



**HAL**  
open science

# Effets physiques des fonds d'ondes gravitationnelles : décohérence intrinsèque dans les interféromètres

Brahim Lamine

► **To cite this version:**

Brahim Lamine. Effets physiques des fonds d'ondes gravitationnelles : décohérence intrinsèque dans les interféromètres. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT : . tel-00006936

**HAL Id: tel-00006936**

**<https://theses.hal.science/tel-00006936>**

Submitted on 21 Sep 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



LABORATOIRE KASTLER BROSSEL



**THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

**Spécialité :**  
Physique Quantique

**Présentée par**  
Brahim LAMINE

Pour obtenir le grade de  
DOCTEUR de l'Université Pierre et Marie Curie

**Effets physiques des fonds d'ondes gravitationnelles :  
décohérence intrinsèque dans les interféromètres**

Soutenue le 8 Septembre 2004 devant le jury composé de :

M. Pascal DEGIOVANNI	.....	Rapporteur
M. Marc-Thierry JAEKEL	.....	Examineur
M. Jean-Michel RAIMOND	.....	Président du jury
M. Serge REYNAUD	.....	Directeur de thèse
M. Philippe TOURENC	.....	Examineur
M. Jacques VIGUÉ	.....	Rapporteur



---

# Résumé

---

LA détection directe des ondes gravitationnelles par de grands détecteurs interférométriques fait l'objet d'un effort international très intense. Au delà des signaux recherchés par ces détecteurs, l'existence de fonds d'ondes gravitationnelles s'étalant sur une large plage de fréquences est prédite par les modèles astrophysiques et cosmologiques décrivant l'Univers. Ces fonds d'ondes gravitationnelles sont un élément important de notre environnement gravitationnel. Dans cette thèse, on étudie leur effet sur les propriétés de cohérence des systèmes physiques. Cette interaction est à l'origine d'une décohérence que l'on étudie théoriquement à l'aide de la fonctionnelle d'influence de Feynman-Vernon. L'effet est petit pour des systèmes microscopiques comme des atomes ou des photons circulant dans des interféromètres, mais il devient dominant pour les systèmes macroscopiques comme par exemple le mouvement du centre de masse de la Lune. Au vu de ces résultats, il est important de se demander si cette décohérence gravitationnelle pourrait être mise en évidence expérimentalement à l'aide par exemple d'un système mésoscopique dont on pourrait suivre la perte de cohérence. Cette question correspond à un modèle complètement calculable de transition classique-quantique induite par les fluctuations intrinsèques de l'espace-temps.

**Mots clés :** Décohérence, ondes gravitationnelles, interféromètre, fonctionnelle d'influence de Feynman Vernon, fluctuations-dissipation.

THE direct detection of gravitational waves using large interferometers is part of a huge international effort. These detectors will look for signals, but besides these signals, it exists gravitational waves backgrounds extending on a large frequency band. These backgrounds are predicted by astrophysical and cosmological models describing the evolution of the Universe and constitute an essential part of our gravitational environment. In this thesis, we study their effects on coherence properties of physical systems. The interaction with these backgrounds causes a decoherence mechanism that we study using the Feynman-Vernon functional influence approach. The effect is shown to be negligible for microscopic systems such as atoms or photons circulating in interferometers, but becomes important for

macroscopic systems such as the motion of the center of mass of the Moon for example. We also address the question whether this gravitational decoherence could be experimentally observed using a mesoscopic system in which decoherence could be monitored. In this thesis, we deliver an exactly solvable model characterizing the quantum classical transition induced by gravitational fluctuations of spacetime.

**Key words** : Decoherence, gravitational waves, interferometer, Feynman Vernon influence functional, fluctuations-dissipation.

---

# Remerciements

---

*J'ai effectué mon travail de thèse au sein du laboratoire Kastler Brossel de Septembre 2001 à août 2004. Je remercie Franck Laloë, son directeur, de m'y avoir accueilli et m'avoir offert de bonnes conditions de travail.*

*Une thèse est le fruit d'un travail collectif et d'échanges fréquents, j'aimerais remercier ici tout ceux qui y ont participé directement ou indirectement. En premier lieu je tiens à remercier très chaleureusement Serge Reynaud qui a dirigé mon travail de thèse durant ces trois années. Il l'a fait avec une incroyable disponibilité, à tel point que je n'ai pas le souvenir qu'il m'ait déjà refusé qu'on se voit pour discuter de ma thèse, même lorsque la masse de travail qu'il avait à faire était conséquente. J'ai aussi beaucoup travaillé avec Marc-Thierry Jaekel, je veux le remercier vivement des longs moments passés ensemble à déchiffrer la théorie de la Relativité Générale. Tous deux m'ont apportés une somme de connaissances qu'il serait vain d'énumérer. Je les remercie aussi pour la grande liberté scientifique et la confiance qu'ils m'ont accordées quant à l'organisation de mon travail de recherche. En particulier, je remercie Serge de m'avoir permis de participer à de nombreuses conférences internationales dans lesquelles j'ai pu exposer mon travail de thèse.*

*J'ai également travaillé avec Astrid Lambrecht que je tiens à remercier pour l'aide qu'elle m'a apportée, tant au niveau scientifique qu'au niveau psychologique lors des moments difficiles liés à la rédaction du manuscrit. D'autre part, cette thèse a été effectuée au sein du groupe fluctuations quantiques et relativité, qui regroupe un certain nombre de thésards que je remercie pour les multiples discussions que j'ai pu avoir avec eux. Merci à Cyriaque Genet, Francesco Intravaia et Rémy Hervé qui a eu le courage de relire en détail une bonne partie de mon manuscrit. Francesco a joué un rôle important tant au niveau des nombreuses discussions physiques que l'on a pu avoir ensemble, qu'au niveau humain et en particulier en ce qui concerne l'organisation du pot de thèse.*

*Au cours de ma thèse, j'ai eu l'occasion de discuter avec de nombreux chercheurs extérieurs au laboratoire. Je les remercie pour les discussions qu'ils m'ont accordées et qui ont donné naissance à une multitude d'idées. Merci en particulier à Paulo Maia Neto qui a effectué deux séjours à Paris, Luiz Davidovich qui m'a fourni une idée importante qui figure dans ma thèse ainsi que Christian Bordé avec qui j'ai eu des discussions fructueuses. Je tiens tout*

particulièrement à remercier Pascal Degiovanni à qui la partie théorique de ma thèse doit beaucoup, notamment par le biais de son cours de DEA sur la cohérence quantique. Sans ce cours, ma thèse n'aurait pas eu le même visage.

Pascal Degiovanni et Jacques Vigué ont accepté la charge de rapporteur. Merci à eux pour leurs remarques constructives sur la manuscrit. Merci aussi aux autres membres du jury, Jean-Michel Raimond, Marc-Thierry Jaekel qui a relu l'ensemble de ma thèse et m'a aidé à préparer la soutenance, Philippe Tourrenc et bien sûr Serge Reynaud, qui a consacré un temps incalculable à la relecture du manuscrit. En particulier, je me rappellerai longtemps le fonctionnement en 3 huites que l'on a eu vers la fin de la rédaction, ou encore les répétitions de ma soutenance et la préparation de mes transparents pendant le week end. Merci beaucoup Serge, tu n'as pas compté ton temps lorsque j'avais besoin de toi.

Pendant une année entière, j'ai travaillé en parallèle de ma thèse sur un sujet passionnant qui porte sur l'étude de l'élasticité en Relativité Générale. Je ne parle pas de ce sujet dans ce manuscrit car les résultats ne sont pas encore confirmés. Cependant, ce travail mené avec Serge Reynaud et Marc-Thierry Jaekel m'a beaucoup mobilisé et a été l'occasion pour moi de très nombreux échanges scientifiques avec des chercheurs. Je veux remercier en particulier Peter Wolf pour avoir été aussi ouvert scientifiquement et m'avoir soutenu lors de discussions scientifiques houleuses. Je tiens aussi à remercier Gilles Esposito-Farese et Philippe Tourrenc avec qui j'ai beaucoup discuté.

J'ai eu un grand plaisir à travailler dans l'antenne Jussieu du laboratoire. J'ai trouvé agréable qu'il y ait toujours une personne avec qui il était facilement possible de parler physique et de prendre conseil. Merci en particulier aux membres permanents avec qui j'ai eu des contacts. Merci à Paul Indelicato qui m'a prêté un bureau lorsque j'ai commencé ma thèse et merci à Dominique Delande qui m'a permis d'utiliser ses ordinateurs pour mes calculs. Merci aussi à Lucile Julien grâce à qui j'ai obtenu un enseignement en SCM à Paris 6. Merci à Claude Fabre et François Biraben pour la centaine de signatures que je leur ai demandées, le premier en tant que directeur de mon école doctorale, le second en tant que directeur adjoint du laboratoire. Merci aussi à l'ensemble des membres permanents du laboratoire avec qui j'ai eu de nombreuses discussions, scientifiques ou non : Jean Michel Courty (pour nos discussions scientifiques en particulier, ainsi que pour l'organisation des réunions bruit quantique), François Nez (en tant que passionné d'aéronautique), Catherine Schwob (merci d'avoir fait des efforts pour mes enseignements à Paris 6), Antoine Heidmann (si tu as besoin de soudure ou de pièces de mécanique tu peux m'appeler), Michel Pinard (pour tes discussions, promis ça restera secret...), Agnès Maître (merci pour tes plats Picard, ça m'a été utile plus d'une fois!) et les plus jeunes, Pierre-François Cohadon, Jean-Pierre Hermier (allez les bleus), Nicolas Treps (allez les verts), Thomas Coudreau (j'espère que je serai dans les remerciements des futures thèses de MPQ pour avoir transporté ta table optique!) et Benoit Grémaud pour son aide informatique précieuse. Je tiens à remercier en particulier Pierre-François qui m'a, à de nombreuses occasions, rendu divers services et qui a partagé mon bureau pendant 2 ans. J'en profite aussi pour remercier Emmanuelle, qui m'a épaulé dans les moments difficiles.

*Ma thèse s'est déroulée dans une ambiance studieuse mais très agréable. Je veux remercier l'ensemble des personnes (jeunes ou moins jeunes) pour avoir participé à rendre le difficile travail de thésard plus humain. Merci surtout à ceux avec qui j'ai développé de vraies relations d'amitiés, Sylvain Gigan, Julien Laurat, Julien Le Bars et Thomas Caniard. Merci aussi à tout ceux avec qui j'ai eu beaucoup de contacts, Olivier Arcizet, Olivier Arnoult, Rémy Battesti, Augustin Baas, Tristan Briant, Pierre Cladé, Aurélien Dantan, Vincent Delaubert, Rémy Hervé, Laurent Hilico, Vincent Josse, Jean Philippe Karr, Senem Kilic, Eric-Olivier Le Bigot, Laurent Longchambon, Laurent Lopez, Saida Guellati-Khélifa, Olivier Sigwarth, Florence Thibout (merci pour tes leçons de verrerie), Vladimir Yerokhin et les Italiens du laboratoire, Alberto Bramati, Francesco Intravaia, Marco Romanelli, Riccardo Sapienza et Martino Trassinelli. Enfin, je remercie tout particulièrement les secrétaire successives du laboratoire, Christelle Sansa, Monique Bonnamy, Lætitia Morel, ainsi que José Romer. Monique et Laetitia m'ont été à de nombreuses occasions d'un soutien important et ont montré une efficacité remarquable lorsque j'avais besoin d'elles. J'ajoute aussi mes remerciements aux informaticiens, Corinne Poisson et Serge Begon, sans qui les bugs successifs de Windows n'auraient pas pu être résolus.*

*Enfin, et parce qu'une vie ne se réduit pas simplement à la physique, je veux remercier mes copines et copains de Lyon, de Lille et de Paris, dont un certain nombre ont fait l'effort de se déplacer pour ma soutenance. Je n'oublie pas bien sûr ma famille, mes parents, mon frère et ma soeur dont le soutien a été sans faille du début à la fin. Finalement, je remercie tout particulièrement Lætitia, qui a partagé avec moi la pénible épreuve de la rédaction du manuscrit, pour son soutien et son amour.*



---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Décohérence gravitationnelle : première approche</b>	<b>9</b>
A	L'environnement gravitationnel et son influence . . . . .	11
A.1	Effets métriques sur la propagation d'un champ . . . . .	11
A.1.1	L'approximation eikonale . . . . .	11
A.1.2	Perturbation du déphasage . . . . .	12
A.1.3	Invariance de jauge du déphasage dans un interféromètre . . . . .	14
A.1.4	L'effet Sagnac . . . . .	16
A.2	Principe de la détection interférométrique des OG . . . . .	17
A.2.1	Mouvement des miroirs . . . . .	19
A.2.2	Étude dans un système de coordonnées TT (Transverse Traceless) . . . . .	20
A.2.3	Étude dans un système de coordonnées de Fermi . . . . .	22
A.2.4	Comparaison des deux systèmes de coordonnées . . . . .	25
A.2.5	Hypothèse des miroirs quasi-libres . . . . .	26
A.3	Description des fonds stochastiques d'OG . . . . .	28
A.3.1	Caractérisations générales . . . . .	28
A.3.2	Fond galactique : bruit de confusion des binaires . . . . .	31
A.3.3	Fond cosmologique : OG reliques . . . . .	33
B	Décohérence gravitationnelle dans les interféromètres atomiques . . . . .	36
B.1	Présentation succincte du projet HYPER . . . . .	36
B.1.1	De l'effet Sagnac à l'effet Lense Thirring . . . . .	37
B.1.2	Effet des OG . . . . .	39
B.1.3	Quelques chiffres importants concernant HYPER . . . . .	40
B.2	Déphasage gravitationnel dans un interféromètre atomique en approximation eikonale . . . . .	40
B.2.1	Interféromètres atomiques matériels . . . . .	41
B.2.2	Équivalence avec un entraînement du référentiel d'inertie local . . . . .	48

	B.2.3	Description plus réaliste d'un interféromètre de type HYPER	49
	B.2.4	Comparaison avec le cas des miroirs libres	54
B.3		Décohérence gravitationnelle dans le projet HYPER	56
	B.3.1	Perte de cohérence et dispersion de phase	56
	B.3.2	Les fonctions de réponse du projet HYPER	58
	B.3.3	Estimation de la décohérence dans HYPER	61
	B.3.4	Comparaison avec le cas des miroirs libres	62
	B.3.5	Discussions	64
C		Décohérence du mouvement du centre de masse de la Lune	66
	C.1	Perturbation du mouvement de la Lune	67
		C.1.1 Force de marée	67
		C.1.2 Description ondulatoire du mouvement de la Lune	69
		C.1.3 Perturbation de la propagation d'un plan de phase	70
		C.1.4 Transfert d'impulsion le long de la trajectoire	72
	C.2	Diffusion du mouvement de la Lune	73
		C.2.1 Diffusion aux temps longs	73
		C.2.2 Relation fluctuations-dissipation	75
		C.2.3 Diffusion aux temps courts	77
		C.2.4 Discussion des échelles de temps	78
	C.3	Décohérence d'une Lune de Schrödinger	81
		C.3.1 Analogie qualitative avec la diffusion de photons sur une cible massive	81
		C.3.2 Description simplifiée de la décohérence : dispersion de phase	83
		C.3.3 Décohérence aux temps longs	84
		C.3.4 Décohérence aux temps courts	86
		C.3.5 Discussion des diverses échelles de temps	87
<b>3</b>		<b>Quelques développements théoriques</b>	<b>89</b>
	A	Traitement Lagrangien de l'interaction en jauge TT	91
		A.1 Lagrangien d'interaction	91
		A.1.1 Généralités	91
		A.1.2 Invariance de jauge de l'action d'interaction $S_{S/\mathcal{E}}$	93
		A.1.3 Équivalence entre les approches géométrique et Lagrangienne	93
		A.2 Écriture de l'action d'interaction en jauge TT	94
		A.2.1 Particules matérielles en mouvement non relativiste	94
		A.2.2 Approximation quadrupolaire	95
		A.2.3 Champ électromagnétique	96
		A.3 Remarques sur l'invariance de jauge et analogies avec l'électromagnétisme	98
		A.3.1 La perturbation dans un système de coordonnées de Fermi	99
		A.3.2 Description Hamiltonienne	100

B	Traitement quantique de la décohérence gravitationnelle . . . . .	102
B.1	Dispersion de phase et décohérence . . . . .	102
B.1.1	Deux points de vue qualitatifs pour la décohérence . . . . .	102
B.1.2	Catastrophe d'orthogonalité . . . . .	104
B.1.3	Dispersion de phase . . . . .	105
B.2	Formalisme de Feynman-Vernon et limites classiques . . . . .	107
B.2.1	Couplage linéaire à un bain d'oscillateurs harmoniques . . . . .	107
B.2.2	Effets physiques de la fonctionnelle d'influence . . . . .	111
B.2.3	Les limites classiques de la décohérence . . . . .	113
B.3	Fonctionnelle d'influence d'un système couplé au fond d'OG . . . . .	116
B.3.1	Le fond d'OG comme un bain harmonique . . . . .	116
B.3.2	L'état des fonds reliques et astrophysiques . . . . .	118
B.3.3	Détermination de la fonctionnelle d'influence . . . . .	119
B.3.4	Application aux fluctuations classiques du champ de gravité . . . . .	122
C	Retour sur la décohérence dans les interféromètres . . . . .	124
C.1	Lien avec l'approche de Feynman-Vernon . . . . .	124
C.1.1	Détermination du contraste . . . . .	124
C.1.2	Expressions de la décohérence . . . . .	126
C.2	Quelques compléments sur la décohérence dans les interféromètres . . . . .	127
C.2.1	Effet dû à la stratégie de détection . . . . .	127
C.2.2	Intégration des spectres réels dans HYPER . . . . .	130
C.2.3	Décohérence dans un fond anisotrope . . . . .	132
C.3	Influence de la géométrie . . . . .	133
<b>4</b>	<b>La décohérence gravitationnelle et la transition quantique/classique</b>	<b>135</b>
A	Résumé des résultats précédents . . . . .	137
A.1	Rôle des échelles de Planck dans la transition classique/quantique . . . . .	137
A.2	Discussion des facteurs dont dépend la décohérence . . . . .	138
A.3	Fonctionnelle d'influence et échelle de Planck . . . . .	140
B	Les interféromètres optiques . . . . .	142
B.1	Interféromètre de type Michelson . . . . .	143
B.1.1	Expression du bruit de phase gravitationnel . . . . .	143
B.1.2	Quelques résultats généraux sur la variance du bruit de phase . . . . .	146
B.1.3	Décohérence dans l'approximation des grandes longueurs d'onde . . . . .	147
B.1.4	Discussions . . . . .	148
B.2	Cavité Fabry-Perot . . . . .	151
B.2.1	Expression du champ réfléchi par une cavité . . . . .	151
B.2.2	Calcul dans l'approximation quadrupolaire . . . . .	153
B.2.3	Bruit équivalent sur la fréquence de résonance . . . . .	155
B.3	Autres détecteurs optiques d'OG . . . . .	156

B.3.1	Mesure d'effets Doppler . . . . .	156
B.3.2	Mesure de temps d'arrivée . . . . .	160
C	Les interféromètres atomiques . . . . .	162
C.1	Tour d'horizon des différents interféromètres atomiques . . . . .	162
C.2	Discussions sur le seuil de décohérence . . . . .	164
C.3	Quelques perspectives . . . . .	167
<b>5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>169</b>
<b>Annexe</b>		<b>171</b>
A	Rappels de Relativité Générale . . . . .	171
A.1	Le principe d'équivalence . . . . .	171
A.2	Le tenseur métrique en RG . . . . .	173
A.3	Dérivées covariantes et contravariantes . . . . .	173
A.4	Le tenseur de courbure . . . . .	175
B	Rappels sur les équations du mouvement relativiste . . . . .	177
B.1	Équation géodésique . . . . .	177
B.2	Approximation eikonale des équations d'onde . . . . .	177
B.3	Équation de la déviation géodésique . . . . .	179
C	Rappels sur les Ondes Gravitationnelles . . . . .	181
C.1	Éléments de théorie linéarisée de la RG . . . . .	181
C.2	Solutions en ondes planes - polarisations . . . . .	183
C.3	Fonctions de corrélation d'un fond d'OG . . . . .	185
C.4	Fonctions de corrélation pour un fond d'OG anisotrope . . . . .	187
D	Relativité Générale et réponse linéaire . . . . .	189
D.1	Propagateur du graviton . . . . .	189
D.2	Densité spectrale . . . . .	190
D.3	Fonctions de corrélation des fluctuations . . . . .	191
E	Rappels sur la théorie de la fonctionnelle d'influence . . . . .	193
E.1	Fonctionnelle d'influence de Feynman-Vernon . . . . .	193
E.2	Quelques propriétés générales . . . . .	195
E.3	Fonctionnelles d'environnements classiques . . . . .	196
E.4	Effets physiques des fonctionnelles d'influence . . . . .	197
<b>Bibliographie</b>		<b>199</b>

# Introduction

---

LES Ondes Gravitationnelles (OG) sont un élément essentiel de notre environnement, au même titre que les Ondes Électromagnétiques (OEM), bien qu'elles n'aient pas encore été détectées directement. C'est à l'étude de quelques-uns de leurs effets qu'est consacré ce travail de thèse.

Les OG sont les radiations gravitationnelles prédites par la Relativité Générale (RG), c'est-à-dire la théorie relativiste de la gravitation. Cette théorie a passé avec succès les nombreux tests auxquels elle a été soumise depuis sa naissance [1]. Elle doit être prise en compte pour l'étude des phénomènes astrophysiques dans lesquels interviennent des champs forts ou des vitesses élevées. Elle joue un rôle central en cosmologie.

L'existence des des OG est une prédiction centrale de la RG qui n'a pas encore été mise en évidence directement. Elle a toutefois été prouvée de façon indirecte par l'étude des séquences temporelles des pulses émis par les pulsars binaires [2]. Leur détection directe donne lieu à des programmes très importants, d'une part par la construction de grands interféromètres optiques [3, 4, 5, 6, 7], d'autre part par la conception d'un détecteur spatial encore plus grand [8].

Cette détection sera un événement considérable pour la communauté des relativistes et des astrophysiciens. Pour la première communauté, elle constituera un test fondamental de la validité de la Relativité Générale [9]. D'une part, les OG sont les solutions radiatives des équations d'Einstein, de la même façon que les ondes électromagnétiques sont les solutions radiatives des équations de Maxwell. Leur observation directe serait donc une nouvelle confirmation éclatante de la théorie de la RG telle qu'elle a été formulée par Einstein. D'autre part, la détermination de la vitesse de propagation des OG permet de tester si celles-ci correspondent à des excitations d'un champ de masse nul (le graviton), comme prédit par le RG d'Einstein, ou bien si le graviton possède une masse et se propage alors à une vitesse plus faible que celle de la lumière. Pour tester cette hypothèse expérimentalement, une idée

naturelle consiste à comparer les temps d'arrivée d'une OG et d'une onde électromagnétique provenant du même événement, par exemple une supernova ou une binaire de trous noirs.

Pour la communauté des astrophysiciens, l'observation des OG ouvrira une nouvelle « fenêtre » sur l'Univers, permettant d'obtenir des informations tout à fait différentes de celles dont on dispose aujourd'hui [10]. Elle permettra de tester la théorie des objets astrophysiques compacts tels que les trous noirs. Ceux-ci sont probablement des objets assez abondants [11], et des trous noirs super-massifs semblent être présents au centre de la plupart des galaxies, y compris la notre [12]. Leurs propriétés détaillées ne peuvent être comprises qu'à l'aide de la RG et leur étude fera des pas de géant dès que seront détectées des OG émises par ces systèmes ou des binaires contenant au moins un trou noir. Par exemple, la forme d'onde émise par une binaire de trous noirs lors de sa coalescence dépend de façon critique des effets non linéaires prévus par la RG et son observation fournira donc un laboratoire idéal pour l'étude de la gravitation en champ fort [13, 14].

Un autre objectif très important de cette « astrophysique gravitationnelle » qui est en train de naître aujourd'hui [15] est l'étude des OG qui ont pu être émises par l'Univers lui-même, en particulier lors de son évolution primordiale [16]. Les OG sont très peu couplées à la matière ce qui implique que ce rayonnement est très peu absorbé ou diffusé entre son émission et sa détection. Cette particularité des OG a comme conséquence importante que les OG ainsi créées se sont rapidement découplées et ont donc pu laisser une empreinte de l'état de l'Univers à cette époque primordiale. En comparaison, les photons se sont découplés 300 000 ans après le Big-Bang et reflètent l'Univers à cette période. En ce sens, la détection de ces OG reliques constitue un challenge de tout premier ordre pour la cosmologie puisqu'elle permettrait de tester les modèles de la cosmologie primordiale, en particulier les modèles d'inflation [17, 18, 19]. L'observation de ce rayonnement gravitationnel permettra ainsi d'obtenir des informations très précieuses sur la structure de l'Univers, notamment sur les composantes « matière noire » et « énergie noire » qui constitue 96% du contenu en énergie de l'Univers et qui ne sont connues qu'au travers d'informations sur leur interaction avec le champ gravitationnel [20].

Évidemment, une autre conséquence de la faiblesse du couplage des OG à la matière est que ces ondes sont beaucoup plus difficiles à détecter que les ondes électromagnétiques. Les premiers détecteurs étudiés depuis les années 60 sont les barres de Weber [21]. Ces détecteurs sont essentiellement des barres solides de différentes formes dont les résonances acoustiques peuvent être excitées par le passage des OG [22, chap. 37.4]. Autrement dit, les barres détectent l'énergie déposée dans leurs modes de vibration interne par le passage d'OG. Malgré les efforts considérables déployés depuis 40 ans pour améliorer cette technique, refroidir les barres en dessous de 1 K, développer des stratégies astucieuses de lecture du signal et de réduction du bruit, la sensibilité n'a pas encore atteint le niveau requis pour détecter des OG. De plus, ces détecteurs ont par nature des bandes de détection étroites correspondant aux résonances acoustiques des barres. Elles peuvent donc difficilement prétendre servir d'observatoires.

C'est pour remédier à ces problèmes qu'a démarré l'étude des grands détecteurs interférométriques, dont on attend les prochaines détections dans les toutes prochaines années. Pour atteindre des sensibilités suffisantes, ces détecteurs sont des interféromètres de Michelson avec une taille de plusieurs kilomètres et des cavités Fabry-Perot dans chaque bras. Une introduction à ces détecteurs peut être trouvée dans [24] et le livre [25]. Des sites web sont consacrés à chacun de ces projets [3, 4, 5, 6, 7].

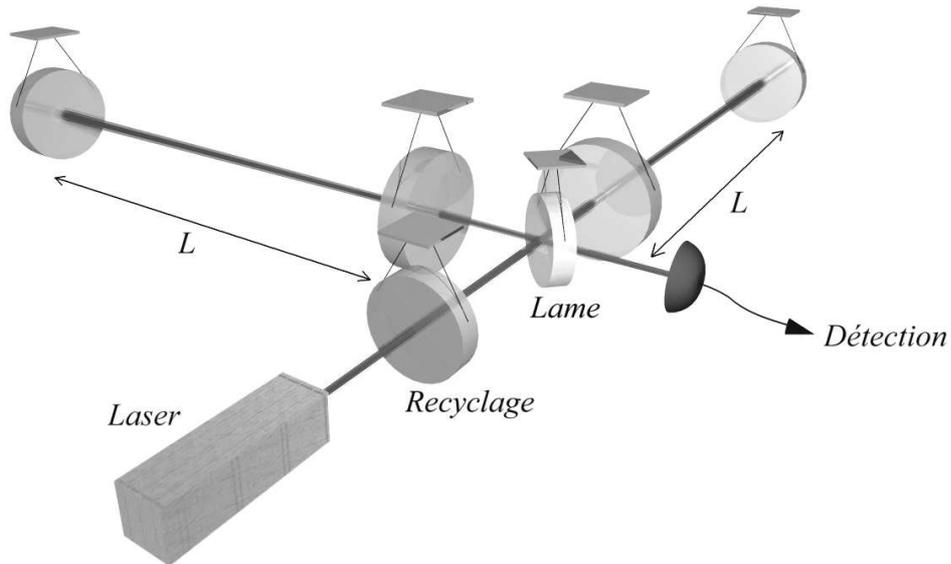


FIG. 1.1: Schéma d'un détecteur interférométrique d'OG tel que VIRGO.

On discute maintenant rapidement le principe de fonctionnement du détecteur Franco-Italien VIRGO dont on a représenté une vue d'artiste sur la figure (1.1). Dans la configuration de Michelson en frange noire, le signal en sortie est proportionnel à la différence de longueur entre les deux bras perpendiculaires. Chaque bras de l'interféromètre est en fait une cavité Fabry-Perot, ce qui permet d'augmenter la taille effective de l'interféromètre et dans le même temps d'augmenter la sensibilité de l'appareil. Le miroir de recyclage de puissance permet de réinjecter la lumière qui sort de l'interféromètre puisque l'on se place sur une frange noire. Tous les miroirs ainsi que la séparatrice sont suspendus à l'aide d'un système de pendules sophistiqué qui permet de découpler l'instrument du bruit sismique aux basses fréquences. On se retrouve ainsi avec des miroirs quasiment libres, du moins pour les fréquences dans la bande de détection de l'appareil.

La bande de détection de ces détecteurs terrestres est principalement déterminée par trois facteurs, à savoir le bruit sismique pour les basses fréquences (à partir de 1 Hz pour VIRGO), les bruits thermiques aux fréquences intermédiaires (autour de la centaine de Hz), et le bruit optique filtré par l'instrument aux hautes fréquences (jusqu'à quelques kHz). La figure (1.2) récapitule l'effet de ces trois facteurs dans la courbe de sensibilité de VIRGO. Les

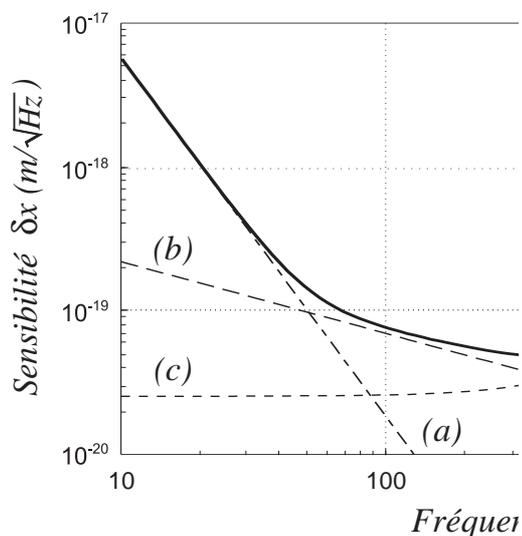


FIG. 1.2: Spectre de bruit de position des miroirs dans VIRGO. La sensibilité du détecteur est déterminée principalement par trois grands bruits. (a) : le bruit sismique. (b) : les bruits thermiques. (c) : le bruit de phase du laser filtré par les cavités. Ici on donne la sensibilité en  $m/\sqrt{\text{Hz}}$ .

autres détecteurs interférométriques fonctionnent sur des principes analogues. LIGO vise une sensibilité un petit peu meilleure que VIRGO à sa fréquence optimale (vers le kHz) mais il est en revanche moins sensible aux basses fréquences (de 1 à quelques Hz) par suite d'efforts moindres sur la qualité des suspensions. GEO est désavantagé par sa taille moins grande (600 m au lieu de 3 à 4 km pour VIRGO et LIGO). TAMA est encore moins grand (300 m) mais il développe d'ores et déjà des techniques cryogéniques pour essayer de compenser ce facteur défavorable [6].

De façon générale, de nombreuses solutions sont étudiées pour améliorer la sensibilité de ces appareils. Certaines d'entre elles seront intégrées dans les évolutions des grands interféromètres prévues pour les prochaines années (comme par exemple le recyclage du signal [26]). En particulier, on peut signaler l'utilisation des états comprimés [27] ou des techniques de contrôle du bruit applicables aux fluctuations thermiques [28] ou quantiques [29]. D'autres configurations sont aussi envisageables [30, 31, 32, 33]. Enfin, une autre possibilité étudiée très activement concerne le détecteur spatial LISA qui est sensible à des fréquences beaucoup plus basses (de  $10^{-3}$  à  $10^{-1}$  Hz) en raison de sa taille beaucoup plus grande (5 millions de km) [8].

Les OG qui seront détectées par VIRGO et les autres détecteurs interférométriques correspondent à des événements, comme par exemple des coalescences de binaires. Ces événements correspondent à des signatures très particulières dans le domaine temporel aussi bien que spectral et l'étude de ces signatures (forme d'onde, « patrons » standards...) fait l'objet de

---

nombreuses études [34]. Dans cette thèse, on mettra l'accent sur les fonds stochastiques d'OG. L'exemple le mieux connu d'un tel fond correspond à la confusion des émissions de tous les systèmes binaires de notre Galaxie et de son voisinage [35]. Ces ondes non résolues peuvent être considérées comme un bruit gravitationnel stationnaire et elles sont caractérisées par un spectre que l'on décrira de manière plus détaillée dans la suite. Les cosmologistes prédisent également l'existence d'un fond gravitationnel relique, émis lors des phases primordiales d'évolution de l'Univers, dont l'observation fournirait des informations d'une valeur inestimable sur ces phases [17].

Ces fonds d'origine galactique et cosmique ne peuvent pas être détectés par les interféromètres construits sur Terre. Ils sont cependant susceptibles d'être vus dans la fenêtre de détection de LISA et leur observation constitue pour cette raison un des enjeux importants de ce projet [8].

Le but de la présente thèse est d'étudier des mécanismes de décohérence qui pourraient en principe permettre de mettre en évidence les fonds stochastiques d'OG sur d'autres systèmes que LISA. Afin de bien comprendre en quoi consiste cet effet, on rappelle que de façon générale la décohérence rend compte de la perte de cohérence d'un système lorsque celui-ci interagit avec un environnement possédant un grand nombre de degrés de liberté. En particulier, si on prépare un état pur qui est une superposition linéaire de deux états différents, l'interaction avec un environnement transforme dynamiquement cet état pur en un mélange statistique. Cet effet explique que les objets qui sont très couplés à un environnement extérieurs, comme par exemple les objets macroscopiques, se comportent classiquement alors que les objets isolés conservent leurs propriétés quantiques. Outre l'intérêt fondamental que revêt la décohérence pour expliquer l'existence de phénomènes classiques dans un monde physique régi par les lois de la mécanique quantique (voir par exemple le livre [36]), elle joue un rôle important dans les technologies quantiques qui se développent très rapidement en ce moment. En effet, la décohérence est un des problèmes difficiles qui s'opposent au développement des machines quantiques et limite pour le moment le calcul quantique cohérent [37, 38].

Le phénomène de décohérence a déjà été observé expérimentalement dans des expériences d'électrodynamique quantique en cavité pour des superpositions linéaires de deux états du champ électromagnétique en cavité microonde [39, 40, 41]. Dans cette expérience, la cohérence de la superposition est mesurée à l'aide d'un atome sonde dont on regarde les corrélations avec l'état de l'atome qui a préparé la superposition. En effet, l'état du champ après le passage du premier atome est corrélé à celui-ci et lorsque le second atome passe dans la cavité un instant après, il se corrèle à son tour à l'état du champ tel qu'il est à ce moment. La mesure de la corrélation entre ces deux atomes permet de mesurer la perte de cohérence de la superposition de l'état du champ en fonction du temps d'attente entre le passage du premier et du second atome. La cohérence décroît rapidement avec le temps, beaucoup plus vite que le temps de vie du champ dans la cavité et d'autant plus vite que la « distance » entre les deux états impliqués dans la superposition linéaire est grande. Dans ces expériences, la décohérence est déterminée par les fluctuations de l'environnement électromagnétique des atomes et du champ

dans la cavité.

Dans cette thèse, nous étudierons l'effet de décohérence induit par les fluctuations de notre environnement gravitationnel [42]. Ces fluctuations s'identifient exactement aux OG émises par toutes les sources astrophysiques et cosmologiques et elles sont caractérisées par une densité spectrale de bruit. Contrairement aux fluctuations électromagnétiques dont on peut se protéger par des techniques de blindage ou en abaissant la température, les fonds stochastiques d'OG sont couplés de façon inévitable à tout système. Autrement dit, l'environnement gravitationnel a un caractère très universel même si son couplage à la matière est faible, comme pour les OG en général.

L'idée de mettre en évidence des fluctuations gravitationnelles par un effet de décohérence n'est en fait pas nouvelle. Déjà présente dans le cours de Feynman sur la gravitation [43, 44], l'idée que les fluctuations de gravitation puissent jouer un rôle universel dans la transition entre le monde classique et le monde quantique a ensuite été étudiée par de nombreux auteurs et popularisée par exemple dans [45, 46, 47, 48, 49]. À l'échelle de Planck, la plupart des modèles de gravité quantique prévoit que l'espace est soumis à des fluctuations quantiques incessantes dont la taille est de l'ordre de la longueur de Planck  $\ell_P \sim 10^{-35}$  m [50]. Ces fluctuations créent une structure granulaire appelé mousse d'espace-temps [51] (space-time foam). Ces fluctuations sont bien plus petites que n'importe quelle échelle observable actuellement mais il existe de nombreuses propositions qui pourraient permettre de les détecter [52, 53, 54, 48].

Dans ce contexte, l'idée d'utiliser la décohérence comme révélateur de ces fluctuations est tout à fait analogue au fait que le mouvement Brownien a permis de révéler l'existence des atomes longtemps avant que l'on puisse résoudre l'échelle atomique. Même si les fluctuations se font à une échelle inobservable, l'effet cumulé d'un très grand nombre de ces fluctuations donne lieu à un effet de diffusion que l'on peut observer sur des objets plus gros, à des échelles observables. Dans le cas du mouvement Brownien habituel, la diffusion d'une particule macroscopique, une poussière par exemple, est une diffusion spatiale due aux très nombreux chocs des atomes : le mouvement macroscopique global révèle l'existence de fluctuations microscopiques. De façon analogue, les fluctuations à l'échelle de Planck pourraient être révélées par une diffusion de la phase dans des interféromètres atomiques de très grande sensibilité [52, 53, 54, 48, 55, 56]. Comme le suggère la « vue d'artiste » de la figure (1.3), ces fluctuations pourraient provoquer une décohérence de l'interféromètre mise en évidence expérimentalement à travers une chute du contraste des franges.

Les fluctuations quantiques du champ de gravité à l'échelle de Planck sont calculables [57] bien qu'on ne dispose pas encore aujourd'hui d'une théorie consistante de la gravité quantique. La raison en est que la RG est de toute façon une bonne théorie effective de la gravité aux fréquences auxquelles sont faites les expériences [58, 59, 60]. Bien évidemment, elles ont des effets habituellement très petits, en raison de la valeur extrêmement petite de la longueur de Planck. Les effets étudiés dans cette thèse sont beaucoup plus grands que ces effets quantiques. En effet, ils sont dus aux OG stochastiques qui sont des ondes classiques contenant un très



FIG. 1.3: Représentation d'artiste de la décohérence que peuvent induire des fluctuations à l'échelle de Planck sur la phase d'un interféromètre atomique de grande sensibilité.

grand nombre de gravitons par mode. Autrement dit, l'environnement gravitationnel est un bain très faiblement couplé aux systèmes étudiés, mais de très haute température [42]. C'est cette dernière propriété qui justifie notre intérêt particulier pour ce mécanisme de décohérence.

Comme on le verra dans la thèse, ce mécanisme est en fait le mécanisme dominant de décohérence pour les mouvements macroscopiques, tels que le mouvement de la Lune autour de la Terre. On étudiera aussi de manière détaillée l'effet de décohérence sur des interféromètres atomiques par suite du déphasage stochastique introduit par la diffusion du fond d'OG. Pour ces instruments la cohérence est simplement reliée au contraste des franges et cette caractérisation a déjà été utilisée pour étudier expérimentalement la décohérence d'un interféromètre induite par la diffusion d'un bain de photons [61]. On prendra comme exemple explicite le projet d'interféromètre HYPER pour lequel il a été proposé que la décohérence due à la structure granulaire de l'espace-temps pourrait être observable [52, 53, 54]. HYPER est un projet de l'Agence Spatiale Européenne dont l'objectif est de mesurer l'effet Lense-Thirring, un effet relativiste d'entraînement du référentiel d'inertie local par la rotation de la Terre. Il s'agit d'un interféromètre atomique en orbite autour de la Terre et utilisé comme gyromètre de très haute précision.

Dans le second chapitre de cette thèse, nous allons présenter une première approche du problème de la décohérence gravitationnelle afin de mettre en évidence ses principales caractéristiques. Nous montrerons comment les fluctuations gravitationnelles affectent l'évolution des systèmes matériels aussi bien que des champs électromagnétiques. Nous discuterons les effets de la décohérence pour les interféromètres [62] ainsi que pour le mouvement du centre de masse de la Lune [42].

Dans le troisième chapitre, nous nous attacherons à donner une description théorique

plus générale et plus élaborée de l'effet de décohérence d'un système quelconque par son interaction avec le bain d'OG. Afin de décrire cet effet de la façon la plus générale, nous adopterons une approche Lagrangienne et nous calculerons la fonctionnelle d'influence de Feynman-Vernon [63, 64]. Cette méthode très générale consiste à intégrer sur les degrés de liberté de l'environnement et permet de calculer la modification de l'opérateur évolution du système induit par l'interaction avec l'environnement [65]. Cette approche se révèle comode ici car le couplage aux OG est faible et les méthodes perturbatives habituelles pour les intégrales de chemins peuvent s'appliquer. Nous montrerons que cette méthode permet de calculer la décohérence pour un système arbitraire couplé à un fond d'OG caractérisé par un spectre quelconque. Nous verrons aussi que dans la double limite d'un environnement faiblement couplé et possédant un grand nombre de quanta, limite parfaitement adaptée pour le bain d'OG, les résultats généraux du troisième chapitre redonnent comme cas particulier ceux du deuxième chapitre. Ils permettent également de retrouver quelques résultats moins systématiques qui peuvent être trouvés dans la littérature [66, 67, 68]

Dans le quatrième chapitre, nous utiliserons ces résultats pour discuter la question d'une frontière universelle entre les mondes classique et quantique. Cette question a fait l'objet de nombreuses propositions depuis celle de Feynman [43]. Le mécanisme discuté dans cette thèse est un exemple d'un mécanisme entièrement calculable dans le cadre de la physique actuelle et qui fournit des réponses quantitatives précises. On retrouve, comme on s'y attendait, que la décohérence gravitationnelle est négligeable pour les objets microscopiques et dominant pour les objets macroscopiques. Malheureusement, des expériences probantes ne peuvent être faites ni dans un cas, ni dans l'autre : le temps de décohérence est beaucoup trop long pour être observable dans le premier cas et il est beaucoup trop court dans le second cas. Dans ces conditions, il est intéressant de chercher si on peut mettre en évidence expérimentalement l'existence et la position de la frontière entre le mode classique et le monde quantique. Pour fixer les idées, on se concentre sur des expériences de type interférométrie et on recherche les conditions expérimentales qu'il faudrait réunir pour atteindre cette frontière. En connexion avec les expériences sur les interférences d'objets de plus en plus gros [69, 70], on montre qu'il existe une limite à la possibilité de faire interférer des objets de plus en plus lourds et chauds et on discute les paramètres pertinents dont dépend explicitement cette limite.

---

# Décohérence gravitationnelle : première approche

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>L'environnement gravitationnel et son influence</b> . . . . .	<b>11</b>
A.1	Effets métriques sur la propagation d'un champ . . . . .	11
A.2	Principe de la détection interférométrique des OG . . . . .	17
A.3	Description des fonds stochastiques d'OG . . . . .	28
<b>B</b>	<b>Décohérence gravitationnelle dans les interféromètres atomiques</b> <b>36</b>	
B.1	Présentation succincte du projet HYPER . . . . .	36
B.2	Déphasage gravitationnel dans un interféromètre atomique en approximation eikonale . . . . .	40
B.3	Décohérence gravitationnelle dans le projet HYPER . . . . .	56
<b>C</b>	<b>Décohérence du mouvement du centre de masse de la Lune</b> . . .	<b>66</b>
C.1	Perturbation du mouvement de la Lune . . . . .	67
C.2	Diffusion du mouvement de la Lune . . . . .	73
C.3	Décohérence d'une Lune de Schrödinger . . . . .	81

---

**L**A décohérence résulte de l'interaction d'un système avec un environnement extérieur qui possède des fluctuations, qu'elles soient d'origine classique ou quantique. La décohérence due à l'interaction avec un fond d'ondes électromagnétiques a été et est encore beaucoup étudiée sur de très nombreux systèmes car c'est pour le moment le mécanisme de décohérence qui limite le fonctionnement des « machines quantiques ».

Dans cette thèse, nous étudions l'effet de notre environnement gravitationnel qui est rempli de bruit sur une très vaste plage de fréquence. Celui-ci correspond aux Ondes Gravitationnelles (OG) et a bien sûr un couplage plus faible aux systèmes quantiques habituels que

l'environnement électromagnétique, mais il a aussi un aspect très fondamental dans la mesure où on ne peut pas s'en protéger. Enfin, la décohérence gravitationnelle constitue un exemple exactement calculable de phénomène physique à l'interface entre la théorie quantique et la théorie de la gravitation.

## A L'environnement gravitationnel et son influence

La théorie de la Relativité Générale (RG) prévoit que les OG sont couplées à tout système physique mais trop faiblement pour être actuellement détectable. La faiblesse de ce couplage a empêché pour le moment leur détection directe, mais le développement rapide des techniques interférométriques permet d'atteindre des sensibilités proches des estimations théoriques pour le niveau des OG et leur éventuelle détection directe devrait se produire dans les prochaines années.

La première partie de cette section résume les concepts théoriques sous-jacents à leur détection et notamment la façon dont les OG agissent sur les particules matérielles et la lumière. En particulier, on traitera la perturbation des équations de propagation dans l'approximation eikonale [71, 72], qui est l'analogie de l'approximation de l'optique géométrique pour la propagation des rayons lumineux.

La deuxième partie applique ces concepts au cas des détecteurs interférométriques d'OG. À cette occasion, on explicite le calcul du signal gravitationnel dans deux systèmes de coordonnées différents. Chacun de ces systèmes de coordonnées permet de se faire une image physique de la façon dont agissent les OG en reportant l'effet des OG soit sur un déplacement effectif des miroirs de l'interféromètre, soit sur un déphasage de la lumière qui se propage dans l'interféromètre. Ces deux images physiques sont équivalentes, mais elles doivent bien sûr être utilisées avec précaution.

Enfin, la dernière partie présente les caractérisations statistiques prédites, à l'heure actuelle, pour les fonds d'OG dans lesquels nous baignons. On introduit une température effective de bruit qui rend compte du niveau des fluctuations gravitationnelles aux différentes fréquences susceptibles d'agir sur les systèmes physiques.

### A.1 Effets métriques sur la propagation d'un champ

Lorsque qu'un détecteur fait intervenir la lumière et des objets matériels, l'effet physique observé dans le détecteur implique à la fois la lumière et la matière. On a alors tendance à donner des images physiques en traitant séparément l'effet des OG sur la lumière et sur la matière. Cependant, cette séparation est plutôt artificielle car elle dépend de façon cruciale du choix du système de coordonnées. Cette constatation est fréquente en Relativité Générale (RG) et même en électromagnétisme. En effet, on sait par exemple qu'un changement de référentiel change l'interprétation des effets que l'on peut attribuer au champ électrique ou au champ magnétique.

#### A.1.1 L'approximation eikonale

On va décrire maintenant les équations qui régissent l'évolution de la phase d'un champ scalaire dans l'approximation eikonale. Dans ce but, la fonction d'onde  $\psi(x)$  du champ est

décomposée sous la forme suivante :

$$\psi(x) = \psi_0(x)e^{i\varphi(x)} \quad (2.1)$$

$\psi_0(x)$  et  $\varphi(x)$  sont des fonctions réelles. L'amplitude  $\psi_0(x)$  est une fonction supposée lentement variable par rapport à la phase  $\varphi(x)$  qui vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi (ordre dominant dans l'approximation eikonale (voir l'appendice B pour plus de détails) :

$$g^{\mu\nu}(x)K_\mu(x)K_\nu(x) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \quad , \quad K_\mu(x) = \partial_\mu\varphi(x) \quad (2.2)$$

Avec  $K_\mu$  un vecteur d'onde pour le champ. Cette équation régit la propagation de la phase partout où celle-ci est continue et différentiable. Si cette hypothèse est vérifiée par morceaux seulement, alors il faut rajouter au déphasage calculé en résolvant l'équation (2.2) la somme algébrique  $\Delta\varphi$  des discontinuités de phase le long de la trajectoire. Ce cas de figure peut apparaître par exemple lors de réflexion de la lumière sur des miroirs, ou lorsqu'une onde de matière se réfléchit sur un faisceau lumineux.

On sait que l'approximation eikonale sur l'onde est équivalente à l'équation géodésique d'une particule semi-classique qui correspondrait au centre du « paquet » d'onde (voir l'annexe B pour une discussion plus détaillée de cet argument et de ses conditions de validité; voir aussi [73]). Dans cette approximation, on peut donc considérer que la particule se déplace le long d'une géodésique.

### A.1.2 Perturbation du déphasage

Dans l'approximation eikonale, l'effet de la propagation est d'introduire un déphasage  $\delta\varphi(x)$  du champ par rapport au déphasage non perturbé  $\varphi^{(0)}(x)$  :

$$\varphi(x) = \varphi^{(0)}(x) + \delta\varphi(x) \quad (2.3)$$

En théorie linéarisée d'Einstein, la métrique se décompose selon :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad , \quad |h^{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.4)$$

Et les indices sont levés et baissés à l'aide de la métrique de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ . En particulier, on :

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma} \quad (2.5)$$

Le déphasage  $\delta\varphi(x)$  se calcule alors à l'ordre le plus bas dans la perturbation  $h_{\mu\nu}$  à partir de l'équation eikonale (2.2) :

$$2K^\mu(x)\partial_\mu\delta\varphi(x) - h_{\mu\nu}(x)K^\mu(x)K^\nu(x) = 0 \quad (2.6)$$

Dans une approximation linéaire en la perturbation métrique  $h_{\mu\nu}$ , le vecteur d'onde  $K^\mu(x)$  est pris à l'ordre zéro dans la perturbation :

$$K^\mu(x) = K^{\mu(0)}(x) = \partial^\mu\delta\varphi^{(0)}(x) \quad (2.7)$$

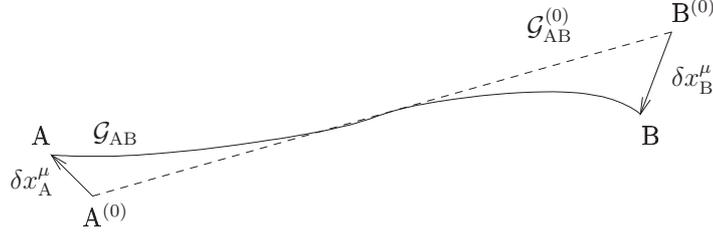


FIG. 2.1: Perturbation de la propagation d'un champ. Il y a deux contributions au déphasage induit par les OG sur la propagation de la phase  $\varphi(x)$ . La première provient du changement induit sur la phase  $\varphi$  le long de la trajectoire, et l'autre sur le déplacement des deux bouts A et B de cette trajectoire.

Cette équation peut ensuite s'intégrer le long de la géodésique  $\mathcal{G}$  en repérant celle-ci à l'aide d'un paramètre affine  $\lambda$ . En choisissant une paramétrisation telle que :

$$dx^\mu = K^\mu d\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\lambda} = K^\mu \partial_\mu \quad (2.8)$$

on obtient (voir par exemple [72] pour plus de détails) :

$$\delta\varphi_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} h_{\mu\nu}(x) K^\mu(x) K^\nu(x) d\lambda \quad (2.9)$$

où  $x$  est la position calculée pour le paramètre  $\lambda$ .

En fait, le déphasage doit être évalué entre deux points physiques A et B, correspondants par exemple à des miroirs, et ceux-ci sont aussi susceptibles de se déplacer sous l'effet de la perturbation métrique (voir figure (2.1)). En traitant linéairement tous les termes, on peut alors écrire le déphasage entre les points physiques A et B comme une somme de trois contributions :

$$\begin{aligned} \varphi(x_B) - \varphi(x_A) &= \varphi^{(0)}(x_{B,(0)}) - \varphi^{(0)}(x_{A,(0)}) \\ &+ \left(x_B^\mu - x_{B,(0)}^\mu\right) \partial_\mu \varphi^{(0)}(x_{B,(0)}) - \left(x_A^\mu - x_{A,(0)}^\mu\right) \partial_\mu \varphi^{(0)}(x_{A,(0)}) \\ &+ \delta\varphi_{\mathcal{G}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$\varphi^{(0)}(x_B^{(0)}) - \varphi^{(0)}(x_A^{(0)})$  est le déphasage à l'ordre zéro enregistré par le champ en l'absence de perturbation métrique le long de la géodésique non perturbée  $\mathcal{G}_{AB}^{(0)}$ . La variation du déphasage due à la perturbation métrique est alors la somme des deux derniers termes qu'on peut réécrire :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{AB} &= K_\mu[B] \delta x_B^\mu - K_\mu[A] \delta x_A^\mu \\ &+ \delta\varphi_{AB} \end{aligned} \quad (2.11)$$

La première ligne provient du déplacement des points A et B par la perturbation métrique et sera appelé dans la suite déphasage de bords en référence au fait qu'il ne dépend que de la position des points initiaux et finaux. Ces déplacements peuvent se calculer si on spécifie comment sont matérialisés les points A et B et dans quel système de coordonnées on se place. On rappelle que les vecteurs d'onde sont évalués à l'ordre zéro dans cette expression.

La seconde ligne est la perturbation du déphasage accumulée le long de la propagation du champ sur la géodésique  $\mathcal{G}_{AB}$ . On note ce déphasage  $\delta\varphi$ , à ne pas confondre avec le déphasage global  $\Delta\varphi$ . Puisque l'intégrande qui apparaît dans l'intégrale (2.9) est d'ordre un dans la perturbation  $h_{\mu\nu}$ , cette contribution se réduit à une intégrale sur la géodésique non perturbée. L'expression de  $\delta\varphi_{AB}$  est donnée par l'équation (2.9), là encore évaluée avec un vecteur d'onde non perturbé (2.7).

Tout au long de ce manuscrit, on choisit de noter  $\Delta\varphi$  les variations de phase qui tiennent compte à la fois du déphasage propagatif, que l'on note  $\delta\varphi$ , et des termes de bords.

Lorsqu'il est évalué sur un contour fermé, on verra dans la section suivante que le déphasage total est un invariant de jauge. Par contre, sa décomposition en deux termes sera différente dans des référentiels différents.

### A.1.3 Invariance de jauge du déphasage dans un interféromètre

Tel que nous l'avons exprimé, le déphasage n'apparaît pas comme explicitement invariant de jauge, car il a été exprimé en fonction du potentiel gravitationnel  $h_{\mu\nu}$  et de termes de bords dépendant du déplacement  $\delta x^\mu$  des points où le champ se sépare, se réfléchit et se recombine. Il est important de s'assurer de l'invariance de jauge de cette expression avant de spécifier une jauge particulière. Cette invariance sera reprise de manière systématique dans le second chapitre. Ici, on peut la discuter pour le cas particulier que nous sommes en train d'étudier.

Pour cela, on part de l'expression (2.10) du déphasage valable le long d'un segment [AB] que l'on peut aussi écrire de façon commode en remarquant que  $K^\mu d\lambda = dx^\mu$  :

$$\Delta\varphi[AB] = \frac{1}{2} \int h_{\mu\nu}(x) K^\mu dx^\nu + K_\mu (\delta x_B^\mu - \delta x_A^\mu) \quad (2.12)$$

Si on considère la géométrie Mach-Zehnder de la figure (2.2), alors le déphasage  $\Delta\varphi$  mesuré par l'interféromètre s'écrit :

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \oint_{ABCD} h_{\mu\nu}(x) K^\mu dx^\nu + (K_\mu^- - K_\mu^+) (\delta x_A^\mu - \delta x_B^\mu - \delta x_C^\mu + \delta x_D^\mu) \quad (2.13)$$

On a noté pour simplifier  $K_\mu^+$  et  $K_\mu^-$  les vecteurs d'onde sur les segments [AB] et [CD] d'une part et [BD] et [AC] d'autre part.

Le déphasage propagatif s'exprime donc comme une circulation du vecteur  $\frac{1}{2}h_{\mu\nu}K^\mu$  sur la boucle fermée constituant l'interféromètre. De façon analogue, on peut réécrire le terme de bord comme une intégrale de contour en définissant  $\delta x^\mu(x)$  le déplacement du faisceau

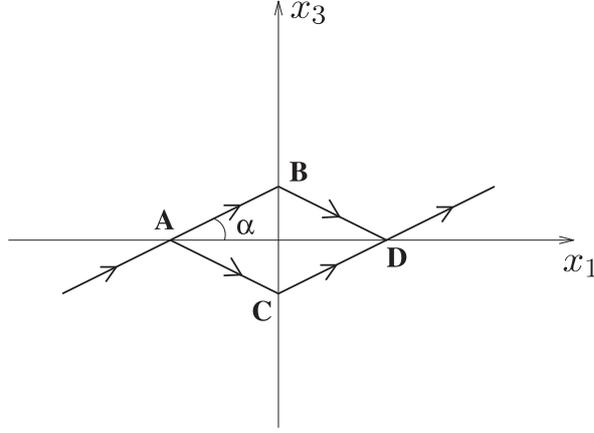


FIG. 2.2: Représentation schématique d'un interféromètre atomique avec une géométrie de Mach-Zehnder présentant la symétrie du losange.

atomique à la position  $x$  le long de la géodésique :

$$\begin{aligned}
 (K_{\mu}^{-} - K_{\mu}^{+}) (\delta x_{\text{A}}^{\mu} - \delta x_{\text{B}}^{\mu} - \delta x_{\text{C}}^{\mu} + \delta x_{\text{D}}^{\mu}) &= \oint_{\text{ABCD}} K_{\mu}(x) \partial_{\nu} \delta x^{\mu}(x) dx^{\nu} \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{\text{ABCD}} (\partial_{\nu} \delta x_{\mu} + \partial_{\mu} \delta x_{\nu}) K^{\mu} dx^{\nu} \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Ainsi, le déphasage total peut s'écrire finalement comme une circulation sur la boucle fermée non perturbée de l'interféromètre :

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2} \oint_{\text{ABCD}} (h_{\mu\nu} + \partial_{\nu} \delta x_{\mu} + \partial_{\mu} \delta x_{\nu}) K^{\mu} dx^{\nu} \quad (2.15)$$

Un changement de jauge, c'est-à-dire un changement de coordonnées infinitésimal (C-8), ne change pas cette expression du déphasage. Cette situation est analogue à l'effet Aharonov-Bohm dans lequel le potentiel vecteur intégré sur un contour fermé permet de former une quantité invariante de jauge. De façon générale, les phases définies comme un couplage entre les potentiels et un courant conservé sont automatiquement invariantes de jauge quand elles sont évaluées sur un contour fermé.

Dans le cas de la détection d'OG, le déphasage pourra être écrit en fonction des courbures de Riemann. Avant de traiter ce cas, on donne d'abord un exemple de calcul explicite de déphasage dans le cas simple de l'effet Sagnac pour lequel l'expression du déphasage est aussi un invariant de jauge. Dans ce dernier cas, ce déphasage invariant ne peut bien sûr pas être écrit en fonction des courbures de Riemann qui sont nulles pour la métrique plate obtenue dans un référentiel non inertiel.

### A.1.4 L'effet Sagnac

L'effet Sagnac a un grand nombre d'interprétations différentes (voir [74, partie 2.1] pour une revue des différentes approches et [75, 76, 77, 78, 79]). On en donne ici une interprétation à l'aide de l'expression (2.9) obtenue dans la partie précédente.

Considérons une configuration dans laquelle un faisceau de lumière de fréquence  $\Omega_{\text{phot}}$  se propage le long d'un chemin fermé dans deux directions opposées en partant du point A. On suppose cet interféromètre dans le plan  $(x^1, x^2)$  et en rotation à la fréquence  $\Omega_{\text{rot}}$  autour de l'axe  $x^3$  (voir figure (2.3)). On suppose que la métrique est Minkowskienne dans le référentiel du laboratoire dont on note les coordonnées  $\hat{x}^\mu$  avec des chapeaux. Dans un référentiel attaché à l'interféromètre, c'est-à-dire un système de coordonnées  $\{x^\mu\}$  en rotation avec l'instrument, on obtient :

$$\begin{cases} x^0 = \hat{x}^0 \\ x^1 = \hat{x}^1 \cos(\Omega_{\text{rot}} t) - \hat{x}^2 \sin(\Omega_{\text{rot}} t) \\ x^2 = \hat{x}^1 \sin(\Omega_{\text{rot}} t) + \hat{x}^2 \cos(\Omega_{\text{rot}} t) \\ x^3 = \hat{x}^3 \end{cases} \quad (2.16)$$

Dans ce référentiel, il apparaît une perturbation métrique  $h_{\mu\nu}^{\text{Sagnac}}$  que l'on peut calculer grâce à la loi de transformation de la métrique (A-8). On obtient explicitement :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{\text{Sagnac}}$$

$$h_{\mu\nu}^{\text{Sagnac}}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{\Omega_{\text{rot}}^2((x^1)^2 + (x^2)^2)}{c^2} & \frac{\Omega_{\text{rot}} x^2}{c} & -\frac{\Omega_{\text{rot}} x^1}{c} & 0 \\ \frac{\Omega_{\text{rot}} x^2}{c} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Omega_{\text{rot}} x^1}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

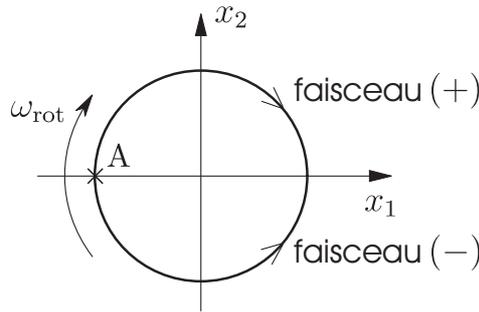


FIG. 2.3: Géométrie de l'effet Sagnac. L'interféromètre est en rotation dans son plan à la fréquence  $\Omega_{\text{rot}}$ . On fait interférer deux faisceaux lumineux (+) et (-) se propageant dans les deux directions différentes. L'état d'interférence dépend de la fréquence de rotation : c'est l'effet Sagnac.

On procède maintenant à une approximation de vitesse faible en négligeant les termes d'ordre  $\frac{\Omega_{\text{rot}}^2 x^2}{c^2} \sim \frac{v^2}{c^2}$  où  $v$  représente l'ordre de grandeur de la vitesse d'un point attaché à l'appareil par rapport au référentiel du laboratoire. Dans cette approximation, la perturbation métrique ne fait plus intervenir que les composantes  $h_{0i}$  (où  $i = 1, 2$ ) :

$$h_{\mu\nu}^{\text{Sagnac}}(x) \simeq \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_{\text{rot}} x^2}{c} & -\frac{\Omega_{\text{rot}} x^1}{c} & 0 \\ \frac{\Omega_{\text{rot}} x^2}{c} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Omega_{\text{rot}} x^1}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Dans le référentiel associé à l'instrument, les points matériels sont au repos, donc le déphasage de bord correspondant au premier terme dans l'expression (2.11) n'apparaît pas. Le déphasage est donc déterminé par le déphasage propagatif qui, pour le faisceau lumineux (+) par exemple, s'écrit à l'aide de (2.9) :

$$\Delta\varphi_{(+)} = \delta\varphi_{(+)} = \frac{1}{2} \oint h_{0i}^{\text{Sagnac}} K^0 K_{(+)}^i d\lambda \quad (2.19)$$

Pour le faisceau (-), le vecteur d'onde change de signe,  $K_{(-)}^i(\lambda) = -K_{(+)}^i(\lambda)$ , de telle sorte que le déphasage change lui aussi de signe :

$$\Delta\varphi_{(-)} = -\Delta\varphi_{(+)} \quad (2.20)$$

Le déphasage différentiel entre les deux faisceaux lumineux (+) et (-) s'écrit donc comme le double du déphasage subit par un des faisceaux :

$$\Delta\varphi_{\text{Sagnac}} = \Delta\varphi_{(+)} - \Delta\varphi_{(-)} = \oint h_{0i}^{\text{Sagnac}} K^0 dx^i \quad (2.21)$$

$$\simeq \frac{\Omega_{\text{rot}} \Omega_{\text{phot}}}{c^2} \oint (x^2 dx^1 - x^1 dx^2) \quad (2.22)$$

En introduisant l'aire  $A_{\text{phot}}$  de l'interféromètre, on retrouve l'expression habituelle du déphasage Sagnac [78] :

$$\Delta\varphi_{\text{Sagnac}} = \frac{2\Omega_{\text{phot}} A_{\text{phot}}}{c^2} \Omega_{\text{rot}} \quad (2.23)$$

Dans le calcul que nous venons de faire dans le référentiel attaché à l'instrument, le déphasage de bord est nul puisque les éléments optiques sont fixés rigidement à l'instrument. Celui-ci apparaîtrait dans un autre système de coordonnées, par exemple le référentiel du laboratoire, mais le résultat physique, à savoir le déphasage total, resterait lui inchangé.

## A.2 Principe de la détection interférométrique des OG

Le principe des détecteurs interférométriques consiste à mesurer la distance propre entre deux géodésiques qui sont matérialisées par des miroirs suspendus. Dans la pratique, ces

miroirs ne sont en mouvement géodésique que dans une certaine plage de fréquence qui correspond à la fenêtre de détection de l'instrument considéré. L'effet des fréquences plus basses est traité comme une dérive lente et est compensé. Au delà d'une certaine fréquence, le mouvement des miroirs n'est plus contrôlé et son effet se traduit comme un bruit supplémentaire qui fera l'objet des études de décohérence présentées plus loin dans cette thèse.

La mesure de la distance propre se fait par la mesure du temps d'aller retour d'un faisceau lumineux de fréquence  $\Omega_{\text{phot}}$ . Plus précisément, cette mesure est réalisée sur une configuration de Michelson qui permet d'obtenir un signal proportionnel à la différence entre la « longueur optique » des deux bras perpendiculaires de l'interféromètre  $SM_1$  et  $SM_2$  (voir figure (2.4)). Cette configuration est particulièrement bien adaptée à la détection des OG. En effet, du fait de l'effet transverse d'une OG, quand la longueur d'un bras augmente la longueur de l'autre bras diminue et ainsi la différence entre les deux bras est multipliée par deux. Le déphasage  $\Delta\varphi$  que mesure un tel interféromètre s'écrit de façon générale :

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 \quad (2.24)$$

$$\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_{SM_iS} = \Delta\varphi_{SM_i} + \Delta\varphi_{M_iS} \quad (2.25)$$

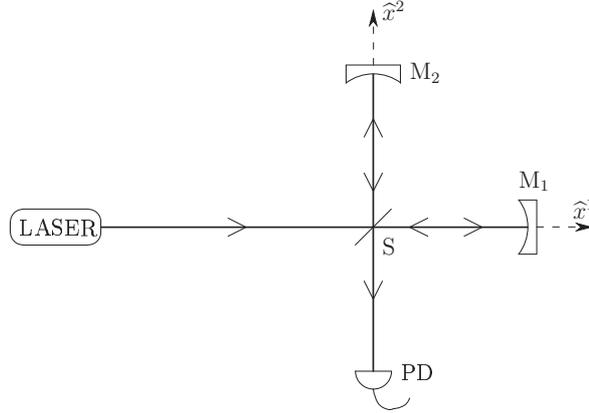


FIG. 2.4: Représentation simplifiée d'un interféromètre de Michelson servant à la détection des ondes gravitationnelles.

Pour expliciter le principe de fonctionnement d'un détecteur interférométrique d'OG, on présente ci-dessous deux images physiques correspondant à deux systèmes de coordonnées différents. Le premier système de coordonnées permet de considérer qu'à l'ordre le plus bas les miroirs sont immobiles tandis que la lumière est affectée d'un déphasage le long de chaque bras (voir section A.2.2). Dans le second système de coordonnées, les équations de Maxwell ne sont pas modifiées à l'ordre le plus bas dans la taille de l'instrument par rapport à la longueur d'onde des OG (voir section A.2.3) et l'effet des OG se reporte sur un mouvement des miroirs.

Avant d'étudier le calcul explicite du déphasage dans deux systèmes de coordonnées différents, on présente d'abord (section A.2.1) la procédure que l'on utilise pour calculer les déphasages de bords qui apparaissent de façon générale dans l'expression du déphasage. Enfin, on la section A.2.4 compare les résultats obtenus dans les deux approches.

### A.2.1 Mouvement des miroirs

On a déjà noté que le calcul des déphasages demandait de spécifier précisément comment étaient matérialisés les bords des trajets lumineux, ici les miroirs dans les détecteurs optiques. On suppose que ces points sont des objets matériels en chute libre, et donc que leurs coordonnées vérifient l'équation géodésique (voir équation (B-3) de l'annexe B) :

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu u^\rho u^\sigma = 0 \quad (2.26)$$

Avec  $u^\mu$  la quadri-vitesse associée à un de ces miroirs :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.27)$$

$\tau$  est le temps propre de l'objet considéré et  $x^\mu$  sa position. Cette équation est valable dans tous les systèmes de coordonnées, avec les lois de transformation écrites dans l'annexe A. En particulier, on rappelle que les symboles de Christoffel  $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$  ne sont pas les composantes d'un tenseur.

On peut réécrire l'équation (2.26) sous une forme Newtonienne en utilisant le temps coordonné  $t = x^0/c$  et la vitesse coordonnée  $\frac{dx^\mu}{dt}$ . On écrit alors

$$u^\mu = \frac{u^0}{c} \frac{dx^\mu}{dt} \quad (2.28)$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{u^0}{c} \frac{du^\mu}{dt} = \left(\frac{u^0}{c}\right)^2 \frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \frac{u^0}{c} \frac{du^0}{cdt} \frac{dx^\mu}{dt} \quad (2.29)$$

On en déduit l'écriture quasi-Newtonienne de l'équation géodésique :

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \frac{1}{u^0} \frac{du^0}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = 0 \quad (2.30)$$

La situation physique que nous considérons nous permet maintenant de procéder à deux approximations. D'une part, la vitesse spatiale des miroirs reste toujours très petite devant la vitesse de la lumière :

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \ll c \quad (2.31)$$

Autrement dit, la composante temporelle  $u^0$  de la quadri-vitesse est quasiment constante :

$$u^0 = c \frac{dt}{d\tau} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c \left(1 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right) \quad (2.32)$$

D'autre part, la métrique est proche d'une métrique de Minkowski :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad |\Gamma_{0i}^\mu| \ll 1 \quad (2.33)$$

Dans les conditions où :

$$\frac{v^2}{c^2} \ll |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.34)$$

le second terme de l'équation (2.30) est négligeable et l'équation géodésique se simplifie pour devenir, à l'ordre un en  $v/c$  :

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^\mu(x) - 2c \Gamma_{0i}^\mu(x) \frac{dx^i}{dt} \quad (2.35)$$

Cette équation s'interprète comme une équation de Newton où les termes de droite sont des forces d'inertie agissant sur l'objet en chute libre : une force d'inertie centrifuge qui ne dépend pas de la vitesse coordonnée et une force de Coriolis linéaire dans la vitesse.

Dans les paragraphes suivants, nous utiliserons cette équation pour calculer les déplacements des miroirs qui définissent les bords des chemins sur lesquels on calcule les déphasages optiques.

### A.2.2 Étude dans un système de coordonnées TT (Transverse Traceless)

Quand on étudie des OG, c'est-à-dire des solutions libres de l'équation d'Einstein linéarisée loin des sources des ondes (voir l'appendice C pour une discussion plus détaillée), on peut choisir un système de coordonnées TT où la perturbation métrique vérifie les conditions de jauge suivantes. D'abord les composantes ayant au moins un indice temporel sont nulles :

$$h_{00} = h_{0i} = 0 \quad (2.36)$$

Autrement dit, seules les composantes spatiales  $h_{ij}$  sont non nulles. De plus, ces composantes spatiales sont transverses et elles ont une trace nulle :

$$\partial^i h_{ij} = 0 \quad , \quad h^i_i = 0 \quad (2.37)$$

Cette jauge est donc analogue à la jauge de Coulomb de l'électromagnétisme [80]. L'analogie va plus loin puisqu'on peut développer les OG sur la base des ondes planes, se propageant à la vitesse de la lumière, avec deux états de polarisation pour chaque vecteur d'onde possible (voir l'appendice C).

Ces conditions de jauge sont telles que les composantes TT de la métrique sont directement liées à la courbure de Riemann :

$$R_{i0j0} = \frac{1}{2} \partial_0^2 h_{ij}^{\text{TT}} \quad (2.38)$$

Là encore on a une analogie avec la relation en électromagnétisme, en jauge de Coulomb, entre le champ électrique  $F_{0i}$  et les composantes spatiales  $A_i$  du potentiel  $F_{0i} = \partial_0 A_i$ . Notez

toutefois que c'est une dérivée seconde qui apparaît dans (2.38). Cette relation signifie qu'on peut utiliser les  $h_{ij}^{\text{TT}}$  comme les degrés de liberté pertinents des OG, autrement dit comme de bonnes caractérisations physiques de ces ondes (annexe C).

Tous ces choix de jauge sont compatibles avec le fait de prendre un observateur inertiel, disons ici la séparatrice S, immobile dans le référentiel choisi en l'absence de perturbation [22, chap. 35.4]. On suppose aussi que les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  seraient immobiles dans ce même référentiel, en l'absence de perturbation.

Dans le référentiel TT, les conditions de jauge (2.36) et (2.37) impliquent :

$$\Gamma_{00}^\mu = 0 \quad (2.39)$$

Finalement, puisqu'on a supposé les miroirs et la séparatrice immobiles en l'absence de perturbation, la condition (2.34) est vérifiée car la vitesse de ces objets est alors d'ordre un dans la perturbation, de telle sorte que l'équation (2.35) nous dit que ces éléments optiques restent immobiles au cours du temps, au premier ordre dans la perturbation. Cela signifie que les termes de bords (première ligne de (2.11)) ne contribuent pas au calcul du déphasage dans ce cas :

$$\delta x_S^\mu = \delta x_{M_1}^\mu = \delta x_{M_2}^\mu = 0 \quad (2.40)$$

Le déphasage total (2.24) en sortie d'interféromètre s'écrit alors comme un déphasage propagatif (2.9) évalué le long des chemins suivis par la lumière :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 \\ \Delta\varphi_k &= \delta\varphi_{\text{SM}_k\text{S}} = \frac{1}{2} \int_{\text{SM}_k\text{S}} h_{ij}^{\text{TT}} K^i K^j d\lambda \end{aligned} \quad (2.41)$$

Le paramètre  $\lambda$  peut s'exprimer en fonction du temps coordonnée  $t$  :

$$x^\mu = x^\mu(\lambda = 0) + K^\mu \lambda \quad , \quad \lambda = \frac{c}{K_0} t \quad , \quad K_0 = \frac{\Omega_{\text{phot}}}{c} \quad (2.42)$$

Les déphasages s'écrivent donc :

$$\Delta\varphi_k(t) = \frac{1}{2K_0} \int_{\text{SM}_k\text{S}} h_{ij}^{\text{TT}}(x(t')) K^i K^j c dt' \quad (2.43)$$

Nous considérons maintenant la géométrie du Michelson où les vecteurs d'ondes s'écrivent  $|K^j| = \frac{\Omega_{\text{phot}}}{c} \delta_1^j$  (respectivement  $|K^j| = \frac{\Omega_{\text{phot}}}{c} \delta_2^j$ ) pour le chemin  $\text{SM}_1\text{S}$  (respectivement  $\text{SM}_2\text{S}$ ). Ainsi, le déphasage (2.41) s'écrit finalement (il n'y a pas de sommation implicite sur  $k$  dans cette formule) :

$$\Delta\varphi_k(t) = \frac{\Omega_{\text{phot}}}{2} \int_{\text{SM}_k\text{S}} h_{kk}^{\text{TT}}(x(t')) dt' \quad (2.44)$$

Pour le moment, il est important de noter que la seule restriction à la validité de cette expression est l'approximation eikonale et l'hypothèse que les miroirs sont en chute libre

et au repos en l'absence de la perturbation métrique. Nous avons déjà remarqué que cette hypothèse n'est pas vraie pour les détecteurs réels et nous reviendrons sur les conditions de validité correspondantes dans la section A.2.5. Les calculs sont d'autre part effectués à l'ordre un dans la perturbation métrique.

On peut maintenant simplifier cette expression dans le cas où la longueur d'onde des OG est très grande devant la taille de l'interféromètre, ce qui est le cas pour les sources d'OG qui doivent être détectées par VIRGO et LIGO. Sous cette hypothèse, en négligeant la variation de  $h_{ij}$  pendant le temps d'aller retour du faisceau<sup>1</sup>, on peut remplacer la perturbation métrique apparaissant dans les intégrales précédentes par sa valeur au niveau de la séparatrice notée simplement  $h_{ij}^{\text{TT}}(t)$ . On suppose le Michelson dans le plan  $(x^1, x^2)$  et réglé en teinte plate telle que :

$$x_{M_2, (0)}^2 - x_{S, (0)}^2 = x_{M_1, (0)}^1 - x_{S, (0)}^1 \equiv L \quad (2.45)$$

On obtient finalement le déphasage mesuré par l'instrument :

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_0 \frac{h_{22}^{\text{TT}}(t) - h_{11}^{\text{TT}}(t)}{2}, \quad \varphi_0 = 2 \frac{\Omega_{\text{phot}} L}{c} \quad (2.46)$$

$\varphi_0$  représente le déphasage dans l'interféromètre en l'absence de perturbation. Un Michelson avec ses bras selon  $x^1$  et  $x^2$  est sensible à la composante :

$$h_+^{\text{TT}} \equiv \frac{h_{22}^{\text{TT}}(t) - h_{11}^{\text{TT}}(t)}{2} \quad (2.47)$$

de la métrique, c'est-à-dire à la polarisation linéaire (+) dans la plan  $(x^1, x^2)$ . La polarisation ( $\times$ ) donne une contribution qui se compense entre les deux bras dans cette géométrie.

### A.2.3 Étude dans un système de coordonnées de Fermi

On donne maintenant une deuxième présentation de ce même calcul dans un autre référentiel, appelé système de coordonnées de Fermi, défini de façon à ce que les équations restent assez proches de ce qu'elles sont en physique Newtonienne [22, 71].

On choisit un observateur inertiel particulier, ici la séparatrice S, et on s'efforce de lui attacher un référentiel aussi proche que possible d'un référentiel inertiel. On montre qu'on peut toujours choisir la métrique de Minkowski sur cet observateur tout en annulant tous les symboles de Christoffel :

$$g_{\mu\nu}[\text{S}] \equiv \eta_{\mu\nu} \quad (2.48)$$

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}[\text{S}] \equiv 0 \quad (2.49)$$

---

<sup>1</sup>Cela se traduit par des conditions sur les valeurs de l'accélération  $a$  du détecteur et de la fréquence de rotation  $\Omega_{\text{rot}}$  de l'appareil. Plus précisément, on doit avoir  $\tau \ll \Omega_{\text{rot}}^{-1}$  pour que l'appareil ait peu tourné et  $\tau \ll (L/a)^{1/2}$  pour que l'appareil se soit peu déplacé par rapport à sa taille  $L$ .  $\tau$  désigne ici le temps de vol des atomes ou des photons dans l'instrument.

Lorsque l'on s'éloigne de l'observateur S, la métrique ne peut rester égale à la métrique de Minkowski en raison de la présence de courbures non nulles, mais elle ne s'en écarte que faiblement puisque le système de coordonnées est tel que les dérivées spatiales de la métrique sont nulles au niveau de l'observateur. On démontre qu'on peut choisir d'écrire la perturbation métrique sous la forme suivante [22, 71] :

$$\begin{aligned} h_{00}^F(\hat{x}) &= R_{0k0l} \hat{x}^k \hat{x}^l \\ h_{0i}^F(\hat{x}) &= \frac{2}{3} R_{0kil} \hat{x}^k \hat{x}^l \\ h_{ij}^F(\hat{x}) &= \frac{1}{3} R_{kilj} \hat{x}^k \hat{x}^l \end{aligned} \quad (2.50)$$

$R_{\mu\nu\rho\sigma}$  est le tenseur de Riemann exprimé au niveau de l'observateur en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  et ce développement de la métrique n'est valable que lorsque  $|\hat{x}^i|$  reste petit devant la longueur d'onde  $\Lambda$  ( $|\hat{x}^i| \ll \Lambda$ ). Il s'agit d'une condition de grande longueur d'onde tout à fait analogue à celle qui conduit à l'approximation dipolaire dans la description de l'interaction entre atomes et photons [80]. Les grands interféromètres ont une taille typique de l'ordre de 3 km, ce qui restreint l'utilisation de ce système de coordonnées à des fréquences d'OG plus petites que  $10^5$  Hz. Ceci correspond en fait au domaine de fréquence dans lequel les détecteurs ont une sensibilité suffisante pour voir les ondes.

