



HAL
open science

Conception d'organes automobiles par optimisation topologique

Sonia Calvel

► **To cite this version:**

Sonia Calvel. Conception d'organes automobiles par optimisation topologique. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2004. Français. NNT: . tel-00007196

HAL Id: tel-00007196

<https://theses.hal.science/tel-00007196>

Submitted on 25 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE III
U.F.R. Mathématiques Informatique Gestion

THÈSE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III

Discipline : Mathématiques Appliquées

Présentée et soutenue par

Sonia CALVEL

le mardi 5 octobre 2004

Conception d'organes automobiles par optimisation topologique

Directeur de thèse :

M. MONGEAU Maître de conférence HDR, Université Paul Sabatier

Composition du jury :

M.P. BENDSØE	Professeur, Technical University of Denmark	(Rapporteur)
A. TITS	Professeur, University of Maryland	(Rapporteur)
C. BÈS	Professeur, Université Paul Sabatier	(Examineur)
M. MASMOUDI	Professeur, Université Paul Sabatier	(Examineur)
Y. TOURBIER	Dr, Chef de projet, Renault S.A.	(Examineur)
S. GRIHON	Dr, Chef de service, Airbus Toulouse	(Invité)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Marcel Mongeau qui a dirigé ces travaux. Ses conseils scientifiques et humains m'ont été précieux.

Je suis reconnaissante à Martin Bendsøe et André Tits d'avoir accepté, malgré la distance, d'être rapporteurs de cette thèse.

J'exprime toute ma gratitude à Yves Tourbier, pour m'avoir proposé cette thèse et pour l'avoir suivie au sein de Renault. Son investissement a été essentiel pour mener à bien ce travail de recherche.

Je remercie également Mohamed Masmoudi, Christian Bès et Stéphane Grihon d'être membres du jury.

J'adresse mes remerciements à tous les membres du laboratoire Mathématiques et Applications de l'Université Paul Sabatier, pour m'avoir accueillie lors de mes passages à Toulouse.

J'ai une pensée particulière pour toutes les personnes que j'ai côtoyées chez Renault au cours de ces trois ans. En particulier, merci à Nadine, Caroline, Gaëlle, Marc, Magali et François pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail ainsi que pour l'aide qu'ils ont su m'apporter.

Enfin, je remercie du fond du coeur mon entourage, famille et amis, de m'avoir soutenue et encouragée tout au long de ces trois ans, et tout particulièrement, un grand merci à Stéphane.

Table des matières

Introduction	4
1 Motivations pratiques et applications Renault	7
1.1 L'allégement chez les constructeurs automobiles	7
1.2 Exemples de composants automobiles	9
1.2.1 Une pièce de la caisse : la face avant technique	9
1.2.2 Une pièce du groupe moto-propulseur : la face accessoires	13
1.3 Apports de l'optimisation topologique pour la conception	14
1.4 Limitations actuelles de l'optimisation topologique pour la conception	18
2 Notions préalables en mécanique des structures	21
2.1 La théorie de l'élasticité linéaire	21
2.1.1 Définitions préalables	21
2.1.2 Introduction à l'élasticité linéaire	24
2.1.3 La méthode variationnelle en élasticité	26
2.1.4 Méthode des éléments finis en élasticité	28
2.2 Quelques critères mécaniques utilisés chez Renault	31
2.2.1 Critères statiques	32
2.2.2 Critères dynamiques	32
2.3 Calcul d'une base modale et méthode de recomposition	35
2.3.1 Calcul de la base modale	36
2.3.2 Méthode de recomposition modale	36
3 Méthodes d'optimisation topologique	41
3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception	42
3.1.1 Méthodes conduisant à un problème d'optimisation discrète	43
3.1.2 Les méthodes d'homogénéisation	50
3.1.3 La méthode SIMP	58
3.1.4 Difficultés fréquemment rencontrées avec les méthodes de distribution de matière	61
3.2 Les méthodes basées sur le gradient de forme	63
3.2.1 Le gradient de forme	63

3.2.2	La méthode des lignes de niveaux	65
3.2.3	Le gradient topologique	68
3.3	Les méthodes évolutives	70
3.4	Choix d'une méthode adaptée à notre problématique	71
4	Optimisation numérique	75
4.1	Méthodes d'optimisation locale dans le cas d'un problème sans con- trainte	77
4.1.1	Définitions	77
4.1.2	Méthodes de descente	78
4.1.3	Méthode de Newton	79
4.2	Méthodes d'optimisation locale dans le cas d'un problème avec con- traintes	80
4.2.1	Problèmes avec contraintes d'égalité	81
4.2.2	Problèmes avec contraintes d'inégalité	83
4.3	Calcul des sensibilités	89
4.3.1	Calcul de l'état adjoint	90
4.4	Algorithmes d'optimisation globale	91
4.4.1	Les méthodes déterministes	92
4.4.2	Les méthodes stochastiques	93
5	Mise en oeuvre de la méthode : Choix algorithmiques	97
5.1	Étude et choix algorithmiques pour la méthode SIMP	99
5.1.1	Réglage du paramètre p de la méthode SIMP	100
5.1.2	Étude de la forme de la fonction de pénalisation de la méthode SIMP	103
5.2	Formulation mathématique des contraintes dynamiques	107
5.2.1	Discrétisation et agrégation	110
5.2.2	Modélisation de la courbe de compliance dynamique	117
5.3	Un problème d'optimisation globale	120
5.4	Étude et choix réalisés pour l'algorithme CFSQP	132
6	La maquette logicielle <code>DynamiT0</code> : application à une pièce automobile	135
6.1	La maquette logicielle <code>DynamiT0</code>	135
6.1.1	Architecture de <code>DynamiT0</code>	136
6.1.2	Entrées - Sorties de la maquette	137
6.1.3	Exemple d'application à une console cubique	139
6.2	Optimisation topologique d'une face accessoires	143
	Conclusion	158

Introduction

En raison de l'exigence croissante des clients en terme de sécurité et de confort (notamment vibratoire et acoustique), la masse des véhicules automobiles est en constante augmentation depuis 1980. Cette dérive pondérale présente des effets négatifs sur la consommation, sur la performance et plus généralement sur l'agrément de conduite. Ainsi, la plupart des constructeurs automobiles, et notamment Renault, mène des études afin d'alléger les véhicules tout en respectant un cahier des charges garant des exigences de confort et de sécurité.

L'objectif de l'optimisation topologique est de déterminer, très en amont des projets, les caractéristiques d'une pièce ou d'une structure mécanique. Il s'agit de définir dans l'espace disponible (place que la pièce peut occuper dans le véhicule) où il est avantageux de mettre de la matière. Le calcul est introduit suffisamment tôt dans le processus de conception afin d'envisager et de tester des solutions originales et non pas forcément de reconduire des solutions adoptées sur des projets véhicules précédents, pour lesquelles les possibilités d'amélioration sont limitées.

Aujourd'hui l'optimisation topologique d'un organe mécanique n'est possible qu'à partir d'un cahier des charges simplifié car toutes les contraintes déclinées sur les projets véhicules (notamment celles concernant le comportement vibro-acoustique de la pièce) ne peuvent être prises en compte dans les solutions logicielles actuellement disponibles sur le marché. Ceci est un frein important à l'utilisation de l'optimisation topologique dans le processus de conception d'un constructeur automobile comme Renault.

Ainsi, l'enjeu principal de la thèse est de développer une méthodologie d'optimisation topologique et une solution logicielle associée, permettant la prise en compte d'un cahier des charges intégrant des contraintes dynamiques et conforme à ceux utilisés chez Renault.

Dans le chapitre 1 de ce document, nous développerons la problématique d'allègement et ses enjeux pour Renault. Nous décrirons à l'aide d'exemples, les méthodes actuelles de conception, leurs limitations et la problématique à laquelle nous nous intéressons (prise en compte de critères dynamiques, primordiaux dans la conception de composants automobiles).

Le chapitre 2 concernera les notions de mécanique nécessaires à la compréhension

des termes utilisés par la suite. Après avoir rappelé la théorie de l'élasticité linéaire, nous introduirons les critères dynamiques que les ingénieurs de Renault utilisent pour la conception de pièces automobiles.

Nous ferons dans le chapitre 3 un état de l'art des méthodes d'optimisation topologique. Nous comparerons ces différentes techniques et nous justifierons le choix de la méthode des matériaux fictifs appelée SIMP, qui nous paraît la plus adaptée à la résolution de notre problème particulier.

Cette méthode d'optimisation topologique conduit à un problème d'optimisation continue de grande dimension. Nous discuterons donc dans le chapitre 4 des méthodes d'optimisation numérique adaptées à la résolution d'un tel problème, et notamment de la méthode FSQP que nous avons retenue. Nous terminerons ce chapitre par un bref état de l'art des méthodes d'optimisation globale.

Les deux derniers chapitres concerneront l'application et l'évaluation de la méthodologie d'optimisation topologique que nous proposons.

Plus précisément, le chapitre 5 concernera nos choix algorithmiques pour la mise en oeuvre de la maquette logicielle `DynamiTO` que nous avons développée : réglages des paramètres de la méthode SIMP et de l'algorithme d'optimisation FSQP.

L'architecture et le principe de fonctionnement de `DynamiTO` seront décrits dans le chapitre 6. Nous donnerons également dans ce dernier chapitre les résultats obtenus pour la conception d'une pièce du moteur automobile : la face accessoires.

Chapitre 1

Motivations pratiques et applications Renault

Nous décrivons dans ce chapitre la problématique de conception des pièces automobiles.

Afin d'illustrer notre propos et de mettre en évidence la difficulté de résolution de tels problèmes, nous citerons l'exemple de deux composants automobiles. Nous parlerons alors des techniques actuelles de résolution et de ce que peuvent apporter les méthodes de conception sans a priori. Enfin, pour terminer, nous expliquerons les limitations actuelles de l'optimisation topologique et les solutions apportées par ce travail de recherche.

1.1 L'allégement chez les constructeurs automobiles

La réduction des gaz à effet de serre et plus particulièrement la réduction des émissions de CO₂ fait partie des principaux challenges environnementaux mondiaux. L'accumulation de ces gaz dans l'atmosphère est en effet considérée comme une des causes du réchauffement climatique observé depuis plusieurs années.

Les véhicules automobiles étant en partie responsables des émissions de ces gaz (17% des émissions de CO₂ provenant de la combustion des énergies fossiles - étude réalisée par Booz, Allen et Hamilton), l'Association des Constructeurs Européens d'Automobiles (ACEA) a proposé en 1997, suite à la conférence de Kyoto, de réduire en Europe les émissions moyennes de CO₂, sur un cycle de conduite normalisé, à 140g par kilomètre en 2008, ce qui représente une réduction de 25% par rapport à la valeur de référence en 1995.

Dans un véhicule, les émissions de CO₂ sont directement corrélées à la consommation. Ainsi, hormis les gains liés à l'amélioration du rendement du moteur, l'aérodynamique et le poids du véhicule influent sur les quantités émises. Par exemple, si on prend un véhicule du type Scénic Essence émettant environ 160g de CO₂ par

kilomètre, une réduction de masse de 10kg permet un gain d'environ 1g de CO₂ par kilomètre. Sachant, de plus, que les réductions de poids permettent des économies de matière première, une amélioration de la performance et plus généralement un meilleur agrément de conduite, construire des véhicules les plus légers possible est un thème prépondérant dans l'industrie automobile.

Or, en parallèle les exigences en confort acoustique et vibratoire, en niveau d'équipement réglementaire ou de confort et surtout en matière de sécurité n'ont cessé d'augmenter, ce qui s'est traduit par un alourdissement croissant des véhicules. Par exemple, 225kg séparent une R19 de 1989 et une Mégane2 berline de 2002, soit 22% d'augmentation de masse en 13 ans, équivalent à environ 17kg par an (cf. figure 1.1).

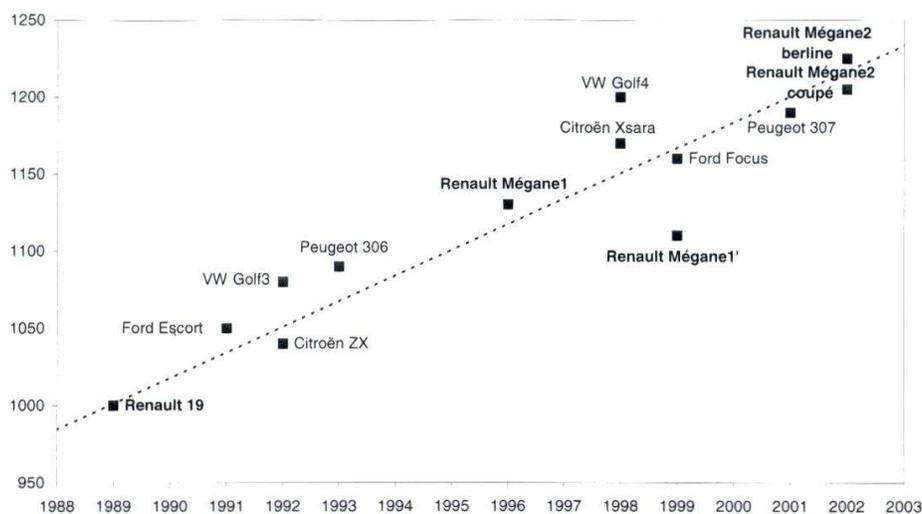


FIG. 1.1 – Évolution de la masse des véhicules en fonction de l'année de sortie.

L'allègement des véhicules est donc devenu une problématique cruciale chez les constructeurs automobiles. L'objectif poursuivi est de minimiser la masse des véhicules tout en améliorant les prestations¹ sécurité, acoustique et confort.

Aussi, la conception de chaque composant mécanique consiste souvent à trouver un compromis entre des objectifs contradictoires : diminuer la masse et améliorer les niveaux de différentes prestations (acoustique, sécurité, ...). Nous illustrerons cette problématique au travers d'exemples donnés dans la partie 1.2 et nous montrerons dans la partie 1.3 comment un outil de conception sans a priori peut faciliter l'obtention de solutions.

1. La prestation client est l'ensemble de ce qu'attend une personne d'une automobile, de ce qu'elle peut ressentir en regardant ou en utilisant un véhicule, ce dont elle peut parler en bien ou en mal à son propos.

1.2 Exemples de composants automobiles

Dans un véhicule, quatre zones représentent plus de 80% de la masse. Il s'agit par ordre d'importance décroissante, de la caisse², du groupe moto-propulseur³, des sièges et du châssis (liaison au sol).

Dans la conception des véhicules, des objectifs d'allègement sont déclinés au niveau de la conception de très nombreuses pièces. Afin d'illustrer le type de cahier des charges pris en compte et notamment de montrer l'importance des critères dynamiques (réponses aux excitations du moteur), nous allons présenter le cas de deux composants automobiles : une pièce de la caisse, appelée face avant technique et une pièce du groupe moto-propulseur appelée face accessoires.

Ces deux exemples nous permettront également de décrire les méthodes actuelles de conception et d'introduire celle qui est proposée dans cette thèse.

1.2.1 Une pièce de la caisse : la face avant technique

La face avant technique d'un véhicule automobile (cf. figure 1.2) est une pièce de la caisse du véhicule qui se trouve en avant du bloc moteur et qui a pour fonction de supporter différents organes comme l'éclairage principal et auxiliaire, le système de refroidissement moteur (radiateur), les systèmes d'absorption de chocs et les pare-chocs, les guides d'air, l'électronique embarquée, les serrures et butées de capot, divers réservoirs et autres équipements traditionnellement présents dans cette partie du véhicule (cf. figure 1.3).

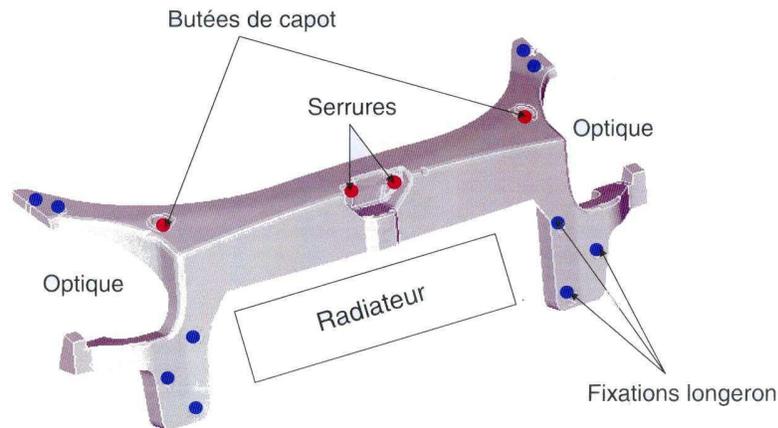


FIG. 1.2 – Une face avant technique.

2. Tout le véhicule sauf les trains, les roues, le moteur, les échappements et les ouvrants.

3. Moteur, boîte de vitesse et transmission.

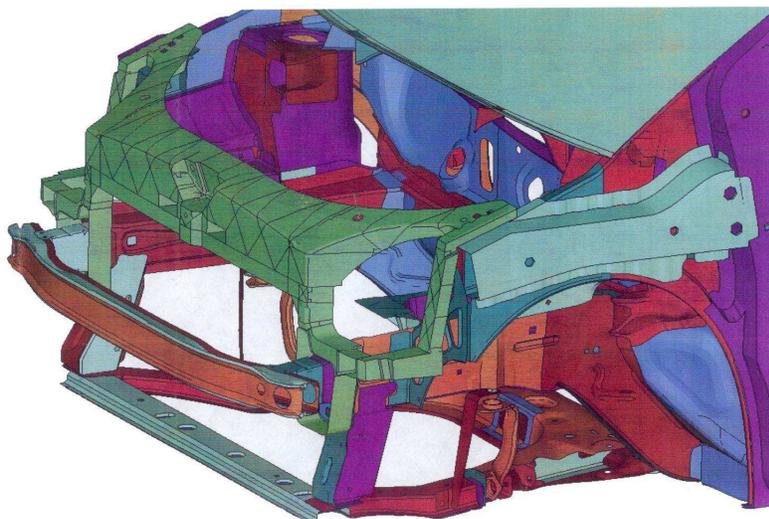


FIG. 1.3 – *La face avant technique dans la caisse.*

La face avant technique est une pièce impactant les prestations vibro-acoustiques et endurance de la caisse puisque sa position est transversale (elle relie les deux côtés de caisse).

Aujourd'hui, cette pièce est souvent en plastique pour des raisons d'allègement et de facilité d'accrochage des accessoires, ou composite (plastiques et acier). Elle pèse en général entre 3 et 4kg.

La problématique de conception d'une face avant technique consiste ainsi à trouver une pièce de masse minimale qui respecte les contraintes suivantes (les notions mécaniques évoquées sont définies dans le chapitre 2) :

Contraintes de résistance : raideurs dites statiques

- Contrainte de raideur au niveau des butées de capot et de la serrure, qui est essentielle pour éviter que la face avant technique ne s'affaisse et que les optiques ne cassent si on claque le capot trop fort. On contraint la raideur statique, c'est-à-dire la déformation sous un effort donné, au niveau des deux butées de capot et au niveau de la gâche de la serrure.
- Contrainte de résistance du capot à l'arrachement pour éviter que la serrure ne se rompe et le capot ne se soulève à cause d'une forte prise au vent, par exemple lorsqu'on roule sur autoroute.

Prestations en vibro-acoustique : raideurs dites dynamiques

La face avant technique joue un rôle primordial dans les prestations vibro-acoustiques de la caisse. Elle doit permettre de « filtrer » le bruit et les vibrations liés au fonctionnement du moteur, afin qu'ils ne soient pas répercutés sur

1.2 Exemples de composants automobiles

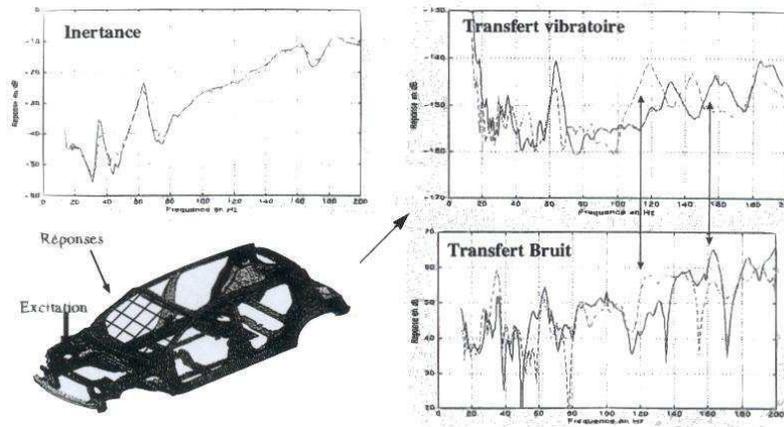


FIG. 1.4 – Mesures de raideurs dynamiques sur la caisse.

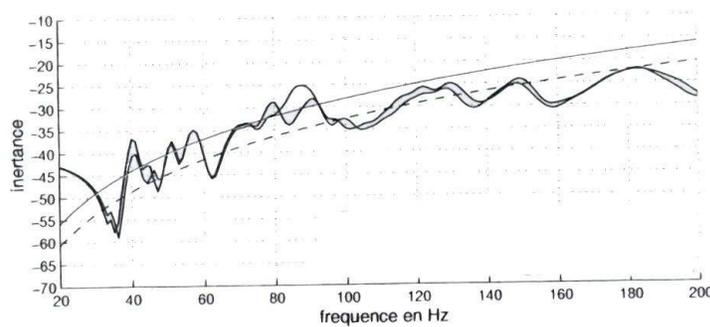


FIG. 1.5 – Inertance mesurée sur le support moteur.

le pare-brise, ce qui se manifesterait par un bruit dans l'habitacle perceptible par le conducteur et les passagers.

La face avant technique permet de rigidifier la caisse en vue de diminuer l'impact des excitations du moteur. On évalue sa raideur selon deux types de critères (cf. figure 1.4) :

- L'inertance du support moteur : On trace les courbes d'inertance⁴ du support moteur (point d'entrée des excitations du moteur vers la caisse) afin de vérifier que la face avant technique joue bien son rôle de « filtre ».

On pourra voir un exemple de courbe d'inertance sur la figure 1.5.

Sur une telle courbe, on peut voir plusieurs pics correspondant aux grands

4. On appelle inertance ou raideur dynamique (en un point et dans une direction de l'espace) la décomposition en fréquences de la réponse de la structure à une excitation (cf. chapitre 2).

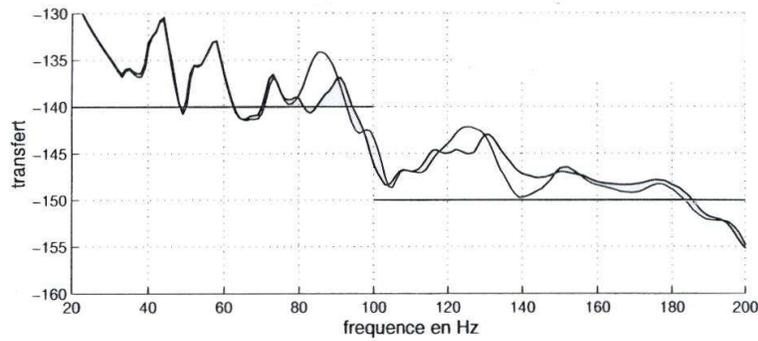


FIG. 1.6 – *Transfert acoustique entre le support moteur et le pare-brise.*

modes propres de la caisse. On note qu'ici il ne servirait à rien d'augmenter la fréquence du (ou des) premier(s) mode(s) car le spectre d'excitation du moteur (lorsque le régime varie) est très grand et les modes décalés seraient quand même excités. Il s'agit ainsi d'abaisser les pics de la courbe d'inertance, c'est-à-dire d'imposer que la courbe soit au-dessous d'une courbe de référence donnée.

- Le transfert acoustique entre le support moteur et le pare-brise : On trace les courbes de transfert⁵ entre le point d'entrée des excitations du moteur et le pare-brise (un exemple de transfert est donné sur la figure 1.6). Le cahier des charges impose que la courbe calculée reste, pour toutes les fréquences, au-dessous d'une courbe de référence donnée (appelée calibre). Le but recherché est que les excitations du moteur ne se répercutent pas comme une vibration du pare-brise, ce qui conduirait à un bruit perceptible par les occupants du véhicule.

Prestations endurance et sécurité

Dans le processus actuel, une fois que l'on a trouvé la face avant technique de masse minimale et respectant le cahier des charges, on vérifie a posteriori les prestations liées à l'endurance et à la sécurité.

Ainsi, dans la conception de la face avant technique, les aspects dynamiques (inertances et transferts acoustiques) sont essentiels pour assurer les bonnes performances vibratoires et acoustiques du véhicule.

Pourtant, il est difficile et peu intuitif de comprendre quelle est l'influence de la face avant technique sur les inertances et les transferts de la caisse. On verra dans la partie 1.3 comment des procédures automatiques d'optimisation et notamment les

5. On appelle transfert acoustique d'un point A à un point B (dans une direction donnée de l'espace) la décomposition en fréquences de la réponse de la structure au point B à une excitation au point A (cf. chapitre 2).

1.2 Exemples de composants automobiles

méthodes d'optimisation topologique peuvent aider les ingénieurs à aborder un tel problème de conception.

1.2.2 Une pièce du groupe moto-propulseur : la face accessoires

Le groupe moto-propulseur est une source de bruits et de vibrations importante dont on cherche à réduire l'impact.

La résolution de ce problème passe par un travail en réponse forcée : on simule sur banc l'excitation du groupe moto-propulseur (au niveau des quatre pistons sur le vilebrequin) à certaines fréquences (correspondant aux différents régimes – tours/minute du moteur), puis on mesure les accélérations qui en résultent. Le problème consiste à minimiser ces accélérations.

Sur le graphique obtenu (ensemble de courbes représentant les accélérations du groupe moto-propulseur pour différents régimes du moteur), les fortes accélérations correspondent soit aux modes propres du groupe moto-propulseur, soit à ceux de pièces particulières (comme la face accessoires). Pour réduire tous les pics de la courbe, on recherche quelles sont les pièces excitées qui sont entrées en résonance. Un cahier des charges est alors décliné pièce par pièce, afin d'élever leurs fréquences propres et d'améliorer leur comportement dynamique (optimisation d'inertances).

On prend ici l'exemple d'une face accessoires qui fait partie du groupe moto-propulseur. Elle est fixée au moteur par le carter-cylindres et permet l'accrochage au moteur du compresseur d'air et de l'alternateur (cf. figure 1.7). La face accessoires est une petite pièce légère (environ 2kg) qui doit supporter des accessoires relativement lourds : le compresseur et l'alternateur pèsent chacun environ 6kg. La raideur et la résistance de la face accessoires sont donc primordiales.

Il s'agit de minimiser la masse tout en s'assurant que la première fréquence propre soit au-dessus d'une valeur donnée. Il est également nécessaire que la face accessoires filtre les excitations du moteur et puisse supporter les accessoires, ce qui revient à imposer que les inertances (raideurs dynamiques) au niveau de tous les points d'accrochage (points d'accrochage de la face accessoires au compresseur et à l'alternateur) soient supérieures à une valeur de référence.

Dans ce cas, le cahier des charges ne comporte que des contraintes dynamiques. On note ainsi, comme pour la face avant technique, l'importance de telles contraintes pour assurer les prestations vibratoires et acoustiques du véhicule.

Nous avons illustré, au travers de ces deux exemples, les objectifs qui guident la conception dans l'industrie automobile. Nous expliquons dans la partie suivante quelles sont les méthodes actuelles de résolution et le rôle que peut jouer l'optimisation topologique.

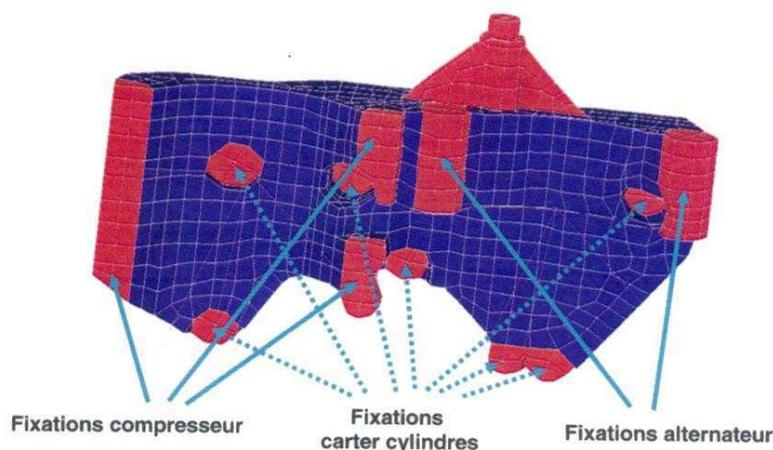


FIG. 1.7 – *Une Face Accessoires.*

1.3 Apports de l'optimisation topologique pour la conception

Traditionnellement, l'ingénieur de bureau d'étude résout de tels problèmes de conception en procédant par essais successifs. À partir de son expérience et de son savoir-faire, il dessine une première pièce, puis vérifie par le calcul qu'elle respecte le cahier des charges. Si ce n'est pas le cas, il modifie son dessin et ainsi de suite jusqu'au respect des contraintes. Dans la plupart des cas, plusieurs itérations sont nécessaires. Cette façon de faire est ainsi souvent très coûteuse en temps et imprécise.

Elle est actuellement de plus en plus souvent remplacée par l'utilisation de logiciels de modélisation numérique et d'optimisation (logiciels d'optimisation de forme « classique ») qui permettent d'analyser de nombreuses possibilités et qui automatisent la recherche de la forme optimale. Il existe de nombreux logiciels qui permettent d'optimiser un composant sous différents critères en modifiant itérativement une forme de départ. Comme expliqué dans [12] ou [26], l'inconvénient de ces méthodes est que le résultat obtenu dépend fortement du choix de la géométrie initiale. En effet, au cours des itérations, les formes successives ne peuvent varier que par leur frontière, tandis que leur topologie reste fixe : la structure garde le même nombre de composantes, de bords et de trous (cf. figure 1.8).

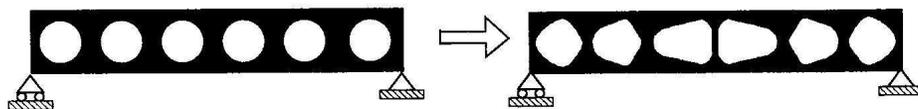


FIG. 1.8 – *Optimisation de forme classique.*

1.3 Apports de l'optimisation topologique pour la conception

Ces méthodes peuvent par ailleurs être coûteuses en temps de calcul car si une forme s'éloigne trop de la géométrie initiale au cours des itérations, il sera nécessaire de remailler la structure.

L'optimisation de forme est devenue dans les années 80 un outil répandu pour optimiser la forme des structures et elle est utilisée dans l'industrie automobile depuis ces années-là. Dans les années 90, l'optimisation de forme a gagné en popularité (voir [18] pour plus de détails). Toutefois, même si c'est devenu un outil facilement accessible aux ingénieurs grâce à l'existence de logiciels performants, comme évoqué précédemment, les caractéristiques des formes obtenues sont limitées. Le calcul intervient lorsque la forme géométrique de la pièce est déjà avancée, les modifications apportées sont mineures et l'architecture de la pièce reste quasiment la même. Ainsi, comme on part souvent de solutions connues ou expérimentées sur des véhicules précédents, on reste dans des schémas classiques.

L'optimisation topologique remet en cause la topologie de la pièce (c'est-à-dire le nombre de composantes, de bords et de trous) et permet ainsi de bénéficier d'un potentiel d'optimisation plus élevé. Elle consiste à effectuer, avant l'optimisation proprement dite de la structure, une optimisation de sa topologie (cf. figure 1.9).

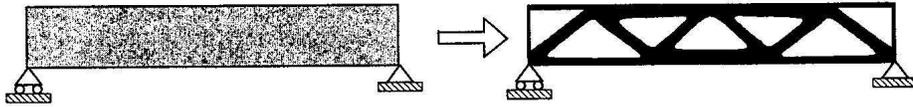


FIG. 1.9 – *Optimisation topologique.*

Dans cette optique, il s'agit d'un outil de conception sans a priori, permettant de choisir une topologie initiale adéquate. Cela intervient, en avant-projet, comme une aide objective pour la sélection des caractéristiques générales de la structure. Le calcul étant introduit très tôt dans le processus de conception, l'optimisation topologique permet d'éviter de reconduire les solutions adoptées sur des projets véhicules précédents.

D'après [18], l'industrie automobile a commencé à s'intéresser à l'optimisation topologique à la fin des années 80 - début des années 90. Les exemples que l'on trouve dans la littérature du milieu des années 90 restent toutefois assez théoriques et l'optimisation topologique n'est pas aujourd'hui utilisée à son plein potentiel dans l'industrie automobile (aussi bien chez les constructeurs que chez les équipementiers), notamment à cause des limitations que nous décrirons dans la partie suivante, au travers de l'exemple de la face avant technique.

Parmi les logiciels d'optimisation topologique existants, on peut citer le logiciel OPTISTRUCT de la société ALTAIR. Il est utilisé chez Renault et a permis de

résoudre divers problèmes de conception. Nous présentons ici celui concernant la forme d'un support de boîte de vitesse. Il s'agissait dans ce cas de minimiser la masse tout en respectant un cahier des charges à la fois statique (compliance à minimiser) et dynamique (fréquence propre à élever). On a représenté sur la figure 1.10 le domaine d'encombrement maximal de la pièce qui est le point de départ de l'algorithme d'optimisation topologique. La figure 1.11 représente la topologie préconisée par



FIG. 1.10 – *Encombrement maximal d'un support de boîte de vitesse.*

OPTISTRUCT. La dernière étape consiste à générer un modèle CAO de la pièce



FIG. 1.11 – *Topologie préconisée par le logiciel OPTISTRUCT.*

préconisée (cf. figure 1.12 droite) qui peut-être comparé à la version antérieure (cf.

1.3 Apports de l'optimisation topologique pour la conception

figure 1.12 gauche). Cet exemple illustre bien l'intérêt de l'optimisation topologique car on obtient une forme qui n'était pas intuitive (à cause de sa dissymétrie) et qui est conforme au cahier des charges.

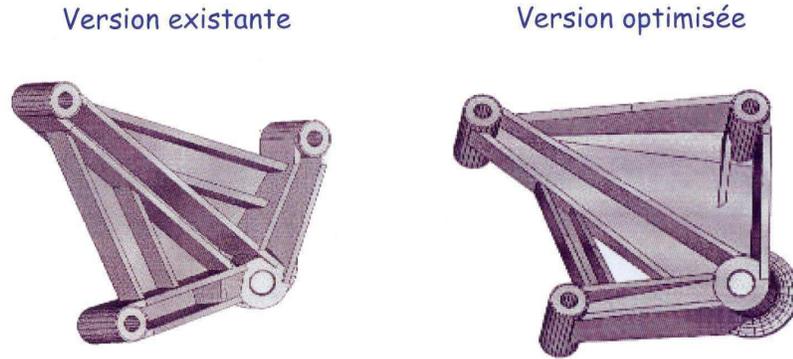


FIG. 1.12 – Exemple d'application du logiciel OPTISTRUCT.

Toutefois, comme nous le verrons dans la partie suivante, les logiciels actuellement disponibles (comme OPTISTRUCT) ne permettent de traiter que partiellement la plupart des cahiers des charges exigés chez Renault. En effet, par exemple, le logiciel OPTISTRUCT ne peut résoudre, dans sa version actuelle, que les problèmes d'optimisation dont la fonction objectif et les contraintes correspondent à :

- la masse,
- le volume,
- la compliance,
- un des modes propres,
- le déplacement d'un noeud,
- une combinaison pondérée des fonctions précédentes.

Il n'est donc pas possible de travailler avec par exemple le tenseur des contraintes ou avec les raideurs dynamiques (inertance ou transfert), qui sont pourtant essentielles pour garantir les prestations vibratoires et acoustiques du véhicule comme nous l'avons montré dans la partie précédente. Notons de plus, que toutes les grandeurs doivent être calculées sur le même modèle de calcul, ce qui est une autre limitation problématique.

Nous illustrons dans la partie suivante, sur le cas de la face avant technique (présenté en détail dans la partie 1.2.1), les limitations de l'optimisation topologique et différentes méthodes déjà envisagées pour s'efforcer de prendre en compte les critères vibratoires dans la conception d'une telle pièce.

1.4 Limitations actuelles de l'optimisation topologique pour la conception

Le cahier des charges de nombreuses pièces automobiles (comme celui de la face avant technique et celui de la face accessoires) n'entrent pas dans le cadre des logiciels d'optimisation topologique actuels. Il n'est en effet pas possible, par exemple, de prendre en compte des raideurs dynamiques, pourtant primordiales dans de nombreux problèmes de conception de pièces automobiles.

Nous allons illustrer cette limitation et les contournements envisagés sur l'exemple de la conception de la face avant technique. Ceci nous amènera à la problématique retenue dans cette thèse.

Pour rigidifier la face avant technique, on utilise un réseau de nervures (cf. figure 1.13). Une première approche possible pour concevoir ces nervures consiste à utiliser un outil d'optimisation « classique » (de forme ou paramétrique) permettant de prendre en compte le cahier des charges complet.



FIG. 1.13 – Réseau de nervures de la face avant technique.

Cette technique a été utilisée dans le cadre d'un stage de fin d'études [34] pour optimiser les épaisseurs des nervures de la face avant technique (minimisation de la masse tout en respectant les contraintes statiques et dynamiques décrites dans la partie 1.2.1). Le but de cette étude était principalement de déterminer les nervures influentes sur le comportement vibratoire de la caisse et de trouver ainsi le nervurage optimal. Pour cela, la démarche adoptée consistait à créer une surface de réponse à l'aide d'une méthode de krigeage puis à utiliser le modèle obtenu, dont les évaluations sont peu coûteuses, afin d'optimiser les épaisseurs des nervures.

La figure 1.14 représente les écarts au cahier des charges dynamique, obtenus pour l'ensemble des épaisseurs des nervures testées dans un plan d'expériences. Ce graphique nous permet d'évaluer le potentiel d'amélioration, à géométrie fixée, en optimisant l'épaisseur des nervures (l'optimum trouvé est en noir). On constate ainsi que les performances que l'on peut espérer atteindre restent limitées. En l'occurrence, il est impossible pour la topologie des nervures étudiée de vérifier le cahier des

1.4 Limitations actuelles de l'optimisation topologique pour la conception

charges. On peut au mieux essayer de s'en approcher.

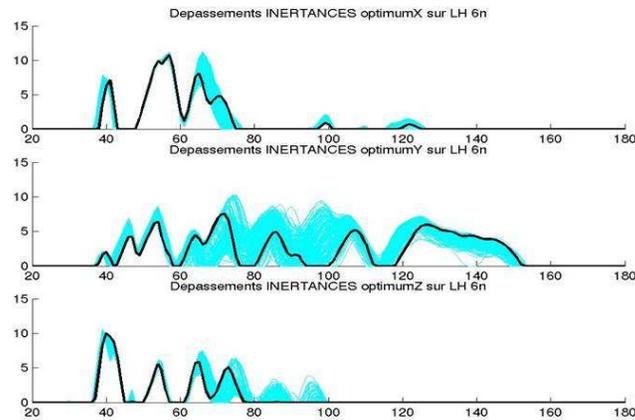


FIG. 1.14 – *Écarts au cahier des charges dynamique obtenus pour l'ensemble des épaisseurs des nervures testées dans un plan d'expériences.*

Dans ce cas, on peut prendre en compte l'intégralité du cahier des charges (il est en effet possible d'optimiser des critères dynamiques) et on travaille avec un modèle mécanique représentatif de la réalité. Toutefois, le potentiel d'optimisation à géométrie fixée reste limité. La topologie de la pièce n'est pas remise en cause et on reste dans des schémas classiques. Il serait donc intéressant de pouvoir utiliser l'optimisation topologique pour concevoir le nervurage (combien de nervures, où et quelle épaisseur?).

Il est aujourd'hui possible de déterminer un nervurage optimal vis à vis du cahier des charges statique par optimisation topologique, ce qui fait partie du processus actuel de conception chez Renault. C'est un premier pas intéressant mais ce n'est pas satisfaisant car les contraintes dynamiques, pourtant essentielles, ne sont pas prises en compte (elles ne peuvent qu'être évaluées a posteriori). On peut ensuite appliquer une optimisation paramétrique telle que celle décrite dans le paragraphe précédent. Nous avons vu cependant que le potentiel d'amélioration est réduit.

Deux solutions sont actuellement envisageables pour prendre en compte le cahier des charges dynamique dans le choix de la topologie.

Une première solution consiste à essayer de traduire les contraintes dynamiques en un ensemble de contraintes statiques équivalentes qui pourront être prises en compte par un logiciel comme OPTISTRUCT. La technique utilisée consiste à identifier les modes qui posent problèmes en dynamique (par exemple une torsion ou une flexion particulière) et à les contraindre par un ensemble de contraintes statiques. Cette approche, qui a été étudiée par les ingénieurs concepteurs, s'est avérée peu satisfaisante car elle repose sur des a priori métier forts et le lien avec les contraintes initiales (inertances et transferts) est mal établi.

Une alternative consiste à utiliser un modèle simplifié de la face avant technique composé d'un réseau d'éléments de type poutre. Un algorithme d'optimisation permet ensuite de sélectionner les poutres les plus influentes, c'est-à-dire, d'obtenir le treillis de poutres minimal améliorant les performances de la structure. On pourra voir sur la figure 1.15 un exemple de treillis de poutres pouvant être utilisé pour la modélisation de la face avant technique. Dans ce cas, les variables d'optimisation

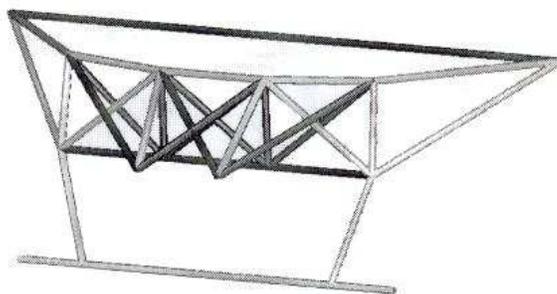


FIG. 1.15 – *Treillis de poutres utilisé pour la modélisation de la face avant technique.*

sont les raideurs des poutres (une raideur nulle correspond à l'absence de la poutre). Le cahier des charges dynamique peut être pris en compte dans sa totalité mais l'approche n'est pas satisfaisante car le modèle poutre ne se comporte pas forcément comme la vraie pièce (modélisation grossière). Par ailleurs, il est très souvent difficile d'interpréter les résultats, c'est-à-dire de savoir comment générer une pièce réelle à partir des résultats obtenus.

Nous avons vu que les différentes méthodes de conception disponibles aujourd'hui pour une telle pièce ne sont pas entièrement satisfaisantes puisque soit on travaille à topologie fixée (et donc avec un potentiel d'amélioration réduit puisque les caractéristiques générales de la pièce ne sont pas remises en cause et il peut arriver qu'une partie du cahier des charges ne soit pas réalisable), soit on cherche à optimiser la topologie mais les contraintes portant sur des raideurs dynamiques ne peuvent être prises en compte.

Le but de notre travail de recherche est de construire une méthodologie d'optimisation topologique utilisable par les secteurs opérationnels et supprimant ces limitations, c'est-à-dire permettant la prise en compte de critères dynamiques, primordiaux dans la conception des pièces automobiles. Ce travail nous a amené à proposer une méthode et une solution logicielle que nous décrivons dans ce document.

Chapitre 2

Notions préalables en mécanique des structures

Nous présentons dans ce chapitre les notions de mécanique des structures qui nous seront nécessaires pour expliciter mathématiquement les contraintes de notre problème d'optimisation topologique. Aussi, après avoir décrit la théorie de l'élasticité linéaire, dont le succès vient du fait qu'elle fournit un modèle réaliste du comportement d'une grande classe de matériaux, nous expliciterons des notions mécaniques intervenant dans la définition des cahiers des charges Renault. Nous terminerons en décrivant la méthode de calcul de la base modale d'une structure donnée, puis comment à partir de cette base modale il est possible de prévoir le comportement de la pièce lorsqu'elle est soumise à des efforts dynamiques sinusoïdaux.

Les démonstrations des résultats présentés et des détails supplémentaires concernant ce chapitre pourront être trouvés dans [21] ou [28] par exemple.

2.1 La théorie de l'élasticité linéaire

Cette partie est consacrée à la description du problème de l'élasticité linéaire. Nous expliciterons ainsi la formulation variationnelle qui en découle et la méthode éléments finis permettant sa résolution.

Les notions présentées dans cette partie ne concernent que des problèmes à l'équilibre, la variable temps n'interviendra pas.

2.1.1 Définitions préalables

Les définitions mécaniques décrites dans ce paragraphe, sont nécessaires à l'écriture et à la compréhension des équations de l'élasticité linéaire.

Soit Ω la configuration du corps étudié non déformé dans \mathbb{R}^3 , on note

- $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \varphi(x)$ la **déformation**,
- $\Omega_D = \varphi(\Omega)$ la **configuration déformée**,
- $F_\varphi = \nabla\varphi$ le **gradient de la déformation**,
- $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto u(x) = \varphi(x) - x$ le **champ des déplacements** de Ω .

On appelle $E = \frac{1}{2}(F_\varphi F_\varphi^T - I)$ le **tenseur des déformations** (E est une « mesure » de la déformation) et on a

$$E(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u) \quad \text{avec} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$$

i.e.

$$E_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

On remarque que E est symétrique mais non linéaire par rapport à u .

Si on note ϵ la partie linéaire de E :

$$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

on a

$$E_{ij}(u) = \epsilon_{ij}(u) + o(|\nabla u|), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

On dit que ϵ est le **tenseur des déformations linéarisées** et lorsqu'on fait l'hypothèse des petites déformations ($|\nabla u| \ll 1$), on a $E_{ij}(u) \simeq \epsilon_{ij}(u)$.

Définition 2.1 (Conditions aux limites) Soient u le déplacement défini à l'intérieur du domaine Ω et sur sa frontière $\partial\Omega$ et n la normale unitaire extérieure définie sur $\partial\Omega$. On dit qu'on a des conditions aux limites de **Dirichlet** si la valeur de u est connue sur $\partial\Omega$. Dans le cas particulier où les conditions de Dirichlet sont **homogènes**, on a $u = 0$ sur $\partial\Omega$. En revanche, les conditions aux limites sont de **Neumann** si $\partial_n u = \nabla u \cdot n$ (avec \cdot le produit scalaire) est donné sur $\partial\Omega$ et les conditions de Neumann sont dites **homogènes** si $\partial_n u = 0$ sur $\partial\Omega$.

2.1 La théorie de l'élasticité linéaire

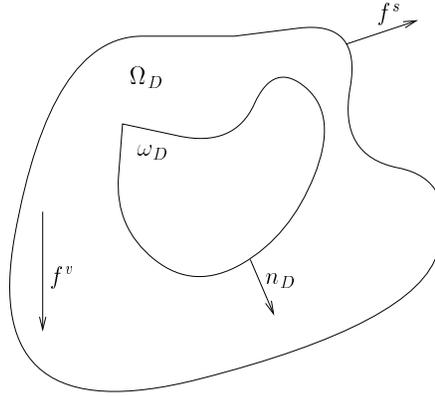


FIG. 2.1 – Représentation du domaine de travail Ω_D .

La configuration déformée Ω_D est soumise à des forces appliquées sur sa frontière $\partial\Omega_D$ (**forces de contact**) ou à l'intérieur (**forces de gravité**). On note f^s et f^v les forces appliquées en un point X de Ω_D respectivement sur la frontière et dans le volume, ω_D un domaine de Ω_D et n_D la normale unitaire extérieure définie sur $\partial\omega_D$, la frontière de ω_D (cf. figure 2.1).

L'action sur ω_D exercée par le reste du corps, $\Omega_D \setminus \omega_D$, peut être représentée par une densité surfacique des forces définie sur $\partial\omega_D$. On fait ici l'hypothèse de Cauchy, c'est-à-dire on suppose que cette densité en $X \in \partial\omega_D$ ne dépend que de X et de la normale n_D en ce point. On la note $t(X, n_D)$ et on dit que $t(X, n_D) \in \mathbb{R}^3$ est le **vecteur contraintes** au point X et dans la direction n_D .

