Simulation numérique d'écoulements confinés de fluides miscibles par la méthode BGK sur réseau

Laurent Talon

▶ **To cite this version:**

Laurent Talon. Simulation numérique d'écoulements confinés de fluides miscibles par la méthode BGK sur réseau. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT : . tel-00007304

HAL Id: tel-00007304

https://theses.hal.science/tel-00007304

Submitted on 5 Nov 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE
LA SCIENCE A PARIS

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : PHYSIQUE DES LIQUIDES

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de PARIS 6

Présentée par

Laurent Talon

Sujet de la thèse :

Simulation numérique d'écoulements confinés de fluides miscibles par la méthode BGK sur réseau

Soutenue le :
18 octobre 2004

Devant le jury composé de :

M. Benamar ..... Présidente du jury
F. Charru ..... Examinateur
F. Delay ..... Rapporteur
P. Lallemand ..... Rapporteur
N. Rakotomalala ..... Co-directeur de Thèse
D. Salin ..... Directeur de Thèse

Table des matières

La méthode BGK sur réseau **5**

I Modélisation d'écoulements miscibles en milieu poreux hétérogène **11**

Introduction **13**

1 Modélisation de milieux poreux hétérogènes **21**

1.1 L'équation de Darcy-Brinkman 21

1.2 Génération du milieu poreux 22

1.3 Analyse aux faibles perturbations 23

1.4 Comparaison simulation-théorie 27

2 Étude analytique de la macrodispersion **31**

2.1 Principe 31

2.2 Macrodispersion 32

2.3 La méthode spectrale 33

3 Cas du traceur passif **37**

3.1 Introduction 37

3.2 Méthode de mesure 37

3.3 Influence de la perméabilité moyenne K_l 39

3.4 Influence de la longueur de corrélation λ 40

3.5 Influence de l'écart quadratique moyen σ_f 41

3.6 Conclusion 42

4 Cas du contraste de viscosités stabilisant **45**

4.1 Introduction . . . 45

4.2 Caractérisation de la loi de mélange macroscopique . . . 45

4.3 Résultats numériques . . . 47

4.3.1 Influence de la viscosité . . . 48

4.3.2 Influence des hétérogénéités . . . 48

4.3.3 Influence du coefficient de diffusion mésoscopique . . . 49

4.4 Comparaison avec le développement aux faibles perturbations . . . 49

5 Cas du contraste de viscosités déstabilisant **53**

5.1 Introduction . . . 53

5.2 Analyse de stabilité linéaire . . . 54

5.3 Caractérisation du mélange macroscopique . . . 58

5.4 Influence du rapport de viscosités . . . 60

5.5 Influence de l'amplitude des hétérogénéités . . . 61

5.6 Influence de la longueur de corrélation . . . 62

5.7 Influence du coefficient de diffusion mésoscopique . . . 63

5.8 Commentaires . . . 63

6 Conclusion **67**

II Écoulements triphasiques confinés **69**

Introduction **71**

1 Théorie des ondes cinématiques **75**

1.1 Cas à une variable . . . 75

1.1.1 Les invariants de Riemann . . . 76

1.1.2 Le problème de Riemann . . . 78

1.1.3 Un exemple d'application . . . 80

1.2 Cas à deux variables . . . 83

1.2.1 Système hyperbolique . . . 84

1.2.2 Système elliptique . . . 87

1.3 Conclusion . . . 89

2 Écoulement triphasique quasi-parallèle **91**

2.1 Position du problème . . . 91

2.2 Calcul des fonctions de flux . . . 93

2.3 Étude du système de conservation . . . 94

2.4 Solutions analytiques du problème de Riemann . . . 97

2.4.1 Cas purement hyperbolique . . . 98

2.4.2 Cas mixte hyperbolique-elliptique . . . 101

2.4.3 Remarque . . . 101

2.5 Conclusion . . . 104

3 Étude numérique en condition de lubrification imposée **105**

3.1 Principe . . . 105

3.2 Cas hyperbolique . . . 106

3.3 Cas mixte hyperbolique-elliptique . . . 112

3.4 Conclusion . . . 115

4 Résolution numérique du problème complet **117**

4.1 Cas purement hyperbolique . . . 117

4.2 Cas mixte hyperbolique-elliptique . . . 123

5 Conclusion - Perspectives **141**

III Écoulements diphasiques confinés **143**

Introduction **145**

1 Résultats numériques **149**

1.1 Position du problème . . . 149

1.2 Influence de la condition d'injection . . . 149

1.3 Influence du nombre de Reynolds . . . 155

1.4 Influence du nombre de Péclet . . . 155

2 Une approche analytique **159**

3 Approche expérimentale **165**

3.1 Description du montage expérimental . . . 166

3.2 Résultats expérimentaux . . . 166

Introduction

La caractéristique principale d'un fluide est certainement de pouvoir prendre la forme du récipient qui le contient. Il n'est donc pas rare d'observer dans la nature des écoulements de fluides dans des volumes réduits. L'étude de tels écoulements est très importante car ils peuvent se trouver extrêmement utiles ou bien nuisibles. Pour citer quelques types d'écoulements confinés, on a par exemple les écoulements dans les fissures qui peuvent provoquer des dommages très importants dans certaines constructions. Dans le monde du vivant les écoulements fluides sont le principal moyen d'échanges de matière entre différentes parties d'un organisme. Dans chaque organisme animal ou végétal, il existe donc des écoulements confinés jouant un rôle primordial. L'étude des écoulements de fluides en milieux confinés s'inscrit dans un grand nombre d'applications, relativement anciennes, ou toutes nouvelles avec le développement de la microfluidique.

Certains écoulements peuvent parfois être composés de plusieurs fluides de natures différentes. Ces écoulements sont dit multiphasiques. En effet, il n'est pas rare d'observer dans un même volume aussi étroit soit-il, plusieurs types de fluides qui s'écoulent simultanément. Ces fluides se distinguent généralement par des propriétés physiques différentes (densité, viscosité...). Dans les écoulements géologiques par exemple, il est fréquent d'observer plusieurs phases aux propriétés physiques très différentes comme de l'eau, du gaz ou du pétrole. Pour reprendre l'exemple des écoulements biologiques, on pourra citer l'exemple du sang s'écoulant dans les veines. Celui-ci est souvent composé de deux phases, l'une constituée de plasma et de globules et l'autre de plasma seul. Les globules s'écoulent généralement au centre des veines. Comme autres applications d'écoulements multiphasiques, on peut également citer les transports de polluants dans les sols ou bien les procédés d'enduction multicouches. Dans ce mémoire, nous allons essentiellement nous intéresser à des écoulements de systèmes confinés, multiphasiques et miscibles. Les différents fluides ne se distingueront que par leur viscosité.

D'une manière générale, un écoulement est dit confiné lorsqu'il s'écoule dans un volume dont une des dimensions est faible par rapport aux autres. Les fractures, les veines ou les milieux poreux sont donc des milieux confinés, la dimension petite étant respectivement, la largeur de la fracture, le diamètre des veines et la taille des pores. Pour de tels systèmes, il est rare d'avoir accès expérimentalement aux détails structurels de l'écoulement sur les petites échelles. La description de tels systèmes se fait donc généralement en étudiant des comportements de grandeurs d'ensembles observables à plus grande échelle ("upscaling"). Ces grandeurs dites "mésoscopiques" ou "macroscopiques" sont en fait des moyennes d'autres grandeurs définies sur les petites échelles "microscopiques" inaccessibles. Dans l'exemple de l'écoulement sanguin, il est par exemple difficile de connaître le champ de vitesses dans chacune des deux phases, par contre les quantités qui sont

utiles et plus facilement accessibles sont les débits de chacune d'entre elles.

Toutefois, pour pouvoir comprendre et modéliser l'évolution d'un écoulement confiné, il est parfois indispensable de connaître les structures sur les petites échelles. C'est le cas par exemple, lorsque des instabilités sont générées à ces petites échelles. L'apparition d'instabilités dans un écoulement peut en effet en modifier radicalement les comportements macroscopiques. Ainsi, un écoulement d'eau et de pétrole donne lieu à l'apparition d'émulsion entre ces deux phases, dans certaines conditions d'écoulement. Un des intérêts majeurs des simulations numériques est qu'elles donnent justement accès dans un système donné à toutes les quantités physiques qui seraient difficilement mesurables expérimentalement. Elles sont donc un atout dans la compréhension et la description de tels systèmes.

Dans ce mémoire, nous allons étudier plusieurs systèmes confinés. Dans la première partie, nous nous intéresserons au problème très important du mélange de deux fluides dans un milieu poreux. Les milieux poreux illustrent bien le problème du manque d'information sur de petites échelles. Dans un milieu poreux, les échelles inaccessibles sont bien sûr celles des pores mais d'un point de vue géologique il y a souvent d'autres échelles, plus grandes, également mal connues. Pour étudier des écoulements souterrains sur des distances de l'ordre de la centaine de kilomètres, il est impensable de vouloir déterminer le détail structurel du terrain sur des échelles de l'ordre du mètre. Une méthode souvent utilisée consiste à modéliser la structure aux échelles mal connues. Une telle modélisation est faite pour rendre compte au mieux des propriétés d'ensemble (macroscopiques et donc mesurables) du milieu étudié. Dans notre cas du déplacement d'un fluide par un autre dans un milieu poreux, la grandeur mesurable est par exemple la quantité de chacun des fluides sortant du milieu. Par contre, cette grandeur va fortement dépendre de la structure interne de ce milieu. Si celle-ci est très désordonnée, on se doute qu'il va falloir attendre très longtemps avant que le premier fluide soit complètement évacué du milieu (s'il y a des zones stagnantes notamment). L'approche utilisée dans ce mémoire est de modéliser le désordre aux petites échelles (échelles mésoscopiques) afin d'étudier les propriétés macroscopiques du milieu. La modélisation aux échelles mésoscopiques se fait en supposant que l'écoulement satisfait une loi de Darcy localement mais avec une perméabilité distribuée de façon aléatoire. La propriété macroscopique étudiée est essentiellement la loi d'étalement (ou loi de mélange macroscopique) de fluides miscibles, qui se différencient physiquement par leur viscosité.

Dans la seconde et troisième partie de ce mémoire, nous étudierons le déplacement d'un fluide par un autre à l'échelle microscopique du pore. La seconde partie est consacrée à ce type d'étude lorsque la loi de viscosité de mélange est non-monotone. La modélisation de ce système nous a en particulier amenés à étudier un type d'équations que l'on retrouve souvent lorsque l'on cherche à décrire des grandeurs moyennées : les équations de conservations. L'approche utilisée pour étudier ce système peut donc se généraliser facilement à d'autres systèmes.

Finalement, dans la troisième partie, nous sommes revenus à l'étude plus classique du déplacement d'un fluide par un autre avec une loi de viscosité monotone dans un tube. Bien que ce système ait été beaucoup étudié expérimentalement dans le cas de fluides non-miscibles [6, 50] ou avec un contraste de densités [60], nous avons constaté numériquement et expérimentalement que dans notre cas simple il demeure des problèmes non résolus. Nous nous sommes en particulier intéressés au problème de sélection de la forme et de la vitesse du doigt de déplacement.

Ce mémoire commence par un bref exposé de la méthode numérique utilisée : la méthode BGK sur réseau.

La méthode BGK sur réseau

Dans ces travaux, la méthode numérique utilisée pour étudier les différentes situations physiques est la méthode de BGK sur réseau. Cette méthode développée par Qian, d'Humières et Lallemand [74] permet de simuler les équations de Navier-Stokes (faiblement compressible) et de convection-diffusion sur un réseau discret. Notre utiliserons ici le maillage bidimensionnel du type D2Q9 (voir figure 1). Cette méthode numérique a été choisie essentiellement pour sa souplesse et sa facilité de mise en oeuvre. Nous verrons qu'elle permet de simuler aussi bien les équations de Darcy que celles de Navier-Stokes.

Principe

Les équations de Boltzmann permettent de décrire l'évolution des probabilités de présence (et de vitesse) des particules constituant le fluide. Le principe de la méthode BGK peut être vu comme la discrétisation sur un réseau d'une équation de relaxation de type Boltzmann. Sur un réseau, on peut définir la densité de probabilité $N_i(\vec{x},t)$ qu'aurait une particule de fluide située en $\vec{x}$ de se propager dans la direction $\vec{e}_i$. A partir d'une telle définition, la densité et la quantité de mouvement locale du fluide s'expriment par :

$$\rho(\vec{x},t) = \rho_0 \sum_{i=0}^{8} N_i(\vec{x},t) \quad \text{et} \quad \rho(\vec{x},t)\vec{u}(\vec{x},t) = \rho_0 \sum_{i=0}^{8} N_i(\vec{x},t)\vec{e_i} \tag{1}$$

où ρ_0 est la densité moyenne de particules du système.

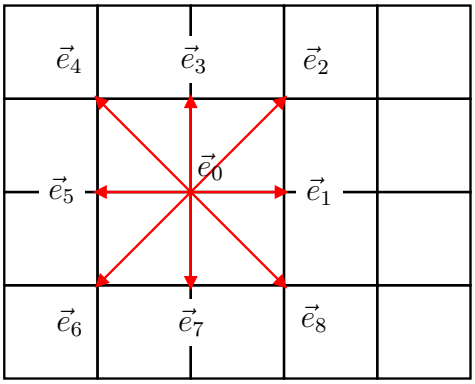


FIG. 1. *Définition des 9 vecteurs vitesses d'un réseau du type D2Q9.*

Il est possible d'écrire l'équation d'évolution de ces densités de probabilité sous la forme :

$$N_i(\vec{x}+\vec{e}_i,t+1)-N_i(\vec{x},t)=\delta_c(\vec{x},t) \quad \text{avec} \quad i\in[0;8] \tag{2}$$

où $\vec{e}_i$ sont les vecteurs vitesses de base du maillage (voir figure 1) et $\delta_c(\vec{x},t)$ est un terme prenant en compte les collisions entre les particules. Ce terme collisionnel, qui rend compte de toutes les propriétés physiques du fluide est supposé être sous une forme relaxative :

$$\delta_c(\vec{x},t)=-\frac{N_i(\vec{x},t)-N_i^{eq}(\vec{x},t)}{\tau} \tag{3}$$

où $N_i^{eq}(\vec{x},t)$ est une "densité de probabilité d'équilibre" (pour chacune des directions i). τ caractérise le temps de relaxation de retour à l'équilibre. Les propriétés physiques du fluide dépendent ainsi du paramètre τ et de la fonction de distribution à l'équilibre $N_i^{eq}(\vec{x},t)$. La méthode consiste à choisir ces distributions à l'équilibre $N_i^{eq}(\vec{x},t)$ pour retrouver les équations de Navier-Stokes :

$$N_i^{eq}(\vec{x},t)=t_i\rho\left\{1+\sum_{\alpha,\beta}\left[\frac{e_{i\alpha}u_\alpha}{c_s^2}+\frac{u_\alpha u_\beta}{2c_s^2}(\frac{e_{i\alpha}e_{i\beta}}{c_s^2}-\delta_{\alpha\beta})\right]\right\} \tag{4}$$

où $e_{i\alpha}$ et u_α sont les composantes des vecteurs $\vec{e}_i$ et $\vec{u}$ suivant l'axe x ou y, $c_s=1/3$ est la vitesse du son et les coefficients t_i valent respectivement $4/9$, $1/9$ et $1/36$ pour la direction "nulle", les directions x et y, et les directions diagonales. Dans de telles conditions, on peut montrer que le fluide considéré obéit aux équations de Navier-Stokes [74]. Le choix du paramètre τ définit la viscosité cinématique :

$$\nu=\frac{1}{6}(2\tau-1) \tag{5}$$

Notons que le terme collisionel δ_c est un opérateur redistribuant les probabilités de particules dans chacune des directions en une position donnée. En pratique, dans l'algorithme, l'étape de redistribution des directions est découplée de celle de propagation.

Dans de telles conditions, on peut montrer [74] que les quantités définies en (1) satisfont l'équation de Navier-Stokes faiblement compressible (si $u/c_s \ll 1$) :

$$\nabla\vec{u}=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}.\vec{\nabla}\vec{u}=-\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}P+\nu\Delta\vec{u} \tag{7}$$

$$\text{avec } P=c_s^2\rho \tag{8}$$

Il est possible d'ajouter une force volumique $\vec{F}(\vec{x})$ dans cette équation de mouvement [19, 33, 84]. Pour cela, il suffit de remplacer dans l'équation (4) le champ de vitesses $\vec{u}$ par :

$$\vec{U}(\vec{x})=\vec{u}(\vec{x})+\frac{\tau}{\rho}\vec{F}(\vec{x}) \tag{9}$$

Ainsi, une telle méthode permet de simuler l'équation de Navier-Stokes avec une force volumique quelconque :

$$\frac{\partial\vec{u}(\vec{x})}{\partial t}+\vec{u}(\vec{x}).\vec{\nabla}\vec{u}(\vec{x})=-\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}P(\vec{x})+\nu\Delta\vec{u}(\vec{x})+\vec{F}(\vec{x})/\rho_0 \tag{10}$$

La méthode BGK permet également de simuler une équation de convection-diffusion d'un colorant quelconque. Pour cela, on définit la densité de probabilité $C_i(\vec{x})$ qu'une particule de colorant

située en $\vec{x}$ a de se propager suivant la vitesse $\vec{e}_i$. Ces densités de probabilité sont soumises également à une loi de propagation du type :

$$C_i(\vec{x}+\vec{e}_i,t+1) - C_i(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau_c}(C_i(\vec{x},t) - C_i^{eq}(\vec{x},t))$$
$$\text{avec } C_i^{eq} = t_i(1+\frac{\vec{u}.\vec{e}_i}{c_s^2})$$

Le paramètre τ_c définit le coefficient de diffusion D_0, selon : $D_0 = \frac{1}{6}(2\tau_c - 1)$. Dans ces conditions on peut montrer [32] que le champ $C(\vec{x}) = \sum_i C_i$ obéit à une équation de convection-diffusion :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}C = D_0 \Delta C \tag{11}$$

La méthode BGK nous permet ainsi de simuler les équations nécessaires à l'étude des déplacements de fluides miscibles qui sont les équations de Navier-Stokes (avec force volumique) et de convection-diffusion. Notons également que les paramètres ν et D_0 peuvent éventuellement varier spatialement. Il est en particulier possible de faire dépendre la viscosité ν de la concentration en colorant C.

Conditions limites

Les simulations numériques qui vont être présentées utilisent des parois horizontales, en $y = 1$ et $y = L_y$ qui sont les bords du réseau[1]. Pour simuler la présence d'une paroi située entre deux noeuds, il suffit de modifier l'étape de propagation des densités de probabilité qui se propagent en direction de cette paroi. Ces parois peuvent être :

• **Non-glissantes :** la modification à effectuer est un réflexion dite "bounce-back" : une densité se dirigeant en direction de la paroi, se retrouve après l'étape de propagation au même point mais dans la direction opposée (voir figure 2 à gauche). Dans de telles conditions, on peut montrer que le fluide vérifie $\vec{u} = 0$ au niveau de la paroi.

• **Glissantes :** la modification est du même type. Par contre, la propagation selon la direction parallèle à la paroi n'est pas modifiée (voir figure 2 à droite). Dans ces conditions, le fluide vérifie à la paroi $u_y = 0$.

• **Périodique :** pour simuler un milieu infiniment large, on peut également prendre des conditions de bords périodiques. Les particules sortant d'un côté se retrouvent à l'instant d'après de l'autre côté (sans modification des directions).

La condition d'entrée et de sortie du fluide suivant la direction x sera du type périodique également mais avec un forçage de débit à l'entrée. Cette méthode, utilisée par P. Watzky [95] dans ses travaux de thèse, consiste à enlever des densités se propageant dans la direction $-x$ pour

[1] En fait, les parois sont situées en $y = \frac{1}{2}$ et $y = L_y + \frac{1}{2}$.

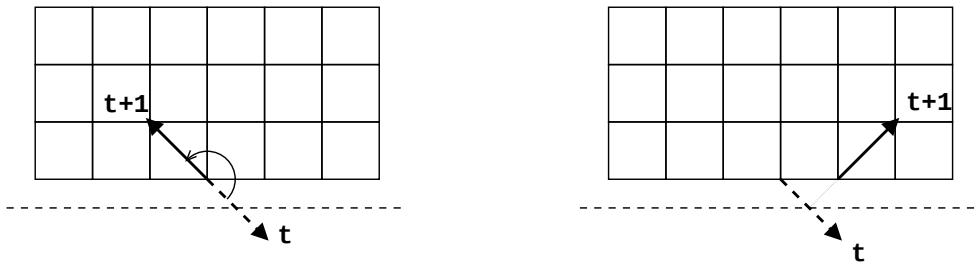


FIG. 2. *Propagation des densités de probabilité rencontrant une paroi (en pointillés). La flèche en pointillés représente la direction de la distribution se propageant vers la paroi. La flèche noire représente la direction après l'étape de propagation. A gauche, la paroi est non-glissante. A droite, la paroi est glissante.*

les rajouter dans la direction x afin d'obtenir le débit souhaité. Plus précisément, le débit total traversant la section $x = 1$, s'écrit :

$$Q = \sum_y \sum N_i(x = 1, y)\vec{e}_i.\vec{e}_x$$

Ainsi, on peut donc forcer le débit total en $x = 0$ à valoir Q_0, en rajoutant $\epsilon = (Q_0 - Q)/2L_y$ à la densité N_1 et en retranchant la même quantité à la densité N_5 (voir figure 3). Avec un tel forçage, si on impose le débit en $x = 1$, il est nécessaire d'attendre un certain temps avant que le débit soit uniforme sur tout le réseau. Ce temps d'attente, nécessaire à l'établissement du champ de pressions doit permettre plusieurs allers/retours d'ondes de pression. Dans chaque simulation numérique, il sera nécessaire d'attendre que le débit soit uniforme. Cette méthode permet donc d'imposer un débit fixé Q_0, en maintenant la "masse totale" dans le système constante. Notons que l'on aurait pu également imposer une pression à l'entrée et à la sortie pour forcer l'écoulement. Une autre méthode possible, que nous aurons l'occasion d'utiliser au chapitre II.4.2, est d'appliquer une force volumique uniforme dirigée suivant l'axe des x.

Les conditions d'entrée et de sortie pour le colorant sont plus simples : on impose le profil de concentration qui nous intéresse à l'entrée et à la sortie du réseau.

La méthode BGK nous permet donc de simuler facilement les équations de Navier-Stokes et de convection-diffusion dans une cellule avec des parois glissantes ou non, le débit total traversant le système pouvant être imposé. De plus, la viscosité peut être dépendante de la concentration locale ce qui nous permet de simuler un mélange de fluides miscibles avec contraste de viscosités. On peut également ajouter une force volumique (uniforme ou non) dans l'équation de Navier-Stokes. L'ajout d'une telle force volumique va nous permettre, en particulier, de simuler l'équation de Darcy-Brinkman.

Comme nous l'avons déjà dit, l'avantage majeur de cette méthode numérique réside dans sa souplesse. On peut non seulement rajouter des forces volumiques dans les équations de Navier-Stokes, mais également des termes de création du colorant ou d'une espèce chimique dans l'équation de convection-diffusion. Cette méthode présente également l'avantage de pouvoir être très facilement parallélisée. En ce qui concerne la vitesse de calcul, la simulation sur un réseau de dimension

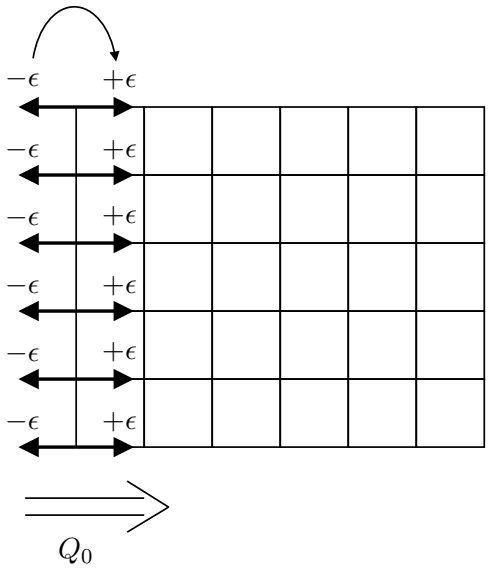


FIG. 3. *Étape de forçage du débit total à l'entrée du réseau. Une partie de la population se dirigeant dans la direction $-x$ est rajoutée dans la direction x pour que le débit total soit égal à Q_0.*

512×512 pendant 10^6 pas de temps dure environ 3 heures avec un processeur Pentium IV cadencé à 3Ghz.

Première partie

Modélisation d'écoulements miscibles en milieu poreux hétérogène

Introduction

L'étude des milieux poreux possède un vaste champ d'applications. Dans la nature, on trouve très fréquemment des matériaux contenant des pores. Comme exemple de milieux poreux, on peut citer les sols, le bois, le béton ou les tissus biologiques. D'un point de vue industriel, les structures poreuses peuvent être utilisées comme filtres, ou catalyseur (pour leurs grandes surfaces d'échange), ou encore en chromatographie. Ces structures peuvent également être nuisibles, dans le béton armé par exemple, elles permettent son invasion par de l'eau, facilitant la dégradation de l'armature. Les milieux poreux sont par conséquent le sujet d'un grand nombre d'études scientifiques et industrielles. Ces études peuvent être subdivisées en un certain nombre de catégories selon que l'on s'intéresse aux propriétés mécaniques, hydrodynamiques, acoustiques ou physico-chimiques du milieu. Dans ce mémoire, nous nous intéresserons essentiellement aux propriétés des écoulements en milieu poreux.

Le champ d'applications des écoulements en milieu poreux est aussi extrêmement vaste. On peut citer l'étude des courants d'eau dans les sols ou les écoulements de fluides biologiques (sang, eau...) dans les tissus cellulaires, le cartilage ou les os. Nous nous intéresserons en particulier aux aspects de transport que peuvent impliquer ces écoulements. Lorsqu'un fluide s'écoule dans un milieu poreux, il permet en effet de véhiculer un certain nombre de constituants dans celui-ci. Le problème est de savoir comment un milieu poreux va favoriser ou non le transport d'une substance donnée.

Ce type d'étude permet par exemple de déterminer jusqu'à quelle profondeur, dans un intervalle de temps donné, un polluant va se propager dans les sols. Notons qu'il a été remis d'actualité par les projets de stockage de déchets polluants en sous-sol (en particulier le CO_2). Les phénomènes de transport en milieu poreux intéressent également les industriels dans le domaine de l'extraction pétrolière.

Du fait de la structure extrêmement complexe de ces milieux, il semble vain de tenter de déter-

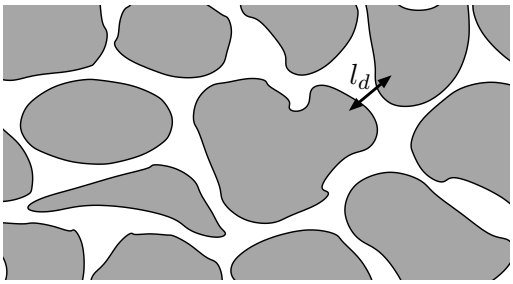


FIG. 4. *Exemple de structure d'un milieu poreux. Les pores du milieu ont une taille typique* l_d.

miner la structure exacte de l'écoulement dans les milieux poreux. En particulier, la résolution des écoulements de Stokes dans les pores n'est pas envisageable. Comme nous l'avons dit précédemment, les grandeurs physiques qui nous intéressent sont souvent des grandeurs moyennes. Dans un milieu poreux, on s'intéresse en général à la moyenne du champ de vitesses et du gradient de pression sur un grand nombre de pores. La loi de Darcy permet de relier entre elles ces deux grandeurs moyennes.

La loi de Darcy

On suppose que le fluide intersticiel obéit à la loi de Stokes :

$$\eta \Delta \vec{u} = \vec{\nabla} P \tag{12}$$

où $\vec{u}$ et P sont les champs de vitesses et de pressions et η est la viscosité du fluide. On s'intéresse aux moyennes de ces grandeurs sur un volume V, définies par :

$$< \vec{u} >= \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{u} \, dv \tag{13}$$

$$< \vec{\nabla} P >= \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} P \, dv \tag{14}$$

où $\mathcal{V}$ dénote l'espace occupé par le fluide dans le volume V. Pour une taille suffisamment grande du volume d'intégration dans un milieu poreux, ces valeurs moyennes atteignent une valeur asymptotique. Le volume limite correspondant est en général suffisamment grand pour contenir un grand nombre de pores. Dans un milieu poreux, ce sont les valeurs moyennes ainsi définies qui nous intéressent particulièrement. Une loi couramment utilisée, qui relie ces champs moyennés dans un milieu poreux est celle de Darcy :

$$\eta < \vec{u} >= -\mathbf{K}. < \vec{\nabla} P > \tag{15}$$

où $\mathbf{K}$ est le tenseur de perméabilité caractérisant le milieu poreux. Il est fréquent que le milieu poreux soit isotrope, auquel cas la perméabilité est un simple scalaire. Si la perméabilité caractérise les propriétés d'écoulement d'un milieu poreux, il est possible de trouver dans la nature des milieux dont les propriétés varient sur des échelles encore plus grandes que celle sur laquelle la moyenne volumique a été effectuée. Ainsi, lorsque la perméabilité varie spatialement au-delà de cette échelle, on parle de milieu poreux hétérogène. A nouveau, lorsqu'un milieu poreux est hétérogène, on peut s'intéresser uniquement aux comportements des grandeurs moyennées sur des échelles plus grandes que celle de l'hétérogénéité. L'objectif des travaux présentés dans ce mémoire s'inscrit dans ce type d'étude. On va tenter de déterminer des lois de comportements moyens à partir d'un milieu vérifiant la loi de Darcy, mais dont la perméabilité varie spatialement. On s'est en particulier concentré sur l'étude du mélange de deux fluides miscibles en milieu poreux.

Dans la suite de ce mémoire, nous allons distinguer trois échelles spatiales caractéristiques différentes :

- **L'échelle microscopique** : elle est comparable aux tailles des pores. A cette échelle, l'écoulement obéit à l'équation de Stokes.

- **L'échelle mésoscopique** : à cette échelle, les volumes sont suffisamment grands et contiennent un nombre suffisamment grand de pores pour que la loi de Darcy soit applicable. Si on observe un milieu poreux sur des échelles plus grandes que l'échelle mésoscopique, le champ de perméabilités peut éventuellement varier spatialement.
- **L'échelle macroscopique** : un volume caractéristique à cette échelle contient suffisamment de fluctuations de la perméabilité pour pouvoir déterminer un comportement moyen d'évolution du fluide. Un des objectifs de ce mémoire est de déterminer cette loi de comportement aux grandes échelles.

Dans ces travaux nous allons nous intéresser au problème du mélange en milieu poreux. Lorsqu'on déplace un fluide par un autre, la grandeur physique qui nous intéresse est en général la proportion moyenne d'un fluide par rapport à l'autre (nommée également concentration moyenne ou saturation). La loi d'évolution de cette variable peut également se différencier selon l'échelle caractéristique de la moyenne. On distingue donc également des lois de mélange microscopique, mésoscopique et macroscopique.

Loi de mélange mésoscopique

Lorsque deux fluides se mélangent dans un milieu poreux, nous savons décrire la loi d'évolution à l'échelle du pore de ce mélange (l'échelle est donc microscopique). Pour deux fluides miscibles, incompressibles, le mélange suit une loi de convection-diffusion :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla} c = D_m \Delta c \tag{16}$$

où D_m est le coefficient de diffusion microscopique et c la concentration d'un des deux fluides. Cependant, il est souvent utile de connaître la loi d'évolution des grandeurs moyennées. Il existe un grand nombre de lois permettant de décrire le mélange à l'échelle mésoscopique. Ces lois dépendent fortement de la structure microscopique du champ de vitesses et donc de celle du milieu poreux (voir [11, 46] par exemple). Dans le cadre de notre étude, nous supposerons que les grandeurs mésoscopiques suivent également une loi de type convection-diffusion :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{U}.\vec{\nabla} C = D_0 \Delta C \tag{17}$$

avec

$$\vec{U} = \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{u}\, dv \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{V}} c\, dv$$

où D_0 est un coefficient de dispersion mésoscopique. Il est important de souligner que ce coefficient de dispersion peut être (et c'est même le cas le plus probable) différent du coefficient de diffusion moléculaire. En effet, un comportement diffusif peut être dû à des fluctuations d'un transport convectif du traceur sur les petites échelles. Ce transport peut augmenter ainsi le coefficient de diffusion mésoscopique. Nous reverrons ce type de mécanisme tout au long de cette partie. Un exemple typique est illustré par la célèbre dispersion de Taylor [90, 3].

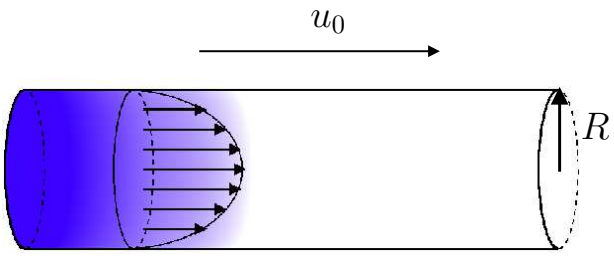


FIG. 5. *Schéma du transport d'un traceur dans un tube de rayon R. La vitesse débitante est u_0. A l'intérieur de ce tube, le profil du champ de vitesses est parabolique. Le traceur (représenté en bleu) est injecté à l'entrée du tube.*

La dispersion de Taylor

G.I. Taylor [90] a étudié la loi de mélange moyen d'un colorant injecté à l'entrée d'un tube de rayon R, de longueur infinie (que l'on pourrait éventuellement assimiler à un pore) et dans lequel s'écoule un fluide à vitesse moyenne u_0 suivant l'axe z du tube (voir figure 5). En supposant une loi microscopique de convection-diffusion du type Eq. (16) et un profil parabolique (loi de Poiseuille) pour la vitesse du fluide, on cherche à déterminer les équations d'évolution de la concentration moyennée sur la section S du tube :

$$\bar{c}(z) = \frac{1}{S}\int c(r,\theta,z) r dr d\theta$$

Pour cela, l'approche utilisée par Taylor est celle dite du développement aux faibles perturbations. On décompose la concentration et la vitesse autour de leurs valeurs moyennes :

$$c(r,\theta,z) = \bar{c}(z) + c'(r,\theta,z)$$
$$\vec{u}(r,\theta,z) = u_0\vec{e}_z + u'(r,\theta,z)\vec{e}_z$$

où c' et u' ont leur moyenne nulle. L'équation de convection-diffusion Eq. (16) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{c}+c') + (u_0+u')\frac{\partial}{\partial z}(\bar{c}+c') = D_m\Delta\bar{c} + D_m\Delta c' \tag{18}$$

Si l'on moyenne cette équation sur la section (*i.e.* en intégrant suivant r et θ), on obtient alors :

$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial z}\bar{c} + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial z}\int u'c' r dr d\theta \; = D_m\frac{\partial^2}{\partial z^2}\bar{c} \tag{19}$$

On constate que la concentration moyenne suit presque une loi de type convection-diffusion, la convection se faisant à la vitesse moyenne $\vec{u}_0$. Il apparaît cependant un terme intégral qui corrèle les fluctuations de vitesses avec celles de concentrations. Ce terme peut modifier de façon significative la loi de mélange moyen. Si l'on suppose que dans le référentiel se déplaçant à la vitesse u_0, le champ de concentrations est stationnaire, l'équation (18) à l'ordre 1 en c' permet de déterminer une équation différentielle de $c'(r,\theta,z)$:

$$u'\frac{\partial\bar{c}}{\partial z} = D_m\Delta c' \tag{20}$$

On remarque que c' est proportionnel à $\frac{\partial \bar{c}}{\partial z}$. La détermination de c' nous permet donc de calculer le terme intégral de l'équation (19). Celui-ci est proportionnel au gradient de concentration moyen, ce qui nous permet de déduire que la concentration moyenne satisfait une loi de type convection-diffusion :

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = (D_m + D_{Taylor}) \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} \tag{21}$$

avec

$$D_{Taylor} = -\frac{1}{S\frac{\partial \bar{c}}{\partial z}} \int u'c' r dr d\theta = \frac{R^2 u_0^2}{48 D_m} \tag{22}$$

Ce résultat permet de comprendre comment on peut passer d'une loi microscopique à une loi mésoscopique. Pour déterminer les lois d'évolution des grandeurs mésoscopiques, il est nécessaire de calculer une fonction de corrélation spatiale microscopique des écarts du champ de vitesses et du champ de concentrations à leurs champs moyennés respectifs. Le passage d'une loi mésoscopique à une loi macroscopique se fait suivant une démarche similaire.

Loi de mélange macroscopique en milieu poreux

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au problème du mélange macroscopique dans les milieux poreux. A partir du déplacement d'un fluide à la vitesse débitante $\vec{u}_0$ dans un milieu poreux bidimensionnel, si on injecte un autre fluide à l'entrée, on peut étudier l'évolution de la concentration moyenne $\bar{C}$ au cours du temps (ici, la moyenne se fait sur la largeur du poreux).

Une démarche du type Taylor nous montre qu'un régime de convection-diffusion, avec un coefficient de diffusion autre que celui moléculaire, peut résulter du couplage entre des fluctuations spatiales de concentration et des fluctuations spatiales de vitesse. Cela nécessite donc des fluctuations de vitesses dans ce milieu. On peut le comprendre aisément dans la mesure où les fluctuations de vitesses auront pour effet de déformer le front. Une déformation du front produit alors un étalement à l'échelle macroscopique.

Les origines physiques de telles fluctuations peuvent être de natures différentes. Si le mélange est **passif** (*i.e.* la concentration n'affecte pas l'écoulement), les fluctuations de vitesses ne peuvent provenir que des fluctuations de la perméabilité. Par conséquent, ce sont les hétérogénéités du milieu poreux qui sont responsables du mélange macroscopique. Dans un milieu poreux homogène, il ne peut donc pas y avoir de mélange macroscopique. Par contre, les choses peuvent changer lorsque le mélange est **actif** et en particulier lorsque les deux fluides ont des viscosités différentes. Il est en effet connu qu'une telle configuration peut être instable (instabilité dite de Saffman-Taylor [80]). Une faible fluctuation de concentration peut générer des fluctuations de viscosité et donc une fluctuation de vitesse. Il se crée alors un couplage entre les fluctuations de concentrations et de vitesses, ce qui crée un mélange à l'échelle macroscopique. Dans un milieu poreux homogène, un déplacement de deux fluides miscibles avec contraste de viscosités peut entraîner un mélange macroscopique. Cette instabilité se déclenche uniquement lorsque le fluide déplaçant est moins visqueux (et donc plus mobile) que celui déplacé.

Les différents mécanismes de mélange macroscopique qui vont nous intéresser sont résumés sur la figure 6. Chacun des milieux est occupé par un fluide de viscosité η_1 s'écoulant à la vitesse

débitante u_0. A un instant initial t_0, on injecte à l'entrée à la même vitesse débitante, un autre fluide miscible de viscosité η_2. On s'intéresse dans ce système à l'évolution temporelle de la concentration moyenne (transverse) : $\bar{C}(x,t) = \int_0^{L_y} C(x,y,t)dy$, où $C(x,y,t)$ est le concentration de mélange et x et y sont respectivement les directions parallèle et transverse à celle de l'écoulement moyen $\vec{u}_0$. A l'instant initial $\bar{C}(x,t=0) = 1 - H(x)$ est une fonction de Heaviside. L'étude du mélange macroscopique consiste à étudier l'évolution de cette fonction au cours du temps. En haut de la figure, la perméabilité du milieu est homogène (le front initial est par contre légèrement bruité pour permettre l'apparition d'une instabilité). On constate dans ce cas que, lorsque le fluide déplaçant est plus visqueux ou passif, il n'y a presque pas de mélange macroscopique. En effet, la courbe $\bar{C}(x,t)$ reste très proche d'une fonction de Heaviside. Cela est dû au fait qu'il n'y a pas de fluctuations du champ de vitesses. Le front de déplacement reste plat. Le faible mélange macroscopique est uniquement dû à la diffusion mésoscopique du front. Par contre, lorsque le contraste de viscosités devient déstabilisant, le front de déplacement est déformé, il en résulte un étalement de la courbe $\bar{C}(x,t)$ (voir courbes en haut à droite de la figure 6). L'instabilité de Saffman-Taylor mélange donc macroscopiquement les deux fluides. En bas de la figure, le champ de perméabilités est hétérogène. Les fluctuations de perméabilités créent des chemins préférentiels dans lesquels le fluide s'écoule plus facilement, ce qui induit des hétérogénéités du champ de vitesses. Ces fluctuations de vitesses déforment le front de mélange quel que soit le contraste de viscosités. Il en résulte donc également un mélange macroscopique des deux fluides. Notons que ce mélange dépend du rapport de viscosités ; lorsque le contraste est déstabilisant le mélange macroscopique est plus important.

Le chapitre 1 de ce mémoire détaille les caractéristiques des milieux poreux hétérogènes utilisés, ainsi que l'équation d'écoulement, de Darcy-Brinkman, simulé. Dans le chapitre 2, nous exposons la méthode de calcul de la macrodispersion d'un traceur actif dans un tel milieu poreux, dans le cadre d'un développement aux faibles perturbations. Les chapitres 3 et 4 concernent la simulation numérique de la macrodispersion et la comparaison avec les prédictions théoriques du chapitre 2, dans le cas du traceur passif et d'un rapport de viscosités stabilisant, respectivement. Dans le chapitre 5, consacré aux simulations numériques dans le cas d'un rapport de viscosité déstabilisant, nous étudierons l'influence des hétérogénéités du milieu et du contraste de viscosités sur la loi de mélange macroscopique. Nous analyserons en particulier le couplage éventuel entre ces deux effets.

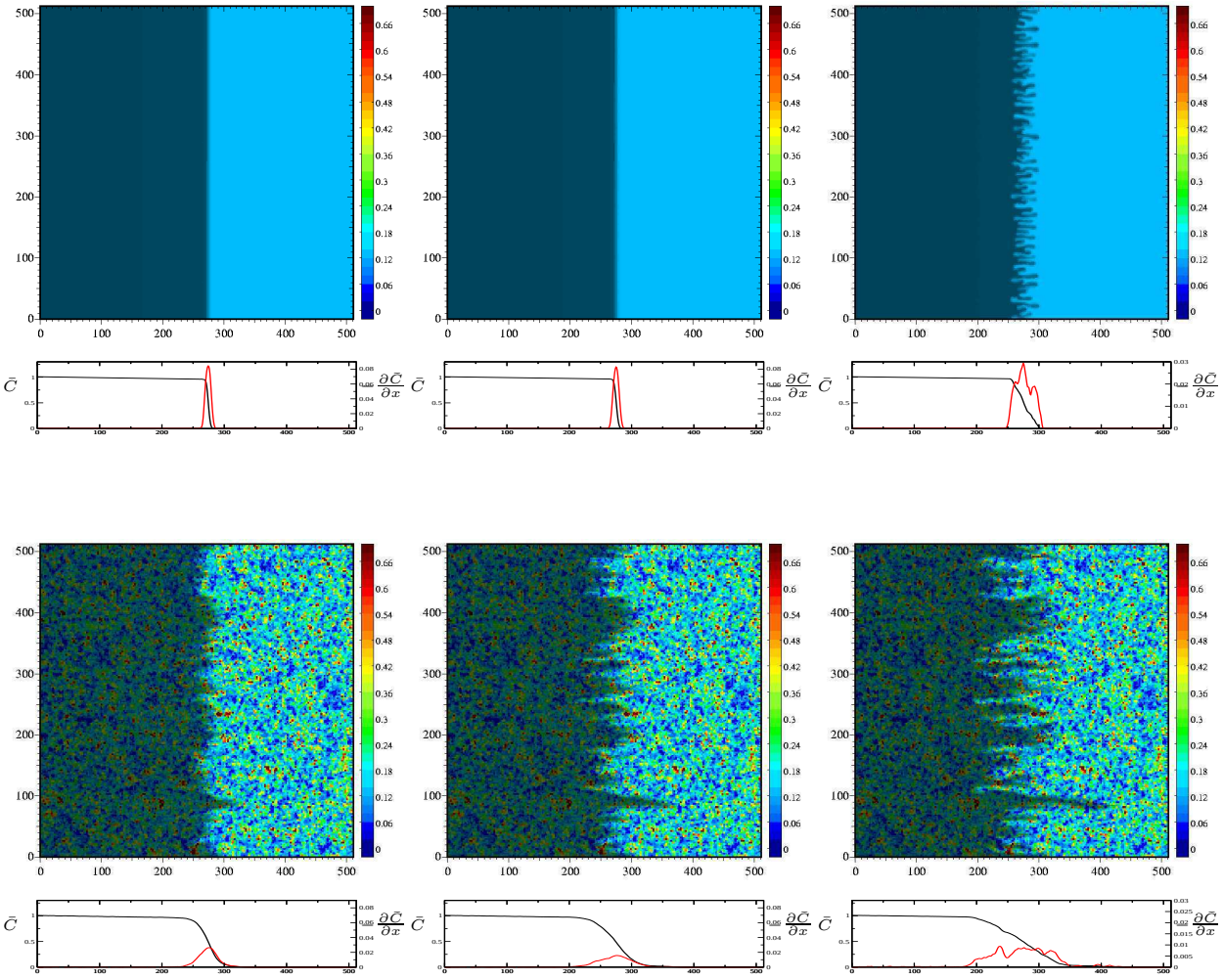


FIG. 6. *Exemple de déplacement d'un fluide par un autre en milieu poreux. Le déplacement se fait à vitesse constante. La carte de couleur représente le champ de perméabilités. Les niveaux de gris correspondent au champ de concentrations du fluide déplaçant (noir pour $C = 1$). En bas de chaque configuration, ont été tracés la concentration moyenne $\bar{C}$ ainsi que le gradient moyen correspondant : $-\frac{\partial \bar{C}}{\partial x}(x)$. Dans la colonne de gauche, le fluide noir est plus visqueux que celui en place. Au centre, les deux fluides ont la même viscosité (traceur passif). Dans la colonne de droite, le fluide déplaçant (noir) est moins visqueux. En haut, la perméabilité est homogène. En bas, la perméabilité est hétérogène.*

Chapitre 1

Modélisation de milieux poreux hétérogènes et équation de Darcy-Brinkman

1.1 L'équation de Darcy-Brinkman

Nous avons vu au chapitre introductif que la description d'un écoulement en milieu poreux se fait en général en utilisant l'équation de Darcy :

$$< \vec{u} >= -\frac{K}{\eta} < \vec{\nabla} P > \tag{1.1}$$

ou η est la viscosité du fluide, K la perméabilité du milieu poreux et $< \vec{u} >$ la moyenne volumique du champ de vitesses sur un grand nombre de pores. Cette équation permet aussi de décrire un écoulement dans une cellule de Hele-Shaw, $< \vec{u} >$ est alors la moyenne du champ de vitesses sur l'épaisseur de la tranche (voir la seconde partie de ce mémoire). Dans certaines configurations, l'équation (1.1) n'est plus appropriée. Par exemple, un cas qui nous intéresse tout particulièrement est celui où un milieu présente une discontinuité de perméabilité. L'équation de Darcy impliquerait une discontinuité du champ de vitesses ce qui n'est pas physiquement acceptable. Pour régulariser le champ de vitesses, il est courant d'ajouter un terme de diffusion visqueuse, ce qui conduit à l'équation de Darcy-Brinkman [12] :

$$< \vec{\nabla} P >= -\frac{\eta}{K} < \vec{u} > +\eta_e \Delta < \vec{u} > \tag{1.2}$$

où η_e est un terme qui dépend du milieu et du fluide. Les situations physiques dans lesquelles une équation du type Darcy-Brinkman devient nécessaire sont relativement variées. D'une manière générale, on peut considérer que l'équation de Darcy n'est plus valable lorsque la perméabilité varie sur des échelles de longueurs trop courtes pour qu'une moyenne volumique puisse s'appliquer convenablement. Ce cas nous intéresse particulièrement car nous voulons introduire des hétérogénéités dans notre milieu poreux, qui varient sur des échelles de longueur typique λ. Nous pouvons prévoir que la loi de Darcy ne sera plus valable lorsque cette longueur typique λ sera plus petite que la taille des pores. D'autre part, nous savons que la longueur $\sqrt{K}$ est comparable à la taille des pores.

Dans un milieu poreux hétérogène, la loi de Darcy ne peut plus être valable si $\lambda < \sqrt{K}$. La loi de Darcy-Brinkman sert généralement pour décrire de tels milieux. Nous verrons de plus dans ce chapitre que dans les cas où $\lambda \gg \sqrt{K}$, on retrouve les mêmes résultats qu'en utilisant l'équation de Darcy.

On peut citer d'autres applications de l'équation de Darcy-Brinkman. Elle permet également de décrire une interface entre un milieu poreux et un fluide libre ou une paroi [69] ou des milieux poreux "dilués" comme les suspensions [30]. Elle permet de rendre compte de la présence d'une interface entre deux fluides de densités différentes [68] ou bien de corrections dues aux termes inertiels dans une cellule de Hele-Shaw.

Dans cette partie, on se propose d'étudier des écoulements dans des milieux poreux hétérogènes qui satisfont l'équation de Darcy-Brinkman. Les hétérogénéités sont introduites par une dépendance spatiale de la perméabilité. Pour des raisons de commodité dans les notations, nous supprimerons les $< >$ de la moyenne volumique. Par ailleurs, nous supposerons que la viscosité effective η_e est égale à la viscosité du fluide (*i*.e. $\eta = \eta_e$). Cette hypothèse ne modifie en rien la physique du problème car elle revient juste à un adimensionnement de la pression et de la perméabilité. L'équation régissant le champ de vitesses dans le milieu poreux est donc :

$$\vec{\nabla} P = -\frac{\eta}{K(\vec{r})}\vec{u} + \eta \Delta \vec{u} \tag{1.3}$$

où $K(\vec{r})$ est la perméabilité au point $\vec{r}$, η la viscosité du fluide et $\vec{u}$ et P les champs de vitesses et pressions (en moyenne volumique).

Pour simuler l'équation de Darcy-Brinkman, nous avons utilisé la méthode BGK. Nous avons vu qu'elle nous permet de simuler l'équation de Navier-Stokes faiblement compressible avec une force volumique $\vec{F}(\vec{r})$:

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} \right] = -\vec{\nabla} P + \vec{F}(\vec{r}) + \eta \Delta \vec{u} \tag{1.4}$$

Si on se place dans des conditions quasi-statiques et à bas nombre de Reynolds, le terme de gauche peut être négligé. L'équation 1.4 devient donc :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} P + \vec{F}(\vec{r}) + \eta \Delta \vec{u} \tag{1.5}$$

Cette dernière équation est l'équation de Darcy-Brinkman si on impose la force volumique :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\eta \vec{u}/K(\vec{r})$$

où $K(\vec{r})$ est la perméabilité locale sur le réseau. Pour rendre compte des hétérogénéités naturelles, il a été choisi de distribuer de façon aléatoire le champ de perméabilités. Nous nous sommes de plus restreints à l'étude de milieux poreux bidimensionnels. La section suivante présente la statistique utilisée ainsi que la méthode employée pour l'obtenir.

1.2 Génération du milieu poreux

Nous nous intéressons dans cette partie à l'étude du mélange dans un milieu poreux. Nous avons vu dans le chapitre introductif que, pour avoir des phénomènes de mélange, il était nécessaire d'introduire des fluctuations de perméabilités corrélées spatialement. Pour étudier de façon convenable

les lois de mélange par des méthodes stochastiques, il est de plus nécessaire d'utiliser une statistique dont les propriétés sont connues et facilement paramétrables. Une statistique couramment utilisée est la distribution *log-normale* [44, 34, 23]. Nous avons naturellement choisi cette distribution afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux de la littérature :

$$\ln K = \bar{f} + f' \tag{1.6}$$

avec

$$p(f') = e^{-\frac{f'^2}{2\sigma_f^2}} \tag{1.7}$$

où $\bar{f} = \ln K_l$ et σ_f sont respectivement la moyenne et l'écart quadratique de $\ln K(\vec{r})$. De plus, une fonction de corrélation couramment utilisée est l'exponentielle décroissante qui est dans le cas isotrope :

$$R_{ff}(\vec{\zeta}) =< f'(\vec{r}+\vec{\zeta})f'(\vec{r}) >= \sigma_f^2 \exp\left(-|\frac{\vec{\zeta}}{\lambda}|\right) \tag{1.8}$$

où λ définit la longueur de corrélation du milieu. Les crochets $< >$ représentent une moyenne spatiale sur $\vec{r}$. La méthode la plus simple trouvée pour générer une telle distribution fut de convoluer un champ de bruit blanc avec une fonction de corrélation adéquate. Après un certain nombre d'essais, il est apparu que la fonction $g(\vec{r}) \propto exp(-(r^2/\delta^2)^{1/3})$ convenait le mieux à nos besoins, δ étant un paramètre ajustable qui contrôle la longueur de corrélation. Sur un réseau discret le champ de $\ln K$ se calcule de la façon suivante :

$$f_{x,y} = \bar{f} + \frac{\sigma_f}{\alpha} \sum_{i_0,j_0} h_{x+i_0,y+j_0} . g_{i_0,j_0} \text{ avec } \begin{cases} g_{i_0,j_0} = exp(-(\frac{i_0^2+j_0^2}{\delta^2})^{1/3}) \\ \\ \alpha = \left(\sum_{i_0,j_0} g_{i_0,j_0}^2\right)^{1/2} \end{cases}$$

où h_{ij} est un champ de bruit blanc de moyenne nulle et d'écart quadratique égal à 1. Un champ de perméabilités ainsi généré est représenté sur la figure 1.1 et sa fonction d'auto-corrélation sur la figure 1.2. Pour déterminer la longueur de corrélation λ, un ajustement exponentiel décroissant est utilisé. Il est apparu que λ était une fonction linéaire du paramètre δ. Cette méthode permet donc de générer un milieu poreux suivant une distribution log-normale avec une valeur moyenne $K_l = exp(\bar{f})$, un écart quadratique σ_f et une longueur de corrélation λ donnés.

1.3 Analyse aux faibles perturbations : méthode spectrale

Lorsque l'amplitude des fluctuations de perméabilité (σ_f) est suffisamment faible, il est possible de calculer au second ordre en σ_f le champ de vitesses dans un tel milieu poreux. On peut de cette façon étudier analytiquement les propriétés du milieu poreux considéré. Ce calcul permet en particulier de déterminer la perméabilité effective du milieu généré avec les propriétés statistiques décrites précédemment. Le fluide qui s'écoule dans le milieu poreux a une vitesse moyenne $\vec{u}_0$ uniforme et dirigée suivant l'axe des x. La méthode consiste à développer les champs de vitesses, de pressions et de perméabilités autour de leurs valeurs moyennes afin de linéariser l'équation de Darcy-Brinkman. La linéarisation respective du champ de vitesses, de perméabilités et de pressions

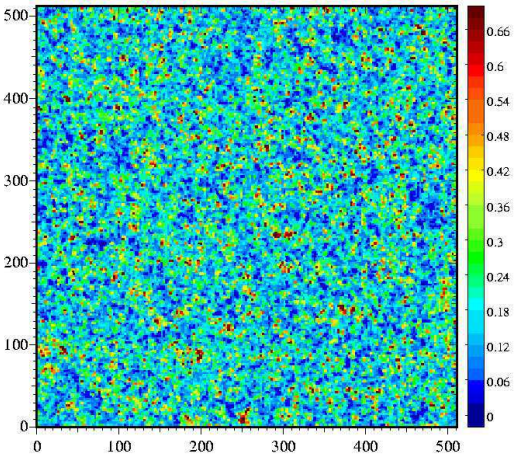


FIG. 1.1. *Exemple de champ de perméabilités. Les paramètres utilisés pour générer ce champ sont :* $K_l = exp(-2)$, $\sigma_f = 0.8$, $\lambda = 2.25$.

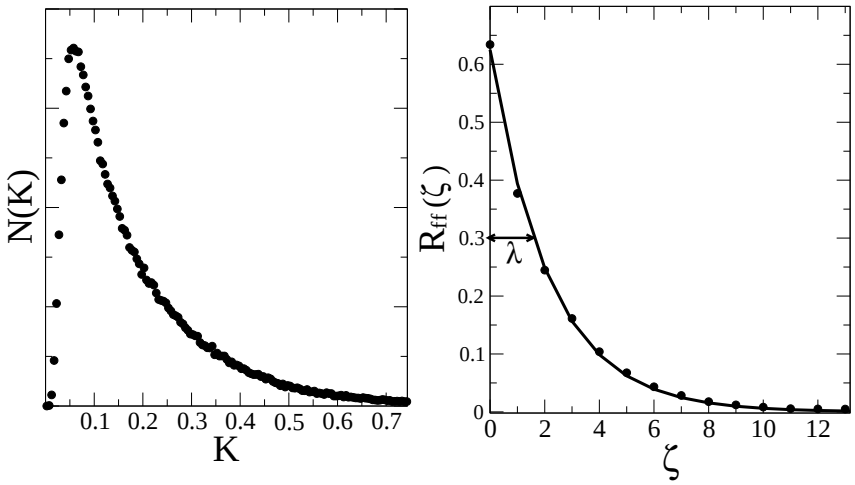


FIG. 1.2. *Statistiques du champ de perméabilités de la figure 1.1. A gauche : fonction de distribution de la perméabilité. A droite : fonction d'auto-corrélation* $R_{ff}(\vec{\zeta}) =< f'(\vec{r}+\vec{\zeta})f'(\vec{r}) >$. *Les points correspondent aux résultats numériques. La courbe représente la régression linéaire avec une exponentielle décroissante permettant de déterminer* λ.

s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}' \\ K(\vec{r}) = exp(\bar{f} + f') = K_l(1 + f') \\ P = P_0 + p' \end{cases} \tag{1.9}$$

où $\vec{u}_0$, $\bar{f}$ et P_0 sont les valeurs moyennes spatiales respectives du champ de vitesses, du logarithme de la perméabilité et de la pression. L'équation de Darcy-Brinkman

$$\vec{u} = -\frac{K(\vec{r})}{\eta}\vec{\nabla}P + K(\vec{r})\Delta\vec{u} \tag{1.10}$$

devient donc

$$(\vec{u}_0 + \vec{u}') = -\frac{K_l(1 + f' + f'^2/2)}{\eta}\vec{\nabla}(P_0 + p') + K_l(1 + f' + f'^2/2)\Delta(\vec{u}_0 + \vec{u}') \tag{1.11}$$

En prenant la valeur moyenne de l'équation précédente et en ne gardant que les termes inférieurs à l'ordre 2, on obtient :

$$\vec{u}_0 = -\frac{K_l}{\eta}\left[\frac{\partial P_0}{\partial x}\left(1 + \underbrace{< f'^2/2 >}_{1}\right)\vec{e}_x + \underbrace{< f'\vec{\nabla}p' >}_{2}\right] + K_l\underbrace{< f'\Delta\vec{u}' >}_{3} \tag{1.12}$$

On peut remarquer qu'un développement jusqu'au premier ordre nous aurait simplement donné une perméabilité effective,$-\eta u_0/\frac{\partial P_0}{\partial x}$, égale à K_l. La prise en compte des hétérogénéités du milieu nécessite de calculer les corrélations entre les différentes perturbations p', u' et f'. Pour cela, il est pratique de passer par les transformées de Fourier de ces quantités. Les termes d'ordre 1 de l'équation (1.11) nous donnent :

$$\vec{u}' = -\frac{K_l}{\eta}(\vec{\nabla}p' + f'\frac{\partial P_0}{\partial x}\vec{e}_x) + K_l\Delta\vec{u}' \tag{1.13}$$

Notons $\hat{p}(\vec{k})$, $\hat{u}(\vec{k})$ et $\hat{f}(\vec{k})$ les transformées de Fourier respectives de $p'(\vec{r})$, $u'(\vec{r})$ et $f'(\vec{r})$, et exprimons $\hat{p}$ et $\hat{u}$ en fonction de $\hat{f}$.

$$\hat{u}_i = -\frac{K_l}{\eta}(ik_i\hat{p} + \delta_{ix}\frac{\partial P_0}{\partial x}\hat{f}) - K_l k^2\hat{u}_i \quad \text{avec} \quad i = x, y \tag{1.14}$$

où δ_{ij} est la fonction de Kroenecker. D'où

$$(1 + K_l k^2)\hat{u}_i = -\frac{K_l}{\eta}(ik_i\hat{p} + \delta_{ix}\frac{\partial P_0}{\partial x}\hat{f}) \quad \text{avec} \quad i = x, y \tag{1.15}$$

De plus on sait que le fluide est incompressible, on a donc

$$\vec{\nabla}.\vec{u}' = 0 \tag{1.16}$$

Avec l'équation précédente (1.15), on obtient :

$$0 = -\frac{K_l}{\eta}\sum_{i=x,y}(-k_i^2\hat{p} + ik_i\delta_{ix}\frac{\partial P_0}{\partial x}\hat{f}) \tag{1.17}$$

D'où,

$$\hat{p} = \frac{\partial P_0}{\partial x}\frac{ik_x}{k^2}\hat{f} \tag{1.18}$$

D'après l'équation (1.15), on obtient :

$$(1 + K_l k^2)\hat{u}_i = -\frac{K_l}{\eta}\frac{\partial P_0}{\partial x}(\frac{-k_i k_x + k^2\delta_{ix}}{k^2})\hat{f} \tag{1.19}$$

Maintenant que l'on connaît les transformées de Fourier de nos champs de perturbation, il ne reste plus qu'à calculer les trois moyennes spatiales de l'équation (1.12). Pour cela, on a besoin d'utiliser la relation suivante : *soient $g(\vec{r})$ et $h(\vec{r})$ deux fonctions de l'espace et $\hat{g}(\vec{k})$ et $\hat{h}(\vec{k})$ leurs transformées de Fourier respectives, la moyenne spatiale du produit $f(\vec{r})g(\vec{r})$ peut se calculer par :*

$$< g(\vec{r})h(\vec{r}) >= \iint \hat{g}(\vec{k})\,\hat{h}^*(\vec{k})dk_x dk_y \tag{1.20}$$

Connaissant la transformée de Fourier de la fonction de corrélation,

$$\hat{R}_{ff}(k) = \hat{f}\hat{f}^* = \frac{\lambda^2\sigma_f^2}{2\pi}\frac{1}{(1+\lambda^2k^2)^{3/2}} \tag{1.21}$$

on en déduit que :

$$< f'^2 >= \sigma_f^2 \tag{1.22}$$

$$< f'\frac{\partial p'}{\partial x} >= -\frac{1}{2}\frac{\partial P_0}{\partial x}\sigma_f^2 \tag{1.23}$$

$$< f'\Delta u_x' >= \frac{K_l}{\eta}\frac{\partial P_0}{\partial x}\frac{\lambda^2\sigma_f^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}k_y^2}{(1+K_lk^2)(1+\lambda^2k^2)^{3/2}}d\vec{k} \tag{1.24}$$

Nous en déduisons finalement la perméabilité effective du milieu poreux

$$K_{eff}\hat{=} -\frac{\eta u_0}{\frac{\partial P_0}{\partial x}} = K_l\left(1 - \frac{\sigma_f^2}{4}\frac{K_l}{\lambda^2}\int_0^{\infty}\frac{y}{(1+\frac{K_l}{\lambda^2}y)(1+y)^{3/2}}dy\right) \tag{1.25}$$

Gelhar et Axness [34] définissent une perméabilité adimensionnée γ (*flow factor*) à partir de cette perméabilité effective :

$$\gamma\hat{=}K_{eff}/K_l$$

Il est nécessaire de faire un certain nombre de commentaires à propos de cette équation. La première remarque est que le terme de Brinkman ne modifie les résultats de la littérature qu'à travers le terme $\frac{K_l}{\lambda^2}$. On constate de plus que dans la limite $\frac{K_l}{\lambda^2} \to 0$, on retrouve bien la relation prédite par Gelhar *et al.* , à savoir que $\gamma = 1$. En d'autres termes, le terme de Brinkman ne modifie les résultats classiques que lorsque la racine carrée de la perméabilité moyenne devient comparable à la longueur de corrélation du milieu ($\lambda \sim \sqrt{K}$). L'équation de Darcy-Brinkman est donc bien une équation de Darcy plus générale puisqu'elle permet de retrouver les mêmes résultats dans le cas limite $\frac{K_l}{\lambda^2} \to 0$.