On a placé la séparatrice S au niveau de l'observateur, soit aussi au centre du système de coordonnées. On vérifie sur (2.50) que les symboles de Christoffel restent nuls en ce point. On peut donc utiliser le même raisonnement que dans la section précédente pour montrer que la séparatrice reste immobile au centre du système de coordonnées en présence de la perturbation :

$$\hat{x}_S^j = 0 \quad (2.51)$$

Cette propriété n'est plus vraie pour les miroirs M qui ne sont pas au centre du référentiel de Fermi et, donc, subissent une force de marée à l'ordre un dans la perturbation. Pour la calculer, on développe les symboles de Christoffel au voisinage du centre en écrivant :

$$\Gamma_{00}^j(\hat{x}_M) \simeq \hat{x}_M^i \hat{\partial}_i \Gamma_{00}^j(\hat{x} = 0) \quad (2.52)$$

La dérivée est à calculer en  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire sur la séparatrice S. On utilise ensuite l'équation (C-4) qui exprime le tenseur de Riemann en fonction des symboles de Christoffel dans le domaine linéaire et on restreint les calculs à l'ordre 1 dans les distances spatiales :

$$R_{0i0}^j = \hat{\partial}_0 \Gamma_{0i}^j - \hat{\partial}_i \Gamma_{00}^j \simeq -\hat{\partial}_i \Gamma_{00}^j \quad (2.53)$$

On écrit enfin l'équation du mouvement pour le miroir M à l'aide de l'équation (2.35) en supposant M au repos par rapport à la séparatrice en l'absence de perturbation métrique :

$$\frac{d^2 \hat{x}_M^j}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^j(\hat{x}_M) = c^2 \hat{x}_M^i R_{0i0}^j \quad (2.54)$$

La courbure est évaluée sur la séparatrice  $S$ . D'autre part, on a supprimé le chapeau sur le temps coordonné  $t$  afin d'alléger l'écriture. C'est l'équation du mouvement du miroir induit par la « force de marée » qui figure au second membre.

La solution en  $\hat{x}$  de l'équation précédente s'obtient comme une intégrale double de la courbure de Riemann. Afin d'obtenir un résultat plus explicite, on peut utiliser l'équation (2.38) qui montre que  $h_{ij}^{\text{TT}}$  contient la même information physique que  $R_{0i0j}$  et, donc, réécrire l'équation précédente :

$$\frac{d^2 \hat{x}_M^j}{dt^2} = \hat{x}_M^i \frac{d^2 h_i^{j;\text{TT}}(t)}{dt^2} \quad (2.55)$$

L'équation (2.54) s'intègre à l'ordre un dans la perturbation pour le miroir  $M_k$  ( $k = 1, 2$ ) :

$$\hat{x}_{M_k}^j(t) = \hat{x}_{M_k,(0)}^i \left( \eta_i^j + \frac{1}{2} h_i^{j;\text{TT}}(t) \right) \quad (2.56)$$

$\hat{x}_{M_k,(0)}$  est la position du miroir  $M_k$  en l'absence de perturbation, qu'on suppose à une distance  $L$  de la séparatrice dans la direction  $\hat{x}^k$ ; on rappelle que la valeur de  $h_{ij}^{\text{TT}}$  est à prendre au niveau de la séparatrice.

Montrons maintenant que le déphasage de la lumière est négligeable dans le référentiel de Fermi. Il est donné par la formule (2.9) comme une intégrale de la perturbation métrique et celle-ci est de l'ordre de  $R_{\mu k \rho l} \hat{x}^k \hat{x}^l$  dans (2.50). En utilisant la relation (2.38) entre la métrique et la courbure, on voit que l'ordre de grandeur de ces termes est  $h(L^2/\Lambda^2)$  où  $L$  est la taille de l'appareil et  $\Lambda$  la longueur d'onde des OG. Puisqu'on se place dans la limite des grandes longueurs d'onde  $\Lambda \gg L$ , on peut négliger l'effet de la perturbation métrique  $h_{\mu\nu}^F$  sur la propagation de la lumière.

Le déphasage total s'écrit donc seulement avec des termes de bords. On écrit :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{SM_k S} &= \Delta\varphi_{SM_k} + \Delta\varphi_{M_k S} \\ &= K_\mu [SM_k] \delta \hat{x}_{M_k}^\mu - K_\mu [M_k S] \delta \hat{x}_{M_k}^\mu \end{aligned} \quad (2.57)$$

où on a utilisé le fait que le déplacement de la séparatrice reste nul. On écrit enfin  $K_\mu = K_k$  sur le chemin  $SM_k$  et  $K_\mu = -K_k$  sur le chemin  $M_k S$  où on utilise la géométrie du Michelson, tout en négligeant la rotation de l'interféromètre pendant le temps de vol de la lumière.

En insérant l'expression (2.56) du déplacement du miroir, on obtient finalement :

$$\Delta\varphi_k = K^k h_{kk}^{\text{TT}} L \quad (2.58)$$

dans laquelle il n'y a pas de sommation implicite. En ajoutant les termes correspondant aux deux bras, on obtient finalement :

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_0 \frac{h_{22}^{\text{TT}}(t) - h_{11}^{\text{TT}}(t)}{2}, \quad \varphi_0 = 2 \frac{\Omega_{\text{phot}} L}{c} \quad (2.59)$$

Ce résultat est le même que celui obtenu dans le système de coordonnées TT dans la limite des grandes longueurs d'onde. On remarque que bien que l'on soit dans un système de coordonnées de Fermi, le déphasage s'exprime de façon simple en faisant intervenir l'expression de la perturbation métrique en jauge TT.

### A.2.4 Comparaison des deux systèmes de coordonnées

L'identité des résultats calculés dans les deux référentiels était attendue puisque, comme nous l'avons déjà dit, le déphasage est une quantité invariante de jauge. Par contre, les images physiques associées à ce calcul changent d'un référentiel à l'autre. On vient de le voir pour les deux systèmes de coordonnées différents qui sont souvent utilisés dans la description des détecteurs d'OG. Pour bien expliquer ce point important, nous le résumons ici de façon qualitative.

Dans le système de coordonnées de Fermi, le déphasage propagatif  $\delta\varphi_G$  est négligeable au premier ordre dans le rapport  $L/\Lambda$  où  $L$  est la taille du système et  $\Lambda$  la longueur d'onde des OG [15]. Autrement dit, la propagation des champs n'apparaît pas affectée et l'effet des OG est entièrement reporté sur le déplacement des miroirs qui réfléchissent la lumière, à travers une force de marée qui agit sur eux. Ce système de coordonnées permet d'étudier la détection des OG dans un cadre très proche de la physique Newtonienne, en considérant que les objets massifs sont soumis à une force de marée alors que la lumière n'est pas affectée. Il est cependant trompeur de croire qu'une force agisse « réellement » sur les miroirs car ceux-ci sont en chute libre et les forces de marées doivent plutôt être interprétées comme des forces d'inertie apparaissant par suite du choix de coordonnées [81].

Le système de coordonnées de Fermi a l'inconvénient de n'être valable que dans un développement dans la taille de l'appareil  $L$  comparé à la longueur d'onde  $\Lambda$  des OG [15]. Cette hypothèse est assez bien vérifiée pour les détecteurs actuels qui opèrent jusqu'à 10 kHz environ, fréquence pour laquelle la longueur d'onde est de 30 km, ce qui est grand devant la taille des détecteurs. Mais elle ne le sera pas dans les calculs que nous ferons dans la suite sur la décohérence des interféromètres, et nous n'utiliserons donc pas ce choix de référentiel dans ces calculs.

Dans le système de coordonnées TT au contraire, les termes associés au mouvement des miroirs sont négligeables alors que l'effet des OG s'interprète comme une modification anisotrope de l'indice du vide entre les miroirs. Cette modification est proportionnelle à  $h_{ij}K^j$  dans la direction  $x^i$ , et c'est la propagation de la lumière le long de son chemin qui enregistre cet effet.

Ce système de coordonnées possède l'avantage d'être utilisable sur toute l'étendue spatiale du détecteur. De ce fait, il est bien adapté à l'étude de l'effet des OG de hautes fréquences, celles qui interviendront ci-après dans le processus de décohérence. Il a l'inconvénient de n'être valable que localement dans le temps si le détecteur n'est pas en mouvement inertiel [22, chap. 35.5]. Néanmoins, les effets de non-inertie sont souvent faibles car pendant le temps de vol  $\tau$  des particules dans l'interféromètre, le mouvement global de l'appareil est quasi-inertiel. Nous reviendrons sur les conditions de validité permettant de faire cette approximation dans la prochaine section.

Nous terminons la comparaison entre les deux choix de référentiel par une remarque générale sur l'équation de déviation géodésique qui donne la distance optique entre deux

trajectoires géodésiques voisines. Cette équation, présentée dans l'annexe B.3, s'écrit sous une forme invariante de jauge et montre directement que les détecteurs interférométriques mesurent la courbure de Riemann (voir aussi [22, chap. 35.5 et 37]). Elle donne bien sûr le même résultat que les calculs présentés ci-dessus. Nous avons choisi ici de donner des calculs explicites afin de bien expliquer d'une part, le rôle du choix d'un référentiel particulier, d'autre part la séparation entre déphasages de propagation liés à la lumière et déphasages de bords associés au mouvement des miroirs. Ceci nous permettra de lever toute ambiguïté sur les calculs de déphasages des interféromètres atomiques présentés plus loin dans cette thèse.

### A.2.5 Hypothèse des miroirs quasi-libres

Insistons ici sur le fait que nous avons utilisé l'équation géodésique pour calculer le mouvement des miroirs. Dans toute expérience, les miroirs sont bien évidemment tenus par un système de suspension, ne serait-ce que pour s'affranchir du champ de gravité terrestre. Ils sont donc soumis à une accélération verticale. D'autre part, la rotation de la Terre communique une rotation d'ensemble aux miroirs. Les calculs présentés ci-dessus ne peuvent être valables que dans une bande de fréquences dans laquelle les miroirs peuvent être considérés comme quasi-libres. Lorsque ce n'est pas le cas, il est nécessaire de rajouter à l'équation (2.35) une force rendant compte de la cohésion de la structure mécanique qui tient les miroirs.

Pour discuter plus précisément ces effets, on peut se référer à la théorie de la détection des OG par les barres de Weber [21] qui décrit la réponse élastique d'un solide à une perturbation gravitationnelle. Les équations de l'élasticité peuvent être écrites dans un système de coordonnées de Fermi [82] ou dans un système de coordonnées TT [81]. Ces deux approches peuvent se traiter de façon unifiée lorsqu'on évalue comme quantité invariante de jauge le déphasage mesuré par temps d'aller-retour d'un faisceau lumineux [83] sans spécifier à priori de système de coordonnées.

Par exemple, supposons que les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  du Michelson, de masse  $m$ , soient reliés par un ressort de raideur  $K$  à la séparatrice (voir figure (2.5)). On va discuter qualitativement la valeur du signal interférométrique  $\Delta\varphi$  en fonction de la valeur de la fréquence des OG comparativement à la fréquence de résonance du ressort. Pour cela, on utilise les résultats généraux sur la théorie des barres de Weber. En particulier, dans un système de coordonnées de Fermi, l'équation du mouvement pour la position des miroirs peut se résoudre et donne comme solution pour la déformation  $\Delta x^i[\omega]$  de la longueur du ressort dans l'espace de Fourier [23] :

$$\Delta x^i[\omega] \sim \frac{m\omega^2}{m\omega^2 - im\Gamma\omega - K} h^i_j[\omega] L^j \quad (2.60)$$

Où on a rajouté un coefficient d'amortissement  $\Gamma$  pour le ressort. Le déphasage mesuré par

l'interféromètre se déduit de l'équation précédente grâce à (2.59) :

$$\Delta\varphi[\omega] = \chi[\omega] \frac{h_{22}[\omega] - h_{11}[\omega]}{2} \varphi_0 \quad (2.61)$$

$$\chi[\omega] \sim \frac{\omega^2}{\omega^2 - i\Gamma\omega - \omega_{ac}^2}, \quad \omega_{ac}^2 = \frac{K}{m} \quad (2.62)$$

On a défini une susceptibilité  $\chi[\omega]$  et on note  $\omega_{ac}$  la fréquence acoustique correspondant dans ce cas simple à la fréquence propre du ressort.

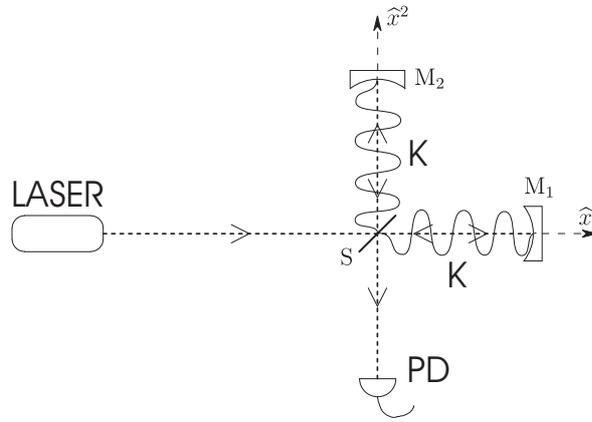


FIG. 2.5: Représentation schématique d'un interféromètre de type Michelson dans lequel les miroirs sont reliés à la séparatrice par des ressorts de raideur  $K$ . Les miroirs n'étant plus libres, le signal gravitationnelle est réduit par la réaction du ressort qui s'oppose à la force de marée, d'autant plus que la constante de raideur  $K$  est importante.

Lorsque la raideur du ressort est quasi nulle, ce qui correspond au cas des miroirs quasi-libres, on retrouve le déphasage calculé dans les sections précédentes :

$$\omega_{ac} \ll \omega \quad , \quad \Delta\varphi_{\text{libre}} \sim \frac{h_{22} - h_{11}}{2} \varphi_0 \quad (2.63)$$

La situation où les miroirs sont tenus rigidement par le ressort, c'est-à-dire pour  $\omega_{ac} \gg \omega$ , est qualifiée de limite adiabatique et dans ce cas le déphasage tend vers 0 avec la fréquence :

$$\omega \ll \omega_{ac} \quad , \quad \Delta\varphi_{\text{rigide}} \sim \left( \frac{\omega}{\omega_{ac}} \right)^2 \Delta\varphi_{\text{libre}} \quad (2.64)$$

Autrement dit, le déphasage propagatif et le déphasage de bord se compensent dans la limite adiabatique. Dans le cas d'un solide infiniment rigide ( $\omega_{ac} \rightarrow \infty$ ) la compensation est exacte. Si on interprète cette compensation dans un système de coordonnées TT, cela montre que deux objets rigidement liés voient leur distance coordonnée varier en présence d'OG, de façon

à compenser le déphasage de la lumière entre ces deux objets. Dans un système de coordonnées de Fermi, les objets tenus rigidement tendent au contraire à garder leurs coordonnées constantes [81].

Ce raisonnement qualitatif peut être généralisé au cas d'une configuration quelconque dans laquelle la structure est définie par un solide compliqué possédant de multiples fréquences de résonance acoustique  $\omega_{ac}$  correspondant à de multiples modes de vibration (cisaillement, compression dans une direction etc...). Le système de pendule mis au point pour VIRGO [3] permet alors d'obtenir, pour le mouvement dans la direction des bras, une fréquence acoustique très petite afin que les mouvements dans cette direction puissent être considéré comme libre pour des fréquences  $\omega$  supérieures au Hertz. Dans le même temps, les miroirs sont fermement tenus dans les directions perpendiculaires, avec des fréquences acoustiques très élevées pour limiter les mouvements dans ces directions.

Enfin, notons qu'entre les deux limites de fréquences discutées plus haut, à savoir les très basses fréquences devant les fréquences acoustiques, et les très hautes fréquence devant celles-ci, se situe le domaine de fonctionnement des barres. En effet, pour celles-ci, on exploite la résonance qui se produit lorsque la fréquence  $\omega$  est égale à une fréquence acoustique  $\omega_{ac}$  de la barre. La sensibilité de la mesure est alors déterminée par le coefficient d'amortissement  $\Gamma$ , autrement dit le facteur de qualité mécanique de la barre [23].

### A.3 Description des fonds stochastiques d'OG

Les ondes gravitationnelles sont créées en principe dès que de la matière est accélérée de façon asymétrique mais les seuls systèmes susceptibles de produire des niveaux d'OG détectables sont les systèmes astrophysiques et cosmologiques.

La bande de fréquence couverte par les détecteurs en construction ou en opération sur Terre se situe dans le domaine des fréquences comprises typiquement entre 10 Hz et 10 kHz. Le projet LISA vise la détection de fréquences plus basses, typiquement entre quelques dixièmes de mHz et 1 Hz. Dans ces deux gammes de fréquence, on attend l'observation de « bouffées » (« bursts ») d'OG ou d'ondes périodiques émises par des systèmes astrophysiques.

Il existe également des fonds d'ondes gravitationnelles correspondants à la confusion d'un grand nombre de sources astrophysiques ou même à une émission d'origine cosmologique. Nous décrivons ici les propriétés de ces fonds qui peuvent donner lieu à des effets physiques observables tels que le phénomène de décohérence gravitationnelle étudié dans les prochaines sections.

#### A.3.1 Caractérisations générales

Les propriétés d'un fond d'OG peuvent être caractérisées de manière statistique par les fonctions de corrélation de la perturbation métrique  $h_{ij}^{TT}$  en jauge TT. Afin d'alléger la notation, on supprime l'exposant TT qu'on suppose implicite à chaque fois qu'apparaît la perturbation métrique  $h_{ij}$ . On discutera en détail plus loin le fond dû à la confusion de toutes

les ondes émises dans le voisinage de la Galaxie. Puisqu'il existe un très grand nombre de telles sources, le théorème de la limite centrale nous indique que ce fond est gaussien avec une très bonne approximation et peut donc être entièrement caractérisé par sa fonction de corrélation à deux points. De façon équivalente, on peut aussi étudier le spectre associé à ces fluctuations.

Pour cela, on décompose la perturbation gravitationnelle dans ses composantes de Fourier, où chacune de ces composantes est la somme de deux polarisations circulaires (voir l'annexe C) :

$$h_{ij}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} h_{ij}[k] e^{-ik_\mu x^\mu} \quad , \quad h_{ij}[k] = \sum_{\gamma=\pm} \left( \frac{\mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \mathbf{e}_j^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]}{\sqrt{2}} \right)^* h^\gamma[k] \quad (2.65)$$

$\hat{\mathbf{k}}$  représente le vecteur unitaire dans la direction du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Les conditions de réalité pour ce champ s'écrivent :

$$\left( \mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \right)^* = \mathbf{e}_i^\gamma[-\hat{\mathbf{k}}] \quad , \quad (h^\gamma[k])^* = h^\gamma[-k] \quad (2.66)$$

Les OG se propagent à la vitesse de la lumière et sont transverses par rapport au vecteur d'onde :

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0 \quad , \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \quad , \quad \mathbf{k}_i h_{ij} = 0 \quad (2.67)$$

Dans le cas simplifié où le fond d'OG est en plus stationnaire et non polarisé, on peut le caractériser par la seule densité spectrale des fluctuations  $C_{hh}[k]$  définie de la façon suivante :

$$\langle h^\gamma[k] h^{\gamma'}[k'] \rangle = (2\pi)^4 \delta^{\gamma\gamma'} \delta^4(k + k') C_{hh}[k] \quad (2.68)$$

Il sera commode aussi de considérer la fonction de corrélation temporelle en un point donné, le centre du détecteur en  $\mathbf{x} = 0$  par exemple :

$$\langle h_{ij}(t) h_{kl}(0) \rangle = \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] e^{-i\omega t} \quad (2.69)$$

La fonction de corrélation  $S_h[\omega]$  a la dimension d'un temps et est une fonction réelle et paire afin d'assurer les conditions de réalité. C'est cette fonction qui est utilisée dans la plupart des papiers consacrés à la détection des OG [18]. On trouve quelquefois dans ces articles la notion d'amplitude de bruit  $h_\omega$  avec la correspondance :

$$h_\omega^2 \triangleq \frac{\omega}{2\pi} S_h[\omega] \quad (2.70)$$

Cette amplitude présente l'avantage d'être sans dimension. Toutefois, nous utiliserons de préférence la caractérisation  $S_h[\omega]$ .

Dans la suite on étudiera des détecteurs anisotropes et on devra utiliser la caractérisation plus générale  $C_{hh}[k]$ . En conservant l'hypothèse d'un fond isotrope, on écrira cette quantité en fonction du spectre :

$$C_{hh}[k] = 10\pi^2 c^2 \delta(k^2) \frac{S_h[\omega]}{\omega} \quad (2.71)$$

Une autre façon commode de décrire les propriétés spectrales de ces fonds est de les caractériser par une température de bruit  $T_{\text{gw}}[\omega]$  directement reliée au nombre de quanta à chaque fréquence  $\omega$ . Dans le domaine de la RG linéarisée, il est possible de quantifier le champ gravitationnel comme une collection d'oscillateurs harmoniques dont les quanta sont des particules de masse nulle appelés gravitons [60, 18]. En annexe D figure une méthode de détermination de la température de bruit associée à un fond d'OG à partir de l'expression des fonctions de réponse du champ gravitationnel. La caractérisation en terme de température se révélera très utile pour la description de la décohérence car la température est une bonne mesure des fluctuations d'un environnement.

Cette température peut s'obtenir aussi en considérant l'énergie portée par les ondes planes gravitationnelles de fréquence  $\omega$ . Pour cela, on rappelle que l'énergie des OG n'est pas localisée dans une longueur d'onde mais peut se calculer comme une moyenne sur plusieurs longueurs d'onde. Pour un fond stochastique dont les propriétés statistiques ne dépendent ni du temps ni de l'espace, cette moyenne spatiale peut être remplacée par une moyenne temporelle ou, sous l'hypothèse d'ergodicité, par la valeur moyenne d'ensemble sur le fond. Cette méthode permet de relier la densité d'énergie  $T_{00}^{\text{gw}}$  au spectre [22, chap. 10.8][84] :

$$T_{00}^{\text{gw}} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}(x) \dot{h}^{ij}(x) \rangle = \frac{5c^2}{16\pi G} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 S_h[\omega] \quad (2.72)$$

La densité d'énergie peut ensuite s'écrire à partir d'un nombre de gravitons par mode  $n_{\text{gw}}[\omega]$  à la fréquence  $\omega$  :

$$T_{00}^{\text{gw}} = 2 \times \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} n_{\text{gw}}[\omega] \hbar\omega = \frac{\hbar}{\pi c^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^3 n_{\text{gw}}[\omega] \quad (2.73)$$

Le facteur 2 provient de la contribution des deux polarisations. On définit alors la température de bruit comme étant la température d'équilibre d'un oscillateur harmonique de fréquence  $\omega$  qui posséderait le même nombre de quanta  $n_{\text{gw}}[\omega]$ . Dans la limite classique correspondant à un grand nombre de graviton par mode  $n_{\text{gw}}[\omega] \gg 1$  (donc pour une température de bruit grande  $k_{\text{B}}T_{\text{gw}} \gg \hbar\omega$ ), cette relation s'écrit simplement :

$$k_{\text{B}}T_{\text{gw}}[\omega] = n_{\text{gw}}[\omega] \hbar\omega \quad (2.74)$$

En identifiant les deux expressions de  $T_{00}^{\text{gw}}$ , on obtient finalement (voir également l'annexe D) :

$$k_{\text{B}}T_{\text{gw}}[\omega] = \frac{5c^5}{16G} S_h[\omega] \quad (2.75)$$

De façon dimensionnelle,  $T_{\text{gw}}$  est la température construite à partir de  $c$ ,  $G$ ,  $k_{\text{B}}$  et  $S_h[\omega]$ .

En fait, cette température n'est pas une température d'équilibre thermodynamique. Elle s'apparente plutôt à la température effective de bruit souvent utilisée pour les amplificateurs en électronique. On verra que la température du fond d'OG dépend fortement de la fréquence.

Ceci s'explique par le fait que le couplage entre la matière et l'environnement gravitationnel est faible, de sorte qu'il n'y a pas thermalisation de ce bain.

En réalité, le fond d'OG est un fond hautement classique dans lequel le nombre de gravitons  $n_{\text{gw}}[\omega]$  est important. Cela se voit explicitement si on l'exprime de façon à faire intervenir le temps de Planck :

$$n_{\text{gw}}[\omega] = \frac{5}{16} \frac{S_h[\omega]}{t_{\text{P}}} \frac{1}{\omega t_{\text{P}}} \quad (2.76)$$

Avec les chiffres utilisés dans toutes les discussions de cette thèse, les deux facteurs sans dimension apparaissant dans cette expression sont tous les deux très grands devant 1. A titre d'exemple, la détection interférométrique des OG nécessite au moins  $10^{31}$  gravitons à 1 kHz et  $10^{43}$  gravitons à 1 Hz [18]<sup>2</sup>.

### A.3.2 Fond galactique : bruit de confusion des binaires

Un certain nombre de processus astrophysiques sont à l'origine de la création d'OG, le processus prédominant étant la génération d'OG par des systèmes binaires [35]. C'est d'ailleurs sur un système de ce genre qu'a été mise en évidence de façon indirecte l'existence des OG via un phénomène de relaxation [2]. La fréquence des OG émises par les binaires est donnée par le double de leur fréquence de rotation. Puisque deux fréquences du spectre correspondent à deux systèmes binaires différents, il est clair que différentes fréquences seront indépendantes les unes des autres.

Les systèmes binaires les plus courants autour de nous sont les binaires de naines blanches de notre galaxie et de son voisinage. Ce fond est connu de façon statistique via un comptage des binaires sur la voûte céleste. Le détecteur LISA sera sensible dans la bande de fréquence correspondant à ces sources mais il ne permettra pas de résoudre individuellement les sources trop faibles ou celles dont la fréquence est de toute façon trop basse pour être vues pendant une mesure de durée raisonnable, disons pour fixer les idées 1 an d'intégration [85, 86]. Le fond astrophysique va donc apparaître comme un fond de confusion, bien que les limites exactes de cette confusion dépendent des performances des détecteurs d'OG.

Le spectre, tel qu'il est prédit par les astronomes, est représenté sur la figure (2.6) [11]. Il découle de lois bien connues de la physique ainsi que de connaissances d'astrophysique galactique et constitue donc une source sûre d'OG. Ce bain se trouve concentré sur une plage de fréquence limitée, typiquement entre le  $\mu\text{Hz}$  et le  $\text{mHz}$ . Dans cette plage de fréquence, le spectre  $S_h[\omega]$  est quasiment plat avec :

$$S_h \simeq 10^{-34} \text{ Hz}^{-1} \quad (2.77)$$

---

<sup>2</sup>Pour être plus précis, ce nombre de gravitons est en fait le nombre de gravitons *moyen* par mode. Comme il est très grand, on va négliger dans la suite les fluctuations du nombre de graviton autour de ce nombre moyen et ne s'intéresser qu'à ce dernier (les fluctuations relatives étant de l'ordre de  $1/\sqrt{n_{\text{gw}}}$ ). Autrement dit, l'état quantique de l'environnement ne sera caractérisé que par son nombre moyen de quanta par mode  $n_{\text{gw}}[\omega]$ , quantité qui est reliée via l'équation (2.74) à la quantité classique  $S_h[\omega]$ , ou encore à l'amplitude classique  $h_\omega$  via (2.70).

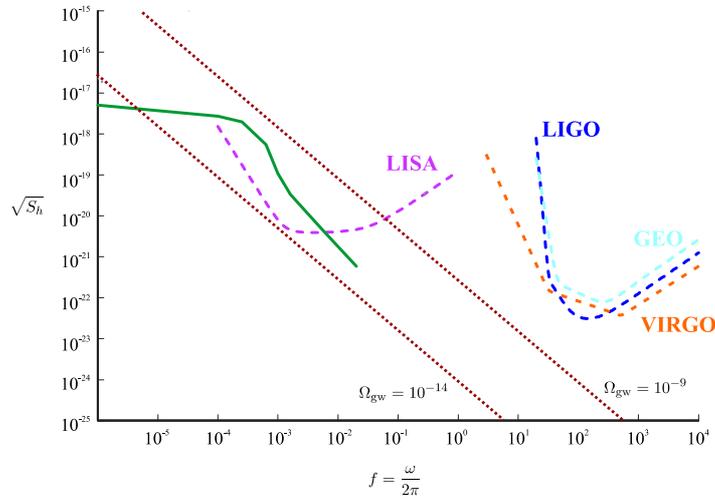


FIG. 2.6: Racine carrée  $\sqrt{S_h[\omega]}$  (mesurée en  $\text{Hz}^{-\frac{1}{2}}$ ) de la densité spectrale des fonds d'OG d'origine astrophysique et cosmologique en fonction de la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  (en Hz), dans un diagramme log-log. Les courbes en tirets représentent les courbes de sensibilité des détecteurs d'OG terrestres (VIRGO, LIGO et GEO) et spatiaux (LISA); la courbe solide décrit le bruit de confusion des binaires (voir la section A.3.2) et les courbes en pointillé représentent les fonds d'origine cosmologique calculés pour différentes valeurs du paramètre  $\Omega_{\text{gw}}$  (voir la section A.3.3).

La température de bruit associée par la relation (2.75) n'est donc sûrement pas une température thermodynamique :

$$T_{\text{gw}} \simeq 10^{41} \text{ K} \quad (2.78)$$

Cette température est beaucoup plus grande que toute température habituelle, elle est même supérieure à la température de Planck  $T_{\text{P}}$  définie par :

$$k_{\text{B}}T_{\text{P}} = \frac{\hbar}{t_{\text{P}}} \quad , \quad T_{\text{P}} = \frac{1}{k_{\text{B}}} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \simeq 1.4 \times 10^{32} \text{ K} \quad (2.79)$$

Autrement dit,  $T_{\text{gw}}$  est une température de bruit dont la valeur très grande traduit le grand nombre de gravitons qui existent à ces fréquences. Mais elle ne correspond pas à une température d'équilibre car le bain de gravitons est très faiblement couplé à la matière. Cette caractéristique est typique des OG qui ont la particularité d'être à haute température mais de ne pas jouer de rôle dissipatif efficace.

Enfin, notons que ce fond est principalement d'origine galactique et ainsi doit être anisotrope du fait de notre position excentrée par rapport au centre de la Galaxie [87]. En particulier, une modulation du signal de LISA d'un facteur  $\sim 2$  est à attendre en fonction de l'orientation de celui-ci par rapport au centre de la galaxie [88]. On négligera cet effet dans la suite car on se s'occupera que d'estimation d'ordre de grandeur. Un calcul plus précis pourrait être mené grâce à la généralisation au fond anisotrope qui est présentée dans l'annexe C, mais il ne changerait pas les conclusions de notre étude. L'hypothèse gaussienne est valable au vu du grand nombre de sources indépendantes contribuant au fond à une fréquence donnée.

### A.3.3 Fond cosmologique : OG reliques

Il existe de nombreuses prédictions pour les fonds d'OG d'origine cosmologique [17, 18, 89] et ces prédictions sont encore assez spéculatives. Parmi celles-ci, les OG produites durant l'évolution cosmique à travers une amplification des fluctuations gravitationnelles originelles [16] jouent un rôle important. Bien que les fluctuations originelles soient de nature purement quantique (fluctuations de point zéro dans l'Univers primordial), les modèles prévoient qu'elles aient été considérablement amplifiées par l'inflation pour donner à l'heure d'aujourd'hui un fond stochastique qui peut être traité de façon quasi-classique. Ce fond relique d'origine purement quantique n'a pas encore été détecté expérimentalement mais il constitue une conséquence inéluctable des principes de base de la mécanique quantique et des équations de la RG [90].

Ce fond est l'analogie gravitationnel du fond cosmique micro-onde électromagnétique mais il n'est pas thermique [91]. Pour ce fond, la stationarité est probablement très bien vérifiée car l'âge de l'Univers est tellement grand que les propriétés statistiques de ce bain ne varient pas sur le temps d'une expérience, même très longue<sup>3</sup>. Il faut cependant noter que le

<sup>3</sup>Plus précisément, le redshift  $z$  correspondant à la création de ce bain est très grand devant l'unité. Une variation temporelle de  $\Delta t$  de ses propriétés statistiques lors de sa formation est vue maintenant comme une variation de l'ordre de  $z\Delta t$ , et apparaît gelée si  $z$  est grand.

fond relique d'OG possède des propriétés de non-stationarité qui sont négligeables en ce qui nous concerne mais pourraient éventuellement être mises en évidence grâce à l'observation des inhomogénéités du fond cosmique électromagnétique qui peuvent avoir enregistré des variations temporelles sur le temps très long qui s'est écoulé depuis leur émission [92].

On caractérise ce fond par un spectre qu'il est commode d'exprimer sous la forme suivante :

$$S_h[\omega] = \frac{6\pi H_0^2 \Omega_{\text{gw}}[\omega]}{\omega^3} \quad (2.80)$$

$H_0$  est la constante de Hubble; sa valeur est  $H_0 \simeq 2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$  pour la valeur la plus couramment admise ( $H_0 \simeq 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  dans les unités utilisées en astrophysique). Le paramètre  $\Omega_{\text{gw}}$  représente la densité d'énergie des OG rapportée à la densité d'énergie critique. Il peut être exprimé comme un nombre de gravitons  $n_{\text{gw}}$  par mode en utilisant (2.74) et (2.75). Bien que ce nombre  $n_{\text{gw}}$  soit très grand devant 1,  $\Omega_{\text{gw}}$  est très petit, ce qui montre que les OG participent peu au bilan énergétique de l'Univers actuel.

Dans les modèles simples [16], ce paramètre est constant depuis une fréquence de coupure ultra basse  $\omega_{\text{ulf}}^{\text{cosmo}}$  jusqu'à une fréquence de coupure haute  $\omega_{\text{uv}}^{\text{cosmo}}$ . La fréquence de coupure infrarouge  $\omega_{\text{ulf}}^{\text{cosmo}}$  peut aller jusqu'à la fréquence de Hubble [16]. La fréquence de coupure haute est souvent prise dans le domaine du GHz [18].

Les contraintes existant à ce jour sur ce paramètre [93] sont récapitulées sur la figure (2.7). Celles-ci sont principalement données par trois observations : l'isotropie observée du fond microonde cosmologique (CMB) contraint  $\Omega_{\text{gw}}$  à être plus petit que  $10^{-14}$  pour des fréquences aux alentours de la fréquence de Hubble [94]. La régularité des temps d'arrivée des pulses des pulsars milliseconde contraint  $\Omega_{\text{gw}}$  à être plus petit que  $10^{-8}$  pour des fréquences autour de  $10^{-8} \text{ Hz}$  [95, 96]. Enfin, une contrainte indépendante de la fréquence provient de la nucléosynthèse et de l'abondance des éléments [93].

Les domaines ombrés sur la figure (2.7) représentent deux modèles de fond relique qui sont compatibles avec toutes les observations connues. Le premier, qui constitue le modèle le plus simple, correspond à une valeur  $\Omega_{\text{gw}} \sim 10^{-14}$  et une coupure à la fréquence de Hubble  $2 \times 10^{-18} \text{ Hz}$ . Le second présente un niveau plus important, de l'ordre de  $\Omega_{\text{gw}} \sim 10^{-8}$ , mais il est coupé vers  $10^{-15}$  de façon à ne pas entrer en contradiction avec l'isotropie observée pour le CMB. Ces modèles sont aussi représentés sur la figure (2.6) par des droites pointillées. Ces droites ont une pente  $-\frac{3}{2}$  dans le diagramme log-log puisque  $\Omega_{\text{gw}}$  est constant aux fréquences apparaissant sur cette figure, de sorte que  $S_h$  varie comme  $1/\omega^3$  (voir équation (2.80)) et  $\sqrt{S_h}$  comme  $1/\omega^{3/2}$ .

On voit que le fond cosmologique domine le fond astrophysique aux basses fréquences inférieures au  $\mu\text{Hz}$ , ainsi qu'aux fréquences supérieures à environ  $10 \text{ kHz}$  du fait de la coupure des OG provenant des binaires. Malgré l'incertitude sur la valeur de  $\Omega_{\text{gw}}$ , il est probable que le fond cosmologique soit plus petit que le fond de confusion des binaires dans la plus grande partie de la plage de fréquence intermédiaire allant du microHertz au Hertz. Nous utiliserons ces hypothèses dans les calculs que nous ferons dans la suite. Elles seront en effet suffisantes

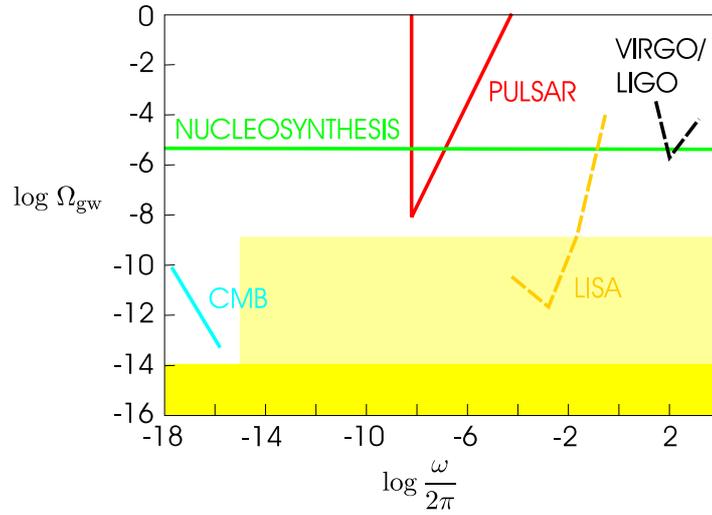


FIG. 2.7: Ce graphique représente dans un diagramme log-log les contraintes sur le paramètre  $\Omega_{\text{gw}}$  en fonction de la fréquence. Le domaine qui se trouve sous les courbes est exclu par les observations.

pour obtenir des estimations fiables des ordres de grandeurs.

L'hypothèse gaussienne semble raisonnable vu le très grand nombre de cellules élémentaires participant à la génération de ce fond. L'isotropie mérite d'être traitée plus en détail. En effet, une petite anisotropie initiale dans les fluctuations a pu être amplifiée très fortement par l'évolution cosmique et créer à l'heure d'aujourd'hui un fond anisotrope [97]. Là encore, on ne discutera pas ces subtilités dans la mesure où on veut surtout donner des estimations d'ordre de grandeur.

## B Décohérence gravitationnelle dans les interféromètres atomiques

De la même façon que les OG produisent un déphasage dans les grands interféromètres optiques destinés à leur détection, ils produisent un déphasage dans les interféromètres atomiques ultra sensibles actuellement en opération ou en projet, sur Terre ou dans l'espace. Ceci provient du fait que les OG déphasent les ondes de matière se propageant dans les deux bras de l'interféromètre d'une manière différentielle si ces bras sont spatialement séparés. En conséquence du caractère fluctuant du fond d'OG, le déphasage qui en résulte provoque une perte de contraste après moyenne sur le temps d'intégration de la mesure. Cette perte de contraste apparaît comme une décohérence induite par l'interaction de l'interféromètre avec le fond d'OG qu'on n'observe pas, c'est-à-dire la partie du fond sur laquelle on moyenne pendant la mesure.

Pour le moment, un tel effet de décohérence gravitationnelle n'a pas encore été mis en évidence. Cependant, le développement rapide des performances des interféromètres amène à se poser la question de savoir si, bien qu'ils ne soient pas spécifiquement dédiés à la détection des OG, leur sensibilité ultime ne pourrait pas être limitée par les fluctuations induites par les perturbations métriques. En particulier, il est bien connu que l'utilisation d'ondes de matière permet une amplification potentiellement très importante de la sensibilité de certains détecteurs aux effets d'inertie, notamment pour les gyromètres. Il est donc intéressant de se demander si les interféromètres atomiques bénéficient aussi de cette amplification concernant cette fois la détection des OG et le cas échéant d'en quantifier aussi précisément que possible l'effet.

En particulier, il a été proposé que des fluctuations de l'espace-temps pourraient être mises en évidence dans des expériences d'interférométrie atomique à travers la diffusion de phase qu'elles entraînent. L'idée est que même si l'on ne peut pas détecter individuellement ces fluctuations, l'effet cumulé d'un grand nombre de ces fluctuations pourraient révéler un mouvement de diffusion macroscopique détectable [54, 52, 53, 51]. Cet argument est analogue à l'argument bien connu pour le mouvement Brownien qui a permis de mettre en évidence l'existence des atomes par un effet cumulé des collisions de ces atomes sur des sondes macroscopiques à une époque où on se savait pas encore « voir » les atomes directement.

Dans cette partie, on utilise ces idées pour calculer l'effet de décohérence et l'écrire en termes des propriétés spectrales du fond d'OG et des propriétés géométriques de l'interféromètre. Pour fixer les idées, j'utiliserai les chiffres correspondant au projet HYPER qui a été proposé par des équipes françaises et européennes pour une mission spatiale.

### B.1 Présentation succincte du projet HYPER

HYPER est un projet d'interféromètre spatial [98, 99] dont l'objectif principal est la détection de l'effet Lense-Thirring, un effet de Relativité Générale dû à la proximité de l'in-

terféromètre avec une masse en rotation, ici la Terre. Il s'agit d'un gyromètre qui mesure des fréquences de rotation du référentiel d'inertie local par rapport à un référentiel céleste matérialisé par des étoiles lointaines sur lesquelles l'orientation de l'instrument est asservie par pointé télescopique.

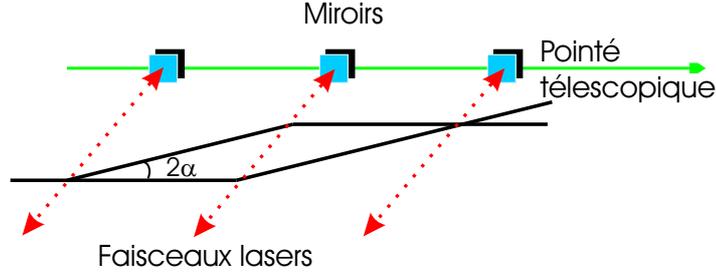


FIG. 2.8: Représentation schématique de l'interféromètre HYPER. En mode gyromètre, deux tels interféromètres se superposent tête bêche de telle sorte que la soustraction des déphasages des deux interféromètres permet d'éliminer les effets d'accélération et de ne mesurer que la fréquence de rotation.

On donne dans la suite une description volontairement simple du fonctionnement de l'instrument HYPER et on renvoie le lecteur à la littérature pour plus de détails sur l'appareil en lui-même [98] ou le calcul du signal (déphasage) lorsque l'on tient compte de toutes les perturbations [100, 101, 102].

### B.1.1 De l'effet Sagnac à l'effet Lense Thirring

Le principe de base des gyromètres atomiques est fondé sur l'effet Sagnac [78]. Si on suppose un interféromètre en rotation à la fréquence  $\Omega_{\text{Sagnac}}$  dans un espace supposé Minkowskien, on montre qu'un déphasage Sagnac  $\varphi_{\text{Sagnac}}$  apparaît et s'écrit pour un interféromètre atomique :

$$\varphi_{\text{Sagnac}}^{\text{at}} = \frac{2m_{\text{at}}A_{\text{at}}}{\hbar} \Omega_{\text{Sagnac}} \quad (2.81)$$

$m_{\text{at}}$  est la masse des atomes,  $\Omega_{\text{Sagnac}}$  la fréquence de rotation et  $A_{\text{at}}$  l'aire de l'interféromètre atomique. Pour comparaison, l'effet Sagnac s'écrit pour un interféromètre optique :

$$\varphi_{\text{Sagnac}}^{\text{phot}} = \frac{2\Omega_{\text{phot}}A_{\text{phot}}}{c^2} \Omega_{\text{Sagnac}} \quad (2.82)$$

où  $\Omega_{\text{phot}}$  est la fréquence des photons et  $A_{\text{phot}}$  l'aire de l'interféromètre optique (voir la section A.1.4).

On voit sur ces expressions que la sensibilité des interféromètres atomiques à l'effet Sagnac est potentiellement beaucoup plus importante que celle des interféromètres optiques car l'énergie de masse des atomes est bien plus grande que l'énergie des photons [103, 104, 105][106,

p. 239] :

$$\frac{\varphi_{\text{Sagnac}}^{\text{at}}}{\varphi_{\text{Sagnac}}^{\text{phot}}} = \frac{m_{\text{at}} c^2}{\hbar \Omega_{\text{phot}}} \frac{A_{\text{at}}}{A_{\text{phot}}} \quad (2.83)$$

Autrement dit, le premier rapport dans cette expression est beaucoup plus grand que 1 (dans le cas du projet HYPER avec l'atome de césium, ce rapport vaut environ  $2 \times 10^{11}$  pour des fréquences optiques). Toutefois, les interféromètres optiques réalisent des aires plus grandes. Par ailleurs, ils correspondent à des flux plus importants, ce qui les rend encore compétitifs à l'heure actuelle. Néanmoins, il est naturel d'envisager l'utilisation d'interféromètres atomiques pour la mesure d'un effet de rotation très petit tel que l'effet Lense-Thirring.

L'aire  $A_{\text{at}}$  d'un interféromètre atomique peut être réexprimée en fonction de caractéristiques géométriques de l'appareil, de la vitesse  $v_{\text{at}}$  des atomes et du temps de parcours dans les bras. Par exemple, pour une géométrie de losange, l'aire s'exprime en fonction du temps de parcours  $\tau_{\text{at}}$  sur chaque bras de longueur  $L$  et de l'angle d'ouverture  $2\alpha$  entre les deux bras :

$$A_{\text{at}} = L^2 \sin(2\alpha) = v_{\text{at}}^2 \tau_{\text{at}}^2 \sin(2\alpha) \quad (2.84)$$

Il est important de noter que l'effet Sagnac mesure la fréquence de rotation par rapport au référentiel d'inertie local. En relativité générale, ce référentiel d'inertie local diffère du référentiel des étoiles fixes de par la présence d'objets massifs. En particulier, le référentiel d'inertie local est entraîné par la rotation de la Terre : c'est l'effet Lense-Thirring (voir par exemple [107] ou les livres de référence [22, 60]). La présence d'une masse importante est aussi à l'origine d'effets supplémentaires du même type parfois beaucoup plus importants que l'effet Lense-Thirring. En particulier, il apparaît un effet dynamique qui provient du fait que le satellite se déplace par rapport à une métrique courbe et qui contrairement à l'effet Lense-Thirring ne dépend pas du moment cinétique de la Terre. Sur les gyroscopes, cet effet donne aussi lieu à un effet de précession (appelé précession géodétique) qui est deux ordres de grandeur plus important que la précession Lense-Thirring [60, chap 9.6].

Ici, nous nous contenterons de considérer l'effet Lense-Thirring qui se traduit par un déphasage supplémentaire  $\varphi_{\text{LT}}$  que l'on peut écrire en analogie avec l'effet Sagnac :

$$\varphi_{\text{LT}} = \frac{2m_{\text{at}} A}{\hbar} \Omega_{\text{LT}} \quad (2.85)$$

Nous avons défini une fréquence de rotation  $\Omega_{\text{LT}}$  qui mesure l'effet d'entraînement du référentiel inertiel local par la rotation de la Terre :

$$\Omega_{\text{LT}} = \frac{GJ_{\oplus}}{r^3 c^2} (1 - 3 \cos^2 \theta) \sim 4 \times 10^{-14} \text{ rad.s}^{-1} \quad (2.86)$$

$J_{\oplus}$  représente le moment cinétique de la Terre,  $r$  est la distance du satellite au centre de la Terre et  $\theta$  est l'angle entre l'axe de rotation de la Terre et la droite joignant le centre de la Terre au satellite (voir figure (2.9)). La fréquence  $\Omega_{\text{LT}}$  est constante dans le temps en un point d'espace donné mais dépend de la position du satellite autour de la Terre. Le projet HYPER

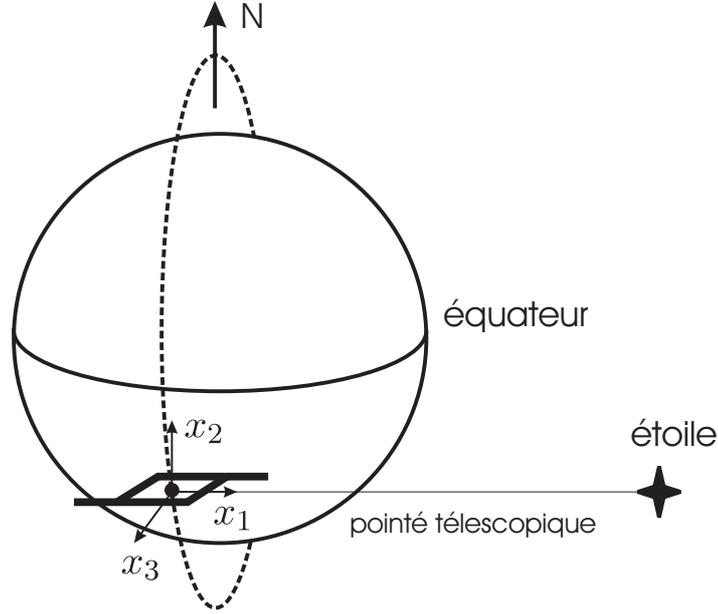


FIG. 2.9: Orbite et configuration du satellite HYPERSAT pour la mesure de l'effet Lense-Thirring.

visé à cartographier cet effet, c'est-à-dire à mesurer  $\Omega_{\text{LT}}$  pour différentes latitudes  $\theta$ , à une distance  $r$  fixée de la Terre. En cela, il a des objectifs complémentaires à ceux du satellite GPB qui a été lancé en mars 2004 pour mesurer la valeur moyenne de l'effet Lense-Thirring sur l'orbite du satellite [108].

### B.1.2 Effet des OG

Les OG donnent lieu elles aussi à un effet d'entraînement du référentiel d'inertie local, de la même manière que les perturbations gravitationnelles créées par la Terre en rotation. On peut écrire leur effet sur le déphasage de la même façon que le déphasage Sagnac :

$$\delta\varphi_{\text{gw}}(t) = \frac{2m_{\text{at}}A_{\text{at}}}{\hbar}\delta\Omega_{\text{gw}}(t) \quad (2.87)$$

La fréquence  $\delta\Omega_{\text{gw}}$  s'interprète comme une fréquence instantanée d'entraînement du référentiel d'inertie local. Contrairement au champ Lense-Thirring qui est un champ proche quasi-statique, les OG sont des champs lointains, rayonnés à grande distance et dépendants du temps. En conséquence, la fréquence  $\delta\Omega_{\text{gw}}$  et donc le déphasage  $\delta\varphi_{\text{gw}}$  sont des grandeurs qui dépendent du temps.

Ce déphasage apparaît comme un bruit dans la mesure de l'effet Lense-Thirring qu'il est nécessaire de quantifier. Pour le calculer, il faut déterminer l'effet des perturbations gravitationnelles sur l'interféromètre. On peut d'ores et déjà deviner par homogénéité que la fréquence  $\delta\Omega_{\text{gw}}$  doit être proportionnelle à une dérivée temporelle de la métrique. Ce point

sera précisé dans la prochaine partie où la formule (2.85) sera démontrée à partir d'un calcul du déphasage.

### B.1.3 Quelques chiffres importants concernant HYPER

HYPER a comme objectif primaire la cartographie de l'effet Lense-Thirring. Il suivra pour cela une orbite polaire afin de moduler l'effet Lense-Thirring en balayant l'angle  $\theta$  à une altitude de 1000 km (un compromis entre l'amplitude de l'effet qui décroît en  $1/r^3$  d'après l'équation (2.85) et la nécessité d'une altitude grande pour limiter les effets de friction de l'atmosphère). A cette altitude, la période de révolution est de  $T_r = 100$  minutes.

HYPER est aussi sensible à l'accélération de l'interféromètre qui crée un déphasage supplémentaire bien supérieur au déphasage Lense-Thirring. Pour éliminer cet effet, HYPER est en fait constitué de deux interféromètres de Mach-Zehnder identiques parcourus en sens opposé par les sondes atomiques. Le déphasage dû à l'accélération est le même pour les deux interféromètres, alors qu'il est opposé pour le déphasage Lense-Thirring. L'observable gyroscopique est formée comme la différence entre les déphasages donnés par les deux interféromètres.

Le point standard pour une mesure de l'effet Lense-Thirring est défini comme une moyenne sur un temps  $T_p \sim 3$  s. La sensibilité attendue pour la mesure des fréquences de rotation est de  $3 \times 10^{-8} \text{ rad.s}^{-1} \text{ Hz}^{-1/2}$ . Cette sensibilité est essentiellement limitée par le bruit de grenaille du faisceau atomique, ce bruit étant lui même limité par le flux atomique. Pour mesurer l'effet Lense-Thirring avec une précision de 5%, HYPER doit intégrer le signal pendant plusieurs mois. Cela fait intervenir des fréquences supérieures à environ  $10^{-6}$  Hz. Cette discussion nous permettra plus loin de préciser quelles sont les fréquences de bruit qui interviennent, et de montrer en particulier le rôle important joué par le fond de confusion des binaires.

## B.2 Déphasage gravitationnel dans un interféromètre atomique en approximation eikonale

On a présenté dans la première partie de la thèse le calcul du déphasage pour un champ qui se propage dans un champ gravitationnel dans l'approximation eikonale et en l'absence de toute autre perturbation de la phase. Lorsqu'un champ optique se propage entre deux miroirs, on a vu que l'effet des ondes gravitationnelles se manifeste à la fois sur le déplacement de ces miroirs et sur le champ qui se propage. Ce n'est qu'à la condition de tenir compte de ces deux contributions que le déphasage en sortie d'interféromètre est obtenu comme une quantité invariante de jauge. Sachant cela, on peut alors choisir le système de coordonnées qui convient le mieux pour calculer le déphasage.

On choisit ici de se placer dans un système de coordonnées TT. En effet, la limite des grandes longueurs d'onde n'est plus vérifiée quand on étudie la décohérence ; la raison est que ce sont les longueurs d'onde de l'ordre de la taille de l'interféromètre qui déphasent les deux bras et qui sont donc susceptibles d'introduire le plus de bruit dans l'interféromètre. Le

système de coordonnées de Fermi n'est donc pas utilisable pour ce calcul alors que le système de coordonnées TT s'y prête bien.

Les déphasages de bords sont calculés en utilisant l'équation géodésique, une fois spécifié comment sont matérialisés les miroirs. Le déphasage propagatif est quant à lui exprimé de façon commode en fonction des composantes de Fourier  $h^\gamma[k]$  qui caractérisent le bruit gravitationnel. On écrira le déphasage comme un développement sur ces modes :

$$\delta\varphi_{\mathcal{G}}(t) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{\gamma=\pm} \phi_k^\gamma[\mathcal{G}(t)] h^\gamma[k] \quad (2.88)$$

En identifiant cette expression avec l'expression du déphasage (2.9) et la décomposition de la métrique (2.65), on obtient le coefficient :

$$\phi_k^\gamma[\mathcal{G}(t)] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\mathcal{G}(t)} \mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]^* \mathbf{e}_j^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]^* K^i K^j e^{-ik_\mu x^\mu(\lambda)} d\lambda \quad (2.89)$$

Le temps  $t$  est une date qui paramètre les géodésiques. Ici, on prendra pour  $t = 0$  l'instant auquel l'onde de matière est au milieu de l'interféromètre. Si on change cette valeur de  $\tau$ , l'expression (2.89) est simplement changée d'un facteur de phase  $e^{-i\omega\tau}$  ; en effet, le système de coordonnées étant comobile, le terme de phase apparaissant dans l'expression (2.89) est modifiée de la quantité  $-i\omega\tau$ . On choisit de noter  $\phi_k^\gamma[\mathcal{G}]$  la valeur pour une géodésique  $\mathcal{G}$  définie à l'instant de référence  $t = 0$ . Ce coefficient  $\phi_k^\gamma[\mathcal{G}]$  ne dépend alors que de la géométrie de l'interféromètre et il vérifie les conditions de réalité suivantes :

$$\phi_{-k}^\gamma[\mathcal{G}] = (\phi_k^\gamma[\mathcal{G}])^* \quad (2.90)$$

Avec ces notations, le déphasage propagatif s'écrit finalement :

$$\delta\varphi_{\mathcal{G}}(t) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{\gamma=\pm} \phi_k^\gamma[\mathcal{G}] h^\gamma[k] e^{-i\omega t} \quad (2.91)$$

Le calcul d'un déphasage dans un interféromètre se ramène donc au calcul du coefficient  $\phi_k^\gamma$  sur les géodésiques qui constituent l'interféromètre, plus le calcul des déphasages de bords. C'est ce que nous allons faire dans les paragraphes suivants en spécifiant la géométrie de l'instrument et la façon dont les bords sont matérialisés.

### B.2.1 Interféromètres atomiques matériels

On commence par étudier le cas d'un interféromètre matériel dans lequel des atomes seraient séparés et réfléchis par des miroirs matériels en chute libre, en analogie avec les détecteurs d'OG étudiés précédemment. Cette expérience ne correspond pas à l'interféromètre HYPER sur lequel nous reviendrons plus loin. Ce modèle d'interféromètre est représenté sur la figure (2.10). On suppose que les miroirs B, C et les séparatrices A, D sont des objets

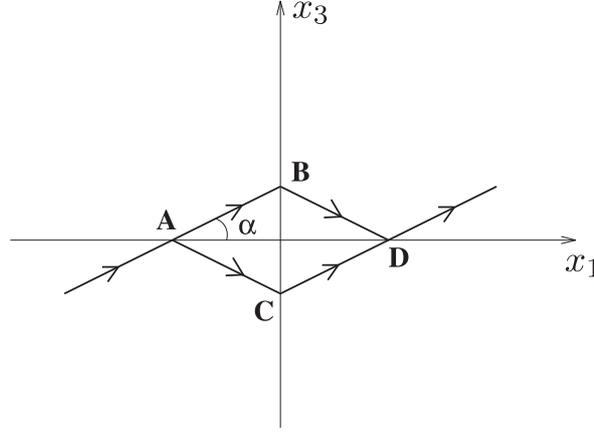


FIG. 2.10: Représentation schématique d'un interféromètre atomique avec une géométrie de Mach-Zehnder présentant la symétrie du losange.

matériels en chute libre et que l'onde de matière se sépare, se réfléchit et se recombine de façon élastique sans subir de discontinuité de déphasage.

Dans un système de coordonnées TT, les miroirs restent immobiles, comme on l'a discuté dans la partie A.2.2 pour les détecteurs optiques d'OG. Cette propriété reste vraie dans le temps si on néglige le recul pris par les miroirs suite au transfert d'impulsion venant des atomes qui se réfléchissent. Cela revient à supposer la masse du miroir très grande devant celle des atomes. On pourrait traiter ces effets de recul en utilisant les méthodes qui ont été développées en interférométrie atomique [103, 106, 109]. Nous ne le ferons pas ici et nous contenterons du terme principal.

Avec ces hypothèses simplificatrices, le déphasage est uniquement déterminé par des contributions propagatives du type (2.91). Pour calculer la sensibilité  $\phi_k^\gamma$  correspondante, on suppose que la phase de l'onde de matière ne subit pas de discontinuité lors des réflexions sur les miroirs de telle sorte que le déphasage s'écrit comme la somme de déphasages sur chaque segment de l'interféromètre. On suppose aussi que toutes les interactions sont élastiques de sorte que l'énergie cinétique des atomes est constante dans l'interféromètre (à l'ordre zéro dans la perturbation). Le quadrivecteur  $K^\mu$  est relié à l'impulsion  $P^\mu$  par la relation  $P^\mu = \hbar K^\mu$  et on a pour une onde de matière à la limite non-relativiste :

$$K^0 = \frac{E}{\hbar c} \simeq \frac{m_{\text{at}} c}{\hbar} \quad , \quad K^i = \frac{p^i}{\hbar} \simeq \frac{m_{\text{at}} v_{\text{at}}^i}{\hbar} = K^0 u^i \quad (2.92)$$

Dans ces calculs,  $u^i$  représente la vitesse réduite :

$$u^i = \frac{v_{\text{at}}^i}{c} \quad (2.93)$$

Pour l'interféromètre représenté sur la figure (2.10), le déphasage en sortie s'écrit finalement

comme une intégrale sur le contour fermé défini par l'interféromètre :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{\text{at}} &= \frac{1}{2} \int_{\text{ABD}} h_{ij}(x(\lambda)) K^i(x(\lambda)) K^j(x(\lambda)) d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\text{ACD}} h_{ij}(x(\lambda)) K^i(x(\lambda)) K^j(x(\lambda)) d\lambda \\ &= \frac{K_0^2}{2} \oint_{\text{ABDCA}} h_{ij}(x(\lambda)) u^i(x(\lambda)) u^j(x(\lambda)) d\lambda\end{aligned}\quad (2.94)$$

Cette expression du déphasage correspond à la description la plus simple que l'on puisse donner des interféromètres à ondes de matière et elle porte le nom de déphasage de Linet-Tourenç [72]. C'est elle que nous utiliserons systématiquement dans la suite. Des calculs plus raffinés du déphasage très utiles pour d'autres applications [109, 110] ne changeraient pas les ordres de grandeur que nous obtiendrons plus loin pour la décohérence.

Nous calculons le coefficient  $\phi_k^\gamma$  comme une somme sur chaque segment constituant l'interféromètre :

$$\phi_k^\gamma = \phi_k^\gamma[\text{AB}] - \phi_k^\gamma[\text{AC}] - \phi_k^\gamma[\text{CD}] + \phi_k^\gamma[\text{BD}]\quad (2.95)$$

On écrit la contribution le long de chaque segment grâce à (2.89) :

$$\phi_k^\gamma[\text{AB}] = \frac{m_{\text{at}} c^2}{2\sqrt{2}\hbar} \int_{t_A}^{t_B} \left( \mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]^* u_{\text{AB}}^i(t') \right)^2 e^{-i(\omega t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t'))} dt' \quad (2.96)$$

L'intégrale est à considérer sur la géodésique non perturbée définie à un temps de référence  $t = 0$  et  $\mathbf{u}$  est à prendre à l'ordre zéro dans la perturbation. Le paramètre  $\lambda$  a été identifié en utilisant les relations suivantes :

$$x^i = x^i(t=0) + v_{\text{at}}^i t = x^i(t=0) + u^i ct \quad (2.97)$$

$$x^i = x^i(\lambda=0) + K^i \lambda = x^i(\lambda=0) + K_0 u^i \lambda \quad , \quad \lambda = \frac{ct}{K_0} \quad (2.98)$$

On fait l'hypothèse d'une géométrie ayant la symétrie du losange avec un angle d'ouverture  $2\alpha$  et une longueur :

$$\ell_{\text{AB}} = v_{\text{at}} \tau_{\text{at}} \quad (2.99)$$

sur chaque segment. On suppose l'interféromètre dans le plan  $(x^1, x^3)$  et on paramètre les coordonnées des sommets de la façon suivante :

$$\begin{aligned}t_{\text{D}} &= \tau_{\text{at}}, & \mathbf{x}_{\text{D}} &= (\ell_{\text{AB}} \cos \alpha, 0, 0), \\ t_{\text{A}} &= -t_{\text{D}}, & \mathbf{x}_{\text{A}} &= -\mathbf{x}_{\text{D}}, \\ t_{\text{B}} &= 0, & \mathbf{x}_{\text{B}} &= (0, 0, \ell_{\text{AB}} \sin \alpha), \\ t_{\text{C}} &= t_{\text{B}}, & \mathbf{x}_{\text{C}} &= -\mathbf{x}_{\text{B}}\end{aligned}\quad (2.100)$$

On a utilisé la stationarité du fond d'OG pour choisir l'origine des temps. Les vitesses réduites s'écrivent :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{AB} &= \frac{v_{\text{at}}}{c} (\cos \alpha, 0, \sin \alpha) \\ \mathbf{u}_{BD} &= \frac{v_{\text{at}}}{c} (\cos \alpha, 0, -\sin \alpha) \\ \mathbf{u}_{AC} &= \mathbf{u}_{BD}, \quad \mathbf{u}_{CD} = \mathbf{u}_{AB}\end{aligned}\quad (2.101)$$

On calcule les facteurs suivants :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{AB} &= \frac{v_{\text{at}}}{c} (\sin \theta \cos \varphi \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \\ \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{AC} &= \frac{v_{\text{at}}}{c} (\sin \theta \cos \varphi \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B &= \omega \tau_{\text{at}} \frac{v_{\text{at}}}{c} \cos \theta \sin \alpha\end{aligned}\quad (2.102)$$

Les angles  $\theta$  et  $\varphi$  sont les angles d'Euler habituels (voir annexe C). Les trajectoires  $\mathbf{x}(t')$  le long de chaque segment se paramétrisent enfin de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\text{AB} &: \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t') = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{AB} \omega t' \\ \text{BD} &: \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t') = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{BD} \omega t' \\ \text{AC} &: \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t') = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{BD} \omega t' \\ \text{CD} &: \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t') = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{AB} \omega t'\end{aligned}\quad (2.103)$$

À l'ordre le plus bas en  $\frac{v_{\text{at}}}{c}$  on obtient  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u} \ll 1$ , de sorte que les amplitudes  $\phi_k^\gamma$  s'écrivent, en utilisant (2.96) et les conditions de réalités (C-22) :

$$\begin{aligned}\phi_k^\gamma[\text{AB}] &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{m_{\text{at}} c^2}{\hbar \omega} (\mathbf{e}^{-\gamma} \cdot \mathbf{u}_{AB})^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B} \left( 1 - e^{i\omega \tau_{\text{at}} (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{AB})} \right) \\ \phi_k^\gamma[\text{BD}] &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{m_{\text{at}} c^2}{\hbar \omega} (\mathbf{e}^{-\gamma} \cdot \mathbf{u}_{AC})^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B} \left( e^{-i\omega \tau_{\text{at}} (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{AC})} - 1 \right) \\ \phi_k^\gamma[\text{AC}] &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{m_{\text{at}} c^2}{\hbar \omega} (\mathbf{e}^{-\gamma} \cdot \mathbf{u}_{AC})^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B} \left( 1 - e^{i\omega \tau_{\text{at}} (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{AC})} \right) \\ \phi_k^\gamma[\text{CD}] &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{m_{\text{at}} c^2}{\hbar \omega} (\mathbf{e}^{-\gamma} \cdot \mathbf{u}_{AB})^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B} \left( e^{-i\omega \tau_{\text{at}} (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{AB})} - 1 \right)\end{aligned}\quad (2.104)$$

La variation de l'amplitude  $\phi_k^\gamma$ , donnée par l'expression (2.95), est représentée sur les figures (2.11) en fonction des angles d'Euler. On a choisi une fréquence  $\omega$  de l'ordre de l'inverse du temps de vol des atomes car la sensibilité est maximale pour des fréquences voisines de  $1/\tau_{\text{at}}$ . Elle tend en effet vers zéro pour  $\omega \tau_{\text{at}} \ll 1$  et  $\omega \tau_{\text{at}} \gg 1$ , comme on peut le voir sur la figure (2.12).

Les expressions (2.104) sont valables quelque soit la fréquence  $\omega$  dans la limite non relativiste ( $v_{\text{at}} \ll c$ ). L'expression de l'amplitude  $\phi_k^\gamma$  est alors relativement complexe dans le cas général et demande un calcul numérique des intégrales qui interviennent dans l'expression de la décohérence. Cependant, l'expression se simplifie dans le cas limite où l'angle d'ouverture  $\alpha$  est petit devant 1 (faisceaux peu séparés), ce qui est le cas pour les interféromètres atomiques

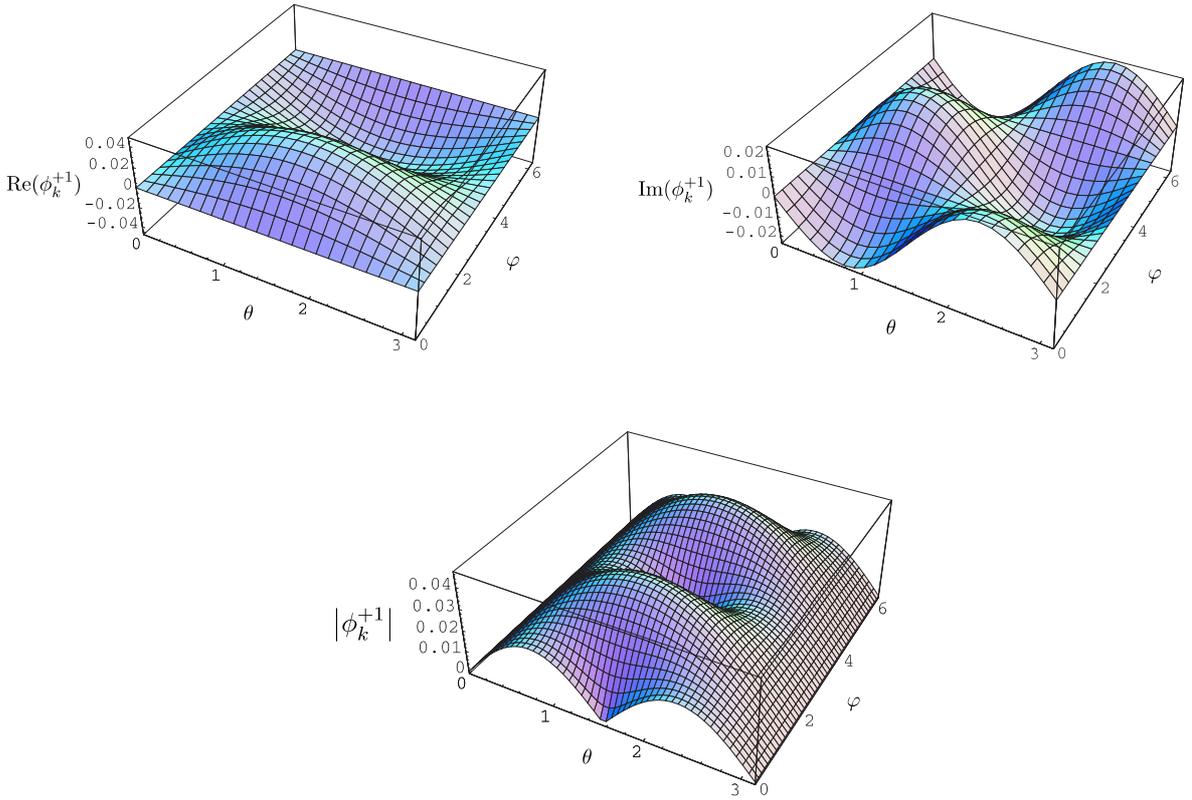


FIG. 2.11: Partie réelle et imaginaire de  $\phi_k^\gamma$  en fonction de la direction du vecteur d'onde des OG exprimée en fonction des angles d'Euler  $\theta$  et  $\varphi$ . On a pris  $\gamma = +1$ , la polarisation  $\gamma = -1$  se retrouvant par les relations de réalités (2.90) et (C-22). D'autre part, on a comme paramètre  $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\tau_{\text{at}} = 1.5 \text{ s}$ ,  $v_{\text{at}} = 0.2 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\alpha = 0.0175$ , qui sont ceux correspondant au projet HYPER.

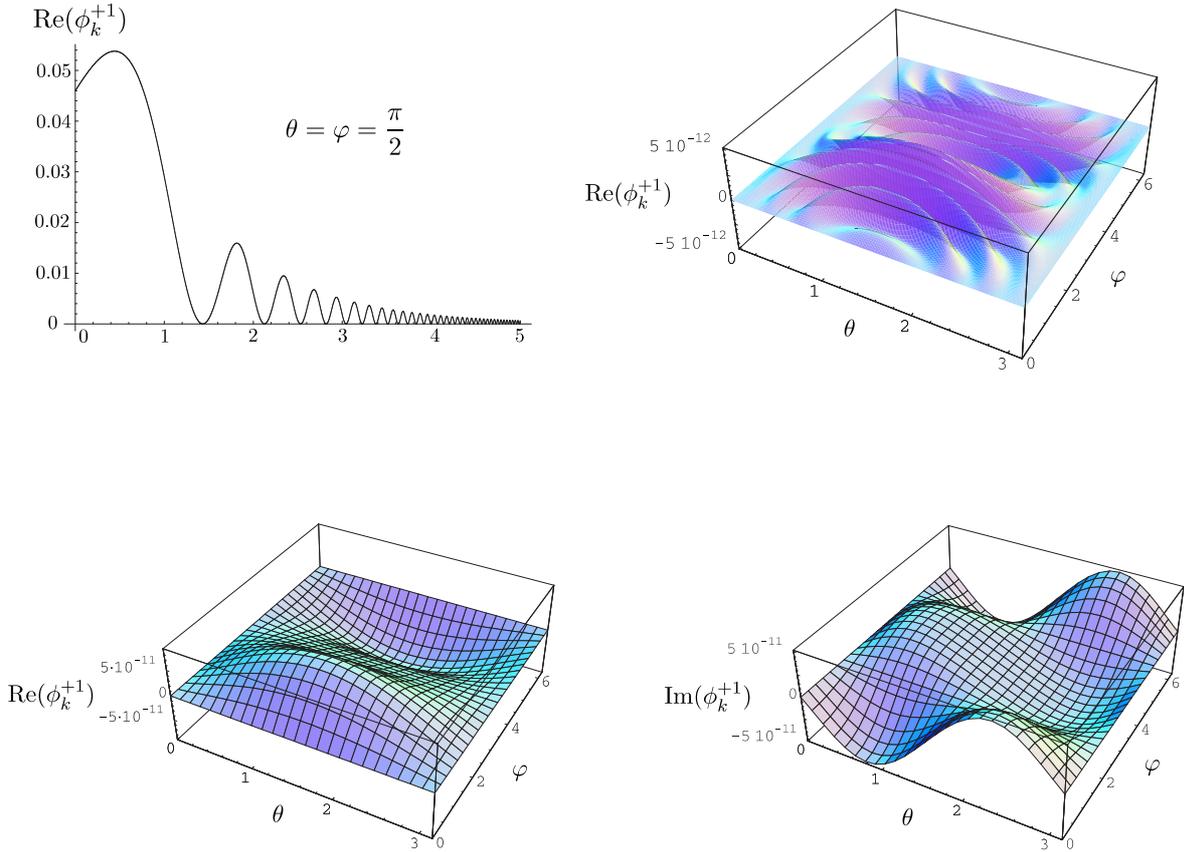


FIG. 2.12: La figure en haut à gauche représente la décroissance typique de la partie réelle de  $\phi_k^\gamma$ . On a représenté pour cela sa valeur en  $\theta = \varphi = \frac{\pi}{2}$ . On voit que cette fonction est maximale pour une fréquence de l'ordre de  $\frac{1}{\tau_{\text{at}}}$  et décroît de part et d'autre. La décroissance est linéaire pour les basses fréquences, et en oscillant pour les hautes fréquences. À hautes fréquences, la sensibilité commence à développer des franges, comme on peut le voir sur la figure en haut à droite, pour une fréquence  $\omega = 20 \times \frac{c}{\tau_{\text{at}} v_{\text{at}}}$ . Les deux figures du bas représentent la partie réelle et imaginaire de la sensibilité pour une fréquence  $\omega = \frac{c}{\tau_{\text{at}} v_{\text{at}}}$ . Cette fréquence représente la limite de modélisation de la sensibilité  $\phi_k^\gamma$  par l'expression simplifiée (2.108).

et en particulier le projet HYPER pour lequel cet angle vaut  $\alpha = 0.0175$ . En se limitant à l'ordre un en  $\alpha$ , l'amplitude  $\phi_k^\gamma$  se réduit après quelques calculs à l'expression suivante :

$$\phi_k^\gamma \simeq 2i\sqrt{2} \frac{m_{\text{at}} v_{\text{at}}^2}{\hbar\omega} \sin(2\alpha) \mathbf{e}_1^{-\gamma} \mathbf{e}_3^{-\gamma} \sin^2 \left[ \frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2} \left( 1 - \frac{v_{\text{at}}}{c} \sin\theta \cos\varphi \right) \right] + O(\alpha^2) \quad (2.105)$$

L'ordre zéro en  $\alpha$  a disparu, ce qui est normal car l'effet doit disparaître lorsque les sondes empruntent les mêmes chemins. Notons que l'on conserve l'expression  $\sin(2\alpha)$  au lieu de son développement  $2\alpha$  à l'ordre le plus bas en  $\alpha$  pour des raisons de commodité et d'interprétation (voir la section B.2.2 suivante). Cette expression est encore valable quelque soit la fréquence  $\omega$ , mais on voit que l'amplitude ne prend des valeurs significatives que lorsque  $\omega\tau_{\text{at}} \sim 1$ . Autrement dit, pour les valeurs de  $\omega$  qui contribuent, on peut négliger le terme en  $\frac{v_{\text{at}}}{c} \sin\theta \cos\varphi$  qui apparaît dans le sinus pour obtenir finalement une expression encore plus simple :

$$\phi_k^\gamma \simeq 4i\sqrt{2} \frac{\Omega_{\text{at}} \sin(2\alpha)}{\omega} \mathbf{e}_1^{-\gamma} \mathbf{e}_3^{-\gamma} \sin^2 \frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2} \quad (2.106)$$

On a défini l'énergie cinétique  $\Omega_{\text{at}}$  des atomes mesurée comme une fréquence :

$$\Omega_{\text{at}} = \frac{m_{\text{at}} v_{\text{at}}^2}{2\hbar} \quad (2.107)$$

La fonction  $\phi_k^\gamma$  définit la réponse en amplitude pour une OG de fréquence  $\omega$  se propageant dans la direction  $\hat{\mathbf{k}}$ . Cette fonction dépend donc, en plus de la fréquence  $\omega$ , des angles  $\theta$  et  $\varphi$  définissant la direction du vecteur d'onde des OG. La dépendance angulaire s'exprime explicitement sous la forme (voir la figure (2.11) pour une représentation) :

$$\phi_k^\gamma = -4i\sqrt{2} \frac{\Omega_{\text{at}} \sin(2\alpha)}{\omega} \sin\theta (\cos\theta \cos\varphi + i\gamma \sin\varphi) \sin^2 \frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2} \quad (2.108)$$

On voit que la sensibilité  $\phi_k^\gamma$  est proportionnelle à l'énergie cinétique des atomes et non pas à leur énergie au repos comme c'était le cas pour l'effet Sagnac. On s'attend donc à ce que l'effet d'amplification existant pour l'effet Sagnac en passant des photons aux atomes n'apparaisse pas pour la détection des OG. Cela provient du fait que les OG sont intrinsèquement des composantes spatiales de la métrique, alors que l'effet Lense-Thirring ou l'effet Sagnac sont liées à des composantes temporelles de la métrique. On reviendra sur ce point dans la deuxième partie.

L'expression (2.108) peut être retrouvée comme une limite grande longueur d'onde des expressions (2.104). Cependant nous ne faisons pas cette hypothèse ici et le fait de retrouver la même expression que celle valable en limite grande longueur d'onde provient du fait que les atomes se déplacent lentement par rapport aux OG,  $v_{\text{at}} \ll c$ . Ce ne sera par exemple pas le cas pour les trajets lumineux qui seront étudiés par la suite.