Théorème 2.1 (Théorème de Cauchy) *Pour tout $X \in \Omega_D$, il existe un opérateur linéaire $\sigma(X)$ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , tel que $t(X, n_D) = \sigma(X)n_D$. Ce tenseur σ , appelé **tenseur des contraintes de Cauchy** au point X , est représenté par la matrice $(\sigma_{ij}(X))_{1 \leq i, j \leq 3}$.*

On a alors les **propriétés fondamentales** suivantes :

Propriété 2.1 *Le torseur de l'ensemble des forces s'exerçant sur tout sous-domaine ω_D de Ω_D est nul, c'est-à-dire*

– la résultante est nulle :

$$\int_{\partial\omega_D} \sigma n_D dS + \int_{\omega_D} f^v dX = 0,$$

– le moment résultant est nul :

$$\int_{\partial\omega_D} X \wedge (\sigma n_D) dS + \int_{\omega_D} X \wedge f^v dX = 0,$$

avec \wedge le produit vectoriel.

Propriété 2.2 *A l'intérieur de Ω_D , le tenseur des contraintes σ vérifie les équations d'équilibre :*

$$-div \sigma = f^v \text{ sur } \Omega_D \quad \left(div_i \sigma = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} \right), \quad (2.1)$$

$$\sigma n = f^s \text{ sur } \partial\Omega_D, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (2.3)$$

2.1.2 Introduction à l'élasticité linéaire

Après quelques définitions, nous explicitons dans ce paragraphe le problème de l'élasticité linéaire. La théorie de l'élasticité linéaire recouvre de nombreux cas réels concernant des matériaux divers (métaux, bois, plastiques, ...)

Définition 2.2 (Élasticité) *On dit qu'un matériau est **élastique** s'il peut se déformer sans casser et s'il revient à sa forme initiale quand on relâche un effort appliqué.*

Définition 2.3 (Loi de comportement) *On appelle **loi de comportement**, la relation entre contraintes et déformations spécifiques du milieu.*

*Si le milieu est **élastique** la loi de comportement est de la forme :*

$$\sigma(X) = \Sigma(x, E(u)) \quad (2.4)$$

avec $X = \varphi(x)$, $x \in \Omega$ et $\Sigma : \Omega \times \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$, \mathfrak{S} étant l'ensemble des matrices 3×3 réelles symétriques.

Si de plus le milieu est homogène, on a :

$$\sigma(X) = \Sigma(E(u)), \text{ indépendant de } x.$$

Le **problème de l'élasticité** consiste à trouver le champ de contraintes σ défini dans Ω_D (configuration déformée) et le champ de déplacements u défini dans Ω (configuration non déformée) vérifiant les équations d'équilibre (équations (2.1), (2.2) et (2.3)), la loi de comportement (équation (2.4)) et des conditions aux limites convenables.

Lors de la résolution de ce problème nous sommes confrontés à deux difficultés. Tout d'abord, σ est défini dans la configuration déformée a priori inconnue. De plus, nous avons à résoudre un problème d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

2.1 La théorie de l'élasticité linéaire

On fait alors l'hypothèse des petites perturbations, c'est-à-dire des petites déformations ($|\nabla u| \ll 1$) et des petits déplacements ($|u| \ll 1$), puis on linéarise le problème de l'élasticité (approximation au premier ordre) afin d'obtenir un problème linéaire posé dans la configuration initiale (non déformée).

Nous n'explicitons pas ici la démarche de linéarisation et nous posons directement le problème linéaire.

Le **problème d'élasticité linéaire** se formule de la façon suivante :

Trouver $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ et $u = (u_i)_{1 \leq i \leq 3}$ définis dans Ω vérifiant :

– les équations de l'équilibre :

$$-div \sigma = f^v \text{ dans } \Omega, \quad (2.5)$$

– la loi de comportement :

$$\sigma(x) = A(x)\epsilon(u) \forall x \in \Omega, \quad (2.6)$$

où $A(x) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est une application linéaire. Pour simplifier, on supposera dans la suite que le milieu est **homogène**, c'est-à-dire

$$A(x) = A \text{ indépendant de } x.$$

– les conditions aux limites sur $\Gamma = \delta\Omega$:

– du type forces imposées sur un sous-ensemble donné $\Gamma_F \subset \Gamma$:

$$\sigma n = f^s \text{ sur } \Gamma_F, \quad (2.7)$$

– du type déplacements imposés sur $\Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_F$:

$$u = d \text{ sur } \Gamma_D, \quad (2.8)$$

avec $d : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}^3$ donné.

On remarque que la loi de comportement de l'élasticité linéaire (2.6) se réécrit

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,h=1}^3 a_{ijkh} \epsilon_{kh}(u) \text{ sur } \Omega$$

et on appelle les coefficients a_{ijkh} ($1 \leq i, j, k, h \leq 3$), les **coefficients d'élasticité**. Ces derniers vérifient les propriétés de symétrie suivantes :

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{ijhk}.$$

Remarque : Si l'on identifie \mathcal{S} à \mathbb{R}^6 (les matrices 3×3 réelles symétriques sont caractérisées par 6 coefficients) alors A s'identifie à une matrice 6×6 .

Définition 2.4 (Isotropie) *On dit qu'un milieu est **isotrope** au point x si son comportement est « le même dans toutes les directions ». Dans ce cas, on montre que la loi de comportement de l'élasticité linéaire (2.6) s'écrit*

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(u))I + 2\mu\epsilon(u),$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont les **coefficients de Lamé**, tr est l'opérateur trace (somme des termes diagonaux) et I la matrice identité (de dimension 3).

Définition 2.5 *Le coefficient $\eta = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$, appelé **module de Young** et le coefficient $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$, appelé **coefficient de Poisson**, caractérisent un matériau.*

Le module de Young caractérise l'élasticité ou la raideur d'un matériau. C'est un module de rigidité à l'allongement : pour une force F par unité de surface donnée, l'allongement relatif $\frac{\Delta L}{L}$ est d'autant plus petit que η est grand. Le module de Young a la dimension d'une force par unité de surface, c'est-à-dire d'une contrainte ou d'une pression. On l'exprime en Newton par m^2 ou en Pascal (1 Pascal = 1 Newton/ m^2). Le module de Young η est toujours positif. Par exemple, pour l'acier $\eta=200$ GPa et pour l'aluminium $\eta=70$ GPa.

Le module de Poisson permet de déterminer la capacité de rétrécissement de la section par rapport à l'étirement. Il est sans unité et tel que $0 < \nu < 0.5$.

2.1.3 La méthode variationnelle en élasticité

Le problème de l'élasticité linéaire, décrit dans la partie précédente, peut se ré-écrire sous la forme d'un problème d'équations aux dérivées partielles dont découle la **formulation variationnelle en élasticité**. Ce nouveau problème, du type elliptique à 9 équations scalaires, peut alors être facilement résolu à l'aide de méthodes classiques, comme la méthode des éléments finis décrite dans le paragraphe 2.1.4.

Dans la suite on suppose que le domaine Ω est suffisamment régulier. On note $\Gamma = \partial\Omega$ et n la normale unitaire extérieure définie sur Γ .

Soient l'espace de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega)\}$$

avec $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions définies sur Ω , de carré intégrable et

$$V = H^1(\Omega)^3.$$

Les champs de déplacements $u = (u_i)_{i=1,2,3}$ et de contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2,3}$

2.1 La théorie de l'élasticité linéaire

satisfont les équations et les conditions aux limites suivantes :

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i^v = 0 \text{ dans } \Omega, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (2.9)$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,h=1}^3 a_{ijkh} \epsilon_{kh}(u) \text{ dans } \Omega, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (2.10)$$

$$\epsilon_{kh}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_h} \right), \quad 1 \leq k, h \leq 3, \quad (2.11)$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = f_i^s, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad \text{sur } \Gamma_F, \quad (2.12)$$

$$u_i = d_i, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad \text{sur } \Gamma_D. \quad (2.13)$$

Les équations (2.9) et (2.10) sont appelées respectivement équation d'équilibre et équation de comportement.

Soit

$$U_{ad} = \{v \in V \mid v = d \text{ sur } \Gamma_D\}$$

l'ensemble des solutions admissibles du problème (2.9)-(2.13) et v un élément quelconque de U_{ad} .

En multipliant (2.9) par $(v_i - u_i)$ et en intégrant sur Ω , il vient

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i^v \right) (v_i - u_i) dx = 0 \quad \forall v \in U_{ad},$$

c'est-à-dire (après une intégration par parties)

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i - u_i) dx = \int_{\Omega} f_i^v (v_i - u_i) dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) dS.$$

Le tenseur σ_{ij} étant symétrique, on a

$$\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i - u_i) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v - u)$$

et comme $\partial\Omega = \Gamma_F \cup \Gamma_D$, $\sum_j \sigma_{ij} n_j = f_i^s$ sur Γ_F et $v_i = u_i = d_i$ sur Γ_D ,

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v - u) dx = \int_{\Omega} f_i^v (v_i - u_i) dx + \int_{\Gamma_F} f_i^s (v_i - u_i) dS \quad \forall v \in U_{ad}.$$

On a ainsi démontré la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Si u est solution du problème (2.9)-(2.13), u est solution de la formulation variationnelle suivante :*

Trouver $u \in U_{ad}$ tel que

$$a(u, v - u) = L(v - u) \quad \forall v \in U_{ad}$$

avec, pour $1 \leq i \leq 3$

$$a_i(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \sum_{k,h=1}^3 a_{ijkh} \epsilon_{kh}(u) \epsilon_{ij}(v) \, dx$$

et

$$L_i(v) = \int_{\Omega} f_i^v v_i \, dx + \int_{\Gamma_F} f_i^s v_i \, dS.$$

2.1.4 Méthode des éléments finis en élasticité

Nous décrivons dans ce paragraphe, la méthode la plus souvent utilisée pour la résolution de la formulation variationnelle en élasticité.

Par souci de simplicité, on présente ici un cas en deux dimensions ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $x \in \Omega : x = (x_1, x_2)$). On suppose également que $d = 0$ et que le matériau utilisé est isotrope et homogène.

On note

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{le symbole de Kronecker.}$$

Le problème d'élasticité linéaire s'écrit alors :

Trouver $u = (u_i)$ et $\sigma = (\sigma_{ij})$ ($i, j = 1, 2$) dans Ω tels que :

$$\sigma_{ij} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \text{ dans } \Omega, \quad (2.14)$$

$$-\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i^v \text{ dans } \Omega, \quad (2.15)$$

$$\sum_j \sigma_{ij} n_j = f_i^s \text{ sur } \Gamma_F \text{ et } u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_D. \quad (2.16)$$

et la **formulation variationnelle** devient :

2.1 La théorie de l'élasticité linéaire

Trouver $u \in V$ tel que :

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V,$$

$$V = \{v = (v_i)_{i=1,2} \mid v_i \in H^1(\Omega) \text{ et } v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_D, i = 1, 2\}$$

avec, pour $i = 1, 2$

$$a_i(u, v) = \int_{\Omega} (\lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + 2\mu \sum_{j=1}^2 \epsilon_{ij}\epsilon_{ij}) dx$$

et

$$L_i(v) = \int_{\Omega} f_i^v v_i dx + \int_{\Gamma_F} f_i^s v_i dS.$$

Dans tout ce qui suit, on écrit u , ϵ et σ sous forme de vecteurs colonnes :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \gamma_{12} = 2\epsilon_{12}.$$

Remarque : Pour des problèmes en trois dimensions, σ et ϵ sont représentés par des vecteurs colonnes de dimension 6.

On a ainsi

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

et on peut écrire

$$\epsilon = Du,$$

où D est l'opérateur de dérivation sous forme de matrice, appelé **matrice des déformations**.

La loi de Hooke (2.14) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix},$$

où H est une matrice 3×3 qui s'exprime à l'aide de λ et μ , appelée **matrice de Hooke** (en déformations planes). Elle décrit les propriétés physiques du matériau

en ce point.

Supposons, pour simplifier, Ω polygonal et considérons une triangulation τ_h de Ω ($h > 0$) :

$$\tau_h = \bigcup_{k=1}^N T_k,$$

avec N le nombre d'éléments du maillage.

Soient a^m les sommets des éléments T_k n'appartenant pas à Γ_D ($1 \leq m \leq p$, avec p le nombre de sommets). On note C^0 l'ensemble des fonctions continues et P_1 l'ensemble des polynômes de degré 1. On définit alors l'espace des fonctions éléments finis scalaires :

$$X_h = \{ \Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Psi \in C^0, \Psi|_{T_k} \in P_1 \forall k \in \{1, \dots, N\}, \Psi = 0 \text{ sur } \Gamma_D \}$$

et on note V_h l'espace des fonctions éléments finis à valeurs vectorielles :

$$V_h = (X_h)^2.$$

Soient ϕ_1, \dots, ϕ_m les fonctions de base éléments finis de X_h :

$$\phi_j \in X_h \quad \text{et} \quad \phi_j(a^m) = \delta_{jm}, \quad 1 \leq j, m \leq p,$$

on note Φ_j ($1 \leq j \leq 2p$) les fonctions :

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_1 \end{pmatrix}, \Phi_3 = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \Phi_{2p} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_p \end{pmatrix},$$

qui constituent une base de V_h et qui sont appelées **fonctions de forme** de la méthode éléments finis choisie.

On cherche ainsi un déplacement éléments finis u_h tel que

$$\forall x \in \Omega, u_h(x) = \sum_{j=1}^{2p} q_j \Phi_j(x).$$

Les q_j sont les degrés de liberté du déplacement éléments finis u_h et

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{2p} \end{pmatrix}$$

est appelé **vecteur des déplacements nodaux**.

2.2 Quelques critères mécaniques utilisés chez Renault

On peut donc écrire

$$\forall x \in \Omega, u_h(x) = N(x) \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{2p} \end{pmatrix},$$

avec $N(x) = (\Phi_j)_{1 \leq j \leq 2p}$ une matrice $2 \times 2p$, appelée **matrice d'interpolation**.

Le tenseur des déformations du champ de déplacement s'écrit alors

$$\forall x \in \Omega, \epsilon(x) = DN(x)q = B(x)q,$$

où $B(x) = DN(x)$ est une matrice $3 \times 2p$, qui s'exprime à l'aide des dérivées partielles des ϕ_j et appelée **matrice des déformations** éléments finis.

Ainsi, le **problème éléments finis** associé à la formulation variationnelle s'écrit

$$\text{Trouver } u_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Ce problème équivaut à résoudre le système linéaire $Rq = F$, où

$$q = (q_j) \text{ est le vecteur des degrés de liberté,}$$

$$R = (R_{jl}) \text{ est une matrice } 2p \times 2p, \quad R_{jl} = \int_{\Omega} (B^T(x)HB(x))_{jl} dx,$$

$$F = (F_j) \in \mathbb{R}^{2p}, \quad F_j = \int_{\Omega} (N^T f^v)_j dx + \int_{\Gamma_F} (N^T f^s)_j dS.$$

R est la **matrice de rigidité** (pour la méthode éléments finis choisie), F est le **vecteur des forces extérieures** (ou appliquées connues) et Rq est le **vecteur des forces intérieures** (forces dues aux déformations élastiques).

Le système linéaire $Rq = F$ exprime le fait que le vecteur des forces résiduelles est nul à l'équilibre. Cela traduit l'équilibre de la structure discrète.

La méthode présentée ici en deux dimensions, se généralise aisément en trois dimensions. C'est cette méthode qui est utilisée dans la plupart des logiciels de calcul des structures comme le logiciel MSC/NASTRAN que nous avons utilisé et dont nous parlerons plus tard.

2.2 Quelques critères mécaniques utilisés chez Renault

Nous présentons dans cette partie quelques critères couramment utilisés dans les cahiers des charges Renault et auxquels nous ferons référence par la suite.

Nous avons choisi de séparer les notions présentées en deux classes distinctes. Ainsi, dans le premier paragraphe, nous parlerons de critères statiques dans lesquels la variable temps n'intervient pas, par opposition aux critères dynamiques décrits dans le second paragraphe.

2.2.1 Critères statiques

Nous présentons ici un critère statique couramment utilisé pour l'étude des caractéristiques d'une structure.

Compliance

La compliance permet de mesurer la raideur globale d'une structure déformée (pour un cas de chargement donné), puisque minimiser la compliance revient à maximiser la raideur totale de la structure sous un effort donné. Pour une pièce, mesurer la compliance est équivalent à mesurer le travail des forces extérieures ou l'énergie élastique.

Plus précisément, la compliance est définie par :

$$c = \int_{\delta\Omega} f^s \cdot u \, dS = \int_{\Omega} A\epsilon(u) \cdot \epsilon(u) \, dx = \int_{\Omega} A^{-1}\sigma \cdot \sigma \, dx,$$

avec σ et u solutions du problème (2.9)-(2.13).

2.2.2 Critères dynamiques

Fréquence propre

Les fréquences propres correspondent à des fréquences d'excitation caractéristiques de la structure considérée. On cherche généralement à les éviter (c'est-à-dire à les repousser ou en diminuer l'impact) car elles entraînent des déplacements importants et donc des risques de rupture de la structure.

Les fréquences structurales sont très importantes dans l'industrie automobile. En effet, par exemple, si un des harmoniques générés par le moteur coïncide avec une fréquence structurale, cela va entraîner des problèmes de résonance, c'est-à-dire du bruit et des vibrations à l'intérieur de l'habitacle.

La méthode de calcul des fréquences propres et des modes propres associés est donnée dans la partie 2.3.

Inertance et transfert vibratoire

Notons tout d'abord que les termes définis dans ce paragraphe sont ceux employés chez Renault. Ils peuvent ainsi être différents de ceux plus usuellement utilisés.

2.2 Quelques critères mécaniques utilisés chez Renault

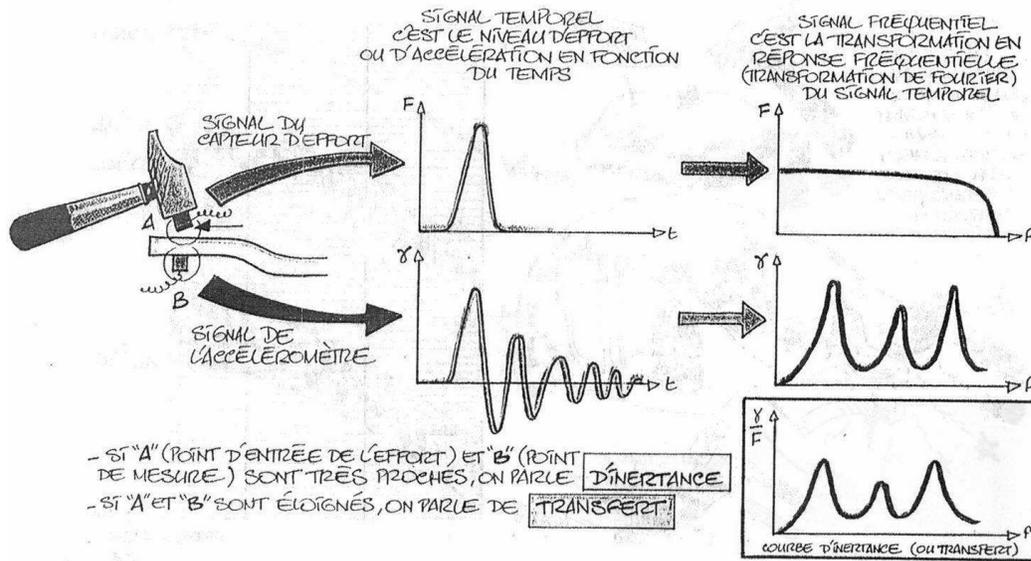


FIG. 2.2 – Calcul d'une inertance.

Une courbe d'**inertance** représente le comportement (dit comportement dynamique) d'une structure soumise à des excitations de différentes fréquences. On dit parfois aussi qu'un calcul d'inertance permet de mesurer la raideur dynamique globale d'une pièce.

On calcule l'inertance en un point P d'une structure en procédant comme suit (cf. figure 2.2). On applique une force F unitaire (par exemple un coup de marteau) au point P de la structure au temps 0. On mesure la force appliquée et l'accélération γ au même point P pendant un certain temps t . On transforme ensuite les courbes obtenues (force et accélération en fonction du temps) dans le domaine fréquentiel (transformation de Fourier). La courbe d'inertance est alors obtenue en traçant $\frac{\hat{\gamma}}{\hat{F}}$ (avec $\hat{\gamma}$ et \hat{F} les transformées de Fourier de γ et de F) dans le domaine fréquentiel.

Si le point de mesure de la force est différent de celui de l'accélération, on parle de **transfert**.

Dans le cas où on mesure la vitesse ou le déplacement (au lieu de l'accélération) au point P , on utilise respectivement les termes **mobilité** et **compliance dynamique**. Dans le dernier cas, les pics de la courbe correspondent aux fréquences propres de la pièce.

Le calcul d'une de ces courbes n'est pas réalisable directement à l'aide d'un logiciel. On procède alors par calcul de réponses forcées (cf. partie 2.3). On excite la pièce au point P avec une force unitaire fréquentielle et on mesure l'accélération (ou la vitesse ou le déplacement) maximum au point P . On fait cela plusieurs fois, en pratique sur une plage de fréquences avec un pas donné. Si on trace le module de l'accélération (ou la vitesse ou le déplacement) maximum mesurée en fonction

de la fréquence d'excitation, on obtient la courbe d'inertance (ou de mobilité ou de compliance dynamique) correspondante.

Montrons ce résultat dans le cas de la compliance dynamique et considérons pour cela l'équation du second ordre à coefficients constants suivante :

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + c\frac{d}{dt}u(t) + bu(t) = F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

donnant le déplacement u de la structure pour une force d'excitation F .

Si on note λ_1 et λ_2 les racines (distinctes ou non) de l'équation caractéristique $\lambda^2 + c\lambda + b = 0$, l'équation (2.17) peut s'écrire :

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)u(t) = F(t).$$

Pour F continue et à support limité à gauche (c'est-à-dire nulle pour t inférieur à un certain t_0), il existe une et une seule solution u à support limité à gauche et celle-ci est donnée par :

$$u(t) = G(t) * F(t) \quad (2.18)$$

avec $G(t)$ la réponse impulsionnelle

$$G(t) = [H(t)e^{\lambda_2 t}] * [H(t)e^{\lambda_1 t}] = \begin{cases} H(t)\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} & \text{pour } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ H(t)te^{\lambda_1 t} & \text{pour } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

et $H(t)$ la fonction de Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Par propriété de la transformation de Fourier, la relation (2.18) devient :

$$\hat{u}(\omega) = \hat{G}(\omega)\hat{F}(\omega)$$

avec \hat{u} , \hat{G} et \hat{F} les transformées de Fourier respectives de u , G , et F .

La courbe de compliance dynamique $\frac{\hat{u}}{\hat{F}}$ est donc égale à la courbe de $\hat{G}(\omega)$.

Dans le cas d'une réponse forcée, $F(t) = e^{i\omega t}$ et donc d'après (2.18)

$$u(t) = G(t) * e^{i\omega t}. \quad (2.19)$$

Remarque : La fonction $t \mapsto e^{i\omega t}$ n'étant pas à support limité à gauche, on ne peut pas en principe écrire (2.19). Toutefois, on peut rendre le calcul précédent raisonnable en prenant pour $t > 0$ la fonction d'excitation $F(t) = H(t + N)e^{i\omega t}$

2.3 Calcul d'une base modale et méthode de recombposition

(c'est-à-dire le signal sinusoïdal qui a commencé au temps $-N$). Le support étant limité à gauche, on peut alors écrire

$$u(t) = G(t) * (H(t + N)e^{i\omega t}) = \hat{G}e^{i\omega t} + r_N(t),$$

où l'erreur r_N tend vers 0 avec N .

Par propriété de la convolution, (2.19) se réécrit

$$u(t) = \hat{G}(\omega)e^{i\omega t}.$$

On retrouve alors le résultat énoncé plus haut, c'est-à-dire que la courbe du module du déplacement maximum correspond à la courbe de $\hat{G}(\omega)$ et donc à la courbe de compliance dynamique.

Nous avons présenté dans cette partie quelques critères utilisés dans les cahiers des charges Renault. Nous avons vu que le calcul des courbes de compliance dynamique est réalisé à partir d'un calcul de réponses forcées. Nous allons voir ci-dessous une méthode (dite méthode de recombposition modale) permettant, à partir de la base modale de la pièce (c'est-à-dire de ses fréquences propres et de ses modes propres associés), de connaître sa réponse quelle que soit la force fréquentielle d'excitation.

2.3 Calcul d'une base modale et méthode de recombposition

Après avoir expliqué comment sont calculés les modes et les fréquences propres d'une pièce donnée, nous décrivons dans cette partie la méthode de recombposition modale permettant de connaître le comportement dynamique de la structure lorsqu'elle est soumise à une force sinusoïdale quelconque.

On assimile ici la structure étudiée à un système mécanique discrétisé, composé de n degrés de liberté (correspondant aux degrés de liberté des noeuds du maillage de calcul) et on considère l'équation matricielle qui régit le mouvement de la structure :

$$M \frac{d^2}{dt^2} u(t) + C \frac{d}{dt} u(t) + K u(t) = F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.20)$$

avec M la matrice de masse de la structure, C la matrice d'amortissement, K la matrice de rigidité, $u(t)$ le vecteur des déplacements et $F(t)$ le vecteur des forces extérieures appliquées.

La force appliquée $F(t)$ est une force sinusoïdale et s'écrit donc sous la forme :

$$F(t) = F(\omega)e^{i\omega t}$$

avec $F(\omega)$ un vecteur à n composantes complexes indépendantes de t .

2.3.1 Calcul de la base modale

Explicitons tout d'abord comment est calculée la base modale d'une structure donnée, c'est-à-dire ses fréquences propres et ses modes propres associés.

Considérons le système homogène associé à (2.20) sans amortissement :

$$M \frac{d^2}{dt^2} u(t) + K u(t) = 0. \quad (2.21)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $u(t) = \phi e^{i\omega t}$, où ω est la pulsation et ϕ un vecteur à n composantes réelles indépendantes de t .

Si on calcule les dérivées première et seconde de u par rapport à t :

$$\frac{d}{dt} u(t) = \phi i \omega e^{i\omega t} \text{ et } \frac{d^2}{dt^2} u(t) = -\phi \omega^2 e^{i\omega t}$$

et qu'on remplace ces expressions dans l'équation (2.21), on obtient :

$$-M \phi \omega^2 e^{i\omega t} + K \phi e^{i\omega t} = 0$$

c'est-à-dire

$$(K - \omega^2 M) \phi = 0.$$

Pour trouver les solutions autres que triviales de cette équation, on résout $|K - \lambda M| = 0$. Les solutions λ_j ($1 \leq j \leq n$) sont les **fréquences propres** de la structure étudiée et les vecteurs ϕ_j ($1 \leq j \leq n$) tels que $(K - \lambda_j M) \phi_j = 0$, sont les **modes propres** associés. On appelle **pulsations propres** les ω_j tels que $\lambda_j = \omega_j^2$ ($1 \leq j \leq n$) et **matrice de la base modale** la matrice Φ de taille $n \times n$ dont les colonnes sont constituées des modes propres.

Une fois la base modale calculée (c'est-à-dire la matrice Φ connue), la méthode de recombinaison modale permet de prévoir le comportement dynamique de la structure quelle que soit la force d'excitation sinusoïdale appliquée. C'est ce que nous allons montrer dans le paragraphe suivant.

2.3.2 Méthode de recombinaison modale

La méthode de recombinaison modale, utilisée dans les logiciels de mécanique des structures, permet de calculer simplement à partir de la base modale la réponse de la structure à une excitation quelconque.

Remarquons tout d'abord que les modes propres ϕ_j sont orthogonaux à K et M , c'est-à-dire que dans la base modale les matrices K et M sont diagonales. On note

2.3 Calcul d'une base modale et méthode de recomposition

$\widetilde{M} = \Phi^T M \Phi$ et $\widetilde{K} = \Phi^T K \Phi$, les matrices diagonales réelles de taille $n \times n$ et de coefficients diagonaux m_j et k_j .

On peut écrire le vecteur des déplacements $u(t)$ dans la base des modes propres :

$$u(t) = \Phi Q(t)$$

où $Q(t)$ est un vecteur de taille n .

Si l'on dérive deux fois $u(t)$ et qu'on remplace les expressions dans l'équation (2.20), on obtient :

$$M \Phi \frac{d^2}{dt^2} Q(t) + C \Phi \frac{d}{dt} Q(t) + K \Phi Q(t) = F(t),$$

c'est-à-dire en multipliant à gauche par Φ^T :

$$\widetilde{M} \frac{d^2}{dt^2} Q(t) + \Phi^T C \Phi \frac{d}{dt} Q(t) + \widetilde{K} Q(t) = \Phi^T F(t).$$

Afin de simplifier les calculs, on choisit alors d'approcher $\Phi^T C \Phi$ par une matrice diagonale \widetilde{C} . Les termes diagonaux de \widetilde{C} s'expriment sous la forme $c_j = 2m_j \omega_j \xi_j$ ($1 \leq j \leq n$) avec ξ_j un coefficient d'amortissement, et l'équation (2.20) devient

$$\widetilde{M} \frac{d^2}{dt^2} Q(t) + \widetilde{C} \frac{d}{dt} Q(t) + \widetilde{K} Q(t) = \Phi^T F(t). \quad (2.22)$$

Considérons maintenant le vecteur $F(t)$ à n composantes complexes :

$$\begin{aligned} F_j(t) &= 0 \text{ si le degré de liberté } j \text{ est non excité,} \\ F_j(t) &= f_j e^{i(\omega t + \alpha_j)} \text{ sinon,} \end{aligned}$$

avec $1 \leq j \leq n$, ω la pulsation et α_j le déphasage entre la force d'excitation sur le degré de liberté j et celle exercée sur le degré de liberté de référence (degré de liberté de phase nulle appelé référence de phase).

On peut donc écrire $F(t) = F e^{i\omega t}$, et si on note $\widetilde{F} = \Phi^T F$, on a

$$\Phi^T F(t) = \Phi^T F e^{i\omega t} = \widetilde{F} e^{i\omega t}.$$

Revenons au vecteur des déplacements $u(t)$. On cherche les solutions $Q(t)$ sous la forme $Q(t) = Q e^{i\omega t}$ avec Q un vecteur indépendant du temps et exprimé dans la base modale. En dérivant, on obtient :

$$\frac{d}{dt} Q(t) = i\omega e^{i\omega t} Q \text{ et } \frac{d^2}{dt^2} Q(t) = -\omega^2 e^{i\omega t} Q$$

et l'équation (2.22) devient

$$-\omega^2 \widetilde{M} Q + i\omega \widetilde{C} Q + \widetilde{K} Q = \widetilde{F}.$$

Comme les matrices \widetilde{M} , \widetilde{C} et \widetilde{K} sont diagonales on a, pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$-\omega^2 m_j q_j + i\omega c_j q_j + k_j q_j = f_j$$

avec f_j la $j^{\text{ème}}$ composante de \widetilde{F} .

Comme $k_j = m_j \omega_j^2$ et $c_j = 2m_j \omega_j \xi_j$, on a

$$(-\omega^2 m_j + 2im_j \omega \omega_j \xi_j + m_j \omega_j^2) q_j = f_j$$

c'est-à-dire

$$q_j = h_j f_j,$$

avec

$$h_j = \frac{1}{m_j(-\omega^2 + 2i\omega\omega_j\xi_j + \omega_j^2)}. \quad (2.23)$$

Si on note

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & h_2 & \\ & & \dots \\ 0 & & & h_n \end{pmatrix}$$

la matrice diagonale de taille $n \times n$ dépendante de ω , on a $Q = H\widetilde{F}$, $u = \Phi H\widetilde{F}$ et donc, comme $\widetilde{F} = \Phi^T F$, on a finalement

$$u = \Phi H \Phi^T F. \quad (2.24)$$

D'après (2.23), H ne dépend que de la pulsation ω , des masses modales m_j , des amortissements modaux ξ_j et des pulsations propres ω_j , tandis que la matrice de base Φ dépend uniquement des modes propres ϕ_j .

Ainsi, d'après (2.24), le calcul de réponse est applicable pour toute structure dont on connaît la base modale (c'est-à-dire ses fréquences propres et ses modes propres associés) ainsi que ses masses et amortissements modaux.

Rappelons toutefois que ceci n'est valable que dans le cas où C est diagonalisable (base modale réelle). Dans le cas d'une base modale complexe, le vecteur déplacement est donné par la formule :

$$u = [\Phi G \Phi^T + \overline{\Phi} \widehat{G} \Phi^T] F,$$

avec u le vecteur déplacement de chaque degré de liberté, F le vecteur des forces d'excitation, Φ la base modale complexe, $\overline{\Phi}$ la conjuguée de Φ , G et \widehat{G} deux matrices diagonales qui dépendent de la pulsation ω et telles que :

$$G_j = \frac{1}{A_j(i\omega - \lambda_j)} \text{ et } \widehat{G}_j = \frac{1}{A_j(i\omega - \overline{\lambda_j})},$$

2.3 Calcul d'une base modale et méthode de recombinaison

avec $A_j = 2i\omega_j m_j$ et $\lambda_j = -\xi_j \omega_j + i\omega_j \frac{1}{\sqrt{1-\xi_j^2}}$.

Nous avons montré dans cette partie comment, à partir du calcul de la base modale d'une structure donnée, il est aisé de connaître le comportement dynamique de la structure lorsqu'elle est soumise à une force d'excitation fréquentielle quelconque. En raison de sa simplicité, cette méthode (dite de recombinaison modale) est utilisée dans les logiciels de calcul des structures (dont MSC/NASTRAN) pour l'évaluation des réponses forcées.

Chapitre 3

Méthodes d'optimisation topologique

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, un problème d'optimisation topologique peut être vu comme un problème de distribution de matière.

On dispose au départ d'un domaine de référence $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, choisi en fonction de l'encombrement maximal possible, et de l'ensemble des conditions aux limites (chargements et fixations) du composant mécanique à optimiser. Il s'agit de répartir de façon optimale, un matériau de densité ρ^0 et de propriétés A^0 dans Ω , c'est-à-dire de déterminer le sous-domaine ω de Ω rempli de matière [12, 11].

Mathématiquement, le problème d'optimisation topologique est de la forme

$$\min_{\omega \subset \Omega} f(\omega) \tag{3.1}$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} g_i(\omega) &\leq 0 & i \in I, \\ h_i(\omega) &= 0 & i \in E, \end{aligned}$$

avec I et E des ensembles finis d'indices, f la fonction objectif, g_i et h_i les fonctions définissant les contraintes (à valeurs réelles).

Notons qu'en pratique, la fonction objectif et les contraintes représentant le plus souvent une masse, un déplacement, une compliance ou une fréquence propre, ce sont dans la plupart des cas des fonctions implicites et non linéaires en ω . Leur évaluation nécessite alors la résolution d'une équation d'état et le problème (3.1) est de la forme

$$\min_{\omega \subset \Omega} f(u(\omega), \omega) \tag{3.2}$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} g_i(u(\omega), \omega) &\leq 0 & i \in I, \\ h_i(u(\omega), \omega) &= 0 & i \in E, \end{aligned}$$

avec u la solution de l'équation d'état $e(u(\omega), \omega) = 0$.

Dans le cas de l'élasticité linéaire, il s'agit du système (2.9)-(2.13) qui sera en pratique résolu par une méthode d'éléments finis (voir paragraphe 2.1.4).

Nous présentons dans ce chapitre différentes méthodes d'optimisation topologique, que l'on trouve dans la littérature et permettant de résoudre le problème (3.1). Ainsi, nous décrirons dans la première partie, les méthodes de distribution de matière qui consistent à discrétiser le domaine Ω en un maillage dit de « conception » et à décider quels éléments seront vides ou pleins. Nous parlerons ensuite des approches utilisant le gradient de forme. Enfin, nous présenterons d'autres techniques, peut-être moins utilisées que les précédentes : les méthodes évolutives. Au delà d'un simple état de l'art, cet inventaire nous permettra d'expliquer notre choix. C'est ce que nous ferons à la fin de ce chapitre.

3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception

Le problème (3.1) est continu en espace puisqu'on cherche une forme quelconque dans Ω .

Une idée naturelle pour sa résolution, consiste à discrétiser le domaine Ω à l'aide d'un maillage dit de « conception », de telle sorte que le problème (3.1) se reformule comme un problème de distribution de matière dans les éléments du maillage de conception (problème d'optimisation discrète). Cette approche est détaillée dans la partie 3.1.1. La limitation principale de cette approche est que, comme elle conduit à un problème d'optimisation discrète dont la résolution est coûteuse en calcul, le maillage de conception doit être grossier.

Une famille importante de méthodes alternatives permet de se ramener à un problème d'optimisation continue pour lequel on dispose d'algorithmes beaucoup plus efficaces. Ces méthodes consistent à relaxer le problème (3.1), c'est-à-dire à ne plus choisir le matériau dans un ensemble discret (vide ou plein) mais dans un ensemble continu (on autorise une solution composée d'une infinité de matériaux entre le vide et le matériau plein). La figure 3.1 illustre le principe de ces approches qui consistent à relaxer puis à discrétiser en espace et enfin à pénaliser les densités intermédiaires afin d'obtenir une solution « fabricable » (composée de vide et de plein).

D'un point de vue mécanique, la relaxation consiste à ne plus considérer un matériau plein isotrope mais un matériau composite poreux. Il est alors nécessaire de définir les propriétés A du matériau anisotrope utilisé pour des densités ρ comprises entre 0 et ρ^0 , dans le but d'évaluer la fonction objectif et les contraintes. Pour cela, deux types de méthodes existent : les méthodes d'homogénéisation et la méthode

3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception

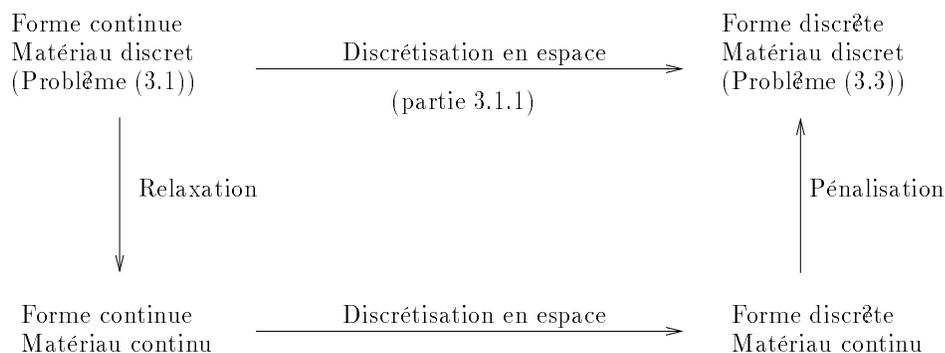


FIG. 3.1 – *Principe des méthodes de distribution de matière.*

SIMP.

Les **méthodes d'homogénéisation**, décrites dans la partie 3.1.2, consistent à considérer qu'un matériau avec une densité $\rho \in]0, \rho^0[$ est un matériau composite avec une microstructure particulière et d'en déduire ses propriétés macroscopiques. Quant à la **méthode SIMP (Simplified Isotropic Material with Penalisation)**, décrite dans la partie 3.1.3, elle permet de supprimer le concept délicat de la microstructure en utilisant un matériau fictif, c'est-à-dire en faisant un choix arbitraire de la valeur des propriétés du matériau pour $\rho \in]0, \rho^0[$. L'étape de pénalisation, contrairement aux méthodes d'homogénéisation, est dans ce cas implicite.

3.1.1 Méthodes conduisant à un problème d'optimisation discrète

L'idée la plus simple pour la résolution du problème (3.1) consiste à passer du domaine continu Ω à un domaine discret : on discrétise l'espace de conception Ω à l'aide d'un maillage. Il s'agit alors de répartir de façon optimale de la matière dans les éléments de conception.

Le maillage de conception utilisé pour la discrétisation du domaine Ω , sera noté $\tau^{co,h}$, avec h la plus grande distance entre deux noeuds adjacents du maillage (h représente la finesse du maillage) et tel que

$$\Omega = \bigcup_{j \in \{1, \dots, N\}} (\tau_j^{co,h})$$

avec N le nombre d'éléments de conception.

Ce maillage peut être identique ou différent de celui de calcul, noté $\tau^{ca,h'}$, permettant la résolution de l'équation d'état. Le plus souvent, les maillages de conception et de calcul sont confondus, mais pour réduire le nombre de variables d'optimisation,

on utilise couramment des maillages différents : un élément de conception peut alors contenir plusieurs éléments du maillage de calcul ($\tau^{ca,h'} \subset \tau^{co,h}$) (cf. figure 3.2) ou bien être complètement différent (voir les méthodes décrites à la fin de cette partie).

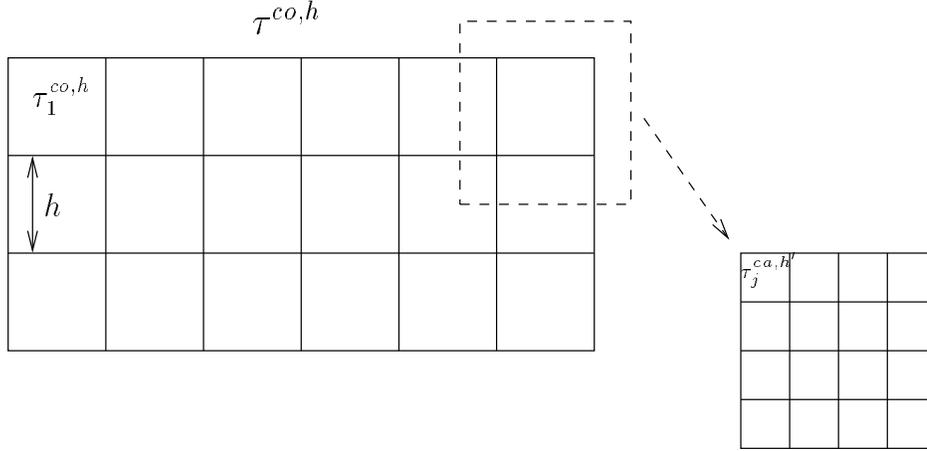


FIG. 3.2 – Exemple d'un maillage de conception et d'un maillage de calcul.

Considérons maintenant le vecteur

$$\mu = (\mu_i)_{i=1,\dots,N}, \quad \mu_i \in \{0, 1\} \quad \forall i,$$

qui indique la présence ou non de matière dans chaque élément du maillage de conception.

On note alors

$$\omega_\mu = \bigcup_{k \in \{1,\dots,N\} | \mu_k > 0} (\tau_k^{co,h}),$$

la forme discrète associée, et le problème (3.1) devient

$$\min_{\mu \in \{0,1\}^N} f(\omega_\mu) \tag{3.3}$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} g_i(\omega_\mu) &\leq 0 & i \in I, \\ h_i(\omega_\mu) &= 0 & i \in E. \end{aligned}$$

Ce problème peut être résolu par un algorithme d'optimisation discrète.

3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception

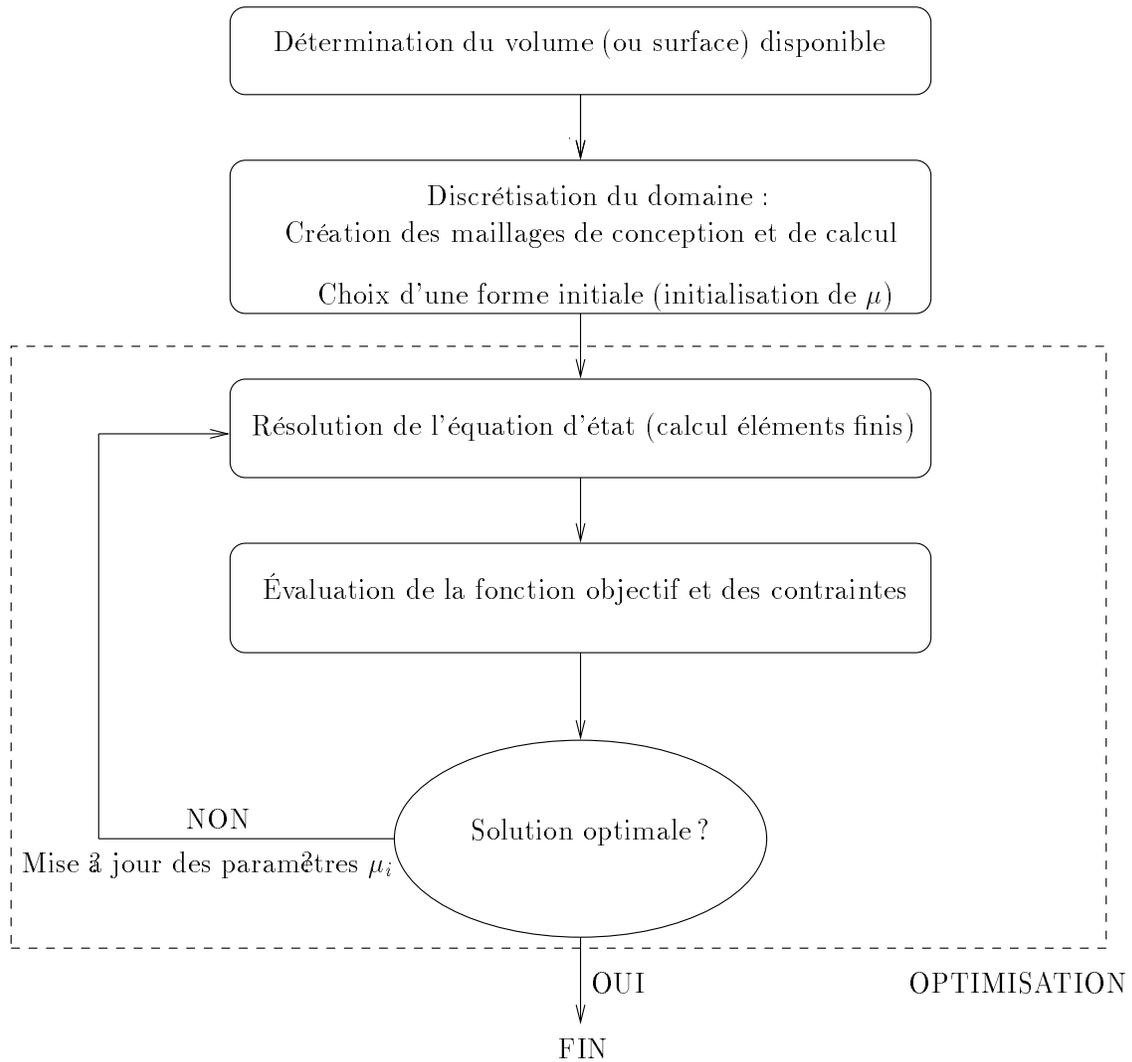


FIG. 3.3 – Déroulement classique d'un algorithme d'optimisation topologique par distribution de matière.

Le schéma donnant le principe d'un tel algorithme d'optimisation topologique par distribution de matière est décrit sur la figure 3.3.

Remarques :

- On initialise en général avec une forme pleine (Ω) mais d'autres choix sont possibles.
- Le problème (3.3) est généralement de très grande taille (le nombre de variables de conception étant très important) et chaque évaluation de la fonction objectif ou des contraintes est coûteuse (car impliquant une analyse éléments finis).
- On peut vouloir figer (vides ou pleines) certaines parties du domaine Ω , ce qui revient à restreindre l'ensemble des formes ω admissibles dans le problème continu (3.1) ou à fixer certaines composantes de μ à 0 ou 1 dans le problème discret (3.3).

Différents algorithmes peuvent être utilisés pour résoudre le problème (3.3) tels qu'un algorithme de Branch and Bound, la méthode du recuit simulé, les algorithmes génétiques (ou évolutionnaires) etc. Une description de ces méthodes est donnée au chapitre 4 et on pourra voir des exemples d'applications (notamment sur des problèmes de l'industrie automobile) dans [29], [30] ou [50].

La résolution du problème (3.3) présente des difficultés bien connues. Il a été démontré (voir [1] et [12] par exemple) que si l'on considère une suite de maillages de conception de plus en plus fins ($h \rightarrow 0$), la suite des solutions du problème (3.3) associé ne converge pas. En effet, lorsqu'on raffine le maillage, on obtient en pratique des solutions comportant de plus en plus de trous de petite taille, au lieu d'obtenir une représentation plus précise d'une même structure optimale. La solution du problème (3.3) est ainsi fortement dépendante du maillage de conception. Ce problème de dépendance de la solution au maillage intervient aussi lors de l'utilisation de méthodes d'optimisation topologique différentes. On en verra plus loin (partie 3.1.2) les raisons.

En plus de la difficulté évoquée ci-dessus, cette formulation du problème, basée sur un maillage donné et un tableau de bits, pose surtout un problème de temps de calcul et montre ses limites lorsqu'on affine le maillage de conception. En effet, lorsque le nombre de variables d'optimisation est important, les méthodes discrètes deviennent excessivement coûteuses en temps de calcul. Il est ainsi expliqué dans [8] et [29] que leur utilisation est limitée à l'emploi d'un maillage grossier. Pourtant, un maillage suffisamment fin est souvent nécessaire pour que la forme obtenue fournisse suffisamment d'information au concepteur.

