



**HAL**  
open science

# Ondes non-linéaires à une et deux dimensions dans une mince couche de fluide

Nicolas B. Garnier

► **To cite this version:**

Nicolas B. Garnier. Ondes non-linéaires à une et deux dimensions dans une mince couche de fluide. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2000. Français. NNT : . tel-00007185

**HAL Id: tel-00007185**

**<https://theses.hal.science/tel-00007185v1>**

Submitted on 22 Oct 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Université Paris 7 - Denis Diderot*  
*UFR Physique des liquides*

## Thèse

pour l'obtention du Diplôme de  
Docteur de l'Université Paris 7  
Spécialité: Physique des liquides

présentée par :

Nicolas Garnier

# Ondes non-linéaires à une et deux dimensions dans une mince couche de fluide

soutenue le 15 septembre 2000 devant le jury composé de :

Arnaud Chiffaudel	Directeur de thèse
Yves Couder	Président
Pierre Coulet	
Stephan Fauve	
Patrice Legal	Rapporteur
Innocent Mutabazi	Rapporteur
Christiane Normand	



# Remerciements

LE TRAVAIL ICI PRÉSENTÉ EST LE FRUIT DE TROIS ANNÉES de collaboration avec Arnaud Chiffaudel. Si futile est la question de la durée de ces trois années, l'impression qu'il m'en reste est celle d'avoir (ré-)appris la recherche, avec la rigueur, la patience et l'humanité dont Arnaud m'a toujours fait montre ; je n'oublierai — je l'espère — jamais ses conseils avisés. Mes remerciements les plus chaleureux ne sont qu'une petite projection de la reconnaissance que je lui voue.

Je remercie vivement J.-P. Lièvre — dont la passion communicative pour les Mathématiques et surtout la Physique — a aiguillé nombre de mes choix jusqu'ici, ainsi que Stephan Fauve, mon premier guide dans le monde de la physique non-linéaire.

François Daviaud m'a accueilli dans son groupe et au fil des jours aidé à apprécier les choses à une valeur plus juste. Je le remercie pour sa patience, ses conseils et je n'oublierai pas son exemple.

J'ai eu le plaisir de travailler avec Christiane Normand ; nos discussions inopinées ont de plus éclairé de nombreux points dans cette thèse et je la remercie.

Je remercie Innocent Mutabazi et Patrice Le Gal de leur intérêt pour mon travail et d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit. Je remercie Yves Couder, Pierre Coulet, Stéphan Fauve et Christiane Normand d'avoir participé au jury.

Je remercie Jacques Hammann, directeur du service, de m'avoir accueilli dans son laboratoire, Mme Marciano pour ses conseils et secours administratifs, et tous les membres du laboratoire qui m'ont consacré un peu de leur temps.

De nombreuses personnes ont participé à la mise en place des montages, ainsi qu'à leur entretien et mise à jour au fil des besoins. Merci à Gérard Francinet pour l'électronique, Vincent Padilla, Michel Juignet et Jean-Claude Tack pour la mécanique, et bien sûr Cécile Gasquet pour l'informatique et ses applications. Que Vincent Croquette trouve ici toute ma reconnaissance pour son logiciel *XVin*.

J'ai eu le plaisir de travailler avec des stagiaires enthousiastes, qui ont participé à certains travaux exposés ici : merci à Frédéric Joly, Arnaud Prigent, Alexis Casner et Laurent Maingault pour leur collaboration. De même, les interactions avec les différents membres du Groupe Instabilités et Turbulence furent toujours agréables.

Alexia (☺), sa patience et sa juste détermination, m'ont toujours accompagné. Je n'oublie pas les amis — proches et éloignés — qui rencontres après rencontres s'inquiétaient (encore) de l'utilité ou de l'avancement de mes travaux, ainsi que des multiples problèmes connexes à ma condition. Ma famille m'a toujours soutenu, quelles que furent les situations : que mes sincères remerciements leur reviennent à tous enfin.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Les ondes hydrothermales</b>	<b>7</b>
1.1 Présentation des mécanismes de l'écoulement de base . . . . .	8
1.1.1 Mécanismes thermogravitaire et thermocapillaire . . . . .	8
1.1.2 Réduction de la dimensionalité du problème . . . . .	11
1.2 Calcul de l'écoulement de base . . . . .	16
1.2.1 Equations de Boussinesq . . . . .	16
1.2.2 Géométrie rectangulaire . . . . .	18
1.2.3 Géométrie cylindrique . . . . .	21
1.3 Analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de base . . . . .	24
1.3.1 Historique . . . . .	24
1.3.2 Equations pour les perturbations . . . . .	25
1.3.3 Instabilités stationnaires . . . . .	27
1.3.4 Instabilités en ondes propagatives : ondes hydrothermales . . . . .	29
1.3.5 Mécanismes heuristiques . . . . .	36
1.3.6 Caractère absolu ou convectif de l'instabilité . . . . .	38
1.4 Une modélisation idoine et universelle . . . . .	39
1.4.1 Développement en échelles multiples et difficultés . . . . .	39
1.4.2 Equations d'amplitude en géométrie 1D . . . . .	42
1.4.3 Equations d'amplitude en géométrie rectangulaire 2D . . . . .	43
1.4.4 Equations d'amplitude en géométrie cylindrique 2D . . . . .	44
1.4.5 Quelques valeurs des coefficients . . . . .	44
1.4.6 Commentaires . . . . .	46
<b>2 Dispositifs expérimentaux</b>	<b>47</b>
2.1 Fluide utilisé . . . . .	47
2.2 Cellules de convection . . . . .	48
2.2.1 Cellule rectangulaire 1D . . . . .	49
2.2.2 Cellule annulaire 1D . . . . .	50
2.2.3 Cellule cylindrique 2D : disque . . . . .	50
2.2.4 A propos des conditions aux limites thermiques . . . . .	54
2.3 Méthode d'observation par ombroscopie . . . . .	55

2.3.1	Principe . . . . .	55
2.3.2	Quantifications . . . . .	56
2.3.3	Quantification des effets de surface . . . . .	62
2.3.4	Autres effets . . . . .	63
2.3.5	Acquisition du signal . . . . .	63
2.4	Analyse des signaux . . . . .	64
2.4.1	Recherche de la fréquence . . . . .	65
2.4.2	Transformée de Hilbert et filtrage . . . . .	65
2.4.3	Choix des filtres . . . . .	68
2.4.4	Second filtrage . . . . .	69
2.4.5	Quantités mesurées . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Transition convectif/absolu pour les instabilités oscillantes 1D</b>	<b>71</b>
3.1	Instabilité primaire en ondes hydrothermales . . . . .	73
3.1.1	Cas de l'équation de Ginzburg-Landau complexe . . . . .	73
3.1.2	Cas de l'expérience « anneau » . . . . .	78
3.1.3	Cas de l'expérience « rectangle » . . . . .	80
3.1.4	Discussion . . . . .	87
3.2	Instabilité secondaire des ondes hydrothermales . . . . .	95
3.2.1	Cas de l'équation de Ginzburg-Landau complexe . . . . .	95
3.2.2	Cas de l'expérience « anneau » . . . . .	95
3.2.3	Cas de l'expérience « rectangle » . . . . .	96
3.3	Instabilités d'ordre supérieur . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Ecoulement de base convectif stationnaire à 2D</b>	<b>115</b>
4.1	Profils de température . . . . .	116
4.1.1	Protocole . . . . .	116
4.1.2	Hauteur de fluide $h=1.9$ mm . . . . .	118
4.1.3	Hauteur de fluide $h=1.2$ mm . . . . .	119
4.1.4	Analyse des résultats . . . . .	121
4.2	Rouleaux corotatifs . . . . .	125
4.2.1	Présentation visuelle du phénomène . . . . .	125
4.2.2	Présentation des mesures . . . . .	126
4.2.3	Cas des petites hauteurs . . . . .	129
4.2.4	Comportements pour $h = 1,9$ mm et $\Delta T < 0$ . . . . .	129
4.2.5	Comportements pour $h = 1,9$ mm et $\Delta T > 0$ . . . . .	132
4.2.6	Commentaires et conclusions . . . . .	133
<b>5</b>	<b>Instabilités en géométrie étendue 2D</b>	<b>137</b>
5.1	Transition 1D / 2D dans le rectangle . . . . .	137
5.1.1	Cas des grandes hauteurs: OH1 . . . . .	138
5.1.2	Cas des petites hauteurs: OH2 . . . . .	140
5.1.3	Petit bilan et convention adoptée . . . . .	140

5.1.4	A propos des rouleaux corotatifs . . . . .	142
5.2	Diagramme des phases dans le disque . . . . .	145
5.2.1	Cas des grandes hauteurs ( $h = 1,9$ mm), $\Delta T > 0$ . . . . .	145
5.2.2	Cas des grandes hauteurs ( $h = 1,9$ mm), $\Delta T < 0$ . . . . .	149
5.2.3	Cas des petites hauteurs ( $h = 1,2$ mm), $\Delta T > 0$ . . . . .	153
5.2.4	Cas des petites hauteurs ( $h = 1,2$ mm), $\Delta T < 0$ . . . . .	158
5.2.5	Petit bilan . . . . .	160
5.3	Comportements critiques . . . . .	163
5.3.1	OH1 . . . . .	163
5.3.2	OH2 . . . . .	165
5.3.3	Fleurs . . . . .	170
5.3.4	Conclusion . . . . .	172
5.4	Interprétations en termes géométriques . . . . .	173
5.4.1	Spirales d'Archimède . . . . .	173
5.4.2	Angles de propagation . . . . .	174
5.4.3	Rapports d'aspect et confinement . . . . .	176
5.5	Transition vers la turbulence . . . . .	178
5.5.1	Evolution qualitative des spectres de puissance . . . . .	178
5.5.2	Evolutions quantitatives . . . . .	179
5.5.3	Conclusions . . . . .	181
	<b>Conclusions</b>	<b>183</b>
	<b>A A propos de l'élévation de hauteur</b>	<b>187</b>
	<b>B Instabilité d'Eckhaus supercritique dans l'anneau</b>	<b>189</b>
B.1	Observations . . . . .	189
B.2	Modélisation . . . . .	191
B.3	Prédictions . . . . .	192
	<b>C Déterminations expérimentales des coefficients des équations d'amplitude</b>	<b>199</b>
C.1	Courbe de stabilité marginale dans l'anneau et relation de dispersion . . . . .	199
C.2	Etats transitoires et relaxations de perturbations . . . . .	200
C.3	Auto-cohérence avec le formalisme de transition convectif/absolu . . . . .	205
C.4	Bilan . . . . .	205
	<b>D Pliages et représentations polaire ou cartésienne</b>	<b>209</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>218</b>



# Introduction

LE TRAVAIL PRÉSENTÉ ICI porte sur l'étude d'un écoulement thermo-hydrodynamique en convection illustrant les premières étapes de la transition vers le chaos spatio-temporel d'un système étendu d'ondes propagatives.

## Chaos, chaos spatio-temporel et turbulence

En physique, le chaos déterministe temporel est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales. L'apparition de ce chaos temporel — connu depuis les travaux de Poincaré en mécanique céleste — a été élucidée dans les années 1970 par les travaux théoriques de Ruelle et Takens (1971) explicitant un scénario de transition par quasi-périodisme, illustré par exemple sur le modèle de Lorenz (1963) ou celui de Rossler (1976). Ce scénario a été confirmé par de nombreuses expériences (Bergé (1988)) dont les plus célèbres se trouvent en thermo-hydrodynamique — convection de Rayleigh-Bénard dans une petite boîte — et en chimie — réaction de Bélousov-Zabotinsky — entre autres. A peu près dans le même temps, deux autres scénarii étaient mis en évidence : celui de la cascade sous-harmonique et celui de l'intermittence.

Si l'aspect spatial est pris en compte, le chaos est qualifié de spatio-temporel et son apparition continue à l'heure actuelle de faire l'objet de nombreuses études. En effet, un système étendu (une « grande » boîte) présente un continuum de degrés de liberté spatiaux qui interviennent dans la transition vers le chaos, enrichissant la phénoménologie décrite dans le cas purement temporel des petites boîtes.

En hydrodynamique, le chaos spatio-temporel prélude souvent à la turbulence ; et celle-ci reste depuis plusieurs siècles (travaux de Léonard de Vinci) une source de questions ouvertes. Parmi ces questions, et outre celle d'une description précise de la turbulence, se trouve le problème de comprendre comment un système donné peut transiter d'un état laminaire vers un état turbulent. Notre étude s'inscrit dans ce cadre : comprendre avec un système modèle comment la variation d'une contrainte extérieure — la variation d'une grandeur intensive appelée *paramètre de contrôle* — provoque la transition vers la turbulence.

Par transition vers la turbulence, nous entendons ici surtout les premières étapes de cette transition. Nous décrirons ainsi comment une simple couche de fluide, au repos lorsqu'aucune contrainte ne lui est appliquée — l'équilibre thermodynamique est établi —, acquiert hors équilibre, sous l'effet d'une contrainte *thermique*, un mouvement tout d'abord parfaitement ordonné. Sous l'effet d'une contrainte de plus en plus importante, une com-

plexification progressive du comportement spatial et temporel apparaît via la formation de structures dissipatives. A chaque étape, une bifurcation donne naissance à un nouvel objet qui vient enrichir la structure précédente (Fauve (1984)). Un nombre d'étapes fini, petit, est parfois suffisant à un système expérimental pour présenter toutes les caractéristiques du chaos spatio-temporel, c'est à dire d'une forme de turbulence si l'on considère la terminologie propre à l'hydrodynamique.

### Systèmes ouverts et fermés

Dans le but de comprendre la transition vers le chaos spatio-temporel, de nombreux systèmes modèles ont déjà été mis en avant et un grand intérêt a été porté aux systèmes fermés — sans flux de matière, ni donc d'information extérieure — ainsi qu'aux systèmes ouverts, souvent plus proches des phénomènes observables dans la vie courante (sillages, panache de fumée de cigarette, robinet ouvert...). Parmi les systèmes fermés les plus étudiés, citons les systèmes purement hydrodynamiques comme l'écoulement de Taylor-Couette — qui présente des instabilités super- ou sous-critiques suivant les cas — ainsi que les systèmes thermo-hydrodynamiques, avec présence active du champ scalaire température, comme le système thermo-convectif de Rayleigh-Bénard — qui présente une instabilité supercritique dans le cas d'un fluide simple et une instabilité sous-critique dans le cas d'un mélange binaire.

### Contraintes thermiques et mécaniques

Un avantage des systèmes thermo-hydrodynamiques réside dans le fait que la contrainte qui éloigne le fluide de l'équilibre thermodynamique est d'origine thermique. La seule échelle spatiale macroscopique associée à la contrainte est l'échelle  $L$  à laquelle est imposé le gradient de température ; il en est de même pour l'échelle de temps macroscopique. Par conséquent, les structures qui apparaissent ne se trouvent en présence d'aucun forçage spatial ou temporel. En effet, le bruit thermique se déploie sur des échelles microscopiques et n'influe pas les structures macroscopiques qui apparaissent, au contraire du bruit mécanique. Les systèmes thermo-hydrodynamiques sont donc une illustration de choix des scénarii de transition vers un chaos spatio-temporel intrinsèque, i.e., non imposé par un bruit extérieur.

### Bifurcations supercritiques et sous-critiques

Le système particulier que nous étudions présente essentiellement des bifurcations supercritiques. Dans une bifurcation supercritique, le nouvel objet — ou mode — apparaît « continûment », c'est à dire que son amplitude est continue au passage de la bifurcation. L'autre grande famille de bifurcations est celle des bifurcations sous-critiques, où l'apparition du nouveau mode est discontinue (i.e. brutale) ; de telles bifurcations sont en général associées à un cycle d'hystérésis. En terme de transition de phase à l'équilibre thermodynamique, les bifurcations ou instabilités supercritiques sont analogues à des transitions du second ordre (transition ferromagnétique/paramagnétique par exemple) alors que les bifurcations ou instabilités sous-critiques sont analogues à des transitions du premier ordre (transition liquide/vapeur par exemple).

### Structures stationnaires et propagatives

Notre système convectif présente de plus l'originalité suivante : sous certaines conditions que nous remplirons toujours, la première bifurcation qui y apparaît est supercritique et donne naissance à un système d'ondes propagatives. Rappelons que la convection de Rayleigh-Bénard dans les fluides simples donnait naissance à des structures stationnaires de façon supercritique ; dans le cas des mélanges binaires, les structures pouvaient être propagatives mais apparaissaient alors de façon sous-critique. Nous allons ainsi étudier la transition vers le chaos spatio-temporel à partir non plus d'une structure périodique et stationnaire mais à partir d'une structure périodique en espace et en temps.

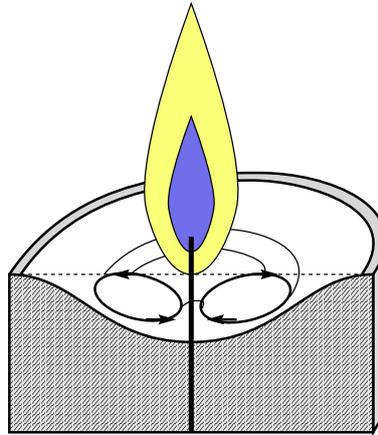
De plus, au contraire de l'instabilité secondaire oscillatoire des rouleaux stationnaires de Rayleigh-Bénard, notre instabilité est la première que subit le fluide lorsque la contrainte thermique est augmentée. Cela confère au système une plus grande généralité et la possibilité d'un lien direct avec la description hydrodynamique classique par les équations de Navier-Stokes.

## Présentation du système étudié

Par sa mise en oeuvre, le système convectif que nous étudions est assez proche de celui de Bénard-Marangoni, où l'existence d'une surface libre met en jeu les effets thermocapillaires. Notre système en diffère essentiellement par l'orientation du gradient thermique imposé : d'un gradient vertical dans le cas de Rayleigh-Bénard ou Bénard-Marangoni nous passons à un gradient horizontal.

L'instabilité en ondes propagatives — appelées *ondes hydrothermales* — survient ainsi lorsque l'on soumet une couche de fluide avec surface libre à un gradient *horizontal* de température. Les écoulements alors produits trouvent une agréable illustration dans l'exemple de la bougie : la cire liquide qui entoure le pied de la flamme est mise en mouvement sous l'effet des variations de la tension de surface par un mécanisme que nous détaillerons en § 1.1.1. La trajectoire des petites particules de poussière ou de cendres dans la cire fondue représente parfaitement l'écoulement de base que nous étudierons tout au long de ce manuscrit. Plus généralement, de nombreux procédés industriels mettent en jeu ces mêmes mécanismes. Les métaux liquides en cours de solidification et la purification du silicium par fusion de zone — pour ne citer qu'eux — sont par exemple influencés par la convection thermocapillaire, même en microgravité. D'autres activités comme la production de films photographiques et la réalisation de soudures métalliques sont sujettes à des instabilités qui la plupart du temps altèrent la qualité des produits finaux. Des intérêts industriels suscitent donc aussi un besoin de comprendre et de maîtriser les écoulements avec surface libre dûs à des gradients de température.

La présence d'une surface libre est primordiale car elle permet le développement des effets thermocapillaires, en plus des effets thermogravitaires. Ces deux mécanismes seront décrits en § 1.1. La direction horizontale du gradient de température conduit ainsi à une différence drastique par rapport aux systèmes convectifs traditionnels de Rayleigh-Bénard ou Bénard-Marangoni : l'écoulement de base est à vitesse non nulle. Cela rend l'étude



de stabilité linéaire du problème plus ardue, et des méthodes numériques doivent être employées pour le résoudre (§ 1.3.4). Cet écoulement est de plus susceptible sous certaines conditions de se structurer avant de se déstabiliser en ondes propagatives : nous illustrerons ainsi l'apparition de rouleaux co-rotatifs dans l'écoulement de base en § 4.2.

## Présentation du système d'ondes propagatives - objectifs

Lorsque l'écoulement de base décrit ci-dessus se déstabilise, un ensemble ordonné d'ondes propagatives apparaît dans la boîte. Nous étudions différentes géométries qui se différencient essentiellement par leur rapport d'aspect horizontal, lequel définit la topologie accessible au système d'ondes propagatives : une ou deux dimensions, avec conditions limites périodiques ou non.

Nous avons ainsi deux cellules permettant d'observer un système unidimensionnel d'ondes ; l'une de ces cellules est un anneau aux conditions limites périodiques et l'autre un long rectangle qui ne possède pas cette périodicité spatiale. Toutes les deux sont de grandes boîtes, mais la phénoménologie des bifurcations successives qui s'y produisent est très différente. L'étude détaillée de l'instabilité primaire et de la première instabilité secondaire dans le rectangle sera faite à la lumière des résultats obtenus dans l'anneau ainsi qu'en s'appuyant sur un modèle en équation d'amplitude de type Ginzburg-Landau complexe et sur la notion d'instabilité convective ou absolue. Ce travail est rapporté au chapitre 3.

Un autre objectif de notre travail est d'étendre l'espace accessible aux ondes de une à deux dimensions d'espace. Nous avons ainsi réalisé une cellule de convection « bidimensionnelle » (toujours en termes de rapport d'aspect horizontal) et étudions les propriétés spatiales et temporelles des structures instables dans une telle configuration. Notre choix s'est porté sur une cellule possédant la géométrie cylindrique, tout comme la cellule annulaire unidimensionnelle, afin de réduire l'influence des conditions aux limites. Nous observons alors — entre autres — des ondes spirales, des ondes cibles et des « fleurs ».

La géométrie cylindrique nécessite la prise en compte des effets de courbure : une étude théorique adéquate est présentée au chapitre 1 et les résultats expérimentaux au chapitre 5.

## Contenu du manuscrit

Nous proposons ci-dessous une grille de lecture qui ne respecte pas l'ordre de la table des matières, mais celui d'un agencement « par thèmes ».

Les différents protocoles expérimentaux communs à toutes nos expériences sont décrits dans le second chapitre. Une section (§ 2.3) est consacrée à la visualisation par ombroscopie comme méthode de mesure quantitative. D'autres techniques expérimentales, plus spécifiques, sont décrites en temps utile (§ 4.2.2 et annexe D notamment).

L'écoulement de base est modélisé dans le premier chapitre. Les mécanismes sont discutés en § 1.1. Des expressions de la vitesse et de la température sont ensuite rapportées en § 1.2. Des profils expérimentaux de température dans le cas de la géométrie étendue cylindrique sont présentés dans le chapitre 4, § 4.1.

La structuration de cet écoulement de base en un écoulement multi-cellulaire pour les plus grandes hauteurs de fluide est brièvement exposée dans le premier chapitre en § 1.3.3. Les résultats expérimentaux sur cette structuration stationnaire sont détaillés au chapitre 4, § 4.2 et une discussion s'ensuit dans le cas de la géométrie cylindrique ; l'effet de la courbure  $y$  est mis en évidence.

L'étude des ondes hydrothermales déstabilisant l'écoulement de base précédemment décrit est formulée comme un problème de stabilité linéaire dans le premier chapitre, en § 1.3.4. Nous montrons les effets de la courbure dans le cas de la géométrie cylindrique.

Dans le cas où seule une dimension d'espace est considérée, une approche non-linéaire du problème est suggérée en § 1.4 où est introduit le formalisme des équations d'amplitude. Ce dernier est ensuite utilisé pour décrire les résultats expérimentaux obtenus à une dimension d'espace. La distinction convectif/absolu fait ainsi l'objet du chapitre 3. Des annexes présentent les liens entre l'expérience et la théorie que tissent les mesures des coefficients des équations d'amplitude (Annexe C), ainsi que l'instabilité secondaire d'Eckhaus observée dans nos expériences (Annexe B). Quelques simulations numériques étayent le chapitre 3 et ses annexes.

Le cas d'un système d'ondes étendu dans deux dimensions d'espace est considéré théoriquement dans le premier chapitre et expérimentalement dans le chapitre 5. Nous illustrons alors une richesse de comportements étonnante qui ne peut être expliquée par la seule addition d'une dimension d'espace supplémentaire équivalente.



# Chapitre 1

## Les ondes hydrothermales

CONTRAIREMENT AUX ROULEAUX STATIONNAIRES de convection de Rayleigh-Bénard, qui prennent naissance par déstabilisation d'une couche de fluide soumise à un gradient *vertical* de température, les ondes hydrothermales sont issues de la déstabilisation d'une couche de fluide avec surface libre soumise à un gradient *horizontal* de température. Dans le premier cas, l'écoulement du fluide avant l'instabilité est inexistant : le fluide a une vitesse nulle en tout point. Dans le second cas, l'écoulement avant l'instabilité est à vitesse non nulle, mais stationnaire. Cet écoulement qui est le seul présent au voisinage de l'état d'équilibre thermodynamique est dit *écoulement de base*. Il peut être approché par une théorie de la *réponse linéaire* : comme nous le verrons, la vitesse de l'écoulement est proportionnelle à la contrainte thermique  $\Delta T$  appliquée au fluide.

Nous allons dans un premier temps (§ 1.1) décrire les phénomènes physiques à l'origine de l'écoulement de base : poussée d'Archimède et tension de surface. Nous modéliserons cet écoulement dans le cas des géométries rectangulaire et cylindrique ; nous pourrons alors étudier sa stabilité vis à vis de perturbations linéaires (§ 1.3). Nous ébaucherons ensuite une description du système dans l'état instable au voisinage de la bifurcation grâce à une analyse faiblement non-linéaire (§ 1.4.1). Nous réduirons alors la dynamique du système en ne considérant plus que les *équations d'amplitude* obtenues par cette analyse, ou plus généralement par des arguments de symétrie (§ 1.4.2). Enfin, nous discuterons de la validité de cette approche — formellement identique à celle qui consiste à prendre la limite hydrodynamique pour passer d'une description microscopique à une description mésoscopique par l'équation de Navier-Stokes — pour décrire les états plus éloignés du seuil qui constituent l'objet proprement dit de ce travail de thèse : les systèmes d'ondes non-linéaires.

## 1.1 Présentation des mécanismes de l'écoulement de base

### 1.1.1 Mécanismes thermogravitaire et thermocapillaire

Nous décrivons ici comment se met en place l'écoulement de base dans une couche de fluide soumise à un gradient horizontal de température. Pour cela, nous pouvons utiliser le principe de Curie<sup>1</sup> qui s'applique à l'écoulement de base dans lequel aucune symétrie des causes (la géométrie du récipient en présence d'un gradient horizontal de température) n'est brisée. Nous n'utilisons donc que deux dimensions d'espace : la direction verticale (notée  $z$ ) et la direction horizontale du gradient de température (notée  $x$ ), le problème étant invariant par translation continue selon la troisième direction ( $\vec{e}_z \times \vec{e}_x$ ). Deux mécanismes interviennent ; le premier est dû à la poussée d'Archimède (convection thermogravitaire), et le second à la tension de surface (convection thermocapillaire). Dans nos réalisations expérimentales, ce dernier effet est toujours prépondérant (cf § 1.1.2) et nous négligeons parfois la thermogravité ; nous présentons néanmoins ci-dessous les deux effets.

#### Effet thermogravitaire

Le premier mécanisme susceptible d'engendrer un mouvement dans la couche de fluide est la variation de la densité  $\rho$  du fluide avec la température, que nous modélisons par l'équation d'état suivante :

$$\rho(T) = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)) \quad (1.1)$$

où

$$\alpha = - \left. \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0} = \text{cste}$$

Pour des raisons de stabilité thermodynamique, on a généralement  $\alpha > 0$  dans les fluides purs. Cette dépendance de  $\rho$  avec la température est à l'origine de la convection de Rayleigh-Bénard lorsqu'existe un gradient vertical négatif de température. Dans notre cas, elle induit une dilatation du fluide du côté chaud, donc une élévation de la surface, et ainsi une différence de pression horizontale à une hauteur d'observation fixée (cf Fig. 1.1). En surface, le fluide est donc animé d'un mouvement de la zone chaude vers la zone froide.

Ce mécanisme opère en volume, et il est présent dès que la différence de température  $\Delta T$  est non nulle. On s'attend par ailleurs à ce qu'il soit d'autant plus important que la hauteur de fluide est plus grande.

---

1. Une forme de ce principe s'exprime ainsi : « Les effets sont au moins aussi symétriques que les causes qui leur ont donné naissance ».

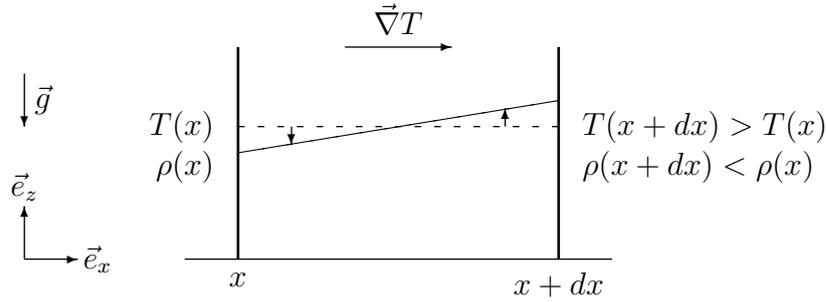


FIG. 1.1 – Déformation élémentaire de la surface libre par la poussée d'Archimède due à un gradient horizontal de température.

En coordonnées cartésiennes, avec  $\vec{\nabla}T$  selon  $\vec{e}_x$ , il est possible de calculer la variation de la hauteur survenant sur un petit élément de surface  $dx$  lors de l'imposition d'un gradient  $dT/dx$ ; nous obtenons (les calculs sont reportés en annexe A, page 187) :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{3}{8}\alpha h \frac{dT}{dx} \propto h \quad (1.2)$$

*Application numérique:* avec  $\frac{dT}{dx} = 1$  K/cm, et  $h = 1,7$  mm, il vient  $\frac{dh}{dx} = 6.10^{-6}$  pour l'eau et  $8,5.10^{-5}$  pour l'huile aux silicones que nous utilisons, ce qui est tout à fait négligeable dans nos réalisations expérimentales.

### Effet thermocapillaire

Le second — et principal dans notre cas — mécanisme engendrant l'écoulement de base est dû à la variation de la tension de surface  $\sigma$  avec la température :

$$\sigma(T) = \sigma_0 - \gamma(T - T_0)$$

où

$$\gamma = - \left. \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right|_{T=T_0} = \text{cste}$$

Pour la plupart des fluides, la tension de surface est liée aux forces de Van der Waals; une augmentation de l'agitation thermique réduit l'influence de ces interactions et diminue la valeur de la tension de surface. On en déduit que  $\gamma > 0$ , ce qui est vérifié pour la plupart des fluides. Une différence de température en surface se traduit par une différence de tension de surface, ce qui meut le fluide en surface de la zone chaude ( $\sigma$  faible) vers la zone froide ( $\sigma$  fort) (cf Fig. 1.2). Le fluide étant visqueux, ce mouvement diffuse dans le volume sous la surface. Par conservation de la matière à travers une section verticale quelconque, le bas de la couche de fluide doit alors être animé d'une vitesse de sens opposé, ce qui traduit sa recirculation et l'existence d'un rouleau dans l'écoulement de base.

Ce mécanisme opère en surface, mais diffuse dans le volume et sera lui aussi présent dès que  $\Delta T \neq 0$ .

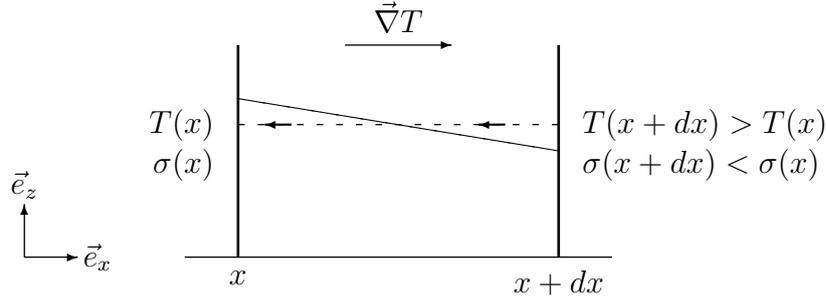


FIG. 1.2 – Déformation élémentaire de la surface libre par une différence de tension de surface due à un gradient horizontal de température.

En coordonnées cartésiennes, avec  $\vec{\nabla}T$  selon  $\vec{e}_x$ , la variation de hauteur s'écrit (annexe A ou Guyon *et al.* (1991)) :

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{3}{2} \frac{\gamma}{\rho g h} \frac{dT}{dx} \propto \frac{1}{h} \quad (1.3)$$

*Application numérique* : avec  $\frac{dT}{dx} = 1$  K/cm et  $h = 1,7$  mm, il vient  $\frac{dh}{dx} = -6.10^{-2}$  pour l'eau et seulement  $-1.10^{-3}$  pour l'huile aux silicones que nous utilisons, ce qui est un effet très petit dans nos expériences.

### Commentaires

Les deux mécanismes produisent un déplacement du fluide en surface du côté chaud vers le côté froid. Par contre, la poussée d'Archimède tend à élever le fluide du côté chaud et la tension de surface à l'élever du côté froid.

Les effets thermogravitaires sont prédominants pour les couches de fluide hautes, alors que les effets thermocapillaires sont prédominants pour les couches minces. La hauteur intermédiaire séparant ces deux régimes peut être simplement exprimée comme :

$$\left. \frac{dh}{dx} \right|_{\text{capillaire}} = - \left. \frac{dh}{dx} \right|_{\text{gravitaire}} \Leftrightarrow h = 2h_e \quad \text{où} \quad h_e = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho \alpha g}}$$

*Application numérique* : Pour l'huile utilisée,  $h_e = 3$  mm. Nos expériences sont réalisées avec des hauteurs comprises entre 1 et 2 mm, ce qui correspond en fait à de minces couches de fluide. Cette hauteur  $h_e$  intervient dans la définition du nombre de Bond dynamique (cf section suivante).

Ne perdons pas de vue que ces calculs sont effectués pour l'écoulement de base et ne préjugent en rien des instabilités pouvant survenir. Néanmoins, cette analyse est confortée par de précédentes expériences de convection thermocapillaire, avec gradient de température horizontal, effectuées par Burguete *et al.* (2000), Daviaud et Vince (1993), Mukolobwicz (1998), Pelacho et Burguete (1999), Riley et Neitzel (1998), Vince (1994). En effet, pour les plus petites hauteurs ( $h < 3$  mm), il a été observé que les ondes hydrothermales qui nous

intéressent sont l'instabilité prévalante. De même, pour les plus fortes hauteurs ( $h > 3$  mm), l'écoulement de base est instable vis-à-vis de rouleaux stationnaires dont l'axe est colinéaire au gradient de température. Tous les travaux rapportés ici ne concernent que les minces couches ( $h < h_e$ ) et donc l'instabilité en ondes hydrothermales.

### 1.1.2 Réduction de la dimensionnalité du problème

Nous introduisons ici les seules grandeurs qui ont un rôle effectif dans le problème : les nombres sans dimension, qui permettent de réduire la dimensionnalité du problème en ne faisant intervenir que des combinaisons des variables physiques dimensionnées.

**Description du fluide - nombre de Prandtl** Nous étudions un fluide en mouvement et un champ de température associé. Nous avons donc deux grandeurs de dimension  $L^2.T^{-1}$  traduisant respectivement la diffusion de la vitesse et celle de la température : la viscosité cinématique  $\nu$  et la diffusivité thermique  $\kappa$ . Leur rapport est appelé nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

Il caractérise l'importance relative des effets thermiques et visqueux. Si l'on imagine par exemple un élément de fluide de taille caractéristique  $l$ , les temps de diffusion visqueuse  $\tau_\nu$  et de la chaleur  $\tau_\kappa$  seront donnés par :

$$\tau_\nu = \frac{l^2}{\nu}, \quad \tau_\kappa = \frac{l^2}{\kappa} \quad \Rightarrow \quad Pr = \frac{\tau_\kappa}{\tau_\nu}$$

On note ainsi que pour les fluides de grand nombre de Prandtl (huiles silicones très visqueuses par exemple), le temps thermique est plus grand que le temps visqueux et que les processus de diffusion de la chaleur pilotent le mouvement du fluide. Pour les faibles valeurs du nombre de Prandtl (métaux liquides par exemple), les effets thermiques s'amenuisent et le comportement du fluide est essentiellement hydrodynamique. Nos expériences sont réalisées avec un liquide de nombre de Prandtl égal à 10.

**Effets thermogravitaires** La poussée d'Archimède due à un gradient thermique  $\beta = \Delta T/l$  — une différence de température  $\Delta T$  appliquée sur une échelle  $l$  — imposé à une couche de fluide de hauteur  $h$  peut être comparée aux forces dissipatives apparaissant dans l'équation de Navier-Stokes (éq. 1.6). Celles-ci sont dues à l'existence d'une viscosité  $\nu$  et d'une diffusivité  $\kappa$  finies. Le rapport résultant est appelé nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{\alpha g h^4 \Delta T}{\nu \kappa l}$$

Un grand nombre de Rayleigh exprime le fait que la vitesse d'ascension d'une particule fluide sous l'effet de la poussée d'Archimède est telle que la diffusion thermique n'a pas le temps d'agir :  $\tau \ll \tau_\kappa$ . Dans le cas où la contrainte thermique est appliquée verticalement (cas de Rayleigh-Bénard), on a  $l = h$  et une simplification de l'expression ci-dessus. Dans

le cas où elle est appliquée horizontalement, on a  $l = L_{\parallel}$ , la taille de la cellule dans la direction du gradient.

**Effets thermocapillaires** La force en surface due à une différence de température  $\Delta T$  appliquée sur une échelle  $l$  à une couche de fluide de hauteur  $h$  peut de la même façon être comparée aux forces dissipatives ; le rapport résultant est appelé nombre de Marangoni :

$$Ma = \frac{\gamma h^2 \Delta T}{\rho \nu \kappa l}$$

Dans le cas où la contrainte thermique est appliquée verticalement (cas de Bénard-Marangoni), on a  $l = h$ . Dans le cas qui nous intéresse, elle est appliquée horizontalement et  $l = L_{\parallel}$ .

**Autres nombres sans dimension** Il est possible de combiner les nombres précédemment obtenus pour en former d'autres, parfois plus simples à manipuler, mais qui, bien sûr, n'apportent pas de degrés de liberté supplémentaires :

Nombre de Grashoff:  $Gr = Ra/Pr = \frac{\alpha g h^4 \Delta T}{\nu^2 l}$

Nombre de Bond dynamique:  $Bd = Ra/Ma = \frac{\rho \alpha g h^2}{\gamma} = 4 \frac{dh(\text{gravitaire})}{dh(\text{capillaire})} = \left( \frac{h}{h_e} \right)^2$

ou son inverse:  $W = Ma/Ra = Bd^{-1}$

Nombre de Reynolds gravitaire:  $Re_g = Ra/Pr = Gr$

Nombre de Reynolds capillaire:  $Re_c = Ma/Pr = \frac{\gamma h^2 \Delta T}{\rho \nu^2 l}$

*Application numérique* : Par définition, nous avons  $W > 1$  si  $h < h_e$ . Pour l'huile utilisée (cf § 2.1), nous avons  $W \simeq 2,4$  pour  $h = 1,9$  mm,  $W \simeq 3,0$  pour  $h = 1,7$  mm et  $W \simeq 6,0$  pour  $h = 1,2$  mm. Ainsi, dans tous les cas envisagés ici, les effets thermogravitaires sont négligeables devant les effets thermocapillaires, du moins pour l'écoulement de base.

*Remarque* : Les nombres de Reynolds gravitaire et capillaire peuvent être directement obtenus comme des nombres de Reynolds  $UL/\nu$  en considérant comme vitesse  $U$  la vitesse caractéristique d'un écoulement gravitaire ou capillaire. Par exemple, dans le cas thermocapillaire, la vitesse caractéristique (d'une particule fluide de la surface libre) peut être écrite en équilibrant la force de dissipation visqueuse agissant sur un volume  $h^3$  ( $\eta U h^3 / h^2$ )

à la force due à la variation de la tension de surface et s'appliquant sur une surface  $h^2$  ( $h^2\gamma\partial T/\partial x$ ):

$$U_{\text{capillaire}} = \frac{\gamma(\frac{\partial T}{\partial x})h}{\eta} = \frac{h}{L_x} \frac{\gamma\Delta T}{\eta} \quad (1.4)$$

$$\left( \Rightarrow Re_c = \frac{U_{\text{capillaire}}h}{\nu} \right)$$

*Application numérique*: Dans la cellule rectangulaire 1D ( $h = 1.7$  mm,  $L_x = 10$  mm), pour  $\Delta T = 3$  K il vient  $U_{\text{capillaire}} = 90$  mm/s. Dans la cellule disque 2D ( $h = 1.7$  mm,  $L_x = 63,5$  mm), pour  $\Delta T = 10$  K, il vient  $U_{\text{capillaire}} = 48$  mm/s. Nous pouvons en déduire l'ordre de grandeur du temps nécessaire au fluide pour parcourir exactement un rouleau complet de l'écoulement de base, i.e. une « période »: 0,3 s pour le rectangle et 2,7 s pour le disque. Ces valeurs sont surestimées car la vitesse du fluide n'est qu'au plus égale à sa vitesse en surface.

**Autres effets de la tension de surface** La pression capillaire  $\sigma_0/h$  peut être comparée aux pressions hydrostatique et hydrodynamique pour donner respectivement le nombre de Bond et le nombre capillaire. En comparant les forces de tension de surface aux forces de frottement visqueux, nous obtenons le nombre de « tension de surface »:

$$\text{Nombre de Bond:} \quad B_o = \frac{\rho g h^2}{\sigma_0} = \left( \frac{h}{\lambda_c} \right)^2 \quad (B_o \neq B_d!)$$

$$\text{Nombre capillaire:} \quad C_a = \frac{\gamma\Delta T}{\sigma_0} = -\frac{d\sigma(T)}{\sigma_0} = \frac{Ma}{PrS} \frac{l}{h}$$

$$\text{Nombre de « tension de surface »:} \quad S = \frac{\rho h \sigma_0}{\eta^2}$$

$$\text{Nombre de crispation:} \quad C_r = \frac{\eta \kappa}{\sigma_0 h} = (PrS)^{-1}$$

Ces nombres font intervenir la tension de surface, et non plus seulement sa dérivée. Ils permettent de mesurer l'importance des déflexions de la surface libre. Ainsi, la surface est plate si  $\{S \rightarrow \infty\}$ , i.e.  $\{C_a \rightarrow 0\}$ ; nous nous plaçons dans ce cas pour tous nos calculs de l'écoulement de base.

**Cas limite des petites hauteurs** Le travail présenté ici — l'étude des ondes hydrothermales — correspond à l'hypothèse des minces couches, i.e., l'hypothèse que la hauteur de fluide est faible. Cela permet de négliger les effets thermogravitaires devant les effets thermocapillaires. En effet le rapport  $B_d$  est proportionnel à  $h^2$  et vaut exactement 1 pour

$h = h_e$ , et la limite  $h \rightarrow 0$  est équivalente à  $Ra \rightarrow 0$ . Nous retrouvons alors les résultats obtenus en l'absence de gravité ( $g = 0$ ).

De plus, la présence d'une tension de surface implique l'existence d'une échelle spatiale appelée longueur capillaire  $\lambda_c$  :

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (1.5)$$

*Application numérique* : pour l'eau à 20°C,  $\lambda_c \simeq 2.8$  mm et pour l'huile utilisée, à 25°C,  $\lambda_c \simeq 1.4$  mm.

Les ondes purement hydrodynamiques — dans un fluide isotherme donc sans intervention du champ  $T$  — de longueur d'onde  $\lambda$  sont alors de deux types :

$$\left| \begin{array}{l} \lambda \ll \lambda_c : \text{ondes capillaires} \\ \lambda \gg \lambda_c : \text{ondes de gravité} \end{array} \right.$$

Notons tout de suite que les ondes hydrothermales, couplées au champ de température, n'entrent dans aucune des deux catégories ci-dessus. Notons aussi que leur longueur d'onde est de l'ordre de  $\lambda_c$  et qu'elles se situent à la limite entre les deux phénomènes. Nous pouvons donc nous attendre à un couplage entre les ondes hydrothermales et des ondes hydrodynamiques (capillaires ou de gravité).

**Remarque et bilan sur les hauteurs** Après avoir isolé  $h_e$  et  $\lambda_c$ , nous pouvons contruire les nombres sans dimension  $h/h_e$  et  $h/\lambda_c$  qui ne sont rien d'autre que les racines carrées des nombres de Bond dynamique  $Bd$  et statique  $Bo$ . La figure 1.3 présente alors les différents régimes qui découlent des distinctions  $Bd \lesssim 1$  et  $Bo \lesssim 1$ .

**Rapports d'aspect** Pour compléter notre inventaire de nombres sans dimension dans le cadre d'une approche hydrodynamique, il est nécessaire d'introduire les dimensions spatiales normalisées par la hauteur  $h$ ; cela définit les deux rapports d'aspects géométriques horizontaux :

direction du gradient :

$$\Gamma_{\parallel} = L_{\parallel}/h = \begin{cases} L_x/h & \text{en coordonnées cartésiennes,} \\ L_r/h & \text{en coordonnées cylindriques.} \end{cases}$$

direction orthogonale au gradient :

$$\Gamma_{\perp} = L_{\perp}/h = \begin{cases} L_y/h & \text{en coordonnées cartésiennes,} \\ L_{\theta}/h & \text{en coordonnées cylindriques.} \end{cases}$$

Il est ensuite possible de combiner ces deux quantités pour obtenir :

$$\Gamma = \frac{\Gamma_{\perp}}{\Gamma_{\parallel}} = \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}}$$

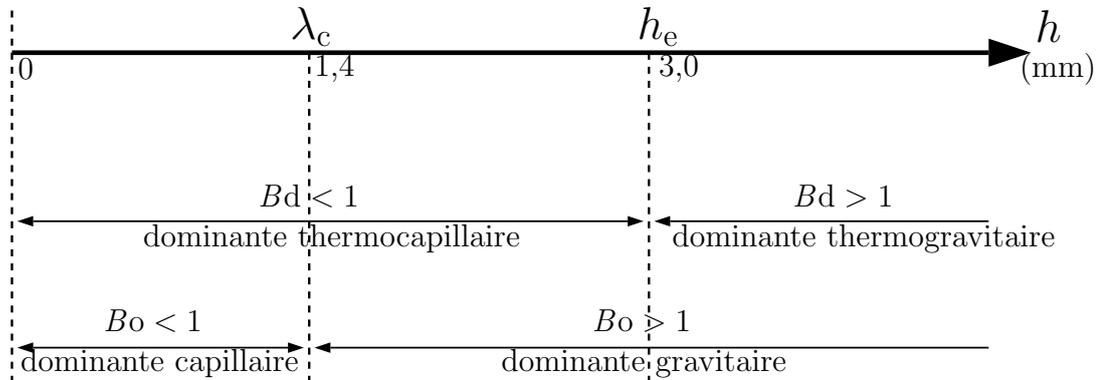


FIG. 1.3 – Schéma des différents régimes possibles en fonction de la hauteur de fluide  $h$  dans la cellule ; les valeurs numériques sont calculées pour l'huile que nous utilisons.  $Bd = (h/h_e)^2$  représente les effets thermiques au contraire de  $Bo = (h/\lambda_c)^2$ .

qui mesure le rapport d'aspect du système horizontal où l'on s'est affranchi de la dimension verticale.  $\Gamma \rightarrow 0$  est ainsi la signature d'un système unidimensionnel dans la direction perpendiculaire au gradient — la cellule rectangulaire étroite est dans ce cas —, et  $\Gamma \sim 1$  la signature d'un système bidimensionnel — la cellule cylindrique en forme de disque, baptisée « LOTUS », est dans ce cas.

## 1.2 Calcul de l'écoulement de base

Nous allons présenter ici les formulations de l'écoulement de base thermocapillaire et thermogravitaire dans les géométries rectangulaire et cylindrique. Une revue des phénomènes abordés a été produite par Davis (1987). Les résultats concernant l'écoulement de base purement thermocapillaire en coordonnées cartésiennes ont été décrits en détail par Sen et Davis (1982) et utilisés par Smith et Davis (1983a); l'écoulement tenant en plus compte de la gravité ( $g \neq 0$ ) peut être trouvé par exemple dans les travaux de Laure *et al.* (1990), Mercier et Normand (1996), Mercier (1997). Nous retrouvons ici ces résultats grâce à une méthode perturbative équivalente à celle introduite par Laure *et al.* (1990) dans le cas rectangulaire sans gravité; nous les complétons dans le cas général et en géométrie cylindrique. Les expressions trouvées sont donc celles d'un écoulement en géométrie infiniment étendue (extensions horizontales infinies).

### 1.2.1 Equations de Boussinesq

Pour déterminer la forme de l'écoulement de base, nous résolvons les équations de Navier-Stokes associées aux conditions limites adéquates. Nous considérons une couche de fluide de hauteur  $h$ , avec sa surface supérieure libre. Cette couche est soumise à un gradient horizontal de température  $\vec{\nabla}T = \frac{\Delta T}{L_{\parallel}} \vec{e}_{\parallel}$  qui définit la direction  $\vec{e}_{\parallel}$ . La direction verticale est notée  $\vec{e}_z$ . Encore une fois, nous invoquons le principe de Curie pour ne garder que ces deux directions d'espace pertinentes.

Dans le cas rectangulaire, nous aurons  $\vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$ , donc  $\vec{e}_{\parallel} = \vec{e}_x$  (et  $\vec{e}_{\perp} = \vec{e}_y$ ). Dans le cas cylindrique, nous aurons de même  $\vec{e}_{\parallel} = \vec{e}_r$  (et  $\vec{e}_{\perp} = \vec{e}_{\theta}$ ). Il nous arrivera parfois de noter  $x$  (resp.  $y$ ) la variable d'espace dans la direction horizontale du gradient (resp. perpendiculaire au gradient) tout en restant dans le cas général (cartésien ou cylindrique).

#### Equations en volume

Si l'on tient compte des effets thermogravitaires, le système d'équations décrivant l'évolution de la vitesse  $\vec{v}(x, y, z, t) = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$ , de la température  $T(x, y, z, t)$  et de la pression  $P(x, y, z, t)$  du fluide est constitué par les équations de Navier-Stokes, de conservation de la masse et de l'énergie prises dans l'approximation de Boussinesq :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla}P + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{0} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \Delta T \end{array} \right. \quad (1.6)$$

La masse volumique est exprimée par la formule (1.1). L'approximation de Boussinesq consiste à négliger les variations de  $\nu = \eta/\rho$  et  $\kappa$ , tout en ne faisant dépendre  $\rho$  que de  $T$  et uniquement pour le terme de gravité.

### Conditions aux limites

Nous devons écrire les conditions aux limites pour la vitesse et la température dans la direction verticale  $z$ . Les conditions limites sur les bords latéraux (direction  $\vec{e}_{\parallel} = \vec{e}_x$  et  $\vec{e}_{\perp} = \vec{e}_y$ ) sont rejetées à l'infini et n'interviennent donc pas : nous étudions un système d'extension horizontale infinie.

Nous supposons de plus que la surface libre est indéformable :  $S \rightarrow \infty$ .

Les deux directions horizontales sont ici formellement équivalentes ; nous avons :

en  $z = 0$  : condition cinématique :  $\vec{v}|_{z=0} = \vec{0}$

$$\text{condition thermique : } \left\{ \begin{array}{ll} T|_{z=0} = T_c & \text{si paroi conductrice} \\ \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=0} = 0 & \text{si paroi isolante} \end{array} \right.$$

en  $z = h$  : condition cinématique normale :  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$  i.e.  $w|_{z=h} = 0$

$$\text{condition cinématique tangentielle selon } \vec{e}_x : \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\text{condition thermique : } \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} + \text{Bi}(T - T_a) = -Q$$

où l'on a noté  $Q$  le flux de chaleur à la surface — que nous supposons nul — et  $T_a$  la température de l'air loin au dessus de la surface. Nous supposons que  $T_a = T_c(x)$  = le profil conducteur de température.  $\text{Bi}$  est alors le nombre de Biot<sup>2</sup> et nous posons dans la suite  $\mu = \text{Bi}/(1 + \text{Bi})$ .

*Remarque* : Ecrire et résoudre l'équation de conservation de la matière est équivalent dans notre système à écrire :

$$\int_0^h u(z) dz = 0$$

### Adimensionalisation et petit paramètre géométrique

Comme nous l'avons déjà évoqué, les symétries imposent que l'écoulement de base soit indépendant de la direction horizontale transverse au gradient de température, et que la vitesse selon cette direction soit nulle :

$$\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0, \quad v \equiv 0$$

---

2. En notant  $\lambda_f$  et  $\lambda_a$  les conductivités thermiques du fluide (huile) et de l'air, et  $h_a$  la hauteur d'air considéré entre la surface libre et l'altitude dont on connaît le profil  $T_a(x)$ , le nombre de Biot peut être écrit :

$$\text{Bi} = kh \frac{\lambda_a}{\lambda_f} \coth(kh_a) \simeq \frac{\lambda_a}{\lambda_f} \frac{h}{h_a} \quad \text{si } k \ll h_a^{-1}$$

où  $k$  est le nombre d'onde de la structure convective.

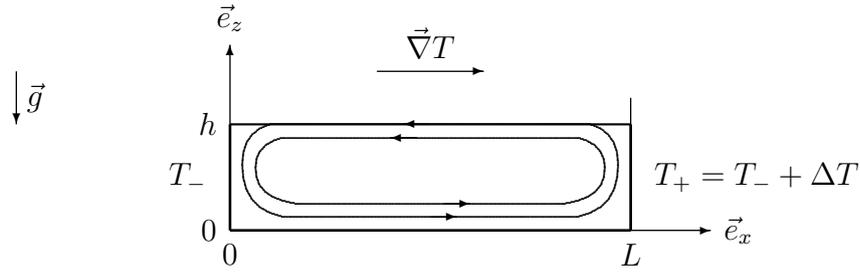


FIG. 1.4 – Section de la géométrie rectangulaire et notations associées. L’axe des  $x$  est orienté du froid vers le chaud. Deux lignes de courant de l’écoulement de base sont symboliquement représentées. Nous avons de plus illustré l’effet des parois en  $x = 0$  et  $x = L$  (recirculation du fluide); le calcul perturbatif effectué dans le texte ne donne accès qu’à l’écoulement loin de ces parois.

Pour calculer l’écoulement de base, nous employons une méthode perturbative utilisant le petit paramètre  $\epsilon = \Gamma_{\parallel}^{-1} = h/L_x$ . Les expressions de l’écoulement de base que nous obtenons sont alors celles d’une géométrie infinie selon la direction du gradient. Ce développement suivant le rapport d’aspect n’est pas nécessaire dans le cas rectangulaire où une solution exacte peut être trouvée directement, mais très pratique pour aborder le cas cylindrique. Nous choisissons alors les échelles suivantes :

température	$\Delta T$
longueur dans la direction du gradient	$L_{\parallel} = L_x = L$
longueur dans la direction verticale	$h$
vitesse (pour $u$ et $w$ )	$\nu/h$
pression	$\nu^2 \rho_0 L/h^3$
masse volumique	$\rho_0$

La partie hydrostatique de la pression correspondant à la masse volumique  $\rho_0$  est de plus soustraite de la nouvelle expression de la pression.

## 1.2.2 Géométrie rectangulaire

Nous considérons que le fluide est dans une boîte finie de longueur  $L$  selon la direction du gradient (figure 1.4) et nous notons l’abscisse adimensionnée  $X = x/L = \epsilon x/h$ . Ainsi, la variable  $X$  sera une variable « lente » par rapport à la variable  $z$ .

Nous décrivons précisément la résolution du système à l’ordre le plus bas en  $\epsilon$ ; la résolution aux ordres suivants s’effectue de la même façon. A l’ordre 0 en  $\epsilon$ , le système d’équations s’écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{\partial p_0}{\partial X} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{\partial p_0}{\partial z} + Gr T_0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ w_0 \frac{\partial T_0}{\partial z} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

La troisième équation se résout en utilisant les conditions aux limites mécaniques en  $z = 0$  et il vient  $w_0 = 0$ , i.e. pas de vitesse verticale. La quatrième équation se ré-écrit alors plus simplement comme l'équation de diffusion de la chaleur à une dimension (selon  $\vec{e}_X$ ); en utilisant les conditions aux limites thermiques en  $z = 0$  et  $z = 1$ , nous trouvons  $T_0(X, z) = T_c(X)$ , i.e. le profil conducteur, indépendant de  $z$ . Nous éliminons ensuite la pression entre les deux premières équations et nous utilisons les expressions de  $w_0$  et  $T_0$ ; il vient :

$$\frac{\partial^3 u_0}{\partial z^3} = Gr$$

Nous en déduisons que  $u_0$  est un polynôme de degré 3 en  $z$  dont les coefficients sont éventuellement des fonctions de  $X$ . En utilisant les conditions aux limites mécaniques et la conservation de la matière dans une section verticale de la cellule, nous obtenons les valeurs des coefficients. Dans le cas rectangulaire, ces derniers sont indépendants de  $X$ , et il en est donc de même de  $u_0$ . Nous avons ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(X, z) = Gr \bar{u}_0(z) \\ w_0(X, z) = 0 \\ T_0(X, z) = T_c(X) \equiv X \end{array} \right.$$

où  $T_c(X)$  est le profil conductif de température et  $\bar{u}_0(z)$  est un polynôme de degré 3 en  $z$  qui traduit la structure du profil vertical de vitesse :

$$\bar{u}_0(z) = \frac{1}{48}(8z^3 - 15z^2 + 6z) - \frac{W}{4}(3z^2 - 2z)$$

A l'ordre suivant (ordre  $\epsilon^1$ ) et en utilisant les résultats ci-dessus, il vient par la même démarche :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(X, z) = 0 \\ w_1(X, z) = 0 \\ T_1(X, z) = Ra\tau(z) \end{array} \right.$$

où  $\tau(z)$  est un polynôme en  $z$  qui traduit la structure du profil vertical de température; son expression dépend du type de conditions aux limites thermiques en  $z = 0$  et  $z = 1$ . Suivant le choix d'un fond conducteur ou isolant, nous obtenons :

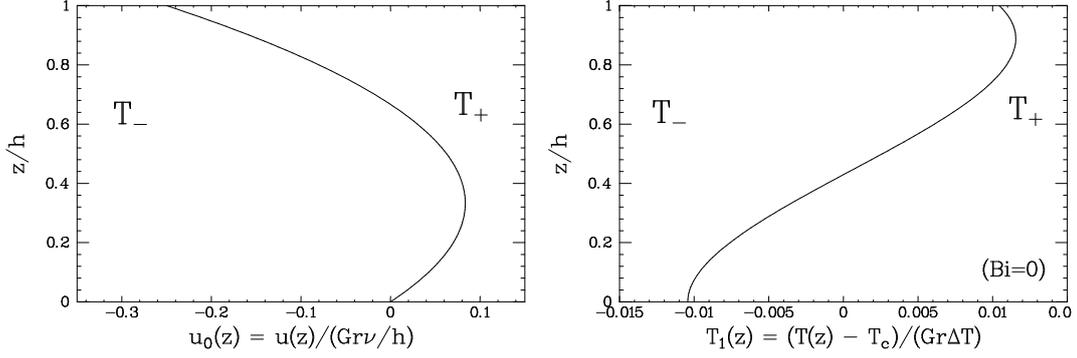


FIG. 1.5 – Profils verticaux  $\bar{u}_0(z)$  (à gauche) et  $\tau(z)$  (à droite, pour  $Bi=0$ ) décrivant complètement l'écoulement de base en géométrie cartésienne.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau(z) = \frac{1}{48}z \left[ \frac{1}{20}(8z^4 - 25z^3 + 20z^2 - 3\mu) - W(3z^3 - 4z^2 + \mu) \right] \quad \text{si fond conducteur} \\ \tau(z) = \frac{1}{48}z \left[ \frac{1}{20}(8z^4 - 25z^3 + 20z^2 - 3) - W(3z^3 - 4z^2 + 1) \right] \quad \text{si fond isolant} \end{array} \right.$$

Aux ordres suivants, il ne reste que des systèmes d'équations dont les solutions sont triviales :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(X, z) = 0 \\ w_n(X, z) = 0 \quad \forall n \geq 2 \\ T_n(X, z) = 0 \end{array} \right.$$

La méthode perturbative en  $\epsilon = h/L$  donne donc un résultat exact dans le cas rectangulaire, et fournit un moyen simple d'obtenir l'écoulement de base :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(X, z) = Gr\bar{u}_0(z) \\ w(X, z) = 0 \\ T(X, z) = T_c(X) + Ra\tau(z) \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Les profils verticaux correspondants sont reproduits sur la figure 1.5. L'absence de vitesse verticale  $w$  est la traduction du rejet des parois à l'infini : l'écoulement de base a ainsi été déterminé dans le cas d'une couche de fluide de longueur infinie ; la prise en compte des conditions aux limites sur les parois latérales introduirait l'existence d'une vitesse verticale près des bords, et un raccordement des solutions comme effectué par Sen et Davis (1982) devrait alors être envisagé.

*Remarque :* A partir de l'expression de la vitesse ainsi obtenue, il est possible d'avoir accès à la vitesse en surface dans le cas purement thermocapillaire ( $Ra = 0$ ). Nous trouvons alors :

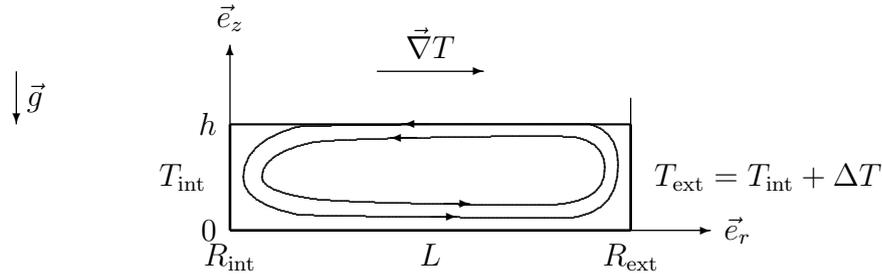


FIG. 1.6 – Section de la géométrie cylindrique et notations associées. Par convention, on écrira toujours  $\Delta T = T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}$ , le signe de  $\Delta T$  sera donc quelconque. L'axe des  $r$  est orienté de l'intérieur vers l'extérieur. Deux lignes de courant de l'écoulement de base sont symboliquement représentées sur lesquelles est perceptible une dépendance en  $r$ .

$$u(z=1)|_{Ra=0} = U_{\text{capillaire}} = -\frac{1}{4} \frac{\gamma \Delta T h}{\rho \nu L}$$

Ce qui est à rapprocher de l'expression (1.4), trouvée « à la main » ; l'ordre de grandeur alors trouvé est très correct.

### 1.2.3 Géométrie cylindrique

Si le développement en  $\epsilon = \Gamma_{\parallel}^{-1}$  était presque inutile en géométrie rectangulaire, il s'avère intéressant dans le cas plus ardu de la géométrie cylindrique où il a été utilisé par Vrane et Smith (1996). Nous écrivons ici  $L = R_{\text{ext}} - R_{\text{int}}$  la longueur de la cellule dans le sens du gradient (figure 1.6) et  $\phi = L/R_{\text{int}}$  le paramètre de courbure. Nous pouvons alors écrire la coordonnée spatiale dans le sens du gradient (radial) à l'aide d'une variable adimensionnée  $X$  :

$$r = R_{\text{int}} + hx = R_{\text{int}} + LX \quad X \in [0, 1]$$

Là encore,  $X$  sera la variable lente (variations sur l'échelle  $L$ ) par opposition à  $x$  et  $z$  (variations sur l'échelle  $h$ ). Contrairement au cas rectangulaire, le problème n'est ici plus symétrique sous la transformation  $\{(\vec{\nabla}T, \vec{e}_{\parallel}) \mapsto -(\vec{\nabla}T, \vec{e}_{\parallel})\}$ , et nous choisissons de noter  $\Delta T = T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}$  quels que soient les côtés chaud et froid.

À l'ordre le plus bas en  $\epsilon$ , une résolution du système analogue au cas rectangulaire conduit à :

$$\begin{cases} u_0(X, z) = Gr\Phi(X) \bar{u}_0(z) \\ w_0(X, z) = 0 \\ T_0(X, z) = T_c(X) \end{cases}$$

où  $\bar{u}_0(z)$  est le même polynôme de degré 3 en  $z$  que dans le cas rectangulaire, ce qui traduit la même allure des profils verticaux de vitesse  $u$ . Le profil conductif  $T_c(X)$

apparaît encore au premier ordre, mais il s'agit maintenant du profil conductif en géométrie cylindrique :

$$T_c(X) \equiv \ln(1 + \phi X)$$

La dépendance hyperbolique en  $r$  du profil de vitesse en géométrie cylindrique est traduite par une enveloppe lentement variable en  $X$ , notée  $\Phi(X)$  :

$$\Phi(X) = \frac{\phi}{1 + \phi X} = \frac{R_{\text{ext}} - R_{\text{int}}}{r} = \frac{dT_c}{dX}$$

Cette enveloppe peut être interprétée comme le flux unitaire de température à travers la surface extérieure verticale d'un cylindre de rayon  $r(X)$ .

A l'ordre suivant, il vient :

$$\begin{cases} u_1(X, z) = Gr^2 \Phi(X)^2 \bar{u}_1(z) \\ w_1(X, z) = 0 \\ T_1(X, z) = Ra\Phi(X)^3 \tau(z) \end{cases}$$

où  $\tau(z)$  est le même polynôme en  $z$  que dans le cas rectangulaire, et  $\bar{u}_1(z)$  un nouveau polynôme en  $z$  traduisant le couplage entre  $u$  et  $T$  dû à la géométrie cylindrique. Ce polynôme a, dans le cas général ( $Ra \neq 0, Ma \neq 0$ ), une expression compliquée. Dans le cas purement thermocapillaire ( $Ra = 0$ ), et pour un fond conducteur, il s'écrit plus simplement :

$$\bar{u}_1(z)|_{Ra=0} = -\frac{W^2}{96} \left[ \frac{1}{35}(63z^6 - 126z^5 + 70z^4 - 24z^2 + 20z) + (1 - \mu)Pr(3z^2 - 2z) \right]$$

Dans le cas d'un fond isolant, l'expression de  $\bar{u}_1(z)$  est déduite de la précédente remplaçant le terme en  $(1 - \mu)Pr$  par 1.

A l'ordre suivant, on trouve  $w_2 \neq 0$ , ce qui traduit l'apparition d'une vitesse verticale, inexistante dans le cas rectangulaire. De même, les termes suivants pour  $u$  et  $T$  ne seront pas nuls, mais de plus en plus petits pourvu que  $Gr\Phi(X)$  soit faible. Le développement en  $\epsilon = h/L$  qui donnait parfaitement l'écoulement de base en géométrie infinie dans le cas rectangulaire ne donne ici qu'un développement approché car la géométrie ne peut être que semi-infinie à cause de la singularité en  $r = 0$  ( $\Phi \rightarrow \infty$ ). Néanmoins, les résultats obtenus dans le cas rectangulaire peuvent se déduire des expressions cylindriques par la limite des faibles courbures, réalisée loin du point singulier ( $r = 0$ ) :

$$\{R_{\text{int}} \rightarrow \infty, \quad R_{\text{ext}} \rightarrow \infty, \quad L = \text{cste}\} \quad \Leftrightarrow \quad \{\phi \rightarrow 0, \quad \Phi(X) \rightarrow 1\}$$

Le bilan de nos calculs peut être résumé ainsi :

$$\begin{cases} u(X, z) = Gr \Phi(X) \bar{u}_0(z) + \epsilon Gr^2 \Phi(X)^2 \bar{u}_1(z) \\ w(X, z) = 0 \\ T(X, z) = T_c(X) + \epsilon Ra\Phi(X)^3 \tau(z) \end{cases} \quad (1.8)$$

Nous poserons dans la suite :

$$\Gamma_X = \epsilon \Phi(X) = \frac{h}{r} \quad \text{et} \quad G_X = Gr \Phi(X) = Gr \frac{L}{r}$$

$G_X$  représente alors un nombre de Grashoff local qui tient compte de la courbure et  $\Gamma_X$  représente les effets de courbure relatifs.

### 1.3 Analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de base

Après une rapide présentation des principales études de stabilité linéaire de l'écoulement thermocapillaire, nous perturberons l'écoulement de base obtenu en géométrie cylindrique — éq. (1.8). Nous évoquerons les instabilités stationnaires avant de décrire des résultats classiques sur les ondes hydrothermales, et quelques nouveaux aspects dus à la présence de courbure. Les mécanismes heuristiques décrivant l'apparition de la structure en ondes ainsi que le caractère convectif, absolu et global de l'instabilité seront ensuite esquissés.

Notons que notre contribution à l'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de base complète les études précédentes sur deux points :

- la prise en compte de la courbure, nouveau paramètre dû à la géométrie cylindrique,
- l'étude du cas mixte où le fond de la cellule est conducteur et la surface libre à petit nombre de Biot (surface presque isolante).

#### 1.3.1 Historique

La première analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de base a été effectuée par Smith et Davis (1983a) dans le cas rectangulaire purement thermocapillaire ( $Bd = 0$ ) et en géométrie infinie. Cette étude a ensuite été complétée par la prise en compte des effets thermogravitaires à nombre de Prandtl bas, modéré et grands par Gershuni *et al.* (1992) et Parmentier *et al.* (1993). L'introduction d'un nombre de Biot par Mercier et Normand (1996) a permis de clarifier l'existence d'instabilités stationnaires associées à un gradient vertical de température instable au sens de Rayleigh-Bénard. Priede et Gerbeth (1997b) ont dans le même temps étudié en détail l'influence des différentes conditions aux limites thermiques dans le cas purement thermocapillaire. Priede et Gerbeth (1997a) ont enfin pris en compte le caractère convectif au seuil de l'instabilité en ondes, et déterminé le seuil du mode global dans le cas d'une boîte de taille finie. Les tableaux des figures 1.8 et 1.7 résument les différentes études théoriques de stabilité linéaire dans les cas d'une géométrie infinie et d'une géométrie finie dans la direction du gradient de température.

Le cas de la géométrie cylindrique a été abordé par Vrane et Smith (1996), en autorisant des déflexions de la surface libre, mais seules des perturbations de très grande longueur d'onde — nombre d'onde azimuthal proche de l'unité — ont été considérées. Nous présentons donc ici nos calculs de stabilité linéaire de l'écoulement de base en géométrie cylindrique.

Notons que nous avons jusqu'à présent négligé les déflexions de surface dans le calcul de l'écoulement de base : nous avons supposé que la surface libre était indéformable. Tout comme Smith et Davis (1983a), nous poursuivons cette approche et les perturbations de l'écoulement de base que nous allons considérer ne contiennent pas de déflexions de surface. Nous pouvons bien sûr imaginer un calcul plus complet où apparaîtraient de petites variations d'altitude de la surface, mais les ondes hydrothermales telles que décrites par

Smith et Davis (1983a) ne nécessitent pas ce raffinement ; stricto sensu, les ondes hydrothermales ne sont même pas liées à des ondes de déformation de la surface libre. Cela va un peu à l'encontre de l'intuition que l'on peut avoir des ondes dans un système avec surface libre, et c'est sans doute pour cela que Smith et Davis (1983b) ont étudié le cas d'une interface déformée dans un second article concomitant. Une nouvelle instabilité oscillante associée à des ondes de surface a ainsi été mise en évidence, mais lors d'une étude n'impliquant qu'une dimension d'espace horizontale — la direction du gradient —. Smith et Davis (1983b) montrent que cette instabilité ne devient plus dangereuse que les ondes hydrothermales que pour des faibles valeurs du nombre de Prandtl (typiquement  $Pr < 0,15$ ) mais précisent alors qu'un plus grand rapport d'aspect  $\Gamma_{\parallel}$  abaisse le seuil de ces ondes de surface. Vu le nombre de Prandtl du fluide que nous utilisons, nous ne nous intéressons pas dans la suite aux ondes de surface non-hydrothermales, et négligeons les déflexions de surface dans tous nos calculs. Expérimentalement toutefois, nous ne pouvons pas affirmer que les ondes hydrothermales ne sont pas couplées à des variations de l'altitude de la surface libre, mais il est clair que si cela est le cas, ce n'est pas le mécanisme ou la caractéristique principale des ondes que nous observons ; nous quantifions et discutons ces effets en § 2.3.3.

### 1.3.2 Equations pour les perturbations

Nous perturbons l'écoulement de base<sup>3</sup> (1.8) par  $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T}, \tilde{p})$  :

$$\begin{cases} u &= u_0 + \epsilon u_1 + \tilde{u} \\ v &= \tilde{v} \\ w &= \tilde{w} \\ T &= T_0 + \epsilon T_1 + \tilde{T} \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + \tilde{p} \end{cases}$$

#### Equations

Après avoir injecté les expressions ci-dessus dans les équations (1.6), nous tronquons ces dernières à l'ordre linéaire en les perturbations ; cela nous permet de prendre la transformée de Fourier :

$$\left( \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T}, \tilde{p} \right)^T (x, \theta, z, t) = e^{i(\alpha x + n\theta)} e^{-i\omega t} \left( \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T}, \tilde{p} \right)^T (z)$$

Seule subsiste alors une dépendance en  $z$  ; nous notons  $D \equiv d/dz$ . Nous posons  $\beta = n\Gamma_X$  et définissons (pour des raisons de simplicité d'écriture) les nouvelles variables suivantes :

---

3. L'écoulement de base en géométrie rectangulaire (1.7) n'est qu'un cas limite de (1.8) lorsque la courbure devient négligeable :

$$G_X \rightarrow Gr, \quad \Gamma_X \rightarrow 1, \quad \epsilon\Gamma_X \rightarrow 0.$$

$$\begin{cases} Y_1 = \tilde{u} & Y_5 = D\tilde{u} \\ Y_2 = \tilde{v} & Y_6 = D\tilde{v} \\ Y_3 = \tilde{w} & Y_7 = D\tilde{w} - \tilde{p} \\ Y_4 = (Gr/\epsilon)\tilde{T} & Y_8 = (Gr/\epsilon)D\tilde{T} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_u = \mathcal{M}_w - i\alpha\Gamma_X + \alpha^2 + \Gamma_X^2 - G_X\Gamma_X(\bar{u}_0 + 3G_X\Gamma_X\bar{u}_1) \\ \mathcal{M}_v = \mathcal{M}_w + \beta^2 + \Gamma_X^2 + G_X\Gamma_X(\bar{u}_0 + G_X\Gamma_X\bar{u}_1) \\ \mathcal{M}_w = -i\omega + i\alpha G_X(\bar{u}_0 + G_X\Gamma_X\bar{u}_1) + \alpha^2 + \beta^2 - i\alpha\Gamma_X \\ \mathcal{M}_\theta = \mathcal{M}_w + (1 - Pr^{-1})(i\alpha\Gamma_X - \alpha^2 - \beta^2) \end{cases}$$

Il vient ainsi le système suivant pour l'évolution des perturbations :

$$\begin{cases} DY_1 = Y_5 \\ DY_2 = Y_6 \\ DY_3 = -(i\alpha + \Gamma_X)Y_1 - i\beta Y_2 \\ DY_4 = Y_8 \\ DY_5 = \mathcal{M}_u Y_1 + \beta(\alpha + 2i\Gamma_X)Y_2 + G_X(\bar{u}_0' + G_X\Gamma_X\bar{u}_1')Y_3 - i\alpha Y_7 \\ DY_6 = \mathcal{M}_v Y_2 + \beta(\alpha - 3i\Gamma_X)Y_1 - i\beta Y_7 \\ DY_7 = \mathcal{M}_w Y_3 - Y_4 \\ DY_8 = Pr(\mathcal{M}_\theta Y_4 + G_X(1 - 2PrG_X\Gamma_X\tau_0)Y_1 + PrG_X^2\tau_0'Y_3) \end{cases} \quad (1.9)$$

A ces équations nous devons ajouter les conditions aux limites adéquates pour les perturbations, qui sous leur forme adimensionnée s'écrivent :

$$\begin{cases} Y_1 = 0 \\ Y_2 = 0 \\ Y_3 = 0 \\ Y_4 = 0 \end{cases} \Big|_{z=0} \quad \begin{cases} DY_1 = Y_5 = -i\alpha Y_4 \\ DY_2 = Y_6 = -i\beta Y_4 \\ Y_3 = 0 \\ DY_4 = Y_8 = -BiY_4 \end{cases} \Big|_{z=1}$$

### Méthode de résolution

Nous résolvons alors le problème en utilisant la méthode exposée par Mercier (1997) et que nous résumons ci-dessous.

Nous nous plaçons à la limite de la stabilité marginale ( $\Im(\omega) = 0$ ) et recherchons une solution  $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_8)^T$  du système précédent sous la forme d'une combinaison linéaire de quatre solutions linéairement indépendantes, que nous notons  $\{Y^{\vec{i}}\}_{i=1, \dots, 4}$  :

$$\vec{Y}(z) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \vec{Y}_i(z)$$

Chacune des quatre fonctions  $\vec{Y}_i(z)$  est obtenue en intégrant le système (1.9) du premier ordre en  $z$ , avec les conditions « initiales » suivantes en  $z = 0$  :

$$\begin{aligned}
\text{pour } \vec{Y}^{(1)} : \vec{Y}^{(1)}(z=0) &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \\
\text{pour } \vec{Y}^{(2)} : \vec{Y}^{(2)}(z=0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \\
\text{pour } \vec{Y}^{(3)} : \vec{Y}^{(3)}(z=0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \\
\text{pour } \vec{Y}^{(4)} : \vec{Y}^{(4)}(z=0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T
\end{aligned}$$

En satisfaisant ensuite les conditions limites en  $z = 1$  pour la combinaison  $\vec{Y}(z)$ , l'on obtient un système algébrique  $4 \times 4$  qui n'a de solution que si son déterminant s'annule. Cela conduit à l'équation caractéristique suivante :

$$\mathcal{F}_{\{W, Bi, Pr, \Gamma_X\}}(Gr, \alpha, \beta, \omega) = 0 \quad (1.10)$$

Comme nous l'avons noté,  $W$ ,  $Bi$ ,  $Pr$  et  $\Gamma_X$  sont des paramètres. Pour des raisons d'ordre pratique, nous traiterons les deux composantes  $\alpha$  et  $\beta$  du vecteur d'onde comme des paramètres. Il ne reste alors qu'à chercher le couple de valeurs de  $Gr$  et  $\omega$  qui annule simultanément les parties réelle et imaginaire de l'équation caractéristique. Si l'on recherche une instabilité stationnaire, la partie imaginaire de l'équation est automatiquement annulée en fixant  $\omega = 0$ .

La mise en pratique de la méthode ci-dessus a été effectuée en adaptant un code de Jean-François Mercier et Christiane Normand.

### 1.3.3 Instabilités stationnaires

Nous n'avons pas recherché d'instabilité stationnaire, pour nous concentrer sur les phénomènes ondulatoires. Nous nous contentons donc ici de rappeler que deux types d'instabilités stationnaires ont été rapportés. Toutes les deux prennent la forme de rouleaux, mais elles sont de nature très différentes.

La présence de la courbure est susceptible de modifier les résultats rappelés ci-après. Les modifications attendues doivent être du même acabit que celles que nous présenterons dans la section suivante, consacrée à l'instabilité oscillante en ondes hydrothermales.

#### Rouleaux corotatifs de l'écoulement de base

Outre les ondes hydrothermales, l'écoulement de base se révèle instable vis-à-vis de modulations stationnaires de vecteur d'onde colinéaire au gradient de température appliqué. Ces modulations, vues sur la variable vitesse, se superposent à l'écoulement de base pour donner un écoulement structuré en rouleaux stationnaires co-rotatifs d'axe perpendiculaire au gradient de température.

Strani *et al.* (1983) ont observé numériquement ces rouleaux et Laure *et al.* (1990) ont donné les valeurs critiques associées à leur apparition. Comme l'ont montré Mercier et Normand (2000), ces rouleaux doivent être vus comme le développement spatial des perturbations dues à la présence de bords dans la direction du gradient de température ; un taux de croissance spatial est ainsi attaché à cette structuration de l'écoulement. Le

référence	dim.	c.l.(z=0)/(z=h)	$Pr$	$k$	résultats
Laure <i>et al.</i> (1990) ( $g = 0$ )	2D	C/C	0	$\in \mathbb{C}$	RC
Mercier (1997)	3D	C/B	$0 - \infty$	$\in \mathbb{C}$	RC
Priede et Gerbeth (1997a)	2D	I/I	$10^{-3} - 10^3$	$\in \mathbb{C}$	RC, OH
Mancho et Herrero (2000)	3D	C/Bc	$\infty$	$\in \mathbb{R}$	RC, OH, RS

FIG. 1.7 – Résumé des études théoriques des écoulements thermocapillaires en géométrie confinée dans la direction horizontale du gradient. La colonne « dim. » indique la dimensionnalité des perturbations étudiées. Les conditions aux limites sont abrégées : C : conducteur, I : isolant, B : loi de Newton et nombre de Biot avec profil de température conducteur dans l'air, Bc : loi de Newton avec profil de température constant dans l'air. La colonne  $k$  indique si le nombre d'onde est pris complexe (analyse de stabilité spatiale) ou non. Les résultats sont notés RC : rouleaux corotatifs, OH : ondes hydrothermales, RS : rouleaux stationnaires longitudinaux.

tableau 1.7 résume les études théoriques ayant révélé la présence de rouleaux corotatifs grâce à la prise en compte du confinement dans la direction du gradient de la boîte étudiée. Le tableau 1.9 présente quant à lui les principales études numériques de l'écoulement de base et de sa structuration. Toutes confirment le résultat suivant de Mercier et Normand (2000), Mercier (1997) : les rouleaux apparaissent du côté froid pour les petits nombres de Prandtl ( $Pr \leq 0,01$ ), du côté chaud pour les grands nombres de Prandtl ( $Pr \geq 4$ ) et des deux côtés pour les nombres de Prandtl intermédiaires.

