



HAL
open science

Processus de réaction-diffusion : une approche par le groupe de renormalisation non perturbatif

Léonie Canet

► **To cite this version:**

Léonie Canet. Processus de réaction-diffusion : une approche par le groupe de renormalisation non perturbatif. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2004. Français. NNT: . tel-00006919

HAL Id: tel-00006919

<https://theses.hal.science/tel-00006919>

Submitted on 20 Sep 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris VII - Denis Diderot

Année 2004

THÈSE

pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT

Spécialité : PHYSIQUE DES PARTICULES

présentée et soutenue publiquement
par

Léonie CANET

le 17 septembre 2004

Sujet :

**Processus de réaction-diffusion :
une approche par le groupe de renormalisation
non perturbatif.**

Jury :

Pierre BINÉTRUY	Président du jury
Jean-Philippe BOUCHAUD	Rapporteur
Bertrand DELAMOTTE	Directeur de thèse
Malte HENKEL	Rapporteur
Henk HILHORST	Examineur
Clément SIRE	Examineur

Remerciements

Je tiens tout d’abord à remercier le LPTHE et son directeur Laurent Baulieu pour m’avoir permis de réaliser ce travail de thèse dans les meilleures conditions, ainsi que le LPTL et tout particulièrement son directeur Bertrand Guillot pour son accueil cordial et sa gentillesse.

Je remercie ensuite chaleureusement Bertrand Delamotte pour la valeur et la justesse de son encadrement, ainsi que pour ses qualités humaines. Je lui suis très reconnaissante de m’avoir entraînée vers le domaine passionnant de la physique hors de l’équilibre, ce qui nous a amené à un travail aussi riche qu’agréable.

Je remercie également sincèrement tous mes collaborateurs, à commencer par Dominique Mouhanna et Julien Vidal, puis Hugues Chaté, Nicolas Wschebor et Olivier Deloubrière, avec qui travailler a été un grand enrichissement en même temps qu’un réel plaisir. Merci à Dominique et Julien pour leur présence et leur aide au quotidien.

J’exprime ma gratitude envers les membres du jury, Pierre Binétruy, Henk Hilhorst et Clément Sire, et remercie Jean-Philippe Bouchaud et Malte Henkel qui ont si gentiment accepté de rapporter cette thèse.

Je remercie tout particulièrement Julien pour sa générosité et sa gentillesse tout au long de cette thèse et la précieuse aide “logistique” qu’il m’a apportée pendant la rédaction de ce manuscrit. Merci à Dominique, Julien et Bertrand pour les relectures attentives et efficaces de celui-ci.

Mes pensées vont aussi vers Alain Laverne pour sa disponibilité et son attention, et avec qui enseigner a été une magnifique expérience. L’entourage du midi a été également très sympathique et appréciable pendant ces trois années, donc un grand merci à Matthieu Tissier, Sébastien Dusuel, Kyril Kazymyrenko, Rémi Mosseri pour ces moments, et merci aussi à Benoit Douçot, Drazen Zanchi et Bernard Diu.

Ce travail est enfin une occasion privilégiée pour moi d’exprimer toute ma tendresse et mon amour à mes parents et Sylvain et Cécile, et de leur témoigner ma profonde gratitude pour leur soutien et la force qu’ils me donnent. Je salue également du fond du cœur tous mes amis avec qui j’ai partagé les meilleurs moments et également grâce à qui j’ai traversé ceux plus difficiles. Merci à Renaud d’être là. Merci à Ivan d’être lui.

Table des matières

I	Introduction de la première partie	5
I.1	Phénomènes critiques et transitions de phase	5
I.2	Le groupe de renormalisation	6
II	Le groupe de renormalisation non perturbatif	9
II.1	Notion d'action effective moyenne	9
II.1.1	Fondements du groupe de renormalisation	9
II.1.2	L'action effective moyenne	13
II.2	Troncations de l'action effective moyenne	18
II.2.1	Enjeux	18
II.2.2	Le développement dérivatif	19
II.2.3	Le développement en champ	20
II.3	Mise en pratique : le modèle $O(n)$	21
II.3.1	Dérivation des équations de flot du modèle $O(n)$	21
II.3.2	Physique à l'ordre ϕ^4	27
III	Développement dérivatif et optimisation	35
III.1	Les procédures d'approximation	35
III.1.1	Panorama	35
III.1.2	Dépendance dans la fonction de coupure	37
III.1.3	Choix d'un critère d'optimisation	41
III.2	Etude des ordres ∂^0 et ∂^2	42
III.2.1	Optimisation à l'ordre ∂^0	43
III.2.2	Optimisation à l'ordre ∂^2	45
III.3	Etude de l'ordre ∂^4	49
III.3.1	Dérivation des équations de flot	49
III.3.2	Développement en champ	52
III.3.3	Optimisation	53
III.4	Intégration des équations de flot des fonctions complètes	55
III.4.1	Intégration du flot et recherche de points fixes	56
III.4.2	Optimisation des fonctions complètes	57
III.4.3	Optimisation à l'ordre ∂^4 ?	62

IV Introduction de la deuxième partie	65
IV.1 Hors de l'équilibre	65
IV.2 Les processus de réaction-diffusion	67
V Processus de réaction-diffusion et percolation dirigée	71
V.1 La percolation dirigée	71
V.1.1 Transition de phase vers un état absorbant	72
V.1.2 Réalisations théoriques	78
V.1.3 Réalisations expérimentales	84
V.1.4 Bilan	90
V.2 Les marches aléatoires avec branchement et annihilation	90
V.2.1 Définition	90
V.2.2 Diagramme de phase en champ moyen	91
V.2.3 Diagramme de phase par simulations numériques	92
V.2.4 Diagramme de phase par groupe de renormalisation perturbatif	92
VI Théorie des champs pour les processus de réaction-diffusion	97
VI.1 Formalisme de fonction de réponse	97
VI.1.1 Equation de Langevin	97
VI.1.2 Fonctionnelle de réponse de Janssen-De Dominicis	99
VI.2 "Seconde quantification" des processus de réaction-diffusion	101
VI.2.1 Equation maîtresse	102
VI.2.2 Opérateurs de création et d'annihilation	105
VI.2.3 Les états cohérents	108
VI.2.4 Limite continue d'espace	111
VI.2.5 Action de la percolation dirigée	113
VI.3 Lien entre les deux approches	114
VI.3.1 Nature du bruit	114
VI.3.2 Synthèse	115
VII Réaction-diffusion et groupe de renormalisation non perturbatif	117
VII.1 Groupe de renormalisation non perturbatif hors de l'équilibre	117
VII.1.1 Action effective moyenne hors de l'équilibre	117
VII.1.2 Equations de flot pour les processus de réaction-diffusion	121
VII.2 Propriétés universelles de la percolation dirigée	128
VII.2.1 Construction d'un <i>ansatz</i> pour la percolation dirigée	129
VII.2.2 Calcul des exposants critiques	130
VII.2.3 Exposants à l'ordre ∂^2 du développement dérivatif	134
VII.3 Diagramme de phase des marches aléatoires avec branchement et annihilation	139
VII.3.1 Analyse par le groupe de renormalisation non perturbatif	140
VII.3.2 Simulations numériques	142
VII.3.3 Analyse de l'équation maîtresse à petite diffusion	147

VIII Conclusion générale	153
VIII.1 Synthèse	153
VIII.2 Perspectives	154
A Equation de flot de Γ_k	157
B Fonctions seuil pour le modèle d'Ising	161
C Equations de flot du modèle d'Ising à l'ordre ∂^4	163
D Compléments à la dérivation d'une théorie des champs	185
D.1 Relations de bilan détaillé	185
D.2 Discrétisation de Ito	187
D.3 Etats cohérents	189
E Equations de flot pour les processus de réaction-diffusion	193
E.1 Notations et conventions	193
E.1.1 Dérivation fonctionnelle dans l'espace de Fourier	194
E.1.2 Définition de $[\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k]^{-1}$	195
E.2 Equations de flot de D_k et Z_k	196
E.3 Fonctions seuil	198

Chapitre I

Introduction de la première partie

I.1 Phénomènes critiques et transitions de phase

Les phénomènes critiques occupent une place centrale dans l'étude des systèmes de plus en plus complexes qui cristallisent aujourd'hui l'attention des physiciens, qu'ils s'intéressent aux structures de l'univers, aux propriétés macroscopiques des solides ou encore aux interactions fondamentales entre les particules qui composent la matière. Le point commun de ces systèmes est qu'ils comportent, en général, un très grand nombre de degrés de liberté interagissant mutuellement et parfois fortement corrélés.

La description de tels systèmes engage une grande diversité d'échelles — de l'échelle des chocs thermiques entre molécules à celle des comportements collectifs hydrodynamiques pour un liquide par exemple. L'étude du système considéré nécessite donc de parvenir à hiérarchiser l'influence des processus se déroulant à des échelles caractéristiques différentes, afin d'identifier ceux qui dominent. Il s'agit alors d'isoler, à l'échelle typique de ces processus, le plus petit nombre de degrés de liberté suffisant à comprendre les propriétés de l'ensemble du système, *i.e.* sa physique de basse énergie. Cet échantillon représentatif est contenu dans un volume, généralement petit, tel que ses interactions avec le reste du système soient négligeables, c'est-à-dire dont la taille linéaire correspond typiquement à la longueur de corrélation ξ . Tant que cette longueur reste de l'ordre de quelques distances inter-atomiques ou inter-moléculaires, les degrés de liberté du système apparaissent faiblement corrélés et les méthodes de calcul usuelles comme le champ moyen permettent d'en déduire les propriétés.

Cependant, la longueur de corrélation dépend des conditions extérieures qui déterminent l'état du système, comme la température et la pression. Dans certaines situations — en un point critique — les propriétés thermodynamiques du système peuvent brutalement varier sous un changement infinitésimal des conditions externes, caractérisant ainsi une transition de phase. Il existe principalement deux types de transitions. Dans une transition discontinue (du premier ordre) — par exemple la condensation d'un gaz vers l'état liquide ou la fusion d'un solide — les différents états du système, de part et d'autre du point critique, co-existent en ce point. Comme ces états possèdent chacun des propriétés macroscopiques distinctes, le comportement du système apparaît discontinu au passage du point critique, *i.e.* ses propriétés thermodynamiques subissent

des sauts. La longueur de corrélation reste finie.

Au contraire, lors d'une transition continue (du second ordre en général), la longueur de corrélation diverge au point critique, de sorte que toutes les échelles contribuent en ce point de façon équivalente et les corrélations s'étendent à grande distance, couplant des degrés de liberté du système arbitrairement éloignés. Le volume de corrélation ξ^d englobe alors un nombre infini de degrés de liberté corrélés sur toutes les échelles, ce qui en a longtemps rendu l'étude difficile.

Paradoxalement, la divergence de la longueur de corrélation amène une simplification remarquable de la théorie en unifiant la phénoménologie des transitions de phase continues, ce qui forge le concept d'universalité. En effet, la divergence de ξ marque la disparition de toute échelle caractéristique dans le système (à l'exception de la distance inter-atomique a) et induit donc une invariance d'échelle du système (au-delà de quelques a). D'une part, celle-ci se traduit par des variations en loi de puissance des grandeurs physiques au voisinage du point critique. Par exemple, lors de la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique — paradigme des transitions continues —, le paramètre d'ordre (l'aimantation) se comporte au voisinage de la température critique (de Curie) comme

$$m \sim (T_c - T)^\beta,$$

où β est un exposant critique.

D'autre part et plus fondamentalement, la disparition d'échelle finie ($\neq a$) implique que certaines quantités au voisinage de la transition — comme les exposants critiques — apparaissent largement indépendantes des détails microscopiques de l'interaction entre les atomes ou les molécules et ne s'avèrent déterminées que par quelques caractéristiques globales du système, comme les symétries de l'interaction et la dimension spatiale, qui définissent un nombre restreint de classes d'universalité. Ainsi, des phénomènes *a priori* très différents, comme les transitions ferromagnétiques-paramagnétiques (pour des spins d'Ising), les transitions liquide-vapeur au point critique ou les transitions de démixion de deux fluides, présentent les mêmes propriétés universelles.

La caractérisation de ces classes d'universalité apporte ainsi une connaissance globale des phénomènes critiques et apparaît donc comme un enjeu théorique majeur. Cette caractérisation requiert de traiter un nombre infini de degrés de liberté corrélés sur toutes les échelles. Pour les systèmes à l'équilibre thermique, ceci a été réalisé grâce aux techniques du groupe de renormalisation, qui ont initié la compréhension de l'émergence des comportements collectifs moteurs des phénomènes critiques et de l'existence de l'universalité. Nous discutons maintenant du principe de ces techniques.

I.2 Le groupe de renormalisation

Le groupe de renormalisation, tel qu'originellement conçu par Wilson [1], constitue un outil pour construire, à partir des degrés de liberté initiaux, une théorie effective de longue distance formulée en termes de peu de degrés de liberté. Le groupe de renormalisation peut donc s'interpréter comme une procédure de réduction systématique du nombre de degrés de liberté au sein du volume ξ^d jusqu'à se ramener à un système

à corrélations effectives locales (de courte distance). Le groupe de renormalisation de Wilson s’inspire du concept de “blocs de spins” de Kadanoff [2]. Son principe consiste à séparer les degrés de liberté de haute et basse énergies d’un système et à intégrer progressivement les composantes de haute énergie afin de construire une théorie effective — un hamiltonien effectif \mathcal{H}^{eff} — pour les degrés de liberté de basse énergie. Ceux-ci correspondent à la physique de longue distance du système. L’évolution des hamiltoniens effectifs avec l’échelle de renormalisation est régie par une équation de flot exacte [3, 1, 4].

Ce principe tisse les fondements communs à toute approche du groupe de renormalisation non perturbatif. Au début des années 90, l’idée a émergé, sous l’impulsion conjointe de Wetterich [5], Morris [6] et Ellwanger [7], de construire un flot de renormalisation, non pas de hamiltoniens \mathcal{H}^{eff} mais d’énergies libres effectives Γ_k , qui offrent l’avantage de donner un accès plus direct aux quantités physiques. Ces travaux ont fondé le formalisme de l’action effective moyenne, version la plus moderne du groupe de renormalisation non perturbatif, qui sous-tend l’ensemble de ce travail de thèse.

Les différentes équations du groupe de renormalisation non perturbatif sont toutes exactes. Cependant, leur nature fonctionnelle en interdit toute résolution directe et nécessite de recourir à des approximations. La force du groupe de renormalisation, en général, réside dans sa propension à se prêter à des traitements approchés efficaces — par exemple la théorie de perturbation pour les équations de groupe de renormalisation de type Callan-Symanzik [8, 9]. Les versions “à la Wilson” (non perturbatives) du groupe de renormalisation diffèrent en ce que les approximations naturelles ne reposent pas (nécessairement) sur les théories de perturbation et préservent donc, par essence, le caractère non perturbatif des équations exactes.

Ces approches ouvrent ainsi un accès théorique à des phénomènes intrinsèquement non perturbatifs. Ces phénomènes se déroulent par exemple dans un régime de “fort couplage”, comme pour les transitions de phase multicritiques développées à deux dimensions par des spins d’Ising [10, 11]. Ou ces phénomènes peuvent s’avérer dominés par des configurations non perturbatives comme les défauts topologiques, qui induisent par exemple, pour des spins XY en deux dimensions, la transition de phase de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless [12, 13] gouvernée par le confinement ou le déconfinement des vortex.

Ces phénomènes se révèlent encore plus abondants lorsque l’équilibre thermique du système est rompu, comme si la dynamique entraînait naturellement les systèmes hors de l’équilibre vers la criticalité. Les approches non perturbatives acquièrent alors un intérêt accru. Le vaste champ de la physique hors de l’équilibre sera abordé dans la seconde partie de ce manuscrit. Avant cela, concentrons-nous sur les systèmes à l’équilibre pour explorer, dans une première partie, le groupe de renormalisation non perturbatif et ses applications.

Cette première partie se scinde en deux chapitres d’objectifs assez différents. Le chapitre II est conçu comme une introduction à vocation synthétique et pédagogique au groupe de renormalisation non perturbatif en général et plus spécifiquement au formalisme de “l’action effective moyenne” [14]. Sa description formelle, axée sur sa déclinaison en physique statistique, est illustrée par le modèle $O(n)$, montrant ainsi

la capacité de cette approche à en décrire les différentes réalisations, incluant les phénomènes par essence non perturbatifs comme la transition de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless évoquée précédemment.

A cette présentation générale succède, dans le chapitre III, une discussion plus spécialisée, vouée à exposer les travaux réalisés au cours de ce travail de thèse consacrés à l'étude et l'optimisation des différentes procédures d'approximation. Ces analyses, portant sur le modèle d'Ising à trois dimensions, comportent deux volets, reliés à chacune des deux approximations les plus courantes : le développement en champ et celui en dérivées. Nous étudions, dans le premier, la convergence du développement en champ et la mise en œuvre d'une procédure d'optimisation, aux deux premiers ordres — notés ∂^0 et ∂^2 — du développement dérivatif.

La contribution la plus nouvelle émane du second volet, qui propose le premier calcul par des méthodes du groupe de renormalisation non perturbatif à l'ordre ∂^4 du développement dérivatif. Ce calcul a pour double ambition de tester la convergence de ce développement et de pallier au traditionnel point faible de ces approches : la détermination de la dimension anormale. Nous présentons, dans le même temps, les diverses méthodes numériques envisageables pour résoudre les équations du groupe de renormalisation non perturbatif et constituons ainsi la “boîte à outils” dans laquelle nous puiserons pour aborder la seconde partie de ce manuscrit.

Chapitre II

Le groupe de renormalisation non perturbatif

Ce chapitre part de l'idée du groupe de renormalisation tel que conçu par Wilson [1], dans laquelle s'enracine le groupe de renormalisation non perturbatif, pour aboutir à sa formulation la plus moderne en terme d' "action effective moyenne". Nous proposons une introduction synthétique à cette méthode, inspirée en partie de la revue [14] à laquelle nous renvoyons le lecteur pour une présentation approfondie. L'équation source du formalisme, qui décrit le flot de renormalisation de cette action effective moyenne, est dérivée dans une première section, dans la situation canonique d'une théorie des champs à l'équilibre thermodynamique. Ceci sera généralisé aux phénomènes hors de l'équilibre dans la seconde partie de ce manuscrit. Après une présentation, au cours de la deuxième section, des différentes procédures d'approximations accompagnant la mise en œuvre pratique de ce formalisme, son emploi est illustré, dans une troisième section, par le traitement concret des modèles $O(n)$ dans le cadre de l'approximation la plus simple, offrant ainsi une familiarisation à cette méthode.

II.1 Notion d'action effective moyenne

II.1.1 Fondements du groupe de renormalisation

Nous retraçons, pour débiter cette section, l'émergence du groupe de renormalisation non perturbatif, de sa formulation initiale à sa version en terme d'une action effective moyenne Γ_k . Nous présentons ensuite ce formalisme à travers la construction de Γ_k puis la dérivation de son équation de flot.

Toutes les approches du groupe de renormalisation non perturbatif se fondent sur le principe commun, originellement formulé par Wilson, de construction, pour un système donné, d'une théorie effective de longue distance, par intégration progressive des degrés de liberté microscopiques de ce système. Ce principe s'illustre le plus naturellement par le concept de décimation de blocs de spins introduit par Kadanoff [2] et schématisé sur la figure 1 pour un réseau carré de maille a à deux dimensions.

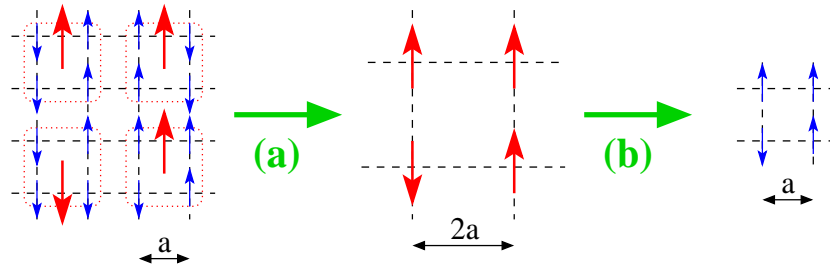


FIG. 1 – Transformation du groupe de renormalisation sur un réseau carré à deux dimensions. (a) Décimation de blocs de spins, les quatre spins d’une plaquette du réseau initial sont remplacés par un spin de bloc. (b) Changement d’échelle pour les longueurs et les spins de bloc.

Des spins S_i^0 occupent les sites i du réseau et interagissent entre plus proches voisins. L’énergie des différentes configurations $\{S_i^0\}$ est donnée par le hamiltonien microscopique $\mathcal{H}_0[\{S_i^0\}]$ du système. La procédure de décimation (figure 1(a)) consiste à partitionner le système en plaquettes élémentaires respectant la symétrie du réseau et à attribuer à chacune de ces plaquettes une variable “spin de bloc” S_i^1 . La valeur de ce spin de bloc, de même nature que les spins initiaux, est déterminée par la valeur des spins S_i^0 de la plaquette (par exemple à travers une règle majoritaire). Comme le réseau formé par les spins de bloc apparaît dilaté par rapport au réseau initial, on effectue une contraction des longueurs afin de restaurer l’unité naturelle du système : la maille a du réseau initial. La contraction des longueurs s’accompagne aussi d’un changement d’échelle, ou renormalisation, des variables spins de blocs (figure 1(b)). Ainsi, la nouvelle description devient équivalente à celle initiale et peut lui être comparée. On calcule alors l’interaction effective entre spins de blocs et le hamiltonien associé $\mathcal{H}_1[\{S_i^1\}]$. Les opérations conjointes de décimation des spins d’une plaquette et de changement d’échelle (des longueurs et des spins) définissent une transformation du groupe de renormalisation. Celle-ci réalise bien la réduction systématique du nombre de degrés de liberté en conservant les propriétés de longue distance du système. En itérant ces transformations est ainsi générée une séquence de hamiltoniens effectifs $\mathcal{H}_k[\{S_i^k\}]$ dépendant de l’échelle courante k , qui décrivent tous la même physique de basse énergie (*i.e.* conduisent aux mêmes quantités thermodynamiques). Cette séquence définit un flot de renormalisation.

La propriété essentielle découlant de cette procédure est qu’elle offre une transcription formelle de l’émergence de phénomènes critiques [2, 1]. En effet, un système critique est invariant d’échelle, sa description statistique ne dépend pas de la “résolution” à laquelle il est observé. Ceci se traduit par l’identité des hamiltoniens $\mathcal{H}_n[\{S_i^n\}]$ à différents degrés de moyennage des variables S_i^n . Ainsi, la transformation du groupe de renormalisation laisse alors \mathcal{H}_n invariant, qui correspond à un point fixe de cette transformation. Wilson a montré que les propriétés universelles du système critique, associées aux lois de puissance, comme les exposants critiques, sont alors codées dans le comportement du flot de renormalisation linéarisé au voisinage de ce point fixe.

La procédure de blocs de spins a inspiré la formulation wilsonienne du groupe de renormalisation [15, 16], que nous présentons maintenant. Pour cela, plaçons-nous dans un espace continu où les degrés de liberté microscopiques sont représentés par des champs $\phi(x)$. L'espace des configurations des champs est caractérisé par la fonction de partition :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-\mathcal{S}[\phi]}, \quad (\text{II.1})$$

où "l'action" microscopique \mathcal{S} est reliée au hamiltonien par $\mathcal{S} = \mathcal{H}/k_B T^1$. La procédure de décimation discrète se transpose dans le continu en moyennant progressivement les modes de fluctuations à variation spatiale rapide, c'est-à-dire les modes de courtes longueurs d'onde, donc de grandes impulsions, notés $\phi_>$, pour construire une théorie effective pour les modes de grandes longueurs d'onde $\phi_<$. Ces modes représentent les degrés de liberté effectifs de "basse énergie", analogues des spins de bloc sur le réseau. Les variations les plus rapides s'opèrent à l'échelle de la maille a du réseau. L'échelle d'impulsion $\Lambda = a^{-1}$ symbolise alors la coupure ultra-violette au-delà de laquelle les modes $\phi(q > \Lambda)$ n'ont plus d'existence physique. La première transformation ("décimation") réalise donc l'intégration (dans l'espace de Fourier) des modes d'impulsion de module compris entre Λ et $\Lambda - dk$, puis le processus est itéré en intégrant des modes de fluctuations sur des couches d'impulsions successives de largeur dk , comme schématisé sur la figure 2. L'action effective du système pour les modes de fluctuations $\phi_<(q \leq k)$

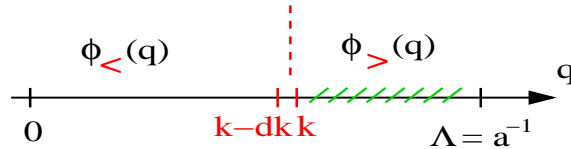


FIG. 2 – Schéma de la "décimation" continue dans l'espace de Fourier. Les modes de grandes impulsions $\phi_>(q > k)$ sont progressivement intégrés (zone hachurée) depuis l'échelle $k = \Lambda$ par tranches successives de largeur dk . Cette procédure génère une action effective $\mathcal{S}_k^{\text{eff}}$ pour les modes de basse énergie $\phi_<$.

de faibles impulsions, *i.e.* variant sur des distances grandes devant k^{-1} , s'obtient en séparant, au sein de la fonction de partition (II.1), les modes $\phi_>$ de grande impulsion des modes $\phi_<$ puis en intégrant sur les modes $\phi_>$:

$$e^{-\mathcal{S}_k^{\text{eff}}[\phi_<]} = \int \mathcal{D}[\phi_>] e^{-\mathcal{S}[\phi_> + \phi_<]}. \quad (\text{II.2})$$

L'échelle d'impulsion k représente pour $\mathcal{S}_k^{\text{eff}}$ la coupure ultra-violette courante.

Toutes les approches de groupe de renormalisation non perturbatif se fondent sur le principe commun de "décimation" continue, *i.e.* d'intégration progressive des fluctuations de haute énergie pour construire une description effective en termes des modes de basse énergie. L'évolution infinitésimale de l'action effective $\mathcal{S}_k^{\text{eff}}$ avec l'échelle k peut alors être décrite par une équation différentielle *exacte*, originellement dérivée par Wegner et Houghton [3] pour une coupure brutale entre les modes (coupure en un point k)

¹ k_B désigne la constante de Boltzmann et T la température.

et Wilson [1] pour une coupure plus douce (ou intégration incomplète). Nous donnons ici sa forme telle que redérivée par Polchinski [4] pour une fonction de coupure générale $K_k(q)$ réalisant la séparation des modes autour de l'échelle k , qui s'écrit :

$$\partial_k \mathcal{S}_k^{\text{eff}}[\phi_{<}] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(\partial_k K_k(q) \frac{\delta^2 \mathcal{S}_k^{\text{eff}}}{\delta \phi_{<}(q) \delta \phi_{<}(-q)} - \frac{\delta \mathcal{S}_k^{\text{eff}}}{\delta \phi_{<}(q)} \partial_k K_k(q) \frac{\delta \mathcal{S}_k^{\text{eff}}}{\delta \phi_{<}(-q)} \right) \quad (\text{II.3})$$

Le flot de renormalisation de $\mathcal{S}_k^{\text{eff}}$ est exact. L'équation (II.3) contient ainsi toute la physique, perturbative et non perturbative du modèle. Cependant, un des inconvénients majeurs de la formulation (II.3) est inhérent à la nature abstraite de son objet : une action effective $\mathcal{S}_k^{\text{eff}}$ pour les degrés de liberté $\phi_{<}$ non encore intégrés. Cette action effective ne possède pas de signification physique directe. En effet, les champs $\phi_{<}$ dont elle dépend disparaissent dans la limite physique $k \rightarrow 0$. Ces champs ne s'apparentent donc pas à un paramètre d'ordre "effectif", c'est-à-dire à un précurseur, à l'échelle k , du paramètre d'ordre physique, qui s'identifie à ce dernier dans la limite $k \rightarrow 0$. Le champ $\phi_{<}$ représente la composante de grande longueur d'onde ("moyenne spatiale") du champ microscopique mais ne correspond pas à une moyenne thermodynamique. Il est alors difficile d'extraire de l'action effective $\mathcal{S}_k^{\text{eff}}$ des quantités physiques. En particulier, les propriétés physiques d'un système sont décrites par ses fonctions de corrélations, qui sont codées dans le jeu des fonctions une particule-irréductibles (1-PI) ou fonctions de vertex $\Gamma^{(n)}$ à n points. Ces fonctions dérivent de la fonctionnelle génératrice Γ qui s'identifie à l'énergie libre de Gibbs. Γ se déduit, par transformation de Legendre, de l'énergie libre $\ln \mathcal{Z}$ en présence d'une source externe J — par exemple un champ magnétique. La détermination de quantités physiques requiert donc de coupler le système à une source J en introduisant dans la fonction de partition (II.1) la contribution $\exp(\int J \phi)$. Le calcul effectif de Γ nécessite alors de résoudre la dépendance fonctionnelle de $\mathcal{Z}[J]$ dans la limite physique $k \rightarrow 0$, en intégrant fonctionnellement sur tous les champs $\phi_{<}$, ce qui représente une difficulté non négligeable.

Cette difficulté peut être tempérée par le fait que, au-delà d'un sens physique, les propriétés intrinsèques du flot de renormalisation au voisinage d'un point fixe suffisent à caractériser les comportements critiques. Cependant, l'équation de flot (II.3) est une équation différentielle fonctionnelle que l'on ne sait traiter directement, ce qui impose de recourir à des approximations. A cet égard, le dernier terme du membre de droite de l'équation (II.3) couple, dans l'espace réel, des points distants x et y de l'espace *via* $\partial_k K_k(x - y)$ et cette non localité complique singulièrement l'élaboration d'approximations. De surcroît, dans le formalisme de Wilson-Polchinski, les quantités physiques sont affectées d'une grande sensibilité au choix de la fonction de coupure $K_k(x - y)$ des modes de grande impulsion en présence d'approximations [6]. Cette sensibilité, exacerbée par le terme non local de l'équation (II.3), semble rendre arbitraire la détermination de la dimension anormale. Ce problème, lié à la brisure de l'invariance par reparamétrisation, est discuté dans [17, 18].

Finalement, ces difficultés, intrinsèques à la formulation de Wilson-Polchinski [6, 19, 20], en ont longtemps restreint l'usage à des preuves de renormalisabilité perturbative. La communauté s'est donc détournée des approches du groupe de renormalisation non

perturbatif au profit d'équations (tout aussi exactes) de groupe de renormalisation de type Callan-Symanzik [8, 9], pour lesquelles des schémas d'approximation (la théorie de perturbation) apparaissent plus naturels et bien contrôlés. La renaissance de l'interprétation wilsonienne du groupe de renormalisation a été amorcée par les travaux parallèles de Wetterich [21, 22, 5, 23, 24], Morris [6, 19, 25], Ellwanger [7, 26] et Bonini *et al.* [27] au début des années 90, lorsque l'idée a germé de formuler un flot non pas d'actions effectives, mais d'objets contenant directement les propriétés thermodynamiques du système, comme Γ (nous renvoyons à [17] pour une revue détaillée de l'émergence de ces méthodes). L'expression d'un groupe de renormalisation non perturbatif pour la transformée de Legendre Γ de $\ln \mathcal{Z}$ atténue la plupart des difficultés énoncées précédemment. La suite de ce chapitre est consacré à la présentation de ce formalisme, appelé communément méthode de l'action effective moyenne. Soulignons que certaines des propriétés, mises en lumière au cours de la construction du groupe de renormalisation non perturbatif pour Γ , ne sont pas spécifiques au formalisme de l'action effective moyenne, mais communes à toute approche de groupe de renormalisation non perturbatif (donc déjà vérifiées par l'équation de Wilson-Polchinski).

II.1.2 L'action effective moyenne

Le formalisme de l'action effective moyenne est une transposition directe à l'énergie libre de Gibbs Γ du concept d'action effective $\mathcal{S}_k^{\text{eff}}$ élaboré par Wilson. Cette méthode, procédant du principe représenté sur le schéma 3, est vouée à construire une énergie libre effective $\Gamma_k[\psi_k]$ n'incluant, à l'échelle d'impulsion k , que les modes de fluctuations de grandes impulsions $\Lambda > q > k$. Les variables effectives ψ_k représentent une moyenne thermodynamique des degrés de liberté microscopiques ϕ sur un volume k^{-d} et s'apparentent cette fois à un précurseur du paramètre d'ordre $\psi = \langle \phi \rangle$ — l'aimantation dans le cas d'un système de spins. Γ_k s'interprète donc comme l'énergie libre de petits systèmes de volume k^{-d} . Ainsi, à l'échelle $k = \Lambda$, aucune fluctuation n'a encore été intégrée et les effets collectifs éventuellement induits par celles-ci sont donc négligés. Le champ ψ_Λ correspond au champ microscopique ϕ et $\Gamma_{k=\Lambda}$ s'identifie à l'action microscopique \mathcal{S} du système. Lorsque l'échelle k décroît, les fluctuations de grande impulsion sont progressivement incorporées (comme sur la figure 2), permettant d'accéder à la description des phénomènes sur des échelles de longueur de plus en plus grandes. A $k = 0$, toutes les fluctuations ont été incluses et $\Gamma_{k=0}$ coïncide avec l'énergie libre Γ .

Il convient de souligner des propriétés fondamentales de la procédure de “décimation continue” appliquée à Γ . Tout d'abord, cette construction réalise bien le programme d'un groupe de renormalisation, dans le sens où les propriétés universelles d'un phénomène critique sont codées dans la structure du flot linéarisé au voisinage du point fixe associé. Elle constitue ainsi une méthode de calcul des exposants critiques. Cependant, cette procédure dépasse l'objectif initial car elle offre un moyen de calcul de l'action effective d'un système (recouvrée à l'échelle physique $k = 0$) à partir de sa formulation microscopique et représente donc en ce sens une “résolution” de la théorie (au même titre que l'équation de Polchinski en présence d'une source). En effet, le souvenir des détails microscopiques du système, spécifiés à l'échelle $k = \Lambda$, est conservé tout au long du flot qui relie aux conditions initiales microscopiques l'état

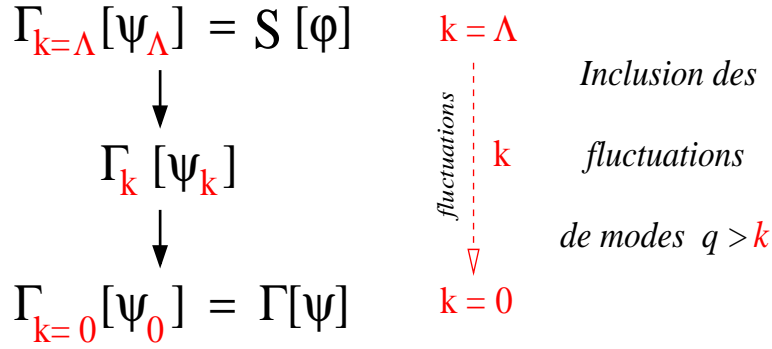


FIG. 3 – Schéma de la construction de l’action effective moyenne Γ_k . A l’échelle $k = \Lambda$, aucune fluctuation n’est encore incluse et Γ_Λ coïncide avec l’action microscopique \mathcal{S} . Puis, lorsque l’échelle k décroît, de plus en plus de fluctuations, d’impulsion $q > k$, sont intégrées. Finalement, à $k = 0$, toutes les fluctuations ont été moyennées et l’énergie libre de Gibbs Γ est recouvrée.

macroscopique effectif qui en découle. Ainsi, le groupe de renormalisation non perturbatif permet d’accéder aux grandeurs non universelles [28, 29, 30], comme par exemple une température critique. Rappelons que, contrairement aux quantités universelles qui ne dépendent que des couplages nus *pertinents* (au sens du groupe de renormalisation), les grandeurs non universelles sont sensibles à *tous* les couplages nus présents dans l’action microscopique. Calculer des propriétés non universelles impose donc d’inclure dans l’action initiale tous les couplages nus *non pertinents*, ce qui proscrie généralement tout traitement *via* des méthodes perturbatives de groupe de renormalisation. L’accès aux propriétés non universelles s’avère donc propre aux procédures de groupe de renormalisation non perturbatif et constitue l’une des forces de ces approches.

Une autre propriété de cette procédure est que son emploi ne repose pas sur des développements en un petit paramètre, il n’est donc pas perturbatif. Autrement dit, le domaine d’application de ce formalisme n’est *a priori* pas confiné aux régimes de faibles constantes de couplage ou au voisinage de dimensions critiques [31, 32].

Construction de l’action effective moyenne

L’action effective moyenne Γ_k réalise un moyennage thermodynamique des fluctuations de grande impulsion $q > k$, en intégrant sur ces modes. Il s’agit donc d’éliminer dans la fonction de partition (II.1) la contribution à l’intégrale fonctionnelle des modes de basse impulsion. Pour cela, on ajoute à l’action \mathcal{S} un terme de “masse” (c’est-à-dire un terme quadratique en champ) dépendant de l’échelle k qui découple les modes d’impulsion inférieure à k . Ce terme s’exprime dans l’espace des impulsions :

$$\Delta\mathcal{S}_k[\phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \phi(q) R_k(q) \phi(-q). \quad (\text{II.4})$$

La fonction de coupure R_k — analogue de la fonction K_k introduite dans le formalisme de Wilson-Polchinski (II.3) — assure la séparation des modes. Pour cela, elle doit

satisfaire les contraintes :

$$\begin{cases} R_k(q^2) \sim k^2 & \text{quand } q^2 \ll k^2 \\ R_k(q^2) \rightarrow 0 & \text{quand } q^2 \gg k^2, \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

schématisées sur la figure 4. D'une part, pour les modes de basse impulsion $q^2 \ll k^2$,

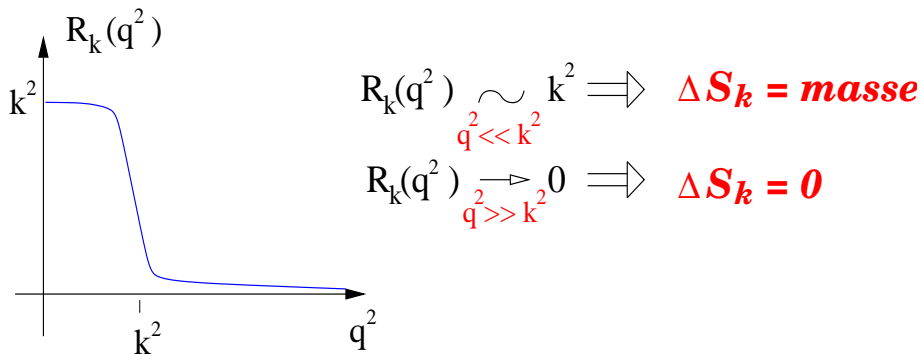


FIG. 4 – Allure de la fonction de coupure $R_k(q)$ réalisant la séparation des modes. A basse impulsion $q^2 \ll k^2$, $R_k(q)$ agit comme une masse ($\sim k^2$), qui supprime la propagation des modes lents. A grande impulsion $q^2 \gg k^2$, $R_k(q)$ disparaît n'altérant pas les modes rapides.

R_k s'apparente à une masse effective k^2 qui gèle leur propagation et supprime ainsi leur contribution. La fonction $R_k(q)$ agit donc comme une coupure infra-rouge (IR) de l'intégrale fonctionnelle. En outre, $R_k(q)$ régularise automatiquement le flot de renormalisation, non seulement dans l'IR mais également dans l'ultra-violet (UV), ce qui sera explicité plus loin. D'autre part, $R_k(q) \rightarrow 0$ pour les modes de grande impulsion $q^2 \gg k^2$ qui ne sont donc pas affectés. La fonction de partition modifiée (et en présence de sources externes) dépend désormais de l'échelle² :

$$\mathcal{Z}_k[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}[\phi] - \Delta\mathcal{S}_k[\phi] + J\cdot\phi}. \quad (\text{II.6})$$

Il lui est associée une énergie libre “courante” (*i.e.* dépendante d'échelle) $\mathcal{W}_k[J] = \ln \mathcal{Z}_k[J]$, dont se déduit alors, par dérivation fonctionnelle, le paramètre d'ordre courant :

$$\psi_k(x) = \frac{\delta\mathcal{W}_k}{\delta J(x)} = \langle \phi_k(x) \rangle. \quad (\text{II.7})$$

L'action effective moyenne est définie par une transformation de Legendre de l'énergie libre³, au terme de masse $\Delta\mathcal{S}_k$ près :

$$\Gamma_k[\psi_k] + \ln \mathcal{Z}_k = J\cdot\psi_k - \Delta\mathcal{S}_k[\psi_k], \quad (\text{II.8})$$

²L'opérateur “.”, dans (II.6) et dans la suite, symbolise une intégration sur la variable d'espace : $J\cdot\phi \equiv \int d^d x J(x) \phi(x)$.

³A travers cette transformation, l'échelle k — coupure UV de l'action wilsonienne $\mathcal{S}_k^{\text{eff}}$ — devient pour Γ_k une coupure IR.

qui permet de recouvrir les comportements souhaités de Γ_k aux échelles extrêmes $k = \Lambda$ et $k = 0$ (figure 3), ce que nous précisons maintenant (voir [14] pour une discussion complémentaire).

Lorsque k parcourt l'intervalle $[\Lambda, 0]$, Γ_k interpole continûment entre l'action microscopique et l'énergie libre de Gibbs (comme schématisé sur la figure 3). Ceci impose que la fonction de coupure $R_k(q)$ vérifie les deux contraintes supplémentaires :

$$\begin{cases} R_k(q) \rightarrow 0 & \text{quand } k \rightarrow 0 \\ R_k(q) \rightarrow \infty & \text{quand } k \rightarrow \Lambda, \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

pour tout q fixé. Ainsi, d'une part $\Delta\mathcal{S}_k$ s'annule à l'échelle $k = 0$ et l'équation (II.8) définit $\Gamma_{k=0}$ comme la transformée de Legendre standard de \mathcal{W} , qui s'identifie donc bien à Γ .

D'autre part, considérons l'équation (II.8) sous forme exponentiée :

$$e^{-\Gamma_k[\psi_k]} = \mathcal{Z}_k[J] e^{-J \cdot \psi_k + \Delta\mathcal{S}_k[\psi_k]}. \quad (\text{II.10})$$

En remarquant que $J = \delta\Gamma_k/\delta\psi_k + R_k \psi_k$ par dérivation de l'équation (II.8), et en recourant au changement de variables $\chi = \phi - \psi_k$ dans l'intégrale fonctionnelle du membre de droite de l'équation (II.10), on obtient l'expression :

$$e^{-\Gamma_k[\psi_k]} = \int \mathcal{D}\chi e^{-\mathcal{S}[\chi + \psi_k] + \chi \cdot \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\chi} - \frac{1}{2}\chi \cdot R_k \cdot \chi}. \quad (\text{II.11})$$

Ainsi, lorsque R_k diverge dans la limite $k \rightarrow \Lambda$ selon (II.9), l'exponentielle du terme quadratique en χ tend vers une fonction de Dirac $\delta(\chi)$. Effectuer alors dans (II.11) l'intégration sur χ engendre l'égalité souhaitée : $\Gamma_{k=\Lambda} = \mathcal{S}$.

Pour donner une illustration concrète des contraintes (II.5) et (II.9), nous donnons un choix typique [31] de fonction de coupure :

$$R_k(q) = \frac{q^2}{e^{q^2/k^2} - 1}. \quad (\text{II.12})$$

Cette fonction se comporte en k^2 à faible impulsion et s'annule à grande impulsion, comme attendu. En outre, sa décroissance lorsque q croît est exponentielle, de sorte que les modes rapides sont très peu dégradés (contrairement à, par exemple, une loi de puissance qui reste non négligeable sur un grand intervalle d'impulsion au-delà de k^2 , altérant ainsi les modes correspondants).

Finalement, l'évolution de l'action effective moyenne avec l'échelle k est régie par une équation de flot qui s'obtient de façon exacte. Pour ne pas alourdir l'exposé, la dérivation de cette équation est renvoyée à l'annexe A. On en donne ici simplement l'expression générale [5] :

$$\partial_k \Gamma_k[\psi_k] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \partial_k R_k(q) \left[\Gamma_k^{(2)}[\psi_k] + R_k \right]^{-1}(q) \right\}, \quad (\text{II.13})$$

où Tr représente l'intégration sur l'impulsion interne q , ainsi que de façon générale la sommation sur les indices internes, soit $\text{Tr} \equiv \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \sum_i$ et où $\Gamma_k^{(2)}[\psi_k]$ désigne la dérivée fonctionnelle seconde de Γ_k , évaluée en un champ *quelconque* ψ_k . L'équation de flot (II.13) est valable pour une action effective moyenne Γ_k générale. Le modèle considéré est simplement spécifié par la forme de l'action initiale $\Gamma_{k=\Lambda} = \mathcal{S}$.

Propriétés de l'équation

Mettons en lumière les aspects essentiels de cette formulation (nous renvoyons à [14] pour une discussion approfondie).

(a) Tout d'abord, l'équation (II.13), exacte, contient *toute* la physique du modèle, perturbative et non perturbative, ce qui englobe les comportements à faible et fort couplages, l'existence éventuelle d'états liés ou d'excitations topologiques... En outre, il suffit que R_k respecte les symétries du modèle pour que celles-ci soient automatiquement préservées par Γ_k au cours du flot.

(b) Ensuite, la motivation essentielle pour construire un flot, non pas d'actions $\mathcal{S}_k^{\text{eff}}$ mais d'énergies libres Γ_k , était d'y attacher une signification physique. De fait, l'équation de flot de Γ_k (II.13), bien que formellement équivalente à l'équation (II.3)⁴, donne un accès direct aux quantités physiques. Il suffit, en effet, d'intégrer le flot de renormalisation jusqu'à l'échelle $k = 0$ pour obtenir une description macroscopique du système considéré, en terme du paramètre d'ordre. La détermination des quantités physiques n'implique donc aucune intégration fonctionnelle (hormis (II.11) qui est triviale), à la différence de la version de Wilson-Polchinski. En particulier, pour des configurations de champ spatialement homogènes, Γ correspond alors, dans la limite physique $k \rightarrow 0$, au potentiel effectif $U = T\Gamma/\mathcal{V}$ qui contient les propriétés thermodynamiques du système [14] ($\mathcal{V} \equiv \int d^d x$ dénotant le volume du système).

(c) En outre, l'équation (II.13) a la structure d'une équation à 1-boucle, que l'on peut représenter graphiquement par :

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---}$$

où le point symbolise l'insertion de $\partial_k R_k$ et le trait le "propagateur" $[\Gamma_k^{(2)}[\psi_k] + R_k]^{-1}$. Cependant, l'apparente ressemblance avec une équation à 1-boucle perturbative ne doit pas prêter à confusion. Le propagateur circulant dans la boucle dépend ici *fonctionnellement* des champs à travers $\Gamma_k^{(2)}[\psi_k]$ et s'identifie, dans la limite $k \rightarrow 0$, au propagateur complet renormalisé de la théorie. Autrement dit, il couple des valeurs de champ quelconques, contrairement au propagateur perturbatif qui n'est défini qu'à champ nul. Ce propagateur rend ainsi l'équation (II.13) elle-même fonctionnelle.

De cette structure à 1-boucle découle deux conséquences remarquables. La première est qu'une boucle signifie une seule impulsion interne qui circule et donc une intégrale simple en impulsion. L'équation (II.13) diffère en ceci du développement perturbatif en boucles à petit couplage, qui implique autant d'intégrales multiples que de boucles qui

⁴Le lien formel exact entre l'action wilsonienne et l'action effective moyenne est explicité dans [6].

sont en général difficiles à évaluer. La seconde est que la structure à une boucle apporte un avantage d'ordre pratique, dans le sens où elle offre un guide pour construire des schémas d'approximation, ce qui est le sujet de la section suivante.

(d) Pour finir, la présence de la fonction de coupure R_k régularise automatiquement l'intégrale apparaissant dans le flot de renormalisation (II.13), comme annoncé plus haut. La régularisation IR est assurée par la présence de la masse effective k^2 affectée aux modes de faible impulsion, qui empêche le propagateur $[\Gamma_k^{(2)}[\psi_k] + R_k]^{-1}$ de développer un pôle à une échelle k non nulle. Ceci signifie qu'à $k \neq 0$ la théorie ne diverge pas, même à la température critique ou en présence d'excitations non massives comme, en particulier, les modes de Goldstone. L'action effective moyenne permet donc d'étudier une phase engendrée par brisure spontanée de symétrie. Cette propriété découle de la définition même de $\Gamma_k + \Delta\mathcal{S}_k$ comme une transformée de Legendre, ce qui lui confère un caractère convexe et rend donc les valeurs propres de la matrice $[\Gamma_k^{(2)} + R_k]$ positives. La régularisation UV est quant à elle liée à la forte décroissance de la dérivée $\partial_k R_k$ à grande impulsion, qui supprime la contribution de ces modes dans l'intégrale (II.13) et assure sa convergence dans l'UV. Mentionnons que l'absence de divergence UV est propre à toute approche du groupe de renormalisation non perturbatif.

II.2 Troncations de l'action effective moyenne

II.2.1 Enjeux

L'équation gouvernant l'évolution de Γ_k avec l'échelle k (II.13) est une équation fonctionnelle aux dérivées partielles, que l'on ne sait évidemment pas résoudre. Son analyse requiert donc de procéder à des simplifications. Pour cela, on "tronque" Γ_k , c'est-à-dire que l'on s'en donne une forme simple, un *ansatz*, respectant les symétries du modèle et inspirée des propriétés de longue distance du système. Le but est de transformer l'équation de flot fonctionnelle en un système d'équations différentielles couplées régissant les flots de "couplages", que l'on puisse traiter numériquement. L'enjeu réside ainsi dans l'élaboration d'un *ansatz* simple mais incorporant tous les ingrédients perturbatifs et non perturbatifs essentiels pour décrire de façon fidèle la physique du système considéré, c'est-à-dire tel que les effets négligés ne produisent que de faibles corrections. Le degré de précision atteint est conditionné par la richesse de l'approximation élaborée. Il s'agit donc d'établir un compromis entre le raffinement de l'*ansatz* et la lourdeur des calculs, en prenant en compte les limitations numériques. Cela nécessite d'être en mesure de contrôler la qualité des approximations effectuées en disposant d'une évaluation fiable de l'erreur induite par la troncation, ce qui n'est pas une tâche aisée. En outre, le choix de la fonction de coupure R_k joue un rôle important et peut être optimisé, ce qui est développé au chapitre III. L'étude systématique des différents schémas d'approximation, indispensable à la maîtrise de ce formalisme, a concentré beaucoup d'attention et de travaux et fait l'objet d'une partie de ce travail de thèse [33, 34], présentée dans le chapitre III. Commençons par introduire les schémas de troncation généralement mis en œuvre dans les approches du groupe de renormalisation non perturbatif. (Dans

la suite, l'appellation "groupe de renormalisation non perturbatif" se réfère exclusivement à sa version en transformée de Legendre, *i.e.* au formalisme de l'action effective moyenne).

II.2.2 Le développement dérivatif

Les phénomènes critiques et les transitions de phase continues émanent des comportements collectifs à grande échelle des degrés de liberté microscopiques et se rapportent donc à la physique de longue distance du système. La physique de longue distance est véhiculée par les modes de grande longueur d'onde donc d'impulsion $q \rightarrow 0$. Ceci justifie le choix de la troncation presque toujours utilisée, qui consiste à développer Γ_k en puissance des dérivées spatiales [31, 19, 25]. Par exemple, pour un modèle à symétrie $O(n)$, qui possède un seul invariant $\rho \equiv \frac{1}{2}\psi_a\psi_a$, où ψ_a est un champ à n composantes, les premiers termes de l'*ansatz* dérivatif de Γ_k s'écrivent :

$$\Gamma_k[\psi] = \int d^d x \left\{ U_k(\rho) + \frac{1}{2}Z_k(\rho) (\partial_\mu \psi_a)^2 + \frac{1}{4}Y_k(\rho) (\partial_\mu \rho)^2 + O(\partial^4) \right\}. \quad (\text{II.14})$$

La fonction $U_k(\rho)$ décrit la physique liée aux configurations de champ spatialement uniformes. Elle s'identifie donc, dans la limite $k \rightarrow 0$, au potentiel effectif, à un facteur de température près. Les fonctions de renormalisation des champs $Z_k(\rho)$ et $Y_k(\rho)$ contiennent les effets associés aux configurations de champ lentement variables dans l'espace, et ainsi de suite. L'approximation de plus bas degré, notée ∂^0 et communément nommée approximation du potentiel local (APL), consiste à négliger la renormalisation des champs en considérant dans l'*ansatz* (II.14) le seul terme cinétique "nu" $(\partial_\mu \psi_a)^2 - Z_k(\rho) \equiv 1$. L'APL peut être raffinée en renormalisant ce terme par un simple coefficient Z_k dépendant de l'échelle k mais non des champs, approximation que nous qualifierons "d'ordre dominant" (OD). Le degré suivant d'approximation, noté ∂^2 , consiste à traiter la troncation complète (II.14) à l'ordre ∂^2 du développement dérivatif, c'est-à-dire en incluant la dépendance complète en champ des fonctions de renormalisation $Z_k(\rho)$ et $Y_k(\rho)$. Cette troncation requiert d'intégrer des équations aux dérivées partielles couplées pour les trois fonctions $U_k(\rho)$, $Z_k(\rho)$ et $Y_k(\rho)$ dépendant chacune de l'échelle k et de l'invariant ρ en tout point de l'espace et représente donc des efforts déjà notoires [28]. Les troncations employées ne dépassent ainsi jamais en pratique l'ordre ∂^2 .

Profitons de ce paragraphe dédié au développement dérivatif pour d'ores et déjà broser les grands traits de notre travail méthodologique exposé dans le chapitre III et dresser le cadre dans lequel il s'inscrit. Ce développement soulève une question cruciale quant à sa convergence et à sa fiabilité, qui n'est étayée d'aucune preuve formelle (voir le chapitre III). Toutefois, les études menées jusqu'à présent abondent dans le sens de conforter la précision des plus bas ordres du développement [28, 35, 36, 11], ce qui augure de bonnes propriétés de convergence. Dans ce contexte, notre travail a contribué à approfondir les fondements du développement dérivatif en apportant une indication tangible de la rapidité de sa convergence, à travers le premier calcul à l'ordre ∂^4 , effectué pour le modèle d'Ising en trois dimensions [34]. Ce travail conforte également la fiabilité de la méthode en montrant, à l'ordre ∂^2 , que la précision peut être estimée et

optimisée simplement, à travers le “réglage” de la fonction de coupure [33].

Pour achever la discussion du développement dérivatif, concentrons-nous sur la détermination de la dimension anormale dans ce schéma de troncation. En effet, il peut paraître surprenant qu’un tel développement, polynômial en dérivées, soit d’une quelconque pertinence pour décrire une physique critique, justement caractérisée par un propagateur non analytique en impulsion $[G^{(2)}(q)]^{-1} = \Gamma^{(2)}(q) \sim q^{2-\eta}$. En fait, l’hypothèse implicite sous-tendant cette procédure est que ce comportement ne se construit que progressivement au cours du flot de sorte que la non-analyticité n’émerge à strictement parler qu’à la limite $k = 0$. On infère donc que le propagateur courant évolue qualitativement suivant une loi de la forme [31] :

$$\Gamma_k^{(2)}(q) \sim \left(q^2 + ck^2\right)^{\frac{2-\eta}{2}}. \quad (\text{II.15})$$

Le propagateur est régulier à basse impulsion et se comporte dans cette limite comme $\Gamma_k^{(2)}(q) \sim k^{2-\eta} (1 + c' q^2/k^2)$. La stratégie est donc d’extraire la dimension anormale de la dépendance en échelle k du coefficient de q^2 lorsque $q \rightarrow 0$. Bien sûr, ceci suppose que les variations spatiales sont suffisamment faibles. A grande impulsion, le caractère non analytique du propagateur est manifeste.

Remarquons finalement que la contribution des modes de grande impulsion $q \gg k$ est supprimée dans l’intégration en impulsion par la décroissance rapide de $\partial_k R_k(q)$ et que celle des modes de faible impulsion $q \ll k$ est coupée, par construction, par la fonction R_k de sorte que les modes d’impulsion dans une étroite fenêtre centrée sur k dominent l’intégrale. Ceci suggère que probablement un développement autour de $q = k$ serait le plus approprié. Néanmoins, le développement autour de $q = 0$ reste plus simple et conduit à des résultats déjà satisfaisants. Nous considérons donc ce dernier dans la suite.

II.2.3 Le développement en champ

Il peut s’avérer nécessaire de recourir à une simplification supplémentaire, notamment pour des modèles possédant un nombre plus élevé d’invariants ou de fonctions de renormalisation analogues à Z_k et Y_k , amenuisant les possibilités d’intégration numérique des fonctions complètes [18]. Cette simplification consiste en un développement en champ des fonctions intervenant dans l’*ansatz* de Γ_k [31]. La troncation en champ d’une fonction générique X_k dépendante d’un invariant ρ , s’écrit comme son développement de Taylor à l’ordre p autour d’une configuration donnée ρ_0 :

$$X_k(\rho) = \sum_{i=0}^p X_{i,k}(\rho - \rho_0)^i. \quad (\text{II.16})$$

L’avantage précieux de la troncation en champ est qu’elle transforme les équations aux dérivées partielles pour les fonctions $X_k(\rho)$ en des équations différentielles ordinaires pour les constantes de couplage $X_{i,k}$ réduisant ainsi considérablement la complexité numérique. En outre, la convergence du développement en champ s’avère, dans la plupart des cas, possible à vérifier et à contrôler et elle se révèle généralement assez rapide,

ce qui en fait un outil fiable.

Notons qu'il existe d'autres procédures de troncation, comme développer Γ_k en termes des fonctions à n points $\Gamma_k^{(n)}$ [14], qui ne seront pas exploitées dans la suite de cet exposé et ne sont donc pas détaillées plus avant.

II.3 Mise en pratique : le modèle $O(n)$

Cette section est consacrée à la dérivation des équations du groupe de renormalisation non perturbatif pour les modèles $O(n)$, à l'ordre dominant du développement dérivatif. L'intérêt de cette entreprise est double. D'abord, il fournit la trame générale des approximations et calculs sous-tendant toute exploitation de la méthode. De plus, il montre que les équations de flot obtenues, subséquemment tronquées à l'ordre le plus bas en puissances du champ (l'ordre ϕ^4), contiennent déjà tous les effets physiques remarquables propres aux diverses réalisations des modèles $O(n)$, associées à des dimensions d et à des nombres de composantes n différents. Tout d'abord, ces équations reproduisent en $d = 4$ la fonction β (à 1-boucle) universelle du couplage quartique et la limite standard à grand nombre de composantes n [37, 31]. En outre, les *mêmes* équations décrivent également la transition de phase continue en $d = 3$ avec des exposants critiques non-triviaux et même la transition de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless [13, 12] induite par le déconfinement des vortex en $d = 2$ (pour un paramètre d'ordre à deux composantes $n = 2$). L'approche du groupe de renormalisation non perturbatif procure donc un cadre théorique unifié pour les modèles $O(n)$ en toute dimension [32] et pour tout n [31].

II.3.1 Dérivation des équations de flot du modèle $O(n)$

Spécifions tout d'abord la forme du terme de "masse" $\Delta\mathcal{S}_k$ de l'équation (II.4) pour ce modèle. Pour respecter la symétrie $O(n)$, celui-ci est diagonal dans l'espace des impulsions et des indices : $\Delta\mathcal{S}_k = \frac{1}{2} \int_{\vec{q}} \phi_a(\vec{q}) [R_k]_{ab}(\vec{q}) \phi_b(-\vec{q})$. La matrice de coupure $[R_k]$ est invariante par rotation — elle ne dépend donc que de \vec{q}^2 — et s'écrit finalement $[R_k]_{ab}(\vec{q}) = R_k(\vec{q}^2) \delta_{ab}$, où δ_{ab} désigne le symbole de Kronecker.

On considère dans la suite l'ordre dominant (OD) du développement dérivatif qui consiste, rappelons-le, à introduire un coefficient de renormalisation Z_k du champ qui ne dépend pas du champ. Cette troncation correspond à l'*ansatz* de Γ_k :

$$\Gamma_k[\psi] = \int d^d \vec{x} \left\{ U_k(\rho) + \frac{1}{2} Z_k (\partial_\mu \psi_a)^2 \right\}, \quad (\text{II.17})$$

où $\rho = \frac{1}{2} \psi_a \psi_a$ est l'invariant de la symétrie $O(n)$.

Equation de flot du potentiel

En évaluant l'*ansatz* (II.17) dans une configuration de champ uniforme selon une direction \vec{e} , $\vec{\psi}_{uni}(\vec{x}) = \psi \vec{e}$, on extrait la relation entre le potentiel U_k et Γ_k : $U_k[\vec{\psi}_{uni}] \equiv$

$\Gamma_k[\vec{\psi}_{uni}]/\mathcal{V}$, où \mathcal{V} représente le volume du système ($\mathcal{V} \equiv \int d^d \vec{x} \equiv (2\pi)^d \delta^d(\vec{0})$). L'équation de flot du potentiel s'obtient donc en évaluant l'équation (II.13) dans une configuration uniforme⁵ :

$$\partial_t U_k[\psi] = \frac{1}{2\mathcal{V}} \text{Tr} \left[\partial_t [R_k]_{ab}(\vec{q}) \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k \right]_{ab}^{-1}(\vec{q}) \right] \Bigg|_{\vec{\psi}=\vec{\psi}_{uni}}. \quad (\text{II.18})$$

Dans cette expression, la variable d'échelle adimensionnée t est définie comme $t = \ln(k/\Lambda)$, ∂_t représentant donc la dérivée logarithmique $k \partial_k$. Commençons par établir l'expression du propagateur $[\Gamma_k^{(2)} + R_k]_{ab}^{-1}$ dans l'espace des impulsions pour le champ uniforme $\vec{\psi}_{uni}$. $\Gamma_k^{(2)}$ est la dérivée fonctionnelle seconde de Γ_k , soit après avoir transformé de Fourier l'*ansatz* (II.17) :

$$[\Gamma_k^{(2)}]_{ab}(\vec{q}) \Big|_{\vec{\psi}=\vec{\psi}_{uni}} \equiv \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \psi_a(\vec{q}) \delta \psi_b(-\vec{q})} = \frac{\delta^d(\vec{0})}{(2\pi)^d} \left([Z_k \vec{q}^2 + U'_k(\rho)] \delta_{ab} + U''_k(\rho) \psi_a \psi_b \right), \quad (\text{II.19})$$

les indices prime et seconde affectés à U_k marquant des dérivées par rapport à l'invariant ρ et ψ_i une composante du champ uniforme $\vec{\psi}_{uni}$. On peut se ramener, sans perte de généralité, à une base des champs dans laquelle le champ uniforme est porté par le premier vecteur \vec{e}_1 de la base, soit $\psi_a = \psi \delta_{a1}$ (et $\rho \equiv \frac{1}{2}\psi^2$). La matrice $[\Gamma_k^{(2)} + R_k]_{ab}$ est alors diagonale dans l'espace des indices avec tous ses éléments diagonaux égaux, à l'exception du premier. L'inverser revient donc simplement à prendre l'inverse de ses éléments soit :

$$[\Gamma_k^{(2)} + R_k]_{ab}^{-1}(\vec{q}) = (2\pi)^d \delta^d(\vec{0}) \left\{ \frac{1}{Z_k \vec{q}^2 + R_k(\vec{q}^2) + U'_k(\rho)} (\delta_{ab} - \delta_{a1} \delta_{b1}) + \frac{1}{Z_k \vec{q}^2 + R_k(\vec{q}^2) + U'_k(\rho) + 2\rho U''_k(\rho)} (\delta_{a1} \delta_{b1}) \right\}. \quad (\text{II.20})$$

En effectuant la trace prescrite par l'équation (II.18) sur les indices a et b , on obtient [31] :

$$\partial_t U_k(\rho) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} \partial_t R_k(\vec{q}^2) \left[\frac{1}{M(U'_k(\rho) + 2\rho U''_k(\rho), \vec{q})} + \frac{n-1}{M(U'_k(\rho), \vec{q})} \right], \quad (\text{II.21})$$

où $M(m^2, \vec{q}) = [Z_k \vec{q}^2 + R_k(\vec{q}^2) + m^2]$ est l'inverse du propagateur d'un mode de masse $(R_k + m^2)^{1/2}$.

La valeur moyenne des champs en l'absence de sources extérieures correspond au minimum du potentiel, ce qui suggère de choisir la norme de la configuration uniforme $\vec{\psi}_{uni} = \psi \vec{e}_1$ telle qu'elle réalise ce minimum, c'est-à-dire la valeur ψ_0 telle que

⁵L'équation (II.19) définit $\Gamma_k^{(2)}$ comme la dérivée fonctionnelle seconde de Γ_k par rapport à des champs $\psi(\vec{q})$ dans l'espace de Fourier et non comme la transformée de Fourier de la dérivée fonctionnelle seconde de Γ_k dans l'espace des x (en dérivant Γ_k par rapport à des champs $\psi(\vec{x})$). Cette différence induit un facteur $(2\pi)^{2d}$ dans l'expression de l'équation de flot (II.13), ce qui est explicité dans l'annexe E. Ainsi, dans toute la suite, $[\Gamma_k^{(2)} + R_k]$ désigne en fait $[(2\pi)^{2d} \Gamma_k^{(2)} + R_k]$. Pour plus de précision, un calcul analogue est mené en grand détail au cours du chapitre VII et dans l'annexe E.

$U'_k(\rho_0) = 0$. On note $\vec{\psi}_0 = \psi_0 \vec{e}_1$. Plaçons-nous au voisinage du minimum courant $\rho_{0,k}$ du potentiel. Si $\rho_{0,k}$ est non nul, alors l'équation de flot du potentiel (II.21) contient, à l'échelle k , la contribution d'un mode longitudinal massif de masse $(2\rho_0 U''_k(\rho_0) + R_k)^{1/2}$ (dans la direction \vec{e}_1 de $\vec{\psi}_0$) et de $(n-1)$ modes radiaux de masse nulle associés aux $(n-1)$ composantes symétriques (orthogonales à $\vec{\psi}_0$). Ces n modes représentent les déformations d'un champ $\vec{\psi}$ autour du minimum. L'excitation longitudinale induit une modulation en norme de $\vec{\psi}$ et les excitations radiales créent des déviations (en angle) autour de la direction \vec{e}_1 . Soulignons que ces modes correspondent à un spectre effectif à une échelle k finie et n'augurent en rien du spectre physique dans la limite $k = 0$. Autrement dit, que le minimum courant du potentiel prenne une valeur non triviale à une échelle $k \neq 0$ ne signifie pas nécessairement que le système soit dans une phase brisée. En effet, la valeur $\rho_{0,k}$ du minimum peut rejoindre l'origine à une échelle $k = k_s$ finie, "restaurant" ainsi la symétrie non manifeste pour $k < k_s$. Le système est alors dans la phase symétrique. Si le flot conduit au contraire à la phase brisée, le minimum (renormalisé) garde une valeur non nulle même à $k = 0$ et les modes de masse nulle incarnent alors les modes de Goldstone. Comme évoqué dans le paragraphe II.1.2, la présence de la fonction de coupure $R_k(\vec{q}^2)$ rend les contributions des modes de masse nulle parfaitement régulières pour $k > 0$ et ces modes sont naturellement inclus dans la description. Le propagateur contient automatiquement les corrections induites par la renormalisation du champ Z_k . Déterminons à présent son évolution.

Renormalisation du champ

L'expression (II.19) rattache la renormalisation du champ à la partie quadratique en impulsion externe de la dérivée seconde de Γ_k . Dans le cadre du développement dérivatif, d'après (II.15), la dimension anormale effective η_k est codée dans la dépendance en k du coefficient — ici Z_k — de l'impulsion externe (notée désormais \vec{p}^2) lorsque celle-ci tend vers zéro. On définit donc naturellement Z_k dans cette limite [31], par :

$$Z_k \equiv \frac{(2\pi)^d}{\delta^d(\vec{0})} \lim_{\vec{p} \rightarrow 0} \partial_{\vec{p}^2} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \psi_a(\vec{p}) \delta \psi_b(-\vec{p})}, \quad (\text{II.22})$$

que l'on évalue par exemple dans la configuration du minimum du potentiel⁶ (soit dans l'espace de Fourier $\psi_{uni,a}(\vec{q}) = (2\pi)^d \psi_0 \delta_{a1} \delta^d(\vec{q})$). En identifiant (II.19) au comportement qualitatif (II.15), il découle $Z_k \sim k^{-\eta_k}$ et la dimension anormale courante se définit alors simplement par :

$$\eta_k = -\partial_t \ln Z_k. \quad (\text{II.23})$$

Lorsque le flot de renormalisation atteint un point fixe P^* , c'est-à-dire à la température critique $T = T_c$, la valeur de la dimension anormale effective au point fixe $\eta_k = \eta^*$ coïncide avec l'exposant critique η .

Formulons ici une remarque utile. On peut gagner un ordre de complexité dans le calcul de la dérivée logarithmique ∂_t par rapport à l'échelle en remarquant que

⁶Le choix du minimum du potentiel comme point de développement est justifié au chapitre III.

l'équation de flot (II.18) peut s'écrire formellement de la façon suivante [31] :

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \tilde{\partial}_t \text{Tr} \left[\ln [\Gamma_k^{(2)} + R_k] \right], \quad (\text{II.24})$$

si $\tilde{\partial}_t$ n'agit que sur la fonction de coupure R_k , soit $\tilde{\partial}_t \equiv \partial_t R_k \frac{\partial}{\partial R_k}$. Dérivons donc l'expression (II.24) par rapport au champ, en notant $\Gamma_k^{(n)}$ les dérivées fonctionnelles n -ièmes de Γ_k et en n'explicitant que les indices et impulsions externes. La dérivée fonctionnelle première de l'équation (II.24), donnée par :

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(\vec{p})} \partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \tilde{\partial}_t \text{Tr} \left[[\Gamma_k^{(3)}]_{a;\vec{p}} [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1} \right], \quad (\text{II.25})$$

se représente graphiquement par un vertex à trois pattes $\Gamma_k^{(3)}$, dont deux sont connectées par le propagateur :

$$\frac{\delta}{\delta \psi_a(\vec{p})} \partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \tilde{\partial}_t \begin{array}{c} \vec{q} \\ \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \vec{p} \end{array}$$

Il convient de rappeler que ce diagramme à 1-boucle est de nature fonctionnelle. Le vertex $\Gamma_k^{(3)}[\psi_k]$ et le propagateur $[\Gamma_k^{(2)}[\psi_k] + R_k]$ dépendent de toutes les valeurs des champs et de tous les couplages.

En remarquant que la dérivée de l'inverse d'une matrice M peut s'exprimer comme $\partial M^{-1} = -M^{-1} \partial M M^{-1}$, une nouvelle dérivation conduit finalement à l'expression souhaitée :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta \psi_a(\vec{p}) \delta \psi_b(-\vec{p})} \partial_t \Gamma_k &= \frac{1}{2} \tilde{\partial}_t \text{Tr} \left[[\Gamma_k^{(4)}]_{a,b;\vec{p},-\vec{p}} [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1} \right. \\ &\quad \left. - [\Gamma_k^{(3)}]_{a;\vec{p}} [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1} [\Gamma_k^{(3)}]_{b;-\vec{p}} [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1} \right], \quad (\text{II.26}) \end{aligned}$$

qui peut se représenter par :

$$\frac{\delta^2}{\delta \psi_a(\vec{p}) \delta \psi_b(-\vec{p})} \partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \tilde{\partial}_t \left(\begin{array}{c} \vec{q} \\ \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \vec{p} \end{array} \begin{array}{c} \vec{q} \\ \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \vec{q}-\vec{p} \end{array} \right)$$

La dérivation fonctionnelle de l'expression (II.24) admet donc une représentation diagrammatique pourvue de règles simples : la dérivée d'un vertex lui octroie une patte externe supplémentaire, et celle d'un propagateur branche à celui-ci une patte externe pour former un vertex à trois pattes affecté d'un signe $(-)$. Cette représentation se révélera fort utile dans le chapitre III. Après avoir évalué $\Gamma_k^{(3)}$ et $\Gamma_k^{(4)}$ puis réalisé toutes les sommations d'indices, on aboutit à l'équation d'évolution de Z_k [31, 14] :

$$\partial_t Z_k = -2 \rho_0 U''(\rho_0)^2 \tilde{\partial}_t \partial_{\vec{p}^2} \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{M(2 \rho_0 U''(\rho_0), \vec{q})} \frac{1}{M(2 \rho_0 U''(\rho_0), \vec{p} - \vec{q})}. \quad (\text{II.27})$$

Avant d'analyser les équations (II.21) et (II.27), nous allons procéder à quelques transformations pour, d'une part, les exprimer en fonction de quantités adimensionnées — afin de supprimer toute dépendance explicite dans l'échelle k et faciliter ainsi la recherche de points fixes [31] — et, d'autre part, introduire quelques notations ré-employées dans la suite et qui en permettent un traitement systématique.

Dédimensionnement

On introduit des variables renormalisées et adimensionnées conformément aux dimensions canoniques fixées par l'*ansatz* (II.17) :

$$\begin{cases} \rho &= k^{d-2} Z_k^{-1} \tilde{\rho} \\ \rho_0 &= k^{d-2} Z_k^{-1} \kappa \\ U_k(\rho) &= k^d u_k(\tilde{\rho}). \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

L'obtention d'une écriture explicitement invariante d'échelle appelle à incorporer un facteur Z_k à la fonction de coupure en posant :

$$R_k(\vec{q}) = Z_k \vec{q}^2 r(y) \quad \text{avec} \quad y = \vec{q}^2 / k^2. \quad (\text{II.29})$$

L'inverse du propagateur s'écrit alors $M(m^2, \vec{q}) = Z_k k^2 [y(1 + r(y)) + \tilde{m}^2]$, où $r(y)$ et $\tilde{m} = u'_k + 2\tilde{\rho} u''_k$ sont sans dimension (les fonctions primées représentant des dérivées par rapport à $\tilde{\rho}$). Il reste à expliciter la dépendance d'échelle de R_k :

$$\begin{aligned} \partial_t R_k(\vec{q}) &= k \partial_k (Z_k \vec{q}^2 r(y)) \\ &= -Z_k \eta_k \vec{q}^2 r(y) + Z_k \vec{q}^2 k \partial_k r(\vec{q}^2 / k^2) \\ &= Z_k k^2 [-\eta_k y r(y) - 2y^2 r'(y)] \equiv Z_k k^2 s(y). \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Finalement, on transforme l'intégrale d -dimensionnelle en une intégrale unidimensionnelle en effectuant l'intégration angulaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} f(\vec{q}^2 / k^2) = 2 v_d k^d \int_0^{+\infty} dy y^{d/2-1} f(y), \quad (\text{II.31})$$

où $v_d^{-1} = 2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)$ représente le volume de la sphère unité et on note :

$$I_n^d(w) = \frac{n + \delta_{n0}}{2} \int_0^{+\infty} dy y^{d/2-1} \frac{s(y)}{[y(1 + r(y)) + w]^{n+1}}. \quad (\text{II.32})$$

On déduit simplement de l'équation (II.21) l'expression adimensionnée de l'équation de flot du potentiel :

$$\begin{aligned} \partial_t u_k(\tilde{\rho}) &= \partial_t [k^{-d} U_k(\rho)] \\ &= -d u_k(\tilde{\rho}) + k^{-d} \partial_t U_k(\rho) \Big|_{\rho=\tilde{\rho}} + k^{-d} \frac{\partial U_k}{\partial \rho} \partial_t \rho \Big|_{\rho=\tilde{\rho}} \\ &= -d u_k(\tilde{\rho}) + (d - 2 + \eta_k) \tilde{\rho} u_k(\tilde{\rho}) + 2 v_d l_0^d (2 \tilde{\rho} u''_k) + 2 v_d (n - 1) l_0^d(0). \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Il reste à établir l'expression de la dimension anormale courante η_k définie par l'équation (II.23). En explicitant la dérivation par rapport à \bar{p}^2 dans l'équation (II.27), on peut montrer que η_k s'exprime en fonction des variables adimensionnées renormalisées [31] :

$$\eta_k = \frac{16 v_d}{d} \kappa u_k''(\tilde{\rho}_0)^2 m_2^d(2 \kappa u_k''(\kappa)), \quad (\text{II.34})$$

avec :

$$m_2^d(w) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}} \tilde{\partial}_t \left\{ \frac{[1 + r(y) + y r'(y)]^2}{[y(1 + r(y))]^2 [y(1 + r(y)) + w]^2} \right\}, \quad (\text{II.35})$$

où l'opérateur $\tilde{\partial}_t$ dans cette expression n'agit que sur le régulateur $r(y)$ et l'on convient que $\partial_t r(y) \equiv s(y)$ en négligeant dans $s(y)$ la contribution proportionnelle à η_k .

Les fonctions l_n^d et m_2^d , dénommées fonctions seuil, sont non polynômiales en leur argument w et codent ainsi le caractère non perturbatif du flot de renormalisation du potentiel $u_k(\tilde{\rho})$ et de Z_k . La propriété fondamentale de ces fonctions, source de leur nom, réside dans leur comportement à grand argument w . Celles-ci décroissent en effet rapidement vers 0 lorsque w , correspondant à la masse renormalisée $m^2/k^2 Z_k$ des excitations, devient grand $w \gg 1$. Cette propriété rend explicite le découplage des modes de grande masse qui cessent effectivement de contribuer au flot dès que leur masse renormalisée dépasse l'échelle k^2 . Ce phénomène instaure l'émergence d'un potentiel effectif pour les modes de basse énergie (petite masse).

Ces fonctions seuil sont de plus normalisées de sorte qu'elles vérifient, indépendamment du choix de la fonction de coupure :

$$l_n^{2n}(0) \Big|_{\eta_k=0} = 1 \quad \text{et} \quad m_2^2(0) = 1. \quad (\text{II.36})$$

Ces égalités découlent simplement des contraintes (II.5) satisfaites par la fonction de coupure, qui se transposent à la fonction adimensionnée $r(y)$, définie par (II.29), sous la forme $\lim_{y \rightarrow \infty} r(y) = 1$ et $\lim_{y \rightarrow 0} r(y) = \infty$. En effet, d'après la définition (II.32) des fonctions seuil l_n^d et en négligeant la contribution de η_k :

$$l_n^{2n}(0) = \frac{n}{2} \int_0^{+\infty} dy y^{n-1} \frac{-2 y^2 r'(y)}{y^{n+1} [(1 + r(y))]^{n+1}} = \left[\frac{1}{(1 + r(y))^n} \right]_0^\infty = 1. \quad (\text{II.37})$$

De même, d'après la définition (II.35) de la fonction seuil m_2^d et en utilisant la relation $\partial_t r(y) = -2 y \partial_y r(y)$, il vient :

$$m_2^2(0) = \int_0^\infty dy \partial_y \left[\frac{1 + r(y) + y r'(y)}{1 + r(y)} \right]^2 = 1. \quad (\text{II.38})$$

Les propriétés universelles (II.36) — vraies pour tout $r(y)$ — des fonctions seuil garantissent de recouvrer, dans les limites correspondantes, les fonctions β perturbatives universelles à 1-boucle, ce qui est explicité dans la suite.

II.3.2 Physique à l'ordre ϕ^4

Nous achevons cette section en explorant la physique contenue dans la version la plus simple des équations de renormalisation (II.33) et (II.34). Pour cela, nous développons le potentiel effectif courant $u_k(\tilde{\rho})$ en puissances de l'invariant $\tilde{\rho}$ au premier ordre non trivial, qui correspond à ϕ^4 . On choisit de développer ce potentiel autour de son minimum κ , ce qui sera justifié au chapitre III. On adopte donc la paramétrisation :

$$u_k(\tilde{\rho}) = \frac{1}{2} \lambda (\tilde{\rho} - \kappa)^2. \quad (\text{II.39})$$

Les couplages λ et κ dépendent de l'échelle k , λ représentant le couplage ϕ^4 usuel et $2\lambda\kappa$ la masse. Dans la paramétrisation (II.39), κ admet une définition implicite comme valeur annulant la dérivée première du potentiel u_k et λ se définit comme la dérivée seconde de u_k au point κ , soit :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u_k}{\partial \tilde{\rho}}(\tilde{\rho}) \right|_{\tilde{\rho}=\kappa} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 u_k}{\partial \tilde{\rho}^2}(\tilde{\rho}) \right|_{\tilde{\rho}=\kappa} = \lambda. \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Les équations de flot de ces deux couplages se déduisent des définitions (II.40) en les dérivant par rapport à l'échelle t . Notons que l'action de la dérivée (totale) d/dt se compose alors de deux contributions, la première provenant de la dépendance en k du potentiel effectif courant u_k , la seconde liée à la variation avec l'échelle du point d'évaluation κ , soit de façon générique :

$$\frac{d}{dt} \left[\left. \frac{\partial^n u_k}{\partial \tilde{\rho}^n} \right|_{\tilde{\rho}=\kappa} \right] = \left[\left. \frac{\partial^n \partial_t u_k}{\partial \tilde{\rho}^n} \right|_{\tilde{\rho}=\kappa} \right] + \partial_t \kappa \left. \frac{\partial^{n+1} u_k}{\partial \tilde{\rho}^{n+1}} \right|_{\tilde{\rho}=\kappa}, \quad (\text{II.41})$$

où $\partial_t u_k$ est donné par l'équation (II.33). Finalement, il existe une relation de récurrence liant les dérivées successives des fonctions seuil introduites précédemment qui rend extrêmement simple les dérivations de l'équation de flot originelle (II.33). Cette relation s'écrit :

$$\frac{\partial l_n^d(w)}{\partial w} = -n l_{n+1}^d(w), \quad (\text{II.42})$$

et l'on obtient, pour la troncation ϕ^4 considérée, le jeu d'équations de flot (fonctions β) :

$$\partial_t \kappa = -(d-2 + \eta_k) \kappa + 2v_d (n-1) l_1^d(0) + 6v_d l_1^d(2\lambda\kappa) \quad (\text{II.43})$$

$$\partial_t \lambda = (d-4 + 2\eta_k) \lambda + 2v_d (n-1) \lambda^2 l_2^d(0) + 18v_d \lambda^2 l_2^d(2\lambda\kappa) \quad (\text{II.44})$$

$$\eta_k = \frac{16v_d}{d} \kappa \lambda^2 m_2^d(2\lambda\kappa). \quad (\text{II.45})$$

Donnons une illustration concrète de la forme de ces équations, qui s'avèrent très simples [38] pour le choix d'une fonction de coupure particulière, qui s'écrit sous forme adimensionnée :

$$r(y) = \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \theta(1-y), \quad (\text{II.46})$$

où $\theta(x)$ représente la fonction de Heaviside. Cette fonction — introduite par Litim [38] comme une coupure “optimale” (voir le chapitre III) — possède la propriété remarquable de conférer aux fonctions seuil une expression analytique (non intégrale), de sorte que les équations (II.43) à (II.45) deviennent simplement :

$$\partial_t \kappa = -(d - 2 + \eta_k) \kappa + v_d \frac{4}{d} \left(1 - \frac{\eta_k}{d+2}\right) \left(\frac{3}{(1+2\lambda\kappa)^2} + (n-1)\right) \quad (\text{II.47})$$

$$\partial_t \lambda = (d - 4 + 2\eta_k) \lambda + v_d \lambda^2 \frac{8}{d} \left(1 - \frac{\eta_k}{d+2}\right) \left(\frac{9}{(1+2\lambda\kappa)^3} + (n-1)\right) \quad (\text{II.48})$$

$$\eta_k = \frac{16 v_d}{d} \frac{\kappa \lambda^2}{(1+2\lambda\kappa)^2}. \quad (\text{II.49})$$

Nous disposons à présent de tous les outils pour montrer que ce jeu unique et très simple de fonctions β offre une vision unifiée des modèles $O(n)$ dans les différents régimes de couplage, en toute dimension et pour tout n . En effet, ces équations établissent une connection entre différentes approches perturbatives, valides chacune autour d’une dimension spécifique et dans un domaine de couplage donné. Ces équations non perturbatives relient ainsi, d’une part, le développement à petit couplage au voisinage de la dimension critique supérieure $d = 4$, d’autre part, le développement à basse température au voisinage de la dimension critique inférieure $d = 2$ et même encore, en $d = 2$, l’approche de Villain pour des spins XY qui consiste à introduire explicitement des excitations topologiques (vortex) dans l’action microscopique.

Etude en $d = 4$

Au-delà de la dimension quatre, le modèle $O(n)$ est décrit à longue distance par la théorie gaussienne, caractérisée par un couplage quartique nul $\lambda = 0$. L’approche perturbative usuelle consiste à se placer au voisinage de cette dimension critique où le couplage quartique λ reste d’ordre ϵ pour développer la théorie en puissances de λ [39]. Pour confronter les équations (II.43), (II.44) et (II.45) aux résultats perturbatifs, on développe ces équations au second ordre en $\{\kappa, \lambda\}$ et l’on pose $d = 4 - \epsilon$. Tout d’abord, la dimension anormale η_k est nulle à cet ordre car l’équation (II.45) est d’ordre trois en $\{\kappa, \lambda\}$. Ensuite le développement des fonctions seuil en puissances de $w = 2\lambda\kappa$ s’écrit à cet ordre : $l_n^d(w) \simeq l_n^d(0) - n w l_{n+1}^d(w)$. Ainsi, comme $v_4 = 1/(32\pi^2)$ et $l_2^4(0) = 1$ d’après (II.36), l’équation (II.44) de $\partial_t \lambda$ devient (au premier ordre en ϵ) :

$$\beta(\lambda) \equiv \partial_t \lambda = -\epsilon \lambda + \frac{n+8}{16\pi^2} \lambda^2. \quad (\text{II.50})$$

Celle-ci ne dépend plus de la fonction de coupure $r(y)$ et reproduit la fonction β universelle perturbative pour le couplage quartique [39].⁷ Le développement au même ordre

⁷Notons que l’équation (II.44) de $\partial_t \lambda$ ne redonne la fonction β perturbative qu’à l’ordre de 1-boucle — ce qui découle naturellement de la structure de l’équation de flot de Γ_k . Retrouver cette dernière à l’ordre de 2-boucles nécessite de sommer des contributions d’une infinité de termes du développement dérivatif (voir le chapitre III et [40, 41]).

de l'équation (II.43) de $\partial_t \kappa$ fournit une équation supplémentaire (non universelle, *i.e.* dépendante de $r(y)$) qui gouverne l'évolution du minimum du potentiel :

$$\beta(\kappa) \equiv \partial_t \kappa = -(2 - \epsilon) \kappa + \frac{n+2}{16 \pi^2} l_1^4(0) - \frac{3}{8 \pi^2} \lambda \kappa. \quad (\text{II.51})$$

En $d = 4$, le couplage λ apparaît marginal et κ s'avère pertinent. Ces équations admettent une solution de point fixe non triviale :

$$(\kappa^*, \lambda^*) = \left(\frac{(n+2) l_1^4(0)}{32 \pi^2}, \frac{16 \pi^2 \epsilon}{n+8} \right). \quad (\text{II.52})$$

On peut alors établir l'expression de l'exposant critique ν qui décrit la divergence de la longueur de corrélation au voisinage du point fixe en linéarisant le flot de renormalisation au voisinage de cette solution. On construit pour cela la matrice de stabilité $M_{i,j} = \partial \beta(g_i) / \partial g_j |_{g=g^*}$ où $g = (\kappa, \lambda)$. Comme $\partial_t \lambda$ ne dépend pas de κ à cet ordre, $M_{i,j}$ est triangulaire. L'inverse de sa valeur propre négative décrit la façon dont le flot s'échappe du point fixe selon la direction pertinente, qui transcrit donc le comportement de la longueur de corrélation au voisinage de la température critique. On obtient :

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon n + 2}{4 n + 8}, \quad (\text{II.53})$$

qui coïncide avec le résultat perturbatif à une boucle [39].

