

Soutenance de thèse

21 octobre 2004

**Représentations des algèbres affinisées  
quantiques :  
q,t-caractères et produit de fusion**

David Hernandez

## Algèbres de Kac-Moody quantiques $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

Générateurs de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  :  $k_h$  ( $h \in \mathfrak{h}$ ),  $x_i^\pm$  ( $i \in I$ ).

Relations de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  ( $i \neq j$ ) :

$$k_h k_{h'} = k_{h+h'} , k_0 = 1$$

$$k_h x_j^\pm k_{-h} = q^{\pm \alpha_j(h)} x_j^\pm$$

$$[x_i^+, x_j^-] = \delta_{i,j} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$$

$$\sum_{r=0 \dots 1-C_{i,j}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - C_{i,j} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} (x_i^\pm)^{1-C_{i,j}-r} x_j^\pm (x_i^\pm)^r = 0$$

$$(\text{où } k_i = k_{r_i \alpha_i^\vee})$$

## Algèbres de Kac-Moody quantiques $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

Coproduit de Drinfeld-Jimbo :

$$\Delta(k_h) = k_h \otimes k_h$$

$$\Delta(x_i^+) = x_i^+ \otimes 1 + k_i^+ \otimes x_i^+$$

$$\Delta(x_i^-) = x_i^- \otimes k_i^- + 1 \otimes x_i^-$$

## Algèbres affines quantiques $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$

Réalisation de Drinfeld :

Générateurs :  $x_{i,r}^{\pm}$  ( $i \in I, r \in \mathbb{Z}$ ),  $k_h$  ( $h \in \mathfrak{h}$ ),  $h_{i,m}$  ( $i \in I, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ), éléments centraux  $c^{\pm 1/2}$

Relations :

$$k_h k_{h'} = k_{h+h'}, k_0 = 1, [k_h, h_{j,m}] = 0$$

$$[h_{i,m}, h_{j,m'}] = \delta_{m,-m'} \frac{[mB_{i,j}]_q c^m - c^{-m}}{m} \frac{1}{q - q^{-1}}$$

$$k_h x_{j,r}^{\pm} k_{-h} = q^{\pm \alpha_j(h)} x_{j,r}^{\pm}$$

$$[h_{i,m}, x_{j,r}^{\pm}] = \pm \frac{1}{m} [mB_{ij}]_q c^{\mp |m|/2} x_{j,m+r}^{\pm}$$

$$[x_{i,r}^+, x_{j,r'}^-] = \delta_{ij} \frac{c^{\frac{r-r'}{2}} \phi_{i,r+r'}^+ - c^{\frac{r'-r}{2}} \phi_{i,r+r'}^-}{q_i - q_i^{-1}}$$

## Algèbres affines quantiques $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$

$$\begin{aligned} & x_{i,r+1}^{\pm} x_{j,r'}^{\pm} - q^{\pm B_{ij}} x_{j,r'}^{\pm} x_{i,r+1}^{\pm} \\ &= q^{\pm B_{ij}} x_{i,r}^{\pm} x_{j,r'+1}^{\pm} - x_{j,r'+1}^{\pm} x_{i,r}^{\pm} \end{aligned}$$

Relations de Serre affines quantiques :

$$\sum_{\pi \in \Sigma_s} \sum_{k=0..s} (-1)^k \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_{q_i}$$

$$x_{i,r_{\pi(1)}}^{\pm} \cdots x_{i,r_{\pi(k)}}^{\pm} x_{j,r'}^{\pm} x_{i,r_{\pi(k+1)}}^{\pm} \cdots x_{i,r_{\pi(s)}}^{\pm} = 0$$

où dans  $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})[[z]]$  (resp. dans  $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})[[z^{-1}]]$ ) :

$$\sum_{m \geq 0} \phi_{i,\pm m}^{\pm} z^{\pm m} = k_{\pm r_i \alpha_i^{\vee}} \exp(\pm(q - q^{-1}) \sum_{m' \geq 1} h_{i,\pm m'} z^{\pm m'})$$

