HAL
open science

Les ferrofluides : ondes de surface, résistance de vague et simulation de la convection dans le manteau terrestre

Julien Browaeys

To cite this version:

Julien Browaeys. Les ferrofluides : ondes de surface, résistance de vague et simulation de la convection dans le manteau terrestre. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2000. Français. NNT : . tel-00007235

HAL Id: tel-00007235

https://theses.hal.science/tel-00007235v1

Submitted on 27 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT
UFR de Physique

Année 2000 *N° attribué par la bibliothèque*

THESE

pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7

SPECIALITE : Physique des Liquides

présentée et soutenue publiquement par

Julien BROWAEYS

le 20 janvier 2000

Titre

Les ferrofluides : ondes de surface, résistance de vague et simulation de la convection dans le manteau terrestre.

Directeur de thèse

Jean-Claude BACRI

JURY

M. Jean-Claude BACRI
M. Andreï CEBERS
M. Yves COUDER
M. Patrice FLAUD
M. Claude JAUPART
M. Elie RAPHAEL

JULIEN BROWAEYS

Laboratoire des Milieux Désordonnés et Hétérogènes
Case 86
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

Tél. : +33 1 44 27 41 40
E-mail : browaeys@ccr.jussieu.fr

Table des matières

Introduction **7**

1 Quelques vues sur les ferrofluides **9**
1.1 Histoire 9
1.2 Stabilité 11
1.3 Propriétés physiques 15
1.3.1 Propriétés magnétiques 15
1.3.2 Propriétés mécaniques 16
1.3.3 Propriétés optiques 16
1.4 Applications 17
1.4.1 Champ industriel 17
1.4.2 Champ bio-médical 18

2 Ondes de surface dans un ferrofluide **21**
2.1 Introduction 21
2.2 Relation de dispersion 23
2.2.1 Historique 23
2.2.2 Cas idéalisé 26
2.2.3 Expression de la relation de dispersion 31
2.2.4 Domaine de validité 32
2.3 Mise en œuvre expérimentale 34
2.3.1 Caractéristiques hydrodynamiques 34
2.3.2 Caractéristiques magnétiques 35
2.3.3 Montage expérimental 37
2.3.4 Visualisation par ombroscopie 39
2.3.5 Production d'ondes de surface 43
2.4 Résultats 44
2.4.1 Modes de représentation 44
2.4.2 $\omega^2(k,H)$ 45
2.4.3 $\mu_0 H^2(k,\omega)$ 46
2.4.4 Déformation statique 47
2.4.5 Brisure de symétrie azimutale 50
2.4.6 Apparition des pics 51

2.5 Conclusion 51

3 Résistance de vague de capillarité-gravité 53
3.1 Eléments d'hydrodynamique navale 53
3.1.1 Notion de résistance de vague 55
3.1.2 Mesure expérimentale 55
3.1.3 Stationnarité du système d'onde 58
3.1.4 Le «coin» de Kelvin 59
3.1.5 Et la capillarité? 60
3.1.6 Ferrofluides sous champ magnétique 61
3.2 Ondes de capillarité-gravité et résistance de vague 61
3.2.1 Ondes unidimensionnelles 62
3.2.2 Ondes bidimensionnelles 69
3.2.3 Fluides magnétiques 76
3.3 Mise en œuvre expérimentale 78
3.3.1 Principe 78
3.3.2 Mesure de force 80
3.3.3 Montage expérimental 86
3.3.4 Caractéristiques des fluides employés 87
3.3.5 Mouillage magnétique du fil 88
3.4 Résultats 92
3.4.1 Fluides ordinaires 92
3.4.2 Fluides magnétiques 97
3.5 Bilan et perspectives 101

4 Simulation de la convection dans le manteau terrestre 103
4.1 Introduction 103
4.2 Convection magnéto-calorique 104
4.2.1 Principe 104
4.2.2 Equations du mouvement 105
4.2.3 Similitude entre la terre et le modèle de laboratoire . . 106
4.3 Dispositif expérimental 107
4.3.1 Description générale 107
4.3.2 Visualisation thermique 109
4.3.3 Caractérisation des fluides magnétiques 109
4.3.4 Champ et force magnétiques 113
4.4 Résultats expérimentaux 116
4.4.1 Distribution de la température 116
4.4.2 Nombre de Nusselt 117
4.4.3 Facteur d'échelle temporel 118
4.5 Bilan et perspectives 120

Conclusion 122

A Obtention de l'équation de dispersion **124**
A.1 Equations ferrohydrodynamiques 124
A.1.1 Equation de Navier-Stokes généralisée 125
A.1.2 Conditions aux limites 126
A.1.3 Géométrie de l'écoulement 127
A.1.4 Linéarisation des équations 127
A.1.5 Résolution des équations linéarisées 128
A.2 Equations électrodynamiques 130
A.2.1 Potentiel perturbatif du champ magnétique 130
A.2.2 Conditions aux limites 131
A.2.3 Expression des efforts magnétiques 132
A.3 Relations de dispersion 133
A.3.1 Expression en profondeur finie, sans viscosité 133
A.3.2 Expression en profondeur infinie, sans viscosité 133
A.3.3 Expression en profondeur finie, avec viscosité 134

B Symétrie du tenseur des contraintes **136**
B.1 Ondes de surface 138
B.2 Convection magnéto-calorique 138

Bibliographie **140**

Introduction

Les ferrofluides sont des solutions colloïdales stables de nano-particules magnétiques dispersées dans un solvant. Grâce à la conjonction inhabituelle de propriétés liquides et magnétiques, il est entre autres possible de les faire s'écouler en utilisant des champs magnétiques.

Cependant, il faut vérifier certaines conditions pour y parvenir [1]. Par exemple, la seule application d'un champ magnétique variable, même non-uniforme, ne permet pas d'animer un ferrofluide complètement contenu dans une cuve hermétique. L'aimantation du fluide s'adapte quasi-instantanément au champ excitateur, et aucun mouvement ne peut être mis en évidence.

Pour qu'il y ait déplacement du fluide, il faut que subsiste en son sein une *hétérogénéité* de l'aimantation, dont la cause est autre que la seule excitation magnétique. La présence d'une *interface* est une condition suffisante : la discontinuité de l'aimantation entre deux milieux de susceptibilités magnétiques différentes produit un champ de pression à l'interface qui est à même de la déformer. L'ascension capillaire en présence de champ magnétique permet ainsi classiquement de mesurer la susceptibilité des sels paramagnétiques en solution. Pour les ferrofluides, dont le paramagnétisme est *géant*, l'instabilité de pics est un des effets les plus spectaculaires qui en découle.

Dans le *volume* même du fluide, la présence d'hétérogénéités d'aimantation peut être assurée par des variations de température, autrement dit en chauffant le fluide de manière non uniforme. Outre les effets conjugués de la poussée d'Archimède et de la dilatation, les forces magnétiques volumiques entretiennent alors la convection du fluide. En situation d'apesanteur, seules ces dernières interviennent.

Ces caractéristiques, si particulières, des ferrofluides, permettent d'explorer plus avant des écoulements, des instabilités qui sont connues par ailleurs en hydrodynamique. Dans ce travail, on se propose d'examiner trois situations où l'utilisation conjointe d'un ferrofluide et d'un champ magnétique permettent d'enrichir des expériences *classiques*. Le ferrofluide est donc envisagé en tant que *système-modèle* ; les seules propriétés dont on

1. Ne sont considérés ici, et comme dans le reste de cette thèse, que des fluides sans rotations internes (cf. annexe B). Le couple résultant des forces magnétiques est supposé nul.

se préoccupe sont leurs caractéristiques thermomécaniques[2] et magnétiques.

Dans un premier temps, on s'est intéressé à la propagation d'ondes à la *surface* libre d'un ferrofluide. La relation de dispersion, connue théoriquement, est fonction du champ magnétique appliqué. Si ce dernier est uniforme, constant et vertical, cette relation peut être non-monotone. Elle intervient dans toutes les instabilités mettant en jeu l'interface libre d'un ferrofluide. Comme aucune mesure expérimentale précise n'est proposée dans la littérature, une expérience, mettant en œuvre une méthode d'ombroscopie, a été réalisée.

Par la suite, un autre phénomène, concernant aussi les ondes de *surface*, a retenu notre attention. Lorsqu'un objet, dont la taille caractéristique reste très inférieure à la longueur capillaire, est déplacé à la surface libre d'un liquide, il subit une force résistante liée à l'émission d'ondes de capillarité-gravité. Cette «résistance de vague», dont l'expression en fonction de la vitesse de déplacement a été calculée récemment, n'est différente de zéro qu'au-delà d'une certaine vitesse critique. On a cherché à observer expérimentalement ce comportement, pour des fluides de différentes viscosités (la théorie néglige son effet). L'utilisation de ferrofluides, en présence d'un champ magnétique vertical, offre de plus la possibilité d'ajuster la vitesse critique et de vérifier ainsi de manière extensive les prédictions de la théorie.

Enfin, s'interessant cette fois à des phénomènes se produisant en *volume*, on s'est efforcé de montrer qu'un ferrofluide permettait d'effectuer des expériences de convection en géométrie quasi-centrale dans un laboratoire terrestre[3]. Il est en effet possible de créer une force volumique d'origine magnétique quasiment radiale, dont l'intensité très supérieure au poids du fluide. Le ferrofluide, maintenu entre deux coques sphériques, est chauffé à l'intérieur et refroidi à l'extérieur. Le modèle qui a été construit permet de simuler, grâce aux lois d'échelle, la convection dans le manteau terrestre : les nombres de Rayleigh associés sont dans les deux cas de l'ordre de 10^6.

2. Il s'agit principalement de la masse volumique, de la viscosité et de la tension superficielle et, le cas échéant, la conductivité thermique et la capacité calorifique.

3. La seule expérience de convection analogue, sans ferrofluides mais avec des liquides diélectriques, a été réalisée dans la navette spatiale [54].

Chapitre 1

Quelques vues sur les ferrofluides

Un ferrofluide est un liquide qui a de fortes propriétés magnétiques. Sous l'action d'un champ magnétique, ce liquide noir, opaque, s'aimante, et prend des formes spectaculaires : sa surface se couvre de pics ou, confiné entre deux plaques, un labyrinthe apparaît.

Des particules magnétiques de taille nanométrique sont en suspension dans un liquide porteur. Elles confèrent au ferrofluide ses propriétés magnétiques. Le fluide magnétique, aussi appelé ferrofluide, est un colloïde sensible à un champ magnétique extérieur.

1.1 Histoire

Les ferrofluides n'existent pas à l'état naturel : il faut les synthétiser. La première tentative répertoriée est due à Wilson [135], et remonte à 1779. Le fluide y était formé d'une dispersion de fines particules de fer dans de l'eau. Dans les années 1930, Bitter [18] et Ellmore [39], ont tenté d'utiliser des particules microniques de magnétite. Les solutions obtenues étaient peu stables, les particules s'agrégeant en présence d'un champ magnétique[1]. En 1963, Stephen Papell [93], de la NASA, synthétisa l'un des premiers ferrofluides. De la poudre de magnétite (10 microns) est mélangée à du kérosène en présence d'acide oléique. Elle est broyée pendant plus d'un mois jusqu'à être réduite en particules dont la taille n'excède pas 10 nm. Les particules sont recouvertes d'acide oléique, ce qui assure la stabilité de la solution colloïdale.

Peu après, Rosensweig, en collaboration avec les chercheurs d'*Avco*

1. Le changement brutal des propriétés mécaniques qu'entraîne l'application d'un champ magnétique confère néanmoins un intérêt tout particulier à ces fluides. Ce sont des fluides *magnétorhéologiques*, utilisés dans certains dispositifs mécaniques — embrayages, freins, amortisseurs [89].

Corp., améliora le fluide de Papell et synthétisa un ferrofluide bien plus concentré et magnétique, comparable aux ferrofluides exploités aujourd'hui. Il examina une grande variété de particules magnétiques, d'agents dispersants et de fluides porteurs. Parallèlement, il analysa les principes physiques qui régissent les propriétés micro- et macroscopiques de ces fluides, fondant une nouvelle branche de l'hydrodynamique : la *ferrohydrodynamique* explore l'influence des forces de polarisation magnétique sur l'écoulement des ferrofluides [110]. Enfin, en compagnie de R. Moskovitz, il créa *Ferrofluidics*, une entreprise qui se consacre à la production et à la commercialisation de ferrofluides et des technologies dérivées.

D'autres méthodes de synthèse, moins laborieuses, ont été inventées dans les années 1970 [67]. La co-précipitation de complexes ferreux et ferriques en milieu aqueux, dans des conditions bien contrôlées, conduit à la formation de magnétite colloïdale. Ces particules sont transférées dans des solvants organiques (huiles) en présence de tensioactifs.

Au début des années 1980, R. Massart réussit à synthétiser des ferrofluides sans tensioactifs [84, 85, 64, 127]. La charge ionique des particules assure la stabilisation du colloïde (cf. section 1.2). Le solvant privilégié est l'eau, mais d'autres solvants polaires sont utilisables (glycérol, glycol, dibutyl phtalate...). Il est d'ailleurs possible de «greffer» des tensioactifs sur ces particules pour obtenir des ferrofluides dans des solvants non-polaires, telles certaines huiles silicones. L'equipe ferrofluides du LI2C [2], formée autour de R. Massart, a développé un savoir-faire considérable en la matière (fluides bio-compatibles, sélection précise de la taille des particules...).

Les recherches de nouvelles synthèses sont très vivaces. Des techniques d'électrodéposition sur film liquide à très basse pression [59] permettent par exemple de créer des ferrofluides dont les particules sont de fer pur ; des synthèses dans des conditions extrêmes de température et de pression d'obtenir des particules de nitrure de fer [88]. Ces particules sont bien plus magnétiques que les ferrites mixtes habituellement utilisées [3], mais hélas rapidement oxydées à l'air libre. C'est pourquoi certains chercheurs [92] s'attèlent à synthétiser des particules recouvertes d'une couche inhibant l'oxydation, par exemple de silice. Enfin, dans une toute autre direction, des travaux sont en cours [37] dans le but de synthétiser des métaux liquides magnétiques.

2. Laboratoire des Liquides Ioniques et Interfaces Chargées, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Bâtiment F, case 63, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

3. L'aimantation à saturation du fer vaut environ 1 500 kA/m [51], 4,3 fois plus que celle de la maghémite, oxyde magnétique de fer, couramment utilisé.

1.2 Stabilité

Le problème essentiel à résoudre pour fabriquer un ferrofluide est celui de sa stabilité. Pour connaître les conditions de celle-ci, il est nécessaire de s'intéresser aux interactions auxquelles les particules sont soumises [110].

La gravité provoque la sédimentation de la solution. L'agitation thermique s'y oppose. L'échelle de variation L de la concentration est fixée en écrivant l'égalité de l'énergie potentielle gravitationnelle et l'énergie d'agitation brownienne[4] d'une particule :

$$kT \approx \Delta\rho V g L$$

où k est la constante de Boltzmann[5], T la température absolue (environ 300 K), V le volume de la particule, et $\Delta\rho$ (≈ 4300 kg/m^3) la différence de masse volumique entre la particule et le fluide porteur[6]. Les récipients utilisés au cours de ce travail ne contenaient guère plus de 5 cm de ferrofluide. En supposant que les particules sont sphériques ($V = \pi d^3/6$), on peut déduire le diamètre critique au-delà duquel se produit la sédimentation :

$$d = \left(\frac{6kT}{\pi\Delta\rho g L}\right)^{1/3} \approx 15 \text{ nm}.$$

Les particules composant les ferrofluides utilisés couramment dans notre laboratoire ont un diamètre d valant environ 10 nm, ce qui assure la stabilité de la solution dans le champ de pesanteur terrestre[7]. De plus, une taille de cet ordre de grandeur est inférieure à celle de la paroi d'un domaine de Weiss : chaque particule constitue un mono-domaine magnétique.

Un gradient de champ magnétique extérieur attire les particules, comme le fait le champ de gravité. Pour éviter une sédimentation par les forces magnétiques, il faut que l'énergie potentielle magnétique des particules dans un champ extérieur soit inférieure à l'énergie thermique :

$$\mu_0 M_s V \Delta H \ll kT,$$

où M_s est l'aimantation à saturation du matériau qui compose les particules, et ΔH l'amplitude de la variation du champ H à l'échelle de l'échantillon.

4. Cette équation peut être retrouvée en écrivant que le gradient de pression osmotique est équilibré par les forces volumiques de pesanteur.

5. $k \approx 1{,}38\ 10^{-23}$ J/K.

6. On tient compte de la poussée d'Archimède.

7. Cette analyse parait en partie superfétatoire. La loi de Stokes [52] fournit à la vitesse caractéristique de sédimentation, $V = g\Delta\rho d^2/(18\eta)$ ($\eta \approx 10^{-3}$ Pa.s est la viscosité de l'eau), soit environ $2{,}3\ 10^{-10}$ m/s, avec $d = 10$ nm. Il faudrait donc plus de mille ans pour observer la sédimentation d'une colonne de 10 m de ferrofluide !

Dans ce travail, nous avons utilisé des ferrofluides à base de ferrite de cobalt [127], dont l'aimantation à saturation vaut $M_s = 420$ kA/m [46] ; dans toutes nos expériences, le champ magnétique ne varie pas de plus de 80 kA/m. La taille critique correspondante vaut 6 nm, inférieure à la taille moyenne des particules. La sédimentation sous l'action du champ ne se produit pas pour autant, car les constantes de temps associées sont extrêmement longues[8, 9].

L'interaction dipolaire entre les particules est due à l'aimantation spontanée des particules. Afin d'éviter l'agglomération des particules, l'énergie maximale nécessaire pour les séparer — correspondant au cas où les particules sont en contact — doit être inférieure à l'énergie d'agitation thermique :

$$\mu_0 \frac{(M_s/V)^2}{2\pi {d_0}^3} \ll kT.$$

Cela conduit à un diamètre critique de 7,5 nm. Pour un diamètre de 10 nm, l'agitation thermique ne suffit pas tout à fait à stabiliser le ferrofluide ; il est à remarquer que l'agglomération qui pourrait en résulter est réversible, car l'énergie magnétique maximale a une valeur finie.

Les forces de van der Waals sont en réalité l'interaction dont il est essentiel de s'affranchir. Lorsque deux particules sont proches, le modèle de Hamaker [60] prévoit l'énergie d'interaction :

$$U' \sim \frac{-Ad}{24x},$$

où x est la distance entre les surfaces de deux particules supposées sphériques, et A la constante de Hamaker (environ 10^{-19} J). Cette énergie tend vers l'infini[10] lorsque x tend vers 0. L'agitation thermique ne peut s'opposer à l'agrégation des particules. Il faut, d'une manière ou d'une autre, introduire une force de répulsion entre les particules pour éviter qu'elles se rapprochent par trop. L'énergie d'interaction de Van der Waals décroît rapidement avec la distance entre particules (en x^{-6}).

La répulsion électrostatique ou stérique entre les particules assure la stabilité des ferrofluides en les empêchant de s'approcher outre mesure.

8. A partir de la loi de Stokes, on peut construire un temps caractéristique de sédimentation (cf. note 7) qui vaut ici 4,3 10^7 s, soit environ 1 an et demi !

9. Le coefficient de diffusion des particules dans le fluide a été mesuré lors d'expériences de diffusion Rayleigh forcée [9, 79] : $D \approx 10^{-11}$ m^2/s. Il permet de construire un temps caractéristique de diffusion qui vaut, pour une distance typique de 1 cm : $t_c \approx 10^7$ s, soit près de 4 mois.

10. En réalité cette énergie est limitée par la répulsion qui existe à très courte portée, et par la rugosité des particules.

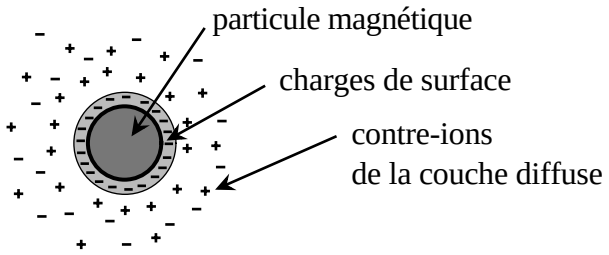


FIG. 1.1 – *Schématisation d'un ferrofluide* ionique. *Le signe de la charge de surface est arbitraire.*

Dans certaines synthèses, les particules magnétiques portent des charges de surface, grâce aux propriétés acido-basiques de leurs ligands de surface[11] formés lors de la synthèse. On qualifie ces ferrofluides de *ioniques* (cf. fig. 1.1). L'interaction entre particules n'est pas celle existant entre deux charges, à cause des contre-ions qui assurent l'électro-neutralité de la solution. Pour les besoins de la modélisation, on utilise souvent le modèle de la double couche [60]. L'énergie d'interaction décroît exponentiellement, sur une échelle de longueur égale à la longueur de Debye. Sans entrer dans les détails de la théorie DLVO [38], il est possible d'imposer une énergie répulsive suffisante pour empêcher les particules de s'approcher à des distances où l'interaction de Van der Waals dominerait.

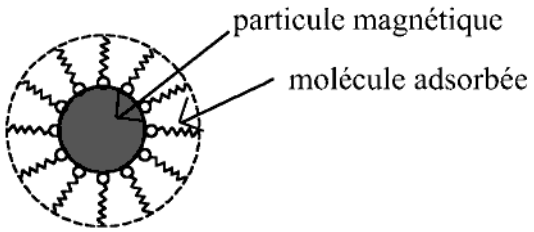


FIG. 1.2 – *Schématisation d'un ferrofluide* surfacté.

Dans le cas de ferrofluides *surfactés*, de longues chaînes amphiphiles sont adsorbées à la surface des particules. La tête polaire adhère à la surface du ferrofluide tandis que la queue a-polaire, d'une dizaine d'angströms de long, présente une affinité avec le fluide porteur (cf. fig. 1.2). Voilà pourquoi la plupart des ferrofluides surfactés sont à base de solvant non-polaire[12] Ces molécules forment un «matelas élastique» autour des grains, qui, par

11. Il s'agit en général du ligand hydroxo (–OH). Le ligand citrate permet d'obtenir un ferrofluide stable à pH 7.

12. L'obtention de ferrofluides surfactés dans un solvant polaire comme l'eau nécessite l'adjonction d'un deuxième agent tensioactif de façon à réaliser un ensemble [particule magnétique – tensioactif 1 – tensioactif 2] présentant une couche extérieure hydrophile [114].

répulsion *entropique* [110], empêche l'approche de particules (cf. fig. 1.3).

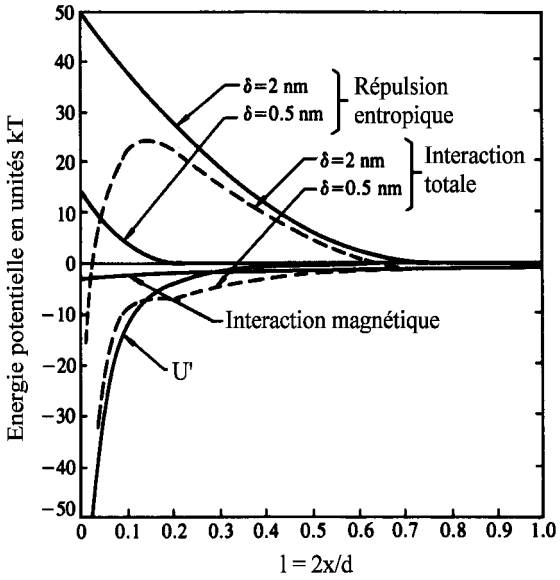


FIG. 1.3 – *Energies d'interactions de Van der Waals, dipolaire magnétique et répulsive entropique, en fonction de la distance x séparant deux particules ; $d = 10$ nm est le diamètre d'une particule et δ mesure la longueur de la molécule adsorbée en surface. La concentration superficielle en tensioactifs des particules est de 10^{18} molécules/m^2. L'influence de l'interaction magnétique est marginale.* (D'après R. E. Rosensweig [110].)

Le contrôle de la force ionique de la solution (et donc de la longueur de Debye) permet de déstabiliser les ferrofluides *ioniques*. A mesure que celle-ci est augmentée, les interactions électrostatiques sont de plus en plus écrantées. De manière générique, le ferrofluide subit une séparation de phases : une phase liquide concentrée, très riche en particules (la fraction volumique peut atteindre 30 %) et très magnétique (la susceptibilité magnétique peut atteindre 70), coexiste avec une phase appauvrie. La tension superficielle entre les deux fluides est très basse ($\sigma \approx 3\mu$N/m) car on est toujours proche du point critique de transition. Ces fluides démixés ont fait, et font encore aujourd'hui, l'objet de nombreuses expériences [10, 11, 12, 115]. Pour des concentrations plus élevées en sel, le ferrofluide flocule puis précipite. Avec un autre paramètre de contrôle, comme le pH de la solution, le fluide est susceptible de former un gel thixotrope [56] avant de précipiter.

On observe des phénomènes similaires avec des ferrofluides surfactés [36]. Le paramètre permettant le contrôle de la déstabilisation de la solution est alors, soit la concentration en tensioactif, soit la proportion d'un «mauvais»

co-solvant ajouté au fluide porteur [36].

Les ferrofluides, convenablement préparés, sont extrêmement stables. Certains échantillons, datant de près d'une trentaine d'années, ne présentent toujours aucun signe de détérioration [110].

1.3 Propriétés physiques

Le fort couplage qui existe entre les propriétés mécaniques et magnétiques confère tout leur intérêt aux ferrofluides. Pour autant, il ne faudrait pas oublier les remarquables propriétés optiques de ces matériaux.

1.3.1 Propriétés magnétiques

Les particules d'un ferrofluide colloïdal, chacune portant un moment magnétique $\vec{m}$, sont analogues aux molécules d'un gaz paramagnétique. En l'absence d'un champ appliqué, les particules sont orientées aléatoirement et l'aimantation totale du fluide est nulle. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, la tendance des moments dipolaires à s'aligner avec le champ est en partie compensée par l'agitation thermique. Dans la mesure où les interactions magnétiques entre les particules sont négligées, la théorie de Langevin décrit l'aimantation M du fluide en fonction du champ H :

$$\begin{aligned} M &= \Phi M_s L(\gamma = \Phi M_s \left(\coth(\gamma) - 1/\gamma\right), \quad \text{avec} \\ \gamma &= \frac{\pi}{6}\frac{\mu_0 M_s H d^3}{kT}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où Φ est la fraction volumique des particules, M_s leur aimantation à saturation, et d leur diamètre.

L'aimantation à saturation d'un ferrofluide est égale, à la dilution près, à celle du matériau qui compose ses particules. Celle d'un ferrofluide commun à base de maghémite ($M_s = 350$ kA/m), relativement concentré ($\Phi = 15\%$), vaut $\Phi M_s = 52{,}5$ kA/m à saturation.

La susceptibilité magnétique à champ nul prend, pour ces matériaux, une valeur inhabituelle. Avec les valeurs numériques qui précèdent, pour des particules de 10 nm de diamètre, on obtient $\chi \approx 1$. La susceptibilité d'un ferrofluide est environ 1 000 fois plus grande que celle des liquides paramagnétiques usuels, comme $FeCl_3$ en solution aqueuse saturée ($\chi \approx 4{,}6\ 10^{-4}$) ou bien l'oxygène liquide ($\chi \approx 3{,}5\ 10^{-3}$). On parle de paramagnétisme géant [13].

13. Superparamagnétisme et paramagnétisme géant sont deux propriétés différentes de la matière. Le superparamagnétisme concerne des matériaux ferromagnétiques dont l'énergie d'anisotropie est très inférieure à kT. L'aimantation est alors une fonction univaluée du champ appliqué. Le paramagnétisme géant caractérise des matériaux paramagnétiques dont la susceptibilité est exceptionnellement élevée (de l'ordre de l'unité). Un ferrofluide

La loi de Langevin ne fait que décrire approximativement la courbe d'aimantation d'un ferrofluide [110]. D'une part, toutes les particules n'ont pas la même taille: le magnétisme de surface peut être important pour les particules les plus petites [46]. D'autre part, les ferrofluides sont très concentrés et il est impossible de faire abstraction des interactions entre les particules [120]. Voilà pourquoi il est toujours nécessaire de déterminer expérimentalement la courbe aimantation des échantillons de ferrofluides dont on dispose.

1.3.2 Propriétés mécaniques

L'influence du champ sur les équations du mouvement d'un fluide magnétique sont explicitées annexe A (section A.1). Les forces surfaciques produites par le champ ont une influence majeure sur toutes les instabilités de surface susceptibles d'apparaître. Les forces volumiques ne se réduisent pas simplement à l'expression de la force de Kelvin $\vec{M}.\vec{\nabla}\vec{H}$, comme on pourrait le supposer au premier abord. Elles ont une résultante nulle à moins que la densité et la température ne soient pas uniformes au sein du fluide[14]. Enfin, le champ magnétique change les propriétés rhéologiques des ferrofluides. L'annexe B est consacrée à ce sujet.

1.3.3 Propriétés optiques

Les ferrofluides, sous l'influence d'un champ magnétique, deviennent biréfringents [19]. Chaque particule est optiquement anisotrope[15]. Leurs axes d'anisotropie sont colinéaires à leurs axes de facile aimantation. Lorsque, sous l'action d'un champ magnétique, les particules s'alignent, le fluide devient biréfringent, son axe optique étant colinéaire au champ magnétique. A saturation[16], la différence d'indice Δn est de l'ordre de 0,01 pour un fluide dont la fraction volumique vaut 10 % [55].

Cet effet permet de sonder localement et instantanément l'orientation des particules de ferrofluide. Les propriétés rhéologiques de fluides ensemencés de particules (ferrofluides très dilués) peuvent ainsi être étudiées [13]. La compétition entre le couple des contraintes visqueuses et le couple du champ magnétique change l'orientation des particules (cf. annexe B). Une mesure *locale* de la vorticité peut donc être envisagée [58].

---

présente un paramagnétisme géant du fait de la rotation mécanique des grains dans le liquide porteur. S'il est gelé, les particules qui le composent ne sont plus libres de s'orienter librement. Selon leur nature, ce solide peut alors être ferromagnétique ou superparamagnétique.

14. Ces forces magnétiques sont exploitées dans l'expérience de convection en géométrie radiale, au chapitre 4.

15. L'origine de cette anisotropie n'est, à l'heure actuelle, pas entièrement élucidée.

16. Le champ nécessaire vaut environ 800 kA/m (10 000 Oe).

Les caractéristiques optiques particulières des ferrofluides ne se limitent pas à la biréfringence. Les ferrofluides sont aussi dichroïques sous l'influence du champ magnétique. Ce dernier est de plus susceptible de conférer un pouvoir rotatoire au fluide (effet Faraday) [79]. Toutes ces propriétés peuvent être exploitées pour mieux caractériser des fluides complexes (cristaux liquides, vésicules...), dopés en particules magnétiques [124, 123].

1.4 Applications

Examinons quelques-unes des multiples applications des ferrofluides.

1.4.1 Champ industriel

La *Ferrofluidics Corporation* [17] possède un quasi-monopole, non seulement de la fabrication de ferrofluides mais encore des applications industrielles qui les mettent en œuvre.

Joints tournants

Leur premier succès commercial concerne la mise au point de joints annulaires entre un arbre tournant et la structure qui le supporte. Le joint, constitué de quelques gouttes de ferrofluide, est maintenu par un aimant permanent formant un collier autour de l'arbre. Ces joints liquides évitent les frottements et n'engendrent aucune poussière. De plus, ils assurent une très bonne étanchéité entre les compartiments. Un joint simple supporte environ 0,1 bar. Dans certains cas, il est nécessaire d'utiliser des joints à plusieurs étages pour résister à des différences de pression élevées : la pression maximale supportée est proportionnelle au nombre d'étages.

On rencontre ces joints dans les procédés industriels de croissance sous vide de cristaux de silicium [18]. On les utilise aussi pour la protection de disques durs [19], dans les lasers à gaz et dans certains moteurs fonctionnant dans des conditions extrêmes.

Haut-parleurs

Les ferrofluides ont aussi la faveur des mélomanes. Dans les haut-parleurs classiques, une bobine (solidaire du pavillon), se meut dans l'entrefer d'un aimant permanent. Pour des enceintes de grande puissance (> 200 W rms), cette bobine chauffe fortement. Il faut la refroidir : une technique consiste à remplir l'interstice de ferrofluide. Au contraire d'un fluide ordinaire, celui-ci est maintenu en place par l'aimant. Le liquide possède une conductivité

17. http://www.ferrofluidics.com
18. On recherche alors des liquides porteurs dont la pression partielle est extrêmement basse pour assurer un vide poussé.
19. La vitesse de rotation peut atteindre 70 000 tours-minute avant que le joint rompe.

thermique bien meilleure que l'air. La dissipation de la chaleur est donc plus facile. Par ailleurs, à cause du frottement visqueux avec le fluide, la réponse mécanique en fréquence du haut-parleur est améliorée. Au total, ce procédé permet de multiplier par 3 sur la puissance admissible.

Séparation par flottaison

La lévitation magnétique dans un ferrofluide est utilisée pour séparer des matériaux de densité différente.

De la même façon qu'un matériau diamagnétique est susceptible de léviter dans un gradient de champ magnétique [5], un matériau non-magnétique au sein d'un ferrofluide peut être mis en lévitation. Si on place un récipient de ferrofluide entre le mêmes pôles de deux aimants, le champ créé est minimal au centre (cf. fig. 1.4). Le fluide est attiré vers les régions de champ fort et, par voie de conséquence, la pression est aussi minimale au centre. En l'absence de pesanteur, un objet non magnétique se positionne donc au centre du récipient. Déplacé hors de sa position d'équilibre, l'objet de volume V subit la force de rappel suivante [110] :

$$\vec{F}_m \approx -V\mu_0 M.\vec{\nabla}H.$$

En présence de pesanteur, l'équilibre stable est possible si le poids est inférieur à la force de rappel[20]. Avec des ferrofluides usuels ($M_s \approx 30$ kA/m) et des gradients de champ raisonnables ($\mu_0\nabla H \approx 1$ T/cm), il est possible de faire flotter tous les solides non-magnétiques.

Aux Etats-Unis, une usine-pilote utilisant cet effet a été installée pour séparer des déchets métalliques industriels non-ferreux. Au Japon, la société *Hitachi* trie les composants d'appareils électriques domestiques en aluminium, zinc et en cuivre. Cette méthode est aussi expérimentée pour trier des diamants dans le sable par flottaison sélective.

1.4.2 Champ bio-médical[21]

Il existe de nombreuses applications aux ferrofluides bio-compatibles, et toutes ne sont pas prospectives.

D'une part, la réactivité de surface des particules rend les ferrofluides fonctionnalisable en autorisant leur liaison avec différents effecteurs biologiques comme par exemple des anticorps [117]. D'autre part, le faible volume des particules permet *in vivo* une biodistribution favorable au ciblage non spécifique de certains organes[22], mais aussi au ciblage spécifique de cellules malignes lorsque les particules ont été fonctionnalisées.

20. Le théorème d'Earnshaw n'est pas violé : à ce sujet, voir [110, p. 146]
21. Merci à Florence Gazeau pour l'aide apportée à la conception de ce paragraphe.
22. Dans le système réticulo-endothélial : le foie, la rate ...

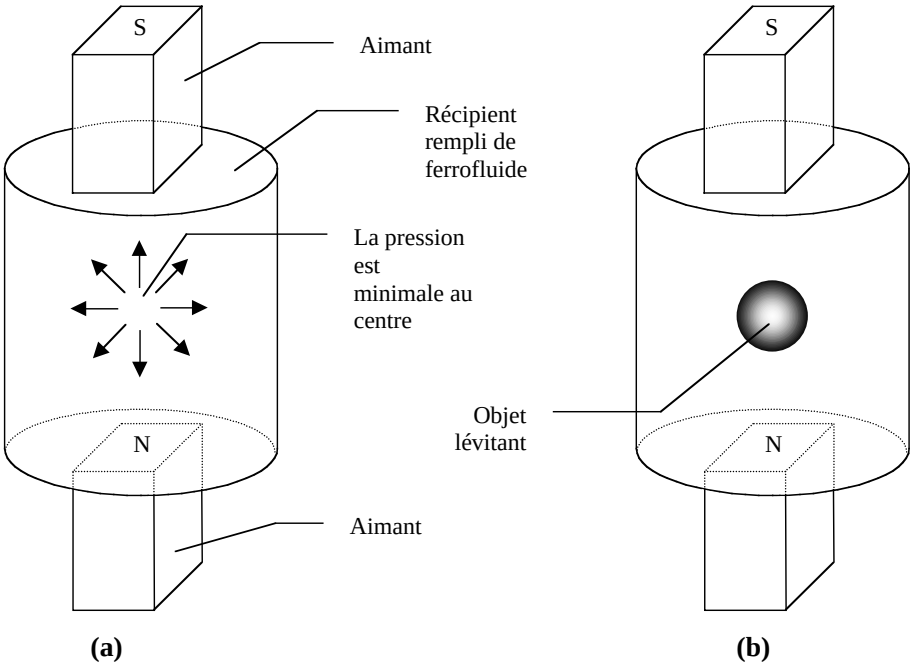


FIG. 1.4 – *Lévitation d'un corps non-magnétique dans un ferrofluide. La pression est fonction croissante de la distance au centre (a). Lorsqu'un corps non-magnétique est placé dans le récipient, il se déplace vers le centre et y reste à l'équilibre (b).*

C'est évidemment leurs propriétés magnétiques qui confèrent à ces particules leur originalité. Sous gradient de champ magnétique, on pourra *in vitro* isoler des cellules qui ont fixé des nanoparticules magnétiques. C'est ainsi par exemple qu'on sépare magnétiquement des globules rouges pathologiques en couplant aux nanoparticules magnétiques une protéine (l'annexine) qui se fixe sur un des phospholipides de la membrane cellulaire, exposé à l'extérieur de la cellule uniquement si celle-ci est endommagée [53].

Ce même principe de tri magnétique peut être adapté à la séparation de macromolécules biologiques (des fragments d'ADN par exemple), de virus, de bactéries... à des fins diagnostiques.

In vivo, les forces magnétiques qu'on peut obtenir sous gradient de champ sont suffisantes pour favoriser la vectorisation de drogues (vésicules magnétiques comme véhicules de médicaments ou de radioéléments) ou pour augmenter le temps de rétention de drogues sur un site donné (implants magnétiques).

L'utilisation actuelle des nanoparticules magnétiques en milieu hospitalier concerne essentiellement l'imagerie par résonance magnétique nucléaire (IRM) : les particules, en créant localement une inhomogénéité de champ magnétique, modifient les temps de relaxation des protons dont la mesure

est à la base de l'IRM ; elles jouent le rôle d'agent de contraste [134]. Tout le problème est donc d'assurer un ciblage spécifique des nanoparticules, ce qui est l'enjeu des voies de recherche les plus prometteuses dans ce domaine.

Cependant, même une fixation non spécifique des particules, par phagocytose de cellules macrophagiques, présente un intérêt dans de nombreuses pathologies, par exemple en permettant la visualisation de tumeurs malignes du foie (dont le système phagocytaire est moins efficace que le reste du tissu sain) ou pour le diagnostic d'un rejet de greffe (qui induit une réaction inflammatoire et par conséquent un afflux de cellules macrophagiques chargées en particules magnétiques).

Les propriétés magnétiques des nanoparticules sous champ magnétique alternatif ouvrent aussi des perspectives thérapeutiques [53]. A haute fréquence (de l'ordre du mégahertz), les particules superparamagnétiques sont des sources nanométriques de chaleur : concentrées dans des cellules cancéreuses, elles peuvent induire un stress cellulaire, entrainant directement la mort de ces cellules ou bien indirectement des sécrétions qui activent le système immunitaire contre ces cellules.

Dans le domaine de la biologie cellulaire, les ferrofluides élargissent aussi le champ des possibles : les nano-particules magnétiques, internalisées par la cellule sous forme de vésicules magnétiques (endosomes), constituent des sondes locales, manipulables par un champ extérieur, de l'espace intracellulaire.

Chapitre 2

Ondes de surface dans un ferrofluide sous l'influence d'un champ magnétique vertical

2.1 Introduction

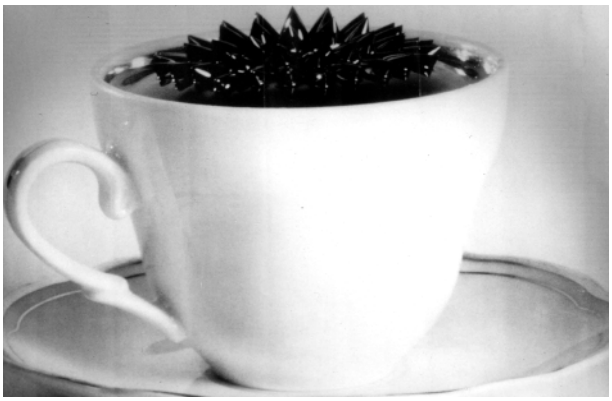


FIG. 2.1 – *Instabilité de pics d'un ferrofluide*

Quand un ferrofluide est soumis à l'influence d'un champ magnétique extérieur, on est en premier lieu frappé par la structuration de sa surface libre en pics (figure. 2.1). Ce phénomène ne se produit bien sûr que dans des conditions particulières, mais usuellement vérifiées : lorsque le ferrofluide

est suffisamment concentré[1], des champs magnétiques modestes[2] suffisent pour réaliser l'instabilité de pics. Rosensweig en fut l'inventeur et cette instabilité porte parfois son nom. Avec Cowley [31], il l'analysa comme résultant de l'amplification linéaire des ondes de surface de capillarité-gravité sous l'influence d'un champ magnétique extérieur normal à l'interface (cf. figure 2.2).

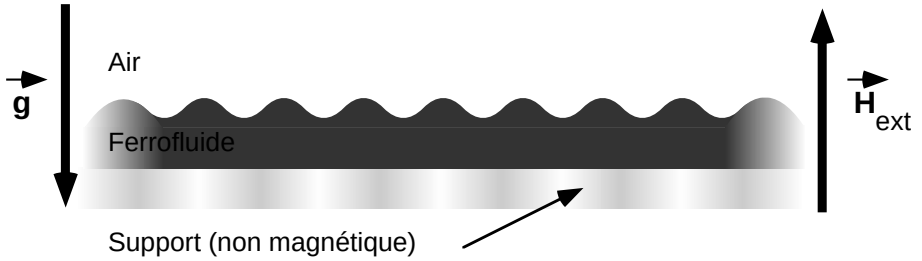


FIG. 2.2 – *Configuration modèle pour l'instabilité de pics. La couche de ferrofluide, d'épaisseur finie, n'est pas limitée horizontalement. Pour les besoins de la représentation l'amplitude d'une onde de capillarité-gravité a été fortement exagérée.* $\vec{H}_{ext}$ *représente le champ extérieur appliqué et* $\vec{g}$ *le champ de pesanteur.*

Dans les fluides non magnétiques, de nombreuses instabilités se développent à la suite à l'amplification d'ondes de capillarité-gravité, telles l'instabilité de Kelvin-Helmholtz[3], l'instabilité de Rayleigh-Taylor[4] ou bien l'instabilité de Rayleigh[5]. Citons encore l'instabilité de Faraday[6] dans laquelle le mécanisme d'amplification des ondes est cette fois paramétrique.

1. L'aimantation du ferrofluide M doit être suffisamment élevée. Comme nous le verrons (éq. (2.4) page 28), une condition suffisante est $M > M_{crit} \approx (8\rho g\sigma/\mu_0^2)^{1/4}$. Ici μ_0 est la perméabilité du vide, g l'accélération de la pesanteur, ρ la masse volumique du ferrofluide (de l'ordre de 1500 kg/m^3) et σ la tension superficielle (au plus celle de l'eau c'est-à-dire 73 mN/m). On obtient alors $M_{crit} \approx 1{,}0\ 10^4$ A/m. L'aimantation de la maghémite (oxyde de fer magnétique stable qui compose habituellement les ferrofluides) est de l'ordre de $3{,}5\ 10^5$ A/m. Une fraction volumique minimale de $1{,}0\ 10^4/3{,}5\ 10^5 \approx 3\%$ est dès lors suffisante à l'observation de pics. Les ferrofluides usuels (du commerce) ont une fraction volumique de l'ordre de 5%.

2. La susceptibilité χ d'un ferrofluide est en général de l'ordre de l'unité, ce qui fait qu'un champ extérieur $H_{ext} = (1+\chi)M_{crit}/\chi$ de $1{,}5\ 10^4$ A/m est suffisant, ce qui correspond à un champ magnétique d'induction d'environ 20 mT, valeur accessible avec un électro-aimant sans pièces polaires.

3. Elle se manifeste à l'interface de deux fluides glissant l'un sur l'autre [28]. Lorsque la différence des deux vitesses dépasse une valeur critique cet écoulement devient instable. La différence de vitesse, dont l'influence se manifeste au travers du terme inertiel, est déstabilisante.

4. Lorsqu'un fluide est placé au-dessus d'un autre fluide non-miscible et moins dense, l'interface se déstabilise suite à l'action du champ de pesanteur [28].

5. Une colonne de liquide en translation uniforme est déstabilisée en gouttelettes par l'action de la tension superficielle [69]. Précision : la gravité n'intervient pas ici.

6. Le mouvement alternatif vertical d'un récipient de fluide produit un système d'ondes

Ces instabilités sont toujours présentes avec des fluides magnétiques, et la présence d'un champ magnétique influe sur leur seuil d'apparition[7]. De manière générale, un champ magnétique perpendiculaire à l'interface a une action déstabilisante[8], tandis qu'un champ magnétique dans le plan de l'interface est habituellement stabilisant. Le champ magnétique, en tant que paramètre de contrôle supplémentaire, permet ainsi d'explorer des instabilités déjà connues par ailleurs. Mais dans certains cas, l'instabilité de Rosensweig peut interagir plus subtilement avec les autres instabilités pour engendrer des morphologies nouvelles[9], ou bien même retarder leurs déclenchements[10].

En tout état de cause, la connaissance de la *relation de dispersion* est primordiale pour modéliser le déclenchement de ces instabilités.

2.2 Relation de dispersion

2.2.1 Historique

Sans calculer directement la relation de dispersion qui nous intéresse[11], Cowley & Rosensweig [31] développèrent les fondements de la théorie linéaire qui permet d'obtenir l'expression du terme magnétique de la relation de dispersion. Dans cette première analyse les effets de la viscosité furent négligés.

Par la suite, Zelazo & Melcher [138] exprimèrent la relation de dispersion d'ondes de capillarité-gravité à l'interface entre deux ferrofluides confinés dans l'entrefer d'un électro-aimant (cf. fig. 2.3). Bien que cette configuration présente l'avantage d'induire des conditions aux limites simples[12], elle a hélas le défaut d'être difficilement exploitable expérimentalement : comment visualiser simplement l'interface ? Dès lors les résultats théoriques en fonction de l'épaisseur présentent un intérêt moindre ; on retrouve néanmoins le résultat établi par Cowley & Rosensweig pour un ferrofluide d'épaisseur

stationnaires pourvu que l'accélération correspondante soit suffisante [41].

7. L'instabilité de Rayleigh magnétique est traitée par exemple dans [108], les instabilités de Rayleigh-Bénard et Bénard-Marangoni magnétiques sont décrites dans [133], celle de Rayleigh-Taylor dans [86].

8. On se rapproche en effet du seuil de l'instabilité de Rosensweig.

9. L'instabilité de Faraday dans un fluide magnétique sous champ peut conduire à la formation de structures en domaines, car plusieurs longueurs d'ondes peuvent être présentes pour une seule fréquence d'excitation. Cet effet, prédit par Raitt & Riecke [101], a été observé en géométrie unidimensionnelle par Mahr & Rehberg [83].

10. Théoriquement, le mécanisme d'amplification paramétrique de l'instabilité de Faraday peut retarder l'instabilité de Rosensweig [87], de la même manière qu'un pendule inversé peut être stabilisé par l'oscillation verticale de son support [70].

11. En effet, ils étaient principalement intéressés par la valeur critique du champ magnétique au-delà de laquelle l'instabilité de pics se développe.