Etude en $2 < d < 4$

En descendant en dimension, les équations (II.43), (II.44) et (II.45) continuent d'admettre une solution de point fixe non triviale (κ^*, λ^*) qui décrit une transition de phase continue. Au voisinage de ce point fixe, la structure de la fonction β du couplage quartique $\beta(\lambda) = -\lambda + \lambda^2(c_1 + c_2(\lambda\kappa))$ associe à ce couplage une direction contractante et donc stable. Au contraire, la structure de l'équation de flot du minimum $\beta(\kappa) = -\kappa + c_3 + c_4(\lambda\kappa)$ rend cette direction instable, κ correspond donc à une variable pertinente au sens du groupe de renormalisation, qui représente l'écart à la température critique. Ainsi sa valeur initiale à l'échelle microscopique Λ conditionne la phase atteinte à la fin du flot et permet de contrôler la distance à la transition. Le comportement du flot de renormalisation au voisinage de la transition de phase est schématisé sur la figure 5.

Pour un couplage quartique microscopique λ_Λ donné, il existe une valeur initiale critique $\kappa_{cr}(\lambda_\Lambda)$ qui conduit le flot à son point fixe, marquant la transition de phase (invariance d'échelle du système). La dimension anormale s'identifie alors à la solution η^* de point fixe, où toutes les variables évoluent simplement en lois d'échelle suivant leurs dimensions canonique et anormale. Pour une valeur $\kappa_\Lambda = \kappa_{cr} + \delta\kappa_\Lambda$ s'écartant légèrement de κ_{cr} , le système n'est plus critique et $\delta\kappa_\Lambda \propto (T_c - T)$ mesure la distance à la transition. Si $\delta\kappa_\Lambda < 0$, le flot aboutit dans la phase symétrique et le minimum du potentiel rejoint alors l'origine pour une valeur non nulle de l'échelle de renormalisation $k = k_s$. (Le flot peut être continué pour $k < k_s$ en recourant à la paramétrisation $u_k(\tilde{\rho}) = m_k^2 \tilde{\rho} + \frac{1}{2} \lambda \tilde{\rho}^2$). La phase symétrique se caractérise par n excitations massives

n	ν^{GRNP}	$\nu^{\text{ref.}}$	η^{GRNP}	$\eta^{\text{ref.}}$
1	0.520^{u_2}	$0.6300(15)^a$	0.057^{u_2}	$0.032(3)^a$
	0.688^{u_3}	$0.6304(13)^b$	0.038^{u_3}	$0.0335(15)^b$
	0.638^{u_4}		0.045^{u_4}	
2	0.613^{u_2}	$0.6695(20)^a$	0.058^{u_2}	$0.033(4)^a$
	0.722^{u_3}	$0.6703(15)^b$	0.038^{u_3}	$0.354(25)^b$
	0.700^{u_4}		0.042^{u_4}	
3	0.699^{u_2}	$0.7050(30)^a$	0.051^{u_2}	$0.033(4)^a$
	0.756^{u_3}	$0.7073(35)^b$	0.035^{u_3}	$0.0355(25)^b$
	0.752^{u_4}		0.038^{u_4}	
10	0.906^{u_4}	0.877^c	0.0187^{u_4}	0.025^c
20	0.952^{u_4}	0.942^c	0.0102^{u_4}	0.013^c
100	0.992^{u_4}	0.989^c	0.0022^{u_4}	0.003^c

TAB. II.1 – Exposants critiques pour le modèle $O(n)$ en trois dimensions pour différentes valeurs de n . Les colonnes ^{ref.} donnent les meilleures estimations théoriques provenant : ^a de la resommation des séries perturbatives à 6-boucles [39], ^b des séries perturbatives incluant des corrections à 7-boucles [39] et ^c du développement en $1/n$ à l'ordre $1/n^2$ [39]. Les colonnes ^{GRNP} rassemblent les résultats issus du groupe de renormalisation non perturbatif à l'OD (avec une coupure exponentielle) et pour les troncations en champ aux plus bas ordres : $p_u = 2$ — donnée par les équations (II.43) à (II.45) — [42], $p_u = 3$ [42] et $p_u = 4$ [31], notées respectivement ^{u₂}, ^{u₃} et ^{u₄}.

Etude en $d = 2$

Le résultat sans doute le plus remarquable provient de l'analyse des équations du groupe de renormalisation non perturbatif du modèle $O(n)$ en dimension deux et en particulier pour $n = 2$ [43, 35]. Ces équations décrivent quantitativement, pour des spins XY , la transition de déconfinement des vortex de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless [12, 13] à partir des seuls degrés de liberté initiaux — les spins — sans introduire explicitement d'excitations topologiques. Nous donnons simplement ici les éléments clés de l'analyse et une synthèse des résultats, et nous renvoyons aux travaux originaux [43, 35] pour une présentation complète.

L'on se concentre donc sur le voisinage de la dimension deux, dimension critique inférieure du modèle $O(n)$ pour $n > 2$, pour laquelle la température critique devient nulle. L'approche usuelle consiste à effectuer un développement à basse température des modèles σ non linéaires $O(n)/O(n-1)$ [44]. Relions tout d'abord les couplages κ et λ définis par (II.39) aux paramètres du modèle σ non linéaire [42, 18], dont la fonction de partition est donnée par :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\vec{\phi} \delta(\vec{\phi}^2 - 1) \exp\left(-\frac{1}{2T} \int d^d x (\partial \vec{\phi})^2\right). \quad (\text{II.54})$$

En relâchant la contrainte de norme unité à travers une exponentielle et en redéfinissant

le champ $\vec{\phi} \rightarrow \sqrt{T}\vec{\phi}$, il vient :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\vec{\phi} \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^d x \left[(\partial \vec{\phi})^2 - g (\vec{\phi}^2 T - 1)^2 \right] \right), \quad (\text{II.55})$$

dans la limite $g \rightarrow \infty$. On en déduit que le minimum du potentiel $\vec{\phi}^2 = 1/T$ diverge à température nulle. Ainsi, le développement perturbatif à basse température correspond, dans l'approche non perturbative, à la limite de grand $\kappa (= \phi^2/2)$ et donc de grande masse. Ceci se comprend ainsi : dans la limite de grande masse, le mode longitudinal massif des modèles $O(n)$ est gelé et la physique devient pilotée par les modes radiaux de Goldstone. Le découplage des modes massifs transparait dans la décroissance à grand argument des fonctions seuil.

Pour retrouver les résultats perturbatifs, on développe en puissances de $1/\kappa$ les équations de flot (II.43), (II.44) et (II.45), en posant $d = 2 + \epsilon$. On obtient, (en utilisant les normalisations (II.36)) :

$$\eta_k = \frac{1}{4\pi\kappa} \quad (\text{II.56})$$

$$\beta(\kappa) = -\epsilon\kappa + \frac{n-2}{4\pi}. \quad (\text{II.57})$$

L'équation (II.57) reproduit la fonction β à 1-boucle [39] de la température T du modèle σ non linéaire, en identifiant $T = (2\kappa)^{-1}$.

En dimension deux, la fonction $\beta(\kappa)$ permet de classifier les comportements des modèles en fonction du nombre de composantes du champ, conformément au théorème de Mermin-Wagner [45]. En effet, remarquons que d'après l'équation (II.43) (ou plus explicitement (II.47)), $\beta(\kappa)$ est strictement positive en $d = 2$ lorsque $\kappa = 0$, c'est-à-dire dans la phase de haute température. L'existence d'un point fixe requiert donc que, lorsque $\kappa \rightarrow \infty$, la fonction $\beta(\kappa)$, donnée par l'équation (II.57) dans cette limite, devienne négative. Ainsi, seul le modèle d'Ising ($n = 1$) réalise cette condition et présente une phase de basse température. Au contraire, il n'existe pas de transition de phase pour $n \geq 3$.

Concentrons-nous finalement sur le cas $n = 2$, qui annule la fonction $\beta(\kappa)$ dans la limite de température nulle, où elle prend la forme donnée par l'équation (II.57) (à $\epsilon = 0$). L'étude des variations de la fonction $\beta(\kappa)$ [43, 35] montre que celle-ci reste négligeable lorsque la température s'élève jusqu'à une valeur critique $\kappa_c \simeq 0.2$, avant de croître exponentiellement, pour $\kappa < \kappa_c$, suivant l'allure tracée sur la figure 6. La valeur κ_c sépare ainsi deux régimes distincts qui constituent les phases de haute et basse températures. Dans la phase de basse température ($\kappa > \kappa_c$), le flot quasi-nul — du moins extrêmement lent — de $\beta(\kappa)$ génère une ligne de quasi-points fixes pour λ et η_k , paramétrée par κ , matérialisée sur la figure 7. La dimension anormale dépend donc de la température et elle atteint la valeur $\eta \simeq 0.24$ à la transition (pour la troncation (II.39) considérée). Dans cette phase, κ garde une valeur finie non nulle lorsque $k \rightarrow 0$. Cependant, conformément au théorème de Mermin-Wagner, comme $\eta_k > 0$, le minimum dimensionné non renormalisé $\rho_0 = Z_k^{-1}\kappa \sim k^\eta\kappa$, lui, tend bien vers 0 avec l'échelle. Ainsi, la valeur moyenne du champ non renormalisé reste nulle

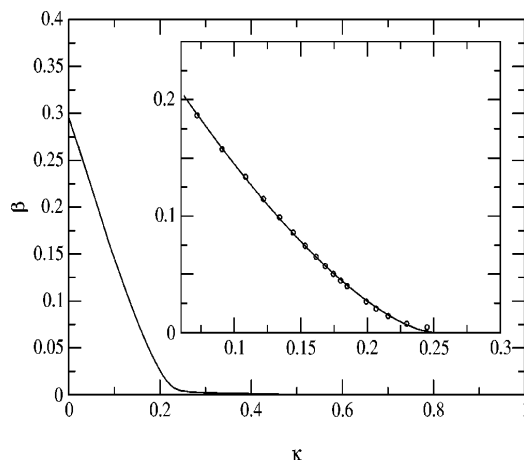


FIG. 6 – Fonction $\beta(\kappa)$ pour $n = 2$ d'après [35] (figure obtenue à partir des fonctions complètes $u_k(\tilde{\rho})$ et $z_k(\tilde{\rho})$, l'allure est qualitativement la même pour la troncation étudiée ici). Elle est nulle dans la phase de basse température, soit tant que $\kappa > \kappa_c \simeq 0.2$, puis croît exponentiellement dans la phase haute température.

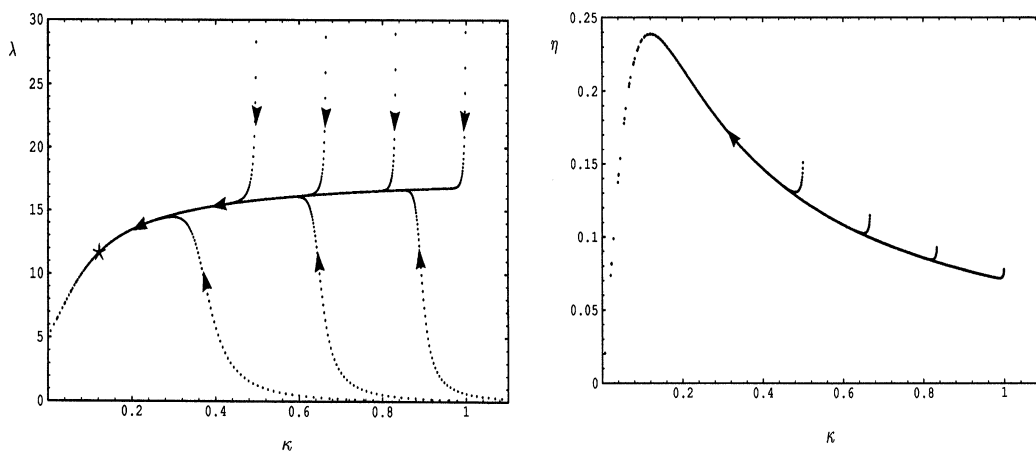


FIG. 7 – Évolution de λ et η_k avec $\kappa = 1/(2T)$ d'après [43]. La valeur $\kappa_c \simeq 0.2$ marquant la transition délimite à droite (pour $\kappa > \kappa_c$) une région de quasi points fixes (qui correspond à la ligne continue sur laquelle toutes les trajectoires confluent) où le flot est extrêmement lent.

$\langle \phi_a \rangle = \sqrt{2\rho_0} = 0$ dans la limite $k \rightarrow 0$. La phase de basse température se révèle quasi-ordonnée. Dans la phase de haute température, ce quasi-ordre est déstabilisé par le déconfinement des vortex et la fonction β croît exponentiellement.

Ces résultats, issus d'une troncation assez crue, révèlent déjà qualitativement les propriétés de la transition et des phases de haute et basse température. Ils ont par la suite été grandement affinés en considérant la dépendance en champ complète des fonctions $u_k(\tilde{\rho})$ et $z_k(\tilde{\rho})$ [35]. En particulier, l'évolution de la masse renormalisée dans la phase de haute température — symétrique — a été analysée. Son comportement

au voisinage de la transition est compatible avec la loi d'échelle essentielle attendue $m_R \sim \exp(-b/[(T - T_c)^\xi])$ avec une valeur $\xi = 0.502 \pm 0.05$ [35]. La valeur de η à la transition est donnée à cet ordre par $\eta = 0.287$ (résultats à comparer aux résultats $\eta = 1/4$ et $\xi = 1/2$ issus de l'approche de Villain [46] où les configurations de vortex sont introduites explicitement dans l'action).

En deux dimensions, les équations du groupe de renormalisation non perturbatif du modèle $O(2)$ à l'ordre ∂^2 du développement dérivatif formulées en termes des seuls degrés de liberté initiaux — c'est-à-dire des spins XY sans ajouter explicitement des configurations topologiques comme les vortex — parviennent à décrire qualitativement et quantitativement la transition de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless. Cette transition, à aimantation nulle, est induite par la décondensation de vortex qui brise le quasi-ordre de basse température du système. L'*ansatz* contient donc intrinsèquement la physique non perturbative du modèle. C'est là une des indications les plus tangibles de la capacité de la méthode à traiter la physique non perturbative.

Il convient de citer, dans la même veine, le calcul explicite des dix premiers points de transitions multi-critiques du modèle d'Ising en dimension deux, accompagné d'une preuve non perturbative qu'il n'existe pas d'autres points fixes que les points multi-critiques [11]. Ces transitions multi-critiques correspondent à des régimes de fort couplage et apparaissent donc intrinsèquement non perturbatives. Mentionnons également, en se restreignant à la mécanique statistique, que le groupe de renormalisation non perturbatif a permis de donner une description quantitative de la transition de phase du modèle de Gross-Neveu en trois dimensions [47, 36], ainsi que des systèmes anti-ferromagnétiques frustrés [18].

Conclusion

Nous venons de jeter les bases du groupe de renormalisation non perturbatif, qui s'appuie autant sur la dérivation d'une équation de flot exacte pour l'action effective moyenne que sur la nécessaire mise en œuvre d'approximations pour en extraire des informations pratiques. Nous nous sommes essentiellement attachés dans ce chapitre à illustrer les principaux mécanismes de calculs inhérents à cette approche, au "niveau zéro" des approximations. Il s'en dégage néanmoins déjà des résultats physiques non triviaux. L'étape à franchir désormais consiste à apporter une justification à ces diverses approximations et à montrer qu'elles se contrôlent de façon fiable. Pour cela, nous allons maintenant "déployer les grands moyens" et nous attaquer aux ordres suivants, ce qui nous amène au chapitre III.

Chapitre III

Développement dérivatif et optimisation

Ce chapitre aborde la question délicate de l'évaluation et l'amélioration des différents schémas d'approximation mis en œuvre lors de toute exploitation concrète du formalisme du groupe de renormalisation non perturbatif. En effet, rappelons que l'on ne peut espérer résoudre l'équation exacte (II.13) sans recourir à une troncature de l'action effective moyenne Γ_k . Nous présentons d'abord une rapide synthèse des différents travaux consacrés à l'étude de ces procédures d'approximation, afin de mettre en relief les objectifs des analyses effectuées au cours de ce travail de thèse qui font l'objet des deux publications [33, 34], en insistant en particulier sur le rôle central de la fonction de coupure — également dénommée “régulateur”. Ces contributions sont ensuite exposées dans le reste de ce chapitre.

III.1 Les procédures d'approximation

III.1.1 Panorama

L'approximation la plus systématique, introduite au paragraphe II.2.2, consiste à négliger les interactions dérivatives d'ordre élevé (supérieur à ∂^2 en pratique) supposées peu affecter la physique de longue distance décrite par les modes de basse impulsion $q \rightarrow 0$. Toutes les applications du groupe de renormalisation non perturbatif reposent donc sur l'hypothèse fondamentale que le développement dérivatif converge, et ce suffisamment rapidement pour conférer aux bas ordres la qualité nécessaire. Valider cette hypothèse apparaît donc comme une des pierres angulaires de cette approche soutenant la légitimité des résultats qui en découlent. Il n'existe pas de preuve formelle de la convergence du développement dérivatif et en établir une relèverait du tour de force car il ne s'apparente pas à un développement contrôlé en série d'un petit paramètre. Néanmoins, l'idée que ce développement converge est appuyée par une série de travaux que nous exposons brièvement.

La convergence du développement dérivatif a été étudiée perturbativement pour le modèle $O(n)$ par Wetterich et Papenbrock [40] (dans le cas d'un régulateur exponentiel) et par Morris et Tighe [41, 48] (pour un champ à une composante). Tout d'abord,

de par leur structure, les équations du groupe de renormalisation non perturbatif reproduisent la fonction β du couplage λ de ϕ^4 à l'ordre de 1-boucle de façon triviale et ce indépendamment de l'opportunité d'un développement dérivatif et du choix de la fonction de coupure. En effet, la renormalisation de la fonction de corrélation 1-PI à quatre points n'implique à cet ordre que le vertex classique λ qui ne dépend pas des impulsions externes. Reproduire la fonction β perturbative à 2-boucles se révèle beaucoup moins trivial. Cela nécessite de sommer des contributions à tous les ordres du développement dérivatif. Morris et Tighe ont montré [41] que les séries numériques obtenues convergent effectivement vers le résultat perturbatif mais seulement pour certaines fonctions de coupure, comme le régulateur exponentiel, excluant notamment la coupure “dure” (fonction de Heaviside $r(y) = \theta(1 - y)$) pour laquelle la série diverge.

De manière non perturbative, ce problème peut être abordé en testant en pratique les performances de la méthode dans des cas connus. A cet égard, la rapidité de la convergence du développement dérivatif est fortement confortée par la précision des résultats obtenus pour les modèles $O(n)$ à l'ordre ∂^2 [28, 35, 36, 11]. Citons à titre d'exemple les exposants critiques du modèle d'Ising en trois dimensions, obtenus à cet ordre, sur lequel nous allons nous concentrer dans la suite : $\nu = 0.6307$ et $\eta = 0.0467$ [28]. Ces résultats sont à comparer aux valeurs provenant du résultat perturbatif à 6-boucles incluant des corrections 7-boucles : $\nu = 0.6304(13)$ et $\eta = 0.0335(25)$ [49]. La détermination de la dimension anormale η pâtit d'une plus grande incertitude que celle de ν , ce qui reflète les limites des calculs à l'ordre ∂^2 pour résoudre la structure en impulsion de la fonction de corrélation à deux points. Raffiner η nécessite *a priori* d'enrichir le contenu en impulsion de l'*ansatz* en incorporant des couplages dérivatifs supplémentaires. Ce remède, quoique souvent invoqué [14], n'avait jamais été validé. Comme il présuppose la convergence du développement dérivatif, il en offre un bon test, qui fait l'objet de nos travaux présentés dans [34]. Ces travaux donnent la première assise quantitative à la convergence du développement dérivatif à travers le calcul explicite de l'ordre ∂^4 et apportent ainsi une confirmation substantielle de la rapidité de la convergence de ce développement en montrant qu'à cet ordre la détermination de η rejoint la valeur “à 7-boucles” (voir section III.3).

Pour réaliser cette étude, nous allons procéder à une approximation corrolaire, introduite au paragraphe II.2.3, qui réside dans le développement en champ des fonctions de renormalisation. Ce développement permet de transformer le système aux dérivées partielles d'équations d'évolution des fonctions de renormalisation en un système d'équations différentielles ordinaires pour les coefficients du développement en champ de ces fonctions — les “constantes de couplage”. La réduction de complexité qui en découle s'avère ici indispensable pour rendre possible un traitement numérique de ces équations à l'ordre ∂^4 (voir section III.4). Ceci nous conduit donc à la discussion de cette approximation. Le développement en champ soulève naturellement les mêmes interrogations quant à sa convergence que le développement dérivatif. Néanmoins, le problème se révèle dans ce cas beaucoup moins épineux dans la mesure où l'on peut en vérifier assez facilement la convergence. Non pas que l'on dispose cette fois d'un petit paramètre de contrôle mais beaucoup plus de termes sont calculables généralement — bien qu'au prix de gros efforts numériques— et l'on peut ainsi en analyser directement l'influence.

De nombreux travaux ont été dédiés à l'étude du développement en champ, sur la base des modèles $O(n)$. Ils se cantonnent, dans le cadre précis du formalisme de l'action effective moyenne, presque exclusivement à l'ordre ∂^0 du développement dérivatif [50, 51, 52, 53]. Jusqu'à présent, seuls Aoki *et al.* [51] avaient prolongé cette étude à l'ordre ∂^2 , pour le cas spécifique d'une coupure en loi de puissance. Cependant, ce régulateur ne supprime pas de façon efficace les contributions des modes de basse impulsion, ce qui dégrade la précision des résultats associés et ne les rend pas représentatifs des performances globales à attendre de l'ordre ∂^2 . Notons que des études plus complètes, incluant l'ordre ∂^2 , ont été menées dans les cadres connexes de l'équation de Polchinski [54, 55] et du formalisme de groupe de renormalisation en temps propre [56], que nous ne discuterons pas ici. L'ensemble de ces études montre que le développement en champ converge et que tant la rapidité de la convergence que la qualité de la valeur asymptotique varient selon la fonction de coupure utilisée.

L'étude des différents développements apparaît donc intimement liée à celle du choix du régulateur. Ceci conduit naturellement à une réflexion sur l'influence de la fonction de coupure et sur l'existence d'un choix optimal de régulateur qui améliore la qualité des approximations [57, 38, 52]. L'élaboration d'une méthode systématique pour identifier de tels régulateurs constitue un enjeu important car elle conditionne de façon cruciale les performances du groupe de renormalisation non perturbatif. Plusieurs approches ont été proposées, sur la base des modèles $O(n)$, dont les principes sont expliqués dans le paragraphe suivant. Ces études demeurent de nouveau essentiellement confinées à l'ordre ∂^0 du développement dérivatif. La connaissance des propriétés du développement en champ et la maîtrise de l'optimisation pour des ordres plus élevés du développement dérivatif se révèlent donc très partielles. Dans ce cadre, nos travaux [33, 34] présentés dans ce chapitre procure une étude complète du développement en champ, soumis à une procédure d'optimisation, pour le modèle d'Ising aux ordres ∂^0 , ∂^2 puis ∂^4 . Ceci forme le corps des sections III.2 et III.3. Commençons par passer en revue le rôle du régulateur et les critères d'optimisation existant à l'ordre ∂^0 afin d'en dégager une procédure généralisable aux ordres plus élevés.

III.1.2 Dépendance dans la fonction de coupure

L'action effective moyenne Γ_k s'identifie par construction à l'énergie libre de Gibbs Γ dans la limite $k \rightarrow 0$. En effet, d'après la contrainte (II.9), le régulateur R_k s'annule à $k = 0$ de sorte que le terme de masse ΔS_k disparaît des expressions (II.6) et (II.8), et $\Gamma_{k=0}$ devient la transformée de Legendre standard de l'énergie libre (dans les notations du chapitre II). Ainsi, les quantités physiques, qui dérivent de Γ_0 , ne dépendent pas du schéma de séparation des modes R_k . Plus précisément, partant d'une action microscopique initiale donnée, la trajectoire de renormalisation effectivement suivie dans l'espace des paramètres du modèle dépend, elle, de la forme spécifique du régulateur à toute échelle k finie mais le point final du flot à l'échelle $k = 0$ est invariant, comme représenté sur le schéma de la figure 1. Cependant, cette propriété, vérifiée par le flot exact, est violée lorsque l'action effective Γ_k est tronquée [6, 59, 58]. Toute troncation introduit alors une dépendance artificielle des grandeurs physiques dans le choix de la coupure. Ceci suggère de rechercher et déterminer — s'il existe — un régulateur

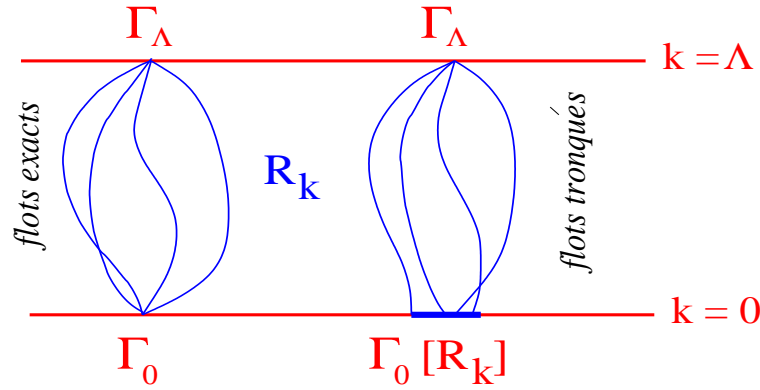


FIG. 1 – Influence du régulateur R_k sur la trajectoire du flot de renormalisation entre les échelles $k = \Lambda$ et $k = 0$ (schéma inspiré de [58]). Chaque régulateur engendre sa propre trajectoire dans l'espace des paramètres du modèle. Toutes les trajectoires confluent, quel que soit R_k , au même point final Γ_0 dans la théorie exacte (à gauche). En présence d'approximations, elles subissent une dispersion et le point final $\Gamma_0[R_k]$ dépend alors du régulateur (à droite).

optimal qui minimise la distance au point Γ_0 exact. Néanmoins ce problème est plus délicat qu'il n'y paraît car le choix d'un critère d'optimisation n'est pas unique. S'agit-il de se fier à la rapidité de convergence du développement en champ ? Qu'advient-il alors de celle du développement dérivatif ? Est-ce équivalent à améliorer la précision des résultats, à minimiser la dépendance des résultats dans la fonction de coupure ?

Cette question rejoint une problématique propre à toute théorie d'approximation, qui rend les approximants dépendant de paramètres non physiques. Elle a été originellement mise en lumière dans le cadre de l'application des théories de perturbation à la chromodynamique quantique [60, 61]. L'influence du schéma de renormalisation sur les grandeurs physiques semblait rendre caduque tout pouvoir prédictif de ces théories, dans la mesure où le choix du schéma relève entièrement de l'arbitraire. Un des premiers traitements a été proposé par Halliday et Suranyi à travers une analyse de la théorie perturbative de l'oscillateur anharmonique [60]. Ils suggéraient de recourir, pour fixer le choix d'un paramètre non physique, à un critère de rapidité apparente de la convergence des séries perturbatives, qui consiste à minimiser, ordre par ordre, les corrections successives. Peu après, Stevenson, soulignant que cette procédure ne garantissait en rien de converger vers la valeur exacte, a élaboré une stratégie alternative [61]. L'idée en est de parvenir à exploiter la connaissance de la propriété d'invariance par rapport au schéma — ou plus généralement aux paramètres non physiques — vérifiée par la théorie exacte pour enrichir l'information fournie par les approximants successifs. Ceci suggère de choisir les paramètres qui réduisent au maximum la sensibilité des résultats à des petites variations de ces paramètres, ce que Stevenson a baptisé le principe de sensibilité minimale (PSM). Ce principe va sous-tendre notre travail. Deux des caractéristiques de cette procédure, mises en exergue dans notre analyse (sections III.2 et III.3), sont déjà évoquées dans le travail original [61]. Premièrement, ce principe n'est pas équivalent à une optimisation de la rapidité de la convergence qui ne conduit pas

nécessairement à la même valeur. Deuxièmement, le PSM semble, comme escompté, posséder la propriété fondamentale de minimiser l'erreur par rapport à la valeur exacte — autrement dit d'optimiser la précision — et donc de sélectionner l'approximation la plus fiable.

Dans le cadre spécifique du groupe de renormalisation non perturbatif, cette problématique se décline en la dépendance dans le choix de la fonction de coupure R_k . Sonder l'influence du régulateur prend un sens concret en paramétrant une fonction de coupure donnée par un (ou un jeu de) paramètre(s) variable(s). La valeur optimale est alors déterminée à travers un critère d'optimisation et les performances des différentes familles de coupure sont comparables en confrontant les résultats optimaux issus de chacune d'elles. Se basant sur l'étude du modèle d'Ising en trois dimensions à l'ordre ∂^0 , deux critères d'optimisation ont été élaborés et étudiés. Le premier, proposé par Liao *et al.* [52], s'apparente à celui de Halliday et Suranyi. Il repose sur l'argument que le profil du régulateur, en régissant la séparation entre les modes de fluctuation rapide et lent, conditionne le traitement des opérateurs non pertinents. Il en découle l'hypothèse que, pour un profil optimal, les compensations mutuelles entre ces opérateurs non pertinents au point fixe sont maximales (et donc au plus proche de la théorie exacte pour laquelle leurs contributions s'annulent exactement), ce qui se transcrit par la convergence en champ la plus rapide. En pratique, ce critère s'inspire de l'observation que des

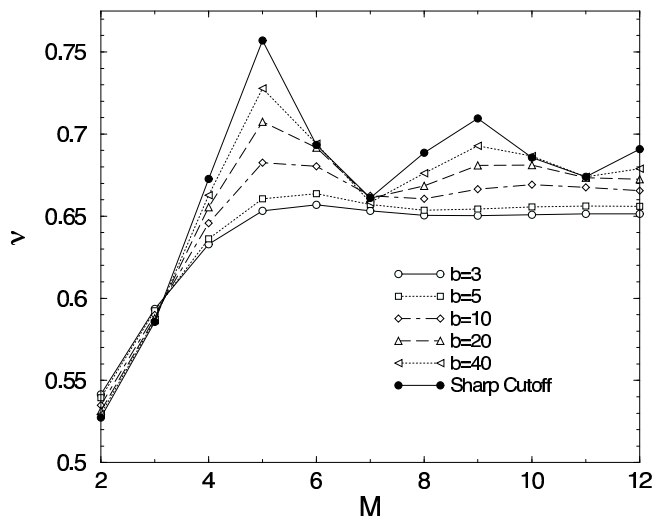


FIG. 2 – Exposant ν du modèle d'Ising en trois dimensions à l'ordre ∂^0 , en fonction de l'ordre M de la troncation en champ d'après [52]. Le potentiel est développé autour de son minimum ρ_0 . Les courbes représentent, de haut en bas, les résultats obtenus pour des profils de régulateurs de plus en plus “doux”, les cas extrêmes correspondant à la coupure dure (en haut) et au régulateur optimal (en bas). La “douceur” du profil conditionne l'amplitude des oscillations.

régulateurs à variations trop brutales (la non analyticité de la coupure dure représentant   cet égard le cas extrême, ce qui la discrimine) ou trop lentes, induisent de grandes

oscillations en variant l'ordre en champ, comme illustré sur la figure 2. Les auteurs ont réalisé une étude systématique pour trois familles de régulateurs (loi de puissance, exponentielle et tangente hyperbolique) dont la “douceur” du profil est paramétrée. Pour chacune, un régulateur est sélectionné de manière unique en déterminant la valeur du paramètre qui conduit à la convergence en champ la plus rapide. La comparaison des régulateurs ainsi optimisés pour chacune des trois familles révèle que leurs profils sont sensiblement identiques. Corrolairement, les exposants ν associés à chacun sont très proches, correspondant donc au même niveau de précision (les courbes pour les trois régulateurs optimaux se confondent avec la courbe “b=3” de la figure 2).

Dans une série de travaux [57, 38, 62, 63, 53, 58], Litim a proposé un second critère d'optimisation, qui s'énonce de la façon suivante. L'inverse du propagateur effectif apparaissant dans l'équation de flot de Γ_k (II.13) possède, en présence d'un régulateur, un “seuil”, soit :

$$\min_{q^2 \geq 0} [\Gamma_k^{(2)}[\phi(q)]|_{\phi=\phi_0} + R_k(q)] = \min_{q^2 \geq 0} [P^2(q^2)] = Ck^2, \quad (\text{III.1})$$

où la constante C est strictement positive et finie. Les régulateurs optimaux sont définis comme ceux qui maximisent le seuil C . L'idée est que la valeur de C règle la distance de $P^2(q^2)$ à zéro et donc la distance du propagateur $P^2(q^2)^{-1}$ au pôle. La maximisation de C contribue alors à stabiliser le flot en éloignant au plus le pôle du propagateur à tout k fini. Plus précisément, Litim a montré que l'équation de flot admet un développement en puissances de $1/P$ dont les coefficients s'écrivent de façon générique [57] :

$$a_n = \int_q F[R_k] P^{-n}(q^2), \quad (\text{III.2})$$

où la forme de F dépend de la théorie considérée. Dans la limite $n \rightarrow \infty$, ces intégrales sont dominées par la contribution du minimum de P^2 , soit $a_n \sim C^{-n/2}$, de sorte que maximiser C revient à maximiser le rayon de convergence $R = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n/a_{n+1}$ de ce développement en amplitude. L'espoir est donc que le “bon comportement” du flot se répercute sur les propriétés de convergence des développements en champ ou en dérivées. Litim suggère que ce critère est équivalent au PSM [62], du moins à l'ordre ∂^0 . Une étude extensive des résultats émanant de l'application de ce critère a été menée pour plusieurs formes fonctionnelles de régulateurs. La figure 3, comparant l'exposant ν du modèle d'Ising en trois dimensions obtenu à l'ordre ∂^0 pour trois régulateurs différents, en fournit une illustration.

Il en ressort que les régulateurs optimisés mènent à une convergence rapide du développement en champ et au même niveau de précision (voir par exemple la figure 3, où les deux courbes du bas correspondent à des régulateurs optimisés et celle du haut non). En outre, ces études ont inspiré la formulation d'une solution particulière du critère de maximisation du seuil [38] :

$$R_k(q^2) = (k^2 - q^2)\theta(k^2 - q^2). \quad (\text{III.3})$$

La caractéristique de ce régulateur optimal est qu'alors le propagateur $P^2(q^2)$ atteint la borne supérieure C non pas en un point mais pour toutes les valeurs $q^2 < k^2$. Le

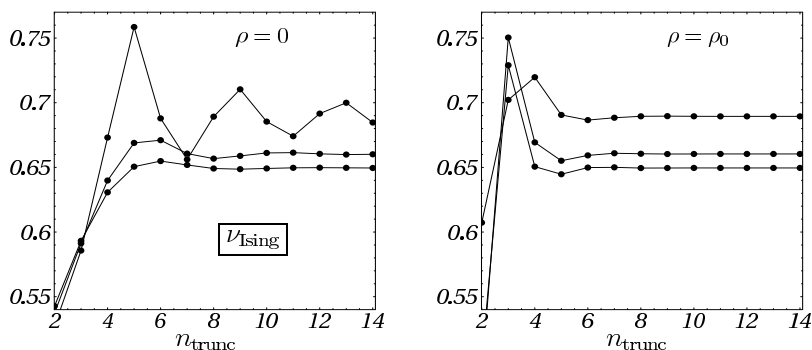


FIG. 3 – Exposant ν du modèle d’Ising en trois dimensions à l’ordre ∂^0 , en fonction de l’ordre n_{trunc} de la troncature en champ d’après [53]. Le potentiel est développé soit autour du champ nul (à gauche), soit autour de son minimum ρ_0 (à droite), ce dernier point améliorant sensiblement la convergence en amortissant les oscillations. Les trois courbes représentent, de haut en bas, les résultats obtenus avec : la coupure dure (non optimale), le régulateur en loi de puissance optimisé, le régulateur optimal (III.3). Les deux régulateurs optimaux conduisent à des résultats plus précis.

propagateur ne dépend donc plus de l’impulsion interne sur tout l’intervalle $[0; k^2]$, ce qui offre en outre l’avantage pratique que les intégrales en impulsion peuvent être calculées analytiquement (cette propriété a déjà été exploitée au paragraphe II.3.2, voir les équations (II.46) à (II.49)).

III.1.3 Choix d’un critère d’optimisation

A l’ordre ∂^0 du développement dérivatif, les deux critères précédents amènent en fait au même degré de précision et à des propriétés semblables de la convergence. Nous allons montrer que cela relève d’une propriété spécifique de l’ordre ∂^0 en dérivées qui se révèle peu sensible à la fonction de coupure. Autrement dit, dans ce cas, optimiser la rapidité de convergence, la précision ou maximiser le seuil conduit à des valeurs convergées sensiblement confondues quel que soit le régulateur optimisé (sauf cas pathologique). Cependant, cette propriété vole en éclats à l’ordre suivant et l’ambiguïté du choix d’un critère prend toute son ampleur. Il s’agit donc de décider d’un critère, applicable à tous les ordres du développement dérivatif.

L’extension du critère de Litim se révèle non triviale à l’ordre ∂^2 . En effet, $\Gamma_k^{(2)}(\phi)$ dépend désormais implicitement du régulateur R_k à travers la renormalisation du champ $Z_k(\phi_0)$, ce qui complique singulièrement la maximisation du seuil. Plus fondamentalement, les implications de la maximisation du seuil sur la convergence des développements en champ et en dérivées ou sur la précision sont loin d’être clairement élucidées aux ordres suivants, de sorte que l’objet concret sur lequel porte l’optimisation n’est pas réellement maîtrisé, ce qui écarte pour notre analyse le choix de ce critère. Finalement, de manière générale — comme mis en évidence par Stevenson — la procédure d’optimisation de la rapidité de la convergence du développement en champ n’implique pas nécessairement de minimiser la “distance” à la théorie exacte.

Or, la fiabilité d'une méthode réside primordialement dans sa capacité à produire des résultats convergés "justes", c'est-à-dire précis (en référence à la valeur exacte), ce qui doit prévaloir sur converger le plus rapidement mais vers des résultats différents. Nous prôtons donc le choix d'un critère d'optimisation de la précision et ceci va être assuré par le principe de sensibilité minimale, comme nous allons le montrer.

L'application du PSM consiste dans notre étude à sélectionner, au sein d'une famille donnée de régulateurs à un paramètre libre α , celui qui minimise la dépendance d'une quantité physique Q par rapport au régulateur, donc celui pour laquelle Q est stationnaire par rapport à α , soit :

$$\left. \frac{dQ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{\text{PSM}}} = 0. \quad (\text{III.4})$$

Cette condition s'assouplit en une minimisation de $dQ(\alpha)/d\alpha$ si cette dérivée ne s'annule pas. Bien sûr il peut exister plusieurs solutions $\{\alpha_{\text{PSM}}^i\}$ satisfaisant cette condition. Toutefois, compléter ce critère de quelques règles simples permet de s'affranchir de cette difficulté en isolant dans l'ensemble des $\{\alpha_{\text{PSM}}^i\}$ une solution optimale unique.

III.2 Etude des ordres ∂^0 et ∂^2

Nous présentons, dans cette section, l'étude systématique que nous avons menée [33] du développement en champ, aux ordres ∂^0 et ∂^2 du développement dérivatif et pour deux familles de fonctions de coupure, accompagnée de l'optimisation, par application du PSM, de ces fonctions de coupure. Notre analyse est réalisée pour le modèle d'Ising en trois dimensions, dont l'*ansatz* de symétrie \mathbf{Z}_2 s'écrit à l'ordre ∂^2 du développement dérivatif :

$$\Gamma_k[\psi] = \int d^d \vec{x} \left\{ U_k(\rho) + \frac{1}{2} Z_k(\rho) (\partial_\mu \psi)^2 + O(\partial^4) \right\}, \quad (\text{III.5})$$

où $\rho = \frac{1}{2} \psi^2$. Nous introduisons les fonctions et variables adimensionnées et renormalisées :

$$\begin{cases} \rho &= k^{d-2} Z_k^{-1} \tilde{\rho} \\ U_k(\rho) &= k^d u_k(\tilde{\rho}) \\ Z_k(\rho) &= Z_k z_k(\tilde{\rho}). \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Les fonctions adimensionnées $u_k(\tilde{\rho})$ et $z_k(\tilde{\rho})$ sont développées en puissances de l'invariant $\tilde{\rho}$ autour d'une configuration κ définie comme le minimum du potentiel $u'_k(\tilde{\rho})|_{\kappa} = 0$. L'influence de la configuration en champ autour de laquelle les fonctions sont développées sur la détermination des exposants critiques a été étudiée dans [25, 51, 53]. Il s'en dégage que le minimum courant κ du potentiel joue un rôle privilégié par rapport à toute configuration fixe et, en particulier, à la configuration de champ nul. Le développement autour du minimum assure en effet une meilleure suppression des oscillations des exposants d'un ordre à l'autre et accélère de façon significative la convergence du développement en champ (voir la figure 3). Dans la suite, nous adoptons donc ce choix qui correspond, pour une fonction générique $h_k(\tilde{\rho})$, à la paramétrisation :

$$h_k(\tilde{\rho}) = \sum_{i=0}^{p_h} h_{i,k} (\tilde{\rho} - \kappa)^i. \quad (\text{III.7})$$

Les premiers termes représentent les opérateurs les plus pertinents et l'on s'attend donc à une stabilisation des exposants critiques à un ordre fini et "pas trop grand" du développement. Ici, $\{p_u = 10, p_z = 9\}$ se révèlent suffisants pour atteindre le régime asymptotique. L'optimisation porte sur deux formes fonctionnelles de régulateurs : le régulateur exponentiel (II.12) et le régulateur θ (III.3) qui constituent des régulateurs privilégiés ; le régulateur exponentiel car il réalise une séparation efficace des modes sur une fenêtre étroite en impulsion, ce qui participe certainement de la précision des résultats associés ; le régulateur θ car il confère aux intégrales définissant les fonctions seuil une expression analytique. La paramétrisation de ces familles s'écrit, sous forme adimensionnée $r(y) = R_k(q^2/k^2)/(Z_k q^2)$:

$$\begin{cases} r_{\text{exp},\alpha}(y) = \alpha \frac{1}{e^y - 1} \\ r_{\theta,\alpha}(y) = \alpha \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \theta(1 - y). \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Comme il suffit de deux exposants indépendants pour décrire les propriétés critiques universelles du modèle d'Ising, nous nous concentrons dans la suite sur ν et η . Pour chaque ordre en troncation et chaque régulateur, les coordonnées du point fixe sont recherchées par résolution numérique du système homogène $\{\partial_t h_{i,k} = 0\}$. L'exposant ν est alors extrait des valeurs propres de la matrice de stabilité $[\partial(\partial_t h_{i,k})/\partial h_{j,k}]$ évaluée au point fixe. L'exposant η s'identifie à la valeur de point fixe de la dimension anormale courante $\eta_k = \eta^*$.

III.2.1 Optimisation à l'ordre ∂^0

A l'ordre ∂^0 , les variations de ν en fonction du paramètre α présentent, à chaque ordre en champ, un extremum unique et donc une solution unique ν_{PSM} satisfaisant la contrainte de sensibilité minimale. Ces variations sont représentées, pour les grandes troncations, sur la figure 4 (avec une échelle en ordonnée très dilatée pour distinguer les différentes courbes, sinon superposées). Le régulateur $r_{\theta,\alpha}$ conduit à la valeur optimisée $\nu_{\text{PSM}} = 0.650$ associée au paramètre optimal $\alpha_{\text{PSM}} = 1$ (figure 4 (b)). Le régulateur $r_{\text{exp},\alpha}$ optimal est réalisé pour $\alpha_{\text{PSM}} = 6.03$ qui donne la valeur $\nu_{\text{PSM}} = 0.651$ (figure 4 (a)). L'évolution des exposants optimaux à chaque ordre du développement en champ est tracée sur la figure 5 pour les deux familles de régulateur. Les deux courbes apparaissent pratiquement indiscernables, les valeurs asymptotiques différant de moins de 0.5%, et s'avérant de plus atteintes à la même vitesse. L'exposant ν optimal semble donc vérifier également une stationnarité dans l'espace global des régulateurs.

Discutons, au vu de ces courbes, le critère de rapidité de la convergence. A cet ordre en dérivées, les régulateurs pour toutes les valeurs de α examinées ici conduisent à la même rapidité de convergence du développement en champ, bien que vers des valeurs asymptotiques éventuellement distinctes. Ceci est illustré dans l'encart de la figure 5 qui compare l'évolution de ν_{PSM} avec l'ordre de la troncation à celle obtenue pour un régulateur arbitraire $r_{\theta,\alpha=0.1}$. Les deux courbes convergent "à la même vitesse" vers des

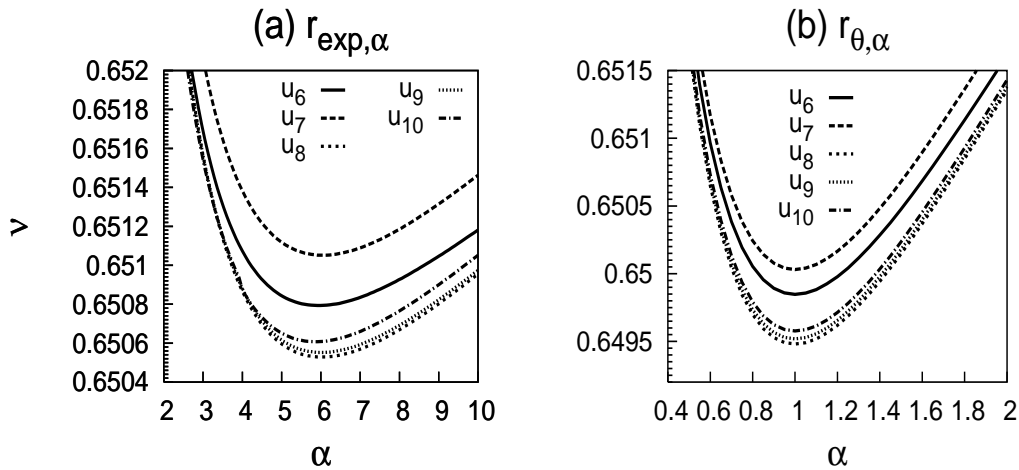


FIG. 4 – Variations de ν avec α à l'ordre ∂^0 , aux plus grandes troncations en champ $\{p_u > 5\}$, pour les deux régulateurs $r_{exp,\alpha}$ et $r_{\theta,\alpha}$. A chaque troncation u_i , la fonction $\nu(\alpha)$ présente un minimum unique, qui correspond donc à la valeur optimale ν_{PSM} sélectionnée par le PSM.

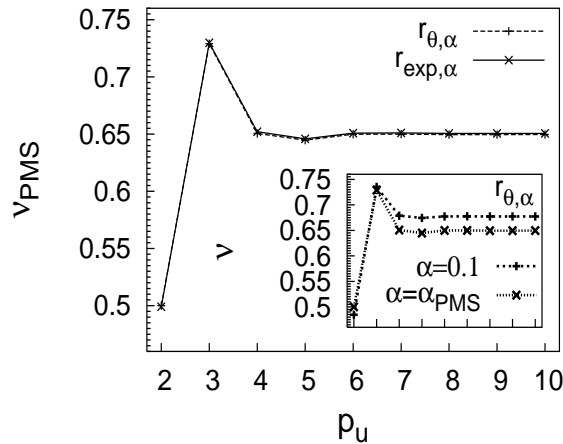


FIG. 5 – Évolution des exposants ν_{PSM} optimisés avec l'ordre de la troncation en champ à l'ordre ∂^0 . Les courbes, obtenues pour les régulateurs exponentiel et θ *optimaux*, sont confondues. Par contre, comme l'illustre l'encart, un régulateur quelconque — par exemple $r_{\theta,0.1}$ — conduit à une valeur asymptotique distincte, bien qu'atteinte “à la même vitesse”.

valeurs sensiblement différentes. Le critère de rapidité de la convergence ne permettrait pas, dans ce cas, de les discriminer et sélectionner un régulateur, contrairement au PSM.

Confrontons finalement ces résultats à ceux issus de la maximisation du seuil, disponibles à l'ordre ∂^0 pour les régulateurs étudiés ici [57, 53]. Ce critère sélectionne $\alpha_{\text{opt}} = 1$ [53] pour le régulateur θ et $\alpha_{\text{opt}} = 3.92$ [57] pour le régulateur exponentiel. Il coïncide donc avec le PSM pour le régulateur θ (en effet, $\alpha_{\text{PSM}} = 1$ à tous les ordres en champ, voir la figure 4 (b)), comme suggéré par Litim. Dans le cas du régulateur

exponentiel, les paramètres optimaux diffèrent pour ces deux critères. Néanmoins les exposants optimaux correspondants s'avèrent presque identiques car, pour $r_{exp,\alpha}$, les variations de ν n'excèdent pas 1% sur toute la plage explorée [$\alpha_1 \simeq 1.2, \alpha_2 \simeq 74$] et, de fait, $|\nu_{\text{PSM}} - \nu_{\text{opt}}| < 10^{-4}$. Les deux critères peuvent donc encore être considérés comme équivalents.

La propriété principale du PSM, qui se dégage en particulier de la figure 4, est qu'à cet ordre en dérivées, ν apparaît sur-évalué, pour toutes les valeurs du paramètre α et pour les deux familles, par rapport à sa valeur "à 7-boucles" et que la solution ν_{PSM} de la condition de stationnarité sélectionne un minimum pour chaque famille. Par conséquent, la solution du PSM minimise l'écart à la valeur "exacte". Sélectionner le paramètre réduisant le plus la dépendance dans le régulateur revient donc à optimiser la précision. Cette propriété est préservée aux ordres suivants du développement dérivatif, comme nous le verrons.

En outre, cette analyse apporte une nouvelle pierre pour consolider la base du développement en champ. Celui-ci se montre en effet bien contrôlé et converge rapidement, comme manifeste sur la figure 5 (quatre ou cinq ordres suffisent à atteindre à moins de 1% le régime asymptotique).

III.2.2 Optimisation à l'ordre ∂^2

L'analyse se complique quelque peu à l'ordre ∂^2 de par l'existence de solutions multiples à la condition de stationnarité. Il s'agit de dégager des règles permettant de lever la dégénérescence et de discriminer les solutions. Ces règles se fondent sur l'hypothèse que le développement dérivatif converge rapidement et donc que les corrections successives aux quantités physiques décroissent suffisamment vite. En l'absence de toute autre forme d'approximation (sans troncation en champ), la valeur asymptotique du développement dérivatif est exacte, et donc indépendante du régulateur. Ceci garantit que tous les régulateurs mènent asymptotiquement au même résultat, bien qu'à des vitesses différentes.¹ L'enjeu consiste ainsi à choisir le régulateur qui induit la convergence en dérivées la plus rapide, renforçant la précision des premiers ordres.

Cet argument se décline en deux règles simples pour classer les solutions. La première enjoint de sélectionner dans l'ensemble des solutions stationnaires celle qui minimise les corrections ordre par ordre en dérivées. Ceci revient à l'ordre ∂^2 à minimiser l'écart à la valeur issue de l'ordre ∂^0 . Une seconde règle émerge de la confrontation de plusieurs familles de régulateur. Il s'agit de retenir la solution stationnaire "dans l'espace des familles", c'est-à-dire d'exclure les solutions qui n'existent que pour une famille donnée de régulateur sans équivalent dans les autres, ou engendreraient de grandes fluctuations entre familles. Finalement, un dernier critère émane de la synthèse de plusieurs observables, optimisées indépendamment. Il convient alors de s'assurer de la cohérence des résultats en vérifiant que le paramètre optimal associé à une observable rend également stationnaires les autres observables, ce qui élimine d'éventuels accidents

¹Cette garantie distingue le développement en dérivées de celui en champ, pour lequel les valeurs asymptotiques, associées à différents régulateurs, subissent la dispersion résiduelle liée à la troncation du flot à un ordre donné du développement dérivatif.

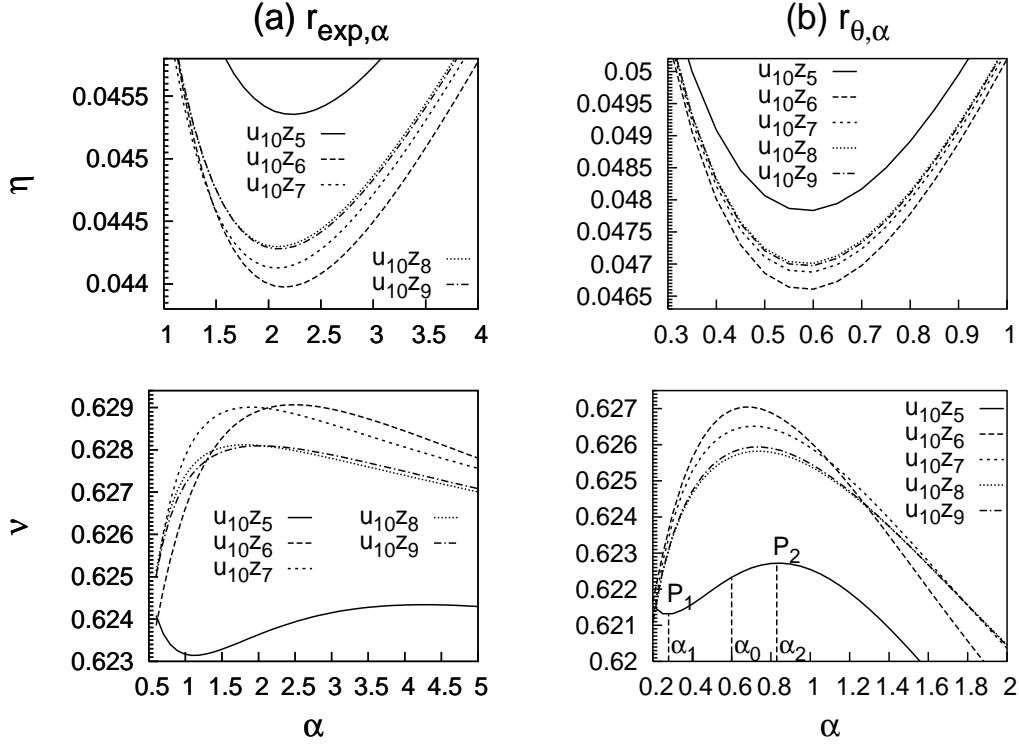


FIG. 6 – Variations de ν avec α à l'ordre ∂^2 , aux plus grandes troncations en champ $\{p_u = 10, p_z > 4\}$ pour les deux régulateurs $r_{exp, \alpha}$ et $r_{\theta, \alpha}$. A chaque troncation u_{10z_i} , les fonctions $\nu(\alpha)$ et $\eta(\alpha)$ présentent un extremum unique (à l'exception de u_{10z_5} discutée en note¹), qui détermine les solutions ν_{PSM} et η_{PSM} du PSM.

liés à une observable particulière. Ces quelques règles très générales, illustrées dans la suite, permettent de lever toutes les ambiguïtés à l'ordre ∂^2 .

Exposons notre analyse. Le développement du potentiel à l'ordre maximal $p_u = 10$ est inclus, et le développement de z_k est considéré ordre par ordre jusqu'à $p_z = 9$. Pour le régulateur exponentiel et à tous les ordres en champ (à l'exception de $p_z = 5$)², les variations des exposants ν et η avec le paramètre α , tracées sur la figure 6 (a) pour les grandes troncations, possèdent encore un extremum unique. Les valeurs du paramètre optimal pour les deux exposants α_{PSM}^ν et α_{PSM}^η convergent vers des valeurs très voisines $\alpha \simeq 2.$, ce qui valide la cohérence des résultats issus de l'optimisation indépendante des deux exposants. Les valeurs optimisées asymptotiques des exposants sont $\nu_{PSM} = 0.6281$ et $\eta_{PSM} = 0.0443$ pour ce régulateur [33].

Pour le régulateur θ , il existe deux solutions stationnaires pour chacun des exposants, qui sont représentées sur la figure 7 pour la troncation en champ d'ordre le plus élevé $\{p_u = 10, p_z = 9\}$. Tout d'abord, chacune des deux solutions, indicée 1 et 2, est

²Le cas de $\nu(\alpha)$ pour la troncation u_{10z_5} est un cas spécial pour lequel il existe deux solutions presque dégénérées pour les deux régulateurs. Ainsi, l'on peut choisir arbitrairement l'une ou l'autre (notées P_1 et P_2 sur la figure 6 (b) sur l'exemple de $r_{\theta, \alpha}$) ou la médiane car leurs différences n'excèdent pas le dixième de pourcent.

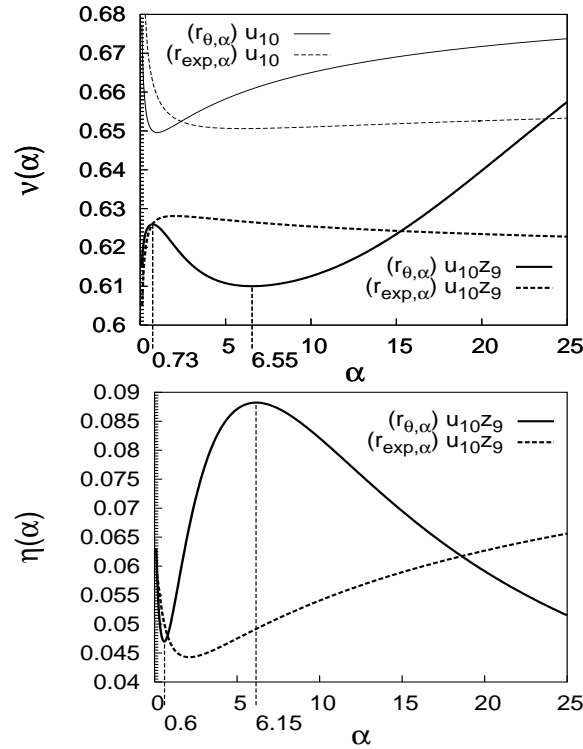


FIG. 7 – Comparaison, aux troncations maximales en champ, des exposants issus des ordres ∂^0 et ∂^2 d'une part, et pour chacun des deux régulateurs $r_{exp,\alpha}$ et $r_{\theta,\alpha}$ d'autre part. D'abord, en considérant le régulateur $r_{\theta,\alpha}$ seul, la minimisation de la distance entre les valeurs des exposants à l'ordre ∂^0 (courbes $(r_{\theta,\alpha}) u_{10}$) et celles à l'ordre ∂^2 (courbes $(r_{\theta,\alpha}) u_{10} z_9$) sélectionne la première solution du PSM située en $\alpha \simeq 0.6$. (Rappelons que la courbe $\eta(\alpha)$ à l'ordre ∂^0 est l'axe $\eta = 0$.) Ensuite, en confrontant les deux régulateurs à l'ordre ∂^2 (courbes $(r_{\theta,\alpha}) u_{10} z_9$ et $(r_{exp,\alpha}) u_{10} z_9$), l'extremum pour $r_{\theta,\alpha}$, le plus proche de l'unique solution de PSM pour $r_{exp,\alpha}$ est encore le premier. La seconde solution de PSM en $\alpha \simeq 6$ pour $r_{\theta,\alpha}$, est donc rejetée.

repérée par des valeurs très proches du paramètre associé à chacun des exposants : $\alpha_{\text{PSM1}}^\nu \simeq \alpha_{\text{PSM1}}^\eta \simeq 0.6$ et $\alpha_{\text{PSM2}}^\nu \simeq \alpha_{\text{PSM2}}^\eta \simeq 6$. Ces solutions apparaissent donc cohérentes par paires pour les deux observables, validant ces deux résultats — et n'en privilégiant aucun. Pour les discriminer, appliquons les deux règles énoncées plus haut. Ces solutions sont confrontées aux solutions de l'ordre ∂^0 d'une part, et aux solutions issues du régulateur exponentiel à l'ordre ∂^2 d'autre part, sur la figure 7. Minimiser les fluctuations entre les deux ordres en dérivées ou vérifier la stationnarité entre les deux familles concordent pour éliminer sans ambiguïté la solution 2. Ce sont les variations liées à la solution 1 retenue qui sont tracées sur la figure 6 (b). Cette solution conduit aux valeurs asymptotiques $\nu_{\text{PSM}} = 0.6260$ et $\eta_{\text{PSM}} = 0.0470$ [33].

La figure 8 consigne les développements en champ pour les deux régulateurs optimaux confirmant, à cet ordre en dérivées, la rapidité de la convergence du développement en champ, ce qui constitue le premier résultat de cette analyse. Mentionnons

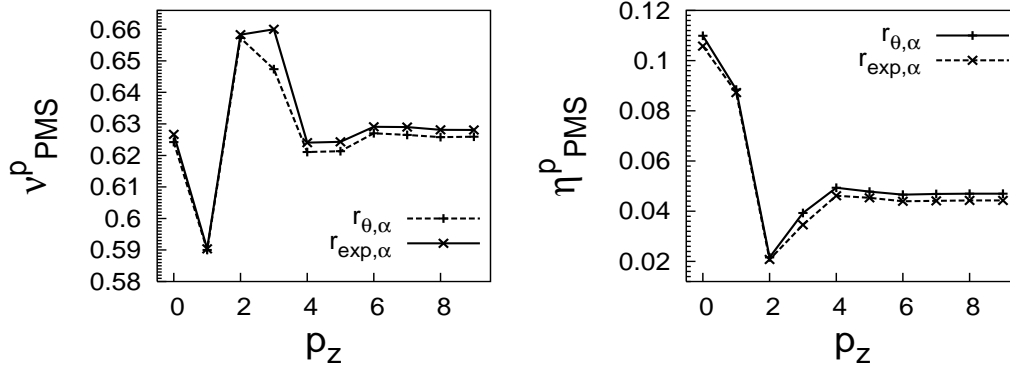


FIG. 8 – Évolution des exposants ν_{PSM} et η_{PSM} optimisés avec l’ordre de la troncation en champ à l’ordre ∂^2 .

ici, pour la suite, qu’à la troncation $\{p_u = 8, p_z = 6\}$ et pour le régulateur exponentiel, les exposants optimaux, donnés par $\nu_{\text{PSM}} = 0.6291$ et $\eta_{\text{PSM}} = 0.0440$, s’identifient aux valeurs issues de la troncation maximale $\{p_u = 10, p_z = 9\}$ données p.46 à moins de 1%. Cette analyse illustre de plus que l’application du PSM se généralise simplement à l’ordre ∂^2 , dans le sens où celui-ci peut être rendu non ambigu en l’étoffant de quelques règles simples. En particulier, l’application indépendante du principe aux deux exposants ν et η fournit des résultats cohérents. On peut alors montrer que cela s’étend à tous les autres exposants liés par des relations d’échelle à ν et η , qui préservent trivialement la propriété de stationnarité par rapport au paramètre (voir [33]).

La caractéristique fondamentale de l’équivalence entre PSM et optimisation de la précision est préservée à l’ordre ∂^2 . En effet, d’après la figure 6, toutes les valeurs de ν sous-évaluent la valeur “exacte” et la valeur optimale correspond à un maximum, et réciproquement pour η . Le PSM fournit donc un outil précieux pour tester l’influence de la fonction de coupure — obtenir une estimation de l’erreur — et optimiser la précision des résultats.

Nous renvoyons à l’article [33] pour des données complémentaires concernant en particulier l’influence et l’optimisation d’un second paramètre (et également l’expression de l’équation de flot de $z_k(\tilde{\rho})$).

Nous rassemblons pour conclure les estimations d’exposants issus des différentes méthodes d’optimisation dans la table III.1. La valeur de l’exposant ν obtenue par le groupe de renormalisation non perturbatif à l’ordre ∂^2 se compare aux meilleures déterminations analytiques et numériques. En revanche, l’erreur relative sur η s’avère plus importante et ceci est à imputer *a priori* à l’ordre du développement dérivatif qui donne une approximation grossière de la dépendance en impulsion des fonctions de vertex. Cependant, calculer l’ordre suivant en dérivées n’est pas une mince affaire, comme nous le présentons maintenant.

		ν	η
∂^0	$r_{\text{exp},\alpha_{\text{PSM}}}$ [33]	0.651	0
	$r_{\theta,\alpha_{\text{PSM}}}$ [33] et $r_{\theta,\alpha=1}$ [53]	0.650	0
	$r(y) = 1/y$ [51, 64]	0.660	0
∂^2	$r_{\text{exp},\alpha=1}$ * [28]	0.6307	0.0467
	$r_{\text{exp},\alpha_{\text{PSM}}}$ [33]	0.6281	0.0443
	$r_{\theta,\alpha_{\text{PSM}}}$ [33]	0.6260	0.0470
	$r(y) = 1/y$ [51, 64]	0.6175	0.0542
7-boucles	[49]	0.6304(13)	0.0335(25)
Monte-Carlo	[65]	0.6297(5)	0.0362(8)
Expériences :	transition de démixion [66]	0.636(31)	0.045(11)
	transition liquide-vapeur [67]	0.6298(90)	

TAB. III.1 – Exposants critiques du modèle d’Ising en trois dimensions. Les résultats notés ∂^0 et ∂^2 sont issus du formalisme de l’action effective moyenne. Les valeurs optimisées selon le PSM, calculées dans ce chapitre sont repérées par $r_{\text{exp}/\theta,\alpha_{\text{PSM}}}$ [33]. (* provient de l’intégration des fonctions complètes $u_k(\tilde{\rho})$ et $z_k(\tilde{\rho})$ sans troncation en champ [28]).

III.3 Etude de l’ordre ∂^4

Cette section présente l’étude que nous avons menée à l’ordre ∂^4 du développement dérivatif [34]. Nous y exposons en particulier l’obtention des équations de renormalisation à l’ordre ∂^4 , avant de détailler l’application de la procédure d’optimisation.

III.3.1 Dérivation des équations de flot

La première étape consiste à identifier les fonctions de renormalisation intervenant à l’ordre ∂^4 . Pour cela, examinons les monômes du type (∂^4, ψ^n) que l’on peut formuler afin d’en extraire une base. Avec deux champs scalaires, tous les termes à quatre dérivées que l’on peut former : $\{\psi\partial^4\psi, (\partial^2\psi)^2, \partial_\mu\partial_\nu\psi\partial_\mu\partial_\nu\psi$ et $\partial_\mu\psi\partial_\mu\partial^2\psi\}$ sont équivalents par intégration par parties, on en retient donc un seul, par exemple $(\partial^2\psi)^2$. Avec deux puissances du champ supplémentaires, on peut construire sept combinaisons différentes en répartissant les quatre dérivées sur les quatre champs scalaires. Certaines de ces combinaisons sont encore reliées par intégrations par parties de sorte qu’il s’en dégage trois indépendantes : $\{\psi^2(\partial^2\psi)^2, \psi(\partial^2\psi)\partial_\mu\psi\partial_\mu\psi, (\partial_\mu\psi\partial_\mu\psi)^2\}$. Ajouter des champs n’introduit pas de nouvelles structures en dérivées. On a donc recensé les trois types de termes qui composent les (développements polynômiaux des) fonctions de renormalisation intervenant à l’ordre ∂^4 , conduisant à l’*ansatz* :

$$\Gamma_k[\psi] = \int d^d \vec{x} \left[U_k(\rho) + \frac{1}{2} Z_k(\rho) (\nabla\psi)^2 + \frac{1}{2} W_k^a(\rho) (\Delta\psi)^2 + \frac{1}{2} W_k^b(\rho) (\nabla\psi)^2 (\psi\Delta\psi) + \frac{1}{2} W_k^c(\rho) ((\nabla\psi)^2)^2 \right], \quad (\text{III.9})$$

où les deux termes $(\partial^2\psi)^2$ et $\psi^2(\partial^2\psi)^2$ participent du développement de la même fonction $W_k^a(\rho) (\Delta\psi)^2$. Par ailleurs, seul le terme $W_k^a(\rho) (\Delta\psi)^2$ contribue directement au propagateur, les autres influant sur les fonctions de vertex d'ordres supérieurs.

L'étape suivante requiert de formuler des équations de définition pour les cinq fonctions U_k , Z_k et W_k^s , $s = a, b, c$. On se place encore dans la limite d'impulsions externes nulles, où le développement dérivatif fait sens. Les fonctions U_k et Z_k sont définies comme dans le chapitre précédent : celle du potentiel en évaluant Γ_k dans une configuration de champ uniforme et celle de Z_k en isolant la dépendance quadratique dans l'impulsion externe de $\Gamma_k^{(2)}$:

$$Z_k(\rho) = \lim_{\vec{p}_i \rightarrow 0} \partial_{\vec{p}_1^2} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\psi(\vec{p}_1)\delta\psi(\vec{p}_2)}. \quad (\text{III.10})$$

Le but est maintenant de construire des définitions pour les W_k^s , $s = a, b, c$, sous la contrainte d'utiliser des $\Gamma_k^{(n)}$ de plus bas ordres possibles et le plus petit nombre d'impulsions externes afin de simplifier au mieux leur équation de flot. A cet égard, $\Gamma_k^{(2)}$ suffit à définir W_k^a en considérant sa dépendance en \vec{p}^4 :

$$W_k^a(\rho) = \lim_{\vec{p}_i \rightarrow 0} \partial_{\vec{p}_1^4} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\psi(\vec{p}_1)\delta\psi(\vec{p}_2)}. \quad (\text{III.11})$$

Les définitions de W_k^b et W_k^c requièrent des $\Gamma_k^{(n)}$ d'ordres plus élevés. Commençons par W_k^b . Ce terme donne une contribution à $\Gamma_k^{(3)}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ pour des impulsions externes distinctes $\vec{p}_1 \neq \vec{p}_2 \neq \vec{p}_3$, que l'on va exploiter. Cette contribution, proportionnelle à W_k^b , est portée par $\vec{p}_1^2(\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3)$ et ses permutations circulaires. Cette structure, une fois la conservation de l'impulsion³ explicitement exprimée $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1 - \vec{p}_2$, produit des contributions en $(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2$ et $\vec{p}_1^2 \vec{p}_2^2$. Parallèlement, la conservation explicite de l'impulsion mélange les structures en impulsions associées aux différents W_k^s . En particulier, la structure initiale \vec{p}_1^4 et ses permutations, associée à W_k^a génère également un terme en $(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2$ (proportionnel à $dW_k^a/d\rho$). Pour isoler une contribution pure de W_k^b en la séparant des contributions mixtes, il suffit donc de sélectionner la dépendance en $\vec{p}_1^2 \vec{p}_2^2$ (qui, elle, provient exclusivement de $\vec{p}_3^2(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)$), ce que l'on note symboliquement :

$$W_k^b(\rho) = -\frac{1}{2\sqrt{2\rho}} \lim_{\vec{p}_i \rightarrow 0} \partial_{\vec{p}_1^2 \vec{p}_2^2} \frac{\delta^3 \Gamma_k}{\delta\psi(\vec{p}_1)\delta\psi(\vec{p}_2)\delta\psi(\vec{p}_3)}. \quad (\text{III.12})$$

Finalement, il convient de mettre en jeu $\Gamma_k^{(4)}$ pour définir W_k^c . Trois impulsions externes non triviales s'avèrent nécessaires pour séparer la contribution de W_k^c de celles liées à W_k^a et W_k^b et leurs dérivées, en particulier pour distinguer W_k^c de W_k^b . La seule combinaison en impulsion (dérivant de $(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)(\vec{p}_3 \cdot \vec{p}_4)$) propre à W_k^c une fois la conservation de l'impulsion exprimée, s'écrit $\vec{p}_1^2(\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3)$, d'où :

$$W_k^c(\rho) = -\frac{1}{4} \lim_{\vec{p}_i \rightarrow 0} \partial_{\vec{p}_1^2 \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3} \frac{\delta^4 \Gamma_k}{\delta\psi(\vec{p}_1) \dots \delta\psi(\vec{p}_4)}. \quad (\text{III.13})$$

³La conservation de l'impulsion est explicitement exprimée car, bien qu'induisant un mélange des structures en impulsions originellement indépendantes, elle simplifie et accélère notablement les procédures de calcul formel indispensables pour mener à bien ce calcul.

Pour établir les équations d'évolution des cinq fonctions, il s'agit maintenant de dériver leur définition par rapport à l'échelle t . Fort de l'interprétation diagrammatique établie au paragraphe II.3.1, on effectue les dérivations fonctionnelles de l'équation de flot de Γ_k (II.24) dictées par les équations de définitions (III.11), (III.12) et (III.13) pour déterminer les différents graphes. On calcule les $\Gamma_k^{(n)}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$ impliqués dans ces graphes à partir de l'*ansatz* (III.9). Le propagateur effectif complet $[\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1}$ (scalaire pour un champ à une composante) s'exprime à cet ordre en dérivées :

$$[M(\rho, \vec{q})]^{-1} = [Z_k(\rho) \vec{q}^2 + R_k(\vec{q}^2) + W_k^a(\rho) \vec{q}^4 + U'_k(\rho) + 2\rho U''_k(\rho)]^{-1}. \quad (\text{III.14})$$

Pour isoler les structures en impulsions pertinentes pour chaque équation, on développe les trois expressions obtenues en puissances des impulsions externes au quatrième ordre, en prêtant une attention particulière à la structure angulaire et en employant les relations :

$$\int d^d \vec{q} (\vec{p} \cdot \vec{q})^2 f(\vec{q}) = \frac{\vec{p}^2}{d} \int d^d \vec{q} \vec{q}^2 f(\vec{q}) \quad (\text{III.15})$$

$$\int d^d \vec{q} (\vec{p} \cdot \vec{q})^4 f(\vec{q}) = \frac{\vec{p}^4}{d(d+2)} \int d^d \vec{q} \vec{q}^4 f(\vec{q}), \quad (\text{III.16})$$

pour extraire des intégrales la dépendance en impulsions externes. On obtient alors les trois équations d'évolution souhaitées pour W_k^a , W_k^b et W_k^c en sélectionnant les combinaisons requises en impulsions. Ces trois équations de flot sont transcrites dans l'annexe C, essentiellement pour donner plus de consistance à la discussion qui suit dans la section III.4.

Il s'ensuit un travail assez fastidieux de recensement et classification des différentes intégrales en impulsion intervenant dans ces équations de flot, afin de parvenir à une systématisation, indispensable au traitement numérique. On peut ainsi se ramener, au prix d'intégrations par parties, à une base de six intégrales, que nous nommerons fonctions seuil par analogie au chapitre précédent, qui s'écrivent sous la forme synthétique adimensionnée :

$$F_n^d(\tilde{\rho}, \eta) = \int dy y^{\frac{d}{2}-1} \tilde{\partial}_t \left(\frac{f(y)}{(p(y) + w_k^a(\tilde{\rho})y^2 + u'_k(\tilde{\rho}) + 2\tilde{\rho} u''_k(\tilde{\rho}))^n} \right), \quad (\text{III.17})$$

où $p(y) = y(z_k(\tilde{\rho}) + r(y))$ et $f(y)$ prend successivement les valeurs $y(\partial_y p)^i$ avec $i = 0, \dots, 4$ puis $y(\partial_y^2 p)$, pour les fonctions seuil notées respectivement $F = L, N, M, S, T$ et U . Les définitions explicites de ces fonctions seuil sont données dans l'annexe B. Les intégrales S, T et U proviennent spécifiquement de l'inclusion des termes d'ordre ∂^4 . L'intégrale U implique une dérivée d'ordre supérieur du propagateur $\partial_y^2 p$, qui impose au régulateur d'être au moins de classe \mathcal{C}^3 (*i.e.* trois fois dérivable et continu). Cette contrainte écarte en particulier le régulateur θ étudié dans la section précédente, dont la dérivée troisième produit une contribution divergente. Nous nous restreignons donc dans la suite au seul régulateur exponentiel $r_{exp,\alpha}$.

III.3.2 Développement en champ

Nous disposons à présent des équations d'évolution des fonctions complètes. Nous considérons les fonctions adimensionnées :

$$\begin{cases} W_k^a(\rho) &= k^2 Z_k^{-1} w_k^a(\tilde{\rho}) \\ W_k^b(\rho) &= k^d Z_k^{-2} w_k^b(\tilde{\rho}) \\ W_k^c(\rho) &= k^d Z_k^{-2} w_k^c(\tilde{\rho}), \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

et procédons, comme précédemment, à leur développement en champ autour du minimum du potentiel, selon (III.7). Les équations de flot des constantes de couplage $w_{i,k}^s$ se déduisent de celles des fonctions complètes par dérivations successives par rapport au champ et évaluation au minimum. Cette tâche est considérablement simplifiée par la classification établie des fonctions seuil, car alors la dérivée de chacune est simplement liée par une relation de récurrence à d'autres fonctions seuil. Ces relations sont énumérées dans l'annexe B. Cependant, la longueur des équations sources (voir notamment $\partial_t w_k^c$ dans l'annexe C) limite irrémédiablement l'ordre des troncations en champ envisageables. L'enjeu réside donc dans l'obtention de suffisamment de termes du développement pour atteindre le régime convergé de chaque fonction. Nous fixons $\{p_u = 8, p_z = 6\}$, pour lesquels les exposants ν_{PSM} et η_{PSM} approchent à moins de 1% leur valeur asymptotique (voir le paragraphe III.2.2). Dans une première étape, nous examinons indépendamment le comportement des développements de chaque fonction w_k^s , les autres étant prises nulles. La fonction w_k^c apparaît jouer un rôle prépondérant dans le flot, ses effets dominant largement l'influence des fonctions w_k^a et w_k^b sur les variations des exposants, comme le dépeint la figure 9 (à comparer à la figure 11). De surcroît, w_k^c subit les plus grandes fluctuations avec la troncation qui ralentissent d'autant sa convergence. L'objectif est donc d'inclure le plus de termes possibles de son développement. Les développements de w_k^a et w_k^b se stabilisent rapidement, il suffit de considérer $p_{w^a} = p_{w^b} = 4$. Les limites numériques⁴ imposent alors $p_{w^c} = 5$ — l'équation $\partial_t w_{5,k}^c$ dépassant à elle seule le million de lignes! Ceci semble juste suffisant pour atteindre le régime asymptotique, bien qu'un ou deux termes supplémentaires eussent bien sûr été bienvenus pour apporter une assise plus solide à cette affirmation.

Remarquons pour achever cette discussion “technique” que le propagateur peut présenter un pôle pour une valeur finie de l'impulsion $y = q^2/k^2$ si $w_k^a(\tilde{\rho})$ prend des valeurs négatives (voir l'expression (III.14)). Dans le cadre du développement en champ, les propagateurs ne sont évalués qu'au minimum, il suffit donc de contrôler la seule valeur $w_k^a(\kappa)$. Il apparaît que cette valeur peut effectivement devenir négative au point fixe, mais en restant suffisamment petite devant 1 pour rejeter le pôle vers les grandes impulsions, qui se trouve ainsi fortement supprimé par la décroissance exponentielle de $\partial_t R_k$. Autrement dit, ce pôle n'a pas de conséquence numérique désastreuse dans cette approche.

⁴Celles-ci sont atteintes essentiellement en terme de mémoire pour le calcul formel des dérivées successives de l'équation de flot de w_k^c . A cet égard, les relations de récurrence de l'annexe B donnent une idée du facteur de dilatation des équations — induit par les seules fonctions seuil — inhérent à chaque nouvelle dérivation.

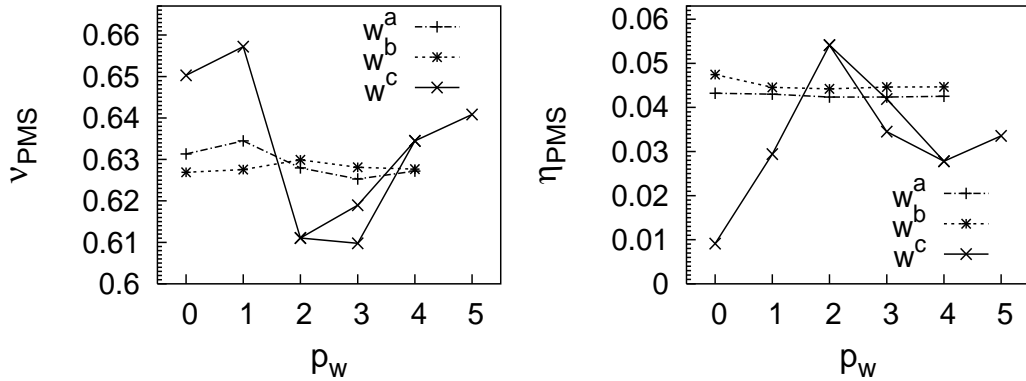


FIG. 9 – Évolution de ν_{PSM} et η_{PSM} avec l'ordre de la troncation en champ pour chacune des fonctions w_k^s développées *indépendamment*, les deux autres restant nulles, avec $\{p_u = 8, p_z = 6\}$. L'effet des fluctuations de w_k^c domine largement sur celui des variations de w_k^a et w_k^b , conditionnant entièrement l'évolution des exposants issus des trois fonctions combinées, représentée dans la zone III de la figure 11 (voir le texte pour l'explication du double point d'abscisse 3).

III.3.3 Optimisation

L'optimisation se déroule dans le même esprit que celui des analyses de la section III.2. Les développements complets de u_k et z_k — jusqu'à $p_u = 8$ et $p_z = 6$ — sont inclus et les trois fonctions w_k^s sont développées à présent simultanément ordre par ordre. Les variations des exposants avec le paramètre α sont calculées pour chaque troncation et sont représentées, pour les dernières troncations, sur la figure 10. En-

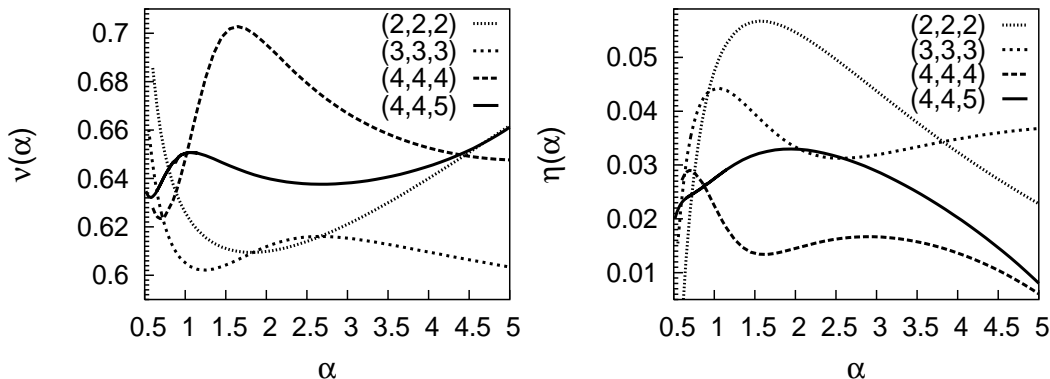


FIG. 10 – Variations des exposants ν et η avec α à l'ordre ∂^4 , pour les grandes troncations du développement *simultané* en champ des w_k^s , avec $\{p_u = 8, p_z = 6\}$. La discrimination des différentes solutions de PSM est discutée dans le texte.

delà de $p_{w^s} = 2$ — soit pour les trois premières troncations — les exposants $\nu(\alpha)$ et $\eta(\alpha)$ possèdent chacun une solution unique vérifiant la condition de stationnarité.

Par contre, pour $p_{w^s} > 2$, les variations des exposants avec α dessinent plusieurs extrema locaux qui offrent autant de solutions à la contrainte de sensibilité minimale. L'ambiguïté est simplement levée pour la troncation la plus élevée, correspondant à $(p_{w^a}, p_{w^b}, p_{w^c}) = (4, 4, 5)$. Tout d'abord, η est inambigu car ses variations ne présentent à cet ordre qu'une solution $\eta_{\text{PSM}} = 0.0330$ réalisée pour $\alpha_{\text{PSM}}^\eta \simeq 2$. Quant à ν , si l'on suppose qu'il a atteint à cet ordre sa valeur asymptotique, on peut invoquer la règle justifiée au paragraphe III.2.2, qui préconise de choisir, sous l'hypothèse que le développement dérivatif converge, le régulateur qui rend cette convergence la plus rapide. Ce critère sélectionne le premier minimum, localisé en $\alpha \simeq 0.6$, qui prend la valeur $\nu_{\text{PSM}} = 0.632$. Les deux solutions ν_{PSM} et η_{PSM} correspondent à des paramètres optimaux distincts, issus des deux applications indépendantes du PSM. L'on peut employer l'argument de cohérence des résultats (paragraphe III.2.2) pour formuler une erreur associée au choix de la solution ν_{PSM} . Les exposants ν évalués pour les deux paramètres α_{PSM}^η et α_{PSM}^ν diffèrent de 1.3%, ce qui suggère l'erreur associée à la valeur ν_{PSM} choisie.

Finalement, soulignons qu'à cet ordre en troncation, l'exposant ν apparaît sur-évalué pour toutes les valeurs de α et que, pour le paramètre α_{PSM}^ν sélectionné, la valeur optimale ν_{PSM} se place au minimum minimorum. Alors, la propriété du PSM d'incarner une optimisation de la précision est conservée (η_{PSM} minimisant également la distance à la valeur exacte). Pour les deux ordres précédents, une ambiguïté partielle subsiste. Deux choix semblent acceptables. L'un consiste à suivre par continuité, en termes de concavité de l'extremum et de localisation α , les solutions de PSM ordre par ordre. Alternativement, on peut envisager de minimiser, pour les deux ordres intermédiaires, les fluctuations ordre par ordre en champ, ce qui revient à lisser la convergence. Quoi qu'il en soit, ces choix se confondent pour la troncation $(4, 4, 4)$ et finalement, seul le point $(3, 3, 3)$ n'est pas résolu. Les deux choix sont par conséquent représentés sur les figures 9 et 11, cette dernière rassemblant l'évolution des exposants optimisés avec l'ordre en champ pour les trois ordres successifs en dérivées.