Notons dès à présent l'analogie formelle de notre problème avec celui dit de la « cavité entraînée » étudié par Bye (1966) où une contrainte mécanique<sup>4</sup> est appliquée à la surface libre d'un liquide contenu dans une cavité identique aux nôtres, et dans une moindre mesure avec le problème de Taylor-Dean. En effet, dans ces trois cas, le profil de vitesse est identique : il s'agit d'un profil de Couette-Poiseuille dont les mécanismes de déstabilisation peuvent être retrouvés dans chacun des systèmes.

Ces rouleaux ont été observés expérimentalement pour les grands nombres de Prandtl. En géométrie rectangulaire « unidimensionnelle » Garcimartín *et al.* (1997) les ont vus dans une cellule de rapport d'aspect horizontal et de hauteur appropriés ( $\Gamma = 0,1$ ,  $h = 3$  mm) ; il en est de même pour Villers et Platten (1992) et De Saedeleer *et al.* (1996). Ces derniers ont mesuré précisément l'amortissement spatial de la structure, en parfait accord avec les prédictions de Mercier et Normand (2000). Les rouleaux corotatifs ont été rapportés en géométrie rectangulaire étendue par Mukolobwicz (1998), Riley et Neitzel (1998) et Pelacho et Burguete (1999). Schwabe *et al.* (1992) les ont observés en géométrie cylindrique ; nous les avons étudié en détail — avec la visualisation de grande qualité nécessaire — en géométrie

4. Cette contrainte a par exemple pour origine un vent de vitesse uniforme ; il est remarquable que les équations en volume soient les mêmes que dans notre problème thermocapillaire, ainsi que les conditions aux limites mécaniques. Notre système diffère « juste » par l'adjonction de la variable  $T$  et les conditions aux limites thermiques enrichissent le problème jusqu'à le rendre très différent de celui du vent en surface.

cylindrique bidimensionnelle et nous rapportons des résultats quantitatifs dans le chapitre 4 (§ 4.2).

### Instabilité en rouleaux pour les très grandes hauteurs

Pour les « très » grandes hauteurs de fluide ( $h > 3$  mm), une instabilité sous forme de rouleaux d'axe colinéaire au gradient de température a été observée dans la cellule rectangulaire unidimensionnelle. Cette instabilité exclut alors la présence d'ondes hydrothermales : ces dernières n'ont jamais été observées dans les régimes où les rouleaux existent.

Cette instabilité a été observée dans une cellule rectangulaire étendue par Daviaud et Vince (1993) et en géométrie cylindrique par Favre (1997), Favre *et al.* (1997). Dans cette dernière expérience, les rouleaux sont alignés selon le gradient de température et ils ont alors l'aspect de « rayons de bicyclette » (la cellule constituant la roue proprement dite). Du point de vue analytique, Mercier et Normand (1996) ont retrouvé cette instabilité en considérant le cas de conditions aux limites thermiques conductrices sur le fond de la cellule tout en introduisant un nombre de Biot en surface.

Notre analyse comparative des effets gravitaires et thermocapillaires en termes de variation de hauteur et de nombre de Bond dynamique  $Bd$  (cf § 1.1) a mis en avant une hauteur  $h_e$  séparant les régimes à dominante gravitaire ( $h > h_e$ ) des régimes à dominante thermocapillaire ( $h < h_e$ ). Il est remarquable de noter que pour l'huile utilisée dans toutes les expériences où les rouleaux stationnaires ont été observés, nous avons justement  $h_e = 3$  mm. Si le lien était confirmé, cela signifierait que les ondes hydrothermales n'apparaissent que dans des conditions où les effets thermocapillaires sont prédominants. Cela est bien sûr en accord avec les tous premiers résultats de Smith et Davis (1983a).

#### 1.3.4 Instabilités en ondes propagatives : ondes hydrothermales

Ainsi baptisées par leurs découvreurs Smith et Davis (1983a), les ondes hydrothermales apparaissent comme une instabilité ondulatoire propagative de l'écoulement de base thermocapillaire pur ou avec thermogravité. Nous détaillons ci-après leurs principales caractéristiques telles que rapportées jusqu'à présent, avant d'en exposer de nouvelles liées à la courbure.

#### Caractéristiques

Les ondes apparaissent avec une fréquence et un nombre d'onde finis. La prise en compte des effets thermogravitaires et/ou de déflexions de la surface peut, dans les cas limites où ceux-ci sont importants, conduire à d'autres modes d'instabilités de fréquences différentes. Pour la fréquence des ondes hydrothermales, un assez bon accord existe entre les résultats expérimentaux dans l'huile de silicone (Garcimartín *et al.* (1997), Mukolobwicz (1998), Pelacho et Burguete (1999)) et les prédictions théoriques (Smith et Davis (1983a), Mercier (1997)). De nombreux résultats expérimentaux sur les ondes hydrothermales dans l'huile que nous utilisons, dans des géométries rectangulaires étendues, sont présentés et discutés

étude théorique	effets	dim.	c.l.(z=0)/(z=h)	Pr	résultats
Smith et Davis (1983a)	Ma	3D	I/I	$10^{-3} - 10^2$	OH
Smith et Davis (1983b)	Ma, S	2D	I/I	$10^{-3} - 10^2$	OS
Laure et Roux (1989)	Ma, Ra	3D	I/I ou C/C	$10^{-3} - 1$	OH
Gershuni <i>et al.</i> (1992)	Ra, Ma	3D	C/C	$10^{-2} - 10^2$	OH, MH
Parmentier <i>et al.</i> (1993)	Ma, Ra	3D	I/I	$10^{-2} - 10$	OH
Mercier et Normand (1996)	Ma, Ra	3D	C/B	7	OH, RS
Priede et Gerbeth (1997a)	Ma, Ra	2D	I/I	$10^{-3} - 10^3$	RC, OH
Priede et Gerbeth (1997b)	Ma	3D	C-I/B	$10^{-4} - 1$	OH

FIG. 1.8 – Résumé des études théoriques de la stabilité temporelle des écoulements thermocapillaires en géométrie infinie rectangulaire. Le gradient de température est toujours horizontal. *Ma* signifie la prise en compte de la tension de surface, *Ra* la prise en compte de la thermogravité et *S* la prise en compte des déflexions de surface. La colonne « dim. » indique la dimensionnalité des perturbations considérées. Les conditions limites thermiques sont notées ainsi : *I* : isolant, *C* : conducteur, *B* : nombre de Biot. Les modes observés sont notés ainsi : *OH* : ondes hydrothermales, *MH* : modes hydrodynamiques ( $Pr < 0, 1$ ), *OS* : ondes de surface, *RS* : rouleaux stationnaires longitudinaux.

dans l'article de Burguete *et al.* (2000) ; nous donnons dans le tableau de la figure 1.10 un aperçu des différentes expériences rapportées.

Les ondes apparaissent avec un angle de propagation  $\psi$  entre le gradient de température et leur vecteur d'onde ; nous détaillons un peu plus cette notion d'angle en § 5.1.3. La figure 1.11 fixe les idées en géométrie rectangulaire. Avec les notations précédentes en géométrie cylindrique, nous avons :

$$\psi = \arctan \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \quad \text{car} \quad \frac{k_\theta}{rk_r} = \frac{n}{r(\frac{\alpha}{h})} = \frac{hn\Phi(X)}{L\alpha}$$

Smith et Davis (1983a), Smith (1986) ont montré une dépendance de cet angle en fonction du nombre de Prandtl (uniquement). Ainsi, pour les petits nombres de Prandtl, les ondes sont attendues avec un vecteur d'onde presque colinéaire au gradient de température ; plus le nombre de Prandtl augmente et plus l'angle augmente jusqu'à ce que le vecteur d'onde soit presque perpendiculaire au gradient. Les expériences ont confirmé l'ordre de grandeur mais seule une faible gamme de nombre de Prandtl a été parcourue. Parmentier *et al.* (1993), Mercier (1997) ont eux montré une dépendance de  $\psi$  vis-a-vis de  $W$ . Pour les plus faibles valeurs de  $W$ , i.e. les plus grandes valeurs de  $h$ , l'angle  $\psi$  est nul ; pour les plus grandes valeurs de  $W$ , i.e. les plus faibles valeurs de  $h$ , l'angle est fini et proche de  $\pi/2$ .

### Effet de la hauteur

Les expériences menées au laboratoire depuis Daviaud et Vince (1993) ont montré l'existence des ondes hydrothermales dans des canaux allongés dans la direction perpendi-

étude numérique	effets	dim.	c.l.(z=0)/(z=h)	$Pr$	résultats
Strani <i>et al.</i> (1983)	$Ma, S$	2D	I/I	n.c (0)	RC
Ben Hadid et Roux (1990)	$Ma$	2D	C/C ou I/I	0.015	RC
Ben Hadid et Roux (1992)	$Ma, Ra$	2D	C/C ou I/I	0.015	RC,O
Villers et Platten (1992)	$Ma, Ra$	2D	C/I	4	RC,O
Mancho et Herrero (2000)	$Ma, Ra$	2D	C/Bc	$\infty$	RC

FIG. 1.9 – Résumé des études numériques des écoulements thermocapillaires. La colonne « dim. » indique la dimensionnalité de la simulation numérique. Les conditions limites thermiques sont notées I pour isolant, C pour conducteur et Bc pour l'utilisation de la loi de Newton avec profil de température constant dans l'air. RC: rouleaux corotatifs, O: oscillations temporelles issues de la déstabilisation du premier rouleau ou de la couche limite.

expérience			$L_{\parallel}$ (mm)	$L_{\perp}$ (mm)	$h$ (mm)	$Pr$
Villers et Platten (1992)	rectangle	RC,CL	30	10	1.75 – 14.25	4.2
Daviaud et Vince (1993)	rectangle	OH,RS	10	200	0.6 – 10	10
Ezersky <i>et al.</i> (1993)	rectangle	CL	70	50	1.2 – 3.1	60
De Saedeleer <i>et al.</i> (1996)	rectangle	RC,CL	74	10	2.5 – 4.7	15
Gillon et Homsy (1996)	rectangle	RS	10	38	6.8	9.5
Braunsfurth et Homsy (1997)	rectangle	RS,CL	10	10	1.25 – 10	4.4
Garcimartín <i>et al.</i> (1997)	rectangle	RC,CL	100	10	2 – 3.5	10-30
Riley et Neitzel (1998)	rectangle	RC,OH	30	50	0.75 – 2.5	14
Pelacho et Burguete (1999)	rectangle	RC,OH	60	50	1.25 – 3.5	10
Schwabe <i>et al.</i> (1992)	rectangle	RC,CL	20	40	0.5 – 3.6	17
Schwabe <i>et al.</i> (1992)	anneau	RC,OH	57	305	0.5 – 3.6	17
Kamotani <i>et al.</i> (1992)	anneau	OH?	2, 15	6, 47	2.5 – 11.4	19-27
Favre (1997)	anneau	OH,RS	35	204	2 – 10	10.3
« rectangle »	rectangle	RC,OH,RS	10-30	90-180	0.5 – 10	10.3
« anneau »	anneau	RC,OH	10	502	1.7	10.3
« disque »	anneau	RC,OH	63,5	225	0.6 – 1.9	10.3

FIG. 1.10 – Synthèse des études expérimentales imposant un gradient horizontal de température à une mince couche de fluide avec surface libre. Les structures observées sont abrégées ainsi: RC: rouleaux corotatifs structurant l'écoulement de base, OH: ondes hydrothermales bien caractérisées se propageant du froid vers le chaud, RS: rouleaux stationnaires d'axe colinéaire au gradient de température, CL: instabilité de couche limite ou du premier rouleau du côté chaud produisant des ondes voyageant du chaud vers le froid.

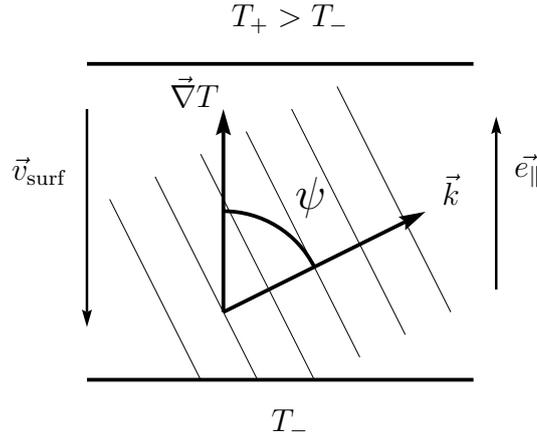


FIG. 1.11 – Schéma illustrant la définition de l'angle de propagation  $\psi$  des ondes.  $v_{surf}$  : vitesse du fluide en surface, du chaud vers le froid. Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  a pour composantes  $k_{\parallel} = \alpha$  selon  $\vec{e}_{\parallel}$  et  $\beta = k_{\perp}$  selon  $\vec{e}_{\perp}$ .

culaire au gradient. Daviaud et Vince (1993) ont étudié une cellule rectangulaire de largeur  $L_{\parallel} = 10$  mm. Mukolobwicz (1998) a étudié exhaustivement cette cellule rectangulaire pour une largeur  $L_{\parallel} = 20$  mm et une cellule annulaire de largeur  $L_{\parallel} = 10$  mm. Burguete *et al.* (2000) présentent une compilation et une comparaison des résultats dans le rectangle pour les trois largeurs 10, 20 et 30 mm.

Toutes ces études ont précisé le diagramme des phases dans le plan des paramètres de contrôle expérimentaux  $(h, \Delta T)$ . L'aspect qualitatif de ce diagramme n'évolue pas avec la largeur de la cellule. il existe toujours une hauteur intermédiaire — typiquement 1,7 mm pour  $L_{\parallel} = 10$  mm — pour laquelle le seuil  $\Delta T_c$  des ondes est le plus faible. Pour de plus faibles hauteurs, le seuil remonte; nous pouvons alors suggérer que pour garder un nombre de Marangoni critique  $Ma_c$  constant,  $h \searrow \Rightarrow \Delta T_c \nearrow$ . Pour de plus fortes valeurs de la température, le seuil remonte aussi; nous pouvons alors suggérer que pour garder un nombre de Rayleigh constant,  $h \nearrow \Rightarrow \Delta T_c \nearrow$ . Notons cependant que nos interprétations en termes de  $Ma$  et  $Ra$  supposent que les deux effets thermogravitaire et thermocapillaire agissent simultanément pour donner naissance aux ondes hydrothermales, ce qui n'est pas pris en compte dans la théorie originale de Smith et Davis (1983a).

Mukolobwicz (1998) a de plus observé deux types de sources d'ondes hydrothermales dans ses expériences : pour les petites hauteurs, la source est ponctuelle et pour les grandes hauteurs, la source est une ligne. La hauteur limite entre ces deux comportements coïncide à peu près avec la hauteur du seuil  $\Delta T_c$  minimal ainsi qu'avec la longueur capillaire  $\lambda_c$  pour laquelle le nombre de Bond  $Bo$  vaut 1 (cf figure 1.3). Nous reviendrons au chapitre 5 sur cette distinction que nous quantifierons, mais notons dès à présent que ces études précédentes ont conditionné nos choix de hauteurs de travail. Nous nous sommes ainsi placés à  $h = 1,7$  mm dans les cellules de largeur 10 mm au chapitre 3 afin de minimiser les effets de variation de hauteur dans les expériences. De même, pour étudier les différents régimes

d'ondes, nous avons sélectionné les valeurs particulières  $h = 1,2$  mm (petite hauteur) et  $h = 1,9$  mm (grande hauteur) dans les applications numériques du présent chapitre et les expériences des chapitres 4 et 5.

### Effet de la courbure

Nous présentons ici la résolution numérique de l'équation caractéristique (1.10) dans le cas  $Pr = 10$ , ce qui correspond à nos conditions expérimentales. Nous avons de même choisi les valeurs de  $W = Ma/Ra$  réalisées lors des séries d'expériences :

	$h$ (mm)	$W$	$\epsilon = L_{\parallel}/h$	$\Phi(0) = \phi$	$\Phi(1)$
rectangle	1,7	3,0	0,17	0	0
anneau	1,7	3,0	0,17	0,12	0,13
disque	1,2	6,0	0,019	15,88	0,94
disque	1,9	2,4	0,03	15,88	0,94

Nous avons porté dans le tableau ci-dessus les valeurs extrémales de la courbure : le maximum est réalisé au bord intérieur ( $\Phi(X=0) = L_{\parallel}/R_{\text{int}}$ ) et le minimum est réalisé au bord extérieur ( $\Phi(X=1) = L_{\parallel}/R_{\text{ext}}$ ). Pour nos calculs numériques, la courbure intervient seulement via  $\Gamma_X = \epsilon\Phi(X)$  qui est un paramètre libre que nous varions et via  $G_X$  qui remplace le nombre de Grashoff  $Gr$ .

Les figures 1.12 et 1.13 représentent l'évolution avec la courbure  $\Gamma_X = h/r$  du nombre de Marangoni critique, de la fréquence critique et des composantes  $\alpha$  et  $\beta$  du vecteur d'onde critique. Sur chacun des graphes, les cas  $\Delta T > 0$  et  $\Delta T < 0$  sont reproduits, le second étant représenté comme le cas d'une courbure négative. Nous remarquons tout de suite l'asymétrie entre la situation où le côté chaud est situé à l'extérieur et son opposée. Cette asymétrie provient des termes de courbure dans les équations en coordonnées cylindriques et elle correspond à l'absence de la symétrie  $\{(\Delta T, r) \mapsto -(\Delta T, r)\}$ . L'effet de la courbure est par ailleurs « continu » et le cas d'une courbure nulle n'est qu'un cas particulier.

Plus précisément, une courbure non nulle a deux conséquences distinctes. Tout d'abord, le seuil de l'instabilité en ondes est affecté : ce seuil est abaissé par une forte courbure si  $T_{\text{ext}} > T_{\text{int}}$  mais il est augmenté par une forte courbure si  $T_{\text{ext}} < T_{\text{int}}$ . Ensuite, l'orientation du vecteur d'onde par rapport au gradient de température  $\vec{\nabla}T$ , ainsi que la fréquence critique sont modifiées. Si  $\Delta T > 0$ , une augmentation de la courbure  $\Gamma_X$  conduit le vecteur d'onde à être aligné de plus en plus sur la direction radiale du gradient de température ; pour une certaine valeur de la courbure, le nombre d'onde azimuthal est même nul et la structure se comporte alors localement comme une onde cylindrique émise par le centre de la cellule. Si  $\Delta T < 0$ , le contraire se produit : l'angle  $\psi$  augmente ; néanmoins, la composante  $\alpha$  ne s'annule pas pour les valeurs de courbure que nous utilisons.

Les comportements décrits ci-dessus semblent génériques ; ils ont été obtenus pour d'autres valeurs de  $Pr$  et de  $W$ . Nous les confrontons aux résultats expérimentaux en § 5.4.

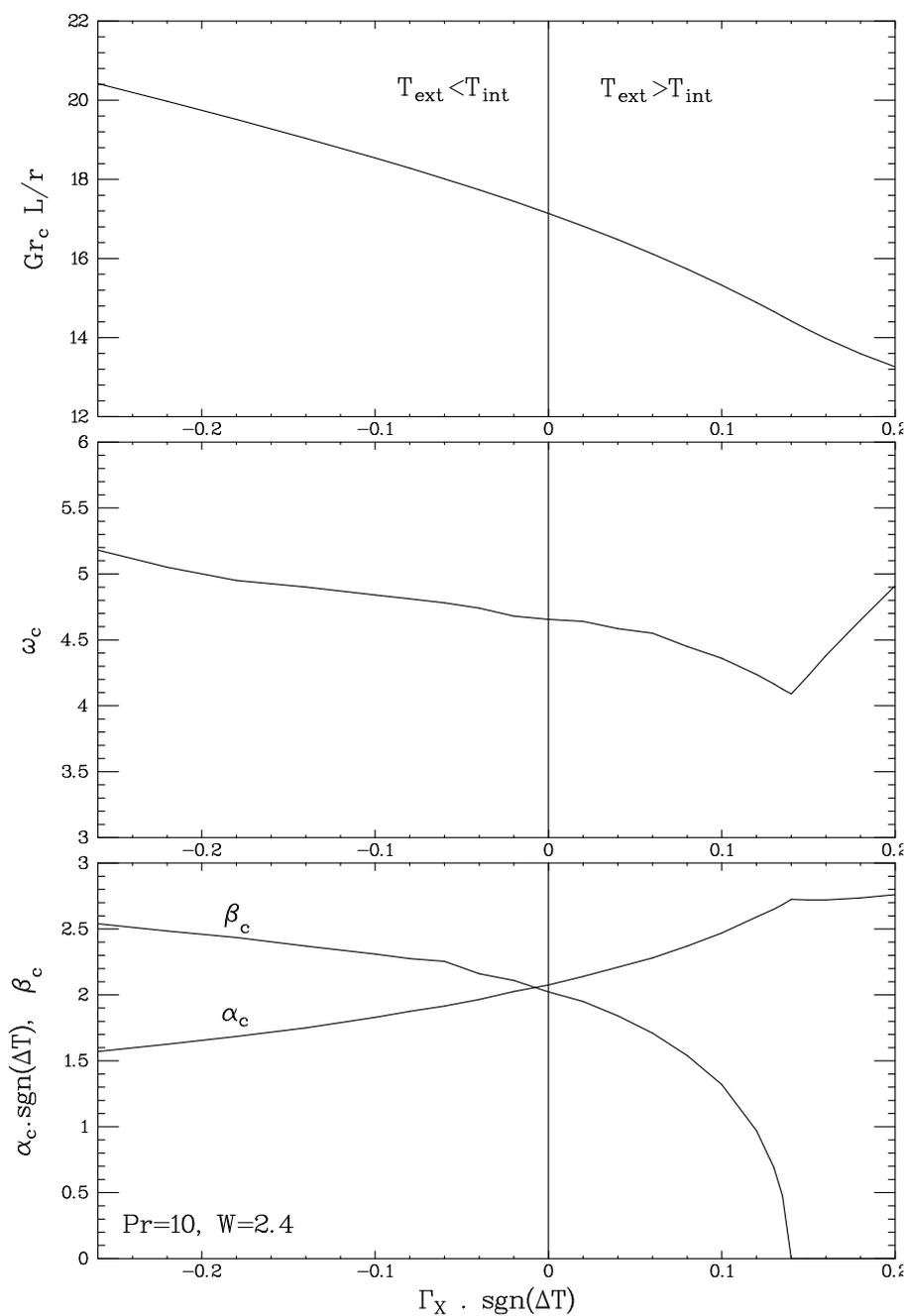


FIG. 1.12 – Effet de la courbure. Cas  $Pr = 10$ ,  $W = 2,4$  ( $h = 1,9$  mm dans nos expériences). Evolution avec  $\Gamma_X = h/r$  du nombre de Grashoff critique  $|Gr_c|$  (en haut), de la pulsation critique  $\omega_c$  et des composantes réduites ( $\alpha, \beta$ ) critiques du vecteur d'onde (en bas). Sur chaque graphe, les résultats pour  $\Delta T > 0$  et  $\Delta T < 0$  sont reproduits, en définissant artificiellement en abscisse une courbure signée par  $\Delta T$ .

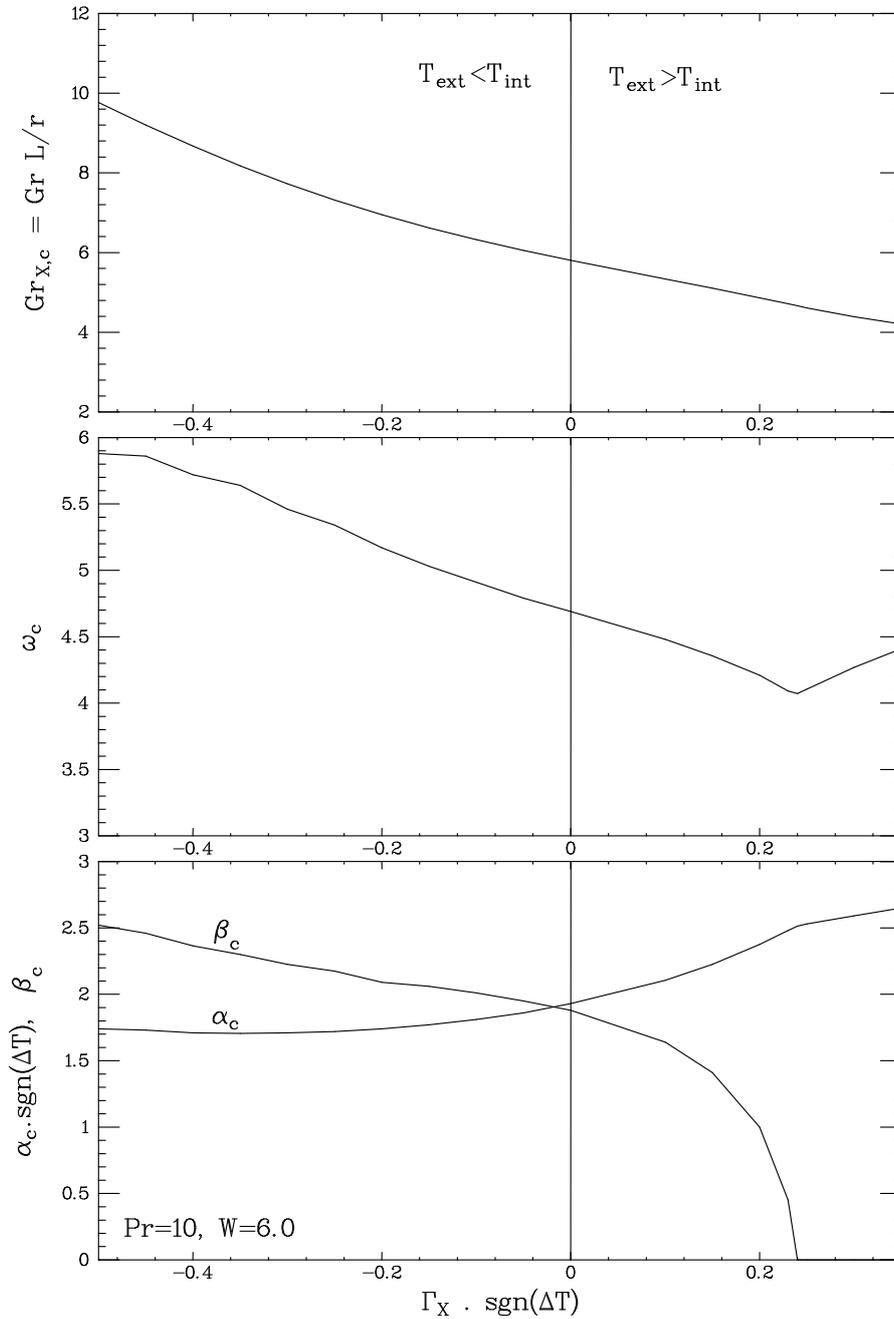


FIG. 1.13 – Effet de la courbure. Cas  $Pr = 10$ ,  $W = 6,0$  ( $h = 1,2$  mm dans nos expériences). Evolution avec  $\Gamma_X = h/r$  du nombre de Grashoff critique  $|Gr_c|$  (en haut), de la pulsation critique  $\omega_c$  et des composantes réduites ( $\alpha, \beta$ ) critiques du vecteur d'onde (en bas). Sur chaque graphe, les résultats pour  $\Delta T > 0$  et  $\Delta T < 0$  sont reproduits en fonction de  $(h/r) \cdot \text{sgn}(\Delta T)$ .

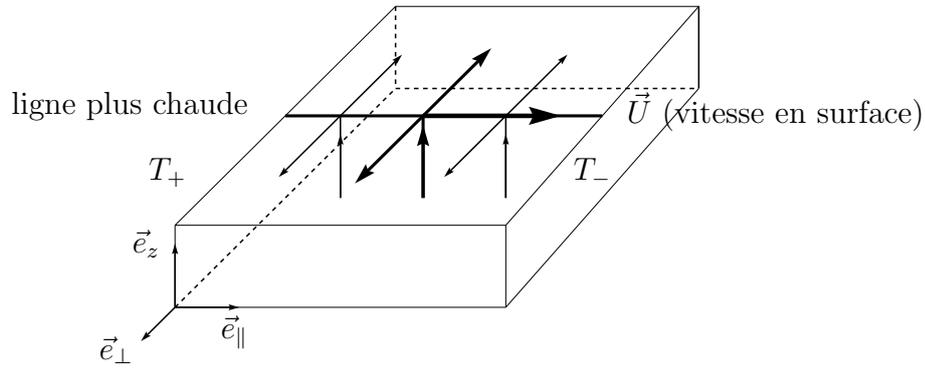


FIG. 1.14 – Schéma illustrant une ligne chaude en surface du fluide et les mouvements induits par la présence de cette ligne. Pour des petits nombres de Prandtl, cette perturbation sera entretenue et se propagera suivant la vitesse en surface (voir texte).

Notons que l'annulation de  $\beta_c$ , i.e. la transformation qualitative des ondes en cibles, survient pour des valeurs plus faibles de la courbure lorsque  $W$  est plus petit : notre calcul nous indique ainsi que les plus fortes hauteurs de fluide sont les plus propices à l'observation d'ondes cibles.

**Cas de l'anneau et du rectangle** Nous pouvons calculer une différence de seuil pour les ondes hydrothermales dans le rectangle ( $\Gamma_X=0$ ) et l'anneau ( $\Gamma_X \simeq 0,021$ ). Qualitativement tout d'abord, la courbure abaisse la valeur du seuil et nous pouvons prédire un seuil plus bas dans l'anneau. Quantitativement, nous obtenons pour  $W = 3,0$  un écart de seuil adimensionné  $\Delta Gr / Gr$  de 0,03. Cette valeur est faible et ne suffit pas à expliquer les observations expérimentales, comme nous le verrons au chapitre 3, notamment en § 3.1.4.

### 1.3.5 Mécanismes heuristiques

Smith (1986) a proposé deux mécanismes différents pour expliquer heuristiquement l'instabilité en ondes hydrothermales dans les deux cas limites  $Pr \rightarrow 0$  et  $Pr \rightarrow \infty$ . Nous les reproduisons ici partiellement. Les effets gravitaires sont négligés et l'on suppose l'écoulement de base établi.

#### Mécanisme pour $Pr \rightarrow 0$

La chaleur diffuse plus vite que la quantité de mouvement donc les effets inertiels dominant. Le mécanisme décrit ci-après est très proche de celui de Pearson (1958) expliquant la convection stationnaire de Bénard-Marangoni ; il est juste modifié par l'existence d'un écoulement de base qui advecte en moyenne les cellules de Bénard.

Supposons une perturbation sous la forme d'une ligne plus chaude située à la surface et parallèle au gradient (figure 1.14). Comme cette ligne est plus chaude, la tension de surface  $\gamma$  est plus faible qu'à gauche et qu'à droite et le fluide s'écoule donc en surface à partir de la ligne et vers l'extérieur. Par conservation de la matière dans un voisinage de la ligne, nous en déduisons que le fluide est sous cette dernière animé d'un mouvement ascendant (voir figure). Or ce fluide qui remonte vers la surface est moins chaud, et moins rapide (cf. profils  $u(z)$  et  $\tau(z)$  de l'écoulement de base, Fig. 1.5). Comme  $Pr \rightarrow 0$ , le fluide est plus vite à l'équilibre thermique que mécanique et la ligne chaude se refroidit mais reste animée d'une vitesse plus faible que le reste de la surface. Cette vitesse plus faible refroidit encore la ligne qui se transforme par inertie en ligne froide. La tension de surface et la conservation de la matière opèrent alors en sens contraire pour enfoncez le fluide de la ligne et le remplacer ainsi par des particules plus chaudes et plus rapides provenant de la surface avoisinante de la ligne froide. La thermalisation opère et réchauffe la ligne mais par inertie celle-ci reste animée d'une vitesse plus rapide. Elle va donc continuer à se chauffer jusqu'à une température plus élevée que son voisinage lorsque l'équilibre mécanique sera atteint. Nous sommes ainsi revenus à la situation initiale — une ligne chaude — et une période des ondes s'est écoulée.

Ce mécanisme explique une propagation des ondes dans la direction du gradient, du froid vers le chaud. Remarquons qu'il est « saturé » au contraire du mécanisme proposé par Pearson, et qu'il est ainsi susceptible de s'éteindre de lui-même...

### Mécanisme pour $Pr \rightarrow \infty$

Le fluide conduit mieux la vitesse que la chaleur et le mécanisme précédent ne fonctionne plus. Les effets thermiques dominent.

Le mécanisme proposé par Smith dans ce cas est sensé expliquer une propagation des ondes dans la direction perpendiculaire au gradient. Il est malheureusement sujet à la critique et nous ne l'exposons pas ici... Notons toutefois qu'il prédit une propagation des ondes dans la direction perpendiculaire au gradient de température.

### Mécanisme pour $Pr$ intermédiaire

Pour des nombres de Prandtl intermédiaires, les deux mécanismes précédents agissent simultanément et les ondes se propagent avec un angle fini par rapport au gradient de température. C'est ce que nous observons dans nos expériences avec  $Pr \simeq 10$ .

### Conclusion

Trouver un mécanisme pour expliquer un phénomène ondulatoire *propagatif* n'est pas simple. Le cas des ondes hydrothermales n'échappe pour l'instant pas à la règle.

### 1.3.6 Caractère absolu ou convectif de l'instabilité

L'instabilité qui nous intéresse est en ondes propagatives, avec une vitesse de groupe a priori finie. Ainsi lorsque l'écart au seuil adimensionné  $\epsilon = (Ma - Ma_c)/Ma_c$  (paramètre de contrôle) est encore très faible et qu'il en est de même du taux de croissance temporel de l'onde, l'instabilité est convective.

La notion d'instabilité convective a été introduite dans le calcul de stabilité linéaire de l'écoulement de base thermocapillaire par Priede et Gerbeth (1997a). Ces auteurs ont de plus considéré la présence de parois dans les directions  $x$  et  $y$ , ce qui leur a permis de retrouver les rouleaux stationnaires (co-rotatifs) de l'écoulement de base et surtout de déterminer le seuil de l'instabilité *globale* en ondes hydrothermales. Nous reviendrons plus en détail sur le caractère *convectif*, *absolu* et *global* de l'instabilité dans le chapitre 3. Remarquons néanmoins que les calculs et distinctions faites par Priede et Gerbeth (1997a) sont entièrement linéaires et obtenus après intégrations itératives sur l'ensemble du plan des nombres d'ondes complexes  $(k_r, k_i)$ . Une description à partir d'équations d'amplitude permet d'aller beaucoup plus loin, notamment jusqu'à une distinction convectif/absolu non-linéaire. Nous nous référerons dans ce cas aux travaux de Chomaz et Couairon (1999), Couairon et Chomaz (1999). Le chapitre 3 est consacré à cette étude.

## 1.4 Une modélisation idoine et universelle

Les informations apportées par l'analyse de stabilité linéaire ne nous renseignent que sur quelques caractéristiques de l'instabilité (taux de croissance linéaire, nombre de Marangoni critique, fréquence et nombre d'onde critiques), et ce pour une valeur bien déterminée de la différence de température. Dans de nombreux cas, ces informations sont déjà suffisantes ou difficiles à obtenir. Néanmoins, si l'on désire en savoir plus — notamment sur les dépendances vis à vis du paramètre de contrôle, ici  $\Delta T$  — il est nécessaire d'utiliser un autre outil : l'analyse faiblement non-linéaire. Nous allons décrire cette approche et ses résultats, puis nous inspirer de ces derniers pour écrire une équation modèle sous la forme d'une équation d'amplitude. Nous discuterons alors de sa validité et de sa généralité avant d'évoquer quelques généralisations possibles.

Il arrivera dans la suite que nous parlions d'ondes alors que seule leur amplitude sera en fait considérée : nous écartons alors artificiellement les dépendances « rapides » en temps et en espace que sont les oscillations à la fréquence au seuil  $\omega_0$ , et avec le vecteur d'onde au seuil  $\vec{k}_0 = (k_{0,x}, k_{0,y})$ . Ainsi, pour décrire un champ oscillant  $\theta(\vec{r}, t)$  tel que la température, nous écrivons implicitement :

$$\theta(x, y, z, t) = \theta_0(z) \left( (A(X, Y, T)e^{i(\omega_0 t - k_{0,x}x - k_{0,y}y)} + B(X, Y, T)e^{i(\omega_0 t - k_{0,x}x + k_{0,y}y)}) + \mathbb{C}\mathbb{C} \right)$$

où  $\mathbb{C}\mathbb{C}$  désigne le complexe conjugué du terme le précédant. Notre propos porte alors sur les amplitudes  $A$  et  $B$ , lentement variables en temps et en espace via  $(X, Y, T)$ . Pour décrire les comportements du champ oscillant, ces amplitudes sont plus appropriées qu'une fonction particulière  $\theta$  telle que la température, les composantes de la vitesse, la pression où la déflexion de la surface si le modèle la prend en compte.

*Notation :* Nous écrivons  $k$  un nombre d'onde de la structure,  $k_0$  la valeur critique de ce nombre d'onde et  $q = k - k_0$  le nombre d'onde associé aux variations de l'amplitude. De même, la fréquence des ondes hydrothermales est notée  $\omega_0 + \omega$  où  $\omega_0$  est la fréquence critique. Lorsque seul l'état de base est présent, nous avons  $A \equiv 0$ ,  $B \equiv 0$  et nous l'appelons l'état de repos.

### 1.4.1 Développement en échelles multiples et difficultés

Une analyse faiblement non-linéaire autour du seuil de l'instabilité en ondes hydrothermales a été entreprise par Smith (1988) dans le but de déterminer si les ondes hydrothermales étaient des ondes propagatives couplées non-linéairement de façon destructive ou au contraire couplées de sorte à donner des ondes stationnaires.

Cette approche classique consiste à effectuer un développement en échelles multiples utilisant le petit paramètre  $\epsilon = (Ma - Ma_c)/Ma_c$ , distance au seuil adimensionnée. Malheureusement, la résolution de la condition de solvabilité, permettant de donner les équations

d'amplitude attendues, doit être effectuée par voie numérique. La structure de ces équations peut néanmoins être écrite formellement et Smith obtient<sup>5</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial t} + v_{g\parallel} \frac{\partial A}{\partial x} + v_{g\perp} \frac{\partial A}{\partial y} = cA + \mathcal{L}_A A + g(|A|^2 + \lambda|B|^2)A + (p_{1\parallel} \frac{\partial P}{\partial x} + p_{1\perp} \frac{\partial P}{\partial y})A \\ \frac{\partial B}{\partial t} + v_{g\parallel} \frac{\partial B}{\partial x} - v_{g\perp} \frac{\partial B}{\partial y} = cB + \mathcal{L}_B B + g(|B|^2 + \lambda|A|^2)B + (p_{1\parallel} \frac{\partial P}{\partial x} - p_{1\perp} \frac{\partial P}{\partial y})B \\ \Delta P = (p_{2\parallel} \partial_x + p_{2\perp} \partial_y)|A|^2 + (p_{2\parallel} \partial_x - p_{2\perp} \partial_y)|B|^2 \end{array} \right.$$

$\mathcal{L}_A$  et  $\mathcal{L}_B$  sont des opérateurs de dérivation spatiale du second ordre explicités plus loin.  $c$ ,  $v_{g\parallel}$ ,  $v_{g\perp}$ ,  $g$ ,  $p_{1\parallel}$ ,  $p_{1\perp}$ ,  $p_{2\parallel}$  et  $p_{2\perp}$  sont des coefficients complexes qui dépendent du nombre de Prandtl et des conditions aux limites et sont déterminés numériquement. L'existence de la troisième équation n'est qu'un jeu d'écriture. En effet, cette dernière relation entre  $|A|^2$ ,  $|B|^2$ , et  $P$  est linéaire et peut être inversée de sorte à éliminer  $P$  des deux premières équations. Formellement :

$$P(x, y, t) = G_A(x, y) * |A(x, y, t)|^2 + G_B(x, y) * |B(x, y, t)|^2$$

où  $G_A$  et  $G_B$  sont les fonctions de Green suivantes :

$$G_{A,B} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint d^2\vec{k} \quad \frac{i}{k^2} (p_{2\parallel} k_x \pm p_{2\perp} k_y) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

Ceci fait apparaître deux termes intégraux dans chacune des deux équations pour  $A$  et  $B$ . Ces termes traduisent l'existence d'un écoulement à grande échelle. Dans la suite, nous négligeons ces termes.

Notons que  $v_{g\parallel}$  désigne la vitesse de groupe dans la direction  $x$  du gradient de température et  $v_{g\perp}$  la vitesse de groupe dans la direction  $y$  orthogonale au gradient. Le changement de signe de la vitesse de groupe entre l'équation pour  $A$  et celle pour  $B$  n'est opéré que sur  $v_{g\perp}$  ce qui traduit un fait observé dans les expériences : les ondes se propagent toujours du froid vers le chaud dans la direction  $x$ , mais choisissent entre la droite et la gauche dans la direction  $y$ . Cette différence entre les directions  $x$  et  $y$  n'est rien d'autre que la signature de la brisure de symétrie par le gradient de température, brisure imposée sur l'écoulement de base, avant la bifurcation. Les opérateurs de dérivation spatiale  $\mathcal{L}_A$  et  $\mathcal{L}_B$ , ainsi que ceux affectés des coefficients ( $p_{1\parallel}$ ,  $p_{1\perp}$ ,  $p_{2\parallel}$ ,  $p_{2\perp}$ ) sur les termes de pression gardent eux aussi la trace de cette « dissymétrie ».

Nous avons :

---

5. Cette écriture est correcte si  $Bi \neq 0$ . Dans le cas d'un nombre de Biot nul, des termes supplémentaires de même structure que les termes de pression doivent être pris en compte. Ils traduisent l'existence d'un champ de température à grande échelle. En effet,  $Bi = 0$  simplifie l'expression des conditions aux limites thermiques à la surface et entraîne donc l'existence d'une constante d'intégration non fixée. Nous avons réservé aux termes de température correspondants le même sort que pour les termes de pression... nous les négligeons.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_A &= (\xi_0^\parallel)^2 \partial_{xx} + (\xi_0^\perp)^2 \partial_{yy} + (\xi_a)^2 \partial_{xy} \\ \mathcal{L}_B &= (\xi_0^\parallel)^2 \partial_{xx} + (\xi_0^\perp)^2 \partial_{yy} - (\xi_a)^2 \partial_{xy}\end{aligned}$$

où les coefficients sont a priori complexes.

Nous observons ainsi que la symétrie droite/gauche est préservée :

$$(y \mapsto -y) \Rightarrow (\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B \mapsto \mathcal{L}_B, \mathcal{L}_A)$$

La structure de ces termes spatiaux est identique à celle des équations de Ginzburg-Landau complexe (CGL) pour les milieux excitable isotropes ainsi qu'à celle de l'équation de Ginzburg-Pitaevskii pour les fluides anisotropes. Dans le cas de CGL :

$$\xi_0^\parallel = \xi_0^\perp \quad \text{et} \quad \xi_a = 0$$

et dans le cas de Ginzburg-Pitaevskii :

$$\xi_0^\parallel \neq \xi_0^\perp \quad \text{et} \quad \xi_a = 0$$

La structure du terme spatial trouvé par Smith — et qui est aussi celui de toutes les équations précédentes — est différente de la structure du terme spatial de l'équation de NWS déduite par Newell et Whitehead (1969), Segel (1969) pour une structure stationnaire de convection de Rayleigh-Bénard dans un milieu isotrope :

$$\mathcal{L}_A = \xi_0^2 \left( \partial_x - \frac{i\xi_0}{2k_0} \partial_{yy} \right)^2 \quad (\xi_0^\parallel = \xi_0^\perp = \xi_0)$$

Les différences entre tous ces termes trouvent leur origine dans les symétries spatiales du problème considéré. Le cas des ondes hydrothermales correspond à celui d'une géométrie anisotrope : la direction du gradient de température n'a pas le même rôle que la direction perpendiculaire. La symétrie  $x \rightarrow -x$  n'existe en effet pas ; cela conditionne le choix a priori des termes spatiaux qui ont un sens. Nous allons dans les sections suivantes reconstruire les équations d'amplitude à partir des symétries.

### Remarque sur l'ordre de la vitesse de groupe

Le petit paramètre  $\epsilon = (Ma - Ma_c)/Ma_c$  utilisé pour le développement en échelles multiples permet de « compter » l'ordre des termes de l'équation d'amplitude. Ainsi, tous les termes de l'équation de Ginzburg-Landau complexe sont d'ordre  $\epsilon^{3/2}$ . Cela implique que les composantes  $v_{g\parallel}$  et  $v_{g\perp}$  de la vitesse de groupe sont d'ordre  $\epsilon^{1/2}$ , en apparence contradiction avec les observations expérimentales qui révèlent une vitesse de groupe finie, d'ordre 1, indépendante de  $\epsilon$ . Ce problème a été soulevé par Cross (1986).

Un réponse a été apportée par Knobloch et De Luca (1990) : elle consiste a utiliser deux échelles de temps lentes ( $\epsilon^{1/2}$  et  $\epsilon$ ) au lieu d'une seule ( $\epsilon$ ), ce qui revient aussi à considérer deux termes dans le développement des amplitudes en puissance de  $\epsilon$ . Notons que Smith (1988) a justement utilisé ces mêmes développements dans le cas particulier des ondes hydrothermales. Dans la suite, nous adopterons le point de vue de l'expérimenteur, observant une vitesse de groupe d'ordre 1 (Fig. 3.3 et 3.19) et une amplitude en  $\epsilon^{1/2}$ . Cela est compatible avec une étude des symétries du problème et correspond à l'approche la plus simple.

### 1.4.2 Equations d'amplitude en géométrie 1D

Plaçons-nous dans le cas d'une géométrie cartésienne 1D. Celle-ci représente pour nous la direction horizontale  $\vec{e}_\perp$  orthogonale au gradient de température. Le cas limite de la géométrie 1D permet de traiter par la même équation le cas du rectangle étendu 1D et le cas de l'anneau étendu 1D.

Notre approche est différente de celle de Smith : au lieu de partir du jeu d'équations de Navier-Stokes, nous écrivons phénoménologiquement les équations d'amplitude pour  $A$  et  $B$  en nous servant uniquement d'arguments de symétrie. Pour une bifurcation de Hopf supercritique à 1D, si  $y$  est la direction spatiale dans laquelle se déploient les ondes, nous pouvons écrire directement :

$$\begin{cases} \tau_0 \left( \frac{\partial A}{\partial t} + v_g \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \epsilon(1 + ic_0)A + \xi_0^2(1 + ic_1)\partial_{yy}A + g(1 + ic_2)(|A|^2 + \lambda|B|^2)A \\ \tau_0 \left( \frac{\partial B}{\partial t} - v_g \frac{\partial B}{\partial y} \right) = \epsilon(1 + ic_0)B + \xi_0^2(1 + ic_1)\partial_{yy}B + g(1 + ic_2)(|B|^2 + \lambda|A|^2)B \end{cases}$$

Ces deux équations sont des équations de Ginzburg-Landau complexes d'ordre 3, présentées sous leur forme dimensionnée. Seuls les termes non-linéaires résonnants (permis par les symétries) d'ordre le plus bas sont conservés. Les coefficients de l'équation sont a priori complexes dans le cas d'une instabilité en ondes (la symétrie de translation continue dans le temps n'existe pas au contraire du cas d'une structure stationnaire). Les parties réelles des coefficients peuvent s'interpréter comme suit :  $\epsilon$  est l'écart au seuil adimensionné,  $\tau_0$  l'échelle de temps,  $\xi_0$  la longueur de corrélation de la structure,  $g$  une unité de mesure des amplitudes et  $\Re(\lambda)$  un coefficient de couplage non-linéaire ;  $v_g$  est la vitesse de groupe. Les parties imaginaires  $c_i$  des coefficients agissent sur la fréquence et traduisent la dispersion :  $c_0$  représente un éventuel décalage de fréquence avec  $\epsilon$ ,  $c_1$  la dispersion linéaire par le nombre d'onde et  $c_2$  la dispersion non-linéaire par l'amplitude.

Cette approche ne donne hélas aucune information sur les coefficients. Un des fils directeurs des travaux rapportés ici est ainsi de déterminer expérimentalement les valeurs de ces coefficients. Cela a été effectué à une dimension d'espace (pour des raisons de simplicité) et nous a permis de tester la modélisation en étudiant des effets alors prédictibles et descriptibles aisément dans ce formalisme.

Notons que les équations de CGL sont souvent présentées sous une forme adimensionnée. Nous avons choisi ici la forme dimensionnée afin de rester au plus près des interprétations expérimentales, par exemple en n'oubliant pas de coefficient lors des comparaisons avec les prédictions du modèle. Les adimensionalisations suivantes sont possibles :

temps	$\tau_0$	$\tau_0 \epsilon^{-1}$
espace	$\xi_0$	$\xi_0 \epsilon^{-1/2}$
vitesse	$\xi_0 \tau_0^{-1}$	$\xi_0 \tau_0^{-1} \epsilon^{1/2}$
amplitude	$g^{-1/2}$	$g^{-1/2} \epsilon^{1/2}$

Ces adimensionalisations ne conservent que les coefficients de dispersion  $c_i$  et, dans le premier cas, le paramètre de contrôle  $\epsilon$ .

La formulation en équations d'amplitude a déjà prouvé son efficacité pour aborder les problèmes d'instabilité et formations de structures. Nous nous attacherons à éprouver ce formalisme, quitte à le pousser dans certains de ses retranchements ; ainsi nous n'hésiterons pas à transposer les résultats classiques en coordonnées cartésiennes vers les coordonnées cylindriques ; nous étudierons l'effet d'une seconde dimension d'espace et surtout nous nous autoriserons des excursions loin du seuil de l'instabilité, là où la validité des équations d'amplitude n'est pas acquise.

### 1.4.3 Equations d'amplitude en géométrie rectangulaire 2D

Le passage de 1 à 2 dimensions d'espace des équations de CGL ne présente pas de difficultés techniques. Les termes spatiaux — uniquement des termes de dérivation — doivent être modifiés. Dans le cas d'une géométrie isotrope, il semble alors naturel de remplacer  $\partial_x$  par  $\vec{\nabla}$  et  $\partial_{xx}$  par le laplacien  $\Delta$  des coordonnées cartésiennes.

Dans notre cas néanmoins, la deuxième dimension d'espace que nous rajoutons (notée  $x$ ) correspond à la direction du gradient de température et l'on ne bénéficie plus de la symétrie  $x \mapsto -x$ . L'ensemble des deux équations cherchées et des deux solutions  $(A, B)$  doit néanmoins rester invariant sous la symétrie  $(y \mapsto -y, A \leftrightarrow B)$ . Nous en déduisons alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + v_{g\parallel} \frac{\partial A}{\partial x} + v_{g\perp} \frac{\partial A}{\partial y} = \epsilon A + \mathcal{L}_A A + g(|A|^2 + \lambda|B|^2)A \\ \frac{\partial B}{\partial t} + v_{g\parallel} \frac{\partial B}{\partial x} - v_{g\perp} \frac{\partial B}{\partial y} = \epsilon B + \mathcal{L}_B B + g(|B|^2 + \lambda|A|^2)B \end{cases}$$

Bien sûr, ce système n'est rien d'autre que celui trouvé par Smith dans le cas où l'on néglige les termes intégraux de pression :  $P \equiv 0$ .

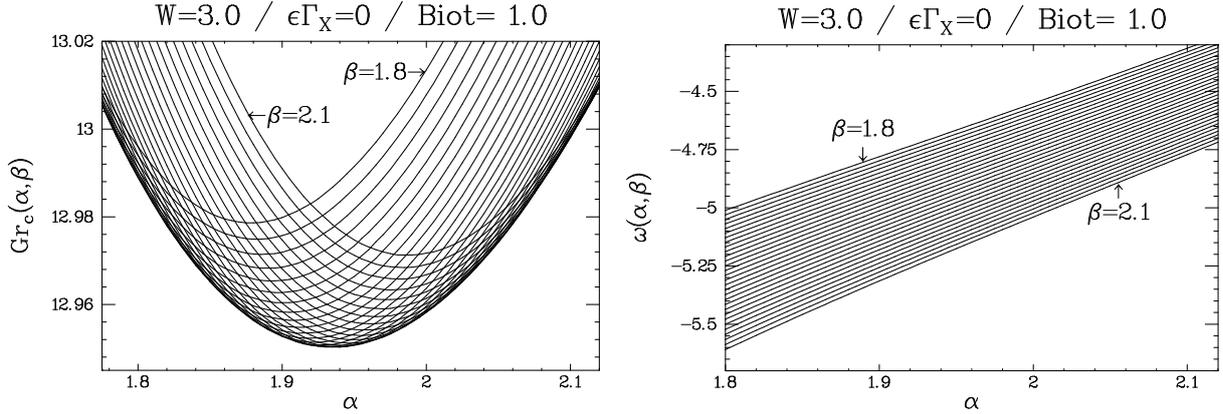


FIG. 1.15 – Exemple de courbes  $Gr_c(k_{\parallel}, k_{\perp})$  (à gauche) et  $\omega_c(k_{\parallel}, k_{\perp})$  (à droite). Chaque point est obtenu en fixant  $k_{\parallel} = \alpha$  et  $k_{\perp} = \beta$  et en résolvant (1.10). Chaque courbe est obtenue en fixant  $\beta$  et en variant  $\alpha$ . Les valeurs des paramètres ont été choisies ainsi :  $Pr = 10$ ,  $W = 3$ ,  $Bi = 1$  et courbure nulle.

#### 1.4.4 Equations d'amplitude en géométrie cylindrique 2D

Le passage des coordonnées cartésiennes à cylindriques peut se faire simplement en remplaçant le laplacien des coordonnées cartésiennes par son acolyte en coordonnées cylindriques. Le gradient sera modifié de même.

Néanmoins, une telle géométrie est intrinsèquement attachée à l'existence d'un point singulier : l'origine des coordonnées. De fait, très peu d'auteurs ont considéré cette géométrie ; en effet, des cellules de convection de Rayleigh-Bénard cylindriques n'ont pas de tel point singulier. Seules des géométries où la symétrie cylindrique pré-existe à l'instabilité sont de bons candidats à cette modélisation.

Nous n'utiliserons pas les équations d'amplitude en géométrie cylindrique 2D dans la suite.

#### 1.4.5 Quelques valeurs des coefficients

##### Dérivations numériques

Nous pouvons utiliser nos calculs de stabilité linéaire (§ 1.3.4) pour obtenir numériquement les valeurs de quelques coefficients des équations d'amplitude.

En effet, outre les valeurs du nombre de Marangoni critique, de la fréquence critique  $\omega_0$  et du vecteur d'onde critique  $\vec{k}_0$ , nous avons plus généralement accès aux courbes  $Gr_c(k_{\parallel}, k_{\perp})$  et  $\omega_c(k_{\parallel}, k_{\perp})$  en résolvant l'équation caractéristique (1.10) pour chaque couple de composantes du nombre d'onde  $k_{\parallel} = \alpha$  et  $k_{\perp} = \beta$  données. La figure 1.15 présente de telles courbes critiques. Comme noté par Laure et Mutabazi (1994), cela nous permet d'en déduire :

code numérique		coeff. dimensionné	
$Gr_c$	12,95	$Ma_c$	400,2
$\omega_c$	4,93	$f_c$	0,177 Hz
$\alpha_c$	1,935	$\lambda_c^{\parallel}$	5,52 mm
$\beta_c$	1,95	$\lambda_c^{\perp}$	5,48 mm
$\partial_{\alpha}\omega$	2,52	$v_{g\parallel}$	0,96 mm/s
$\partial_{\beta}\omega$	$\pm 1,81$	$v_{g\perp}$	$\pm 0,69$ mm/s
$\partial_{\alpha}^2 Gr$	2,568	$\xi_{0\parallel}$	4,76 mm
$\partial_{\beta}^2 Gr$	1,517	$\xi_{0\perp}$	3,66 mm

FIG. 1.16 – Valeurs numériques des parties réelles des coefficients en facteur des termes linéaires de l'équation d'amplitude au seuil des ondes hydrothermales pour  $Pr = 10$ ,  $W = 3$ ,  $Bi = 1$ , courbure nulle.

$$v_{g\parallel} = \left. \frac{\partial \omega_c}{\partial k_{\parallel}} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_0} \quad v_{g\perp} = \left. \frac{\partial \omega_c}{\partial k_{\perp}} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_0}$$

ainsi que :

$$\xi_{0\parallel}^2 = \left. \frac{1}{2Gr_c} \frac{\partial^2 Gr}{\partial k_{\parallel}^2} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_0} \quad \xi_{0\perp}^2 = \left. \frac{1}{2Gr_c} \frac{\partial^2 Gr}{\partial k_{\perp}^2} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_0}$$

Ces dernières expressions sont reliées à notre définition du paramètre de contrôle  $\epsilon$  :

$$\epsilon = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c} = \frac{Gr - Gr_c}{Gr_c} = \frac{Ma - Ma_c}{Ma_c}$$

En nous plaçant dans le cas sans courbure correspondant au rectangle, pour une hauteur de fluide  $h = 1,7$  mm et une extension  $L_x = 10$  mm, nous trouvons alors un jeu de valeurs, que nous re-dimensionalisons avec les échelles de temps  $\tau_\nu = 4.44$  s et d'espace  $h$  comme définies précédemment. Le tableau de la figure 1.16 présente les résultats obtenus.

$\alpha = k_{\parallel}$  et  $\beta = k_{\perp}$  sont les composantes du vecteur d'onde selon la direction du gradient et selon la direction perpendiculaire. Le problème étant décomposé selon ces deux directions, il nous est aisé de calculer les dérivées partielles selon chacune d'entre elles.

Remarquons au passage que nous observons (figure 1.15) une très faible courbure de la surface  $\omega_c(k_{\parallel}, k_{\perp})$ ; or cette courbure est liée au coefficient  $c_1$  (relation 3.2) qui doit donc être très petit ( $c_1 \simeq 0$ ).

## Mesures expérimentales

Nous pouvons obtenir expérimentalement la valeur de certains coefficients. De telles mesures sont exposées dans l'annexe C et comparées aux valeurs prédites numériquement. La

connaissance des coefficients de l'équation d'amplitude nous permet de faire des prédictions sur le comportement du système comme nous le présentons en annexe B.

### 1.4.6 Commentaires

Les équations d'amplitude ne sont théoriquement valides que très près du seuil de l'instabilité et sur des distances et temps ni trop « courts » par rapport à  $\xi_0$  et  $\tau_0$ , ni trop « longs ». Néanmoins leur portée est très grande ; en effet, compte tenu de leur universalité (seules les symétries du problème contraignent la forme de l'équation), elles peuvent être appliquées à une très grande diversité de systèmes.

Nous présentons en annexe B une extension possible de l'équation d'amplitude de Ginzburg-Landau telle que les résultats expérimentaux dans la cellule périodique unidimensionnelle (anneau) la suggèrent ; a priori, cette nouvelle équation n'a pas un domaine de validité plus étendu que celui de l'équation de départ mais en tout cas, elle décrit bien les résultats expérimentaux sur une grande plage de valeurs supercritiques de  $\epsilon$ .

Une extension possible du domaine de validité peut être réalisée par l'abandon de l'amplitude du mode le plus instable comme variable pertinente, mais en autorisant plusieurs modes complets. Une telle approche est par exemple celle des *équations modèles*, telles celle de Swift et Hohenberg (1977) (SH) pour la convection de Rayleigh-Bénard. Cette approche est plus simple que celle des équations constitutives, et valide pour une plage de valeurs du paramètre de contrôle plus grande que pour les équations d'amplitude. Elle a par exemple été menée fructueusement dans le cas de l'optique non-linéaire où les équations de Maxwell-Bloch ont été réduites à un modèle de type SH par Lega *et al.* (1994). Malheureusement, il n'existe pas à l'heure actuelle de tel modèle pour l'étude des ondes hydrothermales.

## Chapitre 2

# Dispositifs expérimentaux

LES ÉLÉMENTS RELATIFS aux expériences effectuées sont ici décrits en détail. Tout d'abord les propriétés physiques du fluide utilisé — huile de silicones — seront exposées. Nous décrirons ensuite les différentes cellules de convection ; chacune d'entre elles possède ses propres spécificités et limites, et des expériences particulières sont ainsi attachées à chacune. La plupart de nos mesures quantitatives sont effectuées par ombroscopie ; une section sera consacrée à cette méthode et sa mise en œuvre, et nous y montrerons notamment qu'il est possible d'obtenir des signaux quantitatifs. Une dernière partie évoquera alors les traitements que nous opérons sur les signaux recueillis.

### 2.1 Fluide utilisé

Dans les expériences décrites ici, le fluide utilisé est l'huile V065 de Rhodia (Rhône-Poulenc). Il s'agit d'une huile de silicone, à savoir d'un méthylpolysiloxane à chaîne purement linéaire. Dans notre cas, l'huile choisie est très peu visqueuse (0.65 cSt contre 1 cSt pour l'eau) et il s'agit donc d'une chaîne courte, très peu polymérisée et proche du monomère, contrairement par exemple aux huiles d'une très grande viscosité utilisées dans la convection de Bénard-Marangoni — ou plus prosaïquement en pharmacie et cosmétologie.

L'huile est transparente pour la lumière visible ; cette propriété nous permet d'effectuer des observations et des mesures par ombroscopie (§ 2.3). Notons que son indice optique  $n$  est de l'ordre de 1,4 et que la dérivée de ce dernier par rapport à la température  $\partial n/\partial T$  est négative (car  $n$  est une fonction croissante de  $\rho$  comme pour la plupart des fluides) et de l'ordre de  $-4.10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

Ses principales propriétés<sup>1,2</sup> sont résumées dans le tableau ci-dessous où les données pour l'eau ont été reportées à titre indicatif. La quatrième colonne indique les valeurs données par le fabricant et la dernière colonne, partielle, les valeurs mesurées en laboratoire par J.K. Platten (tension de surface notamment).

---

1. Pour la tension de surface:  $1 \text{ dyne/cm} = 10^{-3} \text{ N/m}$ .

2. Pour la viscosité:  $1 \text{ cSt} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

grandeur	unité	eau	huile V065	
		donnée	donnée	mesure
tension de surface $\sigma$ (25°C)	mN.m <sup>-1</sup>	≈ 70	15,9	(15.37)
$\gamma = -\partial\sigma/\partial T$	mN.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>	≈ 7	n.c.	0,0877 ± 0,0005
$\rho$ (25°C)	kg.m <sup>-3</sup>	1000	760	(756)
$\rho\alpha = -\partial\rho/\partial T$	kg.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup>	n.c.	1,1	n.c.
$\Rightarrow \alpha$ (25°C)	K <sup>-1</sup>	10 <sup>-4</sup>	0,00134	n.c.
viscosité $\nu$ (25°C)	m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>	10 10 <sup>-7</sup>	6,5 10 <sup>-7</sup>	
indice optique $n$ (25°C)	.	1,33	1,35	
conductibilité thermique $\lambda$	W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>	0,4	0,10	
chaleur spécifique $c_v$	J.kg <sup>-1</sup> .K	4180	2090	
$\Rightarrow \kappa = \lambda/(\rho c_v)$	m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>	10 <sup>-7</sup>	6,3 10 <sup>-8</sup>	
$\Rightarrow Pr = \nu/\kappa$	.	7	10,3	

N'est pas mentionnée dans ce tableau la pression de vapeur saturante, non fournie par le constructeur, mais précisons que cette huile est très volatile : le taux d'évaporation effectivement mesuré à l'air ambiant varie entre 0.5 mm/h (20°C) et plus de 1 mm/h (30°C). Des mesures particulières doivent donc être prises pour travailler sur des temps suffisamment longs. Remarquons que nous observons un début d'ébullition vers 50°C, ce qui limite de facto la plage de températures accessibles lors de nos expériences.

La densité de l'huile est faible, ce qui permet aux poussières et aux impuretés de tomber au fond de la cellule où elles n'ont aucune influence sur l'écoulement car elle ne modifient pas la tension de surface. De plus, contrairement à l'eau, l'ensemble de ses propriétés physiques — notamment la valeur de  $\gamma$  — rend ce fluide très bon candidat à l'étude de l'instabilité en ondes hydrothermales.

Notons enfin que d'autres fluides transparents de nombre de Prandtl voisins permettent aussi l'étude des ondes hydrothermales : décane ( $Pr = 15$ , De Saedeleer *et al.* (1996)), éthanol ( $Pr = 17$ , Schwabe *et al.* (1992)) et acétone ( $Pr = 4,2$ , Villers et Platten (1992)) notamment. Plus généralement, Les fluides de grand nombre de Prandtl ne semblent pas sujets à cette instabilité et les fluides de petit nombre de Prandtl — métaux liquides — ne permettent pas la visualisation des ondes et ont une surface libre difficile à maintenir propre (Favre (1997)).

## 2.2 Cellules de convection

Trois cellules différentes ont été utilisées. Leur caractéristique principale est le rapport d'aspect horizontal  $\Gamma$  défini en § 1.1.2. La première et plus ancienne réalisée est une cellule rectangulaire, essentiellement «1D» mais pouvant prendre un rapport d'aspect «2D». La seconde est une cellule annulaire réalisant un système «1D» aux conditions limites périodiques. La dernière est une cellule cylindrique «2D» périodique seulement dans la

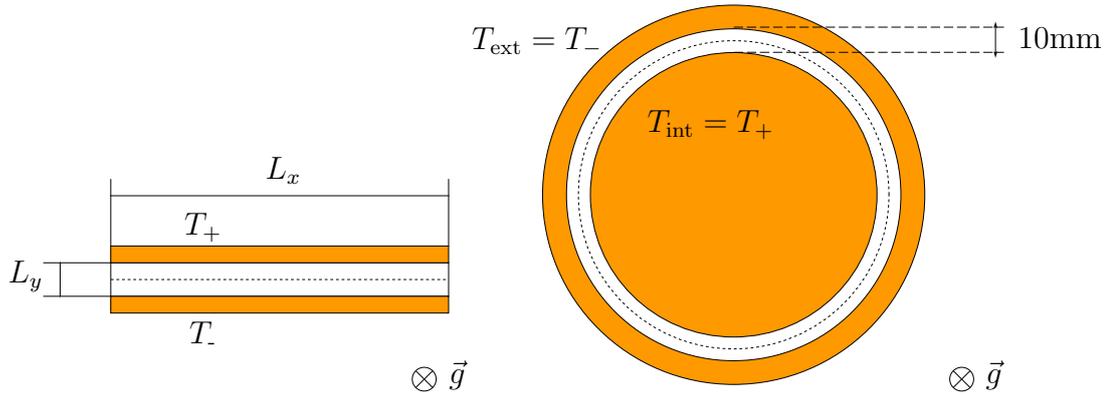


FIG. 2.1 – Schéma de principe des cellules « rectangle » (à gauche) et « anneau » (à droite). Les lignes d'acquisition usuelles sont représentées en pointillés. Dans la cellule rectangulaire, les dimensions  $L_x$  et  $L_y$  sont variables; dans la cellule annulaire,  $R_{\text{ext}} - R_{\text{int}} = 10\text{mm}$  et  $L_x = \pi(R_{\text{ext}} + R_{\text{int}}) = 502\text{mm}$ .

direction orthogonale au gradient. La construction de cette cellule a été une partie importante de ce travail de thèse. Les ménisques ont été éliminés, un contrôle automatisé de la température a été utilisé et des dispositifs spéciaux de mesure et de régulation de la hauteur de fluide ont été conçus, testés et mis en place sur cette dernière cellule.

### 2.2.1 Cellule rectangulaire 1D

Cette cellule est formée de deux longues parois en cuivre (Fig. 2.1) dans lesquelles circule de l'eau régulée en température par deux bains; l'ensemble joue le rôle de thermostats. Le fond est en verre et les parois latérales en plexiglas. La hauteur du récipient ainsi formé est de 2 cm, mais celui-ci sera toujours partiellement rempli par 1 à 2 mm d'huile. L'horizontalité est assurée par le réglage de 3 pieds à vis. Un couvercle en plexiglas peut fermer l'ensemble, réduisant ainsi l'évaporation du fluide de 0.5 mm/h à 0.05 mm/h. L'ensemble des pièces ainsi que l'horizontalité sont ajustés au centième de millimètre. La différence de température est mesurée à l'aide de cinq thermocouples de type Alumel/Chromel<sup>3</sup> montés en série.

Les dimensions horizontales de la cellule peuvent être variées:  $L_x = 10, 20$  ou  $30$  mm par positionnement rigide des blocs de cuivre et  $L_y \in [0, 250]$  par positionnement de cales mobiles en plexiglas. Pour fixer les idées, les résultats présentés ici concernent des rapports d'aspect  $\Gamma = 18$  ( $L_x = 10$  mm,  $L_y = 180$  mm) pour le chapitre 3 et plus petits  $\Gamma = 3$  ( $L_x = 30$  mm,  $L_y = 90$  mm) pour le chapitre 5.

3. L'Alumel (Ni-Al, magnétique) constitue le conducteur de la borne (-) alors que le conducteur à la borne (+) est en Chromel (Ni-Cr). La sensibilité d'une jonction est de  $41.3 \mu\text{V/K}$  à  $20^\circ\text{C}$  (données constructeur).

### 2.2.2 Cellule annulaire 1D

L'intérieur de cette cellule est formé d'un grand plot en cuivre (Fig. 2.1) chauffé électriquement à l'aide de résistances chauffantes. L'extérieur est une couronne de cuivre dans laquelle circule de l'eau (plus froide) régulée en température par un bain. Le fond est en verre de qualité standard et un couvercle en plexiglas ferme la cellule par le dessus. La différence de température est mesurée à l'aide de thermocouples Alumel/Chromel déjà évoqués.

Le fluide est situé entre le plot en cuivre central et la couronne extérieure, dans un espace de largeur 10mm et de périmètre moyen 502mm, ce qui confère à la cellule un rapport d'aspect horizontal  $\Gamma = 50.2$  très grand. Cette cellule est particulièrement intéressante grâce à ses conditions aux limites périodiques.

### 2.2.3 Cellule cylindrique 2D : disque

Pour étudier les ondes hydrothermales à deux dimensions, une cellule où  $\Gamma_{\parallel}$  et  $\Gamma_{\perp}$  sont grands est nécessaire. Afin d'éliminer le plus possible les effets de bords, les conditions aux limites périodiques ont été recherchées ; malheureusement elles ne peuvent être effectivement réalisées que dans la direction perpendiculaire au gradient de température. La géométrie choisie est ainsi celle d'un disque ; on peut la voir comme un anneau 1D dont on aurait étendu après coup la direction radiale occupée par le fluide. Le rapport d'aspect horizontal  $\Gamma$  ne privilégie pas une direction par rapport à l'autre. Les dimensions retenues (rayon intérieur 8 mm et rayon extérieur 135 mm) ainsi que la faible épaisseur de fluide utilisée (1 à 2 mm) nous permettent de décrire la couche de fluide contenue comme un « disque compact d'huile ». Cette cellule a été baptisée «LOTUS».

Le gradient radial de température est imposé par deux blocs de cuivre (plot central et couronne extérieure) thermostatés par circulation d'eau. Le fond de la cellule est constitué d'un miroir, ce qui permet, en amenant la circulation d'eau du plot central par le dessous, de ne pas être visuellement gêné par les tuyaux (figure 2.2). Le montage ombroscopique (par réflexion) nous permet alors d'observer tout le fluide, sans zone d'ombre.

### Températures

Les blocs de cuivre sont transformés en thermostats vis-à-vis de la couche d'huile par circulation d'eau régulée en température grâce à deux bains Lauda RC 6. Ces bains sont programmables et interfaçables avec un ordinateur via le port série (RS232). Un programme de pilotage et de contrôle des bains a ainsi été réalisé et utilisé.

Les températures sont mesurées à l'aide de résistances de platine (Pt 100) situées dans les blocs de cuivre thermostatés, à 1 mm environ du contact avec le fluide. Ces résistances sont connectées aux organes de contrôle des bains grâce à un câblage sur 4 fils. Les bains assurent la régulation de température directement sur les indications de ces sondes locales. L'ensemble des valeurs des températures de consigne, des sondes locales et de l'eau en

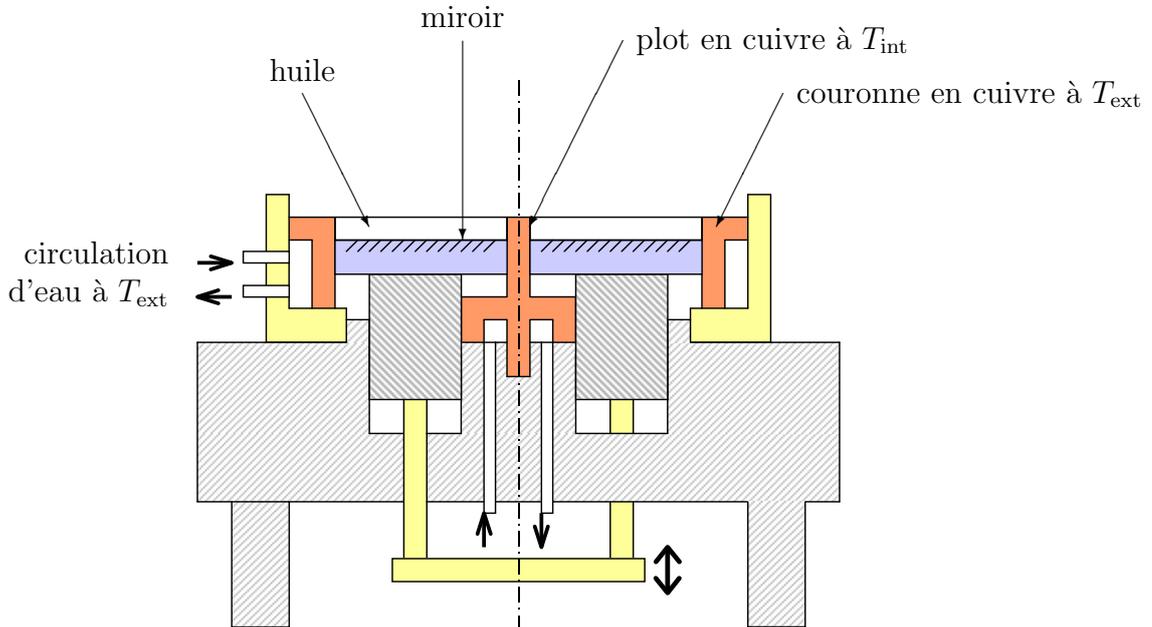


FIG. 2.2 – Schéma simplifié de l'expérience cylindrique 2D «LOTUS». Le miroir est posé sur un tore d'inox qui coulisse verticalement dans le bâti. Les blocs de cuivre thermostatés — qui permettent d'appliquer le gradient horizontal radial de température — sont représentés, ainsi que les circulations d'eau. L'huile affleure les bords en cuivre sans qu'il y ait de ménisques.

circulation sont enregistrées pour chacun des bains au cours du temps, avec une période d'acquisition de l'ordre de 10 s. Cela est utile pour suivre les fluctuations de  $\Delta T$  sur de grandes échelles de temps, mais aussi et surtout pour suivre les variations programmées et réaliser des expériences sur des temps longs.

### Ménisques

Les ménisques ont deux désavantages notoires : ils polluent la visualisation par ombroscopie (cf 2.6) et constituent pour les petites hauteurs de fluide une région où les ondes hydrothermales seront instables « avant » le bulk. Cela a été mis en évidence dans d'autres cellules et dans une expérience préliminaire adaptée, mais peut être interprété dans le diagramme des états du système : la courbe de ce plan  $(h, \Delta T)$  qui sépare la zone stable de la zone instable vis à vis des ondes hydrothermales a une pente négative pour les petites hauteurs : une hauteur plus importante déclenche ainsi l'instabilité plus tôt.

Nous avons décidé de nous affranchir des ménisques en nous arrangeant pour que les parois latérales soient toujours au niveau de la surface libre, et en tout cas ne la dépassent pas. Nous tolérons néanmoins un petit excès de fluide évitant ainsi l'existence d'une ligne

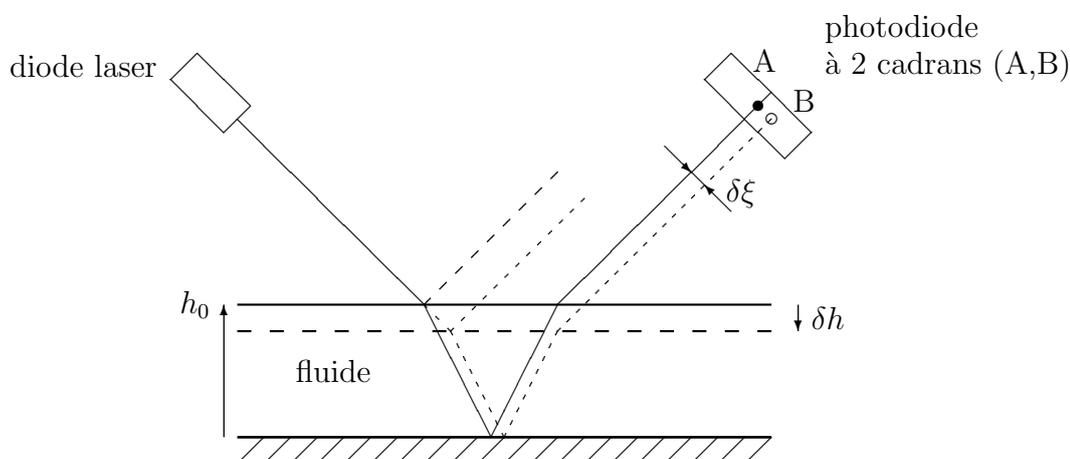


FIG. 2.3 – Schéma de principe de la mesure de hauteur. Lorsque la hauteur de fluide est égale à la valeur de consigne  $h_0$ , le rayon frappe équitablement les deux cadrans A et B de la photodiode. Lorsque la hauteur est trop faible,  $\delta h < 0$ , le point d'impact du rayon de sortie est décalé de  $\delta \xi$  et le cadran B est plus éclairé. La différence des tensions  $V_A - V_B$  des deux cadrans est alors négative. L'inverse est vrai quand  $\delta h > 0$ . Les deux rayons (réfléchis par la surface et le miroir) sont en pratique confondus en un seul du fait de la largeur du faisceau.

de contact qui serait due à un mauvais mouillage de l'huile sur les parois de cuivre. La hauteur excessive de fluide est comprise entre 5 et 10 centièmes de millimètre, ce qui est beaucoup trop faible pour permettre une quelconque convection de Rayleigh-Bénard ou Bénard-Marangoni ( $Ra \propto h^3$  et  $Ma \propto h$ ).

Le changement de hauteur de travail s'effectue en déplaçant le miroir par rapport au bâti, i.e., par rapport aux blocs de cuivre dont l'altitude est constante. Le déplacement du miroir résulte en fait du déplacement d'un cylindre percé posé sur trois pieds, poussés simultanément par un disque de laiton grâce à une vis micrométrique (figure 2.2).

### Régulation de hauteur

L'huile est très volatile et nous voulons travailler avec une hauteur constante au cours du temps. Fermer la cellule par un hublot en verre est une première réponse au problème, hélas insuffisante à cause du mouillage par capillarité. Ce dernier autorise en effet l'huile à quitter la zone utile de la cellule pour monter le long des parois verticales et, au gré des variations de température et de pression, faire fluctuer la hauteur de fluide dans la cellule. Nous avons donc mis au point un dispositif de mesure relative et de régulation du niveau d'huile dans la cellule.

La méthode de mesure est optique et ne perturbe ni l'écoulement, ni l'ombroscopie. Une diode laser émet un rayon lumineux incident sur la couche de fluide avec un angle de  $45^\circ$ . Ce rayon est en partie réfléchi par la surface et en partie réfracté dans le fluide, où il rencontre le miroir et est totalement réfléchi. Une variation de la hauteur induit un décalage des deux rayons réfléchis. Le faisceau émis par la diode laser a une section elliptique ; nous l'orientons de sorte que le petit axe de l'ellipse soit dans le plan vertical du rayon incident. Néanmoins, les deux faisceaux réfléchis sont quasiment confondus en un seul, légèrement plus large. Une photodiode à 4 cadrans, placée en retrait de la cellule, récupère les rayons réfléchis. Chacun des cadrans délivre une tension proportionnelle à l'intensité lumineuse reçue. Deux cadrans suffisent pour l'information sur la hauteur. En notant  $V_A$  et  $V_B$  les tensions électriques délivrées par les cadrans A et B, nous pouvons nous arranger pour que la tension  $V_A - V_B$  varie dans le même sens que la hauteur  $h$  dont elle constitue alors une mesure relative. L'épaisseur du faisceau n'est pas gênante et seul le décalage de l'ensemble importe et est mesuré. Comme on le voit sur la figure 2.3, le signe de cette tension suffit à nous informer d'un manque ou d'un excès de fluide.

