce sujet sont la classification des surfaces d'Enriques réelles [14], la classification des surfaces hyperelliptiques réelles [11], la classification des surfaces $\mathbb{R}$-réglées [44] et la contradiction de la conjecture de Nash en dimension 3 [24].

De mon côté, j'ai obtenu des résultats sur les surfaces elliptiques réelles [M4] et sur les variétés uniréglées réelles [M7].

Surfaces elliptiques modulaires réelles

On a défini dans la section précédente les surfaces elliptiques régulières réelles.

Les surfaces elliptiques régulières relativement minimales $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ sont classifiées sur $\mathbb{C}$ par la caractéristique d'Euler holomorphe $\chi(\mathcal{O}_X)$ et la liste des fibres multiples, liste qui peut être vide.

Il est en général assez difficile de trouver, dans une famille donnée de surfaces complexes, des surfaces algébriques réelles avec un « grand » premier nombre de Betti $h^1(X(\mathbb{R}))$. Par exemple, on ne sait toujours pas s'il existe une surface de degré 5 dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ avec un premier nombre de Betti égal à 47 (47 est un majorant connu pour ces surfaces), cf. [18], [5] et [M1].

D'après un résultat de V. Kharlamov (communication privée 1997), on a la proposition suivante.

Proposition 2.1 (Kharlamov). *Une surface elliptique réelle X régulière et sans fibre multiple, vérifie l'inégalité de Ragsdale-Viro*

$$h^1(X(\mathbb{R})) \leq h^{1,1}(X) \ .$$

Dans l'article [M4], j'ai construit une suite de surfaces elliptiques réelles relativement minimales qui maximisent le nombre $h^1(X(\mathbb{R}))$. Je montre ainsi que l'inégalité de Ragsdale-Viro $h^1(X(\mathbb{R})) \leq h^{1,1}(X)$ est optimale pour toutes les surfaces elliptiques réelles régulières et sans fibre multiple.

D'après le théorème de décomposition de Hodge, pour une surface elliptique X régulière relativement minimale, on a $h^{1,1}(X) = 10\chi(\mathcal{O}_X)$ d'où lorsque X est de plus sans fibre multiple,

$$h^1(X(\mathbb{R})) \leq 10\chi(\mathcal{O}_X) \ .$$

Théorème G. *Pour tout $k > 0$, il existe une surface elliptique régulière réelle relativement minimale X telle que :*

$$\chi(\mathcal{O}_X) = k, \quad h^1(X(\mathbb{R})) = 10k \ .$$

Preuve. Les surfaces qui apparaissent dans l'énoncé précédent sont dites modulaires. Une surface modulaire est fabriquée à partir d'un sous-groupe Γ d'indice fini du groupe modulaire $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$. Je vais donner une idée de la construction. Le but étant d'obtenir des surfaces réelles avec une topologie intéressante, j'ai adapté la construction classique [38] [39] au cas réel. Ensuite j'ai utilisé la classification réelle des fibres singulières d'une fibration elliptique donnée par Silhol [40] pour obtenir les conditions nécessaires à poser sur le groupe Γ pour que la surface réelle ait une homologie maximale en rang 1.

Considérons un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ étant un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, le groupe Γ est un sous-groupe discret du groupe des isométries du plan hyperbolique $\mathbb{H}$. C'est donc un groupe fuchsien et le quotient $\Delta'_\Gamma = \mathbb{H}/\Gamma$ est une courbe complexe dont la non compacité provient des classes paraboliques ou cusps. Une compactification naturelle est obtenue en remarquant que Γ opère sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ considéré comme sous-espace du bord de $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}/\ \Im(z) > 0\}$, on considère alors la courbe complexe compacte

$$\Delta_\Gamma = (\mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))/\Gamma \ .$$

On utilise alors le fait que Γ n'est pas seulement un groupe d'isométries de $\mathbb{H}$ mais aussi un groupe d'automorphismes de courbes elliptiques, on construit alors naturellement une fibration localement triviale en courbes de

genre 1 au dessus de l'ouvert Δ'_Γ de Δ_Γ. Il y a alors en général plusieurs façons de prolonger la fibration au dessus de chaque point cusp p. Pour déterminer le type complexe de fibre singulière au dessus de p, il suffit de connaître un élément du stabilisateur de $p \in \Delta_\Gamma$. On obtient ainsi une représentation de monodromie

$$\rho\colon \pi_1(\Delta'_\Gamma) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$$

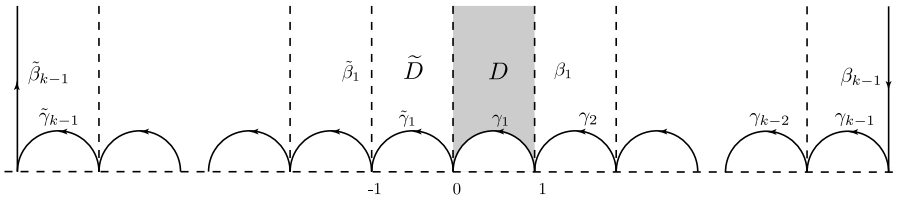
Pour chaque relèvement $\rho'\colon \pi_1(\Delta'_\Gamma) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, de ρ on obtient une surface elliptique avec une liste de fibres singulières de types complexes fixés.

