

SIMULATIONS MULTIDOMAINES DES ÉCOULEMENTS EN MILIEU POREUX

Vincent MARTIN (INRIA et ANDRA)

Thèse réalisée sous la direction de Jean ROBERTS (INRIA)

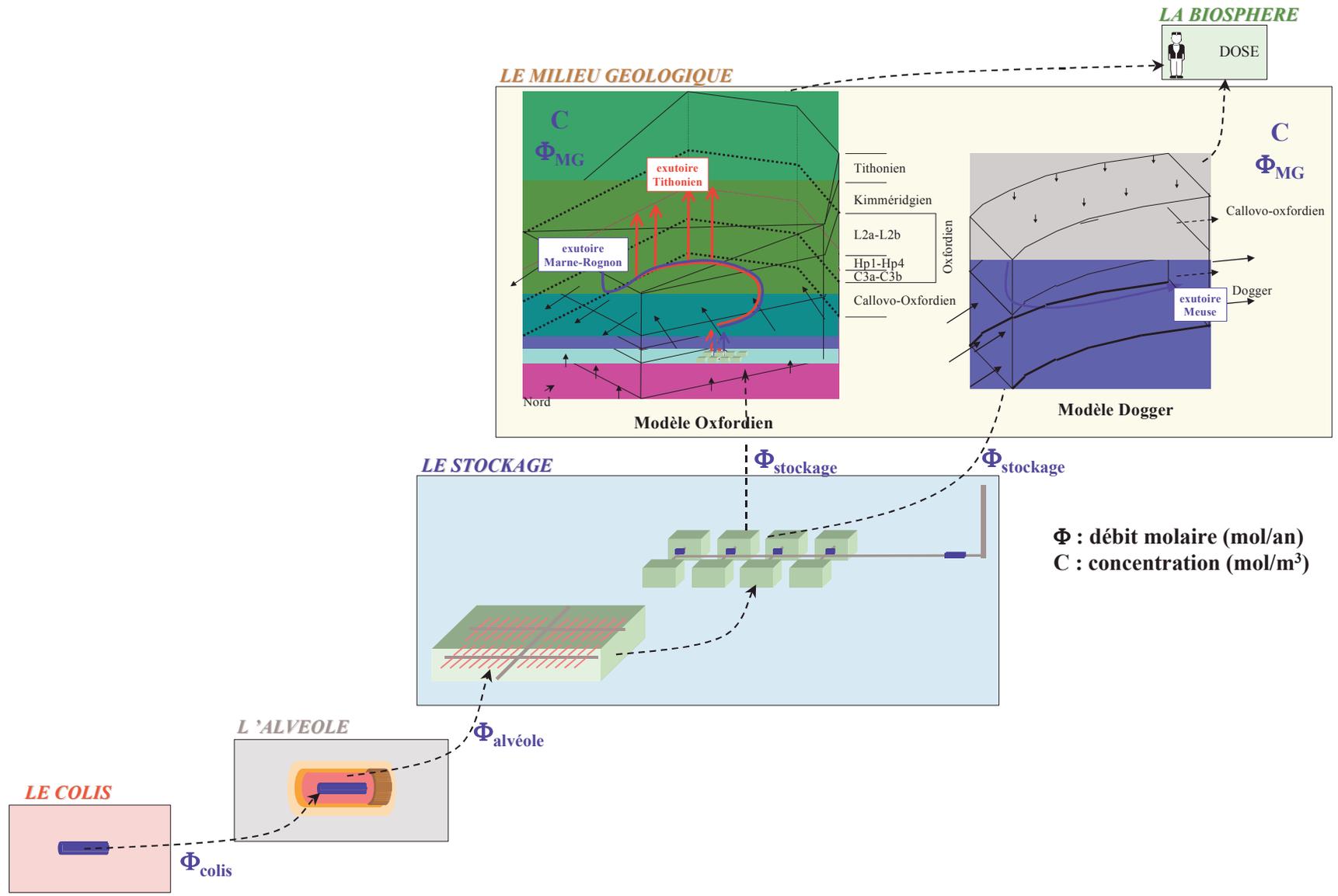
Motivations : stockage profond de déchets radioactifs

L'une des hypothèses étudiée pour traiter le problème des déchets radioactifs en France.

Laboratoire souterrain de Bure (Meuse).

- Endommagement des conteneurs.
- Dissolution des radionucléides dans l'eau.
- Transport et décroissance des radionucléides.
- Sortie dans la biosphère ? Quand ? A quel degré de nocivité ?

⇒ Nécessité de déterminer précisément l'écoulement souterrain.

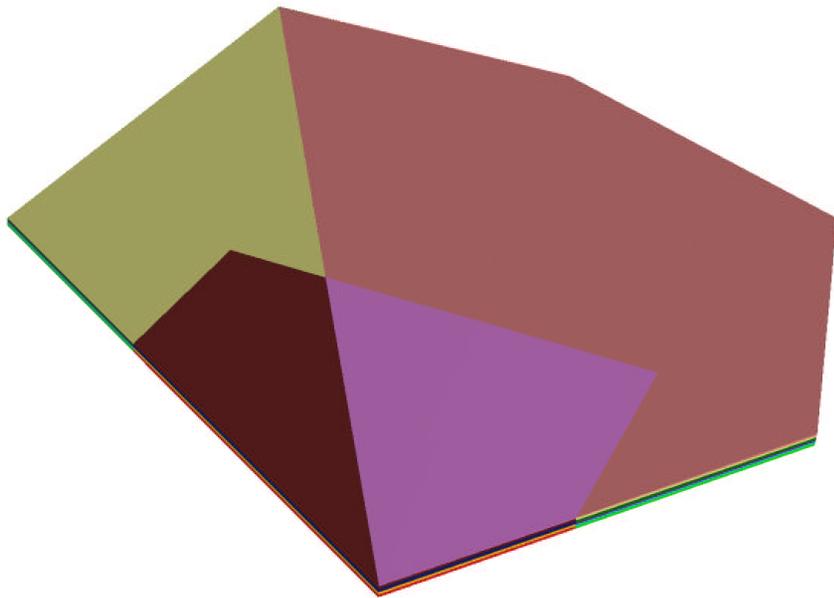


Problèmes numériques liés aux calculs de stockage

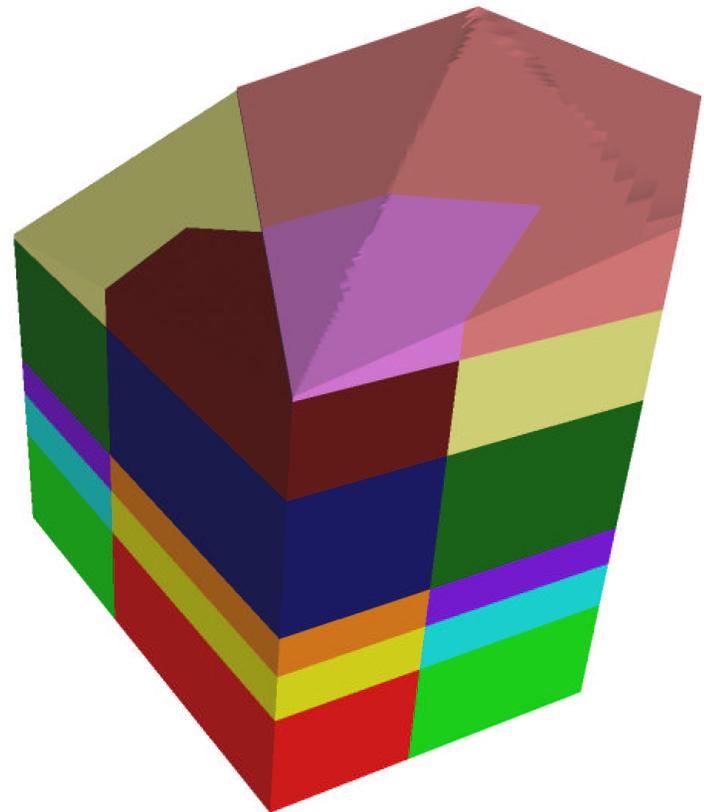
Problèmes difficiles à résoudre :

- multi-échelles
 - ★ du mètre à la dizaine de kilomètres.
 - ★ de la dizaine d'années au million d'années.
- multi-physiques
 - ★ couplage Thermo–Hydro–Mécanique.
 - ★ couplage Chimie–Transport.
- très hétérogènes
 - ★ couches géologiques très perméables ou très peu perméables.
 - ★ fractures et failles.
- ...

Domaine de calcul d'une simulation de stockage

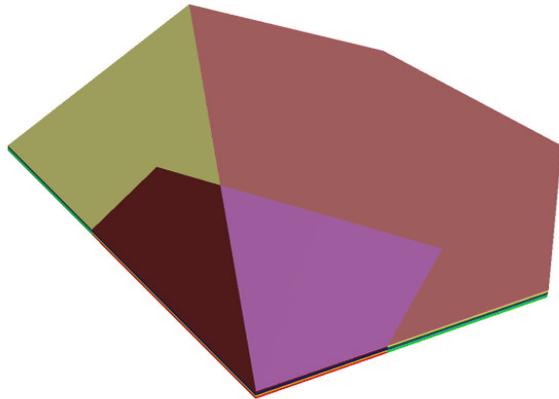


Echelle réelle

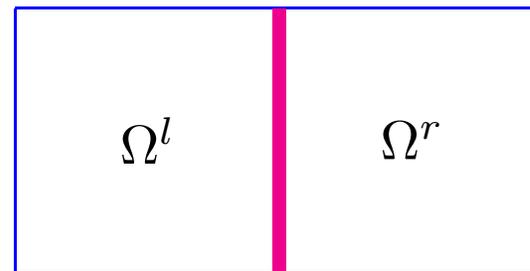


Echelle : $z' = 100z$.

Modèle d'écoulement



Modèle géologique



Modèle de fractures

Écoulement monophasique, incompressible, négligeant la gravité.

Equations de l'écoulement

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= q, \\ \vec{u} &= -K \vec{\nabla} p. \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega$$

Plan de l'exposé

Objectif des simulations multidomaines :
couplages multiphysiques et multiéchelles.

- **Décomposition de domaines non-conforme avec raccord par des conditions d'interface de type Robin.**
- **Résolution numérique parallèle grâce à l'environnement OcamlP3l.**
- **Modélisation des grandes fractures et barrières en milieu poreux.**

Décomposition de domaines de Robin non-conforme

Méthodes de Décomposition de Domaine (MDD)

Principe : découper un problème en sous-problèmes plus petits et plus faciles à résoudre.

Toute la difficulté : recoller correctement les sous-problèmes.

MDD permettent de

- coupler des physiques différentes vivant dans des régions différentes.
- résoudre les problèmes de grandes tailles (préconditionneur).
- paralléliser les calculs.

Décomposition de domaines : principe.

Résoudre sur Ω \sim Résoudre sur $\Omega_i, i = 1, 2$ + conditions de raccord sur $\Gamma_{1,2}$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = q$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_i = q_i$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2$$

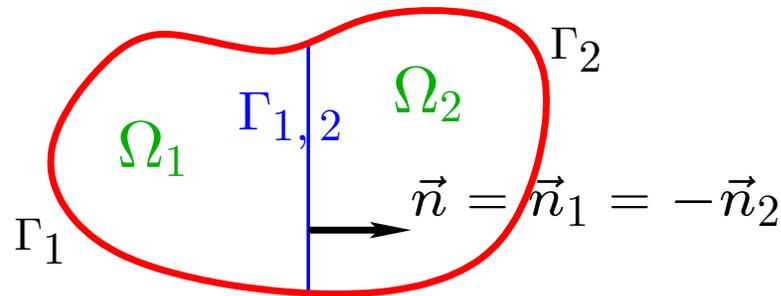
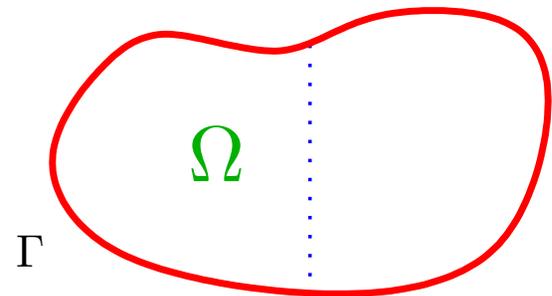
$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \nabla p$$

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \nabla p_i$$

$$p_1 = p_2$$

(+C.L.) sur Γ

(+C.L.) sur Γ_i



Problème de transmission.