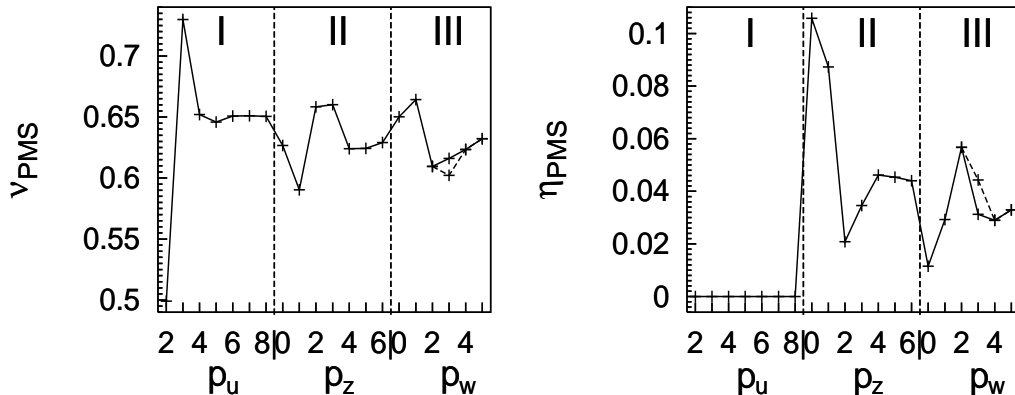


FIG. 11 – Évolution des exposants ν et η optimisés avec l'ordre des troncations en champ aux ordres successifs ∂^0 (zône I), ∂^2 (zône II) et ∂^4 (zône III). Les trois fonctions w_k^s , dans la zône III, sont développées *simultanément* en champ.

Il émerge une image assez cohérente des comportements des développements en champ de u_k , z_k et w_k^s . Les fluctuations s'atténuent typiquement après les 4 ou 5 premiers ordres en champ dans les trois zones de la figure 11. Cette analyse suggère qu'à l'ordre ∂^4 , la propriété de convergence rapide de ce développement est préservée. Elle montre ainsi que celui-ci constitue un outil précieux pour contourner les difficultés de traitement numérique lorsque que le nombre de fonctions ou d'invariants croît. Il permet de dégager les propriétés essentielles d'un système, caractérisées par des estimations quantitatives précises, et de révéler les difficultés principales, dépeignant ainsi un premier tableau d'ensemble qui restitue une image fidèle du problème.

Finalement, présentons la synthèse des trois ordres étudiés quant au développement dérivatif. Le tableau III.2 résume les valeurs des exposants optimisés à chaque ordre en dérivées. La distance relative entre les ordres ∂^2 et ∂^4 est plus faible que celle séparant

ordre	ν	η
∂^0	0.6506	0
∂^2	0.6281	0.0443
∂^4	0.632	0.033
7-boucles ^(c)	0.6304(13)	0.0335(25)

TAB. III.2 – Exposants optimisés selon le PSM dans ce chapitre, pour le modèle d'Ising à trois dimensions, aux trois premiers ordres en dérivées [33, 34]. (c) valeurs perturbatives incluant des corrections à 7-boucles [49].

les ordres ∂^0 et ∂^2 , le développement dérivatif semble donc bien converger. Pour le moins, ces résultats constituent la première vérification concrète qu'enrichir le contenu dérivatif de l'*ansatz* permet d'affiner la dépendance en impulsion de la fonction de vertex à deux points et d'améliorer ainsi la détermination de la dimension anormale. Ceci se traduit par une valeur de η qui rejoint la valeur perturbative incluant des contributions à 7-boucles, ce qui laisse présager que le développement à l'ordre ∂^4 correspond à un degré de précision comparable.

Ceci est d'autant plus remarquable que le développement dérivatif est effectué au voisinage d'impulsions nulles et que la structure en impulsions est pour l'essentiel négligée. Cette limite d'impulsion nulle semble contenir néanmoins suffisamment d'information pour décrire $\Gamma^{(2)}$ de façon pertinente. Elle deviendrait bien sûr tout à fait insuffisante pour capter des structures en impulsions plus complexes.

III.4 Intégration des équations de flot des fonctions complètes

Tout au long de ce chapitre, nous avons privilégié, dans l'étude des propriétés universelles du modèle d'Ising, le développement en champ des fonctions de renormalisation. Ce choix repose sur deux considérations tendant vers un objectif commun :

réduire au maximum la complexité numérique et les temps de calcul. La première de ces considérations est que l'on s'intéresse ici uniquement au point fixe, qui suffit pour déterminer les comportements critiques. Son étude ne nécessite donc pas d'intégrer tout le flot à partir d'une situation microscopique initiale car les détails de cette configuration microscopique n'affectent pas, par définition, les propriétés universelles. L'on peut donc se restreindre à la résolution du système homogène $\{\partial_t h_k^l(\tilde{\rho}) = 0\}$ (où h_k^l représente les différentes fonctions u_k , z_k et w_k^s indicées par l). La deuxième considération a déjà été évoquée à plusieurs reprises : le développement en champ permet en outre de s'affranchir du caractère différentiel de ce système pour se ramener à la résolution d'un système *algébrique* d'équations couplées non linéaires $\{\partial_t h_{k,i}^l = 0\}$.

Toutefois, le traitement des fonctions complètes devient, dans certaines situations, incontournable. Tout d'abord le développement en champ peut s'avérer ne pas converger. Ensuite, certains modèles imposent, par principe, de recourir à une description fonctionnelle, en particulier lorsque le champ porte une dimension canonique nulle, rendant toutes les puissances du champ également pertinentes. C'est le cas pour certaines dimensions d'espace (la dimension deux par exemple pour les modèles $O(n)$) et pour certains systèmes désordonnés [68, 3].

En outre et plus fondamentalement, l'on peut être intéressé par les comportements *non universels* d'un système et par là-même enclin à exploiter la propriété du groupe de renormalisation non perturbatif de conserver tout au long du flot, jusqu'à l'action effective du système dans la limite physique $k \rightarrow 0$, le souvenir de l'information microscopique. Dans ce cas, c'est précisément l'influence des détails microscopiques sur des quantités macroscopiques que l'on cherche à sonder, ce qui nécessite l'intégration complète du flot des échelles $k = \Lambda$ à $k = 0$. Ce sera le cas dans la deuxième partie de ce manuscrit, en particulier au chapitre VII.

Cette perspective constitue naturellement l'une des motivations de cette section, qui va être dédiée à la présentation de la résolution des équations de flot des fonctions complètes, de nouveau sur la base du modèle d'Ising en trois dimensions (donc à partir des équations sources dérivées précédemment). L'étude qui suit, outre valider — si besoin était — la convergence du développement en champ pour ce modèle, constitue surtout la première optimisation réalisée avec la dépendance complète en champ des fonctions de renormalisation. Les résultats qui en découlent, que nous présentons dans la suite, seront prochainement soumis à publication [69].

III.4.1 Intégration du flot et recherche de points fixes

Il s'agit d'intégrer en “temps” t du groupe de renormalisation le jeu d'équations de flot $\{\partial_t h_k^l(\tilde{\rho}) = \beta(h_k^l(\tilde{\rho}), h_k^{l'}(\tilde{\rho}), h_k^{l''}(\tilde{\rho}), h_k^m(\tilde{\rho}), h_k^{m'}(\tilde{\rho}) \dots)\}$. Pour cela, la variable $\tilde{\rho}$ est discrétisée sur une grille comportant N_g points répartis sur un intervalle $[0, \tilde{\rho}_f]$ contenant le minimum. La condition initiale à $t = 0$ (ou de manière équivalente $k = \Lambda$) reflète l'action nue, constituée d'un potentiel quartique de la forme $u_\Lambda(\tilde{\rho}) = \lambda/2 (\tilde{\rho} - \kappa_\Lambda)^2$ et d'une fonction $z_k(\tilde{\rho}) = 1$ constante. L'on choisit de fixer arbitrairement le paramètre λ (à la valeur 0.1), le paramètre κ_Λ représente alors la direction pertinente associée à la température. Nous allons considérer, en se référant aux notations du paragraphe II.2.2, les trois approximations successives dans le développement dérivatif, constituées par

l'APL (approximation du potentiel local $\equiv \partial^0$), l'OD (ordre dominant $\equiv \partial^0$ complété de Z_k) puis l'ordre ∂^2 incluant la dépendance en champ complète de $z_k(\tilde{\rho})$ (l'ordre ∂^4 est discuté au paragraphe III.4.3).

Présentons le déroulement de l'intégration du flot de u_k (cette description fait écho à la discussion analogue du paragraphe II.3.2). Pour des valeurs grandes du paramètre initial κ_Λ , le flot aboutit dans la phase spontanément brisée (basse température). Alors le minimum κ du potentiel adimensionné s'éloigne à l'infini lorsque $t \rightarrow -\infty$ (ou de manière équivalente $k \rightarrow 0$), conférant une valeur finie non nulle au champ dimensionné renormalisé (qui incarne à $t = -\infty$ le paramètre d'ordre, *i.e.* l'aimantation). Des petites valeurs de κ_Λ envoient le flot dans la phase symétrique (haute température) où le minimum se fond sur l'origine à une échelle finie $t_s > -\infty$. Le champ dimensionné renormalisé prend alors une valeur nulle. Enfin, il existe une valeur critique κ_{cr} qui entraîne le flot de renormalisation au point fixe, où les grandeurs adimensionnées cessent d'évoluer avec l'échelle t . Des évolutions typiques du minimum κ du potentiel et de η_k au cours du flot de renormalisation sont représentées à l'OD sur la figure 12 (bas), pour un ensemble de valeurs initiales κ_Λ encadrant la valeur critique. Plus la valeur de κ_Λ est proche de κ_{cr} , plus l'attraction du point fixe devient sensible, ce qui transparaît dans l'allongement du "plateau", c'est-à-dire du temps t de renormalisation passé par le flot au voisinage du point fixe, avant finalement de s'en échapper. Ce scénario rencontre une autre illustration sur la figure 12 (haut) qui représente l'évolution avec le temps t de la dérivée première du potentiel $u'_k(\tilde{\rho})$ pour une valeur initiale $\kappa_\Lambda \lesssim \kappa_{cr}$. La dérivée du potentiel initiale $u'_\Lambda(\tilde{\rho}) = \lambda(\tilde{\rho} - \kappa_\Lambda)$ apparaît sur la figure 12 (haut) presque horizontalement. Entre chaque courbe, le même temps s'est écoulé de sorte que la zone d'accumulation de ces courbes matérialise le potentiel de point fixe. Puis le flot s'échappe finalement et le minimum adimensionné fuit rapidement vers l'origine (le flot étant stoppé sur la figure 12 à une échelle $t > t_s$).

L'intégration à l'ordre ∂^2 se déroule de façon analogue. La dimension anormale η_k reste évaluée au minimum κ du potentiel, *i.e.* $Z_k \equiv Z_k(\kappa)$ ou de façon équivalente $z_k(\kappa) = 1$ (d'après la définition III.6). La figure 13 retrace les évolutions conjointes des fonctions $u'_k(\tilde{\rho})$ et $z_k(\tilde{\rho})$ pour des temps t du groupe de renormalisation régulièrement espacés, à partir d'une condition initiale $\kappa_\Lambda \lesssim \kappa_{cr}$ qui conduit *in fine* à la phase symétrique. Les variations de la fonction $z_k(\tilde{\rho})$ apparaissent ténues sur l'intervalle en champ considéré.

III.4.2 Optimisation des fonctions complètes

Pour déterminer les propriétés universelles du modèle, on recherche le point fixe en ajustant finement la valeur initiale κ_Λ jusqu'à atteindre, pour la valeur κ_{cr} , le régime critique. L'exposant critique η est alors donné par la valeur de "plateau" η^* de la dimension anormale courante η_k . On dispose de deux méthodes pour déterminer l'exposant ν . Comme exposé au paragraphe II.3.2, en intégrant le flot à partir de différents $\kappa_\Lambda \lesssim \kappa_{cr}$, la masse renormalisée carrée $m_R^2 = \lim_{k \rightarrow 0} k^2 u'_k(0)$ dans la phase symétrique se comporte au voisinage du régime critique comme $m_R^2 \sim |\kappa_\Lambda - \kappa_{cr}|^{2\nu}$. La pente de la courbe $\ln(m_R^2)$ fournit ainsi une première détermination de ν . Par analogie avec la

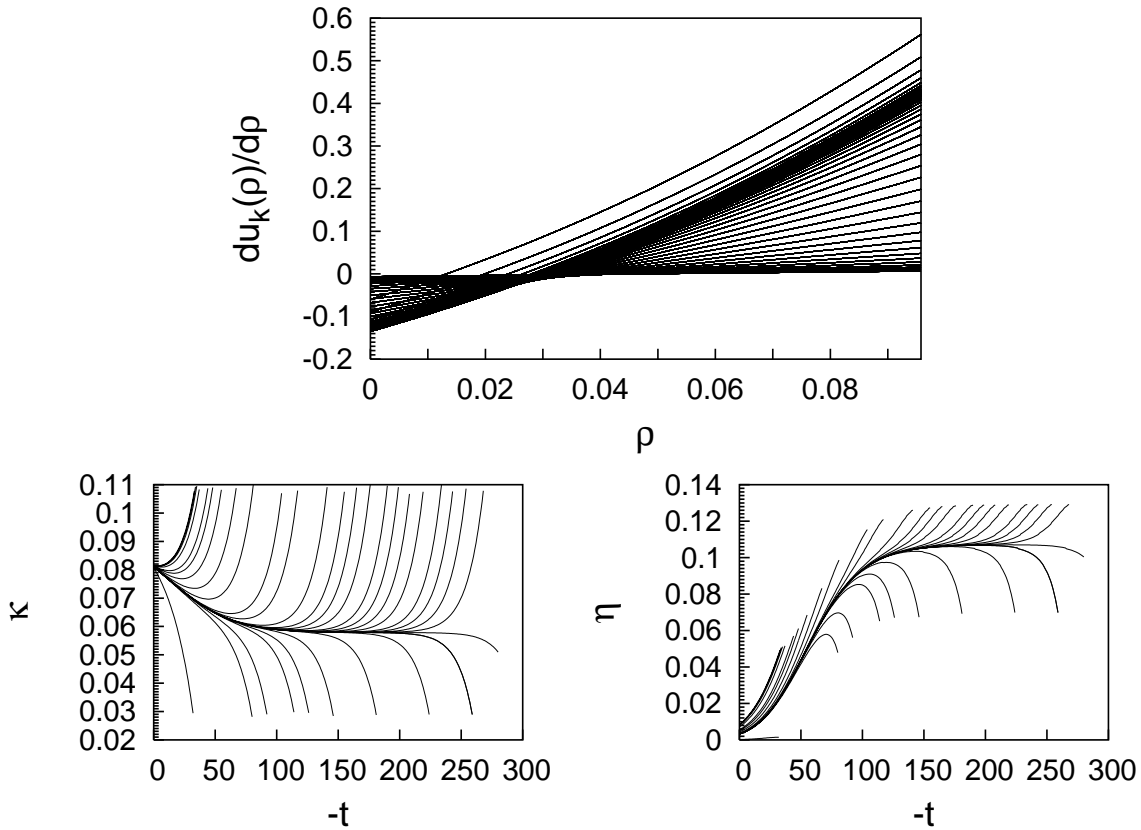


FIG. 12 – A l’OD- En-haut : allure de $u'_k(\tilde{\rho})$ à des temps t du groupe de renormalisation régulièrement espacés, pour une condition initiale $\kappa_\Lambda \lesssim \kappa_{cr}$. La dérivée initiale du potentiel $u'_\Lambda(\tilde{\rho})$ apparaît presque horizontalement. Puis lorsque t diminue, u'_k se déforme pour arborer sa forme de point fixe (matérialisée par l’accumulation oblique de courbes) conservée pendant un long temps de renormalisation. Le flot s’en échappe finalement pour rejoindre la phase symétrique, le minimum κ du potentiel (point de dérivée nulle sur la figure) fuyant vers l’origine. Le flot est ici stoppé avant de l’atteindre (à une échelle $t > t_s$). En-bas : évolutions de κ et η_k avec t pour un jeu de valeurs initiales κ_Λ autour de κ_{cr} , qui illustrent le déroulement typique d’une recherche de point fixe, κ tendant alternativement vers 0 (phase symétrique) ou vers l’infini (phase brisée). Cette figure fait écho au schéma la figure II-5.

méthode employée lors du développement en champ, l’on peut alternativement s’attacher à linéariser le flot au voisinage du point fixe, c’est-à-dire lorsque les grandeurs adimensionnées deviennent stationnaires, autrement dit loin sur le “plateau”. On établit alors une matrice de stabilité en linéarisant, au point fixe, les flots de toutes les valeurs des fonctions et de leurs dérivées en chaque point de la grille. La diagonalisation de cette matrice génère une valeur propre négative, qui règle la vitesse d’échappement du flot selon la direction pertinente et offre ainsi une deuxième détermination de ν . Ces deux méthodes, que nous désignerons respectivement “dynamique” et par “diagonali-

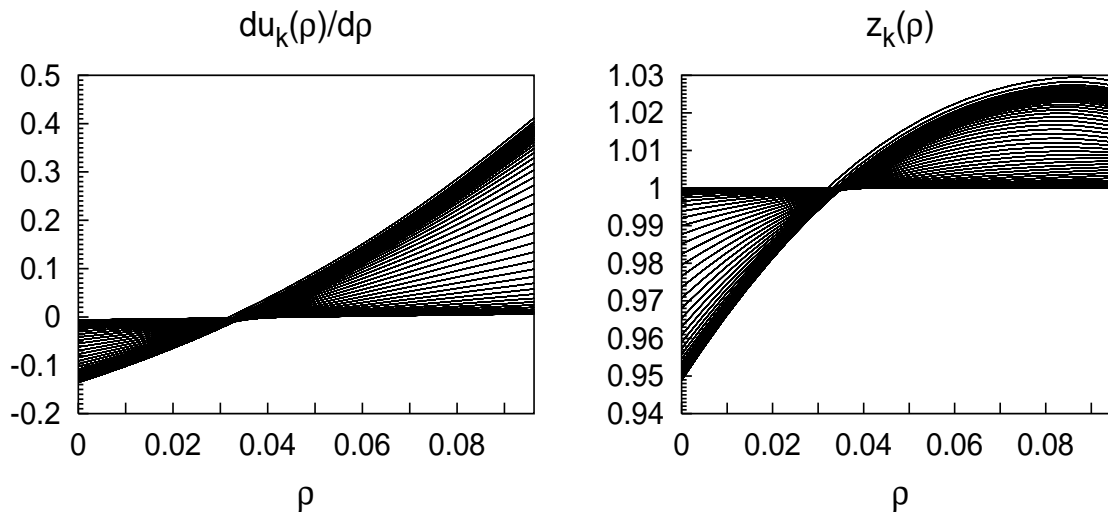


FIG. 13 – A l'ordre ∂^2 - Allure de $u'_k(\tilde{\rho})$ et $z_k(\tilde{\rho})$ à des temps t du groupe de renormalisation régulièrement espacés, pour une condition initiale $\kappa_\Lambda \lesssim \kappa^*$ (se reporter à la légende de la figure 12). L'accumulation de courbes repère les solutions de point fixe $u'_k{}^*(\tilde{\rho})$ et $z_k{}^*(\tilde{\rho})$.

sation”, procèdent de principes assez distincts et peuvent donc mener à des résultats sensiblement différents. Nous privilégions dans la suite la procédure de diagonalisation, moins coûteuse en temps d'intégration et *a priori* plus aisément comparable à la méthode utilisée lors du développement en champ. La procédure dynamique n'est mise en œuvre qu'à l'OD, où elle est confrontée à celle de diagonalisation.

Optimisation à l'APL

Nous étudions à l'APL l'influence du choix du régulateur, à travers les deux familles de régulateur, exponentiel et θ définis par l'équation (III.8), paramétrées par α , et recourons au PSM pour sélectionner le paramètre optimal. Les variations à l'APL de l'exposant ν avec α sont représentées sur la figure 14 pour les deux familles de régulateur, comparées aux courbes issues de la troncation maximale $p_u = 10$ du développement en champ (au même ordre ∂^0). Les deux approches concordent à quelques dixièmes de pourcent, ce qui prouve la convergence du développement en champ et valide la précision de l'intégration numérique. Réitérons néanmoins la conclusion inhérente à l'application du PSM : il existe à l'ordre ∂^0 une valeur unique de α satisfaisant la contrainte de stationnarité et celle-ci minimise l'écart à la valeur exacte, correspondant donc à la précision optimale.

Optimisation à l'OD

On considère à l'OD la contribution d'un coefficient de renormalisation Z_k indépendant des champs, ce qui correspond à la troncation $\{p_u = 10, p_z = 0\}$ (dans les no-

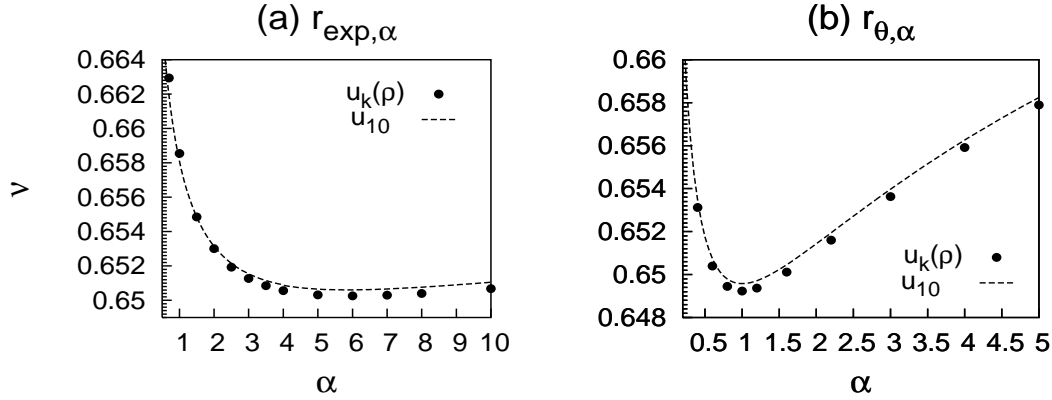


FIG. 14 – Variations de ν avec α à l'APL, en potentiel complet, par la méthode de diagonalisation (points noirs) et en troncation en champ (ligne en pointillés).

tations (III.7)). L'OD revêt, dans le contexte du traitement des fonctions complètes, une importance particulière car il enrichit de façon significative — et à relativement peu de frais — l'information contenue à l'APL en la complétant d'une dimension anormale, certes un peu grossière, mais non nulle. On recherche de nouveau le régime critique pour différentes valeurs du paramètre α . Les variations à l'OD des deux ex-

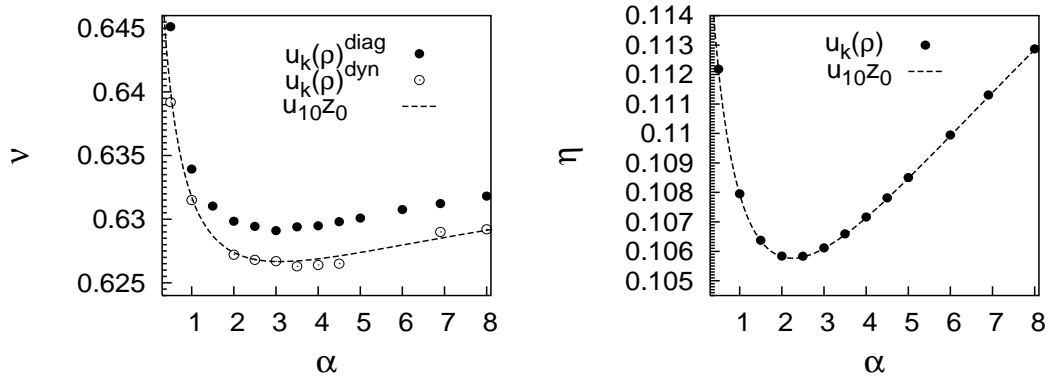


FIG. 15 – Variations de ν et η avec α à l'OD, en potentiel complet, par la méthode de diagonalisation (points noirs) et dynamiquement (points blancs), et en troncation en champ (ligne en pointillés).

posants η et ν avec α sont tracées sur la figure 15, pour le régulateur exponentiel $r_{exp, \alpha}$ ($r_{\theta, \alpha}$ conduisant à des résultats analogues), et confrontées à celles découlant de la troncation $u_{10}z_0$. Les courbes $\eta(\alpha)$ issues des deux approches (troncation en champ et intégration des fonctions complètes) se confondent quasiment.

A cet ordre, les deux déterminations possibles de ν sont comparées. Notons $\nu(\alpha)^{tronc}$, $\nu(\alpha)^{diag}$ et $\nu(\alpha)^{dyn}$ les courbes obtenues respectivement *via* le développement en champ, et *via* les deux procédures de diagonalisation et dynamique couplées à l'intégration du flot. Les courbes $\nu(\alpha)^{tronc}$ et $\nu(\alpha)^{diag}$ relèvent en essence du même principe et s'avèrent

en effet concorder. Leur léger écart, d'environ 1%, est sans doute à attribuer à la différence d'excursion en champ — vraisemblablement plus sensible en présence de la dimension anormale. En effet, en potentiel complet, la matrice de stabilité incorpore les contributions provenant non seulement du minimum mais de toutes les autres valeurs du champ sur l'intervalle considéré, et contient donc une information plus riche. On peut par conséquent s'attendre à ce que les détails de la discrétisation et surtout l'intervalle en champ balayé — soit le nombre de points de la grille — influent sur la détermination de ν^5 . Remarquons enfin que la courbe $\nu(\alpha)^{dyn}$ semble incidemment coïncider à cet ordre avec la courbe $\nu(\alpha)^{tronc}$. Cependant, il convient de tempérer cet accord car l'erreur entâchant chaque point déterminé dynamiquement est certainement au moins de l'ordre de 5%.

Finalement, l'OD circonscrit une nouvelle fois la même conclusion quant à l'équivalence entre le PSM et l'optimisation de la précision et quant à la convergence avérée du développement en champ.

Optimisation à l'ordre ∂^2

Nous considérons à présent l'ordre ∂^2 complet, que nous confrontons à la troncation en champ maximale à cet ordre $\{p_u = 10, p_z = 9\}$. Amorçons un petit intermède pour prendre la mesure des temps de calcul qui commencent à croître de façon non négligeable. Le nombre de “valeurs traitées”, regroupant les fonctions et leurs dérivées en chaque point de la grille, passe de $N_g \times N_{der}^u$, où N_{der}^u indique l'ordre le plus élevé en dérivées impliqué dans les fonctions de flot, à $N_g \times (N_{der}^u + N_{der}^z)$. Bien que le nombre de valeurs double simplement, la complexité numérique des algorithmes croît au minimum en N^2 . L'obtention d'un couple $(\nu(\alpha), \eta(\alpha))$ à cet ordre demande déjà environ 35 jours de CPU d'un Pentium IV à 3.2 GHz.

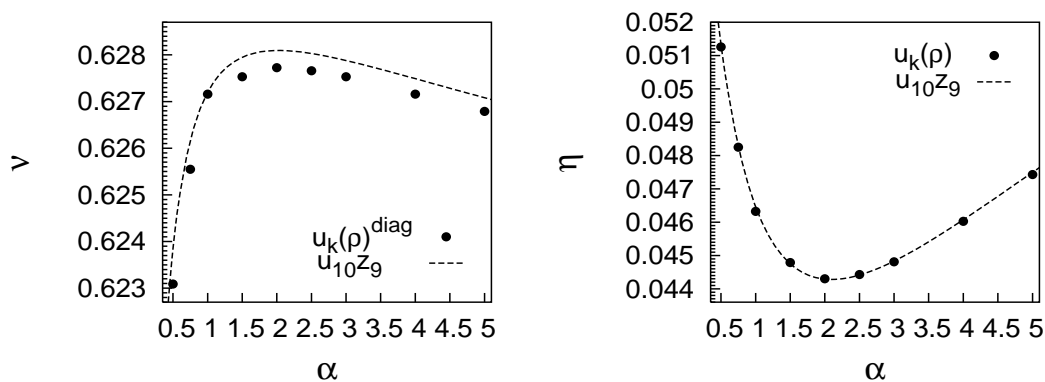


FIG. 16 – Variations de ν et η avec α à l'ordre ∂^2 , en potentiel complet, par la méthode de diagonalisation (points noirs) et en troncation en champ (ligne en pointillés).

La figure 16 dépeint les variations des deux exposants ν et η avec α , obtenus par

⁵La dépendance de ν dans le nombre de points de la grille et dans l'excursion en $\tilde{\rho}$ a été éprouvée. Il en ressort que les valeurs de ν sont assez stables tant que certaines contraintes sur $dx = \tilde{\rho}_f/N_g$ et dt sont satisfaites, rendant l'erreur contrôlable.

intégration des fonctions complètes et avec la troncation en champ maximale $u_{10}z_9$. Elle montre que les deux courbes $\eta(\alpha)$ sont de nouveau superposées. Ceci suggère que, au point fixe, ce qui se passe pour toutes les autres valeurs du champ $\tilde{\rho} \neq \kappa$ a peu d'incidence sur les valeurs des fonctions au minimum — telles qu'évaluées indépendamment en développant en champ. Autrement dit, seule une information locale à son point d'évaluation influe sur η . Au contraire, le calcul de ν mélange le comportement des fonctions pour toutes les valeurs du champ de l'intervalle considéré. Les deux courbes $\nu(\alpha)^{tronc}$ et $\nu(\alpha)^{diag}$ diffèrent d'environ 0.5%. Finalement la conclusion quant aux propriétés du PSM et de la convergence en champ est invariante, à ceci près qu'elle émane cette fois de la première optimisation couplée à l'intégration du flot des fonctions complètes.

III.4.3 Optimisation à l'ordre ∂^4 ?

Revenons quelques étapes en arrière, à la fin du paragraphe III.3.1. Nous disposons donc des équations d'évolution des trois fonctions de renormalisation de l'ordre ∂^4 : W_k^a , W_k^b et W_k^c . Se pose alors la question aigüe de leur traitement. Procédons à une petite estimation de la tâche numérique pour résoudre les équations de flot complètes. Le nombre d'équations de flot à l'ordre ∂^4 s'élève à $N_f = 5$ et elles comptent au total environ 400 intégrales (voir l'annexe C). Intégrer numériquement le flot à partir d'une condition initiale requiert de résoudre à chaque pas de temps un système non linéaire de $N = \sum_{i=1}^{N_f} N_{der}^i \times N_g$ équations différentielles couplées, dont la complexité croît en puissances de N . Ces équations, découlant de la discrétisation des seconds membres des fonctions de flot, impliquent de multiples intégrales à évaluer numériquement. Une intégration du flot compte entre 300 et 800 itérations en temps pour atteindre la description effective macroscopique du système et la détermination des conditions initiales critiques repose sur entre 20 et 30 intégrations complètes (voir la figure 12 qui illustre une recherche typique de point fixe). A cela s'ajoutent entre 6 et 8 intégrations au voisinage du point critique (et donc longues) pour déterminer ν . Tout ceci fournit un point pour une valeur donnée du paramètre, l'optimisation en nécessite, dans le cas le plus favorable d'un extremum rapidement localisé, une dizaine.

Ceci interdit donc tout espoir d'intégration numérique du flot avec les performances informatiques actuelles. Malgré l'implémentation de procédures efficaces d'archivage et de mémorisation pour réduire d'une part le nombre de calculs effectifs d'intégrales (de près de 30%) et d'autre part le nombre d'itérations lors d'une intégration (en initiant les flots au voisinage du point fixe), une estimation du temps nécessaire, basée sur les temps de calcul à l'ordre ∂^2 , l'élève à plus de 400 jours pour l'ordre ∂^4 .

Le problème de l'intégration du flot des fonctions de renormalisation complètes est encore aggravé par la présence du pôle dans le propagateur pour une valeur finie en impulsion si $W_k^a(\rho)$ prend des valeurs négatives. L'existence de ce pôle est d'autant plus difficile à contrôler que l'excursion en ρ est grande. Des solutions sont envisageables mais les temps de réponse numérique compliquent de façon réhhibitoire leurs mises au point. Ces considérations nous incitent finalement à procéder (comme nous l'avons fait dans la section III.3) à un développement en champ des fonctions u_k , z_k et w_k^s ,

$s = a, b, c$. (Notons que l'évolution du matériel informatique devrait rendre rapidement cette estimation obsolète et l'optimisation alors envisageable).

Conclusion

La méthode de l'action effective moyenne est indissociable du cortège d'approximations qui en accompagne tout usage. La fiabilité de cette approche est donc tributaire de la qualité et du contrôle de ces approximations. La maîtrise de l'influence du régulateur en forme la clé de voûte, car l'erreur relative à une approximation transparaît dans la dépendance des résultats en ce dernier. En effet, comme pressenti dans le travail fondateur du principe de sensibilité minimale [61], les résultats stationnaires par rapport à une variation du schéma d'approximation, ici du régulateur, sont ceux qui minimisent l'écart à la valeur exacte. Ceci apparaît tangiblement dans notre analyse, pour laquelle la valeur "exacte" est connue et l'application du principe de sensibilité minimale sélectionne effectivement la valeur la plus précise inhérente à un ordre donné. Cette propriété prend bien sûr toute sa force lorsque le vrai résultat n'est pas connu. Il permet alors d'en détecter la meilleure approximation et d'en formuler l'erreur associée, en considérant la dispersion des résultats sur une plage de paramètres autour de la valeur stationnaire.

Finalement, ce critère d'optimisation permet d'atteindre une grande précision pour l'exposant ν dès l'ordre ∂^2 du développement dérivatif, comme l'a montré notre étude. Nous avons de plus proposé le premier calcul à l'ordre ∂^4 , qui indique d'une part que le développement dérivatif semble converger rapidement et d'autre part que la dimension anormale η peut aussi bénéficier, à cet ordre, d'une détermination précise. La dernière partie de ce chapitre constitue également le premier exemple d'optimisation appliquée aux fonctions de renormalisation complètes. Ayant éprouvé la fiabilité des approximations et les performances de la méthode du groupe de renormalisation non perturbatif, nous allons désormais aborder la physique hors de l'équilibre et explorer les processus de réaction-diffusion.

Chapitre IV

Introduction de la deuxième partie

Nous allons aborder, dans cette seconde partie, la physique hors de l'équilibre et plus spécifiquement les processus de réaction-diffusion. Toute cette partie s'organise en vue de la présentation, au chapitre VII, des travaux que nous avons réalisés dans ce domaine et qui s'appuient sur la généralisation hors de l'équilibre des méthodes du groupe de renormalisation non perturbatif, exposées dans la première partie. Ces travaux forment la contribution la plus originale de ce travail de thèse et s'articulent autour de deux objectifs : le calcul analytique des exposants de la percolation dirigée et la détermination du diagramme de phase de certains modèles de marches aléatoires avec branchement et annihilation. Commençons par introduire le contexte général dans lequel ils s'inscrivent.

IV.1 Hors de l'équilibre

En physique statistique, un système physique se compose d'un très grand nombre de degrés de liberté qui se comportent, sous l'effet de l'agitation thermique ou d'un autre mécanisme aléatoire, comme autant de variables stochastiques. Lorsque le système est à l'équilibre thermique, la distribution de probabilités des configurations microscopiques α est donnée par l'ensemble de Gibbs et les propriétés thermodynamiques du système, *i.e.* ses fonctions de corrélation, s'obtiennent en moyennant sur l'ensemble des configurations accessibles, affectées chacune de leur poids de Boltzmann $\exp(-\mathcal{H}[\alpha]/k_B T)$. En pratique, pour la plupart des modèles, la fonction de partition et donc les fonctions de corrélation ne sont pas calculables analytiquement. La conception de techniques d'approximation, comme les développements en séries ou le groupe de renormalisation, a toutefois permis de les analyser et d'en déduire les caractéristiques essentielles. Ces techniques ont ainsi dévoilé les mécanismes moteurs des phénomènes critiques, en caractérisant le développement de corrélations à longue distance à partir des interactions microscopiques purement locales. Le groupe de renormalisation a procuré la première explication de l'existence de l'universalité, fondant un des succès de la physique statistique. Une autre percée incombe à l'application des théories conformes aux modèles de physique statistique [10, 70] dont a découlé une classification complète des comportements critiques en deux dimensions d'espace.

Cependant, beaucoup de systèmes physiques ne se trouvent pas dans un état d'équilibre thermique. Leur écart à l'équilibre peut revêtir différentes formes. Soit le système a subi à un instant une perturbation extérieure qui l'a conduit loin de l'équilibre et a déclenché un processus dynamique de relaxation vers un état stationnaire qui ne correspond pas (nécessairement) à un état d'équilibre. Soit le système est maintenu en permanence loin de l'équilibre par l'action d'une force extérieure. Celle-ci peut se matérialiser, par exemple, par un flux de chaleur lorsque le système est au contact de bains thermiques de températures différentes ou par un flux de particules si le système est couplé à des réservoirs de potentiels chimiques distincts. De manière générale, l'évolution temporelle des degrés de liberté microscopiques relève d'un processus stochastique supposé faiblement corrélé dans le temps. L'hypothèse souvent adoptée est qu'alors la dynamique est bien représentée par un processus markovien, défini par un ensemble de probabilités (conditionnelles) de transition $\mathcal{P}(\alpha_k, t | \alpha_j, t')$ entre états microscopiques α_i dépendant en général du temps t . L'évolution de ces probabilités de transition avec le temps t est régie par une équation différentielle dérivant des règles dynamiques microscopiques [71]. Cette équation se transpose directement à l'évolution de la distribution de probabilités $\mathcal{P}(\alpha_i, t)$ du système, sous la forme de l'équation maîtresse ou de l'équation de Fokker-Planck, selon la nature des processus sous-jacents.

Pour les systèmes hors de l'équilibre, les relations de bilan détaillé — qui imposent l'égalité de la probabilité d'une transition donnée à celle de la transition “renversée dans le temps” dans l'état stationnaire — ne sont souvent pas vérifiées. Par conséquent, l'évolution dynamique viole le théorème de fluctuation-dissipation. Le système n'est alors pas contraint de rejoindre son état d'équilibre canonique (de probabilités de configurations $\propto \exp(-\mathcal{H}[\alpha]/k_B T)$) et la distribution de probabilités de l'état stationnaire atteint n'est, en général, pas connue. La description de ces systèmes requiert génériquement la résolution de l'équation maîtresse ou de Fokker-Planck, souvent hors de portée. L'absence d'outil théorique systématique rend donc la compréhension des phénomènes critiques hors de l'équilibre encore balbutiante.

En contre-partie, en s'affranchissant de la contrainte de bilan détaillé, l'on s'attend à des comportements beaucoup plus riches qu'à l'équilibre thermique. Par exemple, l'apparition de lois de puissance semble beaucoup plus fréquente hors de l'équilibre, comme si la dynamique entraînait naturellement les systèmes vers la criticalité dans certaines situations. Le concept d'universalité acquiert donc hors de l'équilibre une importance primordiale pour répertorier et caractériser les comportements critiques observés. Plusieurs scénarios, dont un des précurseurs réside dans la “criticalité auto-organisée” [72], ont tenté d'élucider les mécanismes sous-jacents, avec un succès très modéré.

Nous achevons là l'introduction générale sur la physique hors de l'équilibre. L'étendue de son champ nous contraint à en passer sous silence des pans entiers, comme par exemple les systèmes diffusifs forcés [73], les phénomènes de croissance [74, 75] ou encore le vieillissement. Nous allons, dans toute cette seconde partie, nous concentrer sur la classe des systèmes formée par les processus de réaction-diffusion, que nous introduisons maintenant.

IV.2 Les processus de réaction-diffusion

Compte tenu du manque de méthodes théoriques systématiques, les processus de réaction-diffusion, par leur simplicité et leur représentativité, offrent un terrain d'exploration privilégié. Introduits initialement pour modéliser des réactions chimiques, ils se sont étendus à des phénomènes généraux de propagation sous diverses contraintes, comme la progression d'une maladie au sein d'une population [76], l'expansion d'une colonie de bactéries sur un substrat ou l'évolution de feux de forêts [77, 78], et au-delà des systèmes "physiques" dans un sens large, à des modèles de trafic routier [79] ou d'économie [80]. Les contraintes, imposées par l'interaction avec le milieu ou entre les individus, opposent des processus de type "naissance" qui favorisent la prolifération (d'individus, de feux, de maladies . . .) à des processus de type "mort" qui tendent à la décimation. L'état stationnaire résulte de la compétition entre ces deux facteurs.

Les processus de réaction-diffusion modélisent la dynamique d'un ensemble d'une ou plusieurs espèces de particules — A, B, \dots — qui diffusent librement par mouvement brownien (ou balistique) et subissent aléatoirement certaines réactions, spontanées (à un corps — par exemple $A \rightarrow B+C$) ou mutuelles (impliquant la rencontre de plusieurs particules — par exemple $A+B \rightarrow C$). Ces systèmes simples sont sièges de phénomènes complexes, comme des transitions de phase hors de l'équilibre entre différents états stationnaires. Une classe de transitions se révèle particulièrement omniprésente : les transitions "absorbantes", qui caractérisent le passage critique d'un état "actif" vers un état "inactif" qui piège à jamais le système. Un état "actif" désigne un état où il persiste une dynamique non triviale, entretenue en permanence par des réactions entre particules et qui fluctue donc sans cesse. Dans un état "inactif", la dynamique s'avère au contraire gelée, éliminant toute fluctuation (un tel état règne par exemple lorsque toutes les particules du système ont disparu — et si le vide ne crée pas spontanément de particules). Les comportements critiques de ce type de transitions appartiennent, dans leur vaste majorité, à la classe d'universalité de la percolation dirigée, sur laquelle nous allons nous concentrer.

Avant de préciser la structure de cette partie, recensons quelques moyens disponibles pour décrire l'évolution temporelle d'un système soumis à des processus de réaction-diffusion. Tout d'abord, ceux-ci se prêtent naturellement à des simulations Monte Carlo. Celles-ci ont en effet largement contribué à défricher ce domaine et à mettre en lumière les phénomènes remarquables engendrés par la dynamique, amorçant ainsi des progrès importants dans la compréhension des systèmes hors de l'équilibre. Cette dernière a également été considérablement enrichie par un certain nombre de résultats exacts en une dimension d'espace [81]. Une partie de ces résultats découle d'équivalences reliant certains processus de réaction-diffusion à des modèles intégrables de chaînes de spins quantiques en (1+1) dimensions, à l'équilibre thermique. Nous ne discuterons pas de ces approches et éluderons également d'autres méthodes analytiques (comme le formalisme d'états matriciels produits développé dans le contexte des processus d'exclusion asymétrique ASEP à une dimension [82]). Nous renvoyons à la revue [83] pour des références bibliographiques.

D'autre part, une représentation simple des processus de réaction-diffusion peut

être obtenue par une approche de type champ moyen, qui prend la forme de “loi d’action de masse” pour les systèmes chimiques. Les propriétés du système sont alors déduites de celles d’un degré de liberté isolé, considéré comme plongé dans le bain moyen formé par ses semblables. Cette approche est fondée sur l’hypothèse que le système reste suffisamment homogène au cours de l’évolution, ce qui est en général vérifié à grande dimension d’espace. Cependant, les processus qui nous intéressent ici sont dits “limités par la diffusion”, ce qui, en-deçà d’une certaine dimension — la dimension critique supérieure —, tend à invalider l’hypothèse de champ moyen. En effet, la diffusion apparaît comme le vecteur du mélange, favorisant la mise en présence des réactants et également réharmonisant leur distribution spatiale, modifiée *localement* par les réactions. Si le processus est limité par la diffusion alors celle-ci ne s’avère plus assez efficace pour compenser l’effet de ségrégation induit par les réactions qui créent des structures spatiales non triviales — non homogènes. Autrement dit, le rôle des fluctuations de densité se révèle dans ce cas essentiel.

On peut améliorer la description de champ moyen en incluant phénoménologiquement l’effet des fluctuations à travers un bruit stochastique, ce qui conduit aux équations de Langevin. Alternativement, on peut dériver, à partir des règles dynamiques microscopiques, l’équation maîtresse associée aux processus considérés. Chacune de ces deux approches peut alors être formulée sous forme d’une théorie des champs, qui permet d’élucider l’incidence des fluctuations et va constituer le socle de notre étude.

Détaillons pour finir l’organisation de cette seconde partie. Tout d’abord, le chapitre V se scinde en deux parties assez indépendantes. La première est dédiée à l’exploration de la classe d’universalité de la percolation dirigée à travers une présentation de modèles qui s’y rattachent et de ses réalisations expérimentales. Nous donnons, dans la seconde, une introduction partielle des marches aléatoires avec branchement et annihilation axée sur un aspect principal : la construction du diagramme de phase des marches “impaires”. Ensuite, le chapitre VI est voué à la dérivation d’une théorie des champs pour les processus de réaction-diffusion. Nous présentons les deux formalismes principaux qui mènent à la formulation d’une telle théorie. Le premier formalisme, élaboré par Janssen [84] et de Dominicis [85], part des équations de Langevin pour les transformer, *via* l’introduction d’un champ auxiliaire — le champ de Martin-Siggia-Rose [86] — en une intégrale fonctionnelle. Le second, dû à Doi [87] et Peliti [88], transcrit l’équation maîtresse en une équation de Schrödinger décrivant l’évolution temporelle du “vecteur d’état” du système, dont la solution peut s’exprimer formellement en terme d’une intégrale de chemin.

Finalement, nous appuyant sur cette théorie des champs, nous exposons, au chapitre VII, les analyses que nous avons menées [89, 90]. Nous proposons pour commencer une généralisation naturelle du formalisme de l’action effective moyenne à des systèmes hors de l’équilibre puis dérivons des équations de flot très génériques pour les processus de réaction-diffusion. Ces équations nous permettent, dans un premier temps, d’obtenir une détermination analytique des exposants critiques de la percolation dirigée en toute dimension physique. Elles sous-tendent, dans un second temps, notre calcul du diagramme de phase des marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires, que nous complétons de simulations numériques et d’une analyse à petite diffusion de

l'équation maîtresse.

Chapitre V

Processus de réaction-diffusion et percolation dirigée

La motivation de ce chapitre est de mettre en perspective les enjeux des analyses [89, 90] réalisées lors de ce travail de thèse, et s’articule donc naturellement autour de deux pôles. La première section est ainsi consacrée à une présentation assez détaillée et “illustrée” de la classe d’universalité de la percolation dirigée, ce qui lui confère un caractère plutôt descriptif. Après la caractérisation de cette classe d’universalité, nous avons choisi d’axer l’exposé sur une confrontation entre les réalisations théoriques et expérimentales de cette classe. La deuxième section aborde un sujet *a priori* déconnecté du précédent, les marches aléatoires avec branchement et annihilation, mais dont le lien avec la percolation dirigée s’éclaircira dans la suite. Cette section est centrée sur la discussion du diagramme de phase des marches “impaires” découlant de différentes approches. Le choix des points soulevés ici rencontrera sa justification au chapitre VII.

V.1 La percolation dirigée

Cette section propose une “mini-revue” des principaux traits de la classe d’universalité de la percolation dirigée (nous conseillons par exemple la lecture de [83] pour une présentation approfondie). Nous commençons par définir, sur l’exemple du modèle de la percolation dirigée, la transition “absorbante” représentant cette classe d’universalité puis nous en dérivons la caractérisation — les exposants critiques — à l’approximation de champ moyen. Ces premiers paragraphes contiennent toute l’information nécessaire pour la suite. Le reste de la section est ensuite consacré à illustrer cette transition en la déclinant sous les différentes formes qu’elle peut revêtir. Le fil conducteur en est l’exploration d’une célèbre conjecture due à Janssen [91] et Grassberger [92], qui attribue à cette classe d’universalité une grande généralité. Nous parcourons donc un certain nombre de modèles et d’expériences, en identifiant les composantes (les phases, le paramètre d’ordre. . .) de la transition — si elle existe. Ce parcours s’organise autour de la mise en regard des modèles et des expériences correspondantes.

Décrivons, pour commencer, la classe d’universalité de la percolation dirigée. Le

nom de cette classe réfère à des modèles — très épurés — de connectivité en milieu aléatoire, appliqués à la description de l’infiltration d’un fluide (de l’eau) dans un milieu poreux (une roche). Le premier de ces modèles est né des travaux de Broadbent et Hammersley [93]. Nous allons puiser dans cette interprétation “hydrostatique” pour introduire les comportements critiques de la percolation dirigée.

V.1.1 Transition de phase vers un état absorbant

Nous considérons un modèle — très simplifié — de percolation, conçu initialement pour prédire, lors d’un forage, les chances de présence de pétrole et le volume moyen accessible depuis un puits quelconque [94]. Dans ce modèle, le milieu poreux est représenté par un réseau — hypercubique — dont les noeuds forment les micro-cavités et les liens les micro-canaux les reliant. La perméabilité du milieu est codée dans l’état — libre ou obstrué — des canaux que le fluide peut donc ou non emprunter. L’état de chaque lien est déterminé de manière aléatoire et non corrélée, selon une probabilité p qui fixe la proportion de liens ouverts. Ceci définit le modèle original, isotrope, de percolation. Le modèle de percolation dirigée introduit, lui, une direction spatiale privilégiée en imposant un sens de parcours des liens, qui modélise l’action d’un champ de force extérieure comme la gravité. Dans ces deux modèles, l’influence d’autres phénomènes comme, par exemple, les effets de capillarité ou de viscosité, sont complètement négligés.

Les deux modèles de percolation, isotrope et dirigée, présentent une transition de phase en toute dimension $d > 1$. En effet, si $p = 1$, tous les liens sont passants et le fluide envahit tout le milieu poreux, plongeant le système dans la phase “mouillée” ou active. Lorsque $p = 0$, le fluide reste confiné dans ses zones de présence initiale, et le système demeure dans la phase “sèche” ou inactive. Lorsque p croît, à partir de $p = 0$, le fluide s’infiltré de plus en plus profondément, imprégnant des volumes croissants du système. L’on observe alors l’apparition d’une valeur critique p_c pour laquelle le fluide pénètre le milieu sur des profondeurs arbitrairement grandes, dessinant des amas percolants qui strient le milieu poreux de part en part, ce qui correspond à la transition entre les phases sèche et mouillée. L’on peut caractériser l’état du système par la probabilité qu’un site quelconque appartienne à un amas percolant p_{perc} . Ce paramètre d’ordre s’annule dans la phase sèche et acquiert une valeur finie $p_{perc} > 0$ au-delà de la transition, dans la phase mouillée. Dans tous les cas étudiés [94], l’on constate que cette variation est *continue* et que la transition s’avère donc du second ordre.

Le modèle de percolation isotrope devient soluble exactement en dimension $d = 1$ ainsi que sur un réseau de Bethe — donnant la limite de dimension infinie [94]. A une dimension d’espace, l’émergence d’une phase active requiert l’ouverture de tous les liens. Le système reste donc toujours dans la phase sèche sauf en un point extrême à $p = 1$. Dans la limite de dimension infinie (sur un réseau de Bethe) il existe, si $p > 0$, au moins un lien libre parmi l’infinité de liens connectés à un site, de sorte que le fluide se fraye toujours un chemin sur des distances arbitrairement grandes. La phase sèche se comprime en un point de probabilité nulle $p = 0$. En toute dimension finie $d > 1$, le système subit une transition de phase qui se révèle du second ordre pour une valeur critique non triviale $0 < p_c < 1$ [94].

Interprétation dynamique

Le modèle géométrique statique de la percolation dirigée peut s'interpréter comme un modèle dynamique, en assignant à la direction spatiale privilégiée un caractère temporel. Les sites occupés par le fluide deviennent des particules. Une "tranche" (à t constant) de l'espace orthogonal à la direction temporelle représente alors la répartition instantanée des particules sur le réseau. La succession des tranches reflète l'évolution de l'occupation du réseau. Les règles de passage entre deux tranches, conditionnées par l'état des liens dans le modèle statique, s'interprètent comme un ensemble de réactions chimiques entre particules. Le passage d'un modèle statique à d dimensions à un modèle dynamique à $(d - 1)$ dimensions d'espace plus une de temps est illustré sur la figure 1 pour $d = 1$. Si dans une tranche t , un site occupé voit ses deux liens adjacents ouverts

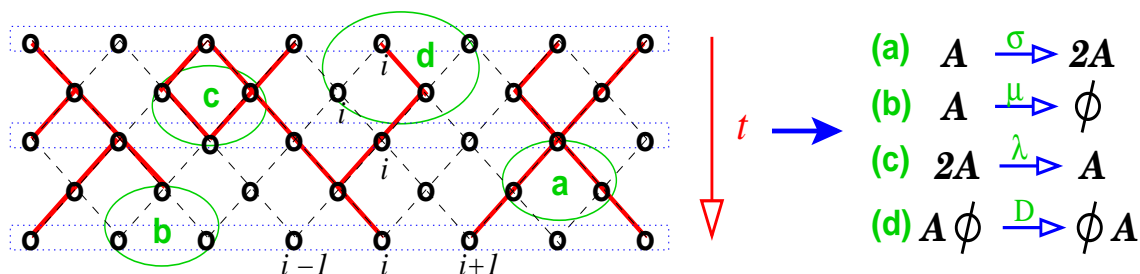


FIG. 1 – Interprétation du modèle géométrique statique de la percolation dirigée comme un processus dynamique. Les traits gras repèrent les canaux — ouverts — empruntés par le fluide entre les sites immergés. Les différentes configurations possibles, selon l'état des liens, de passage du fluide entre les niveaux horizontaux sont cerclées en trait fin. Ces transitions s'interprètent alors comme des réactions entre particules, répertoriées à droite du schéma.

(a), le fluide immerge les sites voisins de la tranche $t + 1$, ce qui se transcrit par une réaction de production de particules $A \rightarrow A + A$. L'obstruction des deux liens adjacents (b) induit au contraire la destruction spontanée d'une particule $A \rightarrow \emptyset$. Si le fluide de deux sites accolés de la tranche t conflue au même site de la tranche $t + 1$ (c), la réaction est qualifiée de *coagulation* $A + A \rightarrow A$. Enfin, l'état mixte (d) équivaut à une simple diffusion, avec conservation du nombre de particules $A + \emptyset \rightarrow \emptyset + A$.

Pour résumer, le modèle statique de la percolation dirigée se transpose en un processus dynamique de réaction-diffusion, muni des règles :



où les taux de transition D , σ , λ et μ sont originellement reliés à la probabilité p d'ouverture des liens. Nous adoptons désormais cette interprétation dynamique en considérant les différents taux comme indépendants. Remarquons que la réaction (V.4) implique la

destruction spontanée d'une particule, non compensée par une création spontanée. De même, les réactions (V.3) et (V.2) ne s'équilibrent généralement pas ($\lambda \neq \sigma$), de sorte que l'évolution dynamique est irréversible dans le temps.

Champ moyen

Pour dégager les propriétés essentielles du système dont la dynamique est gouvernée par les processus (V.1) à (V.4), on s'intéresse, pour commencer, à l'évolution de la densité moyenne $n(t)$, en négligeant toute dépendance spatiale (et donc la diffusion). On peut associer aux processus réactifs une loi d'action de masse, en pondérant les taux de réaction par le produit des concentrations des réactants, soit :

$$\partial_t n(t) = (\sigma - \mu) n(t) - 2 \lambda n(t)^2. \quad (\text{V.5})$$

La coagulation implique la coïncidence de deux particules au même site et se déroule donc proportionnellement à n^2 . Cette approximation revient à remplacer la probabilité jointe moyenne de rencontrer deux particules au même site $\langle n^2 \rangle$ par le carré de la probabilité moyenne de présence de chacune sur le site $\langle n \rangle^2$, c'est-à-dire à négliger les corrélations de densité. L'équation (V.5) possède deux solutions dont la stabilité dépend du signe de $\Delta = (\sigma - \mu)$. Si $\Delta < 0$, la densité ne cesse de décroître jusqu'à rejoindre la seule solution stationnaire stable $n_v = 0$. Si $\Delta > 0$, l'état vide devient instable et la densité sature à la valeur stationnaire $n_s = \Delta/(2\lambda)$ finie. La solution explicite donnant l'évolution temporelle de la densité à partir d'une densité initiale n_0 s'écrit :

$$n(t) = \frac{n_0 n_f}{n_0 + (n_f - n_0)e^{-\Delta t}}, \quad (\text{V.6})$$

qui tend lorsque $t \rightarrow \infty$ vers $n_f = n_v$ ou vers $n_f = n_s$ (selon le signe de Δ) comme $e^{-t/\tau}$, le temps $\tau = \Delta^{-1}$ représentant le temps de relaxation. Ces deux états asymptotiques sont donc rejoints exponentiellement vite. Enfin, si $\Delta = 0$ (soit $\sigma = \mu$), la densité décroît algébriquement vers l'état asymptotique vide,

$$n(t) = \frac{n_0}{1 + 2 \lambda n_0 t}. \quad (\text{V.7})$$

Ce comportement critique algébrique signe la transition qui relie continûment les deux états stationnaires n_v et n_s . La figure 2 représente l'évolution temporelle typique, dans ces trois régimes, d'un système unidimensionnel à partir d'une configuration initiale uniforme du réseau (haut) et d'une particule germe (bas). A gauche, toutes les particules périssent exponentiellement vite, laissant un système vide qui le demeure à jamais car celui-ci est dénué de mécanisme de création spontanée de particules (fluctuation de densité) susceptible de ré-ensemencer le réseau. Cette phase est donc absorbante. A droite, le réseau atteint exponentiellement vite la densité moyenne de saturation et il reste siège d'une dynamique non triviale qui entretient des fluctuations permanentes de densité. Cette phase est donc active. Au milieu, la densité décroît très lentement, des particules survivent arbitrairement longtemps, ce qui reflète la disparition d'échelle finie dans le système. Plus précisément, à l'approche de la transition, la densité passe d'un comportement exponentiel à un comportement algébrique, c'est-à-dire que le temps de

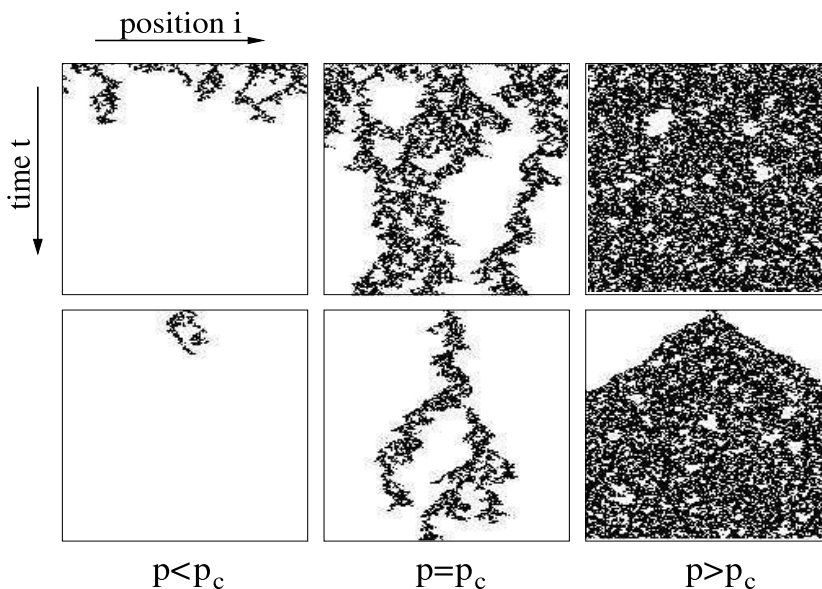


FIG. 2 – Evolution temporelle typique d’un système unidimensionnel selon le signe de $\Delta \equiv p - p_c$, à partir d’un réseau uniformément peuplé (en haut) ou d’une particule germe (en bas), d’après [83]. Le système se trouve, de gauche à droite, respectivement dans la phase absorbante, à la transition, et dans la phase active.

relaxation typique τ commence à diverger. En effet, d’après (V.7), $\partial_t n(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et le système se met donc à tendre infiniment lentement vers son état stationnaire à l’approche d’un régime critique. Ceci constitue le phénomène de ralentissement critique.

L’espace et le temps jouent des rôles généralement différents dans les phénomènes hors de l’équilibre de sorte que le système comporte deux longueurs de corrélation distinctes, une longueur spatiale ξ_{\perp} et une longueur temporelle ξ_{\parallel} . Dans la phase absorbante et à la transition, ces longueurs — spatiale et temporelle — reflètent les tailles typiques — radiale et longitudinale — des ramifications issues d’une particule germe. Lorsque les longueurs de corrélation divergent à la transition, ces ramifications tissent des faisceaux de filaments qui s’étirent dans le temps, réminiscent des amas percolants de l’interprétation géométrique. Elles s’interprètent plutôt comme les tailles typiques des îlots vides dans la phase active.

Caractérisation de la transition

La classe d’universalité de la percolation dirigée décrit donc les propriétés d’une transition continue entre un état stationnaire actif et donc fluctuant, et un état inactif sans fluctuation et donc absorbant. A la transition, les grandeurs physiques se comportent en lois de puissance, caractérisées par des exposants critiques, comme lors des phénomènes critiques à l’équilibre. La “distance” à la transition est contrôlée par la valeur de $\Delta \equiv p - p_c$. Ainsi, le paramètre d’ordre, ici la densité moyenne de l’état

stationnaire n_s , s'annule à l'approche de la transition comme :

$$n_s \sim (p - p_c)^\beta. \quad (\text{V.8})$$

Les longueurs de corrélation temporelle et spatiale divergent au voisinage de la transition selon deux exposants indépendants :

$$\xi_\perp \sim |p - p_c|^{-\nu_\perp} \quad (\text{V.9})$$

$$\xi_\parallel \sim |p - p_c|^{-\nu_\parallel}. \quad (\text{V.10})$$

L'exposant critique dynamique $z = \nu_\parallel/\nu_\perp$ caractérise alors la loi d'échelle "anormale" entre l'espace et le temps : $\xi_\parallel \sim (\xi_\perp)^z$ ou plus simplement $t \sim x^z$. Trois exposants critiques indépendants, par exemple β, ν_\perp et z , suffisent à définir la classe d'universalité de la percolation dirigée [95]. Mentionnons que d'autres lois de puissance peuvent également être considérées [96], par exemple en présence d'un champ externe ou pour décrire des propriétés dépendantes du temps — comme par exemple la probabilité de survie d'une particule à un temps donné — qui ne seront pas envisagées ici.

Déterminons à présent la valeur des trois exposants critiques β, ν_\perp et z à l'approximation de champ moyen. La forme des solutions de l'équation (V.5) donne trivialement les valeurs de champ moyen des exposants β et ν_\parallel . D'une part, la valeur n_s du paramètre d'ordre décroît linéairement à l'approche de la transition : $n_s = \Delta/(2\lambda) \propto (p - p_c)$, d'où $\beta = 1$. D'autre part, d'après (V.6), la densité $n(t)$ se comporte à grand temps comme $\exp(-t/\tau) \sim \exp(-t/\xi_\parallel)$. Ainsi, au voisinage de la transition, la longueur de corrélation ξ_\parallel diverge comme $\tau = \Delta^{-1}$, d'où $\nu_\parallel = 1$. La divergence du temps de relaxation (et de ξ_\parallel) à l'approche de la transition traduit le phénomène de ralentissement critique.

La détermination de l'exposant ν_\perp nécessite d'incorporer à la description de champ moyen une dépendance spatiale. On introduit donc une densité "locale" $n(x, t)$ moyennant le nombre de particules contenues dans un petit volume $d^d x$. L'équation (V.5) s'étend alors à $n(x, t)$ en incluant le terme diffusif $D \nabla^2 n(x, t)$ associé au processus de diffusion (V.1), mais en négligeant toujours les corrélations spatiales de densité. L'équation de champ moyen "local" s'écrit alors :

$$\partial_t n(x, t) = D \nabla^2 n(x, t) + (\sigma - \mu) n(x, t) - 2\lambda n(x, t)^2. \quad (\text{V.11})$$

Plaçons-nous au régime critique. D'après les lois de puissance (V.8) à (V.10), un changement d'échelle $x \rightarrow \Lambda x$ s'accompagne des transformations :

$$t \rightarrow \Lambda^z t, \quad \Delta \rightarrow \Lambda^{-1/\nu_\perp} \Delta \quad \text{et} \quad n(x, t) \rightarrow \Lambda^{-\beta/\nu_\perp} n(\Lambda x, \Lambda^z t). \quad (\text{V.12})$$

Si l'on reporte ces transformations dans l'équation (V.11), alors son invariance par changement d'échelle requiert que l'exposant critique ν_\perp prenne la valeur $\nu_\perp = 1/2$.

Finalement, en rassemblant les résultats de champ moyen et de son extension "locale", on obtient les exposants :

$$\beta = 1, \quad \nu_\perp = \frac{1}{2}, \quad z = 2. \quad (\text{V.13})$$

La description de champ moyen demeure légitime tant que les fluctuations spatiales restent négligeables, et ceci est réalisé tant que la dimension d'espace est grande. L'on s'attend à ce que les fluctuations modifient les exposants de champ moyen pour des dimensions spatiales en-deçà de la dimension critique supérieure d_c . Comme nous le montrerons au chapitre VI, cette dimension critique est $d_c = 4$ pour la percolation dirigée de sorte que les fluctuations invalident le champ moyen en dimension spatiale $d < 4$, *i.e.* en toute dimension physique. Or, il n'existe aucun résultat exact, même à une dimension d'espace, déterminant la valeur des exposants critiques en dessous de d_c . Les simulations numériques semblent, de plus, infirmer les différentes valeurs rationnelles qui ont été conjecturées [97]. On donne dans la table V.1 les meilleures déterminations de ces exposants, issues de simulations Monte Carlo et de développements en séries, en dimensions d'espace $d = 1, 2$ et 3 .

dimension	Ref.	β	ν_{\perp}	z
3	[98]	0.81(1)	0.581(5)	1.90(1)
2	[99]	0.584(4)	0.734(4)	1.76(3)
1	[100]	0.276486(8)	1.096854(4)	1.580745(10)

TAB. V.1 – Meilleures estimations des exposants critiques de la percolation dirigée en dimensions spatiales 1, 2 et 3 (issues de simulations numériques en $d = 3$ et $d = 2$ et de développements en séries en $d = 1$).

En outre, au voisinage de la dimension critique supérieure, l'on peut recourir à des calculs par groupe de renormalisation perturbatif pour obtenir une estimation des exposants critiques en $d = 4 - \epsilon$. Ce calcul a été effectué à l'ordre de 2-boucles [101]. Les expressions des exposants qui en résultent (à l'ordre ϵ^2) sont reportées dans la table V.2, accompagnées des valeurs numériques correspondantes pour $\epsilon = 1, 2$ et 3 . Bien sûr, la validité de ces expressions est, ce faisant, indûment prolongée à des valeurs de ϵ où elles ne font certainement plus sens. Nous les donnons simplement à titre indicatif.

dimension	β	ν_{\perp}	z
$d = 4 - \epsilon$	$1 - \epsilon/6 - 0.01128\epsilon^2$	$1/2 + \epsilon/16 + 0.02110\epsilon^2$	$2 - \epsilon/12 - 0.02921\epsilon^2$
3	0.82205	0.5836	1.88746
2	0.62155	0.7094	1.71649
1	0.39848	0.8774	1.4871

TAB. V.2 – Estimations des exposants critiques de la percolation dirigée par un calcul à 2-boucles de groupe de renormalisation perturbatif, en dimensions spatiales 1, 2 et 3 d'après [101].

La percolation dirigée, par sa simplicité et l'intérêt qu'elle cristallise, se présente, pour les systèmes hors de l'équilibre, comme l'analogue du modèle d'Ising à l'équilibre. Cependant, à la différence de ce dernier, on ne dispose pas de déterminations analytiques exactes des exposants critiques même en basses dimensions où ceux-ci ne sont

estimés que numériquement. Notre premier travail, présenté au chapitre VII, est donc voué à calculer, par le groupe de renormalisation non perturbatif, les exposants critiques de la percolation dirigée. Le caractère non perturbatif de cette méthode ne la restreint pas, par essence, au voisinage de la dimension critique et rend donc possible l'accès aux basses dimensions.

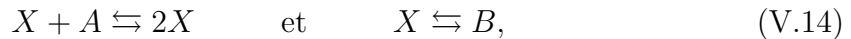
Ces dernières remarques concluent la caractérisation des propriétés universelles de la percolation dirigée qui contient tous les éléments nécessaires pour remplir notre premier objectif. Nous allons, dans la suite de cette section, simplement illustrer le concept d'universalité par la diversité et le nombre des systèmes qui appartiennent à la classe de la percolation dirigée et présentent donc le même comportement critique. Cette représentativité conforte une conjecture célèbre, que nous introduisons maintenant.

V.1.2 Réalisations théoriques

Nous explorons, dans un premier volet, les différents *modèles* théoriques qui appartiennent à la classe d'universalité de la percolation dirigée. Nous suivons un fil historique, en retraçant tout d'abord l'émergence de la conjecture due à Janssen et Grassberger [91, 92] puis nous détaillons quelques modèles choisis parmi les nombreuses réalisations qui lui ont succédé.

A- Conjecture

Les premiers modèles présentant une transition absorbante rattachée à la classe d'universalité de la percolation dirigée proviennent de domaines pour le moins disjoints : la chimie [102] et la physique des particules [103]. Au début des années 70, Schlögl a modélisé des réactions chimiques autocatalytiques par des processus stochastiques markoviens [102]. Le “premier modèle de Schlögl” se compose des processus :



où A et B représentent des espèces chimiques inertes et X l'espèce réactive. Grassberger *et al.* [104, 95] ont établi une équivalence reliant ces processus à une théorie des champs, la théorie de Regge [105, 101, 103], décrivant — sans entrer dans le détail — la diffusion de “partons” (composants élémentaires des hadrons) de haute énergie dans le plan transverse à l'impulsion du hadron lors, par exemple, d'une collision. Dans le même temps, Cardy et Sugar ont prouvé [106] que le comportement critique du modèle de la percolation dirigée s'identifie également à celui de la théorie de Regge. Finalement, il en découle que le modèle de Schlögl, la théorie de Regge et le modèle de la percolation dirigée appartiennent à la même classe d'universalité.

Dans ces analogies entre la théorie de Regge et des processus stochastiques, la rapidité (logarithme de l'impulsion longitudinale) des partons de la théorie de Regge correspond au temps des particules stochastiques et le plan transverse à l'espace. Les amplitudes de diffusion à “ n partons” sont alors directement connectées aux fonctions de corrélation de densité à n points des particules stochastiques [106]. Cette équivalence trahit la nature de la théorie de Regge qui relève plus d'un processus

stochastique que d'une théorie quantique et en explique les "bizarreries".¹ La connaissance fine des exposants critiques en dimension $d = 4 - \epsilon$, dans le cadre de la théorie de Regge [101], se transpose ainsi directement aux réactions chimiques. La fragmentation des hadrons selon un mécanisme de physique nucléaire dénommé mécanisme de Schwinger a également, peu après, été rattachée à la percolation dirigée [107].

Ces équivalences ont été étendues à travers deux réflexions parallèles au début des années 80. D'une part, Janssen [91] s'est attaché à établir une preuve plus formelle de l'équivalence entre le modèle de Schlögl et la théorie de Regge à partir des équations de Langevin associées aux processus (V.14), en dérivant une représentation en terme d'une intégrale fonctionnelle de ces processus et en explicitant ainsi l'identité des deux théories des champs. Ce travail l'a amené à constater que l'ensemble des réactions (V.14) forme le modèle le plus "économique" pour décrire une transition de phase entre un état actif et un état absorbant, dans le sens où il inclut tous les couplages pertinents autorisés par les symétries. A cet égard, ce modèle se présente comme l'analogue de la théorie ϕ^4 pour les systèmes à l'équilibre. Il en a conclu que la théorie de Regge (et donc la percolation dirigée) constitue le prototype de toute transition continue vers un état absorbant.

D'autre part, Grassberger [92] s'est appliqué à démontrer que la transition continue du "second modèle de Schlögl" [102] défini par les processus :



appartient à la même classe d'universalité que le premier. Ceci l'a également amené à remarquer que les processus (V.14) contiennent les ingrédients essentiels induisant une transition vers un état absorbant.

Ces travaux parallèles ont fondé la célèbre conjecture de la percolation dirigée [91, 92] qui peut s'énoncer, en la modulant par quelques nuances, sous la forme suivante :

"Une transition de phase continue entre un état actif et un état absorbant caractérisée par un paramètre d'ordre à une composante appartient génériquement à la classe de la percolation dirigée. Cette règle s'applique à des processus de réaction-diffusion définis par des transitions dynamiques locales [excluant des interactions de longue portée comme les vols de Lévy] et en l'absence de symétries supplémentaires ou de désordre gelé."

Nous désignerons dans la suite cette conjecture par "conjecture de GJ" par référence à ses auteurs. Cette conjecture renforce — par sa simplicité — la comparaison entre la classe d'universalité de la percolation dirigée pour les systèmes hors de l'équilibre et celle du modèle d'Ising pour les systèmes à l'équilibre. Rappelons néanmoins qu'elle contraste avec cette dernière par l'absence de déterminations théoriques exactes — proches des valeurs numériques — de ses exposants critiques à basse dimension.

¹Par exemple, le paramètre d'évolution $t = (\sqrt{-1} \times \text{rapidité})$ s'apparente à un temps imaginaire. Ainsi l'équation du mouvement des partons ressemble plus à une équation de diffusion, propre aux processus stochastiques, qu'à une équation de Schrödinger pour des particules quantiques [95, 106].

B- Une grande famille

La classe d'universalité de la percolation dirigée compte depuis de nombreux membres. Loin de donner une énumération exhaustive de tous les modèles qui s'y rattachent, nous en présentons les plus représentatifs, en privilégiant ceux qui se confrontent à l'expérience. Nous veillons, en particulier, à identifier clairement ce qui constitue la phase active, la phase absorbante et le paramètre d'ordre.

Il convient de mentionner l'un des premiers modèles liés à la percolation dirigée [95], le "processus de contact", introduit par Harris [76] pour modéliser la progression d'une maladie au sein d'une population en l'absence de mécanisme d'immunisation. L'extrême simplicité des règles dynamiques du processus de contact (les particules ne diffusant pas) le rend particulièrement propice à des simulations Monte Carlo de grande précision. De fait, il a servi de support aux déterminations numériques les plus fines des exposants critiques de la percolation dirigée en trois dimensions d'espace [98].

Les automates cellulaires

Pour leur propension à se prêter également à des simulations numériques, les automates cellulaires [108] forment une classe importante de processus de réaction-diffusion. Un automate est une loi, déterministe ou stochastique, qui associe, à tout état α d'un système à un instant t , un état β au temps $t + 1$. L'itération de cette loi aux états successifs du système engendre son évolution temporelle, discrète et synchrone pour tous les degrés de liberté du système. Dans le cas des processus de réaction-diffusion, le système est un ensemble de variables aléatoires discrètes S_i^α , à k valeurs, sur un réseau de N sites i et ses états sont l'ensemble des k^N configurations possibles. L'automate cellulaire régit alors l'évolution de la probabilité d'une configuration entre les temps t et $t + 1$, à travers une matrice de probabilités de transition $T_{\alpha\beta}$ suivant la loi :

$$P^\beta(t + 1) = \sum_{\alpha} T_{\alpha\beta} P^\alpha(t). \quad (\text{V.16})$$

La matrice $T_{\alpha\beta}$ contient les probabilités conditionnelles (indépendantes du temps) de basculer dans l'état β au temps $t + 1$ sachant que le système se trouve dans l'état α au temps t , avec la propriété essentielle de n'impliquer que des transitions locales, soit pour un réseau du type de celui de la figure 1 :

$$T_{\alpha\beta} = \prod_i p(S_i^\beta | S_{i-1}^\alpha, S_{i+1}^\alpha). \quad (\text{V.17})$$

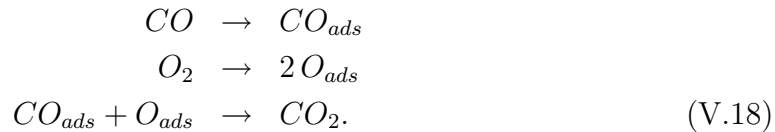
L'état S_i^β du site i au temps $t + 1$ n'est donc conditionné que par les états S_{i-1}^α et S_{i+1}^α au temps t de ses plus proches voisins ($i - 1$) et ($i + 1$).

Dans le cas de variables S_i^α binaires ($k = 2$) et en l'absence de création spontanée de particules, l'automate est entièrement défini par deux probabilités indépendantes $p(1|1, 0) = p(1|0, 1) = p_1$ et $p(1|1, 1) = p_2$ (avec $p(1|0, 0) = 0$). Le diagramme de phase du système en fonction des valeurs de p_1 et p_2 [108] est scindé par une ligne de transitions continues en deux phases, l'une absorbante et l'autre active. Conformément à la conjecture de GJ, ces transitions s'apparentent toutes (sauf aux points extrêmes) à la classe d'universalité de la percolation dirigée [109]. Les valeurs particulières des

probabilités $p_1 = p$ et $p_2 = p(2 - p)$ reproduisent le modèle de la percolation de liens décrit précédemment [108].

Les réactions chimiques catalytiques

Nous considérons à présent un modèle conçu [110] pour clarifier les propriétés d'une réaction chimique très étudiée de par l'importance de ses applications industrielles : la réaction catalytique hétérogène d'oxydation du monoxyde de carbone. Cette réaction couple une phase gazeuse composée d'un mélange de CO et d' O_2 à un substrat solide de platine formant le catalyseur. La réaction de catalyse hétérogène se décompose en trois étapes (suivant le processus de Langmuir) : (1) l'adsorption des réactants en phase gazeuse sur les sites du réseau cristallin du catalyseur, (2) la réaction d'oxydation entre réactants occupant des sites adjacents et (3) la désorption du produit qui rejoint la phase gazeuse, soit :



Les fractions molaires de CO et d' O_2 dans la phase gazeuse (respectivement y_{CO} et $1 - y_{CO}$) sont variables. La valeur du paramètre y_{CO} contrôle ainsi le taux effectif de la réaction d'oxydation. L'adsorption de l'oxygène sur le catalyseur nécessite la vacance de deux sites adjacents, alors qu'un seul suffit à celle du monoxyde de carbone. Ziff, Gulari et Barshad ont proposé [110] une représentation simple de cette réaction catalytique comme un processus de réaction-diffusion sur un réseau, imitant les trois étapes du processus réactionnel. La simulation numérique de ce modèle a conduit au diagramme de phase reproduit sur la figure 3 qui représente, en fonction de la pression partielle y_{CO} , les fractions d'occupation du platine pour les deux réactants et le taux de production de CO_2 .

Si la fraction molaire du CO dépasse la valeur $y_{CO} = y_2$ — marquant une transition du premier ordre — le CO recouvre entièrement le substrat de sorte que les atomes de dioxygène ne peuvent plus s'y adsorber et le système devient inerte. Si, au contraire, cette fraction n'atteint pas une valeur minimale $y_{CO} = y_1$, c'est l'oxygène qui empoisonne le catalyseur et bloque la réaction. Pour $y_1 < y_{CO} < y_2$, le système entre dans une phase réactive, le catalyseur est alors siège d'adsorptions et de désorptions incessantes, correspondant à des fractions d'occupation moyenne du substrat non nulles pour les deux réactants.

La caractéristique remarquable de ce diagramme est que lorsque y_{CO} traverse la valeur y_1 , le système subit une transition de phase continue entre l'état empoisonné à l' O_2 inerte (absorbant) et l'état réactif (fluctuant) où le taux de production de CO_2 (le paramètre d'ordre) acquiert une valeur stationnaire non nulle. Les propriétés critiques de cette transition ont été reliées, *via* des arguments formels basés sur l'analyse des équations de Langevin, à la classe d'universalité de la percolation dirigée [111]. Cette conclusion a été confirmée par une première estimation numérique inambiguë des exposants [112], puis une seconde beaucoup plus raffinée [99].

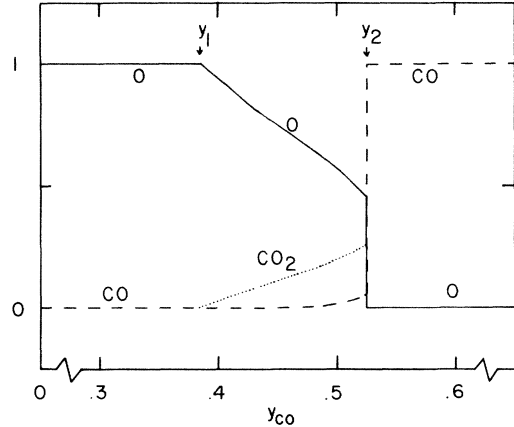


FIG. 3 – Diagramme de phase du modèle de Ziff-Gulari-Barshad d’après [110]. Le trait plein (respectivement interrompu) indique la fraction d’occupation moyenne du Pt par le réactant O (respectivement CO) en fonction de la fraction molaire y_{CO} de CO , les pointillés représentant le taux de production de CO_2 . Les valeurs y_1 et y_2 délimitent l’état réactif, marquant les transitions, du second et du premier ordre, entre cet état réactif et un état inerte, empoisonné respectivement à l’ O_2 et au CO .

Des versions simplifiées de modèles de réactions catalytiques n’impliquant qu’une seule espèce chimique ont été formulées par la suite pour dégager les ingrédients essentiels moteurs de la transition du second ordre en élaguant le reste du diagramme de phase (la transition du premier ordre). Ces transitions tombent aussi naturellement dans la classe de la percolation dirigée [113].

Croissance d’une interface dans un milieu désordonné

Détaillons un dernier exemple, provenant de l’étude de la transition de piègeage d’une interface dans un milieu à deux dimensions [114, 115]. Dans les modèles considérés, une interface est entraînée par une force extérieure à travers un milieu désordonné. Si la force ne compense pas l’effet du désordre (gelé), l’interface est piégée par les impuretés du milieu qui bloquent son avancée. La morphologie de l’interface, façonnée par la distribution des pièges, présente typiquement une structure auto-similaire, possédant des propriétés statistiques en lois de puissance. En particulier, la “rugosité” w d’une interface décrite par le profil $h(x, t)$ est caractérisée par un exposant critique χ défini par :

$$w(L, t) \equiv \left\langle \left[h(x, t) - \langle h(x, t) \rangle \right]^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}} \equiv L^\chi f(t/L^z), \quad (\text{V.19})$$

où L est la taille linéaire du système, z l’exposant critique dynamique et $\langle \rangle$ symbolise la moyenne spatiale. Ce problème relève génériquement de la classe d’universalité de l’équation de Kardar-Parisi-Zhang [116, 74] et des polymères dirigés [117, 118, 74] qui prédit en deux dimensions $\chi = 2/3$. Cependant deux travaux [114, 115] ont simultanément suggéré qu’en dimension deux, les propriétés géométriques de l’interface

piégée se rattachaient plutôt à un modèle de percolation dirigée. L’argument est le suivant. Le milieu désordonné est modélisé par un réseau, comportant une proportion p de cellules bloquées réparties aléatoirement (selon le schéma de la figure 4). L’interface se propage à travers ce milieu selon une direction donnée. Alors, sa progression s’arrête si elle butte sur une ligne ininterrompue de sites bloqués, transverse à sa direction de propagation, autrement dit s’il existe un amas percolant transverse de sites pièges. Un tel amas ne peut se développer que lorsque p atteint le seuil critique de transition de la percolation dirigée. Alors, les propriétés géométriques de l’interface piégée s’identifient à celles d’un amas percolant critique, l’exposant de rugosité se déduisant, en particulier, des dimensions typiques de l’amas, soit $\chi = \nu_{\parallel}/\nu_{\perp}$.

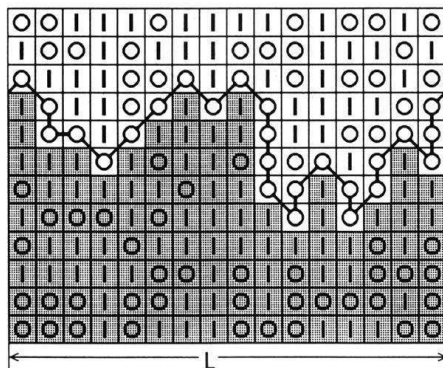


FIG. 4 – Schéma du modèle de croissance d’une interface dans un milieu désordonné bidimensionnel d’après [114] : les “O” repèrent les cellules bloquées, les “I” les cellules libres. L’ascension de l’interface s’arrête lorsque que celle-ci rencontre un amas percolant transverse.

Le modèle des polymères dirigés repose sur un problème statique d’optimisation *globale* de chemin dans un paysage d’énergie aléatoire alors que celui de la percolation dirigée est composé de règles dynamiques *locales*. Cependant, si, dans le modèle de polymères, la distribution d’énergie est bimodale de probabilité p_e , alors les deux problèmes s’avèrent reliés [119]. Plus précisément, lorsque p_e atteint la valeur p_c du seuil critique de transition de la percolation dirigée, la morphologie de l’interface subit un glissement de sa forme prescrite par le modèle des polymères dirigés vers celle prédite par le modèle de percolation dirigée, et l’exposant de rugosité passe alors de sa valeur “polymères” χ_{KPZ} à sa valeur “percolation” $\chi_{DP} = \nu_{\parallel}/\nu_{\perp}$ en $d = 2$.

La liste pourrait encore s’allonger. Pour clore ce florilège, mentionnons simplement un modèle de feux de forêts avec des arbres “immunisés” [78], qui offre une possibilité de vérification expérimentale. L’incendie, à partir de foyers allumés aléatoirement par la foudre, se propage de proche en proche, un arbre s’enflammant avec une probabilité $p \neq 1$ si des arbres voisins brûlent. De plus, des arbres sont régénérés aléatoirement. L’existence d’une immunisation le distingue des modèles classiques de feux de forêts [94, 77] et ce modèle présente un comportement critique qui se fonde dans la classe d’universalité de la percolation dirigée.

Nous allons maintenant aborder le second volet qui concerne les réalisations expérimentales de la percolation dirigée, reliées, pour la plupart, à des modèles que nous venons d'évoquer.

V.1.3 Réalisations expérimentales

La classe d'universalité de la percolation dirigée réserve ses mystères. En effet, au sein des *modèles* de processus de réaction-diffusion présentant une transition absorbante, cette classe d'universalité semble omniprésente, comme le reflète la conjecture de GJ. Paradoxalement, à cette ubiquité théorique fait écho une quasi-absence de réalisations *expérimentales*. Plusieurs hypothèses pour tenter d'expliquer cette troublante lacune ont été émises. L'une d'elles est qu'un milieu réel comporte toujours des impuretés ou des irrégularités et la présence de désordre gelé apparaît dénaturer le comportement critique [120, 121, 122]. Une autre faille est pressentie dans le concept même d'état absorbant. Dans certains contextes expérimentaux [123], l'"état absorbant" n'a pas de réalité physique, de sorte que les fluctuations résiduelles détruisent la transition.

Nous donnons ici un bref aperçu des principales tentatives expérimentales pour mettre en évidence les exposants critiques de la percolation dirigée, à commencer par les plus naturelles qui se révèlent paradoxalement les moins concluantes, pour achever par la première indication tangible de cette classe qui provient d'une étude expérimentale d'intermittence spatio-temporelle.

Percolation en milieu poreux

Comme le modèle de la percolation dirigée s'inspire de la percolation d'un fluide dans un milieu poreux en présence d'une force externe, on en attend là une réalisation naturelle. Cependant, dans un milieu poreux réel, la probabilité de percolation s'avère très difficile à mesurer. D'abord parce qu'une roche, de par sa formation, est souvent anisotrope. La taille des pores apparaît, en outre, très inhomogène et leur distribution hautement irrégulière, comme le montre par exemple une section fine extraite d'une roche Savonnier-oolithic [124]. La mesure des probabilités de percolation, tentée dans cet échantillon de roche [124], produit des résultats entièrement conditionnés par la porosité locale et la direction spatiale, de sorte qu'il s'avère impossible d'identifier un comportement critique.