L'action du groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ est notée $z \mapsto A.z$ où $A.z = \frac{az+b}{cz+d}$ si A est représenté par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc=1$. L'involution $\sigma_{\mathbb{H}} : z \mapsto -\bar{z}$ de $\mathbb{H}$ est anti-holomorphe. On note $S : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$, clairement S induit une involution sur $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ que l'on notera encore S. Soient $z \in \mathbb{H}$ et $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, alors $\sigma_{\mathbb{H}}\left(A.\sigma_{\mathbb{H}}(z)\right) = S(A).z$.

Soit Γ un groupe fuchsien (i.e. un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$), l'involution $\sigma_{\mathbb{H}}$ induit une structure réelle sur le quotient $\mathbb{H}/\Gamma$ si et seulement si $\sigma_{\mathbb{H}}\Gamma = \Gamma\sigma_{\mathbb{H}}$, i.e. si et seulement si Γ est stable par S.

En général, on ne peut pas contrôler complètement le type réel des fibres singulières obtenues par cette construction. Dans les cas où cela est possible, j'ai effectué le calcul et obtenu des conditions nécessaires sur Γ. Finalement, avec l'aide de P. Schmutz-Schaller, j'ai trouvé une suite de groupes qui vérifient ces conditions nécessaires.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit Γ_k le groupe arithmétique dont le domaine fondamental est représenté sur la figure suivante.



J'ai montré que pour chaque groupe Γ_k, il existe une surface elliptique modulaire réelle $X_k \longrightarrow \Delta_{\Gamma_k} \cong \mathbb{P}^1$ qui vérifie les conclusions du Théorème G. Pour chaque k, la partie réelle $X_k(\mathbb{R})$ est connexe. Lorsque k est pair, $X_k(\mathbb{R})$ est difféomorphe à la surface orientable de genre $\frac{5k}{2}$. Dans le cas contraire, $X_k(\mathbb{R})$ est difféomorphe à la surface non orientable de caractéristique d'Euler $2-10k$. $\square$

Le Théorème G est pour moi une étape vers la classification des surfaces elliptiques réelles. En collaboration avec K. Kurdyka, je dirige actuellement la thèse de M. Akriche à qui j'ai proposé de poursuivre l'étude des surfaces elliptiques réelles. Plusieurs résultats sont en cours de rédaction. Ce sujet est prometteur.

Variétés uniréglées de dimension 3, conjectures de Nash et de Kollár

En 1952, Nash a montré que pour toute variété lisse compacte connexe M, il existe une variété algébrique réelle X telle que M soit difféomorphe à une composante connexe de $X(\mathbb{R})$ [35]. Dans le même article, il propose la conjecture suivante :

Conjecture (Nash 1952). Soit M une variété lisse compacte connexe, il existe une variété *rationnelle* projective non singulière réelle X telle que M soit difféomorphe à $X(\mathbb{R})$.

Cette conjecture avait été réfutée par anticipation [12] :

Théorème (Comessatti 1914). *Soit S une surface rationnelle réelle non singulière. Lorsque la partie réelle $S(\mathbb{R})$ est orientable, elle est difféomorphe à la sphère S^2 ou au tore $S^1 \times S^1$.*

On en déduit immédiatement une conjecture de Nash amendée en supposant que $\dim X \neq 2$. Mais en 1998, J. Kollár [24] a aussi contredit la conjecture de Nash en dimension 3. En dimension supérieure à trois, cette conjecture est toujours ouverte.

Signalons pour être complet que R. Benedetti et A. Marin [4] ont montré que toute variété compacte de dimension 3 est homéomorphe à la partie réelle d'une variété rationnelle projective réelle *singulière*. Il existe encore d'autres versions de cette conjecture dues à S. Akbulut, H. King, G. Mikhalkin, je renvoie à [23] pour les énoncés.

En fait, le résultat de J. Kollár est plus général et concerne les variétés *uniréglées* réelles de dimension 3. Une variété algébrique est uniréglée si il existe une variété Y de dimension $\dim X - 1$ et une fonction rationnelle dominante $\mathbb{P}^1 \times Y \dashrightarrow X$. En dimension inférieure ou égale à 3, une variété projective non singulière est uniréglée si et seulement si sa dimension de Kodaira est strictement négative. En dimension plus grande, cette équivalence est conjecturale.

Théorème (Kollár 1998). *Soit X une variété algébrique réelle uniréglée de dimension 3, supposons que la partie réelle $X(\mathbb{R})$ est orientable, alors toute composante connexe de $X(\mathbb{R})$ est difféomorphe à une somme connexe*

$$N \# a\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \# b(S^2 \times S^1), \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

où N appartient à l'une des classes suivantes :

1. *variétés de Seifert*
2. *sommes connexes d'espaces lenticulaires*
3. *fibrés en tores sur S^1 ou doublement revêtus par de tels fibrés*
4. *un nombre fini d'exceptions possibles*

Une variété rationnelle est clairement uniréglée et le théorème précédent contredit la conjecture de Nash. Il existe en effet une infinité de variétés hyperboliques de dimension 3 qui ne sont pas réalisables par des variétés uniréglées réelles.

À la suite de son théorème, J. Kollár a proposé une série de conjectures concernant la réciproque. En collaboration avec J. Huisman, nous avons montré une de ces conjectures :

Théorème H. *Toute variété de Seifert orientable est difféomorphe à une composante connexe d'une variété uniréglée réelle.*

Soit $S^1 \times D^2$ le *tore solide* où S^1 est le cercle unité $\{u \in \mathbb{C}, |u| = 1\}$ et D^2 est le disque unité fermé $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$. Une *fibration de Seifert* du tore solide est une application lisse

$$f_{p,q} : S^1 \times D^2 \to D^2 \ , (u, z) \mapsto u^q z^p \ ,$$

où p et q sont des entiers naturels vérifiant $p \neq 0$ et $(p, q) = 1$.