Un réservoir d'huile en communication avec la cellule est monté sur une vis sans fin verticale mue par un moteur à courant continu. La montée ou la descente du réservoir permet d'injecter ou de retirer du fluide de la cellule. Le signal électrique  $V_A - V_B$  recueilli par la photodiode est alors filtré passe-haut pour éliminer les oscillations rapides, amplifié, et envoyé aux bornes du moteur. Le tuyau qui relie le réservoir à la cellule est assez fin (diamètre intérieur 5mm) et le temps de relaxation pour atteindre l'équilibre des hauteurs est de l'ordre de quelques secondes, ce qui constitue un filtre passe-haut mécanique, mais celui-ci n'est pas suffisant.

### Vapeur et condensation

L'huile s'évaporant à grande allure lorsque le gradient thermique est augmenté, la régulation de hauteur est très sollicitée et l'on peut imaginer que le réservoir ne soit pas de capacité suffisante pour travailler sur des temps très longs. Il est donc presque nécessaire de fermer la cellule par un hublot en verre. Malheureusement, la vapeur d'huile chaude évaporée du côté chaud ( $T_+$ ) a tendance à se déposer sur ce hublot, toujours plus froid que  $T_+$ . Pour éviter cette condensation qui altère grandement la visualisation par ombroscopie, nous avons placé dans la cellule un condenseur au dessus de la surface libre du fluide, mais en retrait sur les côtés. Il s'agit d'un tuyau en cuivre enroulé dans lequel circule de l'eau plus froide que la température ambiante. L'huile se dépose ainsi sur ce serpentin de cuivre et ne pollue pas le couvercle. Afin d'éviter que l'huile condensée froide ne retombe intempestivement dans la cellule et cause ainsi une perturbation de température et de hauteur, une rigole située sous le serpentin récupère les gouttes. Le fluide froid s'écoule en dehors de la cellule par une petite ouverture spéciale ; il rejoint alors le tuyau de communication entre la cellule et le réservoir.

Dans le souci de faciliter la mise en équilibre mécanique des deux vases communicants que constituent la cellule et le réservoir, un tuyau souple relie leur atmosphère pour que la

pression soit la même dans chacun d'eux. Tout autre orifice dans la cellule et le réservoir est soigneusement bouché afin de limiter au maximum les pertes d'huile.

### 2.2.4 A propos des conditions aux limites thermiques

Les parties de la cellule en contact avec l'huile seront à l'origine de conditions aux limites spécifiques. Nous donnons dans le tableau ci-dessous les conductivités thermiques des différents matériaux en présence :

matériau	$\lambda$ (W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )
cuivre	400
verre	0,76
plexiglas	0,209
huile	0,1
air	0,018

Les blocs de cuivre réalisent donc un contact « parfaitement » conducteur sur les extrémités de la couche de fluide dans la direction du gradient de température ; leur très grande inertie leur confère ainsi le rôle de thermostats. Le fond de la cellule en verre — hublot ou miroir — pourra être qualifié de conducteur alors que la surface libre, où l'huile est en contact avec l'air, impose des conditions aux limites isolantes. Dans le cas de la cellule rectangulaire, les parois latérales (direction perpendiculaire au gradient) en plexiglas offrent quant à elles des conditions plus ambiguës.

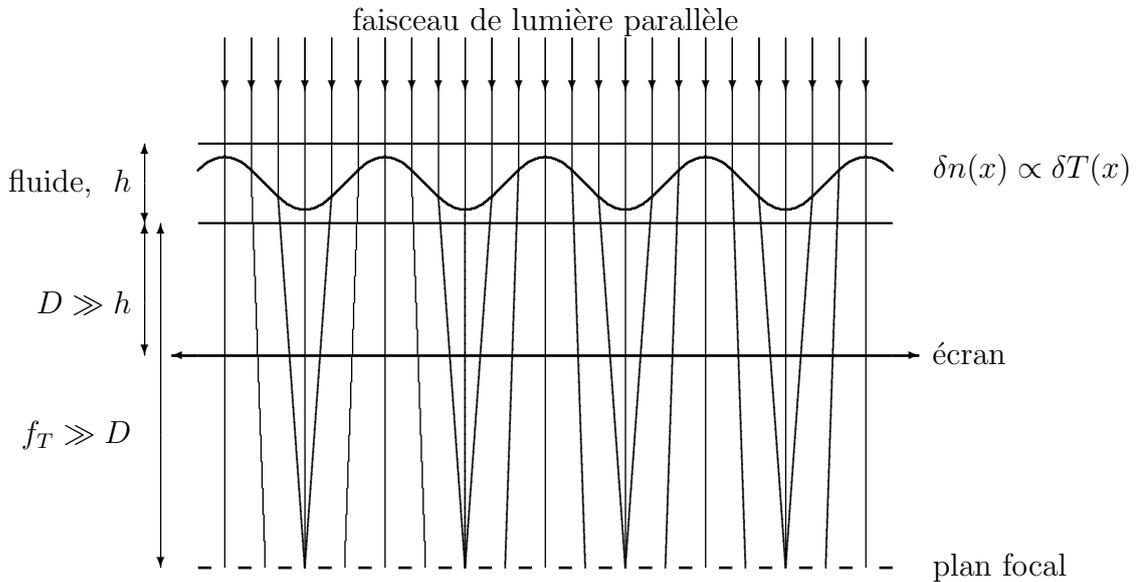


FIG. 2.4 – Schéma de principe de l'ombroscopie.

## 2.3 Méthode d'observation par ombroscopie

### 2.3.1 Principe

L'essentiel des résultats expérimentaux, hormis les mesures de température du chapitre 4, est obtenu par ombroscopie quantitative, telle qu'utilisée précédemment dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard par Croquette (1986), Pocheau (1987), Kolodner et Williams (1990).

Le principe de l'ombroscopie consiste à utiliser les variations spatiales de l'indice optique  $n(T)$  comme traceur de la dépendance spatiale du champ de température  $T$  (Merzkirch (1987)). Par exemple, un indice optique périodique dans la cellule conduit à une déviation périodique d'un faisceau de lumière initialement parallèle. Sous certaines conditions, l'on peut récupérer en aval sur un écran un signal dont l'intensité reproduira la dépendance spatiale de la température. Comme nous l'avons déjà mentionné, les ondes hydrothermales ont une dépendance spatiale selon les grandes directions horizontales et il est naturel d'éclairer la cellule de convection par un faisceau de lumière parallèle vertical. L'information selon la direction  $z$  est alors intégrée, mais si l'on prend soin de travailler dans un régime où les variations de  $T$  et  $n$  sont faibles — intensité du faisceau et gradients locaux de température peu élevés — toute l'information selon les directions horizontales est préservée, et de plus l'intensité recueillie est proportionnelle à l'amplitude des ondes, vues comme des ondes de perturbation de température ou de déflexion de surface.

### 2.3.2 Quantifications

L'intensité du signal ombroscopique peut sous certaines conditions directement être reliée aux perturbations de température. La relation quantitative entre le champ de température et l'intensité recueillie sur l'écran a été exprimée dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard par Croquette (1986) et Pocheau (1987). Nous allons, dans les lignes qui suivent, reprendre les calculs correspondants dans le cas des ondes hydrothermales, en utilisant une approche très semblable.

#### Equation « maîtresse »

Le chemin  $\mathcal{C}$  suivi par un rayon lumineux minimise le chemin optique  $\mathcal{I}$  (principe de Fermat) :

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}} n(\vec{r}) ds \quad \delta\mathcal{I} = 0$$

Ce qui peut être réécrit sous la forme locale suivante :

$$\frac{\partial n \vec{u}}{\partial s} = \vec{\nabla} n$$

$s$  est l'abscisse curviligne et  $\vec{u}$  le vecteur unitaire tangent au rayon lumineux. Plaçons nous dans un plan  $(x, z)$  où  $x$  représente la direction horizontale dans laquelle les ondes se développent et  $z$  est orienté dans le sens des rayons parallèles incidents (de bas en haut en pratique), et choisissons  $z = 0$  au niveau du premier contact des rayons et du fluide (à la surface libre). Nous avons alors deux équations scalaires entre lesquelles nous pouvons éliminer l'abscisse curviligne  $s$  en nous plaçant dans la limite des faibles déflexions ( $\partial z / \partial s \rightarrow 1$ ), ce qui donne :

$$nx'' + \frac{\partial n}{\partial z} x' - \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

où les primes dénotent la dérivation par rapport à  $z$  de la trajectoire  $x(z)$ . Si l'on note  $i$  l'angle local du rayon par rapport à la verticale, alors la limite des faibles déflexions que nous avons déjà invoquée s'écrit :  $i \ll 1$ , i.e. :

$$i \simeq \sin(i) \simeq \tan(i) = \frac{dx}{dz} = x'$$

L'équation « maîtresse » (2.1) est du second ordre. Les deux constantes d'intégration peuvent être fixées simplement en imposant la position et l'angle d'impact d'un rayon lumineux sur la surface libre en  $z = 0$ . Nous choisirons ainsi dans toute la suite  $x' = 0$  (incidence purement verticale) et  $x = x_0$  (abscisse du point d'impact fixée).

### Résolution

Nous proposons ci-dessous la résolution de l'équation « maîtresse » (2.1) dans quelques cas qui nous intéressent particulièrement : régime conductif de Rayleigh-Bénard, écoulement de base thermocapillaire, et perturbations par des ondes de température.

- Dans le cas où l'indice ne dépend que de  $z$ , et avec les conditions aux limites énoncées :

$$(\text{éq. maîtresse}) \Rightarrow \frac{d}{dz}(nx') = 0 \Rightarrow nx' = 0 \Rightarrow x = x_0$$

Le rayon est donc purement vertical. Ce cas correspond par exemple à un indice  $n$  constant (fluide au repos) ou au régime conductif de Rayleigh-Bénard. Une dépendance purement verticale de la température n'a donc pas d'influence sur le faisceau ; ce n'est plus le cas lorsqu'une dépendance horizontale est présente.

- Dans le cas où l'indice dépend de  $z$  et  $x$ , mais où cette dépendance est séparable sous la forme d'une somme :

$$\begin{aligned} n(x, z) = n_0 + n_1x + n_2(z) \quad \text{avec} \quad n_1x \ll n_0 \quad \forall x \in [0, L_x] \\ \text{et} \quad |n_2(z)| \ll n_0 \quad \forall z \in [0, h] \end{aligned}$$

Une telle écriture correspond comme nous allons le voir au cas de l'écoulement de base thermocapillaire en géométrie rectangulaire (§ 1.2.2, éq. (1.7)). Nous résolvons alors l'équation à l'ordre le plus bas en  $(hn_1/n_0)$  :

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}(nx') = n_1 \Rightarrow nx' = n_1z \Rightarrow x = x_0 + \frac{n_1}{2n_0}z^2$$

Etant donnée la forme du profil de température dans l'écoulement de base en géométrie rectangulaire, on peut écrire :

$$\begin{aligned} n(x, z) &= n_0 + \frac{dn}{dT} \left( \frac{\partial T}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial T}{\partial z}(z - z^*) \right) \\ &\doteq n_0 + n_1x + n_2(z) \\ \Rightarrow n_1 &= \frac{dn}{dT}\beta \end{aligned}$$

où  $\beta$  est le gradient horizontal de température  $\Delta T/L_x$ . La direction ici notée  $x$  correspond à la direction notée  $x$  pour l'écoulement de base. La dépendance très simple en  $x$  de l'écoulement de base permet d'avoir un résultat indépendant de la dépendance en  $z$ , tout comme dans le cas d'un indice seulement variable avec  $z$ . Cette propriété cesse d'être vraie pour un écoulement de base perturbé par les ondes hydrothermales, mais nous négligerons dans ce cas la dépendance en  $z$  de  $n$ , car celle-ci n'a qu'une influence réduite

sur la déviation du faisceau ; cela est de plus corroboré par le fait que nous intégrons  $z$  sur l'épaisseur de la couche de fluide.

$n_1$  et  $n_2(z)$  sont proportionnels à  $|dn/dT\Delta T| \ll 1$ , ce qui justifie les approximations faites a priori sur l'expression de  $n$ . Comme  $dn/dT < 0$  pour les fluides, on en déduit que l'image sera uniformément déviée du côté froid (cf.  $\beta(x - x_0) < 0$ ). Cette déviation n'aura aucune influence sur nos mesures car elle ne provoque qu'une translation de l'image.

Dans le cas d'une cellule cylindrique, la translation  $x - x_0$  se trouve affectée d'une dépendance en  $\Phi(X) = \phi/(1 + \phi X)$ , tout comme les profils correspondants de l'écoulement de base (cf. § 1.2.3, formules (1.8)). Nous supposons cet effet faible ; cela est justifié par l'allure des profils radiaux de température présentés en § 4.1. Dans le cas de la cellule « disque », nous pouvons donc prédire a priori un agrandissement de l'image lorsque le chauffage a lieu au centre ( $\Delta T < 0$ , rayons lumineux défléchis vers l'extérieur), et une réduction de l'image lorsque le centre est plus froid ( $\Delta T > 0$ , rayons défléchis vers le centre).

Notre calcul omet cependant la variation de hauteur induite par les effets thermocapillaires et exposée en § 1.1 (formule (1.3)). Bien que cette dernière soit faible, elle est assez importante pour transformer la surface du fluide en un dioptré convergent si  $\Delta T < 0$  (épaisseur d'huile plus petite au centre chaud) ou divergent si  $\Delta T > 0$  (épaisseur d'huile plus grande au centre froid). La déviation globale du faisceau lumineux est alors essentiellement due à cet effet de surface, qui est de sens contraire à l'effet prédit par le calcul précédent sur les variations d'indice. Ainsi, les images obtenues pour  $\Delta T > 0$  sont légèrement dilatées et le plot central apparaît plus grand ; de même, les images obtenues pour  $\Delta T < 0$  sont légèrement contractées et le plot central apparaît plus petit. Ce phénomène est effectivement observé dans les expériences comme l'illustrent les clichés de la cellule « LOTUS » des chapitres 4 et 5. Notons que par un réglage approprié du dispositif optique expérimental, il est possible d'atténuer dans certaines limites cet effet.

- Dans le cas où l'indice est modulé par une perturbation monochromatique dans la direction  $x$  (direction horizontale quelconque, qui ne coïncide plus nécessairement avec la direction du gradient), nous écrirons :

$$n(x) = n_0 + n_1 \cos(kx) \quad \text{avec} \quad n_0 \gg n_1$$

avec les mêmes conditions aux limites que précédemment ; il vient alors :

$$x'' + \frac{n_1}{n_0} k \sin(kx) = 0$$

qui est l'équation d'un oscillateur du type pendule pesant (!) où  $z$  joue le rôle du temps. Nous intégrons une fois cette équation et nous en déduisons :

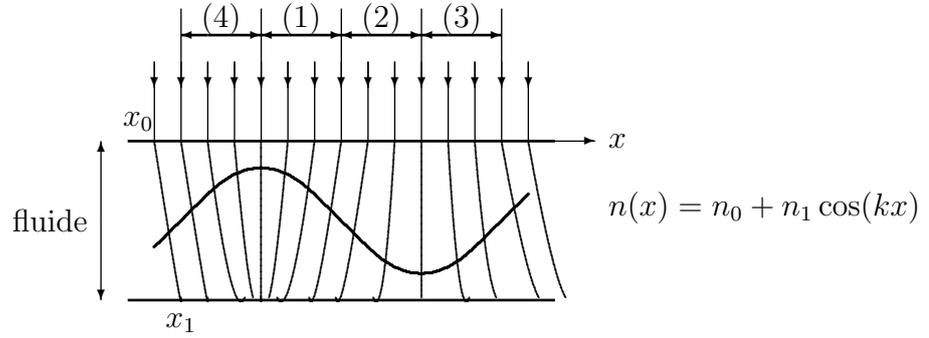


FIG. 2.5 – Illustration de l'effet lentille sur une période spatiale pour le cas simple d'une modulation monochromatique de l'indice. Les zones (1)-(4) se réfèrent aux phases de  $kx_0$  évoquées dans le texte. Les rayons lumineux à l'intérieur du fluide sont des arcs de paraboles.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (x')^2 &= 2 \frac{n_1}{n_0} (\cos(kx) - \cos(kx_0)) \\
 &= 2 \frac{n_1}{n_0} \sin(k(x+x_0)/2) \sin(k(x_0-x)/2) \\
 &\simeq \frac{n_1}{n_0} \sin(kx_0) k(x_0-x)
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'hypothèse selon laquelle  $n_1 \ll n_0$  et donc que  $|x'| \rightarrow 0$  et qu'ainsi  $x - x_0 \rightarrow 0$  (ceci est l'hypothèse des faibles déviations... dans le cas du pendule pesant). Les expressions ci-dessus requièrent que le membre de droite soit positif. Cela peut être interprété comme suit (figure 2.5) :

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{ll}
 kx_0 \in [0, \pi/2] & \Leftrightarrow \sin(kx_0) > 0 \Rightarrow x > x_0 \quad \text{et} \quad \cos(kx_0) > 0 \Rightarrow n(x) \text{ max.} \quad (4) \\
 kx_0 \in [\pi/2, \pi] & \Leftrightarrow \sin(kx_0) > 0 \Rightarrow x > x_0 \quad \text{et} \quad \cos(kx_0) < 0 \Rightarrow n(x) \text{ min.} \quad (3) \\
 kx_0 \in [-\pi, -\pi/2] & \Leftrightarrow \sin(kx_0) < 0 \Rightarrow x < x_0 \quad \text{et} \quad \cos(kx_0) < 0 \Rightarrow n(x) \text{ min.} \quad (2) \\
 kx_0 \in [-\pi/2, 0] & \Leftrightarrow \sin(kx_0) < 0 \Rightarrow x < x_0 \quad \text{et} \quad \cos(kx_0) > 0 \Rightarrow n(x) \text{ max.} \quad (1)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

on écrira donc suivant les cas :

$$\frac{dx}{dz} = \pm \sqrt{\frac{2n_1 k}{n_0} |\sin(kx_0)| \sqrt{|x - x_0|}}$$

ce qui, compte tenu de la condition  $x = x_0$  en  $z = 0$ , s'intègre et donne dans tous les cas :

$$x - x_0 = -\frac{n_1 k}{2n_0} \sin(kx_0) z^2$$

Les rayons lumineux dans la couche de fluide sont donc des arcs de parabole. Nous pouvons calculer l'angle d'incidence sur la paroi inférieure de la cellule et en déduire par la loi de la réfraction de Descartes l'angle de sortie du rayon lumineux arrivé initialement en  $x = x_0$  sur la surface libre :

$$\begin{aligned}\sin(i_{\text{sortie}}) &= n \sin(i(z = h)) \\ &\simeq n_0 x'(z = h) \\ &- \simeq n_1 k h \sin(kx_0)\end{aligned}$$

Comme nous sommes en optique incohérente, nous pouvons écrire l'intensité lumineuse  $I(x)$  reçue sur un écran horizontal situé à une distance  $D$  de la paroi inférieure connaissant  $I_0$  l'intensité du faisceau uniforme incident :

$$I(x) = \int I_0 \delta(x_2 - x) dx_0$$

avec :

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= -D \tan(i_{\text{sortie}}) \\ x_1 - x_0 &= -\frac{kn_1}{2n_0} \sin(kx_0) h^2 \\ \Rightarrow x_2 - x_0 &= -n_1 h k \left( D + \frac{h}{2n_0} \right) \sin(kx_0) \\ &\simeq -n_1 h k D \sin(kx_0) \quad \text{si } D \gg h\end{aligned}$$

On en déduit une expression de la distance focale équivalente ( $+f_T$ ) au voisinage d'un maximum d'indice ( $kx_0 \simeq 0[2\pi]$ ), i.e., d'une lentille locale convergente. Une zone de minimum d'indice ( $kx_0 \simeq \pi[2\pi]$ ) se comportera, elle, comme une lentille locale divergente de focale ( $-f_T$ ). L'annulation de  $\partial x_2 / \partial x_0$  (tous les rayons arrivent au foyer image) donne dans les deux cas :

$$f_T = \frac{h}{n_1 (hk)^2} \quad (2.2)$$

Si  $D \ll f_T$ , la relation entre  $x_0$  et  $x_2$  est bijective et dans la limite des déflexions faibles, on obtient finalement pour expression de l'intensité le long de l'écran :

$$I(x) \simeq I_0 \left( 1 + \frac{D}{f_T} \cos(kx) + \dots \right) \quad (2.3)$$

Les points de suspension représentent les termes suivants du développement limité en  $D/f_T$  qui sont en fait les harmoniques spatiaux ; la présence de ces derniers signale alors

une déformation du signal. Cette déformation peut être intéressante si l'on veut des images bien contrastées, mais si l'on désire plutôt une information quantitative, il faut s'arranger pour réduire l'importance des harmoniques spatiaux, par exemple en se plaçant très en avant du plan focal ( $D \ll f_T$ ).

Nous relierons enfin la variation d'indice aux variations de la température, afin de traduire l'influence des ondes de perturbation de température :

$$\begin{aligned} n(x) &= n_0 + \frac{dn}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} = n_0 + \frac{dn}{dT} \eta \cos(kx) \\ &= n_0 + n_1 \cos(kx) \\ \Rightarrow n_1 &= \frac{dn}{dT} \eta \end{aligned}$$

où  $\eta$  est l'amplitude des perturbations de température que l'on étudie<sup>4</sup> et  $dn/dT < 0$ .

*Remarque* : Ce calcul peut être étendu au cas où  $T(x)$  n'est plus sinusoidale, mais quelconque : il suffit de décomposer  $T$  en série de Fourier. A chaque mode  $k$  de la série correspond alors une distance focale  $f_T(k)$ . En utilisant la passerelle  $\{ik \leftrightarrow \partial/\partial x \leftrightarrow \vec{\nabla}\}$ , nous en déduisons :

$$I(x) \simeq I_0 \left( 1 + Dh \frac{dn}{dT} (\vec{\nabla})^2 T + \dots \right)$$

Les termes suivants peuvent être obtenus en développant aux ordres suivant l'intégrande, mais le premier ordre nous suffit car — comme dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard — les perturbations de température sont (quasi-)sinusoïdales au seuil de l'instabilité.

*Commentaires* : La réponse du système ombroscopique est dite « linéaire » si une perturbation monochromatique du champ de température (comme cela est le cas au seuil de l'instabilité) est signalée par une modulation monochromatique de l'intensité sur l'écran. Ce régime « linéaire » signifie que le montage optique ne réalise pas de distorsions — ce qui se traduirait par l'apparition d'harmoniques — et que le signal récupéré sur l'écran est quantitativement relié au champ de température via la formule (2.3). Ce régime, que nous recherchons expérimentalement, nécessite que  $D \ll f_T$ , donc que le contraste ne soit pas trop fort. Notamment, lorsque nous nous éloignerons du seuil de l'instabilité, il faudra être attentif à l'augmentation de  $n_1$ , i.e. à la réduction de la distance focale. On peut de même remarquer que l'amplitude de la modulation de l'intensité dépend de la distance  $D$ , qu'il faudra donc maintenir constante lors d'une série d'expériences visant à mesurer et comparer des amplitudes d'ondes.

---

4.  $\eta$  est relié au paramètre d'ordre de l'instabilité en ondes hydrothermales :  $\eta = \epsilon^{1/2} < \theta >_z$ , où  $\epsilon$  est la distance adimensionnée au seuil et  $< \theta >_z$  représente l'information donnée par le profil vertical intégré dans la direction  $z$ . Pour les ondes hydrothermales,  $\eta \propto \epsilon^{1/2}$  car l'instabilité est supercritique ; on peut donc travailler avec  $\eta$  aussi petit que l'on veut, et donc  $n_1$  petit.

### 2.3.3 Quantification des effets de surface

L'ombroscopie est évidemment sensible aux déflexions de la surface libre que nous avons jusqu'ici négligées. Il est ainsi possible de détecter des ondes de surfaces, telles que les ondes de gravité produites par un expérimentateur tremblotant en contact de la cellule de convection, une pelleteuse voisine, ou bien la variation de hauteur  $\delta h(x, y)$  produite par les ondes hydrothermales. Supposons que la surface soit faiblement déformée par les ondes suivant la relation :

$$h(x) = h_0 + h_1 \cos(kx + \varphi) \quad \text{avec} \quad h_1 \ll h_0$$

où  $\varphi$  est une constante traduisant l'éventuel déphasage entre  $n(x)$  et  $h(x)$ . Alors un calcul tout à fait analogue au précédent conduit à l'obtention d'une distance focale traduisant les effets de déformations de surface :

$$f_s = \frac{h_1}{(n_0 - 1)(h_1 k)^2}$$

et à la formulation suivante de la modulation de l'intensité reçue par l'écran :

$$I(x) \simeq I_0 \left( 1 - \frac{D}{f_s} \cos(kx + \varphi) \right)$$

De précédents travaux (F. Daviaud et J. Burguete) ont mesuré l'amplitude des déflexions de surface par les ondes hydrothermales à l'aide d'un faisceau laser en incidence normale : nous pouvons les chiffrer comme étant au plus de  $20\mu\text{m}$ . De plus, Jenkins (1988) donne  $dn/dT \simeq -4.10^{-4} \text{ K}^{-1}$  pour les huiles de silicones<sup>5</sup>. Nous pouvons donc comparer les effets de  $n(T)$  et de  $h(T)$  par le rapport :

$$\frac{\text{effet de } h}{\text{effet de } n} = \frac{f_T}{f_s} = \frac{(n_0 - 1)h_1}{n_1 h_0} \sim \frac{(n_0 - 1) \frac{dh}{dT}}{\frac{dn}{dT} h_0}$$

Si — comme nous l'avons écrit ci-dessus — nous supposons que les ondes de déflexion de surface proviennent des ondes de température dans le volume, nous pouvons utiliser la relation (1.3) et nous obtenons alors un rapport de l'ordre de 100, ce qui semble surestimé. En effet, si des déflexions de surface existent au niveau des ondes, leur amplitude n'a aucune raison d'être reliée à l'amplitude de l'onde de température — au contraire de l'écoulement de base — ; de plus, le déphasage  $\varphi$  peut éventuellement amortir l'ensemble de la déflexion.

Quoi qu'il en soit, nous pouvons dans toute la suite considérer l'équivalence entre amplitude du signal ombroscopique et amplitude des ondes hydrothermales à condition de positionner l'écran à une distance  $D$  petite devant  $f_T$  et  $f_s$ .

---

5. A comparer à  $dn/dT \simeq -8,4.10^{-5} \text{ K}^{-1}$  pour l'eau, d'après Merzkirch (1987).

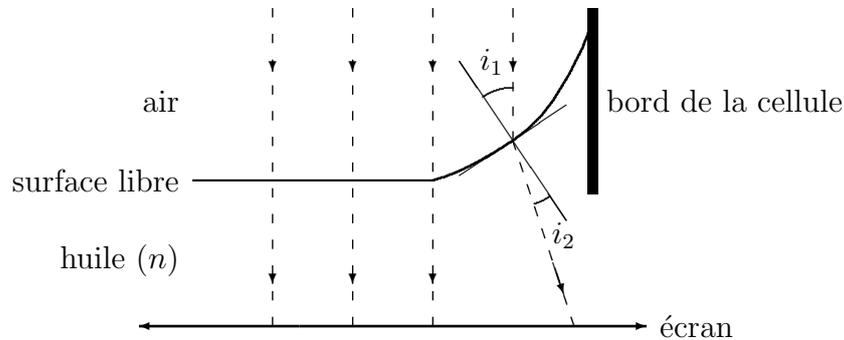


FIG. 2.6 – Divergence du faisceau de lumière à la traversée du ménisque : l'image du bord est dilatée.  $\sin(i_1) = n \sin(i_2)$ .

### 2.3.4 Autres effets

L'éventuelle existence de ménisques aux bords de la cellule est a priori une source de difficultés. Comme on peut le voir sur la figure 2.6, la très forte variation de hauteur<sup>6</sup> que constitue un tel objet aura un effet sur le signal aux bords de la cellule. Ainsi, dans la cellule rectangulaire où les ménisques existent, l'image apparente de la cellule sera dilatée aux bords, et l'amplitude localement diminuée.

Afin d'éviter tout problème, le signal sera acquis loin du ménisque dont l'extension est de quelques millimètres. Seules les cellules unidimensionnelles (rectangle et anneau) sont affectées, mais leur largeur  $L_x \geq 10\text{mm}$  est assez grande pour qu'il subsiste au centre une zone non déformée sur laquelle porteront les mesures. Néanmoins, dans le cas du rectangle, les extrémités du canal dans la grande direction  $L_y$  nécessiteront une attention particulière.

### 2.3.5 Acquisition du signal

Nous utilisons une caméra CCD qui échantillonne le signal ombroscopique en 256 niveaux de gris. Deux variantes de montage sont utilisées (Fig. 2.7) :

- montage « indirect », où la caméra filme l'écran. Les expériences dites « unidimensionnelles » ont un montage ombroscopique de ce type.
- un montage « direct », où l'écran est remplacé par un ensemble de deux lentilles formant un système afocal. La première lentille est la même que celle qui produit la source de lumière parallèle. La seconde lentille est de petit diamètre et de courte focale et elle envoie l'image sur la matrice active de la caméra, dépouillée de son objectif. Ce montage est utilisé sur l'expérience « bidimensionnelle ».

6. la taille caractéristique d'un ménisque est donnée par la longueur capillaire  $\lambda_c = 1,4\text{ mm}$  pour l'huile utilisée (formule (1.5))

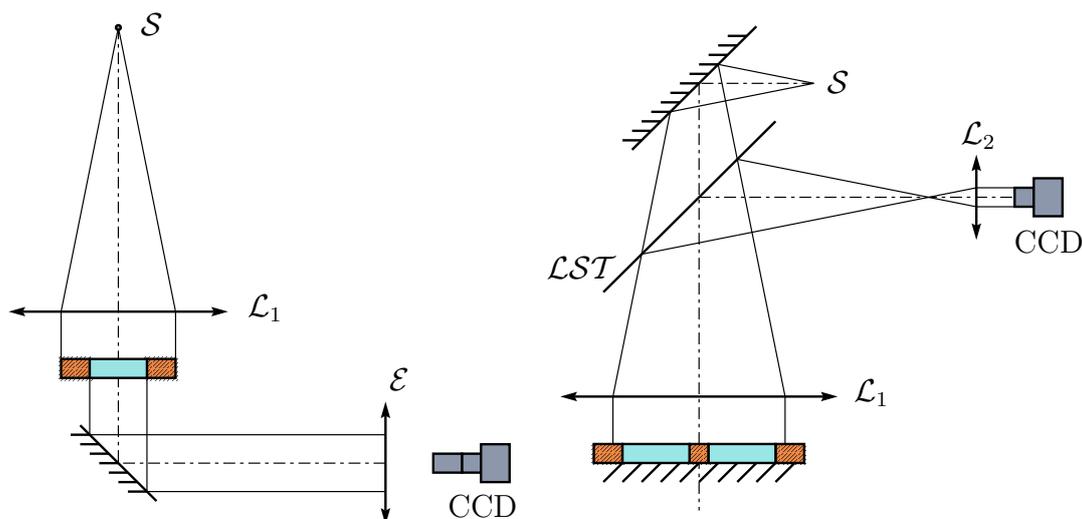


FIG. 2.7 – Schémas des montages ombroscopiques utilisés.  $S$  : source ponctuelle,  $\mathcal{L}_1$  : lentille de grande focale et grand diamètre, CCD : caméra CCD. A gauche : montage indirect (cellules rectangulaire et annulaire),  $\mathcal{E}$  : écran. A droite : montage direct (cellule 2D «LOTUS»),  $\mathcal{L}_2$  : lentille de courte focale,  $\mathcal{LST}$  : lame semi-transparente.

La caméra est reliée, via une carte d'acquisition numérique, à un ordinateur qui enregistre le signal avec une fréquence  $f_e$  bien déterminée, sous-multiple de la fréquence de trame de la caméra (25 Hz).  $f_e$  est choisie de sorte à respecter le critère de Shannon, sans pour autant sur-échantillonner inutilement le signal. Il est aussi possible de prendre des clichés « instantanés » à la demande de l'utilisateur. Afin d'économiser en temps de transfert et/ou de ne pas acquérir des informations inutiles, seul le signal des pixels situés sur des lieux géométriques simples est conservé, pour réaliser ce que l'on appelle des *diagrammes spatio-temporels*. Dans le cas de la cellule rectangulaire, le lieu géométrique sera une ligne coïncidant avec le grand axe de symétrie de la cellule (donc le plus loin des ménisques possible). Dans le cas de la cellule cylindrique « disque », il s'agira de rayons, diamètres et périmètres. Le logiciel qui réalise toutes ces opérations et bien d'autres encore a été conçu au laboratoire par Cécile Gasquet, toujours attentive, même aux requêtes les plus farfelues. Un exemple de diagramme spatio-temporel « brut » obtenu par la chaîne d'acquisition est observable sur la figure 2.8, en bas à gauche.

## 2.4 Analyse des signaux

Nous allons détailler ici les outils permettant d'avoir accès aux quantités locales caractérisant les ondes à partir des diagrammes spatio-temporels; un exposé de la technique suivante utilisée dans un cas très proche peut être trouvé dans l'article de Kolodner et Williams (1990). Les directions des lignes et colonnes représentent dans toute la suite l'es-

pace et le temps sur les diagrammes. Notons  $a_r(x, t)$  un diagramme brut, où  $(x, t)$  prennent des valeurs discrètes dans  $[0, L] \times [0, T]$ . Les directions  $x$  et  $t$  jouent des rôles parfaitement symétriques au niveau des traitements; néanmoins en pratique, nous les utiliserons de manière non symétrique en fonction du diagramme (lieu géométrique avec conditions limites périodiques ou pas) et de la quantité recherchée (précision désirée en fréquence ou nombre d'onde).

### 2.4.1 Recherche de la fréquence

Après transformation de Fourier<sup>7</sup>  $a_r(x, \omega)$  d'une colonne  $x$ , nous avons accès à la densité spectrale de puissance  $S(x, \omega) = |a_r(x, \omega)|^2$ . Les fonctions  $a_r(x, \omega)$  et  $S(x, \omega)$  sont paires en  $\omega$  car le signal de départ est réel. Le pic principal du spectre nous donne la fréquence  $f_0$  et nous pouvons repérer les éventuelles harmoniques du signal et ses modulations. Afin d'augmenter le rapport signal sur bruit des spectres, nous moyennons un grand nombre d'entre eux réalisés sur différentes colonnes du diagramme, comme expliqué sur la figure 2.9:

$$S(\omega) = \int S(x, \omega) dx$$

Notons que cette opération est différente de celle visant à moyennner d'abord les transformées de Fourier, puis prendre le module du résultat.

La recherche du nombre d'onde  $k_0$  s'effectue de manière analogue en permutant lignes et colonnes. Dans la suite, nous continuons les descriptions à l'aide de la fréquence.

Nous verrons plus loin que des valeurs plus précises de  $\omega_0$  et  $k_0$  sont obtenues après transformée de Hilbert.

### 2.4.2 Transformée de Hilbert et filtrage

Une fois la fréquence  $f_0$  de la porteuse des ondes déterminée, une transformée de Hilbert associée à un filtrage est appliquée dans cette même direction à l'ensemble du diagramme. Le signal «brut» réel, qui peut être écrit pour le mode principal:

---

7. Nos définitions sont les suivantes:

$$\begin{aligned} a_r(x, \omega) &= \int a_r(x, t) e^{-i\omega t} dt = \int a_r(x, t) e^{-2i\pi f t} dt = a_r(x, f) \\ a_r(x, t) &= \int a_r(x, f) e^{+2i\pi f t} df = \frac{1}{2\pi} \int a_r(x, \omega) e^{+i\omega t} d\omega \\ a_r(k, t) &= \int a_r(x, t) e^{-ikx} dx \quad a_r(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int a_r(k, t) e^{+ikx} dk \end{aligned}$$

où les intégrales sont prises sur tout l'espace accessible à la variable d'intégration.  $f$  est la fréquence,  $\omega = 2\pi f$  la pulsation et  $k$  le nombre d'onde dans la direction  $x$ . Comme nos signaux sont discrets en espace et en temps, les intégrales sont remplacées par des sommes finies.

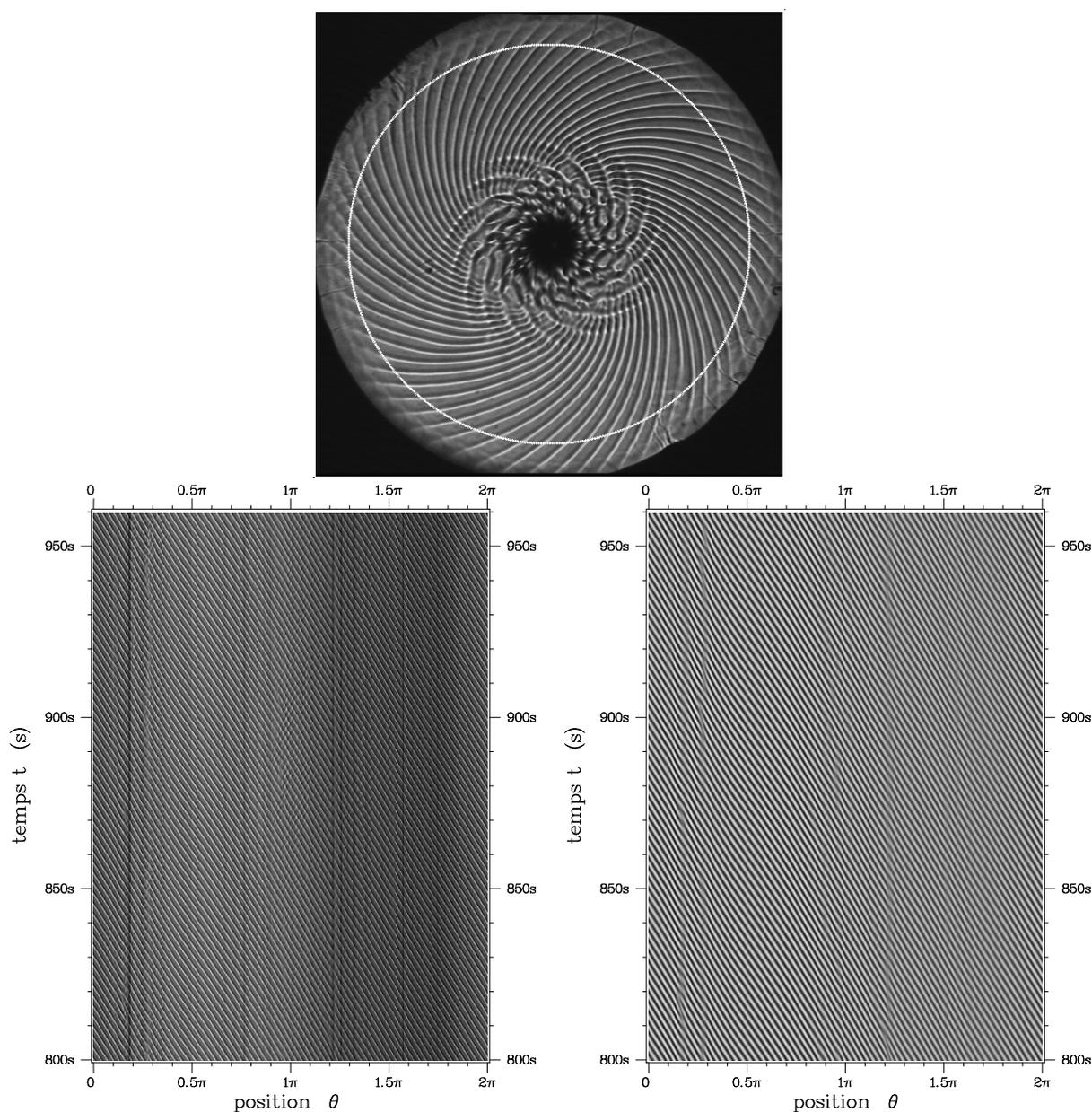


FIG. 2.8 – Exemple de diagramme spatio-temporel. En haut : cliché ombroscopique représentant l'état étudié (ici, deux spirales en contrarotation pour  $h = 1,2$  mm et  $\Delta T = 19$  K dans la cellule LOTUS) ; la ligne blanche symbolise la ligne d'acquisition (un cercle). En bas : diagrammes spatio-temporels représentant le signal ombroscopique en fonction de la position sur la ligne d'acquisition (angle  $\theta$ ) et du temps (seules les lignes entre  $t = 800$  s et 960 s sont représentées pour des raisons de clarté) ; la fréquence d'acquisition est de 5 Hz. A gauche : diagramme brut, juste après son acquisition. A droite : diagramme filtré en temps, puis en espace de sorte à isoler l'onde gauche, majoritaire (cf figure 2.9).

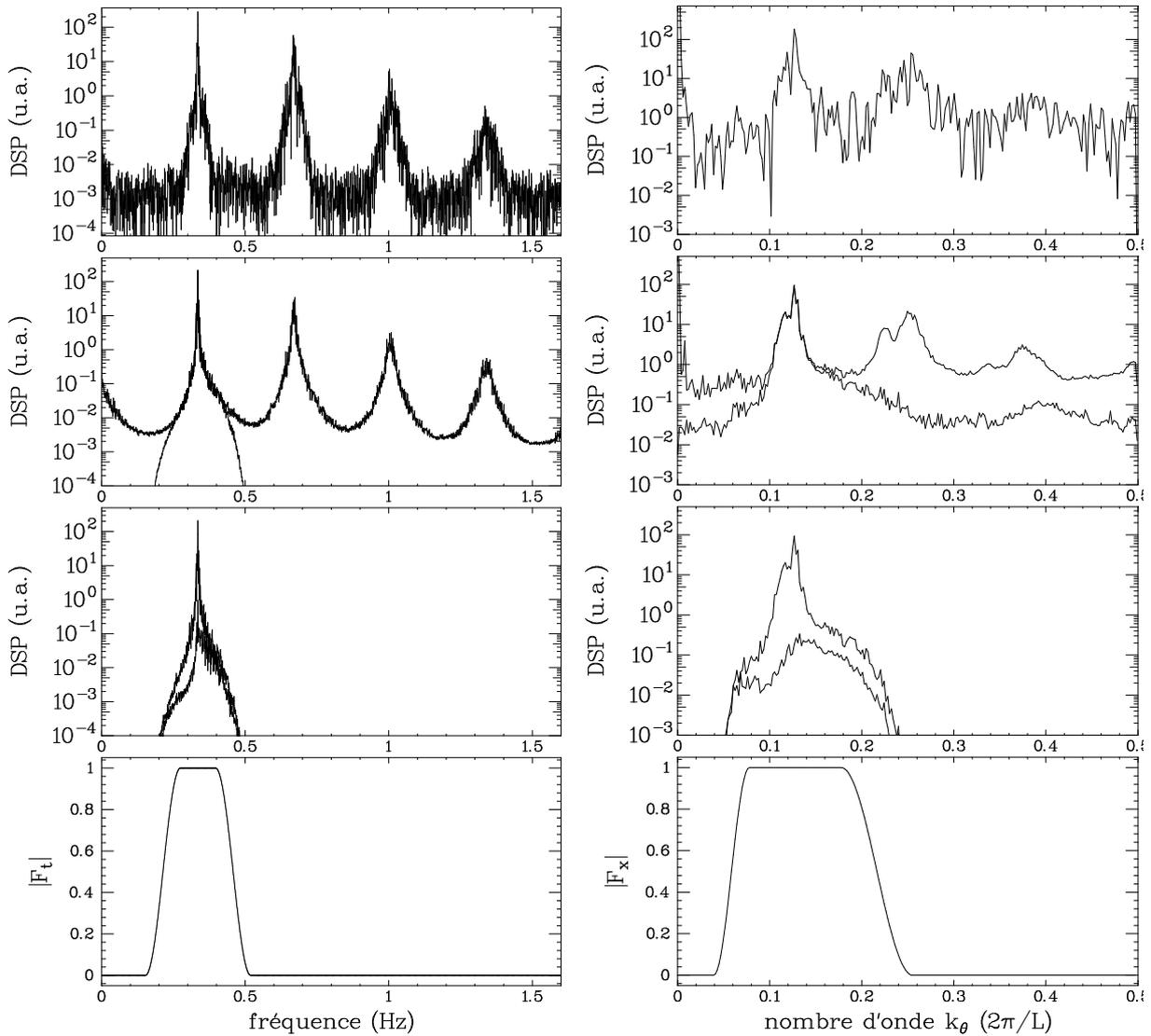


FIG. 2.9 – Spectres issus du diagramme de la figure 2.8. Première ligne : spectre temporel brut sur la colonne 100 ( $\theta = 1,23$ ) et spectre spatial brut sur la ligne  $t = 900$  s. Deuxième ligne : spectres moyennés avant et après le premier filtrage en temps. Troisième ligne : spectres moyennés après le second filtrage en espace séparant les ondes majoritaire (gauche) et minoritaire (droite). Dernière ligne : filtre utilisé en temps et en espace. Noter par exemple que l'onde minoritaire n'a pas exactement la même fréquence que l'onde majoritaire, et que cela conduit à un pic plus large dans le spectre brut.

$$a_r(x, t) = A_r(x, t) \cos(\omega(x, t)t \pm k(x, t)x)$$

est ainsi transformé en signal complexe équivalent :

$$a_c(x, t) = A_c(x, t) e^{i(\omega(x, t)t \pm k(x, t)x)} \quad \text{avec} \quad A_r = \Re[A_c(x, t)]$$

La transformée de Hilbert correspond à un effacement des fréquences négatives. Il s'agit donc d'un filtre linéaire particulier appliqué au signal brut  $a_r(x, t)$ . En tant que filtrage linéaire, il peut être interprété comme une convolution du signal de départ avec une fonction de transfert, i.e., une multiplication dans l'espace de Fourier :

$$a_c(x, \omega) = a_r(x, \omega)H_0(\omega)$$

où  $H_0(\omega)$  est une version particulière de la fonction d'Heavyside qui s'annule à l'origine :

$$H_0 : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega \leq 0 \end{cases}$$

La fréquence nulle est effacée car elle correspond à la valeur moyenne du signal le long de la colonne  $x$ , ce qui n'a pas de sens physique dans notre cas<sup>8</sup>.

$$a_r(x, \omega = 0) = \langle a_r(x, t) \rangle_{t \in [0, T]} \Rightarrow a_c(x, \omega = 0) = 0$$

Nous profitons de la transformée de Hilbert pour appliquer un second filtre au signal (deux filtres linéaires commutent) afin d'éliminer la partie du signal hors de notre propos : les harmoniques du signal de l'onde, les signaux parasites non stationnaires (éventuelles ondes de gravité...) et le plus de bruit possible :

$$a_f(x, \omega) = a_c(x, \omega)F_t(\omega) = a_r(x, \omega)(F_t.H_0)(\omega)$$

Le choix du filtre  $F_t(\omega)$  et sa construction sont détaillés dans le paragraphe suivant.

### 2.4.3 Choix des filtres

A distance finie du seuil d'apparition des ondes, la fréquence est distribuée autour de la valeur  $f_0$ , ce qui correspond à un paquet d'onde dans l'espace de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{A}(\omega) e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \hat{A} \simeq 0 \quad \text{si } \omega \text{ est très différent de } \omega_0$$

---

8. Cette valeur moyenne correspond en fait à l'éclairage moyen du pixel  $x$  au cours du temps. La distribution spatiale de cette valeur reflète l'inhomogénéité spatiale de l'éclairage incident, la présence de poussière sur les lentilles et miroirs, les déviations du faisceau par l'écoulement de base — avec où sans rouleaux stationnaires corotatifs —, et éventuellement la présence d'autres structures stationnaires.

La largeur du paquet d'onde traduit la richesse du signal et doit être conservée dans nos études. Ainsi, le filtrage doit laisser passer un certain nombre de modes : le filtre passe-bande choisi a une largeur adaptée à celle du pic visible sur le spectre. A cette fin, nous utilisons un filtre linéaire réel ; nous avons rédigé une routine permettant de construire des filtres laissant entièrement passer une bande de modes tout en ayant des bords « doux » — le filtre est dérivable — afin de minimiser la pollution du signal filtré par des résidus de convolution. De tels filtres sont illustrés sur la figure 2.9.

#### 2.4.4 Second filtrage

Dans le cas où sont présentes deux ondes propagatives de sens opposé, un second filtrage est nécessaire pour en séparer les signaux. Si la transformée de Hilbert a été effectuée en temps, le second filtrage doit opérer en espace :

$$a'_f(k, t) = a_f(k, t)F_x(k)$$

où  $F_x$  ne laisse passer que les nombres d'onde d'un signe particulier, avec éventuellement une sélection passe-bande supplémentaire.  $F_x$  est construit par la même routine que  $F_t$ .

#### 2.4.5 Quantités mesurées

Après transformation de Hilbert et second filtrage, nous avons accès à la grandeur suivante :

$$a'_f(x, t) = A(x, t)e^{i\phi(x, t)}$$

pour l'onde droite et pour l'onde gauche. Ceci nous donne accès aux quantités réelles suivantes :

- l'amplitude locale  $A(x, t) = |a'_f(x, t)|$
- le nombre d'onde local  $k(x, t) = \frac{\partial\phi}{\partial x} = k_0 + q(x, t)$
- la fréquence locale  $\omega(x, t) = \frac{\partial\phi}{\partial t} = f_0 + f(x, t)$

Chacune de ces quantités se présente comme un diagramme spatio-temporel réel et peut éventuellement faire l'objet d'un traitement analogue à celui subi par le diagramme brut. Cela nous permet par exemple d'avoir accès à l'amplitude, au nombre d'onde et à la fréquence d'une modulation d'amplitude, ou de phase.



## Chapitre 3

# Transition convectif/absolu pour les instabilités oscillantes 1D

LA STABILITÉ D'UN SYSTÈME PHYSIQUE est généralement étudiée grâce au signe d'un taux de croissance temporel (voir Chandrasekhar (1961)). Par exemple, la stabilité linéaire de la position d'équilibre d'un pendule est donnée par le signe du taux de croissance temporel d'une petite perturbation solution de l'équation d'évolution linéarisée autour du point d'équilibre en question. Nous avons utilisé cette approche en procédant à l'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de base thermocapillaire dans le chapitre 1, § 1.3. Mais la notion de taux de croissance temporel dépend directement du référentiel spatio-temporel utilisé pour formaliser le problème. Une fois ce constat établi, la notion de stabilité peut être affinée. L'instabilité est ainsi qualifiée de convective si le taux de croissance temporel est positif aux temps longs dans un référentiel particulier mais pas dans celui du laboratoire. De façon complémentaire, elle est qualifiée d'absolue si le taux de croissance est positif dans le référentiel du laboratoire. La figure 3.1 illustre les différents cas qui se présentent à l'ordre linéaire. Nous voyons donc apparaître l'importance du référentiel particulier dit « du laboratoire », dans lequel l'instabilité a la possibilité d'être convective, c'est à dire en quelque sorte, fugitive.

Lors d'expériences, y compris d'expériences de pensée, un tel référentiel se dégage en effet toujours : dans le cas d'un sillage par exemple, l'obstacle est fixe dans ce référentiel, mais l'écoulement advecte l'instabilité et l'on pressent l'intérêt d'un second référentiel, mobile par rapport à celui du laboratoire. Dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard, nous avons une cellule finie dont les bords sont fixes dans le référentiel du laboratoire ; si la structure qui apparaît est stationnaire, aucun autre référentiel ne peut-être mis en avant, et l'instabilité n'est jamais convective. Au contraire, une instabilité oscillante en ondes propagatives est convective au voisinage de son seuil. Une description rigoureuse des instabilités linéaires convectives/absolues a été produite par Huerre et Monkewitz (1990) à l'aide de fonctions de Green décrivant l'évolution spatio-temporelle d'une perturbation localisée en temps et en espace (paquet d'onde) en fonction de la vitesse relative du référentiel d'étude par rapport au référentiel du laboratoire. L'aspect convectif ou absolu apparaît alors comme

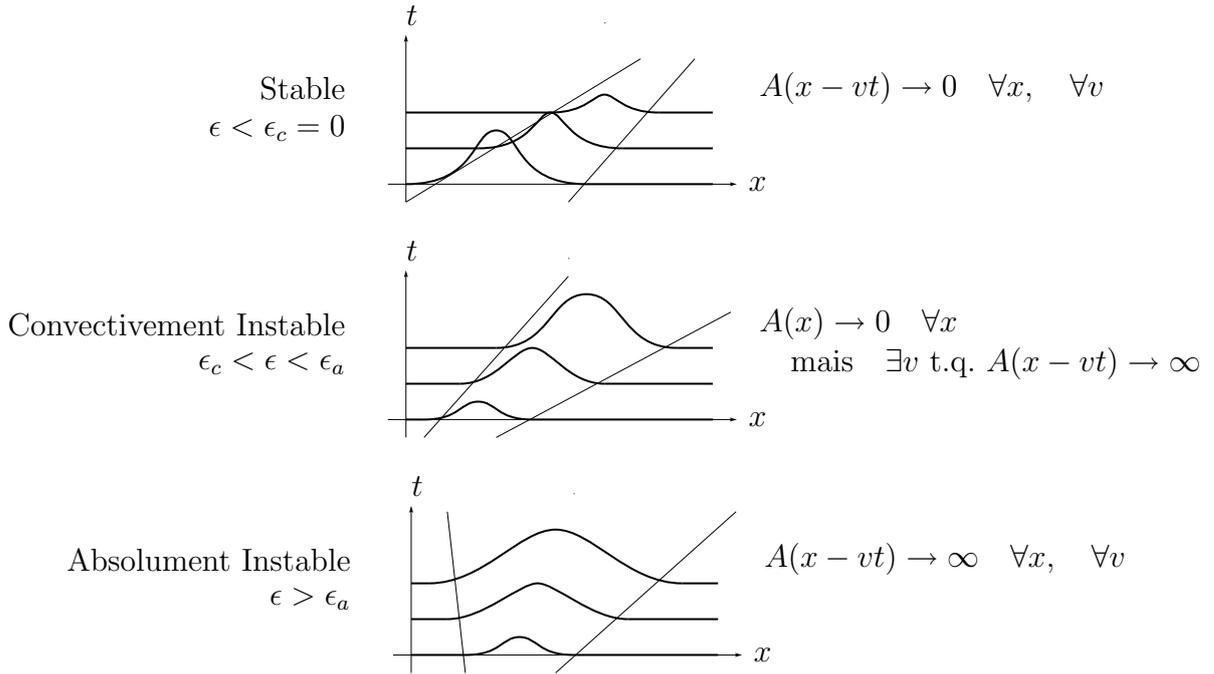


FIG. 3.1 – Représentations schématiques de l'évolution d'une perturbation d'un état stable, convectivement instable et absolument instable, dans le référentiel du laboratoire. La stabilité linéaire d'une perturbation infinitésimale est ici considérée. Des différences existent si les effets non-linéaires sont pris en compte (perturbation forte et saturée). Le domaine spatial considéré peut être indifféremment fini ou infini.

la dépendance ou non du taux de croissance effectif avec la vitesse relative du référentiel et cette distinction n'a un sens que dans les systèmes où l'invariance galiléenne est brisée.

Ce formalisme s'est révélé très riche pour la description des instabilités survenant dans des systèmes *ouverts*. En hydrodynamique notamment, la présence d'un écoulement moyen — cas des sillages par exemple — autorise l'instabilité à être convective pour les plus petites valeurs du paramètre de contrôle avant d'être absolue pour les plus grandes valeurs. Une variation spatiale du paramètre de contrôle peut de plus permettre à l'instabilité d'être absolue au voisinage immédiat de l'obstacle, puis convective en aval.

Dans le cas des systèmes *fermés*, i.e., sans advection moyenne, la distinction entre caractère absolu et convectif d'une instabilité en ondes propagatives se révèle tout aussi intéressante. En effet, si l'instabilité donne naissance à des ondes de vitesse de groupe finie au seuil, cette instabilité est toujours convective au seuil. Quelle que soit la vitesse de groupe, il lui est toujours possible d'advecter des perturbations dont le taux de croissance, variant comme  $\epsilon$ , est aussi petit que l'on veut pour peu que l'on soit suffisamment près du seuil. Ce caractère convectif a, comme nous le verrons, de profondes conséquences sur les possibilités d'observation de la structure.

L'étude présentée ici est celle d'un système *fermé*, sans flux de matière imposé par l'extérieur. Parmi les systèmes équivalents produisant des ondes propagatives, nous pouvons citer l'écoulement de Taylor-Dean (Laure et Mutabazi (1994), Bot *et al.* (1998)) où des ondes apparaissent par bifurcation primaire. De plus nombreux systèmes produisent des ondes propagatives par bifurcation secondaire ; citons l'instabilité secondaire oscillatoire en convection de rayleigh-Bénard, ainsi que l'écoulement de Taylor-Couette lorsqu'apparaissent des rouleaux propagatifs (wavy vortex flow) par déstabilisation des rouleaux de Taylor. Dans ce dernier cas, Tagg *et al.* (1990) ont d'ailleurs distingué la nature convective au seuil de l'instabilité.

Nous nous limitons au cas unidimensionnel des cellules « rectangle » et « anneau » et nous étudions donc la propagation des ondes dans la direction perpendiculaire à l'écoulement de base, i.e., la direction suivant laquelle il n'existe à priori aucun type d'advection (cf principe de Curie, § 1.1). Cette constatation nous permet d'utiliser le formalisme d'une équation d'amplitude de Ginzburg-Landau complexe.

## 3.1 Instabilité primaire en ondes hydrothermales

Dans un premier temps, nous reproduisons et complétons les études analytiques du modèle de Ginzburg-Landau complexe. Nous présenterons ensuite les résultats obtenus expérimentalement à la lumière de ce modèle : le cas simple des conditions limites périodiques précède celui, plus riche, de la cellule de taille finie. Un dernier paragraphe est consacré aux interprétations de ces résultats ; nous y parlons notamment d'autres raisons possibles d'existence d'un mode global dans une boîte finie.

Nous notons dans tout ce chapitre  $L = L_{\perp}$  la taille de la boîte étudiée ; il s'agit de la dimension dans la direction perpendiculaire au gradient de température. De même, nous noterons  $y$  la variable d'espace dans cette direction,  $x$  n'intervient plus dans tout le chapitre.

### 3.1.1 Cas de l'équation de Ginzburg-Landau complexe

L'équation d'amplitude que nous utilisons a été introduite en § 1.4.2 dans le cas de deux ondes contra-propagatives. Ici, pour des raisons de simplicité, nous ne nous intéressons qu'au cas d'une onde unique, que nous supposons être (par exemple) une onde droite dont l'amplitude  $A$  vérifie :

$$\tau_0 \left( \frac{\partial A}{\partial t} + v_g \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \epsilon(1 + ic_0)A + \xi_0^2(1 + ic_1)\partial_{yy}A + g(1 + ic_2)|A|^2 \quad (3.1)$$

Deissler (1985) a le premier étudié l'effet de la vitesse de groupe  $v_g$  vue comme une vitesse d'advection dans le cas d'un écoulement sans advection extérieure imposée. C'est tout naturellement qu'il a utilisé une équation modèle du type CGL avec le terme  $v_g \partial A / \partial y$ . L'origine de ce terme n'importe pas ; son interprétation étant — de façon équivalente — soit la présence d'une advection moyenne forcée par l'extérieur (écoulement moyen, exemple :

un sillage avec une vitesse  $v_g$ ), soit l'existence d'une vitesse de groupe (dans le cas d'une instabilité en ondes propagatives). Nous nous restreignons dans toute la suite au cas où  $v_g \in \mathbb{R}$ ; le cas complémentaire  $v_g \in i\mathbb{R}$  a été étudié par Rovinsky *et al.* (1996) comme résultant d'un écoulement différentiel.

L'existence de  $c_1$  et  $c_2$  complique un peu la dynamique par rapport au cas d'une instabilité stationnaire décrite par une équation de Ginzburg-Landau réelle (IRGL). Les calculs pour le premier seuil sont cependant encore très simples; nous les reproduisons ici dans un contexte un peu différent de celui des articles originaux de Deissler (1985, 1987, 1989), en insistant comme Tobias *et al.* (1998) sur l'effet de la géométrie finie.

Comme nous l'avons déjà suggéré, la distinction entre instabilité convective et absolue a un sens dans le cas d'une boîte finie, mais pas en géométrie périodique. La spécification des conditions aux limites est un point crucial de l'analyse du problème.

### Forme des solutions et géométrie

Nous allons résoudre l'équation de CGL *linéarisée*, puis entière, dans chacune des trois géométries: infinie, finie périodique, finie non périodique. Remarquons que nous ne considérons que le problème d'une onde unique, mais cela n'est pas limitatif dans notre cas. En effet, l'équation CGL à l'ordre linéaire est la même dans le cas d'une onde unique (équation unique) ou de deux ondes (deux équations non couplées à l'ordre linéaire). De plus, du fait du couplage non-linéaire destructif observé au seuil des ondes hydrothermales (cf § 3.1.2), le problème non-linéaire est lui aussi limité à l'étude d'une seule équation pour  $A$  si l'on ne regarde que l'onde dominante  $A$  et si l'on suppose  $B(x, t) = 0$ . Le cas d'une instabilité en ondes stationnaires requiert quant à lui l'analyse simultanée de deux équations CGL couplées; c'est le cas notamment des travaux de Neufeld *et al.* (1996) qui ont montré que la transition ondes stationnaires/onde unique était reliée à la transition convectif/absolu.

Notons qu'en toute rigueur, le cas de la géométrie finie requiert dès l'ordre linéaire la prise en compte de deux équations car de deux ondes. Cela est dû aux conditions aux limites utilisées qui peuvent coupler  $A$  et  $B$ , notamment grâce à un coefficient de réflexion (cf § 3.1.4).

**Géométrie infinie - ordre linéaire** Il est naturel de chercher une solution sous la forme d'une onde plane. Nous obtenons ainsi une relation de dispersion :

$$A(y, t) = A_0 e^{iqy - \omega t} \quad \text{avec} \quad \omega = v_g q + \xi_0^2 \tau_0^{-1} c_1 q^2 \quad (3.2)$$

avec

$$q \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad q^2 < \epsilon$$

ce qui traduit l'existence d'un continuum de solutions possibles dès que  $\epsilon > 0$ .

**Géométrie infinie - solutions non-linéaires** L'équation CGL admet un ensemble de solutions *de Stokes* qui s'expriment ainsi (voir par exemple Cross et Hohenberg (1993)) :

$$A(y, t) = A_0 e^{iqy - \omega t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} gA_0^2 &= \epsilon - \xi_0^2 q^2 \\ \tau_0 \omega &= \tau_0 v_g q + \xi_0^2 (c_1 - c_2) q^2 + c_2 \epsilon \end{cases} \quad (3.3)$$

et toujours

$$q \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad q^2 < \epsilon$$

Ce sont tout simplement des ondes planes (3.2) dont l'amplitude et la fréquence dépendent de  $\epsilon$  et  $q$ .

**Conditions limites périodiques - ordre linéaire** Il est alors naturel de chercher une solution sous la forme d'une série de Fourier (en nombres d'ondes), ce qui non seulement tient bien compte de la périodicité spatiale mais aussi rapproche le problème du cas de la géométrie infinie. Nous pouvons donc nous attendre à trouver un ensemble de solutions compris dans l'ensemble des solutions ondes planes (3.2), mais plus réduit, de sorte à tenir compte de l'aspect *discret* et non plus continu des nombres d'ondes permis. La différence par rapport au cas de la géométrie infinie se résume ainsi :

$$q = \frac{n\pi}{L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

Les nombres d'ondes permis sont maintenant *quantifiés*.

**Conditions limites périodiques - solutions non-linéaires** Les solutions du problème non linéaire sont encore analogues à celles de la géométrie infinie, i.e., des solutions de Stokes (3.3), mais avec la quantification énoncée ci-dessus. On a donc un sous-ensemble discret de solutions de Stokes.

**Conditions limites finies - ordre linéaire** Dans le cas d'un domaine de longueur  $L$  sans périodicité, nous devons spécifier des conditions aux limites  $y = 0$  et  $y = L$ . Nous pouvons par exemple prendre des conditions aux limites de type Dirichlet<sup>1</sup> (proches des faits expérimentaux) :

$$A(y) = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y = L$$

Nous résolvons le problème en recherchant une solution du type onde plane, mais avec un nombre d'onde complexe. Nous autorisons ainsi l'existence d'un taux de croissance spatial, inutile et inconvenant dans les cas infinis et périodiques ; nous reprenons ainsi les calculs de Tobias *et al.* (1998) mais avec une équation dimensionnée. Nous trouvons que

---

1. Le cas de conditions de Neumann est aussi possible :  $A_y = 0$  en  $y = 0$  et  $y = L$ . Cela modifie peu la structure des résultats.

les solutions n'existent que pour certaines valeurs discrètes  $\{\epsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$  de  $\epsilon$ . La solution non nulle qui apparaît pour la plus faible valeur  $\epsilon_1 \equiv \epsilon_f$  du paramètre de contrôle s'écrit :

$$A(y, t) = A_0 f(y) e^{i\omega_f t} \quad \text{avec} \quad f(y) = e^{\xi_a(1-ic_1)y} \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (3.4)$$

où :

$$\begin{aligned} \epsilon_f &= \epsilon_a + \frac{\xi_0^2 \pi^2}{L^2}, & \text{avec} & \quad \epsilon_a = \frac{\tau_0^2 v_g^2}{4\xi_0^2(1+c_1^2)} \\ \omega_f &= \omega_a + \frac{(c_0 - c_1)}{\tau_0} \frac{\xi_0^2 \pi^2}{L^2}, & \text{avec} & \quad \omega_a = \frac{(c_0 + c_1)}{\tau_0} \epsilon_a \\ \xi_a &= \frac{\tau_0 v_g}{2\xi_0^2(1+c_1^2)} \end{aligned}$$

Le terme  $\epsilon_a$  est d'ordre 1 car la vitesse de groupe est d'ordre 1. Il traduit le décalage du seuil dû au caractère convectif de l'instabilité au seuil et à l'attente de la transition convectif/absolu. Par contre, la différence  $\epsilon_f - \epsilon_a$  est d'ordre  $1/L^2$  et elle ne signale que les effets de discrétisations, très réduits dans le cas des grandes boîtes.

Dans les cas qui nous intéressent (anneau et rectangle), la taille du système  $L$  est très grande<sup>2</sup> devant  $\xi_0$  et l'on peut donc négliger les effets de discrétisation. Nous confondons ainsi dans la suite  $\epsilon_f$  avec  $\epsilon_a$  ainsi que  $\omega_f$  avec  $\omega_a$ .

Aucune solution non nulle, i.e. aucune onde, n'existe tant que  $\epsilon$  n'a pas atteint la valeur  $\epsilon_f \simeq \epsilon_a$ , finie, indépendante de  $L$ . En ce sens, la solution trouvée pour cette valeur de  $\epsilon$  constitue un *mode global*, comme défini par Huerre et Monkewitz (1990). Il est remarquable que nous trouvons le seuil d'existence des ondes à la valeur  $\epsilon_a$  qui correspond à la transition convectif/absolu des ondes sans invoquer l'analyse particulière (Deissler (1985) par exemple) que requiert l'étude de cette transition.

Ce mode global qui existe pour  $\epsilon_f \simeq \epsilon_a$  possède une enveloppe spatiale particulière, produit d'un sinus par une exponentielle. Le sinus permet de répondre aux conditions aux limites imposées alors que l'exponentielle traduit l'advection par la vitesse de groupe. Lorsque  $v_g = 0$ , le taux de croissance spatial  $\xi_a$  s'annule et l'exponentielle disparaît ; la distinction convectif/absolu n'existe plus. Du coup, le décalage de fréquence  $\omega_a$  et le décalage de nombre d'onde  $-ic_1 \xi_a$  s'annulent aussi.

---

2. Rappelons :  $\xi_0 \simeq 5.1$  mm.  $L=502$  mm (resp. 180 mm) pour l'anneau (resp. le rectangle). Donc

$$\left(\frac{\xi_0 \pi}{L}\right)^2 = 10^{-3} \quad (\text{resp. } 8.10^{-3})$$

**Conditions limites finies - analyse faiblement non-linéaire** Les solutions du problème non-linéaire sont plus difficiles à trouver que dans les cas précédents à cause de la translation du seuil à  $\epsilon_a$ ; nous pouvons procéder à une analyse faiblement non-linéaire autour de la première de ces solutions, obtenue pour  $\epsilon_f \simeq \epsilon_a$ . Nous n'avons plus de famille continue de solutions comme dans les cas précédents.

Au voisinage de  $\epsilon_f$ , nous pouvons calculer :

$$(1 + ic_0)(\epsilon - \epsilon_f) - i\tau_0(\omega(\epsilon) - \omega_f) = 48\pi^4(1 + c_1^2)^5 g|A_0|^2 \left( \frac{\xi_0^2}{\tau_0 v_g L} \right)^5$$

Nous trouvons donc les comportements critiques suivants, donnés par Tobias *et al.* (1998)<sup>3</sup>, Chomaz et Couairon (1999) :

$$\begin{aligned} A_0(\epsilon, k) &\propto (\epsilon - \epsilon_f)^{1/2} \quad \text{pour } |\epsilon - \epsilon_f| = \mathcal{O}(L^{-5}) \\ \omega(\epsilon) - \omega_f &= (c_0 - c_2)\tau_0^{-1}(\epsilon - \epsilon_f) \end{aligned}$$

L'apparition du mode global est donc supercritique et le décalage de fréquence proportionnel à  $\epsilon - \epsilon_f$ . Ces résultats sont accompagnés de leur zone de validité en  $\epsilon$ , qui est en  $L^{-5}$ , donc a priori très réduite, voire inobservable.

### Instabilité de l'état de repos

Les solutions non-triviales de CGL mises en avant dans le paragraphe précédent correspondent dans l'espace réel à des ondes. La solution triviale  $A(y, t) = 0$  correspond quant à elle à l'état de base, où plus précisément à l'absence d'ondes dans le formalisme des équations d'amplitudes; nous l'appellons *état de repos*. Nous allons maintenant chercher les conditions de stabilité de cette solution. Gardons néanmoins présent à l'esprit que si cette dernière se déstabilise, c'est pour former une solution non-triviale telle que celles énoncées précédemment; de plus, la stabilité linéaire de l'état de repos est donnée par le taux de croissance d'une perturbation ajoutée à la solution  $A = 0$ , c'est à dire d'une solution de l'équation CGL linéarisée que nous avons déjà résolue. La fréquence doit dorénavant être complexe, mais elle satisfait la même relation de dispersion (3.2).

#### - Conditions limites rejetées à l'infini

- L'état de repos  $A = 0$  est instable (convectivement) sitôt que  $\epsilon > 0$ .
- L'instabilité absolue, détectée sur une perturbation de nombre d'onde complexe, arrive quant à elle pour  $\epsilon > \epsilon_a$ .

#### - Conditions limites périodiques (CLII)

- Bien que l'état de repos  $A = 0$  soit instable (convectivement) sitôt que  $\epsilon > 0$ , il faut attendre une valeur de  $\epsilon$  suffisamment grande pour autoriser un nombre d'onde multiple

---

3. L'article de Tobias *et al.* (1998) contient une petite erreur dans l'expression du coefficient de proportionnalité de l'amplitude, mais cela ne change pas du tout la conclusion.

de  $\pi\xi_0/L$  qui signera la nouvelle solution stable ; Tuckerman et Barkley (1990) ont étudié en détail les bifurcations résultant d'une telle discrétisation. On s'attend donc à un mode global pour une valeur de  $\epsilon$  d'au plus  $(\pi\xi_0/L)^2$ . Ces effets sont pour nous tout à fait négligeables.

- L'instabilité peut toujours être qualifiée d'absolue car le taux de croissance effectif d'une perturbation est positif en tout point, avec une éventuelle composante oscillant avec la période  $L/v_g$ . Le référentiel du laboratoire n'a pas de rôle plus particulier qu'un autre référentiel car tout changement de référentiel laisse le problème invariant ; la vitesse de groupe peut donc être éliminée.

#### - Conditions limites finies

- Bien que l'état de repos soit instable dès que  $\epsilon > 0$ , aucune solution autre que  $A = 0$  n'existe avant l'installation d'un mode global à  $\epsilon_f \simeq \epsilon_a$ . La zone  $[0, \epsilon_f]$  est une zone d'instabilité convective.

- Rappelons que comme nous travaillons avec de grandes boîtes, nous négligeons les effets de discrétisation :  $\epsilon_a$  et  $\epsilon_f$ . L'apparition du mode global correspond au franchissement de la limite convectif/absolu établie dans le cas de la géométrie infinie.

#### - Conditions limites finies, cas de deux ondes

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que le cas d'une onde unique et ainsi étudié une équation de Ginzburg-Landau pour l'amplitude  $A$ . Or comme nous l'avons évoqué au premier chapitre et allons le voir en § 3.1.2 ci-dessous, les ondes hydrothermales apparaissent par paire {onde droite, onde gauche} et il nous faut donc en toute rigueur considérer le cas de deux ondes couplées non-linéairement par deux équations d'amplitude (cf 1.4.2).

Néanmoins, le couplage observé entre les deux ondes contra-propagatives est du type destructif : l'onde majoritaire se nourrit de l'onde minoritaire. De plus, l'étude que nous avons présentée ci-dessus dans le cas de la boîte finie est essentiellement linéaire : le couplage n'intervient pas dans l'équation. En fait, le seul couplage digne d'intérêt dans notre cas est celui introduit par les conditions aux limites, et il n'intervient donc que dans le cas de la boîte finie non-périodique.

Ce couplage est introduit par l'existence de coefficients de réflexion aux bords de la cellule qui permettent à l'onde incidente sur un bord d'être en partie réémise — réfléchi — sous forme d'onde inverse. Ce mécanisme a été introduit pour la première fois par Cross (1986) et nous discuterons son application à notre cas en § 3.1.4. Notons dès à présent qu'il est ici négligeable, ou du moins que le mécanisme convectif/absolu intervient « avant » et que c'est donc bien ce dernier qui pilote la dynamique au seuil d'apparition des ondes.

### 3.1.2 Cas de l'expérience « anneau »

La hauteur de fluide est dans toute cette section égale à  $1,7 \pm 0,1$  mm. La bifurcation vers le régime d'ondes est supercritique, comme on peut le voir sur la figure 3.2, et la structure qui apparaît possède au seuil 54 ou 55 longueurs d'ondes. Nous en déduisons que

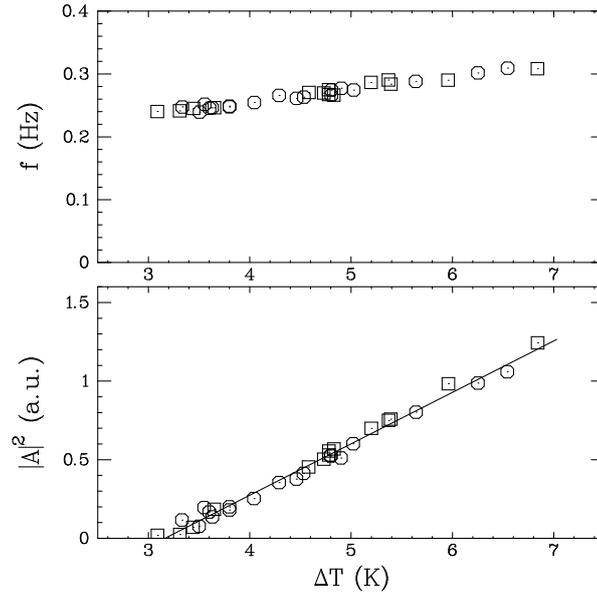


FIG. 3.2 – Evolution de l’amplitude  $A$  (en bas, au carré) et de la fréquence  $f$  (en haut) au voisinage du seuil dans l’anneau pour  $h=1,7$  mm. Ces mesures correspondent à une amplitude strictement homogène dans toute la cellule. Les symboles  $\circ$  et  $\square$  représentent respectivement les modes 54 et 55 car  $54 < Lk_0/2\pi < 55$ . L’ajustement linéaire de  $A^2$  est effectué sur l’ensemble des deux jeux de valeurs.

le nombre d’onde critique  $Lk_0/2\pi$  est compris entre ces deux entiers ; sa valeur en unités usuelles est de  $0,68 \text{ mm}^{-1}$ . Le seuil des ondes hydrothermales est alors mesuré avec une bonne précision grâce aux mesures de l’amplitude des modes 54 et 55 :

$$\Delta T_c = 3,1 \pm 0,1 \text{ K}$$

Cela correspond à un nombre de Marangoni de l’ordre de  $Ma \simeq 2500$ . Cette valeur du seuil nous permet de définir  $\epsilon = (\Delta T - \Delta T_c)/\Delta T_c$  pour la cellule annulaire, mais aussi pour la cellule rectangulaire lorsque celle-ci contient une couche de fluide de même rapport d’aspect  $\Gamma_{\parallel}$  selon  $\nabla T$ , et de même hauteur  $h$ . Ce point est discuté plus loin (§ 3.1.4).

Pour  $\epsilon > 0$ , i.e.,  $\Delta T > \Delta T_c$ , et à proximité du seuil, une onde unique d’amplitude stationnaire et homogène dans la cellule est présente ; la fréquence est finie au seuil (figure 3.2). L’onde minoritaire n’est pas observée. Cette configuration nécessite éventuellement un régime transitoire — de l’ordre de l’heure — pour s’établir, mais représente le seul état le plus stable du système. Bien sûr, l’onde observée est indifféremment une onde droite ou gauche et la symétrie brisée est restaurée en moyenne sur l’ensemble des réalisations. Nous pouvons déduire de ce comportement que le couplage non-linéaire entre les deux ondes contra-propagatives est dans notre cas destructif ; en termes d’équations d’amplitude couplées (cf. § 1.4.2), le coefficient  $\lambda$  doit ainsi être supérieur à l’unité. Des expériences

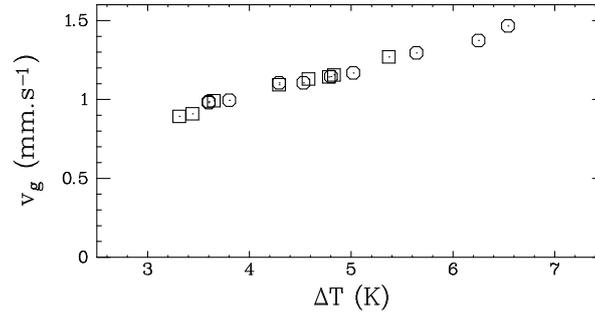


FIG. 3.3 – Evolution de la vitesse de groupe dans l’anneau pour  $h=1,7$  mm. Les symboles  $\circ$  et  $\square$  représentent respectivement les modes 54 et 55.

appropriées (cf. Annexe C) nous donnent la valeur  $\lambda \simeq 1,4$ .

Le nombre d’onde moyen est évidemment discret, mais le nombre d’onde local est uniforme dans la cellule (du moins tant que  $\epsilon < 0,5$  et que les instabilités secondaires n’entrent pas en jeu). Comme nous l’avons dit, sa valeur au seuil hésite suivant les réalisations entre 54 et 55 ; des états homogènes avec d’autres valeurs de  $k$  sont aussi possibles, et sont obtenus soit par perturbations, soit par augmentation de  $\epsilon$  en rencontrant l’instabilité d’Eckhaus (cf. annexe B).

La figure 3.3 illustre le comportement de la vitesse de groupe pour les modes 54 et 55 en fonction de  $\Delta T$  ; cette dernière est mesurée comme la vitesse des perturbations linéaires. Nous notons ainsi que la vitesse de groupe est finie au seuil et augmente légèrement lorsque l’on s’en éloigne. C’est la valeur au seuil qui apparaît dans l’équation d’amplitude ; nous avons ainsi  $v_g = 0.875$  mm/s.

### 3.1.3 Cas de l’expérience « rectangle »

Nous avons utilisé la cellule rectangulaire en réglant  $L_x = 10$  mm, et choisissant  $h=1,7$  mm comme hauteur de travail, de sorte à nous placer exactement dans les mêmes conditions que dans la cellule annulaire. La longueur du canal est réglée à  $L_y = 180$  mm.

Nous observons alors les ondes hydrothermales à partir de  $\Delta T_{\text{exp}} = 3,66$  K  $>$   $\Delta T_c$  ; nous définissons donc le seuil expérimental  $\epsilon_{\text{exp}} = 0,18 >$  0 dans le rectangle. Ce seuil est supérieur à celui mesuré dans l’anneau. Les paragraphes qui suivent décrivent la structure et les comportements critiques observés. Une discussion est proposée dans la section suivante. Une présentation différente peut être trouvée dans Garnier et Chiffaudel (2000a,b).