Ainsi, afin de pallier cette difficulté, des études ont été faites sur l'utilisation de paramétrisations indépendantes de la discrétisation éléments finis. Ces approches sont décrites dans [29] et [30] :

3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception

Diagrammes de Voronoï : Considérons un nombre fini de points V_0, \dots, V_N (**les sites de Voronoï**) dans un domaine borné donné de Ω (le domaine de travail). À chaque site V_i (cf. figure 3.4), on associe l'ensemble de tous les points du domaine de travail pour lesquels le site de Voronoï le plus proche est V_i . On nomme cet ensemble $C_i = \{x \in \Omega \text{ tel que } \|x - V_i\| < \|x - V_j\| \forall j \neq i\}$ (avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne) **cellule de Voronoï**. Le **diagramme de Voronoï** est la partition du domaine définie par les cellules de Voronoï (cf. [47] pour une description détaillée des diagrammes de Voronoï).

Dans le cas d'un problème d'optimisation topologique, le maillage de conception peut être défini par un diagramme de Voronoï. Les variables d'optimisation sont alors la densité de matière (0 ou 1) à l'intérieur de chaque cellule. Le maillage de calcul est fixé au départ (maillage éléments finis classique). L'évaluation des fonctions se fait par projection du diagramme de Voronoï sur le maillage de calcul (un élément fini appartient à l'une ou l'autre des catégories (matériau ou vide) en fonction de la valeur de la cellule de Voronoï dans laquelle se trouve son centre de gravité). L'avantage d'une telle approche est que l'on peut facilement choisir le nombre d'éléments de conception désirés.

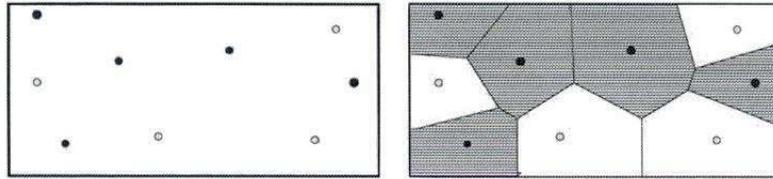


FIG. 3.4 – *Diagramme de Voronoï avec ses sites et ses cellules.*

Dipôles : Un dipôle est un ensemble de deux sites de Voronoï, l'un étiqueté 0 et l'autre 1, situés au même point du domaine de calcul, avec une médiane associée repérée par son angle directeur. Un dipôle est donc défini dans \mathbb{R}^2 par trois variables réelles : ses coordonnées (x, y) et l'angle θ de sa médiane avec l'axe x . La figure 3.5 donne un exemple de dipôle. Dans ce cas, le maillage de

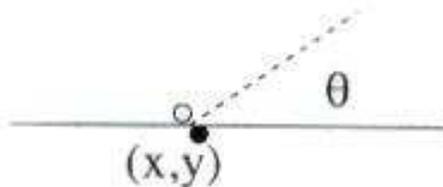


FIG. 3.5 – *Dipôle de Voronoï.*

conception est un ensemble de dipôles (cf. figure 3.6). Comme précédemment, on dispose d'une partition du domaine de travail en deux sous-ensembles, et on évalue les fonctions en projetant le maillage de conception sur celui de calcul (maillage éléments finis fixé).

Cette représentation tente de pallier la difficulté d'ajustement des frontières de la solution lorsqu'on utilise les diagrammes de Voronoï classiques. Il est en effet difficile de modifier une portion de frontière sans toucher aux portions adjacentes. Toutefois, dans ce cas aussi des situations délicates peuvent apparaître notamment pour le contrôle de la médiane entre deux dipôles.

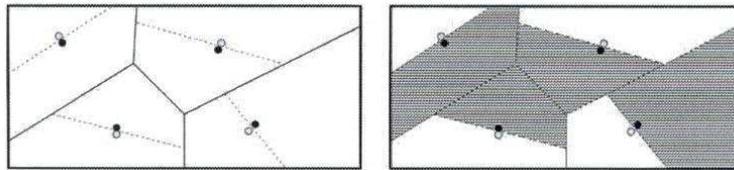


FIG. 3.6 – *Dipôles de Voronoï et maillage de conception.*

Barres de Voronoï : Une barre de Voronoï est définie par quatre variables réelles : ses coordonnées (x, y) , l'angle θ de la barre avec l'axe x et sa largeur (cf. figure 3.7). Pour une représentation en barres, on trace dans un premier temps un diagramme de Voronoï, puis on place dans chacune des cellules une barre ayant une largeur et une direction données. Le maillage de conception est ainsi constitué d'un ensemble de barres (cf. figure 3.7), et il suffit de projeter ce maillage sur celui de calcul, en sachant qu'un élément fini est considéré comme plein de matière si et seulement si son centre de gravité est dans la partie pleine d'une barre de Voronoï.

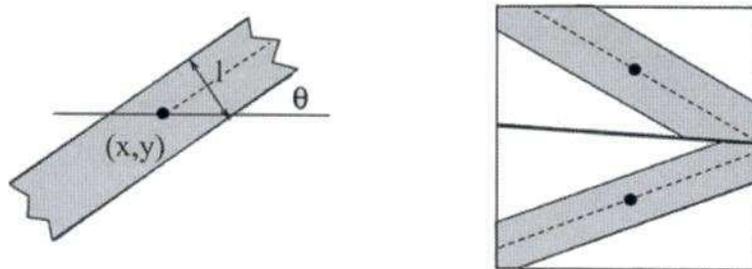


FIG. 3.7 – *Barre de Voronoï et maillage de conception.*

3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception

Cette représentation aide à l'apparition de structures en treillis (solution optimale dans certains cas particuliers), en introduisant des formes élémentaires qui sont déjà des barres. Elle permet par ailleurs d'éviter les difficultés de contrôle des frontières qui apparaissent dans les deux approches précédentes. Il faut toutefois noter qu'il est souvent difficile d'utiliser cette paramétrisation dans un cas en trois dimensions.

Systèmes de fonctions itérées (IFS) : Dans les trois méthodes de paramétrisation décrites précédemment, les blocs élémentaires permettant de construire la structure sont définis par l'utilisateur. Au contraire, dans la représentation à base de systèmes de fonctions itérées, aucune hypothèse n'est faite, ce qui permet d'éviter des choix inadéquats.

Un IFS est un ensemble de transformations contractantes (cf. [29] pour une définition plus détaillée). Le principal intérêt d'un tel objet mathématique est qu'il définit de manière unique un ensemble particulier, appelé son « attracteur ». Les attracteurs d'IFS furent à l'origine utilisés pour définir des ensembles fractals (tapis de Sierpinski, fougère de Barnsley, etc.), mais de nombreuses autres applications existent en analyse d'image ou de signal.

En optimisation topologique, on résout le problème inverse suivant : soit une forme optimale ω , trouver l'IFS dont l'attracteur est ω . Comme expliqué dans [29], la résolution de ce problème est complexe et l'utilisation des IFS en optimisation topologique n'en est qu'à ses premières expérimentations. De nombreux problèmes se posent encore (temps de calcul important, qualité et admissibilité de la solution, etc.).

On peut trouver dans [29], des exemples d'application de ces méthodes de paramétrisation couplées avec un algorithme évolutionnaire, notamment un cas en trois dimensions.

Une autre méthode d'optimisation topologique conduit également à un problème d'optimisation discrète de taille réduite. Il s'agit des méthodes d'optimisation topologique utilisant des **structures en treillis**.

L'optimisation topologique de structures en treillis consiste à chercher la solution du problème (3.3) parmi des structures composées de barres (ou « poutres »).

On dispose ainsi au départ d'un ensemble de n noeuds et de m connections possibles (représentées par des barres) entre les noeuds et on cherche la sous-structure optimale de cet « univers structural ». Les variables de conception du problème d'optimisation sont les sections des barres, qui ne peuvent prendre que les valeurs $\epsilon \ll 1$ (et non pas zéro pour éviter des problèmes de singularité de la matrice de raideur) et 1. On utilise alors un algorithme d'optimisation discrète (comme un algorithme génétique [50] ou le recuit simulé [48]) et la topologie « optimale » est obtenue en ne considérant à l'optimum que les sections significatives (à valeur 1). Cette approche peut donc être vue comme de l'optimisation paramétrique avec un nombre

de variables élevé (nombre de barres). Lorsque tous les noeuds sont joints, le nombre de barres est proportionnel au carré du nombre de noeuds et devient considérable lorsque le réseau est dense. De plus, comme on ne supprime pas de barre au fur et à mesure (on met seulement la valeur de leur section à ϵ), la taille du système reste fixe et le coût en temps de calcul très élevé. On retrouve donc le problème de temps de calcul déjà rencontré avec l'approche discrète basée sur un maillage donné et un tableau de bits.

Il existe cependant pour la résolution de ce problème des méthodes plus adaptées, comme celles décrites dans [12] ou celle proposée par Beckers et Fleury dans [6, 5] et utilisant une approche primale-duale. Ces méthodes de résolution permettent en effet de traiter des applications présentant un grand nombre de variables (jusqu'à plus de 130000 barres potentielles dans [6]), mais restent limitées à des problèmes particuliers où notamment le nombre de contraintes est très faible (1 ou 2).

En fait, la véritable limitation de ces approches est la difficulté d'interprétation du treillis proposé pour dessiner la pièce à fabriquer.

D'autres méthodes permettant de pallier les problèmes de temps de calcul de l'approche discrète, consistent à relaxer le problème (3.3). Ces méthodes de relaxation, décrites dans les deux parties suivantes, sont les plus connues et les plus utilisées en optimisation topologique.

3.1.2 Les méthodes d'homogénéisation

Il est juste de considérer les travaux de Murat et Tartar à la fin des années 70 et au début des années 80 (voir [61] par exemple) comme fondateurs de la théorie de l'homogénéisation appliquée à l'optimisation de forme. D'autres travaux théoriques fondamentaux sur les liens entre l'optimisation de forme et l'homogénéisation ont eu lieu en Russie et aux États-Unis (voir par exemple [33] ou [38]). De façon surprenante, les premiers calculs numériques réalistes en ce domaine ne sont arrivés que plus tard (citons en particulier le travail pionnier de Bendsøe et Kikuchi en 1988 [9]). Ces méthodes sont jusqu'à présent limitées à l'élasticité linéaire et la plupart des résultats théoriques ne concernent que l'optimisation de fonctions bien particulières [2].

Nous présenterons les méthodes d'homogénéisation dans le cas particulier du problème d'optimisation de forme qui consiste à minimiser, sur l'ensemble des formes admissibles ω , la somme pondérée de la compliance (notée c) et du poids (proportionnel au volume noté $|\omega|$). Autrement dit, on cherchera une forme optimale qui minimise une fonction objectif particulière notée $F(\omega)$:

$$\inf_{\omega \subset \Omega} (F(\omega) = c(\omega) + \lambda|\omega|). \quad (3.4)$$

3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception

C'est en effet dans ce cas particulier que la plupart des résultats théoriques ont été établis.

Il est montré dans [1] qu'en l'absence de contrainte supplémentaire sur les formes admissibles ω , le problème (3.4) est mal posé, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de forme optimale. Dans ce cas, pour n'importe quelle forme admissible $\omega_1 \subset \Omega$ donnée, il existe une forme admissible $\omega_2 \subset \Omega$ telle que $F(\omega_2) < F(\omega_1)$. La raison mécanique de ce phénomène de non-existence d'une solution au problème (3.4) est qu'il est souvent avantageux de faire beaucoup de petits trous (plutôt que quelques grands trous) dans une structure donnée afin d'améliorer sa performance par rapport à un compromis masse/raideur.

En revanche, on peut construire une suite (ω_ϵ) de formes telle que ω_ϵ soit la solution minimale de (3.4) parmi toutes les formes n'ayant pas de trou d'un diamètre inférieur à ϵ (avec une telle restriction sur le diamètre minimal d'un trou, le problème (3.4) a bien une solution).

Par conséquent, comme expliqué dans [1] et [2], atteindre le minimum de (3.4) peut faire appel à un processus de passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ (lorsque les trous deviennent de plus en plus petit et de plus en plus nombreux) conduisant au matériau d'origine infiniment perforé. On est alors en présence d'un matériau composite (ou hétérogène) car constitué d'un mélange de deux phases (ici vide et matériau). Le minimum du problème (3.4) n'est donc pas réalisé par une forme stricto sensu mais par un matériau composite.

L'idée des méthodes d'homogénéisation est ainsi d'élargir l'espace des formes admissibles en autorisant, dès le départ, les matériaux hétérogènes obtenus par un mélange fin de ce matériau et de vide.

D'après la théorie de l'homogénéisation, un matériau composite (caractérisé par une certaine microstructure - mélange matériau/vide) se comporte comme un matériau homogène de densité volumique locale θ (fonction définie sur Ω , prenant ses valeurs entre 0 et 1 et indiquant le taux de matériau plein au point $x \in \Omega$) et de loi de Hooke A^* (fonction définie en tout point de Ω). On dit alors que $\theta(x)$ et $A^*(x)$ sont les propriétés effectives (ou homogénéisées) du matériau composite au point x . Il s'agit de déterminer, toujours grâce à l'homogénéisation, la valeur de A^* pour une microstructure donnée.

Ainsi, si on note G_θ l'ensemble des propriétés effectives possibles A^* pour des matériaux composites ayant pour densité effective θ (pour une valeur de θ , il existe plusieurs propriétés A^* possibles correspondant à des microstructures différentes), le problème (3.4) devient (problème homogénéisé) :

$$\min_{\substack{0 \leq \theta \leq 1 \\ A^* \in G_\theta}} (\tilde{F}(\theta, A^*) = \tilde{c}(\theta, A^*) + \lambda \int_{\Omega} \theta(x) dx). \quad (3.5)$$

Remarquons ici que les algorithmes numériques qui résolvent le problème (3.5) vont fournir des solutions généralisées (composites) comportant des densités intermédiaires (entre vide et plein). Elles devront alors être post-traitées afin d'obtenir des solutions « fabricables » sans densité intermédiaire. On pourra comparer sur la figure 3.8 (provenant de [2]) la solution optimale du problème (3.5) réalisée avec un matériau composite et une forme voisine « fabricable » sans densité intermédiaire (sous-optimale).

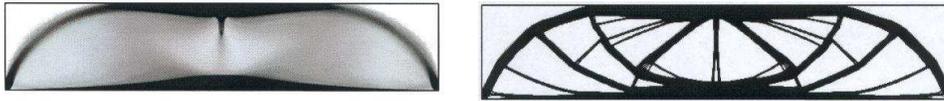


FIG. 3.8 – *Solution composite (gauche) et solution « fabricable » (droite).*

Les propriétés effectives A^* et donc l'ensemble G_θ pour une microstructure quelconque ne sont pas connus. Les approches proposées dans la littérature consistent à faire des hypothèses sur la microstructure utilisée. Les variantes les plus connues sont celles utilisant des matériaux laminés séquentiels, développées par Allaire et al. (voir [1], [2] et [12]), et celles utilisant des microstructures périodiques perforées, introduites par Bendsøe et Kikuchi (voir [9], [8] et [62, 63]). Pour chacune des deux approches, décrites ci-dessous, on présentera l'algorithme et la méthode de pénalisation associés.

Les matériaux laminés séquentiels

Afin d'être utilisée en optimisation topologique, une classe particulière de composites doit être assez riche pour pouvoir espérer approcher aussi bien que possible les composites optimaux et ainsi entraîner de bonnes propriétés de stabilité et de convergence pour les algorithmes numériques. Elle doit également permettre une description assez simple et explicite de ses membres afin de préserver l'efficacité des méthodes numériques.

Comme on peut voir dans [1], [2] ou [4], la classe des matériaux laminés séquentiels satisfait ces critères : leur description nécessite un petit nombre de paramètres et leurs propriétés macroscopiques sont données par des formules explicites. De plus, ils sont optimaux pour les cas particuliers des critères du type compliance ou fréquences propres.

Nous revenons ici au problème (3.4) et au problème homogénéisé (3.5) correspondant. Dans ce cas, la valeur de la compliance est donnée par le principe de

3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception

minimisation de l'énergie élastique complémentaire :

$$\tilde{c}(\theta, A^*) = \min_{\substack{\text{div } \tau=0 \text{ dans } \Omega \\ \tau n=f \text{ sur } \delta\Omega}} \int_{\Omega} A^*(x)^{-1} \tau \tau \, dx . \quad (3.6)$$

Ainsi, l'ordre des minimisations en τ et en (θ, A^*) étant indifférent, on cherche :

$$\min_{\substack{0 \leq \theta \leq 1 \\ A^* \in \tilde{G}_\theta}} \tilde{F}(\theta, A^*) = \min_{\substack{\text{div } \tau=0 \text{ dans } \Omega \\ \tau n=f \text{ sur } \delta\Omega}} \left\{ \int_{\Omega} \min_{\substack{0 \leq \theta \leq 1 \\ A^* \in \tilde{G}_\theta}} (A^*(x)^{-1} \tau \tau + \lambda \theta(x)) dx \right\}. \quad (3.7)$$

Désignons par $L_\theta \subset G_\theta$ l'ensemble des propriétés effectives A^* possibles pour une classe particulière de matériaux composites qu'on appelle les **laminés séquentiels**. En chaque point, la microstructure locale de ces matériaux est obtenue par mise en couches successives du matériau plein et du vide dans des directions et avec des proportions données. Une microstructure laminée est déterminée par un entier $p \geq 1$, le rang du laminé (c'est-à-dire le nombre de laminations successives qu'il faut faire pour le construire), les vecteurs de directions des laminations $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ et la proportion vide/plein dans la direction e_i à chaque étape de lamination $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$ ($0 \leq m_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^p m_i = 1$) (cf. figure 3.9).

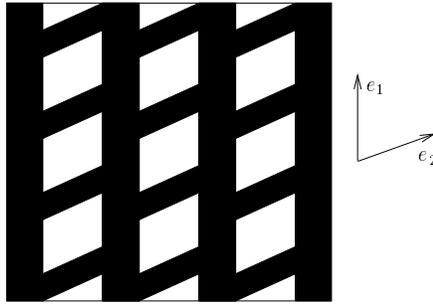


FIG. 3.9 – Représentation d'une microstructure laminée séquentielle de rang 2.

Il est alors montré dans [1] que

$$\min_{A^* \in \tilde{G}_\theta} A^{*-1} \tau \tau = \min_{A^* \in L_\theta} A^{*-1} \tau \tau . \quad (3.8)$$

c'est-à-dire que le problème (3.5) réalise son minimum dans L_θ .

Étant donné un tenseur des contraintes τ , on montre aussi dans [1] que pour le problème (3.5), la microstructure laminée séquentielle optimale au point x est de rang N (dimension de l'espace) avec comme directions de lamination $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$, les

valeurs propres de $\tau(x)$ et des proportions $(m_i)_{1 \leq i \leq N}$ s'exprimant en fonction de ces mêmes valeurs propres :

$$A^{*-1} = A^{-1} + \frac{1-\theta}{\theta} \left(\sum_{i=1}^p m_i f_A^c(e_i) \right)^{-1},$$

où $f_A^c(e_i)$ est un tenseur d'ordre 4 défini, pour toute matrice ξ , par la forme quadratique

$$f_A^c(e_i)\xi.\xi = A\xi.\xi - \frac{1}{\mu}|A\xi e_i|^2 + \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + \lambda)}((A\xi)e_i.e_i)^2,$$

avec μ et λ les coefficients de Lamé de A .

Dès lors, une fois A^* optimal connu, on trouve facilement le minimum de (3.7) par rapport à la densité θ , ce qui termine le calcul explicite des paramètres de la forme composite optimale pour un tenseur des contraintes donné τ . Seul le calcul de τ reste à faire numériquement par une méthode d'éléments finis.

Le problème homogénéisé d'optimisation de forme (3.7) est donc, comme on l'a vu, une double minimisation par rapport aux paramètres (θ, A^*) et au tenseur des contraintes τ .

Rappelons ici que les problèmes (3.5) et (3.7) sont continus. Il est donc nécessaire pour leur résolution numérique de discrétiser en espace et de chercher non pas une forme continue mais discrète. On considère ainsi le maillage de conception $\tau^{co,h}$ et dans chaque élément, μ_i et A_i pour $i = 1, \dots, N$, tels que

$$\theta(x) = \mu_i \text{ et } A^*(x) = A_i \quad \forall x \in \tau_i^{co,h}.$$

L'algorithme proposé par Allaire et al. dans [2] est alors le suivant :

Initialisation : Choisir la forme initiale c'est-à-dire μ_i^0 et A_i^0 pour $i = 1, \dots, N$.

Répéter jusqu'à convergence :

1. Étant donné une forme (μ_i^{k-1}, A_i^{k-1}) , $i = 1, \dots, N$, on calcule le tenseur des contraintes τ_k par résolution d'un problème d'élasticité linéaire (par une méthode d'éléments finis).
2. Étant donné ce tenseur des contraintes τ_k , on calcule les nouveaux paramètres de forme (μ_i^k, A_i^k) , $i = 1, \dots, N$, avec les formules explicites d'optimalité faisant intervenir τ_k .

3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception

Comme déjà précisé, nous obtenons à la fin de l'algorithme une forme généralisée (ou relaxée), c'est-à-dire une pièce constituée de densités intermédiaires et donc non « fabricable ». Notre but est alors d'obtenir une forme quasi-optimale constituée uniquement de matériau plein et de vide (non composite), ceci grâce à une technique de post-traitement qui permet de pénaliser les densités intermédiaires. En d'autres termes, la solution du problème relaxé est projetée sur l'espace des formes non composites. La stratégie proposée dans [2] est la suivante : on effectue quelques itérations supplémentaires de l'algorithme, au cours desquelles on force les densités à prendre des valeurs proches de 0 ou 1. En pratique, au lieu de mettre à jour la « vraie » densité optimale θ_{opt} , on utilise la valeur $\theta_{pen} = (1 - \cos(\pi\theta_{opt}))/2$.

La plupart des résultats théoriques de cette méthode ont été obtenus pour le problème (3.4) et pour l'optimisation des fréquences propres ou des déplacements d'une structure (pour un ou plusieurs chargements). En effet, la microstructure optimale n'est connue explicitement que pour ces fonctions particulières. Toutefois, cette technique peut être étendue d'un point de vue numérique à l'optimisation d'un tenseur des contraintes. On utilise pour cela des microstructures sous-optimales (mais toujours caractérisées par une formule explicite), comme expliqué dans [1].

Par rapport au travail initial de Bendsøe et Kikuchi (cf. paragraphe suivant) qui utilisent comme microstructure une cellule périodique carrée percée d'un trou rectangulaire, cette approche se distingue (entre autres) par l'utilisation de microstructures optimales, à savoir les laminés séquentiels (équation (3.8)). Les laminés séquentiels ne sont pas la seule classe connue de microstructures optimales, mais c'est la plus facile à utiliser.

Les microstructures périodiques perforées

Comme expliqué dans [9], [63] ou [39], un autre type de microstructures peut être considéré. Il s'agit des microstructures périodiques perforées. La microstructure en un point x du matériau est alors caractérisée par la répétition périodique d'une cellule unitaire (infiniment petite) composée du matériau initial et d'un trou (cf. figure 3.10). Quatre modèles de cellule unitaire, représentés sur la figure 3.11, sont usuellement considérés : (a) une cellule avec un trou carré (« modèle S »), dans ce cas la densité de la cellule est prise comme variable de conception, (b) une cellule avec une cavité rectangulaire (« modèle R »), dans ce cas les variables sont les côtés du rectangle, (c) le « modèle SR » et (d) le « modèle RR » similaires respectivement au « modèle S » et au « modèle R » avec la rotation du trou comme degré de liberté supplémentaire.

Dans ce cas, la principale hypothèse de la théorie de l'homogénéisation est que les cellules microscopiques ont une période et des dimensions infinitésimales comparées aux variables « macroscopiques » et au volume de départ. On peut donc supposer que les propriétés du matériau sont des fonctions périodiques des variables

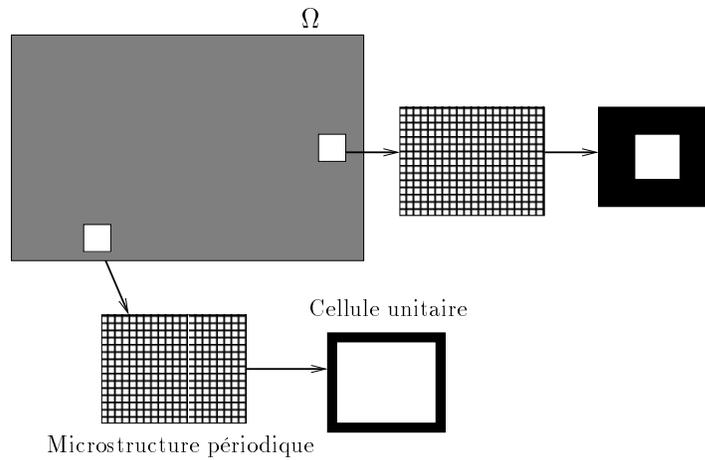


FIG. 3.10 – Exemple de microstructures périodiques perforées.

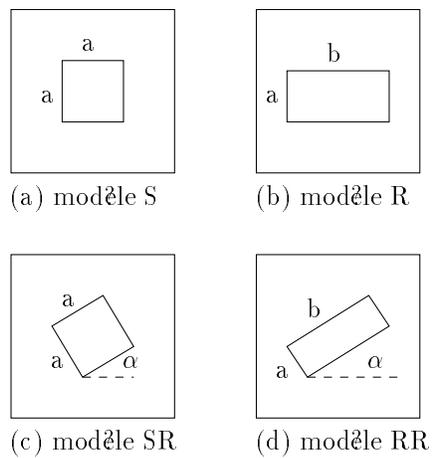


FIG. 3.11 – Modèles de cellule unitaire perforée.

3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception

microscopiques et la théorie mathématique de l'homogénéisation permet de remplacer le matériau hétérogène périodique par un « équivalent » homogène ayant le même comportement. Elle est ainsi utilisée pour calculer les coefficients d'élasticité homogénéisés pour des tailles de trous variées.

En chaque point x du matériau, la microstructure locale est donc caractérisée par les paramètres a , b , α de la cellule unitaire considérée.

Comme expliqué dans [9], [12] et [63], le problème est résolu en deux étapes :

1re étape : Pré-calcul des coefficients d'élasticité homogénéisés.

Pour certaines tailles de trou données (c'est-à-dire pour certaines valeurs de paramètres a , b et α), on discrétise la microstructure et on obtient, à l'aide d'un schéma éléments finis, les déformations caractéristiques de la cellule. Les coefficients d'élasticité homogénéisés A^* (nécessaires à l'expression de la fonction objectif et des contraintes) sont ensuite calculés à partir des valeurs de ces déformations microscopiques. Les valeurs des coefficients pour toutes les autres tailles de trou (c'est-à-dire pour toutes les autres valeurs des paramètres) sont ensuite calculées par interpolation.

Notons que contrairement au cas des laminés séquentiels, il n'y a pas ici d'expression explicite des coefficients homogénéisés. Le calcul de A^* pour une valeur des paramètres nécessite la résolution de plusieurs schémas éléments finis.

2e étape : Algorithme de résolution.

Dans chaque élément de conception, les valeurs des propriétés A_i du matériau et de μ_i sont données par la valeur des paramètres a_i , b_i et α_i correspondants (pré-calcul). Un algorithme d'optimisation est alors utilisé pour résoudre le problème (3.4) discrétisé (c'est-à-dire trouver les paramètres a_i , b_i et α_i optimaux dans chaque élément du maillage de conception). Rappelons qu'à chaque itération, l'évaluation de la fonction objectif et des contraintes se fait par la résolution d'un schéma éléments finis.

Enfin, il est dans ce cas aussi nécessaire a posteriori de pénaliser les densités intermédiaires de la structure optimale obtenue. On utilise ici une procédure itérative (voir [9]) permettant de déterminer si μ_i dans chaque élément de conception vaut 0 ou 1, sans que le volume de la pièce optimale ne soit modifié.

Cette méthode d'homogénéisation, comme la précédente, est limitée à l'élasticité linéaire. De plus, la plupart des résultats concernent l'optimisation d'une compliance (un ou plusieurs chargements) (voir [9], [12] ou [62] par exemple) ou des fréquences propres (voir [40], [41], [39] ou [63]), c'est-à-dire l'optimisation d'une fonction particulière.

Nous présentons dans le paragraphe suivant une méthode alternative aux mé-

thodes d'homogénéisation.

3.1.3 La méthode SIMP

Les méthodes d'homogénéisation décrites dans les sections précédentes peuvent paraître difficiles à mettre en oeuvre et inadaptées aux problèmes réels. On passe en effet beaucoup de temps à introduire la théorie de l'homogénéisation, à définir une microstructure optimale et des formules complexes pour mettre à jour les différentes variables, alors qu'à la fin on oublie tout ce qu'on a fait précédemment puisqu'on pénalise et on élimine le matériau composite.

Bendsøe [7], puis Rozvany, Zhou et Sigmund [49] et enfin Yang et Chuang [66], ont alors introduit une méthode plus simple, la méthode SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization), appelée aussi méthode des matériaux fictifs, qui s'avère bien fonctionner en pratique.

La méthode SIMP consiste aussi à utiliser une densité continue plutôt qu'une forme réelle. Toutefois, on supprime dans ce cas le concept délicat de la microstructure (puisqu'à la fin toutes les densités intermédiaires doivent être éliminées par la pénalisation) et on travaille avec un matériau fictif, en prenant en un point x de Ω , une valeur $A^*(x)$ arbitraire pour une densité volumique $\theta(x) \in [0, 1]$, qui ne correspond pas forcément à un matériau composite existant. Plus précisément, on considère, pour tout $x \in \Omega$,

$$A^*(x) = [\theta(x)]^p A^0, \quad (3.9)$$

$$0 \leq \theta(x) \leq 1, \quad (3.10)$$

avec $p > 1$.

Ainsi, si on discrétise en espace (utilisation du maillage de conception), la densité ρ_i et les propriétés A_i du matériau fictif utilisé dans chaque élément de conception sont données, pour $i = 1, \dots, N$, par

$$\rho_i = \mu_i \rho^0, \quad (3.11)$$

$$A_i = \mu_i^p A^0, \quad (3.12)$$

avec $0 \leq \mu_i \leq 1$, $i = 1, \dots, N$, ρ^0 et A^0 les propriétés du matériau de départ. Le problème (3.1) se réécrit alors sous la forme :

$$\min_{\mu \in [0,1]^N} f(\mu) \quad (3.13)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} g_i(\mu) &\leq 0 & i \in I, \\ h_i(\mu) &= 0 & i \in E. \end{aligned}$$

3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception

Contrairement aux méthodes d'homogénéisation présentées dans la partie précédente, il n'est pas nécessaire de pénaliser a posteriori les densités intermédiaires de la structure optimale obtenue pour la classe large des problèmes consistant à minimiser la masse en maximisant la raideur. On peut en effet montrer que, lorsque $p > 1$, les densités intermédiaires auront naturellement tendance à prendre les valeurs 0 ou 1. Pour expliquer cela, on a représenté sur la figure 3.12 la masse et la raideur du matériau fictif en fonction de μ_i , la masse étant proportionnelle à la densité μ_i et la rigidité proportionnelle à μ_i^p . On peut voir que pour $p > 1$ les densités intermédiaires ne sont pas favorables dans le sens où elles correspondent à une rigidité faible comparée à la masse du matériau (situation opposée à notre objectif qui est, dans la plupart des cas, la maximisation d'une raideur avec minimisation de la masse de la structure). Avec cette formulation du problème d'optimisation topologique, un algorithme d'optimisation locale cherchera à déplacer vers du matériau plein les éléments de conception tels que la valeur μ_i correspondante est proche de 1 pour l'itération courante (gain significatif en rigidité pour une petite perte du point de vue masse) et, de la même façon, cherchera à déplacer vers du vide les éléments tels que la valeur μ_i correspondante est proche de 0 pour l'itération courante (faible perte de rigidité pour un gain significatif du point de vue masse).

On peut dès lors supposer que la qualité de la solution obtenue sera fortement dépendante de la solution initiale. Nous étudierons cet aspect par la suite.

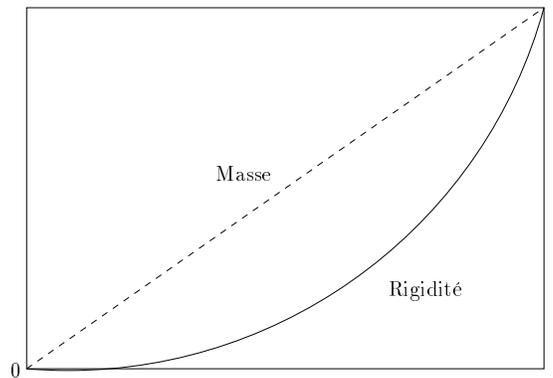


FIG. 3.12 – Représentation de la masse et de la rigidité de la structure en fonction de la densité μ_i .

Remarque : Nous avons vu, que contrairement aux méthodes d'homogénéisation, le modèle SIMP utilise les propriétés d'un matériau fictif et ne peut donc pas toujours être interprété physiquement. On peut alors se demander si en choisissant une puissance p particulière, on ne pourrait pas trouver un matériau, par exemple composite, dont les propriétés vérifient (3.9) et (3.10). Il est démontré dans [10] et [12] que le modèle SIMP peut être considéré comme un modèle de matériau si la

puissance p satisfait

$$\begin{aligned} p &\geq \max \left\{ \frac{2}{1-\nu_0}, \frac{4}{1+\nu_0} \right\} \text{ (en 2D),} \\ p &\geq \max \left\{ 15 \frac{1-\nu_0}{7-5\nu_0}, \frac{3}{2} \frac{1-\nu_0}{1-2\nu_0} \right\} \text{ (en 3D),} \end{aligned} \quad (3.14)$$

où ν_0 est le module de Poisson du matériau de départ.

Rappelons que nous devons également tenir compte, dans le choix de p , du fait qu'une forme bien pénalisée (sans densité intermédiaire) n'est obtenue qu'avec une valeur de p assez grande (d'après [12], en général $p > 3$). On observe toutefois dans les tests qu'une pénalisation trop sévère des densités intermédiaires peut conduire à des minima locaux et à des formes très sensibles au choix du point initial. Il est donc conseillé dans [12] d'utiliser une suite de valeurs croissantes pour p et de démarrer l'optimisation pour une valeur de p donnée, à partir de la solution optimale trouvée pour la valeur précédente de p . On recommande de plus d'utiliser une méthode au cours de laquelle la valeur de p est augmentée lentement, afin qu'elle atteigne la valeur souhaitée (satisfaisant nos critères) aux dernières itérations. Cette stratégie ne garantit pas une forme sans densité intermédiaire, même si elle donne de bons résultats dans la plupart des cas [12].

L'approche SIMP, bien que moins sophistiquée que les méthodes d'homogénéisation du point de vue de la théorie physique sous-jacente, est très simple à mettre en oeuvre et a l'avantage d'être générale car aucune hypothèse sur la forme du problème n'est nécessaire (contrairement aux méthodes d'homogénéisation). On peut ainsi voir dans [12] (ou [67] pour des exemples dans l'industrie automobile) qu'elle permet de traiter des objectifs multiples et des problèmes multidisciplinaires. Un exemple est aussi donné dans [11] et [54] sur la prise en compte de plusieurs matériaux pour l'optimisation de la forme d'une structure mécanique. Enfin, notons que Bendsøe et Sigmund proposent dans [12] un critère (généralisation en dynamique du critère statique de compliance défini au chapitre 2) permettant de prendre en compte des contraintes dynamiques de type réponses forcées.

D'autres méthodes, utilisant également un matériau fictif mais un autre schéma d'interpolation pour l'expression (3.9) des coefficients A^* , sont décrites dans [12, pages 60 à 67]. Ces techniques, moins utilisées et moins faciles à mettre en oeuvre que la méthode SIMP, peuvent toutefois présenter des avantages pour la résolution de certains problèmes spécifiques.

3.1 Les méthodes de distribution de matière sur un maillage de conception

3.1.4 Difficultés fréquemment rencontrées avec les méthodes de distribution de matière

Comme évoqué au paragraphe 3.1.1, un problème de dépendance de la solution au maillage peut se poser avec toutes les méthodes de distribution de matière (non convergence de la solution discrète lorsqu'on raffine le maillage de conception). Deux autres difficultés, que nous décrivons ci-dessous, peuvent également apparaître avec ces méthodes : le problème des damiers et le problème des modes locaux. Le but de cette partie est de décrire les techniques permettant de pallier ces difficultés. Cette liste n'est pas exhaustive et nous conseillons [12] pour plus de détails et un inventaire plus complet.

Le problème de dépendance de la solution au maillage

Afin d'éviter le problème de dépendance de la solution au maillage, un traitement complémentaire est nécessaire. Il existe pour cela trois grands types de méthodes (décrites et comparées dans [12] et [55]).

- Ajout d'une contrainte sur le périmètre de la structure. Le périmètre d'une structure Ω est égal à la somme des longueurs de toutes ses frontières (intérieures et extérieures). Contraindre le périmètre limite donc le nombre de trous qui peuvent apparaître dans le domaine. L'avantage de cette méthode est qu'elle n'entraîne aucune modification de l'algorithme. L'inconvénient est que le choix de la borne pour la contrainte peut être difficile à faire.
- Ajout d'une contrainte sur la variation locale de la densité. Il suffit ici d'imposer des bornes sur la variation de $\theta : |\frac{\partial \theta}{\partial x_i}|$, $i = 1, 2, 3$. Cette contrainte est malheureusement souvent inexploitable à cause du trop grand nombre de contraintes supplémentaires à considérer. On rapporte dans [12] et [55] que la méthode est trop lente pour des problèmes pratiques d'optimisation topologique. Une autre idée consiste alors à créer une contrainte « globale » sur le gradient, portant sur la norme de Sobolev $H^1(\Omega)$:

$$\|\theta\|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} \theta^2 + \|\nabla \theta\|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le choix de la borne de la contrainte peut être dans ce cas aussi problématique.

- Filtres sur la densité. Cette méthode, similaire au filtrage d'image, consiste à limiter la variation des densités en modifiant l'expression des coefficients d'élasticité. Plus précisément, ce filtre impose que la raideur en un point x de Ω dépende de la densité de tous ses voisins. Il empêche ainsi la formation de petits trous (et assure donc l'indépendance de la solution au maillage).
- Filtres sur les sensibilités. Des tests, présentés dans [55], ont montré que cette méthode est la plus efficace pour assurer l'indépendance de la solution au

raffinement du maillage. Elle consiste à modifier la sensibilité de la fonction objectif pour un élément donné en utilisant une moyenne pondérée de ses sensibilités par rapport aux éléments voisins.

Le problème des damiers

En plus de la dépendance de la solution au maillage, une autre difficulté peut apparaître aussi bien avec la méthode SIMP qu'avec les méthodes d'homogénéisation : **le problème des damiers**. Il s'agit d'un problème lié à la formation de régions où alternent des éléments vides et solides ordonnés en damiers (cf. figure 3.13). Ces configurations sont dues au schéma éléments finis et plus particulièrement à de mauvaises modélisations numériques qui surestiment la raideur des damiers. Les damiers peuvent en effet avoir une grande raideur artificielle si on les analyse avec une discrétisation inappropriée [55, 20].



FIG. 3.13 – Exemple d'une solution avec damiers.

L'utilisation d'éléments finis de plus haut degré pour le calcul du déplacement (notamment des éléments de 8 ou 9 noeuds) permet d'éviter les problèmes de damiers pour les méthodes d'homogénéisation. Avec l'approche SIMP, il faut de plus que la valeur de p soit suffisamment petite. Le principal inconvénient de l'emploi d'éléments finis de plus haut degré est l'augmentation du temps de calcul, rendant l'approche impraticable pour les problèmes réels.

Comme pour éviter la dépendance de la solution au maillage, on peut soit ajouter une contrainte au problème d'optimisation afin de limiter l'apparition des damiers (une heuristique est ainsi décrite dans [12]), soit utiliser une technique de filtres. Les résultats rapportés dans [12] semblent indiquer que cette dernière méthode est très efficace.

Le problème des modes locaux

Cette difficulté intervient lorsqu'on utilise la méthode SIMP pour la résolution de problèmes dynamiques. En effet, lors du calcul de la base modale (calcul des fréquences et des modes propres de la pièce – cf. partie 2.3), de nombreux modes locaux, faisant intervenir un petit nombre d'éléments, apparaissent dans les régions où le rapport masse/raideur est très grand.

3.2 Les méthodes basées sur le gradient de forme

Ainsi, dans le cas de la méthode SIMP, cela se produit lorsque la densité μ_i est faible puisque, lorsque la densité μ_i tend vers 0, le rapport masse/raideur (égal à $\frac{\mu_i}{\mu_i^p}$, $p > 1$) tend vers l'infini. Ces modes « artificiels » sont donc dus à la modélisation des trous dans la pièce par un matériau « mou » ayant une densité (et donc une masse) non pas nulle mais faible.

Le nombre de ces modes locaux pose problème puisqu'il augmente le temps de calcul et rend difficile l'identification des modes réels de la pièce que l'on cherche à optimiser.

Une solution consiste à faire en sorte que le rapport masse/raideur reste toujours fini lorsque la densité diminue, c'est-à-dire, dans le cas de la méthode SIMP, à utiliser un autre schéma d'interpolation pour l'expression (3.9), par exemple ceux des méthodes décrites dans [12, pages 60 à 67] et dont on a déjà évoqué l'existence précédemment.

D'autres méthodes d'optimisation topologique, basées sur un concept différent de celui de distribution de matière, ont été développées en parallèle. Nous décrivons brièvement dans les deux parties suivantes certaines d'entre elles. Cette liste est loin d'être exhaustive et l'on pourra voir [12] ou [23] pour un inventaire complet.

3.2 Les méthodes basées sur le gradient de forme

Après avoir donné la définition du gradient de forme et expliqué comment le calculer, nous décrivons dans cette partie deux méthodes basées sur son expression : la méthode des lignes de niveau puis celle utilisant le gradient topologique.

3.2.1 Le gradient de forme

Les méthodes d'optimisation de forme « classique », décrites au chapitre 1, reposent sur la définition du gradient de forme. Ce dernier donne en effet l'influence du mouvement des frontières du domaine sur la fonction considérée.

Des détails sur les notions de ce paragraphe peuvent être trouvés dans [57] ou [43] par exemple.

Soit $\omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) un ensemble ouvert et borné. On suppose que la frontière de ω est divisée en trois parties : $\partial\omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$, avec les conditions aux limites de Dirichlet sur Γ_D et de Neumann sur $\Gamma \cup \Gamma_N$. On suppose de plus que les frontières Γ_D et Γ_N sont fixées et donc que seule Γ peut varier.

Soit ω_0 un domaine de référence, on considère les domaines du type

$$\omega = (I_d + \theta)(\omega_0) \text{ avec } \theta \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d).$$

(Pour θ vérifiant $\|\theta\|_{C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)} < 1$, $(I_d + \theta)$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d).

On appelle **dérivée de forme** d'une fonction $J(\omega)$ en ω_0 la différentielle $J'(\omega_0)$ (au sens de Fréchet) de $\theta \mapsto J((I_d + \theta)\omega_0)$ en 0 :

$$J((I_d + \theta)(\omega_0)) = J(\omega_0) + J'(\omega_0)(\theta) + o(\theta),$$

avec

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\|o(\theta)\|_{C^1}}{\|\theta\|_{C^1}} = 0 \text{ et } \theta \mapsto J'(\omega_0)(\theta) \text{ est une forme linéaire continue.}$$

Exemple : Soient ω un ouvert de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3), $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$J(\omega) = \int_{\omega} f(x) dx.$$

J est différentiable en ω_0 et

$$J'(\omega_0)(\theta) = \int_{\omega_0} \operatorname{div}(\theta(x)f(x)) dx = \int_{\partial\omega_0} \theta(x).n(x)f(x) dx$$

pour tout $\theta \in C^1(\mathbb{R}^d)$.

Cette dérivée est bien définie et nous décrivons dans ce qui suit la méthode du lagrangien de Céa permettant de la calculer (on pourra voir [43] pour le détail des calculs).

Méthode du lagrangien

Supposons que ω soit rempli d'un matériau élastique, linéaire et isotrope de loi de Hooke A et que l'on souhaite minimiser la fonction

$$J(\omega) = \int_{\omega} j(u) dx,$$

où $j \in C^1(\omega)$ et u est solution du problème d'élasticité (cf. chapitre 2) suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\epsilon(u)) = 0 & \text{dans } \omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ (A\epsilon(u))n = f^s & \text{sur } \Gamma_N \\ (A\epsilon(u))n = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Considérons $\omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ et sa frontière $\partial\omega_0$ divisée en trois parties : $\partial\omega_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_{0N} \cup \Gamma_{0D}$. Céa montre dans [16] que la dérivée de forme de J en ω_0 est donnée par la formule

$$J'(\omega_0)(\theta) = \int_{\Gamma_0} (j(u) + A\epsilon(u).\epsilon(p_0))\theta.n ds,$$

3.2 Les méthodes basées sur le gradient de forme

avec $\theta = 0$ sur $\Gamma_{0N} \cup \Gamma_{0D}$, u solution du problème d'élasticité

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\epsilon(u)) = 0 & \text{dans } \omega_0 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{0D} \\ (A\epsilon(u))n = f^s & \text{sur } \Gamma_{0N} \\ (A\epsilon(u))n = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

et p_0 l'état adjoint dans ω_0 , solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\epsilon(p_0)) = -j'(u) & \text{dans } \omega_0 \\ p_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_{0D} \\ (A\epsilon(p_0))n = 0 & \text{sur } \Gamma_{0N} \cup \Gamma_0. \end{cases}$$

Ainsi, par exemple, dans le cas où J est égal à la compliance

$$J(\omega) = \int_{\Gamma_N} f^s \cdot u \, ds = \int_{\omega} A\epsilon(u) \cdot \epsilon(u) \, dx,$$

sa dérivée de forme est égale à

$$J'(\omega_0)(\theta) = \int_{\Gamma_0} -A\epsilon(u) \cdot \epsilon(u) \theta \cdot n \, ds.$$

Notons ici que le gradient de forme n'est pas toujours facilement calculable. Son expression est bien connue dans le cas de fonctions particulières (comme la compliance) mais ce n'est pas toujours le cas, notamment lorsque le calcul de l'état adjoint n'est pas immédiat.

3.2.2 La méthode des lignes de niveaux

L'idée d'utiliser une méthode de lignes de niveaux en optimisation topologique a été proposée récemment par Sethian et Wiegmann [53] et s'inspire des méthodes de lignes de niveaux d'Osher et Sethian [45] utilisées en mécanique des fluides, en traitement d'image, etc.

Nous avons choisi de décrire ici le travail d>Allaire et al. [3], qui se distingue de celui de Sethian et Wiegmann [53] du fait qu'il utilise le gradient de forme et un matériau mou pour représenter le vide. Cette méthode permet de prendre en compte des fonctions objectifs très générales. De plus, comme les formes ω considérées ne sont pas maillées mais capturées sur le maillage fixe d'un domaine Ω avec $\omega \subset \Omega$, le coût en temps de calcul reste modéré (pas de remaillage nécessaire).

Supposons (comme dans [3]) que l'on ait à minimiser la fonctionnelle $J(\omega)$ avec J représentant par exemple une compliance et $\omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert, borné,

rempli d'un matériau linéaire, élastique et isotrope de loi de Hooke A (on se place ici en élasticité linéaire mais il n'y a aucune difficulté à choisir un autre modèle). Supposons encore une fois que la frontière de ω est divisée en trois parties : $\partial\omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$, avec les conditions aux limites de Dirichlet sur Γ_D et de Neumann sur $\Gamma \cup \Gamma_N$. On suppose toujours que les frontières Γ_D et Γ_N sont fixées et donc que seule Γ peut varier. On introduit le domaine de travail $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dans lequel toutes les formes admissibles ω sont incluses et on suppose que Γ_D et Γ_N font partie de la frontière de Ω ($\partial\Omega$). On utilise aussi un maillage régulier de Ω , fixé une fois pour toutes.

On va alors capturer une forme $\omega \subset \Omega$ sur ce maillage fixe comme une ligne de niveaux d'une fonction ψ . En d'autres termes, on décrit les frontières de ω à l'aide d'une fonction de lignes de niveaux ψ définie sur Ω telle que :

$$\begin{cases} \psi(x) = 0 \iff x \in \partial\omega \cap \Omega, \\ \psi(x) < 0 \iff x \in \omega, \\ \psi(x) > 0 \iff x \in (\Omega \setminus \omega). \end{cases}$$

La frontière Γ de ω (représentée par la ligne de niveau $\psi(x) = 0$) est ainsi une interface séparant la partie pleine de matière, ω , de la partie vide, $\Omega \setminus \omega$ (remplie d'un matériau mou de loi de Hooke $B = 10^{-3}A$).