Une variété lisse M de dimension 3 est une *variété de Seifert* si il existe une application lisse $f : M \longrightarrow S$ sur une surface lisse S dont chaque fibre est difféomorphe au cercle S^1 et admet un voisinage fermé fibré V tel que la restriction $f_{|V} \colon V \longrightarrow f(V)$ est difféomorphe à une fibration de Seifert du tore solide.

On trouve aussi dans la littérature, e.g. [37], une version qui autorise un modèle local non orientable.

Preuve du théorème. Soit M une variété de Seifert orientable.

La preuve comporte deux étapes :

1. Nous montrons qu'il existe une fibration de Seifert $f \colon M \to S$ et un revêtement fini ramifié galoisien orientable $p \colon \tilde{S} \to S$ tel que le produit fibré

$$\tilde{f} \colon \tilde{M} = M \times_S \tilde{S} \longrightarrow \tilde{S}$$

soit un fibré différentiel en cercles localement trivial orientable. De plus, l'action induite par le groupe de Galois G de p sur $\tilde{M}$ est sans point fixe. En particulier, il existe un groupe fini G agissant sur le fibré localement trivial $\tilde{f}$ tel que $\tilde{f}/G \cong f$.

2. Nous montrons qu'il existe une structure de surface algébrique réelle sur $\tilde{S}$, et qu'il existe un fibré vectoriel algébrique réel $\tilde{L}$ de rang 2 sur $\tilde{S}$ admettant

1. une action algébrique réelle de G sur l'espace total de $\tilde{L}$,
2. une métrique algébrique réelle G-équivariante λ sur $\tilde{L}$

tel que le fibré unitaire en cercles dans $\tilde{L}$ soit difféomorphe de façon G-équivariante à $\tilde{M}$. $\square$

Pour situer ce résultat dans un cadre plus général, rappelons qu'une variété M *admet une structure géométrique* si M admet une métrique localement homogène complète. Dans ce cas, le revêtement universel M' de M admet une métrique homogène complète. La variété M possède alors une structure géométrique modelée sur la géométrie $(\mathrm{Isom}(M'), M')$. W. Thurston a classifié les huit géométries en dimension 3.

En général, une variété de dimension 3 ne possède pas de structure géométrique. En particulier, à part $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})\#\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, aucune somme connexe non triviale n'est géométrique. À l'opposé, toute variété de Seifert admet une structure géométrique modelée sur l'un des six modèles suivants (voir [37] pour une description détaillée de ces géométries) :

$$S^3, S^2 \times \mathbb{R}, E^3, \mathrm{Nil}, H^2 \times \mathbb{R}, \widetilde{\mathrm{SL}_2\,\mathbb{R}}\ .$$

Les deux géométries « non Seifert » sont la géométrie hyperbolique et la géométrie Sol. Grâce aux travaux de Viterbo et d'Eliashberg, on peut exclure la géométrie hyperbolique des composantes réelles de variétés uniréglées. J. Kollár a conjecturé l'exclusion de Sol. D'après le Théorème H, la conjecture suivante devient une conséquence de celle de J. Kollár.

Conjecture. Les composantes réelles *géométriques* des variétés uniréglées réelles de dimension 3 orientables sont exactement les variétés de Seifert orientables.

Je travaille actuellement à cette conjecture et j'envisage de poursuivre la classification des variétés réelles de dimension 3. Les variétés uniréglées réelles dans un premier temps puis les 3-variétés réelles admettant une fibration elliptique.

3 Approximation des applications lisses par des applications régulières

Étant données deux variétés algébriques réelles non singulières X et Y, on note $\mathcal{R}(X(\mathbb{R}), Y(\mathbb{R}))$ l'espace des applications régulières, c'est-à-dire, ici, les applications rationnelles sans pôle réel. Comme $X(\mathbb{R})$ et $Y(\mathbb{R})$ sont lisses, c'est un sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(X(\mathbb{R}), Y(\mathbb{R}))$. On dit qu'une application f de $\mathcal{C}^\infty(X(\mathbb{R}), Y(\mathbb{R}))$ est approximable par des fonctions régulières si f appartient à l'adhérence $\overline{\mathcal{R}(X(\mathbb{R}), Y(\mathbb{R}))}$ pour la topologie compacte-ouverte.

Le Théorème de Weierstrass classique dit que lorsque $Y(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^p$, on a densité : $\overline{\mathcal{R}(X(\mathbb{R}), Y(\mathbb{R}))} = \mathcal{C}^\infty(X(\mathbb{R}), Y(\mathbb{R}))$. Mais en général le sous-espace $\mathcal{R}(X(\mathbb{R}), Y(\mathbb{R}))$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}^\infty(X(\mathbb{R}), Y(\mathbb{R}))$, voir par exemple [9].

Dans le cas où $Y(\mathbb{R})$ est la sphère standard S^2 et où X est une surface rationnelle sur $\mathbb{R}$ (i.e. birationnellement isomorphe sur $\mathbb{R}$ à $\mathbb{P}^2$), J. Bochnak et W. Kucharz on montré que la densité a lieu si et seulement si $X(\mathbb{R})$ n'est pas homéomorphe à un tore et dans le cas du tore, que les seules applications approximables sont homotopiquement triviales [27].