#### a. Description de la structure

Décrivons en détail l’enveloppe des ondes au seuil et légèrement au dessus. Un cliché typique est reproduit sur la figure 3.4. La figure 3.5 représente les profils d’amplitude  $A$  et

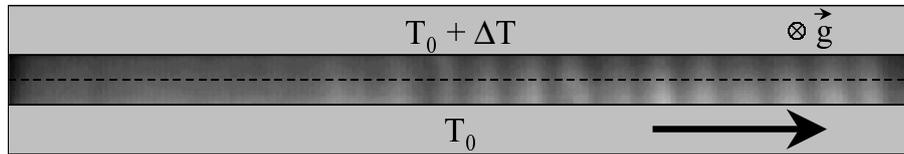


FIG. 3.4 – Cliché ombroscopique typique de la cellule rectangulaire.  $L_x = 10$  mm,  $h = 1,7$  mm,  $\Delta T = 3,8$  K. La ligne d'acquisition est représentée en pointillés (- - -).

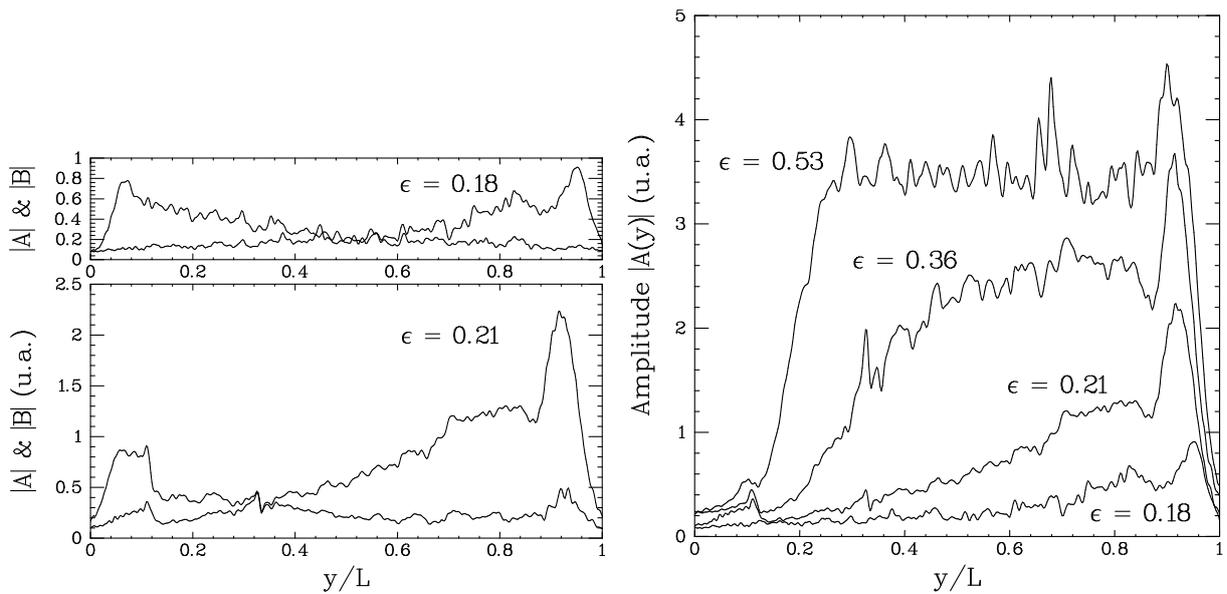


FIG. 3.5 – Profils d'amplitude dans la cellule rectangulaire pour  $h=1,7$  mm,  $L_x=10$  mm,  $L_y=180$  mm. Au seuil ( $\Delta T = 3,66$  K,  $\epsilon = 0,18$ , à gauche en haut), les deux ondes ont sensiblement la même amplitude et la structure est symétrique. Lorsque l'on s'éloigne du seuil, l'une des deux ondes gagne sur l'autre ( $\Delta T = 3,75$  K,  $\epsilon = 0,21$ , à gauche en bas). A droite sont représentés les profils de l'onde dominante exclusivement, pour différentes valeurs de  $\Delta T$  (3,66 K, 3,75 K, 4,20 K et 4,75 K).

$B$  de l'onde droite et de l'onde gauche obtenus après transformée de Hilbert en temps et filtrage en espace pour séparer les deux sens de propagation. Ce dernier filtrage a été choisi de sorte à laisser passer le plus grand nombre de modes possibles et il ne coupe en fait que les très basses valeurs du nombre d'onde ( $|k| < 4\pi/L_y$ ) et les très hautes ( $|k| \gg k_0$ ). Par un souci de clarté, l'onde dominante est présentée comme une onde droite d'amplitude  $A$ , mais le cas inverse est équiprobable. Les ondes n'ont pas une amplitude homogène dans la cellule, mais ont une structure spatiale bien particulière, telle que :

- l'amplitude s'annule (ou presque) aux bords en  $y = 0$  et  $y = L$ .
- les deux ondes co-existent : dans un voisinage de chacun des bords, l'amplitude de l'onde droite (resp. gauche) est suffisamment faible pour que l'onde gauche (resp. droite) ne soit pas non-linéairement « tuée » et donc existe.
- un bord est ainsi source d'onde droite et puits d'onde gauche ; l'autre bord joue le rôle inverse.
- en aval de son bord source, l'amplitude d'une onde croît exponentiellement (zone I). Cette zone est mise en évidence sur la figure 3.6.
- en aval de cette zone de croissance exponentielle, l'onde atteint un plateau d'amplitude qui correspond à la saturation non-linéaire (zone II).
- encore plus en aval, juste avant le bord « puits », l'amplitude de l'onde atteint une valeur maximale, plus forte que la valeur à saturation de la zone II. Nous appellerons cette zone le mode de bord (zone III).

**Etats quasi-périodiques** Nous avons observé, pour des différences de température  $\Delta T$  comprises entre 3,85 K et 4,25 K ( $\epsilon \in [0, 24 ; 0, 38]$ ), des états parfois bi-périodiques. Il s'agit d'états où la position de la source — qui sépare la zone majoritaire d'onde droite de la zone très minoritaire d'onde gauche — oscille spatialement et temporellement. La figure 3.7 illustre le comportement typique d'un tel état, qui est à rapprocher des structures observées par Cross (1986, 1988) et alors nommées « blinking states ».

Notons qu'une bande continue d'états quasipériodiques existe entre 4,08 K et 4,25 K alors qu'en dessous, seuls quelques états ont été observés — avec une oscillation beaucoup plus faible — vers 3,85 K et il est alors possible d'avoir dans cette zone des états « stationnaires » classiques.

Nous n'évoquerons plus dans la suite ces états pour nous concentrer sur les états « stationnaires » dans la région plus proche du seuil ( $\epsilon \in [0, 18 ; 0, 32]$ ).

## b. Recherche de comportements critiques

À partir des observations précédentes, nous avons cherché à mesurer pour chacune des ondes majoritaire et minoritaire des grandeurs caractéristiques et étudié leur comportements avec  $\Delta T$ .

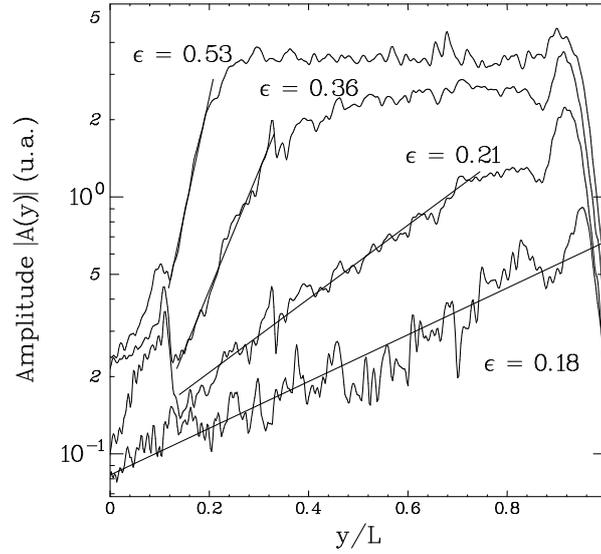


FIG. 3.6 – Profils d’amplitude de la figure 3.5-droite, en échelle logarithmique : les zones de dépendance exponentielle de l’amplitude sont ainsi mises en valeur. Outre la source étendue, le puit d’onde (en aval, à droite), présente aussi une zone (de décroissance) exponentielle, très courte. Il en est de même légèrement en amont (à gauche) du maximum, dans la partie « montante » du mode de bord.

**Amplitude à saturation** Elle est définie comme la valeur de l’amplitude au niveau du plateau (zone II). Malheureusement, au voisinage du seuil, le plateau est inexistant et l’amplitude à saturation n’est pas définie, ce qui compromet son utilisation en tant que paramètre d’ordre décrivant la bifurcation. A titre indicatif, nous avons reproduit ses variations en  $\Delta T$  sur la figure 3.8 ; il n’est pas possible d’approximer la tendance par une droite, et une loi en racine nous donne un seuil bien trop élevé. Nous n’utilisons pas l’amplitude à saturation pour décrire l’apparition des ondes dans le rectangle.

**Amplitude moyenne** Il est aisé de calculer la valeur moyenne  $\langle A \rangle$  de l’amplitude en intégrant l’aire située sous le profil d’amplitude locale. Ainsi :

$$\langle A \rangle = \int_0^L A(y) dy$$

Cette amplitude moyenne joue plus ou moins le rôle de l’amplitude à saturation pour les plus grandes valeurs de  $\epsilon$ , mais au contraire de l’amplitude à saturation, elle peut être définie près du seuil d’apparition des ondes, dans les régimes où la zone II n’est pas définie.

Le comportement de l’amplitude moyenne est reproduit sur la figure 3.8. Nous y notons une tendance linéaire qui, si nous l’extrapolons, nous donne une valeur par défaut du seuil des ondes : l’amplitude moyenne ne varie pas continuellement au seuil. Le comportement de  $\langle A \rangle$  ne peut être expliqué a priori sans une description de l’enveloppe spatiale de l’onde.

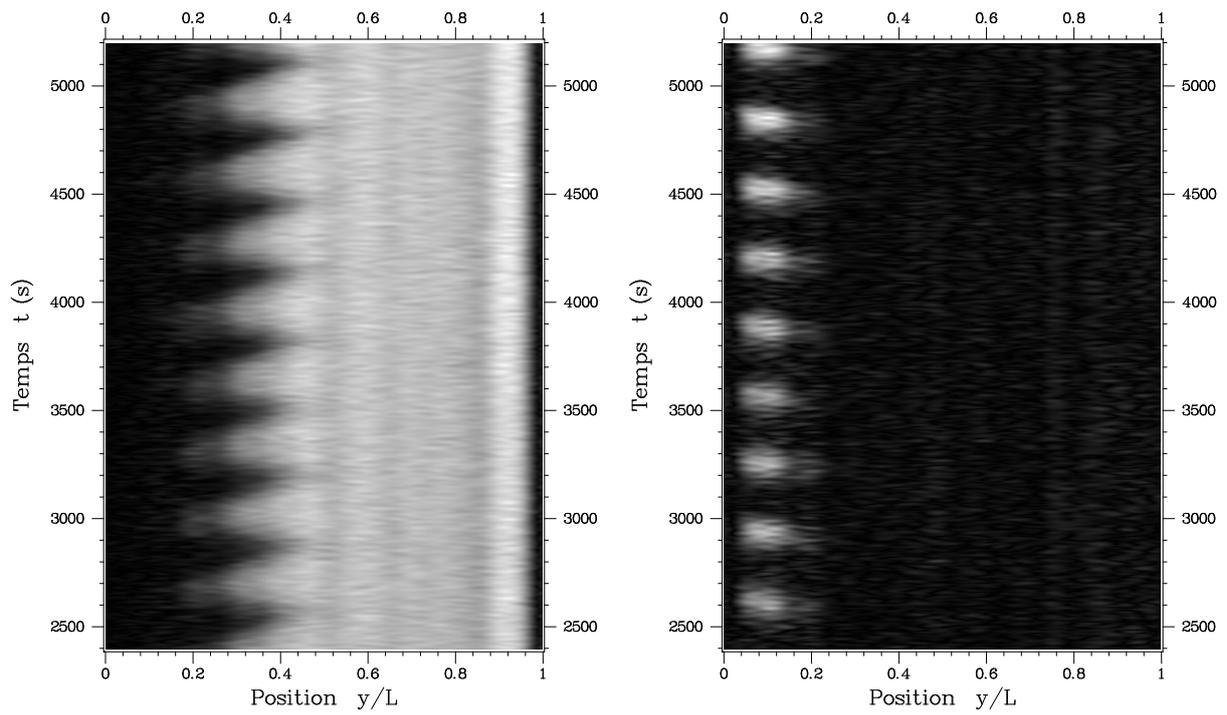


FIG. 3.7 – Illustration d'un état bi-périodique dans le rectangle pour  $\Delta T = 4,21$  K. A gauche : diagramme spatio-temporel représentant l'amplitude locale instantanée de l'onde droite majoritaire. A droite : diagramme spatio-temporel représentant l'amplitude locale instantanée de l'onde inverse gauche. Un battement de très basse fréquence est observé.

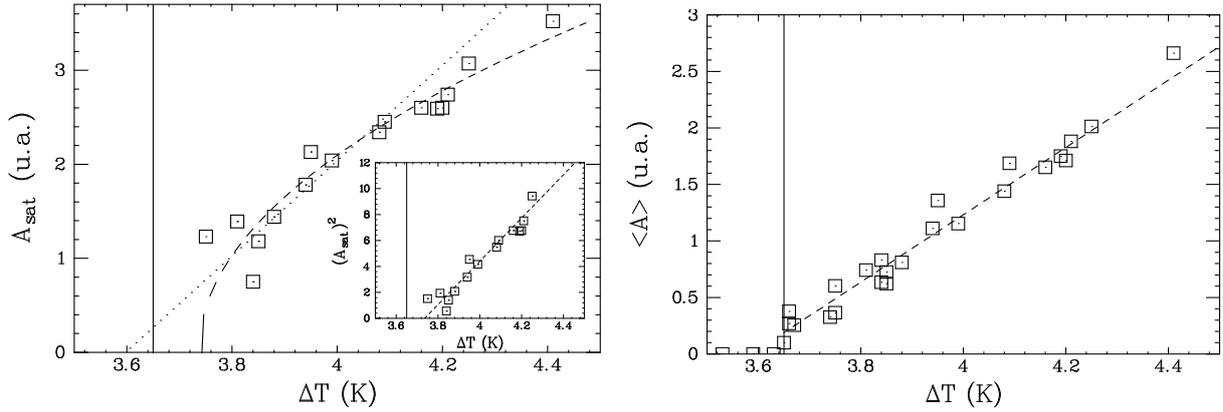


FIG. 3.8 – Evolution de l'amplitude à saturation  $A_{sat}$  (à gauche) et de l'amplitude moyenne  $\langle A \rangle$  (à droite) dans le rectangle en fonction de  $\Delta T$ .  $A_{sat}$  n'a pas un comportement critique clair. Noter la petite discontinuité de  $\langle A \rangle$  au seuil. Sur chaque graphe, la droite verticale représente le seuil expérimental observé à l'œil et déduit de l'évolution de l'amplitude maximale (fig. 3.9).

**Amplitude maximale** Nous pouvons dans tous les cas mesurer l'amplitude maximale —  $A_{max}$ , resp.  $B_{max}$  — de l'onde majoritaire, resp. minoritaire, réalisée près du bord puits, dans la zone III.

Le comportement de l'amplitude maximale est reproduit sur la figure 3.9. Nous y notons une variation continue au seuil et un comportement critique en racine carrée de l'écart au seuil :

$$A_{max} \propto (\Delta T - \Delta T_{exp})^{1/2}$$

ce qui nous permet de définir ce dernier : nous déduisons de  $A_{max}(\Delta T)$  que  $\Delta T_{exp} = 3,66$  K.

**Taux de croissance spatial** Dans la zone source (zone I), nous pouvons mesurer le taux de croissance spatial que nous notons  $\xi_s^{-1}$ , comme illustré sur la figure 3.6, nous avons en effet dans la zone I :

$$A(y) \propto \exp(y/\xi_s)$$

La dépendance critique de  $\xi_s$  est reproduite sur la figure 3.10. Un ajustement linéaire nous donne alors :

$$\xi_s \propto (\Delta T - \Delta T_{exp})$$

ce qui nous offre une autre possibilité de mesurer le seuil des ondes ; nous retrouvons la même valeur  $\Delta T_{exp}$ .

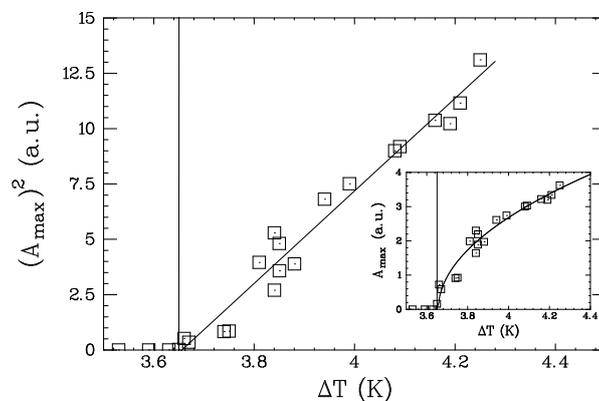


FIG. 3.9 – Evolution de l'amplitude maximale  $A_{max}$  dans le rectangle en fonction de  $\Delta T$ . Rappelons que cette amplitude est mesurée dans la zone III tout près du bord aval de la cellule, sur le « mode de bord ». La droite verticale repère la position du seuil  $\Delta T_{exp}$  déduite de ce graphe.

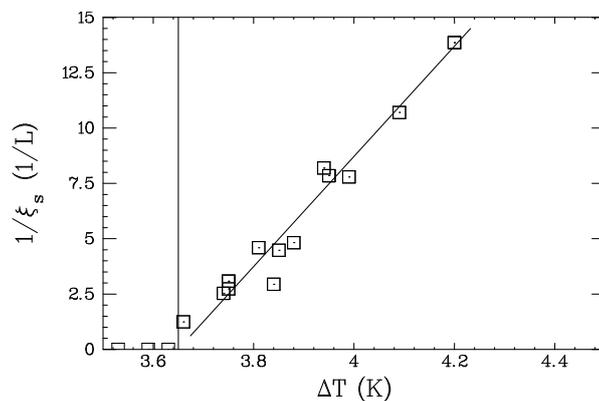


FIG. 3.10 – Evolution du taux de croissance spatiale  $\xi_s$  dans le rectangle en fonction de  $\Delta T$ . La droite verticale repère la position du seuil  $\Delta T_{exp}$  obtenu à partir de  $A_{max}$ .

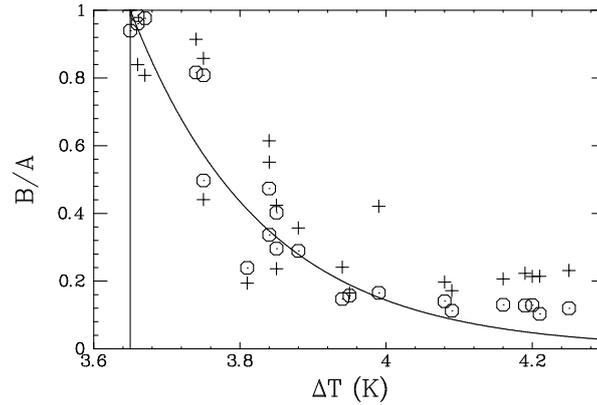


FIG. 3.11 – Rapport  $B/A$  de l'onde minoritaire sur l'onde majoritaire. Les cercles (○) correspondent aux amplitudes moyennes et les croix (+) aux amplitudes maximales. La courbe continue est un ajustement de la forme :  $B/A = \exp(-(\epsilon - \epsilon_a)/cste)$ .

**Et l'onde minoritaire?** Sur la figure 3.11 ont été reproduits les rapports  $\langle B \rangle / \langle A \rangle$  et  $B_{\max}/A_{\max}$  des amplitudes des ondes minoritaire et majoritaire. La compétition non-linéaire destructrice entre les deux ondes contra-propagatives y est ainsi illustrée; une exponentielle en trait plein représente un ajustement analytique possible.

**Fréquence et nombre d'onde** Nous mesurons aussi le nombre d'onde et la fréquence des ondes. Le nombre d'onde n'a pas une valeur entière, mais est relativement homogène dans la cellule (Fig. 3.12) et sa valeur au seuil est environ de  $21.2\pi/L_y = 0,68 \text{ mm}^{-1}$ . Il évolue peu avec  $\epsilon$  (Fig. 3.13). Il en est de même pour la fréquence, dont la valeur moyenne au voisinage du seuil est de 0,24 Hz. Comme présenté sur la figure Ces valeurs sont très proches de celle de  $k_0$  et  $\omega_0$  trouvées dans l'anneau, même si de petits écarts sont repérables comme nous le discuterons plus loin.

### 3.1.4 Discussion

#### Formalisme convectif/absolu pour l'apparition du mode global dans la cellule rectangulaire

Comme nous l'avons vu en § 3.1.1 sur le cas modèle de l'équation CGL, l'attente de la transition convectif/absolu joue le rôle de retardateur de l'instabilité dans le cas de la géométrie finie aux conditions limites non périodiques. Le décalage  $\epsilon_{\text{exp}}$  du seuil expérimental dans le rectangle peut ainsi être expliqué de façon naturelle. La figure 3.14 représente ainsi l'évolution de l'amplitude maximale obtenue par des simulations numériques directes<sup>4</sup> de l'équation de CGL dans les deux cas d'une géométrie périodique et d'une

4. Nous employons une méthode de type Runge-Kutta d'ordre 4 avec 256 points en espace.

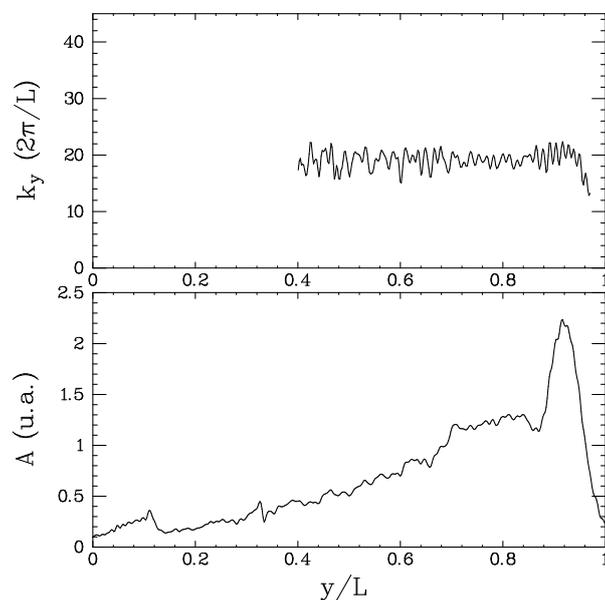


FIG. 3.12 – Dépendance spatiale du nombre d'onde  $k$  dans la cellule rectangulaire pour l'onde majoritaire (onde droite), pour  $\Delta T = 3,75$  K. A titre indicatif, le profil d'amplitude est reproduit au dessous. Le nombre d'onde n'est pas représenté dans les régions où l'amplitude est la plus faible ( $< 0,5$  u.a.) car le bruit de mesure  $y$  est très élevé.

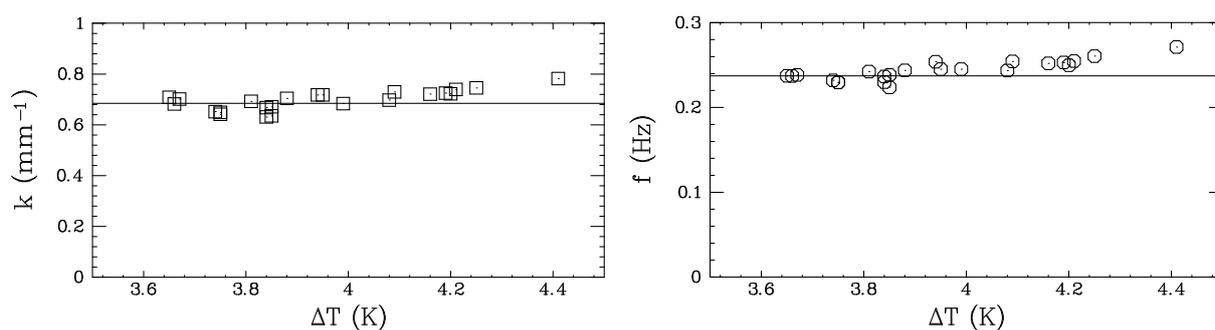


FIG. 3.13 – Evolution du nombre d'onde  $k$  (à gauche) et de la fréquence  $\omega$  (à droite) avec  $\Delta T$ . Les lignes horizontales correspondent aux valeurs  $k_0$  et  $\omega_0$  au seuil dans l'anneau.

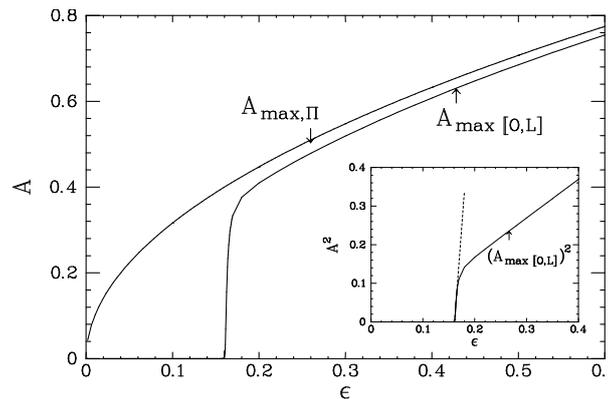


FIG. 3.14 – Amplitude maximale  $A_{max}$  obtenue après une expérience numérique (intégration de l'équation de Ginzburg-Landau adimensionnée pour  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$  et  $\tau_0 v_g \xi_0^{-1} = 0.875$ ) dans une boîte de taille  $L = 37.5$ . Le cas de conditions aux limites périodiques est repéré par l'indice  $\Pi$  et le cas de conditions de Dirichlet (boîte finie) par l'indice  $[0, L]$ . Dans le cas périodique, l'amplitude est homogène dans la cellule et l'on a exactement  $\langle A \rangle = A_{max} = \epsilon^{1/2}$ . Dans le cas de la boîte finie, le seuil est décalé à la valeur  $\epsilon_a \simeq 0.16$  prédite par la formule (3.4) pour les valeurs choisies des coefficients.

géométrie de boîte finie.

Le mode global (3.4) qui apparaît alors possède une enveloppe spatiale bien particulière dont nous observons toutes les caractéristiques qualitatives : annulation (au niveau de bruit près) de l'amplitude aux bords<sup>5</sup>, asymétrie amont/aval due à la propagation des ondes, croissance exponentielle de l'amplitude et valeur maximale réalisée par conséquent en aval.

Le comportement critique (puissance 1/2) de l'amplitude maximale — mesurée sur le mode de bord — est donc le comportement critique du mode global (3.4) qui apparaît comme on l'a vu en § 3.1.1 de façon supercritique.

Nous pouvons alors utiliser les différentes relations définies par l'équation (3.4) (page 76) pour obtenir des relations entre différents coefficients des termes linéaires de l'équation d'amplitude modélisant notre système expérimental.

### Transition linéaire ou non-linéaire

La figure 3.1 illustre un état linéairement stable, convectivement instable et absolument instable ; cela correspond aux calculs développés en § 3.1.1 sur l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée : seules des perturbations infiniment faibles sont considérées. Chomaz (1992), Couairon et Chomaz (1999) ont posé et résolu la question de la transition convectif/absolu non-linéaire ; les états correspondants sont illustrés sur la figure 3.15. C'est la

5. Le cas de conditions aux limites différentes peut d'ailleurs permettre une non-annulation de l'amplitude au profil de ses dérivées spatiales ; nous n'avons pas exploré analytiquement ce cas car il nous semblait plus éloigné des observations expérimentales.

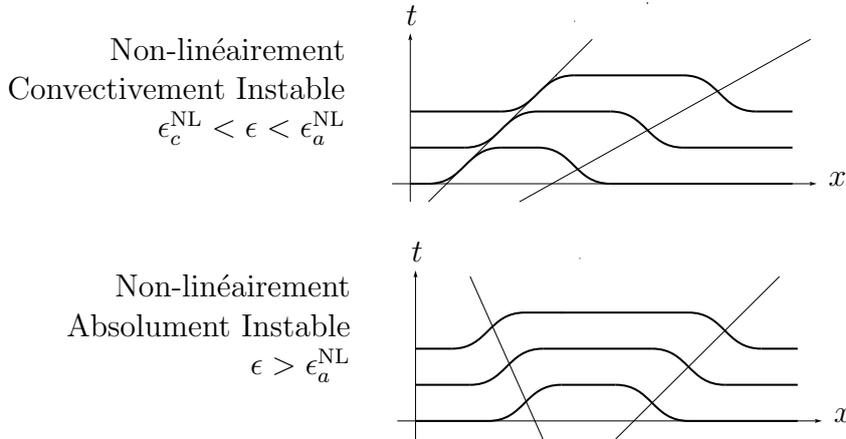


FIG. 3.15 – Représentations schématiques d'une perturbation non-linéairement convectivement instable et non-linéairement absolument instable en géométrie infinie. C'est le signe de la vitesse du front arrière qui détermine le caractère de l'instabilité. D'après Chomaz (1992).

vitesse du front arrière qui pilote l'advection de la perturbation non-linéaire en lieu et place de la vitesse de groupe.

Pour un système supercritique, un état linéairement stable est non-linéairement stable et réciproquement. Par contre, Couairon et Chomaz (1999) ont montré que ce même système peut être non-linéairement absolument instable avant d'être linéairement absolument instable : la vitesse du front arrière est en effet supérieure ou égale à la vitesse de groupe (travaux de Dee et Langer (1983), van Saarloos (1988)). Dans notre cas expérimental, nous n'avons pas un accès direct à cette distinction au niveau des vitesses car il nous est impossible de mesurer la vitesse du front arrière lors de l'envahissement de la cellule par la structure.

Cependant, Couairon (1997), Couairon et Chomaz (1999) ont montré sur l'équation CGL avec onde unique que l'apparition d'un mode global non-linéaire était accompagnée d'un comportement critique bien défini pour la taille de la source.

En définissant la taille de la source d'onde comme la distance entre le coeur de la source — le bord de la cellule dans notre cas — et la position où l'amplitude de l'onde émise vaut la moitié de sa valeur à saturation, Couairon et Chomaz ont prédit deux lois d'échelle différentes. Lorsque le seuil non-linéaire d'instabilité globale coïncide avec le seuil linéaire d'instabilité absolue, la vitesse du front est alors sélectionnée linéairement (i.e., suivant le critère de Dee et Langer (1983), van Saarloos (1988)), et la taille de la source varie comme  $(\epsilon - \epsilon_a)^{-1/2}$ . Au contraire, lorsque la transition est non-linéaire, i.e., que le seuil d'instabilité globale  $\epsilon_g$  est plus bas que le seuil linéaire  $\epsilon_a$ , alors la taille de la source varie en  $\ln(\epsilon - \epsilon_g)$ .

Comme il nous est difficile de mesurer directement la taille de la source pour les états

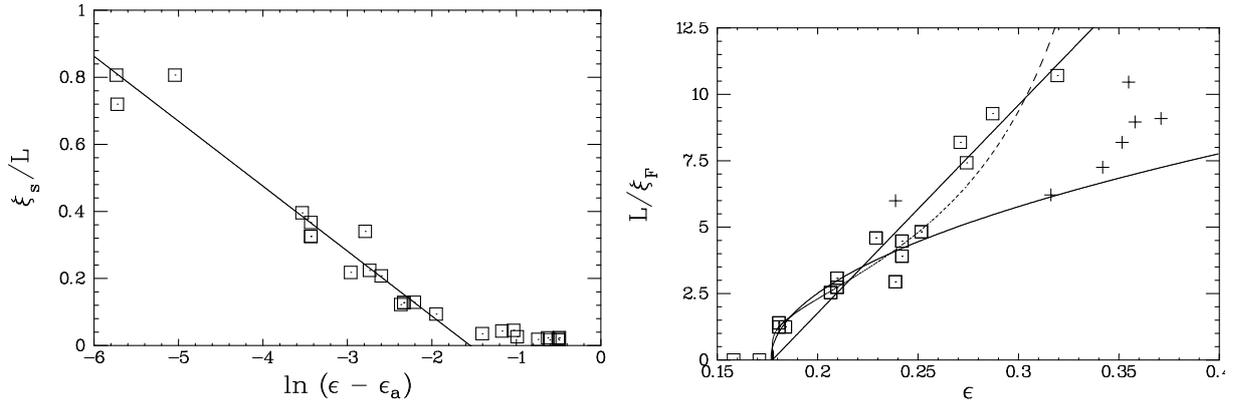


FIG. 3.16 – Ajustement de la loi  $\xi_s(\Delta T)$  par une loi logarithmique (à gauche). Les trois différentes possibilités d’ajustement sont superposées aux données expérimentales à droite (loi linéaire, en racine carrée et logarithmique).

près du seuil, nous assimilerons cette grandeur au taux de croissance spatial  $\xi_s$  de l’amplitude au niveau de la source. A première vue (Fig. 3.10), le comportement critique en  $(\epsilon - \epsilon_{\text{exp}})^{-1}$  de cette grandeur ne correspond à aucun des cas linéaire ou non-linéaire répertoriés. Néanmoins, cette loi en  $(\epsilon - \epsilon_{\text{exp}})^{-1}$  que nous obtenons ne semble pas être valable très près du seuil : nous avons réalisé trois expériences pour  $\Delta T = 3, 66$  K, et chacune nous a donné la même valeur de  $\xi_s$ , qui s’éloigne de l’ajustement linéaire bien au delà de nos barres d’erreur expérimentales. En observant différemment nos résultats (Fig. 3.16), nous pouvons remarquer que la loi en puissance  $-1/2$  (sélection linéaire) s’applique très près du seuil car elle décrit mieux les variations très rapides au départ, mais son domaine de validité est très réduit ( $0,18 < \epsilon < 0,21$ ). La loi logarithmique (sélection non linéaire) donne quand à elle une bien meilleure représentation des points expérimentaux car elle répond à ces deux critères.

Gondret *et al.* (1999) ont observé une telle transition non-linéaire entre instabilité convective et absolue, associée à une divergence logarithmique de la taille de la zone de croissance. Mais le système alors étudié — instabilité de Kelvin-Helmoltz — est un système ouvert et aucun mode de bord n’est observé en aval.

Pour étayer la discussion, remarquons que notre définition de  $\xi_s$  est légèrement différente de celle de Couairon et Chomaz (1999) qui utilisent à la place la taille de la source définie comme sa « largeur à mi-hauteur ». Si l’on note  $\xi_{1/2}$  la taille de la source et  $A_0$  l’amplitude en  $y = 0$ ,  $A_s$  l’amplitude à saturation et  $\xi_s$  le taux de croissance spatial au voisinage de la source, alors en supposant que la variation de l’amplitude entre  $y = 0$  et  $y = \xi_{1/2}$  est uniquement due à la variation exponentielle (ce qui peut ne plus être vrai au delà de  $\xi_{1/2}$  mais reste très raisonnable en dessous : cf Fig. 3.17), nous pouvons écrire<sup>6</sup> :

6. Nous pouvons aussi prendre en compte la saturation non-linéaire en supposant que l’amplitude répond à une équation de Landau dans le cas stationnaire :

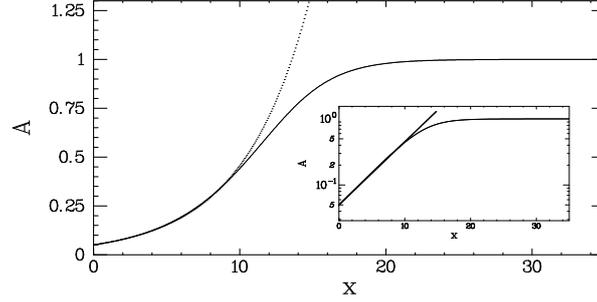


FIG. 3.17 – Illustration d’une croissance exponentielle au niveau de la source et saturant loin de la source. L’inclusion est en échelle logarithmique; on y voit la définition de  $\xi_s$  comme la pente de la droite. La grandeur  $\xi_{1/2}$  est quant à elle définie comme le point d’amplitude  $A_{sat}/2$ . L’ajustement logarithmique s’avère être valide pour  $y \in [0, \xi_{1/2}]$ .

$$A(y = \xi_{1/2}) = \frac{A_s}{2} \quad \text{avec} \quad A(y) = A_0 \exp(y/\xi_s)$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_{1/2}}{\xi_s} = \ln\left(\frac{A_s}{A_0}\right) - \ln 2$$

Si nous supposons que le rapport  $A_s/A_0$  est fixé — ce qui est le cas si l’on considère un coefficient de réflexion entre deux ondes contra-propagatives comme dans la section suivante — alors nous trouvons que  $\xi_s$  et  $\xi_{1/2}$  sont proportionnels: nous pouvons donc comparer nos mesures ( $\xi_s$ ) aux prédictions théoriques ( $\xi_{1/2}$ ) car les deux ont le même comportement critique. Si nous supposons au contraire que le rapport  $A_s/A_0$  n’est pas fixé, mais que c’est plutôt l’amplitude au bord amont  $A_0$  qui est constante (égale au niveau de bruit), nous écrivons alors :

$$A_s = \sqrt{\frac{\epsilon'}{g}} \quad \text{avec} \quad \epsilon' = \epsilon - \epsilon_a \quad \Rightarrow \quad \frac{\xi_{1/2}}{\xi_s} = \frac{1}{2} \ln(\epsilon') - \ln(2A_0g)$$

$$\xi_s \frac{\partial A}{\partial y} = A - \frac{A^3}{A_s^2} \quad \text{avec} \quad A_s = \sqrt{\frac{\epsilon'}{g}}$$

Nous trouvons alors :

$$(A(y)/A_s)^{-2} = 1 + a \exp\left(-2\frac{y}{\xi_s}\right) \quad \text{avec} \quad a^{-1} = (A_s/A_0)^2 - 1 \simeq (A_s/A_0)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_{1/2}}{\xi_s} = \ln\left(\frac{A_s}{A_0}\right) - \ln \sqrt{3}$$

ce qui est semblable au résultat exposé.

Deux régimes se dégagent donc. Le premier correspond à  $\epsilon \rightarrow 0$ ; le lien entre  $\xi_{1/2}$  et  $\xi_s$  fait alors intervenir  $\epsilon'$  et la comparaison entre théorie et expérience est non triviale. Le second régime correspond à de plus forts  $\epsilon$  pour lesquels la valeur de  $\ln(\epsilon)$  est négligeable devant  $\ln(\epsilon')$ ; nous retrouvons alors dans ce cas le même comportement critique pour  $\xi_{1/2}$  et  $\xi_s$ . Vu la très faible valeur de l'amplitude aux bords, i.e. du niveau de bruit ( $A_0g \simeq 1\%$  typiquement), le premier régime est quasiment impossible à observer.

En conclusion, nous pouvons affirmer que dans tous les cas les deux grandeurs  $\xi_s$  et  $\xi_{1/2}$  ont le même comportement critique. Nous déduisons alors de la dépendance logarithmique de  $\xi_s$  en  $\epsilon - \epsilon_a$  que la transition observée est non-linéaire.

### Coefficients de réflexion et mécanisme de Cross

La transition convectif/absolu n'est pas le seul mécanisme permettant de produire un mode global. Si des réflexions existent aux bords de la cellule, Cross (1986, 1988), Cross et Kuo (1992) ont montré que l'onde advectée ne quitte pas totalement la cellule mais est en partie réfléchiée et transformée en onde inverse, qui à son tour est amplifiée tout en étant advectée. Si l'on s'en tient à l'ordre linéaire, en notant  $r$  le coefficient de réflexion, il est possible de définir le seuil  $\epsilon_r$  à partir duquel ce mécanisme permet à une onde d'être auto-entretenu par les réflexions :

$$\epsilon_r = -\frac{v_g \tau_0}{L} \ln |r|$$

Nous avons tout de suite identifié  $\epsilon_{\text{exp}}$  avec le seuil de transition convectif/absolu, mais en toute rigueur  $\epsilon_r$  est un candidat tout aussi valable. Plus précisément, notre hypothèse était la suivante :  $\epsilon_a \leq \epsilon_r$ . Discutons un peu le cas contraire.

Pour  $\epsilon_r \leq \epsilon_a$  Cross a expliqué analytiquement et illustré numériquement un scénario d'apparition et d'évolution des ondes semblable à celui que nous observons, et déjà rapporté par Croquette et Williams (1989a,b). Notons tout de même une différence qualitative avec nos résultats : Cross et Croquette observent, juste au dessus de  $\epsilon_r$ , toute une plage de valeurs de  $\epsilon$  où la structure est parfaitement symétrique. Cette plage correspond à la région d'interaction linéaire entre les deux ondes et elle résiste tant que effets non-linéaires n'entrent pas en jeu. Dans le cas de Cross, lorsque  $\epsilon$  est augmenté, la limite convectif/absolu est finalement franchie.

Rappelons que le couplage non-linéaire entre les deux ondes favorise la disparition de l'une pour la prospérité de l'autre (cf § 3.1.2). Néanmoins,  $\epsilon_r < \epsilon_a$  permet d'observer les deux ondes sur un intervalle en  $\epsilon$  de largeur finie, tout comme l'ont décrit Croquette et Williams (1989b).

Notons enfin que la transition convectif/absolu ne fait pas intervenir la dimension spatiale  $L$  (pour peu que cette dernière soit assez grande, comme on l'a vu) alors que le mécanisme des réflexions fait jouer cette grandeur. Notamment, si  $L \rightarrow \infty$ , le seuil de Cross se rapproche continûment du seuil convectif traditionnel alors que la transition convectif/absolu persiste à la distance finie  $\epsilon_a$  de ce seuil. Des expériences complémentaires

avec des cellules finies plus étendues devraient apporter des informations très enrichissantes sur chacun des deux effets.

### Effets de courbure

Nous avons supposé que le seuil convectif des ondes hydrothermales dans l'anneau et dans le rectangle était le même (si  $h$  et  $\Gamma_{\parallel}$  étaient les mêmes). Comme nous l'avons vu en § 1.2.2 et § 1.2.3, l'écoulement de base est le même dans les deux géométries pour peu que la courbure soit négligeable. Nous pouvons chiffrer l'effet de courbure par  $\Phi(X)$  calculé pour l'anneau (cf. § 1.2.3) :

$$\begin{aligned}\Phi(X) &= \frac{\phi}{1 + \phi X} = \frac{R_{\text{ext}} - R_{\text{int}}}{r} = 0,13 \quad \text{en } X = 0, \text{ i.e., } r = R_{\text{int}} \\ &= 0,12 \quad \text{en } X = 1, \text{ i.e., } r = R_{\text{ext}}\end{aligned}$$

Il s'avère néanmoins que les équations d'évolution des perturbations ne sont pas sensibles à  $\Phi(X) = L/r$  mais à  $\Gamma_X = h/r = \epsilon\Phi(X)$ , soit environ 0,025. De plus, les calculs numériques effectués en § 1.3.4 nous donnent un décalage du seuil d'au maximum 0,03 ; cela ne peut à lui tout seul expliquer le décalage de 0,18 que nous observons. Notons aussi que le seuil doit être plus élevé dans l'anneau que dans le rectangle si le chauffage a lieu au centre (figures 1.12 et 1.13 pages 34 et 1.13) comme c'est le cas dans la cellule annulaire.

Nous avons donc négligé les effets de courbure, et supposé que cela ne met pas en défaut notre démarche de comparaison entre rectangle et anneau. Dans le cas contraire, une bonne approche du problème consiste à utiliser la cellule annulaire en brisant ses conditions aux limites périodiques ; nous y avons ainsi placé une petite cale de plexiglas et obtenu qualitativement des résultats compatibles avec les observations issues du rectangle.

### Commentaires

L'expérimentateur doit attendre l'apparition d'un mode global pour observer des ondes propagatives dans une cellule quelconque. Dans le cas de l'anneau, aux conditions limites périodiques, seuls des effets de discrétisation — négligeables dans une grande boîte comme notre anneau — retardent l'apparition du mode global par rapport au seuil prévu en géométrie infinie, i.e., sans se préoccuper du référentiel. Dans le cas du rectangle, au contraire, un décalage d'ordre 1 (de l'ordre de la vitesse de groupe en fait) est irrédûciblement associé à l'existence d'une advection dans le référentiel du laboratoire. Le mode global qui signe à l'expérimentateur l'existence d'ondes dans la cellule non-périodique n'apparaît qu'une fois ce décalage franchi. Les théories de stabilité linéaire classiques utilisées pour rechercher les instabilités propagatives de l'écoulement de base doivent ainsi être corrigées pour prendre en compte l'« auto-advection » de l'instabilité.

## 3.2 Instabilité secondaire des ondes hydrothermales

A une dimension d'espace, comme nous nous y sommes restreints ici, nous savons que les ondes non-linéaires ne peuvent être sujettes — du point de vue de la phase — qu'à l'instabilité modulationnelle à petit nombre d'onde ( $\delta k \rightarrow 0$ ) dite d'*Eckhaus*. La vitesse de groupe des ondes hydrothermales restant finie lorsque  $\epsilon$  est augmenté et que survient cette instabilité secondaire, nous devons discerner entre la nature convective ou absolue de l'instabilité d'Eckhaus comme nous l'avons fait pour l'instabilité primaire.

Nous évoquons ici encore l'étude du modèle de CGL dans le cas d'une onde unique. Nous rappelons ensuite les résultats expérimentaux de Mukolobwicz *et al.* (1998) qui ont observé l'instabilité d'Eckhaus des ondes hydrothermales dans l'anneau; l'annexe B rappelle et complète cette étude avant d'en proposer une modélisation originale. Nous décrivons ensuite en détail les observations expérimentales dans la géométrie rectangulaire non périodique où nous illustrons l'instabilité d'Eckhaus absolue et convective.

### 3.2.1 Cas de l'équation de Ginzburg-Landau complexe

Les calculs de stabilité linéaire d'une solution de Stokes non nulle vis-à-vis de perturbations d'amplitude et de phase ont été réalisés par Fauve (1987), Matkowsky et Volpert (1993) pour l'instabilité convective en géométrie infinie. Tuckerman et Barkley (1990) ont étudié l'effet de la discrétisation dans le cas des conditions aux limites périodiques; ils ont ainsi mis en évidence un décalage de la région de stabilité (parabole d'Eckhaus, définie en annexe B) vers les plus petites valeurs du paramètre de contrôle. Ce décalage — de  $(-\frac{1}{2}\xi_0\pi/L)$  pour l'équation de Ginzburg-Landau réelle — permet au nombre d'onde discret le plus critique d'être stable vis-à-vis des modulations d'Eckhaus lorsqu'il apparaît. La prise en compte de la transition entre instabilité convective et absolue est plus ardue. Huerre (1988) a abordé la question analytiquement dans le cas de IRGL. Dans le cas de CGL, Deissler (1987) a abordé qualitativement le problème avec une étude numérique, en observant le régime convectivement instable d'Eckhaus grâce à une source de bruit placée à la paroi amont du domaine. Müller et Tveitereid (1995) ont numériquement isolé les différents domaines de stabilité dans le plan  $(\epsilon, q)$  et Couairon et Chomaz (1999) étudié les modes globaux correspondants; une présentation complète de ces résultats peut être trouvée dans l'article de Chomaz *et al.* (1999).

Nous ne reproduisons ici que des résultats expérimentaux. Le cas de l'anneau est brièvement rappelé et commenté. Le cas du rectangle est décrit en détail; sa configuration est la même que dans l'étude du premier seuil:  $L_x = 10$  mm et  $L_y = 180$  mm.

### 3.2.2 Cas de l'expérience « anneau »

Dans le cas de l'anneau, Mukolobwicz *et al.* (1998) ont montré que l'instabilité d'Eckhaus survient de façon supercritique lorsque  $\Delta T$  est augmenté. Cette instabilité permet à la structure de changer de nombre d'onde; ce dernier reste bien sûr toujours entier du fait des

conditions aux limites périodiques, comme observé aussi par Schouveiler *et al.* (1998). Les travaux de Mukolobwicz *et al.* (1998) ont de plus révélé l'existence d'états instables pour lesquels la modulation saturait à une valeur finie sans conduire à un changement de nombre d'onde. Ces travaux ont été complétés jusqu'à obtenir l'allure générale du diagramme de stabilité dans le plan  $(k, \epsilon)$ , lequel est présenté en annexe B.

Une description en termes d'équation CGL seule ne suffit plus pour décrire la phénoménologie observée. Nous avons ainsi complété l'équation de CGL par des termes d'ordre supérieur. L'annexe B est consacrée à ce travail où quelques résultats sur la transition convectif/absolu de l'instabilité secondaire sont aussi présentés.

### 3.2.3 Cas de l'expérience « rectangle »

Nous nous plaçons dans la même configuration que précédemment :  $L_x = 10$  mm,  $L_y = 180$  mm et  $h = 1,7$  mm. Nous décrivons ci-après les états obtenus pour  $\Delta T$  élevé devant la valeur du seuil expérimental des ondes  $\Delta T_{\text{exp}} = 3,66$  K. Dans ces régimes, l'onde minoritaire a une amplitude négligeable presque partout dans la cellule et nous ne parlerons ainsi plus que de l'onde majoritaire, notée  $A$  et supposée par convention voyager vers la droite.

#### a. Présentation générale

Lorsque  $\Delta T$  est augmenté à partir du seuil primaire des ondes tel qu'étudié en § 3.1.3, une onde majoritaire envahit progressivement toute la cellule en éliminant l'onde inverse. S'installe alors un régime où l'onde majoritaire (que nous prendrons toujours être une onde droite) atteint son amplitude à saturation presque partout dans la cellule. La fréquence et le nombre d'onde sont uniformes et ce dernier est à peu près constant, et vaut environ  $21.(2\pi/L) \simeq k_0$  ce qui signifie que 21 longueurs d'onde sont présentes dans la boîte ; nous appellerons ainsi l'onde correspondante le « mode 21 ». Jusqu'à  $\Delta T \simeq 5,5$  K, ce mode est parfaitement homogène et stable. La figure 3.18 représente en fonction de  $\Delta T$  l'évolution du nombre d'onde local dans la cellule, ainsi que de la fréquence.

Au delà de 5,5 K environ, l'instabilité d'Eckhaus survient dans la cellule rectangulaire tout comme dans la cellule annulaire. Nous observons ainsi une instabilité de la phase du mode 21 ; cette instabilité est signée par l'apparition de modulations conduisant éventuellement à des dislocations qui permettent à un nouveau mode de s'installer. Ce nouveau mode est appelé mode 17 (mode dont le nombre d'onde vaut environ  $17.(2\pi/L)$ ). Nous avons pu mesurer le nombre d'onde local et la fréquence locale dans chacune des zones 21 et 17 ; la figure 3.18 révèle ainsi la présence de l'instabilité secondaire par le dédoublement des courbes de nombre d'onde et de fréquence. A partir de diagrammes spatio-temporels de fréquence ou de nombre d'onde local(e) instantané(e), nous pouvons mesurer le nombre d'onde et la fréquence des modulations dans le régime instable d'Eckhaus ; ces valeurs sont ainsi reproduites sur la figure 3.20. Nous pouvons remarquer que le nombre d'onde de la modulation est égal à la différence des nombres d'onde du mode 21 et du mode 17 ; il en

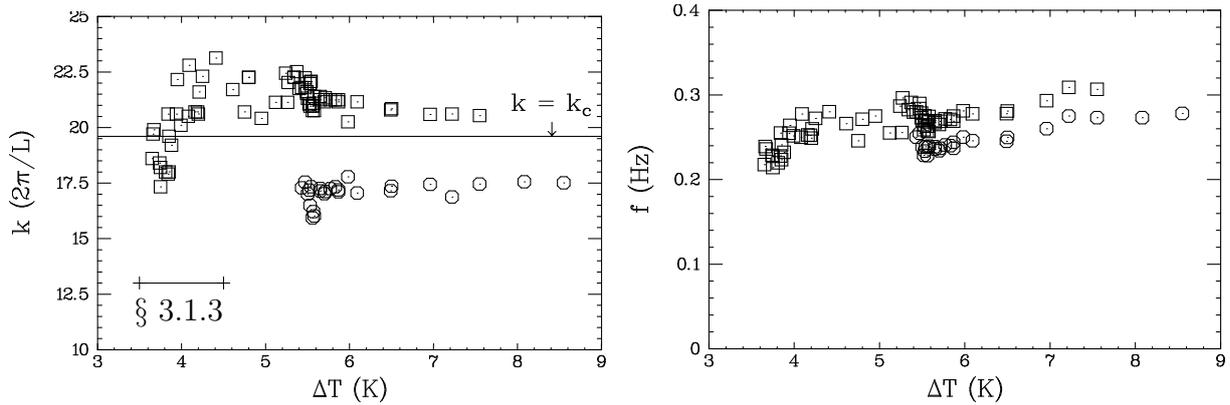
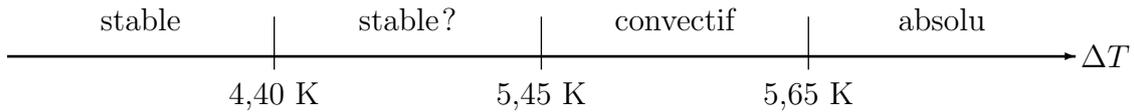


FIG. 3.18 – Evolution du nombre d'onde (à gauche) et de la fréquence (à droite) dans le rectangle lorsque l'on s'éloigne du seuil d'apparition des ondes et que survient l'instabilité d'Eckhaus. Le segment sur le graphe de gauche repère la zone de  $\Delta T$  étudiée en § 3.1.3 au voisinage du seuil primaire (la figure 3.13 est ainsi un détail dans cette zone). Les deux branches au delà de  $\simeq 5,5$  K signalent l'instabilité modulationnelle d'Eckhaus (voir texte). Les carrés ( $\square$ ) et les ronds ( $\circ$ ) correspondent respectivement aux modes 21 et 17.

est de même pour la fréquence des modulations. Il est aussi possible de mesurer un taux de croissance temporel de la modulation  $\sigma$ , lors des régimes transitoires par exemple ; nous définirons aussi plus loin un taux de croissance spatial.

La vitesse de groupe étant finie (cf Fig. 3.19), cette instabilité est a priori convective au seuil, et devient éventuellement absolue au delà d'un second seuil, situé plus haut. Le petit schéma ci-dessous situe les principaux régimes d'instabilité d'Eckhaus du mode 21 :



Pour des raisons de clarté, nous exposerons nos résultats en commençant par les plus hautes valeurs de  $\Delta T$ , pour lesquelles l'instabilité d'Eckhaus est absolue, et nous descendrons progressivement les valeurs de  $\Delta T$ .

A titre indicatif, le rapport des fréquences des modes 21 et 17 est reproduit sur la figure 3.21. Ce rapport semble à peu près constant et sa valeur ( $1,13 = 113/100$ ) est assez loin d'une fraction non-réductible simple. Nous en déduisons qu'il n'y a pas d'accrochage entre les deux modes 21 et 17.

### b. Etats absolument instables d'Eckhaus : $\Delta T \geq \Delta T_a^{\text{Eck}} = 5,56$ K

Commençons par la description du régime instable d'Eckhaus le plus simple à décrire. Pour  $\Delta T > 5,56 \pm 0,03$  K, la source émet une onde instable vis à vis de modulations de

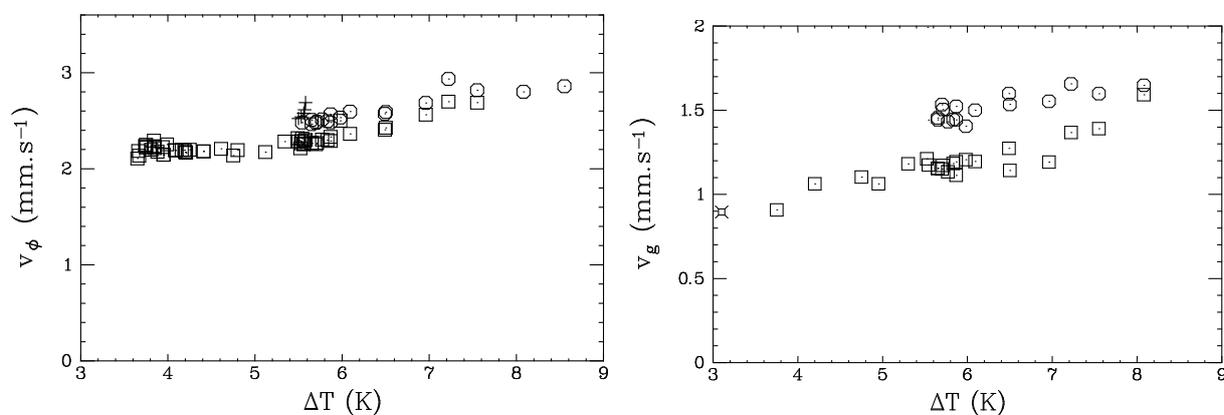


FIG. 3.19 – Evolution de la vitesse de phase  $v_\phi = k/\omega$  (à gauche) et de la vitesse de groupe (à droite, mesurée comme vitesse de propagation de perturbations) dans le rectangle en fonction de  $\Delta T$ . Les carrés ( $\square$ ) et les ronds ( $\circ$ ) correspondent respectivement au modes 21 et 17. Le premier point du graphe de la vitesse de groupe, pour  $\Delta T = 3,1$  K, correspond à la valeur au seuil dans l'anneau.

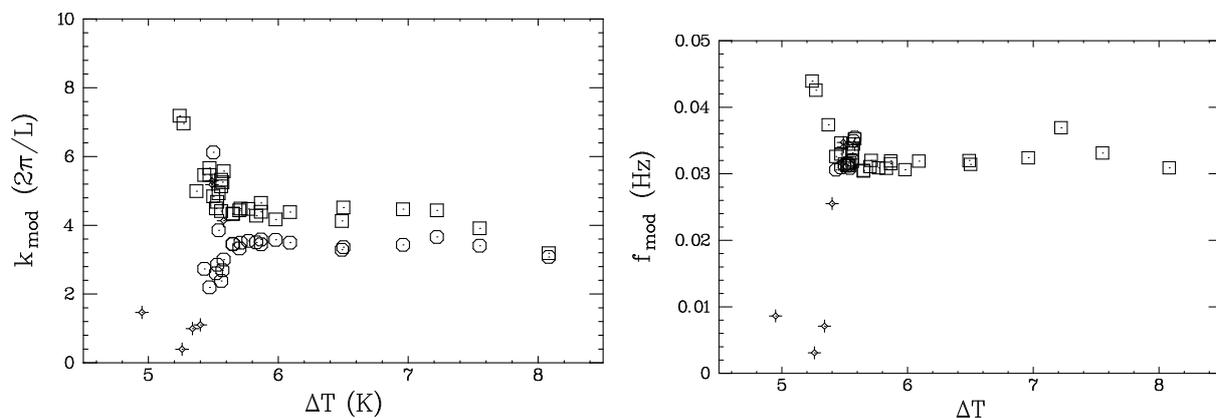


FIG. 3.20 – Evolution du nombre d'onde (à gauche) et de la fréquence (à droite) de la modulation de phase dans le rectangle en fonction de  $\Delta T$  lorsque des états instables d'Eckhaus sont observés.

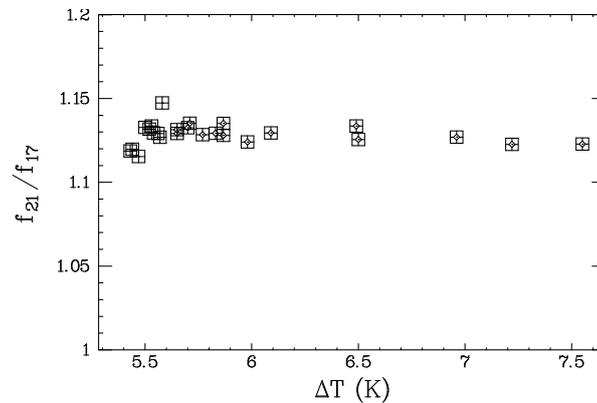


FIG. 3.21 – Evolution du rapport des fréquences du mode 21 et du mode 17 dans la zone de températures où le mode 21 est instable d'Eckhaus et où le mode 17 est stable d'Eckhaus.

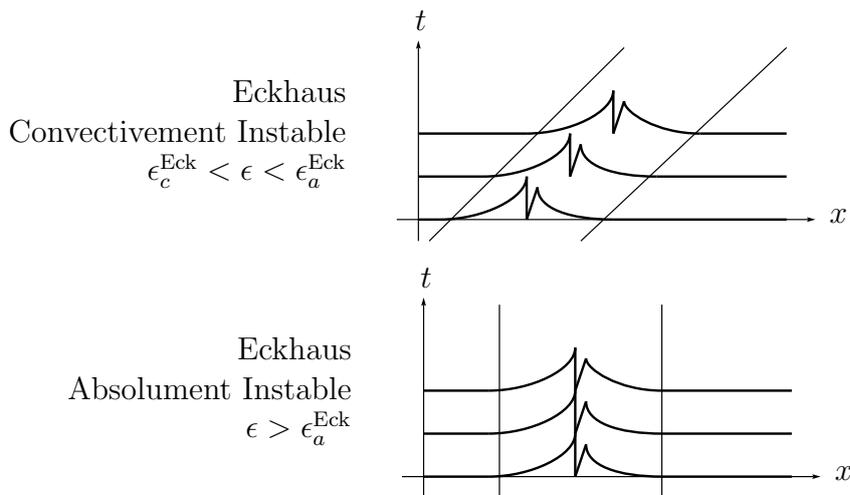


FIG. 3.22 – Représentations schématiques de l'amplitude d'une modulation d'Eckhaus sur un état convectivement instable et absolument instable en géométrie finie ou semi-infinie. Tout comme sur la figure 3.15, c'est le signe de la vitesse du front arrière qui détermine le caractère de l'instabilité. L'instabilité n'est pas saturée non-linéairement, mais éclate en un trou d'amplitude associé à un saut de phase. Le front avant est par conséquent esclave du front arrière (cf. le taux de croissance spatiale est constant). Ces schémas sont une reprise épurée des résultats expérimentaux.

phase. En effet, une modulation de phase est observée : si nous regardons une image de la fréquence locale  $\omega = \partial\phi/\partial t$  ou du nombre d'onde local  $k_y = \partial\phi/\partial y$  (fig. 3.23), nous voyons clairement une oscillation de la fréquence se propager — à la vitesse de groupe — tout en étant amplifiée. Cette modulation n'est pas saturée et elle conduit la structure à changer de fréquence lors d'un saut de phase, accompagné d'un trou d'amplitude. En aval de cette dislocation spatio-temporelle, le nombre d'onde local est différent et une modulation résiduelle relaxe à zéro. Après la catastrophe, l'onde émise par la source est toujours instable mais il lui faut un certain temps pour qu'une nouvelle modulation soit amplifiée jusqu'à produire une nouvelle dislocation. Les dislocations forment un front séparant la zone de nombre d'onde 21, instable, émis par la source et la zone de nombre d'onde post-dislocation 17, stable. De tels objets ont déjà été observé dans le système de Taylor-Dean par Bot et Mutabazi (2000) où ils permettaient de même un changement de fréquence. Le régime observé pour  $\Delta T > 5,56$  K est ainsi caractérisé par la périodicité temporelle des dislocations et la stabilité spatiale du front de dislocation qui occupe ainsi une position stationnaire. Cette position dépend du gradient de température appliqué. En dessous de  $\Delta T = 5,56$  K et sans perturber le système, aucune modulation n'est observée et les états sont uniformes.

Une transformée de Hilbert en temps de l'image réelle de nombre d'onde (figure 3.23), resp. de fréquence, nous donne alors accès à l'amplitude locale et instantanée de la modulation de nombre d'onde, resp. de fréquence. A partir d'une telle image, nous pouvons mesurer la position  $\xi_d$  du front des dislocations ; cette position est constante au cours du temps dans le présent régime et nous avons une bijection entre  $\Delta T$  et  $\xi_d$ . A partir d'un profil moyen de l'amplitude de la modulation de fréquence (figure 3.24), nous mesurons  $\xi_d$  ; nous avons aussi accès au taux de croissance spatial de cette modulation. Celui-ci est stationnaire ; nous notons alors  $1/\xi_{21}^{\text{Eck}} > 0$  le taux de croissance de la modulation dans la zone du mode 21 (instable) et  $1/\xi_{17}^{\text{Eck}} < 0$  le taux de (dé)croissance de la modulation dans la zone du mode 17/L (stable) :

$$\begin{aligned} \delta k \propto \delta \omega &\propto \exp(y/\xi_{21}^{\text{Eck}}) && \text{dans la zone } kL/2\pi = 21 \\ \delta k \propto \delta \omega &\propto \exp(y/\xi_{17}^{\text{Eck}}) && \text{dans la zone } kL/2\pi = 17 \end{aligned}$$

Nous qualifions ce régime d'instabilité d'Eckhaus d'*absolue* car la position du front de dislocations est fixe dans le référentiel du laboratoire, ce qui signifie que les modulations ne sont pas advectées hors de la cellule mais restent à une position bien déterminée. Nous pouvons mesurer un taux de croissance temporel positif pendant le régime transitoire d'installation des modulations et dislocations ; ce taux est ensuite nul car le régime asymptotique est stationnaire.

La figure 3.25 représente alors l'évolution des grandeurs  $\xi_d$  et  $\xi_{21}^{\text{Eck}}$  en fonction de  $\Delta T$  dans le régime absolument instable d'Eckhaus. La zone d'instabilité absolue est alors limitée à  $\Delta T \geq 5,56 \pm 0.03$  K, et l'évolution de la position du front est discontinue en cette valeur.

Nous observons une augmentation du taux de croissance spatial  $(\xi_{21}^{\text{Eck}})^{-1}$  avec le paramètre de contrôle et nous pouvons ajuster cette évolution par une loi linéaire.

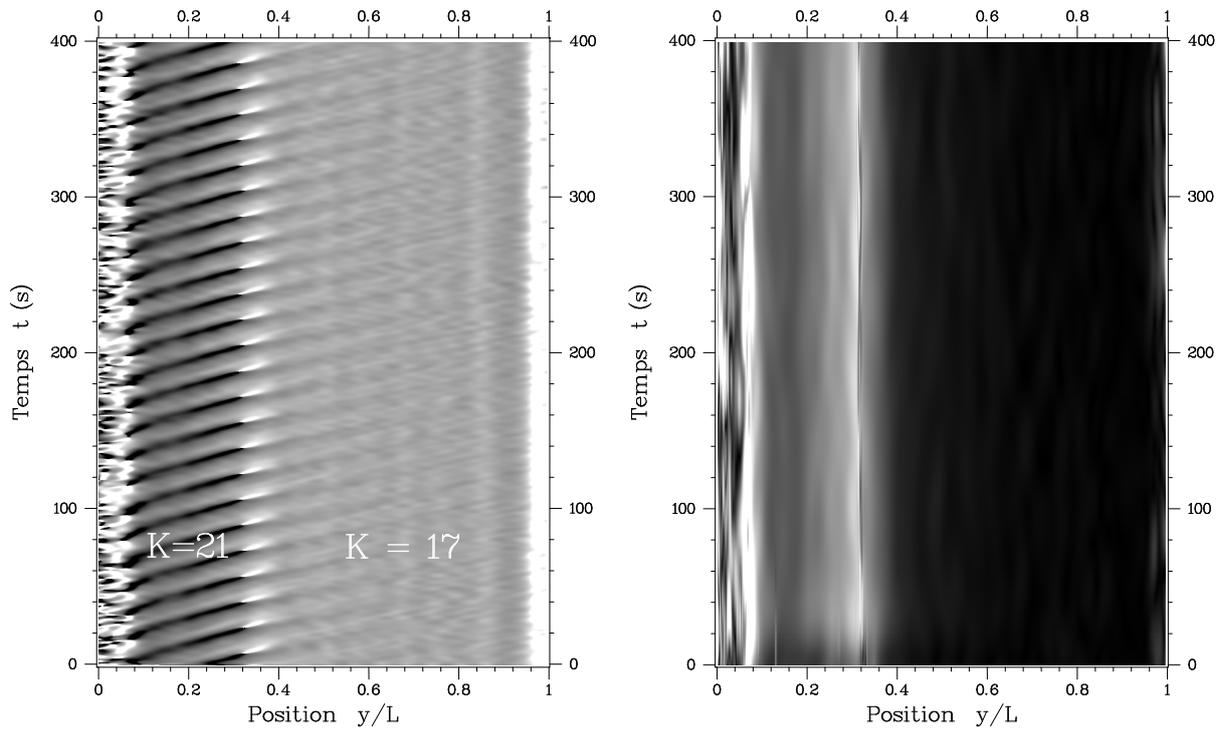


FIG. 3.23 – *Instabilité d’Eckhaus absolue. Diagramme spatio-temporel du nombre d’onde  $k_y(y, t)$  local instantané dans le rectangle pour  $\Delta T = 5,65$  K. A gauche est reproduit le signal  $\partial\phi/\partial y$  et à droite l’amplitude de la modulation de  $\partial\phi/\partial y$  telle que donnée par une transformée de Hilbert en temps.*

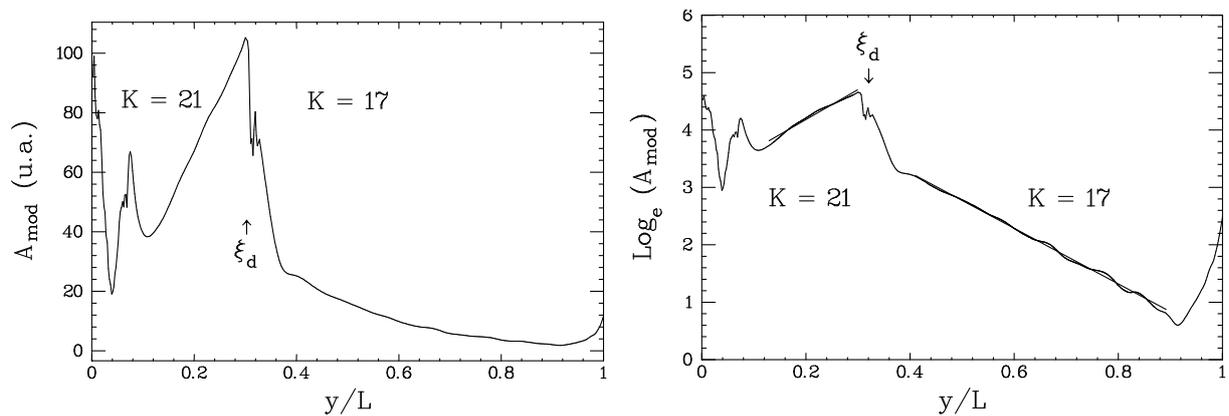


FIG. 3.24 – *Profil spatial moyen de la modulation d’amplitude extrait du diagramme de la figure 3.23, pour  $\Delta T = 5,65$  K. A gauche : profil en échelle linéaire ; à droite : profil en échelle logarithmique, révélant les variations exponentielles et justifiant la définition des taux de croissance spatiaux.*

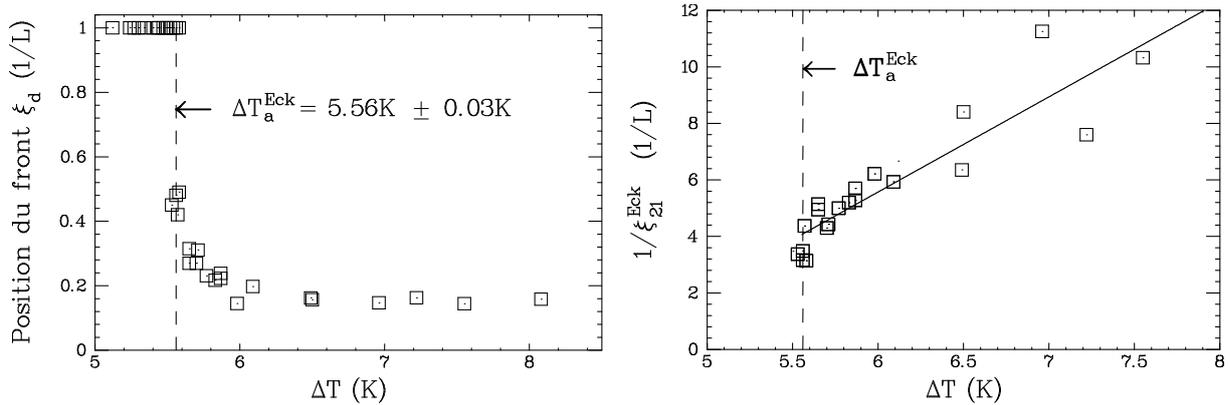


FIG. 3.25 – Variation de la position du front de dislocations (à gauche) et des taux de croissance spatiaux (à droite), en fonction de  $\Delta T$ , dans la zone d'instabilité d'Eckhaus absolue. Le front de dislocations est par convention positionné en  $y = L$  lorsqu'aucune modulation n'est présente, i.e., en dessous de 5,56 K.

Nous pouvons remarquer que les dislocations surviennent lorsque l'amplitude des modulations de la fréquence a atteint une valeur limite  $\Omega$  que l'on peut noter :

$$\Omega = \delta\omega_0 e^{\xi_d/\xi_{21}^{\text{Eck}}}$$

Cette valeur de la modulation est constante d'une réalisation sur l'autre et ne dépend pas de  $\Delta T$ , comme l'illustre la figure 3.26. Elle se trouve être égale à la différence des fréquences du mode 21 (instable) et du mode 17, c'est-à-dire à la fréquence des modulations. Cela s'interprète aisément en imaginant que la dislocation survient lorsque la fréquence locale dans la zone 21 a atteint la valeur de la fréquence du mode 17 : le système a alors accès à ce nouveau mode, qui a l'avantage d'être stable ; de manière équivalente, la dislocation survient lorsque l'amplitude de la modulation de fréquence atteint la valeur de la fréquence de la modulation. Ce raisonnement est aussi valable pour les nombres d'onde.

Notons enfin que le front de dislocations peut avoir une certaine « largeur », notamment pour les plus faibles valeurs de  $\Delta T$  dans la zone d'instabilité d'Eckhaus absolue. Dans ces régimes, stationnaires eux aussi, le front a bien entendu toujours une position fixe, mais les dislocations surviennent alternativement à deux abscisses distinctes. Ce phénomène de battement est illustré sur la figure 3.27 ; il n'altère en rien les définitions et conclusions précédentes, et nous avons traité ce cas comme celui d'un front « unique ».

### c. Régime convectif de front : $5,45 \text{ K} \leq \Delta T \leq \Delta T_a^{\text{Eck}} = 5,56 \text{ K}$

Que se passe-t-il si nous diminuons la contrainte  $\Delta T$  ? Nous présentons maintenant le régime intermédiaire entre le voisinage du premier seuil — où les ondes sont stables d'Eckhaus — et le régime absolument instable d'Eckhaus — au delà de 5,56 K. Dans ce régime intermédiaire, les comportements sont beaucoup plus diversifiés.

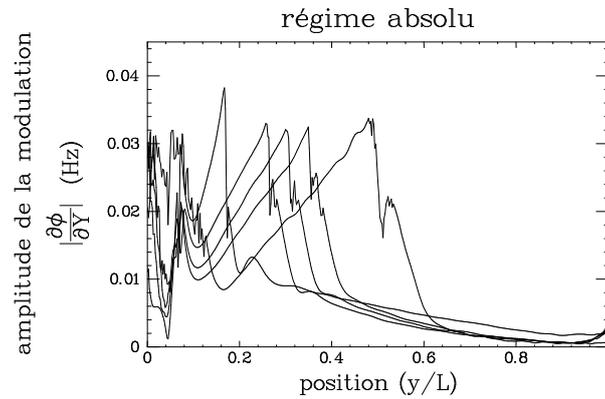


FIG. 3.26 – Superposition de différents profils d’amplitude de modulation de fréquence obtenus pour des différentes valeurs de  $\Delta T$ . Plus celle-ci est élevée et plus le front de dislocations est proche de la source à gauche de la cellule. L’éclatement et le saut de phase ont apparemment toujours lieu pour une même amplitude  $\Omega \simeq 0.03$  Hz de la modulation qui correspond exactement à la différence  $f_{21} - f_{17}$  des fréquences du mode 21 et du mode 17, i.e. à la fréquence de la modulation.

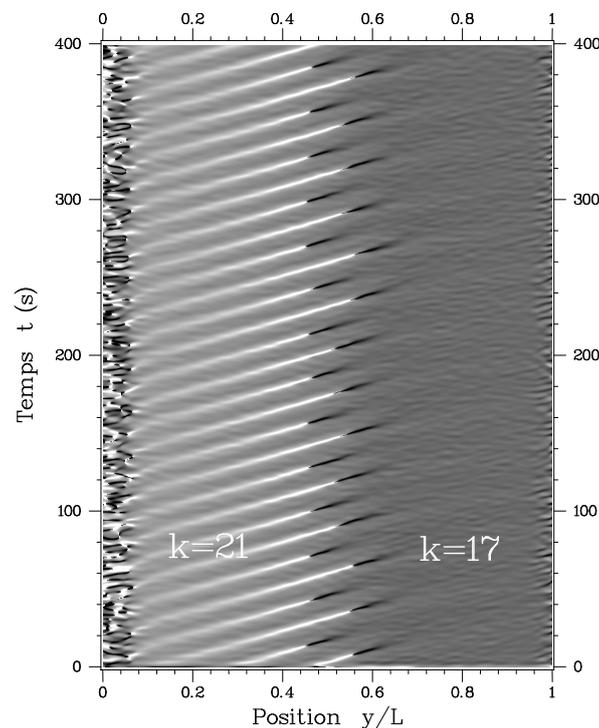


FIG. 3.27 – Instabilité d’Eckhaus absolue. Diagramme spatio-temporel de la fréquence instantanée dans le rectangle pour  $\Delta T = 5,58$  K. Le front de dislocations est double.

La figure 3.28 illustre un premier cas simple d'instabilité convective où une perturbation initiale nourrit pendant de nombreuses périodes une modulation qui est petit à petit advectée vers l'aval par la vitesse de groupe. Le système relaxe donc vers un état uniforme, sans modulation. Dans ce régime, les ondes sont instables d'Eckhaus, mais le taux de croissance temporel des modulations est négatif et il est impossible de définir une position stationnaire du front des dislocations. Celui-ci n'existe que lors de périodes transitoires; par exemple après une perturbation mécanique du système (ajout d'une goutte d'huile) ou bien un changement de  $\Delta T$ .

Nous pouvons néanmoins définir un taux de croissance spatial  $\xi_{21}^{\text{Eck}}$ . Ce dernier est positif au delà d'une certaine valeur  $\Delta T = 5.45$  K, ce qui confirme la notion d'instabilité d'Eckhaus même si le front est évacué hors de la cellule. La dépendance de  $\xi_{21}^{\text{Eck}}$  vis à vis de  $\Delta T$  est reproduite sur la figure 3.29. Ce taux de croissance spatial tend vers zéro quand  $\Delta T \rightarrow 5,45$  K par valeurs supérieures.

Remarquons que les états décrits jusqu'à présent étaient caractérisés par la relaxation d'une perturbation forte (remplissage typiquement) ou bien par diminution de  $\Delta T$  à partir d'un état absolument instable d'Eckhaus. Nous pouvons en cela les appeler des états fortement non-linéaires.

#### d. $\Delta T < 5,45$ K : Etats stables ?

**d.1 Etats non modulés.** En dessous de  $\Delta T = 5,45$  K, et si l'on ne perturbe pas le système, les états observés ne présentent pas de dislocations, ni même de modulations. Nous ne pouvons donc pas mesurer de taux de croissance spatial. Le système semble stable d'Eckhaus.

Avant de présenter les résultats obtenus en perturbant volontairement le système par des moyens mécaniques, nous allons présenter un régime particulier qui nous laisse supposer que les états sont effectivement stables vis-à-vis des modulations, ou de certaines perturbations.

**d.2 Existence d'une source bruyante et ses conséquences.** La richesse de cette zone — apparemment stable — ainsi que de la zone déjà répertoriée comme convective peut être mise en lumière par un nouveau phénomène permettant de façon indépendante d'imposer une source de bruit à un bord de la cellule.

En effet, lorsque le fluide s'évapore durant une longue expérience, la hauteur  $h$  diminue en dessous de la valeur de travail  $h = 1,7$  mm, et par voie de conséquence la fréquence et le nombre d'onde augmentent légèrement par rapport aux valeurs critiques correspondant à  $h = 1,7$  mm. Lorsque la hauteur de fluide est inférieure à une valeur seuil, de l'ordre de 1,6 mm, nous observons alors que la source d'onde majoritaire se décolle du bord pour se placer à environ une longueur d'onde de ce bord, à l'intérieur de la cellule. Cela a pour effet de réduire la taille effective de la cellule tout en maintenant le même nombre de longueurs d'onde à l'intérieur de cette taille effective.