## $q$ -caractères

$$\chi_q : \text{Rep}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})) \rightarrow \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}]_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*}$$

$$V = \bigoplus_{\gamma} V_{\gamma}$$

$$V_{\gamma} = \{v \in V / \exists p \geq 0, \forall i \in I, m \geq 0, (\phi_{i,\pm m}^{\pm} - \gamma_{i,\pm m}^{\pm})^p \cdot v = 0\}$$

$$\sum_{i \in I, m \geq 0} \gamma_{i,\pm m}^{\pm} z^{\pm m}$$

$$= q_i^{\deg(Q_i) - \deg(R_i)} \frac{Q_i(zq_i^{-1})R_i(zq_i)}{Q_i(zq_i)R_i(zq_i^{-1})}$$

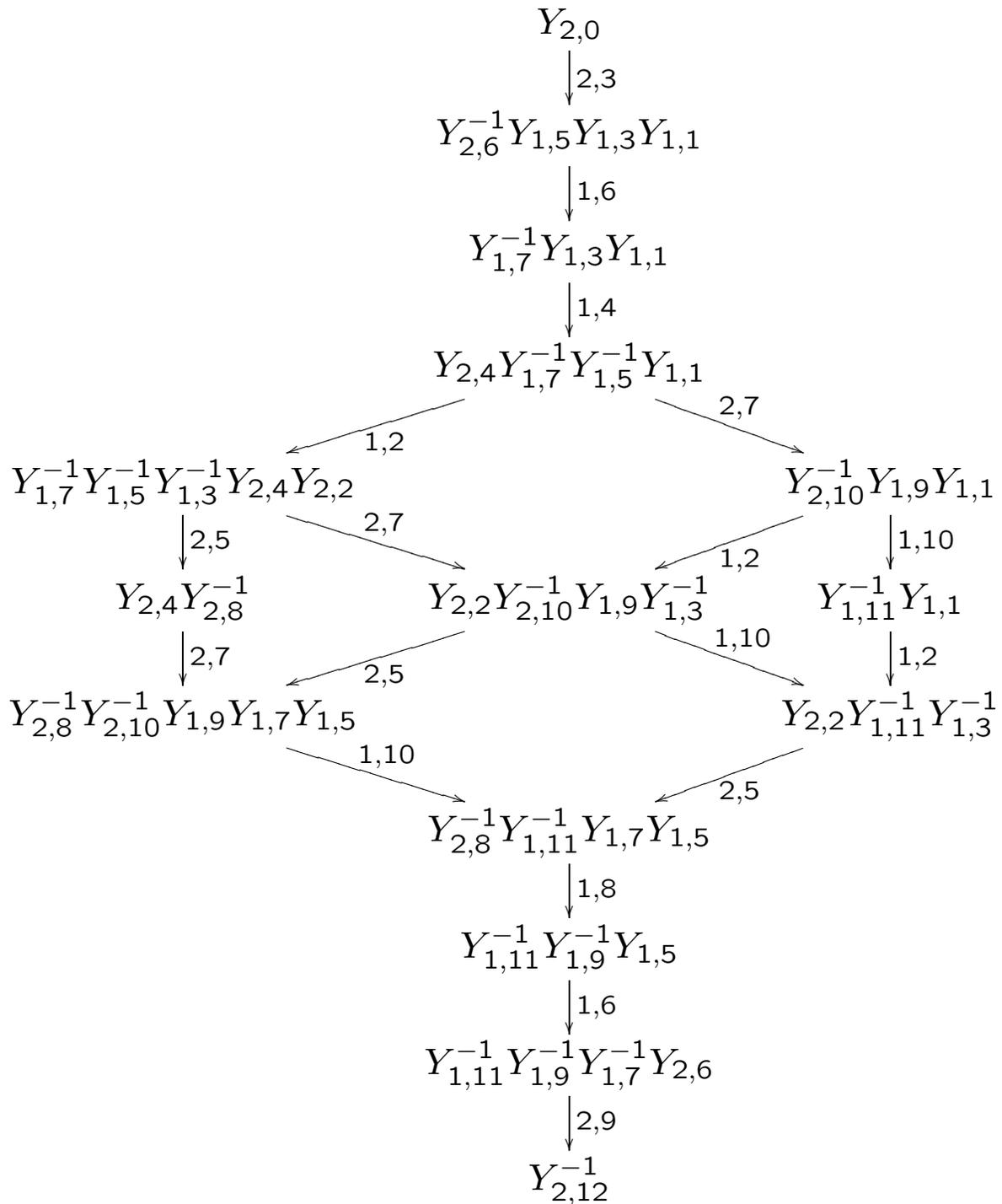
$$Q_i(z) = \prod_{a \in \mathbb{C}^*} (za - 1)^{q_{i,a}}, R_i(z) = \prod_{a \in \mathbb{C}^*} (za - 1)^{r_{i,a}}$$