Surfaces géométriquement rationnelles, surfaces de del Pezzo

En collaboration avec N. Joglar, nous avons montré que lorsque X est une surface géométriquement rationnelle (i.e. telle que $X_\mathbb{C}$ est birationnellement isomorphe sur $\mathbb{C}$ à $\mathbb{P}^2$), on a la densité à l'exception de deux cas. Les exceptions sont : le tore précédemment cité et les surfaces de Del Pezzo réelles de degré 2 formées de quatre sphères. Dans ce dernier cas, les seules applications approximables sont celles de degré pair.

Remarquons que les surfaces rationnelles sur $\mathbb{R}$ sont des cas particulier des surfaces géométriquement rationnelles. Les surfaces rationnelles sur $\mathbb{R}$ sont en fait exactement les surfaces géométriquement rationnelles *connexes* [41].

Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé une caractérisation originale d'un invariant classiquement utilisé pour ce type de question. Il s'agit du sous-groupe $H^2_{\mathbb{C}-\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$ de $H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$ formé des classes des restrictions à $X(\mathbb{R})$ des fibrés holomorphes en droites (on n'impose pas qu'ils soient définis sur $\mathbb{R}$). On note $\Gamma(X) = H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})/H^2_{\mathbb{C}-\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$ le quotient. Le lien avec le problème posé est donné par l'équivalence [6],

$$\overline{\mathcal{R}(X(\mathbb{R}), S^2)} = \mathcal{C}^\infty(X(\mathbb{R}), S^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma(X) = 0\ .$$

Une surface de Del Pezzo est une surface de diviseur anti-canonique $-K$ ample. Le degré d d'une surface de Del Pezzo est son premier nombre de Chern K^2. À l'exception de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, les surfaces de Del Pezzo sont des éclatées du plan $\mathbb{P}^2$ en $9 - d$ points. Sur une surface de Del Pezzo réelle de degré 2, il existe deux structures réelles dont l'une a une partie réelle

connexe, c'est celle qui provient de la conjugaison complexe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ via les éclatements.

Théorème I. *Soit X une surface de Del Pezzo réelle de degré 2 dont la partie réelle $X(\mathbb{R})$ est difféomorphe à la réunion disjointe de 4 sphères, alors $\Gamma(X) = \mathbb{Z}/2$. On a le même résultat lorsque $X(\mathbb{R})$ est orientable et admet un modèle $\mathbb{R}$-minimal du type précédent.*

Preuve. Soit X une surface algébrique réelle, on peut décrire un morphisme de Gysin $i_!\colon H_2(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(X(\mathbb{R}),\mathbb{Z})$ de la manière suivante : pour la structure de variété différentielle sous-jacente, $X(\mathbb{C})$ est une variété de dimension 4 et $X(\mathbb{R})$ une sous-variété de dimension 2. Soit $L \subset X$ une courbe algébrique (réelle ou non), $L(\mathbb{C})$ est aussi une sous-variété de dimension 2 de $X(\mathbb{C})$. Lorsque $L(\mathbb{C})$ est transverse à $X(\mathbb{R})$ dans $X(\mathbb{C})$, on pose

$$i_!([L(\mathbb{C})]) = [L(\mathbb{C}) \pitchfork X(\mathbb{R})] \ .$$

Dans le cas qui nous intéresse, soit X une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle de partie réelle orientable. On obtient

$$\Gamma(X) = H_0(X(\mathbb{R}),\mathbb{Z})/\operatorname{Im} i_! \ . \tag{3.1}$$

Il reste à calculer l'image de $i_!$. Soit X est une surface de Del Pezzo réelle de degré 2, le groupe d'homologie $H_2(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ est engendré par les classes des courbes exceptionnelles et par la section hyperplane. Le morphisme anticanonique Ψ_{-K} est un revêtement double du plan ramifié le long d'une courbe quartique Δ. Les (-1)-courbes de X sont envoyées pas Ψ_{-K} sur les bitangentes de Δ. Lorsque $X(\mathbb{R})$ est maximale, c'est-à-dire ici quand $X(\mathbb{R}) \sim \bigsqcup 4S^2$, la partie réelle de Δ est maximale aussi, $\Delta(\mathbb{R}) \sim \bigsqcup 4S^1$, et toutes les bitangentes sont réelles.

Finalement, on montre que les (-1)-courbes de X sont imaginaires et transverses à $X(\mathbb{R})$ dans $X(\mathbb{C})$. On obtient la conclusion par la connaissance (classique) des configurations de bitangentes à une quartique plane. □

Théorème J. *Soit X une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle. Alors*

$$\Gamma(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } X(\mathbb{R}) \sim S^1 \times S^1 \\ \mathbb{Z}/2 & \textit{si } X \textit{ est comme dans le Théorème I} \\ 0 & \textit{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Preuve. Le quotient $\Gamma(X)$ n'est pas un invariant birationnel. Nous avons montré qu'une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle X qui contient une (-1)-courbe *réelle* vérifie $\Gamma(X) = 0$.