Au fil du processus d'optimisation, la forme va évoluer selon un temps fictif qui correspond à un pas de descente.

Supposons maintenant que la forme $\omega = \omega(t)$ évolue suivant le temps t avec une vitesse normale $V(t, x)$. Dans ce cas, si on dérive l'équation

$$\psi(x(t), t) = 0 \quad \forall x(t) \in \partial\omega(t),$$

on obtient

$$\partial_t \psi + \frac{d}{dt} x(t) \cdot \nabla_x \psi = \partial_t \psi + Vn \cdot \nabla_x \psi = 0. \quad (3.15)$$

Or, comme $n = \frac{\nabla_x \psi}{\|\nabla_x \psi\|}$, (3.15) s'écrit :

$$\partial_t \psi + V \nabla_x \psi \cdot \frac{\nabla_x \psi}{\|\nabla_x \psi\|} = 0. \quad (3.16)$$

Il vient donc que ψ doit satisfaire l'équation d'Hamilton-Jacobi suivante :

$$\partial_t \psi + V \|\nabla_x \psi\| = 0. \quad (3.17)$$

(Cette équation est posée sur tout Ω et pas seulement sur le bord $\partial\omega$, à condition que la vitesse soit partout connue).

3.2 Les méthodes basées sur le gradient de forme

Pour améliorer la forme ω , on va alors transporter ses frontières (c'est-à-dire la ligne de niveau $\psi = 0$) suivant la direction opposée au gradient de forme, la variable de temps t jouant le rôle de pas de descente. Il suffit ainsi de résoudre (3.17) avec $V = -J'(\omega)$. On utilise pour cela un schéma aux différences finies inspiré de ceux utilisés pour les équations hyperboliques non linéaires (voir [52] pour plus de détails et l'exemple du schéma de Crandall-Lions).

Remarques :

- La normale n donnée par $\frac{\nabla_x \psi}{\|\nabla_x \psi\|}$ est calculée par différences finies.
- Même si n n'est définie que sur Γ , la méthode des lignes de niveaux permet d'étendre sa définition à tout le domaine Ω .

La procédure itérative (décrite dans [3]) pour la résolution d'un problème d'optimisation topologique à l'aide d'une méthode de lignes de niveaux, est structurée comme suit :

Initialisation : Choisir la fonction lignes de niveaux ψ_0 correspondant au choix initial Ω_0 (afin d'avoir de nombreux trous on pourra choisir un produit de sinus par exemple).

Répéter jusqu'à convergence :

1. Calcul de u_k (solution du problème d'élasticité linéaire) et de p_k (état adjoint correspondant). L'analyse éléments finis est effectuée sur un maillage quadrangulaire fixe.
2. Calcul du gradient de forme correspondant à la vitesse normale V_k .
3. Transport de la forme à la vitesse V_k afin d'obtenir une nouvelle forme ψ_{k+1} .

Il est important de noter que dans le cas où le pas de temps Δt_k vérifie la condition de Courant-Friedrichs-Levy pour (3.17) (condition nécessaire à la convergence du schéma aux différences finies choisi), cet algorithme ne permet pas la création de nouveaux trous. Toutefois cette méthode entraîne des changements de topologie comme la disparition ou la fusion de trous. Elle reste donc une méthode d'optimisation topologique à condition que le nombre de trous dans la configuration de départ soit suffisamment important.

On remarque également que l'algorithme décrit ci-dessus conduit à un minimum local qui dépend fortement du choix de la topologie initiale. Dans [3], les résultats obtenus avec une topologie initiale bien choisie sont similaires à ceux obtenus avec les techniques d'homogénéisation utilisant les laminés séquentiels décrites au paragraphe 3.1.2 mais avec une convergence moins rapide. Bien que l'on soit au stade

initial de développement de cette technique, on trouvera des exemples d'application intéressants dans [3] ou [53].

3.2.3 Le gradient topologique

Le gradient topologique d'une fonctionnelle (comme la compliance par exemple) donne une information sur l'opportunité de créer des trous de taille infinitésimale à certains endroits de la structure.

Les premiers à introduire la notion de gradient topologique furent Céa [16] et Céa et al. [17] en 1973. Ils utilisaient alors une extension du gradient de forme classique (cf. partie 3.2.1) à l'ensemble du domaine de conception. Plus tard, Schumacher introduisit dans [51], la première définition du gradient topologique. Sa méthode, référencée sous le nom de « bubble method » [22], consiste à introduire un petit trou dans le domaine de conception et à l'élargir à l'aide d'une méthode d'optimisation de forme classique. Sokolowski et al. donnèrent dans [56], une justification mathématique à cette technique et Masmoudi a développé dans [42], une méthode adjointe permettant de prendre en compte une fonction objectif très générale. C'est cette dernière formulation que nous donnons ici.

Considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 , de frontière Γ . Soient u_Ω la solution d'une équation aux dérivées partielles définie sur Ω et $J(\Omega)$ une fonction coût de la forme : $J(\Omega) = j(\Omega, u_\Omega)$.

Pour $r > 0$, on définit l'ensemble $\Omega_r = \Omega \setminus \overline{(x_0 + r\omega)}$, obtenu en supprimant la partie $x_0 + r\omega$ de Ω , où $x_0 \in \Omega$ et $\omega \subset \mathbb{R}^d$.

Dans [42], Masmoudi définit alors le développement asymptotique de la fonction J sous la forme suivante :

$$J(\Omega_r) = J(\Omega) + f(r)g(x_0) + o(f(r)), \quad (3.18)$$

où $g(x_0)$ est le **gradient topologique** et f une fonction à valeurs réelles telle que

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = 0 \text{ et } f(r) > 0.$$

Il utilise pour cela deux outils mathématiques : une méthode de lagrangien généralisée et la troncature du domaine (on trouvera des détails dans [26] par exemple). L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de donner la valeur de $g(x)$ pour tout x en fonction de u_Ω et de son état adjoint p_Ω qui, eux, ne dépendent pas de x . Numériquement, cela signifie que seule la résolution de deux systèmes (ceux donnant les valeurs de u_Ω et de p_Ω) est nécessaire pour connaître la valeur de $g(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

On notera que le sens physique de la création d'un « trou » (si on se place dans le contexte de la mécanique des structures) dépend des conditions aux limites imposées sur les frontières de ce trou. Par exemple, dans le cas de conditions aux limites

3.2 Les méthodes basées sur le gradient de forme

de Neumann homogènes, $x_0 + r\omega$ représente une perforation alors que dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet homogènes, $x_0 + r\omega$ représente une soudure. Ainsi, l'expression du gradient topologique va dépendre aussi bien de ces conditions aux limites que du problème traité (le gradient topologique pour un problème d'élasticité linéaire sera en effet différent de celui calculé pour la résolution des équations de Maxwell).

Si on revient à l'expression (3.18), on remarque que la variation de la fonctionnelle J est donnée par le signe de $g(x)$. Donc, si on veut minimiser la fonction coût $J(\Omega)$, on doit créer un trou là où g est négative. On obtient ainsi (cf. [16]) la condition d'optimalité suivante :

$$g(x) \geq 0 \text{ dans } \Omega, \quad (3.19)$$

qui peut être utilisée dans un algorithme d'optimisation. On trouve par exemple dans [16], l'algorithme suivant :

Initialisation : Choisir un domaine initial Ω_0 et poser $k = 0$.

Répéter (tant que la cible n'est pas atteinte) :

1. Calculer u_k et p_k les solutions directes et adjointes définies sur le domaine Ω_k .
2. Calculer le gradient topologique g_k .
3. Définir le nouveau domaine $\Omega_{k+1} = \{x \in \Omega_k, g_k(x) \geq 0\}$.
4. Faire $k := k + 1$.

En pratique, le gradient topologique est calculé sur chaque élément d'un maillage fixe. Les éléments sont ensuite classés suivant la valeur de leur sensibilité, puis ceux pour lesquels elle est la plus faible, sont supprimés. Le nombre d'éléments supprimés à chaque étape est donné par la valeur du quotient du volume d'éléments supprimés sur le volume de la structure précédente. On peut prendre par exemple la valeur $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{10}$.

Enfin, on note que la méthode du gradient topologique a l'avantage de permettre de traiter des fonctions objectifs très générales (on pourra trouver des exemples d'application en mécanique (élasticité linéaire) et en électromagnétisme dans [15] et [25]) et n'est généralement pas très coûteuse en temps de calcul. Elle présente cependant l'inconvénient non négligeable d'être difficilement mise en oeuvre puisque l'expression du gradient topologique n'est pas toujours calculée aisément. En effet, le calcul de l'état adjoint n'est pas toujours facile surtout lorsque l'opérateur n'est pas auto-adjoint ou, pire, s'il n'est pas linéaire. On peut toutefois utiliser une approximation du gradient topologique et obtenir de bons résultats.

3.3 Les méthodes évolutives

De nombreuses méthodes de résolution n'utilisant ni la programmation mathématique ni l'analyse de sensibilités ont été proposées (voir [23] pour un inventaire). Ces techniques sont appelées **méthodes évolutives**, mais n'ont aucun lien avec l'utilisation des algorithmes évolutionnaires (ou génétiques). L'idée principale est similaire à celle des méthodes de « *fully stressed design* », c'est-à-dire que l'on va ajouter de la matière là où la valeur du tenseur des contraintes σ est élevée et en supprimer là où elle est faible (en pratique, on ajoute ou on supprime des éléments du maillage).

Ainsi, la procédure itérative développée par Xie et Steven [65] (détaillée dans [32]), consiste, comme décrit précédemment, à supprimer pas à pas les parties de la structure où les contraintes sont les moins élevées (c'est-à-dire celles où la matière est utilisée inefficacement) jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint. La topologie de la structure évolue ainsi lentement et la distribution des contraintes devient de plus en plus uniforme. Pour que cet algorithme se comporte bien numériquement, il est en effet nécessaire que la quantité de matière supprimée à chaque étape soit faible. Il est important de maintenir une évolution régulière.

Au départ, un domaine de conception (occupant tout l'espace disponible), les conditions aux limites et les propriétés matériau sont définies. Le domaine de référence peut comporter des parties « non design » c'est-à-dire que l'on ne peut pas modifier au cours de l'optimisation.

La première étape consiste à discrétiser le domaine continu à l'aide d'un maillage éléments finis assez fin. Le tenseur des contraintes initial σ^e est ensuite calculé sur chaque élément fini (analyse en élasticité linéaire) et tous les éléments qui remplissent la condition suivante sont supprimés :

$$\sigma^e < r_0 \sigma^{max}, \quad (3.20)$$

où le coefficient r_0 est le taux de rejet et σ^{max} est la valeur maximale des tenseurs σ^e . En d'autres termes, on impose une valeur faible aux coefficients d'élasticité A de ces éléments. Une autre analyse éléments finis est alors réalisée et d'autres éléments sont supprimés en fonction de la valeur de leur tenseur des contraintes. Si pour un taux de rejet donné r_i , la situation n'évolue pas (peu d'éléments sont supprimés), on incrémente :

$$r_{i+1} = r_i + r_{ev}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Cette procédure itérative est répétée jusqu'à ce qu'il y ait convergence, c'est-à-dire jusqu'à ce que tous les tenseurs des contraintes aient atteint un certain seuil.

Remarques :

3.4 Choix d'une méthode adaptée à notre problématique

- En général, on prend $r_0 = r_{ev} = 1\%$.
- Lorsqu'on veut supprimer un élément, on impose à ses coefficients d'élasticité une valeur faible qui est typiquement :

$$A = 10^{-6} A^0,$$

avec A^0 les coefficients d'élasticité initiaux.

- Concernant le nombre d'éléments supprimés au cours d'une itération, le critère (3.20) peut être remplacé par un pourcentage d'éléments à supprimer (ceux dont la valeur du tenseur des contraintes σ^e correspondant est la plus faible).
- On a donné ci-dessus un critère d'arrêt particulier mais les possibilités sont nombreuses (voir [32] ou [64] pour une liste plus complète).

L'avantage de ces méthodes est qu'elles peuvent être utilisées aussi bien avec des fonctions coût simples (mais générales) qu'en optimisation multi-critères. On pourra voir des exemples d'application dans [32, 65] ou encore dans [31] pour l'optimisation de composants mécaniques. Toutefois, la suppression d'éléments (ne pouvant être réintégrés à la structure) conduit souvent à des résultats erronés. De plus, cet algorithme reste une heuristique et un choix judicieux des paramètres (comme le taux de rejet) peut être difficile.

3.4 Choix d'une méthode adaptée à notre problématique

Nous avons décrit dans les parties précédentes les différentes méthodes d'optimisation topologique permettant de résoudre le problème (3.1). Pour chacune d'entre elles, nous avons évoqué les avantages et les inconvénients rencontrés lors de leur utilisation.

Dans cette partie, nous allons expliquer pourquoi nous avons choisi la méthode SIMP comme méthode d'optimisation topologique pour la résolution de nos problèmes particuliers. Pour cela, rappelons tout d'abord les caractéristiques de nos problèmes d'optimisation topologique (on pourra également pour cela revoir le chapitre 1) :

- Le cahier des charges et donc les contraintes à prendre en compte sont très divers (notamment lorsqu'il s'agit d'inertance ou de transfert). Il est donc nécessaire que la méthode utilisée soit générique c'est-à-dire qu'elle permette que le cahier des charges initial soit pris en compte dans sa totalité.
- Le logiciel de calcul des structures devra être utilisé en « boîte noire » dans le sens où nous ne souhaitons pas modifier le code, mais simplement récupérer la valeur des fonctions et de leur sensibilités par rapport aux densités. Nous

avons en effet, pris le parti de ne pas redévelopper un solveur éléments finis mais d'utiliser le logiciel commercial Nastran, qui est performant, largement utilisé (notamment chez Renault) et qui permet de modéliser des problèmes mécaniques très généraux, ce qui aurait été impossible avec notre propre code.

- Le temps d'évaluation de la fonction objectif, des contraintes et de leurs sensibilités étant important, il est nécessaire que le coût de résolution du problème d'optimisation qui découle de la méthode choisie soit peu élevé.

Plusieurs critères permettent de comparer les différentes méthodes d'optimisation topologique. Afin que celle que nous allons choisir soit la plus adaptée à la résolution de notre problème, nous avons retenu les trois critères suivants : la généralité des fonctions (objectif et contraintes) pouvant être prises en compte dans l'optimisation, la faisabilité du couplage avec un logiciel commercial de calcul des structures et enfin les difficultés connues. Le tableau 3.1 résume les caractéristiques de chacune des méthodes en fonction des critères sélectionnés.

La possibilité que des contraintes dynamiques, du type inertances et transferts, soient prises en compte dans l'optimisation est pour nous le critère le plus important. Il apparaît ainsi, au vue du tableau 3.1, que nous devons utiliser soit la méthode SIMP, soit une méthode discrète. Ces deux types de méthodes peuvent être couplés avec Nastran. Or, comme nous l'avons évoqué précédemment le coût d'évaluation de la fonction objectif et des contraintes est trop important pour que la résolution de notre problème par un algorithme d'optimisation discrète soit envisageable. Il est donc clair que choisir la méthode SIMP constitue pour nous le meilleur compromis.

3.4 Choix d'une méthode adaptée à notre problématique

	Généralité des fonctions (objectif, contraintes)	Faisabilité du couplage avec un logiciel de calcul de structures commercial	Difficultés connues
Méthodes discrètes + algorithme d'optimisation discrète	Aucune hypothèse	Oui	Temps de calcul important Dépendance de la solution au maillage Apparition éventuelle de damiers
Méthodes d'homogénéisation Laminés séquentiels ou Microstructures périodiques + algorithme d'optimisation continue	Uniquement la compliance, un déplacement, une valeur propre ou un tenseur des contraintes	Oui	Obtenir une solution fabricable (pénalisation) Apparition éventuelle de damiers
Méthode SIMP + algorithme d'optimisation continue	Aucune hypothèse	Oui	Dépendance de la solution au maillage Pénalisation des densités intermédiaires Apparition éventuelle de damiers Problème de modes locaux en dynamique
Méthode des lignes de niveaux	Le gradient de forme doit être calculable	L'état adjoint doit être disponible	Pas de création de nouveaux trous
Gradient topologique	Résultats théoriques disponibles que pour des cas particuliers	L'état adjoint doit être disponible	Les éléments supprimés ne peuvent être réintégrés à la structure
Méthodes évolutives	Adaptée à l'optimisation d'un tenseur des contraintes	Oui	La méthode d'optimisation est une heuristique : difficulté de réglage des paramètres Les éléments supprimés ne peuvent être réintégrés à la structure

TAB. 3.1 – *Comparaison des méthodes d'optimisation topologique.*

Chapitre 4

Optimisation numérique en vue de l'optimisation topologique

L'objectif de ce chapitre est de présenter les méthodes d'optimisation numérique pouvant permettre la résolution de notre problème d'optimisation topologique, c'est-à-dire pouvant être couplées avec la méthode SIMP. Aussi, après avoir rappelé les caractéristiques de notre problème, nous parlerons de méthodes d'optimisation locale particulières, les méthodes de descente. Nous décrirons en détail la méthode FSQP, qui utilise une séquence de sous-problèmes approchés pour l'approximation du problème initial et qui semble, comme nous le verrons par la suite, bien adaptée à la résolution de notre problème d'optimisation topologique. Pour une plus grande clarté dans la présentation des méthodes de descente, nous parlerons tout d'abord des problèmes d'optimisation sans contrainte, puis nous aborderons le cas plus général avec contraintes. Nous terminerons ce chapitre en décrivant les différents types d'algorithmes d'optimisation globale existants en insistant sur ceux déjà utilisés pour la résolution d'un problème d'optimisation topologique (cf. chapitre 3).

L'utilisation des algorithmes de programmation mathématique pour résoudre les problèmes d'optimisation de forme (en général) est bien établie et décrite en détail dans la littérature (cf. [12] par exemple). Le problème d'optimisation de forme est alors un problème d'optimisation classique sur les variables de forme qui, dans notre cas, correspondent aux densités à l'intérieur des éléments de conception.

Ainsi, si l'on reprend les notations utilisées au chapitre 3, notre problème d'optimisation (qui est sans contrainte d'égalité) s'écrit

Trouver $(\mu_i)_{i=1,2,\dots,N}$ avec $\mu_i \in [0, 1]$, qui minimise $f(\mu)$,

sous les contraintes

$$g_i(\mu) \leq 0 \quad i \in I, \tag{4.1}$$

avec $I = \{1, 2, \dots, m\}$.

Les caractéristiques de ce problème rendent difficile sa résolution. En effet :

- la fonction objectif f et les contraintes g_i sont le plus souvent implicites en μ . Leur évaluation nécessite alors la résolution d'une équation d'état à l'aide d'un schéma éléments finis et est donc très coûteuse en temps de calcul. Ces mêmes fonctions sont, de plus, non linéaires en μ ;
- le problème d'optimisation (4.1) est de (très) grande taille puisque le nombre de variables (correspondant au nombre d'éléments de conception et donc souvent au nombre d'éléments finis du maillage) est important (de plusieurs centaines à plusieurs milliers) ;
- la plupart des problèmes d'optimisation topologique ne sont pas convexes. La non convexité signifie qu'un problème peut avoir plusieurs minima locaux et que l'on peut obtenir avec des méthodes d'optimisation classiques plusieurs solutions pour le même problème, quand on choisit des valeurs de paramètres ou des solutions initiales différentes. Nous montrerons l'existence de plusieurs minima locaux aux chapitres 5 et 6 de ce document, au travers des différents exemples traités.

La grande taille du problème ainsi que le coût d'évaluation de la fonction objectif et des contraintes rendent difficile l'utilisation des algorithmes d'optimisation n'utilisant que la valeur de la fonction objectif et des contraintes et pas celle des dérivées correspondantes (méthodes « sans dérivée »). En effet, d'une part, ces méthodes nécessitent de nombreuses évaluations de la fonction objectif et des contraintes, très coûteuses ici ; et d'autre part, la grande taille du problème rend nécessaire l'information fournie par les dérivées. Pour les mêmes raisons, les algorithmes d'optimisation globale semblent inadaptés à la résolution des problèmes d'optimisation topologique (cf. partie 4.4 de ce chapitre).

Notons, de plus, qu'il serait dommage d'utiliser dans notre cas une méthode « sans dérivée » puisque les dérivées premières, calculées à l'aide de l'état adjoint, sont disponibles et peuvent être évaluées en même temps que la fonction objectif et les contraintes (même calcul Nastran).

Au vu de toutes ces caractéristiques, les méthodes qui nous ont semblé être les plus adaptées à la résolution de notre problème sont les méthodes d'optimisation locale non linéaire, dites de descente. Nous nous sommes ainsi intéressée à la méthode appelée **Programmation Quadratique Successive (PQS)**, connue en anglais sous le nom *Sequential Quadratic Programming* (SQP), et plus particulièrement à une de ses variantes appelée en anglais **Feasible SQP (FSQP)** que nous avons choisie pour résoudre notre problème.

4.1 Méthodes d'optimisation locale dans le cas d'un problème sans contrainte

Notation : Dans la suite de ce chapitre, pour plus de clarté et conformément à la tradition en optimisation numérique, nous noterons x notre vecteur de variables d'optimisation, c'est-à-dire le vecteur de \mathbb{R}^N représentant les densités à l'intérieur des éléments de conception (noté μ jusqu'à présent).

Ainsi, nous considérerons dans la suite de ce chapitre le problème d'optimisation sous la forme générale :

Trouver $x \in \mathbb{R}^N$ qui minimise $f(x)$

sous les contraintes

$$g_i(x) \leq 0 \quad i \in I, \quad (4.2)$$

où $I = \{1, 2, \dots, m\}$.

4.1 Méthodes d'optimisation locale dans le cas d'un problème sans contrainte

Nous considérons dans cette partie le problème sans contrainte :

Trouver $x \in \mathbb{R}^N$ qui minimise $f(x)$. (4.3)

Après avoir donné quelques définitions, nous décrirons les méthodes les plus utilisées pour sa résolution : les méthodes de descente. Nous parlerons notamment des méthodes newtoniennes.

4.1.1 Définitions

Nous décrivons dans ce paragraphe, les définitions et rappels nécessaires à la compréhension des méthodes d'optimisation décrites par la suite.

Définition 4.1 *On dit que*

- $x^* \in \mathbb{R}^N$ est un **minimum local** de f si $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout x dans un voisinage de x^* .
- $x^* \in \mathbb{R}^N$ est un **minimum local strict** de f si $f(x^*) < f(x)$ pour tout $x \neq x^*$ dans un voisinage de x^* .
- $x^* \in \mathbb{R}^N$ est un **minimum global** de f si $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout x .

Définition 4.2 (Convexité) L'ensemble $C \subseteq \mathbb{R}^N$ est convexe si $\forall x, y \in C$ on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

La fonction $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si C est convexe et si $\forall x, y \in C$ ($x \neq y$) on a $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

Proposition 4.1 (Conditions d'optimalité du premier ordre) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Si x^* est un minimum local de f alors $\nabla f(x^*) = 0$ (Condition nécessaire).

Si $\nabla f(x^*) = 0$ et f est convexe alors x^* est un minimum global de f (Condition suffisante).

Proposition 4.2 (Conditions d'optimalité du second ordre) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Si x^* est un minimum local de f alors $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*)$ est symétrique semi-définie positive (Condition nécessaire).

Si $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*)$ est symétrique définie positive alors x^* est un minimum local strict de f (Condition suffisante).

4.1.2 Méthodes de résolution : les méthodes de descente

Ce paragraphe est consacré à la description des méthodes de descente, couramment utilisées pour résoudre le problème (4.3).

Pour la résolution du problème d'optimisation (4.3), si l'on procède par itérations successives, on cherche un point x_{k+1} ($(k+1)^{\text{ème}}$ itération) tel que $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$. Ainsi, si l'on prend $x_{k+1} = x_k + \alpha d$ avec $d \neq 0$ et α positif petit, on a

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \alpha d^T \nabla f(x_k) + o(\alpha) \quad (\text{formule de Taylor tronquée}) \quad (4.4)$$

et on va choisir d tel que $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ pour α assez petit. D'après (4.4), il suffit par exemple que $d^T \nabla f(x_k) < 0$.

On a ainsi la définition suivante :

Définition 4.3 On dit que $d \in \mathbb{R}^N$ est une direction de descente pour f à partir du point x_k si $d^T \nabla f(x_k) < 0$.

Les méthodes de descente reposent sur cette définition et l'algorithme de base s'écrit sous la forme :

1. Initialiser le point x_0 .
2. Étant donné x_k , calculer une direction de descente d_k .

4.1 Méthodes d'optimisation locale dans le cas d'un problème sans contrainte

3. Rechercher un pas de descente $\alpha > 0$ tel que $f(x_k + \alpha d_k) < f(x_k)$.
4. Test d'arrêt et boucle : $x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$ et $k = k + 1$.

La valeur de α détermine le pas que l'on peut faire dans la direction de descente d_k . Plusieurs méthodes permettent de la calculer. Le plus souvent on utilise la règle d'Armijo, celle de Goldstein et Price ou bien celle de Wolfe. Nous avons choisi de ne pas les décrire ici et on pourra voir [13] pour plus de détails.

4.1.3 Méthode de Newton

Dans le cas sans contrainte, chaque itération de la méthode de Newton consiste en la minimisation du développement de Taylor de f tronqué à l'ordre 2 autour du point courant x_k :

$$q(x) = f(x_k) + (x - x_k)^T \nabla f(x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T \nabla^2 f(x_k)(x - x_k).$$

Ainsi, on va prendre comme point x_{k+1} le minimum de $q(x)$ qui, lorsqu'il existe, est donné par le x_{k+1} solution de $\nabla q(x_{k+1}) = 0$, c'est-à-dire solution de

$$\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Donc, en supposant $\nabla^2 f(x_k)$ définie positive,

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k).$$

Autrement dit, la méthode de Newton est une méthode de descente avec un pas α toujours égal à 1 et avec comme direction de descente d_k (en supposant toujours $\nabla^2 f(x_k)$ définie positive), la solution du système d'équations linéaires :

$$\nabla^2 f(x_k) d_k = -\nabla f(x_k),$$

appelée la direction de Newton. On note que d_k est unique seulement si $\nabla^2 f(x_k)$ est définie positive.

L'algorithme de Newton s'écrit :

1. Initialiser le point x_0 .
2. Étant donné x_k , résoudre $\nabla^2 f(x_k) d_k = -\nabla f(x_k)$ pour déterminer la direction de descente d_k .
3. Test d'arrêt et boucle : $x_{k+1} = x_k + d_k$ et $k = k + 1$.

Méthodes quasi-newtoniennes

Les méthodes newtoniennes décrites précédemment calculent toute l'information relative à la courbure de f à chaque itération (en calculant $\nabla^2 f(x_k)$). Dans le cas des méthodes quasi-newtoniennes, l'information est construite au fur et à mesure (d'une itération à l'autre) en n'utilisant que $f(x_k)$ et $\nabla f(x_k)$.

Ainsi, à l'itération k , une approximation H_k de l'inverse de $\nabla^2 f(x_k)$ est supposée disponible. La matrice H_k contient l'information cumulée relative à la courbure de f .

En pratique, on démarre avec $H_0 = I_N$. Après le calcul de x_{k+1} , H_{k+1} est obtenue en mettant à jour H_k en y intégrant l'information nouvellement acquise sur la courbure de f :

$$H_{k+1} = H_k + U_k$$

où la matrice de mise à jour U_k est définie par la méthode de quasi-Newton spécifique utilisée. Par exemple, si on utilise l'approximation dite du type BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) :

$$H_{k+1} = H_k - \frac{1}{s_k^T H_k s_k} H_k s_k s_k^T H_k + \frac{1}{y_k^T s_k} y_k y_k^T$$

avec $s_k = x_{k+1} - x_k$ et $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$.

L'algorithme de quasi-Newton est ainsi le suivant :

1. Initialiser le point x_0 et prendre $H_0 = I$ ($k = 0$).
2. Étant donné x_k , résoudre $d_k = -H_k \nabla f(x_k)$.
3. Rechercher un pas de descente α solution de

$$\min_{\alpha} f(x_k + \alpha d_k).$$

4. Test d'arrêt et boucle : $x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$, $H_{k+1} = H_k + U_k$ et $k = k + 1$.

Les méthodes dites newtoniennes et quasi-newtoniennes sont à la base des algorithmes de descente les plus performants pour les problèmes d'optimisation non-linéaire, notamment l'algorithme PQS que nous décrirons par la suite pour le cas plus général d'un problème avec contraintes.

4.2 Méthodes d'optimisation locale dans le cas d'un problème avec contraintes

Nous généralisons dans cette partie l'utilisation des méthodes de descente pour la résolution des problèmes avec contraintes. Nous aborderons dans un premier temps

4.2 Méthodes d'optimisation locale dans le cas d'un problème avec contraintes

des problèmes comportant seulement des contraintes d'égalité avant de passer au cas plus général des problèmes avec contraintes d'inégalité.

4.2.1 Problèmes avec contraintes d'égalité

Nous considérons dans ce paragraphe le problème avec contraintes d'égalité suivant :

Trouver $x \in \mathbb{R}^N$ qui minimise $f(x)$,

sous les contraintes

$$g_i(x) = 0 \quad i \in E, \quad (4.5)$$

où $E = \{1, 2, \dots, p\}$ et les fonctions f et g_i supposées de classe C^2 .

Définition 4.4 *On dit que*

- $x^* \in \mathbb{R}^N$ est un **minimum local** du problème (4.5) si $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout x dans un voisinage de x^* tel que $g_i(x) = 0 \quad \forall i \in E$.
- $x^* \in \mathbb{R}^N$ est un **minimum global** de f si $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout x tel que $g_i(x) = 0 \quad \forall i \in E$.

Proposition 4.3 (Conditions d'Euler-Lagrange) *Si x^* est un minimum local de (4.5) et si les contraintes sont qualifiées en x^* (cf. [44] par exemple), alors $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tel que $\nabla f(x^*) + (\lambda^*)^T \nabla g(x^*) = 0$.*

Définition 4.5 *On appelle $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ avec $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$ le lagrangien du problème (4.5).*

On va donc s'intéresser à la résolution du système $\nabla L(x, \lambda) = 0$. On peut alors utiliser la méthode de Newton (en tant que méthode pour résoudre un système d'équations non linéaires) qui dans ce cas s'écrit (cf. [13] pour plus de détails) :

Étant donné des poids positifs ω_i , $i \in E$,

1. Initialiser (x_0, λ_0) .
2. Étant donné (x_k, λ_k) , résoudre le système

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L & \nabla_{x\lambda}^2 L \\ \nabla_{\lambda x}^2 L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{x_k} \\ \Delta_{\lambda_k} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x_k) + \lambda_k^T \nabla g(x_k) \\ g(x_k) \end{pmatrix}$$

pour

$$\begin{pmatrix} \Delta_{x_k} \\ \Delta_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

la direction de Newton.

3. Rechercher un pas de descente α dans la direction Δ_{x_k} (recherche linéaire), par exemple avec la fonction de mérite

$$\Phi(x) = f(x) + \sum_{i \in E} w_i |g_i(x)|.$$

4. Test d'arrêt et boucle : $x_{k+1} = x_k + \alpha \Delta_{x_k}$, $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha \Delta_{\lambda_k}$.

Cette méthode de Newton peut être interprétée comme une méthode dite PQS (**Programmation Quadratique Successive**) appliquée à la résolution de (4.5).

L'idée de base de cette méthode est de transformer le problème d'optimisation non linéaire avec contraintes en une suite de sous-problèmes quadratiques (critère à minimiser quadratique sous contraintes linéaires).

Soient $x_k \in \mathbb{R}^N$ l'itéré courant et $\lambda_k \in \mathbb{R}^p$ l'estimé courant des multiplicateurs de Lagrange. Considérons le problème quadratique suivant :

Minimiser

$$q(\Delta_{x_k}) = \nabla f(x_k)^T \Delta_{x_k} + \frac{1}{2} \Delta_{x_k}^T \nabla_{xx}^2 L(x_k, \lambda_k) \Delta_{x_k} \quad (4.6)$$

sous les contraintes

$$g_i(x_k) + \nabla g_i(x_k)^T \Delta_{x_k} = 0, \quad i \in E,$$

appelé **problème quadratique tangent**. La fonction objectif est une approximation quadratique du lagrangien autour du point courant alors qu'on considère une approximation affine des contraintes.

L'algorithme PQS repose sur le lemme suivant (démontré dans [13]) :

Lemme 4.1 *Soit (Δ_{x_k}, λ) une solution du problème (4.6). Alors*

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{x_k} \\ \Delta_{\lambda_k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

est le pas de l'algorithme de Newton pour la résolution du problème (4.5) avec $\lambda = \lambda_k + \Delta_{\lambda_k}$.

4.2 Méthodes d'optimisation locale dans le cas d'un problème avec contraintes

Le principe général de l'algorithme PQS est ainsi le suivant :

1. Initialiser (x_0, λ_0) .
2. Étant donné (x_k, λ_k) , résoudre (4.6) pour obtenir la direction Δ_{x_k} et le multiplicateur de Lagrange λ associé.
3. Rechercher un pas α dans la direction Δ_{x_k} à partir du point x_k , à l'aide d'une fonction de mérite.
4. Test d'arrêt et boucle : $x_{k+1} = x_k + \alpha \Delta_{x_k}$, $\lambda_{k+1} = \lambda$.

L'avantage de l'interprétation PQS de la méthode de Newton est qu'elle se généralise aisément dans le cas d'un problème avec contraintes d'inégalité comme on le verra par la suite.

4.2.2 Problèmes avec contraintes d'inégalité

Considérons maintenant le problème général (4.2) :

Trouver $x \in \mathbb{R}^N$ qui minimise $f(x)$,

sous les contraintes

$$g_i(x) \leq 0 \quad i \in I,$$

où $I = \{1, 2, \dots, m\}$.

On dit que x est un **point de KKT** du problème d'optimisation (4.2) et $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m$ une **paire de KKT** avec multiplicateur de Lagrange associé, si les conditions suivantes (dites de Karush, Kuhn et Tucker) sont satisfaites :

$$\nabla f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \quad (4.7)$$

$$g_i(x) \leq 0 \quad (i \in I) \quad (4.8)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i \in I) \quad (4.9)$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0 \quad (i \in I). \quad (4.10)$$

Proposition 4.4 (Conditions d'optimalité du premier ordre) *Dans le cas où les contraintes sont qualifiées en x^* (cf. [44] par exemple), les conditions de KKT sont des conditions nécessaires pour que x^* soit un minimum local du problème (4.2).*

Pour la résolution de (4.2), la méthode PQS nécessite de considérer à chaque itération le problème quadratique tangent suivant :

Minimiser

$$q(\Delta_{x_k}) = \nabla f(x_k)^T \Delta_{x_k} + \frac{1}{2} \Delta_{x_k}^T \nabla_{xx}^2 L(x_k, \lambda_k) \Delta_{x_k} \quad (4.11)$$

sous les contraintes

$$g_i(x_k) + \nabla g_i(x_k)^T \Delta_{x_k} \leq 0, \quad i \in I.$$

L'algorithme est analogue à celui utilisé dans le cas d'un problème sans contrainte d'inégalité : à l'itération k , on prend pour direction de descente en x_k et pour nouvel estimateur des multiplicateurs, une paire de KKT (d, λ) du problème quadratique (4.11). Plus précisément, l'algorithme s'écrit :

1. Initialiser (x_0, λ_0) .
2. Trouver un point de KKT (d, λ) du sous-problème quadratique (4.11).
3. Rechercher un pas $\alpha > 0$ dans la direction d à partir de x_k , en utilisant une fonction de mérite.
4. Test d'arrêt et boucle : $x_{k+1} = x_k + \alpha d$, $\lambda_{k+1} = \lambda$.

Il existe de nombreuses variations de l'algorithme PQS permettant de résoudre le problème (4.2), en construisant les itérés tels qu'ils soient tous admissibles, c'est-à-dire qu'ils appartiennent tous à l'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R}^N \mid g_i(x) \leq 0, i \in I\}$. Ces méthodes sont appelées **Feasible SQP** (FSQP).

Ces méthodes sont adaptées à la résolution de problèmes pratiques pour lesquels il est souvent important d'avoir tous les itérés admissibles. En effet :

- $f(x)$ peut ne pas être définie hors du domaine admissible ;
- si l'évaluation de f est coûteuse, il n'est pas souhaitable de l'évaluer en un point non admissible ;
- si on veut arrêter prématurément l'algorithme, l'itéré courant sera toujours une solution admissible.

Nous nous sommes ainsi intéressée à ce type de méthodes pour la résolution de notre problème. Nous décrivons ici une mise en oeuvre particulière de l'algorithme FSQP, développée par Panier et Tits [46] et implémentée en C dans le solveur **CF-SQP** [36, 35].

Précisons tout d'abord, qu'une **direction de descente admissible** en un point $x \in X$ est définie comme un vecteur $d \in \mathbb{R}^N$ tel que $x + td$ appartienne à X pour tout $t \in [0, t_*]$, pour un certain t_* positif.

L'algorithme PQS standard calcule la direction de descente d^0 (qui dépend de x et de H , avec H la hessienne $(\nabla_{xx}^2 L)$ du lagrangien associé au problème (4.2)),

4.2 Méthodes d'optimisation locale dans le cas d'un problème avec contraintes

solution du **problème quadratique** $QP(x, H)$:

Minimiser

$$\frac{1}{2}(d^0 \cdot H d^0) + \nabla f(x) \cdot d^0$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} b_l &\leq x + d^0 \leq b_u \\ g_j(x) + \nabla g_j(x) \cdot d^0 &\leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

avec b_l et b_u les contraintes de bornes et en notant \cdot le produit scalaire euclidien.

Dans FSQP, on remplace la direction d^0 par la combinaison convexe

$$d = (1 - \rho)d^0 + \rho d^1,$$

avec d^1 une direction admissible, solution d'un certain problème quadratique (que nous préciserons plus tard) et $0 \leq \rho \leq 1$. Pour préserver les propriétés de convergence locale de l'algorithme SQP, ρ est choisi comme une fonction de d^0 , de telle sorte que d approche d^0 suffisamment vite (en particulier $\rho(d^0) = O(\|d^0\|^2)$ quand on approche de la solution).

De plus, pour éviter l'effet de Maratos, qui peut remettre en cause la bonne convergence de l'algorithme (voir par exemple [13, page 150] ou [19]) et garantir une convergence superlinéaire, une correction du second ordre \tilde{d} est utilisée pour « courber » la direction de recherche.

On fera ainsi une recherche d'un pas $t > 0$ (par exemple de type Armijo) le long de l'arc $x_c + td + t^2\tilde{d}$. Des conditions sur d^1 , ρ et \tilde{d} permettant d'obtenir une convergence locale superlinéaire sont données dans [46].

Remarque :

Soit $I(x) = \{j : g_j(x) = 0\}$, les indices des contraintes actives. Pour conserver une convergence globale et locale (superlinéaire), l'algorithme FSQP construit la suite des directions de recherche $\{d_k\}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

$$d_k = 0 \text{ si } x_k \text{ est un point de KKT pour } (P) ; \quad (4.12)$$

$$\nabla f(x_k) \cdot d_k < 0 \text{ si } x_k \text{ n'est pas un point de KKT ;} \quad (4.13)$$

$$\nabla g_j(x_k) \cdot d_k < 0 \quad \forall j \in I(x_k) \text{ si } x_k \text{ n'est pas un point de KKT ;} \quad (4.14)$$

$$d_k = d_k^0 + O(\|d_k^0\|^2). \quad (4.15)$$

La propriété (4.12) indique la convergence de l'algorithme et la propriété (4.13) que d_k est une direction de descente.

Description de l'algorithme

Données :

$$x_0 \in \mathbb{R}^N, \epsilon > 0.$$

Paramètres :

$$\eta = 0.1$$

$$\nu = 0.01$$

$$\alpha = 0.1$$

$$\beta = 0.5$$

$$\kappa = 2.1$$

$$\tau_1 = \tau_2 = 2.5$$

$$\underline{t} = 0.1.$$

Notation :

$$I_k^g(d_k) = \{j \in \{1, \dots, m\} : |g_j(x_k)| \leq 0.2 \|d_k\| \cdot \|\nabla g_j(x_k)\|\} \cup \{j \in \{1, \dots, m\} : \lambda_{k,j} > 0\}.$$

Étape 0 : Initialisation

On pose $k = 0$ et $H_0 = I_N$.

Si le point initial x_0 fourni par l'utilisateur n'est pas admissible, on commence par résoudre le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \max_{j=1, \dots, m} \{g_j(x)\}$$

sous les contraintes

$$b_l \leq x \leq b_u,$$

jusqu'à ce que l'objectif $\max\{g_j(x)\} \leq 0$ soit atteint. Le x admissible ainsi obtenu est le point de départ de l'algorithme.

Étape 1 : Calcul de la direction de recherche

1. Calculer d_k^0 , la solution du problème quadratique $QP(x_k, H_k)$. Si $\|d_k^0\| \leq \epsilon$ stop.
2. Calculer d_k^1 en résolvant le problème quadratique strictement convexe

$$\min_{d^1 \in \mathbb{R}^N, \gamma \in \mathbb{R}} \frac{\eta}{2} ((d_k^0 - d^1) \cdot (d_k^0 - d^1)) + \gamma$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} b_l &\leq x_k + d^1 \leq b_u \\ \nabla f(x_k) \cdot d^1 &\leq \gamma \\ g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k) \cdot d^1 &\leq \gamma, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

4.2 Méthodes d'optimisation locale dans le cas d'un problème avec contraintes

$$3. d_k = (1 - \rho_k)d_k^0 + \rho_k d_k^1$$

$$\text{avec } \rho_k = \frac{(\|d_k^0\|)^\kappa}{(\|d_k^0\|)^\kappa + \nu_k} \text{ et } \nu_k = \max(0.5, \|d_k^1\|^{\tau_1}).$$

4. Calculer \tilde{d}_k en résolvant le problème quadratique strictement convexe

$$\min_{\tilde{d} \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} ((d_k + \tilde{d}) \cdot (H_k(d_k + \tilde{d}))) + f(x_k + d_k) - f(x_k) + \nabla f(x_k) \cdot \tilde{d}$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} b_l &\leq x_k + d_k + \tilde{d} \leq b_u \\ g_j(x_k + d_k) + \nabla g_j(x_k) \cdot \tilde{d} &\leq -\min(\nu \|d_k\|, \|d_k\|^{\tau_2}), \quad j \in I_k^g(d_k). \end{aligned}$$

Si le problème quadratique n'a pas de solution ou si $\|\tilde{d}_k\| > \|d_k\|$, $\tilde{d}_k = 0$.

Étape 2 : Calcul du pas de descente

Soit $\delta_k = \nabla f(x_k) \cdot d_k$.

Calculer t_k , le premier t dans $\{1, \beta, \beta^2, \dots\}$ vérifiant

$$\begin{aligned} f(x_k + td_k + t^2 \tilde{d}_k) &\leq f(x_k) + \alpha t \delta_k, \\ g_j(x_k + td_k + t^2 \tilde{d}_k) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Étape 3 : Mises à jour

1. Si le pas de descente est très petit ($t_k < \underline{t}$) et que la mise à jour a dépassé $5n$ itérations, on réinitialise la hessienne $H_{k+1} = H_0$. Sinon on calcule une nouvelle approximation H_{k+1} de la hessienne du lagrangien en utilisant une formule de type BFGS.
2. $x_{k+1} = x_k + t_k d_k + t_k^2 \tilde{d}_k$.
3. Incrémenter k .
4. Retour à l'étape 1.

Nous avons vu que l'idée de base des méthodes PQS (et donc FSQP) est de transformer le problème d'optimisation non linéaire en une suite de sous-problèmes quadratiques. D'autres méthodes dites de programmation séquentielle convexe, sont similaires dans le sens où elles utilisent une séquence de sous-problèmes comme approximation simple du problème initial.

Les méthodes de programmation séquentielle convexe

Dans le cas des méthodes de programmation séquentielle convexe, les sous-problèmes sont convexes et séparables (c'est-à-dire pouvant s'écrire comme la somme

de fonctions ne dépendant que d'une seule variable). Pour chaque itéré, le sous-problème peut alors être résolu avec une méthode duale ou un algorithme des points intérieurs (algorithme primal-dual) [24].

L'avantage des méthodes duales est que l'optimisation est réalisée non plus dans l'espace des variables mais dans l'espace dual, dont la dimension est relativement faible et dépend du nombre de contraintes actives à chaque itération.

Afin d'illustrer les méthodes de programmation séquentielle convexe, nous décrivons dans ce paragraphe l'algorithme CONLIN (CONvex LINearization) [24] puis nous parlerons de l'algorithme MMA (Method of Moving Asymptotes) [59][60] qui en découle. Pour une description plus générale des méthodes de programmation séquentielle convexe, on pourra également voir [14].

La méthode CONLIN procède par linéarisation de la fonction objectif et de toutes les contraintes définissant le problème d'optimisation et permet ainsi de générer une séquence de sous-problèmes convexes et séparables. Pour cela on utilise le schéma d'approximation suivant :

$$\tilde{c}(x) = c(x^0) + \sum_{+} c_i^0(x_i - x_i^0) - \sum_{-} (x_i^0)^2 c_i^0 \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0} \right) \quad (4.16)$$

avec

$$c_i^0 = \frac{\partial c}{\partial x_i}(x^0),$$

et les symboles \sum_{+} (respectivement \sum_{-}) signifiant « sommation des termes pour lesquels c_i^0 est positive (respectivement négative) au point courant x_i^0 ». On peut, en effet, facilement prouver que si la fonction $c : x \mapsto c(x)$ est différentiable, le schéma (4.16) donne une approximation convexe de c autour de x^0 .

Ainsi, suivant le signe de la dérivée, on utilisera comme variables de linéarisation soit les variables directes x soit les variables réciproques $\frac{1}{x}$. D'après [24], l'utilisation des variables réciproques aurait dans de très nombreux cas un effet bénéfique sur les propriétés de convergence de l'optimisation.

Dans MMA, on remplace dans le schéma d'approximation les variables directes et réciproques par les variables $\frac{1}{U_i - x_i}$ et $\frac{1}{x_i - L_i}$ avec U_i et L_i des constantes fixées par l'utilisateur :

$$\tilde{c}(x) = c(x^0) + \sum_{+} \frac{r_i}{U_i - x_i} - \sum_{-} \frac{s_i}{x_i - L_i},$$

avec les nombres r_i et s_i choisis tels que :

$$\begin{aligned} \text{si } c_i^0 > 0 \text{ alors } r_i &= (U_i - x_i^0)^2 c_i^0 \text{ et } s_i = 0 ; \\ \text{si } c_i^0 < 0 \text{ alors } r_i &= 0 \text{ et } s_i = -(x_i^0 - L_i)^2 c_i^0. \end{aligned}$$

4.3 Calcul des sensibilités

La forme des fonctions d'approximation dépend des valeurs choisies pour les constantes U_i et L_i , qui permettent de contrôler le seuil pour lequel l'approximation est raisonnable (les paramètres U_i et L_i donnent des asymptotes verticales, d'où le nom de l'algorithme - cf. figure 4.1). On remarque que l'on retrouve la méthode CONLIN si $L_i = 0$ et $U_i = +\infty$ et que les valeurs $L_i = -\infty$ et $U_i = +\infty$ conduisent à la méthode SLP (Sequential Linear Programming) [44]. Notons de plus, que ces valeurs peuvent être modifiées d'une itération à l'autre.

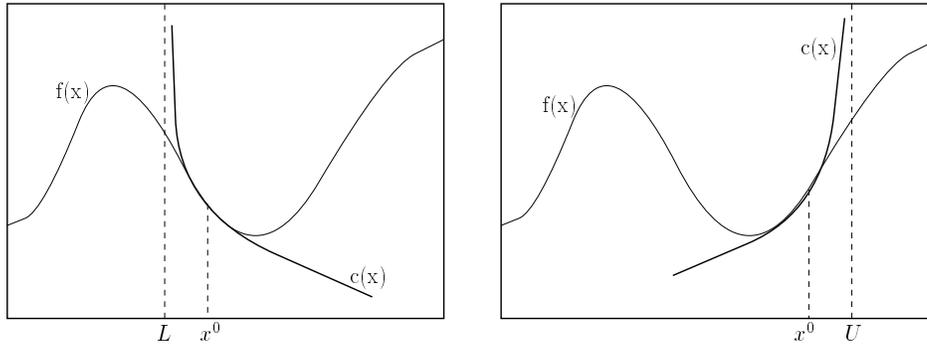


FIG. 4.1 – Illustration (en dimension 1) de l'approximation MMA. Cas d'une dérivée négative (gauche) et positive (droite).