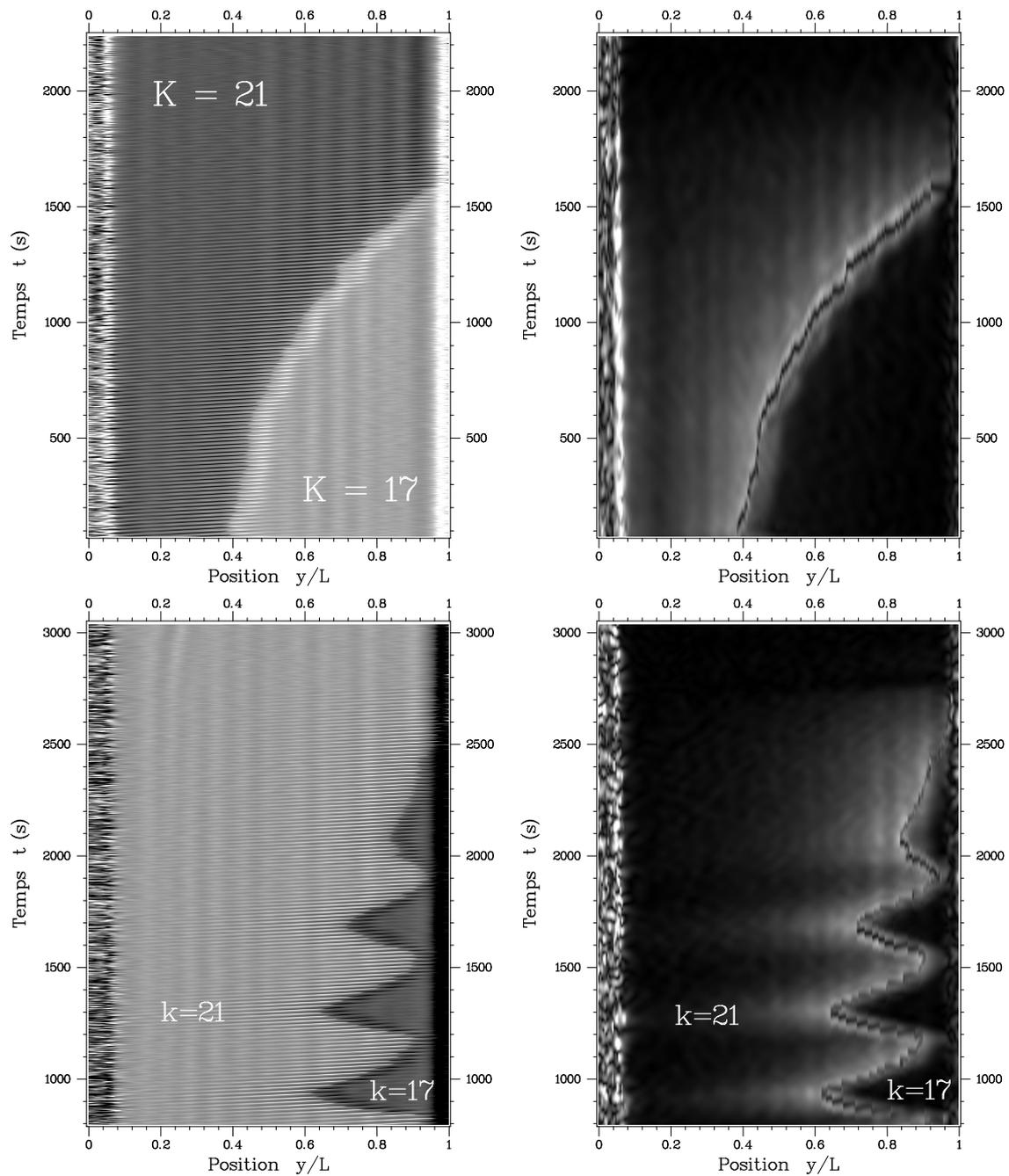


FIG. 3.28 – *Instabilité d'Eckhaus convective. Diagrammes spatio-temporels du nombre d'onde local instantané  $k_y(y,t)$  dans le rectangle pour  $\Delta T = 5,54$  K (en haut) et  $\Delta T = 5,52$  K (en bas). A gauche sont reproduits les signaux  $\partial\phi/\partial y$  et à droite les amplitudes des modulations de nombre d'onde telles que données par une transformée de Hilbert en temps. Les diagrammes de gauche révèlent clairement que la zone 21 est instable : l'amplitude de la modulation est croissante en espace et décroissante en temps ; l'instabilité est convective.*

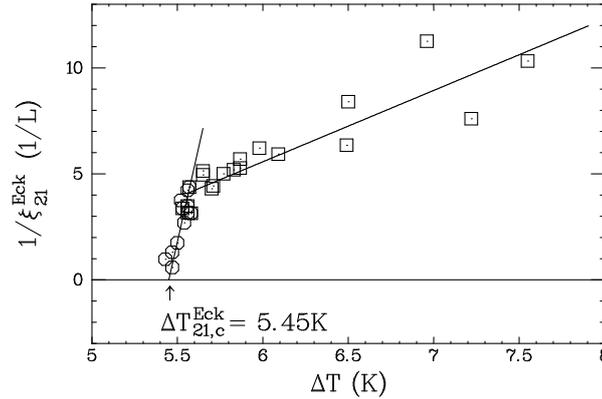


FIG. 3.29 – Variation du taux de croissance spatiale, en fonction de  $\Delta T$ , mesuré sur des états de relaxation (symboles  $\circ$ ).  $\xi_{21}^{Eck} > 0$  signe des états instables. Les points de la zone d’instabilité d’Eckhaus absolue (symboles  $\square$ ) sont reproduits pour comparaison.

Nous prenons avantage de cette modification due à l’évaporation et qui survient après quelques heures d’expérimentation : la source qui n’est plus collée au bord de la cellule est beaucoup plus bruyante. Ce plus haut niveau de bruit peut être heuristiquement expliqué par le fait que la position de la source est un degré de liberté supplémentaire, et surtout par le fait que la source émet maintenant une onde inverse dans un petit domaine (entre la source et le bord de la cellule) ce qui permet à cette dernière d’avoir une amplitude plus élevée dans cette région en évitant le couplage non-linéaire destructif. Cette onde inverse interagit bruyamment avec l’onde majoritaire.

La présence de la source de bruit permet d’observer dans la région convectivement instable des modes entretenus. Ces modes ne sont pas auto-entretenus, mais nourris par le bruit de la source<sup>7</sup>. Plus intéressant encore, cette source existe aussi dans la zone « stable » pour  $\Delta T < 5,45$  K et permet d’exciter le système en émettant des modulations de phase. Un tel régime est illustré sur la figure 3.30. Il est alors possible de mesurer le taux de croissance ou d’amortissement des modulations émises par la source.

La figure 3.31 illustre divers profils d’amplitude de modulation dans le régime forcé par la source. La figure 3.32 présente alors les mesures du taux de croissance spatial de la modulation : ce dernier est négatif en dessous de 5,45 K et positif au dessus. Les nouveaux points ainsi obtenus dans la zone convectivement instable s’alignent avec les points obtenus précédemment.

$\xi_{21}^{Eck} < 0$  signifie que le mode 21 est stable vis-à-vis des modulations de phase. Une approximation linéaire de la variation correspondante nous conduit à une valeur du seuil de l’instabilité d’Eckhaus de 5,45 K, i.e. une valeur identique à celle obtenue grâce aux états convectivement instables. Cependant, la pente de l’approximation linéaire est différente :

7. Dans le cas de l’instabilité primaire, nous n’avons pas observé des structures analogues car les sources n’étaient pas assez bruyantes et/ou la cellule pas assez longue.

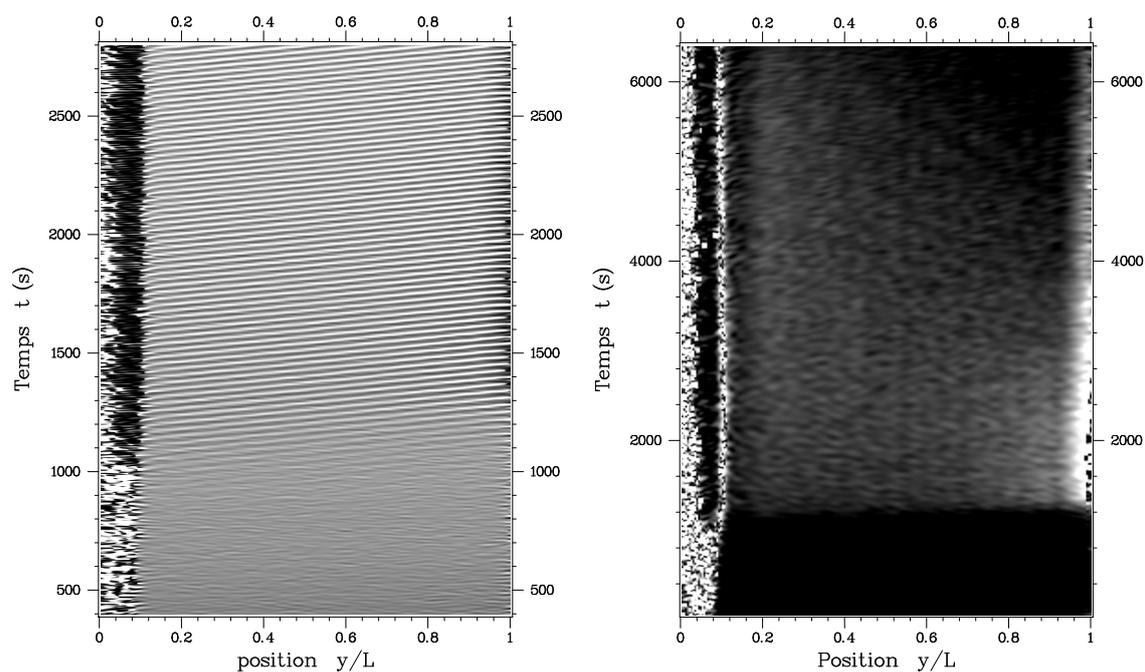


FIG. 3.30 – *Etat stable forcé*. Diagrammes spatiotemporels de la fréquence locale instantanée  $\partial\phi/\partial t$  dans le rectangle pour  $\Delta T = 5,27$  K. A gauche, élargissement autour de la date à laquelle une source de bruit apparaît (vers  $t = 1000$  s). A droite, amplitude de la modulation : celle-ci s'amortit temporellement et spatialement vers l'aval et l'on mesure après relaxation un taux de croissance spatial de la modulation qui est négatif.

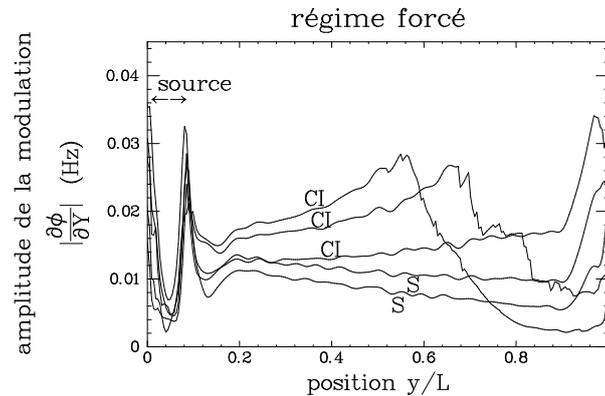


FIG. 3.31 – Superposition de différents profils spatiaux d’amplitude de modulation de fréquence obtenus pour différentes valeurs de  $\Delta T$  dans la zone où une « source de bruit » existe (source positionnée en  $y \simeq 0,05$ , à gauche). Ces profils sont extraits en fin de fichier, i.e. après relaxation. Les symboles S et CI dénotent les états stables ( $\Delta T < 5,45$  K) pour lesquels la modulation décroît spatialement et les états convectivement instables ( $\Delta T > 5,45$  K) pour lesquels la modulation croît spatialement. Tout comme en Fig. 3.26, l’éclatement et le saut de phase ont apparemment lieu pour une même amplitude  $\Omega \simeq 0.03$  Hz de la modulation.

le comportement du taux de croissance n’est pas le même de part et d’autre du seuil bien que le taux de croissance lui-même soit continu au passage du seuil.

**d.3 États perturbés par l’expérimentateur** Pour observer des modulations advectées et les regarder croître ou décroître spatialement, nous procédons typiquement à une perturbation mécanique sans changement de  $\Delta T$ . Notre tactique favorite consiste à déposer sans ménagement une goutte de fluide chaude à proximité d’un bord de la cellule.

La figure 3.33 présente ainsi sur une image de fréquence la relaxation d’une perturbation. Le taux de croissance spatial des modulations advectées est positif, ce qui semble suggérer que de telles perturbations sont instables ; le taux de croissance temporel est quant à lui négatif.

Les taux de croissance spatiaux mesurés sur de tels états perturbés artificiellement sont reproduits sur la figure 3.34. La dispersion de ces résultats est grande ; néanmoins, un ajustement linéaire des points nous donne exactement la même tendance que l’ajustement effectué sur les états absolument instables. Dans les deux cas, un « seuil » situé autour de 4,4 K se dégage.

Comment interpréter ces états ? Si l’on suppose que les modulations issues des perturbations mécaniques sont différentes (en un sens à préciser) des modulations issues d’une excitation par la source artificielle de bruit, il est possible d’expliquer des valeurs différentes

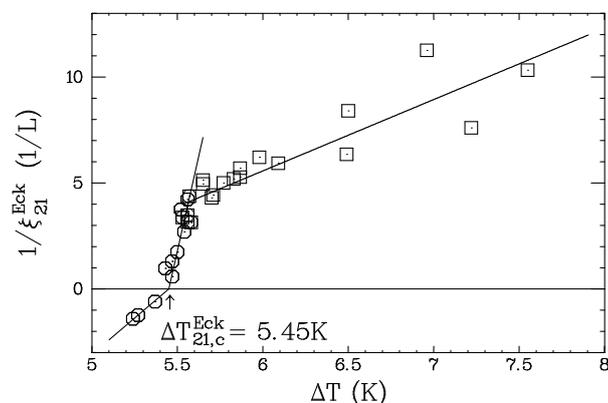


FIG. 3.32 – Variation du taux de croissance spatial, en fonction de  $\Delta T$ , mesuré sur des états stables forcés par une source de bruit:  $\xi_{21}^{Eck} < 0$  signe des états stables. Les points correspondants aux états instables précédents sont reproduits pour comparaison.

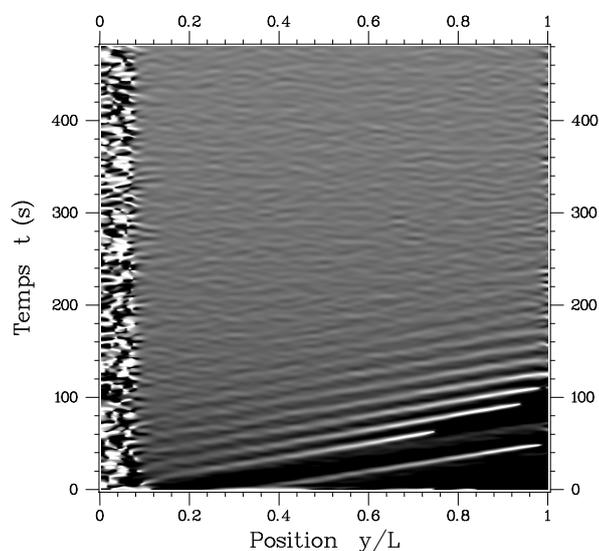


FIG. 3.33 – Diagramme spatiotemporel de la fréquence locale et instantanée dans le rectangle pour  $\Delta T = 5,47$  K. A la date  $t = 0$  s, une perturbation mécanique conduit à l'apparition de modulations qui explosent en dislocations tout en étant advectées et disparaissant. La vitesse d'advection est mesurée comme la vitesse du front arrière qui est bien définie.

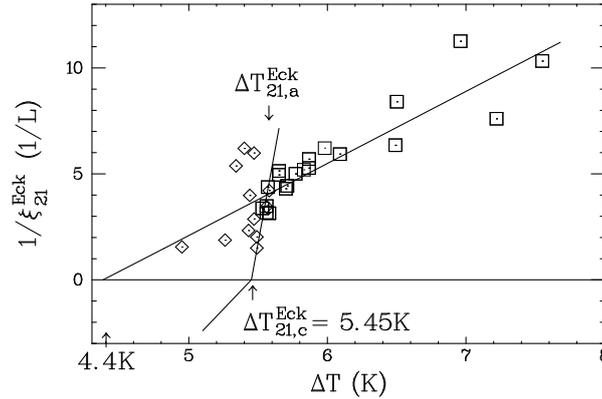


FIG. 3.34 – Variation du taux de croissance spatial, en fonction de  $\Delta T$ , mesuré sur des états après perturbation mécanique ( $\diamond$ ) :  $\xi_{21}^{Eck} > 0$  signe des états stables. Les points correspondants aux états absolument instables sont reportés ( $\square$ ). Les états convectivement instables et stables ne sont rappelés que par leur ajustement linéaire. Il est possible d'extrapoler par une droite le comportement commun des états perturbés et des états absolument instables. Le seuil alors défini est de 4,4 K.

des taux de croissance. En effet, ce dernier est fonction du nombre d'onde et de la fréquence des modulations et ces dernières ont très certainement des caractéristiques différentes dans chacun des cas : le taux de croissance spatial de l'instabilité d'Eckhaus n'est ainsi pas le même pour les perturbations émises par la source et par l'expérimentateur. Ainsi, entre 4,4 K et 5,45 K, nous pouvons supposer que les perturbations émises par la source et qui relaxent à zéro sont justement des perturbations de nombre d'onde et de fréquence stables vis-à-vis de l'instabilité modulationnelle et qu'au contraire les perturbations produites par l'expérimentateur contiennent un plus grand nombre de fréquences et de nombres d'onde dont certains situés dans la bande instable d'Eckhaus.

Nous pouvons aussi — par analogie avec le seuil d'un mode global linéaire ou non-linéaire — suggérer la définition de deux seuils différents. Nous aurions alors un seuil de l'instabilité linéaire convective d'Eckhaus (perturbations infiniment faibles et monochromatiques, émises par la source) et la définition d'un seuil de l'instabilité non-linéaire convective d'Eckhaus (perturbations fortes, riches en fréquences et avec une enveloppe bien déterminée où les effets non-linéaires jouent un rôle). Le seuil non-linéaire est alors situé à 4,4 K, avant le seuil linéaire à 5,45 K.

### e. Mesures des vitesses de front

Les différentes vitesses ayant un sens lors de l'advection de l'instabilité modulationnelle et que nous avons pu mesurer expérimentalement sont :

- la vitesse de groupe des ondes hydrothermales, qui dans notre système dépend de

$\Delta T$ <sup>8</sup> mais n'est que légèrement différente de la vitesse de groupe au seuil  $v_g$  qui apparaît dans l'équation de CGL (équ.(3.1)) :

$$v_g(\epsilon, q) = v_g|_{\epsilon=0} + 2\xi_0^2\tau_0^{-1}(c_1 - c_2)q + \dots$$

- la vitesse du front *arrière* des modulations lorsque celles-ci sont advectées vers l'aval, i.e., lorsque l'on est dans la zone de stabilité où d'instabilité convective. Cette vitesse coïncide avec la vitesse du front de dislocation lorsque celui-ci existe.
- la vitesse du front *avant* des modulations lorsque celles-ci sont advectées vers l'amont, i.e., lorsque l'on est dans la zone convective forcée ou bien lorsque s'instaure un régime absolu.

La vitesse de groupe est calculée comme la vitesse de phase des modulations, i.e., le rapport de la fréquence par le nombre d'onde des modulations. Les vitesses des fronts avant et arrière des modulations ou des dislocations peuvent être mesurées de deux façons différentes :

- soit indirectement comme le rapport du taux de croissance temporel par le taux de croissance spatial.
- soit directement sur un diagramme spatio-temporel, comme la pente locale de la ligne de dislocations ou la pente locale d'une iso-amplitude des modulations.

Nous avons vérifié que les deux méthodes donnaient les mêmes résultats et nous pouvons sans problème confondre les deux ensembles de valeurs.

La figure 3.35 illustre alors le comportement de ces vitesses en fonction du paramètre de contrôle. Pour les états absolument instables, la vitesse négative mesurée correspond à un envahissement de la cellule à partir du bord aval, i.e. à l'encontre de l'advection par la vitesse de groupe. Nous vérifions bien qu'à une augmentation de  $\Delta T$  correspond une vitesse de pénétration plus élevée. Ces vitesses sont en parfait accord avec l'intuition.

Un comportement bien plus étrange est observé pour les états convectivement instables entre 5,45 K et 5,56 K. En effet, plus  $\epsilon$  est élevé dans la zone convective — et donc plus l'on se rapproche de la limite convectif/absolu — et plus la vitesse d'évacuation vers l'aval des modulations est grande ! Au seuil de transition convectif/absolu semble de plus correspondre une divergence de la vitesse du front des dislocations. Ce comportement est assez inattendu car contraire à la première intuition qui voudrait que plus l'on est instable et plus les modulations sont persistantes dans l'état convectif. Si nous ne pouvons expliquer la brusque discontinuité au seuil convectif/absolu à 5,56 K, il n'en reste pas moins que celle-ci marque nettement un changement de régime et confirme ainsi la notion de transition.

Pour les états « stables » en dessous de 5,45 K, les mesures sont effectuées sur des états forcés par une source de bruit et la vitesse rend alors compte de l'instauration du régime

---

8. Cette dépendance a été mise en évidence dans l'anneau et l'ajout de termes supplémentaires à l'équation de CGL permet de la décrire (cf annexe B). Nous la retrouvons dans le rectangle comme le montre la figure 3.19.

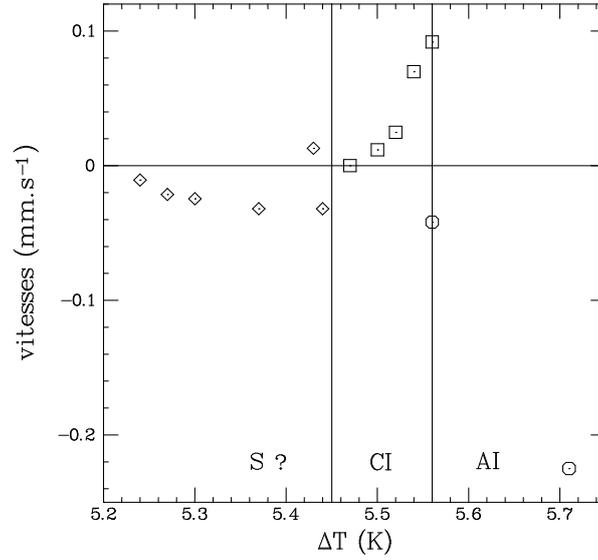


FIG. 3.35 – Vitesses du front des modulations ou dislocations dans le rectangle en fonction de  $\Delta T$ , dans les différents régimes d’instabilité d’Eckhaus.  $\diamond$  : états stables forcés,  $\square$  : états convectivement instables (il s’agit de la vitesse de fuite vers l’aval du front arrière) et  $\circ$  : états absolument instables (il s’agit de la vitesse de rétraction du front avant vers l’amont — donc négative — mesurée pendant le régime transitoire).

asymptotique forcé. La dynamique est alors lente et le taux de croissance temporel est faible, voire mal défini. Il y a ainsi une très nette différence entre ces états forcés et les états perturbés « de l’extérieur » pour lesquels la vitesse du front arrière des modulations est de l’ordre de la vitesse de groupe, i.e. beaucoup plus élevée. En cela, les états forcés semblent plus proches des états convectifs observés au delà de 5,45 K et nous les avons utilisés pour confirmer le seuil convectif  $\Delta T_{21,c}^{\text{Eck}}$ ... mais ce régime est-il réellement stable vis-à-vis de l’instabilité d’Eckhaus?

### 3.3 Instabilités d'ordre supérieur

A priori, si la vitesse de groupe  $v_g$  ne s'annule pas, les instabilités d'ordre supérieur pouvant intervenir sont convectives au voisinage de leur seuil. Deissler a ainsi observé numériquement une turbulence faible advectée dans l'équation de CGL avec vitesse de groupe ; et les sillages regorgent d'exemple de ce type.

Dans le cas de l'anneau, les conditions aux limites périodiques empêchent à priori cette phénoménologie. Néanmoins, nous pouvons imaginer que dans le cas où existent des couples {puits, source}, les régions d'onde droite et les régions d'onde gauche soient suffisamment séparées pour se comporter comme des « petites boîtes finies », au moins sur des temps  $\tau$  courts, i.e., petits devant les temps caractéristiques de déplacement des sources et des puits. Un tel régime suppose bien sûr que ces objets ne se déplacent quasiment pas sur une période de l'onde de base, ce qui est plutôt un cas assez rare parmi tous les régimes à fort  $\epsilon$  observés dans l'anneau. En résumé, des effets attachés à la transition convectif/absolu sont donc envisageables dans l'anneau lorsque des couples {puits, source} existent ; nous pouvons ainsi imaginer que l'expérience de Lega *et al.* (1992) — où des dislocations sont observées — est dans ce cas. Couillet *et al.* (1993) ont par ailleurs montré que la stabilité des sources est directement liée au caractère convectif ou absolu de la stabilité des solutions ondes planes que ces objets permettent de « raccorder ».

Dans le rectangle, le mode 17 devient à son tour instable d'Eckhaus pour  $\Delta T = 8,2$  K ( $\epsilon \simeq 1,65$ ). A priori, nous pouvons attendre la même phénoménologie que celle observée pour l'instabilité d'Eckhaus du mode 21. Celui-ci n'est d'ailleurs plus observé et la source émet directement le mode 17 modulé. La figure 3.36 illustre, dans le cas où le mode 17 est absolument instable, le régime transitoire menant au régime stationnaire après une augmentation de  $\Delta T$ . Nous y voyons ainsi la naissance des modulations, puis leur éclatement en un front de dislocations. Ce front naît sur le bord aval (à droite) à la date  $t \simeq 700$  s et se déplace ensuite à contre-courant jusqu'à atteindre sa position d'équilibre en  $y/L \simeq 0,4$ . Cette dynamique est exactement la même que celle des transitoires observés à l'établissement du régime d'instabilité d'Eckhaus absolue du mode 21. Néanmoins, le diagramme de la figure 3.36 présente en plus un autre phénomène. En aval du premier front, des modulations existent qui sont à leur tour amplifiées jusqu'à conduire à de nouvelles dislocations à partir de  $t \simeq 1000$  s. Ces dislocations forment un second front qui se propage à son tour à rebrousse-poil. Un fait remarquable est que ces dislocations se produisent très régulièrement avec une période qui est exactement le double de la période des dislocations du premier front. Non content de cela, le système nous offre alors suivant le même principe l'apparition en aval d'une nouvelle fréquence de modulations, suivies d'un nouveau front de dislocations, de période encore doublée (soit 4 fois la période initiale). En fin de fichier — malheureusement trop court — un nouveau doublement de période survient (dislocations à 8 fois la période initiale).

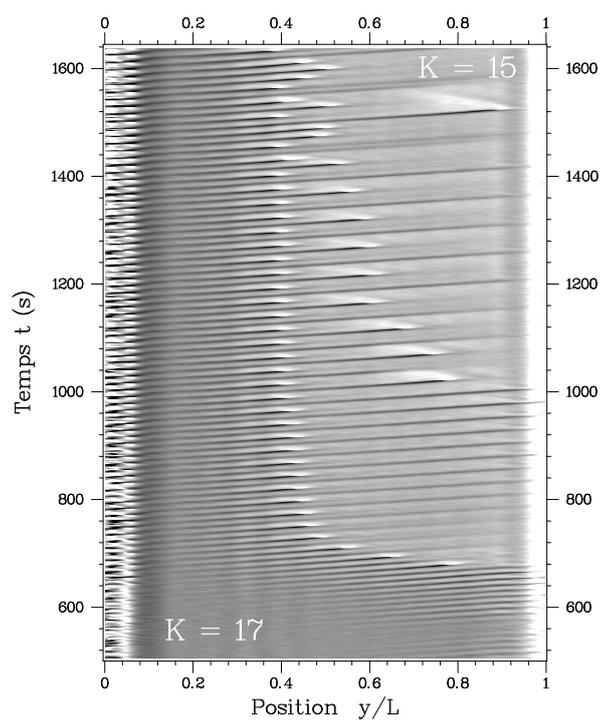


FIG. 3.36 – Diagramme spatio-temporel pour  $\Delta T = 8,5 K$ , illustrant une cascade temporelle de doublement de période dans un régime transitoire menant à un état où le second mode (17) est à son tour instable d'Eckhaus (absolument).

## Chapitre 4

# Écoulement de base convectif stationnaire à 2D

CE CHAPITRE PRÉSENTE L'ÉCOULEMENT thermocapillaire expérimental obtenu dans une géométrie « 2D » qui a la symétrie de révolution autour d'un centre. Une première partie (§ 4.1) est consacrée à la description du champ de température expérimental dans la cellule en forme de disque. Une seconde partie (§ 4.2) traite de la possible modulation stationnaire de l'écoulement de base par des rouleaux corotatifs.

### Présentation

Afin de fixer les idées sur l'écoulement de base et sa structuration en rouleaux, nous avons représenté sur la figure 4.1 l'allure de ces objets en géométrie cartésienne. L'écoulement de base y apparaît ainsi comme un grand rouleau occupant toute la cellule. La modulation de cet écoulement de base donnant l'apparence d'une structuration en rouleaux stationnaires corotatifs est aussi représenté. La figure 4.2 présente la transposition de ces structures au cas de la géométrie cylindrique : l'écoulement de base est alors un tore qui occupe toute la zone de fluide de la cellule.

Il n'y a a priori aucune corrélation entre la présence de rouleaux et celles des ondes hydrothermales. Néanmoins, pour les plus grandes hauteurs de fluide  $h > 1,5 \text{ mm} \simeq \lambda_c$ , les apparitions respectives de ces deux types d'objets coïncident presque. L'aspect novateur de la géométrie disque nous a poussé à étudier ces rouleaux. Seule la cellule cylindrique 2D est ici étudiée en détail, non seulement car la géométrie étendue dans la direction du gradient permet une étude quantitative de la distribution spatiale des rouleaux, mais aussi car le montage ombroscopique direct utilisé permet cette étude avec une grande qualité. Les comportements reportés sont génériques et ont été observés — certes avec plus de difficultés — dans les géométries unidimensionnelles et ils ont fait l'objet d'une étude théorique par Mercier et Normand (2000).

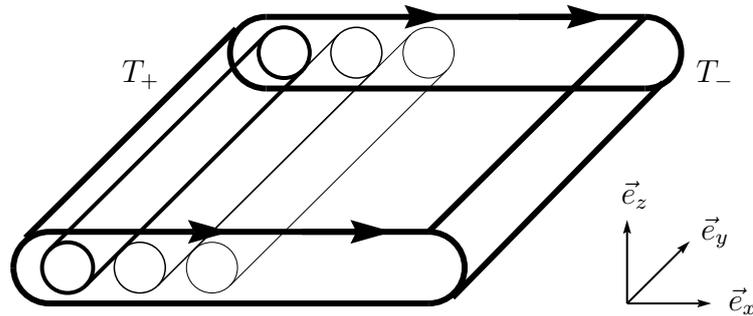


FIG. 4.1 – Schéma de l'écoulement de base (trait gras et flèches) et de trois rouleaux corotatifs dans le cas de la géométrie cartésienne. Le fluide s'écoule en surface du chaud vers le froid et l'écoulement de base forme un cylindre aplati invariant par translation selon  $\vec{e}_y$ . Les rouleaux corotatifs apparaissent du côté chaud et pénètrent progressivement la cellule. Ils tournent tous dans le même sens que l'écoulement de base.

## 4.1 Profils de température

Afin de mieux caractériser l'écoulement de base, il semble naturel de mesurer la distribution spatiale des champs de température et de vitesse et de les comparer aux prédictions du modèle théorique semi-infini (§ 1.2.3, formule (1.8)). A cette fin nous avons mesuré les profils radiaux de température dans la cellule pour les hauteurs de fluide  $h=1,9$  mm et  $h=1,2$  mm.

### 4.1.1 Protocole

Les mesures ont été effectuées grâce à deux thermocouples Al/Kr dont la sensibilité est de  $41,3 \mu\text{V/K}$ . Le thermocouple de référence est introduit dans un orifice adéquat de la couronne extérieure en cuivre, ce qui le positionne à 1 mm environ de la frontière avec le fluide. Le thermocouple de mesure est promené dans le fluide le long d'un rayon, à une altitude  $z \leq h$  choisie. Ses déplacements sont effectués par une platine de translation motorisée pilotée par un ordinateur qui recueille la position et la valeur de la température correspondante, moyennée typiquement sur 40 mesures acquises à une fréquence de 2Hz. Un délai de 5 ou 10 secondes est respecté après chaque mouvement du thermocouple, ces derniers étant effectués par pas de 0,5 mm.

Nous avons recueilli pour une hauteur  $h$  et une valeur de  $\Delta T$  donnés un ensemble de profils horizontaux réalisés à différentes altitudes  $z$ . Vue la similitude des profils réalisés à des altitudes voisines de quelques dixièmes de millimètres, nous avons mesuré des profils espacés de 0,4 mm pour  $h=1,9$  mm et de 0,3 mm pour  $h=1,2$  mm. A partir de ces données, il nous a été possible en recombinaison les points de remonter à une image du

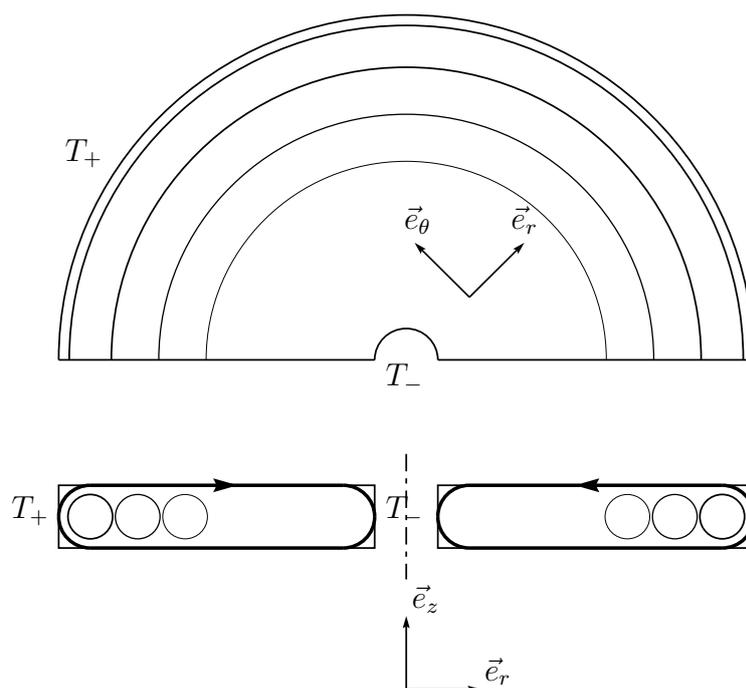


FIG. 4.2 – Schéma de l'écoulement de base (trait gras) et de trois rouleaux corrotatifs dans le cas de la géométrie cylindrique 2D « LOTUS ». Le centre est à la température  $T_-$  et l'extérieur à  $T_+ > T_-$ . Le fluide s'écoule donc en surface du chaud vers le froid. L'écoulement de base forme un tore aplati invariant par rotation d'angle  $\theta$ . Les rouleaux corrotatifs apparaissent du côté chaud et pénètrent progressivement la cellule.

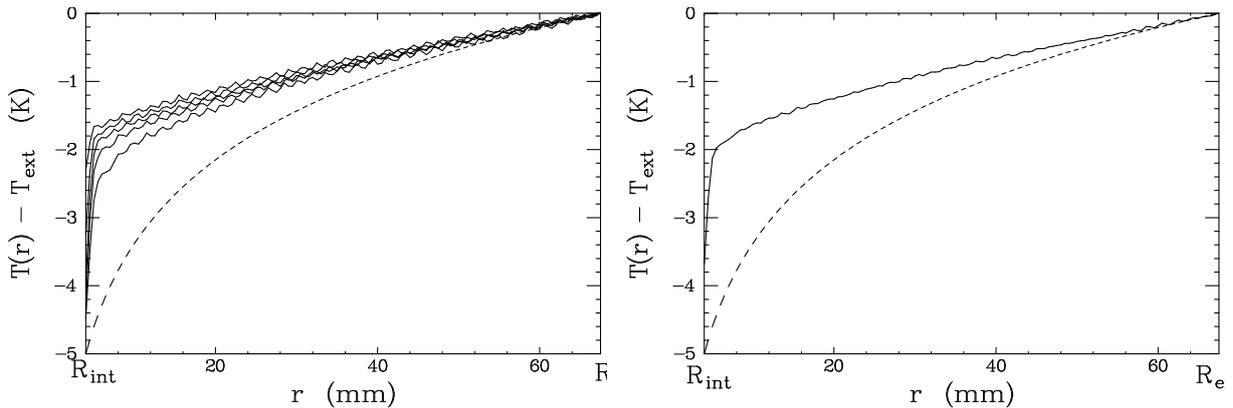


FIG. 4.3 – Profils de température expérimentaux radiaux  $T(r) - T_{ext}$  pour  $4 \text{ mm} < r < 67.5 \text{ mm}$  ( $h=1,9 \text{ mm}$ ,  $\Delta T=+5\text{K}$ ). A gauche : les différentes courbes en traits pleins correspondent, de haut en bas, à  $z=1.9 \text{ mm}$  (à la surface), 1.5, 1.1, 0.7, 0.3 mm. A droite : profil moyen. Sur chacun des graphes, la courbe en pointillés représente le profil conductif théorique. Les oscillations spatiales sont dues à l'oscillation à très basse fréquence des régulations de température.

champ de température complet dans une section radiale de la cellule et donc d'en déduire en particulier les profils verticaux de température.

#### 4.1.2 Hauteur de fluide $h=1.9 \text{ mm}$

La figure 4.3 représente les différents profils radiaux mesurés pour  $\Delta T = T_{ext} - T_{int} = +5 \text{ K}$ , ainsi que leur moyenne représentant le profil moyen après intégration suivant  $z$ . Ces profils présentent une oscillation spatiale d'amplitude  $\pm 0,1 \text{ K}$ , qui est en fait la signature des oscillations temporelles des températures  $T_{int}$  et  $T_{ext}$  autour de leur valeur de consigne. Ces oscillations peuvent être fortement amorties si l'on règle soigneusement les paramètres de régulation des bains thermostatés ; cette opération est à renouveler à chaque changement des températures de consigne et surtout lors d'une inversion de  $\Delta T$ , ce que nous avons souvent omis. La longueur d'onde de ces oscillations spatiales est proportionnelle à la vitesse de déplacement du thermocouple dans la cellule ; nous vérifions ainsi que la période des oscillations thermiques parasites est de l'ordre de 2 minutes. Ces oscillations disparaissent lorsque l'on moyenne plusieurs profils, ou que l'on balaye la cellule en intégrant les valeurs en chaque point sur un temps très long.

La figure 4.4 présente alors les profils moyens obtenus pour différents  $\Delta T$  séparés de 5 K. A titre de comparaison, les profils théoriques dans le cas conductif — obtenus par la résolution de l'équation de la chaleur en géométrie cylindrique — sont aussi représentés. Nous commenterons ces résultats en § 4.1.4.

A partir des données précédentes, nous pouvons construire une image représentant le

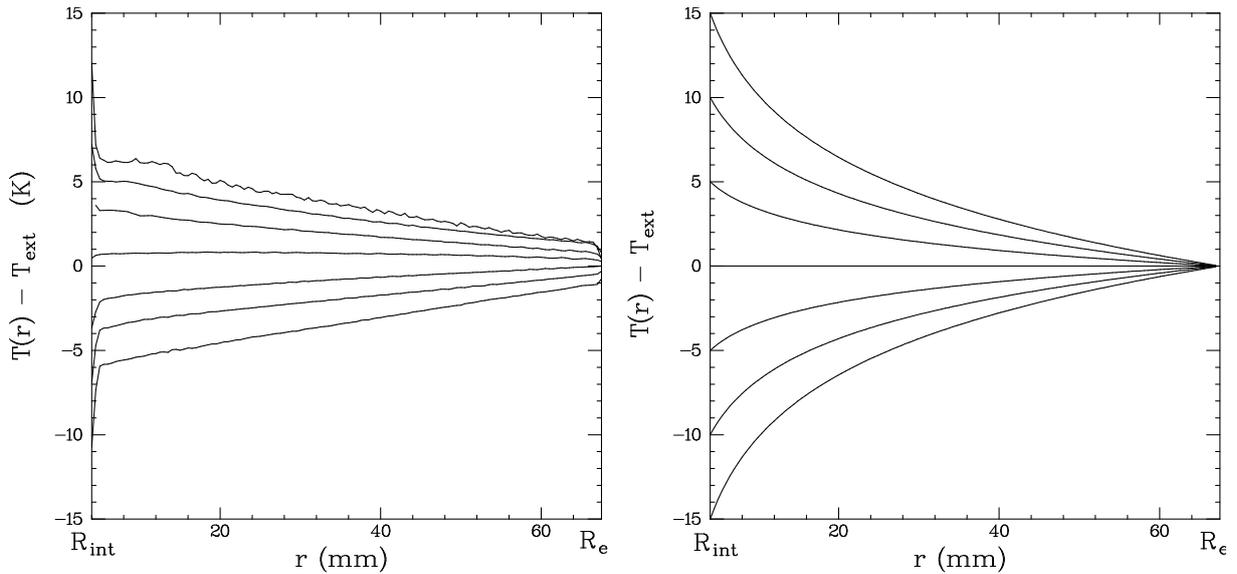


FIG. 4.4 – Profils de température  $T(r)$  pour  $h=1,9$  mm. A gauche : profils expérimentaux moyens. A droite : profils conductifs théoriques. Sur les deux graphes sont représentés les cas  $\Delta T = +15, +10, +5, 0, -5, -10, -15$  K.

champ de température dans toute une section radiale  $(r, z)$  de la cellule. De telles images sont représentées sur la figure 4.5. A côté de chaque image sont présentés des profils verticaux de température déduits de ces dernières. L'information ainsi extraite — notamment la stabilité locale au sens de Rayleigh-Bénard — est commentée en § 4.1.4.

A titre indicatif, nous donnons ci-dessous les valeurs du gradient « théorique »  $\beta_{\text{th}}$  — calculé brutalement en divisant  $\Delta T$  par  $L_{\parallel} = 63,5$  mm : c'est donc une valeur « globale » — ainsi que les valeurs du gradient effectif  $\beta_e$  — pente du profil expérimental de température loin des bords de la cellule.

$\Delta T$	$\beta_{\text{th}}$ (mK/mm)	$\beta_e$ (mK/mm)
15 K	236	76
10 K	157	46
5 K	79	25
-5 K	-79	37
-10 K	-157	60
-15 K	-236	78

Le gradient effectif loin des bords est donc de 2 à 3 fois plus faible que le gradient imposé « globalement » à la cellule.

### 4.1.3 Hauteur de fluide $h=1.2$ mm

La figure 4.6 présente les profils moyens obtenus pour différents  $\Delta T$  séparés de 5 K.

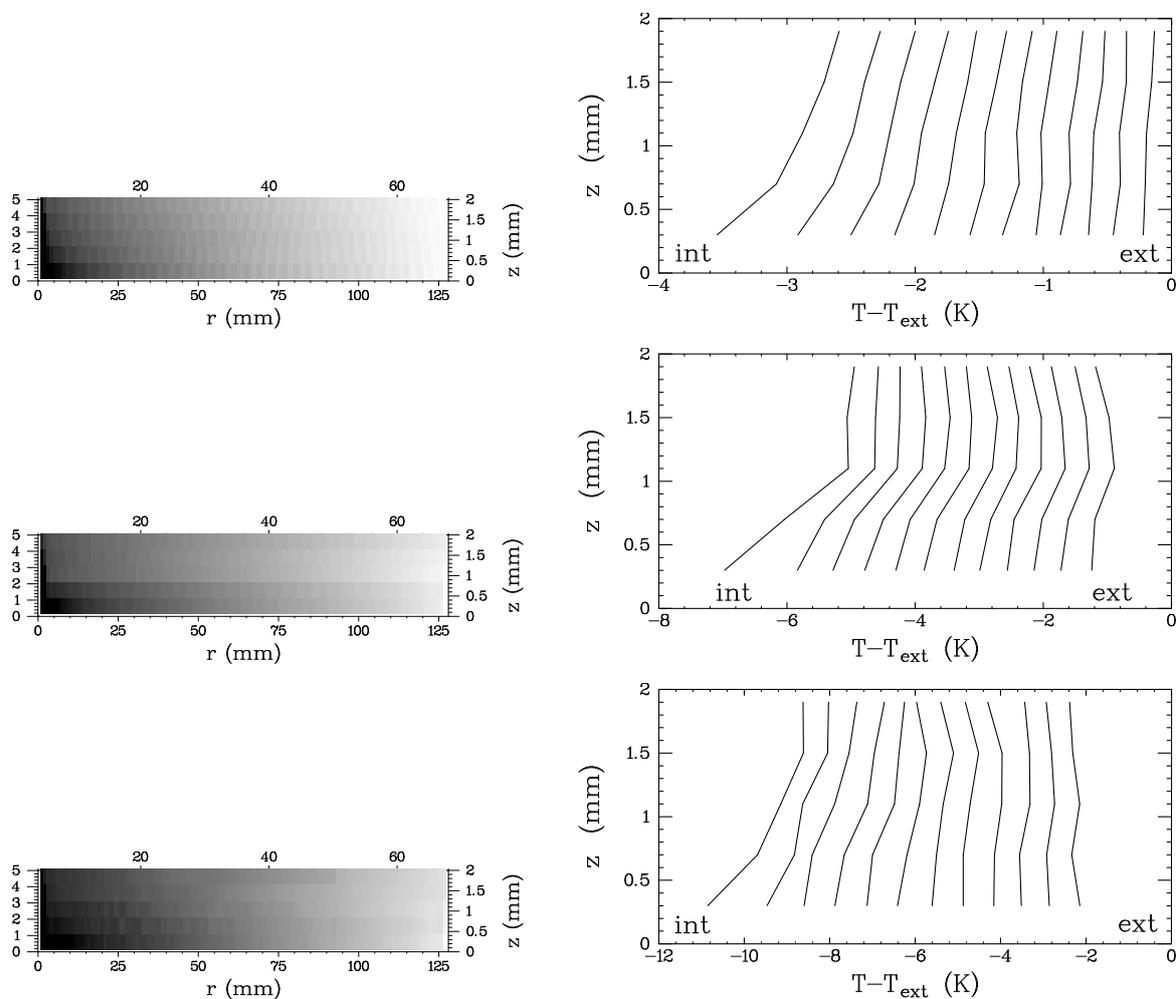


FIG. 4.5 – Images du champ de température et profils verticaux de température  $T(z)$  correspondants pour  $h=1,9$  mm,  $\Delta T = +5, +10, +15$  K. Sur les images, le noir correspond à la température la plus basse  $T_{int}$  et le blanc à la plus chaude  $T_{ext} > T_{int}$ . Chacun des 12 profils de chaque graphe est obtenu en moyennant 10 profils expérimentaux adjacents espacés de 0.5 mm.

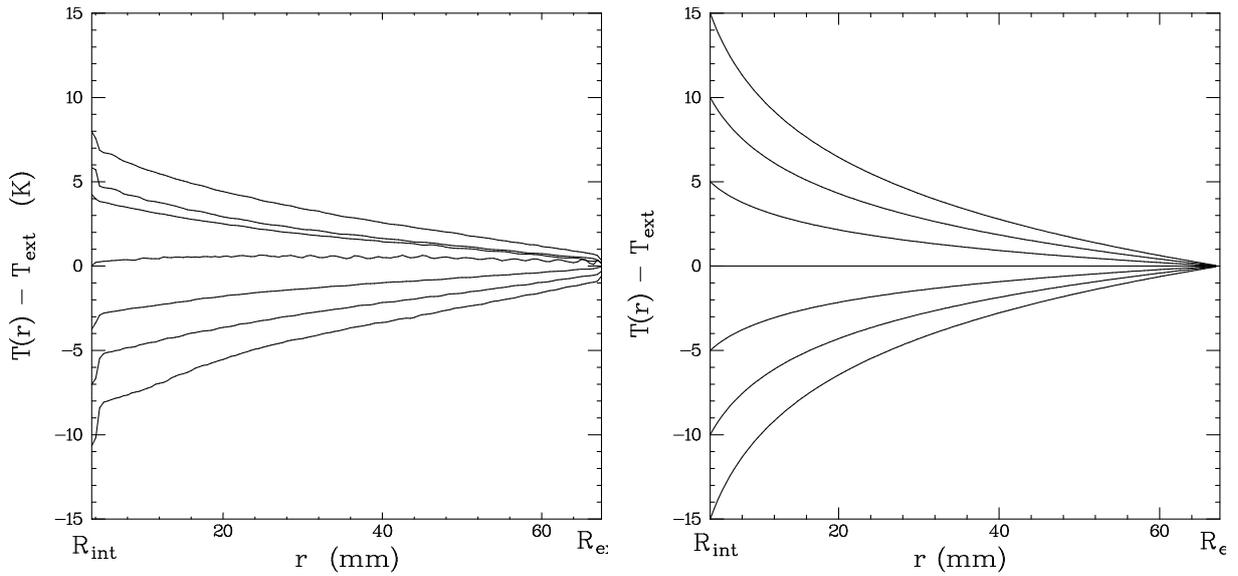


FIG. 4.6 – Profils de température  $T(r)$  pour  $h=1,2$  mm. A gauche : profils expérimentaux moyens. A droite : profils conductifs théoriques. Sur les deux graphes sont représentés les cas  $\Delta T = +15, +10, +5, 0, -5, -10, -15$  K.

Les profils verticaux de température que l'on peut déduire des données précédentes ne sont pas pertinents. En effet, aucune différence sensible n'est observable entre chacun de ces profils ; l'épaisseur de fluide étant sans doute trop faible pour réellement permettre de discerner le profil vertical. Afin de nous en convaincre, nous avons réalisé pour  $\Delta T = -10$  K une série de 10 profils horizontaux à des altitudes séparées de 0,1 mm, entre  $z = h = 1,2$  mm et  $z = 0,3$  mm. Les profils verticaux déduits de ces données sont représentés sur la figure 4.7 et commentés en § 4.1.4.

#### 4.1.4 Analyse des résultats

##### Une distribution radiale quasi-linéaire

Comme on peut le constater sur les figures 4.4 et 4.6, les profils radiaux moyens de température sont très éloignés des profils conductifs logarithmiques solutions de l'équation de la chaleur en géométrie cylindrique :

$$\begin{aligned} T_{\text{cond}}(r) &= (T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}) \frac{\ln(r/R_{\text{ext,int}})}{\ln(R_{\text{ext}}/R_{\text{int}})} + T_{\text{ext,int}} \\ &= T_{\text{int}} + \Delta T \frac{\ln(1 + \phi X)}{\ln(1 + \phi)} \end{aligned}$$

Cela est dû à l'existence de deux couches limites : une couche limite périphérique, près de la couronne de cuivre extérieure, et une couche limite centrale, près du plot de cuivre

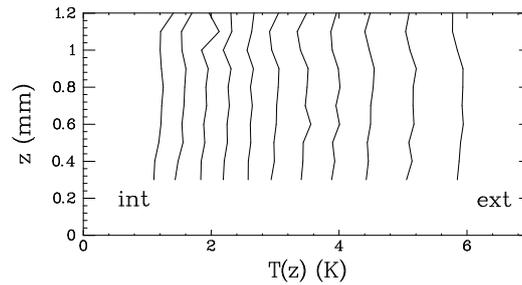


FIG. 4.7 – Profils de température  $T(z)$  expérimentaux pour  $h=1,2$  mm,  $\Delta T = -10$  K. Chacun des 12 profils de chaque graphe contient 10 points et est obtenu en moyennant 10 profils expérimentaux adjacents espacés de 0.5 mm.

central. La couche centrale est toujours plus importante que la couche extérieure; elle absorbe près de la moitié de la différence de température appliquée, et cela quelque soit la température imposée (chaud ou froid). La couche périphérique a un rôle plus réduit, d'importance comparable à celle des couches limites observées en géométrie rectangulaire par Burguete *et al.* (1999), Garcimartín *et al.* (1997).

Hors de ces deux zones aux extrémités du domaine, la distribution de température n'est pas logarithmique et le gradient n'est ainsi pas hyperbolique. Au contraire, les mesures expérimentales suggèrent que ce gradient effectif est quasiment constant loin des bords de la cellule. Les effets consécutifs à la géométrie cylindrique et à l'existence d'un point singulier en  $r = 0$  sont ainsi complètement masqués pour le champ de température dans l'écoulement de base.

Comment expliquer cette linéarité du profil radial de température? Celle-ci est reliée à l'existence d'une couche limite autour du plot central, qui absorbe une grande partie de la différence de température imposée. Cette couche limite peut résulter d'une évaporation relativement plus importante dans la région centrale, ainsi que d'un rayonnement lui aussi plus accentué par la géométrie cylindrique. De plus, la différence de température est imposée dans un demi-espace seulement : le plot central et la couronne en cuivre imposent au miroir constituant le fond de la cellule une distribution radiale de température qui est très proche de la distribution conductive théorique énoncée ci-dessus. Par contre, le plot central et la couronne en cuivre ne peuvent imposer un gradient conductif à la couche d'air située sur la surface libre du fluide. Comme l'évoque le schéma de la figure 4.8, une déformation importante des isothermes dans l'air peut se ressentir sur les isothermes dans le fluide. De tels effets existent sans doute dans notre expérience.

Remarquons enfin que la linéarité du profil de température est observée pour les deux hauteurs  $h=1,2$  mm et  $h=1,9$  mm; mais qu'elle est plus nette pour les grandes hauteurs.

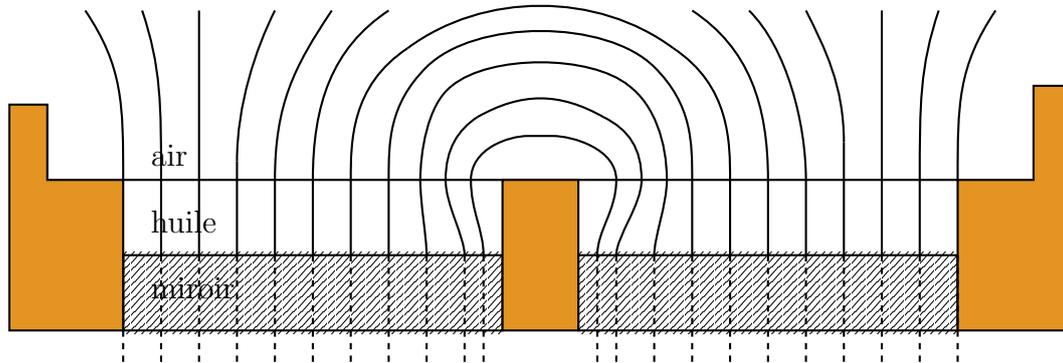


FIG. 4.8 – Schéma illustrant qualitativement la déformation des isothermes près du plot central. Les isothermes sont parfaitement verticales dans le miroir (solide conducteur), mais il n'en est rien dans l'air car le gradient horizontal n'est pas imposé dans l'air, mais seulement au niveau de l'huile. Près du plot central, la déformation des isothermes dans l'air se prolonge dans le fluide et perturbe ainsi le profil horizontal de température.

### Une distribution verticale peu marquée aux petites hauteurs

Commençons tout d'abord par le constat suivant : pour  $h=1,2$  mm les profils verticaux de température sont difficiles à isoler du bruit qui entoure les mesures. Cela signifie néanmoins que ces profils sont peu marqués ( $Ra \tau(z)$  est d'amplitude faible) et nous avons pu constater que les ondes hydrothermales ont une amplitude en température de l'ordre de l'amplitude du profil vertical de température. Pour cela, nous avons réalisé des expériences complémentaires en mesurant le signal temporel en un point de la cellule et en répétant l'opération sur une série de points alignés verticalement. La figure 4.9 représente alors pour chaque série temporelle la valeur moyenne, ainsi que les extrema ce qui donne l'amplitude en température des ondes hydrothermales. Cette dernière est du même ordre que la différence des températures entre  $z = 0$  et  $z = h$ . On s'attend à ce que cette différence évolue proportionnellement à  $\Delta T$  (§ 1.2.3, éq. (1.8) p. 22) alors que l'amplitude des ondes suit une loi en racine carrée avant de saturer (cf § 5.3.2).

Notons que la figure 4.9 illustre clairement que les ondes hydrothermales sont — entre autres composantes — des ondes de température en volume.

### Une distribution verticale parfois instable aux grandes hauteurs

Pour  $h = 1,9$  mm, certains profils verticaux de température présentent sur une fraction de leur hauteur une zone où  $T(z_1) > T(z_2)$  pour  $z_1 < z_2$ . Cette zone est ainsi potentiellement instable au sens de Rayleigh-Bénard. Une telle inversion est observable sur les profils

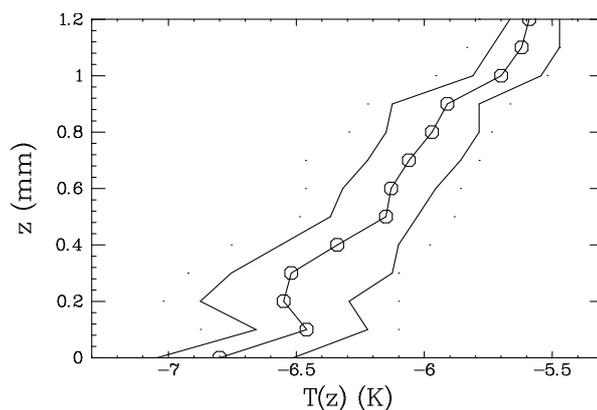


FIG. 4.9 – Profil vertical de la température moyenne (ligne continue et points  $\circ$ ), minimale et maximale (lignes continues sans point) en présence d'ondes hydrothermales, pour  $h=1,2$  mm,  $\Delta T = 15$  K et à la position  $r = 17,5$  mm.

verticaux de la figure 4.5 pour  $\Delta T = +5$  et  $+10$  K ; cette inversion a lieu dans la partie supérieure de la couche de fluide, et plutôt du côté chaud (extérieur). Néanmoins l'amplitude de la différence de température verticale reste toujours très faible et aucun rouleau de convection de Rayleigh-Bénard n'est jamais observé.

Mercier (1997) a discuté l'influence d'un profil vertical de température instable vis-à-vis de l'instabilité en ondes hydrothermales et vis-à-vis de l'existence de rouleaux corotatifs. La seule corrélation entre les distributions de température instables et l'existence de rouleaux corotatifs se résume à l'observation qualitative suivante : à grande hauteur et pour les plus grandes différences de températures, des zones de profils inversés existent du côté chaud, i.e., du côté où les rouleaux corotatifs sont initialement observés.

Nous allons dans la section suivante détailler la structuration de l'écoulement de base en rouleaux corotatifs avant l'apparition des ondes hydrothermales.

$h=1,9\text{mm}, \Delta T=-5\text{K}$

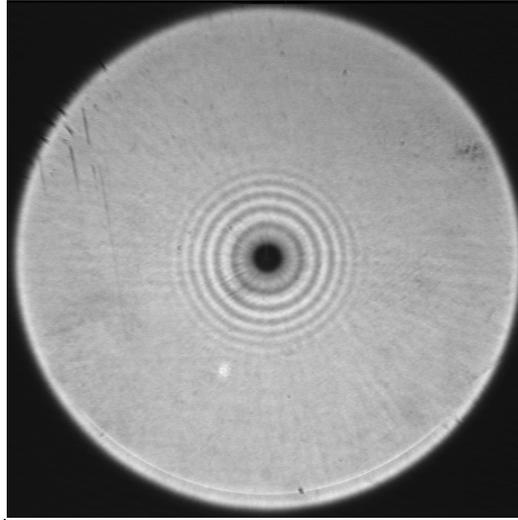


FIG. 4.10 – Cliché pour  $h = 1,9 \text{ mm}$ ,  $\Delta T = -5 \text{ K}$ . Rouleaux corotatifs autour du centre chaud.

## 4.2 Rouleaux corotatifs

Comme nous l'avons évoqué en § 1.3.3, l'écoulement de base est susceptible d'être modulé par des rouleaux co-rotatifs d'axe perpendiculaire au gradient de température. Les précédentes observations ont toujours rapporté ce phénomène pour les grandes hauteurs de fluide, i.e.,  $h > \lambda_c$  où  $\lambda_c$  est la longueur capillaire comme noté en § 1.1.2, formule (1.5). Nous présentons ici nos observations — à grande hauteur également — qui grâce au montage ombroscopique apportent les premières informations quantitatives sur cette structuration.

En § 4.2.1, nous illustrons la structuration de l'écoulement en rouleaux à grande hauteur ( $h = 1,9 \text{ mm}$ ) dans les deux cas envisageables : côté le plus chaud situé au bord extérieur —  $\Delta T = T_{\text{ext}} - T_{\text{int}} > 0$  — ou au centre —  $\Delta T < 0$ ). En § 4.2.2, nous présentons le protocole nous permettant de quantifier la structuration. Les résultats obtenus pour à grande hauteur sont ensuite exposés en § 4.2.4 pour  $\Delta T < 0$  et § 4.2.5 pour  $\Delta T > 0$ .

### 4.2.1 Présentation visuelle du phénomène

La figure 4.10 reproduit une image ombroscopique typique de l'écoulement de base parfaitement stationnaire mais où une modulation en rouleaux est visible du côté intérieur chaud.

La figure 4.11 est obtenue pour une différence de température  $\Delta T$  plus élevée, et une instabilité dépendante du temps y est visible ; il s'agit de « fleurs » qui tournent autour du plot central. Par un procédé décrit dans la section suivante, nous pouvons éliminer cette composante oscillante de l'image afin de n'étudier que les rouleaux stationnaires.

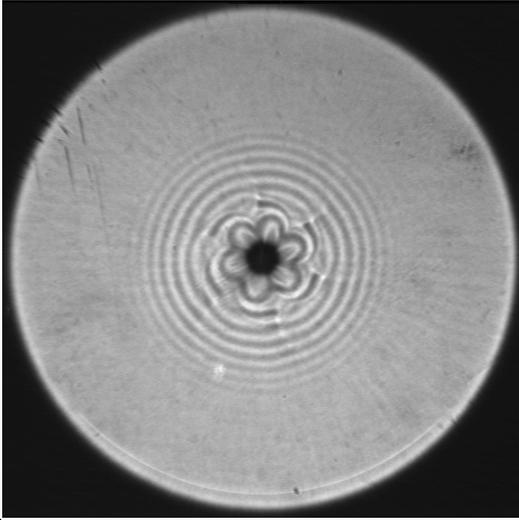
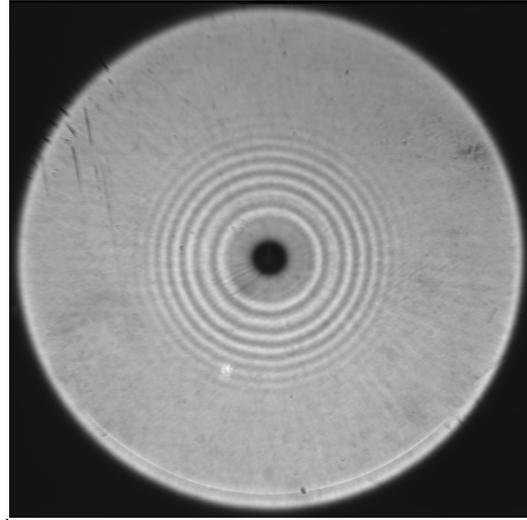
$h=1,9\text{mm}$ ,  $\Delta T=-6,5\text{K}$  $h=1,9\text{mm}$ ,  $\Delta T=-6,5\text{K}$ 

FIG. 4.11 – Clichés pour  $h = 1,9 \text{ mm}$ ,  $\Delta T = -6,5 \text{ K}$ . Rouleaux corotatifs autour du centre chaud. A gauche : cliché standard ; à droite : moyenne temporelle de 40 clichés à 2 Hz.

Les figure 4.12 présentent le cas où la température la plus élevée est située du côté extérieur. Les rouleaux apparaissent tout d’abord du côté extérieur chaud, puis envahissent toute la cellule et semblent plus vivaces au centre.

Si la température est encore un peu augmentée, l’écoulement de base et sa modulation en rouleaux deviennent instables vis-à-vis des ondes hydrothermales. Ainsi, la figure 4.13 illustre la superposition des rouleaux et des ondes que nous appelons OH1 dans le cas où ces dernières présentent une « source » d’onde et dans le cas où une onde unique est présente. Les rouleaux sont particulièrement visibles au niveau de la source des ondes car leur amplitude y est très faible.

## 4.2.2 Présentation des mesures

Dans cette section, les ondes sont absentes ou nous ne nous en préoccupons pas : nous observons l’écoulement de base dans lequel aucune brisure de symétrie n’intervient encore. Nous ne conservons que les objets stationnaires de la structure convective. La symétrie de révolution du problème nous permet de nous restreindre à un rayon de la cellule pour décrire toute la structure spatiale. A partir d’un cliché ombroscopique, nous représentons le signal dans le plan orthogonal  $(\theta, r)$  en dépliant l’image comme expliqué en annexe D. Nous procédons alors à un filtrage dans la direction  $\theta$  qui ne conserve que les modes 0 (moyenne) et 1 (éventuelle modulation due à un « décentrage » de la structure et de l’origine des coordonnées cylindriques). Nous filtrons ensuite dans la direction radiale autour du nombre d’onde moyen des rouleaux et procédons à une transformation de Hilbert. Nous obtenons alors l’amplitude locale et le nombre d’onde local de la structure en rouleaux, que nous

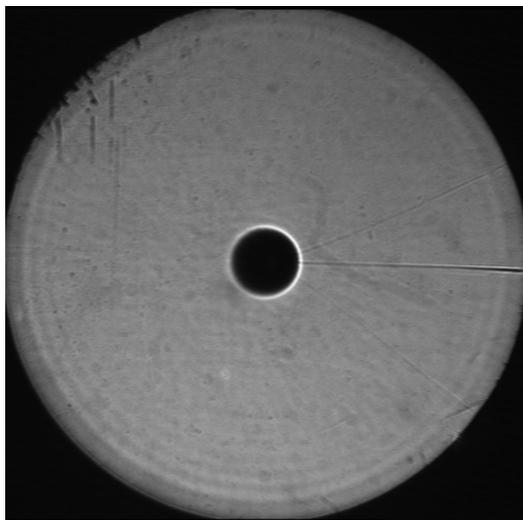
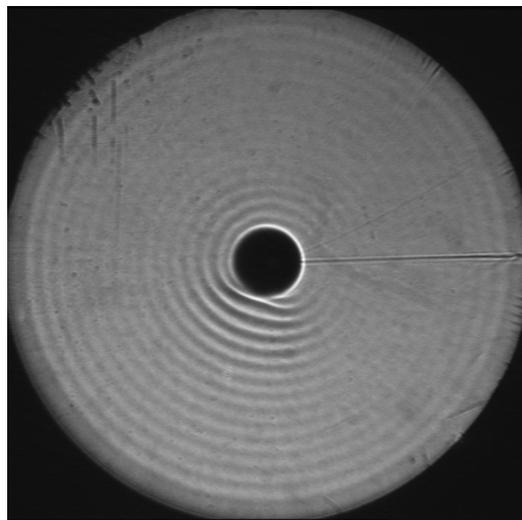
$h=1,9\text{mm}, \Delta T=+10\text{K}$  $h=1,9\text{mm}, \Delta T=+11\text{K}$ 

FIG. 4.12 – Clichés pour  $h = 1,9 \text{ mm}$ . A gauche : rouleaux corotatifs près de la couronne extérieure chaude pour  $\Delta T = 10 \text{ K}$ . A droite : rouleaux sur toute l'extension radiale pour une différence de température  $\Delta T = 11 \text{ K}$  légèrement supérieure.

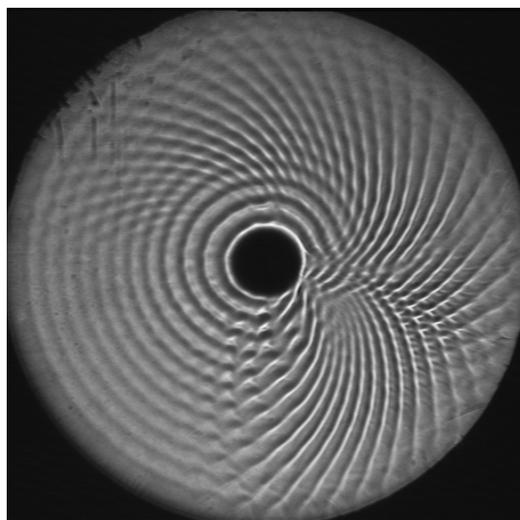
 $h=1,9\text{mm}, \Delta T=+13\text{K}$ 

FIG. 4.13 – Cliché pour  $h = 1,9 \text{ mm}$ ,  $\Delta T = +13 \text{ K}$ . Rouleaux corotatifs présents lorsque survient l'instabilité en ondes hydrothermales notées OH1.

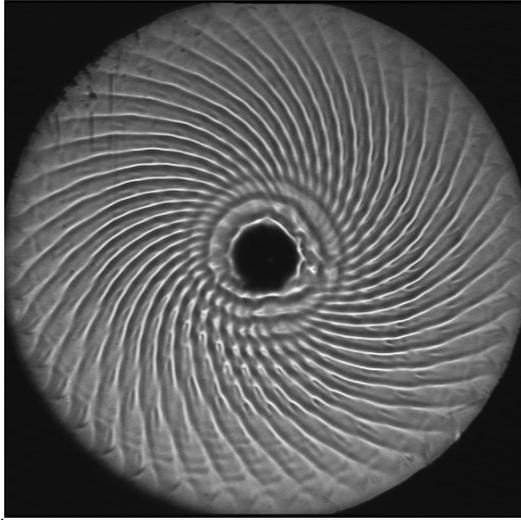
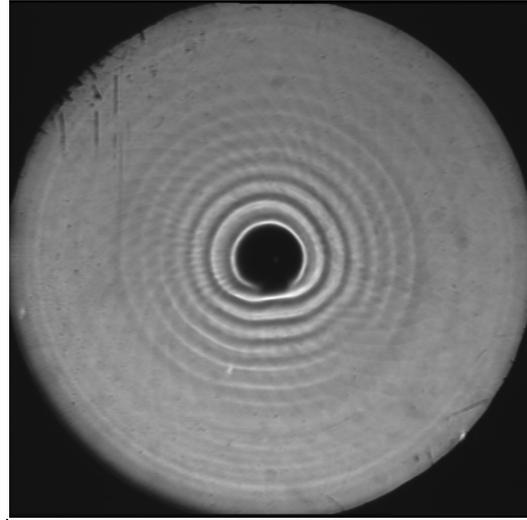
$h=1,9\text{mm}$ ,  $\Delta T=+15\text{K}$  $h=1,9\text{mm}$ ,  $\Delta T=+15\text{K}$ 

FIG. 4.14 – Clichés pour  $h = 1,9 \text{ mm}$ ,  $\Delta T = +15 \text{ K}$ . Rouleaux corotatifs et ondes hydrothermales. A droite : image moyenne.

moyennons dans la direction  $\theta$  afin d'augmenter le rapport signal/bruit.

Afin d'avoir une meilleure résolution, notamment dans le régime où les ondes hydrothermales sont présentes, l'image que nous traitons est parfois remplacée par la moyenne d'une série d'images acquises sur un grand nombre de périodes des ondes hydrothermales : une telle image moyenne ne contient ainsi plus l'information relative aux modes oscillants. La fréquence d'acquisition des images est choisie autour de 2 Hz, et plusieurs dizaines d'images sont moyennées. Les figures 4.11, 4.14 et 4.15 illustrent ce procédé sur des cas typiques. Le même traitement que celui énoncé ci-dessus est ensuite appliqué. Cela nous permet d'étudier les rouleaux stationnaires dans un régime où ils sont partiellement recouverts par les ondes. Cette démarche est complémentaire de celle qui consiste à filtrer des diagrammes spatio-temporels dans la direction temporelle pour éliminer les modes stationnaires.

Les figures 4.16, respectivement 4.20, présentent une succession de profils d'amplitude locale obtenue par la méthode précédente pour différentes valeurs de la différence de températures  $\Delta T < 0$ , respectivement  $\Delta T > 0$ . Sur tous les profils est observable une forte variation de l'amplitude aux bords, ce qui n'a pas de sens physique mais provient du filtrage dans la direction radiale ; cette « pollution » numérique doit être écartée lors de la mesure de l'amplitude moyenne. Dans le cas  $\Delta T < 0$ , nous pouvons néanmoins mesurer une amplitude maximale réalisée à l'intérieur de la cellule et qui a un sens ; ceci n'est plus vrai pour  $\Delta T > 0$ .

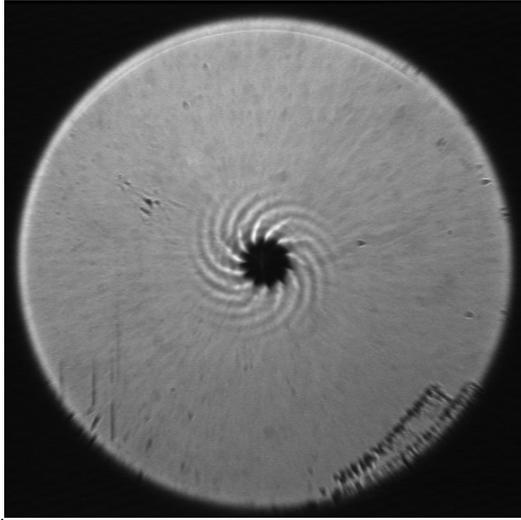
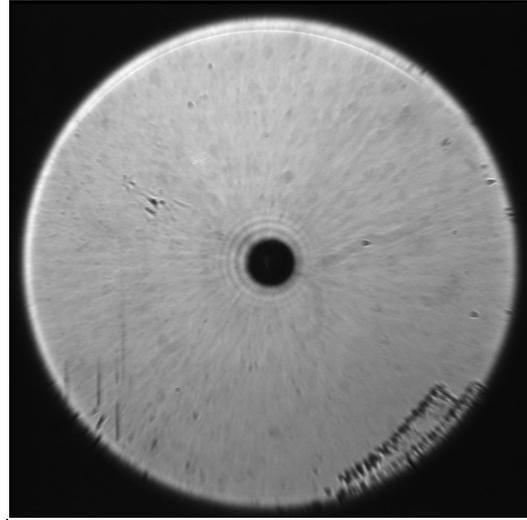
$h=1,2\text{mm}, \Delta T=-8,5\text{K}$  $h=1,2\text{mm}, \Delta T=-8,5\text{K}$ 

FIG. 4.15 – Clichés pour  $h = 1,2 \text{ mm}$ ,  $\Delta T = -8,5 \text{ K}$ . Rouleaux corotatifs autour du centre chaud. A gauche : cliché instantané ; à droite : moyenne temporelle de 30 clichés à 2 Hz.

### 4.2.3 Cas des petites hauteurs

Nous n'avons pas observé de rouleaux co-rotatifs seuls à petite hauteur. Pour  $h = 1,2 \text{ mm}$  et  $\Delta T > 0$ , aucun rouleau n'est visible avant et après l'apparition des ondes propagatives qui sont alors des cibles pulsantes (cf § 5.2.3). Pour  $h = 1,2 \text{ mm}$  et  $\Delta T < 0$ , des rouleaux — très faibles — ont été observés, localisés près du plot central plus chaud ; nous n'avons pas mené d'étude quantitative de la structure correspondante. La figure 4.15 illustre les rouleaux observés à petite hauteur ( $h = 1,2 \text{ mm}$ ) en chauffant au centre. Nous pouvons remarquer que la longueur d'onde est plus petite dans ce cas que dans la configuration à  $h = 1,9 \text{ mm}$ . En effet, cette dernière est proportionnelle à la hauteur de fluide dans la cellule ; ce résultat classique peut par exemple être interprété en remarquant que l'échelle de longueur choisie pour adimensionner le problème (cf § 1.2.1) est justement la hauteur de fluide  $h$ .

### 4.2.4 Comportements pour $h = 1,9 \text{ mm}$ et $\Delta T < 0$

Regardons tout d'abord le comportement de l'amplitude des rouleaux. Lorsque  $|\Delta T|$  est augmentée, l'amplitude locale augmente dans une région localisée près du plot central et la structure occupe une zone de la cellule de plus en plus étendue autour de celui-ci (figure 4.16).

L'évolution de l'amplitude maximale est représentée sur la figure 4.17. L'évolution de l'amplitude moyenne est reproduite sur la même figure ; cette amplitude moyenne est me-

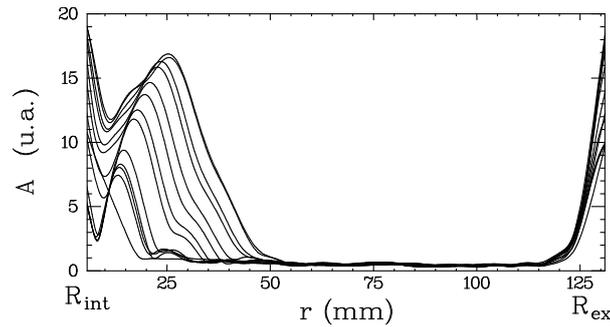


FIG. 4.16 – Différents profils radiaux d’amplitude du mode «rouleaux» pour  $\Delta T = T_{ext} - T_{int}$  compris entre  $-2$  K et  $-5$  K;  $h = 1,9$  mm.

surée après pondération par une fenêtre de Hann<sup>1</sup>, de sorte à donner moins d’importance aux bords. En effet, la valeur de l’amplitude locale est très mal définie dans ces zones : le filtrage spatial introduit des « couches limites numériques » qui sont nettement visibles sur la figure 4.16. Nous observons que ces amplitudes moyenne et maximale ont un comportement linéaire avec la différence de température. Mais si l’amplitude maximale sature vers  $\Delta T \simeq -5$  K, il n’en est rien pour l’amplitude moyenne qui continue son évolution linéaire jusqu’à  $\Delta T \simeq -9$  K. Cela est dû à la croissance de la zone occupée par les rouleaux : le front limitant cette région avance dans la cellule. Notons tout de même que l’amplitude maximale sature au moment où les ondes apparaissent (ondes fleurs, cf § 5.2.2). Nous ne pouvons certifier que l’origine de ce phénomène est physique car notre méthode de mesure par ombroscopie superpose les signaux des rouleaux et des ondes dans la région où le maximum est réalisé.

Les évolutions, même linéaires, de l’amplitude (moyenne ou maximale) ne permettent pas de définir proprement un seuil d’apparition des rouleaux. Pour cela, nous nous contentons simplement des observations visuelles : pour  $|\Delta T| \lesssim 2$  K, aucune trace de rouleau n’est observée.

Comme l’amplitude locale est nulle loin du centre, nous pouvons définir — tout comme pour un front d’ondes dans la cellule rectangle du chapitre 3 — la position du front de la zone envahie par les rouleaux. Il s’agit de la position à laquelle la moitié de l’amplitude maximale est atteinte. L’évolution de cette grandeur avec  $\Delta T$  est représentée sur la figure 4.18 : nous voyons qu’une augmentation de  $|\Delta T|$ , i.e., de la vitesse de l’écoulement de base, correspond à une pénétration plus forte des rouleaux dans la cellule.

Nous pouvons de plus mesurer le nombre d’onde des rouleaux corotatifs, un rouleau correspondant à une longueur d’onde. Ce dernier évolue comme représenté sur la figure 4.19. Nous y voyons alors clairement plusieurs régimes se dégager, suivant l’existence ou non d’un mode oscillant. Au contraire de l’amplitude, l’information donnée par le nombre d’onde est

1. La fenêtre de Hann est une fenêtre de Hamming qui s’annule exactement aux bords contrairement à cette dernière qui prend aux bords une valeur finie, très faible.