Pour prouver le Théorème, on utilise la classification des modèles relativement minimaux sur $\mathbb{R}$. En plus du cas connu où $X(\mathbb{R})$ est connexe, ces modèles sont : les fibrés en coniques et certaines surfaces de Del Pezzo réelles de degré 2 et 1. Nous avons calculé $\Gamma(X)$ dans chacun de ces cas. □

Corollaire J'. *Soit X une surface algébrique réelle géométriquement rationnelle. L'espace des applications régulières $\mathcal{R}(X(\mathbb{R}), S^2)$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(X(\mathbb{R}), S^2)$ des applications $\mathcal{C}^\infty$ sauf si $X(\mathbb{R})$ est difféomorphe à $S^1 \times S^1$ ou si X est comme dans le Théorème I.*

Surfaces réglées, fibrations en coniques

Je viens de terminer la classification pour les surfaces de dimension de Kodaira strictement négative [M8].

Les surfaces géométriquement rationnelles en font partie, et il restait à traiter les fibrations en coniques dont la base est de genre non nul et leurs éclatées. En particulier, si X est une fibration en conique de base non rationnelle, $X(\mathbb{C})$ n'est pas simplement connexe et $X(\mathbb{R})$ peut contenir plusieurs composantes non sphériques.

L'une des difficultés dans l'étude de telles surfaces, difficulté spécifique au cas réel, est que certaines fibrations en coniques réelles sont $\mathbb{R}$-minimales mais non $\mathbb{C}$-minimales. De ce fait, on ne peut pas ramener les calculs aux surfaces $\mathbb{R}$-réglées.

Soit X une fibration en conique de base non rationnelle $\mathbb{R}$-minimale. On généralise le résultat 3.1 au cas non géométriquement rationnel et non orientable. On ramène ainsi l'étude aux relations d'incidence entre $X(\mathbb{R})$ et les courbes réelles ou complexes de X. Le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}})$ est engendré par la classe d'une fibre, par celle d'une section (qui n'est pas toujours réelle) et par les classes des (-1)-courbes complexes qui rencontrent leurs conjuguées.

La classe d'une fibre est réelle et se traite facilement. On règle le cas des (-1)-courbes grâce à un argument de transversalité semblable au cas des Del Pezzo. La difficulté principale fut de comprendre le comportement de la section.

Soit X une surface algébrique réelle de dimension de Kodaira strictement négative qui n'est pas géométriquement rationnelle. Dans ce cas X admet un réglage réel $\rho\colon X \longrightarrow B$. Rappellons qu'une composante connexe de $X(\mathbb{R})$ peut être difféomorphe à une sphère, un tore ou n'importe quelle surface non-orientable. On note K' l'ensemble des composantes de $X(\mathbb{R})$ qui sont difféomorphes à la bouteille de Klein et dont l'image par ρ est une composante connexe de $B(\mathbb{R})$.

Théorème K. *Soit X une surface algébrique réelle réglée sur $\mathbb{C}$ non géométriquement rationnelle. Etant donné une application lisse $f\colon X(\mathbb{R}) \longrightarrow S^2$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est approximable par des applications régulières ;*
2. *f est homotope à une application régulière ;*

3. *pour toute composante connexe M de $X(\mathbb{R})$ difféomorphe à un tore, on a* $\deg(f)_{|M} = 0$ *et pour toute paire de composantes N, L appartenant à K', on a* $\deg_{\mathbb{Z}/2}(f)_{|N} = \deg_{\mathbb{Z}/2}(f)_{|L}$.

Dans le même article, j'ai aussi obtenu une généralisation d'un Théorème de W. Kucharz [27, Th. 1.2].

Théorème L. *Soient $V = X(\mathbb{R})$ et $W = Y(\mathbb{R})$ des surfaces algébriques réelles connexes telles que X soit réglée sur $\mathbb{C}$ et Y soit rationnelle. Alors l'espace $\mathcal{R}(V, W)$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(V, W)$, à l'exception du cas où V est difféomorphe au tore et W est difféomorphe à la sphère.*

Dans ce dernier cas, l'adhérence de $\mathcal{R}(V, W)$ dans $\mathcal{C}^\infty(V, W)$ est formé des applications homotopiquement nulles.

Je viens d'être invité par W. Kucharz à l'Université du Nouveau-Mexique à Albuquerque, USA, pour travailler avec lui sur cette question.

II Participation à l'encadrement doctoral et expérience d'animation de la recherche

Encadrement doctoral

— Co-direction (80%) de la thèse de doctorat de Mouadh Akriche *Surfaces algébriques réelles fibrées en courbes*, début de la thèse : octobre 2001 (co-directeur : K. Kurdyka).
— Membre du jury de la thèse de A. Gabard, *Sur la topologie et la géométrie des courbes algébriques réelles*, 10 juin 2004, Université de Genève, Suisse
— Membre du jury de la thèse de L. Kubbe, *Nonisomorphic algebraic models of smooth manifolds*, 14 mai 2003, Vrije Universiteit, Amsterdam
— Membre du jury de la thèse de D. Derval, *Étude des classes de cohomologie algébrique des variétés algébriques réelles*, 21 décembre 2001, Université Rennes 1
— Co-direction (50%) du DEA de C. Chaumart (ENS Lyon) *Opérateur de Dirac sur les surfaces de Riemann* soutenu en juin 98 (co-directeur : B. Colbois).

Organisation de conférence

7 et 8 février 1997, *Surfaces de Riemann : une autre approche de l'uniformisation*, Chambéry, co-organisateur : B. Colbois.