Ces méthodes sont bien adaptées et couramment utilisées pour la résolution de problème d'optimisation de forme en général et d'optimisation topologique en particulier. Ceci est dû au fait qu'elles permettent de réduire le temps de calcul nécessaire à la résolution des sous-problèmes approchés, surtout pour les problèmes ayant peu de contraintes. Toutefois, dans notre cas, cette partie (c'est-à-dire le temps passé dans l'algorithme d'optimisation numérique) est négligeable par rapport au temps d'évaluation des fonctions comme on le constatera lors de nos essais numériques (cf. chapitres 5 et 6). Notons, de plus, qu'ici l'approximation est linéaire et donc moins riche que l'approximation quadratique utilisée par un algorithme du type SQP. Enfin, nous remarquons que les méthodes décrites précédemment comportent de nombreux paramètres à fixer par l'utilisateur, le réglage des paramètres de CF-SQP étant beaucoup plus automatique.

4.3 Calcul des sensibilités

Les gradients nécessaires à l'utilisation des algorithmes d'optimisation décrits dans les paragraphes précédents sont facilement calculables pour la fonction objectif et les contraintes lorsqu'elles dépendent uniquement de la densité. Lorsqu'elles sont implicites (elles dépendent du déplacement par exemple), les sensibilités sont obtenues à l'aide de dérivations de fonctions composées (règle de la chaîne).

En optimisation topologique, comme on travaille souvent avec peu de contraintes, la méthode la plus efficace pour le calcul des dérivées est l'utilisation de l'état adjoint.

4.3.1 Calcul de l'état adjoint

Soit l'équation d'état suivante :

$$A(x)u(x) = B(x) \tag{4.17}$$

avec par exemple, $A(x)$ la matrice de rigidité, $B(x)$ un vecteur représentant la charge, $u(x)$ le déplacement correspondant et $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ un vecteur de paramètres (densités, propriétés de matériaux, ...).

Si on dérive cette équation par rapport à $x_i, i = 1, \dots, N$, on a

$$\partial_{x_i} A(x)u(x) + A(x)\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} B(x)$$

et donc

$$A(x)\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} B(x) - \partial_{x_i} A(x)u(x). \tag{4.18}$$

Soit $J(x, u(x))$ la fonction coût à minimiser. On veut calculer (si elle existe) la différentielle de $j(x) = J(x, u(x))$:

$$\nabla_x j(x) = \partial_x J(x, u(x)) + \partial_u J(x, u(x))\nabla_x u(x). \tag{4.19}$$

Pour cela on doit calculer $\nabla_x u(x)$. Deux méthodes existent :

La méthode directe

On résout les N systèmes linéaires suivants :

$$A(x)\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} B(x) - \partial_{x_i} A(x)u(x), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Il y a donc dans ce cas, N résolutions de systèmes d'équations linéaires supplémentaires.

La méthode inverse ou adjointe

D'après (4.18) on a

$$A(x)\nabla_x u(x) = \nabla_x B(x) - \nabla_x A(x)u(x) \tag{4.20}$$

4.4 Algorithmes d'optimisation globale

et donc l'équation (4.19) s'écrit

$$\nabla_x j(x) = \partial_x J(x, u(x)) + \partial_u J(x, u(x)) [A^{-1} \nabla_x B(x) - A^{-1} \nabla_x A(x) u(x)]$$

c'est-à-dire

$$\nabla_x j(x) = \partial_x J(x, u(x)) + [\partial_u J(x, u(x)) A^{-1}] (\nabla_x B(x) - \nabla_x A(x) u(x)).$$

Dans ce cas, le calcul de $\nabla_x u(x)$ ne nécessite plus que la résolution d'un seul système d'équations linéaires supplémentaire, celui de l'état adjoint

$$P^T A(x) = \partial_u J(x, u(x)),$$

avec $P^T = \partial_u J(x, u(x)) A^{-1}$ et P appelé **l'état adjoint** de la méthode.

Remarque : les expressions de $\partial_{x_i} A(x)$ et $\partial_{x_i} B(x)$ ne sont en général pas disponibles explicitement. On approche alors ces dérivées par différences finies. Soit par différences finies **décentrées** à droite

$$\partial_{x_i} A(x) \approx \frac{A(x + \Delta_x) - A(x)}{\Delta_x}$$

ou à gauche

$$\partial_{x_i} A(x) \approx \frac{A(x) - A(x - \Delta_x)}{\Delta_x}.$$

L'erreur est alors de l'ordre de Δ_x .

Soit par différences finies **centrées**

$$\partial_{x_i} A(x) \approx \frac{A(x + \Delta_x) - A(x - \Delta_x)}{2\Delta_x}.$$

L'erreur est dans ce cas de l'ordre de Δ_x^2 . Cette approximation est plus précise que les précédentes mais deux fois plus coûteuse (en termes d'évaluations de A).

4.4 Algorithmes d'optimisation globale

Comme nous le verrons aux chapitres 5 et 6, notre problème d'optimisation topologique est non convexe, c'est-à-dire que si on choisit une solution initiale ou des paramètres différents, on obtiendra des solutions différentes correspondant à des minima locaux. Il est ainsi nécessaire d'utiliser une méthode d'optimisation globale afin d'obtenir le minimum global (correspondant au meilleur des minima locaux). Toutefois, comme indiqué plus haut, la grande taille du problème et le coût d'évaluation de la fonction objectif et des contraintes rendent difficile l'utilisation des

algorithmes d'optimisation globale. Nous nous contenterons ainsi dans cette partie d'un bref état de l'art des méthodes existantes.

Les méthodes pour la résolution d'un problème d'optimisation globale peuvent être divisées en deux classes : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

4.4.1 Les méthodes déterministes

Les méthodes déterministes regroupent toutes les méthodes qui ne comportent aucun aspect aléatoire ni stochastique, telles

- la séparation et évaluation progressive,
- les méthodes de plans de coupe,
- l'analyse par intervalles,
- l'homotopie (méthode de lissage),
- les méthodes lipschitziennes,
- les méthodes de décomposition.

Chacune de ces méthodes est adaptée à une classe très particulière de problèmes d'optimisation globale, mais requiert systématiquement des temps de calcul excessifs pour les problèmes pratiques. Elles sont ainsi très peu adaptées aux problèmes d'optimisation topologique (déjà très coûteux en temps de calcul). Aussi, nous ne détaillerons ici qu'une seule de ces méthodes, utilisée comme on l'a vu précédemment (cf. paragraphe 3.1.1) pour résoudre les problèmes d'optimisation topologique non relaxés.

Méthode de Branch and Bound.

Nous décrivons ici comment est utilisée cette technique dans le cas particulier du problème d'optimisation topologique discret.

Cette méthode d'énumération implicite est basée sur la résolution de sous-problèmes continus. On associe tout d'abord le problème discret initial à un problème équivalent qui permet aux variables de prendre des valeurs continues. Ce problème constitue le nœud situé à la base de l'arbre de décision. Après résolution, si toutes les variables de la solution sont entières, on arrête car le problème discret est résolu. Dans le cas contraire, la valeur de la fonction objectif constitue une borne inférieure f_i , car l'ajout d'une contrainte qui impose que les variables soient discrètes ne peut que faire augmenter la valeur de la fonction objectif. On crée alors deux sous-problèmes en ajoutant au problème précédent une contrainte sur une des variables non entières : l'un des deux sous-problèmes impose à la variable considérée d'être inférieure ou égale à la valeur entière immédiatement inférieure et l'autre impose qu'elle soit supérieure ou égale à la valeur entière immédiatement supérieure. Dans

4.4 Algorithmes d'optimisation globale

le cas où toutes les variables de la solution de l'un des deux problèmes sont entières, la valeur de la fonction objectif correspondante devient une borne supérieure f_s du problème. C'est-à-dire qu'à partir de ce moment-là, tous les nœuds ayant une valeur de fonction objectif supérieure à f_s seront abandonnés, et seulement les nœuds ayant une valeur de fonction objectif comprise entre f_i et f_s seront développés. S'il n'y a pas d'autre solution de valeur inférieure à f_s , alors le nœud correspondant à f_s est optimal. S'il y en a, il se peut qu'elles comprennent des variables non entières, les nœuds correspondants sont alors développés à leur tour et les solutions résultantes sont étudiées jusqu'à ce que tous les nœuds soient abandonnés.

Remarquons par ailleurs, que souvent, les ingénieurs confrontés aux problèmes pratiques se contentent de solutions approximatives (c'est-à-dire réalisables et ayant une « bonne » valeur de la fonction objectif). Ils ont ainsi recours à des **heuristiques**, dont les plus connues sont citées ci-dessous.

- L'algorithme glouton ;
- Les améliorations locales ;
- Les initialisations multiples ;
- Les méthodes directes dont la plus connue est sans doute la méthode du polytope mouvant, connue aussi sous le nom de simplexe non linéaire ou encore de Nelder-Mead, du nom des auteurs d'une des premières versions.

4.4.2 Les méthodes stochastiques

Cette deuxième classe de méthodes d'optimisation globale regroupe les méthodes comportant une forme de recherche aléatoire, généralement un échantillonnage de la fonction objectif en des points choisis aléatoirement dans le domaine réalisable.

Nous distinguons trois types de méthodes stochastiques : les méthodes à deux phases, les heuristiques stochastiques permettant de s'échapper d'optima locaux et, enfin, les méthodes basées sur les surfaces de réponse.

Les méthodes à deux phases

Il s'agit de méthodes stochastiques dans lesquelles deux phases peuvent être distinguées : une *phase globale* qui évalue la fonction objectif en un nombre de points engendrés aléatoirement et une *phase locale* qui manipule ces points, par exemple par l'entremise d'améliorations locales.

La plus simple de ces méthodes est la **recherche aléatoire pure** qui ne consiste en fait qu'en la phase globale. On engendre une suite de points dans le domaine réalisable et on garde en mémoire le meilleur point trouvé. On note qu'engendrer ces points aléatoirement dans le domaine réalisable n'est pas une tâche facile dans le cas de contraintes plus générales que les contraintes de bornes.

La façon la plus simple d'utiliser une stratégie d'amélioration locale L est via la méthode d'**initialisations multiples** (*multistart*). Il s'agit d'appliquer la procédure de recherche L à chaque point engendré aléatoirement et de garder en mémoire le meilleur point trouvé. Beaucoup plus attrayante que la recherche aléatoire pure, elle a néanmoins un gros désavantage. En effet, inévitablement, la recherche locale trouvera souvent le même minimum local. Idéalement, la procédure L ne serait pas appelée plus d'une fois dans chaque *bassin d'attraction* (le bassin d'attraction d'un minimum local x^* étant l'ensemble des points du domaine réalisable S à partir desquels L convergera vers x^*).

C'est ce que permettent les méthodes de **regroupement en grappes** (*clustering method*), qui cherchent à regrouper les points de l'échantillon qui sont proches les uns des autres, afin de n'initialiser la procédure de recherche locale qu'une seule fois dans chaque *région d'attraction*. La méthode à deux phases qui semble la plus satisfaisante, combinant une bonne performance numérique avec des propriétés théoriques solides, est la méthode **Random Linkage** (RL) [37].

Notons enfin qu'en pratique des critères d'arrêt doivent être mis en oeuvre et que dans de nombreuses applications il n'est pas concevable de tenter de trouver tous les minima locaux.

Les heuristiques stochastiques permettant de s'échapper d'optima locaux

Les trois méthodes présentées ici sont souvent considérées avec un certain mépris par une partie de la communauté mathématique, en raison du manque de fondement théorique pour expliquer leur succès. Elles sont cependant toutes massivement appliquées dans de nombreux domaines.

Leur performance dépend fortement de l'ajustement de paramètres correspondant à un bon compromis entre *intensification* (exploitation des meilleures solutions trouvées) et *diversification* (exploration de l'espace de recherche). De plus, leur mise en oeuvre devra exploiter au maximum la structure particulière du problème d'optimisation globale considéré. Rappelons que les deux algorithmes décrits ci-dessous sont, comme la méthode de *Branch and Bound*, utilisés pour résoudre des problèmes d'optimisation topologique sous forme discrète (non relaxé).

- **Recherche avec tabous** : Cette méthode est basée sur un concept d'intelligence artificielle utilisant une mémoire adaptative de l'histoire de la recherche. Le principe de base consiste à poursuivre la recherche même si la valeur de la fonction objectif se détériore, afin de s'échapper des optima locaux, avec des mécanismes évitant le cyclage en interdisant certains retours (rendus *tabous*).
- **Recuit simulé** : Cette méthode émule la technique du recuit simulé en métallurgie, qui consiste à chauffer une pièce de métal jusqu'à son point de fusion, puis à la refroidir très lentement jusqu'à température ambiante, afin que les atomes du métal aient le temps de prendre des positions qui minimisent l'énergie. À une température T , on perturbe la position des atomes de manière

4.4 Algorithmes d'optimisation globale

aléatoire et on calcule la variation d'énergie qui en découle, ΔE . Si $\Delta E \leq 0$, la nouvelle configuration d'atome est acceptée avec la probabilité 1. Au contraire si $\Delta E \geq 0$, le nouvel état est accepté avec la probabilité $P(\Delta E) = e^{\frac{-\Delta E}{k_b T}}$ où k_b est la constante de Boltzmann. À chaque température, plusieurs structures atomiques sont ainsi générées, jusqu'à ce qu'un état d'équilibre énergétique soit atteint. Ensuite, la température est réduite et l'on réitère jusqu'à ce qu'on obtienne un état d'énergie minimale.

En optimisation topologique, la fonction objectif est assimilée à l'énergie et les variables de conception aux positions des atomes. La température T est un paramètre de contrôle de la convergence du processus.

- **Algorithmes génétiques** : Ces méthodes sont inspirées de la théorie de l'évolution de Darwin. La *population* d'une génération donnée est représentée par un ensemble de conceptions différentes (*individus*). Ces derniers sont autorisés à se *reproduire* tout en favorisant les meilleures caractéristiques (la progéniture doit être plus forte que les parents), c'est-à-dire afin que la nouvelle conception soit meilleure que la précédente. Chaque variable est constituée d'un bit correspondant à un *gène* et un individu est constitué d'une chaîne de bits représentant un *chromosome*. Au départ, la taille de la population initiale est fixée et on génère de manière aléatoire les individus qui la constituent (choix aléatoire de 0 et de 1). On utilise pour la création d'une nouvelle population des opérateurs *génétiques* qui modifient la composition des *enfants* (c'est-à-dire des solutions codées). On itère ce procédé et après plusieurs générations, la qualité des conceptions doit augmenter.

Les méthodes basées sur les surfaces de réponse

Ces méthodes, qui sont particulièrement adaptées aux cas de fonctions objectifs du type boîte noire, sont apparues en optimisation globale par l'entremise du *krigeage* en géostatistiques. (Le terme krigeage vient du nom de l'ingénieur minier sud-africain D. G. Krige qui a développé cette méthode pour prédire la localisation des réserves de minerai de fer). Cette méthode s'appuie sur l'hypothèse suivante : les valeurs de la fonction objectif en des points rapprochés ont un certain degré de corrélation spatiale alors qu'en des points éloignés les valeurs de la fonction objectif sont statistiquement indépendantes. De manière plus générale, les méthodes basées sur les surfaces de réponse supposent que la fonction objectif peut être modélisée par la réalisation d'un processus stochastique gaussien. En conséquence, on suppose que la valeur, $f(x)$, de la fonction objectif en un point non encore échantillonné (non encore évalué) peut être interprétée comme une variable aléatoire $Y(x)$ ayant une certaine distribution.

Avant tout, on évalue la fonction objectif en un ensemble q de points initiaux x_i , $i = 1, \dots, q$. On interpole ensuite les données $(x_i, f(x_i))$ avec une combinaison linéaire de fonctions de base (fonctions de régression), afin d'obtenir un modèle pour f , c'est-à-dire, une fonction approchant la fonction objectif. Les fonctions de base

comportent des paramètres à ajuster. Une fonction d'erreur reflète l'incertitude du modèle qui, en n'importe quel point x du domaine de f , peut être interprétée comme étant la variance de $Y(x)$.

Un judicieux compromis entre la minimisation du modèle (intensification de la recherche) et la maximisation de la fonction erreur (diversification de la recherche - aspect global) constitue une fonction critère permettant de déterminer un nouveau point candidat pour l'évaluation de la fonction objectif.

Nous avons tenté de présenter dans cette partie un large éventail de méthodes pratiques pour la résolution d'un problème d'optimisation globale. Notons qu'il n'existe pas vraiment de méthode générale permettant la résolution d'un problème d'optimisation globale quelconque. Il est, en effet, toujours nécessaire d'exploiter la connaissance propre au domaine particulier d'application et la structure particulière du problème d'optimisation globale traité.

Notons aussi que ces méthodes d'optimisation globale sont, le plus souvent, plutôt adaptées aux problèmes d'optimisation sans contrainte ou avec uniquement des contraintes de bornes. Elles sont, de plus, surtout efficaces dans le cas où la taille du problème est limitée (pas au-delà d'une centaine de variables) et où le coût d'évaluation de la fonction objectif est faible. Ces caractéristiques expliquent la difficulté de leur utilisation pour la résolution de problèmes d'optimisation topologique. On pourrait toutefois envisager d'utiliser un algorithme à *deux phases* permettant de lancer des optimisations locales à partir de différents points initiaux et ainsi diversifier notre recherche.

Chapitre 5

Mise en oeuvre de la méthode : Choix algorithmiques

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 1, le but de notre travail de recherche est de construire une méthodologie d'optimisation topologique permettant la prise en compte de critères à la fois statiques et dynamiques, primordiaux dans la conception des pièces automobiles.

Plus précisément, le problème type que nous souhaitons résoudre consiste à minimiser la masse d'une pièce tout en respectant des contraintes statiques (déplacement maximal imposé en un ou plusieurs points pour un cas de chargement donné) et des contraintes dynamiques (compliance dynamique maximale imposée sur une plage de fréquences d'excitation donnée).

Nous avons vu au chapitre 3 que la méthode d'optimisation topologique que nous avons choisie pour résoudre notre problème est la méthode SIMP. Elle permet en effet de prendre en compte des critères dynamiques (inertances, transferts) et peut être couplée avec un logiciel commercial de mécanique des structures tel que NASTRAN.

Réutilisons les notations du chapitre 3 pour donner une formulation mathématique plus précise du problème que l'on souhaite résoudre. Supposons pour cela que l'on doive concevoir une pièce dans un domaine d'encombrement maximal Ω , que l'on a discrétisé à l'aide du maillage de conception $(\tau_i^{co,h})_{i=1,\dots,N}$ avec N le nombre d'éléments de conception. On note $\tau^{ca,h'}$ le maillage de calcul (permettant la résolution de l'équation d'état) et $\mu \in [0,1]^N$ le vecteur représentant les variables d'optimisation (densités à l'intérieur des éléments de conception).

La densité ρ_i et les propriétés A_i du matériau fictif (SIMP) utilisé dans chaque élément de conception sont données, pour $i = 1, \dots, N$, par les équations (notées

(3.11) et (3.12) dans le chapitre 3)

$$\rho_i = \mu_i \rho^0, \quad (5.1)$$

$$A_i = \mu_i^p A^0, \quad (5.2)$$

avec ρ^0 et A^0 les propriétés du matériau de départ.

Notre problème d'optimisation topologique discrétisé s'écrit alors :

$$\min_{\mu} \rho^0 \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\tau_i^{co,h}} d\omega$$

sous les contraintes

– statiques :

$$|u_{d,j}(\mu)| \leq \delta_{d,j}, \quad d \in \{1, 2, 3\}, j \in J \quad (5.3)$$

où J est un ensemble d'indices de noeuds du maillage de calcul, $u_{d,j}$ est le déplacement au noeud j dans la $d^{\text{ième}}$ direction de l'espace et $\delta_{d,j} \in \mathbb{R}$ une valeur maximale imposée par le cahier des charges de conception de la pièce. Chacune de ces contraintes peut être associée à un cas de chargement différent.

– et dynamiques :

$$\max_{f \in [f_{min}, f_{max}]} \overline{u_{d,k}}(\mu, f) \leq \gamma_{d,k}, \quad d \in \{1, 2, 3\}, k \in K \quad (5.4)$$

où K est un ensemble d'indices de noeuds du maillage de calcul, f est la fréquence d'une force d'excitation périodique (d'amplitude 1N) appliquée au noeud k ou en un autre noeud, f_{min} et f_{max} définissent la plage de fréquences étudiée, $\overline{u_{d,k}}$ est l'amplitude du déplacement associé du noeud k dans la $d^{\text{ième}}$ direction de l'espace, $\gamma_{d,k} \in \mathbb{R}$ est une valeur maximale imposée par le cahier des charges de conception de la pièce. Le point d'application de la force d'excitation peut être différent pour chaque contrainte.

Notons enfin, que les déplacements $u_{d,j}$ et $\overline{u_{d,k}}$ sont calculés par éléments finis (utilisation du logiciel de calcul des structures NASTRAN) et que le problème d'optimisation est résolu à l'aide de l'algorithme CFSQP (cf. chapitre 4).

L'objet de ce chapitre est de décrire les choix algorithmiques effectués pour la résolution de ce problème et intégrés dans la maquette logicielle **DynamiTO** présentée dans le chapitre suivant. Nous les illustrerons à travers plusieurs tests numériques.

Plus précisément, la première partie de ce chapitre sera consacrée à la mise en oeuvre de la méthode SIMP. Nous étudierons notamment l'influence du paramètre de pénalisation p et nous proposerons des variantes à la formule (5.2). Nous parlerons

5.1 Étude et choix algorithmiques pour la méthode SIMP

dans la partie suivante de la formulation mathématique des contraintes dynamiques, c'est-à-dire des différentes approximations possibles pour la fonction maximum utilisée dans l'équation (5.4). Enfin, la troisième partie sera dédiée à l'aspect optimisation globale du problème (existence de nombreux minima locaux) et à son lien avec la méthode SIMP.

5.1 Étude et choix algorithmiques pour la méthode SIMP

Dans cette partie, nous décrivons notre mise en oeuvre de la méthode SIMP. Nous étudierons ainsi dans le premier paragraphe l'influence du paramètre p puis nous proposerons dans le second un nouveau type de matériau fictif afin de pallier l'apparition de modes locaux (cf. partie 3.1.4).

Pour ces études, nous avons utilisé l'exemple d'une plaque console (cantilever) présenté ci-dessous.

Considérons un parallélépipède de taille $D_x \times D_y \times D_z \text{ mm}^3$ avec une face bloquée (cf. figure 5.1).

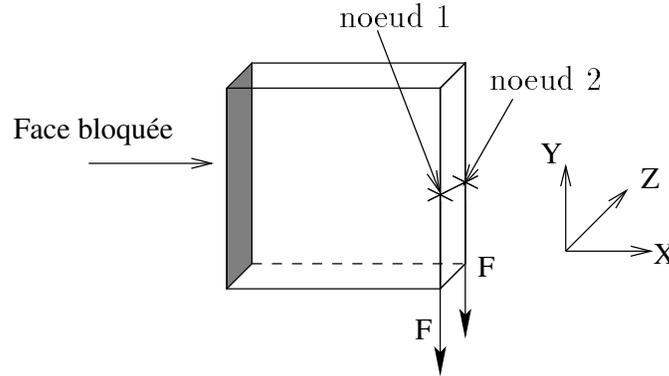


FIG. 5.1 – Représentation du cas test.

Dans un premier temps, on applique sur la face de la pièce, opposée à la face fixée, sur deux noeuds symétriques, une force F et on impose des contraintes statiques afin que le déplacement mesuré aux points d'application des forces soit inférieur en valeur absolue à δ . En utilisant les notations décrites plus haut, cela revient à poser les deux contraintes statiques suivantes :

$$|u_{2,1}(\mu)| \leq \delta, \quad (5.5)$$

$$|u_{2,2}(\mu)| \leq \delta. \quad (5.6)$$

Par la suite, on applique sur le noeud 1, une force de $1N$ à la fréquence f et on impose des contraintes dynamiques afin que la courbe de compliance dynamique

mesurée sur le noeud d'application de la force soit au-dessous de la droite d'équation $y = \gamma$. Ainsi, on pose la contrainte dynamique suivante :

$$\max_{f \in [f_{min}, f_{max}]} \overline{u_{2,1}}(\mu, f) \leq \gamma. \quad (5.7)$$

À titre d'exemple, on a représenté sur la figure 5.2 une courbe de compliance dynamique avec une droite de référence associée.

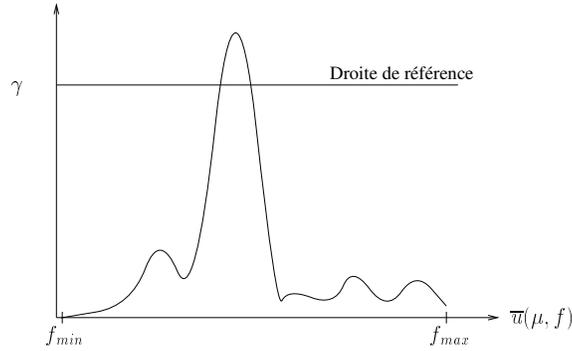


FIG. 5.2 – Représentation d'une courbe de compliance dynamique et de droite de référence associée.

Nous choisissons d'utiliser ici un maillage de conception et un maillage de calcul confondus. Ce maillage est régulier, composé de n_x éléments cubiques dans la direction X , n_y dans la direction Y et n_z dans la direction Z . Nos variables d'optimisation, correspondant aux densités à l'intérieur des éléments de conception, sont donc au nombre de $n_x \times n_y \times n_z$. Rappelons que ces variables sont représentées par le vecteur $\mu = (\mu_i)_{i=1, \dots, N}$ avec pour tout élément de conception i , $\mu_i \in [\epsilon, 1]$, la valeur ϵ correspondant de fait au vide. En pratique, nous utiliserons la valeur $\epsilon = 0.001$ au lieu de 0 pour éviter les problèmes de conditionnement de matrice. De plus, on considèrera la plupart du temps $n_z = 1$ pour pouvoir faire des représentations en deux dimensions (plan (X, Y)). Notons toutefois qu'il s'agit bien d'un exemple en trois dimensions d'espace.

Nous avons étudié ce cas test de géométrie simple afin de pouvoir réaliser de nombreux tests en un temps raisonnable. Rappelons qu'il s'agit néanmoins d'un cas en trois dimensions qui présente toutes les difficultés d'une pièce réelle.

5.1.1 Réglage du paramètre p de la méthode SIMP

Commençons par mesurer l'influence du paramètre de pénalisation p de la méthode SIMP (intervenant dans la formule (5.2)) sur la qualité de la solution obtenue

5.1 Étude et choix algorithmiques pour la méthode SIMP

(pénalisation des densités intermédiaires, valeur de la fonction objectif, etc.).

Pour tous les tests décrits dans cette partie, $D_x = D_y = 100$, $D_z = 10$, $n_x = n_y = 20$, $n_z = 1$ ($N = 400$) et $\rho^0 = 7800 \text{kg/m}^3$. Le point de départ de l'algorithme d'optimisation correspond à toutes les densités égales à 0.9 ($\mu_i^0 = 0.9$, $i = 1, \dots, 400$), sa masse étant égale à $7.02 \times 10^{-1} \text{kg}$. Nous nous limitons ici aux contraintes statiques, c'est-à-dire qu'on applique une force $F = 1000 \text{N}$ et on veut que le déplacement associé soit inférieur à $\delta = 12.8 \times 10^{-3} \text{mm}$. Le temps CPU d'un calcul NASTRAN (évaluation de la masse, des déplacements et de leurs sensibilités) est d'environ une minute sur une station SUN ULTRA 10.

On réalise plusieurs tests en faisant varier le paramètre p et on compare la valeur finale de la masse, le nombre d'évaluations de la fonction objectif et/ou des contraintes (nombre d'appels à NASTRAN) requises pour la convergence de l'optimisation, le nombre d'itérations de l'algorithme CFSQP et enfin le nombre d'éléments de conception pour lesquels la densité de matière est différente de ϵ ou de 1 à 10^{-6} près (nombre de densités intermédiaires). Ces valeurs sont données dans le tableau 5.1.

Test	p	Masse finale (10^{-1}kg)	Nombre d'évaluations (appel NASTRAN)	Nombre d'itérations de CFSQP	Nombre de densités intermédiaires
1	1	3.654361	257	58	318
2	2	4.162881	91	29	54
3	3	4.206229	224	72	17
4	3.5	4.208084	77	24	6
5	4	4.254976	100	32	18
6	5	4.316577	79	26	16
7	6	4.353124	69	21	16

TAB. 5.1 – Résultats des tests réalisés avec différentes valeurs de p .

Au vu de ces résultats, nous remarquons :

- Même si l'évolution est moins probante pour $p \geq 4$, on note que plus on augmente la valeur de p , moins la solution comporte de densités intermédiaires. Ceci est une des caractéristiques connues de la méthode SIMP (cf. partie 3.1.3). Concernant les densités intermédiaires, on remarque (cf. figure 5.3) qu'il y a toujours plus de valeurs proches de 1 que de 0 : ces densités intermédiaires sont strictement supérieures à 0.5 pour $p > 2$ et à 0.8 lorsque $p > 3$. Ce phénomène est dû à la forme particulière de la fonction $f_p : x \mapsto x^p$ intervenant dans le modèle SIMP (équation (5.2)). Nous en donnerons plus précisément les raisons dans la partie 5.1.2 et nous proposerons une autre fonction.

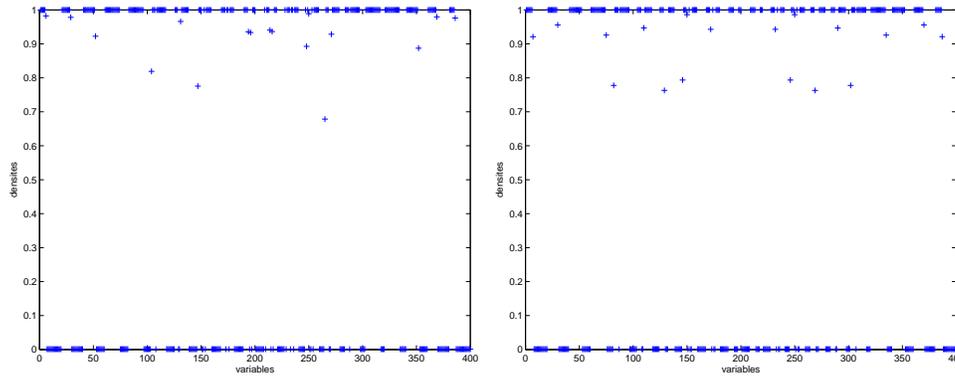


FIG. 5.3 – Valeur des densités de la solution obtenue avec $p = 3$ et $p = 4$.

- La masse de la solution obtenue augmente (et donc la qualité de la solution décroît) avec la valeur du paramètre p . Ce comportement est une conséquence de la pénalisation des densités intermédiaires.

Rappelons tout d’abord (cf. chapitre 3) que pour $p > 1$, les densités intermédiaires ne sont pas favorables dans le sens où elles correspondent à une rigidité faible comparée à la masse du matériau (situation opposée à notre objectif). Avec la formulation SIMP, l’algorithme d’optimisation locale cherche à déplacer vers du matériau plein les éléments de conception tels que la valeur μ_i correspondante est proche de 1 pour l’itération courante (gain significatif en rigidité pour une petite perte du point de vue masse) et de la même façon cherche à déplacer vers du vide les éléments tels que la valeur μ_i correspondante est proche de 0 pour l’itération courante (faible perte de rigidité pour un gain significatif du point de vue masse).

La pénalisation revient donc à imposer une contrainte implicite qui impacte la recherche du minimum. Afin de satisfaire ces contraintes plus fortes du problème d’optimisation, l’algorithme devra augmenter la valeur de la fonction objectif. Cela est plus clair pour le cas extrême : la solution d’un problème relaxé (en variables continues) est toujours meilleure que celle du problème en variables binaires correspondant.

Notons enfin que l’impact de la pénalisation sur la masse sera d’autant plus grand que le maillage est grossier.

- Dans la plupart des cas, le nombre d’évaluations et d’itérations diminue lorsque la valeur de p augmente. Une explication possible serait analogue à celle du point précédent. En effet, lorsque la valeur de p est faible ($p \leq 3$), l’algorithme a plus de degrés de liberté pour rechercher une solution non pénalisée. Au contraire, lorsque $p > 3$, l’algorithme sera contraint de se diriger rapidement vers une solution fortement pénalisée, c’est-à-dire avec peu de densités intermédiaires.

5.1 Étude et choix algorithmiques pour la méthode SIMP

Au vu de ces résultats et sachant que l'on souhaite obtenir une solution sans densité intermédiaire (densités en 0/1) pour laquelle la masse est la plus faible possible, les choix $p = 3.5$ ou $p = 4$ (tests 4 et 5) semblent être de bons compromis. On pourra visualiser les formes obtenues (valeurs des densités) sur la figure 5.4 en utilisant ces valeurs de p .

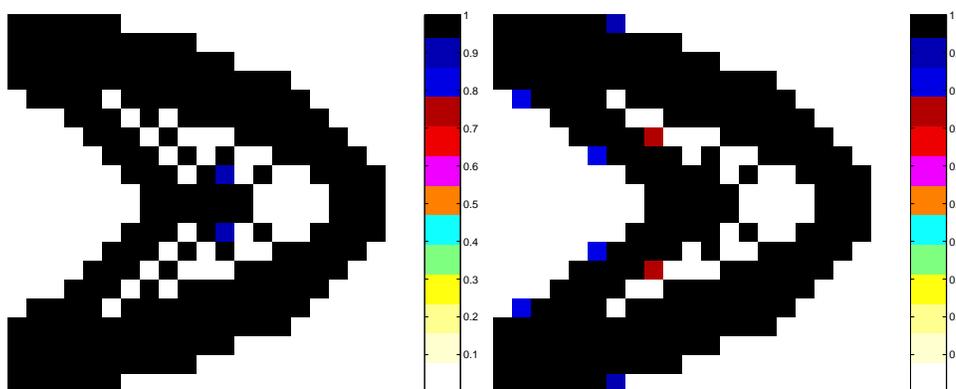


FIG. 5.4 – Solutions obtenues avec $p = 3.5$ et $p = 4$.

5.1.2 Étude de la forme de la fonction de pénalisation de la méthode SIMP

La forme particulière de la fonction $f_p : x \mapsto x^p$ ($p > 1$) semble être la cause de certaines difficultés rencontrées au cours de la résolution de notre problème d'optimisation topologique, comme l'apparition de modes locaux ou l'aspect optimisation locale/globale du problème. Nous illustrerons ces phénomènes dans les paragraphes suivants, et proposons une variante de la fonction f_p ayant de meilleures propriétés.

Les modes locaux

Rappelons tout d'abord (cf. partie 3.1.4) que l'utilisation de la fonction f_p entraîne l'apparition de nombreux modes locaux, lorsqu'on calcule la base modale d'une solution comportant des densités intermédiaires. Le nombre de ces modes « parasites » pose problème puisqu'il augmente le temps de calcul NASTRAN et la place mémoire nécessaire, et rend difficile l'identification des modes réels de la structure étudiée. Comme expliqué dans [12], ces modes locaux apparaissent dans les régions où le rapport masse/raideur est très grand, c'est-à-dire, dans le cas de la méthode SIMP, lorsque la densité μ_i tend vers 0. En effet, dans ce cas le rapport masse/raideur, égal à $\frac{\mu_i}{\mu_i^p}$ ($p > 1$), tend vers l'infini lorsque μ_i tend vers 0. Ces modes locaux sont donc dus à la modélisation des trous dans la pièce par un matériau

mou ayant une densité faible, pour éviter la suppression des éléments du maillage de calcul correspondants.

Illustrons l'apparition de modes locaux en considérant la solution obtenue au test 4 ($p = 3.5$). La base modale de cette solution comporte sur la plage de fréquence 0-500Hz, 798 modes propres locaux (compris entre 0 et 2Hz) et 12 modes propres réels. On peut donc constater sur cet exemple le nombre considérable de modes locaux obtenus. On a représenté sur la figure 5.5, le premier mode local de la pièce (gauche) et le dernier mode global (droite). Cette figure illustre bien la différence entre un mode propre local qui correspond à une déformation locale et un mode propre réel qui correspond à une déformation globale de la structure.

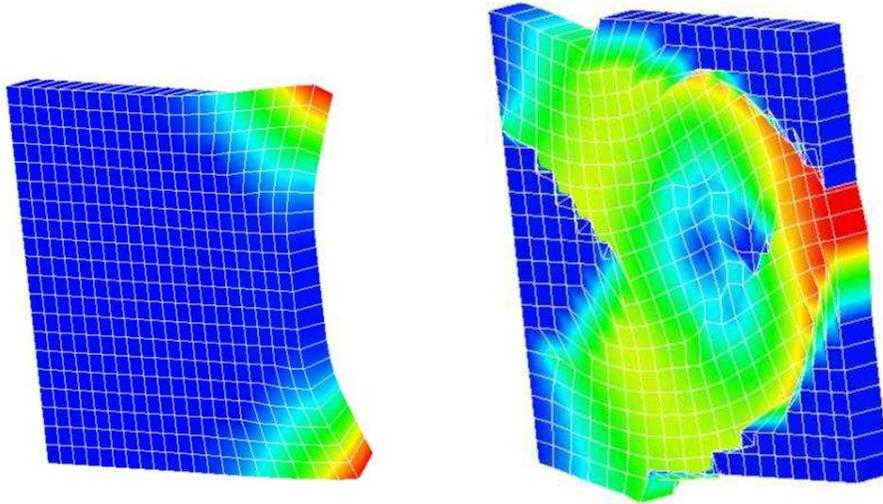


FIG. 5.5 – Mode propre local (gauche) et mode propre réel (droite).

L'utilisation de la fonction f_p provoque non seulement l'apparition de modes locaux mais a aussi un impact sur l'aspect optimisation locale/globale de notre problème. On illustre ce phénomène dans le paragraphe suivant, avant de proposer une solution à ces deux difficultés.

Aspect optimisation locale/globale du problème

Nous avons représenté sur la figure 5.6 les courbes des fonctions f_p pour p allant de 1 à 5. Nous remarquons que lorsque $p > 1$ la courbe est tangente à l'axe des abscisses en $x = 0$ (la dérivée est nulle en $x = 0$). La forme de la courbe est totalement différente en $x = 1$.

Supposons que $p > 1$ et que la densité à l'intérieur de l'élément de conception i est faible (μ_i proche de 0). Dans ce cas, une augmentation de la densité μ_i aura un

5.1 Étude et choix algorithmiques pour la méthode SIMP

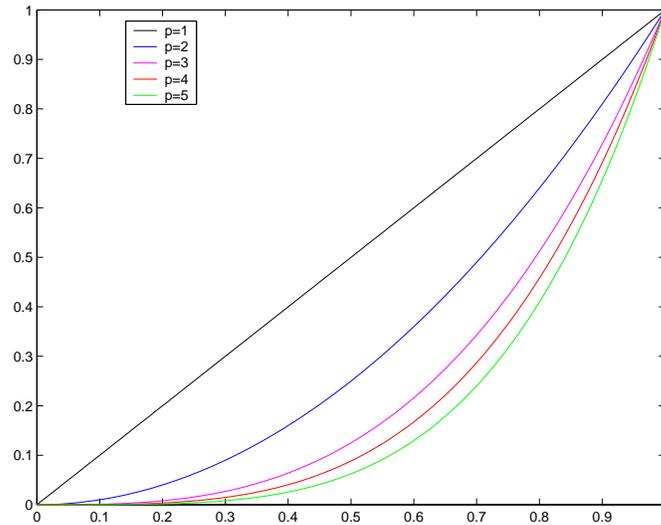


FIG. 5.6 – Représentation de la fonction x^p pour p allant de 1 à 5.

impact négligeable en raideur (μ_i^p a toujours une valeur proche de 0) mais conséquent en masse (la courbe $y = x$ a une pente positive à l'origine). Cette variation de la densité étant très défavorable, l'algorithme va rarement augmenter les densités faibles au cours de l'optimisation. Ainsi, lorsque $p > 1$, la plupart des densités faibles ou nulles au début de l'optimisation reste inchangée (on vérifiera empiriquement ce phénomène dans la partie 5.3). Ainsi, selon le point de départ considéré (par exemple selon qu'il comporte ou non des densités nulles), la solution finale sera différente. Il s'agit donc dans ce cas d'un problème d'optimisation globale.

C'est pour cette même raison que les densités intermédiaires de la solution finale sont souvent proches de 1 et non de 0.

Les deux problèmes précédents sont liés au fait que la limite de $f'_p(x)$ pour $p > 1$ est égale à 0 lorsque x tend vers 0. Ainsi, afin de pallier ces difficultés, une idée consiste à remplacer dans l'expression (5.2), la fonction f_p par une fonction ayant les mêmes propriétés de pénalisation (fonction convexe), valant 0 en $x = 0$ et 1 en $x = 1$, mais ayant une dérivée non nulle en $x = 0$. Le comportement en $x = 1$ étant satisfaisant, la nouvelle fonction aura un comportement « symétrique » en $x = 0$, c'est-à-dire une dérivée en $x = 0$ inverse à celle en $x = 1$. Enfin, pour la nouvelle fonction utilisée, le rapport masse/raideur ne devra pas tendre vers l'infini dans les zones de faible densité, afin d'éviter l'apparition de modes locaux.

La fonction

$$f_\alpha : x \mapsto \frac{1}{\alpha}(x + (\alpha - 1)x^{\alpha+1})$$

répond à ces critères. En effet, ses dérivées sont égales à

$$\frac{d}{dx}f_\alpha(0) = \frac{1}{\alpha},$$

$$\frac{d}{dx}f_\alpha(1) = \alpha.$$

Nous avons tracé sur la figure 5.7 la courbe correspondante pour α allant de 1 à 4. À titre de comparaison nous avons également tracé la courbe de la fonction f_p pour p égal à 4.

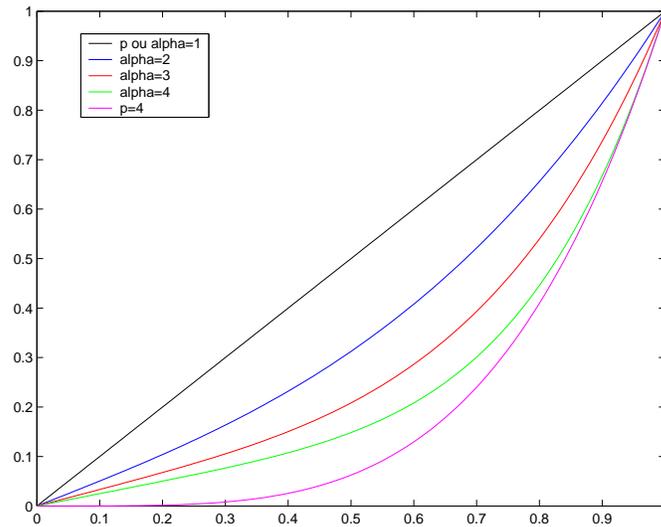


FIG. 5.7 – Représentation de la nouvelle fonction pour α allant de 1 à 4.

Toujours sur le cas de la console (mêmes conditions initiales et mêmes valeurs de paramètres), on teste la fonction f_α pour α valant 2.5, 3 puis 4. Les résultats sont donnés dans le tableau 5.2.

Test	α	Masse finale ($10^{-1}kg$)	Nombre de densités intermédiaires
8	2.5	4.171648	64
9	3	4.186335	24
10	4	4.252974	20

TAB. 5.2 – Tests avec différentes valeurs α .

On remarque tout d'abord, comme avec la fonction f_p , que la masse augmente et le nombre de densités intermédiaires diminue quand α augmente. Cette similitude était prévisible puisque pour un α donné, le terme dominant de f_α est en x^p avec $p = \alpha + 1$.

5.2 Formulation mathématique des contraintes dynamiques

Les résultats sont donc comparables avec ceux obtenus avec le modèle SIMP. Toutefois, un avantage important des fonctions f_α par rapport aux fonctions f_p est qu'aucun mode local n'apparaît dans la base modale des solutions, même pour celles comportant des densités intermédiaires (dans ce cas, le rapport masse/raideur ne tend pas vers l'infini lorsque la densité tend vers 0). Ainsi, si l'on reprend l'exemple de la solution obtenue au test 4 et que l'on calcule sa base modale en remplaçant la fonction f_p par f_α dans l'expression (5.2), la solution ne contient plus que des modes propres globaux.

Par ailleurs, l'utilisation de cette fonction a une influence sur l'aspect optimisation locale/globale du problème d'optimisation topologique. En effet, les densités nulles au départ devraient être modifiées au cours de l'optimisation. Ainsi, même si l'on considère des solutions initiales différentes (comportant ou non des densités nulles), on peut obtenir la même solution finale. Cet aspect sera étudié dans la partie 5.3.

Notons pour conclure que nous avons tout d'abord considéré la fonction

$$f_\lambda : x \rightarrow \frac{f_1(x) + f_2(x) + |f_1(x) - f_2(x)|}{2},$$

avec

$$\begin{aligned} f_1 : x &\rightarrow 1 + \frac{2}{(3 + \lambda)(1 - \lambda)}(\lambda - \sqrt{3 - 2\lambda - (3 + \lambda)(1 - \lambda)x}), \\ f_2 : x &\rightarrow \frac{(3 + \lambda)(1 - \lambda)x^2}{4} + x\lambda, \end{aligned}$$

qui, en plus de satisfaire au critère de symétrie de la courbe entre $x = 0$ et $x = 1$, est également symétrique par rapport à l'axe $y = 1 - x$ (cf. figure 5.8) et donc traite la présence/absence de matière de façon totalement symétrique. Nous n'avons pas retenu cette forme de pénalisation pour des difficultés de codage dans la mise en oeuvre de f_λ dans le logiciel NASTRAN.

5.2 Formulation mathématique des contraintes dynamiques

Nous rappelons que les contraintes dynamiques (cf. chapitre 2) concernent le comportement de la pièce soumise à une excitation périodique (réponse forcée). Il va s'agir d'abaisser les pics de courbes de compliance dynamique (on veut qu'elles soient au-dessous d'une droite de référence donnée), comme exprimé par l'équation (5.4).

Une courbe de compliance dynamique donne une réponse en fréquences. On excite la pièce à une fréquence et en un point donnés et on calcule le module du

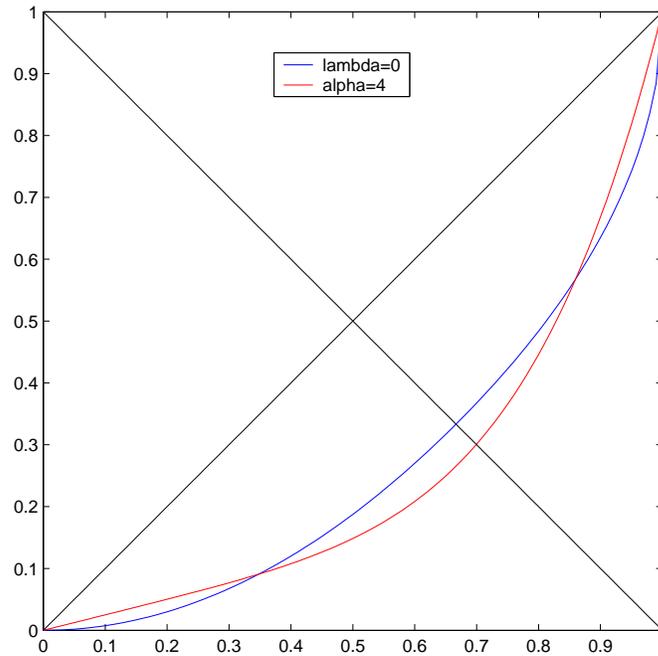


FIG. 5.8 – Représentation de la fonction f_λ ($\lambda = 0$) et comparaison avec la fonction f_α ($\alpha = 4$).

déplacement maximum correspondant en ce même point. On réitère cela pour plusieurs fréquences (en pratique sur une plage de fréquences avec un pas donné). La courbe de compliance dynamique est la courbe représentant la valeur du déplacement mesuré sur toute la plage de fréquences d'excitation. La contrainte dynamique impose que la courbe obtenue soit au-dessous de la droite de référence sur toute la plage de fréquences considérée, c'est-à-dire que le maximum de la courbe soit inférieur à une certaine valeur.

Notons ici que la seule publication traitant ce type de contrainte est celle de Soto [58]. Toutefois, il ne s'agit pas dans son cas, d'être au-dessous d'une droite de référence, mais d'être le plus proche possible (au sens de la norme l_2) d'une autre courbe de compliance dynamique donnée correspondant, par exemple, au comportement d'une pièce existante déjà éprouvée.