12. Annulation des champs magnétiques perturbatifs dans les pièces polaires.

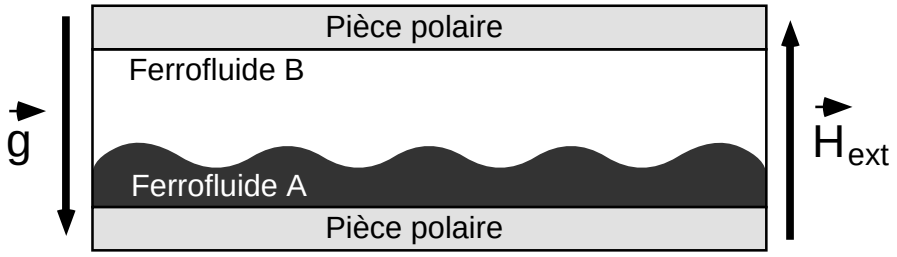


FIG. 2.3 – *Configuration-modèle envisagée par Zelazo & Melcher [138]. Deux ferrofluides non miscibles de perméabilité magnétique et de densité a priori différentes sont confinés entre les pièces polaires d'un électro-aimant. Le système n'est pas limité horizontalement.*

infinie[13]. C'est d'ailleurs ce résultat qu'ils s'efforcèrent de confirmer expérimentalement. Un système d'ondes stationnaires est établi dans un récipient parallélépipédique soumis à un mouvement horizontal périodique[14] (cf. figure 2.4). L'expérience est réalisée en présence d'un gradient de champ magnétique adverse ; ceci implique l'utilisation d'une relation de dispersion plus complexe. En dépit de précautions expérimentales, la méconnaissance de la distribution du champ appliqué ainsi que l'imprécision liée à la méthode de mesure de la longueur d'onde les conduisit à une vérification approximative de la relation de dispersion. On notera d'ailleurs l'absence de points expérimentaux à champ faible ou nul ($F_p \approx 0$ dans la figure 2.4). Il n'en reste pas moins que c'est la seule vérification expérimentale quantitative de la relation de dispersion des ondes de capillarité-gravité en présence d'un champ magnétique vertical que l'on pouvait trouver dans la littérature jusqu'à présent[15].

Quant à la théorie, après l'article de Zelazo & Melcher, plusieurs auteurs ont cherché à inclure des conditions aux limites plus réalistes[16] ainsi que les effets de la viscosité [7, 20, 113, 130]. Weilepp & Brand [133] en 1996 et Abou *et al.* [1] en 1997 obtinrent une relation de dispersion pour une couche de ferrofluide d'épaisseur et de viscosité quelconque. Cependant tous ont négligé l'aspect non-linéaire de la courbe d'aimantation du ferrofluide, et supposèrent que la susceptibilité magnétique de celui-ci était constante. Cette hypothèse peut sembler grossière comme le montre l'examen d'une

13. Infinie signifiant très grande devant les longueurs d'ondes .
14. Il s'agit ici d'un forçage spatial.
15. Plus récemment, la relation de dispersion à été étudiée expérimentalement dans une géométrie annulaire unidimensionnelle [82]. Cependant la nature même de cette configuration induit un champ magnétique fort peu homogène, et au dire même des auteurs aucune vérification quantitative de la théorie n'est possible.
16. C'est-à-dire une couche de ferrofluide d'épaisseur finie reposant sur un milieu non magnétique.

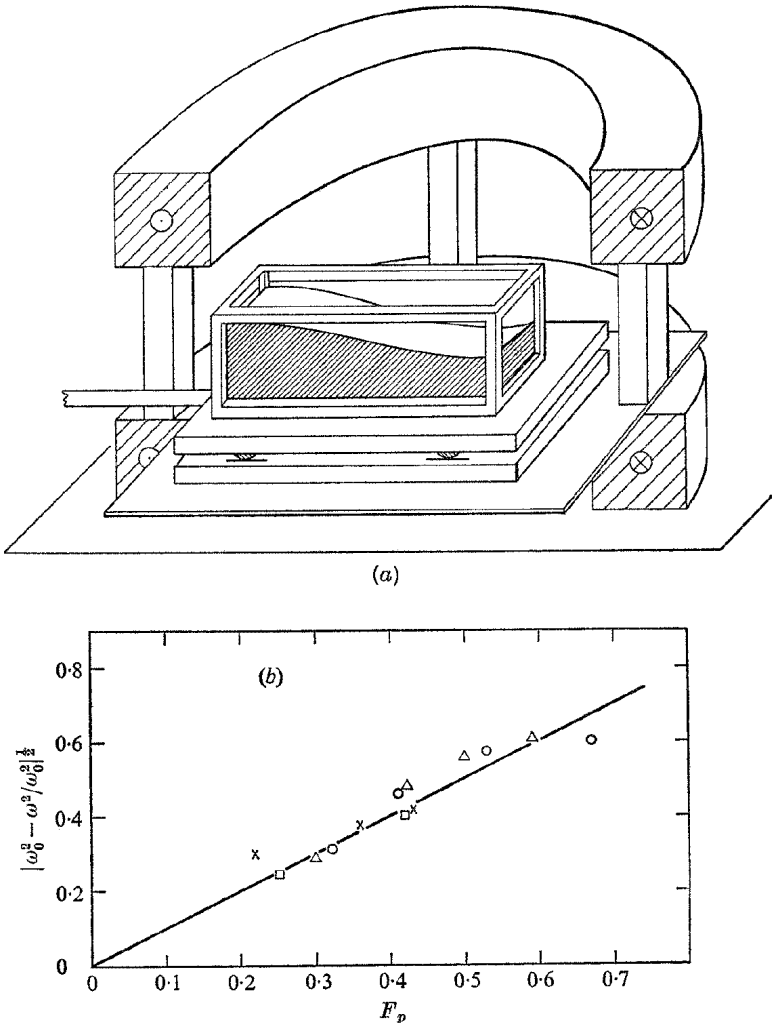


FIGURE 6. (*a*) Apparatus for measuring resonance frequencies with field imposed perpendicular to interface; vibrations of the tank in the horizontal plane drive the waves. (*b*) Relative frequency shift as a function of the parameter F_p, proportional to the applied field intensity. The frequency shifts downward as the applied field intensity is increased. Theory: —. ○, 2·0 cm; △, 2·4; ×, 4·0; □, 4·0.

FIG. 2.4 – *Schéma expérimental et résultats des expériences reproduits de l'article de Zelazo & Melcher [138]. Les vibrations du réservoir dans le plan horizontal produisent un système d'ondes stationnaires. Le paramètre F_p est proportionnel à l'intensité du champ magnétique appliqué. La fréquence de résonance ω diminue à mesure que l'intensité du champ est accrue. La théorie est représentée par un trait plein.*

courbe d'aimantation (cf. figure 2.8 page 36). Néanmoins, ainsi que nous le montrerons par la suite, cette hypothèse est *la plupart du temps* vérifiée, grâce à l'effet du champ démagnétisant qui diminue le champ effectivement perçu par le ferrofluide.

2.2.2 Cas idéalisé

Afin de donner un premier aperçu des propriétés de l'équation de dispersion qui nous intéresse, nous effectuons une série d'approximations qui, nous le montrerons plus avant, n'influent guère sur les spécificités de cette équation. Nous nous plaçons donc dans le cas idéalisé où le ferrofluide est non-visqueux et où la profondeur de la couche est infinie. La relation de dispersion qui lie la pulsation ω au vecteur d'onde k s'écrit alors :

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{\mu_0 M^2 k^2}{\rho(1+1/r)}. \tag{2.1}$$

Ici g est l'accélération de la pesanteur, σ la tension superficielle, μ_0 la perméabilité magnétique du vide, M l'aimantation du fluide magnétique, ρ sa masse volumique et enfin r est une perméabilité composite, définie par l'équation (2.13), qui est en première approximation égale à la perméabilité magnétique relative du ferrofluide $\mu_r = B/(\mu_0 H)$. Une représentation schématique de la relation (2.1) est donnée figure 2.5.

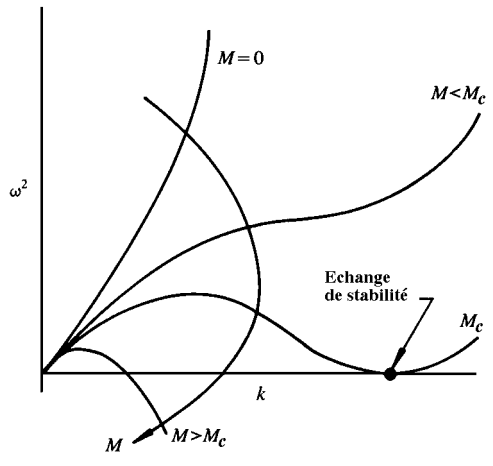


FIG. 2.5 – *Relation de dispersion (2.1). Le quadrant supérieur correspond au domaine où les ondes sont stables. Le quadrant inférieur correspond au domaine où les ondes sont amplifiées exponentiellement.*
(D'après Rosensweig [110] page 191.)

En l'absence de tension de surface ($\sigma = 0$) et de champ magnétique ($M = 0$), l'équation (2.1) se réduit à la relation de dispersion bien connue

des ondes de gravité [80] en profondeur infinie :

$$\omega^2 = gk.$$

Les ondes de gravité dominent le terme de droite de l'équation (2.1) lorsque k est petit[17], ou, ce qui revient au même, lorsque la longueur d'onde est grande[18]. Si, d'un autre coté, les effets de la tension superficielle dominent dans (2.1),

$$\omega^2 = \sigma k^3/\rho$$

et de telles ondes sont appelées ondes capillaires [80]. Le terme capillaire domine le membre de droite de (2.1) lorsque de grands nombres d'ondes sont considérés.

Puisque ω apparaît au carré et que le membre de droite de (2.1) est toujours réel, ω ne peut être que réel ou imaginaire pur[19]. Dans ce dernier cas, une perturbation arbitraire de l'interface croît exponentiellement avec le temps ; la perturbation est en effet modélisée par :

$$\xi = \xi_0 \, \Re[\exp(i(\omega t - kx))],$$

où ξ_0 est l'amplitude de la perturbation de la surface et $\Re$ signifie la prise de la partie réelle. Le comportement d'une onde (son amplification ou non) dépend donc du signe de ω^2 dans (2.1).

Valeurs-seuils de l'instabilité de Rosensweig

Ce signe est contrôlé par la valeur de l'aimantation : lorsqu'elle atteint une valeur suffisante, pour des nombres d'ondes intermédiaires[20], la relation de dispersion admet une racine double, puis au-delà elle admet deux racines (cf. figure 2.5). La transition d'un état stable à un état instable se produit donc lorsque les deux conditions suivantes sont rencontrées :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 0 \\ \partial\omega^2/\partial k &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Lors de cette transition, ω passe d'une valeur réelle à une valeur imaginaire pure. Les équations (2.2) sont les conditions d'un *échange de stabilité*[21].

17. k doit être très inférieur au vecteur d'onde capillaire $k_c = \sqrt{\rho g/\sigma}$.

18. λ doit être très supérieur à la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\sigma/\rho g}$.

19. Inversement, il est possible de comprendre l'équation (2.1) comme lien entre le taux de croissance des perturbations $s = i\omega$ et le vecteur d'onde. C'est ainsi, par exemple, qu'ont procédé Abou et al. dans [1].

20. Hors du domaine des ondes de gravité ou capillaires, $k \approx k_c = \sqrt{\rho g/\sigma} = 2\pi/l_c$.

21. Ce terme a été introduit par Poincaré dans son étude des formes et de la stabilité de gouttes en rotation [95].

L'application de ces conditions à (2.1) donne :

$$k_c = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} \tag{2.3}$$

$$\mu_0 M_c^2 = 2\left(1+\frac{1}{r}\right)\sqrt{\rho g \sigma} \tag{2.4}$$

Le vecteur d'onde critique de l'instabilité de Rosensweig[22] n'est autre que l'inverse de la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\sigma/\rho g}$. Il est sélectionné lors de la formation du réseau hexagonal de pics juste au-dessus du seuil, de telle sorte que la distance inter-pics d est reliée à la longueur d'onde au seuil par la relation $\lambda_c = 2\pi/k_c = \sqrt{3}/2\, d$. La prédiction de la géométrie du réseau est hors du champ de l'analyse linéaire, et sans entrer dans des détails qui nous éloigneraient trop de notre sujet, citons à ce propos les travaux d'analyse non-linéaire de Gailitis [44], Brancher [21] et de Twombly & Thomas [129] qui chacun explorèrent la nature de la transition vers le réseau hexagonal. Pour des champs encore plus élevés, le réseau hexagonal est susceptible[23] de se transformer en un réseau carré [2, 4, 31].

L'équation (2.4) donne la valeur critique de l'aimantation, c'est-à-dire la plus faible valeur de l'aimantation pour laquelle l'instabilité de pics peut être observée[1,24]. On le remarque : l'aimantation et non le champ extérieur contrôle le déclenchement de l'instabilité de Rosensweig ; la valeur de r influe peu puisqu'une modification de la perméabilité relative ne fait qu'au plus varier l'aimantation au seuil d'un facteur $\sqrt{2}$.

A-dimensionnalisation de la relation de dispersion

Il est possible d'«a-dimensionnaliser» cette relation de dispersion en fonction des paramètres critiques que l'on vient de calculer (éq. (2.3) et (2.4)). Nous introduisons de plus une pulsation caractéristique ω_c qui est la

22. C'est aussi, par exemple, le vecteur d'onde critique de l'instabilité de Rayleigh-Taylor [126].

23. Sans qu'on en connaisse encore la cause, pour certains ferrofluides le réseau carré n'apparaît pas, aussi fort que le champ puisse être.

24. Récemment E. Dubois et R. Massart du Laboratoire des Colloïdes et Interfaces Chargées de l'Université Paris 6 ont synthétisé un fluide magnétique conducteur, une suspension colloïdale de particules de fer dans du mercure [37]. Le champ d'applications d'un tel ferrofluide est *a priori* très large, et concerne plus particulièrement la magnéto-hydrodynamique. Cependant il paraît difficile en l'état actuel des choses de pouvoir observer l'instabilité de Rosensweig avec un tel matériau. La fraction volumique du fer maximale atteinte est de 2 % ; sachant que l'aimantation à saturation du fer est d'environ 1,5 10^6 A/m, l'aimantation à saturation de ce ferrofluide est au mieux de $M \approx 3\ 10^4$ A/m. Or avec $\rho = 13\,500$ kg/m^3 et $\sigma = 435$ mN/m [131], $M_c \approx 2{,}7\ 10^4$ A/m. La réduction de ce seuil paraît ardue, à moins d'envisager des expériences en microgravité, ou à l'interface avec un liquide transparent de densité comparable.

pulsation correspondant au vecteur d'onde capillaire en absence de champ :

$$\omega_c = \sqrt[4]{\frac{4\rho g^3}{\sigma}}, \tag{2.5}$$

et un champ magnétique critique H_c défini[25] comme le champ qu'il faut appliquer pour que l'aimantation du ferrofluide vaille M_c. Ce champ n'est bien sûr pas défini dans le cas où l'aimantation à saturation du ferrofluide M_s est inférieure à M_c. La relation de dispersion (2.1) s'écrit alors :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k_c} + \left(\frac{k}{k_c}\right)^3\right) - \left(\frac{H}{H_c}\right)^2 \left(\frac{k}{k_c}\right)^2. \tag{2.6}$$

Cette relation de dispersion est représentée figure 2.6 pour différents champs magnétiques.

Non-monotonicité de la relation de dispersion

Cette relation de dispersion présente une particularité remarquable : il est possible de définir un autre champ critique H^*, plus petit que H_c, au-dessus duquel la courbe de dispersion n'est plus monotone (cf. figure 2.6). Au-delà de ce seuil, les ondes sont toujours stables mais la courbe $\omega(k)$ présente un minimum de telle sorte que la vitesse de groupe

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \tag{2.7}$$

peut être négative ; en principe trois nombres d'onde peuvent êtres choisis pour une fréquence particulière[26]. Cet effet a des conséquences intéressantes en ce qui concerne l'instabilité de Faraday (cf. notes 9 et 10 du bas de la page 23).

Par définition, pour un champ H^*, la courbe de dispersion admet un point d'inflexion :

$$\begin{aligned} \partial\omega^2/\partial k &= 0 \\ \partial^2\omega^2/\partial k^2 &= 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

ce qui conduit après remplacement dans (2.6) à

$$H^* = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\, H_c \approx 0{,}93\, H_c. \tag{2.9}$$

25. Le calcul de H_c à partir de M_c et de la courbe d'aimantation est détaillé section 2.2.3.

26. Il existe une analogie entre le minimum secondaire de cette relation de dispersion et le minimum associé aux rotons dans le spectre énergétique de l'hélium superfluide [71].

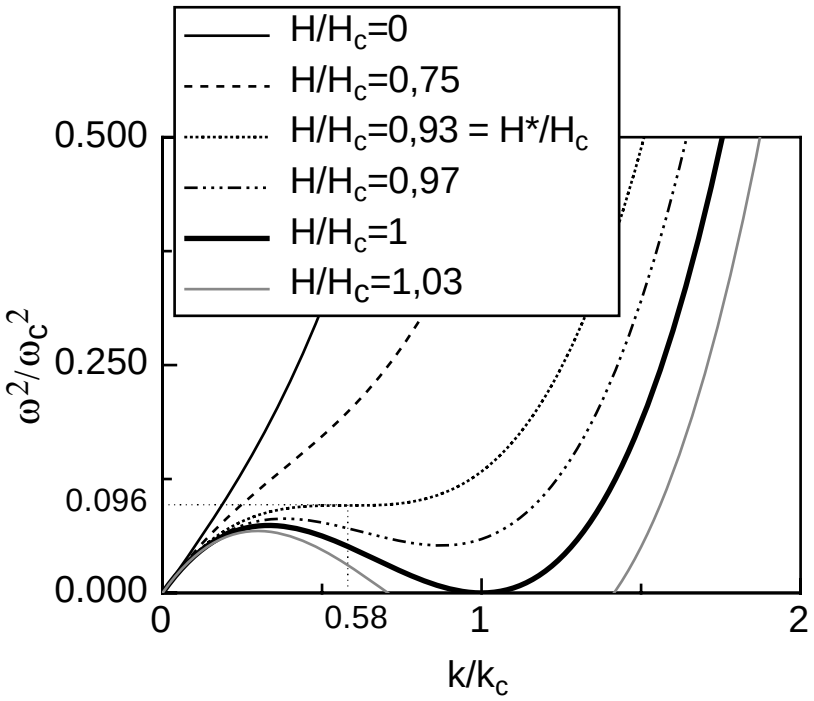


FIG. 2.6 – *Relation de dispersion pour un ferrofluide non visqueux dans la limite d'une épaisseur infinie. H_c représente le champ critique de l'instabilité de pics ; ω_c est la pulsation à la longueur d'onde capillaire en l'absence de champ magnétique ; k_c le vecteur d'onde capillaire. Les courbes ne sont plus monotones si $H > H^* = 0{,}93\, H_c$. Lorsque $H > H_c$, ω^2 est négatif pour certaines valeurs de k. Les ondes sont alors amplifiées exponentiellement dans le temps.*

Soient k^* et ω^* les coordonnées de ce point d'inflexion :

$$\frac{k^*}{k_c} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58, \tag{2.10}$$

$$\frac{\omega^{*2}}{\omega_c^2} = \frac{\sqrt{3}}{18} \approx 0{,}096. \tag{2.11}$$

Dans un premier temps, nous avions envisagé d'observer directement les conséquences d'une telle caractéristique sur le comportement d'un paquet quasi-gaussien d'ondes de surface. Cependant il faut travailler à $\omega \approx 0{,}2\,\omega_c$ et $k \approx 0{,}6\,k_c$ (cf. figure 2.6) ce qui correspond, avec les ferrofluides dont nous disposons (cf. section 2.3.1), à une fréquence d'environ 3 Hz et à une longueur d'onde d'environ 2 cm. Pour obtenir un paquet d'ondes dont la fréquence est bien définie (disons à 10% près), il faut s'assurer qu'il contienne au moins 10 périodes spatiales. Il faut donc étudier la propagation de paquets d'ondes

d'au moins 20 cm de longueur ce qui, outre des quantités très importantes de ferrofluide, exigerait des champs magnétiques homogènes sur des distances de l'ordre du mètre.

Voilà pourquoi nous avons plutôt cherché à observer expérimentalement la dispersion non-monotone en utilisant des ondes quasi-sinusoïdales, monochromatiques.

2.2.3 Expression de la relation de dispersion

La relation de dispersion est dérivée complètement à l'annexe A dans le cas d'un ferrofluide non-visqueux :

$$\omega^2 = \frac{\tanh(kh)}{\rho}\left(\rho g k + \sigma k^3 - \mu_0 M^2 k^2 \frac{r}{r+1}\left(\frac{1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)\exp(-2skh)}{1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2\exp(-2skh)}\right)\right), \tag{2.12}$$

où, rappelons-le, ω est la pulsation, k le module du vecteur d'onde, h l'épaisseur de la couche de ferrofluide, ρ sa densité, σ sa tension superficielle, M son aimantation et μ_0 la perméabilité du vide. La grandeur r est une perméabilité relative composite :

$$r = \sqrt{\left(1+\frac{M(H^i)}{H^i}\right)\left(1+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H}(H^i)\right)}, \tag{2.13}$$

quant à s il s'agit d'une mesure de la non-linéarité de la courbe d'aimantation :

$$s = \sqrt{\frac{1+\frac{M(H^i)}{H^i}}{1+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H}(H^i)}} \tag{2.14}$$

Il est possible d'obtenir l'aimantation M ainsi que r et s en fonction du champ extérieur H^e appliqué. Pour ce faire, on calcule[27] dans un premier temps le champ H^i à l'intérieur du ferrofluide en résolvant l'équation implicite suivante :

$$H^e = M(H^i) + H^i. \tag{2.15}$$

De la valeur de H^i, on déduit les grandeurs M, r et s.

Dans le cas où la susceptibilité magnétique est supposée constante[28],

$$M = \chi H^i \Rightarrow H^e = (\chi+1)H^i \Rightarrow M = \frac{\chi}{1+\chi}H^e; \tag{2.16}$$

si de plus la longueur d'onde λ est petite comparée à l'épaisseur h de la couche de ferrofluide, c'est-à-dire si $kh \gg 1$, on retrouve la formulation

27. Remarquer que la composante normale de $\vec{B}$ est continue à l'interface : $B^i = B^e$.
28. La courbe d'aimantation est alors linéaire.

proposée par Rosensweig [110] qui décrit le régime asymptotique en profondeur infinie :

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{\mu_0 H^{e2} k^2}{\rho} \left(\frac{\chi^2}{(\chi+1)(\chi+2)} \right). \tag{2.17}$$

Le champ magnétique appliqué au seuil de l'instabilité vaut alors :

$$H_c^e = \sqrt{\frac{2(1+\chi)(2+\chi)}{\mu_0 \chi^2}} \sqrt[4]{\rho g \sigma}. \tag{2.18}$$

2.2.4 Domaine de validité

Deux approximations importantes permettent d'appliquer à nos expériences la relation de dispersion (2.12).

Viscosité

Tous les fluides sont visqueux. Pour quantifier les effets de la viscosité, il est possible de définir deux nombres de Reynolds [1], basés soit sur la profondeur de la couche de fluide, soit sur la longueur d'onde :

$$Re = \frac{\omega h^2}{\nu} \tag{2.19}$$

$$\text{ou } Re = \frac{\omega}{\nu k^2} \tag{2.20}$$

La première équation s'apparente à l'évaluation de l'épaisseur de la couche-limite qui se forme en bas du récipient ; la seconde à l'épaisseur de la couche-limite au voisinage de l'interface. Cette dernière se développe parce que le cisaillement doit d'être nul à l'interface[29]. L'influence de la viscosité sur l'écoulement engendré par les ondes de surface est négligeable pourvu que le nombre de Reynolds soit supérieur à 20 environ [78]. Ceci conduit à deux conditions sur la pulsation ω, pour des longueurs d'onde courtes et longues :

$$\omega > \sup \left(20\frac{\nu}{h^2}, 20\nu k^2 \right) \tag{2.21}$$

Ces confditions sont toujours satisfaites dans nos expériences.

Effets de la géométrie

L'expérience de propagation d'ondes de surface est réalisée en géométrie cylindrique (cf. section 2.3.3) ; les ondes produites sont concentriques. Or la dérivation de l'équation de dispersion a été effectuée en supposant les ondes

29. Le champ magnétique n'introduit que des contraintes normales, et l'air au-dessus du fluide n'oppose pas de résistance aux efforts de cisaillement.

planes. Tant que la longueur d'onde observée est petite devant le rayon du récipient contenant le ferrofluide, il est possible de négliger les effets de la géométrie. Mais, pour des ondes plus longues, il est difficile d'en faire abstraction.

La fonction J_0 de Bessel fonde[30] la solution stationnaire de l'équation d'ondes de gravité pures en géométrie cylindrique [63, 94]. Les crêtes successives d'une onde concentrique, ainsi que son profil, sont représentées figure 2.7.

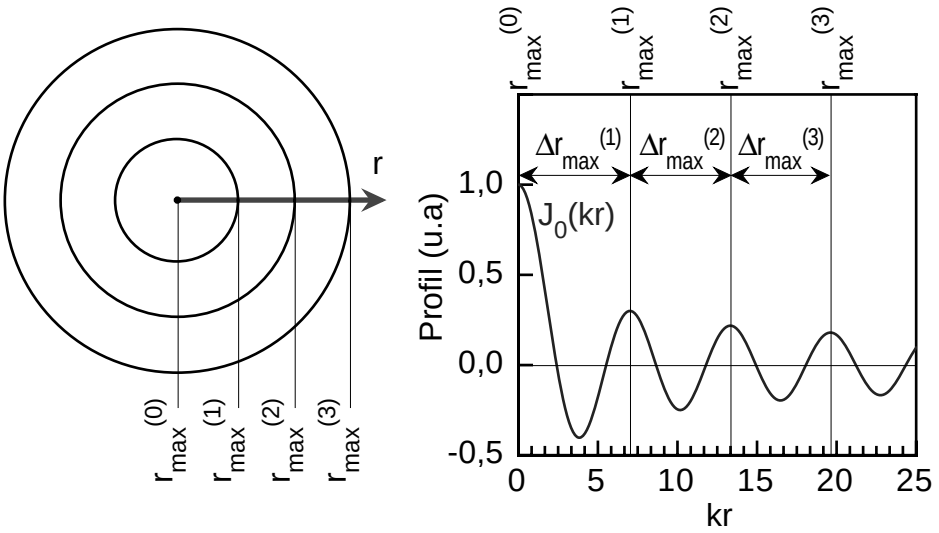


FIG. 2.7 – *Représentation d'une onde cylindrique stationnaire de gravité (à gauche), et son profil (à droite). La distance Δr_{max} entre deux crêtes consécutives est d'autant plus proche de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ que le rayon r est grand devant celle-ci.*

Dans le cas d'ondes planes, la distance entre deux crêtes est assimilée à la longueur d'onde. Cependant, pour les ondes concentriques, cette distance (que nous noterons Δr_{max}) n'est pas constante ; elle tend vers la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ à mesure que l'on s'éloigne du centre de symétrie. Une estimation quantitative de l'erreur commise dans l'évaluation de cette longueur d'onde est donc fournie par l'évaluation[31] des maximums successifs de la fonction $J_0(kr)$. Comme on le constate dans la table 2.1, l'erreur est infime dès que l'on observe plus de deux «anneaux» concentriques.

Pour effectuer des mesures correctes de longueur d'onde, il faut donc que celle-ci soit inférieure à la moitié du rayon du récipient :

$$\lambda < R/2. \tag{2.22}$$

30. On trouve dans Paterson [94, p. 312] une introduction lumineuse aux fonctions de Bessel.

31. Communication privée de A. Lange.

TAB. 2.1 – *Position r_{max} des maximums de la fonction $J_0(kr)$ en fonction du vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$; leurs écarts successifs Δr_{max} et son ratio à λ qui mesure de l'effet de la géométrie.*

Maximum	r_{max}	Δr_{max}	$\Delta r_{max}/\lambda$
n° 1	0		
n° 2	$7{,}015/k$	$7{,}015/k$	1,11
n° 3	$13{,}324/k$	$6{,}308/k$	1,04
n° 4	$19{,}616/k$	$6{,}292/k$	1,014

Dans le cas contraire, on risque de surestimer la longueur d'onde (d'environ 11%, cf. table 2.1), ou inversement de sous-estimer le vecteur d'onde. Dans nos expériences, le rayon du récipent vaut $R = 9{,}6$ cm ; les longueurs d'ondes sont correctement mesurées si elles sont inférieures à 4,8 cm, ce qui correspond à un vecteur d'onde minimal de 1,31 cm^{-1}.

Le calcul complet de l'équation de dispersion en géométrie cylindrique est encore absent de la littérature ; il permettrait peut-être de comprendre l'effet que peuvent produire les perturbations non-périodiques du champ magnétique.

2.3 Mise en œuvre expérimentale

Nous avons utilisé un ferrofluide synthétisé selon la méthode de Massart [84, 85, 64, 127] par Sophie Neveu[32] au LIIC[33]. Il s'agit d'une suspension colloïdale de particules de ferrite de cobalt dans de l'eau (référence S253).

2.3.1 Caractéristiques hydrodynamiques de l'échantillon

Densité

La densité est de $\rho = 1560$ kg/m^3 et la fraction volumique en particule correspondante est de 14 %, ce qui en fait un ferrofluide raisonnablement concentré, la fraction volumique maximale d'un ferrofluide se situant autour de 30 %.

32. E-mail : neveu@ccr.jussieu.fr
33. Cf. note 2 p. 10.

Tension superficielle

La tension de surface du ferrofluide avec l'air a été soigneusement[34] mesurée à l'aide d'un tensiomètre à anneau Krüss K10T[35]. Elle est de 71.4 mN/m à 20 °C[36]. Cette valeur, très proche de la tension de surface de l'eau pure[37], confirme que notre ferrofluide ionique ne contient pas de tensioactifs.

Valeurs critiques

En se basant sur les valeurs des deux paragraphes précédents, on trouve $k_c \approx 4{,}6$ cm^{-1}, et $\omega_c \approx 95{,}3$ rad/s. Ces valeurs, ainsi que nous le montrerons plus loin, ne sont qu'indicatives.

Viscosité

La viscosité dynamique de l'échantillon, mesurée avec un viscosimètre de Poiseuille[38], est de 10 mPa.s, ce qui conduit à une viscosité cinématique[39] de 6,4 10^{-6} m^2/s. Dans nos expériences, ainsi que nous le montrerons par la suite, les effets de la viscosité peuvent être négligés (cf. fig. 2.15 et 2.16).

2.3.2 Caractéristiques magnétiques de l'échantillon

Courbe d'aimantation

La courbe d'aimantation (figure 2.8) a été obtenue à l'aide d'un fluxmètre calibré[40]. Parce que le ferrofluide est fortement concentré et polydispersé[41], il ne se conforme pas à la loi du paramagnétisme de Langevin. Pourtant cela reste une bonne approximation dans le domaine de champ magnétique qui

34. Les récipients ont été nettoyés au mélange sulfochromique, rincés à l'eau distillée ultrapure de telle sorte qu'aucune bulle d'air ne persiste plus d'une demi-seconde à la surface [116], puis séchés dans une étuve.

35. Les mesures ont été faites à l'*Institut Curie*. Merci à Olivier Sandre pour nous y avoir guidé.

36. Toutes les expériences ont été menées entre 20 et 25 °C.

37. Les tables indiquent 72,8 mN/m à 20 °C (cf. par exemple [131]).), et nous avons personnellement mesuré 73,0 mN/m.

38. Viscosimètre de Ubbelhode avec niveau sphérique suspendu, fabriqué par Schott-Geräte et distribué en France par Ateliers Cloup s.a.r.l., 42 à 48 bd de Polangis, B.P. 60, 94502 Champigny-sur-Marne Cedex. La mesure du temps d'écoulement d'un fluide à travers un capillaire calibré permet de déduire sa viscosité dynamique.

39. Le viscosimètre est prévu pour des liquides transparents, ce que n'est pas le ferrofluide. En conséquence le repérage du ménisque dans le capillaire est difficile et soumis à erreur d'interprétation. La valeur de la viscosité indiquée ici n'est donc qu'approximative.

40. La correction du champ démagnétisant a été effectuée.

41. Toutes les particules n'ont pas *a priori* la même taille.

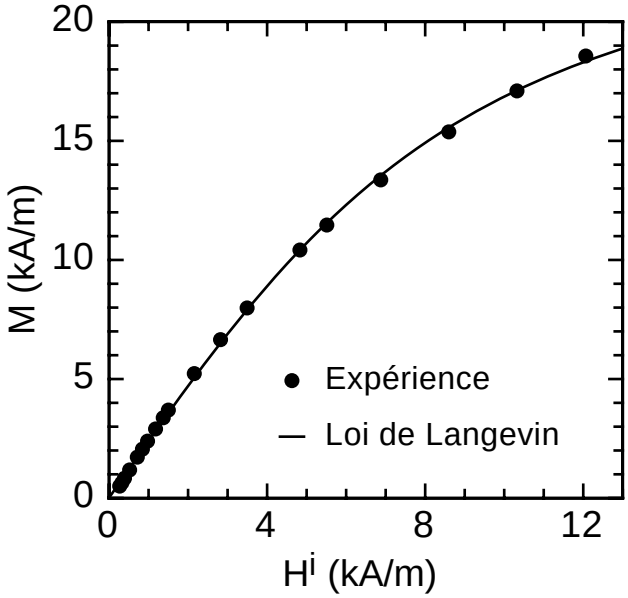


FIG. 2.8 – *Aimantation de l'échantillon de ferrofluide utilisé (S253) en fonction du champ H^i qui y règne. La courbe pleine représente l'ajustement des moindres carrés de l'équation 2.23: A_0 = 26,15 kA/m et A_1 = 3,63 kA/m.*

nous intéresse[42] :

$$M \approx A_0(\coth(H^i/A_1) - A_1/H^i). \tag{2.23}$$

Ici, H^i représente le champ qui règne à l'intérieur du ferrofluide. Il est à noter que la valeur A_0 obtenue est *a priori* différente de l'aimantation à saturation du ferrofluide; de même, la valeur A_1 n'a pas de signification physique particulière. La connaissance des paramètres d'ajustement de l'équation (2.23) à la courbe d'aimantation expérimentale (figure 2.8) permet dès lors de calculer tous les paramètres magnétiques du problème.

Perméabilités composites

La figure 2.9 représente les paramètres magnétiques intervenant dans la relation de dispersion en fonction du champ (cf. section 2.2.3). On le constate, alors que la susceptibilité $\chi \approx r - 1$ est de l'ordre de 2,3 , l'aimantation M du fluide reste inférieure au champ extérieur ($M \approx 0{,}7\ H^e$). Le ferrofluide sous champ produit un champ démagnétisant[43] dont l'effet est

42. De 0 à environ 12 kA/m, champ autour duquel l'instabilité de Rosensweig se développe.

43. De manière générale [30], le champ démagnétisant $\vec{H}_d = -D\vec{M}$ s'ajoute au champ appliqué à un matériau magnétique. D est le coefficient démagnétisant qui dépend

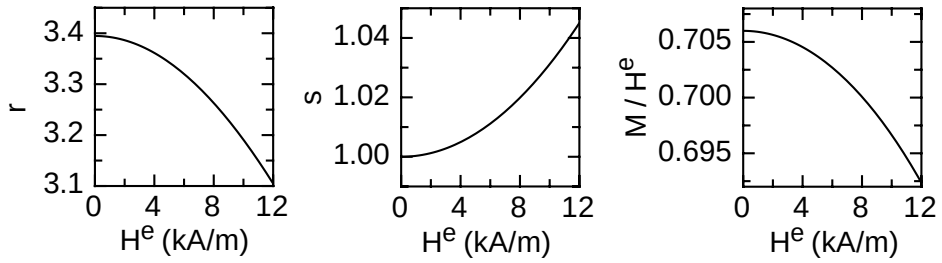


FIG. 2.9 – *Variation des paramètres magnétiques caractéristiques de l'échantillon en fonction du champ magnétique extérieur H^e appliqué; r représente une perméabilité relative composite (éq. (2.13)) et s'identifie avec la perméabilité relative pour un matériau magnétique linéaire ; s (éq. (2.14)) est une mesure de la non-linéarité de la courbe d'aimantation ($s = 1$ si celle-ci est linéaire) ; M est l'aimantation du ferrofluide.*

de diminuer le champ H^i qui règne en son sein. Ici, puisque la composante normale de l'induction $\vec{B}$ est conservée à la traversée de l'interface, $\mu_0 H^e = \mu_0(H^i + M)$, et donc $H^i = H^e - M$. C'est pourquoi la non-linéarité de la courbe d'aimantation tarde à se faire sentir. Au moins pour des ferrofluides suffisamment magnétiques, l'hypothèse d'une perméabilité constante reste correcte.

Une autre manière de quantifier ces effets consiste à introduire une susceptibilité effective χ^{eff}, calculée de telle sorte que le terme magnétique de l'équation (2.17) (où l'on néglige la non-linéarité de la courbe d'aimantation) soit égal au terme magnétique de l'équation (2.12) (où l'on ne néglige rien). La figure 2.10 montre que sa valeur est *quasiment* indépendante du champ magnétique ce qui justifie *a posteriori* l'utilisation d'un terme magnétique dans lequel la susceptibilité serait constante. D'un autre côté, on constate que la dépendance du terme magnétique avec l'épaisseur h de la couche ne peut être omise.

2.3.3 Montage expérimental

Le schéma de l'expérience est donné figure 2.11. Un récipient cylindrique de *Téflon*® d'un diamètre de 19,2 cm contient le ferrofluide. Ce matériau a été choisi car il est relativement peu mouillant, l'angle de contact à la ligne triple valant quelques dizaines de degrés. Un récipient de verre serait peu adapté car les ferrofluides à base d'eau mouillent totalement le verre, et ont une fâcheuse tendance à sécher sur les bords. Du poids du ferrofluide dans

exclusivement de la géométrie du système. Dans le cas d'un ellipsoïde ou de ses formes dégénérées (plan, cylindre...), D est un tenseur symétrique qui ne dépend pas des coordonnées spatiales ; ses vecteurs propres sont colinéaires aux axes de symétrie du système ; sa trace vaut un.

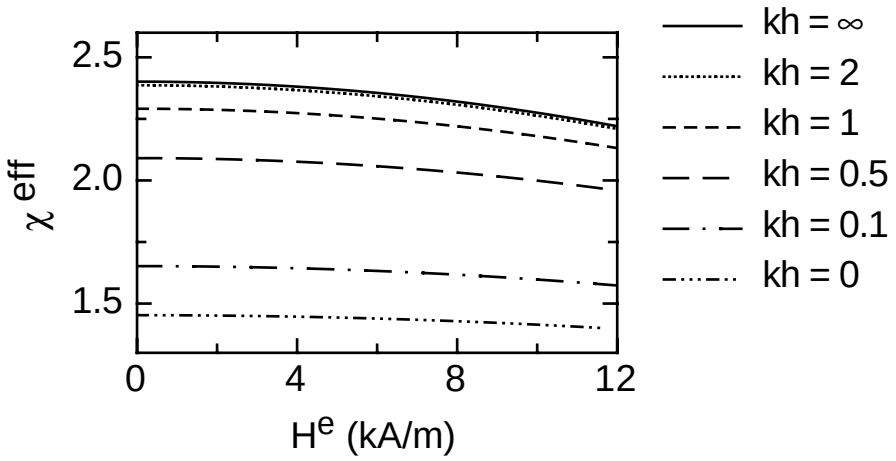


FIG. 2.10 – *Perméabilité magnétique effective χ^{eff} en fonction du champ extérieur H^e pour différents vecteurs d'ondes a-dimensionnels kh. La limite $kh \longrightarrow \infty$ est communément appelée «approximation en eau profonde» ; la limite $kh \longrightarrow \infty$ est appelée «limite aux grandes longueurs d'ondes».*

le récipient, on déduit l'épaisseur moyenne de la couche : $h = 4{,}35$ mm.

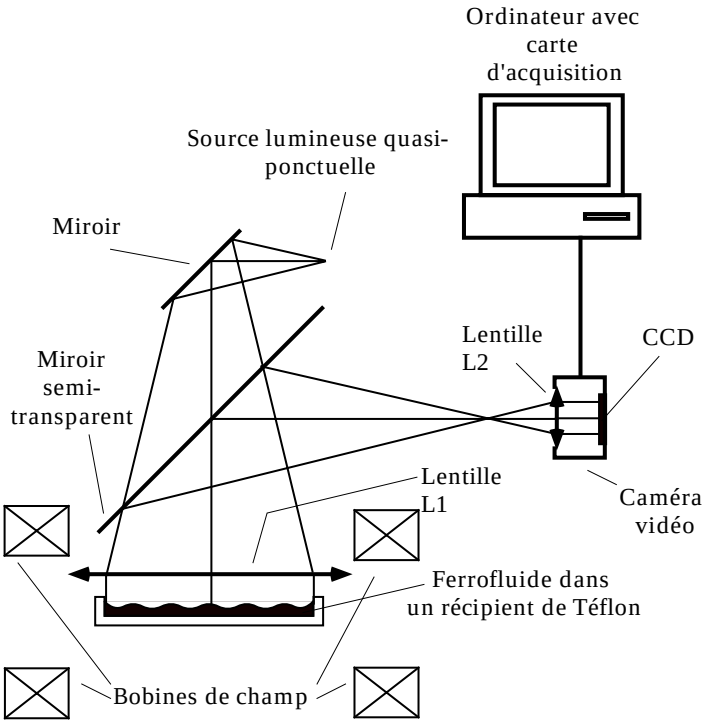


FIG. 2.11 – *Schéma expérimental.*

Ce récipient est placé entre deux bobines horizontales (diamètre interne de 25 cm, externe de 50 cm et épaisseur de 11 cm). Elles produisent un champ magnétique statique vertical et sont séparées de 6,5 cm de telle sorte que l'homogénéité du champ soit supérieure à 99 %. Cette position n'est *pas* celle de Helmholtz[44] : en effet ce qui importe n'est pas l'homogénéité du champ sur un axe vertical mais plutôt sur le plan horizontal de la surface libre du ferrofluide. Le courant des bobines est produit par un générateur de courant[45] commandé analogiquement par un générateur BF. Le champ des bobines est une fonction linéaire du courant qui les traverse. La constante de proportionnalité a été mesurée une fois pour toute à l'aide d'un gaussmètre. Ainsi, tout au long de nos expériences, nous avons pu mesurer le champ avec un ampèremètre.

La visualisation des ondes est assurée par une méthode ombroscopique et leur production par une modulation du champ, ainsi que cela est détaillé dans les deux sections suivantes. La caméra est reliée à un ordinateur muni d'une carte d'acquisition[46] à fin de traitement de l'image[47].

2.3.4 Visualisation par ombroscopie[48]

Si l'on veut détecter des ondes de surface linéaires[49] il faut employer une méthode particulièrement sensible.

La visualisation directe de l'interface par une caméra ne donne pas de résultats probants tant que l'amplitude des ondes ne dépasse pas quelques millimètres. La configuration de la source de lumière est par ailleurs très critique : il semble que la meilleure consiste en un anneau éclairant[50] placé autour de l'objectif d'une caméra, elle-même à la verticale du récipient.

D'un autre côté, l'ombroscopie est particulièrement bien adaptée à la détection de déformations de surface de faibles amplitudes. Son invention est habituellement attribuée à Dvorak (1880) qui fut un collaborateur de E. Mach [25]. Il s'agit tout simplement d'un dispositif afocal : l'échantillon à tester est éclairé par un faisceau de lumière parallèle. Dans la mesure où l'échantillon est optiquement neutre, le faisceau ressort parallèle. En revanche, s'il existe à l'intérieur de l'échantillon des gradients d'indice de réfraction (ou autres) modifiant le trajet des rayons lumineux, on obtient à la

44. Dans la configuration de Helmholtz la distance entre les bobines est sensiblement égale à leur rayon.

45. Un double merci à Jacques Servais, électronicien et pour l'occasion électrotechnicien émérite.

46. Macintosh 8500/150 AV.

47. Logiciel NIH Image avec extensions pour diagrammes spatio-temporels gracieusement fournies par O. Cardoso http://www.lps.ens.fr/ ~cardoso.

48. Merci à Olivier Cardoso pour l'idée, la mise en œuvre et la documentation concernant l'ombroscopie.

49. Leur amplitude est très inférieure à la longueur d'onde

50. Un tube fluorescent ou une lampe de forme torique convient [14], mais un anneau d'une centaine de diodes électroluminescentes (LED) semble encore mieux adapté [74].

sortie de l'échantillon des zones où les rayons lumineux sont soit concentrés, soit dispersés. C'est une méthode classique de visualisation des écoulements, par exemple pour la visualisation d'ondes de chocs, ou la visualisation de températures : ainsi l'instabilité de Rayleigh-Bénard peut-elle être observée [103] puisque l'indice de réfraction est une fonction de la température. De même, une onde acoustique stationnaire dans une cuve d'eau est très aisément visualisée [112]. Dans notre expérience, les rayons incidents sont réfléchis par la surface et leur déviation est représentative des ondes de surface.

Le montage optique est représenté figure 2.12. La surface du ferrofluide

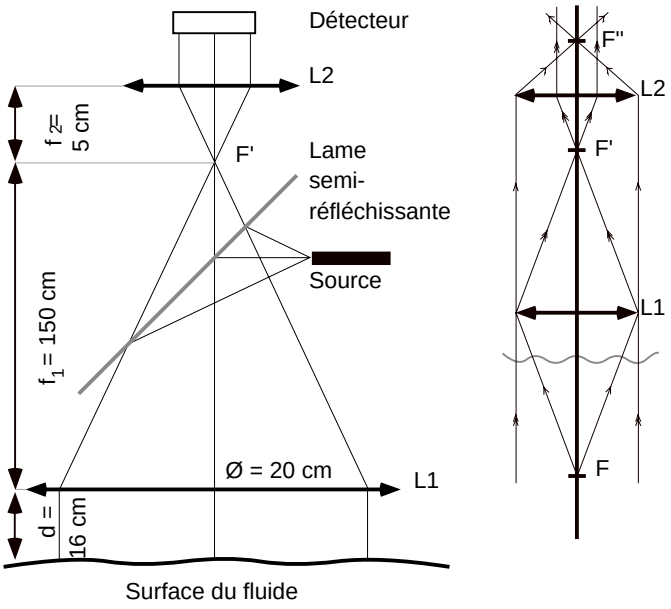


FIG. 2.12 – *Schématisation de la détection ombroscopique. Pour les besoins de la repésentation, le schéma n'est pas à l'échelle. Les dimensions ainsi que le placement de la source sont précisés à gauche, et à droite le trajet des rayons lumineux.*

est illuminée par un faisceau de lumière parallèle issue d'une source ponctuelle placé à la distance focale f_1 de la lentille L1. Les rayons non déviés issus de la surface sont focalisés en un point lui-même foyer objet d'une lentille L2 de focale f_2. Une lame semi-réfléchissante est interposée de façon à placer la source en dehors du trajet des rayons lumineux. Un capteur CCD permet de recueillir le faisceau.

Les crêtes et les creux de l'interface libre du fluide agissent comme autant de lentilles convergentes et divergentes. Comme elles sont éclairées

en lumière parallèle, elles créent des objets éloignés[51] *virtuels* au-dessus et au-dessous de la surface du fluide. Le système des deux lentilles, comparable à une lunette astronomique, permet l'observation de ces sources dans un plan proche du plan focal de L2. Pour préciser les choses introduisons F le foyer objet de L1, F' le foyer image de L1 et le foyer objet de L2, et enfin F" le foyer image de L2 (cf. figure. 2.12). Soit M un quelconque point source, M' son image par L1 et M" son image par L2. Le grandissement γ du système, comme on peut le constater dans la figure. 2.12, est égal au rapport des deux focales, soit $\gamma = -f_2/f_1$. La formule de Newton pour les lentilles minces s'écrit :

$$\overline{MF}.\overline{MF'} = -f_1^2 \quad \text{et} \quad \overline{MF'}.\overline{MF''} = -f_2^2, \tag{2.24}$$

et donc :

$$\overline{F''M''} = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \overline{FM}. \tag{2.25}$$

Un faible déplacement du détecteur joue donc énormément sur la position du plan observé, et ce d'autant que f_2 est plus grand que f_1.