$$m_{\gamma} = \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{q_{i,a} - r_{i,a}}$$

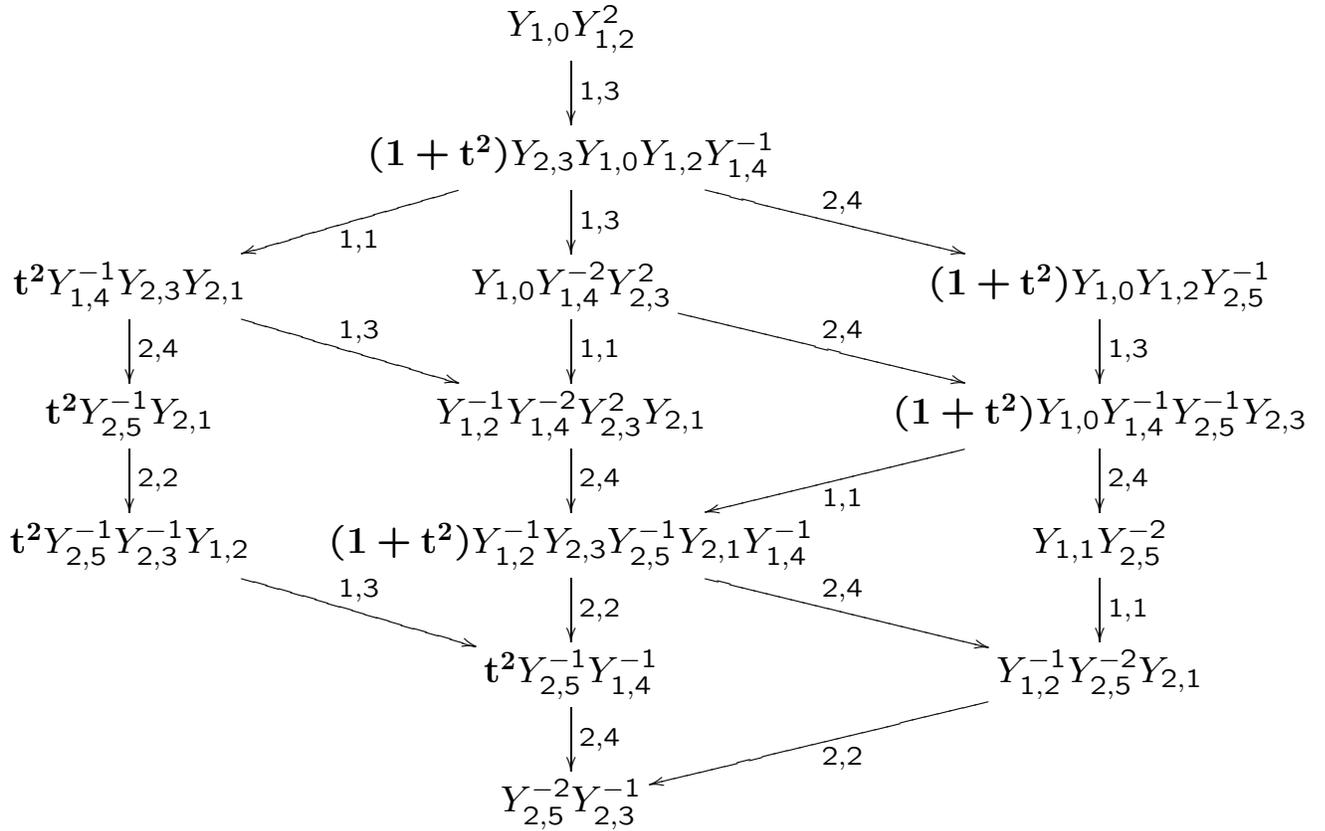
$$\chi_q(V) = \sum_{\gamma} \dim(V_{\gamma}) m_{\gamma}$$