On peut constater que le terme de Brinkman a aussi pour effet de diminuer la perméabilité effective du milieu poreux. Ce résultat se comprend facilement dans la mesure où le principal rôle de terme de Brinkman est d'écranter les fortes perméabilités.

Un effet inattendu du terme de Brinkman est que la perméabilité effective diminue avec l'amplitude des fluctuations alors que la loi de Darcy nous donnerait simplement $\gamma = 1$. Il faut cependant noter que ce résultat dépend de la dimension du système. Si on s'était placé dans un milieu poreux

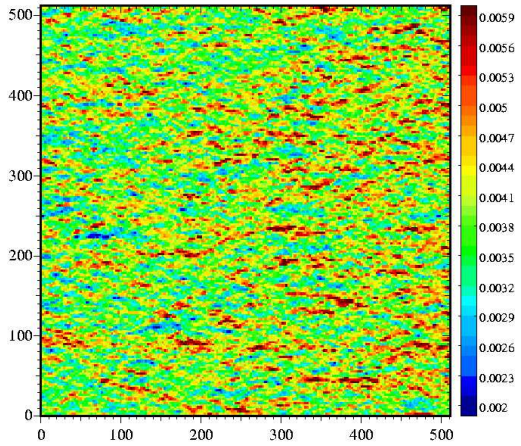


FIG. 1.3. *Champ de la composante de vitesse u_x correspondant au milieu poreux de la figure 1.1. Les paramètres sont $\sigma_f = 0.8$, $\lambda = 2.25$ et $K_l = 0.13$.*

à trois dimensions, on aurait eu une augmentation de la perméabilité en fonction de σ_f (dans le cas de Darcy) :

$$\gamma = 1 + \frac{\sigma_f^2}{6} \tag{1.26}$$

Il faut signaler de plus que l'on peut trouver dans la littérature des développements à des ordres supérieurs et pour des fonctions d'auto-corrélation de champs de perméabilité variées. [26, 20, 44, 45]

Le calcul précédent permet également de relier les fluctuations de vitesse aux fluctuations de perméabilité :

$$\frac{\sigma_{u_x}^2}{u_0^2} \hat{=} \frac{< u'^2_x >}{u_0^2} = \frac{3}{8}\sigma_f^2 \int_0^\infty \frac{y dy}{(1+y^2)^{3/2}(1+\frac{K_l}{\lambda^2}y^2)^2} \tag{1.27}$$

$$\frac{\sigma_{u_y}^2}{u_0^2} \hat{=} \frac{< u'^2_y >}{u_0^2} = \frac{1}{3}\frac{< u_x^2 >}{u_0^2} \tag{1.28}$$

Ces formules montrent que le terme de Brinkman a pour effet de diminuer les fluctuations de vitesse. La prochaine section a pour but d'étudier le champ de vitesses obtenu numériquement dans le milieu poreux et de le comparer aux résultats de l'analyse aux faibles perturbations.

1.4 Comparaison simulation-théorie

La méthode pour étudier le milieu poreux généré est relativement simple. On génère d'abord le milieu poreux avec l'algorithme décrit dans la section 1.2. On résoud ensuite l'écoulement en utilisant la méthode BGK (avec une force volumique) dans laquelle on fixe le débit total u_0. Une fois que le régime stationnaire est atteint, on mesure alors le gradient de pression total du système (qui est relié au champ de densités $P = c_s^2\rho$) ainsi que son champ de vitesses. Un champ de vitesses est représenté sur la figure 1.3. On est donc en mesure d'étudier l'influence des différents paramètres sur notre milieu poreux. On a tout d'abord vérifié que le gradient de pression moyen était uniforme. On s'est assuré ensuite que l'on avait bien une dépendance linéaire du gradient de

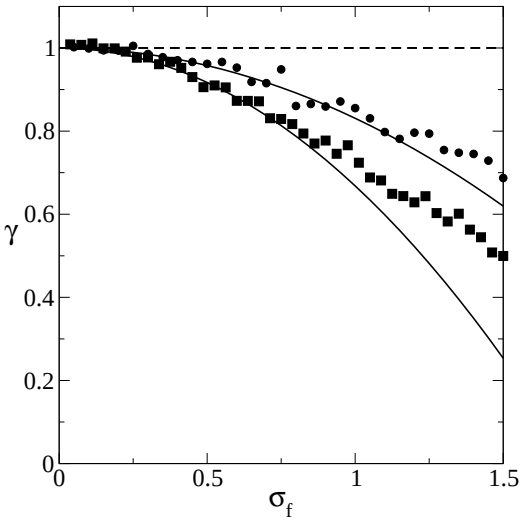


FIG. 1.4. *Perméabilité effective mesurée* $K_{eff} = -\eta u_0 / \frac{\partial P_0}{\partial x}$, *normalisée par* K_l, *en fonction de l'amplitude des hétérogénéités* σ_f. *Les points correspondent à une simulation ayant un coefficient* $\frac{K_l}{\lambda^2} = 0.09$. *Les carrés correspondent au cas où* $\frac{K_l}{\lambda^2} = 1$. *Les courbes continues correspondent aux valeurs prédites par l'équation* (1.25). *La ligne en pointillés représente le cas sans le terme de Brinkman* ($\frac{K_l}{\lambda^2} = 0$).

pression en fonction du débit moyen imposé, ce qui permet de conclure que le milieu obéit bien à une loi du type Darcy à l'échelle macroscopique. La figure 1.4 montre l'influence de l'amplitude des hétérogénéités σ_f sur la perméabilité effective normalisée γ. Les simulations montrent un bon accord avec les prédictions théoriques de la partie précédente. Il est même assez surprenant que l'équation (1.25) semble valable pour des hétérogénéités aussi grandes que $\sigma_f = 0.8$, dans la mesure où elle repose sur une hypothèse de faibles perturbations. La deuxième remarque est que dans les limites $\frac{K_l}{\lambda^2} \to 0$ ou $\sigma_f \to 0$, l'influence du terme de Brinkman devient négligeable comme l'on s'y attendait.

On peut également s'intéresser aux distributions de vitesses dans le milieu poreux. La figure 1.5 montre la densité de probabilité de la composante u_x de la vitesse. On peut constater que celle-ci suit relativement bien une loi log-normale, ce qui est assez intuitif dans la mesure où la distribution de perméabilité est elle-même log-normale. Une autre grandeur intéressante du champ de vitesses est l'amplitude des fluctuations de celui-ci. La figure 1.6 montre le lien entre les fluctuations σ_{u_x} et σ_{u_y} des composantes u_x et u_y et les fluctuations de perméabilité. On observe bien une dépendance linéaire de σ_{u_x} et σ_{u_y} en fonction de σ_f. Les deux pentes sont bien dans le rapport $\sqrt{3}$. On constate, à nouveau, que les prédictions théoriques données par les équations (1.27) et (1.28) sont en bon accord avec les résultats numériques. Notons également sur la figure 1.3 que la longueur de corrélation du champ de vitesses est différente suivant l'axe x ou l'axe y. La longueur de corrélation est plus petite suivant l'axe y.

Maintenant que nous connaissons mieux les principales propriétés du milieu poreux généré, nous sommes en mesure d'étudier l'évolution du front de mélange de fluides miscibles dans ce milieu. Dans ce mémoire nous nous sommes restreints aux configurations où les propriétés des deux fluides

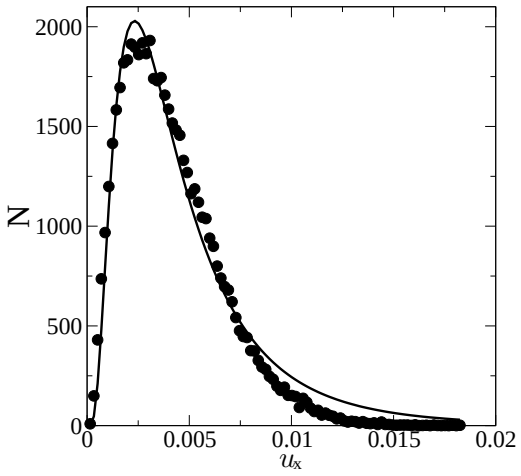


FIG. 1.5. *Fonction de distribution de la composante u_x dans le milieu poreux de la figure 1.1.*

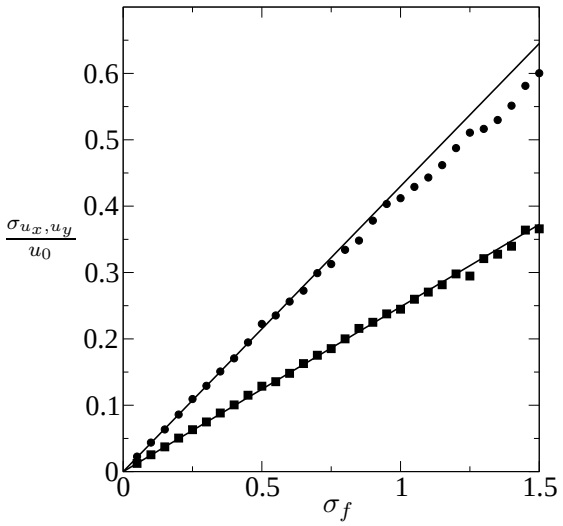


FIG. 1.6. *Amplitude des fluctuations σ_{u_x} et σ_{u_y} des deux composantes de la vitesse, normalisée par u_0, en fonction de l'amplitude des fluctuations de perméabilité σ_f.*

ne diffèrent que par leur viscosité. De plus, cette étude peut se diviser en trois cas distincts : le cas du traceur passif (les deux fluides ont la même viscosité), le cas stable (le fluide déplaçant est plus visqueux que celui déplacé) et enfin le cas instable (le fluide déplaçant est moins visqueux que celui déplacé).

D'un point de vue analytique, les résultats les plus quantitatifs que l'on trouve dans la littérature sont fondés sur un développement aux faibles perturbations. Nous venons déjà de voir que cette méthode permet de retrouver certains résultats de simulations concernant la structure du champ de vitesses. Pour le cas du traceur, on peut citer les travaux Gelhar et Axness [34] qui nous ont servis particulièrement, ainsi que ceux de Dagan [23, 24, 25].

Le prochain chapitre a pour but d'étudier analytiquement les phénomènes de couplage entre les hétérogénéités et la viscosité par un développement spectral aux faibles perturbations.

Chapitre 2

Étude analytique de la macrodispersion

2.1 Principe

Nous avons déjà vu qu'un développement aux faibles perturbations permet de retrouver certaines propriétés du milieu poreux, observées numériquement. Cette méthode permet également de faire des prévisions sur l'évolution d'un front de mélange lorsqu'il y a un couplage entre la viscosité et les hétérogénéités.

Ce développement a été utilisé entre autres par Gelhar *et al.* [34] et Welty *et al.* [96] pour calculer un coefficient de diffusion macroscopique dans le cas du traceur et avec un contraste de viscosités. Pour pouvoir trouver des résultats exploitables, nous verrons qu'il est nécessaire de faire un certain nombre d'hypothèses qui sont parfois très restrictives dans notre configuration. Par conséquent, les conclusions qui en découlent peuvent donc *à priori* sembler contestables dans notre cas.

Cependant, les résultats numériques ont montré un régime à caractère diffusif dans le cas stable et le cas stabilisant. Nous avons donc été amenés naturellement à comparer nos coefficients de diffusion à ceux prédits par ce type d'analyse. De plus, nous avons repris cette analyse pour inclure le terme de Brinkman et pour tenir compte de notre géométrie (2D).

Il faut aussi souligner que le calcul dans le cas du traceur est beaucoup plus simple et demande moins d'hypothèses. Nous ferons cependant le calcul dans le cas général, le cas du traceur pouvant se retrouver dans le cas limite $\eta_2/\eta_1 \to 1$.

Nous supposerons que les fluides incompressibles obéissent à l'équation de Darcy-Brinkman et à celle de convection-diffusion, on a donc :

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \tag{2.1}$$

$$\vec{u} = -\frac{K(\vec{r})}{\eta}\vec{\nabla}P + K(\vec{r})\Delta\vec{u} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\nabla}.(C\vec{u}) = D_0\Delta C \tag{2.3}$$

où $\vec{u}$, P et $K(\vec{r})$ sont les champs de vitesses, de pressions et de perméabilités. C est la concentration du fluide déplaçant et $\eta(C)$ est la viscosité du fluide. Nous supposerons que la loi de viscosité du mélange suit une loi exponentielle :

$$\eta(C) = \eta_1 e^{\beta C}, \text{ avec } \beta = ln(\frac{\eta_2}{\eta_1}) \tag{2.4}$$

où η_1 et η_2 sont les viscosités des fluides déplacé ($C = 0$) et poussant ($C = 1$), respectivement. On remarquera que si $\beta = 0$, il n'y a pas de contraste de viscosités. Si $\beta > 0$, le déplacement est stabilisé par viscosité. Par contre, si $\beta < 0$, le déplacement est alors instable par viscosité.

Le principe de la méthode, nous l'avons déjà vu, consiste à développer les champs de vitesses, pressions, concentrations, perméabilités et viscosités autour de leurs valeurs moyennes transverses :

$$\begin{aligned}
&\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}' \\
&P = P_0 + p' \\
&C = C_0 + c' \\
&K = K_l(1 + f') \\
&\eta(C) = \eta(C_0 + c') = \eta(C_0) + \left.\frac{d\eta}{dC}\right|_{C_0} c' = \eta_0(1 + \beta c')
\end{aligned}$$

où $\eta_0 = \eta(C_0)$ et où les moyennes sont calculées transversalement à l'écoulement. Avant de poursuivre, il est nécessaire de faire une première hypothèse. On supposera que $\vec{u}_0$ est uniforme et égale à la vitesse débitante imposée ($\vec{u}_0 = u_0\,\vec{e}_x$). Une fois linéarisées, les équations (2.1), (2.2) et (2.3) deviennent :

$$\vec{\nabla}.\vec{u}' = 0 \tag{2.5}$$

$$\vec{u}_0 + \vec{u}' = -\frac{K_l}{\eta_0}(1 + f')(1 - \beta c')(\vec{\nabla}P_0 + \vec{\nabla}p') + K_l(1 + f')\Delta u' \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial(C_0 + c')}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left[(C_0 + c')(\vec{u}_0 + \vec{u}')\right] = D_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}C_0 + D_0\Delta c' \tag{2.7}$$

Le but de cette analyse est de résoudre ces équations, afin de déterminer l'évolution du champ de concentrations et d'en déduire un coefficient de diffusion macroscopique.

2.2 Macrodispersion

Dans ce mémoire nous nous intéressons principalement aux évolutions d'un front de mélange et des grandeurs macroscopiques en supposant les lois d'évolution mésoscopiques connues. Un développement aux faibles perturbations permet d'apporter quelques éléments de réponse. En effet, l'évolution macroscopique d'un front de mélange sera de type diffusif si la moyenne transverse du champ de concentrations satisfait une loi de convection-diffusion du type (21) (page 17) de diffusion macroscopique D_M.

Une analyse aux faibles perturbations permet de déterminer ce coefficient de diffusion macroscopique. En effet, si l'on moyenne transversalement l'équation (2.7), celle-ci devient :

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_0 C_0 + \overline{u'c'}) = D_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}C_0 \tag{2.8}$$

où $u' = u'_x$ est la composante suivant x de $\vec{u}'$. Pour obtenir cette expression, on a utilisé le fait que $\overline{\vec{u}'} = \vec{0}$, $\overline{c'} = 0$. L'équation précédente peut se réécrire de la façon suivante :

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} + u_0\frac{\partial C_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(D_0\frac{\partial C_0}{\partial x} - \overline{u'c'}) \tag{2.9}$$

Il apparaît donc clairement que le terme $\overline{u'c'}$ va déterminer la loi de mélange macroscopique. Dans notre cas, il représente en particulier le couplage viscosité-hétérogénéités et est à l'origine du mélange convectif des fluides à l'échelle macroscopique. Pour évaluer ce terme, il est nécessaire de connaître la structure des champs de vitesses et de concentrations à l'échelle mésoscopique. On peut de plus constater que si $\overline{u'c'}$ est proportionnel au gradient de concentration moyen, alors le front va suivre une loi du type convection-diffusion. Ceci nous permet alors de définir un coefficient de dispersion macroscopique :

$$D_{disp} \hat{=} D_M - D_0 = -\overline{u'c'} / \frac{\partial C_0}{\partial x} \tag{2.10}$$

D'une manière générale, c'est ce terme qui nous intéressera. D'autre part, il est connu que ce coefficient de diffusion est généralement proportionnel au débit moyen [34, 46]. Dans la littérature, on définit souvent un coefficient de **macrodispersivité** ou longueur de dispersion :

$$\alpha \hat{=} \frac{D_{disp}}{u_0} \tag{2.11}$$

Dans l'équation de convection-diffusion à l'échelle mésoscopique, le coefficient de diffusion peut aussi résulter d'un mélange convectif dû à des fluctuations de vitesses sur des échelles encore plus petites. C'est pourquoi on peut définir aussi un coefficient de **dispersivité mésoscopique** :

$$\alpha_0 \hat{=} \frac{D_0}{u_0} \tag{2.12}$$

Le principe de la démarche effectuée par Welty *et al.* est de calculer un coefficient de dispersion macroscopique à partir des champs moyens C_0 et u_0 supposés connus.

La suite de cette analyse a pour but d'évaluer ce coefficient de macrodispersion.

2.3 La méthode spectrale

Pour déterminer le coefficient de macrodispersion D_{disp}, une méthode possible est de passer dans l'espace de Fourier de la même façon que dans le chapitre précédent. Cependant, contrairement au cas précédent, il est nécessaire de faire un certain nombre d'approximations. La première consiste à "geler" l'état de base. Cela signifie que les quantités moyennes (ou état de base) varient peu temporellement[1]. De plus, nous verrons aussi qu'une autre hypothèse, nécessaire dans le cas d'un contraste de viscosités, est un gradient de concentration moyen uniforme.

Soient $\hat{u}_i(\vec{k})$, $\hat{p}(\vec{k})$, $\hat{f}(\vec{k})$ et $\hat{c}(\vec{k})$ les transformées de Fourier respectives des champs u_i', p', f' et c'. De la même façon que précédemment, si on considère les termes d'ordre 1 de l'équation de Darcy-Brinkman (2.6) et en utilisant $u_0 = -\frac{\partial P_0}{\partial x} K_l/\eta_0$, on obtient :

$$\hat{u}_i = (\hat{f} - \beta\hat{c})u_0\delta_{ix} - ik_i\frac{K_l}{\eta_0}\hat{p} - K_l k^2 \hat{u}_i \tag{2.13}$$

d'où :

$$(1 + K_l k^2)\hat{u}_i = (\hat{f} - \beta\hat{c})u_0\delta_{ix} - ik_i\frac{K_l}{\eta_0}\hat{p} \tag{2.14}$$

[1] Cette hypothèse est appelée communément QSSA (Quasi-Steady-State Approximation).

La non-compressibilité de l'écoulement (Eq. (2.5)) nous donne alors :

$$\frac{K_l}{\eta_0}k^2\hat{p} = -ik_x(\hat{f} - \beta\hat{c})u_0 \tag{2.15}$$

Finalement, de ces deux équations, on peut déterminer les transformées du champ de vitesses :

$$\hat{u}_x = \frac{k_y^2}{k^2(1+K_l k^2)}(\hat{f} - \beta\hat{c})u_0 \tag{2.16}$$

$$\hat{u}_y = -\frac{k_x k_y}{k^2(1+K_l k^2)}(\hat{f} - \beta\hat{c})u_0 \tag{2.17}$$

On peut constater que les équations (2.16) et (2.17) sont une généralisation de l'équation (1.19), aux cas où le contraste de viscosités est quelconque ($\beta \neq 0$). Pour déterminer le coefficient de macrodispersion, il est encore nécessaire de déterminer la transformée du champ de concentrations. A ce stade, on suppose que le gradient de concentration moyen $\frac{\partial C_0}{\partial x}$ est uniforme spatialement pour pouvoir se placer dans l'espace de Fourier. D'après l'équation de convection diffusion (2.7) on a alors :

$$\frac{\partial\hat{c}}{\partial t} + \hat{u}_x\frac{\partial C_0}{\partial x} + ik_x u_0\hat{c} = -D_0 k^2\hat{c} \tag{2.18}$$

On s'intéresse à la solution asymptotique quasi-stationnaire de cette équation. Pour résoudre temporellement cette équation une méthode serait d'utiliser les transformées de Laplace. Cette méthode alourdit considérablement les calculs, nous supposerons qu'un tel état stationnaire existe[2]. L'état stationnaire nous donne :

$$\hat{c} = -\frac{1}{u_0}\frac{\partial C_0}{\partial x}\frac{1}{ik_x + \alpha_0 k^2}\hat{u}_x \tag{2.19}$$

si on note $D_0 = \alpha u_0$. En utilisant la relation (2.16), on en déduit :

$$\hat{u}_x = u_0\hat{f}\frac{ik_x + \alpha_0 k^2}{(1+K_l k^2)(ik_x + \alpha_0 k^2)\frac{k^2}{k_y^2} - \beta\frac{\partial C_0}{\partial x}} \tag{2.20}$$

On cherche à évaluer le coefficient de macrodispersion,

$$D_{disp} \hat{=} -\overline{u'c'}/\frac{\partial C_0}{\partial x} = -\frac{1}{\frac{\partial C_0}{\partial x}}\iint \hat{c}\hat{u}_x^* d\vec{k} \tag{2.21}$$

Donc, d'après les équations (2.19) et (2.20), en ne conservant que la partie réelle de l'intégrale, on en déduit :

$$\alpha = \iint \hat{f}\hat{f}^* \frac{\alpha_0 k^2 k_y^4}{\left[(1+K_l k^2)\alpha_0 k^4 - \beta\frac{\partial C_0}{\partial x}k_y^2\right]^2 + (1+K_l k^2)^2 k^4 k_x^2} dk_x dk_y \tag{2.22}$$

D'où :

$$\alpha = \frac{\lambda^2\sigma_f^2}{2\pi}\iint \frac{1}{(1+\lambda^2 k^2)^{3/2}} \frac{\alpha_0 k^2 k_y^4}{\left[(1+K_l k^2)\alpha_0 k^4 - \beta\frac{\partial C_0}{\partial x}k_y^2\right]^2 + (1+K_l k^2)^2 k^4 k_x^2} dk_x dk_y \tag{2.23}$$

[2]En passant par les transformées de Laplace, on peut montrer qu'un tel état stationnaire existe dans les cas passif et stable. En revanche, dans le cas instable la solution diverge.

On peut simplifier cette dernière expression si on suppose[3] $k_x \ll k_y$. On a alors $k_y^2 \sim k^2$. L'intégration suivant k_x nous donne finalement :

$$\alpha = \lambda \sigma_f^2 \int_0^\infty \frac{y^2}{\left[(1+\frac{K_l}{\lambda^2}y^2)y^2+b\right]\left[1+\frac{K_l}{\lambda^2}y^2\right][1+y^2]^{3/2}} dy \tag{2.24}$$

avec $b = -\frac{\beta\lambda^2}{\alpha_0}\frac{\partial C_0}{\partial x}$.

L'équation ci-dessus est une généralisation du résultat obtenu par Welty *et al.* dans le cas à deux dimensions et en tenant compte du terme de Brinkman. Encore une fois, l'influence du terme de Brinkman est contenue dans le terme $\frac{K_l}{\lambda^2}$. Le résultat le plus surprenant de cette analyse est sans doute la dépendance du coefficient de macrodispersion en fonction du paramètre b, ce paramètre étant proportionnel au gradient de concentration moyen. Ce résultat semble montrer que la loi de mélange n'est pas de type diffusif lorsqu'il y a un contraste de viscosités, on verra par la suite que si on observe un régime diffusif, celui-ci ne peut être que transitoire.

Dans le cas du traceur ($b = 0$), la loi est diffusive, ce qui est en bon accord avec les résultats de la littérature. Nous tenterons dans le prochain chapitre de vérifier cette relation.

Par contre, lorsqu'il y a un contraste de viscosités, ce résultat montre que le coefficient de dispersion dépend du gradient de concentration. Dans le meilleur des cas, si ce résultat est applicable, on doit donc avoir une dispersion non-linéaire. Il est de plus intéressant de noter que ce régime n'est possible qu'en présence d'un coefficient de dispersivité mésoscopique[4] ($\alpha_0 \neq 0$). La limite $\alpha_0 \to 0$ nous donne $\alpha \to 0$. Une autre limite intéressante concerne les temps infinis, en effet, si le front de mélange s'étend au cours du temps, on doit avoir

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial C_0}{\partial x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{t\to\infty} b = 0 \tag{2.25}$$

Donc, pour les temps très longs, le coefficient de dispersion doit tendre vers celui du traceur ; la viscosité ne joue plus aucun rôle. Qualitativement, ce résultat peut se justifier par le fait qu'aux temps longs la diffusion (transverse) efface les contrastes de concentrations (et donc de viscosités).

Nous venons de voir que cette méthode analytique permet de prévoir un coefficient de macrodispersion dans chacun des cas qui nous intéresse. Il faut cependant souligner à nouveau que cette analyse repose sur des hypothèses relativement fortes (faibles perturbations, gradient uniforme, état stationnaire), ce qui ne permet pas de trancher *a priori* sur la loi de mélange. Les chapitres suivants sont consacrés à l'étude numérique de chacun des cas. Ces résultats numériques pourront éventuellement être éclairés par cette analyse.

[3] Cette hypothèse revient à supposer que la longueur de corrélation des fluctuations suivant l'axe x est grande devant celle suivant l'axe y, ce qui est le cas pour le champ de vitesses.

[4] C'est en fait le coefficient de dispersion transverse qui joue un rôle important.

Chapitre 3

Cas du traceur passif

3.1 Introduction

Nous avons commencé notre étude sur le mélange en milieu poreux par le cas le plus simple qui est celui où on injecte un traceur passif à l'entrée. Les équations d'évolution du traceur et du fluide sont alors totalement découplées. L'étude de la propagation d'un traceur dans un milieu hétérogène peut trouver des applications dans un grand nombre de domaines. On peut citer par exemple l'étude du transport de polluants dans les sols.

Il nous est apparu nécessaire de commencer notre étude par cette configuration pour plusieurs raisons. La première est que c'est un cas qui a été relativement bien étudié, il est en effet couramment admis que la loi de mélange est du type diffusif. On trouve de plus dans la littérature un certain nombre de résultats de simulations numériques [1, 93, 79]. L'autre est que les hypothèses de l'analyse numérique sont beaucoup moins restrictives que dans les autres cas. L'étude du traceur nous permet donc de nous assurer que nos approches numérique et analytique sont bien appropriées à ce genre de problème.

3.2 Méthode de mesure

Le déroulement de cette étude se divise en deux parties. Dans un premier temps on génère le milieu poreux dans lequel on résoud le champ de vitesses par la méthode BGK en imposant le débit total. Un fois que le régime stationnaire est atteint, on peut alors injecter le colorant et simuler son évolution[1]. Il existe deux méthodes pour étudier la dynamique d'un front de mélange. La première consiste à mesurer la concentration du traceur à la sortie de l'échantillon en fonction du temps. Un traitement de ce signal permet ensuite de déterminer le coefficient de diffusion. La seconde méthode consiste à mesurer le profil de concentration moyen à chaque pas de temps. Un certain nombre de traitements permet ensuite de déterminer la loi de mélange et, si celle-ci est du type diffusif, le coefficient de diffusion. Dans ce mémoire, nous appliquerons les deux approches. La première méthode est celle appliquée généralement expérimentalement, où l'on a peu souvent

[1] Étant donné que les dynamiques du fluide et du colorant sont découplées, il n'est pas nécessaire de faire tourner les deux algorithmes simultanément.

accès à tout le champ de concentrations à tout instant. De plus, elle présente l'avantage d'être très facile à utiliser puisqu'il n'y a qu'une courbe à traiter. Par contre, il apparaît assez clairement qu'une grande partie des informations est perdue dans ce traitement. Cette méthode n'est de plus applicable que lorsque l'on connaît par avance la loi de mélange. Enfin, le signal en sortie dépend de l'historique du déplacement du front, elle n'est donc applicable que pour des lois stationnaires (les effets d'entrée doivent par conséquent être négligeables).

Dans la configuration qui nous intéresse pour l'instant, nous supposerons que la loi de mélange est du type diffusif et nous prendrons un milieu suffisamment long pour que les effets d'entrée soient négligeables[2]. Nous avons donc utilisé la première méthode. Nous avons cependant vérifié que la loi était bien du type diffusif en étudiant l'évolution de la concentration moyenne.

Le principe de cette méthode consiste à étudier les moments de la probabilité du temps de séjour de la concentration dans l'échantillon. En supposant que la concentration moyenne vérifie une loi du type convection-diffusion :

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial C_0}{\partial x} = D_M \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

la densité de probabilité $P(t)$ du temps de séjour d'une particule de traceur dans l'échantillon est égale au flux de concentration à la sortie $x = L$. Soit $J(x,t) = u_0 C_0 - \frac{\partial C_0}{\partial x}$ le flux de concentration, on a alors : $P(t) = J(x = L, t)$. On peut quantifier les moments de la fonction $P(t)$ en utilisant les transformées de Laplace :

$$\tilde{C}_0(x,s) = \int_0^\infty C_0(x,t) e^{-st} dt$$
$$\tilde{J}(x,s) = \int_0^\infty J(x,t) e^{-st} dt$$

Les moments d'ordre k de $P(t)$ peuvent se déterminer par la relation suivante :

$$\overline{t^k} \hat{=} \int_0^\infty t^k P(t) dt = \int_0^\infty t^k J(L,t) dt = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial s^k} \tilde{J}(L, s = 0) \tag{3.2}$$

La résolution de l'équation de convection-diffusion donne la relation suivante :

$$\tilde{J}(x = L, s) = \frac{M_s e^M}{M \sinh M_s + M_s \cosh M_s} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M = \frac{u_0 L}{2 D_M} \\ \\ M_s = \sqrt{M^2 + s \frac{L}{D_M}} \end{cases}$$

Dans la limite $M \gg 1$, on a alors :

$$\begin{cases} \overline{t} = \frac{L}{u_0} - \frac{D_M}{u_0^2} \\ \\ \overline{t^2} = \frac{L^2}{u_0^2} - 2 \frac{D_M^2}{u_0^4} \end{cases}$$

La mesure des deux premiers moments de $P(t)$ nous permet donc de déterminer le coefficient de macrodispersion dans la limite $M \gg 1$:

$$\overline{t^2} - \overline{t}^2 = \frac{2 L D_M}{u_0^3} \tag{3.3}$$

[2] Il est admis que le mélange devient diffusif lorsque le front a parcouru une dizaine de longueurs de corrélation soit environ trente noeuds.

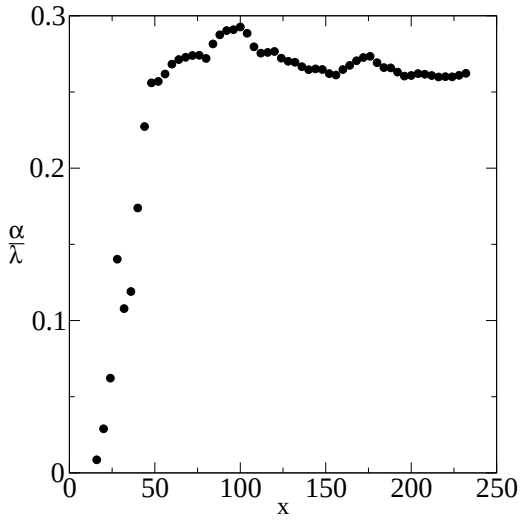


FIG. 3.1. *Dispersivité α, normalisée par λ, en fonction de la distance x à l'entrée. Les paramètres sont $u_0 = 0.004$, $\bar{f} = -1$, $\sigma_f = 0.4$ et $\lambda = 2.2$.*

Nous venons de voir que cette méthode ne fonctionne que si l'on mesure la concentration à une distance suffisamment éloignée de l'entrée, d'une part car l'on doit vérifier $M \gg 1$ et ensuite car le régime n'est pas forcément de type diffusif aux temps courts. Pour s'assurer que l'on prend une distance L suffisamment grande, nous avons mesuré le coefficient de diffusion pour des distances à l'entrée différentes. On peut ainsi voir sur la figure 3.1 que, lorsque l'on se place à une distance de l'ordre de $L \sim 20\lambda_x$, on a atteint un régime permanent. D'une façon générale, nous avons effectué nos mesures à une distance $L \sim 100\lambda$. Nous sommes donc en mesure de calculer le coefficient de diffusion macroscopique en fonction des paramètres du milieu poreux. De plus, il semble naturel de comparer nos résultats à la prédiction analytique du chapitre précédent dans le cas particulier $\beta = 0$:

$$\alpha \hat{=} \frac{D_{disp}}{u_0} = \lambda\sigma_f^2 \int_0^\infty \frac{1}{\left(1 + \frac{K_l}{\lambda^2} y^2\right)^2 (1+y^2)^{3/2}} dy \hat{=} \lambda\sigma_f^2 \, g(\tfrac{K_l}{\lambda^2}) \tag{3.4}$$

Pour cela, nous analyserons successivement l'influence du terme de Brinkman K_l/λ^2, de la longueur de corrélation λ et de l'amplitude des hétérogénéités σ_f.

3.3 Influence de la perméabilité moyenne K_l

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la perméabilité moyenne K_l n'intervient qu'à travers le terme de Brinkman. Celui-ci devient négligeable lorsque $K_l/\lambda^2 \to 0$. Nous avons en particulier observé que ce terme a pour principal effet de diminuer les fluctuations de vitesses. Pour vérifier cette prédiction, nous avons fait une série de simulations dans lesquelles seul ce paramètre varie. On constate sur la figure 3.2 que α décroît avec K_l/λ^2 et que

$$\lim_{K_l/\lambda^2 \to 0} \frac{\alpha}{\lambda\sigma_f^2} = 1$$

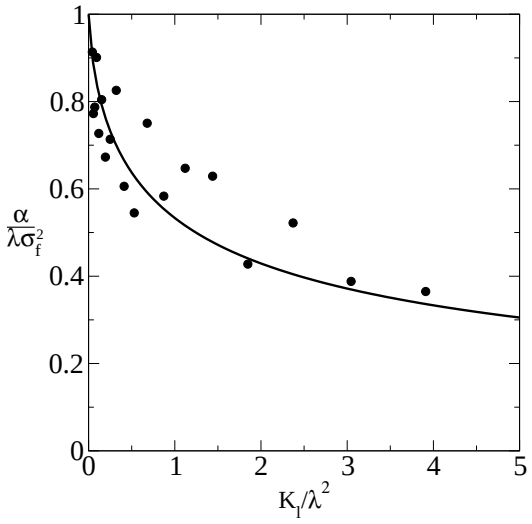


FIG. 3.2. *Dispersivité α divisée par $\lambda\sigma_f^2$, en fonction de la perméabilité K_l, normalisée par λ^2. Les paramètres sont $u_0 = 0.004$, $\lambda = 2.2$ et $\sigma_f = 0.8$. La courbe pleine représente les valeurs données par l'équation* (3.4).

De plus, on peut constater que la courbe prédite analytiquement (Eq. (3.4)) concorde raisonnablement avec nos résultats. Les fluctuations autour de la courbe peuvent s'expliquer par le fait que l'amplitude des fluctuations des hétérogénéités est assez importante ($\sigma_f = 0.8$) et que l'échantillon considéré n'est pas assez grand pour donner une bonne moyenne statistique. On peut de plus constater que pour $K_l/\lambda^2 < 1$, le terme de Brinkman ne diminue au maximum la dispersivité que d'environ 40%. On voit par exemple sur la figure 3.2 que pour $K_l/\lambda^2 \sim 0.4$ la dispersivité est diminuée de 25% ; pour $K_l/\lambda^2 \sim 0.1$ elle n'est diminuée que de 5%. D'une manière générale, pour la suite de nos simulations, nous nous placerons dans des cas où $K_l/\lambda^2 < 0.1$.

3.4 Influence de la longueur de corrélation λ

On s'intéresse maintenant à l'influence de la longueur de corrélation du champ de perméabilités. L'expression analytique de la macrodispersivité α devrait, en première approximation, être proportionnelle à la longueur de corrélation. Mais on a vu cependant dans la section précédente qu'elle dépendait du terme de Brinkman K_l/λ^2. D'après la courbe obtenue précédemment, on peut s'attendre à une dépendance linéaire en λ pour $K_l/\lambda^2 \lesssim 2$. La figure 3.3 montre cette dépendance pour $K_l \sim 0.36$. On peut constater que celle-ci est raisonnablement une droite pour $\lambda \in [0.3, 2]$, l'influence du terme de Brinkman varie alors dans l'intervalle $K_l/\lambda^2 \in [0.09, 4]$. On constate également que cette dépendance s'écarte d'une droite pour $\lambda \gtrsim 3$. Ce dernier constat s'explique aisément par le fait que le milieu est trop petit pour pouvoir contenir un nombre suffisamment grand d'hétérogénéités et donc pour mesurer correctement un effet moyen. Pour diminuer cette fluctuation statistique, il aurait fallu augmenter la taille du milieu. Pour les longueurs de corrélation inférieures à 3, il paraît surprenant d'observer un comportement linéaire. Le système se comporte en effet comme si $g(K_l/\lambda^2) \sim 1$ alors que pour $\lambda \in [0.3, 1]$ on a $g(K_l/\lambda^2) \in [0.3, 0.8]$. Cette variation de la pente

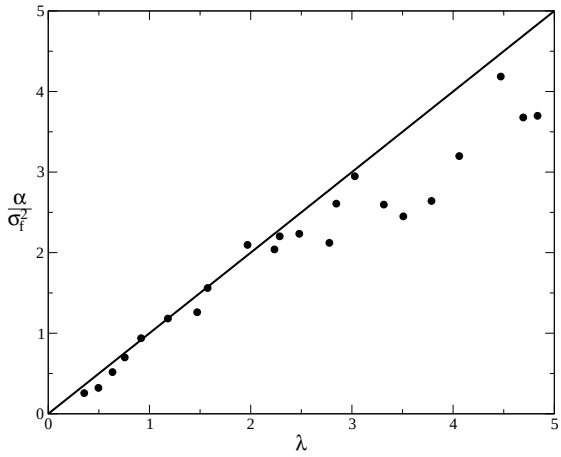


FIG. 3.3. *Dispersivité α, divisée par σ_f^2, en fonction de la longueur de corrélation λ, pour $K_l = 0.36$. La droite d'équation $\alpha/\sigma_f^2 = \lambda$ est donnée par l'équation* (3.4) *dans le cas où $K_l \ll \lambda^2$.*

n'est peut-être pas observable également du fait des fluctuations statistiques. Notons également que le modèle utilisé n'est sûrement plus valable pour des longueurs de corrélations inférieures à la maille du réseau. On peut par contre constater que pour des longueurs de corrélation inférieures à 3 (et un réseau de taille 256×256), les prédictions théoriques sont en bon accord avec les résultats numériques.

3.5 Influence de l'écart quadratique moyen σ_f

Le paramètre qui caractérise le plus les hétérogénéités est sans doute σ_f car il représente l'amplitude des hétérogénéités. D'après l'équation (3.4), on s'attend à ce que, pour les faibles amplitudes de fluctuations de la perméabilité, le coefficient de dispersion croisse quadratiquement avec σ_f. La figure 3.4 montre la dépendance de α en fonction de σ_f pour les paramètres $K_l/\lambda^2 = 0.074$ et $D_0 = 10^{-4}$. On constate sur cette figure que l'on a effectivement une dépendance quadratique non seulement pour les faibles valeurs de σ_f mais aussi pour des valeurs allant jusqu'à $\sigma_f \sim 1.5$. De plus, un ajustement quadratique de la courbe nous donne $\alpha/\lambda\sigma_f^2 = 0.8$, la prédiction théorique prévoirait un coefficient $g(0.074) \sim 0.84$. Les prévisions analytiques sont en très bon accord avec nos résultats. Il est de plus assez remarquable que cette prévision reste valable pour de grandes valeurs de σ_f. Par ailleurs, ce résultat nous amène à faire une remarque concernant les calculs de Gelhar *et al.*. En effet, si on avait suivi la même démarche analytique que dans [34], on aurait trouvé une relation du type :

$$\alpha = \frac{\lambda\sigma_f^2}{\gamma^2} g(\frac{K_l}{\lambda^2}) \tag{3.5}$$

où γ est le coefficient de perméabilité effective mesuré au chapitre 1.4. Pour une valeur de $\sigma_f = 1.5$ et $K_l/\lambda^2 = 0.0074$, on a mesuré $\gamma \sim 0.6$. Dans ce cas, la dispersivité normalisée devrait donc être d'environ

$$\alpha/\lambda \sim \frac{0.84}{(0.6)^2}\sigma_f^2 \sim 2.3\ \sigma_f^2$$

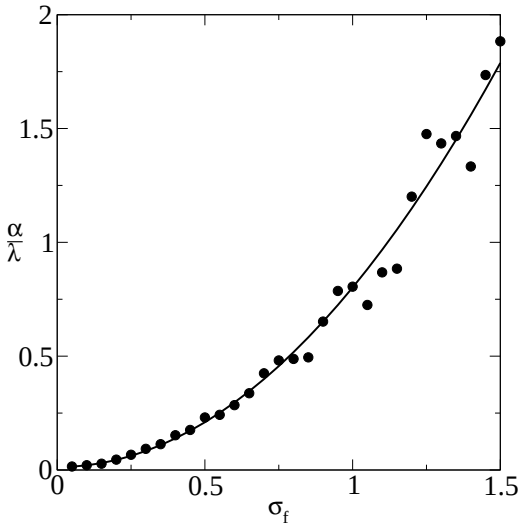


FIG. 3.4. *Dispersivité α, normalisée par λ, en fonction de l'amplitude des hétérogénéités σ_f. Les paramètres constants sont $K_l = 0.36$, $\lambda = 2.2$ ($K_l/\lambda^2 \simeq 0.074$), $u_0 = 0.004$ et $D_0 = 0.0001$. La courbe pleine représente l'expression donnée par l'équation* (3.4).

Ce coefficient est nettement trop important comparé aux résultats de nos simulations ($\alpha/\lambda \simeq 0.8\,\sigma_f^2$, voir figure 3.4). En fait, la présence de γ dans l'équation (3.5) repose sur une erreur de raisonnement. En effet, pour calculer la valeur de γ nous avons dû faire un développement au second ordre en f'. Par contre, lorsque nous avons calculé le coefficient de dispersion nous nous sommes limités aux termes d'ordre 1. Inclure l'expression de γ dans l'équation de dispersion revient donc à inclure certains termes d'ordre 2 dans un développement d'ordre 1. Il est aussi à noter que l'approche de Dagan [23] aboutissait à un résultat qui ne différait de celui de Gelhar que par la présence de ce coefficient γ^2.

3.6 Conclusion

L'étude du cas du mélange passif nous a permis, sur un cas suffisamment simple, de tester notre méthode de calcul et notre approche analytique. Les résultats obtenus nous ont montré que la méthode BGK nous permet de résoudre l'équation de convection-diffusion et celle de Darcy-Brinkman. De plus, il s'est avéré que l'approche du développement aux faibles perturbations était appropriée pour de tels écoulements. Les résultats obtenus sont en effet en très bon accord avec l'analyse.

Cette étude pourrait se poursuivre dans plusieurs directions. Il serait par exemple intéressant d'étudier l'effet de l'anisotropie du milieu. Il est en effet possible de générer avec l'algorithme précédent des milieux poreux anisotropes. On peut mentionner aussi l'étude de champs de perméabilités plus complexes, telles que les distributions auto-affines pour lesquelles il n'y a plus de longueur caractéristique [70, 29].

Nous allons maintenant nous intéresser aux mélanges actifs. Nous avons vu au début de ce mémoire que la méthode BGK permet de modéliser ce type de système en faisant dépendre la

viscosité du fluide de la concentration. Le prochain chapitre a pour objectif d'étudier l'influence d'un contraste de viscosités stabilisant.

Chapitre 4

Cas du contraste de viscosités stabilisant

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à un déplacement de fluides miscibles dans la même configuration que précédemment. On introduit une différence de viscosité entre les fluides. Ce contraste de viscosités est pris de façon à ce qu'il stabilise le front. Autrement dit, la viscosité du fluide en place est inférieure à celle du fluide déplaçant. Nous avons dans ce cas une compétition entre deux effets opposés. D'un côté, nous avons un milieu poreux qui crée des chemins préférentiels pour les fluides. Cet effet contribue à déformer le front de mélange. Nous venons d'étudier cet effet seul dans le cas du traceur. D'un autre côté, nous avons un gradient de viscosité stabilisant qui a pour principal effet d'aplanir le front de mélange. Ces deux effets sont mis en évidence sur la figure 4.1, qui montre, à un instant particulier, les fronts d'invasion obtenus dans le cas du traceur et dans le cas stabilisé par viscosité, pour un même milieu poreux. Le but de cette étude est d'étudier le couplage entre ces deux effets contraires. Dans un premier temps, nous chercherons à déterminer le type de la loi de mélange macroscopique. Une fois cette étude faite, nous chercherons à déterminer comment varie cette loi en fonction des paramètres de notre système. Nous tenterons enfin de comparer nos résultats numériques à ceux de l'analyse du chapitre 2.

4.2 Caractérisation de la loi de mélange macroscopique

Dans le chapitre précédent nous avons présenté une méthode de mesure du coefficient de diffusion macroscopique. Nous avons vu que cette méthode nécessite par avance de savoir si la loi est du type diffusif ou non. Si dans le cas du traceur, nous pouvions prévoir un comportement diffusif comme nous le suggère la littérature, ce n'est malheureusement plus le cas pour notre configuration. On trouve très peu de résultats dans la littérature concernant le cas stable. On peut citer les travaux récents de Artus *et al.* [4] et bien sûr ceux de Welty *et al.*. Dans le premier cas, les auteurs observent numériquement un front dont l'étalement sature au bout d'un certain temps. Il faut noter cependant que dans leurs simulations, la diffusion microscopique est absente. Nous verrons que dans notre

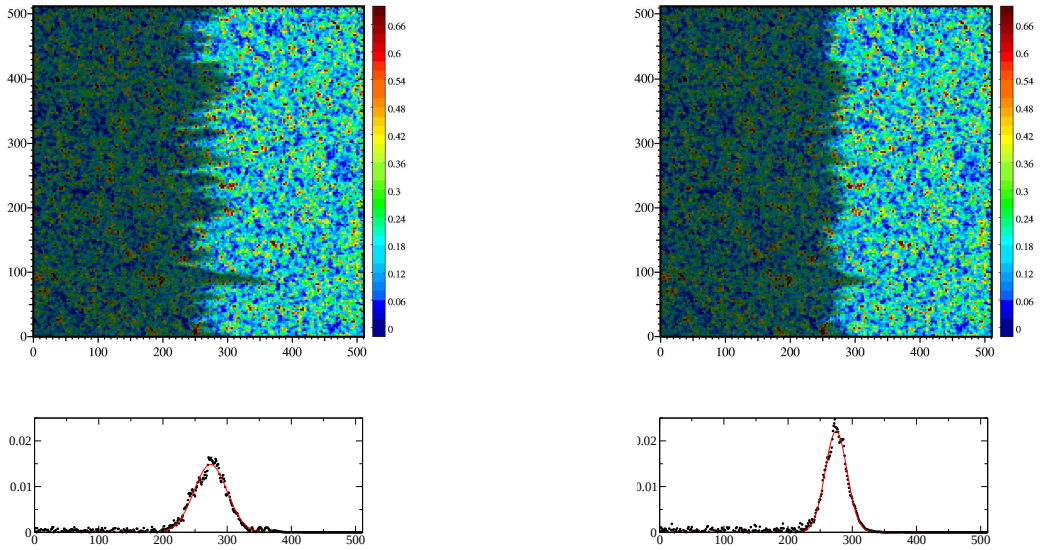


FIG. 4.1. *En haut : deux fronts typiques d'invasion. Les niveaux de gris correspondent à la carte de perméabilité. Le noircissement est proportionnel à la concentration du fluide déplaçant. Les deux cas ont été réalisés avec le même milieu poreux (paramètres : $K_l = 0.135$, $\sigma_f = 0.8$ et $\lambda = 2.2$). La figure de gauche correspond au cas du traceur ($\beta = 0$) et celle de droite correspond au cas avec contraste de viscosités stabilisant ($\beta = 0.2$). En bas : les gradients de concentration moyenne correspondants $-\frac{\partial \bar{C}}{\partial x}(x)$. Les courbes rouges correspondent à un ajustement gaussien.*

cas elle joue un rôle prédominant. Les travaux de Welty *et al.*, dont la démarche analytique a été présentée plus haut, prévoient un régime diffusif transitoire moyennant un certain nombre d'approximations. Le coefficient de diffusion obtenu dépend alors du gradient de concentration moyen, ce qui semble *a priori* en contradiction avec l'hypothèse d'un régime diffusif.

Le première problème qui nous intéresse est donc de déterminer le type de loi qui régit l'évolution du profil de concentration moyen $\overline{C}(x,t) = \frac{1}{L_y}\int C dy$. La méthode décrite au chapitre précédent ne s'applique évidemment plus. Une méthode plus générale pour résoudre ce type de problème est d'étudier l'évolution des différents moments de la courbe du gradient de concentration moyenne en fonction du temps. Les deux premiers moments sont définis par :

$$M_1(t) = \int_0^L x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} dx \tag{4.1}$$

$$M_2(t) = \int_0^L x^2 \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} dx - M_1(t)^2 \tag{4.2}$$

Cependant, dans notre cas, nous avons utilisé une méthode plus simple. En effet, nous avons constaté que la dérivée de la concentration moyenne pouvait être décrite de manière très satisfaisante par une gaussienne. La figure 4.1 (en bas) nous montre cette dérivée ainsi que son ajustement gaussien. De plus, à partir de cet ajustement, nous pouvons déterminer la variance de la concentration moyenne. Le fait que la dérivée de la concentration moyenne se décrive avec une gaussienne semble suggérer que l'évolution du front est du type diffusif. Pour s'en assurer, il suffit de tracer la variance $\sigma^2(t)$ en fonction du temps. La loi est diffusive si $\sigma^2(t)$ varie proportionnellement au temps. Le coefficient

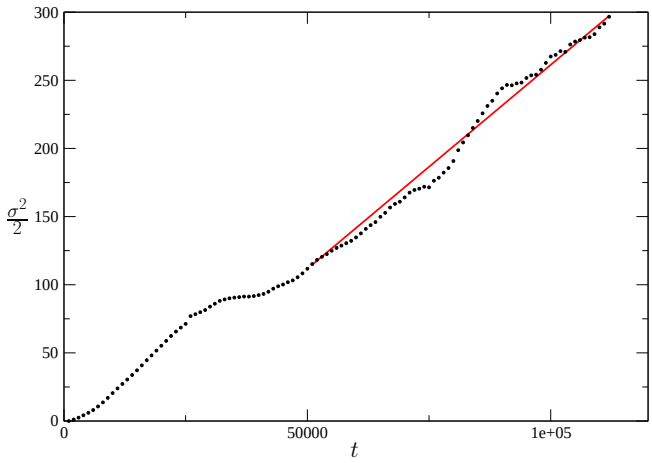


FIG. 4.2. *Demi-variance $\frac{1}{2}\sigma^2$ du gradient de concentration moyen en fonction du temps. La droite représente la régression linéaire permettant de déterminer le coefficient de diffusion. On trouve ici $D_M = 5.10^{-3}$.*

de diffusion est alors donné par :

$$D_M = \frac{1}{2}\frac{d\sigma^2}{dt} \tag{4.3}$$

La figure 4.2 montre une courbe typique de $\frac{1}{2}\sigma^2(t)$. On constate que cette courbe devient bien linéaire à partir d'un certain temps. Nous pouvons donc en conclure que le front de mélange peut raisonnablement être décrit par une loi du type convection-diffusion. Le coefficient de diffusion est mesuré à partir d'une régression linéaire de la courbe précédente.

On remarque que pour les temps initiaux, la loi n'est pas diffusive, et qu'il faut attendre que le front se soit suffisamment étalé pour qu'elle le devienne. Typiquement, il est nécessaire que le front s'étale sur une dizaine de longueurs de corrélation. Sur la figure 4.2, par exemple, la loi n'est pas diffusive durant la moitié de la simulation. La méthode décrite dans le chapitre précédent ne peut donc pas s'appliquer pour mesurer le coefficient de diffusion.

4.3 Résultats numériques

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier l'influence des différents paramètres de contrôle sur le coefficient de diffusion. Les paramètres que nous avons fait varier sont $\sigma_f \in [0;1]$, $\lambda \in [0;10]$, $D_0 \in [5.10^{-5};5.10^{-3}]$, $\beta \in [0;1]$ et $u_0 \in [10^{-4};10^{-3}]$. De plus, nous avons pris une valeur de K_l suffisamment faible pour que la contribution du terme de Brinkman soit négligeable. Dans tout ce qui suit, nous avons fixé $K_l = 0.135$. Dans de telles conditions, la dispersivité dans le cas du traceur est : $\alpha \sim 0.9\ \lambda\ \sigma_f^2$.

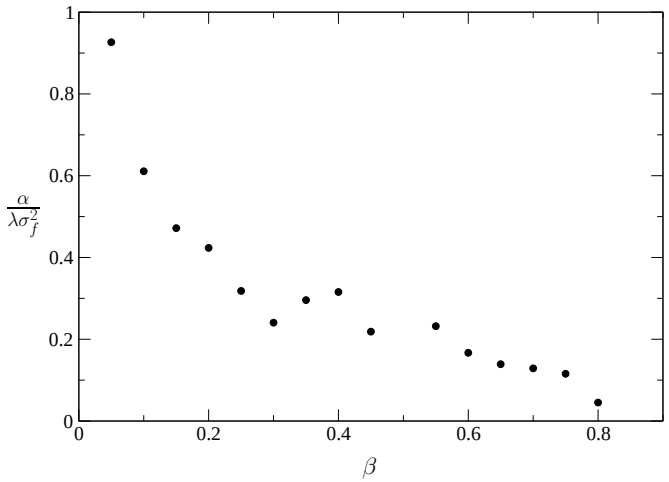


FIG. 4.3. *Dispersivité α, normalisée par $\lambda\sigma_f^2$, en fonction du rapport de viscosité β.*

4.3.1 Influence de la viscosité

La figure 4.3 montre la dépendance de la dispersivité α, normalisée par la dispersivité $\lambda\sigma_f^2$ obtenue dans le cas du traceur, en fonction du rapport de viscosités $\beta = \ln(\frac{\eta_2}{\eta_1})$. On constate que plus le contraste de viscosités est grand, plus la dispersivité est faible. On retrouve de plus, les deux cas limites que l'on pouvait prévoir. Pour $\beta \to 0$, le coefficient de dispersion tend bien vers celui obtenu dans le cas du traceur, les fluctuations de perméabilité dominent alors la dynamique du front. Pour $\beta \to \infty$, le coefficient de dispersion tend vers 0, le contraste de viscosités domine les hétérogénéités et le front de mélange n'est plus dispersé par les hétérogénéités.

4.3.2 Influence des hétérogénéités

Un paramètre qui nous intéresse plus particulièrement est l'amplitude des fluctuations de la perméabilité. Les courbes sur la figure 4.4 montrent la dépendance de la dispersivité en fonction de σ_f pour deux valeurs de β : $\beta = 0.2$ pour les points noirs et $\beta = 0.5$ pour les losanges rouges. On peut constater sur la figure de gauche que, comme on s'y attend, α augmente bien avec σ_f. De plus, le contraste de viscosités stabilisant diminue l'effet des hétérogénéités (les losanges sont au-dessous des points). Cependant, on peut remarquer sur la figure de droite que la tendance n'est plus quadratique comme c'était le cas pour le traceur. Il semblerait qu'une loi cubique soit plus appropriée. L'effet du contraste de viscosités, qui est de diminuer la dispersivité par rapport au cas du traceur, est ainsi d'autant plus important que σ_f est petit. De plus, on peut raisonnablement penser que le coefficient $\frac{\alpha}{\lambda\sigma_f^2}$ est borné par celui du traceur ($\alpha/\lambda\sigma_f^2 < 0.9$ pour tout σ_f). Par conséquent, on peut penser que dans la limite $\sigma_f \to \infty$ on a $\frac{\alpha}{\lambda\sigma_f^2} \to 0.9$.

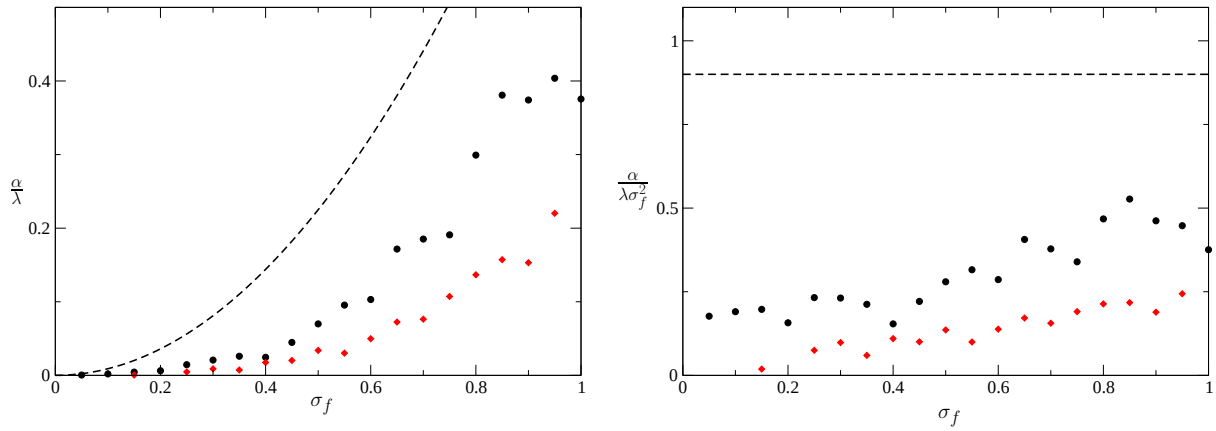


FIG. 4.4. *Dispersivité α, normalisée par λ, à gauche et par $\lambda\sigma_f^2$, à droite, en fonction de l'amplitude des hétérogénéités σ_f. Les points rouges correspondent à un rapport de viscosités $\beta = 0.5$, les points noirs à un rapport de viscosités $\beta = 0.2$. Les courbes en pointillés, $\alpha = 0.9\lambda\sigma_f^2$, correspondent au cas du traceur ($\beta = 0$).*

4.3.3 Influence du coefficient de diffusion mésoscopique

Dans l'analyse aux faibles perturbations, on a vu que le coefficient de diffusion mésoscopique jouait un rôle important sur le coefficient de dispersion contrairement au cas du traceur. Sur la figure 4.5, nous avons tracé l'évolution de la dipersivité en fonction du coefficient de diffusion mésoscopique D_0. On constate sur cette courbe que la dispersion augmente avec D_0. En d'autres termes, la diffusion semble réduire l'effet de la viscosité. De plus, nous avons vu analytiquement que cela est essentiellement dû à la diffusion transverse, qui tend à gommer les contrastes de viscosité.

4.4 Comparaison avec le développement aux faibles perturbations

Nous avons vu au Chapitre 2 qu'il était possible de déterminer analytiquement un coefficient de diffusion dans le cas où le contraste de viscosité est stabilisant. La dispersivité est donnée par :

$$\alpha = \lambda\sigma_f^2 \int_0^\infty \frac{y^2}{\left[(1+\frac{K_l}{\lambda^2}y^2)y^2+b\right]\left[1+\frac{K_l}{\lambda^2}y^2\right][1+y^2]^{3/2}}dy \tag{4.4}$$

avec $b = -\frac{\beta\lambda^2}{\alpha_0}\frac{\partial C_0}{\partial x}$.

Cependant, nous avons aussi vu que ce coefficient de dispersion peut paraître assez paradoxal dans la mesure où il dépend d'un gradient de concentration moyen supposé uniforme. Si on trace le gradient de concentration moyen $-\frac{\partial C_0}{\partial x}$ en fonction de x (voir figure 4.1), on constate immédiatement que ce gradient est loin d'être uniforme. Ce qui devrait aboutir à deux conclusions possibles : soit l'analyse est inapplicable dans notre cas car elle repose sur des hypothèses non vérifiées, soit on peut admettre qu'elle est valable localement, auquel cas le front devrait suivre une loi de diffusion anormale (le coefficient de diffusion varie spatialement). Il faut noter que l'hypothèse d'un gradient

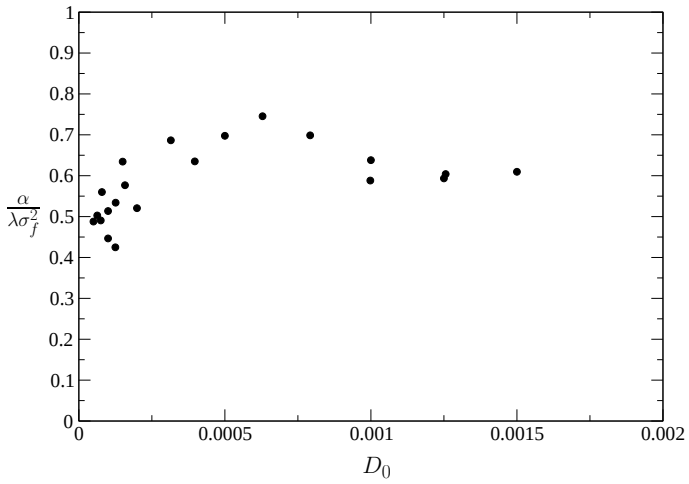


FIG. 4.5. *Dispersivité α, normalisée par $\lambda\sigma_f^2$, en fonction du coefficient de diffusion mésoscopique D_0.*

de concentration moyen uniforme et quasi-stationnaire est souvent utilisée dans les analyses de stabilité linéaire [88] (QSSA, Quasi-Steady-State Approximation).

Pour comparer nos résultats avec les prédictions analytiques, nous avons estimé le coefficient $b = -\frac{\beta\lambda^2}{\alpha_0}\frac{\partial C_0}{\partial x}$ de la manière suivante. Nous avons décidé arbitrairement de mesurer le gradient de concentration à son maximum au milieu du front. Ceci nous définit un coefficient b_M maximum mesuré dans notre simulation, et tel que :

$$b_M \hat{=} -\left.\frac{\beta\lambda^2}{\alpha_0}\,\frac{\partial C_0}{\partial x}\right|_{max}$$

Ce paramètre est mesuré en général à la fin de la simulation. Il dépend *a priori* du temps auquel on le mesure, cependant il s'est avéré qu'il varie assez peu sur les échelles de temps de nos simulations. Le temps auquel on mesure ce coefficient ne modifie pas drastiquement les résultats présentés ci-dessous.

La figure 4.6 montre la dépendance de la dispersivité, normalisée par $\lambda\sigma_f^2$, en fonction du paramètre b_M. Les valeurs de α sont obtenues pour différentes valeurs des paramètres β, σ_f, D_0 et u_0. On peut constater que tous les points se regroupent sur une même courbe. Ce résultat montre bien que le paramètre b, mis en évidence par l'analyse, permet de décrire correctement l'état de notre système. De plus, à partir de ce résultat, on peut comparer cette courbe de tendance avec la formule analytique (Eq. (4.4)). Sur la figure 4.6, la courbe pleine représente la loi analytique tracée en prenant $b = b_M$. On constate que si l'analyse prédit une tendance comparable aux résultats, elle sous-estime le coefficient α. Cela peut se comprendre aisément. En effet, comme nous avons pris le maximum de gradient possible, nous avons surestimé le coefficient b et donc sous-estimé le coefficient de dispersion ($\alpha(b)$ est une fonction décroissante).