Si on effectue les observations dans le plan focal image de la surface du fluide, on forme une image parfaite de celle-ci mais on perd l'information sur la courbure locale : l'image des lentilles équivalentes à la déformation est dans le plan d'observation. Autrement dit, les contributions des lentilles convergentes et divergentes se compensent exactement.

A l'inverse, dans un des plans focaux des images des sources virtuelles[52], l'image de la surface est extrêmement floue. Il est impossible d'y localiser les ondes et d'y faire une quelconque mesure.

C'est pourquoi on opère un compromis et on focalise le système légèrement au-dessus (ou au-dessous) de la surface du fluide, afin d'observer simultanément la surface du fluide et ses variations de courbure. La figure 2.13 présente des instantanés typiques d'ondes de surface obtenus avec le dispositif ombroscopique.

Dans ces conditions pratiques, on peut estimer que le rayon de courbure minimal observable R est du même ordre que la focale f_1 de la lentille L1. La courbure d'une sinusoïde $z = a \sin kx$ représentant l'onde vaut[53] $\gamma = 1/R = -ak^2 \sin kx$. L'amplitude minimale detectable vaut donc approximativement $\lambda^2/(4\pi^2 f_1)$. Ici, avec $\lambda \approx 4$ cm et $f_1 = 150$ cm, une amplitude de 30 μm est détectable. La niveau de sensibilité de la détection est tel qu'il était possible de déceler les ondes produites par les pas d'une personne marchant à quelques mètres de l'expérience.

Expérimentalement, le point source est réalisé en utilisant un illuminateur à fibre optique[54] éclairant un diaphragme de quelques dixièmes de

51. La courbure de la surface est d'autant plus faible que l'amplitude de l'onde est petite.
52. Elles sont issues des lentilles équivalentes convergentes *ou bien* divergentes.
53. On suppose que son amplitude a est petite devant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.
54. Illuminateur FORT, modèle GLI 150, lampe halogène de 150 W.

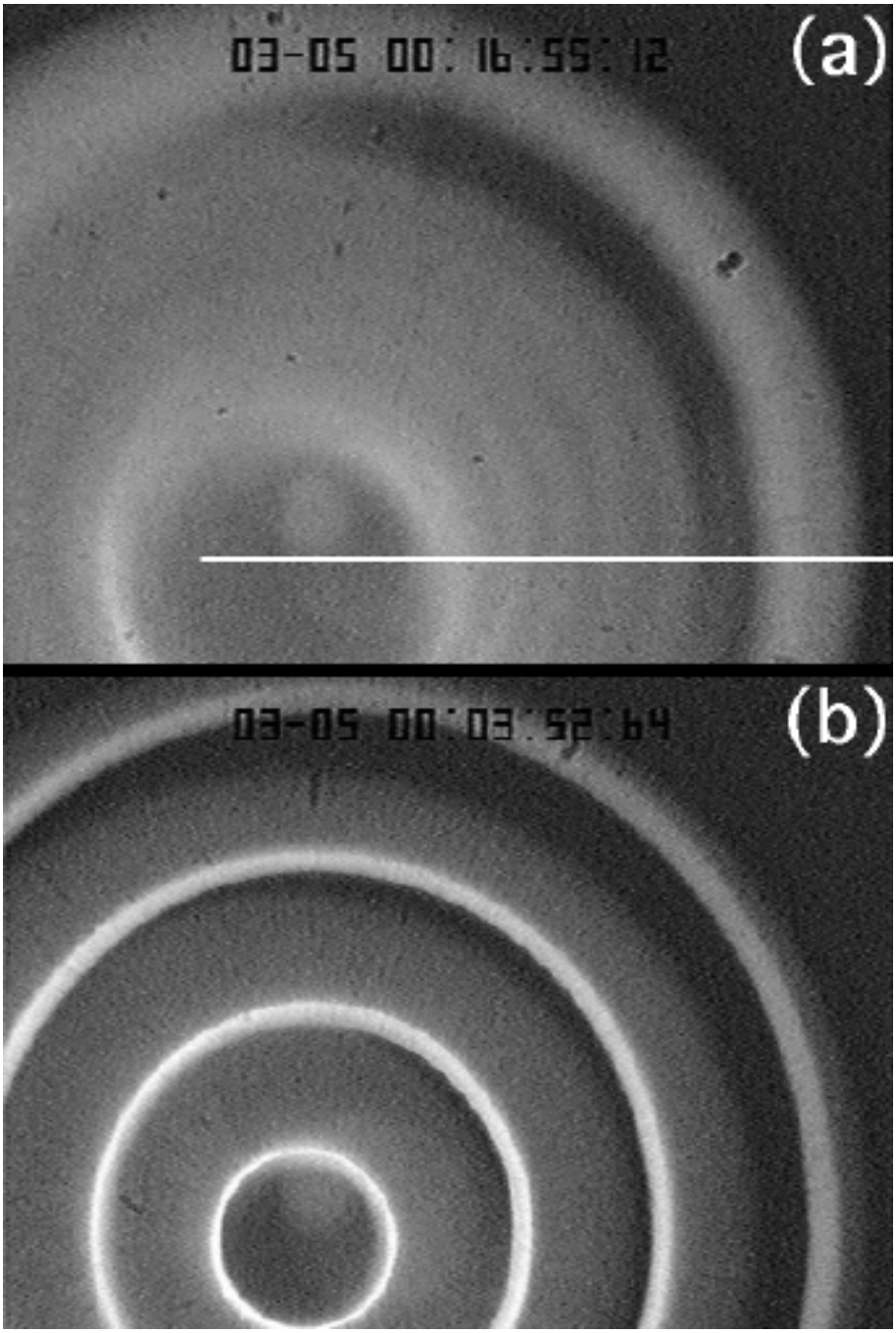


FIG. 2.13 – *(a) Instantané d'une onde progressive à 4 Hz sous un champ magnétique égal à 0,48 H_c. (b) Instantanné d'une onde progressive à 7 Hz sous un champ magnétique égal à 0,64 H_c. Le trait blanc, long de 9,6 cm, non seulement fixe l'échelle mais encore représente la coupe à partir de laquelle sont extraits les diagrammes spatio-temporels (fig. 2.14).*

millimètre de diamètre. La lentille L1 doit avoir un diamètre au moins égal à celui du récipient de fluide à observer ce qui impose sa focale (150 cm) afin d'éviter les aberrations sphériques. Une focale plus longue eût impliqué l'utilisation d'un espace considérablement plus grand. Quant à la lentille L2, il s'agit tout simplement d'un objectif d'appareil photographique[55] monté sur la caméra CCD à notre disposition[56].

Signalons pour conclure que très récemment [107] a été proposée une mesure de la position de la surface en utilisant une méthode de tomographie à rayons X. Cette technique, bien que lourde à mettre en œuvre[57] semble ouvrir des perspectives très séduisantes puisqu'il sera ainsi possible de connaître très précisément l'amplitude et le profil des ondes de surface.

2.3.5 Production d'ondes de surface

La première technique utilisée pour produire des ondes de surface consiste à exploiter les propriétés magnétiques du fluide et à utiliser une perturbation locale oscillante du champ magnétique; une petite bobine placée sous le récipient de ferrofluide convient parfaitement. Malheureusement il est très difficile d'exciter ainsi des ondes dont la longueur d'onde est très différente de la taille de la bobine (environ 2 cm de diamètre). Le même problème se poserait si l'on utilisait un petit aimant vibrant sous la surface.

Une autre méthode pour produire des ondes consiste à exciter périodiquement la surface du ferrofluide avec une pointe actionnée par un pot vibrant. De la même façon un petit haut-parleur pourrait être utilisé a cet effet [82]. Bien que ce procédé soit bien adapté aux hautes fréquences, il est difficile de produire des longueurs d'ondes supérieures à 2 cm.

Si on module légèrement le champ magnétique vertical appliqué, on constate que des ondes concentriques sont émises par les bords du récipient. La modulation du champ est susceptible de changer le niveau du ménisque parce que des gradients de champ magnétique sont présents sur les bords. La figure 2.14 représente le diagramme spatio-temporel de telles ondes. A cause de la dissipation visqueuse[58], ce sont bien des ondes progressives qui sont observées, excepté au voisinage du centre du récipient où l'onde est stationnaire. L'émission d'ondes par les bords est un effet très gênant pour étudier l'instabilité de Faraday : elle facilite *a priori* l'apparition de

55. Objectif Pentax 28 mm ouvrant à 2,8.

56. La position de la cellule CCD pouvait être chariotée indépendamment de la position de l'objectif grâce à une vis qui permet de régler le type de monture (C ou CS) de l'objectif.

57. Elle requiert une source X placée au-dessous de la surface du ferrofluide, et à grande distance devant le diamètre du récipient de façon à obtenir un faisceau quasi-parallèle. Un écran luminescent sensible aux rayons X, placé au-dessus du récipient, est filmé avec une caméra CCD ordinaire.

58. L'amortissement des ondes par la viscosité est un effet du premier ordre tandis que les effets de la viscosité sur la fréquence sont du second ordre [63].

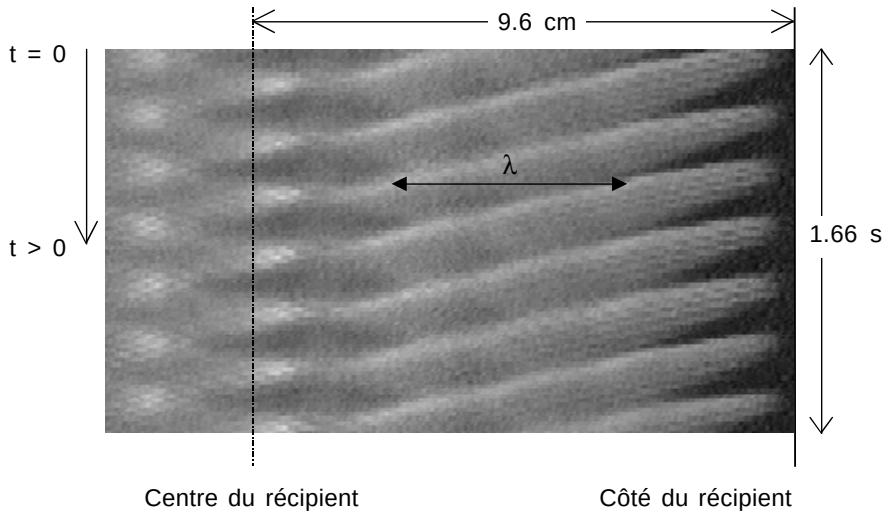


FIG. 2.14 – *Diagramme spatio-temporel d'une onde de surface. La fréquence est de 4 Hz et le champ vaut* $H = 0{,}48\,H_c$. *Chaque ligne horizontale de ce diagramme représente une coupe diamétrale de la surface à un temps donné (cf. fig. 2.13). Les niveaux de gris codent la hauteur de l'interface : le blanc représente les crêtes et le noir les creux. La longueur d'onde* λ *est représentée. L'onde est stationnaire au centre ; le taux d'onde stationnaire (T.O.S) décroît rapidement avec la distance au centre de la cuve ; à proximité du bord extérieur l'onde est purement progressive.*

la résonance harmonique au lieu de la résonance subharmonique habituelle [14].

Cette méthode est fiable pour produire des ondes dans le domaine de fréquence qui nous intéresse (3-25 Hz). La composante alternative du champ est fixée à 0,5 % du champ-seuil H_c. Il est donc difficile d'extrapoler les résultats pour des champs inférieurs à 0,1 H_c puisque le taux d'ondulation serait alors supérieur à 5 %.

Les trois méthodes présentées ici donnent des résultats similaires dans les domaines de fréquences *ad hoc*. Nous avons cependant préféré utiliser exclusivement la modulation de champ puisque c'est elle qui fonctionne dans le domaine de fréquence le plus élargi.

2.4 Résultats

2.4.1 Modes de représentation

Afin de rendre compte des résultats expérimentaux, nous relevons deux coupes dans l'espace des paramètres (k,ω,$\mu_0 H^2$) — cf. figure 2.15 et 2.16 (page 47). La tension superficielle σ est le seul paramètre qu'on fasse varier

pour ajuster les courbes aux points expérimentaux. Cette grandeur est en effet extrêmement sensible à la présence d'impuretés en surface [32]. La valeur de tous les autres paramètres (les paramètres magnétiques, la densité et l'épaisseur de la couche de fluide) reste celle mesurée indépendamment par ailleurs (sections 2.3.1 page 34 et 2.3.2 page 35).

Sur les deux figures 2.15 et 2.16, le domaine où la viscosité ne peut être négligée (équation 2.21 page 32) est représenté en grisé sombre. Tous les points expérimentaux sont en dehors de ces domaines. Enfin, l'intervalle de nombres d'ondes où l'approximation d'onde plane n'est plus vraiment justifiée (éq.(2.22)) est représenté en gris clair. Quelques points expérimentaux se trouvent dans cette zone, et les mesures correspondantes sont à considérer avec les précautions qui s'imposent (cf. section 2.2.4).

2.4.2 $\omega^2(k,H)$

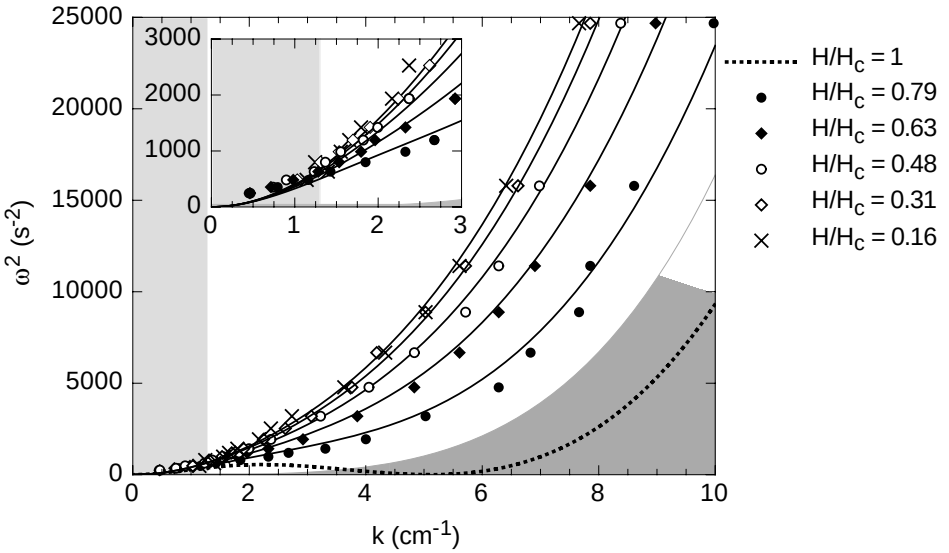


FIG. 2.15 – *Equation de dispersion expérimentale dans le plan* (k,ω^2) *pour différents champs magnétiques. Les courbes noires représentent l'équation théorique (2.12) avec une tension superficielle* $\sigma = 60$ *mN/m. La courbe en pointillés représente la relation de dispersion au champ-seuil* H_c *de l'instabilité de Rosensweig. Les parties en gris sombre et clair représentent respectivement les domaines des paramètres où les effets de la viscosité et de la géométrie cylindrique deviennent non négligeables (éq. (2.21) et (2.22)). En encart, un agrandissement de la zone des vecteurs d'ondes inférieurs à 3* cm^{-1}.

L'ajustement de tous les points expérimentaux par la méthode des

moindres carrés[59] conduit à l'évaluation d'une tension superficielle de 60 mN/m. Cette valeur est inférieure de 16 % à celle minutieusement mesurée à l'aide d'un tensiomètre à anneau (cf. section 2.3.1). La contamination de la surface par des poussières atmosphériques qui agissent comme agents tensioactifs peut expliquer un tel écart. Nous avons donc effectué une mesure complémentaire au tensiomètre, en laissant reposer le ferrofluide dans une atmosphère non purifiée[60]. Après quelques minutes, la tension de surface mesurée n'était que de 52 mN/m. Cette valeur statique est sensiblement différente du résultat obtenu lors de notre expérience de propagation d'ondes de surface : il est bien connu que les mesures dynamiques conduisent souvent à des valeurs plus élevées [3]. Pour cette raison, et puisque la tension de surface d'un fluide aqueux est extrêmement sensible à la présence d'un quelconque tensioactif[61], la mesure résultant de l'ajustement des courbes peut être considérée comme une valeur *in situ*, compatible avec les mesures au tensiomètre.

2.4.3 $\mu_0 H^2(k,\omega)$

Dans les premières expériences, le champ magnétique fut fixé à différentes valeurs et le vecteur d'onde mesuré en fonction de la fréquence. Les résultats correspondants sont présentés sur la figure 2.15. L'ajustement des courbes est satisfaisant bien qu'il soit difficile de commenter les résultats pour des nombres d'ondes inférieurs à 3 cm^{-1}. Le champ critique est estimé à partir des courbes d'ajustement. Comme nous le verrons par la suite (section 2.4.6), il est très difficile de définir une valeur précise du champ-seuil H_c avec notre système de détection ombroscopique. La valeur extrémale du ratio H/H_c est volontairement limitée à 0,79 parce qu'au-delà de ce champ, des pics se forment aux bords du récipient de ferrofluide ; pendant le temps de l'expérience, le fluide sèche dans les pics et prend peu à peu une texture grumeleuse. C'est pourquoi il est préférable de fixer la fréquence des oscillations puis de mesurer la longueur d'onde en fonction du champ statique appliqué. Les résultats correspondants sont présentés figure 2.16. Cette représentation est plus adaptée, particulièrement dans le domaine des petits vecteurs d'ondes ($k < 3$ cm). On constate ici que l'ajustement des courbes est compatible avec les données expérimentales, à l'exception de la région où la courbe de dispersion est non-monotone. Même si l'on varie les différents paramètres de la relation de dispersion, il n'est pas possible dans cette région d'ajuster courbes théoriques et points expérimentaux. Il n'est par ailleurs pas exclu que ceci soit dû à un effet de la géométrie (cf. section

59. A cet effet, nous nous sommes servi du logiciel ProFit (http://www.quansoft.com), qui fait usage de l'algorithme de Levenberg-Marquardt [99].

60. Les mesures n'ont pu être effectuées *in situ* car le tensiomètre à notre disposition se trouve à l'Institut Curie.

61. Sa concentration n'est d'ailleurs pas déterminée.

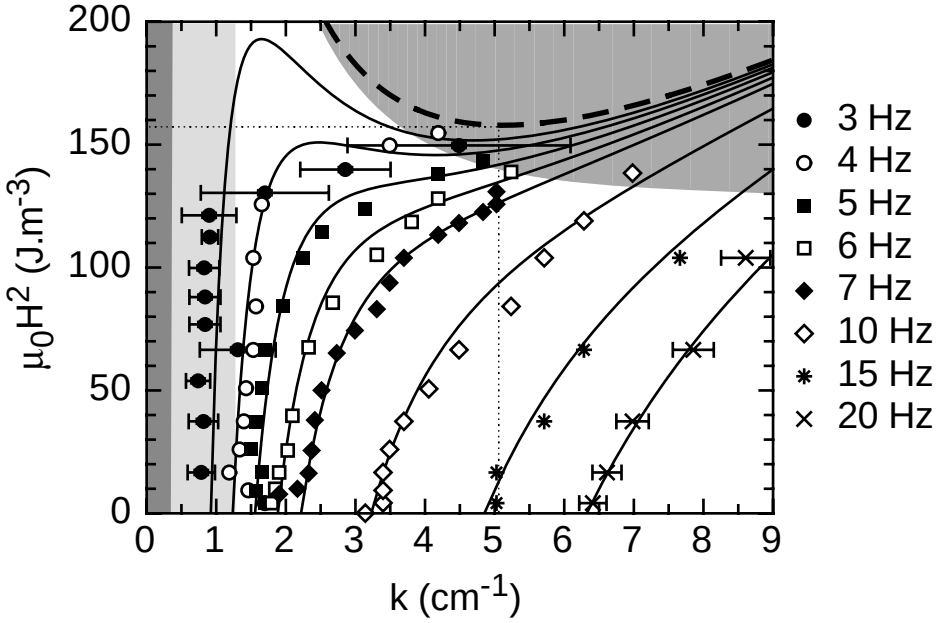


FIG. 2.16 – *Equation de dispersion expérimentale dans le plan* (k,$\mu_0 H^2$) *pour différentes fréquences temporelles. Les courbes noires représentent l'équation théorique (2.12) avec une tension superficielle* $\sigma = 60$ *mN/m. La courbe marginale de stabilité (fréquence nulle) est représentée en tirets gras. Les pointillés maigres repèrent quant à eux le minimum de la courbe marginale et indiquent les valeurs critiques* $k_c = 5{,}1$ cm^{-1} *et* $H_c = 11{,}2$ *kA/m. Les parties en gris sombre et clair représentent respectivement les domaines des paramètres où les effets de la viscosité* et *de la géométrie cylindrique deviennent non négligeables (éq. (2.21)). Pour les besoins de la représentation seules quelques barres d'erreur sont indiquées.*

2.2.4 page 32) ; il semble que l'approximation des ondes plane conduise à une sous-estimation du vecteur d'onde.

2.4.4 Déformation statique

Lorsque le champ magnétique est proche de sa valeur-seuil H_c, un motif statique circulaire inattendu se développe (figures 2.17 et 2.18), même si le champ magnétique *n'est pas* modulé.

Cette déformation commence à apparaître[62] pour un champ de l'ordre de la moitié de la valeur-seuil. Seule la précision de l'ombroscopie permet de détecter un tel phénomène. La forme de la déformation est indépendante de l'intensité du champ magnétique, seule son amplitude augmente avec le champ. Une explication possible serait que le champ magnétique effectif

62. Son amplitude excède 60 μm.

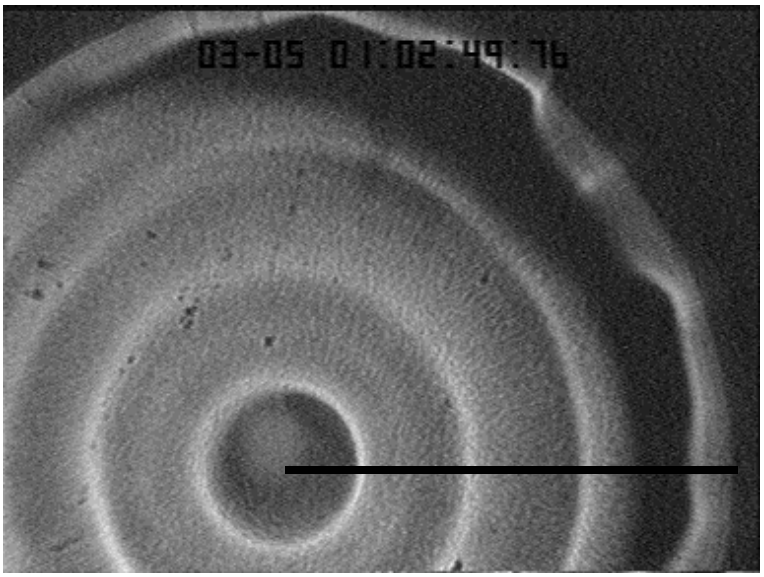


FIG. 2.17 – *Déformation statique spontanée au-dessous du champ-seuil ($H/H_c = 0{,}79$). La ligne noire représente la coupe sur laquelle les diagrammes spatio-temporels (fig. 2.18 et 2.19) ont été extraits.*

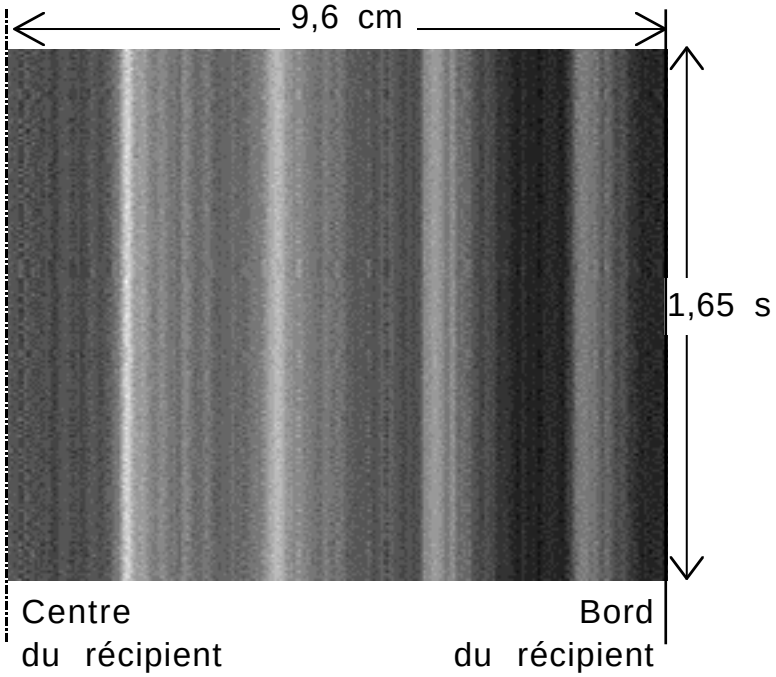


FIG. 2.18 – *Diagramme spatio-temporel de la déformation spontanée de la surface sous l'influence d'un champ magnétique sous-critique ($H/H_c = 0{,}79$). La déformation est invariante dans le temps.*

n'est pas homogène à cause de la taille finie du récipient ; le coefficient démagnétisant n'est pas rigoureusement égal à l'unité et serait une fonction oscillante de la distance au centre. On peut avancer aussi l'idée que le champ magnétique produit par les bobines est non-homogène, les variations spatiales d'intensité n'étant pas détectables avec les gaussmètres dont nous disposons. Il parait cependant peu probable que deux bobines puissent produire une telle modulation du champ en fonction de la distance au centre des bobines[63]. La géométrie cylindrique de l'expérience peut-elle avoir induit une transition imparfaite vers l'instabilité de Rosensweig ? Pas plus que les autres, cette possibilité ne peut être exclue.

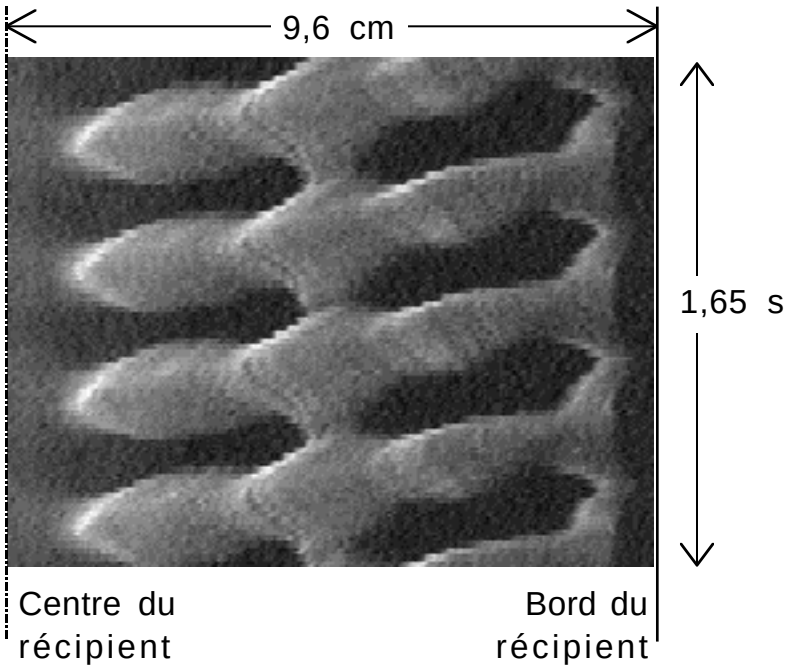


FIG. 2.19 – *Diagramme spatio-temporel d'une onde à 2,5 Hz se propageant sur la déformation statique sous-critique ($H/H_c = 0{,}79$). La mesure de la longueur d'onde est hasardeuse.*

Bien que la surface soit déformée, les ondes émises à la périphérie du récipient se propagent sur cette déformation (figure. 2.19). La mesure de la longueur d'onde est d'autant moins précise qu'elle se rapproche de la longueur caractéristique des ondulations statiques — environ 2,2 cm ce qui correspond à un vecteur d'onde de 2,8 cm^{-1}. Cette valeur est relativement proche de k^* ($k^* \approx 0{,}58\,k_c \approx 2{,}9$ cm^{-1}), ce qui peut laisser penser que ce phénomène est d'une manière ou d'une autre lié à la non-monotonicité de la

63. Une manière de s'en assurer, pensons-nous aujourd'hui, consisterait à décentrer la cuve par rapport des bobines et à voir si le centre de la déformation est translaté d'autant.

relation de dispersion. La question reste ouverte à l'heure actuelle.

2.4.5 Brisure de symétrie azimutale

Lorsque le champ magnétique est davantage augmenté ($H/H_c > 85\%$), la symétrie azimutale du système est brisée et des rides azimutales se forment à l'intérieur de chaque onde radiale émise à la périphérie (cf. figure. 2.20).

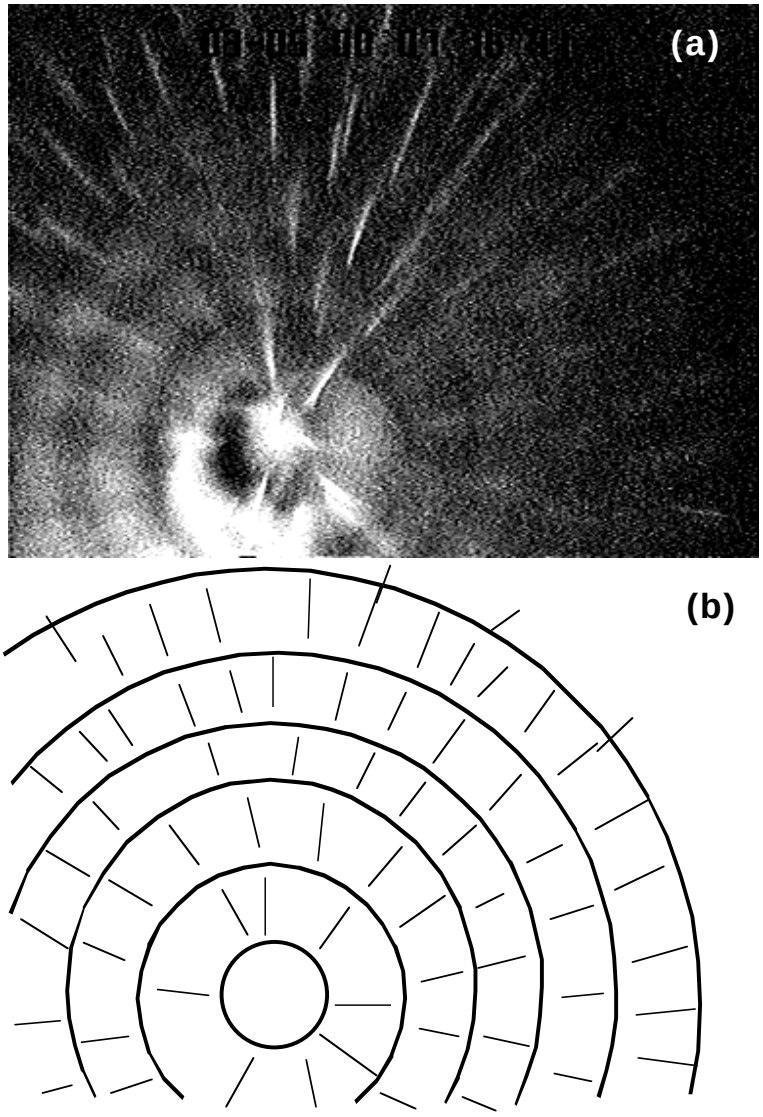


FIG. 2.20 – *Des ridules azimutales qui se développent à l'intérieur des ondes radiales émises des bords ; leur longueur d'onde caractéristique est du même ordre que celle de l'onde radiale principale ; (a) image observée, et (b) sa schématisation.*

Leur longueur caractéristique est sensiblement la même que la longueur d'onde de l'onde-mère radiale. Bien que leur propagation soit erratique, on observe que leur fréquence est la même que celle de l'onde-mère. Ainsi est-il improbable que ces ondes soient le résultat de l'instabilité de Faraday, puisque dans ce cas leur fréquence serait égale à la moitié[64] de celle de l'onde-mère radiale. Des effets de couplage non-linéaire[65] seraient probablement mieux à même d'expliquer le pourquoi de telles rides.

Une augmentation du champ induit une augmentation de l'amplitude de ces rides, si bien que lorsque le champ dépasse 95 % de la valeur-seuil, l'amplitude des rides est tellement grande qu'elle masque complètement l'onde-mère radiale. Il n'est alors plus possible de déterminer le vecteur d'onde de l'onde radiale. La déformation statique de la surface est de toute façon si grande que la méthode d'ombroscopie est incapable de fournir une image nette.

2.4.6 Apparition des pics

L'extrême sensibilité de l'ombroscopie est à double tranchant : elle empèche de voir l'apparition des pics de l'instabilité de Rosensweig car, très près du champ-seuil, la surface est déjà bien trop perturbée. Il est donc impossible de mesurer avec précision le champ H_c. D'ailleurs, les expériences avec visualisation directe de l'interface montrent que les pics n'apparaissent pas tous simultanément, mais sur les bords[66] et de proche en proche vers le centre du récipient [74]. L'estimation du champ-seuil dépend donc de la définition choisie. Pour notre part, nous proposons de conserver la valeur du champ au-delà de laquelle aucune structure n'est plus visible par l'ombroscopie. Ce critère conduit à une mesure du champ-seuil de 11,5 kA/m, à peine 3 % au-dessus de la valeur attendue des courbes ajustées des figures 2.15 et 2.16.

2.5 Conclusion

Nous avons, à l'aide d'une méthode ombroscopique, mesuré les propriétés dispersives des ondes de capillarité-gravité en présence d'un champ magnétique vertical. Le modèle linéaire utilisé pour décrire ces ondes inclut les propriétés magnétiques de l'échantillon de ferrofluide employé, ainsi que les effets de profondeur finie. L'accord expérience/théorie est bon, bien que la partie non-monotone de la relation de dispersion n'ait pu directement être mise en évidence. Nous avons constaté la présence d'une déformation statique de la surface bien au-dessous du seuil, dont la nature

64. Un résonnance harmonique ne peut toutefois pas être complètement exclue.
65. Dans une théorie linéaire il ne peut y avoir de couplage entre ondes planes.
66. Ils apparaissent d'abord où les gradients de champ sont les plus intenses.

reste inexpliquée à ce jour. Près du champ critique, des ondes azimutales se développent et compliquent la visualisation de l'interface. Ainsi, le mécanisme de bifurcation vers un système de pics par auto-amplification des ondes n'a pu être observé en détail dans notre expérience. Une analyse non-linéaire et/ou une modélisation des effets de la taille finie du récipient seront peut-être, à l'avenir, à même de fournir une description plus complète des phénomènes observés.

La validité désormais démontrée de la relation de dispersion théorique nous permet d'étudier avec confiance d'autres types de phénomènes, comme la résistance de vague pour un ferrofluide, exposée au chapitre suivant. Par ailleurs, l'intention sous-jacente qui motivait notre expérience de propagation d'ondes était la réalisation d'une étude de l'instabilité de Faraday produit par la modulation du champ magnétique vertical. Nous avons constaté que sous l'influence d'une modulation infime du champ, le ménisque de fluide oscillait, produisant une onde concentrique. Si ce phénomène nous a été utile pour mesurer la relation de dispersion, il est au contraire très gênant pour observer l'instabilité de Faraday. La réalisation d'expériences futures sur ce sujet devra en tenir compte.

Chapitre 3

Résistance de vague pour des ondes de capillarité-gravité

3.1 Eléments d'hydrodynamique navale

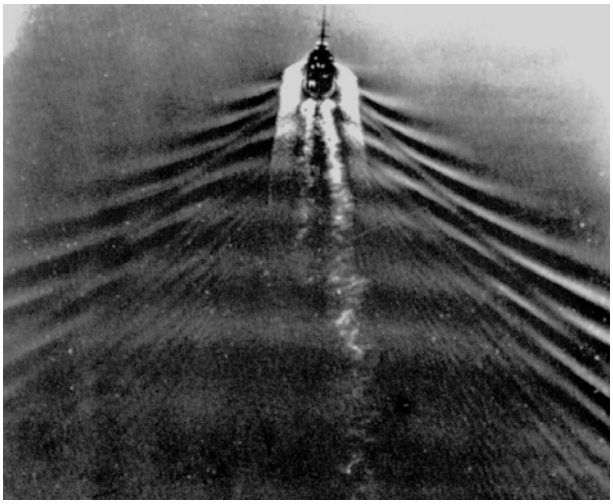


FIG. 3.1 – *Système d'ondes engendrées par le mouvement d'un bateau.* (D'après Faber [40].)

L'aire de contact avec l'eau d'un sous-marin en plongée est supérieure à celle d'un sous-marin en surface. De ce fait, on pourrait croire que c'est en surface qu'un sous-marin est le plus véloce. Comme le montre le tableau 3.1 ci-après, cette supposition se révèle incorrecte. Comment, dès lors, expliquer cette différence de performances ? Pour cela, il est nécessaire d'analyser la nature même de la résistance au mouvement d'un objet dans l'eau.

Type de bâtiment	Vitesse max. en plongée (km/h)	Vitesse max. en surface (km/h)	Dimensions $L \times H \times P$ (m)	Puissance (kW)	Dénomination OTAN	Nationalité
Daphné	16	13	$57{,}7 \times 6{,}7 \times 5{,}2$	1900	SS	France
Agosta	37	22	$67{,}6 \times 6{,}8 \times 5{,}4$	3500	SS	France
SCB 216 A (Classe Franklin)	46	28	$129 \times 10 \times 9$	11000	SSN	USA
SCB 304 (Classe Ohio)	46	37	$171 \times 12{,}8 \times 11{,}1$	44130	SSBN	USA
Typhoon (Akula 941)	46	37	$171 \times 24 \times 12{,}5$	66150	SSBN	Russie
Oscar II (Antyev 949 A)	56	37	$154 \times 18{,}2 \times 9$	66150	SSGN	Russie

TAB. 3.1 – *Caractéristiques techniques résumées pour quelques sous-marins. Leur vitesse de pointe en surface est plus petite que celle en plongée.* (D'après B. Prézelin [98].)

3.1.1 Notion de résistance de vague

La force résistante subie par un objet sous-marin en mouvement est principalement provoquée par la viscosité de l'eau. Au voisinage de la carène se développe une couche-limite visqueuse qui diffuse[1] la quantité de mouvement du bateau. Cette couche-limite peut aussi décoller[2], formant alors un sillage tourbillonnaire qui transporte de la quantité de mouvement. La dissipation visqueuse a en fin de compte raison des tourbillons : le travail effectué par le moteur est dissipé en chaleur[3].

Pour un vaisseau avançant en surface, cet effet est toujours présent. Mais, en examinant la figure 3.1, on constate la présence de vagues se développant dans le sillage du bateau. Des ondes de surface se propagent vers l'infini, emportant avec elles de la quantité de mouvement, de la même manière que le sillage tourbillonnaire ; en première approximation, il est possible de *découpler* les deux phénomènes. La force résistante supplémentaire au mouvement qui est associée aux vagues est appelée *résistance de vague*. C'est cette résistance qui empêche les sous-marins en surface d'atteindre la même vitesse de pointe qu'en plongée.

3.1.2 Mesure expérimentale

Depuis les travaux de Froude dans les années 1870 [17], pour mesurer la résistance de vague d'un bateau il est d'usage de construire un modèle réduit [80] : à la partie immergée de la coque du bateau, on associe la même partie mais symétrique par rapport à la surface de l'eau et immergée elle aussi (cf. figure 3.2). Ce système permet d'estimer la traînée due à l'émission de tourbillons[4]. Il est ainsi possible de remonter à la valeur de la résistance de vague, moyennant l'utilisation de lois d'échelle[5]. Ces dernières furent exprimées par Reech puis formalisées par Froude [17] : la résistance de vague

1. Il s'agit plutôt de convection, la couche-limite devenant turbulente à proximité de la paroi ; les nombres de Reynolds associés sont en effet très élevés : pour une taille caractéristique L de 10 cm, une vitesse U de 10 m/s, la viscosité de l'eau de mer ν avoisine les $10^{-6} m/s$, $Re = \frac{UL}{\nu} \approx 10^6$.

2. L'état de rugosité de la surface est à cet égard déterminant, cf. [52, p. 414].

3. Dans le cas d'un sous-marin, ou même d'une torpille, le nombre de Reynolds R_e est très supérieur à l'unité (cf. note 1), et l'écoulement est turbulent. En revanche, dans le cas de *petits* objets se déplaçant *lentement* ($R_e \ll 1$), la force de friction est de nature visqueuse ; la dissipation se produit tout autour de l'objet, dans la région où le champ de vitesse est perturbé.

4. La connaissance de l'écoulement autour de ce modèle *double* permet par ailleurs de déduire la distribution de pression en surface équivalente à la présence du navire [80, p. 407].

5. En toute rigueur, il faut aussi utiliser le même nombre de Reynolds ce qui est impossible à moins de travailler à l'échelle unité ! Il faut donc recourir à certaines approximations ; on préfère en général conserver le nombre de Froude et effectuer une correction afin de tenir compte de la non-égalité des nombres de Reynolds entre le modèle et la réalité [17].

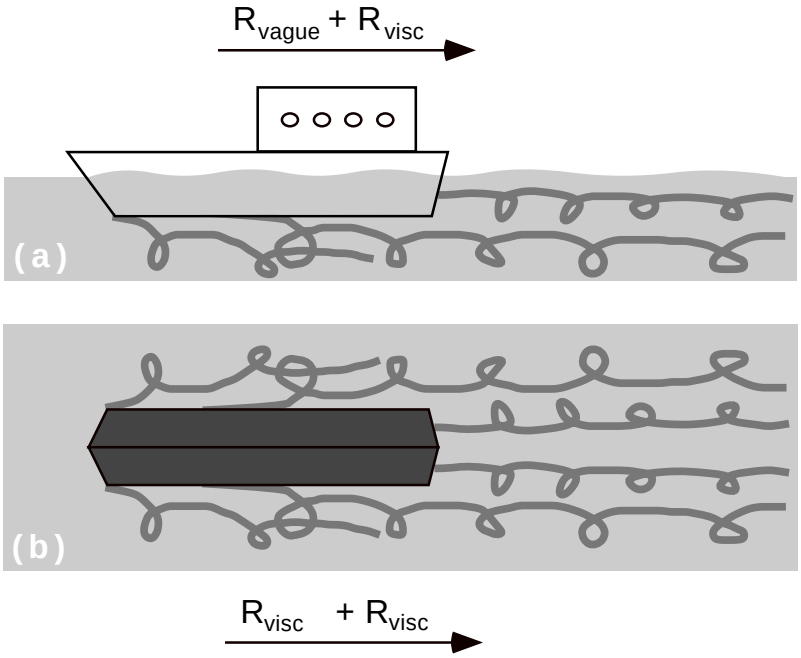


FIG. 3.2 – *Méthode de mesure de la résistance de vague [80]. Un modèle réduit du bateau est dans un premier temps construit, et la force de traînée totale est mesurée (a). C'est la somme de la traînée visqueuse et de la résistance de vague. Par la suite (b), un modèle constitué de la partie immergée de la coque du modèle initial et de son symétrique placé au-dessus, est immergé ; la force de traînée à nouveau mesurée, et correspond au double de la traînée visqueuse du cas (a). On en déduit par soustraction la résistance de vague.*

est seulement fonction du nombre de Reech-Froude

$$F = \frac{U}{\sqrt{gL}}, \tag{3.1}$$

où U est la vitesse, L la longueur du navire et g l'accélération de la pesanteur. Ce nombre exprime le rapport entre les effets inertiels et les effets gravitationnels. Ainsi, à une même vitesse de 25 nœuds[6], un super-pétrolier de 500 000 tonnes est-il un navire lent (petit nombre de Froude), tandis qu'une vedette de plaisance est un navire rapide.

En général, la résistance de vague n'est pas une fonction monotone de la vitesse, comme on peut le constater figure 3.3. Expliquer le détail des multiples maximums serait chose ardue, mais nous pouvons au moins examiner leur origine. *Grosso modo*, deux ondes sont émises, une à la proue du navire et l'autre à la poupe. La première agit comme une source, la seconde comme un puits : elles sont en opposition de phase (cf. figure 3.4).

6. 1 nœud = 1,852 km/h.

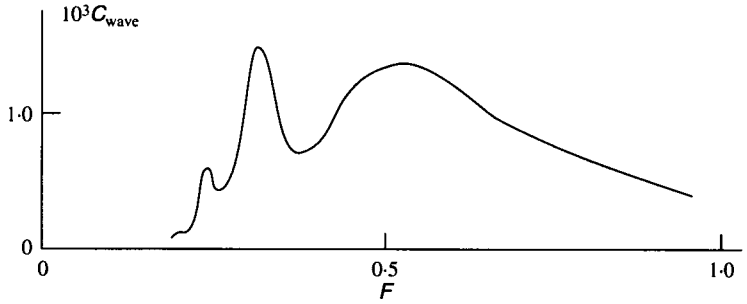


FIG. 3.3 – *Variation du coefficient de résistance de vague* $c_{wave} = R_{vague}/(\frac{1}{2}\rho A U^2)$ *en fonction du nombre de Froude* $F = U/\sqrt{Lg}$*, pour une péniche. Ici* R_{vague} *est la résistance de vague,* ρ *la densité,* A *l'aire de la coque en contact avec l'eau,* U *la vitesse du bateau, et* L *sa longueur ;* g *est l'accélération de la pesanteur.* (D'après Faber [40].)

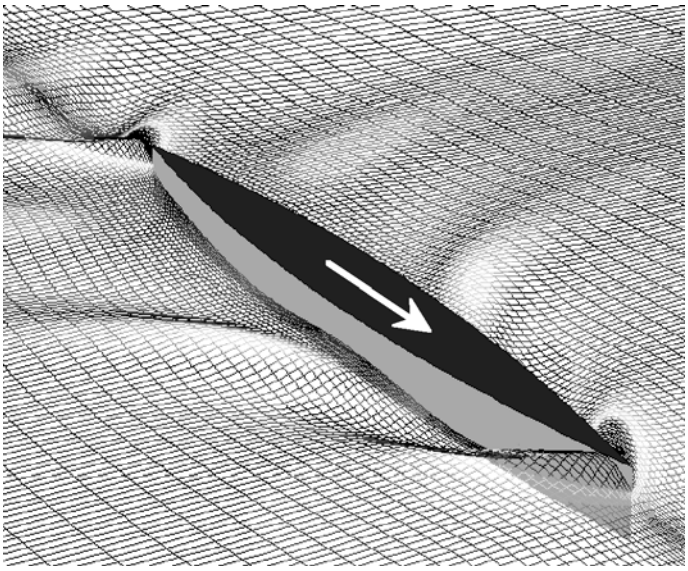


FIG. 3.4 – *Simulation numérique de la surface libre de l'eau à proximité d'un ferry en translation. Les niveaux de gris du maillage indiquent l'amplitude de la perturbation. Noter la présence d'une renflement à la proue et d'une (petite) dépression à la poupe. Code RAPID développé par l'Institut de Recherche Maritime des Pays-Bas (MARIN).*

Les deux ondes interfèrent, et la densité d'énergie du système — de même que la résistance de vague — dépendra de la nature constructive ou destructive des interférences. Le *design* de la coque des navires importe donc pour minimiser la résistance de vague. Cependant, pour un nombre de Reech-Froude supérieur à 1/2, la résistance de vague croît moins rapidement que

la résistance de frottement. Celle-ci devient alors prépondérante et constitue pour les navires rapides l'obstacle majeur à l'accroissement de leur vitesse.