---

**$q$ -caractères :  $\mathfrak{g} = G_2, m = Y_{2,0}$**



$q, t$ -caractères :  $\mathfrak{g} = A_2, m = Y_{1,0}Y_{1,2}^2$



## Construction de $\mathcal{Y}_t$ à partir de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{h}})$

$$a_i[m] = (q - q^{-1})h_{i,m}, \quad y_j[m] = \sum_{i \in I} \tilde{C}_{i,j}(q^m)a_i[m]$$

Dans  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{h}})[[h]]$  :

$$A_{i,l} = \exp\left(\sum_{m>0} h^m a_i[m] q^{lm}\right) \exp\left(\sum_{m>0} h^m a_i[-m] q^{-lm}\right)$$

$$Y_{i,l} = \exp\left(\sum_{m>0} h^m y_i[m] q^{lm}\right) \exp\left(\sum_{m>0} h^m y_i[-m] q^{-lm}\right)$$

$$t_l = \exp\left(\sum_{m>0} h^{2m} q^{lm} c_m\right)$$

(où  $c_m = (c^m - c^{-m})/m$ ).

$$\mathcal{Y}_u = \mathbb{Z}[A_{i,l}, Y_{i,l}, t_l]_{i \in I, l \in \mathbb{Z}}$$

$$\mathcal{Y}_t = \mathcal{Y}_u / \langle t_l = 1/l \neq 0 \rangle$$

## $t$ -analogues des opérateurs d'écrantage

Pour  $i \in I, l \in \mathbb{Z}$ , on définit dans  $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{h}})[[h]]$  :

$$S_{i,l} = \exp\left(\sum_{m>0} h^m \frac{a_i[m]}{q_i^m - q_i^{-m}} q^{lm}\right)$$

$$\exp\left(\sum_{m>0} h^m \frac{a_i[-m]}{q_i^{-m} - q_i^m} q^{-lm}\right)$$

$S_{i,t} : \mathcal{Y}_t \rightarrow \mathcal{Y}_{i,t}$  tel que pour  $\lambda \in \mathcal{Y}_t$  :

$$S_{i,t}(\lambda) = \frac{1}{t^2 - 1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} [S_{i,l}, \lambda]$$

$\mathcal{Y}_{i,t}$  est le sous  $\mathcal{Y}_t$ -module de  $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{h}})[[h]] / \langle t_l = 1/l \neq 0 \rangle$  engendré par les  $S_{i,l}$ .