Communications sur invitation dans des congrès

Février 2004, *Real algebraic morphisms on 2-dimensional conic bundles*, Workshop "Topology and Geometry of Real Algebraic Varieties" part of the Special semester "Topological Aspects of Real Algebraic Geometry" MSRI Berkeley, Californie, USA
Décembre 2003, *Toute 3-variété de Seifert orientable est une composante réelle d'une variété algébrique uniréglée*, congrès "Géométrie Algébrique Complexe" (GAC 2003-2), CIRM, Marseille
Avril 2003, *Every orientable Seifert 3-manifold is a real component of a uniruled algebraic variety*, congrès RAAG 2003, Université de Pise (Italie)
Mars 2002, *Algebraic morphisms and Del Pezzo surfaces of degree 2*, congrès "Reelle algebraische Geometrie", Mathematisches Forschungsinstitut, Oberwolfach (Allemagne)
Juin 2001, *Algebraic cycles and real hyperelliptic surfaces*, congrès RAAG'01, IRMAR, Université Rennes 1.
Septembre 2000, *Algebraic cycles and real bielliptic surfaces*, congrès "Analytic Geometry and Singularities", Institut Banach, Varsovie (Pologne)
Septembre 1998, *Real elliptic surfaces and Ragsdale-Viro inequality*, congrès "Real Analytic and Algebraic Geometry - RAAG-98", Centro Internazionale

per la Ricerca Matematica (C.I.R.M.), Levico Terme–Trento (Italie)
Mars 1997, *Algebraic cycles on real elliptic surfaces*, congrès "Reelle algebraische Geometrie", Mathematisches Forschungsinstitut, Oberwolfach (Allemagne)
Janvier 1997, *Topology of real Enriques surfaces*, congrès "Topology of real algebraic varieties", Fields Institute, Toronto (Canada)
Décembre 1996, *Homologie des surfaces algébriques réelles*, congrès "Rencontres Grenoble-Lyon-Genève", Université de Genève (Suisse)
Juillet 1994, *Period map for real abelian varieties*, congrès *Workshop on computational problems in the theory of Riemann surfaces*, Helsinki (Finlande)
Mai 1994, *Algebraic cycles on real K3 surfaces*, congrès *Conference on Real and Complex Algebraic Geometry*, Soesterberg (Pays-Bas)

Communications sur invitation

Février 2004, *Every orientable Seifert 3-manifold is a real component of a uniruled algebraic variety*, University of New Mexico, Albuquerque, Nouveau-Mexique, USA
Novembre 2003, *Toute 3-variété de Seifert orientable est une composante réelle d'une variété algébrique uniréglée*, Université Lille I
Octobre 2003, *Toute 3-variété de Seifert orientable est une composante réelle d'une variété algébrique uniréglée*, Institut Fourier, Grenoble
Juin 2003, *Toute 3-variété de Seifert orientable est une composante réelle d'une variété algébrique uniréglée*, Séminaire AGATA, Université Montpellier II
Juin 2003, *Toute 3-variété de Seifert orientable est une composante réelle d'une variété algébrique uniréglée*, Séminaire Darboux, Université Montpellier II
Mai 2003, *Toute 3-variété de Seifert orientable est une composante réelle d'une variété algébrique uniréglée*, Université de Provence, Aix–Marseille I
Mai 2003, *Every orientable Seifert 3-manifold is a real component of a uniruled algebraic variety*, Vrije Universiteit, Amsterdam (Pays-Bas)
Mars 2003, *Morphismes algébriques vers la sphère standard et surfaces de Del Pezzo réelles de degré 2*, Université d'Angers
Décembre 2002, *Morphismes algébriques vers la sphère standard et surfaces de Del Pezzo réelles de degré 2*, Université de Rennes I
Novembre 2002, *Cycles algébriques et topologie des surfaces bielliptiques réelles*, Séminaire AGATA, Université Montpellier II
Novembre 2002, *Morphismes algébriques vers la sphère standard et surfaces de Del Pezzo réelles de degré 2*, Séminaire Darboux, Université Montpellier II
Mai 2001, *Regular maps from rational surfaces to the standard sphere*, Université Complutense, Madrid (Espagne)

Octobre 1999, *Types topologiques des surfaces bielliptiques réelles*, Université Montpellier II.
Septembre 1999, *Types topologiques des surfaces bielliptiques réelles*, Université Jagiellonian de Cracovie (Pologne)
Décembre 1998, *Surfaces elliptiques modulaires réelles*, Université Rennes I
Décembre 1998, *Surfaces elliptiques réelles et inégalité de Ragsdale-Viro*, Université d'Angers

Articles en commun

L'article [M3] a été écrit en collaboration avec J. van Hamel de l'Université d'Utrecht (Pays-Bas)
L'article [M6] a été écrit en collaboration avec N. Joglar de l'Université d'Aranjuez (Espagne)
L'article [M7] a été écrit en collaboration avec J. Huisman de l'Université de Rennes

Invitations

15–22 février 2004, invitation de W. Kucharz, University of New Mexico, Albuquerque, Nouveau-Mexique, USA
10–18 mai 2003, invitation de J. Bochnak, Vrije Universiteit, Amsterdam, Pays-Bas
18–25 septembre 1999, invitation de K. Rusek, Jagiellonian University, Cracovie, Pologne
6–20 mars 1995, invitation de J. Bochnak, Vrije Universiteit, Amsterdam, Pays-Bas
5–12 décembre 1994, invitation de J. Bochnak, Vrije Universiteit, Amsterdam, Pays-Bas
1er octobre–31 décembre 1994, invitation de P. Buser, Chaire de géométrie de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse

Responsabilité à l'intérieur d'un réseau européen

Responsable du site Web du réseau européen IHP "Real Algebraic and Analytic geometry (RAAG)", `www.ihp-raag.org`