3.1.3 Stationnarité du système d'ondes dans un référentiel lié au navire

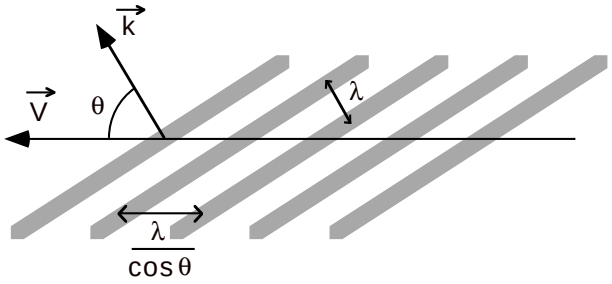


FIG. 3.5 – *Les crêtes des ondes planes (en gris) accompagnent la source de perturbation. La condition (3.2) en est déduite. $\vec{V}$ est la vitesse de la perturbation de surface, $\vec{k}$ un vecteur d'onde faisant un angle θ avec la vitesse.*

Une des caractéristiques les plus importantes des ondes émises est leur *stationnarité* dans le référentiel lié au vaisseau en translation. En effet, vu du navire, le système d'ondes est immobile. On peut le comprendre : le bateau, immobile dans son référentiel, ne fait qu'imposer une distribution de pression *stationnaire* à la surface de l'eau. Vu par un observateur extérieur, les ondes produites par le mouvement du navire progressent *à la même vitesse* que celui-ci. Pour simplifier le problème, comme Kelvin [66], supposons le navire quasi-ponctuel[7, 8]. Si l'on décompose le système d'ondes en ondes planes, chaque onde doit apparaître stationnaire au point de la perturbation ; *sur la trajectoire* le vecteur d'onde apparent vaut $k\cos\theta$ (cf. figure 3.5) où $\theta(k)$ est une mesure de l'angle $(\vec{k},\vec{V})$. La vitesse apparente de l'onde vaut $\omega/(k\cos\theta)$, et doit être égale à la vitesse de propagation V du navire :

$$V\cos\theta(k) = c(k) \tag{3.2}$$

avec $c(k) = \omega(k)/k$ qui représente la vitesse de phase de l'onde. D'autres méthodes conduisent à cette *condition de stationnarité* [40, 69, 80, 122] : on reviendra sur l'une d'entre elles ultérieurement (section 3.2.2).

7. Cette hypothèse revient à se placer *loin* du navire, c'est-à-dire à une distance très supérieure à la longueur d'onde caractéristique du problème (cf. section 3.1.4).

8. Une telle source est modélisée par une distribution δ de Dirac. Le sillage de Kelvin est donc la fonction de Green du problème. Par convolution il est possible de remonter au motif réel. C'est ainsi que procède Havelock, en prenant des distributions-sources variées [57].

3.1.4 Le «coin» de Kelvin

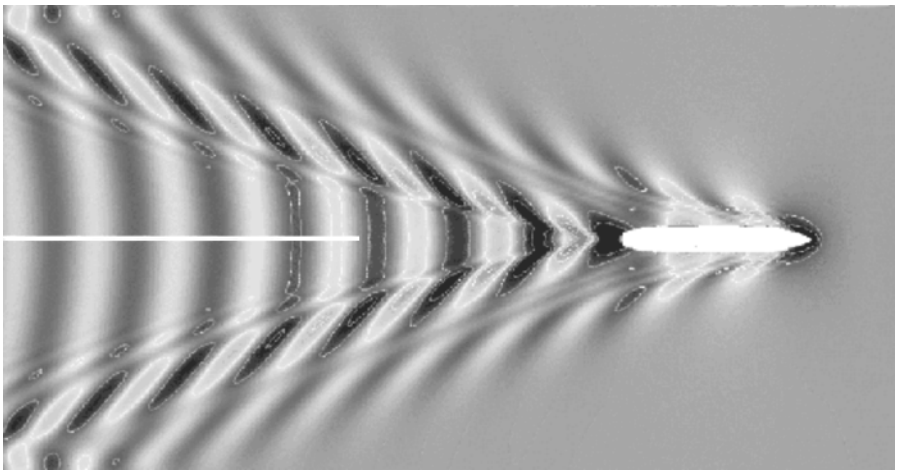


FIG. 3.6 – *Simulation numérique de la surface libre de l'eau à distance d'un ferry en mouvement. L'amplitude des ondes est représentée en niveaux de gris. Le motif est ici proche du «coin» de Kelvin théorique. On peut le décomposer en deux zones : l'onde au voisinage de l'axe de symétrie du navire (ligne blanche) est quasi-plane et la plus longue du système ; aux bords, les ondes sont plus courtes et leurs structures plus complexes. Code RAPID développé par l'Institut de Recherche Maritime des Pays-Bas (MARIN).*

En utilisant la condition (3.2) avec la relation de dispersion des ondes de gravité, il est possible d'obtenir le domaine où les ondes produites interfèrent de manière constructive. Ce domaine est appelé d'après son inventeur «coin» de Kelvin[9]. Une représentation en est proposée figure 3.6. Sa construction explicite nous éloignerait encore davantage du sujet central de ce chapitre. D'ailleurs, ainsi que le précise Faber[10] [40], les arguments géométriques avancés en général ne sont pas très rigoureux et des développements mathématiques poussés seraient nécessaires pour obtenir une vision claire et précise du phénomène[11]. Précisons simplement que ce coin de Kelvin possède une ouverture angulaire théorique valant $2\arcsin(1/3) \approx 20\,^{\circ}$, qu'on retrouve figure 3.6.

Les longueurs d'ondes présentes dans le coin de Kelvin traduisent le contenu spectral de la distribution de pression[12] associée à la présence du

9. En anglais *Kelvin wedge*.

10. *The argument is aesthetically attractive, like most arguments which rely upon geometry, but the extent to which it illuminates the physics of the Kelvin wedge is open to question.* , ibid. p. 194.

11. Cf. par exemple [63], pp. 117 et suivantes.

12. Des modèles numériques aussi bien qu'expérimentaux (note 4) permettent de l'obtenir.

navire en mouvement. Pour la distribution de pression quasi-ponctuelle envisagée jusqu'à présent, toutes les longueurs d'ondes sont produites également, et le «coin» de Kelvin est bien observé (cf. figure 3.1). Ce n'est cependant qu'une approximation et en toute rigueur, il faut comparer la taille du navire[13] à une longueur caractéristique du problème.

En combinant les grandeurs caractéristiques du système, à savoir la vitesse U et l'accélération de la pesanteur g, il est possible de construire cette longueur $\lambda_f = U^2/g$. A un facteur 2π près[14], λ_f n'est autre que la longueur d'une onde progressive qui avance parallèlement, dans le même sens et à la même célérité que le navire, et que l'on observe dans le coin de Kelvin (cf. figure 3.6, au voisinage de la ligne médiane).

Si la longueur L du navire est très inférieure à cette longueur d'onde[15], seules les courtes longueurs d'ondes sont excitées et la majeure partie de l'amplitude se trouve dans des ondes pour lesquelles l'angle θ est petit. Cela s'observe observe habituellement derrière un hors-bord, où en gros, il y a seulement deux vagues de part et d'autre du sillage ; ce sillage peut être plus fermé que le coin de Kelvin [80].

A l'inverse, si la longueur du navire est très supérieure[16] à λ_f, seules les plus grandes longueurs d'ondes sont excitées et le sillage d'un supertanker se résume effectivement à une onde quasi-plane. Contenue dans le «coin» de Kelvin, voire même dans un angle plus fermé, elle se propage dans le même sens et à la même vitesse que le navire. Récemment Shliomis & Steinberg ont interprété cet effet en termes de phénomène critique [122].

3.1.5 Et la capillarité ?

Même si depuis près d'un siècle et demi la résistance de vague des navires est étudiée de manière extensive[17], il y a peu de temps que la tension superficielle a été intégrée dans les calculs[18].

Elle est omise à juste titre dans le cas des applications navales car les

13. Un navire engendre préférentiellement des longueurs d'ondes qui prédominent dans l'analyse de Fourrier de la perturbation de pression équivalente qu'il impose à la surface de l'eau [80, p. 274].

14. La relation de dispersion des ondes de gravité en profondeur infinie s'écrit $\omega^2 = gk$, d'où la vitesse de phase $c = \sqrt{g/k}$. Il suffit d'égaler U et c pour déduire la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.

15. Ceci revient à un nombre de Reech-Froude grand devant l'unité, puisque $F = U/\sqrt{gL} = \sqrt{\lambda_f/L}$. En hydrodynamique navale on parle de navire rapide [17].

16. Le nombre de Reech-Froude est alors petit devant l'unité, cf. note précédente.

17. Cette étude est loin d'être achevée et le sujet est toujours d'actualité. A chaque *America Cup* de nouveaux problèmes sont traités, tels récemment la résistance de vague en présence de houle [6].

18. *Stricto sensu*, on trouve déjà dans Lamb [69, art. 272] et dans d'autres sources le calcul du motif produit par l'émission d'ondes de capillarité-gravité par une perturbation de pression en mouvement. Pour autant, le calcul de *résistance de vague* n'est jamais effectué.

longueurs caractéristiques en jeu, la longueur L du bateau et U^2/g, sont toutes deux très supérieures à la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\sigma/(\rho g)} \approx 2{,}7$ cm pour l'eau. Mais il n'en est pas de même pour un objet dont la taille caractéristique est comparable à l_c, et qui se meut à des vitesses modestes[19]. Raphaël & de Gennes [102] ont ainsi calculé, dans la théorie linéaire, la résistance de vague exercée par une perturbation de pression en translation uniforme à la surface libre d'un fluide. Leurs résultats théoriques sont à l'origine des expériences réalisées dans ce travail.

3.1.6 Ferrofluides sous champ magnétique

Comme nous l'avons montré au chapitre 2, un champ magnétique modifie les caractéristiques dispersives des ondes de surfaces de capillarité-gravité dans un ferrofluide. L'effet d'un champ magnétique sur le sillage d'onde induit par une perturbation en mouvement a été partiellement exploré par Berkovski *et al.* [16]. Dans cet article, les auteurs mirent en évidence une modification du sillage dans le cas d'un champ magnétique *dans le plan* de la surface libre, et la décrivirent dans l'approximation d'ondes *purement* capillaires ou de gravité. La résistance de vague associée n'attira pas leur intérêt. Il semble de plus qu'aucune expérience ne fut effectuée pour confirmer la théorie.

Outre les difficultés expérimentales qui s'opposent à la réalisation d'une telle configuration de champ[20] magnétique, la simplification excessive de la relation de dispersion[21] ne permet pas d'entrevoir l'existence de la vitesse critique d'apparition des ondes. Ainsi montrera-t-on que cette vitesse est une fonnction décroissante du champ magnétique si ce dernier est normal à l'interface libre.

3.2 Ondes de capillarité-gravité et résistance de vague

L'analyse développée en introduction sur les ondes de gravité produites par un objet en mouvement se transpose au cas des ondes de capillarité-gravité. A une limite près : il existe une vitesse en deçà de laquelle les ondes ne peuvent se propager.

19. C'est-à-dire de telle sorte que $\lambda_f = U^2/g$ soit comparable à la longueur capillaire.

20. Si, comme dans notre expérience (section 3.3.3), le ferrofluide est contenu dans un canal annulaire, un champ magnétique dans le plan de l'interface rend la profondeur du fluide dépendante de la position dans le canal (le ferrofluide peut même déborder); le champ démagnétisant induit n'est en effet pas homogène. Pour étudier ce type de configuration de champ il est nécessaire d'utiliser un canal rectiligne, mais l'expérience est alors bien plus complexe à mettre en œuvre.

21. C'est-à-dire ne considérer que des ondes de gravité *ou* de capillarité, mais pas les deux ensemble.

3.2.1 Ondes unidimensionnelles

Afin de comprendre le mécanisme de mise en place d'un système d'ondes stationnaires, on examinera en premier lieu le cas d'ondes unidimensionnelles[22], c'est-à-dire se propageant dans une direction unique. La perturbation considérée est donc une perturbation de pression ayant la forme d'une *bande* infiniment fine et infiniment étendue dans une direction horizontale de l'espace — cf. figure 3.7.

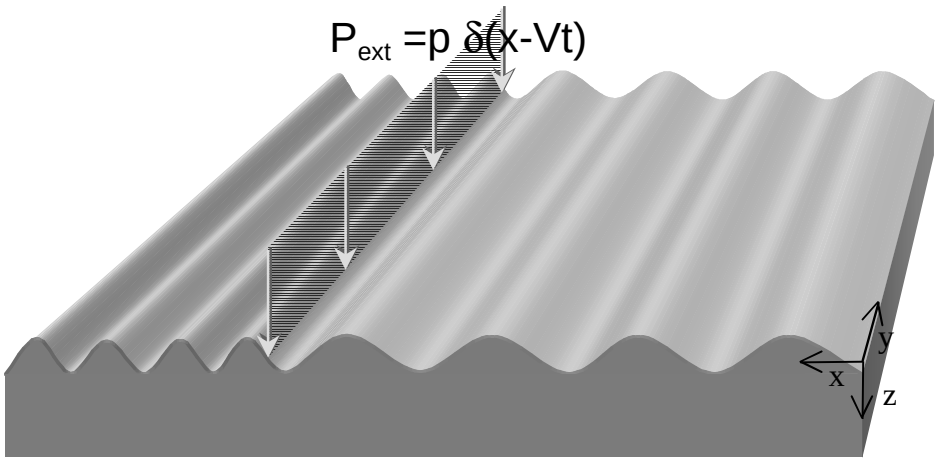


FIG. 3.7 – *Une perturbation de pression sous la forme d'une distribution δ unidimensionelle se déplace à la surface d'un fluide au repos à la vitesse $\vec{V} = V\vec{e_x}$. Il y crée un système d'ondes. Dans le référentiel lié à cette perturbation, le fluide est en mouvement (à la vitesse $-\vec{V}$) et le système d'onde est stationnaire.*

Condition de stationnarité

Pour que le système soit stationnaire dans le référentiel de la source, il faut et il suffit que la vitesse de phase des ondes c soit égale à la vitesse V de la perturbation en mouvement :

$$c = V. \tag{3.3}$$

Pour un fluide non-magnétique[23] cette vitesse de phase c s'écrit[24] :

$$c(k) = \omega(k)/k = \sqrt{g/k + \sigma k/\rho}. \tag{3.4}$$

22. Parfois ces ondes sont qualifiée de 2D en ce sens que le champ de vitesse dépend de deux coordonnées seulement, une verticale et une horizontale. Dans ce travail on qualifie de bidimensionnelle la réponse à une excitation *ponctuelle* dans le plan horizontal.

23. La section 3.2.3 est consacrée au cas des fluides magnétiques.

24. Pour une discussion de la relation de dispersion des ondes de capillarité-gravité en profondeur infinie, se reporter à la section 2.2.2.

En utilisant les grandeurs caractéristiques du système[25], l'équation précédente se simplifie :

$$\frac{c}{c_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k_c}{k} + \frac{k}{k_c}}, \tag{3.5}$$

où c_c est la vitesse de phase des ondes de vecteur d'onde capillaire $k_c = \sqrt{\rho g/\sigma}$:

$$c_c = \frac{\omega(k_c)}{k_c} = \sqrt[4]{\frac{4g\sigma}{\rho}}. \tag{3.6}$$

Pour fixer un ordre de grandeur, on obtient pour l'eau[26] $c_c = 23$ cm/s, et pour le mercure[27] $c_c = 18{,}8$ cm/s.

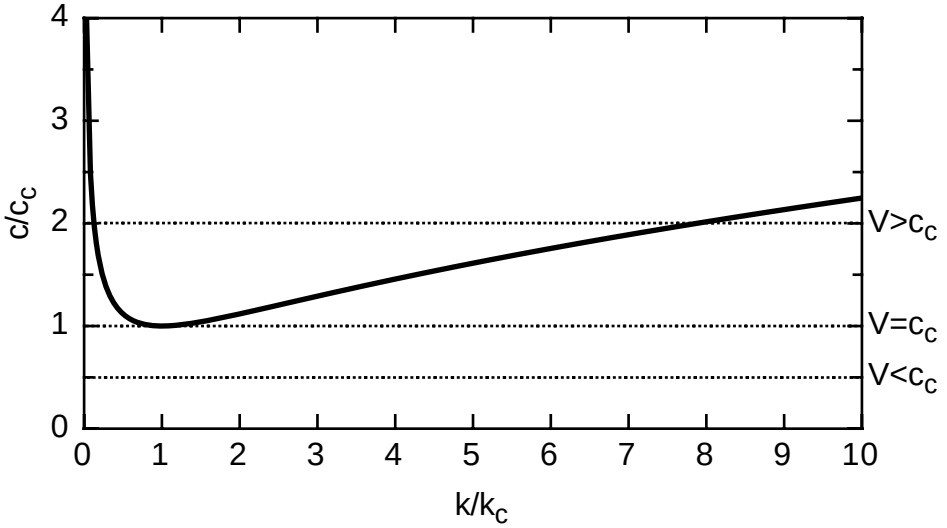


FIG. 3.8 – *Vitesse de phase d'une onde de capillarité-gravité en profondeur infinie, en fonction de son vecteur d'onde (rapporté au vecteur d'onde capillaire k_c). La condition de stationnarité (3.3) conduit à zéro, une ou deux solutions pour une vitesse V de la perturbation respectivement inférieure, égale ou supérieure à la vitesse de phase c_c.*

On constate sur la figure 3.8 que la vitesse de phase est toujours *supérieure* ou égale à c_c, ce qui entraîne l'absence de solutions à l'équation (3.3) lorsque la vitesse V est *inférieure* à c_c. Dans ce cas-là, aucun système d'onde n'est produit par la perturbation et la résistance de vague est rigoureusement nulle.

En revanche, si $V > c_c$, deux vecteurs d'ondes sont susceptibles d'être solution de (3.3), positionnés de part et d'autre du vecteur d'onde capillaire

25. Cf. section 2.2.2, équations (2.3) et (2.5).
26. Pour l'eau à température ambiante, $\sigma = 73$ mN/m [131].
27. Pour le mercure à température ambiante, $\sigma = 435$ mN/m et $\rho = 13\,500$ kg/m^3 [131].

k_c :

$$k^{\pm} = k_c \left(\frac{V}{c_c}\right) \left(1 \pm \left(1 - \left(\frac{c_c}{V}\right)^4\right)^{1/2}\right). \tag{3.7}$$

Afin de déterminer le vecteur sélectionné en amont et en aval de la perturbation, il est nécessaire d'examiner la vitesse de groupe des ondes associée à ces deux vecteurs d'ondes.

La vitesse de groupe d'une onde est définie par $c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ et vaut pour des ondes de capillarité-gravité :

$$c_g = \frac{g + 3\frac{\sigma k^2}{\rho}}{2\sqrt{gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}}}, \tag{3.8}$$

que l'on peut écrire autrement en utilisant les variables caractéristiques du problème :

$$\frac{c_g}{c_c} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1 + 3\left(\frac{k}{k_c}\right)^2}{\left(\frac{k}{k_c} + \left(\frac{k}{k_c}\right)^3\right)^{1/2}} \tag{3.9}$$

Comme on peut le constater figure 3.9, la vitesse de groupe est inférieure à

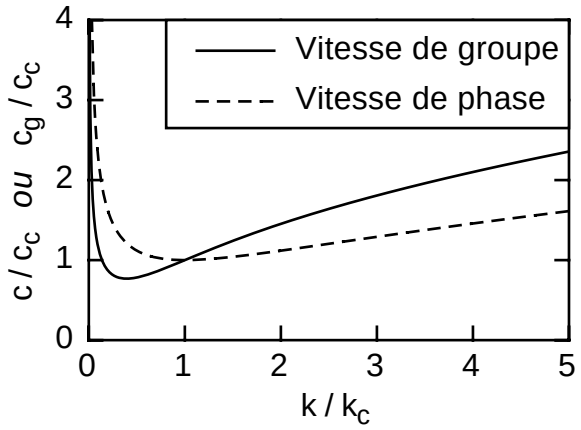


FIG. 3.9 – *Comparaison de la vitesse de groupe et de la vitesse de phase d'ondes de capillarité-gravité en profondeur infinie.*

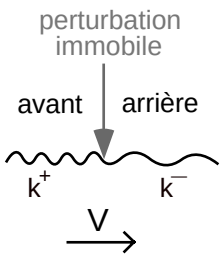
la vitesse de phase lorsque $k < k_c$ et supérieure dans le cas contraire. Cette vitesse de groupe est non seulement la vitesse de propagation d'un paquet d'ondes, mais aussi la vitesse de propagation de l'énergie associée à une onde [80, chap. 3.6 à 3.8].

Dans le système d'ondes développé, l'énergie doit nécessairement provenir de la perturbation de pression[28]. La vitesse de groupe en *avant* de

28. On fait ici une hypothèse de causalité, nécessaire aussi lorsqu'on effectue les calculs

TAB. 3.2 – *Expression des différentes vitesses de groupe et de phase dans les référentiels liés au fluide et à la source. Les ondes sont stationnaires dans le référentiel lié à la source (celui du schéma).*

Vitesse ...	Référentiel lié au fluide	Référentiel lié à la source
fluide	0	V
source	$-V$	0
phase en avant	$-c^{av} = -V$	$c^{am} = 0$
phase en arrière	$-c^{av} = -V$	$c^{ar} = 0$
groupe en avant	$-c_g^{av} < -V$	$V - c_g^{am} < 0$
groupe en arrière	$-c_g^{ar} > -V$	$V - c_g^{av} > 0$



la source doit donc être *plus grande* que la vitesse de la perturbation, plus grande donc que la vitesse de phase (cf. table 3.2) : le vecteur d'onde solution est donc k^+ et c'est une onde où les effets de la capillarité dominent[29]. Inversement, en *arrière* de la perturbation, la vitesse de groupe doit être *plus petite* que la vitesse de la perturbation de manière à «éloigner» l'énergie de la source (cf. table 3.2). Le vecteur d'onde k^- est alors sélectionné ce qui signifie qu'il s'agit d'une onde où prédominent les effets de la gravité.

Résistance de vague

La résistance de vague, homogène à une force, peut être calculée en effectuant un bilan d'énergie. L'opérateur extérieur fournit une puissance RV où R est la résistance de vague et V la vitesse de déplacement de la perturbation. Cette puissance est rayonnée par les ondes de surface ; or l'énergie[30] d'une onde par unité de surface[31] vaut [80] :

$$E = \frac{1}{2}\rho c^2 k a^2, \tag{3.10}$$

où c est la vitesse de phase de l'onde et a son amplitude. Cette énergie se propageant à la vitesse de groupe, la puissance nécessaire pour engendrer

de manière plus détaillée [69, art. 271]. Puisque les équations du mouvement fluide ne font intervenir que des dérivées du second ordre par rapport au temps (termes inertiels), le problème est invariant par renversement du temps. Deux solutions coexistent mathématiquement, une onde plane issue de l'infini et une autre provenant de la source. Pour lever l'ambiguïté, il faut donc d'une manière [80, section 3.7.] ou d'une autre [102] éliminer la solution provenant de l'infini. De fait, dès que la dissipation visqueuse est prise en compte, cette solution disparaît d'elle-même.

29. k^+ est plus grand que k_c.

30. En moyenne, cette énergie se répartit pour moitié sous forme d'énergie cinétique et pour moitié sous forme d'énergie potentielle, gravitationnelle *et* superficielle [72].

31. Plus précisément par unité d'aire de l'interface.

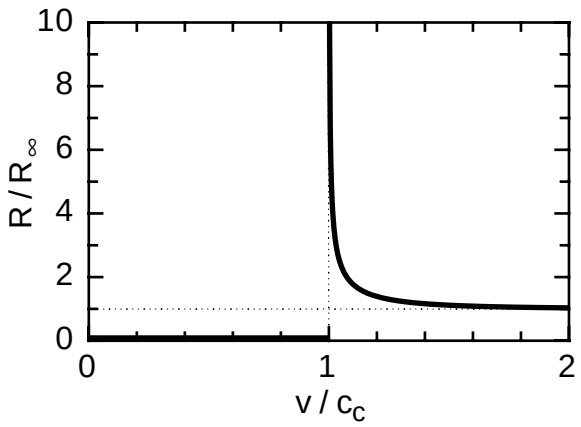


FIG. 3.10 – *Résistance de vague unidimensionnelle R en fonction de la vitesse v. La vitesse est rapportée à la vitesse critique d'apparition des ondes c_c (équation (3.6)) tandis que la résistance est rapportée à sa valeur à l'infini $R_\infty = p^2/\sigma$.*

le système d'ondes stationnaires dans le référentiel lié à la perturbation de pression s'écrit :

$$RV = (V - c_g^{av})E_{av} + (c_g^{am} - V)E_{am} \tag{3.11}$$

où les indices am et av désignent respectivement les régions en amont et en aval de la perturbation.

Presque tous les paramètres sont connus : après avoir remplacé c_g^{av} et c_g^{am} par leurs valeurs respectives $c_g(k^-)$ et $c_g(k^+)$, il reste à calculer les énergies, et donc à déterminer les amplitudes. Cette détermination, omise ici, est relativement longue — le lecteur intéressé consultera les ouvrages de Lamb [69] et Lighthill [80]. Il est suffisant de savoir que, pour une perturbation du type $P_{ext} = p\delta(x - Vt)$, les amplitudes sont égales en amont et en aval et données par :

$$a_{am} = a_{av} = \frac{2p}{\sigma(k_+ - k_-)}. \tag{3.12}$$

On en déduit l'expression de la résistance de vague *unidimensionnelle* :

$$R = \frac{p^2}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_c}{V}\right)^4}}, \tag{3.13}$$

qui est représentée figure 3.10. Lorsque $V \gg c_c$, l'équation (3.13) se réduit à $R = R_\infty = p^2/\sigma$. La résistance de vague est alors indépendante de la gravité : l'énergie associée à l'onde de gravité en aval est négligeable puisque son vecteur d'onde tend vers zéro. Lorsque la vitesse approche c_c par valeurs

supérieures, les amplitudes et, par voie de conséquence, la résistance de vague, tendent vers l'infini. La raison en est qu'à mesure qu'on tend vers c_c, il est de plus en plus difficile de rayonner de l'énergie efficacement dans la mesure où les vitesses de groupe s'approchent, elles aussi, de c_c. Pour des ondes bidimensionnelles, c'est-à-dire susceptibles de se propager dans les deux directions x et y (cf. figure 3.7), cette singularité disparaît car l'énergie peut être rayonnée dans ces *deux* directions [102].

Effets de profondeur finie

Toute l'étude précédente est effectuée pour une profondeur de fluide infinie. Cependant, il est difficile de négliger les effets de la profondeur dans les cas usuels. D'après (A.70), pour un fluide non-magnétique de profondeur finie, la relation de dispersion des onde de capillarité-gravité s'écrit :

$$\omega^2 = \frac{\tanh(kh)}{\rho}\left(\rho g k + \sigma k^3\right). \tag{3.14}$$

La vitesse de phase s'écrit donc :

$$\frac{c}{c_c} = \left(\frac{\tanh(\frac{k}{k_c}(k_c h))}{2}\left(\frac{k}{k_c} + \frac{k_c}{k}\right)\right)^{1/2}, \tag{3.15}$$

les paramètres k_c et ω_c ayant été introduits précédemment (cf. page 63.)

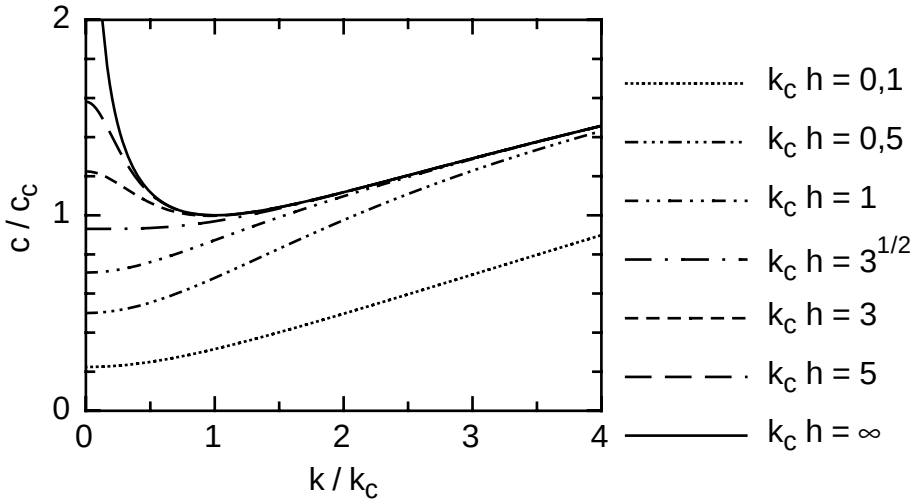


FIG. 3.11 – *Vitesse de phase pour différentes profondeurs réduites $k_c h$. Tant que $k_c h < \sqrt{3}$ la courbe reste monotone ; en $k = 0$ la vitesse de phase vaut $c' = \sqrt{gh}$.*

Comme on peut le constater figure 3.11, la vitesse de phase présente un extremum local c' pour un vecteur d'onde nul. Deux cas se présentent en fonction de la valeur de l'épaisseur :

- La profondeur h est supérieure à $h' = \sqrt{3}/k_c$ (on explicitera cette valeur plus loin dans le texte). Un minimum local en $k = k_{min} < k_c$ est toujours présent, et sa valeur c_{min} est peu différente de c_c (cf. figure 3.12). Pour que l'analyse en profondeur infinie reste fondée, il faut et il suffit que $c_c < V \ll c'$.
- La profondeur h est inférieure à $h' = \sqrt{3}/k_c$. L'analyse qui précède n'est plus valable en ce sens qu'un seul vecteur d'onde est sélectionné, au lieu de deux. Une extension de la théorie reste donc à faire. Cependant, il existe toujours une vitesse critique en deçà de laquelle aucune onde n'est émise : $c_{min} = c'$.

Il est aisé de calculer la nouvelle vitesse critique c' ainsi que l'épaisseur en dessous de laquelle le minimum en $k \neq 0$ disparaît. Un développement limité au voisinage de $kh = 0$ de la vitesse de phase fournit :

$$\begin{aligned}
\lim_{kh\to 0} c &= c_c \left(\frac{kh - \frac{k^3h^3}{3}}{2} \left(\frac{k}{k_c} + \frac{k_c}{k} \right) \right)^{1/2} \\
&\approx \frac{c_c}{\sqrt{2}} \left(k_c h + \frac{k^2 h}{k_c} - \frac{k^2 h^3 k_c}{3} \right)^{1/2} \\
&\approx c_c \sqrt{\frac{k_c h}{2}} \left(1 + \left(\frac{k}{k_c} \right)^2 \left(1 - \frac{(k_c h)^2}{3} \right) \right).
\end{aligned}$$

La vitesse de phase en $k = 0$ vaut donc :

$$c' = c_c \sqrt{\frac{k_c h}{2}} = \sqrt{gh}, \tag{3.16}$$

qui n'est autre que l'expression de la vitesse dans l'approximation des grandes [32] ondes de gravitation. Quant à la valeur de l'épaisseur pour laquelle les deux extremums se confondent, elle est exprimée, d'après ce qui précède :

$$h' = \frac{\sqrt{3}}{k_c} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = \sqrt{3}\, l_c, \tag{3.17}$$

où l_c est la longueur capillaire. Pour cette profondeur particulière, le minimum de vitesse vaut :

$$c_{min}(h') = c_c \sqrt{\frac{k_c h'}{2}} = \frac{3^{1/4}}{2^{1/2}}\, c_c \approx 0{,}93\, c_c, \tag{3.18}$$

qui reste peu différent de c_c (cf. figure 3.12).

32. Leur longueur d'onde est grande devant la profondeur de la couche sur laquelle elles se propagent. C'est le cas par exemple des ondes produites par les barges dans les canaux [69], ou bien des tsunamis produits par les tremblements de terre sous-marins [50].

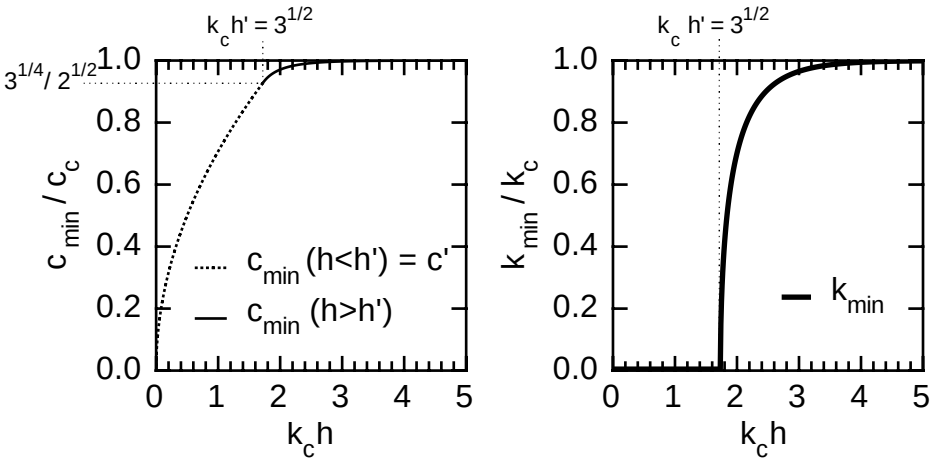


FIG. 3.12 – *Vitesse c_{min} et son vecteur d'onde k_{min} correspondant au minimum de la vitesse de phase, tracés en fonction de la profondeur a-dimensionnalisée $k_c h$ de la couche de fluide. En deçà de $k_c h = \sqrt{3}$, $k_{min} = 0$ et $c_{min} = c' = \sqrt{gh}$. Au-delà, k_{min} est une fonction croissante de l'épaisseur, et $c_{min} \approx c_c$.*

Pour l'eau h' vaut 4,72 mm. Il faut recourir à une profondeur de liquide *bien supérieure* à 5 mm si on désire observer la résistance de vague telle qu'elle a été analysée par Raphaël & de Gennes [102]. Dans l'expérience, à tort sans doute, on s'est contenté de l'approximation $h > l_c$: les 8 mm de profondeur choisis[33] avec une parcimonie aujourd'hui regrettée, interdisent de négliger les effets de profondeur finie. En l'occurrence, $c_c \approx 23$ cm/s et $c' = 1{,}21\, c_c \approx 28$ cm/s. Dès que cette vitesse est atteinte, l'analyse est à refaire puisque les ondes de gravitation[34] disparaissent[35]. Néanmoins il semblerait[36] que ces ondes de gravité ne contribuent qu'en faible proportion à la résistance de vague — des travaux sont en cours pour éclairer cette question.

3.2.2 Ondes bidimensionnelles

Le cas des ondes bidimensionnelles, bien que similaire, présente quelques différences. La condition de stationnarité de telles ondes, déjà évoquée[37],

33. Ceci correspond à $k_c h \approx 2{,}9$.
34. On nomme par extension onde de gravitation les ondes dont le vecteur d'onde est plus petit que k_c.
35. *Nota bene* : l'analyse effectuée ici n'est valable que pour des ondes unidimensionnelles. Dans le cas d'ondes bidimensionnelles, cette discussion doit être convenablement modifiée et les ondes de gravité ne disparaissent en fait que d'une région particulière du plan.
36. E. Raphaël, communication privée.
37. Cf. section 3.1.3.

est différente en ce sens que des ondes peuvent être émises dans *toutes les directions* du plan. En conséquence, la résistance de vague est finie à la vitesse critique c_c, et devient une fonction croissante de la vitesse.

Condition de stationnarité

La condition de stationnarité peut être retrouvée simplement en effectuant un changement de référentiel. La relation de dispersion des ondes de capillarité-gravité est valable dans le référentiel K dans lequel le fluide est au repos, et toutes les grandeurs[38] sont proportionnelles à $\exp[i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)]$. Dans le référentiel K' qui se déplace à la vitesse $\vec{V}$, ces mêmes grandeurs sont cette fois-ci proportionnelles à $\exp[i(\vec{k}.\vec{r'} - \omega' t)]$, où $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{V}t$ est le vecteur-position et $\omega' = \omega - \vec{k}.\vec{V}$ la pulsation dans le référentiel en translation[39]. Le système d'onde étant stationnaire dans K' (la perturbation de pression y est immobile), $\omega' = 0$, ce qui conduit de nouveau à :

$$\omega = kV\cos\theta, \tag{3.19}$$

où θ mesure l'angle entre $\vec{k}$ et $\vec{V}$.

Cette relation est analogue à celle rencontrée lors de l'étude du rayonnement Cerenkov : des ondes électromagnétiques sont produites par une charge en mouvement se déplaçant plus rapidement que la lumière dans le milieu considéré [29]. On retrouve ce même type d'expression lors de l'étude d'écoulements supersoniques (cône de Mach) [72].

Ré-écrite sous la forme :

$$c(k) = V\cos\theta, \tag{3.20}$$

cette relation de stationnarité permet de comprendre pourquoi aucune onde ne peut être émise lorsque $V < c_c$. Même en considérant des directions différentes de celle indiquée par la vitesse de la source, il n'y a en effet aucun moyen de vérifier (3.20).

Contrairement au cas des ondes unidimensionnelles (section 3.2.1), pour une vitesse $V > c_c$, ce ne sont plus *deux* longueurs d'ondes qui sont produites, mais un *continuum* — dont les bornes sont d'ailleurs les deux vecteurs d'ondes sélectionnés dans le cas unidimensionnel (équation 3.7). En utilisant (3.5), on constate que $k(\theta)$ est solution de l'équation du second degré suivante :

$$\left(\frac{k}{k_c}\right)^2 - 2\left(\frac{V}{c_c}\cos\theta\right)^2\left(\frac{k}{k_c}\right) + 1 = 0. \tag{3.21}$$

Cette équation n'a de solutions que si $V > c_c$:

$$\frac{k_\pm(\theta)}{k_c} = \left(\frac{V}{c_c}\cos\theta\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{V}{c_c}\cos\theta\right)^4 - 1}. \tag{3.22}$$

38. Il s'agit de la vitesse, de son potentiel, de la pression, de la déformation de surface,...
39. Le changement de fréquence est usuellement appelé *effet Doppler*.

Résistance de vague

Plutôt que de rapporter en détail la procédure employée pour obtenir l'expression de la résistance de vague, on préférera renvoyer le lecteur intéressé à l'article original de Raphaël & de Gennes [102]. En voici les résultats principaux.

La résistance de vague R d'une distribution de pression $P_{ext}(r)$ à symétrie cylindrique est donnée[40] par :

$$R = \frac{1}{\pi\sigma}\int_0^{\arccos(c_c/V)} \cos\theta\, \frac{\{k_+(\theta)G[k_+(\theta)]\}^2 + \{(k_-(\theta)G[k_-(\theta)]\}^2}{k_+(\theta) - k_-(\theta)}\,\mathrm{d}\theta, \quad (3.23)$$

où

$$G(k) = 2\pi\int_0^{+\infty} rP_{ext}(r)J_0(kr)\,\mathrm{d}r \quad (3.24)$$

représente la transformée de Fourier[41] de la distribution de pression, J_0 étant la fonction de Bessel de première espèce et de degré zéro. Les vecteurs $k_\pm(\theta)$ sont les deux solutions de la condition de stationnarité et sont donnés par l'équation (3.22).

Dans le cas simplificateur d'une distribution de pression réduite à un δ de Dirac, l'expression (3.24) se simplifie :

$$P_{ext}(x,y) = p\,\delta(x)\delta(y) \Longrightarrow G(k) = p, \quad (3.25)$$

et l'expression (3.23) se ramène à :

$$R(V) = \frac{p^2}{\pi\sigma}\int_0^{\arccos(c_c/V)} \cos\theta\, \frac{k_+(\theta)^2 + k_-(\theta)^2}{k_+(\theta) - k_-(\theta)}\,\mathrm{d}\theta, \quad (3.26)$$

ou, en remplaçant $k_\pm(\theta)$ par sa valeur en (3.22) :

$$R(V) = \frac{p^2 k_c}{\pi\sigma}\int_0^{\arccos(c_c/V)} \cos\theta\, \frac{2\left(\frac{V}{c_c}\cos\theta\right)^4 - 1}{\sqrt{\left(\frac{V}{c_c}\cos\theta\right)^4 - 1}}\,\mathrm{d}\theta. \quad (3.27)$$

Dans ces conditions, la résistance de vague, juste au-dessus du seuil, prend une valeur finie R_c non nulle :

$$R_c = \frac{p^2 k_c}{2\sqrt{2}\sigma}, \quad (3.28)$$

et est une fonction croissante de la vitesse au-delà (cf. figure 3.13). Pour des valeurs asymptotiquement grandes de la vitesse, c'est-à-dire pour $V \gg c_c$,

40. On se place ici dans le référentiel lié à la perturbation en translation.
41. On l'appelle parfois dans ce cas transformée de Hankel [63, p. 66].

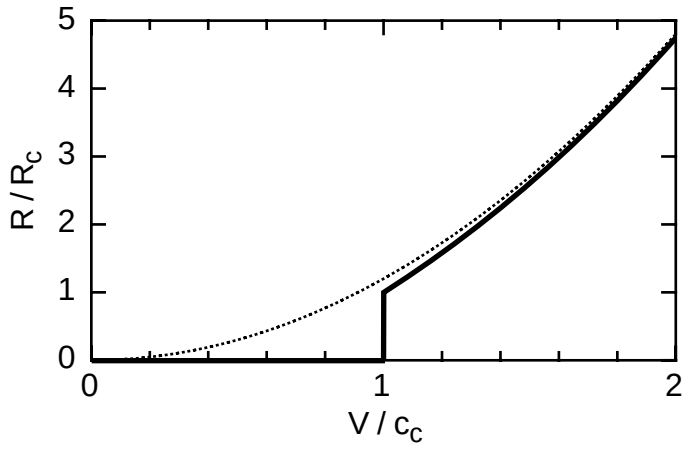


FIG. 3.13 – *Résistance de vague associée à une distribution de pression ponctuelle se déplaçant à la vitesse V. La résistance R est rapportée à sa valeur critique au seuil R_c (équation (3.28)), tandis que la vitesse est rapportée à la vitesse critique d'apparition des ondes c_c (équation (3.31)). Pointillés : asymptote de R/R_c à grande vitesse.*

l'expression de la résistance de vague varie comme le carré de la vitesse :

$$\begin{aligned} R(V \gg c_c) &\approx \frac{p^2 k_c}{\pi\sigma} \int_0^{\pi/2} 2\cos^3\theta \left(\frac{V}{c_c}\right)^2 \mathrm{d}\theta \\ &\approx \frac{4p^2 k_c}{3\pi\sigma} \left(\frac{V}{c_c}\right)^2 \\ &\approx \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} R_c \left(\frac{V}{c_c}\right)^2 . \end{aligned} \tag{3.29}$$

Cette asymptote est représentée figure 3.13. Dans cette approximation, seule la composante capillaire contribue à la résistance de vague : dans (3.26), $k_+ \gg k_c \gg k_-$.

Influence de la taille de la source

Une source de perturbation se ramenant à une distribution δ de Dirac est concrètement irréalisable. Il faut donc envisager les effets qu'induisent la taille finie a de la source — cette taille restant tout de même petite devant la longueur capillaire.

Le contenu spectral de la distribution de pression détermine la bande de vecteurs d'ondes contenus dans le sillage d'ondes, ainsi que mentionné pour les navires section 3.1.4. Au-delà d'une certaine vitesse c_{lim} (cf. figure 3.14), la source n'est plus capable de produire les vecteurs d'ondes exigés par la

condition de stationnarité[42]. Conséquemment, la résistance de vague atteint un maximum au voisinage de c_{lim} puis devient une fonction décroissante de la vitesse, comme nous le montrons plus avant.

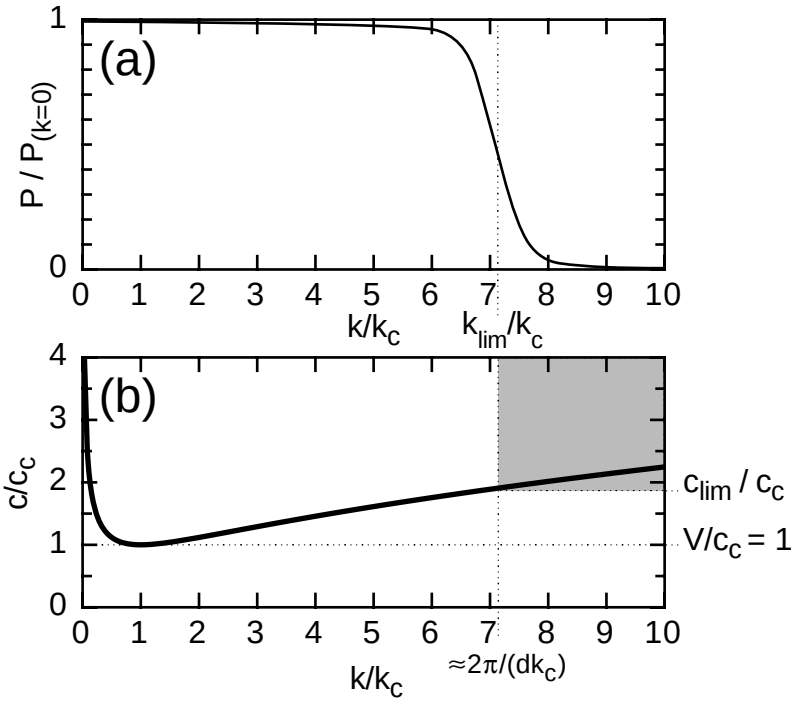


FIG. 3.14 – *Le spectre en vecteurs d'ondes, caractéristique d'une distribution de pression générique d'extension horizontale d est représentée en (a). La source correspondante ne produit que des ondes dont le vecteur est inférieur à k_{lim}. Aucune onde plus courte n'est donc produite si la vitesse de la source est supérieure à $c_{lim} = c(k_{lim})$ — zone grisée en (b).*

Le plus grand vecteur d'onde émis par la source vaut typiquement :

$$k_{lim} \approx \frac{2\pi}{a}, \tag{3.30}$$

auquel correspond la vitesse de phase :

$$c_{lim} \approx c_c \left(\frac{1}{2} \left(\frac{k_{lim}}{k_c} + \frac{k_c}{k_{lim}} \right) \right)^{1/2}.$$

Puisque la taille de la perturbation est supposée petite devant la longueur capillaire, l'expression précédente se simplifie et,

$$c_{lim} \approx c_c \sqrt{\frac{\pi}{dk_c}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho a}}. \tag{3.31}$$

42. Plus précisément, elle n'est plus capable de produire les ondes *capillaires* dont la longueur d'onde est plus petite que la taille caractéristique de l'objet.

Comment obtenir la forme asymptotique de la résistance de vague à grande vitesse[43] ? Pour satisfaire l'inéquation $k < k_{lim}$, il faut imposer une condition sur l'angle θ existant entre le vecteur d'onde et la vitesse. En remarquant qu'aux grandes vitesses $V \gg c_c$ on a :

$$\lim_{V/c_c \to +\infty} k_+(\theta) = 2\left(\frac{V}{c_c}\cos\theta\right)^2 \text{ et } \lim_{V/c_c \to +\infty} k_-(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{c_c}\cos\theta\right)^{-2}, \tag{3.32}$$

la condition sur l'angle s'écrit :

$$\cos\theta < \frac{c_c}{V}\sqrt{\frac{k_{lim}}{2}} = \frac{c_{lim}}{V}. \tag{3.33}$$

Puisqu'il est nécessaire de vérifier en même temps la condition de stationnarité (3.20), les valeurs de l'angle θ doivent donc satisfaire :

$$\arccos(c_{lim}/V) < \theta < \arccos(c_c/V). \tag{3.34}$$

Soit $\epsilon = \pi/2 - \theta$. Cette grandeur tend vers zéro à mesure que la vitesse V devient grande devant[44] c_{lim} (équation précédente). On est donc en droit d'effectuer l'approximation $cos\theta \approx \sin\epsilon \approx \epsilon$. L'inéquation (3.34) se ramène alors à :

$$(c_{lim}/V) > \epsilon > (c_c/V). \tag{3.35}$$

Pour $V \gg c_{lim} \gg c_c$, en se basant sur l'équation (3.29) :

$$\begin{aligned} R &\approx \frac{p^2 k_c}{\pi\sigma}\int_{\arccos(c_{lim}/V)}^{\arccos(c_c/V)} 2\cos^3\theta\left(\frac{V}{c_c}\right)^2 \mathrm{d}\theta \\ &\approx \frac{p^2 k_c}{\pi\sigma}\left(\frac{V}{c_c}\right)^2 \int_{c_{lim}/V}^{c_c/V} 2\epsilon^3\,(-\mathrm{d}\epsilon) \\ &\approx \frac{p^2 k_c}{\pi\sigma}\left(\frac{V}{c_c}\right)^2 \frac{1}{2}\left(\left(\frac{c_{lim}}{V}\right)^4 - \left(\frac{c_c}{V}\right)^4\right) \\ &\approx \frac{\sqrt{2}}{\pi} R_c \left(\frac{c_c}{V}\right)^2 \left(\left(\frac{c_{lim}}{c_c}\right)^4 - 1\right). \end{aligned} \tag{3.36}$$

La courbe correspondant à ce résultat est tracée figure 3.15. En remplaçant dans (3.36) k_c et R_c par leur valeurs respectives, on constate que la résistance limite R_{lim} est indépendante non seulement de la tension superficielle σ, mais encore de la gravité g :

$$R_{lim} = \pi\,\frac{p^2}{\rho a^2 V^2}. \tag{3.37}$$

43. $V \gg c_{lim}$
44. Et *a fortiori* devant c_c.