Plus fondamentalement, la validité de ce modèle très épuré pour décrire l'infiltration réelle d'un fluide est improbable, car il néglige complètement l'effet des forces capillaires qui brouillent largement l'unidirectionnalité de la propagation, ainsi que les phénomènes hydrodynamiques (tels que la viscosité) qui influent de façon complexe sur le comportement du fluide.

Feux de forêt

De même, la mesure du comportement critique de feux de forêts dans des expériences réelles est entâchée d'une grande incertitude de par la difficulté du protocole. Penchons-nous par exemple sur une expérience, effectuée en laboratoire, de propagation d'incen-

dies en présence de vent [125]. Dans cette étude, le feu, initié sur une ligne, se propage à travers différents substrats — de surface de 0.5 m^2 à 1.6 m^2 — constitués de blocs combustibles ou inifugés, distribués avec une probabilité p . Le feu est attisé par un vent artificiel de vitesse variable (de 0 à 5 m/s). L'incendie est répété typiquement une cinquantaine de fois pour chaque vitesse de vent. L'expérience met en évidence une transition de phase entre l'état absorbant où l'incendie s'éteint irréversiblement et l'état actif où il ravage tout le substrat. Néanmoins, la valeur du seuil critique p_c varie de 25% à 45% selon les conditions expérimentales (vitesse du vent, type de combustibles...) et aucun exposant critique n'a pu être mesuré, ce qui ne permet pas de conclure quant à l'appartenance de cette transition à la classe de la percolation dirigée.

Croissance d'une interface en milieu désordonné

Une expérience de propagation d'un fluide dans un milieu désordonné [114] a apporté une illustration remarquable du glissement subtil du comportement critique de l'interface de la classe des polymères dirigés vers celle de la percolation dirigée. Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 5 (a), qui représente un fluide (une suspension d'encre ou de café) s'imprégnant par capillarité dans un milieu poreux (une feuille de papier). La valeur de l'exposant de rugosité est mesurée durant l'ascension

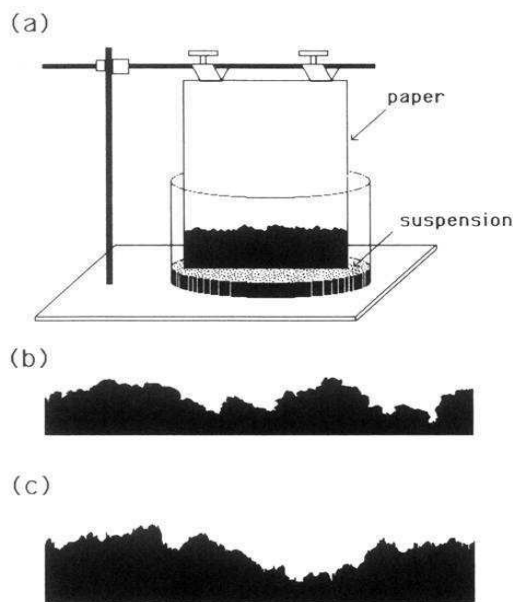


FIG. 5 – Expérience d'imprégnation d'une feuille de papier par un fluide coloré (suspension d'encre) d'après [114]. (a) Dispositif expérimental. (b) Allure typique d'une interface enregistrée au terme de son ascension. (c) Allure typique d'une interface piégée, générée par le modèle de la figure 4 avec $p \simeq p_c = 0.47$. Ce modèle semble reproduire, de façon pertinente, les propriétés statistiques de l'interface finale observée.

dynamique, au cours de laquelle il prend la valeur $\chi_d = 0.68 \pm 0.04 \sim \chi_{KPZ}$. L'ascension de l'interface s'arrête lorsque l'effet du désordre et de la gravité compensent

les forces capillaires. L'exposant de rugosité caractérisant l'interface piégée s'abaisse alors à $\chi_s = 0.63 \pm 0.04 \sim \chi_{DP}$. Cet accord quantitatif fin entre la rugosité mesurée et la prédiction théorique [114, 115] présentée précédemment soutient la pertinence du modèle de la percolation dirigée pour décrire l'interface piégée. Cette expérience constituerait ainsi une première réalisation de la percolation dirigée. Cependant, ce succès est nuancé par la vaste majorité des expériences de croissance similaires en deux dimensions, dont les mesures d'exposant de rugosité pâtissent d'une grande dispersion et dont la précision expérimentale ne suffit en général pas pour résoudre l'écart fin séparant χ_{DP} et χ_{KPZ} et discerner les deux classes d'universalité, ce qui fragilise ainsi la conclusion précédente.

Oxydation catalytique du monoxyde de carbone

Une dernière réalisation naturelle des processus de réaction-diffusion a trait aux réactions chimiques. Le diagramme de phase expérimental [123] de la réaction de catalyse hétérogène d'oxydation du CO par l' O_2 est reproduit sur la figure 6. La transition

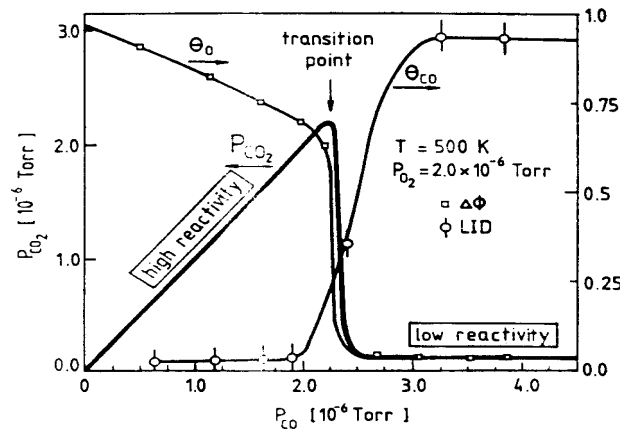


FIG. 6 – Diagramme expérimental de la réaction catalytique d'oxydation du CO d'après [123], à confronter au diagramme théorique de la figure 3. La transition du second ordre entre un état empoisonné à l' O_2 et l'état réactif (correspondant au point y_1 de la figure 3) est remplacée par une décroissance linéaire de la fraction d'occupation du Pt par l' O_2 , notée θ_O . Il ne subsiste expérimentalement que la transition du premier ordre, indiquée par la flèche.

du second ordre, correspondant au point y_1 du diagramme théorique de la figure 3, est complètement effacée, pour laisser place à une décroissance quasi-linéaire de la fraction d'occupation de l'oxygène. L'empoisonnement à l'oxygène n'est donc pas observé expérimentalement. En fait, comme souligné par Ziff, Gulari et Barshad [110], l'adsorption d' O_2 requiert deux sites adjacents vides. L'empoisonnement à l' O_2 apparaît donc comme un processus extrêmement lent, les lacunes uniques formant autant de foyers de réactivité résiduelle. En outre, l'état empoisonné est érodé par la désorption thermique de l'oxygène et ces fluctuations régénèrent l'état réactif (après un temps d'induction)

si la phase gazeuse est suffisamment riche en CO . La désorption thermique agit ainsi comme une force externe qui maintient le système loin de la transition et fragilise le concept d'état absorbant. Finalement, une nouvelle fois, le modèle néglige la présence du désordre créé par les impuretés dans le substrat et l'existence de terrasses dans le réseau cristallin. On peut également invoquer les mécanismes réactionnels qui apparaissent en réalité beaucoup plus complexes, des configurations spécifiques de réactants, par exemple, s'avérant favorisées [126].

Avalanches dans les granulaires

Des phénomènes d'avalanche dans un milieu granulaire, étudiés expérimentalement par Daerr et Douady [127], apparaissent comme un candidat potentiel de réalisation expérimentale de la percolation dirigée. Dans l'expérience [127], une source ponctuelle déverse continûment un granulaire (des billes de verre) au sommet d'un plan incliné rugueux. Au fur et à mesure de l'apport de matière, les grains déversés s'agencent en couches superposées. La stabilité de ces couches dépend de l'angle ϕ d'inclinaison du plan. Tant que l'angle reste faible, les grains se réarrangent localement et le système demeure stable, statique. Lorsque l'angle atteint une valeur critique ϕ_c , une perturbation localisée (l'apport d'un grain au sommet) déstabilise toutes les couches qui s'écroulent brutalement en avalanche. A forte inclinaison, l'ajout de matière induit un écoulement dynamique permanent et donc fluctuant. Hinrichsen *et al.* ont proposé un modèle pour ce phénomène [128], qui suggère que le passage de l'état statique à l'état dynamique s'apparente à une transition absorbante de la classe de la percolation dirigée. Cependant, ce modèle prédit que cette transition n'apparaît qu'après un long régime transitoire, pendant lequel le système est décrit par la classe d'universalité de la percolation dirigée *compacte* [129]. Dépasser ce régime transitoire nécessiterait de procéder à des expériences d'avalanche analogues mais sur des échelles de temps beaucoup plus longues et donc sur des tailles beaucoup plus grandes. Cette piste n'a, jusqu'à présent, pas été explorée.

Intermittence spatio-temporelle dans un fluide magnétique

Finalement, la seule réalisation expérimentale semblant se rattacher, à ce jour, à la classe d'universalité de la percolation dirigée provient de l'étude de l'intermittence spatio-temporelle dans un ferro-fluide sous champ magnétique oscillant [130]. Cette expérience est inspirée de travaux théoriques sur la turbulence [131, 132] qui suggèrent que le front entre des écoulements laminaires et turbulents, où le chaos apparaît *via* un phénomène d'intermittence spatio-temporelle, s'apparente à la transition de la percolation dirigée. Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 7. Un ferro-fluide (suspension de magnétite dans un fluide porteur d'isoparafine) est versé en surface d'un aimant à bords saillants. Il est piégé sur les bords dans une géométrie annulaire par un champ magnétique que le relief intensifie localement. Une autre bobine, parcourue par un courant alternatif, crée un champ d'excitation, dont le gradient est contrôlé par l'intensité du courant. Un ferro-fluide soumis à un champ magnétique inhomogène se hérissé de pics (instabilité de Rosensweig) formant des motifs dont la périodicité est proportionnelle au gradient de champ magnétique. Un fort gradient supprime les pics

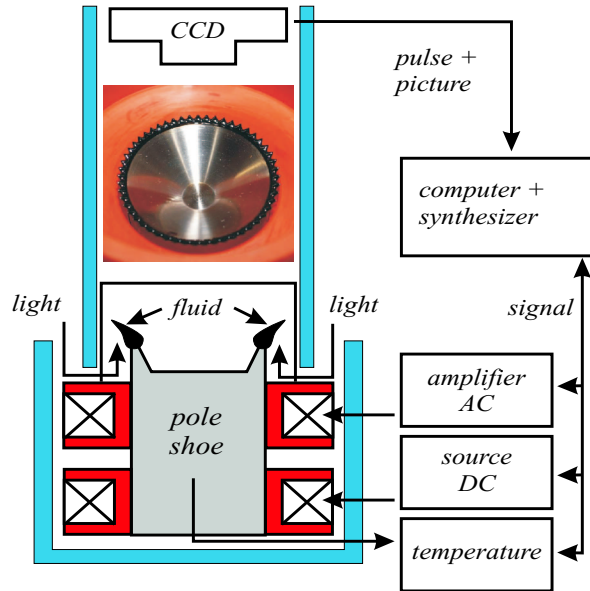


FIG. 7 – Dispositif expérimental de l’expérience d’intermittence spatio-temporelle d’après [130]. La photo centrale montre l’anneau de pics bordant la surface de l’aimant cylindrique.

de grande amplitude en faveur d’une densité plus grande de petits pics. L’expérience enregistre l’évolution spatiale et temporelle de la distribution des pics sur l’anneau en fonction de l’intensité du courant, présentée sur la figure 8. Sur ces images, le dégradé est proportionnel à l’amplitude des pics. Une ligne horizontale représente l’état instantané de l’anneau déroulé et l’axe vertical retrace la succession dans le temps des états de l’anneau, à des intervalles synchronisés sur la fréquence du champ de sorte à effacer le battement des pics.

Lorsque l’intensité est faible, de larges pics s’érigent régulièrement le long de l’anneau et leur amplitude bat de façon cohérente, synchronisée par la fréquence du champ (figure 8 (a)). Cet état laminaire est “non fluctuant” dans le sens où aucun désordre ne s’y immisce et ne trouble la synchronisation des pics. Lorsque le courant atteint un seuil critique, la densité croissante des pics devient une source de compétition qui induit des fluctuations dans la position et le battement des pics, de sorte que des régions arbitrairement grandes se désynchronisent. Ceci constitue le phénomène d’intermittence spatio-temporelle (figure 8 (b)). Si le courant continue de croître, il génère un état chaotique où des pics émergent de manière désordonnée dans l’espace et dans le temps, ce qui correspond à une phase active et donc fluctuante (figure 8 (c)). Un paramètre d’ordre mesurable pour quantifier les différents régimes est la fraction chaotique moyenne, qui représente la moyenne dans le temps du taux de pics désordonnés le long de l’anneau. Ce paramètre d’ordre s’annule bien dans le régime laminaire. La technique expérimentale mise en œuvre a permis des mesures précises des différents exposants à la transition. Ceux-ci, rassemblés dans la table V.3, montrent un accord remarquable avec les exposants de la percolation dirigée issus des développements en

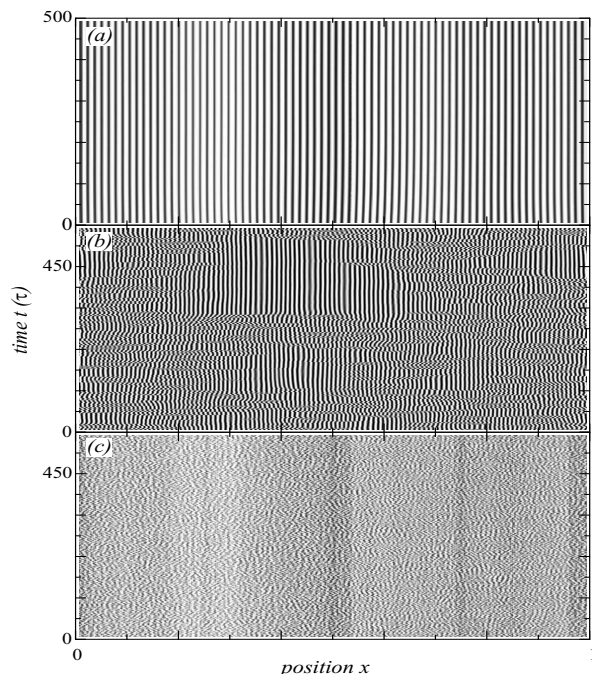


FIG. 8 – Enregistrement de l’amplitude des pics le long de l’anneau déroulé représenté horizontalement, l’axe vertical en retraçant l’historique, d’après [130]. (a) état laminaire (absorbant), (b) transition avec des zones de désynchronisation partielle et (c) état chaotique (actif).

séries [100], sauf pour ν_{\parallel}^2 . Cette expérience offre une belle illustration du concept de

	β	ν_{\perp}	ν_{\parallel}	μ_{\perp}
Expérience [130]	0.3 ± 0.05	1.2 ± 0.1	0.7 ± 0.05	1.7 ± 0.05
Séries [100]	0.276486(8)	1.096854(4)	1.733847(6)	1.748

TAB. V.3 – Mesures expérimentales des exposants critiques de la percolation dirigée en 1+1 dimensions dans l’expérience d’intermittence spatio-temporelle [130], comparées aux estimations provenant des développements en séries [100].

l’universalité en rattachant à la classe de la percolation dirigée un phénomène, *a priori* très différent des transitions absorbantes originant des réactions chimiques entre particules, comme le développement d’intermittence spatio-temporelle dans un ferro-fluide.

²L’écart de ν_{\parallel} à la valeur théorique (voir table V.3) est probablement à attribuer à l’absence expérimentale d’un réel état absorbant. Comme le suggère Rupp *et al.* [130], un modèle plus réaliste devrait comporter un mécanisme stochastique de nucléation de zones chaotiques dans des domaines laminaires afin de rendre compte du bruit expérimental. Un tel processus de création spontanée pourrait par exemple se traduire par l’inclusion d’un champ externe dans le modèle de la percolation dirigée, suffisamment faible pour ne pas altérer le comportement universel [83].

V.1.4 Bilan

Nous achevons là cette illustration de la classe d'universalité de la percolation dirigée. En s'affranchissant des détails microscopiques et de la complexité d'un système réel, quelques éléments essentiels suffisent à reproduire un comportement critique. Ainsi, la "puissance" d'un modèle tient à sa simplicité pour décrire une physique complexe. A cet égard, les seuls ingrédients fondant la classe de la percolation dirigée, communs à toutes ses réalisations, résident simplement dans l'existence d'une transition de phase *continue* entre un *état actif* et un *état absorbant*, caractérisée par un paramètre d'ordre à *une composante*. De nombreux modèles sièges d'une transition absorbante réalisent naturellement la synthèse de ces composantes et se rattachent, conformément à la conjecture de GJ, à la classe de la percolation dirigée. Cependant, les systèmes réels semblent se soustraire presque systématiquement à cette règle. L'échec apparent de la classe de la percolation dirigée pour rendre compte des transitions absorbantes réelles ouvre une brèche. Au-delà des nécessaires effets négligés propres à chaque situation, cela semble suggérer que la percolation dirigée exclut une composante clé de la plupart des systèmes réels (le désordre ?) et la déceler représente un enjeu théorique important.

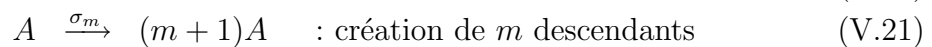
Nous ne creuserons pas plus avant cette piste et allons, pour clore ce chapitre, nous engager sur un sujet de prime abord relativement indépendant de ce qui précède mais dont le lien avec la percolation dirigée s'éclaircira par la suite. Ce sont les modèles de marches aléatoires avec branchement et annihilation. Ces modèles constituent une classe importante de processus de réaction-diffusion et présentent une physique riche.

V.2 Les marches aléatoires avec branchement et annihilation

Nous donnons dans cette deuxième section une présentation partielle des modèles de marches aléatoires avec branchement et annihilation et de leurs caractéristiques. Celle-ci est volontairement orientée vers le second objectif que nous nous proposons de suivre au cours du chapitre VII, qui consiste en la détermination du diagramme de phase des marches "impaires" (définies plus bas). Le but ultime de cette section est donc de mettre en relief la problématique sous-jacente à notre analyse.

V.2.1 Définition

Les modèles de marches aléatoires avec branchement et annihilation, initialement introduits par Bramson et Gray [133], décrivent des processus de réaction-diffusion de la forme générique :



dont est exclue la mort spontanée $A \rightarrow \emptyset$, soit $k > 1$. La classe des marches aléatoires avec branchement et annihilation “paires” regroupe celles pour lesquelles le nombre m de descendants produits par (V.21) et le nombre k de particules détruites par (V.22) sont pairs. Cette classe a suscité un grand intérêt [134, 135, 136, 137, 138, 139, 140] comme le premier exemple de transition absorbante n’appartenant *pas* à la classe d’universalité de la percolation dirigée. L’élément la dérogeant à la règle de GJ réside dans l’existence d’une symétrie supplémentaire, la conservation du nombre de particules *modulo* 2. Elle a ainsi marqué l’émergence d’une nouvelle classe d’universalité, baptisée “PC” (parité conservée). Nous ne détaillerons pas ces processus (et renvoyons à [141] pour une revue) et nous intéresserons exclusivement dans la suite à la classe des marches aléatoires avec branchement et annihilation “impaires”, dont nous allons maintenant explorer le diagramme de phase.

V.2.2 Diagramme de phase en champ moyen

Dans une approche de champ moyen analogue à celle de la section V.1.1 — qui consiste à négliger la diffusion — l’évolution temporelle de la densité moyenne de particules soumises aux processus (V.21) et (V.22) est régie par la loi d’action de masse :

$$\partial_t n(t) = m \sigma_m n(t) - k \lambda_k n(t)^k. \quad (\text{V.23})$$

Cette équation, pour $k > 1$, possède deux solutions stationnaires :

$$n_v = 0 \quad \text{et} \quad n_s = \left(\frac{m \sigma_m}{k \lambda_k} \right)^{1/(k-1)}. \quad (\text{V.24})$$

La solution nulle s’avère instable, de sorte que le système rejoint toujours l’état actif tant que $m \sigma_m > 0$, et ce exponentiellement vite dans le temps. Il existe une transition au point critique $\sigma_m = 0$, c’est-à-dire en l’absence de branchement, autrement dit de mécanisme de création de particules.

En effet, si $m \sigma_m = 0$, le modèle dégénère en un modèle d’annihilation pure, par ailleurs bien contrôlé théoriquement [88, 142, 143]. Pour l’annihilation pure, le champ moyen prédit (pour $k \geq 2$) une décroissance algébrique de la densité en $n(t) \sim t^{-1/(k-1)}$. Cependant des analyses par groupe de renormalisation perturbatif [142, 143] ont montré (en restaurant bien sûr la diffusion et les fluctuations) qu’en deçà d’une dimension critique $d_c(k) = 2/(k-1)$, les fluctuations deviennent prédominantes et ont pour effet de ralentir la décroissance. En fait, un premier régime transitoire de destruction rapide des particules en contact tend à isoler spatialement les particules rescapées, créant ainsi des *anti*-corrélations dans le système. Ces anti-corrélations freinent, à grand temps, la disparition des particules. En particulier, dans le cas de l’annihilation de paires $k = 2$, pour lequel la dimension critique est $d_c = 2$, la densité décroît alors en $t^{-d/2}$ pour $d < d_c$ (au lieu de t^{-1} en champ moyen). Il se dégage également de ces études que les processus de coagulation $2A \rightarrow A$ et d’annihilation de paires $2A \rightarrow \emptyset$ s’avèrent équivalents, dans le sens où ils induisent le même comportement critique. Une transformation exacte reliant ces deux modèles en toute dimension a par ailleurs été établie [144]. Les deux processus seront donc désormais confondus.

Dans toute la suite, nous nous spécialisons au cas $k = 2$ d'une destruction par paire ($2A \rightarrow \emptyset$ à un taux noté λ). L'annihilation de paires correspond au processus de destruction mutuelle rencontré dans l'essentiel des modèles que nous avons parcourus dans la section V.1. Néanmoins, les marches aléatoires avec branchement et annihilation se distinguent fondamentalement de ceux-ci en ce que la destruction mutuelle n'est plus complétée d'un processus de mort spontanée ($A \rightarrow \emptyset$). Cette absence entraîne des modifications radicales, comme la disparition de la transition de phase absorbante dans l'approximation de champ moyen évoquée précédemment.

V.2.3 Diagramme de phase par simulations numériques

Cependant, les premières simulations numériques [135, 145] en (1+1) et (2+1) dimensions ont dévoilé, pour les marches impaires, l'existence d'un état absorbant pour une valeur strictement positive $\sigma_m > 0$ du taux de branchement, invalidant le champ moyen — qui ne prédit qu'une phase active³. Dans ces simulations, les marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires sont définies sur le réseau par les règles suivantes :

(1) Une particule tirée au hasard diffuse, avec une probabilité p , sur un des sites voisins choisi aléatoirement. Si ce site est occupé, les deux particules s'annihilent instantanément.

(2) Une particule tirée au hasard engendre, avec une probabilité $(1 - p)$, m descendants répartis aléatoirement sur les sites voisins. Si un de ces sites est occupé, les deux particules s'annihilent instantanément.

Dans cette simulation, le temps est discret et les taux de réaction sont contrôlés par un paramètre libre p unique, les probabilités p , $(1 - p)$ et 1 substituant respectivement les trois taux indépendants D , σ_m et λ . Notons que, dans ces conditions relativement restrictives, aucune transition n'est mise en évidence en (3+1) dimensions [135].

Ces simulations suggèrent donc que les fluctuations altèrent de façon qualitative le diagramme de phase issu du champ moyen. Comme pour l'annihilation pure, ces processus étant limités par la diffusion, on s'attend effectivement à un rôle prépondérant des fluctuations à basse dimension.

V.2.4 Diagramme de phase par groupe de renormalisation perturbatif

L'enjeu est donc d'élaborer une description théorique qui rend compte du rôle des fluctuations. Le groupe de renormalisation apparaît comme un bon candidat. Fort du formalisme de transcription de processus stochastiques en une intégrale fonctionnelle (exposé au chapitre VI), Cardy et Täuber [139, 140] ont dérivé une théorie des champs pour les marches aléatoires avec branchement et annihilation, dont ils ont entrepris une analyse complète par groupe de renormalisation perturbatif. Il s'en dégage d'emblée deux éléments clés. L'analyse des graphes de Feynman montre d'abord que pour une

³Ce résultat émane du champ moyen "de sites" développé ici où les degrés de liberté sont les particules. Il pourrait certainement être raffiné en considérant un champ moyen pour les paires ou les triplets [146, 147].

valeur de m donnée, tous les processus de branchement (V.21) avec $m_R = m - 2, m - 4 \dots 1, -1$ sont générés par renormalisation, et les opérateurs d'indices m_R les plus petits correspondent aux plus pertinents. Il suffit donc, pour comprendre l'incidence des fluctuations sur l'existence d'une transition, de considérer le cas $m = 1$ ($A \rightarrow 2A$ à un taux noté σ), générique de tous les processus de branchement à nombre impair de descendants.

Le processus de mort spontanée ($m_R = -1$) est également généré par renormalisation par combinaison des deux réactions $A \rightarrow 2A$ et $2A \rightarrow 0$, avec un taux μ_R dépendant de taux initiaux “nus” λ et σ . Ainsi, le terme correspondant entre dans l'action effective, autrement dit la théorie des champs des marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires se ramène à celle des processus (V.1) à (V.4) de la percolation dirigée avec un taux $\mu \equiv \mu_R(\lambda, \sigma)$. Les fluctuations peuvent, par conséquent, induire une transition absorbante, si elles confèrent au taux μ_R une valeur suffisamment grande pour compenser la production de particules, c'est-à-dire pour rendre $\Delta_R = \sigma_R - \mu_R$ négatif. Cette transition, si elle existe, appartient alors naturellement à la percolation dirigée, vérifiant, une fois de plus, la conjecture de GJ. Il s'agit donc, pour décider de l'existence de cette transition, de calculer la valeur renormalisée de la “masse” Δ_R .

Cardy et Täuber ont donc entrepris un calcul perturbatif de la masse renormalisée Δ_R , en adoptant la stratégie suivante. Si $\sigma = 0$, le modèle coïncide avec celui de l'annihilation pure pour laquelle la dimension critique supérieure est $d_c = 2$. Ainsi, au-delà de deux dimensions l'effet des fluctuations reste modéré — pour l'annihilation pure — et le champ moyen est valide. Le problème est donc de déterminer si une petite perturbation σ à l'annihilation pure détruit irrémédiablement l'état absorbant comme le suggère le champ moyen. Par analogie avec celle-ci, on peut songer que, pour les marches aléatoires avec branchement et annihilation, les fluctuations s'atténuent également au-delà de $d = 2$. Pour cette raison, Cardy et Täuber se sont placés au voisinage de la dimension deux, en posant $d = 2 - \epsilon$. Ils ont évalué Δ_R par deux méthodes. La première consiste à ne retenir, à tous les ordres en λ , que les graphes les plus divergents dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$. Ces contributions forment une série géométrique, de sorte que tous ces graphes se resomment simplement. La seconde méthode repose sur le calcul de tous les graphes intervenant à l'ordre de 1-boucle. Les deux approches concordent et donnent les résultats suivants. Si $d < 2$, les fluctuations parviennent à induire une transition de phase pour un taux de branchement non nul :

$$\sigma_c = D \left(\frac{\lambda}{2D\pi\epsilon} \right)^{2/\epsilon}. \quad (\text{V.25})$$

A la limite $\epsilon = 0$ ($d = 2$), le taux d'annihilation λ devient marginal. Il en résulte l'existence d'une transition, qui apparaît exponentiellement supprimée :

$$\sigma_c \sim D e^{-4\pi D/\lambda}. \quad (\text{V.26})$$

L'expression perturbative de la masse renormalisée Δ_R n'est plus valide au-delà de la dimension $d = 2$, à partir de laquelle la théorie de perturbation s'effondre et ne permet donc pas de conclure. Cependant, comme la ligne de transition dans le plan $(\lambda/D, \sigma/D)$

s'avère déjà infiniment plate en $d = 2$ d'après (V.26) et que l'annihilation λ devient non pertinente au-delà de $d = 2$, Cardy et Täuber infèrent que les fluctuations ne suffisent plus à générer une destruction efficace des particules et que par conséquent le système demeure actif pour tout $\sigma > 0$ en $d > 2$. Selon cette analyse, le champ moyen devient donc valide au-delà de $d = 2$.

Ces résultats perturbatifs sont synthétisés sur le schéma de la figure 9. La par-

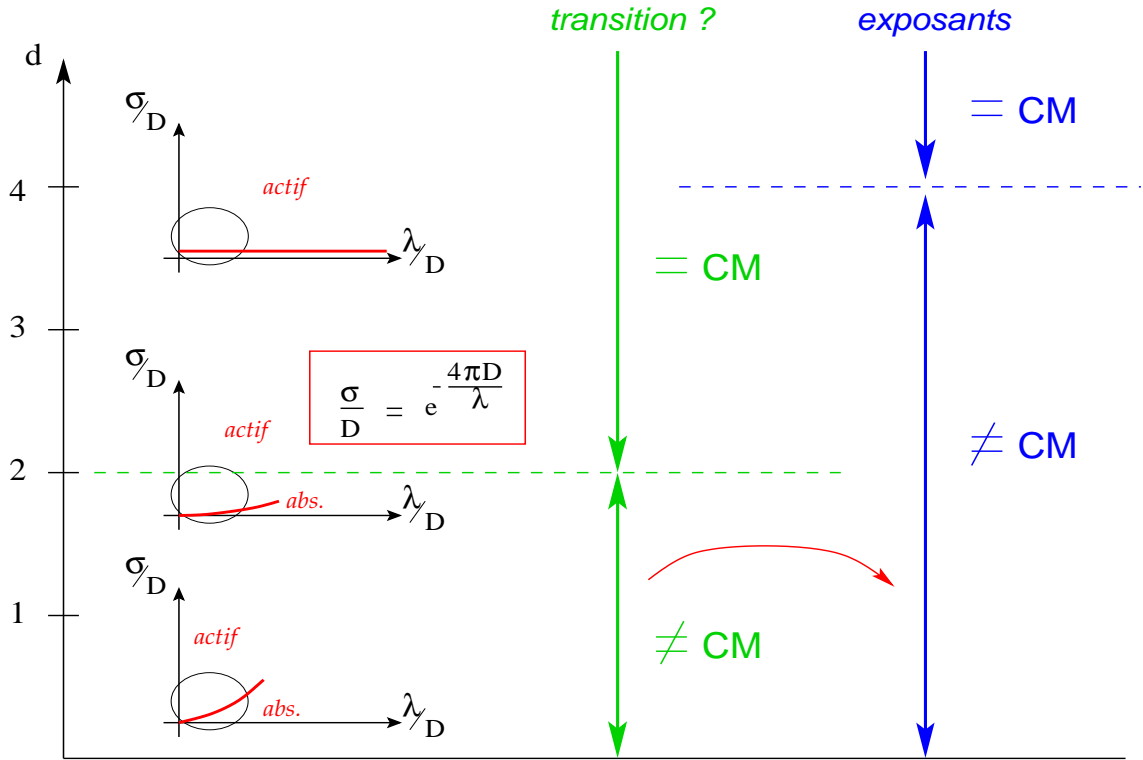


FIG. 9 – Allure du diagramme de phase des marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires en fonction de la dimension spatiale d , selon l'analyse perturbative [139, 140]. CM signifie champ moyen, ce diagramme est expliqué dans le texte.

tie gauche du schéma représente le diagramme de phase dans le plan $(\lambda/D, \sigma/D)$ en fonction de la dimension. La dimension deux marque la dimension critique supérieure au-delà de laquelle l'état absorbant disparaît, selon l'analyse perturbative, de sorte que la ligne de transition se confond avec l'axe ($\sigma = 0$) de l'annihilation pure. Les ellipses autour de l'origine symbolisent le domaine de validité de la théorie de perturbation définie dans la limite $\sigma/D, \lambda/D \rightarrow 0$. De même, le pointillé horizontal en $d = 2$ séparant les deux régimes matérialise la dimension autour de laquelle la théorie perturbative est valide, *i.e.* dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$. La partie droite du schéma repère les dimensions pour lesquelles le champ moyen (CM) s'applique. Il convient de distinguer deux propriétés : l'*existence* de la transition (colonne "transition ?" du schéma) et la valeur des *exposants* critiques (colonne "exposants"). D'une part, l'existence de la transition traduit une propriété *non universelle* du système puisque dépendante des valeurs

des taux de réactions microscopiques. L'analyse perturbative lui affecte une dimension "critique" $d_c^{N,U} = 2$ (pour $\mu_\Lambda = 0$), ce qui signifie qu'il existe une transition non triviale pour $d < d_c^{N,U}$ (zone " \neq CM") et qu'au-delà le champ moyen est recouvert (zone " $=$ CM"), *i.e.* le système est toujours actif. D'autre part, en $d < d_c^{N,U}$, la transition est caractérisée par les exposants (*universels*) de la percolation dirigée qui a pour dimension critique $d_c^U = 4$, *i.e.* les exposants de champ moyen (" $=$ CM") ne sont valides que pour $d > d_c^U$. Autrement dit, s'il n'existe de transition non triviale (à $\sigma \neq 0$) qu'en-deçà de $d = 2$, comme prédit par le groupe de renormalisation perturbatif, les exposants correspondants sont toujours les valeurs modifiées par les fluctuations (" \neq CM") et données par les valeurs du tableau V.1.

Les diagrammes de phase de la figure 9 sont issus d'un calcul perturbatif basé sur l'analyse des comportements des taux renormalisés au voisinage de l'origine et proche de la dimension deux. Cette approche ne peut, par essence, être prolongée à des taux arbitraires ou en dimension plus grande et ne permet donc pas d'explorer globalement le diagramme de phase. Néanmoins, elle semble être en accord avec la seule simulation numérique disponible en dimension $d = 3$ [135] (évoquée au paragraphe V.2.3), qui n'y décèle pas de transition. D'autre part, l'expérience acquise à l'équilibre thermique semble suggérer que le champ moyen ou le "1-boucle" suffisent en général à capturer *qualitativement* les traits d'un diagramme de phase, même si les valeurs correspondantes ne s'avèrent pas (nécessairement) *quantitativement* correctes. Ainsi la situation à l'équilibre a forgé l'idée, communément admise, que les fluctuations modifient seulement quantitativement la vision issue du calcul à 1-boucle. Ces éléments concordent pour soutenir la prédiction perturbative d'une dimension critique $d_c^{N,U} = 2$ pour l'existence de la transition de phase. Cependant, nous allons montrer, dans le chapitre VII, qu'il existe en fait une transition de phase pour les marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires en dimension trois, et même en toute dimension finie, ce qui s'oppose *qualitativement* au diagramme de phase précédent et infirme, plus généralement, l'idée commune, inspirée de l'équilibre, du rôle seulement quantitatif des fluctuations. Ceci sera développé au chapitre VII.

Conclusion

Ce chapitre avait pour vocation essentielle de donner une illustration de la notion de transition de phase absorbante, sous toutes les formes dont l'universalité peut la revêtir et de dégager le contexte dans lequel s'inscrivent les analyses que nous aborderons au chapitre VII. Nous avons ainsi rencontré la conjecture de GJ, rattachant génériquement les modèles, sièges d'une transition absorbante continue, à la classe de la percolation dirigée et son "paradoxe" : à cette omniprésence théorique fait écho une quasi-absence de réalisations expérimentales. Le défi lancé par cette inadéquation ne sera pas examiné plus avant, et recevra sans doute de futures attentions. Nous avons finalement donné, en vue de l'exposé de nos travaux, une introduction condensée des marches aléatoires avec branchement et annihilation. Nous allons provisoirement nous détourner de ces sujets, le temps du chapitre VI voué à les doter d'une théorie des champs, pour nous y replonger durablement au chapitre VII.

Chapitre VI

Théorie des champs pour les processus de réaction-diffusion

Ce chapitre est consacré à la dérivation d’une théorie des champs pour les processus de réaction-diffusion introduits au cours du chapitre précédent, afin d’en permettre l’analyse par des méthodes du groupe de renormalisation non perturbatif. Nous nous proposons ainsi de présenter, dans les deux premières sections, les deux formalismes principaux permettant de transcrire des processus de réaction-diffusion en une théorie des champs. Dans le premier, la construction de la “fonctionnelle de réponse” [84, 85] repose sur les équations de Langevin associées à ces processus. Le second prend ses racines dans l’équation maîtresse [87, 88] et exploite une analogie avec un système d’oscillateurs harmoniques quantiques pour en formuler une solution en terme d’une intégrale de chemin. Ces deux approches indépendantes sont comparées dans la dernière section. Ce chapitre a pour ambition de comprendre les fondements et le sens de la théorie des champs découlant de ces formalismes, afin d’en mieux maîtriser l’étude qui constitue l’objet du dernier chapitre.

VI.1 Formalisme de fonction de réponse

Nous présentons, dans cette section, la dérivation de la “fonctionnelle de réponse” due à Janssen et de Dominicis [84, 85]. Ce formalisme se fonde sur les équations de la dynamique issue de l’approche de Langevin. Nous commençons donc par exposer le principe de cette approche.

VI.1.1 Equation de Langevin

Au cours du chapitre V, nous avons établi une équation de champ moyen (V.5) pour déterminer l’évolution temporelle de la valeur moyenne de la densité $n(t)$ des particules soumises aux processus (V.1) à (V.4) de la percolation dirigée. Cette description néglige toute structure spatiale et donc l’influence des fluctuations (spatiales) de densité, qui s’avèrent altérer profondément les comportements critiques de ces systèmes “limités par la diffusion” à basse dimension. Nous avons ensuite affiné l’approche de champ moyen en y incorporant une dépendance spatiale *via* l’introduction d’une densité “locale” $n(x, t)$

représentant la moyenne du nombre de particules sur un volume $d^d x$. Dans le même esprit que la loi d'action de masse, nous avons alors formulé une équation de champ moyen “local” régissant l'évolution temporelle de $n(x, t)$. Cette équation, incluant le terme diffusif correspondant au processus (V.1), s'écrit :

$$\partial_t n(x, t) = D \nabla^2 n(x, t) + (\sigma - \mu) n(x, t) - 2 \lambda n(x, t)^2. \quad (\text{VI.1})$$

Cependant, cette description néglige encore les corrélations entre les variables $n(x, t)$ en différents points de l'espace. L'équation (VI.1) reste déterministe et ne traduit pas le caractère stochastique engendré au niveau “mésoscopique” par les différentes réalisations des processus microscopiques. L'idée est donc de modéliser phénoménologiquement l'effet des fluctuations stochastiques en s'inspirant des comportements critiques au voisinage de la transition continue. A l'approche de la transition, la longueur de corrélation temporelle et, avec elle, le temps de relaxation du paramètre d'ordre divergent, ce qui reflète le phénomène de ralentissement critique (voir le paragraphe V.1.1). Celui-ci amène à une séparation naturelle des échelles de temps. Il en découle, en effet, que toutes les autres grandeurs physiques fluctuent beaucoup plus rapidement que le paramètre d'ordre aux abords de la transition, et agissent donc sur celui-ci comme des forces stochastiques à variation temporelle rapide et de courte portée. On peut donc représenter leur effet par un terme de “bruit” aléatoire, ce qui conduit à l'équation de Langevin, qui s'écrit de façon générique :

$$\partial_t \phi(x, t) = F[\phi](x, t) + \eta(x, t). \quad (\text{VI.2})$$

Les champs $\phi(x, t)$ représentent des variables stochastiques “effectives”, c'est-à-dire qu'elles réalisent, comme $n(x, t)$, une moyenne locale des degrés de liberté microscopiques mais en codant, dans leur nature stochastique, ses fluctuations. Ces champs décrivent les modes de basse énergie et lentement variables, comprenant les fluctuations du paramètre d'ordre, les quantités conservées, les modes de Goldstone... L'influence des forces stochastiques est codée dans le bruit blanc (*i.e.* non corrélé) η qui englobe toutes les fluctuations de courte distance. Ce bruit est affecté d'une moyenne nulle et de corrélations “blanches” :

$$\langle \eta(x, t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2 \Gamma \delta(t - t') \delta^d(x - x'), \quad (\text{VI.3})$$

où le corrélateur Γ du bruit est, de façon générale, un opérateur (dérivatif pour une quantité conservée et dépendant éventuellement du champ). L'opérateur $F[\phi]$ contient l'ensemble des forces déterministes agissant sur le champ ϕ (*i.e.* ici le second membre de l'équation (VI.1) avec $n(x, t) \equiv \phi(x, t)$). Les deux équations (VI.2) et (VI.3) forment un modèle effectif continu des processus microscopiques.

La réversibilité de l'évolution se transcrit alors dans les propriétés de F et Γ . On peut formuler deux conditions suffisantes qui assurent que la dynamique conduit *in fine* le système vers la distribution canonique de probabilités d'équilibre $\propto \exp(-\mathcal{H}/k_B T)$. Ces deux contraintes sont les suivantes (voir par exemple [148]). D'une part, le bruit doit satisfaire la relation d'Einstein, qui relie linéairement ses corrélations (ici Γ) aux constantes de relaxation (ici D), soit :

$$\Gamma = D k_B T. \quad (\text{VI.4})$$

D'autre part, la composante réversible (non relaxationnelle) de la force doit être associée à un courant de probabilités stationnaire de divergence nulle, *i.e.* vérifiant :

$$\int d^d x \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left(F^{rev}[\phi] e^{-\mathcal{H}[\phi]/k_B T} \right) = 0. \quad (\text{VI.5})$$

Nous renvoyons à l'annexe D.1 pour des définitions explicites de ces notions et plus de détails. Si l'une de ces contraintes est brisée, la dynamique emporte le système vers un état hors de l'équilibre.

Nous ne discuterons pas ici du traitement direct des équations de Langevin ou des équations associées de Fokker-Planck pour l'évolution des densités de probabilités, et renvoyons par exemple à [149] pour une présentation de ce vaste domaine. Nous allons nous attacher à montrer que l'on peut formuler les équations de Langevin comme une théorie de deux champs, *via* le formalisme de la fonctionnelle de réponse, élaboré par Janssen et De Dominicis [84, 85]. Nous détaillons maintenant cette première dérivation.

VI.1.2 Fonctionnelle de réponse de Janssen-De Dominicis

Les équations de Langevin (VI.2) et (VI.3) admettent une solution en terme d'une intégrale de chemin, en recourant à un champ auxiliaire, le champ de réponse, introduit par Martin-Siggia-Rose [86]. Ce champ permet de construire une fonctionnelle de réponse, dont la formulation initiale résulte des travaux parallèles de Janssen [84] et de De Dominicis [85].

La dérivation de ce formalisme se déroule comme suit. Tout d'abord, la distribution de probabilités du bruit, caractérisée par les deux moments (VI.3), peut s'exprimer comme la distribution gaussienne :

$$\mathcal{P}[\eta] \propto e^{-\frac{1}{4} \int d^d x dt \eta(x, t) [\Gamma]^{-1} \eta(x, t)}, \quad (\text{VI.6})$$

où $[\Gamma]^{-1}$ est à prendre, de façon générale, au sens d'une fonction de Green. On s'intéresse à l'expression de la valeur moyenne d'une observable physique. Celle-ci s'obtient en sommant sur les différentes réalisations du bruit η , soit :

$$\langle \mathcal{O}[\phi] \rangle \propto \int \mathcal{D}\eta \mathcal{O}[\phi_\eta] \mathcal{P}[\eta], \quad (\text{VI.7})$$

où le champ ϕ_η vérifie l'équation du mouvement (VI.2) pour le bruit η . Cette contrainte sur la dynamique du champ ϕ_η , notée

$$\mathcal{C}[\phi] \equiv \{ \partial_t \phi(x, t) - F[\phi](x, t) - \eta(x, t) \}, \quad (\text{VI.8})$$

peut être matérialisée par une fonction de Dirac, imposant $\mathcal{C}[\phi] = 0$ en chaque point (x, t) de l'espace pour sélectionner, *dans l'espace fonctionnel* des champs ϕ , ceux qui

obéissent à la dynamique de Langevin. On peut ainsi écrire une expression de l'identité¹ :

$$1 = \int \mathcal{D}\phi \prod_{(x,t)} \delta(\mathcal{C}[\phi]) \quad (\text{VI.9})$$

$$= \int \mathcal{D}[i\tilde{\phi}] \mathcal{D}\phi e^{-\int d^d x dt \tilde{\phi} \mathcal{C}[\phi]} \quad (\text{VI.10})$$

$$= \int \mathcal{D}[i\tilde{\phi}] \mathcal{D}\phi e^{-\int d^d x dt \tilde{\phi}(x,t) (\partial_t \phi(x,t) - F[\phi](x,t) - \eta(x,t))}. \quad (\text{VI.11})$$

Dans la seconde égalité, les fonctions de Dirac sont écrites en représentation intégrale, par l'intermédiaire du champ auxiliaire imaginaire pur $\tilde{\phi}$ — le champ de Martin-Siggia-Rose [86]. Comme (VI.9) implique un produit sur (x,t) de $\delta(\cdot)$, cela nécessite de considérer les valeurs du champ $\tilde{\phi}(x,t)$ en chaque point de l'espace, ce qui transparaît dans l'intégration fonctionnelle $\int \mathcal{D}[i\tilde{\phi}]$ dans (VI.10). En injectant dans la valeur moyenne (VI.7) l'expression de l'identité (VI.11) puis en regroupant les contributions du bruit η , il vient alors :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}[\phi] \rangle \propto \int \mathcal{D}[i\tilde{\phi}] \mathcal{D}\phi \left\{ e^{-\int d^d x dt \tilde{\phi}(x,t) (\partial_t \phi(x,t) - F[\phi])} \right. \\ \left. \times \mathcal{O}[\phi] \int \mathcal{D}\eta e^{\int d^d x dt \tilde{\phi}(x,t) \eta(x,t)} \mathcal{P}[\eta] \right\}. \quad (\text{VI.12}) \end{aligned}$$

L'intégrale fonctionnelle sur le bruit apparaît alors comme une simple intégration gaussienne, que l'on effectue :

$$\int \mathcal{D}\eta e^{\int \tilde{\phi} \eta} \mathcal{P}[\eta] = \int \mathcal{D}\eta e^{\int [\tilde{\phi} \eta - \eta^2/4\Gamma]} \propto e^{\Gamma \tilde{\phi}^2}. \quad (\text{VI.13})$$

Finalement, on en déduit l'expression de la distribution de probabilités pour les variables ϕ , qui s'écrit :

$$\mathcal{P}[\phi] \propto \int \mathcal{D}[i\tilde{\phi}] e^{-\mathcal{F}[\tilde{\phi}, \phi]}, \quad (\text{VI.14})$$

où le poids statistique $\mathcal{F}[\tilde{\phi}, \phi]$ est la fonctionnelle de réponse de Janssen-De Dominicis [84, 85, 150] :

$$\mathcal{F}[\tilde{\phi}, \phi] = \int d^d x dt \left\{ \tilde{\phi}(x,t) [\partial_t \phi(x,t) - F[\phi](x,t)] - \tilde{\phi}(x,t) \Gamma \tilde{\phi}(x,t) \right\}. \quad (\text{VI.15})$$

Soulignons que, dans cette représentation, la contribution du bruit est entièrement codée dans le terme quadratique en $\tilde{\phi}$. La fonction de réponse dynamique $G(x-x', t-t')$ (analogue de la susceptibilité pour un système magnétique) s'exprime comme la

¹La contrainte $\mathcal{C}[\phi]$ est non linéaire en ϕ , la première égalité n'est donc vraie que dans la discrétisation de Ito, pour laquelle le jacobien $|\delta\mathcal{C}[\phi]/\delta\phi|$ est unité. Ceci est détaillé dans l'annexe D.2 (voir aussi [148, 139, 71]).

corrélation du champ “physique”² ϕ avec le champ auxiliaire $\tilde{\phi}$, ce qui confère à $\tilde{\phi}$ son appellation de “champ de réponse”. En effet, $G(x - x', t - t')$ est définie comme la dérivée du paramètre d’ordre $\langle \phi(x, t) \rangle$ par rapport à une source externe $J(x', t')$, évaluée à source nulle $J \rightarrow 0$. Or, ajouter un champ externe $J(x, t)$ à l’équation de Langevin et donc à la contrainte (VI.8) génère une contribution linéaire $\tilde{\phi} J$ dans la fonctionnelle de réponse $\mathcal{F}[\tilde{\phi}, \phi]$. Ainsi, la dérivation de $\langle \phi(x, t) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \phi(x, t) \mathcal{P}[\phi]$ par rapport à $J(x', t')$ “abaisse” un terme $\tilde{\phi}(x', t')$ et il en découle l’égalité annoncée :

$$G(x - x', t - t') = \langle \phi(x, t) \tilde{\phi}(x', t') \rangle. \quad (\text{VI.16})$$

Pour finir, remarquons que l’on peut formellement effectuer, dans (VI.14), l’intégrale sur le champ $\tilde{\phi}$. Il en résulte une fonctionnelle ne dépendant plus que du champ physique ϕ . Cependant, les calculs s’avèrent en général moins aisés dans la version à un champ qu’avec la fonctionnelle de réponse. Néanmoins, mentionnons qu’une nouvelle représentation en intégrale fonctionnelle des équations de Langevin, n’impliquant que le champ ϕ sans introduire de champ auxiliaire, a récemment été dérivée [151]. Cette version semble, elle, être propice à des calculs concrets [152].

La fonctionnelle de réponse (VI.14) munit ainsi les systèmes dynamiques d’une première théorie des champs. Toutefois, dans cette approche, les fluctuations stochastiques des processus sont intégrées *phénoménologiquement* à la description, à travers le bruit supposé gaussien de l’équation de Langevin. Les propriétés statistiques des fluctuations sont alors entièrement déterminées par le corrélateur du bruit. Si la dynamique préserve les relations de bilan détaillé, ce corrélateur est fixé par le théorème de fluctuation-dissipation. Dans le cas contraire, c’est-à-dire pour un système hors de l’équilibre, la forme du corrélateur doit être choisie arbitrairement. La qualité de la description est alors conditionnée par la pertinence de ce choix, ce qui rejaillit inéluctablement sur le formalisme de fonction de réponse qui découle des équations de Langevin.

Les processus de réaction-diffusion correspondent justement à la situation où la distribution du bruit n’est pas *a priori* connue. Nous allons montrer dans la section suivante que, pour ces processus, une deuxième représentation en terme d’intégrale de chemin peut être dérivée sans invoquer d’hypothèses sur la structure du bruit, c’est-à-dire sur la distribution des fluctuations. La source en est l’équation maîtresse.

VI.2 “Seconde quantification” des processus de réaction-diffusion

En s’appuyant sur l’équation maîtresse associée à des processus de réaction-diffusion, une représentation *exacte* sous forme d’intégrale fonctionnelle peut être construite, à travers le formalisme de “seconde quantification” élaboré par Doi [87, 153] et Peliti [88].

²L’interprétation physique du champ ϕ est délicate et discutée à la section VI.3.

Nous allons présenter la dérivation complète d’une théorie des champs pour les processus de réaction-diffusion généraux suivants :

$$A\emptyset \xleftrightarrow{D} \emptyset A \quad (\text{VI.17})$$

$$A \xrightarrow{\sigma_m} (m+1)A \quad (\text{VI.18})$$

$$kA \xrightarrow{\lambda_k} \emptyset, \quad (\text{VI.19})$$

qui englobent tous les processus introduits au chapitre V. Ces définitions ressemblent à celles des marches aléatoires avec branchement et annihilation, à la différence qu’est inclus ici le processus de destruction spontanée ($k = 1$), éventuellement combiné à d’autres mécanismes de destruction ($k = 2 \dots$).

Le principe dont procède ce formalisme est assez simple. Tâchons, avant d’entrer dans le détail, d’en donner une idée en tissant la trame des opérations qui composent cette dérivation. Plaçons-nous sur un réseau. L’état du système est entièrement déterminé par le nombre de particules en chaque site. La dynamique générée par les processus (VI.17) à (VI.19) consiste simplement en des modifications locales, au cours du temps, des nombres d’occupation à des taux (D, λ_k, σ_m) fixés. Ainsi, l’évolution temporelle des probabilités de configurations — régie par l’équation maîtresse — s’écrit comme un bilan de destructions et de productions de particules en chaque site. Cette évolution peut donc assez naturellement se modéliser par l’action d’opérateurs de création et d’annihilation (a^\dagger, a) sur ces sites. Cette formulation en termes d’opérateurs suggère de représenter par un vecteur d’état l’ensemble des configurations possibles du système pondérées par leur probabilité. Alors, de l’équation maîtresse, elle-même linéaire en probabilité, se déduit une équation du mouvement pour ce vecteur d’état, gouverné par un opérateur d’évolution “matriciel” formé de a et de a^\dagger . Comme l’équation maîtresse est du premier ordre en temps — ce qui traduit la nature irréversible des processus —, l’équation du mouvement ainsi obtenue s’apparente à une équation de Schrödinger pour le vecteur d’état (en temps imaginaire). L’expression d’une solution formelle de cette équation différentielle du premier ordre est immédiate. Alors, par analogie avec la mécanique quantique, on recourt à une base d’états cohérents pour exprimer la valeur moyenne d’une observable sous forme d’une intégrale fonctionnelle, sur deux champs ϕ et $\hat{\phi}$.

Précisons l’organisation de cette section. Nous construisons, dans un premier paragraphe, l’équation maîtresse associée aux processus (VI.17) à (VI.19) qui gouverne l’évolution temporelle des probabilités de configurations de particules sur les sites du réseau. Dans le deuxième paragraphe, nous introduisons des opérateurs bosoniques de création et d’annihilation (et l’espace de Fock associé) en assimilant le nombre d’occupation n de chaque site aux états propres d’énergie $|n\rangle$ d’un oscillateur harmonique. Nous transcrivons alors l’équation maîtresse en une équation de Schrödinger en temps imaginaire pour le vecteur d’état du système. Puis dans un troisième paragraphe, nous en exprimons la solution formelle sous forme d’une intégrale de chemin.

VI.2.1 Equation maîtresse

L’équation maîtresse décrit le changement infinitésimal de la probabilité d’une configuration α pendant un temps dt , qui résulte du bilan des probabilités de “gains” (liés

à des transitions $\beta \rightarrow \alpha$ qui changent un état β en l'état α) et de "pertes" (liées à des transitions $\alpha \rightarrow \gamma$ qui détruisent la configuration α), soit :

$$\frac{d\mathcal{P}(\alpha; t)}{dt} = \sum_{\beta} R_{\beta \rightarrow \alpha} \mathcal{P}(\beta; t) - \sum_{\gamma} R_{\alpha \rightarrow \gamma} \mathcal{P}(\alpha; t), \quad (\text{VI.20})$$

où les taux de transition $R_{\alpha \rightarrow \beta}$ sont homogènes, c'est-à-dire indépendants du temps. Établissons, pour des particules vivant sur les N sites d'un réseau hypercubique de maille a , le bilan des processus (VI.17) à (VI.19) qui les animent. Les configurations des particules sur le réseau sont notées $\{n_i\} \equiv (n_1, n_2, \dots, n_N)$, où n_i représente le nombre d'occupation du site i . L'équation maîtresse peut se décomposer en la somme sur chaque site des contributions de chacun des processus, soit :

$$\frac{d\mathcal{P}(\{n_i\}; t)}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{P}(n_i; t)}{\partial t} \Big|_{kA \rightarrow \emptyset} + \frac{\partial \mathcal{P}(n_i; t)}{\partial t} \Big|_{A \rightarrow (m+1)A} + \frac{\partial \mathcal{P}(n_i; t)}{\partial t} \Big|_{A \emptyset \rightarrow \emptyset A} \right], \quad (\text{VI.21})$$

où $\partial_t \mathcal{P}(n_i, t)$ ($\equiv \partial_t \mathcal{P}(\dots n_i \dots; t)$) désigne spécifiquement l'évolution induite par la modification du nombre d'occupation n_i du site i .

Examinons l'incidence du processus $kA \rightarrow \emptyset$ sur l'évolution de la probabilité $\mathcal{P}(n_i; t)$ pendant dt (schématisée sur la figure 1). Un événement tel que le site i contient

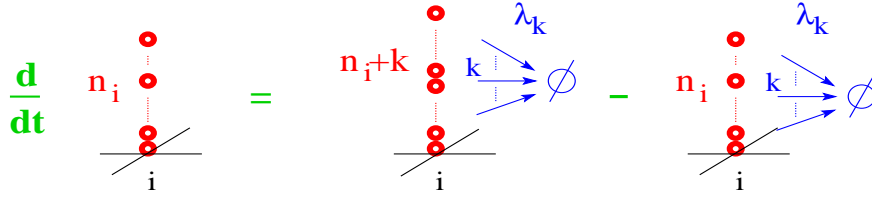


FIG. 1 – Schéma des événements induits par le processus $kA \rightarrow \emptyset$ susceptibles de modifier la probabilité $\mathcal{P}(n_i; t)$ que le site i compte n_i particules.

n_i particules au temps t et que k d'entre elles s'annihilent pendant dt réduit $\mathcal{P}(n_i; t)$. Cet événement se produit avec une probabilité $\lambda_k dt$ pour chacun des $(C_{n_i}^k)$ k -uplets que l'on peut former avec les n_i particules du site. Au contraire, $\mathcal{P}(n_i; t)$ augmente si le site, peuplé par $(n_i + k)$ particules au temps t , voit l'un des $(C_{n_i+k}^k)$ k -uplets possibles de particules s'annihiler. Le bilan de ce processus s'écrit donc, en absorbant dans λ_k le facteur $k!$:

$$\frac{\partial \mathcal{P}(n_i; t)}{\partial t} \Big|_{kA \rightarrow \emptyset} = \lambda_k \left[(n_i + k)(n_i + k - 1) \dots (n_i + 1) \mathcal{P}(n_i + k; t) - n_i(n_i - 1) \dots (n_i - k + 1) \mathcal{P}(n_i; t) \right]. \quad (\text{VI.22})$$

De même, le processus $A \rightarrow (m + 1)A$ accroît la probabilité $\mathcal{P}(n_i; t)$ si l'occupation du site est $(n_i - m)$ au temps t et que l'une de ces $(n_i - m)$ particules engendre m descendants, ce qui a une probabilité $\sigma_m (n_i - m) dt$ (figure 2). La diminution de $\mathcal{P}(n_i; t)$

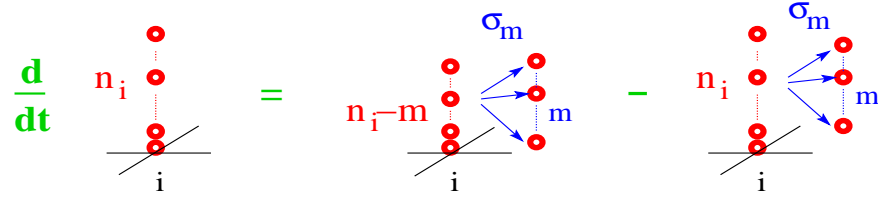


FIG. 2 – Schéma des événements induits par le processus $A \rightarrow (m + 1)A$ susceptibles de modifier la probabilité $\mathcal{P}(n_i; t)$ que le site i compte n_i particules.

est provoquée par la production de m particules-filles sur un site qui en contenait n_i au temps t , il s'ensuit le bilan :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}(n_i; t)}{\partial t} \right|_{A \rightarrow (m+1)A} = \sigma_m \left[(n_i - m) \mathcal{P}(n_i - m; t) - n_i \mathcal{P}(n_i; t) \right]. \quad (\text{VI.23})$$

Finalement, la diffusion implique les $\{v\}$ sites voisins (figure 3) et le changement de $\mathcal{P}(\dots n_i, n_v, \dots; t)$ provient de l'échange d'une particule entre le site i et l'un de ses sites voisins v . Chacune des n_i particules du site i a une probabilité $D dt$ de diffuser

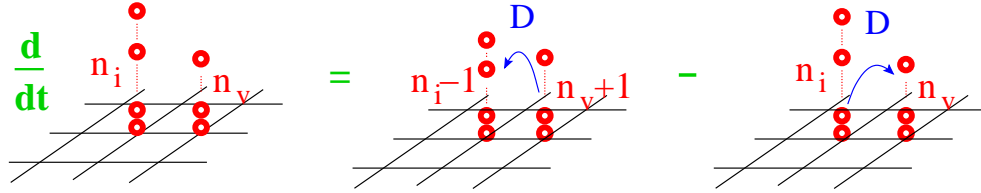


FIG. 3 – Schéma des événements induits par le processus $A\emptyset \rightarrow \emptyset A$ susceptibles de modifier la probabilité $\mathcal{P}(n_i; t)$ que le site i compte n_i particules.

par site voisin ce qui diminue d'autant $\mathcal{P}(\dots n_i, n_v, \dots; t)$. Si le site i compte $(n_i - 1)$ particules, chacune des $(n_v + 1)$ particules de l'un des voisins peut venir incrémenter de 1 la population du site i pour augmenter $\mathcal{P}(\dots n_i, n_v, \dots; t)$, soit :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}(n_i; t)}{\partial t} \right|_{A\emptyset \rightarrow \emptyset A} = D \sum_{\{v\}} \left[(n_v + 1) \mathcal{P}(\dots n_i - 1, n_v + 1 \dots; t) - n_i \mathcal{P}(\dots n_i, n_v \dots; t) \right], \quad (\text{VI.24})$$

ce qui finalement complète l'équation maîtresse (VI.21).

Définissons l'état initial du réseau. L'on s'attend, à grand temps, à ce que la dynamique du système ait effacé l'influence des conditions initiales — par exemple dans un régime critique. L'on choisit d'attribuer, par exemple, au nombre d'occupation initial d'un site i , une distribution poissonnienne non corrélée. Chaque site est ainsi peuplé de n_i particules avec une probabilité $e^{-n_0} n_0^{n_i} / n_i!$, où n_0 représente l'occupation moyenne par site. L'on décide de fixer indépendamment l'occupation de chaque site, de sorte

que les configurations initiales du réseau suivent la distribution :

$$\mathcal{P}(\{n_i\}; 0) = e^{-N n_0} \prod_i \frac{n_0^{n_i}}{n_i!}. \quad (\text{VI.25})$$

VI.2.2 Opérateurs de création et d’annihilation

La dynamique décrite par l’équation maîtresse (VI.21) peut être formulée en termes d’opérateurs de création et d’annihilation agissant sur un vecteur d’état. (Nous renvoyons, par exemple, à [154] pour des détails complémentaires sur ce qui suit). Pour cela, l’on fait correspondre, au nombre n_i d’occupation d’un site, la valeur propre associée à un vecteur $|n_i\rangle$ d’un espace de Hilbert qui est état propre de l’opérateur “nombre de particules” ($a_i^\dagger a_i$) de ce site — c’est-à-dire état propre d’énergie d’un oscillateur harmonique en ce site. On introduit ainsi en chaque site du réseau des opérateurs de création et d’annihilation qui vérifient les relations de commutation bosonique³ :

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad , \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad (\text{VI.26})$$

où les indices i et j indiquent les sites du réseau. Le ket vide $|0\rangle$ est défini en chaque site par $a_i|0\rangle = 0$ et un vecteur $|n_i\rangle$ de l’espace de Hilbert par l’action de l’opérateur de création sur ce ket : $|n_i\rangle = (a_i^\dagger)^{n_i}|0\rangle$. L’ensemble des configurations $\{n_i\}$ possibles du système est alors représenté par l’espace de Fock des états $|\{n_i\}\rangle = \otimes_i |n_i\rangle$. L’effet des opérateurs a_i et a_i^\dagger sur un état $|\{n_i\}\rangle$ est de modifier le nombre d’occupation du site i avec les normalisations (non usuelles mais commodes pour la suite) :

$$a_i^\dagger |\dots n_i \dots\rangle = |\dots n_i + 1 \dots\rangle \quad a_i |\dots n_i \dots\rangle = n_i |\dots n_i - 1 \dots\rangle. \quad (\text{VI.27})$$

On définit le vecteur “état du système” au temps t , codant toute l’information sur les probabilités des configurations du système, par la superposition pondérée des états de Fock :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\{n_i\}} \mathcal{P}(\{n_i\}; t) |\{n_i\}\rangle. \quad (\text{VI.28})$$

Soulignons que ce vecteur d’état $|\psi(t)\rangle$ n’implique pas des amplitudes de probabilité, comme en mécanique quantique, mais est directement linéaire dans les probabilités, comme l’équation maîtresse.

Il suffit alors de dériver l’expression (VI.28) par rapport au temps, en injectant pour chaque état $|\{n_i\}\rangle$ son équation maîtresse $d\mathcal{P}(\{n_i\}; t)/dt$, pour obtenir l’évolution temporelle $d|\psi(t)\rangle/dt$ du vecteur d’état. Celle-ci apparaît trivialement issue de l’action des opérateurs a_i et a_i^\dagger sur les états $|\{n_i\}\rangle$. Par exemple, d’après l’équation (VI.23),

³Le choix d’opérateurs bosoniques est dicté ici par la possibilité d’occupation multiple des sites. La restriction de l’occupation à au plus une particule ($n_i = 0$ ou 1), pertinente dans certains modèles, requiert des opérateurs fermioniques (des matrices de Pauli) [155, 154] et débouche, en général, sur des modèles de spins quantiques dont certains s’avèrent intégrables en une dimension [156].

l'évolution temporelle induite par le processus de branchement s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{\{n_i\}} \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{P}(n_i; t)}{\partial t} \Big|_{A \rightarrow (m+1)A} \right] |\{n_i\}\rangle &= \sigma_m \sum_i \left[\sum_{\{n_i=m\}}^{\infty} n_i \mathcal{P}(n_i; t) \Big| \dots n_i + m \dots \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\{n_i=0\}}^{\infty} n_i \mathcal{P}(n_i; t) \Big| \dots n_i \dots \right] \\ &= \sigma_m \sum_i \left[(a_i^\dagger)^m a_i^\dagger a_i - a_i^\dagger a_i \right] |\psi(t)\rangle. \end{aligned} \quad (\text{VI.29})$$

L'effet des processus d'annihilation et de diffusion se déduit, de façon analogue, de (VI.22) et (VI.24) respectivement. Ainsi, l'évolution du vecteur d'état découle directement de l'équation maîtresse et s'écrit :

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\hat{\mathcal{H}}[\{a_i^\dagger\}, \{a_i\}] |\psi(t)\rangle, \quad (\text{VI.30})$$

avec le "hamiltonien" (non hermitique) ordonné en produit normal :

$$\hat{\mathcal{H}}[\{a_i^\dagger\}, \{a_i\}] = \sum_i \left[-D \sum_{\{v\}} a_i^\dagger (a_v - a_i) - \lambda_k (1 - (a_i^\dagger)^k) a_i^k + \sigma_m (1 - (a_i^\dagger)^m) a_i^\dagger a_i \right]. \quad (\text{VI.31})$$

L'équation (VI.30) du mouvement de $|\psi(t)\rangle$ s'apparente donc à une équation de Schrödinger en "temps imaginaire". Comme celle-ci est du premier ordre en temps, on peut en donner une solution formelle $|\psi(t)\rangle = e^{-\hat{\mathcal{H}}t} |\psi(0)\rangle$.

Finalement, dans cette représentation, le vecteur d'état à $t = 0$ reflétant la distribution poissonnienne (VI.25) des configurations initiales, s'écrit :

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= \sum_{n_i} \left[e^{-N n_0} \prod_i \frac{n_0^{n_i}}{n_i!} \right] |\{n_i\}\rangle \\ &= e^{-N n_0} \prod_i \sum_{n_i} \frac{n_0^{n_i} (a_i^\dagger)^{n_i}}{n_i!} |\{0\}\rangle \\ &= e^{-N n_0} \prod_i e^{n_0 a_i^\dagger} |\{0\}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{VI.32})$$

Il s'agit maintenant d'exploiter cette formulation "quantique" des processus stochastiques pour exprimer les valeurs moyennes d'observables physiques sous forme d'intégrales fonctionnelles.

Calcul d'une observable

Une grandeur physique ne dépend, pour les processus du type naissance ou mort, que des nombres n_i de particules par site. La valeur moyenne d'une observable est alors donnée par la somme pondérée des contributions de toutes les configurations, *i.e.* :

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \sum_{\{n_i\}} \mathcal{P}(\{n_i\}; t) \mathcal{O}(\{n_i\}), \quad (\text{VI.33})$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente donc la moyenne sur tous les états possibles. Comme le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est lui-même linéaire en \mathcal{P} (et non en amplitude de probabilité), insérer, comme en mécanique quantique, $\mathcal{O}(t)$ entre le bra et le ket de ce vecteur ne donne pas sa valeur moyenne (VI.33). Pour pallier à cela, on introduit l'état de projection :

$$\langle \cdot | = \langle \{0\} | \prod_i e^{a_i}, \quad (\text{VI.34})$$

qui est état propre à gauche de l'opérateur a_i^\dagger de valeur propre unité, *i.e.* $\langle \cdot | a_i^\dagger = \langle \cdot |$. On associe à $\mathcal{O}(\{n_i\})$ l'opérateur diagonal $\tilde{\mathcal{O}}$ en substituant (dans le développement de Taylor de la fonction $\mathcal{O}(\{n_i\})$) la variable n_i par l'opérateur nombre de particules ($a_i^\dagger a_i$). Comme l'état de Fock $|\{n_i\}\rangle$ est état propre de cet opérateur — de valeur propre n_i —, l'action de $\tilde{\mathcal{O}}$ sur cet état s'écrit simplement $\tilde{\mathcal{O}}|\{n_i\}\rangle = \mathcal{O}(\{n_i\})|\{n_i\}\rangle$. On montre alors — voir l'annexe D.3 — que la valeur moyenne (VI.33) s'exprime en projetant l'opérateur $\tilde{\mathcal{O}}$ à gauche sur l'état projectif (VI.34) et à droite sur le vecteur d'état :

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \langle \cdot | \tilde{\mathcal{O}} |\psi(t)\rangle. \quad (\text{VI.35})$$

L'opérateur $\tilde{\mathcal{O}}$ est, par construction, une fonction des a_i^\dagger et des a_i : $\tilde{\mathcal{O}} \equiv \tilde{\mathcal{O}}(\{a_i^\dagger, a_i\})$. Cependant, l'opérateur de création agissant à gauche sur l'état de projection $\langle \cdot |$ laisse, par définition de cet état, le projecteur inchangé. On peut donc commuter dans $\tilde{\mathcal{O}}$ tous les a_i^\dagger vers la gauche pour former un nouvel opérateur $\hat{\mathcal{O}}(\{a_i\})$ correspondant à la même valeur moyenne mais ne dépendant, lui, que des a_i . Pour un opérateur ordonné $\tilde{\mathcal{Q}}$, ceci revient simplement au remplacement formel de tous les a_i^\dagger par 1 : $\tilde{\mathcal{Q}}(\{a_i^\dagger, a_i\}) = \tilde{\mathcal{Q}}(\{1, a_i\}) = \hat{\mathcal{Q}}(\{a_i\})$. Nous privilégions par la suite l'expression de la valeur moyenne en terme de l'opérateur $\hat{\mathcal{O}}$, soit :

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \langle \cdot | \hat{\mathcal{O}}(\{a_i\}) |\psi(t)\rangle. \quad (\text{VI.36})$$

Remarquons finalement que la conservation des probabilités implique que l'opérateur d'évolution temporelle annihile à gauche l'état de projection. En effet, la conservation des probabilités s'écrit :

$$\sum_{\{n_i\}} \mathcal{P}(\{n_i\}; t) = \langle \cdot | \hat{1} |\psi(t)\rangle = 1. \quad (\text{VI.37})$$

En dérivant la deuxième égalité par rapport à t , il vient :

$$\frac{d}{dt} \langle \cdot | e^{-\hat{\mathcal{H}}t} |\psi(0)\rangle = -\langle \cdot | \hat{\mathcal{H}} |\psi(t)\rangle = 0, \quad (\text{VI.38})$$

qui doit être vérifié pour état $|\psi(t)\rangle$, ce qui impose $\langle \cdot | \hat{\mathcal{H}} = 0$. Cette propriété permet (comme $\hat{\mathcal{H}}$ ne dépend pas du temps) d'attribuer un temps arbitraire $t_a > t$ à l'état de projection dans l'équation (VI.36), car elle induit :

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \langle \cdot | \hat{\mathcal{O}} e^{-\hat{\mathcal{H}}t} |\psi(0)\rangle = \langle \cdot | e^{-\hat{\mathcal{H}}(t_a-t)} \hat{\mathcal{O}} e^{-\hat{\mathcal{H}}t} |\psi(0)\rangle. \quad (\text{VI.39})$$

Cette dernière égalité signifie que la mesure d'une observable au temps t est indépendante du temps t_a affecté à l'état de projection tant que $t < t_a$.

VI.2.3 Les états cohérents

Résumons les étapes précédentes. De la “seconde quantification” de l’équation maîtresse a découlé la construction d’un opérateur $\hat{\mathcal{H}}$ qui gouverne l’évolution du vecteur d’état $|\psi(t)\rangle$ du système. Ce vecteur, combiné à un état de projection $\langle \cdot |$ — état propre à droite de valeur propre unité de a_i — permet de déterminer la valeur moyenne d’une grandeur physique selon :

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \langle \cdot | \hat{\mathcal{O}}(\{a_i\}) e^{-\hat{\mathcal{H}}[\{a_i^\dagger\}, \{a_i\}]t} |\psi(0)\rangle. \quad (\text{VI.40})$$

En exploitant l’analogie avec la mécanique quantique, on peut maintenant exprimer cette valeur moyenne comme une intégrale de chemin, en recourant aux états cohérents de l’assemblée d’oscillateurs harmoniques attachés aux sites du réseau. Les états cohérents en un site i sont définis comme vecteurs propres à droite de l’opérateur d’annihilation de valeur propre ϕ_i . Leur expression est précisée dans l’annexe D.3. Ces états forment une base (sur-) complète du système d’oscillateurs, dont la relation de fermeture est également dérivée dans l’annexe D.3.

L’idée consiste à scinder dans (VI.40) l’évolution temporelle entre deux instants $t = 0$ et $t = t_f$ en N tranches infinitésimales de largeur $\Delta t = t_f/N$, indicées par α ($t_\alpha \equiv \alpha \Delta t/N$) puis de prendre la limite $N \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$. On utilise la formule de Trotter :

$$\left(1 + \frac{t}{N} \hat{\mathcal{H}}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{t \hat{\mathcal{H}}}, \quad (\text{VI.41})$$

pour découper l’exponentielle en N tranches $(1 + \Delta t \hat{\mathcal{H}})$ et insérer entre chacune d’elles une base complète⁴ d’états cohérents de valeurs propres $\{\phi_{\alpha,i}\} \equiv (\phi_{\alpha,1}, \dots, \phi_{\alpha,N})$. Dans cette notation, α indice la tranche et le second indice i repère le site. Alors, l’expression (VI.40) est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(t) \rangle = \mathcal{N}^{-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{\alpha=1}^N \left[d^2 \{\phi_{\alpha,i}\} \langle \{\phi_{\alpha,i}\} | 1 + \Delta t \hat{\mathcal{H}} | \{\phi_{\alpha-1,i}\} \rangle \right] \\ \times d^2 \{\phi_{0,i}\} \langle \cdot | \hat{\mathcal{O}} | \{\phi_{N,i}\} \rangle \langle \{\phi_{0,i}\} | \psi(0) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{VI.42})$$

où \mathcal{N} est un facteur de normalisation (contenant entre autre tous les facteurs π de (D.41)) et $d^2 \{\phi_{\alpha,i}\} \equiv \prod_i d\phi_{\alpha,i} d\phi_{\alpha,i}^*$. Commençons par calculer le terme entre crochets. On pose :

$$\mathcal{H}_{\alpha,i} \equiv \frac{\langle \{\phi_{\alpha,i}\} | \hat{\mathcal{H}}[\{a_i^\dagger\}, \{a_i\}] | \{\phi_{\alpha-1,i}\} \rangle}{\langle \{\phi_{\alpha,i}\} | \{\phi_{\alpha-1,i}\} \rangle}. \quad (\text{VI.43})$$

Alors, en employant la formule (D.40) du recouvrement entre deux états cohérents :

$$\langle \{\phi_{\alpha,i}\} | 1 + \Delta t \hat{\mathcal{H}} | \{\phi_{\alpha-1,i}\} \rangle = \exp \left(\sum_i \left(-\frac{|\phi_{\alpha,i}|^2}{2} - \frac{|\phi_{\alpha-1,i}|^2}{2} + \phi_{\alpha,i}^* \phi_{\alpha-1,i} \right) \right) \left[1 + \Delta t \mathcal{H}_{\alpha,i} \right]. \quad (\text{VI.44})$$

Examinons à présent les états cohérents “aux limites” (*i.e.* initiaux à $t_{\alpha=0}$ de valeurs propres $\{\phi_{0,i}\}$ et finaux à $t_{\alpha=N}$ de valeurs propres $\{\phi_{N,i}\}$). Les états cohérents finaux

⁴L’expression de cette base complète d’états cohérents est donnée par (D.41).

interviennent dans l'expression $\langle \cdot | \hat{\mathcal{O}} | \{\phi_{N,i}\} \rangle$. L'opérateur $\hat{\mathcal{O}}(\{a_i\})$ n'étant construit que de a_i , ceux-ci en sont donc vecteurs propres à droite — c'est-à-dire, si l'on note $\mathcal{O}(\{\phi_{N,i}\})$ la fonction correspondant au développement de Taylor de $\hat{\mathcal{O}}$ dans lequel les a_i sont substitués par les valeurs propres $\phi_{N,i}$, l'action de $\hat{\mathcal{O}}$ sur l'état de Fock s'écrit $\hat{\mathcal{O}} | \{\phi_{N,i}\} \rangle = \mathcal{O}(\{\phi_{N,i}\}) | \{\phi_{N,i}\} \rangle$. Il en résulte :

$$\langle \cdot | \hat{\mathcal{O}} | \{\phi_{N,i}\} \rangle = \langle \cdot | \{\phi_{N,i}\} \rangle \mathcal{O}(\{\phi_{N,i}\}). \quad (\text{VI.45})$$

En outre, le temps $t_{\alpha=N} = t_f$, auquel l'observable est mesurée, est arbitraire dans la mesure où le résultat est invariant, d'après (VI.39), quel que soit le temps de mesure $t < t_f$. On peut donc librement changer dans (VI.45) le temps de mesure en remplaçant $\mathcal{O}(\{\phi_{N,i}\})$ par $\mathcal{O}(\{\phi_{\alpha,i}\})$.⁵

Pour finir, comme le projecteur s'identifie à l'ensemble des états cohérents $\{1\}$ de valeurs propres l'unité en chaque site *modulo* une normalisation — en comparant (VI.34) à (D.30) —, on peut en calculer le recouvrement avec les états cohérents finaux $\alpha = N$:

$$\langle \cdot | \{\phi_{N,i}\} \rangle \propto \exp\left(-\frac{|\phi_{N,i}|^2}{2} + \phi_{N,i}\right), \quad (\text{VI.46})$$

(en passant $e^{-1/2}$ dans la constante de proportionnalité).

Les états cohérents initiaux sont, eux, couplés à l'état initial du réseau à travers $\langle \{\phi_{0,i}\} | \psi(0) \rangle$. L'état initial poissonnien (VI.32) coïncide, à une normalisation près, avec l'ensemble des états cohérents $\{n_0\}$ de valeurs propres n_0 en chaque site. Son recouvrement avec les états cohérents initiaux $\alpha = 0$ est donc donné par :

$$\langle \{\phi_{0,i}\} | \psi(0) \rangle \propto \exp\left(-\frac{|\phi_{0,i}|^2}{2} + \phi_{0,i}^* n_0\right), \quad (\text{VI.47})$$

(en rejetant, de même, $e^{-n_0^2/2}$ dans la constante de proportionnalité). En regroupant les expressions (VI.44) à (VI.47) et en absorbant dans \mathcal{N} les normalisations de (VI.46) et (VI.47), la valeur moyenne (VI.42) se réécrit :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(t) \rangle &= \mathcal{N}^{-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{\alpha=0}^N d^2 \{\phi_{\alpha,i}\} \mathcal{O}(\{\phi_{\alpha,i}\}) [1 + \Delta t \mathcal{H}_{\alpha,i}]^N \\ &\quad \exp\left(\sum_i \left[\sum_{\alpha=1}^N \left(-|\phi_{\alpha,i}|^2 + \phi_{\alpha,i}^* \phi_{\alpha-1,i}\right) - |\phi_{0,i}|^2 + \phi_{N,i} + n_0 \phi_{0,i}^* \right]\right). \end{aligned} \quad (\text{VI.48})$$

Déterminons le terme $\mathcal{H}_{\alpha,i}$ défini par (VI.43). L'opérateur d'évolution $\hat{\mathcal{H}}$ est ordonné en produit normal d'après (VI.31). Ainsi, d'une part, l'action à droite, sur des états cohérents indicés par α , de l'opérateur d'annihilation a_i génère leur valeur propre au site i , *i.e.* $a_i | \{\phi_{\alpha,i}\} \rangle = \phi_{\alpha,i} | \{\phi_{\alpha,i}\} \rangle$ (a). D'autre part, l'action à gauche de a_i^\dagger sur le bra $\langle \{\phi_{\alpha,i}\} |$ se déduit du complexe conjugué de l'expression (a) et produit donc la valeur propre $\phi_{\alpha,i}^*$. Le recouvrement des deux états $\langle \{\phi_{\alpha,i}\} | \{\phi_{\alpha-1,i}\} \rangle$ se compense alors avec le dénominateur de (VI.43). L'expression de $\mathcal{H}_{\alpha,i}$ découle donc simplement de

⁵Autrement dit, comme l'opérateur d'évolution $\hat{\mathcal{H}}$ annihile à gauche le projecteur (paragraphe VI.2.2), $\hat{\mathcal{O}}$ aurait pu être inséré entre deux tranches quelconques.

l'expression (VI.31) du "hamiltonien" en substituant tous les opérateurs a_i^\dagger et a_i par les valeurs propres $\phi_{\alpha,i}^*$ et $\phi_{\alpha-1,i}$:

$$\mathcal{H}_{\alpha,i} = \hat{\mathcal{H}}[\{\phi_{\alpha,i}^*\}, \{\phi_{\alpha-1,i}\}] \equiv (\text{VI.31}) \Big|_{a_i^\dagger \rightarrow \phi_{\alpha,i}^* ; a_i \rightarrow \phi_{\alpha-1,i}}. \quad (\text{VI.49})$$

Il reste à effectuer le passage à la limite $N \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$. Dans cette limite, l'ensemble discret de valeurs prises par les variables $\phi_{\alpha,i}$ pour $\alpha = \{0, \dots, N\}$ en un site i devient une infinité continue de valeurs $\phi_i(t)$ lorsque t parcourt l'intervalle $[0, t_f]$. La différence discrète entre deux valeurs consécutives tend alors vers la dérivée temporelle :

$$\phi_{\alpha,i} - \phi_{\alpha-1,i} = \Delta t \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t_\alpha) + o(\Delta t^2), \quad (\text{VI.50})$$

en ne retenant que le premier ordre en Δt , en cohérence avec la formule de Trotter. Alors les différents morceaux composant l'argument de l'exponentielle dans (VI.48) deviennent, dans la limite continue en temps :

$$\sum_{\alpha=1}^N \left(-|\phi_{\alpha,i}|^2 + \phi_{\alpha,i}^* \phi_{\alpha-1,i} \right) = -\Delta t \sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha,i}^* \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \Big|_{t_\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} - \int_0^{t_f} dt \phi_i^*(t) \partial_t \phi_i(t) \quad (\text{VI.51})$$

et pour les conditions aux temps limites :

$$-|\phi_{0,i}|^2 + \phi_{N,i} + n_0 \phi_{0,i}^* \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \phi_i(t_f) + n_0 \phi_i^*(0), \quad (\text{VI.52})$$

car le terme $\phi_i^*(0)\phi_i(0)$ couple des champs au même instant $t = 0$ et génère donc des contributions nulles. (Ceci est vrai dans la discrétisation de Ito, voir l'annexe D.2).

Remarquons ensuite qu'évaluer, dans l'expression (VI.49) de $\mathcal{H}_{\alpha,i}$, les champs ϕ et ϕ^* au même instant α induit des corrections d'ordre $(\Delta t)^2$. On peut donc changer dans (VI.49) $\phi_{\alpha-1,i}$ en $\phi_{\alpha,i}$, soit⁶ :

$$\mathcal{H}_{\alpha,i} = \sum_i \left[-D \sum_{\{v\}} \phi_{\alpha,i}^* (\phi_{\alpha,v} - \phi_{\alpha,i}) - \lambda_k (1 - (\phi_{\alpha,i}^*)^k) \phi_{\alpha,i}^k + \sigma_m (1 - (\phi_{\alpha,i}^*)^m) \phi_{\alpha,i}^* \phi_{\alpha,i} \right]. \quad (\text{VI.53})$$

On utilise alors de nouveau la formule de Trotter pour reconstruire l'exponentielle :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\alpha=0}^N [1 + \Delta t \mathcal{H}_{\alpha,i}] = \exp \left(\sum_{\alpha} \Delta t \mathcal{H}_{\alpha,i} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp \left(\int_0^{t_f} dt \mathcal{H}_t \right). \quad (\text{VI.54})$$

Le produit, sur toutes les valeurs de α , des éléments d'intégration dans (VI.48) devient, dans la limite continue en temps, une mesure fonctionnelle dans la variable t :

$$\prod_{\alpha=0}^N d^2 \{\phi_{\alpha,i}\} \equiv \prod_i \prod_{\alpha=0}^N d\phi_{\alpha,i} d\phi_{\alpha,i}^* \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \prod_i \int \mathcal{D}\phi_i(t) \mathcal{D}\phi_i^*(t). \quad (\text{VI.55})$$

En rassemblant les résultats (VI.51) à (VI.55), on obtient la limite continue en temps de (VI.48). On a donc construit une expression *exacte* de la valeur moyenne d'une

⁶Ceci revient implicitement à adopter la représentation de Ito, voir l'annexe D.2.

observable, sur le réseau, sous forme d'une intégrale fonctionnelle sur deux champs ϕ_i et ϕ_i^* . Nous considérons désormais ces deux champs comme *indépendants*⁷. On attribue donc au champ ϕ_i^* un nouveau symbole $\hat{\phi}_i$ et l'expression (VI.48) s'écrit alors dans la limite continue temporelle :

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \mathcal{N}^{-1} \int \prod_i \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\hat{\phi}_i \mathcal{O}(\{\phi_i\}(t)) e^{-\mathcal{S}[\hat{\phi}_i, \phi_i; t_f]} \quad (\text{VI.56})$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{S}[\hat{\phi}_i, \phi_i; t_f] = \sum_i \left[\int_0^{t_f} dt \left(\hat{\phi}_i(t) \partial_t \phi_i(t) + \mathcal{H}_t \right) - \phi_i(t_f) - n_0 \hat{\phi}_i(0) \right]. \quad (\text{VI.57})$$

Nous avons donc dérivé une théorie des champs associée aux processus microscopiques (VI.17) à (VI.19). L'action (VI.57) est du premier ordre en temps, comme l'équation maîtresse, ce qui traduit ici le caractère irréversible de la dynamique. Remarquons que le passage de ces processus à l'intégrale fonctionnelle (VI.56) n'a nécessité aucune hypothèse sur les propriétés statistiques d'un bruit. Les fluctuations stochastiques se transposent automatiquement dans les fluctuations des deux champs, décrites par une intégrale fonctionnelle, par analogie avec la mécanique quantique.