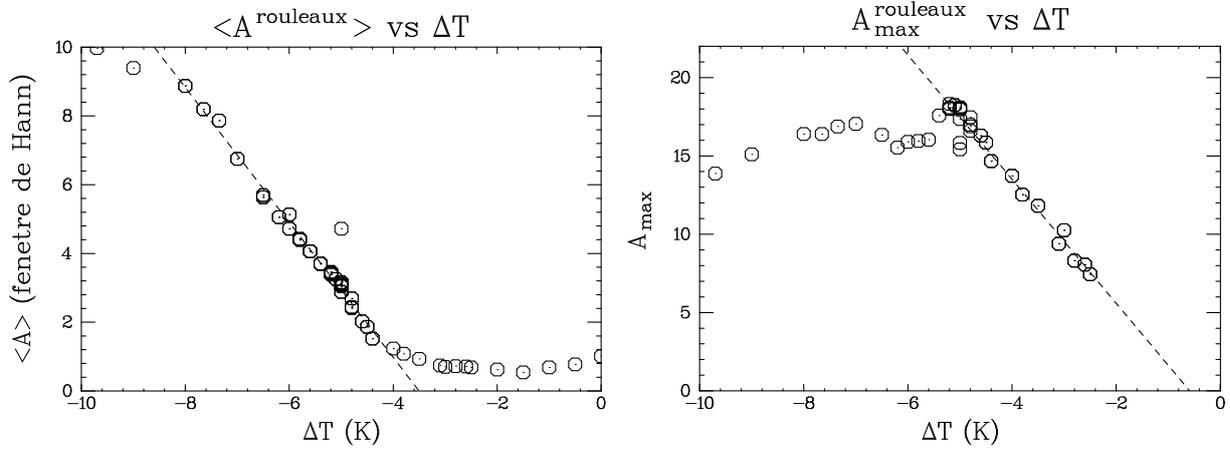


FIG. 4.17 – Amplitude des rouleaux vs  $\Delta T < 0$ , pour  $h = 1,9$  mm. A gauche : amplitude moyenne obtenue avec une fenêtre de Hann. A droite : amplitude maximale. Les droites en pointillés sont des approximations qui ne fournissent pas un seuil cohérent ; les rouleaux sont observés dès que  $\Delta T \lesssim -2$  K.

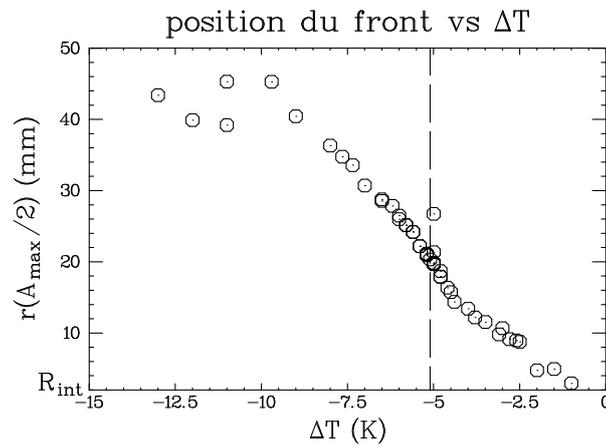


FIG. 4.18 – Position du front des rouleaux vs  $\Delta T < 0$  pour  $h = 1,9$  mm. La droite verticale indique le seuil d'apparition des ondes fleurs ( $-5,1$  K).

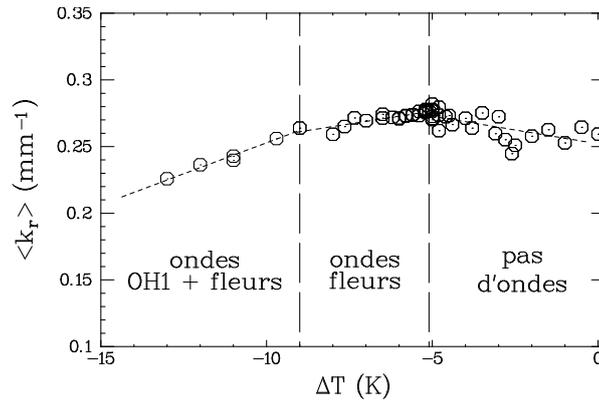


FIG. 4.19 – Nombre d’onde moyen de la structure en rouleaux vs  $\Delta T < 0$  pour  $h = 1,9 \text{ mm}$ . Cette grandeur n’a pas le même comportement dans les trois régimes.

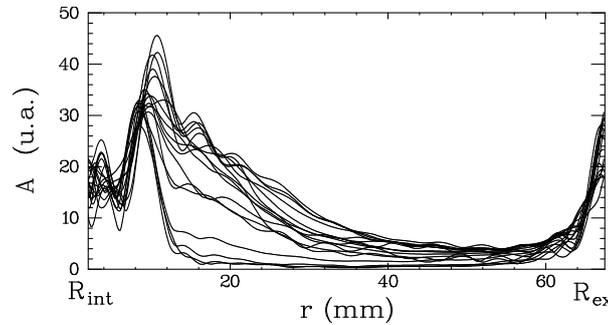


FIG. 4.20 – Différents profils radiaux d’amplitude du mode « rouleaux » pour  $T_{ext} > T_{int}$ . Au contraire du cas  $\Delta T < 0$  de la figure 4.16, le mode s’établit très vite partout dans la cellule après une apparition localisée au bord extérieur. L’amplitude locale est alors non nulle en chaque point.

purement spatiale et indépendante du réglage ombroscopique. L’apparition de nouveaux modes d’instabilité pour  $\Delta T \simeq -5 \text{ K}$  et  $\Delta T \simeq -9 \text{ K}$  sera détaillée dans le prochain chapitre. Notons juste que ces instabilités perturbent suffisamment les champs de température et de vitesse pour modifier le nombre d’onde des rouleaux stationnaires corotatifs.

#### 4.2.5 Comportements pour $h = 1,9 \text{ mm}$ et $\Delta T > 0$

Une série d’expériences identiques a été effectuée avec le côté chaud situé à l’extérieur. Les rouleaux apparaissent tout d’abord du côté extérieur vers  $\Delta T \simeq 8,5 \text{ K}$ , mais ils envahissent ensuite toute la cellule lors d’une transition brutale pour  $\Delta T = 10,2 \text{ K}$  (voir les clichés de la figure 4.12). Un empilement de profils d’amplitude locale du mode rouleaux est représenté sur la figure 4.20.

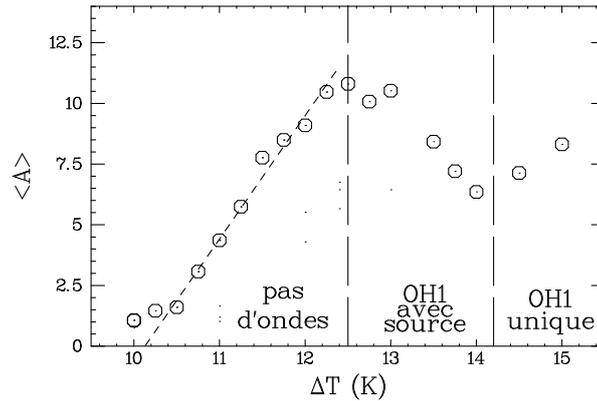


FIG. 4.21 – Amplitude moyenne de la structure en rouleaux pour  $\Delta T = T_{ext} - T_{int} > 0$ . Les cercles ( $\circ$ ) représentent une série d’acquisition régulière où les ondes sont apparues à 12 K avec un puits et une source laissant apparaître une zone de rouleaux seuls ; pour les plus forte valeurs de  $|\Delta T|$ , une onde unique était finalement présente.

L’amplitude maximale n’est pas mesurable avec précision car elle est réalisée près des bords, dans la région où l’amplitude est sujette à la déformation induite par le filtrage. La figure 4.21 présente le comportement de l’amplitude moyenne calculée dans une zone éloignée des bords (entre  $r = 13$  mm et  $r = 62$  mm). Malgré tous nos efforts, nous n’avons pas pu isoler clairement un comportement cohérent dans le régime où les rouleaux sont localisés au bord extérieur chaud (entre 8,5 et 10,2 K). Par contre, dès que ceux-ci envahissent toute la cellule, l’amplitude varie significativement (au dessus de 10,2 K). Pour  $\Delta T \gtrsim 12,5$  K, les ondes hydrothermales apparaissent (ondes OH1) et deux structures se superposent.

Le nombre d’onde moyen dans la zone où les rouleaux existent est représenté sur la figure 4.22. Ses variations sont importantes (20% environ) et, là encore, différents régimes peuvent être isolés qui correspondent à l’existence ou non d’un mode oscillant (dans ce cas, les ondes OH1).

Différents régimes se détachent donc sur chacun des deux graphes précédents (amplitude et nombre d’onde). Nous avons ainsi repéré un régime de rouleaux localisés à l’extérieur, un régime de rouleaux non localisés, et un régime de cohabitation avec les ondes hydrothermales. Dans ce dernier cas de figure, les cas d’une onde unique ou d’un couple {source/puits} d’ondes peuvent même être distingués.

## 4.2.6 Commentaires et conclusions

### Effet de la courbure

La géométrie étudiée — cylindrique — nous conduit à des résultats tout à fait dissymétriques lorsque côté chaud et côté froid sont intervertis. Cela provient de la présence

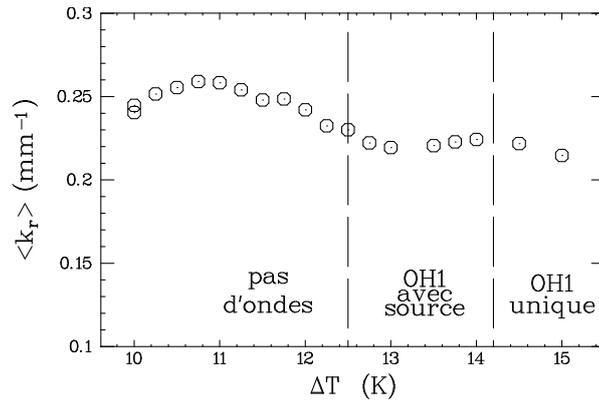


FIG. 4.22 – Nombre d’onde radial moyen  $k_r$  de la structure en rouleaux pour  $\Delta T = T_{ext} - T_{int} > 0$ .

de nouveaux termes — dus à la courbure — dans les équations régissant les mouvements du fluide. Ces termes ne sont pas symétriques sous la transformation  $\{r \rightarrow -r\}$  qui accompagne un changement de signe de  $\Delta T$ .

À notre connaissance, aucun résultat expérimental précis n’existe à ce jour en géométrie cartésienne (rectangle) sur l’évolution de l’amplitude et la propagation du front des rouleaux stationnaires. Nous pouvons néanmoins déduire de nos résultats en géométrie cylindrique que :

- Les rouleaux apparaissent préférentiellement pour les plus grandes hauteurs de fluide ( $h = 1,9$  mm est plus favorable que  $h = 1,2$  mm) . Ce résultat déjà connu de Pelacho et Burguete (1999) est confirmé.
- Les rouleaux apparaissent toujours du côté chaud pour l’huile utilisée ( $Pr = 10$ ), et envahissent ensuite progressivement la cellule ; un taux de croissance spatial est donc attaché à cette structure.
- Il est possible de définir, à l’œil, un seuil pour l’apparition des rouleaux. Ceci est indiscutable dans le cas  $\Delta T > 0$ , et semble aussi très probable pour  $\Delta T < 0$ .
- Le seuil d’apparition des rouleaux précède celui des ondes hydrothermales OH1 (ainsi que celui d’un autre mode oscillant : les fleurs).

De précédents travaux (Mercier et Normand (2000)) prédisent par ailleurs que cet effet des bords latéraux est accompagné d’un taux de croissance spatial. À partir des profils d’amplitude locale, nous avons cherché à définir un tel taux de croissance spatial. Malheureusement, la variation de l’amplitude n’est pas exponentielle, mais plutôt linéaire, et nous n’avons pu définir une telle grandeur. En fait, les effets de courbure se superposent aux effets d’amortissement spatial et tout ajustement quantitatif doit tenir compte des deux effets.

Mais si nous ajoutons qualitativement aux effets de courbure l'effet de la localisation spatiale, nous pouvons interpréter comme suit nos observations :

- $\Delta T > 0$ , i.e.,  $T_{\text{ext}} > T_{\text{int}}$  : les rouleaux poussent tout d'abord du côté chaud à l'extérieur, mais la longueur de pénétration est faible à cause des effets (contraires) de la courbure. Tant que cette longueur de pénétration est inférieure à une fraction de la longueur d'onde, aucun rouleau ne peut être observé. Lorsque  $\Delta T$  est assez élevée (au delà de 8,5 K), la longueur de pénétration est de l'ordre de la longueur d'onde et un rouleau est observé. Lorsque  $\Delta T$  est plus élevée encore (au delà de 10,2 K), le taux de croissance spatial est assez fort pour contrer les effets de courbure loin du centre et les rouleaux envahissent toute la cellule, le paramètre de contrôle local étant plus fort au centre. Cette transition est brutale. Les effets de courbure dominent alors et la structure est essentiellement localisée au centre (bien qu'envahissant toute l'extension radiale).
- $\Delta T < 0$ , i.e.,  $T_{\text{ext}} < T_{\text{int}}$  : les rouleaux poussent tout d'abord du côté chaud, à l'intérieur. Cette configuration est favorisée par un gradient horizontal local de température plus élevé au centre à cause de la courbure. La structure est donc toujours localisée au centre et elle envahit progressivement la cellule lorsque  $|\Delta T|$  est augmenté. Il est alors possible de définir un front du mode rouleaux.

### Un phénomène uniquement hydrodynamique ?

Des rouleaux corotatifs similaires ont été prédits par Bye (1966) dans le problème de la cavité entraînée. Il s'agit en fait d'une version simplifiée de notre problème thermocapillaire où le champ de température est découplé du champ de vitesse et où seule une contrainte de cisaillement en surface rappelle la présence de la contrainte initialement thermique. Bye a ainsi illustré la déstabilisation du profil de vitesse de Couette-Poiseuille près du bord aval vis-à-vis de la vitesse en surface. Le bord aval correspond chez nous au bord froid car le fluide s'écoule en surface du chaud vers le froid, ce qui correspond à un vent en surface du chaud (amont) vers le froid (aval).

Les rouleaux que nous observons ne sont donc pas régis par les calculs de Bye. Laure *et al.* (1990) ont montré que ce serait le cas si  $Pr \rightarrow 0$ , i.e., si l'aspect thermique était découplé de l'aspect uniquement hydrodynamique étudié par Bye. L'huile aux silicones que nous utilisons est un fluide de grand nombre de Prandtl ( $Pr = 10$ ) et les rouleaux corotatifs sont donc couplés au champ de température. Pour autant, ils sont sans lien direct avec les ondes hydrothermales. Leur structure corotative confirme cette impression en infirmant l'hypothèse de rouleaux de convection, qui sont eux contrarotatifs.

### Rouleaux corotatifs et ondes hydrothermales

Nous avons confirmé le fait suivant : à grande hauteur, les rouleaux corotatifs apparaissent toujours avant tout autre mode oscillant, notamment celui des ondes hydrother-

males OH1. Il existe de plus une plage finie de valeurs de  $\Delta T$  séparant les deux seuils correspondants.

La méthode de visualisation par ombroscopie ne nous permet pas de suivre quantitativement l'évolution des rouleaux lorsque les ondes existent. En effet, comme nous le détaillerons en § 5.1.4 (en particulier figure 5.6), l'ombroscopie «intègre» l'information dans la direction verticale et l'effet des ondes se superpose à celui des rouleaux. De plus, les ondes finissent même par occulter complètement la structure stationnaire sous-jacente (Fig. 5.6).

Notons cependant que ces rouleaux corotatifs constituent une modification de l'écoulement de base sous-jacent sur lequel l'analyse de stabilité linéaire doit — en toute rigueur — porter. A ce jour, aucune étude de stabilité linéaire de l'écoulement de base n'a pris en compte la présence des rouleaux, peut-être favorable à l'apparition des ondes hydrothermales, voire nécessaire à la présence des ondes de type OH1. Nous reviendrons sur ce point en § 5.1.4.

## Chapitre 5

# Instabilités en géométrie étendue 2D

LES ONDES OBSERVÉES à deux dimensions d'espace se présentent sous des formes différentes; une très grande diversité de structures caractérise ainsi la transition vers le chaos spatio-temporel dans la cellule « disque ».

Ce chapitre introduit tout d'abord (§ 5.1) les deux types d'ondes (OH1 et OH2) différentes observées dans la cellule rectangulaire lorsque ses rapports d'aspects sont ajustés de sorte à avoir un système de plus en plus « bidimensionnel », notamment en diminuant la hauteur de fluide. Les parties suivantes décrivent l'ensemble des résultats obtenus dans la cellule cylindrique «2D». La section 5.2 est ainsi consacrée à la description qualitative des structures existantes dans le plan des paramètres de contrôle que sont la hauteur  $h$  et la différence de température  $\Delta T$ ; un diagramme des phases est proposé, construit à partir de deux hauteurs de fluide pour lesquelles des expériences exhaustives ont été effectuées. Des résultats quantitatifs sont présentés en § 5.3; des comportements critiques originaux sont ainsi révélés sur les ondes bidimensionnelles. La section 5.4 propose des interprétations, notamment par comparaison avec le cas de la géométrie rectangulaire bi-dimensionnelle, avec les résultats de l'analyse de stabilité linéaire et en utilisant les paramètres adimensionnés spatiaux que sont les rapports d'aspect et le nombre de Bond dynamique.

### 5.1 Transition 1D / 2D dans le rectangle

La cellule rectangulaire a un rapport d'aspect horizontal  $\Gamma = L_y/L_x$  qui peut être modifié. Ainsi, en réglant  $L_x = 30$  mm et  $L_y = 90$  ou 180 mm, nous obtenons un système beaucoup plus étendu dans la direction du gradient de température et il nous a été possible d'illustrer l'aspect bidimensionnel obtenu.

Nous avons vu au chapitre précédent le caractère convectif de l'instabilité au seuil, dans le rectangle pour  $L_x = 10$  mm. Cet aspect est toujours présent à  $L_x = 30$  mm, mais nous l'écartons en nous plaçant toujours dans la zone où l'instabilité est absolue : nous observons ici les modes globaux bien établis dans la cellule.

La première section ci-dessous rapporte des résultats obtenus à grande hauteur, où les ondes hydrothermales observées sont les mêmes que celles étudiées au chapitre 3. La seconde section étudie au contraire le cas des petites hauteurs, où un nouveau type d'ondes hydrothermales est observé.

### 5.1.1 Cas des grandes hauteurs : OH1

#### Description

Les structures obtenues pour  $h \geq 1,5$  mm sont les mêmes que celles du chapitre 3 qui en constituent un cas particulier. Des rouleaux stationnaires co-rotatifs — tels qu'étudiés en 4.2 — sont observés avant l'apparition des ondes. La structuration en rouleaux persiste lorsque les ondes existent, en accord avec les observations de Pelacho et Burguete (1999). Un cliché typique est reproduit sur la figure 5.1 ; assez loin du seuil des ondes, les rouleaux sont toujours présents et fort bien visibles au voisinage de la source d'ondes.

Ces ondes se propagent avec un certain angle  $\psi = (\vec{\nabla}T, \vec{k})$  par rapport au gradient de température (la figure 5.5 page 142 rappelle la définition de  $\psi$ ). Cet angle est constant partout dans la cellule. Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est de plus presque perpendiculaire à  $\vec{\nabla}T$ . Il existe néanmoins une petite composante dans la direction du gradient (que nous avons négligée au chapitre 3 en considérant le problème comme unidimensionnel). Cette composante est toujours orientée du froid vers le chaud et est plus forte pour  $L_x = 30$  mm que pour  $L_x = 10$  mm. Sur le cliché de la figure 5.1, pris assez loin du seuil des ondes, seule une onde voyageant vers la droite est observable : la compétition non-linéaire mise en évidence au chapitre 3 fonctionne ici aussi.

Ces ondes planes peuvent être qualifiées d'« unidimensionnelles » dans le sens où une seule composante permet de décrire le vecteur d'onde ou la direction de propagation.

#### Source d'onde

Une source d'onde peut exister qui sépare alors deux domaines d'ondes contra-propagatives. Néanmoins, comme nous l'avons vu lors de l'étude du mode global 1D, cette situation correspond à une structure symétrique droite/gauche qui n'est observable qu'au seuil du mode global. Si on s'éloigne de ce dernier, la source n'est plus au milieu du canal, mais est très vite rejetée à un des bords ; c'est le cas de la plupart de nos observations expérimentales, par exemple aussi celui de la figure 5.1. Toutefois, dans chacun de ces cas, les deux types d'ondes droite et gauche sont présents au voisinage de la source comme illustré sur la figure 5.2.

La source semble s'étendre sur une ligne parallèle au gradient de température ; un tel objet est de codimension 1 dans le plan horizontal.

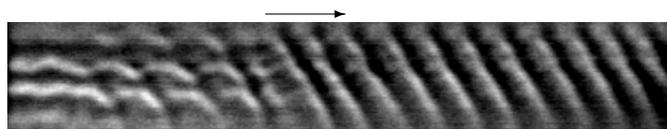


FIG. 5.1 – Cliché ombroscopique obtenu dans le rectangle pour  $L_x=30$  mm,  $L_y = 180$  mm,  $h = 2,75$  mm et  $\Delta T = 7$  K. Une onde de type OH1 est visible, la source d'onde est située au bord gauche. Dans le cœur de la source, nous voyons essentiellement les rouleaux, de plus en plus ondulés quand l'amplitude de l'onde croît. Là où l'amplitude de l'onde est saturée, seules ces dernières sont visibles (cf § 5.1.4).

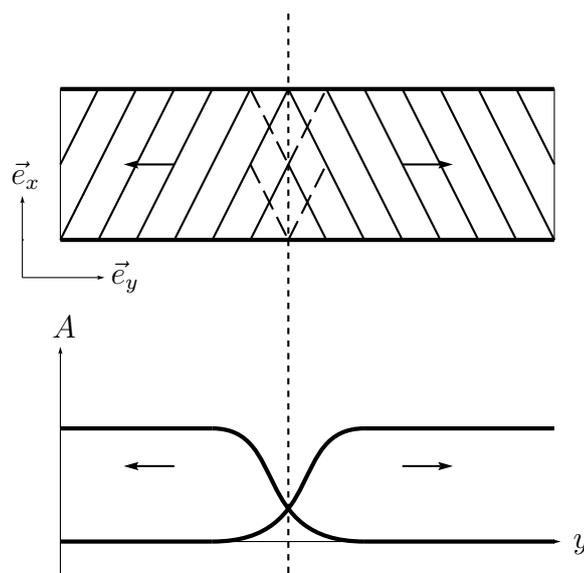


FIG. 5.2 – Schéma illustrant la source d'ondes hydrothermales du premier type (OH1). La source est en fait au centre d'une zone de recouvrement (pointillés) entre l'onde droite et l'onde gauche — qui peuvent avoir des caractéristiques différentes. Il y a donc de l'onde stationnaire au voisinage de la source. Un tel objet est généralement collé à un bord de la cellule.

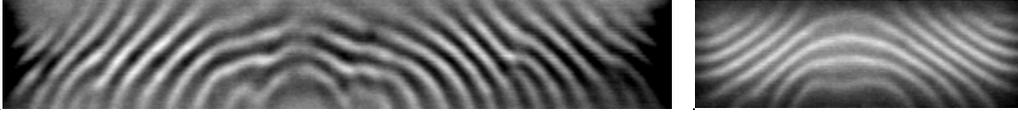


FIG. 5.3 – Clichés ombroscopiques obtenus dans le rectangle pour  $L_x = 30$  mm, et  $h = 1$  mm. A gauche :  $L_y = 180$  mm et  $\Delta T = 7.3$  K. A droite :  $L_y = 90$  mm et  $\Delta T = 5$  K. Sur chaque cliché, une onde de type OH2 est visible ; la source d’onde est située au milieu du canal, du côté froid.

### 5.1.2 Cas des petites hauteurs : OH2

#### Description

Pour des hauteurs  $h \leq 1,5$  mm, les ondes observées ne se comportent qualitativement plus comme décrit précédemment. De plus, les rouleaux co-rotatifs structurant l’écoulement de base ne sont plus observés ; leur absence confirme les observations de Pelacho et Burguete (1999).

L’angle  $\psi = (\vec{\nabla}T, \vec{k})$  n’est pas constant dans toute la cellule. La propagation dans la direction du gradient s’effectue toujours du froid vers le chaud ; la propagation dans la direction perpendiculaire est dominante dans une grande partie de la cellule, mais pas au voisinage de la source d’ondes (Fig. 5.3).

Deux composantes distinctes sont alors nécessaires pour décrire en tout point le vecteur d’onde ou la direction de propagation. Nous qualifions ainsi ces ondes de « bidimensionnelles ».

#### Source d’onde

Une source d’onde est toujours présente au milieu du canal, et cela même si l’on s’éloigne du seuil d’apparition des ondes. La variation rapide de l’angle  $\psi$  au voisinage de la source confère à celle-ci le caractère d’une source d’ondes cylindriques. Le schéma de la figure 5.4 représente ainsi la source observée comme un objet de codimension 2 dans le plan horizontal<sup>1</sup>.

### 5.1.3 Petit bilan et convention adoptée

- A grande hauteur, les ondes hydrothermales sont des ondes planes « unidimensionnelles » émises par une source de codimension 1. Nous les qualifions d’ondes hydro-

1. Nous pouvons remarquer que la reconnexion des ondes cylindriques et des ondes planes s’effectue avec un pincement et/ou une dilatation localisée de la structure ; cette modification locale du nombre d’onde conduit parfois à l’existence d’une dislocation spatiale dont le comportement spatio-temporel peut être périodique. C’est l’étude d’un tel objet qui a été effectuée par Burguete *et al.* (1999) dans des conditions expérimentales proches. Le trou d’amplitude étudié dans cet article provient ainsi de la déformation spatiale d’une onde de type OH2.

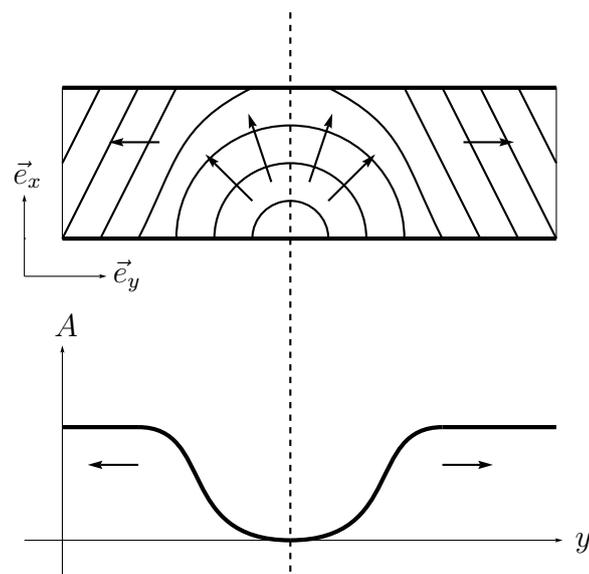


FIG. 5.4 – Schéma illustrant la source d'onde hydrothermale bidimensionnelle « OH2 ». A gauche et à droite de la source, la même onde est observée mais sa direction de propagation est différente ; il n'y a pas d'onde stationnaire.

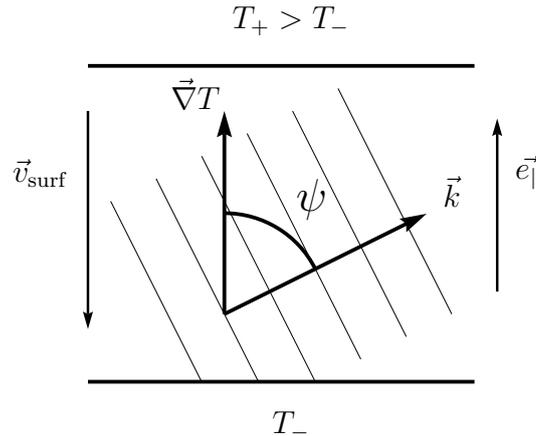


FIG. 5.5 – Schéma illustrant la définition « naturelle » de l'angle de propagation  $\psi$  des ondes.  $\vec{v}_{\text{surf}}$  : vitesse du fluide en surface, du chaud vers le froid.

thermales de type 1 : OH1.

- A petite hauteur, les ondes observées sont cylindriques près de la source, puis confinées en ondes planes par la géométrie. Ces ondes « bidimensionnelles » sont émises par une source de codimension 2. Nous les qualifions d'ondes hydrothermales de type 2 : OH2.

Rappelons ici la notion d'angle local  $\psi$  entre le gradient de température appliqué  $\vec{\nabla}T$  et le vecteur d'onde de la structure  $\vec{k}$  (cf Fig. 5.5). Cette définition est naturelle et peut être utilisée sur un cliché ombroscopique pour obtenir une valeur de  $\psi$  à  $\pi$  près. En ce sens,  $\psi$  peut être baptisée « angle statique ». Nous l'appellons abusivement « angle de propagation » car c'est aussi l'angle entre  $\vec{\nabla}T$  et la vitesse de phase  $\vec{v}_\phi$  — cette dernière étant colinéaire à  $\vec{k}$ . Néanmoins, nous savons (chapitre 3 par exemple) que la vitesse de groupe est souvent plus pertinente que la vitesse de phase ; il serait donc plus judicieux d'introduire l'angle de propagation comme l'angle entre le gradient de température et la vitesse de groupe. Pour autant, nous nous contenterons de  $\psi$  car les théories de stabilité linéaire l'utilisent ( $\vec{k} \parallel \vec{v}_\phi$ , et cf § 1.3.4) et de plus  $\psi$  est directement mesurable sur des clichés, et il est donc plus facile de l'interpréter en termes géométriques. Rappelons :

$$\begin{aligned} \psi &= \arctan\left(\frac{k_\perp}{k_\parallel}\right) = \arctan\left(\frac{k_y}{k_x}\right) && \text{en cartésiennes} \\ &= \arctan\left(\frac{k_\theta}{rk_r}\right) && \text{en cylindriques} \end{aligned}$$

#### 5.1.4 A propos des rouleaux corotatifs

Rappelons que des rouleaux corotatifs apparaissent aux grandes hauteurs. Ainsi, les ondes de type OH2 (petites hauteurs) apparaissent dans un écoulement de base non per-

turbé par les rouleaux corotatifs. Au contraire, les OH1 (grandes hauteurs) apparaissent sur un écoulement de base possédant déjà des rouleaux corotatifs. Nous avons toujours pu observer une plage de valeurs de  $\Delta T$  où les rouleaux existent seuls, avant l'apparition des ondes. Cette plage peut être très réduite (quelques dixièmes de K).

### **Ombroscopie**

Du point de vue de la visualisation ombroscopique, la distance de focalisation des rouleaux corotatifs et celle des ondes hydrothermales sont très proches, ce qui a pour résultat de superposer ces deux structures de manière assez troublante. Nous pouvons ainsi avoir l'impression que les ondes hydrothermales sont au voisinage de leur seuil un mode d'instabilité oscillatoire des rouleaux corotatifs ; cela est schématiquement représenté sur la figure 5.6.

Par exemple, sur le cliché de la figure 5.1 où deux rouleaux corotatifs sont nettement visibles, la zone de faible amplitude des ondes au voisinage la source (bord gauche) peut se laisser interpréter comme une zone de modulation des rouleaux corotatifs. Cependant, loin de la source, la structure en ondes est nettement prédominante et les rouleaux ne sont plus visibles.

### **Conclusion**

Pour conclure, notons que les OH1 apparaissent sur un écoulement de base perturbé de rouleaux corotatifs et que la visualisation par ombroscopie nous donne au voisinage du seuil des OH1 une impression d'instabilité secondaire, même si il n'en est rien.

Dans la prochaine section, nous retrouvons en géométrie cylindrique étendue des ondes hydrothermales présentant les même caractéristiques (OH1 et OH2). Nous étudions ensuite le lien entre les résultats du rectangle et ceux du disque, notamment la transition 1D/2D lorsque la hauteur  $h$  est diminuée.

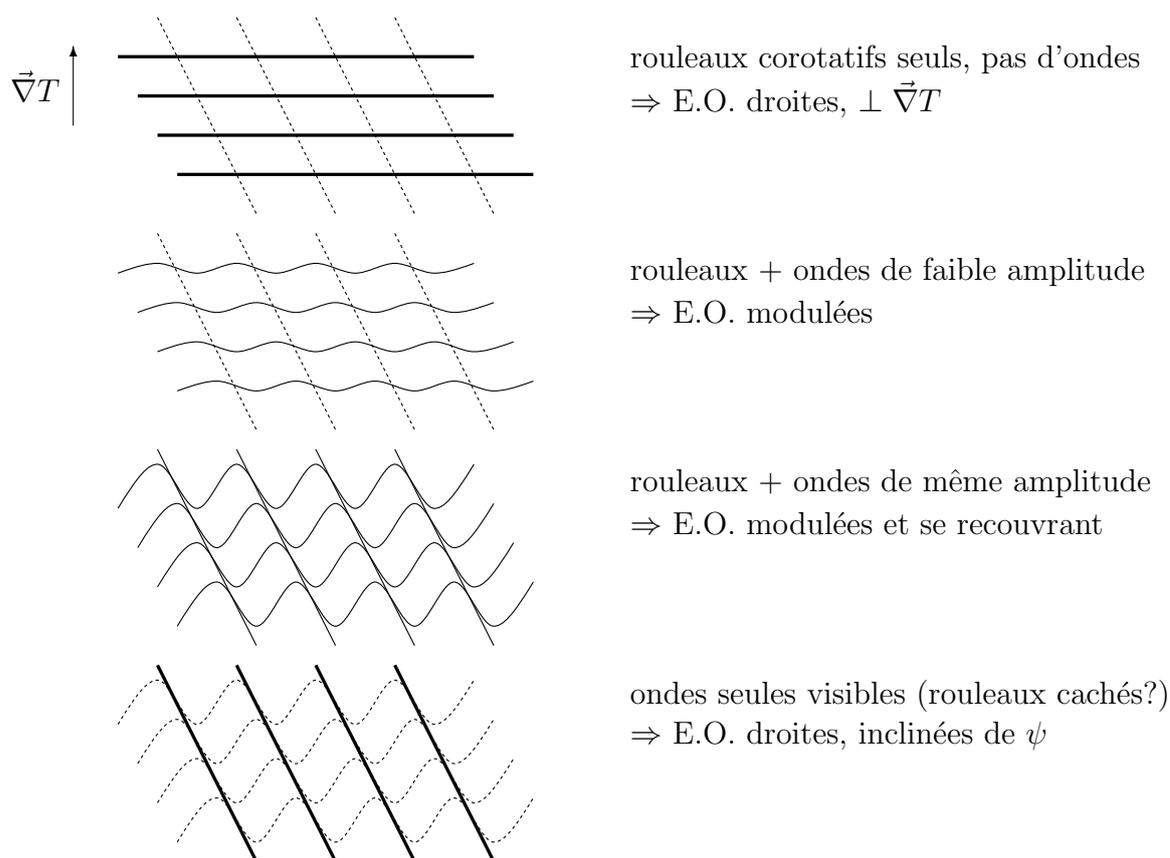


FIG. 5.6 – Illustration schématique de la superposition des rouleaux corotatifs et des ondes OH1 par la méthode de visualisation ombroscopique. Seule une équiphasse ombroscopique (E.O.) est représentée par période spatiale de la structure convective. L'épaisseur des traits continus représente l'amplitude du signal ombroscopique ; un trait pointillé représente une amplitude nulle (mode non détecté par l'ombroscopie). De haut en bas,  $|\Delta T|$  est augmenté ; le seuil des ondes est franchi après le premier schéma.

## 5.2 Diagramme des phases dans le disque

La figure 5.7 représente un diagramme des différentes structures observées en fonction des paramètres  $h$  et  $\Delta T$ , directement accessibles à l'expérimentateur. Deux grandes campagnes d'acquisition ont été effectuées pour des hauteurs de 1,9 mm et 1,2 mm respectivement. Nous décrivons dans cette section les différentes structures observées en fonction de la position dans le plan des paramètres.

### 5.2.1 Cas des grandes hauteurs ( $h = 1,9$ mm), $\Delta T > 0$

Choisissons  $\Delta T > 0$  pour commencer ; le bord extérieur est plus chaud que le plot central. Lorsque la différence de température  $\Delta T = T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}$  est augmentée, nous observons successivement les objets suivants :

**Ecoulement de base non perturbé :**  $0 < \Delta T < \Delta T_{\text{rouleaux}}^{(+)} = 8,5$  K

L'écoulement de base est en place ; les lignes de courant sont agencées sur des tores et aucune modulation n'est observée. La vitesse est en tout point proportionnelle à  $\Delta T$  ; nous sommes sur la « branche thermodynamique » et chaque élément de fluide est à l'équilibre thermodynamique local bien que le système dans son ensemble ne soit pas à l'équilibre.

**Rouleaux corotatifs :**  $\Delta T \geq \Delta T_{\text{rouleaux}}^{(+)} = 8,5$  K

Des rouleaux stationnaires sont présents du côté extérieur chaud. Ces rouleaux constituent une modulation de l'écoulement de base et sont étudiés au chapitre 4, § 4.2.5.

**Ondes hydrothermales OH1 :**  $\Delta T \geq \Delta T_{\text{OH1}}^{(+)} = 12$  K

Des ondes propagatives existent. Si la vitesse de phase est utilisée pour décrire leur propagation, cette dernière est orientée indifféremment à gauche ou à droite dans la direction azimuthale, mais toujours de l'intérieur froid vers l'extérieur chaud dans la direction radiale. Comme nous le verrons plus loin, les composantes de la vitesse de groupe sont orientées dans le même sens que celle de la vitesse de phase, ce qui lève toute ambiguïté sur les sens de propagation.

Les équiphases correspondantes sont des spirales (cf clichés). Ces ondes propagatives existent dans toute la cellule dès le seuil  $\Delta T_{\text{OH1}} = 12$  K franchi. Du fait de leur similitude avec les ondes planes observées dans les cellules unidimensionnelles (§ 5.1.1), nous les appelons ondes hydrothermales premier type : OH1. Notons que les rouleaux sont toujours présents, mais partiellement masqués par les ondes ; ces deux types d'objets ont — vis-à-vis du montage ombroscopique — sensiblement la même distance focale et ne sont donc pas aisément séparables par cette technique, comme cela a été évoqué en § 5.1.4.

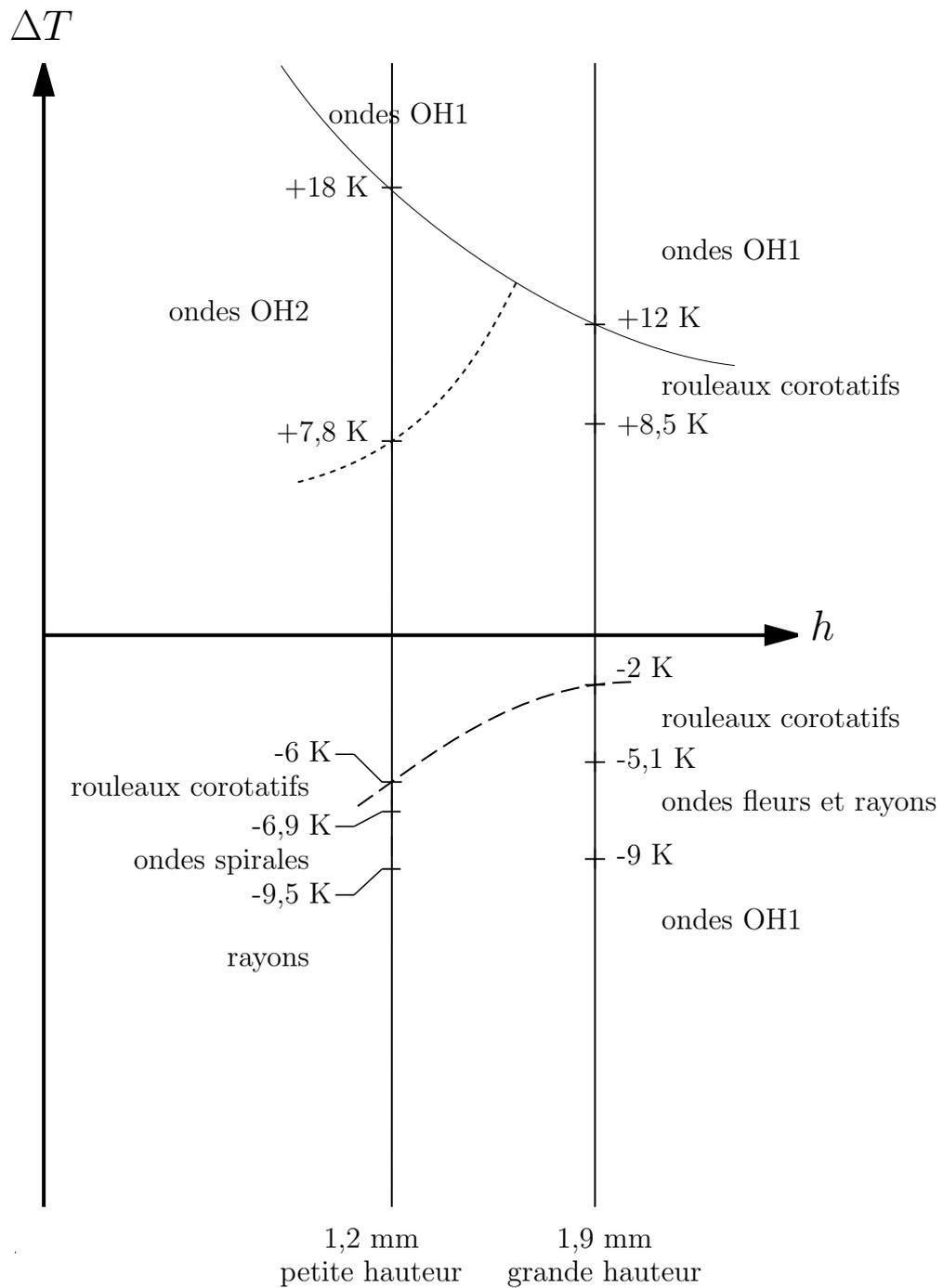


FIG. 5.7 – Diagramme des phases de l'expérience « LOTUS ». Noter que lorsque  $|\Delta T|$  croît les structures se superposent; à chaque seuil, une nouvelle structure apparaît et les précédentes subsistent. Les trois courbes sont des interpolations schématisées limitant certaines régions.

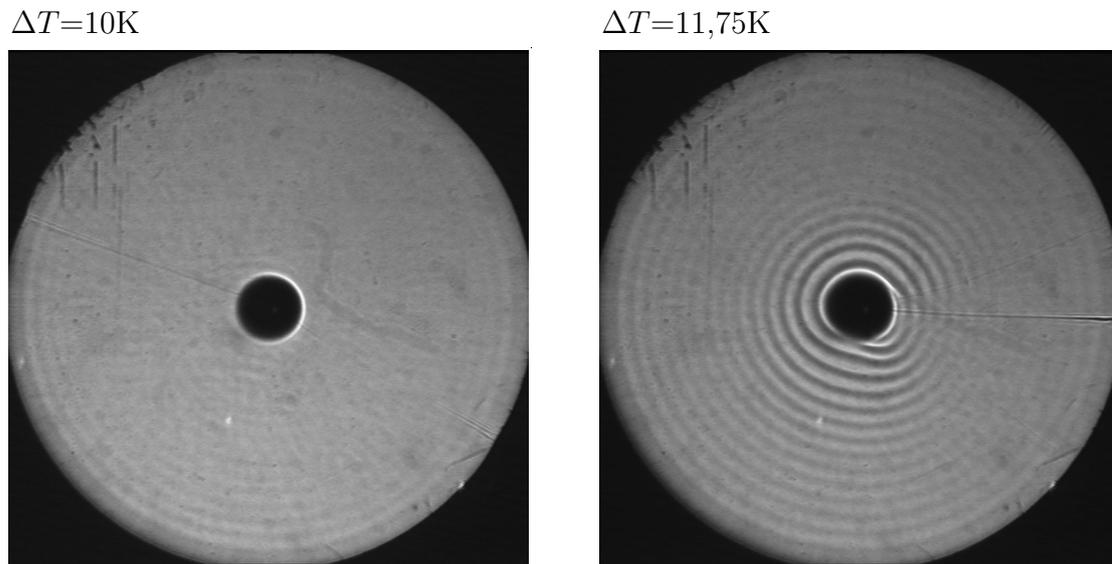


FIG. 5.8 – Clichés pour  $h = 1,9 \text{ mm}$ . Rouleaux corotatifs seuls.

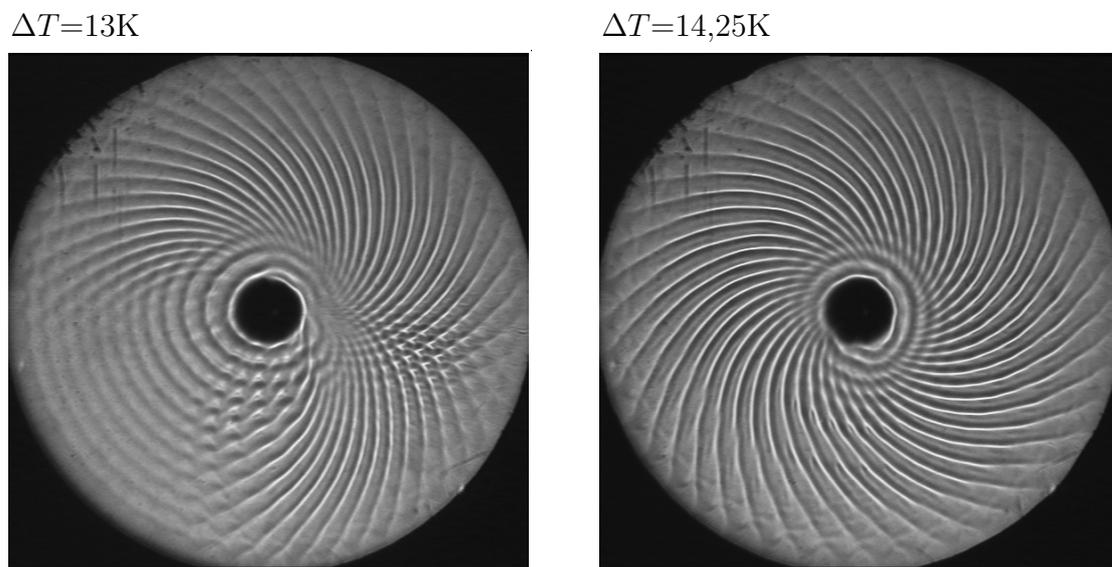


FIG. 5.9 – Clichés pour  $h = 1,9 \text{ mm}$ . Ondes  $OH1$  seules. A gauche : il existe une « source » large qui émet une onde droite et une onde gauche ainsi qu'un « puits » où les deux ondes se recouvrent. A droite : une onde unique.

Remarquons que l'apparition des OH1 s'effectue en deux temps ; et il semble donc plus pertinent de définir les deux seuils successifs suivants :

- $\Delta T_{\text{OH1,c}}^{(+)} = 12 \text{ K}$  : seuil d'apparition des OH1. Au delà de cette valeur, les ondes sont présentes mais de façon peu ordonnée. Au moins un couple {puits, source} existe, donc une onde droite et une onde gauche sont présentes. La source a une grande extension orthoradiale, ce qui correspond à une absence d'ondes dans un large quartier de la cellule alors que toute la direction radiale est envahie dans le quartier où existent les ondes. Le puits a une extension orthoradiale beaucoup plus limitée et l'on y observe un recouvrement des ondes droites et gauches.
- $\Delta T_{\text{OH1,a}}^{(+)} > \Delta T_{\text{OH1,c}}^{(+)}$  : valeur seuil à partir de laquelle des ondes uniques (droite ou gauche, sans source ni puits) sont observables. Cette valeur se situe suivant les expériences entre 13 K et 14 K.

L'existence de ces deux seuils fait très fortement penser à l'existence d'un seuil convectif et d'un seuil absolu. Cependant, nous avons remarqué au chapitre 3 que seul le seuil absolu était observé lors d'expériences, à moins qu'une source de bruit assez puissante n'existe. Nous avons de plus ici deux directions d'espace, donc deux composantes de la vitesse de groupe. Nous pouvons ainsi émettre l'hypothèse que les ondes sont absolument instables dans les deux directions sitôt le seuil  $\Delta T_{\text{OH1,a}}^{(+)}$  franchi, alors qu'elles ne sont que absolument instables dans la direction orthoradiale et convectivement instables dans la direction radiale avec une source de bruit pour  $\Delta T_{\text{OH1,c}}^{(+)} \leq \Delta T < \Delta T_{\text{OH1,a}}^{(+)}$ .

Notons de plus que la transition vers une onde unique est sous-critique et que nous ne l'observons donc pas toujours à la même valeur de  $\Delta T$ . Ainsi, le cliché représentant une onde unique à  $\Delta T = 14,25 \text{ K}$  de la figure 5.9 provient d'une expérience où la différence de température était progressivement augmentée par paliers de 1 K, à raison de 1 K par heure et en attendant au moins 1 heure entre chaque augmentation. Lors de cette expérience, l'onde unique est apparue pour  $\Delta T$  compris entre 14 K et 14,25 K. Lors d'une expérience similaire mais avec une vitesse de montée de 0,4 K par heure, l'onde unique n'est pas apparue avant  $\Delta T = 15 \text{ K}$ . Enfin, lors d'une expérience où  $\Delta T$  est diminué (1 K par heure), l'onde unique subsiste jusqu'à 13 K, mais pas en dessous.

Remarquons enfin que pour une petite plage de valeurs de  $\Delta T$  voisines de  $\Delta T_{\text{OH1,c}}^{(+)}$  (toujours strictement inférieures à  $\Delta T_{\text{OH1,a}}^{(+)}$ ), les ondes OH1 peuvent être « accrochées » à un défaut de l'écoulement de base. En effet, quelle que soit la valeur de la différence de température appliquée et quelle que soit la hauteur, l'écoulement de base peut être localement modifié par la présence d'un défaut positionné le long d'un rayon de la cellule, rayon dont il a l'apparence. Ce type de défaut peut par exemple être observé sur certains clichés de ce manuscrit. Nous avons remarqué qu'une évaporation rapide associée à la chute de gouttes d'huile froide dans le fluide en convection était à l'origine de ces défauts. Quoi qu'il en soit, la présence d'un tel objet perturbe les ondes OH1 au voisinage de leur seuil (convectif?) et les mesures critiques effectuées certains jours peuvent s'en ressentir. Du fait de leur non-généricité et leur non-reproductibilité, nous n'avons pas étudié spécifiquement ces événements.

**Instabilités secondaires et d'ordre supérieur :  $\Delta T \geq \Delta T_{\text{secondaire}}^{(+)}$** 

Des instabilités secondaires apparaissent ; nous ne les avons pas étudiées en détail, mais ont été observés les événements suivants :

- instabilité d'Eckhaus 2D : le nombre de longueurs d'ondes orthoradiales, i.e. le nombre de branches de spirales change avec  $\Delta T$ . Ce changement de nombre d'onde entier est analogue à celui observé dans l'anneau par Mukolobwicz *et al.* (1998).
- instabilité oscillatoire : les spirales sont soumises à une modulation spatiale sur toute leur longueur.
- instabilité « sur-harmonique » : les longueurs d'onde se divisent en deux loin du centre et le nombre d'onde orthoradial est ainsi doublé.
- croissance de l'onde inverse et interaction de cette dernière avec l'onde unique : bien que l'onde soit unique (pas de source ni de puit), l'onde inverse commence à exister dans un secteur du disque où elle affaiblit légèrement l'onde majoritaire.
- naissance de couples { puits, source } séparant plus nettement les deux ondes contre-propagatives lorsque l'onde inverse arrive à dominer sur l'onde initialement unique.

Cette liste n'est sans doute pas exhaustive.

Notons enfin que les structures observées pour les différences de températures les plus élevées (typiquement 25 K avant que l'huile n'ait ses propriétés trop modifiées voire ne se vaporise du côté chaud) sont très désordonnées ; un régime de chaos spatio-temporel est atteint pour une valeur de la contrainte thermique « seulement » double ou triple de la valeur au seuil du premier motif propagatif.

**5.2.2 Cas des grandes hauteurs ( $h = 1,9$  mm),  $\Delta T < 0$** 

Lorsque l'on inverse  $\Delta T$ , i.e., lorsque l'on chauffe le centre de la cellule au lieu de le refroidir, la phénoménologie observée est différente. Cela est attendu car, comme nous l'avons remarqué en § 1.2.3, le système n'est pas symétrique vis à vis de la transformation  $(r, \Delta T) \mapsto (-r, -\Delta T)$ .

**Ecoulement de base :  $0 \geq \Delta T > \Delta T_{\text{rouleaux}}^{(-)} \simeq -2$  K**

Seul l'écoulement de base non perturbé est observé. Aucune structure spatiale telle que rouleaux stationnaires ou ondes n'est présente.

**Rouleaux corotatifs :  $\Delta T \leq \Delta T_{\text{rouleaux}}^{(-)} \simeq -2$  K**

Des rouleaux stationnaires sont présents du côté intérieur chaud. Leur étude détaillée a été présentée au chapitre 4.

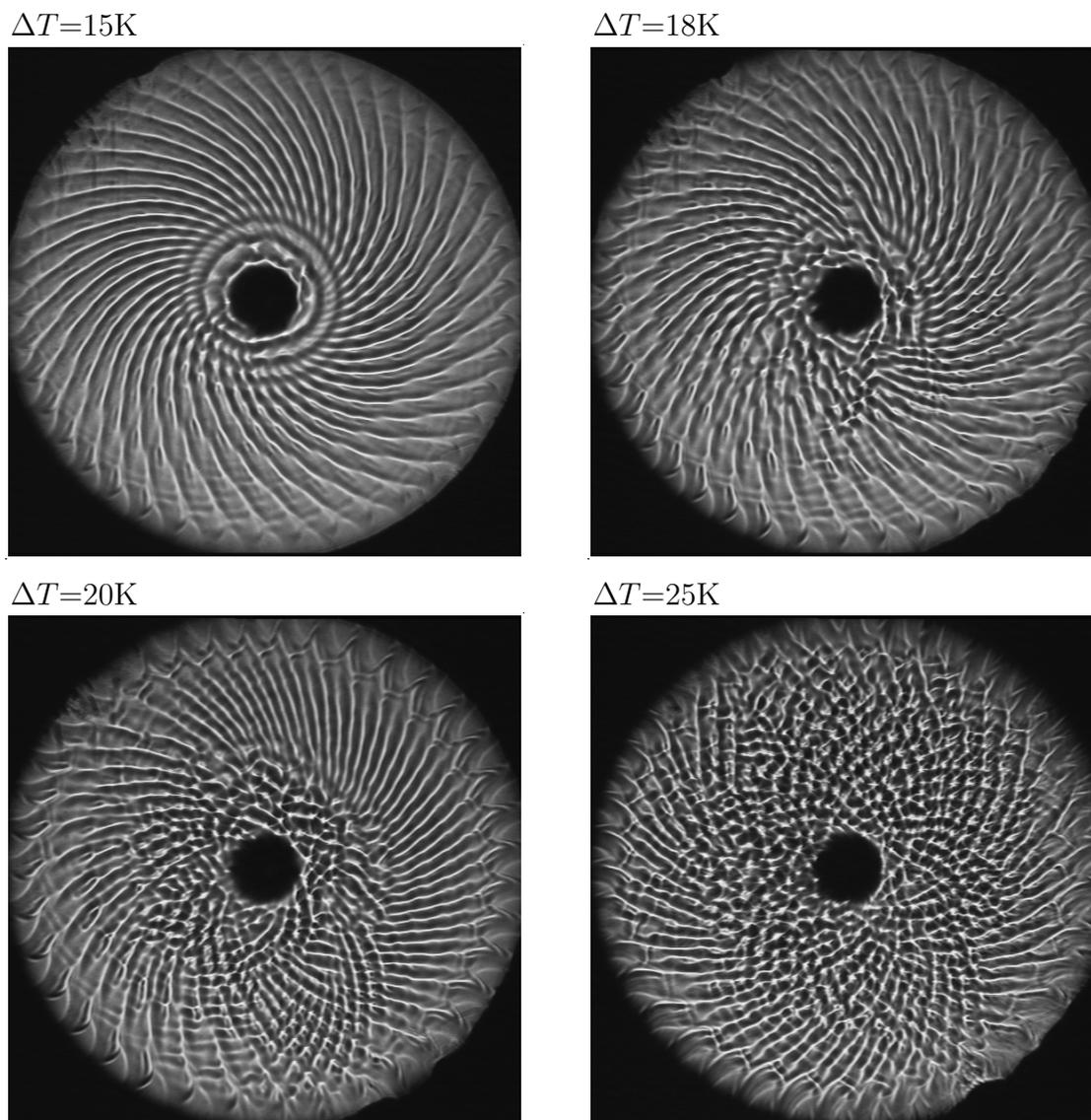


FIG. 5.10 – Clichés pour  $h = 1,9$  mm. Ondes OH1 modulées ( $\Delta T = 15$  K), avec des dislocations spatiales ( $\Delta T = 18$  K), avec une instabilité sous-harmonique et un peu d'onde inverse ( $\Delta T = 20$  K) et avec beaucoup d'onde inverse ( $\Delta T = 25$  K), ce qui donne un régime chaotique en espace et en temps.

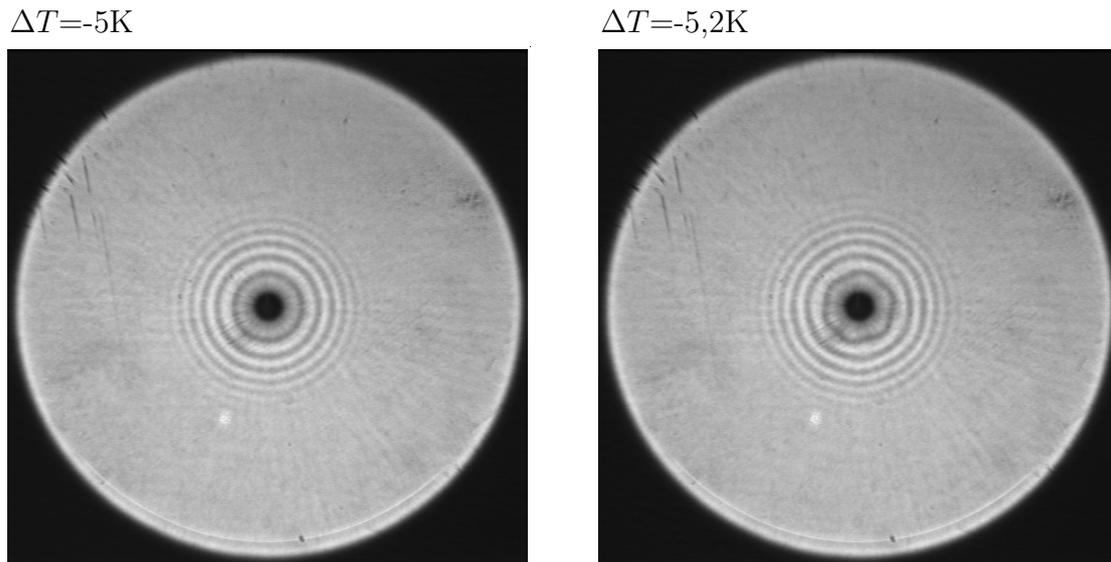


FIG. 5.11 – Clichés pour  $h = 1,9$  mm. Rouleaux co-rotatifs seuls au centre chaud ( $\Delta T = -5$  K), puis superposition des rouleaux et d’un embryon d’ondes fleurs (hexagone) tournantes, au seuil de celles-ci ( $\Delta T = -5,2$  K).

**Ondes fleurs :**  $\Delta T \leq \Delta T_{\text{fleurs}}^{(-)} = -5,2$  K

Une structure oscillante localisée près du centre chaud est présente. Très localisée au seuil et avec 6 longueurs d’onde, cette dernière ressemble tout d’abord à un hexagone (figure 5.11) tournant par à-coups. Lorsque  $\Delta T$  est augmenté, la structure s’étend et prend l’aspect d’une fleur tournante. Sujette à l’instabilité d’Eckhaus dans la direction azimutale, cette fleur acquiert ensuite un septième pétale avant que n’apparaissent les OH1 (figure 5.12).

Notons la très forte ressemblance de ces fleurs tournantes avec les « pétales » observé par Favre (1997) dans une expérience de convection thermocapillaire similaire : un disque de fluide chauffé au centre et refroidi à sa périphérie. Remarquons que dans l’expérience de Favre, le plot central était remplacé par un chauffage localisé uniquement à la surface du fluide, sur un disque de rayon plus grand que le rayon de notre plot central. De même, l’extension radiale des pétales alors observés était plus grande, et aucun rouleau corotatif n’était observé. Les deux instabilités sont néanmoins très semblables.

Plus généralement, la littérature sur les instabilités oscillantes en convection thermocapillaire rapporte de nombreux résultats en géométrie cylindrique obtenus par chauffage au centre ; cette géométrie correspondant aux applications industrielles comme la fusion de zone. Néanmoins la hauteur de fluide est souvent élevée et les rapports d’aspect transverses proches de l’unité. Ainsi, Kamotani *et al.* (1992) rapportent dans le cas d’un rapport d’aspect horizontal proche du notre une structure oscillante localisée que nous pouvons interpréter comme ... une fleur à deux pétales !

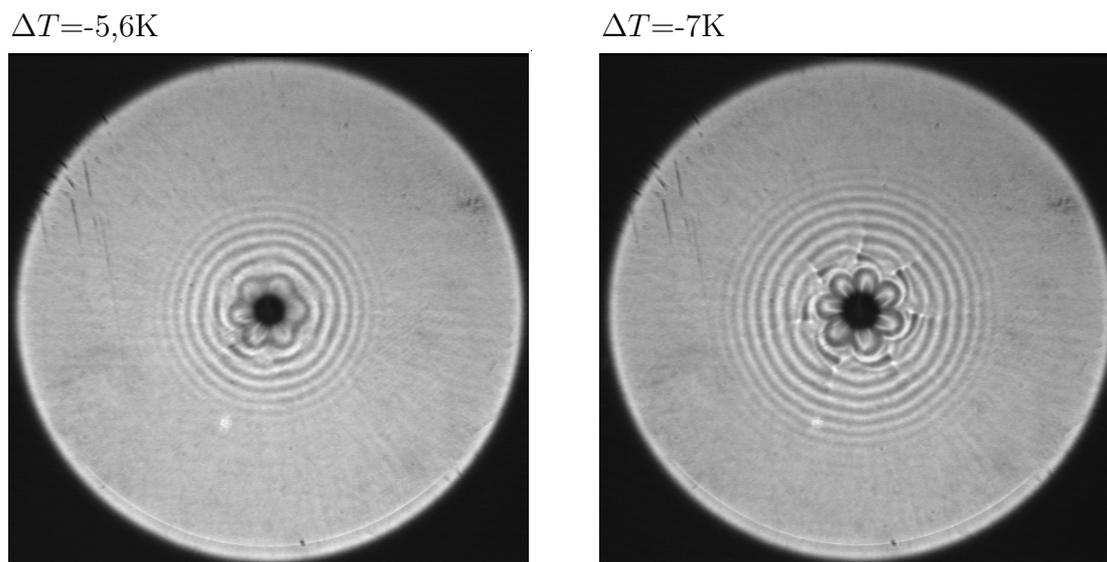


FIG. 5.12 – Clichés pour  $h = 1,9$  mm. Rouleaux corotatifs et ondes fleurs. Noter le changement de nombre d'onde orthoradial (nombre de pétales) par augmentation de  $\Delta T$  et instabilité d'Eckhaus entre les deux clichés.

### Ondes hydrothermales : $\Delta T \leq \Delta T_{\text{OH1}}^{(-)} \simeq -10$ K

De nouvelles ondes apparaissent qui envahissent toute la cellule, bien que la zone des fleurs — au centre — reste majoritairement acquise à ces dernières. Les nouvelles ondes ont toutes les caractéristiques des OH1 et nous les qualifions de telles.

Le bord extérieur froid se comporte comme une source d'ondes ; la composante radiale de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe est centripète. Les ondes convergent vers le centre et l'aspect global de la structure est assez désordonné dès le seuil du fait de la compression de l'information à l'approche du centre.

La transition vers le chaos spatio-temporel est ainsi encore plus « rapide » que celle observée pour  $\Delta T > 0$  car les structures sont très incohérentes en espace et en temps.

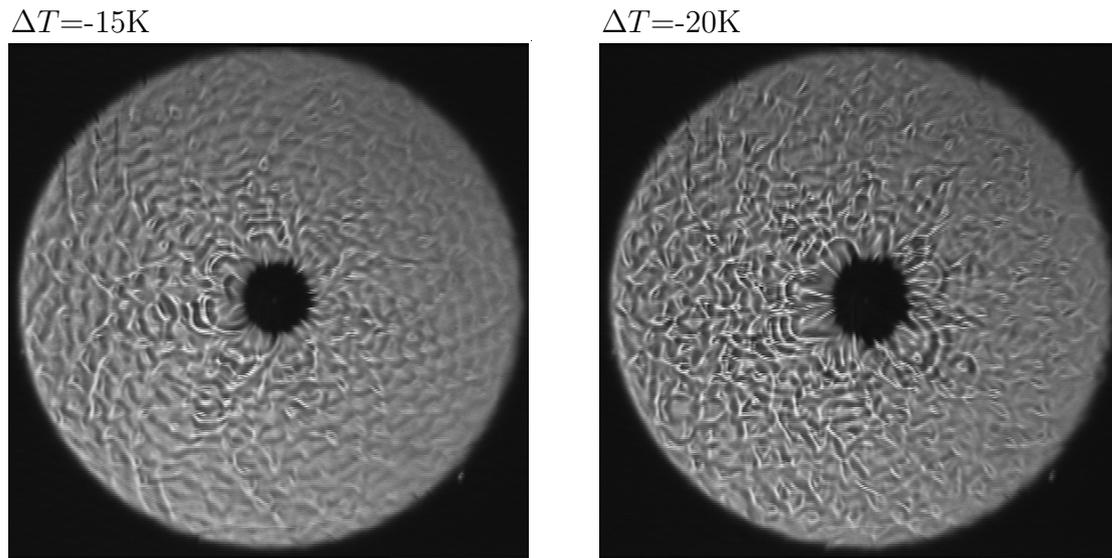


FIG. 5.13 – Clichés pour  $h = 1,9$  mm. Ondes hydrothermales, sur leur accompagnement d'ondes fleurs (8 pétales désormais difficiles à distinguer), et de rouleaux corotatifs. L'ensemble est peu cohérent.

### 5.2.3 Cas des petites hauteurs ( $h = 1,2$ mm), $\Delta T > 0$

Nous allons maintenant décrire les structures observées à petite hauteur sur le cas particulier  $h = 1,2$  mm.

**Ecoulement de base :**  $0 \leq \Delta T < \Delta T_{\text{OH2}}^{(+)} = 7,8$  K

Aucune onde n'est présente dans la cellule. Les rouleaux corotatifs n'ont pas été observés avant l'apparition de la première structure oscillante et ne le sont pas plus après : pour les petites hauteurs et  $\Delta T > 0$ , il n'y a pas de structuration de l'écoulement de base en rouleaux corotatifs.

**Ondes hydrothermales du second type :**  $\Delta T \geq \Delta T_{\text{OH2}}^{(+)} = 7,8$  K

Des ondes apparaissent. Ces ondes sont qualitativement différentes de celles obtenues à grande hauteur car :

- elles sont localisées au seuil près du plot intérieur froid, dans une tout petite région ;
- leur direction de propagation est purement radiale au seuil : nous observons alors des cibles qui pulsent avec une fréquence finie.

Tout se passe ainsi comme si le plot central froid était tout entier la source d'onde cylindriques. Le nombre d'onde n'a aucune composante orthoradiale et l'angle de propagation des ondes par rapport au gradient est nul.

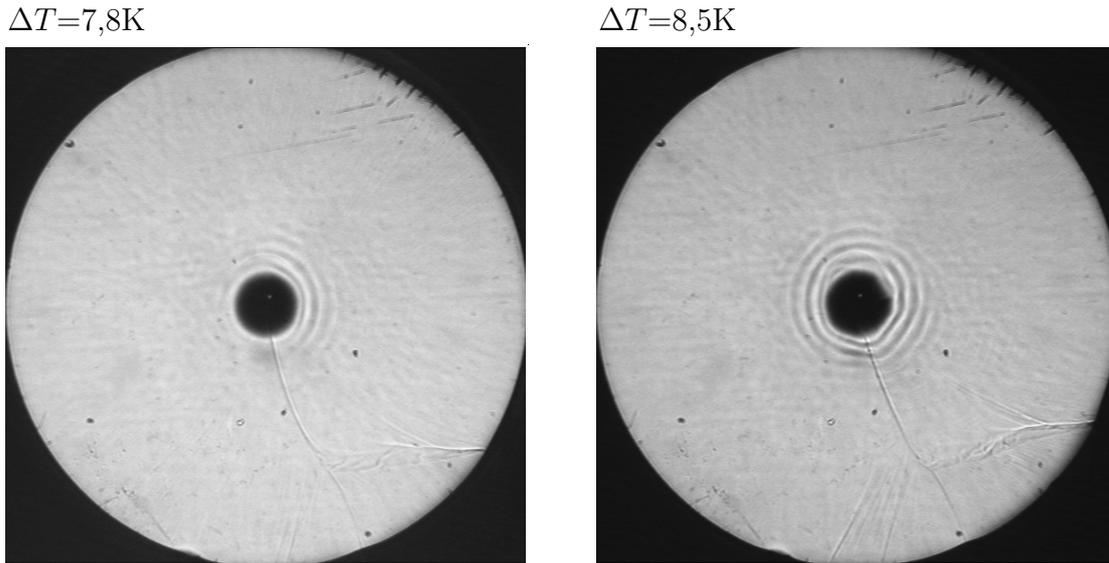


FIG. 5.14 – Clichés pour  $h = 1,2$  mm. Ondes hydrothermales de type 2 (OH2) se propageant radialement. Il n’y a pas de rouleaux. Au seuil, les OH2 sont des cibles parfaites (à gauche). Légèrement au dessus du seuil, les cibles se sont déformées et le nombre d’onde orthoradial n’est plus nul (à droite) ; cela se traduit par un décalage du centre des cibles par rapport au centre de la cellule.

Lorsque  $\Delta T$  est augmenté, ces « ondes cibles » s’ouvrent pour prendre l’aspect de spirales. Une source d’onde est alors présente qui sépare un domaine d’onde droite et un domaine d’onde gauche. Une onde unique peut aussi être observée, mais pas de façon stationnaire : la source d’onde apparaît et disparaît erratiquement avec une constante de temps de l’ordre de quelques minutes. Dans tous les cas, les ondes demeurent localisées près du centre froid.

Nous qualifions ces ondes d’OH2 par analogie avec les ondes hydrothermales « bidimensionnelles » observées dans le rectangle à petite hauteur. Nous quantifions précisément leur comportement critique en § 5.3.2.

### Instabilités secondaires des OH2 : $\Delta T \geq \Delta T_{\text{OH2}}^{(+)} = 7.8$ K

Nous pouvons énoncer que les ondes précédentes se déstabilisent dès le seuil franchi. En effet, l’ouverture des spirales est accompagnée d’une augmentation du nombre de branches qui signe encore une fois une instabilité d’Eckhaus.

Nous n’avons pas étudié en détail ces transitions, mais nous quantifions en 5.3.2 l’augmentation du nombre de modes instables. Les ondes de type OH2 ne sont monochromatiques qu’au seuil, mais elles restent toujours localisées.

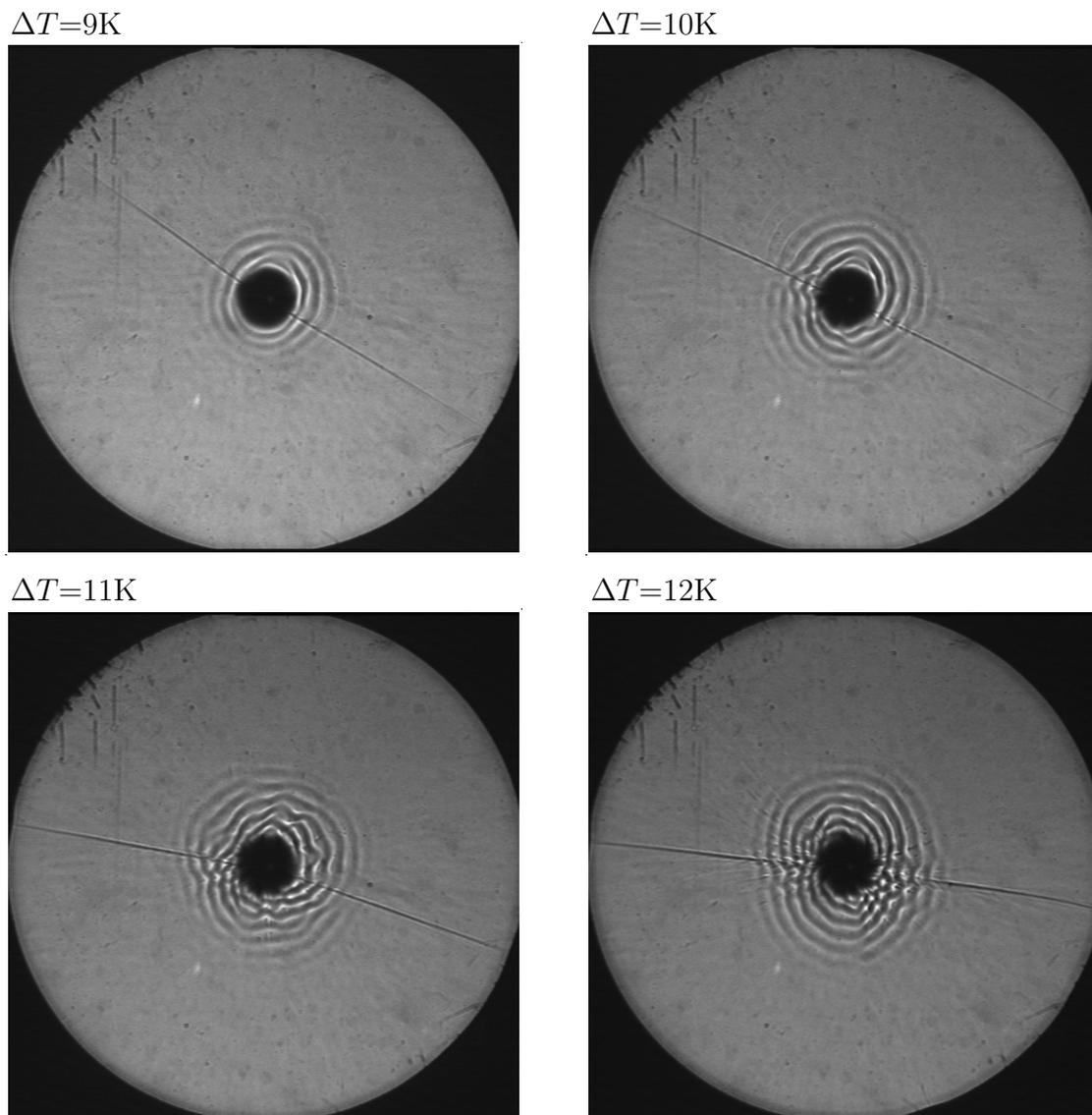


FIG. 5.15 – Clichés pour  $h = 1, 2$  mm. Ondes hydrothermales de type 2 (OH2) se propageant radialement. Il n'y a pas de rouleaux. Au fur et à mesure que  $\Delta T$  est augmenté, les cibles s'ouvrent et se transforment en spirales : le nombre d'onde orthoradial augmente.

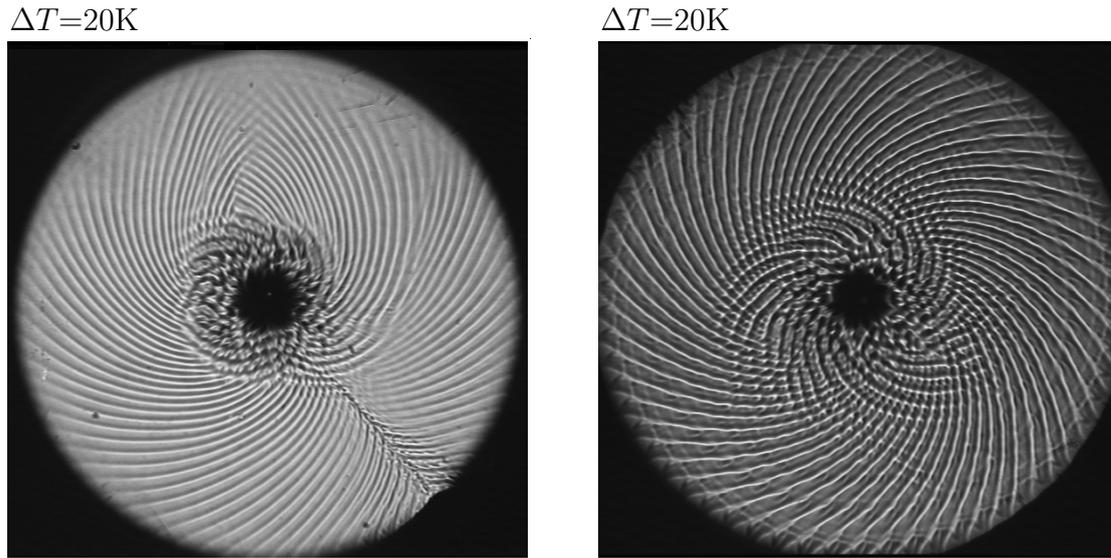


FIG. 5.16 – Clichés pour  $h = 1,2$  mm. Structure composée d’ondes hydrothermales de type 1 (OH1) et de type 2 (OH2). A gauche, cas où coexistent des ondes contra-propagatives de chaque espèce. A droite, cas où les OH1 et les OH2 forment des ondes uniques, les deux espèces tournant en sens opposés.

### Ondes hydrothermales du premier type (OH1) : $\Delta T \geq \Delta T_{\text{OH1}}^{(+)} \simeq 18$ K

De nouvelles ondes apparaissent qui remplissent toute la cellule. Ces ondes présentent toutes les caractéristiques des OH1 observées à  $h = 1,9$  mm pour  $\Delta T > 0$ . Elles ne sont pas localisées et les deux composantes du nombre d’onde sont proportionnelles partout dans la cellule, ce qui définit un angle  $\psi$  constant (cf § 5.4). Nous les qualifions donc d’ondes hydrothermales OH1.

Nous obtenons ainsi des OH1 à petite hauteur. Celles-ci apparaissent sur un écoulement déjà fortement modifié — surtout au centre de la cellule — par la présence des ondes OH2. La structure résultante est assez complexe et une augmentation de  $\Delta T$  conduit rapidement à des états très désordonnés, que nous étudierons plus précisément en 5.5.

Précisons que les OH2 sont déjà très peu cohérentes dans la région proche du plot central lorsque les OH1 apparaissent dans toute la cellule. Or ces dernières ont tendance à « s’accrocher » de sorte à ce que leurs équiphases prolongent plus ou moins bien les équiphases des OH2. Par conséquent, les OH1 subissent un forçage turbulent de la part des OH2, ce qui les rend plus désordonnées. Le premier cliché de la figure 5.16 illustre ce phénomène. Par contre, si les OH1 et les OH2 sont des ondes uniques et si elles tournent dans des sens opposés autour du plot central, l’accrochage est moins performant et la structure a une apparence plus régulière; le second cliché de la figure 5.16 présente une telle situation.

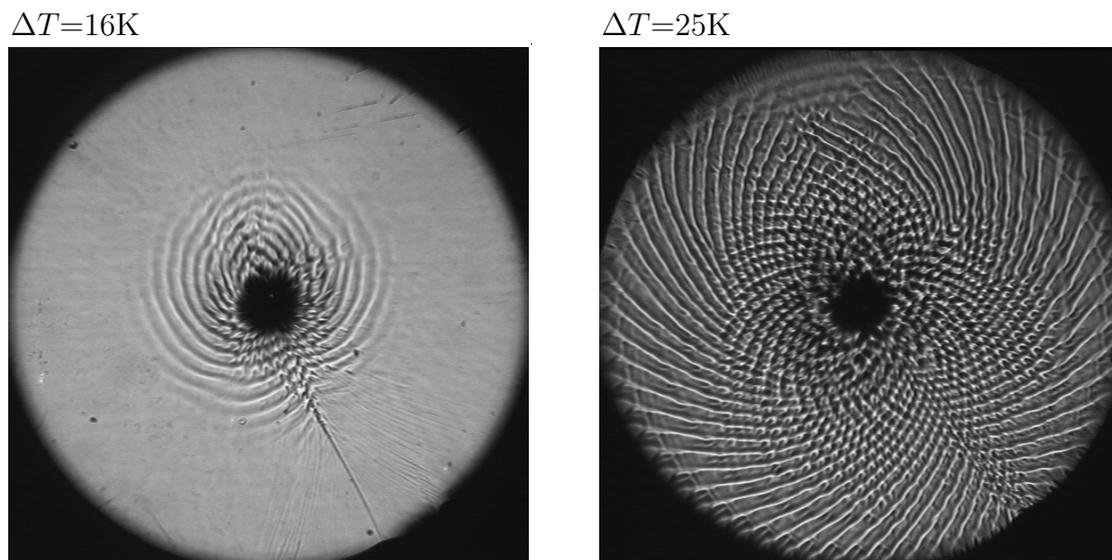


FIG. 5.17 – Clichés pour  $h = 1,2$  mm. A gauche : avant l'apparition des OH1, la structure des OH2 est déjà chaotique en temps et en espace très près du plot central. A droite : après l'apparition des OH1 — au dessus de 18 K — la transition vers le chaos spatio-temporel suit son cours ; la zone centrale étant toujours plus désordonnée. L'onde unique d'OH1 se brise toujours pour les fortes valeurs de  $\Delta T$  et il y a beaucoup d'ondes stationnaires dans la direction azimuthale.