### B.2.2 Équivalence avec un entraînement du référentiel d'inertie local

Afin de se raccorder à la discussion de la partie B.1, il est utile d'exprimer le déphasage atomique associé à l'amplitude  $\phi_k^\gamma$  de la partie précédente comme une observable gyrométrique, c'est-à-dire une observable sensible à la rotation. Pour cela, on peut regrouper les équations (2.91) et (2.108) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{\text{at}}(t) &= 8i\Omega_{\text{at}} \sin(2\alpha) \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2}}{\omega} h_{13}[\omega, \mathbf{x} = \mathbf{0}] e^{-i\omega t} \\ h_{13}[\omega, \mathbf{x} = \mathbf{0}] &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\gamma=\pm} \frac{(\mathbf{e}_1^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]\mathbf{e}_3^\gamma[\hat{\mathbf{k}}])^*}{\sqrt{2}} h^\gamma[k]\end{aligned}\quad (2.109)$$

On écrira également :

$$\Delta\varphi_{\text{at}}(t) = \frac{m_{\text{at}}v_{\text{at}}^2\tau_{\text{at}}^2 \sin(2\alpha)}{\hbar} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2}\right)^2} i\omega h_{13}[\omega, \mathbf{x} = \mathbf{0}] e^{-i\omega t} \quad (2.110)$$

En utilisant l'équation (2.84), on peut enfin réécrire le déphasage sous une forme analogue au déphasage Sagnac <sup>4</sup> :

$$\Delta\varphi_{\text{at}}(t) = \frac{2m_{\text{at}}A_{\text{at}}}{\hbar} \delta\Omega_{\text{gw}}(t) \quad (2.111)$$

avec  $\delta\Omega_{\text{gw}}(t)$  une fréquence de rotation caractérisant l'entraînement du référentiel d'inertie local. L'intérêt de cette dérivation est que nous avons maintenant obtenu l'expression de cette fréquence à partir du calcul du déphasage fait dans la section précédente :

$$\delta\Omega_{\text{gw}}(t) = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2}\right)^2} i\omega h_{13}[\omega, \mathbf{x} = \mathbf{0}] e^{-i\omega t} \quad (2.112)$$

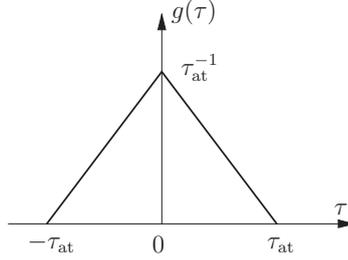
On voit que cet effet d'entraînement du référentiel d'inertie local dépend maintenant du temps. On peut encore améliorer la compréhension qualitative de cet effet en donnant une expression équivalente de la fréquence d'entraînement :

$$\delta\Omega_{\text{gw}}(t) = -\frac{1}{2} \frac{d\overline{h_{13}}}{dt} \quad , \quad \overline{h_{13}}(t) = \int h_{13}(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (2.113)$$

La fonction  $g(\tau)$  est telle que sa transformée de Fourier soit égale au sinus cardinal apparaissant dans l'expression (2.112) :

$$g(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} g[\omega] e^{-i\omega\tau} \quad , \quad g[\omega] = \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2}\right)^2} \quad (2.114)$$

<sup>4</sup>Cette réécriture comme un effet Sagnac n'est que formelle. En effet, le paramètre pertinent en ce qui concerne l'effet des OG ne se réduit pas en général à l'aire de l'interféromètre, comme on le verra explicitement plus loin (voir le chapitre 4).

FIG. 2.13: Fonction  $g(\tau)$ .

La fonction  $g(\tau)$  traduit d'une part le filtrage par l'appareil des longueurs d'onde petites devant la taille de l'interféromètre et dont l'effet se moyenne à zéro sur chaque segment, et d'autre part le filtrage des grandes longueurs d'onde pour lesquelles le déphasage est le même sur chaque bras, donnant ainsi un déphasage nul en sortie d'interféromètre. Elle est représentée sur la figure (2.13). Sa forme triangulaire est bien sûr directement liée à la forme en losange de l'interféromètre, qui est scannée au cours du temps par les atomes.

En conclusion, un interféromètre atomique fonctionnant en mode gyrométrique est sensible au passage des OG qui font changer le référentiel d'inertie local. Cet effet, décrit par la dérivée de la composante  $h_{13}$  (pour un interféromètre dans le plan  $(x_1, x_3)$ ), est moyenné sur la durée de la traversée de l'interféromètre par les atomes. On peut donc bien se représenter l'effet des OG sur l'interféromètre comme équivalent à un effet d'entraînement généralisé, sous la condition de prendre en compte une caractéristique importante de l'instrument : son temps de résolution  $\tau_{\text{at}}$ .

Comme nous l'avons déjà dit, cette section est basée sur une description approximative du déphasage. Elle rend compte de façon correcte du déphasage dans HYPER, sauf pour le fait essentiel que les miroirs et séparatrices ne sont pas des éléments matériels dans celui-ci, mais plutôt des faisceaux lasers produisant des transitions Raman.

### B.2.3 Description plus réaliste d'un interféromètre de type HYPER

Dans un interféromètre de type HYPER, les miroirs et séparatrices sont réalisés par des faisceaux lasers produisant des transitions Raman stimulées dans une séquence  $\pi/2 - \pi - \pi/2$  ([103] pour un article de revue). Dans ce processus, les atomes interagissent avec deux lasers contra-propageant légèrement désaccordés de fréquence respectives  $\Omega_{\text{phot},1}$  et  $\Omega_{\text{phot},2}$ . Le désaccord est choisi de telle sorte que le processus Raman, absorption d'un photon sur l'un des faisceaux et émission stimulée d'un photon sur l'autre faisceau, soit résonnant avec une transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental. Dans le même temps, le désaccord entre le niveau fondamental et les niveaux excités est important afin de se placer dans un régime dispersif où l'émission spontanée est négligeable (grand désaccord devant la largeur du niveau excité). Enfin, le temps d'interaction est très court devant tous les temps

caractéristiques du système de telle sorte que le processus peut être considéré comme localisé dans l'espace et le temps.

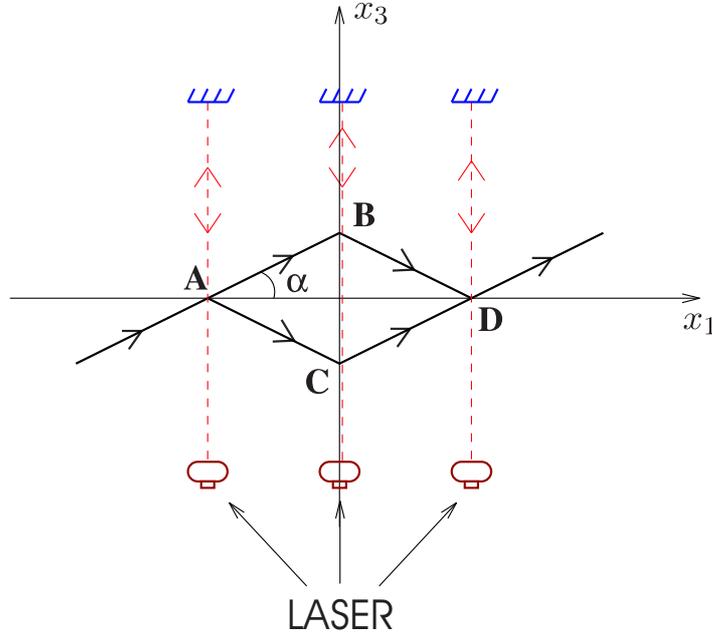


FIG. 2.14: Description schématique d'un interféromètre atomique avec une géométrie Mach-Zehnder. Les miroirs et séparatrices sont réalisés à l'aide de transitions Raman stimulées. On a représenté la géométrie correspondant au projet HYPER, notamment en ce qui concerne le trajet des lasers (en pointillé) entre leur source et les atomes.

En plus du changement d'état interne de l'atome, le processus Raman s'accompagne d'un transfert d'impulsion entre l'atome et le champ laser, transverse à la direction principale  $x^1$  du losange :

$$v_{\text{trans}} = \frac{2\hbar\Omega_{\text{phot}}}{mc} \quad (2.115)$$

$\Omega_{\text{phot}}$  est la valeur quasi-commune des fréquences des faisceaux lasers :

$$\Omega_{\text{phot},1} \simeq \Omega_{\text{phot},2} \equiv \Omega_{\text{phot}} \quad (2.116)$$

Ces changements d'impulsion s'accompagnent d'une variation d'énergie cinétique contrairement au cas de la partie précédente où les réflexions sur les miroirs étaient élastiques. Cependant, à l'ordre le plus bas en  $h_{ij}v_{\text{at}}^i v_{\text{at}}^j$ , on peut négliger cet effet de recul car  $v_{\text{trans}} \ll v_{\text{at}}$ .

L'utilisation de faisceaux Raman pour séparer, réfléchir et recombinaer les faisceaux atomiques est à l'origine de deux modifications pour l'expression du déphasage par rapport à la partie précédente. Premièrement, les coordonnées des points où les atomes se réfléchissent ne sont plus constantes, ce qui est à l'origine de termes de bords dont il faut tenir compte en plus

du déphasage propagatif calculé dans la partie précédente. Deuxièmement, une conséquence de l'interaction Raman est que le faisceau atomique subit un déphasage à l'issue de l'interaction contrairement au cas de la partie précédente où les faisceaux atomiques se réfléchissaient sans discontinuité du déphasage sur les miroirs et séparatrices matériels. On va voir que dans le cas d'HYPER ces deux contributions se compensent presque exactement, ce qui explique que le calcul du déphasage de la partie précédente suffit à rendre compte de l'effet des OG sur HYPER.

La discontinuité du déphasage lors de l'interaction avec les faisceaux Raman est donnée par la différence de phase entre les deux lasers contra-propageants [111, 112]. On l'appelle phase Raman locale et est notée  $\varphi_{\text{phot}}[X]$  pour les sommets  $X = A, B, C, D$ . Le déphasage qui se rajoute dû au processus Raman sur les séparatrices et les miroirs s'écrit alors :

$$\varphi_{\text{phot}} = \varphi_{\text{phot}}[A] - \varphi_{\text{phot}}[B] - \varphi_{\text{phot}}[C] + \varphi_{\text{phot}}[D] \quad (2.117)$$

Ainsi, toute perturbation sur la phase Raman se répercute automatiquement comme une perturbation sur le signal de sortie. Dans la pratique, ces phases Raman ne sont asservies qu'en des points d'espace-temps éloignés de la position  $X$  des atomes. Ainsi, les deux lasers contra-propageant ne parcourant pas tout à fait le même chemin depuis ce point jusqu'à la zone d'interaction  $X$ , ils sont affectés différemment par la perturbation métrique. Durant ce trajet, les fluctuations gravitationnelles créent une fluctuation de la phase Raman telle qu'elle est vue par les atomes. Dans une description simplifiée, on peut considérer la source laser comme une boîte noire délivrant les deux fréquences Raman avec la même phase en un point que nous appellerons « source laser ». Ceci est sûrement valable si la dimension spatiale du système optique créant les deux faisceaux Raman est petite devant la distance parcourue par les faisceaux pour aller de cette source aux atomes.

On commence par évaluer ces deux contributions au niveau du point B, la contribution totale s'obtenant alors comme la somme des contributions au niveau de chaque sommet. On considère dans un premier temps la première de ces contributions, à savoir le déphasage de bord atomique. Il en existe deux contributions, l'une provenant du chemin [AB], l'autre provenant du chemin [BD]. Ces termes de bords s'écrivent, grâce à (2.10) :

$$\delta x_B^\mu (K_\mu^{\text{at}}[AB] - K_\mu^{\text{at}}[BD]) \quad (2.118)$$

La deuxième contribution qui se rajoute au niveau du point B est donnée par la phase Raman local  $\varphi_{\text{phot}}[B]$ . Pour la calculer, il faut déterminer le trajet effectué par les lasers entre la source laser et la zone d'interaction, puis appliquer les formules générales (2.10) de la section A.1.2. Ces chemins sont représentés sur la figure (2.15) dans un diagramme d'espace-temps au niveau du point B. La phase Raman locale  $\varphi_{\text{phot}}[B]$  s'écrit comme la différence de phase entre les chemins LMB et L'B correspondant au trajet des deux lasers contrapropageant :

$$\varphi_{\text{phot}}[B] = \varphi_{\text{phot}}[LMB] - \varphi_{\text{phot}}[L'B] \quad (2.119)$$

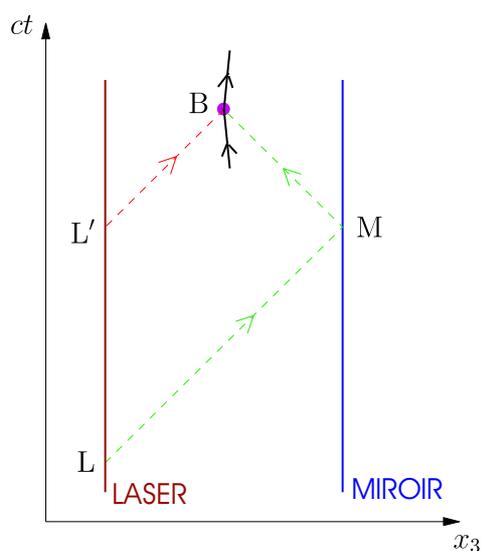


FIG. 2.15: Diagramme d'espace-temps représentant le processus Raman au niveau de la séparatrice B : les lignes en pointillés représentent le trajet des photons ; les lignes verticales en trait plein représentent les objets matériels supposés en chute libre que sont la source laser et le miroir qui réfléchit le laser ; la ligne en trait gras presque verticale représente le mouvement des atomes lent  $v_{\text{at}} \ll c$ . La contribution  $\varphi_{\text{phot}}$  au déphasage est due à la perturbation de la phase Raman locale au point B. Les phases sont supposées être égales au niveau de la source laser, mais sont déphasées différemment sur les chemins L'B et LMB du fait de la perturbation métrique.

La perturbation gravitationnelle de la phase Raman locale, notée  $\Delta\varphi_{\text{phot}}[\text{B}]$  est ensuite décomposée entre un déphasage propagatif et un déphasage de bord :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{\text{phot}}[\text{B}] &= \delta\varphi_{\text{LMB}}^{\text{phot}} - \delta\varphi_{\text{L'B}}^{\text{phot}} + \delta x_{\text{B}}^{\mu} \left( K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{MB}] - K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{L'B}] \right) \\ &\quad + \delta x_{\text{M}}^{\mu} \left( K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{LM}] - K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{MB}] \right) \\ &\quad + \delta x_{\text{L}'}^{\mu} K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{L'B}] - \delta x_{\text{L}}^{\mu} K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{LM}]\end{aligned}\quad (2.120)$$

On a supposé dans cette dernière expression que les faisceaux lasers se réfléchissaient sans déphasage sur les miroirs. Or, la conservation de l'impulsion au niveau du point B implique que :

$$K_{\mu}^{\text{at}}[\text{AB}] + K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{MB}] = K_{\mu}^{\text{at}}[\text{BD}] + K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{L'B}]\quad (2.121)$$

Ainsi, les déphasages de bords au niveau du point B se compensent entre les atomes et les photons et cela provient tout simplement de la conservation de l'impulsion : si l'atome tape le faisceau à un endroit décalé de  $\delta x^{\mu}$  sur le faisceau, alors il verra une phase Raman locale décalée de  $\delta x^{\mu} K_{\mu}^{\text{phot}}$ , qui compense exactement le déphasage de bord  $\delta x^{\mu} K_{\mu}^{\text{at}}$  si  $K_{\mu}^{\text{at}} + K_{\mu}^{\text{phot}}$  se conserve. Autrement dit, le calcul du déphasage induit par les lasers se ramène au calcul du déphasage propagatif le long des deux chemins de la figure (2.15), et des déphasages de bords au niveau du miroir et de la sources laser. On note ce déphasage  $\Delta\varphi'_{\text{phot}}[\text{B}]$  :

$$\Delta\varphi_{\text{phot}}[\text{B}] = \Delta\varphi'_{\text{phot}}[\text{B}] + \delta x_{\text{B}}^{\mu} \left( K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{MB}] - K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{L'B}] \right)\quad (2.122)$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi'_{\text{phot}}[\text{B}] &= \delta\varphi_{\text{LMB}}^{\text{phot}} - \delta\varphi_{\text{L'B}}^{\text{phot}} + \delta x_{\text{M}}^{\mu} \left( K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{LM}] - K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{MB}] \right) \\ &\quad + \delta x_{\text{L}'}^{\mu} K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{L'B}] - \delta x_{\text{L}}^{\mu} K_{\mu}^{\text{phot}}[\text{LM}]\end{aligned}\quad (2.123)$$

Pour déterminer  $\Delta\varphi'_{\text{phot}}[\text{B}]$ , il faut spécifier précisément comment sont tenus les miroirs et les lasers. Dans HYPER, ceux-ci sont rigidement reliés entre eux d'une part et avec les sources laser d'autre part. On peut alors utiliser le résultat vu dans la section A.2.5 qui montre que dans la limite adiabatique le déphasage propagatif et le déphasage de bord se compensent. Autrement dit, la position coordonnée relative entre le miroir et la source laser est modifiée de telle sorte que le déphasage de bord au niveau des bords L, L' et B compense le déphasage propagatif des photons se propageant sur les chemins en pointillés représentés sur la figure (2.15). Cette compensation dépend des propriétés de rigidité de la structure et de la fréquence  $\omega$  des OG. On peut l'écrire qualitativement en analogie avec l'équation (2.64) dans le cas d'HYPER pour lequel la limite quasi-rigide s'applique pour toutes les fréquences  $\omega$  intervenant dans l'expression du déphasage gravitationnel :

$$\Delta\varphi'_{\text{phot}}[\text{B}] \sim \left( \frac{\omega}{\omega_{\text{ac}}} \right)^2 \Delta\varphi'_{\text{phot}}^{\text{libre}}[\text{B}]\quad (2.124)$$

$\Delta\varphi'_{\text{phot}}^{\text{libre}}[\text{B}]$  sera calculé dans la partie suivante, mais on peut déjà dire qu'il est qualitativement donné par le déphasage accumulé sur les chemins en pointillés de la figure (2.15). Le

rapport des fréquences  $\omega$  aux fréquences acoustiques typique de la structure de HYPER est très faible. Autrement dit, le déphasage  $\Delta\varphi'_{\text{phot}}[\text{B}]$  est négligeable dans le bilan de phase de l'interféromètre et peut être oublié.

Finalement, le déphasage dans HYPER se réduit uniquement au déphasage calculé dans la section précédente où on avait supposé des miroirs matériels libres comme dans VIRGO. En termes simples, on peut considérer, dans la limite où les miroirs sont rigidement reliés à la source laser, que les interactions Raman sont équivalentes à des miroirs pour atomes en chute libre.

#### B.2.4 Comparaison avec le cas des miroirs libres

Afin d'obtenir une limite supérieure du déphasage que la lumière peut induire sur les atomes, on peut étudier le cas hypothétique où les miroirs M pour les lasers seraient libres. On a vu que cette situation ne correspond pas au projet HYPER pour lequel on se trouve au contraire à la limite quasi-rigide. Nous le calculons néanmoins ici pour deux raisons : d'une part il permettra des comparaisons intéressantes entre interféromètres atomiques et optiques sur lesquelles nous reviendrons dans la troisième partie ; d'autre part, il nous donnera une borne supérieure pour la contribution des déphasages optiques à la décohérence des interféromètres atomiques.

On se place donc dans la configuration où les miroirs et lasers servant à créer et réfléchir les faisceaux Raman sont en chute libre et on calcule l'effet de déphasage induit sur les atomes. On commence pour cela par évaluer le déphasage pris par les atomes au niveau du point B. Puisque l'on est en jauge TT, les termes de bord associés aux points L, L' et M sont nuls :

$$\delta x_M^\mu = \delta x_{L'}^\mu = \delta x_L^\mu = 0 \quad (2.125)$$

Le déphasage optique  $\Delta\varphi'_{\text{phot}}[\text{B}]$  s'écrit donc :

$$\Delta\varphi'_{\text{phot}}[\text{B}] = \delta\varphi_{\text{LMB}}^{\text{phot}} - \delta\varphi_{\text{L'B}}^{\text{phot}} \quad (2.126)$$

Celui-ci est donné comme la différence de phase entre les trajets optiques des deux lasers contra-propageant et nécessite donc de calculer la différence de sensibilité  $\phi_k^\gamma$  entre les deux chemins représentés sur la figure (2.15) :

$$\phi_k^\gamma[\text{B}] = \phi_k^\gamma[\text{LMB}] - \phi_k^\gamma[\text{L'B}] \quad (2.127)$$

On paramètre les points de la façon suivante :

$$\begin{aligned} t_M &= t_B - \tau_{\text{MB}}, & x_M^3 &= x_B^3 + c\tau_{\text{MB}}, \\ t_L &= t_B - (\tau_{\text{MB}} + \tau_{\text{LM}}), & x_L^3 &= x_B^3 - c(\tau_{\text{LM}} - \tau_{\text{MB}}), \\ t_{L'} &= t_B - (\tau_{\text{LM}} - \tau_{\text{MB}}), & x_{L'}^3 &= x_L^3 \end{aligned} \quad (2.128)$$

On a introduit la notation  $\tau_{LM}$  pour le temps de vol des photons de la source laser L au miroir M et  $\tau_{MB}$  pour le temps de vol du miroir M à l'atome en B. Les vitesses réduites pour les photons s'écrivent :

$$u_{LM}^3 = u_{L'B}^3 = 1 \quad , \quad u_{MB}^3 = -1 \quad (2.129)$$

Avec ces conventions, les termes de polarisation s'écrivent :

$$(\mathbf{e}^{-\gamma} \cdot \mathbf{u})^2 = \sin^2 \theta \quad (2.130)$$

et le facteur de sensibilité  $\phi_k^\gamma[\mathbf{B}]$ , qui ne dépend plus de la polarisation  $\gamma$ , s'écrit d'après (2.89) :

$$\phi_k^\gamma[\mathbf{B}] = \frac{i\Omega_{\text{phot}}}{2\sqrt{2}\omega} \psi_k e^{-i\omega\eta_B} \quad (2.131)$$

où on définit la fonction  $\psi_k$  :

$$\psi_k = \beta_+ \beta_- \left( e^{i\omega\tau_{MB}\beta_+} \frac{1 - e^{i\omega\tau_{LM}\beta_-}}{\beta_-} + \frac{1 - e^{i\omega\tau_{MB}\beta_+}}{\beta_+} - \frac{1 - e^{i\omega(\tau_{LM}-\tau_{MB})\beta_-}}{\beta_-} \right) \quad (2.132)$$

ainsi que le temps de phase  $\eta_B$  du mode  $k$  au point B et les facteurs angulaires  $\beta_\pm$  :

$$\omega\eta_B = k_\mu x_B^\mu = \omega t_B - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_B \quad , \quad \beta_\pm = 1 \pm \cos \theta \quad , \quad \beta_+ \beta_- = \sin^2 \theta \quad (2.133)$$

La fonction  $\psi_k$  rend compte de la structure géométrique des chemins lumineux dans l'espace-temps. Cette fonction est plus compliquée dans le cas optique que dans le cas atomique car les ondes EM se déplacent à la même vitesse que les OG, ce qui a pour conséquence de mélanger effets spatiaux et temporels. En particulier, c'est à l'origine d'effets d'orientation comme par exemple l'apparition de résonances éventuelles dans le facteur  $\psi_k$  pour des directions de propagation colinéaires. Notons enfin que ce facteur  $\psi_k$  ne diverge pas grâce au facteur de polarisation  $\beta_+ \beta_-$  apparaissant au numérateur.

Puis on procède de même pour les autres contributions  $\Delta\varphi_{\text{phot}}[\mathbf{A}]$ ,  $\Delta\varphi_{\text{phot}}[\mathbf{C}]$  et  $\Delta\varphi_{\text{phot}}[\mathbf{D}]$ . Avec une géométrie de losange, ces 3 contributions ne diffèrent de  $\Delta\varphi_{\text{phot}}[\mathbf{B}]$  que d'un facteur de phase de telle sorte que le déphasage total fasse intervenir le facteur de sensibilité  $\phi_k^\gamma$  suivant (voir équation (2.117)) :

$$\phi_k^\gamma = \frac{i\Omega_{\text{phot}}}{2\sqrt{2}\omega} \psi_k \Psi_k \quad (2.134)$$

$$\Psi_k = e^{-i\omega\eta_A} - e^{-i\omega\eta_B} - e^{-i\omega\eta_C} + e^{-i\omega\eta_D} \quad (2.135)$$

Les temps de phase  $\eta_A$ ,  $\eta_C$  et  $\eta_D$  sont définis comme  $\eta_B$  à partir des phases du mode  $k$  au point d'espace-temps correspondant au passage des atomes dans les faisceaux optiques. La fonction  $\Psi_k$  représente un terme d'interférence entre les effets sur les différents miroirs et séparatrices du faisceau atomique.

La sensibilité est le produit d'un facteur de forme  $\psi_k$  et d'un terme d'interférence  $\Psi_k$ . On remarque d'ores et déjà que cette sensibilité est déterminée par la fréquence  $\Omega_{\text{phot}}$  du laser alors que dans le cas atomique, celle-ci était déterminée par la fréquence  $\Omega_{\text{at}}$ . Puisque cette dernière est très petite devant la fréquence d'un photon optique,  $\Omega_{\text{at}} \ll \Omega_{\text{phot}}$ , on s'attend à ce que la sensibilité optique aux fluctuations métrique soient plus importante que la sensibilité atomique. Cependant, cela n'implique pas encore que le déphasage optique soit plus important que le déphasage atomique car le temps d'exposition des photons aux fluctuations de la métrique est très petit devant le temps de vol des atomes.

Enfin, de la même façon que le déphasage atomique pouvait se réécrire comme un effet de précession, il en est de même pour le déphasage provenant de la contribution optique. En effet, bien que l'aire spatiale parcourue par les photons soit nulle puisqu'il s'agit d'aller-retour sur un même axe, l'aire balayée dans l'espace-temps ne l'est pas (voir figure (2.15)). Le déphasage  $\Delta\varphi_{\text{phot}}$  doit aussi pouvoir s'écrire comme une observable gyroscopique dont l'aire équivalente est difficile à calculer (voir discussion plus loin sur la fonction  $y(x)$ ). En effet, en plus d'une dérivée temporelle de  $h_{33}(t)$ , il interviendra des gradients spatiaux car la lumière se déplaçant à la même vitesse que les OG, elle est beaucoup plus sensible à la structure spatiale que ne le sont les atomes.

### B.3 Décohérence gravitationnelle dans le projet HYPER

Dans cette partie, on va estimer l'effet du bruit gravitationnel sur la cohérence de l'interféromètre. Celle-ci peut se caractériser simplement en considérant le contraste des franges que l'interféromètre peut réaliser indépendamment de toutes autres perturbations non gravitationnelles ; en effet, le contraste est une bonne mesure pour déterminer si un interféromètre fonctionne correctement comme détecteur de phase. Le traitement de cette partie consiste à étudier les fluctuations sur la phase provenant de fluctuations métriques filtrées par l'interféromètre. Une approche plus approfondie sera effectuée dans la seconde partie.

#### B.3.1 Perte de cohérence et dispersion de phase

On suppose que l'interféromètre est soumis à des fluctuations de phase qui affectent différemment les deux bras de telle sorte que le déphasage en sortie d'interféromètre est affecté de fluctuations de phase  $\Delta\varphi(t)$ . On suppose aussi, pour simplifier, que ces fluctuations sont stationnaires et gaussiennes. L'effet de dispersion de phase discuté ci-dessus peut être interprété dans le langage de la décohérence en identifiant la trace partielle sur les degrés de liberté d'un environnement qu'on ne mesure pas avec le filtrage du spectre de bruit gravitationnel. Nous utiliserons cette identification de manière qualitative dans cette section. Nous la caractériserons de manière plus formelle dans la deuxième partie.

L'équation (2.91) donne les fluctuations à la sortie d'un interféromètre comme une dé-

composition sur les modes d'OG :

$$\Delta\varphi(t) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{\gamma=\pm} \phi_k^\gamma h^\gamma[k] e^{-i\omega t} \quad (2.136)$$

Les coefficients  $\phi_k^\gamma$  ont été calculés dans la partie précédente pour un interféromètre atomique. Ils s'écrivent comme des intégrales sur des contours fermés définis par les trajets des champs atomiques. Le fond d'OG est caractérisé par sa fonction de corrélation  $C_{hh}[k]$  (voir la partie A.2) de telle sorte que la fonction de corrélation du bruit de phase s'écrit :

$$\langle \Delta\varphi(t)\Delta\varphi(t') \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{\gamma=\pm} \phi_k^\gamma \phi_{-k}^\gamma C_{hh}[k] e^{-i\omega(t-t')} \quad (2.137)$$

En considérant un fond isotrope et non polarisé, on peut intégrer l'équation précédente sur les directions de propagation pour obtenir :

$$\langle \Delta\varphi(t)\Delta\varphi(t') \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_\varphi[\omega] e^{-i\omega(t-t')} \quad (2.138)$$

On a introduit un spectre  $S_\varphi$  des fluctuations de phases :

$$S_\varphi[\omega] = S_h[\omega] \mathcal{A}[\omega] \quad (2.139)$$

On utilise l'équation (2.71) et les conditions de réalité (2.90) pour obtenir cette expression.

Le spectre  $S_\varphi[\omega]$  est le produit de deux termes. Le premier est le spectre de bruit gravitationnel  $S_h[\omega]$  et le second une fonction de réponse d'appareil  $\mathcal{A}[\omega]$  qui sélectionne des fréquences dans la bande de détection de l'appareil :

$$\mathcal{A}[\omega] = \frac{5}{2} \sum_{\gamma=\pm} \langle |\phi_k^\gamma|^2 \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} \quad (2.140)$$

La notation  $\langle \cdot \rangle_{\hat{\mathbf{k}}}$  signifie une valeur moyenne sur les directions  $\hat{\mathbf{k}}$  de l'OG (voir l'annexe C pour plus de détail).

La fonction  $\mathcal{A}[\omega]$  synthétise à elle seule toutes les informations sur les caractéristiques de l'appareil. Elle dépend de la géométrie de l'appareil et filtre spatialement les fluctuations gravitationnelles entrant dans l'interféromètre. La fonction de filtrage associée  $g[\omega]$  est telle que  $|g[\omega]|^2 = \mathcal{A}[\omega]$ . Dans le cas d'un interféromètre atomique matériel, cette fonction  $g[\omega]$  est donnée par l'équation (2.114).

De façon générale, cette fonction d'appareil  $\mathcal{A}[\omega]$  possède des comportements asymptotiques bien définis. D'une part,  $\mathcal{A}[\omega]$  s'annule à haute fréquence parce que les fréquences grandes devant l'inverse du temps de parcours se moyennent à zéro sur chaque bras. D'autre part, le comportement à fréquence nulle de  $\mathcal{A}[\omega]$  est régi par la différence de marche entre les deux bras pour une perturbation constante. Dans le cas d'un losange, cette fonction de réponse tend donc vers zéro par symétrie.

L'expression (2.139) est valable pour un fond stationnaire, isotrope et non polarisé, le facteur  $5/2$  provenant d'une moyenne angulaire pour un fond isotrope et non polarisé. Une généralisation au cas anisotrope sera présentée dans la deuxième partie dans laquelle on développera la fonction de réponse dans les harmoniques sphériques. On pourrait aussi généraliser cette approche aux fonds non-Gaussiens en développant le contraste dans les cumulants du bruit gravitationnel, mais on ne le fera pas dans cette thèse.

Nous voulons maintenant caractériser la perte de contraste de l'interféromètre due à ces fluctuations de phase. De manière qualitative, le contraste va s'effondrer quand le brouillage de la phase sera de l'ordre de  $2\pi$ . De manière plus quantitative, on introduit une visibilité  $\mathcal{V}$  qui mesure la perte de contraste comme la valeur moyenne de l'exponentielle du déphasage<sup>5</sup> :

$$\mathcal{V} = \langle \exp(i\Delta\varphi(t)) \rangle \quad (2.141)$$

Comme le fond est supposé stationnaire, la visibilité ne dépend pas du temps  $t$  et l'hypothèse Gaussienne permet de calculer cette visibilité à partir de la variance  $\Delta\varphi^2$  du bruit de phase :

$$\mathcal{V} = \exp\left(-\frac{\Delta\varphi^2}{2}\right) \quad (2.142)$$

Le contraste s'écrit donc comme une exponentielle de la variance du bruit de phase. Cette équation n'est valable qu'à la limite classique, qui est bien vérifiée pour le problème de la décohérence gravitationnelle. Là encore, nous donnerons un traitement plus complet dans la deuxième partie.

D'après (2.138), la variance  $\Delta\varphi^2$  peut s'écrire :

$$\Delta\varphi^2 = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] \mathcal{A}[\omega] \quad (2.143)$$

C'est donc une intégrale sur toutes les fréquences du spectre gravitationnel  $S_h[\omega]$  que multiplie une réponse d'appareil  $\mathcal{A}[\omega]$ . Autrement dit, elle mesure le bruit gravitationnel tel qu'il est filtré par l'appareil. Nous verrons une généralisation de cette expression dans la partie 3.C.2.1.

### B.3.2 Les fonctions de réponse du projet HYPER

Pour déterminer l'effet de décohérence sur l'interféromètre atomique HYPER, il faut déterminer sa fonction de réponse  $\mathcal{A}[\omega]$  donnée par l'expression (2.139).

Le projet HYPER est un interféromètre complexe dans lequel des champs atomiques et optiques ainsi que le mouvement des éléments optiques tels que les miroirs et lasers interviennent. Sa fonction de réponse d'appareil est difficile à évaluer en général car il faut tenir compte non seulement des réponse atomique et optique, mais aussi de leur couplage. De façon

<sup>5</sup>On justifiera dans la partie suivante cette équation et on donnera un sens plus précis à la valeur moyenne. De manière qualitative, on remarque que, dans HYPER comme dans la plupart des expériences, le signal est à la fois une moyenne d'ensemble et une moyenne temporelle sur le temps de la mesure.

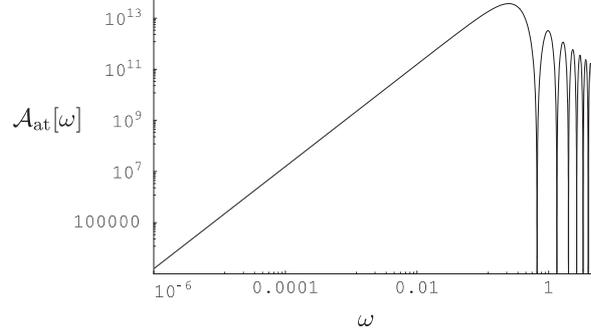


FIG. 2.16: Fonction de réponse atomique  $\mathcal{A}_{\text{at}}[\omega]$  d'un Mach-Zehnder de symétrie losange en fonction de la fréquence, représentée en diagramme log-log. L'appareil filtre les hautes fréquences et les basses fréquences à cause de sa symétrie centrale.

générale, cette fonction s'écrit comme la réponse de la structure atomique  $\mathcal{A}_{\text{at}}[\omega]$  de l'interféromètre, de sa structure photonique  $\mathcal{A}_{\text{phot}}[\omega]$  et d'un couplage  $\mathcal{A}_{\text{at/phot}}[\omega]$  entre ces deux structures :

$$\mathcal{A}[\omega] = \frac{5}{2} \sum_{\gamma=\pm} \left\langle |\phi_{\mathbf{k},\text{at}}^{\gamma} + \phi_{\mathbf{k},\text{phot}}^{\gamma}|^2 \right\rangle_{\mathbf{k}} = \mathcal{A}_{\text{at}}[\omega] + \mathcal{A}_{\text{phot}}[\omega] + \mathcal{A}_{\text{at/phot}}[\omega] \quad (2.144)$$

Comme nous l'a suggéré l'étude du déphasage dans la partie précédente, la sensibilité optique est plus grande que la sensibilité atomique dans le cas de miroirs en chute libre, et négligeable dans le cas de miroirs rigidement liés. Dans le cas d'HYPHER, il est naturel de s'attendre à ce que le bruit de phase soit dominé par la contribution atomique de l'appareil. En toute rigueur, cette affirmation demande à être traitée plus en détail en étudiant la réponse élastique de la structure rigide qui relie la source laser aux miroirs.

La fonction de réponse atomique  $\mathcal{A}_{\text{at}}[\omega]$  s'écrit, en utilisant (2.108) et en effectuant l'intégration angulaire (voir l'annexe C pour un résumé des intégrales angulaires) :

$$\mathcal{A}_{\text{at}}[\omega] = 4 \left( \frac{\Omega_{\text{at}} \sin(2\alpha)}{\omega} \right)^2 f^2(\omega\tau_{\text{at}}) \quad (2.145)$$

$$f(x) = 2(1 - \cos x) = 4 \sin^2 \frac{x}{2} \quad (2.146)$$

Elle est tracé en diagramme log-log sur la figure (2.16). Elle possède bien la propriété de transparence à haute fréquence du fait de sa taille finie ainsi que l'annulation à fréquence nulle provenant de la symétrie du losange. Cette fonction de réponse peut aussi se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{at}}[\omega] &= \left( \frac{2m_{\text{at}}}{\hbar} A_{\text{at}} \omega \right)^2 \text{sinc}^4 \left( \frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2} \right) \\ &= \left( \frac{2m_{\text{at}}}{\hbar} A_{\text{at}} \omega \right)^2 |\tilde{g}[\omega]|^2 \end{aligned} \quad (2.147)$$

où on reconnaît dans la parenthèse un déphasage de type Sagnac et la transformée de Fourier  $\tilde{g}[\omega]$  de la fonction  $g(\tau)$  introduite dans la section B.2.2. Cette remarque rejoint le fait que l'effet des OG peut être vu comme équivalent à un effet d'entraînement du référentiel d'inertie local (voir la section B.2.2).

La sensibilité optique dans le cas de miroirs en chute libre est potentiellement plus grande que celle des atomes car  $\Omega_{\text{phot}} \gg \Omega_{\text{at}}$ . Dans le but d'obtenir une estimation supérieure de la décohérence, on peut donc considérer dans un premier temps le cas des miroirs libres pour lequel l'effet est maximum. La fonction de réponse optique se déduit de (2.134) :

$$\mathcal{A}_{\text{phot}}[\omega] = \frac{5}{8} \left( \frac{\Omega_{\text{phot}}}{\omega} \right)^2 \langle |\psi_k|^2 |\Psi_k|^2 \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} \quad (2.148)$$

où les deux polarisations  $\gamma = \pm$  donnent la même contribution au résultat précédent. On peut exprimer la fonction  $\psi_k$  et le terme d'interférence  $\Psi_k$  en faisant intervenir la fonction  $f(x)$  :

$$\begin{aligned} |\psi_k|^2 &= \beta_+(\beta_+ - \beta_-) \left[ f(\omega((\tau_{\text{LM}} - \tau_{\text{MB}})\beta_-)) + f(\omega\tau_{\text{LM}}\beta_-) + f(\omega\tau_{\text{MB}}\beta_+) \right. \\ &\quad \left. - f(\omega((\tau_{\text{LM}} - \tau_{\text{MB}})\beta_- - \tau_{\text{MB}}\beta_+)) - f(\omega(\tau_{\text{LM}}\beta_- + \tau_{\text{MB}}\beta_+)) \right] \\ &\quad + \beta_+^2 f(\omega\tau_{\text{MB}}(\beta_+ + \beta_-)) + \beta_-(\beta_- - \beta_+) f(\omega\tau_{\text{MB}}\beta_+) \end{aligned} \quad (2.149)$$

et

$$\begin{aligned} |\Psi_k|^2 &= f(\omega\eta_{\text{AB}}) + f(\omega\eta_{\text{AC}}) + f(\omega\eta_{\text{BD}}) + f(\omega\eta_{\text{CD}}) - f(\omega\eta_{\text{AD}}) - f(\omega\eta_{\text{BC}}) \quad (2.150) \\ \eta_{\text{AB}} &= \eta_{\text{B}} - \eta_{\text{A}} = \tau_{\text{at}} \left( 1 - \frac{v_{\text{at}}}{c} (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta \cos \varphi) \right) \\ \eta_{\text{AC}} &= \eta_{\text{C}} - \eta_{\text{A}} = \tau_{\text{at}} \left( 1 + \frac{v_{\text{at}}}{c} (\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta \cos \varphi) \right) \\ \eta_{\text{AD}} &= \eta_{\text{D}} - \eta_{\text{A}} = \eta_{\text{AB}} + \eta_{\text{AC}} \\ \eta_{\text{BC}} &= \eta_{\text{C}} - \eta_{\text{B}} = \eta_{\text{AC}} - \eta_{\text{AB}} \\ \eta_{\text{CD}} &= \eta_{\text{AB}} \quad , \quad \eta_{\text{BD}} = \eta_{\text{AC}} \end{aligned}$$

Dans la même limite non relativiste que dans le cas de la fonction de réponse atomique, on peut exprimer la fonction  $|\Psi_k|^2$  de la façon suivante :

$$|\Psi_k|^2 = 16 \sin^2 \left( \frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2} \right) \quad (2.151)$$

Ainsi, la fonction de réponse optique s'écrit aussi en fonction de la réponse atomique de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_{\text{phot}}[\omega] = \frac{5}{32} \left( \frac{\Omega_{\text{phot}}}{\Omega_{\text{at}} \sin(2\alpha)} \right)^2 \langle |\psi_k|^2 \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} \mathcal{A}_{\text{at}}[\omega] \quad (2.152)$$

Puisque  $\Omega_{\text{at}} \ll \Omega_{\text{phot}}$ , on s'attend à la hiérarchie suivante pour le cas des miroirs libres (à l'exception de certaines fréquences pour lesquelles  $\psi_k$  s'annule) :

$$\mathcal{A}_{\text{at}}[\omega] \ll \mathcal{A}_{\text{at/phot}}[\omega] \ll \mathcal{A}_{\text{phot}}[\omega] \quad (2.153)$$

### B.3.3 Estimation de la décohérence dans HYPER

Les méthodes développées précédemment permettent d'estimer la décohérence afin de déterminer si cet effet peut ou non être observable. Pour cela, on peut considérer que le spectre des OG est constant et égal au plateau fixé par le fond de confusion des binaires entre le microHertz et le milliHertz car cette valeur est un majorant du spectre pour les fréquences d'intérêt. Cette hypothèse de bruit blanc qui consiste à remplacer le spectre de bruit  $S_h[\omega]$  par une constante  $S_h \simeq 10^{-34} \text{ Hz}^{-1}$  permet de rendre explicite les résultats finaux. L'influence du bruit cosmique sera traité dans la deuxième partie.

D'autre part, puisque les fréquences qui interviennent dans l'intégrale (2.143) sont très petites devant  $\frac{k_B T_{\text{gw}}}{\hbar}$ , on peut aussi considérer que l'environnement possède un spectre thermique dans sa limite haute température; en effet, dans cette limite  $n_{\text{gw}}[\omega] = \frac{k_B T_{\text{gw}}}{\hbar \omega}$  donc  $S_h[\omega] = \frac{16G}{5c^5} k_B T_{\text{gw}}$  est constant. Cette représentation est plus physique que l'hypothèse de bruit blanc mais n'est qu'une autre façon de représenter les mêmes propriétés statistiques du fond d'OG.

Pour le projet HYPER, on a déjà montré dans la section B.2.3 qu'on pouvait négliger les effets optiques et ne considérer que la fonction de réponse atomique  $\mathcal{A}_{\text{at}}[\omega]$  donnée par l'expression (2.145). L'intégrale (2.143) peut alors être évaluée grâce à la propriété suivante de la fonction  $f(x)$  :

$$f^2(x) = 4f(x) - f(2x) \\ \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f(\omega\tau)}{\omega^2} = |\tau| \quad (2.154)$$

On obtient alors :

$$\frac{\Delta\varphi_{\text{at}}^2}{2} = 4(\Omega_{\text{at}} \sin 2\alpha)^2 S_h \tau_{\text{at}} \quad (2.155)$$

Le terme  $\sin^2(2\alpha)$  est une caractéristique géométrique de l'interféromètre qui détermine la différence entre les chemins suivis par les atomes. En ce sens, il joue le rôle de paramètre de classicité qui entre dans les expressions usuelles de la décohérence. En effet, plus les chemins sont éloignés spatialement, plus la décohérence est efficace car plus ils sont vus classiquement par des fluctuations gravitationnelles.

L'évaluation numérique de la décohérence dans HYPER est basée sur le choix de l'atome de césium pour lequel on a les données suivantes :

$$\begin{aligned} m_{\text{at}} &\simeq 133 \text{ a.u.} \simeq 2 \times 10^{-25} \text{ kg} \\ v_{\text{at}} &\simeq 0.2 \text{ m.s}^{-1} \\ \Omega_{\text{at}} &\simeq 4 \times 10^7 \text{ Hz} \\ \sin(2\alpha) &= \frac{v_{\text{trans}}}{v_{\text{at}}} \simeq 0.035 \\ \tau_{\text{at}} &= \frac{\ell_{\text{AB}}}{v_{\text{at}}} \simeq 1.5 \text{ s} \end{aligned} \quad (2.156)$$

D'autre part, en utilisant comme valeur du spectre de bruit celui correspondant au plateau du bruit de confusion des binaires,  $S_h \simeq 10^{-34} \text{Hz}^{-1}$ , on obtient pour la variance du bruit de phase atomique :

$$\frac{\Delta\varphi_{\text{at}}^2}{2} \simeq 10^{-21} \quad (2.157)$$

Visiblement cette variance, qui est à mettre dans l'exponentielle (2.142) pour fabriquer la visibilité, n'affecte en aucune mesure le contraste des franges. En conséquence, l'interaction du champ atomique avec les OG ne fait pas suffisamment fluctuer la phase pendant le temps de mesure pour dégrader la sensibilité de celle-ci. C'est une bonne nouvelle pour HYPER qui voit donc sa mesure de l'effet Lense-Thirring préservée de toute perturbation provenant des fluctuations de l'espace-temps dans lequel il baigne.

### B.3.4 Comparaison avec le cas des miroirs libres

Dans cette section, on calcule l'effet de décohérence potentiellement atteignable si les miroirs pour les lasers étaient en chute libre. Dans ce cas, l'effet du bruit gravitationnel sur la phase Raman n'est plus nul et est à l'origine d'un bruit de phase sur les atomes en sortie d'interféromètre. On comparera dans la section suivante B.3.5 ce bruit de la phase Raman avec les bruits instrumentaux visés dans HYPER.

Pour évaluer cette contribution optique, on effectue les mêmes approximations que dans le cas atomique, à savoir qu'on considère un spectre  $S_h$  constant sur le domaine relevant de l'intégrale (2.143). Ainsi, la variance du bruit de phase s'écrit comme l'intégrale sur toutes les fréquences de la fonction de réponse optique  $\mathcal{A}_{\text{phot}}[\omega]$  donnée par l'équation (2.148). Cette intégrale se calcule grâce aux propriétés suivantes de la fonction  $f(x)$  :

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= 2f(x) + 2f(y) - f(x+y) - f(x-y) \\ \int \frac{d\omega}{4\pi} \frac{f(\omega\eta)f(\omega\tau)}{\omega^2} &= \min(|\eta|, |\tau|) \end{aligned} \quad (2.158)$$

Ainsi, on déduit de (2.149) et (2.150) que la variance du bruit de phase optique s'écrit sous une forme analogue à la variance atomique (2.155) :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varphi_{\text{phot}}^2}{2} &\simeq 4\Omega_{\text{phot}}^2 S_h \tau_{\text{phot}} \\ \tau_{\text{phot}} &= \frac{5}{32} \langle 2T(\eta_{AB}) + 2T(\eta_{AC}) - T(\eta_{AD}) - T(\eta_{BC}) \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} \end{aligned} \quad (2.159)$$

On a introduit un temps  $\tau_{\text{phot}}$  défini à partir d'une fonction auxiliaire  $T$  qui possède la même structure que (2.149) :

$$\begin{aligned} T(\eta) &= \beta_+(\beta_+ - \beta_-) \left[ \min(|\eta|, |\tau_{\text{LM}} - \tau_{\text{MB}}|\beta_-) + \min(|\eta|, \tau_{\text{LM}}\beta_-) + \min(|\eta|, \tau_{\text{MB}}\beta_+) \right. \\ &\quad \left. - \min(|\eta|, |(\tau_{\text{LM}} - \tau_{\text{MB}})\beta_- - \tau_{\text{MB}}\beta_+|) - \min(|\eta|, \tau_{\text{LM}}\beta_- + \tau_{\text{MB}}\beta_+) \right] \\ &\quad + \beta_+^2 \min(|\eta|, \tau_{\text{MB}}(\beta_+ + \beta_-)) + \beta_-(\beta_- - \beta_+) \min(|\eta|, \tau_{\text{MB}}\beta_+) \end{aligned} \quad (2.160)$$

Dans HYPER, les longueurs des segments optiques et atomiques sont du même ordre de grandeur, mais puisque la vitesse de la lumière  $c$  est très grande devant les vitesses atomiques  $v_{\text{at}}$ , le temps de vol  $\tau_{\text{at}}$  est très supérieur aux temps optiques  $\tau_{\text{LM}}$  et  $\tau_{\text{MB}}$ . On en déduit que les temps de phase  $\eta$  sont très grands devant les temps apparaissant dans les fonctions min de l'équation précédente, à l'exception du voisinage immédiat de certaines directions pour lesquelles ce paramètre  $\eta$  s'annule. Cela arrive, comme on peut le voir sur l'expression explicite (2.150) des temps de phase  $\eta$ , lorsqu'un mode gravitationnel particulier se propage le long d'un des segments atomiques. Ces exceptions ont une contribution négligeable dans l'intégrale angulaire car ne concerne que des angles solides très limités. On peut les négliger avec une très bonne approximation et obtenir la fonction  $T$  comme suit :

$$T(\eta) \simeq \beta_+(\beta_+ - \beta_-) \left[ |\tau_{\text{LM}} - \tau_{\text{MB}}| \beta_- - |(\tau_{\text{LM}} - \tau_{\text{MB}}) \beta_- - \tau_{\text{MB}} \beta_+| \right] + \beta_+(\beta_+^2 + \beta_-^2) \tau_{\text{MB}} \quad (2.161)$$

Dans ces conditions, la fonction  $T$  ne dépend plus du paramètre  $\eta$  et le temps d'interaction optique  $\tau_{\text{phot}}$  s'écrit simplement :

$$\tau_{\text{phot}} = \frac{5}{16} \langle T \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} = y \tau_{\text{MB}} \quad (2.162)$$

Le facteur numérique  $y$  est une fonction du rapport  $x = \tau_{\text{LM}}/\tau_{\text{MB}}$  :

$$y(x) = \frac{5}{16} \langle \beta_+(\beta_+ - \beta_-)(|x - 1| \beta_- - |x \beta_- - 2|) + \beta_+(\beta_+^2 + \beta_-^2) \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} \\ y(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^3} \right) & \text{for } x \geq 1 \\ \frac{5}{12} & \text{for } x \leq 1 \end{cases} \quad (2.163)$$

La fonction  $y(x)$  est représenté sur la figure (2.17). Seules les valeurs pour  $x \geq 1$  ont un sens car la zone d'interaction doit se trouver entre le laser et le miroir. Finalement, la variance du bruit de phase  $\Delta\varphi_{\text{phot}}^2$  correspondant aux chemins optiques est essentiellement déterminée par le temps de vol  $\tau_{\text{MB}}$  des photons entre les atomes et les miroirs :

$$\frac{\Delta\varphi_{\text{phot}}^2}{2} \simeq 4\Omega_{\text{phot}}^2 S_h y \tau_{\text{MB}} \quad (2.164)$$

Le paramètre  $y$  joue le rôle de paramètre géométrique analogue au  $\sin^2(2\alpha)$  qui apparaissait dans la fonction de réponse atomique. Pour un temps  $\tau_{\text{MB}}$  donné (c'est-à-dire une distance des atomes aux miroirs), on voit que la décohérence est d'autant plus importante que  $y$  est grand, c'est-à-dire que  $x$  est grand. Autrement dit, la décohérence augmente lorsque les lasers s'éloignent de la zone d'interaction, ce qui est normal car alors on augmente la surface d'espace-temps vu par les OG (voir figure (2.15)). En utilisant les chiffres de HYPER :

$$\Omega_{\text{phot}} \simeq 2 \times 10^{15} \text{rad.s}^{-1} \quad , \quad \tau_{\text{MB}} \simeq 10^{-9} \text{s} \\ \tau_{\text{LM}} \sim 3\tau_{\text{MB}} \quad , \quad \tau_{\text{phot}} \sim \frac{2}{3}\tau_{\text{MB}} \quad (2.165)$$

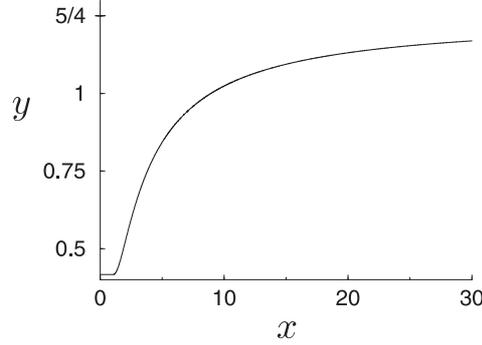


FIG. 2.17: Variation du rapport  $y = \tau_{\text{phot}}/\tau_{\text{MB}}$  en fonction du rapport  $x = \tau_{\text{LM}}/\tau_{\text{MB}}$ ;  $y$  varie entre deux valeurs asymptotiques,  $5/12$  pour les valeurs de  $x \leq 1$  et  $5/4$  à la limite  $x \gg 1$ .

on obtient l'estimation de la décohérence via la variance du bruit de phase associée aux chemins optiques :

$$\frac{\Delta\varphi_{\text{phot}}^2}{2} \simeq 10^{-12} \quad (2.166)$$

On a bien  $\Delta\varphi_{\text{phot}}^2 \gg \Delta\varphi_{\text{at}}^2$  mais il était cependant nécessaire d'effectuer le calcul complet pour obtenir une conclusion définitive. En effet, la variance dépend aussi du temps d'exposition des photons aux perturbations gravitationnelles et ce temps est très faible devant le temps de vol  $\tau_{\text{at}}$  des atomes.

L'équation (2.166) montre que même si les miroirs étaient libres, les fluctuations de la phase Raman induites par l'interaction des chemins lumineux avec les OG ne suffiraient pas à faire décohérer l'interféromètre atomique.

### B.3.5 Discussions

Pour discuter l'instrument réel, il est également important de tenir compte du bruit de vibration de la structure solide qui porte les miroirs. Dans ce but, il est intéressant d'exprimer d'abord le bruit de phase optique, c'est-à-dire le bruit sur la phase Raman locale, comme un bruit de vibration équivalent des miroirs. On distingue trois situations.

La première est celle d'un interféromètre atomique idéal dans lequel les miroirs sont rigidement tenus entre eux de telle sorte que les OG ne produisent pas de bruit optique. Autrement dit, le bruit équivalent de vibration des miroirs est nul. C'est la cas étudié dans la section B.3.3.

La deuxième situation correspond au cas hypothétique des miroirs libres dans lequel les OG font fluctuer le phase Raman locale de la façon décrite dans la section B.3.4. Le bruit équivalent, écrit en terme de la position  $q$  des miroirs, possède un niveau donné par l'expression :

$$\sqrt{S_q^{\text{libre}}[\omega]} \sim \sqrt{S_h} c\tau \sim 10^{-17} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.167)$$

On a utilisé les chiffres de HYPER avec  $c\tau$  proche de 1 m.

Enfin, la troisième situation correspond à l'instrument réel dans lequel le bruit de vibration équivalent au bruit optique est donnée par une formule du type :

$$\sqrt{S_q} \sim \left( \frac{\omega}{\omega_{ac}} \right)^2 \sqrt{S_q^{libre}} \quad (2.168)$$

$\omega_{ac}$  est une fréquence acoustique typique de l'instrument. Le bruit équivalent est donc beaucoup plus petit que  $10^{-17} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ .

Maintenant, il nous faut comparer ce chiffre au bruit de vibration de l'instrument réel qui est estimé pour HYPER à un niveau [98] :

$$\sqrt{S_q^{mec}} \sim 10^{-12} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.169)$$

Ceci signifie que le bruit induit par les OG est largement dominé par les bruits de vibration mécanique et ce sont ces derniers qui déterminent la chute du contraste dans HYPER.

Autrement dit, les interféromètres atomiques tels que HYPER, même si ils sont en principe sensibles aux OG, ne constituent pas aujourd'hui de bons instruments pour les détecter. Vis-à-vis de cet objectif, ils sont largement distancés par les grands interféromètres optiques qui, d'une part correspondent à une fréquence optique ( $\Omega_{phot}$  dans la section précédente), d'autre part ont aussi un temps effectif d'interaction plus grand.

Cependant, les possibilités d'amélioration sont potentiellement importantes, comme on le discutera dans la troisième partie. Et l'utilisation des ondes de matière est encore loin d'avoir exploré toute ses possibilités !

## C Décohérence du mouvement du centre de masse de la Lune

On a vu dans la partie précédente que l'effet de la décohérence gravitationnelle est essentiellement déterminé par l'énergie cinétique du système étudié dans le référentiel de son centre de masse. On s'attend donc à ce que cet effet de décohérence soit beaucoup plus efficace pour les systèmes macroscopiques pour lesquels l'énergie cinétique est très élevée en comparaison de celle des sondes microscopiques. Comme un comportement classique est justement observé pour ces systèmes macroscopiques, on peut même envisager que ceci ait un rapport avec la transition entre mondes quantique et classique. On reviendra sur cette idée dans le quatrième chapitre.

Ici, on va étudier le cas des mouvements planétaires tels que le mouvement de la Lune autour de la Terre. La Lune est un objet possédant un très grand nombre de degrés de liberté internes et elle est couplée à un très grand nombre de degrés de liberté différents dans son environnement. Plus précisément, ces degrés de liberté internes sont excités principalement par des sources extérieures comme le rayonnement électromagnétique (rayonnement solaire de façon prépondérante) et les forces de marées dues à la Terre. De façon générale, ces degrés de liberté internes se couplent au mouvement du centre de masse et le font diffuser de telle sorte que l'état de la Lune se projette très rapidement sur un état de position du centre de masse bien défini. Autrement dit, les éventuelles cohérences qui pourraient exister entre des états de centre de masse différents sont détruites très rapidement [113, 114, 115]. Ceci justifie que le mouvement de la Lune soit toujours traité classiquement.

Nous allons étudier ici une autre contribution à la décohérence du centre de masse de la Lune qui est liée à son interaction avec l'environnement gravitationnel. On pourrait penser que cet effet est négligeable puisqu'on sait bien que le mouvement moyen de la Lune est très peu affecté par la dissipation liée à l'environnement gravitationnel. En fait, l'effet de décohérence est non seulement important mais même beaucoup plus important que les autres mécanismes évoqués dans le paragraphe précédent [42, 116].

La décohérence du mouvement du centre de masse de la Lune provient de la perturbation de ce mouvement par les OG. La Lune en elle-même n'absorbe pas d'OG donc ses degrés de liberté internes ne sont pas couplés au bain d'OG. Par contre, le mouvement du centre de masse l'est et on calculera dans cette partie la diffusion du centre de masse de la Lune causée par les perturbations gravitationnelles que sont les OG. On s'intéressera ensuite au comportement d'une superposition linéaire de deux états séparés spatialement d'une distance  $\Delta x$  le long de sa trajectoire circulaire dans une hypothétique « Lune de Schrödinger » qui serait décrite par une fonction d'onde et on estimera le temps de décroissance des cohérences entre ces deux états. Dans ce calcul, on oubliera les autres perturbations qui contribuent beaucoup moins à la diffusion et à la décohérence. On oubliera donc aussi tous les degrés de liberté internes de la Lune et on supposera que celle-ci se comporte vis-à-vis de la gravitation comme une particule test ponctuelle.

Enfin, on choisit de se placer dans un système de coordonnées de Fermi dans lequel on

montrera (voir la section A.1 du chapitre 3) que les OG se couplent au quadrupole du système formé par la Terre et la Lune via le tenseur de courbure de Riemann. En fait, le choix de ce système de coordonnées, comme déjà précisé pour le cas des interféromètres (section A.2.3 du second chapitre), n'est valable que dans la limite où la longueur d'onde des OG est grande devant la taille du quadrupole, c'est-à-dire ici la distance Terre-Lune. Cette approximation que l'on qualifie de quadrupolaire par analogie avec l'électromagnétisme restreint l'étude de la décohérence à des fréquences du bain plus petites que 1 Hz. On verra que ceci suffit largement pour traiter les effets essentiels de la décohérence.

### C.1 Perturbation du mouvement de la Lune

Dans cette partie on traite l'effet des OG comme une perturbation du mouvement planétaire et on se restreint pour simplifier au cas du mouvement circulaire. Dans l'esprit de la théorie d'Hamilton-Jacobi, il est possible d'attribuer une phase au mouvement de la Lune. On montre que la perturbation de cette phase par les OG se ramène à une perturbation de l'impulsion le long de la trajectoire.

Le cas plus général du mouvement Keplerien elliptique amènerait de nouveaux effets comme une précession des équinoxes et une précession du périhélie. Nous nous contentons ici d'étudier le cas du mouvement circulaire puisque ces effets complémentaires n'apportent rien d'essentiel au calcul de la décohérence du mouvement de la Lune.

#### C.1.1 Force de marée

Pour décrire la perturbation gravitationnelle, on choisit un référentiel de Fermi dans lequel le centre de masse du système Terre-Lune est immobile. Ce choix est possible ici à cause de l'approximation de grande longueur d'onde discutée ci-dessus. On néglige le mouvement de la Terre dont la masse est beaucoup plus grande que celle de la Lune. La courbure de Riemann est évaluée au centre de la Terre et on rappelle qu'on peut l'exprimer en fonction de la perturbation métrique en jauge TT :

$$R_{0i0j}(t) = \frac{1}{2c^2} \ddot{h}_{ij}^{\text{TT}}(t) \quad (2.170)$$

L'équation géodésique appliquée à la Lune montre alors que la perturbation gravitationnelle est équivalente à une force de marée. On montre plus précisément que la position  $x_i$  de la Lune vérifie l'équation :

$$m\ddot{x}_i(t) = F_i + mc^2 R_{0i0j}(t)x_j(t) \quad (2.171)$$

Dans cette équation quasi-Newtonienne,  $t$  est le temps propre et le temps coordonné pour un observateur au niveau de la Terre et  $m$  est la masse réduite que l'on prend ici égale à la masse de la Lune pour les applications numériques puisque celle-ci est petite devant la masse de la Terre. La force  $F_i$  est la force d'attraction gravitationnelle due à la Terre.

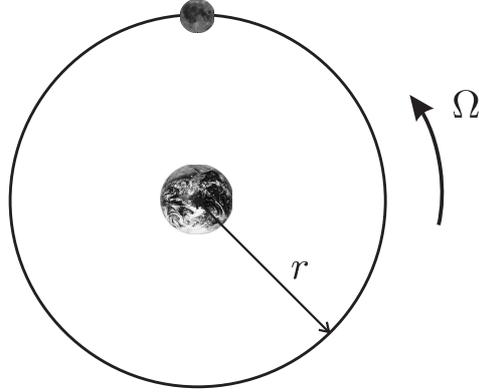


FIG. 2.18: Représentation du système Terre-Lune. On suppose une trajectoire circulaire de la Lune autour de la Terre.

On suppose que la Lune suit une trajectoire non-perturbée circulaire dans le plan  $(x_1x_2)$ , de rayon  $r$  et parcourue à la fréquence  $\Omega$ . On paramétrise ce mouvement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_1^{(0)}(t) &= r \cos(\Omega t) & , & & x_2^{(0)}(t) &= r \sin(\Omega t) & , & & x_3^{(0)}(t) &= 0 \\ GM &= r^3 \Omega^2 \end{aligned} \quad (2.172)$$

$M$  est la masse totale du système Terre-Lune, beaucoup plus grande que la masse  $m$  de la Lune de telle sorte qu'on la prendra égale à la masse de la Terre. On utilisera aussi le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adapté au mouvement circulaire qui s'écrit simplement :

$$r^{(0)}(t) = r \quad , \quad \theta^{(0)}(t) = \Omega t \quad , \quad z^{(0)}(t) = 0 \quad (2.173)$$

On prendra comme valeurs numériques :

$$\begin{aligned} M &\sim 6 \times 10^{24} \text{ kg} & , & & m &\sim 8 \times 10^{22} \text{ kg} \\ r &\sim 4 \times 10^8 \text{ m} & , & & \Omega &\sim 3 \times 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1} \end{aligned} \quad (2.174)$$

On appelle  $\vec{\delta F}^{\text{gw}}$  la force de marée qui apparaît dans l'équation (2.171) et on obtient au premier ordre dans la perturbation métrique :

$$\begin{aligned} \delta F_r^{\text{gw}}(t) &= \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{\text{TT}}(t) m x_i^{(0)}(t) \frac{x_j^{(0)}(t)}{r} \\ \delta F_\theta^{\text{gw}}(t) &= \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{\text{TT}}(t) m x_i^{(0)}(t) \frac{\dot{x}_j^{(0)}(t)}{r\Omega} \\ \delta F_z^{\text{gw}}(t) &= \frac{1}{2} \ddot{h}_{3j}^{\text{TT}}(t) m x_j^{(0)}(t) \end{aligned} \quad (2.175)$$

Ces forces de marées modifient la trajectoire circulaire de la Lune. En particulier, la force  $F_z^{\text{gw}}$  hors du plan est responsable d'une rotation du plan de la trajectoire. Nous n'étudierons pas

cette rotation de manière plus détaillée parce que, comme nous allons le voir, elle n'affecte pas la phase du mouvement que nous définirons plus loin.

Les forces dans le plan de rotation, elles, peuvent se réécrire en termes des polarisations circulaires droite  $h_R(t)$  et gauche  $h_L(t)$  définies par référence au plan de rotation  $(x_1x_2)$  :

$$\begin{aligned}\delta F_r^{\text{gw}}(t) &= \frac{mr}{4} \left( \ddot{h}_{11}(t) + \ddot{h}_{22}(t) \right) - i \frac{mr}{2\sqrt{2}} \left( \ddot{h}_R(t)e^{2i\Omega t} - \ddot{h}_L(t)e^{-2i\Omega t} \right) \\ \delta F_\theta^{\text{gw}}(t) &= \frac{mr}{2\sqrt{2}} \left( \ddot{h}_R(t)e^{2i\Omega t} + \ddot{h}_L(t)e^{-2i\Omega t} \right)\end{aligned}\quad (2.176)$$

Les polarisations circulaires sont normalisées de telle sorte qu'elles correspondent au même spectre de bruit que les polarisations linéaires  $h_\times \equiv h_{12}$  et  $h_+ \equiv \frac{h_{11}-h_{22}}{2}$  :

$$h_R(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( h_{12}(t) + i \frac{h_{11}(t) - h_{22}(t)}{2} \right) \quad , \quad h_L(t) = h_R^*(t) \quad (2.177)$$

En faisant l'hypothèse d'un fond non polarisé, les fonctions de corrélation s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\langle h_R(t)h_L^*(0) \rangle &= \langle h_L(t)h_R^*(0) \rangle = 0 \\ \langle h_R(t)h_R^*(0) \rangle &= \langle h_L(t)h_L^*(0) \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] e^{-i\omega t}\end{aligned}\quad (2.178)$$

On remarque notamment que les polarisations droite et gauche sont décorréliées. En utilisant la condition de trace nulle pour la partie TT de la perturbation métrique ainsi que les conditions de réalité, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}\delta F_r^{\text{gw}}(t) &= -\frac{mr}{4} \ddot{h}_{33}(t) + \frac{mr}{\sqrt{2}} \text{Im} \left( \ddot{h}_R(t)e^{2i\Omega t} \right) \\ \delta F_\theta^{\text{gw}}(t) &= \frac{mr}{\sqrt{2}} \text{Re} \left( \ddot{h}_R(t)e^{2i\Omega t} \right)\end{aligned}\quad (2.179)$$

La force de marée créée par les OG dans le plan de rotation contient une modulation à la fréquence  $2\Omega$  du fait de la rotation de la Lune autour de la Terre.

### C.1.2 Description ondulatoire du mouvement de la Lune

Le lien entre une description mécanique du mouvement d'une particule et une description ondulatoire est donné en mécanique classique par la théorie d'Hamilton-Jacobi. On donne ici les grandes lignes qui permettent de décrire le mouvement d'une particule par une théorie ondulatoire et on renvoie à [117, chap. 10] pour une étude exhaustive.

On avait déjà noté au moment du calcul du déphasage dans un interféromètre à onde de matière que la phase de la fonction d'onde vérifiait une équation de type Hamilton-Jacobi (voir la partie 2.A.1.1). De façon analogue, on attribue au mouvement mécanique de la Lune une phase qui est simplement reliée à l'action  $S$ . L'amplitude  $\psi$  de l'onde à associer au mouvement de la particule, ici la Lune, s'écrit alors :

$$\psi = \psi_0 e^{i\frac{S}{\hbar}} \quad (2.180)$$

La connection entre la description mécanique (corpusculaire) et ondulatoire provient du fait que l'équation de Schrödinger associée à cette amplitude  $\psi$  se réduit simplement à l'équation d'Hamilton-Jacobi dans la limite classique  $\hbar \rightarrow 0$ . Or, cette équation d'Hamilton-Jacobi décrit la propagation de la particule dans l'approximation eikonale pour laquelle la longueur d'onde des particules est petite [117, chap. 10.8]. Autrement dit, la mécanique classique ( $\hbar \rightarrow 0$ ) peut s'identifier à une approximation de type optique géométrique, ou encore approximation eikonale (c'est le formalisme WKBJ).

On peut ensuite décomposer l'action  $S$  sous la forme :

$$S = W - Et \quad (2.181)$$

avec  $E$  l'énergie de la particule et  $W$  la fonction caractéristique d'Hamilton. Cette fonction ne dépend pas explicitement du temps et elle donne l'impulsion  $\vec{p}$  de la particule par la relation :

$$\vec{p} = \vec{\nabla} W \quad (2.182)$$

Considérons maintenant la propagation d'un plan de phase, c'est-à-dire d'une surface  $S = \text{constante}$  (surface équi-phase). Pour le mouvement non perturbé, l'énergie  $E$  est conservée et le déplacement du plan de phase est décrit par la relation :

$$dW = Edt \quad (2.183)$$

On peut aussi écrire cette propagation du plan de phase (on parle aussi du plan d'onde) en terme de l'impulsion (voir (2.182)) :

$$\vec{p} \cdot d\vec{x} = Edt \quad (2.184)$$

Cette équation est bien compatible avec les équations de la mécanique :

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} \quad , \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (2.185)$$

Le plan de phase est perpendiculaire à la trajectoire et il se propage le long de cette trajectoire (figure (2.19)).

Ces propriétés sont tout à fait analogues à celles que l'on écrit pour la propagation d'une onde lumineuse. Dans ce cas, l'énergie s'écrit  $E = \hbar\omega$ , l'impulsion  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  et la propagation du front d'onde est donnée par l'équation (2.184), soit aussi  $\vec{k} \cdot d\vec{x} = \omega dt$ .

Dans la section suivante, on étudie l'effet de la perturbation gravitationnelle sur la propagation d'un tel plan de phase.

### C.1.3 Perturbation de la propagation d'un plan de phase

Nous voulons déterminer l'effet de la perturbation gravitationnelle sur un front d'onde de Lune décrit par l'équation (2.183). Supposons que l'on branche la perturbation à l'instant

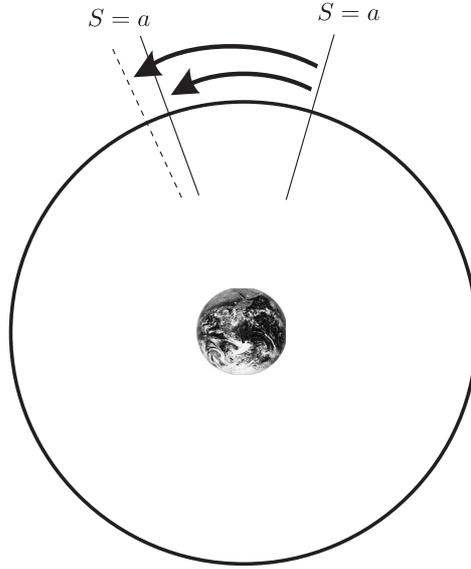


FIG. 2.19: Le mouvement ondulatoire de la Lune peut être caractérisée par l'avancement d'un plan de phase pour lequel  $S$  est une constante. En présence d'une perturbation, le front d'onde perturbé, représenté en pointillé, n'est pas exactement au même endroit que le front d'onde non perturbé.

$t = 0$  quand l'énergie vaut  $E_0$ . L'équation du mouvement du plan de phase s'obtient alors avec l'équation (2.183) comme :

$$\frac{dW}{dt} = E = E_0 + \int_0^t \frac{dE}{ds} ds \quad (2.186)$$

$E$  représente l'énergie de la trajectoire en présence de la perturbation et sa variation est égale à la puissance de la force de marée :

$$\frac{dE}{ds} = \vec{v} \cdot \vec{\delta F}^{\text{gw}} \quad (2.187)$$

Dans le cas du mouvement circulaire, son expression se réduit à l'action de la force orthoradiale :

$$\frac{dE}{ds} = r\Omega \delta F_{\theta}^{\text{gw}} \quad (2.188)$$

Dans ce cas particulier, la propagation du plan d'onde s'écrit aussi en terme de l'impulsion orthoradiale :

$$p_{\theta} = \frac{E_0}{r\Omega} + \int_0^t \delta F_{\theta}^{\text{gw}}(s) ds \quad (2.189)$$

soit, en remarquant que  $\frac{E_0}{r\Omega}$  correspond à l'impulsion non perturbée  $p_{\theta}^{(0)}$  :

$$p_{\theta}(t) = p_{\theta}^{(0)} + \delta p_{\theta}(t) \quad , \quad \delta p_{\theta}(t) = \int_0^t \delta F_{\theta}^{\text{gw}}(s) ds \quad (2.190)$$

Autrement dit, l'effet de la perturbation gravitationnelle sur la propagation d'un plan de phase est un effet longitudinal qui s'accumule le long de la trajectoire. Bien sûr, les autres composantes de la force sont à l'origine d'autres effets comme par exemple la diffusion du plan de la trajectoire. Pour déterminer ces effets, il serait commode d'étudier la variation des constantes du mouvement dans le formalisme angle-action de la théorie d'Hamilton-Jacobi. Nous ne le ferons pas ici car cela n'apporte pas d'informations supplémentaires au calcul de la décohérence gravitationnelle.

Notons cependant que dans le mouvement Keplerien, il existe en plus de l'énergie deux autres quantités conservées qui sont le moment cinétique  $\vec{L}$  et le vecteur de Laplace-Runge-Lenz [117, chap. 3]. On donne ici l'équation des perturbations pour le moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{x} \times \delta\vec{F}^{\text{gw}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = r \delta F_{\theta}^{\text{gw}} \quad (2.191)$$

En comparant cette équation avec (2.188), on remarque que pour le mouvement circulaire une perturbation de l'énergie est équivalente à une perturbation du moment cinétique :

$$\frac{dE}{dt} = \Omega \frac{dL}{dt} \quad (2.192)$$

Ceci montre qu'une perturbation d'un plan de phase de Lune s'assimile à une perturbation du moment cinétique de la Lune par rapport au centre de la Terre. Autrement dit la phase permet de mesurer la rotation : elle se comporte comme une variable gyrométrique. Cette remarque met en évidence une analogie avec la sensibilité aux OG des interféromètres (voir la section 2.B.1.2).

#### C.1.4 Transfert d'impulsion le long de la trajectoire

Les discussions précédentes nous montrent que la perturbation du mouvement d'un plan de phase peut en fait se ramener à l'étude de la perturbation de l'impulsion  $p_{\theta}$  le long de la trajectoire non perturbée. D'après l'équation (2.190), celle-ci demande de calculer la composante orthoradiale  $\delta F_{\theta}^{\text{gw}}$  de la force. Dans le domaine de Fourier, on a :

$$\delta F_{\theta}^{\text{gw}}[\omega] = -\frac{mr}{2\sqrt{2}}((\omega + 2\Omega)^2 h_R[\omega + 2\Omega] + (\omega - 2\Omega)^2 h_L[\omega - 2\Omega]) \quad (2.193)$$

où on a utilisé le fait que  $h_R^*[\omega] = h_L[-\omega]$ . On obtient alors :

$$\delta p_{\theta}(t) = \int_0^t ds \delta F_{\theta}^{\text{gw}}(s) = t \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right) \delta F_{\theta}^{\text{gw}}[\omega] e^{-i\frac{\omega t}{2}} \quad (2.194)$$

Le transfert d'impulsion le long de la trajectoire peut s'interpréter, une fois intégré sur un temps  $t$ , comme un retard ou une avance par rapport au mouvement circulaire uniforme prédit par les équations de Newton en l'absence d'OG. On paramètre cet effet par un décalage angulaire  $\delta\theta(t)$  de la Lune sur une trajectoire circulaire de rayon  $r$  :

$$\delta p_{\theta}(t) = mr\delta\dot{\theta}(t) \quad (2.195)$$

On obtient donc :

$$\delta\theta(t) = \frac{1}{mr} \int_0^t ds \int_0^s ds' \delta F_\theta^{\text{gw}}(s') \quad (2.196)$$

Cette équation typique de la théorie du mouvement Brownien va donner naissance au comportement de diffusion aux temps longs étudié dans la prochaine section.

Dans l'espace de Fourier, on obtient la solution générale :

$$\delta\theta(t) = \frac{t}{mr} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta F_\theta^{\text{gw}}[\omega] \frac{1 - e^{-i\frac{\omega t}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{i\omega} \quad (2.197)$$

Il est intéressant de regarder le comportement de ce décalage angulaire aux temps courts  $t \rightarrow 0$ . Plus précisément, lorsque  $\omega_{\text{uv}} t \ll 1$ , où  $\omega_{\text{uv}}$  est la coupure ultra violette du bain d'OG, on a :

$$\delta\theta(t) \sim \frac{t^2}{2mr} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta F_\theta^{\text{gw}}[\omega] = \frac{\ddot{h}_\times(0) - \ddot{h}_+(0)}{4} t^2, \quad \omega_{\text{uv}} t \ll 1 \quad (2.198)$$

L'effet aux temps courts est donc déterminé par la différence entre les polarisation  $+$  et  $\times$  à l'instant considéré. Cette différence est nulle en moyenne car le fond est non polarisé, mais la valeur quadratique moyenne ne l'est pas et donne lieu à une diffusion de l'angle  $\theta$ , donc de la position de la Lune le long de sa trajectoire.

## C.2 Diffusion du mouvement de la Lune

Dans cette partie, on caractérise la diffusion provenant de l'interaction du système Terre-Lune avec un fond d'OG dont les propriétés statistiques sont connues. On caractérise cette diffusion pour des échelles de temps petites ou grandes devant le temps caractéristique d'évolution de la Lune. On étudie en particulier la diffusion de l'impulsion le long de la trajectoire.

### C.2.1 Diffusion aux temps longs

Sur le long terme, l'effet des OG est essentiellement caractérisé comme une diffusion le long de la trajectoire. Avant d'étudier ce mouvement de diffusion, notons que l'impulsion radiale  $p_r$  obéit à l'équation :

$$\ddot{p}_r + \Omega^2 p_r = \dot{F}_r^{\text{gw}} + 2\Omega F_\theta^{\text{gw}} \quad (2.199)$$

Cette équation contient une force de rappel de telle sorte qu'il n'y a pas, sur le long terme, de diffusion de la quantité de mouvement radiale. On retrouve ici la propriété de stabilité de la variation du grand axe pour les trajectoires Kepleriennes [117, chap 11-6]. Au contraire, le mouvement le long de la trajectoire circulaire ne contient pas de terme de rappel. Il n'est en effet pas nécessaire de fournir du travail pour changer  $\theta$  car la force de gravitation est une force centrale et le mouvement est quasi-circulaire.

Dans la limite des temps longs, la Lune a le temps d'effectuer de nombreuses révolutions autour de la Terre et la diffusion peut être reliée au spectre des fluctuations de la force. Pour le démontrer quantitativement, on commence par caractériser la diffusion dans l'espace des impulsions. On déduit de l'équation (2.194) la variance de l'impulsion orthoradiale transférée après un temps  $t$  :

$$\langle \delta p_\theta^2(t) \rangle = t^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} S_{F_\theta}[\omega] \times \text{sinc}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \quad (2.200)$$

Le spectre de bruit de la force de marée  $S_{F_\theta}$  peut s'exprimer en fonction du spectre de bruit gravitationnel  $S_h[\omega]$  grâce à l'équation (2.193) et aux fonctions de corrélation données en annexe :

$$\begin{aligned} S_{F_\theta}[\omega] &= \int dt \langle F_\theta(t) F_\theta(0) \rangle e^{i\omega t} \\ &= \frac{m^2 r^2}{8} ((2\Omega + \omega)^4 S_h[2\Omega + \omega] + (2\Omega - \omega)^4 S_h[2\Omega - \omega]) \end{aligned} \quad (2.201)$$

L'expression de la variance de  $\delta p_\theta(t)$  s'écrit finalement :

$$\langle \delta p_\theta^2(t) \rangle = \frac{m^2 r^2 t^2}{4} \int \frac{d\omega}{2\pi} (\omega + 2\Omega)^4 S_h[\omega + 2\Omega] \text{sinc}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \quad (2.202)$$

Dans la limite des temps longs ( $\Omega t \gg 1$ ), le sinus cardinal sélectionne les fréquences telles que  $|\omega| \lesssim \frac{1}{t}$  et donc seules les fréquences  $\omega \ll 2\Omega$  contribuent à l'intégrale (2.202). A l'ordre le plus bas, on peut donc remplacer  $(\omega + 2\Omega)^4 S_h[\omega + 2\Omega]$  par la constante  $16\Omega^4 S_h[2\Omega]$  que l'on sort de l'intégrale. En utilisant le résultat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{1}{|t|} \quad (2.203)$$

On en déduit que la variance aux temps longs s'assimile à une diffusion Brownienne caractérisée par un coefficient de diffusion  $D_{\text{gw}}$  indépendant du temps :

$$\langle \delta p_\theta^2(t) \rangle = S_{F_\theta}[0] t = D_{\text{gw}} t \quad , \quad \Omega t \gg 1 \quad (2.204)$$

$$D_{\text{gw}} = 4m^2 r^2 \Omega^4 S_h[2\Omega] \quad (2.205)$$

Ce coefficient de diffusion sélectionne, pour les temps longs, le spectre des OG à deux fois la fréquence de révolution. On retrouve ici l'idée d'un couplage entre le quadrupole du système Terre-Lune et les OG. Le quadrupole évolue à deux fois la fréquence de rotation de sorte que l'effet cumulatif à long terme est essentiellement déterminé par les fluctuations gravitationnelles à cette fréquence.

