



**HAL**  
open science

# Modèles et schémas numériques pour la simulation de genèse de bassins sédimentaires

Guillaume Enchéry

► **To cite this version:**

Guillaume Enchéry. Modèles et schémas numériques pour la simulation de genèse de bassins sédimentaires. Mathématiques [math]. Université de Marne la Vallée, 2004. Français. NNT : . tel-00007371

**HAL Id: tel-00007371**

**<https://theses.hal.science/tel-00007371>**

Submitted on 10 Nov 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ DE MARNE-LA-VALLÉE**

*École Doctorale Information, Communication, Modélisation et Simulation*

*Laboratoire Analyse et Mathématiques Appliquées*

*avec la collaboration de*

**L'INSTITUT FRANÇAIS DU PÉTROLE**

**THÈSE**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MARNE-LA-VALLÉE**

*Discipline : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES*

présentée et soutenue publiquement par

**Guillaume Enchéry**

*le 9 Septembre 2004*

---

**MODÈLES ET SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR LA  
SIMULATION DE GENÈSE DE BASSINS  
SÉDIMENTAIRES**

**Models and schemes for sedimentary basin simulations**

---

*devant le jury composé de:*

<b>M. Damien Lamberton,</b>	Président du jury,
<b>M. Robert Eymard,</b>	Directeur de thèse,
<b>M. Jacques Blum,</b>	Rapporteur,
<b>M. Pierre Fabrie,</b>	Rapporteur,
<b>M. Jürgen Fuhrmann,</b>	Rapporteur,
<b>Mme Raphaële Herbin,</b>	Examineur,
<b>M. Roland Masson,</b>	Membre invité.



# Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Robert Eymard (Université de Marne-la-Vallée) qui a accepté de diriger ma thèse et qui a suivi mes travaux avec beaucoup d'intérêt tout au long de ces trois années. Ses conseils et les connaissances qu'il m'a apportés m'ont été d'une aide précieuse. J'ai beaucoup apprécié sa pédagogie et la clarté de ses explications. J'espère devenir un jour un aussi bon enseignant que lui.

Roland Masson m'a accueilli au sein du département de Mathématiques Appliquées à l'Institut Français du Pétrole (IFP). Il a également suivi régulièrement l'avancée de mes travaux et a accepté de participer à mon jury. Je tiens à l'en remercier vivement.

Je remercie également Jacques Blum (Université de Nice), Pierre Fabrie (Université de Bordeaux) et Jürgen Fuhrmann (Weierstrass Institute, Berlin) pour avoir bien voulu être rapporteurs de ma thèse. Je leur suis reconnaissant du temps qu'ils ont consacré à la relecture de mon manuscrit et j'adresse un merci particulier à Jürgen Fuhrmann qui a relu mon travail en dépit de la barrière de la langue.

Je remercie Damien Lambertson (Université de Marne-la-Vallée) pour avoir accepté la présidence de mon jury et Raphaèle Herbin (Université de Provence) pour sa participation au jury.

J'adresse mes remerciements à Sylvie Wolf (IFP) qui m'a proposé ce sujet de thèse et qui m'a guidé dans le développement de mon simulateur en me faisant partager son expérience de la modélisation de genèse de bassins.

Je remercie chaleureusement Anthony Michel (IFP) qui, dès son arrivée à l'IFP, a tout de suite témoigné de l'intérêt à mes travaux. Les discussions que nous avons pu avoir sur les méthodes Volumes Finis m'ont souvent été très utiles. Je garderai un très bon souvenir de notre collaboration et j'espère que nous aurons à nouveau l'occasion de travailler ensemble.

En préparant ma thèse à l'IFP, j'ai pu bénéficier des connaissances et des conseils de nombreux ingénieurs. Je pense en particulier à Isabelle Faille, Eric Flauraud, Quang Huy Tran, Françoise Willien et je les remercie pour leur aide.

J'ai également une pensée amicale pour les ingénieurs Géomath, les thésards, les post-docs avec lesquels j'ai passé ces trois ans de thèse. Je les remercie pour leur gentillesse et leur bonne humeur.

Enfin mes dernières pensées vont à tous les membres de ma famille. Leur soutien et leur affection dépassent largement le cadre de cette thèse aussi je leur dirai simplement....  
Merci pour tout !



# Résumé

Ce travail présente quelques contributions à la modélisation et à la simulation de genèse de bassins sédimentaires.

Nous présentons tout d'abord les modèles mathématiques et les schémas numériques mis en œuvre à l'Institut Français du Pétrole dans le cadre du projet *Temis*. Cette première partie est illustrée à l'aide de tests numériques portant sur des bassins  $1D/2D$ .

Nous étudions ensuite le schéma amont des pétroliers utilisé pour la résolution des équations de Darcy, et nous établissons des résultats mathématiques nouveaux dans le cas d'un écoulement de type Dead-Oil. Nous montrons également comment construire un schéma à nombre de Péclet variable en présence de pression capillaire. Là encore, nous effectuons une étude mathématique détaillée et nous montrons la convergence du schéma dans un cas simplifié. Des tests numériques réalisés sur un problème modèle montrent que l'utilisation d'un nombre de Péclet variable améliore la précision des calculs.

Enfin nous considérons dans une dernière partie un modèle d'écoulement où les changements de lithologie et les changements de courbes de pression capillaire sont liés. Nous précisons la condition physique que doivent vérifier les solutions en saturation aux interfaces de changement de roche et nous en déduisons une formulation faible originale. L'existence d'une solution à ce problème est obtenue par convergence d'un schéma volumes finis. Des exemples numériques montrent l'influence de la condition d'interface sur le passage ou la retenue des hydrocarbures.

**Mots-clés :** Bassins sédimentaires, Ecoulements en milieu poreux, Capillarité, Equations paraboliques non linéaires, Volumes finis.



# Abstract

This work presents some results concerning the modelling and the simulation of sedimentary basins.

We first describe the mathematical models and the numerical schemes used in the Institut Français du Pétrole within the framework of the *Temis* project. This first part is illustrated by numerical tests dealing with  $1D/2D$  basins.

We then study an upwind scheme commonly used for the resolution of Darcy's equations and we establish new mathematical results for a Dead-Oil model. We also show how to design a scheme with a variable Péclet number in presence of capillary pressure. Again, we complete a mathematical study and we prove the convergence of the scheme for a simplified case. Numerical tests achieved on a model problem show that the use of a variable Péclet number improves the precision of the calculations.

Finally, in a last part, we consider a flow problem where the rock changes and the changes of capillary pressure curves are coupled. We precise the physical condition that the solutions in saturation must satisfy on the interfaces where the type of rock changes and we deduce from this condition an original weak problem. The existence of a solution to this problem is obtained by proving the convergence of a finite volume scheme. Numerical examples show the effects of the interface condition on the capillary trapping.

**Keywords** :Sedimentary basins, Flows in porous media, Capillarity, Nonlinear PDE of parabolic type, Finite volume methods.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
I.1	Exploration pétrolière et modèles numériques . . . . .	15
I.2	Le modèle Temis . . . . .	16
I.3	Amélioration des modèles et des schémas numériques existants . . . . .	16
<b>II</b>	<b>La modélisation de bassin sédimentaire</b>	<b>19</b>
II.1	Bassins sédimentaires et hydrocarbures . . . . .	19
II.1.1	Formation des bassins sédimentaires . . . . .	19
II.1.2	Craquage et migration des hydrocarbures . . . . .	20
II.2	La modélisation de bassins sédimentaires . . . . .	23
II.2.1	Description microscopique d'une roche sédimentaire . . . . .	23
II.2.2	Nécessité d'un changement d'échelle . . . . .	27
II.2.3	Cadre de la modélisation et inconnues du problème . . . . .	27
II.2.4	Lois d'écoulements . . . . .	28
II.2.5	Calcul de la température . . . . .	38
II.2.6	Evolution du squelette et compaction . . . . .	40
II.2.7	Conditions aux bords et conditions initiales de dépôt . . . . .	42
<b>III</b>	<b>Aspects numériques en simulation de bassin</b>	<b>45</b>
III.1	Choix de la méthode de discrétisation . . . . .	45
III.2	Maillages . . . . .	46
III.2.1	Caractéristiques des maillages de bassins . . . . .	46
III.2.2	Cas d'une simulation monodimensionnelle . . . . .	46
III.2.3	Cas d'un modèle en dimension $d = 2, 3$ . . . . .	47
III.2.4	Conclusions . . . . .	49
III.3	Notations . . . . .	50
III.3.1	Discrétisation en temps . . . . .	50
III.3.2	Discrétisation en espace . . . . .	50
III.3.3	Conventions d'écriture . . . . .	51
III.4	Discrétisation des équations d'écoulement . . . . .	51
III.4.1	Décentrage amont des pétroliers . . . . .	53
III.4.2	Décentrage causal . . . . .	53
III.4.3	Calcul des termes sources . . . . .	54
III.5	Discrétisation des équations de rhéologie . . . . .	54

III.6	Traitement des mailles situées sur l'interface eau-sédiments . . . . .	55
III.7	Traitement des érosions . . . . .	56
III.8	Résolution du système couplé . . . . .	56
III.9	Calcul du pas de temps . . . . .	57
III.10	Tests numériques . . . . .	58
III.10.1	Caractéristiques du Test 1 . . . . .	58
III.10.2	Caractéristiques du Test 2 . . . . .	60
III.10.3	Influence du pas du maillage sur le franchissement des barrières capillaires . . . . .	61
<b>IV</b>	<b>Etude mathématique du schéma industriel</b>	<b>71</b>
IV.1	Modèle mathématique . . . . .	71
IV.2	Discrétisation volumes finis admissible . . . . .	74
IV.3	Définition des schémas . . . . .	76
IV.3.1	Notations préliminaires . . . . .	76
IV.3.2	Le schéma amont des pétroliers . . . . .	76
IV.3.3	Le schéma à nombre de Péclet variable . . . . .	80
IV.4	Etude du schéma amont des pétroliers en l'absence de capillarité . . . . .	82
IV.4.1	Estimations sur la pression . . . . .	82
IV.4.2	Existence d'une solution discrète au système couplé . . . . .	86
IV.4.3	Stabilité $L^\infty$ . . . . .	88
IV.4.4	Quelques remarques sur la convergence du schéma . . . . .	90
IV.5	Etude du schéma à nombre de Péclet variable sur le modèle complet . . . . .	91
IV.5.1	Estimations sur la pression . . . . .	91
IV.5.2	Stabilité $L^\infty$ . . . . .	92
IV.5.3	Existence d'une solution discrète au système couplé . . . . .	94
IV.5.4	Convergence du schéma dans un cas simplifié . . . . .	96
IV.6	Tests numériques . . . . .	114
IV.6.1	Données numériques . . . . .	114
IV.6.2	Tests sur le schéma amont des pétroliers en l'absence de pression capillaire . . . . .	114
IV.6.3	Tests sur le schéma à nombre de Péclet variable en présence de pression capillaire . . . . .	117
<b>V</b>	<b>Pressions capillaires et changement de type de roche</b>	<b>125</b>
V.1	Introduction . . . . .	125
V.2	Etude du schéma volumes finis . . . . .	132
V.2.1	Un schéma implicite . . . . .	132
V.2.2	Stabilité $L^\infty$ . . . . .	134
V.2.3	Existence et unicité de la solution discrète . . . . .	135
V.2.4	Convergence . . . . .	136
V.3	Tests numériques . . . . .	146
V.3.1	Test1 . . . . .	146
V.3.2	Test2 . . . . .	146

<b>VI Conclusions et perspectives</b>	<b>151</b>
<b>Annexes</b>	<b>153</b>
<b>A La modélisation de bassin sédimentaire</b>	<b>155</b>
A.1 Un exemple d'algorithme de backstripping . . . . .	155
<b>B Etude du schéma industriel</b>	<b>163</b>
B.1 Propriétés de la fonction $F(.,., Q, R)$ . . . . .	163
B.2 Lemmes de convergence . . . . .	165
<b>C Pressions capillaires et changement de type de roche</b>	<b>171</b>
C.1 Unicité de la solution . . . . .	171
<b>Nomenclature</b>	<b>180</b>
<b>Index</b>	<b>186</b>



# Table des figures

II.1	Etirement de la lithosphère continentale. . . . .	21
II.2	Rupture de la lithosphère continentale et formation de la lithosphère océanique. . . . .	21
II.3	Migration des hydrocarbures . . . . .	22
II.4	Réseau poreux . . . . .	24
II.5	Interface eau-huile dans un pore . . . . .	25
II.6	Repère lié à la stratification . . . . .	33
II.7	Loi de Kozeny Karman pour $S_{spec} = 5.10^6 m^2.m^{-3}$ . . . . .	34
II.8	Perméabilités relatives de l'eau et de l'huile en fonction de la saturation de l'huile . . . . .	35
II.9	Hystérésis des perméabilités relatives . . . . .	35
III.1	Dépôt de la première cellule . . . . .	47
III.2	Dépôt de la seconde cellule . . . . .	47
III.3	Maillage Multi1D . . . . .	48
III.4	Maillage bassin coïncidant . . . . .	49
III.5	Géométrie et structure du bassin . . . . .	58
III.6	Evolution de la porosité en fonction de la profondeur . . . . .	59
III.7	Géométrie et structure du bassin . . . . .	60
III.8	Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour $t = 1.0$ . L'huile est retenue. La pression capillaire est discontinue au niveau de la barrière d'argile. . . . .	61
III.9	Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour $t = 4.0$ . L'huile a franchi la barrière d'argile et la pression capillaire est continue. . . . .	61
III.10	Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour $t = 100.0$ . . . . .	62
III.11	Etat final en saturation obtenu pour différentes discrétisations de la barrière argileuse . . . . .	63
III.12	Porosités calculées en $t = 4 Ma$ (a), $t = 8 Ma$ (b), $t = 12 Ma$ (c), $t =$ $32 Ma$ (d), $t = 42 Ma$ (e) . . . . .	65
III.13	Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour $t = 35.0$ . . . . .	66
III.14	Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour $t = 41.0$ . . . . .	66
III.15	Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour $t = 49.0$ . . . . .	66
III.16	Barrières capillaires à l'instant initial. . . . .	67

III.17	Saturations obtenues en $t = 10.0$ avec des mailles de hauteur solide égale à $200 m$ .	67
III.18	Saturations obtenues en $t = 0.2$ avec des mailles de hauteur solide égale à $100 m$ .	68
III.19	Saturations obtenues en $t = 0.4$ avec des mailles de hauteur solide égale à $100 m$ .	68
III.20	Saturations obtenues en $t = 10.0$ avec des mailles de hauteur solide égale à $100 m$ .	69
IV.1	$p - p_{\text{hydro}}$ à $t = 0.1 Ma$ pour différents pas d'espace	115
IV.2	Saturation à $t = 0.1 Ma$ pour différents pas d'espace	116
IV.3	Convergence numérique en pression	116
IV.4	Convergence numérique en saturation	117
IV.5	Maillage et zones particulières du domaine $\Omega$	118
IV.6	Saturation en $t = 0.0 Ma$	118
IV.7	Saturation en $t = 0.3 Ma$	119
IV.8	Saturation en $t = 1.0 Ma$	121
IV.9	Saturation en $t = 2.0 Ma$	121
IV.10	Saturation en $t = 3.7 Ma$	122
IV.11	Saturation en $t = 10.0 Ma$	122
IV.12	Saturations obtenues par les différents schémas en $t = 0.5$	123
IV.13	Saturations obtenues par les différents schémas en $t = 1.0$	123
IV.14	Saturations obtenues par les différents schémas en $t = 1.5$	124
IV.15	Convergence numérique en saturation	124
V.1	Exemple de courbes de pression capillaire	126
V.2	Test 1 : $u(., t)$ , $\pi(., u(., t))$ , $\varphi(., u(., t))$ pour $t = 0.007$ (a) et $t = 0.05$ (b)	147
V.3	Test 2 : $u(., t)$ , $\pi(., u(., t))$ , $\varphi(., u(., t))$ pour $t = 0.007$ (a) et $t = 0.05$ (b)	148
V.4	Test 1 : Evolution du flux et des saturations sur l'interface	149
V.5	Test 2 : Evolution du flux et des saturations sur l'interface	149
A.1	Translation courbe $[BC]$ en $[B'C']$ suite à l'érosion de $[AB]$ (courbe de gauche). Translation courbe $[B'C']$ en $[B''C'']$ suite au dépôt de $[DE]$ (courbe de droite).	157
A.2	Calcul des hauteurs réelles à partir d'une courbe $\phi_i(z)$	158

# Chapitre I

## Introduction

---

### I.1 Exploration pétrolière et modèles numériques

L'exploration pétrolière vise à reconstituer l'historique de formation des bassins sédimentaires afin de détecter la présence d'hydrocarbures, de préciser leur localisation et de détailler les espèces présentes dans les réservoirs. La prospection s'appuie traditionnellement sur

- la géologie,
- la sismique réflexion qui fournit des images  $2D$  ou  $3D$  du sous-sol sur plusieurs centaines voire quelques milliers de mètres de profondeur,
- les données de forage qui fournissent des informations sur l'âge et la nature des roches présentes, leurs porosités, leurs perméabilités, les pressions, les températures régnant dans le sous-sol mais aussi, dans certains cas, des renseignements sur la matière organique et les hydrocarbures présents.

A partir de ces données, les géologues recensent les pièges, les réservoirs, les roches mères potentiels et essaient d'élaborer des scénarios de formation des bassins qui s'inspirent, dans certains cas, d'études antérieures.

Au cours des trente dernières années, une meilleure compréhension de l'évolution géologique des bassins, des lois géochimiques de maturation de la matière organique ainsi que des phénomènes de migration ont permis de préciser les mécanismes de genèse de bassins. Pour les géologues, est alors apparue la nécessité de créer un outil capable d'intégrer toutes ces lois physico-chimiques afin de synthétiser rapidement l'ensemble des données disponibles.

Le premier modèle numérique de bassin sédimentaire a été introduit par Yüklér et Welte en 1978 (Yüklér, Cornford & Welte 1978) sous une forme monodimensionnelle puis tridimensionnelle en 1981 (Yüklér & Welte 1981). Depuis cette époque, la simulation de genèse de bassin a connu un développement croissant.

Toutefois, les connaissances en géologie, géochimie, géophysique, mécanique... semblent encore trop imparfaites aujourd'hui si bien que les simulateurs actuels ne peuvent être utilisés comme des outils de prédiction fiables au cours des campagnes d'exploration. Ils constituent plutôt des outils de synthèse permettant de tester la validité de certaines hypothèses et de vérifier la cohérence des données.

## I.2 Le modèle Temis

A l'Institut Français du Pétrole, le premier modèle complet de genèse de bassin date du milieu des années 1980 (Ungerer, Bessis, Chenet, Durand, Nogaret, Chiarelli, Oudin & Perrin 1984), (Ungerer, Doligez, Chénet, Burrus, Lafargue, Giroir, Heum & Eggen 1987), (Ungerer, Burrus, Doligez, Chénet & Bessis 1990). Ce modèle, nommé *Temis*, a été, depuis cette époque, étendu à des bassins 3D et a subi de nombreuses évolutions aussi bien au niveau du modèle physique que des méthodes numériques mises en œuvre (Schneider, Wolf, Faille & Pot 2000a). Il comprend actuellement

- un module de calcul de la géométrie du bassin basé sur un algorithme de backstriping,
- une résolution couplée des équations de Darcy triphasique (eau + huile + gaz) et des équations liée à la rhéologie du milieu poreux de type viscoélastoplastique,
- un module de calcul de la température basé sur la résolution de l'équation de la chaleur ou sur la donnée d'un gradient géothermique.

Ce modèle aboutit à un système d'équations couplées, non linéaires, instationnaires sur un domaine hétérogène, anisotrope et dont la géométrie, variable au cours du temps, constitue elle aussi une inconnue du problème...

## I.3 Amélioration des modèles et des schémas numériques existants

Les équations du modèle *Temis* sont résolues à l'aide de schémas numériques de type volumes finis centrés. Quelques-uns de ces schémas sont utilisés depuis de nombreuses années dans des codes industriels développés pour la simulation de bassin ou de réservoir. Cependant ils font l'objet de peu de résultats mathématiques dans des cas réalistes. Notre objectif est donc ici d'étendre l'étude des schémas existants à des modèles plus complexes. Notre travail de recherche s'oriente essentiellement selon deux axes.

1. Vérifier que les schémas utilisés à l'heure actuelle présentent de bonnes propriétés sur le plan mathématique : stabilité, existence et unicité de la solution discrète, convergence et précision des calculs.
2. S'assurer que les schémas mis en œuvre respectent la physique liée à la genèse de bassins.

Nous considérons donc, au début, des modèles de bassins simplifiés que nous enrichissons progressivement par l'introduction de nouveaux phénomènes physiques. A chaque fois nous nous assurons que les schémas étudiés vérifient les objectifs énoncés ci-dessus.

Une première étude porte sur le schéma amont des pétroliers. Ce schéma est utilisé depuis de nombreuses années pour la résolution des équations de Darcy en simulation de bassin ou de réservoir. Sur le plan mathématique, de nombreuses études ont déjà été publiées à son sujet mais, dans la plupart des cas, elles n'intègrent pas le terme de gravité ou alors uniquement dans des cas monodimensionnels. Or, dans les bassins, la gravité est le moteur principal de migration des hydrocarbures. Il est donc important d'intégrer ce terme dans notre étude. Les résultats que nous présentons ont donné lieu à la publication d'un article paru dans la revue *Computational Methods In Applied Mathematics* (Enchéry, Eymard, Masson & Wolf 2002).

Nous nous intéressons ensuite aux effets capillaires qui jouent également un rôle prépondérant lors de la migration. Sur ce thème, notre travail se divise en deux parties.

Dans un premier temps, nous nous limitons à des lois où les pressions capillaires ne dépendent que des saturations. L'introduction des pressions capillaires fait alors apparaître un terme de diffusion dans l'équation de conservation hydrocarbure qui, sur le plan numérique, peut être utilisé pour contruire un schéma à nombre de Péclet variable. Sur ce schéma, nous présentons quelques résultats mathématiques ainsi que quelques tests numériques qui ont fait l'objet d'un second article en cours de rédaction (Enchéry soumis).

Nous considérons ensuite le cas où les pressions capillaires sont à la fois des fonctions dépendant de la saturation et de la variable d'espace. Cette dépendance en espace est due aux changements de lithologies et permet de reproduire numériquement les pièges capillaires. En effet certaines couches géologiques possèdent une forte pression capillaire d'entrée qui retarde voire, dans certains cas, bloque complètement la progression des hydrocarbures, entraînant la formation de gisements.

Des tests numériques montrent que le schéma amont des pétroliers peut, dans ce cas, donner une très mauvaise estimation des réservoirs présents. L'introduction d'une nouvelle condition d'écoulement au niveau des interfaces de changement de roche nous permet de préciser les mécanismes de passage des hydrocarbures. A partir de là, nous construisons un nouveau schéma en saturation qui satisfait cette condition et qui converge vers une solution faible du problème.

Ces résultats ont fait également l'objet d'un article, actuellement en cours de relecture (Enchéry, Eymard & Michel soumis).

Tous les schémas étudiés, à l'exception du dernier, ont été intégrés et testés dans un prototype reproduisant quelques-unes des fonctionnalités des simulateurs actuels.

La suite de ce document s'organise de la façon suivante.

- Le chapitre II décrit les principaux phénomènes physico-chimiques qui contribuent

à la formation d'un bassin et présente les modèles mathématiques qui ont été mis en œuvre dans le cadre du projet *Temis* et, en particulier, dans le prototype.

- Le chapitre III propose une discrétisation volumes finis des équations introduites dans le chapitre précédent et présente quelques tests numériques réalisés avec le prototype.
- L'étude mathématique du schéma amont des pétroliers et du schéma à Péclet variable est détaillée au chapitre IV.
- Enfin les problèmes mathématiques liés à la dépendance en espace des courbes de pressions capillaires sont abordés au chapitre V.