VI.2.4 Limite continue d'espace

Une dernière étape, commode pour traiter la théorie des champs (VI.57), consiste à effectuer le passage à la limite continue d'espace. Cette étape implique, elle, une approximation.

Il convient pour cela d'établir une correspondance entre les fonctions de l'indice discret i sur le réseau et les fonctions de la variable continue x . On pose les règles de substitution $\phi_i \rightarrow a^d \phi(x)$, $\hat{\phi}_i \rightarrow \hat{\phi}(x)$ et $\sum_i \rightarrow \int d^d x / a^d$. La différence entre plus proches voisins impliquée dans le terme de diffusion tend à la limite continue d'espace vers un gradient $\sum_{\{v\}} (\phi_v - \phi_i) \rightarrow a^2 \nabla^2 \phi(x)$ (au premier ordre). Finalement, en définissant les taux "continus" de réactions $\bar{\lambda}_k = a^{(k-1)d} \lambda_k$, $\bar{\sigma}_m = \sigma_m$ et $\bar{D} = a^2 D$ (et en abandonnant aussitôt les $\bar{\cdot}$), l'intégrale fonctionnelle (VI.57) s'écrit dans la limite continue spatiale :

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\hat{\phi} \mathcal{O}(\phi(x, t)) e^{-\mathcal{S}[\hat{\phi}, \phi; t_f]}. \quad (\text{VI.58})$$

L'on identifie la normalisation \mathcal{N} à la fonctionnelle génératrice $\mathcal{Z} = \langle 1 \rangle$:

$$\mathcal{N} \equiv \mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\mathcal{S}[\hat{\phi}, \phi; t_f]}. \quad (\text{VI.59})$$

L'action $\mathcal{S}[\hat{\phi}, \phi; t_f] \equiv \mathcal{S}[\hat{\phi}, \phi] + \mathcal{S}_{CL}[\hat{\phi}, \phi; t_f]$ se compose d'un terme d'ensemble :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\hat{\phi}, \phi] = \int d^d x dt \left\{ \hat{\phi}(x, t) \left(\partial_t - D \nabla^2 \right) \phi(x, t) \right. \\ \left. - \lambda_k \left(1 - \hat{\phi}(x, t)^k \right) \phi(x, t)^k + \sigma_m \left(1 - \hat{\phi}(x, t)^m \right) \hat{\phi}(x, t) \phi(x, t) \right\} \quad (\text{VI.60}) \end{aligned}$$

⁷Ceci équivaut simplement à un changement de variables $[\phi, \phi^*] \rightarrow [\mathfrak{R}(\phi), \mathfrak{I}(\phi)]$.

et d'une partie transcrivant purement les conditions aux limites temporelles :

$$\mathcal{S}_{CL}[\hat{\phi}, \phi; t_f] = - \int d^d x \left\{ \phi(x, t_f) + n_0 \hat{\phi}(x, 0) \right\}. \quad (\text{VI.61})$$

Discutons des caractéristiques de l'action (VI.60). Celle-ci se scinde en une partie "gaussienne" libre \mathcal{S}_0 et une partie d'"interactions" \mathcal{S}_{int} . La partie "gaussienne", *i.e.* quadratique dans les champs :

$$\mathcal{S}_0 = \int d^d x dt \hat{\phi} \left(\partial_t - D \nabla^2 \right) \phi, \quad (\text{VI.62})$$

provient du processus *diffusif*. Elle s'identifie à l'action du mouvement brownien, décrivant la diffusion d'une particule libre. Le reste de l'action \mathcal{S}_{int} contient toutes les interactions entre particules, originant des processus *réactifs*. Leur nature est ici potentielle (sans terme dérivatif) car toutes les réactions considérées se déroulent entre les particules d'un même site.⁸

Les équations classiques du mouvement se déduisent du point de stationnarité de l'action $\mathcal{S}[\hat{\phi}, \phi]$ par rapport aux champs ϕ et $\hat{\phi}$, dont les coordonnées sont données par :

$$\delta \mathcal{S} / \delta \phi = 0 = -(\partial_t + D \nabla^2) \hat{\phi} - k \lambda_k (1 - \hat{\phi}^k) \phi^{k-1} + \sigma_m (1 - \hat{\phi}^m) \hat{\phi} \quad (\text{VI.63})$$

$$\delta \mathcal{S} / \delta \hat{\phi} = 0 = (\partial_t - D \nabla^2) \phi + k \lambda_k \phi^k \hat{\phi}^{k-1} + \sigma_m (1 - (m+1) \hat{\phi}^m) \phi. \quad (\text{VI.64})$$

L'équation (VI.63) admet trivialement la solution homogène $\hat{\phi} = 1$. En l'insérant dans l'équation (VI.64) il vient :

$$\partial_t \phi(x, t) = D \nabla^2 \phi(x, t) - k \lambda_k \phi(x, t)^k + m \sigma_m \phi(x, t). \quad (\text{VI.65})$$

Cette équation correspond exactement à l'équation de champ moyen (loi d'action de masse) "local" associée aux processus (VI.17) à (VI.19) obtenue en considérant une dépendance spatiale de la densité (de manière analogue à (VI.1)). Au niveau "classique", le champ $\phi(x, t)$ s'identifie donc à une densité locale moyennant les degrés de liberté microscopiques (les particules) sur un petit volume $d^d x$.

Ceci ne reste pas vrai de façon générale [155]. En effet, la densité locale n est représentée par l'opérateur $a_i^\dagger a_i$. Ses moments $\overline{n^k}$ correspondent donc aux moyennes "quantiques" $\langle (a_i^\dagger a_i)^k \rangle$. Or, comme mentionné précédemment, ces moyennes s'expriment de façon équivalente en termes des seuls a_i , en commutant à gauche tous les a_i^\dagger avant de les remplacer formellement par 1. (En outre, comme dans le passage à l'intégrale de chemin a_i engendre $\phi(x)$, on peut directement transposer ceci au champ $\phi(x)$, soit $\langle a_i^k \rangle \equiv \langle \phi(x)^k \rangle$). Ainsi, si la densité moyenne \bar{n} coïncide bien avec la moyenne du champ $\langle \phi \rangle$ (en remplaçant formellement a_i^\dagger par 1 dans $\langle a_i^\dagger a_i \rangle$), cela n'est pas vérifié par ses moments d'ordres supérieurs, par exemple $\overline{n^2} = \langle \phi^2 \rangle + \langle \phi \rangle$. On peut montrer [155] que si la distribution de ϕ est gaussienne — donc dans le cas de la diffusion pure — celle

⁸Notons, pour la suite, qu'en théorie de perturbation les fonctions de corrélation sont calculées en développant perturbativement le terme d'interaction $e^{-\mathcal{S}_{int}}$ puis en évaluant les valeurs moyennes par rapport à la partie libre $e^{-\mathcal{S}_0}$. La théorie de perturbation est donc valide dans la limite $\sigma_m, \lambda_k \rightarrow 0$.

de la densité n qui en résulte est poissonnienne, ce qui rejoint un résultat classique du mouvement brownien.

Le champ ϕ n'a donc pas trivialement la signification physique d'une densité locale, dans le sens où ses corrélations ne sont pas directement reliées aux moments de la densité. Cependant, sous certaines conditions, cette distinction s'atténue et l'on peut quand même assimiler le champ ϕ à un champ de densité, ce qui est discuté dans la section VI.3.

VI.2.5 Action de la percolation dirigée

Pour terminer, envisageons plus particulièrement les processus (V.1) à (V.4) définissant le modèle de la percolation dirigée, introduit dans le paragraphe V.1.1 du chapitre précédent. Ces processus s'identifient trivialement à ceux étudiés dans ce chapitre : (V.1) \equiv (VI.17), (V.2) \equiv (VI.18) pour $m = 1$ à un taux σ , (V.3) \equiv (VI.19) pour $k = 2$ à un taux λ^9 et (V.4) \equiv (VI.19) pour $k = 1$ à un taux μ . Remarquons au passage qu'avec cette correspondance, l'équation classique du mouvement (VI.65) redonne bien, en identifiant le champ $\phi(x, t)$ à la densité locale $n(x, t)$, la loi d'action de masse à dépendance spatiale (VI.1) établie pour les processus de la percolation dirigée.

Exprimons alors explicitement l'action de la percolation dirigée (repérée par l'indice DP). En développant, pour ces processus, l'action (VI.60) autour de sa solution stationnaire $\hat{\phi} = 1$ à travers la translation $\hat{\phi}(x, t) = 1 + \tilde{\phi}(x, t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{DP}[\tilde{\phi}, \phi] = \int d^d x dt \left\{ \tilde{\phi}(x, t) \left(\partial_t - D \nabla^2 - (\sigma - \mu) \right) \phi(x, t) \right. \\ \left. + 2 \lambda \tilde{\phi}(x, t) \phi(x, t)^2 - \sigma \tilde{\phi}(x, t)^2 \phi(x, t) + \lambda \left(\phi(x, t) \tilde{\phi}(x, t) \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{VI.66})$$

On peut alors symétriser la partie d'interaction en recourant au changement d'échelle des champs $\tilde{\phi} \rightarrow \sqrt{2\lambda/\sigma} \tilde{\phi}$ et $\phi \rightarrow \sqrt{\sigma/2\lambda} \phi$, qui change l'action (VI.66) en :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{DP}[\tilde{\phi}, \phi] = \int d^d x dt \left\{ \tilde{\phi}(x, t) \left(\partial_t - D \nabla^2 - (\sigma - \mu) \right) \phi(x, t) \right. \\ \left. + \sqrt{2\sigma\lambda} \left(\tilde{\phi}(x, t) \phi(x, t)^2 - \tilde{\phi}(x, t)^2 \phi(x, t) \right) + \lambda \left(\phi(x, t) \tilde{\phi}(x, t) \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{VI.67})$$

Concentrons-nous sur les dimensions canoniques des différentes composantes de cette action. La partie temporelle du terme cinétique confère au produit des champs $\tilde{\phi}\phi$ la dimension canonique $[\tilde{\phi}\phi] = k^d$, en notant k une échelle d'impulsion. De façon générale, la dimension propre de chacun des champs ne peut être déterminée *a priori* et requiert l'examen des divergences des graphes de Feynman. Ici, la symétrisation des champs impose d'attribuer la même dimension aux deux champs, de sorte que $[\phi] = [\tilde{\phi}] = k^{d/2}$. On en déduit, pour le couplage effectif du vertex à trois points $u = \sqrt{2\sigma\lambda}$, la dimension canonique $[u] = k^{2-d/2}$ (en affectant au temps t la dimension "naïve" k^{-2}). Ainsi, ce couplage devient marginal en dimension quatre, ce qui définit

⁹En se référant à l'équivalence entre coagulation et annihilation de paires énoncée à la section V.2.

donc la dimension critique supérieure $d_c = 4$ de la percolation dirigée.

Notons qu'alors le couplage λ du vertex à quatre points est non pertinent au voisinage de d_c et peut donc être supprimé dans l'action. Sous cette forme (à $\lambda = 0$), l'action (VI.67) de la percolation dirigée coïncide avec l'action de la théorie de Regge [105], ce qui atteste de l'équivalence discutée à la section V.1.2 entre ces deux théories.

VI.3 Lien entre les deux approches

Au cours des deux sections précédentes nous avons, par des dérivations indépendantes, formulé deux représentations en terme d'une intégrale fonctionnelle des processus de réaction-diffusion. Penchons-nous à présent sur le lien qui existe entre ces deux approches.

VI.3.1 Nature du bruit

Considérons la fonctionnelle génératrice (VI.59) émanant de la seconde dérivation :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-\mathcal{S}_{DP}[\tilde{\phi}, \phi]}, \quad (\text{VI.68})$$

associée à l'action \mathcal{S}_{DP} de la percolation dirigée donnée par (VI.66). Pour la relier à la fonctionnelle de réponse issue de la première dérivation, introduisons un terme de bruit en exprimant — en réminiscence de la section VI.1 — l'exponentielle de la partie quadratique en $\tilde{\phi}$ de \mathcal{S}_{DP} comme provenant de l'intégration sur un bruit blanc η :

$$e^{-(\lambda\phi^2 - \sigma\phi)\tilde{\phi}^2} = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{P}(\eta) e^{-\eta\tilde{\phi}}, \quad (\text{VI.69})$$

où $\mathcal{P}(\eta)$ représente la distribution gaussienne :

$$\mathcal{P}(\eta) = e^{-\frac{\eta^2}{2(\lambda\phi^2 - \sigma\phi)}}. \quad (\text{VI.70})$$

Le champ $\tilde{\phi}$ n'apparaît alors plus que linéairement dans \mathcal{S}_{DP} et, comme ce champ est imaginaire pur, son intégration produit une fonction de Dirac $\int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp(-\tilde{\phi}\mathcal{C}[\phi, \eta]) = \delta(\mathcal{C}[\phi, \eta])$ qui impose la contrainte :

$$\mathcal{C}[\phi, \eta] = \partial_t \phi(x, t) - D \nabla^2 \phi(x, t) + 2\lambda \phi(x, t)^2 - (\sigma - \mu) \phi(x, t) - \eta(x, t) = 0. \quad (\text{VI.71})$$

Le champ ϕ obéit donc à la dynamique de Langevin associée aux processus de la percolation dirigée, pour un bruit gaussien η dont la distribution $\mathcal{P}(\eta)$ est codée dans la partie quadratique en $\tilde{\phi}$ de \mathcal{S}_{DP} . On déduit directement de (VI.70) les corrélations de ce bruit :

$$\langle \eta \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = (-\lambda\phi^2 + \sigma\phi) \delta^d(x - x') \delta(t - t'). \quad (\text{VI.72})$$

Tout d’abord, ce corrélateur est proportionnel au champ ϕ et s’annule donc dans l’état vide de sorte que celui-ci ne fluctue plus. Outre cette propriété qui traduit simplement l’existence d’un état absorbant, la structure (VI.72) des corrélations du bruit est non triviale et rend manifeste la difficulté de construire directement une équation de Langevin si rien ne guide, par ailleurs, le choix de ces corrélations (*e.g.* un théorème de fluctuation-dissipation). Ceci se révèle d’autant plus épineux que les corrélations du bruit (VI.72) peuvent s’avérer négatives. En effet, dans le cas de l’annihilation pure ($\sigma = 0$), d’après (VI.72), on a $\langle \eta^2 \rangle = -\lambda \phi^2$, ce qui exige que le bruit η soit imaginaire, autrement dit que la représentation de Langevin (VI.71) soit complexe! Ce caractère imaginaire traduit ici physiquement l’existence des *anti*-corrélations, évoquées dans la section V.2, induites par les fluctuations stochastiques qui tendent, à temps long, à ségréguer les particules et ralentir fortement leur extinction (en dimension $d < d_c$).

L’origine d’un corrélateur imaginaire est à imputer à la nature même du champ ϕ , qui ne représente pas directement un champ de densité, ce qui rejaillit sur le sens (non physique) du bruit η . En fait, tel qu’introduit à travers la transformation gaussienne (VI.69), le bruit η ne contient que le bruit lié aux *réactions*, en excluant le bruit issu de la *diffusion* ((VI.72) ne dépend pas de D) et ne correspond donc qu’à une partie du bruit physique. Rien ne le contraint par conséquent à être réel. Nous renvoyons à [157, 155] pour une analyse approfondie du rôle de la nature réelle ou imaginaire du bruit.

Ceci appelle plusieurs remarques. Il est possible, sous certaines conditions, d’approximer l’équation maîtresse par une équation de Fokker-Planck, dont on peut alors déduire directement une équation de Langevin [71]. Dans ce cas, le bruit apparaissant dans l’équation de Langevin représente tout le bruit physique, et ses corrélations — toujours positives — incluent donc naturellement la contribution du bruit de diffusion en plus de bruit de réaction. De cette équation de Langevin peut alors être dérivée une fonctionnelle de réponse. Par cette voie, la contribution complète du bruit se répercute dans l’action \mathcal{S}' obtenue. Une action \mathcal{S}'_{DP} “complète” a notamment été dérivée, selon cette procédure, par Janssen [91] pour les réactions chimiques du premier modèle de Schlögl (voir le paragraphe V.1.2). Or il apparaît que la composante du bruit de diffusion dans \mathcal{S}'_{DP} se révèle dans ce cas non pertinent [91]. L’action complète \mathcal{S}'_{DP} s’avère ainsi équivalente à l’action (VI.67) dérivée ici. Ceci implique que l’on peut dans ce cas légitimement assimiler le champ ϕ à un champ physique de densité locale.

De manière plus générale, lorsque les corrélations du bruit (VI.72) sont positives (caractérisant donc un bruit réel), on peut attribuer au champ ϕ une signification physique. Une manière de l’envisager est qu’alors la représentation de Langevin (VI.71) est définie et s’interprète bien comme l’équation du mouvement d’un champ ϕ — physique — de densité, moyennant localement des degrés de liberté microscopiques.

VI.3.2 Synthèse

Pour conclure, comparons les deux approches en discutant leur domaine d’application respectif. L’équation maîtresse décrit, à travers l’évolution de la distribution de probabilités, la dynamique stochastique des degrés de liberté “*microscopiques*” — *i.e.*

des particules. Par conséquent, la fonctionnelle génératrice qui en dérive transcrit automatiquement, dans les corrélations de deux champs ϕ et $\tilde{\phi}$, les propriétés statistiques des fluctuations stochastiques. Le champ physique ϕ s'apparente dans le cas générique (d'un bruit réel) à une densité locale. L'équation de Langevin décrit, elle, la dynamique d'une variable stochastique *mésoscopique*, qui matérialise une densité moyennée localement. Elle perd donc l'information sur les propriétés statistiques des processus sous-jacents, qui sont modélisées par un bruit — en général blanc. La fonctionnelle de réponse incorpore ainsi phénoménologiquement les fluctuations du champ ϕ . Si les corrélations du bruit sont par ailleurs connues (par exemple fixées par un théorème de fluctuation-dissipation ou inférées directement de l'équation maîtresse), les deux approches sont équivalentes.

L'usage de l'une ou l'autre de ces approches est conditionné par la nature du modèle initial. La dérivation d'une intégrale fonctionnelle à partir de l'équation maîtresse n'est possible que si les règles dynamiques microscopiques se formulent comme des processus locaux ne dépendant que du nombre de particules. Cette contrainte restreint ce formalisme à des processus de type naissance et mort ou échange de particules, qui relèvent donc de la forme générale (VI.17) à (VI.19) pour *une* espèce de particules. Néanmoins, cette description s'étend à un nombre arbitraire n d'espèces de particules [158] pouvant se transmuter par réactions chimiques (*e.g.* $A \rightarrow B + C$) puisque ces dernières correspondent encore à des créations ou destructions de particules. Dans ce cas, la théorie des champs associée comporte $2n$ champs ϕ^α et $\hat{\phi}^\alpha$, où $\alpha = 1 \dots n$ indice les différentes espèces. Les processus de réaction-diffusion en général se prêtent donc naturellement à une dérivation "exacte", ce qui représente un domaine relativement vaste. Cependant, dans la plupart des autres cas (l'hydrodynamique, les phénomènes de croissance ...), on ne sait formuler qu'une description mésoscopique du système, en terme d'un champ aléatoire local. On dispose, dans cette situation, d'une équation de Langevin et on recourt donc naturellement au formalisme de la fonctionnelle de réponse pour formuler une théorie des champs. Bien sûr, l'écriture d'une théorie des champs, si elle concentre toute notre attention, n'a rien d'un passage obligé et bien d'autres approches sont envisageables!

Conclusion

Nous avons dans ce chapitre analysé les fondements de la formulation en intégrale fonctionnelle des processus de réaction-diffusion. Nous avons en particulier montré qu'une théorie des champs peut être dérivée pour ces processus de façon exacte — *via* l'équation maîtresse — hormis le passage à la limite continue d'espace. Nous disposons maintenant d'actions explicites pour la théorie des champs de la percolation dirigée (VI.67) et de celle des marches aléatoires avec branchement et annihilation (VI.60), que nous allons à présent mettre à profit pour explorer, par les méthodes du groupe de renormalisation non perturbatif, les propriétés universelles et non-universelles de ces systèmes.

Chapitre VII

Réaction-diffusion et groupe de renormalisation non perturbatif

Dans ce chapitre, nous exposons les contributions apportées lors de ce travail de thèse à l'étude des systèmes hors de l'équilibre [89, 90]. Ces travaux s'attachent à sonder d'une part les propriétés universelles des systèmes de la classe de la percolation dirigée et, d'autre part, des propriétés non universelles relatives à un modèle de cette classe : les marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires. Ce chapitre s'organise en trois sections. Dans la première, nous dérivons des équations de flot du groupe de renormalisation non perturbatif génériques pour les processus de réaction-diffusion. Nous appuyant sur ces dernières, nous calculons, dans une deuxième section, les exposants critiques de la percolation dirigée puis nous déterminons, pour finir, le diagramme de phase des marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires entre une et six dimensions d'espace.

VII.1 Groupe de renormalisation non perturbatif hors de l'équilibre

Dans cette section, nous généralisons le formalisme de l'action effective moyenne aux systèmes hors de l'équilibre, en définissant une “action effective moyenne” Γ_k pour ces systèmes puis en dérivant une équation exacte pour le flot de Γ_k . Nous élaborons ensuite un *ansatz* de Γ_k générique pour les processus de réaction-diffusion à l'ordre le plus bas en dérivées et établissons explicitement les équations de flot associées à cet *ansatz* qui sous-tendent toutes les études de ce chapitre.

VII.1.1 Action effective moyenne hors de l'équilibre

Il s'agit de construire une “action effective moyenne” Γ_k — procédant du même principe qu'à l'équilibre (*cf.* section II.1.2) — pour des systèmes hors de l'équilibre, c'est-à-dire un objet qui moyenne progressivement les modes de fluctuation de haute énergie pour aboutir à une description effective en termes des modes de basse énergie. Au cours de cette intégration, Γ_k doit réaliser une interpolation continue entre une

définition microscopique “ \mathcal{S} ” du système en termes des degrés de liberté initiaux et une fonctionnelle “ Γ_0 ” du paramètre d’ordre qui décrit les propriétés macroscopiques du système.

A l’équilibre, Γ_k s’apparente à une énergie et coïncide donc à l’échelle $k = \Lambda$ avec le hamiltonien (au facteur $k_B T$ près) et à l’échelle $k = 0$ avec l’énergie libre de Gibbs. Hors de l’équilibre, les fonctionnelles d’énergie, comme la fonction de partition \mathcal{Z} ou l’énergie libre, ne sont pas définies. Il s’agit donc d’identifier des fonctionnelles “ \mathcal{S} ” et “ Γ_0 ” qui jouent un rôle analogue à celles-ci hors de l’équilibre. A cet égard, la fonctionnelle génératrice $\mathcal{Z}[\tilde{\phi}, \phi]$, construite au chapitre VI, apparaît comme un point de départ naturel. En effet, bien que l’action $\mathcal{S}[\tilde{\phi}, \phi]$ ne s’interprète pas comme l’énergie du système (elle n’est plus reliée *via* $k_B T$ à un hamiltonien), \mathcal{Z} est la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation $\langle \tilde{\phi}^m \phi^n \rangle$ du système.¹ Par analogie avec l’équilibre, on peut alors définir à partir de \mathcal{Z} une “énergie libre” \mathcal{W} (génératrice des fonctions de corrélation connexes) puis une fonctionnelle génératrice Γ des fonctions de corrélation 1-particule irréductibles. Ceci suggère donc de construire un objet Γ_k qui s’identifie à l’action microscopique $\mathcal{S}[\tilde{\phi}, \phi]$ à l’échelle $k = \Lambda$ et à Γ à l’échelle $k = 0$. Comme Γ génère les fonctions de corrélation 1-PI, la qualité essentielle de l’action effective moyenne d’être reliée aux quantités physiques est ainsi préservée. Détaillons plus avant cette construction.

Construction de Γ_k

La fonctionnelle Γ_k doit relier continûment, par intégration progressive des fluctuations, \mathcal{S} à Γ . Hors de l’équilibre, les différents modes de fluctuation varient non seulement sur des distances *spatiales* plus ou moins grandes (correspondant à différents régimes d’impulsion) mais également sur des échelles *temporelles* variées (correspondant à différents régimes de fréquence). L’action effective Γ_k doit donc intégrer les fluctuations de grande impulsion *et* de grande fréquence, de l’échelle microscopique $k = \Lambda$ où aucun mode n’est encore inclus dans Γ_k à l’échelle physique $k = 0$ où toutes les fluctuations ont peu à peu été incorporées. Pour cela on ajoute, dans la fonctionnelle \mathcal{Z} , un terme de “masse” $\Delta \mathcal{S}_k$ qui assure la suppression des contributions des champs de basse impulsion et basse fréquence. On introduit au préalable des sources externes J et \tilde{J} couplées aux champs ϕ et $\tilde{\phi}$. Alors, en adoptant une écriture vectorielle : $\mathcal{J} = [J, \tilde{J}]$ et $\Phi = [\phi, \tilde{\phi}]$, la fonctionnelle $\mathcal{Z}_k[\mathcal{J}]$ (en présence des sources et du terme de masse) s’écrit :

$$\mathcal{Z}_k[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\Phi e^{-\mathcal{S}[\Phi] - \Delta \mathcal{S}_k[\Phi] + \int_{\mathbf{x}} \mathcal{J} \cdot {}^t\Phi} \quad \text{où } \mathcal{D}\Phi \equiv \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\tilde{\phi}, \quad (\text{VII.1})$$

où ${}^t\Phi$ représente le transposé de Φ et où l’opérateur “ \cdot ” marque, dans ce chapitre, le produit de vecteurs ou de matrices. Les variables temporelle et spatiales sont réunies au sein d’une variable globale $\mathbf{x} \equiv (x, t)$ et l’élément d’intégration est noté synthétiquement

¹L’interprétation physique des champs $\tilde{\phi}$ et ϕ s’avère parfois délicate, comme souligné au chapitre VI. Cependant, rappelons que pour la percolation dirigée ainsi que pour les marches aléatoires avec branchement et annihilation, le champ ϕ peut être assimilé à une densité locale et les corrélations des deux champs traduisent donc bien les propriétés physiques du système.

$\int_{\mathbf{x}} \equiv \int d^d x dt$. Le terme de masse, quadratique dans les champs, implique de façon générique une matrice de coupure 2×2 (notée \tilde{R}_k) et s'écrit, dans l'espace de Fourier :

$$\Delta \mathcal{S}_k[\Phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} \Phi(-q, -\omega) \cdot \tilde{R}_k(q^2, \omega) \cdot {}^t\Phi(q, \omega), \quad (\text{VII.2})$$

où le symbole \tilde{M} repère une matrice M dans l'espace de Fourier, selon les notations définies dans l'annexe E.

Précisons la forme de la matrice de coupure \tilde{R}_k . Comme discuté au chapitre VI, l'action \mathcal{S} pour un système hors de l'équilibre se scinde en deux composantes :

$$\mathcal{S}[\Phi] = \mathcal{S}_0[\Phi] + \mathcal{S}_{int}[\Phi] \equiv \int d^d x dt \tilde{\phi}(x, t) (\partial_t - D \nabla^2) \phi(x, t) + \int d^d x dt U[\Phi]. \quad (\text{VII.3})$$

Pour les processus de réaction-diffusion, la partie "gaussienne" \mathcal{S}_0 transcrit la diffusion et le potentiel $U[\Phi]$ code toutes les réactions chimiques couplant les particules.²

La dépendance dynamique (en q et en ω) du "propagateur" (défini comme l'inverse de la partie quadratique en champs de l'action) provient donc exclusivement du terme diffusif associé au produit des champs $\tilde{\phi} \phi$. Il suffit ainsi d'affecter une masse aux modes $\tilde{\phi} \phi$ de basses impulsion et fréquence. Alors la matrice \tilde{R}_k prend de la forme :

$$\tilde{R}_k(q^2, \omega) = \begin{bmatrix} 0 & R_k(q^2, \omega) \\ R_k(q^2, -\omega) & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{VII.4})$$

La fonction de coupure $R_k(q^2, \omega)$ obéit à des contraintes analogues à celles établies au premier chapitre ((II.5) et (II.9)), en les étendant à la dépendance en fréquence, soit :

$$\begin{cases} R_k(q^2, \omega) \sim k^2 & \text{quand } q^2 \ll k^2 \text{ ou } |\omega| \ll k \\ R_k(q^2, \omega) \rightarrow 0 & \text{quand } q^2 \gg k^2 \text{ ou } |\omega| \gg k \\ R_k(q^2, \omega) \rightarrow 0 & \text{quand } k \rightarrow 0 \text{ à } q \text{ et } \omega \text{ fixés} \\ R_k(q^2, \omega) \rightarrow \infty & \text{quand } k \rightarrow \Lambda \text{ à } q \text{ et } \omega \text{ fixés.} \end{cases} \quad (\text{VII.5})$$

La première contrainte assure que la fonction de coupure $R_k(q^2, \omega)$ agit comme une masse $\sim k^2$ qui gèle la propagation des modes lentement variables dans l'espace et dans le temps, supprimant ainsi leur contribution à l'intégrale fonctionnelle. La deuxième contrainte garantit que $\Delta \mathcal{S}_k[\Phi]$ disparaît à grandes impulsion et fréquence, de manière à ne pas altérer l'intégration des modes à variations rapides.

On définit la fonctionnelle $\mathcal{W}_k[\mathcal{J}] = \ln \mathcal{Z}_k[\mathcal{J}]$ de sorte que les valeurs moyennes effectives (à l'échelle k) des champs microscopiques $\tilde{\phi}$ et ϕ se déduisent par dérivation de \mathcal{W}_k par rapport aux sources :

$$\psi_k = \langle \phi \rangle \equiv \frac{\delta \mathcal{W}_k}{\delta J} \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_k = \langle \tilde{\phi} \rangle \equiv \frac{\delta \mathcal{W}_k}{\delta \tilde{J}}. \quad (\text{VII.6})$$

²Cette décomposition s'applique également à un système hors de l'équilibre quelconque, \mathcal{S}_0 décrit alors la partie libre (relaxationnelle) et \mathcal{S}_{int} les interactions, éventuellement dérivatives, du système.

On définit alors l'action effective moyenne Γ_k comme la transformée de Legendre de \mathcal{W}_k , modifiée par la soustraction du terme de masse :

$$\Gamma_k[\Psi_k] + \mathcal{W}_k[\mathcal{J}] = \int_{\mathbf{x}} \mathcal{J} \cdot {}^t\Psi_k - \Delta \mathcal{S}_k[\Psi_k], \quad (\text{VII.7})$$

en notant $\Psi_k = [\psi_k, \tilde{\psi}_k]$. Le champ ψ_k s'apparente à un paramètre d'ordre effectif, s'identifiant au paramètre d'ordre physique dans la limite $k \rightarrow 0$. La présence du terme de masse dans (VII.7) permet de recouvrer, par l'intermédiaire des deux dernières contraintes de (VII.5), les comportements asymptotiques de Γ_k aux échelles extrêmes : $\Gamma_{k=0} = \Gamma$ — la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation 1-particule irréductibles, transformée de Legendre standard de \mathcal{W} — et $\Gamma_{k=\Lambda} = \mathcal{S}$ — l'action microscopique. La démonstration de ceci est tout à fait analogue à celle du paragraphe II.1.2.

Nous avons défini une action effective moyenne hors de l'équilibre, établissons maintenant sa variation avec l'échelle k .

Dérivation de l'équation de flot de Γ_k

Pour dériver l'équation de flot de Γ_k , nous allons suivre le même cheminement que dans l'annexe A, en employant ici une écriture matricielle. Le symbole \widehat{X} repère les matrices (2×2) dans l'espace des x et on introduit les vecteurs d'opérateurs de dérivées fonctionnelles $\hat{\delta}_{\mathcal{J}_x} = [\delta/\delta J(\mathbf{x}), \delta/\delta \tilde{J}(\mathbf{x})]$ (et de même $\hat{\delta}_{\Psi_x}$).

Commençons par établir la variation de Γ_k sous un changement infinitésimal de l'échelle k , à Ψ_k fixé. Celle-ci découle de la dérivation de (VII.7) par rapport à k :

$$\partial_k \Gamma_k[\Psi_k] \Big|_{\Psi} = -\partial_k \mathcal{W}_k[\mathcal{J}] \Big|_{\Psi} + \int_{\mathbf{x}} \partial_k \mathcal{J}(\mathbf{x}) \cdot {}^t\Psi_k(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \Psi_k(\mathbf{x}) \cdot \partial_k \widehat{R}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot {}^t\Psi_k(\mathbf{x}') \quad . \quad (\text{VII.8})$$

La variation par rapport à l'échelle k de \mathcal{W}_k , à Ψ fixé, se déduit de $\partial_k \mathcal{W}_k$ à \mathcal{J} fixé en ajoutant le terme de dérivation composée :

$$\partial_k \mathcal{W}_k \Big|_{\Psi} = \partial_k \mathcal{W}_k \Big|_{\mathcal{J}} + \int_{\mathbf{y}} \partial_k \mathcal{J}(\mathbf{y}) \cdot {}^t \hat{\delta}_{\mathcal{J}_y} \mathcal{W}_k. \quad (\text{VII.9})$$

Il s'agit alors de déterminer $\partial_k \mathcal{W}_k \Big|_{\mathcal{J}}$. Comme dans l'annexe A, cette variation s'obtient en dérivant la définition (VII.1) de \mathcal{Z}_k par rapport à k , à \mathcal{J} fixé, puis en exploitant la relation $\Psi_k = \hat{\delta}_{\mathcal{J}} \mathcal{W}_k$, d'où :

$$\partial_k \mathcal{W}_k e^{\mathcal{W}_k} = \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \hat{\delta}_{\mathcal{J}_x} \cdot \partial_k \widehat{R}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot {}^t \hat{\delta}_{\mathcal{J}_{x'}} \right\} e^{\mathcal{W}_k}. \quad (\text{VII.10})$$

On en déduit, en explicitant l'action de l'opérateur $\hat{\delta}_{\mathcal{J}}$ sur $\exp(\mathcal{W}_k)$ (puis en divisant par $\exp(\mathcal{W}_k)$) :

$$\partial_k \mathcal{W}_k \Big|_{\mathcal{J}} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \left\{ \hat{\delta}_{\mathcal{J}_x} \mathcal{W}_k \cdot \partial_k \widehat{R}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot {}^t \hat{\delta}_{\mathcal{J}_{x'}} \mathcal{W}_k + \text{Tr} \left[\partial_k \widehat{R}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \hat{\delta}_{\mathcal{J}_x} \left({}^t \hat{\delta}_{\mathcal{J}_{x'}} \mathcal{W}_k \right) \right] \right\}. \quad (\text{VII.11})$$

Le dernier terme du membre de droite représente la matrice des dérivées fonctionnelles secondes de \mathcal{W}_k par rapport aux champs J et \tilde{J} , que l'on note $\widehat{\mathcal{W}}_k^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \hat{\delta}_{\mathcal{J}_x} \left({}^t \hat{\delta}_{\mathcal{J}_{x'}} \mathcal{W}_k \right)$. En reportant les résultats (VII.9) et (VII.11) dans (VII.8), on obtient l'expression souhaitée de la variation de Γ_k avec l'échelle k :

$$\partial_k \Gamma_k[\Psi_k] \Big|_{\Psi} = \frac{1}{2} \text{Tr} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \partial_k \widehat{R}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \widehat{\mathcal{W}}_k^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (\text{VII.12})$$

On peut s'attacher — comme dans l'annexe A — à donner à l'équation (VII.12) une forme auto-référente, c'est-à-dire ne dépendant que de Γ_k et de ses dérivées. A cette fin, on détermine l'inverse de $\widehat{\mathcal{W}}_k^{(2)}$ de la façon suivante. D'une part, on dérive la relation $\Psi_k(\mathbf{x}) = \hat{\delta}_{\mathcal{J}_x} \mathcal{W}_k$ par rapport à ${}^t \hat{\delta}_{\Psi_{x'}}$ en explicitant dans le membre de droite la dérivation composée, ce qui fournit une formulation de l'inverse de $\widehat{\mathcal{W}}_k^{(2)}$:

$$\hat{1} \cdot \delta^{(d+1)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int_{\mathbf{y}} {}^t \hat{\delta}_{\Psi_{x'}} \mathcal{J}(\mathbf{y}) \cdot \widehat{\mathcal{W}}_k^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (\text{VII.13})$$

D'autre part, l'expression de la matrice jacobienne ${}^t \hat{\delta}_{\Psi_{x'}} \mathcal{J}(\mathbf{y})$ — inverse de $\widehat{\mathcal{W}}_k^{(2)}$ — s'obtient par les deux dérivations successives $\hat{\delta}_{\Psi_y}$ puis ${}^t \hat{\delta}_{\Psi_{x'}}$ de l'équation (VII.7), soit :

$${}^t \hat{\delta}_{\Psi_{x'}} \mathcal{J}(\mathbf{y}) = \widehat{\Gamma}_k^{(2)}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \widehat{R}_k(\mathbf{x}' - \mathbf{y}), \quad (\text{VII.14})$$

en notant $\widehat{\Gamma}_k^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ la matrice des dérivées fonctionnelles secondes de Γ_k . En remplaçant $\widehat{\mathcal{W}}_k^{(2)}$ par son inverse (VII.14) dans l'équation de flot de Γ_k (VII.12), celle-ci se réécrit :

$$\partial_k \Gamma_k[\Psi_k] \Big|_{\Psi} = \frac{1}{2} \text{Tr} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \partial_k \widehat{R}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \left[\widehat{\Gamma}_k^{(2)} + \widehat{R}_k \right]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (\text{VII.15})$$

Donnons également son expression en transformée de Fourier (avec les conventions de l'annexe E) :

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \int_{\mathbf{q}} \partial_k \widetilde{R}_k(\mathbf{q}) \left[\widetilde{\Gamma}_k^{(2)} + \widetilde{R}_k \right]^{-1}(-\mathbf{q}, \mathbf{q}). \quad (\text{VII.16})$$

Cette équation de flot est exacte — et donc non perturbative. Elle présente évidemment la même structure à 1-boucle que dans le formalisme à l'équilibre. Comme dans ce cas, traiter cette équation nécessite de recourir à des procédures d'approximation, ce que nous envisageons dans le paragraphe suivant, en nous concentrant sur les processus de réaction-diffusion.

VII.1.2 Equations de flot pour les processus de réaction-diffusion

Pour exploiter l'équation (VII.15), nous allons élaborer un *ansatz* de Γ_k pour les processus de réaction-diffusion. Pour cela, nous allons procéder à un développement dérivatif (*cf.* section II.2.2) des dépendances spatiale et temporelle de l'action effective moyenne Γ_k , en développant cette dernière en puissances des gradients et des dérivées

en temps. Cette approximation privilégie la description du comportement à grande distance ($q \rightarrow 0$) et à temps long ($\omega \rightarrow 0$) du système, qui correspond au régime physiquement intéressant dans l'étude des phénomènes critiques. Déterminons dans ce cadre l'*ansatz* le plus général au premier ordre en dérivées — c'est-à-dire en ne retenant que les termes d'ordre ∇^2 et ∂_t — que nous noterons symboliquement ∂^2 par analogie avec l'équilibre.

Construction d'un *ansatz*

Il s'agit d'identifier les termes dérivatifs intervenant dans l'*ansatz* de Γ_k à l'ordre ∂^2 . On procède comme dans la section III.3.1 en recensant tous les monômes que l'on peut former avec $(\nabla^2, \psi^n, \tilde{\psi}^m)$ et $(\partial_t, \psi^n, \tilde{\psi}^m)$. Commençons par la partie spatiale. Avec les deux types de champs ψ et $\tilde{\psi}$ et deux opérateurs ∇ , on peut constituer sept combinaisons dérivatives :

$$\psi^m \tilde{\psi}^n [\psi \Delta \psi, \psi \Delta \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \Delta \psi, \tilde{\psi} \Delta \tilde{\psi}] \quad \text{et} \quad \psi^m \tilde{\psi}^n [(\nabla \psi)^2, \nabla \psi \nabla \tilde{\psi}, (\nabla \tilde{\psi})^2]. \quad (\text{VII.17})$$

Tout terme de la première famille de combinaisons, du type $\psi^m \tilde{\psi}^n (\chi_a \Delta \chi_b)$ où χ_i désigne ψ ou $\tilde{\psi}$ (“les laplaciens”), se ramène par intégration par parties à une combinaison de termes de la seconde famille du type $\psi^m \tilde{\psi}^n (\nabla \chi_a \nabla \chi_b)$ (“les gradients”). Il suffit donc de conserver les trois combinaisons (indépendantes) de gradients qui forment une base pour les termes dérivatifs spatiaux. Pour la partie temporelle, les deux types de termes dérivatifs que l'on peut former $\psi^m \tilde{\psi}^n \partial_t \psi$ et $\psi^m \tilde{\psi}^n \partial_t \tilde{\psi}$ sont reliés par intégration par parties, tant que $m \neq 0$ et $n \neq 0$. Cependant, si par exemple $n = 0$ dans le premier terme, le monôme $\psi^m \partial_t \psi$ correspond à une dérivée totale et sa contribution est nulle (et de même pour celle de $\tilde{\psi}^n \partial_t \tilde{\psi}$). Il suffit donc, dans tous les cas, d'un terme dérivatif temporel qui prend la forme générale $\psi^m \tilde{\psi}^n (\tilde{\psi} \partial_t \psi)$. Finalement, l'*ansatz* de Γ_k au premier ordre en dérivées s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma_k = \int d^d x dt \left\{ U_k(\tilde{\psi}, \psi) + D_k(\tilde{\psi}, \psi) \tilde{\psi}(x, t) \partial_t \psi(x, t) \right. \\ \left. + Z_k(\tilde{\psi}, \psi) \nabla \psi(x, t) \nabla \tilde{\psi}(x, t) + \frac{1}{2} Y_k^1(\tilde{\psi}, \psi) (\nabla \psi(x, t))^2 + \frac{1}{2} Y_k^2(\tilde{\psi}, \psi) (\nabla \tilde{\psi}(x, t))^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{VII.18})$$

Le potentiel courant U_k contient la physique liée aux modes uniformes et stationnaires et les fonctions de renormalisation des termes dérivatifs D_k , Z_k et Y_k^i , $i = 1, 2$, incorporent les effets induits par les modes variant lentement dans l'espace et dans le temps.

Nous étudierons cet *ansatz* plus avant dans la section VII.2.3 pour calculer les exposants de la percolation dirigée à l'ordre ∂^2 . Dans un premier temps, nous allons nous concentrer sur l'ordre dominant (OD) qui consiste à négliger la dépendance en champs des fonctions de renormalisation dérivatives. On peut montrer (par le calcul) qu'à l'OD les termes $Y_k^1 (\nabla \psi)^2$ et $Y_k^2 (\nabla \tilde{\psi})^2$ n'entrent pas dans l'*ansatz*, car le flot des coefficients Y_k^i se révèle proportionnel à eux-mêmes. Ainsi, si ces termes sont nuls initialement (ce qui est le cas pour les actions \mathcal{S} considérées), ils ne sont pas générés

par renormalisation et restent nuls à toute échelle k . Il n'est donc pas nécessaire de les inclure dans l'*ansatz* à l'OD, qui s'écrit finalement :

$$\Gamma_k = \int d^d x dt \left\{ U_k(\tilde{\psi}, \psi) + \tilde{\psi}(x, t) \left[D_k \partial_t - Z_k \nabla^2 \right] \psi(x, t) \right\}. \quad (\text{VII.19})$$

Discutons de l'interprétation des coefficients de renormalisation Z_k et D_k , en analysant les dimensions canoniques des différentes composantes de cet *ansatz*. Comme Γ_k est sans dimension, l'expression (VII.19) détermine la dimension du potentiel :

$$[U_k] = k^d \omega \quad (\text{VII.20})$$

— en notant k une échelle d'impulsion et ω une échelle de fréquence — et fixe la dimension du produit $\tilde{\psi}\psi$. Celle-ci admet les deux expressions :

$$[\tilde{\psi}\psi] = k^d D_k^{-1} = k^{d-2} \omega Z_k^{-1}. \quad (\text{VII.21})$$

Il en découle une première relation :

$$[\omega] = k^2 Z_k D_k^{-1}, \quad (\text{VII.22})$$

qui établit la loi d'échelle entre le temps et l'espace. Rappelons que l'espace et le temps jouent, en général, des rôles différents dans les systèmes hors de l'équilibre (voir la section V.1.1). A l'approche d'un régime critique, les longueurs de corrélation spatiale et temporelle divergent selon des lois de puissance indépendantes, dont le rapport traduit la loi d'échelle "anormale" entre l'espace et le temps, caractérisée par l'exposant dynamique z . Celui-ci est défini tel que $L/t^{1/z}$ soit sans dimension au point critique, ou de manière équivalente $\omega \sim k^z$.

Or, à la criticalité, Z_k et D_k vont se comporter en lois de puissance : $Z_k \sim k^{-x_Z}$ et $D_k \sim k^{-x_D}$ de sorte que les exposants x_Z et x_D reflètent alors, *via* (VII.22), cette loi d'échelle anormale suivant :

$$z = 2 - x_Z + x_D = 2 + \partial_t \ln Z_k - \partial_t \ln D_k, \quad (\text{VII.23})$$

où comme précédemment ∂_t représente la dérivée logarithmique $k \partial_k$. En outre, d'après la relation (VII.21), D_k représente, à la transition, la dimension anormale η des champs, définie comme dans [159] par $[\tilde{\psi}\psi] = k^{d+\eta}$, soit :

$$\eta = x_D = -\partial_t \ln D_k. \quad (\text{VII.24})$$

La dimension anormale η ainsi définie est liée par des relations d'échelle aux autres exposants critiques, par exemple pour la percolation dirigée $\beta = \nu_{\perp} (d + \eta)/2$ [159].

Nous allons à présent dériver les équations de flot des composantes $U_k(\tilde{\psi}, \psi)$, Z_k et D_k de l'*ansatz* (VII.19).

Dérivation des équations de flot à l'OD

La détermination de ces équations est assez analogue aux calculs présentés dans la section II.3.1. Nous les menons ici en détail car le traitement de la partie fréquentielle mérite une attention particulière (surtout quant à son signe — la dépendance en fréquence n'étant pas, contrairement à celle en impulsion, quadratique). Cependant, pour ne pas alourdir notre propos, les notations et conventions choisies ainsi qu'une partie des calculs sont renvoyées à l'annexe E. Mentionnons simplement que les variables d'impulsion et de fréquence sont de nouveau représentées par un symbole unique $\mathbf{q} \equiv (q, \omega)$.

Considérons tout d'abord le potentiel U_k . Celui-ci se définit simplement en évaluant l'*ansatz* (VII.19) de Γ_k dans une configuration de champs uniformes et stationnaires : $\psi(x, t) = \psi_0$ et $\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{\psi}_0$, pour laquelle $U_k = \Gamma_k|_{\Psi(\mathbf{x})=\Psi_0} \mathcal{V}^{-1}$ où $\mathcal{V} = \int d^d x dt$. L'équation de flot de U_k s'obtient donc en évaluant l'équation (VII.16) du flot de Γ_k — dans l'espace de Fourier — pour la configuration Ψ_0 (qui s'écrit en transformée de Fourier $\Psi_0(\mathbf{q}) = [\psi_0, \tilde{\psi}_0](2\pi)^D \delta^D(\mathbf{q})$ où $D = d+1$). Commençons par calculer le propagateur $[\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k]^{-1}$ intervenant dans (VII.16). Pour cela, exprimons l'*ansatz* (VII.19) en transformée de Fourier :

$$\Gamma_k = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ \tilde{\psi}(-q, -\omega) [Z_k q^2 - i D_k \omega] \psi(q, \omega) \right\} + \int_{\mathbf{x}} U_k(\tilde{\psi}, \psi), \quad (\text{VII.25})$$

puis dérivons cette expression deux fois par rapport à des champs $\Psi_i(\mathbf{q})$ et $\Psi_j(\mathbf{q}')$. En évaluant ces dérivées secondes dans la configuration Ψ_0 , on obtient la matrice des dérivées fonctionnelles secondes de Γ_k :

$$\bar{\Gamma}_k^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{\delta^D(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{(2\pi)^D} \begin{bmatrix} U_k^{(0,2)} & Z_k q^2 - i D_k \omega + U_k^{(1,1)} \\ Z_k q^2 + i D_k \omega + U_k^{(1,1)} & U_k^{(2,0)} \end{bmatrix}, \quad (\text{VII.26})$$

dont l'élément (i, j) est défini par :

$$[\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \equiv \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Psi_i(\mathbf{q}) \delta \Psi_j(\mathbf{q}')}, \quad (\text{VII.27})$$

et où $U_k^{(n,m)}$ désigne les dérivées du potentiel par rapport aux champs :

$$U_k^{(n,m)}(\tilde{\psi}, \psi) \equiv \frac{\delta^{n+m} U_k(\tilde{\psi}, \psi)}{\delta \tilde{\psi}^n \delta \psi^m}. \quad (\text{VII.28})$$

La notation $\bar{\Gamma}_k^{(n)}$ représente une dérivée fonctionnelle n -ième de Γ_k par rapport à des champs *exprimés dans l'espace de Fourier*. $\bar{\Gamma}_k^{(n)}$ se relie simplement à la transformée de Fourier — notée $\tilde{\Gamma}_k^{(n)}$ — de la même dérivée fonctionnelle de Γ_k par rapport à des champs dans l'espace des \mathbf{x} (voir l'annexe E) ; par exemple pour $n = 2$: $\bar{\Gamma}_k^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = (2\pi)^{-2D} \tilde{\Gamma}_k^{(2)}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}')$ (selon l'équation (E.15)). Cette relation et l'expression (VII.26) suggère de poser :

$$\tilde{R}_k(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = (2\pi)^D \begin{bmatrix} 0 & R(\mathbf{q}) \\ R(-\mathbf{q}) & 0 \end{bmatrix} \delta^D(\mathbf{q} + \mathbf{q}'), \quad (\text{VII.29})$$

de sorte que la matrice $[\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k]$ s'écrit :

$$[\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k](\mathbf{q}, \mathbf{q}') = (2\pi)^D \begin{bmatrix} U_k^{(0,2)} & h(\mathbf{q}) \\ h(-\mathbf{q}) & U_k^{(2,0)} \end{bmatrix} \delta^D(\mathbf{q} + \mathbf{q}'), \quad (\text{VII.30})$$

avec $h(\pm\mathbf{q}) = Z_k q^2 + R_k(q^2, \pm i\omega) \pm i D_k \omega + U_k^{(1,1)}$. Il s'agit de déterminer l'inverse de cette matrice pour obtenir l'expression du propagateur $\tilde{\mathcal{W}}_k^{(2)} \equiv [\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k]^{-1}$ impliqué dans l'équation de flot (VII.16). La relation d'inversion s'écrit dans l'espace de Fourier (voir annexe E) :

$$\int_{\mathbf{q}} [\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k]_{jm}(\mathbf{p}', \mathbf{q}) [\tilde{\mathcal{W}}_k^{(2)}]_{mi}(-\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (2\pi)^D \delta_{ij} \delta^D(\mathbf{p} + \mathbf{p}'). \quad (\text{VII.31})$$

En injectant l'expression (VII.30) de $[\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k]$ dans cette relation, on en déduit :

$$[\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k]^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{(2\pi)^D}{\alpha(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} -U_k^{(2,0)} & h(-\mathbf{q}) \\ h(\mathbf{q}) & -U_k^{(0,2)} \end{bmatrix} \delta^D(\mathbf{q} + \mathbf{q}'), \quad (\text{VII.32})$$

avec

$$\alpha(\mathbf{q}) = h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) - U_k^{(2,0)} U_k^{(0,2)}. \quad (\text{VII.33})$$

Pour obtenir l'équation de flot du potentiel, il ne reste plus qu'à effectuer le produit de cette matrice (VII.32) avec la matrice $\partial_t \tilde{R}_k$ définie à travers (VII.29) puis d'en prendre la trace, ce qui engendre :

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} (2\pi)^D \delta^D(\mathbf{0}) \int_{\mathbf{q}} \frac{[h(\mathbf{q}) \partial_t R_k(-\mathbf{q}) + h(-\mathbf{q}) \partial_t R_k(\mathbf{q})]}{h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) - U_k^{(2,0)} U_k^{(0,2)}}, \quad (\text{VII.34})$$

où $t = \ln(k/\Lambda)$. Le facteur $(2\pi)^D \delta^D(\mathbf{0})$ représente simplement le "volume" $\mathcal{V} \equiv \int d^d x dt$ du système (voir annexe E) qui disparaît pour donner l'équation de flot du potentiel $\partial_t U_k = \mathcal{V}^{-1} \partial_t \Gamma_k$.

Nous allons un peu plus loin revenir sur cette équation pour en dériver une forme plus simple. Avant cela, déterminons les équations de flot des coefficients de renormalisation D_k et Z_k . D'après l'expression (VII.26) de $\bar{\Gamma}_k^{(2)}$ ceux-ci se définissent comme :

$$Z_k = \frac{(2\pi)^D}{\delta^D(\mathbf{0})} \lim_{q, \omega \rightarrow 0} \partial_{q^2} [\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{21}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \quad \text{et} \quad D_k = -i \frac{(2\pi)^D}{\delta^D(\mathbf{0})} \lim_{q, \omega \rightarrow 0} \partial_\omega [\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{21}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}). \quad (\text{VII.35})$$

L'obtention des équations de flot de Z_k et D_k requiert donc de dériver ces définitions par rapport à l'échelle t . Ceci implique de calculer les graphes (selon la représentation diagrammatique de l'équation (E.23) explicitée dans l'annexe E) qui composent la dérivée fonctionnelle seconde de $\partial_t \Gamma_k$ par rapport aux champs $\psi(\mathbf{q})$ et $\tilde{\psi}(-\mathbf{q})$. L'expression complète de $\partial_t [\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{21}$ est établie dans l'annexe E. Nous en donnons une expression explicite dans un cas simple au paragraphe suivant.

Il s'agit alors, d'après les définitions (VII.35), de développer l'expression de $\partial_t [\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{21}$ au premier ordre en q^2 puis au premier ordre en ω dans la limite $q \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow 0$ pour obtenir respectivement les équations $\partial_t Z_k$ et $\partial_t D_k$. Nous allons au préalable

recourir à une simplification supplémentaire qui confère à ces équations une forme plus compacte. Cette simplification consiste à choisir une fonction de coupure qui ne dépend que des impulsions. Remarquons en effet que, dans le cas de la percolation dirigée et plus généralement des processus de réaction-diffusion, le temps et l'espace ne sont pas reliés par une symétrie particulière³ et rien ne contraint *a priori* à un traitement symétrique des parties fréquentielle et impulsionnelle. En outre, la partie fréquentielle s'avère parfaitement régulière dans l'IR comme dans l'UV. Il suffit donc d'imposer une coupure pour la partie impulsionnelle pour assurer la régularisation complète de l'intégrale sur les fréquence et impulsion internes impliquée dans l'équation de flot. On abandonne donc dans la suite la dépendance fréquentielle du régulateur : $R_k(q^2, i\omega) \equiv R_k(q^2)$.

Arrêtons-nous un instant sur les conséquences possibles de ce choix. Ne pas introduire de coupure en fréquence implique que toutes les fréquences contribuent de façon équivalente dans l'intégration "de boucle" sur la fréquence interne et que celle-ci n'est donc plus dominée par les modes de fréquence de l'ordre de k . Les implications de cette observation sont loin d'être claires. Cependant, il semble raisonnable d'estimer que l'influence en est d'autant plus atténuée que la dimension d'espace est grande, dans la mesure où l'intégrale multi-dimensionnelle en impulsion réduit vraisemblablement la contribution relative de l'intégrale simple en fréquence. L'on peut donc éventuellement s'attendre à des effets lorsque les contributions de l'espace et du temps deviennent comparables, *i.e.* à faible dimension spatiale, ce qui n'est pas encore, à ce jour, complètement élucidé.

Terminons alors la dérivation des équations de flot dans cette approximation. Les expressions de $\partial_t Z_k$ et $\partial_t D_k$ avec une coupure purement impulsionnelle — un peu longues — sont consignées dans l'annexe E. Nous en donnons une expression explicite simplifiée au paragraphe suivant. Reprenons d'abord l'équation pour le flot du potentiel. Si la fonction de coupure ne dépend que des impulsions, l'intégration en fréquence dans (VII.34) devient triviale et peut être effectuée analytiquement. En effet, le dénominateur de (VII.34) apparaît alors simplement quadratique en fréquence :

$$\alpha(\mathbf{q}) = \left(Z_k q^2 + R_k(q^2) + U_k^{(1,1)} \right)^2 + \left(D_k \omega \right)^2 - \left(U_k^{(2,0)} U_k^{(0,2)} \right), \quad (\text{VII.36})$$

et le numérateur ne dépend plus de la fréquence. Il en résulte :

$$\partial_t U_k = \int_{\mathbf{q}} \frac{\partial_t R_k(q^2) \left(Z_k q^2 + R_k(q^2) + U_k^{(1,1)} \right)}{\alpha(\mathbf{q})} \quad (\text{VII.37})$$

$$= \frac{1}{2D_k} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\partial_t R_k(q^2) \left(Z_k q^2 + R_k(q^2) + U_k^{(1,1)} \right)}{\sqrt{\left(Z_k q^2 + R_k(q^2) + U_k^{(1,1)} \right)^2 - \left(U_k^{(2,0)} U_k^{(0,2)} \right)}}. \quad (\text{VII.38})$$

³Ceci à l'inverse, par exemple, des phénomènes de croissance d'interface décrits par l'équation de Kardar-Parisi-Zhang [116]. En effet, cette dernière s'avérant équivalente à l'équation de Burgers [160], les champs vérifient la symétrie de Galilée. Cette symétrie impose des contraintes spécifiques reliant les termes cinétiques spatiaux et temporel de l'action (voir par exemple [161]) qui se transposent sur la forme du régulateur.

Nous avons ainsi établi les équations de flot générales pour les processus de réaction-diffusion, à l'OD du développement dérivatif et pour une coupure en impulsion. Nous allons dans le paragraphe suivant en donner des expressions plus simples en explicitant le cas générique pour lequel $\tilde{\psi}_0 = 0$ dans l'état stationnaire.

Equations de flot à $\tilde{\psi}_0 = 0$

Pour les processus de réaction-diffusion, le champ auxiliaire $\tilde{\phi}$ acquiert une valeur moyenne nulle dans l'état stationnaire.⁴ En outre, par construction (*cf.* chapitre VI), le potentiel s'avère proportionnel à ce champ et il en résulte que toutes les dérivées du potentiel par rapport à ψ seulement — du type $U_k^{(0,n)}$ — sont nulles dans l'état stationnaire. Ceci suggère de se placer, pour l'étude des processus de réaction-diffusion, dans une configuration uniforme et stationnaire caractérisée par $\tilde{\psi}_0 = 0$ pour évaluer les différentes équations de flot. Dans cette configuration, l'expression de $\partial_t [\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{21}$ donnée par (E.26) se simplifie. En outre, pour un régulateur purement impulsif, la dépendance en fréquence apparaît encore confinée au dénominateur et son intégration s'effectue de nouveau explicitement. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \partial_t \Gamma_k}{\delta \psi(\mathbf{p}) \delta \tilde{\psi}(-\mathbf{p})} &= \frac{1}{D_k} U_k^{(2,1)} U_k^{(1,2)} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\partial_t R_k(q^2)}{[D_k i\nu + f(q) + f(q-p)]^2} \\ &- \frac{1}{2D_k} (U_k^{(2,0)})^2 U_k^{(1,2)} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \partial_t R_k(q^2) \left(\frac{f(q) + f(q-p)}{f(q) f(q-p) [D_k i\nu + f(q) + f(q-p)]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{f(q)^2 [D_k i\nu + f(q) + f(q-p)]} \right), \quad (\text{VII.39}) \end{aligned}$$

où $f(q) = Z_k q^2 + R_k(q^2) + U_k^{(1,1)}$ et ν désigne la fréquence externe : $\mathbf{p} \equiv (p, \nu)$.

On introduit, comme au chapitre II, les variables adimensionnées et renormalisées :

$$\begin{cases} \psi &= k^d D_k^{-1} \chi \\ \tilde{\psi} &= k^d D_k^{-1} \tilde{\chi} \\ U_k(\tilde{\psi}, \psi) &= k^{d+2} Z_k D_k^{-1} u_k(\tilde{\chi}, \chi), \end{cases} \quad (\text{VII.40})$$

afin d'obtenir des expressions ne dépendant plus explicitement de l'échelle k , et faciliter la recherche de points fixes. Ceci nécessite, d'après la forme du terme de masse (VII.2), d'absorber un facteur Z_k dans la fonction de coupure en posant :

$$R_k(q^2) = Z_k q^2 r(y) \quad \text{avec} \quad y = q^2/k^2. \quad (\text{VII.41})$$

On définit comme à l'équilibre des fonctions seuil L et M données dans l'annexe E. Avec ces conventions, l'équation de flot adimensionnée du potentiel devient simplement :

$$\partial_t u_k = -(d+2+x_D-x_Z) u_k + \frac{1}{2} (d+x_D) (\chi_0 u_k^{(0,1)} + \tilde{\chi}_0 u_k^{(1,0)}) - \frac{1}{2} L(0, 0, d, 0) \quad (\text{VII.42})$$

⁴En effet, l'opérateur a_i^\dagger (correspondant au champ $\tilde{\phi}$) agissant à gauche sur l'état de projection le laisse invariant, d'où $\langle \tilde{\phi} \rangle = \langle \cdot | \hat{\mathcal{H}} | \psi \rangle = 0$, car d'après le paragraphe VI.2.2, l'opérateur d'évolution $\hat{\mathcal{H}}$ annihile l'état de projection.

(pour une configuration stationnaire $(\chi_0, \tilde{\chi}_0)$ quelconque).

Ensuite, en annulant dans les équations (E.29) et (E.30) les dérivées $u_k^{(0,n)}$ du potentiel, les équations de Z_k et D_k en termes des variables adimensionnées s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \partial_t Z_k = & \frac{1}{d} \left\{ u_k^{(2,0)} \left(u_k^{(1,2)} \right)^2 \left(4 M(1, 3, d, 0) - 8 M(3, 4, d, 0) \right) \right. \\ & \left. + u_k^{(2,1)} u_k^{(1,2)} \left(3 M(0, 2, d, 0) - 12 M(2, 3, d, 0) + 12 M(4, 4, d, 0) - 4 M(2, 4, d, 2) \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{VII.43})$$

$$\text{et} \quad \partial_t D_k = \frac{1}{2} \left\{ u_k^{(2,1)} u_k^{(1,2)} L(1, 2, d, 0) - u_k^{(2,0)} \left(u_k^{(1,2)} \right)^2 L(0, 2, d, 0) \right\}. \quad (\text{VII.44})$$

L'équation (VII.42) du flot du potentiel ainsi que les expressions (E.29) et (E.30) des flots $\partial_t Z_k$ et $\partial_t D_k$ des coefficients de renormalisation — dérivées ici à l'OD et pour une coupure impulsionnelle — sont valables pour des champs uniformes et stationnaires quelconques — leur forme simplifiée (VII.43) et (VII.44) correspondant à $\tilde{\psi}_0 = 0$. Pour dériver ces équations, nous avons simplement spécifié la forme générale (diffusive, du type \mathcal{S}_0 dans (VII.3)) de la partie cinétique. Ces équations s'appliquent donc à tous les modèles dont la partie cinétique est de type diffusif, complétée d'interactions potentielles. Ceci couvre tous les processus de réaction-diffusion (à une espèce de particules) et rend donc ces équations très génériques. Nous allons les particulariser à la percolation dirigée dans la prochaine section puis pour les marches aléatoires avec branchement et annihilation dans la dernière section.

VII.2 Propriétés universelles de la percolation dirigée

Cette section est consacrée à la détermination des exposants critiques caractérisant la transition de phase absorbante de la classe d'universalité de la percolation dirigée. Comme la dimension critique supérieure du modèle de la percolation dirigée est $d_c = 4$ (*cf.* section VI.2.5), nous nous concentrons sur les dimensions spatiales $d < d_c$ — *i.e.* les dimensions physiques 1, 2 et 3 — pour lesquelles l'effet des fluctuations invalide l'approximation de champ moyen. Il s'agit donc d'exploiter les équations de flot dérivées dans la section précédente pour analyser le modèle de la percolation dirigée. Pour cela, il suffit de particulariser, dans un premier temps, l'*ansatz* (VII.19) pour ce modèle, ce qui revient simplement à en spécifier les symétries pour en déduire les caractéristiques générales du potentiel U_k associé. Nous recourons ensuite, dans une seconde étape, aux différentes techniques présentées au chapitre III pour résoudre numériquement les équations de point fixe et calculer les exposants critiques associés, avant de se pencher, enfin, sur l'ordre ∂^2 .

VII.2.1 Construction d'un *ansatz* pour la percolation dirigée

Nous avons établi dans la section VI.2.5 l'action nue — à l'échelle Λ — de la percolation dirigée, dont nous rappelons l'expression :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{DP}[\tilde{\phi}, \phi] = & \int d^d x dt \left(\tilde{\phi}(x, t) \left(\partial_t - D \nabla^2 - (\sigma - \mu) \right) \phi(x, t) \right. \\ & \left. + \sqrt{2\sigma\lambda} \left(\tilde{\phi}(x, t) \phi(x, t)^2 - \tilde{\phi}(x, t)^2 \phi(x, t) \right) + \lambda (\phi(x, t) \tilde{\phi}(x, t))^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{VII.45})$$

Cette action se révèle invariante sous la transformation simultanée des champs :

$$\begin{cases} \phi(x, t) & \rightarrow -\tilde{\phi}(x, -t) \\ \tilde{\phi}(x, t) & \rightarrow -\phi(x, -t), \end{cases} \quad (\text{VII.46})$$

qualifiée de “symétrie de rapidité” (en égard à la théorie de Regge). Le potentiel courant $U_k(\tilde{\psi}, \psi)$ doit donc vérifier cette symétrie. Recherchons la forme des termes autorisés par cette symétrie en examinant les monômes constituant le développement polynômial du potentiel :

$$U_k(\tilde{\psi}, \psi) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} \tilde{\psi}^\alpha \psi^\beta. \quad (\text{VII.47})$$

Sous la transformation (VII.46) des champs, le temps ne jouant aucun rôle pour les termes potentiels, il vient :

$$a_{\alpha, \beta} \tilde{\psi}^\alpha \psi^\beta \longrightarrow (-1)^{\alpha+\beta} a_{\alpha, \beta} \psi^\alpha \tilde{\psi}^\beta. \quad (\text{VII.48})$$

Explicitons les deux cas possibles. Si $(\alpha + \beta)$ est pair, le terme général (VII.48) est symétrique sous l'échange des deux champs et l'invariance du potentiel requiert alors $a_{\alpha, \beta} = a_{\beta, \alpha}$. Si $(\alpha + \beta)$ est impair, le monôme (VII.48) est antisymétrique sous l'échange des deux champs, ce qui induit $a_{\alpha, \beta} = -a_{\beta, \alpha}$. Finalement, le terme général du développement (VII.47) code explicitement la symétrie de rapidité s'il s'écrit comme la combinaison proprement symétrisée des monômes, soit :

$$a_{\alpha, \beta} \left(\tilde{\psi}^\alpha \psi^\beta + (-1)^{\alpha+\beta} \psi^\alpha \tilde{\psi}^\beta \right). \quad (\text{VII.49})$$

En outre, toutes les combinaisons de la forme (VII.49) admettent une paramétrisation en termes des deux invariants élémentaires⁵ : $\rho = \tilde{\psi} \psi$ et $\zeta = \psi - \tilde{\psi}$. En effet, le terme général (VII.49) se réécrit (par exemple si $\alpha \leq \beta$) comme $a_{\alpha, \beta} (\psi \tilde{\psi})^\alpha (\psi^k + (-1)^k \tilde{\psi}^k)$ où $k = \beta - \alpha$ et le terme $(\psi^k + (-1)^k \tilde{\psi}^k)$ se factorise à son tour en un polynôme en ρ et en ζ quel que soit k .

Finalement, on considère une fonction potentielle $U_k(\rho, \zeta)$ qui, ainsi paramétrisée, est explicitement invariante sous la symétrie de rapidité. La forme de ce potentiel spécifie donc l'*ansatz* (VII.19) pour la percolation dirigée.

⁵On pourrait alternativement choisir $\gamma = \psi + \tilde{\psi}$, ce qui est équivalent car ρ , ζ et γ sont liés par la relation $\zeta^2 - \gamma^2 = 4\rho$.

Remarquons simplement pour finir que l'action nue (VII.45) commence par une puissance de ρ . Or, d'après l'équation de flot (VII.38) du potentiel, cette propriété est préservée au cours du flot, c'est-à-dire que si U_Λ ne contient pas de terme linéaire en ζ , un tel terme n'est pas généré par renormalisation. On a donc $U_k \propto \rho$ pour tout k .

Déterminons à présent les exposants critiques de la percolation dirigée.

VII.2.2 Calcul des exposants critiques

La classe de la percolation dirigée est caractérisée par trois exposants indépendants, par exemple ν_\perp , β et z (*cf.* section V.1.1). A travers les relations (VII.23) et (VII.24), les solutions de point fixe de x_D et x_Z donnent accès aux exposants critiques z et β (en utilisant pour ce dernier la relation d'échelle $\beta = \nu_\perp/2(d + \eta)$). L'exposant ν_\perp traduit quant à lui la divergence de la longueur de corrélation *spatiale* et s'apparente donc à l'exposant ν du modèle d'Ising, dans le sens où sa détermination procède du même principe. L'on dispose ainsi des différentes méthodes exposées au chapitre III pour calculer numériquement la valeur de ν_\perp (noté dorénavant ν).

Comme à l'équilibre, il s'agit de choisir la configuration de champs — uniformes et stationnaires — dans laquelle les équations de flot des coefficients de renormalisation Z_k et D_k sont évaluées, pour en déduire les valeurs des exposants critiques associées. Pour les raisons exposées précédemment, on adopte pour le champ auxiliaire la configuration nulle $\tilde{\psi} = 0$. En outre, dans le modèle de la percolation dirigée, la valeur moyenne du champ ϕ — *i.e.* ψ — dans l'état stationnaire représente la densité moyenne de cet état, qui acquiert une valeur finie κ dans la phase active et s'annule dans la phase absorbante. Cette valeur moyenne correspond, en l'absence de sources externes, au minimum en ψ du potentiel. Or, à l'équilibre, le minimum du potentiel s'est avéré présenter des propriétés appréciables de convergence. Il paraît donc raisonnable de choisir la configuration stationnaire ($\tilde{\psi} = 0, \psi = \kappa$) — soit ($\rho = 0, \zeta = \kappa$) — où κ vérifie $\partial U_k / \partial \psi|_{\psi=\kappa} = 0$. Rappelons que, comme pour le modèle d'Ising, la valeur courante κ_k représente le minimum du potentiel à une échelle k finie et ne présage en rien de la phase physique atteinte par le système à $k = 0$, autrement dit un minimum non trivial $\kappa_k \neq 0$ pour $k \neq 0$ ne signifie pas nécessairement que le système se trouve dans la phase brisée⁶ — active.

On utilise deux approches indépendantes pour calculer les exposants critiques : d'une part on développe le potentiel u_k en puissances des deux champs et l'on résout directement les équations de point fixe, d'autre part on intègre les équations de flot avec l'échelle en gardant la dépendance fonctionnelle complète en ζ du potentiel, dans un développement partiel de ce dernier en ρ . Dans les deux approches, nous déterminons les valeurs des exposants successivement à l'APL puis à l'OD⁷. A l'APL, les champs et le temps ne sont pas renormalisés, soit $D_k = Z_k = 1$ — *i.e.* $x_D = x_Z = 0$ — et seul l'exposant ν est non trivial. Les exposants critiques z et η sont donc donnés dans

⁶Ici, la brisure concerne la symétrie de rapidité.

⁷Les abréviations APL et OD désignent respectivement "approximation du potentiel local" et "ordre dominant", comme définies dans la section II.2.2.

cette approximation par leur valeur de champ moyen $z = 2$ et $\eta = 0$. A l'OD, on considère des coefficients de renormalisation D_k et Z_k courant suivant les équations de flot (VII.43) et (VII.44) et les trois exposants acquièrent une valeur non triviale — *i.e.* incluant l'effet des fluctuations.

Pour simplifier le traitement numérique, nous employons dans la suite la fonction de coupure r_θ introduite dans les premiers chapitres et définie par :

$$r_\theta(y) = \left(\frac{1}{y} - 1\right) \theta(1 - y). \quad (\text{VII.50})$$

Nous nous restreignons ici à cette seule fonction de coupure et n'étudions ni l'influence du régulateur ni la mise en œuvre d'une procédure d'optimisation. Nous ne cherchons pas, dans un premier temps, à raffiner les différentes estimations produites, mais simplement à apprécier les performances globales de la méthode. Ces analyses apparaîtront bien sûr indispensables dans un second temps et seront réalisées ultérieurement.

Nous commençons par envisager la première approche, dans laquelle nous développons le potentiel en puissances des invariants, autour de la configuration stationnaire choisie, jusqu'à l'ordre 7 en champs selon :

$$\begin{aligned} u_k(\rho, \zeta) = & u_1 \rho (\zeta - \kappa) + \frac{1}{2} u_2 \rho^2 + \frac{1}{2} u_3 \rho (\zeta - \kappa)^2 + \frac{1}{2} u_4 \rho^2 (\zeta - \kappa) \\ & + \frac{1}{6} u_5 \rho (\zeta - \kappa)^3 + \frac{1}{6} u_6 \rho^3 + \frac{1}{4} u_7 \rho^2 (\zeta - \kappa)^2 + \frac{1}{24} u_8 \rho (\zeta - \kappa)^4 \\ & + \frac{1}{12} u_9 \rho^2 (\zeta - \kappa)^3 + \frac{1}{12} u_{10} \rho^3 (\zeta - \kappa)^2 + \frac{1}{5!} u_{11} \rho (\zeta - \kappa)^5 \dots \quad (\text{VII.51}) \end{aligned}$$

Cet ordre s'avère suffisant pour atteindre le régime asymptotique dans les dimensions 3, 2 et 1 à l'APL comme à l'OD (voir les figures 1 et 2). Les équations de flot des constantes de couplage u_i se déduisent par les dérivations appropriées de l'équation de flot (VII.42) par rapport aux invariants. Comme à l'équilibre, les dérivées des fonctions seuil s'obtiennent simplement par des relations de récurrence entre ces fonctions (données dans l'annexe E). On recherche alors numériquement la solution du système homogène des équations de point fixe $\{\partial_t u_i = 0\}$, pour chaque troncation, dans les trois dimensions, à l'APL puis à l'OD. Les figures 1 et 2 représentent l'évolution des exposants critiques en fonction de la troncation (pour les troncations successives $\{u_1, u_2\}$ à $\{u_1, \dots, u_{10}\}$ — l'équation de u_{11} dépassant la capacité de mémoire disponible). Les variations de ν sont tracées à l'APL (figure 1 (a)) puis à l'OD (figure 1 (b)), celles de x_D et x_Z sont données à l'OD sur les figures 2 (c) et (d) respectivement.

Le développement en champs s'avère converger dans tous les cas, et ce d'autant plus rapidement que la dimension est élevée. En effet, les puissances des champs deviennent des opérateurs d'autant plus pertinents que la dimension diminue, ce qui nécessite alors d'inclure plus d'opérateurs avant d'atteindre un régime asymptotique. Toutes les valeurs asymptotiques, obtenues pour la plus grande troncation, sont réunies dans la table VII.1 et commentées après cet exposé de la seconde approche.

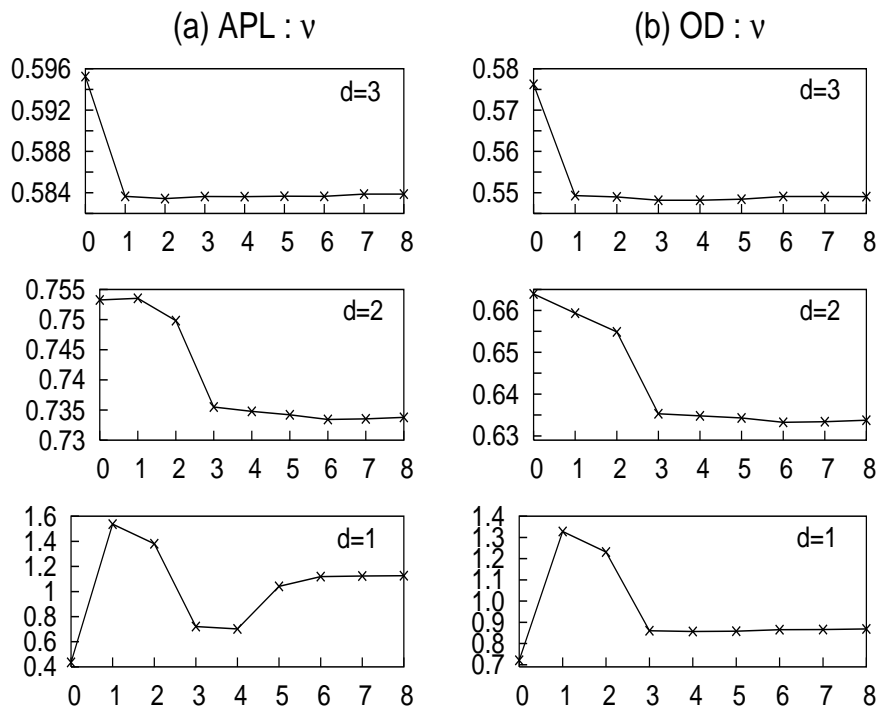


FIG. 1 – Variations de l'exposant ν en dimensions spatiales 3, 2 et 1 (de haut en bas), en fonction de l'ordre de la troncation en champs du potentiel — les abscisses 0 à 8 désignant les troncations successives $\{u_1, u_2\}$, $\{u_1, u_2, u_3\}$... $\{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$; (a) à l'APL et (b) à l'OD.

Dans cette seconde approche, nous avons conservé la dépendance fonctionnelle complète du potentiel en ζ en développant celui-ci selon ρ (autour de $\rho = 0$), soit :

$$u_k(\rho, \zeta) = \rho u_k^1(\zeta) + \frac{\rho^2}{2} u_k^2(\zeta) + \frac{\rho^3}{6} u_k^3(\zeta) \dots \quad (\text{VII.52})$$

Les trois coefficients u_k^i sont donc trois fonctions de ζ , dont nous déduisons les équations de flot par dérivation de (VII.42) par rapport à ρ . Nous intégrons alors numériquement les flots des trois fonctions $\partial_t u_k^i(\zeta)$ (supplémentés de $\partial_t Z_k$ et $\partial_t D_k$ évalués au point κ où la dérivée de u_k par rapport à ζ s'annule). Nous ajustons la forme du potentiel initial (définie d'après (VII.45) par $u_\lambda^1 = \sqrt{2\lambda\sigma}$, $u_\lambda^2 = 2\lambda$ et $u_\lambda^3 = 0$) à travers le paramètre σ jusqu'à rejoindre le potentiel de point fixe. L'exposant ν est alors déterminé par la méthode de diagonalisation (*cf.* section III.4) et les exposants z et η sont déduits des valeurs "plateaux" de x_D et x_Z . Les exposants critiques obtenus diffèrent de moins de 3% des estimations issues de la première approche de développement dans les deux invariants, ce qui confirme la validité de cette approche et les résultats qui en découlent.

Commentons à présent ces résultats rassemblés dans la table VII.1. A l'APL, la valeur de l'exposant ν obtenue par le groupe de renormalisation non perturbatif reproduit avec une grande précision les meilleures estimations numériques issues de simulations

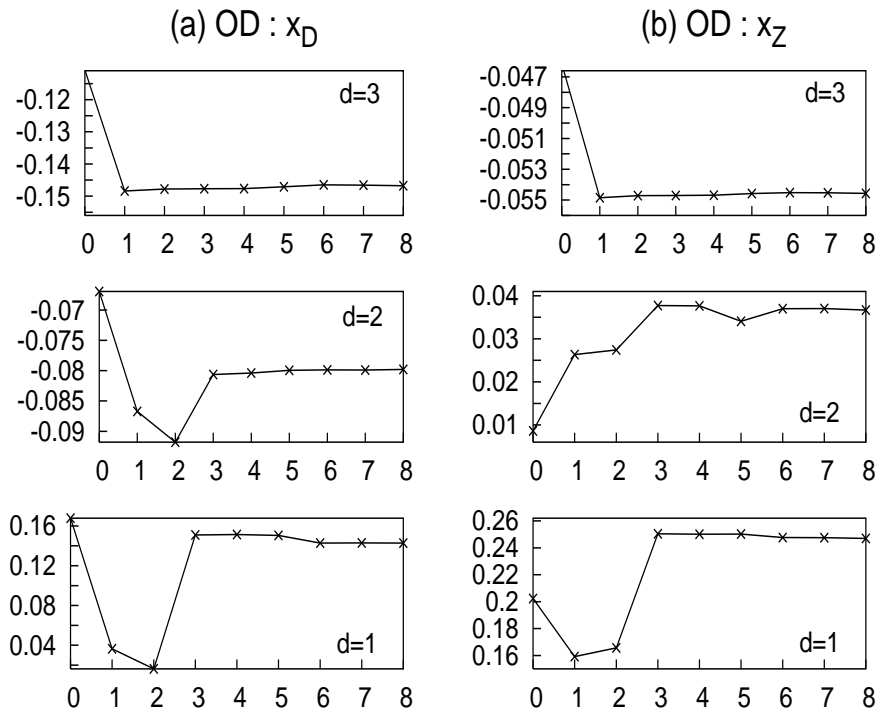


FIG. 2 – Variations des exposants (a) x_D et (b) x_Z en dimensions spatiales 3, 2 et 1 (de haut en bas) en fonction de l'ordre de la troncation en champs du potentiel — les abscisses 0 à 8 désignant les troncations successives $\{u_1, u_2\}$, $\{u_1, u_2, u_3\}$, ... $\{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$; à l'OD.

Monte Carlo ou de développements en séries [98, 99, 100] en dimension $d = 3$, $d = 2$ et même en dimension $d = 1$. Cette approximation apparaît donc suffisante pour capturer de façon fiable les propriétés “statiques” de la transition. Les exposants “dynamiques” η et z sont donnés à l'APL par leur valeur de champ moyen (0 et 2 respectivement) et la détermination de $\beta = \nu/2(d + \eta)$ reste donc plus grossière.

L'OD permet en revanche de fournir une estimation pertinente des exposants η et z . Leur valeur se révèle d'autant plus précise que η et $(2 - z)$ restent petits, et tend donc à se détériorer lorsque la dimension diminue. Notons que l'exposant ν se dégrade légèrement à cet ordre (sa précision s'avérant restaurée à l'ordre suivant, voir la table VII.2). Les résultats apparaissent globalement en accord correct avec les meilleures estimations [98, 99, 100]. Comme à l'équilibre, affiner les déterminations de η et z requiert d'améliorer la description de la dépendance en impulsion et en fréquence de la fonction de corrélation à deux points en enrichissant le contenu de l'*ansatz* de Γ_k . Franchissons donc une dernière étape dans le degré d'approximation.

d		APL	OD	MC et séries
3	ν	0.584	0.549	0.581(5)
	β	0.876	0.783	0.81(1)
	z	2	1.908	1.90(1)
2	ν	0.734	0.634	0.734(4)
	β	0.734	0.608	0.584(4)
	z	2	1.884	1.76(3)
1	ν	1.126	0.869	1.096854(4)
	β	0.563	0.496	0.276486(8)
	z	2	1.896	1.580745(10)

TAB. VII.1 – Exposants critiques de la percolation dirigée par calcul du groupe de renormalisation non perturbatif à l’APL et à l’OD. Les résultats issus des simulations Monte Carlo ou des développements en séries [98, 99, 100] sont rappelés dans la dernière colonne (voir section V.1.1).

VII.2.3 Exposants à l’ordre ∂^2 du développement dérivatif

Affiner les estimations des exposants “dynamiques” obtenus à l’OD requiert de considérer l’*ansatz* complet (VII.18) incluant la dépendance fonctionnelle dans les champs des fonctions de renormalisation $Z_k(\tilde{\psi}, \psi)$ et $D_k(\tilde{\psi}, \psi)$. A cet ordre, les deux fonctions supplémentaires $Y_k^1(\tilde{\psi}, \psi)$ et $Y_k^2(\tilde{\psi}, \psi)$ entrent également en jeu.

Spécifions tout d’abord cet *ansatz* pour le modèle de la percolation dirigée. Pour simplifier l’expression de la symétrie de rapidité, on symétrise tout d’abord la dépendance temporelle en ajoutant un second terme, miroir du premier par échange des champs :

$$\int d^d x dt \left\{ D_k^1(\tilde{\psi}, \psi) \tilde{\psi}(x, t) \partial_t \psi(x, t) + D_k^2(\tilde{\psi}, \psi) \psi(x, t) \partial_t \tilde{\psi}(x, t) \right\}, \quad (\text{VII.53})$$

même si celui-ci est redondant (relié au premier par intégration par parties). Alors l’invariance de l’*ansatz* (VII.18) sous la transformation (VII.46) des champs impose les relations :

$$Z_k(\tilde{\psi}, \psi) = Z_k(-\psi, -\tilde{\psi}) \quad (\text{VII.54})$$

$$Y_k^1(\tilde{\psi}, \psi) = Y_k^2(-\psi, -\tilde{\psi}) \quad (\text{VII.55})$$

$$D_k^1(\tilde{\psi}, \psi) = -D_k^2(-\psi, -\tilde{\psi}). \quad (\text{VII.56})$$

Une façon simple — bien qu’également redondante — de satisfaire ces contraintes consiste à choisir des fonctions explicitement invariantes sous cette transformation, c’est-à-dire paramétrisées en termes de ρ et de ζ . L’*ansatz* de la percolation dirigée à l’ordre ∂^2 s’écrit alors :

$$\Gamma_k^{\text{DP}} = \int_{\mathbf{x}} \left\{ U_k(\tilde{\psi}, \psi) + D_k(\tilde{\psi}, \psi) [\tilde{\psi} \partial_t \psi - \psi \partial_t \tilde{\psi}] \right. \\ \left. + Z_k(\tilde{\psi}, \psi) \nabla \psi \nabla \tilde{\psi} + \frac{1}{2} Y_k(\tilde{\psi}, \psi) [\tilde{\psi} (\nabla \psi)^2 - \psi (\nabla \tilde{\psi})^2] \right\}, \quad (\text{VII.57})$$

où les différentes fonctions U_k , Z_k , D_k et Y_k sont analytiques en ρ et en ζ . (Les termes $(\nabla\psi)^2$ et $(\nabla\tilde{\psi})^2$ seuls sont explicitement exclus car non générés). Nous nous concentrons dans la suite sur cet *ansatz*.