On peut caractériser également la diffusion spatiale de la Lune le long de sa trajectoire non perturbée. Pour cela, on utilise l'équation (2.197) qui permet de calculer la variance du décalage angulaire  $\langle \delta\theta^2(t) \rangle$  :

$$\langle \delta\theta^2(t) \rangle = \frac{t^2}{m^2 r^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} S_{F_\theta}[\omega] \left| \frac{1 - e^{-i\frac{\omega t}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{i\omega} \right|^2 \quad (2.206)$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \langle \delta\theta^2(t) \rangle = & \frac{t^2}{4} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{(2\Omega + \omega)^4}{\omega^2} S_h[2\Omega + \omega] \\ & \times \left( 1 + \text{sinc}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) - 2\text{sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (2.207)$$

Pour les temps longs, l'intégrale précédente est principalement dominée par les fréquences  $\omega \rightarrow 0$ . En utilisant le résultat suivant :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1 + \text{sinc}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) - 2\text{sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega^2} = \frac{|t|}{3} \quad (2.208)$$

on obtient :

$$\langle \delta\theta^2(t) \rangle = \frac{4}{3} \Omega^4 t^3 S_h[2\Omega] \quad (2.209)$$

Ces résultats sont donc très analogues à ceux bien connus pour la théorie du mouvement Brownien. L'effet aux temps longs est caractérisé par une diffusion de  $\delta p_\theta$  proportionnelle au temps  $t$  et par une diffusion de  $\delta\theta$  proportionnelle à  $t^3$ .

### C.2.2 Relation fluctuations-dissipation

Le théorème fluctuations-dissipation fournit une relation générale entre la diffusion et la dissipation pour un système en interaction avec un environnement (voir la deuxième partie pour plus de détails). Dans la limite des temps asymptotiquement longs  $t \rightarrow \infty$ , cette relation prend la forme particulièrement simple d'une relation fluctuations-dissipation d'Einstein [118, 119].

Pour le voir, nous réécrivons le coefficient de diffusion  $D_{\text{gw}}$  sous la forme suivante :

$$D_{\text{gw}} = m\Gamma_{\text{gw}} k_B T_{\text{gw}}[2\Omega] \quad (2.210)$$

Dans cette équation,  $T_{\text{gw}}$  est la température effective de bruit associée au bain d'OG. Si cette température effective dépend de la fréquence, nous retenons sa valeur à la fréquence  $2\Omega$  qui est couplée de manière séculaire au mouvement :

$$k_B T_{\text{gw}} = \frac{5c^5}{16G} S_h[2\Omega] \quad (2.211)$$

À la fréquence  $2\Omega$ , qui est de l'ordre de  $4 \times 10^{-6}$  Hz, le fond gravitationnel est dominé par la contribution astrophysique provenant du bruit de confusion des binaires (voir figure (2.6)).

Le deuxième facteur important dans la relation d'Einstein (2.210) est le taux de dissipation  $\Gamma_{\text{gw}}$  qui vaut :

$$\Gamma_{\text{gw}} = \frac{64Gmr^2\Omega^4}{5c^5} \sim 2 \times 10^{-34} \text{ s}^{-1} \quad (2.212)$$

Cette expression est précisément égale au taux d'émission d'OG par un quadropole non relativiste tournant dans l'approximation des grandes longueurs d'onde [60, chap. 10.5]. Comme on le verra dans la deuxième partie, il correspond tout simplement au résultat de la règle d'or de Fermi pour le système Terre-Lune couplé au bain d'OG. Ce facteur de dissipation ne dépend pas de la température.

La très faible valeur de ce facteur d'atténuation pour la Lune montre que les OG n'affectent pas la dynamique du mouvement moyen de celle-ci. La réaction de rayonnement n'a en fait un effet notable que dans les systèmes binaires fortement liés tels que les pulsars millisecondes pour lesquels l'accélération et la masse sont importantes [2]. La confirmation expérimentale de cet effet par Hulse et Taylor [2] constitue une preuve indirecte de l'existence des OG.

Il est intéressant de comparer les effets de diffusion aux temps longs dus aux ondes électromagnétiques et aux OG. Pour faire le calcul correspondant au bain électromagnétique, on modélise la Lune comme une sphère réfléchissante et on suppose que l'environnement électromagnétique est un bain thermique à haute température, typiquement la température du rayonnement solaire sur la Lune <sup>6</sup>. Plus précisément, la limite considérée est celle pour laquelle  $\hbar\Omega_0 \ll k_B T_{\text{em}} \ll \hbar\Omega_{\text{cutoff}}$  [113]. On a introduit une fréquence de coupure  $\Omega_{\text{cutoff}}$  à partir de laquelle la sphère diélectrique devient transparente au rayonnement électromagnétique.

Sous ces hypothèses, le facteur d'atténuation  $\Gamma_{\text{em}}$  associé à la pression de radiation des fluctuations de ce champ électromagnétique s'évalue comme suit [120, 113] :

$$\Gamma_{\text{em}} = \frac{4\pi^3 \hbar a^2}{15m} \left( \frac{k_B T_{\text{em}}}{\hbar c} \right)^4 \quad (2.213)$$

où le rayon  $a$  de la sphère est supposé grand devant la longueur d'onde des photons. Contrairement au cas des OG ou à une diffusion Brownienne habituelle, ce facteur d'atténuation dépend de la température. Cet effet s'interprète comme un effet Doppler des photons réfléchis. En effet, les photons réfléchis de part et d'autre des faces de la sphère en mouvement n'étant pas exactement à la même fréquence du fait d'un décalage Doppler, ils donnent lieu à un effet différentiel de la pression de radiation [120].

Pour la Lune, la température  $T_{\text{em}} \sim 2.7$  K du fond diffus microonde d'origine cosmique suffit à produire un facteur d'atténuation  $\Gamma_{\text{em}} \simeq 2 \times 10^{-32} \text{ s}^{-1}$  100 fois plus important que

---

<sup>6</sup>Le calcul qui suit est très qualitatif et permet simplement d'obtenir un ordre de grandeur. Outre l'hypothèse simplificatrice de la sphère parfaitement réfléchissante, on considère le soleil comme une source isotrope alors qu'elle ne l'est certainement pas. Le calcul pour un bain anisotrope serait beaucoup plus compliqué et ne changerait pas les ordres de grandeur. Si le couplage entre le bain et la Lune était linéaire, on pourrait obtenir très simplement le résultat de ce calcul en remplaçant la température par la moyenne des températures des différents environnements (le ciel, le CMB, le Soleil, la Terre etc...) pondérées par les angles solides. Mais ce raisonnement n'est pas possible ici car les effets de pression de radiation sont quadratiques et le calcul de la température effective que voit la Lune est donc plus délicat à déterminer. Pour simplifier, nous prendrons comme température  $T_{\text{em}}$  celle de la surface du Soleil ( $T_{\text{em}} \sim 6000$  K), ce qui nous fournira une valeur surestimée. Ce résultat suffira à assurer notre conclusion, à savoir que la décohérence électromagnétique est dominée par la décohérence gravitationnelle.

la dissipation  $\Gamma_{\text{gw}}$  due aux OG. D'autre part, puisque ce facteur varie en  $T_{\text{em}}^4$  conformément à la loi de Stefan-Boltzmann, la dissipation due à la diffusion des radiations solaires ( $T_{\text{em}} < 6000 \text{ K}$ ) est à peu près 15 ordres de grandeurs plus importante que  $\Gamma_{\text{gw}}$ . Ceci montre bien que la dissipation gravitationnelle a un effet négligeable sur le mouvement moyen de la Lune.

En fait, la dissipation du mouvement de la Lune est principalement déterminée par les effets de marées gravitationnelles entre la Terre et la Lune [121]. Cette dissipation est 16 ordres de grandeurs plus importante que la dissipation  $\Gamma_{\text{gw}}$  due aux OG. On obtient donc la hiérarchie suivante pour les effets de dissipation :

$$\Gamma_{\text{gw}} \ll \Gamma_{\text{em}} < \Gamma_{\text{marée}} \quad (2.214)$$

On verra ci-dessous que cette hiérarchie est tout à fait différente en ce qui concerne les effets de décohérence.

### C.2.3 Diffusion aux temps courts

Pour des raisons qui deviendront claires par la suite, il est important aussi d'extraire le comportement aux temps courts de la diffusion de la Lune. En ce qui concerne la diffusion d'impulsion, le comportement devient quadratique dans le temps à la limite  $t \rightarrow 0$  :

$$\langle \delta p_{\theta}^2(t) \rangle = \frac{m^2 r^2 t^2}{4} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^4 S_h[\omega] \quad (2.215)$$

Pour la diffusion de position le long de la trajectoire, le comportement est quartique :

$$\langle \delta \theta^2(t) \rangle = \frac{t^4}{16} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^4 S_h[\omega] \quad (2.216)$$

Les deux dernières équations font intervenir l'expression intégrale :

$$K_h \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^4 S_h[\omega] \quad (2.217)$$

Elle fait intervenir toutes les fréquences du spectre de bruit et ne sélectionne plus uniquement une fenêtre étroite autour de  $2\Omega$ . Physiquement,  $K_h$  peut être explicitement reliée aux fonctions de corrélation de la courbure puisque (voir l'annexe C pour les détails) :

$$\begin{aligned} \langle \ddot{h}_{ij}(t) \ddot{h}_{kl}(t) \rangle &= \frac{5}{2} \delta_{ijkl} K_h \\ \langle R_{0i0j}(t) R_{0k0l}(t) \rangle &= \frac{5}{8c^4} \delta_{ijkl} K_h \end{aligned} \quad (2.218)$$

Puisque nous sommes intéressés par les effets de rotation dans le plan  $(x_1, x_2)$  nous pouvons écrire de façon plus spécifique :

$$\langle R_{0102}(t) R_{0102}(t) \rangle = \frac{5}{2c^4} K_h \quad (2.219)$$

La constante  $K_h$  permet de définir un temps caractéristique  $t_{\text{gw}}$  tel que :

$$t_{\text{gw}} \equiv K_h^{-\frac{1}{4}} \quad (2.220)$$

Physiquement, ce temps représente celui mis par la lumière pour parcourir une distance égale au rayon de courbure moyen au niveau de la Terre. Les variances caractérisant la diffusion aux temps courts peuvent se récrire en fonction de ce temps :

$$\frac{\langle \delta p_{\theta}^2(t) \rangle}{p^2} = \frac{1}{(2\Omega t_{\text{gw}})^2} \left( \frac{t}{t_{\text{gw}}} \right)^2, \quad \langle \delta \theta^2(t) \rangle = \frac{1}{16} \left( \frac{t}{t_{\text{gw}}} \right)^4 \quad (2.221)$$

On peut évaluer ce temps  $t_{\text{gw}}$  pour un bain qui serait thermique à toutes les fréquences (voir expression (2.76)) :

$$t_{\text{gw}}^{\text{th}} = \frac{1}{2\sqrt{t_{\text{P}}}} \left( \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega^5}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_{\text{B}}T}} - 1} \right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{t_{\text{P}}}} \left( \frac{63\pi}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\hbar}{\pi k_{\text{B}}T} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.222)$$

Comme on l'a vu (section 2.A.3.2), le bain galactique ne correspond à une température quasi-constante que sur un intervalle de fréquence restreint. Il faut donc évaluer avec plus de précaution sa contribution à l'intégrale donnant  $t_{\text{gw}}$ . On obtient ainsi

$$t_{\text{gw}}^{\text{astro}} \sim \left( \frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{4}} S_h^{-\frac{1}{4}} (\omega_{\text{uv}}^{\text{astro}})^{-\frac{5}{4}} \sim 2 \times 10^{12} \text{ s} \quad (2.223)$$

Enfin, pour le bain relique d'OG, on calcule :

$$t_{\text{gw}}^{\text{cosmo}} \sim (6\pi H_0^2 \Omega_{\text{gw}})^{-\frac{1}{4}} (\omega_{\text{uv}}^{\text{cosmo}})^{-\frac{1}{2}} \sim 10^7 \text{ s} \left( \frac{10^{-14}}{\Omega_{\text{gw}}} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{1 \text{ GHz}}{f_{\text{uv}}^{\text{cosmo}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.224)$$

Les résultats montrent que la diffusion du mouvement de la Lune aux temps courts est dominée par le fond relique :

$$t_{\text{gw}}^{\text{cosmo}} \ll t_{\text{gw}}^{\text{astro}} \quad (2.225)$$

Cette hiérarchie reste vraie pour les différentes valeurs de  $\Omega_{\text{gw}}$  et  $f_{\text{uv}}^{\text{cosmo}}$  envisagées dans la littérature [18] et on remarque qu'elle est différente de celle obtenue ci-dessus pour la diffusion aux temps longs.

#### C.2.4 Discussion des échelles de temps

Le temps  $t_{\text{gw}}$  ne doit pas être confondu avec le temps de mémoire  $t_{\text{res}}$  du bain d'OG. Celui-ci s'obtient comme le temps caractéristique au bout duquel la fonction de corrélation de la courbure tend vers zéro. Cette fonction de corrélation  $C_{RR}(\tau)$  s'écrit :

$$C_{RR}(\tau) = \langle R_{0i0j}(\tau) R_{0k0l}(0) \rangle = \frac{5}{8c^4} \delta_{ijkl} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^4 S_h[\omega] e^{-i\omega\tau} \quad (2.226)$$

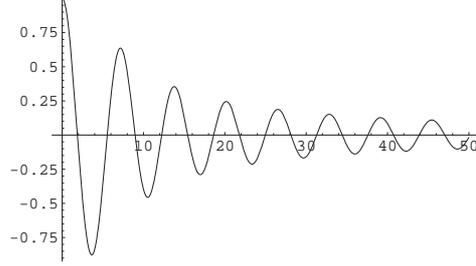


FIG. 2.20: Décroissance de la fonction  $C_{RR}^{\text{astro}}(\tau)$  en fonction de  $x = \omega_{\text{uv}}^{\text{astro}}\tau$  et normalisée par  $\frac{S_h(\omega_{\text{uv}}^{\text{astro}})^5}{c^4}$ .

Le temps de mémoire  $t_{\text{res}}$  est alors approximativement donné par l'inverse de l'extension en fréquence de ce fond mais il ne dépend pas du niveau des fluctuations. Notons que pour un environnement électromagnétique thermique, ce temps de corrélation dépend de la température qui fixe la largeur de la densité spectrale. Cette propriété est reliée à l'existence de corps noir qui permet de « répartir » les fluctuations sur les différentes fréquences. On peut maintenant évaluer ce temps de mémoire pour le fond astrophysique et le fond cosmologique.

Pour le bruit de confusion des binaires, on peut évaluer la fonction de corrélation de la courbure en supposant que le spectre  $S_h[\omega]$  est quasiment constant et décroît très rapidement après une coupure  $\omega_{\text{uv}}^{\text{astro}}$ . On obtient alors :

$$C_{RR}^{\text{astro}}(\tau) = \frac{5S_h}{c^4} \int_0^{\omega_{\text{uv}}^{\text{astro}}} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^4 \cos(\omega\tau) \quad (2.227)$$

En terme de la variable réduite  $x = \omega_{\text{uv}}^{\text{astro}}\tau$ , l'équation précédente s'intègre comme :

$$C_{RR}^{\text{astro}}(x) = \frac{5}{2\pi} \frac{S_h(\omega_{\text{uv}}^{\text{astro}})^5}{c^4} \frac{4x(x^2 - 6) \cos x + (24 - 12x^2 + x^4) \sin x}{x^5} \quad (2.228)$$

Cette fonction de corrélation est représentée sur la figure (2.20). La valeur du temps de mémoire est ainsi reliée à la coupure haute du bain :

$$t_{\text{res}}^{\text{astro}} \equiv \frac{2\pi}{\omega_{\text{uv}}^{\text{astro}}} \sim 10^3 \text{ s} \quad (2.229)$$

Pour les OG reliques, la fonction de corrélation de la courbure s'écrit (voir l'expression (2.80)) :

$$\begin{aligned} C_{RR}^{\text{cosmo}}(\tau) &= \frac{30\pi H_0^2}{c^4} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega \Omega_{\text{gw}}[\omega] \cos(\omega\tau) \\ &= \frac{30H_0^2}{c^4} \Omega_{\text{gw}} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{\text{uv}}^{\text{cosmo}}\tau}{2}\right)}{\tau} \right) \end{aligned} \quad (2.230)$$

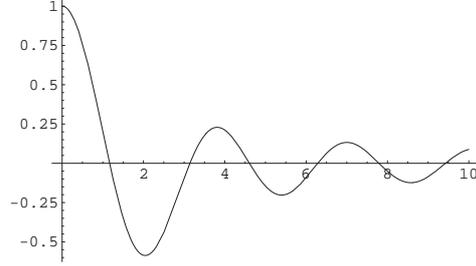


FIG. 2.21: Décroissance de la fonction  $C_{RR}^{\text{cosmo}}(\tau)$  en fonction de  $x = \frac{\omega_{\text{uv}}^{\text{cosmo}} \tau}{2}$  et normalisée par  $\frac{15\Omega_{\text{gw}} H_0^2 \omega_{\text{uv}}^{\text{cosmo}}}{c^4}$ .

Cette fonction décroît en oscillant et devient négligeable lorsque  $\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_{\text{uv}}^{\text{cosmo}}}$  (voir figure (2.21)). Le temps de mémoire du bain d'OG d'origine cosmologique s'écrit donc comme l'inverse de la fréquence de coupure haute du fond :

$$t_{\text{res}}^{\text{cosmo}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{uv}}^{\text{cosmo}}} \sim 10^{-9} \text{ s} \quad (2.231)$$

Le fond relique s'étendant sur une très grande plage de fréquence (jusqu'au GHz) comparé au fond astrophysique, son temps de mémoire est beaucoup plus petit que celui de la contribution astrophysique. Ce temps de mémoire est cependant grand devant celui d'un bain électromagnétique à la température  $T$  qui est donné par [122] :

$$t_{\text{res}}^{\text{em}} = \frac{\hbar}{\pi k_{\text{B}} T} \simeq \frac{2 \times 10^{-12}}{T[\text{K}]} \text{ s} \quad (2.232)$$

Pour le fond électromagnétique le temps de mémoire du réservoir est directement relié à la température, ce qui n'est pas le cas avec les OG. Cette différence est essentielle pour l'interprétation de la décohérence et elle permettra de comprendre que le temps de décohérence puisse devenir plus petit que le temps de mémoire du réservoir (voir la discussion précise de ce point plus loin).

La distinction entre le comportement aux temps courts et aux temps longs se fait en référence à la période de rotation de la Lune. On définit ce temps  $t_{\text{sys}}$  comme étant le temps caractéristique d'évolution du système :

$$t_{\text{sys}} \equiv \frac{2\pi}{\Omega} \quad (2.233)$$

Dans le cas des OG, le temps de mémoire du réservoir  $t_{\text{res}}$  est petit devant le temps d'évolution  $t_{\text{sys}}$  du système, ce qui revient à dire que l'on est dans la limite Markovienne. D'autre part, ce temps  $t_{\text{sys}}$  est lui même très petit devant le temps de dissipation par émission spontanée  $t_{\text{diss}} \equiv \Gamma_{\text{gw}}^{-1}$  :

$$t_{\text{res}} \ll t_{\text{sys}} \ll t_{\text{diss}} \quad (2.234)$$

Pour terminer cette section, notons que la description présentée ici n'est valable que dans la limite des grandes longueurs d'onde dans laquelle la taille du système est petite devant la longueur d'onde des OG. Pour des fréquences de l'ordre de la fréquence de coupure  $\omega_{\text{uv}} \sim 10^{10}$  Hz, la longueur d'onde est de l'ordre de 1 m ! Comme on le verra dans la deuxième partie, on peut néanmoins conserver cette description à condition de ne considérer que des déplacements de la Lune petits devant 1 m. Cela implique en particulier que la description de la diffusion n'est valable que sur des distances petites devant cette longueur.

### C.3 Décohérence d'une Lune de Schrödinger

On sait que les effets dissipatifs dus aux OG sont très largement négligeables. Cependant, comme on va le voir, les effets de décohérence par le couplage aux OG ne sont pas du tout négligeables. En fait, ils vont même devenir dominants par rapport aux autres contributions à la décohérence.

On suppose qu'à l'instant initial on prépare une superposition linéaire de deux états de la Lune dont les centres de masse sont séparés d'une distance  $\Delta x$  le long de la même trajectoire (voir figure (2.22)). L'état considéré correspond à la superposition de deux états de la Lune pris à des époques différentes. Conformément à la description ondulatoire présentée précédemment (section C.1.2), il correspond donc à ce qu'on peut appeler une Lune de Schrödinger, par analogie avec le célèbre chat de Schrödinger.

On suppose ici que la seule source de perturbation provient des fluctuations gravitationnelles et on néglige le couplage des degrés de liberté externes avec les degrés de liberté internes. Dans cette approximation, suffisante pour calculer les effets de décohérence liés au couplage avec l'environnement gravitationnel, la Lune se comporte comme une particule test localisée en son centre de masse.

Enfin, on néglige tous les effets en  $1/m$ , c'est-à-dire qu'on considère la Lune comme infiniment lourde. On néglige aussi les variations de vitesse  $\delta\vec{p}/m$  de la Lune due à la diffusion des OG. Cependant, cela ne veut pas dire qu'on néglige les variations d'impulsion  $\delta\vec{p}$  qui jouent un rôle fondamental dans le phénomène de décohérence spatiale. Notons que sous ces hypothèses, la perte de cohérence spatiale possède de nombreuses analogies avec le cas de la diffusion de photons par un atome [118]. La deuxième partie présente une méthode qui permet de s'affranchir de cette approximation.

#### C.3.1 Analogie qualitative avec la diffusion de photons sur une cible massive

Dans cette partie, on exploite l'analogie avec l'électromagnétisme pour montrer qu'une diffusion d'impulsion est à l'origine d'une perte de cohérence spatiale. Cette section s'inspire fortement du cours de Cohen-Tannoudji au collège de France [118].

Considérons un état pur  $\psi(\vec{x})$  et caractérisons les cohérences spatiales par les éléments

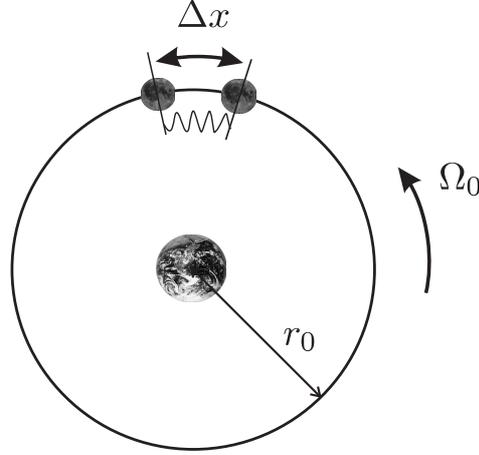


FIG. 2.22: Représentation symbolique de la superposition de deux états de la Lune séparés spatialement d'une distance  $\Delta x$  le long de la trajectoire moyenne circulaire (Lune de Schrödinger). Les cohérences entre ces deux états sont détruites en un temps très court par l'interaction avec les OG.

hors diagonaux de la matrice densité  $\hat{\rho}_S$  :

$$\langle \vec{x}' | \hat{\rho}_S | \vec{x} \rangle = \psi(\vec{x})\psi^*(\vec{x}') \quad (2.235)$$

L'argument de cet élément de matrice est égal à la différence de phase de  $\psi$  entre les points  $\vec{x}$  et  $\vec{x}'$ . L'interaction avec un environnement comme le bain d'OG crée un déphasage aléatoire entre ces deux positions qui réduit la cohérence spatiale. Pour être plus précis, on considère la notion plus générale de cohérence spatiale globale  $G(\Delta\vec{x})$  à une distance  $\Delta\vec{x}$  définie comme étant la somme de toutes les cohérences spatiales entre couples de points séparés par une distance  $\Delta\vec{x}$  :

$$G(\Delta\vec{x}) = \int d^3\vec{x} \langle \vec{x} | \hat{\rho}_S | \vec{x} + \Delta\vec{x} \rangle \quad (2.236)$$

La longueur de cohérence spatiale  $\xi$  est donnée par la largeur de la fonction  $G(\Delta\vec{x})$ . On peut montrer que celle-ci est reliée à la dispersion en impulsion que l'on a calculé dans la partie précédente. En effet, en définissant la distribution d'impulsion  $P(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \hat{\rho}_S | \vec{p} \rangle$  et  $\Delta p$  la largeur de  $P(\vec{p})$ , c'est-à-dire la dispersion d'impulsion, on a la relation suivante :

$$G(\Delta\vec{x}) = \int d^3\vec{p} P(\vec{p}) e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\Delta\vec{x}}{\hbar}} \quad (2.237)$$

Ainsi, la cohérence spatiale globale est la transformée de Fourier de la distribution d'impulsion, et la longueur de cohérence  $\xi$  vérifie alors :

$$\xi = \frac{\hbar}{\Delta p} \quad (2.238)$$

Tout processus tendant à augmenter la dispersion d'impulsion tend donc à réduire la cohérence spatiale. Les OG créent une dispersion d'impulsion le long de la trajectoire :

$$\Delta p(t) \equiv \sqrt{\langle \delta p_\theta^2(t) \rangle} \quad (2.239)$$

qui augmente avec le temps. Ce processus va donc conduire à une décohérence de la Lune de Schrödinger.

### C.3.2 Description simplifiée de la décohérence : dispersion de phase

Qualitativement, on peut aussi décrire ce phénomène de décohérence en remarquant que l'état de la Lune étant délocalisé spatialement, les deux composantes ne voient pas la même perturbation. Dans le langage du formalisme d'Hamilton-Jacobi, cela revient à dire que deux plans de phase séparés d'une distance  $\Delta x$  ne sont pas perturbés exactement de la même façon.

On peut écrire le déphasage  $\Delta\varphi(t)$  accumulé après un temps  $t$  entre ces deux parties spatialement distantes, ou encore entre deux plans de phase séparés d'une distance  $\Delta x$ , comme la différence d'action classique  $\Delta S(t)$  correspondant à ces deux plans de phase :

$$\Delta\varphi(t) = \frac{\Delta S(t)}{\hbar} \sim \frac{\delta p_\theta(t) \Delta x}{\hbar} \quad (2.240)$$

Ce déphasage stochastique est donc caractérisé par une variance :

$$\langle \Delta\varphi^2(t) \rangle = \frac{\langle \delta p_\theta^2(t) \rangle \Delta x^2}{\hbar^2} \quad (2.241)$$

L'expression précédente a été écrite à l'ordre le plus bas dans la perturbation.

Les exponentielles des déphasages sont alors caractérisées par la quantité suivante :

$$\langle e^{i\Delta\varphi(t)} \rangle = \exp\left(-\frac{\langle \Delta\varphi^2(t) \rangle}{2}\right) \quad (2.242)$$

La valeur moyenne est à prendre sur les variables stochastiques du fond d'OG avec l'hypothèse Gaussienne. La décohérence se produit lorsque la phase relative entre les deux plans de phase diffuse de  $2\pi$ . On reviendra plus en détail dans la deuxième partie sur le lien entre la théorie générale de la décohérence et la dispersion de phase entre deux états corrélés [123, 124].

La variance du déphasage s'écrit aussi (voir l'analogie avec l'équation (7) de [125]) :

$$\langle \Delta\varphi^2(t) \rangle = \left(\frac{\Delta x \times t}{\hbar}\right)^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} S_{F_\theta}[\omega] \times \text{sinc}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \quad (2.243)$$

Cette expression va nous permettre de caractériser complètement la décohérence de la Lune de Schrödinger représentée sur la figure (2.22). On la calcule de manière générale en utilisant les résultats de la section C.2.

On étudie dans la section [C.3.3](#) le comportement de la décohérence dans le régime des temps longs devant le temps d'évolution du système, c'est-à-dire ici pour  $t \gg \frac{2\pi}{\Omega}$ . On montre que dans ce régime on retrouve le scénario habituel de la décohérence pour lequel celle-ci est essentiellement déterminée par la distance  $\Delta x$  entre les deux composantes et le coefficient de diffusion  $D_{\text{gw}}$  [[119](#)]. Dans ce régime, la Lune est déjà très largement dans un état décohéré. On ne peut donc pas en extraire le temps caractéristique de la perte de cohérence, c'est-à-dire le temps au bout duquel la variance  $\Delta\varphi^2(t)$  devient de l'ordre de l'unité. Autrement dit, les temps longs donnent accès à la queue de la décohérence, une situation dans laquelle le système se comporte déjà classiquement.

C'est pourquoi on étudie ensuite (partie [C.3.4](#)) le cas des temps courts. C'est en fait cette limite qui permet d'extraire le temps de décohérence du mouvement du centre de masse de la Lune et donne lieu à un scénario de décohérence correspondant à une hiérarchie des échelles de temps tout à fait inhabituelle [[125](#)]. On discute enfin dans la partie [C.3.5](#) ces deux comportements et on les met en relation avec les diverses échelles de temps qui interviennent dans le problème.

### C.3.3 Décohérence aux temps longs

Puisque l'on se place aux temps longs, on peut utiliser les valeurs asymptotiques pour les coefficients de diffusion. À l'aide de l'expression ([2.204](#)), on déduit que le facteur de décohérence se caractérise par la variance :

$$\Delta\varphi^2(t) = -\Lambda_{\text{gw}}\Delta x^2 t \quad , \quad \Lambda_{\text{gw}} = \frac{D_{\text{gw}}}{2\hbar^2} = \frac{m\Gamma_{\text{gw}}}{2\hbar^2}k_{\text{B}}T_{\text{gw}} \quad (2.244)$$

Le taux de décohérence  $\Lambda_{\text{gw}}$  s'écrit aussi :

$$\Lambda_{\text{gw}} = \frac{2m^2r^2\Omega^4}{\hbar^2} S_h[2\Omega] = \frac{32Gm^2r^2\Omega^4}{5c^5\hbar^2}k_{\text{B}}T_{\text{gw}} \quad (2.245)$$

Ainsi, la décohérence se produit aux temps longs avec un comportement qualitativement analogue à celui habituellement rencontré dans les modèles simples de la décohérence. En particulier, la phase diffuse de façon Brownienne.

Pour la Lune, le taux de décohérence  $\Lambda_{\text{gw}}$  est très élevé :

$$\Lambda_{\text{gw}} \sim 10^{75}\text{s}^{-1}\text{m}^{-2} \quad (2.246)$$

Si on imagine une superposition séparée d'une longueur de Planck  $\ell_{\text{P}} \sim 10^{-35}$  m, la variance atteint une valeur de l'ordre de l'unité en  $10 \mu\text{s}$ . Ceci montre que pour des temps longs devant  $t_{\text{sys}} \simeq 2 \times 10^6$  s la variance est déjà extrêmement faible. Ce résultat ne donne donc que la queue de l'exponentielle de décohérence puisqu'il n'est valable que pour des valeurs de l'exponentielle déjà très petites.

La comparaison avec d'autres phénomènes de décohérence est particulièrement simple dans cette limite. En comparant les taux de décohérence  $\Lambda_{\text{gw}}$  et  $\Lambda_{\text{em}}$  dus respectivement à la diffusion des OG et des ondes électromagnétiques, on obtient en effet :

$$\frac{\Lambda_{\text{gw}}}{\Lambda_{\text{em}}} = \frac{D_{\text{gw}}}{D_{\text{em}}} = \frac{\Gamma_{\text{gw}}}{\Gamma_{\text{em}}} \frac{T_{\text{gw}}}{T_{\text{em}}} \quad (2.247)$$

On voit qu'en plus du coefficient de dissipation  $\Gamma_{\text{gw}}$ , la décohérence fait intervenir la température  $T_{\text{gw}}$  du bain gravitationnel. Bien que la dissipation due aux OG soit très faible devant celle associée aux ondes électromagnétiques, la température effective est bien plus grande. Le taux de décohérence  $\Lambda_{\text{gw}}$  est au bout du compte 38 ordres de grandeur plus important que celui associé à la diffusion du rayonnement thermique fossile. La température du rayonnement solaire n'étant que 3 ordres de grandeur plus importante que celle du fond cosmique, son taux de décohérence reste encore très largement négligeable devant celui associé à la diffusion des OG. Cette conclusion reste vraie même pour les effets de marées pour lesquels on peut prendre une température du même ordre :

$$D_{\text{gw}} \gg D_{\text{marée}} > D_{\text{em}} \quad (2.248)$$

En conséquence, le comportement aux temps longs des cohérences pour les mouvements planétaires est régi par la diffusion du fond d'OG. Cela provient essentiellement de la très grande température de bruit existant aux fréquences des mouvements planétaires. La discussion peut être rendue plus claire encore en écrivant le rapport des taux de décohérence comme un produit de facteurs sans dimension :

$$\frac{\Lambda_{\text{gw}}}{\Lambda_{\text{em}}} = \frac{9}{2\pi^3} \left( \frac{m}{m_{\text{P}}} \right)^2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{2\hbar\Omega}{k_{\text{B}}T_{\text{em}}} \right)^4 \frac{T_{\text{gw}}}{T_{\text{em}}} \quad (2.249)$$

Le rapport  $\frac{m^2}{m_{\text{P}}^2}$  est clairement relié à l'argument de la masse de Planck présenté en introduction et sur lequel nous allons revenir dans le chapitre 4.

Cependant, l'expression complète fait intervenir d'autres termes importants dans l'évaluation de la décohérence. En particulier, il apparaît un facteur géométrique  $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ , l'inverse de la puissance quatrième du nombre de photons  $\frac{k_{\text{B}}T_{\text{em}}}{\hbar\Omega}$  par mode à la fréquence  $2\Omega$  et le rapport des températures des bains. La décohérence induite par les fluctuations de la pression de radiation est par elle-même suffisamment efficace [113] pour faire décohérer le mouvement d'objets macroscopiques, même en l'absence de fluctuations gravitationnelles, mais il est important de noter qu'elle est largement dominée par la décohérence gravitationnelle.

Dans cette optique, il est intéressant de chercher la masse d'une sphère de densité moyenne ( $d \sim 5$ ) pour laquelle le taux de décohérence gravitationnelle serait égal au taux de décohérence électromagnétique. On suppose donc deux sphères de masses volumique  $\rho$  en interaction gravitationnelle et en rotation compacte l'une autour de l'autre ( $r = 2a$ ). La masse frontière

$m_{\text{front.}}$  d'une des sphères pour laquelle la décohérence gravitationnelle est égale à la décohérence électromagnétique est donnée par :

$$m_{\text{front.}} = m_{\text{P}} \times \frac{1}{2\rho G} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{k_{\text{B}} T_{\text{em}}}{\hbar} \right)^2 \sqrt{\frac{T_{\text{em}}}{T_{\text{gw}}}} \sim 7 \times 10^9 \text{ kg} \quad (2.250)$$

On a pris dans ce calcul la température du rayonnement solaire  $T_{\text{em}} \sim 6000 \text{ K}$ . Avec le rayonnement fossile à  $3 \text{ K}$ , on trouverait une masse frontière d'environ  $40 \text{ kg}$ .

### C.3.4 Décohérence aux temps courts

On va maintenant regarder la décohérence dans la limite des temps courts. Dans cette limite, le facteur de décohérence se déduit de (2.215) :

$$\Delta\varphi^2(t) = \frac{m^2 r^2}{4\hbar^2} \frac{\Delta x^2 t^2}{t_{\text{gw}}^4} \quad (2.251)$$

où on a introduit le temps caractéristique  $t_{\text{gw}}$  défini par (2.220) :

$$\frac{1}{t_{\text{gw}}^4} \equiv K_h \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^4 S_h[\omega] \quad (2.252)$$

Le comportement de la décroissance des cohérences est donc qualitativement différent de celui des temps longs. On peut extraire un temps de décohérence à partir duquel  $\Delta\varphi^2(t)$  devient plus grand que l'unité :

$$t_{\text{dec}} = 2 \frac{\hbar t_{\text{gw}}^2}{mr\Delta x} \quad (2.253)$$

On a vu que c'était le réservoir d'OG relique qui déterminait la diffusion aux temps courts. On peut finalement écrire le temps de décohérence en regroupant ces résultats :

$$t_{\text{dec}} \sim 5 \times 10^{-51} \text{ s} \left( \frac{10^{-14}}{\Omega_{\text{gw}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 \text{ m}}{\Delta x} \right) \quad (2.254)$$

Comme précisé plus haut, cette expression n'a en fait de sens que dans la limite où la séparation  $\Delta x$  est petite devant  $\sim 1 \text{ m}$  afin de respecter la limite des grandes longueurs d'onde.

Comme on le verra dans la partie suivante, les OG sont couplées au quadrupole  $Q_{ij}(t)$  du système Terre-Lune via un couplage proportionnel à  $Q_{ij}(t)R_{0i0j}(t)$ . Le paramètre de classicité pertinent dans ce problème est donc en fait la variation  $\Delta Q$  du quadrupole entre les deux positions séparées de  $\Delta x$ . On rappelle la définition de ce quadrupole :

$$Q_{ij}(t) = m \left( x_i(t)x_j(t) - \frac{\delta_{ij}}{3} x_k(t)x_k(t) \right) \quad (2.255)$$

Ainsi que sa valeur sur une orbite circulaire de la Lune :

$$\begin{aligned} Q_{11}(t) &= \frac{1}{6}mr^2 + \frac{1}{2}mr^2 \cos(2\Omega t) \\ Q_{22}(t) &= \frac{1}{6}mr^2 - \frac{1}{2}mr^2 \cos(2\Omega t) \\ Q_{12}(t) &= \frac{1}{2}mr^2 \sin(2\Omega t) \end{aligned} \quad (2.256)$$

Pour des raisons qui apparaîtront claires plus tard, on peut définir la quantité  $\Delta Q$  suivante :

$$\Delta Q = \sqrt{|\Delta Q_{ij}(t)\Delta Q_{kl}(t)\delta_{ijkl}|} \quad , \quad \delta_{ijkl} = \frac{2}{5}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{4}{15}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (2.257)$$

Autrement dit, on a simplement pour un mouvement circulaire :

$$\Delta Q = 2\sqrt{\frac{2}{5}}mr\Delta x \quad (2.258)$$

en se plaçant dans la limite où  $\Delta x$  est petit devant  $r$ . Le temps de décohérence  $t_{\text{dec}}$  s'écrit alors de façon générique comme la prédiction générale pour les scénarios de décohérence rapide [125] :

$$t_{\text{dec}} = \frac{4\sqrt{2}}{c^2} \frac{\hbar}{\Delta Q \Delta R} \quad (2.259)$$

Nous avons introduit une valeur  $\Delta R$  caractérisant la dispersion de la courbure :

$$\Delta R = \sqrt{\langle R_{0i0j}(t)R_{0i0j}(t) \rangle} \quad (2.260)$$

En conclusion, la diffusion d'un très grand nombre de gravitons d'origine reliques permet l'émergence rapide des propriétés classiques du mouvement du centre de masse de la Lune.

### C.3.5 Discussion des diverses échelles de temps

La partie précédente montre qu'il existe la hiérarchie suivante des échelles de temps pour les fluctuations du mouvement de la Lune :

$$t_{\text{dec}} \ll t_{\text{res}} \ll t_{\text{sys}} \ll t_{\text{diss}} \quad (2.261)$$

$t_{\text{diss}}$  désigne le temps caractéristique de dissipation de l'énergie par émission spontanée d'OG. Cette limite est inhabituelle dans la mesure où le temps de décohérence est plus petit que le temps de mémoire du réservoir. On retrouve dans cette limite les résultats généraux étudiés dans [125] et en particulier un comportement de la décohérence qui fait intervenir la fonction de corrélation du bain.

Une limite fréquemment rencontrée dans les théories de la décohérence correspond à la hiérarchie suivante des échelles de temps :

$$t_{\text{res}} \ll t_{\text{sys}} \ll t_{\text{dec}} \ll t_{\text{diss}} \quad (2.262)$$

Dans ce cas, la décohérence opère lentement par rapport au temps d'évolution du système. L'application de la règle d'or de Fermi (voir [118, chapitres IV et V]) permet alors d'obtenir un temps de décohérence qui s'écrit de façon générale sous la forme :

$$t_{\text{dec}} \sim t_{\text{diss}} \left( \frac{d}{\Delta x} \right)^2 \quad (2.263)$$

où  $d$  est une largeur caractéristique des deux composantes et  $\Delta x$  la distance séparant ces deux composantes. Puisque la dissipation est reliée à la diffusion, ce temps de décohérence est simplement proportionnel au coefficient de diffusion. Ce résultat est celui qui a été obtenu pour la limite des temps longs pour la décohérence de la Lune.

Afin de se placer dans la situation précédente, on peut imaginer un système modèle constitué de 2 particules en interaction gravitationnelle reproduisant le système Terre-Lune à une échelle réduite de telle sorte que la décohérence soit plus lente que la dynamique du système. On suppose que la description de la partie précédente sur la diffusion s'applique encore pour un tel système et on étudie la décohérence d'une superposition telle que celle envisagée plus haut.

En utilisant l'expression (2.244), on montre que le temps de décohérence s'écrit :

$$t_{\text{dec}} = \frac{4}{\Gamma_{\text{gw}}} \left( \frac{\lambda_{T_{\text{gw}}}}{\Delta x} \right)^2 = 4t_{\text{diss}} \left( \frac{\lambda_{T_{\text{gw}}}}{\Delta x} \right)^2, \quad \lambda_{T_{\text{gw}}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mk_{\text{B}}T_{\text{gw}}}} \quad (2.264)$$

avec  $t_{\text{diss}}$  le temps de dissipation par émission spontanée d'OG. On voit que l'on retrouve le résultat général (2.263) avec comme longueur  $d$  la longueur d'onde de De Broglie d'une particule qui serait à l'équilibre thermique à la température  $T_{\text{gw}}$ . On voit que l'effet de la température est de diminuer le temps de décohérence et on parle d'activation thermique de la décohérence. D'autre part, la décohérence est d'autant plus rapide que la classicité du système, caractérisée par la distance spatiale  $\Delta x$ , est grande.

---

## Quelques développements théoriques

---

### Sommaire

<b>A</b>	<b>Traitement Lagrangien de l'interaction en jauge TT</b>	<b>91</b>
A.1	Lagrangien d'interaction	91
A.2	Écriture de l'action d'interaction en jauge TT	94
A.3	Remarques sur l'invariance de jauge et analogies avec l'électromagnétisme	98
<b>B</b>	<b>Traitement quantique de la décohérence gravitationnelle</b>	<b>102</b>
B.1	Dispersion de phase et décohérence	102
B.2	Formalisme de Feynman-Vernon et limites classiques	107
B.3	Fonctionnelle d'influence d'un système couplé au fond d'OG	116
<b>C</b>	<b>Retour sur la décohérence dans les interféromètres</b>	<b>124</b>
C.1	Lien avec l'approche de Feynman-Vernon	124
C.2	Quelques compléments sur la décohérence dans les interféromètres	127
C.3	Influence de la géométrie	133

---

**C**E chapitre a pour but de justifier et d'approfondir certains résultats obtenus dans la première partie. En particulier, on a adopté dans les parties précédentes un point de vue géométrique pour décrire l'effet des OG, que ce soit à travers l'approximation eikonale pour les interféromètres ou l'équation de déviation géodésique pour le mouvement du centre de masse de la Lune. Dans le chapitre 2, on choisit un traitement Lagrangien du couplage entre un système et les OG dont on montrera l'équivalence avec le point de vue géométrique.

La section **A** présente l'étude précise de ce couplage et fournit notamment un nouvel éclairage sur l'invariance de jauge évoqués dans la première partie à propos du déphasage dans les interféromètres.

L'approche Lagrangienne est particulièrement bien adaptée à la description de la décohérence par les intégrales de chemin. Dans cette description qui fait appel à la notion de fonctionnelle d'influence de Feynman Vernon, l'interaction avec le bain d'OG peut être traitée comme le couplage d'un système à une collection d'oscillateurs harmoniques. On y retrouve alors de nombreuses analogies avec le couplage d'un atome au champ électromagnétique.

Les deux cas, électromagnétique et gravitationnel, présentent cependant des différences notables. En particulier, le couplage des OG à la matière est très faible tandis que l'environnement gravitationnel possède un très grand nombre de gravitons par mode. Dans cette double limite, la décohérence possède une interprétation classique dans laquelle celle-ci est équivalente à une interaction avec un environnement classique aléatoire. La démonstration précise de ces résultats fait l'objet de la section **B**.

Dans la section **C**, nous utilisons ces résultats pour reprendre l'étude des phénomènes de décohérence discutés dans le second chapitre pour les interféromètres atomiques. Nous donnons aussi des calculs complémentaires concernant les effets de géométrie dans la décohérence et le calcul du contraste dans les interféromètres.

## A Traitement Lagrangien de l'interaction en jauge TT

Dans cette partie, on s'intéresse à l'interaction d'un système noté  $\mathcal{S}$  avec l'environnement gravitationnel noté  $\mathcal{E}$  et on montre qu'il est possible de substituer à l'approche géométrique de la gravitation une description Lagrangienne. Cette approche Lagrangienne a déjà été utilisée avec succès pour décrire la déviation des rayons lumineux [126].

Il est connu de longue date qu'il existe un formalisme Lagrangien de la RG [43, 60, 84] qui permet de retrouver les équations d'Einstein. Cette approche redonne les déphasages calculés dans la première partie pour des particules matérielles non relativistes aussi bien que pour les photons. Elle permet de donner une justification à l'invariance de jauge du déphasage calculé dans le second chapitre.

### A.1 Lagrangien d'interaction

On rappelle la description Lagrangienne de l'équation d'Einstein. Ce formalisme possède une expression simplifiée dans le cas de l'interaction avec des champs gravitationnels faibles comme par exemple les OG. Il existe alors des analogies avec l'électromagnétisme, notamment lorsque l'on se place dans l'approximation des grandes longueurs d'onde (que l'on appelle aussi approximation quadrupolaire dans le cas de la RG).

#### A.1.1 Généralités

La dynamique du champ gravitationnel libre est décrite par une densité Lagrangienne  $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}(x) = -\frac{c^3}{16\pi G} R(x) \quad (3.1)$$

dont se déduit par intégration une action  $S_{\mathcal{E}}$  :

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{E}} &= \int dt L = \int d^4x \sqrt{g(x)} \mathcal{L}_{\mathcal{E}}(x) \\ &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g(x)} R(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$g(x) = -\det(g_{\mu\nu})$  permet de construire l'élément de volume invariant  $\sqrt{g(x)}d^4x$ . On distingue la densité Lagrangienne  $\mathcal{L}$  et le Lagrangien  $L$  obtenu comme l'intégrale de  $\mathcal{L}$  sur tout l'espace. Cependant, pour alléger l'écriture, on appelle indifféremment Lagrangien les quantités  $\mathcal{L}$  ou  $L$ .

Pour coupler un système  $\mathcal{S}$  au champ gravitationnel, on rajoute son Lagrangien qui dépend a priori de la métrique  $g_{\mu\nu}$  et que l'on note  $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}^{(g)}$ . La procédure standard pour obtenir ce Lagrangien consiste à partir du Lagrangien en espace de Minkowski, remplacer la métrique  $\eta_{\mu\nu}$  par  $g_{\mu\nu}$  et les dérivées usuelles  $\partial_{\mu}$  par des dérivées covariantes  $D_{\mu}$ .

Pour des champs gravitationnels faibles, le développement de  $\sqrt{g(x)}\mathcal{L}_S^{(g)}$  par rapport à la métrique  $g_{\mu\nu}$  s'écrit de la façon suivante :

$$\delta \left( \sqrt{g(x)}\mathcal{L}_S^{(g)} \right) = \frac{\partial(\sqrt{g(x)}\mathcal{L}_S^{(g)})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{g(x)}\mathcal{L}_S^{(g)})}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} \delta g_{\mu\nu,\rho} \quad (3.3)$$

En utilisant  $\delta g_{\mu\nu,\rho} = \partial_\rho \delta g_{\mu\nu}$ , on peut réécrire l'équation précédente comme suit :

$$\begin{aligned} \delta \left( \sqrt{g(x)}\mathcal{L}_S^{(g)} \right) &= \left( \frac{\partial(\sqrt{g(x)}\mathcal{L}_S^{(g)})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial(\sqrt{g(x)}\mathcal{L}_S^{(g)})}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &\quad + \partial_\rho \left( \frac{\partial(\sqrt{g(x)}\mathcal{L}_S^{(g)})}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} \delta g_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le dernier terme est une divergence et, puisque les Lagrangiens sont définis à des termes de bords près, on peut l'oublier [117].

Le terme restant en facteur de  $\delta g_{\mu\nu}$  est directement relié à la définition du tenseur énergie impulsion  $T^{\mu\nu}$  (voir [60, chap. 12] ou [84, chap. 94,95]) :

$$\delta \left( \int d^4x \sqrt{g(x)}\mathcal{L}_S^{(g)} \right) \triangleq \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{g(x)} T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu}(x) \quad (3.5)$$

Cette relation peut d'ailleurs être lue comme la définition du tenseur énergie impulsion :

$$T^{\mu\nu} = \frac{2c}{\sqrt{g}} \frac{\delta(\sqrt{g}\mathcal{L}_S^{(g)})}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (3.6)$$

Elle assure automatiquement que la variation de l'action par rapport à la métrique redonne les équations d'Einstein.

L'identification des équations (3.4) et (3.6) montre qu'en présence d'une perturbation, on peut décomposer la densité Lagrangienne du système perturbé comme une densité Lagrangienne évaluée dans l'espace de Minkowski, que l'on note simplement  $\mathcal{L}_S$ , plus une densité Lagrangienne d'interaction notée  $\mathcal{L}_{S/\mathcal{E}}$  telle que :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_S^{(g)} &= \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{S/\mathcal{E}} \quad , \quad \mathcal{L}_{S/\mathcal{E}} = \frac{1}{2c} \delta g_{\mu\nu}(x) T^{\mu\nu}(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'action d'interaction s'écrit donc :

$$S_{S/\mathcal{E}} = \frac{1}{2c} \int \sqrt{g(x)} \delta g_{\mu\nu}(x) T^{\mu\nu}(x) d^4x \quad (3.8)$$

Cette action décrit comment, à l'ordre le plus bas dans la perturbation métrique, on peut remplacer la description géométrique de la RG par une description Lagrangienne : on rajoute simplement la perturbation  $S_{S/\mathcal{E}}$  à l'action du système non perturbé, c'est-à-dire l'action  $S_S = \int d^4x \mathcal{L}_S$  du système évaluée dans l'espace de Minkowski plus l'action  $S_{\mathcal{E}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  du champ gravitationnel libre.

### A.1.2 Invariance de jauge de l'action d'interaction $S_{S/\mathcal{E}}$

Un avantage de cette présentation est que l'action  $S_{S/\mathcal{E}}$  représentant la perturbation est automatiquement scalaire, c'est-à-dire invariante sous les transformations de jauge. Pour le voir, considérons une transformation de jauge :

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu \\ h_{\mu\nu}(x) &\longrightarrow h_{\mu\nu}(x) - D_\mu \varepsilon_\nu(x) - D_\nu \varepsilon_\mu(x) \end{aligned} \quad (3.9)$$

La variation de l'action s'écrit alors (voir [60, chap. 12.3] pour plus de détails) :

$$\delta S_{S/\mathcal{E}} = \frac{1}{2c} \int \sqrt{g(x)} \varepsilon_\nu(x) D_\mu T^{\mu\nu}(x) d^4x \quad (3.10)$$

Pour écrire cette relation, on a oublié une divergence qui disparaît en tant que terme de bord. On constate sur l'expression (3.10) que la conservation du tenseur énergie impulsion est équivalente à l'invariance de jauge de l'action d'interaction :

$$\delta S_{S/\mathcal{E}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.11)$$

On peut d'ailleurs considérer que les lois de conservation découlent de l'invariance de l'action [84]. Ce résultat est analogue au fait que la conservation de la charge est une condition nécessaire et suffisante pour que l'action construite sur le Lagrangien standard de l'électrodynamique soit invariant de jauge [80, chap. II.B.3]. Il signifie ici que la perturbation ne dépend pas du choix du système de coordonnées à des termes de bords près.

Dans la suite, nous utiliserons l'action (3.8) pour étudier la diffusion des OG par des systèmes simples comme des interféromètres ou des quadrupoles classiques tels que le système Terre-Lune. Avant cela, nous revenons brièvement sur le lien entre l'approche précédente et la description du second chapitre pour le déphasage dans un interféromètre.

### A.1.3 Équivalence entre les approches géométrique et Lagrangienne

La description Lagrangienne que nous venons de donner permet de traiter des systèmes dans lesquels l'énergie est délocalisée, contrairement au second chapitre où on la supposait parfaitement localisée. On peut retrouver ce cas limite, qui correspond au traitement de la particule test matérielle, en procédant aux simplifications suivantes. Tout d'abord, on considère que le tenseur énergie-impulsion se réduit à une distribution ponctuelle qui suit la trajectoire  $q(\tau)$  où  $\tau$  désigne le temps propre de la particule. Son tenseur énergie impulsion s'écrit alors :

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \int dq^\nu cp^\mu \delta^4(x - q(\tau)) \quad , \quad p^\mu = m \frac{dq^\mu}{d\tau} \\ c^2 d\tau^2 &= g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu \end{aligned} \quad (3.12)$$

On sait que l'équation (3.11) de conservation de l'énergie donne alors la loi du mouvement géodésique pour cette particule matérielle [60, 84].

En utilisant l'hypothèse eikonale, on relie ensuite l'intégrale d'action à la phase  $\varphi$  associée à la propagation du champ (voir la discussion de la section 2.C.1.2) :

$$\varphi = \frac{S}{\hbar} \quad (3.13)$$

Ces relations établissent l'équivalence entre la méthode géométrique préférée par la Relativité Générale et la méthode de perturbation Lagrangienne plus utilisée en Théorie des Champs.

Elles mettent en évidence que les déphasages calculés dans le second chapitre sont automatiquement invariants de jauge, à la condition de bien prendre en compte les transferts d'énergie-impulsion. En ce qui concerne les interféromètres atomiques par exemple, nous avons montré dans le second chapitre qu'il fallait tenir compte des bilans d'impulsion sur les séparatrices et les miroirs pour obtenir des expressions invariantes de jauge. Les relations obtenues dans la présente section montrent la généralité de ce résultat. Le déphasage est directement lié à l'action et l'invariance de celle-ci est assurée, cette invariance étant équivalente aux lois de conservation.

## A.2 Écriture de l'action d'interaction en jauge TT

Dans cette partie, on donne la forme explicite de la perturbation  $S_{S/\mathcal{E}}$  pour des systèmes simples comme des particules matérielles en mouvement non relativiste ou encore un champ électromagnétique. Puisque l'on est maintenant assuré de l'invariance de jauge de l'action, on peut faire le calcul dans une jauge particulière. On choisit de se placer dans la jauge TT, qui se révèle pratique pour étudier le couplage aux OG dans le formalisme de la fonctionnelle d'influence de Feynman Vernon (voir aussi les discussions en section 2.A.2.4).

### A.2.1 Particules matérielles en mouvement non relativiste

Supposons une particule test de masse  $m$  en mouvement non relativiste. On peut alors assimiler temps propre  $\tau$  et temps coordonnés  $t$  et écrire en particulier :

$$p^0 = mc \frac{dt}{d\tau} \simeq mc \quad , \quad p^i \simeq m\dot{x}^i \quad (3.14)$$

Le point désigne la dérivée par rapport au temps coordonné. On a finalement une expression simplifiée pour le tenseur d'énergie-impulsion :

$$T^{00}(x) = mc^2 \int cd\tau \delta^4(x - q(\tau)) \quad , \quad T^{ij}(x) = m \int cd\tau \dot{x}^i \dot{x}^j \delta^4(x - q(\tau)) \quad (3.15)$$

Si la perturbation se réduit à des ondes gravitationnelles libres, on peut se placer dans un

système de coordonnées TT, et l'action d'interaction entre deux instants  $t_i$  et  $t_f$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} S_{S/\mathcal{E}}^{\text{TT}} &= \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3\mathbf{x} h_{ij}(t, \mathbf{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{q}(t)) \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t) h_{ij}(t, \mathbf{q}(t)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

En assimilant action et déphasage par l'équation (3.13), on retrouve bien l'expression du déphasage propagatif (2.9) dans l'approximation eikonale avec  $d\lambda = \frac{cdt}{K_0}$  et  $K^i = \frac{m\dot{q}^i}{\hbar}$ .

### A.2.2 Approximation quadrupolaire

On peut simplifier l'expression de la perturbation dans l'approximation quadrupolaire pour laquelle la longueur d'onde des OG est supposée très grande devant la taille du système. Dans cette limite le quadrupole du système apparaît naturellement comme la quantité couplée à la perturbation métrique. Pour le montrer, on note que  $h_{ij}^{\text{TT}}(t)$  peut être pris en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  :

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) \simeq h_{ij}^{\text{TT}}(t) \quad (3.17)$$

L'action d'interaction s'écrit alors à l'ordre le plus bas d'après (3.8) :

$$\begin{aligned} S_{S/\mathcal{E}}^{\text{TT}} &= \frac{1}{2} \int dt h_{ij}^{\text{TT}}(t) \int d^3\mathbf{x} T^{ij}(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} h_{ij}^{\text{TT}}[-\omega] \int d^3\mathbf{x} T^{ij}[\omega, \mathbf{x}] \end{aligned} \quad (3.18)$$

En utilisant la conservation du tenseur énergie-impulsion (sous sa version linéarisée  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ), on peut exprimer la partie spatiale  $T^{ij}$  en fonction de la partie temporelle  $T^{00}$ . Pour cela, on remarque que :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \partial_i T^{i\nu}[\omega, \mathbf{x}] - i\frac{\omega}{c} T^{0\nu}[\omega, \mathbf{x}] = 0 \\ &\quad \Rightarrow \quad \partial_i \partial_j T^{ij}[\omega, \mathbf{x}] = i\frac{\omega}{c} \partial_j T^{0j}[\omega, \mathbf{x}] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Puisque  $\partial_j T^{0j}[\omega, \mathbf{x}] = i\frac{\omega}{c} T^{00}[\omega, \mathbf{x}]$ , on déduit la relation suivante entre les composantes spatiales et temporelles dans l'espace de Fourier :

$$\partial_i \partial_j T^{ij}[\omega, \mathbf{x}] = -\frac{\omega^2}{c^2} T^{00}[\omega, \mathbf{x}] \quad (3.20)$$

En multipliant cette équation par  $x^k x^l$  et en intégrant sur tout l'espace on obtient grâce à deux intégrations par partie sur le membre de gauche et en supposant que  $T^{ij}[\omega, \mathbf{x}]$  tend vers 0 suffisamment vite :

$$\int d^3\mathbf{x} x^k x^l \partial_i \partial_j T^{ij}[\omega, \mathbf{x}] = \int d^3\mathbf{x} \partial_i \partial_j (x^k x^l) T^{ij}[\omega, \mathbf{x}] = 2 \int d^3\mathbf{x} T^{kl}[\omega, \mathbf{x}] \quad (3.21)$$

Dans le domaine temporel, cela se réexprime grâce à (3.20) sous la forme :

$$\int d^3\mathbf{x} T^{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3\mathbf{x} x^i x^j T^{00}(t, \mathbf{x}) \quad (3.22)$$

On a donc exprimé la partie spatiale du tenseur énergie impulsion en fonction de sa partie temporelle (voir aussi [84, chap. 105]). La métrique  $h_{ij}^{\text{TT}}$  étant de trace nulle, ces composantes ne sont couplées qu'à la partie sans trace de  $x^i x^j$  car on peut soustraire le terme  $\frac{1}{3} \delta^{ij} x^k x_k$  sans changer sa contraction avec  $h_{ij}^{\text{TT}}$ . En définissant le quadrupole  $Q^{ij}(t)$  du système de la façon suivante :

$$Q^{ij}(t) = \frac{1}{c^2} \int d^3\mathbf{x} \left( x^i x^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} x^k x_k \right) T^{00}(t, \mathbf{x}) \quad (3.23)$$

on voit qu'on obtient grâce aux équations (3.22) et (3.18) :

$$S_{S/\mathcal{E}}^{\text{TT}} = \frac{1}{4} \int dt h_{ij}^{\text{TT}}(t) \ddot{Q}^{ij}(t) \quad (3.24)$$

Dans la limite des grandes longueurs d'onde, le Lagrangien d'interaction s'écrit donc comme un couplage entre la perturbation métrique  $h_{ij}^{\text{TT}}(t)$  évaluée au centre du système et la dérivée seconde du moment quadrupolaire  $\ddot{Q}^{ij}(t)$ . L'expression (3.24) est valable quel que soit le système, qu'il s'agisse de matière ou de lumière, pourvu que l'on soit dans l'approximation quadrupolaire.

On peut utiliser cette expression pour simplifier la perturbation pour des particules matérielles non relativistes. Pour cela, on réécrit (3.15) de la façon suivante :

$$\int d^3\mathbf{x} T_{\text{NR}}^{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{m}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d\tau \int d^3\mathbf{x} x^i x^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{q}(\tau)) \frac{\delta(t - \tau)}{c} \quad (3.25)$$

L'action s'écrit alors de la façon suivante (comparer avec (3.16)) :

$$S_{S/\mathcal{E}}^{\text{TT}} = \frac{1}{4} \int_{t_i}^{t_f} dt h_{ij}^{\text{TT}}(t) \ddot{Q}^{ij}(t) \quad (3.26)$$

$$Q^{ij}(t) = m \left( q^i(t) q^j(t) - \frac{1}{3} \delta^{ij} q^k(t) q_k(t) \right) \quad (3.27)$$

Remarquons que, dans la limite considérée ici où la taille du système est petite devant la longueur d'onde des OG, l'action (3.24) permet de démontrer l'expression du rayonnement quadrupolaire d'OG par un système binaire [60, chap. 10].

### A.2.3 Champ électromagnétique

Pour la lumière, on peut d'abord faire une description corpusculaire où on suppose que l'énergie du champ électromagnétique est portée par des photons décrits comme des particules ponctuelles se déplaçant à la vitesse de la lumière le long d'une trajectoire  $q(\tau)$ . Avec cette

hypothèse, on peut utiliser les résultats de la partie précédente en remplaçant dans l'expression (3.12) l'impulsion par la quantité :

$$p^i = \hbar K^i = \frac{\hbar \Omega_{\text{phot}}}{c} \hat{\mathbf{K}}^i \quad (3.28)$$

La condition de validité de l'approximation quadrupolaire signifie ici que le champ gravitationnel est pratiquement constant sur les intervalles de temps et d'espace sur lesquels le champ électromagnétique est présent. En utilisant cette hypothèse, on obtient :

$$T^{ij}(x) = \hbar \Omega_{\text{phot}} \int cd\tau \hat{\mathbf{K}}^i \hat{\mathbf{K}}^j \delta^4(x - q(\tau)) \quad (3.29)$$

ce qui donne comme action d'interaction entre deux instants  $t_i$  et  $t_f$  :

$$S_{S/\mathcal{E}} = \frac{\hbar \Omega_{\text{phot}}}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \hat{\mathbf{K}}^i \hat{\mathbf{K}}^j h_{ij}(t, \mathbf{q}(t)) \quad (3.30)$$

On peut également décrire l'interaction des OG avec un champ électromagnétique décrit par son tenseur énergie impulsion  $T^{\mu\nu}$  :

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[ F^\mu_\rho F^{\nu\rho} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] \quad (3.31)$$

Les contractions sont à faire avec la métrique plate  $\eta_{\mu\nu}$ . Le tenseur  $F^{\mu\nu}$  s'écrit :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.32)$$

$$F_{0i} = \frac{E_i}{c}, \quad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k \quad (3.33)$$

Les parties temporelle et spatiale du tenseur énergie impulsion se déduisent [127] :

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ T^{ij} &= \varepsilon_0 \left( \frac{E^2}{2} \delta^{ij} - E^i E^j \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{B^2}{2} \delta^{ij} - B^i B^j \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dans la jauge TT, seules les composantes spatiales de  $h_{ij}^{\text{TT}}$  interviennent et on peut donc se contenter de l'expression de  $T^{ij}$ . De plus, la trace de la métrique est nulle et on obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S/\mathcal{E}}(x) &= \frac{1}{2c} \left( \varepsilon_0 E^i(x) E^j(x) + \frac{1}{\mu_0} B^i(x) B^j(x) \right) h_{ij}(x) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c} h_{ij}(x) F^i_\mu(x) F^{j\mu}(x) \end{aligned} \quad (3.35)$$

On peut maintenant se placer dans une jauge électromagnétique particulière. Si on choisit de se placer dans la jauge de Coulomb telle que  $A^0 = 0$  et  $\partial_i A^i = 0$ , un champ classique  $A^i$  de

fréquence  $\Omega_{\text{phot}}$  se décompose en fonction des variables normales  $\alpha_\gamma$  du champ électromagnétique [80, chap. I] :

$$A_i(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\Omega_{\text{phot}}}} \sum_{\gamma=\pm 1} \left( \alpha_\gamma(\mathbf{K}) \mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{K}}] e^{-i\Omega_{\text{phot}} t - \frac{\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{x}}{c}} + \text{c.c.} \right) \quad (3.36)$$

$\gamma$  est la polarisation circulaire et  $\mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{K}}]$  le vecteur polarisation dont l'expression explicite est donnée en annexe C. En remplaçant cette expression dans le Lagrangien d'interaction (3.35) et en utilisant les conditions de la jauge de Coulomb, celui-ci se simplifie pour donner finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S/\mathcal{E}}(x) = & \frac{\hbar\Omega_{\text{phot}}}{4c} h_{ij}(x) \int \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{K}'}{(2\pi)^3} \hat{\mathbf{K}}^i \hat{\mathbf{K}}'^j \sum_{\gamma, \gamma'} \left( \alpha_\gamma(\mathbf{K}) \mathbf{e}_k^\gamma[\hat{\mathbf{K}}] e^{-i\Omega_{\text{phot}} t - \frac{\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{x}}{c}} + \text{c.c.} \right) \\ & \times \eta^{kl} \left( \alpha_{\gamma'}(\mathbf{K}') \mathbf{e}_l^{\gamma'}[\hat{\mathbf{K}}'] e^{-i\Omega_{\text{phot}} t - \frac{\hat{\mathbf{K}}' \cdot \mathbf{x}}{c}} + \text{c.c.} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dans l'approximation eikonale, seules les contributions ne contenant pas de termes oscillants de la forme  $e^{\pm 2i\Omega t}$  contribuent à l'action. En effet, les termes oscillants se moyennent rapidement à zéro dans l'intégrale temporelle de l'action. D'autre part, dans la limite des grandes longueurs d'onde, cette action se réduit finalement à l'expression suivante :

$$S_{S/\mathcal{E}} = \frac{\hbar\Omega_{\text{phot}}}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt h_{ij}(t) \int \frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3} \sum_{\gamma} |\alpha_\gamma(\mathbf{K})|^2 \hat{\mathbf{K}}^i \hat{\mathbf{K}}'^j \quad (3.38)$$

On retrouve le couplage  $h_{ij} \hat{\mathbf{K}}^i \hat{\mathbf{K}}'^j$  de l'équation (3.30) pondéré par le poids  $|\alpha_\gamma(\mathbf{K})|^2$  du vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  dans le paquet d'onde spatial.

### A.3 Remarques sur l'invariance de jauge et analogies avec l'électromagnétisme

Les résultats présentés dans cette section sont des remarques dont la lecture n'est pas indispensable à la compréhension de ce qui suit.

On présente des expressions explicites de l'action dans un système de coordonnées TT et un système de coordonnées de Fermi. On revient sur les termes de bords qui apparaissent lorsque l'on passe d'une jauge gravitationnelle à une autre et qui ont été discutés dans le second chapitre. L'approche Lagrangienne permet d'en donner une discussion plus systématique ici.

On présente aussi un formalisme Hamiltonien qui permet d'expliciter l'analogie entre les jauges de la RG et celle de l'électromagnétisme. En particulier, on montre que le choix d'une jauge en RG fixe le choix de l'Hamiltonien que l'on doit prendre pour décrire la perturbation, comme en électromagnétisme.

### A.3.1 La perturbation dans un système de coordonnées de Fermi

Il est instructif de comparer l'expression de la perturbation en jauge TT dans l'approximation des grandes longueurs d'onde avec son expression dans la jauge de Fermi.

Dans le système de coordonnées de Fermi, l'action d'interaction s'écrit simplement d'après (3.8) :

$$S_{S/\mathcal{E}}^F = \frac{1}{2} \int dt d^3\mathbf{x} h_{\mu\nu}^F(x) T^{\mu\nu}(x) \quad (3.39)$$

La perturbation métrique  $h_{\mu\nu}^F(x)$  est donnée par les expressions (2.50). Limitons nous au cas d'un système matériel en mouvement non relativiste de telle sorte que les composantes temporelles du tenseur énergie impulsion dominent les composantes contenant au moins une partie spatiale :

$$T^{00} \gg T^{0i} \gg T^{ij} \quad (3.40)$$

Ainsi, dans un système de coordonnées de Fermi, la perturbation se réduit au couplage de la partie temporelle du tenseur énergie impulsion  $T^{00}$  à la partie temporelle  $h_{00}^F$  de la perturbation métrique :

$$\begin{aligned} S_{S/\mathcal{E}}^F &= \frac{1}{2} \int dt d^3\mathbf{x} h_{00}^F(x) T^{00}(x) \\ &= \frac{1}{2} \int dt R_{0i0j}(t) \int d^3\mathbf{x} x^i x^j T^{00}(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

On retrouve le fait que le quadrupole  $Q^{ij}(t)$  intervient naturellement :

$$S_{S/\mathcal{E}}^F = \frac{c^2}{2} \int dt R_{0i0j}(t) Q^{ij}(t) \quad (3.42)$$

Le couplage a lieu entre le quadrupole du système et les composantes  $c^2 R_{0i0j}(t) = \ddot{h}_{ij}^{\text{TT}}(t)/2$  du tenseur de courbure.

On discute maintenant le lien entre les actions exprimées en jauge de Fermi ou en jauge TT. Pour cela, on remarque que l'action (3.42) peut se retrouver à partir de l'expression de celle en jauge TT par deux intégrations par partie. De façon équivalente, l'action d'interaction s'écrit dans le domaine de Fourier, à des termes de bord près :

$$S_{S/\mathcal{E}} = -\frac{1}{4} \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 Q^{ij}[\omega] h_{ij}[-\omega] \quad (3.43)$$

Les expressions (3.26) en jauge TT et (3.42) en jauge de Fermi sont alors obtenues en faisant agir la dérivée seconde respectivement sur le quadrupole et la métrique. Ainsi, le passage d'une jauge à une autre correspond à des expressions équivalentes de l'action, à des termes de bord près. Ce résultat est analogue au cas de l'électromagnétisme lors du passage de l'action en  $\vec{p} \cdot \vec{A}$  à celle en  $\vec{D} \cdot \vec{E}$  [128].

### A.3.2 Description Hamiltonienne

On construit maintenant une description Hamiltonienne à partir de la description Lagrangienne de la partie précédente <sup>1</sup>. Pour cela, on rappelle que le Lagrangien du système et le Lagrangien d'interaction s'écrivent, sans qu'on ait pour le moment spécifié de jauge :

$$\begin{aligned} L(t) &= L_S(t) + L_\mathcal{E}(t) + L_{S/\mathcal{E}}(t) \\ L_S(t) &= -\frac{1}{2} m \dot{q}_i(t) \dot{q}^i(t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{q}}^2(t) \\ L_{S/\mathcal{E}}(t) &= -\frac{1}{2} mc^2 h_{00}(t, \mathbf{q}(t)) - mc \dot{q}^i(t) h_{0i}(t, \mathbf{q}(t)) - \frac{1}{2} m \dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t) h_{ij}(t, \mathbf{q}(t)) \end{aligned} \quad (3.44)$$

On a écrit ces équations pour des particules matérielles non relativistes.

On déduit l'impulsion généralisée  $P_i$  du champ :

$$P_i \triangleq \frac{\partial(L_S + L_{S/\mathcal{E}})}{\partial \dot{q}^i} = -m \dot{q}_i - mc h_{0i} - m \dot{q}^j h_{ij} \quad (3.45)$$

Le premier terme donne le lien habituel entre l'impulsion et la vitesse. Le signe moins provient du fait que la métrique a une signature  $(+, -, -, -)$ . Le deuxième terme de l'équation (3.45) est analogue au terme  $eA_i$  de l'électromagnétisme et donne lieu à des corrections à l'impulsion que l'on qualifie pour cette raison de gravito-électromagnétique. En particulier, il est possible d'interpréter l'effet Lense-Thirring [77] et l'effet Sagnac [78] à l'aide de ce terme (voir aussi [129]). Enfin, le troisième terme correspond à des corrections dépendant de la partie purement spatiale de la métrique et proportionnelles à la vitesse.

L'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  s'écrit alors en fonction de l'impulsion  $P_i$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\triangleq P_i \dot{q}^i - (L_S + L_{S/\mathcal{E}}) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{q}}^2(t) + \frac{1}{2} mc^2 h_{00}(t, \mathbf{q}(t)) - \frac{1}{2} m \dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t) h_{ij}(t, \mathbf{q}(t)) \end{aligned} \quad (3.46)$$

En toute rigueur, il faut remplacer dans cette expression  $\dot{q}^i$  en fonction de l'impulsion généralisée  $P_i$  car l'Hamiltonien dépend des variables  $(q^i, P_j)$ . On va maintenant interpréter cet Hamiltonien dans deux jauges particulières, à savoir la jauge TT et la jauge de Fermi. On comparera les expressions obtenues dans la limite où elles sont simultanément valables, à savoir pour un observateur inertiel et de taille petite devant la longueur d'onde des OG.

Dans la jauge TT, les OG sont entièrement contenues dans la partie spatiale  $h_{ij}^{\text{TT}}$  de la perturbation métrique. Autrement dit, l'impulsion généralisée s'écrit comme une correction à l'impulsion habituelle donnée uniquement par le troisième terme de l'expression (3.45) (on rappelle qu'en théorie linéarisée, les indices sont levés et baissés avec la métrique plate  $\eta_{\mu\nu}$  et non avec  $g_{\mu\nu}$ ) :

$$P_i^{\text{TT}} = -m \dot{q}_i - m \dot{q}^j h_{ij}^{\text{TT}} = -m g_{ij}^{\text{TT}} \dot{q}^j \quad (3.47)$$

<sup>1</sup>On donne ici une description simple valable seulement en théorie linéarisée. La description Hamiltonienne de la RG ainsi que la détermination des degrés de libertés physiques est un problème difficile.

L'Hamiltonien  $\mathcal{H}_{\text{TT}}$  s'écrit alors, en utilisant (3.46) et (3.47) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{TT}} &= -\frac{m}{2}\dot{q}^i\dot{q}^j g_{ij}^{\text{TT}} \\ &= -\frac{1}{2m}\eta^{ij}\left(P_i - m\dot{q}^k h_{ik}^{\text{TT}}\right)\left(P_j - m\dot{q}^l h_{jl}^{\text{TT}}\right) - \frac{1}{2m}P^i P^j h_{ij}^{\text{TT}}\end{aligned}\quad (3.48)$$

À l'ordre le plus bas, on a finalement :

$$\mathcal{H}_{\text{TT}} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2m}P^i h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{q})P^j \quad (3.49)$$

Dans l'approximation quadrupolaire, on peut prendre  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  pour la perturbation métrique de telle sorte que ce couplage est exactement analogue au couplage  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{0})$  de l'électromagnétisme dans l'approximation dipolaire en jauge de Coulomb. En effet, l'impulsion  $p^i = \frac{m}{q}\dot{D}^i$  est proportionnelle à la dérivée première du moment dipolaire  $D^i$  donc  $p^i A_i$  correspond au couplage entre la dérivée première du dipole électrique et le potentiel vecteur. Un système de coordonnées TT est en fait analogue au choix de la jauge électromagnétique dans laquelle seules les parties spatiales de  $A^\mu$  sont non nulles et  $A^\mu$  est transverse (jauge de Coulomb pour un champ libre). La fonction d'onde  $\psi_{\text{TT}}(\mathbf{q}, t)$  vérifie alors l'équation de Schrödinger suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla_{\mathbf{q}}^2 + \partial^i h_{ij}(t)\partial^j\right)\psi_{\text{TT}}(\mathbf{q}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi_{\text{TT}}(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \quad (3.50)$$

Si on se place maintenant dans un système de coordonnées de Fermi, la métrique est donnée par les relations (2.50). Pour simplifier les notations, on enlève le chapeau sur les coordonnées  $q$  et  $t$ . L'impulsion généralisée s'écrit :

$$P_i^{\text{F}} = -m\dot{q}_i - \frac{2}{3}mcq^k q^l R_{0kil} - \frac{1}{3}m\dot{q}^j q^k q^l R_{kilj} \quad (3.51)$$

Dans la limite non relativiste, on peut négliger les termes en  $\dot{q}^i(t)\dot{q}^j(t)h_{ij}^{\text{F}}$  devant ceux en  $c^2 h_{00}^{\text{F}}$  apparaissant dans l'expression générale de l'Hamiltonien (3.46). La limite non relativiste revient donc à approximer l'impulsion généralisée  $P_i^{\text{F}}$  par la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{F}} &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2(t) + \frac{1}{2}mc^2 h_{00}^{\text{F}}(t, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2(t) + \frac{1}{2}mc^2 R_{0i0j}(t, \mathbf{0})q^i q^j \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2(t) + \frac{1}{2}c^2 R_{0i0j}(t, \mathbf{0})Q^{ij}\end{aligned}\quad (3.52)$$

L'Hamiltonien d'interaction  $R_{0i0j}Q^{ij}$  est tout à fait analogue au couplage dipolaire électrique  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$  de l'électromagnétisme. C'est pour cette raison qu'on appelle composantes gravito-électriques les composantes  $R_{0i0j}$  du tenseur de courbure [107]. La fonction d'onde  $\psi_{\text{F}}(\mathbf{q}, t)$  vérifie alors l'équation de Schrödinger suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{q}}^2\psi_{\text{F}}(\mathbf{q}, t) + \frac{1}{2}mc^2 R_{0i0j}(t, \mathbf{0})q^i q^j\psi_{\text{F}}(\mathbf{q}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi_{\text{F}}(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \quad (3.53)$$

De la même façon qu'en électromagnétisme, les fonctions d'onde sont différentes dans différentes jauges [128].

## B Traitement quantique de la décohérence gravitationnelle

La fonctionnelle d'influence de Feynman-Vernon [63] est un outil permettant de traiter les phénomènes de relaxation de façon très générale. Elle est donc parfaitement adaptée à une étude de la décohérence [36, 130, 131]. C'est une méthode fonctionnelle développée par Feynman et Vernon [63, 64] qui est particulièrement commode pour des systèmes quantiques simples tels que des oscillateurs harmoniques. Nous en présentons un résumé dans l'annexe E.

On montre dans la section B.1 qu'il est possible d'analyser la décohérence de deux points de vue différents. La première approche consiste à étudier la « polarisation » de l'environnement par son interaction avec un système, dans le même esprit que les études sur la théorie de la mesure. Une deuxième approche, que privilégie la méthode fonctionnelle de Feynman-Vernon, consiste à étudier les modifications apportées au système par son couplage à un environnement.