Sur la figure 4.6, nous avons tracé la même formule analytique mais en prenant $b = b_M/2$ (courbe en pointillés) et $b = b_M/3$ (courbe en trait-points). On constate que la formule analytique est en très bon accord avec les résultats des simulations numériques si on prend $b = b_M/2$. Ceci

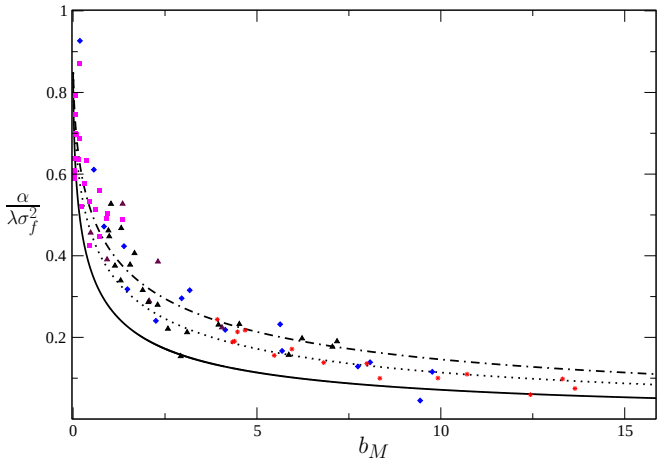


FIG. 4.6. *Dispersivité $\alpha = D_M/u_0$, normalisée par $\lambda\sigma_f^2$, en fonction du paramètre mesuré b_M. Les différents symboles correspondent à des séries de simulations dans lesquelles β, σ_f, u_0 ou D_0 varient. Les courbes représentent l'expression analytique donnée par l'équation (4.4) en prenant $b = b_M$ pour la courbe continue, $b = b_M/2$ pour la courbe en pointillés et $b = b_M/3$ pour la courbe en tiré-points.*

peut s'interpréter physiquement par le fait que le front voit un gradient de concentration effectif de l'ordre de la moitié du gradient maximal.

Le fait que la loi de mélange suive celle prédite par l'analyse est assez paradoxal. En effet, on a déjà mentionné le fait qu'il était contradictoire d'obtenir un coefficient de diffusion qui dépend du gradient de concentration moyen. Pour comprendre pourquoi on peut observer un régime diffusif qui suit la loi analytique dans laquelle le coefficient de diffusion D_M dépend de la valeur de b (en prenant $b = b_M/2$), il suffit d'utiliser la relation d'évolution de la variance du gradient :

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2D_M(\frac{b_M}{2}) \tag{4.5}$$

Le gradient de concentration étant une gaussienne, on a alors

$$-\left.\frac{\partial C_0}{\partial x}\right|_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$$

La variance du gradient devrait suivre l'équation différentielle :

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2D_M(\frac{\beta\lambda^2}{2\alpha_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}) \tag{4.6}$$

Il n'est cependant pas nécessaire d'intégrer cette équation différentielle pour comprendre pourquoi on observe un régime diffusif. En effet, notre traitement numérique repose sur la mesure de $\frac{d\sigma^2}{dt}$ et donc de $D_M(\sigma)$. La figure 4.7 montre la variation théorique du coefficient de diffusion en fonction de l'écart-type σ. On constate (figure de gauche), que pour σ variant de 100 à 200, D_M ne varie que de 0.14 à 0.18. Du fait du bruit inhérent à nos mesures, une si faible variation de la pente de $\sigma^2(t)$ n'est pas détectable.

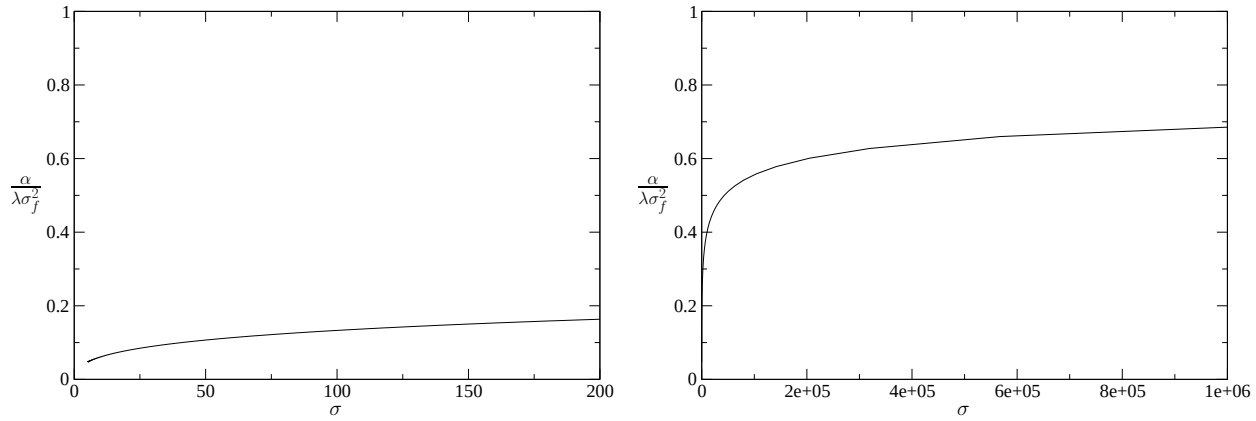


FIG. 4.7. *Dispersivité α transitoire théorique, normalisée par $\lambda\sigma_f^2$, en fonction de l'étalement du gradient de concentration σ donné par l'équation (4.6), en supposant $D_0 = 0.00005$, $\sigma_f = 0.8$, $\beta = 0.5$, $u_0 = 0.004$ et $\lambda = 2.2$. Les deux courbes représentent la même fonction pour des intervalles de σ différents.*

Pour observer une variation notable du coefficient de diffusion, il faudrait que l'écart quadratique varie de plus d'un facteur 2 à partir du moment où la loi devient valable (nos mesures sont effectuées sur des intervalles typiques $\sigma \in [15, 20]$). Il faudrait attendre des étalements ($\sigma(t)$) de l'ordre de 100 pour pouvoir mesurer une variation de la diffusion. Malheureusement, pour pouvoir observer ce genre de phénomène, il faudrait faire des simulations avec des dimensions irréalisables.

De plus, à partir de cette courbe, on peut prévoir à partir de quel écart-type on retrouve le coefficient de diffusion du traceur. On constate que pour obtenir un coefficient de diffusion égal à celui du traceur, il faudrait avoir des écart-types de l'ordre de 10^6 (voir figure 4.7 à droite).

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'évolution d'un front de mélange de deux fluides avec un contraste de viscosités stabilisant. Nous avons montré dans un premier temps que la loi de mélange semblait être du type diffusif. Dans un second temps nous avons montré que le coefficient de diffusion mesuré était, de manière surprenante, en bon accord avec les résultats de l'analyse. Cet accord nécessite de prendre un gradient de concentration effectif égal à la moitié du gradient maximum. En toute rigueur, si on en croit l'analyse, le coefficient de diffusion devrait varier en fonction du temps. Cependant, nos mesures ont été faites sur des tailles trop petites pour permettre l'observation d'une telle dépendance.

Chapitre 5

Cas du contraste de viscosités déstabilisant

Nous allons maintenant nous intéresser au problème du déplacement d'un fluide par un autre moins visqueux dans un milieu poreux hétérogène. Depuis les études de Hill en 1952 [39], Saffman et Taylor [81] et Chouke *et al.* [21], cette configuration a été extrêmement étudiée. La raison provient à la fois de sa complexité analytique et de ses nombreuses applications industrielles. La branche industrielle la plus engagée dans ce type d'étude est bien entendu la branche pétrolière. La méthode numérique présentée ici permettant de modéliser ce type de configuration, nous allons tenter d'apporter une contribution à ce type d'étude.

5.1 Introduction

Étant donné le grand nombre d'études sur le sujet, il n'est pas question de présenter l'ensemble des résultats de la littérature. Nous verrons uniquement les principaux résultats (une bonne référence générale est celle de Homsy [43]). Nous avons déja vu que lorsqu'on déplace un fluide par un autre moins visqueux, il se développe une instabilité de digitations. Pour étudier la dynamique et la structure de ces instabilités, on distingue généralement deux types de régimes (voir figure 5.1) :

- le régime non-développé. Il correspond aux instants initiaux pour lesquels l'interface entre les deux fluides est faiblement perturbée par rapport à une droite. Ce régime est décrit par des équations linéaires, ce qui explique que les résultats les plus quantitatifs sont obtenus dans ce régime.
- Le régime développé. Il correspond aux instants plus grands pour lesquels l'interface est très fortement perturbée. Ce régime est généralement caractérisé par l'apparition des doigts. Les variations de l'interface entre les deux régions de mobilités différentes font qu'il existe un couplage très fort entre les champs de vitesses et de pressions. Le système est alors régi par des équations non-linéaires. Ce régime est le moins bien compris. La plupart des travaux récents concernent ce régime.

Nous allons commencer par présenter les résultats qui concernent les états initiaux dans le cas qui nous concerne (déplacement miscible en milieu poreux bidimensionnel). Insistons sur le fait que

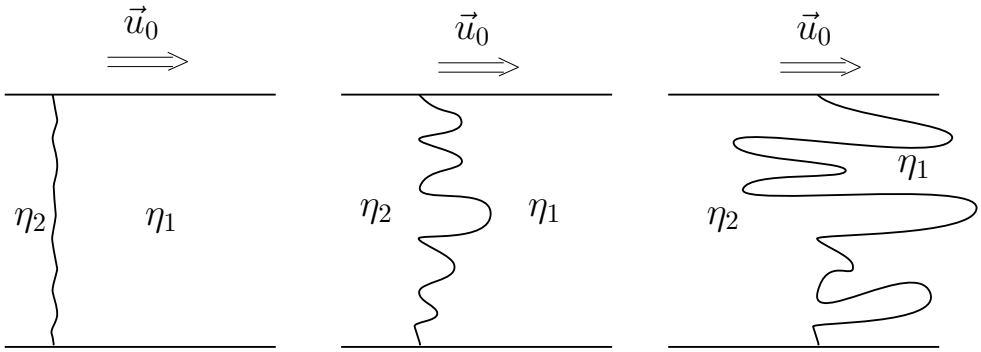


FIG. 5.1. *Différents régimes de l'instabilité. A gauche : régime non-développé. Au centre : régime intermédiaire. A droite : régime développé.*

la plupart de nos simulations numériques ont été effectuées pour des milieux poreux hétérogènes, ce qui confère à notre travail son orginalité.

5.2 Analyse de stabilité linéaire

L'analyse de stabilité linéaire dans le cas de deux fluides miscibles en milieu poreux homogène a été effectuée par Tan et Homsy [88]. Le principe de cette analyse est de perturber faiblement et harmoniquement le front d'un état de base uniforme suivant l'axe transverse à la direction de l'écoulement moyen (y) (voir figure 5.2). Dans la direction de l'écoulement(x), l'interface diffuse est décrite par un profil de concentration :

$$C_0(x,t_0) = \frac{1}{2}(1 - erf(\frac{x}{2\sqrt{D_0 t_0}})) \tag{5.1}$$

où D_0 est le coefficient de diffusion effectif mésoscopique, supposé isotrope et t_0 est un temps mesurant le caractère diffus de l'état de base. Dans ce type d'analyse, l'état de base est considéré comme statique. C'est l'hypothèse dite QSSA déjà discutée. Cette approximation suppose que les perturbations du front évoluent plus rapidement que l'état de base.

Les équations du mouvement de ce système sont les équations de Darcy et de convection-diffusion :

$$\vec{\nabla} P + \frac{\eta(C)}{K}\vec{u} = \vec{0} \tag{5.2}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla} C = D_0 \Delta C \tag{5.4}$$

Un développement aux faibles perturbations permet de linéariser ce système d'équations. Tan et Homsy ont ensuite calculé numériquement[1], pour différentes épaisseurs d'interface (t_0) de l'état de base, le taux de croissance σ des instabilités en fonction du nombre d'onde k (voir figure 5.3). Cette courbe de stabilité montre qu'il existe toujours une bande de nombres d'ondes instables. Elle montre également qu'il existe un nombre d'onde critique k_c qui croît plus rapidement que les

[1]La méthode numérique utilisée est celle dite du "matching asymptote".

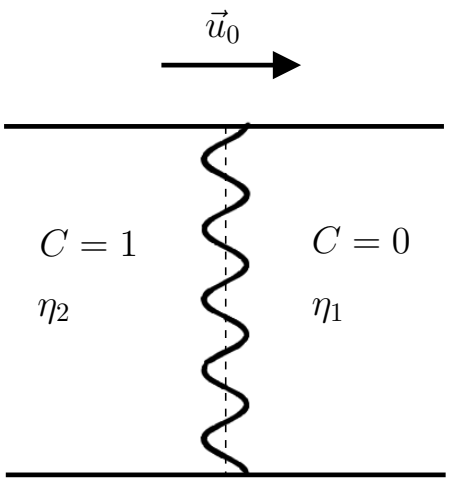


FIG. 5.2. *Schéma de l'analyse de stabilité linéaire. L'état de base est symbolisé par la droite en pointillés. Cet état de base est perturbé harmoniquement, ce qui est représenté par la courbe pleine.*

autres. Il existe donc une largeur de doigt préférentiellement instable. Par ailleurs, si t_0 augmente, la longueur d'onde sélectionnée sera plus grande. Ce résultat paraît intuitif dans la mesure où plus l'interface est épaisse, moins le moteur de l'instabilité est efficace aux petites échelles. Lorsque $t_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque le profil de concentration est une fonction de Heaviside, il est possible de calculer analytiquement la courbe de stabilité [88] :

$$\sigma = \frac{1}{2} k\, u_0\, \ln M - D_0 k^2 \quad \text{avec} \quad M = \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

Cette relation de dispersion montre que la croissance des instabilités dépend linéairement du nombre d'onde (pour les grandes longueurs d'ondes).

Lorsque le milieu poreux est hétérogène, l'analyse de stabilité linéaire devient plus complexe, dans la mesure où il est nécessaire de prendre en compte les chemins préférentiels du milieu. Pour tenir compte des hétérogénéités, Tan et Homsy [89] ont suggéré qu'il devrait exister une résonance entre le milieu poreux et l'instabilité lorsque la longueur de corrélation des hétérogénéités est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde la plus instable. Malheureusement, ce résultat n'a jamais été mis en évidence de façon satisfaisante [27, 28, 17]. Signalons également que le développement aux faibles perturbations effectué par Welty *et al.* [96] et présenté dans cette partie, permet de calculer un taux de croissance aux temps courts. Cette approche montre qu'aux temps courts, la croissance du front est entièrement gouvernée par les hétérogénéités. Il n'y a alors aucun couplage entre les hétérogénéités et les effets visqueux.

Si les études aux temps courts peuvent se révéler très instructives, les études aux temps longs sont les plus pertinentes pour leurs applications. En ce qui concerne les milieux poreux homogènes, Homsy [43] a étudié phénoménologiquement la dynamique des doigts observés. Il a constaté qu'il apparaissait naturellement des doigts de largeur sensiblement égale. L'étude de l'évolution de ces doigts montre qu'ils subissent trois types d'interaction. Ces mécanismes sont le "Spreading" (un doigt s'étend), le "Shielding" (l'expansion d'un doigt peut écranter un autre) et le "Splitting"

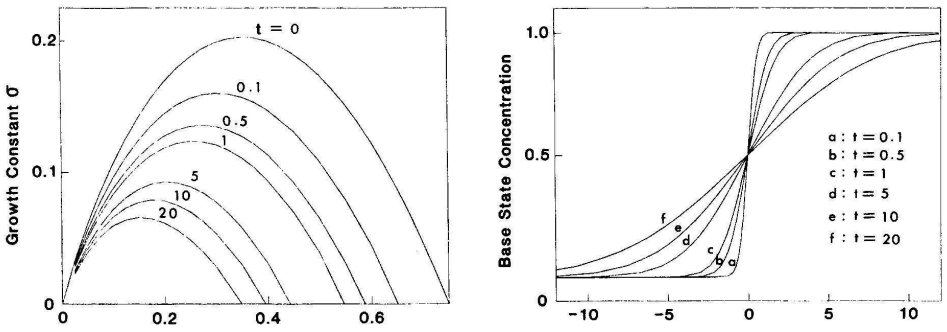


FIG. 5.3. *Extrait de Tan et Homsy [88]. A gauche : taux de croissance en fonction du nombre d'onde et pour différents états de base, en milieu poreux homogène. A droite : états de bases pour différents temps t_0. Ici, $\beta = -3$. La variable temporelle est normalisée par D_0/u_0^2 et la variable spatiale par D_0/u_0.*

(un doigt peut se diviser en deux). Signalons que ce dernier mécanisme n'apparaît que lorsque le nombre de Péclet est suffisamment grand. En ce qui concerne les études quantitatives du régime développé (toujours en milieu poreux homogène), les auteurs de telles études (voir par exemple [102]) caractérisent le système par une longueur d'étalement (ou de mélange) :

$$L_\delta = x_{\bar{C}=\delta} - x_{\bar{C}=1-\delta}$$

avec $\delta = 0.1$. Zimmerman et Homsy [102] ont pu constater deux régimes différents. Aux temps courts, la longueur d'étalement se comporte comme $L_\delta \propto t^{1/2}$. Aux temps longs, elle se comporte comme $L_\delta \propto t$. La loi de mélange est donc initialement de type diffusif puis de type convectif. Le régime développé peut donc être caractérisé par une vitesse d'étalement (normalisée) : $\frac{1}{u_0}\frac{d}{dt}L_\delta$. En milieu poreux homogène, Zimmmerman *et al.* ont constaté que cette vitesse d'étalement se comporte comme

$$\frac{1}{u_0}\frac{d}{dt}L_\delta \sim -\frac{1}{2}\beta \quad \text{avec} \quad \beta = \ln(\frac{\eta_2}{\eta_1}) \tag{5.5}$$

Lorsque le milieu poreux est hétérogène, il est assez courant de caractériser le système par cette vitesse d'étalement [89, 16, 17]. Les expériences de Bacri *et al.* [5] ont d'ailleurs montré que cette vitesse d'étalement gardait une dépendance linéaire en β.

Pour décrire le déplacement en milieu poreux hétérogène, il existe également un grand nombre de modèles empiriques. Ces modèles, utilisés par les industriels (essentiellement les pétroliers), permettent de décrire le milieu poreux par un certain nombre de paramètres ajustables. Afin de décrire une zone de mélange croissant proportionnellement au temps, les modèles les plus connus utilisent des équations de conservation[2] :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(S) = 0 \tag{5.6}$$

où S est la saturation du fluide injecté (*i.e.* la moyenne transverse macroscopique de la quantité de fluide injecté : $S = \bar{C} = 1/L_y \int_0^{L_y} C(x,y)dy$) et f est une fonction de flux à déterminer. Cette dernière dépend *a priori* des viscosités et des densités des deux fluides ainsi que des propriétés du

[2]Ce type d'équation va être étudié en détail dans la partie suivante.

milieu poreux. Comme exemples de modèles de ce type, on peut citer ceux de Koval [57], Fayers [31] ou Todd et Longstaff [92]. La fonction de flux est du type :

$$f(\bar{C}) = u_0 \, \frac{\bar{C}}{\bar{C} + (1-\bar{C})/M_e} \tag{5.7}$$

où M_e est un rapport de viscosités effectif. Ce modèle n'a donc qu'un paramètre ajustable. Le point de départ de tous ces modèles est l'hypothèse dite d'équilibre transverse. Cette approximation consiste à supposer que le gradient de pression est uniforme transversalement et dirigé dans le sens de l'écoulement[3]. Notons que cette hypothèse est essentiellement valable pour les régimes très développés car les champs de vitesses et de concentrations doivent varier faiblement suivant la direction de l'écoulement [101]. On a alors :

$$u_x(x,y) = -\frac{K(x,y)}{\eta(C)} \frac{\partial P}{\partial x} \tag{5.8}$$

La vitesse moyenne s'écrit donc :

$$u_0 = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \frac{K(x,y)}{\eta(C)} dy \tag{5.9}$$

ce qui permet de réécrire l'équation (5.8) sous la forme :

$$u_x(x,y) = L_y u_0 \frac{K(x,y)}{\eta(C)} \frac{1}{\int_0^{L_y} \frac{K(x,y)}{\eta(C)} dy} \tag{5.10}$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier d'un milieu poreux homogène et d'un front de déplacement non-diffus. La concentration vaut $C = 0$ ou 1. On a alors :

$$\frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \frac{1}{\eta(C)} dy = \bar{C}\eta_2^{-1} + (1-\bar{C})\eta_1^{-1} \tag{5.11}$$

La fonction de flux s'écrit donc (pour une perméabilité homogène) :

$$f(\bar{C}) \hat{=} \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} C u_x dy = u_0 \frac{\bar{C}}{\bar{C} + (1-\bar{C})\eta_2/\eta_1} \tag{5.12}$$

Cette dernière équation montre que dans le cas d'un poreux homogène et d'un front non-diffus, l'équation (5.7) s'applique avec $M_e = M = \eta_1/\eta_2$. Dans le cas plus général d'un milieu poreux hétérogène, la fonction de flux s'écrit :

$$f(\bar{C}) = u_0 \frac{\int_{\text{fluide 2}} \frac{K(x,y)}{\eta_2} dy}{\int_{\text{fluide 1}} \frac{K(x,y)}{\eta_1} dy + \int_{\text{fluide 2}} \frac{K(x,y)}{\eta_2} dy} = u_0 \frac{<K>_{\text{fluide 2}} /\eta_2}{<K>_{\text{fluide 1}} /\eta_1 + <K>_{\text{fluide 2}} /\eta_2} \tag{5.13}$$

De plus, le fluide 2 développera des digitations préférentiellement sur les chemins de plus grande perméabilité. On aura donc :

$$H \hat{=} \frac{<K>_{\text{fluide 2}}}{<K>_{\text{fluide 1}}} > 1$$

Ainsi, l'équation (5.7) s'applique avec

$$M_e = \frac{<K>_{\text{fluide 2}}}{<K>_{\text{fluide 1}}} M = HM > M$$

[3] Cette hypothèse est similaire à celle dite de lubrification dans les écoulements confinés.

où H est un coefficient d'hétérogénéité qui dépend *a priori* de λ, σ_f et M. La détermination du facteur H est très complexe. Des tentatives théoriques ont été faites pour expliciter ce terme, en tenant également compte de la diffusion [101, 99], mais on préfère souvent en pratique utiliser un coefficient M_e *ad hoc*, qui permet une description simple (1 paramètre) d'un phénomène très complexe. Rappelons que cette description simple suppose quoi qu'il en soit un gradient de pression uniforme suivant x.

Notons également que cette démarche est assez différente de celle de Gelhar *et al.*, dans la mesure où elle aboutit à des régimes de type convectif plutôt que diffusif. Cependant, les études expérimentales et numériques [43, 5, 89, 91, 17] sur ces systèmes s'accordent sur un régime de type convectif pour le régime développé.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la digitation visqueuse en utilisant le milieu poreux modèle utilisé jusqu'à présent. Nous essaierons comme dans les chapitres précédents d'identifier une loi d'évolution des grandeurs moyennes et de l'étudier en fonction des paramètres de notre système.

5.3 Caractérisation du mélange macroscopique

Jusqu'à présent dans ce mémoire, nous avons principalement étudié des lois de type diffusif. Pour des rapports de viscosités importants, la totalité des expériences et des simulations s'accordent pour conclure que le régime est du type convectif [43, 91, 17]. Par contre, lorsque le rapport de viscosités est faible comparé à un paramètre typique des hétérogénéités, il est souvent admis que le régime est de type diffusif [2]. En effet, dans un tel cas, la dynamique du système est dominée par le milieu poreux et non par le contraste de viscosités. Il semble donc primordial de caractériser la loi d'étalement de la zone de mélange. Lorsque le rapport de viscosités était stabilisant, nous avions exploité le fait que la dérivée de la concentration moyenne était comparable à une gaussienne pour en déduire qu'après un temps transitoire, la loi de mélange devenait de type diffusif.

Malheureusement, lorsque le rapport de viscosités est déstabilisant, la dérivée de la concentration moyenne devient très bruitée (voir figure 5.4). Celle-ci est alors très difficilement comparable à une gaussienne (même pour de faibles valeurs de β). L'ajustement de la dérivée de concentration moyenne ne permet donc plus de caractériser notre système. Le calcul des moments de la dérivée de la concentration moyenne ne permet pas non plus d'obtenir des résultats exploitables. Nous avons donc décidé de suivre la démarche de Homsy *et al.* [43], [103], qui consiste à étudier l'évolution de la longueur de mélange $L_\delta(t)$ (nous avons pris également $\delta = 0.1$). En étudiant cette longueur de mélange, on devrait en principe pouvoir être en mesure de connaître la loi de mélange suivant que $L_\delta \propto t$ ou $L_\delta \propto \sqrt{t}$. En milieu poreux homogène, Zimmerman *et al.* [103] ont par exemple constaté que la loi était de type diffusif aux temps courts ($L_\delta \propto t^{1/2}$) tandis qu'aux temps longs, le régime devenait convectif ($L_\delta \propto t$). Toutefois, dans la pratique, il nous a été difficile de choisir entre les deux régimes, en raison du fait que nos milieux sont trop petits pour pouvoir observer des comportements aux temps longs. Ce problème, illustré par la figure 5.5, montre trois courbes $L_\delta(t)$ en fonction du temps pour des simulations dont le rapport de viscosités est croissant. La simulation de gauche correspond au cas du traceur ($\beta = 0$), la loi de mélange est donc de type diffusif. La courbe centrale et celle de droite correspondent à des rapports de viscosités très faibles ($\beta = -0.05$ et $\beta = -0.1$ respectivement). On constate sur la courbe de droite, un changement assez notable de

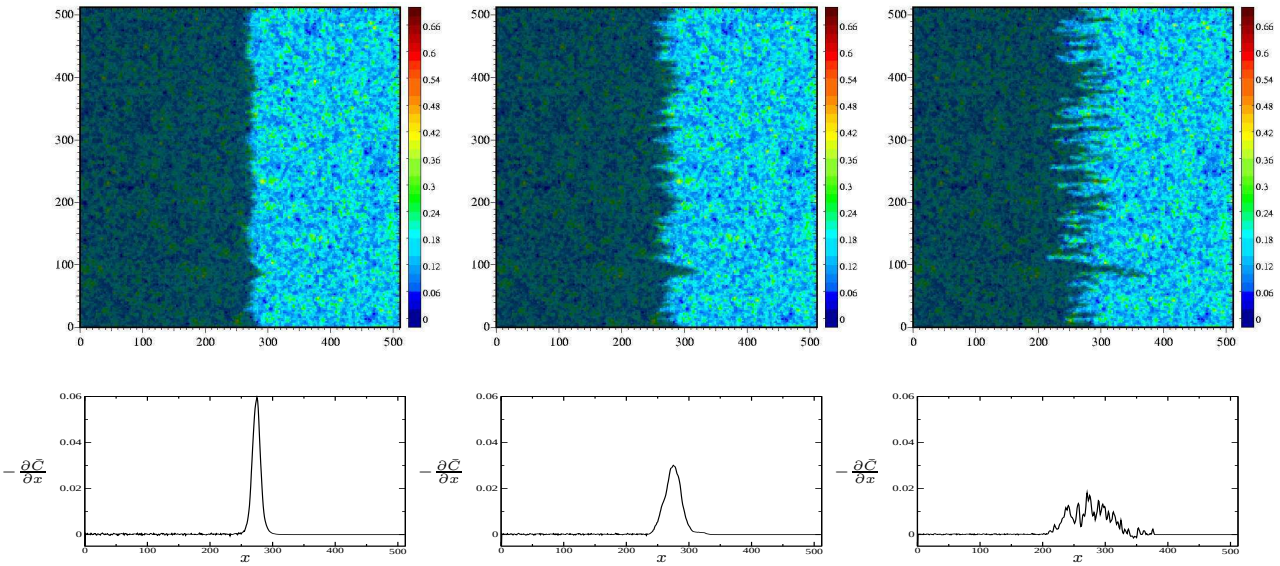


FIG. 5.4. *Exemple de déplacement pour différents rapports de viscosités. A gauche : cas stable* $\beta = 0.4$. *Au centre : cas du traceur* $\beta = 0$. *A droite : cas instable* $\beta = -0.4$. *Les autres paramètres sont :* $u_0 = 4.10^{-4}$, $D_0 = 10^{-4}$, $\sigma_f = 0.4$ *et* $\lambda = 2.2$. *La carte de couleur représente le champ de perméabilités. Celui-ci est identique pour chacune des réalisations. Les niveaux de gris correspondent au champ de concentrations (noir pour* $C = 1$*). En bas sont tracés les gradients de concentration moyens correspondants :* $-\frac{\partial \bar{C}}{\partial x}(x)$.

comportement de la courbe vers les temps $t_0 \sim 50000$. Ce changement correspond à la transition entre un régime diffusif et un régime convectif déjà observée par Homsy *et al.*. Ce constat nous pose un problème majeur : pour différencier un régime en t d'un régime en $\sqrt{t}$ aux temps longs, il faut observer à partir d'un temps t_0 et jusqu'à des temps beaucoup plus longs que $2t_0$. En effet, entre t_0 et $2t_0$, le cas $\beta = 0$ semble linéaire, or nous savons qu'il est diffusif. Pour pouvoir déterminer une variation notable de la pente, il faudrait attendre un temps au moins deux fois plus long.

Dans le chapitre précédent, lorsque le contraste de viscosités était stabilisant, nous avions eu le même type de problème. Toutefois, le fait que la dérivée de la concentration moyenne était de type gaussien nous avait permis de déterminer que la loi était diffusive[4]. Nous ne pouvons

[4]En étudiant la variation temporelle de l'écart quadratique moyen.

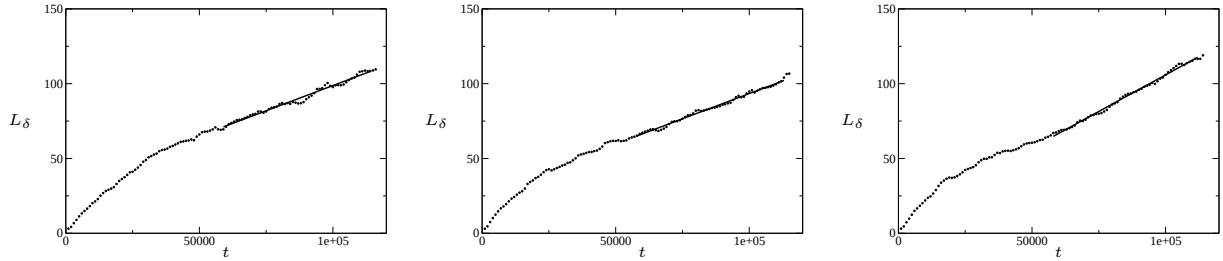


FIG. 5.5. *Longueur de mélange* L_δ *en fonction du temps. A gauche :* $\beta = 0$, *au centre* $\beta = -0.05$, *à droite* $\beta = -0.1$. *Les autres paramètres sont* $u_0 = 0.004$, $D_0 = 0.00005$, $\sigma_f = 0.8$ *et* $\lambda = 2.2$. *Sur la courbe de droite, on peut observer un changement de régime diffusif - convectif. Une telle transition n'est pas observée dans les deux autres cas. La droite continue représente la régression linéaire permettant de calculer* $\frac{d}{dt}L_\delta$.

malheureusement plus utiliser cette démarche, car la dérivée de la concentration moyenne n'est plus gaussienne.

Pour la suite de cette étude, nous avons pris le parti de traiter tous les résultats dans le cadre du modèle convectif. Nous nous sommes donc intéressés principalement à la variable $\frac{d}{dt}L_\delta$ appelée taux de mélange. La mesure de cette variable a été effectuée par régression linéaire à partir de l'instant où le front a parcouru la moitié de la cellule ($t_0 \sim 50000$, voir figure 5.5).

Une autre approche aurait été possible pour caractériser notre système. En effet, nous aurions pu chercher le coefficient M_e qui ajuste au mieux nos profils de concentration moyenne avec une loi du type :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{C}) = 0$$
$$f(\bar{C}) = u_0 \, \frac{\bar{C}}{\bar{C} + (1-\bar{C})/M_e}$$

L'avantage de cette forme est qu'elle décrit l'évolution de chacune des concentrations $\bar{C}(x,t)$ et non pas uniquement celle de la largeur globale du profil L_δ. Cependant, il s'est avéré que dans de nombreux cas, l'ajustement avec un tel modèle n'était pas acceptable. Notons également qu'un tel modèle peut également être discuté à partir des mesures de $\frac{d}{dt}L_\delta$. En effet, avec une telle fonction de flux, nous avons :

$$\frac{d}{dt}L_\delta = f'(C=\delta) - f'(C=1-\delta) \sim \frac{1-M_e}{M_e^2} \tag{5.14}$$

Nous ne présenterons donc que les résultats qui concernent $\frac{d}{dt}L_\delta$.

5.4 Influence du rapport de viscosités

La figure 5.6 montre la dépendance de la vitesse d'étalement normalisée $\frac{d}{dt}L_\delta/u_0$ en fonction du rapport de viscosités $\beta = \ln(\eta_2/\eta_1)$. Sur cette figure, deux séries de points ont été tracées. La première correspond à des hétérogénéités faibles ($\sigma_f = 0.2$) et la seconde à des hétérogénéités plus importantes ($\sigma_f = 0.8$). On constate que la dépendance est linéaire. On peut faire plusieurs remarques importantes sur ces courbes.

La première est que les deux séries de courbes ont sensiblement la même pente. Autrement dit, les hétérogénéités n'ont qu'un effet additif sur la loi de mélange. Ce premier constat invalide les descriptions du type Koval dans lesquelles les hétérogénéités sont prises en compte par la multiplication du rapport de viscosités M_e par un facteur d'hétérogénéité ($M_e \rightarrow HM_e$).

Pour comparer nos résultats avec les prédictions issues de la littérature, on pourrait se demander s'il existe des changements de régime selon que le contraste de viscosités prédomine ou non sur les hétérogénéités. A partir de ces séries de courbes, il semble impossible de distinguer plusieurs régimes. La courbe est continue lorsque $\beta \rightarrow 0$. Si le système se trouve dans un même régime dans tout l'espace de paramètres exploré, ce régime est donc nécessairement celui où les hétérogénéités dominent. Le contraste de viscosités n'est toutefois pas négligeable puisque la vitesse de l'étalement augmente linéairement avec $|\beta|$. On a vu de plus dans la section précédente qu'il donnait une loi de mélange de type convectif pour un rapport de viscosités aussi petit que $\beta = -0.1$.

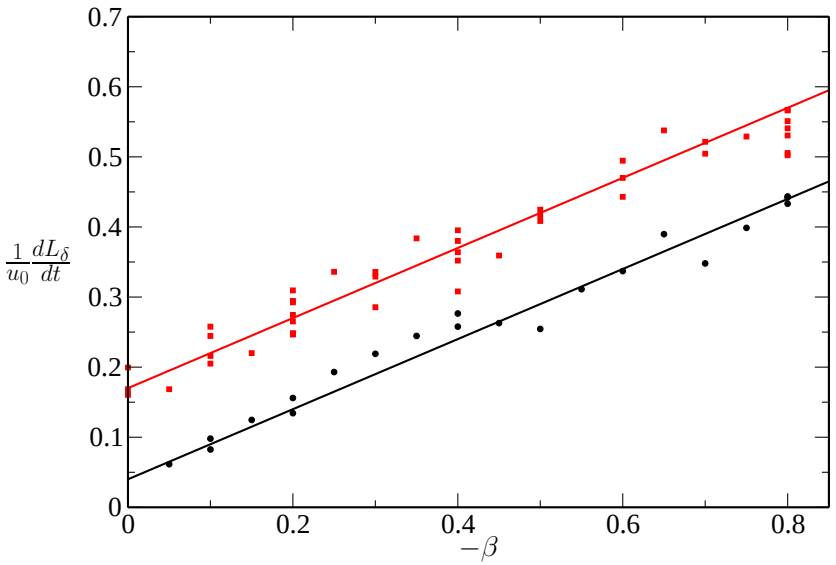


FIG. 5.6. *Vitesse d'étalement normalisée en fonction du rapport de viscosités* $-\beta$. *Les ronds noirs correspondent à* $\sigma_f = 0.2$, *les carrés rouges correspondent à* $\sigma_f = 0.8$. *Les autres paramètres sont* $u_0 = 0.004$, $\lambda = 2.2$ *et* $D_0 = 5.10^{-5}$. *Les deux séries de points sont ajustées par des droites de pente* $1/2$.

On remarque également que la pente de ces droites est de $1/2$, ce qui correspond également à la pente obtenue par Zimmerman et Homsy [103] dans le cas homogène (et donc pour $\sigma_f = 0$). Ce résultat est également en accord avec la dépendance linéaire observée expérimentalement par Bacri *et al.* [5].

Maintenant que nous avons déterminé l'influence du rapport de viscosités, nous allons étudier celle des hétérogénéités.

5.5 Influence de l'amplitude des hétérogénéités

La figure 5.7 montre la dépendance de la vitesse d'étalement en fonction de l'amplitude des hétérogénéités σ_f, pour deux contrastes de viscosités différents, $\beta = -0.2$ (points noirs) et $\beta = -0.8$ (carrés rouges). On constate que la dépendance est également linéaire. De plus, il semble que la pente de ces droites soit identique pour les deux rapports de viscosités utilisés. Il est assez remarquable de constater qu'encore une fois, les deux effets semblent purement additifs. Ce résultat suggère qu'il n'y a aucun couplage entre les effets visqueux et les hétérogénéités puisqu'une loi du type : $\frac{dL_\delta}{dt} = A\beta + B\sigma_f$ semble convenir. Un autre point remarquable est la continuité de cette courbe lorsque $\sigma_f \to 0$. Le régime en milieu poreux homogène ($\sigma_f = 0$) semble donc peu différent du régime en milieu hétérogène ($\sigma_f = 0.8$), aucune transition n'est en tout cas visible sur nos courbes.

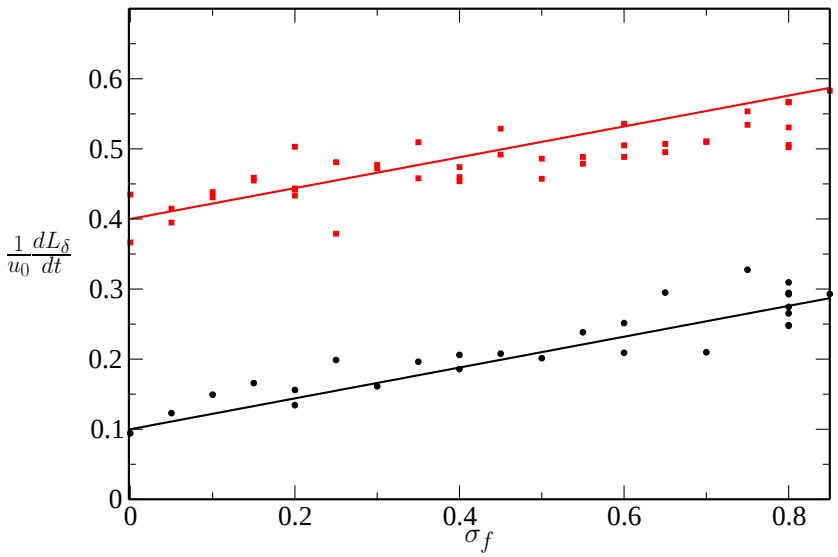


FIG. 5.7. *Vitesse d'étalement normalisée en fonction de l'amplitude des hétérogénéités σ_f. Les ronds noirs correspondent à $\beta = -0.2$, les carrés rouges correspondent à $\beta = -0.8$. Les autres paramètres sont : $u_0 = 0.004$, $\lambda = 2.2$ et $D_0 = 5.10^{-5}$. Les deux séries de points sont ajustées par des droites de pente* 0.22.

5.6 Influence de la longueur de corrélation

Un autre paramètre qui caractérise le milieu poreux est sa longueur de corrélation. La figure 5.8 montre l'influence de cette dernière sur la vitesse d'étalement. De la même manière que précédemment, nous avons utilisé deux rapports de viscosités différents : $\beta = -0.2$ (ronds noirs) et $\beta = -0.8$ (carrés rouges). On peut constater également que la dépendance est à nouveau linéaire avec un coefficient directeur indépendant du rapport de viscosités. Une autre série de simulations avec un σ_f différent nous a montré que la vitesse d'étalement pouvait se mettre finalement sous la forme : $\frac{dL_\delta}{dt}/u_0 = -A\beta + B\lambda\sigma_f$. Une régression linéaire nous donne ainsi : $A \sim 0.5$ et $B \sim 0.1$.

Notons également que la présence d'une résonance entre la longueur de corrélation et la largeur des doigts en milieu homogène aurait pu se manifester par une non-monotonie de la courbe. Une telle résonance n'est donc pas apparente dans nos simulations. Il est cependant possible que nous n'ayons pas exploré des gammes de longueurs de corrélation suffisamment étendues.

On remarquera également que pour des longueurs de corrélation assez importantes, les mesures sont assez bruitées. Ces fluctuations viennent du fait que j'ai pris une taille de milieu fixe pour l'ensemble des réalisations. Il aurait fallu ustiliser une taille de milieu proportionnelle à la longueur de corrélation. Cela n'a pas pu être fait car il aurait fallu utiliser des réseaux beaucoup trop grands (une longueur de corrélation doublée implique un nombre de noeuds quadruplé). Ceci explique également pourquoi nous n'avons pas voulu explorer des longueurs de corrélation plus grandes.

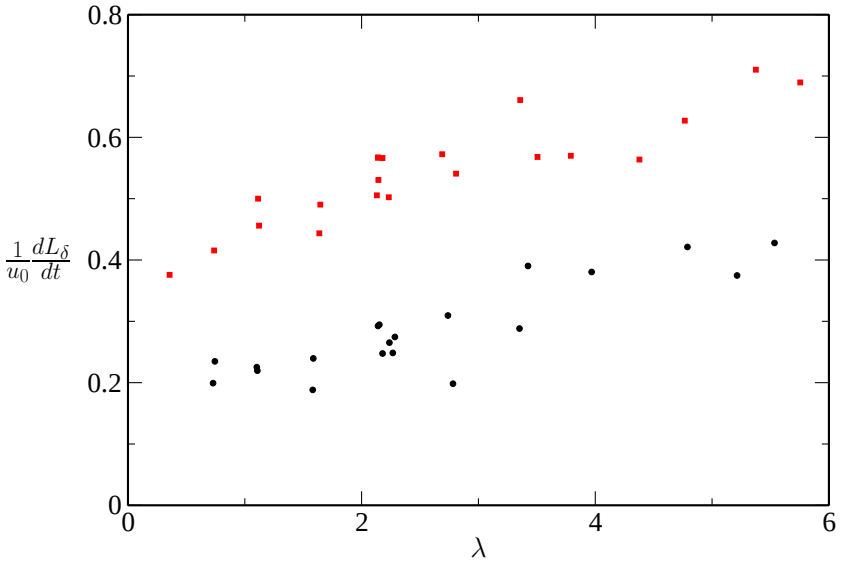


FIG. 5.8. *Vitesse d'étalement normalisée en fonction de la longueur de corrélation λ. Les ronds noirs correspondent à $\beta = -0.2$, les carrés rouges à $\beta = -0.8$. Les autres paramètres sont : $u_0 = 0.004$, $\sigma_f = 0.8$ et $D_0 = 5.10^{-5}$.*

5.7 Influence du coefficient de diffusion mésoscopique

Pour compléter cette étude, nous avons étudié l'influence du coefficient de diffusion mésoscopique. La figure 5.9 montre la dépendance du taux de mélange en fonction du coefficient D_0 pour deux rapports de viscosités différents ($\beta = -0.2$ et $\beta = -0.8$). On constate sur cette figure que $\frac{dL_\delta}{dt}/u_0$ décroît avec D_0 pour les faibles valeurs de D_0, et semblent avoir une valeur asymptotique pour les valeurs de D_0 assez grandes : la diffusion diminue la vitesse d'étalement. Ce résultat est intuitif dans la mesure où la diffusion mésoscopique a pour effet de "gommer" les contrastes de viscosités qui sont le moteur du mélange. Remarquons toutefois que le contraste de viscosités joue toujours un rôle non négligeable : il y a toujours un rapport de l'ordre de deux entre les deux séries. Cette figure peut se comparer à la courbe 4.5 (page 50) obtenue dans le cas du contraste de viscosités stabilisant. On avait obtenu un coefficient de dispersion normalisé qui était croissant avec le coefficient de diffusion mésoscopique : la diffusion mésoscopique favorisait le mélange. En effet, lorsque le coefficient de diffusion était suffisamment grand, le système se comportait comme dans le cas du traceur passif. Ici, le contraste de viscosités reste toujours le moteur du mélange.

5.8 Commentaires

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés au problème de la digitation visqueuse en milieu poreux hétérogène. Nous avons montré que pour la gamme de paramètres utilisés, les effets de viscosité et d'hétérogénéité étaient découplés. Ce résultat est assez surprenant car on aurait pu

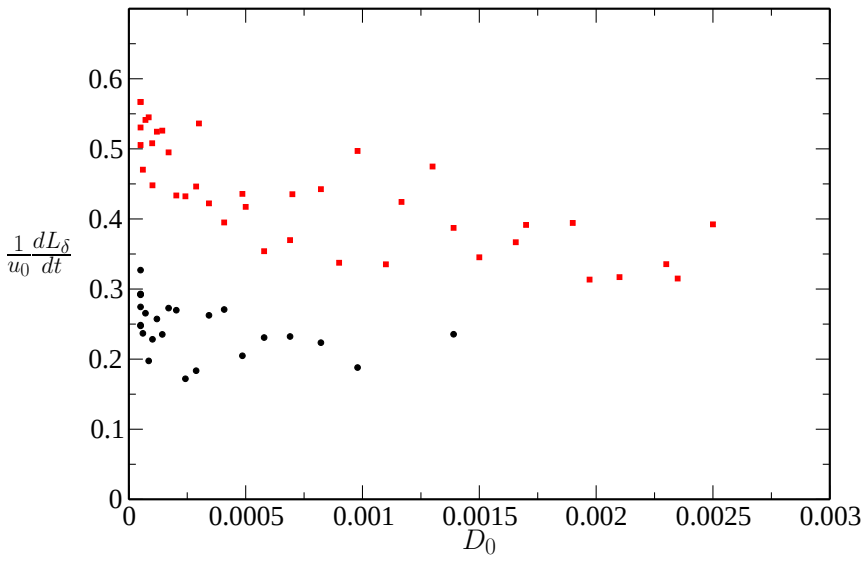


FIG. 5.9. *Vitesse d'étalement normalisée en fonction du coefficient de diffusion mésoscopique* D_0. *Les ronds noirs correspondent à* $\beta = -0.2$, *les carrés rouges à* $\beta = -0.8$. *Les autres paramètres sont :* $u_0 = 0.004$, $\lambda = 2.2$ *et* $\sigma_f = 0.8$.

s'attendre au contraire à un couplage entre les chemins préférentiels du milieu poreux et le contraste de viscosités. Les effets visqueux restent ici les mêmes quelles que soient les hétérogénéités. Il n'y a donc aucun régime dans lequel un des deux effets prédomine sur l'autre. Ceci est en contradiction avec certaines prédictions de la littérature, comme le couplage avec les longueurs de corrélation [89] ou bien une différence de comportement [2] selon que $\beta \ll \lambda\sigma_f^2$ ou $\beta \gg \lambda\sigma_f^2$. Ce résultat invalide également les modèles du type Koval, dans la mesure où les hétérogénéités ne peuvent pas être introduites par un facteur multiplicatif.

Il est toutefois nécessaire de relativiser ces résultats par plusieurs remarques. La première est que nous nous sommes restreints dans notre étude à un contraste de viscosités faible. Un grand nombre d'études numériques ou expérimentales portent sur des rapports de viscosités plus élevés (Homsy [43] utilise principalement $\beta \sim 3$). Toutefois, notre dépendance en β est en bon accord avec celle de Homsy (en homogène). Un autre point restrictif de notre étude est l'impossibilité de déterminer la loi d'évolution moyenne (convective ou diffusive). Même si la vitesse d'étalement apparaît clairement comme linéaire au cours du temps (pour $|\beta| \gtrsim 0.2$), il nous est impossible de détecter une transition entre un régime convectif et diffusif. Une telle transition devrait apparaître au moins lorsque $\beta \to 0$. Ce problème provient d'une part du fait que la dérivée de la concentration moyenne est rarement une gaussienne, comme c'était le cas pour les rapports de viscosités stabilisants. D'autre part, nous avons étudié le système sur des temps trop courts pour pouvoir observer des variations significatives de $\frac{dL_\delta}{dt}(t)$ (nécessaires pour caractériser les régimes diffusifs). Une solution possible pour pallier ce problème serait d'augmenter significativement la longueur du milieu (d'au moins un facteur 4).

Le fait que la dérivée de la concentration moyenne soit si mal définie nous empêche également

de comparer quantitativement nos résultats avec les prévisions stochastiques comme dans le cas du contraste de viscosités stabilisant. Il semble en effet vain de vouloir mesurer un coefficient b_{max} sur nos profils de concentration moyenne.

Soulignons également que, comme pour la plupart des travaux issus de la littérature, nous nous sommes restreints à l'étude de la vitesse d'étalement. On peut penser que l'on pourrait mettre en évidence des régimes différents ou même des phénomènes de couplage si on avait caractérisé notre système par d'autres grandeurs physiques, le problème principal étant évidemment le choix des grandeurs pertinentes. Des tentatives non fructueuses ont été effectuées avec des grandeurs géométriques de l'interface (longueurs, transformées de Fourier...).

Chapitre 6

Conclusion

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés au problème des écoulements de fluides miscibles en milieu poreux. Ce problème, nous l'avons vu, possède un vaste champ d'applications. Pour modéliser des milieux suffisamment réalistes, nous avons introduit des hétérogénéités de perméabilité (approche de milieu poreux continu). Dans une telle approche, les hétérogénéités sont introduites avec une loi de distribution suffisamment contrôlée pour permettre une étude quantitative (approche stochastique). L'évolution des fluides dans ce milieu poreux a été simulée par la méthode BGK sur réseau. Cette méthode possède l'avantage de pouvoir simuler facilement les équations de Darcy-Brinkman dans un milieu poreux hétérogène. Elle permet également d'introduire un second fluide miscible dans notre système. Nous avons pu ainsi étudier le comportement macroscopique de deux fluides miscibles ayant des viscosités différentes.

Nous avons étudié les trois cas possibles suivant que le contraste de viscosités est nul, stabilisant ou déstabilisant. Ce dernier cas donne lieu au phénomène de digitation visqueuse [81]. Cette étude nous a permis de tester les lois d'évolutions établies par un développement aux faibles perturbations. Les résultats semblent en très bon accord dans le cas du traceur ou lorsque le contraste de viscosités est stabilisant. Dans le cas d'un système déstabilisé par la viscosité, les résultats obtenus ne permettent pas de comparer nos résultats à l'analyse stochastique présentée dans ce mémoire. De plus, ces résultats ont montré que dans la gamme de paramètres explorés, il n'y avait aucun couplage entre les hétérogénéités et la viscosité. Ceci contredit certaines prévisions intuitives trouvées dans la littérature. Pour poursuivre cette étude, il serait utile d'étudier des milieux poreux plus larges et d'explorer des gammes de paramètres plus étendues et sur des temps plus longs.

Comme autres perspectives de cette étude, on pourrait étudier l'influence de la gravité pour des fluides de densités différentes. Un application intéressante qui se rapproche de la digitation visqueuse est l'étude des phénomènes de dissolution en milieu poreux. En effet, si dans un milieu poreux on injecte à l'entrée une espèce chimique qui le dissout (et donc qui le rend plus perméable), on peut s'attendre à observer des phénomènes de digitations [36]. Le fluide injecté pénètre préférentiellement les zones les plus perméables, qu'il rend encore plus perméables par le phénomène de dissolution. Ainsi, une excroissance de fluide injecté ne cessera de se développer, dans un phénomène similaire à la digitation visqueuse. La figure 6.1 montre un exemple de front de dissolution dans notre milieu poreux modèle. Ce type de système se rencontre par exemple dans les sols lorsqu'une espèce acide attaque un sol calcaire.

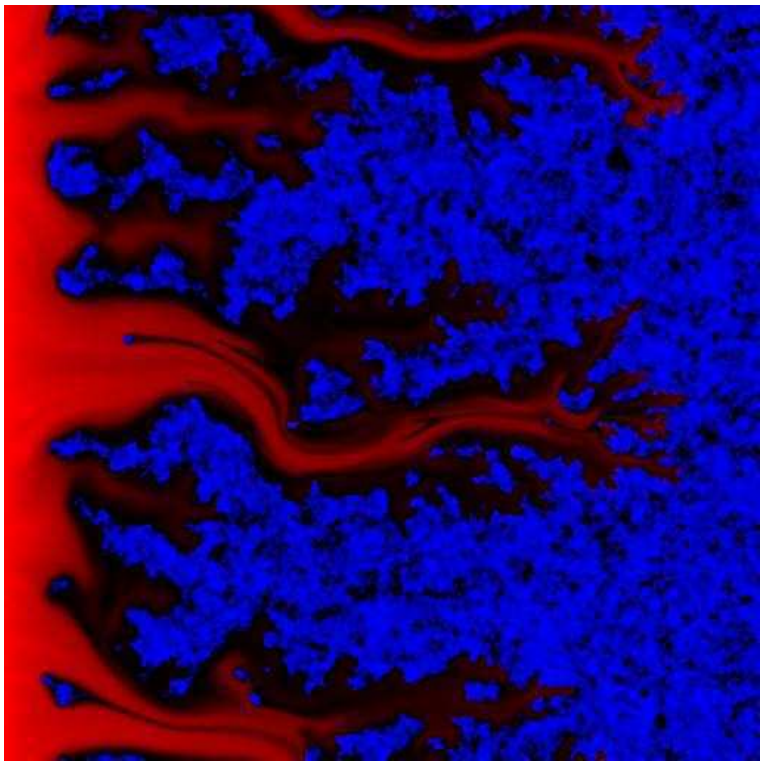


FIG. 6.1. *Front de dissolution d'un milieu poreux. La perméabilité du milieu poreux est en bleu (foncé pour les zones les plus perméables). L'espèce chimique dissolvante est représentée en rouge. On constate que l'attaque du milieu poreux par l'espèce chimique donne des motifs similaires à la digitation visqueuse.*

Deuxième partie

Écoulements triphasiques confinés

Introduction

Nous avons vu dans la partie précédente comment modéliser un milieu poreux à l'échelle macroscopique en supposant des lois d'évolution de l'écoulement et du mélange à l'échelle mésoscopique (loi de Darcy-Brinkman et loi de convection-diffusion). Si ces lois sont très souvent utilisées dans la littérature pour décrire des mélanges en milieu poreux ou en cellule de Hele-Shaw [43, 16, 17, 27, 28, 88], elles peuvent cependant parfois paraître contestables. Un exemple est la loi de Darcy homogène. Nous avons vu dans la partie précédente qu'elle décrit difficilement un véritable milieu poreux. En particulier, elle est incapable de rendre compte de la dispersivité macroscopique du milieu. La loi de Darcy homogène semble *a priori* plus adaptée pour décrire l'écoulement moyenné dans la tranche d'une cellule de Hele-Shaw. Malheureusement, même dans ce cas, cette loi paraît limitée. Dans le cas de la digitation visqueuse en cellule de Hele-Shaw par exemple, lorsqu'on déplace un fluide par un autre moins visqueux, les expériences montrent que la taille de doigt typique sélectionnée par le système est comparable à l'épaisseur de la cellule [71, 59]. Les équations de Darcy (avec un champ de perméabilités bidimensionnel et uniforme) et de convection-diffusion conduisent à une sélection qui est complètement différente d'après l'analyse de Tan et Homsy [88]. En effet, la taille de doigt (*i.e.* la longueur d'onde la plus instable) prédite par l'analyse de stabilité linéaire est indépendante de la perméabilité du milieu (et donc de l'épaisseur de la cellule). La raison d'une telle différence est évidemment que le modèle du milieu poreux ne rend aucun compte de la structure tridimensionnelle de l'écoulement dans une cellule de Hele-Shaw [59]. Ce problème peut également se rencontrer au niveau des pores d'un milieu poreux. Pour décrire correctement un milieu confiné, il est parfois nécessaire d'étudier plus en détail les comportements du système à l'échelle microscopique afin d'établir des lois de comportements des grandeurs moyennes plus appropriées.

Nous allons nous intéresser désormais à la structure de l'écoulement dans l'épaisseur d'une cellule de Hele-Shaw. Les équations du mouvement de notre système sont celles de Navier-Stokes au lieu de Darcy. L'objectif des travaux présentés ici était initialement de poursuivre ceux de Hickernel et Yortsos [37] et de Manickam et Homsy [66], dans lesquels les auteurs étudient l'influence d'un profil de viscosité non-monotone[1] sur la stabilité du déplacement d'un fluide par un autre dans un milieu poreux homogène. Les auteurs ont montré en particulier qu'une telle configuration était toujours instable quel que soit le profil de viscosité dès lors qu'il est non-monotone.

Nous étudierons le déplacement, dans l'épaisseur de la cellule de Hele-Shaw, de deux fluides dont la loi de viscosité de mélange est non-monotone. Insistons sur le fait que dans tout ce qui suit, les fluides sont miscibles, par conséquent il ne sera jamais question de tension de surface.

[1] Une exemple de mélange dont la loi de viscosité est non-monotone est le mélange eau - propan-2-ol.

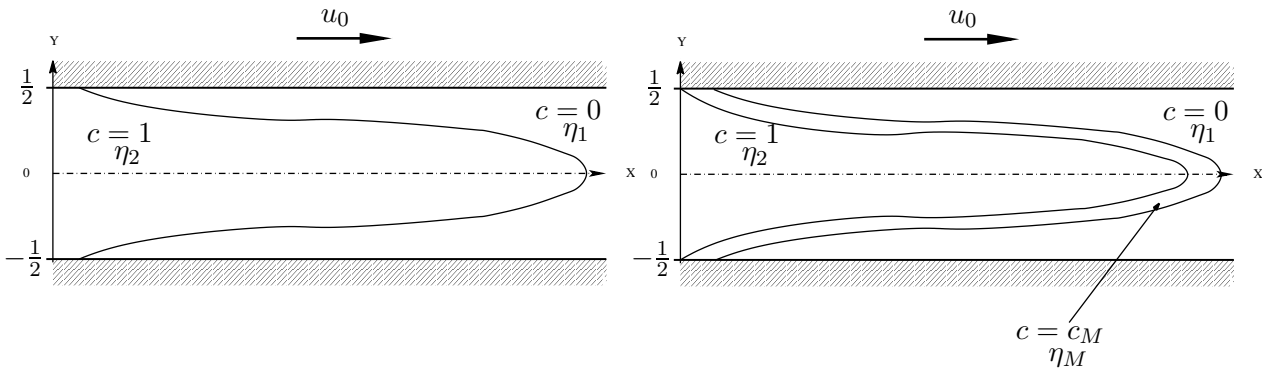


FIG. 6.2. *Schéma du déplacement d'un fluide par un autre dans la tranche d'une cellule de Hele-Shaw. A gauche : il n'y a pas de mélange entre les deux fluides. A droite : le mélange entre les deux fluides fait intervenir une zone de concentration intermédiaire (c_M). Cette zone, dans le cas d'une loi de viscosité non-monotone, correspond à une viscosité extrêmale (η_M) dans le système.*

Étude d'un écoulement triphasique confiné

L'étude d'écoulements de fluides miscibles dont la loi de viscosité de mélange est non-monotone est *a priori* assez complexe. Nous avons donc essayé de modéliser le problème le plus simplement possible. Nous allons voir que cette modélisation nous a conduit à considérer ce système comme étant composé de trois phases distinctes sans tension de surface.

Lorsque deux fluides de viscosités différentes η_1 et η_2 se mélangent, la loi de viscosité locale du fluide est une fonction de la concentration de mélange c. Dans la plupart des cas, cette fonction est monotone. Citons comme exemple la loi exponentielle, très répandue dans la littérature et utilisée dans la première partie de ce mémoire : $\eta(c) = \eta_1 \exp(c \ln(\eta_2/\eta_1))$. Il existe par contre des cas[2] où cette loi de viscosité n'est pas monotone. La viscosité présente donc un extrêmum pour une concentration intermédiaire de mélange c_M, comme le montre la figure 6.2. Ce type de comportement peut modifier radicalement la dynamique d'un système.

Le déplacement miscible d'un fluide par un autre dans une cellule de Hele-Shaw a déjà été étudié en partie dans le cadre d'une loi de viscosité monotone [75, 15]. Ces études ont montré que la diffusion moléculaire a peu de rôle sur la dynamique du système lorsque le débit est assez grand. La dynamique dépend essentiellement du rapport de viscosités des deux fluides et notamment du fait que la viscosité est croissante ou décroissante dans la direction de l'écoulement.

Lorsque la loi de viscosité est non-monotone, on comprend aisément que le comportement sera plus complexe, et pourra cette fois-ci être influencé de manière cruciale par la diffusion moléculaire, qui va faire apparaître une zone de viscosité exrêmale entre les deux fluides poussant et poussé. La figure 6.2 schématise cet effet. Elle montre le déplacement d'un fluide de viscosité η_1 par un fluide de viscosité η_2, au débit volumique imposé u_0. Lorsque les deux fluides se mélangent, il apparaît dans la zone de mélange toutes les concentrations intermédiaires entre 0 et 1. Si la loi de viscosité de mélange est non-monotone, le mélange va ainsi entraîner l'apparition d'une zone où la viscosité est extrêmale. La question qui se pose alors est de déterminer comment l'apparition de cette zone

[2]Dans le mélange du propanol et de l'eau par exemple.

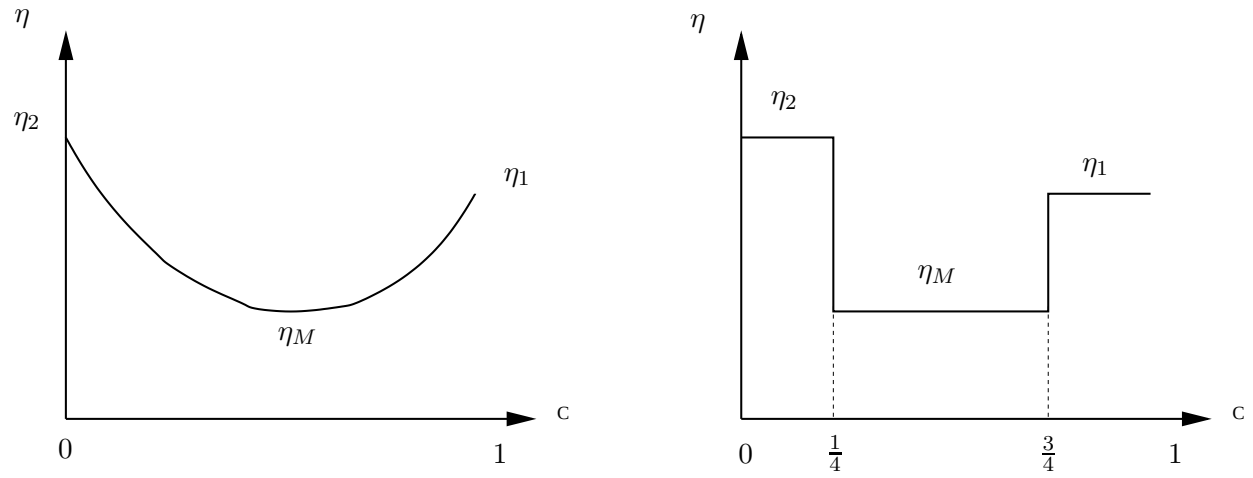


FIG. 6.3. *Deux différentes lois de viscosité de mélange. A gauche, la loi est continue. A droite, la loi est en créneau. Cette dernière loi nous permet de modéliser le système par un écoulement triphasique. Les phases sont séparées par les iso-concentrations* $c = 1/4$ *et* $c = 3/4$.

va modifier la dynamique du système.