## Propriétés axiomatiques des $q, t$ -caractères

$$\chi_{q,t} : \text{Rep}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})) \otimes \mathbb{Z}[t^{\pm}] \rightarrow \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm}, t^{\pm}]_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*}$$

1)  $\chi_{q,t}$  est  $\mathbb{Z}[t^{\pm}]$ -linéaire

$$2) \text{Im}(\chi_{q,t}) = \bigcap_{i \in I} \text{Ker}(S_{i,t})$$

3) Pour  $L(Y_{i,a})$  une représentation fondamentale,  $Y_{i,a}$  est le seul monôme dominant de  $\chi_{q,t}(L(Y_{i,a}))$

$$4) \chi_{q,t} \left( \overrightarrow{\bigotimes}_{l \in \mathbb{Z}} \bigotimes_{i \in I} (L(Y_{i,aq^l}))^{\otimes n_{i,l}} \right)$$

$$= \overrightarrow{\prod}_{l \in \mathbb{Z}} \prod_{i \in I} \chi_{q,t}(L(Y_{i,aq^l}))^{n_{i,l}}$$

## $t$ -déformation de l'algorithme de Frenkel-Mukhin

$m$  est fixé, et  $D(m) = (m_r)_{r \geq 0}$ .

On définit par récurrence sur  $r \geq 0$  les suites

$$(s(m_r)(t))_{r \geq 0} \in \mathbb{Z}[t^\pm]^\mathbb{N},$$

$$(s_J(m_r)(t))_{r \geq 0} \in \mathbb{Z}[t^\pm]^\mathbb{N} \quad (J \subsetneq I) :$$

$$s(m_0)(t) = 1, \quad s_J(m_0)(t) = 0$$

et pour  $r \geq 1, J \subsetneq I$  :

$$s_J(m_r)(t) = \sum_{r' < r} (s(m_{r'})(t) - s_J(m_{r'})(t)) [F_{J,t}(m_{r'})]_{m_r}$$

$$\text{si } m_r \notin B_J, s(m_r)(t) = s_J(m_r)(t)$$

$$\text{si } m_r \in B, s(m_r)(t) = 0$$

$(F_{J,t}(m_{r'}))$  est l'unique élément de  $\bigcap_{j \in J} \text{Ker}(S_{j,t})$  dont  $m_{r'}$  est l'unique monôme  $J$ -dominant).

---

## Exemple d'analogie des polynômes de Kazhdan-Lusztig

$C = B_2$  et  $m = Y_{2,0}Y_{1,5}$ . On a :

$$E_t(m) = L_t(m) + t^{-1}L_t(m'), \quad P_{m',m}(t) = t$$

avec

$$m' = tY_{2,0}Y_{1,5}A_{2,2}^{-1}A_{1,4}^{-1} = Y_{1,1}$$

et :

$$\begin{aligned} L_t(m') &= F_t(m') \\ &= m'(1 + tA_{1,2}^{-1}(1 + tA_{2,4}^{-1}(1 + tA_{1,6}^{-1}))) \end{aligned}$$

## La preuve de la décomposition triangulaire de $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ implique les formules de Jing

On a pour  $s \geq 0$  dans  $\mathbb{C}[z, w_1, \dots, w_s]$  :

$$0 = \sum_{\pi \in \Sigma_s} \epsilon(\pi) \sum_{k=0 \dots s} \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_q (z - q^{s-1} w_{\pi(1)}) \dots (z - q^{s-1} w_{\pi(k)}) \\ (w_{\pi(k+1)} - q^{s-1} z) \dots (w_{\pi(s)} - q^{s-1} z) \\ \prod_{1 \leq r < r' \leq s} (w_{\pi(r)} - q^2 w_{\pi(r')})$$

## Déformation du coproduit de Drinfel'd

$u$  paramètre de renormalisation,  $\mathcal{C} = \mathbb{C}((u))$ .  
 $\tilde{\mathcal{U}}'_q(\widehat{\mathfrak{g}}) = \mathcal{U}'_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{C}$ , sans les relations de Serre.