En particulier, l'approche de la fonctionnelle d'influence donne un éclairage intéressant sur l'interprétation de la décohérence en terme de dispersion de phase [123, 124], qui notamment trouve un sens bien précis lorsque l'environnement est *classique* et *faiblement* couplé au système, comme c'est le cas de l'environnement gravitationnel. Ce cas est étudié en détail dans la section B.2.

Enfin, on applique ces résultats pour le bain d'OG dans la section B.3 en traitant l'environnement gravitationnel comme une collection d'oscillateurs harmoniques, chacun dans un état classique que l'on caractérise par son nombre de quanta d'excitation  $n_{\text{gw}}[\omega]$  à la fréquence  $\omega$ . Cette partie permet aussi de justifier la méthode employée dans le second chapitre pour calculer la décohérence. En particulier, la fonctionnelle d'influence, qui privilégie l'action donc les phases, s'adapte très bien au traitement des interféromètres dans lesquels la phase est un objet primordial.

### B.1 Dispersion de phase et décohérence

L'approche de la fonctionnelle d'influence de Feynman-Vernon permet d'analyser le phénomène de décohérence comme un effet de dispersion de phase induit par le couplage du système à l'environnement. Cette partie B.1 présente une démarche qualitative qui permet de comprendre dans quel sens cette interprétation est équivalente aux approches plus traditionnelles [123, 65].

#### B.1.1 Deux points de vue qualitatifs pour la décohérence

Pour illustrer les deux points de vue que l'on peut adopter sur la décohérence, on utilise l'expérience des fentes d'Young (voir figure (3.1)) comme expérience modèle. Lorsqu'il n'y a pas d'interaction avec un environnement, l'intensité moyenne sur le détecteur s'écrit de façon

générale comme une somme de termes :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^D &= |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2 = |\mathcal{A}_1|^2 + |\mathcal{A}_2|^2 + \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1^* \\ \mathcal{A}_1 &= \langle S|1\rangle\langle 1|D\rangle \quad , \quad \mathcal{A}_2 = \langle S|2\rangle\langle 2|D\rangle \end{aligned} \quad (3.54)$$

$|i\rangle$  ( $i = 1, 2$ ) représente les deux « chemins » possibles,  $|S\rangle$  et  $|D\rangle$  les états du système respectivement au niveau de la source et du détecteur et  $\mathcal{A}_i$  représente les amplitudes de probabilité que la particule passe par la fente  $i$ .

Quand on inclut l'effet de l'interaction avec un environnement, initialement dans l'état  $\mathcal{E}_0$ , l'état global du système et de l'environnement évolue de l'état  $|S\rangle \otimes |\mathcal{E}_0\rangle$  vers l'état  $|1\rangle \otimes |\mathcal{E}_1\rangle + |2\rangle \otimes |\mathcal{E}_2\rangle$ . En supposant le détecteur insensible à l'état de l'environnement, l'intensité moyenne sur le détecteur va s'obtenir en sommant les probabilités sur tous les états  $|\phi_n\rangle$  de l'environnement :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{E}}^D &= \sum_n |\langle S|1\rangle\langle 1|D\rangle\langle \mathcal{E}_1|\phi_n\rangle + \langle S|2\rangle\langle 2|D\rangle\langle \mathcal{E}_2|\phi_n\rangle|^2 \\ &= |\mathcal{A}_1|^2 \langle \mathcal{E}_1|\mathcal{E}_1\rangle + |\mathcal{A}_2|^2 \langle \mathcal{E}_2|\mathcal{E}_2\rangle + 2|\langle \mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2\rangle| \operatorname{Re} \left( \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2^* \exp^{i\arg(\langle \mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2\rangle)} \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

De façon générique, l'expression précédente montre que la présence d'un environnement  $\mathcal{E}$  déplace les franges d'interférences en ajoutant un déphasage  $\arg(\langle \mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2\rangle)$  et réduit le contraste d'un facteur  $\mathcal{V}$  qui s'écrit :

$$\mathcal{V} = |\langle \mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2\rangle| \leq 1 \quad (3.56)$$

Si les états  $|\mathcal{E}_1\rangle$  et  $|\mathcal{E}_2\rangle$  de l'environnement sont très différents,  $|\mathcal{E}_1\rangle$  se recouvre peu avec  $|\mathcal{E}_2\rangle$  et le contraste  $\mathcal{V}$  chute à zéro. En termes qualitatifs, lorsque l'environnement est sensible au chemin suivi par la particule, on peut obtenir une information sur le chemin emprunté et les interférences disparaissent : c'est l'interprétation en terme de « complémentarité » [132] que nous décrivons de manière plus quantitative dans la suite comme une « catastrophe d'orthogonalité » (voir aussi [133, chap 17.1]).

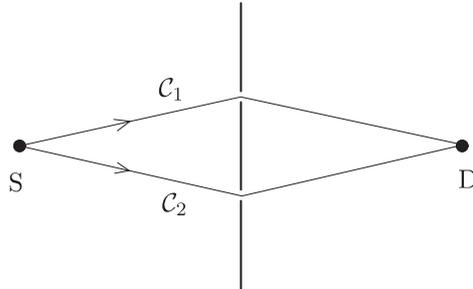


FIG. 3.1: Expérience des trous d'Young.

On peut analyser la même situation du point de vue de la particule. De façon générale l'interaction avec l'environnement crée un déphasage  $\delta\varphi_{\mathcal{C}}$  de la fonction d'onde qui dépend de l'intégrale du potentiel d'interaction  $V[q(t)]$  sur le chemin  $\mathcal{C}$  suivi par la particule :

$$\delta\phi_{\mathcal{C}} = -\frac{1}{\hbar} \int_{\mathcal{C}} V[q(t)] dt \quad (3.57)$$

L'état d'interférence au niveau du détecteur s'écrit donc comme la variation de phase entre les deux chemins  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  suivis par la particule. Les fluctuations de l'environnement font que la réduction de la visibilité  $\mathcal{V}$  des franges est donnée par la quantité suivante :

$$\mathcal{V} = \left\langle e^{i(\delta\varphi_{(1)} - \delta\varphi_{(2)})} \right\rangle \quad (3.58)$$

La valeur moyenne est à prendre sur les fluctuations de l'environnement. Les deux approches (3.56) et (3.58) sont équivalentes quand la condition suivante est vérifiée :

$$\left\langle e^{i(\delta\varphi_{(1)} - \delta\varphi_{(2)})} \right\rangle = \langle \mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_2 \rangle \quad (3.59)$$

Nous allons voir que la théorie de la fonctionnelle d'influence permet de justifier quantitativement cette équivalence en introduisant des raffinements liés au caractère non commutatif des fluctuations quantiques. Pour cela, on va s'intéresser à la fonctionnelle d'influence  $\mathcal{F}[q_+, q_-]$  qui traduit physiquement la cohérence entre deux chemins  $q_{\pm}$  du système. Dans le cas de l'expérience des fentes d'Young, ces chemins sont essentiellement les deux chemins classiques (1) et (2) qui interfèrent au niveau du détecteur.

### B.1.2 Catastrophe d'orthogonalité

Dans cette approche, on étudie la décohérence du point de vue de l'environnement. Pour exprimer la fonctionnelle d'influence, il est commode de faire intervenir l'opérateur d'évolution de l'environnement soumis à l'interaction avec la trajectoire classique  $q_{\pm}$  du système. On définit cette quantité par ses éléments de matrice :

$$\left\langle x_f \left| \widehat{U}_{\mathcal{E}+\mathcal{S}/\mathcal{E}}(t_i, t_f)[q_{\pm}] \right| x_i \right\rangle \triangleq \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S_{\mathcal{E}+\mathcal{S}/\mathcal{E}}[x, q_{\pm}]} \quad (3.60)$$

Notons qu'il n'y a pas d'opérateur du système dans l'expression de  $\widehat{U}_{\mathcal{E}+\mathcal{S}/\mathcal{E}}(t_i, t_f)[q_{\pm}(t)]$ , conditionné par le chemin  $q_{\pm}$  suivi par la particule. Cette quantité permet d'exprimer la fonctionnelle d'influence (E-10), à l'aide de deux relations de fermeture, sous la forme d'une valeur moyenne quantique sur les états de l'environnement :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[q_+, q_-] &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} \left( \widehat{U}_{\mathcal{E}+\mathcal{S}/\mathcal{E}}(t_i, t_f)[q_+] \widehat{\rho}_{\mathcal{E}}(t_i) \widehat{U}_{\mathcal{E}+\mathcal{S}/\mathcal{E}}^{-1}(t_i, t_f)[q_-] \right) \\ &= \left\langle \widehat{U}_{\mathcal{E}+\mathcal{S}/\mathcal{E}}^{-1}(t_i, t_f)[q_-] \widehat{U}_{\mathcal{E}+\mathcal{S}/\mathcal{E}}(t_i, t_f)[q_+] \right\rangle_{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (3.61)$$

La décohérence apparaît ici comme l'effet sur l'environnement du fait que le système décrit des trajectoires différentes  $q_+$  et  $q_-$ . La fonctionnelle d'influence  $\mathcal{F}[q_+, q_-]$  peut ensuite se calculer si on se donne l'état de l'environnement. Par exemple, si on suppose que l'environnement est dans un état initial pur  $|\mathcal{E}_i\rangle$ , on peut définir ses états finaux :

$$|\mathcal{E}_\pm\rangle = \widehat{U}_{\mathcal{E}+S/\mathcal{E}}(t_i, t_f)[q_\pm]|\mathcal{E}_i\rangle \quad (3.62)$$

Puisque  $\widehat{\rho}_{\mathcal{E}}(t_i) = |\mathcal{E}_i\rangle\langle\mathcal{E}_i|$ , on a d'après (3.61) :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \langle\mathcal{E}_-|\mathcal{E}_+\rangle \quad (3.63)$$

On retrouve donc les conclusions qualitatives de la discussion de la partie précédente sur les trous d'Young : la fonctionnelle d'influence correspond exactement à la réduction du contraste des interférences. L'interaction de l'environnement avec le système se réduit donc à un ensemble de problèmes plus simples où l'environnement est couplé à une collection de sources classiques paramétrées par l'ensemble des chemins du système.

Si on suppose maintenant que l'environnement est initialement dans un mélange statistique d'états  $\widehat{\rho}_{\mathcal{E}}(t_i) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\mathcal{E}^{\alpha}\rangle\langle\mathcal{E}^{\alpha}|$ , alors la fonctionnelle d'influence s'obtient comme la moyenne sur cette distribution statistique du contraste des interférences entre les chemins du système :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle\mathcal{E}_-^{\alpha}|\mathcal{E}_+^{\alpha}\rangle \quad (3.64)$$

Les corrélations qui s'établissent entre l'environnement et le système durant l'évolution de celui-ci sont cruciales puisque l'effet de décohérence se manifeste lorsque deux parties différentes du système se corrélient à des états presque orthogonaux de l'environnement.

### B.1.3 Dispersion de phase

On peut aussi étudier ce qui se passe du point de vue du système, et c'est ce que nous allons faire maintenant. On se place en représentation d'interaction par rapport à l'évolution libre de l'environnement. On note  $\widehat{U}_{\mathcal{I}}$  l'opérateur tel que :

$$\widehat{U}_{\mathcal{E}+S/\mathcal{E}}(t_i, t_f)[q_{\pm}] = \widehat{U}_{\mathcal{E}}(t_i, t_f)\widehat{U}_{\mathcal{I}}(t_i, t_f)[q_{\pm}] \quad (3.65)$$

La fonctionnelle d'influence s'écrit alors, d'après (3.61) :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \left\langle \widehat{U}_{\mathcal{I}}^{-1}(t_i, t_f)[q_-] \widehat{U}_{\mathcal{I}}(t_i, t_f)[q_+] \right\rangle_{\mathcal{E}} \quad (3.66)$$

L'indice  $\mathcal{I}$  rappelle qu'on est en représentation d'interaction par rapport à l'environnement, le système étant représenté comme une source classique via les fonctions réelles  $q_{\pm}(t)$ . Les équations d'Heisenberg pour l'opérateur évolution donnent comme solution formelle l'exponentielle ordonnée :

$$\widehat{U}_{\mathcal{I}}(t_i, t_f)[q_{\pm}] = \mathcal{T} \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_{\pm}(t)] dt \right) \quad (3.67)$$

$\widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_{\pm}]$  est l'Hamiltonien d'interaction  $\widehat{H}_{\mathcal{S}/\mathcal{E}}[q_{\pm}]$  en représentation interaction. En utilisant le théorème de Campbell-Hausdorff :

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (3.68)$$

on peut exprimer l'opérateur d'évolution  $\widehat{U}_{\mathcal{I}}(t_i, t_f)[q_{\pm}]$  de la façon suivante [134, chap 4-1-4] :

$$\widehat{U}_{\mathcal{I}}(t_i, t_f)[q_{\pm}] = \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_{\pm}(t)] dt - \frac{1}{2\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \left[ \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_{\pm}(s)], \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_{\pm}(t)] \right] + \dots \right) \quad (3.69)$$

Les pointillés désignent des commutateurs emboîtés au moins d'ordre trois dans la perturbation. Remarquons que dans le cas d'un couplage linéaire dans les variables de l'environnement <sup>2</sup>, le commutateur  $[\widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_{\pm}(t)], \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_{\pm}(s)]]$  est un nombre et les pointillés sont exactement nuls. On peut réécrire l'exponentielle ordonnée comme suit :

$$\widehat{U}_{\mathcal{I}}(t_i, t_f)[q_{\pm}] = e^{i\widehat{\Delta}\phi[q_{\pm}]} \quad (3.70)$$

$$\widehat{\Delta}\phi[q_{\pm}] = -\frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_{\pm}(t)] dt + \frac{i}{2\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \left[ \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_{\pm}(s)], \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_{\pm}(t)] \right]$$

On en déduit que la fonctionnelle d'influence s'écrit :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \left\langle e^{-i\widehat{\Delta}\phi[q_-]} e^{i\widehat{\Delta}\phi[q_+]} \right\rangle_{\mathcal{E}} \quad (3.71)$$

La valeur moyenne est une valeur moyenne quantique qui peut, par exemple, se calculer en utilisant le formalisme des intégrales de chemin via l'équation (E-10). On voit que la fonctionnelle s'interprète comme une moyenne sur tous les chemins fermés de l'environnement du déphasage, les deux chemins  $q_{\pm}(t)$  du système étant fixés. On peut aussi l'exprimer de façon opératorielle en utilisant le théorème de Campbell-Hausdorff et en négligeant les termes d'ordre au moins trois dans la perturbation :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] \simeq \left\langle e^{i(\widehat{\Delta}\phi[q_+] - \widehat{\Delta}\phi[q_-]) - \frac{1}{2}[\widehat{\Delta}\phi[q_+], \widehat{\Delta}\phi[q_-]]} \right\rangle_{\mathcal{E}} \quad (3.72)$$

En développant l'argument de l'exponentielle, on voit que  $\mathcal{F}[q_+, q_-]$  s'écrit comme la valeur moyenne quantique d'un déphasage qui se décompose en un déphasage classique  $\widehat{\Delta}\phi_{\text{cl}}[q_+, q_-]$  et un déphasage quantique  $\widehat{\Delta}\phi_{\text{qu}}[q_+, q_-]$  :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \left\langle e^{i\widehat{\Delta}\phi_{\text{cl}}[q_+, q_-] + i\widehat{\Delta}\phi_{\text{qu}}[q_+, q_-]} \right\rangle_{\mathcal{E}} \quad (3.73)$$

$$\widehat{\Delta}\phi_{\text{cl}}[q_+, q_-] = -\frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_+(t)] - \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_-(t)] \right) \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}\phi_{\text{qu}}[q_+, q_-] &= \frac{i}{2\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \left( \left[ \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_+(s)], \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_+(t)] \right] - \left[ \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_-(s)], \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_-(t)] \right] \right) \\ &\quad + \frac{i}{2\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \left[ \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_+(s)], \widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_-(t)] \right] \end{aligned} \quad (3.75)$$

<sup>2</sup>En toute rigueur seulement si l'environnement est un bain d'oscillateur harmoniques, ce qui est exact pour l'environnement gravitationnel.

$\widehat{\Delta\phi}_{\text{cl}}[q_+, q_-]$  a une expression classique qui en particulier ne dépend pas des commutateurs. Ceux-ci, qui sont responsables de l'émission spontanée par exemple, n'apparaissent que dans la contribution quantique  $\widehat{\Delta\phi}_{\text{qu}}[q_+, q_-]$ .

Dans une limite classique où l'environnement possède un grand nombre de quanta, on devine que ces commutateurs auront un rôle négligeable, et qu'on pourra donc se contenter de la contribution classique  $\widehat{\Delta\phi}_{\text{cl}}[q_+, q_-]$  pour calculer la décohérence. On va vérifier cela dans la partie suivante en étudiant le cas d'un couplage linéaire à un bain d'oscillateurs harmoniques dans un état classique.

## B.2 Formalisme de Feynman-Vernon et limites classiques

Le formalisme de Feynman-Vernon donne une solution simple au problème du couplage linéaire à un bain d'oscillateurs harmoniques. Cette situation est très courante et on verra que c'est notamment le cas de l'interaction avec les bains stochastiques d'OG.

En outre, dans le cas d'un environnement faiblement couplé mais très excité, l'expression de la fonctionnelle d'influence se simplifie beaucoup. Nous appellerons cette double limite la limite classique de la décohérence car dans cette situation les effets quantiques disparaissent. Dans cette limite, la dissipation reste négligeable de telle sorte que l'environnement se comporte uniquement comme une source de bruit stochastique classique. Par contre, la décohérence peut rester importante en raison de la haute température du bain.

### B.2.1 Couplage linéaire à un bain d'oscillateurs harmoniques

On considère un environnement constitué d'une collection d'oscillateurs harmoniques  $x_\alpha$  indépendants les uns des autres et chacun à l'équilibre thermodynamique à une température  $T_\alpha$ . On suppose cet environnement couplé linéairement avec le système physique  $\mathcal{S}$ . De façon générale, les actions associées s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{E}}[x(t)] &= \sum_{\alpha} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{2} m_{\alpha} (\dot{x}_{\alpha}^2(t) + \omega_{\alpha}^2 x_{\alpha}^2(t)) \\ S_{\mathcal{S}/\mathcal{E}}[q(t), x(t)] &= - \sum_{\alpha} \int_{t_i}^{t_f} dt \lambda_{\alpha} Q[q(t)] x_{\alpha}(t) \end{aligned} \quad (3.76)$$

$Q[q(t)]$  est la grandeur du système couplée linéairement à l'environnement et  $\lambda_{\alpha}$  est la constante de couplage de l'oscillateur  $\alpha$ . Ici, le formalisme opératoire (3.73) se révèle très commode puisqu'on peut se ramener à des intégrales gaussiennes. L'Hamiltonien d'interaction en représentation d'interaction s'écrit :

$$\widehat{H}_{\mathcal{I}}[q_{\pm}(t)] = - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Q[q_{\pm}(t)] \widehat{x}_{\alpha}(t) \quad (3.77)$$

D'après la propriété (E-12), la fonctionnelle d'influence d'une collection d'oscillateurs harmoniques ( $\alpha$ ) s'écrit comme le produit des fonctionnelles d'influences associées à chaque

oscillateur. Commençons donc par calculer la fonctionnelle d'influence associée à un unique oscillateur  $\alpha$ . L'opérateur de déphasage classique  $\widehat{\Delta\phi}_{\text{cl}}^\alpha[q_+, q_-]$  donné par (3.74) s'écrit :

$$\widehat{\Delta\phi}_{\text{cl}}^\alpha[q_+, q_-] = \frac{\lambda_\alpha}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (Q[q_+(t)] - Q[q_-(t)]) \widehat{x}_\alpha(t) \quad (3.78)$$

$\widehat{x}_\alpha(t)$  est en représentation d'interaction :

$$\widehat{x}_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_\alpha\omega_\alpha}} \left( \widehat{a}_\alpha(t) + \widehat{a}_\alpha^\dagger(t) \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \widehat{a}_\alpha(t) = e^{-i\omega_\alpha(t-t_i)} \widehat{a}_\alpha \\ \widehat{a}_\alpha^\dagger(t) = e^{i\omega_\alpha(t-t_i)} \widehat{a}_\alpha^\dagger \end{cases} \quad (3.79)$$

Le déphasage quantique  $\widehat{\Delta\phi}_{\text{qu}}^\alpha[q_+, q_-]$  est donné par l'expression (3.75) et se calcule à partir des relations de commutations :

$$\begin{aligned} [\widehat{a}_\alpha(t), \widehat{a}_{\alpha'}(s)] &= [\widehat{a}_\alpha^\dagger(t), \widehat{a}_{\alpha'}^\dagger(s)] = 0 \\ [\widehat{a}_\alpha(t), \widehat{a}_{\alpha'}^\dagger(s)] &= \delta_{\alpha\alpha'} e^{-i\omega_\alpha(t-s)} \\ [\widehat{x}_\alpha(t), \widehat{x}_{\alpha'}(s)] &= -\frac{i\hbar}{m_\alpha\omega_\alpha} \sin(\omega_\alpha(t-s)) \delta_{\alpha\alpha'} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Ainsi, l'opérateur de déphasage quantique  $\widehat{\Delta\phi}_{\text{qu}}^\alpha[q_+, q_-]$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta\phi}_{\text{qu}}^\alpha[q_+, q_-] &= -\frac{\lambda_\alpha^2}{2m_\alpha\hbar\omega_\alpha} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \sin(\omega_\alpha(t-s)) (Q[q_+(s)]Q[q_+(t)] - Q[q_-(s)]Q[q_-(t)]) \\ &\quad -\frac{\lambda_\alpha^2}{2m_\alpha\hbar\omega_\alpha} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} ds \sin(\omega_\alpha(t-s)) Q[q_+(s)]Q[q_-(t)] \end{aligned} \quad (3.81)$$

Du fait de la linéarité du couplage par rapport au degré de liberté  $\hat{x}$  de l'environnement, cet opérateur se réduit à un c-nombre. D'autre part, on remarque que :

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} ds \sin(\omega_\alpha(t-s)) Q[q_+(s)]Q[q_-(t)] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \sin(\omega_\alpha(t-s)) (Q[q_-(t)]Q[q_+(s)] - Q[q_+(t)]Q[q_-(s)]) \end{aligned} \quad (3.82)$$

On peut alors exprimer le déphasage quantique  $\widehat{\Delta\phi}_{\text{qu}}^\alpha[q_+, q_-]$  à l'aide d'une intégrale sur un domaine causal  $t_i \leq s \leq t \leq t_f$  :

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta\phi}_{\text{qu}}^\alpha[q_+, q_-] &= -\frac{\lambda_\alpha^2}{2m_\alpha\hbar\omega_\alpha} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \sin(\omega_\alpha(t-s)) (Q[q_+(t)] + Q[q_-(t)]) \\ &\quad \times (Q[q_+(s)] - Q[q_-(s)]) \end{aligned} \quad (3.83)$$

Grâce à la propriété (E-12), on déduit que la fonctionnelle d'influence (3.73) s'écrit :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \prod_\alpha \left\langle \exp \left( i \widehat{\Delta\phi}_{\text{cl}}^\alpha[q_+, q_-] \right) \right\rangle_{\mathcal{E}_\alpha} \exp \left( i \sum_\alpha \widehat{\Delta\phi}_{\text{qu}}^\alpha[q_+, q_-] \right) \quad (3.84)$$

Si on suppose que chacun de ces oscillateurs est dans un mélange statistique caractérisé par un équilibre thermodynamique à la température  $T_\alpha$ , on peut calculer analytiquement la valeur moyenne quantique qui apparaît dans l'expression ci-dessus par intégration gaussienne :

$$\begin{aligned} & \left\langle \exp \left( \frac{i}{\hbar} \lambda_\alpha \int_{t_i}^{t_f} dt (Q[q_+(t)] - Q[q_-(t)]) \hat{x}_\alpha(t) \right) \right\rangle_{\mathcal{E}_\alpha} \\ &= \exp \left( -\frac{\lambda_\alpha^2}{2\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} ds (Q[q_+(t)] - Q[q_-(t)]) K_\alpha(t, s) (Q[q_+(s)] - Q[q_-(s)]) \right) \\ & \quad \times \exp \left( \frac{i}{\hbar} \lambda_\alpha \int_{t_i}^{t_f} dt (Q[q_+(t)] - Q[q_-(t)]) \langle \hat{x}_\alpha(t) \rangle_{\mathcal{E}_\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$K_\alpha(t, s) = \langle \hat{x}_\alpha(t) \hat{x}_\alpha(s) \rangle_{\mathcal{E}_\alpha} - \langle \hat{x}_\alpha(t) \rangle_{\mathcal{E}_\alpha} \langle \hat{x}_\alpha(s) \rangle_{\mathcal{E}_\alpha} \quad (3.86)$$

Il suffit que l'opérateur densité de l'environnement soit gaussien pour que l'expression (3.85) soit exacte et cette hypothèse est vérifiée pour tous les environnements étudiés ici<sup>3</sup>. La partie quadratique représente le *bruit* tandis que la partie linéaire représente le *signal*. On définit la notation suivante pour la partie linéaire :

$$\Delta\phi_{\text{lin}}^\alpha \triangleq \frac{\lambda_\alpha}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (Q[q_+(t)] - Q[q_-(t)]) \langle \hat{x}_\alpha(t) \rangle_{\mathcal{E}_\alpha} \quad (3.87)$$

Pour des raisons qui apparaîtront plus claires dans la suite, on définit une « force effective » :

$$\hat{F}_\alpha \triangleq \lambda_\alpha \hat{x}_\alpha \quad (3.88)$$

et on introduit les fonctions de corrélation suivantes :

$$\begin{aligned} C(t-s) &= \sum_\alpha \left\langle \hat{F}_\alpha(t) \hat{F}_\alpha(s) \right\rangle_{\mathcal{E}_\alpha} = \hbar (\sigma(t-s) + \xi(t-s)) \\ \sigma(t-s) &= \frac{1}{2\hbar} \sum_\alpha \left( \left\langle \hat{F}_\alpha(t) \cdot \hat{F}_\alpha(s) \right\rangle_{\mathcal{E}_\alpha} - \left\langle \hat{F}_\alpha(t) \right\rangle_{\mathcal{E}_\alpha} \left\langle \hat{F}_\alpha(s) \right\rangle_{\mathcal{E}_\alpha} \right) \\ \xi(t-s) &= \frac{1}{2\hbar} \sum_\alpha \left\langle [\hat{F}_\alpha(t), \hat{F}_\alpha(s)] \right\rangle_{\mathcal{E}_\alpha} \\ \Delta\phi_{\text{lin}} &= \sum_\alpha \Delta\phi_{\text{lin}}^\alpha \end{aligned} \quad (3.89)$$

$\xi(t-s)$  est le commutateur de la force et sa transformée de Fourier s'interprète comme une densité spectrale du couplage (voir les discussions dans la prochaine section). En particulier, c'est elle qui détermine l'émission spontanée du système. De son côté,  $\sigma(t-s)$  représente la fonction de corrélation symétrique de la force  $\hat{F}$  (on note l'anticommutateur avec un point).

<sup>3</sup>Si ce n'était pas le cas, il aurait fallu développer la valeur moyenne sur les cumulants d'ordre supérieurs à deux.

C'est une quantité réelle qui s'approche le plus d'une fonction de corrélation classique (en fait un cumulatif d'ordre deux ici).

Avec ces notations, on réécrit (3.84) en se restreignant au domaine causal pour toutes les intégrations temporelles grâce aux propriétés de symétries de  $\sigma(t-s)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[q_+, q_-] &= \exp \left( -\frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds (Q[q_+(t)] - Q[q_-(t)]) \sigma(t-s) (Q[q_+(s)] - Q[q_-(s)]) \right) \\ &\times \exp \left( \frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds (Q[q_+(t)] + Q[q_-(t)]) \xi(t-s) (Q[q_+(s)] - Q[q_-(s)]) \right) \quad (3.91) \\ &\times \exp(i\Delta\phi_{\text{lin}}) \end{aligned}$$

La fonctionnelle d'influence (3.91) s'écrit comme la forme canonique des fonctionnelles d'influence gaussiennes présentée dans l'annexe E et contient deux noyaux plus un terme linéaire. Ce résultat général provient de l'identité entre les oscillateurs harmoniques en MQ et les noyaux gaussiens en théorie des champs.

1. Le noyau réel  $\sigma$  est appelé noyau de bruit ; il a la même forme qu'un noyau classique correspondant à un potentiel extérieur aléatoire, comme on peut le voir en comparant avec l'expression (E-23). Son interprétation est donc naturellement celle d'un bruit classique extérieur. Ce noyau se couple à des coordonnées « relatives »  $Q[q_+] - Q[q_-]$ .
2. Le noyau imaginaire  $\xi$  est appelé noyau de dissipation. Il est relié à la fonction de réponse de l'environnement car il est proportionnel à la valeur moyenne du commutateur des champs, comme c'est le cas pour la susceptibilité en théorie de la réponse linéaire [57, 135]. Ce noyau se couple à une coordonnée relative  $Q[q_+] - Q[q_-]$  et une coordonnée « centre de masse »  $Q[q_+] + Q[q_-]$ .
3. Le terme linéaire  $\Delta\phi_{\text{lin}}$  représente ce qu'on appelle le *signal*. En effet, au vu des résultats de l'annexe E, ce terme s'apparente à l'interaction avec un environnement extérieur déterministe dont le potentiel d'interaction est donné par :

$$V[q(t), t] = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Q[q(t)] \langle \hat{x}_{\alpha}(t) \rangle_{\mathcal{E}_{\alpha}} \quad (3.92)$$

Ce signal correspond alors à la différence de réponse du système lorsqu'il emprunte les chemins  $q_+(t)$  et  $q_-(t)$  <sup>4</sup>.

De façon générale, les deux noyaux sont reliés par le théorème fluctuation-dissipation qui relie les fluctuations de l'environnement à la dissipation que celui-ci engendre sur le système. Pour le voir, on commence par expliciter la fonction  $\xi$  qui s'obtient grâce à l'expression (3.83)

<sup>4</sup>Dans le cas des interféromètres, il correspond exactement au déplacement de l'interférogramme, ce qui justifie que nous l'identifions à un signal. Comme on le verra plus loin, ses variations temporelles peuvent aussi apparaître comme du bruit, quand le signal est moyenné pendant un temps long.

de  $\Delta\phi_{\text{qu}}^\alpha$  :

$$\xi(t-s) = -i \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}} \sin(\omega_{\alpha}(t-s)) \quad (3.93)$$

Pour calculer la valeur moyenne du produit symétrisé  $\sigma(t-s)$ , on utilise l'équation (3.79) et le fait que  $\langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \rangle_{\mathcal{E}_{\alpha}} = \langle \hat{a}_{\alpha} \hat{a}_{\alpha} \rangle_{\mathcal{E}_{\alpha}} = 0$  :

$$\langle \hat{x}_{\alpha}(t) \cdot \hat{x}_{\alpha}(s) \rangle_{\mathcal{E}_{\alpha}} = \frac{\hbar}{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}} \left( e^{i\omega_{\alpha}(t-s)} \langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha} \rangle_{\mathcal{E}_{\alpha}} + e^{-i\omega_{\alpha}(t-s)} \langle \hat{a}_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \rangle_{\mathcal{E}_{\alpha}} \right) + \text{c.c} \quad (3.94)$$

Cette fonction de corrélation dépend donc explicitement du nombre moyen de quanta que possède chaque oscillateur. On peut relier formellement ce nombre à une température effective  $T_{\alpha}$  via les relations :

$$n_{\alpha}(\beta_{\alpha}) = \langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha} \rangle_{\mathcal{E}_{\alpha}} \triangleq \frac{1}{e^{\beta_{\alpha}\hbar\omega_{\alpha}} - 1} \quad , \quad \beta_{\alpha} = \frac{1}{k_{\text{B}}T_{\alpha}} \quad (3.95)$$

En supposant que la valeur moyenne de la force est nulle,  $\langle \hat{F}_{\alpha}(t) \rangle_{\mathcal{E}_{\alpha}}$ , on déduit donc que :

$$\sigma(t-s) = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}} \coth\left(\frac{\beta_{\alpha}\hbar\omega_{\alpha}}{2}\right) \cos(\omega_{\alpha}(t-s)) \quad (3.96)$$

On décrit dans la section suivante les effets physiques de ces noyaux.

### B.2.2 Effets physiques de la fonctionnelle d'influence

On considère que l'environnement est constitué d'un continuum d'oscillateurs harmoniques indépendants entre eux. La somme sur les oscillateurs  $\alpha$  est remplacée par une intégrale sur les modes de fréquence  $\omega > 0$ . On la représente ici par une densité spectrale  $\mathcal{I}(\omega)$  définie de la même façon que dans beaucoup de papiers traitant de la décohérence [130, 131] :

$$\mathcal{I}(\omega) = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}} \delta(\omega - \omega_{\alpha}) \quad (3.97)$$

On a alors :

$$\sigma(\tau) = \int_0^{\infty} d\omega \mathcal{I}(\omega) \coth\left(\frac{\beta(\omega)\hbar\omega}{2}\right) \cos(\omega\tau) \quad (3.98)$$

$$\xi(\tau) = -i \int_0^{\infty} d\omega \mathcal{I}(\omega) \sin(\omega\tau) \quad (3.99)$$

Ces équations représentent le théorème fluctuations-dissipation entre les deux fonctions  $\xi$  et  $\sigma$ , comme on le voit en passant dans l'espace de Fourier [136] :

$$\begin{aligned} \xi[\omega] &= \pi \mathcal{I}(\omega) \\ \sigma[\omega] &= \coth\left(\frac{\beta(\omega)\hbar\omega}{2}\right) \xi[\omega] \end{aligned} \quad (3.100)$$

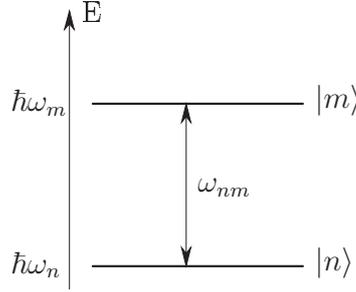


FIG. 3.2: Le système  $\mathcal{S}$  est supposé être un oscillateur harmonique dont les états propres en l'absence d'environnement sont noté  $|n\rangle$  et ont pour énergie  $E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right)$ . On s'intéresse au taux de transition que crée l'environnement entre deux états non perturbés  $|n\rangle$  et  $|m\rangle$ . Celui-ci peut se décomposer comme des processus induits (émission et absorption) et un processus spontané faisant passer le système de l'état du haut à l'état du bas à cause des fluctuations de point zéro de l'environnement.

Pour étudier les effets physiques d'une fonctionnelle d'influence de la forme (3.91) avec les noyaux ci-dessus, on se place dans la situation où le système est un oscillateur harmonique de fréquence propre  $\omega_0$  couplé linéairement à l'environnement, c'est-à-dire tel que  $Q[q(t)] = q(t)$ . En l'absence d'environnement, les états propres du système sont donc les états de Fock  $|n\rangle$ . En présence de l'environnement, ces états ne sont plus des états stationnaires et on calcule le taux de transition  $\Gamma_{n,m}$  entre deux états  $|n\rangle$  et  $|m\rangle$  dans l'approximation de Born (équation (E-31)) :

$$\Gamma_{n,m} = 2|q_{n,m}|^2 \operatorname{Re} \left( \int_0^\infty d\tau (\sigma(\tau) - \xi(\tau)) e^{i\omega_{nm}\tau} \right) \quad (3.101)$$

$$\omega_{nm} = \omega_m - \omega_n \quad , \quad q_{n,m} \triangleq \langle m | \hat{q} | n \rangle$$

En utilisant les décompositions (3.98) et (3.99) ainsi que l'identité :

$$\int_0^\infty d\tau e^{i(\omega_{nm} \pm \omega)t} = \frac{i}{\omega_{nm} \pm \omega + i0^+} = i\mathcal{P}\mathcal{P} \left( \frac{1}{\omega_{nm} \pm \omega} \right) + \pi\delta(\omega_{nm} \pm \omega) \quad (3.102)$$

on déduit :

$$\Gamma_{n,m} = \pi|q_{n,m}|^2 \mathcal{I}(|\omega_{nm}|) \left( \coth \left( \frac{\beta(|\omega_{nm}|\hbar|\omega_{nm}|)}{2} \right) - \operatorname{sign}(\omega_{nm}) \right) \quad (3.103)$$

En utilisant enfin les relations :

$$\operatorname{sign}(x) = \Theta(x) - \Theta(-x) = 1 - 2\Theta(-x) \quad (3.104)$$

$$\coth \left( \frac{\beta(\omega)\hbar\omega}{2} \right) = 2n(\omega) + 1 \quad (3.105)$$

on réexprime les taux de transition sous la forme habituelle en physique atomique :

$$\Gamma_{n,m} = 2\pi |q_{n,m}|^2 \mathcal{I}(|\omega_{nm}|) \left[ n(|\omega_{nm}|) + \frac{1}{2} \Theta(-\omega_{nm}) \right] \quad (3.106)$$

Le terme proportionnel à  $n(|\omega_{nm}|)$  représente l'absorption et l'émission induite qui sont proportionnels au nombre moyen de quanta dans le mode résonnant avec la transition. Le deuxième terme est responsable de l'émission spontanée : il persiste même lorsqu'il n'y a pas d'excitation dans l'environnement à la fréquence de transition et d'autre part il n'existe que pour  $\omega_{nm} < 0$  (on ne peut pas extraire d'énergie d'un environnement vide).

### B.2.3 Les limites classiques de la décohérence

On s'intéresse maintenant aux limites classiques de la décohérence obtenues dans le cadre d'un environnement peu couplé mais très excité. On ne suppose plus que le système est un oscillateur harmonique. On commence par étudier le cas d'un environnement thermique à haute température, puis la limite où cet environnement est très faiblement couplé au système.

Le modèle de Caldeira-Leggett [131] considère l'interaction d'un système avec un bain thermique. Le cas le plus simple correspond au cas d'un oscillateur harmonique de masse  $m$  linéairement couplé à un environnement pour lequel la densité spectrale  $\mathcal{I}(\omega)$  est proportionnelle à la fréquence  $\omega$  pour des fréquences petites devant une coupure  $\Lambda$  (densité « Ohmique ») :

$$\mathcal{I}(\omega) = \frac{m\gamma}{\pi} \omega f_{\Lambda}(\omega) \quad (3.107)$$

$f_{\Lambda}(\omega)$  est une fonction de coupure qui vaut 1 pour  $\omega < \Lambda$  et tend rapidement vers 0 pour des fréquences supérieures à  $\Lambda$  ;  $\gamma$  est un coefficient homogène à une fréquence qui jouera le rôle d'un paramètre de friction.

Les noyaux de bruit et de dissipation peuvent se calculer à partir de (3.99) pour des temps  $\tau \gg \Lambda^{-1}$ . Ils ont une expression particulièrement simple dans la limite  $k_{\text{B}}T \gg \hbar\Lambda$ . Pour simplifier, on les écrit de façon formelle pour un délai  $\tau$  pas trop petit  $\tau \gg \frac{\hbar}{k_{\text{B}}T}$  :

$$\sigma(\tau) = 2m\gamma \frac{k_{\text{B}}T}{\hbar} \delta(\tau) \quad , \quad \xi(\tau) = im\gamma \delta'(\tau) \quad (3.108)$$

La première équation s'interprète comme une relation d'Einstein, c'est-à-dire la limite classique des relations de fluctuation dissipation quantique. Elle relie le noyau de bruit  $\sigma$  à la dissipation caractérisée par le coefficient  $\gamma$ . La deuxième relation décrit justement cette force de dissipation proportionnelle à la vitesse et au coefficient  $\gamma$  [130]. Remarquons que le noyau de bruit s'identifie à la fonction de corrélation d'une force de Langevin. Ce modèle de mouvement Brownien, avec une fonction  $\sigma[\omega]$  plate en fréquence est en fait facile à généraliser en considérant les expressions plus générales discutées plus haut.

La limite classique de la décohérence est obtenue lorsqu'en plus de cette hypothèse de haute température, on rajoute la condition de couplage infiniment faible, le produit des deux

restant constant. Plus précisément, on voit sur le modèle de Caldeira Leggett (3.108) que lorsque  $T \rightarrow \infty$  et  $\gamma \rightarrow 0$  avec un produit qui reste fini, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma(\tau) &= c\delta(\tau) \quad , \quad \xi(\tau) = 0 \\ c &= \frac{2mk_B}{\hbar} \lim (\gamma T) \end{aligned} \quad (3.109)$$

Dans cette limite, le terme purement quantique  $\xi$  s'annule, et la fonctionnelle d'influence peut être simulée par un potentiel extérieur classique aléatoire. Cette double limite est donc celle d'un environnement qui injecte du bruit dans le système sans en perturber significativement le mouvement moyen. Ainsi, même si l'intrication entre le système et l'environnement est présente et introduit la décohérence, on peut faire tout le raisonnement en considérant des états libres du système affectés seulement par une source stochastique mais classique.

Cette interprétation peut être rapprochée d'un argument qui apparaît comme une remarque dans [137]. On considère un ion de charge  $e$  dans un piège harmonique  $\omega_0$  en interaction avec un rayonnement électromagnétique thermique à la température  $T$ . On se place dans le modèle de Caldeira-Leggett à l'approximation Markovienne. On note  $\hat{H}_I(t)$  l'Hamiltonien d'interaction entre l'ion et le champ électrique. L'équation pilote qui donne l'évolution de la matrice densité  $\hat{\rho}_S$  du système s'écrit, dans l'hypothèse Markovienne avec un couplage faible :

$$\frac{d\hat{\rho}_S}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \left\langle \left[ \hat{H}_I(t), \left[ \hat{H}_I(t-\tau), \hat{\rho}_S(t) \right] \right] \right\rangle_{\mathcal{E}} d\tau \quad (3.110)$$

La valeur moyenne est une valeur moyenne quantique  $\langle A \rangle_{\mathcal{E}} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}(A \hat{\rho}_{\mathcal{E}})$ . En supposant un couplage à l'environnement linéaire dans les coordonnées du système, l'équation pilote dans la base des états à nombre de quanta fixé  $(|n\rangle)_n$  est donnée par l'expression suivante [65] :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_S}{dt} &= -i\omega_0 [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_S] - \frac{\gamma e^2}{4} \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega_0}{2}\right) [\hat{a} + \hat{a}^\dagger, [\hat{a} + \hat{a}^\dagger, \hat{\rho}_S]] \\ &\quad - \frac{\gamma e^2}{4} [\hat{a} + \hat{a}^\dagger, \{\hat{a} + \hat{a}^\dagger, \hat{\rho}_S\}] \end{aligned} \quad (3.111)$$

Le premier terme est responsable de l'évolution libre tandis que l'effet de l'environnement est contenu dans les deux autres termes. Dans l'hypothèse du champ tournant et en utilisant l'équation (3.105), cette équation se réduit finalement à :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_S}{dt} &= -i\omega_0 [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_S(t)] - \frac{\gamma e^2}{2} (n(\omega_0) + 1) \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_S + 2\hat{a} \hat{\rho}_S \hat{a}^\dagger + \hat{\rho}_S \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \\ &\quad - \frac{\gamma e^2}{2} n(\omega_0) \left( \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S - 2\hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S \hat{a} + \hat{\rho}_S \hat{a} \hat{a}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (3.112)$$

Dans la double limite qui nous intéresse, à savoir  $T \rightarrow \infty$ ,  $\gamma \rightarrow 0$  et  $\gamma T$  fini, le coefficient devant les deux derniers termes est le même et tend vers la constante  $\frac{\gamma k_B T}{2\hbar\omega_0}$ .

Regardons maintenant ce qu'il en est si on suppose que le champ électrique est un champ classique aléatoire  $E(t)$  que l'on peut écrire comme suit :

$$E(t) = \mathcal{E}^{(+)}(t)e^{-i\omega_0 t} + \mathcal{E}^{(-)}(t)e^{i\omega_0 t} \quad (3.113)$$

Dans l'approximation du champ tournant, l'Hamiltonien du couplage dipolaire électrique s'écrit alors [138] :

$$\widehat{H}_{\mathcal{I}}(t) = -e\hat{q}(t)E(t) = \mu \left( \mathcal{E}^{(+)}(t)\hat{a}^\dagger + \mathcal{E}^{(-)}(t)\hat{a} \right) \quad , \quad \mu = -e\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \quad (3.114)$$

On a en outre les fonctions de corrélations classiques suivantes dans la limite Markovienne pour le champ aléatoire  $E(t)$  [139, Sec. 3.1.3] :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}^{(+)}(t)\mathcal{E}^{(+)}(t') \rangle &= \langle \mathcal{E}^{(-)}(t)\mathcal{E}^{(-)}(t') \rangle = 0 \\ \langle \mathcal{E}^{(+)}(t)\mathcal{E}^{(-)}(t') \rangle &\triangleq g(t-t') = g(t'-t) = 2D\delta(t-t') \end{aligned} \quad (3.115)$$

Dans l'équation pilote (3.110), si on remplace la valeur moyenne quantique par une valeur moyenne d'ensemble sur les variables stochastiques de l'environnement électromagnétique, on obtient :

$$\frac{d\hat{\rho}_S}{dt} = -i\omega_0[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}_S(t)] - 2D\frac{\mu^2}{\hbar^2} \left( \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}_S + 2\hat{a}\hat{\rho}_S\hat{a}^\dagger + \hat{\rho}_S\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_S - 2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_S\hat{a} + \hat{\rho}_S\hat{a}\hat{a}^\dagger \right) \quad (3.116)$$

Cette équation pilote a la même forme que celle obtenue dans la double limite haute température et couplage infiniment faible, à condition d'avoir la relation d'Einstein suivante :

$$\frac{2D\mu^2}{\hbar^2} = \frac{\gamma e^2 k_B T}{2 \hbar \omega_0} \quad \Rightarrow \quad D = 2m\gamma k_B T \quad (3.117)$$

Autrement dit, l'interaction avec un environnement très faiblement couplé mais à très haute température peut être simulé par l'interaction avec un environnement aléatoire dont la fonction de corrélation est donnée par la valeur moyenne du produit symétrisé de l'opérateur de l'environnement qui est couplé au système. Ce résultat est obtenu ici dans la limite Markovienne et pour un oscillateur harmonique couplé linéairement.

Enfin, si le système peut être considéré comme classique dans le sens où son action  $S_S[q]$  est grande devant  $\hbar$ , on peut ne considérer, dans l'équation (E-9), que les chemins classiques du système. Dans ce cas la fonctionnelle d'influence s'interprète comme le contraste entre les chemins classiques  $q_+(t)$  et  $q_-(t)$ .

On verra que c'est dans cette limite que s'inscrit le couplage à notre environnement gravitationnel. Notons qu'il ne s'agit pas dans ce cas d'hypothèses adhoc visant à extraire de l'information de résultats plus généraux. Les propriétés fondamentales des OG conduisent directement à cette situation particulière.

### B.3 Fonctionnelle d'influence d'un système couplé au fond d'OG

On montre dans cette partie que le fond d'ondes gravitationnelles peut, de la même façon qu'un fond électromagnétique, être décrit comme une collection d'oscillateurs harmoniques. Ce fond est couplé linéairement au tenseur énergie impulsion d'un système via le Lagrangien d'interaction. On peut donc, à l'aide de la partie précédente, déduire la fonctionnelle d'influence de Feynman Vernon et calculer les noyaux de bruit et dissipation (voir aussi [67, 68]).

#### B.3.1 Le fond d'OG comme un bain harmonique

À l'aide de l'équation (3.2), on peut réécrire l'action associée aux équations d'Einstein à l'ordre le plus bas dans la perturbation métrique en fonction de la longueur de Planck  $\ell_P$  :

$$S_{\mathcal{E}} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g(x)} R(x) = -\frac{\hbar}{16\pi\ell_P^2} \int d^4x \sqrt{g(x)} R(x) \quad (3.118)$$

où  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  est le scalaire de Ricci (se reporter aux annexes). On cherche à développer ce scalaire dans la perturbation métrique  $h_{\mu\nu}$ . À des termes de bords près, qui d'ailleurs s'annulent en jauge TT, on peut réécrire la densité Lagrangienne en fonction de la perturbation métrique [43] :

$$\sqrt{g}R = \sqrt{g}g^{\mu\nu} (\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}) \quad (3.119)$$

On se place ensuite en jauge TT où (voir annexe C) :

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= 0 && \text{condition de jauge harmonique} \\ \partial^{\mu}h_{\mu\nu} &= 0 && \text{condition de transversalité} \end{aligned} \quad (3.120)$$

On déduit que la densité Lagrangienne (3.119) se développe à l'ordre le plus bas sous la forme, toujours à des termes de bords près (voir aussi [66]) :

$$\sqrt{g}R = -\frac{1}{4} \partial_{\rho}h_{\mu\nu} \partial^{\rho}h^{\mu\nu} \quad (3.121)$$

L'action gravitationnelle s'écrit donc à l'ordre le plus bas :

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{E}} &= \frac{\hbar c}{64\pi\ell_P^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3\mathbf{x} h_{\mu\nu,\rho}(t, \mathbf{x}) h^{\mu\nu,\rho}(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{\hbar}{64\pi c\ell_P^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3\mathbf{x} \left( \dot{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \dot{h}^{ij}(t, \mathbf{x}) + c^2 \partial_k h_{ij}(t, \mathbf{x}) \partial^k h^{ij}(t, \mathbf{x}) \right) \end{aligned} \quad (3.122)$$

Cette action est quadratique dans les champs  $h_{ij}$ , comme on peut s'y attendre. D'autre part, on rappelle qu'on peut introduire une densité d'énergie  $T_{00}^{\text{gw}}$  d'une OG [22, chap. 35.7] :

$$T_{00}^{\text{gw}} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \dot{h}^{ij}(t, \mathbf{x}) \rangle = \frac{\hbar}{32\pi c\ell_P^2} \langle \dot{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \dot{h}^{ij}(t, \mathbf{x}) \rangle \quad (3.123)$$

La valeur moyenne est ici une valeur moyenne spatiale sur quelques longueurs d'onde. Le premier terme de l'action (3.122) s'interprète comme la moitié de cette énergie intégrée sur tout l'espace.

On peut ensuite décomposer le champ métrique dans les modes de propagation  $\mathbf{k}$  de polarisations linéaires (comparer aussi avec l'annexe) :

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\gamma=+, \times} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} h^\gamma[t, \mathbf{k}] e_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.124)$$

Les tenseurs de polarisations  $e_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]$  sont réels et données par les expressions (C-18). D'autre part, on a les conditions de réalité suivantes :

$$\begin{cases} (h^\gamma[t, \mathbf{k}])^* &= \eta_\gamma h^\gamma[t, -\mathbf{k}] \\ e_{ij}^\gamma[-\hat{\mathbf{k}}] &= \eta_\gamma e_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \eta_+ = 1 \\ \eta_\times = -1 \end{cases} \quad (3.125)$$

En utilisant les relations géométriques suivantes sur les polarisations (voir l'annexe C) :

$$\mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \mathbf{e}_{ij}^{\gamma'}[-\hat{\mathbf{k}}] = 2\eta_\gamma \delta^{\gamma\gamma'} \quad (3.126)$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} \dot{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \dot{h}^{ij}(t, \mathbf{x}) &= 2 \sum_{\gamma=+, \times} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left( \dot{h}^\gamma[t, \mathbf{k}] \right)^* \dot{h}^\gamma[t, \mathbf{k}] \\ \int d^3\mathbf{x} c^2 \partial_k h_{ij}(t, \mathbf{x}) \partial^k h^{ij}(t, \mathbf{x}) &= 2 \sum_{\gamma=+, \times} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} c^2 \mathbf{k}^2 (h^\gamma[t, \mathbf{k}])^* h^\gamma[t, \mathbf{k}] \end{aligned} \quad (3.127)$$

À l'aide de ces relations, on peut donc écrire le bain d'ondes gravitationnelles comme une collection d'oscillateurs harmoniques en décomposant  $h_\gamma[t, \mathbf{k}]$  dans sa partie réelle et imaginaire afin d'avoir des variables réelles <sup>5</sup> :

$$S_{\mathcal{E}} = \sum_{\alpha} \int_{t_i}^{t_f} \frac{m_{\alpha}}{2} \left[ \left( \dot{h}_{\alpha}^R(t) \right)^2 - \omega_{\alpha}^2 \left( h_{\alpha}^R(t) \right)^2 + \left( \dot{h}_{\alpha}^I(t) \right)^2 - \omega_{\alpha}^2 \left( h_{\alpha}^I(t) \right)^2 \right] dt \quad (3.128)$$

avec les notations suivantes :

$$\sum_{\alpha} \equiv 2 \sum_{\gamma=+, \times} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{2}{\pi c^3} \sum_{\gamma=+, \times} \int_0^{\infty} \frac{d\omega_k}{2\pi} \omega_k^2 \int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \quad (3.129)$$

$$\omega_{\alpha} \equiv \omega_k = c|\mathbf{k}| \quad , \quad h^\gamma[t, \mathbf{k}] \equiv h_{\alpha}^R(t) + i h_{\alpha}^I(t) \quad (3.130)$$

$$m_{\alpha} \equiv \frac{\hbar}{32\pi c \ell_{\text{P}}^2} = \frac{c^2}{32\pi G} \quad (3.131)$$

<sup>5</sup>On écrit l'action en analogie avec les oscillateurs harmoniques, mais  $m_{\alpha}$  ne représente pas une vraie masse.

La somme sur les oscillateurs est une somme continue sur les directions de propagation et sur la fréquence positive des OG. On peut appliquer les résultats de la partie précédente à condition de considérer que ces oscillateurs harmoniques sont indépendants les uns des autres, c'est-à-dire que différentes fréquences et directions n'interagissent pas entre elles. Cette décomposition est la même que celle apparaissant lorsqu'on développe le Lagrangien  $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  de l'électromagnétisme. Elle est valable ici parce que les gravitons n'interagissent pas entre eux à l'ordre le plus bas, c'est-à-dire dans le cadre de la version linéarisée de la Relativité Générale.

Le bain est caractérisé pour chaque fréquence par le nombre de gravitons par mode, ou de façon équivalente par une température effective de bruit donné par une relation de Planck (D-20). Il n'est pas nécessairement à l'équilibre thermique et la température  $T_\alpha$  est alors donnée par le spectre  $S_h[\omega]$  des fluctuations classiques du champ de gravité :

$$\beta_\alpha = \frac{16G}{5c^5 S_h[\omega_k]} \equiv \frac{1}{k_B T_\alpha} \quad (3.132)$$

On voit déjà qualitativement que le bain d'OG s'inscrit bien dans la double limite d'un couplage faible/température élevée. L'effet de dissipation  $\gamma$  sur le système sera négligeable (car celui-ci est proportionnel à  $G$ ), au moins pour des systèmes de faible énergie. Dans le même temps, la température (3.132) est très grande et le produit des deux est constant et déterminé par le spectre classique de l'environnement :

$$m_\alpha \beta_\alpha = \frac{1}{10\pi c^2 \omega_k S_h[\omega_k]} \quad (3.133)$$

De façon formelle, on peut dire que  $G$  est petit par rapport aux autres dimensions pertinentes :  $m_\alpha$  apparaît alors comme tendant vers l'infini,  $\beta_\alpha$  comme tendant vers 0, le produit des deux restant fini puisqu'il ne dépend pas de  $G$ .

### B.3.2 L'état des fonds reliques et astrophysiques

On caractérise dans cette partie l'état quantique du fond d'OG, qu'il s'agisse du fond de confusion des binaires comme du fond relique.

En ce qui concerne le bruit de confusion des binaires, chaque source (une binaire) peut être considérée comme une source classique pour le champ gravitationnel. On pourrait en principe (mais pas en pratique pour toutes les binaires) en connaître les propriétés de façon précise. Le rayonnement gravitationnel qu'elle produit est donc un état cohérent. C'est la somme de toutes les contributions des binaires avec des phases distribuées (aléatoirement pour nous en pratique) qui produit un fond d'OG dont on peut caractériser les variations temporelles par le spectre  $S_h[\omega]$ . La partie quantique du terme quadratique dans la fonctionnelle d'influence (3.91) représente alors les fluctuations de cet état cohérent autour des valeurs moyennes. Dans la suite, on néglige cette partie quantique qui a une influence extrêmement petite. Seule la partie linéaire joue donc un rôle significatif qui sera discuté plus loin (voir section C.1.2).

Au contraire, dans les modèles les plus simples du fond relique d'OG, celui-ci est un vide très fortement comprimé comprenant un très grand nombre moyen de gravitons [140]. Pour un tel état, la matrice densité est gaussienne et donnera bien naissance aux noyaux de bruit et de dissipation. Par contre, le terme linéaire disparaît car la valeur moyenne du vide comprimé est nulle.

Pour résumer, on ne retiendra que le terme linéaire dans la fonctionnelle d'influence lorsque l'on considère le fond de confusion des binaires. Au contraire, on ne retient que les noyaux de bruit et de dissipation lorsque l'on considère le fond relique. Dans la double limite limite de l'environnement faiblement couplé et très classique, on peut néanmoins utiliser des formules très semblables dépendant seulement d'un noyau classique de bruit, comme on va le voir dans la suite (voir section C.1.2).

### B.3.3 Détermination de la fonctionnelle d'influence

On précise maintenant ces idées en explicitant la fonctionnelle d'influence associée au couplage au bain d'OG. Afin de la déterminer, il faut spécifier le couplage entre le tenseur énergie impulsion du système et les variables  $h_\alpha$  des oscillateurs harmoniques de l'environnement. Pour cela, on réécrit l'action d'interaction en jauge TT d'après (3.7) :

$$\begin{aligned} S_{S/\mathcal{E}} &= \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3\mathbf{x} h_{ij}(t, \mathbf{x}) T^{ij}(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\gamma=+, \times} \int_{t_i}^{t_f} dt \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} h^\gamma[t, \mathbf{k}] e_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] T^{ij}[t, \mathbf{k}] \\ T^{ij}[t, \mathbf{k}] &= \int d^3\mathbf{x} T^{ij}(t, \mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3.134)$$

On peut simplifier l'expression du couplage dans l'approximation des grandes longueurs d'onde. Cependant, cette approximation n'est pas toujours justifiée, comme on l'a vu pour la décohérence dans les interféromètres. Néanmoins, l'expression (E-10) de la fonctionnelle d'influence ne fait intervenir que les quantités  $S_{S/\mathcal{E}}[x_+, q_+] - S_{S/\mathcal{E}}[x_-, q_-]$ . Dans la limite où les chemins  $q_\pm(t)$  du système ne s'écartent que d'une distance petite devant la longueur d'onde, on peut appliquer l'approximation des grandes longueurs d'onde non pas à la quantité  $T^{ij}[t, \mathbf{k}]$  mais aux différences  $T_{q_+}^{ij}[t, \mathbf{k}] - T_{q_-}^{ij}[t, \mathbf{k}]$  qui apparaîtront dans le calcul de la fonctionnelle d'influence.

Cela implique que l'on restreint l'étude des cohérences à des séparations petites devant la longueur d'onde des OG constituant le bain gravitationnel. Puisque ce bain n'existe plus pour des fréquences de l'ordre du GHz (qui est la coupure provenant du bain d'ondes gravitationnelles reliques), cela donne comme limite conservative une distance de l'ordre du mètre. Avec cette hypothèse en tête, on va appliquer l'approximation des grandes longueurs d'onde directement sur  $T^{ij}[t, \mathbf{k}]$  en sachant que son résultat est valable même pour des longueurs d'onde de l'ordre de la taille du système, du moment qu'on ne considère que des chemins  $q_\pm$

peu séparés. On va donc remplacer  $T^{ij}[t, \mathbf{k}]$  par  $T^{ij}[t, \mathbf{0}]$ , que l'on note  $T^{ij}[q(t)]$  pour rappeler qu'il dépend du chemin  $q(t)$  :

$$T^{ij}[t, \mathbf{k}] \simeq \int d^3\mathbf{x} T^{ij}[t, \mathbf{x}] \triangleq T^{ij}[q(t)] \quad (3.135)$$

D'autre part on peut négliger la partie imaginaire de  $h^\gamma[t, \mathbf{k}]$ , puisque l'expression (3.134) doit être réelle :

$$(h^\gamma[t, \mathbf{k}])^* \simeq h^\gamma[t, \mathbf{k}] \quad \Rightarrow \quad h_\alpha^I(t) \simeq 0 \quad (3.136)$$

On peut donc écrire l'action d'interaction par analogie avec (3.76) :

$$S_{S/\mathcal{E}} = - \sum_\alpha \int_{t_i}^{t_f} dt \left( -\frac{1}{4} e_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \right) T^{ij}[q(t)] h_\alpha^R(t) \quad (3.137)$$

Dans les notations de la partie précédente, la force effective est un tenseur qui s'écrit :

$$\hat{F}_{\alpha, ij}(t) = -\frac{1}{4} \mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \hat{h}_\alpha^R(t) \quad (3.138)$$

En utilisant l'équation (3.91), on déduit la fonctionnelle d'influence :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[q_+, q_-] &= \exp(i\Delta\phi_{\text{lin}}[q_+, q_-]) \quad (3.139) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds (T^{ij}[q_+(t)] - T^{ij}[q_-(t)]) \sigma_{F_{ijkl}}(t-s) (T^{kl}[q_+(s)] - T^{kl}[q_-(s)])\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds (T^{ij}[q_+(t)] + T^{ij}[q_-(t)]) \xi_{F_{ijkl}}(t-s) (T^{kl}[q_+(s)] - T^{kl}[q_-(s)])\right) \end{aligned}$$

Les équations (3.93) et (3.96) ainsi que l'expression explicite (3.129) de la somme sur les oscillateurs permettent de calculer les noyaux. Le terme linéaire se calcule à l'aide de (3.134) et représente l'effet différentiel des OG sur les chemins  $q_\pm(t)$  :

$$\Delta\phi_{\text{lin}}[q_+, q_-] = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \langle \hat{h}_{ij}(t) \rangle \Delta T^{ij}(t) dt \quad (3.140)$$

On peut exprimer les noyaux en fonction du temps de Planck  $t_P$  et d'une densité spectrale  $\mathcal{I}(\omega)$  en analogie avec (3.98), (3.99). À l'aide de l'équation (3.132), on obtient finalement les expressions suivantes :

$$\sigma_{ijkl}(\tau) = \delta_{ijkl} \int_0^\infty d\omega \mathcal{I}(\omega) \coth\left(\frac{8t_P^2\omega}{5S_h[\omega]}\right) \cos(\omega\tau) \quad (3.141)$$

$$\xi_{ijkl}(\tau) = i\delta_{ijkl} \int_0^\infty d\omega \mathcal{I}(\omega) \sin(\omega\tau) \quad (3.142)$$

$$\mathcal{I}(\omega) = \frac{t_P^2}{\pi\hbar} \omega = \frac{G}{\pi c^5} \omega \quad (3.143)$$

La quantité  $\delta_{ijkl}$  est donnée par l'expression suivante (voir l'annexe C pour le calcul de ces intégrales angulaires :

$$\delta_{ijkl} = \int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \sum_{\gamma=+,\times} \mathbf{e}_{ij}^{\gamma}[\hat{\mathbf{k}}] \mathbf{e}_{kl}^{\gamma}[\hat{\mathbf{k}}] = \frac{2}{5} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{4}{15} \delta_{ij}\delta_{kl} \quad (3.144)$$

La densité spectrale est proportionnelle à  $\omega$  dans le système de coordonnées TT et l'approximation quadrupolaire. Le choix d'un Lagrangien en  $R_{0i0j}Q^{ij}$  donnerait une densité spectrale proportionnelle à  $\omega^5$ . Ce cas de figure est le même que celui concernant l'interaction avec le champ électromagnétique pour lequel le choix du couplage  $\vec{p} \cdot \vec{A}$  ou  $\vec{D} \cdot \vec{E}$  produit, dans l'approximation dipolaire, une densité spectrale en  $\omega$  ou  $\omega^3$  respectivement [122].

Pour des raisons de commodité, on note :

$$\Delta T^{ij}(t) \equiv T^{ij}[q_+(t)] - T^{ij}[q_-(t)] \quad (3.145)$$

la variable relative du système et :

$$\Sigma T^{ij}(t) \equiv T^{ij}[q_+(t)] + T^{ij}[q_-(t)] \quad (3.146)$$

la variable centre de masse. Puis on définit les fonctions de décohérence  $D[q_+, q_-]$  et de dissipation  $\Gamma[q_+, q_-]$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[q_+, q_-] &= e^{-D[q_+, q_-]} \times e^{i\Gamma[q_+, q_-]} \times e^{i\Delta\phi_{\text{in}}[q_+, q_-]} \\ D[q_+, q_-] &= \frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \Delta T^{ij}(t) \sigma_{ijkl}(t-s) \Delta T^{kl}(s) \\ \Gamma[q_+, q_-] &= \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \Sigma T^{ij}(t) \xi_{ijkl}(t-s) \Delta T^{kl}(s) \end{aligned} \quad (3.147)$$

Le module de la fonctionnelle d'influence, qui détermine la cohérence entre les chemins  $q_{\pm}$  du système, est déterminée par la fonction  $D[q_+, q_-]$ . En utilisant l'équation (3.105), on décompose la fonction de décohérence  $D[q_+, q_-]$  en une contribution du vide  $D_{\text{vac}}[q_+, q_-]$  et une contribution classique  $D_{\text{cl}}[q_+, q_-]$  qui s'écrivent :

$$D[q_+, q_-] = D_{\text{vac}}[q_+, q_-] + D_{\text{cl}}[q_+, q_-] \quad (3.148)$$

$$D_{\text{vac}}[q_+, q_-] = \frac{1}{\hbar} \int_0^{\infty} d\omega \mathcal{I}(\omega) \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \cos(\omega(t-s)) \Delta T^{ij}(t) \delta_{ijkl} \Delta T^{kl}(s) \quad (3.149)$$

$$\begin{aligned} D_{\text{cl}}[q_+, q_-] &= \frac{2}{\hbar} \int_0^{\infty} d\omega \mathcal{I}(\omega) n(\omega) \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \cos(\omega(t-s)) \Delta T^{ij}(t) \delta_{ijkl} \Delta T^{kl}(s) \\ &\quad - \frac{1}{4\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \Delta T^{ij}(t) \langle \hat{h}_{ij}(t) \rangle \langle \hat{h}_{kl}(s) \rangle \Delta T^{kl}(s) \end{aligned} \quad (3.150)$$

Le nombre de graviton par mode  $n(\omega)$  s'écrit, dans la limite où celui-ci est grand devant un :

$$n(\omega) = \frac{k_{\text{B}}T(\omega)}{\hbar\omega} = \frac{5}{16} \frac{S_h[\omega]}{\omega t_{\text{p}}^2} \quad (3.151)$$

En utilisant l'approximation des grandes longueurs d'ondes sur  $\Delta T^{ij}$  (équation (3.22)), on peut réécrire finalement la contribution classique  $D_{\text{cl}}[q_+, q_-]$  en faisant intervenir le quadropole  $Q^{ij}(t)$  du système :

$$D_{\text{cl}}[q_+, q_-] = \frac{1}{2\hbar c^4} \int_0^\infty d\omega \mathcal{I}(\omega) n(\omega) \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \cos(\omega(t-s)) \Delta \ddot{Q}^{ij}(t) \delta_{ijkl} \Delta \ddot{Q}^{kl}(s) - \frac{1}{4\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} ds \Delta T^{ij}(t) \langle \hat{h}_{ij}(t) \rangle \langle \hat{h}_{kl}(s) \rangle \Delta T^{kl}(s) \quad (3.152)$$

### B.3.4 Application aux fluctuations classiques du champ de gravité

On montre maintenant que les noyaux (3.142) et (3.143) permettent d'extraire une limite classique analogue à celle présentée dans la partie précédente, dans laquelle le noyau de dissipation s'annule alors que le noyau de bruit reste fini et donné par la fonction de corrélation classique du bruit gravitationnel<sup>6</sup>. La condition correspondante :

$$\frac{S_h[\omega]}{\omega} \gg t_{\text{P}}^2 \quad (3.153)$$

est à comparer avec les conditions du modèle de Caldeira-Leggett. Elle s'écrit ici fréquence par fréquence puisque le bain d'OG n'est pas à l'équilibre thermodynamique. Cette condition est naturellement satisfaite pour tous les spectres discutés dans la section 2.A.3, à toute fréquence susceptible d'intervenir dans une expérience. Dans cette limite, la fonction de décohérence est dominée par la contribution classique qui se calcule à partir de l'expression :

$$\begin{aligned} \hbar \sigma_{ijkl}^{\text{cl}}(\tau) &= \frac{5}{8\pi} \delta_{ijkl} \int_0^\infty d\omega S_h[\omega] \cos(\omega\tau) - \frac{1}{4} \langle h_{ij}(\tau) \rangle \langle h_{kl}(0) \rangle \\ &= \frac{5}{8} \delta_{ijkl} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] e^{-i\omega\tau} - \frac{1}{4} \langle h_{ij}(\tau) \rangle \langle h_{kl}(0) \rangle \\ &\equiv \frac{1}{4} (\langle h_{ij}(\tau) h_{kl}(0) \rangle - \langle h_{ij}(\tau) \rangle \langle h_{kl}(0) \rangle) \end{aligned} \quad (3.154)$$

On a utilisé (C-50) et  $\langle . \rangle$  désigne la valeur moyenne statistique. Dans notre limite classique, la fonctionnelle d'influence est alors la même que celle obtenue si le système interagit avec un environnement classique *aléatoire* dont les propriétés statistiques sont données par la fonction de corrélation (3.154). En effet, en négligeant les effets d'émission spontanée, la fonctionnelle

<sup>6</sup>Le fait de pouvoir négliger le terme de dissipation nécessite implicitement qu'on traite des systèmes de faible énergie cinétique, c'est-à-dire des systèmes pour lesquels  $T^{ij}$  n'est pas trop grand. Si ce n'était pas le cas, on ne pourrait pas négliger  $\Gamma[q_+, q_-]$  devant un, même si le noyau  $\xi_{ijkl}$  est petit.

d'influence s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[q_+, q_-] &= e^{-D_{\text{cl}}[q_+, q_-] + i\Delta\phi_{\text{lin}}[q_+, q_-]} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{8\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} ds \Delta T^{ij}(t) \sigma_{ijkl}^{\text{cl}}(t-s) \Delta T^{kl}(s) + i\Delta\phi_{\text{lin}}[q_+, q_-]\right) \\
&= \left\langle e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{2} h_{ij}(t) \Delta T^{ij}(t)} \right\rangle e^{i\Delta\phi_{\text{lin}}[q_+, q_-]} = \left\langle e^{\frac{i}{\hbar} \Delta S_{\text{int}}} \right\rangle e^{i\Delta\phi_{\text{lin}}[q_+, q_-]} \quad (3.155)
\end{aligned}$$

$\Delta S_{\text{int}}$  est la variation d'action d'interaction entre les chemins  $q_+$  et  $q_-$  et  $\langle . \rangle$  représente la valeur moyenne statistique. Comme on va le voir dans la prochaine section, ces résultats justifient l'approche classique effectuée dans la première partie. Pour le fond relique d'OG, la décohérence provient de la valeur moyenne d'ensemble sur les fluctuations quantiques de l'état comprimé correspondant (voir B.3.2). Cet effet de décohérence étant dû à la partie classique du noyau de bruit  $\sigma$ , il s'interprète comme un effet dû à l'absorption et à l'émission induite d'OG par le système [141]. Il est dans ce sens analogue à l'effet de décohérence induit par le bremsstrahlung, c'est-à-dire le rayonnement de freinage [122].

Pour le bruit de confusion des binaires, la décohérence provient du fait que le signal est moyenné sur un temps long (voir section 2.B.1.3). De ce fait, la partie linéaire, bien que déterministe, est la cause d'un bruit provenant de l'effet de moyennage temporel.

## C Retour sur la décohérence dans les interféromètres

### C.1 Lien avec l'approche de Feynman-Vernon

Dans cette partie, on revient sur l'expression du contraste calculé dans le second chapitre. On retrouve cette expression à partir de la fonctionnelle d'influence entre les deux chemins qui interfèrent dans la double limite classique présentée dans la partie précédente.

#### C.1.1 Détermination du contraste

On commence par considérer une expérience d'interférométrie optique à deux ondes comme celle des fentes d'Young représentée schématiquement sur la figure (3.1). On présente une approche quantique de la détection des interférences en sortie de l'interféromètre et on renvoie aux livres de références [139, 142, 133] pour une étude détaillée de cette approche.

On suppose que le champ électromagnétique est initialement dans l'état  $|\psi_i\rangle$  à l'instant  $t = t_i$ . La fonction d'onde  $|\psi_f\rangle$  en sortie d'interféromètre à l'instant  $t_f$  s'écrit :

$$|\psi_f, x_f\rangle = \widehat{U}_{S+\mathcal{E}}(t_i, t_f) |\psi_i, x_i\rangle \quad (3.156)$$

où  $|x_i\rangle$  et  $|x_f\rangle$  représentent les états de l'environnement en  $t = t_i$  et  $t = t_f$ . Les éléments de matrice de l'opérateur  $\widehat{U}_{S+\mathcal{E}}(t_i, t_f)$  dans la base des positions  $|q\rangle$  du système s'obtient comme une intégrale de chemin de la forme (E-5) où on somme sur les chemins du système et de l'environnement.

On exprime maintenant l'intensité mesurée à l'aide des méthodes usuelles [143, 144] (voir aussi [139, chap. 12.2]). Si le champ est dans l'état  $|\psi_D\rangle$  après la détection par le détecteur, l'amplitude de probabilité  $\mathcal{A}(\mathbf{q}_D, t_f)[x_f]$  puis la probabilité  $\mathcal{P}(\mathbf{q}_D, t_f)[x_f]$  pour qu'un photon soit détecté à la position  $\mathbf{q}_D$  à l'instant  $t_f$  avec un environnement dans l'état  $|x_f\rangle$  s'écrit alors :

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_D, t_f)[x_f] = \langle \psi_D, x_f | \widehat{E}^{(+)}(\mathbf{q}_D, t_f) | \psi_f, x_f \rangle \quad (3.157)$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}_D, t_f)[x_f] = \left| \langle \psi_D, x_f | \widehat{E}^{(+)}(\mathbf{q}_D, t_f) \widehat{U}_{S+\mathcal{E}}(t_i, t_f) | \psi_i, x_i \rangle \right|^2 \quad (3.158)$$

$\widehat{E}^+$  est la composante de fréquence positive du champ électrique dont les vecteurs propres sont donnés par les états cohérents  $|\alpha\rangle$  :

$$\widehat{E}^{(+)}(\mathbf{q}_D, t_f)|\alpha\rangle = E^{(+)}(\mathbf{q}_D, t_f)|\alpha\rangle \quad (3.159)$$

Pour obtenir la probabilité de photo-détection, on somme la contribution (3.158) sur tous les états finaux  $|\psi_D\rangle$  du champ et sur tous les états finaux  $|x_f\rangle$  de l'environnement. Si l'état initial est un mélange statistique caractérisée par la matrice densité  $\widehat{\rho}_{S+\mathcal{E}}(t_i)$ , alors on obtient

finalemt l'intensité mesurée :

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{q}_D, t_f) \rangle &= \sum_{\psi_D} \int dx_f \langle \psi_D, x_f | \widehat{E}^{(+)}(\mathbf{q}_D, t) \widehat{U}_{S+\varepsilon}(t_i, t_f) \\ &\quad \times \widehat{\rho}_{S+\varepsilon}(t_i) \widehat{U}_{S+\varepsilon}^\dagger(t_i, t_f) \widehat{E}^{(-)}(\mathbf{q}_D, t) | \psi_D, x_f \rangle \end{aligned} \quad (3.160)$$

On définit la composante de fréquence négative du champ  $\widehat{E}^{(-)} = \widehat{E}^{(+)\dagger}$ . Si l'état initial est un état décorréolé, alors l'intensité se généralise à l'expression suivante à l'aide de quatre relations de fermeture :

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{q}_D, t_f) \rangle &= \int \mathcal{D}[q_+(t), q_-(t)] \langle q'_f | \widehat{E}^{(-)}(\mathbf{q}_D, t) \widehat{E}^{(+)}(\mathbf{q}_D, t) | q_f \rangle \langle q_i | \widehat{\rho}_S(t_i) | q'_i \rangle \\ &\quad \times e^{\frac{i}{\hbar}(S_S[q_+] - S_S[q_-])} \mathcal{F}[q_+, q_-] \end{aligned} \quad (3.161)$$

On voit que la fonctionnelle d'influence apparaît naturellement. L'intégrale de chemin est à prendre sur les chemins tels que  $q_+(t_f) = q_f$ ,  $q_-(t_f) = q'_f$ ,  $q_+(t_i) = q_i$ ,  $q_-(t_i) = q'_i$  avec une somme implicite sur  $q_f, q'_f, q_i$  et  $q'_i$ . Cette expression peut se simplifier de la façon suivante en insérant deux relations de fermeture dans le premier terme de l'intégrale de chemin :

$$\langle I(\mathbf{q}_D, t_f) \rangle = |E^{(+)}(\mathbf{q}_D, t)|^2 \int \mathcal{D}[q_+(t), q_-(t)] \langle q_i | \widehat{\rho}_S(t_i) | q'_i \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(S_S[q_+] - S_S[q_-])} \mathcal{F}[q_+, q_-] \quad (3.162)$$

Si on ne considère que les chemins classiques  $q_\pm^{\text{cl}}(t)$ , on trouve finalement que l'intensité mesurée en sortie d'interféromètre s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{q}_D, t_f) \rangle &= I_0 \left[ 1 + \text{Re} \left( e^{\frac{i}{\hbar}(S_S[q_+^{\text{cl}}] - S_S[q_-^{\text{cl}}])} \mathcal{F}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}] \right) \right] \\ I_0 &= |E^{(+)}(\mathbf{q}_D, t)|^2 \end{aligned} \quad (3.163)$$

On a utilisé la propriété (E-11) de la fonctionnelle d'influence et le fait que  $\mathcal{F}[q, q] = 1$ . Le contraste  $\mathcal{V}$  des interférences est donc obtenu directement à partir de (3.163) comme le module de la fonctionnelle d'influence :

$$\mathcal{V} = \left| \mathcal{F}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}] \right| = \exp \left( -D[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}] \right) \quad (3.164)$$

Autrement dit, l'interaction avec un environnement diminue le contraste maximum que peut donc atteindre un interféromètre. Si cette diminution est suffisamment importante, l'interféromètre ne fonctionne plus comme un appareil mesurant la phase. Ce résultat était déjà obtenu de façon qualitative dans la section B.1.2 de ce chapitre en faisant appel à la notion de catastrophe d'orthogonalité pour l'environnement. Ce résultat reste valable dans le cas où ce sont des ondes de matière qui se propagent.

### C.1.2 Expressions de la décohérence

Dans cette partie, on revient sur les expressions de la décohérence pour le fond relique et le fond des binaires, en partant de l'équation (3.155). Dans HYPER, comme nous l'avons déjà signalé, le signal en sortie d'interféromètre est moyenné sur un temps  $\tau_{\text{mes}}$  long. Pour tenir compte de cet effet, il faut effectuer une valeur moyenne temporelle de la fonctionnelle d'influence puisque le contraste final résulte d'une moyenne de plusieurs interférogrammes :

$$\mathcal{V}[\tau_{\text{mes}}] = \left\langle \mathcal{F}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}] \right\rangle_{\tau_{\text{mes}}} = \left\langle e^{-D_{\text{cl}}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}]} \times e^{i\Delta\phi_{\text{cl}}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}]} \right\rangle_{\tau_{\text{mes}}} \quad (3.165)$$

Pour les OG reliques, le terme linéaire représentant ce que nous avons appelé le signal est nul, comme on l'a vu dans la section B.3.2. D'autre part, on peut négliger la variation temporelle de  $D_{\text{cl}}$ , ce qui nous laisse finalement avec un contraste dont on peut donner l'expression grâce à (3.150) seulement, la moyenne temporelle laissant inchangé la fonctionnelle. En effet, à l'aide de cette dernière expression ainsi que des expressions (3.143), (D-23) et (D-27) on exprime le contraste  $\mathcal{V}[\tau_{\text{mes}}]$  en fonction du spectre  $S_h[\omega]$  du fond gravitationnel relique, en analogie avec l'expression (2.141) :

$$\mathcal{V} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] \mathcal{A}[\omega]\right) \quad (3.166)$$

La fonction de réponse  $\mathcal{A}[\omega]$  est définie de telle sorte que cette expression coïncide avec l'expression (2.141) du second chapitre :

$$\mathcal{A}[\omega] = \frac{5}{4\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \cos(\omega(t-s)) \Delta T^{ij}(t) \delta_{ijkl} \Delta T^{kl}(s) \quad (3.167)$$

Cette équation donne une interprétation claire de la fonction de réponse d'appareil : celle-ci est une corrélation proportionnelle à la différence entre les tenseurs énergie impulsion dans les deux bras.