D'un point de vue quantitatif, nous avons choisi pour simplifier ce système une loi de viscosité de mélange en créneau (voir figure 6.3). Une telle loi permet de définir trois régions de viscosité constante. Les interfaces entre ces régions seront repérées par les iso-concentrations $c = 1/4$ et $c = 3/4$. Un tel choix explique le titre de cette partie. En effet, notre système va être décrit comme un écoulement triphasique. Les "phases" seront en pratique les régions de même viscosité. Bien sûr les différentes phases restent miscibles et surtout ne présentent pas de tension de surface. Cette analogie entre notre système et un système triphasique explique que nous parlerons aussi en termes de saturations (la saturation est définie comme la proportion d'une des phases par rapport aux autres). Nous allons également donner arbitrairement des noms à ces "phases" : **w** (comme Water) à la phase correspondant à $c \in [0; 0.25]$, **o** (comme Oil) pour la "phase" $c \in [0.25; 0.75]$ et **g** (comme Gas) pour la "phase" $c \in [0.75; 1]$. Ce type de modèle nous permet entre autres de décrire notre système par un système d'équations de conservations (en considérant que chacune des espèces se conserve).

Nous verrons que le système d'équations de conservations présente l'intéressante propriété de devenir elliptique dans certains cas. L'étude de ce système s'est donc révélée intéressante sur le plan analytique, dans la mesure où nous ne connaissons pas de solutions à ce problème. En outre, il se trouve que ce type d'équations se retrouve dans des systèmes physiques très variés. Citons les exemples des écoulements supersoniques [22], des modèles d'écoulements triphasiques en milieu poreux [8, 52, 10, 47], des modèles d'élasticité à deux phases [48] ou de la sédimentation de suspensions bidisperses [7]. L'étude de systèmes elliptiques peut donc se révéler fort utile dans d'autres contextes physiques.

Cette partie du mémoire va être divisée en plusieurs chapitres. Dans le premier chapitre nous ferons un bref rappel de la théorie des ondes cinématiques. Ce chapitre n'a pas pour objectif d'être exhaustif mais seulement de présenter certaines notions qui nous serviront par la suite. Pour un approfondissement sur le sujet, le lecteur est invité à consulter des ouvrages spécialisés sur ce vaste sujet [97, 41, 42]. Nous verrons en particulier le cas à une et à deux variables. Le chapitre 2 est

consacré à l'étude analytique, dans le cadre de la théorie des ondes cinématiques et dans l'hypothèse de lubrification, des écoulements triphasiques confinés. Dans les chapitres 3 et 4, nous chercherons numériquement, à l'aide de la méthode BGK sur réseau, des solutions au problème de Riemann, dans l'hypothèse de lubrification puis en utilisant les équations complètes d'écoulement. Le chapitre 5 conclut cette deuxième partie.

Chapitre 1

Théorie des ondes cinématiques

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux solutions d'équations différentielles de conservations. Un système d'équations différentielles d'ordre n est dit conservatif s'il peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \vec{0} \tag{1.1}$$

où $u_i(x,t)$ sont les quantités conservées et $f_i(x,t)$ leur fonction de flux, et les vecteurs sont de dimension n. Dans ce chapitre, nous étudierons le cas particulier où les fonctions de flux ne dépendent que de l'état $\vec{u}$. Il est en particulier exclu qu'elles dépendent des gradients de $\vec{u}$. Cette hypothèse est importante dans la mesure où, dans notre cas, cela ne sera vrai que lorsque les gradients seront faibles. L'équation (1.1) peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{0} \tag{1.2}$$

avec les n^2 coefficients de la matrice $\mathbf{A}$ définis par $a_{ij} \hat{=} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$.

Le problème qui nous intéresse est celui dit de **Cauchy** : on cherche l'évolution temporelle des quantités $u_i(x,t)$ qui ont un profil $\vec{u}(x, t=0)$ connu à l'instant initial et satisfont l'équation (1.2).

Pour des raisons de simplicité, nous étudierons dans un premier temps les systèmes d'équations de conservations à une seule dimension (une quantité u est conservée). Le cas à une dimension nous permettra d'introduire les principales notions nécessaires à la résolution de tels systèmes comme celles des invariants de Riemann [78] et des ondes cinématiques. Nous verrons ensuite le cas à deux dimensions qui nous servira plus particulièrement tout au long de cette deuxième partie.

1.1 Cas à une variable

Dans cette section, l'évolution d'une fonction $u(x,t)$ est décrite par l'équation de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{1.3}$$

Cette équation se met sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.4}$$

Le profil initial $u(x, t = 0)$ est supposé connu. Pour simplifier cette étude, nous supposerons par la suite que cette fonction est décroissante spatialement.

Pour étudier l'évolution d'un tel profil une méthode couramment utilisée consiste à chercher des grandeurs conservées dans le plan spatio-temporel. De telles grandeurs sont appelées *invariants de Riemann*.

1.1.1 Les invariants de Riemann

Le principe de la méthode des invariants de Riemann dans le cas à une dimension consiste à déterminer les courbes d'iso-valeurs de la grandeur $u(x, t)$ dans le plan spatio-temporel. Si on se déplace suivant la direction (dx, dt), la variation de u vaut :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt \tag{1.5}$$

D'après l'équation (1.4), la quantité u est donc conservée si :

$$\frac{dx}{dt} = f'(u) \tag{1.6}$$

La courbe solution de l'équation (1.6) est appelée *caractéristique de u*. Dans le cas de systèmes à une dimension, il apparaît clairement que $f'(u)$ est la vitesse de propagation de la quantité u. La caractéristique de u est donc sa "trajectoire" dans le plan (x, t).

Il faut rappeler que la fonction $f(u)$ n'est pas forcément linéaire, ce qui implique que les différentes valeurs de u peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'évolution du profil va donc dépendre du comportement de $f'(u)$. On peut en effet envisager deux cas différents :

$\mathbf{f'(u)}$ est une fonction monotone décroissante. Dans une telle configuration, le profil va s'étaler au cours du temps. En effet, les faibles valeurs de $u(x)$ qui se trouvent à l'avant du profil initial $u(x, t = 0)$, allant plus vite que les fortes valeurs (à l'arrière du profil), elles vont donc s'éloigner (voir figure 1.1) de celles-ci. Ce comportement s'appelle *auto-étalement*.

$\mathbf{f'(u)}$ n'est pas une fonction monotone décroissante. Les choses changent radicalement dès lors qu'il existe des domaines sur lesquels la fonction $f'(u)$ est décroissante. On peut en effet constater sur la figure 1.2 que certaines valeurs de u en amont (u_2 par exemple) se déplacent plus vite que d'autres en aval (u_4). Ceci entraîne alors un *auto-raidissement* local du front. Le front ne peut cependant pas se raidir indéfiniment. Il va en effet arriver un moment où une quantité en amont (u_2) rattrapera une quantitié en aval (u_4). Cet instant est facilement prévisible car il correspond au croisement de deux caractéristiques (voir figure 1.2). Mathématiquement, cela se traduit par une discontinuité locale de $u(x, t)$. Cette discontinuité s'appelle un **choc**. Cette solution discontinue n'est évidemment pas acceptable physiquement. L'apparition d'un choc traduit simplement le fait que le système physique ne peut plus être décrit uniquement par des équations de conservations. Pour obtenir la structure "réelle" du choc il est alors nécessaire de modifier localement la description du système pour rendre compte des comportements aux petites échelles spatiales. Les conséquences et le traitement d'un choc dépendent de la physique du système particulier auquel on s'intéresse. Si on prend l'étude de la dynamique d'une vague, un choc se traduit par l'apparition d'une déferlante. Nous reviendrons sur l'étude des chocs dans la section suivante.

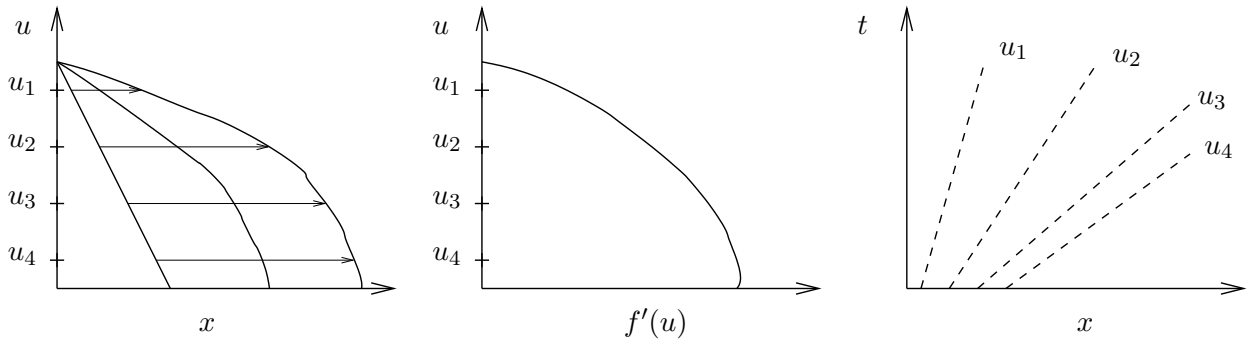


FIG. 1.1. *Évolution d'un profil dans le cas d'un auto-étalement. A gauche : trois profils $u(x)$ pour des instants différents. Au centre : courbe des vitesses $f'(u)$, cette fonction est décroissante. A droite : courbes caractéristiques de u_1, u_2, u_3 et u_4. On note que les caractéristiques ne se croisent jamais.*

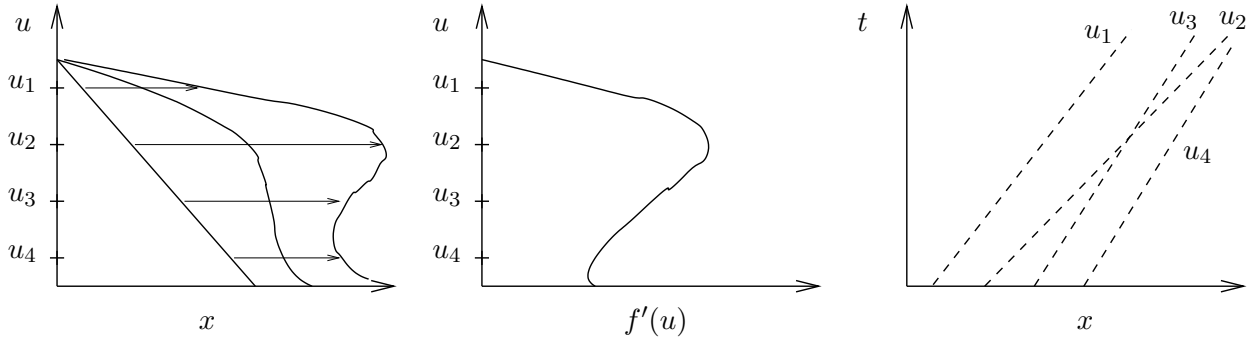


FIG. 1.2. *Évolution d'un profil dans le cas d'un auto-raidissement. A gauche : trois profils $u(x)$ pour des instants différents, le troisième profil ne peut pas être une solution. Au centre : courbe des vitesses $f'(u)$, cette fonction n'est pas monotone. A droite : courbes caractéristiques de u_1, u_2, u_3 et u_4. On note que les caractéristiques u_2 et u_3 se croisent, on doit avoir l'apparition d'un choc.*

Remarque : pour un profil initial $u(x, t = 0)$ croissant, on pourrait montrer que le comportement d'auto-étalement apparaît lorsque $f'(u)$ est croissante et celui d'auto-raidissement lorsque $f'(u)$ est décroissante.

La nature des solutions du problème de Cauchy change radicalement suivant que la fonction $f(u)$ est convexe ou non, elle dépend également de la nature du profil $u(x, t = 0)$. La méthode des caractéristiques permet de prédire l'évolution temporelle d'un profil donné à court terme. Pour les temps très longs, la méthode s'applique dans le cas particulier de l'auto-étalement, mais ne permet pas de déterminer l'évolution d'un profil quelconque (elle ne permet pas de prédire, notamment, l'évolution d'un choc). Les invariants de Riemann sont toutefois utilisés comme schéma numérique d'intégration. Il existe un cas générique au problème de Cauchy pour lequel un grand nombre d'études analytiques ont été faites et pour lequel on peut déterminer analytiquement un ensemble de solutions. Il s'agit du problème de Riemann qui consiste à prendre comme profil initial $u(x, t = 0)$ une fonction échelon.

1.1.2 Le problème de Riemann

On cherche des solutions de l'équation de conservation (1.4) dont le profil initial est de la forme :

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

u_g et u_d sont donc respectivement en amont (à gauche) et en aval (à droite) de l'écoulement. De la même façon que précédemment, nous supposerons que $u_g > u_d$. La méthode générale pour déterminer les solutions satisfaisant le problème de Riemann consiste à chercher des profils auto-similaires, c'est-à-dire des fonctions $U(\zeta)$ de la variable $\zeta = x/t$. Ces solutions auto-similaires sont appelées *ondes cinématiques*. Le changement de variable dans l'équation (1.4) nous donne alors l'équation suivante :

$$(f'(U) - \zeta)\frac{dU}{d\zeta} = 0 \tag{1.8}$$

Les solutions **continues** du problème de Riemann doivent donc vérifier soit $\frac{dU}{d\zeta} = 0$, soit $(f'(U) - \zeta) = 0$. Nous avons vu cependant qu'il était important de considérer également les solutions discontinues (chocs).

Les trois types d'ondes sont :

L'onde constante ($\mathcal{C}$) : cette solution U_C est triviale, cependant elle intervient très souvent. On verra par exemple qu'elle intervient dans les chocs qui ne sont pas de contact.

L'onde de raréfaction ($\mathcal{R}$) : cette solution U_R correspond à une solution qui s'auto-étale dans le temps. Cette solution est continue et non constante, d'après (1.8), elle vérifie donc :

$$f'(U_R(\zeta)) = \zeta$$

Pour qu'une telle solution existe, f' doit être inversible sur l'intervalle $[u_g; u_d]$ considéré. On retrouve donc la condition de monotonocité de la fonction f'. De plus, $U_R(\zeta)$ étant décroissante, on retrouve également que f' doit être une fonction décroissante sur $[u_g; u_d]$.

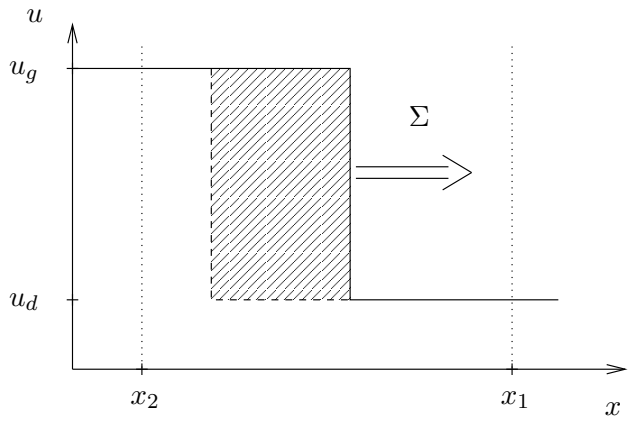


FIG. 1.3. *Schéma traduisant la conservation de u dans la région limitée par x_1 et x_2 durant l'intervalle de temps Δt. Le choc se déplace à la vitesse Σ. L'accroissement Δu de la quantité u pendant Δt correspond à la zone hachurée.*

L'onde de choc ($\mathcal{S}$) : cette solution U_S est une solution $U(\zeta)$ discontinue. Si la discontinuité de U se fait en $\zeta = \Sigma$, cela signifie que le choc se propage à la vitesse Σ. Étant donné que la solution est discontinue, l'équation (1.4) ne permet pas de déterminer la vitesse de ce choc. Cependant, celle-ci doit satisfaire la relation de **Rankine-Hugoniot** :

$$f(u_g) - f(u_d) = \Sigma(u_g - u_d) \tag{1.9}$$

Cette relation traduit la conservation de la quantité u entre l'amont et l'aval du choc. En effet, si l'on considère deux points x_1 et x_2 (voir figure 1.3) suffisamment éloignés du choc pour que l'expression du flux soit valable (u est continue), on peut alors exprimer de deux manières différentes l'accroissement Δu de u entre x_1 et x_2 durant le laps de temps Δt. D'une part, étant donné que le choc se déplace à la vitesse Σ, on a : $\Delta u = \Sigma \Delta t(u_g - u_d)$. Cette variation est aussi la quantité de u entrant dans cette région pendant Δt. On en déduit : $\Sigma \Delta t(u_g - u_d) = (f(u_g) - f(u_d))\Delta t$.

Il faut noter que les solutions au problème de Riemann peuvent parfois être constituées d'une succession de plusieurs types d'ondes. Pour relier un état u_g à un état u_d, il est alors nécessaire d'introduire des états intermédiaires reliés entre eux par des morceaux de divers types d'ondes. On peut schématiser une solution de la façon suivante :

$$u_g \xrightarrow{\mathcal{R}} u_1 \xrightarrow{\mathcal{S}} u_2 \xrightarrow{\mathcal{S}} u_d$$

Notons de plus que cette approche permet uniquement de déterminer un ensemble de solutions au problème de Riemann. Elle ne permet en aucun cas de déterminer la solution physique du problème. L'indétermination de la solution provient essentiellement du fait que l'on peut introduire un nombre infini d'états intermédiaires :

$$u_g \xrightarrow{\mathcal{W}_1} u_1 \xrightarrow{\mathcal{W}_2} u_2 \xrightarrow{\mathcal{W}_3} \dots \xrightarrow{\mathcal{W}_n} u_d \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}_i = \mathcal{R}, \mathcal{S} \text{ ou } \mathcal{C}$$

Cependant, il est fréquent que le système adopte la solution la plus simple possible, c'est-à-dire faisant intervenir le moins d'états intermédiaires. Le problème de l'indétermination de la solution

se pose surtout lorsqu'on ne peut pas connecter l'état de gauche à celui de droite par une simple onde de raréfaction. Il est alors nécessaire d'introduire au moins une onde de choc. Ce choc va être déterminé par sa vitesse (ou de façon équivalente par ses états amont/aval). Celle-ci ne peut pas être déterminée *a priori* à partir des seules équations de conservations. Pour la déterminer, il est nécessaire de raffiner la description du système au niveau des discontinuités. De plus, on peut signaler un certain nombre de critères de sélection introduits dans la littérature, qui permettent de restreindre l'ensemble des solutions, comme la condition d'entropie de Lax [61] et celle de Liu [65] (qui est une généralisation de la précédente). La condition d'entropie de Lax impose pour un choc reliant u_g à u_d que sa vitesse Σ vérifie l'inégalité $f'(u_d) \leq \Sigma \leq f'(u_g)$. Un autre critère de sélection très largement répandu dans la littérature consiste à imposer un **choc de contact**, pour lequel : $f'(u_g) = \Sigma$.

Il apparaît cependant que les critères de sélection dépendent fortement du système physique considéré. Il semble donc vain d'essayer de trouver la solution physique d'un problème donné uniquement en considérant l'équation de conservation.

Il existe un grand nombre d'applications de la théorie des ondes cinématiques à une variable. On l'a déjà vu, ce type d'équations a beaucoup été utilisé pour décrire les lois de mélange diphasique en milieu poreux (e.g. [57]). Les ondes cinématiques servent également pour décrire par exemple le trafic routier, l'évolution de l'épaisseur d'un film mince sur un plan incliné [73, 64], ou les suspensions monodisperses [67]. Le célèbre problème du doigt de Saffman-Taylor [81] peut aussi être vu comme un problème de sélection de vitesse de choc d'une équation de conservation.

1.1.3 Un exemple d'application : le déplacement de deux fluides miscibles visqueux en cellule de Hele-Shaw

Pour illustrer la section précédente nous allons considérer le cas particulier d'un déplacement miscible d'un fluide par un autre entre deux plaques. Les deux fluides ont des viscosités différentes.

L'approche par des équations de conservations de ce système, utilisée par Yang *et al.* [98], Rakotomalala *et al.* [75, 95] et Lajeunesse *et al.* [60, 59] s'est révélée fructueuse. Ceci nous a amenés à l'utiliser dans le cas à trois phases. Le choix de ce système est dû au fait que nous utiliserons ces résultats dans la troisième partie de ce mémoire.

On considère une cellule de Hele-Shaw infinie dans laquelle s'écoule à vitesse débitante constante u_0 un fluide de viscosité η_1. A un instant donné, on déplace le fluide en place par un second fluide de viscosité η_2. Le schéma du déplacement est présenté sur la figure 1.4. Si l'on note $c(x,t)$ la proportion de fluide 2 en x, et $f(c)$ la fonction de flux normalisée, c satisfait une équation de conservation :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_0 \frac{\partial f(c)}{\partial x} = 0 \tag{1.10}$$

En supposant que les effets de diffusion sont négligeables, on peut calculer la fonction de flux dans l'approximation d'un écoulement quasi-parallèle (hypothèse de lubrification). Cette hypothèse revient en fait à supposer que les gradients $\frac{\partial c}{\partial x}$ sont très faibles. On a alors :

$$f(c) = \frac{1}{2} \frac{(2M-3)c^3 + 3c}{1 + (M-1)c^3} \tag{1.11}$$

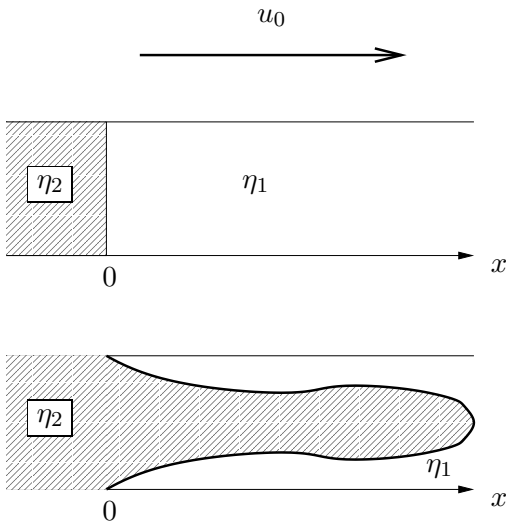


FIG. 1.4. *Déplacement d'un fluide de viscosité η_1 par un fluide de viscosité η_2, à vitesse débitante imposée u_0. La figure du haut représente la configuration initiale du déplacement, celle du bas représente un état ultérieur.*

Avec $M = \frac{\eta_1}{\eta_2}$. Le problème qui nous intéresse ici est bien du type Riemann. En effet, la cellule étant initialement remplie de fluide 1 ($c = 0$), à l'instant $t = 0$, on injecte à l'entrée le second fluide 2 ($c = 1$). La condition initiale s'écrit donc :

$$c(x, t = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Pour trouver les solutions, il faut étudier les variations de $f'(c)$. Une simple étude de fonction nous montre qu'il existe deux comportements distincts, illustrés dans la figure 1.5.

Si $M < 3/2$ **:** la fonction $f(c)$ est concave et $f'(c)$ est strictement décroissante sur $[0; 1]$. La solution du problème est donc une onde de raréfaction.

Si $M > 3/2$ **:** $f(x)$ est convexe-concave et la fonction $f'(c)$ est décroissante sur un intervalle $[c_M; 1]$ et croissante sur l'intervalle $[0; c_M]$. La solution ne peut être composée seulement d'une onde de raréfaction. La figure 1.6 montre des solutions possibles faisant intervenir une onde de raréfaction ($\mathcal{R}$), une onde de choc ($\mathcal{S}$) et une onde constante ($\mathcal{C}$) :

$$c_g = 1 \xrightarrow{\mathcal{R}} c_* \xrightarrow{\mathcal{C}} c_* \xrightarrow{\mathcal{S}} c_d = 0$$

Les trois solutions de la figure 1.6 correspondent à des valeurs intermédiaires c_* différentes. Dans la mesure où le choc satisfait la relation de Rankine-Hugoniot ($\Sigma = f(c_*)/c_*$ dans le cas de la figure 1.6), la valeur de c_* est liée à la vitesse du choc. Remarquons sur la solution en rouge de la figure 1.6, que la détermination graphique du choc (vitesse et hauteur) est obtenue en égalant les aires hachurées contenues entre la courbe $f'(c)$ et le segment de droite Σ de hauteur c_*. La question qui se pose à partir de cette description est de déterminer quelle vitesse de choc (ou quelle largeur c_*) le système va sélectionner.

La courbe en bleu représente la solution pour laquelle le choc est de contact : le choc et la raréfaction ne sont pas connectés par une onde constante. La courbe en noir représente la

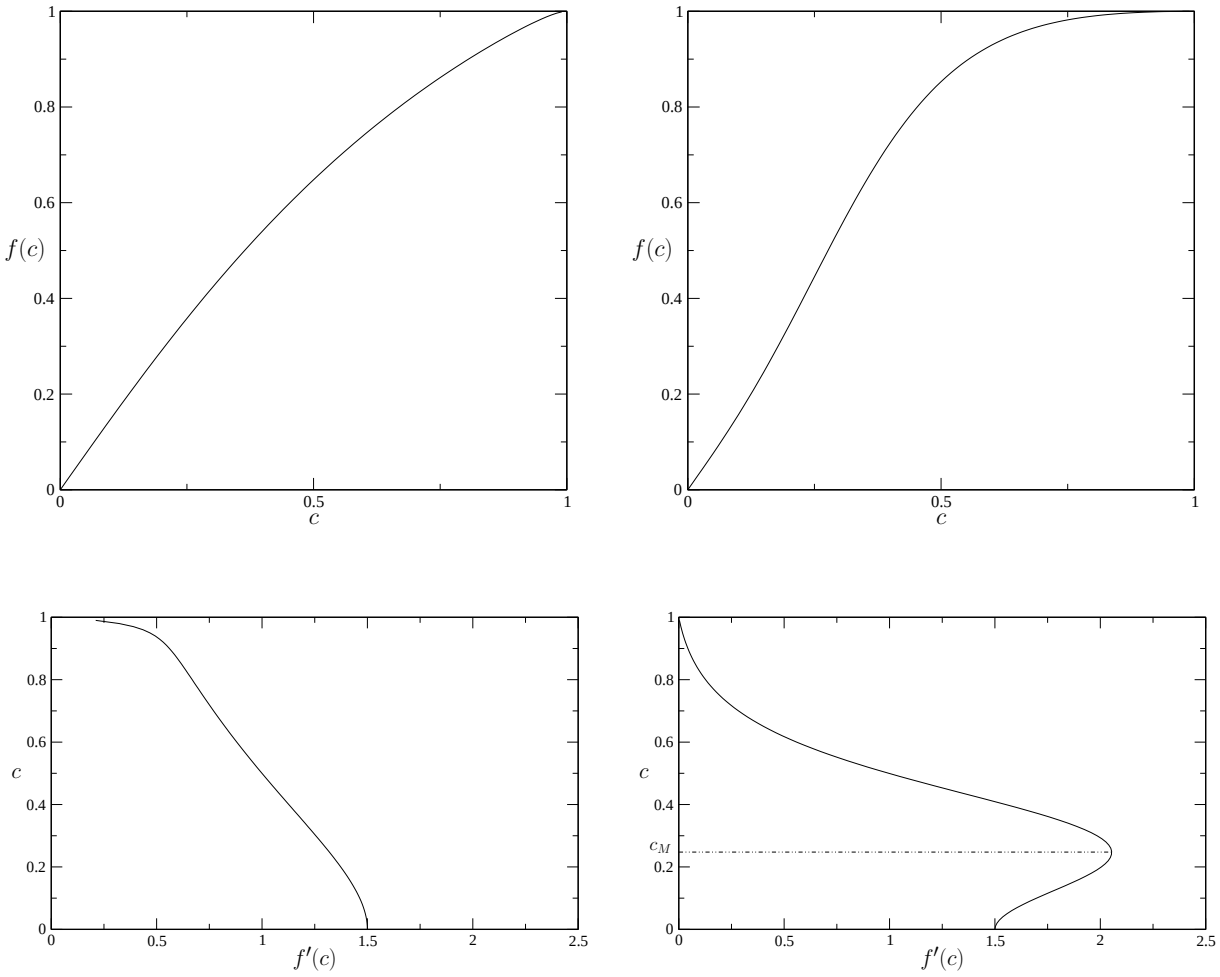


FIG. 1.5. *Fonction de flux $f(c)$ (en haut) et vitesse de propagation $f'(c)$ (en bas) de la proportion c de fluide injecté pour deux contrastes de viscosités différents. A gauche : $M = 0.1$, le fluide déplacé est moins visqueux. $f(c)$ est concave, $f'(c)$ est décroissante. A droite : $M = 10$, le fluide déplacé est plus visqueux. La fonction $f(u)$ est convexe-concave, $f'(c)$ est non-monotone, par conséquent, la solution du problème de Riemann nécessite la présence d'un choc.*

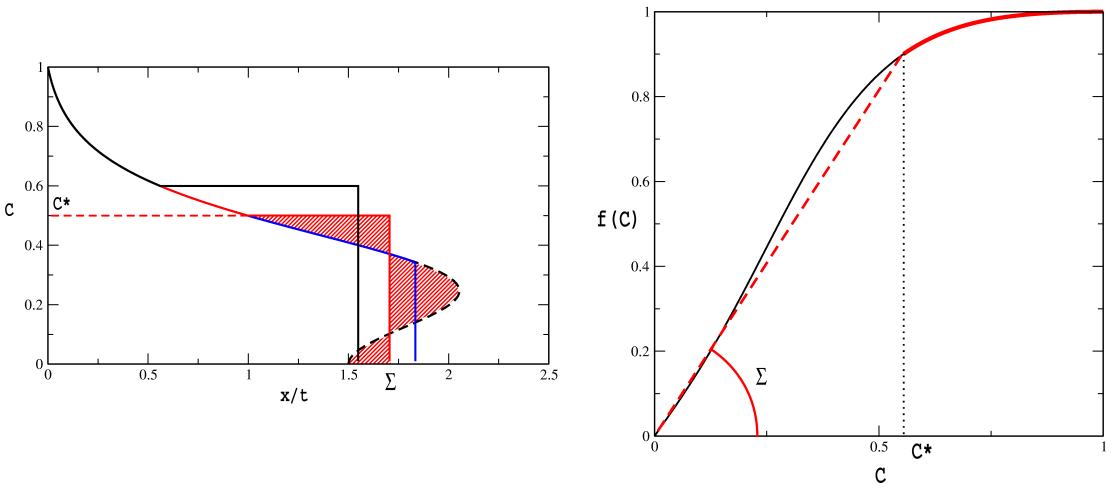


FIG. 1.6. *A gauche : Différentes solutions du problème de Riemann dans le cas $M = 10$. Chacune des courbes correspond à une vitesse de choc différente. La solution en bleu correspond à un choc de contact. La solution en noir correspond à la solution numérique obtenue par P. Watzky [95]. Pour la solution en rouge, la vitesse Σ est déterminée graphiquement en égalant les aires hachurées contenues entre la courbe $f'(c)$ (en pointillés) et la droite Σ, et qui se trouvent de part et d'autre de la droite Σ. A droite : Représentation d'une solution (en rouge) à partir de la fonction de flux (en noir). La vitesse du choc est la pente de la droite reliant $f(c_*)$ à $f(0)$ (en pointillés).*

solution observée numériquement par P. Watzky [95]. Nous aurons l'occasion d'étudier plus en détail cette solution numérique dans la troisième partie.

Maintenant que nous avons vu comment se comporte une équation de conservation scalaire, nous sommes en mesure d'étudier le problème plus complexe dans lequel deux grandeurs obéissent à une équation de conservation.

1.2 Cas à deux variables

Nous nous intéressons maintenant au problème de Cauchy pour un système à deux variables. Soient $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ satisfaisant des équations de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions de u_1 et u_2. Cette équation se met sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\vec{u})\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{0} \tag{1.14}$$

où $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$. De la même façon que précédemment, on cherche en général à résoudre le problème de Cauchy. La résolution d'un tel problème dépend des propriétés de la matrice $\mathbf{A}$ et notamment de ses valeurs propres. La matrice $\mathbf{A}$ ayant des coefficients réels, trois cas peuvent se présenter :

Système hyperbolique : les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ sont réelles et distinctes. C'est le cas le plus facile à résoudre car la démarche analytique est similaire à celle décrite précédemment[1].

Système elliptique : les deux valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont complexes et conjuguées l'une de l'autre. Ce cas nous intéressera particulièrement car il n'existe pas de solutions analytiques connues à ce problème.

Système parabolique : $\mathbf{A}$ possède une valeur propre double. Tout comme le système elliptique, il n'existe pas de solution générale pour décrire ce système.

La matrice $\mathbf{A}(\vec{u})$ dépend des variables (u_1, u_2), le type d'équation (hyperbolique, elliptique ou parabolique) peut varier suivant les valeurs de (u_1, u_2). Il est donc nécessaire de caractériser le système dans l'espace (u_1, u_2).

1.2.1 Système hyperbolique

La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable, soient λ^- et λ^+ ses deux valeurs propres (telles que $\lambda^- < \lambda^+$). On définit de plus $\vec{l^{\pm}} = (l_1^{\pm}, l_2^{\pm})$ et $\vec{r^{\pm}} = (r_1^{\pm}, r_2^{\pm})$ les vecteurs propres respectivement à gauche et à droite de $\mathbf{A}$.

Comme nous l'avons dit, la méthode de résolution de ce type d'équations est similaire à celle du cas à une seule variable. L'évolution d'un profil $\vec{u}(x,t)$ est déterminée à l'aide des invariants de Riemann. Pour déterminer des quantités qui se conservent temporellement, il suffit de multiplier l'équation (1.14) à gauche par $\vec{l^+}$ (ou $\vec{l^-}$), ce qui donne les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t}(l_1^+ u_1 + l_2^+ u_2) + \lambda^+ \frac{\partial}{\partial x}(l_1^+ u_1 + l_2^+ u_2) = 0 \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(l_1^- u_1 + l_2^- u_2) + \lambda^- \frac{\partial}{\partial x}(l_1^- u_1 + l_2^- u_2) = 0 \tag{1.16}$$

On constate sur ces équations que les combinaisons linéaires de u_1 et u_2, $(l_1^+ u_1 + l_2^+ u_2)$ et $(l_1^- u_1 + l_2^- u_2)$, se propagent respectivement aux vitesses λ^+ et λ^-. Ces deux composantes sont appelées caractéristiques. Il est important de noter que la vitesse de chaque caractéristique dépend de (u_1, u_2) et donc de l'autre caractéristique au même point. Dans le plan (x,t), les courbes caractéristiques ne sont donc plus linéaires. Il devient beaucoup plus complexe d'étudier analytiquement l'évolution d'un front en utilisant cette méthode. En fait, la méthode des caractéristiques n'est utilisée que comme méthode numérique ([35]).

De la même façon que pour le problème à une variable, il est plus aisé d'étudier les solutions du problème particulier de Riemann.

Le problème de Riemann

Nous rappelons que le problème consiste à étudier l'évolution d'un profil initial :

$$(u_1, u_2)(x, t=0) = \begin{cases} \vec{u}_g = (u_{g1}, u_{g2}) & \text{si } x < 0 \\ \vec{u}_d = (u_{d1}, u_{d2}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

[1] L'équation de conservation à une dimension est une équation hyperbolique.

La méthode consiste à chercher des solutions auto-similaires dépendant de la variable $\zeta = x/t$. A ce niveau, il est important de préciser quelques points. Les solutions du problème de Cauchy étant de la forme $\vec{u}(x,t)$, la solution peut être représentée à un instant t par une "trajectoire" dans le plan (u_1, u_2), paramétrée par x. Ce chemin est orienté et va de $\lim_{x\to-\infty} \vec{u}(x,t) = \vec{u}_g$ à $\lim_{x\to+\infty} \vec{u}(x,t) = \vec{u}_d$ et dépend *a priori* du temps. Par contre, les chemins correspondant aux solutions auto-similaires sont stationnaires dans le temps.

Un changement de variable $\zeta = x/t$ dans l'équation (1.14) nous donne :

$$-\zeta \frac{d\vec{U}}{d\zeta} + \mathbf{A}\frac{d\vec{U}}{d\zeta} = \vec{0} \tag{1.17}$$

On constate immédiatement que $\vec{U}$ est solution dérivable (et donc continue) seulement si $\frac{d\vec{U}}{d\zeta}$ est vecteur propre (à droite) de la matrice $\mathbf{A}$. Il doit donc être colinéaire à un des deux vecteurs $\vec{r}^{+}$ ou $\vec{r}^{-}$. Soit $\frac{d\vec{U}}{d\zeta} \propto \vec{r}^{\pm}$, on a alors

$$(\lambda^{\pm} - \zeta)\frac{d\vec{U}}{d\zeta} = 0$$

ce qui implique $\lambda^{\pm} = \zeta$ ou $\frac{d\vec{U}}{d\zeta} = \vec{0}$. De la même façon que précédemment, la connexion d'un état $\vec{u}_g$ à un état $\vec{u}_d$ se fait par l'intermédiaire de trois types d'ondes cinématiques.

L'onde de raréfaction : elle correspond aux solutions dérivables (*i.e.* $\frac{d\vec{U}}{d\zeta}$ est fini). Ces solutions doivent vérifier deux conditions :

- $\frac{d\vec{U}}{d\zeta}$ est colinéaire à $\vec{r}^{+}(\vec{U})$ ou à $\vec{r}^{-}(\vec{U})$. La tangente en tout point du chemin doit donc être colinéaire à $\vec{r}^{+}$ ou à $\vec{r}^{-}$. Il en résulte que le chemin doit être situé sur une courbe (dans l'espace (u_1, u_2)) issue de l'intégration suivante :

$$\begin{pmatrix} dU_1 \\ dU_2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} r_1^+ \\ r_2^+ \end{pmatrix} d\zeta \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} dU_1 \\ dU_2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} r_1^- \\ r_2^- \end{pmatrix} d\zeta \tag{1.18}$$

  le facteur de proportionnalité étant quelconque. A partir d'un état $\vec{u}_g = (u_{g1}, u_{g2})$ donné, on peut donc tracer deux courbes, l'une pour les vitesses rapides et l'autre pour les lentes, déterminant l'ensemble des états qui peuvent être connectés par une onde de raréfaction.
- $\lambda^{\pm}(U_1, U_2) = \zeta$, donc l'état $\vec{U}$ se propage à la vitesse $\lambda^{\pm}$. De la même façon que dans le cas à une variable, il est nécessaire que la vitesse sur l'onde de raréfaction soit croissante sur le chemin suivi (un état à gauche ne peut pas aller plus vite qu'un état à droite). Mathématiquement, cette condition se traduit par :

$$\vec{\nabla}\lambda^{\pm}.\, d\vec{U} \geq 0 \tag{1.19}$$

  Sur chaque courbe de raréfaction, il n'y a donc en général qu'une seule direction possible pour une onde de raréfaction, l'autre direction conduisant généralement à un choc. La figure 1.7 (gauche) montre un exemple de chemins de raréfaction construits à partir de l'état $\vec{u}_g$, dans le plan (u_1, u_2). Les chemins de vitesses rapides et lentes y sont notées $\mathcal{R}_+$ et $\mathcal{R}_-$, respectivement. Sur cette figure, les portions de courbes qui ne vérifient pas la relation (1.19) ont été tracées en pointillés.

L'onde constante : cette solution est représentée par un simple point dans le plan (u_1, u_2).

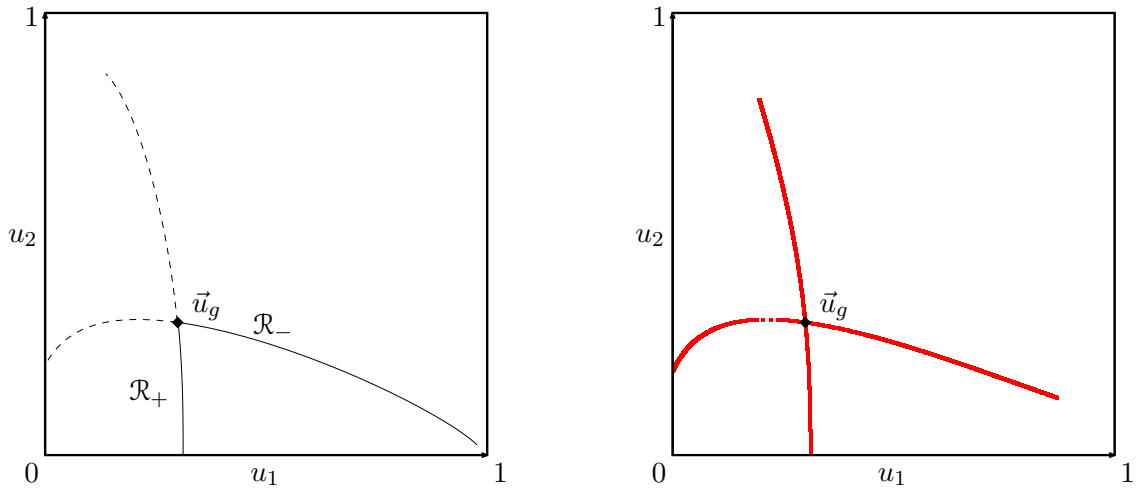


FIG. 1.7. *Exemple de solutions pouvant être connectées à l'état $\vec{u}_g$ par une onde de raréfaction (à gauche) et par un choc (à droite). Les portions de courbe en pointillés sur la figure de gauche correspondent à des chemins de raréfaction interdits depuis l'état $\vec{u}_g$ car la vitesse décroît le long de ces chemins.*

L'onde de choc : comme dans le cas à une variable, il est possible d'avoir une solution discontinue reliant l'état $\vec{u}_g$ à l'état $\vec{u}_d$. Si cette discontinuité se propage à la vitesse Σ, cette vitesse doit satisfaire la relation de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{u}_g) - f_1(\vec{u}_d) \\ f_2(\vec{u}_g) - f_2(\vec{u}_d) \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} u_{g1} - u_{d1} \\ u_{g2} - u_{d2} \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

A partir d'un état $\vec{u}_g$ donné, nous pouvons tracer dans l'espace (u_1, u_2) l'ensemble des états $\vec{u}_d$ qui peuvent être connectés par un choc. Cette courbe, appelée courbe de Hugoniot, est l'ensemble des points pour lesquels il existe Σ tel que l'équation (1.20) soit vérifiée. On peut remarquer sur l'exemple de la figure 1.7 (droite) que les courbes de Hugoniot ressemblent à celles des raréfactions. En fait ces courbes sont tangentes 2 à 2 en $\vec{u}_g$.

Les solutions du problème de Riemann peuvent faire intervenir successivement plusieurs ondes pour relier un état $\vec{u}_g$ à un état $\vec{u}_d$. Si les deux états ne sont pas sur une même courbe de raréfaction ou de Hugoniot, il est nécessaire d'introduire au moins un état intermédiaire :

$$\vec{u}_g \xrightarrow{\mathcal{W}_1} \vec{u}_* \xrightarrow{\mathcal{W}_2} \vec{u}_d \text{ avec } \mathcal{W}_i = \mathcal{R}_\pm, \mathcal{S}_\pm \text{ ou } \mathcal{C}_\pm$$

Cet état intermédiaire doit se trouver à l'intersection de courbes de raréfaction (ou de Hugoniot) issues de $\vec{u}_g$ et de $\vec{u}_d$. La figure 1.8 montre une construction de solution du type :

$$\vec{u}_g \xrightarrow{\mathcal{R}_-} \vec{u}_* \xrightarrow{\mathcal{R}_+} \vec{u}_d$$

On notera qu'un autre état intermédiaire $\vec{u}_\sharp$ aurait pu être introduit :

$$\vec{u}_g \xrightarrow{\mathcal{R}_+} \vec{u}_\sharp \xrightarrow{\mathcal{R}_-} \vec{u}_d$$

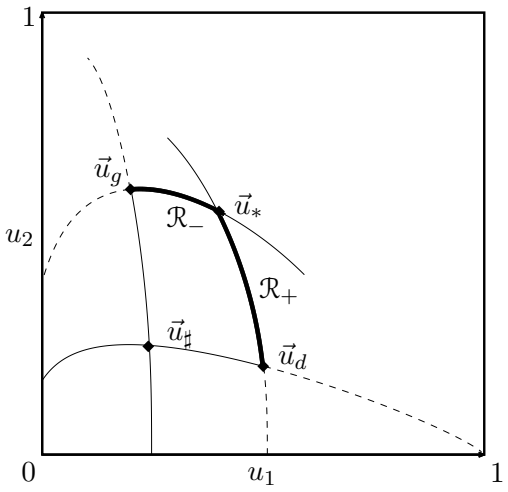


FIG. 1.8. *Exemple de solution du problème de Riemann, constituée de deux ondes de raréfaction. Ces deux ondes sont connectées au point $\vec{u}_*$ qui est l'intersection de la courbe de raréfaction $\mathcal{R}_-$ issue de $\vec{u}_g$ et de $\mathcal{R}_+$ issue de $\vec{u}_d$.*

Cependant cette solution n'est pas acceptable car la vitesse n'est pas croissante sur le chemin. En effet la vitesse en $\vec{u}_\sharp$ passe alors de $\lambda^+(\vec{u}_\sharp)$ à $\lambda^-(\vec{u}_\sharp)$. De la même façon que dans les systèmes à une dimension, les solutions peuvent faire intervenir un ensemble infini de solutions. Il existe également un certain nombre de critères de sélection (Lax [61], Liu [65], choc de contact...).

1.2.2 Système elliptique

Nous avons vu dans la section précédente une méthode de résolution du problème de Riemann qui nécessite l'existence de valeurs propres réelles. Il arrive cependant que le système d'équations aboutisse à des valeurs propres complexes.

Comme exemple de système pouvant impliquer des équations de conservation de type elliptique, on peut citer la dynamique moléculaire avec des équations d'état du type van der Waals [62], la propagation du son, le mélange triphasique en milieu poreux ou la dynamique de milieux élastiques [94].

Malheureusement, il n'existe pas de méthode analytique générale pour résoudre ce genre de système. Nous ne pouvons donc qu'énumérer certaines approches adoptées dans la littérature. On trouve notamment :

Patzek *et al.* [52] : dans le cadre de la modélisation du mélange triphasique en milieu poreux. La présence d'une zone elliptique dans l'espace des phases est suffisante selon les auteurs pour rejeter le modèle qui y aboutit. Cette démarche est éventuellement compréhensible dans des modèles de systèmes très complexes nécessitant un très grand nombre d'approximations. Dans notre cas, nous verrons qu'il n'y a aucune raison de penser que nos hypothèses sont moins valables dans une région que dans une autre.

Blunt *et al.* [10] : en résolvant numériquement des équations de mélange en milieu poreux, les auteurs montrent qu'une solution stable est possible, à condition d'ajouter numériquement

une certaine quantité de diffusion. Nous verrons dans le chapitre suivant que l'augmentation de la diffusion permet effectivement de trouver une solution car elle permet d'éviter la zone elliptique.

Keyfitz *et al.* [53] : certains mathématiciens considèrent que les seules solutions admissibles sont celles dans lesquelles le système entre ou sort d'une zone elliptique par l'intermédiaire d'un choc. La relation de Rankine-Hugoniot est en effet valable quelle que soit la nature du sytème d'équations.

Batchelor *et al.* [7] : une démarche intéressante a été proposée par Batchelor *et al.* . En étudiant la sédimentation bidisperse (sédimentation d'un mélange de deux types de particules), les auteurs interprètent la présence d'une instabilité par le fait que le système d'équations de conservations des deux espèces de billes devient elliptique. Cette démarche est suffisamment intéressante pour que nous la détaillions un peu plus. En effet, si on reporte cet argument à notre système, cela signifierait qu'un état parallèle (autrement dit une onde constante) serait toujours instable dans la zone elliptique (même avec $Re = 0$).

L'approche de Batchelor consiste à faire un développement aux faibles perturbations autour d'un état de base $\vec{u}_0$. En posant :

$$\vec{u}(x,t) = \vec{u}_0 + \vec{u}'(x,t) \tag{1.21}$$

l'équation de conservation (1.2) devient :

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \mathbf{A}(\vec{u}_0)\frac{\partial \vec{u}'}{\partial x} = \vec{0} \tag{1.22}$$

En prenant des perturbations de la forme

$$\vec{u}'(x,t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \exp i(kx - \omega t) \tag{1.23}$$

on obtient l'équation de dispersion :

$$\frac{\omega}{k}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}(\vec{u}_0)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

Si la matrice $\mathbf{A}$ possède deux valeurs propres complexes, celles-ci sont conjuguées l'une de l'autre et sont donc de la forme : $\lambda = \alpha \pm i\sigma$. En notant $\vec{u}^+$ et $\vec{u}^-$ les vecteurs propres dont la partie imaginaire est respectivement positive et négative, on constate que $\vec{u}^+$ satisfait la relation de dispersion suivante :

$$\frac{\omega}{k} = \alpha + i\sigma, \qquad \text{avec } \sigma > 0 \tag{1.25}$$

Le mode $\vec{u}^+$ croît donc exponentiellement avec le temps. On en déduit qu'un état uniforme $\vec{u}_0$ situé dans une zone elliptique est toujours instable, le mode instable est alors $\vec{u}^+$, le taux de croissance de ce mode est la partie imaginaire de la valeur propre. Il est à noter que dans la plupart des situations physiques les fonctions de flux ne dépendent seulement de $\vec{u}_0$ que dans la mesure où les gradients restent faibles (et où les termes diffusifs, par exemple, peuvent être négligés). En conséquence, cette analyse ne peut s'appliquer qu'aux "grandes" longueurs d'onde. Ce calcul montre donc qu'un état uniforme (onde de type $\mathcal{C}$) dans une zone elliptique est toujours instable. Il ne nous permet pas,

toutefois, de résoudre le problème de Riemann (ni celui de Cauchy). Plus précisément, cet argument montre qu'un point dans le plan (u_1, u_2) sera instable s'il correspond à des gradients nuls (cas d'un point unique). En revanche, l'argument n'est pas nécessairement extrapolable au cas d'un point dans la zone elliptique appartenant à un chemin (et correspondant donc à des gradients finis). Au plus peut-on penser que dans le cas d'une onde de raréfaction (pour laquelle les gradients décroissent avec le temps), les états de la zone elliptique pourraient devenir instables aux temps longs.

1.3 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre, la méthode pour obtenir des solutions du problème de Riemann pour des systèmes d'équations de conservations. Nous avons étudié le cas à une et deux variables. On pourrait aisément généraliser cette méthode à des dimensions supérieures. Nous avons vu en particulier que dans le cas à deux dimensions, les solutions du problème de Riemann sont relativement faciles à déterminer lorsque les équations sont purement hyperboliques. Le problème devient difficile à résoudre dès lors qu'une zone elliptique (ou parabolique) se développe. Dans le chapitre suivant, nous allons étudier un système particulier qui obéit à des équations de conservations. Si dans certains cas, le système est de type purement hyperbolique dans l'espace (u_1, u_2), nous verrons que dans d'autres cas, il peut apparaître des régions parabolique ou elliptique. Nous nous intéresserons essentiellement à deux problématiques. La première sera de chercher numériquement des solutions du problème de Riemann vérifiant les équations du modèle. La deuxième sera de déterminer comment un système physique va se comporter lorsqu'il rencontre une zone elliptique.

Chapitre 2

Écoulement triphasique quasi-parallèle

Dans ce chapitre nous nous proposons de modéliser un déplacement de fluides dont le profil de viscosité est non-monotone. La modélisation consiste essentiellement à considérer un profil de viscosité en “créneau". Le système se comporte alors comme un mélange à trois fluides miscibles. Nous allons présenter dans ce chapitre le système d'équations de conservations régissant l'évolution de chacune des “phases".

2.1 Position du problème

Pour faciliter la modélisation d'un déplacement de fluides dont la loi de viscosité de mélange est non-monotone, on s'intéresse ici à un profil de viscosité en créneau. Si l'on note c la concentration du fluide déplaçant, le profil de viscosité est supposé de la forme :

$$\eta(c) = \begin{cases} \eta_{\mathbf{w}} = \eta_1 & \text{si } c < 0.25 & \text{“phase } \mathbf{w}\text{”} \\ \eta_{\mathbf{o}} = \eta_1 \Lambda^{-1} & \text{si } 0.25 \leq c \leq 0.75 & \text{“phase } \mathbf{o}\text{”} \\ \eta_{\mathbf{g}} = \eta_1 M^{-1} & \text{si } 0.75 < c & \text{“phase } \mathbf{g}\text{”} \end{cases} \tag{2.1}$$

où Λ et M sont les mobilités relatives (par rapport au fluide de concentration $c = 0$).

Il est possible alors de traiter le système comme étant composé de trois fluides miscibles de viscosités différentes. La figure 2.1 montre les frontières entre ces trois fluides, repérées par les concentrations $c = 0.25$ et $c = 0.75$. Pour permettre une comparaison aisée avec le traitement des systèmes triphasiques, nous appellerons abusivement “phases" ces trois fluides, et nous les identifierons par **w** (Water) : $c < 0.25$, **o** (Oil) : $0.25 < c < 0.75$ et **g** (Gas) : $0.75 < c$. Dans la suite de cette modélisation nous supposerons que la diffusion moléculaire est négligeable. Cette hypothèse nous permet de traiter notre problème comme un système de trois fluides immiscibles **sans tension de surface**. L'avantage de cette description est d'aboutir à des équations de conservations admettant des solutions d'ondes cinématiques. Les effets de la diffusion ne sont cependant pas toujours négligeables dans notre cas. En effet, si on met en contact le fluide **w** ($c = 0$) et le fluide **g** ($c = 1$), la diffusion a pour effet de “gommer" les discontinuités de concentration. Il apparaît entre **w** et **g** des concentrations intermédiaires et donc une nouvelle phase : **o**. La diffusion peut donc transformer

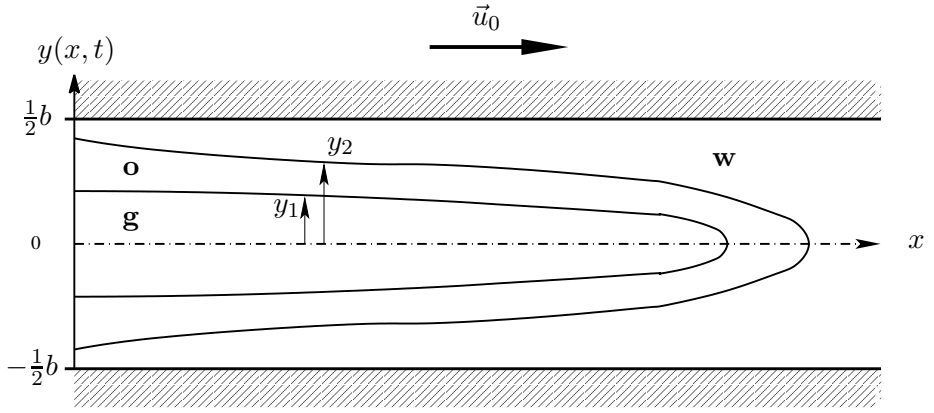


FIG. 2.1. *Schéma de l'écoulement triphasique de vitesse débitante* u_0.

un système diphasique en un système triphasique. Nous aurons l'occasion dans la suite de montrer à quel point ces deux systèmes peuvent être différents.

Le principe de notre modélisation est d'étudier l'évolution des profils de ces phases. Les principales hypothèses sont d'une part que le système est symétrique par rapport au centre de la cellule, d'autre part que les différentes phases s'étendent sur des longueurs grandes devant l'épaisseur de la cellule (*i.e.* les gradients de concentration sont faibles) et enfin que les effets inertiels sont négligeables. Ces deux dernières hypothèses constituent l'hypothèse de lubrification (ou d'écoulement quasi-parallèle).

Considérons une cellule de Hele-Shaw infinie d'épaisseur b, initialement remplie de fluide $\mathbf{w}$. Le fluide s'écoule avec une vitesse débitante u_0. On note $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ les positions respectives des interfaces $\mathbf{g}-\mathbf{o}$ et $\mathbf{o}-\mathbf{w}$ (voir figure 2.1). On s'intéresse aux proportions de chacune des phases, définies par :

$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{g}}(x,t) &\hat{=} 2y_1(x,t)/b \\
S_{\mathbf{o}}(x,t) &\hat{=} 2(y_2(x,t)-y_1(x,t))/b \\
S_{\mathbf{w}}(x,t) &\hat{=} 1-(S_{\mathbf{o}}+S_{\mathbf{w}}) = 1-2y_2(x,t)/b
\end{aligned}$$

Ces proportions, toujours par analogie avec les systèmes triphasiques, seront également appelées saturations. Pour pouvoir écrire une loi de conservation pour chacune des phases, nous avons besoin de définir le flux de chacune d'entre elles. En notant $\vec{u}(x,y,t)$ la vitesse locale du fluide, on définit alors les flux normalisés respectifs des phases $\mathbf{g}$, $\mathbf{o}$ et $\mathbf{w}$ par :

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{g}}(x,t) &\hat{=} \frac{2}{bu_0}\int_0^{y_1} u_x(x,y,t)dy \\
f_{\mathbf{o}}(x,t) &\hat{=} \frac{2}{bu_0}\int_{y_1}^{y_2} u_x(x,y,t)dy \\
f_{\mathbf{w}}(x,t) &\hat{=} \frac{2}{bu_0}\int_{y_2}^{b/2} u_x(x,y,t)dy
\end{aligned}$$

Les équations de conservation de chacune des phases s'écrivent donc (en négligeant l'effet de la

diffusion moléculaire) :

$$\frac{\partial S_{\mathbf{g}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_0 f_{\mathbf{g}})}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial S_{\mathbf{o}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_0 f_{\mathbf{o}})}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial S_{\mathbf{w}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_0 f_{\mathbf{w}})}{\partial x} = 0$$

Toutefois les trois variables $S_{\mathbf{g}}$, $S_{\mathbf{o}}$ et $S_{\mathbf{w}}$ ne sont pas linéairement indépendantes. En effet, nous avons toujours la relation $S_{\mathbf{g}} + S_{\mathbf{o}} + S_{\mathbf{w}} = 1$. Le système peut donc être totalement décrit avec deux variables : nous prendrons $S_{\mathbf{g}}$ et $S_{\mathbf{w}}$. Les proportions des fluides $\mathbf{g}$ et $\mathbf{w}$ obéissent au système d'équations de conservations :

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} S_{\mathbf{g}} \\ S_{\mathbf{w}} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u_0 f_{\mathbf{g}} \\ u_0 f_{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{2.2}$$

Nous retrouvons donc bien un système d'équations du type étudié au chapitre précédent. Pour pouvoir décrire l'évolution des proportions de chacun des fluides par la théorie des ondes cinématiques, il nous suffit d'exprimer les flux des différentes phases, en fonction des saturations $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})$.

2.2 Calcul des fonctions de flux

La vitesse locale $\vec{u}$ du fluide satisfait les équations d'incompressibilité et de Stokes (quasi-statique) :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x,y)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta(x,y)\frac{\partial \vec{u}}{\partial y}\right) = \vec{\nabla} P(x,y) \tag{2.4}$$

On suppose maintenant que l'écoulement vérifie les hypothèses de lubrification. Cela implique que la pression $P(x,y)$ est uniforme sur la tranche, et donc que $\vec{\nabla} P(x,y)$ est dirigé suivant l'axe des x. Cette hypothèse suppose de plus que $\vec{u}$ varie faiblement suivant l'axe des x (et donc qu'il en est de même pour les interfaces entre les fluides). Dans de telles conditions, la composante $u_x(x,y,t)$ satisfait l'équation (en posant $y = b\xi$) :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda^{-1}(\xi)\frac{\partial u_x}{\partial \xi}\right) = \frac{b^2}{\eta_1}\frac{\partial P}{\partial x}(x,t) \qquad \text{avec } \lambda(\xi) = \begin{cases} M & \text{si } \ 0 < |\xi| < y_1/b \\ \Lambda & \text{si } \ y_1/b < |\xi| < y_2/b \\ 1 & \text{si } \ y_2/b < |\xi| < 1/2 \end{cases} \tag{2.5}$$

En posant $\alpha = \frac{b^2}{\eta_1}\frac{\partial P}{\partial x}$ et en intégrant suivant ξ, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u_x(\xi,t) = \alpha \lambda(\xi)\xi + \beta \lambda(\xi) \tag{2.6}$$

où β est une constante d'intégration. L'intégration et les conditions de non-glissement aux parois $(\xi = \pm 1/2)$ nous donnent :

$$u_x(\xi,t) = \alpha \int_{-1/2}^{\xi} \lambda(\xi')\xi' d\xi' + \beta \int_{-1/2}^{\xi} \lambda(\xi') d\xi' \tag{2.7}$$

$$0 = \alpha \int_{-1/2}^{1/2} \lambda(\xi')\xi' d\xi' + \beta \int_{-1/2}^{1/2} \lambda(\xi') d\xi' \tag{2.8}$$

Les symétries du système nous imposent de plus que $\lambda(\xi)$ soit une fonction paire, donc que $\xi\lambda(\xi)$ soit une fonction impaire. Il s'ensuit que la première intégrale de l'équation (2.8) est nulle. Par conséquent, nous avons $\beta = 0$. Le champ de vitesses s'exprime donc par une simple intégrale :

$$u_x(\xi, t) = \alpha \int_{-1/2}^{\xi} \lambda(\xi')\xi' d\xi' \tag{2.9}$$

La constante α s'exprime en fonction de la vitesse débitante de fluide u_0 :

$$\int_{-1/2}^{1/2} u_x(\xi, t) d\xi = \alpha \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{\xi} \lambda(\xi')\xi' d\xi' d\xi = u_0 \tag{2.10}$$

En intégrant par morceaux la fonction $\xi\lambda(\xi)$, on peut expliciter les fonctions de flux :

$$f_{\mathbf{w}} = \frac{S_{\mathbf{w}}^2(3 - S_{\mathbf{w}})}{2[1 + (\Lambda - 1)(1 - S_{\mathbf{w}})^3 - (\Lambda - M)S_{\mathbf{g}}^3]} \tag{2.11}$$

$$f_{\mathbf{g}} = \frac{S_{\mathbf{g}}[3 + 3(\Lambda - 1)(1 - S_{\mathbf{w}})^2 + S_g^2(2M - 3\Lambda)]}{2[1 + (\Lambda - 1)(1 - S_{\mathbf{w}})^3 - (\Lambda - M)S_{\mathbf{g}}^3]} \tag{2.12}$$

On peut donc mettre l'équation (2.2) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} S_{\mathbf{g}} \\ S_{\mathbf{w}} \end{pmatrix} + u_0 \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} S_{\mathbf{g}} \\ S_{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{2.13}$$

Les coefficients q_i sont donnés par :

$$q_1(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}}) = \frac{\partial f_{\mathbf{g}}}{\partial S_{\mathbf{g}}} \quad , \quad q_2(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}}) = \frac{\partial f_{\mathbf{g}}}{\partial S_{\mathbf{w}}} \tag{2.14}$$

$$q_2(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}}) = \frac{\partial f_{\mathbf{w}}}{\partial S_{\mathbf{g}}} \quad , \quad q_4(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}}) = \frac{\partial f_{\mathbf{w}}}{\partial S_{\mathbf{w}}} \tag{2.15}$$

Le système obéit à un système d'équations de conservations à deux dimensions. Pour pouvoir déterminer l'évolution des profils de saturations, nous avons vu qu'il est nécessaire d'étudier la matrice (q_i) dans l'espace $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})$. Il faut de plus noter que les coefficients q_i dépendent également des rapports de viscosités M et Λ.