## Chapitre II

# La modélisation de bassin sédimentaire

---

Cette première partie est une présentation générale de la modélisation de genèse de bassins sédimentaires telle qu'elle est ou a pu être mise en œuvre dans le cadre du projet *Temis*. Nous précisons, en particulier, les équations du modèle utilisées pour la conception de notre prototype.

Nous débutons ce chapitre par quelques généralités sur la formation des bassins sédimentaires (§ II.1.1), le craquage des hydrocarbures et leur migration (§ II.1.2). Nous revenons ensuite plus en détail sur les principaux phénomènes physico-chimiques qui interviennent. Pour cela, nous commençons par une description des roches et des écoulements à l'échelle du pore (§ II.2.1), puis nous adoptons un point de vue plus macroscopique (§ II.2.2) où nous précisons les lois associées aux écoulements (§ II.2.4), aux transferts thermiques (§ II.2.5) et aux déformations du milieu poreux (§ II.2.6). Pour chacun de ces phénomènes, nous présentons les modèles mathématiques associés (§ II.2.3–II.2.7). Enfin nous précisons les différentes conditions aux limites et initiales possibles (§ II.2.7).

## II.1 Bassins sédimentaires et hydrocarbures

### II.1.1 Formation des bassins sédimentaires

Pour comprendre les mécanismes de formation des bassins sédimentaires, quelques rappels sur la structure du globe terrestre sont nécessaires.

Notre planète se compose d'un certain nombre d'enveloppes concentriques et en particulier de l'asthénosphère et de la lithosphère qui sont les deux enveloppes les plus externes. La première se situe à des profondeurs allant de 150 km à 700 km et la seconde de 0 à 150 km. La lithosphère est fragmentée en plaques se déplaçant les unes par rapport aux autres à des vitesses de l'ordre de quelques centimètres par an. Ces déplacements sont dus à des mouvements de convection de matériaux en fusion au sein de l'asthénosphère. Lorsque des mouvements de convection divergents apparaissent au dessous d'une plaque

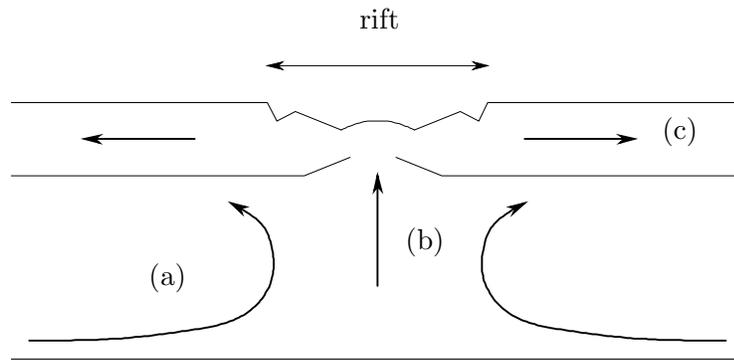
lithosphérique (voir figure II.1) ceci entraîne un étirement de la plaque qui s'amincit, voire se fragilise et se fracture. Il apparaît alors une dépression, appelée aussi rift et des matériaux à température élevée issus de l'asthénosphère peuvent remonter en surface. Ce type d'affaissement est appelé subsidence tectonique. Le rift formé constitue une première forme de bassin sédimentaire composé de zones hautes à sa périphérie et de zones basses au centre. Les intempéries, le vent, les rivières vont éroder les parties élevées et les produits issus de l'érosion vont être transportés par gravité, par le vent ou les cours d'eau et se déposer au centre. Si l'étirement cesse, progressivement le rift va se combler et disparaître. On estime que la durée de vie d'un rift est de l'ordre de quelques millions voire quelques dizaines de millions d'années. Il arrive parfois que le rift s'affaisse à nouveau par contraction thermique lorsque la lithosphère se refroidit suite à l'interruption de la remontée de matériaux asthénosphériques chauds. On parle alors de subsidence thermique.

Parfois l'étirement se poursuit jusqu'à la rupture complète de la lithosphère continentale (voir figure II.2). Des matériaux asthénosphériques peuvent alors faire surface dans une zone appelée ride médio-océanique. Ces matériaux vont combler progressivement l'espace présent entre les deux plaques continentales et les éloigner l'une de l'autre. Leur refroidissement entraîne une subsidence thermique et l'apparition de dépressions. La jonction entre les lithosphères continentales et océaniques, appelée aussi marge passive, constituent généralement des zones de fortes dépressions et donc des bassins sédimentaires importants. Sur ces marges, comme dans le cas précédent, des sédiments vont s'accumuler, puis être transportés vers les parties plus basses du bassin.

Nous avons donc essentiellement deux types d'environnement de dépôt : un environnement de type continental et un environnement de type marin. Suite aux variations du niveau de la mer, un bassin peut connaître différentes périodes d'immersion et d'émergence au cours de son histoire et la nature des sédiments va évoluer en fonction de l'environnement de dépôt. Cette accumulation peut s'étendre sur plusieurs dizaines voire quelques centaines de millions d'années et donne lieu, à l'âge actuel, à des structures très hétérogènes composées de différents types de matériaux (ou lithologies).

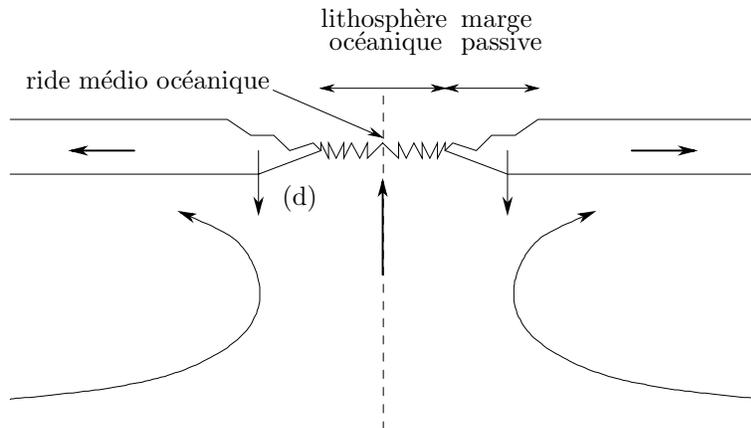
### II.1.2 Craquage et migration des hydrocarbures

Les hydrocarbures sont générés à partir d'une roche solide et insoluble appelée kérogène dans laquelle de la matière organique est piégée. Le kérogène se forme au cours des dépôts de sédiments à partir d'organismes plus ou moins altérés présents dans le milieu de sédimentation (organismes autochtones) ou transportés par des fleuves ou des courants marins (organismes allochtones). Un certain nombre de conditions doivent être réunies pour qu'une accumulation de kérogène se produise. Tout d'abord la biomasse doit être importante sur le site de sédimentation ou à proximité. La matière organique ne doit pas avoir été transportée sur de trop longues distances de façon à éviter toute altération ou dispersion. Enfin l'environnement de dépôt doit être pauvre en oxygène de façon à ce que la matière organique ne soit pas détruite par des bactéries aérobies et que le carbone ne disparaisse pas sous forme de  $CO_2$ . Une fois le dépôt de kérogène formé, la roche est recouverte par d'autres sédiments et s'enfonce progressivement à l'intérieur du bassin : c'est la subsidence. Avec la profondeur la température des sédiments augmente. Ceci est



- (a) : mouvements de convection au sein de l'asthénosphère.
- (b) : remontée de matériaux asthénosphériques.
- (c) : étirement de la plaque lithosphérique.

Figure II.1: Etirement de la lithosphère continentale.



- (d) : subsidence thermique.

Figure II.2: Rupture de la lithosphère continentale et formation de la lithosphère océanique.

dû à la présence de sources de chaleur présentes dans l'asthénosphère et la lithosphère. Sous l'effet de la température le kérogène "cuit" mais ne se consume pas du fait de l'absence d'oxygène. Apparaissent alors les premières traces d'hydrocarbures liquides puis gazeux, aux profondeurs plus élevées. Lorsque les quantités d'huile et de gaz générées sont suffisamment importantes, les hydrocarbures sont expulsées hors du kérogène mature appelé aussi roche mère (voir figure II.3). Cette expulsion est appelée migration primaire. Sous l'effet de la pression du fluide, de la gravité et de la capillarité, ces hydrocarbures vont migrer jusqu'à des pièges où ils s'accumulent. Un piège se compose d'une roche perméable, typiquement un sable, et d'une roche imperméable bloquant la progression des hydrocarbures. Cette seconde étape constitue la migration secondaire. Enfin, il arrive parfois que les hydrocarbures arrivent au bout d'un certain temps à franchir le piège pour gagner d'autres zones d'accumulation ou parvenir en surface. On parle alors de migration tertiaire ou de dismigration.

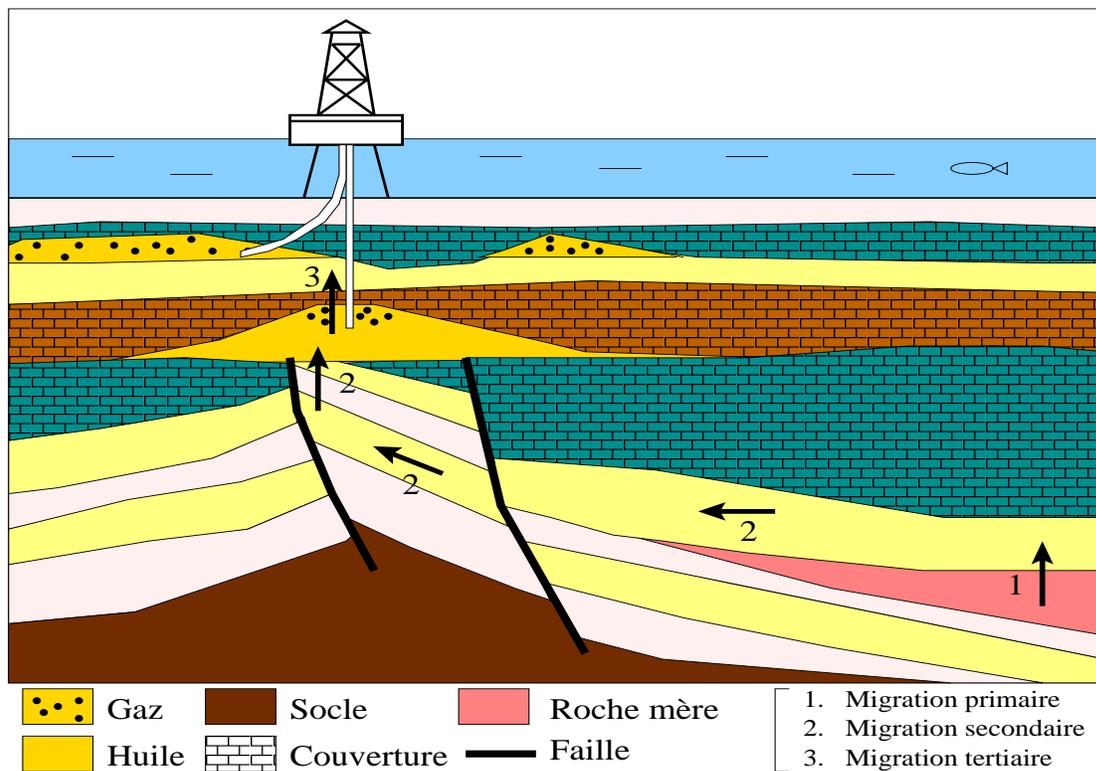


Figure II.3: Migration des hydrocarbures

Dans le paragraphe qui suit, nous détaillons ces différents mécanismes et nous présentons, à chaque fois, les modèles mathématiques qui leur sont associés.

## II.2 La modélisation de bassins sédimentaires

### II.2.1 Description microscopique d'une roche sédimentaire

#### Le réseau poreux

Une roche sédimentaire se compose d'un ensemble de particules minérales solides séparées par des espaces vides, les pores. Ces particules peuvent être de géométries très variées. Par exemple, pour les sables, il s'agit de grains aux formes arrondies tandis que les argiles ou les marnes sont constituées d'un empilement de feuillets. Des fissures peuvent également apparaître lorsque les roches sont soumises aux contraintes tectoniques.

D'une façon générale, la porosité  $\phi$  d'une roche est définie par

$$\phi = \frac{\text{Volume de vide}}{\text{Volume de solide}}.$$

Nous verrons au paragraphe § II.2.2 comment définir plus rigoureusement cette notion. En règle générale, la porosité diminue avec la profondeur. En effet, lorsqu'une roche s'enfouit, la contrainte exercée en un point par les couches susjacentes augmente. Ceci a pour effet un réarrangement des particules solides et une diminution de l'espace poreux. C'est le phénomène de compaction. Si la roche s'enfouit encore plus profondément, des phénomènes de compaction mécano-chimiques apparaissent suite à la dissolution-reprécipitation des minéraux et entraînent une réduction supplémentaire de la porosité. Une autre notion importante, dont nous aurons besoin par la suite, est celle de surface spécifique, notée  $S_{\text{spec}}$  et définie par

$$S_{\text{spec}} = \frac{\text{Surface totale des vides interstitiels}}{\text{Volume total du milieu}}.$$

Elle permet d'évaluer la surface de contact qu'offre un réseau poreux à un fluide qui circule au travers. Elle est de l'ordre de  $10^5 \text{ m}^2 \cdot \text{m}^{-3}$  pour un grès fin et de l'ordre de  $10^8 \text{ m}^2 \cdot \text{m}^{-3}$  pour une argile.

#### Intéactions entre les fluides et le milieu poreux

Dans un bassin sédimentaire, les pores sont en grande partie envahis par de l'eau. Au voisinage des grains, des forces d'attraction moléculaires existent entre l'eau et les particules solides. Ceci se traduit par la présence d'une fine pellicule d'eau autour des grains appelée eau liée et qui reste immobile. Ces forces d'attraction diminuent lorsque la distance entre les molécules d'eau et les particules solides augmentent et donc en dehors de cette zone d'attraction l'eau peut circuler. Même si ces zones de retenue sont relativement fines, elle réduisent le volume poreux disponible pour le déplacement des fluides. Ainsi, lorsque les porosités sont faibles et les surfaces spécifiques importantes, la circulation des fluides est plus difficile. C'est notamment le cas des argiles.

Des hydrocarbures peuvent également circuler à l'intérieur du réseau poreux (voir figure II.4).

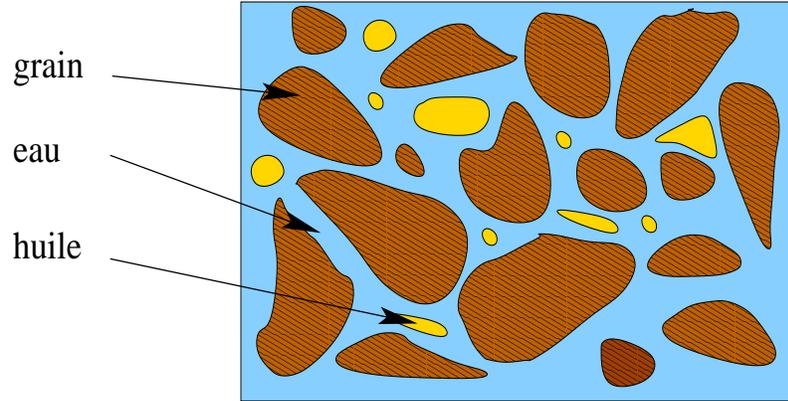


Figure II.4: Réseau poreux

Ils peuvent être de différentes espèces et migrer sous une forme gazeuse ou liquide en fonction des conditions de température et de pression. Il arrive parfois que certains hydrocarbures gazeux comme le méthane se dissolvent dans l'eau et se déplacent en solution dans cette phase (voir (Lamoureux-Var, Wolf, Schneider & Prinzhofer 1998)). Nous n'aborderons pas ce problème ici et nous considérerons que le déplacement des hydrocarbures s'effectue uniquement en phase constituée, liquide ou gazeuse, indépendamment de la phase aqueuse.

Dans la plupart des cas, ces trois phases sont supposées immiscibles. Cela signifie qu'une tension superficielle existe au niveau de l'interface de contact entre deux phases. Considérons par exemple le cas de l'huile liquide et de l'eau et notons par  $\gamma_{w,o}$  la tension superficielle entre ces deux fluides. Elle correspond au travail à fournir pour élargir l'interface de contact d'une unité de surface. De la même façon il existe une tension superficielle entre l'eau (resp. l'huile) et une particule solide quelconque que nous noterons par  $\gamma_{sed,w}$  (resp.  $\gamma_{sed,o}$ ). A l'équilibre, ces grandeurs sont reliées entre elles par la loi de Young (voir figure II.5) donnée par

$$\cos(\theta) = \frac{\gamma_{sed,o} - \gamma_{sed,w}}{\gamma_{w,o}}$$

où  $\theta$  désigne l'angle de mouillage. En modélisation de bassin, il est généralement admis (Schowalter 1979) que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  autrement dit l'eau constitue la phase mouillante. Nous admettons que c'est encore le cas en présence de gaz.

De part et d'autre de l'interface séparant deux phases, les pressions d'équilibre ne sont pas les mêmes. Cette différence est appelée pression capillaire. Si nous reprenons le cas d'un écoulement eau-huile, nous avons

$$\pi_{o,w} = p_o - p_w$$

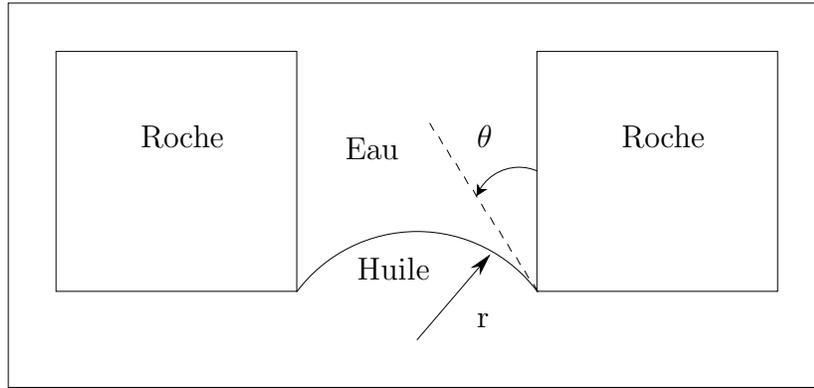


Figure II.5: Interface eau-huile dans un pore

où  $p_\alpha$ ,  $\alpha \in \{w, o\}$  désigne la pression de la phase  $\alpha$  et  $\pi_{o,w}$  la pression capillaire entre les deux phases. La loi de Laplace établit que la pression capillaire est une fonction dépendant à la fois de la tension superficielle  $\gamma_{w,o}$ , de l'angle de mouillage  $\theta$  et du rayon de courbure  $r$  de l'interface eau-huile (voir figure II.5), suivant la relation

$$\pi_{o,w} = \frac{2\gamma_{o,w} \cos(\theta)}{r}. \quad (\text{II.1})$$

Nous constatons en particulier que plus le rayon de courbure est faible plus la pression capillaire est importante. C'est par exemple le cas des roches à faible porosité.

En dehors des forces capillaires, une goutte d'hydrocarbure est soumise aux forces de gravité et de pression du fluide environnant. Les hydrocarbures étant en général plus légers que l'eau, la poussée d'Archimède constitue avec la capillarité un des principaux moteurs au cours de la migration.

### Origine des hydrocarbures

Dans la nature, le carbone évolue principalement selon un cycle biologique et météorique. En effet, le  $CO_2$  présent dans l'atmosphère permet, via la photosynthèse, la formation de végétaux qui eux-mêmes participent à la constitution de la faune. Lorsqu'ils disparaissent, ces organismes vivants forment des résidus de matière organique qui peuvent être directement réutilisés par leur milieu naturel ou se décomposer. En présence d'oxygène cette décomposition, due à l'action de bactéries ou sous l'effet d'une oxydation météorique, génère du  $CO_2$  qui retourne dans l'atmosphère.

Mais il arrive parfois que la matière organique partiellement transformée par des bactéries ne réintègre pas le cycle précédent et reste piégée dans des sédiments. Les quantités sont relativement faibles : elles représentent en moyenne 1% de la masse des sédiments et excèdent rarement les 5%. En règle générale, ce sont dans des roches à grains fins et peu perméables (typiquement des argiles et des marnes) que se trouvent les teneurs les

plus élevées. La fraction de carbone présent sous une forme organique à l'intérieur des sédiments constitue ce qu'on appelle le TOC (Total Organic Content). Cette fraction se décompose en une fraction soluble (aux solvants organiques type chloroforme ou chlorure de méthylène) appelée bitume et en une fraction insoluble appelée kérogène. Le bitume est à la fois un mélange d'hydrocarbures et de produits lourds, les résines et les asphaltènes, formés de carbone et d'hydrogène mais aussi de soufre, d'azote et d'oxygène. Le kérogène est la fraction la plus intéressante d'un point de vue pétrolier puisqu'il constitue en quelque sorte la matière première nécessaire à la génération des hydrocarbures. Comme pour le bitume, sa composition est très complexe et comprend des atomes de carbone, d'hydrogène, et d'oxygène et parfois même de soufre. En fait il existe différents types de kérogènes classiquement divisés en trois catégories selon l'environnement de dépôt.

**Type I :** Il est constitué essentiellement de bactéries issues de lacs évaporitiques ou de lagunes. Ce type n'est pas très fréquent mais peut produire jusqu'à 80 – 90% de son poids en hydrocarbures.

**Type II :** Il s'agit là d'un kérogène très courant composé de restes de phytoplancton marin. Il peut parfois contenir de fortes proportions de soufre et produit jusqu'à 60 – 70% de son poids en hydrocarbures.

**Type III :** Ce type, également très fréquent, correspond à des restes de végétaux supérieurs. Son rendement est de 30 – 40%.

D'un point de vue chimique, nous observons une diminution de la proportion d'atomes d'oxygène par rapport aux atomes de carbone (ratio  $O/C$ ) et une augmentation de la proportion d'atomes d'hydrogène par rapport aux atomes de carbone (ratio  $H/C$ ) lorsque nous passons des kérogènes de type  $I \rightarrow II$  puis  $II \rightarrow III$ .

Au fur et à mesure de son enfouissement, le kérogène va progressivement monter en température du fait de la présence, à l'intérieur du bassin, d'un gradient thermique compris entre 15 et 50  $^{\circ}C.km^{-1}$ . Le kérogène subit alors une sorte de cuisson, une pyrolyse<sup>1</sup> qui se déroule en trois temps. La première étape est la diagenèse au cours de laquelle se forment des composés mobiles riches en oxygène comme l'eau, le  $CO_2$ , les résines et les asphaltènes. A ce stade aucun hydrocarbure n'apparaît. C'est au cours de la seconde étape, la catagenèse, que l'essentiel des hydrocarbures se crée. Sous l'effet du craquage thermique, les molécules organiques se transforment en hydrocarbures liquides. Les molécules obtenues se cassent en chaînes de plus en plus courtes avec l'élévation de la température pour donner du gaz humide et finalement un gaz sec. Nous passons alors successivement de ce qu'on appelle la fenêtre à huile, comprise entre 1000 et 3000 m de profondeur, à la fenêtre à gaz pour des profondeurs supérieures à 3000 m. Avec la formation de gaz, le kérogène s'appauvrit énormément en hydrogène et un composé aromatique très riche en carbone, le pyrobitume, apparaît dans la roche mère. Ce composé est insoluble, immobile et s'apparente au coke. Au cours de la dernière étape, la métagenèse, peu d'hydrocarbures sont générés. Il se forme du méthane à partir des hydrocarbures existants et la proportion de pyrobitume augmente. L'ensemble de ces réactions produisant les premiers hydrocarbures à l'intérieur de la roche mère constitue ce qu'on appelle le craquage primaire.

<sup>1</sup>A ne pas confondre avec une combustion qui a lieu en présence d'oxygène.