Dans le cas des binaires, on a vu dans la section B.3.2 que le terme  $D_{\text{cl}}$  est nul (car la fonction de décohérence  $D$  se réduit à  $D_{\text{qu}}$ ). C'est alors la valeur moyenne temporelle qui est à l'origine de l'effet de décohérence. Le contraste s'écrit en effet :

$$\mathcal{V}[\tau_{\text{mes}}] = \left\langle e^{i\Delta\phi_{\text{cl}}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}]} \right\rangle_{\tau_{\text{mes}}} \quad (3.168)$$

Si le temps de mesure  $\tau_{\text{mes}}$  est suffisamment long, on peut utiliser l'hypothèse ergodique pour remplacer la moyenne temporelle par une valeur moyenne d'ensemble sur un ensemble statistique caractérisé par le spectre  $S_h$  du bruit de confusion des binaires. Dans ce cas, on voit que l'expression du contraste s'écrit encore de la même façon que (2.141).

En résumé, que ce soit pour le fond relique ou le fond des binaires, l'expression de la décohérence pour une expérience intégrant le signal sur un temps long fournit la même expression pour le contraste, bien que les raisons qui y conduisent soient fondamentalement différentes.

Pour les reliques, la décohérence est intrinsèque alors que pour les binaires elle provient du fait que la détection moyenne sur un temps long. Les résultats de cette section permettent de justifier le calcul du contraste donné par l'expression (2.141) du second chapitre. Il est bien décrit par la variance des déphasages entre les deux chemins qui interfèrent, la variance étant calculée à la fois sur les fluctuations statistiques (moyenne d'ensemble) et les variations temporelles (moyenne temporelle).

## C.2 Quelques compléments sur la décohérence dans les interféromètres

Nous donnons maintenant quelques prolongements et compléments concernant l'effet de décohérence gravitationnelle dans les interféromètres. Signalons que nous ne le faisons pas pour la décohérence des mouvements planétaires parce que ces compléments n'apporteraient pas de résultats physiques nouveaux dans ce cas.

### C.2.1 Effet dû à la stratégie de détection

Dans le second chapitre, nous avons calculé le bruit de phase provenant des OG en supposant implicitement que la totalité du déphasage induit par les OG était à considérer comme du bruit. En réalité, seules les fréquences sur lesquelles le signal est moyenné fait chuter le contraste. En particulier, les déphasages dans les fréquences d'analyse du signal Lense-Thirring ne participent pas à la décohérence. Pour corriger les calculs qui ont été faits, il est donc nécessaire de bien définir le bruit et le signal dans une expérience.

Pour voir comment tenir compte de cet effet, regardons dans un premier temps le cas particulier du projet HYPER. On a vu dans la section 2.B.1.3 qu'afin d'obtenir un rapport signal sur bruit suffisant, il était nécessaire d'intégrer le signal sur un temps  $\tau_{\text{mes}} \gg \tau_{\text{at}}$ . Après cette intégration, une partie du déphasage due aux OG va être interprétée comme contribuant au signal Lense-Thirring. Dans une description simple, cette contribution au signal est obtenue comme une moyenne temporelle notée  $\overline{\delta\varphi}(t)$  qui s'écrit en fonction du déphasage  $\delta\varphi$  comme un filtrage dans l'espace des fréquences :

$$\overline{\delta\varphi}[\omega] = \frac{\Gamma}{\Gamma - i\omega} \delta\varphi[\omega] \quad , \quad \Gamma \equiv \frac{1}{\tau_{\text{mes}}} \quad (3.169)$$

Le bruit que l'on note  $\delta\varphi_{\Gamma}$  s'écrit alors comme la différence entre le déphasage réel et sa partie traitée comme un signal :

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{\Gamma} &\equiv \delta\varphi - \overline{\delta\varphi} \\ \delta\varphi_{\Gamma}[\omega] &= \frac{-i\omega}{\Gamma - i\omega} \delta\varphi[\omega] \end{aligned} \quad (3.170)$$

Ce bruit provient dans ce modèle simple des fréquences supérieures à la fréquence d'analyse  $\Gamma$ . Il est à l'origine d'une perte de contraste caractérisée par la variance :

$$\mathcal{V}(t) = \langle \exp(i\delta\varphi_{\Gamma}(t)) \rangle = \exp\left(-\frac{\langle \Delta\varphi_{\Gamma}^2(t) \rangle}{2}\right) \quad (3.171)$$

Le spectre de bruit de  $\delta\varphi_\Gamma$  se déduit de celui de  $\delta\varphi$  :

$$\begin{aligned}\langle \delta\varphi_\Gamma(t)\delta\varphi_\Gamma(t') \rangle &= \int \frac{d\omega}{2\pi} S_{\varphi_\Gamma}[\omega] e^{-i\omega(t-t')} \\ S_{\varphi_\Gamma}[\omega] &= S_\varphi[\omega] \frac{\omega^2}{\omega^2 + \Gamma^2}\end{aligned}\quad (3.172)$$

Ce n'est pas le spectre  $S_\varphi[\omega]$  qui intervient dans l'évaluation de la décohérence, mais plutôt le spectre filtré. Cela revient à considérer que la trace sur les degrés de liberté de l'environnement ne doit être faite que sur les fréquences non prises en compte dans le signal.

Pour des stratégies de détection plus complexes qu'un simple moyennage, il faut remplacer l'équation précédente par un filtrage  $F[\omega]$  plus général :

$$S_{\varphi_\Gamma} = S_\varphi[\omega] F[\omega] \quad (3.173)$$

C'est ce bruit non contrôlé qui détermine la variance qui intervient dans la réduction du contraste :

$$\mathcal{V} = \exp\left(-\frac{\Delta\varphi^2}{2}\right) \quad , \quad \Delta\varphi^2 = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_{\varphi_\Gamma}[\omega] \quad (3.174)$$

En regroupant ces résultats, on peut réécrire cette variance :

$$\Delta\varphi^2 = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] \mathcal{A}[\omega] F[\omega] \quad (3.175)$$

Cette équation généralise (2.143) et montre que le bruit de phase s'écrit comme le bruit gravitationnel (fonction  $S_h$ ) filtré par l'appareil (fonction  $\mathcal{A}[\omega]$ ) et la stratégie de détection (fonction  $F[\omega]$ ). Le filtrage temporel  $F[\omega]$  se rajoute au filtrage spatial qu'impose l'instrument de par sa géométrie et que l'on caractérise par la fonction  $\mathcal{A}[\omega]$ . Les filtrages  $F[\omega]$  et  $\mathcal{A}[\omega]$  permettent de régulariser d'éventuelles divergences infrarouge ou ultraviolette quand c'est nécessaire. En particulier, la fonction  $F[\omega]$  tend vers zéro à fréquence nulle (car mesurer une fréquence nulle demande un temps infiniment long). Par contre, la fonction  $\mathcal{A}[\omega]$  ne tend pas forcément vers zéro à fréquence nulle car c'est une fonction purement géométrique. En particulier, ce n'est pas le cas lorsque l'appareil ne possède pas de centre de symétrie (comme par exemple un Michelson). À elles deux, ces fonctions caractérisent entièrement la réponse de l'instrument.

Regardons maintenant les modifications à apporter précisément à l'estimation de la décohérence dans le projet HYPER. Puisque celui-ci n'a pas la sensibilité requise pour mesurer l'effet Lense-Thirring sur un point standard, il doit moyennner sur environ un mois de mesure pour obtenir une valeur à 5% de l'effet Lense-Thirring [98]. Le signal gyroscopique est donc moyenné sur environ  $10^6$  s, ce qui dans l'espace des fréquences se caractérise par une fonction de filtrage :

$$F[\omega] = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \Gamma^2} \quad , \quad \Gamma \simeq 4 \times 10^{-7} \text{ Hz} \quad (3.176)$$

En utilisant l'expression (2.145) de la fonction de réponse d'appareil de HYPER, on déduit que la variance du bruit de phase s'écrit :

$$\Delta\varphi^2 = 4\Omega_{\text{at}}^2 \sin^2(2\alpha) \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] \frac{f^2(\omega\tau_{\text{at}})}{\omega^2 + \Gamma^2} \quad (3.177)$$

$$f(x) = 4 \sin^2 \frac{x}{2} \quad (3.178)$$

Dans un premier temps, on fait l'hypothèse simplificatrice que l'environnement est un bruit blanc avec un spectre  $S_h[\omega]$  constant. On renvoie à la section suivante la discussion des spectres plus réalistes. En utilisant alors la propriété suivante de la fonction  $f$  :

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f(\omega\tau)}{\omega^2 + \Gamma^2} = \frac{1 - e^{-\Gamma|\tau|}}{2\Gamma} \quad (3.179)$$

on déduit la variance du bruit de phase :

$$\frac{\Delta\varphi_{\text{at}}^2}{2} = 2S_h\Omega_{\text{at}}^2 \sin^2(2\alpha) \frac{3 - 4e^{-\Gamma\tau_{\text{at}}} + e^{-2\Gamma\tau_{\text{at}}}}{\Gamma} \quad (3.180)$$

Le temps de vol  $\tau_{\text{at}}$  des atomes le long des bras est de l'ordre de 1.5s dans HYPER, et le temps de moyennage est beaucoup plus grand. On se trouve ainsi dans la limite  $\Gamma\tau_{\text{at}} \ll 1$  où la variance du bruit de phase se réduit à l'expression suivante :

$$\frac{\Delta\varphi_{\text{at}}^2}{2} = 4(\Omega_{\text{at}} \sin 2\alpha)^2 S_h \tau_{\text{at}} (1 + \Gamma\tau_{\text{at}}) \quad (3.181)$$

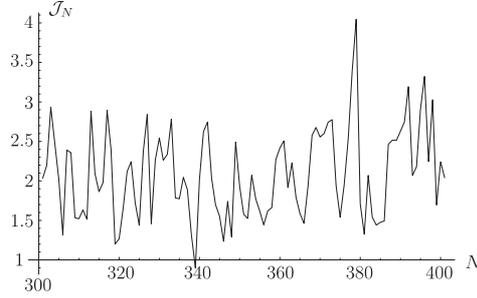
Autrement dit, la correction à apporter par rapport au second chapitre est très faible, de l'ordre de  $\Gamma\tau_{\text{at}} \sim 10^{-7}$ . Il est remarquable que la fréquence de coupure  $\Gamma$  disparaisse à l'ordre le plus bas dans l'estimation (3.181). Ce constat est en fait relié à un argument plus général sur la détection. En effet, les expériences de grande sensibilité demandent des temps d'intégration très longs et la condition  $\Gamma\tau_{\text{vol}} \ll 1$  est presque toujours réalisée, si  $\tau_{\text{vol}}$  est le temps de vol de l'atome dans l'interféromètre. Si l'interféromètre a un comportement basse fréquence qui ne demande pas de régularisation infra-rouge, la variance du bruit de phase peut alors s'écrire en oubliant le filtre  $F[\omega]$  :

$$\Delta\varphi^2 \simeq \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] \mathcal{A}[\omega] \quad (3.182)$$

En effet, les fréquences pour lesquelles  $F[\omega]$  est sensiblement différent de 1 sont coupées par la fonction d'appareil  $\mathcal{A}[\omega]$  qui définit une fenêtre fréquentielle sur laquelle  $F[\omega] \sim 1$ .

En réalité, la stratégie de détection de HYPER ne consiste pas simplement à moyennner sur un temps  $T_{\text{mes}}$ , mais plutôt à échantillonner l'effet Lense-Thirring à chaque révolution [99]. Dans cette configuration, il faut multiplier le filtre Lorentzien par une fonction d'échantillonnage  $F_{\text{ech}}[\omega]$  :

$$F_{\text{ech}}[\omega] = \left| \frac{1 - e^{-i\omega NT_r}}{1 - e^{-i\omega T_r}} \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2\Gamma}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2N\Gamma}\right)} \quad (3.183)$$

FIG. 3.3: Facteur de correction  $\mathcal{J}_N$ .

où  $T_r$  est la période de révolution. On a comme relation  $\Gamma N T_r = 1$  avec  $N \gg 1$ , le nombre d'orbites pour obtenir la sensibilité suffisante pour la mesure de l'effet Lense-Thirring. La variance s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varphi_{\text{at}}^2}{2} &= \frac{16}{\pi} \Omega_{\text{at}}^2 \sin^2(2\alpha) S_h \tau_{\text{at}} \mathcal{J}_N \simeq 1.5 \times 10^{-21} \mathcal{J}_N \\ \mathcal{J}_N &= \int du \frac{\sin^4\left(\frac{u}{2}\right)}{u^2 + \left(\frac{1}{p}\right)^2} \frac{\sin^2\left(N \frac{u T_r}{2\tau_{\text{at}}}\right)}{\sin^2\left(\frac{u T_r}{2\tau_{\text{at}}}\right)} \\ p &= \frac{T_p}{\tau_{\text{at}}} \end{aligned} \quad (3.184)$$

$T_p$  est le temps de moyenne d'un point standard. La fonction  $\mathcal{J}_N$  est représenté sur la figure (3.3) pour des valeurs de  $N$  comprises entre 300 et 400. Ses valeurs restent proches de l'unité et ne changent donc pas significativement les résultats du second chapitre. On a pris comme chiffres représentatifs de l'instrument HYPER  $p \sim 2$  et  $T_r = 100$  min.

### C.2.2 Intégration des spectres réels dans HYPER

Dans cette partie, on complète le calcul de la décohérence gravitationnelle dans un interféromètre atomique en intégrant les spectres gravitationnels réels afin d'améliorer les ordres de grandeur obtenus dans le second chapitre à partir de l'approximation de bruit blanc. Cette hypothèse de bruit blanc dans laquelle on considère le spectre  $S_h[\omega]$  comme indépendant de la fréquence a permis d'extraire une première estimation de l'effet de décohérence. Nous pouvons maintenant affiner cette estimation en tenant compte des variations en fréquences des spectres  $S_h[\omega]$  et  $\mathcal{A}[\omega]$ . Nous calculons également la décohérence provenant du spectre cosmique des OG. En effet, le fond cosmologique pourrait dominer la contribution astrophysique aussi bien aux hautes fréquences qu'aux basses fréquences et il est donc intéressant de l'estimer .

On part de l'expression générale (3.177) de la variance et on la calcule pour le fond de confusion des binaires et le fond relique. Commençons par le bruit de confusion des binaires

dont on connaît une représentation assez précise [145] :

$$S_h[2\pi f] = \begin{cases} 10^{-33} & 10^{-6} \leq f \leq 10^{-5} \\ 4 \times 10^{-43} f^{-1.9} & 10^{-5} \leq f \leq 7 \times 10^{-4} \\ 8 \times 10^{-61} f^{-7.5} & 7 \times 10^{-4} \leq f \leq 2 \times 10^{-3} \\ 3 \times 10^{-47} f^{-2.6} & 2 \times 10^{-3} \leq f \leq 10^{-2} \end{cases} \quad (3.185)$$

En utilisant les chiffres correspondant à HYPER (voir la section précédente), on obtient alors par intégration numérique de l'intégrale (3.177) :

$$\Delta\varphi_{\text{at}}^2[\text{astro}] \simeq 10^{-31} \quad (3.186)$$

Cette variance est très inférieure à celle obtenue dans le second chapitre. Ceci s'explique par le fait que le spectre  $S_h$  a en fait une valeur inférieure au plateau de confusion des binaires dans toute la gamme de fréquence où la fonction d'appareil  $\mathcal{A}[\omega]$  est significative. De toute façon, ceci ne change pas la principale conclusion de notre étude, à savoir que l'effet de décohérence gravitationnelle est totalement négligeable dans HYPER.

Pour la décohérence dans un fond relique d'OG, la variance du bruit de phase s'écrit maintenant, en utilisant (2.142), (2.145) et (2.80) :

$$\frac{\Delta\varphi_{\text{at}}^2}{2}[\text{cosmo}] = 96\Omega_{\text{at}}^2 \sin^2(2\alpha) H_0^2 \times \int d\omega \frac{\sin^4\left(\frac{\omega\tau_{\text{at}}}{2}\right)}{\omega^3(\omega^2 + \Gamma^2)} \Omega_{\text{gw}}[\omega] \quad (3.187)$$

Dans les modèles simples pour le fond relique, le paramètre  $\Omega_{\text{gw}}$  est quasiment constant jusqu'à une fréquence de coupure  $\omega_{\text{ulf}}$  de très basse fréquence. Puisque l'intégrale intervenant dans l'équation précédente n'a pas de divergence infrarouge, la valeur précise de la coupure  $\omega_{\text{ulf}}$  n'a pas d'importance et on peut sortir de l'intégrale le paramètre  $\Omega_{\text{gw}}$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varphi_{\text{at}}^2}{2}[\text{cosmo}] &= 24(\Omega_{\text{at}}\tau_{\text{at}} \sin(2\alpha))^2 \Omega_{\text{gw}} (H_0\tau_{\text{at}})^2 \mathcal{J} \\ \mathcal{J} &= 2 \int_0^\infty du \frac{4 \sin^4\left(\frac{u}{2}\right)}{u^3 (u^2 + (\Gamma\tau_{\text{at}})^2)} \end{aligned} \quad (3.188)$$

Avec les chiffres de HYPER,  $\mathcal{J} \simeq 7.5$  et  $H_0 \simeq 2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ , on obtient :

$$\frac{\Delta\varphi_{\text{at}}^2}{2}[\text{cosmo}] \sim 9 \times 10^{-21} \Omega_{\text{gw}} \quad (3.189)$$

Puisque  $\Omega_{\text{gw}}$  est très certainement petit devant 1 (voir figure (2.7)), la variance du bruit de phase est très petite. D'autre part, si  $\Omega_{\text{gw}}$  est plus petit que  $10^{-1}$  ce qui est probable selon les discussions de la section 2.A.3.3, alors la décohérence est dominée par la diffusion du fond de confusion des binaires. Pour augmenter l'effet du fond cosmologique, il faudrait moyenner sur un temps plus long ou obtenir un temps de vol des atomes plus important. Dans la limite  $\Gamma\tau_{\text{at}} \ll 1$  (avec toujours  $\Gamma \gg \omega_{\text{ulf}}$ ), le facteur  $\mathcal{J}$  a un comportement logarithmique :

$$\mathcal{J} \sim -\frac{1}{2} \ln(\Gamma\tau_{\text{at}}) \quad (3.190)$$

Puisque la divergence est logarithmique, le facteur  $\mathcal{J}$  reste sensiblement constant et de l'ordre de 10. La variance (3.188) peut s'interpréter de façon qualitative de la manière suivante : le terme  $\varphi_{\text{at}}^0 \equiv \Omega_{\text{at}}\tau_{\text{at}}$  représente le déphasage libre pris par la propagation de l'atome. La dispersion de phase est égale à ce facteur multiplié par un terme géométrique en  $\sin(2\alpha)$  et un terme dû à l'expansion de l'Univers en  $\sqrt{\Omega_{\text{gw}}}H_0\tau_{\text{at}}$ . Le facteur d'atténuation  $\sqrt{\Omega_{\text{gw}}}$  par rapport à l'expansion  $H_0\tau_{\text{at}}$  provient du fait que les OG ne représente qu'une fraction  $\Omega_{\text{gw}}$  de l'énergie critique.

### C.2.3 Décohérence dans un fond anisotrope

On a vu que la décohérence était dominée par le fond de confusion des binaires qui est principalement d'origine galactique. De part notre position excentrée par rapport au centre de la Galaxie, ce fond est donc anisotrope (voir la section 2.A.3.2). Si il était possible de fabriquer un instrument qui soit à la frontière de la décohérence, il pourrait être envisageable de tester l'anisotropie du fond en changeant l'orientation de l'appareil par rapport au centre de la Galaxie. C'est pour cette raison que dans cette section on présente un formalisme un peu plus général pour calculer le déphasage dans le cas où le fond gravitationnel n'est pas isotrope.

Pour cela, on utilise les résultats de l'annexe C, et en particulier les décompositions (C-44) et (C-46) de la métrique. Ainsi, on peut décomposer le déphasage, en analogie avec (2.136) :

$$\begin{aligned}\delta\varphi(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{l,m} \sum_{\gamma=+,\times} h_{lm}^\gamma[\omega] \mathcal{F}_{l,m}^\gamma[\omega, t] e^{-i\omega t} \\ \mathcal{F}_{l,m}^\gamma[\omega, t] &= \int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \phi_k^\gamma(t) Y_{lm}[\hat{\mathbf{k}}]\end{aligned}\quad (3.191)$$

On a défini une fonction de réponse en amplitude  $\mathcal{F}_{l,m}^\gamma[\omega, t]$  comme étant la moyenne angulaire de l'amplitude  $\phi_k^\gamma(t)$  projetée sur l'harmonique  $Y_{lm}$  (c'est-à-dire le produit scalaire de  $\phi_k^\gamma$  et  $Y_{lm}$ ). La fonction de corrélation du déphasage s'écrit alors, en utilisant l'équation (C-49) et deux relations de fermeture sur les harmoniques sphériques :

$$\begin{aligned}\langle \delta\varphi(t)\delta\varphi(t') \rangle &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{l,m} S_{l,m}[\omega] \mathcal{A}_{lm}[\omega, t] e^{-i\omega(t-t')} \\ \mathcal{A}_{lm}[\omega, t] &= \sum_{\gamma=+,\times} \int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} |\phi_k^\gamma(t)|^2 Y_{lm}[\hat{\mathbf{k}}]\end{aligned}\quad (3.192)$$

Les expressions (3.192) et (3.192) sont la généralisation au cas non isotrope des équations (2.139). Les fonctions de réponse atomique  $\mathcal{A}_{lm}[\omega]$  sont définies sur les harmoniques sphériques  $Y_{lm}$ . La dépendance temporelle tient compte du fait que l'appareil peut ne pas être stationnaire dans le système de coordonnées choisi.

### C.3 Influence de la géométrie

La fonction de décohérence dépend de la fonction de réponse d'appareil  $\mathcal{A}[\omega]$  et nous l'avons calculée jusqu'à présent pour une géométrie de type losange. Dans cette partie, on se propose de calculer cette fonction de réponse pour un interféromètre de Mach-Zehnder ayant la symétrie du parallélogramme (voir figure (3.4)).

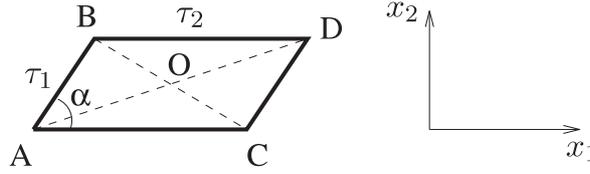


FIG. 3.4: Interféromètre atomique de Mach-Zehnder. Le centre de symétrie en O impose une réponse statique nulle.

On choisit l'origine des temps au point O de telle sorte que les temps de phase  $\eta \equiv \frac{k_\mu x^\mu}{\omega}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}\eta_A &= -\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{2} \frac{v_{\text{at}}}{c} \sin \theta (\tau_2 \cos \varphi + \tau_1 \cos(\varphi - \alpha)) \\ \eta_B &= -\frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1) + \frac{1}{2} \frac{v_{\text{at}}}{c} \sin \theta (\tau_2 \cos \varphi - \tau_1 \cos(\varphi - \alpha))\end{aligned}\quad (3.193)$$

Le centre de symétrie entraîne d'autre part que  $\eta_A = -\eta_D$  et  $\eta_B = -\eta_C$ . Les vitesses réduites s'écrivent :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\text{AB}} &= \frac{v_{\text{at}}}{c} (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \\ \mathbf{u}_{\text{AC}} &= \frac{v_{\text{at}}}{c} (1, 0, 0)\end{aligned}\quad (3.194)$$

On déduit alors l'amplitude  $\phi_k^\gamma$  à l'ordre le plus bas en  $v_{\text{at}}/c$  :

$$\begin{aligned}\phi_k^\gamma &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{m_{\text{at}} c^2}{\hbar \omega} \left[ (\mathbf{e}^{-\gamma} \cdot \mathbf{u}_{\text{AB}})^2 (e^{-i\omega\eta_B} - e^{-i\omega\eta_A}) + (\mathbf{e}^{-\gamma} \cdot \mathbf{u}_{\text{AC}})^2 (e^{i\omega\eta_A} - e^{-i\omega\eta_B}) \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{e}^{-\gamma} \cdot \mathbf{u}_{\text{AC}})^2 (e^{i\omega\eta_B} - e^{-i\omega\eta_A}) - (\mathbf{e}^{-\gamma} \cdot \mathbf{u}_{\text{AB}})^2 (e^{i\omega\eta_A} - e^{i\omega\eta_B}) \right] \\ &= -i\sqrt{2} \frac{m_{\text{at}} c^2}{\hbar \omega} \sin \left( \omega \frac{\eta_B + \eta_A}{2} \right) \sin \left( \omega \frac{\eta_B - \eta_A}{2} \right) \left( (\mathbf{e}^{-\gamma} \cdot \mathbf{u}_{\text{AB}})^* - (\mathbf{e}^{-\gamma} \cdot \mathbf{u}_{\text{AC}})^2 \right)\end{aligned}\quad (3.195)$$

En négligeant, dans les temps de phase, les termes en  $v_{\text{at}}/c$  qui ne contribuent presque pas (voir la discussion à propos du losange), on obtient finalement :

$$\begin{aligned}\phi_k^\gamma &\simeq 2i\sqrt{2} \frac{m_{\text{at}} v_{\text{at}}^2}{\hbar \omega} \sin \left( \frac{\omega \tau_1}{2} \right) \sin \left( \frac{\omega \tau_2}{2} \right) \sin \alpha \left( \cos \theta \sin \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right) - i\gamma \cos \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right) \right) \\ &\quad \times \left( \cos \theta \cos \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right) + i\gamma \sin \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right) \right)\end{aligned}\quad (3.196)$$

On construit ensuite la fonction de réponse d'appareil :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{at}}[\omega] &= \frac{5}{2} \sum_{\gamma=\pm} \langle |\phi_k^\gamma|^2 \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} = 64\Omega_{\text{at}}^2 \sin^2 \alpha \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau_1}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\omega\tau_2}{2}\right)}{\omega^2} \\ \mathcal{A}_{\text{at}}[\omega] &= 4 \left( \frac{\Omega_{\text{at}} \sin(2\alpha)}{\omega} \right)^2 f(\omega\tau_1) f(\omega\tau_2)\end{aligned}\tag{3.197}$$

Cette fonction de réponse est à comparer à la fonction (2.145) dans le cas du losange. On retrouve celle-ci en faisant  $\tau_1 = \tau_2$ . On voit que la fonction d'appareil tend aussi vers zéro pour des fréquences nulles. Cela se comprend car l'appareil ayant un centre de symétrie, il n'y a pas de déphasage différentiel entre les deux bras dans la limite des fréquences infiniment faibles.

Il pourrait bien sûr être intéressant de considérer des géométries sans centre de symétrie [146]. Dans ce cas, la fonction  $\mathcal{A}[\omega]$  pourrait avoir une limite non nulle à fréquence nulle. Autrement dit, l'instrument verrait effectivement les OG de basse fréquence, comme le fait un détecteur d'OG. Cet effet pourrait augmenter l'intégrale (3.175) qui décrit l'effet de décohérence. Toutefois, l'effet ne sera pas forcément très spectaculaire puisque cette intégrale porte sur l'ensemble du spectre.

---

# La décohérence gravitationnelle et la transition quantique/classique

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Résumé des résultats précédents</b> . . . . .	<b>137</b>
A.1	Rôle des échelles de Planck dans la transition classique/quantique . . . . .	137
A.2	Discussion des facteurs dont dépend la décohérence . . . . .	138
A.3	Fonctionnelle d'influence et échelle de Planck . . . . .	140
<b>B</b>	<b>Les interféromètres optiques</b> . . . . .	<b>142</b>
B.1	Interféromètre de type Michelson . . . . .	143
B.2	Cavité Fabry-Perot . . . . .	151
B.3	Autres détecteurs optiques d'OG . . . . .	156
<b>C</b>	<b>Les interféromètres atomiques</b> . . . . .	<b>162</b>
C.1	Tour d'horizon des différents interféromètres atomiques . . . . .	162
C.2	Discussions sur le seuil de décohérence . . . . .	164
C.3	Quelques perspectives . . . . .	167

---

**O**N a montré dans les parties précédentes que la décohérence gravitationnelle n'était pas efficace sur les systèmes microscopiques, mais que la destruction des cohérences spatiales permet à une particule macroscopique d'acquiescer un comportement classique en un temps très court devant le temps caractéristique d'évolution de cette particule. Il paraît intéressant de rechercher précisément où se situe la limite entre les objets « classiques » qui sont décohérés vite et les objets « quantiques » dont les cohérences sont préservées sur un temps long.

Pour localiser cette frontière, il faut déterminer les facteurs qui sont essentiellement responsables de cette décohérence. La section **A** récapitule les résultats qui ont été obtenus dans

les deux premières parties, en écrivant de manière unifiée l'effet qualitatif de la décohérence gravitationnelle à la fois sur les interféromètres et sur le mouvement de la Lune.

Les parties **B** et **C** s'intéressent à la recherche d'un système susceptible de permettre la mise en évidence de la décohérence gravitationnelle. On commence par envisager le cas d'interféromètres optiques de grande taille dont on peut espérer qu'ils soient suffisamment « macroscopiques » pour être sensibles à la décohérence. On étudie ensuite le cas des interféromètres atomiques pour lesquels l'augmentation de l'énergie cinétique est potentiellement importante, contrairement au cas optique où on ne peut essentiellement jouer que sur la taille de l'instrument, l'énergie cinétique étant fixée par la fréquence.

## A Résumé des résultats précédents

### A.1 Rôle des échelles de Planck dans la transition classique/quantique

Les échelles de Planck sont construites à partir des constantes fondamentales  $\hbar$ ,  $c$  et  $G$  :

$$\begin{aligned} t_{\text{P}} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \simeq 5 \times 10^{-44} \text{ s} \\ \ell_{\text{P}} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 10^{-35} \text{ m} \\ m_{\text{P}} &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq 22 \mu\text{g} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Le temps de Planck ainsi que la longueur de Planck sont tous les deux très petits par rapport à tous les temps ou longueurs caractéristique de la physique. Par contre, la masse de Planck se situe entre les domaines microscopique et macroscopique. Cette remarque peut être un signe de l'existence d'une frontière naturelle entre le monde classique et le monde quantique, qui se situerait aux alentours de la masse de Planck et qui pourrait être liée aux fluctuations intrinsèques de l'espace-temps.

En effet, l'échelle de Planck correspond à une échelle à laquelle des effets liés à la gravitation (à cause de  $G$ ) et à la mécanique quantique (par la présence de  $\hbar$ ) sont attendus. Les aspects quantiques pourraient être à l'origine d'une structure de l'espace apparaissant à cette échelle [147, 148]. On sait par exemple que les fluctuations de point zéro de la gravité fixent une limite fondamentale à la mesure de distance qui se situe au niveau de la longueur de Planck [27]. L'observation directe de ces échelles de Planck pourrait avoir une importance capitale pour permettre d'élaborer et de tester la future théorie qui unifiera la mécanique quantique et la gravitation.

Dans ce contexte, il est important de noter que l'échelle de la masse de Planck est accessible puisqu'elle se situe entre les masses microscopiques et macroscopiques. Il est alors intéressant de se demander si on peut mettre en évidence une transition classique/quantique qui se produirait pour des masses au voisinage de la masse de Planck. Une idée déjà présente sous une forme primitive dans le cours Feynman sur la gravitation [43], puis développée et popularisée par Penrose [47] et d'autres [149], consiste à imaginer que cette transition pourrait être associée à la décohérence provenant de l'interaction du système avec les fluctuations de la gravitation.

On peut formuler cette idée de la manière suivante. Considérons la longueur d'onde Compton  $\ell_{\text{C}}$  d'une particule de masse  $m$  :

$$\ell_{\text{C}} = \frac{\hbar}{mc} \tag{4.2}$$

Cette longueur donne qualitativement l'extension spatiale des fluctuations de position de la particule. On voit que, pour des masses supérieures à la masse de Planck, la longueur d'onde

Compton devient plus petite que la longueur de Planck :

$$m > m_P \quad \Leftrightarrow \quad \ell_C < \ell_P \quad (4.3)$$

Ceci suggère que si il existe un mécanisme empêchant de localiser la particule à mieux que la longueur de Planck, alors on doit observer une transition entre des comportements classique et quantique pour des masses traversant la valeur de la masse de Planck.

Il est évident que ce raisonnement ne peut être qu'une première approche qualitative du problème. En effet, la décohérence d'un système doit dépendre à la fois du niveau des fluctuations dans l'environnement et de la force du couplage entre le système et son environnement. Le but de cette thèse est de donner des évaluations quantitatives de l'effet de décohérence pour le processus induit par les bains stochastiques d'OG. Ces évaluations permettront ainsi de préciser la position de la frontière classique/quantique puis de déterminer si il est possible de concevoir des expériences pour tester sa présence.

## A.2 Discussion des facteurs dont dépend la décohérence

Afin de discuter les paramètres qui contrôlent la décohérence, on redonne ici les résultats obtenus dans le second chapitre dans le cas de HYPER. Ceux-ci ont une interprétation simple dans l'hypothèse où le bruit gravitationnel est un bruit blanc. On se place dans cette situation pour la discussion qualitative, sachant que les comportements généraux qu'on obtient dans cette limite sont en fait valables de façon générique. On rappelle qu'on peut écrire la variance du bruit de phase de la façon suivante :

$$\Delta\varphi_{\text{at}}^2 \sim \Omega_{\text{at}}^2 \sin^2(2\alpha) S_h \tau_{\text{at}} \quad (4.4)$$

$S_h$  est le spectre de bruit gravitationnel, supposé constant pour simplifier la discussion,  $\Omega_{\text{at}}$  l'énergie cinétique des atomes mesuré comme une fréquence et  $\tau_{\text{at}}$  le temps de vol des atomes dans l'interféromètre. La dépendance linéaire dans ce temps de vol provient de l'hypothèse de bruit blanc faite sur le spectre gravitationnel. Le facteur  $\sin(2\alpha)$  représente l'ouverture de l'interféromètre, c'est-à-dire l'angle qui sépare les deux faisceaux qui interfèrent (voir figure (2.8)); la variance de bruit est nulle quand  $\sin(2\alpha) = 0$  parce que les deux bras de l'interféromètre sont alors confondus. Ce facteur montre que plus les faisceaux sont séparés spatialement plus l'effet de décohérence est important. Dans le cas d'une superposition de deux états cohérents  $|\alpha\rangle$  et  $|\alpha'\rangle$ , cette « distance » est donnée par le module  $|\alpha - \alpha'|$ . On définira plus précisément dans la prochaine partie la « distance » pertinente à considérer dans le cas du couplage aux OG.

On écrit de la même façon le résultat obtenu pour la Lune dans la limite des temps longs :

$$\Delta\varphi_{\text{lune}}^2 \sim \Omega_{\text{lune}}^2 \left( \frac{\Delta x}{r} \right)^2 S_h \tau_{\text{lune}} \quad (4.5)$$

$\Omega_{\text{lune}}$  est l'énergie cinétique de la Lune mesurée comme une fréquence et  $\tau_{\text{lune}}$  est simplement le temps d'exposition de la Lune de Schrödinger aux fluctuations gravitationnelles. Le facteur

géométrique est ici donné par le rapport de la distance  $\Delta x$  entre les deux composantes à la distance Terre-Lune. Ce rapport s'écrit aussi en analogie avec les interféromètres atomiques comme le sinus de l'angle sous lequel on voit la superposition des deux Lunes depuis le centre de la Terre. De façon générique, on peut donc écrire que la décohérence pour des particules massives se caractérise qualitativement par la variance :

$$\Delta\varphi^2 \sim \Omega^2 \sin^2(2\alpha) S_{\hbar} \tau \quad (4.6)$$

On reviendra sur les photons dans la section A.3 suivante.

On peut aussi exprimer les résultats en faisant intervenir les échelles de Planck introduites dans la section A.1. Pour cela, on introduit le paramètre  $\Theta_{\text{gw}}$  qui mesure la température  $T_{\text{gw}}$  comme une fréquence :

$$\Theta_{\text{gw}} = \pi \frac{k_{\text{B}} T_{\text{gw}}}{\hbar} \quad (4.7)$$

À l'aide de ce paramètre, on peut réécrire les variances du bruit de phase de la façon suivante, en utilisant la relation (2.75) qui relie le spectre à la température :

$$\Delta\varphi^2 \sim (\Omega t_{\text{P}})^2 \sin^2(2\alpha) \Theta_{\text{gw}} \tau_{\text{lune}} \quad (4.8)$$

On voit sur cette expression qu'en plus des paramètres discutés plus haut, la décohérence dépend de la température de l'environnement. La très grande valeur de la température du fond gravitationnel explique l'importance de l'effet de décohérence pour les objets macroscopiques. Par exemple, pour le plateau correspondant au bruit de confusion des binaires, on a  $\Theta_{\text{gw}} \sim 3 \times 10^{52} \text{ s}^{-1}$ .

Enfin, en définissant l'énergie cinétique  $K$  et l'énergie de Planck  $E_{\text{P}}$  :

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad , \quad E_{\text{P}} = m_{\text{P}} c^2 \quad (4.9)$$

on peut réexprimer encore différemment le bruit de phase, en faisant intervenir explicitement l'énergie de Planck :

$$\Delta\varphi^2 \sim \left( \frac{K}{E_{\text{P}}} \right)^2 \sin^2(2\alpha) \Theta_{\text{gw}} \tau_{\text{lune}} \quad , \quad \frac{K}{E_{\text{P}}} = \frac{m}{m_{\text{P}}} \frac{v^2}{2c^2} \quad (4.10)$$

Le rapport  $m_{\text{at}}/m_{\text{P}}$  illustre la discussion de la section A.1 sur les échelles de Planck. On voit cependant que ce n'est pas le seul facteur qui détermine l'effet de la décohérence. En effet, la quantité pertinente, comme on l'a déjà signalé, est l'énergie cinétique  $mv^2/2$  et non l'énergie de masse de la particule  $mc^2$ . Dans la partie 2.B.2.1 qui discutait le cas des interféromètres, on a donné une interprétation simple de ce résultat : le déphasage, invariant de jauge, peut être calculé dans la jauge TT ; dans cette jauge les OG n'ont pas d'effet sur les particules massives au repos ; elles ont un effet sur les masses en mouvement et cet effet est justement déterminé par l'énergie cinétique.

Pour les particules microscopiques, l'énergie cinétique est très faible devant l'énergie de Planck et le rapport  $K/E_P$  est très petit. Au contraire, pour des objets lourds, ce rapport peut devenir très grand devant l'unité. Pour fixer les idées, l'énergie de Planck vaut approximativement :

$$E_P \simeq 2 \times 10^9 \text{ J} \simeq 10^{28} \text{ eV} \quad (4.11)$$

Pour information, on peut reprendre le type de calculs effectués en 2.C.3.3 pour comparer décohérence gravitationnelle et électromagnétique. Dans ce sens, l'énergie de Planck correspond à l'énergie d'une orbite gravitationnelle circulaire correspondant à deux masses de densité  $d = 5$  et de masse  $4 \times 10^{10} \text{ kg}$ , en rotation serrée l'une autour de l'autre.

### A.3 Fonctionnelle d'influence et échelle de Planck

L'expression de la fonctionnelle d'influence en fonction des échelles de Planck permet de rendre plus quantitatives les discussions précédentes. Comme on l'a vu dans le troisième chapitre, la fonctionnelle d'influence donne directement le contraste pour un interféromètre. Elle permet aussi de calculer les cohérences d'un système quelconque, définis comme les éléments hors-diagonaux de la matrice densité. Son comportement est donc essentiel dans la compréhension de la décohérence.

Considérons donc la fonctionnelle d'influence  $\mathcal{F}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}]$  entre les chemins classiques suivis par les deux composantes. Comme on l'a montré dans le troisième chapitre, cette fonctionnelle prend une expression simple dans le cas du couplage aux OG et s'écrit en fonction d'une fonction de décohérence classique  $D_{\text{cl}}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}]$  (voir équation (3.155)) :

$$\mathcal{F}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}] = \exp\left(-D_{\text{cl}}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}]\right) \quad (4.12)$$

La fonction  $D_{\text{cl}}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}]$ , donnée par l'équation (3.152), représente le double de la variance du bruit de phase. En utilisant l'expression (3.143) de la densité spectrale et l'expression (3.151) du nombre de gravitons, on montre que cette fonction peut s'écrire en fonction des échelles de Planck de la façon suivante :

$$D_{\text{cl}}[q_+^{\text{cl}}, q_-^{\text{cl}}] = \frac{5}{16c^4} \frac{1}{(m_P c^2)^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{S_h[\omega]}{t_P^2} \int_0^\tau dt \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \Delta \ddot{Q}^{ij}(t) \delta_{ijkl} \Delta \ddot{Q}^{kl}(s) \quad (4.13)$$

où  $\ddot{Q}^{ij}$  désigne la dérivée seconde du quadrupole du système. L'expression (4.13) montre que le paramètre pertinent à considérer est une fonction de réponse d'appareil  $\mathcal{A}[\omega]$  comme celle introduit dans le second chapitre à propos des interféromètres et qui s'écrit ici en fonction d'une grandeur  $\Delta K$  :

$$\mathcal{A}[\omega] = \frac{5}{16t_P^2} \int_0^\tau dt \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \left( \frac{\Delta K(t,s)}{E_P} \right)^2 \quad (4.14)$$

$$\Delta K(t,s) \equiv \frac{1}{c^2} \sqrt{\Delta \ddot{Q}^{ij}(t) \delta_{ijkl} \Delta \ddot{Q}^{kl}(s)} \quad (4.15)$$

$\Delta K$  représente la bonne « distance » à considérer comme le paramètre de classicité et il se mesure comme une énergie.

Pour donner cette fonction de réponse dans le cas de la Lune, on montre que :

$$\begin{aligned}\Delta K^2(t, s) &= \Delta K_0^2 \cos(2\Omega(t - s)) \\ \Delta K_0 &= \sqrt{\frac{128}{5} m r^2 \Omega^2 \frac{\Delta x}{r}}\end{aligned}\quad (4.16)$$

On retrouve bien la forme générale discutée dans la section précédente :  $\Delta K$  est le produit de l'énergie cinétique par l'ouverture angulaire  $\Delta x/r$ . La fonction de réponse  $\mathcal{A}_{\text{lune}}[\omega]$  s'écrit alors :

$$\mathcal{A}_{\text{lune}}[\omega] = \frac{5}{16} \left( \frac{\Delta K_0}{E_P} \right)^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1 - \cos((\omega - 2\Omega)t)}{((\omega - 2\Omega)t_P)^2} S_h[\omega] \quad (4.17)$$

Cette expression générale permet de retrouver les comportements aux temps courts et aux temps longs. En particulier, la fonction de décohérence est proportionnelle au carré du temps  $t$  aux temps courts et au temps  $t$  lui-même aux temps longs.

Enfin, l'expression (4.14) permet de généraliser au cas de la propagation de photons. Dans ce cas, c'est la fréquence  $\Omega_{\text{phot}}$  qui joue le rôle de l'énergie cinétique. Puisqu'il est difficile de faire interférer des photons de fréquences plus élevées que les fréquences optiques, l'augmentation de la variance du bruit de phase pour des photons requiert expérimentalement une augmentation du temps de vol  $\tau_{\text{phot}}$ .

De façon générale, la décohérence gravitationnelle est pilotée par la fonction d'appareil  $\mathcal{A}[\omega]$  donnée par l'expression (4.14). Cette fonction est elle-même qualitativement déterminée par une valeur caractéristique du paramètre  $\Delta K$ . Dans les deux parties qui suivent, on va classifier les différents appareils susceptibles d'être sensibles aux OG en fonction de ce paramètre  $\Delta K$ .

## B Les interféromètres optiques

Cette partie a comme premier objectif de rechercher si il est possible d'envisager des expériences d'interférométrie optique qui mettrait en évidence la frontière entre le monde classique et le monde quantique. Autrement dit, on recherche un système optique qui puisse être considéré comme macroscopique vis-à-vis du bain gravitationnel.

On a vu dans la partie précédente que l'augmentation de l'effet de décohérence est directement relié à l'augmentation du temps d'interaction entre les photons et les OG si on se restreint aux interféromètres optiques. Pour augmenter ce temps d'interaction, deux stratégies différentes sont possibles, qui sont d'ailleurs toutes les deux mises en oeuvre dans les grands détecteurs interférométriques.

La première stratégie consiste à augmenter la taille de l'interféromètre. Pour un interféromètre de type Michelson, des appareils avec une taille de l'ordre du kilomètre donnent des temps d'interaction  $\tau_{\text{phot}}$  de l'ordre de  $10^{-5}$  s. La taille est encore plus grande sur des expériences d'interférométrie à grande base (VLBI et interférométrie stellaire) et sur le projet LISA de grand détecteur interférométrique d'OG. Ces systèmes sont étudiés dans la section [B.1](#).

Une deuxième stratégie consiste à replier le parcours de la lumière dans une cavité Fabry-Perot. L'étude de l'effet des OG sur cet interféromètre à ondes multiples est détaillée dans la section [B.2](#). L'effet du bruit gravitationnel peut se ramener à un bruit équivalent sur la fréquence de résonance de la cavité, donc sur sa longueur propre. Ce bruit doit être comparé aux bruits de vibration mécanique de la cavité qui font fluctuer la fréquence de résonance de la cavité.

Enfin, un deuxième objectif de cette partie est de relier le travail qui a été fait dans le second chapitre sur le calcul du bruit induit par les OG à des expériences faisant intervenir la propagation de photons sur de grandes distances et pour lesquelles la possibilité de détecter des OG a été étudiée. On ne donne qu'une description générale et on renvoie le lecteur à des articles de revue pour plus de détails.

En particulier, on regarde l'effet des fluctuations gravitationnelles sur la mesure de l'effet Doppler d'un faisceau lumineux effectuant un aller retour entre une station au sol et un satellite en orbite (« Doppler Tracking ») qui est à plusieurs milliers de kilomètres [\[150\]](#). La possibilité qu'un fond stochastique d'OG puisse être détecté par cette méthode a été proposée originellement par Anderson [\[151\]](#) puis développée par Mashhoon [\[152\]](#) et Bertotti [\[153\]](#) (voir aussi une version plus récente dans [\[154\]](#)). Le détecteur d'OG que constitue le satellite et l'observateur sur Terre n'est plus du type interférométrique comme dans les parties précédentes, mais les méthodes générales du second chapitre s'appliquent encore. Enfin, on envisage l'étude du bruit gravitationnel sur la mesure des temps d'arrivée de signaux émis par des pulsars très lointains (« Pulsar Timing » [\[156\]](#)). Là encore, cette méthode a été mise en oeuvre pour la mesure du fond stochastique d'OG, en particulier le fond cosmologique [\[155\]](#).

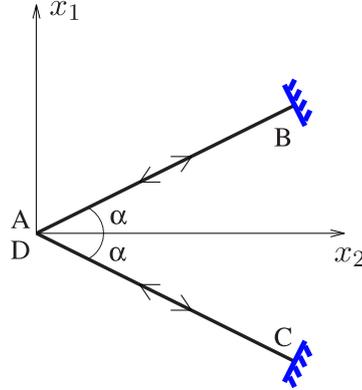


FIG. 4.1: Géométrie de l'interféromètre de type Michelson étudié dans cette partie. Les miroirs B et C, ainsi que la séparatrice (point A et D) sont supposés en chute libre.

### B.1 Interféromètre de type Michelson

On commence par étudier une géométrie de type Michelson dans laquelle de la lumière se propage selon deux bras dont la longueur non perturbée vaut  $L = c\tau_{\text{phot}}$  et qui sont séparés d'un angle  $2\alpha$  (voir figure (4.1)). Les miroirs sont supposés en chute libre. Si on se place dans un système de coordonnées TT, le déphasage dans un tel interféromètre se réduit alors à un déphasage propagatif.

On paramètre les coordonnées des sommets A, B, C et D de façon symétrique en prenant l'origine des temps  $t$  lorsque la lumière atteint les miroirs B et C :

$$\begin{cases} x_A = (-c\tau_{\text{phot}}, 0, 0, 0) \\ x_D = (c\tau_{\text{phot}}, 0, 0, 0) \\ x_B = (0, c\tau_{\text{phot}} \cos \alpha, c\tau_{\text{phot}} \sin \alpha, 0) \\ x_C = (0, c\tau_{\text{phot}} \cos \alpha, -c\tau_{\text{phot}} \sin \alpha, 0) \end{cases} \quad (4.18)$$

On note  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  les vitesses réduites respectives le long des bras AB et AC :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \\ \mathbf{v}(\alpha) = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0) \end{cases} \quad (4.19)$$

#### B.1.1 Expression du bruit de phase gravitationnel

Les résultats généraux du second chapitre permettent d'écrire le déphasage sous la forme suivante :

$$\Delta\varphi = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{\gamma=\pm} \phi_k^\gamma(\alpha) h^\gamma[k] e^{-i\omega t} \quad (4.20)$$

L'amplitude  $\phi_k^\gamma(\alpha)$  se calcule le long de chaque bras  $[XY]$  sur lequel le champ se propage à la vitesse réduite  $u^i[XY]$ , comme suit :

$$\phi_k^\gamma[XY] = \frac{\Omega_{\text{phot}}}{2} \int dt' \mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] u^i[XY] u^j[XY] e^{-i(\omega t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t'))} \quad (4.21)$$

Elle se décompose ici de la façon suivante :

$$\phi_k^\gamma(\alpha) = \phi_k^\gamma(\alpha)[AB] + \phi_k^\gamma(\alpha)[BD] - (\phi_k^\gamma(\alpha)[AC] + \phi_k^\gamma(\alpha)[CD]) \quad (4.22)$$

Afin de simplifier les notations, on définit le paramètre  $\lambda$  qui prend les valeurs  $\pm 1$  tel que :

$$\begin{aligned} \phi_k^\gamma(\alpha)[B_{+1}] &\equiv \phi_k^\gamma(\alpha)[AB] & , & & \phi_k^\gamma(\alpha)[B_{-1}] &\equiv \phi_k^\gamma(\alpha)[BD] \\ \phi_k^\gamma(\alpha)[C_{+1}] &\equiv \phi_k^\gamma(\alpha)[AC] & , & & \phi_k^\gamma(\alpha)[C_{-1}] &\equiv \phi_k^\gamma(\alpha)[CD] \end{aligned} \quad (4.23)$$

On a alors simplement :

$$\phi_k^\gamma(\alpha) = \sum_{\lambda=\pm 1} (\phi_k^\gamma(\alpha)[B_\lambda] - \phi_k^\gamma(\alpha)[C_\lambda]) \quad (4.24)$$

Ces amplitudes sont données, en décomposant (2.9) dans les polarisations linéaires (C-18), par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_k^\gamma(\alpha)[B_\lambda] &= i\lambda \frac{\Omega_{\text{phot}}}{2\omega} \frac{u^i(\alpha)u^j(\alpha)\mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]}{1 - \lambda\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}(\alpha)} \left( e^{-i\omega\eta_B} - e^{i\lambda\omega\tau_{\text{phot}}} \right) \\ \phi_k^\gamma(\alpha)[C_\lambda] &= i\lambda \frac{\Omega_{\text{phot}}}{2\omega} \frac{v^i(\alpha)v^j(\alpha)\mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]}{1 - \lambda\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}(\alpha)} \left( e^{-i\omega\eta_C} - e^{i\lambda\omega\tau_{\text{phot}}} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Les temps de phase  $\eta$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \eta_B &= -\tau_{\text{phot}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}(\alpha) & , & & \eta_C &= -\tau_{\text{phot}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}(\alpha) \\ \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}(\alpha) &= \sin\theta \cos(\varphi - \alpha) & , & & \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}(\alpha) &= \sin\theta \cos(\varphi + \alpha) \end{aligned} \quad (4.26)$$

L'amplitude  $\phi_k^\gamma(\alpha)$  s'exprime alors comme suit :

$$\begin{aligned} \phi_k^\gamma(\alpha) &= \frac{i\Omega_{\text{phot}}}{2\omega} \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \left[ \frac{u^i(\alpha)u^j(\alpha)}{1 - \lambda\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}(\alpha)} \left( e^{i\omega\tau_{\text{phot}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}(\alpha)} - e^{i\lambda\omega\tau_{\text{phot}}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{v^i(\alpha)v^j(\alpha)}{1 - \lambda\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}(\alpha)} \left( e^{i\omega\tau_{\text{phot}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}(\alpha)} - e^{i\lambda\omega\tau_{\text{phot}}} \right) \right] \mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \end{aligned} \quad (4.27)$$

puis, en utilisant les expressions explicites suivantes sur les polarisations :

$$\begin{aligned} u^i(\alpha)u^j(\alpha)\mathbf{e}_{ij}^+[\hat{\mathbf{k}}] &= \sin^2(\varphi - \alpha) - \cos^2\theta \cos^2(\varphi - \alpha) \\ u^i(\alpha)u^j(\alpha)\mathbf{e}_{ij}^\times[\hat{\mathbf{k}}] &= \cos\theta \sin(2(\varphi - \alpha)) \\ v^i(\alpha)v^j(\alpha)\mathbf{e}_{ij}^+[\hat{\mathbf{k}}] &= \sin^2(\varphi + \alpha) - \cos^2\theta \cos^2(\varphi + \alpha) \\ v^i(\alpha)v^j(\alpha)\mathbf{e}_{ij}^\times[\hat{\mathbf{k}}] &= \cos\theta \sin(2(\varphi + \alpha)) \end{aligned} \quad (4.28)$$

On obtient finalement l'amplitude  $\phi_k^\gamma(\alpha)$  :

$$\begin{aligned} \phi_k^\gamma(\alpha) = & \frac{1}{2}\Omega_{\text{phot}}\tau_{\text{phot}} \left[ e^{i\frac{\omega\tau_{\text{phot}}}{2}(1+\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{u}(\alpha))} \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_{\text{phot}}(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{u}(\alpha))}{2}\right) \right. \\ & \left. + e^{-i\frac{\omega\tau_{\text{phot}}}{2}(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{u}(\alpha))} \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_{\text{phot}}(1+\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{u}(\alpha))}{2}\right) \right] u^i(\alpha)u^j(\alpha)\mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \\ & - \frac{1}{2}\Omega_{\text{phot}}\tau_{\text{phot}} \left[ e^{i\frac{\omega\tau_{\text{phot}}}{2}(1+\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{v}(\alpha))} \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_{\text{phot}}(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{v}(\alpha))}{2}\right) \right. \\ & \left. + e^{-i\frac{\omega\tau_{\text{phot}}}{2}(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{v}(\alpha))} \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_{\text{phot}}(1+\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{v}(\alpha))}{2}\right) \right] v^i(\alpha)v^j(\alpha)\mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \quad (4.29) \end{aligned}$$

On a représenté sur les figures (4.2) la dépendance angulaire de la valeur absolue de cette amplitude pour une fréquence égale à  $\frac{1}{\tau_{\text{phot}}}$  dans une configuration de Michelson pour laquelle  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Le comportement en fréquence d'une telle amplitude est aussi représenté sur la figure (4.3) où on trace  $|\phi_k^\times|$  en fonction de la fréquence  $\omega$  dans le cas d'une OG plane dans la direction  $\theta = \varphi = 0$ . On remarque que contrairement au cas de l'interféromètre atomique HYPER dans sa géométrie de losange, cette amplitude ne tend pas vers zéro à fréquence nulle, car le système n'admet pas de centre de symétrie. En particulier, cela signifie qu'une telle configuration est sensible aux OG dont la longueur d'onde est grande devant la taille de l'appareil. Plus précisément, la fonction  $|\phi_k^\gamma|$  définit une plage de sensibilité en fréquence qui s'étend qualitativement de la fréquence nulle à une fréquence de l'ordre de  $\frac{2\pi}{\tau_{\text{phot}}}$ .

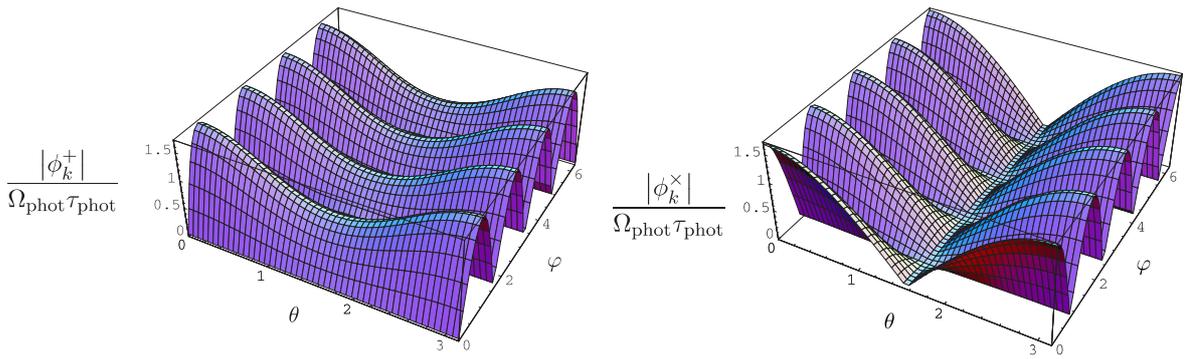


FIG. 4.2: Représentation de la dépendance angulaire de  $|\phi_k^\gamma|$  pour les deux polarisations linéaires  $\gamma = +, \times$ . On a choisi une fréquence  $\omega = \frac{1}{\tau_{\text{phot}}}$  et  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

On déduit maintenant la variance du bruit de phase en utilisant les résultats de la section

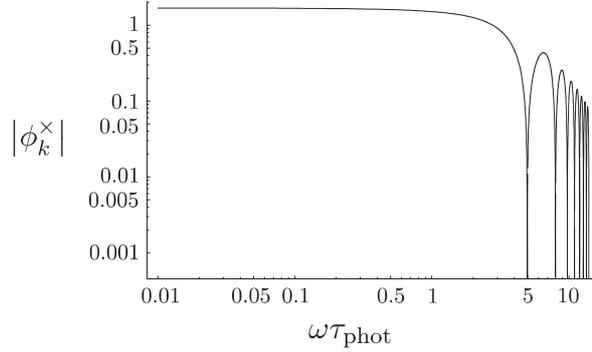


FIG. 4.3:  $|\phi_k^\times|$  en fonction de la fréquence  $\omega$  pour  $\theta = \varphi = 0$  dans un diagramme log-log. On a pris  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Cette fonction ne prend de valeurs significatives qu'entre zéro et  $\omega\tau_{\text{phot}} \sim 10$ .

B.3.1 du second chapitre ainsi que la section C.2.1 du troisième chapitre :

$$\Delta\varphi^2 = \frac{5}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] F[\omega] \sum_{\gamma=+,\times} \langle |\phi_k^\gamma(\alpha)|^2 \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} \quad (4.30)$$

Cette expression générale permet de calculer la décohérence si on se donne le spectre gravitationnel  $S_h[\omega]$  et la stratégie de détection qui permet de déduire  $F[\omega]$ . Cette fonction  $F[\omega]$  sera prise ici comme un filtre passe haut dont la fréquence de coupure  $\Gamma$  est donnée par l'inverse du temps de mesure  $T$  :

$$F[\omega] = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \Gamma^2} \quad (4.31)$$

L'intégration exacte de cette expression ne peut se faire que de façon numérique. Afin d'en obtenir des expressions analytiques, il est nécessaire de faire des approximations. Cependant, il est possible d'extraire des comportements généraux à partir de la forme de l'amplitude  $\phi_k^\gamma$ .

### B.1.2 Quelques résultats généraux sur la variance du bruit de phase

Sans avoir besoin de faire explicitement le calcul de la variance du bruit de phase, on montre que cette variance est proportionnelle au produit  $\Omega_{\text{phot}}^2 \tau_{\text{phot}}$  où  $\Omega_{\text{phot}}$  est la fréquence des photons et  $\tau_{\text{phot}}$  le temps de vol des photons dans l'interféromètre. En effet, par un changement de variable  $x = \omega\tau_{\text{phot}}$  dans l'expression (4.30), on montre de façon générale que la variance s'écrit :

$$\Delta\varphi^2 = \Omega_{\text{phot}}^2 \tau_{\text{phot}} \int dx S_h[x/\tau_{\text{phot}}] F[x/\tau_{\text{phot}}] g[x, \alpha] \quad (4.32)$$

La fonction  $g[x, \alpha]$  est sans dimension. Son expression s'obtient en comparant la dernière expression, l'équation (4.29) et (4.30). C'est une fonction qui ne prend des valeurs significatives que pour des valeurs de  $x$  comprises grossièrement entre  $-2\pi$  et  $2\pi$  (voir figure (4.3)).

L'intégrale sur  $x$  qui apparaît dans l'expression ci-dessus définit alors un temps qui dépend explicitement du spectre  $S_h$ , de l'angle d'ouverture  $2\alpha$  et du temps de mesure  $T$  qui caractérise la fonction  $F$ .

Maintenant on cherche le comportement générique de la fonction  $g[x, \alpha]$  lorsque l'angle  $2\alpha$  est petit devant un. Pour cela, on remarque que l'amplitude  $\phi_k^\gamma(\alpha)$  s'écrit en fait comme la différence entre une fonction  $f^\gamma$  évaluée en  $(\varphi - \alpha)$  et cette même fonction évaluée en  $(\varphi + \alpha)$  :

$$\phi_k^\gamma(\alpha) = f^\gamma(\theta, \varphi - \alpha) - f^\gamma(\theta, \varphi + \alpha) \quad (4.33)$$

$$f^\gamma(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} \left[ e^{i \frac{\omega \tau_{\text{phot}}}{2} (1 + \sin \theta \cos \varphi)} \text{sinc} \left( \frac{\omega \tau_{\text{phot}} (1 - \sin \theta \cos \varphi)}{2} \right) + e^{-i \frac{\omega \tau_{\text{phot}}}{2} (1 - \sin \theta \cos \varphi)} \text{sinc} \left( \frac{\omega \tau_{\text{phot}} (1 + \sin \theta \cos \varphi)}{2} \right) \right] \mathbf{e}_{11}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \quad (4.34)$$

Pour  $\alpha \rightarrow 0$ , on peut donc remplacer l'amplitude  $\phi_k^\gamma$  par l'expression :

$$\phi_k^\gamma(\alpha) = -2\alpha \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (4.35)$$

Cela montre que la variance du bruit de phase est proportionnelle au carré de l'angle d'ouverture, ou encore que :

$$g[x, \alpha] \sim \alpha^2 \tilde{g}[x] \quad (4.36)$$

où on a défini une autre fonction  $\tilde{g}[x]$  dont il n'est pas utile d'obtenir une expression exacte. Comme la fonction  $g[x, \alpha]$ , cette fonction ne prend de valeur significative que pour  $|x|$  inférieur à quelques  $2\pi$ .

### B.1.3 Décohérence dans l'approximation des grandes longueurs d'onde

On donne maintenant la limite de la variance du bruit de phase lorsque la taille de l'interféromètre est suffisamment petite pour que les fréquences  $\omega$  qui contribuent significativement au spectre gravitationnel  $S_h[\omega]$  soit très petites devant  $\frac{1}{\tau_{\text{phot}}}$ . Dans ces conditions, c'est-à-dire pour  $\omega \tau_{\text{phot}} \ll 1$ , on peut remplacer  $\phi_k^\gamma$  par son expression à fréquence nulle, celle qui correspond à la valeur du plateau sur la figure (4.3). Cette amplitude redonne l'expression habituelle de la réponse en amplitude, souvent appelée  $D^{ij}$  dans les papiers sur la détection des OG [157, 18] :

$$\begin{aligned} \phi_k^\gamma(\alpha) &\simeq 2\Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} D^{ij}(\alpha) \mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \\ D^{ij}(\alpha) &= \frac{1}{2} (u^i(\alpha) u^j(\alpha) - v^i(\alpha) v^j(\alpha)) \end{aligned} \quad (4.37)$$

En utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (u^i(\alpha) u^j(\alpha) - v^i(\alpha) v^j(\alpha)) \mathbf{e}_{ij}^+[\hat{\mathbf{k}}] &= -\sin(2\alpha) \sin(2\varphi) (1 + \cos^2 \theta) \\ (u^i(\alpha) u^j(\alpha) - v^i(\alpha) v^j(\alpha)) \mathbf{e}_{ij}^\times[\hat{\mathbf{k}}] &= -2 \sin(2\alpha) \cos(2\varphi) \cos \theta \end{aligned} \quad (4.38)$$

on déduit l'expression de la variance du déphasage à partir de (4.37) et (4.30) :

$$\Delta\varphi^2 = \Delta\varphi_0^2 \sin^2(2\alpha) \Delta_F h^2 \quad , \quad \Delta\varphi_0 = 2\Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} \quad (4.39)$$

$$\Delta_F h^2 \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] F[\omega] \quad (4.40)$$

Dans cette limite, la variance du bruit de phase est simplement proportionnelle à la variance  $\Delta_F h^2$  du bruit gravitationnel restreinte à des fréquences sélectionnées par le filtre  $F$ , c'est-à-dire les fréquences supérieures à l'inverse du temps de mesure  $1/T$ .

On fait l'application numérique pour le cas d'un Michelson de la taille de VIRGO qui correspond à  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et pour lequel l'approximation des grandes longueur d'onde est bien justifiée. On prend comme chiffres :

$$T = 1 \text{ an} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} \sim 2 \times 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1} \quad (4.41)$$

$$\Omega_{\text{phot}} = 3 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1} \quad , \quad \tau_{\text{phot}} = 10^{-5} \text{ s}$$

Les variances des bruits de phase s'écrivent alors pour les fonds astrophysique et cosmologique (voir la modélisation des spectres dans la section 3.C.2.2) :

$$\Delta\varphi^2[\text{astro}] \sim 2 \times 10^{-16} \quad (4.42)$$

$$\Delta\varphi^2[\text{cosmo}] \sim 7 \times 10^{-13} \left( \frac{\Omega_{\text{gw}}}{10^{-14}} \right) \quad (4.43)$$

On a pris  $\omega_{\text{ulf}} = H_0$  dans l'évaluation de la variance cosmique, mais le choix d'une autre coupure ne change pas beaucoup le résultat car la dépendance dans ce paramètre est logarithmique (voir section 3.C.2.2)

On constate que la décohérence reste négligeable, comme on pouvait s'y attendre car la taille de l'interféromètre ne compense pas la faible énergie cinétique des photons.

#### B.1.4 Discussions

À partir des résultats précédents, on peut discuter qualitativement l'effet de décohérence attendu dans diverses situations expérimentales dans lesquels des interférences à deux ondes se produisent.

On commence par discuter les expériences de type VLBI (Very Long Baseline Interferometer, voir [158] pour un article de revue) dont on a représenté le schéma de principe sur la figure (4.4). De la lumière provenant d'un astre en A est recombinaée en un point D à la surface de la Terre à l'aide de deux miroirs placés en B et C. On observe l'état d'interférence en fonction de la longueur de la base BC. Ce type d'interférométrie est réalisée avec des ondes radio dont les fréquences astrophysiques typiques sont de l'ordre de quelques GHz et les bases atteignent des longueurs typiques limitées par le diamètre de la Terre, c'est-à-dire en gros de

l'ordre de 10 000 km. La discussion que l'on donne ici s'adapte aussi au cas de l'interférométrie stellaire dans le domaine optique avec des bases beaucoup plus petites, de l'ordre de 100 m.

Par rapport à la partie précédente, on gagne beaucoup dans le temps d'interaction  $\tau_{\text{phot}}$  mais on perd en contrepartie sur l'angle d'ouverture  $2\alpha$ . On va montrer que les pertes dues à cet effet sont plus importantes que le gain dû à la grande distance.

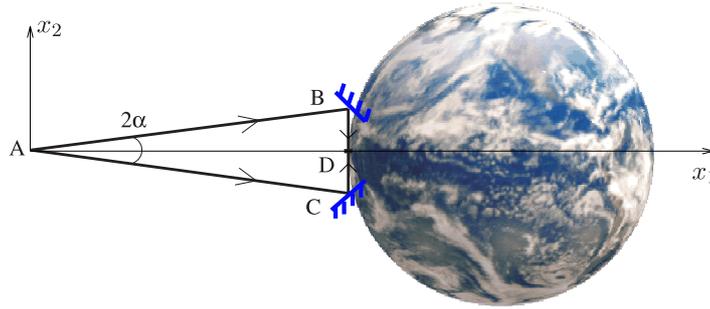


FIG. 4.4: Géométrie des expériences de type VLBI. La distance AB est en fait très grande devant la longueur de la base BC.

De la même façon que précédemment, on peut calculer l'amplitude  $\phi_k^\gamma$  et ensuite la variance du déphasage pour la comparer au cas du Michelson. Pour cela, on paramètre les points A, B, C et D de la façon suivante, en prenant l'origine des temps au niveau des miroirs B et C :

$$\begin{cases} x_A = (-c\tau_{\text{phot}}, 0, 0, 0) \\ x_D = (c\tau_{\text{phot}} \sin \alpha, c\tau_{\text{phot}} \cos \alpha, 0, 0) \\ x_B = (0, c\tau_{\text{phot}} \cos \alpha, c\tau_{\text{phot}} \sin \alpha, 0) \\ x_C = (0, c\tau_{\text{phot}} \cos \alpha, -c\tau_{\text{phot}} \sin \alpha, 0) \end{cases} \quad (4.44)$$

Et les vitesses normalisées s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \\ \mathbf{v} = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0) \\ \mathbf{w} = (0, 1, 0) \end{cases} \quad (4.45)$$

On a noté  $\mathbf{w}$  la vitesse le long du bras CD. On déduit alors l'amplitude  $\phi_k^\gamma(\alpha)$  :

$$\begin{aligned}
\phi_k^\gamma(\alpha) = & \frac{1}{2} \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} e^{i \frac{\omega \tau_{\text{phot}}}{2} (1 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}(\alpha))} \text{sinc} \left( \frac{\omega \tau_{\text{phot}} (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}(\alpha))}{2} \right) u^i(\alpha) u^j(\alpha) \mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \\
& + \frac{1}{2} \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} \frac{w^i w^j \mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]}{1 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{w}} e^{i \omega \tau_{\text{phot}} \sin \theta \cos \varphi \cos \alpha} \left( e^{-i \omega \tau_{\text{phot}} \sin \alpha} - e^{i \omega \tau_{\text{phot}} \sin \theta \sin \varphi \sin \alpha} \right) \\
& - \frac{1}{2} \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} e^{i \frac{\omega \tau_{\text{phot}}}{2} (1 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}(\alpha))} \text{sinc} \left( \frac{\omega \tau_{\text{phot}} (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}(\alpha))}{2} \right) v^i(\alpha) v^j(\alpha) \mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \\
& - \frac{1}{2} \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} \frac{w^i w^j \mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]}{1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{w}} e^{i \omega \tau_{\text{phot}} \sin \theta \cos \varphi \cos \alpha} \left( e^{-i \omega \tau_{\text{phot}} \sin \alpha} - e^{-i \omega \tau_{\text{phot}} \sin \theta \sin \varphi \sin \alpha} \right) \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Dans la limite  $\alpha \ll 1$ , on voit qu'on peut négliger les termes provenant des bras BD et CD. On se retrouve alors avec la même amplitude  $\phi_k^\gamma$  que celle d'un demi interféromètre de Michelson d'angle  $2\alpha$ , comme celui considéré dans les sections précédentes mais dans lequel on ne considère que les trajets de la séparatrice aux miroirs. Dans cette limite, l'amplitude s'écrit :

$$\begin{aligned}
\phi_k^\gamma(\alpha) \simeq & \frac{1}{2} \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} e^{i \frac{\omega \tau_{\text{phot}}}{2} (1 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}(\alpha))} \text{sinc} \left( \frac{\omega \tau_{\text{phot}} (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}(\alpha))}{2} \right) u^i(\alpha) u^j(\alpha) \mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \\
& - \frac{1}{2} \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} e^{i \frac{\omega \tau_{\text{phot}}}{2} (1 + \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}(\alpha))} \text{sinc} \left( \frac{\omega \tau_{\text{phot}} (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}(\alpha))}{2} \right) v^i(\alpha) v^j(\alpha) \mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \quad (4.47)
\end{aligned}$$

À ce niveau, on peut se raccorder aux résultats généraux de la section B.1.3. En particulier, la variance du bruit de phase, dans la limite des petits angles s'écrit :

$$\Delta\varphi^2 = \Omega_{\text{phot}}^2 \tau_{\text{phot}} \alpha^2 \int dx S_h[x/\tau_{\text{phot}}] F[x/\tau_{\text{phot}}] \tilde{g}[x] \quad (4.48)$$

On peut maintenant discuter chaque terme et le comparer à son équivalent dans la géométrie de Michelson. Puisque la fonction  $\tilde{g}[x]$  ne prend de valeurs significatives que pour  $|x| \lesssim 2\pi$ , on voit que plus  $\tau_{\text{phot}}$  est grand, moins il y a de fréquences qui participent à la décohérence puisque celles-ci sont qualitativement comprises entre 0 et  $\frac{2\pi}{\tau_{\text{phot}}}$ . D'autre part, en remarquant que  $2\tau_{\text{phot}}\alpha$  représente le temps de propagation sur la base BC, on voit qu'une expérience de type VLBI peut se comparer à un interféromètre de Michelson avec deux bras perpendiculaires dont la taille effective  $L$  serait donnée par :

$$L = c\tau_{\text{phot}}\alpha^2 = \alpha\text{BC} \ll \text{BC} \quad (4.49)$$

Cette longueur est beaucoup plus petite que la longueur de la base BC. En effet, avec des distances typiques de l'ordre de  $10^4$  années lumière pour les sources radio, l'angle  $\alpha$  est typiquement de l'ordre de  $10^{-13}$  rad. Enfin, la fréquence des ondes radio est environ 6 ordres de grandeur plus petites que les fréquences optiques.

En conclusion, la sensibilité des interférences réalisées à l'aide des VLBI est très inférieure à celle des grands interféromètres de Michelson servant à la détection des OG. La raison principale provient du très faible angle d'ouverture qui sépare les deux faisceaux qui interfèrent. La conclusion reste encore valable pour l'interférométrie stellaire optique.

On termine cette partie par une discussion très qualitative sur l'effet de décohérence attendu sur le projet LISA [8]. Cet appareil est un très grand détecteur d'OG constitué de 3 satellites formant un triangle qui orbite autour du soleil sur la trajectoire de la Terre. LISA peut former plusieurs signaux de type Michelson avec des bras de l'ordre de 5 millions de km et un angle entre les bras de  $\frac{\pi}{3}$ . En utilisant l'expression (4.32), on voit qu'on peut atteindre un facteur d'amplification de l'ordre de  $10^6$  par rapport aux détecteurs terrestres mais l'effet de décohérence reste encore négligeable. Même LISA, avec sa taille énorme, reste microscopique vis-à-vis de la décohérence gravitationnelle !

## B.2 Cavité Fabry-Perot

Jusqu'à présent, on a traité l'effet des OG sur un système d'interférences à deux ondes. On s'intéresse maintenant au cas d'une cavité Fabry-Perot dans laquelle se produisent des interférences à N ondes. On suppose cette cavité formée de deux miroirs A et B en chute libre. Dans ces conditions, comme dans les parties précédentes, seuls les déphasages propagatifs interviennent lorsqu'on se place dans un système de coordonnées TT. Le gain attendu avec cette configuration provient du fait que la lumière parcourt une grande distance dans la cavité avant de ressortir, ce qui lui permet d'accumuler un long temps d'interaction avec les OG tout en gardant une taille raisonnable.

### B.2.1 Expression du champ réfléchi par une cavité

On étudie le champ  $\mathcal{E}^{\text{out}}(t)$  réfléchi par la cavité et on note  $\mathcal{E}^{\text{in}}(t)$  le champ incident. On suppose celle-ci sans perte avec en outre un miroir de fond B parfaitement réfléchissant (coefficient de réflexion égal à 1). Le miroir d'entrée A est quant à lui caractérisé par un coefficient de réflexion  $r$  et un coefficient de transmission  $t$  en amplitude qui vérifient :

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 \quad , \quad r \equiv e^{-\gamma} \quad (4.50)$$

On a défini la quantité  $\gamma$  comme une caractéristique du coefficient de réflexion du miroir d'entrée. Le champ en sortie de cavité s'écrit comme une somme infinie de rayons qui interfèrent après un nombre  $n$  d'allers retours dans la cavité [159, 160] :

$$\mathcal{E}^{\text{out}}(t) = -\mathcal{E}^{\text{in}}(t)e^{-\gamma} + \frac{1 - e^{-2\gamma}}{e^{-\gamma}} \sum_{n \geq 1} e^{-n\gamma} \mathcal{E}^{\text{in}}(t - \delta t_n) \quad (4.51)$$

Le premier terme correspond au rayon directement réfléchi par la cavité tandis que la somme correspond à la contribution de la lumière qui rentre dans la cavité (voir figure (4.5)). La

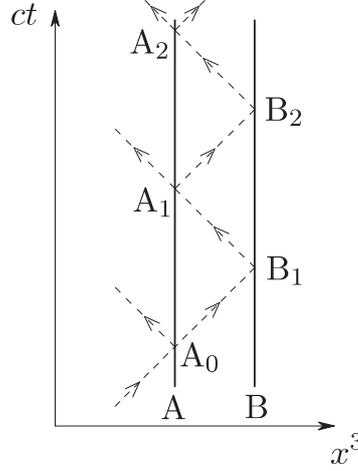


FIG. 4.5: Représentation dans l'espace-temps du trajet de la lumière dans une cavité Fabry-Perot en réflexion. On suppose que le miroir B est parfaitement réfléchissant. Le champ réfléchi par la cavité est alors relié au champ entrant par un déphasage. On note  $A_n$  et  $B_n$  les points de transmission et de réflexion dans l'espace-temps.

quantité  $\delta t_n$  représente le retard pris par le faisceau ayant effectué  $n$  aller-retours dans la cavité. Celui-ci s'écrit comme une contribution due à la propagation libre plus une contribution due aux OG, que l'on note  $\delta t_n^{gw}$  et que l'on va calculer :

$$\delta t_n = 2n\tau_{\text{phot}} + \delta t_n^{gw} \quad (4.52)$$

On a noté  $\tau_{\text{phot}}$  le temps pour faire un aller dans la cavité et  $2\tau_{\text{phot}}$  le temps d'un aller-retour dans la cavité. On suppose maintenant que le champ incident est monochromatique :

$$\mathcal{E}^{\text{in}}(t) = \mathcal{E}_0^{\text{in}} e^{-i\Omega_{\text{phot}}t} \quad (4.53)$$

de telle sorte que le champ réfléchi s'écrit :

$$\mathcal{E}^{\text{out}}(t) = \mathcal{E}_0^{\text{in}} e^{-i\Omega_{\text{phot}}t} e^{-\gamma} \left( -1 + (e^{2\gamma} - 1) \sum_{n \geq 1} e^{-n\gamma} e^{2in\Omega_{\text{phot}}\tau_{\text{phot}}} e^{i\Omega_{\text{phot}}\delta t_n^{gw}} \right) \quad (4.54)$$

Pour expliciter cette expression, il faut maintenant déterminer l'expression du retard  $\delta t_n^{gw}$ . Celui-ci est directement relié au déphasage  $\Delta\varphi_n$  pris par la lumière qui fait  $n$  aller-retours entre les deux miroirs :

$$\Delta\varphi_n = \Omega_{\text{phot}}\delta t_n^{gw} \quad (4.55)$$

Ce déphasage  $\Delta\varphi_n$  se calcule à l'aide des outils du second chapitre. En particulier, on écrit le retard  $\delta t_n^{gw}$  en fonction d'une amplitude  $\phi_k^\gamma[n]$  via la relation :

$$\Omega_{\text{phot}}\delta t_n^{gw}(t) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{\gamma=+,x} \phi_k^\gamma[n] h^\gamma[k] e^{-i\omega t} \quad (4.56)$$

On prend l'axe du Fabry-Perot dans la direction  $x^3$ . On note  $A_p$  (resp.  $B_p$ ) les points de passage de la lumière après  $p$  aller retours dans la cavité au niveau du miroir d'entrée (resp. miroir de sortie). Ces points sont représentés sur le diagramme d'espace-temps de la figure (4.5). On les paramètre en prenant comme origine des temps le point  $A_0$  correspondant au temps de la première réflexion du faisceau incident :

$$\begin{aligned} x_{A_p} &= (2pc\tau_{\text{phot}}, 0, 0, 0) \\ x_{B_p} &= ((2p-1)c\tau_{\text{phot}}, 0, 0, c\tau_{\text{phot}}) \end{aligned} \quad (4.57)$$

En introduisant les temps de phase qui se déduisent de (4.57) :

$$\begin{aligned} \eta_{A_p} &= 2p\tau_{\text{phot}} \\ \eta_{B_p} &= 2p\tau_{\text{phot}} - \tau_{\text{phot}}(1 + \cos\theta) \end{aligned} \quad (4.58)$$

l'amplitude  $\phi_k^\gamma[n]$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \phi_k^\gamma[n] &= \sum_{p=1}^n (\phi_k^\gamma[A_{p-1}B_p] + \phi_k^\gamma[B_pA_p]) \\ \phi_k^\gamma[A_{p-1}B_p] &= i \frac{\Omega_{\text{phot}}}{2\omega} \frac{\mathbf{e}_{33}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]}{1 - \cos\theta} (e^{-i\omega\eta_{B_p}} - e^{-i\omega\eta_{A_{p-1}}}) \\ \phi_k^\gamma[B_pA_p] &= i \frac{\Omega_{\text{phot}}}{2\omega} \frac{\mathbf{e}_{33}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]}{1 + \cos\theta} (e^{-i\omega\eta_{A_p}} - e^{-i\omega\eta_{B_p}}) \end{aligned} \quad (4.59)$$

On obtient finalement à l'aide de l'expression des temps de phase (4.58) :

$$\begin{aligned} \phi_k^\gamma[n] &= \frac{1}{2}\Omega_{\text{phot}}\tau_{\text{phot}} \mathbf{e}_{33}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \left[ e^{i\omega\tau_{\text{phot}}} \text{sinc}\left(\omega\tau_{\text{phot}} \frac{1 - \cos\theta}{2}\right) + \text{sinc}\left(\omega\tau_{\text{phot}} \frac{1 + \cos\theta}{2}\right) \right] \\ &\quad \times e^{-i\omega\tau_{\text{phot}} \frac{1 - \cos\theta}{2}} \frac{1 - e^{-2i\omega\tau_{\text{phot}}}}{1 - e^{-2i\omega\tau_{\text{phot}}}} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Cette amplitude a la même forme que celle associée à un seul bras d'un interféromètre de Michelson (première ligne) avec en plus un terme d'interférence (deuxième ligne) rendant compte de l'effet de coopération des multiples aller-retours des photons dans la cavité.