2.3 Étude du système de conservation

Dans cette section, nous allons étudier les propriétés de la matrice (q_i) dans l'espace des paramètres $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})$. Avant de commencer cette étude, il est nécessaire de faire quelques remarques sur la représentation de l'espace $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})$. Chaque état de notre système est caractérisé par un triplé $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{o}}, S_{\mathbf{w}})$ qui doit satisfaire les conditions :

$$S_{\mathbf{g}} + S_{\mathbf{o}} + S_{\mathbf{w}} = 1$$
$$0 \leq S_{\mathbf{g}},\, S_{\mathbf{o}},\, S_{\mathbf{w}} \leq 1$$

Il semble ainsi logique de représenter les états du système sur un diagramme ternaire. Si on trace un triangle équilatéral de sommets G, O et W, l'état $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{o}}, S_{\mathbf{w}})$ est alors représenté par le barycentre

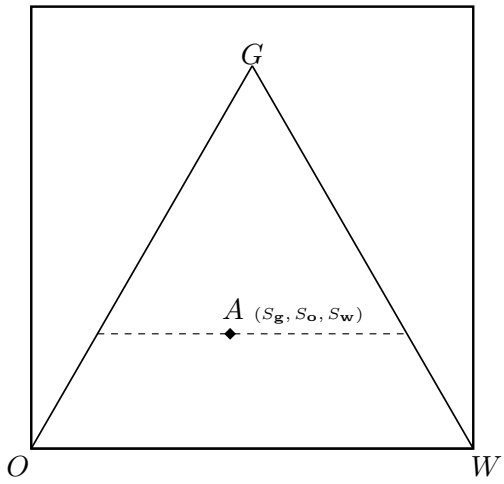


FIG. 2.2. *Diagramme ternaire. La ligne en pointillés représente l'ensemble des points qui ont la même proportion de G que l'état A ($S_{\mathbf{g}}$ = constante).*

de G, O et W avec les poids respectifs $S_{\mathbf{g}}$, $S_{\mathbf{o}}$ et $S_{\mathbf{w}}$. L'ensemble des états qui ont la même proportion $S_{\mathbf{g}}$ est ainsi une droite parallèle à l'axe OW (voir Fig. 2.2). Cette remarque étant faite, nous pouvons étudier notre système dans l'espace des paramètres $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})$.

La première étape consiste à déterminer les régions dans lesquelles le système est hyperbolique, elliptique ou parabolique. Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour résoudre le problème de Riemann dans le cas hyperbolique, nous avions besoin des chemins de raréfaction. Lorsque le système sera hyperbolique, nous tracerons les deux faisceaux de courbes, un pour les valeurs propres lentes et l'autre pour les valeurs propres rapides. Nous ne ferons pas une étude exhaustive du système pour l'ensemble des paramètres $(M = \eta_{\mathbf{w}}/\eta_{\mathbf{g}}, \Lambda = \eta_{\mathbf{w}}/\eta_{\mathbf{o}})$ mais nous discuterons trois situations types.

Système hyperbolique : le système d'équations est hyperbolique quelles que soient les valeurs de $S_{\mathbf{g}}$ et $S_{\mathbf{w}}$ (voir figure 2.3). On notera que lorsque le profil de viscosité est monotone, le système est toujours hyperbolique. Ce cas devrait être *a priori* plus facile à étudier dans la mesure où nous connaissons des solutions au problème de Riemann. Pour la suite de ces travaux nous avons pris $M = 1$ et $\Lambda = 0.1$ comme cas typique de système hyperbolique. Ce cas correspond à un profil de viscosité non-monotone pour lequel **g** et **w** ont la même viscosité, plus faible que celle de la phase intermédiaire **o**.

Système mixte hyperbolique-elliptique : le système présente un domaine dans lequel les équations sont elliptiques (voir figure 2.4). Cette région est unique et est délimitée par un contour sur lequel le système d'équations est parabolique (système dégénéré). Comme cas typique de système mixte nous prendrons les paramètres $M = 1$ et $\Lambda = 10$. Ce cas nous intéresse particulièrement d'un point de vue physique et analytique du fait que nous ne connaissons pas les solutions du problème de Riemann.

Système hyperbolique-parabolique : ce cas n'est qu'un cas particulier du système précédent lorsque la région elliptique se réduit à une simple courbe (voir figure 2.5). Il apparaît lorsque $M = \Lambda > 1$, c'est-à-dire lorsque les phases **g** et **o** ont une même viscosité, inférieure à celle

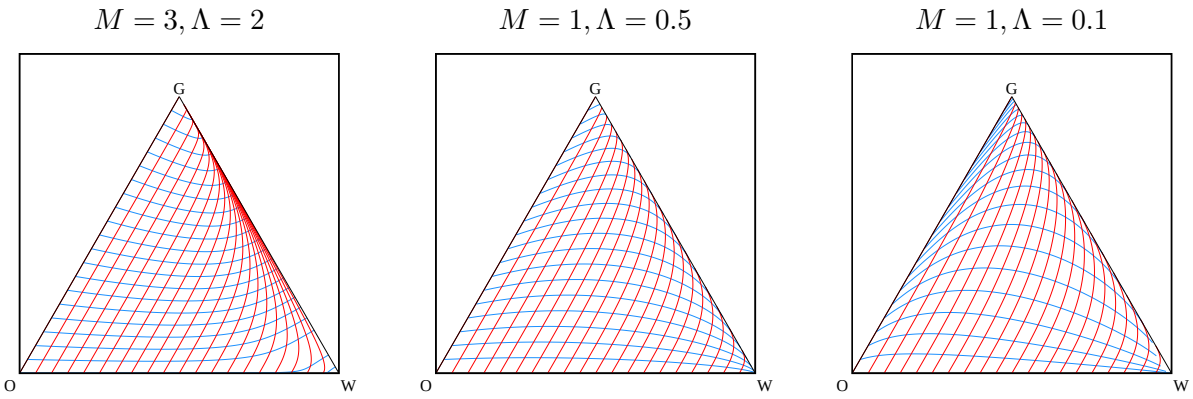


FIG. 2.3. *Exemple de systèmes purement hyperboliques pour différents couples de paramètres* (M, Λ). *Les chemins de raréfaction correspondant à la vitesse lente (resp. rapide) sont représentés en bleu (resp. rouge).*

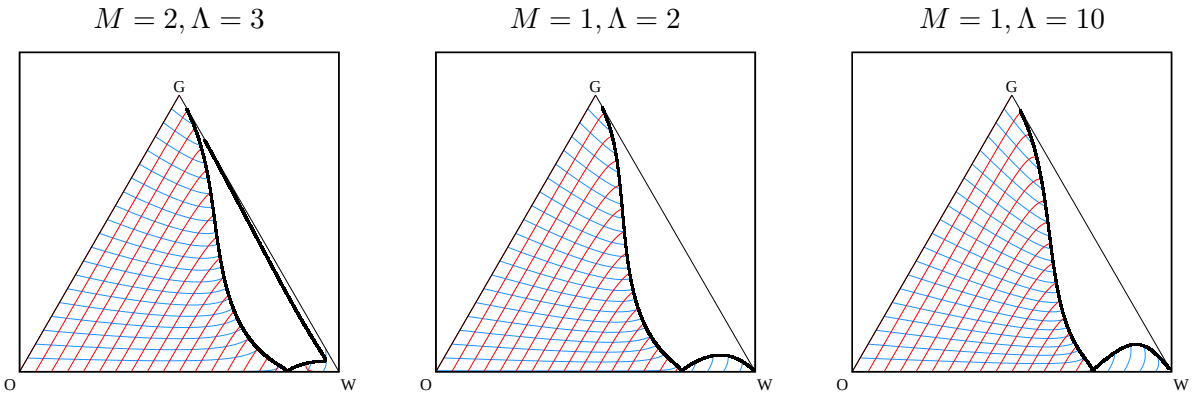


FIG. 2.4. *Exemple de systèmes mixtes hyperbolique - elliptique. Les courbes en bleu (resp. rouge) représentent les chemins de raréfaction correspondant à la vitesse lente (resp. rapide). La zone blanche correspond à la zone elliptique. La courbe en gras correspond aux points où le système est parabolique (dégénéré linéairement).*

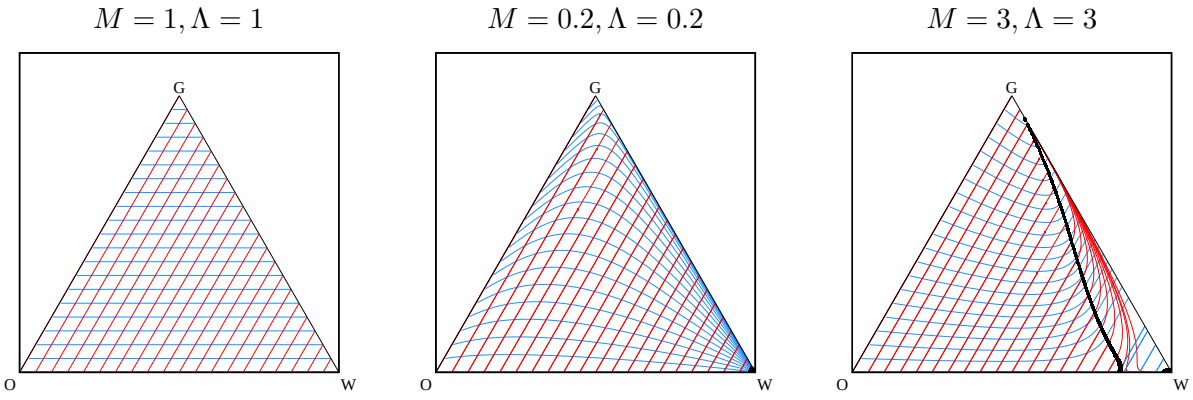


FIG. 2.5. *Exemple de systèmes particuliers. A gauche toutes les phases ont la même viscosité. Au centre et à droite,* **g** *et* **o** *ont la même viscosité. On peut noter l'apparition d'une courbe de dégénérescence sur la figure de droite.*

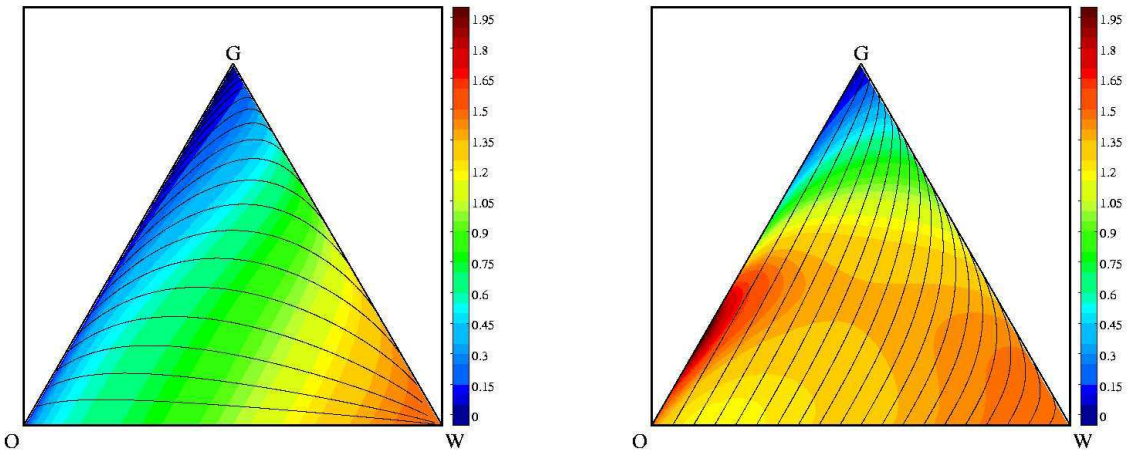


FIG. 2.6. *Champ de valeurs propres du système et chemins de raréfaction dans le cas hyperbolique* $M = 1$ *et* $\Lambda = 0.1$. *Les diagrammes de gauche et de droite correspondent respectivement aux valeurs propres lentes et rapides.*

de **w**.

Maintenant que nous avons identifié les différents types de systèmes, nous allons nous intéresser particulièrement à deux cas représentatifs :

- $M = 1$ et $\Lambda = 0.1$ pour le cas hyperbolique,
- $M = 1$ et $\Lambda = 10$ pour le cas mixte hyperbolique-elliptique.

Nous avons vu au chapitre précédent que pour étudier le système, nous avions également besoin des valeurs propres dans le plan $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})$. Ces champs de valeurs propres sont représentés, ainsi que les chemins, sur la figure 2.6 pour le cas hyperbolique et sur la figure 2.7 pour le cas mixte. Rappelons que les chemins de raréfaction doivent être parcouru dans le sens des valeurs propres (vitesses) croissantes. En particulier, les chemins lents doivent être parcouru de gauche à droite dans les deux cas.

Une fois le système clairement défini, on est capable d'étudier les solutions du problème de Riemann.

2.4 Solutions analytiques du problème de Riemann

On s'intéresse ici au déplacement d'un fluide **w** par plusieurs autres. Les conditions de Riemann que l'on va utiliser sont donc :

$$(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})(x, t = 0) = \begin{cases} (S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})_g & \text{si } x < 0 \\ (0, 1) & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Le problème est de savoir comment relier un état initial $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})_g$ quelconque, que l'on notera A sur le diagramme ternaire, à l'état $(0, 1)$, représenté par le point W. Le point de départ sera en général pris sur l'axe OG, ce qui correspond aux états tels que $S_{\mathbf{w}} = 0$. On note au passage que le déplacement miscible d'un fluide par un autre avec un profil de viscosité non-monotone correspond

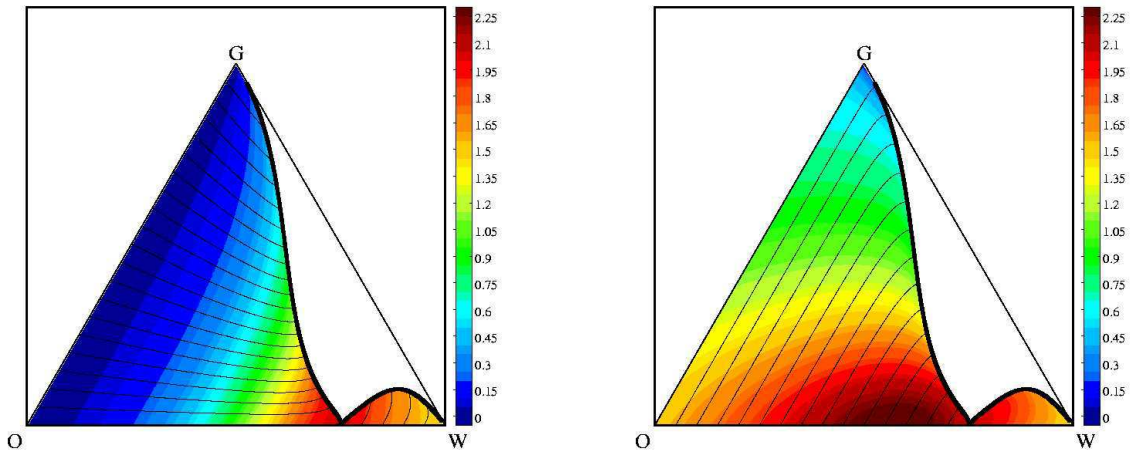


FIG. 2.7. *Champ de valeurs propres et chemins de raréfaction dans le cas mixte $M = 1$ et $\Lambda = 10$. Les diagrammes de gauche et de droite correspondent respectivement aux valeurs propres lentes et rapides.*

à l'état initial pour lequel le point A est confondu avec le point G. En effet, à l'instant initial, il n'y a pas de phase **o** dans le système car il n'y a pas de concentration intermédiaire entre 0 et 1. Celle-ci n'apparaît qu'ultérieurement du fait de la diffusion.

2.4.1 Cas purement hyperbolique ($M = 1$ et $\Lambda = 0.1$)

Dans le cas d'un système purement hyperbolique, il est relativement aisé de trouver un chemin reliant A à W. Il suffit pour cela de suivre le chemin de raréfaction lent (voir figure 2.8). Ce chemin se termine sur l'axe GW au point B. On peut terminer le chemin en reliant B à W par une droite. Le profil des saturations $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})(x,t)$ s'obtient en propageant chaque composition $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})$ avec une vitesse égale à la valeur propre correspondante. La solution du problème de Riemann, en fonction de x/t est donc un profil stationnaire donné par le profil des valeurs propres. Sur la figure 2.8 a été tracée la solution prédite analytiquement qui correspond au chemin :

$$A \xrightarrow{\mathcal{R}_-} B \xrightarrow{\mathcal{R}_-} W$$

On constate que les profils de saturation peuvent être non-monotones : $S_{\mathbf{o}}$ décroît en fonction de x, dans notre exemple, alors que $S_{\mathbf{g}}$ commence par croître spatialement pour décroître ensuite.

En ce qui concerne les vitesses de ce profil, cette solution étant composée de deux raréfactions, il n'y a aucune indétermination. Le "front avant" du déplacement se déplace à la vitesse $3u_0/2$ qui est la vitesse maximale du profil de vitesse de Poiseuille. Ce résultat semble logique, étant donné qu'en fin de chemin, la phase **o** a disparu, la viscosité est donc uniforme sur l'axe des y ($M = 1$), et le profil de vitesse est du type Poiseuille. La phase **g**, avant de disparaître, est localisée en $y = 0$. Il faut cependant faire une remarque qui sera très importante pour la suite concernant cette partie du chemin $(B - W)$. Cette solution prévoit en effet que la phase **o** doit disparaître complètement en fin de chemin. Dans un modèle de fluides non-monotones, cela signifie que les concentrations intermédiaires entre 0.25 et 0.75 sont absentes. Ce phénomène n'est évidemment pas possible dans un système physique dans lequel il y a de la diffusion moléculaire.

D'où la remarque suivante : **dans un modèle de fluides non-monotones, la diffusion moléculaire aura pour principal effet d'interdire les chemins qui se terminent sur l'axe** GW**.** Dans le cas présent, on pourrait penser qu'une solution possible se termine sur l'axe OW par l'intermédiaire d'un choc.

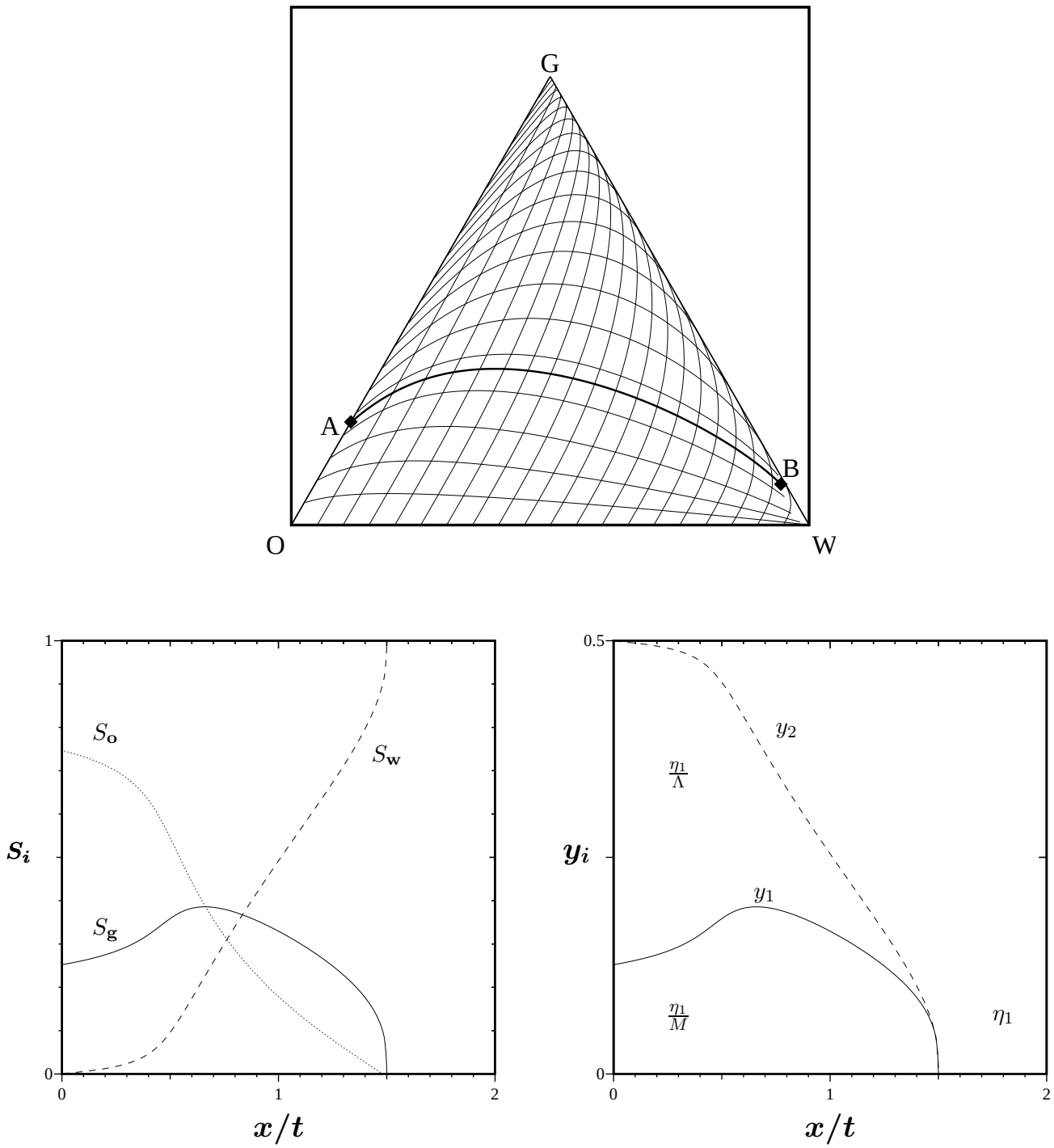


FIG. 2.8. *Solution analytique du problème de Riemann dans le cas d'un système hyperbolique : $M = 1$ et $\Lambda = 0.1$. Le point de départ A correspond à $S_{\mathbf{g}} = 0.25$ et $S_{\mathbf{o}} = 0.75$. La solution relie le point A au point B par une onde de raréfaction lente. Le point B est ensuite connecté au point W par une autre raréfaction. Sur la figure du haut est représenté le chemin dans le plan $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})$. En bas à gauche sont représentées les saturations de chacune des phases en fonction de la variable x/t. En bas à droite sont représentées les positions des interfaces $\mathbf{g} - \mathbf{o}$ (ligne continue) et $\mathbf{o} - \mathbf{w}$ (ligne pointillée) en fonction de x/t. Notons que l'axe x/t a été normalisé par u_0.*

2.4.2 Cas mixte hyperbolique-elliptique ($M = 1$ et $\Lambda = 10$)

Dans le cas d'un système mixte, il devient beaucoup plus complexe de trouver une solution reliant le point A ($S_{\mathbf{g}} = 0.25, S_{\mathbf{w}} = 0$) au point W. La figure 2.9 montre que le chemin initial est une onde de raréfaction lente, il rencontre immanquablement la région elliptique (au point B sur la figure). Il devient alors difficile de terminer le chemin simplement. La condition de Rankine-Hugoniot n'étant pas restreinte au cas hyperbolique, nous avons vu (voir Keyfitz *et al.* [53]) qu'il était possible de traverser la zone elliptique par l'intermédiaire de chocs. Le problème principal consiste à déterminer les points intermédiaires de ce(s) choc(s).

Les courbes de Hugoniot (reliant deux états par un choc) qui partent de W ne croisent pas la courbe de raréfaction lente (AB) issue de A. En effet, les courbes de Hugoniot (et de raréfaction) issues de W se réduisent à la droite GW. Par conséquent, il n'existe pas de solution du type :

$$A \xrightarrow{\mathcal{R}_-} C \xrightarrow{\mathcal{S}_\pm} W$$

On peut alors chercher des solutions du type :

$$A \xrightarrow{\mathcal{R}_-} C \xrightarrow{\mathcal{S}_\pm} D \xrightarrow{\mathcal{R}_\pm} W$$

La recherche d'une telle solution devient alors très fastidieuse. La méthode consiste à tracer les courbes de Hugoniot partant de divers points C de la courbe de raréfaction AB. Quelques exemples de telles courbes ont été tracés sur la figure 2.10. On peut constater sur cette figure que, seul le cas de gauche pourrait éventuellement être solution, car sa courbe de Hugoniot croise la droite GW. Il existe une infinité de tels points, C, qui permettent de faire un choc jusqu'à l'axe GW. Cependant, il faut rappeler que dans le cas d'un fluide non-monotone, ce type de solution n'est pas acceptable. Il faudrait donc plutôt chercher les courbes de Hugoniot qui se terminent sur l'axe OW.

Sur la figure 2.11 ont été tracés d'autres exemples de courbes de Hugoniot connectées à un point C contenu dans la zone elliptique. Ces courbes illustrent bien la complexité du problème de la recherche de solutions. En effet, un état situé dans la zone elliptique est facilement connectable à un autre état situé à gauche de la zone elliptique. Toutefois, il existe très peu d'états de la zone elliptique qui sont connectables à la zone hyperbolique voisine du point W. Pour connecter le point A à un point proche de W, il semble donc nécessaire d'introduire une succession de chocs.

2.4.3 Remarque : déplacement de deux fluides avec une loi de viscosité non-monotone

Un cas particulier de solution qui nous intéresse particulièrement est celui où le point de départ du chemin A est confondu avec le point G. Comme on l'a déjà vu, il correspond au cas du déplacement d'un fluide par un autre avec un profil de viscosité de mélange non-monotone. La condition initiale d'injection s'écrit :

$$c(x, t = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

En l'absence de diffusion moléculaire, l'interface entre les fluides va rester bien définie. Le système ne comportera que des concentrations égales soit à 0 soit à 1. Sur le diagramme ternaire, la solution

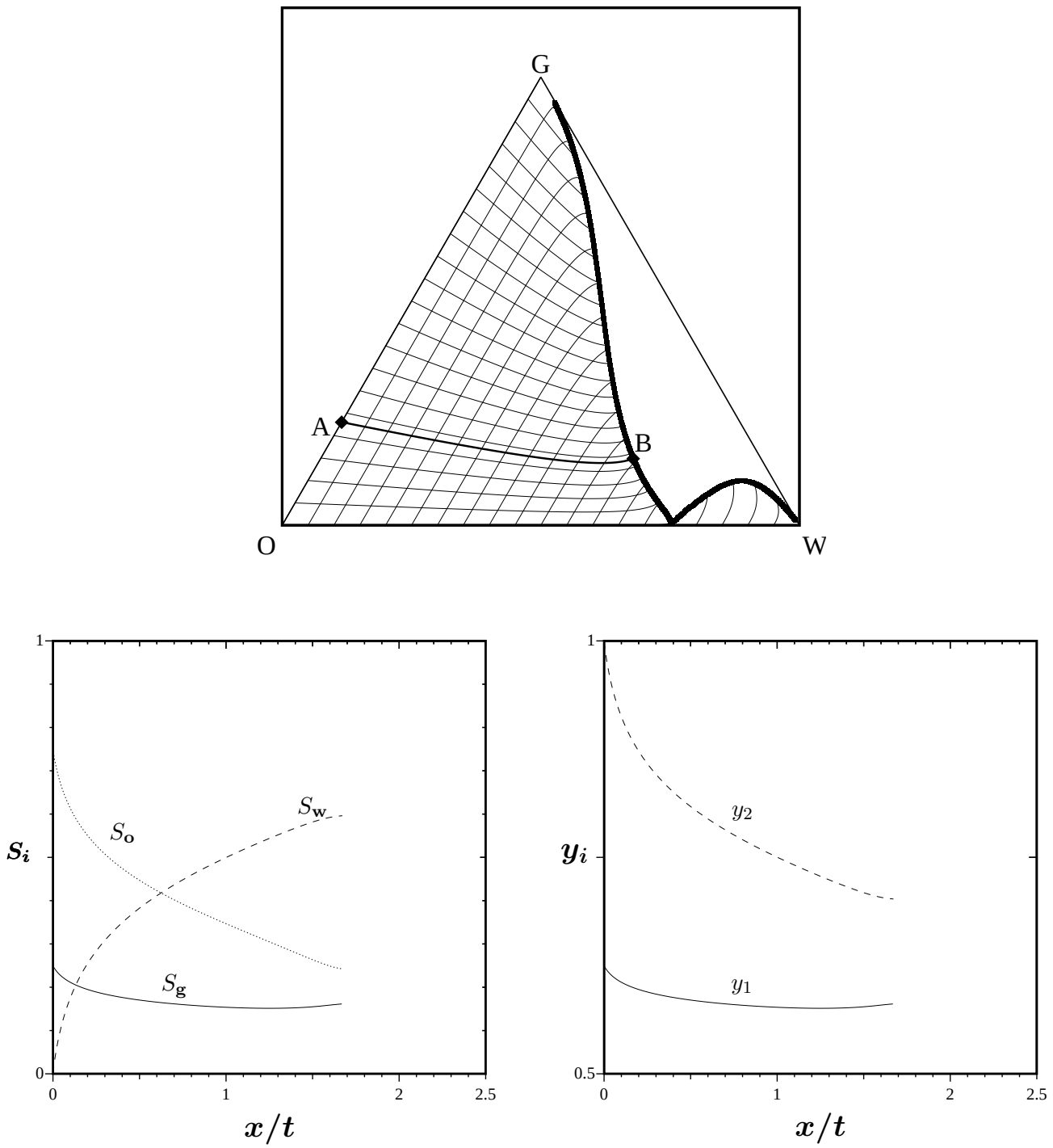


FIG. 2.9. *Solution analytique du problème de Riemann dans le cas d'un système mixte : $M = 1$ et $\Lambda = 10$. Le point de départ A correspond à $S_{\mathbf{g}} = 0.25$ et $S_{\mathbf{o}} = 0.75$. La solution relie le point A au point B par une onde de raréfaction lente. Le point B est situé sur la frontière de la zone elliptique. Sur la figure du haut est représenté le chemin dans le plan $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})$. En bas à gauche sont représentées les saturations de chacune des phases en fonction de la variable x/t. En bas à droite sont représentées les positions des interfaces $\mathbf{g} - \mathbf{o}$ (ligne continue) et $\mathbf{o} - \mathbf{w}$ (ligne pointillée) en fonction de x/t.*

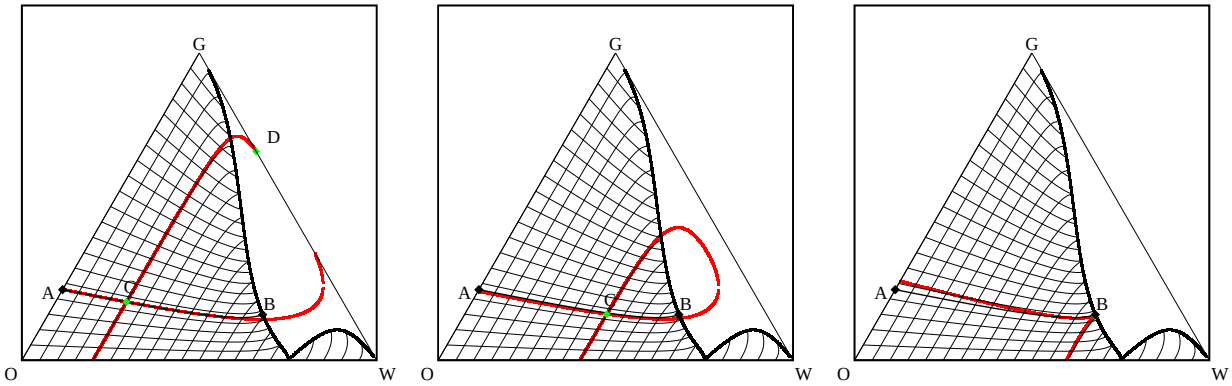


FIG. 2.10. *Courbes de Hugoniot issues de différents points (notés C) sur le chemin de raréfaction AB. Les paramètres sont $M = 1$, $\Lambda = 10$. Sur la figure de droite, le point C est confondu avec le point B.*

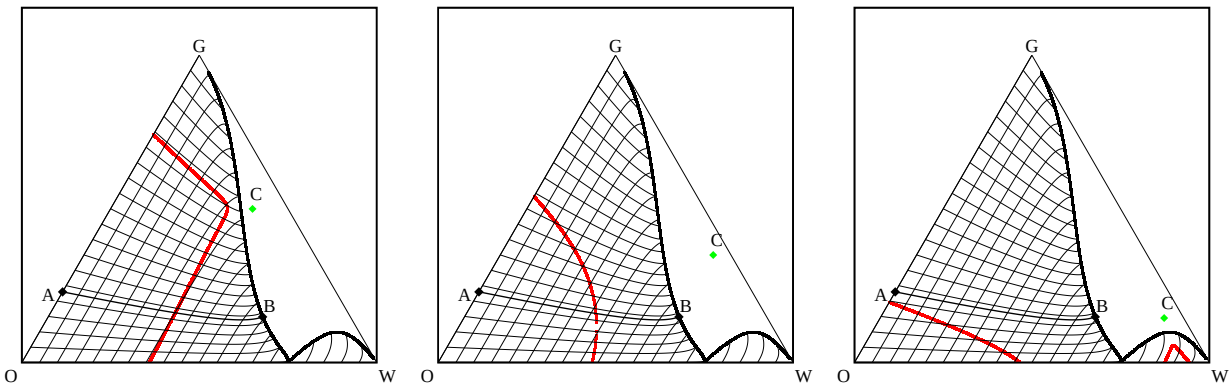


FIG. 2.11. *Courbes de Hugoniot issues de différents points (notés C) dans la région elliptique. Les paramètres sont $M = 1$, $\Lambda = 10$.*

à ce problème est l'onde de raréfaction allant de GW. On peut cependant essayer de prévoir l'effet de la diffusion moléculaire sur une telle solution. Si l'on considère la solution en absence de diffusion, les deux fluides sont délimités par une interface bien définie. Si l'on suppose que la diffusion a pour effet, au temps t, d'étaler cette interface sur une longueur $l \propto \sqrt{D_0 t}$, il en résulte l'apparition de la phase $\mathbf{o}$ avec une saturation $S_\mathbf{o} \sim \sqrt{D_0 t}/b$. Sur le diagramme, le chemin d'une telle solution est une droite parallèle à l'axe GW, d'autant plus proche de l'axe GW que le coefficient de diffusion est faible, ou que les temps sont courts.

Remarquons pour finir qu'une telle droite traverse la zone elliptique. Ainsi le chemin de raréfaction GW du problème de Riemann est nécessairement "dévié" vers la zone elliptique par la diffusion. Ce phénomène soulève la question intéressante de la stabilité d'un tel chemin.

2.5 Conclusion

On a vu dans ce chapitre les équations d'évolution d'un système constitué de trois fluides miscibles de viscosités différentes sous les hypothèses de lubrification. Ces équations sont également valables dans le cas particulier d'un mélange de deux fluides miscibles avec une loi de viscosité de mélange non-monotone. Nous avons vu que dans certaines conditions, le système d'équations d'évolution des saturations devient mixte hyperbolique-elliptique. Une telle situation survient lorsque la viscosité du fluide intermédiaire $\mathbf{o}$ est plus faible que les deux autres (*i.e.* $\Lambda > M$). Lorsque le système d'équations devient elliptique, nous avons vu qu'il était alors difficile de déterminer une solution du problème. Ce problème peut de plus se compliquer avec les effets de la diffusion moléculaire.

Le système présenté dans ce chapitre soulève deux problèmes à mon avis intéressants. Le premier consiste à déterminer l'existence d'une solution analytique au système d'équations mixtes (hyperbolique-elliptique). Le second problème consiste à étudier le comportement du système "réel", c'est-à-dire lorsque chacune des phases obéit à l'équation de Navier-Stokes. Il est en effet envisageable que, pour traverser la région elliptique, le système "brise" les hypothèses analytiques, qui sont principalement celles de lubrification et d'auto-similarité.

Dans la suite de cette deuxième partie, nous avons traité numériquement ces deux problèmes. Dans un premier temps, nous avons étudié un système dans lequel les hypothèses de lubrification sont imposées. Dans un second temps, nous avons étudié le problème complet, dans lequel aucune approximation n'a été faite.

Chapitre 3

Étude numérique en condition de lubrification imposée

3.1 Principe

On se propose dans cette partie d'étudier numériquement le problème du déplacement de fluides non-monotones en **forçant l'écoulement à respecter les conditions de lubrification**. Cette section a pour but de déterminer si le système d'équations présenté dans le chapitre précédent possède une solution simple. On s'intéressera en particulier aux systèmes dans lesquels le chemin doit traverser une région elliptique. On étudiera également l'influence de la diffusion moléculaire sur un tel système.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le champ de vitesses sous les conditions de lubrification est aisément calculable à partir du champ de mobilités $\lambda(\xi, t)$, avec $\xi = y/b$, par la relation :

$$\begin{cases} u_x(\xi, t) = \alpha \displaystyle\int_{-1/2}^{\xi} \lambda(\xi')\xi' d\xi' \\ \\ \alpha^{-1} = u_0^{-1} \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{\xi} \lambda(\xi')\xi' d\xi' d\xi \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans cette section, nous simulerons l'équation de convection-diffusion par la méthode BGK. Le champ de vitesses sera déduit du champ de concentrations, et donc de viscosités, en utilisant l'équation (3.1). De plus, comme cette équation ne donne que la composante suivant x de la vitesse, la composante u_y sera calculée à partir de la relation d'incompressibilité :

$$u_y(x, y, t) = -\int_{-b/2}^{y} \frac{\partial u_x}{\partial x}(x, y', t) dy' \tag{3.2}$$

Cette méthode permet d'obtenir un système qui obéit aux mêmes lois que celles utilisées dans l'analyse précédente. Ce système consiste à déplacer trois fluides miscibles entre deux parois à la vitesse débitante imposée (u_0). Comme conditions aux bords, nous imposerons le champ de concentrations (et donc les saturations des phases) à l'entrée et à la sortie.

Notons cependant la présence de la diffusion moléculaire dans la simulation, dont l'influence peut entraîner des comportements intéressants (effet stabilisant ou déplacement dans une zone elliptique).

Il faut remarquer que dans l'équation (3.2), la présence de la dérivée de la vitesse peut rendre le système très instable. Ce terme a en effet tendance à diverger numériquement dès lors que le gradient de mobilité moyen est trop important. Ce point est assez contraignant dans notre étude car une telle situation survient en présence d'un choc. Physiquement il faut noter que lorsque nous sommes en présence d'un choc, les hypothèses de lubrification ne sont généralement plus valables. Pour cette même raison, l'état initial de notre système ne peut pas être du type Riemann. Une telle condition impose en effet un profil de viscosité en marche d'escalier (et donc $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ est infini).

Dans la suite du chapitre nous allons étudier avec cette méthode les deux types de systèmes purement hyperbolique et mixte.

3.2 Cas hyperbolique

Nous étudierons deux états initiaux particuliers. Le premier correspond à un chemin qui relie un état A quelconque sur l'axe OG à l'état W. Le second correspond au cas où le point A est confondu au point G. Cette dernière situation modélise le déplacement de deux fluides non-monotones.

Cas $\mathbf{A \neq G}$:

La figure 3.2 montre l'évolution du champ de concentrations d'une simulation avec les paramètres $M = 1$, $\Lambda = 0.1$, $u_0 = 8.10^{-4}$ et $D_0 = 5.10^{-5}$. Comme nous l'avons signalé plus haut, la condition initiale ne peut pas être du type Riemann. Nous l'avons choisie arbitrairement de la forme (voir figure 3.1) :

$$c(x, y, t = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |y| < \alpha(x)\ b\ S_{\mathbf{g}_g} \\ 0.5 & \text{si} \quad \alpha(x)\ b\ S_{\mathbf{g}_g} < |y| < \alpha(x)\ b\ (S_{\mathbf{o}_g} + S_{\mathbf{g}_g}) \\ 0 & \text{si} \quad \alpha(x)\ b\ (S_{\mathbf{o}_g} + S_{\mathbf{g}_g}) < |y| \end{cases} \tag{3.3}$$

avec

$$\alpha(x) = e^{-x/10} \text{ et } \left(S_{\mathbf{g}_g}, S_{\mathbf{o}_g}, S_{\mathbf{w}_g}\right) = (0.25, 0.75, 0)$$

De cette façon, le chemin décrivant la condition initiale est une droite joignant le point initial A au point W. Le problème qu'on résoud est donc plutôt du type Cauchy. Nous verrons que cela ne change pas beaucoup les prédictions analytiques dans la mesure où la solution converge vers une solution auto-similaire.

On peut distinguer plusieurs caractéristiques de l'évolution du système à partir de la figure 3.2. On constate que la phase G (au centre en rouge sur la figure) a tendance à gonfler comme on pouvait le prévoir par la solution présentée sur la figure 2.8, page 100. Ce gonflement semble persister au cours du temps. On peut de plus constater que la condition initiale d'entrée, remarquable par sa forme en pointe, ne disparaît que très lentement au cours du temps. Cette pointe ne semble disparaître que sous l'effet de la diffusion. Un autre point important à noter est l'apparition d'une zone de saturations uniformes en $S_{\mathbf{g}}$ et $S_{\mathbf{o}}$ à l'entrée.

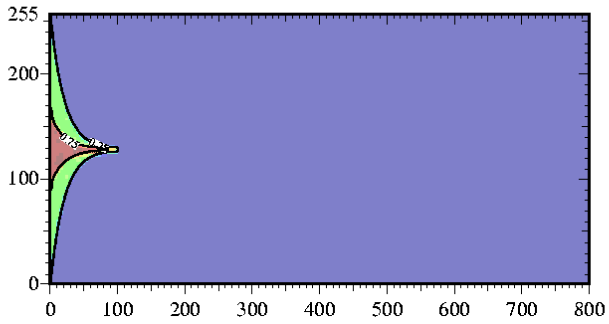


FIG. 3.1. *Condition initiale du champ de concentrations. Les couleurs rouge, verte et bleue correspondent respectivement aux phases* **g**, **o** *et* **w**. *Les courbes en noir correspondent aux interfaces entre les différentes phases (*i.e. *les iso-concentrations* $c = 0.25$ *et* $c = 0.75$*).*

Observons maintenant l'évolution temporelle du chemin sur les diagrammes $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{w}})$ de la figure 3.3. On peut noter que très rapidement la partie amont du chemin s'aligne sur une courbe de raréfaction. La partie aval du chemin semble elle aussi s'aligner sur un chemin de raréfaction ($t = 101000$), mais différent du précédent. Ces deux chemins semblent être reliés par un choc. Il faut noter que si un choc est théoriquement caractérisé par une discontinuité du chemin, cela n'est jamais observable en pratique du fait de la diffusion moléculaire. Celle-ci régularise en effet toujours les discontinuités. Ce choc est également visible sur la figure 3.2 ($t = 101000$), il correspond à la décroissance rapide de $S_{\mathbf{g}}$ à l'avant du nez. Comme attendu, on peut constater que le chemin, avant d'arriver en W, est d'abord confondu avec l'axe OW. Cet effet est dû à la diffusion moléculaire qui impose que la concentration varie continûment de 1 à 0. Dans notre cas, en chaque cote $y = cte$, l'iso-concentration $c = 0.75$ se situe en amont de l'iso-concentration $c = 0.25$ dans la direction de l'écoulement. En conséquence, le front avant de la phase **g** est précédé par le front avant de la phase **o** dans le déplacement de la phase **w**. Nécessairement, l'avant du doigt se termine avec les deux seules phases présentes : $S_{\mathbf{o}}$ et $S_{\mathbf{w}}$. On peut de plus constater que la longueur du chemin situé sur l'axe OW augmente lentement au cours du temps.

Le chemin s'alignant effectivement le long d'une courbe de raréfaction, les prédictions théoriques permettent de déterminer les vitesses de chaque état $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{o}}, S_{\mathbf{w}})$ sur le chemin de raréfaction. Soient t_0 et x_0 l'instant et la position d'apparition d'un état donné. La vitesse de cet état sera égale à $(x - x_0)/(t - t_0)$. Ainsi, les états représentés en fonction de la variable x/t (normalisée par la vitesse débitante) doivent s'aligner sur la courbe des vitesses calculées pour ces états, si l'on suppose que tous les états sont apparus à $t_0 = 0$ en $x_0 = 0$. Notons que cette supposition est fausse pour les états déjà présents à l'instant initial. Ainsi, les états de la condition initiale (contenus dans les exponentielles décroissantes situées en $x > 0$ et $t = 0$) apparaissent toujours sur les courbes en x/t, comme allant plus vite que leur vitesse réelle. La courbe des états obtenus par simulation numérique est tracée sur la figure 3.4 en fonction de la variable x/t (normalisée par la vitesse débitante). Sur cette courbe ont été également tracés les états en fonction de leur vitesse prédite par la théorie des ondes cinématiques. On peut constater que les résultats numériques sont en bon accord avec les vitesses prédites. Des différences, dues à la diffusion moléculaire, sont notables à l'avant et à

l'arrière du doigt :

A l'arrière du doigt, on constate que l'état de l'entrée $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{o}}, S_{\mathbf{w}}) = (0.25, 0.75, 0)$, correspondant aux saturations constantes observées sur la figure 3.2, s'étale sur l'intervalle de vitesses $[0; 0.35u_0]$. La propagation, à la vitesse $0.35u_0$ de l'état correspondant à $S_{\mathbf{w}} = 0$ peut être attribuée à la diffusion qui a pour effet de faire disparaître la phase **w** qui se retrouverait immobile et en faible épaisseur à la paroi. De plus, le fait que sur la figure 3.4, l'état de l'entrée $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{o}}, S_{\mathbf{w}}) = (0.25, 0.75, 0)$ soit connecté aux profils aval avec des pentes quasiment verticales semble indiquer que cet état se connecte à la courbe de raréfaction par l'intermédiaire d'un choc.

A l'avant du doigt, la diffusion moléculaire semble avoir pour effet de diminuer la saturation en **w** et en **g** comme l'on pouvait s'y attendre. L'acroissement brutal de la saturation en **o** à l'avant du déplacement est dû à l'effet conjugué de ce phénomène et de l'état initial exponentiel.

Dans le cas qui vient d'être présenté, les prédictions analytiques et les simulations numériques semblent être en bon accord, hormis aux endroits où la diffusion moléculaire joue un rôle important. On s'attend évidemment à ce que celle-ci ait une grande influence dans les régions où la saturation d'une des trois phases est faible. Il est donc intéressant d'étudier un cas où les effets de la diffusion moléculaire sont toujours présents, à savoir le cas $A = G$.

Cas A = G :

On s'attend à ce que cette condition initiale accentue les effets de la diffusion moléculaire. La figure 3.5 (page 111) montre le chemin des saturations et les iso-concentrations d'une telle situation. On constate sur le diagramme que le chemin est une droite (sauf en fin du chemin). L'épaisseur de la phase **o** est donc quasiment constante dans tout le système. Il est de plus évident que, plus la diffusion moléculaire va être importante, plus cette droite va être éloignée de l'axe GW. Le chemin semble ensuite se terminer tangentiellement à une courbe de raréfaction rapide. Notons enfin que si l'on zoome sur une partie du chemin, on constate qu'il est constitué d'un ensemble de raréfactions et de chocs.

Maintenant que l'on a étudié les solutions du système purement hyperbolique, on peut s'intéresser au cas où une région elliptique se développe. Notons sur la figure 3.5 que la diffusion moléculaire avait déplacé le chemin précisément vers la région où va se développer une zone elliptique. La diffusion moléculaire peut donc jouer un rôle très important dans notre système.

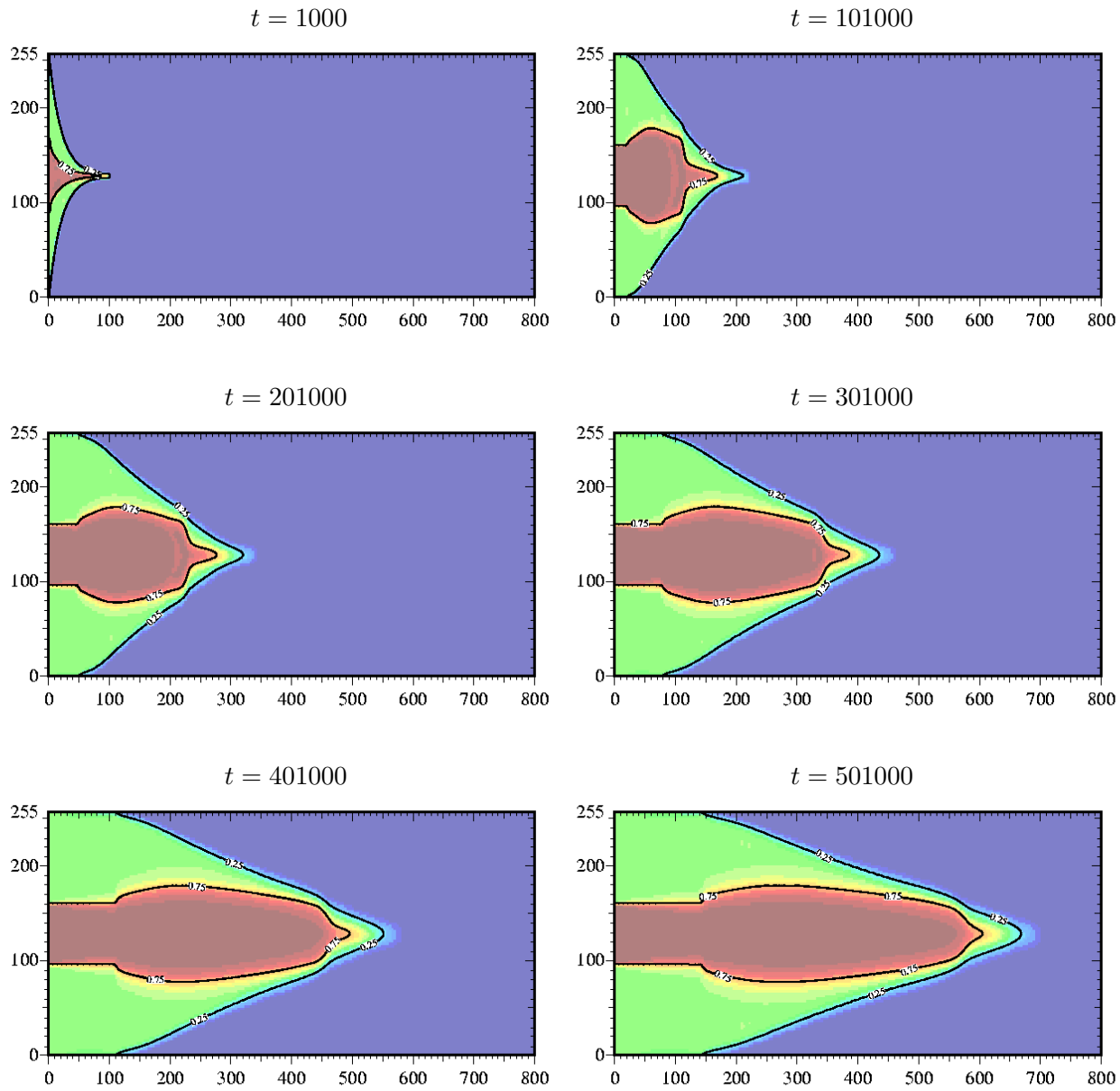


FIG. 3.2. *Évolution des concentrations au cours du temps pour un système purement hyperbolique. Les paramètres du système sont :* $M = 1$, $\Lambda = 0.1$, $u_0 = 8.10^{-4}$, $D_0 = 5.10^{-5}$ *et* $Pe = \frac{u_0 L_y}{D_0} = 4096$. *Les courbes en noir correspondent aux interfaces entre les différentes phases (*i.e. *les iso-concentrations* $c = 0.25$ *et* $c = 0.75$*).*

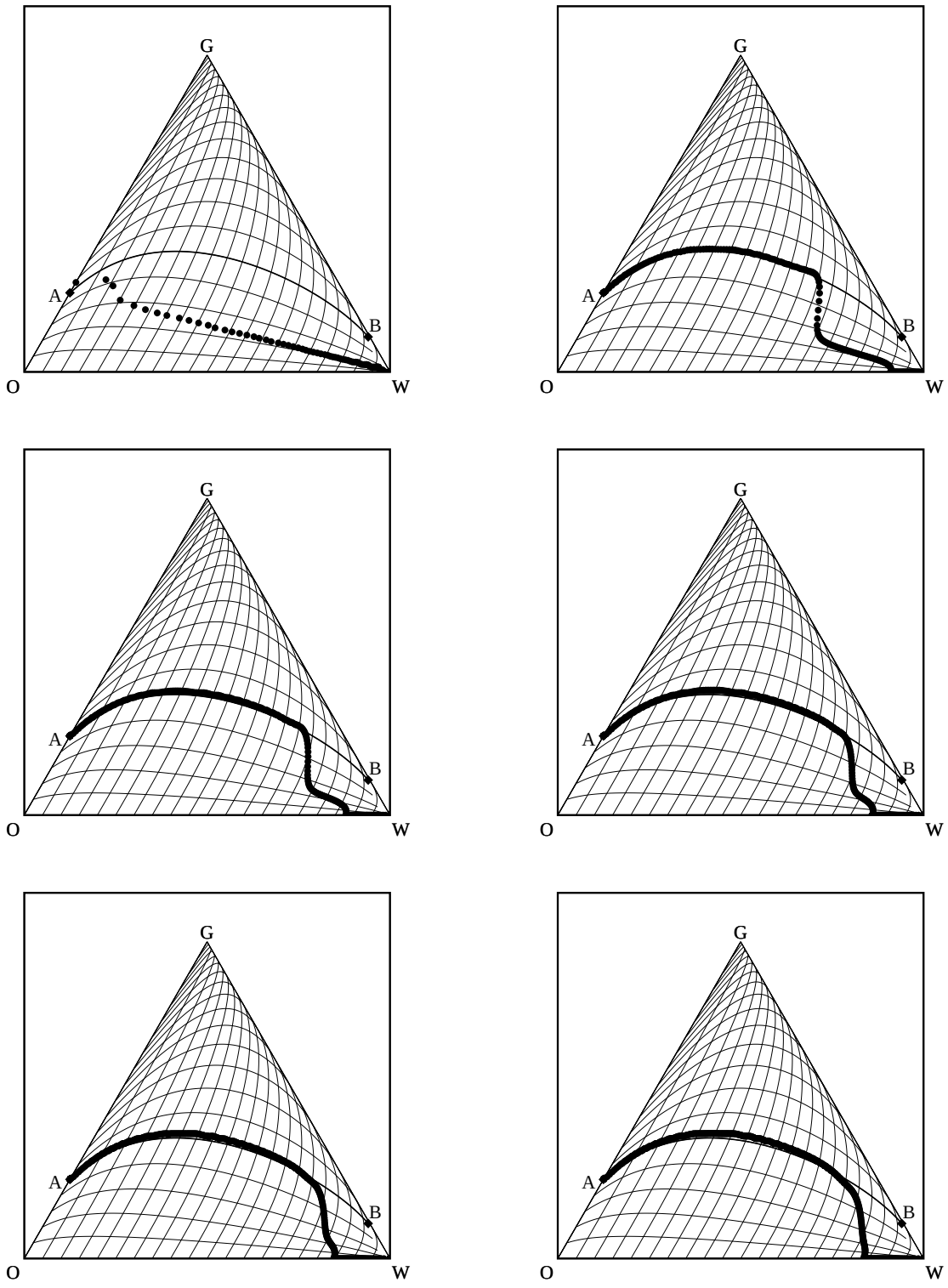


FIG. 3.3. *Évolution temporelle des saturations* $S_{\mathbf{g}}$, $S_{\mathbf{o}}$ *et* $S_{\mathbf{w}}$ *sur le diagramme ternaire pour le système de la figure 3.2 (les temps sont identiques à ceux de la figure précédente).*

$t = 501000$

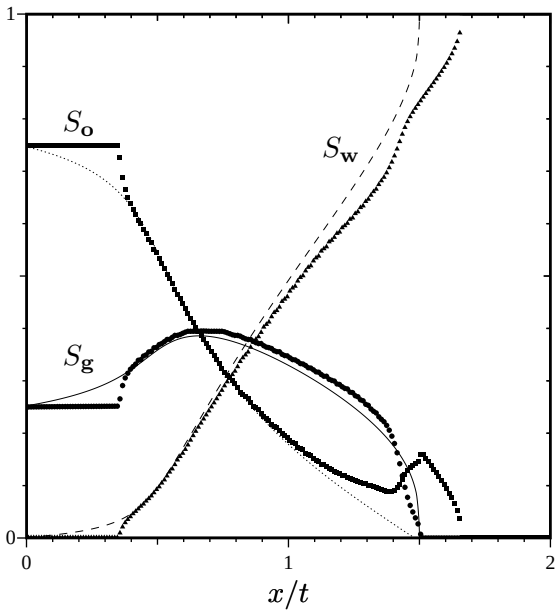


FIG. 3.4. *Courbes des profils S_g, S_o et S_w correspondant à l'instant $t = 501000$ de la figure 3.2 en fonction de la variable x/t (normalisée par la vitesse débitante). Les courbes en traits fins représentent les profils de saturations obtenus par la courbe de raréfaction.*

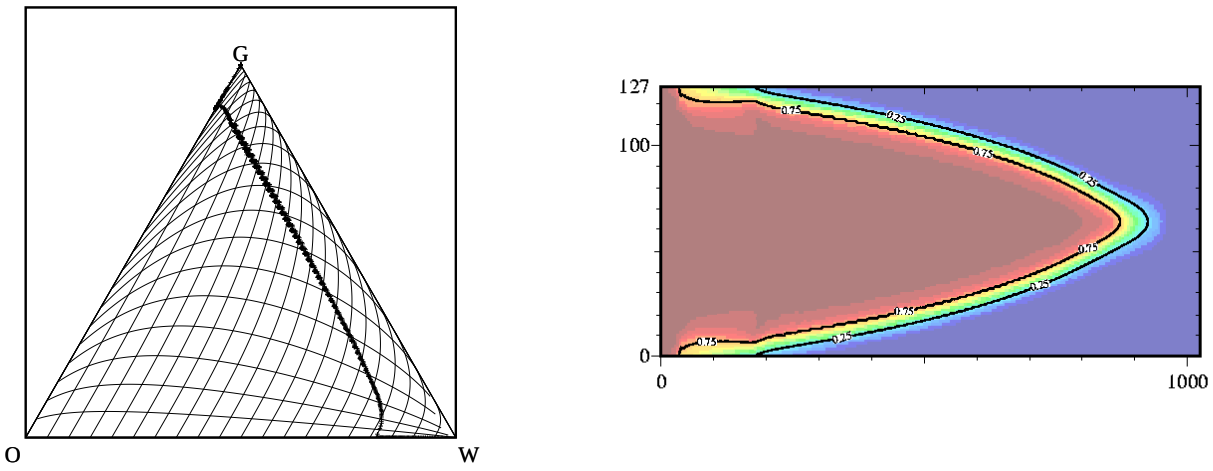


FIG. 3.5. *Chemin et configuration des fluides pour la condition initiale $A = G$ à l'instant $t = 401000$. Les paramètres sont : $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 10^{-4}$ et $Pe = 2048$.*

3.3 Cas mixte hyperbolique-elliptique

Comme auparavant, nous allons distinguer deux types de conditions initiales : $A \neq G$ ou $A = G$.

Cas $\mathbf{A \neq G}$:

La condition initiale est la même que dans la section précédente. Le point A correspond à l'état $(S_{\mathbf{g}}, S_{\mathbf{o}}, S_{\mathbf{w}}) = (0.25, 0.75, 0)$, le profil initial décroît exponentiellement et le chemin initial est une droite joignant le point A au point W.

Sur la figure 3.6 ont été tracés des champs de concentrations successifs. On peut constater sur ces images que le doigt commence à se déstabiliser dès l'instant $t = 81000$. Ces instabilités croissent rapidement et conduisent à des gradients de saturation moyens très importants. Le système devient alors en général instable numériquement. Il faut noter cependant que lorsque la diffusion moléculaire est suffisamment grande, comme c'est le cas ici, les instabilités sont très nettement diminuées. On verra par la suite des cas où le nombre de Péclet est plus important. On notera également qu'au bout du doigt, il peut y avoir plus de trois "phases" stratifiées, ce qui rend caduque l'étude analytique du chapitre précédent.

Si on regarde les chemins correspondant à cette simulation sur la figure 3.7, on constate immédiatement que l'instabilité se développe au centre de la zone elliptique. En dehors de cette zone le chemin suit un chemin de raréfaction. Cette instabilité est cohérente avec les prédictions d'instabilité "à la" Batchelor (voir Ch.1 page 88). Batchelor prévoit dans la zone elliptique une instabilité ayant un taux de croissance proportionnel à la partie imaginaire des valeurs propres de la matrice du système et au nombre d'onde k. Le fait que le nombre d'onde sélectionné de l'instabilité ne soit pas infiniment grand est peut-être dû à la présence de la diffusion moléculaire qui peut stabiliser les courtes longueurs d'ondes (par un terme en $-Dk^2$ dans l'expression du taux de croissance).

Sur la figure 3.8 ont été tracées les courbes de saturation en fonction de la variable x/t (normalisée par la vitesse débitante). Sur cette même courbe ont été tracées les vitesses de raréfaction correspondant à la courbe de raréfaction notée AE sur la figure 3.7. On constate qu'il y a un bon accord avec les prédictions théoriques lorsque le système est hyperbolique. On notera à l'arrière du doigt un effet de la diffusion moléculaire identique au cas précédent.

On pourrait se demander à partir de cette simulation s'il est possible de stabiliser par diffusion le système dans la zone elliptique. En fait, les simulations ont montré que si l'on augmente la diffusion moléculaire, le système devient stable uniquement lorsque la diffusion moléculaire est suffisamment importante pour sortir rapidement le système de la zone elliptique (cette stabilisation est facile à voir lorsque $A = G$ sur la figure 3.9).

Cas $\mathbf{A = G}$:

Le cas où l'état initial est situé au point G est intéressant à étudier. En effet, la diffusion moléculaire a deux effets opposés. Si elle amène le système dans une région elliptique, elle peut également atténuer les instabilités qui peuvent s'y développer. La figure 3.9 montre une simulation pour laquelle la diffusion moléculaire est suffisamment forte pour que le système puisse se stabiliser.

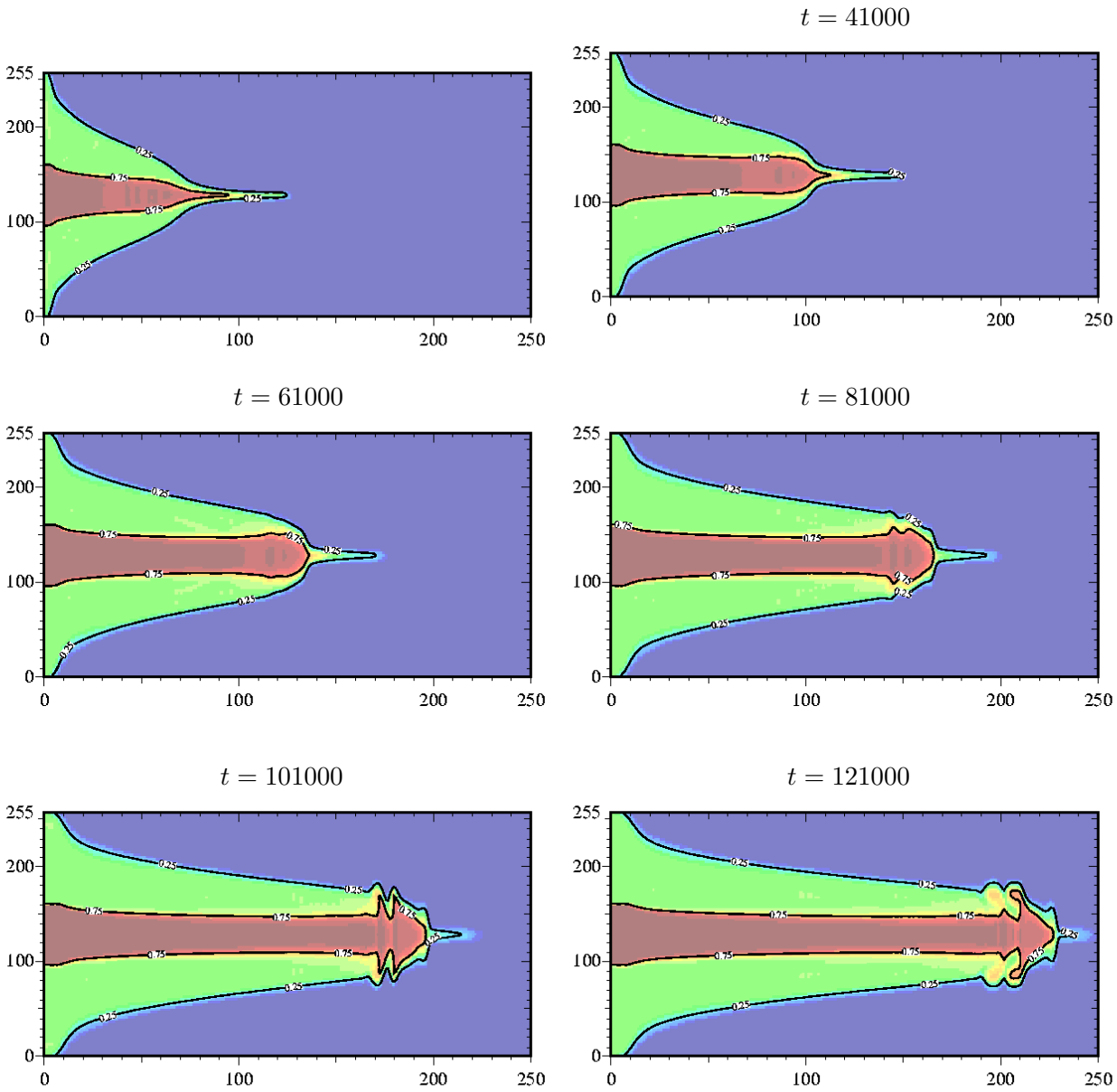


FIG. 3.6. *Évolution du champ de concentrations au cours du temps pour un système mixte hyperbolique-elliptique. Les paramètres sont :* $M = 1$, $\Lambda = 10$, $D_0 = 10^{-4}$, $u_0 = 8.10^{-4}$ *et* $Pe = 2048$.