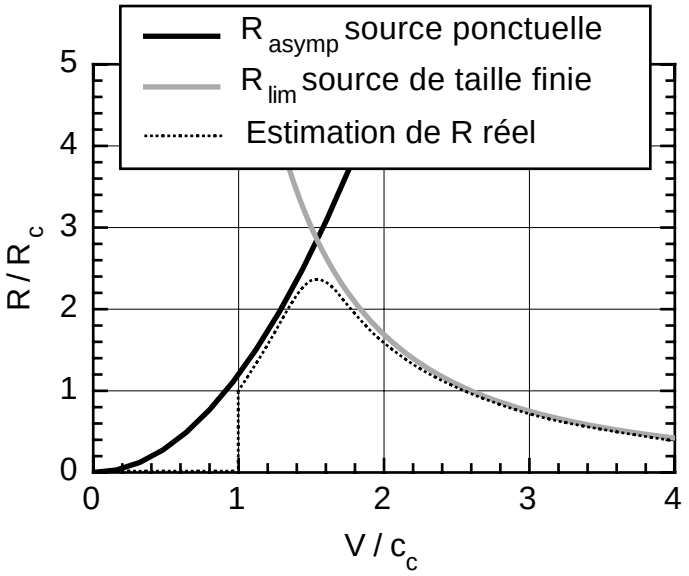


FIG. 3.15 – *Effet de la taille finie de la perturbation sur la résistance de vague R. Ici $c_{lim} = 2c_c$, comme dans l'expérience réalisée. Asymptotiquement, pour $V \in [c_c, c_{lim}[$, $R \propto V^2$ (ligne continue noire); lorsque $V \in [c_c, +\infty[$, $R \propto 1/(V^2)$ (ligne continue grise). L'allure supposée de la résistance de vague est tracée en pointillés.*

Un calcul plus détaillé avec une distribution explicite[45] du champ de pression a été effectuée par Raphaël & de Gennes [102, note 13.]. Il conduit à un résultat similaire, à un facteur de proportionnalité près : $c_{lim} = (3/16)^{1/4}\sqrt{\sigma/\rho a}$, et $R_{lim} = p^2/(8\pi\rho a^2 V^2)$.

Dans le cas de l'eau, pour une perturbation de taille caractéristique[46, 47] 0,1 mm, on obtient $c_{lim} = 56$ cm/s $\approx 2\,c_c$. On a toujours pris soin de travailler en dessous d'une telle vitesse, si bien que les effets de taille finie peuvent être la plupart du temps *négligés*.

45. Raphaël et de Gennes [102] proposent une distribution de la forme $P(r) = pa/[2\pi(a^2+r^2)^{3/2}]$, qui s'étend sur une région circulaire de rayon a environ.

46. Cette taille n'est pas fortuite. C'est le rayon du fil qui nous a servi lors de nos expériences — cf. section 3.3.3.

47. Attention ! l'amplitude de la déformation de la surface libre du fluide au repos ne reflète pas la distribution de pression appliquée. En effet une distribution δ de Dirac, par essence ponctuelle, engendrera une déformation statique qui s'étendra sur une longueur du même ordre que la longueur capillaire.

3.2.3 Fluides magnétiques

Pourquoi des fluides magnétiques ?

Afin de vérifier toutes ces prédictions *théoriques* dans leur généralité, il est nécessaire de faire varier $c_c = (4\sigma g/\rho)^{1/4}$ en changeant la tension superficielle σ et la densité ρ du fluide. En ajoutant un tensioactif à de l'eau, σ peut-être choisie *grosso modo* entre 20 et 73 mN/m. Ainsi les variations de c_c sont-elle restreintes à l'intervalle [17 ; 23] cm/s. Même en choisissant d'autres solvants organiques, ou bien des solutés très concentrés, il est difficile d'obtenir des densités supérieures à 2, ce qui ne changera pas la valeur de la vitesse critique de plus de 20 %. Les métaux liquides (Hg, Ga) ont une tension superficielle bien plus élevée que celle de l'eau, mais leur densité est, elle aussi, bien plus élevée[48]. La vitesse critique qui leur est associée est toujours du même ordre de grandeur, environ 20 cm/s. L'exposant 1/4 dans l'expression de la vitesse critique semble donc *a priori* un obstacle insurmontable pour faire varier celle-ci dans une large gamme.

L'utilisation de fluides magnétiques résout le problème : avec des champs magnétiques modestes, ils permettent d'agir sur la relation de dispersion des ondes de surface. En effet, on a vu dans le chapitre 2 que l'action d'un champ magnétique d'une dizaine de milliteslas[49] permettait de diminuer la fréquence à laquelle des ondes se propageaient, jusqu'à l'annuler, ce qui correspondait à l'apparition de l'instabilité de Rosensweig. Annuler la fréquence pour un vecteur d'onde non nul revient évidemment à annuler la vitesse de phase. Un champ magnétique permet alors d'*ajuster* la vitesse critique c_c depuis sa valeur en champ nul jusqu'à 0 comme l'examine le paragraphe suivant.

Vitesse de phase en fonction du champ

Pour simplifier,on considère le cas d'ondes de capillarité-gravité en profondeur infinie, la perméabilité magnétique étant constante en première approximation[50]. La relation de dispersion des ondes de capillarité-gravité en présence d'un champ magnétique vertical s'écrit (équation (2.6)) :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k_c} + \left(\frac{k}{k_c}\right)^3\right) - \left(\frac{H}{H_c}\right)^2 \left(\frac{k}{k_c}\right)^2, \tag{3.38}$$

48. Pour le gallium, $\sigma \approx 700$ mN/m et $\rho = 5900$ kg/m^3 [131], ce qui donne une vitesse critique de 26 cm/s ; pour le mercure, $c_c \approx 19$ cm/s (cf. note 27).

49. C'est-à-dire une centaine de gauss (pour les aficionados du système CGS).

50. Comme montré au chapitre précédent (section 2.3.2 page 35), la perméabilité magnétique peut être considérée comme constante à condition que l'épaisseur de la couche de ferrofluide soit suffisante (cf. figure 2.10 page 38). C'est le cas ici puisque $k \approx k_c = 0{,}505$ m^{-1} (cela reste vrai pour des vitesses V au voisinage de c_c) et $h = 8$ mm d'où $kh \approx 4$.

où, rappelons-le $\omega_c = \sqrt[4]{4\rho g^3/\sigma}$ (2.5) est la pulsation correspondant au vecteur capillaire $k_c = \sqrt{\rho g/\sigma}$ (2.3) et H_c est le champ-seuil de l'instabilité de Rosensweig (équation (2.18), page 32).

La vitesse de phase en présence de champ magnétique est immédiatement déduite :

$$\frac{c}{c_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k_c}{k} + \frac{k}{k_c} - 2\left(\frac{H}{H_c}\right)^2}, \tag{3.39}$$

où comme toujours $c_c = \omega(k_c)/k_c$ (équation (3.6)). Cette relation est tracée pour différents champs figure 3.16.

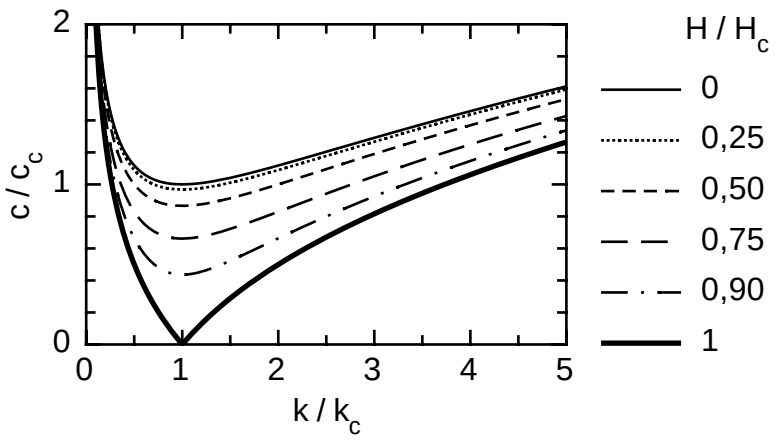


FIG. 3.16 – *Vitesse de phase des ondes en fonction du vecteur d'onde, pour différents champs magnétiques.*

Comme annoncé en préambule, plus le champ est intense, plus la vitesse minimale des ondes c_c^H diminue, jusqu'à s'annuler pour le champ critique H_c. Plus précisément :

$$c_c^H = c_c\sqrt{1 - \left(\frac{H}{H_c}\right)^2}, \tag{3.40}$$

qui n'est autre que l'équation d'une droite de pente -1 dans le système de coordonnées quadratiques $((H/H_c)^2,(V/c_c)^2)$ (cf. figure 3.32 page 99).

Résistance de vague en fonction du champ

Afin de calculer la résistance de vague, on procède comme à la section précédente. La condition (3.19) de stationnarité impose au vecteur d'onde k d'être solution de :

$$\left(\frac{k}{k_c}\right)^2 - 2\left(\left(\frac{V}{c_c}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{H}{H_c}\right)^2\right)\left(\frac{k}{k_c}\right) + 1 = 0. \tag{3.41}$$

On retrouve l'équation (3.21) dans le cas d'un champ nul. Une solution réelle existe si et seulement si :

$$V > c_c^H, \tag{3.42}$$

c_c^H représentant la vitesse de phase minimale en présence d'un champ (équation (3.40)). La résistance de vague est obtenue en injectant les deux solutions de l'équation du second degré (3.41) dans l'expression (3.23) de la résistance de vague pour un objet quasi-ponctuel en déplacement :

$$R^H(V) = \frac{p^2 k_c}{\pi\sigma} \int_0^{\arccos \frac{c_c^H}{V}} \cos\theta \left(2B(V,\theta)^{\frac{1}{2}} + B(V,\theta)^{-\frac{1}{2}}\right) \mathrm{d}\theta, \tag{3.43}$$

$$\text{où } B(V,\theta) = \left(\left(\frac{V}{c_c}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{H}{H_c}\right)^2\right)^2 - 1\,. \tag{3.44}$$

Juste au-dessus du seuil, la résistance de vague prend la valeur finie suivante[51] :

$$R_C^H = \frac{p^2 k_c}{2\sqrt{2}\sigma}\left(1 - \left(\frac{H}{H_c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = R_c\left(1 - \left(\frac{H}{H_c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.45}$$

Cette dernière est une fonction croissante du champ magnétique. Elle tend vers l'infini lorsque le champ magnétique se rapproche de la valeur critique H_c de l'instabilité de Rosensweig (cf. figure 3.33).

La résistance de vague R^H en fonction de la vitesse V est tracée pour différents champs magnétiques figure 3.17. A mesure que le champ magnétique augmente, la courbe croît de moins en moins, jusqu'à cesser[52] d'être monotone pour $H \approx 0{,}858\ H_c$; elle reste néanmoins toujours croissante à grande vitesse, le développement asymptotique (3.29) restant valable même en présence d'un champ magnétique. Dans cette situation aussi, on peut s'attendre à observer des effets de taille finie (3.2.2).

3.3 Mise en œuvre expérimentale

3.3.1 Principe

La réalisation d'une expérience de mesure de la résistance de vague offre plusieurs alternatives. On peut choisir de déplacer une perturbation à la surface d'un liquide au repos, ou à l'inverse, maintenir une perturbation fixe à la surface d'un liquide en mouvement. On a choisi cette dernière solution, car la mesure de la force exercée sur la perturbation est compliquée par son mouvement.

51. Le développement limité de l'expression précédente est long mais ne comporte aucune difficulté particulière.

52. Il n'y a aucune raison pour associer directement cette non-monotonicité à celle de la relation de dispersion.

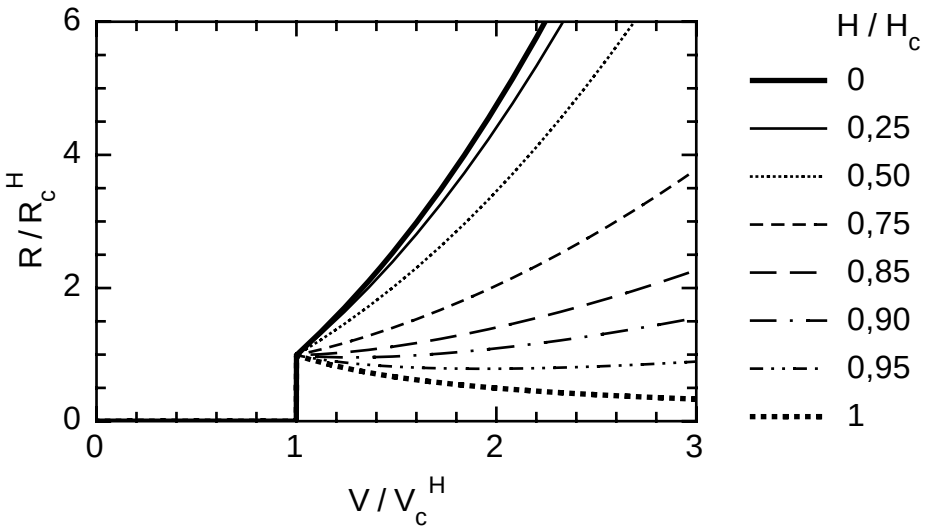


FIG. 3.17 – *Résistance de vague R en fonction de la vitesse v pour différentes valeurs du champ magnétique H. Résistance et vitesse sont rapportées à leurs valeurs au seuil critique d'apparition des ondes ; le champ au champ-seuil de l'instabilité de pics.*

La circulation du liquide peut s'envisager de deux manières. Ou bien on crée un écoulement dans un canal linéaire, avec pompe, réservoir et régulation de débit — une manipulation assez lourde, qui a l'inconvénient d'utiliser une quantité importante de liquide[53] et qui aggrave le risque de pollution des fluides par des tensioactifs[54]. Ou bien on choisit de mettre en rotation un canal circulaire contenant le fluide : la méthode est plus simple, et l'aspiration de la surface permet alors de réduire l'impact d'une contamination accidentelle. On a suivi cette voie.

Quant à la nature de la perturbation, plusieurs possibilités sont envisageables *a priori*. Dans son analyse des ondes produites par un petit obstacle à la surface de l'eau, telle une ligne de pêche [105, cité dans l'art. 272 de [126]] Rayleigh propose de modéliser la perturbation par un jet d'air ou un champ électrostatique localisé[55]. Le premier est exclu car il rend toute mesure de

53. Nous ne disposons que d'une quantité limitée de ferrofluide.

54. Il faudrait donc exclure le pompes rotatives ordinaires dont le lubrifiant pourrait changer l'état de surface des fluides, et choisir plutôt une pompe péristaltique.

55. *When a small obstacle, such as a fishing line, is moved forward slowly through still water, or (which of course comes to the same thing) is held stationary in moving water, the surface is covered with a beautiful wave-pattern, relatively fixed to the obstacle.* [...] *The immersed portion of the obstacle disturbs the flow of the liquid independently of the deformation of the surface, and renders the problem in its original form one of great difficulty. We may however, without altering the essence of the matter, suppose that the disturbance is produced by the application to one point of the surface of a slightly abnormal pressure, such as might be produced by electrical attraction or by the impact of a small jet*

force improbable ; une tension électrique appliquée par une pointe juste au-dessus du fluide est une option réalisable, car l'eau et les ferrofluides sont de bons diéléctriques[56]. Néanmoins, il faudrait employer des tensions élevées (100 V au moins), ce qui rendrait l'ensemble difficile à manier, d'autant plus que l'eau, et *a fortiori* les ferrofluides, sont conducteurs. Il semble plus simple d'utiliser dans un premier temps un fil affleurant le liquide comme élément perturbateur de l'écoulement.

Lors de la conception de cette expérience, la réalisation d'une *mesure de force* a été une préoccupation essentielle. Quel est son ordre de grandeur ? En supposant un mouillage total[57], la force que le fil exerce sur le fluide dans la direction verticale (cf. figure 3.18) vaut[58] :

$$f_a \approx 2\pi r \sigma \tag{3.46}$$

où r est le rayon du fil et σ la tension superficielle. Au seuil, on a montré que la résistance de vague valait (équation (3.28)) $R_c = p^2 k_c/(2\sqrt{2}\sigma)$, où p est l'amplitude de la distribution de Dirac qui modélise la pression appliquée : $P_{ext} = p\,\delta(x)\delta(y)$. La force totale appliquée vaut $f_a = \iint P_{ext}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et s'identifie donc à p. Après substitution on trouve :

$$R_c = \pi^2 r^2 \sqrt{2\rho g \sigma}. \tag{3.47}$$

Ainsi, pour un fil de 0,2 mm de diamètre[59] affleurant de l'eau[26], on attend une force d'environ 4 micronewtons. Une méthode de mesure extrêmement sensible est donc requise pour effectuer une mesure de la résistance de vague. La mesure de la déflexion du fil par un capteur optique infrarouge répond à l'attente.

3.3.2 Mesure de force

Le cours de physique théorique de Landau & Lifshitz constitue une ressource quasiment inépuisable pour le physicien. Outre des explications claires et concises, on y trouve, plus particulièrement dans les exercices, des résultats prêts à l'utilisation, dont la démonstration serait extrêmement pesante pour celui qui aborderait le sujet en parfait novice.

Les formules décrivant la déflexion de barres à section circulaire[60],

of air.

56. Leurs perméabilités diélectriques relatives ϵ_r valent environ 80 (on ne considère ici que les ferrofluides à base d'eau).

57. Les angles de contact observés étaient dans tous les cas très fermés si bien que cette approximation reste toujours valable.

58. Nous justifions cette expression à la section 3.3.5.

59. Si l'on choisit une taille supérieure, on s'expose à des artefacts indésirables : cf. section 3.2.2.

60. Ces formules sont valables tant que le rayon de courbure de la déformation est grand devant la longueur de la barre, ou, ce qui revient ici au même, tant que les déformations restent petites devant la longueur de la barre [73, p. 116].

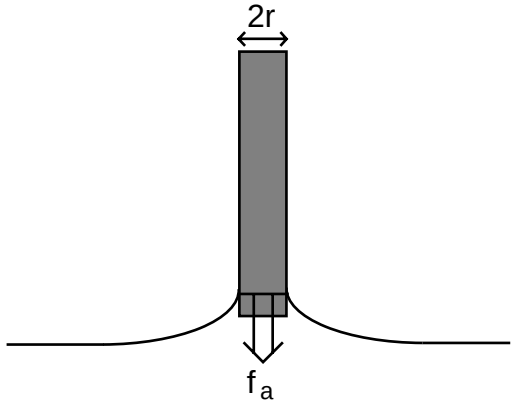


FIG. 3.18 – *Estimation de la force totale f_a exercée par le fil sur le fluide (vers le haut), ou, ce qui revient au même, par le fluide sur le fil (vers le bas). La tension de surface agit comme une force linéique sur la ligne de contact du fil avec le liquide.*

extraites du tome consacré à l'élasticité[61] [73], fondent l'outil théorique qui permet d'accéder à une mesure de la force exercée sur l'extrémité du fil métallique lorsqu'il affleure la surface du liquide en mouvement.

Déformation due à une force ponctuelle

Considérons une barre élastique dont une extrémité est encastrée et l'autre soumise à l'action d'une force f quasi-ponctuelle perpendiculaire à l'axe de la barre. La déflexion ζ de la barre (de longueur totale l) vaut :

$$\zeta = \frac{f}{6EI} z^2 (3l - z) \tag{3.48}$$

où z est la coordonnée du point courant, E le module de Young du matériau qui compose la barre et I le *moment d'inertie*[62] de la section de la barre par rapport à un axe médian. Ici, $I = \pi R^4/4$, R étant le rayon de la barre. Le produit EI est souvent appelé *rigidité flexurale* de la barre. Le déplacement est donc proportionnel à la force appliquée à l'extrémité de la barre.

Ainsi déduira-t-on la force exercée par le fluide sur l'extrémité du fil métallique qui l'affleure de la mesure sa déflexion ζ à une distance z du point d'attache :

$$f = \zeta \, \frac{6EI}{l^3} \, \frac{1}{\left(\frac{z}{l}\right)^2 \left(3 - \frac{z}{l}\right)} \tag{3.49}$$

61. On retrouve les mêmes formules avec d'autres présentations dans les ouvrages consacrés à la résistance des poutres [76].

62. C'est le même qu'en mécanique à ceci près que, dans sa définition, on ne considère pas un élément de masse mais un élément de surface [73].

Un capteur optique, placé à proximité du fil, fournit une tension fonction de la position du fil (cf. fig. 3.22 p. 86). Cette fonction est inconnue *a priori* ; il faut donc calibrer cette chaîne de mesure en appliquant une force d'intensité connue. Un étalon produisant une force de l'ordre du micronewton[63] n'est cependant pas facilement accessible.

Déformation d'une barre sous son propre poids

En fait, pour étalonner le système, un moyen simple consiste à incliner le support du fil, de telle sorte qu'il fléchisse sous son propre poids (cf fig. 3.19). Tout se passe comme si le même fil, mais cette fois-ci en position

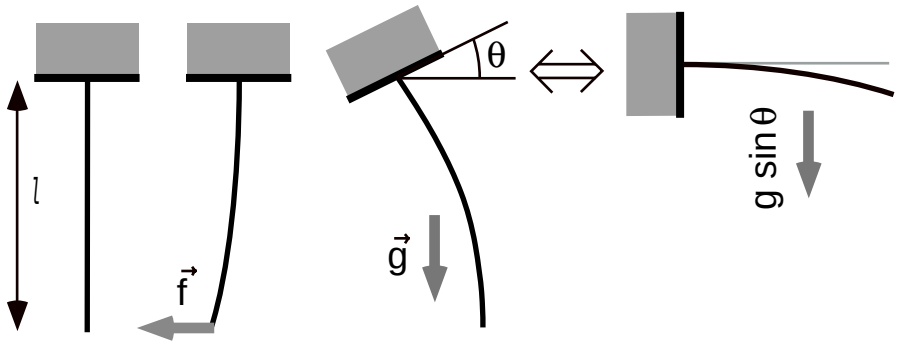


FIG. 3.19 – *Méthode de calibrage du dispositif de mesure de force. De gauche à droite : fil au repos de longueur l, fil courbé par une force quasi-ponctuelle appliquée à son extrémité libre, fil courbé par l'action de son propre poids (son support est incliné). La déflexion sous son propre poids d'une barre élastique dont l'extrémité encastrée fait un angle θ avec l'horizontale est la même que celle d'une barre identique, encastrée horizontalement et soumise à un champ de gravité $g \sin\theta$. L'amplitude des déflexions est fortement exagérée pour les besoins de la représentation.*

horizontale, était soumis au champ de gravité $g \sin\theta$ (θ est une mesure de l'angle d'inclinaison) ; seuls les efforts transversaux au premier ordre agissent sur la forme d'une barre élastique. La déflexion ζ vaut alors [73, p. 120] :

$$\zeta = \frac{\rho' g \sin\theta}{24EI} l^4 \left(\frac{z}{l}\right)^2 \left(\left(\frac{z}{l}\right)^2 - 4\left(\frac{z}{l}\right) + 6\right) \tag{3.50}$$

où ρ' représente la masse linéique du fil métallique.

En éliminant la déflexion ζ des équations (3.49) et (3.50), on obtient :

$$f = \frac{\rho' g l}{4} \frac{\left(\frac{z}{l}\right)^2 - 4\left(\frac{z}{l}\right) + 6}{3 - \frac{z}{l}} \sin\theta. \tag{3.51}$$

63. C'est en effet l'ordre de grandeur attendu, et observé.

La connaissance de la correspondance entre le signal électrique produit par le capteur et l'angle d'inclinaison lors de l'étalonnage permet ainsi de remonter à la force exercée à l'extrémité du fil.

Procédure de calibrage

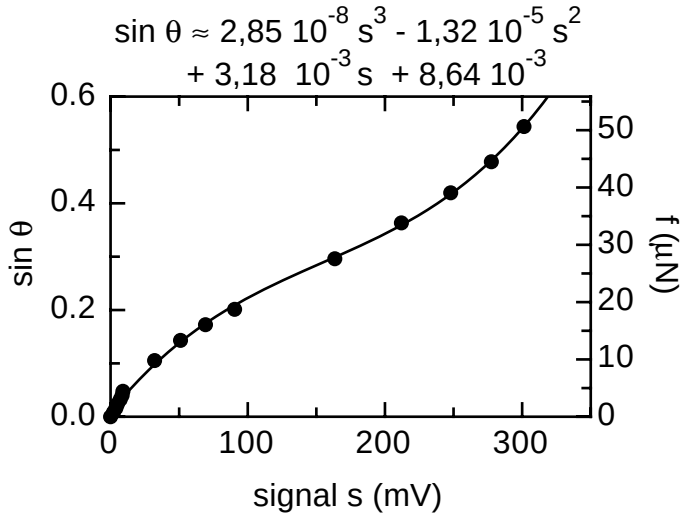


FIG. 3.20 – *Courbe de calibrage du système de mesure de forces. Les points expérimentaux reliant inclinaison du support et signal électrique (échelle de gauche) sont interpolés par un polynôme du troisième degré représenté par un trait continu. La force (échelle de droite) est proportionelle à* $\sin\theta$*, et la constante de proportionalité est déterminée par les caractéristiques physiques du fil et la position du capteur selon l'équation (3.51).*

Avant tout, on s'assure que le capteur optique est *grosso modo* positionné de sorte que la sensibilité soit maximale. Un système électronique de décalage de zéro permet d'assurer[64] que la tension mesurée est nulle pour une déflexion nulle. Le support est alors incliné d'un angle θ. On relève le signal produit par le capteur optique de position en fonction de $\sin\theta$. Une «cubique» est choisie comme fonction d'interpolation de $(\sin\theta)(s)$, où s est la tension de sortie. Les coefficients de ce polynôme sont obtenus par la méthode des moindres carrés, qui fournit la plupart du temps une excellente description (cf. figure 3.20).

En conjonction avec ce polynôme, l'équation (3.51) permet d'accéder directement à la force. Pour donner un ordre de grandeur[65], la longueur l du fil valait 90 mm, son rayon 100 μm, la distance du capteur optique à

64. Ceci pour des raisons purement pratiques de lisibilité.

65. Les paramètres donnés ici sont ceux qui ont servi dans la série de mesure de la résistance de vague dans un ferrofluide en présence de champ (section 3.4.2).

l'extrémité encastrée $z = 57{,}5$ mm, la masse linéique[66] de 0,26 g/m. Avec ces paramètres on construit, pour l'exemple, une courbe d'étalonnage de la force en fonction du signal électrique (échelle de droite de la figure 3.20).

L'ordre de grandeur de la *sensibilité* S du capteur de force réalisé vaut ainsi :

$$S \approx 6\text{mV}/\mu\text{N} = 6\ 10^3\ \text{V/N}.$$

Estimation de la déflexion

Pour estimer la déflexion ζ du fil, il est nécessaire de connaître le module de Young, E, du métal le composant. Une mesure *in situ* permet d'y accéder : la pulsation ω des oscillations du fil autour de sa position d'équilibre est reliée au module de Young par la formule suivante [73, p.149] :

$$\omega = \frac{3{,}52}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \tag{3.52}$$

où $I = \pi R^4/4$ est le moment d'inertie de la section du fil (cf. note 62), $S = \pi R^2$ la section du fil et ρ la densité du matériau le composant. R et l désignent respectivement le rayon et la longueur du fil.

Par exemple, pour une longueur $l = 86{,}7$ mm, la fréquence observée des oscillations libres est de 12,5 Hz, et conduit à un module de Young de $9{,}3\ 10^{10}$ Pa. Cette valeur est tout à fait comparable[67] à celles des tables [51] pour le bronze[68], à savoir $1{,}1\ 10^{11}$ Pa.

En se basant sur l'équation (3.48), la déflexion $\zeta(l)$ à l'extrémité du fil est reliée à la force par :

$$\zeta = f\frac{l^3}{3EI} = \frac{1}{E}\frac{4l^3}{3\pi R^4}, \tag{3.53}$$

ce qui, après avoir remplacé les paramètres par leurs valeurs, conduit à une «raideur» équivalente k de :

$$k = \frac{f}{\zeta} \approx 32\ \text{mN/m}.$$

Une force typique de 4 micronewtons conduira par exemple à un déplacement de l'extrémité du fil de 125 microns, largement suffisant pour être détecté par le capteur optique[69]. On reste dans l'approximation des faibles déformations[60], et le fil peut toujours être considéré comme perpendiculaire à la surface libre du fluide.

66. Elle a été mesurée en déroulant 3 mètres de fil et en les pesant : la masse volumique correspondante vaut 8 300 kg/m^3, à mettre en rapport avec les 8 230 kg/m^3 indiqués par les tables [51] pour le bronze au béryllium.

67. L'incertitude relative sur la longueur se retrouve quadruplée dans l'estimation du module de Young.

68. Le fil est composé de bronze au béryllium, mais sa composition exacte (proportion de béryllium, autres composants...) est inconnue.

69. Cette assertion reste vraie même si le capteur n'est pas situé à l'extrémité du fil.

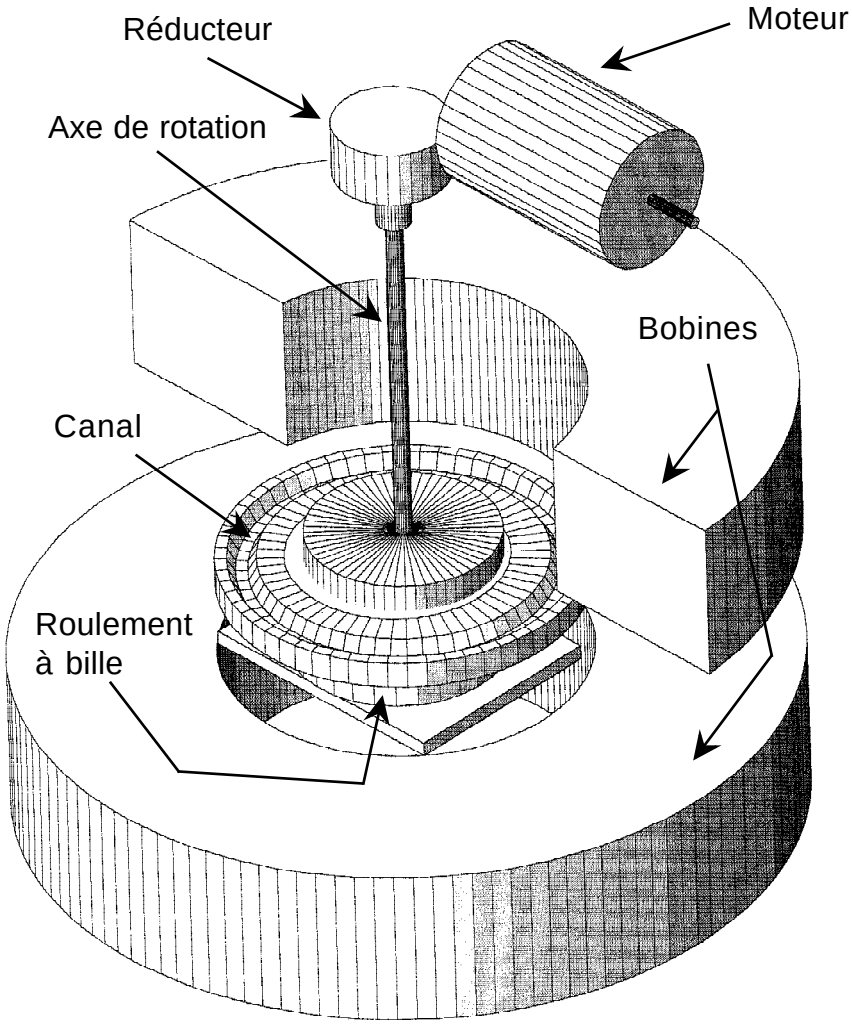


FIG. 3.21 – *Schéma de l'expérience de mesure de la résistance de vague. Projection isométrique à l'échelle 1:6.*

3.3.3 Montage expérimental

Il est schématisé figure 3.21. Un canal, creusé dans une plaque circulaire de dural et recouvert de Téflon® par électrodéposition[70] de façon à le rendre non-mouillant pour l'eau[71] est placé sur un plateau tournant entre deux bobines d'un électro-aimant. Un axe relie le centre de la plaque à un moteur, à travers un réducteur de vitesse. Un régulateur-inverseur[72] alimente le moteur synchrone[73], si bien que le canal peut être mis en rotation à la vitesse désirée, jusqu'à 1 tour/s. La vitesse de l'axe de rotation est mesurée en temps réel à l'aide d'un tachymètre optique. Cependant, malgré la présence d'une alimentation régulée, la vitesse obtenue lors des expériences fluctuait, probablement à cause des mauvaises qualités mécaniques du moteur. L'incertitude relative de la vitesse avoisinne ainsi 4 %.

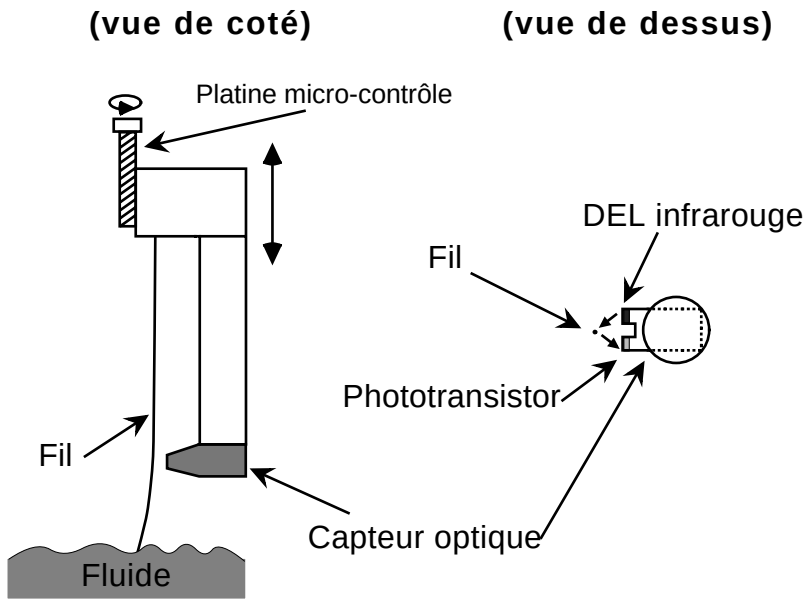


FIG. 3.22 – *Schéma de la mesure optique de la déflexion du fil élastique. La lumière émise par la DEL est réfléchie par le fil et détectée par le phototransistor.*

Un fil de bronze-béryllium est fixé à un support dont la position verticale et horizontale peut être réglée avec précision[74] grâce à des platines Micro-contrôle®. Ainsi est-il possible d'assurer un enfoncement minimal du fil dans

70. Sté Fluorotechnique, 2 av. du Pdt. Allende, Z.I. Mozinor, 93106 Montreuil s/Bois.
71. En fait, il s'agit plutôt de réduire le nombre de points d'ancrage du fluide à la surface du canal, pour que son niveau soit le même à tout endroit.
72. Modèle Parvalux LD11C.
73. Modèle Parvalux 733RB.
74. 500 μm par tour de vis, 50 graduations par tour : la précision absolue est inférieure à 10 μm.

le fluide contenu dans le canal, pour réduire les frottements visqueux. De plus, la distance du fil à l'axe de rotation du système est réglée de sorte que le niveau du fluide est indépendant de la vitesse de rotation du canal[75].

L'ensemble (fil et support) est susceptible d'être incliné jusqu'à un angle d'environ 30° pour le calibrage de force (cf. section précédente). Le rayon du fil est de 100 micromètres pour éviter les effets de taille finie (cf. section 3.2.2). Un capteur optique[76], solidaire du support du fil[77], produit un signal fonction de la déflexion du fil (cf. figure 3.22). Une représentation de la dépendance typique est proposée figure 3.20.

3.3.4 Caractéristiques des fluides employés

Fluides ordinaires

Puisque aucune théorie de la résistance de vague pour des fluides *visqueux* n'a été proposée jusqu'à présent pour des ondes *bidimensionnelles*[78], on s'efforce dans un premier temps d'en étudier expérimentalement l'influence. A cet effet, des mélanges eau/glycérol sont utilisés, car leurs densités et tensions superficielles sont très proches, alors que leurs viscosités dépendent fortement des proportions du mélange (cf. table 3.3).

En raison de la dépendance sous-linéaire des grandeurs caractéristiques c_c et R_c envers la tension superficielle et la densité (éq. (3.6) et (3.28)), et ainsi que le montre la table 3.3, il est légitime de représenter sur le même graphe la résistance de vague en fonction de la vitesse pour les différents mélanges.

Fluide magnétique

Le fluide magnétique employé pour les mesures de résistance de vague en présence de champ magnétique est identique à celui qui a servi dans les expériences sur les ondes de surface (section 2.3.2 p.35). Son champ critique H_c pour l'instabilité de Rosensweig est de 9,15 kA/m. Sa masse volumique ρ est de 1560 kg/m^3, sa tension superficielle σ estimée à 60 mN/m suite à l'expérience de propagation d'ondes de surface (cf. section 2.4). La viscosité de ce ferrofluide a été mesurée avec un viscosimètre de Ubbelhode, et est

75. Il est facile de montrer qu'il existe toujours un tel rayon R_0 pour lequel le niveau du fluide ne change pas, malgré la présence d'une accélération centrifuge. Le calcul conduit à $R_0 = \sqrt{({R_{\rm int}}^2 + {R_{\rm ext}}^2)/2}$, où $R_{\rm int}$ et $R_{\rm ext}$ sont respectivement les rayons intérieurs et extérieurs du canal.

76. Capteur à réflexion Optek OPB744. Il consiste en une DEL infrarouge et un phototransistor mis côte à côte. La lumière émise par la DEL est réfléchie par le fil et détectée par le phototransistor. Disponible par exemple chez *Radiospares*.

77. Lorsque la position de ce dernier est modifiée à l'aide des platines Micro-contrôle®, le signal produit par le capteur reste donc constant.

78. Pour les ondes unidimensionnelles, des effets pré-transitionnels sont prévus, cf. [106].

TAB. 3.3 – *Propriétés physiques des mélanges eau/glycérol employés au cours des expériences. Résistances de vague théorique R_c et vitesses théorique c_c au seuil.*

Fraction massique de glycérol (%)	60	44,5	30	0
Viscosité [a] (mPa.s)	12,5	5,1	2,6	1,0
Masse volumique [b] (g/cm^3)	1,16	1,13	1,09	1,00
Tension superficielle [c] (mN/m)	68	70	72	73
Résistance critique [d] R_c^{th} (μN)	3,9	3,8	3,8	3,7
Vitesse critique c_c^{th} (cm/s)	21,9	22,2	22,6	23,1

[a] La viscosité est mesurée à l'aide d'un viscosimètre Ubbelhode (cf. note 38 page 35). La valeur obtenue ne correspond pas tout à fait aux valeurs usuelles à 20 °C des tables [131]. L'écart, de 20% au plus, s'explique non seulement par la présence d'impuretés dans glycérol utilisé (il n'était pur qu'à 98 %), mais encore par la forte dépendance à la température (22 °C dans nos expériences) de la viscosité de ces mélanges.

[b] Elle est obtenue dans l'approximation des mélanges parfaits.

[c] Les tensions superficielles sont extraites de [131].

[d] Pour le calcul de R_c, on utilise l'équation (3.47), le rayon r du fil étant de 0,1 mm.

TAB. 3.4 – *Résistance de vague théorique R_c et vitesse théorique c_c au seuil pour le ferrofluide employé au cours des expériences.*

Masse volumique ρ (kg/m)^3	Tension superficielle σ (mN/m)	Viscosité dynamique ν (mPa.s)	Vitesse critique R_c^{th} (μN)	Résistance critique [a] c_c^{th} (cm/s)
1560	60	10	4,2	19,7

[a] Pour le calcul de R_c, on utilise l'équation (3.47), le rayon r du fil faisant 0,1 mm.

estimée à environ 10 mPa.s (cf. section 2.3.1 p. 35). Les propriétés de ce ferrofluide sont résumées dans le tableau 3.4.

3.3.5 Mouillage magnétique du fil

Pour confronter l'expérience et la théorie, il faut quantifier la force totale f_a exercée verticalement sur le fluide. On a vu (section 3.3.1, p. 78) que cette force n'est autre que p, paramètre qui intervient dans la modélisation de la perturbation de pression ($P_{ext} = p\,\delta(x)\delta(y)$, éq. (3.25)). Jusqu'à présent, f_a et l'action de la tension superficielle à la ligne de contact (fluide-air-fil) ont été identifiés. Pour cela, on a supposé que le mouillage du fluide sur le fil était total ($f_a = 2\pi r\sigma$ éq. (3.46)), ce qui est relativement correct pour les liquides employés ici. Mais qu'en est-il exactement en présence de champ magnétique?

Afin de répondre à cette question, on filme à fort grossissement l'interface

fluide-air au repos. On constate figure 3.23 que l'amplitude de la déformation dépend fortement de la valeur du champ magnétique. Le champ magnétique n'intervient qu'à travers des termes de forces volumiques[79]. Il n'a pas d'influence sur l'angle de contact, puisque selon la loi de Young-Dupré [3] seules des forces surfaciques (comme les tensions superficielles) régissent les angles de contact.

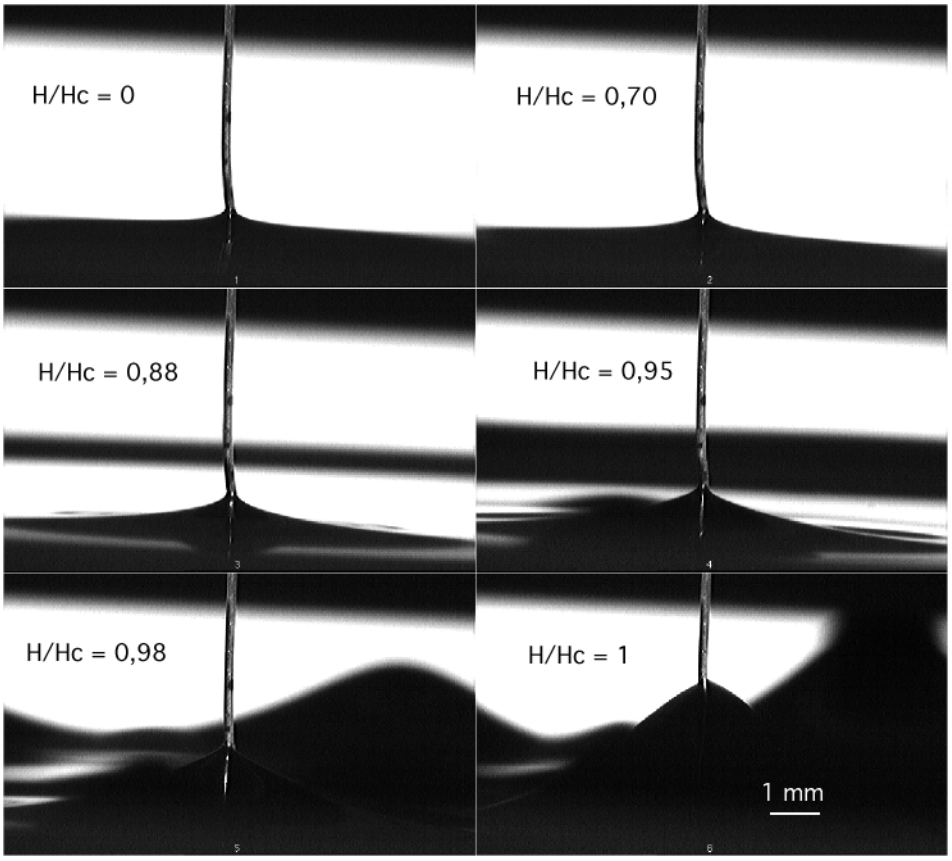


FIG. 3.23 – *Visualisation directe de l'interface ferrofluide/air au voisinage du fil vertical pour différents champs magnétiques, le fluide se trouvant au repos. Le niveau du fluide augmente avec le champ magnétique, parfois de façon brutale. A l'arrière-plan (près du bord du récipient), on voit les pics se développer à mesure que le champ augmente.*

La force exercée par l'*extérieur* sur le ferrofluide réside donc en deux termes :

- la traction produite au niveau de la ligne de contact ; ce terme est indépendant du champ et vaut $2\pi r\sigma$. La somme des forces extérieures

79. Jamais l'influence du champ sur la tension superficielle n'a pu être mise en évidence (communication de J.-C. Bacri).

appliquées est égale au poids du volume déplacé[80]. Ce dernier est fonction croissante du champ magnétique, qu'il faut se résoudre à considérer.

– l'action de forces magnétiques. Comme l'interface n'est pas plane au voisinage du fil, le champ induit n'est pas homogène et les gradients de champ développés agissent à l'interface, *tirant* le ferrofluide vers le haut. Les bobines qui produisent le champ exercent de ce fait une force à distance sur le fluide (et réciproquement).

Une expérience simple prouve l'existence de cette force d'origine magnétique. Un fil coudé affleure la surface de ferrofluide et permet d'estimer la force verticale exercée sur lui en fonction du champ magnétique (cf. figure 3.24). La traction du fil est alors fonction *décroissante* du champ magnétique

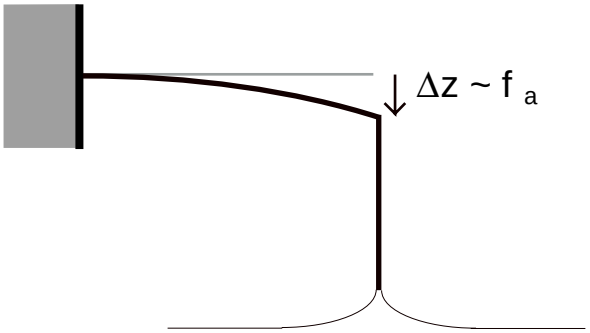


FIG. 3.24 – *Configuration pour estimer la force f_a exercée par le fluide sur le fil. La déviation de la partie horizontale du fil est évaluée à l'aide d'un capteur optique. Le signal produit, non étalonné, est grossièrement proportionnel au déplacement et donc à f_a.*

(cf. figure 3.25). Cet effet est dû à la poussée d'Archimède! Plus le champ est fort, plus le niveau du fluide monte et plus le poids apparent du fil est réduit. Le fil seul ne peut donc assurer l'augmentation de la traction avec le champ, c'est même le contraire.

Pour estimer l'action des forces d'origine magnétique, il est nécessaire de mesurer le volume déplacé en relevant le profil du ménisque. Pour tester cette idée et comparer les résultats à des valeurs connues, on effectue ce relevé en champ nul (figure 3.26 tirée de la figure 3.23 pour $H = 0$) à l'aide d'un logiciel de traitement d'image[81]. Le poids du volume total déplacé par la présence du fil vaut :

$$f_a = \rho g \int_0^\infty z(r) 2\pi r \, \mathrm{d}r, \tag{3.54}$$

80. On entend par là le volume supplémentaire amené par la présence même du fil.
81. Cf. note 47 p. 39.

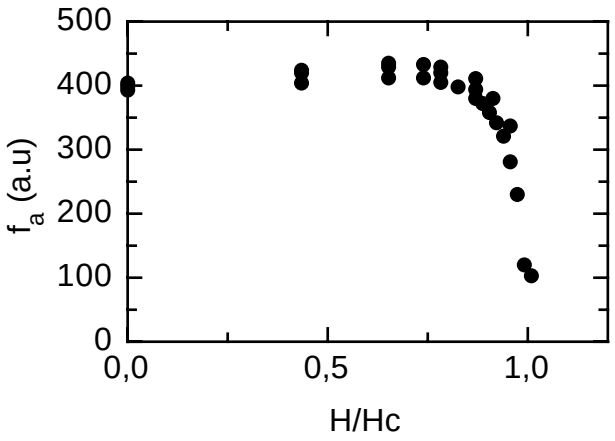


FIG. 3.25 – *Force f_a exercée par le ménisque sur le fil (unité arbitraire), en fonction du champ H appliqué (rapporté à sa valeur-seuil H_c pour l'instabilité de pics). Aux incertitudes de mesure près, cette force est une fonction décroissante du champ magnétique.*

où r est la distance radiale à l'axe du fil (axe de symétrie du système), et z l'altitude de l'interface. Par une intégration numérique (méthode de Simpson), on obtient un volume déplacé de 2,6 mm^3 auquel correspond une force $f_a = 40\mu$N, à comparer à $2\pi r\sigma = 37\mu$N. L'écart est inférieur aux erreurs commises lors de l'estimation du volume, erreurs qui peuvent dépasser les 20 % car l'estimation de l'intégrale (3.54) est extrêmement sensible au choix d'un niveau de référence[82] $\lim_{r\longrightarrow\infty} z$.