### Transition vers le chaos spatio-temporel

Lorsque  $\Delta T$  est encore augmenté, il devient impossible au système de maintenir une éventuelle structure unique d'OH1 ou d'OH2 et deux ondes contra-propagatives de chaque espèce sont présentes. Ces ondes ne s'excluent plus mutuellement comme cela était le cas près du seuil de chacune des espèces, mais n'hésitent pas à s'interpénétrer. Ainsi, dans ce nouveau régime, une augmentation de la contrainte thermique correspond à une augmentation de la région occupée par des ondes stationnaires. Précisons que ces ondes ne sont stationnaires que dans la direction orthoradiale, et qu'une propagation existe toujours dans la direction radiale, du centre froid vers l'extérieur chaud. L'allure de ces ondes stationnaires évoque le cœur d'une fleur de tournesol ; l'analogie n'est pas dénuée de sens car dans les deux cas les fronts d'ondes sont émis au centre et la régularité spatiale découle de la régularité temporelle de l'émission.

Une présentation plus quantitative de la transition vers le désordre est présentée en § 5.5.

#### 5.2.4 Cas des petites hauteurs ( $h = 1, 2$ mm), $\Delta T < 0$

Et enfin, voici les observations obtenues aux petites hauteurs en chauffant le plot central.

**Écoulement de base :**  $0 > \Delta T \geq \Delta T_{\text{rouleaux}}^{(-)} \simeq -6 \text{ K}$

Comme dans les cas précédents, la branche thermodynamique — écoulement de base seul — est observée pour les plus petites valeurs de la contrainte imposée.

**Rouleaux corotatifs :**  $\Delta T \geq \Delta T_{\text{rouleaux}}^{(-)} \simeq -6 \text{ K}$

Des rouleaux stationnaires corotatifs sont visibles autour du plot central alors qu'aucune structure temporellement oscillante n'est présente. La longueur d'onde est plus petite que celle des rouleaux étudiés aux plus grandes hauteurs car la hauteur de fluide est plus faible.

**Ondes propagatives :**  $\Delta T \geq \Delta T_{\text{OH}}^{(-)} = -6,9 \text{ K}$

Une structure propagative est localisée près du plot central chaud. Cette structure est animée dès le seuil d'un mouvement de rotation, i.e., possède un nombre d'onde orthoradial et une vitesse de groupe orthoradiale non nuls. La composante radiale du vecteur d'onde est centripète ce qui traduit encore une fois la propagation des ondes du froid vers le chaud. Il est possible de définir un angle de propagation  $\psi$  entre le gradient de température et le vecteur d'onde. Cet angle est non nul et homogène dans la cellule.

Si nous attribuons la localisation aux effets conjoints de la courbure et de l'advection par la vitesse de groupe, nous sommes tentés de qualifier ces ondes d'hydrothermales du premier type : OH1. En effet, au contraire des OH2, localisées près de leur source dans la direction radiale, ces nouvelles ondes sont localisées en aval de l'advection centripète et surtout, l'angle  $\psi$  est constant dans l'espace et en fonction de  $\Delta T$ .

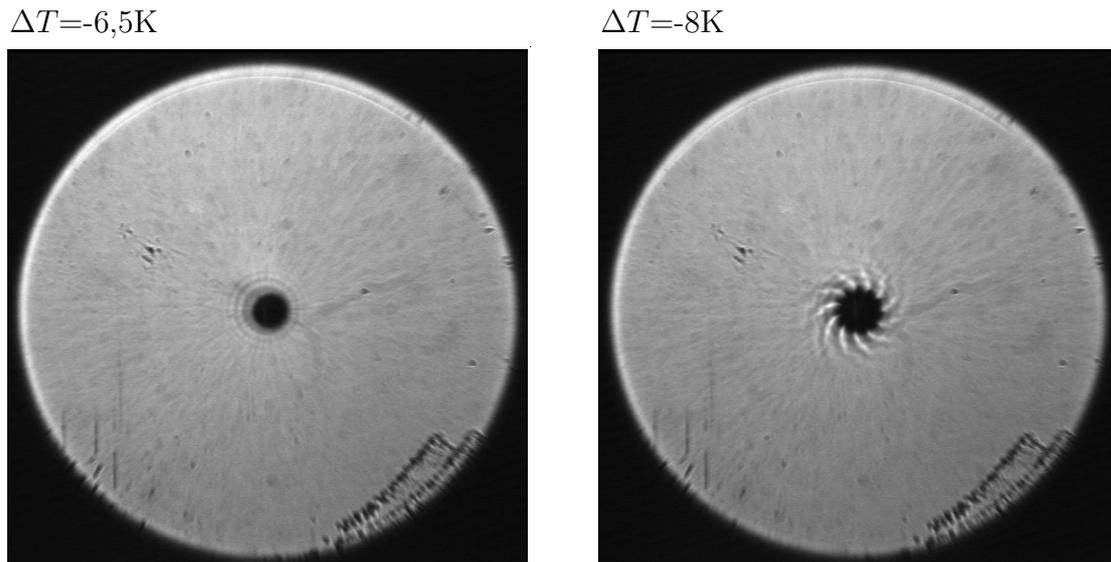


FIG. 5.18 – Clichés pour  $h = 1,2 \text{ mm}$ . A gauche : rouleaux corotatifs seuls. A droite : ondes hydrothermales tournant « à rebrousse poil » : la composante radiale de la vitesse de phase est dirigée vers le centre et la rotation s'effectue dans le sens trigonométrique.

Plus  $\Delta T$  est augmenté et plus la zone envahie par les ondes s'agrandit, tout comme la zone envahie par les rouleaux corotatifs, toujours présents.

**Rayons propagatifs :**  $\Delta T \geq \Delta T_{\text{OH}}^{(-)} = -9,5 \text{ K}$

Peu après l'apparition des OH1, une seconde structure oscillante en temps et en espace est présente. Ses équiphasés sont des rayons ; ces rayons tournent régulièrement autour du plot central ; le vecteur d'onde est purement orthoradial. Tout comme les rouleaux corotatifs et les OH1, cette structure est localisée près du centre froid dans une région où son image ombroscopique se superpose à celle déjà riche des rouleaux et des OH1.

Nous discernons nettement une différence de fréquence entre les OH1 et les rayons : ces derniers tournent deux fois plus vite autour du plot central.

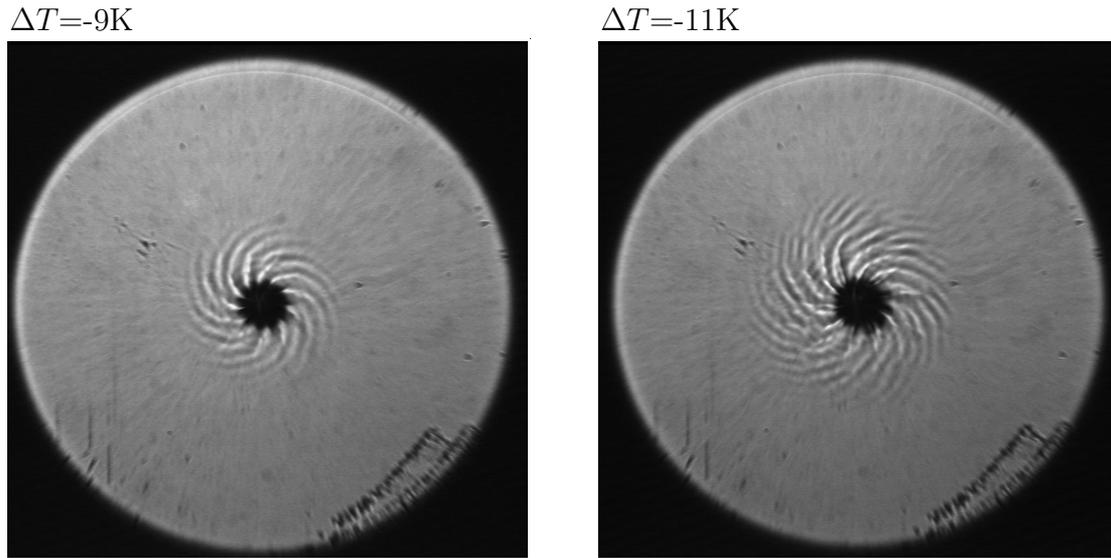


FIG. 5.19 – Clichés pour  $h = 1,2$  mm. Ondes hydrothermales accompagnées de rayons tournants. Ces derniers sont surtout visibles très près du plot central.

### 5.2.5 Petit bilan

#### Valeurs critiques de $Ma$ et $Ra$

Précisons ici les valeurs des seuils des différentes ondes en termes de nombre de Marangoni et Rayleigh :

hauteur	$\Delta T$	$Ra_c$	$Ma_c$	structure
$h = 1,2$ mm	7,8 K	80	500	OH2
	18 K	190	1150	OH1
$h = 1,9$ mm	11 K	730	1760	OH1
	-5,2 K	350	830	fleurs
	-10 K	670	1600	OH1

Nous voyons que le seuil des OH1 est du même ordre de grandeur lorsque la hauteur varie. Rappelons que dans le cas de l'anneau, pour  $h = 1,7$  mm et  $L_{\parallel} = 10$  mm, le seuil des ondes (OH1) se situe à  $Ma \simeq 2500$ , c'est à dire plus haut que dans le disque ; ceci provient sans doute du confinement. A titre indicatif, la théorie en géométrie infinie et sans courbure prédit (§ 1.3.4 et figure 1.16)  $Ma = 400$  pour  $h = 1,7$  mm.

L'influence de la courbure est à prendre en compte pour expliquer un tel écart. Mais surtout, nous avons montré en 4.1 qu'il existe une couche limite thermique près des bords de la cellule qui réduit la valeur effective du gradient de température appliqué. Connaissant le profil de température dans la direction du gradient, nous pouvons remonter au nombre de Marangoni effectif loin des bords de la cellule. D'après les résultats exposés en § 4.1.2,

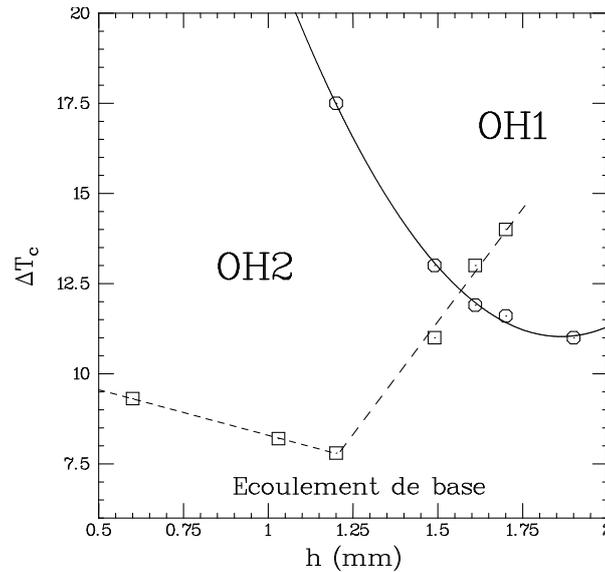


FIG. 5.20 – *Diagramme des phases quantitatives dans l'expérience « LOTUS », pour  $\Delta T > 0$ . Chaque point expérimental est obtenu par extrapolation de l'évolution du carré de l'amplitude des ondes (cf § 5.3, Fig 5.25 par exemple) :  $\circ$  pour OH1 et  $\square$  pour OH2. Les courbes sont des ajustements qualitatifs (trait continu pour OH1 et pointillés pour OH2).*

celui-ci est de deux à trois fois plus faible que celui calculé à partir de  $T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}$ . Nous trouvons alors un accord satisfaisant avec la théorie linéaire en géométrie infinie.

### Effet de la hauteur

Pour une vue d'ensemble des différentes phases observées dans l'expérience, nous nous référons à la figure 5.7.

Les seuils définis dans les sections précédantes — pour  $h = 1,9$  mm comme  $h = 1,2$  mm et  $\Delta T$  de signe variable — sont dépendants de la hauteur de fluide  $h$ . Nous avons :

$$\Delta T_{\text{OH2}}^{(+)} = \Delta T_{\text{OH2}}^{(+)}(h), \quad \Delta T_{\text{OH1}}^{(+)} = \Delta T_{\text{OH1}}^{(+)}(h), \quad \Delta T_{\text{OH1}}^{(-)} = \Delta T_{\text{OH1}}^{(-)}(h) \dots$$

Si nous supposons que cette dépendance en  $h$  est continue pour chacun des seuils — cela revient à dire que les seuils se déplacent continûment lorsque  $h$  est variée —, nous pouvons interpoler les courbes critiques pour des hauteurs intermédiaires. Nous proposons ainsi les courbes de la figure 5.7. Afin d'obtenir plus précisément ces courbes de seuils en fonction de  $h$ , nous avons effectué une série d'expériences avec  $\Delta T > 0$  et  $h$  variable. Les résultats sont reproduits sur la figure 5.20.

Comme nous le constatons sur la figure 5.20, aux grandes hauteurs, les OH1 apparaissent, sans OH2 alors qu'aux petites hauteurs, les OH2 apparaissent tout d'abord, sans OH1.

**Point de codimension 2**

Pour  $\Delta T > 0$ , il existe une hauteur intermédiaire — environ 1,55 mm — pour laquelle les deux types d'ondes hydrothermales OH1 et OH2 ont le même seuil; il s'agit d'un point de codimension 2 dans l'espace des phases du système.

Pour les plus petites hauteurs (inférieures à 1,55 mm), les OH2 apparaissent seules et nous mesurons leur seuil. Si la différence de température est augmentée, les OH1 apparaissent à leur tour et nous pouvons définir de même le seuil de ces dernières. Pour les plus grandes hauteurs (supérieures à 1,55 mm), les OH1 apparaissent seules et nous mesurons leur seuil. Si la différence de température est augmentée, les OH2 apparaissent à leur tour et il est là encore possible de définir le seuil de cette nouvelle structure.

Chacune des structures semble ainsi résulter d'un mode d'instabilité indépendant et aucune interaction entre les deux structures n'est observée: Les OH1 et les OH2 semblent « ne pas se voir ». Aucun comportement particulier n'est à signaler au voisinage du point de codimension 2.

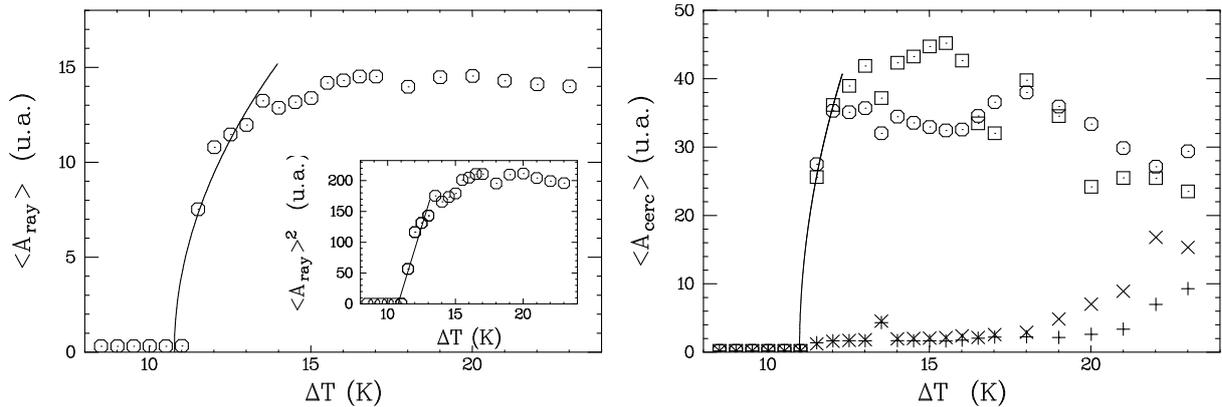


FIG. 5.21 – Evolution de l'amplitude des OH1 pour  $h = 1,9$  mm et  $\Delta T > 0$ . A gauche : amplitude moyennée sur un rayon. A droite : amplitude moyennée sur des cercles de rayon  $r = 25,5$  mm ( $\square$ ) et  $r = 34,8$  mm ( $\circ$ ); l'onde inverse est aussi représentée — (+) et ( $\times$ ) respectivement — qui est négligeable près du seuil mais pousse avec les instabilités secondaires. Le seuil des ondes est mesuré à 11 K .

### 5.3 Comportements critiques

Nous présentons maintenant les comportements critiques des structures oscillantes isolées dans la section précédente. Nous montrons notamment que toutes les instabilités correspondantes sont du type Hopf supercritique.

Les ondes hydrothermales du second type — OH2 — sont étudiées en détail en § 5.3.2; l'évolution originale de leur distribution spatiale avec  $\Delta T$ , ainsi que leur nature non monochromatique sont mise en avant.

#### 5.3.1 OH1

Tout comme dans les cellules 1D, l'apparition des OH1 se fait via une bifurcation de Hopf supercritique. Nous retrouvons en effet un comportement continu de l'amplitude qui varie en  $(\Delta T - \Delta T_{\text{OH1}})^{1/2}$  à chaque apparition des OH1 : pour les petites et les grandes hauteurs, et dans le cas  $T_{\text{int}} < T_{\text{ext}}$  ou son opposé. La fréquence est quant à elle toujours finie au seuil; il en est de même pour les deux composantes  $k_r$  et  $k_\theta$  du vecteur d'onde. L'ensemble de ces résultats est présenté sur les figures 5.21, 5.22, 5.23 et 5.24 dans le cas générique  $h = 1,9$  mm et  $\Delta T > 0$  pour lequel les OH1 sont les seules structures propagatives existantes.

Remarquons ici que la fréquence critique des OH1 est toujours du même ordre (le quart de Hertz) et que sa dépendance essentielle est vis-à-vis de la hauteur de fluide dans la

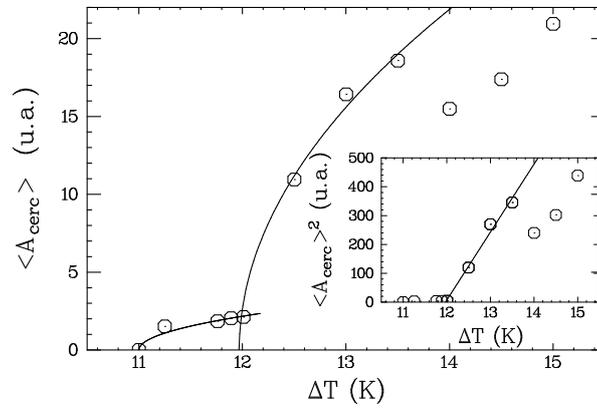


FIG. 5.22 – Evolution de l'amplitude des OH1 pour  $h = 1,9$  mm et  $\Delta T > 0$ , amplitude moyenne sur un cercle de rayon  $r = 25,5$  mm. Le seuil des OH1 est situé autour de 11 K, mais cette série de points a été effectuée en présence d'un défaut. Un changement de régime survient lorsque l'onde n'est plus liée à ce défaut (rayon). Au contraire, les expériences réalisées pour la figure 5.21 était exemptes d'un tel défaut.

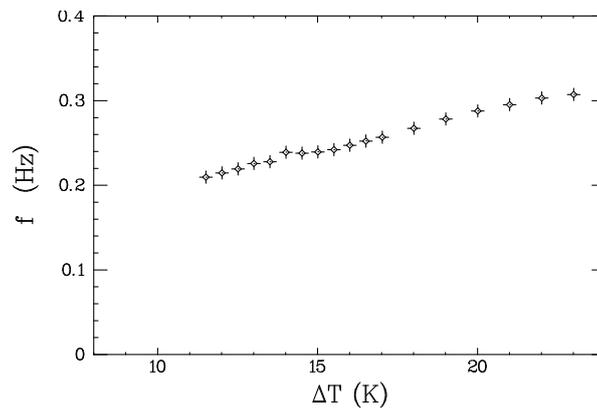


FIG. 5.23 – Evolution de la fréquence moyenne des OH1 pour  $h = 1,9$  mm et  $\Delta T > 0$ . La mesure est effectuée le long de rayons.

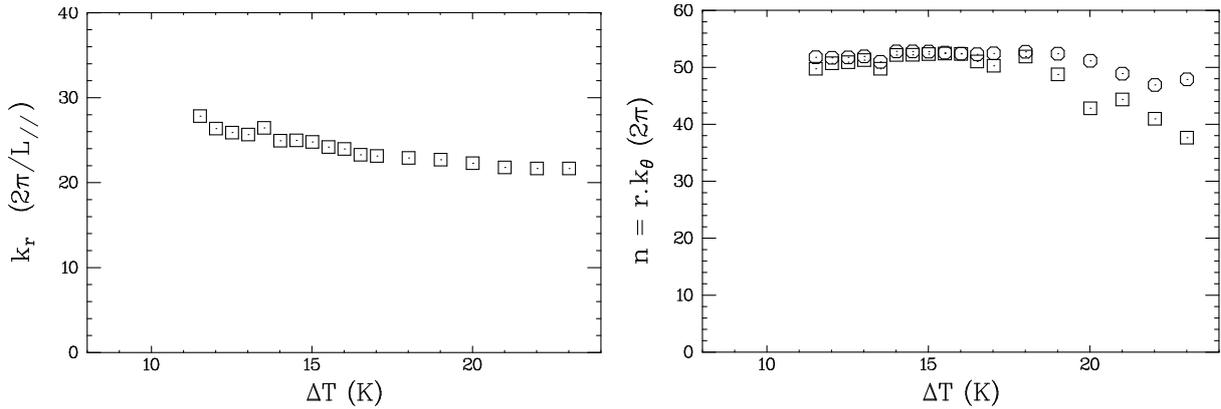
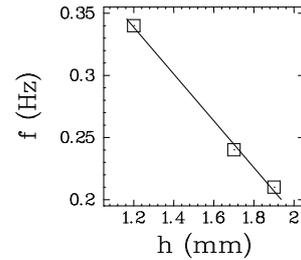


FIG. 5.24 – Evolution du vecteur d'onde moyen des OH1 pour  $h = 1,9$  mm et  $\Delta T > 0$ . A gauche : nombre d'onde radial  $k_r$  ; A droite : nombre d'onde orthoradial  $n = rk_\theta$  mesuré pour  $r = 25,5$  mm ( $\circ$ ) et pour  $r = 34,8$  mm ( $\square$ ). Pour les plus fortes valeurs de  $\Delta T$ ,  $n$  n'est plus constant le long d'un rayon car des instabilités secondaires surviennent.

cellule :

rectangle	$h=1.7$ mm	$f= 0,24$ Hz au seuil
anneau	$h=1.7$ mm	$f= 0,24$ Hz au seuil
«LOTUS»	$h=1.2$ mm	$f= 0,34$ Hz au seuil (OH2)
«LOTUS»	$h=1.9$ mm	$f= 0,21$ Hz au seuil (OH1)



Le tableau ci-dessus récapitule les valeurs des fréquences critiques des OH1 observées dans les différentes géométries. Dans le cas du rectangle, la variation de la fréquence avec la hauteur est détaillée en annexe C. Notons alors qu'une fois la hauteur fixée, la fréquence est quasiment identique pour tous les rapports d'aspects horizontaux ; il est éventuellement possible d'utiliser cette information pour caractériser les OH1 par rapport à d'autres instabilités oscillantes.

### 5.3.2 OH2

Les ondes hydrothermales de type 2 apparaissent — tout comme les OH1 — via une bifurcation de Hopf supercritique. L'évolution continue de l'amplitude au seuil est ainsi visible sur la figure 5.25 et l'évolution de la fréquence sur la figure 5.27.

La distribution spatiale de ces ondes est — comme présenté dans la section précédente — bien particulière au seuil et son évolution avec  $\Delta T$  est originale. L'information spatiale est de deux types : distribution du vecteur d'onde et position de la structure dans la cellule. Sur la figure 5.28 sont visibles les évolutions avec le paramètre de contrôle des deux composantes  $k_r$  et  $k_\theta$  du vecteur d'onde. Alors que la composante  $k_r$  est finie au seuil et évolue peu avec  $\Delta T$ , la composante azimuthale  $k_\theta$  est nulle au seuil — les ondes sont

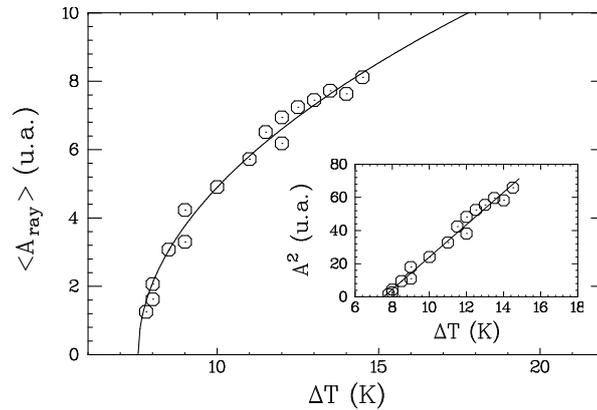


FIG. 5.25 – Evolution de l'amplitude des OH2 pour  $h = 1,2$  mm et  $\Delta T > 0$ . L'amplitude est mesurée le long de rayons et sa valeur moyennée dans l'espace  $\langle A \rangle$  est présentée; il s'agit donc d'une information globale.

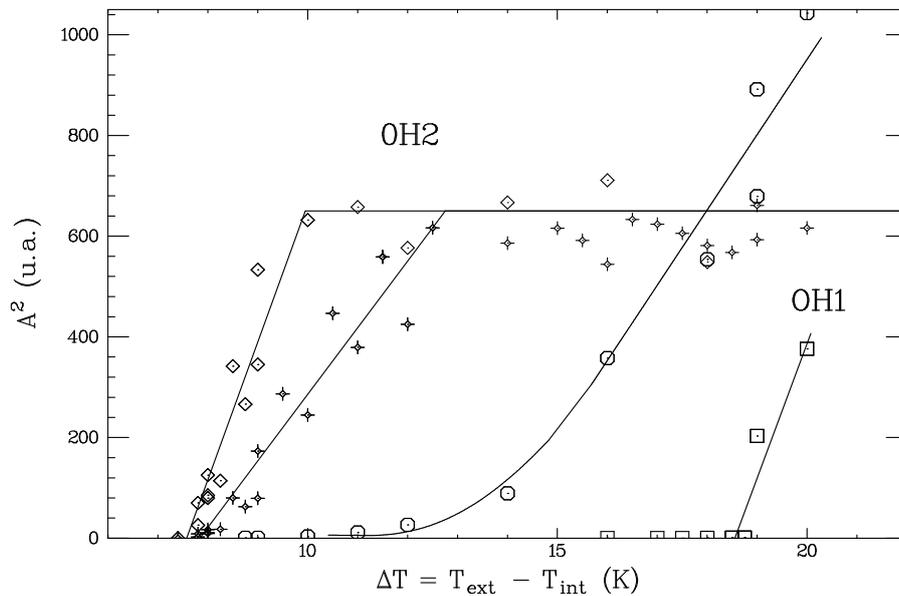


FIG. 5.26 – Evolution de l'amplitude au carré des OH2 pour  $h = 1,2$  mm et  $\Delta T > 0$ . L'amplitude est mesurée le long d'un cercle et sa valeur moyenne est présentée, pour des cercles de rayons  $r = 11,7$  mm ( $\diamond$ ),  $r = 16,4$  mm ( $+$ ), et  $r = 25,7$  mm ( $\circ$ ). L'amplitude des ondes OH1, mesurée sur un cercle de rayon  $r = 49,1$  mm est aussi reportée à titre indicatif. Les courbes continues représentent des ajustements et guident l'œil.

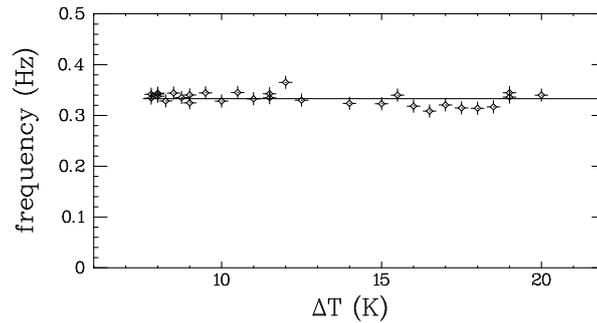


FIG. 5.27 – Evolution de la fréquence des OH2 pour  $h = 1, 2$  mm et  $\Delta T > 0$ .

alors des cibles pulsantes — et augmente régulièrement avec  $\Delta T$  — les ondes sont alors des spirales de plus en plus « ouvertes ».

L'évolution de  $k_\theta$  avec le paramètre de contrôle est très bien ajustée par une loi linéaire. L'extrapolation de cette loi linéaire au point  $k_\theta = 0$  nous redonne approximativement la valeur du seuil, bien que la mesure soit moins précise que celle de l'amplitude. Nous avons ainsi la possibilité de définir un second paramètre d'ordre variant continûment au seuil et avec l'exposant  $+1$  dans la région supercritique. Nous n'avons pas d'interprétation précise de ce nouveau paramètre d'ordre ; toute explication ne doit pas négliger la bidimensionnalité non seulement des OH2, mais aussi de la géométrie de la cellule.

La structure des OH2 est localisée près du plot central. La figure 5.29 présente une succession de profils radiaux d'amplitude : nous y voyons l'instabilité s'étendre lorsque  $\Delta T$  est augmenté. Nous avons quantifié l'envahissement progressif de la cellule par les OH2. Comme dans le cas des rouleaux corotatifs de l'écoulement de base, nous avons mesuré la position du front des OH2 dans la cellule en définissant cette position comme le rayon du point dont l'amplitude est la moitié de l'amplitude maximale. Cette grandeur est reportée sur la figure 5.30. Nous observons un comportement régulier, linéaire en  $\Delta T$  de la position du front des OH2 dans la cellule.

Un élargissement du pic correspondant aux OH2 dans les spectres est observé lorsque la différence de température est augmentée (figure 5.31). Nous mesurons alors la largeur du pic à mi-hauteur et la reportons sur la figure 5.32. Cette grandeur est une mesure de l'élargissement de la bande de modes instables. De plus, si la hauteur du pic principal est fixée — ce qui semble à peu près le cas —, sa largeur est proportionnelle à l'aire sous le pic, qui mesure l'énergie contenue dans l'ensemble des modes instables. Le théorème de Parseval relie alors cette énergie à l'énergie moyenne mesurée dans l'espace direct, i.e., la moyenne spatiale du carré de l'amplitude de l'onde après filtrage. Nous observons le même comportement que sur la figure 5.25 qui représente le carré de l'amplitude moyenne. La largeur du pic principal correspondant aux OH2 se comporte comme un paramètre d'ordre avec la puissance  $1/2$ .

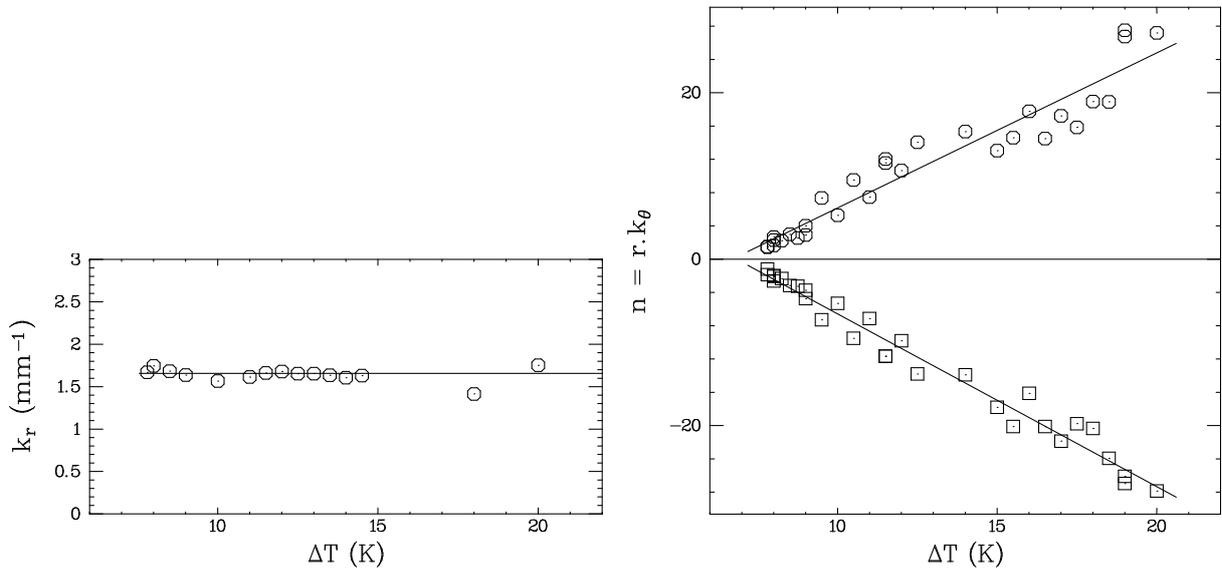


FIG. 5.28 – Evolution du vecteur d'onde des OH2 pour  $h = 1, 2$  mm et  $\Delta T > 0$ . A gauche :  $k_r$  ; à droite :  $k_\theta$ .

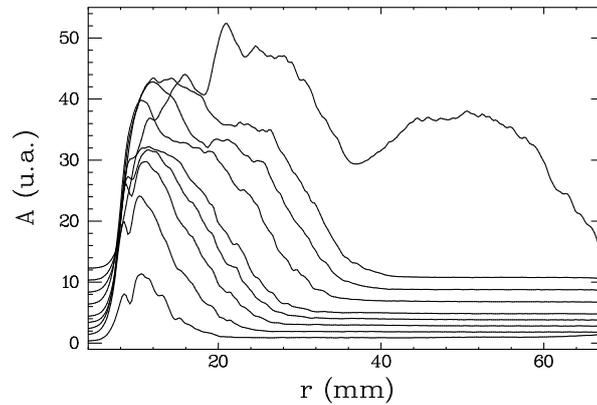


FIG. 5.29 – Empilement de profils radiaux d'amplitude locale pour  $h = 1, 2$  mm et différents  $\Delta T > 0$  : 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18 et 20 K. Pour des raisons de clarté, les profils ont été décalés dans la direction verticale d'un facteur proportionnel à  $\Delta T$ . Sur le dernier profil ( $\Delta T = 20$  K), les OH1 sont présentes et l'amplitude est finie partout dans la cellule.

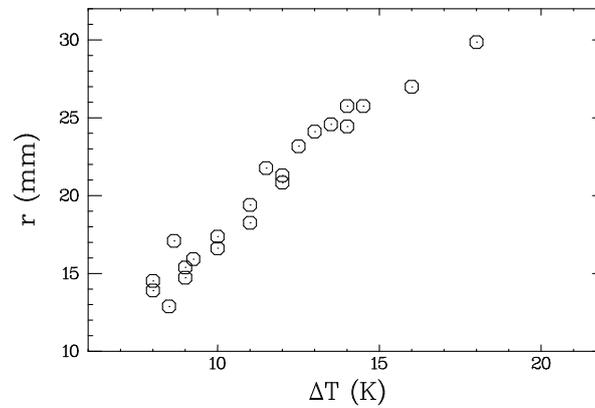


FIG. 5.30 – Evolution de la position du front des OH2 pour  $h = 1, 2$  mm et  $\Delta T > 0$ .

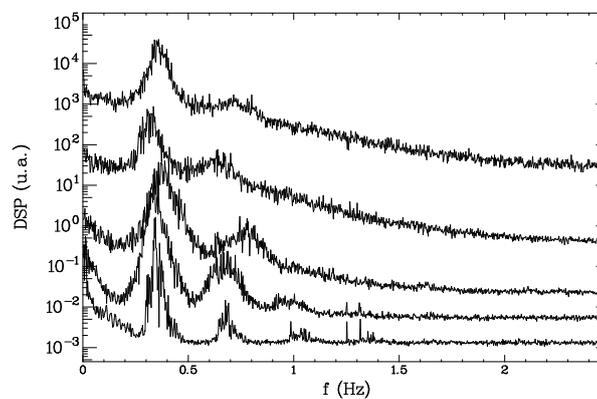


FIG. 5.31 – Empilement de spectres réalisés pour  $h = 1, 2$  mm et différents  $\Delta T > 0$  : 8, 10, 12, 16 et 20 K. L'élargissement du pic correspondant aux OH2 est visible alors que sa hauteur par rapport au niveau de bruit est à peu près constante.

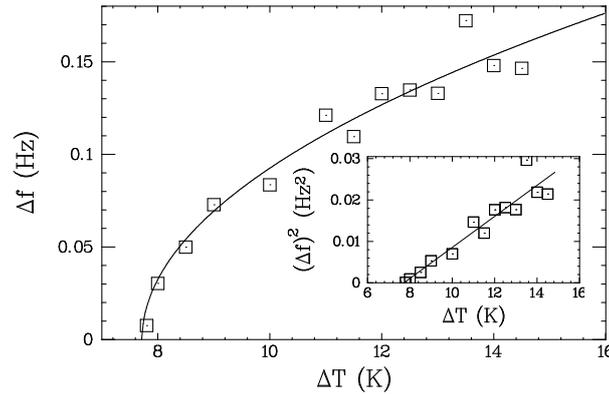


FIG. 5.32 – Evolution de la largeur du pic des OH2 dans le spectre temporel pour  $h = 1, 2$  mm et  $\Delta T > 0$  ; une moyenne est effectuée selon la direction radiale. Un comportement critique se dégage nettement.

### 5.3.3 Fleurs

Le régime particulier des fleurs a lui aussi été étudié en détail du fait de ses a priori similitudes avec les expériences de Schwabe *et al.* (1992).

L'apparition des fleurs s'effectue continûment via une bifurcation supercritique (cf figure 5.33). La fréquence est finie au seuil (figure 5.34).

Nous avons toujours observé une onde unique bien que des battements existent au seuil et que des traces d'onde inverse soient alors présentes. Le nombre d'onde orthoradial adimensionné — qui est aussi le nombre de pétales, i.e. de longueurs d'ondes selon l'azimuth — est discret et vaut 6 au seuil et 7 après sélection par une instabilité modulationnelle. Remarquons que la forme des pétales induit une signature spectrale fortement non-monochromatique : le premier harmonique est ainsi très développé car il traduit la présence de deux bords à chaque pétale.

Du fait de la très grande localisation dans la direction radiale, nous n'avons pas pu mesurer le nombre d'onde radial ; la structure semble en effet s'étendre sur moins d'une longueur d'onde dans cette direction ce qui ne permet pas un traitement du signal efficace. Remarquons juste qu'il ne semble pas y avoir de propagation dans la direction radiale et que la structure « fleurs » constitue ainsi un mode purement azimuthal.

#### Apparition des OH1

Comme nous l'avons noté en 5.2.2, les ondes hydrothermales « classiques » finissent par apparaître dans la zone vierge de fleurs.

La figure 5.35 illustre l'évolution de leur amplitude qui signe une nouvelle fois l'apparition supercritique des OH1 et nous observons sur la figure 5.36 l'évolution de la fréquence,

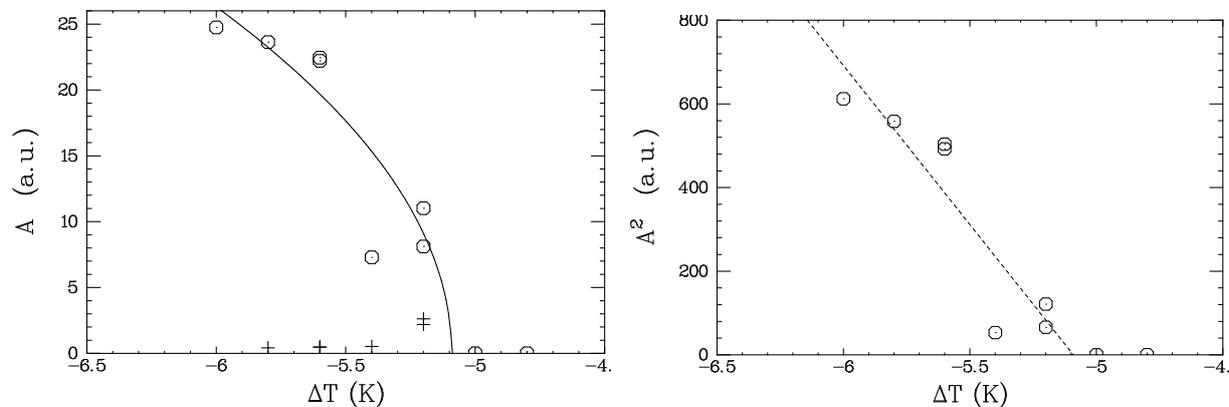


FIG. 5.33 – Evolution de l'amplitude des fleurs pour  $h = 1,9$  mm et  $\Delta T < 0$ . A gauche : amplitude de l'onde majoritaire ( $\circ$ ) et amplitude de l'onde minoritaire ( $+$ ). A droite : carré de l'amplitude de l'onde majoritaire (le carré de l'amplitude de l'onde minoritaire est négligeable).

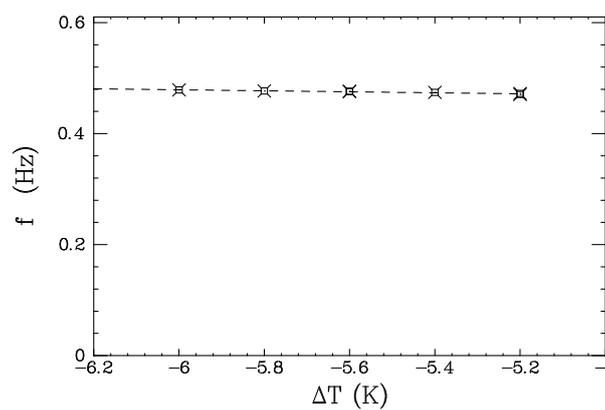


FIG. 5.34 – Evolution de la fréquence des fleurs pour  $h = 1,9$  mm et  $\Delta T < 0$ .

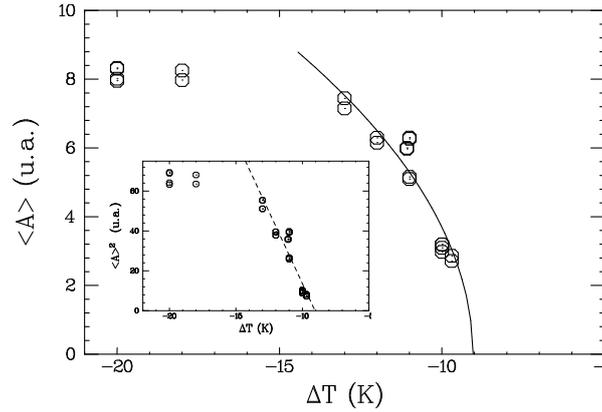


FIG. 5.35 – Evolution de l'amplitude des OH1 pour  $h = 1,9$  mm et  $\Delta T < 0$ .

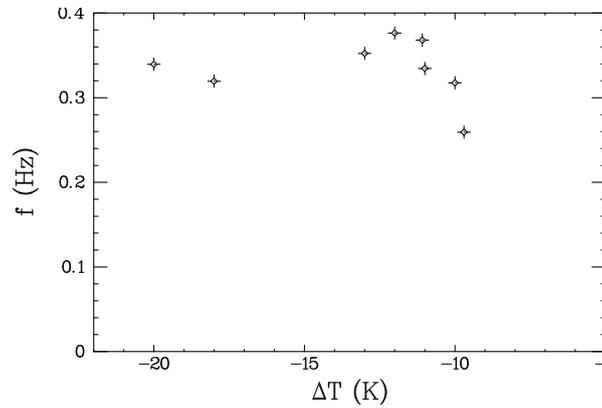


FIG. 5.36 – Evolution de la fréquence des OH1 pour  $h = 1,9$  mm et  $\Delta T < 0$ .

dont la valeur est de l'ordre de 0,25-0,3 Hz au seuil, c'est à dire plus faible que la fréquence des OH2. Un peu plus loin du seuil, la fréquence des OH1 s'accroche sur celle des OH2.

### 5.3.4 Conclusion

Toutes les structures dont nous avons présenté les comportements en fonction du paramètre de contrôle apparaissent par bifurcations supercritiques. Il en est de même pour les autres structures (rayons, ondes spirales à petite hauteur et  $\Delta T < 0$ ) : nous avons observé leur apparition continue, sans hystérésis.

De même, les instabilités secondaires de toutes ces ondes apparaissent et disparaissent aux mêmes valeurs de  $\Delta T$ .

Seule la transition entre une onde unique (gauche ou droite) et un couple d'ondes droite

et gauche semble sous-critique. Plus précisément, cette transition survient pour des valeurs de  $\Delta T$  qui dépendent du chemin suivi (montée ou descente rapide de la température).

Nous avons pu suivre l'évolution des structures depuis leur seuil jusqu'à des états fortement désordonnés. La perte de cohérence des structures est toujours progressive, parfois plus rapide ( $\Delta T < 0$  notamment) et parfois plus lente (particulièrement  $h = 1, 2$  mm et  $\Delta T > 0$ ). Dans l'ensemble, nous pouvons qualifier l'évolution vers le chaos spatio-temporel de notre système comme supercritique au sens large : seule une succession de bifurcations supercritiques est observée.

Enfin, notons que la transition vers le désordre est plus rapide dans notre expérience « LOTUS » que dans les expériences unidimensionnelles. En termes de  $\epsilon$ , distance au seuil adimensionnée — définie avec la valeur du seuil de la première instabilité propagative —, les régimes « turbulents » sont atteints pour des valeurs du paramètre de contrôle de l'ordre de 1. Cela provient de la deuxième dimension étendue d'espace dans laquelle peuvent se déployer les ondes : le nombre de modes instables croît beaucoup plus vite dans le disque (2D) que dans l'anneau ou le rectangle (1D).

## 5.4 Interprétations en termes géométriques

Nous précisons dans cette section la distribution spatiale des OH1 et OH2 dans le disque de sorte à pouvoir la comparer à la distribution observée dans le rectangle. Nous isolons alors qualitativement les différentes structures et proposons un scénario pour expliquer la localisation et les propriétés spatiales des Oh2 au seuil. Nous cherchons ensuite à interpréter la différence entre OH1 et OH2 grâce à des effets géométriques simples, mais nous isolons l'effet « absolu » de la hauteur.

### 5.4.1 Spirales d'Archimède

Nous allons ici montrer l'analogie de dénomination « OH1 » entre les ondes hydrothermales observées dans le disque et celles observées dans le rectangle, en la justifiant grâce à des arguments géométriques.

Pour cela, nous représentons différemment les équiphasés des ondes obtenues sur un cliché ombroscopique. Comme expliqué dans l'annexe D, nous quittons la représentation de l'espace réel pour nous placer dans le plan orthogonal  $(\theta, r)$ , i.e., dans un espace cartésien où la direction du gradient de température et sa direction orthogonale locale se retrouvent perpendiculaires en chaque point. La figure 5.37 illustre cette transformation et permet d'affirmer qu'au premier ordre les équiphasés des OH1 relient  $\theta$  et  $r$  par une relation affine et que ce sont donc des spirales d'Archimède. Le facteur de proportionnalité est relié à l'angle de propagation par :

$$\tan \psi = \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{\text{équiphasé}}$$

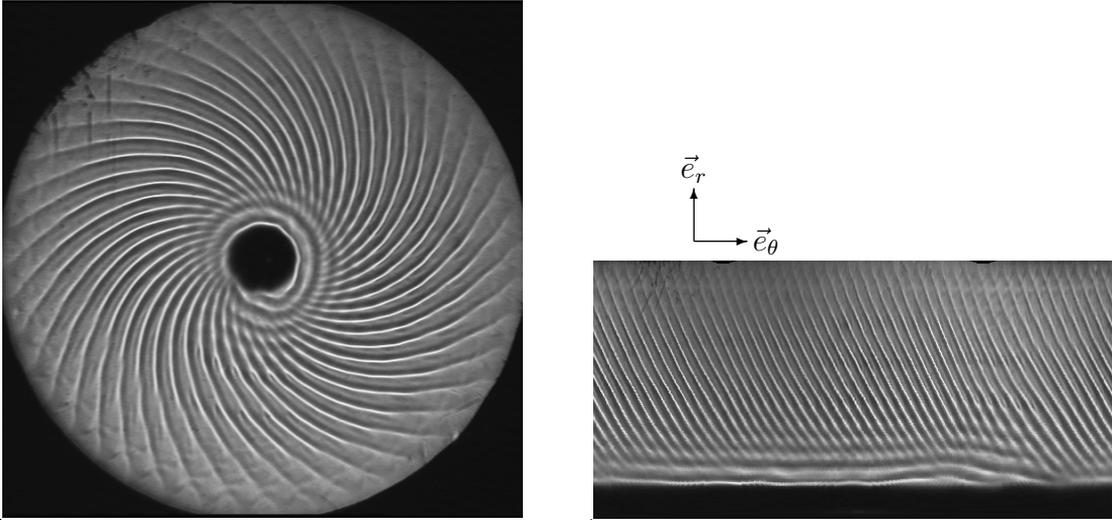


FIG. 5.37 – Spirale unique d’OH1 obtenue pour  $h = 1,9$  mm et  $\Delta T = 14,25$  K. A droite : cliché ombroscopique. A gauche : sa représentation dans le plan orthogonal  $(\theta, r)$ . Nous en déduisons  $\psi \simeq 60^\circ$  dans toute la cellule.

Le fait que  $\psi$  soit homogène partout dans la cellule et constant vis à vis de  $\Delta T$  est bien la signature des ondes OH1 telles que nous les avons définies en § 5.1.1.

Au contraire, dans le cas d’une OH2, l’angle  $\psi$  n’est pas homogène dans la cellule ni constant vis-à-vis de  $\Delta T$ . La figure 5.38 présente ce cas. Nous y voyons clairement que la source d’ondes émet des ondes cylindriques, tout comme dans le cas du rectangle.

### 5.4.2 Angles de propagation

A partir des images dépliées comme en Fig. 5.37, nous pouvons non seulement discerner qualitativement entre OH1 et OH2, mais aussi quantifier l’angle de propagation  $\psi$ .

En résumé, nous avons qualitativement :

ondes OH1	$\psi \simeq 60^\circ$
ondes OH2	$\psi = 0$ au seuil $\psi \rightarrow 45^\circ$ pour $\Delta T$ croissant
ondes fleurs	$\psi = 90^\circ$
ondes rayons	$\psi \simeq 90^\circ$

Sachant que le nombre de Prandtl est fixé, quelle richesse insoupçonnée ! Mais comme nous l’avons trouvé analytiquement et numériquement, la courbure peut modifier l’angle de propagation des ondes au seuil. Nous pouvons même, à la lumière des résultats de la

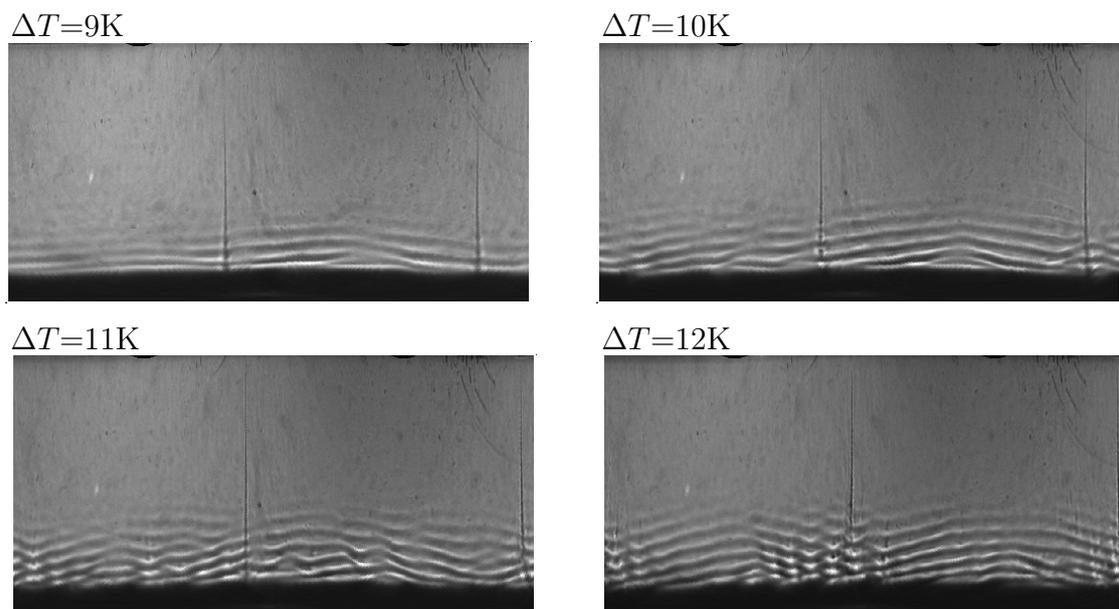


FIG. 5.38 – Ondes cibles OH2 obtenues pour  $h = 1,2$  mm et  $\Delta T = 9, 10, 11, 12$  K. Les clichés originaux sont représentés sur la figure 5.15. Ici, les représentations « dépliées » sont proposées ; le plot central correspond au bas des images. L'angle  $\psi$  s'annule au passage de la source qui émet des ondes cylindriques. Noter la présence d'onde stationnaire au niveau du puit seulement.

section § 1.3.4, proposer le petit scénario suivant pour l'évolution avec  $\Delta T$  de la structure spatiale des OH2 :

Pour  $\Delta T > 0$ , le seuil est plus faible pour les plus fortes courbures  $\Gamma_X$ , réalisées près du plot central. Les ondes apparaissent donc au centre et elles y sont localisées car seule une région centrale est supercritique grâce à la courbure. Toujours à cause de la courbure plus forte, le vecteur d'onde critique est celui où le nombre d'onde orthoradial est nul (si la courbure est assez forte). Nous avons ainsi au seuil des cibles pulsantes localisées. Lorsque  $\Delta T$  est augmenté, la zone supercritique s'étend et le vecteur d'onde critique de la couronne extérieure de la zone fraîchement instable n'est plus purement radial ! Il ne reste plus qu'à imaginer quelques effets non-linéaires du type accrochage pour expliquer que le vecteur d'onde au centre ne soit plus le vecteur d'onde critique purement radial, mais le même vecteur d'onde que dans la couronne extérieure de la zone instable. Notons que le comportement critique de la composante orthoradiale  $k_\theta$  du vecteur d'onde — variation linéaire avec  $\Delta T$ , cf figure 5.28 — n'est pas retrouvé par cette interprétation de l'analyse de stabilité linéaire.

Toujours à la lumière des résultats du premier chapitre, nous remarquons que les structures obtenues pour  $\Delta T < 0$  peuvent être purement azimuthales (fleurs à grande hauteur et rayons à petite et grande hauteur). L'analyse de stabilité linéaire prévoit effectivement une diminution de la composante radiale dans le cas  $\Delta T < 0$  ; néanmoins, l'annulation n'était pas prédite...

### 5.4.3 Rapports d'aspect et confinement

Nous allons maintenant revenir sur la différence entre OH1 et OH2 que l'on peut anticiper en considérant les rapports d'aspect des cellules.

#### Evolution des rapports d'aspect avec $h$

Lorsque la hauteur  $h$  est diminuée, les rapports d'aspect transverses  $\Gamma_{\parallel}$  et  $\Gamma_{\perp}$  sont augmentés : nous avons alors un système plus étendu dans les deux directions horizontales. Remarquons que le rapport d'aspect horizontal  $\Gamma = \Gamma_{\parallel}/\Gamma_{\perp}$  ne dépend pas de  $h$  et reste inchangé dans la manœuvre : nous avons « seulement » agrandi la boîte. Dans le cas de la cellule « LOTUS », une telle variation des rapports d'aspect conduit à l'apparition des ondes hydrothermales bidimensionnelles OH2.

Dans le cas de la cellule rectangulaire, sans doute à cause de l'existence des ménisques, il nous faut de plus varier le rapport d'aspect horizontal en changeant la largeur de la cellule — de 10 à 30 mm par exemple — pour voir les OH2.

En conclusion, les OH2 apparaissent dans nos cellules lorsque le rapport d'aspect  $\Gamma_{\parallel}$  a une valeur plus forte. Un grand rapport d'aspect dans la direction du gradient permet de ne pas être confiné dans cette direction et d'y avoir un grand nombre de longueurs d'ondes. Ainsi, nous passons d'un système étendu dans une seule direction d'espace à un système étendu dans deux directions d'espace ; cela est associé au passage des OH1 — ondes

unidimensionnelles se propageant dans un espace unidimensionnel — aux OH2 — ondes bidimensionnelles se propageant dans un espace bidimensionnel.

### Existence d'une hauteur critique « absolue » ?

Après le constat précédent, un point reste inexpliqué. Dans le rectangle et dans le disque, la séparation entre OH1 et OH2, i.e. entre grandes hauteurs et petites hauteurs, n'est pas exactement réalisée pour une valeur critique du rapport d'aspect  $\Gamma_{\parallel}$ , mais plutôt pour une valeur critique de ... la hauteur !

En effet, des expériences à des hauteurs intermédiaires ont montré que  $h \simeq 1,5$  mm semble dans toutes nos cellules séparer les deux régimes différents d'ondes hydrothermales. Nous pouvons alors en connaissance de cause noter que la longueur capillaire  $\lambda_c$  de l'huile utilisée est de 1,4 mm, i.e. très proche.

Que signifie cela ? Nous pouvons suggérer que les ondes hydrothermales de type I (grandes hauteurs) sont des ondes où l'effet capillaire est négligeable : tout comme Smith et Davis (1983a) l'ont suggéré à toutes les études théoriques ultérieures des ondes hydrothermales, les déflexions de surface peuvent être négligées lors du calcul de stabilité linéaire des OH1. Au contraire, si  $h < \lambda_c$ , les effets capillaires sont dominants et les déflexions de surface ne peuvent plus être négligées. Smith et Davis (1983b) ont par ailleurs considéré le cas où les variations de la hauteur font partie intégrante du calcul de stabilité linéaire de l'écoulement thermocapillaire. Ces auteurs trouvent alors — en l'absence de gravité et en ne considérant qu'une direction horizontale, celle du gradient — un nouveau type d'ondes qu'ils baptisent « ondes surface » et les opposent aux ondes hydrothermales. Les ondes que nous observons sont probablement un cas intermédiaire entre ces deux types ; Les OH1 et les OH2 constituent alors deux modes complémentaires d'une théorie incluant les déflexions de surface et les variations locales de température. Ces deux modes ont des seuils différents en fonction de  $h$  et le point de codimension 2 évoqué dans la section précédente correspond au changement du mode le plus instable.

Du point de vue hydrodynamique, les OH2 résultent du couplage des ondes hydrothermales habituelles (i.e. sans déflexion de la surface libre) avec des ondes de déflexions de surface. Nous pouvons en effet remarquer que les sources d'OH2 sont des sources d'ondes cylindriques — des « ronds dans l'eau » — et leur orientation est essentiellement celle du gradient de température qui impose le mouvement du fluide en surface.

En conclusion, nous pouvons suggérer qu'une théorie complète des ondes hydrothermales doit tenir compte des déflexions de surface lorsque les effets thermocapillaires ne sont plus négligeables, notamment lorsque les nombres de Bond statique et dynamique sont inférieurs à l'unité. Cette complexification de la nature des ondes hydrothermales est un obstacle certain à leur étude dans des systèmes étendus : les rapports d'aspect ne sont pas les seuls nombres sans dimension influant sur la distribution spatiale de la structure. Ainsi, pour obtenir une « boîte » deux fois plus grande, il n'est pas possible de simplement diminuer la hauteur d'un facteur deux ; au contraire, nos résultats montrent qu'il est en

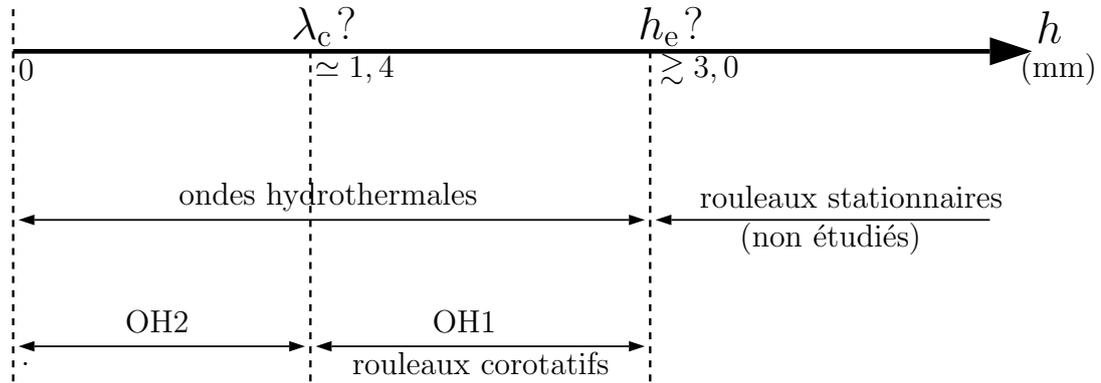


FIG. 5.39 – Schéma des différents régimes observés en fonction de la hauteur de fluide  $h$  dans la cellule ; les valeurs numériques sont déduites des expériences « rectangle » et « LOTUS ». Ce schéma est à rapprocher de celui de la figure 1.3, page 15.

toute rigueur nécessaire de construire une nouvelle cellule dont les dimensions horizontales  $L_x$  et  $L_y$  sont deux fois plus grandes.

## 5.5 Transition vers la turbulence

Nous avons observé, sans l'étudier en détails, la transition vers la turbulence du système dans le cas des petites hauteurs et dans celui des grandes hauteurs. Comme nous l'avons déjà évoqué, de nombreuses instabilités secondaires apparaissent sur les structures OH1 et OH2. Ce paragraphe insiste sur un point particulier commun à chacune des transitions observées : les pics principaux des spectres temporels s'élargissent et se transforment progressivement de spectres de raies en spectres chaotiques, descriptibles avec des lois de puissance.

### 5.5.1 Evolution qualitative des spectres de puissance

Nous avons représenté sur la figure 5.31 une succession de spectres temporels obtenus pour  $h=1,2$  mm et  $\Delta T$  variant du seuil  $\Delta T_{\text{OH2}}^{(+)}$  à un peu plus du double. Cela nous a permis de quantifier l'évolution particulière de la largeur du pic avec  $\Delta T$  (figure 5.31).

Ce comportement est générique dans le sens où chacune des transitions observées (petite ou grande hauteur et  $\Delta T \gtrsim 0$ ) révèle de la même façon un élargissement du pic correspondant au mode instable dans le spectre temporel.

Nous avons vérifié le même phénomène sur les spectres spatiaux. Cela est logique compte tenu de l'existence d'une relation de dispersion pour les ondes : fréquence et nombre d'onde

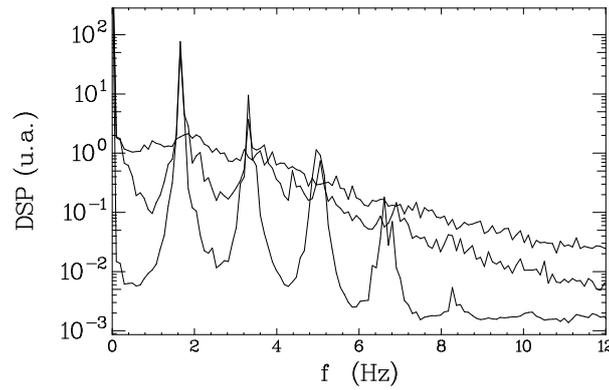


FIG. 5.40 – Spectres temporels moyennés en espace à trois distances différentes du centre de la cellule, pour  $h = 1,2$  mm et  $\Delta T = 25$  K (régime d'OH2 et OH1).  $r = 35,1$  mm : spectre de raies plus fines.  $r = 25,7$  mm : spectre de raies plus larges ; le pic principal a la même amplitude que le précédent.  $r = 16,4$  mm : spectre de puissance ; le pic principal est de plus affaibli.

sont reliés et la dispersion de l'un entraîne la dispersion — au moins qualitative — de l'autre.

Notre système bidimensionnel nous permet ainsi de « voir » pousser un grand nombre de modes instables au voisinage du mode critique. L'élargissement de la bande de modes instables est plus rapide à deux dimensions d'espace.

### 5.5.2 Evolutions quantitatives

Nous avons présenté sur la figure 5.32 l'évolution de la largeur à mi-hauteur du pic principal correspondant aux ondes OH2 dans le spectre temporel. Cette mesure n'est plus réalisable de manière satisfaisante pour les plus fortes valeurs de la contrainte thermique du fait de l'augmentation du niveau de bruit associée à la transformation de l'allure générale du spectre. En effet, ce dernier se transforme progressivement en spectre de loi de puissance et il devient très difficile de mesurer la largeur du pic principal, dont la hauteur chute.

Pour illustrer ce phénomène, nous présentons des spectres obtenus pour  $h = 1,2$  mm et  $\Delta T = 25$  K, dans un régime que nous qualifions de « turbulent ». Rappelons tout d'abord que la région centrale (source d'OH2) est la plus désordonnée et que la région extérieure (OH1) garde une structure plus cohérente, bien que néanmoins altérée : voir cliché de la figure 5.17, droite. Comme on peut le voir sur la figure 5.40, l'allure des spectres temporels réalisés à différentes distances du centre de la cellule n'est pas semblable.

Si nous nous plaçons dans la zone la plus désordonnée — la plus proche du centre —, nous pouvons approcher la décroissance du spectre par une loi de puissance. La figure 5.41 illustre la validité de cet ajustement non seulement sur le spectre temporel, mais aussi sur le spectre spatial.

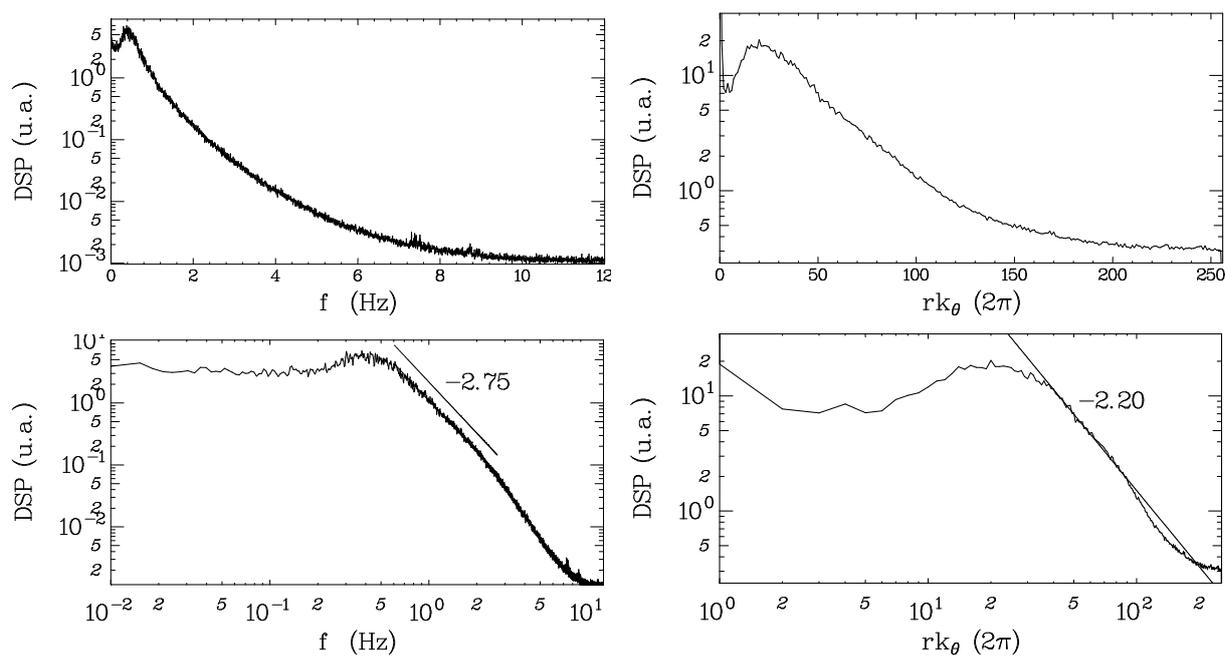


FIG. 5.41 – Spectre temporel (à gauche) et spatial (à droite) sur un cercle de rayon 16,4 mm, pour  $h = 1,2$  mm et  $\Delta T = 25$  K (OH2 « turbulentes »). En haut : échelle log/lin. En bas : échelle log/log et ajustement linéaire. Ce dernier donne une pente comprise entre -2,5 et -3 pour le spectre temporel et entre -2 et -2,5 pour le spectre spatial.

Remarquons le rôle crucial de l'ombroscopie sur l'allure des spectres observés. Comme nous l'avons énoncé dans la section consacrée à cette méthode, le plan de visualisation doit être situé bien en amont du plan focal correspondant à la structure convective observée :  $D \ll f_T$ . Si cela n'est pas le cas, le signal recueilli est susceptible de contenir des harmoniques spatiaux<sup>2</sup> en grande quantité. L'apparition de ces harmoniques est bien évidemment non désirée, voire dangereuse lors de l'étude d'un spectre ! Nous avons donc cherché à minimiser ces effets parasites en déréglant notre montage avant d'acquérir les signaux. A cette occasion, nous avons pu vérifier l'effet du réglage ombroscopique sur la déformation du spectre : celui-ci est faible.

Précisons l'intrication des harmoniques générées par l'ombroscopie avec les harmoniques intrinsèques des ondes. Le problème est résumé par la formule (2.2) : la distance focale  $f_T$  est inversement proportionnelle au carré du nombre d'onde de la structure ! Ainsi, si les ondes possèdent des harmoniques intrinsèques, ces derniers ont une distance focale beaucoup plus courte, ce qui augmente leur impact sur dans le plan de visualisation et génère des harmoniques ombroscopiques supplémentaires...

### 5.5.3 Conclusions

L'ombroscopie doit être manipulée avec précaution pour observer des structures fortement non monochromatiques, telles que nous en obtenons lors de la transition de notre système vers le désordre.

Dans les régimes les plus « calmes » — sans harmoniques — nous avons sans encombre isolé l'élargissement du pic correspondant aux OH2, qui nous permet de définir un nouveau paramètre d'ordre pour cette instabilité.

Dans les régimes les plus « agités » — dont le spectre est très riche —, les conclusions quantitatives sont plus délicates. Nous pouvons néanmoins affirmer un changement de comportement spectral lors de la transition des ondes OH2 vers le chaos spatio-temporel.

Notons enfin que des spectres en loi de puissance ont aussi été observés dans les autres configurations ( $\Delta T < 0$  et  $h = 1,9$  mm). Des mesures locales avec une méthode complémentaire — thermocouples rapides?... — permettront peut-être de conforter l'ombroscopie quantitative dans ces situations extrêmes. Quoi qu'il en soit, les régimes que nous qualifions de « turbulents » peuvent être observés qualitativement et le très grand désordre constaté ne saurait trouver une autre origine que la transition intrinsèque du système vers le chaos spatio-temporel.

---

2. Dans le cas d'une onde, ces harmoniques spatiaux se traduisent aussi par des harmoniques temporels : le signal ombroscopique qui défile en un point de l'écran n'est plus monochromatique.



## Conclusions

LE FIL CONDUCTEUR DE NOTRE TRAVAIL a été de produire et d'étudier un système modèle d'ondes propagatives non-linéaires afin de décrire sa transition vers le chaos spatio-temporel. Nous nous sommes ainsi intéressés à un système thermo-hydrodynamique, sur le plan théorique — analyse de stabilité linéaire et équations d'amplitude sous leur forme normale — et sur le plan expérimental — en vérifiant des prédictions formelles et découvrant à deux dimensions d'espace de nouvelles structures dissipatives.

### Aspects théoriques

La déstabilisation d'un écoulement thermocapillaire et de thermogravité a ainsi été l'objet de nos études. En isolant les différents phénomènes physiques agissant sur une mince couche de liquide avec surface libre soumise à un gradient horizontal de température, nous avons mis en évidence le rôle crucial de la hauteur de fluide. En complétant de précédents travaux théoriques par la prise en compte de la courbure en géométrie cylindrique, nous avons donné une expression approchée de l'écoulement de base présent dès que la contrainte thermique n'est pas nulle. Nous avons ensuite étudié la stabilité linéaire de cet écoulement vis à vis de perturbations propagatives.

En utilisant les résultats donnés par la recherche des courbes neutres, nous avons obtenu des valeurs des coefficients linéaires apparaissant dans le formalisme des équations d'enveloppes, que nous avons ensuite pu confronter aux valeurs obtenues par une série d'expériences adéquates.

Alors qu'en géométrie cartésienne d'extensions horizontales infinies une instabilité supercritique donne naissance à un système d'ondes propagatives homogènes, nous avons montré que la présence de courbure en géométrie cylindrique introduisait une localisation de la région supercritique et que cette localisation n'était pas symétrique par retournement du gradient imposé.

En utilisant le formalisme des équations d'amplitude, nous avons rappelé les différences que la présence d'une vitesse de groupe intrinsèque révèle entre un système infini, un système périodique et un système fini non périodique.

### Aspects expérimentaux

En effectuant des expériences dans une cellule annulaire et une cellule rectangulaire unidimensionnelles de sections identiques, nous avons confirmé que seule la supercritica-

lité d'un mode global signalait à l'expérimentateur un régime asymptotiquement instable. Pour l'instabilité primaire en ondes hydrothermales ainsi que pour l'instabilité secondaire d'Eckhaus de ces dernières, l'apparition du mode global a été associée à la transition convectif/absolu de l'instabilité questionnée. Nous avons ainsi découvert une phénoménologie particulière dans le rectangle, très différente de celle observée dans l'anneau. Pour un système donné « en volume », la transition vers le chaos spatio-temporel dépend ainsi crucialement des conditions aux limites considérées.

Dans le même temps, nous avons vérifié les effets de localisation dus à la courbure sur la structuration de l'écoulement de base en rouleaux corotatifs, puis sur les instabilités en ondes propagatives dans une cellule de convection adaptée, construite pour l'occasion. Nous avons dégagé différents modes d'instabilité, tous supercritiques. Une classification des ondes hydrothermales a alors été proposée, qui s'appuie sur le nombre de paramètres permettant de décrire leur structure spatiale : les OH1 sont des ondes planes essentiellement « unidimensionnelles » et les OH2 des ondes intrinsèquement « bidimensionnelles » ; nous avons vérifié dans des cellules différentes l'influence du rapport d'aspect sur le choix du mode le plus instable.

Ce travail « zoologique » nous a permis de remettre en question l'hypothèse selon laquelle les déflexions de la surface libre pouvaient toujours être négligées. Nous avons ainsi suggéré des effets liés à la valeur relative de la hauteur  $h$  de fluide par rapport à la longueur capillaire  $\lambda_c$  et à une longueur « thermo-capillaire »  $h_e$ . Ces effets réduisent la généralité de notre système modèle vis-à-vis du paramètre  $h$  — les rapports d'aspect seuls ne peuvent décrire les différences observées —, et suggèrent donc de travailler à une hauteur fixée en utilisant la contrainte thermique  $\Delta T$  comme seul paramètre de contrôle. La variation de  $h$  nous donne alors accès à un ensemble de systèmes d'ondes propagatives de natures différentes.

Notons enfin la grande richesse des états transitoires par comparaison aux états asymptotiques. Nous avons ainsi pu observer des états convectivement instables en géométrie non périodique, ainsi que des dynamiques lentes d'états métastables — couples {puits, source} — en géométrie périodique.

## Perspectives théoriques

La distinction convectif/absolu a été introduite via une équation d'amplitude. Notre analyse de stabilité peut être complétée en considérant la partie imaginaire des nombres d'ondes. Il est ainsi envisageable de retrouver certains résultats concernant la géométrie unidimensionnelle — la valeur des seuils dans l'anneau et dans le rectangle — en travaillant avec un nombre d'onde complexe dans la direction perpendiculaire au gradient de température. Le cas de notre cellule étendue cylindrique nécessiterait quant à lui la complexification du nombre d'onde dans la direction du gradient, tout en tenant compte de la courbure.

Les calculs de stabilité linéaire peuvent aussi être améliorés en considérant les déflexions de surface dans le calcul des perturbations. La prise en compte de la présence d'une structuration de l'écoulement de base en rouleaux corotatifs serait aussi une avancée significative qui permettrait de clarifier encore plus la distinction entre les OH1 et les OH2.

A partir de nos connaissances des symétries du problème et des mécanismes, il serait intéressant d'obtenir un système d'équations modèles, à mi-chemin entre les équations de Navier-Stokes et les équations d'amplitude du type Ginzburg-Landau. A partir de ce jeu d'équations, nous pourrions déduire une extension propre des équations d'amplitude à un ordre plus élevé et éventuellement calculer leurs coefficients. Un modèle du type Swift-Hohenberg ou Cross-Newell apporterait ainsi — comme dans le cas de Rayleigh-Bénard ou de l'optique non-linéaire — un pouvoir prédictif certain.

### Perspectives expérimentales

La géométrie cylindrique étendue n'a pas livré tous ses secrets. L'étude de hauteurs intermédiaires permettrait d'isoler et de caractériser un point de codimension 2 entre deux instabilités oscillatoires propagatives. L'étude d'un système étendu sans courbure, i.e. rectangulaire, semble un complément nécessaire avant toute conclusion définitive sur ce point.

Dans toute les géométries, une mesure précise des coefficients des équations d'amplitude pour une même hauteur ( $h = 1,7$  mm) reste incomplète : les coefficients sont-ils les mêmes en géométrie bidimensionnelle que ceux mesurés à une dimension d'espace ? Notre dispositif en géométrie cylindrique devrait pouvoir y répondre.

Dans l'expérience « rectangle », le mode global au seuil primaire provenait de la transition convectif/absolu. Qu'en est-il dans une cellule plus longue où les effets de réflexion des ondes ont une importance accrue ? L'étude quantitative de l'expérience « anneau » dans laquelle une petite cale de plexiglas est introduite pour briser les conditions aux limites périodiques semble sur ce point prometteuse.

Sur le plan des instabilités d'ordre supérieur, la turbulence observée dans l'anneau et dans le disque suggère l'importance des défauts d'amplitude comme objets élémentaires : une approche statistique de l'apparition des couples {puits, sources} devrait révéler des comportements critiques bien définis. Dans le même temps, des mesures de corrélation spatiale des structures ondulatoires devraient aussi permettre de quantifier la transition vers le chaos spatio-temporel et de définir une éventuelle « vitesse » de transition.

Là encore, l'étude de régimes de relaxation lente vers un état asymptotique semble une approche porteuse : la dynamique lente du rapprochement et de la fusion d'un couple {puits, source} reste à quantifier.

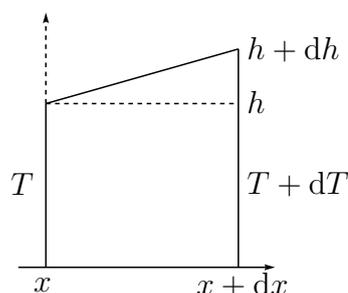
Notre travail a permis de qualifier le système des ondes hydrothermales comme un candidat de choix pour l'étude de la transition vers le chaos spatio-temporel d'un système d'ondes non-linéaires supercritiques. Nous avons de plus confirmé la généralité de la description en équations d'amplitude et utilisé cette dernière à titre prédictif avec un certain

succès. La porte est désormais ouverte à l'utilisation de ce système expérimental modèle pour observer et quantifier des comportements éloignés du seuil et — pourquoi pas? — y observer ou vérifier des scénarii précis de transition vers le chaos spatio-temporel.

## Annexe A

### A propos de l'élevation de hauteur

NOUS ALLONS ICI DÉTAILLER comment sont obtenues les formules (1.2) et (1.3) qui décrivent de combien s'élève la surface libre d'un fluide soumis à un gradient horizontal de température  $\frac{dT}{dx}$  par l'effet de la thermogravité et de la thermocapillarité. Les calculs ci-dessous sont inspirés du calcul présenté par Guyon *et al.* (1991).