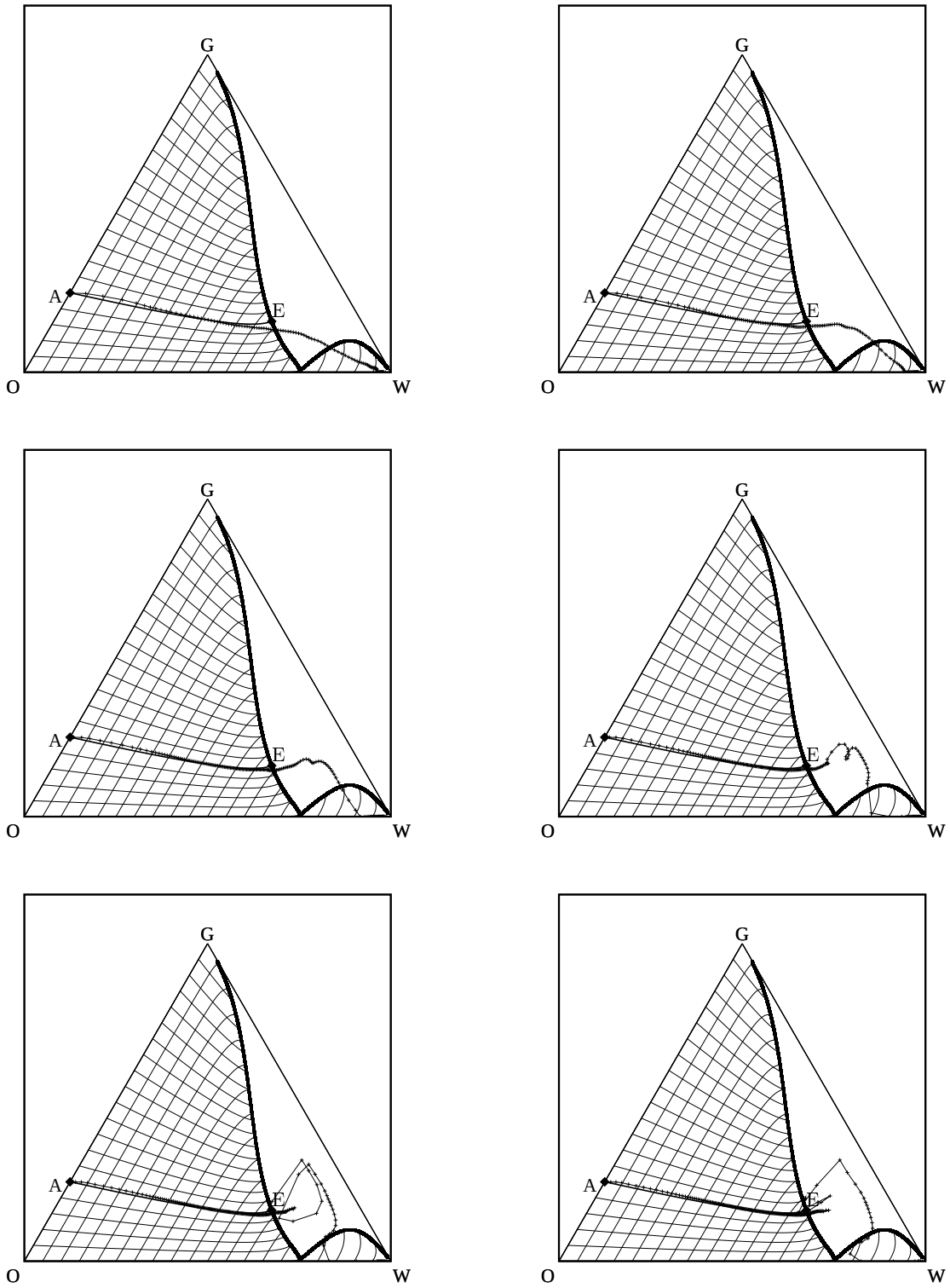


FIG. 3.7. *Evolution, sur le diagramme ternaire, de la solution correspondant à la simulation de la figure 3.6.*

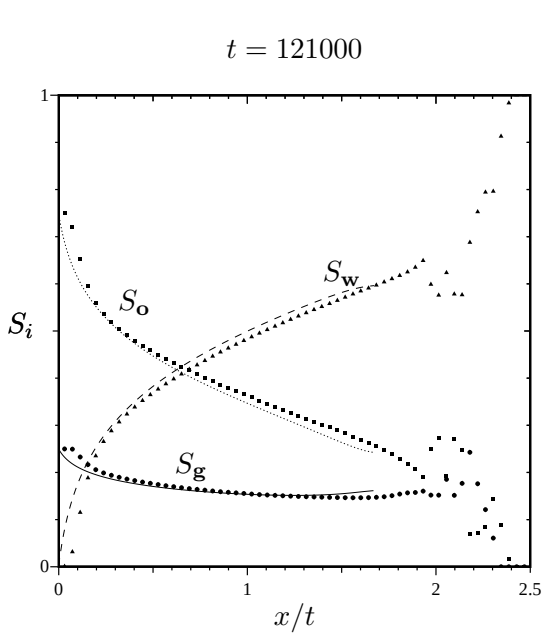


FIG. 3.8. *Courbes des saturations $S_{\mathbf{g}}$, $S_{\mathbf{o}}$ et $S_{\mathbf{w}}$ en fonction de la variable x/t (normalisée) pour la simulation de la figure 3.6.*

On constate alors que cette stabilisation ne se produit que lorsque le système quitte la région elliptique. Il ne semble donc pas possible de stabiliser le système à l'intérieur de la zone elliptique par une augmentation de la diffusion moléculaire.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié des solutions numériques du problème dans le cas où les hypothèses de lubrification sont imposées. Nous avons vu que le système devient instable dès lors qu'il traverse la zone elliptique, comme prévu par l'étude de stabilité linéaire. Nous avons également vu que la présence de la diffusion moléculaire n'était pas un facteur suffisant pour stabiliser le système à l'intérieur de la zone elliptique. Dans le chapitre suivant nous allons étudier un système plus physique dans lequel le fluide obéit aux équations de Navier-Stokes. En effet, si les équations de lubrification conduisent à une instabilité dans la zone elliptique, il est possible que le système trouve un chemin en rompant les hypothèses de lubrification (par l'intermédiaire d'un choc par exemple). Il faut de plus noter la présence d'un terme inertiel qui pourra éventuellement jouer un rôle.

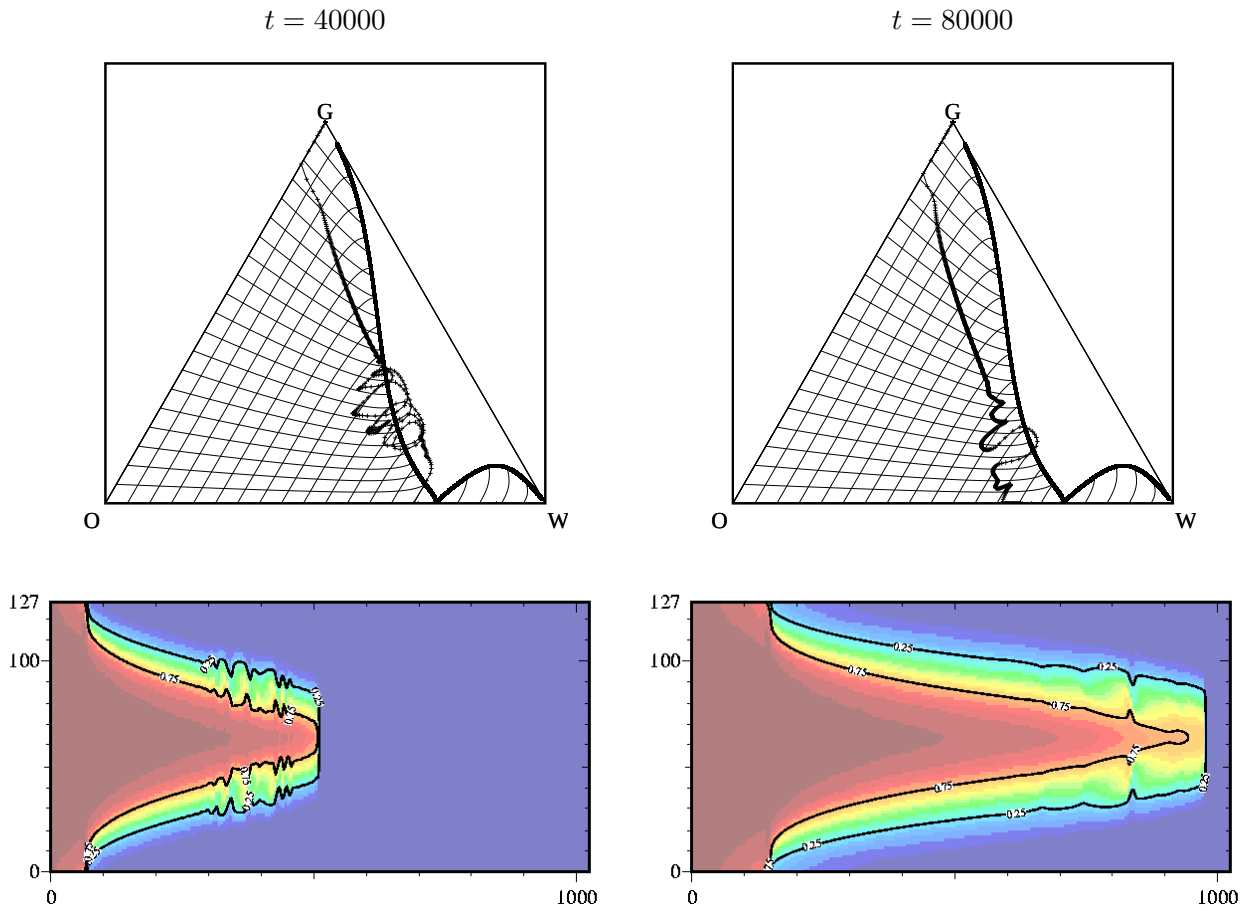


FIG. 3.9. *Diagrammes de phase et configurations des fluides obtenus à deux instants différents d'une simulation. La condition d'injection est du type $A = G$. Le nombre de Péclet est beaucoup plus faible que dans le cas précédent. On constate une stabilisation dès que le chemin quitte la région elliptique. Les paramètres sont : $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 5.10^{-4}$ et $Pe = 410$.*

Chapitre 4

Résolution numérique du problème complet

Dans le chapitre précédent, les conditions de lubrification permettaient d'approcher les prédictions théoriques (solutions en ondes cinématiques, instabilités dans la zone elliptique). Cette étude nous a également permis d'identifier les effets de la diffusion moléculaire sur le système.

Dans ce chapitre, nous allons aborder le problème de l'écoulement triphasique confiné en résolvant les équations de Navier-Stokes entre les deux plaques par la méthode BGK. Les conditions de lubrification ne seront donc plus imposées. Nous nous intéresserons aux deux cas particuliers étudiés au chapitre précédent, le cas purement hyperbolique (représenté par le système $M = 1$ et $\Lambda = 0.1$) et le cas mixte (représenté par $M = 1$ et $\Lambda = 10$). Notre attention se portera plus particulièrement sur le cas mixte, plus riche physiquement.

Il est nécessaire également de noter que si dans le chapitre précédent il était souvent difficile de prendre une condition initiale de type Riemann, ce problème ne se pose plus dans le cas présent.

4.1 Cas purement hyperbolique

De la même façon que précédemment, nous pouvons faire la distinction entre deux états initiaux particuliers : lorsque le départ du chemin se situe sur l'axe OG ou lorsqu'il est confondu avec le point G, ce dernier cas se distinguant par une diffusion moléculaire prédominante.

La condition initiale sera ici de la forme :

$$c(x=0,y,t=0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |y| < b\, S_{\mathbf{g}_g} \\ 0.5 & \text{si} \quad b\, S_{\mathbf{g}_g} < |y| < b\,(S_{\mathbf{o}_g} + S_{\mathbf{g}_g}) \\ 0 & \text{si} \quad b\,(S_{\mathbf{o}_g} + S_{\mathbf{g}_g}) < |y| \end{cases} \tag{4.1}$$

Cas $\mathbf{A \neq G}$:

Sur la figure 4.1 a été tracée l'évolution du champ de concentrations au cours du temps. On peut constater une très grande similitude avec les profils obtenus dans le chapitre précédent (voir

figure 3.2 page 109). On constate une région en amont où les saturations $S_{\mathbf{g}}$ et $S_{\mathbf{o}}$ sont constantes. Cette région est ensuite suivie d'un gonflement de la phase **g** (la phase **o** est décroissante sur cette région). La grande différence avec le cas précédent se situe essentiellement en aval du doigt. Le doigt ne se termine plus par une pointe, mais plutôt par un choc. On pourrait penser que cette différence résulte uniquement de conditions initiales différentes. En fait, il n'en est rien : si on part d'une condition initiale identique à celle du chapitre précédent, les deux profils diffèrent également à l'aval du doigt. La condition initiale ne change que les états transitoires. La raison principale de la différence entre les deux systèmes est, qu'au bout du doigt, les conditions de lubrification ne sont plus valables. La solution du problème présentant un choc ne peut pas être retrouvée avec le modèle de lubrification. La forme du choc ainsi que sa vitesse sont ici déterminées par les équations de Navier-Stokes (écoulement bidimensionnel). Il n'est donc pas étonnant d'obtenir des résultats différents lorsque l'on résoud les équations de Navier-Stokes ou celles de lubrification.

On peut également comparer l'évolution temporelle du chemin dans le diagramme de phases de la figure 4.2. On constate que si les états transitoires sont différents de ceux du chapitre précédent, le chemin final semble identique hormis en fin de chemin. La solution aux temps longs est donc bien composée principalement d'une onde de raréfaction (notée AB sur le diagramme) comme dans le chapitre précédent. On peut également remarquer que le chemin se termine parallèlement à un chemin rapide. Notons que la valeur propre λ_+ diminue dans le sens du parcours de la portion de chemin raccordant l'onde de raréfaction à l'axe OW, ce qui est compatible avec le choc observé sur la figure 4.1.

On pourrait s'étonner de la différence entre les états initiaux des deux systèmes aux temps courts. En effet, dans le chapitre précédent, le chemin des saturations s'alignait très rapidement selon un chemin de raréfaction. On avait vu que les écarts au chemin de raréfaction étaient dus à la diffusion et à la condition initiale différente de celle de Riemann. Dans le cas présent, on a toujours la diffusion moléculaire, par contre la condition initiale est du type Riemann. On se serait donc attendu à observer le développement d'une onde de raréfaction dès les instants initiaux. Le problème provient à nouveau des conditions de lubrification. En effet, notre état initial étant discontinu, les hypothèses de lubrification ne sont plus valables aux temps courts, par conséquent, les équations de conservations présentées dans les chapitres précédents ne permettent pas de prédire l'évolution des profils aux temps courts. La prédiction analytique des états initiaux nécessiterait également la résolution complète des équations de Navier-Stokes. Il apparaît donc clairement qu'utiliser des conditions initiales de type Riemann pour entrer dans le cadre de la description analytique n'a pas beaucoup de sens dans notre cas. Cependant, il est remarquable qu'avec une telle condition, la solution se rapproche de plus en plus de la solution auto-similaire prédite par l'analyse.

Un tel comportement limite est mis en évidence sur la figure 4.3, qui montre la superposition des profils des saturations (en fonction de la variable auto-similaire x/t) et des vitesses prédites par l'onde de raréfaction (notée AB sur le chemin de la figure 4.2). On constate, comme dans le chapitre précédent, un écart à la prédiction théorique en amont et en aval du déplacement. La diffusion est responsable de l'écart en amont du déplacement. Le chemin initial commence par une onde constante (due à la disparition de la phase **w**) qui se raccorde ensuite avec l'onde de raréfaction AB (par l'intermédiaire d'un choc).

En fin de chemin, les saturations quittent le chemin prédit analytiquement par l'intermédiaire

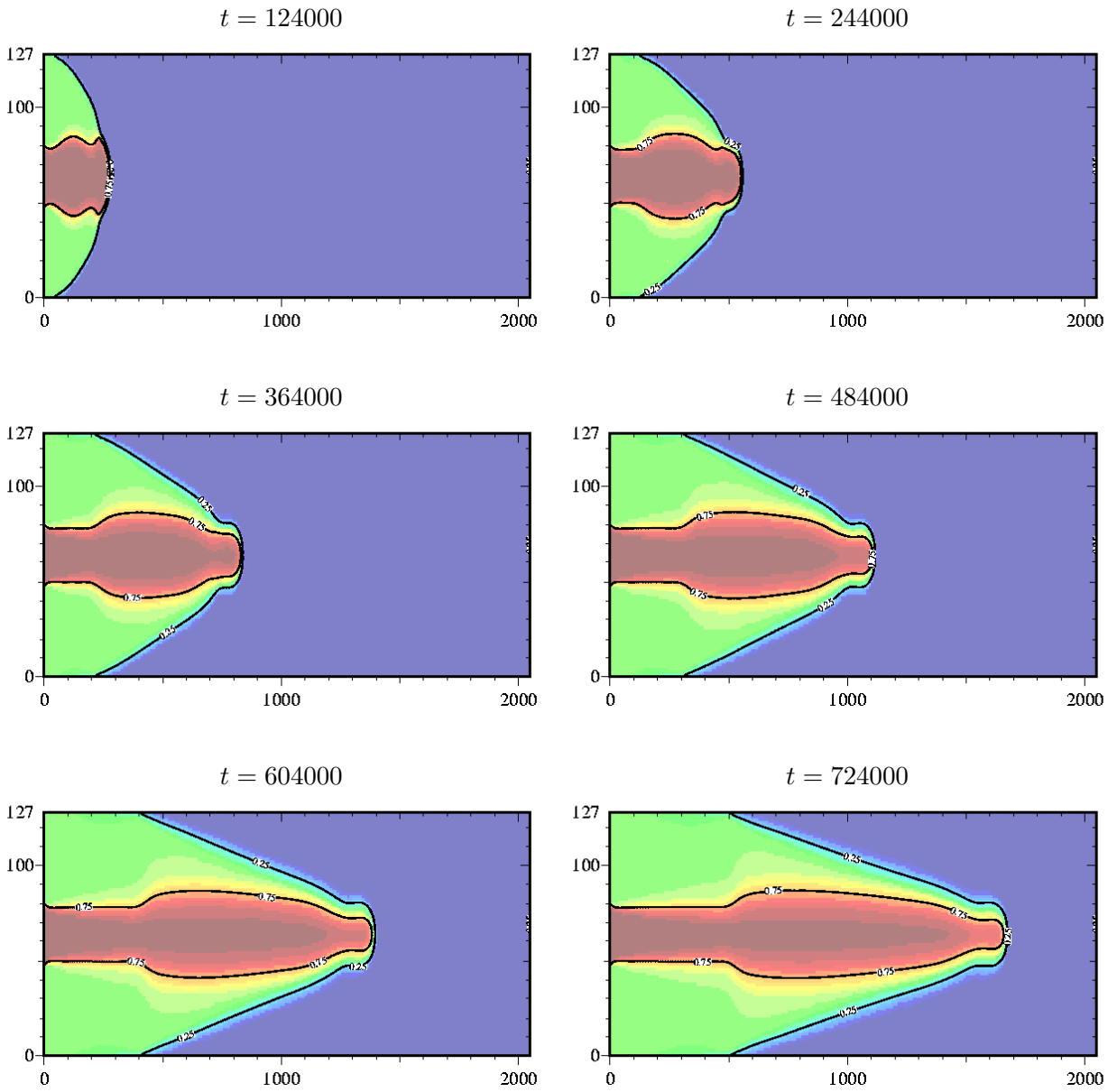


FIG. 4.1. *Évolution du champ de concentrations en fonction du temps pour un système hyperbolique. La condition d'entrée est du type* $A \neq G$. *Les paramètres sont :* $M = 1$, $\Lambda = 0.1$, $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 5.10^{-5}$, $Pe = 4096$.

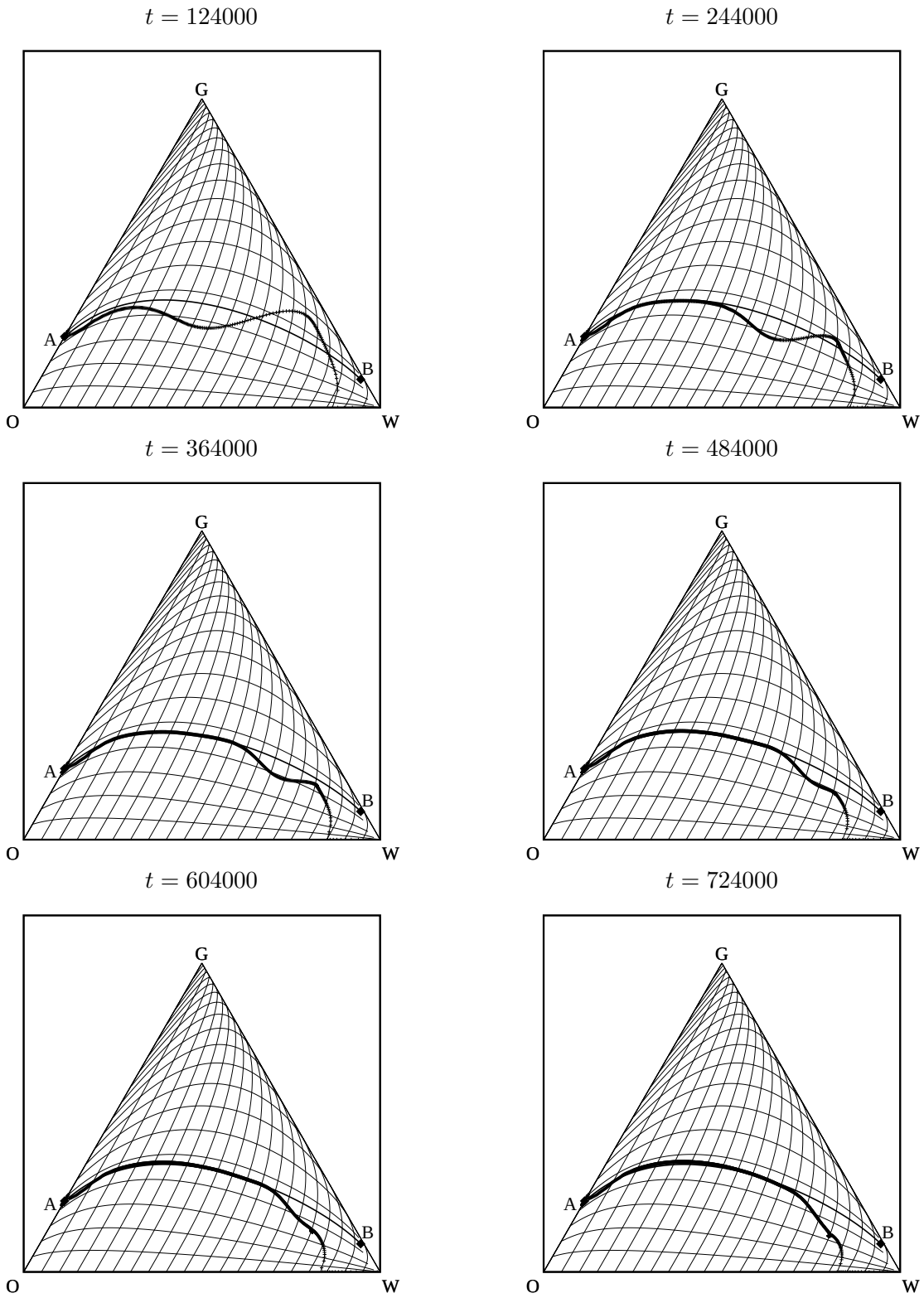


FIG. 4.2. *Représentation de la simulation de la figure 4.1 sur le diagramme ternaire. On constate que le chemin s'aligne sur le chemin de raréfaction AB.*

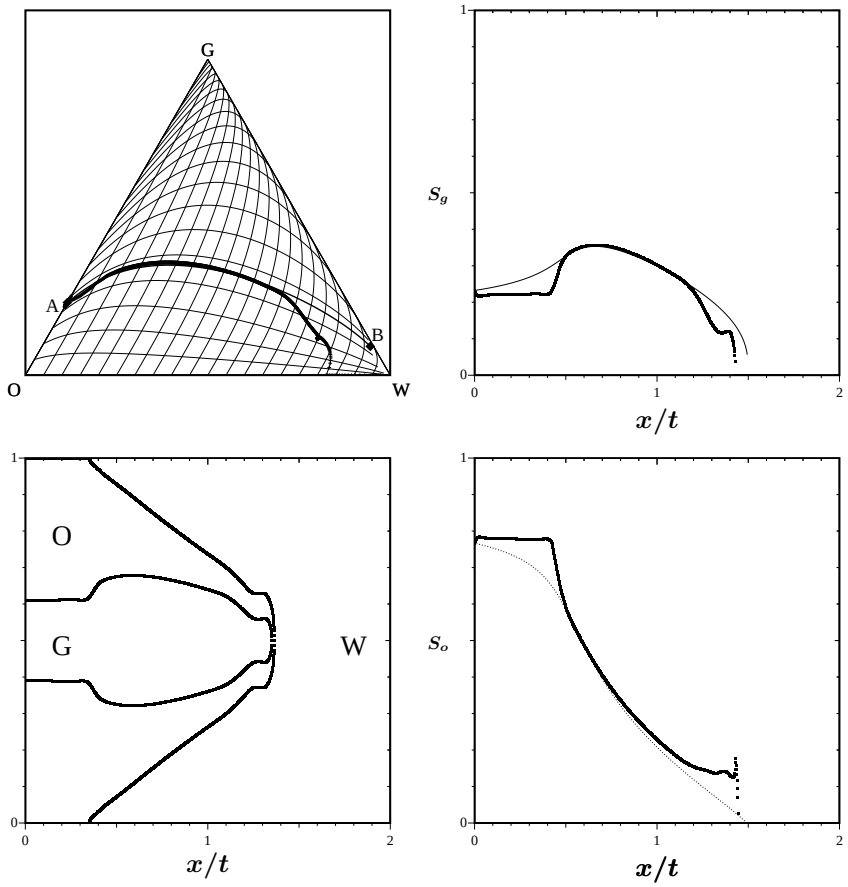


FIG. 4.3. *Chemin sur le diagramme de phases et courbes de saturation (en fonction de la variable x/t, normalisée) correspondant à la figure 4.1 au temps $t = 724000$.*

d'un choc pour se connecter à l'axe OW.

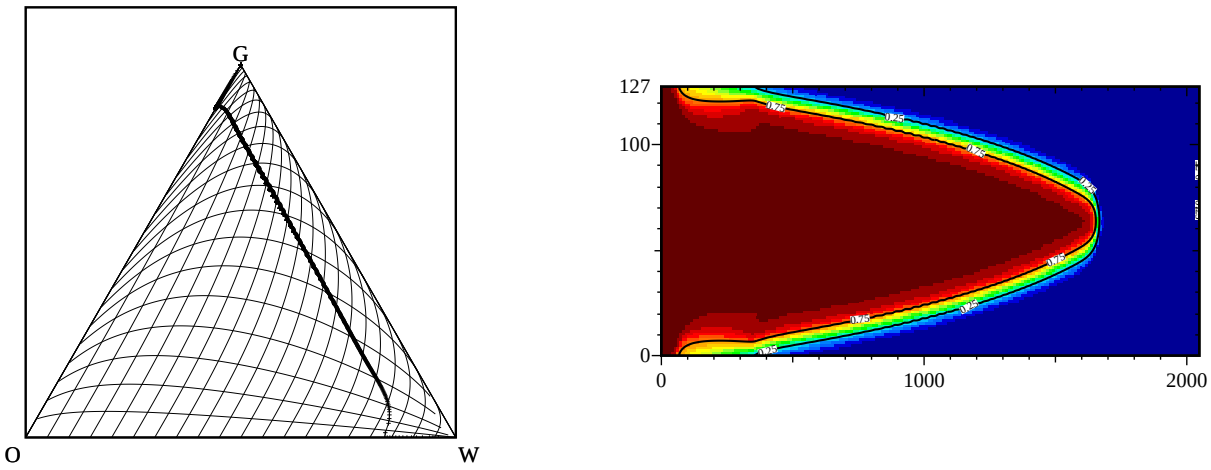


FIG. 4.4. *Diagramme de phases et configurations des fluides d'une simulation dont l'injection correspond au cas $A = G$. Les paramètres sont : $M = 1$, $\Lambda = 10$, $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 5.10^{-5}$, $Pe = 4096$.*

Cas A = G :

Comme nous l'avons déjà signalé, le cas $A = G$ est intéressant car les effets de la diffusion moléculaire sont prédominants. L'étude analytique ne permet pas de prévoir l'évolution d'un tel système. Nous avons cependant vu dans le chapitre précédent (voir figure 3.5 page 111) que la diffusion moléculaire aboutissait à un chemin parallèle à l'axe GW. On constate sur la figure 4.4 que le comportement est quasiment identique. Cela s'explique par le fait que, dans le cas présent, l'écoulement satisfait les conditions de lubrification.

Nous avons vu dans cette section que lorsque le système est purement hyperbolique, les solutions du problème sont très similaires aux solutions du chapitre précédent. Les hypothèses de lubrification sont donc valables dans l'ensemble du système (hormis à l'avant du déplacement). Nous allons maintenant étudier le cas plus intéressant du système d'équations elliptique, pour lequel la résolution du déplacement dans les hypothèses de lubrification aboutissait à des solutions non-physiques.

4.2 Cas mixte hyperbolique-elliptique

Comme précédemment nous allons étudier la solution reliant l'état à gauche A, correspondant à $(S_\mathbf{g}, S_\mathbf{o}, S_\mathbf{w}) = (0.25, 0.75, 0)$, à l'état à droite W, correspondant à $(S_\mathbf{g}, S_\mathbf{o}, S_\mathbf{w}) = (0, 0, 1)$ pour $M = 1$ et $\Lambda = 10$. Les clichés d'une telle réalisation sont présentés sur la figure 4.5. On constate sur cette figure que la structure de la solution est différente du cas purement hyperbolique. Dès les premiers instants, la phase G montre nettement un besoin de s'évaser pour former deux pointes latérales à l'avant du déplacement. Après un temps plus long, le bout du doigt possède une forme en "cloche". Contrairement à la section précédente, on n'observe pas d'instabilité à l'avant de ce

déplacement.

Les chemins correspondant à cette solution ont été tracés pour différents instants sur la figure 4.6. On peut constater un comportement radicalement différent de ceux observés jusqu'ici. En particulier, le chemin de raréfaction prédit par l'analyse dans la zone hyperbolique (chemin AE sur la figure) est ignoré en grande partie. La solution finale étant beaucoup plus complexe à détailler que les précédentes, nous allons discuter de cette solution par morceaux. Sur la figure 4.7, nous avons tracé le chemin de cette solution ainsi que les profils de saturations en fonction de la variable auto-similaire x/t. Nous pouvons de plus décomposer la solution finale en plusieurs morceaux en introduisant les états intermédiaires notés de H à M. Le prochain paragraphe détaille une telle décomposition.

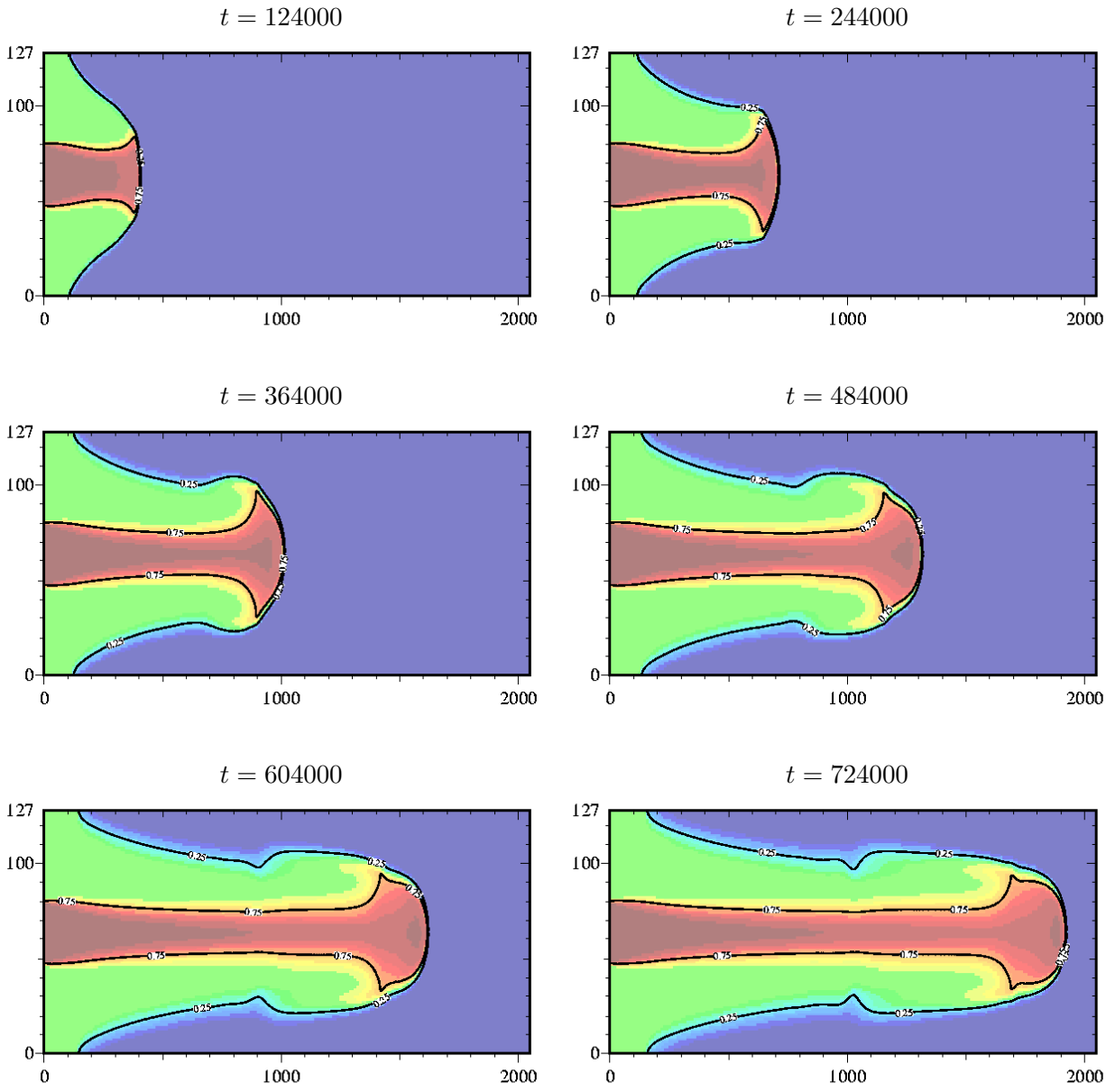


FIG. 4.5. *Évolution du champ de concentrations au cours du temps pour un système mixte. Les paramètres sont :* $M = 1$, $\Lambda = 10$, $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 5.10^{-5}$, $Pe = 4096$.

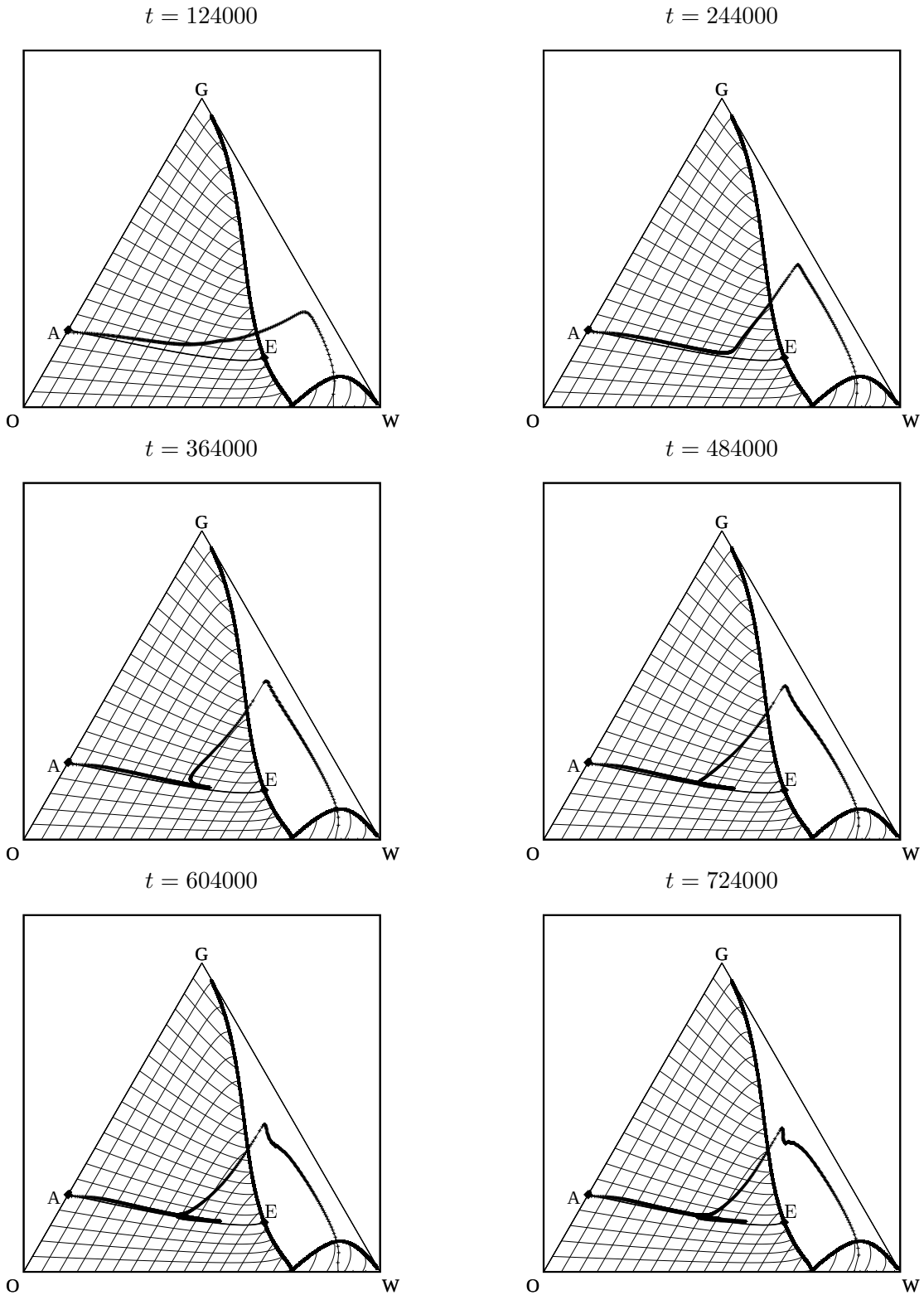


FIG. 4.6. *Évolution temporelle du diagramme ternaire correspondant à la figure 4.5. Le début du chemin semble s'aligner sur la courbe de raréfaction AE.*

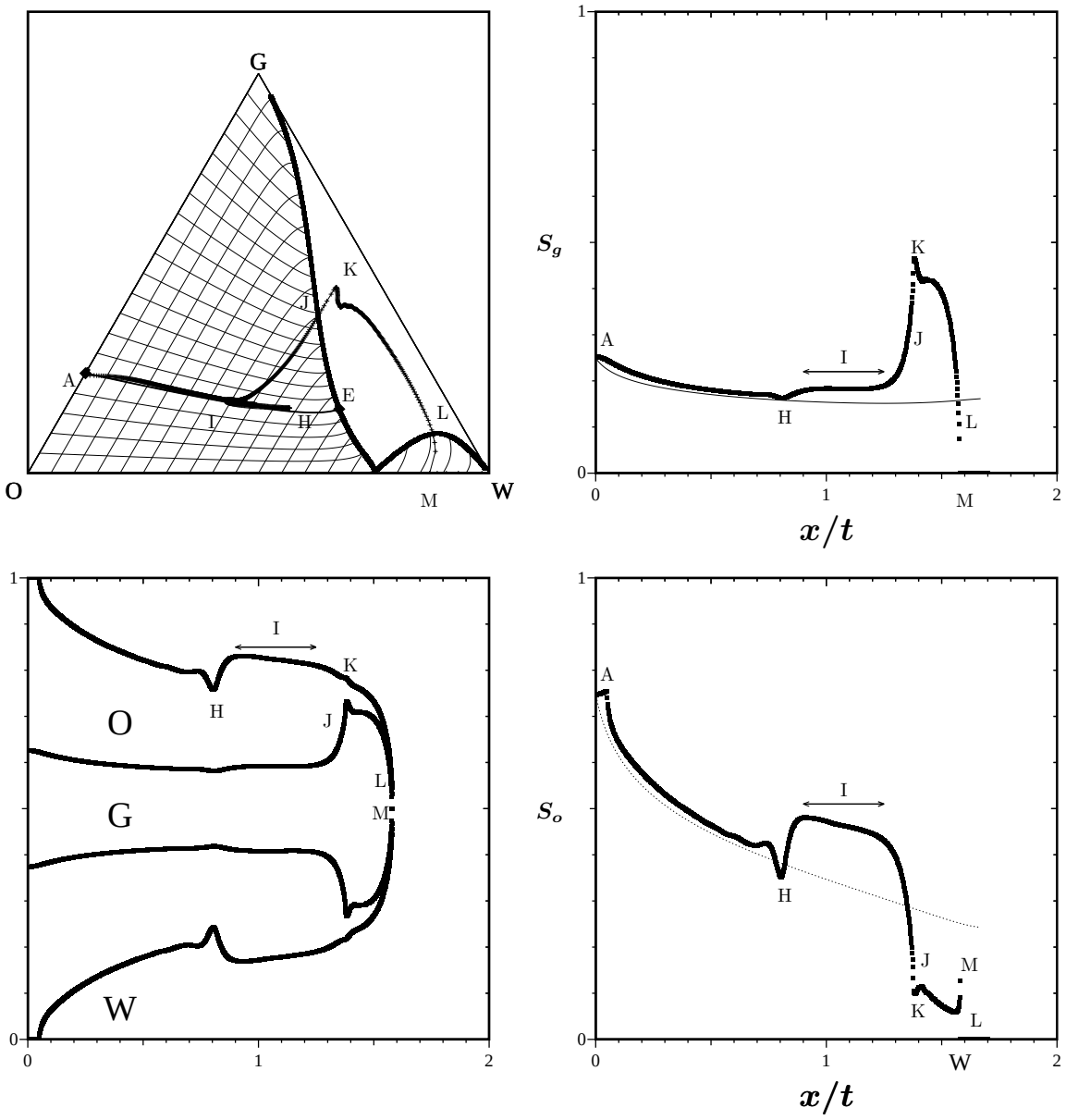


FIG. 4.7. *Diagramme ternaire et courbes de saturations, en fonction de la variable x/t (normalisée), de la simulation de la figure 4.5 à l'instant $t = 724000$. Les points I, J, K, L et M représentent des états particuliers de la solution.*

Décomposition de la solution (voir figure 4.7)

Chemin AH : ce chemin suit la courbe de raréfaction (lente) issue de A et se dirigeant vers E comme prévu (voir diagramme en haut à gauche). On note de plus que les courbes de saturations tracées en fonction de la variable x/t sont également en bon accord avec les courbes des vitesses théoriques (courbes en traits fins sur les figures de droite). Cependant, au lieu de continuer jusqu'au point E, le chemin de raréfaction s'arrête au point H pour repartir en sens inverse.

Chemin HI : ce chemin semble encore suivre une courbe de raréfaction. Si l'on considère l'évolution des valeurs propres dans le sens du chemin HI, celui-ci doit correspondre à un choc. Ce choc est facilement observable sur la figure en bas à droite, car il correspond à une variation très rapide de la saturation $S_{\mathbf{o}}$. On remarque que le point I, facilement repérable sur le diagramme ternaire, est difficilement identifiable sur les courbes de saturations. Cet état correspond à une onde constante.

Chemins IJ et JK : ces chemins correspondent à une forte augmentation de la saturation $S_{\mathbf{g}}$, associée à une forte diminution de $S_{\mathbf{o}}$. Cette augmentation s'effectue de plus en gardant $S_{\mathbf{w}}$ constante. Le point J n'a été introduit que pour marquer l'endroit où le chemin traverse la zone elliptique. Bien que cela ne soit pas tracé sur la figure, le point K se trouve être sur un chemin de Hugoniot issu de I. La condition de Rankine-Hugoniot appliquée à ces deux points donnerait comme vitesse de propagation d'un tel choc : $\Sigma = 1.38$. Ce résultat est en bon accord avec les observations (figure de droite). En effet, le saut de saturation de $S_{\mathbf{g}}$ semble se produire à l'abscisse $x/t \sim 1.4$. On remarquera que l'application de la condition de Rankine-Hugoniot suppose que nos fonctions de flux soient valables en I **et** en K, ce qui nécessite donc la validité des hypothèses de lubrification en ces deux points.

Chemin KL et LM : sur ce chemin, la saturation $S_{\mathbf{o}}$ reste pratiquement constante. Par contre la saturation $S_{\mathbf{g}}$ varie beaucoup. Ce chemin aurait pu être décomposé en trois parties. En effet, $S_{\mathbf{g}}$ commence par décroître brusquement pour former la pointe observée sur les clichés de la figure 4.5, page 125. Cette saturation reste ensuite constante sur l'intervalle de vitesses [1.4, 1.5]. Elle décroît à nouveau très rapidement jusqu'à la disparition totale de la phase **g** (point M). On peut penser raisonnablement que cette partie est constituée d'un choc (de vitesse $\Sigma \sim 1.4$), suivi d'une onde constante qui est à nouveau suivie d'un choc ($\Sigma \sim 1.6$). Comme nous l'avons signalé plus haut, la diffusion est responsable de la présence d'une région où la saturation $S_{\mathbf{o}}$ est uniforme. Cependant, il est assez remarquable que cette diffusion moléculaire "n'efface" pas la pointe formée en K. De plus, il faut remarquer que le chemin KL parallèle à l'axe GW semble stationnaire au cours du temps, ce qui n'est pas intuitif. En effet, on aurait pu s'attendre à ce qu'il s'éloigne progressivement de l'axe GW (en $\sim \sqrt{t}$). Il semblerait en fait que le système "sélectionne" une épaisseur de **o** qui reste constante. Cette sélection résulte d'une compétition entre les effets convectif et diffusif.

Chemin MW : une fois que la phase **g** a disparu, la phase **o** disparaît très rapidement par l'intermédiaire d'un choc ($\Sigma \sim 1.6$). On peut faire un rapprochement intéressant entre la vitesse de ce choc et celle obtenue dans le cas du déplacement de deux fluides présenté au Chapitre 1, page 80 : elles sont pratiquement identiques.

Commentaires : on peut constater avec cette solution que la présence d'une région elliptique modifie grandement le type de solution sélectionné. Cela montre qu'une approche similaire à celle de Patzek *et al.* n'est pas envisageable. En effet, nous voyons ici que le modèle utilisé ne peut pas être rejeté avec comme seul argument qu'il existe une zone elliptique. La présence d'une zone elliptique permet entre autres de prévoir un changement de comportement. On pourrait par contre se demander si le chemin "traverse" effectivement une zone elliptique. En effet, nous avons vu que celle-ci n'a de sens que dans le cadre des hypothèses de lubrification. Pour déterminer si des états se trouvent effectivement dans une région elliptique, il est nécessaire de trouver les états pour lesquels les conditions de lubrification sont vérifiées. Pour cela, nous avons tracé sur la figure 4.8 l'écart (normalisé par la vitesse moyenne) de la vitesse à la vitesse calculée avec les hypothèses de lubrification. Sur cette figure, les zones bleues correspondent à des écarts inférieurs à 6%. On constate qu'entre K et L, il existe une zone proche du point K qui vérifie les conditions du lubrification et qui se trouve effectivement dans une région elliptique. Sur cette même figure, on peut constater que les autres régions pour lesquelles les conditions de lubrification ne sont pas valables sont : le chemin $I \rightarrow K$ et une petite portion à l'entrée, ces deux chemins correspondent à des chocs. Le fait qu'une partie proche du point K vérifie les conditions de lubrification explique que la relation de Rankine-Hugoniot est valable entre les points I et K[1]. On remarquera que la condition de Rankine-Hugoniot n'est par contre pas valable entre les points K et M. Un tel résultat peut se comprendre si on observe les vitesses des états K et M. En effet, la relation de Rankine-Hugoniot nécessite que les états amont et aval aient la même vitesse. Sur la figure 4.7, on peut constater clairement que ce n'est pas le cas (le point K a une vitesse de 1.4 et le point M une vitesse de 1.6). Cette différence est sûrement liée aux effets de la diffusion moléculaire[2].

La solution présentée dans cette section s'est révélée être très complexe. La solution débute effectivement par une onde de raréfaction. Le chemin rentre dans la zone elliptique par l'intermédiaire d'un choc (chemin IK) comme cela aurait était prévu par les mathématiciens (voir Keyfitz *et al.*). Cependant, le chemin quitte ensuite la région elliptique et la sortie de cette région ne se fait pas par l'intermédiaire d'un simple choc comme cela aurait été prévu théoriquement. En effet, pour sortir de cette région, le système invalide les hypothèses de lubrification (et de Rankine-Hugoniot), en particulier du fait des effets de la diffusion moléculaire.

Sur la figure 4.8, on constate que les écarts à la lubrification dépassent les 10% à trois endroits différents. Tout d'abord, l'écart est important au niveau de l'entrée. Il était assez prévisible que des effets d'entrée soient présents dans la mesure où nous n'imposons à l'entrée qu'un débit et des proportions de fluides constantes. Sur le chemin, ces effets d'entrée correspondent uniquement au point A[3]. Le fait que les conditions de lubrification ne soient pas valables au niveau de l'injecteur explique de plus que le chemin de raréfaction choisi sur le diagramme ne soit pas exactement celui issu de A. L'écoulement n'est quasi-parallèle qu'à partir d'une distance de quelques noeuds (10 sur la figure). Au-delà de cette distance, l'écoulement est effectivement quasi-parallèle, mais les saturations $S_{\mathbf{g}}$ et $S_{\mathbf{o}}$ ne sont plus celles imposées à l'entrée. Les deux autres régions où l'écart est important sont le chemin IK et l'avant du doigt. Le premier correspond au choc qui va dans la

[1] Pour que la relation de Rankine-Hugoniot soit valable il suffit en effet que les conditions de lubrification soient vérifiées aux points de départ et d'arrivée du choc.

[2] Rappelons qu'elle est responsable du fait que le point M soit sur l'axe OW.

[3] Il n'y a aucune saturation en $\mathbf{w}$.

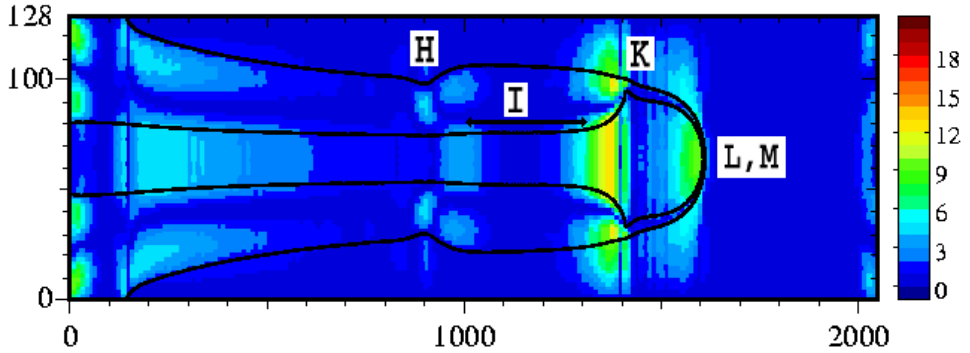


FIG. 4.8. *Écart du champ de vitesses à celui obtenu avec les hypothèses de lubrification,* $\epsilon(x,y) = \frac{u_x(x,y)-u_l(x,y)}{u_0}$ *en pourcentage, au temps* $t = 604000$*, pour la simulation de la figure 4.5. Les valeurs sont en pourcentages.*

zone elliptique. Le second correspond à la disparition de la phase **g**, puis celle de **o**.

On remarquera qu'il existe également un écart non négligeable ($\sim 3\%$) à la condition de lubrification dès qu'il existe des gradients de saturations. Cela est visible sur les profils de saturations correspondant à la raréfaction (chemin AH).

Cette solution soulève un certain nombre de questions. La résolution du problème repose principalement sur la détermination des états I, K et M. Les mécanismes physiques responsables de la sélection de ces états intermédiaires sont la diffusion moléculaire, qui semble jouer un rôle prédominant et peut-être l'inertie. Les états intermédiaires devraient dépendre également de la condition d'injection (le point A).

Un autre problème concerne le point K. En effet, nous avons vu qu'au voisinage de ce point les conditions de lubrification sont vérifiées. Ce point correspond de plus à une solution constante. D'après les résultats de l'analyse de stabilité linéaire, on a vu dans le chapitre précédent qu'une telle solution devrait être instable.

Nous étudierons dans ce qui suit les effets de la condition d'injection, de la diffusion moléculaire, de l'inertie et nous testerons la stabilité d'un état uniforme dans la zone elliptique.

Effets de la condition d'injection

La figure 4.9 montre différentes solutions du problème dans les mêmes conditions que précédemment, mais pour différents points d'injection A, dont l'un en $A = G$. On peut constater sur cette figure qu'il existe une partie du chemin commune à chacun des cas. Cette solution identique semble correspondre à la partie de chemin KW. En particulier, si l'on considère le cas $A = G$, on constate immédiatement que la solution est différente du cas purement hyperbolique. En effet, dans ce dernier cas, on avait vu que le chemin était une droite parallèle à l'axe GW. Ce chemin pouvait s'interpréter par le fait que la diffusion moléculaire créait une épaisseur uniforme de saturation $S_{\mathbf{o}}$. Dans le cas mixte, le chemin suivi à partir du point A, n'est effectivement parallèle à l'axe

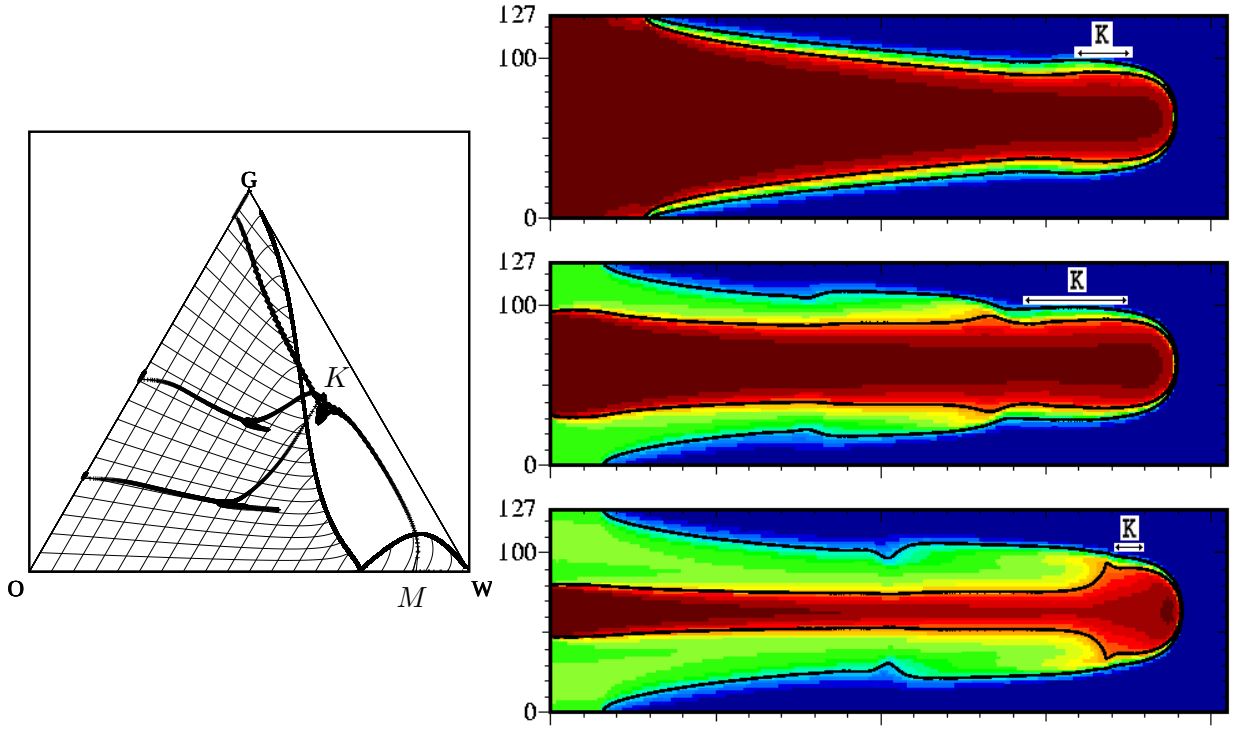


FIG. 4.9. *Diagramme ternaire et configurations des fluides au même temps de simulations pour des conditions d'injection différentes. Les paramètres pour chacune des simulations sont :* $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 5.10^{-5}$, $Pe = 4096$.

GW que jusqu'au point K. A partir de ce point, le chemin se confond avec le chemin KM décrit dans le paragraphe précédent. Cet ensemble de résultats nous indique donc que, quel que soit le point de départ, le système privilégie un chemin de sortie de la zone elliptique. Pour déterminer les mécanismes physiques qui permettent de sélectionner la solution, il est donc nécessaire de se concentrer sur le problème de la sélection du chemin KM.

Cette partie de la solution est assez complexe à étudier analytiquement. Nous allons ici étudier numériquement l'influence du coefficient de diffusion et de l'inertie.

Effets de la diffusion moléculaire

Sur la figure 4.10, la vitesse débitante est identique à celle des simulations précédentes, mais la coefficient de diffusion est plus grand. On constate que, comme l'on pouvait s'y attendre, la diffusion moléculaire modifie le chemin de sortie. En particulier, le chemin KM s'éloigne de l'axe GW lorsque le coefficient de diffusion augmente. Sur la figure à gauche, on constate qu'effectivement l'avant du déplacement est caractérisé par une proportion de $S_{\mathbf{o}}$ plus grande que précédemment (voir figure 4.9 à droite en bas).

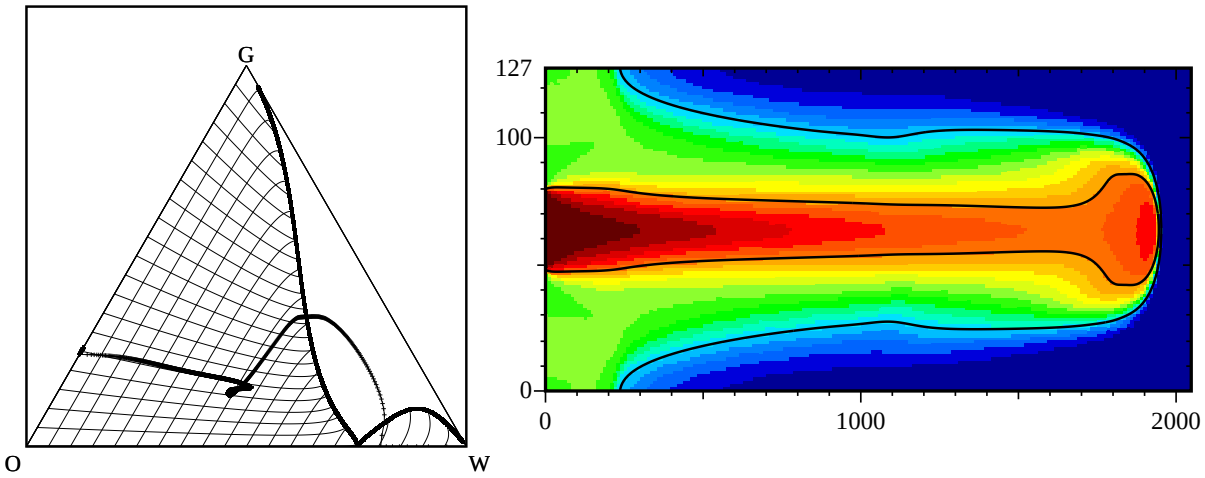


FIG. 4.10. *Diagramme ternaire et configuration des fluides d'une simulation pour un système mixte hyperbolique-elliptique. Les paramètres sont :* $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 2.10^{-4}$, $Pe = 1024$.

Effets inertiels

Sur la figure 4.11, nous avons fait varier le nombre de Reynolds[4] (Re) en gardant le nombre de Péclet ($Pe = 1024$)constant. On constate que les effets inertiels ne se traduisent sur le diagramme ternaire que par l'extension du chemin HI. Ce chemin correspond sur les profils de saturations à une oscillation de l'interface entre les phases **o** et **g** d'amplitude croissante avec Re. Il est assez surprenant de constater sur le diagramme que les oscillations des saturations $S_{\mathbf{o}}$ et $S_{\mathbf{g}}$ correspondent à un chemin qui s'aligne suivant les courbes de raréfaction. En effet, on aurait pu s'attendre à ce que les prédictions théoriques ne soient plus valables, dans la mesure où les conditions de lubrification ne sont plus respectées.

Remarquons aussi que les effets inertiels ne jouent pas un rôle important à l'avant du nez, bien que les gradients de vitesses à cet endroit ne soient plus forcément négligeables par rapport aux effets visqueux. Le(s) choc(s) en aval du déplacement ne dépend(ent) donc pas du nombre de Reynolds.

Remarquons aussi que l'on aurait pu avoir des instabilités de type Kelvin-Helmholtz dans notre système. En effet, un certain nombre d'études analytiques (voir par exemple [100, 63, 77]) montrent qu'un écoulement uniforme composé de deux fluides de viscosités différentes est toujours instable quel que soit le nombre de Reynolds. Il semble cependant que ces effets ne soient pas suffisamment importants pour être observés dans le cas présent : les taux de croissance de telles instabilités sont sans doute trop faibles[5]. Nous reviendrons sur ce type d'instabilité dans la troisième partie de ce mémoire, dans le cas plus simple du déplacement de deux fluides miscibles.

[4] Le nombre de Reynolds dans les simulations précédentes était $Re = 4$.