Une étude similaire pour des valeurs non nulles du champ magnétique permettrait d'estimer avec une précision accrue la force totale appliquée, et, en toute rigueur, il faudrait inclure cette force dans les calculs de la résistance de vague. Certes le problème ne se limite pas à cette estimation. La force exercée par le champ magnétique n'est pas concentrée comme la traction capillaire du fil, mais bien diffuse sur tout le ménisque. Les effets de taille finie (cf. section 3.2.2) perturbent le système, et conduisent à une surestimation de la résistance de vague. A moins d'effectuer des simulations numériques de la répartition du champ pour intégrer ces effets, ce qui entraînerait bien loin, il semble difficile d'atteindre un niveau de précision supérieur à celui fourni par l'approximation qui consiste à faire abstraction des forces d'origine magnétique. Dans cette étude liminaire de la résistance de vague, les efforts de traction capillaires ont été et seront seuls considérés.

82. A cet égard, la procédure employée pour extraire le profil (détection des bords) est déterminante.

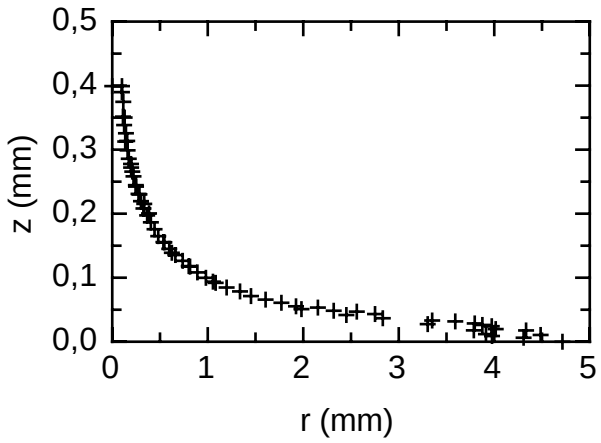


FIG. 3.26 – *Profil du ménisque en champ nul. r est la distance radiale à l'axe du fil (axe de symétrie du système), et z l'altitude de l'interface.*

3.4 Résultats

Tous les outils, théoriques comme expérimentaux, sont désormais disponibles pour réaliser et interpréter les expériences de résistance de vague. On désignera dorénavant par «traînée» la force horizontale R_{exp} subie par l'extrémité du fil en contact avec le fluide.

3.4.1 Fluides ordinaires

La figure 3.27 représente la variation de cette traînée en fonction de la vitesse V du fluide, et ce pour différents mélanges eau/glycérol. Les mesures sont obtenues en augmentant puis en diminuant la vitesse : aucune hystérésis ne se manifeste.

Existence d'une vitesse critique

Il existe une vitesse pour laquelle la traînée mesurée est discontinue. Ce fait valide un aspect important de la théorie de Raphaël et de Gennes [102]. Il a été vérifié *de visu* que cette discontinuité de la traînée se produit exactement à la vitesse à laquelle un système d'ondes se développe. La vitesse critique mesurée[83] V_c vaut $23 \pm 0{,}5$ cm/s pour l'eau pure. Ceci correspond à un intervalle de tension de surface [65,1;77,7] à l'intérieur duquel réside la valeur tabulée de la tension superficielle de l'eau[26], 73 mN.m à 20 °C. Pour les mélanges eau/glycérol, nous obtenons $V_c \approx 22{,}5$ cm/s ce qui est parfaitement compatible avec les tensions de surface des mélanges (autour

83. Nous distinguons la vitesse critique *théorique* c_c et la vitesse critique mesurée V_c.

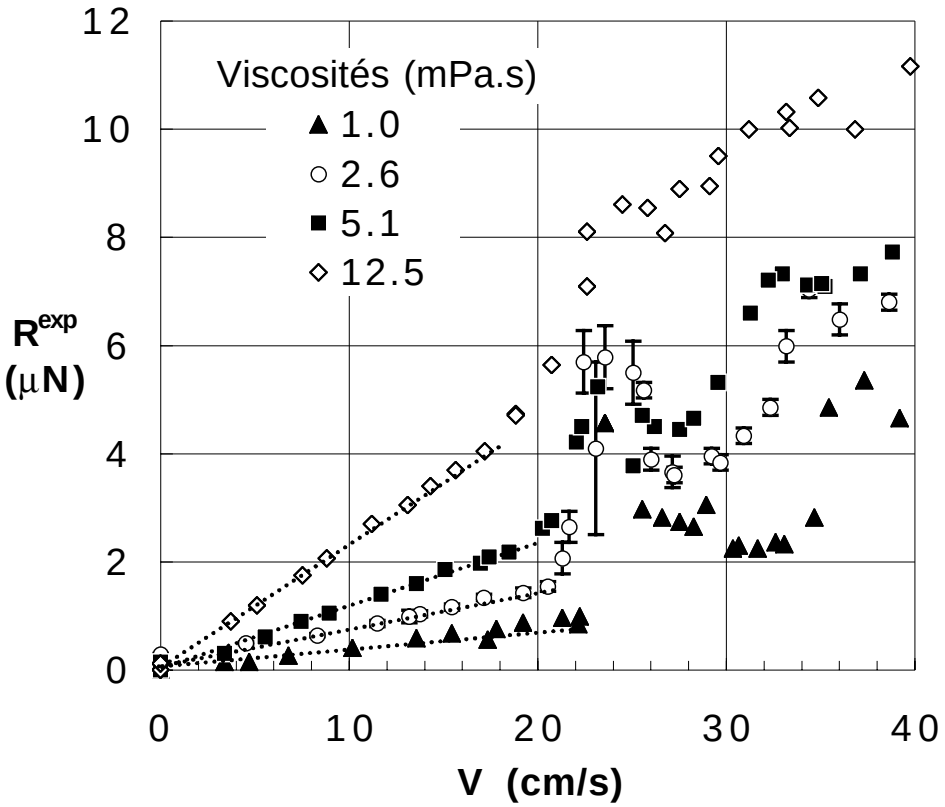


FIG. 3.27 – *Traînée expérimentale R_{exp} fonction de la vitesse V pour différents mélanges eau/glycérol. Seules quelques barres d'erreurs ont été tracées par souci de lisibilité. Les droites en pointillé représentent la partie visqueuse de la traînée R_{visc}.*

de 70 mN/m, cf. table 3.3) si on tient compte des incertitudes quant à la vitesse (cf. section 3.3.3).

Traînée non-nulle en dessous du champ critique

La traînée mesurée n'est pas nulle en dessous de la vitesse critique, mais fonction croissante de la vitesse et de la viscosité. En fait, ainsi que nous l'avons déjà remarqué section 3.1.1, la traînée R_{exp} est la somme de la résistance de vague R et de la résistance visqueuse R_{visc} due à la partie immergée :

$$R_{exp} = R + R_{visc}. \tag{3.55}$$

En dessous du seuil d'apparition des ondes, on mesure *directement* cette résistance visqueuse. Il est difficile d'écrire une expression théorique simple de R_{visc} : à une vitesse d'environ 10 cm/s, le nombre de Reynolds construit sur la longueur approximative de la partie immergée du fil ($h \approx 0{,}4$ mm)

vaut déjà près de 40 (pour l'eau). La formule de Stokes [72] ne peut donc fournir qu'une estimation grossière de cette résistance visqueuse :

$$R_{visc} \approx 6\pi\eta hV. \tag{3.56}$$

Il va de soi que le facteur 6π n'est qu'indicatif.

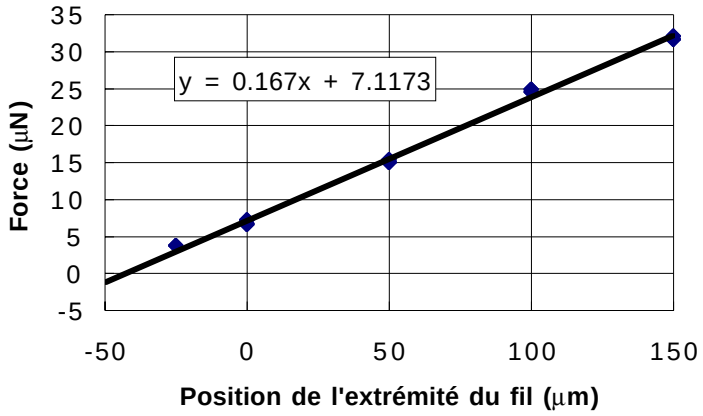


FIG. 3.28 – *Traînée à 18 cm/s fonction de la distance de l'extrémité du fil à la surface. Il faut ajouter environ 400 µm de hauteur du ménisque pour obtenir la profondeur totale h de fil immergé. Le fluide utilisé est le mélange eau/glycérol dont la viscosité est de 12,5 mPa.s.*

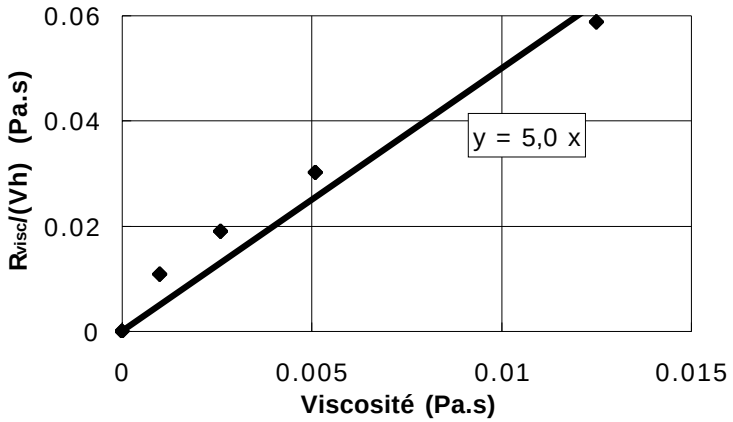


FIG. 3.29 – *Coefficient de traînée $R_{visc}/(Vh)$ en fonction de la viscosité. R_{visc}/V est obtenu par ajustement de droites aux points expérimentaux à vitesse modérée (lignes pointillées de la figure 3.27). Le tirant d'eau h est pris égal à 0,4 mm.*

L'expérience (figure 3.28) vérifie la proportionnalité de R_{visc} et de h. On constate aussi que R_{visc} est proportionnelle à V, au moins pour des vitesses

modérées, inférieures aux vitesse critiques (cf. droites en pointillés sur la figure 3.27).

Comme il est malaisé de garder le même h d'une expérience à l'autre, la relation de proportionnalité entre la résistance visqueuse et la viscosité est plus difficile à mettre en évidence. La figure 3.29 représente la pente[84] des droites en pointillés de la figure 3.27, en fonction de la viscosité des mélanges.

La résistance de vague R pourra donc être estimée[85] en soustrayant la résistance visqueuse R_{visc} à la mesure de force R_{exp}. On fait ici l'hypothèse que R_{visc} conserve le même comportement linéaire à des vitesses supérieures à la vitesse critique[86]. La figure 3.30 décrit l'évolution de la résistance de vague R en fonction de la vitesse.

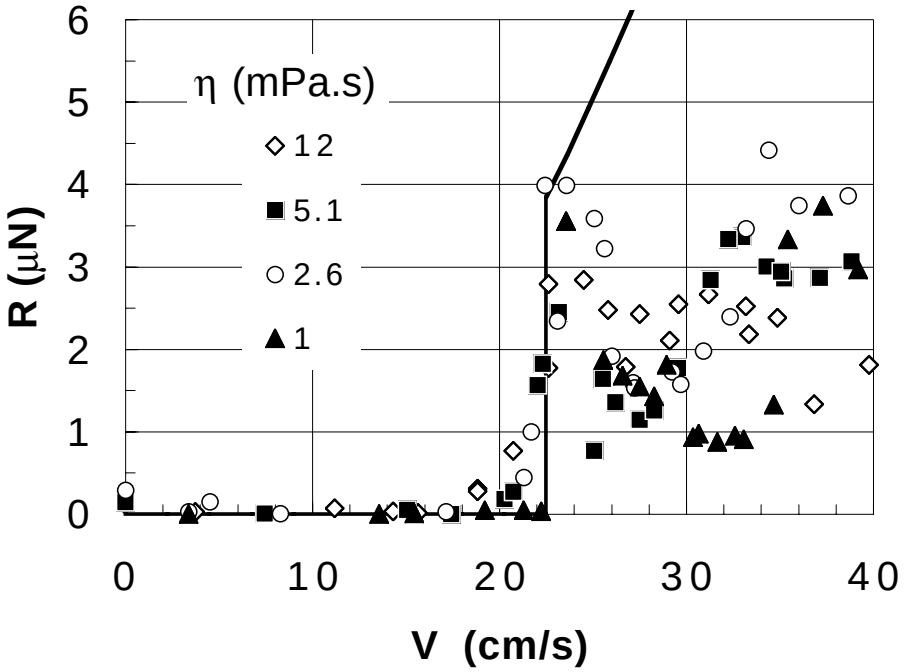


FIG. 3.30 – *Résistance de vague R déduite des expériences en fonction de la vitesse V pour différents mélanges eau/glycérol. Le trait plein représente la théorie.*

Conformément au modèle théorique [102], la résistance de vague est nulle pour des vitesses inférieures au seuil d'apparition des ondes, aux incertitudes

84. Cette pente peut tenir lieu de coefficient de traînée.

85. Implicitement, on supposera que h reste constant lorsque des ondes sont présentes (c'est-à-dire lorsque $V > V_c$). Ce point sera traité plus avant (section 3.4.1).

86. Pour l'eau, comme les nombres de Reynolds rencontrés deviennent grands pour des vitesses dépassant V_c, nous supposons que la résistance visqueuse conserve un comportement quasi-linéaire.

TAB. 3.5 – *Amplitude de la discontinuité R_c au seuil comparée aux prédictions théoriques (éq. (3.47)), pour différents mélanges eau/glycérol.*

Fraction massique de glycérol (%)	60	44.5	30	0
R_c théorique (μN)	3.9	3.8	3.8	3.7
R_c expérimental (μN)	2.9	2.6	4.0	3.6
ΔR_c, incertitudes exp. (μN)	0.3	0.3	0.4	1.8

expérimentales près. Cependant, cette affirmation doit être nuancée pour les vitesses qui, bien qu'inférieures à V_c, en sont proches : la résistance de vague croît alors avec la vitesse. Cet effet prétransitionnel est d'autant plus marqué que la viscosité du fluide est grande. Le modèle de résistance de vague unidimensionnelle de Richard & Raphaël [106], inclut les effets de la viscosité et décrit un comportement semblable.

Amplitude de la discontinuité de la traînée

L'amplitude de la discontinuité de la résistance de vague R_c est en bon accord avec les prédictions de la théorie (cf. table 3.5). Une partie des écarts constatés peuvent être imputés au mouillage non total du fil par le fluide, qui conduisent à surestimer la force verticale appliquée. Par ailleurs l'influence de la viscosité est toujours à envisager : dans le cas des ondes unidimensionnelles celle-ci réduit radicalement [87] R_c [106]. Remarquons enfin qu'expérimentalement la valeur mesurée est très fluctuante.

La résistance de vague est non-monotone

Pour des vitesse supérieures à V_c, la résistance de vague R commence par décroître à mesure que la vitesse augmente, puis augmente à nouveau pour des vitesses plus grandes (cf. figure 3.30). Cet effet n'est pas décrit par la théorie exposée [102], qui, par ailleurs, surestime la résistance de vague mesurée. Il est peu probable que ce comportement soit dû à la viscosité, puisqu'il paraît d'autant *moins* marqué que la viscosité est grande. Il faut envisager plusieurs autres possibilités :

1. Le canal utilisé est trop étroit (2 cm), de sorte que le système d'onde est perturbé par la présence des bords. On se rapprocherait ainsi d'un système unidimensionnel pour lequel on sait que la résistance de vague est une fonction décroissante de la vitesse [69].
   Deux canaux de largeur différente, l'un de 2 cm et l'autre de 4 cm de large, ont été utilisés afin de vérifier si ce paramètre avait une

87. Pour ce type d'ondes, sans viscosité $R_c = +\infty$, alors qu'en considérant ses effets R_c prend une valeur finie.

influence quelconque. Des expériences préliminaires semblent montrer que la largeur du canal ne joue aucun rôle[88].

2. La longueur de fil immergé est susceptible de diminuer, ce qui entraînerait une décroissance de la résistance visqueuse et donc de la résistance de vague telle qu'elle est estimée. Il est légitime de penser qu'une telle variation du tirant d'eau, si elle existe, est provoquée par la mise en place du système d'onde, dont l'amplitude n'est *a priori* que faiblement dépendante de la viscosité. La variation de la résistance visqueuse subséquente devrait donc être proportionnelle à la viscosité des liquides. Or, on constate que pour des fluides dont la viscosité varie de un à douze, la chute de la résistance de vague reste du même ordre. Cette hypothèse est donc difficile à soutenir.
3. La taille finie de la source pourrait expliquer une telle décroissance (cf. section 3.2.2 p. 72). Celle-ci devrait être bien plus étendue,et le rayon a du fil comparable à la longueur capillaire $l_c \approx 2$ mm. Or, dans nos expériences, $a = 0{,}1$ mm. On peut donc *a priori* exclure cette hypothèse.
4. Les effets de profondeur finie n'ont pas été intégré à la théorie. Cependant, ainsi que souligné section 3.2.1 (page 67), il est peu probable que la disparition de la branche $k_-(\theta)$, à laquelle peu de quantité de mouvement est associée, change considérablement la valeur théorique de la résistance de vague. La valeur asymptotique de R aux grands k n'est en effet pas modifiée par l'épaisseur de la couche de fluide.

Si on exclut l'ensemble de ces hypothèses, il faut alors changer la théorie pour inclure des non-linéarités, par exemple en ré-estimant la courbure de la surface à un ordre supérieur ou en examinant l'influence du terme advectif $(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}$ dans l'équation de Navier-Stokes.

3.4.2 Fluides magnétiques

Des expériences identiques aux précédentes ont été répétées avec un fluide magnétique[89]. Celles-ci sont plus délicates à réaliser, le ferrofluide ayant une fâcheuse tendance à sécher sur le fil. De plus, en présence de champ magnétique, les poussières présentes à la surface sont attirées par le ménisque et se déposent sur le fil. Un soin tout particulier s'impose.

Dans un premier temps, la validité des lois concernant les valeurs au seuil mesurées V_c et R_c est passée en revue. Elles sont déduites des mesures

88. Notons au passage que l'utilisation du canal le plus large est problématique dans la mesure où la force centrifuge s'y exprime davantage. La profondeur de fluide n'est pas constante sur toute la largeur du canal, ce qui peut entraîner des difficultés supplémentaires (cf. section 3.2.1 p. 67). A une vitesse de 20 cm/s, le dénivelé est déjà de 2 mm entre le bord intérieur et extérieur, et il croît avec le carré de la vitesse.

89. Ses caractéristiques sont énoncées à la section 3.3.4, page 87.

de résistance de vague en fonction de la vitesse pour différents champs magnétiques (figure 3.31).

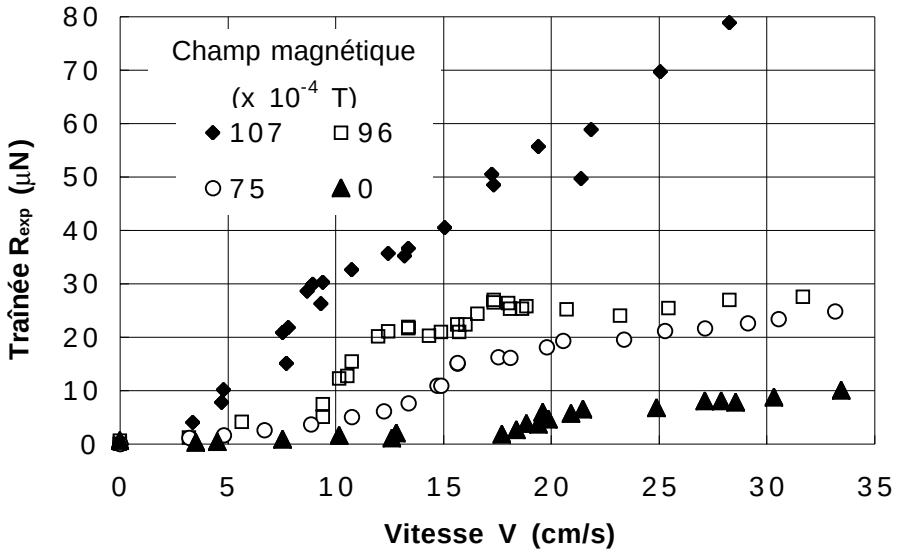


FIG. 3.31 – *Résistance de vague R^{exp} en fonction de la vitesse V du fluide, pour différentes valeurs du champ magnétique extérieur.*

Loi d'échelle de la vitesse critique

L'expression théorique de V_c (éq. 3.40) décrit bien les données expérimentales (cf. figure 3.32) ; il n'y a pas de paramètres ajustables. Ici encore, l'apparition d'ondes de surfaces se produit en même temps que la brusque augmentation de résistance.

Une donnée (pour $H/H_c = 0{,}91$) se situe en dehors de la courbe théorique. Cela provient probablement du mouillage induit par le champ magnétique : à mesure que ce dernier se rapproche de sa valeur-seuil H_c, on s'éloigne du cadre de l'analyse théorique car la force verticale appliquée n'est plus uniquement due à la présence du fil, mais aussi à une force d'origine magnétique (cf. section 3.3.5). De plus, dans ces conditions de champ magnétique, la longueur de fil immergé est bien plus grande[90] : les effets de la viscosité sur la résistance de vague sont certainement bien plus marqués qu'en absence de champ.

Loi d'échelle sur la résistance au seuil

Les écarts constatés entre les mesures et les valeurs théoriques de la résistance de vague au seuil (figure 3.33) sont plus marqués que

90. Pour un champ de 10,5 mT ($H/H_c = 0{,}91$), elle atteint environ 1,5 mm.

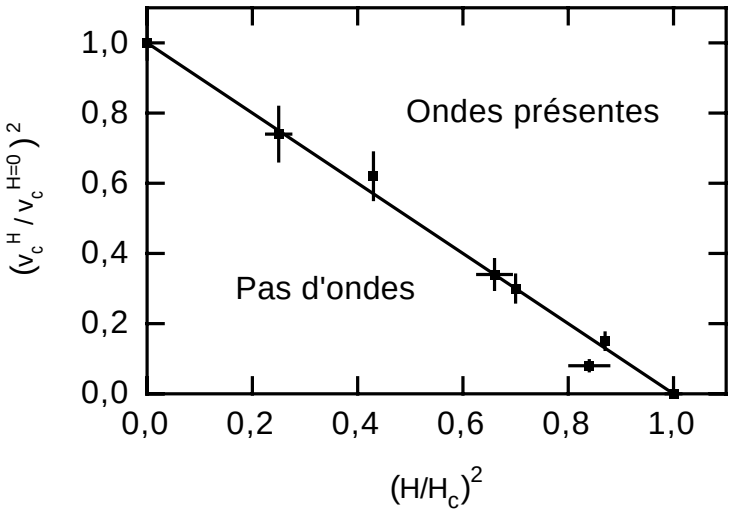


FIG. 3.32 – *Vitesse critique d'apparition des ondes v_c^H (rapportée à la vitesse critique en l'absence de champ $v_c^{H=0}$), en fonction du champ magnétique réduit H/H_c. La droite représente les valeurs-seuils théoriques de l'équation (3.40), et marque la limite du domaine d'existence d'ondes de surface. Il n'y a pas de paramètre ajustable. Les barres d'erreurs expérimentales ont été représentées par des traits grisés. Pour certains points, l'incertitude sur le champ est due à une méthode différente de repérage de la vitesse critique : la vitesse est fixée et le champ augmenté jusqu'au seuil d'apparition des ondes.*

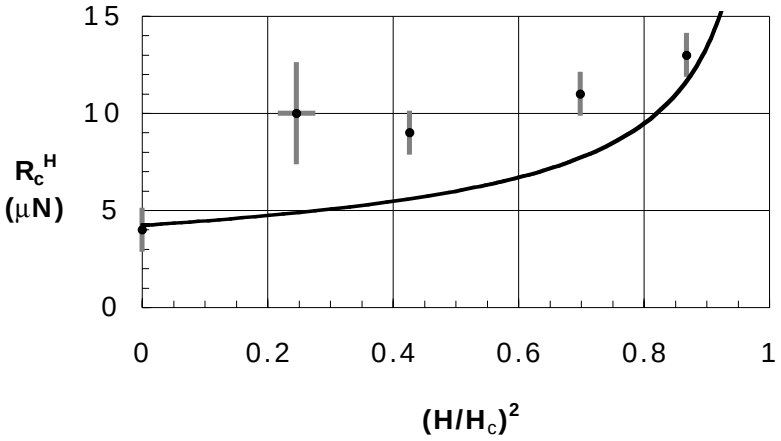


FIG. 3.33 – *Résistance de vague au seuil R_c^H en fonction du champ magnétique réduit H/H_c. La courbe continue représente les prédictions théoriques données par l'équation (3.45). Il n'y a pas de paramètre ajustable.*

précédemment. Ils s'expliquent de la même manière: effets de la viscosité exacerbés par le champ et force verticale appliquée sous-estimée. Il n'en reste pas moins que l'allure générale de la résistance de vague au seuil, en fonction du champ, est correctement décrite.

Courbe maîtresse

Pour les ferrofluides en présence d'un champ magnétique, la procédure employée pour mesurer la résistance de vague est la même que pour les fluides ordinaires. Pour chaque valeur du champ magnétique, une estimation de la résistance visqueuse s'obtient en soustrayant la tendance linéaire de la traînée à des vitesses inférieures aux vitesses-seuils. Le coefficient de traînée[91] est une fonction croissante du champ, comme la longueur de fil immergé[92].

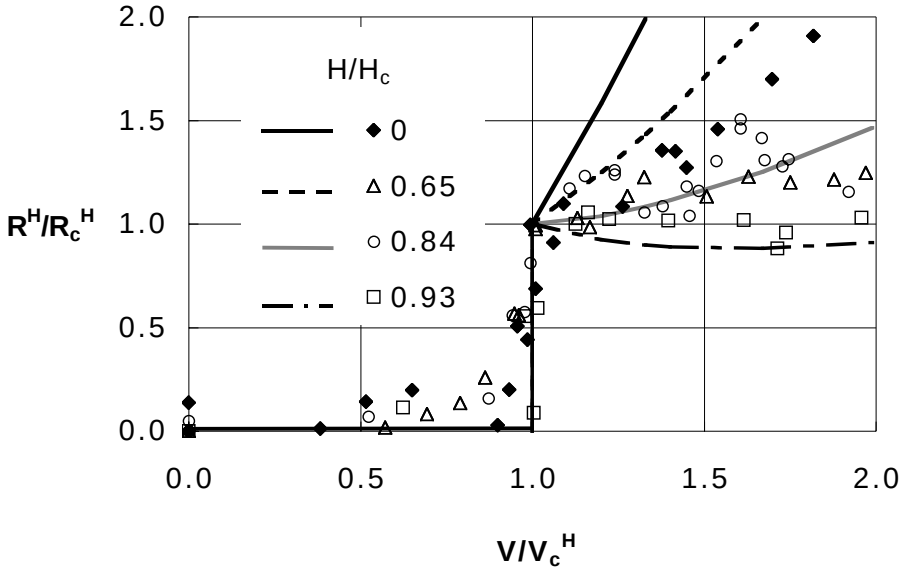


FIG. 3.34 – *Résistance de vague $R = R^H_{exp} - R^H_{visc}$ rapportée à sa valeur-seuil R^H_c, fonction de la vitesse réduite V/V^H_c, pour différents champs magnétiques H/H_c. Les courbes découlent des équations (3.43) et (3.44). La courbe noire en trait plein décrit aussi la résistance de vague d'un fluide non-magnétique.*

La détermination expérimentale de R^{exp}_c et V_c permet une représentation des résultats expérimentaux plus lisible qu'auparavant: figure 3.34, la résistance de vague a-dimensionalisée R/R^H_c est représentée en fonction de la vitesse a-dimensionalisée V/V^H_c. Comme nous l'avons déjà constaté

91. Cf. section 3.4.1 page 93.
92. Cf. section 3.3.5 page 88.

dans le cas des fluides ordinaires visqueux, les prédictions théoriques (éq. (3.43), fig. 3.17) surestiment la résistance de vague au-delà du seuil. Le caractère non-monotone de cette dernière n'est pas visible ici, mais ceci est certainement dû à la valeur élevée de viscosité du ferrofluide[93], comparable à celle de la solution la plus concentrée en glycérol. La description théorique reste satisfaisante en ce qui concerne l'influence du champ magnétique sur la résistance de vague.

3.5 Bilan et perspectives

Pour la première fois, une expérience permettant de mesurer la résistance de vague associée aux ondes de capillarité-gravité a été réalisée. Conformément à la description théorique, on a pu observer une discontinuité de la résistance de vague pour une valeur critique de la vitesse correspondant à la vitesse minimale des ondes de capillarité-gravité . Grâce à l'utilisation d'un fluide magnétique, le domaine de vitesse accessible expérimentalement a pu être étendu. Dans tous les cas, les valeurs critiques mesurées sont en accord avec la théorie. Si une théorie linéaire (négligeant la viscosité) décrit bien le seuil d'apparition de la résistance de vague, on constate certaines différences : des effets pré-transitionnels apparaissent (la résistance de vague n'est pas nulle «juste» en deçà du seuil) pour des vitesses $V > V_c$ on observe que la résistance de vague est une fonction non-monotone de la vitesse.

Il faut donc envisager des améliorations, tant au niveau de l'expérience que de la théorie. L'effet de la viscosité est déjà décrit pour la résistance de vague associée aux ondes unidimensionnelles [106]. Une extension aux ondes bidimensionnelles devrait être prochainement disponible. Par ailleurs, l'équipe de F. Dias poursuit actuellement des recherches visant à inclure les non-linéarités dans la description théorique [34].

Expérimentalement, il faut envisager de changer de mode d'excitation des ondes de capillarité-gravité. Afin de s'affranchir des effets de résistance visqueuse, un petit[94] aimant, placé juste au-dessus de la surface d'un fluide magnétique pourrait convenir. Cet aimant agirait de la même manière qu'une pointe chargée électriquement en attirant localement le fluide magnétique. Il présenterait un avantage : le champ de force produit est plus local car l'aimant est un dipôle quasi-ponctuel. Enfin, à plus long terme, il serait souhaitable d'utiliser non plus un canal circulaire, mais un canal rectiligne plus large dans lequel le fluide s'écoulerait. Ainsi la configuration du champ magnétique pourrait-elle être changée, et le système d'ondes produit observé, puis analysé en rapport avec la résistance de vague.

93. La viscosité de l'ordre d'une dizaine de mPa.s, cf. section 3.3.4.
94. Il mesurerait une fraction de millimètre.

Chapitre 4

Simulation de la convection dans le manteau terrestre[1]

4.1 Introduction

La dérive des continents a été qualifiée d'hypothèse pendant très longtemps. Formulée par Wegener en 1912 [132], il a fallu attendre les études du paléomagnétisme dans les années 60 pour en faire une théorie communément admise par la communauté scientifique au début de années 70.

Le manteau terrestre n'est pas un solide, comme les études sismologiques pourraient le laisser entendre. Bien que des ondes de cisaillement puissent s'y propager, c'est en réalité un fluide visco-élastique susceptible de s'écouler sur des temps géologiquement longs. Autrefois considérés comme immuables, les plaques continentales se déplacent à la surface du globe. Quant aux plaques océaniques, elles sont en permanence créées au niveau des dorsales océaniques, repoussent les continents ou passent dessous (subduction). Tous ces mouvements sont provoqués par la convection du manteau terrestre sous-jacent.

Cette convection résulte de la présence de gradients thermiques dans le manteau, opposés au champ de gravitation. Pour schématiser, une particule de fluide plus chaude, et donc plus légère que celles qui l'entourent, monte, se refroidit et devient plus lourde, et redescend, bouclant ainsi un cycle. Ce processus, la convection de Rayleigh-Bénard, transfère davantage de chaleur que la conduction à différence de température égale.

Dans le manteau terrestre, l'origine du gradient thermique est double : d'une part les reliquats de la chaleur primitive de la terre ; d'autre part la chaleur produite par la désintégration des éléments radioactifs. C'est à cette dernière qu'on doit la persistance d'une activité tectonique.

1. Ce travail a été réalisé sous l'impulsion et en pleine collaboration avec Ronald E. Rosensweig. Qu'il en soit ici remercié.

L'analyse de la convection dans le manteau terrestre repose sur de nombreuses simulations numériques. Mais bien qu'il existe une littérature abondante sur des expériences de convection de Rayleigh-Bénard en géométrie plane, il n'en existe que très peu en géométrie radiale. Les ferrofluides permettent-ils d'avancer dans ce domaine ? Ceci a paru possible comme exposé dans ce travail.

4.2 Convection magnéto-calorique

4.2.1 Principe

Pour réaliser une expérience de convection thermique en géométrie radiale, la principale difficulté consiste à réaliser un champ de force possédant une telle symétrie. Il existe, croit-on savoir, une seule expérience de ce type [54]. Elle a été menée dans la navette spatiale en utilisant un champ de force électrostatique, minime mais à symétrie radiale, se substituant au champ de gravité. L'expérience avait pour fin la modélisation de la convection atmosphérique d'une planète en rotation.

Les fluides magnétiques fournissent une alternative, la possibilité d'exploiter des champs de forces volumiques à symétrie centrale suffisamment intenses pour pouvoir être utilisés dans un laboratoire terrestre. L'application d'un champ magnétique $\vec{H}$ sur un ferrofluide engendre une aimantation $\vec{M}$ qui est une fonction décroissante de la température. Si le champ appliqué est non-uniforme, une densité volumique de force[2] $\mu_0 M \vec{\nabla} H$ agit sur le fluide (μ_0 est la perméabilité magnétique du vide). En présence d'un gradient de température, les variations de M peuvent induire le mouvement du fluide, de la même façon que les variations de densité dans la convection de Rayleigh-Bénard. Si le gradient de température $\vec{\nabla} T$ est parallèle, mais de sens opposé au gradient de champ $\vec{\nabla} H$, une instabilité thermique est susceptible de se développer.

Le sujet a été étudié d'un point de vue théorique pour des liquides magnétiques en géométrie plane [42, 125], et en géométrie cylindrique [136, 97]. Des expériences de convection dans des cellules parallélépipédiques ont été réalisées avec des ferrofluides en micro-gravité [90], et avec des liquides paramagnétiques ordinaires mais dans un champ magnétique particulièrement intense [22]. Enfin, la possibilité de produire une force centrale avec des ferrofluides à été récemment exploitée pour étudier la propagation d'ondes de gravité sur une sphère liquide en rotation [91].

2. Remarquer que, dans la mesure où $\vec{M}$ et $\vec{H}$ sont colinéaires (cf. annexe B), $M \vec{\nabla} H = (\vec{M}.\vec{\nabla})\vec{H}$.

4.2.2 Equations du mouvement

Pour simplifier, on se place dans l'approximation de Boussinesq, où tous les paramètres physiques sauf la densité sont supposés constants ; la dépendance de la densité avec la température est supposée n'influer que sur la poussée d'Archimède (et son analogue magnétique) [40]. Cette hypothèse est réductrice mais constitue néanmoins une étape indispensable pour la compréhension de la nature de la circulation convective magnétique dans une sphère.

Pour le *modèle de laboratoire*, les équations de Boussinesq s'écrivent, sous forme a-dimensionnelle :

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}p + \vec{\Delta}\vec{V} + Ra_m\Theta\xi\vec{e_r} + Ra\Theta\vec{e_z}, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\Theta\vec{V}) = \vec{\Delta}\Theta. \tag{4.3}$$

Les vecteurs-unités $\vec{e_r}$ et $\vec{e_z}$ représentent respectivement la direction radiale (vers le centre) du modèle et la direction verticale du laboratoire. Soit κ la diffusivité thermique, d l'épaisseur de la couche[3], η la viscosité dynamique. $\Delta T = T_1 - T_2$ la différence[4] de température entre la sphère intérieure (T_1) et extérieure (T_2) contenant le fluide.

Dans les équations qui précèdent, $\vec{V}$ représente[5] la vitesse rapportée à κ/d. Le temps, divisé par le temps diffusif d^2/κ conduit au temps a-dimensionnel t. De même, les coordonnées de position sont divisées par d. La différence de température $T - T_2$ est rapportée à ΔT si bien que $\Theta = (T - T_2)/\Delta T$. La pression est divisée par $\kappa\eta/d^2$ pour donner p.

Les nombres de Prandtl Pr, de Rayleigh Ra et le nombre de Rayleigh magnétique Ra_m, ainsi que le rapport ξ de la force magnétique à sa valeur moyenne[6] sont donnés par :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \tag{4.4}$$

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu}, \tag{4.5}$$

$$Ra_m = \frac{g_{m,0}\beta\Delta T d^3}{\kappa\nu}, \tag{4.6}$$

3. En géométrie radiale, d représente la distance entre les deux sphères concentriques contenant le fluide.

4. Cette différence est supposée constante.

5. Le module de ce vecteur correspond au nombre de Péclet thermique.

6. Il s'agit ici d'une moyenne spatiale effectuée dans la mesure du possible sur tout le volume de fluide contenu entre les deux coques sphériques.

TAB. 4.1 – *Paramètres physiques caractéristiques du manteau terrestre [128].*

α	κ	ρ	ν	R_1	R_2	ΔT
(K^{-1})	($m^2.s^{-1}$)	($kg.m^{-3}$)	($m^2.s^{-1}$)	(m)	(m)	(K)
$3\ 10^{-5}$	10^{-6}	3300	$2{,}5\ 10^{17}$	$3{,}48\ 10^6$	$6{,}27\ 10^6$	3000

$$\xi = \xi(\vec{r}) = \frac{g_m(\vec{r})}{g_{m,0}}, \tag{4.7}$$

où g est l'accélération de la pesanteur, $\alpha = -(1/\rho)\partial\rho/\partial T$ le coefficient de dilatation thermique, $\nu = \eta/\rho$ la viscosité cinématique, ρ la masse volumique, et

$$\beta = -(1/M)\partial M/\partial T \tag{4.8}$$

est le coefficient pyromagnétique. La force par unité de masse produite par le champ magnétique sur le ferrofluide, dont l'action est la même qu'un champ de pesanteur radial, est noté :

$$g_m = \mu_0 M|\vec{\nabla} H|/\rho. \tag{4.9}$$

On note $g_{m,0}$ sa valeur moyenne.

Pour le *manteau terrestre*, les équations précédentes s'appliquent moyennant quelques modifications. La force centrale n'est pas magnétique, mais assurée par la gravité. Les équations (4.1) et (4.3) restent inchangée et l'équation (4.2) devient :

$$\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}p + \vec{\Delta}\vec{V} + Ra\Theta\xi\vec{e_r} \tag{4.10}$$

De plus, la force suivant $\vec{e_z}$ est rigoureusement nulle. Il convient donc de remplacer, dans (4.2), Ra par zéro puis Ra_m par Ra.

4.2.3 Similitude entre la terre et le modèle de laboratoire

Les tables 4.1 et 4.2 (cf. page 113) listent les valeurs des paramètres physiques pour le manteau terrestre et le modèle de laboratoire correspondant. Pour que l'on puisse comparer les deux systèmes, il faut, tout en ayant les mêmes conditions aux limites et mêmes rapports d'aspect, assurer l'égalité des nombres a-dimensionnels Pr et $Ra_{(m)}$. Pour les différencier, on utilisera des indices : T pour le manteau terrestre et L pour le modèle de laboratoire.

Pour la terre, le nombre de Prandtl est gigantesque : $Pr \approx 2{,}5\ 10^{23}$. Pour le modèle, il vaut entre 40 et 66 si on emploie un ferrofluide à base d'eau, et de 500 à 4150 si on emploie un ferrofluide à base de glycérol. Tous ces

nombres sont grands devant l'unité, et on se placera dans l'approximation qui consiste à les considérer comme infinis.

Dans l'expérience considérée, le rapport d'aspect (rayon intérieur / rayon extérieur) du modèle (0,7) est, pour des raisons pratiques, légèrement supérieur au rapport d'aspect pour le manteau terrestre (0,55). Il semblerait que l'effet de cette différence soit minime [62]. Pour pouvoir négliger l'influence de la pesanteur dans l'expérience de laboratoire, il faut satisfaire $(Ra_m)_L \gg (Ra)_L)$; on le vérifiera section 4.3.4. Les conditions de similarité sont donc vérifiées à condition que $(Ra_m)_L = (Ra)_T$.

4.3 Dispositif expérimental

4.3.1 Description générale

La figure 4.1 illustre le système. Deux hémisphères en laiton, jointes à la colle époxy[7] constituent la sphère intérieure. Son diamètre est de 35 mm. Elle est maintenue en place par une tige creuse en plexiglas. Une sphère de verre de 1,5 mm d'épaisseur et dont le diamètre intérieur est de 50 mm, entoure la sphère intérieure de laiton. Ainsi, le rayon intérieur vaut-il $R_1 =$ 17,5 mm et le rayon extérieur $R_2 = 25$ mm. Un col de 10 mm de diamètre[8] de 20 mm de long permet le passage de la tige et aussi l'ajustement les positions relatives des deux sphères (de sorte qu'elles soient concentriques). Il reste ouvert afin que le fluide puisse se dilater sans produire de contraintes mécaniques sur la sphère de verre.

La sphère intérieure contient un système de trois aimants cylindriques (Nd-Fe-B) qui produisent le champ magnétique (cf section 4.3.4). L'aimant central est un disque de 25,5 mm de diamètre et de 6,9 mm d'épaisseur. Il est placé pôle nord magnétique contre pôle sud magnétique entre deux aimants de 14,9 mm de diamètre et 5 mm d'épaisseur. Deux résistances au platine Pt100 sont placées à l'intérieur de la sphère de laiton afin de connaître[9] la température de celle-ci, et vérifier son homogénéité. De la chaleur est produite au moyen d'un fil résistif plat de 20 cm de long qui est enroulé autour des aimants. Un générateur de tension continue fournit la puissance nécessaire à l'échauffement (7,2 W dans les expériences extrêmes).

7. Araldite® à séchage lent, stable jusqu'à 200 °C.

8. Il s'agit ici du diamètre intérieur.

9. Chaque résistance est connectée à quatre fils. La température a été mesurée avec un multimètre Hameg HM8112-2.

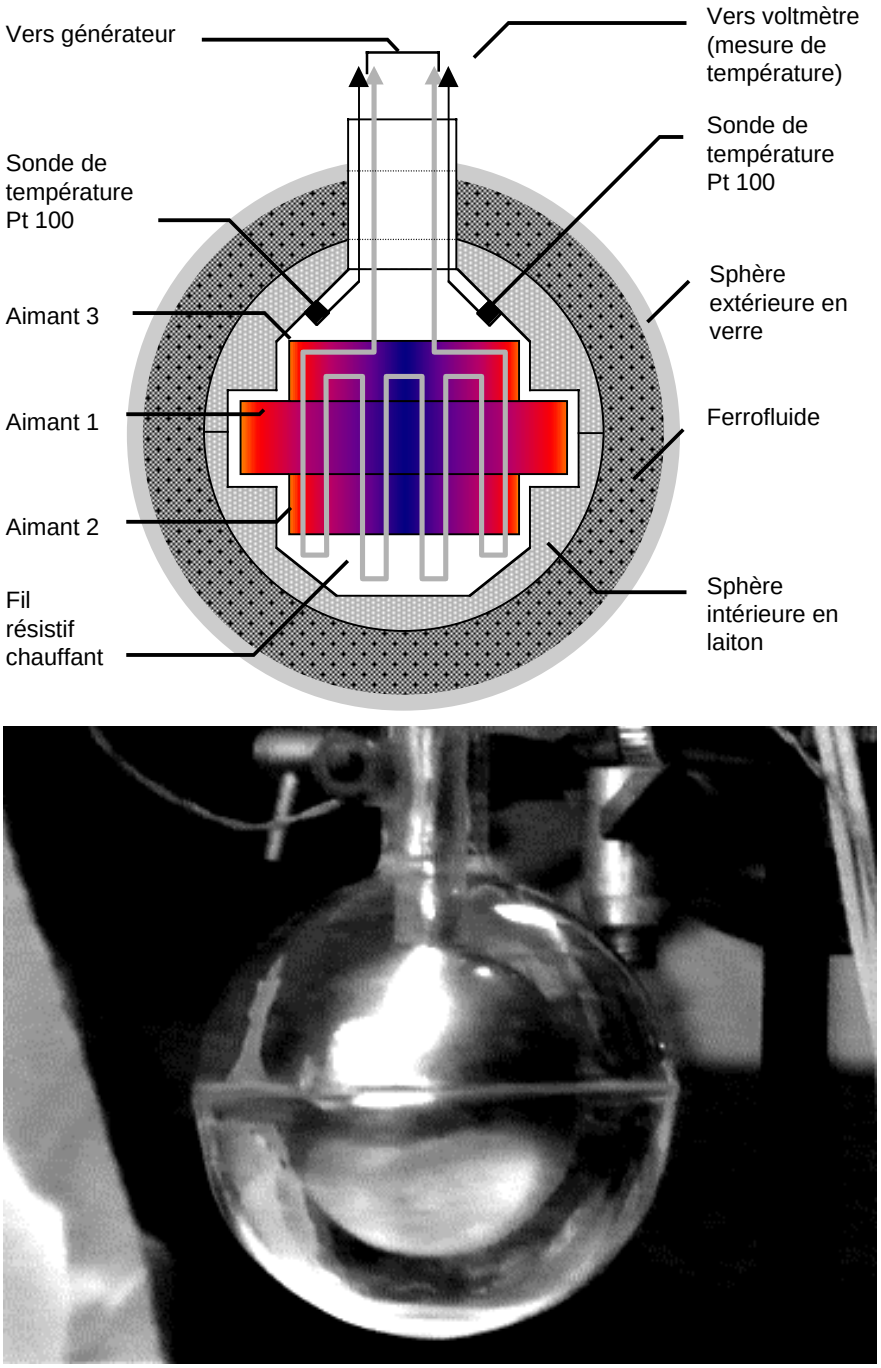


FIG. 4.1 – *Schéma du dispositif expérimental, et photo correspondante (sans ferrofluide).*

4.3.2 Visualisation thermique

Pour visualiser le champ de température, deux techniques ont été envisagées :

1. Les cristaux liquides cholestériques présentent la particularité de changer de couleur en fonction de la température [33]. Ce changement est réversible, et rapide si de fines couches sont utilisées ($\approx 10\mu$m). C'est une technique commune de visualisation de température [49], la plupart du temps utilisée dans des systèmes plans. Les tentatives pour appliquer cette méthode[10] ont échoué. D'une part, il est difficile d'assurer une répartition homogène de cristaux liquides sur la sphère. D'autre part, la couleur des cristaux liquides est à la fois dépendante de l'angle d'éclairage et de l'angle d'observation. En fin de compte, la résolution obtenue était insuffisante pour visualiser les différences minimes de température à la surface de la sphère.
2. Une caméra infrarouge (IR) détecte le rayonnement du corps noir dans la bande des infrarouges thermiques (3-12 μm). Elle est calibrée pour indiquer la température de la surface visée, sous réserve que celle-ci soit perpendiculaire à l'axe de visée. En effet, l'émissivité des surfaces dépend de leur orientation par rapport à l'axe optique (loi de Lambert [118])[11]. La température est donc sous-estimée à la périphérie du centre de visée (le centre de la sphère)[12] Il n'en reste pas moins que le champ de température était parfaitement visible avec la caméra[13] à disposition. La résolution en température est de 0,05 ^{o}C, et la résolution spatiale de 256x200 pixels.