Détermination des équations de flot

L'expression (VII.57) de l'*ansatz* de Γ_k à l'ordre ∂^2 modifie la structure du propagateur $[\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k]^{-1}$ tel qu'établi à l'OD. Déterminons tout d'abord ce dernier. En dérivant fonctionnellement deux fois l'*ansatz* (VII.57) par rapport à $\Psi_i(\mathbf{q})$ et à $\Psi_j(\mathbf{q}')$ — évaluant ces dérivées dans une configuration uniforme et stationnaire — il vient :

$$[\bar{\Gamma}_k^{(2)} + \bar{R}_k](\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{\delta^D(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{(2\pi)^D} \begin{bmatrix} U_k^{(0,2)} + Y_k q^2 \tilde{\psi} & k(-\mathbf{q}) \\ k(\mathbf{q}) & U_k^{(2,0)} - Y_k q^2 \psi \end{bmatrix}, \quad (\text{VII.58})$$

où la notation \bar{M} marque — rappelons-le — une matrice de dérivées fonctionnelles par rapport à des champs dans l'espace de Fourier et où :

$$k(\pm\mathbf{q}) = Z_k q^2 + R_k(q^2) \pm i\omega \left[D_k + \frac{1}{2} (\psi D_k^{(0,1)} + \tilde{\psi} D_k^{(1,0)}) \right] + U_k^{(1,1)}. \quad (\text{VII.59})$$

L'expression (VII.59) suggère d'introduire la fonction $K_k = D_k + \frac{1}{2} (\psi D_k^{(0,1)} + \tilde{\psi} D_k^{(1,0)})$ et, en effet, tous les $\bar{\Gamma}_k^{(n)}$ apparaissent s'exprimer en termes de la fonction K_k et de ses dérivées seulement. En passant, *via* la relation (E.15), de (VII.58) à la transformée de Fourier $[\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k]$ puis en inversant la relation (VII.31), on obtient le propagateur :

$$[\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k]^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{(2\pi)^D}{\gamma(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} -(U_k^{(2,0)} - Y_k q^2 \psi) & k(-\mathbf{q}) \\ k(\mathbf{q}) & -(U_k^{(0,2)} + Y_k q^2 \tilde{\psi}) \end{bmatrix} \delta^D(\mathbf{q} + \mathbf{q}'), \quad (\text{VII.60})$$

avec

$$\gamma(\mathbf{q}) = \left(Z_k q^2 + R_k(q^2) + U_k^{(1,1)} \right)^2 + \left(K_k \omega \right)^2 - \left(U_k^{(2,0)} - Y_k q^2 \psi \right) \left(U_k^{(0,2)} + Y_k q^2 \tilde{\psi} \right). \quad (\text{VII.61})$$

L'équation de flot du potentiel découle alors simplement du calcul de la trace du produit de cette matrice avec $\partial_t \tilde{R}_k$. Ceci produit la même équation que (VII.37) en remplaçant $\alpha(\mathbf{q})$ par $\gamma(\mathbf{q})$. Celle-ci s'intègre de la même manière trivialement en fréquence.

Il reste à établir des définitions pour les fonctions de renormalisation Z_k , K_k et Y_k . D'après l'expression (VII.58) des dérivées fonctionnelles secondes de Γ_k , les fonctions Z_k et K_k se définissent comme précédemment *via* la composante mixte (2,1) de $\bar{\Gamma}_k^{(2)}$ (en considérant respectivement sa dépendance en q^2 et en ω). La fonction Y_k correspond quant à elle à la partie quadratique en impulsion des composantes diagonales (1,1) et (2,2) de $\bar{\Gamma}_k^{(2)}$. On choisit de la définir par une combinaison symétrique de ces deux composantes, car ceci permet d'obtenir une équation de flot qui se formule analytiquement

dans les variables ρ et de ζ . On aboutit ainsi aux définitions suivantes :

$$Z_k = \frac{(2\pi)^D}{\delta^D(\mathbf{0})} \lim_{q,\omega \rightarrow 0} \partial_{q^2} [\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{21}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \quad (\text{VII.62})$$

$$K_k = -i \frac{(2\pi)^D}{\delta^D(\mathbf{0})} \lim_{q,\omega \rightarrow 0} \partial_\omega [\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{21}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \quad (\text{VII.63})$$

$$Y_k = \frac{(2\pi)^D}{\delta^D(\mathbf{0})} \lim_{q,\omega \rightarrow 0} \partial_{q^2} \frac{1}{\tilde{\psi} - \psi} \left[[\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{11}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) + [\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{22}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \right]. \quad (\text{VII.64})$$

Les équations de flot des trois fonctions Z_k , K_k et Y_k se déduisent alors par dérivation de ces définitions par rapport à l'échelle ∂_t . Le calcul se déroule de façon analogue à celui de l'OD en évaluant les graphes définis par l'expression (E.23) — avec le propagateur (VII.60) associés à l'*ansatz* complet (VII.57) —, puis en sélectionnant les composantes (2,1) puis (1,1) et (2,2) intervenant dans les définitions (VII.62) à (VII.64). Isoler les dépendances impulsionnelle et fréquentielle idoines conduit finalement aux équations souhaitées — non reproduites dans ce manuscrit car trop longues et surtout sans intérêt particulier pour comprendre la suite.

Résolution numérique

Identifions à présent les méthodes dont on dispose pour analyser ces équations de flot. A l'ordre ∂^2 , l'*ansatz* (VII.57) pour la percolation dirigée comporte quatre fonctions (U_k , K_k , Z_k et Y_k) dépendant chacune de deux invariants (ρ et ζ). Evaluons le coût de la deuxième approche considérée dans la section précédente qui consiste à développer partiellement ces fonctions (selon ρ). A cet ordre, le nombre de fonctions composant les développements de chacune des quatre fonctions — analogues des u_k^i dans (VII.52) — à intégrer simultanément s'élève déjà à huit à l'ordre ρ^2 et ce traitement n'est donc pas envisageable. Nous ne conservons donc que la première approche et développons les quatre fonctions de renormalisation dans les deux invariants ρ et ζ . On considère le développement de U_k jusqu'à l'ordre 6 en champs, donné par (VII.51) avec $u_9 = u_{10} = u_{11} = 0$. Les développements des fonctions cinétiques K_k , Z_k et Y_k s'écrivent génériquement :

$$\begin{aligned} h_k(\rho, \zeta) = & h_0 + h_1 (\zeta - \kappa) + h_2 \rho + \frac{1}{2} h_3 (\zeta - \kappa)^2 + h_4 \rho (\zeta - \kappa) \\ & + \frac{1}{6} h_5 (\zeta - \kappa)^3 + \frac{1}{2} h_6 \rho^2 + \frac{1}{2} h_7 \rho (\zeta - \kappa)^2 + \frac{1}{24} h_8 (\zeta - \kappa)^4 \dots \end{aligned} \quad (\text{VII.65})$$

Comme dans la section III.3.2, on s'appuie sur l'étude du comportement des développements indépendants des différentes fonctions pour déterminer l'ordre nécessaire pour atteindre un régime asymptotique. Ces comportements sont représentés — sur l'exemple des variations de ν — en dimension 3 et 2 sur les figures 3 (a) et 4 (a) respectivement. Celles-ci suggèrent que la fonction K_k joue un rôle prédominant en conditionnant entièrement les variations globales de ν engendrées par les contributions simultanées des trois fonctions. En outre, les variations de K_k s'avèrent les plus amples et les plus lentes à se stabiliser, alors que typiquement cinq puissances des champs au total (en incluant

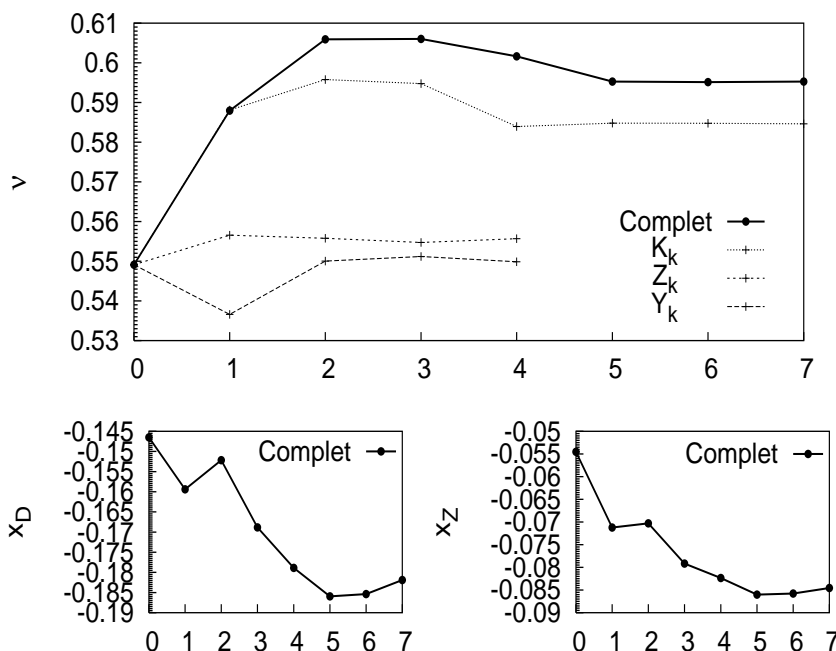


FIG. 3 – Variations des exposants ν , x_D et x_Z en dimension $d = 3$ et à l’ordre ∂^2 , en fonction de l’ordre de la troncation en champs des fonctions de renormalisation Z_k , K_k et Y_k . L’abscisse 0 repère l’OD puis les abscisses 1 . . . 7 indiquent les indices des constantes de couplage formant le développement de chaque fonction — décalés de 1 pour Y_k , cette fonction n’intervenant pas à l’OD. Les traits interrompus, dans la figure du haut, représentent les variations liées à chacune des fonctions développées indépendamment, les autres restant nulles. Le trait plein de légende “Complet” correspond aux variations inhérentes au développement simultané des trois fonctions. Ceci suggère que les variations complètes sont entièrement gouvernées par celles associées à la fonction K_k .

les champs en facteur de ces fonctions dans l’*ansatz* (VII.57)) suffisent pour atteindre les régimes convergés des développements de Z_k et Y_k (soit z_4 et y_3 respectivement). Une fois de plus, l’ordre maximal du développement de K_k , en l’occurrence k_7 , est fixé par les limitations numériques (en terme de puissance de calcul formel essentiellement).

A une dimension d’espace, il s’avère très difficile de déterminer les coordonnées de point fixe. L’algorithme de recherche de la solution qui annule le système homogène d’équations $\{\partial_t h_i = 0\}$ se piège dans une série de minima locaux — dans l’espace des constantes de couplage — qui compliquent singulièrement la tâche numérique. Il en résulte de grandes variations d’une troncation à l’autre, car la “vraie” solution — annulant complètement les équations de flot — n’est en général pas atteinte. Plusieurs hypothèses peuvent être émises pour tenter d’apporter une explication. Par exemple, une des causes de ce comportement pourrait provenir de l’absence de coupure dans le domaine fréquentiel qui, comme mentionné précédemment, confère à tous les modes de

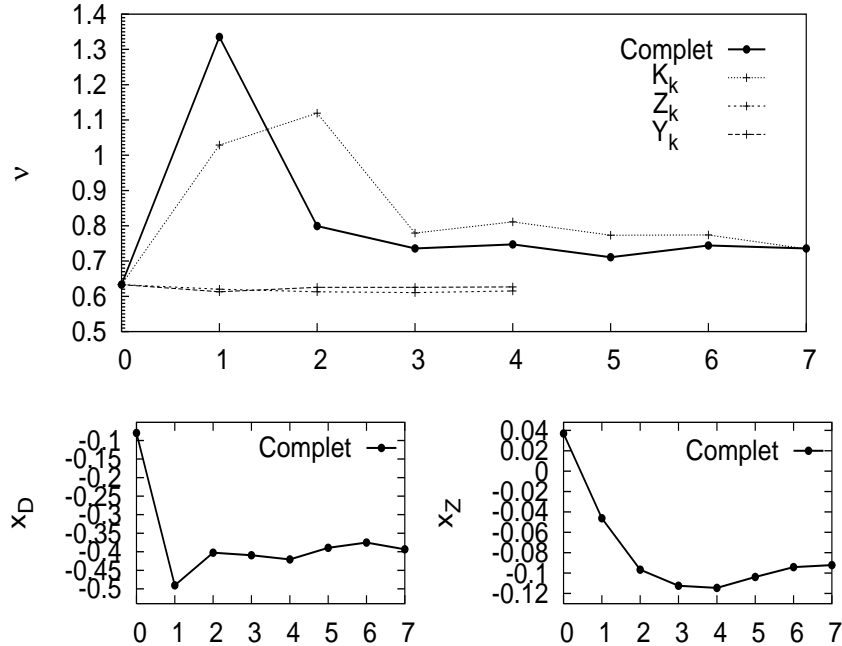


FIG. 4 – Variations des exposants ν , x_D et x_Z en dimension $d = 2$ et à l'ordre ∂^2 , en fonction de l'ordre de la troncation en champs des fonctions de renormalisation Z_k , K_k et Y_k (avec les mêmes commentaires que pour la figure 3).

	$d = 3$	$d = 2$
ν	0.595	0.736
β	0.839	0.591
z	1.903	1.699

TAB. VII.2 – Exposants critiques de la percolation dirigée par calcul du groupe de renormalisation non perturbatif à l'ordre ∂^2 en dimensions 2 et 3, à comparer aux valeurs du tableau VII.1.

fréquence un poids équivalent. Les contributions des hautes fréquences internes, non supprimées par $\partial_k R_k$, pourraient détériorer l'intégration des modes lorsque la dimension est faible — le développement dérivatif supposant que les impulsions et fréquence restent inférieures ou de l'ordre de k . La raison de ce comportement n'est toutefois pas encore clairement identifiée et le problème n'est par conséquent pas encore résolu mais des travaux sont en cours pour tenter d'élucider ce point.

Nous nous contenterons donc ici de donner, dans la table VII.2, les valeurs asymptotiques obtenues à l'ordre ∂^2 — en considérant les trois fonctions simultanément — pour les dimensions d'espace 2 et 3.

Tout d'abord, soulignons que la valeur de ν converge à l'ordre ∂^2 vers les résultats issus des simulations Monte Carlo de la table VII.1, et ce avec une grande précision

tant en $d = 3$ qu'en $d = 2$. En outre, les exposants β et z obtenus à cet ordre rejoignent également les résultats des simulations dans ces deux dimensions et laissent présager de l'extension probable de cette conclusion à la dimension un. Ces déterminations "brutes" des exposants se révèlent déjà assez précises et confortent ainsi l'aptitude de la méthode à décrire de façon fiable les processus de réaction-diffusion. Ces estimations pourraient bien sûr être grandement affinées en recourant à d'autres fonctions de coupure et en les optimisant.

Ceci achève la première partie de notre analyse concernant les propriétés universelles de la classe d'universalité de la percolation dirigée. Nous allons, dans la seconde moitié de ce chapitre, nous consacrer à l'étude de propriétés non universelles de modèles relatifs à la même classe : les marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires.

VII.3 Diagramme de phase des marches aléatoires avec branchement et annihilation

Dans cette section, nous nous proposons d'établir le diagramme de phase des marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires et de le confronter aux diagrammes (issus de l'approche de champ moyen et du groupe de renormalisation perturbatif [139]) exposés à la section V.2. Notre étude comporte trois volets consacrés chacun à une méthode différente pour explorer ce diagramme, la synthèse des trois conférant un ancrage solide à nos résultats. Nous allons, dans le premier volet, calculer ce diagramme par le groupe de renormalisation non perturbatif, en s'appuyant sur les équations de flot dérivées à la section VII.1. De manière indépendante, nous sondons, dans un deuxième volet, ce même diagramme en simulant numériquement, sur un réseau, l'évolution temporelle de particules, dont la dynamique est gouvernée par l'équation maîtresse. Alors, la forme de cette équation et les fondements de la théorie des champs nous guident pour établir le lien entre les approches numérique et analytique et comparer ainsi les deux diagrammes obtenus. Dans un troisième volet, nous nous efforçons de nous forger de manière simple une intuition de l'existence d'un état absorbant en toute dimension en analysant directement l'équation maîtresse — racine des deux approches précédentes — dans une limite particulière, celle de diffusion nulle. Ces trois approches concordent et tendent ainsi à valider le diagramme de phase obtenu.

Rappelons que, comme montré à la section V.2.4, le cas $m = 1$ s'avère générique des marches impaires (à $k = 2$) pour l'étude de l'existence d'une transition. Nous nous concentrons donc sur ce cas qui correspond aux processus :



c'est-à-dire aux processus de la percolation dirigée amputés du mécanisme de destruction spontanée $A \xrightarrow{\mu} \emptyset$. Nous cherchons à déterminer pour quelles valeurs des taux (λ , σ et D) — si elles existent — le système subit une transition de phase absorbante et ce, en

différentes dimensions spatiales. Ceci correspond donc intrinsèquement à une propriété non universelle, puisqu'entièrement conditionnée par les paramètres microscopiques. Rappelons que si cette transition existe alors elle appartient à la classe d'universalité de la percolation dirigée.

Commençons, dans la continuité de la section précédente, par aborder le volet analytique.

VII.3.1 Analyse par le groupe de renormalisation non perturbatif

L'action nue, *i.e.* à l'échelle Λ , associée aux processus (VII.66) correspond à l'action de la percolation dirigée (VII.45) à $\mu = 0$, soit :

$$\mathcal{S}_{BARW}^\Lambda = \int_{\mathbf{x}} \left\{ \tilde{\phi} \left(\partial_t - D \nabla^2 - \sigma \right) \phi + \sqrt{2\sigma\lambda} \left(\tilde{\phi} \phi^2 - \tilde{\phi}^2 \phi \right) + \lambda \left(\phi \tilde{\phi} \right)^2 \right\}. \quad (\text{VII.67})$$

En revanche, l'action effective, *i.e.* à toute échelle $k \neq \Lambda$, s'identifie à celle de la percolation dirigée car le processus $A \rightarrow \emptyset$ est généré par renormalisation à un taux μ dépendant des taux σ , λ et D initiaux (ainsi que tous les processus d'ordre supérieur).

L'*ansatz* de Γ_k spécifié pour le modèle de la percolation dirigée s'étend donc aux marches aléatoires avec branchement et annihilation. Nous travaillons ici à l'OD du développement dérivatif, correspondant à l'*ansatz* (VII.19) (toujours avec la fonction de coupure r_θ). Nous négligeons, en outre, l'influence de la répartition initiale du réseau, c'est-à-dire la partie de l'action (VI.61) transcrivant les conditions aux limites temporelles car, sauf distribution "pathologique", la configuration initiale du réseau, si elle modifie le régime transitoire, est supposée peu influencer sur la nature de l'état stationnaire atteint. Bien sûr, contrairement aux exposants critiques — universels —, les taux critiques *dépendent* de tout le contenu dérivatif de l'action et des conditions initiales, de sorte que l'effet des différentes approximations mises en œuvre s'avère difficile à quantifier. L'on s'attend ainsi plutôt *a priori* à obtenir un diagramme semi-quantitatif, l'erreur entâchant les taux critiques pouvant éventuellement se révéler non négligeable.

Tracer le diagramme de phase des processus (VII.66) revient à déterminer, pour des valeurs données des taux de transition microscopiques $(\sigma_\Lambda/D_\Lambda, \lambda_\Lambda/D_\Lambda)$ (dont nous omettons par la suite l'indice Λ pour alléger l'écriture), la phase dans laquelle aboutit le système à $k = 0$. Pour identifier la phase du système à grand temps, le flot de renormalisation de Γ_k est intégré, à partir d'une condition microscopique à l'échelle $k = \Lambda$ jusqu'à l'échelle physique $k = 0$ où la valeur moyenne du champ — la densité — prenant soit une valeur nulle soit une valeur finie révèle la phase (respectivement absorbante ou active) du système. L'exploration du diagramme se déroule de la façon suivante. Pour un λ/D initial fixé, nous ajustons σ/D jusqu'à atteindre le régime critique et localiser ainsi un point de la ligne de transition séparant les deux phases. Puis nous itérons cette recherche en variant le taux λ/D initial.

Examinons tout d'abord les diagrammes de phase ainsi obtenus pour les dimensions spatiales $d = 2$ et $d = 3$. Les points de transition déterminés dans ces dimensions sont

reportés sur les figures 5 (a) et (b) respectivement. Observons d’ores et déjà que le

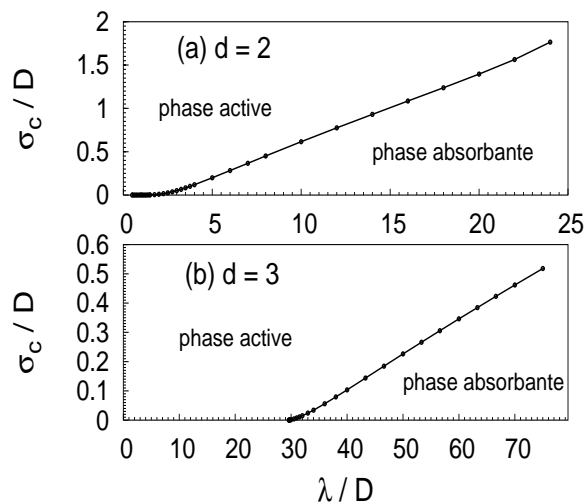


FIG. 5 – Diagramme de phase pour les processus (VII.66) déterminé par le groupe de renormalisation non perturbatif en dimension spatiale (a) $d = 2$ et (b) $d = 3$.

diagramme de la figure 5 (b) révèle l’existence d’une transition de phase en dimension trois, en contradiction avec les prédictions issues des calculs de groupe de renormalisation perturbatif (voir diagramme V.9). La raison de ce désaccord est apparente sur cette figure. En effet, l’état absorbant n’apparaît en $d = 3$ qu’après un certain seuil $(\lambda/D)_s$ (de l’ordre de 30). Ce phénomène s’avère par essence inaccessible par une théorie de perturbation développée au voisinage de l’origine, qui ne perçoit donc que la phase active et rejette l’existence d’une transition. D’autre part, les courbes de points de transition dans les dimensions deux et trois se révèlent quasi-linéaires à grand couplage.

Pour approfondir notre compréhension de ces résultats, nous avons prolongé l’analyse des diagrammes de phase jusqu’en dimension $d = 6$, présentée au paragraphe suivant en regard avec les diagrammes issus des simulations. Avant d’aborder ce deuxième volet, formulons quelques remarques.

Le diagramme de phase de la figure 5 (b) obtenu en dimension trois semble contredire également les simulations numériques [135] présentées au paragraphe V.2.3 qui ne décèlent pas de transition de phase au-delà de la dimension deux. Cependant, deux commentaires s’imposent. Tout d’abord, les règles dynamiques de [135] énoncées au V.2.3 sont définies par un paramètre libre p unique, de sorte que seule une ligne d’équation $(\sigma/D = (1 - p)/p, \lambda/D = 1/p)$ du diagramme est effectivement sondée, ce qui amenuise d’autant les chances d’atteindre l’état absorbant. Ensuite, ces simulations diffèrent fondamentalement des processus considérés dans notre approche (et dans l’approche perturbative qui repose sur la même théorie des champs) puisqu’une contrainte d’exclusion “fermionique” des particules (occupation simple des sites) est imposée à travers les règles présentées au V.2.3. En outre, il en découle que les particules-filles sont créées sur des sites voisins et non au même site. Tant que la diffusion reste grande, ceci a peu d’incidence car le mécanisme de destruction est gouverné par l’annihilation de

particules “étrangères” — non directement affiliées — qui se rencontrent au gré de leurs marches. Au contraire, lorsque la diffusion devient faible, les particules tendent à se sédentariser et le mécanisme de destruction est dominé par “l’auto-destruction”, c’est-à-dire l’annihilation d’une particule avec sa descendance au même site, suivant la séquence $A \rightarrow 2A \rightarrow \emptyset$ — qui traduit le processus effectif de mort spontanée. La dispersion des descendants dans la simulation [135] a donc une incidence cruciale à petite diffusion — ce qui correspond justement à la région de grand couplage λ/D et σ/D du diagramme. Celle-ci tend en effet à supprimer le mécanisme effectif de destruction et donc à défavoriser l’état absorbant, surtout à grande dimension.

Finale­ment, les résultats de la simulation numérique [135] se révèlent difficilement comparables avec les études analytiques et il n’en existe pas d’autres. Ce constat nous a donc incité à réaliser des simulations numériques correspondant aux mêmes règles microscopiques que celles dont dérive la théorie des champs, et qui sont maintenant exposées.

VII.3.2 Simulations numériques

Le but de ce deuxième volet est de déterminer le diagramme de phase des marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires en simulant numériquement les processus (VII.66), selon les mêmes règles dynamiques que celles sous-tendant les approches analytiques, qui sont codées dans l’équation maîtresse. Cette dernière s’écrit pour les processus (VII.66), en spécifiant $k = 2$ et $m = 1$ dans l’équation (VI.21) :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}(\{n_i\}; t)}{dt} = & \sum_i \left\{ \lambda \left[(n_i + 2)(n_i + 1) \mathcal{P}(\dots n_i + 2 \dots; t) - n_i(n_i - 1) \mathcal{P}(\dots n_i \dots; t) \right] \right. \\ & + \sigma \left[(n_i - 1) \mathcal{P}(\dots n_i - 1 \dots; t) - n_i \mathcal{P}(\dots n_i \dots; t) \right] \\ & \left. + D \sum_{\{v\}} \left[(n_v + 1) \mathcal{P}(\dots n_i - 1, n_v + 1 \dots; t) - n_i \mathcal{P}(\dots n_i, n_v \dots; t) \right] \right\}. \quad (\text{VII.68}) \end{aligned}$$

Les simulations numériques se déroulent nécessairement en temps discret. Pour s’approcher au plus près du temps continu de l’équation maîtresse, on se place dans la limite de “petit Δt ”, ce qui revient à travailler à petites probabilités $\sigma \Delta t$, $\lambda \Delta t$ et $D \Delta t$. En effet, l’équation (VII.68) ne dépend que des rapports de ces probabilités et les résultats en découlant doivent donc rester invariants sous un changement d’échelle de celles-ci. Pour quantifier ce critère, on fixe à 2% les variations maximales tolérées sur la détermination des taux critiques lors d’une division de toutes les probabilités par 10. Cette contrainte est vérifiée tant que les probabilités n’excèdent pas typiquement 10^{-3} . L’on se restreint donc dans la suite à des probabilités ne dépassant pas ce seuil.

L’évolution dynamique se déroule de la façon suivante. Des particules peuplent, sans restriction d’occupation, les sites i d’un réseau hypercubique. A chaque pas de temps Δt , tous les sites évoluent parallèlement, suivant les règles déduites de l’équation maîtresse (VII.68) : pour chaque site i , chacune des n_i particules a une probabilité $\sigma \Delta t$ d’engendrer un descendant et une probabilité $D \Delta t$ de diffuser sur chacun de ses voisins (soit une probabilité totale de diffusion $2d D \Delta t$ pour le réseau choisi); chacune

des $n_i(n_i - 1)/2$ paires de particules possibles est également susceptible de s'annihiler avec une probabilité $2\lambda \Delta t$. Le nombre d'occupation de chaque site est alors actualisé selon le bilan des tirages sur ce site et sur les sites voisins. Notons qu'avec la contrainte imposée sur les probabilités, le nombre moyen de réactions, en chaque site et pour un pas de temps, est très inférieur à un. En particulier, des événements tels que le nombre de particules à supprimer au temps $t + \Delta t$ en un site excède le nombre de particules présentes au temps t s'avèrent extrêmement rares — et sont rejetés le cas échéant. Ce régime inefficace numériquement — dans le sens où en un site rien ne se passe à la plupart des itérations — est le prix à payer pour approcher la limite continue. Cependant, ceci est tempéré par l'efficacité de l'algorithme de mise à jour [162, 90], qui ne parcourt de manière effective que les sites non vides — très clairsemés durant la plus grande partie de l'évolution puisque l'on s'intéresse à la transition — et compense ainsi la dilution dans le temps des réactions.

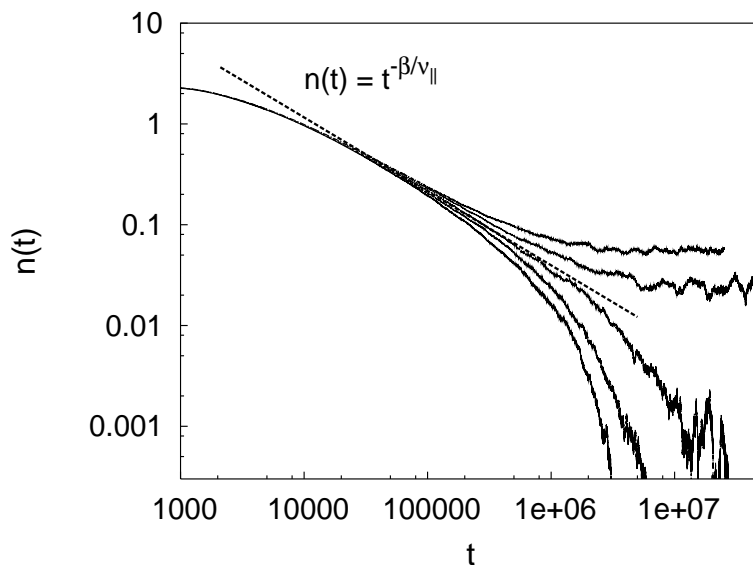


FIG. 6 – Recherche typique de taux critiques en dimension trois. Ici, λ et D sont fixés ($\lambda = 10^{-3}$ et $D = 1.25 \times 10^{-4}$) et σ varie, de bas en haut, de $\sigma = 2.91 \times 10^{-3}$ à $\sigma = 2.95 \times 10^{-3}$ par pas de 10^{-5} . La droite en pointillés représente la décroissance algébrique théorique $\rho(t) \sim t^{-0.734}$ de la percolation dirigée en $d = 3$. La valeur critique $\sigma_c \simeq 2.93 \times 10^{-3}$ sépare les régimes actifs pour $\sigma > \sigma_c$ des régimes absorbants pour $\sigma < \sigma_c$.

Pour déterminer le diagramme de phase, le réseau comporte initialement une particule par site et l'on part d'une condition franchement absorbante, c'est-à-dire de taux microscopiques conduisant à une extinction exponentielle de la population. On recherche alors le régime critique en augmentant progressivement le taux de branchement — par exemple — jusqu'à observer un déclin algébrique de la densité $\rho(t)$, caractérisée par l'exposant critique de décroissance $\delta = \beta/\nu_{\parallel}$ de la percolation dirigée, défini tel que $\rho(t) \sim t^{-\delta}$ à la criticalité [95]. Ceci est illustré sur la figure 6 pour la dimen-

sion trois. Ce régime marque le point de transition qui sépare le régime d'extinction (quasi-) exponentielle des particules du régime de saturation (phase active).

Atteindre une précision typique de 2% sur les taux critiques a nécessité de recourir à des systèmes comptant jusqu'à 2^{24} sites et à des temps de simulation s'étalant jusqu'à 10^9 itérations (en $d = 2$). Nous avons, de cette manière, déterminé les diagrammes de phase des processus (VII.66) dans les dimensions spatiales 1 à 6. Ces diagrammes, représentés sur la figure 7 (par les symboles), dévoilent l'existence d'une transition de phase pour toutes ces dimensions, l'état absorbant n'apparaissant qu'après un certain seuil $(\lambda/D)_s$ pour $d \geq 3$. Avant de commenter en détail ces diagrammes de phase, nous allons au préalable établir le lien entre les diagrammes numériques et analytiques.

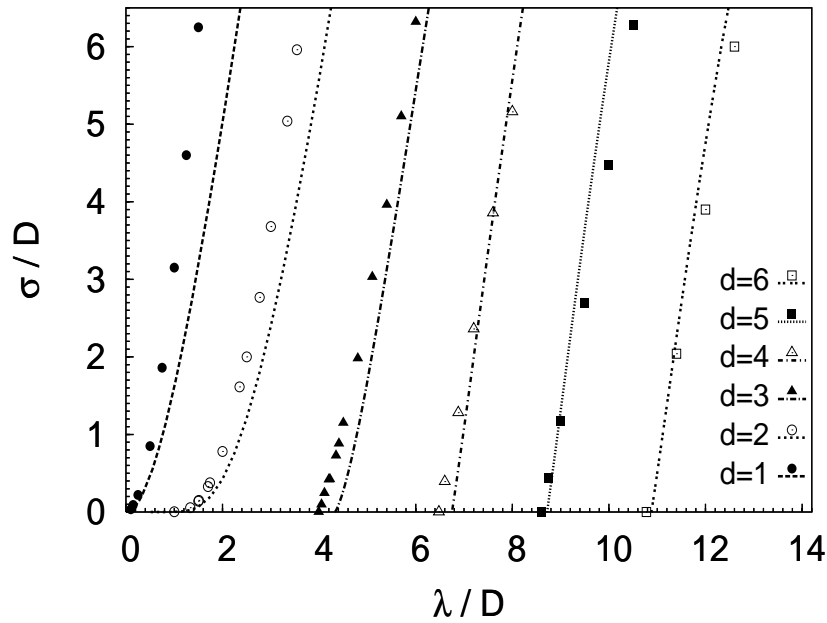


FIG. 7 – Diagramme de phase des processus (VII.66) en dimension 1 à 6. Les symboles découlent des simulations numériques et les lignes représentent les résultats du groupe de renormalisation non perturbatif, après le changement d'échelle des axes expliqué dans le texte. Pour toutes les dimensions, la phase active se place à gauche de la ligne de transition, la phase absorbante à droite.

Confrontation des diagrammes de phase numériques et analytiques

La comparaison des diagrammes de phase obtenus, par le groupe de renormalisation non perturbatif d'une part et par les simulations d'autre part, requiert d'en calibrer les axes λ/D et σ/D . En effet, les simulations numériques modélisent l'évolution dynamique de particules dans un espace discrétisé — sur un réseau — comme l'équation maîtresse elle-même sous sa forme (VII.68). La théorie des champs décrit au contraire des particules évoluant dans un espace continu. Or, lors de la dérivation de l'action

(VII.67) de cette théorie à partir de l'équation maîtresse, le passage à la limite continue a impliqué une redéfinition des taux de transition, en y absorbant des puissances de la maille du réseau selon : $\bar{\lambda} = a^d \lambda$, $\bar{\sigma} = \sigma$ et $\bar{D} = a^2 D$ (voir le paragraphe VI.2.4). Les taux continus diffèrent donc des taux discrets par des facteurs dimensionnels et il convient de les ramener à une échelle commune.

Pour cela, on introduit un paramètre libre C qui peut s'interpréter comme le rapport a/a_0 des échelles microscopiques $a \sim \Lambda^{-1}$ et a_0 sous-jacentes à la théorie des champs et aux simulations respectivement. On corrige donc les échelles des axes analytiques λ/D et σ/D par des facteurs C^{2-d} et C^2 respectivement. Pour fixer la valeur du paramètre C , il suffit d'ajuster deux points homologues issus de chacune des approches (numérique et analytique). Un choix simple de tels points réside dans les points de seuil $(\lambda/D)_s$ des diagrammes pour les dimensions $d \geq 3$.⁸ Leur ajustement est représenté sur la figure 8 (a) qui réunit les points de seuil numériques et ceux analytiques dans la nouvelle échelle (corrigés *via* le facteur C). Ces points s'avèrent étroitement coïncider pour toutes les dimensions. Les diagrammes analytiques complets sont alors tracés dans les

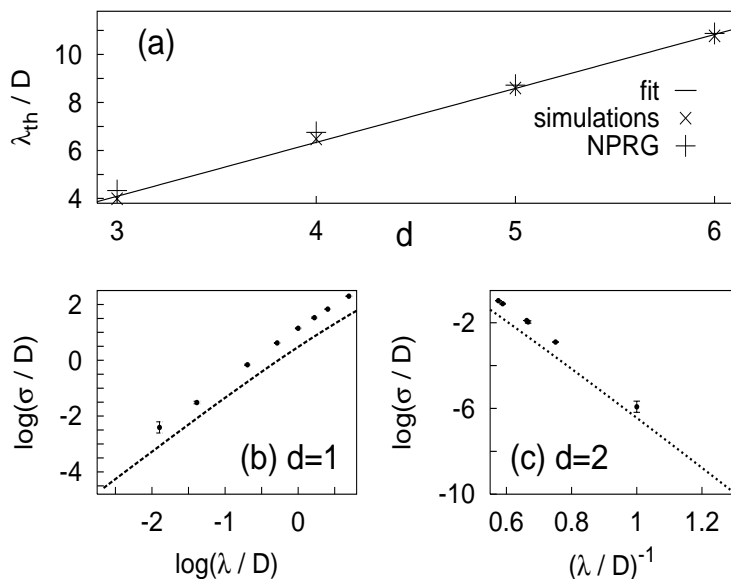


FIG. 8 – (a) Evolution des valeurs de seuil $(\lambda/D)_s$ avec la dimension ; les croix repèrent les points issus des simulations d'une part et, d'autre part, les seuils issus du groupe de renormalisation non perturbatif ("NPRG") corrigés par un facteur de calibration C^{2-d} ajusté de sorte à reproduire les points numériques ; la ligne ("fit") représente un ajustement linéaire de ces seuils. (b) Tracé en échelles logarithmiques de la ligne de transition en $d = 1$ au voisinage de l'origine, qui met en évidence un comportement quadratique. (c) Tracé de la ligne de transition en $d = 2$ au voisinage de l'origine, qui illustre la loi perturbative (VII.69) : $(\sigma/D) \propto \exp[-4\pi(D/\lambda)]$.

axes proprement calibrés à travers le facteur C , et reportés sur la figure 7 (représentés

⁸Nous avons vérifié qu'ajuster la valeur de C en choisissant d'autres quantités n'altère que faiblement sa valeur et ne dégrade donc pas l'accord entre les diagrammes numériques et analytiques de la figure 7.

par les lignes). Les diagrammes numériques et analytiques se révèlent concorder quantitativement, ce qui constitue une indication tangible de la capacité de la méthode de l'action effective moyenne à déterminer des quantités non universelles et ce de façon apparemment précise malgré les nécessaires approximations effectuées.

Analysons à présent plus en détail ces diagrammes de phase. Le résultat principal réside dans l'existence d'une transition de phase dans toutes les dimensions étudiées, en contradiction avec les prédictions perturbatives de Cardy et Täuber [139, 140] (*cf.* figure V.9). Les courbes de transition de la figure 7 apparaissent comme des lignes quasi-parallèles, traversant l'axe (λ/D) en des valeurs de seuil $(\lambda/D)_s(d) \neq 0$ pour $d \geq 3$. Ces valeurs de seuil croissent linéairement avec la dimension, comme le montre la figure 8 (a), suivant une pente 2.248 ± 0.058 déterminée par ajustement linéaire. Nous avons prolongé jusqu'en dimension $d = 10$ la détermination analytique des valeurs de seuil, qui toutes continuent de s'aligner précisément sur la même droite. Cette croissance linéaire du seuil de l'état absorbant avec la dimension suggère que $(\lambda/D)_s(d)$ devient infini dans la limite $d \rightarrow \infty$, où la phase absorbante disparaît alors. Autrement dit, le diagramme de phase de champ moyen (qui ne comporte qu'une phase active) ne semble être recouvert qu'en dimension infinie et non à partir de la dimension critique $d_c^{\text{N.U.}} = 2$ comme prédit par l'analyse perturbative (voir le paragraphe V.2.4) — ni d'ailleurs au-delà de la dimension critique supérieure $d_c^{\text{U}} = 4$ de la percolation dirigée.

Comme annoncé à la fin du chapitre V, ce résultat contredit l'idée, communément admise, que le champ moyen ou le "1-boucle" suffisent à capturer *qualitativement* les traits d'un diagramme de phase, les fluctuations n'en modifiant que *quantitativement* les valeurs, puisque le diagramme "1-boucle" en dimension $d = 3$ est ici qualitativement invalidé.

En dessous de la dimension trois, les seuils s'annulent. Examinons le comportement des lignes de transition au voisinage de l'origine. L'approche à l'origine se révèle quadratique en dimension $d = 1$, exponentielle en dimension $d = 2$ (comme montré sur les figures 8 (b) et (c) respectivement) et nulle en dimension trois, ce qui corrobore les résultats perturbatifs [139], donnés en $d = 1$ par l'équation (V.25) avec $\epsilon = 1$ et en $d = 2$ par l'équation (V.26) rappelée ici :

$$\sigma_c \sim D e^{-4\pi D/\lambda}. \quad (\text{VII.69})$$

Dans notre analyse, le coefficient de l'exponentielle en $d = 2$ (figure 8 (c)) est estimé à 11.86 ± 0.02 pour le diagramme analytique et à 11.67 ± 0.15 pour le diagramme numérique, ce qui confirme quantitativement le coefficient 4π prédit par la loi perturbative (VII.69). En revanche, la saturation suggérée par cette loi — valide seulement à petit couplage — ne se produit pas, laissant place à une croissance quasi-linéaire. Le passage du comportement exponentiel de la ligne de transition au voisinage de l'origine au comportement linéaire (voir le diagramme 5 (a)) marque ainsi approximativement la limite du domaine de validité de la théorie de perturbation.

Les résultats du groupe de renormalisation non perturbatif apparaissent donc en accord avec les résultats perturbatifs dans leur domaine de validité (à faible couplage) mais dévoile des caractéristiques très différentes loin de l'origine, dans la région

précisément “non perturbative”.

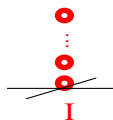
Pour terminer, nous analysons directement l'équation maîtresse (VII.68) dans le régime de petite diffusion pour donner encore un autre éclairage à ces résultats.

VII.3.3 Analyse de l'équation maîtresse à petite diffusion

Ce troisième volet est simplement destiné à se forger une intuition des résultats que nous avons obtenus. Donnons tout d'abord l'idée générale motivant cette analyse. Un des arguments justifiant, comme inféré par Cardy et Täuber [139, 140], la disparition de l'état absorbant en dimension supérieure à deux repose sur les propriétés statistiques d'intersection de marches aléatoires dirigées, qualifiées de “vicieuses” dans la littérature [163] — car s'annihilant lorsqu'elles se rencontrent. Ces marches s'avèrent “ré-entrantes” seulement en dimension inférieure à $2 + 1$ (voir *e.g.* [164]), ce qui signifie que deux marcheurs partant de l'origine ont une probabilité finie de se croiser pendant un temps t tant que $d \leq 2$. Il en découle que des particules isolées dans un système à deux ou une dimension spatiale sont susceptibles de toutes disparaître au gré de leur diffusion, engendrant alors un état absorbant. La probabilité d'intersection des marches vicieuses devient nulle au-delà de la dimension d'espace deux, impliquant que des particules parsemées sur un réseau à trois dimensions errent à jamais, entretenant un état actif.

Cependant, comme suggéré précédemment, le mécanisme de destruction “diffusif” basé sur l'annihilation de particules étrangères dominant seulement à grande diffusion — c'est-à-dire précisément au voisinage de l'origine des diagrammes de phase où le champ moyen est valide. Par contre, à faible diffusion, ce mécanisme est supprimé et supplanté par l'auto-destruction d'une particule avec sa descendance. Ce mécanisme, se déroulant en un site, s'avère, lui, indépendant de la dimension. L'on peut donc en fait légitimement *s'attendre* à l'existence d'un état absorbant à faible diffusion (région “en haut à droite” des diagrammes) en toute dimension. Testons la validité de cet argument en analysant l'équation maîtresse dans la limite de diffusion nulle $D \rightarrow 0$.

Si $D = 0$ exactement, les sites se découplent et l'évolution temporelle de chacun peut être déterminée indépendamment. Nous considérons donc un modèle à un site I :



décrit par la distribution de probabilités $\mathcal{P}(n; t)$ que le site compte n particules au temps t , dont l'évolution temporelle est gouvernée par le système infini $n = 0, \dots, \infty$ d'équations couplées de la forme :

$$\partial_t \mathcal{P}(n; t) = \sigma \left[(n-1) \mathcal{P}(n-1; t) - n \mathcal{P}(n; t) \right] + \lambda \left[(n+2)(n+1) \mathcal{P}(n+2; t) - n(n-1) \mathcal{P}(n; t) \right]. \quad (\text{VII.70})$$

Tout d'abord, on montre simplement analytiquement⁹ que ce système admet une solution stationnaire unique : $\{\mathcal{P}_s(n=0) = 1, \mathcal{P}_s(n \geq 1) = 0\}$, qui correspond à l'état absorbant. Pour vérifier si cet état est atteint dynamiquement ou non, on tronque le système d'équations (VII.70) à $n = 100$ afin de l'intégrer numériquement en temps, en partant d'une condition initiale à une particule (avec une probabilité 1, *i.e.* $\{\mathcal{P}(n=1; t=0) = 1, \mathcal{P}(n \neq 1; 0) = 0\}$). Nous avons vérifié qu'inclure des équations supplémentaires ne changeaient pas les résultats. En effet, comme le montre la figure 9, le régime asymptotique est atteint dès $n \lesssim 6$, *i.e.* les états à grand nombre de particules ne sont pas peuplés, et ce indépendamment de la condition initiale — tant que celle-ci correspond à un faible nombre moyen d'occupation bien sûr.

L'évolution typique du nombre moyen de particules $\bar{n}(t) \equiv \sum n \mathcal{P}(n; t)$ en fonction du temps est représentée sur la figure 9. Pour tous les rapports σ/λ explorés (jus-

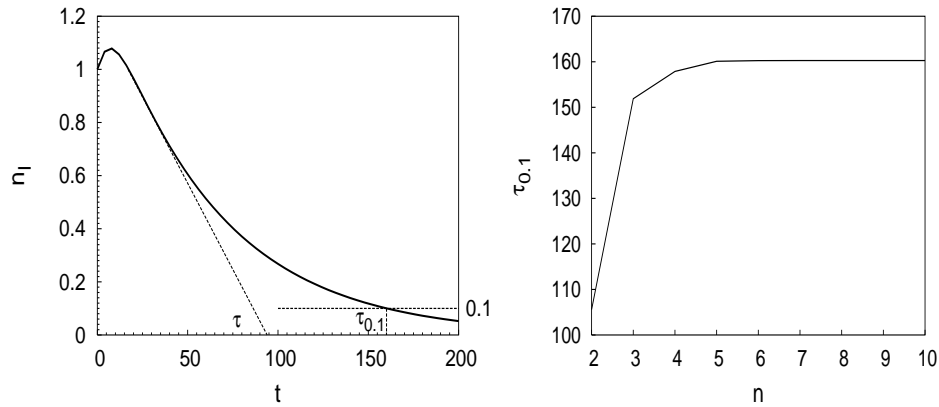


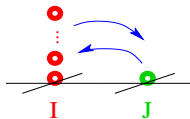
FIG. 9 – Gauche : évolution du nombre moyen d'occupation n_I dans un modèle à un site I (à diffusion nulle) découlant de l'intégration temporelle du système des 100 premières équations maîtresses correspondantes. τ indique le temps typique de relaxation et $\tau_{0.1}$ le temps de décroissance à 10%. Droite : Variation de $\tau_{0.1}$ en fonction du nombre n d'équations maîtresses considérées. Le régime asymptotique est atteint dès typiquement $n = 6$.

qu'à $\sigma/\lambda \lesssim 50$ et probablement pour tout σ/λ fini) le système rejoint toujours l'état absorbant. Le temps τ de relaxation dépend lui du rapport des taux et croît avec lui.

Pour comprendre le diagramme de phase dans la région de grands σ/D et λ/D , il s'agit donc de montrer que cet état absorbant reste stable en incluant une petite diffusion. De façon qualitative, l'on s'attend à ce que ceci reste vrai tant que le temps de diffusion $(2dD)^{-1}$ reste beaucoup plus grand que le temps de relaxation τ de sorte que toutes les particules d'un site disparaissent avant de pouvoir diffuser.

⁹Analysons le système homogène $\{\partial_t \mathcal{P}(0) = 0, \partial_t \mathcal{P}(1) = 0 \dots\}$. La première équation $\partial_t \mathcal{P}(0) = 0$ donne $\mathcal{P}(2) = 0$. Alors l'équation $\partial_t \mathcal{P}(2) = 0$ fournit la relation $\sigma \mathcal{P}(1) + 12\lambda \mathcal{P}(4) = 0$ qui, comme $\mathcal{P}(n) \geq 0$, impose $\mathcal{P}(1) = \mathcal{P}(4) = 0$. L'équation $\partial_t \mathcal{P}(1) = 0$ engendre alors $\mathcal{P}(3) = 0$ puis on déduit trivialement de $\partial_t \mathcal{P}(n) = 0$ que $\mathcal{P}(n+2) = 0$ pour tout $n > 2$. Enfin par conservation des probabilités $\mathcal{P}(0)=1$.

Vérifions cela en incorporant l'effet de la diffusion. Au voisinage du régime critique, le système apparaît très dilué. On s'intéresse donc à une particule isolée sur un site I et l'on modélise son voisinage par un seul site J , initialement vide. On considère donc un modèle à deux sites :



Pour ce modèle, on intègre numériquement en temps le système tronqué des (30×30) premières équations maîtresses couplées — incluant la diffusion — régissant l'évolution temporelle de la distribution de probabilités $\mathcal{P}(n_I, n_J; t)$. Le système rejoint encore invariablement l'état absorbant, ce qui renforce notre conviction de l'existence d'un tel état à petite diffusion.

Allons plus loin. On observe que cet état absorbant persiste lorsque la diffusion croît notablement, mais ceci apparaît alors comme un *artefact* de “taille finie” (réduite à deux sites !) qui empêche les particules de s'éloigner pour échapper aux autres et aboutit donc inéluctablement à leur extinction. On peut supposer qu'une condition nécessaire pour qu'un état actif puisse s'instaurer est que la particule du site I parvienne à se multiplier et ensemençer le site J voisin avant de disparaître — la particule nouvellement créée étant susceptible sur un réseau infini de diffuser et se multiplier à son tour. Etudions l'évolution des nombres moyens d'occupation $\bar{n}_I(t)$ et $\bar{n}_J(t)$ des deux sites au cours du temps. Pour des taux λ et σ donnés, tant que la diffusion est nulle, \bar{n}_J demeure nul. Lorsque D augmente, $\bar{n}_J(t)$ commence à croître et atteint un maximum à un temps noté t_m avant de finalement s'annuler. Ceci nous inspire le critère suivant. On suppose que

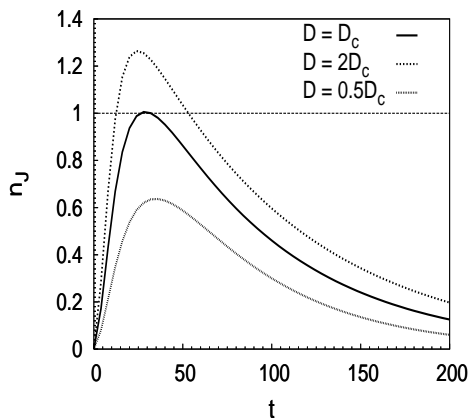


FIG. 10 – Evolution du nombre moyen d'occupation n_J d'un site J initialement vide voisin d'un site I peuplé dans un modèle à deux sites, découlant de l'intégration temporelle du système des (30×30) premières équations maîtresses correspondantes. Si la diffusion est petite, n_J n'atteint jamais un, il dépasse cette valeur à grande diffusion. Il existe une valeur $D = D_c$ pour laquelle n_J atteint un exactement avant de s'annuler, qui est sélectionnée comme “valeur critique” selon le critère discuté dans le texte.

l'état absorbant est déstabilisé si $\bar{n}_J(t_m)$ atteint la valeur 1 (pendant que $\bar{n}_I(t_m) \geq 1$),

puisqu'alors une particule (en moyenne) est créée sur le site J pendant que la particule mère est encore présente. Ceci définit une valeur "critique" $D = D_c$ de diffusion, comme illustré sur la figure 10.

En s'appuyant sur ce critère, nous avons donc déterminé, pour différentes valeurs des taux λ et σ , la valeur critique D_c correspondante. Les différents points obtenus forment une quasi-droite — insérée sur la figure 11 dans le diagramme (analytique) précédent — parallèle aux lignes de transition du diagramme analytique. Ce modèle, pour le moins dépouillé, semble donc suffire pour reproduire les caractéristiques principales à faible diffusion des diagrammes de phase des processus (VII.66) et suggère ainsi que celles-ci ne dépendent pas de la dimension. Ceci conforte notre argument selon lequel

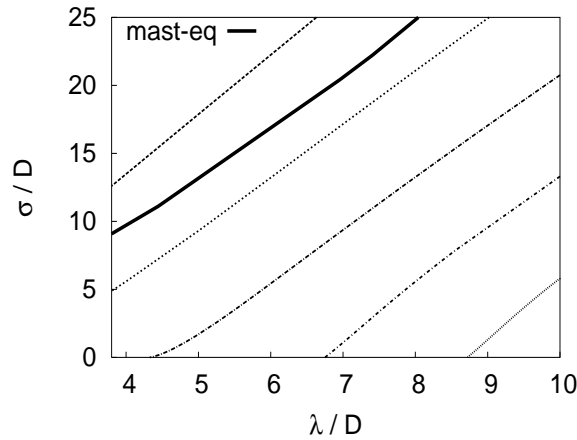


FIG. 11 — Diagramme de phase des processus (VII.66). Les lignes interrompues matérialisent les lignes de transition issues du groupe de renormalisation non perturbatif en dimension 1 à 5 (celles de la figure 7 à laquelle nous renvoyons pour la légende), dans la région de petite diffusion. La ligne pleine plus épaisse résulte du modèle à deux sites. Elle reproduit la pente observée des lignes de transition.

le mécanisme de destruction des particules prédominant à petite diffusion est l'auto-destruction en un site — et ne dépend donc pas de la dimension. Ce modèle simple n'a bien sûr aucune prétention de servir de preuve. Il soutient néanmoins l'existence d'un état absorbant à petite diffusion *indépendamment* de la dimension.

Notons que l'influence du régime de diffusion sur les diagrammes de phase associés à divers processus de réaction-diffusion a très récemment été étudiée notamment par Odor [165], qui met également en évidence des comportements dépendant de la diffusion. En particulier, le diagramme de phase des processus (VII.66) a été établi dans [166] par une méthode de champ moyen amélioré, dite "à n -points", et s'avère précisément confirmer les résultats présentés ici.

Conclusion

Nous avons, dans un premier temps, exploité une approche non perturbative comme un outil de calcul pour déterminer les exposants critiques de la percolation dirigée

dans des dimensions inaccessibles par les approches perturbatives usuelles. Cet outil s'est avéré performant, même si pour le moment des difficultés subsistent encore en dimension un d'espace à l'ordre ∂^2 . Plus fondamentalement, cette approche nous a permis d'approfondir la compréhension des conditions d'existence d'une transition de phase pour les marches aléatoires avec branchement et annihilation, en mettant en lumière le rôle de la diffusion dans la sélection des mécanismes effectifs de destruction de particules. Cette analyse montre ainsi que des effets non perturbatifs peuvent invalider qualitativement un diagramme de phase établi aux premiers ordres de la théorie de perturbation, incluant pourtant déjà en partie l'effet des fluctuations.

Chapitre VIII

Conclusion générale

VIII.1 Synthèse

Le *leitmotiv* de ce travail de thèse a été l'exploration de phénomènes non perturbatifs, qui a requis de se munir d'un outil théorique adapté : le formalisme de l'action effective moyenne. Nous avons d'abord éprouvé cet outil dans un cadre balisé — le modèle d'Ising tri-dimensionnel à l'équilibre — afin d'en acquérir une maîtrise suffisante et d'en tester les performances. A cet égard, nous nous sommes attachés à approfondir l'étude des approximations courantes associées à ce formalisme : le développement dérivatif et le développement en champ. Il s'est dégagé de notre analyse que ce dernier, dont la convergence se révèle en général rapide et contrôlée, apparaît comme un moyen simple pour obtenir des estimations fiables des quantités physiques, d'autant plus en recourant à une optimisation de la précision des résultats, par exemple *via* un critère de sensibilité minimale.

La convergence du développement dérivatif n'est pas, quant à elle, explicitement vérifiable de par la complexité des calculs. Cependant, le premier calcul à l'ordre ∂^4 que nous avons mené laisse présager un bon comportement de ce développement, comme en témoignent les exposants critiques obtenus à cet ordre — notamment la dimension anormale — qui deviennent comparables aux meilleures déterminations théoriques provenant du calcul par groupe de renormalisation perturbatif incluant des corrections à 7-boucles.

Bien sûr, comme toujours, élever le degré de l'approximation accroît singulièrement la complexité des équations associées et les résoudre implique alors un traitement numérique difficile. L'on s'est trouvé confronté aux limitations numériques, tant en terme de mémoire de calcul formel (du logiciel Mathematica) pour dériver les équations qu'en terme de temps de calcul — des nombreux programmes en langage C développés au cours de cette thèse — pour les résoudre. La recherche et l'étude de procédures d'approximation efficaces sont encore largement ouvertes et actives et de nouvelles méthodes — par exemple supplantant le développement dérivatif pour améliorer le traitement de la dépendance impulsionnelle [167] ou encore se basant sur les fonctions de corrélations 2-PI [168] — ont été proposées et semblent prometteuses.

La maîtrise acquise des techniques du groupe de renormalisation non perturbatif

a alors ouvert la voie vers les terrains largement moins balisés de la physique hors de l'équilibre que nous avons abordée *via* les processus de réaction-diffusion. Nous nous sommes concentrés sur deux aspects de la classe d'universalité la plus représentée (la percolation dirigée) : les propriétés universelles de la transition de phase absorbante et surtout le problème de l'existence d'une telle transition dans des modèles dénués de destruction spontanée de particules — les marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires. Nous avons dans un premier temps généralisé le formalisme de l'action effective moyenne à des systèmes de physique statistique hors de l'équilibre, ce qui n'avait encore jamais été envisagé, afin d'établir des équations de flot génériques pour les processus de réaction-diffusion.

Outre fournir des valeurs précises des exposants critiques de la percolation dirigée même en basse dimension, le caractère non perturbatif de ces équations nous a permis d'apporter un éclairage nouveau sur le diagramme de phase des marches aléatoires avec branchement et annihilation en révélant, au delà de la dimension trois, l'apparition d'un seuil précédant l'existence d'un état absorbant. Ces résultats réfutent la prédiction émanant du groupe de renormalisation perturbatif de la disparition d'une transition de phase au-delà de la dimension deux, en rejetant au contraire celle-ci à l'infini. Ces analyses mettent ainsi en évidence le rôle crucial de la diffusion, qui conditionne les caractéristiques du diagramme de phase, et suggèrent son incidence sur l'efficacité des mécanismes effectifs de destruction.

Ces prédictions ont été validées par plusieurs approches indépendantes. D'une part, les simulations numériques Monte Carlo que nous avons réalisées se sont avérées coïncider quantitativement avec le diagramme théorique, confirmant l'aptitude de la méthode à produire des quantités non universelles relativement précises. D'autre part, notre analyse de l'équation maîtresse à petite diffusion conforte l'allure des lignes de transition dans ce régime. En outre, un récent calcul à l'approximation de champ moyen à n -points par Odor [166] a une nouvelle fois confirmé l'allure du diagramme.

Le groupe de renormalisation non perturbatif a ainsi permis de fournir de nouveaux éléments de compréhension des propriétés des marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires et apparaît comme un outil prometteur pour aborder d'autres processus de réaction-diffusion et, plus généralement, d'autres systèmes physiques hors de l'équilibre, dont nous donnons maintenant un bref florilège.

VIII.2 Perspectives

Les processus de réaction-diffusion laissent encore de nombreux problèmes ouverts. En connection étroite avec les modèles envisagés ici, les marches aléatoires avec branchement et annihilation *paires* ont attiré une grande d'attention [135, 136, 137, 138] (voir [141] pour une revue). Comme mentionné au cours du chapitre V, ces processus ont dévoilé une nouvelle classe d'universalité — la classe de parité conservée (PC). L'analyse par groupe de renormalisation perturbatif menée par Cardy et Täuber [139, 140] prédit l'apparition d'une deuxième dimension critique supérieure $d_c \sim 4/3$, en deçà de laquelle les exposants critiques acquièrent les valeurs non triviales de la classe PC.

Cependant, la détermination seulement approximative de cette nouvelle dimension critique interdit tout développement perturbatif autour de celle-ci et les exposants de cette classe ne sont donc pas connus théoriquement en-dehors de la dimension un — où ils sont déterminés exactement [140]. Une approche non perturbative permettrait de sonder ce modèle en basse dimension et d'établir ainsi les propriétés universelles de la classe PC et peut-être d'expliquer l'origine d'une deuxième dimension critique.

En s'écartant légèrement des marches aléatoires avec branchement et annihilation, les processus de réaction-diffusion formés des réactions $2A \rightarrow \emptyset$ et $2A \rightarrow 3A$, dénommés “processus de contact de paires avec diffusion” suscitent une grande effervescence [157, 169, 162, 170] (voir [146] pour une revue) car leur classe d'universalité reste encore à ce jour largement débattue. Plusieurs hypothèses se confrontent, les unes rattachant ces processus à la classe de la percolation dirigée, les autres lui attribuant une nouvelle classe d'universalité, d'autres encore suggérant l'existence d'exposants variant continûment avec la diffusion (voir [146]). Aucun consensus n'a encore clairement émergé. Les approches par groupe de renormalisation perturbatif sont mises en difficulté car les puissances du champ auxiliaire s'avèrent toutes également pertinentes et requièrent donc un traitement fonctionnel. D'une part, le groupe de renormalisation non perturbatif, décrivant par construction les réactions comme un potentiel fonction des deux champs apparaît pallier à ce problème. Cette approche semble d'autre part capable de prendre en compte l'influence de la diffusion et pourrait peut-être ainsi permettre de caractériser de façon fiable les propriétés universelles de ces processus.

Les systèmes hors de l'équilibre ne se limitent pas, bien sûr, aux processus de réaction-diffusion. Une approche non perturbative pourrait se révéler particulièrement appréciable pour explorer le phénomène de transition rugueuse cinétique, au cours duquel une interface, initialement plate, développe lors de sa croissance une structure spatiale non triviale, présentant de l'auto-similarité. Ce phénomène, qui constitue un exemple de criticalité générée naturellement par la dynamique, appartient génériquement à la classe d'universalité de l'équation de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) [116, 74] et des polymères dirigés [117, 118, 74].

L'équation de KPZ peut se formuler, à travers le formalisme de fonction de réponse, comme une théorie des champs. L'analyse perturbative de cette théorie révèle les caractéristiques suivantes (voir par exemple [161, 74]). Il existe une dimension critique inférieure $d_c^{inf} = 2$, en-deçà de laquelle l'interface est toujours rugueuse et le problème s'avère soluble exactement en dimension un, par diverses méthodes. Au-delà de d_c^{inf} , l'interface peut soit rester “plate” soit devenir rugueuse (selon la valeur du couplage non linéaire de l'équation de KPZ), les deux états étant séparés par une transition continue. Le point fixe correspondant à la phase rugueuse s'échappe dans un régime de couplage fort inaccessible perturbativement, laissant les exposants critiques de cette phase théoriquement indéterminés.

En outre, l'existence d'une dimension critique supérieure n'est pas tranchée et encore largement controversée, les estimations s'étalant de $d_c^{sup} \simeq 2.4$ [171] à $d_c^{sup} = \infty$ *e.g.* [172, 173] en passant par $d_c^{sup} = 4$ *e.g.* [174, 175, 176]. L'enjeu théorique réside donc dans la description du régime — non perturbatif — de couplage fort afin de sonder les réalisations physiquement intéressantes (rugueuses) de ces systèmes et le groupe de

renormalisation non perturbatif se pose comme un bon candidat. Des travaux sur ces problèmes sont actuellement en cours.

Annexe A

Equation de flot de Γ_k

Cette annexe est dédiée à la dérivation de l'équation de flot exacte de l'action effective moyenne Γ_k [31], qui est présentée ici pour une théorie scalaire à l'équilibre thermique (et voir *e.g.* [14]). Soulignons que l'extension de cette dérivation à un champ à n composantes est directe, il suffit alors d'affecter aux différents objets des indices internes et d'insérer les sommations appropriées (le cas d'un champ à deux composantes est détaillé explicitement au chapitre VII, pour une théorie hors de l'équilibre). Rappelons les définitions introduites au cours du chapitre II. La fonction de partition dépendante d'échelle s'écrit :

$$\mathcal{Z}_k[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}[\phi] - \Delta\mathcal{S}_k[\phi] + \int d^d x J(x) \phi(x)} \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{\mathcal{K}[\phi, J]} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{avec} \quad \Delta\mathcal{S}_k[\phi] = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \phi(x) R_k(x-y) \phi(y), \quad (\text{A.2})$$

où R_k est une fonction de régularisation IR qui affecte aux modes de basse impulsion $q < k$ une masse effective. Le terme de masse $\Delta\mathcal{S}_k$ est exprimé ici dans l'espace direct. L'action effective moyenne Γ_k est liée à l'énergie libre $\mathcal{W}_k[J] = \ln\mathcal{Z}_k[J]$ par la transformation de Legendre modifiée par l'adjonction du terme de masse, dont la présence est justifiée dans le chapitre II :

$$\Gamma_k[\psi] + \mathcal{W}_k = \int d^d x J(x) \psi(x) - \Delta\mathcal{S}_k[\psi], \quad \text{avec} \quad \psi(x) = \frac{\delta\mathcal{W}_k}{\delta J(x)}. \quad (\text{A.3})$$

Il s'agit donc de calculer la dérivée partielle de Γ_k par rapport à l'échelle k , lorsque ψ est fixé. Nous adoptons dans la suite la notation : $\int_x \equiv \int d^d x$. En dérivant la définition (A.3) par rapport à k , on obtient :

$$\partial_k \Gamma_k \Big|_{\psi} = -\partial_k \mathcal{W}_k \Big|_{\psi} + \int_x \partial_k J(x) \psi(x) - \frac{1}{2} \int_{x,y} \psi(x) \partial_k R_k(x-y) \psi(y). \quad (\text{A.4})$$

Par suite, la dérivée de \mathcal{W}_k à ψ fixé est liée à sa dérivée à J fixé par la relation :

$$\partial_k \mathcal{W}_k \Big|_{\psi} = \partial_k \mathcal{W}_k \Big|_J + \int_y \partial_k J(y) \frac{\delta\mathcal{W}_k}{\delta J(y)}. \quad (\text{A.5})$$

Etablissons alors la variation de \mathcal{W}_k avec l'échelle k , à J fixé. Pour cela, il suffit de dériver l'équation (A.1) — qui définit $\exp \mathcal{W}_k$ — par rapport à k :

$$\partial_k e^{\mathcal{W}_k} \Big|_J = - \int \mathcal{D}\phi \left\{ \partial_k \Delta \mathcal{S}_k[\phi] \right\} e^{\mathcal{K}[\phi, J]} \quad (\text{A.6})$$

$$= - \left\{ \partial_k \Delta \mathcal{S}_k \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} \int \mathcal{D}\phi e^{\mathcal{K}[\phi, J]} \quad (\text{A.7})$$

$$= - \left\{ \partial_k \Delta \mathcal{S}_k \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} e^{\mathcal{W}_k}. \quad (\text{A.8})$$

En exprimant le terme de masse, la dernière égalité s'écrit aussi :

$$\partial_k \mathcal{W}_k e^{\mathcal{W}_k} \Big|_J = \left\{ -\frac{1}{2} \int_{x,y} \frac{\delta}{\delta J(x)} \cdot \partial_k R_k(x-y) \cdot \frac{\delta}{\delta J(y)} \right\} e^{\mathcal{W}_k}, \quad (\text{A.9})$$

et on en déduit finalement, en explicitant l'action des opérateurs de dérivées fonctionnelles sur $\exp \mathcal{W}_k$:

$$\partial_k \mathcal{W}_k \Big|_J = -\frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_k R_k(x-y) \left[\frac{\delta^2 \mathcal{W}_k}{\delta J(x) \delta J(y)} + \frac{\delta \mathcal{W}_k}{\delta J(x)} \frac{\delta \mathcal{W}_k}{\delta J(y)} \right]. \quad (\text{A.10})$$

En insérant dans l'équation (A.4) les relations (A.5) et (A.10), et en notant que par définition $\psi(x) = \frac{\delta \mathcal{W}_k}{\delta J(x)}$, on obtient l'équation de flot souhaitée :

$$\partial_k \Gamma_k \Big|_\psi = \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_k R_k(x-y) \frac{\delta^2 \mathcal{W}_k}{\delta J(x) \delta J(y)} \equiv \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_k R_k(x-y) \mathcal{W}_k^{(2)}(x,y). \quad (\text{A.11})$$

Pour terminer, nous allons établir une formulation “auto-référente” — c'est-à-dire ne dépendant que de la fonctionnelle Γ_k — de l'équation précédente, en exprimant $\mathcal{W}_k^{(2)}(x,y)$ en fonction des seules dérivées fonctionnelles de Γ_k . Tout d'abord, en dérivant la définition $\psi(x) = \frac{\delta \mathcal{W}_k}{\delta J(x)}$ par rapport à $\psi(y)$, on obtient une expression de l'identité :

$$\frac{\delta^2 \mathcal{W}_k}{\delta \psi(y) \delta J(x)} = \delta^d(x-y) = \int_z \frac{\delta^2 \mathcal{W}_k}{\delta J(z) \delta J(x)} \frac{\delta J(z)}{\delta \psi(y)}. \quad (\text{A.12})$$

Le dernier terme dans l'intégrale du membre de droite de (A.12) se calcule simplement en dérivant la relation (A.3) d'abord par rapport à $\psi(z)$:

$$\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \psi(z)} = J(z) - \int_u R_k(z-u) \psi(u), \quad (\text{A.13})$$

puis par rapport à $\psi(y)$:

$$\frac{\delta J(z)}{\delta \psi(y)} = \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \psi(y) \delta \psi(z)} + R_k(z-y) \equiv \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k \right] (y,z). \quad (\text{A.14})$$

La relation (A.12) définit alors $[\Gamma_k^{(2)} + R_k]$ comme l'inverse de $\mathcal{W}_k^{(2)}$ et l'équation de flot (A.11) de Γ_k peut alors s'exprimer en fonction des seules dérivées fonctionnelles de Γ_k selon [31] :

$$\partial_k \Gamma_k[\psi] = \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_k R_k(x-y) [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1}(x,y). \quad (\text{A.15})$$

Cette équation se généralise simplement pour des champs à n composantes sous la forme [31] :

$$\partial_k \Gamma_k[\psi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ [\partial_k R_k(x-y)] \cdot [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1}(x,y) \right\}, \quad (\text{A.16})$$

où la trace Tr indique la sommation sur les indices internes et l'intégration sur les variables x et y (ou, dans l'espace de Fourier, sur l'impulsion interne).

Annexe B

Fonctions seuil pour le modèle d'Ising

Cette annexe regroupe les définitions explicites des différentes fonctions seuil impliquées dans les équations de flot du modèle d'Ising jusqu'à l'ordre ∂^4 du développement dérivatif — apparaissant en particulier dans l'annexe C — ainsi que les relations de récurrence vérifiées par leurs dérivées. Rappelons que cette classification des intégrales en impulsion est introduite essentiellement pour systématiser la dérivation par rapport au champ des équations de flot des fonctions de renormalisation complètes, afin d'en déduire simplement celles des coefficients de leur développement en champ — ou constantes de couplage —, et surtout pour en faciliter le traitement numérique. Ces fonctions seuil, au nombre de six, se définissent de façon synthétique :

$$F_n^d(\tilde{\rho}, \eta) = \int dy y^{\frac{d}{2}-1} \tilde{\partial}_t \left(\frac{f(y)}{P_{\tilde{\rho}}(y)^n} \right), \quad (\text{B.1})$$

où $f(y)$ représente successivement $y(\partial_y p)^i$, $i = 0, \dots, 4$ et $y(\partial_y^2 p)$ pour les six fonctions seuil notées respectivement $F = L, N, M, S, T$ et U . Dans l'expression (B.1), l'opérateur $\tilde{\partial}_t \equiv k \partial_k R_k \partial / \partial R_k$ n'agit que sur la dépendance en k de la fonction de coupure $R_k(q^2) = Z_k q^2 r(y)$ et

$$P_{\tilde{\rho}}(y) = y [z_k(\tilde{\rho}) + r(y)] + w_k^a(\tilde{\rho}) y^2 + u'_k(\tilde{\rho}) + 2 \tilde{\rho} u''_k(\tilde{\rho}). \quad (\text{B.2})$$

Dans le cas du modèle d'Ising, la fonction N se rattache par intégration par parties à la fonction L à travers la relation :

$$N_n^d(\tilde{\rho}, \eta) = \frac{d}{2(n-1)} L_{n-1}^d(\tilde{\rho}, \eta) - 2 w_k^a(\tilde{\rho}) L_n^{d+4}(\tilde{\rho}, \eta), \quad (\text{B.3})$$

et n'est donc plus considérée. Les définitions explicites des fonctions L, M, S, T et U s'écrivent :

$$L_n^d(\tilde{\rho}, \eta) = -n \int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}-1} \frac{y s(y)}{P_{\tilde{\rho}}(y)^{n+1}} \quad (\text{B.4})$$

$$M_n^d(\tilde{\rho}, \eta) = \int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}} \left\{ -n y s(y) \frac{H_{\tilde{\rho}}(y)^2}{P_{\tilde{\rho}}(y)^{n+1}} + 2 s'(y) \frac{H_{\tilde{\rho}}(y)}{P_{\tilde{\rho}}(y)^n} \right\} \quad (\text{B.5})$$

$$S_n^d(\tilde{\rho}, \eta) = \int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}} \left\{ -n y s(y) \frac{H_{\tilde{\rho}}(y)^3}{P_{\tilde{\rho}}(y)^{n+1}} + 3 s'(y) \frac{H_{\tilde{\rho}}(y)^2}{P_{\tilde{\rho}}(y)^n} \right\} \quad (\text{B.6})$$

$$T_n^d(\tilde{\rho}, \eta) = \int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}} \left\{ -n y s(y) \frac{H_{\tilde{\rho}}(y)^4}{P_{\tilde{\rho}}(y)^{n+1}} + 4 s'(y) \frac{H_{\tilde{\rho}}(y)^3}{P_{\tilde{\rho}}(y)^n} \right\} \quad (\text{B.7})$$

$$U_n^d(\tilde{\rho}, \eta) = \int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}} \left\{ -n y s(y) \frac{H'_{\tilde{\rho}}(y)^2}{P_{\tilde{\rho}}(y)^{n+1}} + 2 s''(y) \frac{H'_{\tilde{\rho}}(y)}{P_{\tilde{\rho}}(y)^n} \right\}, \quad (\text{B.8})$$

où les notations $H_{\tilde{\rho}}(y)$ et $s(y)$ désignent les fonctions :

$$H_{\tilde{\rho}}(y) = z_k(\tilde{\rho}) + r(y) + y r'(y) \quad (\text{B.9})$$

$$s(y) = -2 y r'(y) - \eta r(y). \quad (\text{B.10})$$

Les primes affectés aux fonctions $s(y)$ et $H_{\tilde{\rho}}(y)$ marquent des dérivations par rapport à la variable y .