[5] Il est également probable que dans notre cas, la diffusion moléculaire diminue le taux de croissance de ce type d'instabilité.

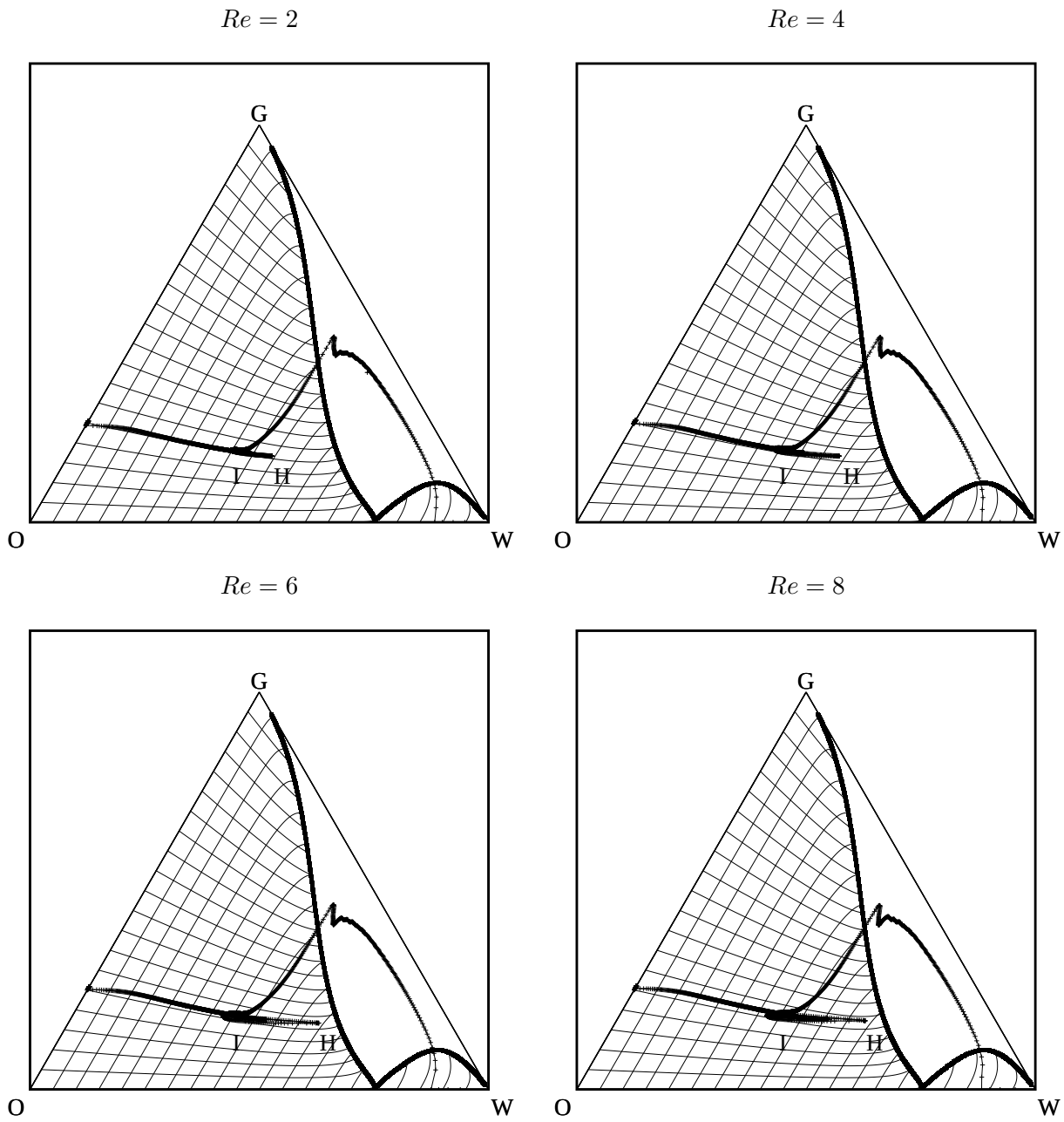


FIG. 4.11. *Diagrammes ternaires pour des systèmes ayant des paramètres identiques à ceux de la simulation de la figure 4.5, mais avec un nombre de Reynolds croissant.*

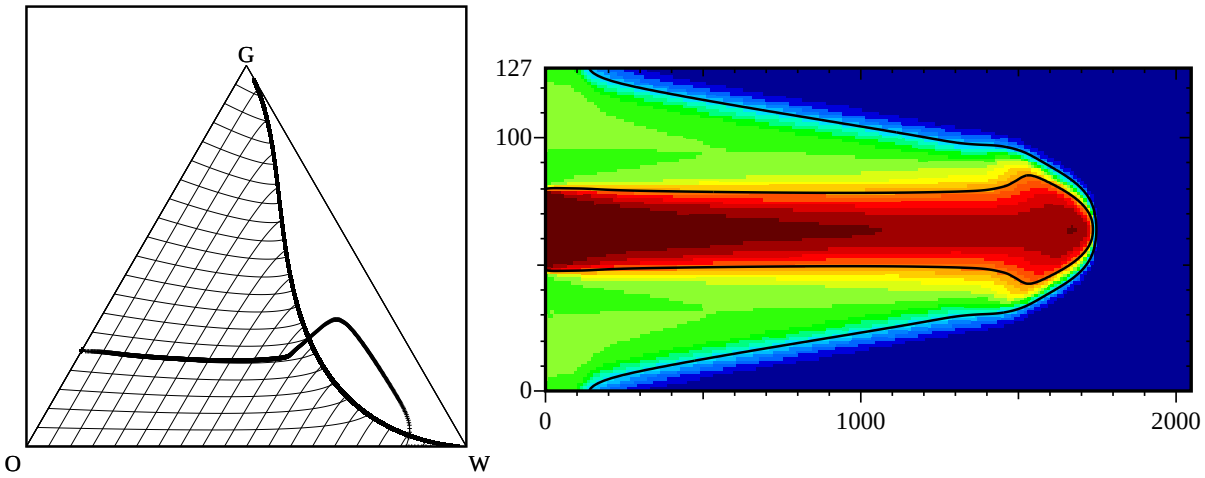


FIG. 4.12. *Diagramme ternaire et champ de concentrations d'un système* $M = 1$, $\Lambda = 2$ *à l'instant* $t = 724000$. *Les paramètres sont :* $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 5.10^{-5}$, $Pe = 4096$ *et* $Re = 4$.

Autres rapports de viscosités

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que deux couples de paramètres ($M = 1, \Lambda = 0.1$) ou ($M = 1, \Lambda = 10$) représentatifs de notre système. Dans cette section, nous allons montrer quelques solutions obtenues avec des paramètres différents.

La simulation présentée sur la figure 4.12 a été réalisée pour des rapports de viscosités ($M = 1, \Lambda = 2$). Pour ces valeurs, une région elliptique se développe également. On remarquera que dans ce cas, il n'y a plus la petite région hyperbolique aux alentours du point W. Dans de telles conditions, on observe que la solution est similaire à la précédente. Le chemin commence par une onde de raréfaction. A un point donné, il quitte ce chemin par l'intermédiaire d'un choc pour aller dans la zone elliptique. La sortie de cette région se fait par l'intermédiaire d'un chemin parallèle à l'axe GW. On notera que l'avant du doigt se déplace à une vitesse ($\Sigma \sim 1.55$) légèrement inférieure au cas précédent. Le système se comporte donc de façon très similaire au cas $M = 1$ et $\Lambda = 10$. Remarquons également que pour cette solution, il n'y a pas de chemin HI ce qui semble suggérer que les effets du nombre de Reynolds sont moins importants (cf. figure 4.11 pour $Re = 4$).

Un cas particulier intéressant est le cas $M = \Lambda$. En effet, dans un tel cas les viscosités de **g** et de **o** sont identiques. Ainsi les phases **g** et **o** se comportent comme dans un mélange passif. On peut voir sur la figure 4.13 qu'il existe une courbe dégénérée et que la région elliptique se réduit à une simple courbe. Il n'y a donc pas d'état uniforme situé dans une région elliptique. Le problème de stabilité ne se pose donc plus. La figure 4.13 montre également la solution, similaire aux solutions précédentes.

Stabilité d'un état uniforme

Dans cette section nous allons nous intéresser à la stabilité d'un état uniforme de notre système. Nous avons vu en effet dans le chapitre 1 qu'un tel état devrait être instable lorsqu'il est situé dans la zone elliptique. Le taux de croissance est alors proportionnel au nombre d'onde : $\sigma \propto k$.

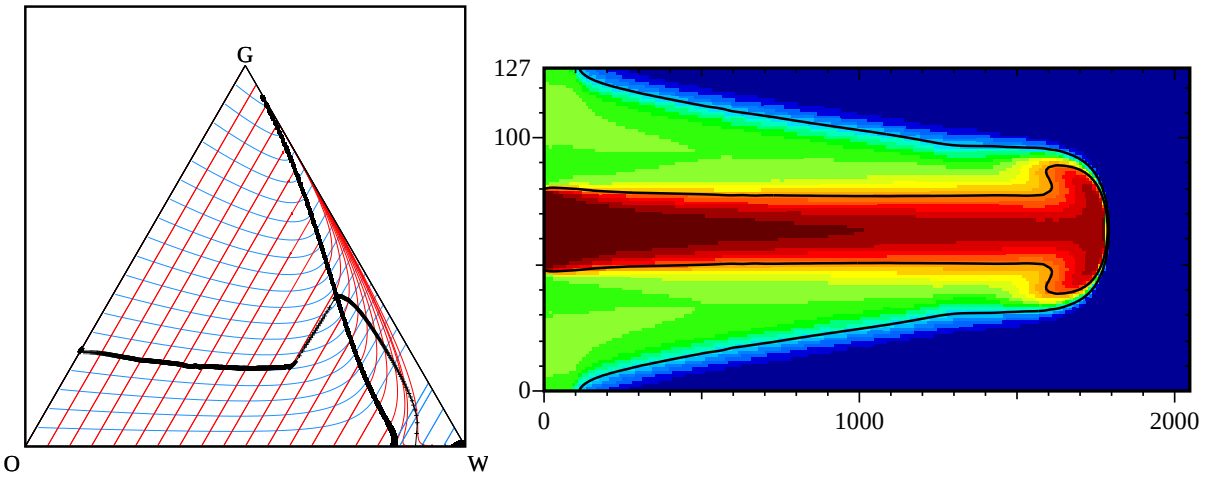


FIG. 4.13. *Diagramme ternaire et champ de concentrations d'un système* $M = 3$, $\Lambda = 3$ *à l'instant* $t = 724000$. *La courbe en gras (reliant GW à OW) correspond à une zone de dégénérescence. Les autres paramètres sont :* $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 5.10^{-5}$, $Pe = 4096$ *et* $Re = 4$.

Pour étudier un système uniforme suivant la direction de l'écoulement nous avons utilisé des conditions aux limites périodiques pour les champs de vitesses et de concentrations. Dans les simulations présentées jusqu'ici, nous utilisions des conditions de débit imposé à l'entrée. Il en résultait un gradient de pression dans notre système, ce qui est incompatible avec des conditions aux limites périodiques selon l'axe des x. Pour obtenir un système parfaitement périodique, la méthode utilisée ici consiste à appliquer une force volumique uniforme à l'équation de mouvement du fluide. Une telle méthode permet d'imposer une pression uniforme, tout en produisant les mêmes effets qu'un gradient de pression uniforme.

Dans de telles conditions, il est donc possible d'étudier l'évolution d'un état uniforme perturbé harmoniquement. La figure 4.14 montre deux configurations à des temps différents d'un tel système. Dans cette simulation, nous avons perturbé harmoniquement les deux interfaces. On constate sur cette figure qu'une telle configuration est effectivement instable. Le chemin correpondant à la solution s'élargit de plus en plus. Notons également qu'une partie du chemin finit par sortir de la région elliptique. Si on prend un état de base en dehors d'une zone elliptique (en prenant $\Lambda = 0.1$ par exemple), cette instabilité n'est pas observée.

Il a été assez difficile de déterminer un taux de croissance de cette instabilité. En effet, les courbes des saturations en fonction du temps sont difficilement ajustables avec une exponentielle croissante. Cette difficulté semble provenir du caractère fortement non-linéaire de l'instabilité[6]. Elle provient également du fait que le déphasage entre les deux interfaces varie au cours du temps alors que l'analyse de stabilité linéaire prévoit un déphasage constant. Pour déterminer le taux de croissance des saturations $S_{\mathbf{g}}$ et $S_{\mathbf{w}}$, nous avons effectué une régression linéaire de la courbe $\ln(S_i(t))$ sur l'intervalle de temps pour lequel celle-ci paraissait linéaire. Ce critère subjectif permet néanmoins d'étudier la variation du taux de croissance en fonction du nombre d'onde. Les courbes des taux de croissance normalisés en fonction du nombre d'onde normalisé sont tracées sur la figure 4.15. Un comportement linéaire est observé aux petits nombres d'onde (grandes longueurs d'ondes).

[6]La perturbation ne reste pas harmonique sur des temps assez longs.

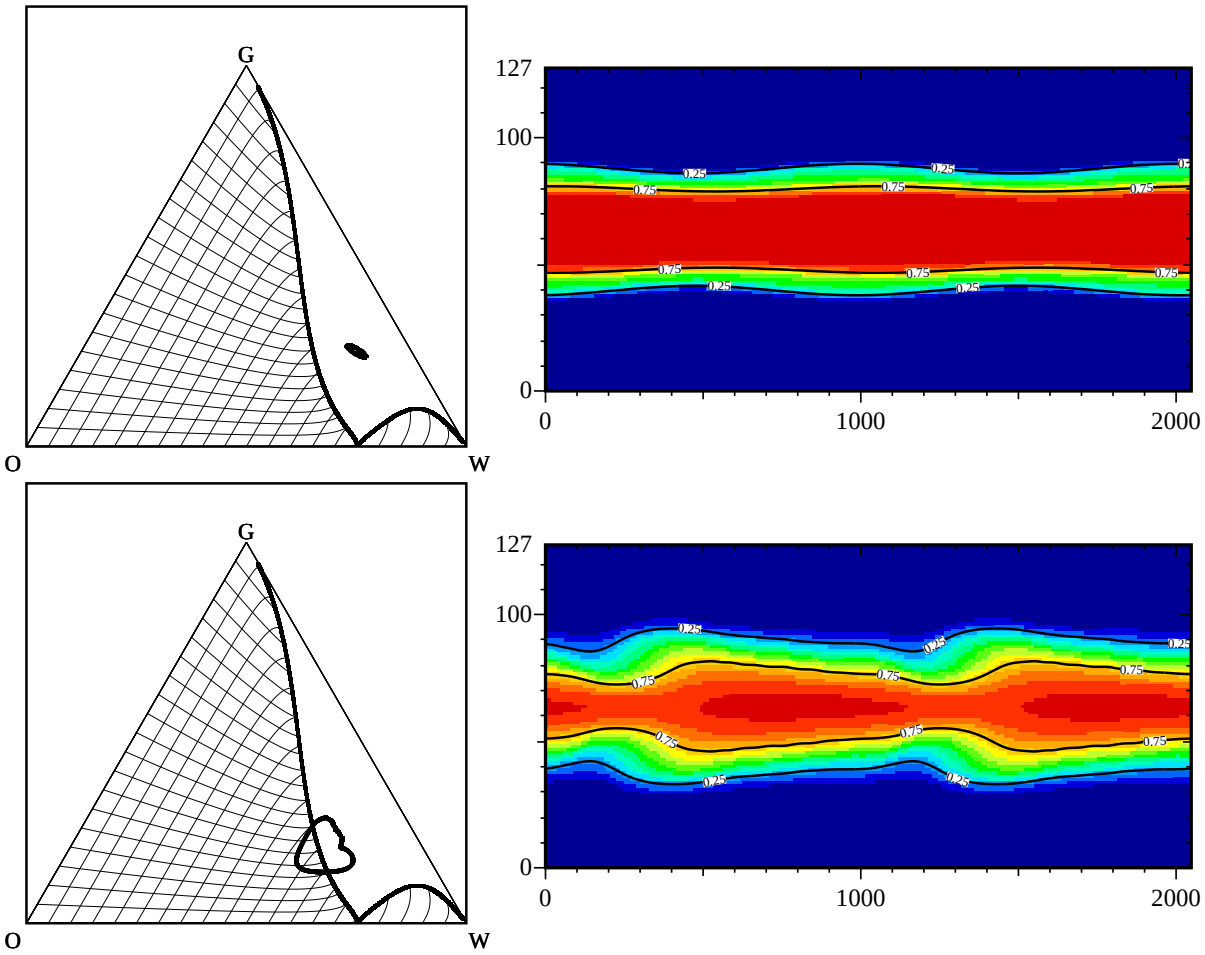


FIG. 4.14. *Diagramme et configuration d'un état uniforme dans la zone elliptique, perturbé harmoniquement. En haut, le temps est court : $t = 40000$, la perturbation est peu développée. En bas, le temps est long $t = 720000$, la perturbation est développée et n'est plus harmonique. Les paramètres sont : $M = 1$, $\Lambda = 10$, $D_0 = 5.10^{-5}$ et $u_0 = 15.10^{-4}$. La longueur d'onde de la perturbation est $\lambda = 1024$.*

Ceci est en accord raisonnable avec notre analyse prédisant un taux de croissance variant comme $\sigma \propto k$ pour les grandes longeurs d'ondes. Toutefois, les taux de croissance ne se comportent pas comme prévu. En effet, aux grandes longueurs d'onde, on mesure $\sigma_g = 0.37\ ku_0$ et $\sigma_w = 0.14\ ku_0$ alors que l'analyse de stabilité linéaire prévoit ici : $\sigma_g = \sigma_w = 0.30$. Cette différence est sans doute due au déphasage non-constant entre les deux interfaces.

Ce résultat montre qu'un état uniforme dans la zone elliptique est instable aux grandes longueurs d'ondes. Il faut noter que dans la littérature, les études de stabilité de fluides stratifiés (sans tension de surface) ont montré que la présence de termes inertiels était nécessaire pour qu'une telle configuration soit instable [50, 51]. Une analyse de stabilité linéaire aux grandes longueurs d'onde (voir par exemple [63, 50, 13]) montre que le taux de croissance σ des instabilités dues aux effets inertiels devrait se comporter comme : $\sigma \propto k^2$. Les effets inertiels sont donc négligeables par rapport à l'instabilité due à l'ellipticité (dont le taux de croissance est $\sigma \propto k$) aux grandes longueurs d'onde.

Il est assez surprenant que cette instabilité de trois fluides confinés soit aussi rarement men-

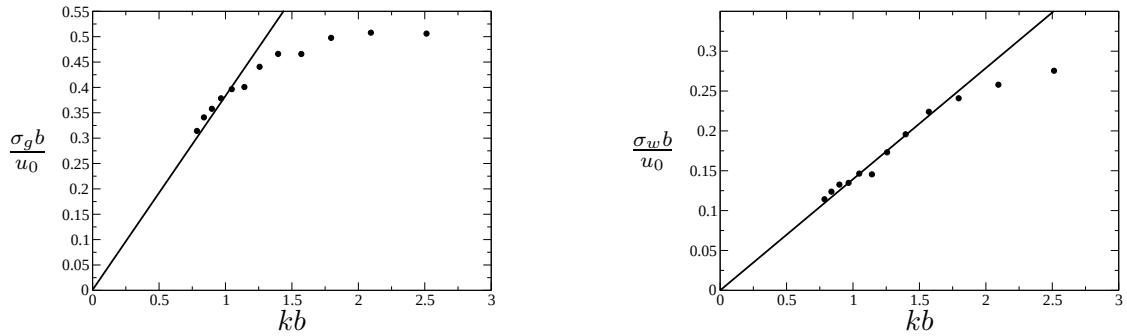


FIG. 4.15. *Taux de croissance (normalisé) de la saturation $S_{\mathbf{g}}$ (à gauche) et $S_{\mathbf{w}}$ (à droite) en fonction du nombre d'onde normalisé $kb = 2\pi b/\lambda$, où b est la largeur de la cellule. Les points noirs correspondent aux résultats des simulations. Les droites correspondent à une régression linéaire sur les premiers points : $\sigma_g/u_0 = 0.37\ k$ et $\sigma_w/u_0 = 0.14\ k$.*

tionnée dans la littérature, elle a pourtant été étudiée analytiquement par Li[7] [63]. Cette instabilité qui peut s'interpréter physiquement par un couplage entre les deux interfaces est souvent ignorée, notamment par Joseph *et al.* [51] qui extrapole le cas à trois fluides à partir de celui à deux. La figure 4.16 extraite de [51] montre ainsi la superposition, en géométrie cylindrique, de deux configurations concentriques de deux fluides (voir figure du bas), qui produit un écoulement concentrique de trois fluides (voir figure du haut). Or, un écoulement uniforme à deux fluides est instable à cause des effets inertiels. Dans un écoulement triphasique, lorsque le système est dans une région elliptique, les effets inertiels deviennent négligeables aux grandes longueurs d'ondes. L'instabilité prédominante est donc celle due à l'ellipticité. Par conséquent, un système composé de trois fluides s'écoulant concentriquement peut être instable sans que celui à deux fluides le soit. Nous avons tenté d'observer expérimentalement ce type de système en géométrie cylindrique[8]. Pour cela, nous avons réalisé un montage dans lequel on injecte trois fluides concentriques de viscosités différentes et de même densité dans un tube. Dans un tel système, nous avons effectivement constaté une instabilité lorsque l'épaisseur du fluide intermédiaire était suffisamment mince (voir figure 4.17).

[7] L'approche de Li est un peu différente de la nôtre. Elle se fonde sur un développement aux grandes longueurs d'ondes des équations d'Orr-Sommerfeld. L'ordre le plus bas du développement est cependant l'équation de conservation.

[8] Expérimentalement, il est beaucoup plus simple d'injecter trois fluides concentriques dans un tube que dans une cellule de Hele-Shaw.

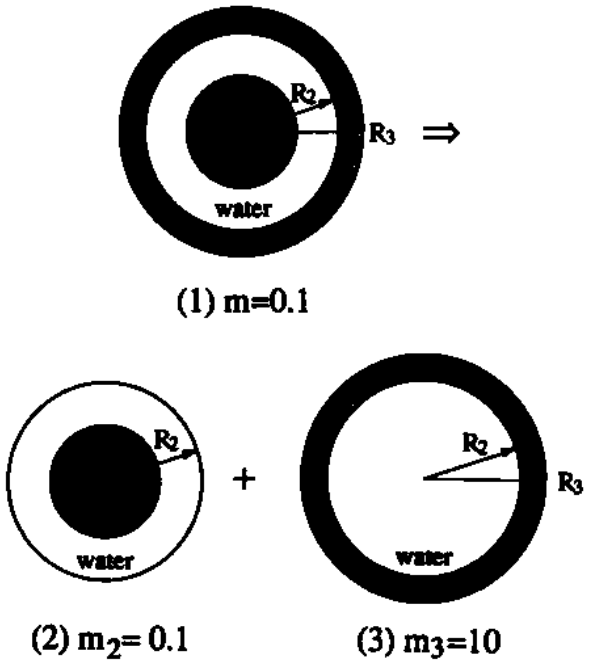


Fig. 2.12. [Hu and Joseph, 1989a] Diagram showing how three-layer core-annular flow could be understood from the composition of two two-layer flows.

FIG. 4.16. *Extrait de Joseph et al. [51]. En géométrie cylindrique, le système de trois fluides peut présenter des régions elliptiques. Par conséquent, un système à trois phases peut se comporter de façon radicalement différente d'un système à deux phases.*

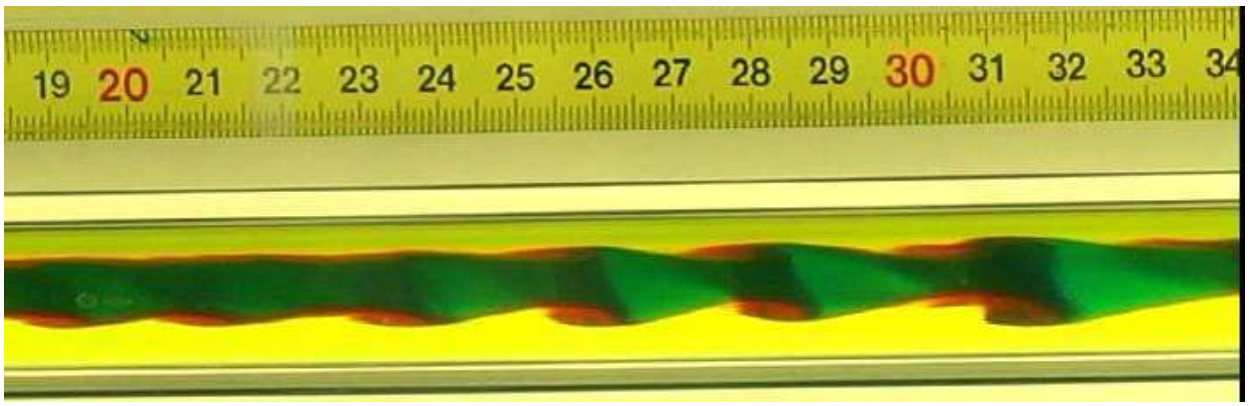


FIG. 4.17. *Expérience d'écoulements de trois fluides concentriques de viscosités différentes. Les fluides central (vert) et extérieur (jaune) ont la même viscosité. Le fluide intermédiaire (rouge) a une viscosité* 15 *fois inférieure. Une analyse de conservation montre qu'un tel système est elliptique, et donc instable aux grandes longueurs d'ondes.*

Chapitre 5

Conclusion - Perspectives

Dans cette partie nous avons étudié un système permettant de modéliser des écoulements de fluides dont la loi de viscosité est non-monotone. L'approche utilisée consiste à les assimiler à des écoulements de fluides concentriques en couches. Nous avons vu que ce type d'approche permet une description par un système d'équations de conservations.

Il s'est avéré que dans certaines conditions (fluide intermédiaire moins visqueux et de faible épaisseur), le système d'équations devient elliptique. L'intérêt de ce type de système devient alors plus vaste dans la mesure où, analytiquement, il n'existe pas de théorie permettant de prévoir la solution de tels sytèmes.

Les résultats numériques ont montré que le système est effectivement plus facilement interprétable dans le cas purement hyperbolique que dans le cas mixte. En effet, dans ce dernier cas, le système semble briser un grand nombre de fois les hypothèses majeures de notre modèle (hypothèses de lubrification), rendant ainsi la solution très difficilement prédictible. Pour comprendre le mécanisme de sélection de la solution, un élément important a été mis en évidence dans ce chapitre. En effet, il semble que pour un nombre de Péclet donné, le système choisisse un chemin particulier dans la zone elliptique, qui reste fixe dans le temps, et ne dépend pas des conditions d'injection. Ce résultat est d'autant plus étrange que nous avons montré qu'un système ne peut pas demeurer dans une région elliptique sans être sujet à des instabilités. Pour poursuivre la compréhension de ce système, il paraît nécessaire de se concentrer sur les mécanismes de sélection de l'avant du doigt de déplacement (*i.e.* du chemin stationnaire dans la région elliptique). Une approche possible pour améliorer la modélisation du système pourrait consister à calculer les corrections aux équations de lubrification dans les fonctions de flux des trois phases, en prenant en compte les effets de la diffusion moléculaire.

Une piste qui me semble intéressante à explorer consiste à faire le parallèle entre ce type de système et celui présenté dans le chapitre 1 concernant le déplacement de deux fluides miscibles de viscosités différentes. Dans ce type de système en partie étudié par P. Watzky [95] et Chen *et al.* [15], il apparaît également que la sélection de la solution du système d'équations de conservations est liée à la structure du nez du déplacement. Il est apparu que ce nez (ce choc) sélectionne une vitesse particulière qui dépend essentiellement du nombre de Péclet (et du rapport de viscosités) comme dans notre cas. Un fait notable à signaler est que la vitesse sélectionnée dans ce système

semble coïncider avec celle du doigt de notre système. La méthode d'approche consistant à évaluer des termes correctifs à la fonction de flux semble également pertinente.

Le déplacement de fluides miscibles à loi de viscosité monotone apparaît nettement plus simple que notre modèle de fluides à loi de viscosité non-monotone. Il nous est donc apparu judicieux de revenir sur ce cas, pour approfondir notre compréhension de tels systèmes. Cette étude est le sujet de la troisième partie de ce mémoire.

Troisième partie

Écoulements diphasiques confinés

Introduction

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au déplacement d'un fluide par un autre miscible et visqueux. Ce système a déjà été présenté dans le chapitre analytique de la partie précédente (voir Partie II, Chapitre 1, page 80). Dans ce chapitre nous avons vu comment une approche de type "ondes cinématiques" permettait de déterminer un ensemble de solutions acceptables. Cette configuration à deux fluides, bien qu'elle soit plus simple à étudier, soulève des problèmes très intéressants, comme nous allons le voir. De plus, ces problèmes présentent de très fortes similitudes avec le cas à trois fluides étudié précédemment. Nous verrons en particulier (cf. Chapitre 1, page 149) que la détermination de la solution de ce problème semble être également conditionnée par l'avant du déplacement. Le retour sur une configuration plus "classique" nous est donc apparu utile pour améliorer notre compréhension des écoulements miscibles visqueux.

Il convient également de souligner que l'étude de ce problème n'est pas encore achevée. Cette partie ne présente donc qu'un ensemble de résultats numériques, analytiques et expérimentaux permettant d'aborder ce problème. Ce type de configuration ayant déjà fait l'objet d'un certain nombre d'études, il est nécessaire de rappeler certains résultats fondamentaux que l'on trouve dans la littérature et qui vont nous servir par la suite.

Principaux résultats de la littérature

Le déplacement visqueux de deux fluides miscibles a été étudié essentiellement dans deux géométries : la cellule de Hele-Shaw observée dans la tranche et le tube cylindrique en symétrie axiale (voir figure 1). Les équations dans une cellule de Hele-Shaw présentent l'avantage d'être faciles à manier (équations de Stokes ou Navier-Stokes bidimensionnelles en coordonnées cartésiennes). Il est par contre plus difficile de réaliser expérimentalement cette configuration. Pour cette raison, la configuration en tube est toujours préférée dans les expériences. Les équations régissant ce système sont par contre plus lourdes (équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques). Cela explique que la première configuration a été principalement le sujet d'études analytiques (voir [98] ou [76] par exemple) et numériques (voir [95] ou [75] par exemple). Par contre, la configuration axisymétrique a été le sujet d'études analytiques ([100, 98]), d'études numériques ([76, 15]) et expérimentales ([6, 72, 58]). Nous ne présenterons que les principaux résultats.

Ces deux configurations sont en fait très similaires et peuvent par conséquent être abordées par le même type d'approche. Nous avons vu dans la partie précédente qu'un tel système peut être

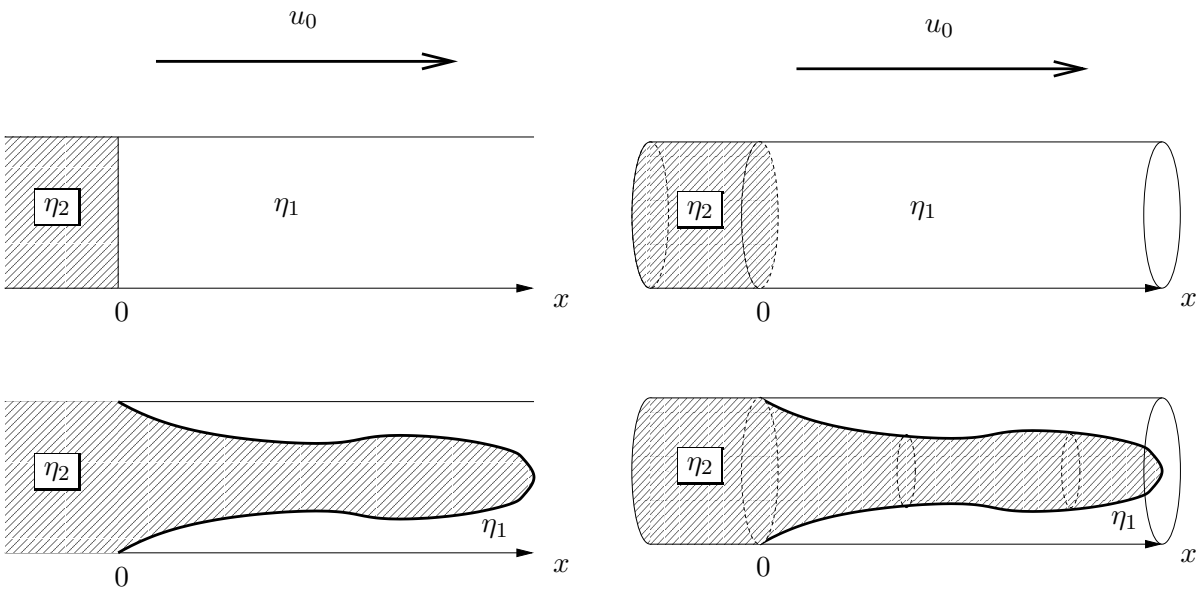


FIG. 1. *Schémas d'un déplacement à vitesse débitante imposée u_0 d'un fluide par un autre pour deux configurations différentes. A gauche : configuration dans la tranche d'une cellule de Hele-Shaw. A droite : configuration cylindrique.*

décrit (dans l'hypothèse de lubrification) par une équation de conservation :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (f_{2d}(C))}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (f_{tube}(C))}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

la quantité conservée étant la concentration moyennée transversalement du fluide déplaçant $C = \int c(x,y)dy$ ou $C = \int c(x,r,\theta)rdrd\theta$. Ce problème peut donc en partie être traité par des ondes cinématiques. Il faut souligner que toutes les simulations et expériences effectuées dans la littérature prennent pour condition initiale (de type Riemann) :

$$C(x, t=0) = \begin{cases} C_g = 1 & \text{si } x < 0 \\ C_d = 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Les solutions à ce type de problème sont de natures différentes selon que $M = \eta_1/\eta_2 < 3/2$ ou $M > 3/2$ (resp. 2 pour le tube). Dans le premier cas, la solution est composée d'une simple onde de raréfaction. Dans le second cas, la solution est du type :

$$C_g = 1 \xrightarrow{\mathcal{R}} C_* \xrightarrow{\mathcal{C}} C_* \xrightarrow{\mathcal{S}} C_d = 0$$

Nous avons vu alors que cette solution est complètement déterminée par la connaissance de C_* ou, de façon équivalente, de la vitesse du choc Σ. Cette vitesse a été étudiée par Rakotomalala *et al.* [75] dans le cas bidimensionnel et par Chen et Meiburg [15] dans le cas du tube[1]. Cette vitesse est proche de la vitesse maximale du profil de Poiseuille (qui vaut 1.5 u_0 pour le cas bidimensionnel et 2 u_0 pour le tube). Chen et Meiburg ont de plus montré que cette vitesse de choc dépend très peu du nombre de Péclet. Elle ne dépend également que très faiblement du rapport de viscosités[2]. La solution du problème ne semble donc varier que très faiblement en fonction des paramètres du

[1] Chen et Meiburg parlent essentiellement de vitesse de doigt sans utiliser le formalisme des ondes cinématiques.

[2] P. Watzky [95] a montré que cette vitesse varie de $\Sigma = 1.6\ u_0$ à $1.8\ u_0$ lorsque le rapport de viscosités varie de $M = 10$ à 1000.

système. De plus, il faut souligner que dans leurs travaux, Chen et Meiburg n'ont pas de termes inertiels dans leur équation du mouvement ($Re = 0$). Ainsi, la similitude entre les deux types de travaux semble suggérer que la sélection de la vitesse du doigt n'est pas liée aux termes inertiels.

On peut également rappeler un point important de la partie précédente : la vitesse de l'avant du déplacement que l'on a observée dans le cas triphasique (avec $\Lambda = 10$) est comparable à celle dans le cas diphasique (avec $M = 10$) : $\Sigma \sim 1.6\ u_0$.

Dans cette partie, nous nous proposons de poursuivre ce type d'étude. Nous tenterons d'aborder ce problème d'un point de vue numérique, analytique et expérimental. Le chapitre 1 est consacré à l'étude numérique de la vitesse du choc dans différents régimes et conditions aux limites. Le chapitre 2 résume succinctement une approche analytique permettant d'améliorer la description en onde cinématique pour pourvoir justifier la présence d'un choc non-classique. Le chapitre 3 décrit des expériences préliminaires d'écoulements de deux fluides en géométrie cylindrique. Le chapitre 4 présente la conclusion et les perspectives de ce travail.

Chapitre 1

Résultats numériques

1.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous allons étudier numériquement le cas bidimensionnel. Le système est très similaire à celui de la partie précédente. On considère la tranche d'une cellule de Hele-Shaw de largeur b, dans laquelle s'écoule un fluide de viscosité η_1 (la concentration de mélange vaut $C = 0$). A l'instant initial, on injecte à l'entrée un autre fluide de viscosité η_2 (la concentration de mélange vaut $C = 1$). On impose une loi de viscosité de mélange en fonction créneau :

$$\eta(C) = \begin{cases} \eta_1 \text{ si } C < 0.5 \\ \eta_2 \text{ si } C > 0.5 \end{cases}$$

Les deux fluides sont donc séparés par l'iso-concentration $C = 0.5$. La proportion d'injection à l'entrée est variable et sera notée C_g. La condition initiale est du type Riemann :

$$C(x, t = 0) = \begin{cases} C_g & \text{si } x < 0 \\ C_d = 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

De plus, le champ de concentrations à l'entrée est maintenu constant au cours du temps, avec $C(x = 0, t) = C_g$. La vitesse débitante à l'entrée est imposée et égale à u_0. Pour toute la suite de cette partie, nous définissons le nombre de Péclet par $Pe = u_0 b/D_0$ et le nombre de Reynolds par $Re = u_0 b/\nu_1$.

1.2 Influence de la condition d'injection

Nous avons déjà évoqué dans l'introduction de la partie précédente la solution numérique au problème lorsque $C_g = 1$. Cette solution, étudiée antérieurement par P. Watzky [95], est montrée dans la figure 1.1 en fonction de la variable auto-similaire x/t. Comme nous l'avons dit précédemment, elle est composée d'une onde de raréfaction (le profil est confondu avec $f'(C)$), d'une onde constante et d'un choc (de vitesse $\Sigma = 1.62\ u_0$). La partie précédente nous montre qu'il peut être instructif de faire varier les conditions d'injection.

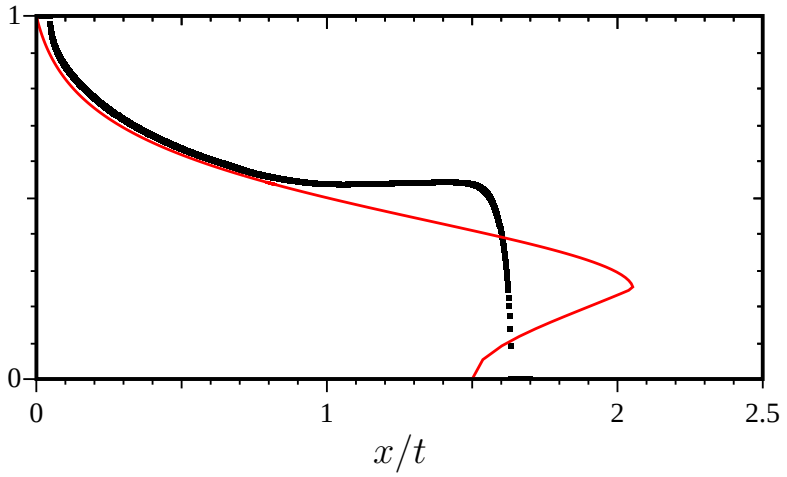


FIG. 1.1. *Profil de saturation C en fonction de la variable auto-similaire x/t (normalisée par u_0). La condition d'injection correspond à $C_g = 1$. Les points noirs correspondent à la simulation. La courbe rouge correspond à la dérivée de la fonction de flux. Les paramètres de la simulation sont $M = 10$, $u_0 = 16.10^{-4}$, $Pe = 4096$ et $Re = 10$.*

La figure 1.2 montre l'évolution du champ de concentrations pour une condition d'injection $C_g = 0.85$. Sur cette figure, on constate que le saturation du fluide intérieur décroît de l'amont vers l'aval. Cette décroissance semble correspondre à une raréfaction (elle semble s'étaler). Nous verrons un peu plus loin que cette solution est effectivement du type : $C_g \xrightarrow{\mathcal{R}} C_* \xrightarrow{\mathcal{C}} C_* \xrightarrow{\mathcal{S}} C_d$.

On peut noter également un effet de la condition d'injection à l'entrée de la cellule. Cet effet d'entrée se caractérise par une légère décroissance de la saturation. Cette décroissance se fait sur une longueur caractéristique constante (d'environ une vingtaine de noeuds).

Sur la figure 1.3, nous avons utilisé les mêmes paramètres (M, D_0, u_0, Pe, Re), avec une condition d'injection inférieure à la précédente $C_g = 0.4$. On constate que l'évolution d'un tel système est radicalement différente. De gauche à droite, la saturation décroît dans un premier temps sur une longueur qui reste constante au cours du temps. La saturation devient ensuite uniforme (les interfaces sont parallèles) sur une distance que l'on notera L_u, et qui croît au cours du temps. Cette saturation semble ensuite se déstabiliser avec l'apparition d'oscillations. Ces oscillations saturent ensuite en amplitude. La saturation devient à nouveau uniforme sur une certaine longueur[1] et se termine par le doigt.

Sur la figure 1.4 est représenté le diagramme spatio-temporel de la concentration moyenne correspondant à cette simulation. Les fortes saturations sont représentées en clair. Les saturations nulles sont en noir. La position (trajectoire) de l'avant du doigt est ainsi repérée par la courbe délimitant la zone noire de la zone claire. Cette courbe est une droite, la vitesse de l'avant du doigt est donc constante. On constate que la longueur L_u croît avec le temps, apparemment de façon linéaire avec le temps. Les différentes raies blanches de largeur finie correspondent aux trajectoires des différents maxima de saturation. La dernière raie (en partant de la gauche), correspond à la région uniforme précédant le bout du doigt. Celle-ci se distingue des autres par le fait que sa

[1] Cette longueur semble croître également au cours du temps.

largeur augmente au cours du temps. Les autres extrêma semblent par contre avoir une vitesse et une largeur constante.

Pour étudier plus quantitativement ces solutions, nous avons tracé sur la figure 1.5 différentes solutions en fonction de la variable auto-similaire x/t, pour des conditions d'injection différentes C_g. Chaque courbe représente une simulation effectuée avec les mêmes paramètres. Il est assez remarquable de constater sur cette figure que toutes les parties aval des profils de saturation se superposent exactement (hormis celle qui correspond à $C_g = 0.12$). Cet ensemble de courbes peut se diviser selon la valeur de C_g en trois sous-ensembles. On peut en effet distinguer :

Les injections larges : elles correspondent sur la figure aux cas $C_g = 1$ et $C_g = 0.85$. On constate que ces deux solutions (si on ne tient pas compte des effets d'injection) sont du type $C_g \xrightarrow{\mathcal{R}} C_* \xrightarrow{\mathcal{C}} C_* \xrightarrow{\mathcal{S}} C_d$, avec $C_* = 0.55$ et $\Sigma = 1.62\ u_0$.

Les injections de largeur moyenne : elles correspondent aux cas $C_g = 0.4$, $C_g = 0.5$ et $C_g = 0.65$ sur la figure. Ces solutions sont caractérisées par une zone de saturation uniforme (d'une onde constante), suivie d'oscillations d'amplitude plus ou moins importante. Ces oscillations se terminent par un raccord à l'onde constante et au choc du cas précédent. L'onde constante a une saturation $C_* = 0.55$ et le choc a une vitesse $\Sigma = 1.62\ u_0$.

Les injections de largeur faible : ce type de solution correspond au cas $C_g = 0.12$. Cette solution ressemble fortement aux précédentes, sauf qu'elle ne se termine pas par une onde constante, mais directement par un choc de vitesse inférieure à $1.62\ u_0$.

On peut montrer (cf. partie précédente) qu'une approche du type ondes cinématiques peut conduire à des solutions du type représenté sur la figure 1.6 :

$$C_g \xrightarrow{\mathcal{C}} C_g \xrightarrow{\mathcal{R}} C_* \xrightarrow{\mathcal{C}} C_* \xrightarrow{\mathcal{S}} C_d = 0 \tag{1.2}$$

Les injections larges satisfont bien ce type de solution. Les deux autres types de solutions semblent être d'une toute autre nature. Notons que les conditions de lubrification ne sont plus satisfaites sur toute la région oscillante. En effet, la longueur d'onde de l'oscillation n'est pas infiniment grande puisqu'elle est de l'ordre de la largeur de la cellule b. Par conséquent, cette région échappe au cadre de la théorie des ondes cinématiques. On remarquera par contre que l'avant du déplacement se termine par un choc de vitesse $\Sigma = 1.62\ u_0$ qui vérifie la condition de Rankine-Hugoniot. Le cas $C_g = 0.12$ se distingue par le fait que l'avant du doigt ne correspond pas à une saturation constante. La relation de Rankine-Hugoniot n'est par conséquent pas valable.

Il est important de signaler que des solutions du type (1.2) pour des valeurs de $C_* \in [0.14; 0.55]$ conduisent nécessairement à des vitesses de chocs supérieures à $\Sigma = 1.62\ u_0$.

Il semble donc que le système préfère "briser" les hypothèses de lubrification plutôt que de choisir une solution qui ne se termine pas par un choc de vitesse $\Sigma = 1.62\ u_0$. Il existerait donc une vitesse (ou une largeur) intrinsèque au système qui conditionne la solution. Cette vitesse correspond à celle étudiée dans la littérature dans le cas d'un déplacement complet ($C_g = 1$). Nous allons maintenant nous intéresser à l'influence des autres paramètres qui sont les nombres de Reynolds et de Péclet.

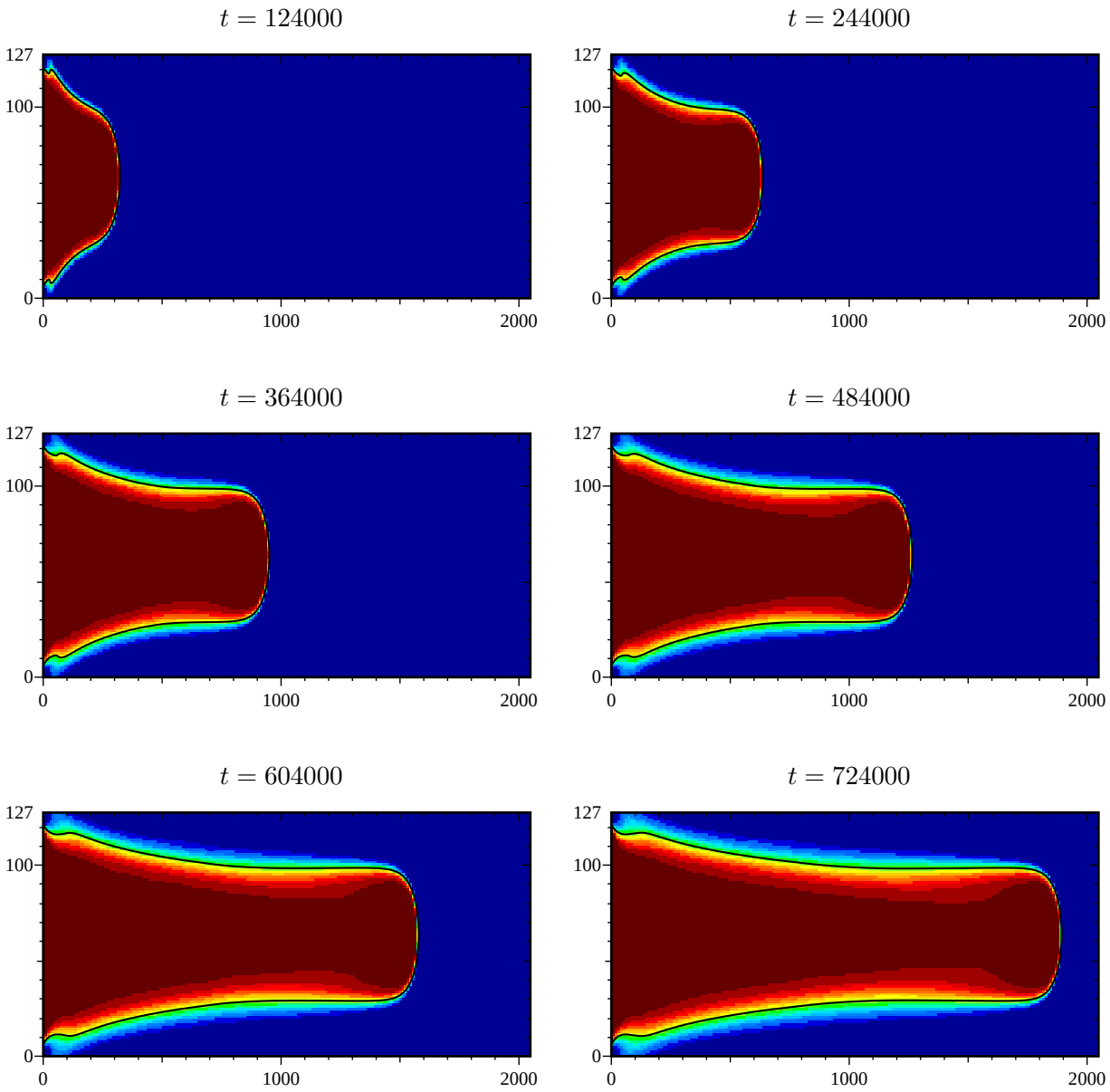


FIG. 1.2. *Évolution du champ de concentrations en fonction du temps. La condition d'entrée est* $C_g = 0.85$. *Les paramètres sont :* $M = 10$, $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 5.10^{-5}$, $Pe = 4096$ *et* $Re = 1$.

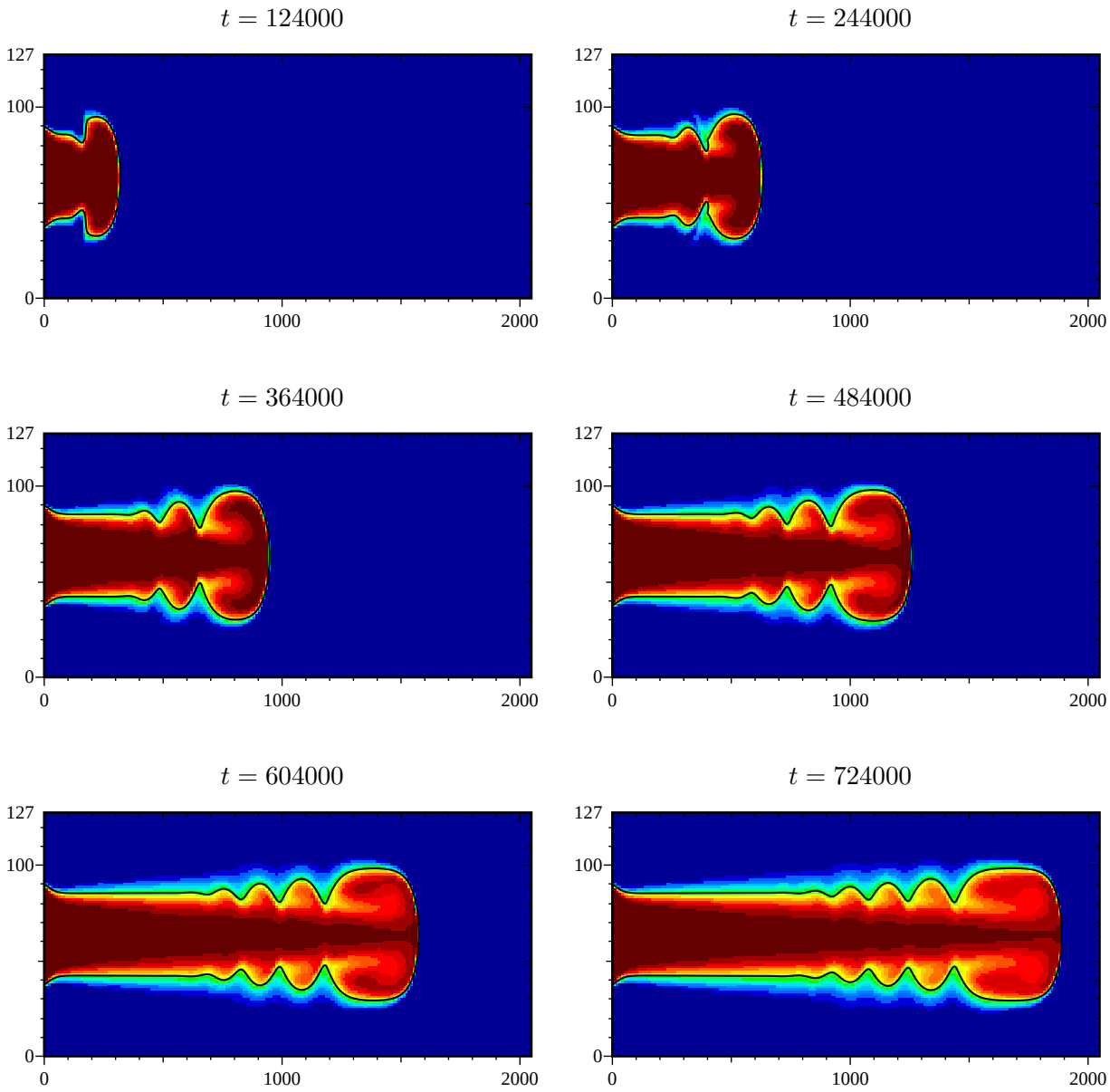


FIG. 1.3. *Évolution du champ de concentrations en fonction du temps. La condition d'entrée est* $C_g = 0.4$. *Les paramètres sont :* $M = 10$, $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 5.10^{-5}$, $Pe = 4096$ *et* $Re = 1$.

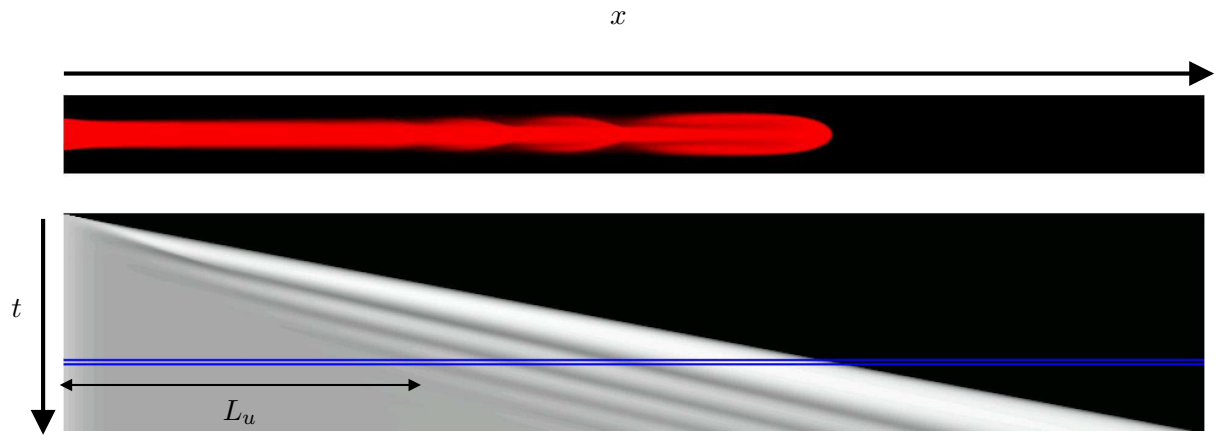


FIG. 1.4. *Champ de concentrations et diagramme spatio-temporel de la concentration moyenne, pour la simulation de la figure 1.3. En haut, le champ de concentrations est représenté en rouge, il correspond au temps* $t = 484000$. *En bas, diagramme spatio-temporel de la concentration moyenne. Les fortes saturations sont représentées en clair. La ligne en bleu correspond au temps de la configuration ci-dessus (*$t = 484000$*). La longueur uniforme est notée* L_u.

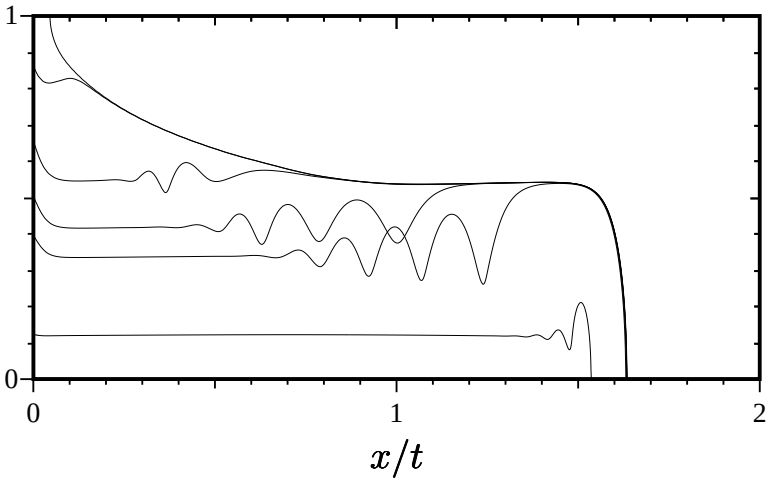


FIG. 1.5. *Profils de saturation en fonction de la variable auto-similaire* x/t *(normalisée) pour des conditions d'injection différentes. Les paramètres de la simulation sont* $M = 10$, $u_0 = 16.10^{-4}$, $Pe = 4096$ *et* $Re = 1$.

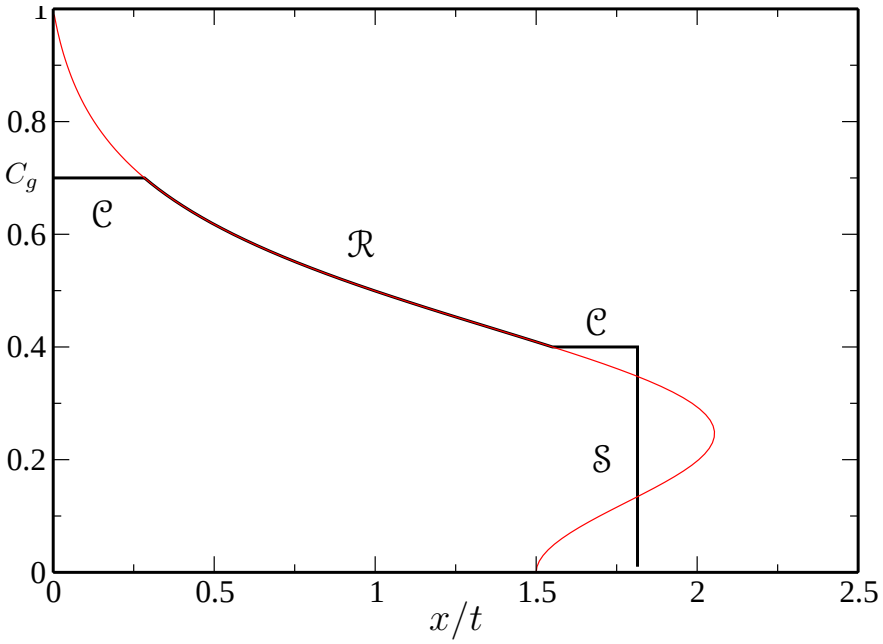


FIG. 1.6. *Exemple de solution du type :* $C_g \xrightarrow{\mathcal{C}} C_g \xrightarrow{\mathcal{R}} C_* \xrightarrow{\mathcal{C}} C_* \xrightarrow{\mathcal{S}} C_d = 0$. *La courbe rouge correspond à la dérivée de la fonction de flux.*

1.3 Influence du nombre de Reynolds

Dans cette section, nous allons étudier l'influence du nombre de Reynolds sur le système. Rappelons que les études numériques de Reinelt et Saffman et de Chen et Meiburg, faites à $Re = 0$ (en résolvant les équations de Stokes), ont abouti aux mêmes vitesses de choc que nous. Par conséquent, on s'attend à ce que la vitesse du choc ne varie pas avec Re. La figure 1.7 montre deux clichés de simulations avec $Re = 2.56$ en gardant les mêmes autres paramètres que les figures 1.2 et 1.3. Sur cette figure, on constate que la solution pour $C_g = 0.85$ ne change pas, pour un même déplacement moyen que dans la figure 1.2 au temps $t = 724000$. La mesure de la vitesse du choc donne également $\Sigma = 1.62\ u_0$. Par contre, lorsque la condition d'injection est $C_g = 0.4$, on constate une différence notable dans les oscillations alors même que la vitesse de l'avant du déplacement est identique. On constate que les oscillations sont plus nombreuses et apparaissent un peu plus en amont du déplacement, aux environs de $L_u \sim 750$, au lieu de $L_u \sim 800$ pour $Re = 1$.

1.4 Influence du nombre de Péclet

Chen et Meiburg ont montré que la vitesse du doigt de déplacement était indépendante du nombre de Péclet. Toutefois, il faut rappeler qu'ils utilisaient une loi de viscosité de type exponentiel. Ici, notre loi est en créneau. La vitesse du doigt ne semble pas dépendre de la loi de viscosité.

Il est par contre possible que le coefficient de diffusion modifie les oscillations éventuelles du système. La figure 1.8 montre des simulations identiques à celles présentées sur la figure 1.7, mais avec un nombre de Péclet plus important ($Pe = 10240$ au lieu de $Pe = 4096$). On constate que le champ de concentrations est modifié pour $C_g = 0.4$. On remarque par exemple la présence d'une

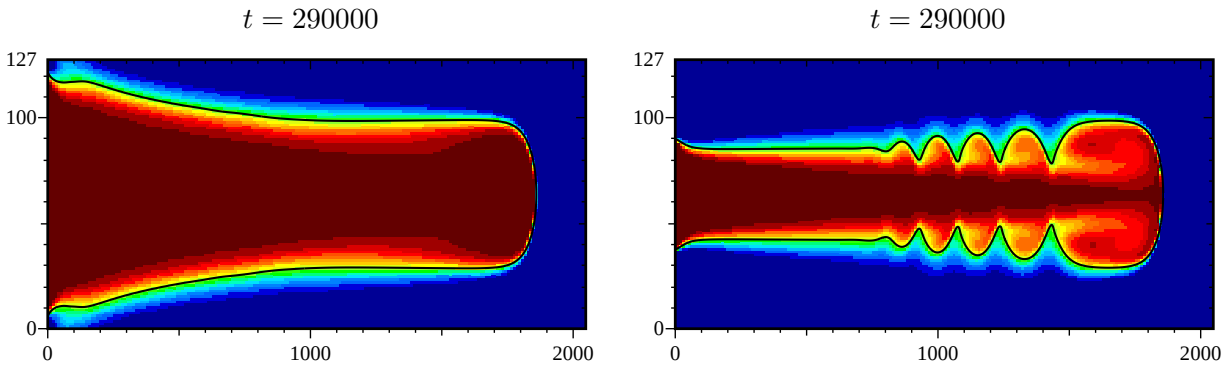


FIG. 1.7. *Champ de concentrations pour des conditions d'entrée* $C_g = 0.85$ *(à gauche) et* $C_g = 0.4$ *(à droite). Les paramètres sont :* $M = 10$, $u_0 = 4.10^{-3}$, $D_0 = 125.10^{-5}$, $Pe = 4096$ *et* $Re = 2.56$. *A comparer avec les figures 1.2 et 1.3 au temps* $t = 724000$.