Méthodes de Décomposition de Domaine

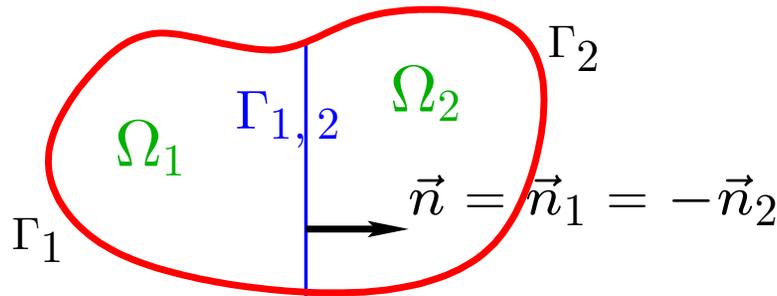
Utilisation pour notre problème (MDD sans recouvrement et non-conforme) :

- sépare les différentes couches géologiques afin de suivre la physique.
- découpe chaque couche en sous-problèmes plus petits.
- améliore le conditionnement.
- naturellement parallèle.
- maillages non-conformes :
 - ★ “zoomer” autour du site de stockage.
 - ★ construire les maillages séparément.

MDD Non-Conforme : bibliographie

- **Méthode des joints (*Mortar*)** : Bernardi, Maday et Patera, (93, 94, ...)
- **Méthode de Robin** (raccord par conditions d'interface de type Robin) :
 - ★ Lions, DDM3 (89) : $\mathcal{H}^1(\cdot)$.
 - ★ Després, Waves 1 (91), et Waves 2 (93) : Helmholtz, Éléments Finis Mixtes (EFM).
 - ★ Douglas, Paes-Leme, Roberts et Wang (93) : écoulement, EFM.
- **Méthode de Robin **non-conforme**** (maillages non-raccordés) :
 - ★ Arbogast et Yotov (97), EFM.
 - ★ Achdou, Japhet, Maday et Nataf (99), Volumes Finis (VF).

Méthode de Robin non-conforme



Soient α_{12} et α_{21} deux coefficients de Robin > 0 .

Etant donné (x_1^0, x_2^0) , résoudre itérativement pour $k = 1, 2, \dots$:

Résoudre (en parallèle) les problèmes de Robin vers Robin :

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_i^k + cp^k = q_i \quad \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2$$

$$\mathbf{u}_i^k = -\mathbf{K}_i \nabla p_i^k$$

$$-\mathbf{u}_i^k \cdot \mathbf{n}_i + \alpha_{ij} p_i^k = x_j^{k-1} \quad \text{sur } \Gamma_{1,2}, \quad j \neq i$$

Calculer : $y_i^k = \mathbf{u}_i^k \cdot \mathbf{n}_i + \alpha_{ji} p_i^k, \quad i = 1, 2.$

Projeter y_i^k sur le maillage d'interface du sous-domaine voisin (projection L^2) :

$$x_j^k = P_{i \mapsto j} y_i^k, \quad j \neq i$$

Estimations d'énergie et d'erreur : idée de la démonstration

Schéma de démonstration similaire à celle d'Arbogast et Yotov.

Formulation mixte : chercher $(\mathbf{u}_h, p_h, \lambda_h) \in \mathbf{Z}_h \times N_h \times \Lambda_h$ tels que

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v})_i - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p_h)_i &= - \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i, \lambda_{h,i} \rangle_i, & \mathbf{v} \in \mathbf{Z}_{h,i}, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_h, r)_i + (c p_h, r)_i &= (q_i, r)_i, & r \in N_{h,i}, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \langle -\mathbf{u}_{h,i} \cdot \mathbf{n}_i + \alpha_{ij} \lambda_{h,i}, \mu_i \rangle_{ij} &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \langle \mathbf{u}_{h,j} \cdot \mathbf{n}_j + \alpha_{ij} \lambda_{h,j}, \mu_i \rangle_{ij}, & \mu_i \in \Lambda_{h,i}. \end{aligned}$$

Estimation d'énergie obtenue avec comme fonction-test :

$$\mu_i|_{\Sigma_{ij}} = \frac{1}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} [\alpha_{ji} \lambda_{h,i} - \mathbf{u}_{h,i} \cdot \mathbf{n}_i] \quad \left(\text{A. Y. : } \mu_i|_{\Sigma_{ij}} = \frac{1}{2} \left[\lambda_{h,i} - \frac{\mathbf{u}_{h,i} \cdot \mathbf{n}_i}{\alpha} \right] \right)$$

\approx idem pour l'estimation d'erreur.

Estimations d'énergie et d'erreur

EFM de plus bas degré (RT0), $c > 0$, a priori $\alpha_{ij} \neq \alpha_{kl}$, $(i, j) \neq (k, l)$.

$$\text{Energie : } \|p_h\|_0 + \|\mathbf{u}_h\|_0 + \left[\sum_{(i,j) \in \mathcal{N}} \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} \|\lambda_{h,i} - \lambda_{h,j}\|_{0,ij}^2 \right]^{1/2} \\ + \left[\sum_{(i,j) \in \mathcal{N}} \frac{1}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} \|\mathbf{u}_{h,i} \cdot \mathbf{n}_i + \mathbf{u}_{h,j} \cdot \mathbf{n}_j\|_{0,ij}^2 \right]^{1/2} \leq C \|q\|_0.$$

$$\text{Erreur : } \|p - p_h\|_0 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 + \left[\sum_{(i,j) \in \mathcal{N}} \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} \|\lambda_{h,i} - \lambda_{h,j}\|_{0,ij}^2 \right]^{1/2} \\ + \left[\sum_{(i,j) \in \mathcal{N}} \frac{\|\mathbf{u}_{h,i} \cdot \mathbf{n}_i + \mathbf{u}_{h,j} \cdot \mathbf{n}_j\|_{0,ij}^2}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} \right]^{1/2} \leq Ch,$$

$$\left[\sum_{i \in I_n} \|\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h,i})\|_{0,i}^2 \right]^{1/2} \leq Ch.$$

Code éléments finis : LifeV

LifeV, <http://www.lifev.org> :

- code d'éléments finis écrit en C++,
- maillages tétraédriques ou hexaédriques généraux,
- applications biomédicales : Navier–Stokes, Interaction Fluide–Structure...
- collaboration entre l'INRIA, le Politecnico (Milan), l'EPFL (Lausanne).

Solveur de sous-domaines : LifeV

Ajout d'un solveur de sous-domaine implémenté en C++ dans [LifeV](#).

Partenariat avec J.-F. Gerbeau, et M. Belhadj (INRIA, projet Bang) :

- Éléments Finis Mixtes Hybrides ($RT0$). Application : milieux poreux.
- maillages généraux hexaédriques.
- utilisation de bibliothèques pour l'algèbre linéaire (UMFPack pour le solveur LU, Lapack).
- algorithme de Robin non-conforme.
- code de projection L^2 réalisé par M. Mancip.

Couplage de codes et parallélisme avec OcamlP3I

François CLEMENT, Arnaud VODICKA, (INRIA, Estime)
Roberto Di COSMO (Paris VII)
Pierre WEIS (INRIA, Cristal)

Pourquoi coupler des codes?

- coupler différents codes existant déjà qui traitent différentes physiques.
 - ★ Ex.: Chimie–Transport
 - ★ Thermo–Hydro–Mécanique...
- coupler un code avec lui-même : décomposition de domaines...

Couplage de code : OcamlP3I

Ocaml : langage de programmation fonctionnel sûr, fortement typé, avec des types polymorphes, ayant des traits impératifs...

Voir <http://www.ocaml.org>

OcamlP3I : environnement de programmation **parallèle** fonctionnelle. Danelutto, Di Cosmo, Leroy et Pelagatti (98).

- modèles de **squelettes** : description très brève de la structure parallèle.
- codes courts et assez simples.
- compilation, débogage, et tests en séquentiel.
- recompilation et exécution parallèle!!
- voir <http://www.ocamlp3i.org>.

Code à coupler : structure

Code externe en C++ : *fonction* réalisant l'opérateur de Robin vers Robin

```
int main() {
    SubdomainPb.initialize();
    while (true) {
        cin >> SubdomainPb.InputInterfaceVector;
        SubdomainPb.computeRHS(); // using InputInterfaceVector
        SubdomainPb.solveLinearSystem(); // direct solver
        SubdomainPb.computeOutputInterfaceVector();
        cout << SubdomainPb.OutputInterfaceVector;
    }
}
```

Code Coupleur en OcamlP3I

```
let subdomain_solver = ...;;

let compute_all_sbd = parfun (
    mapvector (seq subdomain_solver, ns));;

pardo (function () ->
    let aax = (function x ->
        x - projection (compute_all_sbd x)) in
    let x0,b = ... in
    let algorithm = bicgstab in
    let result = algorithm aax x0 b);;
```

Coupleur réalisé par A. Vodicka.

Résultats numériques 3D : performances

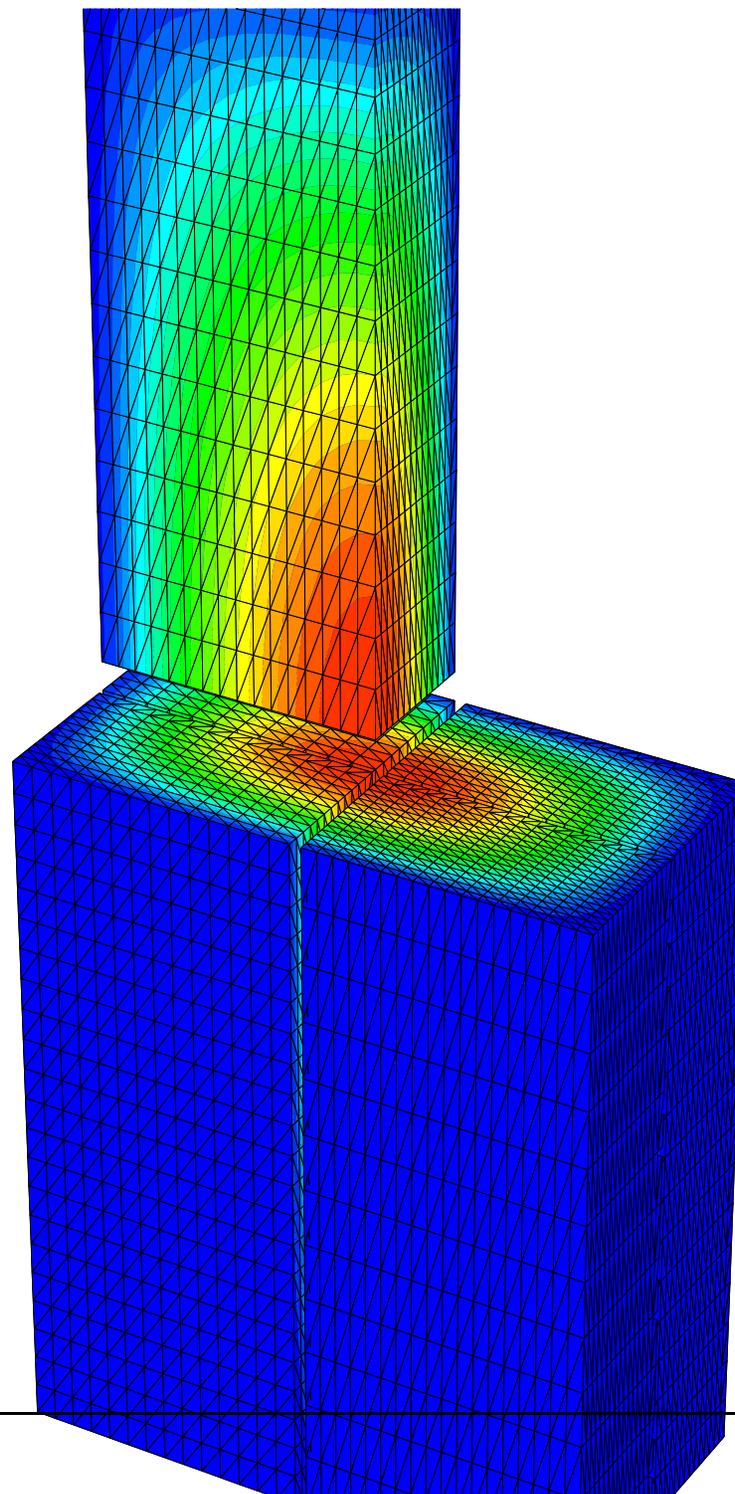
Des tests “académiques” ont été réalisés pour tester l’implémentation de la MDD de Robin non-conforme.