La dépendance en $\tilde{\rho}$ des fonctions seuil est ainsi contenue uniquement dans les fonctions $P_{\tilde{\rho}}(y)$ et $H_{\tilde{\rho}}(y)$ et :

$$\partial P_{\tilde{\rho}}(y) / \partial \tilde{\rho} = y z'_k(\tilde{\rho}) + w_k^{a'}(\tilde{\rho}) y^2 + 3 u_k''(\tilde{\rho}) + 2 \tilde{\rho} u_k'''(\tilde{\rho}) \quad (\text{B.11})$$

$$\partial H_{\tilde{\rho}}(y) / \partial \tilde{\rho} = z'_k(\rho). \quad (\text{B.12})$$

Il s'ensuit que les dérivées de ces fonctions seuil par rapport au champ se déduisent par des relations de récurrence les reliant à d'autres fonctions de la même famille et de la famille "précédente". Ces relations s'écrivent :

$$\frac{\partial L_n^d(\tilde{\rho}, \eta)}{\partial \tilde{\rho}} = -n \left[\left(3 u_k''(\tilde{\rho}) + 2 \tilde{\rho} u_k'''(\tilde{\rho}) \right) L_{n+1}^d(\tilde{\rho}, \eta) + z'_k(\rho) L_{n+1}^{d+2}(\tilde{\rho}, \eta) + w_k^{a'}(\tilde{\rho}) L_{n+1}^{d+4}(\tilde{\rho}, \eta) \right] \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n^d(\tilde{\rho}, \eta)}{\partial \tilde{\rho}} &= -n \left[\left(3 u_k''(\tilde{\rho}) + 2 \tilde{\rho} u_k'''(\tilde{\rho}) \right) M_{n+1}^d(\tilde{\rho}, \eta) + z'_k(\rho) M_{n+1}^{d+2}(\tilde{\rho}, \eta) + w_k^{a'}(\tilde{\rho}) M_{n+1}^{d+4}(\tilde{\rho}, \eta) \right] \\ &\quad + 2 z'_k(\rho) N_n^d(\tilde{\rho}, \eta) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_n^d(\tilde{\rho}, \eta)}{\partial \tilde{\rho}} &= -n \left[\left(3 u_k''(\tilde{\rho}) + 2 \tilde{\rho} u_k'''(\tilde{\rho}) \right) S_{n+1}^d(\tilde{\rho}, \eta) + z'_k(\rho) S_{n+1}^{d+2}(\tilde{\rho}, \eta) + w_k^{a'}(\tilde{\rho}) S_{n+1}^{d+4}(\tilde{\rho}, \eta) \right] \\ &\quad + 3 z'_k(\rho) M_n^d(\tilde{\rho}, \eta) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_n^d(\tilde{\rho}, \eta)}{\partial \tilde{\rho}} &= -n \left[\left(3 u_k''(\tilde{\rho}) + 2 \tilde{\rho} u_k'''(\tilde{\rho}) \right) T_{n+1}^d(\tilde{\rho}, \eta) + z'_k(\rho) T_{n+1}^{d+2}(\tilde{\rho}, \eta) + w_k^{a'}(\tilde{\rho}) T_{n+1}^{d+4}(\tilde{\rho}, \eta) \right] \\ &\quad + 4 z'_k(\rho) S_n^d(\tilde{\rho}, \eta) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial U_n^d(\tilde{\rho}, \eta)}{\partial \tilde{\rho}} = -n \left[\left(3 u_k''(\tilde{\rho}) + 2 \tilde{\rho} u_k'''(\tilde{\rho}) \right) U_{n+1}^d(\tilde{\rho}, \eta) + z'_k(\rho) U_{n+1}^{d+2}(\tilde{\rho}, \eta) + w_k^{a'}(\tilde{\rho}) U_{n+1}^{d+4}(\tilde{\rho}, \eta) \right]. \quad (\text{B.17})$$

Annexe C

Equations de flot du modèle d'Ising à l'ordre ∂^4

Cette annexe consigne les équations de flot qui régissent l'évolution des cinq fonctions de renormalisation adimensionnées $u_k(\tilde{\rho})$, $z_k(\tilde{\rho})$, $w_k^a(\tilde{\rho})$, $w_k^b(\tilde{\rho})$ et $w_k^c(\tilde{\rho})$, formant l'*ansatz* (III.9) pour le modèle d'Ising à l'ordre ∂^4 du développement dérivatif. Les conventions de notations dans cette annexe sont les suivantes. Les dérivées successives des fonctions sont représentées par un chiffre, accolé au nom de la fonction, qui en marque l'ordre. De plus l'argument $\tilde{\rho}$ et la dépendance en k de ces fonctions sont sous-entendus (par exemple $u1 \equiv u'_k(\tilde{\rho})$, $wa3 \equiv w_k^{a(3)}(\tilde{\rho})$, $z5 \equiv z_k^{(5)}(\tilde{\rho}) \dots$). Le format des fonctions seuil est ici $F[n, d]$, où les arguments correspondent respectivement aux indices n et d de la définition (B.1) de $F_n^d(\tilde{\rho}, \eta)$, le point d'évaluation $\tilde{\rho}$ et l'exposant η étant également sous-entendus — car ceux-ci apparaissent identiquement pour chacune des fonctions. $v[d]$ représente le facteur dimensionnel lié au volume de la sphère unité défini dans le chapitre II. Finalement, l'équation de flot de la dérivée première du potentiel, plutôt que celle du potentiel lui-même, est ici reportée car le potentiel $u0 = u_k(\tilde{\rho})$ n'intervient en fait jamais directement dans les équations de flot des autres fonctions de renormalisation. Mentionnons pour finir que $\tilde{\rho}$ est simplement noté ρ dans la suite.

$$\frac{d}{dt} u_1 = u_1 (-2 + \eta) - u_2 \left((2 - d - \eta) \rho + \left(-\frac{(3 u_2 + 2 u_3 \rho) L[1, d]}{u_2} - \frac{z_1 L[1, 2 + d]}{u_2} - \frac{wa_1 L[1, 4 + d]}{u_2} \right) v[d] \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z = & (-2 + d) z_1 \rho + \eta (z + z_1 \rho) + \left((z_1 + 2 z_2 \rho) L[1, d] + \right. \\ & \frac{4 (wa_1 - d wb + 2 wc + d wc + 2 (wa_2 - d wb_1) \rho) L[1, 2 + d]}{d} - 4 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) L[2, d] - \\ & \frac{2 \rho (6 u_2 (3 wa_1 - 2 (-1 + d) wb) + (1 + 2 d) z_1^2 + 4 u_3 (3 wa_1 + 2 wb - 2 d wb) \rho) L[2, 2 + d]}{d} - \\ & \frac{4 ((5 + d) wa_1 - 2 (-1 + d) wb) z_1 \rho L[2, 4 + d]}{d} + \frac{4 wa_1 (-5 wa_1 + 2 (-1 + d) wb) \rho L[2, 6 + d]}{d} + \\ & \frac{8 (2 + d) wa \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 L[3, 2 + d]}{3 d} + \frac{16 (4 + d) wa z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) L[3, 4 + d]}{3 d} + \\ & \frac{8 (6 + d) wa \rho (6 u_2 wa_1 + z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) L[3, 6 + d]}{3 d} + \frac{16 (8 + d) wa wa_1 z_1 \rho L[3, 8 + d]}{3 d} + \\ & \frac{8 (10 + d) wa wa_1^2 \rho L[3, 10 + d]}{3 d} - \frac{16 wa^2 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 L[4, 6 + d]}{d} - \\ & \frac{32 wa^2 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) L[4, 8 + d]}{d} - \frac{16 wa^2 \rho (6 u_2 wa_1 + z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) L[4, 10 + d]}{d} - \\ & \frac{32 wa^2 wa_1 z_1 \rho L[4, 12 + d]}{d} - \frac{16 wa^2 wa_1^2 \rho L[4, 14 + d]}{d} + \frac{4 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 M[4, d]}{d} + \\ & \frac{8 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) M[4, 2 + d]}{d} + \frac{4 \rho (6 u_2 wa_1 + z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) M[4, 4 + d]}{d} + \\ & \left. \frac{8 wa_1 z_1 \rho M[4, 6 + d]}{d} + \frac{4 wa_1^2 \rho M[4, 8 + d]}{d} \right) v[d] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} wa = & wa (2 + \eta) + wa_1 (-2 + d + \eta) \rho + \left((wa_1 + 2 wa_2 \rho) L[1, d] - 2 \rho (6 u_2 wa_1 + z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) L[2, d] - \right. \\ & \frac{4 ((5 + d) wa_1 - 2 (-1 + d) wb) z_1 \rho L[2, 2 + d]}{d} - \\ & \frac{2 ((43 + 12 d + 2 d^2) wa_1^2 - 12 (-1 + d) wa_1 wb + 4 (-1 + d^2) wb^2) \rho L[2, 4 + d]}{d (2 + d)} + \frac{4}{3} wa \rho \\ & (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 L[3, d] + \frac{8 (8 + 3 d) wa z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) L[3, 2 + d]}{3 d} + \frac{1}{3 d (2 + d)} (4 (4 + d) \\ & wa \rho (6 u_2 ((20 + d) wa_1 - 4 (-1 + d) wb) + (16 + 5 d) z_1^2 + 4 u_3 ((20 + d) wa_1 - 4 (-1 + d) wb) \rho) \\ & L[3, 4 + d]) + \frac{8 (6 + d) wa (3 (10 + d) wa_1 - 4 (-1 + d) wb) z_1 \rho L[3, 6 + d]}{3 d (2 + d)} + \\ & \frac{4 (8 + d) wa wa_1 ((46 + d) wa_1 - 8 (-1 + d) wb) \rho L[3, 8 + d]}{3 d (2 + d)} - \\ & \frac{4 (36 + 14 d + d^2) wa^2 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 L[4, 4 + d]}{d (2 + d)} - \\ & \left. \frac{8 (76 + 22 d + d^2) wa^2 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) L[4, 6 + d]}{d (2 + d)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{d(2+d)} (4 wa^2 \rho (6 u_2 ((136 + 22 d + d^2) wa_1 - 8 (-1 + d) wb) + \\
& \quad (128 + 30 d + d^2) z_1^2 + 4 u_3 ((136 + 22 d + d^2) wa_1 - 8 (-1 + d) wb) \rho) L[4, 8 + d]) - \\
& \frac{8 wa^2 ((200 + 30 d + d^2) wa_1 - 8 (-1 + d) wb) z_1 \rho L[4, 10 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{4 wa^2 wa_1 ((284 + 30 d + d^2) wa_1 - 16 (-1 + d) wb) \rho L[4, 12 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{384 (8 + d) wa^3 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 L[5, 8 + d]}{5 d(2+d)} + \\
& \frac{768 (10 + d) wa^3 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) L[5, 10 + d]}{5 d(2+d)} + \\
& \frac{384 (12 + d) wa^3 \rho (6 u_2 wa_1 + z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) L[5, 12 + d]}{5 d(2+d)} + \\
& \frac{768 (14 + d) wa^3 wa_1 z_1 \rho L[5, 14 + d]}{5 d(2+d)} + \frac{384 (16 + d) wa^3 wa_1^2 \rho L[5, 16 + d]}{5 d(2+d)} - \\
& \frac{512 wa^4 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 L[6, 12 + d]}{d(2+d)} - \frac{1024 wa^4 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) L[6, 14 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{512 wa^4 \rho (6 u_2 wa_1 + z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) L[6, 16 + d]}{d(2+d)} - \frac{1024 wa^4 wa_1 z_1 \rho L[6, 18 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{512 wa^4 wa_1^2 \rho L[6, 20 + d]}{d(2+d)} + \frac{8 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) M[4, d]}{d} + \\
& \frac{4 \rho (6 u_2 (7 wa_1 - 2 (-1 + d) wb) + (5 + 2 d) z_1^2 + 4 u_3 (7 wa_1 + 2 wb - 2 d wb) \rho) M[4, 2 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{8 ((11 + d) wa_1 - 2 (-1 + d) wb) z_1 \rho M[4, 4 + d]}{d(2+d)} + \frac{8 wa_1 (9 wa_1 - 2 (-1 + d) wb) \rho M[4, 6 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{16 (6 + d) wa \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 M[5, 2 + d]}{d(2+d)} - \frac{32 (8 + d) wa z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) M[5, 4 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{16 (10 + d) wa \rho (6 u_2 wa_1 + z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) M[5, 6 + d]}{d(2+d)} - \frac{32 (12 + d) wa wa_1 z_1 \rho M[5, 8 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{16 (14 + d) wa wa_1^2 \rho M[5, 10 + d]}{d(2+d)} + \frac{256 wa^2 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 M[6, 6 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{512 wa^2 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) M[6, 8 + d]}{d(2+d)} + \frac{256 wa^2 \rho (6 u_2 wa_1 + z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) M[6, 10 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{512 wa^2 wa_1 z_1 \rho M[6, 12 + d]}{d(2+d)} + \frac{256 wa^2 wa_1^2 \rho M[6, 14 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{8 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 S[5, d]}{3 d} - \frac{16 (4 + d) z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) S[5, 2 + d]}{3 d(2+d)} - \\
& \frac{8 (6 + d) \rho (6 u_2 wa_1 + z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) S[5, 4 + d]}{3 d(2+d)} - \frac{16 (8 + d) wa_1 z_1 \rho S[5, 6 + d]}{3 d(2+d)} - \\
& \frac{8 (10 + d) wa_1^2 \rho S[5, 8 + d]}{3 d(2+d)} + \frac{256 wa \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 S[6, 4 + d]}{3 d(2+d)} + \\
& \frac{512 wa z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) S[6, 6 + d]}{3 d(2+d)} + \frac{256 wa \rho (6 u_2 wa_1 + z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) S[6, 8 + d]}{3 d(2+d)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{512 wa wa1 z1 \rho S[6, 10 + d]}{3 d (2 + d)} + \frac{256 wa wa1^2 \rho S[6, 12 + d]}{3 d (2 + d)} + \frac{32 \rho (3 u2 + 2 u3 \rho)^2 T[6, 2 + d]}{3 d (2 + d)} + \\ & \frac{64 z1 \rho (3 u2 + 2 u3 \rho) T[6, 4 + d]}{3 d (2 + d)} + \frac{32 \rho (6 u2 wa1 + z1^2 + 4 u3 wa1 \rho) T[6, 6 + d]}{3 d (2 + d)} + \\ & \frac{64 wa1 z1 \rho T[6, 8 + d]}{3 d (2 + d)} + \frac{32 wa1^2 \rho T[6, 10 + d]}{3 d (2 + d)} - \frac{4 \rho (3 u2 + 2 u3 \rho)^2 U[4, 2 + d]}{d (2 + d)} - \\ & \frac{8 z1 \rho (3 u2 + 2 u3 \rho) U[4, 4 + d]}{d (2 + d)} - \frac{4 \rho (6 u2 wa1 + z1^2 + 4 u3 wa1 \rho) U[4, 6 + d]}{d (2 + d)} - \\ & \left. \frac{8 wa1 z1 \rho U[4, 8 + d]}{d (2 + d)} - \frac{4 wa1^2 \rho U[4, 10 + d]}{d (2 + d)} \right) v[d] \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} wb =$$

$$\begin{aligned} & wb (d + 2 \eta) + wb1 (-2 + d + \eta) \rho + \left((3 wb1 + 2 wb2 \rho) L[1, d] + (3 u2 (wa1 - 3 (wb + 2 wb1 \rho)) + 2 \right. \\ & \quad \left. (z1^2 + 2 z1 z2 \rho + \rho (2 u4 wa1 \rho - 3 u3 (-2 wa1 + wb + 2 wb1 \rho))) \right) L[2, d] + \\ & \frac{1}{d} \left(((2 - 13 d) wb + 4 (2 + d) wc) z1 + 2 (7 wa2 z1 - (2 + 9 d) wb1 z1 - 4 (-1 + d) wb z2) \rho + \right. \\ & \quad \left. wa1 ((15 + d) z1 + 2 (8 + d) z2 \rho) \right) L[2, 2 + d] + \\ & \frac{1}{d (2 + d)} \left(((35 + 6 d + d^2) wa1^2 + 4 wb ((-5 + 2 d + 3 d^2) wb - 2 (2 + 3 d + d^2) wc + \right. \\ & \quad \left. ((-5 - 7 d) wa2 + 2 (-5 + 2 d + 3 d^2) wb1) \rho) + wa1 ((-44 - 46 d - 3 d^2) wb + 12 (2 + d) wc + \right. \\ & \quad \left. 2 ((35 + 6 d + d^2) wa2 - (34 + 32 d + 3 d^2) wb1) \rho) \right) L[2, 4 + d] - \frac{2}{3} (3 u2 + 2 u3 \rho) \\ & \quad \left(3 u2 (wa + 4 wa1 \rho - 6 wb \rho) + \rho (11 z1^2 + 4 u4 wa \rho + 4 u3 (3 wa + 2 wa1 \rho - 3 wb \rho)) \right) L[3, d] - \\ & \frac{1}{3 d} \left(2 (z1 \rho (12 u2 (3 (7 + d) wa1 + (4 - 13 d) wb) + (10 + 11 d) z1^2 + \right. \\ & \quad \left. 8 u3 (3 (7 + d) wa1 + (4 - 13 d) wb) \rho) + 2 wa (3 u2 (2 (5 + 2 d) z1 + (12 + 5 d) z2 \rho) + \right. \\ & \quad \left. \rho (2 (8 + 3 d) u4 z1 \rho + u3 ((60 + 23 d) z1 + 2 (12 + 5 d) z2 \rho))) \right) L[3, 2 + d] - \\ & \frac{1}{3 d (2 + d)} \left(2 (\rho (3 u2 ((241 + 60 d + 8 d^2) wa1^2 - 4 (43 + 51 d + 5 d^2) wa1 wb + 36 (-3 + d^2) wb^2) + \right. \\ & \quad \left. ((296 + 162 d + 19 d^2) wa1 - 2 (-8 + 48 d + 23 d^2) wb) z1^2 + \right. \\ & \quad \left. 2 u3 ((241 + 60 d + 8 d^2) wa1^2 - 4 (43 + 51 d + 5 d^2) wa1 wb + 36 (-3 + d^2) wb^2) \rho) + \right. \\ & \quad \left. (4 + d) wa ((20 + 7 d) z1^2 + 2 (20 + 7 d) z1 z2 \rho + 6 u2 ((20 + d) wa1 - 4 wb - \right. \\ & \quad \left. 8 d wb + 8 wc + 4 d wc + ((20 + d) wa2 - 12 (1 + d) wb1) \rho) + \right. \\ & \quad \left. 2 \rho (2 u4 ((20 + d) wa1 - 4 (-1 + d) wb) \rho + u3 (7 (20 + d) wa1 + 2 ((6 - 18 d) wb + \right. \\ & \quad \left. 4 (2 + d) wc + ((20 + d) wa2 - 12 (1 + d) wb1) \rho))) \right) L[3, 4 + d] - \\ & \frac{1}{3 d (2 + d)} \left(2 (3 ((227 + 64 d + 4 d^2) wa1^2 - 4 (17 + 29 d + 5 d^2) wa1 wb + 12 (-3 + d^2) wb^2) \right. \\ & \quad \left. z1 \rho + 2 (6 + d) wa (z1 (4 (2 + d) wc + 3 ((10 + d) wa2 - 4 (1 + d) wb1) \rho) - \right. \\ & \quad \left. 4 wb (z1 + 2 d z1 + (-1 + d) z2 \rho) + wa1 (4 (8 + d) z1 + (34 + 5 d) z2 \rho)) \right) L[3, 6 + d] - \\ & \frac{1}{3 d (2 + d)} \left(2 (wa1 ((433 + 52 d + 4 d^2) wa1^2 - 2 (118 + 136 d + 7 d^2) wa1 wb + 36 (-3 + d^2) wb^2) \rho + \right. \\ & \quad \left. (8 + d) wa ((46 + d) wa1^2 - 8 (-1 + d) wa2 wb \rho + \right. \\ & \quad \left. 2 wa1 (-4 (1 + 2 d) wb + 4 (2 + d) wc + ((46 + d) wa2 - 12 (1 + d) wb1) \rho)) \right) L[3, 8 + d] + \\ & 2 wa \rho (3 u2 + 2 u3 \rho)^3 L[4, d] + \frac{12 (5 + 2 d) wa z1 \rho (3 u2 + 2 u3 \rho)^2 L[4, 2 + d]}{d} + \\ & \frac{1}{d (2 + d)} \left(2 wa (3 u2 + 2 u3 \rho) ((4 + d) \rho (3 u2 ((58 + 5 d) wa1 - 8 (wb + 2 d wb)) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3 (20 + 7 d) z_1^2 + 2 u_3 ((58 + 5 d) w a_1 - 8 (w b + 2 d w b)) \rho + \\
& (36 + 14 d + d^2) w a (3 u_2 + 4 \rho (3 u_3 + u_4 \rho)) L[4, 4 + d] + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (4 w a ((6 + d) z_1 \rho (6 u_2 ((47 + 7 d) w a_1 - 4 (w b + 2 d w b)) + \\
& (16 + 5 d) z_1^2 + 4 u_3 (47 w a_1 + 7 d w a_1 - 4 w b - 8 d w b) \rho) + \\
& w a (3 u_2 ((80 + 24 d + d^2) z_1 + (84 + 26 d + d^2) z_2 \rho) + \rho (2 (76 + 22 d + d^2) u_4 z_1 \rho + \\
& u_3 ((540 + 158 d + 7 d^2) z_1 + 2 (84 + 26 d + d^2) z_2 \rho))) L[4, 6 + d] + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (2 w a ((8 + d) \rho (3 u_2 w a_1 ((134 + 7 d) w a_1 - 16 (w b + 2 d w b)) + ((136 + 23 d) w a_1 - \\
& 8 (w b + 2 d w b)) z_1^2 + 2 u_3 w a_1 ((134 + 7 d) w a_1 - 16 (w b + 2 d w b)) \rho) + \\
& w a ((136 + 34 d + d^2) z_1^2 + 2 (136 + 34 d + d^2) z_1 z_2 \rho + 6 u_2 ((136 + 22 d + d^2) w a_1 - \\
& 8 (w b + 2 d w b - (2 + d) w c) + ((136 + 22 d + d^2) w a_2 - 24 (1 + d) w b_1) \rho) + \\
& 2 \rho (2 u_4 ((136 + 22 d + d^2) w a_1 - 8 (-1 + d) w b) \rho + u_3 (7 (136 + 22 d + d^2) w a_1 + \\
& 2 ((12 - 36 d) w b + 8 (2 + d) w c + ((136 + 22 d + d^2) w a_2 - 24 (1 + d) w b_1) \rho))) \\
& L[4, 8 + d] + \frac{1}{d (2 + d)} (4 w a ((10 + d) w a_1 ((91 + 8 d) w a_1 - 8 (w b + 2 d w b)) z_1 \rho + \\
& w a (z_1 (8 (2 + d) w c + ((200 + 30 d + d^2) w a_2 - 24 (1 + d) w b_1) \rho) - 8 w b (z_1 + 2 d z_1 + \\
& (-1 + d) z_2 \rho) + w a_1 ((204 + 32 d + d^2) z_1 + (208 + 34 d + d^2) z_2 \rho)) L[4, 10 + d] + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (2 w a ((12 + d) w a_1^2 (3 (26 + d) w a_1 - 8 (w b + 2 d w b)) \rho + \\
& w a ((284 + 30 d + d^2) w a_1^2 - 16 (-1 + d) w a_2 w b \rho + \\
& 2 w a_1 (-8 (1 + 2 d) w b + 8 (2 + d) w c + ((284 + 30 d + d^2) w a_2 - 24 (1 + d) w b_1) \rho)) \\
& L[4, 12 + d] - \frac{8 (196 + 82 d + 7 d^2) w a^2 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^3 L[5, 4 + d]}{5 d (2 + d)} - \\
& \frac{24 (436 + 138 d + 7 d^2) w a^2 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 L[5, 6 + d]}{5 d (2 + d)} - \\
& \frac{1}{5 d (2 + d)} \\
& (8 w a^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (\rho (3 u_2 ((2212 + 422 d + 21 d^2) w a_1 - 80 (w b + 2 d w b)) + \\
& 3 (744 + 194 d + 7 d^2) z_1^2 + 2 u_3 ((2212 + 422 d + 21 d^2) w a_1 - 80 (w b + 2 d w b)) \rho) + \\
& 24 (8 + d) w a (3 u_2 + 4 \rho (3 u_3 + u_4 \rho)) L[5, 8 + d] - \\
& \frac{1}{5 d (2 + d)} (8 w a^2 (z_1 \rho (6 u_2 ((3340 + 590 d + 21 d^2) w a_1 - 80 (w b + 2 d w b)) + \\
& (1120 + 250 d + 7 d^2) z_1^2 + 4 u_3 ((3340 + 590 d + 21 d^2) w a_1 - 80 (w b + 2 d w b)) \rho) + \\
& 48 (10 + d) w a (3 u_2 (z_1 + z_2 \rho) + \rho (7 u_3 z_1 + 2 u_4 z_1 \rho + 2 u_3 z_2 \rho)) L[5, 10 + d] - \\
& \frac{1}{5 d (2 + d)} (8 w a^2 (\rho (3 u_2 w a_1 ((4652 + 598 d + 21 d^2) w a_1 - 160 (w b + 2 d w b)) + \\
& ((4672 + 758 d + 21 d^2) w a_1 - 80 (w b + 2 d w b)) z_1^2 + \\
& 2 u_3 w a_1 ((4652 + 598 d + 21 d^2) w a_1 - 160 (w b + 2 d w b)) \rho) + 24 (12 + d) w a \\
& (z_1^2 + 2 (7 u_3 w a_1 + z_1 z_2) \rho + 4 (u_4 w a_1 + u_3 w a_2) \rho^2 + 6 u_2 (w a_1 + w a_2 \rho)) L[5, 12 + d] - \\
& \frac{1}{5 d (2 + d)} (8 w a^2 (w a_1 ((6188 + 766 d + 21 d^2) w a_1 - 160 (w b + 2 d w b)) z_1 \rho + \\
& 48 (14 + d) w a (w a_2 z_1 \rho + w a_1 (z_1 + z_2 \rho)) L[5, 14 + d] - \frac{1}{5 d (2 + d)} \\
& (8 w a^2 w a_1 (w a_1 ((2636 + 258 d + 7 d^2) w a_1 - 80 (w b + 2 d w b)) \rho + 24 (16 + d) w a (w a_1 + 2 w a_2 \rho)) \\
& L[5, 16 + d] + \\
& \frac{64 (76 + 11 d) w a^3 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^3 L[6, 8 + d]}{3 d (2 + d)} + \\
& \frac{64 (96 + 11 d) w a^3 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 L[6, 10 + d]}{d (2 + d)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{d(2+d)} \\
& (64 wa^3 (3 u_2 + 2 u_3 \rho) \\
& \quad ((116 + 11 d) \rho (3 u_2 wa_1 + z_1^2 + 2 u_3 wa_1 \rho) + 4 wa (3 u_2 + 4 \rho (3 u_3 + u_4 \rho))) L[6, 12 + d]) + \\
& \frac{1}{3 d (2 + d)} (64 wa^3 ((136 + 11 d) z_1 \rho (18 u_2 wa_1 + z_1^2 + 12 u_3 wa_1 \rho) + \\
& \quad 24 wa (3 u_2 (z_1 + z_2 \rho) + \rho (7 u_3 z_1 + 2 u_4 z_1 \rho + 2 u_3 z_2 \rho))) L[6, 14 + d]) + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (64 wa^3 ((156 + 11 d) wa_1 \rho (3 u_2 wa_1 + z_1^2 + 2 u_3 wa_1 \rho) + 4 wa \\
& \quad (z_1^2 + 2 (7 u_3 wa_1 + z_1 z_2) \rho + 4 (u_4 wa_1 + u_3 wa_2) \rho^2 + 6 u_2 (wa_1 + wa_2 \rho))) L[6, 16 + d]) + \\
& \frac{64 wa^3 (11 (16 + d) wa_1^2 z_1 \rho + 8 wa (wa_2 z_1 \rho + wa_1 (z_1 + z_2 \rho))) L[6, 18 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{64 wa^3 wa_1 ((196 + 11 d) wa_1^2 \rho + 12 wa (wa_1 + 2 wa_2 \rho)) L[6, 20 + d]}{3 d (2 + d)} - \\
& \frac{1536 wa^4 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^3 L[7, 12 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{4608 wa^4 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 L[7, 14 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{4608 wa^4 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (3 u_2 wa_1 + z_1^2 + 2 u_3 wa_1 \rho) L[7, 16 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{1536 wa^4 z_1 \rho (18 u_2 wa_1 + z_1^2 + 12 u_3 wa_1 \rho) L[7, 18 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{4608 wa^4 wa_1 \rho (3 u_2 wa_1 + z_1^2 + 2 u_3 wa_1 \rho) L[7, 20 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{4608 wa^4 wa_1^2 z_1 \rho L[7, 22 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{1536 wa^4 wa_1^3 \rho L[7, 24 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{2 (3 u_2 (3 z_1 + 4 z_2 \rho) + 4 \rho (4 u_3 z_1 + u_4 z_1 \rho + 2 u_3 z_2 \rho)) M[4, d]}{d} - \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (2 ((7 + 3 d) z_1^2 + 2 (7 + 3 d) z_1 z_2 \rho + 6 u_2 (7 wa_1 - 2 wb - 4 d wb + 4 wc + \\
& \quad 2 d wc + (7 wa_2 - 6 wb_1 - 6 d wb_1) \rho) + 2 \rho (2 u_4 (7 wa_1 - 2 (-1 + d) wb) \rho + \\
& \quad u_3 (49 wa_1 + 2 ((3 - 9 d) wb + 2 (2 + d) wc + (7 wa_2 - 6 (1 + d) wb_1) \rho))) M[4, 2 + d]) - \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (2 (wa_1 (3 (8 + d) z_1 + 2 (13 + 2 d) z_2 \rho) + 2 (z_1 (2 (2 + d) wc + ((11 + d) wa_2 - \\
& \quad 6 (1 + d) wb_1) \rho) - 2 wb (z_1 + 2 d z_1 + (-1 + d) z_2 \rho))) M[4, 4 + d]) + \frac{1}{d (2 + d)} \\
& (4 (-9 wa_1^2 + 2 (-1 + d) wa_2 wb \rho + 2 wa_1 (wb + 2 d wb - (2 + d) wc + 3 (-3 wa_2 + wb_1 + d wb_1) \rho) \\
& \quad M[4, 6 + d]) + \frac{36 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 M[5, d]}{d} + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (8 (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (\rho (3 u_2 ((20 + d) wa_1 - 4 (wb + 2 d wb)) + 3 (7 + 3 d) z_1^2 + 2 u_3 \\
& \quad ((20 + d) wa_1 - 4 (wb + 2 d wb)) \rho) + (6 + d) wa (3 u_2 + 4 \rho (3 u_3 + u_4 \rho))) M[5, 2 + d]) + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (4 (z_1 \rho (6 u_2 ((70 + 11 d) wa_1 - 8 (wb + 2 d wb)) + 3 (8 + 3 d) z_1^2 + \\
& \quad 4 u_3 ((70 + 11 d) wa_1 - 8 (wb + 2 d wb)) \rho) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4 (8 + d) wa (3 u_2 (z_1 + z_2 \rho) + \rho (7 u_3 z_1 + 2 u_4 z_1 \rho + 2 u_3 z_2 \rho)) M[5, 4 + d] + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (8 (\rho (6 u_2 wa_1 ((26 + d) wa_1 - 4 (wb + 2 d wb)) + ((53 + 10 d) wa_1 - 4 (wb + 2 d wb)) \\
& \quad z_1^2 + 4 u_3 wa_1 ((26 + d) wa_1 - 4 (wb + 2 d wb)) \rho) + (10 + d) wa \\
& \quad (z_1^2 + 2 (7 u_3 wa_1 + z_1 z_2) \rho + 4 (u_4 wa_1 + u_3 wa_2) \rho^2 + 6 u_2 (wa_1 + wa_2 \rho))) M[5, 6 + d] + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (4 (wa_1 ((146 + 13 d) wa_1 - 16 (wb + 2 d wb)) z_1 \rho + 4 (12 + d) wa \\
& \quad (wa_2 z_1 \rho + wa_1 (z_1 + z_2 \rho))) M[5, 8 + d] + \\
& \frac{8 wa_1 (wa_1 ((32 + d) wa_1 - 4 (wb + 2 d wb)) \rho + (14 + d) wa (wa_1 + 2 wa_2 \rho)) M[5, 10 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{8 (34 + 7 d) wa \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^3 M[6, 2 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{24 (46 + 7 d) wa z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 M[6, 4 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (8 wa (3 u_2 + 2 u_3 \rho) \\
& \quad (3 (58 + 7 d) \rho (3 u_2 wa_1 + z_1^2 + 2 u_3 wa_1 \rho) + 16 wa (3 u_2 + 4 \rho (3 u_3 + u_4 \rho))) M[6, 6 + d] - \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (8 wa (7 (10 + d) z_1 \rho (18 u_2 wa_1 + z_1^2 + 12 u_3 wa_1 \rho) + \\
& \quad 32 wa (3 u_2 (z_1 + z_2 \rho) + \rho (7 u_3 z_1 + 2 u_4 z_1 \rho + 2 u_3 z_2 \rho))) M[6, 8 + d] - \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (8 wa (3 (82 + 7 d) wa_1 \rho (3 u_2 wa_1 + z_1^2 + 2 u_3 wa_1 \rho) + 16 wa \\
& \quad (z_1^2 + 2 (7 u_3 wa_1 + z_1 z_2) \rho + 4 (u_4 wa_1 + u_3 wa_2) \rho^2 + 6 u_2 (wa_1 + wa_2 \rho))) M[6, 10 + d] - \\
& \frac{8 wa (3 (94 + 7 d) wa_1^2 z_1 \rho + 32 wa (wa_2 z_1 \rho + wa_1 (z_1 + z_2 \rho))) M[6, 12 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{8 wa wa_1 ((106 + 7 d) wa_1^2 \rho + 16 wa (wa_1 + 2 wa_2 \rho)) M[6, 14 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{768 wa^2 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^3 M[7, 6 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{2304 wa^2 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 M[7, 8 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{2304 wa^2 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (3 u_2 wa_1 + z_1^2 + 2 u_3 wa_1 \rho) M[7, 10 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{768 wa^2 z_1 \rho (18 u_2 wa_1 + z_1^2 + 12 u_3 wa_1 \rho) M[7, 12 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{2304 wa^2 wa_1 \rho (3 u_2 wa_1 + z_1^2 + 2 u_3 wa_1 \rho) M[7, 14 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{2304 wa^2 wa_1^2 z_1 \rho M[7, 16 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{768 wa^2 wa_1^3 \rho M[7, 18 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{4 (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (3 u_2 + 4 \rho (3 u_3 + u_4 \rho)) S[5, d]}{3 d} + \\
& \frac{8 (4 + d) (3 u_2 (z_1 + z_2 \rho) + \rho (7 u_3 z_1 + 2 u_4 z_1 \rho + 2 u_3 z_2 \rho)) S[5, 2 + d]}{3 d (2 + d)} + \\
& \frac{1}{3 d (2 + d)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(4(6+d)(z_1^2 + 2(7u_3wa_1 + z_1z_2)\rho + 4(u_4wa_1 + u_3wa_2)\rho^2 + 6u_2(wa_1 + wa_2\rho))S[5, 4+d]) + 8(8+d)(wa_2z_1\rho + wa_1(z_1 + z_2\rho))S[5, 6+d]}{3d(2+d)} + \\
& \frac{4(10+d)wa_1(wa_1 + 2wa_2\rho)S[5, 8+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{28\rho(3u_2 + 2u_3\rho)^3S[6, d]}{3d} - \\
& \frac{4(26+7d)z_1\rho(3u_2 + 2u_3\rho)^2S[6, 2+d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{1}{3d(2+d)}(4(3u_2 + 2u_3\rho) \\
& (3(38+7d)\rho(3u_2wa_1 + z_1^2 + 2u_3wa_1\rho) + 32wa(3u_2 + 4\rho(3u_3 + u_4\rho)))S[6, 4+d]) - \\
& \frac{1}{3d(2+d)}(4((50+7d)z_1\rho(18u_2wa_1 + z_1^2 + 12u_3wa_1\rho) + \\
& 64wa(3u_2(z_1 + z_2\rho) + \rho(7u_3z_1 + 2u_4z_1\rho + 2u_3z_2\rho)))S[6, 6+d]) - \\
& \frac{1}{3d(2+d)}(4(3(62+7d)wa_1\rho(3u_2wa_1 + z_1^2 + 2u_3wa_1\rho) + 32wa \\
& (z_1^2 + 2(7u_3wa_1 + z_1z_2)\rho + 4(u_4wa_1 + u_3wa_2)\rho^2 + 6u_2(wa_1 + wa_2\rho)))S[6, 8+d]) - \\
& \frac{4(3(74+7d)wa_1^2z_1\rho + 64wa(wa_2z_1\rho + wa_1(z_1 + z_2\rho)))S[6, 10+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{4wa_1((86+7d)wa_1^2\rho + 32wa(wa_1 + 2wa_2\rho))S[6, 12+d]}{3d(2+d)} + \\
& \frac{256wa\rho(3u_2 + 2u_3\rho)^3S[7, 4+d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{768waz_1\rho(3u_2 + 2u_3\rho)^2S[7, 6+d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{768wa\rho(3u_2 + 2u_3\rho)(3u_2wa_1 + z_1^2 + 2u_3wa_1\rho)S[7, 8+d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{256waz_1\rho(18u_2wa_1 + z_1^2 + 12u_3wa_1\rho)S[7, 10+d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{768wawa_1\rho(3u_2wa_1 + z_1^2 + 2u_3wa_1\rho)S[7, 12+d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{768wawa_1^2z_1\rho S[7, 14+d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{256wawa_1^3\rho S[7, 16+d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{16(3u_2 + 2u_3\rho)(3u_2 + 4\rho(3u_3 + u_4\rho))T[6, 2+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{32(3u_2(z_1 + z_2\rho) + \rho(7u_3z_1 + 2u_4z_1\rho + 2u_3z_2\rho))T[6, 4+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{16(z_1^2 + 2(7u_3wa_1 + z_1z_2)\rho + 4(u_4wa_1 + u_3wa_2)\rho^2 + 6u_2(wa_1 + wa_2\rho))T[6, 6+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{32(wa_2z_1\rho + wa_1(z_1 + z_2\rho))T[6, 8+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{16wa_1(wa_1 + 2wa_2\rho)T[6, 10+d]}{3d(2+d)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{32 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^3 T[7, 2 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{96 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 T[7, 4 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{96 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (3 u_2 w a_1 + z_1^2 + 2 u_3 w a_1 \rho) T[7, 6 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{32 z_1 \rho (18 u_2 w a_1 + z_1^2 + 12 u_3 w a_1 \rho) T[7, 8 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{96 w a_1 \rho (3 u_2 w a_1 + z_1^2 + 2 u_3 w a_1 \rho) T[7, 10 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{96 w a_1^2 z_1 \rho T[7, 12 + d]}{d (2 + d)} + \frac{32 w a_1^3 \rho T[7, 14 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (3 u_2 + 4 \rho (3 u_3 + u_4 \rho)) U[4, 2 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{4 (3 u_2 (z_1 + z_2 \rho) + \rho (7 u_3 z_1 + 2 u_4 z_1 \rho + 2 u_3 z_2 \rho)) U[4, 4 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{2 (z_1^2 + 2 (7 u_3 w a_1 + z_1 z_2) \rho + 4 (u_4 w a_1 + u_3 w a_2) \rho^2 + 6 u_2 (w a_1 + w a_2 \rho)) U[4, 6 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{4 (w a_2 z_1 \rho + w a_1 (z_1 + z_2 \rho)) U[4, 8 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{2 w a_1 (w a_1 + 2 w a_2 \rho) U[4, 10 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{8 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^3 U[5, 2 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{24 z_1 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 U[5, 4 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{24 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (3 u_2 w a_1 + z_1^2 + 2 u_3 w a_1 \rho) U[5, 6 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{8 z_1 \rho (18 u_2 w a_1 + z_1^2 + 12 u_3 w a_1 \rho) U[5, 8 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{24 w a_1 \rho (3 u_2 w a_1 + z_1^2 + 2 u_3 w a_1 \rho) U[5, 10 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \left. \frac{24 w a_1^2 z_1 \rho U[5, 12 + d]}{d (2 + d)} - \frac{8 w a_1^3 \rho U[5, 14 + d]}{d (2 + d)} \right) v[d]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} w c &= (d + 2 \eta) w c + (-2 + d + \eta) w c_1 \rho + \\
& \left((w c_1 + 2 w b c \rho) L[1, d] + \frac{1}{4} (3 z_1^2 + 12 u_2 (w a_1 - w b + 2 (w a_2 - w b_1 - 4 w c_1) \rho) + \right. \\
& \quad 4 z_1 \rho (9 z_2 + 4 z_3 \rho) + 4 \rho (2 u_3 (21 w a_1 - 6 w b + 12 w a_2 \rho - 12 w b_1 \rho - 8 w c_1 \rho) + \\
& \quad \left. \rho (3 z_2^2 + 8 u_5 w a_1 \rho + u_4 (44 w a_1 - 4 w b + 8 w a_2 \rho - 8 w b_1 \rho))) L[2, d] + \right. \\
& \quad \frac{1}{d} ((-w b ((2 + 5 d) z_1 + 2 \rho ((-4 + 11 d) z_2 + 4 (-1 + d) z_3 \rho)) + \\
& \quad w a_1 ((7 + d) z_1 + 4 \rho ((11 + 2 d) z_2 + (5 + d) z_3 \rho)) + \\
& \quad \left. 2 ((6 + d) w c (z_1 + 2 z_2 \rho) + \rho (-2 z_1 (2 (1 + d) w c_1 + (-3 w a_3 + 2 (-1 + d) w b_2) \rho) + \right. \\
& \quad \left. w a_2 ((16 + d) z_1 + 2 (7 + d) z_2 \rho) - w b_1 ((-4 + 11 d) z_1 + 2 (2 + 5 d) z_2 \rho)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L[2, 2 + d] + \frac{1}{d(2+d)} \left((20 + 6d + d^2) wa1^2 - wa1((24 + 22d + d^2) wb - \right. \\
& \quad 2(10(2+d) wc + \rho((109 + 30d + 5d^2) wa2 - (6 + 40d + d^2) wb1 + \\
& \quad \quad 2(-2(10 + 4d + d^2) wc1 + ((23 + 6d + d^2) wa3 - 6(-1 + d) wb2) \rho))) + \\
& \quad 2(2(-4 + d^2) wb^2 + 2(-20 + 6d + d^2) wc^2 + 2(5(2+d) wa2 + 2(6+d) wb1) wc \rho + \\
& \quad \quad ((20 + 6d + d^2) wa2^2 - (24 + 22d + d^2) wa2 wb1 + 4(-4 + d^2) wb1^2) \rho^2) + \\
& \quad \quad wb(4(6+d) wc + \rho((-30 - 40d - d^2) wa2 - 4((11 - 5d^2) wb1 + 4wc1 + \\
& \quad \quad \quad (wa3 + 3d wa3 - 2(-1 + d^2) wb2) \rho))) \left. \right) \\
& L[2, 4 + d] - \frac{2}{3} \rho(36u^2(5wa1 - 2wb - 3wc + 2(wa2 - wb1) \rho) + \\
& \quad 4\rho(29u^3z1^2 + (4u^3(25wa1 - 7wb - 3wc) + 7u^4z1^2 + 16u^3z1z2) \rho + \\
& \quad \quad 8u^3(4u^4wa1 + u^3wa2 - u^4wb - u^3wb1) \rho^2) + \\
& \quad 2wa(3u^2 + 2u^3\rho)(15u^3 + 4\rho(5u^4 + u^5\rho)) + 3u^2(23z1^2 + 32z1z2\rho + \\
& \quad \quad 8\rho(2u^4(4wa1 - wb) \rho + u^3(30wa1 - 9wb - 6wc + 4wa2\rho - 4wb1\rho))) L[3, d] - \\
& \frac{1}{3d} (2(6u^2(2\rho(wa1(14(4+d)z1 + (39 + 10d)z2\rho) + 2((3 - 12d)wb - 2(-3 + d)wc)z1 + \\
& \quad \quad ((17 + 3d)wa2z1 - 2wb1(z1 + 5dz1) + (5 - 8d)wbz2) \rho)) + \\
& \quad \quad wa((2 + d)z1 + \rho((28 + 11d)z2 + 2(8 + 3d)z3\rho)) + \\
& \quad \quad \rho((21 + 23d)z1^3 + 2z1(8(21 + 8d)u^4wa + (21 + 23d)z1z2) \rho + \\
& \quad \quad 8((8 + 3d)u^5wa z1 + u^4(3(13 + 4d)wa1z1 + 2((3 - 6d)wbz1 + (2 + d)wa2z2))) \rho^2 + \\
& \quad \quad 2u^3(2\rho(wa1((307 + 88d)z1 + 2(39 + 10d)z2\rho) + 2((21 - 54d)wb - 4(-3 + d)wc) \\
& \quad \quad \quad z1 + 2((17 + 3d)wa2z1 - 2wb1(z1 + 5dz1) + (5 - 8d)wbz2) \rho)) + \\
& \quad \quad \quad wa(3(48 + 19d)z1 + 2\rho(3(16 + 7d)z2 + 2(8 + 3d)z3\rho))) L[3, 2 + d] - \\
& \frac{1}{3d(2+d)} (2(\rho(4wa1^2\rho((1297 + 442d + 60d^2)u^3 + (347 + 120d + 16d^2)u^4\rho) + \\
& \quad 3u^2((859 + 284d + 40d^2)wa1^2 - 12wb((11 - 5d^2)wb + 8wc + \\
& \quad \quad 2((4 + 10d + d^2)wa2 - 4(-2 + d^2)wb1) \rho) - 4wa1((61 + 111d + 14d^2)wb + \\
& \quad \quad 2(-30 - 14d + d^2)wc - 2((128 + 41d + 6d^2)wa2 - 6(8 + 9d + d^2)wb1) \rho)) - \\
& \quad 2(-24wb^2\rho((-13 + 5d^2)u^3 + (-3 + d^2)u^4\rho) + z1^2(2(-24 - 11d + d^2)wc - \\
& \quad \quad 3((76 + 42d + 5d^2)wa2 - 4(2 + 8d + 3d^2)wb1) \rho) + \\
& \quad \quad 4wb((-5 + 24d + 11d^2)z1^2 + (-16 + 24d + 13d^2)z1z2\rho + \\
& \quad \quad 6u^3\rho(4wc + ((4 + 10d + d^2)wa2 - 4(-2 + d^2)wb1) \rho))) + \\
& \quad \quad wa1((764 + 430d + 59d^2)z1^2 + 8(134 + 76d + 11d^2)z1z2\rho + \\
& \quad \quad 8\rho(-2(1 + 27d + 5d^2)u^4wb\rho - u^3(3(22 + 82d + 13d^2)wb + 2(-30 - 14d + d^2)wc - \\
& \quad \quad \quad 2((128 + 41d + 6d^2)wa2 - 6(8 + 9d + d^2)wb1) \rho))) + \\
& \quad 2(4 + d)wa((2 + d)z1^2 + z1\rho((56 + 19d)z2 + 2(16 + 5d)z3\rho) + \\
& \quad \quad 3u^2(8wa1 - 8wb - 4dwb + 24wc + 4dwc + \\
& \quad \quad \quad (52 + 3d)wa2 - 4(wb1 + 5dwb1 + 4wc1) \rho) + 2((12 + d)wa3 - 4(-1 + d)wb2) \rho^2) + \\
& \quad \quad \rho(u^3(3(132 + 5d)wa1 + 2(-6((3 + 9d)wb - 4(6 + d)wc) + (3(44 + d)wa2 - \\
& \quad \quad \quad 4(3(7 + 5d)wb1 + 4wc1) \rho) + 2((12 + d)wa3 - 4(-1 + d)wb2) \rho^2)) + \\
& \quad \quad 4\rho((2 + d)z2^2 + u^5((20 + d)wa1 - 4(-1 + d)wb) \rho + u^4((108 + 5d)wa1 + \\
& \quad \quad \quad 4((3 - 6d)wb + (6 + d)wc + (4wa2 - 2(2 + d)wb1) \rho)))) L[3, 4 + d] - \\
& \frac{1}{3d(2+d)} (2(\rho(wa1^2((2067 + 640d + 56d^2)z1 + 2(783 + 242d + 20d^2)z2\rho) - \\
& \quad 4wb(3((11 - 5d^2)wb + 8wc)z1 + \\
& \quad \quad 2((6 + 49d + 8d^2)wa2z1 - 3(4(-2 + d^2)wb1z1 + (-3 + d^2)wbz2) \rho)) + \\
& \quad \quad 4wa1(((-57 - 185d - 34d^2)wb + 12(7 + 4d)wc)z1 + ((642 + 199d + 18d^2) \\
& \quad \quad \quad wa2z1 - 2(2(30 + 44d + 7d^2)wb1z1 + 3(-3 + 16d + 4d^2)wbz2) \rho)) + \\
& \quad 2(6 + d)wa(4((-2 - d)wb + (6 + d)wc)z1 + ((86 + 11d)wa2z1 - 4(4wc1z1 + \\
& \quad \quad \quad wb1(z1 + 5dz1) + (wb + 5dwb - 2(6 + d)wc)z2) \rho) + 2((22 + 3d)wa3z1 + \\
& \quad \quad \quad 2(-2(-1 + d)wb2z1 + (10 + d)wa2z2 - 2(2(2 + d)wb1z2 + (-1 + d)wbz3) \rho) \\
& \quad \quad \quad \rho^2 + (10 + d)wa1(z1 + \rho(11z2 + 6z3\rho))) L[3, 6 + d] - \\
& \frac{1}{3d(2+d)} (2(\rho((1451 + 260d + 20d^2)wa1^3 + 24(-3 + d^2)wa2wb^2\rho -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4 wa_1 wb (33 wb - 15 d^2 wb + 24 wc + 2 ((13 + 79 d + 7 d^2) wa_2 - 12 (-2 + d^2) wb_1) \rho) + \\
& 2 wa_1^2 (2 (-3 (23 + 49 d + 4 d^2) wb + (60 + 38 d + d^2) wc) + \\
& ((1451 + 260 d + 20 d^2) wa_2 - 4 (56 + 68 d + 5 d^2) wb_1) \rho) + \\
& 2 (8 + d) wa (8 wa_1^2 + wa_1 (-4 (2 + d) wb + 4 (6 + d) wc + ((146 + 3 d) wa_2 - \\
& 4 (wb_1 + 5 d wb_1 + 4 wc_1)) \rho + 2 ((38 + d) wa_3 - 4 (-1 + d) wb_2) \rho^2) - \\
& 4 \rho (-8 wa_2^2 \rho + 2 (-1 + d) wa_3 wb \rho + wa_2 (wb + 5 d wb - 2 (6 + d) wc + 4 (2 + d) wb_1 \rho)) \\
& L[3, 8 + d] + 2 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 (3 u_2 (3 wa + 10 wa_1 \rho - 4 wb \rho) + \\
& 2 \rho (7 z_1^2 + 6 u_4 wa \rho + 2 u_3 (9 wa + 5 wa_1 \rho - 2 wb \rho))) L[4, d] + \\
& \frac{1}{d} (4 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (z_1 \rho (3 u_2 ((72 + 23 d) wa_1 + 8 wb - 26 d wb) + \\
& (15 + 14 d) z_1^2 + 2 u_3 (72 wa_1 + 23 d wa_1 + 8 wb - 26 d wb) \rho) + \\
& (13 + 5 d) wa (u_2 (9 z_1 + 6 z_2 \rho) + 2 \rho (13 u_3 z_1 + 4 u_4 z_1 \rho + 2 u_3 z_2 \rho))) L[4, 2 + d] + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (2 \rho (2 (36 + 14 d + d^2) wa^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (15 u_3 + 4 \rho (5 u_4 + u_5 \rho)) + \\
& \rho (18 u_2^2 ((299 + 106 d + 15 d^2) wa_1^2 - 2 (18 + 60 d + 11 d^2) wa_1 wb + 12 (-3 + d^2) wb^2) + \\
& (65 + 58 d + 14 d^2) z_1^4 + 4 u_3 ((526 + 300 d + 45 d^2) wa_1 - 2 (-14 + 50 d + 23 d^2) wb) z_1^2 \\
& \rho + 8 u_3^2 ((299 + 106 d + 15 d^2) wa_1^2 - 2 (18 + 60 d + 11 d^2) wa_1 wb + 12 (-3 + d^2) wb^2) \\
& \rho^2 + 6 u_2 ((526 + 300 d + 45 d^2) wa_1 - 2 (-14 + 50 d + 23 d^2) wb) z_1^2 + 4 u_3 \\
& ((299 + 106 d + 15 d^2) wa_1^2 - 2 (18 + 60 d + 11 d^2) wa_1 wb + 12 (-3 + d^2) wb^2) \rho) + \\
& (4 + d) wa (9 u_2^2 ((182 + 15 d) wa_1 + 2 (-4 (1 + 5 d) wb + 4 (4 + d) wc + \\
& ((54 + 5 d) wa_2 - 16 (1 + d) wb_1) \rho)) + 3 u_2 (3 (52 + 17 d) z_1^2 + 4 (50 + 17 d) z_1 \\
& z_2 \rho + 8 \rho (u_4 ((64 + 5 d) wa_1 + 4 (1 - 3 d) wb) \rho + u_3 ((251 + 20 d) wa_1 + \\
& 6 wb - 50 d wb + 16 wc + 4 d wc + ((54 + 5 d) wa_2 - 16 (1 + d) wb_1) \rho)) + \\
& 4 \rho ((56 + 17 d) u_4 z_1^2 \rho + 2 u_3 ((109 + 34 d) z_1^2 + (50 + 17 d) z_1 z_2 \rho + 2 u_4 \\
& ((64 + 5 d) wa_1 + 4 (1 - 3 d) wb) \rho^2) + u_3^2 \rho ((822 + 65 d) wa_1 + 2 (4 ((4 - 20 d) \\
& wb + (4 + d) wc) + ((54 + 5 d) wa_2 - 16 (1 + d) wb_1) \rho))) L[4, 4 + d] + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (4 (z_1 \rho^2 (6 u_2 ((739 + 236 d + 23 d^2) wa_1^2 - 2 (14 + 100 d + 21 d^2) wa_1 wb + \\
& 12 (-3 + d^2) wb^2) + (9 (48 + 23 d + 3 d^2) wa_1 - 2 (-6 + 30 d + 11 d^2) wb) z_1^2 + \\
& 4 u_3 ((739 + 236 d + 23 d^2) wa_1^2 - 2 (14 + 100 d + 21 d^2) wa_1 wb + 12 (-3 + d^2) wb^2) \rho) + \\
& 2 (6 + d) wa \rho (3 (7 + 2 d) z_1^3 + 6 (7 + 2 d) z_1^2 z_2 \rho + 8 u_3 ((23 + 3 d) wa_1 + wb - 3 d wb) \\
& z_2 \rho^2 + 2 z_1 \rho (4 u_4 ((26 + 3 d) wa_1 + wb - 3 d wb) \rho + u_3 ((399 + 48 d) wa_1 + \\
& 2 ((3 - 25 d) wb + 2 (4 + d) wc + ((41 + 6 d) wa_2 - 8 (1 + d) wb_1) \rho))) + \\
& 3 u_2 (wa_1 ((139 + 18 d) z_1 + 4 (23 + 3 d) z_2 \rho) + 2 (z_1 (2 (4 + d) wc + \\
& ((41 + 6 d) wa_2 - 8 (1 + d) wb_1) \rho) - 2 wb (z_1 + 5 d z_1 + (-1 + 3 d) z_2 \rho))) + \\
& wa^2 (3 u_2 (2 (2 + d) z_1 + \rho ((236 + 70 d + 3 d^2) z_2 + 2 (76 + 22 d + d^2) z_3 \rho)) + \\
& \rho (4 \rho ((76 + 22 d + d^2) u_5 z_1 \rho + u_4 ((384 + 112 d + 5 d^2) z_1 + 4 (2 + d) z_2 \rho)) + \\
& u_3 (3 (396 + 118 d + 5 d^2) z_1 + 2 \rho (3 (92 + 30 d + d^2) z_2 + 2 (76 + 22 d + d^2) z_3 \rho)))) \\
& L[4, 6 + d] + \frac{1}{d (2 + d)} (2 (2 \rho^2 (3 u_2 wa_1 ((1070 + 206 d + 15 d^2) wa_1^2 - \\
& 2 (44 + 162 d + 19 d^2) wa_1 wb + 24 (-3 + d^2) wb^2) + \\
& ((1477 + 446 d + 38 d^2) wa_1^2 - 2 (12 + 152 d + 31 d^2) wa_1 wb + 12 (-3 + d^2) wb^2) z_1^2 + 2 u_3 \\
& wa_1 ((1070 + 206 d + 15 d^2) wa_1^2 - 2 (44 + 162 d + 19 d^2) wa_1 wb + 24 (-3 + d^2) wb^2) \rho) + \\
& (8 + d) wa \rho (4 wa_1^2 \rho ((614 + 28 d) u_3 + (162 + 7 d) u_4 \rho) + 2 (-4 (wb + 5 d wb - (4 + d) wc) \\
& z_1^2 + z_1 ((120 + 19 d) wa_2 z_1 - 8 (2 (1 + d) wb_1 z_1 + (-1 + 3 d) wb z_2)) \rho + \\
& 16 (1 - 3 d) u_3 wa_2 wb \rho^2) + 3 u_2 ((418 + 21 d) wa_1^2 + 16 (1 - 3 d) wa_2 wb \rho + \\
& 4 wa_1 (-4 (wb + 5 d wb - (4 + d) wc) + ((128 + 7 d) wa_2 - 16 (1 + d) wb_1) \rho)) + \\
& wa_1 ((392 + 57 d) z_1^2 + 4 (136 + 19 d) z_1 z_2 \rho + 8 \rho (4 (1 - 3 d) u_4 wb \rho + \\
& u_3 ((6 - 50 d) wb + 4 (4 + d) wc + ((128 + 7 d) wa_2 - 16 (1 + d) wb_1) \rho))) + \\
& 2 wa^2 (2 (2 + d) z_1^2 + z_1 \rho ((400 + 98 d + 3 d^2) z_2 + 2 (128 + 30 d + d^2) z_3 \rho) + \\
& 3 u_2 (16 wa_1 + 8 ((-2 - d) wb + (6 + d) wc) + ((392 + 66 d + 3 d^2) wa_2 - \\
& 8 (wb_1 + 5 d wb_1 + 4 wc_1)) \rho + 2 ((120 + 22 d + d^2) wa_3 - 8 (-1 + d) wb_2) \rho^2) + \\
& \rho (4 \rho (2 (2 + d) z_2^2 + u_5 ((136 + 22 d + d^2) wa_1 - 8 (-1 + d) wb) \rho + u_4 ((696 + 110
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d + 5 d^2) wa1 + 8 ((3 - 6 d) wb + (6 + d) wc + (4 wa2 - 2 (2 + d) wb1) \rho)) + \\
& u3 (3 (744 + 110 d + 5 d^2) wa1 + 2 (-36 (1 + 3 d) wb + 48 (6 + d) wc + \\
& \rho (3 (184 + 22 d + d^2) wa2 + 2 (-4 (3 (7 + 5 d) wb1 + 4 wc1) + \\
& ((120 + 22 d + d^2) wa3 - 8 (-1 + d) wb2) \rho)))) L[4, 8 + d] + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (4 (wa1 ((1886 + 378 d + 23 d^2) wa1^2 - 2 (44 + 226 d + 29 d^2) wa1 wb + \\
& 24 (-3 + d^2) wb^2) z1 \rho^2 + (10 + d) wa \rho (8 (1 - 3 d) wa2 wb z1 \rho + \\
& wa1^2 ((275 + 21 d) z1 + 2 (99 + 7 d) z2 \rho) + 4 wa1 (-2 (wb + 5 d wb - (4 + d) wc) z1 + \\
& ((88 + 7 d) wa2 z1 - 8 (1 + d) wb1 z1 + 2 (1 - 3 d) wb z2) \rho)) + \\
& wa^2 (8 ((-2 - d) wb + (6 + d) wc) z1 + ((592 + 94 d + 3 d^2) wa2 z1 - 8 (4 wc1 z1 + wb1 \\
& (z1 + 5 d z1) + (wb + 5 d wb - 2 (6 + d) wc) z2)) \rho + 2 ((184 + 30 d + d^2) wa3 z1 + \\
& 4 (-2 (-1 + d) wb2 z1 + (10 + d) wa2 z2 - 2 (2 (2 + d) wb1 z2 + (-1 + d) wb z3))) \rho^2 + \\
& (10 + d) wa1 (2 z1 + \rho ((64 + 3 d) z2 + 2 (20 + d) z3 \rho))) L[4, 10 + d] + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (2 (2 wa1^2 ((811 + 110 d + 5 d^2) wa1^2 - 2 (26 + 104 d + 9 d^2) wa1 wb + 12 (-3 + d^2) wb^2) \\
& \rho^2 + (12 + d) wa wa1 \rho ((242 + 9 d) wa1^2 + 16 (1 - 3 d) wa2 wb \rho + 2 wa1 \\
& (-4 (wb + 5 d wb - (4 + d) wc) + ((242 + 9 d) wa2 - 16 (1 + d) wb1) \rho)) + 2 wa^2 (16 wa1^2 - \\
& 8 \rho (-8 wa2^2 \rho + 2 (-1 + d) wa3 wb \rho + wa2 (wb + 5 d wb - 2 (6 + d) wc + 4 (2 + d) wb1 \rho)) + \\
& wa1 (-8 (2 + d) wb + 8 (6 + d) wc + \rho ((868 + 90 d + 3 d^2) wa2 + 2 (-4 (wb1 + 5 d wb1 + \\
& 4 wc1) + ((268 + 30 d + d^2) wa3 - 8 (-1 + d) wb2) \rho)))) L[4, 12 + d] - \\
& \frac{48}{5} wa \rho^2 (3 u2 + 2 u3 \rho)^4 L[5, d] - \frac{32 (50 + 19 d) wa z1 \rho^2 (3 u2 + 2 u3 \rho)^3 L[5, 2 + d]}{5 d} - \\
& \frac{1}{5 d (2 + d)} \\
& (8 wa \rho (3 u2 + 2 u3 \rho)^2 \\
& (8 (4 + d) \rho (6 u2 ((29 + 3 d) wa1 - 5 d wb) + \\
& 3 (25 + 8 d) z1^2 + 4 u3 (29 wa1 + 3 d wa1 - 5 d wb) \rho) + \\
& (556 + 222 d + 17 d^2) wa (3 u2 + 4 \rho (3 u3 + u4 \rho))) L[5, 4 + d] - \\
& \frac{1}{5 d (2 + d)} (8 wa \rho (3 u2 + 2 u3 \rho) (12 (6 + d) z1 \rho (u2 ((534 + 75 d) wa1 - 60 d wb) + \\
& 3 (18 + 5 d) z1^2 + 2 u3 (178 wa1 + 25 d wa1 - 20 d wb) \rho) + \\
& wa (3 u2 (3 (1220 + 362 d + 17 d^2) z1 + 2 (1172 + 354 d + 17 d^2) z2 \rho) + \\
& 2 \rho (4 (1244 + 366 d + 17 d^2) u4 z1 \rho + \\
& u3 ((16100 + 4746 d + 221 d^2) z1 + 2 (1172 + 354 d + 17 d^2) z2 \rho))) L[5, 6 + d] - \\
& \frac{1}{5 d (2 + d)} (8 wa \rho (48 (8 + d) wa^2 (3 u2 + 2 u3 \rho) (15 u3 + 4 \rho (5 u4 + u5 \rho)) + \\
& 2 (8 + d) \rho (54 u2^2 wa1 ((134 + 9 d) wa1 - 20 d wb) + (118 + 29 d) z1^4 + \\
& 24 u3 (126 wa1 + 19 d wa1 - 10 d wb) z1^2 \rho + 24 u3^2 wa1 (134 wa1 + 9 d wa1 - 20 d wb) \rho^2 + \\
& 36 u2 ((126 wa1 + 19 d wa1 - 10 d wb) z1^2 + 2 u3 wa1 (134 wa1 + 9 d wa1 - 20 d wb) \rho)) + \\
& wa (9 u2^2 ((6524 + 1146 d + 51 d^2) wa1 - 80 (wb + 5 d wb - (4 + d) wc) + \\
& ((3960 + 732 d + 34 d^2) wa2 - 320 (1 + d) wb1) \rho) + \\
& 4 \rho ((2192 + 510 d + 17 d^2) u4 z1^2 \rho + u3^2 \rho ((29244 + 5046 d + 221 d^2) wa1 - \\
& 80 (4 (-1 + 5 d) wb - (4 + d) wc) + ((3960 + 732 d + 34 d^2) wa2 - 320 (1 + d) wb1) \\
& \rho) + 2 u3 (2 (2153 + 507 d + 17 d^2) z1^2 + (2036 + 498 d + 17 d^2) z1 z2 \rho + \\
& 2 u4 ((2272 + 390 d + 17 d^2) wa1 + 40 (1 - 3 d) wb) \rho^2)) + \\
& 3 u2 (3 (2088 + 502 d + 17 d^2) z1^2 + 4 (2036 + 498 d + 17 d^2) z1 z2 \rho + \\
& 8 \rho (u4 ((2272 + 390 d + 17 d^2) wa1 + 40 (1 - 3 d) wb) \rho + \\
& u3 (2 (4471 + 774 d + 34 d^2) wa1 + 20 ((3 - 25 d) wb + 2 (4 + d) wc) + \\
& ((1980 + 366 d + 17 d^2) wa2 - 160 (1 + d) wb1) \rho))) L[5, 8 + d] - \\
& \frac{1}{5 d (2 + d)} (8 wa \rho (4 (10 + d) z1 \rho (9 u2 wa1 ((354 + 31 d) wa1 - 40 d wb) + \\
& (338 wa1 + 51 d wa1 - 20 d wb) z1^2 + 6 u3 wa1 (354 wa1 + 31 d wa1 - 40 d wb) \rho) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 48 (10 + d) wa^2 (9 u_2 z_2 + 20 u_4 z_1 \rho + 6 u_2 z_3 \rho + 4 u_5 z_1 \rho^2 + u_3 (15 z_1 + 6 z_2 \rho + 4 z_3 \rho^2)) + \\
& wa ((3160 + 642 d + 17 d^2) z_1^3 + 2 (3160 + 642 d + 17 d^2) z_1^2 z_2 \rho + \\
& 8 u_3 ((3240 + 522 d + 17 d^2) wa_1 + 40 (1 - 3 d) wb) z_2 \rho^2 + \\
& 8 z_1 \rho (u_4 ((3480 + 534 d + 17 d^2) wa_1 + 40 (1 - 3 d) wb) \rho + \\
& u_3 (2 (6785 + 1059 d + 34 d^2) wa_1 + 20 ((3 - 25 d) wb + 2 (4 + d) wc) + ((3020 + 510 d + \\
& 17 d^2) wa_2 - 160 (1 + d) wb_1) \rho)) + 6 u_2 (-80 (wb + 5 d wb - (4 + d) wc) z_1 + \\
& 2 ((3020 + 510 d + 17 d^2) wa_2 z_1 - 40 (4 (1 + d) wb_1 z_1 + (-1 + 3 d) wb z_2)) \rho + \\
& wa_1 ((9740 + 1566 d + 51 d^2) z_1 + 2 (3240 + 522 d + 17 d^2) z_2 \rho)) L[5, 10 + d] - \\
& \frac{1}{5 d (2 + d)} (8 wa \rho (24 (12 + d) wa_1 \rho (6 u_2 wa_1 ((39 + 2 d) wa_1 - 5 d wb) + \\
& (113 wa_1 + 11 d wa_1 - 10 d wb) z_1^2 + 4 u_3 wa_1 (39 wa_1 + 2 d wa_1 - 5 d wb) \rho) + \\
& 48 (12 + d) wa^2 (9 u_2 wa_2 + 3 z_1 z_2 + 2 (10 u_4 wa_1 + 3 u_2 wa_3 + z_1 z_3) \rho + \\
& 4 u_5 wa_1 \rho^2 + u_3 (15 wa_1 + 6 wa_2 \rho + 4 wa_3 \rho^2)) + \\
& wa ((13568 + 1986 d + 51 d^2) wa_1 - 80 (wb + 5 d wb - (4 + d) wc)) z_1^2 + \\
& 2 (8 u_3 wa_1 ((4871 + 552 d + 17 d^2) wa_1 + 10 ((3 - 25 d) wb + 2 (4 + d) wc)) + \\
& z_1 ((4320 + 654 d + 17 d^2) wa_2 z_1 + \\
& 2 (-80 (1 + d) wb_1 z_1 + ((4624 + 666 d + 17 d^2) wa_1 + 40 (1 - 3 d) wb) z_2)) \\
& \rho + 4 (u_4 wa_1 ((5028 + 558 d + 17 d^2) wa_1 + 80 (1 - 3 d) wb) + 2 u_3 \\
& (40 (1 - 3 d) wa_2 wb + wa_1 ((4400 + 534 d + 17 d^2) wa_2 - 160 (1 + d) wb_1))) \rho^2 + \\
& 3 u_2 ((13828 + 1626 d + 51 d^2) wa_1^2 + 160 (1 - 3 d) wa_2 wb \rho + 4 wa_1 (-40 \\
& (wb + 5 d wb - (4 + d) wc) + ((4400 + 534 d + 17 d^2) wa_2 - 160 (1 + d) wb_1) \rho)) L[5, 12 + d] - \\
& \frac{1}{5 d (2 + d)} (8 wa \rho (4 (14 + d) wa_1^2 ((578 + 37 d) wa_1 - 60 d wb) z_1 \rho + \\
& 48 (14 + d) wa^2 (3 wa_2 z_1 + 3 wa_1 z_2 + 2 wa_3 z_1 \rho + 2 wa_1 z_3 \rho) + \\
& wa (160 (1 - 3 d) wa_2 wb z_1 \rho + wa_1^2 ((18268 + 2046 d + 51 d^2) z_1 + 2 (6348 + 690 d + 17 d^2) \\
& z_2 \rho) + 4 wa_1 (-40 (wb + 5 d wb - (4 + d) wc) z_1 + ((5960 + 678 d + 17 d^2) wa_2 z_1 - \\
& 40 (4 (1 + d) wb_1 z_1 + (-1 + 3 d) wb z_2)) \rho)) L[5, 14 + d] - \\
& \frac{1}{5 d (2 + d)} (8 wa wa_1 \rho (2 (16 + d) wa_1^2 ((358 + 15 d) wa_1 - 40 d wb) \rho + \\
& 48 (16 + d) wa^2 (3 wa_2 + 2 wa_3 \rho) + \\
& wa ((7860 + 702 d + 17 d^2) wa_1^2 + 160 (1 - 3 d) wa_2 wb \rho + 2 wa_1 \\
& (-40 (wb + 5 d wb - (4 + d) wc) + ((7860 + 702 d + 17 d^2) wa_2 - 160 (1 + d) wb_1) \rho)) \\
& L[5, 16 + d] + \frac{16 (340 + 138 d + 11 d^2) wa^2 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^4 L[6, 4 + d]}{3 d (2 + d)} + \\
& \frac{64 (738 + 221 d + 11 d^2) wa^2 z_1 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^3 L[6, 6 + d]}{3 d (2 + d)} + \\
& \frac{1}{3 d (2 + d)} \\
& (32 wa^2 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 \\
& (\rho (6 u_2 ((1308 + 244 d + 11 d^2) wa_1 - 60 d wb) + 3 (1260 + 304 d + 11 d^2) z_1^2 + \\
& 4 u_3 ((1308 + 244 d + 11 d^2) wa_1 - 60 d wb) \rho) + \\
& 2 (220 + 29 d) wa (3 u_2 + 4 \rho (3 u_3 + u_4 \rho))) L[6, 8 + d] + \\
& \frac{1}{3 d (2 + d)} (64 wa^2 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (z_1 \rho (9 u_2 ((1954 + 327 d + 11 d^2) wa_1 - 60 d wb) + \\
& (1906 + 387 d + 11 d^2) z_1^2 + 6 u_3 ((1954 + 327 d + 11 d^2) wa_1 - 60 d wb) \rho) + \\
& wa (3 u_2 ((840 + 87 d) z_1 + 2 (272 + 29 d) z_2 \rho) + 2 \rho (4 (284 + 29 d) u_4 z_1 \rho + \\
& u_3 (3680 z_1 + 377 d z_1 + 544 z_2 \rho + 58 d z_2 \rho))) L[6, 10 + d] + \\
& \frac{1}{3 d (2 + d)} (16 wa^2 \rho (96 wa^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (15 u_3 + 4 \rho (5 u_4 + u_5 \rho)) + \\
& \rho (54 u_2^2 wa_1 ((2772 + 350 d + 11 d^2) wa_1 - 120 d wb) + \\
& (2676 + 470 d + 11 d^2) z_1^4 + 24 u_3 ((2724 + 410 d + 11 d^2) wa_1 - 60 d wb) z_1^2 \rho + \\
& 24 u_3^2 wa_1 ((2772 + 350 d + 11 d^2) wa_1 - 120 d wb) \rho^2 + 36 u_2 ((2724 + 410 d + 11 d^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{wa1} - 60 \text{d wb}) z1^2 + 2 \text{u3 wa1} ((2772 + 350 \text{d} + 11 \text{d}^2) \text{wa1} - 120 \text{d wb}) \rho) + \\
& 4 \text{wa} (9 \text{u2}^2 (3 (340 + 29 \text{d}) \text{wa1} + 2 (324 + 29 \text{d}) \text{wa2} \rho) + 4 \rho (4 (345 + 29 \text{d}) \text{u3} z1^2 + \\
& ((4500 + 377 \text{d}) \text{u3}^2 \text{wa1} + 29 (12 + \text{d}) \text{u4} z1^2 + 2 (336 + 29 \text{d}) \text{u3} z1 z2) \rho + \\
& 2 \text{u3} (58 (12 + \text{d}) \text{u4} \text{wa1} + (324 + 29 \text{d}) \text{u3} \text{wa2}) \rho^2) + \\
& 3 \text{u2} (3 (340 + 29 \text{d}) z1^2 + 4 (336 + 29 \text{d}) z1 z2 \rho + 8 \rho (29 (12 + \text{d}) \text{u4} \text{wa1} \rho + \\
& \text{u3} (4 (345 + 29 \text{d}) \text{wa1} + (324 + 29 \text{d}) \text{wa2} \rho)))) L[6, 12 + \text{d}] + \\
& \frac{1}{3 \text{d} (2 + \text{d})} (64 \text{wa}^2 \rho (z1 \rho (9 \text{u2} \text{wa1} ((3666 + 433 \text{d} + 11 \text{d}^2) \text{wa1} - 120 \text{d wb}) + \\
& ((3618 + 493 \text{d} + 11 \text{d}^2) \text{wa1} - 60 \text{d wb}) z1^2 + \\
& 6 \text{u3} \text{wa1} ((3666 + 433 \text{d} + 11 \text{d}^2) \text{wa1} - 120 \text{d wb}) \rho) + \\
& 24 \text{wa}^2 (9 \text{u2} z2 + 20 \text{u4} z1 \rho + 6 \text{u2} z3 \rho + 4 \text{u5} z1 \rho^2 + \text{u3} (15 z1 + 6 z2 \rho + 4 z3 \rho^2)) + \\
& \text{wa} ((400 + 29 \text{d}) z1^3 + 2 z1 (8 (815 + 58 \text{d}) \text{u3} \text{wa1} + (400 + 29 \text{d}) z1 z2) \rho + \\
& 8 ((412 + 29 \text{d}) \text{u4} \text{wa1} z1 + \text{u3} ((388 + 29 \text{d}) \text{wa2} z1 + (400 + 29 \text{d}) \text{wa1} z2)) \rho^2 + \\
& 6 \text{u2} (2 (388 + 29 \text{d}) \text{wa2} z1 \rho + (400 + 29 \text{d}) \text{wa1} (3 z1 + 2 z2 \rho))) L[6, 14 + \text{d}] + \\
& \frac{1}{3 \text{d} (2 + \text{d})} (32 \text{wa}^2 \rho (\text{wa1} \rho (6 \text{u2} \text{wa1} ((4732 + 456 \text{d} + 11 \text{d}^2) \text{wa1} - 180 \text{d wb}) + \\
& 3 ((4684 + 516 \text{d} + 11 \text{d}^2) \text{wa1} - 120 \text{d wb}) z1^2 + \\
& 4 \text{u3} \text{wa1} ((4732 + 456 \text{d} + 11 \text{d}^2) \text{wa1} - 180 \text{d wb}) \rho) + 2 \text{wa} (3 (460 + 29 \text{d}) \text{wa1} z1^2 + \\
& 2 (8 (470 + 29 \text{d}) \text{u3} \text{wa1}^2 + z1 ((452 + 29 \text{d}) \text{wa2} z1 + 58 (16 + \text{d}) \text{wa1} z2)) \rho + \\
& 4 \text{wa1} ((476 + 29 \text{d}) \text{u4} \text{wa1} + 2 (452 + 29 \text{d}) \text{u3} \text{wa2}) \rho^2 + \\
& 3 \text{u2} \text{wa1} (3 (460 + 29 \text{d}) \text{wa1} + 4 (452 + 29 \text{d}) \text{wa2} \rho)) + \\
& 48 \text{wa}^2 (9 \text{u2} \text{wa2} + 3 z1 z2 + 2 (10 \text{u4} \text{wa1} + 3 \text{u2} \text{wa3} + z1 z3) \rho + 4 \text{u5} \text{wa1} \rho^2 + \\
& \text{u3} (15 \text{wa1} + 6 \text{wa2} \rho + 4 \text{wa3} \rho^2)) L[6, 16 + \text{d}] + \\
& \frac{1}{3 \text{d} (2 + \text{d})} (64 \text{wa}^2 \rho (\text{wa1}^2 (11 (534 + 49 \text{d} + \text{d}^2) \text{wa1} - 180 \text{d wb}) z1 \rho + \\
& 24 \text{wa}^2 (3 \text{wa2} z1 + 3 \text{wa1} z2 + 2 \text{wa3} z1 \rho + 2 \text{wa1} z3 \rho) + \text{wa} \text{wa1} \\
& (4 (516 + 29 \text{d}) \text{wa2} z1 \rho + \text{wa1} (3 (520 + 29 \text{d}) z1 + 2 (528 + 29 \text{d}) z2 \rho))) L[6, 18 + \text{d}] + \\
& \frac{1}{3 \text{d} (2 + \text{d})} (16 \text{wa}^2 \text{wa1} \rho (\text{wa1}^2 ((7188 + 562 \text{d} + 11 \text{d}^2) \text{wa1} - 240 \text{d wb}) \rho + \\
& 116 (20 + \text{d}) \text{wa} \text{wa1} (\text{wa1} + 2 \text{wa2} \rho) + 96 \text{wa}^2 (3 \text{wa2} + 2 \text{wa3} \rho)) L[6, 20 + \text{d}]) - \\
& \frac{512 (22 + 3 \text{d}) \text{wa}^3 \rho^2 (3 \text{u2} + 2 \text{u3} \rho)^4 L[7, 8 + \text{d}]}{\text{d} (2 + \text{d})} - \\
& \frac{2048 (28 + 3 \text{d}) \text{wa}^3 z1 \rho^2 (3 \text{u2} + 2 \text{u3} \rho)^3 L[7, 10 + \text{d}]}{\text{d} (2 + \text{d})} - \\
& \frac{1}{\text{d} (2 + \text{d})} \\
& (512 \\
& \text{wa}^3 \\
& \rho \\
& (3 \text{u2} + 2 \text{u3} \rho)^2 \\
& (2 (34 + 3 \text{d}) \rho (6 \text{u2} \text{wa1} + 3 z1^2 + 4 \text{u3} \text{wa1} \rho) + \\
& 9 \text{wa} (3 \text{u2} + 4 \rho (3 \text{u3} + \text{u4} \rho))) L[7, 12 + \text{d}]) - \\
& \frac{1}{\text{d} (2 + \text{d})} (512 \text{wa}^3 \rho (3 \text{u2} + 2 \text{u3} \rho) (4 (40 + 3 \text{d}) z1 \rho (9 \text{u2} \text{wa1} + z1^2 + 6 \text{u3} \text{wa1} \rho) + \\
& 9 \text{wa} (\text{u2} (9 z1 + 6 z2 \rho) + 2 \rho (13 \text{u3} z1 + 4 \text{u4} z1 \rho + 2 \text{u3} z2 \rho))) L[7, 14 + \text{d}]) - \\
& \frac{1}{\text{d} (2 + \text{d})} (512 \text{wa}^3 \rho ((46 + 3 \text{d}) \rho (54 \text{u2}^2 \text{wa1}^2 + z1^4 + 24 \text{u3} \text{wa1} z1^2 \rho + 24 \text{u3}^2 \text{wa1}^2 \rho^2 + \\
& 36 \text{u2} \text{wa1} (z1^2 + 2 \text{u3} \text{wa1} \rho)) + 9 \text{wa} (9 \text{u2}^2 (3 \text{wa1} + 2 \text{wa2} \rho) + \\
& 4 \rho (4 \text{u3} z1^2 + (13 \text{u3}^2 \text{wa1} + \text{u4} z1^2 + 2 \text{u3} z1 z2) \rho + 2 \text{u3} (2 \text{u4} \text{wa1} + \text{u3} \text{wa2}) \rho^2) + \\
& 3 \text{u2} (3 z1^2 + 4 z1 z2 \rho + 8 \rho (4 \text{u3} \text{wa1} + \text{u4} \text{wa1} \rho + \text{u3} \text{wa2} \rho)))) L[7, 16 + \text{d}]) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{d(2+d)} (512 wa^3 \rho (4 (52 + 3 d) wa1 z1 \rho (9 u2 wa1 + z1^2 + 6 u3 wa1 \rho) + \\
& \quad 9 wa (z1^3 + 2 z1 (16 u3 wa1 + z1 z2) \rho + 8 (u4 wa1 z1 + u3 wa2 z1 + u3 wa1 z2) \rho^2 + \\
& \quad 6 u2 (3 wa1 z1 + 2 wa2 z1 \rho + 2 wa1 z2 \rho))) L[7, 18 + d]) - \\
& \frac{1}{d(2+d)} (512 wa^3 \rho (2 (58 + 3 d) wa1^2 \rho (6 u2 wa1 + 3 z1^2 + 4 u3 wa1 \rho) + \\
& \quad 9 wa (3 wa1 z1^2 + 2 (8 u3 wa1^2 + wa2 z1^2 + 2 wa1 z1 z2) \rho + \\
& \quad 4 wa1 (u4 wa1 + 2 u3 wa2) \rho^2 + 3 u2 wa1 (3 wa1 + 4 wa2 \rho))) L[7, 20 + d]) - \\
& \frac{512 wa^3 wa1 \rho (4 (64 + 3 d) wa1^2 z1 \rho + 9 wa (3 wa1 z1 + 4 wa2 z1 \rho + 2 wa1 z2 \rho)) L[7, 22 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{512 wa^3 wa1^2 \rho ((70 + 3 d) wa1^2 \rho + 9 wa (wa1 + 2 wa2 \rho)) L[7, 24 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{12544 wa^4 \rho^2 (3 u2 + 2 u3 \rho)^4 L[8, 12 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{50176 wa^4 z1 \rho^2 (3 u2 + 2 u3 \rho)^3 L[8, 14 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{25088 wa^4 \rho^2 (3 u2 + 2 u3 \rho)^2 (6 u2 wa1 + 3 z1^2 + 4 u3 wa1 \rho) L[8, 16 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{50176 wa^4 z1 \rho^2 (3 u2 + 2 u3 \rho) (9 u2 wa1 + z1^2 + 6 u3 wa1 \rho) L[8, 18 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{1}{d(2+d)} \\
& (12544 \\
& \quad wa^4 \\
& \quad \rho^2 \\
& \quad (54 u2^2 wa1^2 + z1^4 + 24 u3 wa1 z1^2 \rho + 24 u3^2 wa1^2 \rho^2 + \\
& \quad 36 u2 wa1 (z1^2 + 2 u3 wa1 \rho)) L[8, 20 + d]) + \\
& \frac{50176 wa^4 wa1 z1 \rho^2 (9 u2 wa1 + z1^2 + 6 u3 wa1 \rho) L[8, 22 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{25088 wa^4 wa1^2 \rho^2 (6 u2 wa1 + 3 z1^2 + 4 u3 wa1 \rho) L[8, 24 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{50176 wa^4 wa1^3 z1 \rho^2 L[8, 26 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{12544 wa^4 wa1^4 \rho^2 L[8, 28 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{1}{d} \\
& (2 \\
& \quad (3 u2 (z1 + 4 \rho (2 z2 + z3 \rho)) + \\
& \quad 2 \rho (2 \rho (11 u4 z1 + 2 u5 z1 \rho + 2 u4 z2 \rho) + u3 (21 z1 + 18 z2 \rho + 4 z3 \rho^2))) M[4, d]) - \\
& \frac{1}{d(2+d)} (2 ((2 + d) z1^2 + 2 (3 u3 (51 wa1 - 6 (1 + 3 d) wb + 8 (6 + d) wc) + (19 + 8 d) z1 z2) \rho + \\
& \quad 4 (2 u4 (39 wa1 + 2 ((3 - 6 d) wb + (6 + d) wc)) + \\
& \quad u3 (57 wa2 - 2 (3 (7 + 5 d) wb1 + 4 wc1)) + 2 z2^2 + d z2^2 + 5 z1 z3 + 2 d z1 z3) \rho^2 + \\
& \quad 8 (u5 (7 wa1 - 2 (-1 + d) wb) + u4 (8 wa2 - 8 wb1 - 4 d wb1) + u3 (3 wa3 + 2 wb2 - 2 d wb2)) \\
& \quad \rho^3 + 6 u2 (4 wa1 - 4 wb - 2 d wb + 12 wc + 2 d wc + \\
& \quad (17 wa2 - 2 (wb1 + 5 d wb1 + 4 wc1)) \rho + (6 wa3 - 4 (-1 + d) wb2) \rho^2)) M[4, 2 + d]) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{d(2+d)} (2(wa1((10+d)z1 + 2\rho((43+4d)z2 + 2(11+d)z3\rho)) + \\
& \quad 2(2(6+d)wc(z1 + 2z2\rho) + \rho(wa2((31+4d)z1 + 2(10+d)z2\rho) + 2((-wb1 - 5dwb1 - \\
& \quad \quad 4wc1)z1 + (7+d)wa3z1 - 2((-1+d)wb2z1 + 2(2+d)wb1z2))\rho)) - \\
& \quad 2wb((2+d)z1 + \rho(z2 + 5dz2 + 2(-1+d)z3\rho)))M[4, 4+d]) + \\
& \frac{1}{d(2+d)} (8(-2wa1^2 + \rho(wa2(wb + 5dwb - 2(6+d)wc) + (-8wa2^2 + 2(-1+d)wa3wb + \\
& \quad 4(2+d)wa2wb1)\rho) + wa1((2+d)wb - (6+d)wc + \\
& \quad (-29wa2 + wb1 + 5dwb1 + 4wc1)\rho - 2(7wa3 + wb2 - dwb2)\rho^2))M[4, 6+d]) + \\
& \frac{28\rho(3u2 + 2u3\rho)(u2(9z1 + 6z2\rho) + 2\rho(13u3z1 + 4u4z1\rho + 2u3z2\rho))M[5, d]}{d} + \\
& \frac{1}{d(2+d)} \\
& (8\rho(2(6+d)wa(3u2 + 2u3\rho)(15u3 + 4\rho(5u4 + u5\rho)) + \\
& \quad 9u2^2((64+3d)wa1 + 2(-2(wb + 5dwb - (4+d)wc) + ((18+d)wa2 - 8(1+d)wb1)\rho)) + \\
& \quad 4\rho((19+7d)u4z1^2\rho + u3((73+28d)z1^2 + 2(16+7d)z1z2\rho + \\
& \quad \quad 4u4((23+d)wa1 + 2wb - 6dwb)\rho^2) + u3^2\rho((294+13d)wa1 + \\
& \quad \quad 2((8-40d)wb + 2(4+d)wc + ((18+d)wa2 - 8(1+d)wb1)\rho))) + \\
& \quad 3u2(3(17+7d)z1^2 + 4(16+7d)z1z2\rho + 4\rho(2u4((23+d)wa1 + (2-6d)wb)\rho + \\
& \quad \quad u3((179+8d)wa1 + 2((3-25d)wb + 2(4+d)wc + \\
& \quad \quad \quad ((18+d)wa2 - 8(1+d)wb1)\rho))))M[5, 2+d]) + \\
& \frac{1}{d(2+d)} (4\rho(3((20+7d)z1^3 + 2u2((206+27d)wa1z1 + 32wc z1 + 8dwc z1 - \\
& \quad 8wb(z1 + 5dz1) + 48wa z2 + 6dwa z2)) + \\
& \quad 2(40(8+d)u4wa z1 + 3((20+7d)z1^2 z2 + 2u2((58+9d)wa2 z1 - 16(1+d) \\
& \quad \quad wb1 z1 + 68wa1 z2 + 9dwa1 z2 + 4wb z2 - 12dwb z2 + 16wa z3 + 2dwa z3)))\rho + \\
& \quad 8(2(8+d)u5wa + u4((80+9d)wa1 + 4(1-3d)wb))z1\rho^2 + 4u3 \\
& \quad ((8+d)wa(15z1 + 6z2\rho + 4z3\rho^2) + 2\rho(2((3-25d)wb + 2(4+d)wc)z1 + \\
& \quad \quad (58+9d)wa2 z1 - 4(4(1+d)wb1 z1 + (-1+3d)wb z2))\rho + \\
& \quad \quad wa1((303+36d)z1 + (68+9d)z2\rho)))M[5, 4+d]) + \\
& \frac{1}{d(2+d)} (8\rho(492u2wa1^2 + 18du2wa1^2 + 180u2wa wa2 + 18du2wa wa2 - \\
& \quad 24u2wa1wb - 120du2wa1wb + 96u2wa1wc + 24du2wa1wc + 151wa1z1^2 + \\
& \quad 24dwa1z1^2 - 4wbz1^2 - 20dwbz1^2 + 16wc z1^2 + 4dwc z1^2 + 60wa z1 z2 + \\
& \quad 6dwa z1 z2 + 2(20(10+d)u4wa wa1 + 6u2((10+d)wa wa3 + 2(1-3d)wa2wb + \\
& \quad \quad wa1((49+2d)wa2 - 8(1+d)wb1)) + z1((45+8d)wa2 z1 + \\
& \quad \quad 2(-4(1+d)wb1 z1 + (53+8d)wa1 z2 + 2wb z2 - 6dwb z2 + 10wa z3 + dwa z3)))\rho + \\
& \quad 8wa1((10+d)u5wa + u4((33+d)wa1 + 2wb - 6dwb))\rho^2 + \\
& \quad 2u3((10+d)wa(15wa1 + 6wa2\rho + 4wa3\rho^2) + 2\rho((247+8d)wa1^2 + 4(1-3d)wa2wb\rho + \\
& \quad \quad 2wa1((3-25d)wb + 2(4+d)wc + ((49+2d)wa2 - 8(1+d)wb1)\rho))) \\
& M[5, 6+d]) + \frac{1}{d(2+d)} (4\rho(wa1^2((442+33d)z1 + 2(162+11d)z2\rho) + \\
& \quad 4wa1(-4wbz1 - 20dwbz1 + 16wc z1 + 4dwc z1 + 36wa z2 + 3dwa z2 + \\
& \quad \quad ((140+11d)wa2 z1 + 2(-8(1+d)wb1 z1 + (2-6d)wb z2 + (12+d)wa z3))\rho) + \\
& \quad 4z1(4(1-3d)wa2wb\rho + (12+d)wa(3wa2 + 2wa3\rho)))M[5, 8+d]) + \\
& \frac{1}{d(2+d)} (8wa1\rho((100+3d)wa1^2 + 8(1-3d)wa2wb\rho + 2(14+d)wa(3wa2 + 2wa3\rho) + \\
& \quad 2wa1(-2(wb + 5dwb - (4+d)wc) + ((100+3d)wa2 - 8(1+d)wb1)\rho))M[5, 10+d]) - \\
& \frac{208z1\rho^2(3u2 + 2u3\rho)^3 M[6, d]}{d} - \frac{1}{d(2+d)} (8\rho(3u2 + 2u3\rho)^2 \\
& (2\rho(6u2((40+3d)wa1 - 10dwb) + 3(32+13d)z1^2 + 4u3(40wa1 + 3dwa1 - 10dwb)\rho) + \\
& (94+17d)wa(3u2 + 4\rho(3u3 + u4\rho)))M[6, 2+d]) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{d(2+d)} (8\rho(3u_2 + 2u_3\rho)(6z_1\rho(u_2((390+57d)wa_1 - 60dwb) + \\
& (38+13d)z_1^2 + 2u_3(130wa_1 + 19dwa_1 - 20dwb)\rho) + \\
& wa(3u_2((390+51d)z_1 + 2(122+17d)z_2\rho) + 2\rho(4(134+17d)u_4z_1\rho + \\
& u_3(1730z_1 + 221d z_1 + 244z_2\rho + 34d z_2\rho)))M[6, 4+d] - \\
& \frac{1}{d(2+d)} (8\rho(32wa^2(3u_2 + 2u_3\rho)(15u_3 + 4\rho(5u_4 + u_5\rho)) + \\
& 2\rho(54u_2^2wa_1((52+3d)wa_1 - 10dwb) + (44+13d)z_1^4 + \\
& 24u_3(8(6+d)wa_1 - 5dwb)z_1^2\rho + 24u_3^2wa_1((52+3d)wa_1 - 10dwb)\rho^2 + \\
& 36u_2((8(6+d)wa_1 - 5dwb)z_1^2 + 2u_3wa_1((52+3d)wa_1 - 10dwb)\rho)) + \\
& wa(9u_2^2((498+51d)wa_1 + 2(150+17d)wa_2\rho) + \\
& 4\rho((174+17d)u_4z_1^2\rho + u_3^2\rho((2238+221d)wa_1 + 2(150+17d)wa_2\rho) + \\
& 2u_3((342+34d)z_1^2 + (162+17d)z_1z_2\rho + 2(174+17d)u_4wa_1\rho^2)) + \\
& 3u_2((498+51d)z_1^2 + 4(162+17d)z_1z_2\rho + 8\rho((174+17d)u_4wa_1\rho + \\
& u_3((684+68d)wa_1 + (150+17d)wa_2\rho))))M[6, 6+d] - \\
& \frac{1}{d(2+d)} (8\rho(2z_1\rho(9u_2wa_1((282+25d)wa_1 - 40dwb) + (266wa_1 + 45dwa_1 - \\
& 20dwb)z_1^2 + 6u_3wa_1(282wa_1 + 25dwa_1 - 40dwb)\rho) + \\
& 32wa^2(9u_2z_2 + 20u_4z_1\rho + 6u_2z_3\rho + 4u_5z_1\rho^2 + u_3(15z_1 + 6z_2\rho + 4z_3\rho^2)) + \\
& wa((202+17d)z_1^3 + 2z_1(8(419+34d)u_3wa_1 + (202+17d)z_1z_2)\rho + \\
& 8((214+17d)u_4wa_1z_1 + u_3((190+17d)wa_2z_1 + (202+17d)wa_1z_2))\rho^2 + \\
& 6u_2(2(190+17d)wa_2z_1\rho + (202+17d)wa_1(3z_1 + 2z_2\rho)))M[6, 8+d] - \\
& \frac{1}{d(2+d)} (8\rho(6wa_1\rho(6u_2wa_1((64+3d)wa_1 - 10dwb) + (184wa_1 + 19dwa_1 - 20dwb) \\
& z_1^2 + 4u_3wa_1(64wa_1 + 3dwa_1 - 10dwb)\rho) + \\
& wa(2(230+17d)wa_2z_1^2\rho + 4wa_1^2\rho((992+68d)u_3 + (254+17d)u_4\rho) + \\
& 3u_2wa_1(51(14+d)wa_1 + 4(230+17d)wa_2\rho) + \\
& wa_1(51(14+d)z_1^2 + 4(242+17d)z_1z_2\rho + 8(230+17d)u_3wa_2\rho^2)) + \\
& 32wa^2(9u_2wa_2 + 3z_1z_2 + 2(10u_4wa_1 + 3u_2wa_3 + z_1z_3)\rho + 4u_5wa_1\rho^2 + \\
& u_3(15wa_1 + 6wa_2\rho + 4wa_3\rho^2)))M[6, 10+d] - \\
& \frac{1}{d(2+d)} (8\rho(2wa_1^2((482+31d)wa_1 - 60dwb)z_1\rho + 32wa^2 \\
& (3wa_2z_1 + 3wa_1z_2 + 2wa_3z_1\rho + 2wa_1z_3\rho) + wa_1 \\
& (4(270+17d)wa_2z_1\rho + wa_1(822z_1 + 51d z_1 + 564z_2\rho + 34d z_2\rho)))M[6, 12+d] - \\
& \frac{1}{d(2+d)} (8wa_1\rho(4wa_1^2((76+3d)wa_1 - 10dwb)\rho + (310+17d)wa_1wa_1(wa_1 + 2wa_2\rho) + \\
& 32wa^2(3wa_2 + 2wa_3\rho))M[6, 14+d]) + \\
& \frac{32(58+11d)wa\rho^2(3u_2 + 2u_3\rho)^4M[7, 2+d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{128(80+11d)wa z_1\rho^2(3u_2 + 2u_3\rho)^3M[7, 4+d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{1}{d(2+d)} (64wa\rho \\
& (3u_2 + 2u_3\rho)^2 \\
& ((102+11d)\rho(6u_2wa_1 + 3z_1^2 + 4u_3wa_1\rho) + 36wa(3u_2 + 4\rho(3u_3 + u_4\rho))) \\
& M[7, 6+d]) + \\
& \frac{1}{d(2+d)} (128wa\rho(3u_2 + 2u_3\rho)((124+11d)z_1\rho(9u_2wa_1 + z_1^2 + 6u_3wa_1\rho) + \\
& 18wa(u_2(9z_1 + 6z_2\rho) + 2\rho(13u_3z_1 + 4u_4z_1\rho + 2u_3z_2\rho)))M[7, 8+d]) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{d(2+d)} (32 wa \rho ((146 + 11 d) \rho (54 u_2^2 wa_1^2 + z_1^4 + 24 u_3 wa_1 z_1^2 \rho + 24 u_3^2 wa_1^2 \rho^2 + \\
& \quad 36 u_2 wa_1 (z_1^2 + 2 u_3 wa_1 \rho)) + 72 wa (9 u_2^2 (3 wa_1 + 2 wa_2 \rho) + \\
& \quad 4 \rho (4 u_3 z_1^2 + (13 u_3^2 wa_1 + u_4 z_1^2 + 2 u_3 z_1 z_2) \rho + 2 u_3 (2 u_4 wa_1 + u_3 wa_2) \rho^2) + \\
& \quad 3 u_2 (3 z_1^2 + 4 z_1 z_2 \rho + 8 \rho (4 u_3 wa_1 + u_4 wa_1 \rho + u_3 wa_2 \rho))) M[7, 10 + d]) + \\
& \frac{1}{d(2+d)} (128 wa \rho ((168 + 11 d) wa_1 z_1 \rho (9 u_2 wa_1 + z_1^2 + 6 u_3 wa_1 \rho) + \\
& \quad 18 wa (z_1^3 + 2 z_1 (16 u_3 wa_1 + z_1 z_2) \rho + 8 (u_4 wa_1 z_1 + u_3 wa_2 z_1 + u_3 wa_1 z_2) \rho^2 + \\
& \quad 6 u_2 (3 wa_1 z_1 + 2 wa_2 z_1 \rho + 2 wa_1 z_2 \rho))) M[7, 12 + d]) + \\
& \frac{1}{d(2+d)} (64 wa \rho ((190 + 11 d) wa_1^2 \rho (6 u_2 wa_1 + 3 z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) + \\
& \quad 36 wa (3 wa_1 z_1^2 + 2 (8 u_3 wa_1^2 + wa_2 z_1^2 + 2 wa_1 z_1 z_2) \rho + \\
& \quad 4 wa_1 (u_4 wa_1 + 2 u_3 wa_2) \rho^2 + 3 u_2 wa_1 (3 wa_1 + 4 wa_2 \rho))) M[7, 14 + d]) + \\
& \frac{128 wa wa_1 \rho ((212 + 11 d) wa_1^2 z_1 \rho + 18 wa (3 wa_1 z_1 + 4 wa_2 z_1 \rho + 2 wa_1 z_2 \rho)) M[7, 16 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{32 wa wa_1^2 \rho ((234 + 11 d) wa_1^2 \rho + 72 wa (wa_1 + 2 wa_2 \rho)) M[7, 18 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{6272 wa^2 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^4 M[8, 6 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{25088 wa^2 z_1 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^3 M[8, 8 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{12544 wa^2 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 (6 u_2 wa_1 + 3 z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) M[8, 10 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{25088 wa^2 z_1 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (9 u_2 wa_1 + z_1^2 + 6 u_3 wa_1 \rho) M[8, 12 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{1}{d(2+d)} (6272 wa^2 \rho^2 (54 u_2^2 wa_1^2 + z_1^4 + 24 u_3 wa_1 z_1^2 \rho + 24 u_3^2 wa_1^2 \rho^2 + 36 u_2 wa_1 (z_1^2 + 2 u_3 wa_1 \rho)) \\
& \quad M[8, 14 + d]) - \\
& \frac{25088 wa^2 wa_1 z_1 \rho^2 (9 u_2 wa_1 + z_1^2 + 6 u_3 wa_1 \rho) M[8, 16 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{12544 wa^2 wa_1^2 \rho^2 (6 u_2 wa_1 + 3 z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) M[8, 18 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{25088 wa^2 wa_1^3 z_1 \rho^2 M[8, 20 + d]}{d(2+d)} - \\
& \frac{6272 wa^2 wa_1^4 \rho^2 M[8, 22 + d]}{d(2+d)} + \\
& \frac{8 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (15 u_3 + 4 \rho (5 u_4 + u_5 \rho)) S[5, d]}{3 d} + \\
& \frac{1}{3 d(2+d)} (8 (4 + d) \rho (9 u_2 z_2 + 20 u_4 z_1 \rho + 6 u_2 z_3 \rho + 4 u_5 z_1 \rho^2 + u_3 (15 z_1 + 6 z_2 \rho + 4 z_3 \rho^2)) \\
& \quad S[5, 2 + d]) + \\
& \frac{1}{3 d(2+d)} (8 (6 + d) \rho (9 u_2 wa_2 + 3 z_1 z_2 + 2 (10 u_4 wa_1 + 3 u_2 wa_3 + z_1 z_3) \rho + \\
& \quad 4 u_5 wa_1 \rho^2 + u_3 (15 wa_1 + 6 wa_2 \rho + 4 wa_3 \rho^2)) S[5, 4 + d]) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{8(8+d)\rho(3wa_2z_1+3wa_1z_2+2(wa_3z_1+wa_1z_3)\rho)S[5,6+d]}{3d(2+d)} + \\
& \frac{8(10+d)wa_1\rho(3wa_2+2wa_3\rho)S[5,8+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{68\rho(3u_2+2u_3\rho)^2(3u_2+4\rho(3u_3+u_4\rho))S[6,d]}{3d} - \\
& \frac{1}{3d(2+d)} \\
& (4\rho(3u_2+2u_3\rho)(3u_2(3(70+17d)z_1+2(62+17d)z_2\rho)+ \\
& 2\rho(4(74+17d)u_4z_1\rho+u_3((950+221d)z_1+2(62+17d)z_2\rho)))S[6,2+d]) - \\
& \frac{1}{3d(2+d)} (4\rho(9u_2^2((318+51d)wa_1+2(90+17d)wa_2\rho)+4\rho \\
& (4(111+17d)u_3z_1^2+((1458+221d)u_3^2wa_1+(114+17d)u_4z_1^2+34(6+d)u_3z_1z_2) \\
& \rho+2u_3(2(114+17d)u_4wa_1+(90+17d)u_3wa_2)\rho^2)+64wa(3u_2+2u_3\rho) \\
& (15u_3+4\rho(5u_4+u_5\rho))+3u_2((318+51d)z_1^2+68(6+d)z_1z_2\rho+ \\
& 8\rho((114+17d)u_4wa_1\rho+u_3((444+68d)wa_1+(90+17d)wa_2\rho))))S[6,4+d]) - \\
& \frac{1}{3d(2+d)} (4\rho(2556u_2wa_1z_1+306du_2wa_1z_1+142z_1^3+17dz_1^3+ \\
& 576u_2wa_2z_2+2(640u_4wa_1z_1+(142+17d)z_1^2z_2+ \\
& 6u_2((130+17d)wa_2z_1+(142+17d)wa_1z_2+32wa_3z_3))\rho+ \\
& 8(32u_5wa+(154+17d)u_4wa_1)z_1\rho^2+8u_3(8wa(15z_1+6z_2\rho+4z_3\rho^2)+ \\
& \rho((130+17d)wa_2z_1\rho+wa_1((598+68d)z_1+(142+17d)z_2\rho))))S[6,6+d]) - \\
& \frac{1}{3d(2+d)} (4\rho(3(3u_2((178+17d)wa_1^2+64wa_2wa_2)+z_1((178+17d)wa_1z_1+64wa_2z_2))+ \\
& 2(640u_4wa_1wa_1+6u_2(17(10+d)wa_1wa_2+32wa_3wa_3)+ \\
& z_1(17(10+d)wa_2z_1+364wa_1z_2+34dwa_1z_2+64wa_3z_3))\rho+ \\
& 4wa_1(64u_5wa+(194+17d)u_4wa_1)\rho^2+8u_3(wa_1\rho((376+34d)wa_1+ \\
& 17(10+d)wa_2\rho)+8wa(15wa_1+6wa_2\rho+4wa_3\rho^2)))S[6,8+d]) - \\
& \frac{1}{3d(2+d)} (4\rho(64wa_1z_1(3wa_2+2wa_3\rho)+wa_1^2((642+51d)z_1+2(222+17d)z_2\rho)+ \\
& 4wa_1(48wa_2z_2+((210+17d)wa_2z_1+32wa_3z_3)\rho))S[6,10+d]) - \\
& \frac{4wa_1\rho((250+17d)wa_1^2+2(250+17d)wa_1wa_2\rho+64wa(3wa_2+2wa_3\rho))S[6,12+d]}{3d(2+d)} + \\
& \frac{176\rho^2(3u_2+2u_3\rho)^4S[7,d]}{3d} + \\
& \frac{704(4+d)z_1\rho^2(3u_2+2u_3\rho)^3S[7,2+d]}{3d(2+d)} + \\
& \frac{1}{3d(2+d)} \\
& (32\rho(3u_2+2u_3\rho)^2 \\
& (11(6+d)\rho(6u_2wa_1+3z_1^2+4u_3wa_1\rho)+72wa(3u_2+4\rho(3u_3+u_4\rho))) \\
& S[7,4+d]) + \\
& \frac{1}{3d(2+d)} (64\rho(3u_2+2u_3\rho)(11(8+d)z_1\rho(9u_2wa_1+z_1^2+6u_3wa_1\rho)+ \\
& 36wa(u_2(9z_1+6z_2\rho)+2\rho(13u_3z_1+4u_4z_1\rho+2u_3z_2\rho)))S[7,6+d]) + \\
& \frac{1}{3d(2+d)} (16\rho(11(10+d)\rho(54u_2^2wa_1^2+z_1^4+24u_3wa_1z_1^2\rho+24u_3^2wa_1^2\rho^2+ \\
& 36u_2wa_1(z_1^2+2u_3wa_1\rho))+144wa(9u_2^2(3wa_1+2wa_2\rho)+ \\
& 4\rho(4u_3z_1^2+(13u_3^2wa_1+u_4z_1^2+2u_3z_1z_2)\rho+2u_3(2u_4wa_1+u_3wa_2)\rho^2)+ \\
& 3u_2(3z_1^2+4z_1z_2\rho+8\rho(4u_3wa_1+u_4wa_1\rho+u_3wa_2\rho))))S[7,8+d]) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3d(2+d)} (64\rho(11(12+d)wa_1z_1\rho(9u_2wa_1+z_1^2+6u_3wa_1\rho)+ \\
& \quad 36wa(z_1^3+2z_1(16u_3wa_1+z_1z_2)\rho+8(u_4wa_1z_1+u_3wa_2z_1+u_3wa_1z_2)\rho^2+ \\
& \quad 6u_2(3wa_1z_1+2wa_2z_1\rho+2wa_1z_2\rho)))S[7,10+d]) + \\
& \frac{1}{3d(2+d)} (32\rho(11(14+d)wa_1^2\rho(6u_2wa_1+3z_1^2+4u_3wa_1\rho)+ \\
& \quad 72wa(3wa_1z_1^2+2(8u_3wa_1^2+wa_2z_1^2+2wa_1z_1z_2)\rho+ \\
& \quad 4wa_1(u_4wa_1+2u_3wa_2)\rho^2+3u_2wa_1(3wa_1+4wa_2\rho)))S[7,12+d]) + \\
& \frac{64wa_1\rho(11(16+d)wa_1^2z_1\rho+36wa(3wa_1z_1+4wa_2z_1\rho+2wa_1z_2\rho))S[7,14+d]}{3d(2+d)} + \\
& \frac{16wa_1^2\rho(11(18+d)wa_1^2\rho+144wa(wa_1+2wa_2\rho))S[7,16+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{6272wa\rho^2(3u_2+2u_3\rho)^4S[8,4+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{25088wa_1z_1\rho^2(3u_2+2u_3\rho)^3S[8,6+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{12544wa\rho^2(3u_2+2u_3\rho)^2(6u_2wa_1+3z_1^2+4u_3wa_1\rho)S[8,8+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{25088wa_1z_1\rho^2(3u_2+2u_3\rho)(9u_2wa_1+z_1^2+6u_3wa_1\rho)S[8,10+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{1}{3d(2+d)} \\
& (6272wa\rho^2 \\
& \quad (54u_2^2wa_1^2+z_1^4+24u_3wa_1z_1^2\rho+24u_3^2wa_1^2\rho^2+36u_2wa_1(z_1^2+2u_3wa_1\rho)) \\
& \quad S[8,12+d]) - \\
& \frac{25088wa_1z_1\rho^2(9u_2wa_1+z_1^2+6u_3wa_1\rho)S[8,14+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{12544wa_1^2\rho^2(6u_2wa_1+3z_1^2+4u_3wa_1\rho)S[8,16+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{25088wa_1^3z_1\rho^2S[8,18+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{6272wa_1^4\rho^2S[8,20+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{32\rho(3u_2+2u_3\rho)(15u_3+4\rho(5u_4+u_5\rho))T[6,2+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{32\rho(9u_2z_2+20u_4z_1\rho+6u_2z_3\rho+4u_5z_1\rho^2+u_3(15z_1+6z_2\rho+4z_3\rho^2))T[6,4+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{1}{3d(2+d)} \\
& (32\rho(9u_2wa_2+3z_1z_2+2(10u_4wa_1+3u_2wa_3+z_1z_3)\rho+ \\
& \quad 4u_5wa_1\rho^2+u_3(15wa_1+6wa_2\rho+4wa_3\rho^2))T[6,6+d]) - \\
& \frac{32\rho(3wa_2z_1+3wa_1z_2+2(wa_3z_1+wa_1z_3)\rho)T[6,8+d]}{3d(2+d)} - \\
& \frac{32wa_1\rho(3wa_2+2wa_3\rho)T[6,10+d]}{3d(2+d)} + \\
& \frac{96\rho(3u_2+2u_3\rho)^2(3u_2+4\rho(3u_3+u_4\rho))T[7,2+d]}{d(2+d)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{96 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (u_2 (9 z_1 + 6 z_2 \rho) + 2 \rho (13 u_3 z_1 + 4 u_4 z_1 \rho + 2 u_3 z_2 \rho)) T[7, 4 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} \\
& (96 \rho (9 u_2^2 (3 w_{a1} + 2 w_{a2} \rho) + \\
& 4 \rho (4 u_3 z_1^2 + (13 u_3^2 w_{a1} + u_4 z_1^2 + 2 u_3 z_1 z_2) \rho + 2 u_3 (2 u_4 w_{a1} + u_3 w_{a2}) \rho^2) + \\
& 3 u_2 (3 z_1^2 + 4 z_1 z_2 \rho + 8 \rho (4 u_3 w_{a1} + u_4 w_{a1} \rho + u_3 w_{a2} \rho))) T[7, 6 + d]) + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (96 \rho (z_1^3 + 2 z_1 (16 u_3 w_{a1} + z_1 z_2) \rho + 8 (u_4 w_{a1} z_1 + u_3 w_{a2} z_1 + u_3 w_{a1} z_2) \rho^2 + \\
& 6 u_2 (3 w_{a1} z_1 + 2 w_{a2} z_1 \rho + 2 w_{a1} z_2 \rho)) T[7, 8 + d]) + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (96 \rho (3 w_{a1} z_1^2 + 2 (8 u_3 w_{a1}^2 + w_{a2} z_1^2 + 2 w_{a1} z_1 z_2) \rho + \\
& 4 w_{a1} (u_4 w_{a1} + 2 u_3 w_{a2}) \rho^2 + 3 u_2 w_{a1} (3 w_{a1} + 4 w_{a2} \rho)) T[7, 10 + d]) + \\
& \frac{96 w_{a1} \rho (3 w_{a1} z_1 + 4 w_{a2} z_1 \rho + 2 w_{a1} z_2 \rho) T[7, 12 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{96 w_{a1}^2 \rho (w_{a1} + 2 w_{a2} \rho) T[7, 14 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{784 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^4 T[8, 2 + d]}{3 d (2 + d)} - \\
& \frac{3136 z_1 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^3 T[8, 4 + d]}{3 d (2 + d)} - \\
& \frac{1568 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 (6 u_2 w_{a1} + 3 z_1^2 + 4 u_3 w_{a1} \rho) T[8, 6 + d]}{3 d (2 + d)} - \\
& \frac{3136 z_1 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (9 u_2 w_{a1} + z_1^2 + 6 u_3 w_{a1} \rho) T[8, 8 + d]}{3 d (2 + d)} - \\
& \frac{1}{3 d (2 + d)} \\
& (784 \rho^2 \\
& (54 u_2^2 w_{a1}^2 + z_1^4 + 24 u_3 w_{a1} z_1^2 \rho + 24 u_3^2 w_{a1}^2 \rho^2 + 36 u_2 w_{a1} (z_1^2 + 2 u_3 w_{a1} \rho)) \\
& T[8, 10 + d]) - \\
& \frac{3136 w_{a1} z_1 \rho^2 (9 u_2 w_{a1} + z_1^2 + 6 u_3 w_{a1} \rho) T[8, 12 + d]}{3 d (2 + d)} - \\
& \frac{1568 w_{a1}^2 \rho^2 (6 u_2 w_{a1} + 3 z_1^2 + 4 u_3 w_{a1} \rho) T[8, 14 + d]}{3 d (2 + d)} - \\
& \frac{3136 w_{a1}^3 z_1 \rho^2 T[8, 16 + d]}{3 d (2 + d)} - \\
& \frac{784 w_{a1}^4 \rho^2 T[8, 18 + d]}{3 d (2 + d)} + \\
& \frac{4 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (15 u_3 + 4 \rho (5 u_4 + u_5 \rho)) U[4, 2 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{4 \rho (9 u_2 z_2 + 20 u_4 z_1 \rho + 6 u_2 z_3 \rho + 4 u_5 z_1 \rho^2 + u_3 (15 z_1 + 6 z_2 \rho + 4 z_3 \rho^2)) U[4, 4 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} \\
& (4 \rho (9 u_2 w_{a2} + 3 z_1 z_2 + 2 (10 u_4 w_{a1} + 3 u_2 w_{a3} + z_1 z_3) \rho + \\
& 4 u_5 w_{a1} \rho^2 + u_3 (15 w_{a1} + 6 w_{a2} \rho + 4 w_{a3} \rho^2)) U[4, 6 + d]) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4 \rho (3 wa_2 z_1 + 3 wa_1 z_2 + 2 (wa_3 z_1 + wa_1 z_3) \rho) U[4, 8 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{4 wa_1 \rho (3 wa_2 + 2 wa_3 \rho) U[4, 10 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{24 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 (3 u_2 + 4 \rho (3 u_3 + u_4 \rho)) U[5, 2 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{24 \rho (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (u_2 (9 z_1 + 6 z_2 \rho) + 2 \rho (13 u_3 z_1 + 4 u_4 z_1 \rho + 2 u_3 z_2 \rho)) U[5, 4 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{1}{d (2 + d)} \\
& (24 \rho (9 u_2^2 (3 wa_1 + 2 wa_2 \rho) + \\
& 4 \rho (4 u_3 z_1^2 + (13 u_3^2 wa_1 + u_4 z_1^2 + 2 u_3 z_1 z_2) \rho + 2 u_3 (2 u_4 wa_1 + u_3 wa_2) \rho^2) + \\
& 3 u_2 (3 z_1^2 + 4 z_1 z_2 \rho + 8 \rho (4 u_3 wa_1 + u_4 wa_1 \rho + u_3 wa_2 \rho))) U[5, 6 + d]) - \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (24 \rho (z_1^3 + 2 z_1 (16 u_3 wa_1 + z_1 z_2) \rho + 8 (u_4 wa_1 z_1 + u_3 wa_2 z_1 + u_3 wa_1 z_2) \rho^2 + \\
& 6 u_2 (3 wa_1 z_1 + 2 wa_2 z_1 \rho + 2 wa_1 z_2 \rho)) U[5, 8 + d]) - \\
& \frac{1}{d (2 + d)} (24 \rho (3 wa_1 z_1^2 + 2 (8 u_3 wa_1^2 + wa_2 z_1^2 + 2 wa_1 z_1 z_2) \rho + \\
& 4 wa_1 (u_4 wa_1 + 2 u_3 wa_2) \rho^2 + 3 u_2 wa_1 (3 wa_1 + 4 wa_2 \rho)) U[5, 10 + d]) - \\
& \frac{24 wa_1 \rho (3 wa_1 z_1 + 4 wa_2 z_1 \rho + 2 wa_1 z_2 \rho) U[5, 12 + d]}{d (2 + d)} - \\
& \frac{24 wa_1^2 \rho (wa_1 + 2 wa_2 \rho) U[5, 14 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{48 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^4 U[6, 2 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{192 z_1 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^3 U[6, 4 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{96 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho)^2 (6 u_2 wa_1 + 3 z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) U[6, 6 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{192 z_1 \rho^2 (3 u_2 + 2 u_3 \rho) (9 u_2 wa_1 + z_1^2 + 6 u_3 wa_1 \rho) U[6, 8 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{1}{d (2 + d)} \\
& (48 \rho^2 (54 u_2^2 wa_1^2 + z_1^4 + 24 u_3 wa_1 z_1^2 \rho + 24 u_3^2 wa_1^2 \rho^2 + 36 u_2 wa_1 (z_1^2 + 2 u_3 wa_1 \rho)) \\
& U[6, 10 + d]) + \\
& \frac{192 wa_1 z_1 \rho^2 (9 u_2 wa_1 + z_1^2 + 6 u_3 wa_1 \rho) U[6, 12 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{96 wa_1^2 \rho^2 (6 u_2 wa_1 + 3 z_1^2 + 4 u_3 wa_1 \rho) U[6, 14 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \frac{192 wa_1^3 z_1 \rho^2 U[6, 16 + d]}{d (2 + d)} + \\
& \left. \frac{48 wa_1^4 \rho^2 U[6, 18 + d]}{d (2 + d)} \right) v[d]
\end{aligned}$$