Lorsque ces hydrocarbures ont été générés en quantité suffisante, ils sont expulsés hors de la roche mère, passent dans le réseau poreux et commencent à migrer. Au cours de la migration, la composition des hydrocarbures évoluent encore en fonction des conditions de température et de pression. C'est le craquage secondaire.

## II.2.2 Nécessité d'un changement d'échelle

Le paragraphe précédent nous a donné un aperçu des principaux phénomènes physiques intervenant à l'échelle du pore. Mais, pour décrire les écoulements et les déformations de la matrice solide, nous devons nous placer à une échelle plus grande.

En effet, reprenons la définition de la porosité que nous avons introduite précédemment. Si nous considérons un volume élémentaire de roche inférieur à la taille des grains ou des pores, nous obtenons  $\phi = 1$  à l'intérieur d'un pore et  $\phi = 0$  sur une particule solide. Autrement dit la porosité ne peut être mesurée ni même définie ponctuellement.

Une première façon de définir la porosité consiste à travailler avec un Volume Élémentaire Représentatif (VER) (voir (Bear 1972)) : la porosité en un point correspond alors à la porosité moyenne sur un volume centré en ce point. Ce volume doit être suffisamment grand pour regrouper plusieurs pores mais aussi suffisamment petit pour ne pas perdre de précision.

Une autre approche consiste à imaginer qu'en chaque point de l'espace la porosité est la réalisation d'un phénomène aléatoire ( $\phi = 1$  si le point est dans un pore,  $\phi = 0$  sinon) et de définir la porosité comme la moyenne des réalisations du phénomène en ce point.

Dans tous les cas, quelle que soit l'approche utilisée, les grandeurs physiques que nous manipulerons par la suite correspondent à des grandeurs moyennées et les lois qu'elles vérifient ne sont valables que sur un plan macroscopique. Il a été établi que la loi de Darcy (voir §1) relative à un écoulement monophasique au travers d'un milieu poreux idéalisé, peut être obtenue à partir des équations de Navier-Stokes écrites à l'échelle du pore puis réexprimées sur un VER (voir (de Marsily 1981)). Nous ne sommes toutefois pas en mesure d'étendre cette étude à des milieux poreux de géométrie complexe car nous ne connaissons pas suffisamment l'ensemble des phénomènes physiques intervenant à l'échelle du pore. La loi de Darcy et son extension aux écoulements multiphasiques reste donc avant tout une loi fondée sur l'expérience (voir (Marle 1972)).

## II.2.3 Cadre de la modélisation et inconnues du problème

Considérons un bassin sédimentaire (pour simplifier cette présentation, nous nous plaçons dans une coupe verticale en dimension  $d = 2$ ) muni d'un repère Eulérien  $(O, Ox, Oz)$ . L'origine  $O$  se trouve en un point fixe situé à l'extérieur du bassin à une hauteur correspondant au niveau moyen de la mer à l'âge actuel et l'axe  $(Oz)$  est orienté dans le sens du vecteur gravité  $\vec{g}$ . Sous l'effet de la compaction et de la sédimentation, la géométrie du bassin évolue au cours du temps mais cette évolution est supposée uniquement verticale. La base du bassin reste fixe. A l'intérieur, nous supposons que les écoulements sont diphasiques (eau, huile), immiscibles et que la phase hydrocarbure est composée d'un

constituant léger et d'un constituant lourd.

Au cours d'une simulation de bassin, nous devons déterminer, à chaque instant,

- la géométrie ou, plus précisément, les hauteurs de sédiments présentes dans chaque colonne du bassin,
- la porosité  $\phi$ ,
- la contrainte verticale  $\sigma_z$  que subit un point du bassin sous le poids de la colonne constituée des fluides et des sédiments susjacentes,
- la pression de l'eau  $p_w$ , la pression de l'huile  $p_o$ ,
- la saturation  $s$  égale à la proportion de volume poreux occupé par la phase hydrocarbure sur le volume poreux total,
- la concentration massique  $c$  de composé léger présent au sein de la phase hydrocarbure,
- la température  $T$ .

Dans les paragraphes § II.2.4– II.2.6, nous proposons des lois macroscopiques qui aboutissent à un système fermé permettant de calculer ces grandeurs.

## II.2.4 Lois d'écoulements

Sur le plan mathématique, la conservation des masses de sédiments, d'eau, d'huile et de composé léger est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \phi)\rho_{\text{sed}}) + \text{div}((1 - \phi)\rho_{\text{sed}}\vec{v}_{\text{sed}}) = 0, \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(1 - s)\rho_w) + \text{div}(\phi\rho_w(1 - s)\vec{v}_w) = 0, \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi s\rho_o) + \text{div}(\phi\rho_o s\vec{v}_o) = \rho_o q_o, \quad (\text{II.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi c s\rho_o) + \text{div}(\phi\rho_o c s\vec{v}_o) = \rho_o q_{o,c}, \quad (\text{II.5})$$

où

- l'indice  $_{\text{sed}}$  indique la phase solide, l'indice  $_o$  la phase hydrocarbure, l'indice  $_w$  la phase aqueuse,
- $\rho_\alpha$  la densité de la phase  $\alpha$ ,  $\alpha \in \{\text{sed}, o, w\}$ ,
- $\vec{v}_\alpha$  la vitesse de la phase  $\alpha$ ,
- $q_o$  le terme source dû au craquage d'une roche mère (craquage primaire)

- $q_{o,c} = q_{o,c,1} + q_{o,c,2}$  désigne la masse de composé léger générée par craquage primaire (terme  $q_{o,c,1}$ ) et par craquage secondaire suite à la transformation du composé lourd en composé léger (terme  $q_{o,c,2}$ ).

Considérons maintenant un volume  $\mathcal{V}(t)$  de milieu poreux et intégrons les équations (II.2)–(II.5) sur ce volume. Rappelons qu’ici le domaine est mobile et se déplace à la vitesse  $\vec{v}_{\text{sed}}$ , d’où la dépendance de  $\mathcal{V}$  par rapport à  $t$ . En utilisant la dérivée particulière d’une intégrale de volume, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} (1 - \phi) \rho_{\text{sed}} dv = 0, \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} (\phi(1 - s) \rho_w) dv + \int_{\mathcal{V}(t)} \text{div} \left( \phi \rho_w (1 - s) (\vec{v}_w - \vec{v}_{\text{sed}}) \right) dv = 0, \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} (\phi s \rho_o) dv + \int_{\mathcal{V}(t)} \text{div} \left( \phi \rho_o s (\vec{v}_o - \vec{v}_{\text{sed}}) \right) dv = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho_o q_o dv, \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} (\phi c s \rho_o) dv + \int_{\mathcal{V}(t)} \text{div} \left( \phi \rho_o c s (\vec{v}_o - \vec{v}_{\text{sed}}) \right) dv = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho_o q_{o,c} dv. \quad (\text{II.9})$$

**Remarque 1 :** Dans certains cas, les équations (II.6)–(II.8) peuvent être exprimées dans un repère dit ”fully compacted” (voir (Nakayama 1987), (Wangen, Antonsen, Fossum & Alm 1990)) où les hauteurs de sédiments sont exprimées non pas en hauteurs réelles (hauteur de roche + pores) mais en hauteurs solides (hauteur de roche uniquement).

En effet supposons que la base du bassin soit horizontale et considérons un point  $C$  tel que  $x_C = x_O$  et où  $z_C$  correspond à la base du bassin. On note  $\xi(x, t)$  la hauteur solide déposée sur une colonne d’abscisse  $x$  à une date  $t$ . On considère alors le repère  $(C, Cx, C\xi)$  où l’axe  $(C\xi)$  est orienté dans le sens opposé à l’axe  $(Oz)$ . Soit  $dv$  un volume élémentaire de roche situé autour d’un point  $(x, z(t), t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ . Les formules de changement de repère entre  $(O, Ox, Oz)$  et  $(C, Cx, C\xi)$  aboutissent à

$$dv = dx dz = \det(J) dx d\xi \quad (\text{II.10})$$

où la matrice Jacobienne  $J$  est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{\phi} - 1} \end{pmatrix}.$$

Ici  $\tilde{\phi}$  correspond à la porosité dans le nouveau repère, autrement dit

$$\phi(x, z, t) = \tilde{\phi}(x, \xi, t).$$

La notation utilisée pour les autres variables dans ce repère est identique.

Les règles de dérivation dans le repère  $(C, Cx, C\xi)$  sont les suivantes

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = J^{-1} \vec{\nabla} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ (\tilde{\phi} - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.11})$$

L'application aux équations (II.6)-(II.8) du changement de variable (II.10) et des règles de dérivation (II.11) aboutissent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_{\text{sed}}(t)} \tilde{\rho}_{\text{sed}} dx d\xi = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_{\text{sed}}(t)} \left( \frac{\tilde{\phi}}{1-\tilde{\phi}} (1-\tilde{s}) \tilde{\rho}_w \right) dx d\xi + \\ \int_{\mathcal{V}_{\text{sed}}(t)} J^{-1} \vec{\nabla} \cdot \left( \tilde{\phi} \tilde{\rho}_w (1-\tilde{s}) (\vec{v}_w - \vec{v}_{\text{sed}}) \right) dx \frac{d\xi}{1-\tilde{\phi}} = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_{\text{sed}}(t)} \left( \frac{\tilde{\phi}}{1-\tilde{\phi}} \tilde{s} \tilde{\rho}_o \right) dx d\xi + \int_{\mathcal{V}_{\text{sed}}(t)} J^{-1} \vec{\nabla} \cdot \left( \tilde{\phi} \tilde{\rho}_o \tilde{s} (\vec{v}_o - \vec{v}_{\text{sed}}) \right) dx \frac{d\xi}{1-\tilde{\phi}} = \\ \int_{\mathcal{V}_{\text{sed}}(t)} \frac{\tilde{\rho}_o \tilde{q}_o}{1-\tilde{\phi}} dx d\xi \end{array} \right.$$

où  $\mathcal{V}_{\text{sed}}(t)$  correspond au volume solide de roche contenu dans  $\mathcal{V}(t)$ . Dans le repère  $(C, Cx, C\xi)$ , la vitesse solide est nulle. Nous pouvons donc permuter les dérivées en temps et les signes somme dans les égalités précédentes. Comme ces égalités ont été obtenues à partir d'un volume de roche quelconque, nous pouvons supprimer les signes somme et nous obtenons ainsi les équations de conservation des phases solide, aqueuse et hydrocarbure exprimées dans le repère  $(C, Cx, C\xi)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{V}_{\text{sed}}}{dt} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\tilde{\phi}}{1-\tilde{\phi}} (1-\tilde{s}) \tilde{\rho}_w \right) + \frac{\partial}{(1-\tilde{\phi}) \partial x} \left( \tilde{\phi} \tilde{\rho}_w (1-\tilde{s}) (\tilde{v}_{w,x} - \tilde{v}_{\text{sed},x}) \right) - \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \tilde{\phi} \tilde{\rho}_w (1-\tilde{s}) (\tilde{v}_{w,\xi} - \tilde{v}_{\text{sed},\xi}) \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\tilde{\phi}}{1-\tilde{\phi}} \tilde{s} \tilde{\rho}_o \right) + \frac{\partial}{(1-\tilde{\phi}) \partial x} \left( \tilde{\phi} \tilde{\rho}_o \tilde{s} (\tilde{v}_{o,x} - \tilde{v}_{\text{sed},x}) \right) - \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \tilde{\phi} \tilde{\rho}_o \tilde{s} (\tilde{v}_{o,\xi} - \tilde{v}_{\text{sed},\xi}) \right) = \frac{\tilde{\rho}_o \tilde{q}_o}{1-\tilde{\phi}}. \end{array} \right. \quad (\text{II.12})$$

□

Les vitesses de filtration  $\vec{u}_o = \phi s (\vec{v}_o - \vec{v}_{\text{sed}})$  et  $\vec{u}_w = \phi (1-s) (\vec{v}_w - \vec{v}_{\text{sed}})$  introduites dans les équations (II.6)–(II.9) sont estimées à l'aide de la loi de Darcy.

### Loi de Darcy

Cette loi est à l'origine une loi expérimentale (voir (Darcy 1856)) qui établit que le débit d'eau  $Q$  au travers d'une colonne de sable de hauteur  $L$  et de section  $A$  est reliée à la perte de charge  $\Delta h$  entre le sommet et la base de la colonne, suivant la relation

$$Q = KA \frac{\Delta h}{L}.$$

$K$  désigne la mobilité du milieu. En remarquant que les pertes de charge, dans un écoulement monophasique eau, sont en fait dues aux gradients de pression et de gravité et que la mobilité est inversement proportionnelle à la viscosité nous avons (voir (de Marsily 1981))

$$\vec{u}_w = \phi(\vec{v}_w - \vec{v}_{\text{sed}}) = \frac{\overline{\overline{\Upsilon}}}{\mu_w} (\vec{\nabla} p_w - \rho_w \vec{g})$$

où  $\overline{\overline{\Upsilon}}$  désigne le tenseur de perméabilité intrinsèque du milieu,  $\mu_w$  la viscosité dynamique de l'eau,  $p_w$  sa pression. La généralisation de cette loi à un écoulement diphasique eau-huile aboutit alors à

$$\vec{u}_w = \phi(1 - s)(\vec{v}_w - \vec{v}_{\text{sed}}) = \frac{\overline{\overline{\Upsilon}} k r_w}{\mu_w} (\vec{\nabla} p_w - \rho_w \vec{g}) \quad (\text{II.13})$$

$$\vec{u}_o = \phi s(\vec{v}_o - \vec{v}_{\text{sed}}) = \frac{\overline{\overline{\Upsilon}} k r_o}{\mu_o} (\vec{\nabla} p_o - \rho_o \vec{g}) \quad (\text{II.14})$$

où  $k r_\alpha$  est la perméabilité relative de la phase  $\alpha$ . Il s'agit là d'un terme de correction du tenseur de perméabilité. En effet, deux fluides immiscibles présents dans le même réseau poreux se gênent mutuellement puisque l'espace poreux disponible pour l'une ou l'autre des deux phases est réduit.

Détaillons maintenant un peu plus les différentes grandeurs introduites. Les lois et les approximations faites dans le paragraphe qui suit sont issues de (Themis 1986) et (Wolf 1995).

## Lois de comportement

### Densités

Les densités de chacun des composés solides ou liquides dépendent normalement de la pression et de la température. Ici nous supposons que :

- la densité  $\rho_{\text{sed}}$  de la roche ne dépend que de la nature de la lithologie,
- la densité de l'eau,  $\rho_w$ , est constante,
- la densité de l'huile est calculée à partir de la densité de chacun de ses composés grâce à la relation

$$\frac{1}{\rho_o} = \frac{c}{\rho_{o,l}} + \frac{1-c}{\rho_{o,h}}$$

où  $\rho_{o,l}$ ,  $\rho_{o,h}$  désignent respectivement les densités en composé léger et lourd dans la phase hydrocarbure. L'huile est supposée faiblement compressible. Pour chacun de ses constituants, nous avons

$$\rho_{o,\gamma} = \rho_{o,\gamma}^* (1 + \alpha_{o,\gamma}(p_o - p_\gamma)), \quad \gamma \in \{l, h\}.$$

$p_\gamma$  est une pression de référence et  $\alpha_{o,\gamma}$  (exprimée en  $\text{MPa}^{-1}$ ) désigne la compressibilité du composé  $\gamma$ .

### Viscosités

Les viscosités dépendent de la température. Pour l'eau, la formule de Bingham donne une approximation suffisamment précise dans la gamme de températures considérées, i.e.,

$$\mu_w = \frac{1}{21.5 \left( (T - 8.4 - 273.15) + \sqrt{8078 + (T - 8.4 - 273.15)^2} \right) - 1200}. \quad (\text{II.15})$$

La température  $T$  est ici exprimée en degrés Kelvin. Pour l'huile, nous devons également tenir compte de la composition du mélange. Notons  $\mu_{o,h}$  et  $\mu_{o,l}$  les viscosités des composés lourds et légers. Ces viscosités peuvent être estimées par la formule d'Andrade

$$\begin{aligned} \mu_{o,l} &= \mu_{o,l,a} \exp\left(\frac{\mu_{o,l,b}}{T}\right), \\ \mu_{o,h} &= \mu_{o,h,a} \exp\left(\frac{\mu_{o,h,b}}{T}\right). \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

La température est ici exprimée en degrés Kelvin et, pour  $\alpha \in \{l, h\}$ , nous avons  $10^{-8} \text{ Pa}\cdot\text{sec} \leq \mu_{o,\alpha,a} \leq 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{sec}$  et  $\mu_{o,\alpha,b} = 2700 \text{ K}$ . La viscosité de l'huile  $\mu_o$  se déduit des viscosités de ses deux constituants et de leur composition grâce à la formule

$$\mu_o = (\mu_{o,l})^c (\mu_{o,h})^{1-c}.$$

### Tenseur de perméabilité intrinsèque

Ce tenseur caractérise la perméabilité de la roche selon les directions de l'espace. Il dépend de la nature de la lithologie et de la porosité. Chacune de ses composantes est homogène à une surface et s'exprime en Darcy ( $D$ ) ( $1 D = 0.987 \cdot 10^{-12} m^2$ ). Dans les bassins sédimentaires les perméabilités rencontrées sont plutôt de l'ordre du  $\mu D$ .

Pour  $d > 1$  ce tenseur est diagonal dans un repère lié à la stratification.

Par exemple, pour  $d = 2$ , dans ce type de repère, il s'écrit sous la forme

$$\overline{\overline{\Upsilon}} = \Upsilon \begin{pmatrix} \Upsilon_s & 0 \\ 0 & \Upsilon_a \end{pmatrix}$$

où  $\Upsilon_s$  et  $\Upsilon_a$  sont des constantes dépendant du milieu. Afin d'obtenir une expression simple de la vitesse de filtration, on suppose en pratique qu'il reste diagonal dans le repère  $(O, Ox, Oz)$ . Cette hypothèse est fautive dans le cas d'un pendage (voir figure II.6). Ici nous supposons que son expression est indépendante de la direction de l'espace. Il s'agira

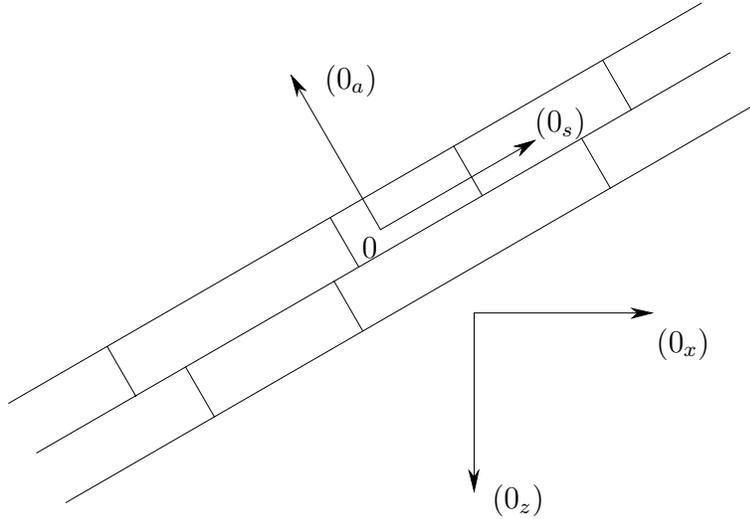


Figure II.6: Repère lié à la stratification

donc simplement d'une fonction scalaire  $\Upsilon$  dépendant de la lithologie et de la porosité. Une approximation de cette fonction est donnée par la loi empirique dite de Kozeny-Karman qui a été modifiée pour étendre son domaine de validité (initialement les sables) aux domaines de faibles porosité et en particulier aux argiles (voir (Ungerer et al. 1984)). Ainsi

$$\Upsilon = \begin{cases} \frac{0.2\phi^3}{(S_{spec}(1-\phi))^2} & \text{si } \phi > 0.1, \\ \frac{20\phi^5}{(S_{spec}(1-\phi))^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La dépendance par rapport à la lithologie vient de la surface spécifique  $S_{spec}$  (voir § II.2.1). Pour  $S_{spec} = 5.10^6 \text{ m}^2 \cdot \text{m}^{-3}$ , la courbe II.7 donne l'évolution de la perméabilité en fonction de la porosité.

Lorsque la pression du fluide devient importante, il arrive que la roche se fracture hydrauliquement (voir (Boutéca & Sarda 1987), (Schneider, Boutéca & Sarda 1999)). Dans les modèles numériques, cette fracturation se traduit par une augmentation de la perméabilité (voir (Schneider & Wolf 1997)) mais nous ne tiendrons pas ici compte de ce phénomène.

### *Perméabilités relatives*

Nous avons vu que les perméabilités relatives ont été introduites dans la loi de Darcy diphasique pour exprimer la gêne mutuelle qu'occasionne la présence de fluides immiscibles dans le même réseau poreux. Ainsi, lors d'un écoulement eau-huile, plus la saturation d'huile est importante plus la perméabilité relative de l'huile est élevée alors que celle

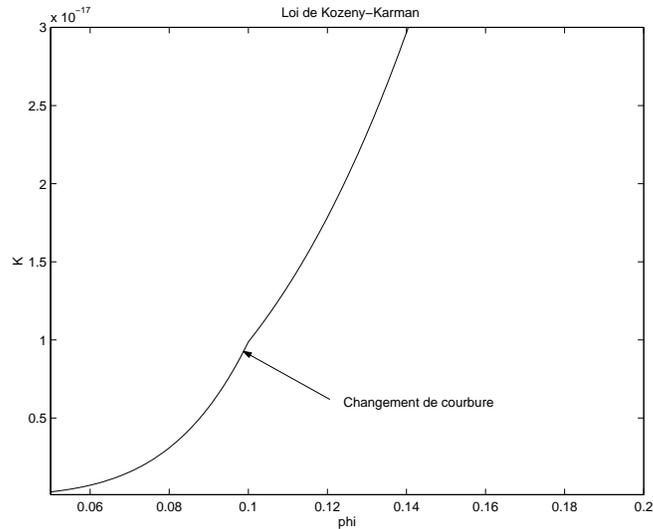


Figure II.7: Loi de Kozeny Karman pour  $S_{spec} = 5.10^6 m^2.m^{-3}$

de l'eau est faible, et inversement pour la phase aqueuse. Par conséquent la perméabilité relative  $kr_o$  (resp.  $kr_w$ ) est une fonction croissante de la saturation  $s$  (resp. de la saturation  $1 - s$ ). Nous avons vu aussi que l'immiscibilité des deux fluides entraîne l'apparition de phénomènes capillaires. Les perméabilités relatives dépendent donc également de la nature des deux fluides en présence et du type de roche.

En modélisation de bassin, nous considérons généralement que la perméabilité relative,  $kr_{\alpha,\beta}$ , de la phase  $\alpha$  lorsqu'elle se déplace en présence de la phase  $\beta$ , est une fonction croissante de la saturation de la phase  $\alpha$  et dépend de la nature de la lithologie. Comme, ici, nous ne considérons qu'un écoulement diphasique, nous n'avons qu'un seul couple  $(kr_o, kr_w)$  dépendant de la variable d'espace et de la saturation  $s$ .

Pour un échantillon de roche donné, le calibrage de ces courbes se fait en laboratoire grâce à des injections fluides. Nous obtenons alors des courbes semblables à celles données par la figure II.8.

Nous constatons que ces courbes ne sont définies que sur un intervalle  $[s_r, s_i]$ . Pour  $s \leq s_r$ , l'huile n'apparaît dans les pores que sous la forme de petites gouttelettes isolées qui ne forment pas encore une phase continue. Dans ce cas, l'huile est immobile. Inversement, lorsque  $s \geq s_i$ , c'est ici l'eau qui constitue une phase discontinue et immobile. Ces deux valeurs montrent que même dans un réservoir rempli d'huile il reste toujours une fraction d'eau irréductible et qu'après avoir traversé une couche de sédiments, les hydrocarbures laissent toujours quelques gouttelettes d'huile résiduelles derrière eux. Remarquons également que quelque soit la valeur de la saturation, la somme  $kr_o + kr_w$  est inférieure ou égale à 1. Cela signifie que lors d'un écoulement multiphasique la capacité maximale de circulation des fluides qu'offre le milieu poreux est rarement atteinte.