Tests d’extensibilité dans les cas conformes et non-conformes.

Résultats satisfaisants...

Grappe de PC’s de l’INRIA :

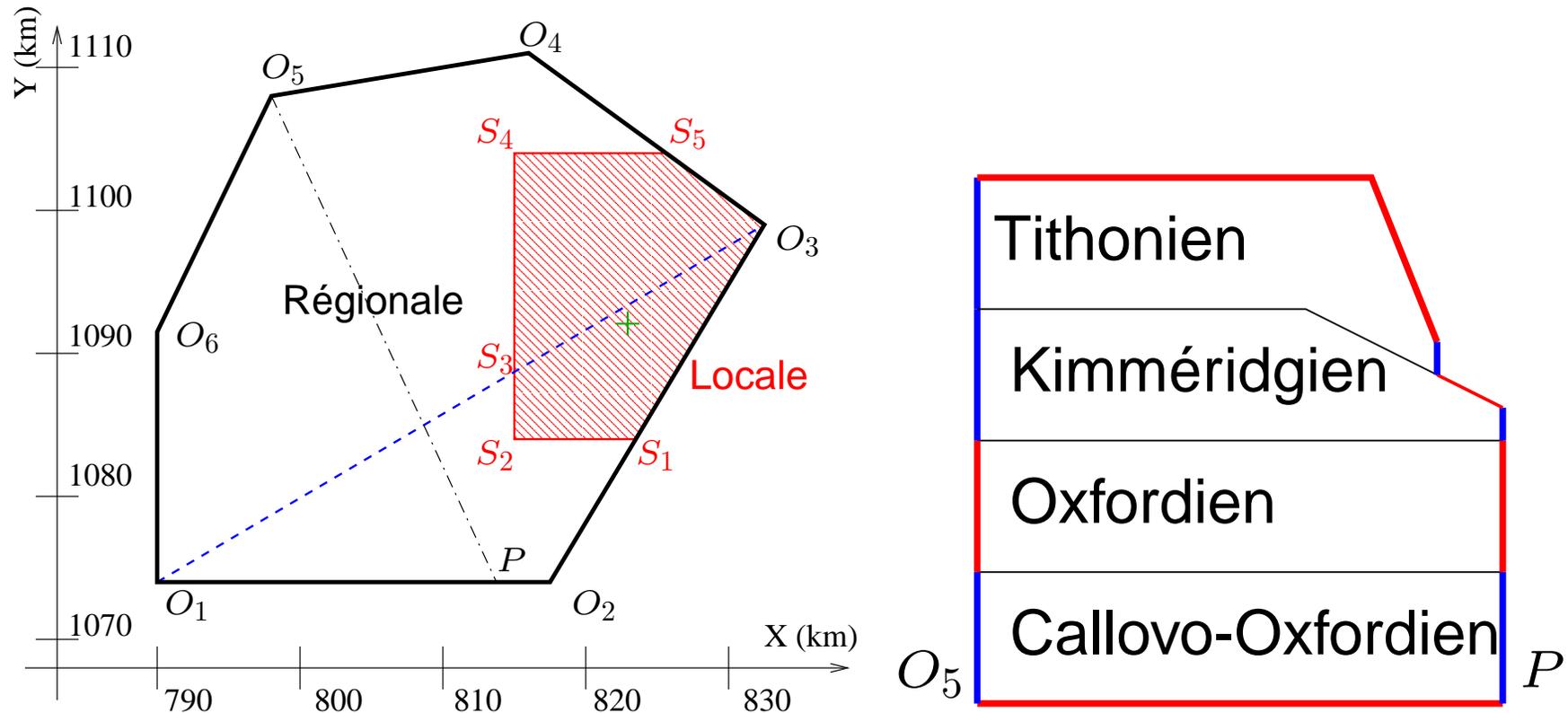
16 biprocesseurs Xeon (2.8 GHz, mémoire : 2 Go).



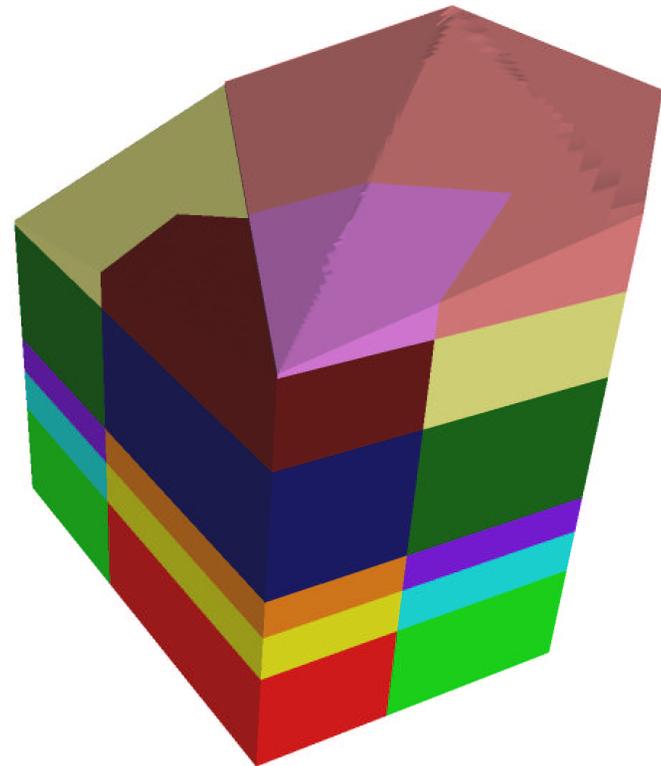
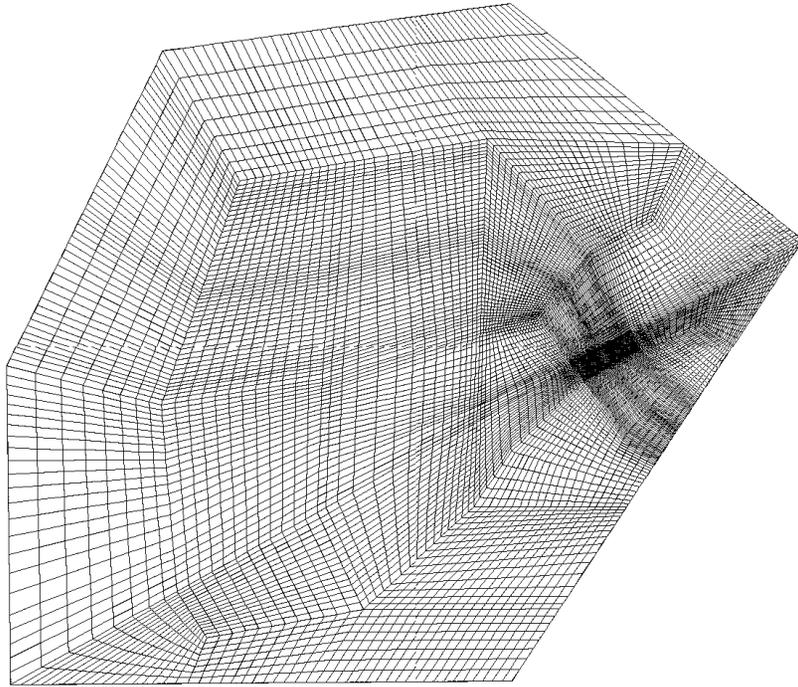
Résultats numériques 3D : calcul de stockage

Simulation de l'écoulement pour un modèle de stockage régional : $\approx (50\text{km} \times 50\text{km} \times 600\text{m})$.

Modèle issu de l'Andra légèrement simplifié (proche d'une simulation "réelle").



Calcul de stockage : maillage et décomposition en sous-domaines

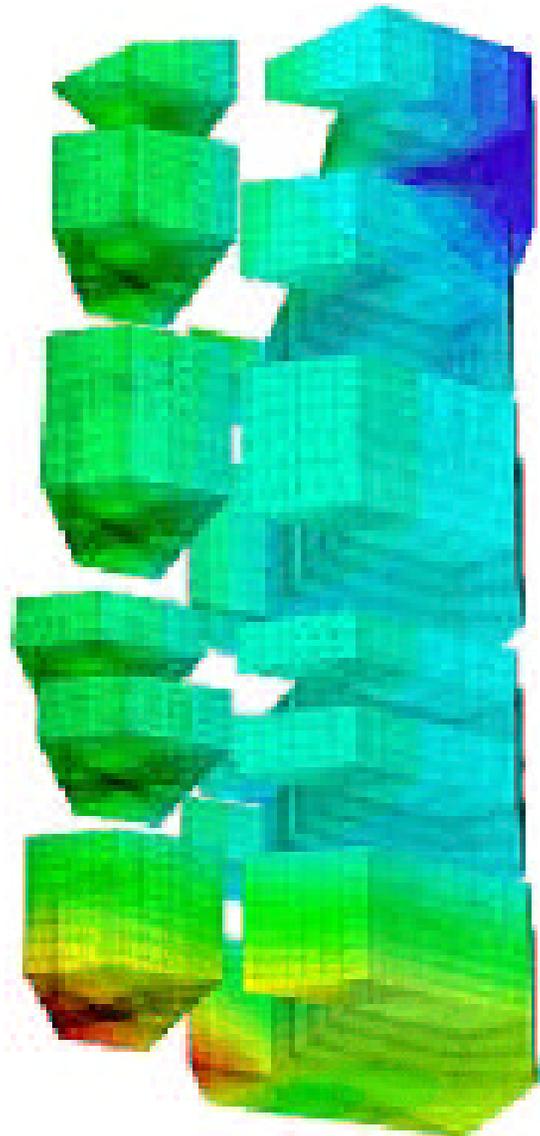


Décomposition conforme, réalisée par Amel Sboui (Inria, Estime).