Tous les résultats de cette partie seront présentés pour l'exemple précédent de la plaque console sur laquelle on applique une excitation au noeud 1 ($D_x = D_y = 100$, $D_z = 10$, $n_x = n_y = 20$, $n_z = 1$ ($N = 400$) et $\rho^0 = 7800 \text{kg/m}^3$). Le point de départ de l'algorithme d'optimisation correspond à toutes les densités égales à 0.9 ($\mu_i^0 = 0.9$, $i = 1, \dots, 400$), sa masse étant égale à $7.02 \times 10^{-1} \text{kg}$. On a tracé sur la figure 5.9 la courbe de compliance dynamique correspondante qui nous servira de référence. Si l'on fait l'analyse modale de cette pièce, on peut voir que ses principaux

5.2 Formulation mathématique des contraintes dynamiques

modes se situent entre 0 et 500Hz. C'est donc sur cette plage de fréquences que nous ferons nos tests.

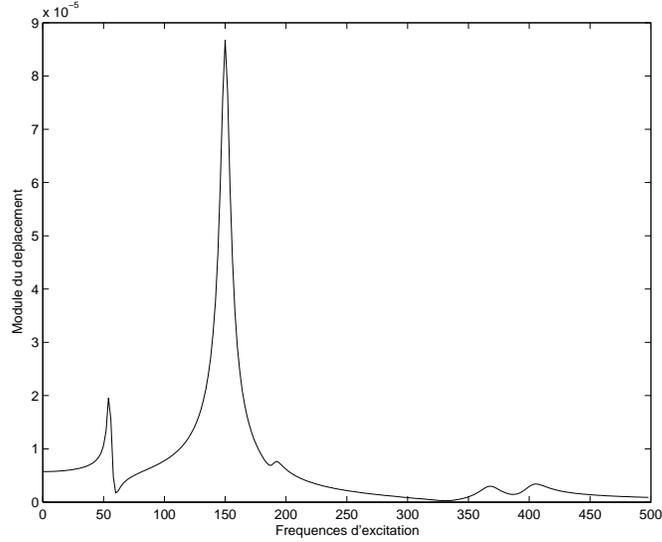


FIG. 5.9 – Courbe de compliance dynamique de la solution initiale.

À titre de comparaison, on a tracé sur la figure 5.10, la courbe de compliance dynamique de la solution obtenue dans le cas où le problème comporte uniquement des contraintes statiques et avec $p = 3.5$ (test 4 décrit dans la partie précédente). On voit que cette courbe présente un pic à $7.57 \times 10^{-5} mm$ pour une fréquence d'excitation de 188Hz.

Supposons maintenant que l'on souhaite améliorer les performances dynamiques de la solution précédente. On impose pour cela la contrainte (5.4) avec $\gamma = 6 \times 10^{-5} mm$. Dans ce cas, aucune des deux solutions précédentes (solution initiale et solution obtenue lorsque le problème ne comporte que des contraintes statiques) ne vérifie cette contrainte.

Concernant le problème des modes locaux évoqué dans la partie précédente, notons qu'excepté leur influence sur le temps d'un calcul dynamique, ils n'interviennent pas dans nos calculs. En effet, nous ne considérons le déplacement qu'au point d'application de la force (élément où il y a toujours de la matière). Les déplacements liés aux modes locaux étant très petits et localisés sur les zones où la densité est faible (et donc pas aux endroits où on applique les forces), ils n'ont aucune influence sur nos résultats. Nous utiliserons ainsi pour les tests de cette partie, le modèle SIMP, c'est-à-dire la fonction f_p .

Une des difficultés de la résolution de ce problème est de traduire la contrainte

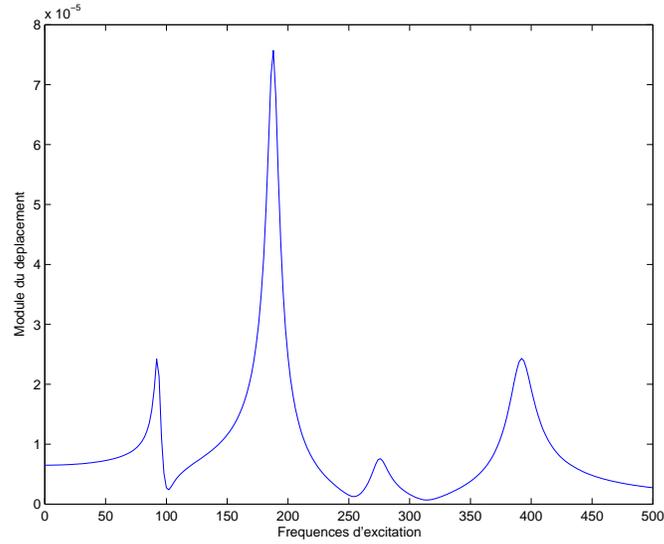


FIG. 5.10 – Courbes de compliance dynamique de la solution du test 4.

dynamique (5.4) sous la forme d’une contrainte mathématique pouvant être prise en compte par un algorithme d’optimisation.

Cette difficulté est liée au fait que nous n’avons pas accès au maximum « réel » de la courbe, c’est-à-dire au maximum des déplacements pour toute fréquence $f \in [f_{min}, f_{max}]$ mais seulement au maximum des évaluations de la courbe discrétisée, c’est-à-dire au maximum des déplacements calculés pour certaines fréquences de l’intervalle $[f_{min}, f_{max}]$. Or, le nombre de fréquences pour lesquelles on calcule le déplacement doit être le plus petit possible pour des raisons de temps de calcul et de place mémoire.

Nous avons ainsi envisagé différentes formulations que nous allons décrire et comparer dans les parties suivantes.

5.2.1 Discrétisation et agrégation

Une façon simple de discrétiser la contrainte (5.4) consiste à imposer que tous les déplacements mesurés soient au-dessous de la valeur de référence γ . La contrainte dynamique (5.4) se réécrit alors :

$$\overline{u_{2,1}}(\mu, f) \leq \gamma, \forall f \in \{f_1, f_2, \dots, f_{N_f}\} \quad (5.8)$$

où N_f est le nombre de fréquences d’excitation considérées, c’est-à-dire le nombre de déplacements calculés.

Il est nécessaire dans ce cas de choisir le pas de discrétisation des fréquences d’excitation, c’est-à-dire de trouver une valeur convenable pour le paramètre N_f . En effet, si le pas de fréquence est trop grand, le maximum « réel » sera mal estimé.

5.2 Formulation mathématique des contraintes dynamiques

Il est alors probable que l'algorithme converge vers une solution ne respectant pas la contrainte imposée : tous les déplacements calculés seront au-dessous de la valeur de référence, mais pour un déplacement (non calculé) correspondant à une fréquence entre deux points de mesure la contrainte ne sera plus respectée (la courbe discrétisée plus finement aura un pic passant entre les points de mesure).

Essayons tout d'abord (test 11) un pas de discrétisation égal à 25Hz ($N_f = 20$). On peut voir sur la figure 5.11 la courbe de compliance dynamique de la solution, tracée avec une discrétisation plus fine (pas égal à 2Hz) que celle utilisée pour poser les contraintes. On constate que le pic de la courbe (intitulée solution en statique + dynamique) passe au-dessus de la droite de référence (le pic passe entre deux points de discrétisation, marqués d'une croix sur la droite de référence).

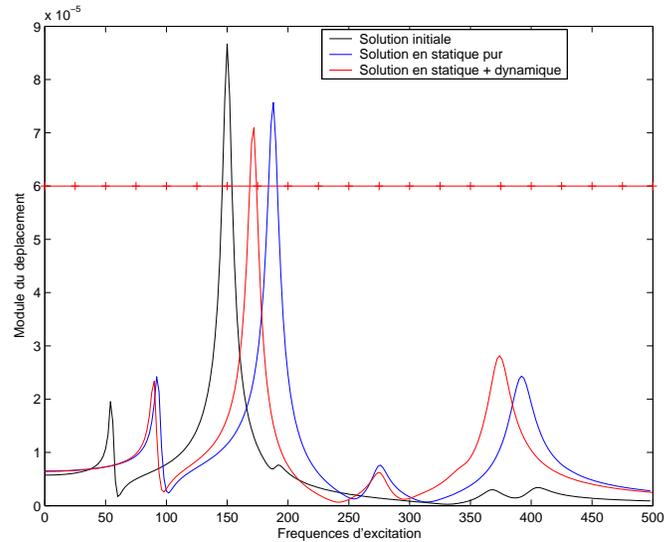


FIG. 5.11 – Comparaison de la courbe de compliance dynamique obtenue au test 11 avec celles de référence.

Pour bien modéliser le maximum « réel » et réduire ce phénomène, il est donc nécessaire que le pas de fréquence soit suffisamment petit. Or, plus le pas de fréquence est petit, plus le nombre de contraintes à inclure dans le problème d'optimisation est important (par exemple si le pas est égal à 2Hz nous avons 250 contraintes à prendre en compte). Dans ce cas, les premières itérations de l'algorithme FSQP permettant de trouver un itéré admissible seront très nombreuses, tout comme le nombre nécessaire d'évaluations des contraintes, et cela est difficilement compatible avec un temps de calcul raisonnable. Pour illustrer ce phénomène, on a représenté sur la figure 5.12 l'évolution de la masse en fonction du nombre d'évaluations (appels à NASTRAN) pour le test 11. En bleu sont représentés les points correspondant à une solution admissible, en rouge ceux correspondant à une solution non admissible et enfin les points sont verts lorsqu'une contrainte est saturée. Sachant qu'une évaluation est

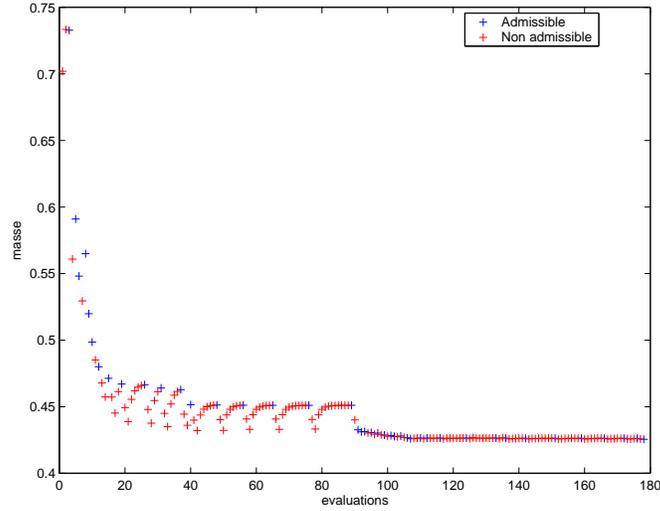


FIG. 5.12 – Évolution de la masse en fonction du nombre d'évaluations pour le test 11.

très coûteuse en temps de calcul (car nécessitant la résolution d'un problème d'élasticité linéaire), il est problématique d'imposer autant de contraintes dynamiques.

Une alternative serait d'utiliser l'option « many sequentially related constraints » de l'algorithme FSQP décrite dans [46]. Toutefois, nous proposons ici de pallier ce problème en agrégeant toutes ces contraintes en une seule qui porte sur le maximum des déplacements calculés (les déplacements ont été calculés pour chaque fréquence marquée d'une croix sur la droite de référence). Nous n'avons plus dans ce cas qu'une seule contrainte dynamique : le maximum de déplacements (parmi ceux associés à chaque fréquence) doit être inférieur à $\gamma = 6 \times 10^{-5} mm$. La contrainte dynamique (5.4) se réécrit alors :

$$\max_{f \in \{f_1, f_2, \dots, f_{N_f}\}} \overline{u_{2,1}}(\mu, f) \leq \gamma. \quad (5.9)$$

Il est évident, comme précédemment, que plus le pas de discrétisation sera faible, meilleure sera l'approximation. Cette solution ne résout pas le problème du pic qui passe entre deux points de mesure. Cependant, ce critère a l'avantage de limiter à un seul le nombre de contraintes à prendre en compte, quel que soit le pas de discrétisation utilisé. Ainsi, la convergence de l'algorithme sera plus rapide. Pour vérifier cela, on pourra comparer la figure 5.13 (évolution de la masse en fonction du nombre d'évaluations pour le test suivant) à la figure 5.12.

Testons ce critère avec un pas de discrétisation égal à 10Hz (test 12). Nous pouvons visualiser la courbe de compliance dynamique de la solution obtenue (tracée avec une discrétisation beaucoup plus fine) sur la figure 5.14. Nous constatons,

5.2 Formulation mathématique des contraintes dynamiques

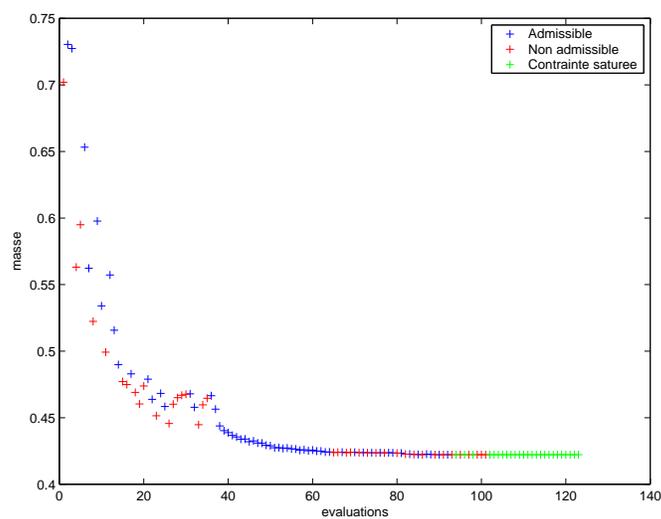


FIG. 5.13 – Évolution de la masse en fonction du nombre d'évaluations pour le test 12.

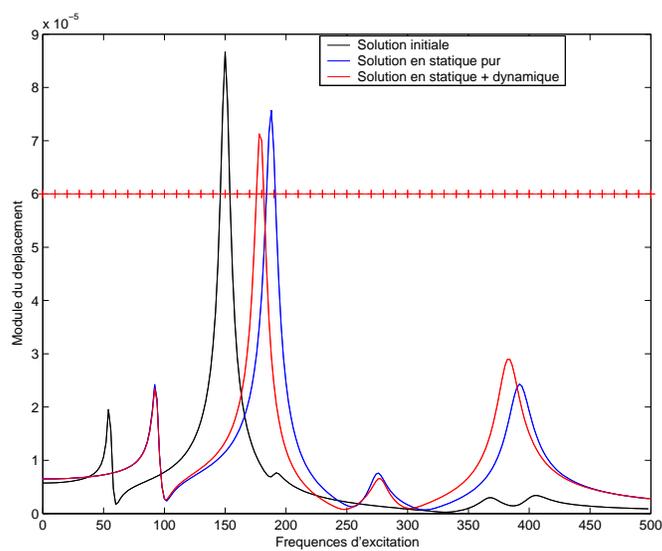


FIG. 5.14 – Courbe de compliance dynamique de la solution obtenue avec le maximum discrétisé (test 12).

comme au test précédent, que le pic de la courbe de compliance dynamique de la solution obtenue passe au-dessus de la droite de référence. Le même problème qu'au test précédent se pose : tous les déplacements calculés (et donc le maximum) sont inférieurs à γ mais la contrainte n'est pas respectée pour une fréquence comprise entre deux points de mesure.

De plus, l'inconvénient principal de la contrainte (5.9) est qu'elle est non différentiable. En effet, la fréquence correspondant au maximum des déplacements calculés peut changer brutalement d'une itération à l'autre. Nous avons illustré ce problème de non différentiabilité de la contrainte (5.9) sur la figure 5.15.

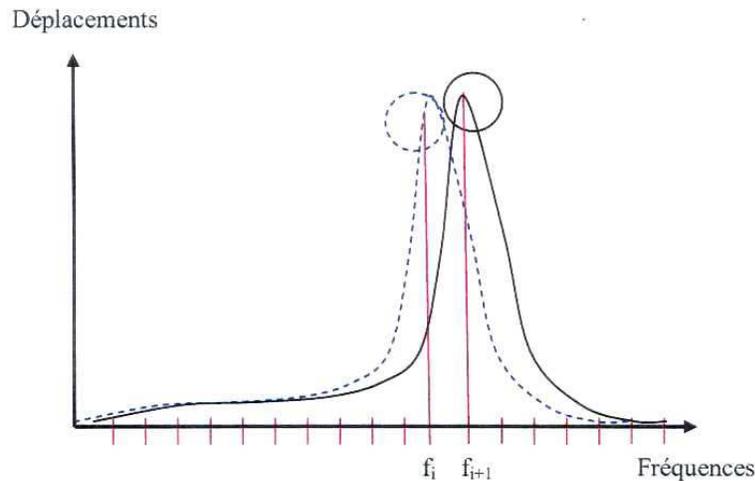


FIG. 5.15 – *Illustration du problème de différentiabilité intervenant avec le maximum discrétisé.*

Supposons que pour une valeur donnée des variables d'optimisation (densités à l'intérieur des éléments de conception) on obtienne la courbe représentée en noir. La valeur de la contrainte (maximum discrétisé) correspond à la fréquence f_i . Supposons maintenant que la courbe bleue en pointillés corresponde à une petite variation des variables. Dans ce cas le maximum discrétisé est atteint à la fréquence $f_i + 1$. Ainsi, le fait de choisir d'agréger toutes nos contraintes (une par fréquence discrétisée) en une seule contrainte exprimée sous la forme d'un maximum (norme l_∞) introduit la non différentiabilité de la contrainte.

De plus, un autre cas de non différentiabilité a lieu lorsque le maximum est atteint en deux valeurs de fréquences d'excitation distinctes.

Agrégation avec la norme l_q

Pour pallier cette difficulté de non différentiabilité nous proposons d'utiliser une norme l_q , avec q fini. Plus précisément, si on note $\bar{u}_k(\mu, f)$ l'amplitude du déplacement

5.2 Formulation mathématique des contraintes dynamiques

ment au noeud k calculé pour la fréquence d'excitation f :

$$\|\overline{u}_k(\mu, \cdot)\|_q = \left(\sum_{f \in \{f_1, f_2, \dots, f_{N_f}\}} \overline{u}_k(\mu, f)^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

et la contrainte (5.4) se réécrit :

$$\|\overline{u}_k(\mu, \cdot)\|_q \leq \gamma_k. \quad (5.10)$$

Dans ce cas, nous nous affranchissons du problème de dérivabilité et nous avons la propriété suivante :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|\overline{u}_k(\mu, \cdot)\|_q = \|\overline{u}_k(\mu, \cdot)\|_\infty = \max_{f \in \{f_1, f_2, \dots, f_{N_f}\}} \overline{u}_k(\mu, f),$$

c'est-à-dire que si la valeur de q utilisée est suffisamment grande, la norme l_q est pratiquement le maximum.

L'utilisation de la norme l_q nécessite de choisir une valeur pour le paramètre q . Pour nous guider dans ce choix, nous avons calculé (cf. tableau 5.3) la valeur de la norme l_q pour la courbe de compliance dynamique (discrétisation fine avec un pas de 2Hz) de différentes solutions et ce, pour différentes valeurs du paramètre q . Les trois solutions étudiées sont : le point de départ de l'optimisation (toutes les densités égales à 0.9), la solution obtenue dans le cas où le problème comporte seulement des contraintes statiques (test 4 décrit dans la partie suivante) et enfin la solution obtenue lorsque le problème comporte des contraintes à la fois statiques et dynamiques (test précédent avec utilisation du maximum discrétisé).

q	Point de départ	Solution en statique pur (Test 4)	Solution en statique et dynamique (Test 12)
∞	8.6690×10^{-5}	7.5699×10^{-5}	7.1288×10^{-5}
2	2.1345×10^{-4}	2.3211×10^{-4}	2.2755×10^{-4}
5	1.0418×10^{-4}	9.5512×10^{-5}	9.0635×10^{-5}
6	9.8977×10^{-5}	8.9938×10^{-5}	8.5313×10^{-5}
8	9.3615×10^{-5}	8.4218×10^{-5}	7.9963×10^{-5}
10	9.0997×10^{-5}	8.1379×10^{-5}	7.7344×10^{-5}
20	8.7360×10^{-5}	7.7089×10^{-5}	7.3355×10^{-5}
30	8.6825×10^{-5}	7.6191×10^{-5}	7.2406×10^{-5}

TAB. 5.3 – Valeur de la norme l_q pour différentes solutions et différentes valeurs de q .

On souhaite une valeur de q suffisamment grande pour permettre de modéliser la norme l_∞ mais pas trop élevée pour éviter les problèmes de différentiabilité « numérique » potentiels que posent la norme l_∞ et que nous avons évoqué précédemment.

Notons tout d'abord que la norme l_2 n'est pas satisfaisante puisque ses valeurs pour les trois solutions ne sont pas du tout en adéquation avec celles obtenues avec le maximum. En effet, dans ce cas, la valeur la plus faible est celle de la solution initiale et la plus élevée celle de la solution avec seulement des contraintes statiques. Or, cette dernière n'a ni le pire ni le meilleur comportement en dynamique. On remarque également qu'au delà de la valeur $q = 8$, la différence entre les valeurs devient faible. La norme l_q converge lentement vers la norme l_∞ . Nous nous sommes basée sur ces observations empiriques pour choisir la valeur $q = 6$ pour les tests décrits par la suite.

Il nous faut maintenant adapter la valeur seuil à prendre pour la borne γ de la contrainte. Nous avons lancé un premier test avec $\gamma = 8 \cdot 10^{-5} mm$ et un pas de discrétisation égal à 10Hz (test 13). Comme on peut le voir sur la figure 5.16, la solution obtenue est non admissible (pour la valeur réelle de la contrainte) puisque la courbe de compliance dynamique passe au-dessus de la droite de référence $y = 6 \cdot 10^{-5}$. La

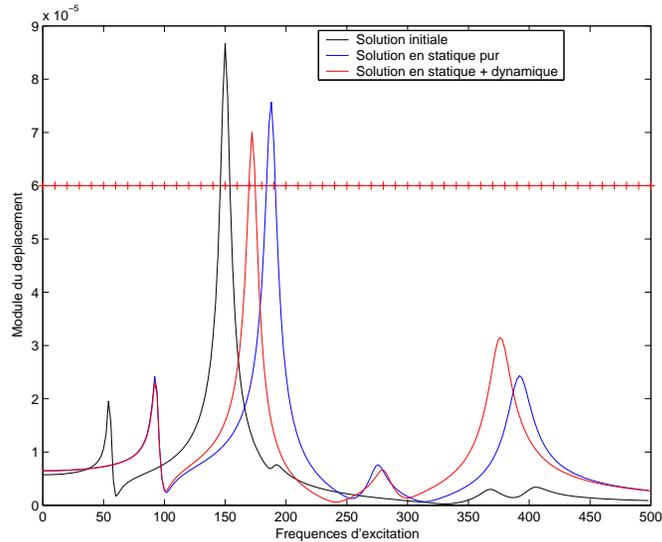


FIG. 5.16 – *Courbe de compliance dynamique de la solution obtenue en utilisant la norme 6 (test 13).*

norme l_6 ne permet donc pas de résoudre les problèmes liés à la discrétisation.

Une solution (utilisable aussi bien avec la norme l_6 qu'avec le maximum discrétisé) peut être d'imposer à l'algorithme d'optimisation une contrainte plus sévère que la contrainte « réelle », c'est-à-dire baisser la valeur du seuil γ de la contrainte (5.4). On verra un exemple d'application dans le chapitre 6.

Notons, par ailleurs, que lorsqu'on utilise la norme l_6 , il est souvent nécessaire d'adapter la valeur γ , pour chaque problème particulier. En effet, par exemple, dans le cas où la courbe comporte deux pics de même hauteur, la borne utilisée avec la

5.2 Formulation mathématique des contraintes dynamiques

norme l_∞ ne convient plus.

Pour éviter d'utiliser une heuristique permettant d'adapter la valeur de la borne γ au problème traité, on peut envisager de modéliser la courbe de compliance dynamique. C'est une méthode de modélisation que nous décrivons dans le paragraphe suivant.

5.2.2 Modélisation de la courbe de compliance dynamique

Afin de pallier le problème dû à la discrétisation de la courbe de compliance dynamique, nous avons envisagé de la modéliser, par exemple à l'aide d'une approximation polynomiale par morceaux, à partir des déplacements calculés. On aura ainsi une expression explicite approchant au mieux la courbe discrétisée finement et le maximum de cette expression approchera le maximum « réel » de la courbe.

La question est alors de savoir quelle classe de fonctions d'approximation utiliser. Il est en effet nécessaire de savoir calculer les sensibilités du maximum modélisé par rapport aux variables d'optimisation et de pouvoir modéliser une courbe avec des pics hauts et étroits.

Les fonctions cardinal splines nous ont paru intéressantes parce que particulièrement bien adaptées à la modélisation des pics. Le calcul des dérivées du maximum de la courbe modélisée par rapport aux variables d'optimisation (densités à l'intérieur des éléments de conception) est immédiat et dépend, comme nous allons le montrer, uniquement des dérivées aux points de contrôle de la spline, c'est-à-dire des dérivées des déplacements calculés (on pourra voir [27] pour plus de détails).

Les cardinal splines sont définies par les valeurs de la fonction à approcher en certains points (noeuds) ainsi que par les dérivées directionnelles de la fonction en ces mêmes noeuds. Nous donnons ci-dessous la forme usuelle des cardinal splines, permettant d'obtenir une représentation approchée de notre courbe de compliance dynamique.

Soit N_f le nombre de fréquences discrétisées, $\{u_0, u_1, \dots, u_{N_f}\}$ les déplacements calculés aux points de discrétisation et $u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}$ quatre déplacements consécutifs de cet ensemble. Ces déplacements dépendent des variables d'optimisation μ , densités à l'intérieur des éléments de conception.

Soit l'intervalle de fréquences $I = [f_i, f_{i+1}]$, on se ramène pour plus de simplicité mais sans perte de généralité à l'intervalle $[0, 1]$ et on considère une fréquence f de cet intervalle.

On impose alors que la courbe approchée $C_i(f, \mu)$ interpole les valeurs u_i et u_{i+1} et sa tangente en ces points est contrainte à être égale à un certain multiple de la pente de la sécante aux points voisins : $\frac{\partial C_i}{\partial f}(f_i, \mu) = \theta(u_{i+1} - u_{i-1})$ (respectivement $\frac{\partial C_i}{\partial f}(f_{i+1}, \mu) = \theta(u_{i+2} - u_i)$) (cf. figure 5.17), où θ est un paramètre à ajuster.

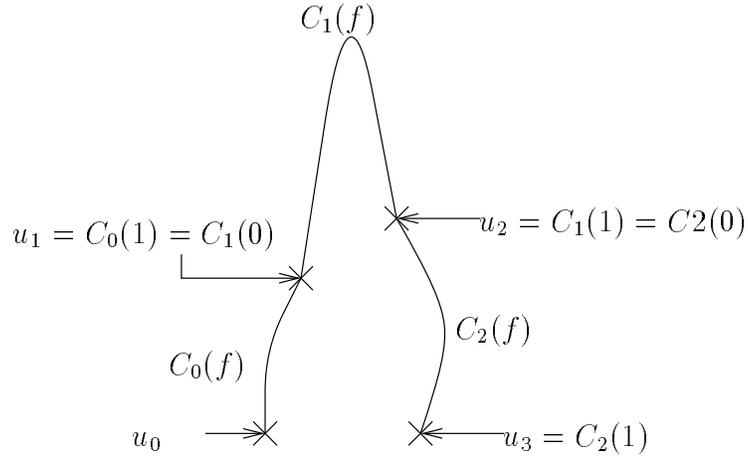


FIG. 5.17 – Modélisation d'un pic à l'aide de cardinal splines.

On cherche donc un polynôme $C_i(., \mu)$ de degré 3 satisfaisant les quatre contraintes :

$$\begin{aligned} C_i(0, \mu) &= u_i, \\ C_i(1, \mu) &= u_{i+1}, \\ \frac{\partial C_i}{\partial f}(0, \mu) &= \theta(u_{i+1} - u_{i-1}) \\ \text{et } \frac{\partial C_i}{\partial f}(1, \mu) &= \theta(u_{i+2} - u_i). \end{aligned}$$

On peut ainsi écrire :

$$C_i(f, \mu) = FMU^T$$

avec

$$\begin{aligned} F &= [f^3 \ f^2 \ f \ 1] \\ U &= [u_{i-1} \ u_i \ u_{i+1} \ u_{i+2}] \end{aligned}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} -\theta & 2 - \theta & \theta - 2 & \theta \\ 2\theta & \theta - 3 & 3 - 2\theta & -\theta \\ -\theta & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour ne pas trop augmenter le temps de calcul, nous nous sommes restreinte à la modélisation du pic de la courbe de compliance dynamique (et non pas à la courbe

5.2 Formulation mathématique des contraintes dynamiques

entière). Pour cela, on recherche le maximum discrétisé qui correspondra pour la modélisation à u_i ou u_{i+1} .

Nous nous sommes contentée de cette modélisation locale car toutes les courbes observées au cours de nos tests possédaient un pic prépondérant. Dans le cas où il y aurait plusieurs pics de hauteur comparable, on peut imaginer modéliser ces différents pics et utiliser une norme l_q pour conserver les propriétés de différentiabilité.

Explicitons la valeur du maximum de la courbe modélisée :

$$\max_f C_i(f, \mu) = C_i(f^*, \mu)$$

avec f^* telle que

$$\frac{\partial C_i}{\partial f}(f^*, \mu) = 0,$$

c'est-à-dire

$$af^2 + bf + c = 0$$

avec

$$\begin{aligned} a &= 3(-\theta u_{i-1} + (2 - \theta)u_i + (\theta - 2)u_{i+1} + \theta u_{i+2}), \\ b &= 2(2\theta u_{i-1} + (\theta - 3)u_i + (3 - 2\theta)u_{i+1} - \theta u_{i+2}), \\ c &= \theta u_{i-1} + \theta u_{i+1}. \end{aligned}$$

Le maximum local de notre polynôme de degré 3 (s'il existe, ce que l'on peut raisonnablement supposer ici) est atteint au point

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

avec les paramètres a, b, c des polynômes en $u_i(\mu)$. Si ce maximum existe, on a $b^2 - 4ac > 0$ et $a \neq 0$ et dans ces conditions la fonction maximum est différentiable en μ .

Le paramètre θ mesure l'amplitude des vecteurs tangents aux points de contrôle, c'est-à-dire la hauteur du maximum dans le cas de la modélisation d'un pic. Nous avons illustré cette propriété sur la figure 5.18. Nous avons représenté en bleu, sur les deux graphiques, une courbe de compliance dynamique discrétisée avec un pas de fréquence égal à 5Hz. Le rond rouge représente le maximum de la courbe spline obtenue à partir des déplacements calculés et avec $\theta = 1.8$ sur la courbe de gauche et $\theta = 2.5$ sur la courbe de droite. Cette valeur maximum est à comparer avec le maximum de la courbe discrétisée plus finement avec un pas de fréquence égal à

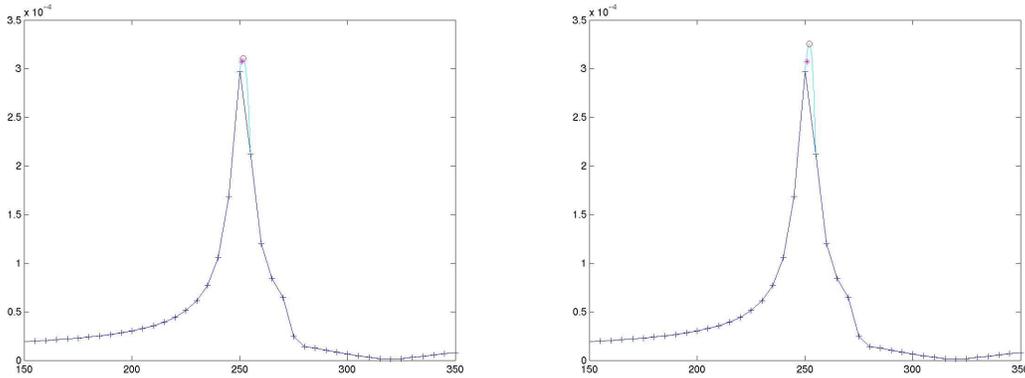


FIG. 5.18 – Influence de la valeur du paramètre θ sur la hauteur du pic modélisé.

1Hz (que l'on suppose proche du maximum « réel ») et représenté par une étoile magenta.

Le point faible de cette approche est le réglage du paramètre θ . En effet, la hauteur du pic de la courbe de compliance dynamique dépend de la valeur des densités et change donc au cours de l'optimisation. Or, le paramètre θ doit être fixé au début de l'optimisation en fonction de la forme du pic de la solution initiale.

Cette approximation du maximum par des splines s'avère toutefois bien fonctionner en pratique et nous montrerons les résultats dans le chapitre suivant sur le cas réel d'un composant automobile.

Pour terminer cette partie sur la modélisation des contraintes dynamiques, remarquons que la valeur de l'amortissement (utilisé dans la résolution du problème d'élasticité linéaire) a une influence sur la forme de la courbe de compliance dynamique. En effet, on peut vérifier que plus la valeur de l'amortissement est petite plus les pics sont hauts et étroits.

5.3 Un problème d'optimisation globale

Il est intuitif que notre problème d'optimisation topologique est non convexe (ni même quasi-convexe), c'est-à-dire qu'avec le même algorithme d'optimisation on peut obtenir différentes solutions lorsqu'on change les valeurs des paramètres définissant l'algorithme ou qu'on prend un point de départ différent pour l'algorithme d'optimisation.

C'est cet aspect optimisation locale/globale que nous étudions dans cette partie. Ainsi, après avoir mis en évidence l'existence de plusieurs minima locaux, nous parlerons de différentes stratégies pour le choix du paramètre de pénalisation p de la méthode SIMP. Pour tous nos tests, nous utiliserons l'exemple de la plaque console.

5.3 Un problème d'optimisation globale

Une façon simple d'évaluer cet aspect optimisation locale/globale est d'optimiser à partir de différents points de départ et pour différentes valeurs de p .

On utilise ainsi les points de départ suivants :

- Point de départ numéro 1 : $\mu_i^0 = 0.9 \forall i = 1, \dots, 400$;
- Point de départ numéro 2 (cf. figure 5.19) : cette solution est identique à la précédente sauf que les 48 éléments au centre de la pièce sont vides (la densité correspondante est nulle : $\mu_i = 0.001$) ;
- Point de départ numéro 2b : cas identique au précédent sauf qu'au centre les densités sont égales à 0.2 et non à 0.001 ;
- Point de départ numéro 2c : comme pour le point numéro 2b les densités au centre ne sont pas nulles mais valent 0.5 ;
- Point de départ numéro 3 (cf. figure 5.19) : nous avons, dans ce cas, créé 9 trous (constitués de 9 éléments chacun) à l'intérieur de la pièce. La densité de ces éléments est égale à 0.001.

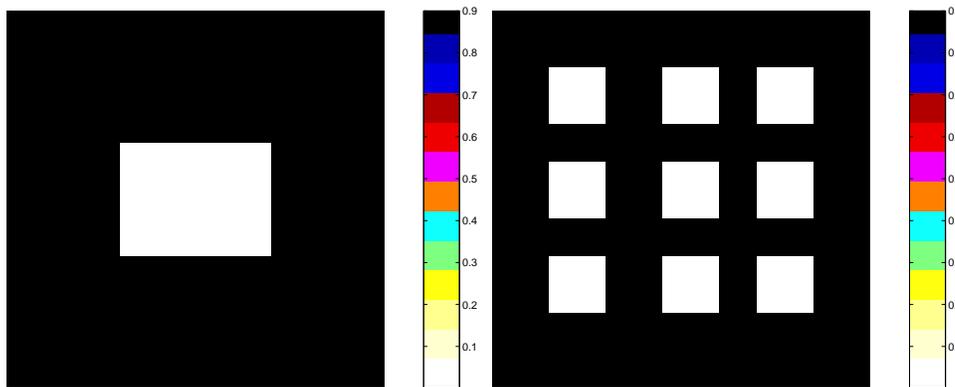


FIG. 5.19 – Point de départs 2 et 3.

Commençons par étudier l'aspect optimisation globale de notre problème dans le cas où nous avons seulement des contraintes statiques. Les tests réalisés et les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 5.4.

Au vu de ces résultats, on peut faire les remarques suivantes :

- Pour $p = 1$, on obtient la même solution quel que soit le point initial choisi (la forme de cette solution est donnée sur la figure 5.20). Il semble donc que l'on obtient dans les trois cas un minimum global du problème d'optimisation relaxé (c'est-à-dire en tolérant les densités intermédiaires).
- Lorsque $p > 1$, les solutions obtenues dépendent du point initial utilisé. On remarque également que les variables égales à 0.001 (densités nulles) au début

Test	p	Point de départ	Masse finale ($10^{-1}kg$)	Nombre de densités intermédiaires
1	1	1	3.654361	318
14		2	3.654360	316
15		3	3.654381	318
2	2	1	4.162881	54
16		2	4.758421	16
5	4	1	4.254976	18
17		2	4.7785	2
18		2b	4.495989	10
19		2c	4.270954	10

TAB. 5.4 – Résultats obtenus avec différents points de départ et plusieurs valeurs de p .

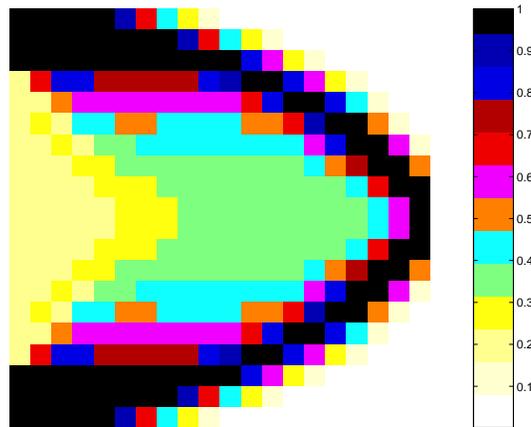


FIG. 5.20 – Solution obtenue avec $p = 1$.

de l'optimisation (la pièce initiale comporte des trous), restent inchangées (cf. figure 5.21). Ceci est dû, comme nous l'avons vu précédemment, à la forme particulière de la fonction f_p utilisée dans la formulation SIMP. Notons ainsi que lorsque la solution initiale comporte des trous, une partie de la forme de la pièce est figée dès le début de l'optimisation. Cela peut expliquer le fait que la masse des solutions obtenues avec le point initial 2 est plus élevée que celle des solutions obtenues avec le point initial 1. Ceci n'est vrai, rappelons-le, que pour les densités très faibles, puisqu'avec $p = 4$ et le point initial 2b, certaines variables dont la valeur initiale est 0.2 peuvent augmenter (cf. figure 5.22) et qu'avec le point initial numéro 2c, la solution obtenue est proche de celle obtenue avec le point initial 1.

5.3 Un problème d'optimisation globale

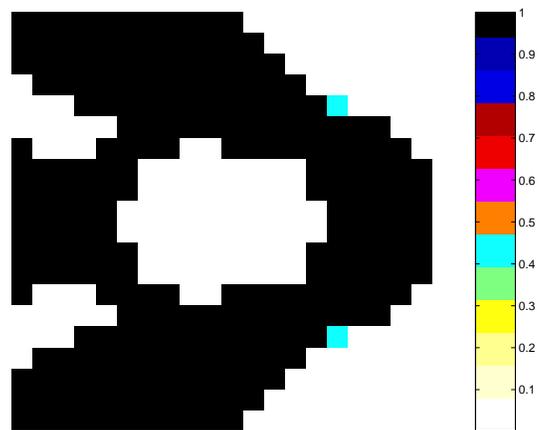


FIG. 5.21 – *Solution obtenue avec $p = 4$ et le point de départ 2.*

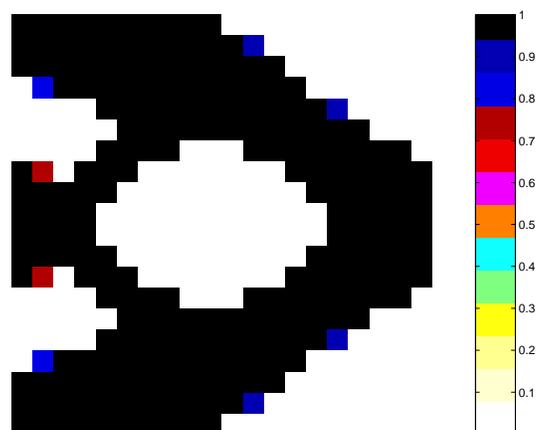


FIG. 5.22 – *Solution obtenue avec $p = 4$ et le point de départ 2b.*

Afin de vérifier ces résultats lorsque le cahier des charges comporte aussi des contraintes dynamiques, on réutilise les conditions du test 13 (utilisation de la norme l_6) avec le point initial numéro 2. Les résultats sont résumés dans le tableau 5.5. Nous

Test	Point de départ	Masse finale ($10^{-1}kg$)	Nb d'éval.	Nb d'itér.	Nb de densités intermédiaires
13	1	4.221339	70	21	20
20	2	4.819617	165	40	20

TAB. 5.5 – *Comparaison des tests réalisés en dynamique avec $p = 3.5$ et différents points de départ.*

remarquons que la solution obtenue avec le point initial numéro 2 (test 20) a une masse plus élevée et un comportement dynamique différent (cf. figure 5.23) que celle obtenue avec le point initial 1 (test 13). De plus, lorsqu'on débute l'optimisation avec le point initial 2, la convergence de l'algorithme est plus lente (le nombre d'évaluations et d'itérations est plus élevé). Enfin, comme on le vérifie sur la figure

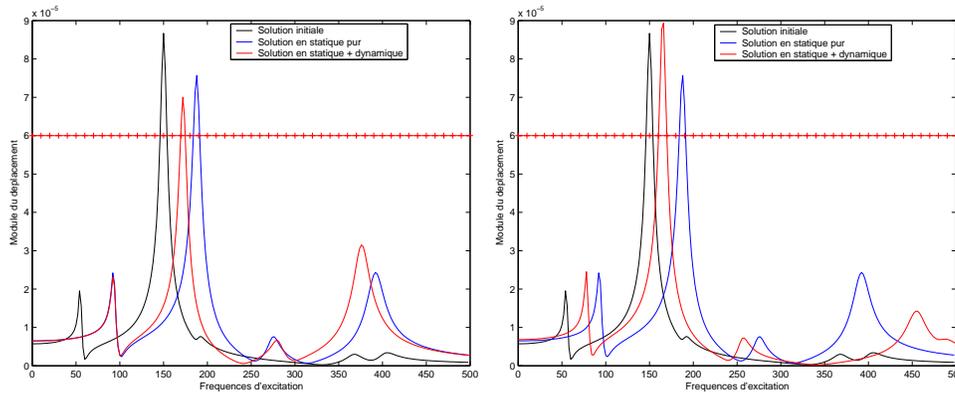


FIG. 5.23 – *Comparaison des courbes de compliance dynamique obtenues avec $p = 3.5$ et différents points de départ (tests 13 et 20).*

5.24, lorsqu'on utilise le point initial 2, les densités nulles au début de l'optimisation restent inchangées et la solution est donc différente de celle obtenue avec le point initial 1. Tous ces résultats sont identiques à ceux obtenus dans le cas où le problème comporte seulement des contraintes statiques. Notre problème relève donc bien dans ce cas aussi de l'optimisation globale.

Qu'en est-il en dynamique lorsque $p = 1$? Remarquons tout d'abord que pour $p = 1$, la courbe de compliance dynamique de la pièce a la même forme que celle obtenue avec $p = 3.5$ mais que ses pics sont moins hauts (cf. figure 5.25). La solution initiale évaluée avec $p = 1$ sera donc « plus admissible » que la même solution initiale évaluée avec $p = 3.5$.

5.3 Un problème d'optimisation globale

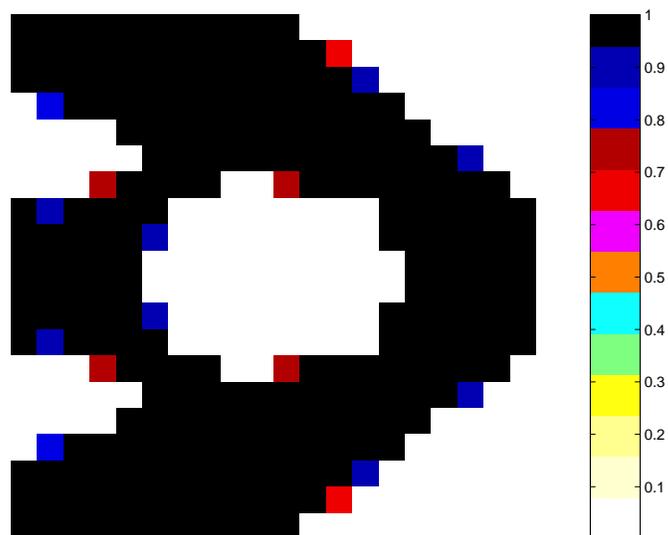


FIG. 5.24 – Solution obtenue en dynamique avec $p = 3.5$ et le point de départ 2.

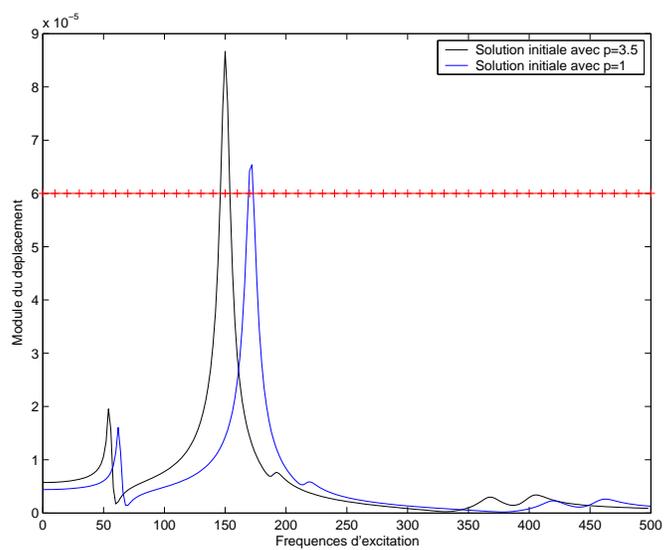


FIG. 5.25 – Comparaison des courbes de compliance dynamique évaluées avec $p = 1$ et 3.5.

Afin d'étudier l'aspect optimisation globale de notre problème lorsque $p = 1$, on réalise les tests 13 et 20 avec $p = 1$. Les résultats obtenus (en terme de masse, nombre d'évaluations et d'itérations, etc.) sont résumés dans le tableau 5.6. Les

Test	Point de départ	Masse finale ($10^{-1}kg$)	Nb d'éval.	Nb d'itér.	Nb de densités intermédiaires
21	1	3.753139	301	65	328
22	2	3.753213	379	75	339

TAB. 5.6 – *Comparaison des tests réalisés en dynamique avec $p = 1$ et différents points de départ.*

solutions obtenues (cf. figure 5.26) semblent identiques. Cela confirme les résultats

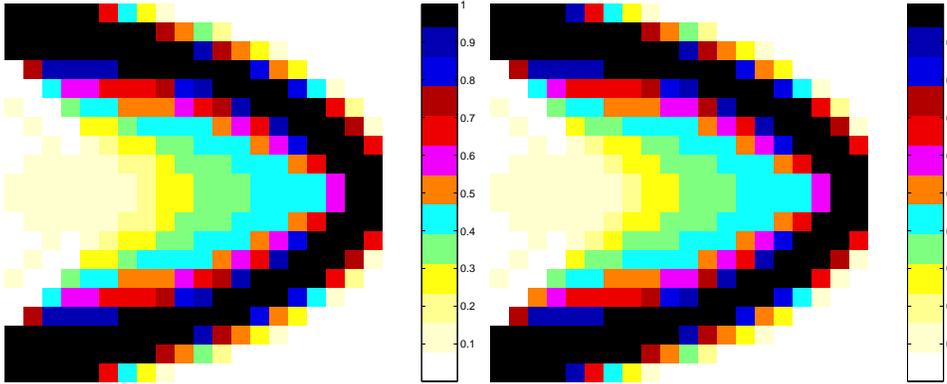


FIG. 5.26 – *Solutions obtenues en dynamique avec $p = 1$ et deux points de départ différents.*

obtenus dans le cas où le problème comporte seulement des contraintes statiques.

La formulation « SIMP » du problème d'optimisation topologique conduit lorsque $p > 1$ à un problème d'optimisation globale et ce, même dans le cas très simple du problème test que nous traitons ici.