En pratique les courbes  $kr_o$  et  $kr_w$  ne sont pas uniques. Lors d'une expérience d'injection, on constate que les courbes de perméabilités relatives dépendent du sens dans lequel nous parcourons la gamme des saturations. Il s'agit là d'un phénomène d'hystérésis. La figure

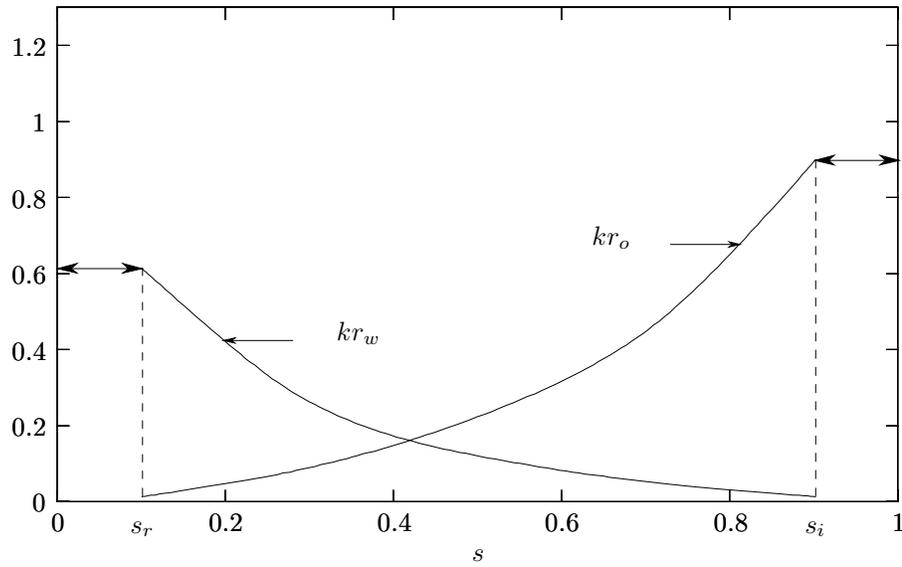


Figure II.8: Perméabilités relatives de l'eau et de l'huile en fonction de la saturation de l'huile

II.9 montre le type de courbes que l'on peut obtenir dans le cas d'un drainage (l'huile chasse l'eau) ou d'une imbibition (l'eau chasse l'huile). En modélisation de bassin, ce phénomène n'est pas pris en compte et l'on se place exclusivement en situation de drainage.

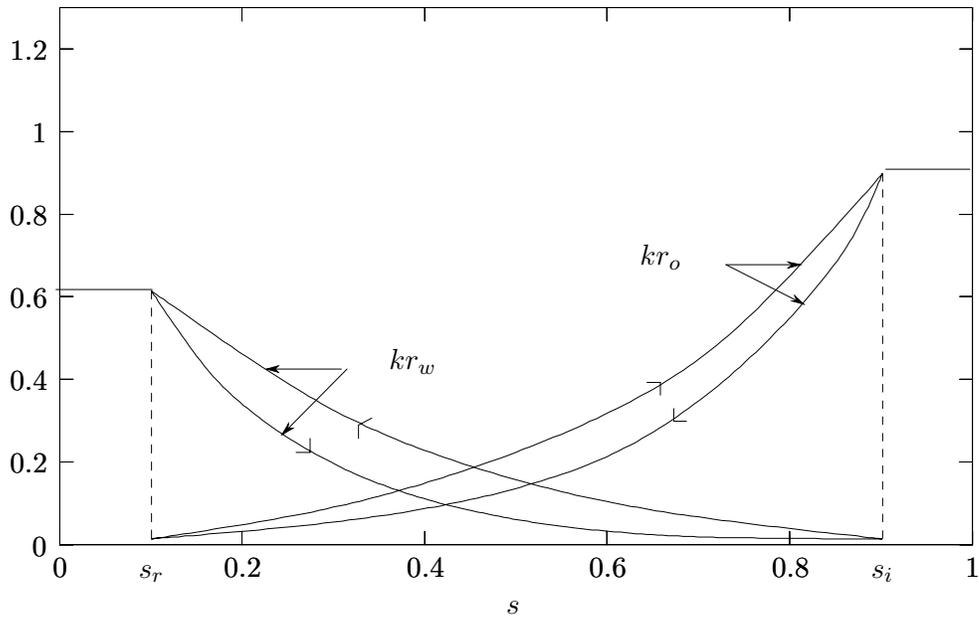


Figure II.9: Hystérésis des perméabilités relatives

**Remarque 2 :** Pour une phase  $\alpha \in \{o, w\}$ , le rapport  $\eta_\alpha = \frac{kr_\alpha}{\mu_\alpha}$  est appelé mobilité de la phase  $\alpha$ .  $\square$

### *Pressions capillaires*

D'après la loi de Laplace (II.1), la pression capillaire à l'échelle microscopique dépend du rayon de courbure, de la tension superficielle à l'interface entre les deux fluides, et de l'angle de mouillage. Le rayon de courbure dépend de la taille des pores et de la saturation  $s$ . Dans les modèles de bassin, pour un couple de phases  $(\alpha, \beta)$  et pour un type de roche donnés, la pression capillaire  $\pi_{\alpha, \beta}$  est définie comme une fonction croissante de la saturation et décroissante de la porosité. En pratique, ces courbes ne sont pas uniques : à une saturation et une porosité données peuvent correspondre différentes valeurs de la pression capillaire suivant la façon dont les fluides envahissent le milieu poreux. Ainsi, comme pour les perméabilités relatives, il existe un phénomène d'hystérésis. Mais là encore nous supposons que nous sommes toujours dans une situation de drainage.

Dans le cadre d'un écoulement diphasique, nous n'avons qu'une seule fonction  $\pi(x, \phi, s)$  vérifiant

$$\pi = p_o - p_w.$$

La dépendance par rapport à la variable d'espace indique ici un changement de courbe suivant la lithologie. Cette dépendance est à l'origine de la formation des pièges capillaires. Nous reviendrons plus en détails sur ces phénomènes au chapitre V.

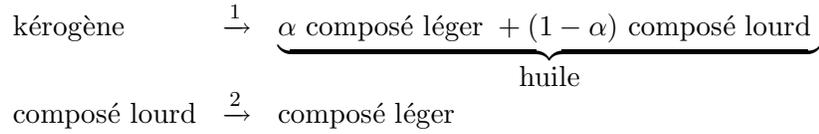
### *Craquage des hydrocarbures*

Dans les bassins, le kérogène se compose d'un ensemble de molécules très variées elles-mêmes formées d'un grand nombre de liaisons chimiques (par exemple des liaisons carbone-carbone, carbonyle, carboxyle...). Dans notre modèle, nous nous limitons à un unique composé comportant un seul type de liaison chimique. Des modèles de craquage plus élaborés peuvent être envisagés (voir (Tissot & Espitalié 1975), (Waples 1984), (Wolf 1995)). Nous admettons que, sous l'effet de la température, les liaisons chimiques peuvent se rompre pour donner un composé léger en proportion  $\alpha$  et un composé lourd en proportion  $1 - \alpha$  (craquage primaire). Notons  $u(t)$  la fraction massique de roche solide intervenant dans cette réaction à un instant  $t$  (ou encore la proportion en masse de kérogène réactif par rapport à la masse solide totale) et  $v(t)$  la fraction massique d'huile présente dans le fluide. Le degré de maturité de la roche mère est donné par le taux de transformation, également appelé  $TR$  (Transformation Ratio) et défini par

$$TR = \frac{u_0 - u}{u_0}$$

où l'indice 0 désigne la fraction massique prise à l'instant initial. Nous supposons qu'au sein du composé lourd il peut encore y avoir des ruptures de liaisons produisant du composé

léger (craquage secondaire). Nous notons  $w(t)$  la fraction massique de composé léger obtenue par cette réaction. Nous avons, donc, en résumé, le schéma réactionnel suivant.



En supposant que la probabilité de rupture d'une liaison est indépendante du temps et qu'elle suit une loi de Poisson, nous aboutissons à (voir (Tissot & Espitalié 1975))

$$\frac{du}{dt} = -k_1 u \quad (\text{II.17})$$

où  $k_1$  est la vitesse de réaction dépendant de la température. Le craquage primaire évolue donc selon une cinétique du premier ordre. Nous admettons que c'est également le cas pour le craquage secondaire. Ainsi

$$\frac{dw}{dt} = k_2(1 - c)v.$$

Une bonne approximation des vitesses de réactions  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  (voir (Tissot 1969)) est donnée par la loi d'Arrhenius, i.e.,

$$k_i = A_i e^{-\frac{E_i}{RT}}$$

où  $E_i$  désigne l'énergie d'activation moyenne en kcal.mol<sup>-1</sup>,  $A_i$  la vitesse maximale en sec<sup>-1</sup>,  $R$  la constante des gaz parfaits exprimée en J.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> ( $R = 8.31441$ ) et  $T$  la température en degrés Kelvin. Le tableau II.1 (source (Tissot & Espitalié 1975)) donne quelques valeurs de ces paramètres dans le cas où le kérogène comporte six types de liaisons chimiques distinctes.

Energies d'activation		Types de kérogène					
Classe	Valeur moyenne (kcal.mol <sup>-1</sup> )	Type I		Type II		Type III	
		$u_{i,0}$	$A_1$	$u_{i,0}$	$A_1$	$u_{i,0}$	$A_1$
$E_{1,1}$	10	0.024	$4.75.10^4$	0.022	$1.27.10^5$	0.023	$5.20.10^3$
$E_{1,2}$	30	0.064	$3.04.10^{16}$	0.034	$7.47.10^{16}$	0.053	$4.20.10^{16}$
$E_{1,3}$	50	0.136	$2.28.10^{25}$	0.251	$1.48.10^{27}$	0.072	$4.33.10^{25}$
$E_{1,4}$	60	0.152	$3.98.10^{30}$	0.152	$5.52.10^{29}$	0.091	$1.97.10^{32}$
$E_{1,5}$	70	0.347	$4.47.10^{31}$	0.116	$2.04.10^{35}$	0.049	$1.20.10^{33}$
$E_{1,6}$	80	0.172	$1.10.10^{34}$	0.120	$3.80.10^{35}$	0.027	$7.56.10^{31}$
Potentiel pétrolier $u_0 = \sum_{i=1}^6 u_{i,0}$		0.895		0.695		0.313	

Table II.1: Distribution des paramètres cinétiques selon le type de kérogène

Ces paramètres cinétiques sont mesurés en laboratoire à l'issue de manipulations portant sur quelques jours voire quelques mois. Nous sommes donc loin des échelles de temps associées à la genèse de bassin, de l'ordre du million d'années. Le calibrage de ces lois s'effectue à l'aide de pyrolyses Rock Eval à hautes températures et on considère en pratique que de fortes températures permettent de compenser les durées d'expériences. (Ungerer & Pelet 1987) ont montré que cette transposition aux modèles géologiques était acceptable. Nous allons maintenant préciser l'expression des termes sources  $q_o$  et  $q_{o,c}$ . Dans de nombreux modèles (et c'est également le cas pour le modèle qui nous intéresse ici) nous n'assurons pas la conservation de la matière : même si des hydrocarbures sont générés et que la fraction  $u$  diminue au cours du temps nous supposons, pour simplifier, que la masse de roche sèche reste constante. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}\rho_o q_o &= \rho_{\text{sed}}(1 - \phi)uk_1, \\ \rho_o q_{o,c,1} &= \alpha \rho_o q_o, \\ \rho_o q_{o,c,2} &= \rho_o k_2 \phi s(1 - c).\end{aligned}$$

Si nous voulons assurer la conservativité des masses, il faut intégrer la fraction massique  $u$  aux inconnues du problème et ajouter l'équation de conservation de la masse de kérogène réactif

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( (1 - \phi) \rho_{\text{sed}} u \right) + \text{div} \left( (1 - \phi) \rho_{\text{sed}} u \vec{v}_{\text{sed}} \right) = -\rho_{\text{sed}}(1 - \phi)uk_1$$

aux équations (II.2)–(II.5).

## II.2.5 Calcul de la température

Le paragraphe précédent nous a montré que la température constituait un paramètre déterminant dans les réactions de craquage et qu'elle permettait de calculer des grandeurs physiques telles que les viscosités. Nous allons donc maintenant voir comment reconstituer l'histoire thermique d'un bassin lors d'une simulation.

Dans un bassin, les transferts de chaleur s'effectuent par conduction et convection. La conduction correspond à une diffusion de chaleur au travers des fluides et des sédiments. Le flux conductif  $\vec{F}_{\text{cond}}$  est donné par la loi de Fourier

$$\vec{F}_{\text{cond}} = -\overline{\lambda}_b \vec{\nabla} T.$$

$\overline{\lambda}_b$  désigne la conductivité thermique du sédiment qui dépend, dans la réalité, de nombreux paramètres physiques tels que la porosité, la densité, la saturation, la pression et la température. Dans le repère associé au bassin, ce tenseur est supposé diagonal, i.e.,

$$\overline{\lambda}_b = \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{pmatrix}.$$

Les paramètres  $\lambda_i$ ,  $i \in \{x, y, z\}$ , sont donnés, de manière empirique, par

$$\lambda_i = \lambda_{i,\text{sed}}^{1-\phi} \lambda_{i,w}^{(1-s)\phi} \lambda_{i,o}^{s\phi}$$

ou encore

$$\lambda_i = \left( \frac{\lambda_{i,w}}{\lambda_{i,\text{sed}}} \right)^\phi \frac{\lambda_{i,\text{sed}}}{1 + \alpha T}$$

(voir (Woodside & Messmer 1961)). Les paramètres  $\lambda_{i,\alpha}$ ,  $\alpha \in \{o, w, s\}$ , désignent les conductivités de la phase  $\alpha$  et s'expriment en  $W.m^{-1}.K^{-1}$ . A  $0^\circ C$ , nous avons, par exemple,

- $\lambda_{\text{sed}}$  :
- charbon, matière organique : 0.2, 0.3,
  - argile : 1.2 à 1.8,
  - carbonate : 2.5 à 3.5,
  - quartz, sel : 7,

$\lambda_w$  : 0.6.

La convection correspond aux transferts de chaleur liés aux déplacements des fluides et des sédiments. Si  $\vec{F}_{\text{conv}}$  désigne le flux convectif, nous avons

$$\vec{F}_{\text{conv}} = \rho_w \phi (1-s) c_w T \vec{v}_w + \rho_o \phi s c_o T \vec{v}_o + \rho_{\text{sed}} (1-\phi) c_{\text{sed}} T \vec{v}_{\text{sed}}$$

où  $\rho_\alpha c_\alpha$  désigne la capacité calorifique de la phase  $\alpha \in \{o, w, \text{sed}\}$  exprimée en  $J.K^{-1}$ . On note  $\rho c_b = \rho_{\text{sed}} (1-\phi) c_{\text{sed}} + \rho_w \phi (1-s) c_w + \rho_o \phi s c_o$  la capacité calorifique du milieu.

A l'intérieur d'un bassin, il existe différentes sources de chaleur. Tout d'abord le dépôt ou l'érosion des sédiments entraînent des apports ou des pertes de chaleur en fonction de la température qui règne au toit du bassin. Certaines lithologies peuvent également contenir des éléments radioactifs. Enfin, les volumes d'hydrocarbures introduits dans le réseau poreux suite au craquage, constituent eux aussi une source de chaleur potentielle. Ainsi l'équation de conservation de l'énergie est donnée par

$$\frac{\partial(\rho c_b T)}{\partial t} + \text{div}(\vec{F}_{\text{conv}} + \vec{F}_{\text{cond}}) = q_{T,\text{sed}} + q_{T,r} + q_{T,o} \quad (\text{II.18})$$

où  $q_{T,\text{sed}}$ ,  $q_{T,r}$ ,  $q_{T,o}$  désignent respectivement les termes sources liés au dépôt ou à l'érosion des sédiments, à la radioactivité et au craquage des hydrocarbures. L'équation est souvent résolue sous une forme simplifiée dans les simulateurs actuels (voir (Agelas, Faille & Wolf 2001)). On suppose, par exemple, que le bassin est en régime hydrostatique ou encore que la convection est négligeable devant la conduction.

Dans certaines simulations, l'équation (II.18) n'est pas résolue du tout. On fixe simplement l'évolution de la température au toit du bassin et du gradient géothermique moyen, en fonction du temps. Ce gradient peut varier de 25 à 80  $^\circ C.km^{-1}$ . Il arrive qu'il reste constant dans le temps. C'est le cas des bassins où les derniers phénomènes tectoniques et

magmatiques sont antérieurs aux dépôts des sédiments. Mais, inversement, il peut aussi subir de fortes variations. En effet, les sédiments déposés à proximité des dorsales sur un fond océanique relativement jeune sont exposés initialement à des gradients géothermiques importants de l'ordre de  $80 \text{ }^\circ\text{C.km}^{-1}$ . Avec l'éloignement des marges continentales, ces gradients peuvent ensuite diminuer de  $40 \text{ }^\circ\text{C.km}^{-1}$  en  $20\text{Ma}$ . En pratique, les géologues ne disposent que des données de forage prises à l'âge actuel qui ne rendent pas forcément compte de ces variations. L'histoire du gradient géothermique doit donc être estimée à l'aide d'autres outils en utilisant, par exemple, des propriétés chimiques de la matière organique comme la réflectance de la vitrinite (voir (Tissot & Espitalié 1975)).

## II.2.6 Evolution du squelette et compaction

### Rhéologie du milieu poreux

Aux équations de conservation (II.2)-(II.3)-(II.4)-(II.5), il faut ajouter une loi de comportement du milieu poreux qui décrit l'évolution de la porosité.

Les premières relations proposées par (Athy 1930) exprimaient simplement la porosité en fonction de la profondeur. Malheureusement ces lois ne sont valables que dans des conditions hydrostatiques. Les travaux de Terzaghi (Terzaghi 1923) puis, un peu plus tard, ceux de Biot (Biot 1941) introduisirent une dépendance par rapport à la contrainte effective  $\sigma$ . Dans notre cas, nous supposons que la contrainte subie par les sédiments est uniquement verticale. La contrainte effective est donc égale à

$$\sigma = \sigma_z - p_f \quad (\text{II.19})$$

où  $p_f$  désigne la pression du fluide. Cette dépendance signifie que la charge exercée par une colonne de sédiments est à la fois absorbée par la pression du fluide qui s'échappe et par le milieu poreux qui se compacte. Ces travaux ont été repris plus tard pour la modélisation de bassin. En supposant le milieu poreux élastique, (Yükler et al. 1978) aboutirent à une relation de la forme

$$\frac{d\phi}{1-\phi} = -\nu d\sigma$$

où  $\nu$  est le coefficient de compression isotherme du milieu poreux. Cette hypothèse d'élasticité du milieu poreux n'est pas très réaliste, car, la compaction dans les bassins est un phénomène irréversible ou faiblement réversible. En effet, lorsque la charge diminue, les sédiments compactés ne retrouvent pas leur géométrie initiale et la porosité ne réaugmente que très légèrement. (Schneider 1993) a amélioré ce formalisme en supposant que la compaction s'effectue sous la forme d'un réarrangement des grains selon une rhéologie élastoplastique. Mais, en réalité, ce type de compaction n'a lieu qu'aux faibles profondeurs dans les zones peu consolidées et en supposant les grains indéformables. En fait, dans les zones les plus profondes, les phénomènes diagénétiques telles que la dissolution-reprécipitation des minéraux deviennent prédominants. Un second modèle intégrant les deux types de compaction, élastoplastique et viscoplastique, fut alors mis au point (voir

(Schneider, Potdevin, Wolf & Faille 1993)). Dans ce modèle, la loi rhéologique du milieu poreux est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\beta(\phi, \sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \alpha(\phi, \sigma) \sigma, \\ \beta(\phi, \sigma) = \frac{\phi_a}{E_a} \exp\left(-\frac{\sigma}{E_a}\right) + \frac{\phi_b}{E_b} \exp\left(-\frac{\sigma}{E_b}\right) \text{ si } \sigma \geq \sigma_m, \\ \beta(\phi, \sigma) = \frac{1}{E_e} \text{ si } \sigma < \sigma_m, \\ \alpha(\phi, \sigma) = \frac{1-\phi}{\mu_b} \text{ si } \sigma > 0 \text{ et } \phi > \phi^{\min}, \\ \alpha(\phi, \sigma) = 0 \text{ si } \sigma \leq 0 \text{ ou } \phi \leq \phi^{\min}, \\ \phi(t=0) = \phi_r + \phi_a + \phi_b. \end{array} \right. \quad (\text{II.20})$$

La composante élastoplastique correspond au terme  $\beta(\phi, \sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t}$  et la composante viscoplastique au terme  $\alpha(\phi, \sigma) \sigma$ .  $E_a, \phi_a, E_b, \phi_b, E_e, \phi_r$  sont des constantes dépendant de la nature de la roche. Ces paramètres sont calibrés en laboratoire à l'aide de test oedométriques.  $\sigma_m$  est la contrainte effective maximale atteinte au cours de l'histoire du bassin. En pratique nous avons  $E_a < E_b$  et  $\phi_r \lll \phi_b \leq \phi_a$ . Ainsi, dans le cas d'une compaction ( $\sigma \geq \sigma_m$ ), la première exponentielle permet de compacter les couches superficielles où la contrainte est plus faible et la seconde assure la compaction des couches plus profondes. Si la contrainte se relâche ( $\sigma < \sigma_m$ ), la porosité peut augmenter mais très faiblement (de l'ordre de quelques pourcents). Il faut donc que la porosité soit peu sensible à la variation de la contrainte et donc que  $\beta$  soit pratiquement nulle. Ainsi  $E_a < E_b \lll E_e$ . Les paramètres  $\mu_b$  et  $\phi^{\min}$  liés à la compaction viscoplastique sont plus difficiles à obtenir et sont calibrés numériquement.

La contrainte effective est donnée par la relation (II.19) où  $p_f = (1-s)p_w + sp_o$ . La contrainte verticale est égale au poids des sédiments et des fluides susjacentes et vérifie donc

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \left( (1-\phi)\rho_{\text{sed}} + \phi \left( (1-s)\rho_w + sp_o \right) \right) g. \quad (\text{II.21})$$

**Remarque 3 :** Dans le repère  $(C, Cx, C\xi)$  (voir Remarque 1) les équations (II.20) et (II.21) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -\beta(\tilde{\phi}, \tilde{\sigma}) \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial t} - \alpha(\tilde{\phi}, \tilde{\sigma}) \tilde{\sigma}, \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_z}{\partial \xi} = - \left( \tilde{\rho}_{\text{sed}} + \frac{\tilde{\phi}}{1-\tilde{\phi}} \left( (1-\tilde{s})\tilde{\rho}_w + \tilde{s}\tilde{\rho}_o \right) \right) g. \end{array} \right. \quad (\text{II.22})$$

□

### Principe du backstripping

Il nous reste maintenant à préciser comment estimer les vitesses de sédimentation. Ces vitesses sont obtenues grâce à un algorithme de backstripping. Cet algorithme permet de calculer l'évolution de la géométrie du bassin à partir des hauteurs réelles de sédiments

des séries actuelles et de la durée de dépôt de ces séries.