Annexe D

Compléments à la dérivation d'une théorie des champs

Cette annexe apporte une série de compléments au chapitre VI. Dans le premier, nous énonçons une forme générale des conditions sur la force F et le bruit η de l'équation de Langevin (VI.2) pour que la dynamique satisfasse les relations de bilan détaillé. Au cours du second, nous rappelons la définition de la discrétisation de Ito des équations de Langevin et démontrons les différentes implications évoquées au cours du chapitre VI, comme la valeur unité du jacobien dans (VI.9) ou la nullité de la contribution du produit des deux champs $\hat{\phi}(t)\phi(t)$ évalués au même instant t dans le calcul d'une valeur moyenne. Enfin, dans le troisième, nous définissons les états cohérents associés à un réseau de sites peuplés chacun de n_i particules et dérivons une relation de fermeture sur ces états cohérents.

D.1 Relations de bilan détaillé

Nous précisons dans cette section la notion de réversibilité pour les forces déterministes de l'équation de Langevin et les conditions générales pour qu'un système évolue vers son état d'équilibre. On considère des variables stochastiques $\phi_i(t)$ (où l'indice i est discret ou continu, les symboles \sum représentant respectivement des sommations ou des intégrations). Sans restreindre la généralité du propos, ces variables sont supposées paires ou impaires sous un renversement du temps, soit :

$$\phi_i \rightarrow \bar{\phi}_i = \epsilon_i \phi_i, \quad \epsilon_i = \pm 1, \quad \text{lorsque } t \rightarrow -t. \quad (\text{D.1})$$

La dynamique des variables ϕ_i est gouvernée par l'équation de Langevin :

$$\partial_t \phi_i(t) = F_i[\phi] + \eta_i(t) \quad (\text{D.2})$$

$$\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = 2 D_{ij}[\phi] \delta(t - t'), \quad (\text{D.3})$$

où F_i représente l'ensemble des forces déterministes agissant sur ϕ et η est un bruit gaussien modélisant le caractère stochastique des champs ϕ . Cette équation dérive de

l'équation de Fokker-Planck associée pour la distribution de probabilités :

$$\partial_t \mathcal{P}(\phi; t) = - \sum_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} [F_i[\phi] \mathcal{P}(\phi; t)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial \phi_i \partial \phi_j} [D_{ij}[\phi] \mathcal{P}(\phi; t)]. \quad (\text{D.4})$$

Les relations de bilan détaillé pour un processus markovien sont les conditions pour que, dans l'état stationnaire, chaque transition possible s'équilibre avec la transition renversée dans le temps. Cette condition s'exprime comme une contrainte sur les probabilités de transition (de façon générale dépendante du temps) :

$$\mathcal{P}(\phi; \tau|\phi'; 0) \mathcal{P}_s(\phi') = \mathcal{P}(\bar{\phi}'; \tau|\bar{\phi}; 0) \mathcal{P}_s(\phi), \quad (\text{D.5})$$

où \mathcal{P}_s désigne la distribution de probabilités de l'état stationnaire. Nous n'envisageons, au cours du chapitre VI, que des processus homogènes, c'est-à-dire dont les probabilités de transition ne dépendent pas du temps. Ainsi, réexprimons la relation (D.5) pour de tels processus et plus spécifiquement pour l'équation maîtresse (VI.20) de la section VI.2.1. Les relations de bilan détaillé s'écrivent alors comme une contrainte sur les taux de transition $R_{\alpha \rightarrow \beta} \equiv \mathcal{P}_h(\phi|\phi')$ — où l'indice h signifie homogène — soit :

$$\mathcal{P}_h(\phi'|\phi) \mathcal{P}_s(\phi) = \mathcal{P}_h(\bar{\phi}|\bar{\phi}') \mathcal{P}_s(\phi'). \quad (\text{D.6})$$

Pour l'équation de Fokker-Planck (D.4) et par conséquent pour l'équation de Langevin, les relations de bilan détaillé (D.6) engendrent [71] les contraintes suivantes sur la force F et le corrélateur du bruit D :

$$\epsilon_i F_i[\bar{\phi}] \mathcal{P}_s(\phi) = -F_i[\phi] \mathcal{P}_s(\phi) + \sum_j \frac{\partial}{\partial \phi_j} [D_{ij}[\phi] \mathcal{P}_s(\phi)] \quad (\text{D.7})$$

$$\epsilon_i \epsilon_j D_{ij}[\bar{\phi}] = D_{ij}[\phi]. \quad (\text{D.8})$$

On peut dériver une formulation plus explicite de la contrainte (D.7) [177] en scindant la force F_i en une partie irréversible (de type relaxationnelle) et une partie réversible, définie chacune par leur comportement sous un renversement du temps, selon :

$$F_i^{rev}[\phi] = \frac{1}{2} (F_i[\phi] - \epsilon_i F_i[\bar{\phi}]) \quad (\text{D.9})$$

$$F_i^{irr}[\phi] = \frac{1}{2} (F_i[\phi] + \epsilon_i F_i[\bar{\phi}]). \quad (\text{D.10})$$

On exprime, pour commencer, la probabilité stationnaire $\mathcal{P}_s(\phi)$ comme l'exponentielle d'un "potentiel" V :

$$\mathcal{P}_s(\phi) = e^{-V[\phi]}. \quad (\text{D.11})$$

Avec ces définitions, la contrainte (D.7) se transpose en deux conditions [177, 178] :

$$\sum_i \left[\frac{\partial}{\partial \phi_i} F_i^{rev}[\phi] - F_i^{rev}[\phi] \frac{\partial V[\phi]}{\partial \phi_i} \right] = 0 \quad (\text{D.12})$$

$$F_i^{irr}[\phi] - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial \phi_j} D_{ij}[\phi] = -\frac{1}{2} \sum_i D_{ij}[\phi] \frac{\partial V[\phi]}{\partial \phi_j}. \quad (\text{D.13})$$

La condition (D.12) apparaît simplement [71] comme l'équation de Fokker-Planck pour la probabilité stationnaire \mathcal{P}_s . La condition (D.13) fournit une équation pour le potentiel V . On peut montrer [177, 71] que cette équation n'admet de solution que si les composantes de la force F et la matrice de diffusion D satisfont la "condition potentielle" [177] qui s'énonce :

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_i}{\partial \phi_j} = \frac{\partial \mathcal{Z}_j}{\partial \phi_i} \quad \text{où} \quad \mathcal{Z}_i = \sum_k D_{ik}^{-1}[\phi] \left[2 F_k^{irr}[\phi] - \sum_j \frac{\partial}{\partial \phi_j} D_{kj}[\phi] \right]. \quad (\text{D.14})$$

Si cette condition est vérifiée, alors la distribution de probabilités de l'état stationnaire est donnée par :

$$\mathcal{P}_s[\phi] = e^{-V[\phi]} = e^{\int \mathcal{D}\phi' \mathcal{Z}[\phi']}. \quad (\text{D.15})$$

Dans le cas d'une matrice de diffusion réduite à un simple coefficient Γ , comme au paragraphe VI.1.1, la condition pour qu'un système, décrit par les équations de Langevin (D.2) et (D.3), relaxe à $t \rightarrow \infty$ vers un état stationnaire dont la distribution de probabilités soit la distribution canonique d'équilibre $\mathcal{P}_s^{eq} \propto \exp(-\mathcal{H}/k_B T)$, se formule très simplement. Que l'état stationnaire corresponde à l'état d'équilibre requiert tout d'abord que la partie dissipative (le bruit) de l'équation de Langevin soit contrainte par la relation d'Einstein : $\Gamma = D k_B T$. Pour que les relations de bilan détaillé soient vérifiées, il suffit alors, en combinant (D.12), (D.13) et (D.14), que le courant réversible stationnaire soit à divergence nulle, *i.e.* :

$$\int d^d x \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left(F^{rev}[\phi] e^{-\mathcal{H}[\phi]/k_B T} \right) = 0. \quad (\text{D.16})$$

Ce sont les deux conditions énoncées dans la section VI.1.1.

Ajoutons que les relations de bilan détaillé engendre l'existence d'un théorème de fluctuation-dissipation, reliant linéairement la fonction de corrélation à deux points à la fonction de réponse dynamique, pour au moins trois classes de modèles [178] :

- (A) les processus irréversibles ($F_i^{rev}[\phi] = 0$);
- (B) les processus dont la composante irréversible de la force est linéaire en champ ($F_i^{irr}[\phi] = \sum_k U_{ik} \phi_k$);
- (C) les systèmes conservatifs à l'équilibre thermique.

D.2 Discrétisation de Ito

Nous détaillons dans cette section l'obtention de l'équation (VI.9), qui précède l'introduction du champ auxiliaire $\tilde{\phi}$ dans la formulation de la fonctionnelle de réponse de Janssen-De Dominicis. En effet, cette équation implique l'intégration sur le champ ϕ d'une fonction de Dirac dont l'argument $\mathcal{C}[\phi]$ est *non linéaire* en ϕ , ce qui engendre $\int \mathcal{D}\phi \delta(\mathcal{C}[\phi]) \neq 1$ (sauf si $|\delta\mathcal{C}[\phi]/\delta\phi| = 1$). Nous montrons ici qu'à condition de recourir

à la représentation de Ito des équations de Langevin, le déterminant devient unité et l'égalité précédente est restaurée.

Nous considérons des champs ϕ qui suivent la dynamique de Langevin :

$$\mathcal{C}[\phi] = \partial_t \phi(x, t) - F[\phi](x, t) - \eta(x, t) = 0. \quad (\text{D.17})$$

L'idée est de sélectionner, dans l'espace fonctionnel des champs ϕ , ceux qui sont solutions de l'équation de Langevin (D.17), à travers des fonctions de Dirac imposées en tout point (x, t) de l'espace, soit :

$$1 = \int \mathcal{D}\phi \prod_{(x,t)} \delta(\phi(x, t) - \phi_{sol}(x, t)|_\eta). \quad (\text{D.18})$$

Cette contrainte s'exprime de façon équivalente en terme de la fonctionnelle $\mathcal{C}[\phi]$ dont les champs $\phi_{sol}|_\eta$ sont racines, soit :

$$1 = \int \mathcal{D}\phi \prod_{(x,t)} \delta(\mathcal{C}[\phi](x, t)) \left| \delta\mathcal{C}[\phi]/\delta\phi \right|. \quad (\text{D.19})$$

Il s'agit donc de calculer le jacobien fonctionnel $\left| \delta\mathcal{C}[\phi]/\delta\phi \right|$. Pour cela, le temps est discrétisé ($t_i = i \Delta t$) de manière à transformer l'équation différentielle (D.17) en une équation aux différences finies. On définit alors les variables discrètes en temps $\phi_i \equiv \phi(t_i)$ et $\eta_i \equiv \eta(t_i)$ (où la dépendance spatiale est implicite). La force $F[\phi]$ dans (D.17) peut être évaluée à un instant quelconque de l'intervalle de temps $[t_{i-1}, t_i]$. On choisit pour le moment de considérer une contribution mixte des deux instants aux bornes de l'intervalle, partagée par un paramètre arbitraire $0 < \tau < 1$. L'équation (D.17) s'écrit alors :

$$\mathcal{C}[\phi_i] = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta t} - \tau F_i - (1 - \tau) F_{i-1} - \eta_i = 0. \quad (\text{D.20})$$

La matrice jacobienne $\left[\delta\mathcal{C}[\phi_i]/\delta\phi_k \right]$ est donc triangulaire inférieure, avec sur sa diagonale les termes $\left(\Delta t^{-1} - \tau \delta F_i/\delta\phi_i \right)$ et sur sa sous-diagonale les termes $\left(-\Delta t^{-1} - (1 - \tau) \delta F_i/\delta\phi_i \right)$, tous ses autres éléments étant nuls. Le déterminant de cette matrice est simplement le produit de ses termes diagonaux, soit :

$$\left| \delta\mathcal{C}[\phi]/\delta\phi \right| = \frac{1}{(\Delta t)^N} \prod_i \left(1 - \tau \Delta t \frac{\delta F_i}{\delta\phi_i} \right) \approx_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^N} \exp \left(-\tau \sum_i \Delta t \frac{\delta F_i}{\delta\phi_i} \right). \quad (\text{D.21})$$

Repassons alors à la variable temporelle continue. Le facteur $1/(\Delta t)^N$ est absorbé dans la mesure fonctionnelle $\mathcal{D}\phi(t)$. Le déterminant (D.21) apporte une contribution à l'expression de l'identité (D.18), et donc à (VI.9). Il s'ensuit que $\left(-\tau \sum_i \Delta t \frac{\delta F_i}{\delta\phi_i} \right)$ s'ajoute linéairement à l'argument de l'exponentielle de (VI.11), qui devient, dans la limite continue en temps :

$$\int d^d x dt \left[\tilde{\phi} \left(\partial_t \phi - F[\phi] - \eta \right) + \tau \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi} \right]. \quad (\text{D.22})$$

Cette contribution se propage alors jusque dans la fonctionnelle de Janssen-De Dominicis (VI.15).

La représentation de Ito des équations de Langevin correspond au choix $\tau = 0$. Pour ce choix, le déterminant devient unité, sa contribution dans (D.22) disparaît et l'égalité (VI.9) devient exacte.

En outre, le paramètre de césure τ reflète la valeur en zéro de la fonction marche de Heaviside $\theta(0) = \tau$ [159, 148]. Or les propagateurs $\langle \psi^*(t)\psi(t') \rangle$ en théorie de perturbation — intervenant dans les graphes de Feynman — s'avèrent proportionnels à la fonction $\theta(t - t')$. Ainsi, imposer $\theta(0) = 0$ revient à supprimer les contributions des graphes contenant des boucles qui se referment sur elle-mêmes ($t = t'$), ce qui assure la causalité.

Ceci justifie de négliger dans (VI.52) le terme $\psi_i(0)\psi_i^*(0)$, qui n'engendre, si $\tau = 0$, que des contributions nulles. Notons que bien sûr, cette propriété reste *in fine* vérifiée quel que soit le choix de τ . La causalité provient alors de la compensation exacte entre les contributions émanant du terme supplémentaire lié au jacobien dans (D.22) et les contributions des boucles fermées [148].

D.3 Etats cohérents

Nous établissons dans cette section la forme des états cohérents d'une assemblée d'oscillateurs harmoniques attachés à chaque site i d'un réseau et dérivons l'expression de la relation de fermeture sur ces états cohérents.

Avant cela, démontrons tout d'abord la relation (VI.35). La valeur moyenne d'une observable est donnée, selon (VI.33), par :

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \sum_{\{n_i\}} \mathcal{P}(\{n_i\}; t) \mathcal{O}(\{n_i\}). \quad (\text{D.23})$$

D'une part, d'après la définition (VI.28) du vecteur d'état $\psi(t)$ du système, la probabilité $\mathcal{P}(\{n_i\}; t)$ d'une configuration $\{n_i\}$ s'exprime comme le scalaire :

$$\mathcal{P}(\{n_i\}; t) = \prod_i \frac{1}{n_i!} \langle \{n_i\} | \psi(t) \rangle. \quad (\text{D.24})$$

D'autre part, d'après la définition (explicitée au paragraphe VI.2.2) de l'opérateur diagonal $\tilde{\mathcal{O}}$, il vient :

$$\langle \{m_i\} | \tilde{\mathcal{O}} | \{n_i\} \rangle = \mathcal{O}(\{n_i\}) \langle \{m_i\} | \{n_i\} \rangle = \mathcal{O}(\{n_i\}) \prod_i m_i! \delta_{m_i n_i}, \quad (\text{D.25})$$

et, en sommant cette égalité sur les configurations $\{m_i\}$, on déduit :

$$\mathcal{O}(\{n_i\}) = \sum_{\{m_i\}} \prod_i \frac{1}{m_i!} \langle \{m_i\} | \tilde{\mathcal{O}} | \{n_i\} \rangle. \quad (\text{D.26})$$

Finalement, en insérant les relations (D.24) et (D.26) dans la définition (D.23), on obtient la relation souhaitée :

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \prod_i \sum_{\{m_i\}, \{n_i\}} \frac{1}{m_i!} \langle \{m_i\} | \tilde{\mathcal{O}} | \{n_i\} \rangle \frac{1}{n_i!} \langle \{n_i\} | \psi(t) \rangle \quad (\text{D.27})$$

$$= \prod_i \sum_{\{m_i\}} \frac{1}{m_i!} \langle \{m_i\} | \tilde{\mathcal{O}} | \psi(t) \rangle \quad (\text{D.28})$$

$$= \langle \cdot | \tilde{\mathcal{O}} | \psi(t) \rangle, \quad (\text{D.29})$$

la dernière égalité découlant de la définition (VI.34) de l'état de projection.

Considérons à présent un oscillateur harmonique associé à un site i . Ses états cohérents regroupent l'ensemble continu des états propres de l'opérateur d'annihilation a_i . On s'intéresse aux états cohérents, étiquetés par un nombre complexe ϕ_i , de la forme :

$$|\phi_i\rangle = \mathcal{N} e^{\phi_i a_i^\dagger} |0\rangle. \quad (\text{D.30})$$

Pour fixer la normalisation \mathcal{N} d'un tel état, on choisit la convention $\langle \phi_i | \phi_i \rangle = 1$, qui impose $\mathcal{N} = \exp(-|\phi_i|^2/2)$. Alors l'action de l'opérateur d'annihilation sur l'état cohérent s'écrit :

$$a_i |\phi_i\rangle = \mathcal{N} \sum_{n_i=0}^{\infty} a_i \frac{(\phi_i a_i^\dagger)^{n_i}}{n_i!} |n_i\rangle = \mathcal{N} \sum_{n_i=1}^{\infty} \phi_i \frac{(\phi_i)^{n_i-1}}{(n_i-1)!} |n_i-1\rangle = \phi_i |\phi_i\rangle, \quad (\text{D.31})$$

et donc le nombre ϕ_i s'identifie à la valeur propre de a_i pour l'état cohérent $|\phi_i\rangle$.

Dérivons une relation de fermeture sur les états cohérents $|\phi_i\rangle$ ainsi définis. Pour cela, partons des états propres d'énergie $|n_i\rangle$ de l'oscillateur qui forment une base complète d'états, vérifiant la relation de fermeture :

$$\hat{1} = \sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} |n_i\rangle \langle n_i| = \sum_{n_i, n_j} \frac{1}{n_i!} |n_i\rangle \langle n_j| \delta_{n_i n_j}. \quad (\text{D.32})$$

Tout d'abord, établissons une représentation intégrale du symbole de Kronecker en remarquant que :

$$\int dx x^n \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \delta(x) = \int dx n(n-1)\dots(n-m) x^{n-m} \delta(x) = n! \delta_{nm}, \quad (\text{D.33})$$

qui s'écrit en transformant de Fourier la fonction de Dirac :

$$\delta_{nm} = \frac{1}{n!} \int dx x^n \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \int dy \frac{1}{2\pi} e^{-i x y} = \frac{1}{2\pi n!} \int dx dy x^n (i y)^m e^{-i x y}. \quad (\text{D.34})$$

Finalement, on obtient la représentation intégrale souhaitée en introduisant le complexe $z = x + i y$, de sorte que (D.34) devient :

$$\delta_{nm} = \frac{1}{\pi n!} \int d^2 z e^{-|z|^2} z^m (z^*)^n \quad \text{où} \quad d^2 z \equiv d\Re(z) d\Im(z). \quad (\text{D.35})$$

En remplaçant alors, dans (D.32), le symbole de Kronecker par son expression (D.35), il vient :

$$\hat{1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n_i n_j} \frac{1}{n_i!} \frac{1}{n_j!} \int d^2 \phi_i e^{-|\phi_i|^2} (\phi_i^*)^{n_j} \phi_i^{n_i} |n_i\rangle \langle n_j| \quad (\text{D.36})$$

$$= \frac{1}{\pi} \int d^2 \phi_i \left(\sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} e^{-\frac{|\phi_i|^2}{2}} \phi_i^{n_i} |n_i\rangle \right) \left(\sum_{n_j} \frac{1}{n_j!} e^{-\frac{|\phi_i|^2}{2}} (\phi_i^*)^{n_j} \langle n_j| \right) \quad (\text{D.37})$$

$$= \frac{1}{\pi} \int d^2 \phi_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|. \quad (\text{D.38})$$

Etendons la définition des états cohérents et la relation de fermeture (D.38) à l'assemblée des N oscillateurs. Un état cohérent, dans l'espace de Fock associé au réseau, correspond au produit direct des états cohérents $|\phi_i\rangle$ définis par (D.30) en chaque site :

$$|\{\phi_i\}\rangle \equiv \otimes_i |\phi_i\rangle = \prod_i e^{-\frac{|\phi_i|^2}{2} + \phi_i a_i^\dagger} |\{0\}\rangle. \quad (\text{D.39})$$

Les états cohérents en différents sites du réseau sont orthogonaux. On en déduit donc le recouvrement entre deux états cohérents de valeurs propres $\{\phi_i\} = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ et $\{\phi'_k\} = (\phi'_1, \dots, \phi'_N)$, qui s'écrit :

$$\langle \{\phi_i\} | \{\phi'_k\} \rangle = \prod_i \langle \phi_i | \phi'_i \rangle = \prod_i \exp \left(-\frac{|\phi_i|^2}{2} - \frac{|\phi'_i|^2}{2} + \phi_i^* \phi'_i \right). \quad (\text{D.40})$$

Finalement, la relation de fermeture (D.38) se généralise trivialement aux états cohérents des N oscillateurs sous la forme :

$$\hat{1} = \frac{1}{\pi} \int d^2 \{\phi_i\} |\{\phi_i\}\rangle \langle \{\phi_i\}| \quad \text{où} \quad d^2 \{\phi_i\} \equiv \prod_i d\phi_i d\phi_i^*. \quad (\text{D.41})$$

Annexe E

Equations de flot pour les processus de réaction-diffusion

Nous explicitons, dans cette annexe, toutes les notations et conventions choisies au cours du chapitre VII et dérivons les relations importantes qui sous-tendent les calculs du groupe de renormalisation non perturbatif menés dans ce chapitre. Ces relations sont établies pour un champ w_i quelconque — qui représente dans le chapitre VII les composantes du vecteur $\Psi_k = [\psi_k, \tilde{\psi}_k]$ de la théorie des champs dynamique, mais peut tout aussi bien s'assimiler au champ scalaire ψ_k du modèle d'Ising à l'équilibre.

Les variables d'espace et de temps — respectivement d'impulsion et de fréquence — sont réunies au sein d'une variable unique $\mathbf{x} \equiv (x, t)$ — et $\mathbf{q} \equiv (q, \omega)$. La somme des dimensions spatiale et temporelle est notée $D \equiv d + 1$.

E.1 Notations et conventions

Nous notons les éléments d'intégration, dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier respectivement, par :

$$\int_{\mathbf{x}} \equiv \int d^d x dt \quad (\text{E.1})$$

$$\int_{\mathbf{q}} \equiv \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{E.2})$$

Nous choisissons de définir les transformées de Fourier selon les conventions suivantes :

$$f(\mathbf{x}) \equiv f(x, t) = \int_{q, \omega} f(q, \omega) e^{i(qx - \omega t)} \equiv \int_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \quad (\text{E.3})$$

$$f(\mathbf{q}) \equiv f(q, \omega) = \int_{x, t} f(x, t) e^{-i(qx - \omega t)} \equiv \int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}, \quad (\text{E.4})$$

sans différencier, pour les fonctions non matricielles — comme typiquement les champs w — leur notation dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier. La fonction de Dirac dans l'espace des impulsions est définie comme la transformée de Fourier de 1, par la relation :

$$\int_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} = (2\pi)^D \delta^D(\mathbf{q}). \quad (\text{E.5})$$

Remarquons que ces définitions impliquent que le “volume” du système s’exprime :

$$\int d^d x dt \equiv \mathcal{V} = \int_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{0}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^D \delta^D(\mathbf{0}). \quad (\text{E.6})$$

Dans toute la suite, la sommation sur les indices répétés est implicite, soit par exemple $w_i w_i \equiv \sum_i w_i w_i$. Définissons la dérivation fonctionnelle et extrayons quelques relations entre les champs exprimés dans les différents espaces. Dans l’espace direct, la dérivation fonctionnelle est définie telle que :

$$\frac{\delta w_i(\mathbf{x})}{\delta w_j(\mathbf{y})} = \delta_{ij} \delta^D(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{E.7})$$

On en déduit les dérivées fonctionnelles mixtes :

$$\frac{\delta w_i(\mathbf{q})}{\delta w_j(\mathbf{y})} = \delta_{ij} e^{-i\mathbf{y}\cdot\mathbf{q}} \quad \text{et} \quad \frac{\delta w_i(\mathbf{x})}{\delta w_j(\mathbf{p})} = \delta_{ij} \frac{e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}}{(2\pi)^D}, \quad (\text{E.8})$$

par transformation de Fourier des champs $w_i(\mathbf{q})$ et $w_j(\mathbf{p})$ respectivement. Finalement, on déduit des deux relations (E.8) l’expression de la dérivation fonctionnelle dans l’espace de Fourier, en introduisant la dérivée composée selon :

$$\frac{\delta w_i(\mathbf{q})}{\delta w_j(\mathbf{p})} = \int_{\mathbf{z}} \frac{\delta w_i(\mathbf{q})}{\delta w_k(\mathbf{z})} \frac{\delta w_k(\mathbf{z})}{\delta w_j(\mathbf{p})} = \delta_{ij} \delta^D(\mathbf{q} - \mathbf{p}). \quad (\text{E.9})$$

Remarquons pour finir que, dans ces notations, la dérivation d’une fonctionnelle exprimée dans l’espace direct — par exemple le potentiel U_k — par rapport à un champ exprimé dans l’espace de Fourier s’écrit :

$$\frac{\delta}{\delta w_i(\mathbf{q})} U_k(w(\mathbf{x})) = \int_{\mathbf{x}} \frac{\delta w_j(\mathbf{x})}{\delta w_i(\mathbf{q})} \frac{\delta}{\delta w_j(\mathbf{x})} U_k(w(\mathbf{x})) = \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^D} \frac{\delta U_k}{\delta w_i}. \quad (\text{E.10})$$

Cette relation est utilisée, par exemple, pour dériver l’expression (VII.26) de $\bar{\Gamma}_k^{(2)}$.

E.1.1 Dérivation fonctionnelle dans l’espace de Fourier

Soit une fonctionnelle F . Nous adoptons les notations \hat{F} , \tilde{F} et \bar{F} pour repérer respectivement : une dérivée fonctionnelle de F dans l’espace direct — par exemple $\delta F/\delta w_i(\mathbf{x})$ —, la transformée de Fourier de \hat{F} — $\int_{\mathbf{x}} \delta F/\delta w_i(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{q}}$ — et la fonctionnelle obtenue par dérivation dans l’espace de Fourier de F — $\delta F/\delta w_i(\mathbf{p})$. Nous notons les dérivées fonctionnelles successives :

$$\frac{\delta^{(n)} F}{\delta w_1(\mathbf{x}_1) \dots \delta w_n(\mathbf{x}_n)} \equiv F_{1\dots n}^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (\text{E.11})$$

Nous allons établir la relation entre une dérivée fonctionnelle n -ième $\bar{F}^{(n)}$ de F par rapport à des champs dans l’espace de Fourier et la transformée de Fourier $\tilde{F}^{(n)}$ de la

dérivée fonctionnelle analogue $\widehat{F}^{(n)}$ de F dans l'espace direct. Considérons tout d'abord les dérivées secondes et explicitons la définition d'un élément de $\overline{F}^{(2)}$:

$$\overline{F}_{ij}^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \equiv \frac{\delta^2 F}{\delta w_i(\mathbf{q}) \delta w_j(\mathbf{q}')} = \int_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \frac{\delta w_k(\mathbf{x}) \delta w_l(\mathbf{x}')}{\delta w_i(\mathbf{q}) \delta w_j(\mathbf{q}')} \widehat{F}_{kl}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (\text{E.12})$$

En remplaçant dans (E.12) les dérivées fonctionnelles mixtes par leur expression (E.8), puis $\widehat{F}_{kl}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ par son expression en transformée de Fourier :

$$\widehat{F}_{kl}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \widetilde{F}_{kl}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') e^{i(\mathbf{p}\mathbf{x} + \mathbf{p}'\mathbf{x}')}, \quad (\text{E.13})$$

il vient :

$$\overline{F}_{ij}^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \int_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \int_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} (2\pi)^{-2D} e^{i(\mathbf{x}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \mathbf{x}'(\mathbf{q}' + \mathbf{p}'))} \delta_{ik} \delta_{jl} \widetilde{F}_{kl}^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (\text{E.14})$$

On effectue alors l'intégration sur \mathbf{x} , qui produit une fonction de Dirac $\delta^D(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ puis celle sur \mathbf{p} (et de même pour les variables primées), d'où il découle :

$$\overline{F}_{ij}^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = (2\pi)^{-2D} \widetilde{F}_{ij}^{(2)}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}'). \quad (\text{E.15})$$

Les impulsions et surtout les fréquences sont de signes opposés entre \overline{F} et \widetilde{F} . Cette relation s'étend à n dérivations, en procédant de façon analogue, selon :

$$\overline{F}_{1\dots n}^{(n)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = (2\pi)^{-nD} \widetilde{F}_{1\dots n}^{(n)}(-\mathbf{q}_1, \dots, -\mathbf{q}_n). \quad (\text{E.16})$$

E.1.2 Définition de $[\widetilde{\Gamma}_k^{(2)} + \widetilde{R}_k]^{-1}$

Nous cherchons à établir la relation définissant le propagateur $[\widetilde{\Gamma}_k^{(2)} + \widetilde{R}_k]^{-1}$ comme l'inverse de $\widetilde{\mathcal{W}}_k^{(2)}$ dans l'espace de Fourier. Par transformation de Fourier, l'équation (VII.15) du flot de Γ_k s'écrit :

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \partial_t \widehat{R}_k(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \widehat{\mathcal{W}}_k^{(2)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \text{Tr} \int_{\mathbf{q}} \partial_t \widetilde{R}_k(\mathbf{q}) \widetilde{\mathcal{W}}_k^{(2)}(-\mathbf{q}, \mathbf{q}). \quad (\text{E.17})$$

Dans l'espace direct, on obtient une définition de l'inverse de $\widehat{\mathcal{W}}_k^{(2)}$ en dérivant fonctionnellement deux fois par rapport aux champs Ψ_i (soit ici w_i) la relation (VII.7) de définition de la transformée de Legendre modifiée, soit :

$$\begin{aligned} \delta_{ij} \delta^D(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \int_{\mathbf{y}} \frac{\delta J_m(\mathbf{y})}{\delta w_i(\mathbf{x})} [\widehat{\mathcal{W}}_k^{(2)}]_{mj}(\mathbf{y}, \mathbf{x}') \\ &= \int_{\mathbf{y}} \left([\widehat{\Gamma}_k^{(2)}]_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + [\widehat{R}_k]_{im}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) [\widehat{\mathcal{W}}_k^{(2)}]_{mj}(\mathbf{y}, \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Procédons à la transformation de Fourier du membre de droite de la seconde égalité :

$$\begin{aligned} \delta_{ij} \delta^D(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \int_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} [\widetilde{\Gamma}_k^{(2)}]_{im}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}) [\widetilde{\mathcal{W}}_k^{(2)}]_{mj}(-\mathbf{q}, \mathbf{q}_3) e^{i(\mathbf{q}_2 \mathbf{x} + \mathbf{q}_3 \mathbf{x}')} + \\ &\quad \int_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_3} [R_k]_{im}(\mathbf{q}) [\widetilde{\mathcal{W}}_k^{(2)}]_{mj}(-\mathbf{q}, \mathbf{q}_3) e^{i(-\mathbf{q} \mathbf{x} + \mathbf{q}_3 \mathbf{x}')}. \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

En multipliant alors les deux membres par $\int_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} e^{-i(\mathbf{p}\mathbf{x} + \mathbf{p}'\mathbf{x}')}$ de sorte que les intégrations sur \mathbf{x} et \mathbf{x}' donnent des fonctions de Dirac, puis en effectuant les intégrations sur \mathbf{q}_3 et \mathbf{q}_2 , il vient :

$$\int_{\mathbf{q}} \left[[\tilde{\Gamma}_k^{(2)}]_{im}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + [\tilde{R}_k]_{im}(\mathbf{q}) \delta^D(\mathbf{q} + \mathbf{p}) \right] [\tilde{\mathcal{W}}_k^{(2)}]_{mj}(-\mathbf{q}, \mathbf{p}') = (2\pi)^D \delta_{ij} \delta^D(\mathbf{p} + \mathbf{p}'),$$

que l'on note synthétiquement :

$$\int_{\mathbf{q}} \left[\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k \right]_{im}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) [\tilde{\mathcal{W}}_k^{(2)}]_{mj}(-\mathbf{q}, \mathbf{p}') = (2\pi)^D \delta_{ij} \delta^D(\mathbf{p} + \mathbf{p}'). \quad (\text{E.20})$$

Cette relation définit le propagateur intervenant dans l'équation de flot de Γ_k dans l'espace de Fourier.

E.2 Equations de flot de D_k et Z_k

Nous allons établir les équations de flot de Z_k et D_k pour les processus de réaction-diffusion en dérivant les relations de définition (VII.35) par rapport à l'échelle t . Il s'agit donc de calculer $\partial_t [\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{21}(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$. Partons de l'équation de flot de Γ_k dans l'espace direct, que l'on peut écrire formellement comme au chapitre II :

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \tilde{\partial}_t \text{Tr} \ln \left[\hat{\Gamma}_k^{(2)} + \hat{R}_k \right], \quad (\text{E.21})$$

où $\tilde{\partial}_t$ n'agit que sur la dépendance en $t = \ln(k/\Lambda)$ de la fonction de coupure. Notons $[\hat{G}_k] = [\hat{\Gamma}_k^{(2)} + \hat{R}_k]^{-1}$ le propagateur. En dérivant fonctionnellement deux fois cette expression par rapport aux champs, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \partial_t \Gamma_k}{\delta w_i(\mathbf{x}) \delta w_j(\mathbf{x}')} &= \frac{1}{2} \tilde{\partial}_t \text{Tr} \int_{\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_5} [\hat{\Gamma}_k^{(4)}]_{ijk_1 k_2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) [\hat{G}_k]_{k_2 k_3}(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) \\ &\quad - [\hat{\Gamma}_k^{(3)}]_{ik_1 k_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) [\hat{G}_k]_{k_2 k_3}(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) [\hat{\Gamma}_k^{(3)}]_{jk_3 k_4}(\mathbf{x}', \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4) [\hat{G}_k]_{k_4 k_5}(\mathbf{y}_4, \mathbf{y}_5). \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

Nous cherchons à formuler cette expression en fonction des dérivées fonctionnelles $\bar{\Gamma}_k^{(n)}$. Pour cela, on exprime la relation entre $\partial_t \bar{\Gamma}_k^{(2)}$ et $\partial_t \hat{\Gamma}_k^{(2)}$ comme dans (E.12) en introduisant les dérivées mixtes puis l'on reporte dans cette relation l'expression (E.22). On réécrit alors celle-ci en termes des transformées de Fourier $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ puis l'on remplace ces dernières par les dérivées fonctionnelles $\bar{\Gamma}^{(n)}$ en utilisant la relation (E.16). On exprime finalement explicitement la conservation de l'impulsion $\bar{\Gamma}_k^{(n)}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = (2\pi)^D \delta^D(\sum_i \mathbf{q}_i) \bar{\Gamma}_k^{(n)}(\mathbf{q}_1, \dots, -\sum_i \mathbf{q}_i)$, ce qui conduit à l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \partial_t \Gamma_k}{\delta w_i(\mathbf{p}) \delta w_j(\mathbf{p}')} &= \frac{\delta^D(\mathbf{p} + \mathbf{p}')}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} \tilde{\partial}_t \text{Tr} \int_{\mathbf{q}} [\bar{\Gamma}_k^{(4)}]_{ijk_1 k_2}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', -\mathbf{q}, \mathbf{q}) [\bar{G}_k]_{k_2 k_3}(-\mathbf{q}) \\ &\quad - [\bar{\Gamma}_k^{(3)}]_{ik_1 k_2}(\mathbf{p}, -\mathbf{q}, -\mathbf{p} + \mathbf{q}) [\bar{G}_k]_{k_2 k_3}(-\mathbf{q} + \mathbf{p}) [\bar{\Gamma}_k^{(3)}]_{jk_3 k_4}(\mathbf{p}', -\mathbf{p}' - \mathbf{q}, \mathbf{q}) [\bar{G}_k]_{k_4 k_5}(-\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

qui admet la représentation diagrammatique :

$$\frac{\delta^2 \partial_t \Gamma_k}{\delta w_i(\mathbf{p}) \delta w_j(-\mathbf{p})} = \frac{1}{2} \tilde{\partial}_t \left(\begin{array}{c} \text{graph 1} - \text{graph 2} \end{array} \right)$$

Le graphe proportionnel à $\bar{\Gamma}_k^{(4)}$ donne, à l'OD, une contribution nulle aux équations de flot de Z_k et D_k car $\bar{\Gamma}_k^{(4)}$ ne dépend pas, à cet ordre, des impulsions et fréquences externes p et ν . Calculons l'autre graphe. Le propagateur \bar{G}_k se déduit de l'expression (VII.32) en recourant à la substitution (E.15) et celle des $\bar{\Gamma}_k^{(3)}$ s'obtient en dérivant fonctionnellement l'*ansatz* (VII.19) par rapport aux champs dans l'espace de Fourier, soit :

$$[\bar{\Gamma}_k^{(3)}]_{1ij}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{\delta^D(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{q}')}{(2\pi)^{2D}} \begin{bmatrix} U_k^{(0,3)} & U_k^{(1,2)} \\ U_k^{(1,2)} & U_k^{(2,1)} \end{bmatrix}_{ij}, \quad (\text{E.24})$$

$$[\bar{\Gamma}_k^{(3)}]_{2ij}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{\delta^D(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{q}')}{(2\pi)^{2D}} \begin{bmatrix} U_k^{(1,2)} & U_k^{(2,1)} \\ U_k^{(2,1)} & U_k^{(3,0)} \end{bmatrix}_{ij}. \quad (\text{E.25})$$

En effectuant les produits matriciels selon (E.23) puis en prenant la trace de la matrice produit, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t [\bar{\Gamma}_k^{(2)}]_{21}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \tilde{\partial}_t \int_{\mathbf{q}} \left\{ h(\mathbf{q}) U_k^{(2,0)} U_k^{(0,3)} U_k^{(2,1)} - h(\mathbf{q}) h(\mathbf{q} - \mathbf{p}) U_k^{(2,1)} U_k^{(1,2)} \right. \\ &- U_k^{(2,1)} U_k^{(1,2)} U_k^{(0,2)} U_k^{(2,0)} + h(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \left(U_k^{(2,1)} \right)^2 U_k^{(0,2)} - \left(U_k^{(2,0)} \right)^2 U_k^{(0,3)} U_k^{(1,2)} \\ &+ h(\mathbf{q} - \mathbf{p}) U_k^{(2,0)} \left(U_k^{(1,2)} \right)^2 + h(-\mathbf{q} + \mathbf{p}) U_k^{(2,0)} U_k^{(2,1)} U_k^{(0,3)} - U_k^{(0,2)} U_k^{(1,2)} U_k^{(2,0)} U_k^{(2,1)} \\ &+ h(-\mathbf{q}) U_k^{(2,0)} \left(U_k^{(1,2)} \right)^2 - h(-\mathbf{q}) h(-\mathbf{q} + \mathbf{p}) U_k^{(2,1)} U_k^{(1,2)} - h(-\mathbf{q}) h(\mathbf{q} - \mathbf{p}) U_k^{(2,1)} U_k^{(1,2)} \\ &+ h(-\mathbf{q}) \left(U_k^{(2,1)} \right)^2 U_k^{(0,2)} - h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q} + \mathbf{p}) U_k^{(3,0)} U_k^{(0,3)} + h(-\mathbf{q} + \mathbf{p}) U_k^{(3,0)} U_k^{(1,2)} U_k^{(0,2)} \\ &\left. + h(\mathbf{q}) U_k^{(3,0)} U_k^{(1,2)} U_k^{(0,2)} - U_k^{(3,0)} U_k^{(2,1)} \left(U_k^{(0,2)} \right)^2 \right\} \frac{\delta^D(\mathbf{0})}{(2\pi)^D} \alpha(\mathbf{q}) \alpha(\mathbf{q} - \mathbf{p}), \quad (\text{E.26}) \end{aligned}$$

où les fonctions h et α désignent respectivement :

$$h(\pm \mathbf{q}) = Z_k q^2 + R_k(q^2, \pm i \omega) \pm i D_k \omega + U_k^{(1,1)} \quad (\text{E.27})$$

$$\alpha(\mathbf{q}) = h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) - U_k^{(2,0)} U_k^{(0,2)}. \quad (\text{E.28})$$

Les équations de flot de Z_k et de D_k s'obtiennent en dérivant l'expression (E.26) par rapport à q^2 et ω respectivement puis en prenant la limite $q \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow 0$.

Pour établir ces expressions, on choisit, comme dans le chapitre VII, une fonction de coupure indépendante des fréquences $R_k(q^2, i \omega) \equiv R_k(q^2)$. On aboutit alors, en

introduisant les variables adimensionnées et renormalisées (VII.40), aux expressions :

$$\begin{aligned} \partial_t Z_k = & \frac{1}{d} \left\{ \left(u_k^{(3,0)} u_k^{(2,1)} u_k^{(0,2)} + u_k^{(0,3)} u_k^{(1,2)} u_k^{(2,0)} + u_k^{(2,0)} \left(u_k^{(1,2)} \right)^2 + u_k^{(0,2)} \left(u_k^{(2,1)} \right)^2 \right) \right. \\ & \times \left(4 M(1, 3, d, 0) - 8 M(3, 4, d, 0) \right) + 4 \left(- u_k^{(2,1)} u_k^{(1,2)} + u_k^{(3,0)} u_k^{(0,3)} \right) M(2, 4, d, 2) \\ & + \left(3 u_k^{(2,1)} u_k^{(1,2)} + u_k^{(3,0)} u_k^{(0,3)} \right) \left(M(0, 2, d, 0) - 4 M(2, 3, d, 0) + 4 M(4, 4, d, 0) \right) \\ & \left. + 4 \left(u_k^{(3,0)} u_k^{(2,1)} \left(u_k^{(0,2)} \right)^2 + u_k^{(0,3)} u_k^{(1,2)} \left(u_k^{(2,0)} \right)^2 + 2 u_k^{(2,1)} u_k^{(1,2)} u_k^{(0,2)} u_k^{(2,0)} \right) M(2, 4, d, 0) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

et

$$\begin{aligned} \partial_t D_k = & \frac{1}{2} \left\{ \left(u_k^{(2,1)} u_k^{(1,2)} - u_k^{(3,0)} u_k^{(0,3)} \right) L(1, 2, d, 0) \right. \\ & \left. + \left(u_k^{(3,0)} u_k^{(1,2)} u_k^{(0,2)} + u_k^{(0,3)} u_k^{(2,1)} u_k^{(2,0)} - u_k^{(0,2)} \left(u_k^{(2,1)} \right)^2 - u_k^{(2,0)} \left(u_k^{(1,2)} \right)^2 \right) L(0, 2, d, 0) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

où L et M représentent des fonctions seuil, définies dans la section suivante.

E.3 Fonctions seuil

Nous introduisons les fonctions seuil L et M répertoriant les différentes intégrales en impulsion et en fréquence intervenant dans les expressions des équations de flot du potentiel courant et des coefficients de renormalisation. Celles-ci sont définies par :

$$L(m, n, dy, d\nu) = v_d \int d^d y d\nu y^{\frac{dy}{2}-1} \nu^{d\nu} s(y) \left(m \frac{f(y)^{m-1}}{P(y, \nu)^n} - 2(n + \delta_{n0}) \frac{f(y)^{m+1}}{P(y, \nu)^{n+1}} \right) \quad (\text{E.31})$$

$$\begin{aligned} M(m, n, dy, d\nu) = & v_d \int d^d y d\nu y^{\frac{dy}{2}} \nu^{d\nu} \left\{ s(y) \left(1 + r(y) + y r'(y) \right)^2 \right. \\ & \left. \times \left(m \frac{f(y)^{m-1}}{P(y, \nu)^n} - 2(n + \delta_{n0}) \frac{f(y)^{m+1}}{P(y, \nu)^{n+1}} \right) + 2 s'(y) \left(1 + r(y) + y r'(y) \right) \frac{f(y)^m}{P(y, \nu)^n} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

où les primes marquent des dérivées par rapport à la variable y , les fonctions $f(y)$, $P(y, \nu)$ et $s(y)$ représentent :

$$f(y) = y(1 + r(y)) + u_k^{(1,1)} \quad (\text{E.33})$$

$$P(y, \nu) = f(y)^2 + \nu^2 - u_k^{(0,2)} u_k^{(2,0)} \quad (\text{E.34})$$

$$s(y) = -2 y^2 r'(y) - x_Z y r(y), \quad (\text{E.35})$$

et $v_d = \left[2^{d+1} \pi^{d/2+1} \Gamma(d/2) \right]^{-1}$ le volume d'intégration (où d est la dimension spatiale considérée).

En utilisant la fonction de coupure $r_\theta(y) = (1/y - 1)\theta(1 - y)$, ces fonctions seuil s'intègrent analytiquement et on obtient simplement pour L :

$$L(m, n, dy, d\nu) = v_d \pi \mathcal{M}^{m-1} \frac{4(2 + dy - x_Z)}{dy(2 + dy)} \times \left(m \mathcal{C}[d\nu, n] \mathcal{N}^{-n + \frac{d\nu+1}{2}} - 2(n + \delta_{n0}) \mathcal{M}^2 \mathcal{N}^{-n-1 + \frac{d\nu+1}{2}} \mathcal{C}[d\nu, n] \right), \quad (\text{E.36})$$

et pour la fonction seuil M :

$$M(m, n, dy, d\nu) = -2 v_d \pi \mathcal{M}^m \mathcal{N}^{-n + \frac{d\nu+1}{2}} \mathcal{C}[d\nu, n], \quad (\text{E.37})$$

avec $\mathcal{M} = (1 + u_k^{(1,1)})$, $\mathcal{N} = [(1 + u_k^{(1,1)})^2 - u_k^{(0,2)} u_k^{(2,0)}]$ et

$$\mathcal{C}[d\nu, n] = \frac{(d\nu - 1)(d\nu - 3) \dots (1)}{(2n - d\nu - 1)(2n - d\nu - 3) \dots (2n - 3)} \frac{(2n - 3)(2n - 5) \dots (1)}{(2n - 2)(2n - 4) \dots (2)}. \quad (\text{E.38})$$

Avec ces définitions, la dérivée de la fonction seuil L par rapport à un champ est simplement liée par une relation de récurrence à d'autres fonctions L selon :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w_i} L(m, n, dy, d\nu) &= m \left(\frac{\partial}{\partial w_i} u_k^{(1,1)} \right) L(m-1, n, dy, d\nu) - 2n \left(\frac{\partial}{\partial w_i} u_k^{(1,1)} \right) L(m+1, n+1, dy, d\nu) \\ &\quad + n \left(\frac{\partial}{\partial w_i} u_k^{(0,2)} u_k^{(2,0)} \right) L(m, n+1, dy, d\nu). \end{aligned} \quad (\text{E.39})$$

Bibliographie

- [1] K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. C **12**, 75 (1974).
- [2] L. P. Kadanoff, Physics **2**, 263 (1966).
- [3] F. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. A **8**, 401 (1973).
- [4] J. Polchinski, Nucl. Phys. B **231**, 269 (1984).
- [5] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
- [6] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 2411 (1994).
- [7] U. Ellwanger, Z. Phys. C **62**, 503 (1994).
- [8] C. G. Callan, Phys. Rev. D **2**, 1541 (1970).
- [9] K. Symanzik, Commun. Math. Phys. **18**, 227 (1970).
- [10] J. L. Cardy, in *Conformal invariance*, Vol. 11 of *Phase transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic Press, New York, 1987).
- [11] T. R. Morris, Phys. Lett. B **345**, 139 (1995).
- [12] V. L. Berezinskii, Sov. Phys. JETP **32**, 493 (1970).
- [13] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1972).
- [14] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Phys. Rep. **363**, 223 (2002).
- [15] K. G. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3174 (1971).
- [16] K. G. Wilson, Scientific American **241**, 158 (1979).
- [17] C. Bagnuls and C. Bervillier, Phys. Rep. **348**, 91 (2001).
- [18] B. Delamotte, D. Mouhanna, and M. Tissier, Phys. Rev. B **69**, 134413 (2004).
- [19] T. R. Morris, Phys. Lett. B **329**, 241 (1994).
- [20] T. R. Morris, Suppl. Prog. Theor. Phys. **131**, 395 (1998).
- [21] C. Wetterich, Z. Phys. C **57**, 451 (1993).
- [22] C. Wetterich, Z. Phys. C **60**, 461 (1993).
- [23] C. Wetterich, Mod. Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
- [24] C. Wetterich, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 3571 (1994).
- [25] T. R. Morris, Phys. Lett. B **334**, 355 (1994).
- [26] U. Ellwanger, Z. Phys. C **58**, 619 (1993).
- [27] M. Bonini, M. D'Attanasio, and G. Marchesini, Nucl. Phys. B **409**, 441 (1993).

- [28] S. Seide and C. Wetterich, Nucl. Phys. B **562**, 524 (1999).
- [29] A. Parola and L. Reatto, Phys. Rev. A **31**, 3309 (1985).
- [30] A. Parola and L. Reatto, Adv. Phys. **44**, 211 (1995).
- [31] N. Tetradis and C. Wetterich, Nucl. Phys. B [FS] **422**, 541 (1994).
- [32] H. Ballhausen, J. Berges, and C. Wetterich, Phys. Lett. B **582**, 144 (2004).
- [33] L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, and J. Vidal, Phys. Rev. D **67**, 065004 (2003).
- [34] L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, and J. Vidal, Phys. Rev. B **68**, 064421 (2003).
- [35] G. von Gersdorff and C. Wetterich, Phys. Rev. B **64**, 054513 (2001).
- [36] F. Höfling, C. Nowak, and C. Wetterich, Phys. Rev. B **66**, 205111 (2002).
- [37] M. D’Attanasio and T. R. Morris, Phys. Lett. B **409**, 363 (1997).
- [38] D. F. Litim, Phys. Rev. D **64**, 105007 (2001).
- [39] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 3rd ed. (Oxford University Press, New York, 1989).
- [40] T. Papenbrock and C. Wetterich, Z. Phys. C **65**, 519 (1995).
- [41] T. R. Morris and J. F. Tighe, JHEP **08**, 007 (1999).
- [42] M. Tissier, Ph.D. thesis, Université Paris VII Denis Diderot, 2001.
- [43] M. Grater and C. Wetterich, Phys. Rev. Lett. **75**, 378 (1995).
- [44] M. Le Bellac, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge* (EDP sciences, CNRS, 1990).
- [45] N. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
- [46] J. Villain, J. Phys. C **36**, 581 (1975).
- [47] L. Rosa, P. Vitale, and C. Wetterich, Phys. Rev. Lett. **86**, 958 (2001).
- [48] T. R. Morris and J. F. Tighe, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 2095 (2001).
- [49] R. Guida and J. Zinn-Justin, J. Phys. A **31**, 8103 (1998).
- [50] G. Zumbach, Nucl. Phys. B **413**, 754 (1994).
- [51] K. I. Aoki *et al.*, Prog. Theor. Phys. **99**, 451 (1998).
- [52] S. Liao, J. Polonyi, and M. Strickland, Nucl. Phys. B **567**, 493 (2000).
- [53] D. F. Litim, Nucl. Phys. B **631**, 128 (2002).
- [54] R. D. Ball, P. E. Haagensen, J. I. Latorre, and E. Moreno, Phys. Lett. B **347**, 80 (1995).
- [55] J. Comellas, Nucl. Phys. B **498**, 539 (1997).
- [56] M. Mazza and D. Zappala, Phys. Rev. D **64**, 105013 (2001).
- [57] D. F. Litim, Phys. Lett. B **486**, 92 (2000).
- [58] D. F. Litim, *unpublished*, hep-th/0208117 (2002).
- [59] J. I. Sumi *et al.*, *unpublished*, hep-th/0002231 (2000).

- [60] I. Halliday and P. Suranyi, Phys. Rev. D **21**, 1529 (1980).
- [61] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **23**, 2916 (1981).
- [62] D. F. Litim, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 2081 (2001).
- [63] D. F. Litim, JHEP **0111**, 059 (2001).
- [64] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys. B **12**, 1343 (1998).
- [65] M. Hasenbusch, Int. J. Mod. Phys. C **12**, 911 (2001).
- [66] O. Müller and J. Winkelmann, Phys. Rev. E **59**, 2026 (1999).
- [67] A. Haupt and J. Straub, Phys. Rev. E **59**, 1795 (1999).
- [68] D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **56**, 1964 (1986).
- [69] L. Canet, in preparation (2004).
- [70] M. Henkel, *Conformal Invariance and Critical Phenomena* (Springer Verlag, Berlin, 1999).
- [71] C. W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
- [72] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
- [73] B. Schmittmann and R. K. P. Zia, in *Statistical mechanics of driven diffusive systems*, Vol. 17 of *Phase transition and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic Press, New York, 1995).
- [74] T. Halpin-Healy and Y.-C. Zhang, Phys. Rep. **254**, 215 (1995).
- [75] A. L. Barabási and H. E. Stanley, *Fractal concepts in surface growth* (Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1995).
- [76] T. E. Harris, Ann. Prob. **2**, 969 (1974).
- [77] B. Drossel and F. Schwabl, Phys. Rev. Lett. **69**, 1629 (1992).
- [78] E. V. Albano, J. Phys. A **27**, L881 (1994).
- [79] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel, and M. Ito, Phys. Rev. E **51**, 2939 (1995).
- [80] J.-P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
- [81] M. Henkel, in *Classical and Quantum Nonlinear Integrable Systems : Theory and Applications*, edited by A. Kundu (Institute of Physics Publishing, Bristol, 2003).
- [82] B. Derrida and M. Evans, in *The asymmetric exclusion process : exact results through a matrix approach, Nonequilibrium statistical mechanics in one dimension*, edited by V. Privman (Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1997).
- [83] H. Hinrichsen, Adv. Phys. **49**, 815 (2000).
- [84] H. K. Janssen, Z. Phys. B **23**, 377 (1976).
- [85] C. de Dominicis, J. Phys. (Paris) C **1**, 247 (1976).
- [86] P. C. Martin, E. D. Siggia, and H. A. Rose, Phys. Rev. A **8**, 423 (1973).
- [87] M. Doi, J. Phys. A **9**, 1479 (1976).

- [88] L. Peliti, J. Phys. (Paris) **46**, 1469 (1984).
- [89] L. Canet, B. Delamotte, O. Deloubrière, and N. Wschebor, Phys. Rev. Lett. **92**, 195703 (2004).
- [90] L. Canet, H. Chaté, and B. Delamotte, Phys. Rev. Lett **92**, 255703 (2004).
- [91] H. K. Janssen, Z. Phys. B **42**, 151 (1981).
- [92] P. Grassberger, Z. Phys. B **47**, 365 (1982).
- [93] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley, Proc. Camb. Phil. Soc. **53**, 629 (1957).
- [94] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to percolation theory*, 2nd ed. (Taylor and Francis, London, 1992).
- [95] P. Grassberger and A. de la Torre, Ann. Phys. (N.Y.) **122**, 373 (1979).
- [96] J. F. F. Mendes, R. Dickman, M. Henkel, and M. C. Marques, J. Phys. A **27**, 3019 (1994).
- [97] I. Jensen and A. J. Guttmann, J. Phys. A **28**, 4813 (1995).
- [98] I. Jensen, Phys. Rev. A **45**, R563 (1992).
- [99] C. A. Voigt and R. M. Ziff, Phys. Rev. E **56**, R6241 (1997).
- [100] I. Jensen, J. Phys. A **32**, 5233 (1999).
- [101] J. Bronzan and J. Dash, Phys. Lett. B **51**, 496 (1974).
- [102] F. Schlögl, Z. Phys. A **253**, 147 (1972).
- [103] M. Moshe, Phys. Rep. C **37**, 257 (1978).
- [104] P. Grassberger and K. Sundermeyer, Phys. Lett. B **77**, 220 (1978).
- [105] H. D. I. Arbabanel and J. B. Bronzan, Phys. Rev. D **9**, 2397 (1974).
- [106] J. L. Cardy and R. L. Sugar, J. Phys. A **13**, L423 (1980).
- [107] M. Henkel and R. Peschanski, Nucl. Phys. B **390**, 637 (1993).
- [108] W. Kinzel, Z. Phys. B **58**, 229 (1985).
- [109] E. Domany and W. Kinzel, Phys. Rev. Lett. **53**, 311 (1984).
- [110] R. M. Ziff, E. Gulari, and Y. Barshad, Phys. Rev. Lett. **56**, 2553 (1986).
- [111] G. Grinstein, Z.-W. Lai, and D. A. Browne, Phys. Rev. A **40**, 4820 (1989).
- [112] I. Jensen, H. Fogedby, and R. Dickman, Phys. Rev. A **41**, 3411 (1990).
- [113] T. Aukrust, D. A. Browne, and I. Webman, Phys. Rev. A **41**, 5294 (1990).
- [114] S. V. Buldyrev *et al.*, Phys. Rev. A **45**, R8313 (1992).
- [115] L.-H. Tang and H. Leschhorn, Phys. Rev. A **45**, R8309 (1992).
- [116] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889 (1986).
- [117] D. A. Huse and C. L. Henley, Phys. Rev. Lett. **54**, 2708 (1985).
- [118] D. S. Fisher, D. A. Huse, and C. L. Henley, Phys. Rev. Lett. **55**, 2924 (1985).
- [119] E. Perlsman and S. Havlin, Europhys. Lett. **46**, 13 (1999).
- [120] H. K. Janssen, Phys. Rev. E **55**, 6253 (1997).

- [121] A. G. Moreira and R. Dickman, *Phys. Rev. E* **54**, R3090 (1996).
- [122] J. Hooyberghs, F. Iglói, and C. Vanderzande, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 100601 (2003).
- [123] M. Ehsasi *et al.*, *J. Chem. Phys.* **91**, 4949 (1989).
- [124] R. Hilfer, T. Rage, and B. Virgin, *Physica A* **241**, 105 (1997).
- [125] H. Téphany, J. Nahmias, and J. A. M. S. Duarte, *Physica A* **242**, 57 (1997).
- [126] J. Wintterlin *et al.*, *Science* **278**, 1931 (1997).
- [127] A. Daerr and S. Douady, *Nature* **399**, 241 (1999).
- [128] H. Hinrichsen, A. Jiménez-Dalmaroni, Y. Rozov, and E. Domany, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4999 (1999).
- [129] J. W. Essam, *J. Phys. A* **22**, 4927 (1989).
- [130] P. Rupp, R. Richter, and I. Rehberg, *Phys. Rev. E* **67**, 036209 (2003).
- [131] Y. Pomeau, *Physica D* **23**, 3 (1986).
- [132] Y. Cuche, R. Livi, and A. Politi, *Physica D* **103**, 369 (1997).
- [133] M. Bramson and L. Gray, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **68**, 447 (1985).
- [134] P. Grassberger, F. Krause, and T. von der Twer, *J. Phys. A* **17**, L105 (1984).
- [135] H. Takayasu and A. Y. Tretyakov, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3060 (1992).
- [136] I. Jensen, *J. Phys. A* **26**, 3921 (1993).
- [137] I. Jensen, *Phys. Rev. E* **50**, 3623 (1994).
- [138] D. ben Avraham, F. Leyvraz, and S. Redner, *Phys. Rev. E* **50**, 1843 (1994).
- [139] J. L. Cardy and U. C. Täuber, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4780 (1996).
- [140] J. L. Cardy and U. C. Täuber, *J. Stat. Phys.* **90**, 1 (1998).
- [141] G. Ódor, *Rev. of Mod. Phys.* **76**, 663 (2004).
- [142] B. P. Lee, *J. Phys. A* **27**, 2633 (1994).
- [143] B. P. Lee and J. L. Cardy, *J. Stat. Phys.* **80**, 971 (1995).
- [144] M. Henkel, E. Orlandini, and G. M. Schütz, *J. Phys. A* **28**, 6335 (1995).
- [145] I. Jensen, *Phys. Rev. E* **47**, R1 (1993).
- [146] M. Henkel and H. Hinrichsen, cond-mat/0402433 (2004).
- [147] J. Marro and R. Dickman, *Nonequilibrium phase transitions in lattice models* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [148] U. C. Täuber, *Critical dynamics. A field theory approach to equilibrium and non-equilibrium scaling behavior*, <http://www.phys.vt.edu/tauber/utaeuber.html>.
- [149] H. Risken, *The Fokker-Planck equation* (Springer-Verlag, Berlin, 1988).
- [150] C. de Dominicis and L. Peliti, *Phys. Rev. B* **18**, 353 (1978).
- [151] D. Hochberg, C. Molina-París, J. Pérez-Mercader, and M. Visser, *Phys. Rev. E* **60**, 6343 (1999).
- [152] D. Hochberg, C. Molina-París, J. Pérez-Mercader, and M. Visser, *Physica A* **280**, 437 (2000).

- [153] M. Doi, *J. Phys. A* **9**, 1465 (1976).
- [154] B. P. Lee, Ph.D. thesis, University of California, 1994.
- [155] J. L. Cardy, in *Proceedings of Mathematical Beauty of Physics*, edited by J.-B. Zuber (Adv. Ser. in Math. Phys., vol. 24 p. 4780, 1996).
- [156] F. C. Alcaraz, M. Droz, M. Henkel, and V. Rittenberg, *Ann. Phys.* **230**, 250 (1994).
- [157] M. J. Howard and U. C. Täuber, *J. Phys. A : Math. Gen.* **30**, 7721 (1997).
- [158] H. J. Hilhorst, O. Deloubrière, M. J. Washenberger, and U. C. Täuber, *cond-mat/0403246* (2004).
- [159] F. van Wijland, K. Oerding, and H. J. Hilhorst, *Physica A* **251**, 179 (1998).
- [160] J. M. Burgers, *The Nonlinear Diffusion Equation* (Riedel, Boston, 1974).
- [161] E. Frey and U. C. Täuber, *Phys. Rev. E* **50**, 1024 (1994).
- [162] J. Kockelkoren and H. Chaté, *Phys. Rev. Lett* **90**, 125701/1 (2003).
- [163] M. E. Fisher, *J. Stat. Phys.* **34**, 665 (1984).
- [164] J. W. Essam and A. J. Guttmann, *Phys. Rev. E* **52**, 5849 (1995).
- [165] G. Ódor, *Phys. Rev. E* **69**, 036112 (2004).
- [166] G. Ódor, *cond-mat/0406233* (2004).
- [167] J. P. Blaizot, R. Mendez-Galain, and N. Wschebor, *cond-mat/0311460* (2004).
- [168] G. Aarts *et al.*, *Phys. Rev. D* **66**, 045008 (2002).
- [169] E. Carlon, M. Henkel, and U. Schollwöck, *Phys. Rev. E* **63**, 036101 (2001).
- [170] H. Hinrichsen, *Physica A* **320**, 249 (2003).
- [171] K. J. Wiese, in *Proceedings of the International Conference of Theoretical Physics 2002, Paris*, edited by D. Iagolnitzer, V. Rivasseau, and J. Zinn-Justin (Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2002), *cond-mat/0302322*.
- [172] C. Castellano *et al.*, *Phys. Rev. E* **58**, R5209 (1998).
- [173] E. Marinari, A. Pagnani, G. Parisi, and Z. Rácz, *Phys. Rev. E* **65**, 026136/1 (2002).
- [174] J. Cook and B. Derrida, *J. Phys. A* **23**, 1523 (1990).
- [175] J.-P. Bouchaud and M. E. Cates, *Phys. Rev. E* **47**, 1455 (1993).
- [176] M. Lässig and H. Kinzelbach, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 903 (1997).
- [177] D. Graham, *Statistical theory of instabilities in stationary nonequilibrium systems with applications to lasers and non linear optics*, Vol. 66 of *Springer tracts in modern physics* (Springer, Berlin, 1973).
- [178] U. Dekker and F. Haake, *Phys. Rev. A* **11**, 2043 (1975).

Résumé :

Cette thèse propose une approche, par les méthodes du groupe de renormalisation non perturbatif, des phénomènes critiques dans les systèmes hors de l'équilibre. Ce travail se scinde en deux parties. La première présente une analyse méthodologique des propriétés de convergence et de précision des approximations les plus couramment utilisées dans ce formalisme : le développement en dérivées et le développement en champ. La seconde partie est consacrée à l'exploration des processus de réaction-diffusion. D'une part, est apportée la première détermination analytique *en toute dimension* des exposants critiques (universels) caractérisant la classe d'universalité de la percolation dirigée. D'autre part, le diagramme de phase *complet* des marches aléatoires avec branchement et annihilation impaires est établi et confirmé par des simulations numériques. Cette analyse révèle des effets non perturbatifs qui modifient *qualitativement* les propriétés (non universelles) communément admises de ce diagramme — issues des théories de perturbation.

Summary :

This thesis broaches the study of critical phenomena in non-equilibrium systems using non-perturbative renormalisation group methods. This work is divided into two parts. The first one presents a methodological analysis of the convergence and accuracy properties of the two currently implemented approximation schemes : the derivative expansion and the field expansion. The second one is devoted to the investigation of reaction-diffusion processes. On the one hand, the first analytical determination *in all dimensions* of the (universal) critical exponents describing the directed percolation universality class is provided. On the other hand, the *complete* phase diagram of odd branching and annihilating random walks is established and supported by numerical simulations. This analysis unveils non-perturbative effects that *qualitatively* alter the commonly assumed (non universal) properties of this diagram — ensuing from perturbation theories.

Mots-clé :

groupe de renormalisation non perturbatif – développement dérivatif –
phénomènes critiques – transitions de phase – systèmes hors de l'équilibre –
processus de réaction-diffusion – percolation dirigée – marches aléatoires avec bran-
chement et annihilation.

Adresse du laboratoire :

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies UMR 7589
Tour 24/14 - 5ème étage - case 7109, 75251 Paris Cedex 05.