Ainsi, toute la pertinence de l'approche proposée par Bendsøe dans [12], consistant à débiter l'optimisation avec une valeur de p faible ($p = 1$ par exemple) et de l'augmenter au cours de l'optimisation, apparaît ici. En effet, en démarrant l'optimisation avec $p = 1$, nous évitons une pénalisation trop forte qui conduirait à un minimum local médiocre. Par la suite, en augmentant de façon progressive la valeur de p au cours de l'optimisation, nous assurons la pénalisation des densités intermédiaires de la solution finale qui sera en 0/1.

Nous nous sommes dès lors interrogée sur la manière de modifier p au cours de l'optimisation : quand ? (au bout de combien d'itérations ?) et comment ? (avec quel

5.3 Un problème d'optimisation globale

pas augmenter p ?). Afin de répondre à ces questions, nous avons réalisé les tests décrits dans le tableau 5.7. Nous avons fait varier p de 1 à 4 (lorsque $p = 4$, nous attendons que l'algorithme converge). La manière d'incrémenter p (de 1, 2, ... par exemple) et le nombre d'itérations au bout desquelles on modifie sa valeur, varient d'un test à l'autre. Nous comparerons les résultats à ceux obtenus dans le cas où $p = 4$ tout au long de l'optimisation (point initial numéro 1) et donnés dans la première ligne du tableau.

Test	Nb iter. avant incrémentation	Valeur incrémentation	Masse finale ($10^{-1}kg$)	Nb de densités intermédiaires
5	0 ($p = 4$)	0	4.254976	18
23	10	+ 0.5	4.247776	27
24	20	+ 1	4.228301	24
25	20	+ 2	4.228298	24
26	30	+ 3	4.224911	10
27	25	+ 3	4.241911	10
28	→ cv	+ 3	4.217065	18

TAB. 5.7 – Résultats lorsque p varie au cours de l'optimisation (p initialement égal à 1).

Il est difficile de tirer une conclusion de ces résultats, les valeurs de masse étant assez similaires. On remarque toutefois, que pour les trois premiers tests, les solutions obtenues comportent plus de densités intermédiaires. Ainsi, si l'on tient compte du compromis nécessaire entre le petit nombre de densités intermédiaires et une valeur de masse réduite, les tests 26 et 28 sont les plus performants. La forme des solutions obtenues avec ces deux tests sont en fait très proches (cf. figure 5.27), ce qui était prévisible puisque lorsque $p = 1$ la solution obtenue au bout de 30 itérations est très proche de la solution « optimale » (obtenue après convergence de l'algorithme), notamment du point de vue de la masse (cf. figure 5.28).

Afin de savoir si le fait de débiter l'optimisation avec $p = 1$ est réellement avantageux, on réalise deux tests supplémentaires : on optimise le problème avec $p = 4$; à partir du point « optimal » obtenu avec $p = 2$, puis à partir du point « optimal » obtenu avec $p = 3$. Nous pouvons visualiser les formes des solutions obtenues sur la figure 5.29 et comparer les résultats dans le tableau 5.8.

Du point de vue de la masse et du nombre de densités intermédiaires, les résultats du test 29 sont meilleurs. On peut ainsi penser que le point « optimal » obtenu avec $p = 2$ est un bon point initial pour $p = 4$, c'est-à-dire qu'en débutant l'optimisation en ce point, l'algorithme se dirige vers un « bon » minimum local. On peut confirmer cela en représentant sur la figure 5.30 l'évolution de la valeur de la masse en fonction du nombre d'évaluations (appels à NASTRAN) dans le cas du test numéro 24. Nous avons représenté en bleu les points correspondant à une solution admissible, en rouge ceux correspondant à une solution non admissible et enfin le point est vert

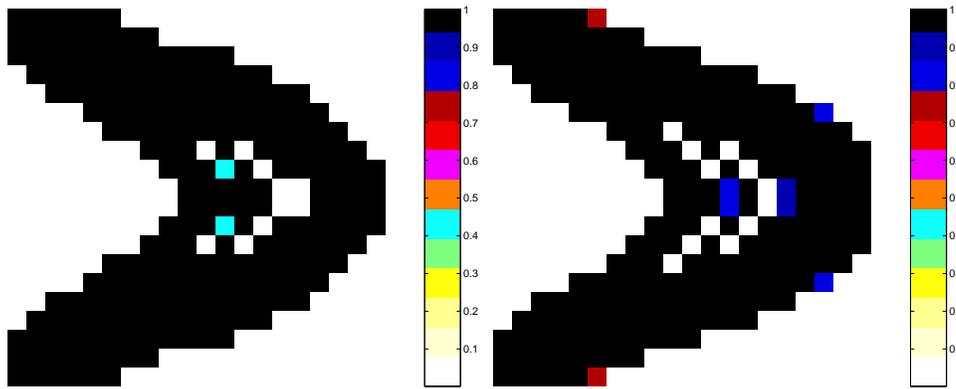


FIG. 5.27 – Représentation des solutions des tests 26 et 28 (lorsque p varie au cours de l'optimisation).

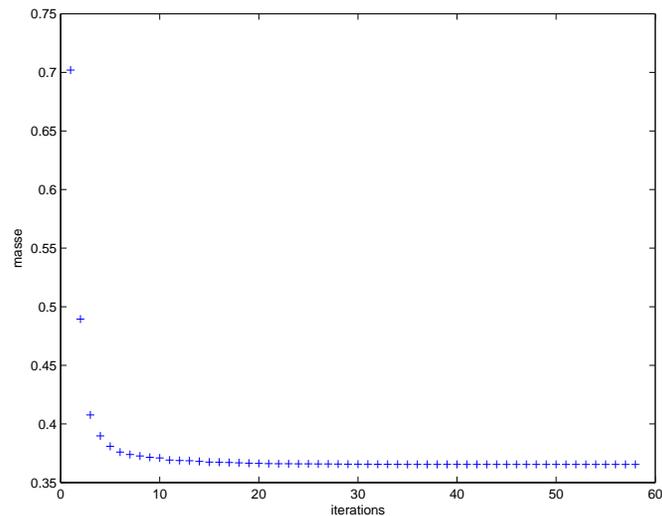


FIG. 5.28 – Tracé de la masse pour chaque itération lorsque $p = 1$.

lorsqu'une contrainte est saturée. Les traits verticaux séparent les évaluations pour chaque valeur de p (p variant de 1 à 4). Nous remarquons que la valeur de la masse pour le point « optimal » obtenu avec un p donné est très différente de celle du premier point admissible pour le p suivant. Il y a un « saut » entre les deux points. Nous notons aussi que ce « saut » est moins important entre le point « optimal » obtenu avec $p = 2$ et le premier point admissible avec $p = 4$ qu'entre le point « optimal » obtenu avec $p = 1$ et ce même point. On peut ainsi penser qu'en réduisant le « saut » apparaissant lors du changement de valeur de p , on améliore les résultats.

Afin de vérifier cela, réalisons le test suivant : on fait varier p de 1 à 2 très lentement (+ 0.1 toutes les 5 itérations) puis p est égal à 4 jusqu'à la convergence.

5.3 Un problème d'optimisation globale

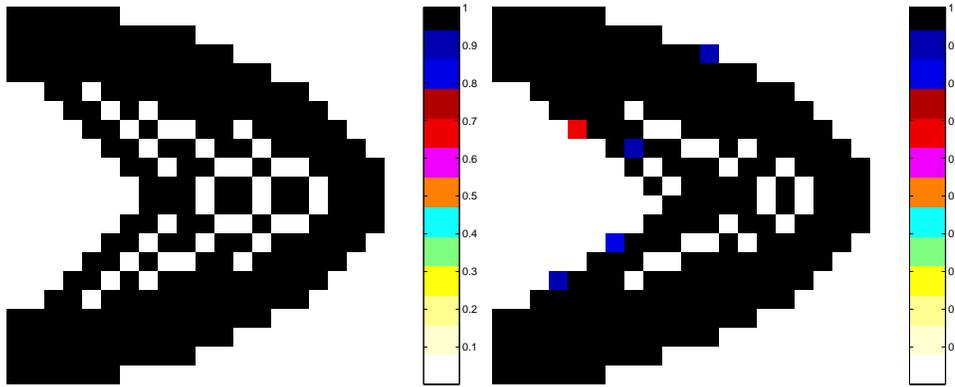


FIG. 5.29 – Représentation des solutions obtenues avec $p = 4$ et différents points de départ (tests 29 et 30).

Test	p initial	Masse finale ($10^{-1}kg$)	Nombre de densités intermédiaires
5	4	4.254976	18
28	1	4.217065	18
29	2	4.162884	10
30	3	4.212885	15

TAB. 5.8 – Autres résultats avec p qui varie au cours de l'optimisation.

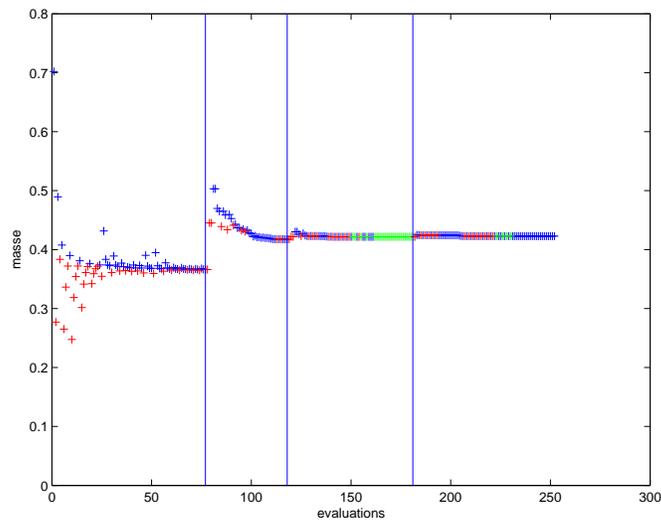


FIG. 5.30 – Valeur de la masse à chaque évaluation (test 24).

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 5.9.

Ces résultats (notamment au vu de la valeur finale de la masse) semblent confir-

Test	Masse finale ($10^{-1}kg$)	Nombre de densités intermédiaires
31	4.166552	20

TAB. 5.9 – Test avec une variation lente de p .

mer notre idée. Toutefois, lorsqu'on visualise la solution, on se rend compte que des damiers apparaissent (cf. figure 5.31). La solution n'est dès lors pas vraiment intéressante.

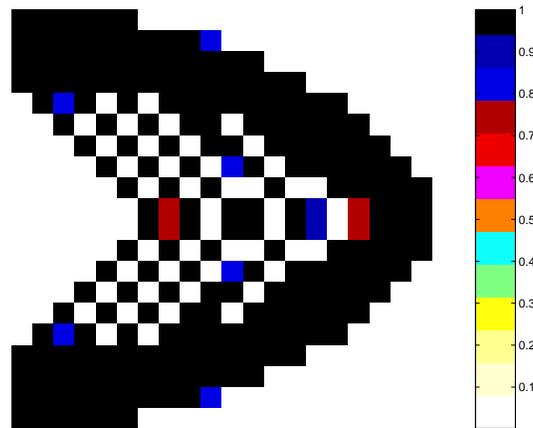


FIG. 5.31 – Représentation de la solution lorsqu'on fait varier p lentement (test 31).

Nous pouvons conclure ici que les résultats les plus satisfaisants ont été obtenus avec les tests 26, 28 et 29. Il semble donc que la meilleure façon de modifier la valeur de p au cours de l'optimisation est de prendre au départ $p = 1$ ou 2, de réaliser un certain nombre d'itérations, puis lancer une optimisation avec $p = 4$ à partir du point « optimal » obtenu.

Afin de vérifier ces résultats dans le cas où le problème comporte également des contraintes dynamiques, nous avons repris le test 13 mais en utilisant comme point de départ de l'optimisation, la solution « optimale » obtenue avec $p = 1$ (test 32). Nous pouvons comparer les résultats obtenus avec ceux du test 13 dans le tableau 5.10.

Les résultats obtenus en terme de masse et de densités intermédiaires sont proches. Il n'est donc pas forcément pertinent dans le cas dynamique de faire varier p au cours de l'optimisation.

Nous avons vu dans la partie 5.1, que remplacer la fonction $f_p : x \rightarrow x^p$ par la fonction $f_\alpha : x \mapsto \frac{1}{\alpha}(x + (\alpha - 1)x^{\alpha+1})$ présentait l'avantage d'éviter l'apparition,

5.3 Un problème d'optimisation globale

Test	Masse finale ($10^{-1}kg$)	Nb d'éval.	Nb d'itér.	Nb de densités intermédiaires
13	4.221339	70	21	20
32	4.231032	70	18	14

TAB. 5.10 – *Comparaison des tests réalisés en dynamique avec différents points de départ.*

dans les calculs dynamiques, de nombreux modes locaux. Nous pouvons dès lors nous interroger sur l'aspect optimisation globale du problème dans le cas où on utilise cette même fonction f_α . Pour répondre à cette question, on réalise un test similaire aux tests 8, 9 et 10 (cf. tableau 5.2) mais en utilisant plutôt le point de départ 2. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 5.11.

Test	Point de départ	α	Masse finale ($10^{-1}kg$)	Nombre de densités intermédiaires
8	1	2.5	4.171648	64
33	2		4.142157	44
9	1	3	4.186335	24
34	2		4.244400	52
10	1	4	4.252974	22
35	2		4.296032	12

TAB. 5.11 – *Tests avec différentes valeurs α et différents points de départ.*

Les résultats obtenus dépendent du point de départ utilisé. Il s'agit donc bien dans ce cas aussi d'un problème relevant de l'optimisation globale. Toutefois, on remarque sur la figure 5.32 que contrairement aux résultats obtenus avec $p > 1$, les densités nulles au départ peuvent être modifiées lorsqu'on utilise la fonction f_α et ce, même lorsque la valeur de α est élevée.

Il est en outre difficile de conclure sur la qualité des solutions obtenues puisque cette dernière dépend de la valeur de α et du point de départ utilisé.

On note néanmoins que la fonction de pénalisation f_α apporte un potentiel de diversification dans notre contexte d'optimisation globale : elle permet des directions de descente qui ajoutent de la matière dans les éléments à densités au départ très faibles. Par ailleurs, rappelons qu'un avantage certain de ces fonctions par rapport à celle habituellement utilisée avec le modèle SIMP, est le fait qu'il n'y a pas apparition de mode locaux dans le cas d'un calcul dynamique.

Nous avons évoqué à plusieurs reprises dans les parties précédentes, l'utilisation de l'algorithme CFSQP. Nous allons dans la partie suivante décrire la mise en oeuvre de cet algorithme d'optimisation, notamment le réglage des paramètres.

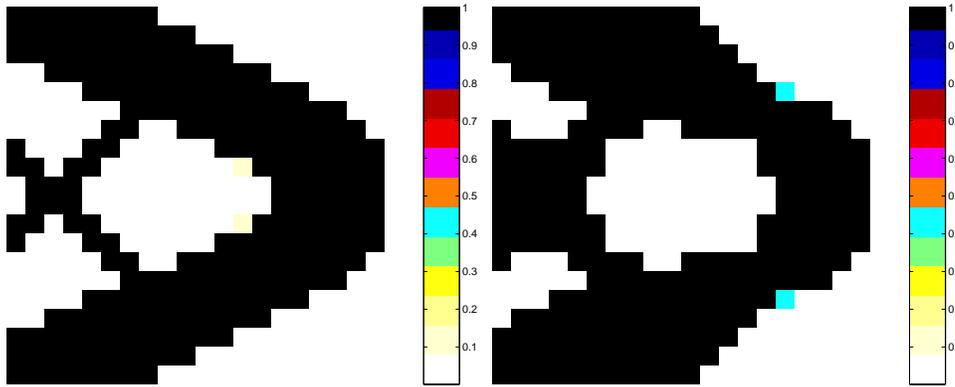


FIG. 5.32 – Comparaison des solutions obtenues avec le point de départ 2, la fonction f_α , $\alpha = 4$ (gauche) et f_p , $p = 4$ (droite).

5.4 Étude et choix réalisés pour l’algorithme CF-SQP

Rappelons tout d’abord que la méthode FSQP fait partie des méthodes d’optimisation locale non linéaire dites de descente. Il s’agit en fait d’une des nombreuses variantes de l’algorithme PQS, dont elle se distingue par le fait que tous les itérés sont admissibles. Nous avons vu dans le chapitre 4 que cette méthode est particulièrement bien adaptée à la résolution de notre problème d’optimisation topologique.

CFSQP est l’algorithme écrit en C, permettant la mise en oeuvre de la méthode FSQP.

L’utilisateur de CFSQP a le choix entre deux options : il peut soit demander à ce que la valeur de la fonction objective décroisse à chaque itération (une fois que l’admissibilité des contraintes est vérifiée), on parle alors de décroissance monotone ; soit se contenter d’une décroissance sous au plus quatre itérations (décroissance non monotone). On s’autorise ainsi à détériorer temporairement la valeur de la fonction objectif. Dans le premier cas, une recherche linéaire de type Armijo est utilisée. C’est cette version de l’algorithme que nous avons décrite dans le chapitre 4.

Nous avons toutefois testé la recherche linéaire non monotone, en relançant le test 5. On peut comparer les résultats obtenus avec les deux options dans le tableau 5.12. Les résultats obtenus sont comparables, excepté en nombre d’évaluations qui est plus élevé avec la décroissance monotone. Ainsi, en terme de temps de calcul, la décroissance non monotone donne sur cet exemple de meilleurs résultats. Cependant, ceci n’est plus vrai pour les tests 1 et 2. En effet, pour le test 1, si on utilise la décroissance non monotone, au bout de 333 évaluations l’algorithme n’a toujours pas convergé et la valeur de la masse de l’itéré courant est plus élevée (et donc la solution moins satisfaisante) que dans le cas de la décroissance monotone. Les résul-

5.4 Étude et choix réalisés pour l'algorithme CFSQP

	Masse finale ($10^{-1}kg$)	Nombre d'évaluations (appel NASTRAN)	Nombre d'itérations de CFSQP	Nombre de densités intermédiaires
Décroissance monotone	4.254976	100	32	18
Décroissance non monotone	4.230231	58	35	12

TAB. 5.12 – *Comparaison des résultats obtenus avec les deux options de CFSQP.*

tats nous semblant satisfaisants avec la recherche monotone (notamment en terme de temps de calcul), nous avons choisi d'utiliser cette méthode dans tous les tests décrits dans ce document.

Notons que, sans aucun réglage particulier des paramètres, le temps de convergence (avec les deux versions de l'algorithme) était excessivement long. L'algorithme ne s'arrêtait pas, bien qu'au bout d'un certain nombre d'itérations, la variation entre deux valeurs successives de la fonction objectif était infime. Autrement dit, les conditions d'arrêt par défaut n'étaient pas satisfaisantes. Nous avons alors utilisé un des paramètres intégrés dans l'algorithme CFSQP et permettant un arrêt « prématuré » de l'algorithme. Nous imposons ainsi que l'algorithme s'arrête si la différence entre les valeurs de la fonctions objectif pour deux itérations consécutives est inférieure à 10^{-15} . On note que de ce fait, l'algorithme peut s'arrêter bien que la norme de Kuhn et Tucker $\|\nabla_{\mu} L\|$ (avec L le lagrangien et μ le vecteur des variables – cf. chapitre 4) ne soit pas aussi petite que la valeur exigée par l'algorithme.

Par ailleurs, afin d'économiser en temps de calcul, nous avons utilisé la variable logique `x_is_new` qui permet d'indiquer si le point courant (valeurs des densités dans chaque élément de conception) est le même que celui évalué précédemment. Dans ce cas, on ne relance pas un calcul NASTRAN mais on réutilise les valeurs de fonctions (objectifs, contraintes et dérivées correspondantes) précédentes qui avaient été stockées dans un fichier.

Enfin, notons que nous avons dû normaliser la valeur de la fonction objectif, des contraintes et de leurs gradients respectifs. En effet, dans le cas où nous ne le faisons pas, la convergence était extrêmement lente (le progrès de la recherche linéaire était infime). Ainsi, si l'on note ∇_f et ∇_{g_i} ($i = 1, \dots, m$) les gradients respectivement de la fonction objectif f et des gradients g_i , on utilise plutôt :

$$\begin{aligned} f &:= f \times \frac{1}{\|\nabla_f\|_\infty}, \\ \nabla_f &:= \nabla_f \times \frac{1}{\|\nabla_f\|_\infty}, \\ g_i &:= g_i \times \frac{1}{\|\nabla_{g_i}\|_\infty}, \\ \text{et } \nabla_{g_i} &:= \nabla_{g_i} \times \frac{1}{\|\nabla_{g_i}\|_\infty}. \end{aligned}$$

Nous avons vu dans les parties précédentes que ces réglages de paramètres nous ont permis d'obtenir des résultats satisfaisants avec un temps de convergence de l'algorithme raisonnable.

Nous avons expliqué dans ce chapitre les choix algorithmiques réalisés et intégrés dans le code `DynamiTO` que nous présentons dans le chapitre 6. Nous avons utilisé dans ce chapitre un exemple basé sur une géométrie simple (plaque console). Nous confirmerons la pertinence de ces choix dans le chapitre suivant sur le cas d'une pièce automobile réelle : la face accessoires (présentée dans le chapitre 1).

Chapitre 6

La maquette logicielle `DynamiT0` : application à une pièce automobile

Le but de notre travail de recherche est de proposer une solution logicielle pour l'optimisation topologique de composants mécaniques, facilement utilisable par les secteurs opérationnels chez Renault et permettant la prise en compte de contraintes dynamiques primordiales dans la conception de pièces automobiles.

Nous avons expliqué dans le chapitre précédent les choix algorithmiques que nous avons faits pour la mise en oeuvre de notre méthode d'optimisation topologique, c'est-à-dire le réglage des paramètres de la méthode d'optimisation topologique SIMP et de l'algorithme d'optimisation numérique CFSQP.

Nous allons décrire dans la première partie de ce chapitre le fonctionnement de la maquette logicielle `DynamiT0` que nous avons développée et qui couple la méthode SIMP et l'algorithme CFSQP. Nous expliquerons ainsi son architecture générale ainsi que les paramètres à fournir par les utilisateurs. Nous illustrerons son utilisation à l'aide de l'exemple de la console en trois dimensions. La seconde partie du chapitre sera consacrée aux résultats obtenus avec `DynamiT0` sur le cas réel d'une pièce automobile : la face accessoires (que nous avons présentée dans le chapitre 1).

6.1 La maquette logicielle `DynamiT0`

La maquette logicielle `DynamiT0` couple le logiciel de calcul des structures NAS-TRAN pour l'évaluation des fonctions (objectif et contraintes) et l'algorithme d'optimisation numérique CFSQP, écrit en C. Ce couplage est réalisé à l'aide de programmes écrits en MATLAB. Nous décrivons plus précisément son fonctionnement dans le paragraphe suivant.

6.1.1 Architecture de DynamiT0

Le fonctionnement général de la maquette DynamiT0, c'est-à-dire le couplage entre les différents programmes est décrit sur la figure 6.1.

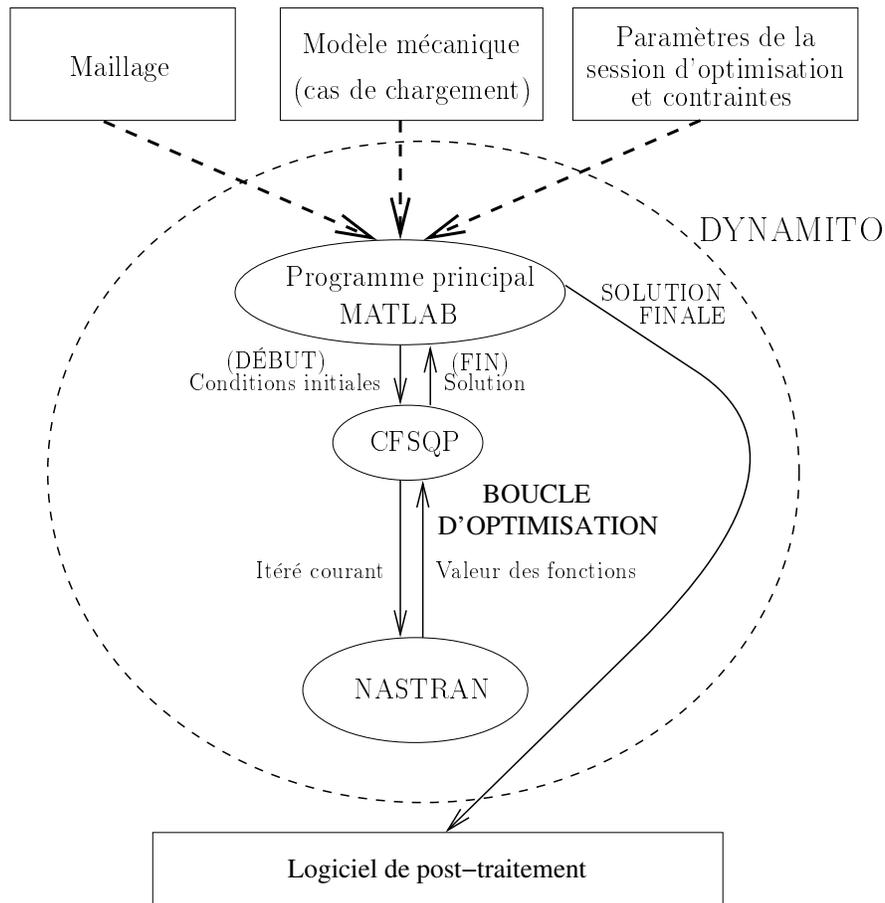


FIG. 6.1 – Schéma du fonctionnement de *DynamiT0*.

Le programme principal de *DynamiT0* est écrit en langage MATLAB. Il contient la valeur des paramètres de la session d'optimisation définis par l'utilisateur (conditions initiales et définition des contraintes).

L'appel de l'algorithme d'optimisation CFSQP, c'est-à-dire l'interface entre le programme principal et CFSQP, est réalisé à l'aide d'une fonction « mex » écrite en langage C. Les évaluations de fonctions (objectif et contraintes) nécessaires au fonctionnement de CFSQP sont faites à l'aide du logiciel commercial de calcul des structures NASTRAN. L'interface entre CFSQP et NASTRAN passe par la lecture et l'écriture de fichiers texte.

La méthode SIMP intervient simplement lors de l'appel au logiciel NASTRAN

6.1 La maquette logicielle `DynamiTO`

pour l'évaluation des fonctions. Rappelons qu'elle consiste à fixer les propriétés matériau dans chaque élément de conception à partir de la valeur de la densité (comprise entre 10^{-3} et 1) correspondante. Ainsi, dans `DynamiTO`, utiliser la méthode SIMP, consiste à considérer dans NASTRAN des cartes matériau pour lesquelles la densité et le module d'Young sont donnés par les équations (3.11) et (3.12).

Rappelons que pour les exemples traités dans le chapitre précédent, la visualisation de la solution (densités optimales) était effectuée en deux dimensions. Pour la visualisation des pièces réelles (cas en trois dimensions), cette méthode n'est plus adaptée. Nous avons donc réalisé un programme MATLAB permettant de transcrire les données finales de CFSQP (densités optimales) en langage compréhensible par Hypermesh (logiciel de pré et post-traitement de la société ALTAIR) et de visualiser notre solution à l'aide de ce logiciel.

Le fonctionnement de `DynamiTO` est « transparent » pour l'utilisateur, dans le sens où le couplage entre les différents programmes est automatique. Il en est de même pour l'écriture et la modification des cartes matériau nécessaires à l'utilisation de la méthode SIMP. L'utilisateur doit simplement fournir des fichiers de calcul NASTRAN et fixer la valeur de paramètres. C'est ce que nous expliquons plus précisément dans le paragraphe suivant.

6.1.2 Entrées - Sorties de la maquette

Pour la mise en oeuvre de `DynamiTO`, l'utilisateur doit fournir en entrée :

- Un fichier de calcul dans le formalisme NASTRAN (*calcul.dat*) contenant le type de calcul, les cas de chargement et la définition des fonctions de l'optimisation (objectif et contraintes). Un exemple de ce type de fichier est donné sur la figure 6.2 ;
- Un autre fichier NASTRAN (*maillage.dat*) contenant la définition du maillage (éléments et noeuds) et inclus dans le précédent ;
- La valeur des paramètres nécessaires à l'optimisation, renseignée dans le programme principal, c'est-à-dire les conditions initiales, la valeur des bornes des contraintes imposées à l'algorithme d'optimisation, la valeur des coefficients p (SIMP) et θ (cardinal spline) s'il y a lieu ;
- Les contraintes mécaniques, également fixées dans le programme principal, c'est-à-dire le numéro des noeuds sur lesquels sont mesurés les déplacements, les directions correspondantes et enfin, dans le cas où le problème comporte des contraintes dynamiques, la plage et le pas de fréquence.

Notons ici que nous avons choisi le formalisme NASTRAN car il est connu et largement utilisé par les ingénieurs et en particulier chez Renault.

```

SOL 200
CEND
TITLE = CALCUL SENSIBILITES SUPPORT ACCESSOIRES
ECHO = NOSORT
DSAPRT (UNFORMATTED, END=SENS) = ALL
$$
DESOBJ (MIN)=1000
$$
SET 1 = 1,2

SUBCASE = 1
  ANALYSIS = STATICS
  SPC = 1
  LOAD = 21
  DISPLACEMENT = 1
  DESSUS=7721
}
CAS DE CHARGEMENT
SUBCASE = 2
  ANALYSIS = STATICS
  SPC = 1
  LOAD = 22
  DISPLACEMENT = 1
  DESSUS=7722
}

$$
BEGIN BULK
INCLUDE 'SOL200_maill1.dat'

SPC1 1 123456 4344 4654 2878 1383 729 848
LOAD 21 1.00000 1.00000 1 1 Nœuds bloqués
LOAD 22 1.00000 1.00000 2
FORCE 1 1 1. 0. 0. -1.
FORCE 1 2 1. 0. 0. -1.
FORCE 2 1 1. 0. -1. 0
FORCE 2 2 1. 0. -1. 0
}
Définition des chargements

$$ OPTIMISATION
DRESP1,1000,masse,WEIGHT,,,,,ALL
$
DRESP1,1211,depl,DISP,,,3,,1
DCONSTR,1213,1211,-1.0e-20,1.00e-20
DRESP1,1212,depl,DISP,,,3,,2
DCONSTR,1214,1212,-1.0e-20,1.00e-20
DCONADD,7721,1213,1214
$
DRESP1,1221,depl,DISP,,,2,,1
DCONSTR,1223,1221,-1.0e-20,1.00e-20
DRESP1,1222,depl,DISP,,,2,,2
DCONSTR,1224,1222,-1.0e-20,1.00e-20
DCONADD,7722,1223,1224
}
Définition des contraintes

ENDDATA

```

FIG. 6.2 – Exemple d'un fichier de calcul NASTRAN calcul.dat.

6.1 La maquette logicielle `DynamiTO`

Au cours de l'optimisation, seules les cartes nécessaires à l'utilisation de la méthode SIMP (fichier NASTRAN *cartes_SIMP.dat*) sont modifiées avant chaque appel à NASTRAN (c'est-à-dire à chaque nouvelle évaluation demandée par l'algorithme d'optimisation), en fonction des valeurs des variables d'optimisation. Le fichier *cartes_SIMP.dat* est inclus dans le fichier *maillage.dat*.

Les sorties de l'algorithme CFSQP sont :

- Un fichier contenant la valeur optimale des variables (densité dans chaque élément de conception) ;
- Un fichier résumant chaque itération de l'algorithme (valeur de la fonction objectif, valeurs des contraintes, itéré courant) ;
- Un fichier résumant chaque évaluation c'est-à-dire chaque appel à NASTRAN (valeur de la fonction objectif, valeur des contraintes, point évalué).

Le contenu de ces trois fichiers permet d'observer le comportement de l'algorithme durant la session d'optimisation. Nous pouvons ainsi, par exemple, étudier l'admissibilité des points évalués, la vitesse de convergence, etc.

Après avoir décrit le fonctionnement de `DynamiTO`, nous allons montrer, dans la partie suivante, son application à l'optimisation topologique d'une console cubique. Ainsi, avant de traiter le cas réel d'un composant automobile, nous allons illustrer le post-traitement et le bon fonctionnement de la maquette sur un exemple plus simple à étudier.

6.1.3 Exemple d'application à une console cubique

Nous illustrons ici l'utilisation de la maquette sur le cas d'une console (cube). On considère ainsi l'exemple donné dans le chapitre précédent avec $D_x = D_y = D_z = 100$, $n_x = n_y = n_z = 10$ ($N = 1000$) et $\rho^0 = 7800 \text{kg/m}^3$. Comme au chapitre précédent, nous représenterons les variables d'optimisation (correspondant aux densités à l'intérieur des éléments de conception), sous la forme du vecteur $\mu = (\mu_i)_{i=1, \dots, 1000}$.

Pour les deux tests réalisés sur cet exemple, nous avons pris comme point de départ de l'algorithme d'optimisation toutes les densités égales à 0.9 ($\mu_i^0 = 0.9$, $i = 1, \dots, 1000$). La solution initiale ainsi définie a une masse égale à 7.02kg . Nous avons fixé le paramètre de pénalisation p de la méthode SIMP à 3.5 (constant).

Pour le premier test, le cahier des charges porte uniquement sur des contraintes statiques. Un des six côtés de la pièce est bloqué et on applique au centre de la face opposée une force F (cf. figure 6.3). Le cahier des charges impose que le déplacement mesuré au point d'application de la force soit inférieur en valeur absolue à δ . On impose ainsi la contrainte statique suivante :

$$|u_{2,j}(\mu)| \leq \delta, \quad (6.1)$$

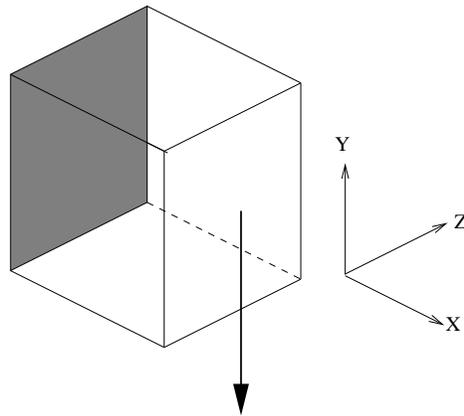


FIG. 6.3 – Représentation du cas test utilisé.

où j est le numéro du noeud d'application de la force F . Le temps CPU d'un calcul NASTRAN est dans ce cas d'environ deux minutes sur une station SUN ULTRA 10.

Pour notre test, on utilise $F = 1000\text{N}$ et $\delta = 1.5 \times 10^{-3}$. On peut visualiser la forme de la solution obtenue sur la figure 6.4. On note que cette solution est

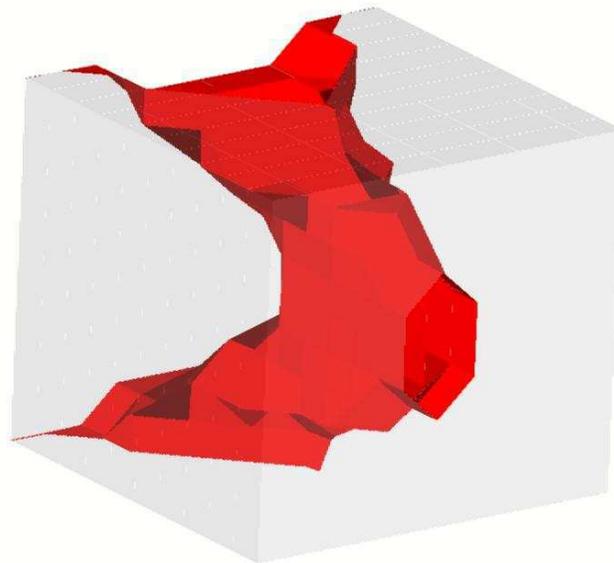


FIG. 6.4 – Solution obtenue lorsque le problème comporte uniquement des contraintes statiques (représentation des densités supérieures à 0.9).

admissible, c'est-à-dire qu'elle respecte les contraintes imposées. Pour montrer le bon comportement de l'algorithme, on a représenté sur la figure 6.5 (gauche) l'évolution de la masse en fonction du nombre d'évaluations (appels à NASTRAN). Comme au

6.1 La maquette logicielle DynamIT0

chapitre précédent, on a représenté en bleu les points correspondants à une solution admissible, en rouge ceux correspondants à une solution non admissible et enfin les points sont verts lorsqu'une contrainte est saturée (et la solution admissible). Sur la même figure (droite), on peut également observer l'évolution de la masse mais cette fois en fonction du nombre d'itérations.

On observe la bonne convergence de l'algorithme avec une diminution de la masse

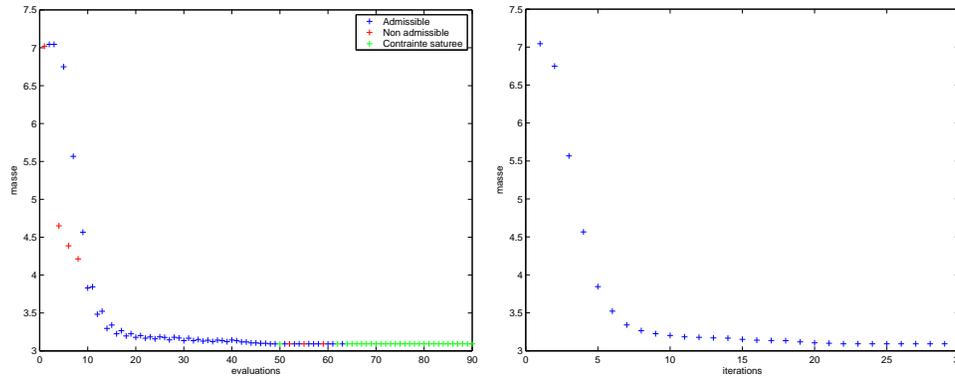


FIG. 6.5 – Illustration du comportement de l'algorithme pour le test du cube lorsque le problème ne comporte que des contraintes statiques.

effective et régulière.

Pour le second test, on ajoute des contraintes dynamiques. Un des six côtés de la pièce est toujours bloqué et on applique sur le côté opposé, sur le même noeud, une force fréquentielle F . On veut que la courbe de compliance dynamique mesurée sur le noeud d'application de la force (et dans la même direction) soit au-dessous de la droite d'équation $y = \gamma$. On impose ainsi la contrainte dynamique suivante :

$$\max_{f \in [f_{min}, f_{max}]} \overline{u_{2,j}}(\mu, f) \leq \gamma, \quad (6.2)$$

avec j le numéro du noeud d'application de la force F .

Nous avons tracé sur la figure 6.6 la courbe de compliance dynamique de la solution initiale (toutes les densités égales à 0.9) ainsi que celle de la solution obtenue lorsque le problème ne comporte que des contraintes statiques (test précédent). Ces deux solutions nous serviront de référence. On pourra comparer ces deux courbes à celle de la solution obtenue lorsque le problème comporte aussi des contraintes dynamiques, sur la figure 6.7. Pour ce dernier test, nous avons utilisé $F = 1\text{N}$, $\gamma = 1.3 \times 10^{-4}$, la norme l_6 et un pas de discrétisation égal à 10Hz. Notons que dans ce cas (avec cette discrétisation) le temps CPU d'une évaluation (appel à NASTRAN) est d'environ une heure sur une station SUN ULTRA 10.

On vérifie que la solution obtenue en statique et dynamique respecte les contraintes dynamiques puisque sa courbe de compliance dynamique est au-dessous de

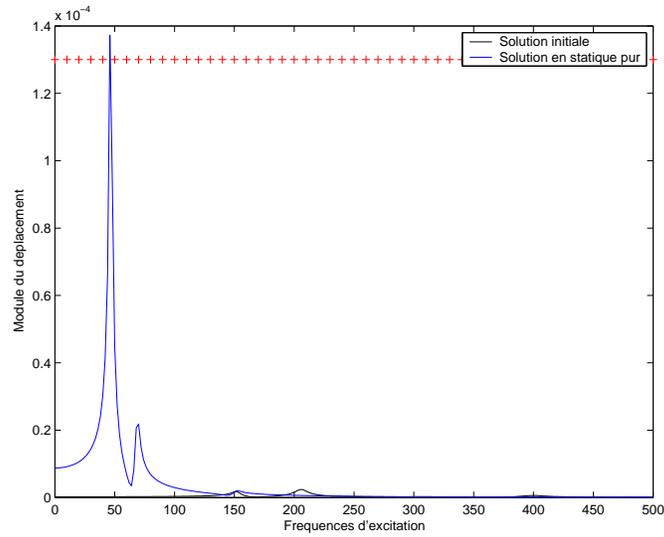


FIG. 6.6 – Courbes de compliance dynamique de la solution initiale et de celle obtenue lorsque le problème ne comporte que des contraintes statiques.

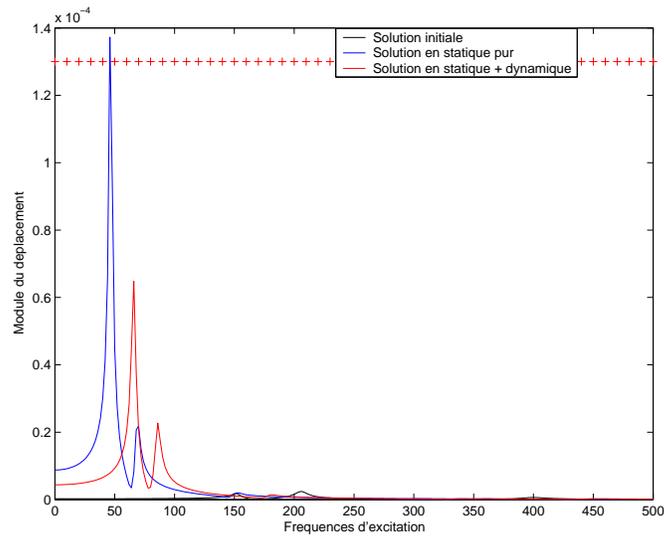


FIG. 6.7 – Comparaison des courbes de compliance dynamique des solutions obtenues.

6.2 Optimisation topologique d'une face accessoires

la droite de référence. De plus, son comportement est bien meilleur que celui de la solution obtenue lorsque le problème ne comporte que des contraintes statiques. Pourtant, si on compare les résultats obtenus en terme de masse (cf. tableau 6.1), on constate que ces deux solutions sont très proches.

Test	Masse finale (<i>kg</i>)	Nb d'éval.	Nb d'itér.	Nb de densités intermédiaires
Statique	3.091631	90	29	8
Statique + Dynamique	3.103334	126	45	4

TAB. 6.1 – *Détails des résultats des deux tests précédents*

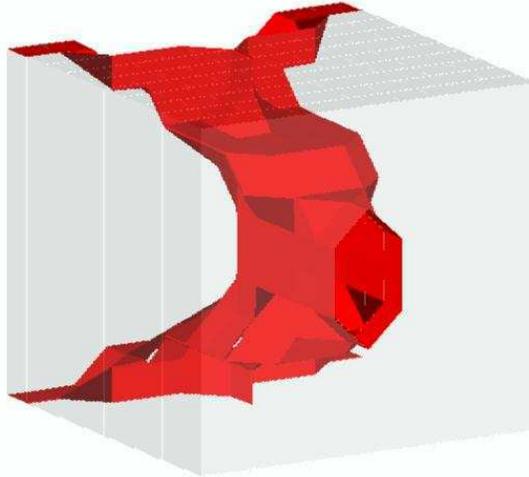


FIG. 6.8 – *Solution obtenue lorsque le cahier des charges comporte des contraintes statiques et dynamiques (représentation des densités supérieures à 0.9).*

Ces tests réalisés sur la console cubique, nous ont permis non seulement de valider le fonctionnement de la maquette mais aussi d'illustrer le post-traitement.

Nous pouvons à présent tester la maquette pour l'optimisation topologique de la face accessoires, composant automobile dont le cahier des charges est décrit dans le chapitre 1.

6.2 Optimisation topologique d'une face accessoires

Nous décrivons dans cette partie les résultats obtenus sur la face accessoires. Comme pour l'exemple précédent, nous avons tout d'abord réalisé un premier test

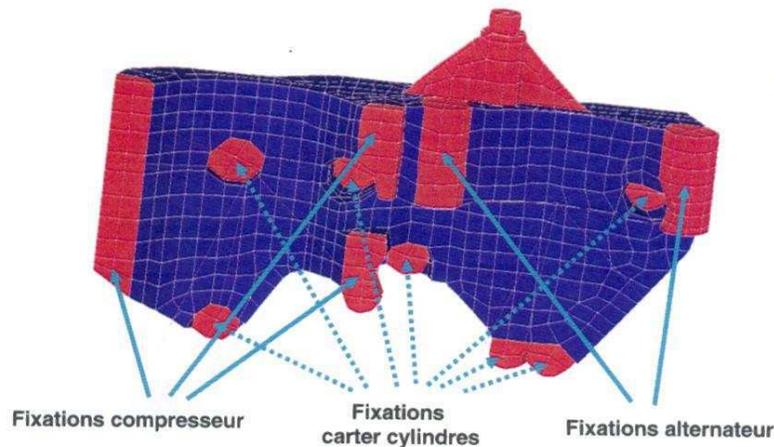


FIG. 6.9 – *La Face Accessoires et le maillage de conception.*

avec un cahier des charges comportant uniquement des contraintes statiques. Ce type de cahier des charges peut être pris en compte dans les logiciels commerciaux d'optimisation topologique comme OPTISTRUCT. Nous avons ainsi, afin de les valider, comparé nos résultats sur la face accessoires (fournis par DynamIT0) à ceux obtenus avec le logiciel OPTISTRUCT.

Par la suite, nous avons pris en compte le cahier des charges « réel », c'est-à-dire comprenant des contraintes portant sur des compliances dynamiques, qui ne peut être traité par le logiciel OPTISTRUCT. Notons que nous ne nous intéresserons pas ici à la maximisation de la première fréquence propre.

Il est important de noter que pour tous les tests décrits dans cette partie, les calculs ont été réalisés en modélisant les accessoires par des masses. Ainsi, toutes les valeurs de masse données par la suite comprennent la masse des accessoires.

Le maillage de conception correspond au maillage de calcul excepté quelques éléments « non design », c'est-à-dire dont la densité est fixée à 1 et qui ne peut être modifiée au cours de l'optimisation. Ces éléments sont représentés en rouge sur la figure 6.9. Le nombre d'éléments de conception est ainsi égal à 1354.

Dans ce cas aussi, nous avons choisi comme point de départ de l'optimisation toutes les densités égales à 0.9 ($\mu_i^0 = 0.9, i = 1, \dots, 1354$). Cette solution a une masse égale à 14.58kg. Le paramètre de pénalisation p de la méthode SIMP vaut 3.5.

Dans le cas statique, nous appliquons une force F sur les points de fixation des accessoires, dans le sens de la gravité pour modéliser la force exercée par le poids des accessoires. Ces points de fixation, au nombre de deux dans le cas étudié, sont notés point 1 et point 2 par la suite. Le cahier des charges impose que les déplacements correspondants soient inférieurs en valeur absolue à δ . Nous imposons

6.2 Optimisation topologique d'une face accessoires

ainsi les contraintes suivantes :

$$|u_{3,1}(\mu)| \leq \delta, \quad (6.3)$$

$$|u_{3,2}(\mu)| \leq \delta. \quad (6.4)$$

Pour nos tests, on utilise $F = 1\text{N}$ et $\delta = 1.25 \times 10^{-5}\text{mm}$. La solution obtenue est représentée sur la figure 6.10. Elle est admissible et sa masse est égale à 13.01kg .

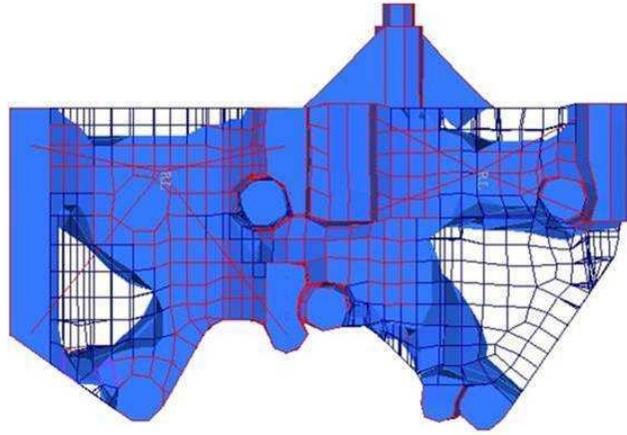


FIG. 6.10 – Solution obtenue avec *DynamiTO* pour la face accessoires avec un cahier des charges purement statique (représentation des densités supérieures à 0.2).