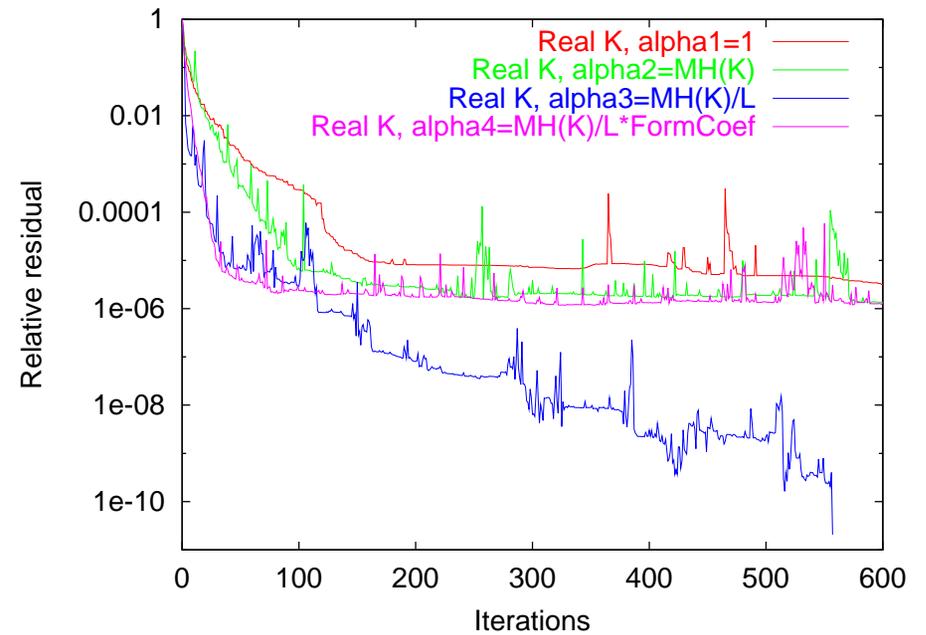
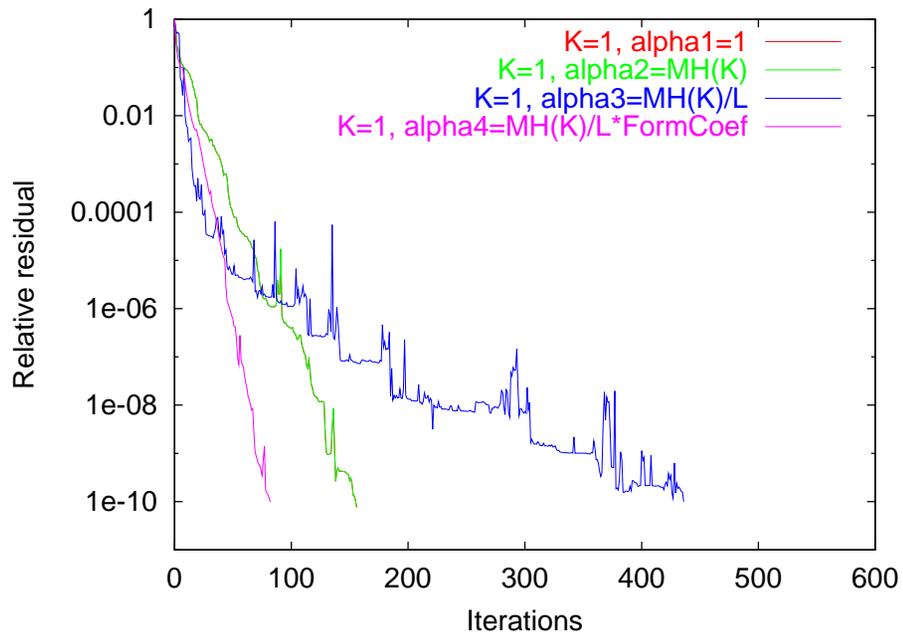
Visualisations grâce à Medit.

Calcul de stockage : caractéristiques des couches

| Couche | zone | $\Delta z(m)$ | $K_h(m/s)$ | $K_v(m/s)$ |
|-------------|------|---------------|------------|------------|
| Tithonien | Rég. | $0 \leq 90$ | $3E - 5$ | $3E - 5$ |
| Tithonien | Loc. | $0 \leq 90$ | $3E - 5$ | $3E - 5$ |
| Kimmér. | Rég. | $0 \leq 100$ | $1E - 11$ | $1E - 11$ |
| Kimmér. | Loc. | $0 \leq 100$ | $3E - 4$ | $3E - 4$ |
| Ox. L2a-L2b | Rég. | 165 | $2E - 7$ | $2E - 7$ |
| Ox. L2a-L2b | Loc. | 165 | $1E - 9$ | $1E - 9$ |
| Ox. Hp1-Hp4 | Rég. | 50 | $6E - 7$ | $6E - 7$ |
| Ox. Hp1-Hp4 | Loc. | 50 | $8E - 9$ | $8E - 9$ |
| Ox. C3a-C3b | Rég. | 60 | $1E - 9$ | $1E - 9$ |
| Ox. C3a-C3b | Loc. | 60 | $1E - 11$ | $1E - 11$ |
| C-Ox. | Rég. | 135 | $1E - 11$ | $1E - 13$ |
| C-Ox. | Loc. | 135 | $1E - 11$ | $1E - 13$ |



| Coef. Robin entre Ω_i et Ω_j | $\mathbf{K} \equiv 1$ | \mathbf{K} réel |
|--|-----------------------|-------------------|
| $\alpha_{ij}^1 \equiv 1$ | 156 | Stagne |
| $\alpha_{ij}^2 = \frac{2\mathbf{K}_i\mathbf{K}_j}{\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j}$ | 156 | Stagne |
| $\alpha_{ij}^3 = \frac{2\mathbf{K}_i\mathbf{K}_j}{(\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j)L_{\Omega}^{ij}}$ | 436 | 557 |
| $\alpha_{ij}^4 = \frac{2\mathbf{K}_i\mathbf{K}_j}{(\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j)L_{\Omega}^{ij}} \frac{L_{\Omega}^{\max}}{L_{\Omega}^{\min}}$ | 82 | Stagne |



Conclusions sur OcamlP3I

- **OcamlP3I** : moyen efficace et sûr de coupler des codes directement **en parallèle**
 - ★ parallélisation sûre!
 - ★ développement rapide.
 - ★ bonne efficacité.
- limitations du couplage avec :
 - ★ goulot d'étranglement des communications.
⇒ lent quand # SD augmente (?).
développements en cours pour remédier à cela!

Rapport de recherche Inria :
Di Cosmo, Weis, Li, Clément, Martin, Vodicka.

Modélisation des écoulements dans les milieux poreux contenant de grandes fractures

Jérôme JAFFRE, Jean ROBERTS (INRIA)

Modélisation des fractures : bibliographie

- **Analyse asymptotique :**

- ★ Sanchez-Palencia (74), grande résistivité \implies saut de pression.
- ★ Huy Hung et Sanchez-Palencia (74),
grande conductivité \implies saut de vitesse normale.

- **Modélisation ad'hoc :**

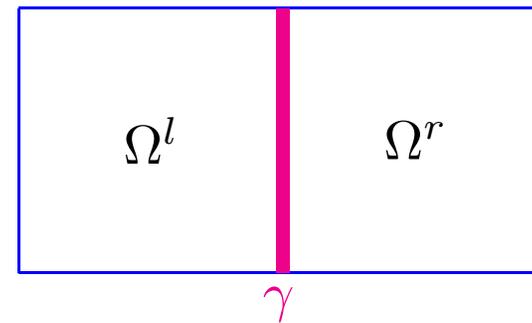
- ★ Bastian, Chen, Ewing, Helmig, Jakobs et Reichenberger, (00).
- ★ Angot, Gallouët et Herbin, (99).
- ★ de Dreuzy et Erhel, (03) : réseau de fractures.
- ★ Adler, Thovert, *Fractures and fracture networks*, (99).

- **Décomposition de domaines :**

- ★ Alboin, Jaffré, Roberts, Wang et Serres (00), grande perméabilité, EFM.
- ★ Faille, Flauraud, Nataf, Pégaz-Fiorinet, Schneider et Willien (02), grande et faible perméabilités, VF.
- ★ Jaffré, Martin et Roberts (SIAM J. Scient. Comput., accepté), grande et faible perméabilités, EFM.

Grandes fractures ou failles

Fracture \longrightarrow milieu poreux



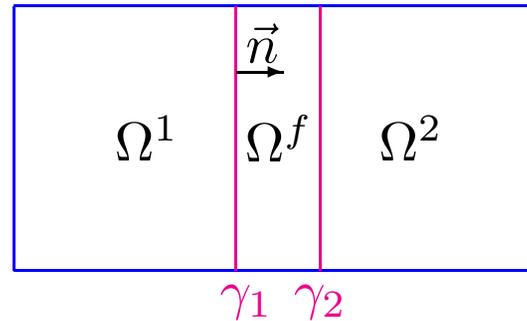
Modèle numérique

Fracture \longrightarrow milieu hétérogène \longrightarrow décomposition de domaines

Fracture \longrightarrow milieu (n-1)-D \longrightarrow interface

Fracture \longleftrightarrow échanges avec la roche

Problème de Transmission



Equations dans Ω_i

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u}_i &= q_i \\ \vec{u}_i &= -K_i \vec{\nabla} p_i \end{aligned} \quad i = 1, 2, f$$

Conditions de Transmission sur γ_i

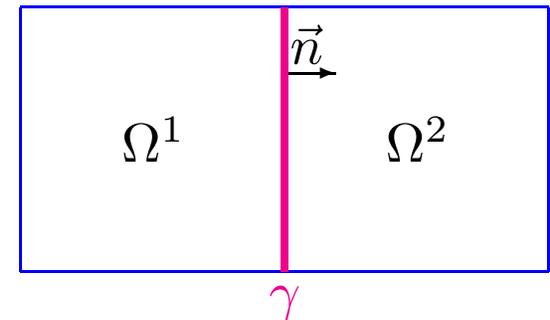
$$\begin{aligned} p_i &= P_f \\ \vec{u}_i \cdot \vec{n} &= \vec{u}_f \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad i = 1, 2$$

Premier modèle

obtenu en utilisant une analyse asymptotique
avec une hypothèse de forte perméabilité dans la fracture

Equations dans Ω_i

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{u}_i &= q_i \\ \vec{u}_i &= -K_i \vec{\nabla} p_i \\ i &= 1, 2\end{aligned}$$



Conditions d'interface sur γ

- Pression continue

$$p_1 = p_2 = P_f$$

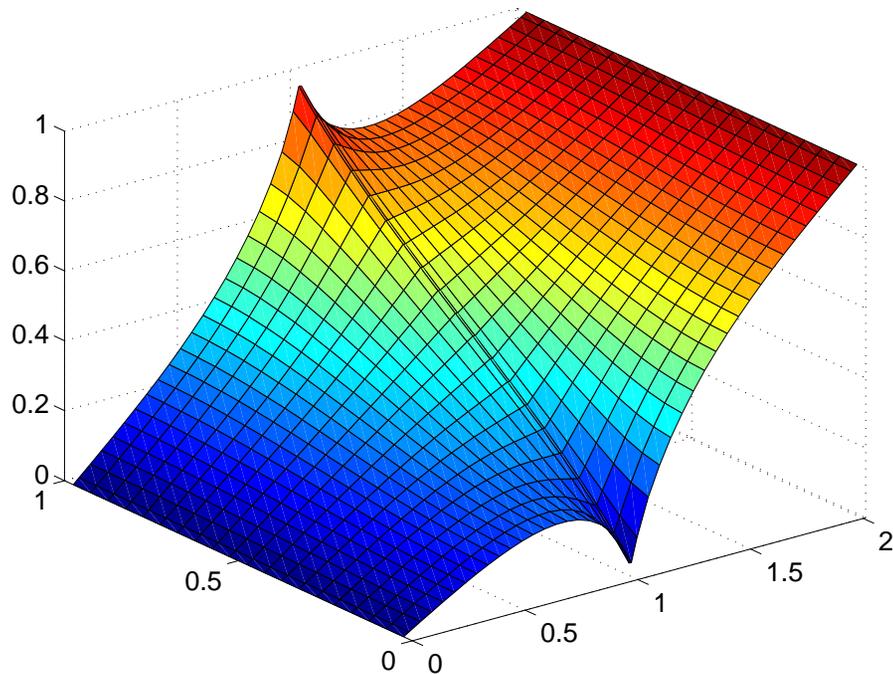
- Flux discontinu

$$\operatorname{div}_\tau \vec{U}_f = d \bar{q}_f + \vec{u}_1 \cdot \vec{n} - \vec{u}_2 \cdot \vec{n}$$