$$\Delta_u : \tilde{\mathcal{U}}'_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}'_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \widehat{\otimes} \tilde{\mathcal{U}}'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$$

morphisme de  $\mathcal{C}$ -algèbres tel que pour  $i \in I$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ ,  
 $m \geq 0$ ,  $h \in \mathfrak{h}$  :

$$\Delta_u(x_{i,r}^+) = x_{i,r}^+ \otimes 1 + \sum_{l \geq 0} u^{r+1} (\phi_{i,-l}^- \otimes x_{i,r+l}^+)$$

$$\Delta_u(x_{i,r}^-) = u^r (1 \otimes x_{i,r}^-) + \sum_{l \geq 0} u^l (x_{i,r-l}^- \otimes \phi_{i,l}^+)$$

$$\Delta_u(\phi_{i,\pm m}^\pm) = \sum_{0 \leq l \leq m} u^{\pm l} (\phi_{i,\pm(m-l)}^\pm \otimes \phi_{i,\pm l}^\pm)$$

$$\Delta_u(k_h) = k_h \otimes k_h$$

### Catégorie $\mathcal{O}^R(\mathcal{U}'_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$

Pour  $R \geq 0$ ,  $\mathcal{O}^R(\widetilde{\mathcal{U}}'_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$  est la catégorie des modules  $V \in \mathcal{O}(\widetilde{\mathcal{U}}'_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$  tels que pour  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , on a une  $\mathcal{C}$ -base  $(v_\alpha^\lambda)_\alpha$  de  $V_\lambda$  satisfaisant :

- i) pour  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha, \beta$ , le coefficient de  $x_{i,m}^+ \cdot v_\alpha^\lambda$  sur  $v_\beta^{\lambda+\alpha_i}$  (resp. de  $x_{i,m}^- \cdot v_\alpha^\lambda$  sur  $v_\beta^{\lambda-\alpha_i}$ ) est dans  $\mathbb{C}[[u]]$  si  $m \geq 0$ , dans  $u^{Rm}\mathbb{C}[[u]]$  pour  $m \leq 0$ .
- ii) pour  $m \geq 0$ ,  $\alpha, \beta$  le coefficient de  $\phi_{i,-m}^- \cdot v_\alpha^\lambda$  sur  $v_\beta^\lambda$  est dans  $u^{-mR}\mathbb{C}[[u]]$
- iii) pour  $m \geq 0$ ,  $\alpha, \beta$  le coefficient de  $\phi_{i,m}^+ \cdot v_\alpha^\lambda$  sur  $v_\beta^\lambda$  est dans  $\mathbb{C}[[u]]$

## Exemple de la procédure de fusion

$$V = L(1 - za) = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1,$$

$$W = L(1 - zb) = \mathbb{C}w_0 \oplus \mathbb{C}w_1 \text{ dans } \mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})).$$

$$X = i(V) \otimes_0 i(W) = \mathcal{C}e_1 \oplus \mathcal{C}e_2 \oplus \mathcal{C}e_3 \oplus \mathcal{C}e_4$$

$$e_1 = v_0 \otimes w_0, e_2 = x_0^- \cdot e_1$$

$$e_3 = -a^{-1}x_1^- \cdot e_1 + e_2, e_4 = qx_0^- \cdot e_2$$

$$X \supset \tilde{X} = \mathbb{C}[u^\pm]e_1 \oplus \mathbb{C}[u^\pm]e_2 \oplus \mathbb{C}[u^\pm]e_3 \oplus \mathbb{C}[u^\pm]e_4$$

$\tilde{X}$  stable par l'action de  $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$

$(X)_{u=1} = \tilde{X}/(1 - u)$  est toujours généré par  $e_1$ . Il est simple pour  $ab^{-1} \neq q^{\pm 2}$ .

Si  $ab^{-1} = q^2$  (resp.  $ab^{-1} = q^{-2}$ ),  $\mathbb{C}e_3$  (resp.  $\mathbb{C}((q^2 - 1)e_2 + e_3)$ ) est un sous module propre.

---