4.3.3 Caractérisation des fluides magnétiques

L'espace entre les deux sphères est rempli d'un ferrofluide à base d'eau ou de glycérol, produit[14] selon la méthode de Massart [84, 85, 64, 127] au LI2C (cf. note 2 p. 10). Les particules sont de ferrite de Cobalt ($CoFe_2O_4$). La fraction volumique ϕ en particules est déduite de la mesure de la masse volumique[15] (cf. table 4.2 page 113).

10. Nous avons employé les mélanges Hallcrest BM/R30C5W/C17-10 et BM/ R25C5W/ C17-10 (http://www.hallcrest.com).
11. Elle dépend aussi de la *nature* des surface visées (ici du verre) [45] mais un réglage de compensation de la caméra est prévu.
12. Nous envisageons d'effectuer un traitement d'image à fin de corriger ceci.
13. Caméra GoRaTec TVS-2000 MkII. Goratec France, 112 rue de Paris, 92100 Boulogne.
14. Merci à S. Neveu.
15. $\rho_{FF} = (1-\phi)\rho_{eau} + \phi\rho_{ferrite}$.

Viscosité

La viscosité des fluides a été mesurée en fonction de la température à l'aide d'un viscosimètre de Couette cône-plan [16] au LBHP [17]. Les résultats sont représentés figure 4.2. La précision est moindre pour le ferrofluide à base d'eau car on s'est approché de la limite de résolution du viscosimètre. Les viscosités sont convenablement décrites par une loi d'Arrhénius [52] : $\eta = A\exp(B/T)$ (T est la température absolue). Un ajustement de courbe selon la méthode des moindres carrés conduit à A= 4,8 10^{-4} Pa.s et B = 980 K pour le ferrofluide à base d'eau ; pour le ferrofluide à base de glycérol on obtient A=2,15 10^{-8} Pa.s et B = 5200 K.

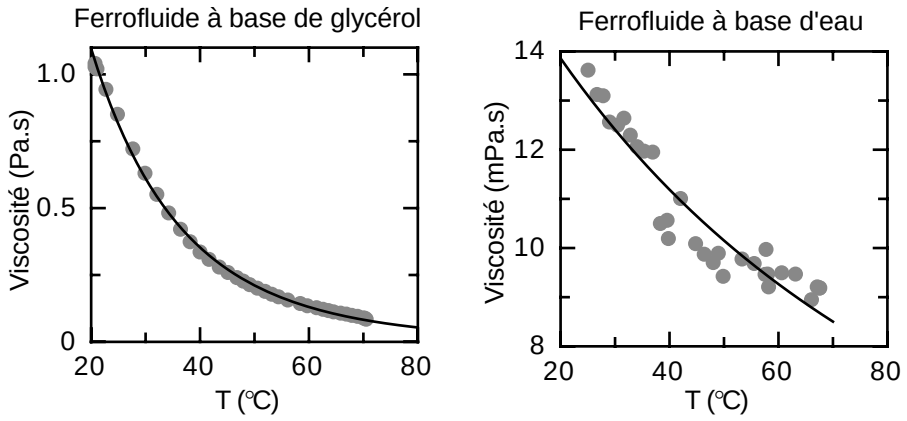


FIG. 4.2 – *Viscosité cinématique du ferrofluide à base d'eau et du ferrofluide à base de glycérol. La viscosité est une fonction décroissante de la température qui obeit à la loi d'Arrhénius (courbe pleine).*

Paramètres thermiques

Les caractéristiques thermiques n'ont pas été directement mesurées, mais calculées en fonction des valeurs tabulées [51, 131] (cf. table 4.2). La capacité calorifique massique des ferrofluides est calculée en proportion de ses constituants. La conductivité thermique k est estimée grâce à la formule suivante :

$$k_{ferrofluide} = k_{fluide}\left(1 + \frac{\phi(k_{ferrite} - k_{fluide})}{\phi^{1/3}k_{fluide} + (1-\phi^{1/3})k_{ferrite}}\right). \qquad (4.11)$$

Une vérification expérimentale de cette expression a été proposée dans [79]. D'autres méthodes de calcul [15] donnent des résultats sensiblement équivalents.

16. Rhéomètre Carri-Med modèle CS.

17. Laboratoire de Biorhéologie et d'Hydrodynamique Physico-chimique, Université Paris 7, Case 7056, 2 Pl. Jussieu 75251 Paris Cedex 05.

Courbes d'aimantation

Les courbes d'aimantation des ferrofluides sont obtenues[18] en utilisant un magnétomètre à échantillon vibrant (montage Foner [43]). La solution de ferrofluide à base de glycérol, 2,2 fois plus concentrée que le ferrofluide à base d'eau (cf. figure 4.3). Elle n'est que 1,95 fois plus magnétique : ce n'est guère étonnant car les particules nanométriques de ferrite de cobalt possèdent en surface une couche de spins mal orientés [46].

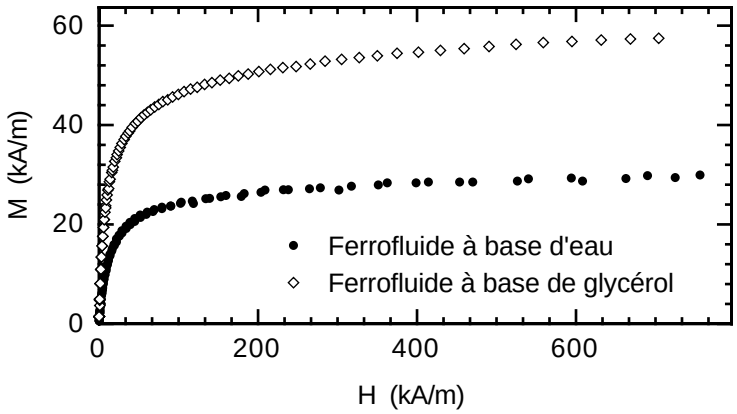


FIG. 4.3 – *Aimantation M en fonction du champ H pour les deux ferrofluides utilisés dans l'expérience de simulation de la convection dans le manteau terretre. La correction du facteur démagnétisant a été effectuée.*

L'aimantation de ces ferrofluides, très concentrés, ne suit pas une loi de Langevin (cf. section 2.3.2 p. 35). Dans l'expérience, le champ magnétique que subit le ferrofluide varie entre 25 et 140 kA/m (cf. section 4.3.4). Pour décrire analytiquement la variation de l'aimantation en fonction du champ dans ce domaine, on a choisi une fonction exponentielle (de type $M = A(1 - B\exp(-CH))$); plus simple qu'une fonction de Langevin (cf. éq. (1.1)), elle fournit une meilleure description, en particulier pour le ferrofluide à base de glycérol (cf. fig. 4.4). Un ajustement selon la méthode des moindres carrés conduit à (A = 49,4 kA/m; B = 0,46; C = 51,6 kA/m) pour le ferrofluide à base de glycérol, et à (A = 25,0 kA/m; B = 0,58; C = 35,4 kA/m) pour le ferrofluide à base d'eau.

Coefficient pyromagnétique

L'aimantation M est fonction de la température à triple titre. Lorsque la température augmente, le fluide se dilate ce qui diminue l'aimantation, grandeur volumique. L'aimantation à saturation du matériau qui compose

18. Les mesures ont été effectuées au LI2C (cf. note 2 p. 10). Merci à E. Dubois pour son aide.

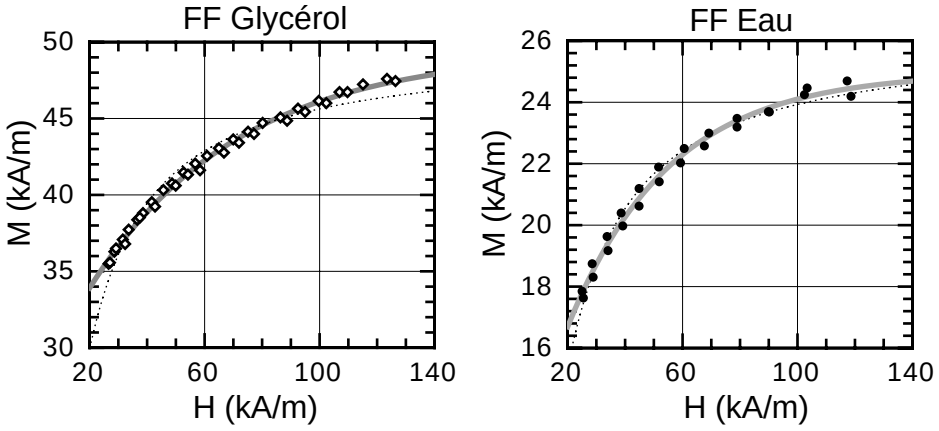


FIG. 4.4 – *Courbes d'aimantation des ferrofluides dans la plage de champ magnétique exploitée. Ajustement selon la méthode des moindres carrés d'une fonction de Langevin (courbe en tiretés) ; ajustement d'une fonction exponentielle (courbe épaisse grisée).*

les particules décroît (loi de Curie). Enfin, le mouvement brownien est plus actif, ce qui désoriente davantage les particules.

Formellement on écrit :

$$M = \phi(T) M_s(T) L(T), \tag{4.12}$$

où ϕ est la fraction volumique des particules, M_s leur aimantation, et L une fonction qui exprime leur degré d'orientation ($0 < L < 1$). Dans l'approximation où les particules ont toutes un diamètre d identique et n'interagissent pas, L est égal à la fonction de Langevin : $L = \coth(\gamma(T)) - 1/\gamma(T)$, avec $\gamma(T) = \mu_0 \pi d^3 M_s H/(6kT)$ (cf. éq. (1.1) page 15).

Le coefficient pyromagnétique β est donné par :

$$\beta = -\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial T} = \alpha(1-\phi_0) - \frac{1}{M_s}\frac{\partial M_s}{\partial T} - \lambda_0. \tag{4.13}$$

Ici les indices 0 signifient qu'il faut prendre la valeur des paramètres pour une température moyenne[19] ; α est le coefficient de dilatation thermique du fluide, ϕ_0 est la fraction volumique et $\lambda_0 = (1/\gamma_0 - \gamma_0/\sinh^2\gamma_0)/(T_0 L(\gamma_0))$.

Ici, pour le ferrofluide à base d'eau, $\alpha(1-\phi_0) = 5{,}1\ 10^{-4}$ K^{-1},$\delta_0 = 6{,}4\ 10^{-4}$ K^{-1} et λ_0 varie entre 4,6 et 22 10^{-4} K^{-1} selon la valeur du champ magnétique (150 mT au maximum et 33,5 mT au minimum). Le coefficient pyromagnétique β varie entre 1,6 et 3,3 10^{-4} K^{-1} (les bornes sont sensiblement les mêmes pour le ferrofluide à base de glycérol). Pour calculer le nombre de Rayleigh, on choisit la valeur moyenne suivante, commune aux deux ferrofluides :

$$\beta \approx 2{,}5\ 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}.$$

19. On choisit ici la moyenne arithmétique des températures extrèmes.

TAB. 4.2 – *Paramètres physiques des matériaux utilisés, à 25° C.*

	ϕ	ρ kg.m^{-3}	c$_p$ J.(kg.K)$^{-1}$	k W.(m.K)$^{-1}$	κ m^2.s^{-1}	μ_0M$_s$ T
Eau	...	998	4180	0,60	1,44 10^{-7}	...
Glycérol	...	1260	2430	0,29	9,47 10^{-8}	...
$CoFe_2O_4$	...	4907	700	6,27	1,83 10^{-6}	...
FF$_{eau}$	0,10	1400	2931	0,70	1,70 10^{-7}	0,0375
FF$_{gly}$	0,22	2060	1526	0,43	1,38 10^{-7}	0,0730
Viscosité	FF$_{eau}$: ν = 11 (20°C) ; 7,6 (40°C) ; 6,7 (60°C) $\times 10^{-6}$ m^{2}s^{-1}					
	FF$_{gly}$: ν = 5,4 (20°C) ; 1,6 (40°C) ; 0,65 (60°C) $\times 10^{-4}$ m^{2}s^{-1}					

Récapitulatif

La table 4.2 résume certaines des caractéristiques physiques des matériaux utilisés dans l'expérience.

4.3.4 Champ et force magnétiques

Loin des aimants, c'est à dire à une distance très supérieure à leurs dimensions, le champ magnétique est dipolaire. L'intensité du champ magnétique sur l'axe de symétrie est donc, à distance égale, deux fois supérieure à sa valeur sur le plan équatorial. Les surfaces iso-intensité ne sont pas sphériques, et le champ de force magnétique $M\vec{\nabla}H$ n'est pas radial. Néanmoins, comme on peut le constater figure 4.5, même pour un champ d'origine purement dipolaire le champ de forces développé est *qualitativement* à symétrie centrale.

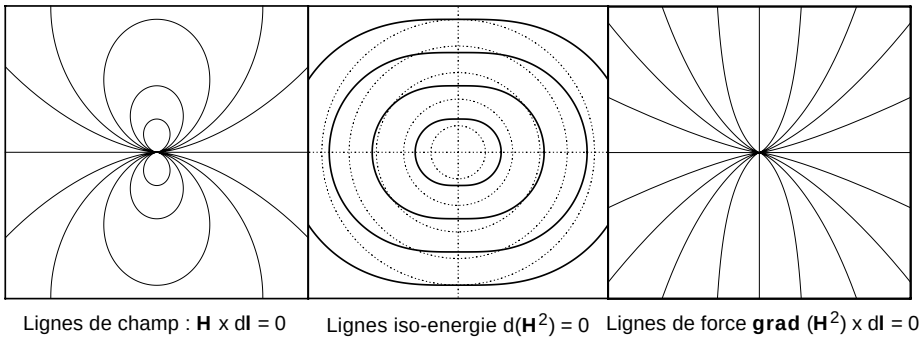


FIG. 4.5 – *Champ magnétique dipolaire : lignes de champ, surfaces iso-intensité (comparées à des sphères) et lignes de force.*

Expérimentalement, on remarque qu'au voisinage des aimants la distribution de H est plus symétrique. Cette propriété est exploitée pour *simuler*

un champ de forces radial.

Carte du champ magnétique

La distribution du champ magnétique a été mesurée à l'aide d'une sonde à effet Hall, sur l'axe des aimants et sur le plan de symétrie de l'ensemble, qualifié d'«équatorial» (cf. fig. 4.6). Les variations du champ peuvent être décrites par une loi de puissance de manière satisfaisante. Par un ajustement selon la méthode des moindres carrés, on trouve : $H_{ext} = 2{,}09\ 10^5\ r^{-2{,}64}$ sur l'axe et $H_{ext} = 3{,}98\ 10^6\ r^{-3{,}71}$ dans le plan équatorial. Ici, r est la distance au centre exprimée en millimètres ($17 < r < 25$ mm).

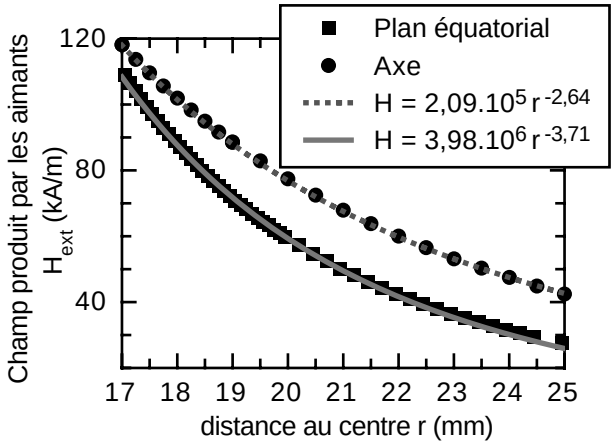


FIG. 4.6 – *Distribution de champ magnétique sur l'axe commun des aimants et sur le plan équatorial. Les variations du champ avec la distance r sont modélisées par une loi de puissance.*

Le gradient de champ $|\vec{\nabla} H_{ext}|$, développé par les aimants est déterminé à partir des expressions précédentes.

Evaluation du champ de force magnétique

La force par unité de masse qui s'exerce sur un élément de fluide vaut $g_m = \mu_0 M |\vec{\nabla} H|/\rho$ (éq. (4.9)). Le gradient de champ est supposé[20] égal à sa valeur en absence de ferrofluide, déterminée au paragraphe précédent. L'aimantation est évaluée en fonction du champ H_{int} qui règne à l'intérieur du ferrofluide. Ce champ dépend du facteur démagnétisant D (cf. note 43 p. 37) :

$$H_{int} = H_{ext} - DM(H_{int}). \tag{4.14}$$

20. Cette approximation, la plupart du temps justifiée, simplifie considérablement le problème. Communication privée de R. Rosensweig.

Aux pôles (sur l'axe), les champs magnétiques sont perpendiculaires à l'interface, le facteur démagnétisant tend donc[21] vers l'unité. A l'inverse, sur l'équateur, les champs sont tangents aux interfaces : le facteur démagnétisant est presque nul[22].

Connaissant la relation phénoménologique décrivant l'aimantation des fluides en fonction du champ (cf. fig. 4.4), on inverse l'équation (4.14) pour connaître l'aimantation en fonction de la distance au centre. On en déduit, sur l'axe et dans le plan équatorial, le ratio g_m/g (cf. fig. 4.7).

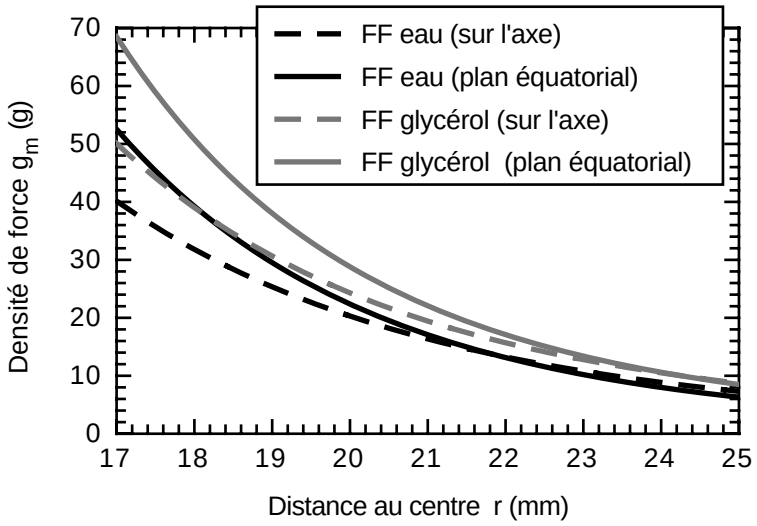


FIG. 4.7 – *Ratio de la force magnétique massique g_m au champ de pesanteur g.*

Quelques commentaires concernant cette figure :

- Dans le manteau terrestre, le champ de gravité est quasiment constant [96]. Dans le modèle de laboratoire, le champ de force équivalent est fonction décroissante de la distance au centre. Cet effet est inhérent à la méthode de production du champ de force. Il conviendra d'estimer ses conséquences dans des simulations numériques.
- Quoique bien plus homogène que s'il avait une origine dipolaire, le champ de force magnétique n'est pas rigoureusement radial. Au maximum, on estime à 15 % ses variations relatives avec la déclinaison. Des propositions pour améliorer ce ratio sont présentées section 4.5.
- La force massique g_m est de 10 à 40 fois supérieure à g. En absence de coque sphérique de verre, on constate que le ferrofluide prend une forme quasi-sphérique[23]. Mais pour évaluer l'influence de la pesanteur

21. La composante normale de $B = \mu_0(H_{int} + M) = \mu_0(H_{ext})$ est conservée au franchissement de l'interface.

22. La composante tangentielle de H est conservée au franchissement de l'interface.

23. Cette forme est hérissée de pics (instabilité de Rosensweig).

sur l'expérience de convection, il est plus judicieux de comparer Ra_m à Ra. Comme le ratio β/α varie entre 3,2 et 6,6 (cf. p. 111), la «poussée magnétique» est de 32 à 264 fois plus intense que la poussée d'Archimède ($Ra_m/Ra = g_m\beta/(g\alpha)$).

4.4 Résultats expérimentaux

4.4.1 Distribution de la température

Des images en fausses couleurs, provenant de la caméra infrarouge, sont présentées figure 4.8. La figure 4.8d montre ce qui se produit lorsqu'un fluide non-magnétique est chauffé dans le dispositif: comme on s'y attend, il y a stratification verticale de la température. Bien au contraire, lorsque le ferrofluide (ici à base d'eau) est chauffé en présence de champ magnétique, on perçoit plusieurs cellules de convection autour du pôle (le dispositif est observé par-dessous ; l'axe optique est alors l'axe des aimants). La série des images 4.8a-c illustre la tendance à la décroissance du nombre de lobes à mesure que le flux de chaleur est accru (cf. table 4.3 pour les grandeurs physiques correspondantes). Les cellules de convection sont mobiles. Ce phénomène est aussi constaté dans des simulations numériques à Ra = 10^8 [75].

Avec le système et les fluides employés, Il n'est pas possible d'observer le déclenchement de l'instabilité de Rayleigh-Bénard (magnétique). La différence de température au seuil est en effet trop petite (10^{-2} °C). Les expériences menées avec le ferrofluide à base de glycérol confirment la tendance déjà évoquée avec le ferrofluide à base d'eau. Le nombre de cellules de convection dans un hémisphère passe de 5 à 4 lorsque le flux thermique augmente de 0,35 à 0,88 W. De manière générale, on opère à des nombres de Rayleigh de l'ordre de 10^6 comparables aux valeurs caractéristiques du manteau terrestre (cf. table 4.1).

Busse [23, 24] a décrit les caractéristiques générales des motifs de convection en géométrie sphérique. Zebib a résolu le problème linéaire pour

TAB. 4.3 – *Comportement convectif du ferrofluide à base d'eau.*

Fig.	ϕ	$P(W)$	ΔT (°C)	T_{moyen} (°C)	Nb. lobes	Ra_m [a]
4.8a	0,10	2,05	5,6	38,4	4	1,02 10^6
4.8b	0,10	4,01	10,2	53,4	3	2,15 10^6
4.8c	0,10	5,23	13,5	62,6	1	3,18 10^6
4.8d [b]	0	7,20	≈ 12	65,3	...	...

[a] Le nombre de Rayleigh magnétique est estimé en prenant pour g_m la valeur moyenne de 230 m.s^{-2}.

[b] Fluide non magnétique - Expérience témoin

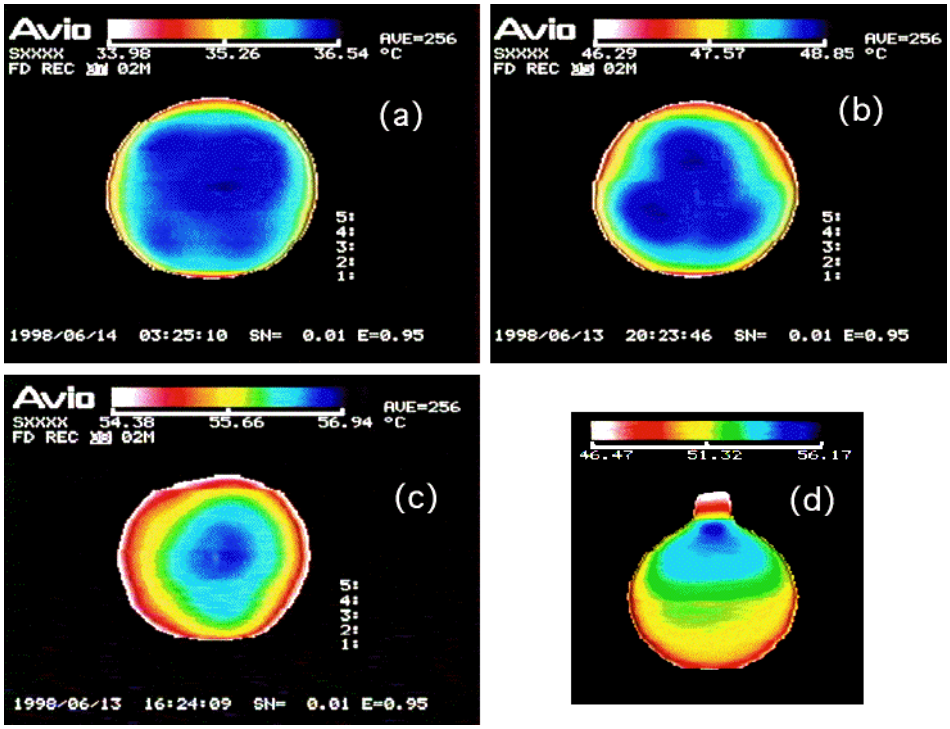


FIG. 4.8 – *Images (en infrarouge) des cellules convectives à la surface périphérique extérieure. (a)–(c) Vue axiale (coté opposé au manchon de verre). Le ferrofluide est à base d'eau. La table 4.3 liste les conditions opératoires. (d) Champ de température obtenu lorsqu'un fluide non magnétique est utilisé (vue équatoriale).*

un modèle[24] où le champ gravitationnel décroît en r^{-4}. Il prédit l'apparition de la convection pour $Ra = 853$, avec huit cellules de convection. Dans toutes les expériences réalisées ici, les nombres de Rayleigh sont trop élevés pour confronter ces prédictions théoriques et numériques. Cependant, les simulations de Zebib *et al.* [137] prédisent une décroissance du nombre de cellules azimutales à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, ce qui concorde avec nos observations (figure 4.8).

4.4.2 Nombre de Nusselt

Le nombre de Nusselt exprime le rapport entre le flux thermique P dans un système convectif, au flux thermique de conduction dans la même

24. Le rapport d'aspect (R_1/R_2) est de 0,7. Travaux non publiés, communiqués par R. Rosensweig.

configuration. Entre deux sphères concentriques [26],

$$Nu = \frac{P}{4\pi k \Delta T}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{4.15}$$

Grâce au thermocouple fixé à la surface de la sphère, on mesure la température de cette dernière, après extinction du régime transitoire (il faut compter environ deux heures). Les valeurs obtenues sont comparables à celles indiquées par la caméra infrarouge.

Les nombres de Nusselt ainsi évalués sont plus petits que l'unité (cf. encart de la figure 4.9). Un tel résultat n'est pas physique, et résulte d'une mauvaise estimation d'un des paramètres. Une erreur systématique sur la mesure de la température ne permet pas d'expliquer complètement la valeur anormale du nombre de Nusselt. L'estimation de la conductivité des fluides par les tables et le calcul (éq. (4.11) p. 110) est probablement à mettre en cause. La composition même du ferrofluide n'est pas connue avec précision : une mesure indépendante de la conductivité reste donc à effectuer[25].

Pour contourner ce problème et évaluer la dépendance du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh, on les *multiplie* par une constante *ad hoc* ($Nu' = 2{,}23 \times Nu$). La figure 4.9, qui représente les résultats ainsi obtenus, n'a qu'une valeur indicative. Les simulations numériques de Zebib *et al.* [137] conduisent[26] à $Nu \sim Ra^{(0{,}27-0{,}28)}$. Cet exposant est comparable à 1/3, qui est prédit par la théorie des couches limites thermiques en géométrie plane [128]. Un accord raisonnable semble être obtenu ici.

En revanche, la valeur du pré-facteur (0,014 : cf. fig. 4.9) paraît faible si on la compare à celles obtenues par ailleurs. Les expériences en géométrie plane [48], ainsi que les simulations numériques en géométrie radiale [61], conduisent à des grandeurs cinq à dix fois supérieures. L'origine d'une telle différence n'a pas pu être élucidée.

4.4.3 Facteur d'échelle temporel

Les vitesses ont été rapportées à κ/d. Ainsi, lorsque les nombres de Rayleigh caractérisant le modèle et le manteau terrestre sont égaux, on a la relation $V_L/V_T = \kappa_L d_T/\kappa_T d_L$ (l'indice T caractérise le manteau terrestre et L le modèle de laboratoire). En se référant aux valeurs numériques précédemment données, on trouve que les vitesses dans le modèle sont 6,18 10^7 fois supérieures à celles qu'on observe sur la terre. Le temps caractéristique de déplacement angulaire d'une cellule peut être défini

25. Habituellement, dans les expériences de convection, on mesure la conductivité thermique en se plaçant en dessous du seuil, ou en inversant le sens du gradient thermique. C'est impossible ici.

26. Dans leurs simulations, le rapport d'aspect R_1/R_2 vaut 0,5. L'influence de ce dernier est marginale [62].

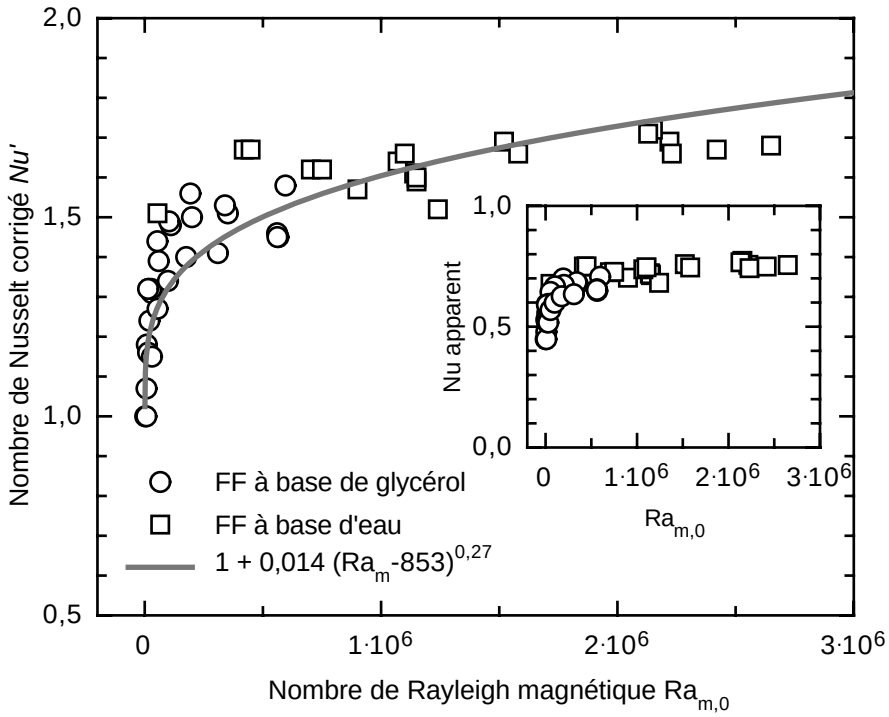


FIG. 4.9 – *Dépendance du taux de transfert thermique (nombre de Nusselt ré-évalué Nu') en fonction du nombre de Rayleigh magnétique dans le système expérimental. En encart : estimation du nombre de Nusselt Nu à partir de données tabulées de la conductivité. Les valeurs de Nu sont inférieures à un, ce qui indique une erreur dans son évaluation.*

comme $\tau = R_2/V$. En conséquence,

$$\frac{\tau_T}{\tau_L} = \frac{R_{2T}\kappa_L d_T}{R_{2L}\kappa_T d_L}. \tag{4.16}$$

Après substitution des valeurs numériques on trouve $\tau_T/\tau_L \approx 1{,}6\ 10^{16}$, ce qui représente un facteur d'échelle considérable. En prenant pour la terre un temps caractéristique de 200 millions d'années (typique de la formation des océans [96]), on trouve 0,4 secondes à l'échelle du laboratoire. Une analyse préliminaire des thermogrammes IR semble indiquer que le temps caractéristique des mouvements des cellules de convection est plutôt de l'ordre de la minute dans le modèle. Une incertitude d'un facteur 100 sur un tel facteur d'échelle ne semble pas abérrant.

4.5 Bilan et perspectives

L'expérience ici réalisée ne reproduit pas parfaitement une situation de convection en géométrie radiale, mais s'en approche cependant : le ferrofluide est soumis à un champ de forces magnétiques qui est «central» à 20 % près. Les nombres de Rayleigh atteints sont de l'ordre du million, ce qui permet d'effectuer un analogie avec la convection dans le manteau terrestre.

Lorsqu'une différence de température est imposée, on constate la présence de plusieurs cellules de convection dérivantes. Cet aspect qualitatif de l'écoulement est conforme à la théorie et aux simulations. De même, la loi d'échelle sur le temps semble-t-elle globalement vérifiée.

De manière plus quantitative, il semble l'efficacité du transfert thermique (nombre de Nusselt) soit plus faible que prévu. Néanmoins, la valeur de l'exposant de la loi de puissance reliant nombre de Nusselt et nombre de Rayleigh ($Nu \sim Ra^{0,27}$) concorde avec celle déduite de simulations numériques.

Toutes les informations obtenues dans cette expérience n'ont pu à ce jour être dépouillées. Il convient, dans un proche avenir, d'exploiter systématiquement les thermogrammes enregistrés pour obtenir des renseignements sur la répartition spatio-temporelle des fluctuations de température à la surface.

Plusieurs voies sont envisagées pour améliorer et enrichir cette expérience. Il est d'abord nécessaire d'améliorer l'*homogénéité du champ de forces magnétiques*. L'équipe du Pr. Nakatsuka[27] s'efforce de construire un assemblage d'aimants qui, mis en rotation axiale, produirait un champ de force déjà plus homogène. A plus long terme, un système d'orientation rapide[28] et aléatoire des aimants intérieurs assurera un champ de force magnétique purement radial, effets démagnétisants compris [111]. En revanche, seule une expérience effectuée dans des conditions de micro-gravité permettra de s'affranchir complètement des effets de la pesanteur.

Grâce aux propriétés magnétiques des nano-particules sous champ magnétique alternatif, il est possible de changer la nature du *mode de production de la chaleur*. A haute fréquence (de l'ordre du mégahertz), les particules superparamagnétiques se comportent comme des sources de chaleur. En exploitant cet effet, on pourrait chauffer du fluide en volume et en étudier ainsi l'influence.

En utilisant un ferrofluide dont le point de fusion est proche de la température ambiante[29], on serait à même d'examiner les effets qu'induisent la présence de *plaques solides* à l'interface. L'analogie avec la convection dans le manteau terrestre serait encore plus complète.

27. School of Engineering, Tohoku University, Aramaki Aoba, Aoba-ku, Sendai, 980-77, Japon.

28. Le temps d'orientation doit être très inférieur aux temps caractéritiques de la convection.

29. Par exemple, pour un ferrofluide à base de camphène, $T_{fusion} \approx 30°$C.

Enfin, à l'instar de l'expérience de Hart *et al.* [54] dans la navette spatiale, la mise en rotation du système est susceptible d'étendre le champ applicatif de la simulation aux planètes géantes et au soleil.

Conclusion

Au travers des trois expériences présentées dans ce travail, l'emploi de ferrofluides a permis d'explorer des situations hydrodynamiques nouvelles.

Quoiqu'on n'ait pu mettre en évidence la non-monotonicité de la relation de dispersion des ondes de capillarité-gravité d'un ferrofluide sous l'influence d'un champ magnétique vertical, il n'en reste pas moins que pour la première fois une vérification quantitative de la théorie linéaire sous-jacente a été effectuée. Grâce à une méthode de détection ombroscopique particulièrement sensible, des effets pré-transitionnels à l'instabilité de Rosensweig ont pu être observés : une déformation statique de l'interface et des ondes azimutales apparaissent pour des champs magnétiques inférieurs au champ-seuil.

La résistance de vague associée aux ondes de capillarité-gravité a pu être mesurée pour des fluides de différentes viscosités, ainsi que pour des ferrofluides. L'utilisation de ces derniers a permis d'ajuster la vitesse critique au-delà de laquelle la résistance de vague est non-nulle, conformément aux prédictions théoriques. En revanche, contrairement à ces dernières, la résistance de vague n'est pas une fonction strictement croissante de la vitesse. On observe dans l'expérience que celle-ci décroît avant de croître. Pourquoi ? Le futur calcul de termes non-linéaires des équations du problème devrait éclairer cette question.

Enfin, un modèle de laboratoire est proposé pour simuler la convection dans le manteau terrestre. Le ferrofluide, placé entre deux coques sphériques, est soumis à un champ quasi-central de forces magnétiques, semblable au champ de pesanteur pour la terre. Avec une caméra infrarouge, on a pu onserver certains comportements qualitatifs de la convection : on constate bien la présence de cellules de convection magnéto-calorique dérivantes ; les lois d'échelle sont vérifiées. A un niveau plus quantitatif, la dépendance entre le nombre de Nusselt avec celui de Rayleigh est conforme aux prédictions des simulations numériques. Cependant, il reste à élucider pour quelle raison le nombre de Nusselt reste sous-évalué. Des améliorations du dispositif sont envisagées afin d'améliorer l'homogénéité du champ et d'étendre le champ applicatif de la simulation (planètes géantes en rotation, plaques continentales,...).

Annexe A

Obtention de l'équation de dispersion

Le calcul de l'équation de dispersion des ondes de capillarité-gravité d'un fluide magnétique visqueux d'épaisseur quelconque est relativement long et ardu. Il a été éffectué, d'une part, par Weilepp & Brand [133], et d'autre part, par Abou et al. [1, 2]. Ces auteurs et d'autres [1] considèrent que l'aimantation du ferrofluide est une fonction linéaire du champ, c'est-à-dire que la perméabilité magnétique du fluide est constante. Cette hypothèse achoppe pour des ferrofluides réels. On ne peut modéliser la courbe d'aimantation par une simple droite (cf. fig. 2.8).

C'est pourquoi on calculera dans cette annexe l'équation de dispersion pour un ferrofluide non-visqueux, en détaillant particulièrement le calcul du terme magnétique, parfois encore source d'erreurs [2]. Les effets du champ et les effets de la viscosité sont découplés, ce qui permet de retrouver aisément l'équation de dispersion complète (incluant la viscosité) à partir des nombreux travaux précédents [3] concernant les ondes de capillarité-gravité dans des fluides visqueux ordinaires, c'est-à-dire non-magnétiques.

A.1 Equations ferrohydrodynamiques

A condition qu'aimantation et champ magnétique soient colinéaires (cf. annexe B), le tenseur des contraintes magnétiques dans un ferrofluide s'écrit [110]:

$$\vec{\vec{\mathrm{T}}}_m = -\left(\mu_0 \int_0^H \left(\frac{\partial M u}{\partial u}\right)_{H,T} \mathrm{d}H + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) \vec{\vec{\mathrm{I}}} + \vec{B} \otimes \vec{H} \tag{A.1}$$

1. Par exemple Lange et al., dans leur récente étude de la sélection du nombre d'onde dans l'instabilité de Rosensweig [74] négligent la non-linéarité de l'aimantation en fonction du champ.

2. Il y a par exemple une erreur de ce type dans [1], corrigée dans [2].

3. Cf. par exemple [78].

où M est le module de l'aimantation, H celui du champ magnétique, T la température et u le volume massique ; $\vec{\vec{\mathrm{I}}}$ est le tenseur identité et $(\vec{B}\otimes\vec{H})_{ij} = B_i H_j$ le produit tensoriel canonique de l'induction $\vec{B}$ par le champ $\vec{H}$.

De cette formule peuvent être déduites toutes les équations de la ferrohydrodynamique : équation de Navier-Stokes généralisée, équation de Bernoulli généralisée, conditions aux interfaces modifiées par le champ. Le fluide est incompressible et l'écoulement est isotherme : cela simplifie grandement les équations.

A.1.1 Equation de Navier-Stokes généralisée

Au tenseur symétrique[4] correspond une densité volumique de force magnétique $\vec{f}_m$ que l'on peut écrire sous différentes formes[5, 6] :

$$\begin{aligned}
\vec{f}_m &= \vec{\nabla}.\vec{\vec{\mathrm{T}}}_m \\
&= -\vec{\nabla}\left(\mu_0\int_0^H u\left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)_{H,T}\mathrm{d}H + \mu_0\int_0^H M\mathrm{d}H\right) + \mu_0 M\vec{\nabla}H \quad \text{(A.2)} \\
&= -\vec{\nabla}\left(\mu_0\int_0^H u\left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)_{H,T}\mathrm{d}H\right) - \mu_0\int_0^H \frac{\partial M}{\partial T}\vec{\nabla}T\,\mathrm{d}H. \quad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

La propagation des ondes de capillarité-gravité est un processus *isotherme*, ce qui annule le second terme du membre de droite de (A.3). Le terme restant est de nature *magnétostrictive*, et n'a pas d'influence sur l'écoulement de fluides *incompressibles*[7] ; il peut être intégré dans la définition de la pression thermodynamique. Ainsi :

$$\vec{f}_m = \vec{0}. \quad \text{(A.4)}$$

Cette équation semble paradoxale puisqu'elle laisse entendre que le champ magnétique, ou même son gradient, n'a *aucune* action sur un fluide magnétique ! En réalité, le couplage de l'écoulement avec le champ se fait *spécifiquement* par l'intermédiaire des conditions-limites aux interfaces (cf. (A.9)).

L'équation de conservation de la matière[8] et l'équation de Navier-Stokes pour un fluide magnétique de densité ρ, de viscosité cinématique

4. $\vec{M}$ et $\vec{H}$ (A.1) sont colinéaires : cf. annexe B.
5. Cf. [110] p. 112 et suivantes.
6. Noter que $\vec{M}\wedge\vec{H} = \vec{0} \Rightarrow M\,\vec{\nabla}H = (\vec{M}.\vec{\nabla})\vec{H}$.
7. Dans les problèmes où la compressibilité joue un rôle, tels la propagation d'ondes acoustiques ou la cavitation, les effets de la magnétostriction *doivent* être pris en compte.
8. Le fluide est incompressible.

ν , s'écrivent donc respectivement[9]:

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \tag{A.5}$$

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \nu\vec{\Delta}\vec{v} + \vec{g} \tag{A.6}$$

A.1.2 Conditions aux limites

Le tenseur des contraintes totales est égal à la somme des tenseurs des contraintes magnétiques et visqueuses, à laquelle on ajoute le tenseur des forces de pression:

$$\vec{\vec{\mathrm{T}}} = \vec{\vec{\mathrm{T}}}_m + \vec{\vec{\mathrm{T}}}_v - p\vec{\vec{\mathrm{I}}}$$

Rappelons au passage l'expression du tenseur des contraintes visqueuses:

$$\vec{\vec{\mathrm{T}}}_v = \eta\left(\vec{\nabla}\vec{v} + {}^T(\vec{\nabla}\vec{v})\right) \tag{A.7}$$

La pression de Laplace équilibre la différence entre les contraintes de part et d'autre de l'interface[10] :

$$\vec{n}.\left(\vec{\vec{\mathrm{T}}}^{(2)} - \vec{\vec{\mathrm{T}}}^{(1)}\right) = -\sigma\,(\vec{\nabla}.\vec{n})\,\vec{n}, \tag{A.8}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à l'interface orienté du milieu (1) vers le milieu (2). $\vec{\nabla}.\vec{n}$ n'est rien d'autre que la courbure de la surface libre. En considérant que le milieu (2) est non-magnétique et non-visqueux[11], et en utilisant les relations de continuité des champs (A.49)(A.50), le développement[12] de (A.8) conduit à l'expression suivante:

$$\left(P^{(1)} - P^{(2)} + \mu_0\int_0^H M\,\mathrm{d}H + \frac{1}{2}\mu_0(\vec{M}.\vec{n})^2 + \sigma(\vec{\nabla}.\vec{n})\right)\vec{n} - \eta\,\vec{n}.\left(\vec{\nabla}\vec{v} + {}^T(\vec{\nabla}\vec{v})\right) = 0. \tag{A.9}$$

A l'image de la tension superficielle, le champ magnétique intervient ici comme terme additif à la pression. Selon Müller [87], puisque le champ de vitesse et le champ magnétique sont exclusivement couplés par l'équilibre des forces *normales* à l'interface[13], la contribution de la viscosité à l'équation de dispersion ne diffère pas des expressions existant dans la littérature pour des fluides non-magnétiques [68][78].

9. Il existe une autre formulation, *équivalente* à (A.6), qui consiste à définir une pression généralisée $P^* = \mu_0\int_0^H M\,\mathrm{d}H + P$, et alors $\partial_t\vec{v} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P^* + \nu\vec{\Delta}\vec{v} + \vec{g} + \mu_0\vec{M}.\vec{\nabla}\vec{H}$; on retrouve ainsi la densité de force magnétique de Kelvin. Néanmoins il ne faut pas confondre P et $P^* \neq P$, ce qui peut être source de confusion (il est nécessaire d'utiliser des conditions aux limites conséquentes).

10. Dans le cas d'une interface avec un solide, il faut naturellement utiliser une condition de non-glissement.

11. La viscosité dynamique de l'air est environ mille fois plus petite que celle de l'eau.

12. Le calcul est détaillé à la page 129 de [110].

13. Il est possible de résoudre la composante verticale de la vitesse v_z en fonction de l'amplitude ξ du déplacement à l'interface sans faire intervenir le champ magnétique. Inversement, le calcul du champ magnétique perturbatif ne fait intervenir que ξ et pas v_z.

A.1.3 Géométrie de l'écoulement

On considère une couche de ferrofluide d'épaisseur finie, d'extension horizontale infinie[14], à la surface de laquelle se propagent des ondes d'amplitude $\xi(x,t)$ (cf. fig. A.1). On dénote par (e+) le demi-espace non-magnétique au-dessus du ferrofluide, par (i) le fluide magnétique et par (e–) le demi-espace situé au-dessous du ferrofluide. La surface libre est décrite par l'équation $z = \xi(x,t)$.

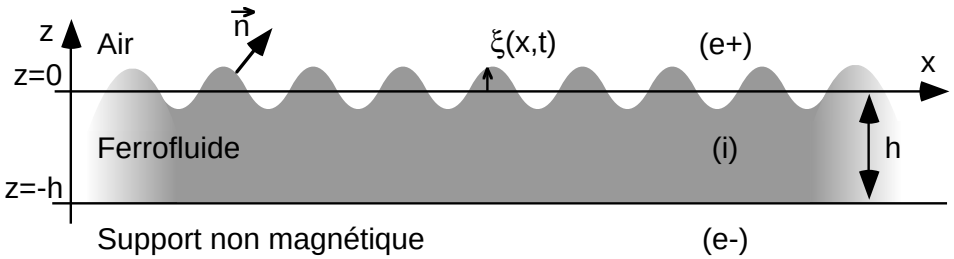


FIG. A.1 – *Configuration géométrique de l'écoulement. L'amplitude de l'onde a été exagérée pour les besoins de la représentation : pour respecter l'approximation linéaire des équations, elle doit être très inférieure à la longueur d'onde.*

A.1.4 Linéarisation des équations

Soit P_{ext} la pression extérieure, $P_{ext} - \rho g z$ la pression hydrostatique et enfin p la variation infinitésimale de pression due à l'écoulement :

$$P = P_{ext} - \rho g z + p. \tag{A.10}$$

La vitesse $\vec{v}$ est directement une grandeur infinitésimale du premier ordre, puisque nulle à l'équilibre.

La condition de continuité des vitesses verticales à l'interface s'écrit :

$$v_z = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \partial_t \xi + v_x \partial_x \xi, \tag{A.11}$$

ce qui revient, au premier ordre, à :

$$v_z = \partial_t \xi \qquad (\text{en } z = 0). \tag{A.12}$$

Parce qu'on néglige désormais la viscosité, il faut relâcher[15] une contrainte sur les conditions aux limites de la vitesse en $z = -h$. La vitesse tangentielle

14. Cette contrainte ne peut bien entendu jamais être satisfaite. L'approximation est néanmoins nécessaire pour pouvoir estimer le champ magnétique à l'équilibre.

15. Cette hypothèse revient à admettre que l'épaisseur ζ de la couche-limite à la paroi est très inférieure à h. Par des arguments dimensionnels [70] $\zeta \approx \sqrt{\nu/\omega}$; dans notre expérience, $\omega \approx 10\pi$ rad/s, $\nu \approx 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$ et donc $\zeta \approx 0{,}5$ mm $\ll 5$ mm $\approx h$.