Nous considérons un volume de fluide de hauteur  $h(x)$  compris entre  $x$  et  $x + dx$  en nous restreignant au plan  $(x, z)$ . Nous supposons que la vitesse peut être mise sous la forme :  $\vec{v}(x, z) = u(z)\vec{e}_x$ , i.e., que la vitesse verticale est négligeable (elle est d'ailleurs nulle en géométrie rectangulaire). L'équation de Navier-Stokes en régime stationnaire se réduit à :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \end{cases}$$

avec :

$$\rho = \rho(x) = \rho_0 + \frac{d\rho}{dx}x = \rho_0 \left( 1 - \alpha \frac{dT}{dx}x \right)$$

Nous fixons les constantes d'intégration avec les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
u(y = 0) &= 0 \\
\int_0^h u(z) dz &= 0 \\
p(z = h) &= p_0
\end{aligned}$$

où  $p_0$  est la pression atmosphérique. Nous linéarisons la dépendance de  $p$  en  $x$  et nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned}
p(x, z) &= p_0 + \rho g(h - y) + \rho_0 g \frac{dh}{dx} x + g \frac{d\rho}{dx} (h - y)x \\
&= p_0 + \rho_0 g \left( \frac{dh}{dx} x + (1 - \alpha \frac{dT}{dx} x)(h - y) \right)
\end{aligned}$$

d'où :

$$u(z) = \frac{\rho g}{\eta} \left[ \frac{dh}{dx} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{hy}{3} \right) - \alpha \frac{dT}{dx} \left( -\frac{y^3}{6} + \frac{hy^2}{2} - \frac{h^2 y}{4} \right) \right]$$

Nous relierons ensuite cette expression à la tension de surface grâce à la condition aux limites cinématique tangentielle à la surface :

$$\eta \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = \frac{d\sigma}{dx} = -\gamma \frac{dT}{dx}$$

d'où, en négligeant  $dh$  devant  $h$  :

$$\frac{dh}{dx} = \left( -\frac{3}{2} \frac{\gamma}{\rho g h} + \frac{3}{8} \alpha h \right) \frac{dT}{dx} \tag{A.1}$$

Nous en déduisons les formules (1.2) et (1.3) donnant la déflexion de surface dans le cas purement thermogravitaire ( $\gamma = 0$ ) et dans le cas purement thermocapillaire ( $\alpha = 0$ ).

La variation de surface d'origine thermogravitaire varie proportionnellement à  $h$  alors que la variation de surface d'origine thermocapillaire varie comme l'inverse de  $h$ . Pour des très faibles valeurs de la hauteur ( $h = 0,6$  mm), nous avons expérimentalement constaté dans la cellule « LOTUS » une déflexion de la hauteur atteignant déjà 50% de la valeur nominale au seuil des ondes OH2...

## Annexe B

# Instabilité d'Eckhaus supercritique dans l'anneau

CETTE ANNEXE RAPPELLE ET COMPLÈTE LES OBSERVATIONS d'une instabilité modulationnelle du type Eckhaus rencontrée dans la cellule annulaire par augmentation de  $\Delta T$ . Une modélisation est proposée qui consiste en une équation d'amplitude de Ginzburg-Landau, complétée par des termes d'ordres supérieurs. Un traitement analytique de cette équation nous permet de retrouver les observations expérimentales et de faire des prédictions.

### B.1 Observations

La figure B.1 est un diagramme des phases observées expérimentalement et reproduites dans le plan  $(k, \epsilon)$ . Chaque petit cercle ( $\circ$ ) correspond à un état stable, i.e. d'amplitude et de gradients de phase parfaitement homogènes. Au contraire, les croix ( $\times$ ) correspondent à des états instables où une modulation de phase pousse jusqu'à conduire à une ou plusieurs dislocations spatiotemporelles ; l'amplitude s'annule alors, la phase subit une discontinuité de  $\pm\pi$  et le système change de nombre d'onde. De même, les croix ( $+$ ) correspondent à des états instables où le système relaxe vers une absence d'ondes. Un quatrième type d'état est représenté par des petites étoiles ( $*$ ) ; il s'agit d'états instables vis-à-vis de modulations de phase qui saturent non-linéairement : ces états ne conduisent pas à une dislocation spatio-temporelle, comme l'on montré Mukolobwicz *et al.* (1998).

Ce diagramme de stabilité nous montre clairement le processus de sélection du nombre d'onde lorsque  $\epsilon$  est augmenté ou diminué. Nous observons effectivement :

- une fermeture « par le dessus » de la zone de stabilité qui donne à la zone stable l'allure d'une chaussette.
- une très nette asymétrie entre les nombres d'ondes  $q > 0$  ( $k > k_0 = 54,75$ ) et les nombres d'ondes  $q < 0$  ( $k < k_0$ ).

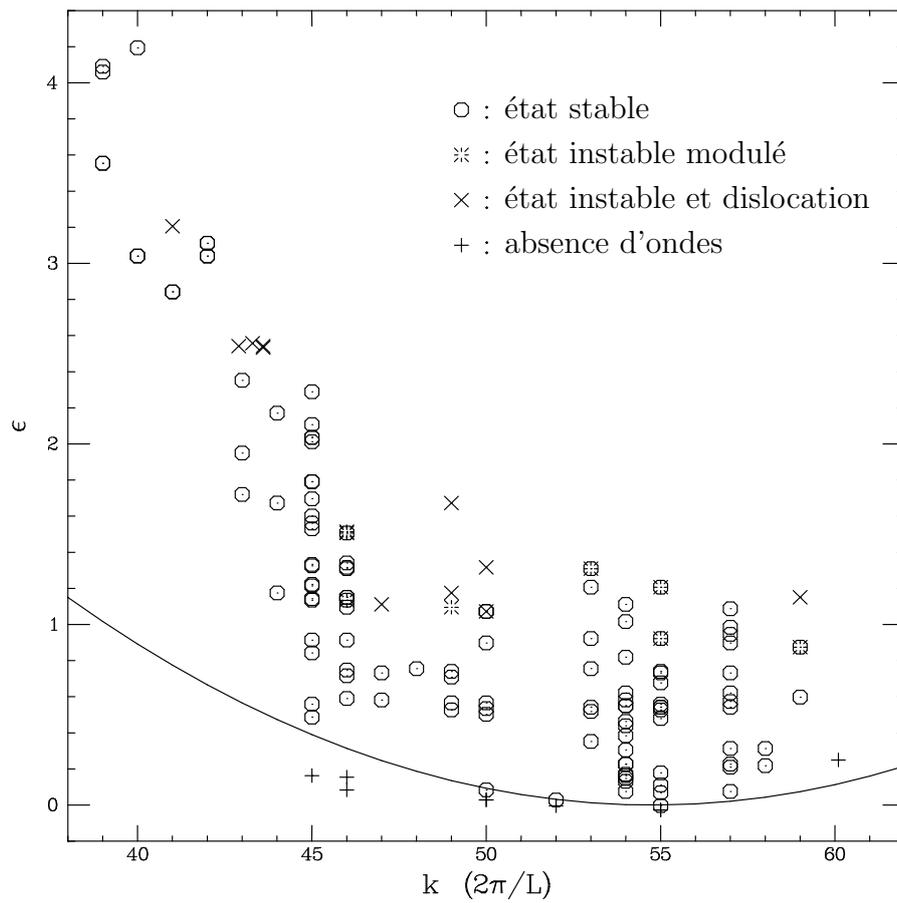


FIG. B.1 – *Etats stables et instables dans le plan  $(k, \epsilon)$  pour l'anneau avec  $h = 1.7\text{mm}$ . Cette figure constitue une tranche de ballon de stabilité. La courbe continue représente la limite de stabilité marginale déduite des résultats expérimentaux (cf annexe C).*

## B.2 Modélisation

Nous avons dans l'anneau une onde unique ; nous nous contentons donc d'une seule équation de Ginzburg-Landau complexe pour l'onde  $A^1$ . En notant  $\lambda = \Re(\omega)$  le taux de croissance temporel et  $\kappa$  le nombre d'onde d'une perturbation d'une solution de Stokes (3.3) de nombre d'onde  $q$ , nous pouvons en effet (Couillet *et al.* (1985), Fauve (1987), Janiaud *et al.* (1992)) :

$$\lambda = D_{\parallel} \kappa^2 \quad \text{avec} \quad D_{\parallel} = -(1 + c_1 c_2) + 2 \frac{q^2(1 + c_2^2)}{\epsilon - q^2}$$

Cela nous donne dans le plan  $(q, \epsilon)$  la limite de stabilité d'Eckhaus suivante :

$$\text{solution stable} \Leftrightarrow \epsilon > \frac{3 + c_1 c_2 + 2c_2^2}{1 + c_1 c_2} q^2$$

Ainsi, pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe, la limite de stabilité d'Eckhaus est une parabole proportionnelle à la parabole de stabilité marginale.

Mais comme nous l'avons noté, nous observons expérimentalement une dissymétrie  $q \mapsto -q$  et une fermeture « par le dessus » ; aucun de ces deux effets n'est présent dans le cas de l'équation de Ginzburg-Landau. Nous introduisons donc des termes supplémentaires d'ordre supérieur (4 et 5 en  $\epsilon^{1/2}$  dans notre cas au lieu de l'ordre 3 habituel de CGL) dans l'équation d'amplitude. Introduire ces termes permet d'avoir au seuil une équation de CGL classique qui se déforme progressivement au fur et à mesure que  $\epsilon$  est augmenté. Nous proposons ainsi :

$$\begin{aligned} \tau_0 A_t = & \epsilon(1 + ic_0)A + \xi_0^2(1 + ic_1)A_{xx} - g(1 + ic_2)|A|^2 A \\ & + \xi_0 g \left( \underbrace{\gamma(1 + ic_3)A|A|_x^2}_{\text{terme 1}} + \underbrace{\delta(1 + ic_4)|A|^2 A_x}_{\text{terme 2}} \right) + \xi_0^2 g \underbrace{\eta(1 + ic_5)|A|^2 A_{xx}}_{\text{terme 3}} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Parmi tous les termes d'ordre 4 possibles en  $A^2$  et  $\partial_x$  —  $|A|^2 A_x$ ,  $A|A|_x^2$ ,  $A^2 \bar{A}_x = A|A|_x^2 - |A|^2 A_x$ ,  $(|A|^2 A)_x = A|A|_x^2 + |A|^2 A_x$  —, seuls  $|A|^2 A_x$  et  $A|A|_x^2$  ont été retenus car les autres peuvent être écrits comme des combinaisons linéaires de ces deux-là.  $A_{xxx}$  et les autres termes en  $\partial_x$  d'ordre plus élevé ne sont pas étudiés car ils se signalent par une dépendance prononcée des amplitudes et fréquences vis-à-vis du nombre d'onde, ce qui n'est pas observé dans les expériences. D'autres termes d'ordre 4 en  $A^2$  sont envisageables mais immédiatement éliminés pour des raisons de non-résonance ( $|A_x|^2$ ,  $(A_x)^2$ ,  $AA_{xx}$ ).

Parmi tous les termes d'ordre 5 (beaucoup plus nombreux), seul un terme ( $|A|^2 A_{xx}$ ) a été conservé car sa signature dans la pseudo-relation de dispersion ne fait pas intervenir des

---

1. Dans le cas d'un système de deux équations couplées, la solution  $B = 0$  entraîne l'annulation du terme de couplage et seule subsiste une équation pour  $A$ .

puissance de  $q$  trop élevées et reste donc proche des résultats expérimentaux. Remarquons toutefois l'existence d'autres candidats possibles comme  $|A_x|^2 A$ , qui a la même signature dans la relation de dispersion et qui ne rend pas le système instable vis-à-vis des gradients de phase élevés.

*Remarque* : La vitesse de groupe  $v_g$  a été éliminée car nous sommes en géométrie périodique. Cette équation ne décrit qu'une seule onde et la symétrie  $y \mapsto -y$ , associée à l'inversion  $A \leftrightarrow B$  n'est de toute façon pas respectée par une seule équation CGL. La présence de termes autorisés à briser la symétrie  $q \mapsto -q$ , donc la symétrie  $y \mapsto -y$  est justifiée par le même argument.

*Remarque* : Nous pouvons interpréter les termes que nous avons rajoutés, non comme des termes d'ordre supérieur en  $\epsilon$ , mais comme les termes suivants du développement de la partie non-linéaire de l'équation en puissance de l'écart au nombre d'onde critique (développement en  $q = k - k_0$ ). C'est alors l'approche de Eckhaus et Iooss (1989).

*Convention* : Pour des raisons de clarté, nous adimensionnons l'équation (B.1) comme exposé en 1.4.2 et nous posons dans toute la suite :

$$\begin{cases} p = 1 + \delta c_4 q + \eta q^2 \\ p' = dp/dq = \delta c_4 + 2\eta q \\ w = c_2 - \delta q + \eta c_5 q^2 \end{cases}$$

En notant  $A(x, t) = Q e^{i(qx - \omega t)}$  une solution stationnaire de l'équation modifiée (B.1), nous avons les relations de dispersion (dimensionnées) suivantes :

$$\begin{cases} pQ^2 = \epsilon - q^2 \\ \omega = \left(\frac{w}{p} - c_0\right) \epsilon - \left(\frac{w}{p} - c_1\right) q^2 \end{cases}$$

Nous avons alors cherché les conditions de stabilité d'une telle solution vis-à-vis de perturbations de phase afin de définir la région de stabilité des ondes dans le plan  $(q, \epsilon)$ . Nous exposons ces résultats dans le paragraphe suivant. Sauf mention du contraire, nous utilisons dorénavant les formes adimensionnées.

## B.3 Prédiction

### Courbe d'Eckhaus

Nous pouvons chercher analytiquement la limite de stabilité d'une solution de Stokes de l'équation CGL modifiée, dans la limite des perturbations de grande longueur d'onde  $\kappa \rightarrow 0$ . Pour cela, nous recherchons le coefficient de diffusion de la phase :

$$D_{\parallel} = -\frac{AQ^4 + BQ^2 + C}{2p^2Q^2} \quad (\text{B.2})$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{A} = -2\eta p^3 + \gamma c_3 p^2 p' + p^2 p'^2 - w(2\eta c_5 p^2 + \gamma p p' - p'^2 w) \\ \mathcal{B} = 2(-p^3 + \gamma c_3 p^2 q + 2p^2 p' q - w(c_1 p^2 + \gamma p q - 2w p' q)) \\ \mathcal{C} = 4q^2(p^2 + w^2) \end{cases}$$

Nous trouvons alors que pour chaque valeur de  $\epsilon$ , deux racines sont possibles car  $\mathcal{A} \neq 0$  si les nouveaux termes ne s'annulent pas. Cela signifie qu'outre la courbe de stabilité d'Eckhaus « classique » tangente localement à la courbe de stabilité marginale, il existe une seconde courbe qui peut refermer le ballon pour des valeurs finies de  $\epsilon$ .

Les figures B.3 et B.4 présentent les courbes obtenues sur des cas réalistes : les coefficients sont ceux mesurés lors des expériences (cf annexe C). Nous proposons néanmoins des valeurs différentes des coefficients du terme 1 (non déterminés expérimentalement) afin d'illustrer la grande richesse de l'équation.

L'information donnée dans la limite  $\kappa \rightarrow 0$  par l'expression analytique de  $D_{||}$  nous donne la limite de l'instabilité d'Eckhaus que nous définissons comme l'instabilité modulationnelle à très grande longueur d'onde. Nous avons complété cette information en recherchant numériquement la limite d'instabilité modulationnelle à nombre d'onde  $\kappa$  quelconque. Nous avons ainsi vérifié que la limite d'Eckhaus représentée par la parabole tangente en  $(q = 0, \epsilon = 0)$  à la courbe de stabilité marginale était la seule limite possible. Cela signifie entre autres qu'une diminution de  $\epsilon$  conduit toujours à l'instabilité d'Eckhaus, i.e. à grande longueur d'onde.

Au contraire, nous avons constaté que la courbe d'Eckhaus « du dessus » (à valeur finie de  $\epsilon$  pour  $q = 0$ ) n'est pas toujours la plus dangereuse et qu'une instabilité à petite longueur d'onde peut survenir par augmentation de  $\epsilon$ . Cette instabilité est peut-être liée au choix du terme 3 ( $|A|^2 A_{xx}$ ) qui est instable vis-à-vis des gradients de phase.

### Limite convectif/absolu

Seule la limite de stabilité convective d'Eckhaus est donnée par le calcul précédent. Dans le cas d'une cellule de taille finie, la limite absolue est la plus intéressante, mais les calculs sont beaucoup plus délicats. En effet, il n'est plus possible de prendre seulement la limite  $\kappa \rightarrow 0$ , car la partie imaginaire du nombre d'onde intervient aussi ; le calcul doit être effectué dans le plan complexe.

Nous avons rédigé un programme permettant, en cherchant le point selle de la surface du taux de croissance temporel dans le plan complexe, d'approcher la limite convectif/absolu de l'instabilité modulationnelle. Nous ne nous restreignons alors pas à la limite des perturbations de grande longueur d'onde. Les courbes limites obtenues sont reproduites sur chaque figure à côté des courbes limites « convectives ». La figure B.2 illustre les différentes régions obtenues dans le cas d'une équation de Ginzburg-Landau non modifiée.

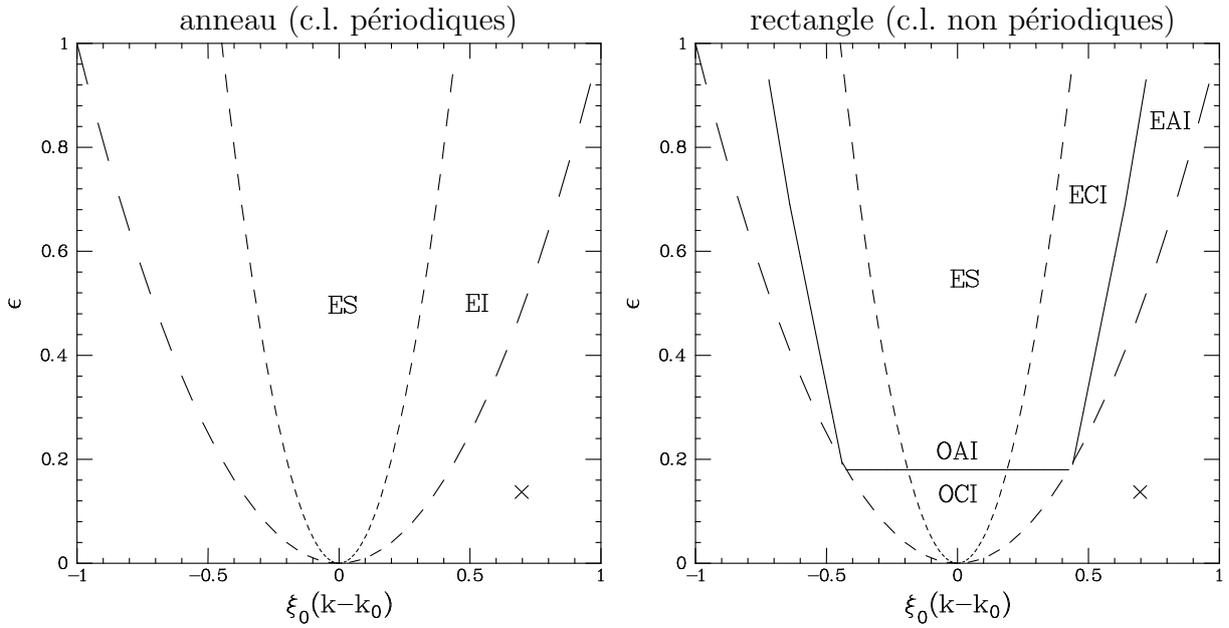


FIG. B.2 – Courbes de stabilité marginale et de stabilité d'Eckhaus pour l'équation de Ginzburg-Landau habituelle avec  $\{c_1=0, c_2=1\}$ . Le graphe de gauche présente la parabole de stabilité marginale et la parabole d'Eckhaus (*ES*: états stables vis-à-vis d'Eckhaus, *EI*: états instables vis-à-vis d'Eckhaus). Le graphe de droite présente les différentes régions dans le cas d'une boîte non périodique. *OCI* et *OAI* représentent les régions où l'instabilité primaire en ondes est respectivement convective et absolue; ces régions sont séparées par une droite horizontale d'équation  $\epsilon = \epsilon_a = 0,18$  (cf chapitre 3). La vitesse de groupe adimensionnée est prise égale à  $v_g \tau_0 \xi_0^{-1} = 0,85$ , conformément aux mesures expérimentales. *ES*, *ECI* et *EAI* repèrent les zones stable, convectivement instable et absolument instable d'Eckhaus. La croix (×) note l'absence de solution en dehors de la parabole de stabilité marginale.

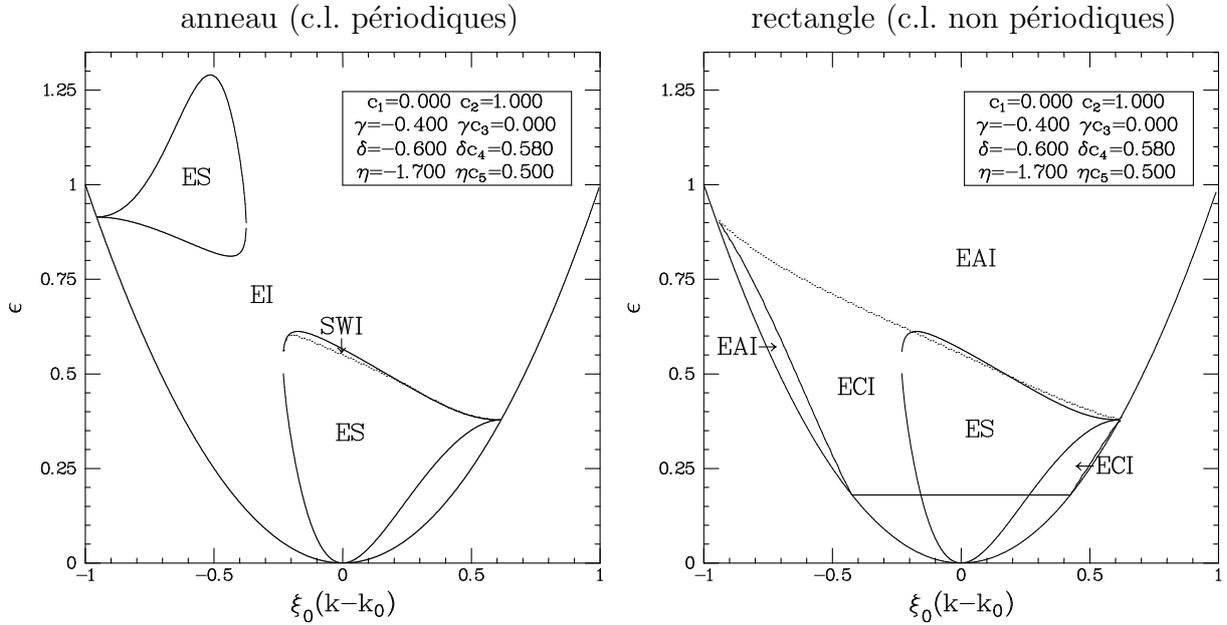


FIG. B.3 – Courbes de stabilité marginale et de stabilité d’Eckhaus pour  $\{c_1=0, c_2=1, \gamma=-0.4, c_3=0, \delta=-0.6, \delta c_4=0.58, \eta=-1.7, \eta c_5=0.5\}$ . La figure de gauche présente les limites d’Eckhaus convectif déduite de la formule B.2 ( $\kappa \rightarrow 0$ ) (trait plein) ainsi que la limite vis-à-vis de perturbations de nombre d’onde  $\kappa$  quelconque (trait pointillé). Les différentes régions sont notées ES, EI : stable, instable vis-à-vis des modulations de petit nombre d’onde. SWI : instable vis-à-vis des modulations de nombre d’onde non nul. La figure de droite présente en plus la limite convectif/absolu d’Eckhaus, qui donne dans le rectangle une zone d’observation des états homogènes plus étendue. La vitesse de groupe adimensionnée est pour ce dernier cas choisie égale à 0,85. La droite horizontale correspond à  $\epsilon = \epsilon_a$ , i.e. à la limite convectif/absolu pour l’instabilité primaire en ondes. ECI, EAI : Eckhaus convectivement et absolument instable. Noter que la courbe en pointillés limitant par le haut la région convectivement instable a été calculée vis-à-vis de perturbations de nombre d’onde  $\kappa$  quelconque, non nécessairement petit.

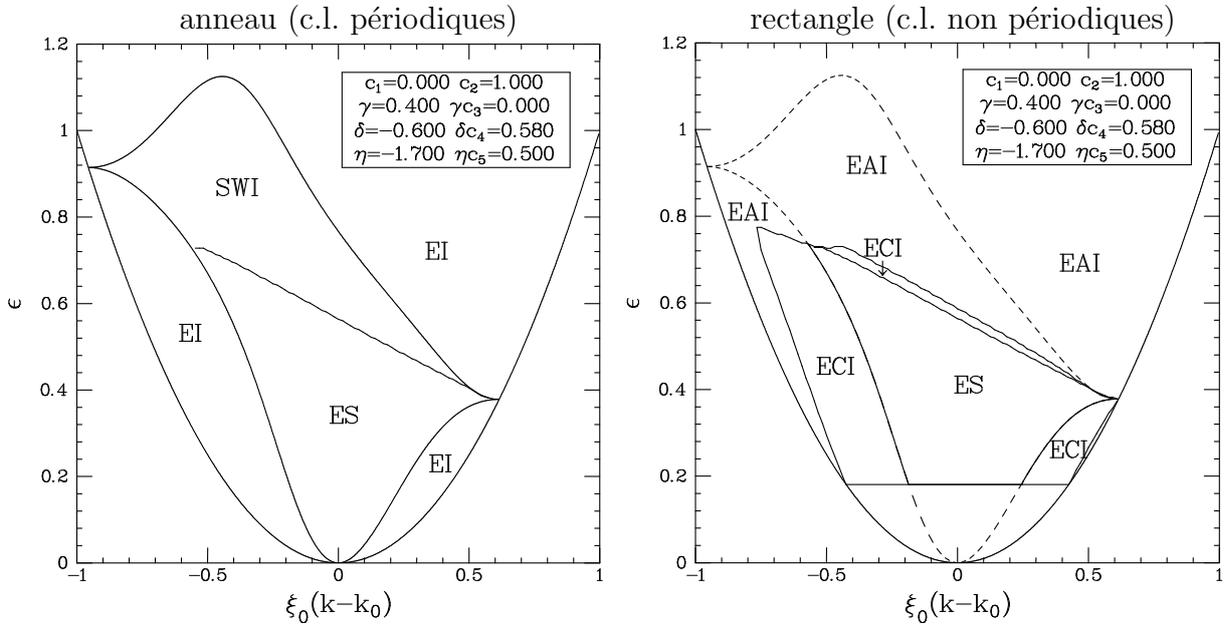


FIG. B.4 – Courbes de stabilité marginale et de stabilité d'Eckhaus pour  $\{c_1=0, c_2=1, \gamma=+0.4, c_3=0, \delta=-0.6, \delta c_4=0.58, \eta=-1.7, \eta c_5=0.5\}$ . La figure de gauche présente les limites d'Eckhaus convectif déduite de la formule B.2 ( $\kappa \rightarrow 0$ ) (trait plein) ainsi que la limite vis-à-vis de perturbations de nombre d'onde  $\kappa$  quelconque (courbe centrale). Les différentes régions sont notées ES, EI: stable, instable vis-à-vis des modulations de petit nombre d'onde. SWI: instable vis-à-vis des modulations de nombre d'onde non nul. La figure de droite présente en plus la limite convectif/absolu d'Eckhaus. La vitesse de groupe adimensionnée est pour ce dernier cas choisie égale à 0,85. La droite horizontale correspond à  $\epsilon = \epsilon_a = 0,18$ , i.e. à la limite convectif/absolu pour l'instabilité primaire en ondes. ECI, EAI: Eckhaus convectivement et absolument instable. Noter qu'à la verticale de  $q = 0$  une fine bande d'instabilité d'Eckhaus convective existe; sa largeur en terme de  $\Delta T$  est de l'ordre de 0,1 K tout comme observé expérimentalement (§ 3.2.3).

### Conclusions

Les différentes courbes obtenues sont commentées dans les légendes des figures. Nous pouvons remarquer qu'une légère modification d'un des paramètres (le changement du signe de  $\gamma$  entre les figures B.3 et B.4 par exemple) altère grandement l'aspect qualitatif du ballon de stabilité.

Nous observons ainsi que pour certaines gammes de paramètres, le ballon calculé à l'aide de  $D_{\parallel}$  dans la limite  $\kappa \rightarrow 0$  peut être constitué de deux régions distinctes. Une telle situation semble correspondre aux observations expérimentales qui révèlent l'existence d'une zone de « turbulence » autour de  $\epsilon \simeq 2,6$  pour laquelle aucun nombre d'onde  $q$  n'est stable. Tempérons néanmoins notre enthousiasme en remarquant que l'analyse numérique des perturbations de nombre d'onde  $\kappa$  quelconque exclut la seconde région de stabilité située plus haut en  $\epsilon$ . Cette configuration est celle de la figure B.3. Notre optimisme ne doit toutefois pas disparaître si nous rappelons que le terme 3 utilisé pour modifier l'équation d'amplitude lui confère une instabilité vis-à-vis des gradients de phase ; cette instabilité conjecturale disparaît sans doute en considérant un autre terme d'ordre 5 comme  $|A_x|^2 A$  : une telle étude est en cours.

Il est en fait possible d'obtenir analytiquement une asymptote de la courbe limitant l'instabilité à grand nombre d'onde. En prenant la limite  $\kappa \rightarrow \infty$ , nous trouvons l'équation :

$$(1 \pm c_1)p + (1 \pm c_5)\eta(\epsilon - q^2) = 0$$

où apparaît clairement le rôle du coefficient  $\eta$  du terme 3. La limite  $\kappa \rightarrow \infty$  est toutefois à prendre avec précaution et nous nous garderons de toute autre conclusion à ce sujet.

Nos calculs révèlent aussi l'extraordinaire complexification liée à la prise en compte de la distinction convectif/absolu. Les diagrammes de stabilité n'ont ainsi pas la même allure dans l'anneau — où le nombre d'onde est discret et peut prendre une valeur différente de sa valeur au seuil — et dans le rectangle — où seul un nombre d'onde est sélectionné pour les plus faibles valeurs de  $\epsilon$ .

Enfin, une fois notée la grande sensibilité qualitative du ballon vis-à-vis des valeurs des coefficients, il est important de préciser que les mesures expérimentales de ces derniers sont délicates et n'offre pas (encore?) la précision nécessaire à toute conclusion définitive. L'annexe suivante est consacrée à ces mesures.



## Annexe C

# Déterminations expérimentales des coefficients des équations d'amplitude

**P**OUR OBTENIR DES PRÉDICTIONS grâce au formalisme des équations d'amplitude, nous devons restreindre les comportements — très riches — de ces dernières en spécifiant du mieux possible les valeurs des différents coefficients qui interviennent. Cette annexe récapitule les méthodes que nous avons employées dans nos diverses géométries pour obtenir les valeurs des coefficients.

Les méthodes spécifiques à la géométrie périodique sont décrites tout d'abord (§ C.1). Les tactiques non spécifiques viennent en § C.2 et le cas de la boîte finie en § C.3. Le bilan des coefficients obtenus est exposé en § C.4

Notons que Burguete *et al.* (1999) ont proposé une méthode de détermination des coefficients plus rapide dans le sens où elle ne demande qu'un diagramme spatiotemporel unique obtenu pour une valeur unique de  $\Delta T$ , au contraire des méthodes présentées ici. Malheureusement, certaines hypothèses à la base de leur approche ne sont pas toujours vérifiées : par exemple l'existence d'un « trou d'amplitude » ou tout du moins d'une région où l'amplitude et les dérivées de la phase varient sur une plage de valeurs assez grande. Cette dernière hypothèse n'est en effet pas simplement vérifiée près du seuil des ondes hydrothermales, et nous pouvons nous attendre loin du seuil à de nouveaux effets (cf annexe B). Nous n'utilisons pas l'approche de Burguete mais notons néanmoins que celle-ci donne des valeurs des coefficients qui sont pour la plupart en accord avec les valeurs obtenues par les méthodes que nous avons utilisées et présentons ici.

### C.1 Courbe de stabilité marginale dans l'anneau et relation de dispersion

Comme exposé en § 3.1.2, le nombre d'onde moyen dans l'anneau est évidemment discret et sa valeur au seuil  $Lk/2\pi$  hésite entre 54 et 55. Après perturbation de ces états et/ou réduction du paramètre de contrôle  $\Delta T$  à partir d'états excités de nombre d'onde différents,

il est possible d'obtenir des séries de valeurs de l'amplitude et de la fréquence en fonction de  $\Delta T$  pour une valeur entière du nombre d'onde moyen bien déterminée. La figure C.1 présente quelques une des courbes obtenues pour l'amplitude. A partir de chaque série, nous en déduisons la valeur critique de  $\Delta T$  pour chaque valeur du nombre d'onde. Cela nous donne accès à la courbe de stabilité marginale (figure C.2) qui par sa courbure au voisinage du seuil nous donne la valeur de la longueur de cohérence  $\xi_0$ .

En effectuant le même travail sur la fréquence en lieu et place de l'amplitude, nous en déduisons la valeur de la vitesse de groupe (dérivée première au seuil) ainsi que la valeur du facteur  $(c_2 - c_1)/\tau_0$  (courbure au seuil) ; les variations de la fréquence en  $\epsilon$  et  $k$  sont reproduites sur la figure C.3.

Comme on peut le voir sur la figure C.1, les différentes courbes représentant l'amplitude en fonction de  $\epsilon$  n'ont pas la même pente et la dépendance de l'amplitude  $Q = |A(y, t)|$  vis-à-vis du nombre d'onde ne peut se résumer à la simple relation  $gQ^2 = \epsilon - \xi_0^2 q^2$ . En utilisant la modélisation proposée en annexe B, nous avons la relation plus riche  $pgQ^2 = \epsilon - \xi_0^2 q^2$ , où  $p = p(q) = 1 + \delta c_4 \xi_0 q + \eta \xi_0^2 q^2$  est une fonction de  $q$  exprimée dans l'annexe précédente. Nous ajustons donc la dépendance de l'amplitude  $Q$  vis-à-vis de  $\epsilon$  et  $q$  et obtenons globalement les valeurs des coefficients du polynôme correspondant. La figure C.4 représente alors le parfait alignement des points expérimentaux après correction par les nouveaux termes de l'équation d'amplitude.

Les séries d'expériences requises pour construire le ballon de stabilité ont été effectuées par Arnaud Prigent dans le cadre de son stage de DEA.

## C.2 Etats transitoires et relaxations de perturbations

La mesure sur des diagrammes spatio-temporels de la vitesse d'advection des perturbations dans des états stables vis à vis d'Eckhaus et les plus proches possibles du seuil nous donne une valeur de la vitesse de groupe  $v_g$ . Cette tactique est valable dans tous les dispositifs expérimentaux et nous donne dans l'anneau et le rectangle la même valeur de  $v_g = 0,895$  mm/s.

Dans le cas de la cellule annulaire, la relaxation de l'amplitude à la suite d'une variation brutale de  $\Delta T$  (croissante ou décroissante) a été enregistrée simultanément avec la valeur instantanée de  $\Delta T$ . Lors du franchissement du seuil des ondes par augmentation de la différence de température, nous avons pu observer la croissance des deux ondes droite et gauche et la victoire de la plus forte sur la plus faible. Nous en déduisons alors une valeur de  $\tau_0$  — fort imprécise malheureusement — ainsi que la partie réelle du coefficient de couplage:  $\lambda=1,4$ . Ces mesures ont été effectuées avec Alexis Casner lors de son stage de DEA.

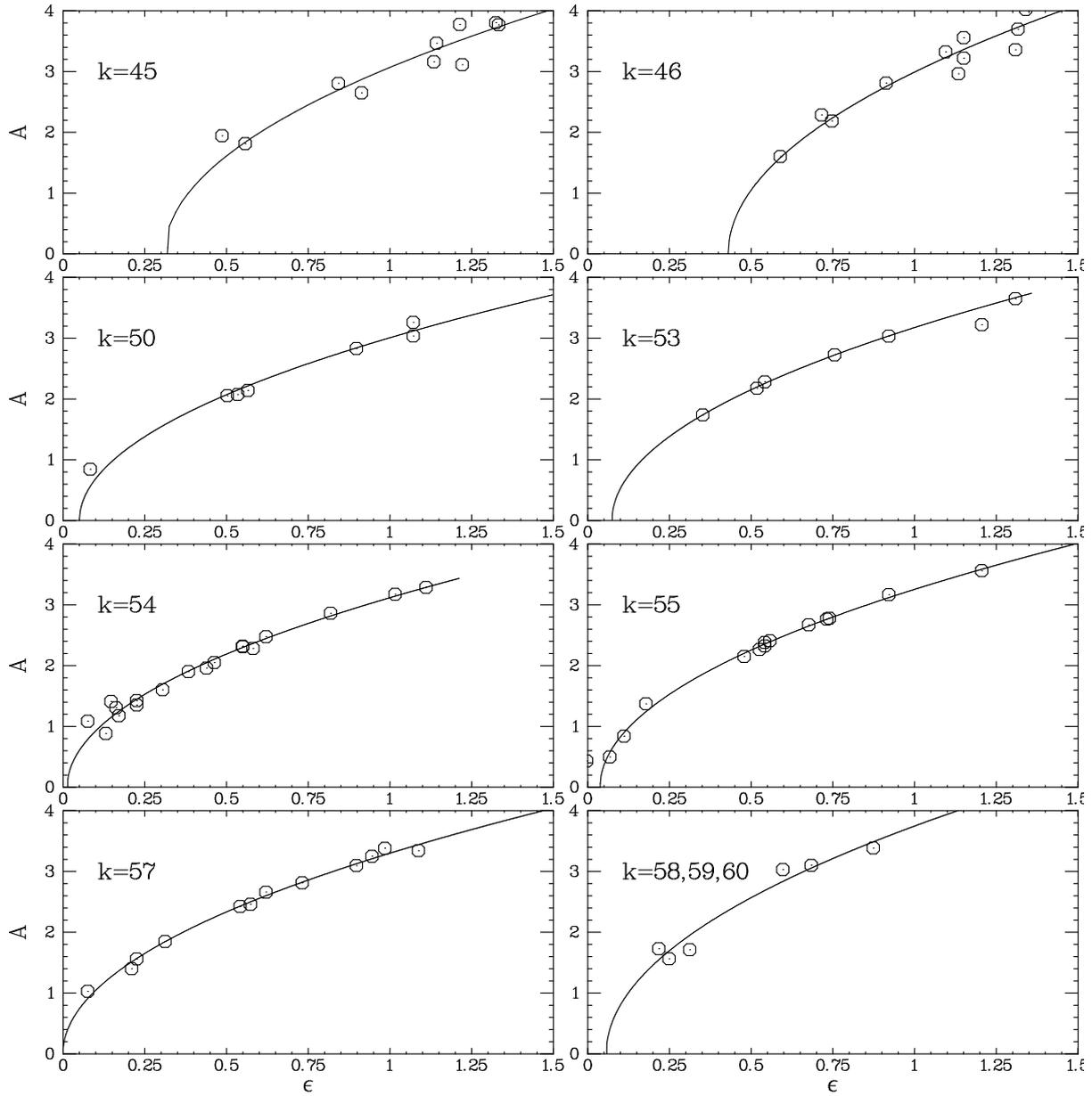


FIG. C.1 –  $A(\epsilon)$  pour différents modes entiers  $k$  ( $2\pi/L$ ). Chaque graphe nous donne accès à la valeur du seuil correspondant à un nombre d'onde, i.e. un point de la courbe de stabilité marginale.

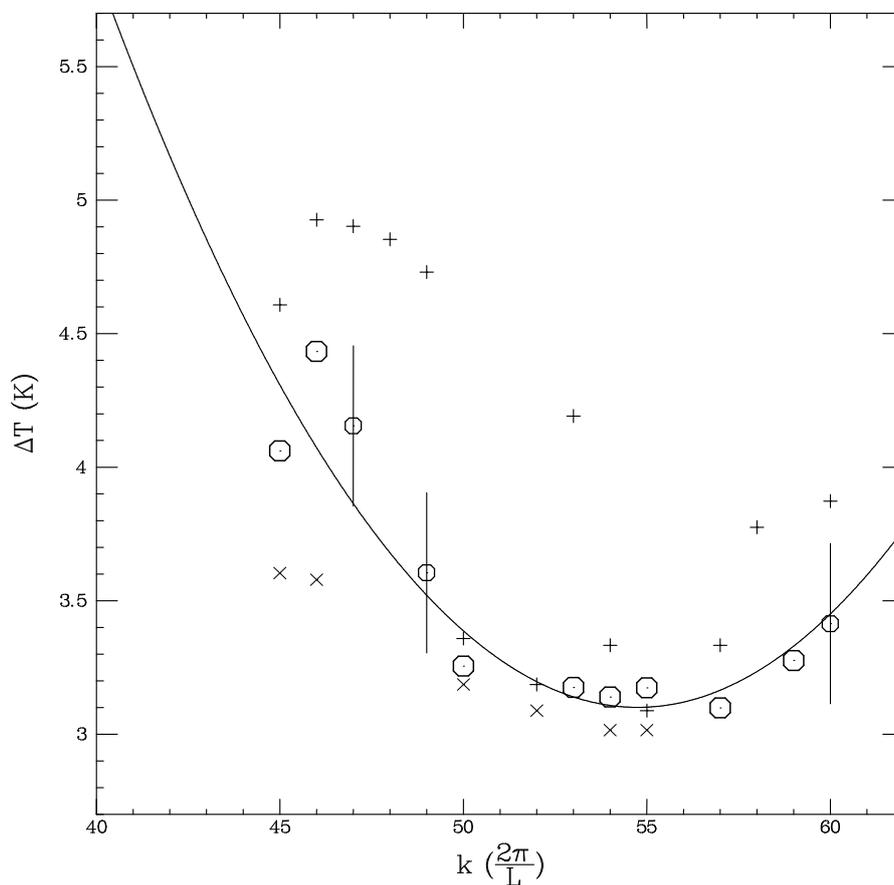


FIG. C.2 – Courbe de stabilité marginale obtenue dans l’anneau. Les cercles (o) sont les valeurs des seuils déduites des graphes de la figure C.1. Les points affublés d’une grande barre d’erreur représente des séries ne contenant que quelques points de mesure et n’ont pas été utilisés pour l’ajustement. Les symboles (+) représentent pour chaque valeur du nombre d’onde les états stables obtenus pour la plus faible valeur de  $\epsilon$ . De même, les symboles (x) représentent les états instables obtenus pour les valeurs les plus élevées de  $\epsilon$ . La courbe en trait plein représente la meilleure approximation des seuils (o) et l’on en déduit la valeur de  $\xi_0$ .

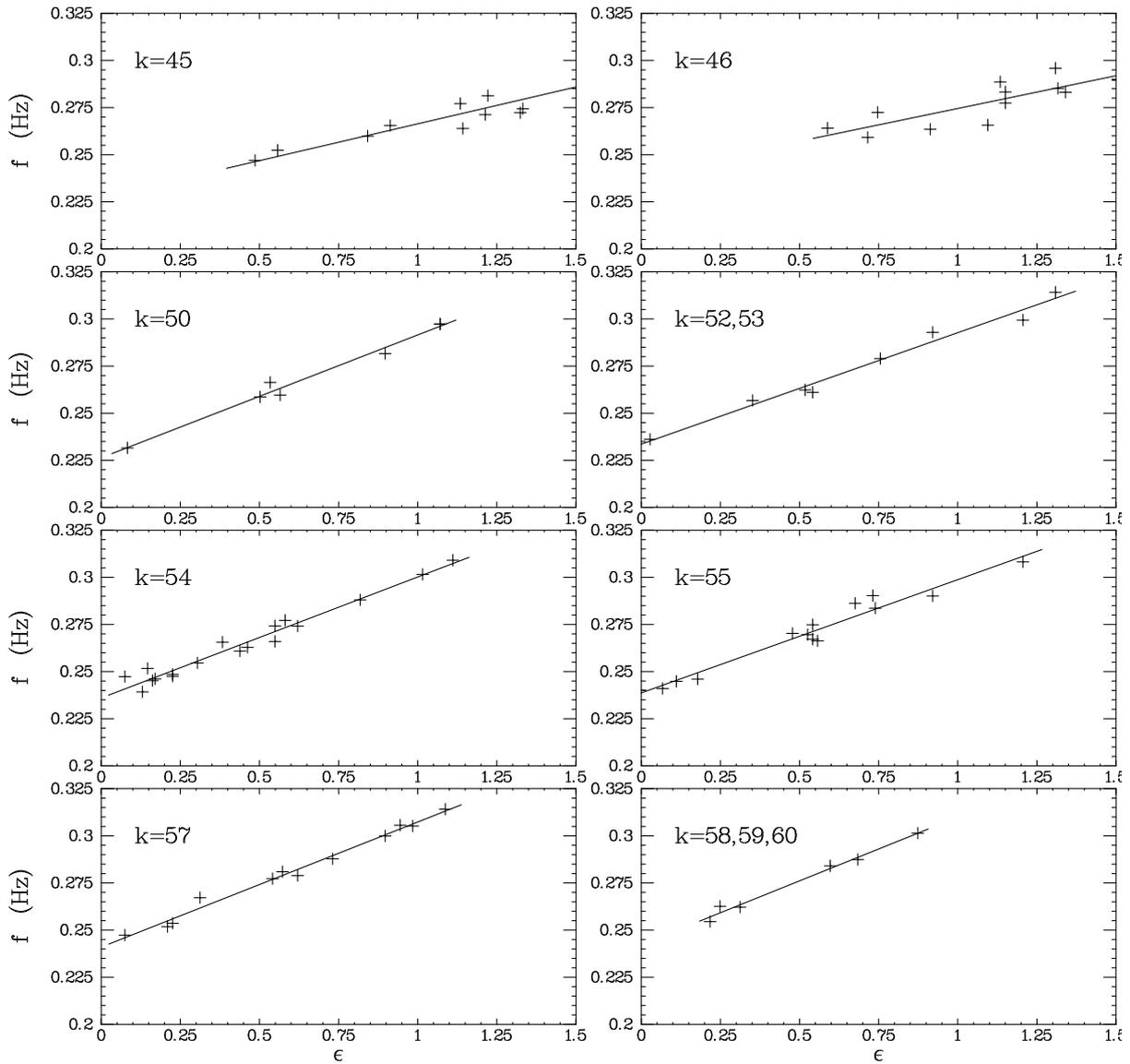


FIG. C.3 – Evolution de la fréquence  $f(\epsilon)$  pour différents modes entiers  $k$  ( $2\pi/L$ ).

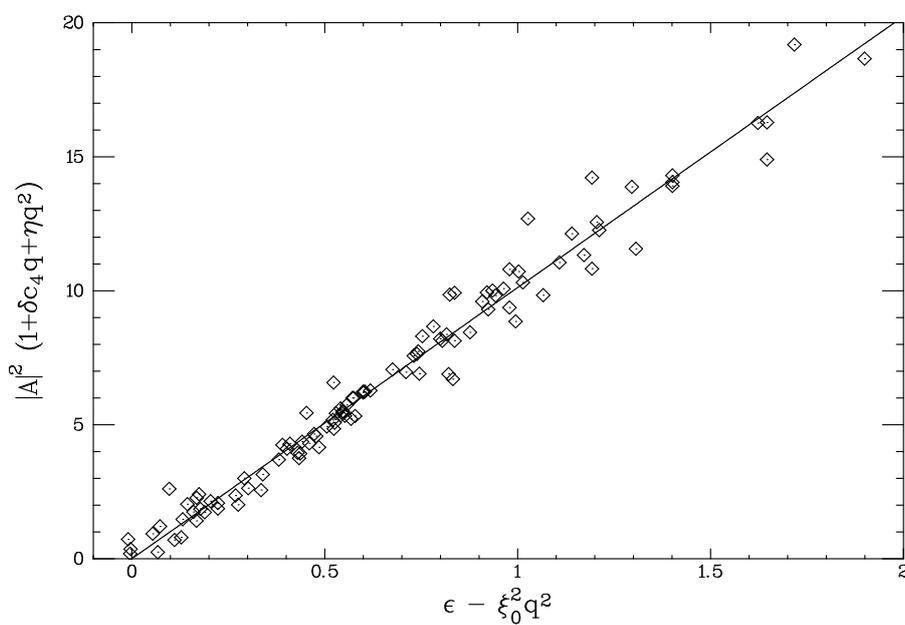


FIG. C.4 – Graphe de l'amplitude corrigée  $pQ^2 = (1 + \delta c_4 q + \eta q^2)Q^2$  en fonction de l'écart au seuil corrigé  $(\epsilon - q^2)$  pour l'ensemble des nombres d'onde  $q = k - k_c$  accessibles dans l'expérience. Les valeurs des coefficients intervenant dans  $p$  proviennent de l'ajustement global correspondant. Après correction, l'ensemble des points se rassemble bien le long d'une droite.

### C.3 Auto-cohérence avec le formalisme de transition convectif/absolu

Nous pouvons utiliser l'expression théorique de  $\epsilon_a$  (équation 3.4) et l'identifier avec la valeur expérimentale du seuil dans le rectangle (§ 3.1.3) pour obtenir une relation liant certains coefficients encore inconnus dont  $\tau_0$  et  $c_1$  :

$$\frac{\tau_0^2 v_g^2}{4\xi_0^2(1+c_1^2)} = \epsilon_a \simeq 0,18$$

Une seconde relation peut être obtenue en utilisant le décalage de fréquence  $\epsilon_f$  au seuil dans le rectangle (formule (3.4)). Cependant, la mesure expérimentale de ce décalage est fort imprécise ; seule une borne supérieure peut en être donnée.

### C.4 Bilan

Pour  $L_x = 10$  mm et  $h = 1,7$  mm, et en combinant tous les résultats obtenus dans l'anneau et le rectangle, nous avons :

grandeur	expérience	théorie linéaire
$k_0$	0,684 mm <sup>-1</sup>	1,147 mm <sup>-1</sup>
$\omega_0$	1,49 s <sup>-1</sup>	1,11 s <sup>-1</sup>
$\xi_0$	5,1 mm	3,66 mm
$v_g$	0,895 mm/s	0,69 mm/s
$\tau_0$	≈ 5 s	4,44 s
$c_0$	3	×
$c_1$	0	×
$c_2$	1	×
$\gamma$	?	×
$\gamma c_3$	?	×
$\delta$	-0,6	×
$\delta c_4$	0,58	×
$\eta$	-1,7	×
$\eta c_5$	0,5	×

La dernière colonne rappelle les résultats obtenus par l'analyse de stabilité linéaire explicitée en § 1.3.4.

L'ensemble de ces coefficients est susceptible de varier avec la hauteur de fluide  $h$ , et dans une moindre mesure avec la largeur de la cellule  $L_{\parallel}$ . En effet, la hauteur de fluide conditionne par exemple l'échelle de temps (cf adimensionalisation, § 1.2.1). Nous avons aussi vérifié lors de nos expériences la très forte dépendance de  $\omega_0$  avec  $h$  ; celle-ci est illustrée sur la figure C.5 qui montre la dépendance de la période des ondes en fonction

de  $h$  dans différentes configurations. Pour ce qui est de la dépendance en  $L_{\parallel}$  — visible sur la figure C.5 en bas à droite —, nous avons proposé avec Burguete *et al.* (2000) une loi d'échelle inspirée de la définition du nombre de Marangoni ( $\propto h^3/L_{\parallel}$ ) pour rassembler les seuils obtenus dans le rectangle avec  $L_{\parallel} = 10, 20$  et  $30$  mm. Cette approche n'est pas suffisante pour décrire le comportement de la fréquence. Pour cela, la figure C.5 présente un ajustement linéaire de la période avec la hauteur et nous observons qu'en géométrie étendue bidimensionnelle ( $L_{\parallel} \geq 30$  mm) la fréquence est indépendante de  $L_{\parallel}$ . Nous remarquons aussi que le confinement augmente la fréquence des ondes.

L'ensemble des expériences et calculs des coefficients doit donc a priori être réalisé à chaque changement des deux paramètres dimensionnels que sont  $h$  et  $L_{\parallel}$ . La courbure représente encore une dépendance possible, mais celle-ci doit pouvoir être incluse dans la forme a priori des équations.

Ainsi, les équations d'amplitude correspondant aux petites et grandes hauteurs dans la cellule LOTUS ne seront pas les mêmes à cause de coefficients différents dus à des hauteurs différentes. Nous pouvons ainsi imaginer que les termes spatiaux  $\mathcal{L}_{A,B}$  varient avec  $h$  et que cette variation permet d'expliquer les différents comportements des composantes des vecteurs d'ondes des OH1 et des OH2.

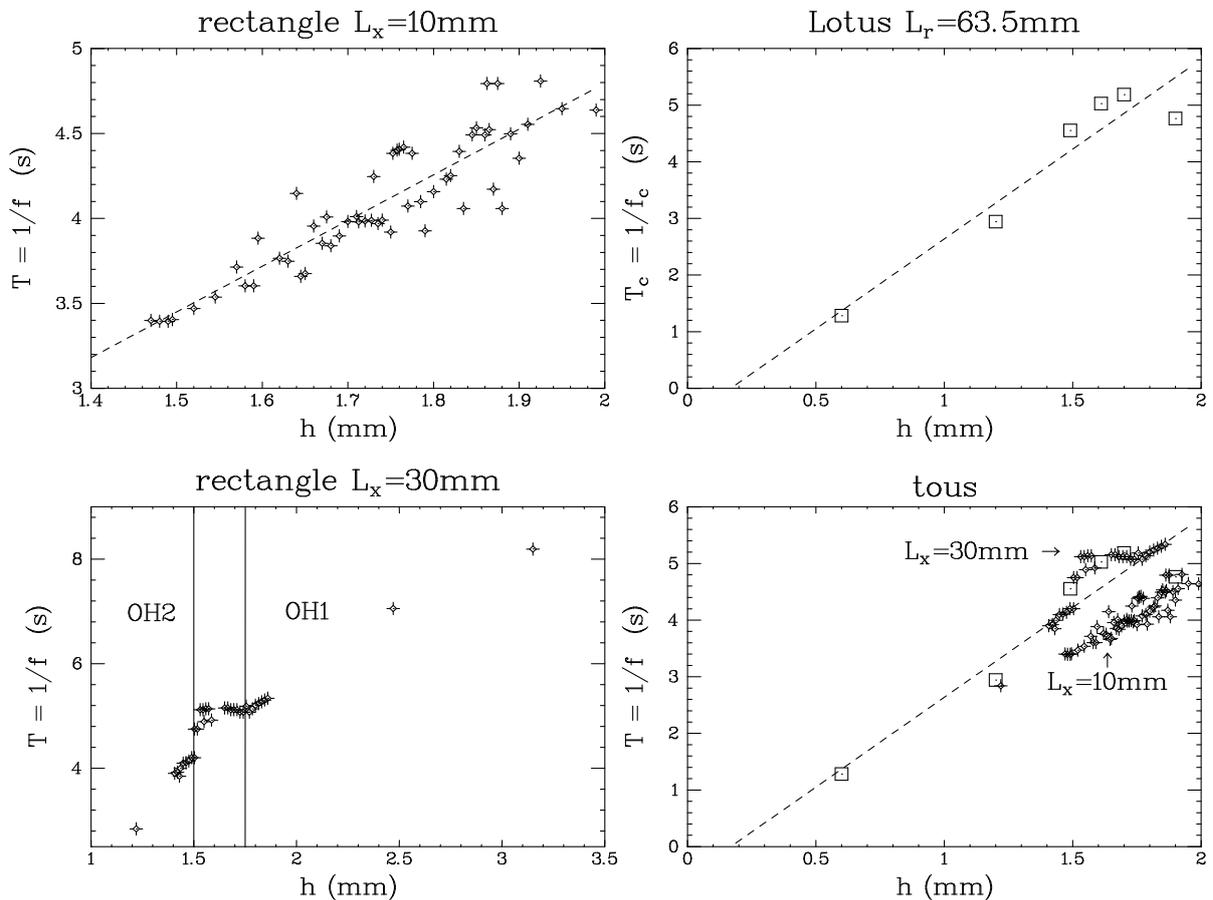


FIG. C.5 – Variation de la période  $T = f^{-1}$  avec la hauteur  $h$ . A gauche : cas du rectangle pour  $L_x = 10$  mm (en haut) et  $L_x = 30$  mm (en bas) ; les mesures sont effectuées sur différentes valeurs de  $\Delta T$  et la dépendance en  $\epsilon$  disperse les points. Pour  $L_x = 30$  mm, des OH2 sont observées à petite hauteur et il existe une plage (en  $h$ ) de transition entre les deux types d'ondes. A droite : cas du disque (en haut) ; seules les valeurs au seuil de l'instabilité en onde sont reportées. La compilation des résultats (en bas à droite) montre la dépendance vis-à-vis de  $L_{\parallel}$  : le confinement augmente la fréquence. Un saut de fréquence distingue les deux types d'ondes hydrothermales.



## Annexe D

# Pliages et représentations polaire ou cartésienne

### Présentation

Afin d'établir un lien entre les structures spatiales des ondes observées en géométrie cylindrique et cartésienne, nous proposons ici une comparaison simple des deux systèmes de représentation.

Considérons, en géométrie rectangulaire de coordonnées  $(x, y)$  une onde « plane » : les courbes isophases sont des segments parallèles entre eux, inclinés d'un angle  $\psi$  par rapport à l'axe des  $x$  (direction du gradient de température). Remplaçons alors les coordonnées  $(x_{\parallel}, x_{\perp}) = (x, y)$  de la géométrie rectangulaire par les coordonnées  $(x_{\parallel}, x_{\perp}) = (r, \theta)$  de la géométrie cylindrique. Cette transformation de pensée revient à considérer la géométrie cylindrique et ses coordonnées polaires en lieu et place des coordonnées cartésiennes de géométrie rectangulaire. La coordonnée  $x_{\parallel}$  est toujours celle le long du gradient de température et  $x_{\perp}$  la coordonnée dans la direction orthogonale.

Cette opération revient à « plier » le graphe du rectangle de manière à retrouver un domaine cylindrique, en raccordant les points  $\{(\theta = 0, r)\}$  aux points  $\{(\theta = 2\pi, r)\}$ , i.e., en imposer des conditions aux limites périodiques en  $\theta$ . Le résultat est représenté sur la figure D.1 : on trouve alors un ensemble de branches de spirales d'Archimède.

### Cas des sources

La procédure décrite ci-dessus peut-être appliquée dans le cas général d'une onde non unique. Les figures D.2 et D.3 illustrent la transposition attendue des sources 1D et 2D du cas rectangulaire au cas cylindrique.

Nous observons une différence qualitative entre les sources d'OH1 et d'OH2, différence que nous avons utilisé dans nos recherches préliminaires pour discriminer les deux espèces.

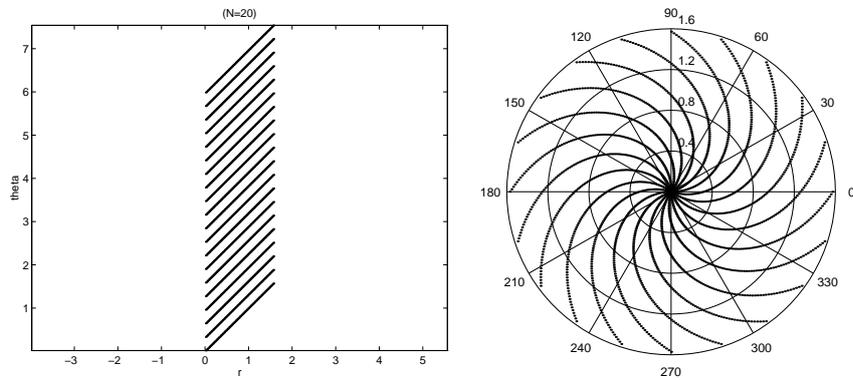


FIG. D.1 – *Pliage d'une onde plane : à gauche représentation dans un repère orthonormé de coordonnées  $(\theta, r)$  ; à droite : représentation rclassique (coordonnées polaires, spirales d'Archimède).*

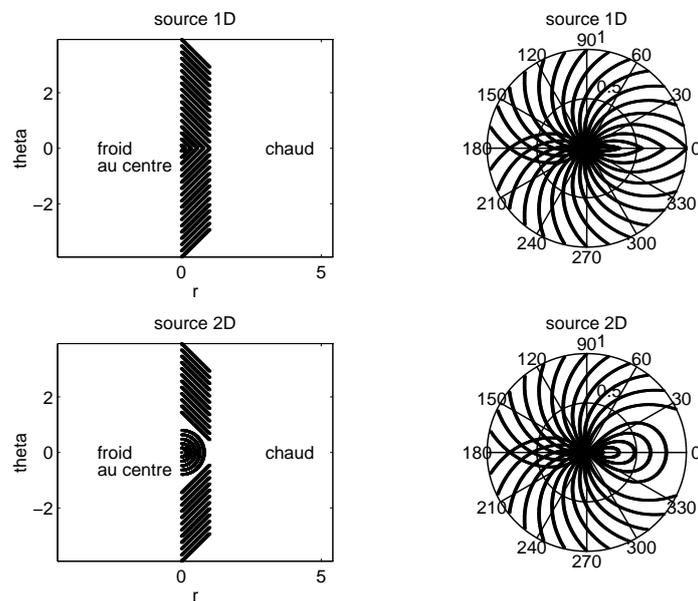


FIG. D.2 – *Sources 1D et 2D avant et après pliage. Le centre est froid.*

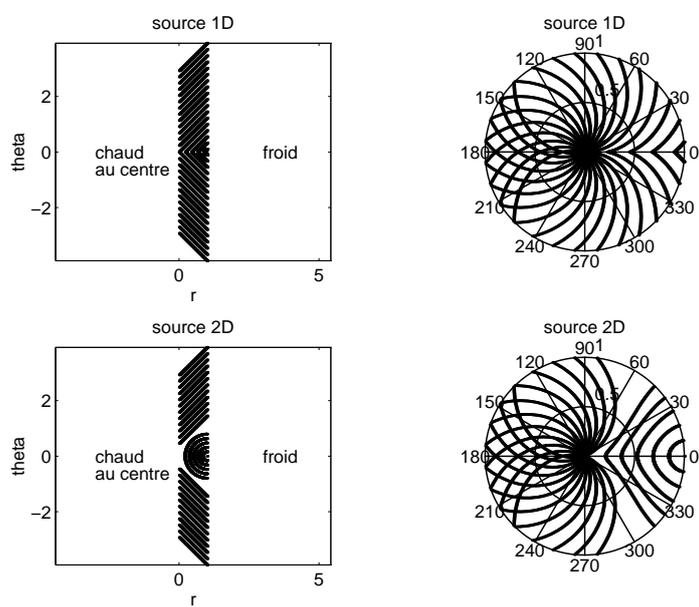


FIG. D.3 – Sources 1D et 2D avant et après pliage. Le centre est chaud.



## Bibliographie

- Ben Hadid, Hamda et Bernard Roux, “Thermocapillary convection in long horizontal layers of low-prandtl-number melts subject to a horizontal temperature gradient”, *Journal of Fluid Mechanics*, **221**, 77–103 (1990).
- Ben Hadid, Hamda et Bernard Roux, “Buoyancy- and thermocapillary-driven flows in differentially heated cavities for low-prandtl-number fluids”, *Journal of Fluid Mechanics*, **235**, 1–36 (1992).
- Bergé, Pierre (sous la direction de), *Le Chaos, théorie et expériences* (Eyrolles, Collection du CEA, 1988), ISBN 2-7272-0145-1.
- Bot, Patrick, Olivier Cadot et Innocent Mutabazi, “Secondary instability mode of a roll pattern and transition to spatiotemporal chaos in the Taylor-Dean system”, *Physical Review E*, **58** (3), 3089–3097 (1998).
- Bot, Patrick et Innocent Mutabazi, “Dynamics of spatio-temporal defects in the Taylor-Dean system”, *European Physical Journal B*, **13**, 141–155 (2000).
- Braunsfurth, M.G. et G.M. Homsy, “Combined thermocapillary-buoyancy convection in a cavity. part ii. an experimental study”, *Physic of Fluids*, **9** (5) (1997).
- Burguete, Javier, Nathalie Mukolobwicz, François Daviaud et Hugues Chaté, “Bekki-Nozaki amplitude holes in hydrothermal nonlinear waves”, *Physical Review Letters*, **82** (16) (1999).
- Burguete, Javier, Nathalie Mukolobwicz, François Daviaud, Nicolas Garnier et Arnaud Chiffaudel, “Buoyant-thermocapillary instabilities in an extended liquid layer subjected to a horizontal temperature gradient”, Submitted to *Physics of Fluids* (2000).
- Bye, John A. T., “Numerical solutions of the steady-state vorticity equation in rectangular basins”, *Journal of Fluid Mechanics*, **26** (3), 577–598 (1966).
- Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and hydromagnetic stability* (Oxford University Press, 1961), ISBN 0-486-64071-X. Re-ed. Dover 1981.
- Chomaz, J.-M., “Absolute and convective instabilities in nonlinear systems”, *Physical Review Letters*, **69** (13), 1931–1934 (1992).
- Chomaz, J.-M., A. Couairon et S. Julien, “Absolute and convective nature of the Eckhaus and zigzag instability with throughflow”, *Physics of Fluids*, **11** (11), 3369–3373 (1999).
- Chomaz, Jean-Marc et Arnaud Couairon, “Against the wind”, *Physics of Fluids*, **11** (10), 2977–2983 (1999).

- Couairon, Arnaud, *Modes globaux fortement non-linéaires dans les écoulements ouverts*, Thèse, Ecole Polytechnique (1997).
- Couairon, Arnaud et Jean-Marc Chomaz, “Primary and secondary nonlinear global instability”, *Physica D*, **132**, 428–456 (1999).
- Coullet, P., S. Fauve et E. Tirapegui, “Large scale instability of non-linear standing waves”, *Journal de Physique - Lettres*, **46**, L787–L791 (1985).
- Coullet, P., T. Frisch et F. Plaza, “Sources and sinks of wave patterns”, *Physica D*, **62**, 75–79 (1993).
- Croquette, Vincent, *Etude des structures convectives de Rayleigh-Bénard en géométrie étendue*, Thèse d’Etat, Université Paris 6 (1986).
- Croquette, Vincent et Hugh Williams, “Nonlinear competition between waves on convective rolls”, *Physical Review A*, **39** (5), R2765–2768 (1989a).
- Croquette, Vincent et Hugh Williams, “Nonlinear waves of the oscillatory instability on finite convective rolls”, *Physica D*, **37**, 300–314 (1989b).
- Cross, M. C., “Travelling and standing waves in binary-fluid convection in finite geometries”, *Physical Review Letters*, **57** (23), 2935–2938 (1986).
- Cross, M. C., “Structure of nonlinear travelling-wave states in finite geometries”, *Physical Review A*, **38**, 3593–3600 (1988).
- Cross, M. C. et P. C. Hohenberg, “Pattern formation outside of equilibrium”, *Reviews of Modern Physics*, **65** (3, part II), 851–1112 (1993).
- Cross, M. C. et E.Y. Kuo, “One dimensional spatial structure near a Hopf bifurcation at finite wavenumber”, *Physica D*, **59**, 90–120 (1992).
- Daviaud, François et Jean Marc Vince, “Traveling waves in a fluid layer subjected to a horizontal temperature gradient”, *Physical review E*, **48** (6), 4432–4436 (1993).
- Davis, Stephen H., “Thermocapillary instabilities”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **19**, 403–435 (1987).
- De Saedeleer, C., A. Garcimartin, G. Chavepeyer, J. K. Platten et G. Lebon, “The instability of a liquid layer heated from the side when the upper surface is open to air”, *Physics of Fluids*, **8** (3) (1996).
- Dee, G. et J.S. Langer, “Propagating pattern selection”, *Physical Review Letters*, **50** (6), 383–386 (1983).
- Deissler, Robert J., “Noise-sustained structure, intermittency, and the Ginzburg-Landau equation”, *Journal of Statistical Physics*, **40** (3/4), 371–395 (1985).
- Deissler, Robert J., “Spatially growing waves, intermittency, and convective chaos in an open-flow system”, *Physica D*, **25D**, 233–260 (1987).
- Deissler, Robert J., “External noise and the origin and dynamics of structure in convectively unstable systems”, *Journal of Statistical Physics*, **54** (5/6), 1459–1488 (1989).
- Eckhaus, Wiktor et Gérard Iooss, “Strong selection or rejection of spatially periodic patterns in degenerate bifurcations”, *Physica D*, **39**, 124–146 (1989).

- Ezersky, A. B., A. Garcimartin, H. L. Mancini et C. Pérez-Garcia, “Spatiotemporal structure of hydrothermal waves in marangoni convection”, *Physical Review E*, **48** (6), 4414–4422 (1993).
- Fauve, S., “Transition vers la turbulence des écoulements convectifs”, *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, . (Numéro spécial), 45–76 (1984).
- Fauve, S., “Large scale instabilities of cellular flows”, in “Instabilities and Nonequilibrium Structures”, E. Tirapegui et D. Villarroel, eds., 63–88 (D. Reidel Publishing Company, 1987).
- Favre, Eric, *Convection thermocapillaire et thermogravitaire dans un fluide chauffé localement sur sa surface libre*, Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble (1997).
- Favre, Eric, Laure Blumenfeld et François Daviaud, “Instabilities of a liquid layer locally heated on its free surface”, *Physics of Fluids*, **9** (5), 1473–1475 (1997).
- Garcimartín, Angel, Nathalie Mukolobwicz et François Daviaud, “Origin of waves in surface-tension-driven convection”, *Physical Review E*, **56** (2) (1997).
- Garnier, Nicolas et Arnaud Chiffaudel, “Caractères convectif et absolu de l’instabilité en ondes hydrothermales”, in “Comptes-rendus de la troisième rencontre du non-linéaire”, R. Ribotta, ed., 233–238 (Editions Paris Onze, 2000a).
- Garnier, Nicolas et Arnaud Chiffaudel, “Non-linear transition to a global mode for traveling-wave instability in a finite box”, Submitted to *Physical Review Letters* (2000b).
- Gershuni, G. Z., P. Laure, V. M. Myznikov, B. Roux et E. M. Zhukhovitsky, “On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers”, *Microgravity Quarterly*, **2** (3), 141–151 (1992).
- Gillon, Pascale et G. M. Homsy, “Combined thermocapillary-buoyancy convection in a cavity: An experimental study”, *Physic of Fluids*, **8** (11) (1996).
- Gondret, P., P. Ern, L. Meignin et M. Rabaud, “Experimental evidence of a nonlinear transition from convective to absolute instability”, *Physical Review Letters*, **82** (7), 1442–1445 (1999).
- Guyon, Etienne, Jean-Pierre Hulin et Luc Petit, *Hydrodynamique Physique* (InterEditions, Editions du CNRS, 1991), ISBN 2-222-04025-6.
- Huerre, Patrick, “On the absolute/convective nature of primary and secondary instabilities”, in “Propagation in systems far from equilibrium”, J.E. Weisfreid, H.R. Brand, P. Manneville, G. Albinet et N. Boccara, eds., volume 41 of *Springer Series in Synergetics*, 340–353 (Springer Verlag, 1988).
- Huerre, Patrick et Peter A. Monkewitz, “Local and global instabilities in spatially developing flows”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **22**, 473–537 (1990).
- Janiaud, Béatrice, Alain Pumir, David Bensimon, Vincent Croquette, Helga Richter et Lorenz Kramer, “The Eckhaus instability for traveling waves”, *Physica D*, **55**, 269–286 (1992).
- Jenkins, D. R., “Interpretation of shadowgraph patterns in Rayleigh-Bénard convection”, *Journal of Fluid Mechanics*, **190**, 451–469 (1988).

- Kamotani, Y., J. H. Lee et S. Ostrach, “An experimental evidence of oscillatory thermocapillary convection in cylindrical containers”, *Physic of Fluids A*, **4** (5) (1992).
- Knobloch, E. et J. De Luca, “Amplitude equations for travelling wave convection”, *Nonlinearity*, **3**, 975–980 (1990).
- Kolodner, Paul et Hugh Williams, “Complex demodulation techniques for experiments on traveling-waves convection”, in “Nonlinear evolution of spatio-temporal structures in dissipative continuous systems”, F. H. Busse et L. Kramer, eds., 73–91 (Plenum Press, New York, 1990).
- Laure, Patrice et Innocent Mutabazi, “Nonlinear analysis of instability modes in the Taylor-Dean system”, *Physics of Fluids*, **6** (11), 3630–3642 (1994).
- Laure, Patrice et B. Roux, “Linear and nonlinear analysis of the Hadley circulation”, *Journal of Crystal Growth*, **97**, 226–234 (1989).
- Laure, Patrice, B. Roux et H. Ben Hadid, “Nonlinear study of the flow in a long rectangular cavity subjected to thermocapillary effect”, *Physics of Fluids A*, **2** (4), 516–524 (1990).
- Lega, J., B. Jانياud, S. Jucquois et V. Croquette, “Localized phase jumps in wave trains”, *Physical Review A*, **45** (8), 5596–5604 (1992).
- Lega, J., J. V. Moloney et A. C. Newell, “Swift-Hohenberg equation for lasers”, *Physical Review Letters*, **73** (22), R2978–2981 (1994).
- Mancho, A. M. et H. Herrero, “Instabilities laterally heated liquid layers”, *Physics of Fluids*, **12** (9), 1044–1051 (2000).
- Matkowsky, B. J. et V. Volpert, “Stability of plane wave solutions of complex Ginzburg-Landau equations”, *Quarterly of Applied Mathematics*, **LI** (2), 265–281 (1993).
- Mercier, J-F. et C. Normand, “Influence of the Prandtl number on the location of recirculation eddies in thermocapillary flows”, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. Submitted (2000).
- Mercier, Jean-François, *Instabilités d’écoulements thermocapillaires et de thermogravité*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (1997).
- Mercier, Jean-François et Christiane Normand, “Buoyant-thermocapillary instabilities of differentially heated liquid layers”, *Physics of Fluids*, **8** (6), 1433–1445 (1996).
- Merzkirch, Wolfgang, *Flow visualization, second edition* (Academic Press, 1987), ISBN 0-12-491351-2.
- Mukolobwicz, Nathalie, *Etude de systèmes d’ondes propagatives dans des écoulements thermogravitaires et thermocapillaires*, Thèse, Université Paris 11 (1998).
- Mukolobwicz, Nathalie, Arnaud Chiffaudel et François Daviaud, “Supercritical Eckhaus instability for surface-tension-driven hydrothermal waves”, *Physical Review Letters*, **80** (21), 4661–4664 (1998).
- Müller, Hanns Walter et Morten Tveitereid, “Absolute and convective nature of the Eckhaus and zigzag instability”, *Physical Review Letters*, **74** (9), 1582–1585 (1995).
- Neufeld, M., D. Walgraef et M. San Miguel, “Noise-sustained structures in coupled complex Ginzburg-Landau equations for a convectively unstable system”, *Physical Review E*, **54** (6), 6344–6355 (1996).

- Newell, Alan C. et J.A. Whitehead, “Finite bandwidth, finite amplitude convection”, *Journal of Fluid Mechanics*, **38** (part 2), 279–303 (1969).
- Parmentier, Patrice M., Vincent C. Regnier et Georgy Lebon, “Buoyant-thermocapillary instabilities in medium-prandtl-number fluid layers subject to a horizontal temperature gradient”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **36** (9), 2417–2427 (1993).
- Pearson, J. R. A., “On convection cells induced by surface tension”, *Journal of Fluid Mechanics*, **19**, 489–500 (1958).
- Pelacho, Miguel Angel et Javier Burguete, “Temperature oscillations of hydrothermal waves in thermocapillary-buoyancy convection”, *Physical Review E*, **59** (1), 835–840 (1999).
- Pocheau, Alain, *Structures spatiales et turbulence de phase en convection de Rayleigh-Bénard*, Thèse d’Etat, Université Paris 6 (1987).
- Priede, Janis et Gunter Gerbeth, “Convective, absolute, and global instabilities of thermocapillary-buoyancy convection in extended layers”, *Physical Review E*, **56** (4), 4187–4199 (1997a).
- Priede, Janis et Gunter Gerbeth, “Influence of thermal boundary conditions on the stability of thermocapillary-driven convection at low prandtl numbers”, *Physics of Fluids*, **9** (6), 1621–1634 (1997b).
- Riley, R. J. et G. P. Neitzel, “Instability of thermocapillary-buoyancy convection in shallow layers. part 1. characterization of steady and oscillatory instabilities”, *Journal of Fluid Mechanics*, **359**, 143–164 (1998).
- Rovinsky, Malevanets et Menzinger, “Differential flow instability in the Ginzburg-Landau and Swift-Hohenberg approximations”, *Physica D*, **95**, 306–318 (1996).
- Schouveiler, L., P. Le Gal et M. P. Chauve, “Stability of a traveling roll system in a rotating disk flow”, *Physics of Fluids*, **11**, 2695–2697 (1998).
- Schwabe, D., U. Möller, J. Schneider et A. Scharmann, “Instabilities of shallow dynamic thermocapillary liquid layers”, *Physic of Fluids A*, **4** (11), 2368–2381 (1992).
- Segel, Lee A., “Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection”, *Journal of Fluid Mechanics*, **38** (part 1), 203–224 (1969).
- Sen, Asok K. et Stephen H. Davis, “Steady thermocapillary flows in two dimensional slots”, *Journal of Fluid Mechanics*, **121**, 163–186 (1982).
- Smith, Marc K., “Instability mechanisms in dynamic thermocapillary liquid layers”, *Physics of Fluids*, **29** (10), 3182–3186 (1986).
- Smith, Marc K., “The nonlinear stability of dynamic thermocapillary liquid layers”, *Journal of Fluid Mechanics*, **194**, 391–415 (1988).
- Smith, Marc K. et Stephen H. Davis, “Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. part 1. convective instabilities”, *Journal of Fluid Mechanics*, **132**, 119–144 (1983a).
- Smith, Marc K. et Stephen H. Davis, “Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. part 2. surface-wave instabilities”, *Journal of Fluid Mechanics*, **132**, 145–162 (1983b).
- Strani, M., R. Piva et G. Graziani, “Thermocapillary convection in a rectangular cavity: asymptotic theory and numerical simulations”, *Journal of Fluid Mechanics*, **130**, 347–376 (1983).

- Swift, J. et P. C. Hohenberg, “Hydrodynamic fluctuations at the convective instability”, *Physical Review A*, **15** (1), 319–328 (1977).
- Tagg, Randall, W. Stuart Edwards et Harry L. Swinney, “Convective versus absolute instability in flow between counterrotating cylinders”, *Physical Review A*, **42** (2), 831–837 (1990).
- Tobias, S. M., M. R. E. Proctor et E. Knobloch, “Convective and absolute instabilities of fluid flows in finite geometry”, *Physica D*, **113**, 43–72 (1998).
- Tuckerman, Laurette S. et Dwight Barkley, “Bifurcation analysis of the Eckhaus instability”, *Physica D*, **46**, 57–86 (1990).
- van Saarloos, Wim, “Front propagation into unstable states: Marginal stability as a dynamical mechanism for velocity selection”, *Physical Review A*, **37** (1), 211 (1988).
- Villers, D. et J. K. Platten, “Coupled buoyancy and Marangoni convection in acetone: experiments and comparison with numerical simulations”, *Journal of Fluid Mechanics*, **234**, 487–510 (1992).
- Vince, Jean Marc, *Ondes propagatives dans des systèmes convectifs soumis à des effets de tension superficielle*, Thèse, Université Paris 7 (1994).
- Vrane, David R. et Marc K. Smith, “The influence of domain curvature on the stability of viscously-dominated thermocapillary flows”, in “Advances in multi-fluid flows”, Y. Renardy, A. Coward, D. Papageorgiore et S.-M. Sun, eds., 219–238 (1996).

# Ondes non-linéaires à une et deux dimensions dans une mince couche de fluide

## Résumé

Les ondes hydrothermales constituent un système modèle d'ondes non-linéaires dont nous étudions expérimentalement la transition vers le chaos spatio-temporel. A une dimension d'espace, par comparaison entre une cellule annulaire périodique et une cellule rectangulaire de taille finie, nous montrons que l'instabilité primaire en ondes ne survient dans ce dernier cas que lorsque la transition convectif /absolu est franchie. Nous isolons de même pour l'instabilité secondaire d'Eckhaus les régimes d'instabilité convective et absolue. A deux dimensions d'espace dans une cellule cylindrique, nous étudions la structuration de l'écoulement de base en rouleaux corotatifs, puis les différents modes d'instabilités en fonction de la différence de température appliquée et de la hauteur de fluide : spirales d'Archimède, cibles, fleurs et rayons apparaissent chacun par bifurcation de Hopf supercritique. Deux modes d'ondes hydrothermales sont alors distingués. Nous tentons d'expliquer l'existence de ces deux modes différents par une étude théorique et numérique : nous quantifions les effets de la courbure sur les instabilités à deux dimensions.

## One and two-dimensional non-linear waves in a thin liquid layer

### Abstract

Hydrothermal waves constitute an ideal non-linear waves system which we are studying experimentally the transition to spatio-temporal chaos. When the system is unidimensional, we compare an annular cell and a rectangular cell of finite extent and show that the primary instability into travelling waves occurs in the rectangular case only when the convective/absolute threshold is reached. With the same arguments, we distinguish two regimes for Eckhaus secondary instability in finite geometry : a convective and an absolute one. When the system is two-dimensional and the geometry is cylindrical, we study first the basic flow structuration, then the different instability modes depending on fluid depth and temperature difference across the cell : Archimedean spirals, targets, flowers and radial lines each appear through a supercritical Hopf bifurcation. Two hydrothermal waves modes are isolated. We present a theoretical and numerical study of the curvature effects in the two-dimensional geometry which may explain some of the differences between the two modes.