Dans la nature, la géométrie d'un bassin dépend à la fois des dépôts ou des érosions de sédiments et des déformations du socle. Nous avons vu que l'accumulation de sédiments récents entraînait la compaction des couches plus anciennes et donc une déformation du squelette. En pratique, les géologues ne disposent que de données relatives à l'âge actuel (images sismiques, données forage...). Ces données permettent certes de reconstituer la succession des dépôts mais, pour donner une image précise du bassin à une date antérieure, il faut être capable d'inverser les processus de compaction et d'érosion. Plus précisément il faut pouvoir remonter le temps en dépilant les différentes couches de sédiments de la plus récente à la plus ancienne. A chaque événement, il faut redonner aux couches érodées le volume solide perdu et calculer le volume poreux présent dans chacune des couches. L'évolution de la porosité pour une lithologie  $i$  est en pratique déterminée par des courbes  $\phi_i(z)$  reliant la porosité à la profondeur. Dans des conditions hydrostatiques, ce type de données est équivalent à la loi de compaction élastoviscoplastique décrite précédemment. Nous présentons en annexe (voir §A.1) un algorithme de backstripping 1D simplifié s'inspirant des travaux de (Perrier & Quiblier 1974), (Bessis 1986), (Demeter 1993).

Une simulation de bassin se déroule donc globalement en deux temps. On calcule tout d'abord les vitesses de sédimentation et la géométrie du bassin par la procédure de backstripping. La résolution des équations (II.2)–(II.5)–(II.18)–(II.21) nous permet ensuite de reconstituer toute l'histoire du bassin du premier dépôt de sédiments jusqu'à l'âge actuel. Malheureusement, il arrive que la géométrie finale obtenue à l'issue de la seconde étape ne corresponde pas à la géométrie calculée par la procédure de backstripping. Ceci est dû au fait que l'algorithme de backstripping suppose le bassin hydrostatique au cours de son histoire alors que la simulation directe peut faire apparaître des surpressions. Il faut alors réajuster les lois  $\phi_i(z)$  ou bien les paramètres de la loi de compaction élastoviscoplastique et relancer une simulation. Ces itérations peuvent être coûteuses en temps de calcul en particulier lors de simulations 3D. Une solution peut être de calculer, au cours d'une simulation directe, les hauteurs réelles et donc les volumes des mailles à l'aide des courbes  $\phi_i(z)$  utilisées précédemment par l'algorithme de backstripping. Ceci revient à imposer la géométrie du bassin puisqu'elle ne dépend désormais plus de la porosité calculée par la loi de compaction. Il n'y a alors plus besoin de résoudre l'équation (II.2). L'inconvénient est que, dans ce cas, nous n'assurons plus nécessairement la conservation de la masse solide, excepté en régime hydrostatique.

Précisons maintenant les conditions aux bords et les conditions initiales de dépôt.

## II.2.7 Conditions aux bords et conditions initiales de dépôt

### Conditions aux bords

#### *Interface supérieure eau-sédiments*

La pression est imposée et correspond au poids de la colonne d'eau qui surplombe le bassin ou à la pression atmosphérique. Du fait de l'absence de sédiments, la pression et la contrainte verticale coïncident. On suppose qu'il n'y a que de l'eau et la température est

imposée.

Sur le plan numérique, cette interface pose quelques problèmes de mise en oeuvre. En effet, c'est à ce niveau qu'apparaissent ou disparaissent les sédiments. Une maille située sur ce bord est intégrée au système lorsqu'elle a atteint une hauteur suffisante. Entre temps, les conditions aux limites peuvent varier progressivement pour rendre compte de l'apparition de cette maille ou rester constantes.

#### *Interfaces latérales*

Au niveau des écoulements, deux types de conditions sont possibles : flux nul ou, dans le cas de circulations régionales, pression et saturation (généralement  $s = 0$ ) imposées. Sur le plan thermique, nous utilisons, dans le premier cas, un flux nul et, dans le second, une température imposée.

#### *Interface socle-sédiments*

Les flux d'eau ou d'hydrocarbures sont nuls. Une température ou un flux de chaleur peuvent être imposés.

### **Conditions initiales de dépôt**

Lorsque débute la plupart des simulations, le bassin n'existe pas encore. C'est avec l'accumulation progressive des sédiments que celui-ci va se construire. Pour initialiser les variables du système, nous devons fixer les conditions initiales vérifiées par les sédiments en cours de dépôt. En pratique, on considère qu'ils se déposent à une température égale à celle imposée au toit du bassin et dans des conditions hydrostatiques.



## Chapitre III

# Aspects numériques en simulation de bassin

---

Les équations présentées au chapitre précédent ne possèdent pas en général de solutions explicites. En pratique, elles peuvent être résolues de façon approchée à l'aide de méthodes numériques de type éléments finis ou volumes finis.

Dans ce chapitre, nous ne nous intéressons qu' à des schémas de type volumes finis (§III.1). Nous décrivons tout d'abord les différents maillages possibles (§III.2), puis nous précisons les schémas associés aux équations d'écoulement (§III.4) et de rhéologie (§III.5). Nous introduisons, en particulier, le schéma amont des pétroliers lors de la discrétisation des équations de conservation des phases liquides. Ce schéma, très utilisé en simulation de réservoir ou de bassin, fera l'objet d'une étude mathématique détaillée au chapitre IV. Nous ne présentons pas ici de schéma pour l'équation de conservation de l'énergie. Le calcul de la température n'a pas été abordé au cours de ce travail. Nous supposons, par la suite, la température connue et donnée.

Dans une seconde partie, nous présentons quelques tests numériques qui illustrent le fonctionnement des schémas introduits. Nous montrons, en particulier, l'influence de la taille du maillage sur le passage des barrières capillaires par les hydrocarbures (§ III.10.3). Ces tests ont constitué un point de départ aux travaux du chapitre V.

### III.1 Choix de la méthode de discrétisation

Deux approches sont possibles pour la résolution des équations (II.2)–(II.5)- (II.19)–(II.21) : une approche de type éléments finis (Bouvier 1989) ou volumes finis (Faille 1992). La première ne privilégie aucune direction de l'espace et permet donc un bon traitement des anisotropies, notamment au niveau des perméabilités (voir § II.2.4). Elle permet de plus de travailler sur des géométries relativement complexes. Malheureusement, sa mise en œuvre dans le cas d'équations de type hyperbolique reste très délicate. Les volumes finis sont par contre très bien adaptés à ce type de problèmes et assurent "naturellement" la conservation des flux. D'un point de vue pratique, ils sont aussi beaucoup plus simples

à mettre en œuvre. Même si cette méthode présente elle aussi quelques inconvénients (pour certains schémas, des contraintes sur le maillage doivent être respectées pour une discrétisation consistante des flux (§ III.2.4)), elle est actuellement très largement utilisée en simulation de réservoir ou de bassin. Nous allons donc, dans tout ce qui suit, nous concentrer exclusivement sur des schémas de ce type.

## III.2 Maillages

### III.2.1 Caractéristiques des maillages de bassins

Les maillages de bassins sont choisis en relation avec la méthode volumes finis. Pour que cette méthode soit suffisamment précise, même sur des maillages grossiers, plusieurs principes doivent être respectés (Aziz & Settari 1979), (Faille 1992).

Tout d’abord, le maillage doit suivre les bancs sédimentaires et chaque maille ne doit contenir qu’une seule lithologie. Un banc, épais, monolithologique, peut être divisé en des bancs plus petits correspondant à des âges géologiques intermédiaires. La taille des mailles correspond alors à la taille de ces couches. Au voisinage des hétérogénéités ou dans les zones où la solution évolue rapidement, le maillage doit être affiné.

Le maillage doit également suivre les évolutions du bassin. L’apparition d’une nouvelle couche de sédiments au sommet entraîne la création d’une nouvelle rangée de mailles. Inversement, si la couche située au toit s’érode, certaines mailles peuvent disparaître. Le nombre de mailles est donc variable. Mais leur taille varie également au cours du temps. En profondeur, la compaction entraîne un tassement des couches les plus anciennes et, en surface, une couche peut s’éroder ou au contraire gonfler avec l’apport de nouveaux sédiments.

### III.2.2 Cas d’une simulation monodimensionnelle

Considérons dans un premier temps un modèle monodimensionnel. Supposons que la simulation porte sur un intervalle de temps  $[-T, 0]$ . Cette période est découpée en événements  $[t_k, t_{k+1}]$  correspondant à des âges géologiques avec  $[-T, 0] = \cup_{k=0}^N [t_k, t_{k+1}]$ ,  $t_0 = -T$  et  $t_{N+1} = 0$ . La procédure de backstripping décrite au § II.2.6 permet de déterminer la longueur des événements  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0 \dots N$  et les hauteurs solides  $h_{\text{sed},k}$  déposées en fin d’événement. Au début de la simulation, le bassin n’existe pas. Si  $h_{\text{sed},0} > 0$ , la ou les première(s) maille(s) vont apparaître au cours de l’événement 0. Pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ , nous supposons que la hauteur solide  $h_{\text{sed},0}(t)$  déposée à cette date, varie linéairement en fonction du temps et vérifie

$$h_{\text{sed},0}(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} h_{\text{sed},0}.$$

La hauteur réelle,  $h_{r,0}(t)$ , est alors donnée par

$$h_{r,0}(t) = \frac{h_{\text{sed},0}(t)}{1 - \phi_0(t)}$$

où  $\phi_0(t)$  correspond à la porosité de la couche. La figure III.1 montre l’évolution de la première cellule. Si, au cours de l’événement 1, une seconde lithologie se dépose, une

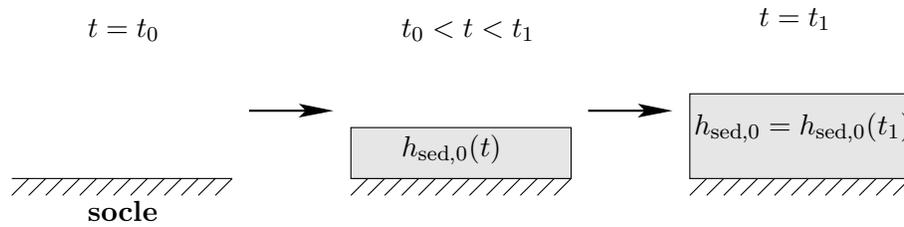


Figure III.1: Dépôt de la première cellule

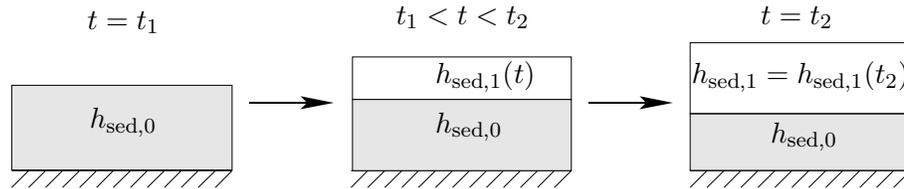


Figure III.2: Dépôt de la seconde cellule

seconde cellule apparaît et la première commence à se compacter (figure III.2). Le processus se poursuit de la même façon au cours des événements qui suivent jusqu'à l'âge actuel. Dans cet exemple, nous nous sommes uniquement placés dans le cas  $h_{\text{sed},k} > 0$  mais nous pouvons également avoir  $h_{\text{sed},k} = 0$  ou  $h_{\text{sed},k} < 0$ . L'événement  $[t_k, t_{k+1}]$  correspond alors à un événement de non-dépôt ou à un événement d'érosion.

Lors d'une sédimentation ou d'une érosion, une maille peut être de taille très petite. Ceci peut entraîner des instabilités numériques (pertes du principe du maximum pour les schémas explicites (voir, par exemple, la condition CFL (IV.29)) et nécessiter une diminution du pas de temps. Une maille doit donc avoir une taille minimale pour être intégrée à la résolution du système discret (voir équations (III.1)–(III.6)). Si ce n'est pas le cas, cette maille est supposée être en conditions hydrostatiques. Il peut également arriver qu'une maille disparaisse en cours de simulation. La maille qui se dépose au dessus et celle située en dessous deviennent adjacentes.

### III.2.3 Cas d'un modèle en dimension $d = 2, 3$

Nous allons maintenant voir les différentes extensions possibles du maillage précédent à des modèles de dimension  $d = 2, 3$ .

La base du bassin correspond à un axe dans le cas  $d = 2$  et à un plan dans le cas  $d = 3$ . Elle est discrétisée à l'aide d'une grille cartésienne fixe au cours du temps. A partir de cette grille, plusieurs maillages sont possibles.

#### Maillage "Multi1D"

Une première idée consiste à construire des colonnes dont la base s'appuie sur la grille horizontale. Comme les vitesses de sédimentation et la compaction ne sont pas nécessairement identiques d'une cellule à l'autre de la grille, les lithologies peuvent être décalées entre deux colonnes voisines (voir figure III.3) et les interfaces verticales, correspondant à une même

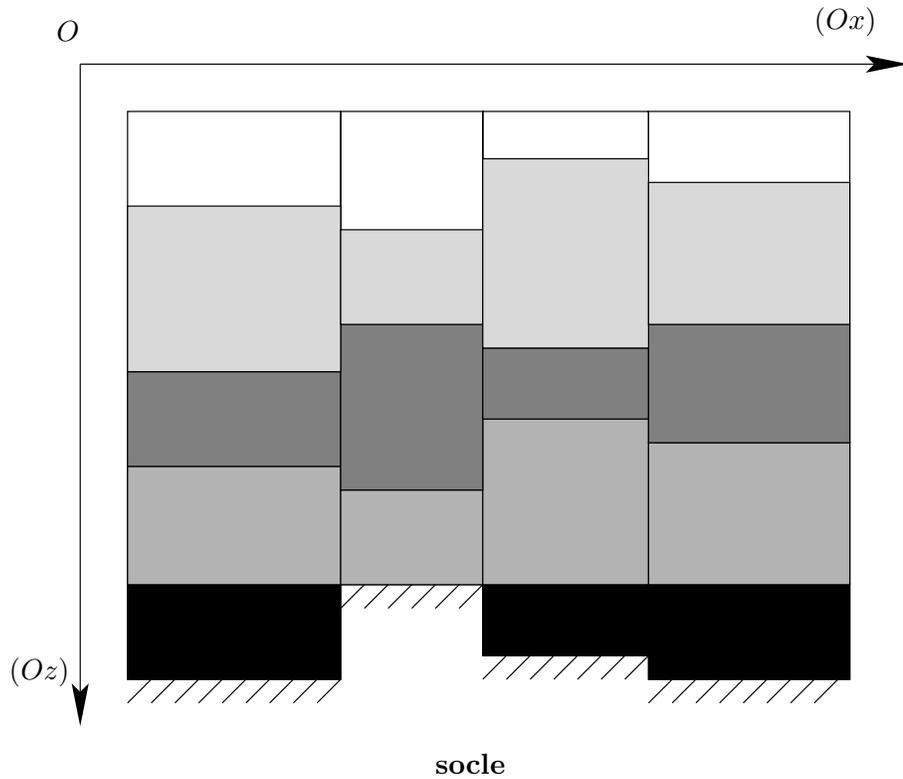


Figure III.3: Maillage Multi1D

série sédimentaire, ne coïncident pas toujours. Ce premier maillage est appelé maillage Multi1D. Dans les schémas d'écoulement, les flux sur les arêtes verticales sont calculés entre deux mailles de même âge de dépôt et l'aire de la surface d'échange est une moyenne des aires des interfaces situées entre les deux cellules.

### Maillage coïncidant : 1<sup>ère</sup> approche

Dans le maillage précédent, les interfaces verticales peuvent être partagées entre trois mailles. Ce type de maillage est dit non-coïncidant. Pour obtenir un maillage coïncidant où une arête verticale est l'intersection de deux mailles uniquement, il faut pouvoir calculer la hauteur de cette arête connaissant la hauteur des mailles voisines. V. Bouvier (Bouvier 1989) a montré que, dans plusieurs cas, ce problème était mal posé. En effet, lorsque l'on pose le système exprimant le volume de chaque maille en fonction des hauteurs d'arêtes et de la largeur de la colonne, ce système est sur- ou sous- déterminé. Des algorithmes basés sur des méthodes d'optimisation ont été mis au point mais ne garantissent pas des résultats satisfaisants dans tous les cas. Certains donnent des maillages non physiques où des mailles se croisent, d'autres n'assurent pas la conservativité de la matière solide.

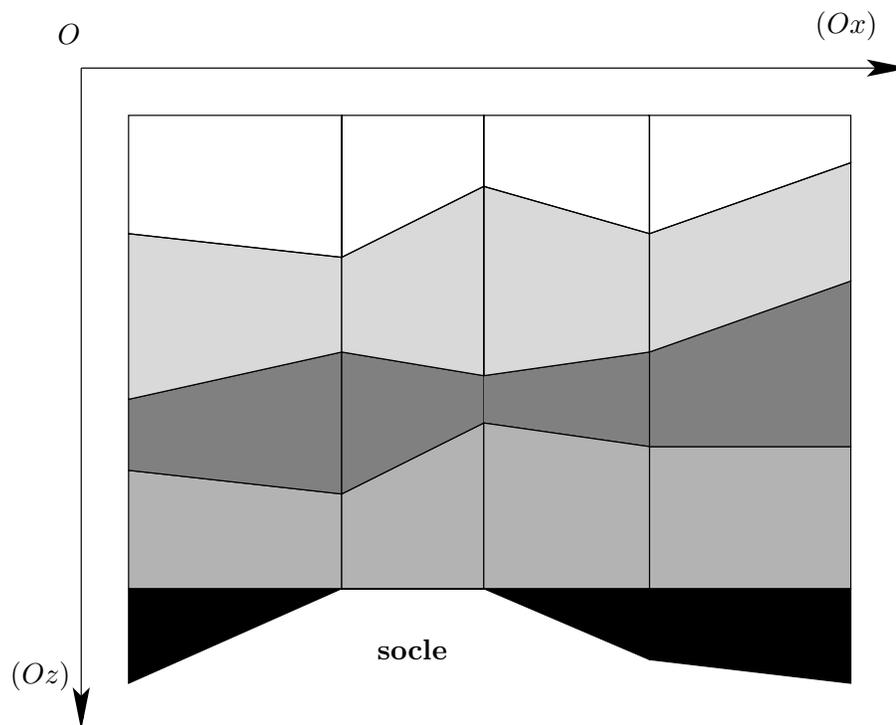


Figure III.4: Maillage bassin coïncidant

### Maillage coïncidant : 2<sup>ème</sup> approche

Une autre approche est de raisonner en hauteurs d'arêtes et non pas en hauteurs de mailles : la procédure de backstripping définit, dans ce cas, les hauteurs solides des arêtes verticales et la simulation directe utilise ces données pour déterminer leurs hauteurs réelles en utilisant les porosités calculées par la loi de compaction au centre des mailles ou au centre des arêtes. Toutes les déformations que nous avons mentionnées précédemment (sédimentation, compaction, érosion...) agissent alors directement sur la taille des arêtes verticales. Nous obtenons dans ce cas un maillage analogue à celui de la figure III.4.

Mentionnons enfin un dernier problème apparaissant en dimension  $d = 3$ . Dans un maillage  $3D$ , les faces horizontales sont définies par quatre points qui ne sont pas nécessairement coplanaires en raison des déformations subies par le bassin. Les volumes, les hauteurs réelles des mailles et les surfaces des interfaces doivent être calculés de façon approchée (voir (Temis 2002)).

### III.2.4 Conclusions

Les contraintes imposées (suivi des bancs sédimentaires, déformations des mailles sous l'effet de la compaction...) aboutissent à des maillages pour lesquels les schémas volumes finis à 3 (resp. 5, 7) points pour  $d = 1$  (resp.  $d = 2$ ,  $d = 3$ ) ne donnent pas une approximation consistante des flux (voir (Faille 1992)). Ceci est dû au fait que la droite joignant les centres de deux mailles n'est pas toujours orthogonale à l'interface située

entre ces mailles (pour la définition d'un maillage Volumes Finis admissible voir Définition IV.2.1). Malgré cela, ces maillages restent très utilisés dans les simulateurs actuels.

L'idéal serait de travailler avec un maillage fixe au cours du temps au travers duquel les sédiments et les fluides se déplaceraient. Mais il est, dans ce cas, très difficile de définir les propriétés physiques d'une maille puisqu'elle peut contenir différents matériaux. Ce type de maillage ne permet pas non plus de suivre les déformations des séries sédimentaires indépendamment les unes des autres.

Une autre approche consiste à écrire les équations (II.2)–(II.5)–(II.19)–(II.21) dans un repère de type  $(C, Cx, C\xi)$  (voir Remarque 1). Le maillage associé à ce repère présente l'avantage d'être fixe au cours du temps. Mais, comme nous l'avons déjà vu, ceci impose quelques contraintes géométriques sur la forme du bassin, en particulier que sa base soit horizontale.

Nous présentons, dans ce qui suit, une discrétisation volumes finis des équations (II.2)–(II.5)–(II.19)–(II.21). Comme conditions aux limites, nous supposons que les flux sont nuls sur les bords latéraux et sur l'interface socle-sédiments et que la pression de l'eau, la température et une saturation nulle sont imposées au sommet du bassin.

Nous introduisons tout d'abord quelques notations.

### III.3 Notations

#### III.3.1 Discrétisation en temps

Soit  $[-T, 0]$  l'intervalle de temps sur lequel porte la simulation. Cet intervalle est découpé en événements qui sont eux-mêmes subdivisés en intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$  correspondant aux pas de temps effectués par les schémas. Nous avons  $\cup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}] = [-T, 0]$ , avec  $t_0 = -T$  et  $t_{N+1} = 0$ . Nous notons  $\delta^n = t_{n+1} - t_n$ . Le calcul des pas de temps  $\delta^n$  est détaillé au §III.9.

#### III.3.2 Discrétisation en espace

Plaçons-nous à un instant précis de l'histoire d'un bassin qui occupe un espace  $\Omega$ . Pour simplifier, nous supposons que  $\Omega$  est un rectangle de  $\mathbb{R}^2$  avec des séries sédimentaires horizontales. On suppose également que la compaction est telle que, malgré ses déformations, le bassin conserve cette structure au cours de la simulation. Soit  $\mathcal{T}$  un maillage cartésien de  $\Omega$ . Pour une maille  $K \in \mathcal{T}$ ,  $x_K$  désigne son centre et  $m(K)$  sa mesure. L'ensemble des interfaces du maillage est noté  $\mathcal{E}$ . Il se décompose en deux sous-ensembles  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  et  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$  qui regroupent respectivement les faces intérieures et les faces situées sur le bord  $\partial\Omega$  du domaine. Du fait des conditions aux limites que nous avons choisies, nous supposons que  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$  ne contient que les interfaces situées sur le bord supérieur puisque les interfaces situées sur les autres bords n'interviennent pas dans les calculs. On note  $m(\sigma)$  la mesure d'une interface  $\sigma$ . Une interface intérieure au domaine et qui sépare deux cellules  $K$  et  $L$  est notée  $K|L$ .  $d_{K|L}$  désigne alors la distance séparant les centres des deux mailles et  $\tau_{K|L}$  la transmissivité, égale à  $\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}$ . Pour une interface  $\sigma$  située sur le bord supérieur,  $d_{K,\sigma}$  désigne la distance entre  $\sigma$  et le centre de la cellule  $K$  située sur ce bord. Dans ce cas, la

transmissivité est égale à  $\frac{m(\sigma)}{d_{K,\sigma}}$ . Enfin,  $N(K)$  désigne l'ensemble des cellules voisines d'une maille  $K$ .

Au cours d'une simulation, nous suivons l'évolution de chacune des mailles depuis leur apparition jusqu'à l'âge actuel où elles peuvent éventuellement avoir disparu. Les hauteurs solides sont mises à jour en début de pas de temps et restent constantes jusqu'au pas de temps suivant. On note alors par  $\mathcal{T}^n$  et  $\mathcal{E}^n$  l'ensemble des mailles et des interfaces présentes au cours de l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}[$ .