Nous pouvons comparer la forme de la solution obtenue avec celle obtenue avec le logiciel OPTISTRUCT représentée sur la figure 6.11. On constate que les formes des deux solutions sont très proches. De même, les masses sont quasiment identiques, puisque la solution obtenue avec le logiciel OPTISTRUCT a une masse égale à 12.99kg . En résumé, nous obtenons pour cet exemple, les mêmes résultats que ceux du logiciel OPTISTRUCT.

Intéressons nous maintenant au cas dynamique, puisqu'il n'est pas possible de le résoudre avec le logiciel commercial OPTISTRUCT. Dans ce cas, nous appliquons aux mêmes noeuds (points d'accrochage des accessoires) une force fréquentielle (dans les trois directions d'espace) et on mesure les courbes de compliance dynamique correspondantes. On impose ainsi les contraintes dynamiques suivantes :

$$\max_{f \in [f_{min}, f_{max}]} \overline{u_{3,1}}(\mu, f) \leq \gamma, \quad (6.5)$$

$$\max_{f \in [f_{min}, f_{max}]} \overline{u_{3,2}}(\mu, f) \leq \gamma. \quad (6.6)$$

On a représenté sur la figure 6.12, les courbes de compliance dynamique de la solution initiale (dans les trois directions d'espace).

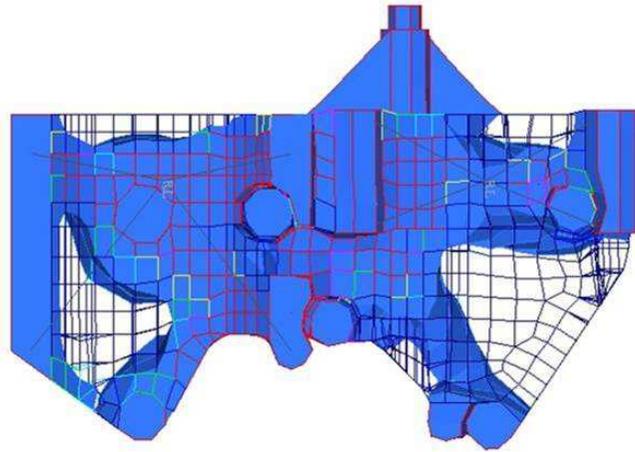


FIG. 6.11 – Solution obtenue avec le logiciel OPTISTRUCT pour la face accessoires avec un cahier des charges purement statique (représentation des densités supérieures à 0.2).

Pour l'optimisation, on utilise $F = 1N$, $\gamma = 1.2 \times 10^{-3}mm$, la norme l_6 et un pas de discrétisation égal à $10Hz$. La solution initiale ayant un mode principal à la fréquence $353Hz$, nous nous sommes restreinte à la plage d'étude $[f_{min}, f_{max}] = [0, 500Hz]$. Dans ce cas, le temps CPU d'un calcul NASTRAN est d'environ deux heures sur une station SUN ULTRA 10.

Pour notre premier test, la contrainte imposée à l'algorithme d'optimisation est égale à $\gamma = 1.2 \times 10^{-3}$. Comme on peut le voir sur la figure 6.13, la solution obtenue est non admissible puisque dans la direction Y, la courbe de compliance dynamique passe au-dessus de la droite de référence.

Une solution pour tenter d'obtenir une solution admissible peut être d'imposer une contrainte plus sévère à l'algorithme d'optimisation, c'est-à-dire par exemple une borne égale à $\gamma = 1.1 \times 10^{-3}$. La solution obtenue n'étant toujours pas admissible, on durcit encore la contrainte et on utilise une borne égale à $\gamma = 1 \times 10^{-3}$. Comme on peut le voir sur la figure 6.14, la solution obtenue est cette fois admissible. Nous l'avons représentée sur la figure 6.15.

Nous pouvons comparer plus précisément les résultats obtenus avec les différentes contraintes imposées à l'algorithme d'optimisation, dans le tableau 6.2.

On vérifie que la solution obtenue avec la contrainte égale à 1×10^{-3} a une masse plus élevée que celles obtenues avec des bornes inférieures. Ceci est bien sûr dû à la sévérité de la contrainte et au fait que la solution obtenue est admissible en dynamique. On remarque par ailleurs que la solution obtenue, toujours avec la borne

6.2 Optimisation topologique d'une face accessoires

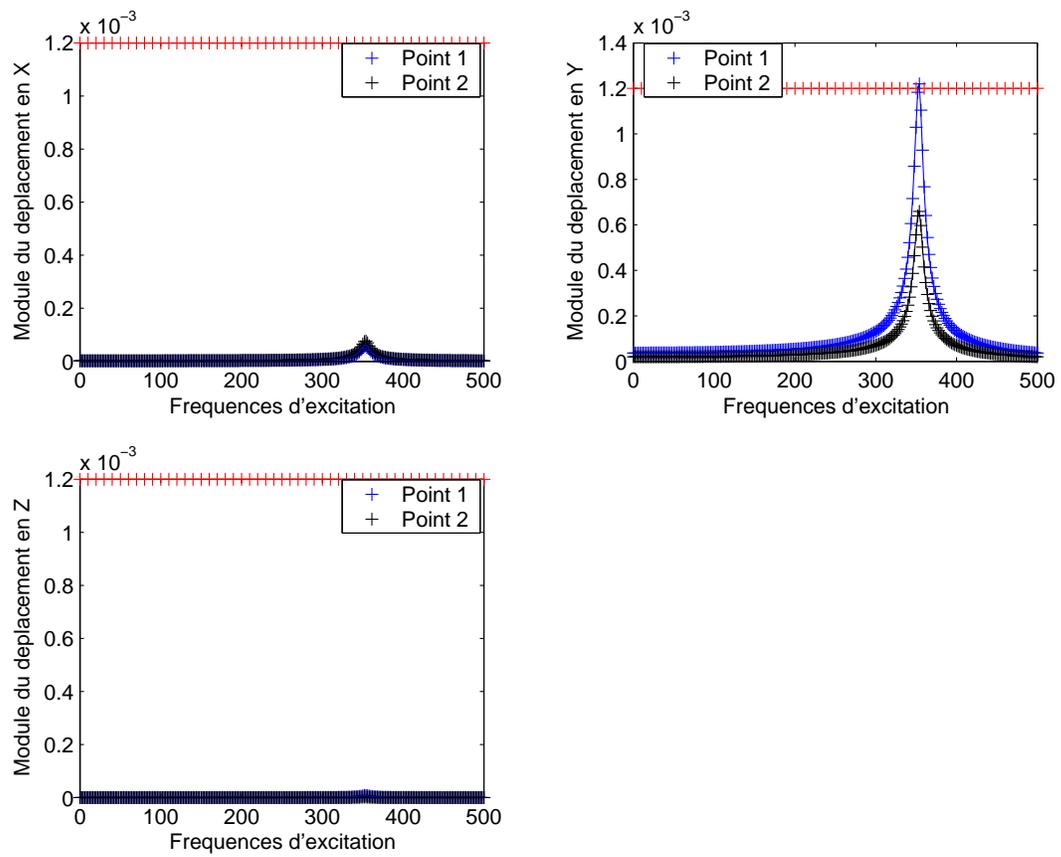


FIG. 6.12 – Courbes de compliance dynamique de la solution initiale.

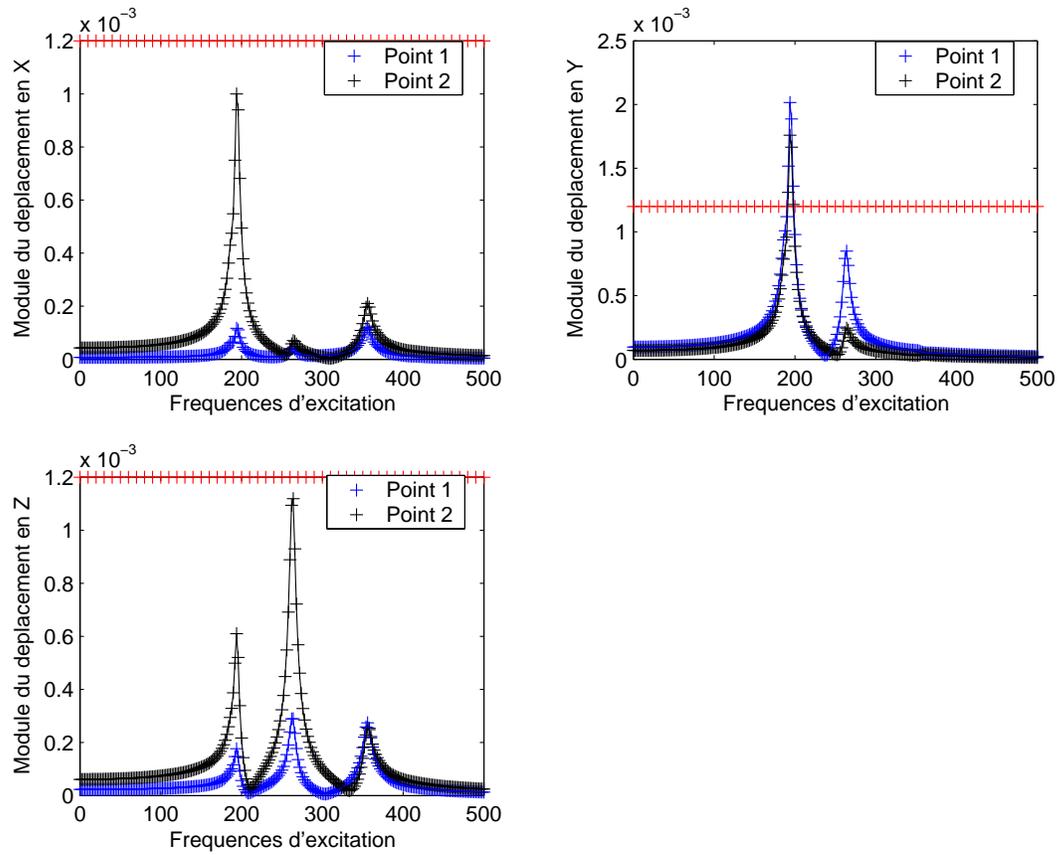


FIG. 6.13 – Courbes de compliance dynamique de la solution obtenue avec la contrainte d'optimisation égale à 1.2×10^{-3} .

6.2 Optimisation topologique d'une face accessoires

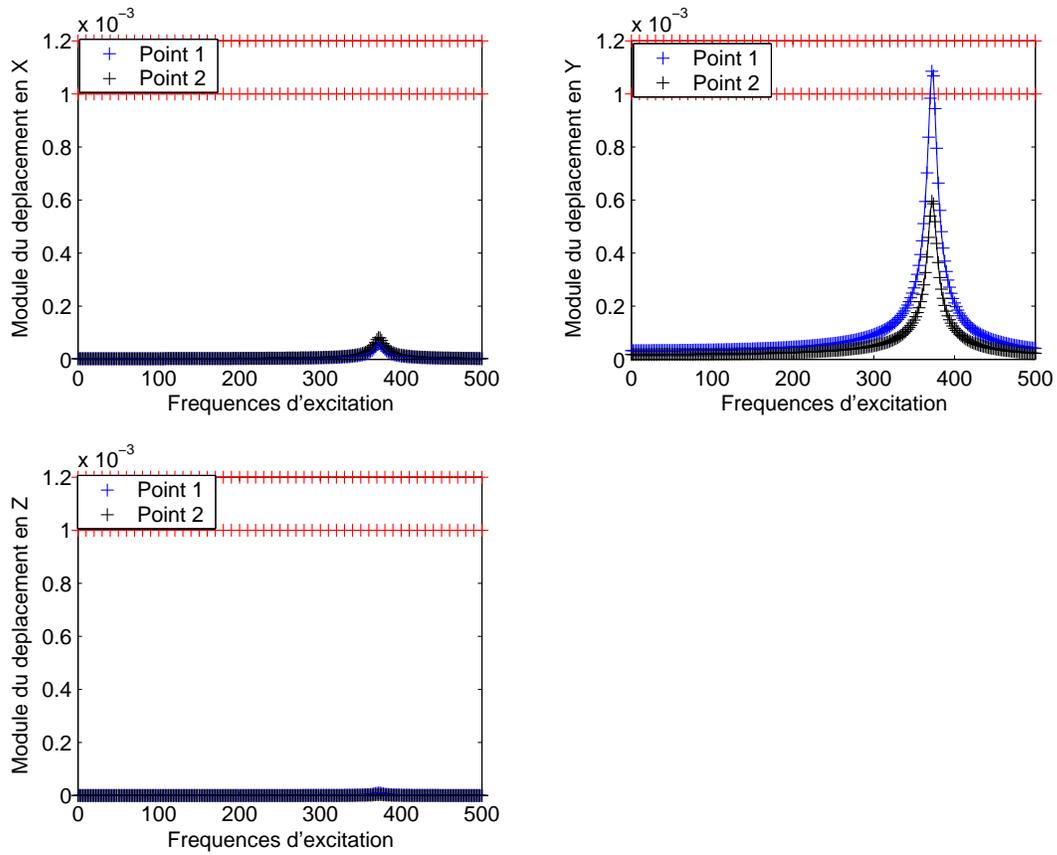


FIG. 6.14 – Courbes de compliance dynamique de la solution obtenue avec la contrainte d'optimisation égale à 1×10^{-3} .

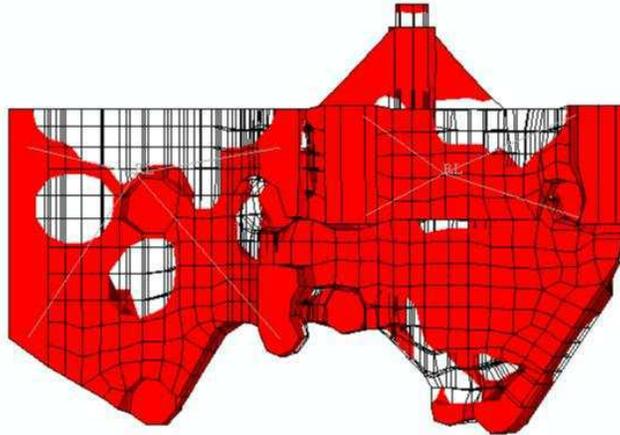


FIG. 6.15 – Solution obtenue avec un cahier des charges dynamique et la contrainte égale à 1×10^{-3} (représentation des densités supérieures à 0.9).

Contrainte ($10^{-3}mm$)	Masse finale (kg)	Nb d'éval.	Nb d'itér.	Nb de densités intermédiaires
1.2	12.833	379	46	1330
1.1	12.789	171	33	450
1	13.973	128	37	22

TAB. 6.2 – Détails des résultats obtenus en faisant varier la contrainte imposée à l'algorithme d'optimisation.

égale à 1×10^{-3} , comporte peu de densités intermédiaires. Cette solution est donc satisfaisante.

Afin d'évaluer le potentiel d'amélioration de la solution admissible obtenue précédemment, on réalise, comme au chapitre 5, une optimisation avec $p = 3.5$ à partir de la solution obtenue avec $p = 1$. On impose de la même façon à l'algorithme d'optimisation une borne égale à 1×10^{-3} .

Nous pouvons comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus précédemment (c'est-à-dire avec $p = 3.5$ directement) dans le tableau 6.3.

Comme on peut le voir sur la figure 6.16, la solution obtenue n'est pas admissible. Ainsi, bien qu'ayant une masse plus faible, elle est moins satisfaisante que celle obtenue avec $p = 3.5$ directement. Nous remarquons aussi que les densités intermédiaires sont beaucoup trop nombreuses.

On note par ailleurs que les deux solutions obtenues sont différentes et donc qu'il s'agit d'optimisation globale (la solution obtenue dépend de la solution initiale). Afin

6.2 Optimisation topologique d'une face accessoires

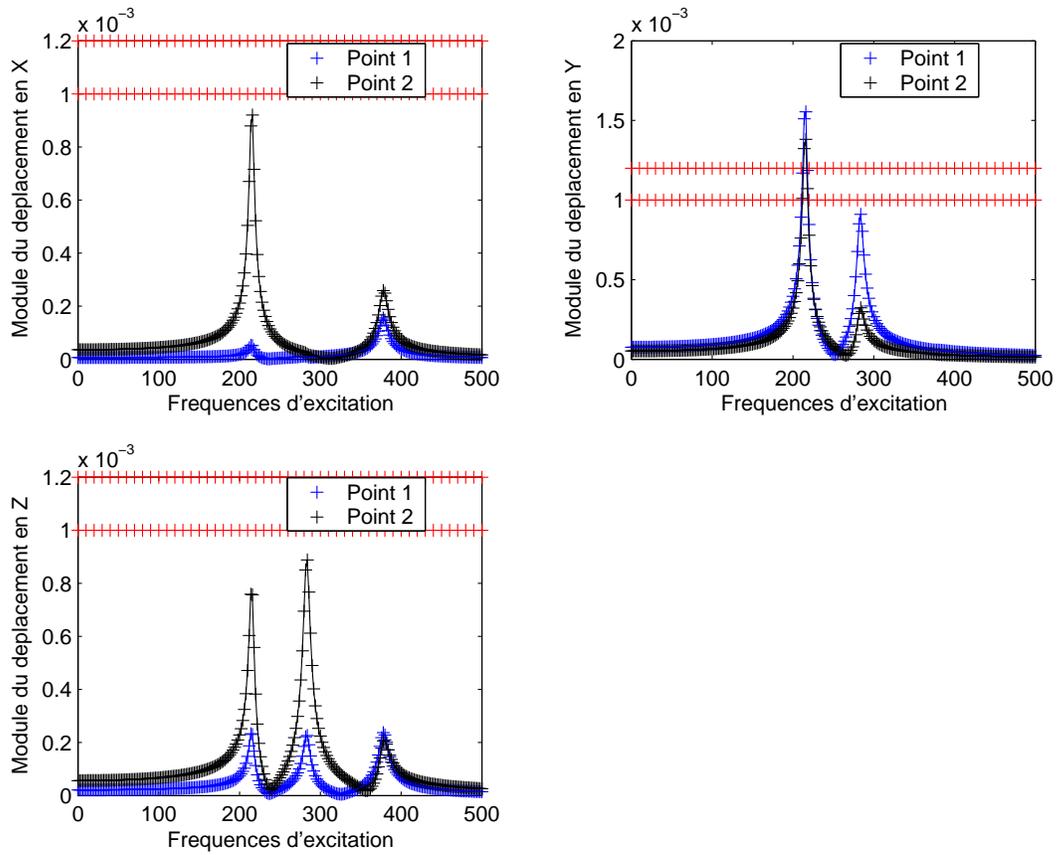


FIG. 6.16 – Courbes de compliance dynamique de la solution obtenue lorsqu'on utilise comme point de départ de l'optimisation la solution obtenue avec $p = 1$.

Valeur de p	Masse finale (kg)	Nb d'éval.	Nb d'itér.	Nb de densités intermédiaires
3.5	13.973	128	37	22
1 puis 3.5	12.736	360	59	1306

TAB. 6.3 – Détails des résultats obtenus en faisant varier p .

de confirmer cette observation nous avons relancé une optimisation avec $p = 3.5$ et comme point de départ de l'algorithme d'optimisation, la solution obtenue avec un cahier des charges purement statique. Si on compare la solution obtenue (représentée sur la figure 6.17) à celle obtenue avec comme point de départ de l'optimisation toutes les densités égales à 0.9 (cf. figure 6.15), on constate que les deux solutions sont différentes. Ce résultat confirme donc qu'on est aussi, dans le cas de la face

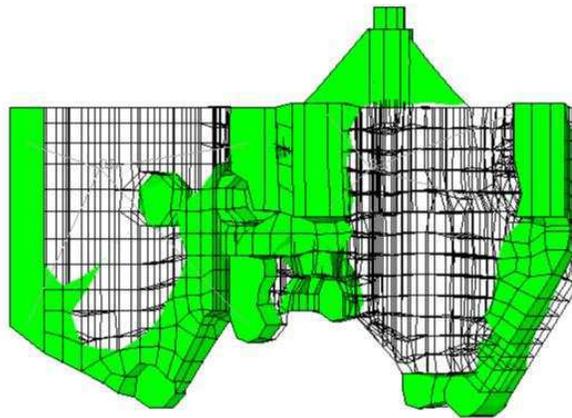


FIG. 6.17 – Solution obtenue pour la face accessoires avec comme point de départ la solution obtenue lorsque le problème ne comporte que des contraintes statiques (représentation des densités supérieures à 0.8).

accessoires, dans un contexte d'optimisation globale.

On peut comparer plus précisément les résultats obtenus dans le tableau 6.4 et constater sur la figure 6.18 que la solution du dernier test est non admissible.

Par ailleurs, comme au chapitre 5, nous avons réalisé des tests en remplaçant dans l'expression (3.11), la fonction $f_p : x \mapsto x^p$ par la fonction $f_\alpha : x \mapsto \frac{1}{\alpha}(x + (\alpha - 1)x^{\alpha+1})$ (avec $\alpha = 4$). Rappelons que cette fonction présente l'avantage d'éviter l'apparition de modes locaux lors du calcul de la base modale d'une solution comportant des densités intermédiaires.

On peut visualiser les courbes de compliance dynamique de la solution obtenue

6.2 Optimisation topologique d'une face accessoires

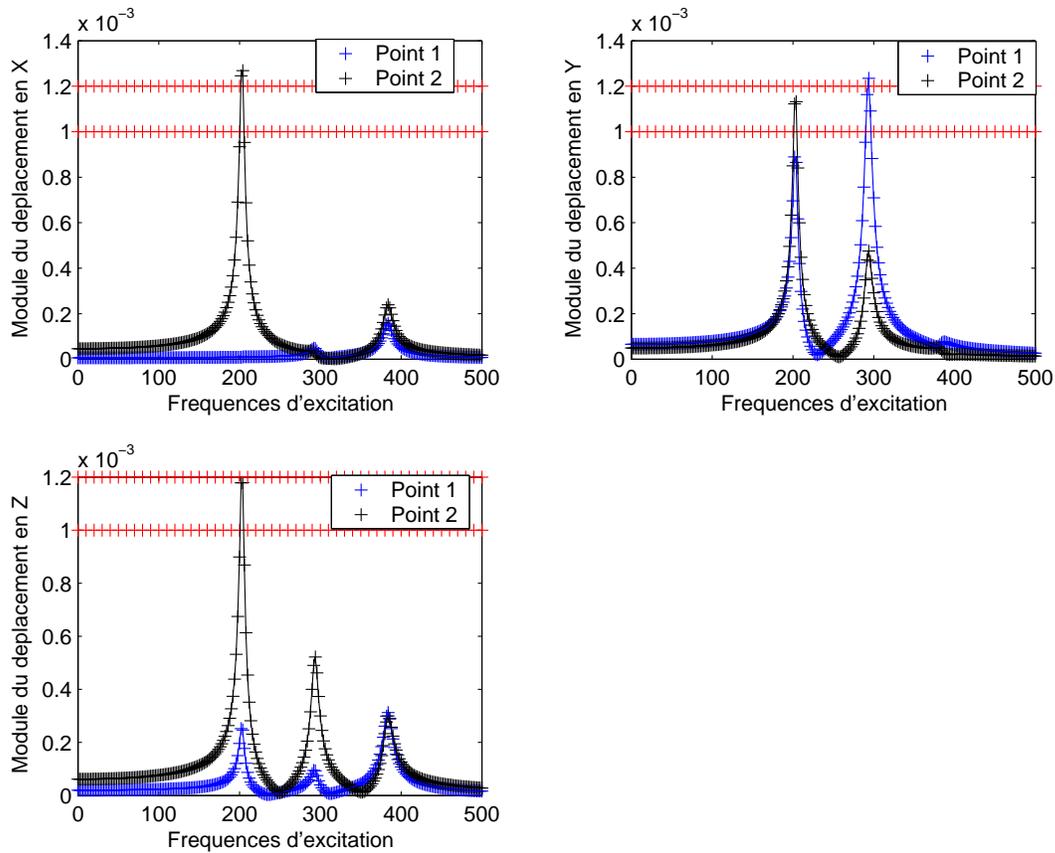


FIG. 6.18 – Courbes de compliance dynamique de la solution obtenue lorsqu'on utilise comme point de départ de l'optimisation la solution obtenue lorsque le problème ne comporte que des contraintes statiques.

Point de départ	Masse finale (kg)	Nb d'éval.	Nb d'itér.	Nb de densités intermédiaires
Toutes les densités égales à 0.9	13.973	128	37	22
Solution obtenue avec $p = 1$	12.736	360	59	1306
Solution obtenue avec des contraintes statiques	12.795	185	65	14

TAB. 6.4 – Détails des résultats obtenus avec différents points de départ de l'optimisation.

sur la figure 6.19 puis comparer ces résultats avec ceux obtenus avec la fonction f_p , $p = 3.5$ dans le tableau 6.5.

	Masse finale (kg)	Nb d'éval.	Nb d'itér.	Nb de densités intermédiaires
$p = 3.5$	13.973	128	37	22
$\alpha = 4$	13.987	187	51	54

TAB. 6.5 – Comparaison des résultats obtenus en utilisant f_p et f_α .

On constate que les résultats obtenus sont assez similaires, excepté le nombre de densités intermédiaires qui est moins élevé dans le premier cas. Du point de vue de la forme, ces deux solutions sont également très proches (cf. figures 6.15 et 6.20).

Nous pouvons conclure ici, qu'abaisser la borne imposée à l'algorithme d'optimisation, permet d'obtenir une solution admissible et constitue donc dans ce cas une solution au problème de discrétisation (c'est-à-dire au problème de pic qui passe entre deux points de mesure).

Toutefois, une étape préliminaire permettant de trouver la valeur adéquate pour la borne des contraintes est nécessaire et peut être laborieuse. Aussi, comme nous l'avons évoqué au chapitre 5, la modélisation, à l'aide de fonctions splines, du pic des courbes de compliance dynamique obtenues au cours des évaluations permet d'obtenir une approximation du maximum réel des courbes.

Nous avons testé cette approche sur le problème de la face accessoires. Notons que pour une plus grande précision dans la modélisation, nous avons utilisé un pas de discrétisation égal à 5Hz. La borne imposée à l'algorithme d'optimisation est dans ce cas égale à la borne « réelle », c'est-à-dire à $\gamma = 1.2 \times 10^{-3}$.

Concernant le paramètre θ permettant de contrôler l'amplitude des vecteurs

6.2 Optimisation topologique d'une face accessoires

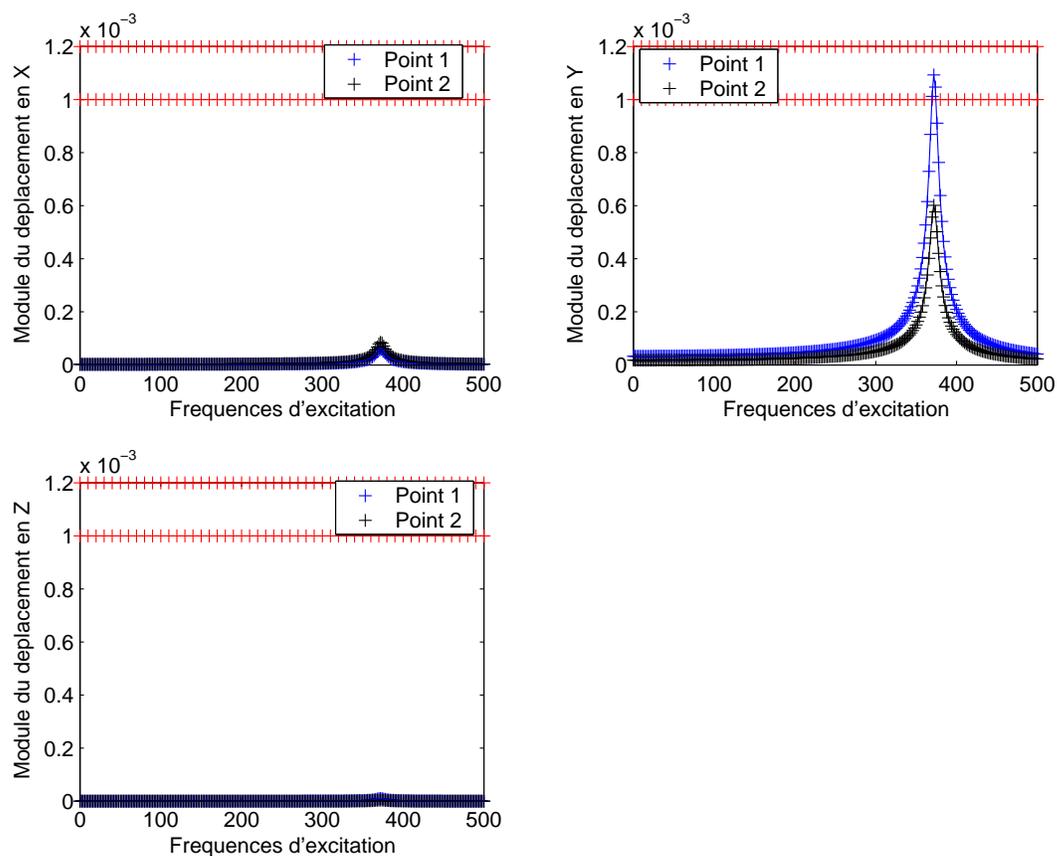


FIG. 6.19 – Courbes de compliance dynamique de la solution obtenue en utilisant la fonction f_α .

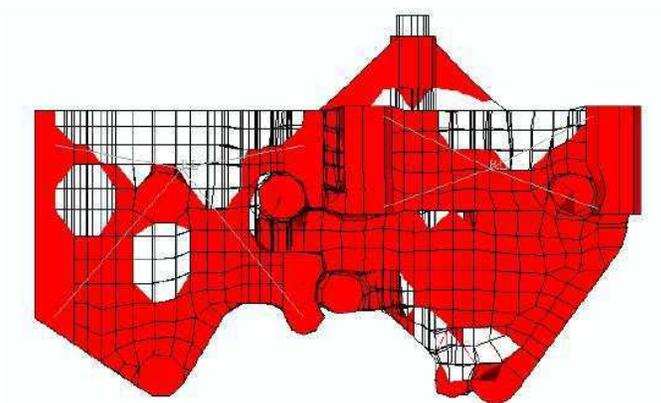


FIG. 6.20 – Solution obtenue lorsqu'on utilise la fonction f_α (représentation des densités supérieures à 0.9).

tangents aux points d'interpolation, nous l'avons fixé de telle sorte que le pic de la solution initiale soit bien modélisé. Nous avons ainsi utilisé la valeur $\theta = 1.8$.

Malgré la pénalisation imparfaite (cf. tableau 6.6) de la solution obtenue, les résultats en terme de masse et de respect des contraintes dynamiques (cf. figure 6.21) sont excellents.

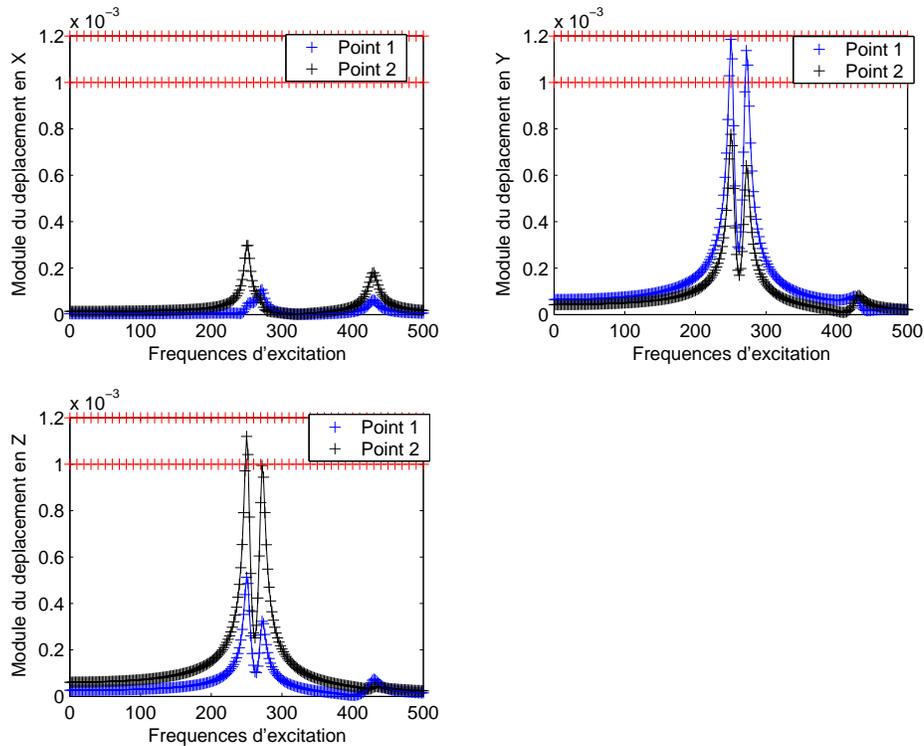


FIG. 6.21 – Courbes de compliance dynamique de la solution obtenue avec les splines.

	Masse finale (kg)	Nb d'éval.	Nb d'itér.	Nb de densités intermédiaires
Norme l_6	13.973	128	37	22
Splines	12.874	283	34	1207

TAB. 6.6 – Détails des résultats obtenus avec différentes modélisation du maximum.

Pour conclure ce chapitre, rappelons que les résultats obtenus avec DynamIT0 sur le cas réel de la face accessoires sont satisfaisants, puisqu'on a gagné jusqu'à 1.5kg en respectant parfaitement les contraintes.

6.2 Optimisation topologique d'une face accessoires

Nous avons vérifié dans ce chapitre la pertinence des choix et des astuces proposés dans le chapitre précédent, permettant de pallier les différentes difficultés rencontrées.

Ainsi, la difficulté liée à l'aspect optimisation globale du problème (existence de nombreux minima locaux) peut être atténuée en faisant varier le paramètre de pénalisation p de la méthode SIMP ou bien en remplaçant la fonction f_p par la fonction f_α .

Par ailleurs, dans le cas dynamique, abaisser la valeur de la borne des contraintes imposées à l'algorithme d'optimisation ou bien modéliser la courbe de compliance dynamique permet d'éviter les problèmes de discrétisation (pic qui passe entre deux points de mesure).

Nous disposons ainsi d'une palette de réglages permettant de s'adapter à la résolution d'un problème d'optimisation topologique comportant aussi bien des contraintes statiques que dynamiques.

Conclusion

Nous avons évoqué à plusieurs reprises dans ce document à quel point l'allègement est important dans la conception de composants automobiles. Nous avons également vu que cet allègement ne peut se faire au détriment des exigences des clients en matière de sécurité et de confort. Nous avons présenté les notions de mécanique fondamentales, nous avons fait une synthèse de l'état de l'art des méthodes d'optimisation topologique et nous avons présenté les idées à la base des méthodes d'optimisation numérique par programmation quadratique séquentielle.

Nous avons également montré comment les méthodes de conception sans a priori, comme l'optimisation topologique, peuvent aider à la résolution des problèmes de conception de composants automobiles. Or, l'optimisation topologique n'est pas utilisée à son plein potentiel dans l'industrie automobile (notamment chez Renault). Ceci est dû à la faible généralité des cahiers des charges pouvant être pris en compte et plus précisément au fait que les contraintes dynamiques (de vibro-acoustique) ne peuvent être intégrées dans le processus d'optimisation.

Nous avons donc proposé dans cette thèse, une méthodologie d'optimisation topologique et une solution logicielle associée (**DynamiTO**) permettant la prise en compte d'un cahier des charges intégrant des contraintes dynamiques, primordiales dans la conception automobile.

Nous avons montré le potentiel de notre méthode sur le cas réel de la face accessoires (pièce du groupe moto-propulseur). Les résultats obtenus sont satisfaisants aussi bien en terme de masse que du point de vue du respect des contraintes. Les différentes astuces, proposées dans le chapitre 5, permettent de trouver un compromis entre pénalisation (solution en 0/1), temps de calcul, valeur de la masse et respect des contraintes.

De par sa généralité et sa simplicité d'utilisation, la maquette logicielle **DynamiTO** que nous avons développée, constitue un outil d'aide à la conception des composants mécaniques et permet de proposer des solutions originales répondant au cahier des charges. Son utilisation entraîne également un gain précieux en délai de conception.

Notons ici que les tests réalisés sur la face accessoires étaient préliminaires, dans le sens où des tests plus intensifs de différentes combinaisons des paramètres, de points de départ, etc. peuvent être envisagés. Cet ajustement de notre méthode pourrait notamment être réalisé à l'aide d'outils d'optimisation globale (méthodes

directes, sans dérivée).

Une autre piste de recherche future pourrait viser à l'amélioration du temps de calcul dédié à l'optimisation numérique, par exemple, en faisant en sorte que seule la fonction objectif (ou une contrainte particulière) soit évaluée et non pas que toutes les fonctions et leurs dérivées respectives soient calculées à chaque appel NASTRAN.

Enfin, rappelons que cette méthodologie générale d'optimisation topologique, dont on a montré le potentiel dans le cadre de l'industrie automobile, peut également être avantageusement utilisée dans d'autres domaines d'application et notamment en aéronautique où la minimisation de la masse est un enjeu majeur.

Bibliographie

- [1] G. Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*. Springer Verlag, 2001.
- [2] G. Allaire, Z. Belhachmi, and F. Jouve. The homogenisation method for topology and shape optimization. Single and multiple loads case. *Revue européenne des éléments finis*, 5:649–672, 1996.
- [3] G. Allaire, F. Jouve, and A. M. Toader. A level-set method for shape optimization. *Compte rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, 334:1–6, 2002.
- [4] S. Aubry. *Étude théorique et numérique de quelques problèmes d'optimisation de forme à l'aide de méthodes d'homogénéisation*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1999.
- [5] M. Beckers. *Optimisation de structures en variables discrètes*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 1997.
- [6] M. Beckers and C. Fleury. A primal-dual approach in truss topology optimization. *Computers and structures*, 64:77–88, 1997.
- [7] M. P. Bendsøe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, 1:193–202, 1989.
- [8] M. P. Bendsøe. *Optimization of structural topology, shape and material*. Springer Verlag, 1995.
- [9] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 71:197–224, 1988.
- [10] M. P. Bendsøe, M. M. Neves, and O. Sigmund. Some recent results on topology optimization of periodic composites. *Topology optimization of structures and composite continua*, pages 3–17, 2000.
- [11] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of applied mechanics*, 69:635–654, 1999.
- [12] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology optimization. Theory, methods and applications*. Springer Verlag, 2003.
- [13] F. Bonnans, C. Lemaréchal, J. C. Gilbert, and C. Sagastizábal. *Optimisation numérique*. Springer, 2003.

- [14] M. Bruyneel. *Schémas d'approximation pour la conception optimale de structures en matériaux composites*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 2002.
- [15] J. Cea, S. Garreau, P. Guillaume, and M. Masmoudi. The shape and topological optimizations connection. *Computational methods in applied mechanics and engineering*, 188:713–726, 2000.
- [16] J. Cea. Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût. *Mathematical modelisation and numerical analysis*, 20(3):371–402, 1986.
- [17] J. Cea, A. Gioan, and J. Michel. Adaptation de la méthode du gradient à un problème d'identification du domaine. *Computing methods in applied sciences and engineering*, pages 391–402, 1973.
- [18] C. J. Chen and M. Usman. Design optimization for automotive applications. *International journal of vehicle design*, 25:126–141, 2001.
- [19] T. F. Coleman and A. R. Conn. Nonlinear programming via an exact penalty function : asymptotic analysis. *Mathematical Programming*, 24:123–136, 1982.
- [20] A. R. Diaz and O. Sigmund. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural optimization*, 10:40–45, 1995.
- [21] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1990.
- [22] H. A. Eschenauer, V. V. Kobolev, and A. Schumacher. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural optimization*, 8:42–51, 1994.
- [23] H. A. Eschenauer and N. Olhoff. Topology optimization of continuum structures : A review. *Applied mechanics*, 54(4):331–390, 2001.
- [24] C. Fleury. Mathematical programming methods for constrained optimization : dual methods. *Progress in astronautics and aeronautics (Structural optimization – Status and promise)*, 150:123–150, 1993.
- [25] S. Garreau, P. Guillaume, and M. Masmoudi. The topological sensitivity for linear isotropic elasticity. *European conference on computational mechanics (ECCM99)*, 1999.
- [26] S. Garreau, P. Guillaume, and M. Masmoudi. The topological asymptotic for PDE systems : The elasticity case. *SIAM Journal Control Optimal*, 39:1756–1778, 2001.
- [27] P. L. George, D. H. Lo, and P. J. Fey. *Maillage et adaptation*. Hermès, 2001.
- [28] P. Germain and P. Muller. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, 1994.
- [29] H. Hamda, F. Jouve, E. Lutton, M. Schoenauer, and M. Sebag. Compact unstructured representations for evolutionary design. *Applied intelligence*, 16:139–155, 2002.

- [30] H. Hamda, I. C. Parmee, O. Roudenko, and M. Schoenauer. Multi-objective evolutionary topological optimum design. In *Fifth international conference on adaptative computing design and manufacture*, volume 5, pages 121–132, 2002.
- [31] L. Harzheim and G. Graf. Optimization of engineering components with the SKO method. *SAE technical paper series*, 951104, 1995.
- [32] E. Hinton and J. Sienz. Fully stressed topological design of structures using an evolutionary procedure. *Engineering computations*, 12:229–244, 1995.
- [33] R. Kohn and G. Strang. Optimal design and relaxation of variational problems. *Communications of pure and applied mathematics*, 39:113–137,139–182,353–377, 1986.
- [34] G. Lavaud. *Optimisation sur modèle krigeage - Application à la face avant technique d'un véhicule automobile*. Mémoire de DEA, École Centrale Lyon, 2003.
- [35] C. T. Lawrence and A. L. Tits. A computationally efficient feasible sequential quadratic programming algorithm. *SIAM Journal Optimization*, 11:1092–1118, 2001.
- [36] C. T. Lawrence, J. L. Zhou, and A. L. Tits. User's guide for CFSQP version 2.5. Technical report, Electrical Engineering Department and Institute for Systems Research, University of Maryland, 1997.
- [37] M. Locatelli and F. Schoen. Random linkage : a family of acceptance / rejection algorithms for global optimization. *Mathematical Programming*, 85:379–396, 1999.
- [38] K. A. Lurie, A. V. Cherkaev, and A. V. Fedorov. Regularization of optimal design problems for bars and plates. *Optimization theory and applications*, 37:499–521,523–543, 1982.
- [39] Z.-D. Ma, N. Kikuchi, and H.-C. Cheng. Topological design for vibrating structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 121:259–280, 1995.
- [40] Z.-D. Ma, N. Kikuchi, H.-C. Cheng, and I. Hagiwara. Structural topology and shape optimization for a frequency response problem. *Computational mechanics*, 13:157–174, 1993.
- [41] Z.-D. Ma, N. Kikuchi, H.-C. Cheng, and I. Hagiwara. Topological optimization technique for free vibration problems. *Applied mechanics*, 62(1):200–207, 1995.
- [42] M. Masmoudi. The topological asymptotic. *Computational methods for control applications*, 16:53–72, 2001.
- [43] F. Murat and J. Simon. Studies on optimal shape design problems. *Lecture notes in computer science*, 41:54–62, 1976.
- [44] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical optimization*. Springer Verlag, 1999.

- [45] S. Osher and J. A. Sethian. Front propagating with curvature dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Computational physics*, 79:12–49, 1988.
- [46] E. R. Panier and A. L. Tits. On combining feasibility, descent and superlinear convergence in inequality constrained optimization. *Mathematical programming*, 59:261–276, 1993.
- [47] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational geometry : An introduction*. Springer Verlag, 1985.
- [48] M. P. Quinn and B. A. Izzuddin. The design of trusses for optimum cardinality. Technical report, Department of Civil Engineering, Imperial College, London, 1996.
- [49] G. I. N. Rozvany, M. Zhou, and O. Sigmund. Topology optimization in structural design. In H. Adeli, editor, *Advances in design optimization*, chapter 10, pages 340–399. Chapman and Hall, 1994.
- [50] E. Sandgren and E. Jensen. Automotive structural design employing a genetic optimization algorithm. *SAE technical paper series*, 920772, 1992.
- [51] A. Schumacher. *Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lophpositionierungskriterien*. PhD thesis, Universität-Gesamthochschule-Siegen, 1995.
- [52] J. A. Sethian. Numerical algorithms for propagating interfaces : Hamilton-Jacobi equations and conservations laws. *Journal of differential geometry*, pages 131–161, 1990.
- [53] J. A. Sethian and A. Wiegmann. Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *Journal of computational physics*, 163(2):489–528, 2000.
- [54] O. Sigmund. Topology optimization of multi-material, multi-physics structures. In *Third World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO), Niagara Falls, USA, May, 1999*, 2000.
- [55] O. Sigmund and J. Petersson. Numerical instabilities in topology optimization : A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 16:68–75, 1998.
- [56] J. Sokolowski and A. Zochowski. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal Control Optimal*, 37:1251–1272, 1999.
- [57] J. Sokolowski and J. P. Zolesio. Introduction to shape optimization : Shape sensitivity analysis. In *Springer series in computational mathematics*, volume 10. Springer, 1992.
- [58] C. A. Soto. Structural topology optimization for tactile response improvement in the automotive industry. In R.-J. Yand and D. E. Smith, editors, *AMD-Vol. 227, Design optimization with applications in industry*, pages 37–48. ASME, 1997.

- [59] K. Svanberg. The method of moving asymptotes. A new method for structural optimization. *International journal for numerical method in engineering*, 24:359–373, 1987.
- [60] K. Svanberg. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. *SIAM journal on optimization*, 12(2):555–573, 2002.
- [61] L. Tartar. Estimations de coefficients homogénéisés. *Lecture notes in mathematics*, 704:364–373, 1979.
- [62] L. H. Tenek and I. Hagiwara. Optimization of material distribution within isotropic and anisotropic plates using homogenization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 109:155–169, 1993.
- [63] L. H. Tenek and I. Hagiwara. Static and vibrational shape and topology optimization using homogenization and mathematical programming. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 109:143–154, 1993.
- [64] Y. M. Xie and G. P. Steven. Optimal design of multiple load case structures using an evolutionary procedure. *Engineering computations*, 1992.
- [65] Y. M. Xie and G. P. Steven. *Evolutionary structural optimisation*. Springer Verlag, 1997.
- [66] R. J. Yang and C. H. Chuang. Optimal topology design using linear programming. *Computers and structures*, 52(2):265–276, 1994.
- [67] R. J. Yang, T. J. Walsh, and P. A. Schilke. A general formulation for topology optimization. *SAE technical paper series*, 942256, 1994.

Application of topology optimization in automotive component design

ABSTRACT

In car manufacturing, designing mechanical components of low mass is critical in order to save on raw materials and in order to produce cars that consume less fuel. However, it is also important that comfort (mainly acoustic aspects) and security requirements are satisfied. In such a context, the aim of topology optimization is to determine, at the beginning of engineering projects, the main features of a component.

Existing commercial software cannot deal with all the constraints relevant to a vehicle project, in particular dynamical constraints. We propose in this thesis a methodology and a software solution which can take into account such specifications and namely those required by Renault. It combines the topology optimization method SIMP and the mathematical programming algorithm FSQP.

We tested the potential of our method, firstly on a simplistic academic problem, and then on the design of an engine accessories support.

Sonia CALVEL

**Conception d'organes automobiles
par optimisation topologique**

Directeur de thèse : M. Marcel MONGEAU
Université Toulouse III, le mardi 5 octobre 2004

RÉSUMÉ en français

Dans l'industrie automobile, les réductions de masse permettent des économies de matières premières et des gains importants en performance. Cet allègement ne peut cependant pas se faire au détriment des exigences en matière de confort et de sécurité. Dans ce contexte, l'objectif de l'optimisation topologique est de déterminer, en amont des projets, les caractéristiques générales des pièces mécaniques.

Les logiciels commerciaux actuels ne permettant pas l'intégration de toutes les contraintes déclinées sur les projets véhicules, notamment les contraintes vibro-acoustiques, nous proposons dans cette thèse une méthodologie et une solution logicielle associée, permettant la prise en compte d'un cahier des charges conforme à ceux utilisés chez Renault. Nous combinons pour cela la méthode d'optimisation topologique SIMP et l'algorithme d'optimisation numérique FSQP.

Après avoir évalué notre méthode sur des cas de géométrie simple, nous montrons son potentiel sur le cas d'une face accessoires.

TITRE et résumé en anglais au recto de la dernière page

MOTS-CLÉS : Optimisation topologique. Méthode des matériaux fictifs (SIMP). Optimisation numérique. Programmation quadratique séquentielle. Optimisation globale. Algorithme FSQP. Contraintes dynamiques. Composants automobiles.

DISCIPLINE : Mathématiques appliquées

Université Paul Sabatier Toulouse III
U.F.R Mathématiques Informatique Gestion
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 4