Le calcul du retard se déduit ensuite de l'expression (4.56). De façon générale, l'expression du retard en fonction de  $n$  est compliquée et le calcul ne peut être fait que numériquement. Dans la suite, on se place dans l'approximation des grandes longueurs d'onde pour laquelle l'expression (4.60) se simplifie.

### B.2.2 Calcul dans l'approximation quadrupolaire

Dans l'approximation des grandes longueurs d'onde,  $\tau_{\text{phot}}$  est suffisamment petit pour que les fréquences qui participent au spectre soient petites devant  $\frac{2\pi}{\tau_{\text{phot}}}$ . On peut donc développer

l'amplitude  $\phi_k^\gamma[n]$  à l'ordre le plus bas en  $\omega\tau_{\text{phot}}$ . Si on suppose en outre que  $n\omega\tau_{\text{phot}} \ll 1$  pour toutes les fréquences significatives du spectre gravitationnel, c'est-à-dire si l'approximation des grandes longueurs d'onde s'applique aussi à l'interféromètre déplié, le terme d'interférence devient proportionnel à  $n$  :

$$\frac{1 - e^{-2in\omega\tau_{\text{phot}}}}{1 - e^{-2i\omega\tau_{\text{phot}}}} \rightarrow n \quad (4.61)$$

L'amplitude s'écrit alors dans cette limite :

$$\phi_k^\gamma[n] \rightarrow n\Omega_{\text{phot}}\tau_{\text{phot}}\mathbf{e}_{33}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \quad (4.62)$$

Et on déduit finalement le retard :

$$\delta t_n^{\text{gw}}(t) \rightarrow n\tau_{\text{phot}}h_{33}(t) \quad (4.63)$$

Celui-ci est simplement proportionnel au nombre  $n$  d'aller retour et on peut calculer exactement l'expression (4.51) du champ réfléchi. L'effet des OG est alors équivalent à remplacer  $\tau_{\text{phot}}$  par la quantité perturbée  $\tau_{\text{phot}}(1 + \frac{1}{2}h_{33}(t))$ .

On obtient après quelques calculs :

$$\mathcal{E}^{\text{out}}(t) = \mathcal{E}^{\text{in}}(t) \times e^{2i\Omega_{\text{phot}}\tau_{\text{phot}}(1 + \frac{1}{2}h_{33}(t))} \frac{1 - e^{-\gamma - 2i\Omega_{\text{phot}}\tau_{\text{phot}}(1 + \frac{1}{2}h_{33}(t))}}{1 - e^{-\gamma + 2i\Omega_{\text{phot}}\tau_{\text{phot}}(1 + \frac{1}{2}h_{33}(t))}} \quad (4.64)$$

La fraction intervenant dans le terme de droite est de module unité, ce qui montre que la cavité agit comme un déphaseur en réflexion. Cela provient simplement du fait qu'on a supposé celle-ci sans perte avec un miroir de fond parfaitement réfléchissant de telle sorte que toute l'énergie qui entre dans la cavité doit intégralement en sortir après un certain temps de transit. On montre après quelques calculs que le déphasage  $\chi(t)$  entre le faisceau réfléchi et le faisceau incident s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\text{out}}(t) &= \mathcal{E}^{\text{in}}(t)e^{i\chi(t)} \\ \chi(t) &= -\text{Arctan} \left( \frac{\text{sh}\gamma \sin [2\Omega_{\text{phot}}\tau_{\text{phot}}(1 + \frac{1}{2}h_{33}(t))] }{1 - \text{ch}\gamma \cos [2\Omega_{\text{phot}}\tau_{\text{phot}}(1 + \frac{1}{2}h_{33}(t))] } \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

En l'absence de perturbation, la variation du déphasage  $\chi$  en fonction de la fréquence  $\Omega_{\text{phot}}$  du champ incident subit une forte variation au niveau des fréquences de résonances de la cavité qui s'écrivent :

$$\Omega_n^{(0)} \equiv \frac{n\pi}{\tau_{\text{phot}}} \quad (4.66)$$

L'indice (0) signifie qu'il s'agit des fréquences de résonance de la cavité en l'absence de perturbation. On voit sur l'expression (4.65) que l'effet des OG est formellement équivalent à un changement de la longueur de la cavité, c'est-à-dire aussi de la fréquence  $\Omega_{\text{phot}}$ . Autrement dit l'effet des OG se manifeste directement sur la courbe (4.6) comme un déplacement du

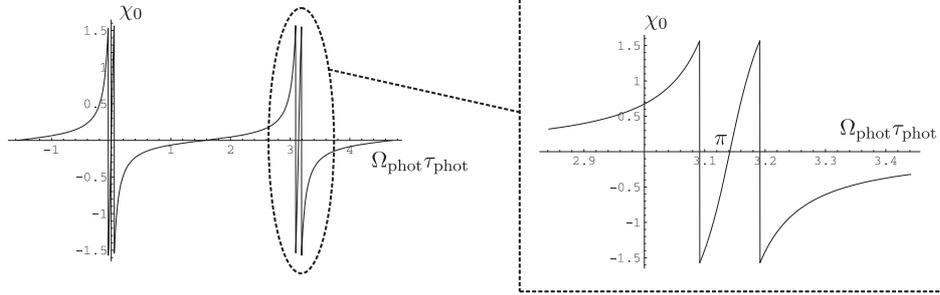


FIG. 4.6: Courbe représentant le déphasage entre le champ incident et le champ réfléchi par la cavité en l'absence de perturbation en fonction de la fréquence  $\Omega_{\text{phot}}$ . Au voisinage des fréquences de résonances  $\frac{n\pi}{\tau_{\text{phot}}}$  le déphasage subit une variation rapide. L'effet des OG se réduit à un déplacement le long de cette courbe. On voit que les points de fonctionnement les plus sensibles se situent au voisinage des fréquences de résonance.

point de fonctionnement. On voit alors que les points de fonctionnement les plus sensibles se situent au voisinage des fréquences de résonance  $\Omega_n^{(0)}$ , là où la pente est maximale.

En développant le déphasage  $\chi(t)$  à l'ordre un dans la perturbation, autour de sa valeur non perturbée  $\chi^{(0)}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\chi(t) &= \chi^{(0)} + \delta\chi(t) \\ \delta\chi(t) &= \frac{\text{sh}\gamma}{\text{ch}\gamma - 1} \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} h_{33}(t) = \frac{1+r}{1-r} \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} h_{33}(t)\end{aligned}\quad (4.67)$$

On voit donc que le déphasage  $\chi(t)$  est proportionnel à un temps effectif d'interaction  $\tau_{\text{eff}}$  donné par le produit du temps  $\tau_{\text{phot}}$  par la finesse  $F$  :

$$\tau_{\text{eff}} = F \tau_{\text{phot}} \quad , \quad F \equiv \frac{1+r}{1-r} \simeq \frac{2}{\gamma}\quad (4.68)$$

La finesse représente l'augmentation de sensibilité due aux multiples passages de la lumière dans la cavité.

### B.2.3 Bruit équivalent sur la fréquence de résonance

On peut aussi interpréter l'effet des OG comme un déplacement des fréquences de résonances  $\Omega_n(t)$ , qui s'écrivent :

$$\Omega_n(t) = \Omega_n^{(0)} \left( 1 + \frac{1}{2} h_{33}(t) \right)\quad (4.69)$$

La fréquence de résonance n'est jamais parfaitement définie car la cavité possède des fluctuations mécaniques de sa longueur et donc du temps de vol  $\tau_{\text{phot}}$ . On caractérise maintenant

le bruit dû aux OG afin de le comparer à celui dû aux vibrations mécaniques. Ce bruit se mesure expérimentalement en faisant interférer le champ réfléchi par la cavité avec le champ incident. En choisissant pour  $\Omega_{\text{phot}}$  une des fréquences de résonances  $\Omega_n^{(0)}$  de façon à se placer au voisinage d'un des points de fonctionnement vus plus haut, on obtient comme intensité résultant de cette interférence :

$$I(t) = I_0(1 + \sin \delta\chi(t)) \simeq I_0(1 + \delta\chi(t)) \quad (4.70)$$

Le bruit d'intensité moyenné sur un temps  $T$  s'écrit alors grâce à (4.67) :

$$\Delta_T I^2 = I_0^2 \frac{4}{\gamma^2} (\Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}})^2 \Delta_T h^2 \quad (4.71)$$

Ce bruit est à comparer au bruit mécanique sur la longueur de la cavité ainsi qu'aux bruits de fréquence du laser. Ces deux bruits se condensent simplement en considérant le bruit sur la quantité  $\Phi \equiv \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}}$ . On a alors à cause de ces bruits techniques :

$$(\Delta_T I^2)_T^{\text{tech.}} = I_0^2 \frac{4}{\gamma^2} \Delta_T \Phi^2 \quad (4.72)$$

Comme on pouvait s'y attendre la comparaison entre les bruits technique et gravitationnel fait intervenir la comparaison entre  $\Delta_T \Phi^2 / \Phi^2$  et  $\Delta_T h^2$ . Dans la pratique, les meilleures cavités ont des bruits techniques beaucoup plus grands que la variance du bruit gravitationnel. Autrement dit, même pour les cavités les plus stables, le bruit gravitationnel est négligeable devant les bruits techniques, tout comme le bruit optique dans HYPER était dominé par le bruit de vibration mécanique des miroirs.

Cette conclusion n'est évidemment pas vraie pour les détecteurs d'OG tels que VIRGO ou LIGO. Ceux-ci visent à détecter des événements tels que des collisions de trous noirs ou d'étoiles à neutrons [11] et les fréquences correspondantes sont celles pour lesquelles les détecteurs sont optimisés (quelques Hz à quelques kHz). Dans cette bande passante de détection, les signaux attendus sont plus grands que les bruits instrumentaux.

## B.3 Autres détecteurs optiques d'OG

### B.3.1 Mesure d'effets Doppler

Dans cette section, on s'intéresse à l'effet des OG sur la mesure d'un effet Doppler sur un aller-retour d'une onde radio entre une station au sol et une sonde interplanétaire (« Doppler Tracking » [150, 154]). Ces mesures d'effet Doppler ont été utilisées pour obtenir les seules informations expérimentales dont on dispose aujourd'hui sur les OG aux fréquences  $\sim 10^{-5} - 1$  Hz. La sensibilité de ces mesures aux OG est maximale pour des fréquences égales à l'inverse du temps mis par le lien radio pour parcourir la distance de la Terre à la sonde ( $10^3 - 10^4$  s typiquement). Pour le moment, ces expériences ont été réalisées avec des sondes non dédiées à

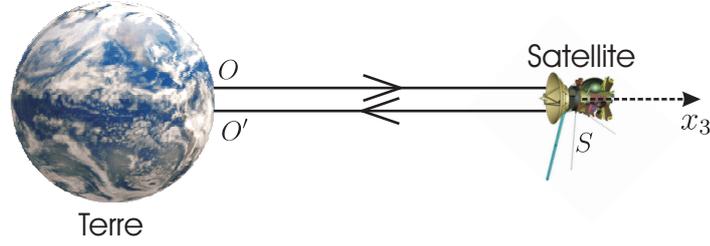


FIG. 4.7: Géométrie correspondant à la mesure d'un effet Doppler sur le trajet aller-retour d'un faisceau radio entre un observateur O et O' sur Terre et une sonde interplanétaire S.

cette tâche, comme par exemple Voyager 1 [161], Pioneer 10 et 11 [162], Ulysses [163], Galileo et Mars Observer [164], Cassini [165].

Le principe de la méthode est la suivante. À l'instant  $t = 0$ , une onde radio est envoyée depuis une station au sol O jusqu'à une sonde S à partir de laquelle elle est renvoyée de façon cohérente vers l'observateur sur Terre qui la reçoit à l'instant  $t$  (ce point d'espace-temps est noté O'). À ce moment, l'observateur mesure la fréquence  $\Omega(t)$  et la compare à celle de l'émission  $\Omega_0$ . On détermine alors le décalage Doppler  $y(t)$  :

$$y(t) = \frac{\Omega(t) - \Omega_0}{\Omega_0} \quad (4.73)$$

On calcule ce signal Doppler en utilisant les outils du second chapitre. On commence donc par calculer le déphasage induit par les OG sur le trajet de la lumière, et on dérive celui-ci pour obtenir la variation de fréquence. La sonde ainsi que la Terre sont toutes les deux en mouvement géodésique. L'observateur a sa position définie dans un système de coordonnées lié à la Terre. Si la sonde possède une vitesse faible et en négligeant les effets liés à la rotation de la Terre, on peut négliger les termes de bords et le déphasage s'écrit comme un déphasage propagatif.

On paramètre les points O, S et O' de la façon suivante (voir figure (4.7)), en prenant pour origine des temps le moment où l'onde radio revient au niveau de l'observateur :

$$\begin{aligned} x_O &= (-2c\tau_{\text{phot}}, 0, 0, 0) \\ x_S &= (-c\tau_{\text{phot}}, 0, 0, c\tau_{\text{phot}}) \\ x_{O'} &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.74)$$

$\tau_{\text{phot}}$  est le temps d'un aller entre l'observateur et la sonde,  $2\tau_{\text{phot}}$  étant le temps d'aller retour. On rappelle que le déphasage  $\Delta\varphi(t)$  sur un aller retour s'écrit de façon générale comme (voir équation (2.91)) :

$$\Delta\varphi(t) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{\gamma=\pm} \phi_k^\gamma h^\gamma[k] e^{-i\omega t} \quad (4.75)$$

On calcule l'amplitude  $\phi_k^\gamma$  correspondant au trajet aller retour de l'onde radio à l'aide de deux équations du type (4.21) :

$$\begin{aligned}\phi_k^\gamma &= \phi_k^\gamma[\text{OS}] + \phi_k^\gamma[\text{SO}'] \\ &= \frac{1}{2} \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} e^{i\omega\tau_{\text{phot}}} \left[ e^{i\frac{\omega\tau_{\text{phot}}}{2}(1+\cos\theta)} \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_{\text{phot}}(1-\cos\theta)}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\frac{\omega\tau_{\text{phot}}}{2}(1-\cos\theta)} \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_{\text{phot}}(1+\cos\theta)}{2}\right) \right] \mathbf{e}_{33}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]\end{aligned}\quad (4.76)$$

La variation de fréquence induite par les OG est donnée par l'équation :

$$\Delta\Omega(t) = \frac{d\Delta\varphi(t)}{dt} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{\gamma=\pm} (-i\omega\phi_k^\gamma) h^\gamma[k] e^{-i\omega t} \quad (4.77)$$

Autrement dit, dans l'espace de Fourier le bruit de fréquence est caractérisé non pas par  $\phi_k^\gamma$  comme c'est le cas pour le déphasage, mais par la quantité  $-i\omega\phi_k^\gamma$ . On peut écrire :

$$\begin{aligned}-i\omega\phi_k^+ &= \Omega_{\text{phot}} r_\theta[\omega] \quad , \quad -i\omega\phi_k^\times = 0 \\ r_\theta[\omega] &= \frac{\cos\theta - 1}{2} - \cos\theta e^{i\omega\tau_{\text{phot}}(1+\cos\theta)} + \frac{1 + \cos\theta}{2} e^{2i\omega\tau_{\text{phot}}}\end{aligned}\quad (4.78)$$

On déduit la réponse du signal Doppler  $y(t)$  :

$$y(t) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} r_\theta[\omega] h^+[k] e^{-i\omega t} \quad (4.79)$$

Cette réponse a été étudiée en détail [150, 152, 154] pour les OG créées par une binaire. Puisque la binaire a une direction  $\hat{\mathbf{k}}_{\text{gw}}$  fixe dans le ciel, ce cas correspond à étudier la réponse à une OG de fréquence quelconque se propageant dans une direction fixe. Dans ce cas, on peut remplacer les quantités  $h^\gamma[k]$  par :

$$h^\gamma[k] = 4\pi\delta^2(\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}_{\text{gw}}) \frac{4\pi^3 c^2}{\omega} \delta(k^2) h^\gamma[\omega] \quad (4.80)$$

Le signal Doppler s'écrit alors :

$$y(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} r_\theta[\omega] h^+[\omega] e^{-i\omega t} \quad (4.81)$$

En définissant la fonction à 3 impulsions  $r_\theta(t)$  (Doppler 3-pulse response function [150, 152, 154]) comme étant la transformée de Fourier inverse de  $r_\theta[\omega]$ , on obtient finalement :

$$\begin{aligned}y(t) &= \int ds r_\theta(t-s) h^+(s) \\ h^+(s) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} h^+[\omega] e^{-i\omega s} \\ r_\theta(\tau) &= \frac{\cos\theta - 1}{2} \delta(\tau) - \cos\theta \delta(\tau - \tau_{\text{phot}}(1 + \cos\theta)) + \frac{1 + \cos\theta}{2} \delta(\tau - 2\tau_{\text{phot}})\end{aligned}\quad (4.82)$$

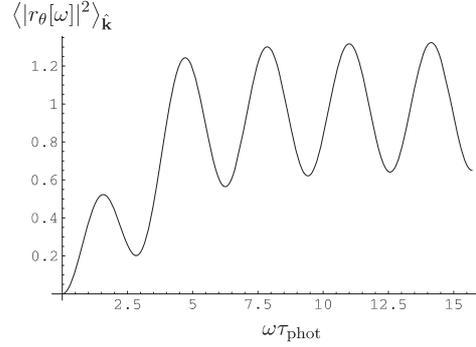


FIG. 4.8: Représentation de  $\langle |r_\theta[\omega]|^2 \rangle_{\hat{\mathbf{k}}}$  en fonction de  $\omega\tau_{\text{phot}}$ . Cette fonction de réponse tend vers zéro à fréquence nulle, puis tend vers la fonction  $1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega\tau_{\text{phot}})$ .

On retrouve ici la fonction discutée en détail dans [154] par exemple.

Maintenant on ne regarde plus une binaire, mais l'ensemble des sources qui créent le spectre gravitationnel  $S_h[\omega]$ . On peut caractériser le bruit de fréquence par la variance  $\langle y^2(t) \rangle_T$  définie sur un temps de mesure  $T \equiv 1/\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \langle y^2(t) \rangle_T &= \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] F[\omega] \times \frac{5}{2} \left( \frac{\omega}{\Omega_{\text{phot}}} \right)^2 \sum_{\gamma=+, \times} \langle |\phi_k^\gamma|^2 \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] F[\omega] \langle |r_\theta[\omega]|^2 \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Le filtre  $F[\omega]$  coupe les fréquences inférieures à  $1/T$ . À partir de l'expression (4.78) de  $r_\theta[\omega]$ , on montre que :

$$\begin{aligned} \langle |r_\theta[\omega]|^2 \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} &= \frac{3(x^3 - 3x + 2 \sin(2x)) - x(3 + x^2) \cos(2x)}{3x^3} \\ x &\equiv \omega\tau_{\text{phot}} \end{aligned} \quad (4.84)$$

On retrouve ici une fonction d'appareil  $\mathcal{A}[\omega] \equiv \langle |r_\theta[\omega]|^2 \rangle_{\hat{\mathbf{k}}}$  similaire à l'équation (22) de [152]. On a représenté l'allure de cette fonction sur la figure (4.8). En utilisant les modèles de spectre de la section 3.C.2.2, on déduit la variance du bruit sur le signal Doppler :

$$\langle y_{\text{astro}}^2(t) \rangle_T \sim 10^{-10} \quad , \quad T = 40 \text{ jours} \quad (4.85)$$

$$\langle y_{\text{cosmo}}^2(t) \rangle_T \sim 2 \times 10^{-27} \left( \frac{\Omega_{\text{gw}}}{10^{-14}} \right) \quad (4.86)$$

On a pris 40 jours comme temps de mesure, ce qui est le maximum atteint actuellement avec la sonde Cassini qui se trouve à  $\tau_{\text{phot}} \sim 5 \times 10^3$  s.

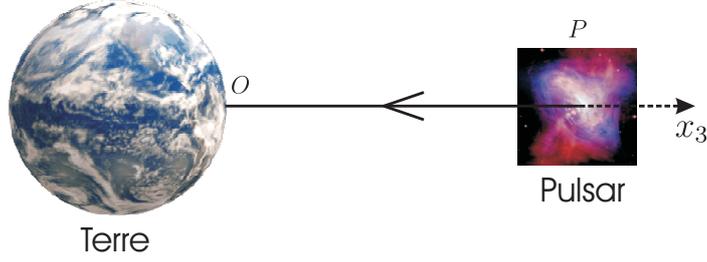


FIG. 4.9: Configuration d'une expérience de mesure de temps d'arrivée de signaux émis par un pulsar distants d'une longueur  $c\tau_{\text{phot}}$  dans la direction  $x_3$ .

La encore, ces bruits sont très faibles devant ceux mesurés expérimentalement sur les sondes [154]. Autrement dit, le bruit induit par les OG sur la lumière effectuant un aller-retour entre la Terre et une sonde interplanétaire est négligeable devant les sources de bruit classiques affectant la vélocimétrie Doppler de la sonde.

### B.3.2 Mesure de temps d'arrivée

Dans cette section, on donne une description très rapide concernant le bruit ajouté par les OG sur les temps d'arrivée de signaux électromagnétiques provenant de pulsars lointains (voir [156] pour une revue détaillée). De très nombreux papiers ont déjà traité ce problème [166, 167, 168]. On montre ici que les méthodes générales développées dans le second chapitre permettent de retrouver le spectre des fluctuations des temps d'arrivée induites par les OG.

Contrairement au cas précédent, il n'y a pas d'aller retour de la lumière, mais seulement un aller simple entre le pulsar P et l'observateur O, comme représenté sur la figure (4.9). En paramétrant ces points de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_P &= (-c\tau_{\text{phot}}, 0, 0, c\tau_{\text{phot}}) \\ x_O &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.87)$$

on déduit l'expression de l'amplitude  $\phi_k^\gamma$  :

$$\phi_k^\gamma = \frac{1}{2} \Omega_{\text{phot}} \tau_{\text{phot}} e^{i\omega\tau_{\text{phot}} \frac{1+\cos\theta}{2}} \text{sinc} \left( \frac{\omega\tau_{\text{phot}}(1+\cos\theta)}{2} \right) \mathbf{e}_{33}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \quad (4.88)$$

La variance du bruit de phase se déduit alors de l'équation :

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle_T = \frac{5}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] F[\omega] \sum_{\gamma=+, \times} \langle |\phi_k^\gamma|^2 \rangle_{\hat{\mathbf{k}}} \quad (4.89)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \langle \Delta\varphi^2 \rangle_T &= \frac{5}{3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \left( \frac{\Omega_{\text{phot}}}{\omega} \right)^2 S_h[\omega] F[\omega] B(\omega\tau_{\text{phot}}) \\ B(x) &\equiv \frac{3}{4} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^5 \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \sin^2 \left( \frac{x(1 + \cos \theta)}{2} \right) = 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{2x - \sin(2x)}{x^3} \right) \end{aligned} \quad (4.90)$$

où on a défini la fonction  $B(x)$  intervenant dans la détermination du spectre de bruit des temps d'arrivée de signaux [167]. Cette fonction est simplement reliée à notre fonction de réponse d'appareil  $\mathcal{A}[\omega]$  par la relation :

$$\mathcal{A}[\omega] = \frac{5}{3} \left( \frac{\Omega_{\text{phot}}}{\omega} \right)^2 B(\omega\tau_{\text{phot}}) \quad (4.91)$$

Dans les expériences qui nous intéressent, la quantité mesurée est donnée par le résidu  $\mathcal{R}$  des temps d'arrivée c'est-à-dire la différence entre le temps d'arrivée observé et le temps d'arrivée calculé [166]. On peut maintenant relier la variance sur les résidus  $\mathcal{R}$  en fonction de celle calculée précédemment sur la phase. On obtient ainsi [166] :

$$\Delta_T \mathcal{R}^2 = \frac{5}{3} T^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} \left( \frac{\Omega_{\text{phot}}}{\omega} \right)^2 S_h[\omega] F[\omega] B(\omega\tau_{\text{phot}}) \text{sinc}^2 \left( \frac{\omega T}{2} \right) \quad (4.92)$$

Le bruit induit par le fond astrophysique est négligeable devant les bruits techniques. Pour le fond cosmologique, si on assimile tout le bruit technique à un bruit gravitationnel, on obtient une contrainte sur la valeur du paramètre  $\Omega_{\text{gw}}$  qui caractérise le fond relique pour une fréquence de l'ordre de l'inverse du temps de parcours  $\tau_{\text{phot}}$  [168] :

$$\Omega_{\text{gw}} \lesssim 10^{-8} \quad , \quad \omega \sim 10^{-8} \quad (4.93)$$

C'est cette donnée que nous avons utilisé pour discuter les contraintes sur le fond cosmologique (section 2.A.3.3).

## C Les interféromètres atomiques

Dans cette partie, on se concentre sur la possibilité d'utiliser des interféromètres atomiques pour rechercher la frontière entre les objets quantiques et les objets classiques. Comme on l'a déjà signalé, ceux-ci offrent l'avantage considérable de permettre une augmentation de l'énergie cinétique. Par contre, un facteur géométrique  $\sin^2(2\alpha)$  grand et une grande énergie cinétique sont deux conditions difficilement compatibles l'une avec l'autre.

Le second chapitre a montré que le temps de décohérence était bien plus grand que le temps de mesure de n'importe quelle expérience d'interférométrie atomique. D'un autre côté, les objets classiques tels que la Lune sont décohérés très rapidement, et cette fois la décohérence n'est pas observable car elle est trop rapide. Cependant, entre ces deux domaines se situe la frontière qui délimite le monde classique du monde quantique. La mise en évidence de cette frontière à l'aide d'un système « mésoscopique » constitue un enjeu majeur pour la théorie de la mesure quantique.

Cette frontière a déjà été explorée dans des expériences d'électrodynamique quantique en cavité dans lesquels on peut maîtriser le couplage à l'environnement et étudier la chute de contraste engendrée sur une expérience d'interférence [169]. Les fluctuations testées dans ces expériences ne sont pas liées à l'environnement gravitationnel mais plutôt à l'environnement électromagnétique. Des expériences récentes telles que celles de Zeilinger [70] ont pour but de tester les limites ultimes pour des interférences impliquant des objets de plus en plus gros. La question de limites liées aux fluctuations intrinsèques de l'espace-temps se pose alors naturellement [170]. La décohérence gravitationnelle étudiée dans cette thèse fournit une réponse de principe à cette question.

Elle fournit en particulier des nombres calculables dès que les paramètres pertinents sont connus. Il convient donc de discuter ces nombres expérience par expérience. Après avoir passé en revue ces expériences (section C.1), on discute dans la section C.2 les possibilités de s'approcher de la frontière. On esquisse enfin dans C.3 les perspectives ouvertes par des techniques expérimentales encore en développement.

### C.1 Tour d'horizon des différents interféromètres atomiques

L'interférométrie atomique s'est développée de façon très rapide à partir du début des années 90, et de nombreuses solutions expérimentales existent à l'heure d'aujourd'hui. Nous en donnerons quelques unes qui nous paraissent les plus prometteuses concernant la décohérence gravitationnelle, mais nous laissons le soin au lecteur de se référer aux ouvrages de référence pour plus de détails [171].

Les parties précédentes ont montré que le paramètre pertinent était l'énergie cinétique via le terme  $\Delta K$ . Il est alors commode pour la comparaison de classer les interféromètres atomiques selon la valeur de l'énergie cinétique transférée aux ondes de matières au niveau des miroirs et séparatrices. Pour préparer la discussion des ordres de grandeur, il est également

important de présenter les autres paramètres pertinents, en particulier l'angle de séparation.

Premièrement, le transfert d'énergie cinétique peut se faire par échange d'impulsion avec des photons à travers un processus Raman comme dans le cas du projet HYPER [172]. Dans celui-ci, ce transfert de quantité de mouvement vaut  $2\hbar K$ , avec un vecteur d'onde  $K$  dans le domaine microonde. Exprimé en terme d'énergie, ce transfert d'impulsion correspond à une différence d'énergie cinétique de l'ordre de  $2 \times 10^{-9}$  eV entre les deux chemins qui interfèrent. On peut aussi envisager un interféromètre de Ramsey-Bordé [173] dans lequel des photons optiques sont absorbés et émis, permettant des transferts d'énergie dans le domaine des énergies optiques.

Ce transfert d'énergie peut être augmentée par un processus multiphotonique dans lequel on communique à l'atome jusqu'à 140 impulsions de photons [174]. Même avec ce procédé, l'énergie transférée reste cependant encore faible et les angles de séparation limités. Pour obtenir des angles de séparation plus importants, on peut exploiter la force dipolaire entre l'atome et le champ [111]. Par exemple, dans l'expérience [175], l'interaction entre le dipole atomique et le champ créé par des lasers hors résonance a permis de réaliser un angle de séparation de 7 degrés.

On peut aussi améliorer la situation en utilisant une interaction avec un champ magnétique. Le couplage qui intervient est alors un couplage en  $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  où  $\vec{\mu}$  est le moment magnétique de l'atome. Cette interaction a permis de réaliser des séparatrices [172], des miroirs [176] et des guides d'onde de matière [177] au dessus d'une surface (atom chip). On peut ainsi réaliser un interféromètre [178] dans lequel l'angle de séparation est grand (jusqu'à 20 degrés). L'énergie du piège magnétique maintenant les atomes au dessus de la surface permet de faire circuler des atomes ayant des énergies cinétiques de l'ordre de  $10^{-7}$  eV. Avec cette technique de guidage magnétique, on peut aussi faire circuler des objets beaucoup plus gros que des atomes, comme par exemple des condensats de Bose-Einstein.

Les méthodes précédentes utilisent des atomes lents. Par exemple le guidage magnétique ne convient que jusqu'à des vitesses de l'ordre de 10 m/s [179]. Or, comme on le voit sur l'expression (4.94), la vitesse intervient à la puissance troisième pour une taille donnée de l'interféromètre et constitue donc un paramètre important. Il faut donc considérer également le cas des interféromètres à atomes rapides pour lesquels les énergies cinétiques sont plus importantes. La première solution consiste à utiliser l'interaction avec la lumière pour construire un interféromètre de Ramsey-Bordé avec des atomes thermiques [180]. Les angles de séparation dans une telle expérience sont de l'ordre de  $20 \mu\text{rad}$  pour une vitesse de  $700 \text{ m.s}^{-1}$ .

Des potentiels dipolaires de l'ordre de 1 – 100 meV [181] permettent également d'obtenir des transferts d'impulsion plus grands qu'avec un couplage Raman [182]. Par exemple, il a été prouvé expérimentalement qu'il était possible de transférer  $42\hbar K$  d'impulsion dans le domaine optique à l'aide d'un réseau magnéto-optique sur des atomes d'Hélium supersoniques [183] (voir aussi [184]).

Notons aussi que l'interaction entre un dipole atomique et un réseau optique permet d'accélérer linéairement un atome ou une molécule jusqu'à des vitesses de l'ordre de  $10 \text{ km.s}^{-1}$  [185],

ce qui correspond à une énergie de l'ordre de 15 eV. De telles énergies demandent de concevoir des séparatrices et des miroirs différents de ceux vus précédemment. Une piste prometteuse concerne la diffraction d'atomes excités par un réseau de fentes nanométriques qui permet d'atteindre des angles de l'ordre de 60 degrés. L'interaction de Van Der Waals entre des atomes excités et le bord des fentes est alors responsable d'un transfert d'énergie de l'ordre de l'eV correspondant à la désexcitation de l'atome au passage de la fente [186].

Enfin, la dernière technique de séparation de faisceaux que je présente consiste en la réalisation de réseaux de fentes matérielles de diffraction. De nombreux interféromètres de ce type ont déjà été réalisés, par exemple un interféromètre de Mach-Zehnder [187] avec des molécules de Na<sub>2</sub> supersoniques. D'autre part, afin d'améliorer le comportement de ces interféromètres au fur et à mesure que la masse augmente, l'équipe de Zeilinger a construit un interféromètre de Talbot Von Laue avec des fentes matérielles [70]. Cette équipe possède le record en ce qui concerne l'observation d'interférence avec des objets lourds et chauds. En particulier, des interférences ont été observées avec une molécule de fluorofullerene C<sub>60</sub>F<sub>48</sub> (voir figure (4.10)). L'énergie cinétique en jeu est de l'ordre de 100 meV.

Pour tous les interféromètres atomiques discutés jusqu'à présent, la décohérence gravitationnelle reste un effet négligeable, comme le montrent les discussions de la section suivante. En effet, l'expérience la plus susceptible d'être sensible à la décohérence gravitationnelle, à savoir l'expérience de l'équipe de Zeilinger, ne permet que d'atteindre une variance de l'ordre de  $10^{-8}\alpha^2$ , avec  $\alpha \ll 1$  et si on fait l'hypothèse haute  $S_h \sim 10^{-34} \text{ Hz}^{-1}$ .

## C.2 Discussions sur le seuil de décohérence

On montre dans cette partie que les techniques simples de séparation d'un faisceaux atomique, basées sur la diffusion de photon ou la diffraction par un réseau de fentes matérielles ne permettent pas d'atteindre le seuil de décohérence gravitationnelle, du moins avec les technologies actuelles.

Comme on peut le voir sur l'équation (4.4), le challenge pour atteindre le seuil de décohérence avec des interféromètres atomique consiste à atteindre à la fois un angle  $\alpha$  grand et une énergie cinétique importante. De façon plus précise, si on suppose qu'on dispose d'un appareil de taille  $D$  (pour une expérience de laboratoire, cette distance est typiquement de l'ordre de 1 m), la variance (4.4) caractérisant la décohérence s'écrit :

$$\Delta\varphi_{\text{at}}^2 \sim \frac{m_{\text{at}}^2 v_{\text{at}}^3}{4\hbar^2} D \sin^2(2\alpha) S_h \quad (4.94)$$

Autrement dit, les trois paramètres importants qui influent sur la décohérence sont la masse, la vitesse et l'angle d'ouverture. Ces trois paramètres sont en fait dépendants les uns des autres puisqu'une grande vitesse par exemple implique souvent un faible angle d'ouverture  $2\alpha$ . On discute ces relations dans la suite en envisageant différentes solution pour séparer les faisceaux atomiques.

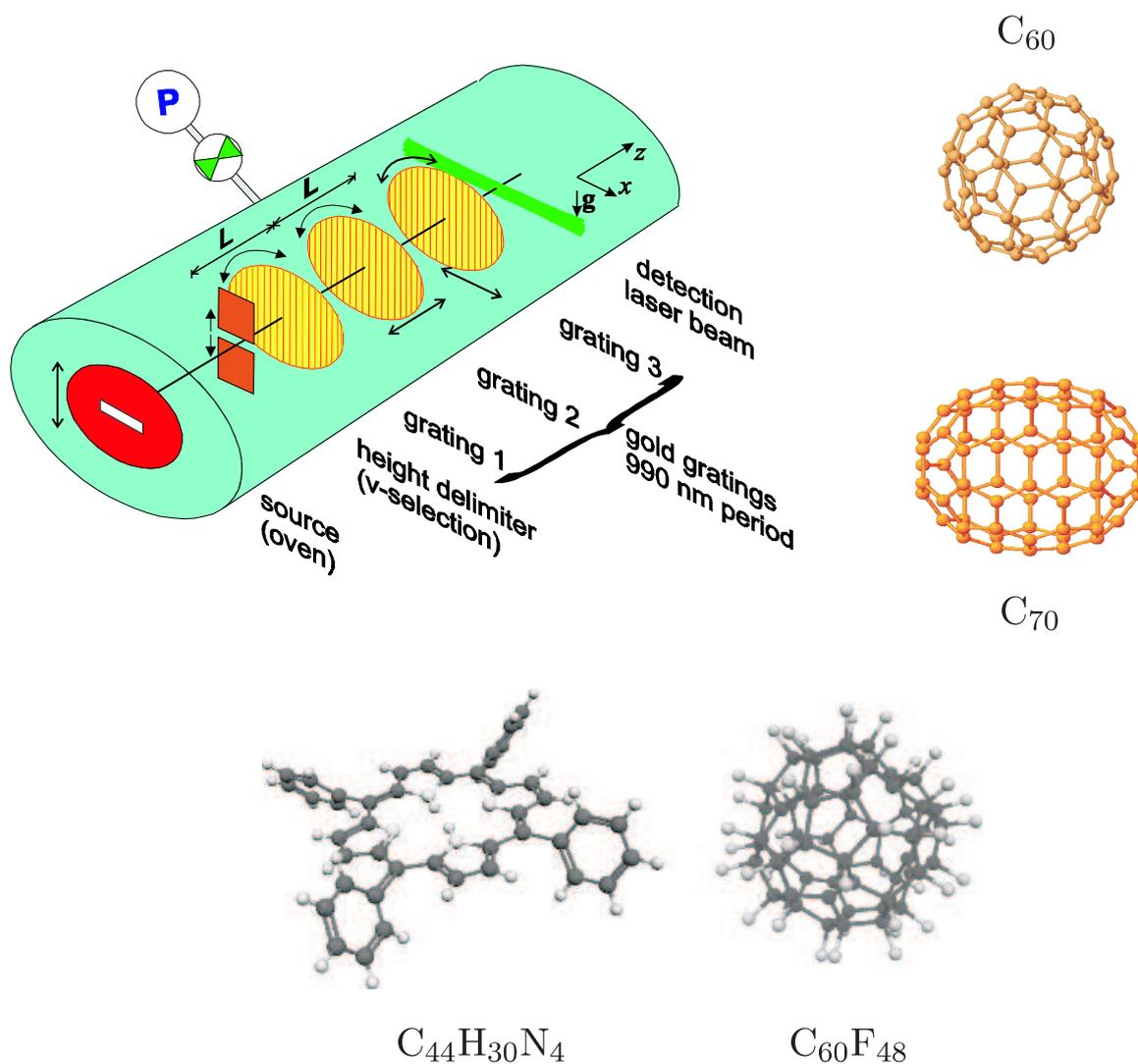


FIG. 4.10: Interféromètre de Talbot Von Lau. Des interférences quantiques ont été observées avec les molécules représentées, le record en énergie cinétique étant obtenu avec une molécule de fluorofullerene C<sub>60</sub>F<sub>48</sub>.

Il est nécessaire de disposer d'une grande valeur de l'énergie cinétique pour atteindre un effet significatif de décohérence. De ce point de vue, les techniques de déviation de faisceaux atomiques présentées plus haut ne sont pas suffisamment efficaces aujourd'hui. Supposons par exemple que la séparatrice soit jouée par un processus d'échange d'impulsions  $N \times \hbar K = N \frac{\hbar \Omega_{\text{phot}}}{c}$  avec  $N$  photons de fréquence  $\Omega_{\text{phot}}$ . Dans ce cas, on montre à partir de l'expression (4.94) que la variance s'écrit :

$$\Delta\varphi_{\text{at}}^2 \sim \Omega_{\text{phot}}^2 \frac{D}{c} S_h \times N^2 \frac{v_{\text{at}}}{c} \quad (4.95)$$

On définit  $\tau_{\text{phot}} \equiv \frac{D}{c}$  comme étant le temps que mettrait un photon à parcourir l'interféromètre s'il était tout optique. L'expression précédente peut alors se comparer à une variance optique de la façon suivante :

$$\Delta\varphi_{\text{at}}^2 \sim \Delta\varphi_{\text{phot}}^2 \times N^2 \frac{v_{\text{at}}}{c} \quad , \quad \Delta\varphi_{\text{phot}}^2 = \Omega_{\text{phot}}^2 \tau_{\text{phot}} S_h \quad (4.96)$$

Autrement dit, utiliser des atomes défléchis par des photons n'est avantageux par rapport à la solution tout optique ayant la même taille  $D$  qu'à la condition que :

$$N^2 \frac{v_{\text{at}}}{c} > 1 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{at}} > \frac{c}{N^2} \quad (4.97)$$

Si on prend  $N \sim 100$  comme limite actuelle au transfert de quantité de mouvement, la vitesse correspondante vaut approximativement  $30 \text{ km.s}^{-1}$ . Cette vitesse étant grande, on voit que pour être compétitif il faudrait gagner un ordre de grandeur sur le nombre  $N$  de photons absorbés au niveau des séparatrices afin de réduire cette vitesse à quelques centaines de mètres par seconde, vitesse actuellement disponible dans les interféromètres à atomes chauds.

Explorons maintenant les solutions basées sur la diffraction par des réseaux matériels. On suppose donc qu'on a un réseau de fentes de largeur  $a$ , séparées d'une distance  $d$ . Si on regarde l'ordre  $p$  de la diffraction, l'angle de déviation provenant de la diffraction s'écrit comme  $2\alpha \sim p \frac{\lambda_{\text{dB}}}{d}$  où  $\lambda_{\text{dB}}$  est la longueur d'onde de De Bröglie :

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{mv_{\text{at}}} \quad (4.98)$$

On peut alors écrire la variance (4.94) de la façon suivante :

$$\Delta\varphi_{\text{at}}^2 \sim p^2 \frac{v_{\text{at}} D}{d^2} S_h \quad (4.99)$$

La distance  $d$  est au minimum égale à la largeur  $a$  des fentes et celle-ci est en gros limitée au nanomètre (voir aussi la discussion de la partie IV de [188]). Avec ces chiffres, on voit qu'atteindre le seuil de décohérence nécessite d'avoir un produit  $p^2 v_{\text{at}} D \sim 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Ceci n'est pas envisageable avec les techniques utilisées aujourd'hui.

### C.3 Quelques perspectives

Les discussions des sections C.1 et C.2 montre que la décohérence gravitationnelle reste négligeable pour tous les interféromètres atomiques étudiés aujourd'hui.

Pour donner une idée du challenge, on considère un interféromètre de taille  $D \sim 1$  m et d'angle d'ouverture de 90 degrés (cas idéal). Avec ces chiffres, le seuil de décohérence est atteint avec un jet moléculaire de vitesse  $\sim 3 \text{ km.s}^{-1}$  et une masse au moins égale à  $6 \times 10^{-22} \text{ kg}$ . Ce chiffre est obtenu à partir de l'expression (4.94) et nous avons supposé que le fond atteignait  $S_h \sim 10^{-34} \text{ Hz}^{-1}$  sur toute la bande de fréquences impliquée. Cette masse correspond à approximativement 3000 atomes de carbones et pourrait être obtenue à l'aide d'une structure de type fullerène à 5 cinq couches [189] (voir figure (4.11)). Elle dépasse très largement le record actuel de l'équipe de Zeilinger, un peu plus de 100 atomes de carbone. De plus, ce jet correspond à une énergie cinétique de 4 keV et dépasse clairement l'énergie de guidage de toutes les solutions envisagées plus haut.

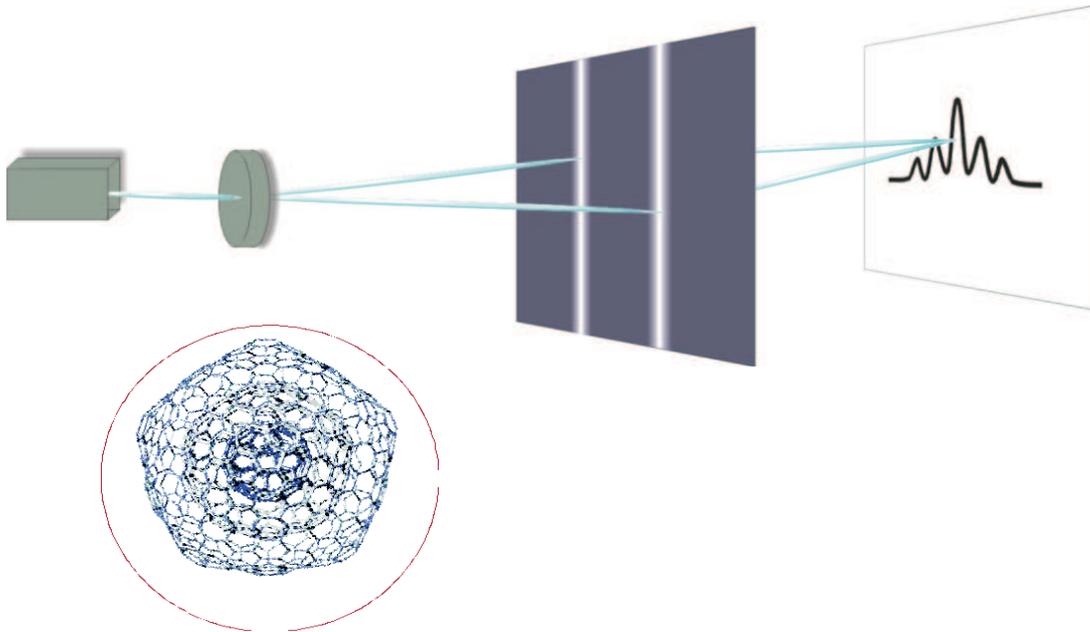


FIG. 4.11: Expérience de pensée dans laquelle un jet moléculaire de 4 keV interfère après des fentes d'Young. En réglant la vitesse du jet moléculaire, on peut en principe se situer en dessous ou au dessus du seuil de décohérence gravitationnelle et ainsi faire apparaître ou disparaître les interférences.

Atteindre ces chiffres avec les techniques actuelles de l'interférométrie atomique semble donc hors de portée, à moins d'une innovation majeure dans le domaine. Les méthodes utilisées pour réaliser des aires importantes, des temps d'exposition longs et des énergies cinétiques

élevées sont en effet peu compatibles entre elles. Enfin, la valeur  $S_h \sim 10^{-34} \text{ Hz}^{-1}$  pour le spectre des OG à la fréquence associée à l'interféromètre (c'est-à-dire l'inverse du temps mis pour construire l'interférogramme) est largement surestimée pour ces expériences.

Enfin, on donne pour finir une idée proposée par Ch.J. Bordé (voir [102]) et qui pourrait permettre de réaliser des interféromètres de grandes aires. Le principe repose sur l'utilisation de faisceau atomique pour réaliser les séparatrice et les miroirs, au lieu d'utiliser des faisceaux lasers. S'il est possible de réaliser une telle séparatrice, on pourrait réaliser un grand transfert d'impulsion égale à l'impulsion de l'onde de matière servant de séparatrice. Si l'on prend des atomes de même impulsion que ceux servant aux interférences, on obtiendrait alors des angles de séparations de  $\pi/2$ .

---

## Conclusion et perspectives

---

LE travail de cette thèse a porté sur l'étude de l'effet des Ondes Gravitationnelles (OG) sur des systèmes physiques simples, en particulier les interféromètres atomiques. La détection directe de ces OG constitue un des plus beaux challenges de la physique actuelle. Cette observation ouvrira une nouvelle fenêtre astrophysique, en particulier sur les systèmes de haute énergie où les champs gravitationnels sont importants.

Dans cette thèse, on a montré que la présence de ce bain d'OG peut aussi se manifester à travers un effet de décohérence. Cet effet de décohérence est universel dans le sens où il agit sur tous les systèmes physiques puisque les OG sont couplées à toute forme d'énergie. En étudiant des exemples modèles explicites, on a démontré que la décohérence gravitationnelle était négligeable pour des systèmes microscopiques tels que des atomes ou des photons circulant dans des interféromètres, mais devenait très important et même dominant pour des objets macroscopiques comme par exemple le mouvement de la Lune.

La remarque précédente nous invite à penser que les OG définissent un environnement naturel délimitant une frontière entre le monde classique et le monde quantique. La recherche de cette frontière est menée de manière active pour la réalisation de dispositifs quantiques de transmission, ou même de transformation, de l'information. Pour des objets microscopiques, la décohérence électromagnétique domine largement la décohérence gravitationnelle. Par contre, plus on augmente la taille du système, plus celui-ci voit son comportement classique contrôlé par la gravitation.

Qu'il s'agisse du domaine microscopique ou du domaine macroscopique, l'effet de décohérence est malheureusement non observable, car il est trop long dans un des cas et trop court dans l'autre cas. Cette remarque nous a conduit à rechercher des objets « mésoscopiques » pour lesquels l'effet de décohérence pourraient être observable, révélant ainsi la présence sous jacente des OG. En prenant comme système modèle les interféromètres atomiques, on a montré que le seuil de décohérence était encore loin d'être accessible expérimentalement.

La difficulté est de réaliser des interféromètres avec des molécules d'énergies cinétiques très grandes tout en ayant une aire importante.

Pour construire un instrument qui soit sensible à la décohérence gravitationnelle, il paraît naturel d'envisager l'utilisation d'objets macroscopiques ayant des propriétés de cohérence quantique. Dans ce but, l'utilisation des condensats de Bose Einstein paraît une solution prometteuse. On renvoie à [190] pour un article de revue sur les propriétés de cohérence des condensats et des diverses expériences d'interférométrie qui ont été réalisées à l'aide de ces condensats.

L'intérêt des condensats réside dans le fait que sous certaines conditions, on pourrait faire en sorte que la masse  $m$  intervenant dans la formule (4.94) soit celle du condensat et non pas celle d'un atome. Cette condition de *rigidité* dépend de la nature des interactions entre atomes dans le condensat. En tout état de cause, cela augmenterait considérablement l'effet de décohérence par un facteur de l'ordre de  $N^2$ , si  $N$  est le nombre d'atomes contribuant de façon cohérente, idéalement le nombre d'atomes dans le condensat. Cette idée n'est pour le moment qu'une perspective. Des travaux complémentaires sont nécessaires avant de pouvoir en évaluer la faisabilité.

D'autre part, le développement rapide de propositions théoriques destinées à réaliser des superpositions macroscopiques d'objets [191, 192, 193] laisse envisager des perspectives intéressantes concernant la décohérence que peut induire les OG sur de telles superpositions. Une expérience modèle mettant en évidence cette décohérence pourrait par exemple faire intervenir une superposition de deux miroirs, dont on mesure la cohérence grâce à un montage de type Michelson [191, 192]. Le mouvement d'un de ces miroirs par rapport à l'autre, par exemple en l'attachant à un cantilever, pourrait donner suffisamment de différence d'énergie cinétique pour mettre en évidence un phénomène de décohérence gravitationnelle. Un calcul détaillé doit être effectué afin de donner une estimation fiable de l'effet et ainsi déterminer ce qu'il est possible de réaliser expérimentalement.

Ces questions s'inscrivent dans un renouveau des études consacrées aux effets de Relativité Générale sur des expériences de mécanique quantiques, comme en témoigne les prospectives de l'ESA par exemple [194]. Le développement rapide des performances des expériences faisant intervenir des objets quantiques permet d'atteindre des sensibilités suffisantes pour détecter des effets de RG comme par exemple des effets de gravitomagnétisme. Il ne fait pas de doute que ce domaine devrait connaître de nouveaux progrès stimulés par le développement de l'interférométrie atomique aussi bien que par les premières détections, prochainement attendues, des OG par les grands interféromètres.

---

# Annexe

---

## A Rappels de Relativité Générale

On donne dans cet appendice les éléments de la Relativité Générale (RG) qui sont utiles pour la compréhension générale des concepts sous-jacents à la détection des ondes gravitationnelles. On présente ici une approche volontairement simple pour introduire les notions comme la métrique ou la courbure. Une approche plus formelle et plus générale peut être trouvée dans des livres [22, 60, 43, 71] et des articles de revue [15].

### A.1 Le principe d'équivalence

La relativité générale est fondée sur le principe d'équivalence qui postule que, localement, les effets de gravitation peuvent être absorbés dans un changement de référentiel. Ce principe se décline selon plusieurs versions. Une version couramment utilisée s'énonce ainsi :

**PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE :** *En tout point M d'un champ de gravité et à tout instant t, il existe des référentiels en chute libre au sein desquels les lois de la nature sont localement les mêmes que celles observées dans un référentiel Galiléen en l'absence de gravitation.*

Ce principe ne s'applique que localement, c'est-à-dire dans un voisinage du point M. Il peut être compris simplement par analogie à la géométrie non Euclidienne dans laquelle toute surface est localement Euclidienne. Imaginons une surface à 2 dimensions, par exemple une sphère, que l'on paramètre par un système de coordonnées  $(x, y)$ , par exemple longitude et latitude d'un point M de la surface. Dans le voisinage de tout point M de cette surface, il existe un système de coordonnées localement Euclidien  $(\xi_x, \xi_y)$ , tel que la distance  $ds$  entre le point M et un point M' voisin vérifie :

$$ds^2 = d\xi_x^2 + d\xi_y^2 \quad (\text{A-1})$$

Cette relation peut aussi s'écrire de façon commode en introduisant les coordonnées  $\xi^1 = \xi_x$  et  $\xi^2 = \xi_y$  ainsi qu'une matrice  $\eta_{\alpha\beta}$  appelé métrique :

$$ds^2 = d\xi^\alpha \eta_{\alpha\beta} d\xi^\beta \quad , \quad \eta_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} \eta_{xx} & \eta_{xy} \\ \eta_{yx} & \eta_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-2})$$

Les indices  $\alpha$  et  $\beta$  prennent les valeurs 1 ou 2 et on utilise la convention de sommation sur les indices répétés. La distance peut se réécrire en fonction de  $dx$  et  $dy$  définis sur la carte plus générale  $(x, y)$  :

$$ds^2 = \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi_x}{\partial y} dy \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} dy \right)^2 = dx^\alpha g_{\alpha\beta} dx^\beta$$

avec :

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{xx} &= \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right)^2 \\ g_{12} = g_{xy} &= \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \right) \\ g_{22} = g_{yy} &= \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

L'objet fondamental de cette géométrie est la métrique  $g_{\alpha\beta}$  qui permet de calculer la distance entre deux points voisins ; elle est symétrique par construction et est appelée métrique pour le système de coordonnées  $(x, y)$ . La RG est tout à fait analogue à une géométrie non Euclidienne dans l'espace-temps. Les référentiels de la RG contiennent, en plus des coordonnées spatiales, une coordonnée temporelle qui permet de dater des événements.

Un référentiel inertiel (ou encore en chute libre) est analogue à un système de coordonnées Euclidien. Dans un tel référentiel, la distance  $ds^2$  s'écrit par analogie avec (A-1) et (A-2) dans un référentiel en chute libre ( $\xi^0 = ct, \xi^1 = \xi_x, \xi^2 = \xi_y, \xi^3 = \xi_z$ ) :

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - d\xi_x^2 - d\xi_y^2 - d\xi_z^2 = (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2 \\ &= d\xi^\mu \eta_{\mu\nu} d\xi^\nu \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

où  $\eta_{\mu\nu}$  est la métrique de Minkowski :

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-5})$$

Les indices grecs  $\mu$  et  $\nu$  prennent les valeurs de 0 à 3.

L'expression de la distance peut être donnée dans un système de coordonnées quelconque  $\{x^\mu\}$  en utilisant les lois de transformation suivantes :

$$d\xi^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} dx^\rho \quad (\text{A-6})$$

On obtient :

$$ds^2 = dx^\rho g_{\rho\sigma} dx^\sigma \quad (\text{A-7})$$

$$g_{\rho\sigma} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} \eta_{\mu\nu} \quad (\text{A-8})$$

Cette expression nous dit comment se transforme la métrique (A-5) dans un changement de coordonnées.

## A.2 Le tenseur métrique en RG

Dans le cas général d'un espace-temps courbe, la métrique ne peut pas se réduire à une métrique Euclidienne de façon globale (ce point sera rediscuté dans la suite). Toutefois la géométrie Riemannienne suppose qu'il existe encore une distance invariante  $ds^2$  dont l'expression est donnée par (A-7) dans un système de coordonnées  $\{x^\mu\}$ . Le fait que  $ds^2$  soit invariant dans un changement de coordonnées  $\{x^\mu\} \rightarrow \{x'^\mu\}$  se traduit par une loi de transformation de la métrique qui généralise (A-8) :

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \quad (\text{A-9})$$

La fonction  $g_{\mu\nu}(x)$ , où  $x$  représente le point courant dans l'espace-temps, suffit maintenant à caractériser la géométrie de cet espace-temps.

Avant de poursuivre, donnons quelques définitions et notations. Un objet invariant dans les changements de coordonnées,  $ds^2$  par exemple, est un scalaire. Les objets  $A^\mu$  qui se transforment comme les variations  $dx^\mu$  sont appelées composantes contravariantes d'un 4-vecteur  $A$  :

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} A^\rho \quad (\text{A-10})$$

Les objets  $A_\mu \equiv g_{\mu\nu} A^\nu$  se transforment alors selon :

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho \quad (\text{A-11})$$

Ces objets  $A_\mu$  sont appelés coordonnées covariantes du 4-vecteur  $A$ . On voit maintenant que les composantes  $g_{\mu\nu}$  se transforment comme les composantes covariantes d'un objet à deux indices, appelé tenseur. On définit aussi l'objet  $g^{\mu\nu}$  dont la représentation matricielle est l'inverse de  $g_{\mu\nu}$  :

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = (\text{Id})_{\mu\nu} \triangleq \delta^\mu_\nu \quad (\text{A-12})$$

Ces composantes  $g^{\mu\nu}$  se transforment comme les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux.

## A.3 Dérivées covariantes et contravariantes

En général, la dérivée ordinaire  $\partial_\mu A^\nu$  d'un vecteur  $A^\nu$  ne se comporte pas comme un tenseur. En effet, on déduit de la partie précédente les lois de transformations suivantes :

$$\partial'_\mu A'^\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} (A'^\nu) = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left( \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} A^\rho \right) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} \partial_\sigma A^\rho + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} A^\rho \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (\text{A-13})$$

La présence du second terme fait que  $\partial_\mu A^\nu$  n'est pas un tenseur. On peut néanmoins définir un tenseur qui joue en général le même rôle que la dérivée ordinaire dans le cas inertiel.

Pour cela, on introduit la notion de dérivée covariante d'un objet contravariant de la façon générale suivante :

$$D_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A^\lambda \quad (\text{A-14})$$

où  $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$  est un objet à définir qu'on appelle symbole de Christoffel. Ce n'est visiblement pas un tenseur car  $\partial_\mu A^\nu$  n'en est pas un et on cherche à ce que  $D_\mu A^\nu$  en soit un. En imposant que la dérivée covariante se transforme bien comme un tenseur :

$$D'_\mu A'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} D_\sigma A^\rho \quad (\text{A-15})$$

on montre que le symbole de Christoffel  $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$  doit nécessairement se transformer selon :

$$\Gamma'_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \quad (\text{A-16})$$

Si cette équation ne comprenait que le premier terme,  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  seraient les composantes d'un tenseur et leur nullité dans un référentiel impliquerait leur nullité dans tous les autres référentiels. Cette équation montre aussi que la partie anti-symétrique de  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  sur ses indices du bas se transforme, elle, comme un tenseur. Le choix de la prendre nulle dans un système de coordonnées revient donc à la prendre nulle quelque soit le système de coordonnées. C'est le choix de la géométrie Riemannienne (voir [84, chap. 85] pour plus de détails) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (\text{A-17})$$

De la même façon, on définit la dérivée covariante d'un vecteur covariant :

$$D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda \quad , \quad D'_\mu A'_\nu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} D_\sigma A_\rho \quad (\text{A-18})$$

Les dérivées covariantes se réduisent aux dérivées ordinaires dans un référentiel inertiel. D'autre part, elles ont comme propriétés la linéarité et la règle de Leibnitz pour la dérivée d'un produit :

$$D_\alpha (A_\mu B_\nu) = (D_\alpha A_\mu) B_\nu + A_\mu (D_\alpha B_\nu) \quad (\text{A-19})$$

Contrairement aux dérivées ordinaires, elles ne commutent pas en général (voir la prochaine section). La dérivée covariante d'un tenseur s'écrit :

$$D_\alpha A_{\mu\nu}^\rho = \partial_\alpha A_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho A_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda A_{\mu\lambda} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda A_{\nu\lambda} \quad (\text{A-20})$$

La dérivée covariante d'un scalaire  $f$  s'écrit comme sa dérivée ordinaire :

$$D_\alpha f \triangleq \partial_\alpha f \quad (\text{A-21})$$

Une propriété essentielle de la RG est que la dérivée covariante de la métrique est nulle. Ceci résulte du fait que  $D_\mu A^\nu$  et  $D_\mu A_\nu$  sont des tenseurs liés par la relation habituelle :

$$D_\mu A^\nu = g^{\rho\nu} D_\mu A_\rho \quad (\text{A-22})$$

Ceci implique que :

$$D_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A-23})$$

Cette propriété ainsi que l'expression explicite (A-20) de la dérivée covariante permet de relier le symbole de Christoffel aux composantes  $g_{\mu\nu}$  de la métrique (voir [84, chap. 86] pour plus de détails) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\sigma}) \quad (\text{A-24})$$

Par la suite, nous aurons aussi besoin de quantités  $\Gamma_{\nu,\rho\sigma}$  telles que :

$$\Gamma_{\mu,\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^\nu \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{\rho\sigma}^\nu = g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu,\rho\sigma} \quad (\text{A-25})$$

Une autre propriété essentielle est que, pour toute métrique, on peut toujours annuler les symboles de Christoffel en un point par un simple changement de coordonnées (voir [84, chap. 85]). Ceci signifie qu'on peut choisir une carte localement inertielle dans le voisinage d'un point M quelconque. On reconnaît là une trace dans le formalisme du principe d'équivalence discuté plus haut. Toutefois, cette carte n'est généralement que localement inertielle, ce qui signifie que les symboles de Christoffel ne peuvent rester nuls quand on s'éloigne du point M dès que l'espace possède une courbure non nulle.

#### A.4 Le tenseur de courbure

À partir de la métrique et de ses dérivées premières et secondes, on construit le tenseur de courbure de Riemann :

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \equiv \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \quad (\text{A-26})$$

On définit de façon équivalente la forme de ce tenseur avec tous ses indices covariants :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= g_{\mu\lambda} R_{\nu\rho\sigma}^\lambda = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} + \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho}) \\ &\quad + g_{\alpha\beta} (\Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\nu\sigma}^\beta - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\rho}^\beta) \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$

Cette deuxième forme permet d'écrire les propriétés de symétrie du tenseur de courbure :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} \quad (\text{A-28})$$

Les courbures de Riemann se transforment comme des tenseurs dans un changement de coordonnées. La nullité de ces courbures est donc un fait physique indépendant du choix du

système de coordonnées. C'est en fait la condition nécessaire et suffisante pour pouvoir annuler les symboles de Christoffel par une transformation globale du système de coordonnées et pas seulement de façon locale comme on l'a fait dans la section précédente. Discutons quelques unes des propriétés importantes du tenseur de Riemann.

Tout d'abord, le tenseur de courbure décrit le caractère non commutatif des dérivées covariantes. Précisément, si on applique deux fois la dérivation covariante sur un vecteur, la différence entre les résultats obtenus pour des ordres différents est proportionnelle à la courbure :

$$[D_\beta, D_\alpha]A^\mu \equiv D_\beta(D_\alpha A^\mu) - D_\alpha(D_\beta A^\mu) = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}A^\nu \quad (\text{A-29})$$

Ensuite, le tenseur de courbure permet d'écrire l'équation d'Einstein qui décrit la dynamique du champ gravitationnel ou de l'espace-temps. Pour écrire cette équation, il faut définir d'abord le tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$  par contraction du tenseur de Riemann :

$$R_{\mu\nu} \triangleq R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \quad (\text{A-30})$$

puis le scalaire de Ricci  $R$  par la trace de ce tenseur à travers une nouvelle contraction :

$$R \triangleq g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (\text{A-31})$$

On peut alors écrire l'équation d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^3}T_{\mu\nu} \quad (\text{A-32})$$

Dans cette équation, le tenseur d'énergie-impulsion  $T_{\mu\nu}$  joue le rôle d'une source pour la déformation de l'espace-temps, comme le courant de charges dans les équations de Maxwell. Loin des sources,  $T_{\mu\nu}$  s'annule ainsi que le tenseur de Ricci mais le tenseur de Riemann peut néanmoins être non nul, ce qui correspond à la propagation d'ondes gravitationnelles.

## B Rappels sur les équations du mouvement relativiste

Dans cet appendice, on donne les équations du mouvement pour des particules ou des champs se propageant dans un espace courbe. On commence par établir l'équation géodésique qui décrit la propagation libre et dont on donne une dérivation géométrique pour des particules tests matérielles puis une dérivation obtenue à partir des équations d'onde dans l'approximation eikonale. On termine cet appendice par l'étude de la déviation géodésique qui rend compte de l'effet de la gravitation sur la séparation relative entre deux objets voisins en chute libre (en mouvement géodésique).

### B.1 Équation géodésique

Dans un référentiel inertiel, l'équation du mouvement d'une particule est donnée par son expression en relativité restreinte, c'est-à-dire :

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = 0 \quad (\text{B-1})$$

$\tau$  est le temps propre et  $u^\mu$  le vecteur vitesse :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \quad , \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (\text{B-2})$$

Cette équation peut se réécrire dans un référentiel quelconque  $\{x^\mu\}$  :

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu u^\rho u^\sigma = 0 \quad (\text{B-3})$$

$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$  sont les symboles de Christoffel introduits ci-dessus. Ils s'annulent dans un référentiel inertiel et on retrouve la loi (B-1) habituelle du mouvement inertiel.

Dans un référentiel quelconque par contre, ces symboles ne sont pas nuls et ils s'interprètent donc comme des accélérations. L'équation géodésique (B-3) s'écrit aussi de façon plus condensée :

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = 0 \quad , \quad \frac{D}{D\tau} \triangleq u^\lambda D_\lambda \quad (\text{B-4})$$

Cette équation s'interprète alors comme une équation de « transport parallèle » du vecteur vitesse le long de la trajectoire. Comme on va le voir dans la partie suivante, on peut retrouver cette équation à partir des équations d'onde dans l'approximation eikonale.

### B.2 Approximation eikonale des équations d'onde

On considère dans cette partie un champ lumineux ou une onde de matière, que l'on décrit comme une onde scalaire. Lorsque l'on néglige les effets de polarisation, la description de la propagation de cette onde se fait de façon simple en étudiant l'équation de Klein Gordon.

La fonction d'onde  $\psi(x)$  du champ considéré, au point  $x$  d'espace-temps, vérifie alors une équation d'onde covariante [72, 67] :

$$\begin{aligned} \square_g \psi(x) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi(x) &= 0 \\ \square_g &\equiv D_\mu D^\mu = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = g^{\mu\nu} \left( \partial_\mu \partial_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \right) \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

$D_\mu$  est la dérivée covariante et  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  le symbole de Christoffel;  $m$  la masse du champ qui se propage ( $m = 0$  pour un champ lumineux). Cette équation est valable dans l'hypothèse de couplage minimal des équations d'onde [71] dans laquelle on remplace simplement les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes.

En général, il n'existe pas de solution pour la fonction d'onde telle que l'amplitude de  $\psi(x)$  soit constante. Cependant, il existe des solutions localement planes pour lesquelles l'amplitude est une fonction lentement variable par rapport à la phase de la fonction d'onde [195]; c'est l'approximation eikonale dans laquelle on écrit :

$$\psi(x) = \psi_0(x) e^{i\varphi(x)} \quad (\text{B-6})$$

$\psi_0(x)$  et  $\varphi(x)$  sont des fonctions réelles. En négligeant les variations relatives de l'amplitude (termes de la forme  $\frac{D^\mu D_\mu \psi_0}{\psi_0}$ ), l'équation de Klein-Gordon (B-5) se réduit à l'approximation eikonale :

$$i g^{\mu\nu} \frac{D_\nu \psi_0}{\psi_0} D_\mu \varphi + i g^{\mu\nu} \frac{D_\mu \psi_0}{\psi_0} D_\nu \varphi + i D^\mu D_\mu \varphi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} = g^{\mu\nu} D_\mu \varphi D_\nu \varphi \quad (\text{B-7})$$

Les parties réelles et imaginaires fournissent deux équations. La première régit la propagation de la phase à l'ordre le plus bas :

$$g^{\mu\nu}(x) \partial_\mu \varphi(x) \partial_\nu \varphi(x) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (\text{B-8})$$

On remarque que  $D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$  car la dérivée covariante d'un scalaire est sa dérivée ordinaire. La deuxième équation régit la variation de l'amplitude  $\psi_0$  :

$$\partial_\mu \varphi \frac{D^\mu \psi_0}{\psi_0} = -\frac{1}{2} D^\mu \partial_\mu \varphi \quad (\text{B-9})$$

Dans un premier temps, on réécrit l'équation de Hamilton-Jacobi (B-8) (voir [117, chap. 1]) en définissant un vecteur d'onde pour le champ :

$$K_\mu(x) = D_\mu \varphi(x) = \partial_\mu \varphi(x) \quad (\text{B-10})$$

Partout où la phase est différentiable, l'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit alors comme une relation de dispersion modifiée par la présence d'une perturbation métrique :

$$g^{\mu\nu}(x) K_\mu(x) K_\nu(x) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (\text{B-11})$$

Pour obtenir l'équation géodésique, on dérive cette expression dans une direction quelconque :

$$D_\rho (g^{\mu\nu} K_\mu K_\nu) = 0 \quad (\text{B-12})$$

En utilisant la relation (A-23) et le fait que  $D_\rho K_\mu = D_\mu K_\rho$  car  $K_\mu$  est le gradient d'un scalaire, on déduit que :

$$K^\mu D_\mu K_\rho = 0 \quad (\text{B-13})$$

On peut maintenant introduire la notion du paquet d'onde semi-classique et définir la vitesse de groupe  $u_\mu$  et l'impulsion  $P_\mu$  du paquet d'onde en fonction du vecteur d'onde  $K_\mu$  de la façon suivante :

$$P^\mu = \hbar K^\mu \quad \Rightarrow \quad K^\mu = \frac{P^\mu}{\hbar} = \frac{m}{\hbar} u^\mu \quad , \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (\text{B-14})$$

$x^\mu$  représente la position du centre du paquet d'onde et  $\tau$  son temps propre. Grâce aux relations ci-dessus, on montre que (B-13) conduit à l'équation géodésique :

$$u^\mu D_\mu u_\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Du_\rho}{D\tau} = 0 \quad (\text{B-15})$$

Autrement dit, le centre d'un paquet d'onde se comporte comme une particule test.

L'approximation eikonale, encore appelé approximation géodésique à cause de la relation précédente, est voisine de l'approximation WKB en mécanique quantique, ou encore de l'approximation de l'optique géométrique. Pour en discuter les conditions de validité, on introduit le vecteur d'onde  $k^\mu$  décrivant la propagation des OG, à distinguer du vecteur d'onde  $K^\mu$  associé au champ test. L'approximation eikonale est alors valable lorsque la métrique varie lentement, c'est-à-dire lorsque  $k^\mu \ll K^\mu$ . Pour la lumière en particulier, cela signifie  $\omega \ll \Omega$  où  $\omega$  est la fréquence des OG et  $\Omega$  celle des photons ( $\Omega \sim 10^{15}$  Hz pour les fréquences optiques). Pour les ondes de matière, la validité de l'approximation eikonale revient à négliger l'énergie  $\hbar\omega$  des OG devant l'énergie au repos et l'énergie cinétique des atomes, autrement dit  $\omega \ll \frac{mv^2}{2\hbar}$  (pour des atomes lents de césium, comme ceux envisagés pour le projet HYPER d'interférométrie atomique, on a  $\frac{mv^2}{2\hbar} \sim 10^7$  Hz).

### B.3 Équation de la déviation géodésique

Les deux parties précédentes s'attachaient à décrire l'équation géodésique qui décrit la propagation libre d'une particule test ou d'une onde dans un espace courbe. La partie qui suit permet de décrire ce qui se passe lorsqu'il y a deux particules tests en mouvement géodésique. Ceci va fournir une nouvelle interprétation de la courbure de Riemann.

Considérons deux géodésiques  $x^\mu(\tau)$  et  $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$  obéissant toutes les deux à l'équation (B-3). La différence  $\delta x^\mu(\tau)$  entre ces deux trajectoires obéit à l'équation suivante :

$$\frac{d^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} = -\partial_\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \delta x^\rho u^\alpha u^\beta - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha \frac{d\delta x^\beta}{d\tau} \quad (\text{B-16})$$

Cette équation se réécrit de façon condensée en faisant apparaître le tenseur de Riemann et une dérivée covariante :

$$\frac{D^2 \delta x^\lambda}{D\tau^2} = R^\lambda_{\nu\mu\rho} \delta x^\mu u^\nu u^\rho \quad (\text{B-17})$$

Cette équation de déviation géodésique est valable pour des distances  $\delta x^\mu$  petites devant l'échelle caractéristique de variation du champ gravitationnel. Lorsque l'on se place dans un référentiel comobile avec la première trajectoire, on a  $u^\mu = c\delta^{\mu 0}$ , et l'équation de déviation géodésique sélectionne les composantes  $R_{0\mu 0\nu}$  du tenseur de Riemann :

$$\frac{D^2 \delta x^\mu}{D\tau^2} = c^2 R^\mu_{0\nu 0} \delta x^\nu \quad (\text{B-18})$$

Cette équation constitue le fondement du principe de la détection des OG par des détecteurs inertiels, c'est-à-dire constitué d'éléments en chute libre les uns par rapport aux autres. Elle montre que la distance entre deux géodésiques est modulée par la présence d'une courbure gravitationnelle variable comme celle créée par une OG.

Interprétée de façon Newtonienne, l'équation (B-18) correspond à une force d'inertie effective  $c^2 R^\mu_{0\nu 0} \delta x^\nu$ . On appelle cette force « force de marée » car elle dépend de la position relative  $\delta x^\nu$ . D'autre part, son effet est analogue aux forces de marées gravitationnelles habituelles puisque dans un plan transverse au vecteur d'onde de l'OG, une contraction dans une direction s'accompagne d'une dilatation dans la direction perpendiculaire. Ces arguments sont repris sous une forme un peu différente dans la partie A.2 du second chapitre où sont discutés les détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles.

## C Rappels sur les Ondes Gravitationnelles

De manière analogue à l'électromagnétisme, les équations d'Einstein admettent des solutions radiatives libres qu'on appelle Ondes Gravitationnelles (OG). Ces solutions prennent une forme relativement simple dans le cas où les champs gravitationnels sont faibles, ce qui correspond en particulier à tous les phénomènes observables dans notre environnement. Ces solutions possèdent dans ce cas limite un certain nombre d'analogies avec l'électromagnétisme. On renvoie le lecteur aux livres de références pour plus de détails [60, 22].

### C.1 Éléments de théorie linéarisée de la RG

Lorsque l'on s'intéresse à la description de phénomènes de gravitation en champs faibles, on peut linéariser la théorie de la relativité générale. Dans cette approximation, la métrique  $g_{\mu\nu}$  n'est que faiblement différente de la métrique de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  et se décompose sous la forme :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (\text{C-1})$$

où  $h_{\mu\nu}$  est appelée perturbation métrique. Dans ces conditions, on choisit de manipuler les indices en utilisant la métrique de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ . Avec cette convention, on a la relation suivante entre les composantes covariantes et contravariantes de la métrique (à l'ordre le plus bas en  $h_{\mu\nu}$ ) :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad , \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma} \quad (\text{C-2})$$

Les symboles de Christoffel s'écrivent alors en utilisant (A-25) :

$$\Gamma_{\rho,\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) \quad (\text{C-3})$$

et le tenseur de Riemann linéarisé en utilisant (A-27) :

$$R_{\rho\mu\sigma\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\rho,\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma_{\rho,\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\mu \partial_\sigma h_{\rho\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h_{\rho\sigma}) \quad (\text{C-4})$$

En utilisant cette expression et l'équation d'Einstein (A-32) sans les sources, on montre que la perturbation métrique vérifie l'équation de propagation suivante :

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial_\lambda \partial_\nu h_\mu^\lambda + \partial_\mu \partial_\nu h_\lambda^\lambda = 0 \quad (\text{C-5})$$

où  $\square$  est maintenant le d'Alembertien ordinaire :

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \quad (\text{C-6})$$

L'équation (C-5) n'admet pas de solution unique, exactement comme dans le cas des équations de Maxwell dans le vide pour le potentiel et le champ électromagnétique. Afin de résoudre explicitement l'équation de propagation (C-5), il faut donc se fixer une jauge, comme on le fait en électromagnétisme.

Cette liberté de jauge s'identifie en RG à la liberté dans le choix du système de coordonnées. Ceci se constate en remarquant que si  $h_{\mu\nu}$  est solution de (C-5), alors  $h'_{\mu\nu}$ , obtenue à partir de  $h_{\mu\nu}$  par un changement de coordonnées infinitésimal, est aussi solution. Considérons en effet un changement de coordonnées au premier ordre en  $\varepsilon^\mu$  :

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \quad (\text{C-7})$$

On obtient alors (au premier ordre, avec  $\varepsilon_\mu$  du même ordre que  $h_{\mu\nu}$ ) :

$$h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) - \partial_\nu \varepsilon_\mu(x) \quad (\text{C-8})$$

On voit explicitement que ce changement de coordonnées n'affecte pas la courbure de Riemann (C-4) (toujours au premier ordre en  $\varepsilon^\mu$ ), en analogie avec l'invariance de jauge électromagnétique de  $F_{\mu\nu}$  :

$$R'_{\mu\nu\rho\sigma}(x) = R_{\mu\nu\rho\sigma}(x) \quad (\text{C-9})$$

Autrement dit, la courbure de Riemann est invariante par changement de jauge. En fait, cette propriété peut aussi se démontrer directement à partir du fait que la courbure de Riemann est un tenseur linéaire en  $h_{\mu\nu}$  dont la loi de transformation se réduit à (C-9) à la limite des champs faibles et des transformations infinitésimales.

En tout état de cause, une conséquence immédiate de (C-9) est que, si  $h_{\mu\nu}$  est solution de (C-5),  $h'_{\mu\nu}$  est aussi une solution puisqu'il conduit aux mêmes courbures. Ainsi, les changements de coordonnées infinitésimaux se comportent bien comme des transformations de jauge de la RG. Et les courbures se comportent dans ce contexte comme les quantités invariantes de jauge.

Quand on étudie la propagation des ondes gravitationnelles, il très commode de travailler dans la jauge TT (Transverse Traceless en anglais, c'est-à-dire Transverse de Trace nulle) qui se construit en deux étapes. Premièrement on considère des coordonnées harmoniques pour lesquelles :

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu h_\nu^\mu = \frac{1}{2} \partial_\nu h_\mu^\mu \quad (\text{C-10})$$

Si  $h_{\mu\nu}$  ne vérifie pas cette condition, il suffit de faire le changement de coordonnées (C-7) tel que :

$$\square \varepsilon_\nu = \partial_\mu h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu h_\mu^\mu \quad (\text{C-11})$$

On voit que  $h'_{\mu\nu}$  obéit alors à la condition (C-10). Pour simplifier les notations, on oublie le prime et on appelle  $h_{\mu\nu}$  la perturbation qui vérifie les équations (C-5) et (C-10) :

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \partial_\mu h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu h_\mu^\mu = 0 \quad (\text{C-12})$$

C'est une équation de propagation similaire à celle obtenue pour le potentiel  $A^\mu$  en électromagnétisme lorsqu'on se place dans la jauge de Lorentz. Cette équation implique notamment que les solutions se propagent à la vitesse de la lumière.