D'un pas de temps à l'autre les mailles subissent des déformations sous l'effet des changements de porosité. Quelques-unes des grandeurs géométriques que nous avons introduites (position entre les centres des mailles, mesures des interfaces verticales...) peuvent être mises à jour en début de pas de temps grâce à la porosité calculée au pas de temps précédent ou bien dépendre des nouvelles valeurs des porosités. Considérons, par exemple, la distance,  $d_{K,\sigma}$ , entre le centre d'une cellule  $K$  et une de ses interfaces horizontales  $\sigma$ . Pour un pas de temps  $[t_n, t_{n+1}[$ , cette distance dépend de la hauteur solide  $h_{\text{sed},K}^n$  déposée en  $t = t_n$  et de la porosité  $\phi_K$  prise aux dates  $t = t_n$  ou  $t = t_{n+1}$ . Dans le premier cas, cette distance sera notée  $d_{K,\sigma}^n$  et dans le second cas,  $d_{K,\sigma}^{n,n+1}$ . Pour éviter de faire systématiquement la distinction entre les mailles horizontales et les mailles verticales, nous utiliserons également la notation  $d_{K,\sigma}^n$  ou  $d_{K,\sigma}^{n,n+1}$  pour les faces  $\sigma$  horizontales même si ces quantités ne dépendent pas du temps.

### III.3.3 Conventions d'écriture

Si  $u$  désigne l'une des variables du problème  $(p_w, s, c, \sigma_z, \phi)$ ,  $(u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}^n}$  désigne l'approximation constante par morceaux de  $u$  sur le maillage  $\mathcal{T}^n$  pour l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}[$ . Nous utiliserons également par la suite la notation  $\delta(u)_{K,L} = u_L - u_K$ .

Nous allons maintenant détailler la discrétisation des équations d'écoulement et de rhéologie pour des mailles situées à l'intérieur du bassin et en l'absence de phénomènes d'érosion. Le cas des mailles situées sur l'interface eau-sédiments est traité au paragraphe §III.6 et les érosions au §III.7.

## III.4 Discrétisation des équations d'écoulement

Soient  $n = 0 \dots N$  et  $K \in \mathcal{T}^n$  une maille ne se situant pas au sommet du bassin. En prenant  $\mathcal{V} = K$  et en utilisant la formule de Green, les équations (II.6)–(II.9) se réécrivent sous la forme

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_K (1 - \phi) \rho_s \, dx &= 0, \\
 \frac{d}{dt} \int_K (\phi(1 - s) \rho_w) \, dx + \sum_{L \in N(K)} \int_{K|L} \left( \phi \rho_w (1 - s) (\vec{v}_w - \vec{v}_s) \right) \cdot \vec{n}_{K,L} \, d\xi(x) &= 0, \\
 \frac{d}{dt} \int_K (\phi s \rho_o) \, dx + \sum_{L \in N(K)} \int_{K|L} \left( \phi \rho_o s (\vec{v}_o - \vec{v}_s) \right) \cdot \vec{n}_{K,L} \, d\xi(x) &= \int_K \rho_o q_o \, dx, \\
 \frac{d}{dt} \int_K (\phi c s \rho_o) \, dx + \sum_{L \in N(K)} \int_{K|L} \left( \phi \rho_o c s (\vec{v}_o - \vec{v}_s) \right) \cdot \vec{n}_{K,L} \, d\xi(x) &= \int_K \rho_o q_{o,c} \, dx
 \end{aligned}$$

où  $\vec{n}_{K,L}$  désigne le vecteur normal à  $K|L$ , unitaire et orienté de  $K$  vers  $L$ . En approchant les dérivées en temps par un schéma d'Euler, en utilisant la loi de Darcy (II.13)-(II.14) et en discrétisant les gradients par un schéma de type différences finies centré, une approximation des équations précédentes est donnée par

$$m(K)^{n,n+1} (1 - \phi_K^{n+1}) = m(K)^n (1 - \phi_K^n), \quad (\text{III.1})$$

$$m(K)^{n,n+1} (\rho_w \phi(1 - s))_K^{n+1} - m(K)^n (\rho_w \phi(1 - s))_K^n + \delta^n \sum_{L \in N(K)} (F_w)_{K,L}^{n+1} = 0, \quad (\text{III.2})$$

$$m(K)^{n,n+1} (\rho_o \phi s)_K^{n+1} - m(K)^n (\rho_o \phi s)_K^n + \delta^n \sum_{L \in N(K)} (F_o)_{K,L}^{n+1} = \delta^n m(K)^{n,n+1} (\rho_o q_o)_K^{n+1}, \quad (\text{III.3})$$

$$m(K)^{n,n+1} (\rho_o \phi c s)_K^{n+1} - m(K)^n (\rho_o \phi c s)_K^n + \delta^n \sum_{L \in N(K)} (F_{o,c})_{K,L}^{n+1} = \delta^n m(K)^{n,n+1} (\rho_o q_{o,c})_K^{n+1} \quad (\text{III.4})$$

où

- $m(K)^n = A_K \frac{h_{\text{sed},K}^n}{1 - \phi_K^n}$ ,  $m(K)^{n,n+1} = A_K \frac{h_{\text{sed},K}^n}{1 - \phi_K^{n+1}}$ ,

- $A_K$  désigne l'aire de la base de la cellule  $K$ ,

- 

$$\begin{aligned}
 (F_w)_{K,L}^{n+1} &= \overline{\Upsilon}_{K|L}^n (\rho_w \eta_w)_{K|L}^{n+1} \left( (\rho_w)_{K|L}^n g \delta(z^n)_{K,L} - \delta(p_w^{n+1})_{K,L} \right), \\
 (F_o)_{K,L}^{n+1} &= \overline{\Upsilon}_{K|L}^n (\rho_o \eta_o)_{K|L}^{n+1} \left( (\rho_o)_{K|L}^n g \delta(z^n)_{K,L} - \delta(p_o^{n+1})_{K,L} \right), \\
 (F_{o,c})_{K,L}^{n+1} &= \overline{\Upsilon}_{K|L}^n (\rho_o c \eta_o)_{K|L}^{n+1} \left( (\rho_o)_{K|L}^n g \delta(z^n)_{K,L} - \delta(p_o^{n+1})_{K,L} \right),
 \end{aligned}$$

- 

$$\overline{\Upsilon}_{K|L}^n = \frac{1}{\tau_{K|L}^n} \left( \frac{d_{K,K|L}^n}{\Upsilon(\phi_K^n)} + \frac{d_{L,K|L}^n}{\Upsilon(\phi_L^n)} \right)$$

- 
- 
- 
- 

$$\frac{d_{K|L}^n}{(\rho_w)_{K|L}^n} = \left( \frac{d_{K,K|L}^n}{\rho_w(p_{w,K}^n)} + \frac{d_{L,K|L}^n}{\rho_w(p_{w,L}^n)} \right),$$

$$\frac{d_{K|L}^n}{(\rho_o)_{K|L}^n} = \left( \frac{d_{K,K|L}^n}{\rho_o(c_{K,K}^n, p_{o,K}^n)} + \frac{d_{L,K|L}^n}{\rho_o(c_{L,L}^n, p_{o,L}^n)} \right),$$

$$p_{o,K}^{n+1} - p_{w,K}^{n+1} = \pi(s_K^{n+1}),$$

$$g\delta(z^n)_{K,L} = \vec{g} \cdot \overrightarrow{x_K^n x_L^n}.$$

**Remarque 4 :** Le choix d'une moyenne harmonique pour le calcul de la perméabilité sur une interface  $K|L$  peut être remis en question (voir (Seguin & Vovelle 2003)). Dans le cas d'un écoulement monophasique et en l'absence de gravité, cette moyenne apparaît "naturellement" lorsque l'on exprime la continuité du flux au travers de l'interface.  $\square$

Nous présentons maintenant quelques décentrages couramment utilisés pour le calcul des termes  $\rho_\alpha \eta_\alpha$ ,  $\alpha \in \{o, w\}$ . Nous précisons ensuite le calcul des termes sources.

### III.4.1 Décentrage amont des pétroliers

Le schéma amont des pétroliers décentre les termes  $\rho_\alpha \eta_\alpha$  en fonction du sens d'écoulement de la phase. Ainsi, pour tout  $\alpha \in \{o, w\}$ ,

$$(\rho_\alpha \eta_\alpha)_{K|L}^{n+1} = \begin{cases} \rho_\alpha(p_{\alpha,K}^{n,n+1}) \eta_\alpha(s_K^{n,n+1}) & \text{si } (\rho_\alpha)_{K|L}^n g\delta(z^n)_{K,L} - \delta(p_\alpha^{n+1})_{K,L} \geq 0, \\ \rho_\alpha(p_{\alpha,L}^{n,n+1}) \eta_\alpha(s_L^{n,n+1}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

### III.4.2 Décentrage causal

Le décentrage causal effectue un traitement différent entre le terme de gravité et le terme en pression. Pour  $\alpha \in \{o, w\}$ , le produit  $(\rho_\alpha \eta_\alpha)_{K,L}^{n+1}$  en facteur du moteur en pression est donné par

$$(\rho_\alpha \eta_\alpha)_{K|L}^{n+1} = \begin{cases} \rho_\alpha(p_{\alpha,K}^{n,n+1}) \eta_\alpha(s_K^{n,n+1}) & \text{si } \delta(p_\alpha^{n+1})_{K,L} \geq 0, \\ \rho_\alpha(p_{\alpha,L}^{n,n+1}) \eta_\alpha(s_L^{n,n+1}) & \text{sinon} \end{cases}$$

et celui en facteur du terme de gravité vérifie

$$(\rho_\alpha \eta_\alpha)_{K|L}^{n+1} = \begin{cases} \rho_\alpha(p_{\alpha,K}^{n,n+1}) \eta_\alpha(s_K^{n,n+1}) & \text{si } (\rho_\alpha)_{K|L}^n g\delta(z^n)_{K,L} \geq 0, \\ \rho_\alpha(p_{\alpha,L}^{n,n+1}) \eta_\alpha(s_L^{n,n+1}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces décentrages assurent la monotonie et donc la stabilité des schémas (voir chapitre IV). Mais ils introduisent une diffusion numérique qui diminue la précision des calculs. Nous essaierons, au chapitre suivant, de quantifier cette diffusion au travers de tests numériques dans le cas du schéma amont des pétroliers. Nous présenterons également d'autres schémas (MUSCL, Péclet variable...) moins diffusifs.

### III.4.3 Calcul des termes sources

Nous avons

$$(\rho_o q_o)_K^{n+1} = \rho_s (1 - \phi_K^{n+1}) k_{1,K}^n u_K^{n+1}$$

où

- $k_{1,K}^n = k_1(T_K^n)$ ,  $T_K^n$  correspondant à la température au point  $x_K^n$ ,
- $u_K^{n+1}$  est calculé à partir de l'équation (II.17) en utilisant un schéma d'Euler implicite en temps, i.e.

$$u_K^{n+1} = \frac{u_K^n}{1 + k_{1,K}^n \delta t}.$$

La quantité de composé léger créée par craquage primaire est donnée par

$$(q_{o,c,1})_K^{n+1} = \alpha (q_o)_K^{n+1}.$$

L'approximation,  $(q_{o,c,2})_K^{n+1}$ , liée au craquage secondaire, est définie par

$$(q_{o,c,2})_K^{n+1} = k_{2,K}^n (\phi s (1 - c))_K^{n+1}.$$

## III.5 Discrétisation des équations de rhéologie

Soient  $n = 0 \dots N$  et  $K$  et  $L$  deux cellules adjacentes situées sur une même verticale. Notons  $z_K^n$  et  $z_L^n$  ( $z_L^n < z_K^n$ ) leurs cotes respectives. Pour tout  $t \in [t_n, t_{n+1}[$ , l'intégration de l'équation (II.21) sur  $[z_L^n, z_K^n]$  donne

$$\sigma_z(\cdot, z_K^n, t) - \sigma_z(\cdot, z_L^n, t) = \int_{z_L^n}^{z_K^n} \left( (1 - \phi) \rho_s + \phi (s \rho_o + (1 - s) \rho_w) \right) (\cdot, z, t) dz.$$

Dans le membre de droite, si nous remplaçons les différentes quantités par leur approximation sur les cellules  $K$  et  $L$  pour le pas de temps  $[t_n, t_{n+1}[$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \sigma_{z,K}^{n+1} - \sigma_{z,L}^{n+1} = & \frac{d_{L,K|L}^{n,n+1}}{2} \left( (1 - \phi_L^{n+1}) \rho_{s,L} + \phi_L^{n+1} \left( (s \rho_o)_L^{n+1} + ((1 - s) \rho_w)_L^{n+1} \right) \right) + \\ & \frac{d_{K,K|L}^{n,n+1}}{2} \left( (1 - \phi_K^{n+1}) \rho_{s,K} + \phi_K^{n+1} \left( (s \rho_o)_K^{n+1} + ((1 - s) \rho_w)_K^{n+1} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

D'autre part, en intégrant l'équation (II.20) sur une maille  $K$  et en approchant les dérivées en temps par un schéma d'Euler nous avons

$$\frac{\phi_K^{n+1} - \phi_K^n}{\delta t} + \beta(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}, \sigma_K^n, \sigma_K^{n+1}) \frac{\sigma_K^{n+1} - \sigma_K^n}{\delta t} + \alpha(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}, \sigma_K^n, \sigma_K^{n+1}) \sigma_K^{n+1} = 0 \quad (\text{III.6})$$

où

•

$$\sigma_K^n = \sigma_{z,K}^n - p_{w,K}^n - (s\pi(\phi, s))_K^n$$

correspond à la discrétisation de l'équation (II.19),

•

$$\beta(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}, \sigma_K^n, \sigma_K^{n+1}) = \begin{cases} \frac{\phi_a}{E_a} \exp\left(\frac{-\sigma_K^{n+1}}{E_a}\right) + \frac{\phi_b}{E_b} \exp\left(\frac{-\sigma_K^{n+1}}{E_b}\right) & \text{si } \sigma_K^n \geq \sigma_{m,K}^n \text{ et } \phi_K^n \geq \phi_r, \\ \frac{1}{E_e} & \text{si } \sigma_K^n < \sigma_{m,K}^n \text{ et } \phi_K^n \geq \phi_r, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

•

$$\alpha(\phi_K^n, \phi_K^{n+1}, \sigma_K^n, \sigma_K^{n+1}) = \begin{cases} \frac{1 - \phi_K^{n+1}}{\mu_b} & \text{si } \sigma_K^n > 0 \text{ et } \phi_K^n > \phi^{\min}, \\ 0 & \text{si } \sigma_K^n \leq 0 \text{ ou } \phi_K^n \leq \phi^{\min}. \end{cases}$$

Dans le calcul des fonctions  $\alpha$  et  $\beta$ , les tests sur la porosité et la contrainte sont explicites. Cela permet d'éviter des discontinuités qui pourraient entraîner une divergence de l'algorithme de Newton (voir paragraphe §III.8).

### III.6 Traitement des mailles situées sur l'interface eau-sédiments

Les mailles situées sur le bord supérieur sont intégrées au système (III.1)–(III.6) lorsqu'elles ont atteint une hauteur solide suffisante. Lorsque cette valeur est trop faible, les variables liées à la maille ( $p_w, s, c, \phi, \sigma_z$ ) sont calculées en conditions hydrostatiques.

Pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}^n$ , les flux sont égaux à

$$\begin{aligned} (F_w)_{K,\sigma}^{n+1} &= \overline{\overline{\Upsilon}}_K^n (\rho_w \eta_w)_{K,\sigma}^{n+1} \left( (\rho_w)_K^n g \delta(z^n)_{K,\sigma} - \delta(p_w^{n+1})_{K,\sigma} \right), \\ (F_o)_{K,\sigma}^{n+1} &= \overline{\overline{\Upsilon}}_K^n (\rho_o \eta_o)_{K,\sigma}^{n+1} \left( (\rho_o)_K^n g \delta(z^n)_{K,\sigma} - \delta(p_o^{n+1})_{K,\sigma} \right), \\ (F_{o,c})_{K,\sigma}^{n+1} &= \overline{\overline{\Upsilon}}_K^n (\rho_o c \eta_o)_{K,\sigma}^{n+1} \left( (\rho_o)_K^n g \delta(z^n)_{K,\sigma} - \delta(p_o^{n+1})_{K,\sigma} \right) \end{aligned}$$

où  $\overline{\overline{\Upsilon}}_K^n = \tau_\sigma^n \Upsilon(\phi_K^n)$ ,  $(\rho_w)_K^n = \rho_w(p_{w,K}^n)$ ,  $(\rho_o)_K^n = \rho_o(c_K^n, p_{o,K}^n)$ , pour tout  $\alpha \in \{o, w\}$   $\delta(p_\alpha^{n+1})_{K,\sigma} = p_{\alpha,\sigma}^n - p_{\alpha,K}^{n+1}$ ,  $p_{\alpha,\sigma}^n$  désigne la pression imposée sur la face  $\sigma$ ,  $\delta(z^n)_{K,\sigma} =$

$\vec{g} \cdot \overrightarrow{x_K^n x_\sigma^n}$ ,  $x_\sigma^n$  désigne l'intersection avec la face  $\sigma$  de sa perpendiculaire passant par le point  $x_K^n$ . Pour tout  $\alpha \in \{o, w\}$ , les produits  $(\rho_\alpha \eta_\alpha)_{K|\sigma}^{n+1}$  peuvent être calculés par un décentrage amont ou causal. Dans le cas de flux entrants, il faut tenir compte des conditions imposées sur ce bord, à savoir  $s_\sigma^n = 0$  et  $p_{w,\sigma}^n$  imposée.

L'équation sur la contrainte verticale est ici égale à

$$\sigma_{z,K}^{n+1} - \sigma_{z,\sigma}^n = \frac{d_{K,\sigma}^{n,n+1}}{2} \left( (1 - \phi_K^{n+1}) \rho_{s,K} + \phi_K^{n+1} \left( (s\rho_o)_K^{n+1} + ((1-s)\rho_w)_K^{n+1} \right) \right)$$

où  $\sigma_{z,\sigma}^n$  est la contrainte verticale liée à la colonne d'eau qui surplombe le bassin.

**Remarque 5 :** En dimension  $d = 1$ , en suivant la même démarche, la discrétisation volumes finis des équations (II.12)-(II.22) intégrées sur des volumes solides aboutit au schéma (III.1)-(III.6).  $\square$

### III.7 Traitement des érosions

Lorsqu'une érosion intervient, chaque colonne qui compose le bassin perd une partie de sa hauteur solide. Les couches sont alors translatées à porosité constante vers le sommet du bassin et une nouvelle géométrie, tenant compte des nouvelles valeurs des hauteurs solides, est calculée. On résoud ensuite le système (III.1)-(III.6) sur ce nouveau domaine.

### III.8 Résolution du système couplé

Le système (III.1)-(III.6) est un système d'équations non linéaires du type

$$\mathcal{F}^n(X_{\mathcal{T}^n}) = 0$$

où  $X_{\mathcal{T}^n} = (p_{w,K}^{n+1}, s_K^{n+1}, c_K^{n+1}, \phi_K^{n+1}, \sigma_{z,K}^{n+1})_{K \in \mathcal{T}^n}$ . Il est résolu à l'aide d'un algorithme de Newton sous-relaxé donné par l'Algorithme 1.

**Algorithme 1:** *Newton*

**Entrée :**  $(p_{w,K}^n, s_K^n, c_K^n, \phi_K^n, \sigma_{z,K}^n)_{K \in \mathcal{T}^n}$

**Sortie :**  $X_{\mathcal{T}^n}$

**Déroulement :**

Mise à jour des données géométriques

$i = 0$

$X_{\mathcal{T}^n}^i = (p_{w,K}^n, s_K^n, c_K^n, \phi_K^n, \sigma_{z,K}^n)_{K \in \mathcal{T}^n}$

$\|\Delta X_{\mathcal{T}^n}\|_\infty = +\infty$

Tant que  $\|\Delta X_{\mathcal{T}^n}\|_\infty > \epsilon_1$  ou  $\|\mathcal{F}^n(X_{\mathcal{T}^n}^i)\|_\infty > \epsilon_2$

Début

Mise à jour des données géométriques dépendant de  $\phi_{\mathcal{T}^n}^{i,n+1}$

Résolution du système linéarisé :  $\Delta X_{\mathcal{T}^n} = (\mathcal{J}\mathcal{F}^n(X_{\mathcal{T}^n}^i))^{-1} \mathcal{F}^n(X_{\mathcal{T}^n}^i)$

$i = i + 1$

$$X_{\mathcal{T}^n}^i = X_{\mathcal{T}^n}^{i-1} - \lambda \Delta X_{\mathcal{T}^n}$$

Fin

$$X_{\mathcal{T}^n} = X_{\mathcal{T}^n}^i$$

Ici  $\phi_{\mathcal{T}^n}^{i,n+1}$  correspond à la solution obtenue pour  $\phi_{\mathcal{T}^n}^{n+1}$  à l'issue de la  $i^{\text{ème}}$  itération,  $\mathcal{J}^n(X_{\mathcal{T}^n}^i)$  désigne la matrice jacobienne de  $\mathcal{F}^n$  calculée en  $X_{\mathcal{T}^n}^i$ .  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont des réels positifs permettant de contrôler la convergence de l'incrément  $\Delta X_{\mathcal{T}^n}$  et du second membre  $\mathcal{F}^n(X_{\mathcal{T}^n}^i)$ . Le paramètre  $\lambda$  est donné par

$$\lambda = \min \left( 1, \frac{\delta p_{N,opt}}{\delta p_{\max}^{n+1,i}}, \frac{\delta s_{N,opt}}{\delta s_{\max}^{n+1,i}} \right),$$

$$\delta p_{\max}^{n+1,i} = \max_{K \in \mathcal{T}^n} (|p_{w,K}^{n+1,i} - p_{w,K}^{n+1,i-1}|),$$

$$\delta s_{\max}^{n+1,i} = \max_{K \in \mathcal{T}^n} (|s_K^{n+1,i} - s_K^{n+1,i-1}|).$$

$\delta p_{N,opt}$  et  $\delta s_{N,opt}$  correspondent aux variations maximales en pression et saturation, l'exposant  $i$  fait référence aux valeurs calculées au cours de l'itération courante pour  $\lambda = 1$ . L'utilisation du paramètre  $\lambda$  facilite dans de nombreux cas la convergence de l'algorithme de Newton (par exemple, lorsque le pas de temps  $\delta t^n$  est important).

En sortie de l'algorithme, nous nous assurons que les pressions sont positives et que les saturations et les compositions sont comprises entre 0 et 1.

### III.9 Calcul du pas de temps

Pour assurer la stabilité des schémas explicites et garantir la convergence des itérations de Newton, les pas de temps  $\delta t^n$  ne doivent pas être trop importants. D'un point de vue numérique, nous fixons les variations maximales des variables en pression et saturation que l'on veut observer au cours d'un pas de temps. Ainsi, en sortie de l'algorithme de Newton, nous parcourons l'ensemble des mailles et calculons les quantités

$$\delta(p_w^{n+1})_{\max} = \max_{K \in \mathcal{T}^n} (|p_{w,K}^{n+1} - p_{w,K}^n|),$$

$$\delta(s^{n+1})_{\max} = \max_{K \in \mathcal{T}^n} (|s_K^{n+1} - s_K^n|).$$

Ces valeurs doivent être proches des seuils en pression,  $\delta p_{opt}$ , et  $\delta s_{opt}$  en saturation. Ces valeurs sont fixées en début de simulation. On calcule alors le pas de temps  $\delta t^{n+1}$  suivant la formule

$$\delta t^{n+1} = \min(\max(C_\delta \delta t^n, \delta t_{\min}), \delta t_{\max})$$

où

$$C_\delta = \min \left( 1.2, \frac{\delta p_{opt}}{\delta(p_w^{n+1})_{\max}}, \frac{\delta s_{opt}}{\delta(s^{n+1})_{\max}} \right).$$

$\delta t_{\min}$  et  $\delta t_{\max}$  correspondent ici aux valeurs minimale et maximale du pas de temps. Si l'algorithme de Newton échoue (divergence, variables non physiques...), le pas de temps

courant est annulé et nous reprenons l'ensemble des calculs avec un pas de temps  $\delta t^n$  divisé par deux.