Membre de projets européens

2002–2006 Membre du projet IHP "Real Algebraic and Analytic geometry (RAAG)"
1997–1998 Membre du projet HCM "Real Algebraic and Analytic geometry (RAAG)"
1995 Boursier post-doc du projet HCM "Matematica a Pisa : Géométrie et topologie en petite dimension" (6 mois)

1991–1994 Membre du projet HCM "Computational problems in the theory of Riemann surfaces"

Collaboration interdisciplinaire

Il s'agit d'un travail en cours avec Denis Eckert, chargé de recherche au CNRS en géographie. Dans la mesure où ce travail est indépendant du reste de ce rapport, je renvoie au texte [M10] accessible sur ma page Web `www.lama.univ-savoie.fr/~mangolte`

Cette recherche m'a amené à être coordinateur adjoint de l'atelier Me2S de l'ACI TTT (Terrains, Techniques, Théories) depuis 2002.

En 2001–2002, j'ai participé au volet *Cartographie non-euclidienne et espace géographique* du projet CartogrAm, groupe de prospective no 7 de la DATAR

Février 2003, communication à L'EHESS.
Janvier 2002, (avec Denis Eckert) Communication à l'Institut de Géographie (Paris) : *Des métriques pour le Monde*
Septembre 2001,(avec Denis Eckert) : *Une position sur les limites et les perspectives d'évolution de la cartographie*, communication présentée lors de la journée d'étude du Programme CartoGram, EHESS,
2–7 juillet 2001, Invitation UMR 5053, CNRS-Université de Toulouse-Le Mirail

III Activités d'enseignement et divers

Responsabilités et enseignement

2003/2004 Cours de théorie de Galois en Maîtrise de Mathématiques pures
Direction de mémoires de Maîtrise
Cours d'algèbre et géométrie en Licence de Mathématiques
Cours d'algèbre et géométrie en DEUG 2^{e}année
Travaux dirigés d'algèbre en DEUG 1^{re}année
2002/2003 Délégation CNRS
2001/2002 Responsable de la Maîtrise de Mathématiques pures
1996–2002 Direction du projet de DESS de B. Delesalle soutenu le 26 mars 1999
Cours de théorie de Galois en Maîtrise de Mathématiques pures
Direction de mémoires de Maîtrise
Cours de géométrie différentielle en Licence de Mathématiques
Travaux dirigés d'analyse en Licence de Mathématiques
Travaux dirigés d'algèbre en Licence de Mathématiques
Travaux dirigés d'analyse numérique en Licence de Mathématiques
Cours d'algèbre et géométrie en DEUG 2^{e}année
Cours d'algèbre en DEUG 1^{re}année
Travaux dirigés d'algèbre en DEUG 1^{re}année
Participation à la mise en place de la réforme des DEUG.
Encadrement des tuteurs.

Mobilité, carrière

Depuis 1996 Université de Savoie, Maître de conférences.
Prime d'encadrement doctoral et de recherche (1998–2002) et (2002–2006).
Première classe depuis septembre 2000.
2002/2003 Laboratoire IM3, UMR 5030 CNRS–Université Montpellier II, délégation CNRS.
1995/1996 Université Montpellier II, ATER.
1994/1995 Université de Pise (Italie), Boursier post-doctoral CEE (6 mois).
1994/1995 École Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suisse), Assistant (3 mois).
1991–1994 Université Montpellier II, Allocataire-Moniteur.
1990/1991 Université Montpellier II, Vacataire pendant la préparation de mon DEA.

Responsabilités collectives

Recherche

Membre élu de la commission de spécialistes 25/26 de l'Université de Savoie,

Responsable du Séminaire de Géométrie (LAMA),

Co-responsable du Séminaire du Laboratoire (LAMA),

Reviewer aux Mathematical Reviews depuis 1994,

2000-2002 Responsable du groupe de travail informel en géométrie *G'67*,

1995/1996 Responsable, avec R. Silhol, du groupe de travail *Surfaces algébriques et structures Spin* à l'Université Montpellier II.

Autre

Responsable du site WEB du LAMA, `www.lama.univ-savoie.fr`

Administrateur Labintel (CNRS),

Co-responsable de la rédaction des rapports d'activité scientifique du LAMA (rapports 1993–1996, 1994–1998 et 1998–2001)

Références bibliographiques

[1] S. Akbulut, H. King, Rational structures on 3-manifolds, *Pacific J. Math.* **151**, 201–204 (1991)

[2] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces,* Ergebnisse der Mathematik. Springer-Verlag (1984)

[3] A. Beauville, *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque, vol. 54, Soc. Math. de France, Paris, 1978

[4] R. Benedetti, A. Marin, Déchirures de variétés de dimension 3, *Comm. Math. Helv.* **67**, 514–545 (1992)

[5] F. Bihan, Betti numbers of real numerical quintic surfaces, *In : Topology, ergodic theory, real algebraic geometry*, 31–38, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001

[6] J. Bochnak, M. Buchner and W. Kucharz, *Vector bundles over real algebraic varieties*, K-Theory **3**, 271-298 (1989). Erratum, K-Theory **4**, p. 103 (1990)

[7] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Real algebraic geometry*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 36, Springer-Verlag, 1998

[8] J. Bochnak, W. Kucharz, On real algebraic morphisms into even-dimensional spheres, *Ann. of Math. (2)* **128**, 415–433 (1988)