à la paroi inférieure n'est plus nulle *a priori*, seule la composante normale de la vitesse l'est :

$$v_z = 0 \qquad (\text{en} z = -h). \tag{A.13}$$

Toujours au premier ordre, le vecteur $\vec{n}$ normal à l'interface a pour coordonnées :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\partial_x \xi \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{A.14}$$

et donc sa divergence vaut :

$$\vec{\nabla}.\vec{n} = -\partial^2_{x^2}\xi. \tag{A.15}$$

La condition (A.9) de continuité des contraintes à l'interface s'écrit donc :

$$p - \rho g \xi + \pi_m - \sigma \partial^2_{x^2}\xi = 0, \tag{A.16}$$

où

$$\pi_m = \delta \left(\mu_0 \int_0^H M \, \mathrm{d}H + \frac{1}{2}\mu_0 (\vec{M}.\vec{n})^2 \right) \tag{A.17}$$

représente la variation des contraintes magnétiques due à la déformation de l'interface libre ; son calcul est effectué à la section A.2.3. Remarque : l'équation (A.16) n'est valable en toute rigueur qu'à l'ordonnée $z = \xi$; mais comme on travaille au premier ordre, on évalue [16] les termes magnétiques et de pression à l'ordonnée $z = 0$.

L'équation d'Euler [17] linéarisée, projetée sur x et sur z, s'écrit donc [18] :

$$\partial_t v_x = -(1/\rho)\partial_x p, \tag{A.18}$$

$$\partial_t v_z = -(1/\rho)\partial_z p. \tag{A.19}$$

L'équation de conservation de la matière (A.5) ne change pas :

$$\partial_z v_x + \partial_x v_z = 0. \tag{A.20}$$

Le système d'équations (A.12 à A.20) intègre toutes les données du problème linéaire.

A.1.5 Résolution des équations linéarisées

Pour résoudre ce système, il est utile de décomposer les grandeurs v_x, v_z, p et ξ en modes normaux :

$$O(x,z,t) = \hat{O}(z) \exp(i(kx - \omega t) + \text{c.c.} \tag{A.21}$$

16. Cf. [80] p. 208 pour une discussion détaillée de ce type d'approximations.
17. Il s'agit de l'équation de Navier-Stokes (A.6) dans laquelle la viscosité a été omise.
18. Le terme de gravité s'élimine avec la composante hydrostatique de la pression à l'équilibre.

où O représente une quelconque quantité ci-dessus énumérée, les accents circonflexes caractérisent des amplitudes qui sont indépendantes de la coordonnée x, k le vecteur d'onde et ω la pulsation ; c.c. représente la forme complexe conjuguée du membre de droite de l'équation. Par souci de brièveté, on note par ailleurs D l'opérateur $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$.

Les équations (A.18), (A.19) et (A.20) donnent respectivement :

$$\frac{\omega}{k}\hat{v}_x = \frac{\hat{p}}{\rho}, \tag{A.22}$$

$$i\omega\hat{v}_z = \frac{Dp}{\rho}, \tag{A.23}$$

$$-ik\hat{v}_x = D\hat{v}_z, \tag{A.24}$$

ce qui conduit directement à :

$$D^2\hat{v}_z = -ikD\hat{v}_x = -\frac{ik^2}{\rho\omega}D\hat{p} = k^2\hat{v}_z, \tag{A.25}$$

dont une solution générale est :

$$\hat{v}_z = C_1\mathrm{e}^{kz} + C_2\mathrm{e}^{-kz} \tag{A.26}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes fixées par les conditions aux limites (A.12)(A.13) — qui par ailleurs s'écrivent avec le formalisme précédemment introduit :

$$\hat{v}_z(0) = -i\omega\hat{\xi}, \tag{A.27}$$

$$\hat{v}_z(-h) = 0. \tag{A.28}$$

Par conséquent,

$$\hat{v}_z = -i\omega\hat{\xi}\,\frac{\sinh\left(k(z+h)\right)}{\sinh(kh)}. \tag{A.29}$$

De la dérivée de cette équation par rapport à z et de (A.22), (A.23) et (A.24) on tire la valeur de la pression à[19] l'interface libre :

$$\hat{p}(0) = \rho\frac{\omega}{k}\hat{v}_x(0) = \rho\frac{i\omega}{k^2}D\hat{v}_z(0) = \rho\coth(kh)\,\frac{\omega^2}{k}\hat{\xi}. \tag{A.30}$$

Il ne reste plus qu'à identifier cette équation avec la condition (A.16) de continuité des contraintes à l'interface :

$$\hat{p}(0) = \left(\rho g + \sigma k^2\right)\hat{\xi} + \hat{\pi}_m(H,k). \tag{A.31}$$

Ainsi obtient-on après élimination des amplitudes :

$$\rho\omega^2 = \tanh(kh)\left(\rho gk + \sigma k^3 + \frac{\hat{\pi}_m(0)}{\hat{\xi}}(H,k)\right) \tag{A.32}$$

19. Il s'agit de la pression *dans* le fluide.

A.2 Equations électrodynamiques

A.2.1 Potentiel perturbatif du champ magnétique

Afin de calculer l'influence des forces d'origine magnétique sur l'interface perturbée, il faut, dans un premier temps, calculer la distribution de champ magnétique. Soient $\vec{B}$ et $\vec{H}$ respectivement les champs magnétiques d'induction et d'excitation. $\vec{B}_0$ et $\vec{H}_0$ représentent leur valeur en l'absence de perturbation et $\vec{b}$ et $\vec{h}$ la contribution de la perturbation de telle sorte que $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ et $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$. Dans la configuration envisagée d'un champ appliqué verticalement on peut écrire :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_z + B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{H} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_z + H_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.33}$$

La courbe d'aimantation du ferrofluide relie excitation et induction :

$$\vec{B}^i = \mu_0(\vec{M} + \vec{H}^i) = \mu(H^i)\vec{H}^i. \tag{A.34}$$

Au premier ordre de la perturbation on a :

$$H^i = \sqrt{{H_0^i}^2 + 2h_z H_0^i + {h_x^i}^2 + {h_z^i}^2} \approx H_0^i + h_z^i, \tag{A.35}$$

et donc

$$\mu(H^i) = \mu(H_0^i) + \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}H}(H_0^i)\, h_z^i. \tag{A.36}$$

En substituant l'équation précédente dans (A.33) et (A.34), on obtient, toujours au premier ordre:

$$b_x^i = \mu(H_0^i)h_x^i \quad \text{et} \quad b_z^i = \left(\mu(H_0^i) + H_0^i \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}H}(H_0^i)\right) h_z^i \tag{A.37}$$

Ceci revient à définir, comme Cowley & Rosensweig [31], une perméabilité effective qui n'est pas la même dans les directions x et z :

$$b_x^i = \mu_x\, h_x^i \quad \text{avec} \quad \mu_x = \frac{B}{H}(H_0^i) \tag{A.38}$$

$$b_z^i = \mu_z\, h_z^i \quad \text{avec} \quad \mu_z = \frac{\partial B}{\partial H}(H_0^i). \tag{A.39}$$

Puisqu'il n'y a pas de courants libres dans le système, $\vec{h}$ est irrotationnel et dérive d'un gradient de potentiel magnétique φ:

$$\vec{h} = -\vec{\nabla}\varphi. \tag{A.40}$$

De plus $\vec{b}$, comme $\vec{B}$, est à divergence nulle ce qui conduit à l'équation suivante sur φ :

$$\mu_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{A.41}$$

Cette équation se ramène à l'équation de Laplace moyennant un changement d'échelle sur la coordonnée z :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial (sz)^2} = 0, \tag{A.42}$$

le paramètre s étant défini par :

$$s = \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_z}}, \tag{A.43}$$

et représentant une mesure de l'écart à la linéarité de la courbe d'aimantation.

Comme pour les grandeurs hydrodynamiques (cf. (A.21)), on fait l'*ansatz* suivant :

$$\varphi(x,z,t) = \hat{\varphi}(z)\exp(i(kx - \omega t)) + \text{c.c.}. \tag{A.44}$$

L'équation (A.41) est résolue dans les trois portions de l'espace (e+), (i) et (e–) :

$$\hat{\varphi}_i(z) = Ae^{+skz} + Be^{-skz}, \tag{A.45}$$

$$\hat{\varphi}_{e+}(z) = Ce^{-skz}, \tag{A.46}$$

$$\hat{\varphi}_{e-}(z) = De^{+skz}, \tag{A.47}$$

Afin de simplifier les équations, on introduira la perméabilité relative composite suivante :

$$r = s\frac{\mu_z}{\mu_0} = \sqrt{\frac{\mu_x\mu_z}{\mu_0^2}} \tag{A.48}$$

qui intervient dès que l'on dérive $\hat{\varphi}$ par rapport à z.

A.2.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites pour φ sont imposées par celles portant sur les champs. Elles fixent les constantes A,B,C,D. Aux interfaces entre (e+) et (i), ou (e-) et (i) on a :

$$(\vec{B}^{e\pm} - \vec{B}^i).\vec{n}^{\pm} = 0, \tag{A.49}$$

$$(\vec{H}^{e\pm} - \vec{H}^i) \wedge \vec{n}^{\pm} = 0, \tag{A.50}$$

Grâce à (A.39), (A.38) et (A.40), les champs s'expriment en fonction de $\hat{\varphi}$ et de ses dérivées[20] :

$$H_x = -ik\hat{\varphi} \tag{A.51}$$

$$H_z = -D\hat{\varphi} + H_0 \tag{A.52}$$

$$B_x = -ik\mu_x\hat{\varphi} \tag{A.53}$$

$$B_z = -\mu_z D\hat{\varphi} + B_0 \tag{A.54}$$

20. Par souci de simplicité, on omet les termes en $\exp(i(kx - \omega t))$ et leurs complexes conjugués. Rappelons que l'opérateur d/dz est noté D.

Après substitution des équations précédentes dans (A.49) et (A.50) et utilisation de (A.14) on obtient les conditions suivantes pour φ :

$$\begin{aligned} -\mu_0 D\hat{\varphi}_{e+}(0) + \mu_z D\hat{\varphi}_i(0) &= 0, & \text{(A.55)} \\ -\mu_0 D\hat{\varphi}_{e-}(-h) + \mu_z D\hat{\varphi}_{e-}(-h) &= 0, & \text{(A.56)} \\ ik(\hat{\varphi}_{e+}(0) - \hat{\varphi}_i(0)) - ik\hat{\xi}(H_0^{e+} - H_0^i) &= 0, & \text{(A.57)} \\ ik(\hat{\varphi}_{e-}(-h) - \hat{\varphi}_i(-h)) &= 0. & \text{(A.58)} \end{aligned}$$

Puisque la composante normale de $\vec{B}_0$ est continue aux interfaces, on a de plus :

$$H_0^{e+} - H_0^i = \frac{B_0^{e+}}{\mu_0} - H_0^i = \frac{B_0^i}{\mu_0} - H_0^i = M. \qquad \text{(A.59)}$$

En remplaçant $\varphi_{(i,e+,e-)}$ par son expression (A.45) ,(A.46) et (A.47) dans les cinq équations qui précèdent, on tire un système de quatre équations sur A, B, C et D :

$$\begin{cases} rk(A - B) = -\mu_0 Ck \\ rk(A\mathrm{e}^{-skh} - B\mathrm{e}^{skh}) = \mu_0 kD\mathrm{e}^{-skh} \\ C = \hat{\xi}M + A + B \\ D\mathrm{e}^{-ka} = A\mathrm{e}^{-skh} + B\mathrm{e}^{skh} \end{cases}, \qquad \text{(A.60)}$$

qui se réduisent aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} A(r-1) - B\mathrm{e}^{2skh}(r+1) = 0 \\ A(r+1) - B(r-1) = -\hat{\xi}M \end{cases}, \qquad \text{(A.61)}$$

desquelles on tire :

$$A = -\frac{\hat{\xi}M}{r+1} \frac{1}{1 - \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2 \mathrm{e}^{-2skh}}, \qquad \text{(A.62)}$$

$$B = -\frac{\hat{\xi}M}{r+1} \frac{\frac{r-1}{r+1}\mathrm{e}^{-2skh}}{1 - \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2 \mathrm{e}^{-2skh}}. \qquad \text{(A.63)}$$

Le champ est donc complètement déterminé.

A.2.3 Expression des efforts magnétiques

La contribution (A.17) du champ magnétique au champ de pression s'écrit :

$$\pi_m = \mu_0 \delta \left(\int_0^H M \,\mathrm{d}H + \frac{1}{2}(\vec{M}.\vec{n})^2 \right). \qquad \text{(A.64)}$$

Grâce à (A.35) le premier terme se simplifie :

$$\delta \left(\int_0^H M \,\mathrm{d}H \right) \approx \delta \left(\int_0^{H_0^i + h_z^i} M \,\mathrm{d}H \right) \approx M_0 h_z^i. \qquad \text{(A.65)}$$

De même, pour le second terme :

$$\delta\left(\frac{1}{2}(\vec{M}.\vec{n})^2\right) = \delta\left(\frac{1}{2}(\vec{M}_0.\vec{n}+\vec{m}.\vec{n})^2\right) \approx \delta\left(\frac{1}{2}(M_0+m_z)^2\right) \approx M_0 m_z. \tag{A.66}$$

Ainsi obtient-on :

$$\pi_m = M_0(h_z^i + m_z) = M_0 b_z^i. \tag{A.67}$$

D'après les expressions (A.54) et (A.45),

$$b_z^i = rk(B-A). \tag{A.68}$$

Par conséquent, en utilisant (A.62), (A.63) et (A.67) on conclut que :

$$\pi_m = \hat{\xi} k M \frac{r}{r+1} \frac{1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)\mathrm{e}^{-2skh}}{1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2 \mathrm{e}^{-2skh}}. \tag{A.69}$$

Cette contribution est proportionnelle à la déformation ξ. Le fluide est donc «aspiré» par l'accroissement de champ aux crêtes.

A.3 Relations de dispersion

A.3.1 Expression en profondeur finie, sans viscosité

De (A.69) et de (A.32) on tire l'équation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = \frac{\tanh(kh)}{\rho}\left(\rho g k + \sigma k^3 - \mu_0 M^2 k^2 \frac{r}{r+1}\left(\frac{1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)\exp(-2skh)}{1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2\exp(-2skh)}\right)\right), \tag{A.70}$$

r et s étant respectivement définis par (A.48) et (A.43), exprimés ici sous une forme différente :

$$r = \sqrt{\left(1+\frac{M(H^i)}{H^i}\right)\left(1+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H}(H^i)\right)}, \tag{A.71}$$

$$s = \sqrt{\frac{1+\frac{M(H^i)}{H^i}}{1+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H}(H^i)}}. \tag{A.72}$$

A.3.2 Expression en profondeur infinie, sans viscosité

En faisant tendre h vers l'infini dans (A.70) on trouve :

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{\mu_0 M^2 k^2}{\rho(1+1/r)}. \tag{A.73}$$

A.3.3 Expression en profondeur finie, avec viscosité

A titre documentaire, voici, tirée de [87], l'expression complète de la relation de dispersion des ondes de capillarité-gravité en présence d'un champ magnétique vertical pour une couche de ferrofluide de profondeur finie et de viscosité cinématique ν :

$$\frac{\nu^2}{k\coth(kh) - \tilde{k}\coth(\tilde{k}h)} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{k}\left[4k^4 + (k^2+\tilde{k}^2)^2\right]\coth(\tilde{k}h) \\ -k\left[4k^2\tilde{k}^2 + (k^2+\tilde{k}^2)^2\right]\tanh(kh) \\ -\dfrac{4k^2\tilde{k}(k^2+\tilde{k}^2)}{\cosh(kh)\sinh(\tilde{k}h)} \end{array} \right\} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{\tanh(kh)}{\rho}\left[\rho g k + \sigma k^3 - \frac{\mu_0 M^2 k^2}{(1+1/r)}\frac{1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)\exp(-2skh)}{1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2\exp(-2skh)}\right] \tag{A.74}$$

avec :

$$\tilde{k} = \sqrt{k^2 - i\omega/\nu}. \tag{A.75}$$

Annexe B

Symétrie du tenseur des contraintes

Bien qu'un ferrofluide ne soit pas à proprement parler un fluide magnétorhéologique[1], il n'en reste pas moins que la viscosité dépend du champ ; ceci d'autant plus que le ferrofluide est concentré (cf. fig. B.1). Afin de comprendre cette dépendance, il faut examiner la structure même du ferrofluide.

Pour des particules de matériau magnétique de forte énergie d'anisotropie, comme le ferrite de cobalt employé ici[2], les moments magnétiques sont bloqués à l'intérieur des grains (dipôles rigides). La réponse du moment magnétique à un champ extérieur est donc subordonnée au mouvement du grain lui-même, qui, par ailleurs, subit une contrainte visqueuse de la part du fluide porteur. Le temps de relaxation τ_B de l'aimantation sous l'effet des fluctuations thermiques a une valeur finie liée au volume hydrodynamique[3] V_H des particules et à la viscosité η du fluide [121]:

$$\tau_B = \frac{3\eta V_H}{k_B T}$$

où k_B est la constante de Boltzmann et T la température absolue[4]. Pour les ferrofluides à base d'eau, $\tau_B \approx 10^{-5}$ s ; pour ceux à base de glycérol,

1. Les fluides magnétorhéologiques sont en effet conçus de telle sorte que leur viscosité soit très dépendante du champ. La taille micronique des particules qui les composent confère à ces fluides des propriétés rhéologiques fortement non-linéaires [89] : ce sont souvent des fluides de Bingham, qui ne s'écoulent sous champ que lorsque la contrainte est suffisante.

2. La constante d'anisotropie du ferrite de cobalt vaut $K = 4{,}4\ 10^7 \mathrm{J/m^3}$ [46]. Ainsi à température ambiante, l'énergie d'anisotropie d'une particule de ferrite de cobalt d'environ $d = 10$ nm de diamètre vaut $K\pi d^3/6 \approx 2{,}2\ 10^{-17}$ J $\approx 5\ 10^3\ \mathrm{k_B}T$. Le moment magnétique est donc piégé sur l'axe de facile aimantation de la particule.

3. Notre ferrofluide étant ionique, le volume V des particules qui le composent peut être égalé à leur volume hydrodynamique V_H.

4. Dans le cas qui nous intéresse, $T = 300$ K.

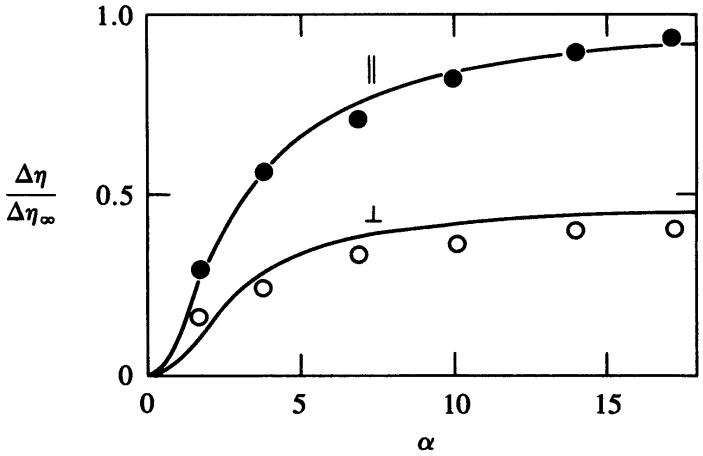


FIG. B.1 – *Viscosité apparente d'un ferrofluide à base de particules de ferrite de cobalt, en fonction du champ. Les mesures sont faites dans un viscosimètre de Poiseuille, le champ étant parallèle (||) ou perpendiculaire (⊥) au capillaire. Le paramètre $\alpha = 3\chi H/M_s$ est proportionnel au champ H appliqué (M_s est l'aimantation à saturation et χ la susceptibilité à champ nul). $\Delta\eta_\infty$ est de l'ordre de η dans des ferrofluides concentrés.* (D'après Shliomis *et al.* [100, 81].)

$\tau_B \approx 10^{-3}$ s. Lorsque le champ $\vec{H}$ et la vorticité $\vec{\omega}$ sont non-colinéaires[5], il apparaît un angle de retard entre l'orientation de la particule et la direction du champ, ce qui engendre une densité volumique de couple magnétique non nulle. Comme chaque particule tourne en s'efforçant d'aligner son moment magnétique le long du champ, elle possède un moment cinétique «interne» (ou de spin), distinct du moment cinétique «externe» (ou orbital) du liquide environnant. Le ferrofluide possède donc un degré de liberté supplémentaire : des *rotations internes* [46] (cf. fig. B.2).

Les temps caractéristiques des écoulements envisagés dans ce travail sont toujours[6] très supérieurs à τ_B : l'aimantation relaxe quasi-instantanément vers sa valeur d'équilibre. Pour autant, il serait erroné de négliger dès à présent les efforts mécaniques de rotation induits par le champ. Bien que $\vec{M}$ et $\vec{H}$ soient *quasiment* colinéaires, le couple exercé par les particules sur le fluide n'est pas nul car le champ (statique) empêche la libre rotation des particules. En plus de la viscosité habituelle, il faut considérer une viscosité de *rotation*[7] η_r dont l'effet est de produire un couple local $\vec{\Gamma}$ par unité de

5. C'est le cas de la plupart des écoulements.

6. La fréquence caractéristique des ondes de surfaces étudiées est d'environ 5 Hz et les temps caractéristiques de l'expérience de convection magnéto-calorique sont de l'ordre de la seconde.

7. Cette viscosité de rotation peut même être négative en champ alternatif ou tournant,

volume :

$$\vec{\Gamma} = \eta_r \, \vec{\nabla} \wedge \vec{v},$$

où $\vec{v}$ est la vitesse locale du fluide. Si on se réfère à [47],

$$\eta_r = \frac{\tau_B \, \mu_0 M H}{8(1 + (\Omega \tau_B)^2)},$$

où Ω représente la demi-amplitude de la vorticité et μ_0 la perméabilité magnétique du vide[8]. Dans toutes les expériences réalisées ici[9], on a $\Omega \tau_B \ll 1$, et donc :

$$\frac{\eta_r}{\eta} \approx \frac{3\mu_0 M H V_H}{8 k_B T}. \tag{B.1}$$

L'augmentation relative de viscosité varie ainsi comme le rapport à $k_B T$ d'une quantité évaluant le couple moyen appliqué à chaque particule.

B.1 Ondes de surface

Pour les expériences concernant les ondes de surface, l'évaluation de ce dernier terme[10] conduit à une viscosité de rotation égale à 1 % de la viscosité dynamique. Cette valeur est suffisamment faible pour pouvoir être négligée. Le ferrofluide est donc sans *rotation interne* ; aimantation et champ sont pour nous colinéaires. Moyennant cette hypothèse, Cowley & Rosensweig [31] dérivèrent en 1967 l'expression symétrique du tenseur des contraintes magnétiques (A.1) (page 124). L'existence d'un couple magnétique agissant sur l'écoulement [110] (Cf. fig. B.2) est associée à sa partie asymétrique.

B.2 Convection magnéto-calorique

Pour les expériences de convection magnéto-calorique, les champs magnétiques appliqués sont beaucoup plus intenses. Une estimation[11] de la viscosité de rotation conduit à une valeur proche de la viscosité dynamique. Puisque, dans notre montage, les lignes de champ magnétique ne possèdent pas de symétrie radiale[12], l'écoulement est en toute rigueur *non-newtonien*. Bien qu'il s'agisse d'une approximation grossière, cet aspect des choses n'est pas pris en compte dans la formulation des équations régissant l'écoulement (cf. équation (4.2) 105).

---

voir par exemple [8].

8. Rosensweig, à la page 267 de son livre [110], reprenant un article de Shliomis [119], offre une présentation différente du même résultat.

9. La vorticité est *au plus* du même ordre de grandeur que la fréquence[6].

10. $\chi \approx 2$, $H \approx 10$ kA/m et les particules ont environ 10 nm de diamètre[3].

11. En première approximation $M \approx H \approx 50$ kA/m, et les particules ont un diamètre d'environ 10 nm.

12. C'est vrai pour toute expérience imaginable car $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$.

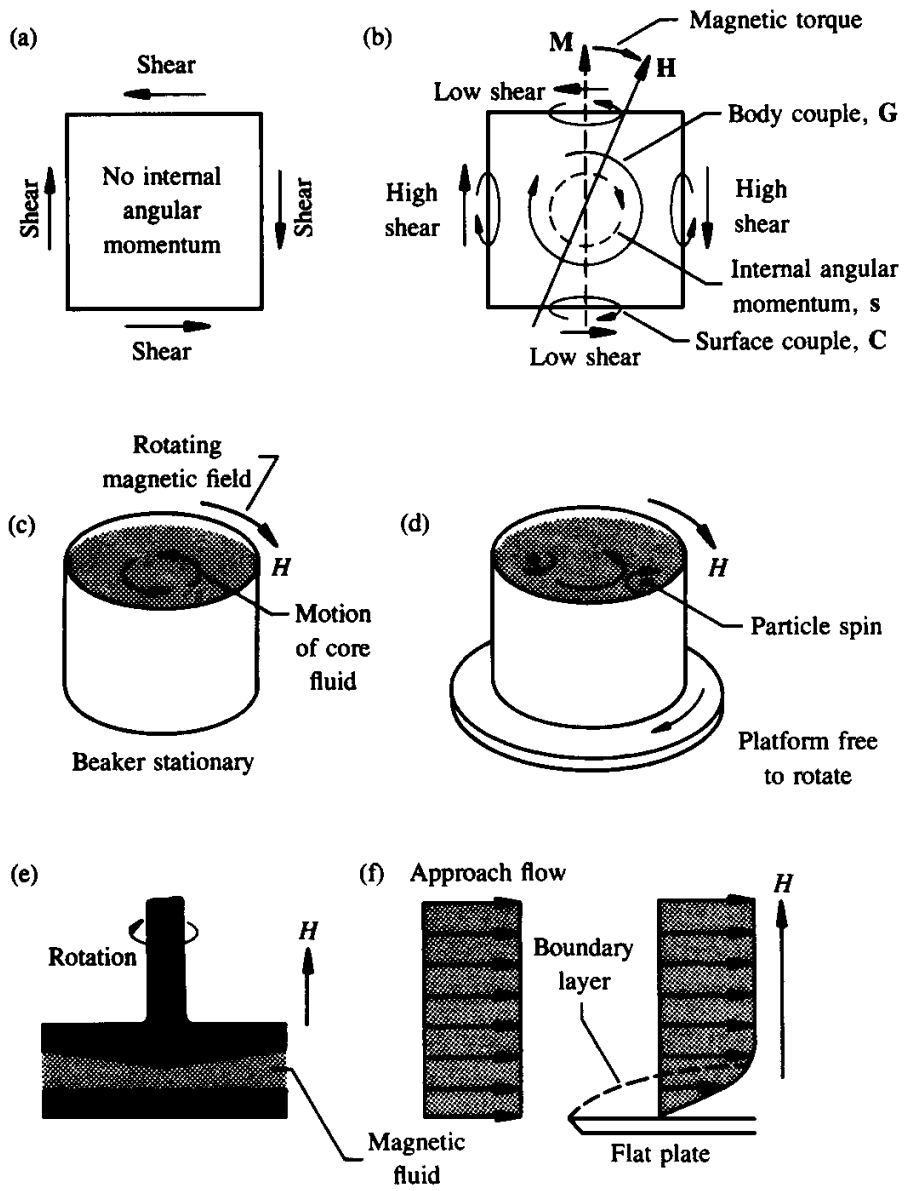


FIG. B.2 – *Des contraintes asymétriques dues au couple magnétique sont présentes dans un ferrofluide lorsque le champ magnétique et l'aimantation du fluide pointent dans des directions différentes: cf. (a) et (b). Les contraintes sont dues à la rotation des particules relativement au fluide porteur. Le couple peut provoquer un écoulement visqueux, comme en (c) ou en (d). Alternativement, comme en (e) ou en (f), un écoulement visqueux peut entrainer la création d'un couple magnétique. La différence entre les taux de cisaillement en (b) provient de l'échange de moment angulaire interne et externe.* (D'après Rosensweig [110] page 238.)

Bibliographie

[1] B. Abou, G. Néron de Surgy and J.-E. Wesfreid, *J. Phys. II*, **7**, 1159 (1997).

[2] B. Abou, *Thèse de doctorat de l'Université Paris 6* (non publiée,1998).

[3] A. W. Adamson, *Physical Chemistry of Surfaces*, 4th ed. (Wiley & Sons, New York, 1982).

[4] D. Allais & J.-E. Wesfreid, *Bull. Soc. Fr. Phys. Suppl.* **57**, 20 (1985).

[5] Anonyme, *La Recherche*, **305** 23 (1998). Voir aussi http://www-hfml.sci.kun.nl/hfml/levitate.html.

[6] J. K. Antrim, *Marine Technology* **31**, 168 (1994).

[7] J.-C. Bacri, R. Perzynski and D. Salin, *CRAS* **307**, 699 (1988).

[8] J.-C. Bacri, R. Perzynski, M. I. Shliomis and G. I. Burde, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2128 (1995).

[9] J.-C. Bacri, A. Cebers, A. Bourdon, G. Demouchy, B. M. Heegaard and R. Perzynski, *Phys. Rev. Let.* **74**, 5032 (1995).

[10] J.-C. Bacri & D. Salin, *J. Phys. Lett. (France)* **43**, L-649 (1982).

[11] J.-C. Bacri, D. Salin, R. Perzynski, V. Cabuil and R. Massart, *J. Colloid Interface Sci.* **132**, 43 (1989).

[12] J.-C. Bacri, A. Cebers and R. Perzynski, *Phys. Rev. Let.* **72**, 2705 (1994).

[13] J.-C. Bacri and D. Gorse, *J. Phys. (France)* **44**, 513 (1983).

[14] V. G. Bashtovoi & R. E. Rosensweig, *J. Magn. Magn. Mater.* **122**, 234 (1993).

[15] J. G. Berryman, *Mixture theories for Rock Properties* in Rock Physics and Phase Relation, AGU Handbook of Physical Constants, edited by T. J. Ahrens (AGU, New York, 1995) p. 205.

[16] B. M. Berkovsky, V. G. Bashtovoi et M. C. Krakov, *Magnitnaya Gidrodynamika* **3**, 28 (1979).

[17] S. Bindel, «Hydrodynamique navale» in *Encyclopædia Universalis*, (Encyclopædia Universalis, Paris, 1998).

[18] F. Bitter, *Phys. Rev.* **41** (1932) 507.

[19] E. Blums, A. Cebers, M. M. Maiorov, *Magnetic Fluids* (Walter de Gruyter, Berlin, 1997).

[20] J.-P. Brancher, *IEEE Trans. Magn.* **MAG-16**, 1331 (1980).

[21] J.-P. Brancher, *Thermomechanics of Magnetic Fluids*, edited by B. Berkovsky (Hemisphere Publishing Corp., 1977).

[22] D. Braithwaite, E. Beaugnon and R. Tournier, *Nature* **354**, (1991).

[23] F. H. Busse, *J. Fluid Mech.* **72**, 67 (1975).

[24] F. H. Busse & N. Riahi, *J. Fluid Mech.* **123**, 283 (1982).

[25] O. Cardoso, *Thèse de doctorat de l'Université Paris 7* (non publiée, 1990).

[26] H. S. Carslaw & J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed. (Clarendon, Oxford, 1959).

[27] P. Cerisier, J. Pantaloni, G. Finiels and R. Amalric, *Appl. Opt.* **12**, 2153 (1982).

[28] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, (Dover 1981).

[29] P. A. Cherenkov, *C. R. Acad. Sci. USSR* **14**, 109 (1937).

[30] S. Chikazumi & S. H. Charap, *Physics of Magnetism* (Wiley & Sons, New York, 1964) p. 19.

[31] M. D. Cowley & R. E. Rosensweig, *J. Fluid Mech.* **30**, 671 (1967).

[32] M. Daoud & C. Williams éditeurs, *La juste argile* (Les Editions de Physique, Paris, 1995).

[33] P.-G. de Gennes et J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals* 2nd ed. (Oxford, New York, 1995).

[34] O. Dias & C. Kharif, *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **31**, 301 (1999).

[35] P. G. Drazin & W. H. Reid, *Hydrodynamic stability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

[36] E. Dubois, V. Cabuil, F. Boué and R. Perzynski, *J. Chem. Phys.* **111**, 7147 (1999).

[37] E. Dubois, J. Chevalet and R. Massart, *J. Molec. Liq.* **83**, 243 (1999).

[38] E. Dubois, *Thèse de doctorat de l'Université Paris 6* (non publié, 1997).

[39] W. C. Elmore, *Phys. Rev.* **54** (1938) 309.

[40] T. E. Faber, *Fluid Dynamics for Physicists* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

[41] M. Faraday, *Philos. Trans. R. Soc. London* **121**, 319 (1831).

[42] B. A. Finlayson, *J. Fluid Mech.* **40**, 753 (1970).

[43] S. Foner, *Rev. Sci. Instr.* **30**, 548 (1959).

[44] A. Gailitis, *J. Fluid Mech.* **82**, 401 (1977).

[45] G. Gausorgues, *La thermographie infrarouge : principes, technologies, applications* $4^{\text{ème}}$ éd. (TEC&DOC, Paris,1999).

[46] F. Gazeau, *Thèse de doctorat de l'Université Paris 7* (non publié, 1997).

[47] F. Gazeau, C. Baravian, J.-C. Bacri, R. Perzynski and M. I. Shliomis, *Phys. Rev. E* **56**, 614 (1997).

[48] E. Giannandrea & U. Christensen, *Phys. Earth. Planet. Inter.* **78**, 139 (1993).

[49] R. J. Goldstein & J. F. Timmers, *J. Heat Mass Transfert* **25**, 1857 (1982).

[50] F. I. González, *Pour la Science* **260** (1999).

[51] D. E. Gray editor, *American Institute of Physics Handbook* 2nd ed. (Mc Graw Hill, New York, 1963).

[52] E. Guyon, J.-P. Hulin & L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, (Inter-Editions, Paris et Editions du CNRS, Meudon, 1991).

[53] A. Halbreich, J. Roger, J.-N. Pons, D. Geldwerth, M.-F. Da Silva, M. Roudier and J.-C. Bacri, *Biochimie* **80**, 1 (1998).

[54] J. Hart, G. A. Glatzmaier and J. Toomre, *J. Fluid Mech.* **173**, 519 (1986).

[55] E. Hasmonay, E. Dubois, J.-C. Bacri, R. Perzynski, Yu. L. Raikher and V. I. Stepanov, *Eur. Phys. J. B* **5** (1998).

[56] E. Hasmonay, A. Bee, J.-C. Bacri and R. Perzynski, *J. Chem. Phys. B* **103** 6421 (1999).

[57] T. H. Havelock, *Collected Papers* (Office Naval Research, Washington D. C., 1996).

[58] B. M. Hegaard, J.-C. Bacri, R. Perzynski and M. Shliomis, *Europhys. Lett.* **34** 299 (1996).

[59] IFAM, Fraunhofer Institut for Manufacturing and Advanced Materials Near-Net-Shape Production Technologies (sur internet, http://www.ifam.fhg.de/fhg/ifam/ifam2801_e_index.html).

[60] J. N. Israelachvili, *Intermolecular and Surface Forces* (Academic Press, Londres, 1985).

[61] Y. Iwase, *J. Geomag. Geoelectr.* **48** 1499 (1996).

[62] G. T. Jarvis, G. A. Glatzmeier and V. I. Vangelov, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **79**, 147 (1995).

[63] R. S. Johnson, *A modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves* (Cambridge University Press, Cambridge 1997).

[64] J.-P. Jolivet, R. Massart et J.-M. Fruchart, *Nouveau Journal de Chimie* **7**, 325 (1983).

[65] A. Jordan, P. Wust, R. Scholz, H. Fachling, J. Krause and R. Felix, *Magnetic Fluid Hyperthermia (MFH) in Scientific and Clinical Applications of Magnetic Carriers* (Plenum Press, New York, 1997) p. 569.

[66] Lord Kelvin (W. Thomson), *Proc. Roy. Soc. A* **42**, 80 (1887).

[67] S. E. Khalafalla & G. W. Reimers, *Separation Sci.* **8**, 161 (1973).

[68] K. Kumar & L. S. Tuckerman, *J. Fluid Mech.* **279**, 49 (1994).

[69] H. Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993) pp. 471-475.

[70] L. Landau & E. Lifchitz, *Mécanique* 4ème éd. (Mir, Moscou, 1981) p. 149.

[71] L. Landau & E. Lifchitz, *Statistical Physics* Part 2, 3rd ed. (Pergamon Press, New York, 1981).

[72] L. Landau & E. Lifchitz, *Mécanique des fluides* 4ème éd. (Mir, Moscou, 1981).

[73] L. Landau & E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité* 2ème éd. (Mir, Moscou, 1967).

[74] A. Lange, B. Reimann and R. Richter, *patt-sol/9909008* sur le serveur d'e-prints http://xxx.lanl.gov (21 Septembre 99).

[75] T. B. Larsen, D. A. Yuen, J. Moser and B. Fornberg, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **84**, 53 (1997).

[76] S. Laroze, *Mécanique des structures Tome 2 (Poutres)*, 2ème éd. (Eyrolles / Masson, Paris, 1988).

[77] G. Lauzun, *De la correction dans les ferrofluides* (PLP, Paris, 1999).

[78] F. H. Leblond & F. Mainardi, *Acta Mechanica* **68**, 203 (1987).

[79] J. Lenglet, *Thèse de doctorat de l'Université Paris 7* (non publié, 1996).

[80] J. Lighthill, *Waves in fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996) p. 223.

[81] J. P. MacTague, *J. Chem. Phys.* **51**, 133 (1969).

[82] T. Mahr, A. Groisman, I. Rehberg, *J. Magn. Magn. Mater.* **159**, 45 (1996).

[83] T. Mahr & I. Rehberg, *Phys. Rev. Let.* **81**, 89 (1998).

[84] R. Massart, *CRAS* **291** (1980).

[85] R. Massart, *IEEE Trans. Magn.* **MAG-17**, 1247 (1981).

[86] J. A. Miranda & M. Widom, *J. Stat. Phys.* **93**, 411 (1998).

[87] H. W. Müller, *Phys. Rev. E* **58**, 6199 (1998).

[88] I. Nakatani, M. Hijikata and K. Ozawa, *J. Magn. Magn. Mater.* **122**, 10 (1993).

[89] M. Nakano & K. Koyama editors, *Electro-Rheological Fluids, Magneto-Rheological Suspensions and Their Applications* (World Scientific, Singapore, 1998).

[90] S. Odenbach, *J. Magn. Magn. Mater.* **149**, 155 (1995).

[91] D. R. Ohlsen & P. B. Rhines, *J. Fluid Mech.* **338**, 35 (1997).

[92] M. Ohmori and E. Matijevic, *J. Colloid and Interface Sci.* **160**, 288 (1993).

[93] S. Papell, Low viscosity magnetic fluid obtained by the colloïdal suspension of magnetic particules, *Brevet US* 3.215.572 (1963).

[94] A. R. Paterson, *A first course in fluid dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

[95] H. Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, (Jacques Gabay, Paris, 1990). Réédition du cours en Sorbonne de 1900.

[96] J.-P. Poirier, *Les profondeurs de la terre* (Masson, Paris, 1991).

[97] V. K. Polevikov & V. E. Fertman, *Magnetohydrodynamics* **13**, 11 (1977).

[98] B. Prézelin, *Flottes de combat 1996* (Editions maritimes et d'outre-mer, Rennes, 1995).

[99] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes – the Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

[100] M. I. Shliomis & Yu. Raikher, *IEEE Trans. Magn.* **MAG-16**, 237 (1980).

[101] D. Raitt & H. Riecke, *Phys. Rev. E* **55**, 5448 (1997).

[102] E. Raphaël & P.-G. de Gennes, *Phys. Rev. E* **53**, 3448 (1996)

[103] S. Rasenat, G. Hartung, B. L. Winkler and I. Rehberg, *Exp. in Fluids* **7**, 412 (1989).

[104] J. T. Ratcliff, G. Schubert and A. Zebib, *J. Geophys. Res.* **101**, 25473 (1996).

[105] Lord Rayleigh, *Proc. Lond. Math. Soc.* **15**, 69 (1883).

[106] D. Richard & E. Raphaël, *Europhys. Lett.* **48**, 49 (1999).

[107] R. Richter & J. Bläsing, *Proceedings of the Second German Ferrofluid Workshop in Magdeburg* (non publié, 1-3 septembre 1999).

[108] R. E. Rosensweig, J. Popplewell, *Electromagnetic forces and applications*, edited by J. Tani and T. Takagi, (Elsevier, 1992) pp. 83-86.

[109] R. Rosensweig, J. Browaeys, J.-C. Bacri, A. Zebib and R. Perzynski, *Physical Review Letters*, **83**, 4904 (1999).

[110] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics* (Dover, Mineola, 1997).

[111] R. E. Rosensweig & A. Zebib, *Proceedings of the International Symposium on Hydrodynamics of Ferrofluids and its Applications*, Aoba Kinene Kaikan, Tohoku University, Sendai, Japan (1997), p. 24.

[112] S. Rytov, Diffraction de la lumière par les ultra-sons, *Actualités Scientifiques & industrielles*, **613** (Hermann, Paris, 1938).

[113] D. Salin, *Europhys. Lett.* **21**, 667 (1993).

[114] C. J. Sambucetti, *IEEE Trans. Magn.* **MAG-16**, 364 (1980).

[115] O. Sandre, J. Browaeys, R. Perzynski, J.-C. Bacri, V. Cabuil and R. Rosensweig, *Phys. Rev. E* **59** 1736 (1998).

[116] J. C. Scott, *Surface Contamination : Genesis, Detection and Control* vol. 1, edited by K. L. Mittal, (Plenum, 1979) pp. 477-497.

[117] C. Sestier, D. Sabolovic, D. Geldwerth, M. Moumaris, J. Roger, J.N. Pons and A. Halbreich, *C. R. Acad. Paris, Life sciences* **318**, 1141 (1995).

[118] Sextant, *Optique expérimentale* (Hermann, Paris, 1997).

[119] M. I. Shliomis, *Soviet Phys. JETP* **34**, 1291 (1972).

[120] M. I. Shliomis, *Sov. Phys. Usp.* **17**, 153 (1974).

[121] M. I. Shliomis, *Soviet Phys. JETP* **39**, 701 (1974).

[122] M. I. Shliomis & V. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4178 (1997).

[123] D. Spoliansky, Thèse de l'Université Paris 6 (non publié, 1999).

[124] D. Spoliansky, V. Ponsinet, J. Ferré and J.-P. Jamet, à paraître dans *Eur. Phys. J. E* (2000).

[125] P. J. Styles & M. Kagan, *J. Colloid Interface Sci.* **134**, 435 (1991).

[126] G. I. Taylor, *Scientific papers* vol. III (Cambridge University Press, Cambridge, 1963) pp. 532-6.

[127] F. Tourinho, R. Franck, R. Massart and R. Perzynski, *Progress in Colloid and Polymer Science* **79**, 128 (1989).

[128] D. L. Turcotte & G. Scubert, *Geodynamics* (Wiley, New York, 1982).

[129] E. Twombly & J. W. Thomas, *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-16**, 214 (1980).

[130] T. Valet & J.-E. Wesfreid, *Dispersive waves in dissipative fluids*, edited by D. G. Crighton and F. Mainardi, (Bologna, 1988) p. 62.

[131] R. C. Weast et al., *Handbook of Chemistry and Physics* 46th ed., (Chemical Rubber Company, Cleveland, 1965).

[132] A. Wegener, *The Origin of Continents and Oceans* 4th ed. (Dover, New York, 1966)

[133] J. Weilepp and R. Brand, *J. Phys. II* **6**, 419 (1996).

[134] R. Weissleder & P. Reimer, *European Journal of Radiology* **3**, 198 (1993).

[135] E. P. Wolhfarth, *Ferromagnetic Materials* Vol. 2, (North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982).

[136] A. Zebib, *J. Fluid Mech.* **321**, 121 (1996).

[137] A. Zebib, A. K. Goyal and G. Schubert, *J. Fluid Mech.* **152**, 39 (1985).

[138] R. E. Zelazo & J. R. Melcher, *J. Fluid Mech.* **39**, 1 (1969).

RESUME

Les ferrofluides sont des colloïdes stables de nanoparticules. L'action d'un champ magnétique est à même d'engendrer diverses instabilités hydrodynamiques, qui se produisent aux interfaces ou en volume. Après une courte introduction aux ferrofluides, trois situations sont examinées.

Les ondes de surface sont amplifiées par un champ magnétique normal à l'interface, conduisant à l'instabilité de Rosensweig. Une expérience est réalisée pour mesurer la relation de dispersion obtenue théoriquement par l'analyse linéaire. La méthode ombroscopique employée permet de visualiser une déformation prétransitionnelle de l'interface, ainsi que l'apparition d'ondes azimutales au voisinage du champ critique de l'instabilité.

La résistance de vague est la force qui s'oppose au déplacement d'un objet en surface, causée par l'émission d'ondes de surface. Si sa taille est très petite devant la longueur capillaire, la résistance de vague est nulle en deçà d'une vitesse critique, puis fonction croissante de la vitesse de déplacement. Une expérience a été réalisée afin d'observer ces prédictions théoriques récentes. Des fluides de différentes viscosités ont été employés. Avec des ferrofluides, il est possible de réduire a volo la vitesse critique. Dans tous les cas, le phénomène critique est bien observé conformément à la théorie. Cependant, la résistance de vague paraît être une fonction non-monotone de la vitesse.

Enfin, les propriétés originales des ferrofluides permettent de concevoir une expérience de convection magnéto-calorique en géométrie centrale, en tous points semblable à la convection de Rayleigh-Bénard. Moyennant l'utilisation de lois d'échelle appropriées, un modèle de laboratoire est élaboré qui simule la convection dans le manteau terrestre le nombre de Rayleigh avoisine le million. Le champ de température est observé par thermographie infrarouge. Des cellules de convection mobiles sont observées, et le nombre de Nusselt est obtenu en fonction du nombre de Rayleigh.

DISCIPLINE PHYSIQUE DES LIQUIDES

MOTS-CLES

FLUIDE MAGNETIQUE, FERROFLUIDE, ONDES DE SURFACE, CAPILLARITE, RESISTANCE DE VAGUE, MANTEAU TERRESTRE, CONVECTION, RAYLEIGH-BENARD

ADRESSE DU LABORATOIRE :

Laboratoire Des Milieux Désordonnés et Hétérogènes
Case 86, Université Paris 6
4, place Jussieu
75254 Paris Cedex 05

ABSTRACT

Ferrofluids are stable colloidal solutions of nanoparticles. The influence of a magnetic can generate several hydrodynamic instabilities, either at the interfaces or in the bulk. After a short introduction to ferrofluids, three situations are examined.

Surface waves are susceptible to be amplified by a normal magnetic field, leading to the Rosensweig instability. An experiment is designed in order to measure the dispersion relation that is otherwise obtained by linear analysis. The shadowgraph method that is used allows to observe a pre-transitional deformation, as well as azimutal wavelets close to the magnetic field threshold.

The wave resistance is the force that puts up against the movement of an object at the surface of a fluid, caused by the emission of surface waves. If its size is much smaller that the capillary length, the wave resistance is to be zero below a critical speed, the minimum velocity of capillary-gravity waves. Beyond, it is an increasing function of the movement speed. An experiment has been designed in order to observe those recent theoretical predictions stemming from linear analysis. Fluids with different viscosities have been employed. With ferrofluids, we show that it is possible to reduce at will the critical velocity. In any case, the critical phenomenon is observed in accordance with the theory. However, the wave resistance seems to be a non-monotonic function of speed.

Lastly, the original properties of ferrofluids allow conceiving a magneto-caloric experiment in central geometry, similar to the Rayleigh-Bénard convection. By the use of appropriate scaling laws, a laboratory model is elaborated that simulates the earth mantle convection: the Rayleigh number is in the order of a million. The temperature field is observed by infrared imaging. Moving convection cells are observed, and the Nusselt number is obtained as a function of the Rayleigh number.

KEYWORDS:

MAGNETIC FLUID, FERROFLUID, SURFACE WAVE, CAPILLARITY, WAVE RESISTANCE, EARTH MANTLE, CONVECTION, RAYLEIGH-BENARD