## III.10 Tests numériques

Nous allons maintenant présenter quelques tests numériques qui illustrent le fonctionnement des schémas que nous avons introduits. Nous précisons tout d'abord les données associées aux différents cas que nous allons traiter.

### III.10.1 Caractéristiques du Test 1

#### Structure et géométrie du bassin

Le Test 1 correspond à un bassin de dimension  $d = 1$  d'environ 5500 m de profondeur. Le test débute alors que le bassin existe déjà et nous supposons qu'il ne subit aucune évolution dans le temps. La figure III.5 précise sa géométrie et sa structure. Les hauteurs réelles ont été calculées à partir des hauteurs solides et d'une courbe  $\phi(z)$  reliant la porosité à la profondeur (voir figure III.6).

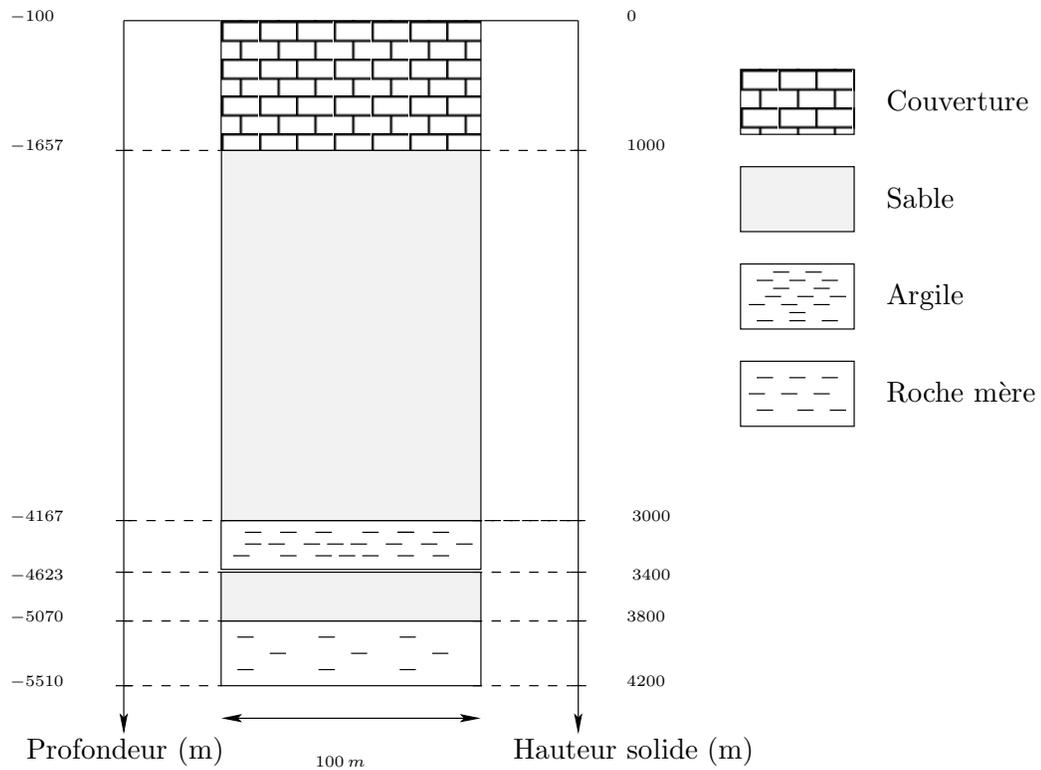


Figure III.5: Géométrie et structure du bassin

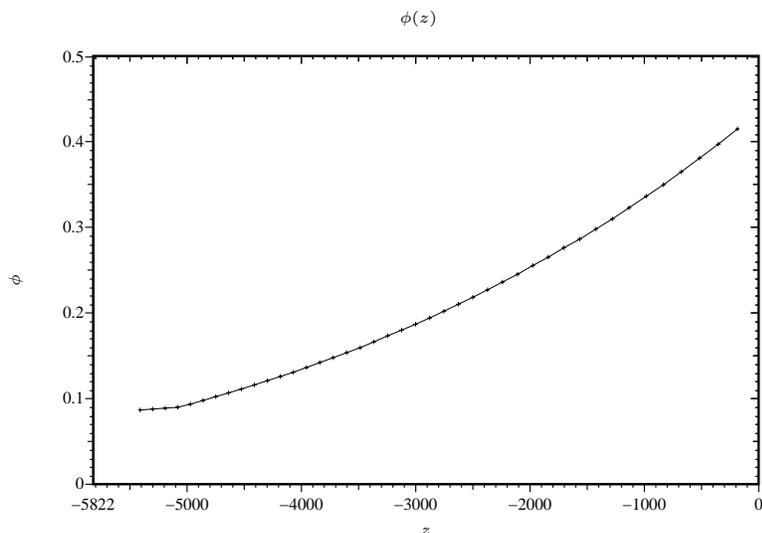


Figure III.6: Evolution de la porosité en fonction de la profondeur

### Lithologies

Les caractéristiques des différentes lithologies qui composent cette colonne sont précisées dans le tableau suivant.

	Couverture	Sable	Argile	Roche mère
$\rho_s (kg.m^{-3})$	3000	3000	3000	3000
$S_{spec} (m^2.m^{-3})$	$10^7$	$10^6$	$10^7$	$10^7$
$\pi_{sed} (MPa)$	10	0	1	1
$u_0$	-	-	-	0.03

Concernant le craquage, nous avons  $E_1 = E_2 = 52 kcal.mol^{-1}$ ,  $A_1 = A_2 = 10^{12} s^{-1}$ ,  $\alpha = 0$ . Les hydrocarbures produits par craquage primaire ne contiennent donc que du composé lourd. A l'intérieur du bassin on suppose qu'il règne un gradient thermique de  $30 ^\circ C.km^{-1}$  et qu'en surface ( $z = 0$ ) la température est nulle.

### Fluides et composés

Nous avons

	Eau	Composé lourd	Composé léger
Densité ( $kg.m^{-3}$ )	1100	700	700
Viscosité	voir Formule (II.15)	$\mu_{o,h,a} = 10^{-5} Pa.s$ $\mu_{o,h,b} = 2700 K$ voir Formule (II.16)	$\mu_{o,h,a} = 10^{-5} Pa.s$ $\mu_{o,h,b} = 2700 K$ voir Formule (II.16)

Les perméabilités relatives ne dépendent ici que de la saturation et sont données par  $kr_o(s) = s$  et  $kr_w(s) = 1 - s$ . Les pressions capillaires  $\pi_l$  dépendent de la saturation et de la lithologie via le paramètre  $\pi_s$  :  $\pi_l(s) = \frac{1}{1-s} + \pi_{sed}$ .

### Conditions aux bords et initiales

Les flux sont nuls sur les bords latéraux et à la base de la colonne. Au sommet, la hauteur d'eau est de  $100 m$ . La simulation porte sur  $100 Ma$ . A l'instant initial, le bassin est en conditions hydrostatiques.

### III.10.2 Caractéristiques du Test 2

Le Test 2 est un cas bidimensionnel. Là encore, nous supposons que la géométrie du bassin n'évolue pas au cours du temps. La figure III.7 précise ses caractéristiques. Les hauteurs réelles ont été calculées à partir des hauteurs solides et de la courbe  $\phi(z)$  donnée par la Figure III.6).

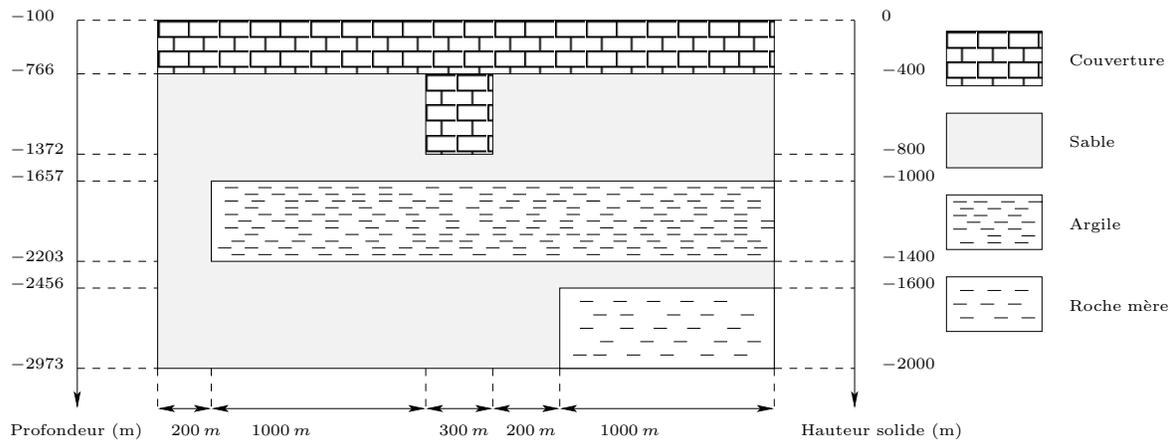


Figure III.7: Géométrie et structure du bassin

Pour le reste, nous conservons les mêmes données que pour le Test 1, à l'exception de la température au sommet qui vaut ici  $100\text{ }^{\circ}C$ . Ceci nous permet d'avoir une chaleur suffisante au fond du bassin pour assurer le craquage.

### III.10.3 Influence du pas du maillage sur le franchissement des barrières capillaires

L'ensemble des résultats qui suivent ont été obtenus en utilisant le schéma amont des pétroliers dans sa forme implicite.

#### Test 1

Nous débutons ces tests avec le Test 1 où nous allons montrer l'influence du pas du maillage sur le passage des hydrocarbures au niveau de la barrière d'argile.

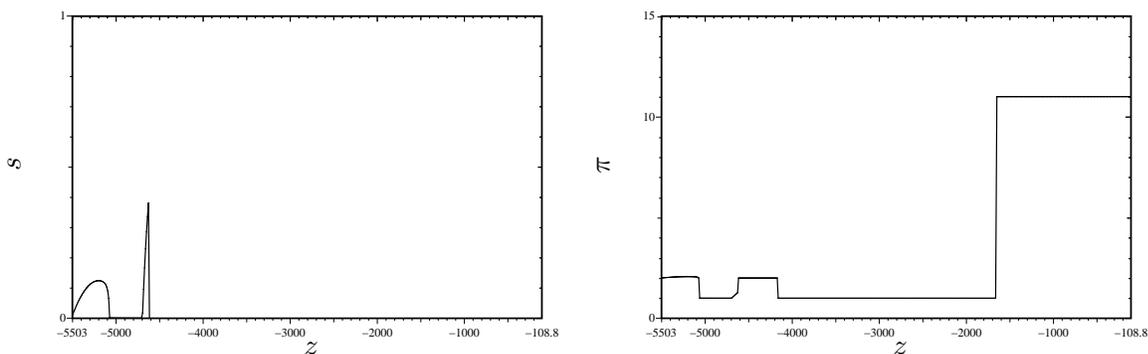


Figure III.8: Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour  $t = 1.0$ . L'huile est retenue. La pression capillaire est discontinue au niveau de la barrière d'argile.

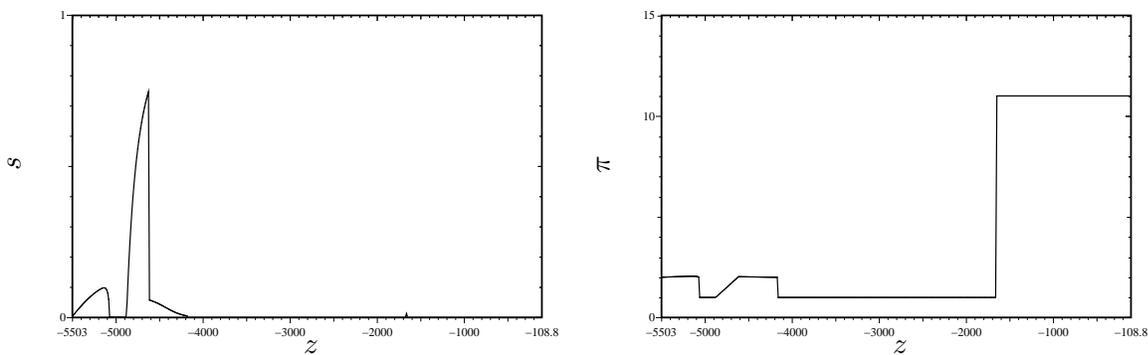
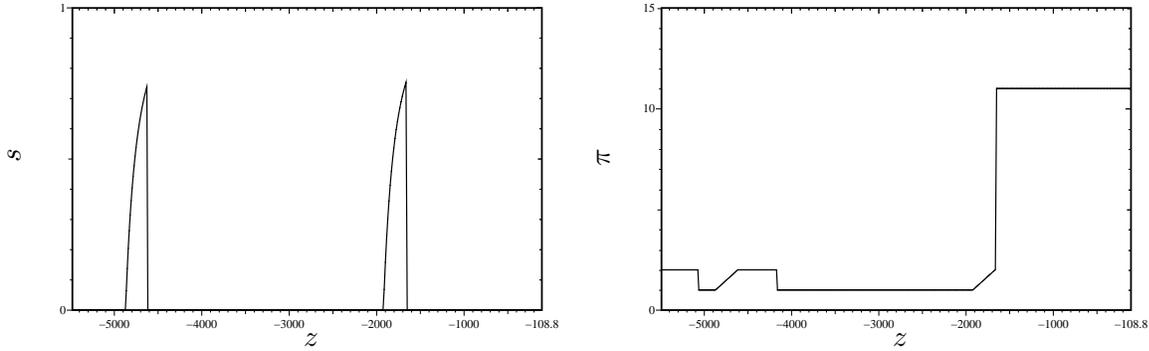


Figure III.9: Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour  $t = 4.0$ . L'huile a franchi la barrière d'argile et la pression capillaire est continue.

Figure III.10: Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour  $t = 100.0$ .

Sur cet exemple, l'huile générée au niveau de la roche mère monte par gravité jusqu'à la barrière d'argile (Figure III.8). Là elle est momentanément ralentie sous l'effet du gradient de pression capillaire et des plus faibles valeurs des perméabilités. Elle poursuit ensuite son ascension jusqu'à la couverture où elle s'accumule (Figures III.9 et III.10). Au cours de la migration, l'huile initialement riche en composé lourd se transforme en composé léger par craquage secondaire.

Discretisons maintenant l'ensemble de la colonne à l'aide de mailles de hauteurs solides égales à  $100\text{ m}$  à l'exception de la barrière d'argile où nous utilisons différents pas d'espace. Pour des mailles de hauteurs solides égales à  $400, 200, 100, 20$  et  $1\text{ m}$ , la Figure III.11 donne les saturations obtenues au bout de  $100\text{ Ma}$ .

Pour des mailles de  $400\text{ m}$ , la discrétisation est trop grossière et aucun hydrocarbure n'est retenu au niveau de la barrière d'argile. Par contre, pour des discrétisations plus fines, nous constatons qu'une partie des hydrocarbures reste piégée en dessous. Les quantités ne sont pas très importantes car les porosités sont faibles à cette profondeur et cela a en fait peu d'incidence sur les quantités présentes dans le réservoir supérieur. Par contre si nous regardons les masses de composé léger présentes dans ce réservoir, nous remarquons qu'elles varient sensiblement en fonction du pas d'espace. Nous avons en effet

$h_{\text{solid}}$ en $m$	masse (en $t$ )
400	185
200	238
100	278
20	289
1	290

En fait les barrières capillaires présentes au niveau de la couche d'argile et de la couverture ont deux effets. La première a un effet de retard : avant de traverser la couche d'argile, les hydrocarbures doivent s'accumuler en quantité suffisante pour rendre la pression capillaire continue. Nous avons en effet  $\pi_{\text{sed}} = 0$  dans la couche de sable et  $\pi_{\text{sed}} = 1$  dans la

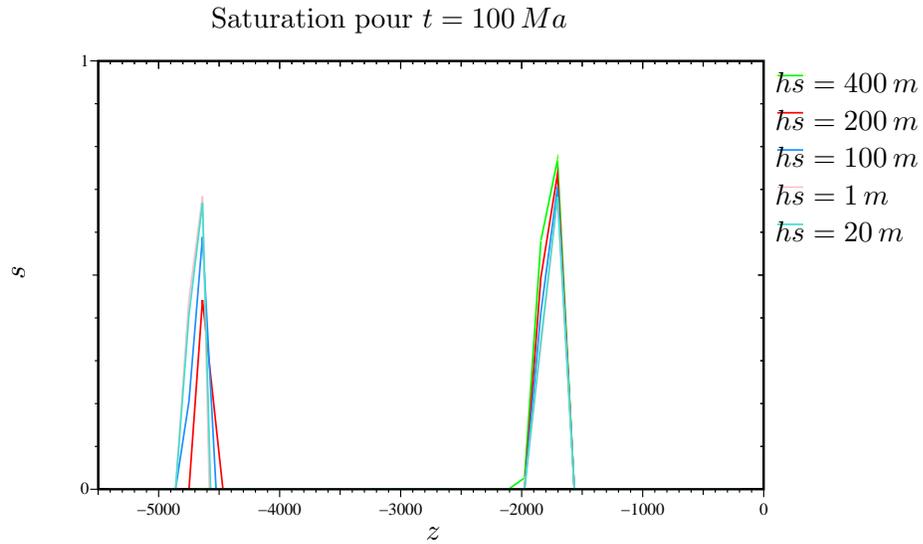


Figure III.11: Etat final en saturation obtenu pour différentes discrétisations de la barrière argileuse

couche d'argile. Il faut donc attendre que la saturation sous la barrière atteigne la valeur  $s^* = 0.75$  pour que les hydrocarbures poursuivent leur ascension (Figures III.8 et III.9). Au niveau de la couverture, la discontinuité des pressions capillaires est trop forte et les hydrocarbures sont retenus dans tous les cas (Figure III.10).

Lorsque le pas du maillage est trop important, la discrétisation du gradient de pression capillaire est trop grossière et les hydrocarbures franchissent la barrière sous l'effet de la gravité avant que la continuité de la pression capillaire ne soit satisfaite. Ainsi, en présence de grosses mailles, les hydrocarbures sont retenus moins longtemps dans les zones chaudes du bassin et donc de plus faibles quantités de composés lourds se transforment en composé léger.

Nous constatons ainsi, sur ce premier exemple, que les barrières capillaires jouent un rôle prépondérant en simulation de bassin car elles ont une influence à la fois sur la localisation et sur la composition des réservoirs finaux.

Nous allons maintenant reprendre le Test 1 en tenant compte, cette fois de la sédimentation et du mécanisme de compaction.

### Test 1 avec compaction

Au début de la simulation, le bassin n'existe pas et les couches se déposent au fur et à mesure à une vitesse  $v_{\text{sed}} = 100 m.Ma^{-1}$ . La loi de rhéologie est donnée par

$$\alpha(\phi, \sigma) = 0, \quad \beta(\phi, \sigma) = \begin{cases} \frac{0.3}{20} \exp(-\frac{\sigma}{20}) + \frac{0.3}{60} \exp(-\frac{\sigma}{60}) & \text{si } \sigma \geq \sigma_m, \\ \frac{1}{10^4} & \text{si } \sigma < \sigma_m, \end{cases} \quad \phi_r = 0.$$

et ceci pour toutes les lithologies qui composent le bassin. La Figure III.12 donnent les porosités obtenues après le dépôt de chacune des couches et les Figures III.13–III.15 montrent l'évolution des saturations et des pressions capillaires au cours du temps. Nous constatons que ces résultats sont analogues au cas sans compaction. Lorsque le maillage est trop grossier, nous constatons également un passage prématuré des hydrocarbures.

### Test 2

Le bassin comporte ici une roche mère et deux réservoirs potentiels séparés entre eux par une cloison étanche (Figure III.16). Après expulsion hors de la roche mère, l'huile monte par gravité jusqu'à la barrière d'argile (Figure III.18). Là, à la différence du cas monodimensionnel, l'huile ne s'accumule mais contourne la barrière et remplit progressivement le réservoir de gauche (Figures III.19 et III.20). Si la discrétisation n'est pas assez fine l'huile poursuit son ascension et remplit le réservoir de droite. C'est en particulier le cas si nous discrétisons le domaine avec des mailles de hauteur solide égale à 200 m (Figure III.17).

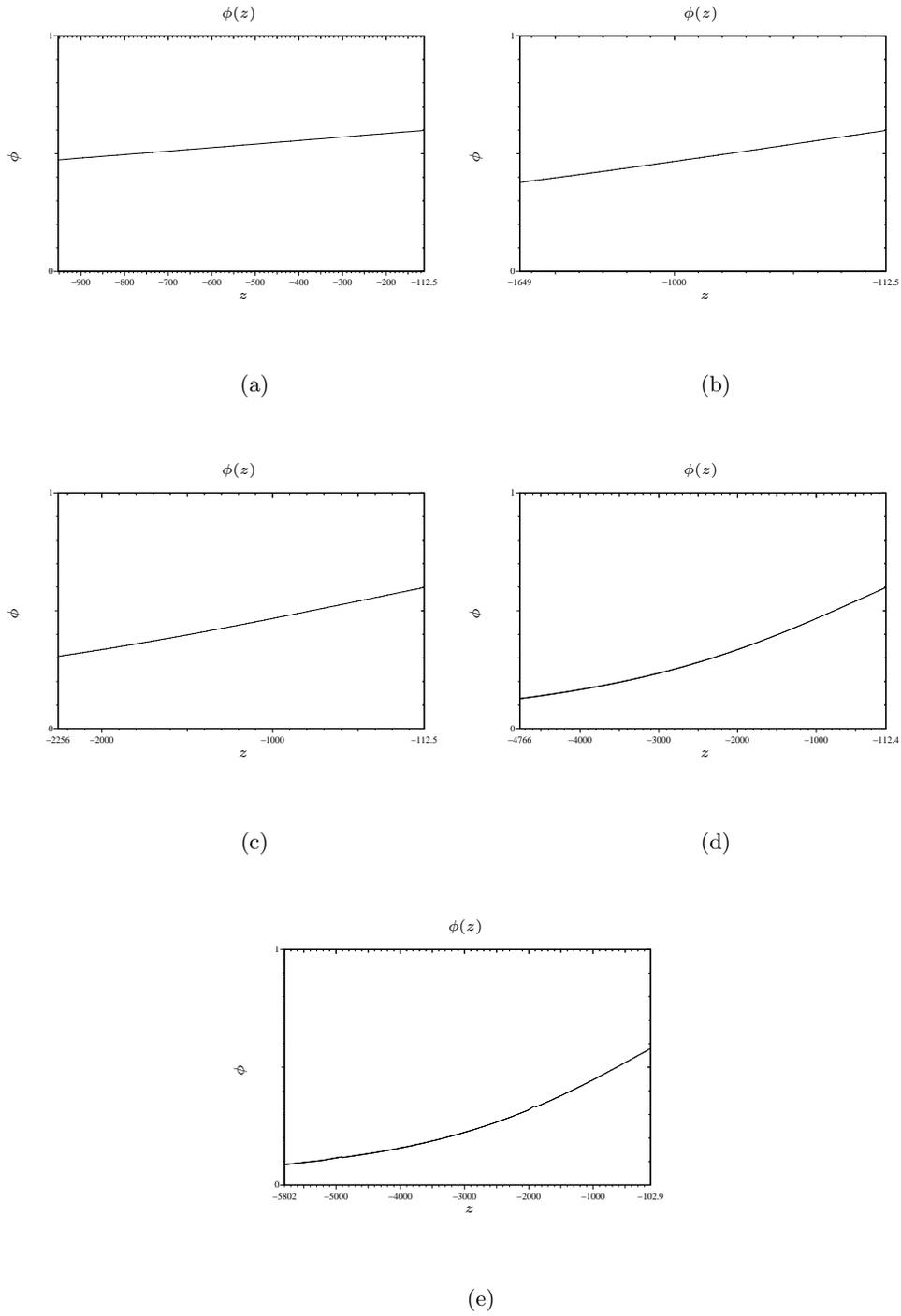


Figure III.12: Porosités calculées en  $t = 4 \text{ Ma}$  (a),  $t = 8 \text{ Ma}$  (b),  $t = 12 \text{ Ma}$  (c),  $t = 32 \text{ Ma}$  (d),  $t = 42 \text{ Ma}$  (e)

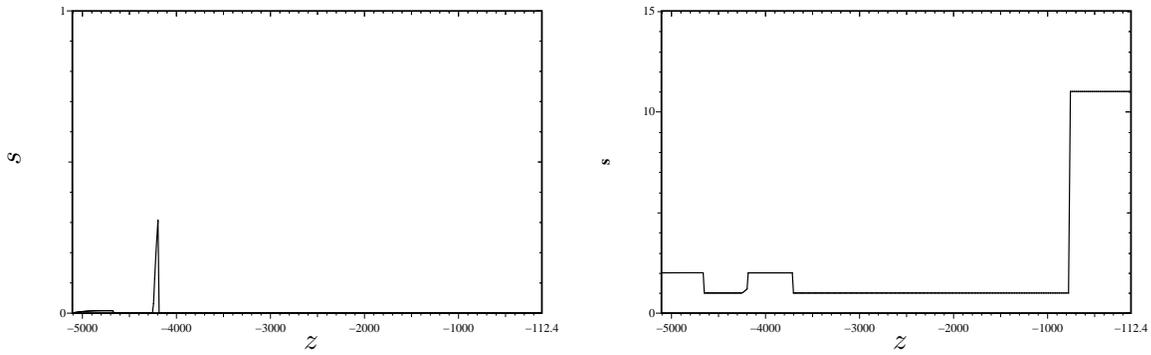


Figure III.13: Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour  $t = 35.0$ .