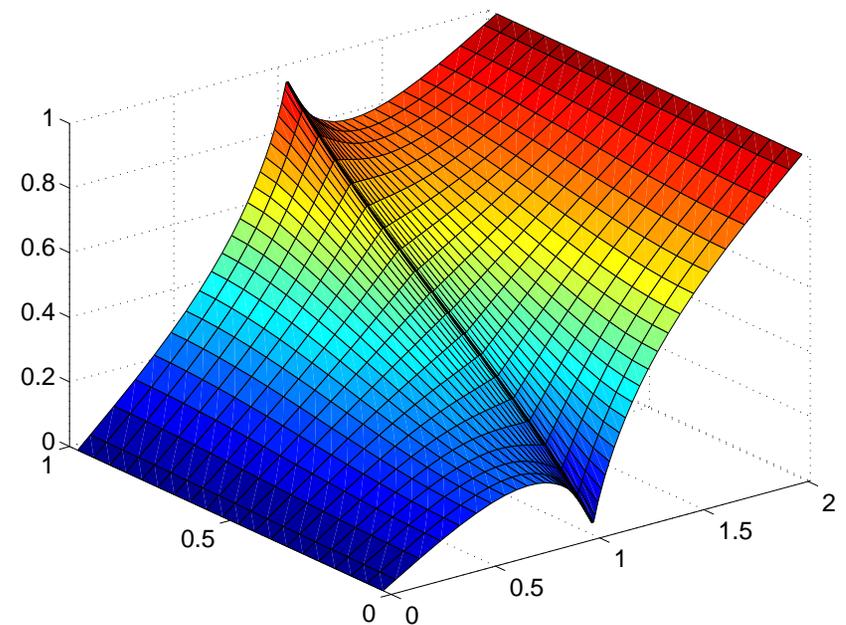
$$\vec{U}_f = -d K_f \nabla_\tau P_f$$

Résultats numériques : problème 2D

Pression pour : $K_f = 100$ $d = 0.01$

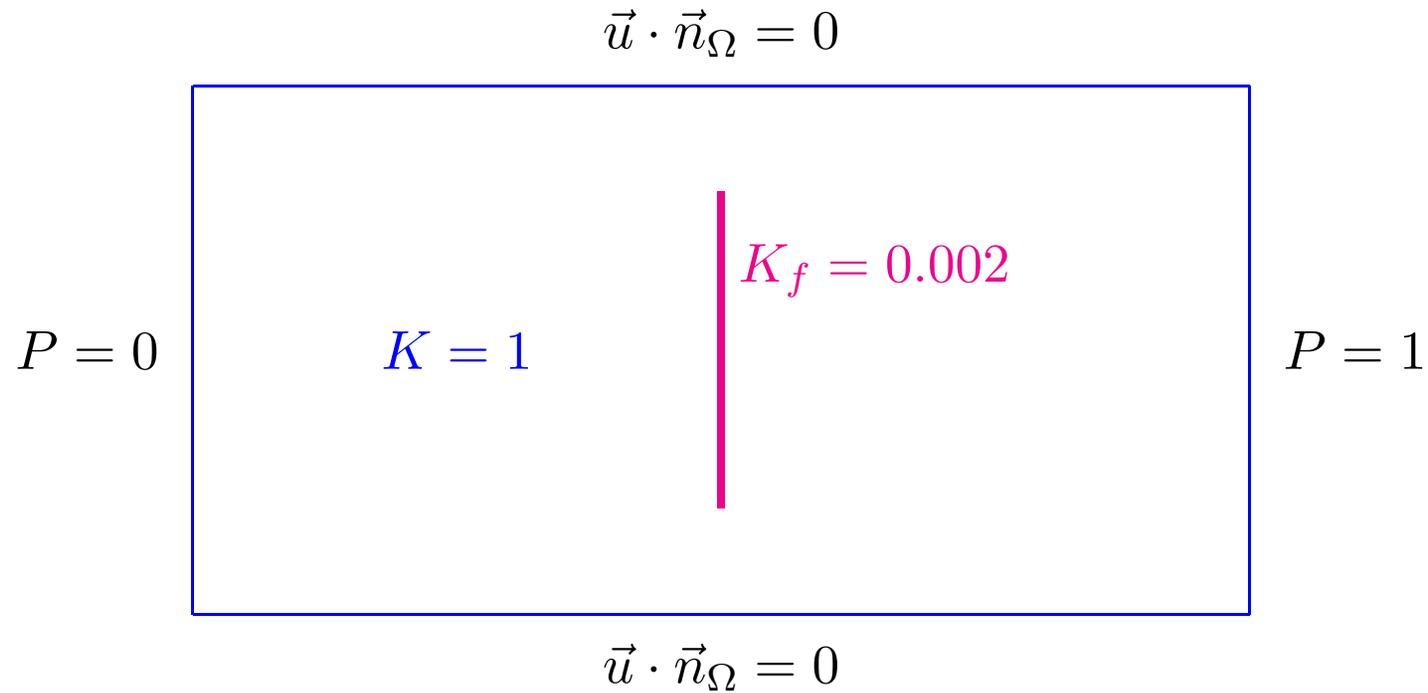


Pression du premier modèle d'interface.



Pression de référence.

Expérience 1 : Barrière avec $K_f = 0.002$ $d = 0.01$

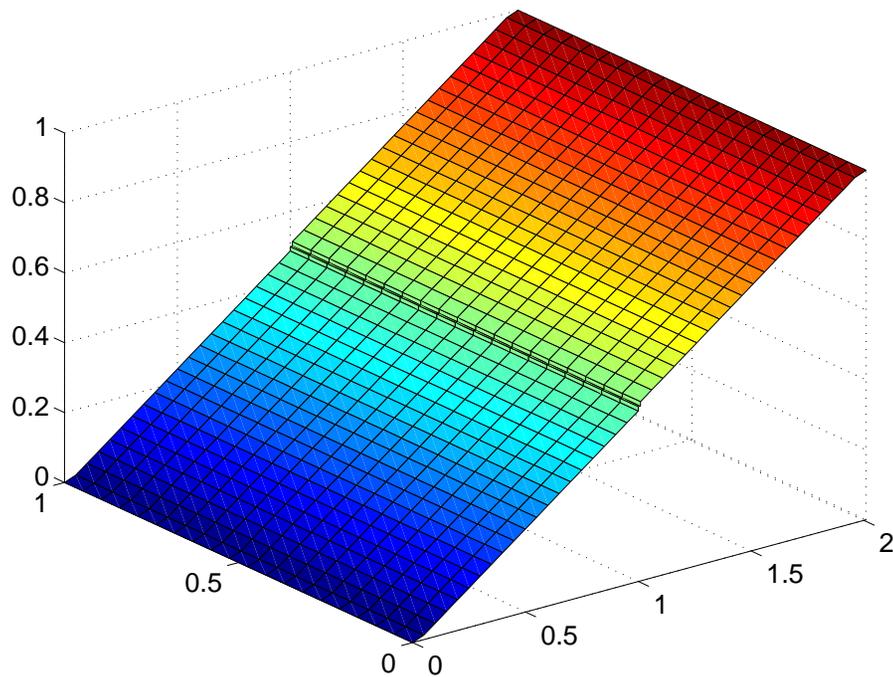


Limitation du premier modèle

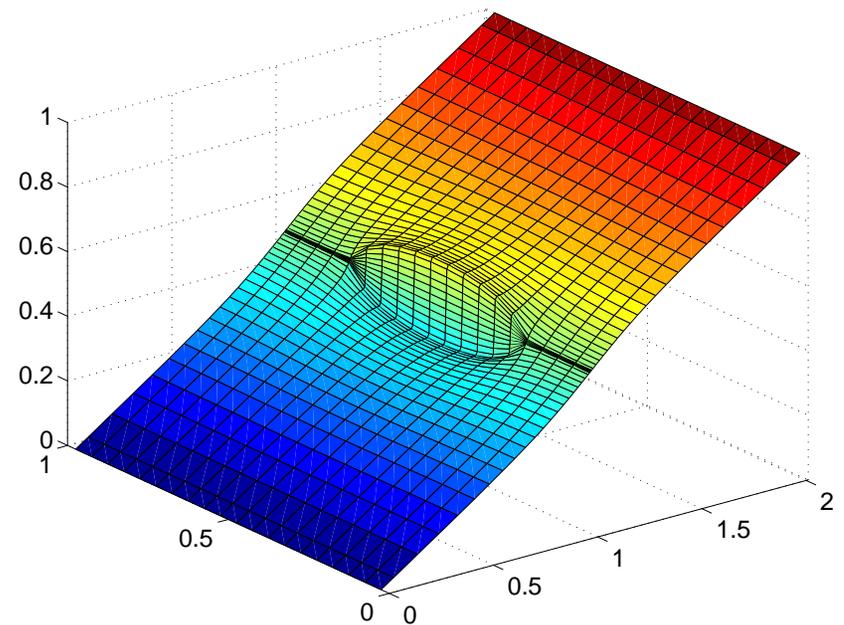
Le premier modèle nécessite la continuité de la pression à travers la fracture

- inappropriée dans le cas d'une **barrière géologique**.

Exemple avec : $K_f = 0.002$ $d = 0.01$



Pression du premier modèle d'interface.



Pression de référence.

Deuxième modèle

- Caractéristiques du deuxième modèle :
 - ★ extension du premier modèle.
 - ★ obtenu en faisant une moyenne à travers la fracture Ω_f .
 - ★ permet les sauts de flux (perméabilité élevée).
 - ★ permet les sauts de pression (perméabilité faible).
 - ★ dépend d'un paramètre.

Conditions d'interface sur γ

(DD)

- pression discontinue

$$p_1 = P_f + \frac{d}{2K_f}(\xi \vec{u}_1 \cdot \vec{n} + (1 - \xi) \vec{u}_2 \cdot \vec{n})$$

$$p_2 = P_f - \frac{d}{2K_f}((1 - \xi) \vec{u}_1 \cdot \vec{n} + \xi \vec{u}_2 \cdot \vec{n})$$

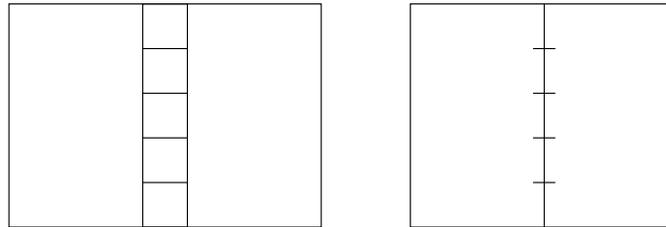
- flux discontinu

$$\operatorname{div}_\tau \vec{U}_f = d q_f + \vec{u}_1 \cdot \vec{n} - \vec{u}_2 \cdot \vec{n}$$

$$\vec{U}_f = -d K_f \nabla_\tau P_f$$

Existence et unicité

Pour des données suffisamment régulières, on montre l'existence et l'unicité du problème modèle à partir de la théorie habituelle de Brezzi pour les formulations mixtes si $\xi > \frac{1}{2}$.