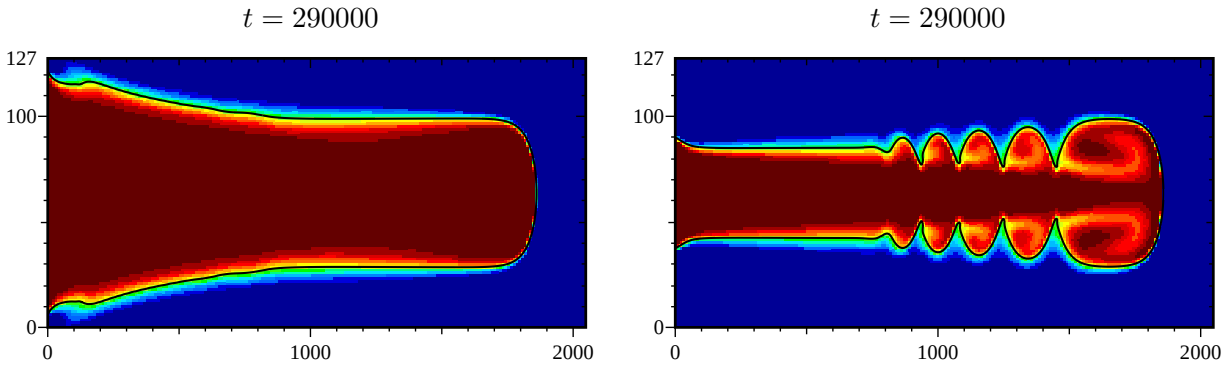


FIG. 1.8. *Champ de concentrations pour des conditions d'entrée* $C_g = 0.82$ *(à gauche) et* $C_g = 0.4$ *(à droite). Les paramètres sont :* $M = 10$, $u_0 = 4.10^{-3}$, $D_0 = 5.10^{-5}$, $Pe = 10240$ *et* $Re = 2.56$. *A comparer avec la figure 1.7.*

recirculation à l'avant du doigt. Par contre, il est assez remarquable que la ligne d'iso-concentration seuil $c = 0.5$ soit quasiment identique sur les deux clichés. La vitesse du doigt et sa largeur sont identiques. Le nombre de Péclet n'a donc aucune influence sur "l'interface" de notre système.

Dans ce chapitre, nous avons vu que le système diphasique présente des similitudes avec celui triphasique. En particulier, nous venons de voir que la solution sélectionnée est totalement conditionnée par la vitesse du choc (ou sa largeur) à l'avant du déplacement. Les autres paramètres n'influencent que la manière d'arriver à ce choc. Nous avons vu qu'il existe deux façons d'arriver au choc. La première solution, qui n'est possible que lorsque l'injection à l'entrée est suffisamment large, arrive au choc par l'intermédiaire d'une onde de raréfaction. La seconde, lorsque l'injection est plus étroite, arrive au choc par l'intermédiaire d'oscillations. Pour les injections très minces, le flux initial imposé à l'entrée est trop faible pour que le doigt se termine comme les autres injections. La vitesse du doigt de déplacement est alors plus faible que les autres.

La conséquence de cette étude est que, si l'on veut approfondir notre connaissance de ce système, il paraît nécessaire d'étudier en particulier les phénomènes qui sélectionnent cette taille du choc

(ou cette vitesse). D'un point de vue analytique, le premier problème qui se pose pour interpréter la sélection de ce choc est qu'il est du type **non-classique**, à savoir qu'il ne vérifie pas la condition d'entropie de Lax [61]. Pour étudier ce type de choc, nous allons présenter une démarche proposée par Lefloch [62] qui pourrait permettre de prévoir une sélection de Σ. Cette méthode consiste à prendre en compte dans l'expression de la fonction de flux des termes dus au gradient de saturation.

Chapitre 2

Une approche analytique : systèmes dynamiques

Dans ce chapitre, nous allons étudier une démarche proposée par Lefloch[1] [62] qui permet d'améliorer notre description en allant au-delà des simples ondes cinématiques. Sa démarche nous a paru intéressante car elle montre comment, en prenant en compte des ordres plus élevés d'une fonction de flux cubique, on peut prévoir une sélection d'une vitesse de choc déterminée. Notons également que cette démarche est applicable essentiellement pour les fonctions de flux de type convexe-concave ou concave-convexe. Elle semble adaptée à notre cas dans la mesure où la fonction de flux qui nous intéresse est justement de type convexe-concave (lorsque $M > 3/2$).

Cette approche pourrait nous permettre de déterminer des vitesses de choc acceptables. Malheureusement, nous n'avons pas encore réussi à aboutir par cette méthode au résultat escompté. La démarche est présentée dans ce chapitre car, à mon avis, elle mérite d'être approfondie par des travaux ultérieurs.

La méthode consiste à aborder le problème par une approche du type système dynamique. La solution du problème peut être décrite comme une trajectoire hétéroclinique reliant l'arrière du choc à l'avant. Nous ne présenterons ici que très brièvement ce type d'approche.

Nous avons vu dans la partie précédente qu'une onde de choc était une solution discontinue dont la discontinuité se déplace à une vitesse constante Σ. Une propriété intéressante du choc observé dans notre système est qu'il est **non-classique**. Un choc est dit classique lorsqu'il vérifie la condition d'entropie de Lax. Pour un choc reliant l'état u_g à l'état u_d, la condition d'entropie de Lax s'écrit :

$$f'(u_g) \leq \Sigma \leq f'(u_d)$$

ou

$$f'(u_d) \leq \Sigma \leq f'(u_g)$$

Le principe est de chercher des solutions sous la forme d'onde propagative continue, c'est-à-dire de la forme $u(x - \lambda t)$, où λ est la vitesse de l'onde. Une telle solution est caractérisée par des

[1] Voir notamment le Chapitre III intitulé *Diffusive-dispersive traveling waves.*

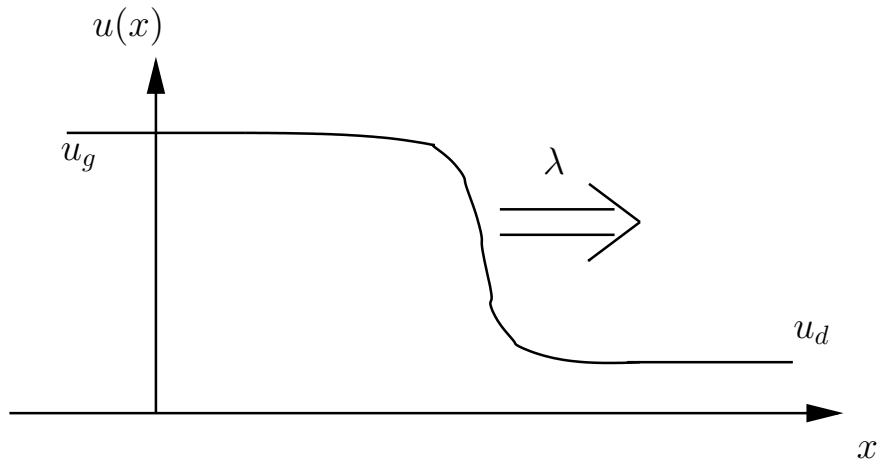


FIG. 2.1. *Exemple de choc se déplaçant à la vitesse λ et reliant l'état u_g à l'état u_d.*

gradients définis. Il est nécessaire d'inclure dans la fonction de flux des termes tenant compte des effets des gradients de u.

Autrement dit, pour étudier un choc reliant un état u_g à u_d (voir figure 2.1), nous cherchons des solutions de la forme :

$$U(\xi) = u(x - \lambda t) \quad \text{avec} \quad \xi = x - \lambda t \tag{2.1}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \lim_{\xi \to -\infty} U(\xi) = u_g \\ \lim_{\xi \to +\infty} U(\xi) = u_d \end{cases} \tag{2.2}$$

Plus particulièrement nous prendrons : $u_d = 0$. La variable $u(x,t)$ vérifie une équation de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{2.3}$$

La fonction de flux est prise de la forme :

$$F = f(u) + \epsilon(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \delta(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma(u)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \dots \tag{2.4}$$

Cette dernière expression de la fonction de flux peut se voir comme un développement (linéaire) de la fonction de flux pour des gradients faibles (ou de grandes longueurs d'ondes). Il est possible de montrer que si l'on ne tient compte que du terme d'ordre 1 (*i.e* en gardant le terme diffusif et en négligeant les termes δ, γ...), l'ensemble des solutions de ce type est constitué uniquement de chocs du type classique. Par conséquent, il est nécessaire de tenir compte des termes au moins d'ordre 2 pour décrire le choc qui nous intéresse. Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons donc à l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \delta(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = 0 \tag{2.5}$$

Un changement de variable $\xi = x - \lambda t$ nous donne :

$$-\lambda\frac{dU}{d\xi} + \frac{df(U)}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(\epsilon(U)\frac{dU}{d\xi} + \delta(U)\frac{d^2U}{d\xi^2}) = 0 \tag{2.6}$$

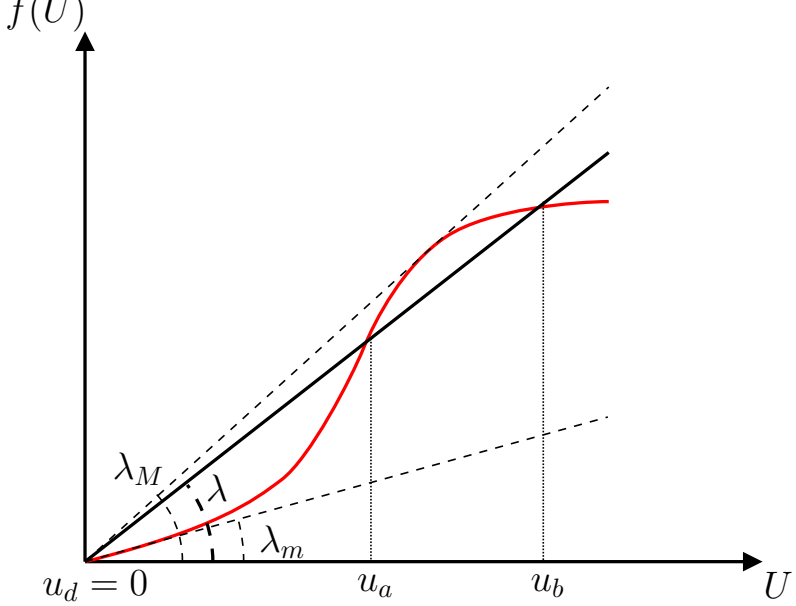


FIG. 2.2. *Détermination des trois points stables (u_d, u_a et u_b) pour une fonction de flux convexe-concave. La courbe rouge représente la fonction de flux $f(U)$. La droite continue a pour équation λU et les deux droites en pointillés $\lambda_m U$ et $\lambda_M U$. On remarquera que $f'(u_d) < \lambda$, $f'(u_a) > \lambda$ et $f'(u_b) < \lambda$.*

En intégrant cette dernière équation sur l'intervalle $[\xi, +\infty[$, on obtient :

$$-\lambda(U - u_d) + f(U) - f(u_d) + \epsilon(U)\frac{dU}{d\xi} + \delta(U)\frac{d^2U}{d\xi^2} = 0 \tag{2.7}$$

avec

$$\lim_{\xi\to+\infty} \frac{d^2U}{d\xi^2} = \lim_{\xi\to+\infty} \frac{dU}{d\xi} = 0 \quad \text{et} \quad u_d = 0$$

En définissant la fonction $g(U, \lambda) = f(U) - \lambda U$, cette dernière équation s'écrit :

$$g(U, \lambda) - g(0, \lambda) + \epsilon(U)\frac{dU}{d\xi} + \delta(U)\frac{d^2U}{d\xi^2} = 0 \tag{2.8}$$

Elle peut se mettre sous la forme vectorielle :

$$\frac{d\vec{X}}{d\xi} = \vec{K}(\vec{X}, \lambda) \quad \text{avec} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} U \\ \frac{dU}{d\xi} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

et

$$\vec{K}(\vec{X}, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{dU}{d\xi} \\ -\frac{1}{\delta(U)}\left[g(U, \lambda) - g(0, \lambda) + \epsilon(U)\frac{dU}{d\xi}\right] \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Ainsi, pour une onde de vitesse λ donnée, la solution apparaît comme une courbe intégrale dans l'espace des phases $(U, \frac{dU}{d\xi})$ partant d'un point $\vec{X}_g$ et se terminant en $\vec{X}_d$. Ce type de courbe s'appelle une trajectoire hétérocline. Les points de départ $\vec{X}_g$, et d'arrivée $\vec{X}_d$ doivent être des points d'équilibres :

$$\lim_{\xi\to+\infty} \frac{dU}{d\xi} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\xi\to-\infty} \frac{dU}{d\xi} = 0$$

D'après l'équation (2.9), ces conditions impliquent[2] : $g(u_g, \lambda) = g(u_d = 0, \lambda) = 0$. De plus, la courbe de flux change de courbure. Comme elle est de type convexe-concave, lorsque la vitesse λ est

[2]Cette condition d'équilibre est identique à celle de Rankine-Hugoniot : $f(u_g) - \lambda u_g = f(u_d) - \lambda u_d$.

comprise entre deux valeurs[3] λ_m et λ_M, il existe deux solutions pour u_g à l'équation $g(u_g, \lambda) = 0$, comme le montre la figure 2.2. On les notera u_a et u_b (telles que $u_a < u_b$). Dans ce cas, on a de plus :

$$f'(U = 0) < \lambda \tag{2.11}$$

$$f'(U = u_a) > \lambda \tag{2.12}$$

$$f'(U = u_b) < \lambda \tag{2.13}$$

Pour une vitesse de choc donnée λ, il existe deux valeurs possibles pour u_g pouvant être reliées à l'état $u_d = 0$ par un choc :

- un choc reliant u_a à u_d. Ce choc est du type classique car : $f'(u_a) > \lambda > f'(u_d)$.
- Un choc reliant u_b à u_d. Ce choc est du type non - classique car : $\lambda > f'(u_b)$ et $\lambda > f'(u_d)$.

Le choc qui nous intéresse est évidemment le second puisqu'il est non-classique. Lefloch démontre, dans le cas particulier d'une fonction de flux cubique et pour des coefficients ϵ et δ constants, qu'il existe une trajectoire hétérocline reliant u_b à u_d pour une valeur de la vitesse λ bien déterminée. En d'autres termes, un choc ne peut être de type non-classique que pour une vitesse bien déterminée. Une démarche équivalente nous permettrait de déterminer la vitesse du choc sélectionnée. Mais, une telle étude nécessite la connaissance des fonctions $\epsilon(u)$ et $\delta(u)$ (et surtout de leur signe). Ces deux coefficients peuvent être calculés par un développement aux grandes longueurs d'ondes (aux faibles gradients). Nous ne présenterons pas ici en détail ce type d'analyse. Le principe est de développer asymptotiquement les équations de Orr-Sommerfeld en fonction du gradient de saturation. Ce type d'analyse a été utilisé par exemple par Yih [9, 100, 64, 13]. Dans notre configuration (avec $M = 10$), un tel développement donne :

- un coefficient $\epsilon(u)$ qui est proportionnel au nombre de Reynolds. Ce coefficient est négatif pour $u \lesssim 0.5$ et positif sinon.
- Un coefficient $\delta(u)$ qui ne dépend pas du nombre de Reynolds, il est toujours positif.

A partir des signes de ces coefficients, on peut étudier la stabilité de chacun des points d'équilibres en étudiant les valeurs propres de la matrice $\dfrac{d\vec{K}}{d\vec{X}}$. Le résultat d'une telle étude (illustré sur la figure 2.3) montre que :

- les points $u_d = 0$ et u_b sont toujours des points selles.
- le point u_a est un point instable si $\epsilon(u_a) < 0$, ce qui correspond à $u_g \lesssim 0.5$, et stable sinon.

Pour déterminer la solution d'un choc non-classique, il est donc nécessaire de trouver la valeur de λ pour laquelle il existe une trajectoire reliant un point selle à un autre.

Cette étape est difficile à mettre en oeuvre du fait de la forte non-linéarité des coefficients $\epsilon(u)$ et $\delta(u)$. La détermination d'une trajectoire hétérocline entre deux points est également un problème difficile nécessitant des méthodes numériques assez complexes. Dans le cas de Lefloch, cette démarche a été fructueuse du fait de la simplicité de la fonction de flux et des coefficients (qui sont constants). Dans notre cas, nous n'avons pas réussi à déterminer l'existence d'une telle trajectoire et donc la structure du choc. Toutefois, cette méthode nous permet de justifier l'existence, dans certains problèmes, de chocs "non-classiques", comme celui que nous avons observé.

[3] Dans notre cas, il existe deux solutions si $\lambda \in [1.5; 2.1]$.

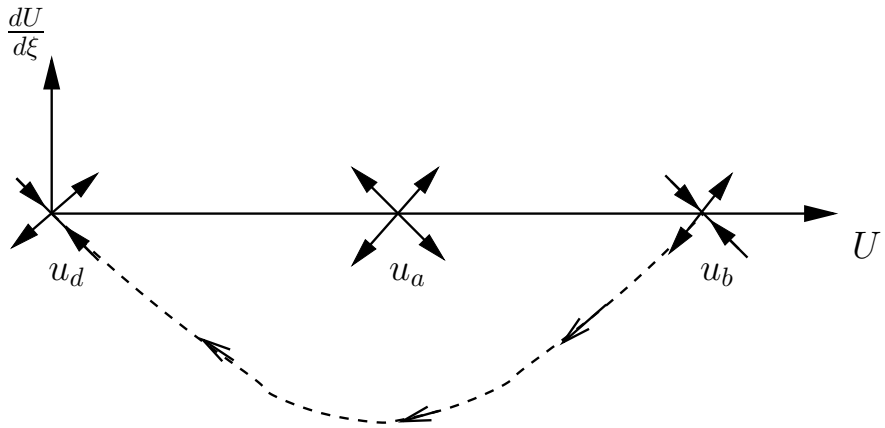


FIG. 2.3. *Exemple de trajectoire hétérocline reliant l'état u_b à l'état u_d. Les points u_b et u_d sont des points selles et u_a est un point instable.*

Chapitre 3

Approche expérimentale

Le dernier chapitre de cette partie (et de ce mémoire) est consacré à la présentation de travaux expérimentaux préliminaires sur l'étude d'un écoulement diphasique, miscible et confiné. La motivation initiale de ces travaux était d'étudier les propriétés du doigt de déplacement lorsque le fluide moins visqueux occupe partiellement la surface d'injection à l'entrée de la cellule, comme le montre l'injection schématisée des deux fluides de la figure 3.1. Pour des raisons de facilité de réalisation, nous avons choisi une géométrie cylindrique. Notre intérêt s'est également porté sur l'étude de l'instabilité observée aux temps longs.

Dans la littérature, il existe un grand nombre d'études analytiques de stabilité d'écoulements uniformes, stratifiés et visqueux. Il est désormais connu que de tels systèmes sont instables à cause du couplage entre l'inertie et le contraste du taux de cisaillement (voir par exemple [100, 38, 40, 49, 50, 51, 13, 14]). Toutefois, et de façon surprenante, nous nous sommes rendu compte qu'il existe très peu d'expériences d'instabilités d'écoulements concentriques de deux fluides miscibles de même densité. Nous trouvons dans la littérature, pour des écoulements en tube, des études d'instabilités avec tension de surface et différence de densités [6]. Pour les déplacements de fluides miscibles, on trouve des expériences avec des effets de gravité [72, 60, 82]. Il y a donc toujours un effet supplémentaire stabilisant ou déstabilisant (gravité, tension de surface) dans ces expériences. Par conséquent, l'instabilité d'écoulement due uniquement au contraste de viscosités et à l'inertie n'a jamais été clairement étudiée. Ici, nous ne nous sommes pas uniquement intéressés aux temps courts et à la structure du doigt, mais également au régime développé dans lequel

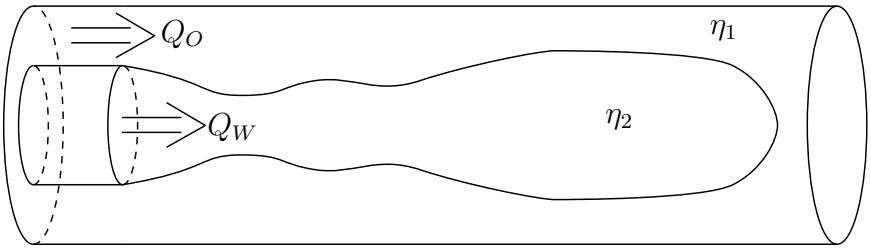
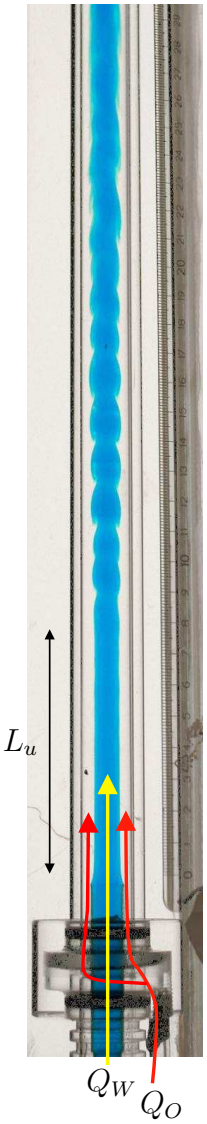


FIG. 3.1. *Schéma d'un déplacement d'un fluide (***o***) par un autre (***w***) en injection cocourante. Les débits respectifs sont Q_O et Q_W.*

l'avant du doigt a disparu, mais des instabilités persistent. Encore une fois, ce chapitre a pour simple but de présenter les premiers résultats d'une étude qui fera l'objet de travaux à venir.

3.1 Description du montage expérimental

La figure ci-contre montre une photographie du dispositif expérimental réalisé. Le montage est constitué d'un tube vertical de rayon 1 cm, immergé dans une cuve pleine d'eau de section rectangulaire (pour des raisons d'optique). On injecte par le bas du tube les deux fluides de manière concentrique (avec un injectuer central de rayon 0.7 cm).
Le fluide blanc (noté **o**) est un mélange d'eau et de natrosol, utilisé pour varier la viscosité du mélange. Le natrosol est un polymère qui présente l'avantage de ne modifier que très faiblement la densité du mélange, il est de plus Newtonien dans la gamme de viscosités utilisée. Le fluide bleu (noté **w**) est de l'eau colorée. Sa densité est ajustée à celle de **o** (avec une précision de 10^{-4} $g.cm^{-3}$) en ajoutant un sel de $CaCl_2$. Les deux injecteurs sont alimentés par deux pompes péristatiques permettant d'imposer le débit de chacun des fluides (variant entre 0 et 1 $cm^3.s^{-1}$). Comme un rapport de débits donné correspond à une largeur du fluide central uniforme (notée R_u sur la figure 3.3), ce montage nous permet donc d'imposer un débit total et une largeur de saturation de façon indépendante. La prochaine section a pour but de présenter les différents régimes observés.



3.2 Résultats expérimentaux

La figure 3.2 montre deux clichés différents. Le cliché du haut représente une simulation dans la configuration Hele-Shaw (2D). Le cliché du bas représente une photographie de l'expérience pour un temps assez court ($\sim 30s$). On constate une grande similitude entre les deux clichés, bien que les deux configurations ne soient pas les mêmes. Sur la photographie, on constate qu'il se forme effectivement un choc. A l'arrière de ce choc, il se forme également une série d'oscillations caractéristiques.

La figure 3.3 montre, pour chaque expérience, les deux grandes grandeurs mesurées : la distance L_u sur laquelle la saturation est uniforme, et le rayon R_u de fluide intérieur (bleu) correspondant à cette région de saturation uniforme. Rappelons que la valeur de R_u est imposée par le rapport des débits des deux fluides.

Si on mesure la vitesse de ce choc (*i.e.* la vitesse de l'avant du déplacement), on constate qu'elle ne dépend effectivement pas du rayon d'injection, elle vaut environ $\Sigma \sim 2.4\ u_0$, où u_0 est la vitesse

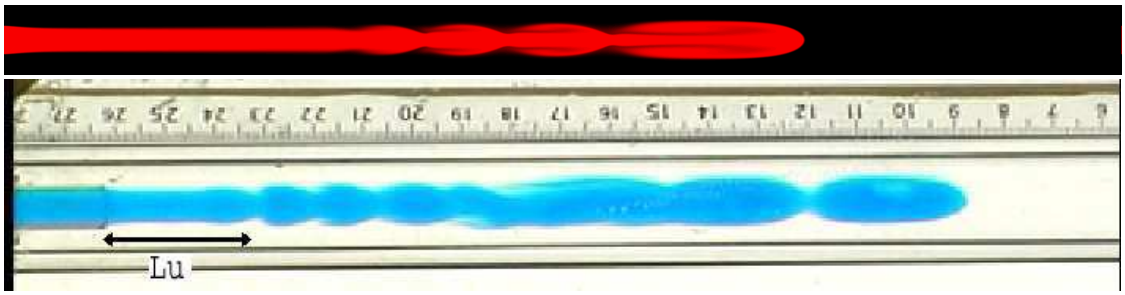


FIG. 3.2. *Exemple d'expérience en début d'injection. A titre de comparaison, une simulation numérique est présentée. Bien que les configurations ne soient pas les mêmes (en tube pour les expériences et en cellule de Hele-Shaw pour les simulations), on constate une similitude assez remarquable. La concentration de* **w** *a été représentée en rouge dans la simulation. Elle correspond au bleu dans l'expérience.*

débitante. Les expériences semblent confirmer les simulations concernant l'apparition d'un choc de taille et de vitesse prédéterminées.

Une autre différence avec l'expérience vient du comportement de la longueur uniforme L_u. Numériquement, on avait observé que L_u était croissante temporellement. On constate expérimentalement que cette longueur augmente au cours du temps, jusqu'à atteindre une valeur asymptotique. Cette différence peut être due aux géométries différentes (Hele-Shaw ou cylindrique), mais elle s'explique plus vraisemblablement par des simulations trop courtes, ou par la présence d'un bruit dans les expériences qui entretiendrait les instabilités.

Une étude de la longueur de stabilisation (L_u) en fonction des paramètres montre qu'elle ne dépend pas du débit total. Elle dépend uniquement du rapport des débits des deux fluides (et donc de la largeur du profil initial) comme le montre la figure 3.4. Sur cette figure a été tracée la longueur uniforme en fonction du rayon uniforme R_u pour des débit totaux différents (variant de 0.1 à 1 $cm^3.s^{-1}$). On constate que tous les points se regroupent sur une même courbe. La longueur uniforme dépend donc uniquement du rapport des deux débits et pas du débit total.

Un autre phénomène observé, et qui n'apparaît pas numériquement, est la formation de "chapelets" pour certaines conditions d'injections (voir figure 3.5). D'une manière très approximative, il semble que ce type de régime apparaît lorsque le débit total est faible et que la largeur d'injection de **w** (fluide central bleu) est faible. Ce type d'instabilité ressemble étrangement à l'instabilité dite "jet - goutte" que l'on obtient lorsque les deux fluides sont immiscibles (et donc lorsqu'il y a une tension de surface).

Ces résultats expérimentaux préliminaires soulèvent des problèmes à mon avis très intéressants. Ils montrent en effet que la largeur et la taille du doigt d'injection semblent être sélectionnées de la même manière que dans les simulations numériques. Ils montrent de plus l'instabilité de l'écoulement uniforme. Cette instabilité, bien que prévisible analytiquement [38], n'avait jamais été observée expérimentalement. En effet, les expériences avec des fluides miscibles étaient toujours stables [82, 72]. Une propriété intéressante de cette instabilité est qu'elle peut parfois apparaître très loin de l'injection (entre 1 cm et 90 cm). Un autre phénomène intrigant observé est l'apparition de "chapelets" qui n'ont jamais été observés à ma connaissance dans des écoulements de fluides

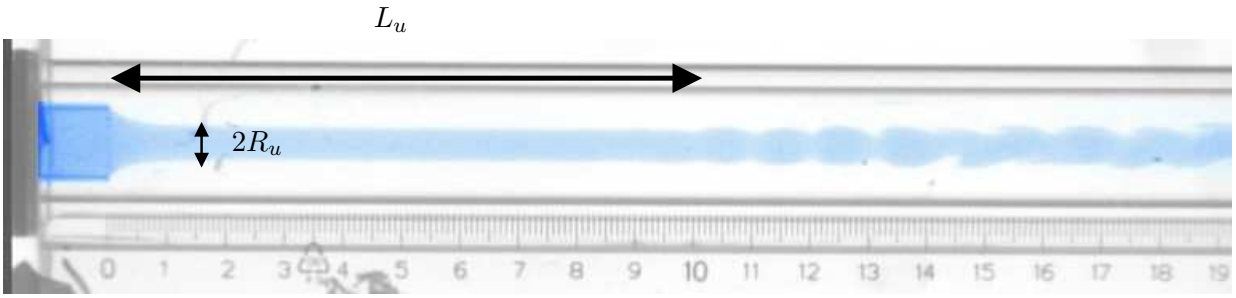


FIG. 3.3. *Configuration des fluides* **w** *et* **o** *pour des débits d'injection respectifs :* 0.27 $cm^3.s^{-1}$ *et* 0.68 $cm^3.s^{-1}$. *La longueur uniforme est notée* L_u, *et le rayon uniforme est noté* R_u. R_u *est imposé par le rapport des débits.*

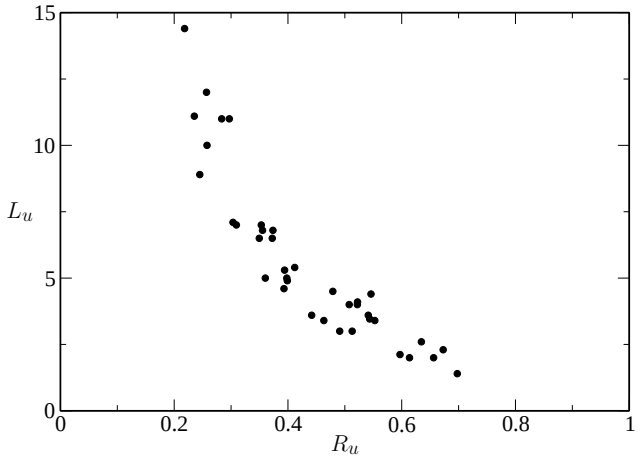


FIG. 3.4. *Longueur uniforme* L_u *en fonction du rayon* R_u. *Les différentes expériences ont été faites pour des débits totaux différents, variant de* 0.1 *à* 1 $cm^3.s^{-1}$.

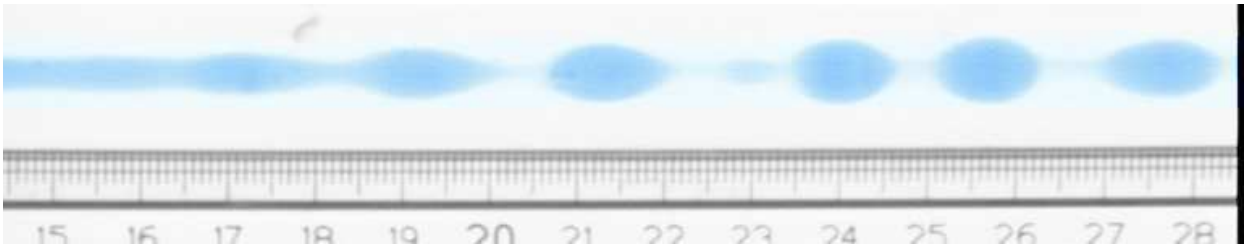


FIG. 3.5. *Formation de "chapelets". Les débits respectifs du fluide* **w** *et* **o** *sont :* 0.03 $cm^3.s^{-1}$ *et* 0.20 $cm^3.s^{-1}$. *Cette instabilité se forme à* $L_u = 15\ cm$ *en aval de l'injection.*

miscibles. Cette étude expérimentale est l'objet de travaux en cours. Il faut signaler également que des tentatives d'expériences d'instabilités d'écoulements triphasiques ont été réalisées sur le même type de montage (voir Partie II, chapitre 4, figure 4.17).

Chapitre 4

Conclusion

Dans cette dernière partie, nous nous sommes intéressés aux écoulements confinés diphasiques (miscibles), plus simples d'approche d'un point de vue analytique et expérimental. Cependant, les études préliminaires effectuées sur cette configuration soulèvent un grand nombre de problèmes intéressants auxquels on ne s'attendait pas. Une étude beaucoup plus approfondie de cette configuration "simple" semble être nécessaire pour améliorer notre compréhension des écoulements confinés.

Soulignons également qu'un système diphasique peut également obéir à un système d'équations elliptiques si on modifie les conditions limites. Un exemple d'un tel système consisterait à injecter le fluide moins visqueux par l'extérieur, le deuxième fluide étant au centre (voir figure 4.1 dans le cas à 2D). A une position donnée, l'iso-concentration $c = 0.5$ permet de distinguer trois phases différentes notées $\mathbf{g}$, $\mathbf{o}$ et $\mathbf{w}$, et le système se décrit alors avec le formalisme de la partie précédente.

Un autre exemple de système de ce type est celui étudié récemment par Chen et Meiburg [18]. Un fluide est déplacé par un autre entre deux plaques, dans le cas où il existe initialement un film de fluide déplaçant aux parois. On constate sur la figure 4.2 qu'un tel système peut très bien se décrire avec notre formalisme d'équations de conservations. La différence essentielle avec notre système réside dans les positions des états de gauche et de droite dans le problème de Riemann. Le chemin sur le diagramme a pour point de départ un point en haut sur l'axe GW et se termine en bas sur l'axe OW. Notons que les auteurs n'ont étudié que le cas purement hyperbolique.

Une autre application concerne également le cas du déplacement d'un fluide par un autre, mais dans le cas où le fluide déplaçant est désaxé. Un tel sytème est également descriptible par un système de deux équations de conservations. L'analyse de stabilité linéaire d'un tel système a été faite par Kliakhangler *et al.* [54]. Il semble également intéressant dans ce cas-là d'étudier les solutions au problème de Riemann.

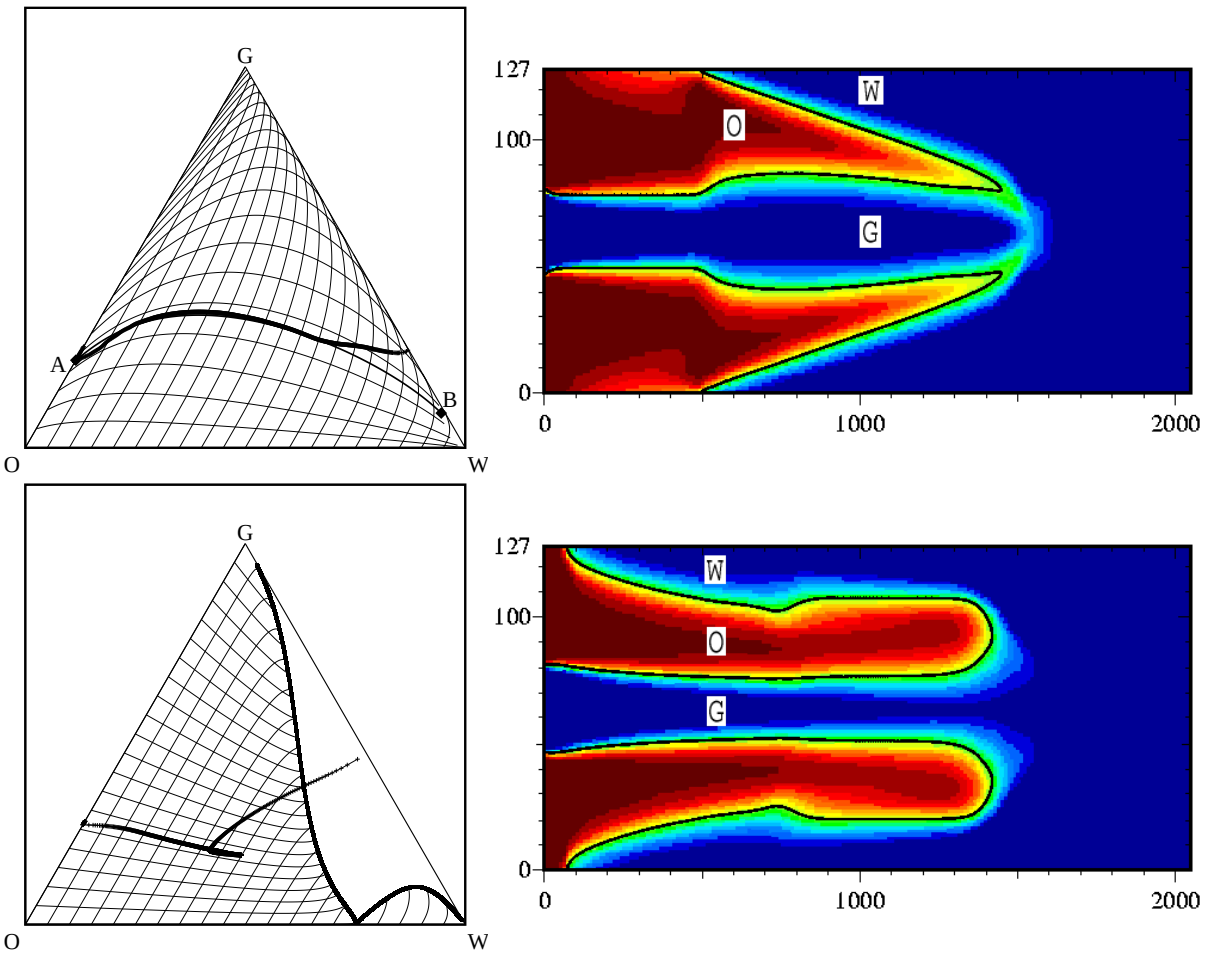


FIG. 4.1. *Déplacement de deux fluides miscibles. Le fluide rouge (***o***) est injecté par l'extérieur, le fluide bleu (***w***, ***g***) étant au centre. En haut, le fluide rouge est plus visqueux que le bleu. En bas, le fluide rouge est moins visqueux. Ce système peut être décrit par un modèle triphasique, similaire au cas* $M = 1$ *et* $\Lambda = 0.1$ *pour la simulation du haut et* $M = 1$ *et* $\Lambda = 10$ *pour celle du bas. Les autres paramètres sont :* $u_0 = 16.10^{-4}$, $D_0 = 5.10^{-5}$, $Pe = 4096$ *et* $Re = 4$.

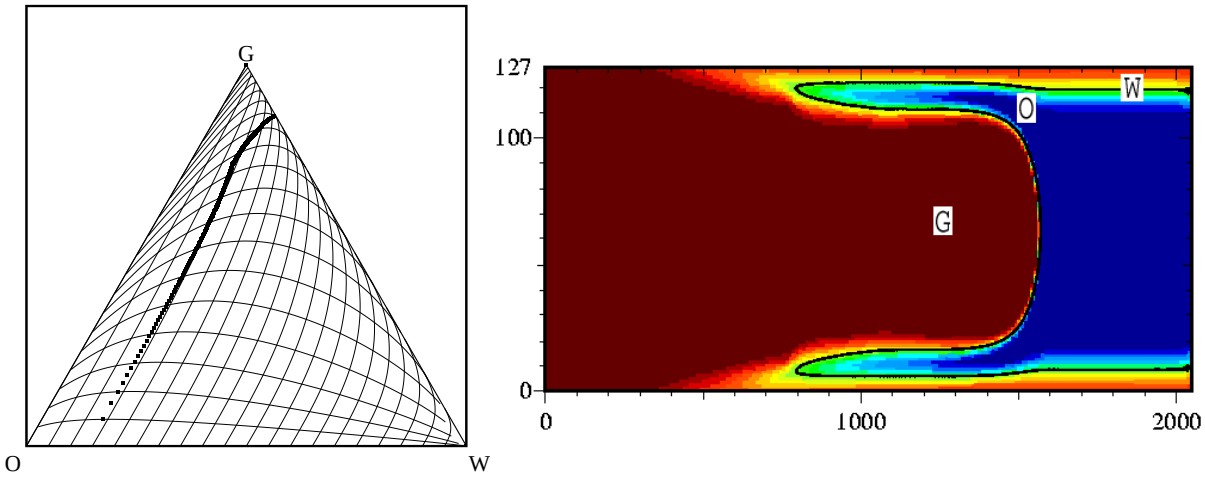


FIG. 4.2. *Déplacement de deux fluides miscibles avec une épaisseur de fluide injecté pré-existante à la paroi. Cette configuration peut être décrite par un modèle triphasique. Ici, le fluide rouge (*$\mathbf{g}$*,* $\mathbf{w}$*) est moins visqueux que le bleu* $\mathbf{o}$*. Cette configuration est similaire au cas* $M = 1$ *et* $\Lambda = 0.1$*.*

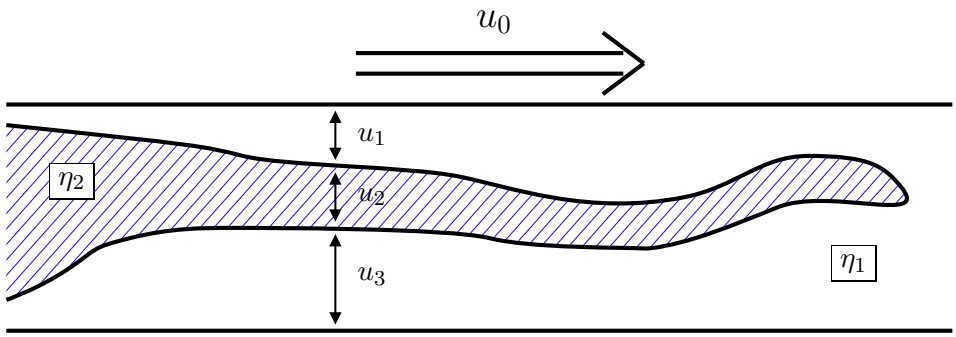


FIG. 4.3. *Déplacement d'un fluide miscible (blanc) par un autre (bleu) en cellule de Hele-Shaw. Lorsque le système n'est pas symétrique, il est décrit par deux variables indépendantes :* $u_1(x,t)$ *et* $u_3(x,t)$ *qui sont les distances aux parois du fluide poussant. Les équations de conservations de ces deux variables peuvent devenir elliptiques.*

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons abordé l'étude de plusieurs systèmes d'écoulements confinés. Dans la première partie, nous avons étudié le problème de l'étalement de la zone de mélange entre deux fluides dans un milieu poreux hétérogène. Nous avons essayé de comprendre l'influence d'éventuelles hétérogénéités de ce milieu sur l'étalement du front de mélange, lorsque les deux fluides ont des viscosités différentes. Nous avons observé deux comportements différents selon le rapport des viscosités. Dans le premier cas, lorsque le contraste de viscosités est stabilisant [85] ou passif [86], nous avons montré que le mélange moyen était de type diffusif. Dans ce cas-là, nous avons vu qu'il était possible de prévoir quantitativement cette loi de mélange macroscopique par un développement aux faibles perturbations. Dans le second cas, lorsque le contraste de viscosités est déstabilisant, nous avons observé un comportement de type convectif. Ce résultat est en accord avec la plupart des autres études sur le sujet. Par contre, nous n'avons pas observé de couplage entre les effets visqueux et les hétérogénéités. On aurait pu penser que les hétérogénéités amplifient fortement la vitesse d'étalement de l'instabilité de digitation. En fait, il est apparu qu'elles ne font qu'ajouter un terme supplémentaire au taux de croissance observé dans le cas homogène. Nous n'avons pas observé un éventuel changement de régime dans les gammes de paramètres explorées. Ce résultat mérite d'être approfondi en élargissant la gamme des paramètres explorée.

Cette étude pourrait se poursuivre dans plusieurs directions. On pourrait étudier l'influence d'autres champs de perméabilités. Comme autre exemple de distribution, on peut penser à un champ hétérogène anisotrope ou à une autre fonction de distribution, auto-affine ou fractale, qui se trouve dans certains milieux géologiques (dans les fractures par exemple), dans un tel champ, on ne peut plus définir une longueur caractéristique de corrélation. La loi de mélange devrait donc être radicalement différente de celles que nous avons observées.

La méthode BGK permettant également de rajouter un terme de réaction chimique dans l'équation de convection-diffusion, on pourrait poursuivre cette étude en étudiant des phénomènes de dissolution chimique d'un milieu poreux. On pourrait également envisager d'étudier le mélange d'écoulements d'un plus grand nombre de fluides.

Dans la seconde partie de ce mémoire, nous avons étudié comment se comporte un déplacement de deux fluides miscibles dont la loi de viscosité est non-monotone. Si ce système peut paraître difficile à étudier, nous avons vu qu'une modélisation par un système triphasique non-miscible permet de retrouver quantitativement la structure du déplacement par des ondes cinématiques[83].

Il est apparu que dans les écoulements triphasiques des phénomènes très intéressants physiquement pouvaient se produire. Partant du constat que le système d'équations de conservations pouvait devenir elliptique, nous avons analysé le comportement du système dans une telle situation. Nous

avons constaté que celui-ci préfère rompre les conditions de lubrification par une succession de chocs. De plus, le système choisit un chemin particulier pour entrer et sortir de la zone elliptique, qui semble être sélectionné par le front avant de déplacement [87]. De manière surprenante, cette sélection passe par un état au milieu de la zone elliptique. En effet, on pouvait s'attendre à ce que le système choisisse un chemin contournant cette région, compte-tenu des observations d'instabilités dans cette région. Nous avons en effet mis en évidence un type d'instabilité rarement évoqué dans la littérature. Cette instabilité apparaît justement lorsque le système est uniforme dans la zone elliptique. Elle n'est aucunement due aux effets inertiels comme l'on pourrait s'y attendre, mais à un couplage entre les deux interfaces.

Notons également que des systèmes d'équations elliptiques apparaissent dans d'autres écoulements confinés. La poursuite de ces travaux pourrait donc se faire par l'étude d'autres systèmes elliptiques. Citons par exemple, la modélisation d'écoulements triphasiques en milieu poreux et le cas d'un déplacement diphasique non-symétrique. Ils interviennent également dans des écoulements de plusieurs couches de films minces [55] ou bien dans les suspensions de billes bidisperses [7]. Un approfondissement analytique des solutions d'équations de conservations, avec une fonction de flux tenant compte des effets des gradients semble être une piste intéressante pour la compréhension du sujet.

Dans la troisième partie de ce mémoire, nous avons commencé à étudier un système plus simple que le précédent. Remarquant qu'il y avait de grandes similitudes entre le cas triphasique et diphasique, nous avons décidé d'approfondir l'étude de ce dernier. Nous avons ainsi établi numériquement (et également par des expériences préliminaires) qu'il y avait une sélection de la largeur du doigt et de sa vitesse. Nous avons montré que cette sélection était indépendante de la condition d'injection, du nombre de Péclet et du nombre de Reynolds. L'influence de ces paramètres se manifeste uniquement dans la façon d'arriver à cette sélection. Nous avons également analysé quelques pistes permettant de rendre compte de cette sélection. Une méthode possible serait de tenir compte dans la fonction de flux des gradients de saturations. Enfin, nous avons commencé à étudier expérimentalement cette configuration. Bien que ce type de configuration soit connu pour être instable du fait de la variation du taux de cisaillement et de l'inertie, il est apparu que le système reste stable sur une longueur importante (jusqu'à cinquante fois la largeur du tube). Nous avons également observé une instabilité similaire à celle dite “jet - goutte", qui à notre connaissance, n'avait jamais été observée pour des fluides miscibles. Cette similitude avec les instabilités immiscibles peut éventuellement faire penser à la tension de surface effective d'un mélange entre deux fluides miscibles prévue par Korteweg [56]. L'étude du déplacement diphasique mérite des approfondissements futurs.

Bibliographie

[1] R. Ababou, D. McLaughlin, L.W. Gelhar, and A.F.B. Tompson, *Numerical simulation of Three-dimensionnal saturated flow in randomly heterogeneous porous media*, Trans. Por. Med. **4** (1989), 549–565.

[2] U.G. Araktingi and Jr. F.M. Orr, *Viscous Fingering in Heterogeneous Porous Media*, SPE Advanced Technology Series (1993).

[3] R. Aris, *Dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube*, Proc. R. Soc. London A **235** (1956), 67–77.

[4] V. Artus, B. Noetinger, and L. Ricard, *Dynamics of the Water-Oil Front for Two-Phase, Immiscible Flow in Heterogeneous Porous Media. 2 - Isotropic Media*, Transport in Porous Media **56** (2004), 305–328.

[5] J.-C. Bacri, D. Salin, and R. Wouméni, *Three dimensional miscible viscous fingering in porous media*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), 2005.

[6] R. Bai, K. Chen, and D.D. Joseph, *Lubricated pipelining : stability of core-annular flow. Part 5. Experiments and comparison with theory*, J. Fluid Mech. **240** (1992), 97–132.

[7] G.K. Batchelor and R.W. Janse Van Rensburg, *Structure formation in bidisperse sedimentation*, J. Fluid Mech. **166** (1985), 379–407.

[8] J.B. Bell, J.A. Trangenstein, and G.R. Shubin, *Conservation laws of mixed type describing three-phase flow in porous media*, SIAM J. Appl. Math. **46** (1986), 1000–1023.

[9] Benney D.J., *Long waves on liquid films*, J. Math. Phys. **45** (1966), 150.

[10] M. Blunt and P.R. King, *Relative Permeabilities from Two and Three Dimensional Pore-Scale Network Modelling*, **6** (1991), 407.

[11] J.F. Brady and D.L. Koch, *Dispersion in Porous Media*, Disorder and Mixing (J. P. Nadal E. Guyon and Y. Pomeau, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1988.

[12] H.C. Brinkman, *A calculation of the viscous exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles*, Appl. Sci. Res. **sect A1** (1947), 27–39.

[13] F. Charru and J. Fabre, *Long waves at the interface between two viscous fluids*, **6** (1994).

[14] F. Charru and E.J. Hinch, *'Phase diagram' of interfacial instabilities in a two-layer Couette flow and mechanism for the long-wave instability*, J. Fluid Mech. **414** (2000), 195–223.

[15] C.-Y. Chen and E. Meiburg, *Miscible Displacement in Capillary Tubes. Part 2. Numerical Simulations*, J. Fluid Mech. **326** (1996), 57–67.

[16] ———, *Miscible porous media displacements in the quarter five-spot configuration. Part 1. The homogeneous case*, J. Fluid. Mech. **371** (1998), 233–268.

[17] C.-Y Chen and E. Meiburg, *Miscible porous media displacements in the quarter five-spot configuration. Part 2. Effects of heterogeneities*, J. Fluid Mech. **371** (1998), 269–299.

[18] C.-Y. Chen and E. Meiburg, *Miscible displacements in capillary tubes : Effect of a preexisting wall film*, Phys. Fluids **16** (2004).

[19] H. Chen, *Discrete Boltzmann systems and fluid flows*, Comp. in Phys. **7** (1993), 632–637.

[20] D.A. Chin, *An assessment of first-order stochastic dispersion theories in porous media*, J. of Hydrology **199** (1997), 53–73.

[21] R.L. Chouke, P. van Meurs, and C. van der Poel, *The instabilitiy of slow, immiscible, viscous liquid-liquid displacements in permeable media*, Trans. AIME **216** (1959), 188.

[22] R. Courant and K.O. Friederichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, 1948.

[23] G. Dagan, *Stochastic modeling of groundwater flow by unconditional and conditional probabilities. 2. The solute transport*, Water Resour. Res. **18** (1982), 835–848.

[24] ———, *Solute transport in heterogeneous porous formation*, J. Fluid. Mech. **145** (1984), 151–177.

[25] ———, *Flow and transport in porous formation*, Springer Verlag, New York, 1989.

[26] A. De Wit, *Correlation structure dependence of the effective permeability of heterogeneous porous media*, Phys. Fluids **7** (1995), 2553–2562.

[27] A. De Wit and G.M. Homsy, *Viscous fingering in periodically heterogeneous porous media. I : Formulation and linear instability*, J. Chem. Phys. **107** (1997), 9609.

[28] ———, *Viscous fingering in periodically heterogeneous pourous media. II : Numerical simulations*, J. Chem. Phys **107** (1997), 9619.

[29] G. Drazer, H. Auradou, J. Koplik, and J.P. Hulin, *Self-Affine Fronts in Self-Affine Fractures : Large and Small-Scale Structure*, Phys. Rev. Lett. **93** (2004), 014501.

[30] L. Durlofsky and J.F. Brady, *Analysis of the Brinkman equation as a model for flow in porous media*, Phys. Fluids **30** (1987), 3329–3341.

[31] F. Fayers and J. Matthews, Soc. Pet. Eng. J. **24** (1984), 225.

[32] E.G. Flekkøy, *Lattice BGK model for miscible fluids*, Phys. Rev. E. **47** (1993), 4247–4271.

[33] E.G. Flekkøy, U. Oxaal, and T. Jøssang, *Hydrodynamic dispersion at stagnation points : Simulations and experiments*, Phys. Rev. E **52** (1995), 4952–4962.

[34] L.W. Gelhar and C.L. Axness, *Three-Dimensional Stochastic Analysis of Macrodispersion in Aquifers*, Water Resour. Res. **19** (1983), 161–180.

[35] S.K. Godunov, *A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics*, Sbornik, 1959.

[36] F. Golfier, C. Zarcone, B. Bazin, R. Lenormand, D. Lasseux, and M. Quintard, *On the ability of a Darcy-scale model to capture wormhole formation during the dissolution of a porous medium*, J. Fluid Mech. **457** (2002), 213.

[37] F.J. Hickernell and Y.C. Yortsos, *Linear stability of miscible displacement processes in porous media in the absence of dispersion*, Stud. Appl. Math. **74** (1986), 93–115.

[38] C.E. Hickox, *Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric pipe flow*, Phys. Fluids **14** (1971), 251.

[39] S. Hill, *Channeling in packed columns*, Chem. Eng. Sci. **1** (1952), 247.

[40] E.J. Hinch, *A note on the mechanism of the instability at the interface between two shearing fluids*, J. Fluid Mech. **144** (1984), 463.

[41] H. Holden, *On the Riemann Problem for a Prototype of a Mixed Type Conservation Law*, Comm. Pure Appl. Math. **40** (1986), 229–264.

[42] L. Holden, *On the strict hyperbolicity of the Buckley-Leverett equations for three-phase flow in porous medium*, SIAM J. Appl. Math. **50** (1990), 667–682.

[43] G.M. Homsy, *Viscous fingering in porous media*, Ann. Rev. Fluid Mech. **19** (1987), 271–311.

[44] K.C. Hsu, *A general method for obtaining analytical expressions for the first-order velocity covariance in heterogeneous porous media*, Water Resour. Res. **35** (1989), 2273–2277.

[45] K.C. Hsu, *General first-order expressions for solute transport in two- and three-dimensional randomly heterogeneous porous media*, Theory, Modeling, and Field Investigation in Hydrogeology : A special Volume in Honor of Shlomo P. Neuman's 60th Birthday, D. Zhang and C. L. Winter, Geophysical Society of America Special Paper, 2000, pp. 91–104.

[46] J.-P. Hulin and D. Salin, *Experimental Study of Tracer Dispersion in Model and Natural Porous Media*, Disorder and Mixing (J.P. Nadal E. Guyon and Y. Pomeau, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1988.

[47] D.M Jackson and M.J. Blunt, *Elliptic Regions and Stable Solutions for Three-Phase Flow in Porous Media*, Transport in Porous Media **48** (2002), 249–269.

[48] R.D. James, *The propagation of phase boundaries in elastic bars*, Archives for Rational Mechanics and Analysis **73** (1980), 125–158.

[49] D.D. Joseph, M. Renardy, and Y. Renardy, *Instability of the flow of two immiscible liquids with different viscosities in a pipe*, J. Fluid Mech. **141** (1984), 309–317.

[50] D.D. Joseph and Y.Y. Renardy, *Fundamentals of Two-Fluid Dynamics. Part I : Mathematical Theory and Applications*, Springer-Verlag, New-York, 1992.

[51] ———, *Fundamentals of Two-Fluid Dynamics. Part II : Lubrificated Transport, Drops and Miscible Liquids*, Springer-Verlag, New-York, 1992.

[52] R. Juanes and T.W. Patzek, *Analytical solution to the Riemann problem of three-phase flow in porous media*, Transport in Porous Media **55** (2004), 47–70.

[53] B.L. Keyfitz, J. Diff. Equations **80** (1989), 280.

[54] I. Kliakhandler and G. Sivashinsky, *Kinetic alpha effect in viscosity stratified creeping flow*, Phys. Fluids **7** (1995), no. 8, 1866–1871.

[55] I.L. Kliakhandler, *Long interfacial waves in multilayer thin films and coupled Kuramoto-Sivashinsky equations*, J. Fluid Mech. **391** (1999), 45–65.

[56] D.J. Korteweg, *Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité*, Arch. Neerl. Sci. Ex. Nat. **6** (1901), 1–27.

[57] E.J. Koval, *A Method for Predicting the Performance of Unstable Miscible Displacements in Heterogeneous Media*, Soc. Pet. Eng. J. **3** (1963), 145.

[58] E. Lajeunesse, *Déplacement et instabilités de fluides miscibles et immiscibles en cellule de Hele-Shaw*, Ph.D. thesis, Paris VI, 1999.

[59] E. Lajeunesse, J. Martin, N. Rakotomalala, and D. Salin, *3D Instability of Miscible Displacements in a Hele-Shaw Cell*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), 5254–5257.

[60] E. Lajeunesse, J. Martin, N. Rakotomalala, D. Salin, and Y.C. Yortsos, *Miscible displacement in a Hell-Shaw cell at high rates*, J. Fluid Mech. **398** (1999), 299–319.

[61] P.D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws, II*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 537–566.

[62] P.G. LeFloch, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2002.

[63] C.-H. Li, *Instability of Three-Layer Viscous Stratified Flow*, Phys. Fluids **12** (1969), no. 12.

[64] S.P. Lin, *Finite amplitude side-band stability of a viscous film*, J. Fluid Mech. **63** (1974), 417–429.

[65] T.P. Liu, *The Riemann problem for general 2×2 conservation laws*, Trans. Amer. Math. Soc. **199** (1974), 89–113.

[66] F.J. Manickam and G.M. Homsy, *Stability of Miscible Displacements in Porous Media with Nonmonotonic Viscosity Profiles*, Phys. Fluids **A.5** (1993), 1356–1367.

[67] J. Martin, N. Rakotomalala, and D. Salin, *Accurate determination of the sedimenation flux of concentrated suspensions*, Phys. Fluids **7** (1995), 2510–2512.

[68] ———, *Gravitational instability of miscible fluids in a Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids. **14** (2002), 902–905.

[69] N. Martys, D.P. Bentz, and E. J. Garboczi, *Computer simulation study of the effective viscosity in Brinkman's equation*, Phys. Fluids **6** (1994), 1434–1439.

[70] N.S. Martys, *Fractal growth in hydrodynamic dispersion through random porous media*, Phys. Rev. E **50** (1994), 335.

[71] L. Paterson, *Fingering with miscible fluids in Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **28** (1985), 26–30.

[72] P. Petitjeans and T. Maxworthy, *Miscible displacements in capillary tubes. Part 1. Experiments*, J. Fluid Mech. **326** (1996), 37.

[73] A. Pumir, P. Manneville, and Y. Pomeau, *On solitary waves running down an inclined plane*, J. Fluid Mech. **135** (1983), 27–50.

[74] Y.H. Qian, D. D'Humières, and P. Lallemand, *Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation*, Europhys. Lett. **17** (1992), 479–484.

[75] N. Rakotomalala, D. Salin, and P. Watzky, *Miscible displacement between two parallel plates : BGK lattice gas simulations*, J. Fluid Mech. **338** (1997), 277–297.

[76] D.A. Reinelt and P.G. Saffman, *The penetration of a finger into a viscous fluid in a channel tube*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. **6** (1985), 542–561.

[77] Y. Renardy, *Viscosity and density stratification in vertical Poiseuille flow*, Phys. Fluids **30** (1987), 1638.

[78] B. Riemann, *Uber die Fortpflangzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*, vol. viii, Göttingen Abhandlungen, 1858.

[79] Y. Rubin, *Stochastic modeling of macrodispersion in heterogeneous porous media*, Water Resour. Res. **26** (1990), 133–141.

[80] P.G. Saffman, *On the boundary conditions at the surface of a porous medium*, Stud. Appl. Math. **50** (1971), 93–101.

[81] P.G. Saffman and G.I. Taylor, *The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid*, Proc. R. Soc. London **Ser. A 245** (1958), 312.

[82] J. Scoffoni, E. Lajeunesse, and G.M. Homsy, *Interface instabilities during displacement of two miscible displacements in a Hele-Shaw cell at high rates*, Phys. Fluids **13** (2001), 799–801.

[83] M. Shariati, L. Talon, J. Martin, N. Rakotomalala, D. Salin, and Y.C. Yortsos, *Physical origins of the change of type from hyperbolic to elliptic equations : Fluid displacement between two parallel plates*, J. Fluid Mech. (2004), to appear.

[84] M.A.A. Spaid and Jr. F.R Phelan, *Lattice Boltzmann methods for modeling microscale flow in fibrous porous media*, Phys. Fluids **9** (1997), 2468–2474.

[85] L. Talon, J. Martin, N. Rakotomalala, and D. Salin, *Stabilizing viscosity contrast effect on miscible displacement in heterogeneous porous media, using lattice BGK simulations*, Phys. Fluids (2004), to appear.

[86] L. Talon, J. Martin, N. Rakotomalala, D. Salin, and Y.C. Yortsos, *Lattice BGK simulations of macrodispersion in heterogeneous porous media*, Water Resour. Res. **39** (2002), 1135–1142.

[87] ———, *Crossing the elliptic region in a hyperbolic system with change-of-type behavior, arising in flow between two parallel plates*, Phys. Rev. E **69** (2004), 066318.

[88] C.T. Tan and G.M. Homsy, *Stability of miscible displacements in porous media : Rectilinear flow*, Phys. Fluids **29** (1986), 3549–3549.

[89] ———, *Viscous fingering with permeability heterogeneity*, Phys. Fluids A **4** (1992), 1099–1101.

[90] G. I. Taylor, *Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube*, Proc. R. Soc. London A **219** (1953), 186–203.

[91] H.A. Tchelepi, F.M. Orr, Jr., N. Rakotomalala, D. Salin, and R. Wouméni, *Dispersion, permeability heterogeneity, and viscous fingering : Acoustic experimental observations and particle-tracking simulations*, Phys. Fluids A **5** (1993), 1558–1574.

[92] M.R. Todd and W.J. Longstaff, *The Development, Testing and Application of a Numerical Simulator for Predicting Miscible Fluid Performance*, Trans., AIME **253** (1972), 874.

[93] A. Tompson and L.W. Gelhar, *Numerical Simulation of Solute Transport in Three-Dimensional, Randomly Heterogeneous Porous Media*, Water Resour. Res. **26** (1990), 2541–2562.

[94] L.M. Truskinovsky, *Dynamics of nonequilibrium phase boundaries in a heat conducting elastic medium*, J. Appl. Math. and Mech. (PMM) **51** (1987), 777–784.

[95] P. Watzky, *Instabilités visqueuses et gravitationnelles entre fluides miscibles : approche par le modèle B.G.K de gaz sur réseau*, Ph.D. thesis, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, 1997.

[96] C. Welty and L.W. Gelhar, *Stochastic analysis of the effects of fluid density and viscosity variability on macrodispersion in heterogeneous porous media*, Water Resour. Res. **27** (1991), 2061–2075.

[97] G.B Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, 1999.

[98] Z. Yang and Y.C. Yortsos, *Asymptotic Solutions of Miscible Displacements in Geometries of Large Aspect Ratio*, Phys. Fluids **9** (1997), 286–298.

[99] Z.M. Yang, Y.C. Yortsos, and D. Salin, *Asymptotic regimes in unstable miscible displacements in random porous media*, Adv. Water Res. **25** (2002), 885.

[100] C.-S. Yih, *Instability due to viscous stratification*, **27** (1967), 337–352.

[101] Y.C. Yortsos, *A Theoretical Analysis of Vertical Flow Equilibrium*, Transp. Porous Media **107** (1995).

[102] W.B. Zimmerman and G.M. Homsy, *Nonlinear viscous fingering in miscible displacement with anisotropic dispersion*, Phys. Fluids **A 3** (1991), 1859–1872.

[103] ———, *Viscous fingering in miscible displacements : Unification of effects of viscosity contrast, anisotropic dispersion, and velocity dependence of dispersion on nonlinear propagation*, Phys. Fluids A **4** (1992), 2348.