[9] J. Bochnak, W. Kucharz, R. Silhol, Morphisms, line bundles and moduli spaces in real algebraic geometry, *Pub. Math. I.H.E.S.* **86** (1997)

[10] E. Borel, A. Haefliger, La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique, *Bul. Soc. Math. France* **83**, 461–513 (1961)

[11] F. Catanese, P. Frediani, Real hyperelliptic surfaces and the orbifold fundamental group, *J. Inst. Math. Jussieu* **2**, 163–233 (2003)

[12] A. Comessatti, Sulla connessione delle superfizie razionali reali, *Annali di Math.* **23**, 215–283 (1914)

[13] A. Degtyarev, V. Kharlamov, Topological classification of real Enriques surfaces. *Topology* **35**, no. 3 (1996) 711–730

[14] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *Real Enriques Surfaces*, Lecture Notes in Math. **1746**, Springer-Verlag 2000

[15] R. Friedman, J. W. Morgan, *Smooth four-manifolds and complex surfaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 27, Springer-Verlag, 1994

[16] J. Huisman, *Cycles on real abelian varieties.* Preprint (1994)

[17] J. Huisman, F. Mangolte, Every orientable Seifert 3-manifold is a real component of a uniruled algebraic variety, *Topology* (accepté pour publication)

[18] I. Itenberg, V. M. Kharlamov, Towards the maximal number of components of a non-singular surface of Degree 5 in RP^3, *In : Topology of real algebraic varieties and related topics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **173**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 111–118 (1996)

[19] N. Joglar-Prieto, Rational surfaces and regular maps into the 2-dimensional sphere *Math. Z.* **234**, 399–405 (2000)

[20] N. Joglar-Prieto, J. Kollár, Real abelian varieties with many line bundles, *Bull. London Math. Soc.* **35**, 79–84 (2003)

[21] N. Joglar-Prieto, F. Mangolte, Real algebraic morphisms and Del Pezzo surfaces of degree 2, *J. Algebraic Geometry* **13**, 269-285 (2004)

[22] A. Kas, On the deformation types of regular elliptic surfaces, *In : Complex analysis and algebraic geometry (W. Baily, T. Shioda, eds.)*, Cambridge University Press, Cambridge 1977

[23] V. Kharlamov, Variétés de Fano réelles, *Sém. Bourbaki 1999/2000*, exp. 872

[24] J. Kollár, The Nash conjecture for threefolds, *ERA of AMS* **4**, 63–73 (1998)

[25] J. Kollár, The topology of real and complex algebraic varieties, *Taniguchi Conference on Mathematics Nara '98*, Adv. Stud. Pure Math., **31**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 127–145, (2001)

[26] W. Kucharz, Algebraic equivalence and homology classes of real algebraic cycles, *Math. Nachr.* **180**, 135–140 (1996) (2000)

[27] W. Kucharz, Algebraic morphisms into rational real algebraic surfaces *J. Algebraic Geometry* **8**, 569–579 (1999)

[28] W. Kucharz, Algebraic equivalence of real divisors, *Max-Planck-Institut für Mathematik, Preprint Series 2000* **61** (2000)

[29] F. Mangolte, Une surface réelle de degré 5 dont l'homologie est entièrement engendrée par des cycles algébriques, *C. R. Acad. Sci.* **318**, 343–346 (1994)

[30] F. Mangolte, Cycles algébriques sur les surfaces K3 réelles, *Math. Z.* **225**, 559–576 (1997)

[31] F. Mangolte, J. van Hamel, Algebraic cycles and topology of real Enriques surfaces, *Compositio Math.* **110**, 215–237 (1998)

[32] F. Mangolte, Surfaces elliptiques réelles et inégalité de Ragsdale-Viro, *Math. Z.* **235**, 213–226 (2000)

[33] F. Mangolte, Cycles algébriques et topologie des surfaces bielliptiques réelles, *Comment. Math. Helv.* **78**, 385–393 (2003)

[34] G. Mikhalkin, Blowup equivalence of smooth closed manifolds, *Topology* **36**, 287–299 (1997)

[35] J. Nash, Real algebraic manifolds, *Annals of Math.* **56**, 405–421 (1952)

[36] S. Yu. Orevkov, Real quintic surface with 23 components, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333**, 115–118 (2001)

[37] P. Scott, The geometries of 3-manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **15**, 401–487 (1983)

[38] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton University Press, Princeton 1971

[39] T. Shioda, *On elliptic modular surfaces*, *J. Math. Soc. Japan* **24**, 20–59 (1972)

[40] R. Silhol, Real algebraic surfaces with rational or elliptic fiberings, *Math. Z.* **186**, 465–499 (1984)

[41] R. Silhol, *Real Algebraic Surfaces*, Lecture Notes in Math. **1392**, Springer-Verlag, Berlin 1989

[42] R. Silhol, Compactifications of moduli spaces in real algebraic geometry, *Invent. Math.* **107**, 151–202 (1992)

[43] J. van Hamel, *Algebraic cycles and topology of real algebraic varieties*, CWI TRACT **129**, Amsterdam (2000)

[44] J.-Y. Welschinger, Real structures on minimal ruled surfaces, *Comment. Math. Helv.* **78**, 418–446 (2003)

[45] H. G. Zeuthen, Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre, *Math. Ann.* **7**, 410–432 (1874)

[46] Séminaire Palaiseau *Géométrie des Surfaces K3 : Modules et Périodes*, Astérisque **126**, Soc. Math. de France, Paris, 1985