Remarques

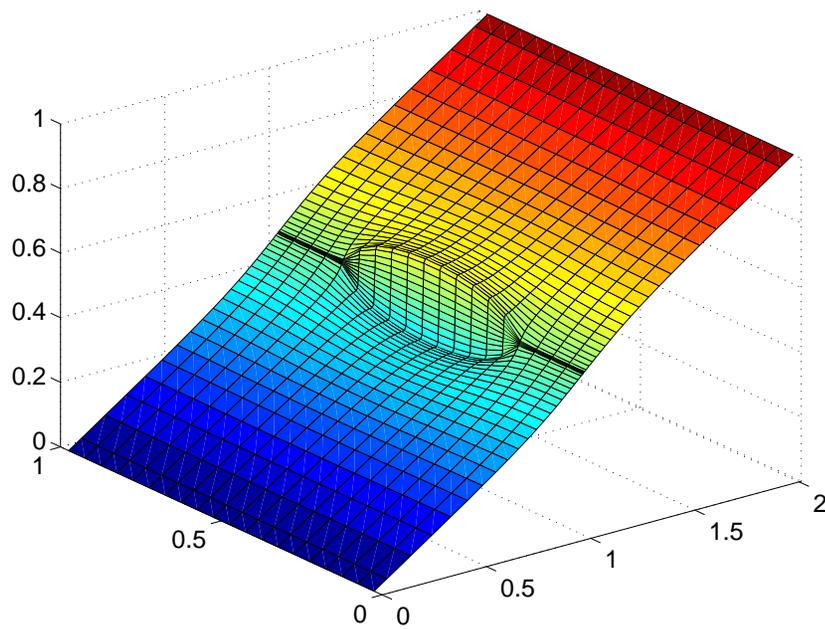
$\xi = \frac{2}{3}$ donne la même solution que l'on obtiendrait avec une solution par EFM standard avec une discrétisation de la fracture constituée d'une grille ayant une seule maille dans la direction normale.

$\xi = 1$ même remarque mais pour discrétisation en volumes finis.

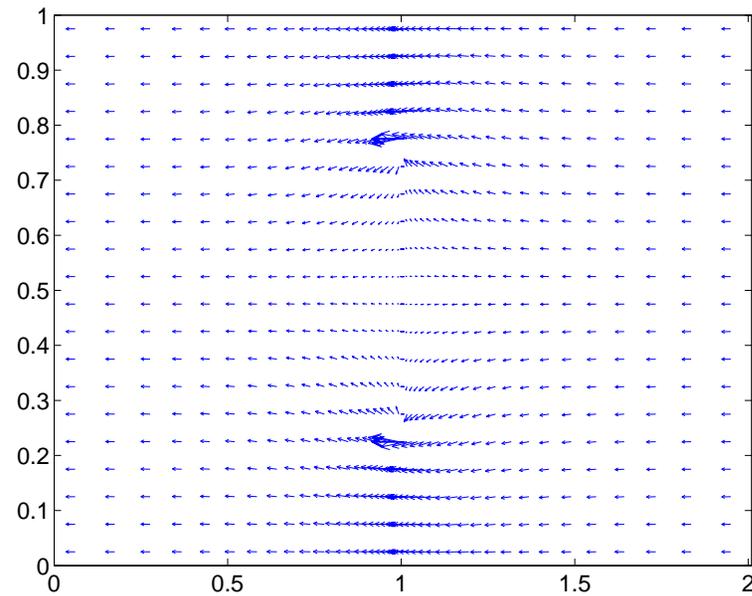
$\xi = 1$ est particulièrement pratique pour une formulation de type décomposition de domaines.

Expérience 1 : Barrière avec $K_f = 0.002$

Solution de référence



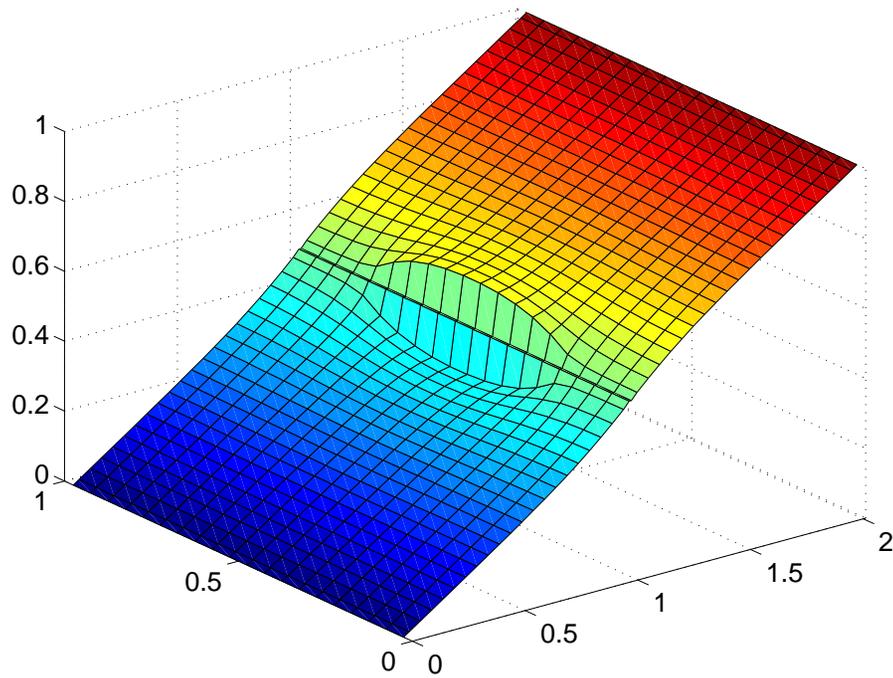
Pression



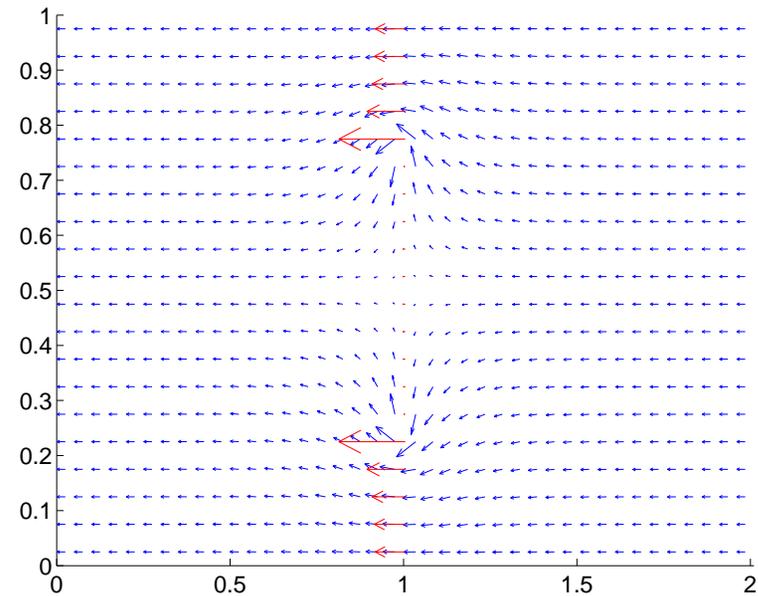
Vitesse

Experience 1 : Barrière avec $K_f = 0.002$

$$\xi = 2/3$$



Pression



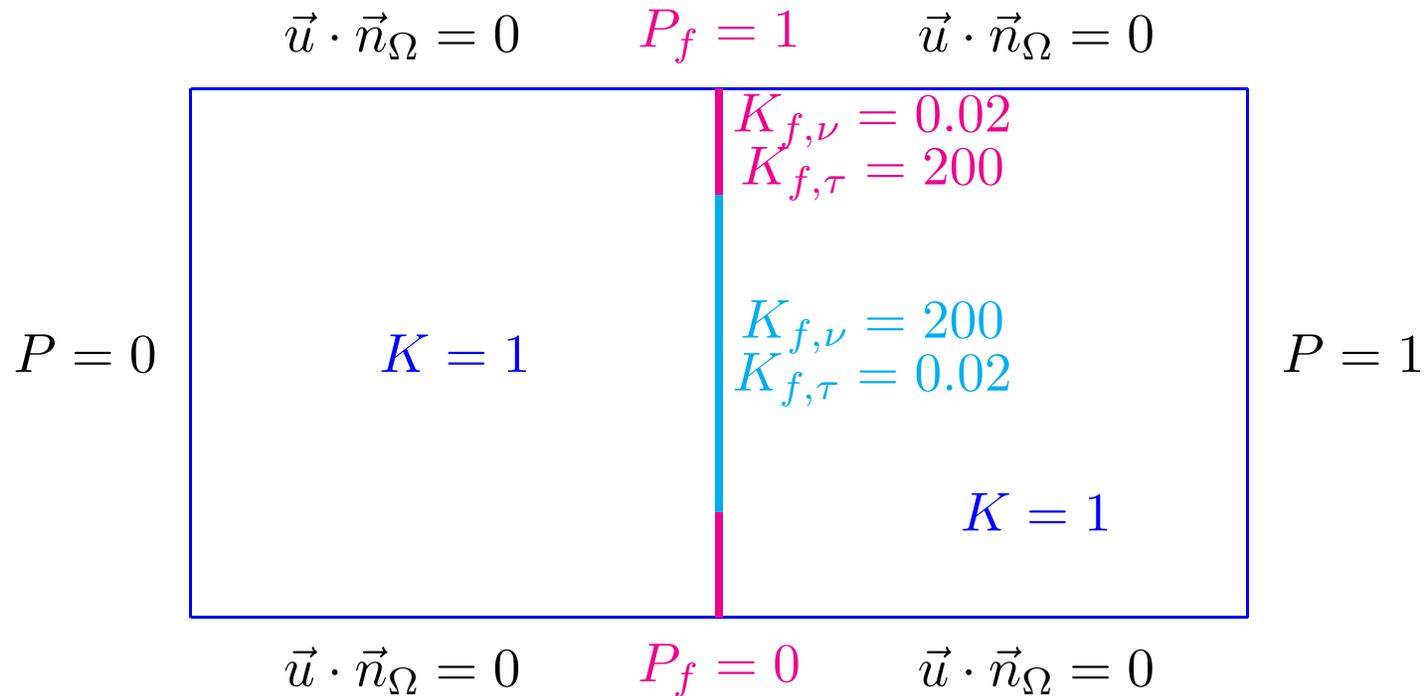
Vitesse

Conclusion et perspectives

- Etude, implémentation et tests d'une méthode de décomposition de domaine non-conforme pour les problèmes de stockage.
- Implémentation parallèle avec OcamlP3I.
- Nouveau modèle de fractures.
- Utilisation plus large d'OcamlP3I : couplage de codes différents.
- Transport pour le modèle géologique.
- Fractures : tests réalistes et modélisation du transport.

...