La condition des coordonnées harmoniques n'est pas encore complètement spécifiée. Il reste une liberté liée à des transformations de jauge supplémentaires  $\varepsilon_\nu$  vérifiant l'équation de propagation homogène  $\square\varepsilon_\nu = 0$ . On peut montrer que cette liberté supplémentaire permet de fixer uniquement  $h_{\mu\nu}$  avec les conditions de la jauge TT :

$$h_{\mu 0} = 0 \quad , \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad h^\mu{}_\mu = 0 \quad (\text{C-13})$$

Dans cette jauge, seules les composantes spatiales de la perturbation métrique sont non nulles et elles sont transverses ( $\partial^i h_{ij} = 0$ ). Pour ces raisons, cette jauge est analogue à la jauge de Coulomb de l'électromagnétisme dans laquelle  $A^0 = 0$  et  $\partial_i A^i = 0$ . Remarquons que l'écriture d'une perturbation métrique en jauge TT n'est valable que pour des champs propagatifs qui vérifient l'équation (C-5) ; en particulier, on ne peut pas la construire pour des champs liés à une source.

On va voir dans la prochaine section que les composantes TT de  $h_{\mu\nu}$  sont directement reliées aux courbures et peuvent donc être considérées comme des caractéristiques physiques des OG, du moins à la limite linéarisée de la RG.

## C.2 Solutions en ondes planes - polarisations

Les solutions de l'équation de propagation peuvent se décomposer en ondes planes, par analogie avec les solutions libres des équations de Maxwell. Considérons pour commencer une onde plane de fréquence  $\omega$  se propageant dans la direction  $z$ . Alors les conditions de jauge TT (C-13) impliquent que les seules composantes non nulles de  $h_{\mu\nu}$  sont :

$$h_{xx} = -h_{yy} = \text{Re} \left( A_+ e^{-i\omega(t - \frac{z}{c})} \right) \quad , \quad h_{xy} = h_{yx} = \text{Re} \left( A_\times e^{-i\omega(t - \frac{z}{c})} \right) \quad (\text{C-14})$$

Les amplitudes  $A_+$  et  $A_\times$  représentent deux modes indépendants de polarisation. On peut réécrire la solution en faisant intervenir des tenseurs de polarisation  $\mathbf{e}_{\mu\nu}^{+, \times}$  :

$$h_{\mu\nu} = \sum_{\gamma=+, \times} \text{Re} \left( A_\gamma \mathbf{e}_{\mu\nu}^\gamma e^{-i\omega(t - \frac{z}{c})} \right) \quad , \quad \mathbf{e}_{\mu\nu}^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{+\gamma} & \delta_{\times\gamma} & 0 \\ 0 & \delta_{\times\gamma} & -\delta_{+\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C-15})$$

Il y a deux polarisations possibles pour les OG, comme pour l'électromagnétisme, mais cette polarisation est maintenant caractérisée par un tenseur de rang 2.

De façon générale, une OG plane de fréquence  $\omega$  se propageant le long d'un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  quelconque s'écrit :

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\gamma} A_\gamma \mathbf{e}_{ij}^\gamma e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (\text{C-16})$$

On connaît le module de  $\mathbf{k}$  et on écrit la direction  $\hat{\mathbf{k}}$  de propagation en fonction des angles d'Euler  $(\theta, \varphi)$  :

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \quad , \quad \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{C-17})$$

De même qu'en électromagnétisme, on peut choisir de décomposer les OG sur la base des polarisations linéaires ou circulaires. Les polarisations linéaires sont une généralisation de (C-15) dans laquelle les tenseurs de polarisations  $\mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]$  avec  $\gamma = +, \times$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{ij}^+[\hat{\mathbf{k}}] = \hat{\mathbf{m}}_i \hat{\mathbf{m}}_j - \hat{\mathbf{n}}_i \hat{\mathbf{n}}_j \\ \mathbf{e}_{ij}^\times[\hat{\mathbf{k}}] = \hat{\mathbf{m}}_i \hat{\mathbf{n}}_j + \hat{\mathbf{n}}_i \hat{\mathbf{m}}_j \end{cases} \quad (\text{C-18})$$

où  $\hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}}$  sont les vecteurs de polarisation linéaire de l'électromagnétisme. Ce sont deux vecteurs unitaires orthogonaux à  $\hat{\mathbf{k}}$  telles que  $(\hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{k}})$  forme un trièdre direct. On peut par exemple les écrire [157] :

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C-19})$$

On peut aussi décomposer les OG sur les polarisations circulaires  $\mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]$  avec cette fois  $\gamma = \pm 1$ . Celles-ci s'expriment simplement comme le produit des vecteurs de polarisations circulaires  $\mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]$  de l'électromagnétisme, avec les relations suivantes :

$$\mathbf{e}_{ij}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] = \left( \frac{\mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \mathbf{e}_j^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]}{\sqrt{2}} \right)^* \quad (\gamma = \pm 1) \quad (\text{C-20})$$

Le facteur de normalisation  $1/\sqrt{2}$  est choisi pour des raisons de commodité. Les polarisations circulaires électromagnétiques  $\mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]$  s'écrivent :

$$\mathbf{e}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] = -\hat{\mathbf{n}} + i\gamma \hat{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \varphi + i\gamma \sin \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi - i\gamma \cos \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\text{C-21})$$

Les conditions de réalités des champs impliquent les relations suivantes sur les polarisations circulaires  $\mathbf{e}^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]$  :

$$(\mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{k}}])^* = \mathbf{e}_i^{-\gamma}[\hat{\mathbf{k}}] = \mathbf{e}_i^\gamma[-\hat{\mathbf{k}}] \quad (\text{C-22})$$

Enfin, dans le cas étudié plus haut de propagation selon  $z$  (axe  $x^3$ ), on peut définir les composantes suivantes de la métrique dans le plan  $(x^1, x^2)$  :

$$h_\times = h_{12} \quad \text{et} \quad h_+ = \frac{h_{11} - h_{22}}{2} \quad (\text{C-23})$$

$$h_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( h_{12} - \frac{h_{11} - h_{22}}{2i} \right) \quad \text{et} \quad h_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( h_{12} + \frac{h_{11} - h_{22}}{2i} \right) \quad (\text{C-24})$$

Dans la jauge TT, la perturbation métrique est directement reliée au tenseur de courbure de Riemann :

$$R_{0i0j}(t) = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 h_{ij}(t)}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad h_{ij}[\omega] = -\frac{2c^2}{\omega^2} R_{0i0j}[\omega] \quad (\text{C-25})$$

La perturbation métrique dans cette jauge étant directement proportionnelle à la courbure de Riemann, elle peut donc être considérée comme une caractérisation physique des OG puisque la courbure est une quantité invariante de jauge. Dans un système de coordonnées quelconque, la perturbation métrique s'obtient comme sa valeur dans une jauge TT plus des termes de jauge de la forme (C-8) (pour une discussion plus détaillée, voir [22, Box 35.1]).

### C.3 Fonctions de corrélation d'un fond d'OG

Pour caractériser un fond stochastique d'OG, il est commode de décomposer la métrique sur les modes de Fourier de polarisations circulaires :

$$\begin{aligned} h_{ij}(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} h_{ij}[k] e^{-ik_\mu x^\mu} \\ h_{ij}[k] &= \sum_{\gamma=\pm 1} \left( \frac{\mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \mathbf{e}_j^\gamma[\hat{\mathbf{k}}]}{\sqrt{2}} \right)^* h^\gamma[k] \end{aligned} \quad (\text{C-26})$$

On a les conditions de réalité suivantes pour le champs  $h^\gamma[k]$  :

$$(h^\gamma[k])^* = h^\gamma[-k] \quad (\text{C-27})$$

Les OG se propagent à la vitesse de la lumière et sont transverses par rapport au vecteur d'onde :

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0 \quad , \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \quad , \quad \mathbf{k}^i h_{ij} = 0 \quad (\text{C-28})$$

Nous ferons ici l'hypothèse que le fond d'OG est stationnaire et non polarisé, de sorte qu'on peut le caractériser par la seule densité spectrale des fluctuations  $C_{hh}[k]$  définie de la façon suivante :

$$\langle h^\gamma[k] h^{\gamma'}[k'] \rangle = (2\pi)^4 \delta^{\gamma\gamma'} \delta^4(k + k') C_{hh}[k] \quad (\text{C-29})$$

Il sera commode aussi de considérer la fonction de corrélation temporelle en un point donné, le centre du détecteur en  $\mathbf{x} = 0$  par exemple. La corrélation entre deux composantes de la métrique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \langle h_{ij}(t) h_{kl}(0) \rangle &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \langle h_{ij}[k] h_{kl}[k'] \rangle e^{-i\omega t} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} C_{hh}[k] \mathcal{Q}_{ijkl}[\hat{\mathbf{k}}] \end{aligned} \quad (\text{C-30})$$

où on définit la quantité  $\mathcal{Q}_{ijkl}[\hat{\mathbf{k}}]$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{ijkl}[\hat{\mathbf{k}}] &\triangleq \frac{1}{2} \sum_{\gamma=\pm 1} \mathbf{e}_i^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \mathbf{e}_j^\gamma[\hat{\mathbf{k}}] \mathbf{e}_k^\gamma[-\hat{\mathbf{k}}] \mathbf{e}_l^\gamma[-\hat{\mathbf{k}}] \\ &= (\hat{\mathbf{m}}_i \hat{\mathbf{m}}_k + \hat{\mathbf{n}}_i \hat{\mathbf{n}}_k)(\hat{\mathbf{m}}_j \hat{\mathbf{m}}_l + \hat{\mathbf{n}}_j \hat{\mathbf{n}}_l) - (\hat{\mathbf{n}}_i \hat{\mathbf{m}}_k - \hat{\mathbf{m}}_i \hat{\mathbf{n}}_k)(\hat{\mathbf{n}}_j \hat{\mathbf{m}}_l - \hat{\mathbf{m}}_j \hat{\mathbf{n}}_l)\end{aligned}\quad (\text{C-31})$$

Pour un fond isotrope, la fonction de corrélation  $C_{hh}[k]$  ne dépend pas de la direction du vecteur d'onde de telle sorte qu'on a :

$$\langle h_{ij}(t) h_{kl}(0) \rangle = \delta_{ijkl} \int \frac{d\omega}{2\pi} \left( \int \frac{d|\mathbf{k}|}{2\pi c^2} C_{hh}[k] \right) e^{-i\omega t} \quad (\text{C-32})$$

$$\delta_{ijkl} \triangleq \int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \mathcal{Q}_{ijkl}[\hat{\mathbf{k}}] \quad (\text{C-33})$$

Afin de calculer explicitement les intégrations angulaires, on définit la quantité  $\mathcal{Q}_{ij}[\hat{\mathbf{k}}]$  telle que :

$$\mathcal{Q}_{ij}[\hat{\mathbf{k}}] \triangleq \hat{\mathbf{m}}_i \hat{\mathbf{m}}_j + \hat{\mathbf{n}}_i \hat{\mathbf{n}}_j = \delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j \quad (\text{C-34})$$

On montre que les termes de polarisations se récrivent alors sous la forme :

$$\mathcal{Q}_{ijkl}[\hat{\mathbf{k}}] = \mathcal{Q}_{ik}[\hat{\mathbf{k}}] \mathcal{Q}_{jl}[\hat{\mathbf{k}}] + \mathcal{Q}_{il}[\hat{\mathbf{k}}] \mathcal{Q}_{jk}[\hat{\mathbf{k}}] - \mathcal{Q}_{ij}[\hat{\mathbf{k}}] \mathcal{Q}_{kl}[\hat{\mathbf{k}}] \quad (\text{C-35})$$

En remarquant que :

$$\int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (\text{C-36})$$

$$\int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j \hat{\mathbf{k}}_k \hat{\mathbf{k}}_l = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{C-37})$$

on déduit l'expression explicite de  $\delta_{ijkl}$  :

$$\delta_{ijkl} = \int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \mathcal{Q}_{ijkl}[\hat{\mathbf{k}}] = \frac{2}{5} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{4}{15} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{C-38})$$

On remarque que les fonctions de corrélations des différentes polarisations sur chaque plan :  $h_{12}$ ,  $h_{13}$ ,  $h_{23}$  pour les polarisations linéaires  $\times$ ,  $\frac{h_{11}-h_{22}}{2}$ ,  $\frac{h_{11}-h_{33}}{2}$ ,  $\frac{h_{22}-h_{33}}{2}$  pour les polarisations linéaires  $+$  ainsi que les polarisations  $h_{\pm 1}$  sur chaque plan, sont égales puisque l'on a :

$$\begin{aligned}\delta_{1212} &= \delta_{1313} = \delta_{2323} = \frac{\delta_{1111} + \delta_{2222} - 2\delta_{1122}}{4} \\ &= \frac{\delta_{1111} + \delta_{3333} - 2\delta_{1133}}{4} \\ &= \frac{\delta_{2222} + \delta_{3333} - 2\delta_{2233}}{4} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}\quad (\text{C-39})$$

On peut donc définir un spectre  $S_h[\omega]$  unique pour  $h$  représentant n'importe laquelle des composantes désignées ci-dessous :

$$h = h_{12}, h_{13}, h_{23}, \frac{h_{11} - h_{22}}{2}, \frac{h_{11} - h_{33}}{2}, \frac{h_{22} - h_{33}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \left( h_{12} \pm \frac{h_{11} - h_{22}}{2i} \right), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( h_{13} \pm \frac{h_{11} - h_{33}}{2i} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left( h_{23} \pm \frac{h_{22} - h_{33}}{2i} \right) \quad (\text{C-40})$$

Ce spectre est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de l'une quelconque de ces composantes, par exemple :

$$\langle h_{12}(t)h_{12}(0) \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_h[\omega] e^{-i\omega t} \quad (\text{C-41})$$

$S_h[\omega]$  est une fonction réelle et paire afin d'assurer les conditions de réalité. Elle a la dimension de l'inverse d'une fréquence, c'est-à-dire aussi la dimension d'un temps.

On étudie dans cette thèse le couplage des OG à des systèmes qui ne sont pas isotropes. Pour cette raison, on devra utiliser la caractérisation plus générale  $C_{hh}[k]$ . En identifiant (C-32) et (C-41), on voit que ces deux quantités sont reliées, pour chaque composante  $h$  précisée plus haut, par :

$$C_{hh}[k] = 10\pi^2 c^2 \delta(k^2) \frac{S_h[\omega]}{\omega} \quad (\text{C-42})$$

$$\delta(k^2) = \frac{c}{2|\mathbf{k}|} (\delta(\omega - c|\mathbf{k}|) + \delta(\omega + c|\mathbf{k}|)) \quad (\text{C-43})$$

#### C.4 Fonctions de corrélation pour un fond d'OG anisotrope

On donne dans ce qui suit une généralisation des fonctions de corrélation au cas d'un fond anisotrope. On décompose la métrique dans les ondes planes de fréquence  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  telle que  $\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2$  :

$$h_{ij}(x) = \sum_{\gamma=+, \times} \int \frac{d\omega d\hat{\mathbf{k}}}{2\pi 4\pi} e_{ij}^{\gamma}[\hat{\mathbf{k}}] h^{\gamma}[\omega, \hat{\mathbf{k}}] e^{-i\omega(t - \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}{c})} \quad (\text{C-44})$$

où  $h^{\gamma}[\omega, \hat{\mathbf{k}}]$  représente l'amplitude, dans la polarisation  $\gamma$ , de l'onde plane de vecteur d'onde  $k^{\mu}$ . On a alors les conditions de réalités suivantes :

$$(h^{\gamma}[\omega, \hat{\mathbf{k}}])^* = h^{\gamma}[-\omega, \hat{\mathbf{k}}] \quad (\text{C-45})$$

Un fond général d'OG anisotrope est caractérisé par la décomposition de l'amplitude  $h^{\gamma}[\omega, \hat{\mathbf{k}}]$  dans les harmoniques sphériques avec les conditions de réalité associées :

$$h^{\gamma}[\omega, \hat{\mathbf{k}}] = \sum_{l,m} h_{l,m}^{\gamma}[\omega] Y_{lm}[\hat{\mathbf{k}}] \\ (h_{l,m}^{\gamma}[\omega])^* = (-1)^m h_{l,-m}^{\gamma}[-\omega] \quad (\text{C-46})$$

Comme précédemment, il est commode de considérer la fonction de corrélation de la perturbation métrique  $h_{ij}(t)$  en un point donné, par exemple le centre  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  du repère, en fonction du temps. Dans ce cas on a la décomposition suivante :

$$h_{ij}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{l,m} \sum_{\gamma=+,\times} h_{l,m}^{\gamma}[\omega] e^{-i\omega t} \int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} e_{ij}^{\gamma}[\hat{\mathbf{k}}] Y_{l,m}[\hat{\mathbf{k}}] \quad (\text{C-47})$$

Pour un fond non polarisée, la fonction de corrélation la plus générale peut ensuite s'écrire sous la forme suivante, en développant dans les harmoniques sphériques :

$$\begin{aligned} \langle (h^{\gamma}[\omega, \hat{\mathbf{k}}])^* h^{\gamma'}[\omega', \hat{\mathbf{k}}'] \rangle &= 8\pi^2 \delta^{\gamma\gamma'} \delta(\omega - \omega') \delta^2(\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}') \sum_{l,m} S_{l,m}[\omega] Y_{l,m}[\hat{\mathbf{k}}] \\ S_{l,m}^*[\omega] &= (-1)^m S_{l,-m}[-\omega] = (-1)^m S_{l,-m}[\omega] \end{aligned} \quad (\text{C-48})$$

On en déduit la fonction de corrélation pour  $h_{lm}^{\gamma}[\omega]$  :

$$\begin{aligned} h_{lm}^{\gamma}[\omega] &= \int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} h^{\gamma}[\omega, \hat{\mathbf{k}}] Y_{l,m}^*[\hat{\mathbf{k}}] \\ \langle (h_{lm}^{\gamma}[\omega])^* h_{l'm'}^{\gamma'}[\omega'] \rangle &= 2\pi \delta^{\gamma\gamma'} \delta(\omega - \omega') \sum_{p,q} S_{p,q}[\omega] \int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} Y_{p,q}[\hat{\mathbf{k}}] Y_{l,m}[\hat{\mathbf{k}}] Y_{l',m'}^*[\hat{\mathbf{k}}] \end{aligned} \quad (\text{C-49})$$

En utilisant deux relations de fermeture et les équations (C-47), (C-49), on déduit les fonctions de corrélation de deux composantes  $h_{ij}(t)$  et  $h_{kl}(0)$  de la métrique :

$$\langle h_{ij}(t) h_{kl}(0) \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{p,q} S_{p,q}[\omega] e^{-i\omega t} \int \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \mathcal{Q}_{ijkl}[\hat{\mathbf{k}}] Y_{p,q}[\hat{\mathbf{k}}] \quad (\text{C-50})$$

Cette équation généralise (C-41) au cas non isotrope et pour n'importe quel composante  $h_{ij}$  et  $h_{kl}$  de la métrique. Dans le cas isotrope, on retrouve les mêmes résultats avec :

$$S_h[\omega] = \frac{2}{5} S_{0,0}[\omega] \quad (\text{C-51})$$

## D Relativité Générale et réponse linéaire

Cette partie a pour but d'écrire un propagateur pour les équations d'Einstein linéarisées et d'en déduire, via le théorème fluctuation-dissipation, le spectre de bruit ainsi que la température de bruit associée à un fond d'ondes gravitationnelles. Cela est fait en analogie avec le traitement habituel des fluctuations du champ électromagnétique [196]. Cette partie s'inspire fortement de l'article [57].

### D.1 Propagateur du graviton

De façon commode, on peut réécrire les équations d'Einstein sous les formes équivalentes :

$$\eta_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\rho\sigma} = -\frac{8\pi G}{c^3}T_{\mu\nu} \quad , \quad R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^3}\eta_{\mu\nu\rho\sigma}T^{\rho\sigma} \quad (\text{D-1})$$

$$\eta_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) \quad (\text{D-2})$$

On se place dans l'espace des impulsions (lorsque l'on ne précise pas, les quantités seront dans la suite à considérer dans cette représentation) et on évalue toutes les quantités dans l'approximation linéaire en  $h_{\mu\nu}$ . Le tenseur de Riemann linéarisé s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma}[k] &= -\frac{1}{2}(k_\mu k_\rho h_{\nu\sigma}[k] + k_\nu k_\sigma h_{\mu\rho}[k] - k_\nu k_\rho h_{\mu\sigma}[k] - k_\mu k_\sigma h_{\nu\rho}[k]) \\ &= -\frac{1}{2}(k_\mu \eta_{\nu\lambda} - k_\nu \eta_{\mu\lambda})(k_\rho \eta_{\sigma\tau} - k_\sigma \eta_{\rho\tau})h^{\lambda\tau}[k] \end{aligned} \quad (\text{D-3})$$

Dans l'espace des impulsions, les transformations de jauge, qui sont aussi les changements de coordonnées infinitésimaux  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$ , s'écrivent :

$$h_{\lambda\tau} \longrightarrow h_{\lambda\tau} + \delta h_{\lambda\tau} \quad , \quad \delta h_{\lambda\tau} = ik_\lambda \delta x_\tau[k] + ik_\tau \delta x_\lambda[k] \quad (\text{D-4})$$

En se plaçant dans la jauge des coordonnées harmoniques pour laquelle :

$$2k^\mu h_{\mu\nu} = k_\nu h^\mu{}_\mu \quad (\text{D-5})$$

l'équation linéarisée d'Einstein s'écrit :

$$k^2 h^{\mu\nu} = -2R^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^3}\eta^{\mu\nu\rho\sigma}T_{\rho\sigma} \quad (\text{D-6})$$

Cette équation peut se lire comme une équation de réponse de la perturbation métrique  $h^{\mu\nu}$ , dans la jauge des coordonnées harmoniques, à la source  $T_{\rho\sigma}$ . La jauge TT étant un sous-ensemble de la jauge des coordonnées harmoniques, le propagateur que l'on calcule est aussi valable pour la jauge TT. En adoptant la prescription de Feynman, on en déduit le propagateur du graviton  $\chi_{h^{\mu\nu}h_{\rho\sigma}}$  comme étant :

$$h_{\mu\nu} = \chi_{h^{\mu\nu}h_{\rho\sigma}} \frac{1}{2}T^{\rho\sigma} \quad , \quad \chi_{h^{\mu\nu}h_{\rho\sigma}} = \frac{32\pi G}{c^3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\eta_{\mu\nu\rho\sigma}}{k^2 - i\varepsilon} \quad (\text{D-7})$$

## D.2 Densité spectrale

Nous utilisons maintenant les relations générales existant entre la fonction de réponse et les fonctions de corrélation. Ces fonctions de corrélation pour deux champs  $f$  et  $g$  sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} C_{fg}(x) &\equiv \langle f(x)g(0) \rangle - \langle f(x) \rangle \langle g(0) \rangle \\ \sigma_{fg}(x) &\equiv \frac{C_{fg}(x) + C_{gf}(-x)}{2\hbar} \quad , \quad \xi_{fg}(x) \equiv \frac{C_{fg}(x) - C_{gf}(-x)}{2\hbar} \end{aligned} \quad (\text{D-8})$$

Ces dernières relations s'écrivent aussi :

$$\hbar\sigma_{fg}(x) = \langle f(x) \cdot g(0) \rangle - \langle f(x) \rangle \langle g(0) \rangle \quad , \quad \hbar\xi_{fg}(x) = \frac{1}{2} \langle [f(x), g(0)] \rangle \quad (\text{D-9})$$

où le produit symétrisé est défini par :

$$f \cdot g = \frac{1}{2}(fg + gf) \quad (\text{D-10})$$

Le commutateur  $\xi_{fg}$  des champs est aussi appelé densité spectrale du champ gravitationnel ; en effet, les fonctions de réponse avancées  $\chi_{fg}^{\text{adv}}$  et retardées  $\chi_{fg}^{\text{ret}}$  se décomposent comme la somme d'une partie dispersive et d'une partie dissipative reliée à  $\xi_{fg}$  par les équations suivantes :

$$\chi_{fg}^{\text{ret}}[k] = \bar{\chi}_{fg}[k] + i\xi_{fg}[k] \quad , \quad \chi_{fg}^{\text{adv}}[k] = \bar{\chi}_{fg}[k] - i\xi_{fg}[k] \quad (\text{D-11})$$

Les fonctions  $\bar{\chi}_{fg}[k]$  et  $\xi_{fg}[k]$  sont respectivement des fonctions paire et impaire de  $k$  de telle sorte que  $\chi_{fg}^{\text{adv}}[k] = \chi_{fg}^{\text{ret}}[-k]$ . Comme d'habitude, la fonction de réponse de Feynman  $\chi_{fg}[k]$  s'écrit comme la réponse retardée pour les fréquences positives et la réponse avancée pour les fréquences négatives :

$$\chi_{fg} = \theta(k_0)\chi_{fg}^{\text{ret}}[k] + \theta(-k_0)\chi_{fg}^{\text{adv}}[k] = \bar{\chi}_{fg}[k] + i\epsilon(k_0)\xi_{fg}[k] \quad (\text{D-12})$$

Les fonctions  $\theta(x)$  et  $\epsilon(x)$  représentent respectivement la fonction Heaviside et la fonction Signe.

En utilisant la relation :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mathcal{P}\mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x) \quad (\text{D-13})$$

on déduit la densité spectrale  $\xi_{h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}}$  grâce à (D-7) :

$$\begin{aligned} \xi_{h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}} &= \frac{32\pi^2 G}{c^3} \epsilon(k_0)\delta(k^2)\eta_{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= \frac{16\pi^2 G}{c^3} \epsilon(k_0)\delta(k^2) (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) \end{aligned} \quad (\text{D-14})$$

Le terme en  $\delta(k^2)$  indique que les fluctuations gravitationnelles sont sur la couche de masse, donc se propagent à la vitesse de la lumière : la dissipation se fait par absorption/émission

d'OG. Une expression invariante de jauge de la densité spectrale (D-14) peut être construite à partir du commutateur de la courbure de Riemann  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ . En utilisant l'équation (D-3), on montre que :

$$\begin{aligned}\xi_{R_{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}}[k] &= \frac{16\pi^2 G}{c^3} \epsilon(k_0)\delta(k^2) (\mathcal{R}_{\mu\nu\mu'\nu'}\mathcal{R}_{\rho\sigma\rho'\sigma'} + \mathcal{R}_{\mu\nu\rho'\sigma'}\mathcal{R}_{\rho\sigma\mu'\nu'} - \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{R}_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}) \\ \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma}[k] &= -\frac{1}{2}(k_\mu\eta_{\nu\lambda} - k_\nu\eta_{\mu\lambda})(k_\rho\eta_{\sigma\tau} - k_\sigma\eta_{\rho\tau})\eta^{\lambda\tau}[k]\end{aligned}\quad (\text{D-15})$$

De façon équivalente, on peut écrire la densité spectrale pour les composantes TT de la perturbation métrique qui correspondent directement aux  $R_{0i0j}$  de la courbure de Riemann. Dans l'espace de Fourier, on a les relations suivantes :

$$R_{0i0j}[k] = -\frac{1}{2}k_0^2 h_{ij}[k] \quad , \quad \mathcal{R}_{0i0j}[k] = \frac{1}{2}(k_0^2\delta_{ij} - k_i k_j) = \frac{k_0^2}{2} \mathcal{Q}_{ij}[\hat{\mathbf{k}}] \quad (\text{D-16})$$

Ces relations permettent de calculer les densités spectrales suivantes :

$$\xi_{R_{0i0j}R_{0k0l}} = \frac{4\pi^2 G}{c^3} \epsilon(k_0)\delta(k^2)k_0^4 \mathcal{Q}_{ijkl}[\hat{\mathbf{k}}] \quad (\text{D-17})$$

$$\xi_{h_{ij}h_{kl}} = \frac{16\pi^2 G}{c^3} \epsilon(k_0)\delta(k^2) \mathcal{Q}_{ijkl}[\hat{\mathbf{k}}] \quad (\text{D-18})$$

Cette dernière expression donne la densité spectrale caractérisant le commutateur des champs dans la jauge TT.

### D.3 Fonctions de corrélation des fluctuations

Le spectre de bruit peut se calculer dans le cas d'un équilibre thermique en utilisant le théorème fluctuation-dissipation. Celui-ci relie la densité spectrale (c'est-à-dire la dissipation ou encore le commutateur des champs) aux fluctuations (c'est-à-dire l'anticommutateur des champs). Dans le domaine des fréquences, un champ qui serait à l'équilibre thermique à la température  $T_{\text{gw}}$  vérifierait :

$$\hbar\sigma_{h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}}[k] = 2 \left( \frac{1}{2} + n[k_0] \right) \epsilon(k_0)\hbar\xi_{h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}}[k] \quad (\text{D-19})$$

$n[k_0]$  est le nombre de graviton par mode à la fréquence  $\omega = c|k_0|$ . Ce nombre serait donné pour un équilibre thermique par la formule de Planck :

$$n[k_0] = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_{\text{B}}T_{\text{gw}}}} - 1} \quad (\text{D-20})$$

c'est-à-dire aussi :

$$2 \left( \frac{1}{2} + n[k_0] \right) = \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_{\text{B}}T_{\text{gw}}} \right) \quad (\text{D-21})$$

On considérera toujours dans cette thèse le cas limite des hautes températures :

$$k_{\text{B}}T_{\text{gw}} \gg \hbar\omega \quad (\text{D-22})$$

c'est-à-dire le cas où le nombre de gravitons par mode est beaucoup plus grand que 1 :

$$n \simeq \frac{k_{\text{B}}T_{\text{gw}}}{\hbar\omega} \gg 1 \quad (\text{D-23})$$

Autrement dit, on négligera les fluctuations quantiques de la gravité. Dans ces conditions, l'anticommutateur  $\hbar\sigma_{h_{ij}h_{kl}}[k]$  sera directement relié au spectre de bruit classique  $C_{hh}[k]$  par la relation :

$$C_{hh}[k]\mathcal{Q}_{ijkl} = \hbar\sigma_{h_{ij}h_{kl}}[k] \quad (\text{D-24})$$

En utilisant l'expression de  $n[k_0]$  et l'expression (D-18) de la densité spectrale, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} C_{hh}[k]\mathcal{Q}_{ijkl}[\hat{\mathbf{k}}] &= \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_{\text{B}}T_{\text{gw}}}\right)\epsilon(k_0)\hbar\xi_{h_{ij}h_{kl}}[k] \\ &= \frac{16\pi^2G}{c^3}\left(\frac{2k_{\text{B}}T_{\text{gw}}}{\hbar\omega}\right)\epsilon(k_0)\epsilon(k_0)\delta(k^2)\mathcal{Q}_{ijkl}[\hat{\mathbf{k}}] \end{aligned} \quad (\text{D-25})$$

En utilisant la relation (C-42), on obtient finalement l'expression du spectre de bruit  $S_h[\omega]$  en fonction de la température  $T_{\text{gw}}$  :

$$S_h[\omega] = \frac{16G}{5c^5} k_{\text{B}}T_{\text{gw}} \quad (\text{D-26})$$

En fait, les fluctuations de la métrique ne sont certainement pas dans un état d'équilibre, comme le montrent les ordres de grandeurs discutés dans le chapitre 1.A. On pourra néanmoins utiliser la relation (D-26) comme la définition d'une température effective de bruit associée à l'environnement gravitationnel :

$$k_{\text{B}}T_{\text{gw}}[\omega] = \frac{5c^5}{16G} S_h[\omega] \quad (\text{D-27})$$

Cette température n'est alors plus définie de façon thermodynamique et, en particulier, elle dépend de la fréquence  $\omega$ . La dépendance en fréquence de  $T_{\text{gw}}$  est discutée de manière détaillée dans le chapitre 1.A.

## E Rappels sur la théorie de la fonctionnelle d'influence

La théorie de la fonctionnelle d'influence permet de calculer le processus de décohérence dans un traitement Lagrangien de l'interaction entre le système et l'environnement. Cette annexe redonne quelques résultats importants que l'on utilisera dans le corps du manuscrit et permet de définir quelques notations. Il est principalement basé sur le cours [65] et la référence [64].

### E.1 Fonctionnelle d'influence de Feynman-Vernon

On considère un système  $\mathcal{S}$  de coordonnées généralisées  $q$  en interaction avec un environnement  $\mathcal{E}$  de coordonnées généralisées  $x$ . L'action totale  $S$  s'écrit :

$$S[q, x] = S_{\mathcal{S}}[q] + S_{\mathcal{E}}[x] + S_{\mathcal{S}/\mathcal{E}}[q, x] = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q_t, \dot{q}_t, x_t, \dot{x}_t, t) dt \quad (\text{E-1})$$

Le système  $\mathcal{S}$  n'étant pas isolé, ses propriétés doivent être décrites à l'aide de sa matrice densité  $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}$ , où les chapeaux signifie qu'il s'agit d'un opérateur. A titre d'exemple, les cohérences du système seront données par les termes non diagonaux de la matrice densité. Une fois connue la matrice densité, on peut calculer n'importe quelle valeur moyenne d'observable du système. Cette matrice densité s'obtient comme une trace sur les degrés de liberté de l'environnement :

$$\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}(\hat{\rho}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}(t)) \quad (\text{E-2})$$

$$\hat{\rho}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}(t_f) = \hat{U}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}(t_i, t_f) \hat{\rho}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}(t_i) \hat{U}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}^{-1}(t_i, t_f) \quad (\text{E-3})$$

$\hat{U}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}(t_i, t_f)$  représente l'opérateur évolution de l'ensemble système + environnement  $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ . Les éléments de matrice de cet opérateur d'évolution se calculent comme une intégrale de chemin [64] :

$$\langle q_f, x_f | \hat{U}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}(t_i, t_f) | q_i, x_i \rangle = \int \mathcal{D}[q(t), x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t), x(t)]} \quad (\text{E-4})$$

$$\begin{cases} q(t_i) = q_i & , & x(t_i) = x_i \\ q(t_f) = q_f & , & x(t_f) = x_f \end{cases} \quad (\text{E-5})$$

On somme donc sur tous les chemins  $q(t)$  du système et  $x(t)$  de l'environnement ayant comme extrémités  $q_i$  (respectivement  $x_i$ ) en  $t = t_i$  et  $q_f$  (respectivement  $x_f$ ) en  $t = t_f$  pour le système (respectivement l'environnement). À partir de cette expression, on déduit les éléments de matrice de l'opérateur densité :

$$\begin{aligned} \langle q_f, x_f | \hat{\rho}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}(t_f) | q'_f, x'_f \rangle &= \int \mathcal{D}[q_+(t), q_-(t)] \mathcal{D}[x_+(t), x_-(t)] e^{\frac{i}{\hbar} (S[q_+, x_+] - S[q_-, x_-])} \\ &\quad \times \langle q_i | \hat{\rho}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}(t_i) | q'_i \rangle \end{aligned} \quad (\text{E-6})$$

où on intègre implicitement sur  $q_i, q'_i, x_i$  et  $x'_i$  tels que :

$$\begin{cases} q_+(t_i) = q_i & , & x_+(t_i) = x_i \\ q_-(t_i) = q'_i & , & x_-(t_i) = x'_i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q_+(t_f) = q_f & , & x_+(t_f) = x_f \\ q_-(t_f) = q'_f & , & x_-(t_f) = x'_f \end{cases} \quad (\text{E-7})$$

On suppose maintenant qu'à l'instant initial l'environnement et le système sont décorrélés de telle sorte que la matrice densité  $\widehat{\rho}_{S+\mathcal{E}}(t_i)$  se factorise :

$$\widehat{\rho}_{S+\mathcal{E}}(t_i) = \widehat{\rho}_S(t_i) \otimes \widehat{\rho}_{\mathcal{E}}(t_i) \quad (\text{E-8})$$

Cette condition mérite d'être discutée plus en profondeur [197], mais on se contente pour le moment d'une description simple. On a alors d'après (E-2) :

$$\langle q_f | \widehat{\rho}_S(t_f) | q'_f \rangle = \int \mathcal{D}[q_+(t), q_-(t)] e^{\frac{i}{\hbar}(S_S[q_+] - S_S[q_-])} \mathcal{F}[q_+(t), q_-(t)] \langle q_i | \widehat{\rho}_S(t_i) | q'_i \rangle \quad (\text{E-9})$$

La fonctionnelle  $\mathcal{F}[q_+, q_-]$  est appelée fonctionnelle d'influence de Feynman-Vernon et elle s'écrit :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \int \mathcal{D}[x_+(t), x_-(t)] e^{\frac{i}{\hbar}(S_{\mathcal{E}+S/\mathcal{E}}[x_+, q_+] - S_{\mathcal{E}+S/\mathcal{E}}[x_-, q_-])} \langle x_i | \widehat{\rho}_{\mathcal{E}}(t_i) | x'_i \rangle \quad (\text{E-10})$$

On somme sur les états initiaux  $x_i$  et  $x'_i$  de l'environnement, ainsi que sur les états finaux  $x_f$  tel que  $x_+(t_f) = x_-(t_f) = x_f$ . Autrement dit, la trace sur les degrés de liberté de l'environnement peut être vu comme une somme sur des chemins fermés comme ceux représentés sur la figure de droite de (6.1).

Finalement, l'expression (E-9) montre que les cohérences entre deux positions  $q_f$  et  $q'_f$  du système  $\mathcal{S}$  s'écrivent comme une double intégrale de chemins sur des chemins  $q_+(t)$  et  $q_-(t)$  arrivant respectivement en  $t = t_f$  en  $q_f$  et  $q'_f$ , où le poids de Feynman  $e^{\frac{i}{\hbar}(S_S[q_+] - S_S[q_-])}$  est pondéré par la fonctionnelle d'influence  $\mathcal{F}[q_+, q_-]$ . On montre que cette fonctionnelle est un nombre complexe de module inférieur à l'unité.

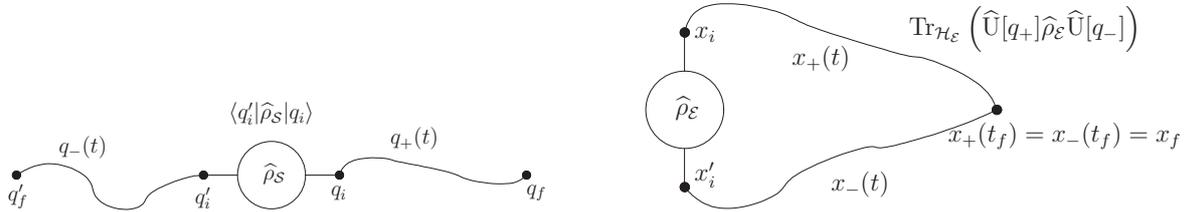


FIG. 6.1: A gauche : Représentation schématique de la double intégrale de chemin pour déterminer les éléments de matrices de l'opérateur densité  $\widehat{\rho}_S(t_f)$ . Chaque couple de chemins  $(q_+(t), q_-(t))$  est affecté d'un facteur de perte de cohérence donné par la fonctionnelle d'influence  $\mathcal{F}[q_+(t), q_-(t)]$  dont une représentation est illustrée sur la figure de droite. Pour son calcul, il faut sommer sur des chemins fermés de l'environnement.

L'interprétation habituelle des intégrales de chemins indique que la fonctionnelle d'influence rend compte physiquement de la perte de cohérence entre les chemins  $q_+(t)$  et  $q_-(t)$  due à l'interaction du système avec l'environnement. Quand ce terme est petit devant 1, l'interférence entre les chemins associés a tendance à s'annuler dans l'intégrale de chemin (E-9). En fait, la fonctionnelle d'influence  $\mathcal{F}[q_+, q_-]$  s'interprète comme une réduction du contraste entre les chemins  $(q_+, q_-)$  dans une expérience d'interférence à deux ondes dont chacune suivrait l'un des chemins.

## E.2 Quelques propriétés générales

On commence par donner deux propriétés importantes qui nous serviront dans la suite :

1. L'échange des chemins est équivalent à une conjugaison complexe :

$$(\mathcal{F}[q_+, q_-])^* = \mathcal{F}[q_-, q_+] \quad (\text{E-11})$$

2. Si l'environnement est formé par  $N$  parties qui n'interagissent pas et qui sont statistiquement indépendantes à l'instant initial, alors  $\mathcal{F}$  se factorise en produit de facteurs :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \prod_{k=1}^N \mathcal{F}_k[q_+, q_-] \quad (\text{E-12})$$

Chaque facteur  $\mathcal{F}_k[q_+, q_-]$  est la fonctionnelle d'influence de la  $k$ -ième partie. Cette propriété va nous servir lorsque l'on considérera le fond d'OG comme une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants, plus précisément un ensemble continu de modes de Fourier qui n'interagissent pas entre eux (dans le cadre de la limite linéarisée de la Relativité Générale).

3. Quand on calcule la fonctionnelle d'influence d'un environnement qui n'est pas dans un état pur, mais dans un mélange statistique d'états  $|\phi_\alpha\rangle$  avec la probabilité  $p_\alpha$  (les bains thermiques sont dans cette situation), la fonctionnelle d'influence s'écrit comme une somme sur cette distribution statistique :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha}[q_+, q_-] \quad (\text{E-13})$$

Pour le moment, on n'a pas encore calculé d'expression pour cette fonctionnelle. Comme on le verra plus tard, les fonctionnelles d'influence calculées en approximation gaussienne jouent un rôle très important et interviennent très fréquemment dans les calculs de décohérence.

La forme d'une fonctionnelle d'influence gaussienne peut être caractérisée de manière simple. Pour une fonctionnelle d'influence de la forme  $\mathcal{F}[q_+, q_-] = e^{-i\Phi[q_+, q_-]}$  où  $\Phi$  est au plus quadratique dans les  $q_{\pm}$ , on montre que :

1. Si  $\Phi[q_+, q_-]$  est homogène de degré un, on a alors nécessairement :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \exp \left( i \int_{t_i}^{t_f} B(t)(q_+(t) - q_-(t))dt \right) \quad (\text{E-14})$$

$B(t)$  est une fonction réelle et la fonctionnelle se réduit à un déphasage, c'est-à-dire un changement de l'action du système.

2. Si  $\Phi[q_+, q_-]$  est homogène de degré deux, on a alors nécessairement :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[q_+, q_-] &= \exp \left( - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds (q_+(t) - q_-(t)) (A(t, s)q_+(s) - A^*(t, s)q_-(s)) \right) \\ \mathcal{F}[q_+, q_-] &= \exp \left( - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds (q_+(t) - q_-(t)) A_R(t, s) (q_+(s) - q_-(s)) \right) \\ &\times \exp \left( -i \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds (q_+(t) - q_-(t)) A_I(t, s) (q_+(s) + q_-(s)) \right) \end{aligned} \quad (\text{E-15})$$

La fonctionnelle se décompose en une partie atténuation (contrôlé par la partie réelle  $A_R$  de  $A$ ) et une partie déphasage (contrôlé par la partie imaginaire  $A_I$  de  $A$ ). Cette forme de fonctionnelle permet donc de rendre compte d'une perte de cohérence entre deux chemins différents, alors qu'une fonctionnelle linéaire ne le permettait pas.

### E.3 Fonctionnelles d'environnements classiques

Afin d'interpréter les résultats généraux de la partie suivante, on va donner la forme des fonctionnelles d'influences de quelques environnements classiques.

On considère d'abord un système en interaction avec un potentiel extérieur tel que :

$$S_{S/\mathcal{E}} = - \int_{t_i}^{t_f} V[q(t), t] dt \quad (\text{E-16})$$

La fonctionnelle d'influence s'écrit alors simplement comme :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} (V[q_+(t), t] - V[q_-(t), t]) dt \right) \quad (\text{E-17})$$

On voit donc que les fonctionnelles d'influence linéaires (E-14) sont physiquement équivalentes à des interactions avec des potentiels extérieurs linéaires en  $q(t)$ , avec la correspondance  $\hbar V[q(t), t] = -B(t)q(t)$ .

On considère maintenant que le potentiel extérieur  $V[q, t]$  est aléatoire et s'écrit :

$$V[q, t] = g(t)U[q(t)] \quad (\text{E-18})$$

On suppose connue la distribution de probabilité  $\mathcal{P}[g(t)]$  de  $g(t)$ . En utilisant la propriété de mélange statistique (E-13), on déduit que :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \int \mathcal{D}[g(t)] \mathcal{P}[g(t)] e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} g(t)(U[q_+(t)] - U[q_-(t)]) dt} \quad (\text{E-19})$$

Dans le cas où  $g(t)$  est un processus stochastique gaussien de moyenne nulle tel que :

$$\overline{g(t)} = 0 \quad , \quad \overline{g(t)g(s)} = c(t, s) \quad (\text{E-20})$$

la fonctionnelle d'influence se calcule par intégration gaussienne :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \exp \left( -\frac{1}{2\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} ds (U[q_+(t)] - U[q_-(t)])c(t, s)(U[q_+(s)] - U[q_-(s)]) \right) \quad (\text{E-21})$$

Si de plus le processus est stationnaire de telle sorte que :

$$c(t, s) = c(t - s) = c(s - t) \quad (\text{E-22})$$

alors on peut réduire les intégrations sur le domaine causal  $t_i \leq s \leq t \leq t_f$  :

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \exp \left( -\frac{1}{\hbar^2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds (U[q_+(t)] - U[q_-(t)])c(t - s)(U[q_+(s)] - U[q_-(s)]) \right) \quad (\text{E-23})$$

On voit donc que si  $U[q(t)] = \lambda q(t)$  (couplage linéaire), alors cette fonctionnelle d'influence représente la partie en  $A_R$  de la forme générale (E-15), avec plus précisément  $\hbar^2 A_R(t, s) = \lambda^2 c(t - s)$ . La partie en  $A_I$ , comme on le verra, est d'origine purement quantique.

Il faut remarquer qu'à partir de fonctionnelles d'influences élémentaires (E-17) qui ne représente que des déphasages, on peut arriver par mélange statistique à un facteur d'atténuation. De la même façon, un bruit classique sur le déphasage donne lieu à une chute de contraste quand il est moyenné sur un temps de mesure.

#### E.4 Effets physiques des fonctionnelles d'influence

Pour étudier les effets physiques d'une fonctionnelle d'influence, et notamment ses effets dissipatifs, on considère le cas simple où le système est un oscillateur harmonique. Ses états propres lorsqu'il est isolé sont donnés par les vecteurs  $|n\rangle$  tels que :

$$\hat{H}_S |n\rangle = \hbar\omega_n |n\rangle \quad , \quad \langle q|n\rangle = \chi_n(q) \quad (\text{E-24})$$

En l'absence d'environnement, ces états sont des états stationnaires et il n'y a pas de transition entre eux. On cherche maintenant à calculer ce taux de transition en présence de l'environnement.

Supposons qu'à l'instant initial l'état s'écrive  $|n, x_i\rangle \equiv |n\rangle|x_i\rangle$  où  $|x_i\rangle$  est l'état de l'environnement à l'instant initial. L'amplitude de transition entre cet état à l'instant  $t_i$  et l'état  $|m, x_f\rangle$  à l'instant final  $t_f$  s'écrit :

$$\mathcal{A}(t_i, t_f)[x_i, x_f] = \langle m, x_f | \hat{U}_{S+\mathcal{E}}(t_i, t_f) | n, x_i \rangle \quad (\text{E-25})$$

avec la probabilité associée :

$$\mathcal{P}(t_i, t_f)[x_i, x_f] = \left| \langle m, x_f \mid \widehat{U}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}(t_i, t_f) \mid n, x_i \rangle \right|^2 \quad (\text{E-26})$$

Pour trouver le taux de transition entre  $|n\rangle$  et  $|m\rangle$ , on somme les probabilités (E-26) sur tous les états finaux  $|x_f\rangle$  de l'environnement. Si l'état initial de l'environnement est caractérisé non pas par un état pur  $|x_i\rangle$  mais par une matrice densité  $\widehat{\rho}_{\mathcal{E}}(t_i)$ , on obtient comme probabilité de transition :

$$\mathcal{P}(mt_f|nt_i) = \int dx_f \langle m, x_f \mid \widehat{U}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}(t_i, t_f) (|n\rangle\langle n| \otimes \widehat{\rho}_{\mathcal{E}}(t_i)) \widehat{U}_{\mathcal{S}+\mathcal{E}}^\dagger(t_i, t_f) \mid m, x_f \rangle \quad (\text{E-27})$$

À l'aide de relations de fermeture et de l'expression (E-5), on trouve finalement que la probabilité de transition se réécrit simplement en fonction de la fonctionnelle d'influence [64] :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(mt_f|nt_i) &= \int \mathcal{D}[q_+(t), q_-(t)] e^{\frac{i}{\hbar}(S_{\mathcal{S}}[q_+(t)] - S_{\mathcal{S}}[q_-(t)])} \mathcal{F}[q_+(t), q_-(t)] \\ &\quad \times \chi_m^*(q_+(t_f)) \chi_m(q_-(t_f)) \chi_n(q_+(t_i)) \chi_n^*(q_-(t_i)) \end{aligned} \quad (\text{E-28})$$

En supposant une fonctionnelle d'influence gaussienne de la forme (E-15), on peut développer la probabilité (E-28) à l'ordre le plus bas dans l'approximation de Born :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(mt_f|nt_i) &= \delta_{n,m} + \mathcal{T}_{n,m} \\ \mathcal{T}_{n,m} &= - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds \langle (q_+(t) - q_-(t))(A(t,s)q_+(s) - A^*(t,s)q_-(s)) \rangle_{\mathcal{S}} \end{aligned} \quad (\text{E-29})$$

La valeur moyenne est à prendre sur le système en l'absence d'environnement. Cette valeur moyenne fait intervenir des termes proportionnels à  $\delta_{m,n}$  qui ne participent pas aux transitions  $m \leftrightarrow n$ , ainsi que des termes qui sont responsables de transitions. Ceux-ci sont donnés pour  $n \neq m$  par l'expression suivante [65] :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n,m} &= 2 \operatorname{Re} \left( \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds e^{i\omega_{nm}(t-s)} A(t,s) \right) |q_{nm}|^2 \\ q_{nm} &= \langle m | \hat{q} | n \rangle \quad , \quad \omega_{nm} = \omega_m - \omega_n \end{aligned} \quad (\text{E-30})$$

Pour un noyau  $A(t,s) = A(t-s)$  stationnaire et dans la limite  $t_f - t_i \rightarrow \infty$ , la probabilité de transition par unité de temps  $\Gamma_{n,m}$  entre les états  $n$  et  $m$  s'écrit :

$$\Gamma_{n,m} = 2|q_{nm}|^2 \operatorname{Re} \left( \int_0^\infty dt A(t) e^{i\omega_{nm}t} \right) \quad (\text{E-31})$$

---

## Bibliographie

---

- [1] C.M. Will, *Living Rev. Rel.* **4** (2001), 4 Cité p. **1**
- [2] J.H. Taylor, A. Wolszczau, T. Damour et J.M. Weisberg, *Nature* **355** (1992), 132 Cité p. **1, 31, 76**
- [3] Projet Franco-Italien VIRGO, voir le site <http://www.virgo.infn.it> Cité p. **1, 3, 28**
- [4] Projet Américain LIGO, voir le site <http://www.ligo.caltech.edu> Cité p. **1, 3**
- [5] Projet Germano-Britannique GEO600, voir le site <http://www.geo600.uni-hannover.de> Cité p. **1, 3**
- [6] Projet Japonais, voir <http://tamago.mtk.nao.ac.jp/> Cité p. **1, 3, 4**
- [7] Projet Australien, voir <http://www.anu.edu.au/Physics/ACIGA/> Cité p. **1, 3**
- [8] Projet international LISA, voir les sites <http://lisa.jpl.nasa.gov> ou <http://www.slr.caltech.edu/lisa/pubs.html> Cité p. **1, 4, 5, 151**
- [9] C.M. Will, *Phys. Today* (octobre 1999), 38 Cité p. **1**
- [10] S.A. Hughes, S. Márka, P.L. Bender et C.J. Hogan, *Proceedings of the 2001 Snowmass Meeting*, eConf C010630 (2001), P402 [[arXiv :astro-ph/0110349](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0110349)] Cité p. **2**
- [11] B.F. Schutz, *Class. Quant. Grav.* **16** (1999), A131 Cité p. **2, 31, 156**
- [12] R. Schödel et *al.*, *Nature* **419** (2002), 694 Cité p. **2**
- [13] T. Damour, *Phys. Rev. D* **64** (2001), 124013 Cité p. **2**
- [14] L. Blanchet, G. Faye, B.R. Iyer et B. Joguet, *Phys. Rev. D* **65** (2002), 061501R Cité p. **2**
- [15] K.S. Thorne, *300 years of gravitation*, Édés S.W. Hawking et W. Israel (Cambridge University Press, 1987) Cité p. **2, 25, 171**
- [16] L.P. Grishchuk, *Usp. Fiz. Nauk* **156** (1988), 297 Cité p. **2, 33, 34**
- [17] B. Allen, dans *Relativistic gravitation and gravitational radiation*, Édés J.A. Marck et *al* (Cambridge Univ. Press, 1996), 373 Cité p. **2, 5, 33**
- [18] M. Maggiore, *Physics Reports* **331** (2000), 283 Cité p. **2, 29, 30, 31, 33, 34, 78, 147**

- [19] L.P. Grishchuk, dans *A Relativistic Spacetime Odyssey*, Éd. I. Ciufolini, D. Dominici et L. Lusanna (World Scientific, 2002), [arXiv :gr-qc/0202072](#) Cité p. 2
- [20] Voir par exemple les Actes du 18ème Colloque d'Astrophysique de l'IAP, *On the Nature of Dark Energy* (édité par P. Brax, J. Martin et J.-P. Uzan, Frontier Group, 2002) Cité p. 2
- [21] J. Weber, *Phys. Rev.* **117** (1960), 306 Cité p. 2, 26
- [22] C.W. Misner, K.S. Thorne et J.A Wheeler, *Gravitation* (Freeman, 1973) Cité p. 2, 21, 22, 23, 25, 26, 30, 38, 116, 171, 181, 185
- [23] J.A. Lobo, *Phys. Rev. D* **52** (1995), 591 Cité p. 26, 28
- [24] E.D. Black et R.N. Gutenkunst, *Am. J. Phys.* **71**(4) (2003), 365 Cité p. 3
- [25] P.R. Saulson, *Fundamentals of interferometric gravitational wave detectors* (World scientific, 1994) Cité p. 3
- [26] B.J. Meers, *Phys. Rev. D* **38** (1988), 2317 Cité p. 4
- [27] M.-T. Jaekel et S. Reynaud, *Europhys. Lett.* **13** (1990), 301 Cité p. 4, 137
- [28] P.-F. Cohadon, A. Heidmann et M. Pinard, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999), 3174 Cité p. 4
- [29] J.-M Courty, A. Heidmann et M. Pinard, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003), 083601 Cité p. 4
- [30] K.-X. Sun, M.M. Fejer, E. Gustafson et R.L. Byer, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996), 3053 Cité p. 4
- [31] J. Mizuno, *Comparison of optical configurations for laser interferometric gravitational wave detector*, Thèse de doctorat (Max Planck Institute, Garching 1995) Cité p. 4
- [32] P.T. Beyersdorf, *The polarization Sagnac interferometer for gravitational wave detection*, Thèse de doctorat (Stanford, 2001) Cité p. 4
- [33] P. Purdue et Y. Chen, *Phys. Rev. D* **66** (2002), 122004 Cité p. 4
- [34] A. Buonanno, Y. Chen et M. Vallisneri, *Phys. Rev. D* **67** (2003), 024016 Cité p. 5
- [35] D. Hils, P.L. Bender et R.F. Webbink, *Astrophys. J.* **360** (1990), 75 Cité p. 5, 31
- [36] D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I.-O. Stamatescu et H.D. Zeh, *Decoherence and the appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer- Verlag, Berlin 1996) Cité p. 5, 102
- [37] S. Haroche et J.-M. Raimond, proceedings of the XXXIst Rencontres de Moriond, *Dark Matter in Cosmology, Quantum measurements, Experimental gravitation*, R. Ansari, Y. Giraud et J. Trinh Van Éd. (Frontières, 1996), 341 ; *Physics Today* (August 1996), 51 Cité p. 5
- [38] W.G. Unruh, *Phys. Rev. A* **51** (1995), 992 Cité p. 5
- [39] X. Maître, E. Hagle, J. Dreyer, A. Maali, C. Wunderlich, M. Brune, J.M. Raimond et S. Haroche, *J. Mod. Optics* **44** (1997), 2023 Cité p. 5

- [40] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J.M. Raimond et S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996), 4887 Cité p. [5](#)
- [41] S. Haroche, *Physics today* (Juillet 1998), 36; voir aussi le site <http://www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/french/frenchframes.html> Cité p. [5](#)
- [42] S. Reynaud, P.A. Maia Neto, A. Lambrecht et M.-T. Jaekel, *Europhys. Lett.* **54** (2001), 135 Cité p. [6](#), [7](#), [66](#)
- [43] R.P. Feynman, *Lectures on Gravitation* (B. Hatfield Éds, 1995) Cité p. [6](#), [8](#), [91](#), [116](#), [137](#), [171](#)
- [44] R.P. Feynman, *Acta Phys. Pol.* **24** (1963), 711 Cité p. [6](#)
- [45] F. Karolyhazy, *Nuovo cimento A* **42** (1966), 390 Cité p. [6](#)
- [46] L. Diosi, *Phys. Rev.* **A40** (1989), 1165 Cité p. [6](#)
- [47] R. Penrose, *Gen. Rel. Grav.* **28** (1996), 581 Cité p. [6](#), [137](#)
- [48] J. Ellis, P. Kanti, N.E. Mavromatos, E. Winstanley, D.V. Nanopoulos, *Mod. Phys. Lett. A* **13** (1990), 303 Cité p. [6](#)
- [49] L.J. Garay, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998), 2508; L.J. Garay, *Phys. Rev. D* **58** (1998), 124015 Cité p. [6](#)
- [50] J.A. Wheeler, *Ann. Physics* **2** (1957), 604 Cité p. [6](#)
- [51] G. Amelino-Camelia, *Phys. Rev. D* **62** (1999), 024015; G. Amelino-Camelia, *Nature* **408** (2000), 661 Cité p. [6](#), [36](#)
- [52] I.C. Percival, *Phys. World* **10** (1997), 48 Cité p. [6](#), [7](#), [36](#)
- [53] I.C. Percival et W.T. Strunz, *Proc. R. Soc. Lond. A* **453** (1997), 431 Cité p. [6](#), [7](#), [36](#)
- [54] W.L. Power et I.C. Percival, *Proc. R. Soc. Lond. A* **455** (2000), 991 Cité p. [6](#), [7](#), [36](#)
- [55] F. Benatti et R. Floreanini, *Phys. Rev. A* **66** (2002), 043617 Cité p. [6](#)
- [56] C. simon et D. Jaksch, [arXiv :quant-ph/0406007](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0406007) (2004) Cité p. [6](#)
- [57] M.T. Jaekel et S. Reynaud, *Ann. Physik* **4** (1995), 68 Cité p. [6](#), [110](#), [189](#)
- [58] C.M. Will, *Science* **250** (1990), 770 Cité p. [6](#)
- [59] T. Damour, dans *Gravitation and Quantizations*, édité par B. Julia et J. Zinn-Justin (North Holland, 1994) Cité p. [6](#)
- [60] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, (Éds Wiley, 1972) Cité p. [6](#), [30](#), [38](#), [76](#), [91](#), [92](#), [93](#), [94](#), [96](#), [171](#), [181](#)
- [61] D.A. Kokorowski, A.D. Cronin, T.D. Roberts et D.E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001), 2191 Cité p. [7](#)
- [62] B. Lamine, M.-T. Jaekel et S. Reynaud, *Eur. Phys. J. D* **20** (2002), 165 Cité p. [7](#)
- [63] R. Feynman et F. Vernon, *Ann. Phys.* **24** (1963), 118 Cité p. [8](#), [102](#)

- [64] R. Feynman et A. Hibbs, *Quantum Mechanics and path integral* (Mac Graw-Hill publishing company, 1965) Cité p. [8](#), [102](#), [193](#), [198](#)
- [65] P. Degiovanni, *Cohérence quantique*, cours du DEA de physique théorique Rhone-Alpin (2001) Cité p. [8](#), [102](#), [114](#), [193](#), [198](#)
- [66] C. Anastopoulos, *Phys. Rev. D* **54** (1996), 1600 Cité p. [8](#), [116](#)
- [67] Z. Haba, *Mod. Phys. Lett. A* **15** (2000), 1519 Cité p. [8](#), [116](#), [178](#)
- [68] Z. Haba, H. Kleinert, *Lecture Notes in Physics*, Decoherence and Entropy in Complex Systems (Selected Lectures from DICE 2002, Springer) Cité p. [8](#), [116](#)
- [69] L. Hackermüller, S. Uttenthaler, K. Hornberger, E. Reiger, B. Brezger, A. Zeilinger et M. Arndt, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003), 090408 Cité p. [8](#)
- [70] B. Brezger, L. Hackermüller, S. Uttenthaler, J. Petschinka, M. Arndt et A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), 100404 Cité p. [8](#), [162](#), [164](#)
- [71] P. Tourrenc, *Introduction à la gravitation expérimentale*, cours du DEA d'Astronomie : Haute Résolution Angulaire, Image et Gravitation (2001) Cité p. [11](#), [22](#), [23](#), [171](#), [178](#)
- [72] B. Linet et P. Tourrenc, *Can. J. Phys.* **54** (1976), 1129 Cité p. [11](#), [13](#), [43](#), [178](#)
- [73] V.B. Braginsky, N.S. Kardashev, A.G. Polnarev et I.D. Novikov, *Nuovo Cimento* **105B** (1990), 1141 Cité p. [12](#)
- [74] G.E. Stedman, *Rep. Prog. Phys.* **60** (1997), 615 Cité p. [16](#)
- [75] B. Mashhoon et al., *Phys. Lett. A* **249** (1998), 161 Cité p. [16](#)
- [76] E.J. Post, *Rev. Mod. Phys.* **39** (1967), 475 Cité p. [16](#)
- [77] J. Anandan, *Phys. Rev. D* **24** (1981), 338 Cité p. [16](#), [100](#)
- [78] W.W. Chow et al., *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985), 61 Cité p. [16](#), [17](#), [37](#), [100](#)
- [79] G. Rizzi et M.L. Ruggiero, *Gen. Rel. Grav.* **35** (2003), 1745 Cité p. [16](#)
- [80] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Photons et atomes* (Editions du CNRS, 1987) Cité p. [20](#), [23](#), [93](#), [98](#)
- [81] P. Tourrenc, *Is there something moving in VIRGO?*, document interne Cité p. [25](#), [26](#), [28](#)
- [82] F.J. Dyson, *Ap. J.* **156** (1969), 529 Cité p. [26](#)
- [83] A. Papapetrou, *Ann. Inst. H. Poincaré* **23** (1975), 389 Cité p. [26](#)
- [84] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs*, 3ème édition (Mir, 1970) Cité p. [30](#), [91](#), [92](#), [93](#), [94](#), [96](#), [174](#), [175](#)
- [85] P.L. Bender et D. Hils, *Class. Quantum Grav.* **14** (1997), 1439 Cité p. [31](#)
- [86] N.J. Cornish, [arXiv :gr-qc/0304020](#) (2003) Cité p. [31](#)
- [87] B. Allen et S. Koranda, *Phys. Rev. D* **55** (1994), 3713 Cité p. [33](#)

- [88] N. Seto, *Phys. Rev. D* **69** (2004), 123005 Cité p. **33**
- [89] A. Buonanno, Lecture given at ICTP (2000), [arXiv :gr-qc/0303085](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0303085) Cité p. **33**
- [90] L.P. Grishchuk, V.M. Lipunov, K.A. Postnov, M.E. Prokhorov et B.S. Sathyaprakash, *Phys. Usp.* **44** (2001), 1 [[arXiv :astro-ph/0008481](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0008481)] Cité p. **33**
- [91] B. Allen, *proceeding of Les Houches School* (Cambridge University Press, 1996) Cité p. **33**
- [92] S. Bose et L.P. Grishchuk, *Phys. Rev. D* **66** (2002), 043529 Cité p. **34**
- [93] M. Maggiore, [arXiv :gr-qc/0008027](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0008027) (2000) Cité p. **34**
- [94] M.S. Turner, *Phys. Rev. D* **55** (1997), 435 Cité p. **34**
- [95] S.E. Thorsett et R.J. Dewey, *Phys. Rev. D* **53** (1996), 3468 Cité p. **34**
- [96] M.P. McHugh et al., *Phys. Rev. D* **54** (1996), 5993 Cité p. **34**
- [97] B. Lamine, A. Lambrecht, M.-T. Jaekel et S. Reynaud, *Class. Quantum Grav.* **21** (2004), S1209 Cité p. **35**
- [98] HYPER, *Hyper-precision cold atom interferometry in space*, Assessment study report **10** (ESA-SCI, 2000) Cité p. **36, 37, 65, 128**
- [99] Site web ESA pour HYPER : <http://sci.esa.int/hyper> Cité p. **36, 129**
- [100] Ph. Tourenç, M.-C. Angonin, X. Ovido, accepted in *Gen. Rel. Grav.* (2004) [[arXiv :gr-qc/0407087](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0407087)] Cité p. **37**
- [101] C. Antoine et Ch.J. Bordé, *J. Opt. B* **5** (2003), S199 Cité p. **37**
- [102] Ch.J. Bordé, *Gen. Rel. Grav.* **36** (2004), 475 Cité p. **37, 168**
- [103] A. Peters, K.Y. Chung et S. Chu, *Metrologia* **38** (2001), 25 Cité p. **37, 42, 49**
- [104] M. Kasevich et S. Chu, *Appl. Phys. B* **54** (1992), 321 Cité p. **37**
- [105] Ch.J. Bordé, *Phys. Lett.* **140** (1989), 10 Cité p. **37**
- [106] Ch.J. Bordé dans *Laser spectroscopy X*, édité par M. Ducloy, E. Giacobino et G. Gamy (World Scientific, 1992) Cité p. **38, 42**
- [107] M.L. Ruggiero et A. Tartaglia, *Nuovo Cim.* **117B** (2002), 743 Cité p. **38, 101**
- [108] Voir le site web <http://einstein.stanford.edu/> Cité p. **39**
- [109] C. Antoine, Thèse de doctorat (2004) Cité p. **42, 43**
- [110] Ch.J. Bordé, *C.R. Acad. Sci. Paris* **2-IV** (2001), 509 Cité p. **43**
- [111] C. Cohen-Tannoudji, *Cours du collège de France* (1992-93) Cité p. **51, 163**
- [112] P. Storey et C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys. II France* **4** (1994), 1999 Cité p. **51**
- [113] D. Dalvit et P.A. Maia Neto, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000), 798 ; P.A. Maia Neto et D. Dalvit, *Phys. Rev. A* **62** (2000), 042103 Cité p. **66, 76, 85**
- [114] S.W. Kim et H.-K. Park, [arXiv :quant-ph/0311115](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0311115) (2003) Cité p. **66**

- [115] L. Hackermueller, K. Hornberger, B. Brezger, A. Zeilinger et M. Arndt, *Nature* **427** (2004), 711 Cité p. **66**
- [116] S. Reynaud, B. Lamine, A. Lambrecht, P.A. Maia Neto et M.-T. Jaekel, *Int. J. Mod. Phys. A* **17** (2002), 1003 Cité p. **66**
- [117] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, 2nd édition, 1980) Cité p. **69, 70, 72, 73, 92, 178**
- [118] C. Cohen Tannoudji, *Cours du collège de France* (1988-89) Cité p. **75, 81, 88**
- [119] A.J. Zurek, *Phys. Rev. D* **24** (1981), 1516 ; A.J. Zurek, *Phys. Rev. D* **26** (1982), 1862 Cité p. **75, 84**
- [120] M.T. Jaekel et S. Reynaud, *Phys. Lett. A* **172** (1993), 319 Cité p. **76**
- [121] E. Bois, F. Boudin et A. Journet, *Astron. Astrophys.* **314** (1996), 989 Cité p. **77**
- [122] H.-Z Breuer et F. Petruccione, *Relativistic quantum measurement and decoherence*, Lecture Notes in Physics **559**, 31 (Springer, Berlin, 2000) [[arXiv :quant-ph/0210013](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0210013)] Cité p. **80, 121, 123**
- [123] A. Stern, Y. Aharonov et Y. Imry *Phys. Rev. A* **41** (1990), 3436 Cité p. **83, 102**
- [124] G.A. Fiete et E.J. Heller, *Phys. Rev. A* **68** (2003), 022112 Cité p. **83, 102**
- [125] D. Braun, F. Haake et W.T. Strunz *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001), 2913 Cité p. **83, 84, 87**
- [126] E. Golowich, P.S. Grivosky et P.B. Pal, *Am. J. Phys.* **58** (1990), 688 Cité p. **91**
- [127] J.M. Raimond, *Electromagnétisme et relativité*, cours du MIP (1997) Cité p. **97**
- [128] M.O. Scully et M.S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1997) Cité p. **99, 101**
- [129] Ch.J. Bordé, C. R. Acad. Sci. Paris **2**, Série IV (2001), 509 ; voir aussi un article de revue sur le site <http://christian.j.borde.free.fr/avril3.ps> Cité p. **100**
- [130] B.L. Hu, J.P. Paz et Y. Zhang, *Phys. Rev. D* **45** (1992), 2843 ; B.L. Hu, J.P. Paz et Y. Zhang, *Phys. Rev. D* **47** (1993), 1576 Cité p. **102, 111, 113**
- [131] A.O. Caldeira et A.J. Leggett, *Annals of Phys.* **149** (1983), 374 Cité p. **102, 111, 113**
- [132] P. Bertet, *Atomes et Cavité : Complémentarité et Fonctions de Wigner*, Thèse de doctorat, [http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/24/96/index\\_fr.html](http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/24/96/index_fr.html) Cité p. **103**
- [133] D.F. Walls, G.J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, 1994) Cité p. **103, 124**
- [134] C. Itzykson et J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (Mc Graw-Hill, 1980) Cité p. **106**
- [135] C. Cohen Tannoudji, *Cours du collège de France* (1977-78) Cité p. **110**
- [136] M.-T. Jaekel, S. Reynaud, *Rep. Prog. Phys.* **60** (1997), 863 Cité p. **111**
- [137] A.R.R. Carvalho, P. Milman, R.L. De Matos Filho et L. Davidovich, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001), 4988 Cité p. **114**

- [138] D.F.V. James, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998), 317 Cité p. **115**
- [139] L. Mandel et E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1995) Cité p. **115, 124**
- [140] L.P. Grishchuk, dans *Quantum Fluctuations*, Les Houches, Session LXIII, 1995 (Éds S. Reynaud, E. Giacobino et J. Zinn-Justin) (Amsterdam, Elsevier, 1997) p. 541 Cité p. **119**
- [141] G. Calucci, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004), 2339 Cité p. **123**
- [142] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (Oxford Science Publications, 1990) Cité p. **124**
- [143] A. Heidmann, S. Reynaud et C. Cohen-Tannoudji, *Optics Comm.* **52** (1984), 235 ; S. Reynaud et A. Heidmann, *Ann. Phys. Fr.* **10** (1985), 227 Cité p. **124**
- [144] S. Reynaud, *Ann. Phys. Fr.* **15** (1990), 63 Cité p. **124**
- [145] C. Ungarelli et A. Vecchio, *Phys. Rev. D* **63** (2001), 064030 Cité p. **131**
- [146] Ch.J. Bordé, communication privée Cité p. **134**
- [147] G. Amelino-Camelia, *Nature* **410** (2001), 1065 ; G. Amelino-Camelia, *Gen. Rel. Grav.* **36** (2004), 539 ; G. Amelino-Camelia, [arXiv :gr-qc/0402009](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0402009) (2004) Cité p. **137**
- [148] C. Rovelli et L. Smolin, *Nucl.Phys. B* **442** (1995), 593 ; *Erratum-ibid. B* **456** (1995), 753 Cité p. **137**
- [149] F. Karolyhazy, *Nuovo Cimento A* **42** (1966), 390 ; L. Diosi, *Phys. Rev. A* **40** (1989), 1165 ; J. Ellis, P. Kanti, N.E. Mavromatos, E. Winstanley et D.V. Nanopoulos, *Phys. Lett. A* **13** (1990), 303 Cité p. **137**
- [150] F. Estabrook et H. Wahlquist, *Gen. Rel. Grav.* **6** (1975), 439 Cité p. **142, 156, 158**
- [151] A.J. Anderson, dans *Gravitazione Sperimentale*, Édés B. Bertotti (Rome, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977) Cité p. **142**
- [152] B. Mashhoon, L.P. Grishchuk, *Ap. J.* **236** (1980), 990 Cité p. **142, 158, 159**
- [153] B. Bertotti et B.J. Carr, *Ap. J.* **236** (1980), 1000 Cité p. **142**
- [154] A.V.B Bertotti et L. Iess, *Phys. Rev. D* **59** (1999), 082001 Cité p. **142, 156, 158, 159, 160**
- [155] V.M. Kaspi, J.H Taylor et M. Ryba, *Astrophys. J.* **428** (1994), 713 ; A.H. Jaffe et D.C. Baecker, *Astrophys. J.* **583** (2003), 616 Cité p. **142**
- [156] D.R. Lorimer, *Living Rev. Relativity* **4** (2001), lrr-2001-5, <http://www.livingreviews.org/lrr-2001-5> Cité p. **142, 160**
- [157] B. Allen et A.C. Ottewill, *Phys. Rev. D* **56** (1997), 545 Cité p. **147, 184**
- [158] O.J. Sovers et J.L. Fanselow, *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998), 1393 Cité p. **148**
- [159] E.D. Black, *Am. J. Phys.* **69** (2001), 79 Cité p. **151**

- [160] A. Lambrecht, *Eur. Phys. J. D* **3** (1998), 95 Cité p. **151**
- [161] R.W. Hellings, P.S. Callahan et J.D. Anderson, *Phys. Rev. D* **23** (1991), 844 Cité p. **157**
- [162] J.D. anderson et *al.*, *Nature* **308** (1984), 158 ; J.W. Armstrong, F.B. Estabrook et H.D. Wahlquist, *Ap. J.* **318** (1987), 536 Cité p. **157**
- [163] B. Bertotti et *al.*, *Astron. Astrophys.*, Suppl. Ser. **92** (1992), 431 ; B. Bertotti et *al.*, *Astron. Astrophys.* **296** (1995), 13 Cité p. **157**
- [164] J.W. Armstrong, in *Second Amaldi Conference on Gravitational Waves*, Édés E. Coccia et *al.* (World Scientific, Singapore 1999) Cité p. **157**
- [165] Mission CASSINI, informations disponibles sur le site <http://www.jpl.nasa.gov/cassini> Cité p. **157**
- [166] B. Mashhoon, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **199** (1982), 659 Cité p. **160, 161**
- [167] B. Bertotti, B.J. Carr et M.J. Rees, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **203** (1983), 945 Cité p. **160, 161**
- [168] S.E. Thorsett R.J. Dewey, *Phys. Rev. D* **53** (1996), 3468 ; M.P. McHugh et *al.*, *Phys. Rev. D* **54** (1996), 5993 ; M.P. McHugh, G. Zalamansky, F. Vernotte, E. Lantz et M.S. Turner, *Phys. Rev. D* **55** (1997), 435 Cité p. **160, 161**
- [169] Voir le site web <http://www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/french/frenchframes.html> Cité p. **162**
- [170] R. Kaltenbaek, M. Aspelmeyer, T. Jennewein, C. Brukner et A. Zeilinger, [arXiv :quant-ph/0308174](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0308174) (2003) Cité p. **162**
- [171] *Atom Interferometry*, édité par P.R. Berman (Academic Press, 1997) Cité p. **162**
- [172] M. Kasevich et S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 181 Cité p. **163**
- [173] Ch.J. Bordé, *Phys. Lett. A* **140** (1989), 10 ; Ch.J. Bordé, N. Courtier, F.D. Burck, A. Goncharov et M. Gorlicki, *Phys. Lett. A* **188** (1994), 187 Cité p. **163**
- [174] M. Weitz, B.C. Young et S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994), 2563 Cité p. **163**
- [175] O. Houde, D. Kadio et L. Pruvost, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000), 5543 Cité p. **163**
- [176] W. Seifert, C.S. Adams, V.I. Balykin, C. Heine, Y. Ovchinnikov et J. Mlynek, *Phys. Rev. A* **49** (1994), 3814 ; T.M. Roach, H. Abele, M.G. Boshier, H.L. Grossman, K.P. Zetie et E.A. Hinds, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995), 629 ; C.V. Saba, P.A. Barton, M.G. Boshier, I.G. Hughes, P. Rosenbusch, B.E Sauer et E.A. Hinds, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999), 468 Cité p. **163**
- [177] D. Cassetari, B. Hessmo, R. Folman, T. Maier et J. Schmiedmayer, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000), 5483 Cité p. **163**
- [178] E. Andersson, T. Calarco, R. Folman, M. Andersson, B. Hessmo et J. Schmiedmayer, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), 100401 Cité p. **163**

- [179] C. Henkel, P. Krüger, R. Folman et J. Schmiedmayer, *Appl. Phys. B* **76** (2003), 173 Cité p. **163**
- [180] F. Riehle, Th. Kisters, A. Witte, J. Helmcke et Ch.J. Bordé, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 177 Cité p. **163**
- [181] H. Stapelfeldt, H. Sakai, E. Constant et P.B. Corkum, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997), 2787 Cité p. **163**
- [182] C. Champenois, M. Büchner, R. Delhuile, R. Mathevet, C. Robilliard, C. Rizzo et J. Vigué, *Eur. Phys. J. D* **13** (2001), 271 Cité p. **163**
- [183] T. Pfau, C. Kurtsiefer, C.S. Adams, M. Sigel et J. Mlynek, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993), 3427 Cité p. **163**
- [184] D.M. Giltner, R.W. McGowan et S.A. Lee, *Phys. Rev. A* **52** (1995), 3966; P.J. Martin et al., *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988), 515 Cité p. **163**
- [185] P.F. Barker et M.N. Shneider, *Phys. Rev. A* **64** (2001), 033408 Cité p. **163**
- [186] M. Boustimi, J. Baudon, M. Ducloy, J. Reinhardt, F. Perales, C. Mainos, V. Bocvarski et J. Robert, *Eur. Phys. J. D* **17** (2001), 141 Cité p. **164**
- [187] M.S. Chapman, C.R. Ekstrom, T.D. Hammond, R.A. Rubenstein, J. Schmiedmayer, S. Wehinger et D.E. Pritchard, *phys. Rev. Lett.* **74** (1995), 4783 Cité p. **164**
- [188] R. Alicki, *Phys. Rev. A* **65** (2002), 034104 Cité p. **166**
- [189] L. Hultman, S. Stafström, Z. Czigány, J. Neidhardt, N. Hellgren, I.F. Brunell, K. Suenaga et C. Colliex, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001), 225503 Cité p. **167**
- [190] K. Bongs et K. Sengstock, *Rep. Prog. Phys.* **67** (2004), 907 Cité p. **170**
- [191] S. Bose, K. Jacobs et P.L. Knight, *Phys. Rev. A* **59** (1999), 3204 Cité p. **170**
- [192] W. Marshall, C. Simon, R. Penrose et D. Bouwmeester, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003), 130401 Cité p. **170**
- [193] J. Ahang, K. Peng et S.L. Braunstein, *Phys. Rev. A* **68** (2003), 013808; S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali et P. Tombesi, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), 120401 Cité p. **170**
- [194] C. Kiefer, étude pour l'ESA (2004), [arXiv :gr-qc/0408010](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0408010) Cité p. **170**
- [195] J. Anandan, *Phys. Rev. D* **15** (1977), 1448 Cité p. **178**
- [196] M.T. Jaekel et S. Reynaud, *Rep. Prog. Phys.* **60** (1997), 863 Cité p. **189**
- [197] V. Hakim et V. Ambegaokar, *Phys. Rev. A* **32** (1985), 423; C.M. Morais et A.O. Caldeira, *phys. Rev. A* **36** (1987), 3509 Cité p. **194**