Expérience 2 : K_f anisotrope, nonconstante
 $d = 0.01$

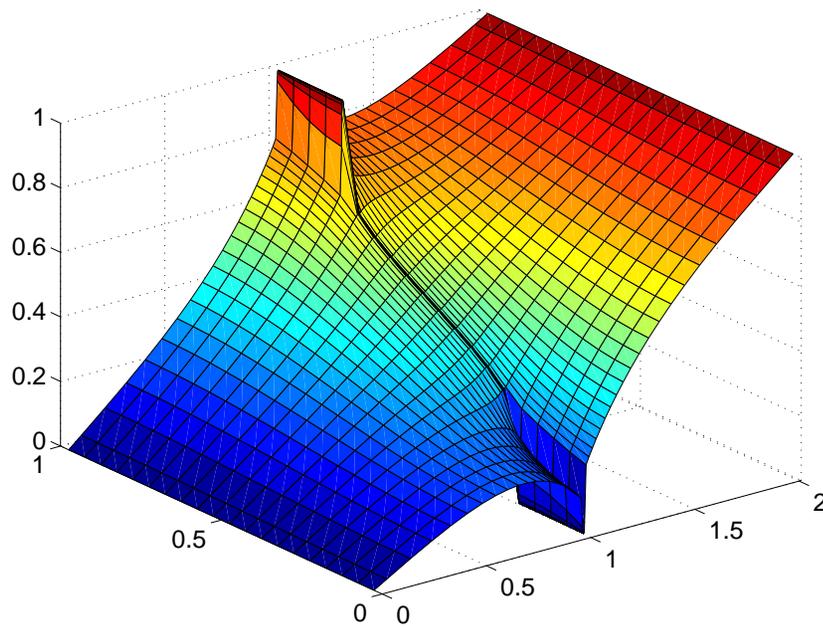


Expérience 2 : K_f anisotrope, nonconstant

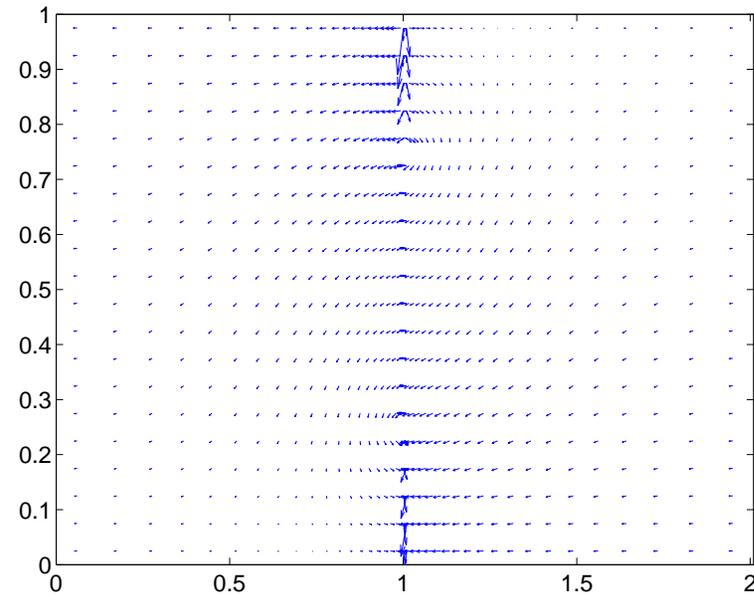
$$K_{f,\tau} = 200 \quad K_{f,\nu} = 1/200 \quad d = 0.01$$

chute de pression le long de la fracture

solution de référence

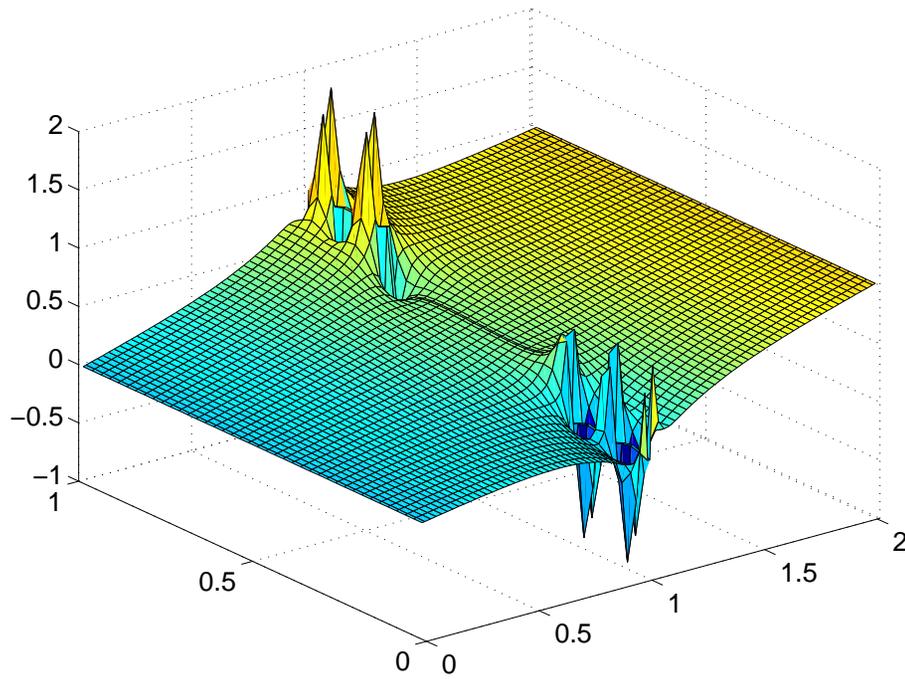


Pression

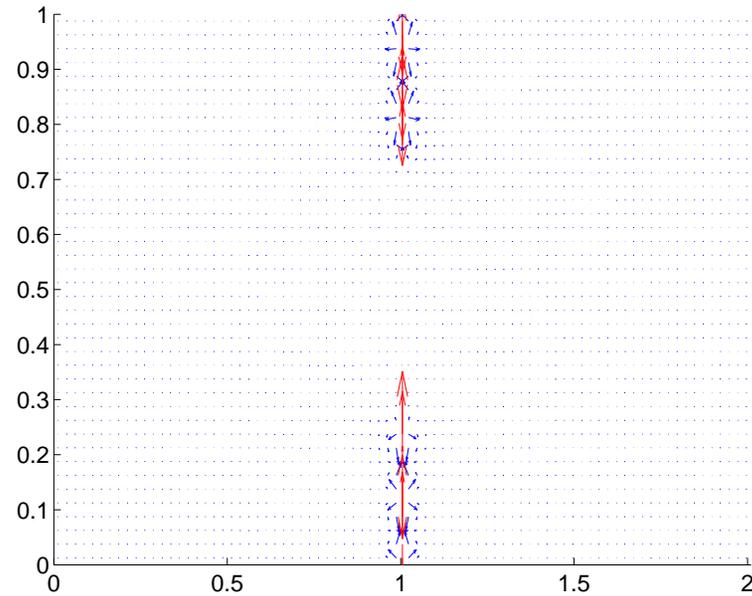


Vitesse

Expérience 2 : K_f : anisotrope, nonconstante
 $K_{f,\tau} = 200$ $K_{f,\nu} = 1/200$ $d = 0.01$
chute de pression le long de la fracture $\xi = 0.49$



Pression

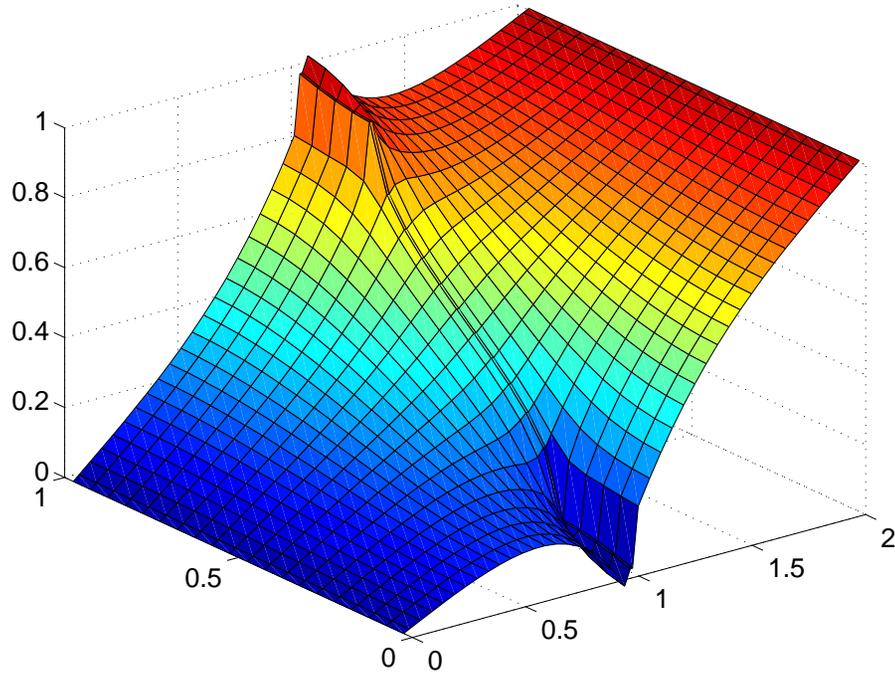


Vitesse

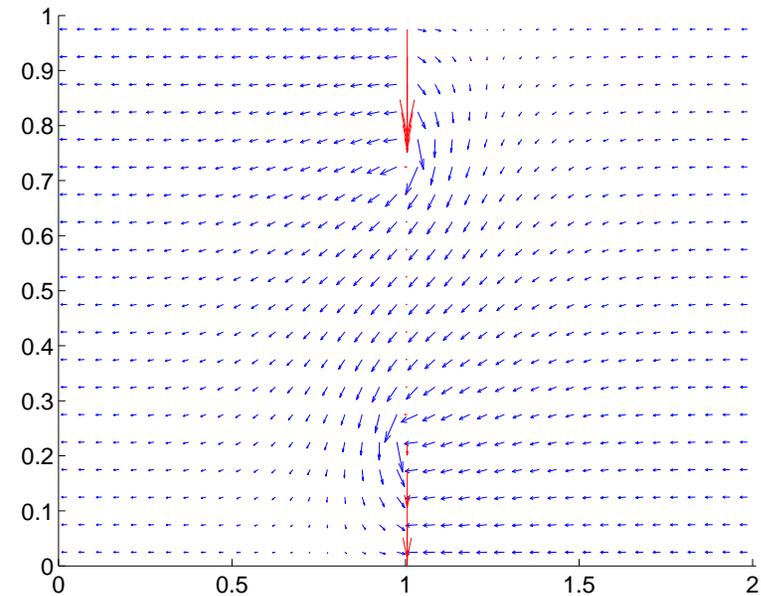
Les modèles ne sont pas stables quand $\xi < 1/2$.

Expérience 2 : K_f anisotrope, nonconstante

$$K_{f,\tau} = 200 \quad K_{f,\nu} = 1/200 \quad d = 0.01, \quad \xi = 0.51$$



Pression

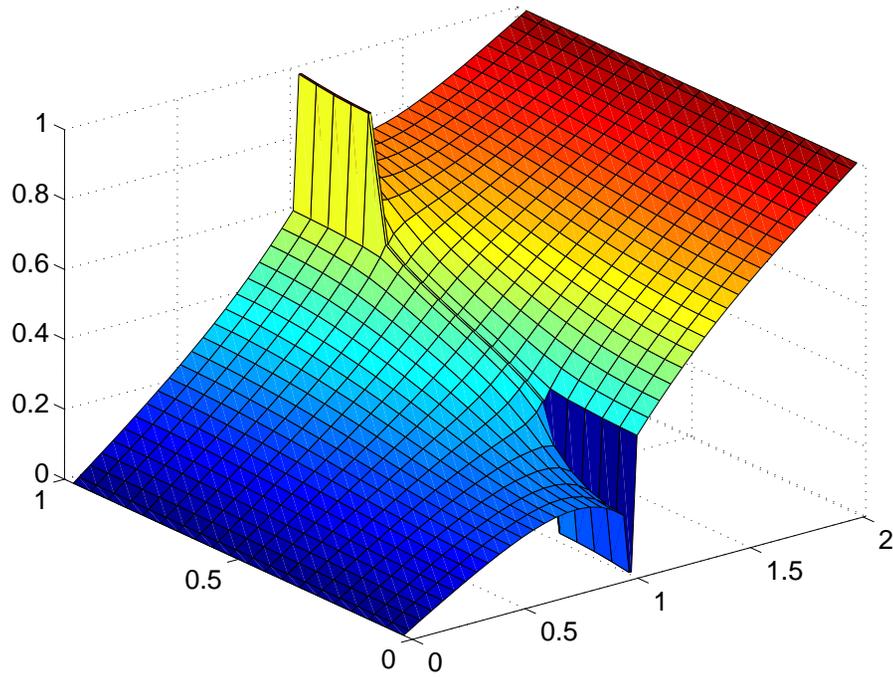


Vitesse

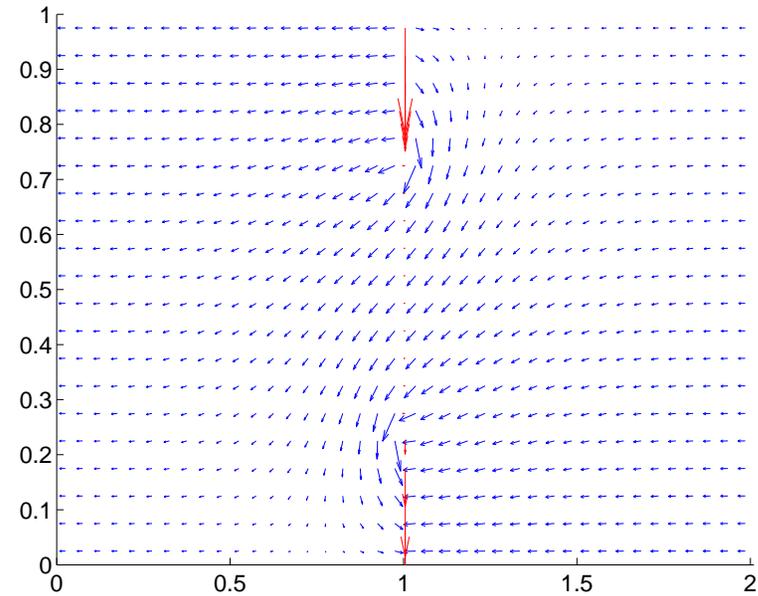
Expérience 2 : K_f anisotrope, nonconstante

$$K_{f,\tau} = 200 \quad K_{f,\nu} = 1/200 \quad d = 0.01$$

chute de pression le long de la fracture $\xi = 2/3$



Pression



Vitesse

Décomposition de domaine : quand $\xi = 1$

Opérateurs Robin \mapsto Neumann \bar{S}_i :

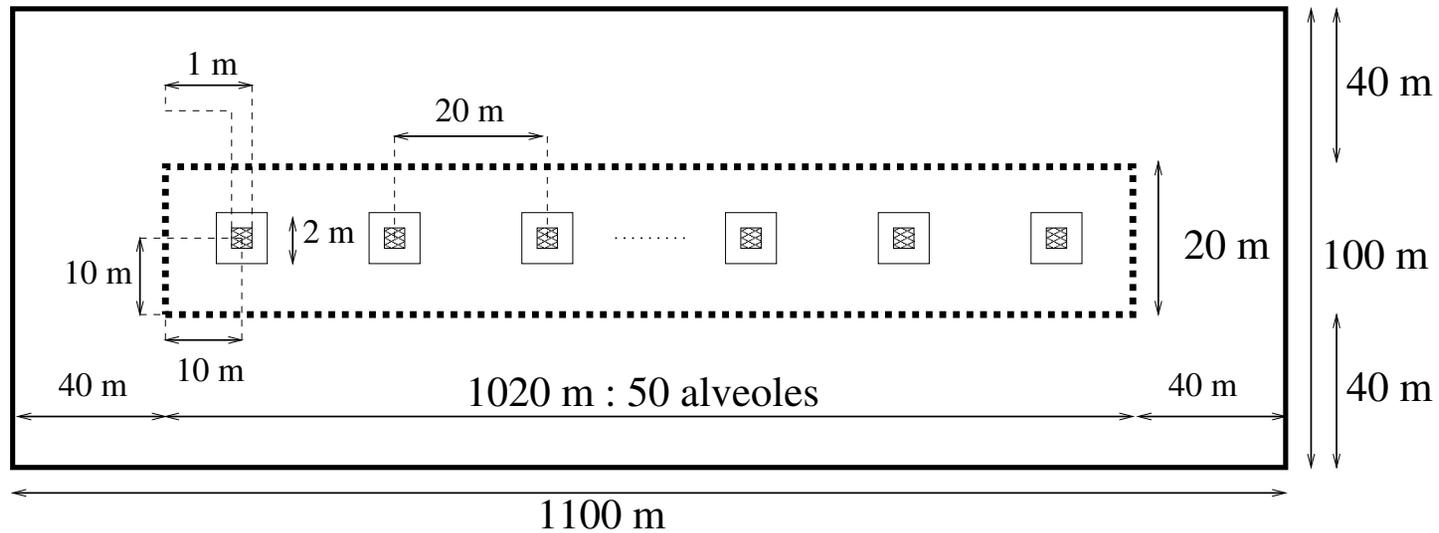
(model)

$$\begin{array}{llll}
 \bar{S}_i(\bar{\lambda}_i) & = & -\mathbf{u}_i^* \cdot \mathbf{n}_i & \text{sur } \gamma, \quad i = 1, 2, & \text{tel que :} \\
 \mathbf{div} \mathbf{u}_i^* & = & q_i & \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2, & \\
 \mathbf{u}_i^* & = & -\mathbf{K}_i \nabla p_i & \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2, & \\
 -\mathbf{u}_i^* \cdot \mathbf{n}_i + \frac{2K_f}{d} p_i & = & \frac{2K_f}{d} \bar{\lambda}_i & \text{on } \gamma, \quad i = 1, 2. &
 \end{array}$$

Problème d'interface non-local, non-standard :

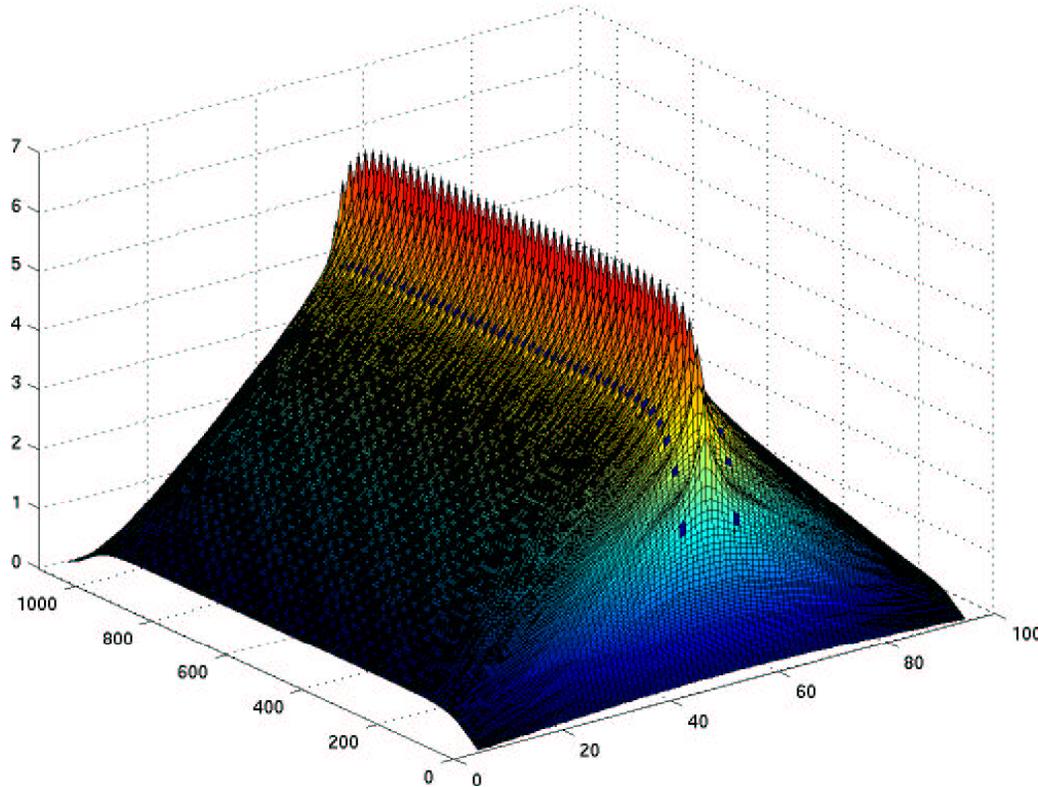
$$\bar{S}_1(p_f) + \bar{S}_2(p_f) - \mathbf{div}_\tau (K_f d \nabla_\tau p_f) = d q_f$$

Application au stockage



- **Sous-domaine externe** : 110×10 (mailles carrées : $10m \times 10m$).
- **Sous-domaine interne** : 4080×80 (mailles carrées : $0.25m \times 0.25m$).

Résultat numérique



Bi-CGStab : 34 itérations (en quelques minutes) pour 8528 inconnues d'interface et \approx 330 000 mailles.

Réalisé à partir du Cemracs 2001, (avec Achdou, Nataf et Wagner).

Résultats numériques 3D : performances

Tests académiques :

- **maillages réguliers (pavés) sur $\Omega = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 5]$.**
- **opérateur de Laplace.**
- **solution connue, simple et régulière : $p^*(x, y, z) = x(1-x)y(2-y)z(5-z)$.**
- **grappe de PC's de l'INRIA :
16 biprocesseurs Xeon (2.8 GHz, mémoire : 2 Go).**

Résultats numériques 3D : performances. Cas non-conforme

Test d'extensibilité, maillages non-raccordés :

- Nombre de mailles par sous-domaine $\approx 50\,000 = \text{Cst.}$
- Nombre d'inconnues par sous-domaine $\approx 150\,000 = \text{Cst.}$
- Charge constante par processeur.
- Calculs sur 16 bi-processeurs (2 Go de mémoire chacun).
- La factorisation nécessite ≈ 1.5 Go de mémoire.

Résultats numériques 3D : performances. Cas conforme

| (N_x, N_y, N_z) | # SD | CPU | Iter | total # cells | T_n/T_1 |
|------------------------|------|---------|------|---------------|-----------|
| $1 \times 1 \times 1$ | 1 | 17'20'' | 0 | 51 200 | 1 |
| $1 \times 1 \times 2$ | 2 | 21'21'' | 6 | 102 400 | 1.23 |
| $1 \times 1 \times 4$ | 4 | 21'51'' | 18 | 204 800 | 1.26 |
| $1 \times 1 \times 8$ | 8 | 20'20'' | 18 | 409 600 | 1.17 |
| $1 \times 1 \times 16$ | 16 | 21'47'' | 22 | 819 200 | 1.26 |
| $1 \times 2 \times 2$ | 4 | 17'59'' | 8 | 204 800 | 1.04 |
| $1 \times 2 \times 4$ | 8 | 20'20'' | 8 | 409 600 | 1.17 |
| $1 \times 2 \times 8$ | 16 | 21'59'' | 21 | 819 200 | 1.27 |
| $1 \times 4 \times 4$ | 16 | 22'41'' | 23 | 819 200 | 1.31 |
| $2 \times 2 \times 2$ | 8 | 21'08'' | 8 | 409 600 | 1.22 |
| $2 \times 2 \times 4$ | 16 | 23'03'' | 20 | 819 200 | 1.33 |

Résultats numériques 3D : performances. Cas non-conforme

| (N_x, N_y, N_z) | # SD | CPU No Col | CPU Col | # Iter | total # cells |
|------------------------|------|------------|---------|--------|---------------|
| $1 \times 1 \times 1$ | 1 | 17'20'' | 17'20'' | 0 | 51 200 |
| $1 \times 1 \times 2$ | 2 | 44'29'' | 26'25'' | 13 | 100 604 |
| $1 \times 1 \times 4$ | 4 | 30'50'' | 25'12'' | 16 | 208 046 |
| $1 \times 1 \times 8$ | 8 | 32'36'' | 25'03'' | 18 | 386 092 |
| $1 \times 1 \times 16$ | 16 | 41'08'' | 29'13'' | 23 | 804 654 |
| $1 \times 2 \times 2$ | 4 | 39'33'' | 29'14'' | 19 | 201 878 |
| $1 \times 2 \times 4$ | 8 | 50'53'' | 27'57'' | 28 | 398 916 |
| $1 \times 2 \times 8$ | 16 | 44'28 | 34'13'' | 32 | 816 904 |
| $1 \times 4 \times 4$ | 16 | 37'05'' | 31'28'' | 26 | 785 496 |
| $2 \times 2 \times 2$ | 8 | 37'37'' | 33'25'' | 30 | 421 691 |
| $2 \times 2 \times 4$ | 16 | 45'05'' | 31'00'' | 31 | 812 194 |