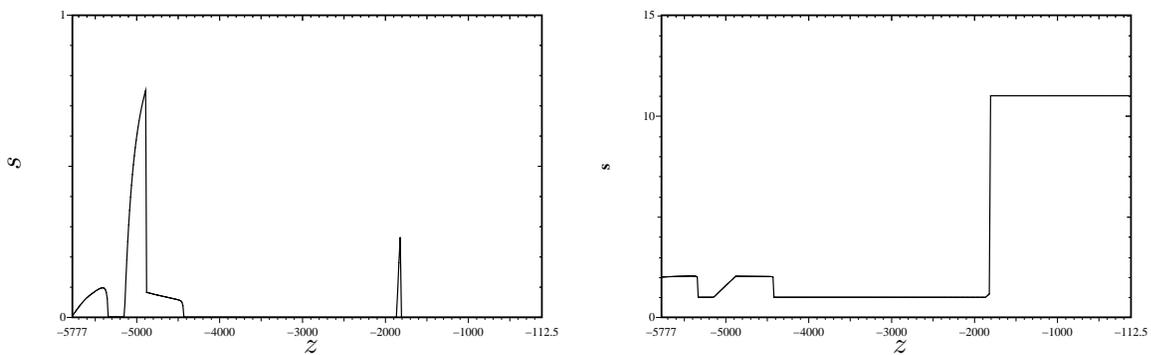


Figure III.14: Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour  $t = 41.0$ .

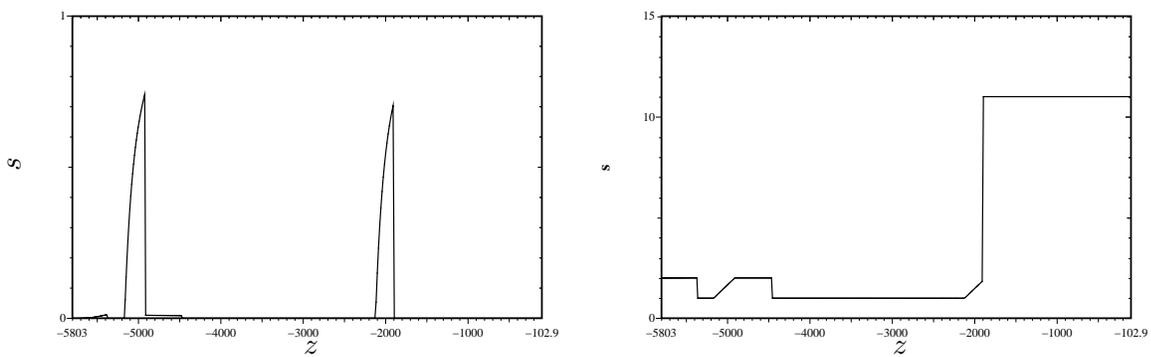


Figure III.15: Saturations (gauche) et pressions capillaires (droite) pour  $t = 49.0$ .

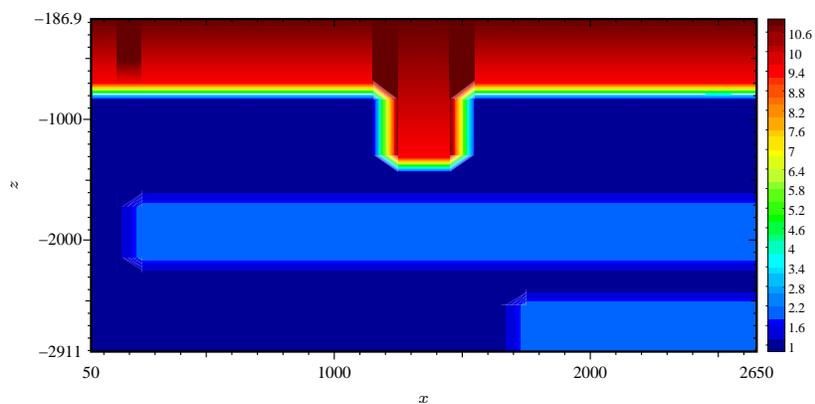


Figure III.16: Barrières capillaires à l'instant initial.

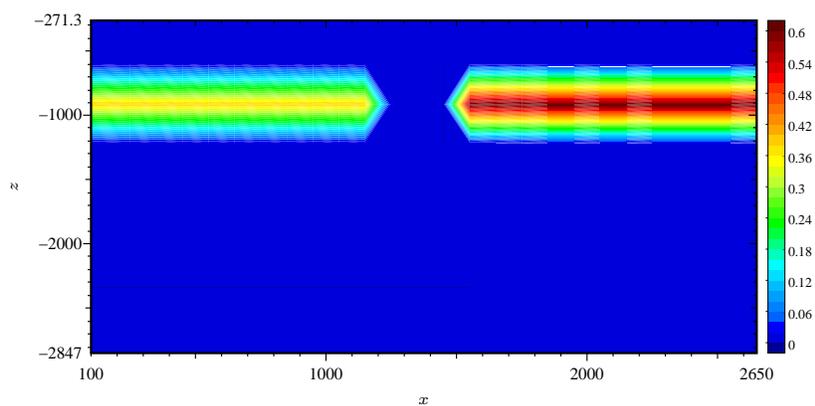


Figure III.17: Saturations obtenues en  $t = 10.0$  avec des mailles de hauteur solide égale à  $200\text{ m}$ .

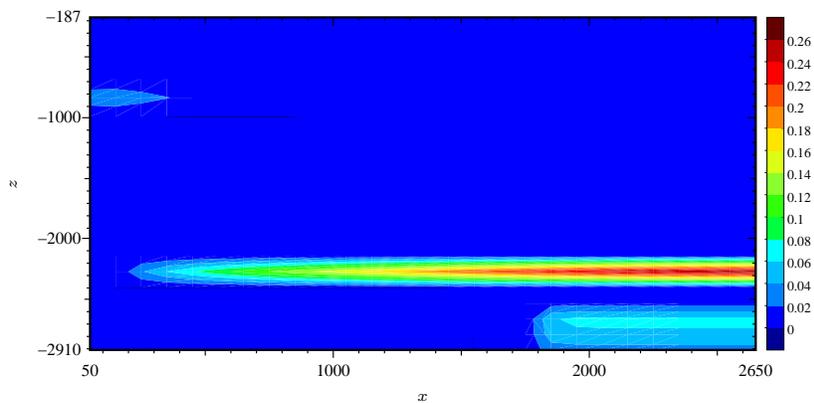


Figure III.18: Saturations obtenues en  $t = 0.2$  avec des mailles de hauteur solide égale à  $100\text{ m}$ .

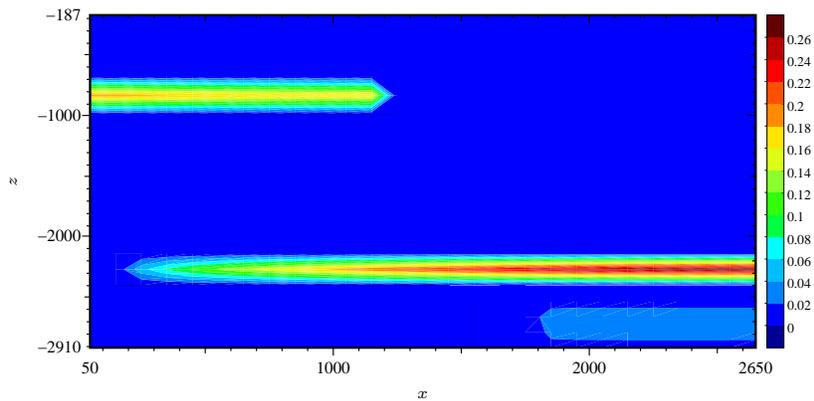


Figure III.19: Saturations obtenues en  $t = 0.4$  avec des mailles de hauteur solide égale à  $100\text{ m}$ .

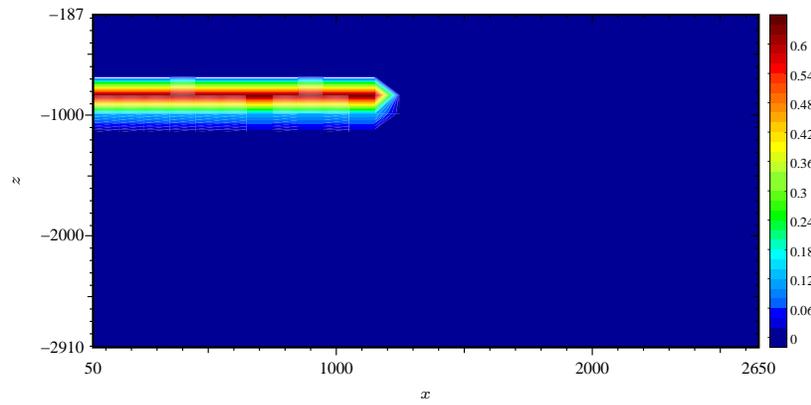


Figure III.20: Saturations obtenues en  $t = 10.0$  avec des mailles de hauteur solide égale à  $100\text{ m}$ .



## Chapitre IV

# Etude mathématique du schéma industriel

---

Le schéma amont des pétroliers est apparu dans les années 60-70 suite aux travaux de D. W. Peaceman (Peaceman 1977) et de K. Aziz (Aziz & Settari 1979) pour la simulation de réservoir. De nombreuses études mathématiques ont été publiées à son sujet mais, dans plupart des cas, l'influence de la gravité n'est pas prise en compte dans les équations d'écoulement ou alors uniquement dans des cas simplifiés. Ici nous proposons une étude générale de ce schéma dans le cadre d'un écoulement de type Dead-Oil. Nous négligeons, dans un premier temps, les effets capillaires et montrons des estimations en pression et saturations ainsi que l'existence d'une solution discrète. Nous reprenons ensuite la même étude en tenant compte, cette fois, de la capillarité. Nous introduisons alors un nouveau schéma à nombre de Péclet variable. L'idée est ici de décomposer la partie convective du flux en une combinaison linéaire entre le flux décentré du schéma amont des pétroliers et le flux centré. Le paramètre de cette combinaison linéaire est ajusté localement, sur chaque face, en fonction de la diffusion introduite par la pression capillaire de façon à rendre le schéma  $L^\infty$ -stable. Nous montrons alors, pour ce schéma, des résultats analogues à la première partie. En supposant le flux total suffisamment régulier, nous montrons la convergence du schéma à Péclet variable vers une solution faible du problème. Quelques tests numériques présentés en fin de chapitre montrent une amélioration de la précision des calculs.

### IV.1 Modèle mathématique

Nous considérons ici un modèle Dead-Oil où un fluide diphasique immiscible et incompressible s'écoule au travers d'un milieu poreux isotrope  $\Omega$ . La géométrie du domaine est fixe au cours du temps. La porosité et la perméabilité du milieu ne dépendent que de la variable d'espace et nous notons  $T$  la durée de l'écoulement. Sous ces hypothèses, la loi de Darcy, généralisée aux écoulements multiphasiques, établit que la saturation  $s : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et la pression de l'eau  $p_w : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \Upsilon \eta_o(s) (\rho_o \vec{g} - \vec{\nabla} p_o) \right) = 0, \\ -\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \Upsilon \eta_w(s) (\rho_w \vec{g} - \vec{\nabla} p_w) \right) = 0, \\ \pi(s) = p_o - p_w. \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Nous supposons les bords du domaine imperméables :

$$\forall \alpha \in \{o, w\}, \Upsilon \left( \eta_\alpha(s) (\rho_\alpha \vec{g} - \vec{\nabla} p_\alpha) \right) \cdot \vec{n} = 0. \quad (\text{IV.2})$$

La pression de l'eau  $p_w$  est donc définie à une constante près. Nous pouvons, par exemple, supposer que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\int_{\Omega} p_w(x, t) dx = 0.$$

La condition initiale est donnée par

$$s(\cdot, 0) = s_{\text{ini}}(\cdot). \quad (\text{IV.3})$$

Tout au long de ce chapitre, nous supposerons les hypothèses suivantes vérifiées.

### Hypothèses IV.1.1

H1-1.  $\Omega$  est un ouvert borné polygonal connexe de  $\mathbb{R}^d$  (avec en pratique  $d = 1, 2$  ou  $3$ ) et  $T$  est un réel positif donné.

H1-2.

$$\begin{aligned} \phi &\in L^\infty(\Omega) \text{ et } 0 < \phi(x) < 1 \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \Upsilon &\in L^\infty(\Omega) \text{ et } 0 < C_{\Upsilon, \text{inf}} \leq \Upsilon(x) \leq C_{\Upsilon, \text{sup}} \text{ p.p. } x \in \Omega, \end{aligned}$$

où  $C_{\Upsilon, \text{inf}}$  et  $C_{\Upsilon, \text{sup}}$  dépendent des propriétés de la roche.

H1-3. Nous supposons que, pour tout  $\alpha \in \{o, w\}$ ,  $\eta_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une application continue Lipschitzienne. Plus précisément, la fonction  $\eta_o$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , strictement croissante sur  $[0, 1]$  et vérifie

$$\begin{aligned} \forall s \leq 0, \quad \eta_o(s) &= 0, \\ \forall s \geq 1, \quad \eta_o(s) &= \eta_o(1). \end{aligned}$$

Inversement la fonction  $\eta_w$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ , strictement décroissante sur  $[0, 1]$  et vérifie

$$\begin{aligned} \forall s \leq 0, \quad \eta_w(s) &= \eta_w(0), \\ \forall s \geq 1, \quad \eta_w(s) &= 0. \end{aligned}$$

De plus nous supposons que la mobilité totale est bornée inférieurement, i.e.,

$$\exists \beta > 0, \beta = \inf_{s \in [0,1]} \eta_T(s).$$

H1-4. *La pression capillaire,  $\pi$ , est une fonction ne dépendant que de la saturation (pour le cas  $\pi(x, s)$  voir le Chapitre V). Elle est définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , continue Lipschitzienne,  $C^1$  et strictement croissante sur  $[0, 1]$ . Nous supposons de plus que*

- pour tout  $s \geq 1$ ,  $\pi(s) = \pi_{\max}$ ,  $\pi_{\max} \in \mathbb{R}_+^*$ ,
- pour tout  $s \leq 0$ ,  $\pi(s) = \pi(0)$ .

H1-5.  $s_{\text{ini}} \in L^\infty(\Omega)$  et  $0 \leq s_{\text{ini}}(x) \leq 1$  p.p.  $x \in \Omega$ .

H1-6. Pour tout  $\alpha \in \{o, w\}$ , les densités  $\rho_\alpha$  sont constantes et  $\rho_o < \rho_w$ .

Nous utiliserons également les notations suivantes :

**Notation IV.1.1**

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \sup_{s, s' \in \mathbb{R}, s \neq s'} \frac{|\eta_\alpha(s') - \eta_\alpha(s)|}{|s' - s|}, \forall \alpha \in \{o, w\}, \\ \eta_T(s) &= \eta_o(s) + \eta_w(s), \\ \gamma &= \sup_{s \in \mathbb{R}} \eta_T(s), \\ L_\pi &= \sup_{s, s' \in \mathbb{R}, s \neq s'} \frac{|\pi(s') - \pi(s)|}{|s' - s|}. \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité d'une solution faible au problème (IV.1) a été établie dans (Kroener & Luckhaus 1984), (Alt & di Benedetto 1985), (Chavent & Jaffré 1986), (Antontsev, Kazhikhov & Monakhov 1990), (Langlo & Espedal 1992), (Feng 1995), (Chen & Ewing 1999), (Chen 2001) sous différentes hypothèses.

Sur le plan numérique, de nombreuses méthodes de résolution ont été mises en oeuvre au cours des dernières décennies : différences finies (Peaceman 1977), (Aziz & Settari 1979), éléments finis mixtes hybrides (Ewing & Heinemann 1984), (Ewing & Wheeler 1984), (Chavent & Jaffré 1986), (Arbogast, Wheeler & Zhang 1996) et volumes finis (Forsyth 1989a), (Forsyth 1989b), (Eymard, Gallouët & Herbin 2000).

Dans ce chapitre nous nous intéressons à un schéma volumes finis centrés appelé schéma amont des pétroliers (voir équations (IV.9)-(IV.10)-(IV.11)-(IV.12)). A la fin des années 80 des études mathématiques ont été réalisées sur ce schéma en dimension  $d = 1$  (Pfirtzel 1987), (Sammon 1988), (Brenier & Jaffré 1991). Quelques-unes de ses propriétés ont été étendues à des espaces de dimension  $d = 2, 3$  (Vignal 1996), (Eymard et al. 2000), (Eymard, Herbin & Michel 2003) mais, dans tous les cas, le terme de gravité n'était pas pris en compte. En fait, en l'absence de pression capillaire, de nombreux problèmes

mathématiques apparaissent. Nous ne sommes, par exemple, pas encore en mesure de montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible au système (IV.1).

Notre étude s'organise de la façon suivante. Nous étudions tout d'abord le schéma amont des pétroliers (IV.9)-(IV.10)-(IV.11)-(IV.12) en l'absence de pression capillaire et nous montrons des estimations a priori en pression (Proposition IV.4.1, Corollaire IV.4.1), saturation (Proposition IV.4.3) et l'existence d'une solution discrète (Proposition IV.4.2). Pour clore cette première partie, nous mentionnons quelques-unes des difficultés qui apparaissent dans la preuve de convergence (voir § IV.4.4). Puis, dans un deuxième temps, nous effectuons une étude en présence de pression capillaire et nous introduisons un nouveau schéma dit à nombre de Péclet variable (voir équations (IV.9)-(IV.19)-(IV.20)-(IV.22)-(IV.23)-(IV.24)). Nous effectuons sur ce schéma une étude mathématique semblable à la première partie (estimations en pression (Proposition IV.5.1, Corollaire IV.5.1), stabilité  $L^\infty$  des saturations (Proposition IV.5.2), existence d'un couple de solutions discret (Proposition IV.5.3)). Nous montrons ensuite la convergence de ce schéma dans un cas simplifié (Théorème IV.5.1). Nous présentons quelques résultats numériques en fin de chapitre (voir §IV.6).

## IV.2 Discrétisation volumes finis admissible

Nous précisons tout d'abord les notions de maillage et de discrétisation admissibles pour les méthodes de type volumes finis centrés (Eymard et al. 2000).

**Définition IV.2.1 (Maillage volumes finis admissible)** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  satisfaisant les Hypothèses H1-1. Une discrétisation admissible de  $\Omega$ , que nous noterons  $\mathcal{M}$ , est un triplet  $(\mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$  où*

- $\mathcal{T}$  est un ensemble de volumes de contrôle correspondant à des ouverts disjoints de  $\Omega$  polygonaux et connexes. Ces éléments vérifient  $\bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bar{K} = \bar{\Omega}$ . Nous notons  $\partial K = \bar{K} \setminus K$  la frontière du volume  $K$ ,  $m(K)$  sa mesure (sa longueur pour  $d = 1$ , son aire pour  $d = 2$ , son volume pour  $d = 3$ ).
- $\mathcal{E}$  désigne l'ensemble des faces du maillage. Nous supposons que, pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ , il existe un hyperplan  $E$  de  $\mathbb{R}^d$  et un volume de contrôle  $K \in \mathcal{T}$  tel que  $\bar{\sigma} = E \cap \partial K$  où  $\sigma$  est un ouvert non vide de  $E$ . Nous notons  $\mathcal{E}_K$  le sous-ensemble de  $\mathcal{E}$  composé des faces du volume  $K$ . Ainsi  $\partial K = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \bar{\sigma}$ . Pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ , nous avons
  - soit  $\sigma \in \mathcal{E}_{int} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \exists (K, L) \in \mathcal{T}^2, K \neq L \text{ tel que } \bar{\sigma} = \bar{K} \cap \bar{L}\}$  (dans ce cas, nous désignons également par  $K|L$  la face  $\sigma$ ),
  - soit  $\sigma \in \mathcal{E}_{ext} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \text{ tel que } \sigma \in \partial\Omega\}$ .

L'ensemble des volumes voisins d'un volume  $K$  est noté  $N(K) = \{L \in \mathcal{T}, \sigma = K|L \in \mathcal{E}_K\}$ . Le vecteur normal unitaire à une face  $K|L \in \mathcal{E}_{int}$  extérieur à  $K$  est noté  $\vec{n}_{K,L}$ . Pour une face  $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$  nous désignons par  $\vec{n}_\sigma$  le vecteur normal unitaire extérieur au domaine  $\Omega$ . L'aire d'une face  $\sigma$  est notée  $m(\sigma)$ .

- $\mathcal{P}$  est un ensemble de points  $(x_K)_{K \in \mathcal{T}}$  satisfaisant les propriétés suivantes :
  - $\forall K \in \mathcal{T}, x_K \in K,$
  - pour  $(K, L) \in \mathcal{T}^2$ , la droite  $(x_K, x_L)$  joignant les points  $x_K$  et  $x_L$  est orthogonale à la face  $K|L$ ,
  - pour  $\sigma \in \mathcal{E}$ ,  $d_\sigma$  désigne la distance entre  $x_K$  et  $x_L$  si  $\sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}$  ou la distance entre  $x_K$  et la face  $\sigma$  si  $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ ,
  - pour  $K|L \in \mathcal{E}_{int}$ , la transmissivité  $\tau_{K|L}$  à travers la face  $K|L$  est égale à  $\frac{m(K|L)}{d_{K|L}}$ ,
  - pour tout  $K \in \mathcal{T}$  et pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ ,  $d_{K,\sigma}$  désigne la distance entre le point  $x_K$  et la face  $\sigma$ ,
  - pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K$ , la transmissivité  $\tau_{K,\sigma}$  à travers la face  $\sigma$  est égale à  $\frac{m(\sigma)}{d_{K,\sigma}}$ .

Nous notons  $D_{K|L}$  la réunion des deux cônes de sommet  $x_K$  et  $x_L$  et ayant pour base commune l'interface  $K|L$ . Pour une face  $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$  telle que  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ ,  $D_\sigma$  désigne le cône de sommet  $x_K$  et de base  $\sigma$ .

Nous posons  $\text{size}(\mathcal{M}) = \sup\{\text{diam}(K), K \in \mathcal{T}\}$ . La régularité  $\text{regul}(\mathcal{M})$  du maillage  $\mathcal{M}$  est définie par

$$\text{regul}(\mathcal{M}) = \max_{K \in \mathcal{T}, \sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{\text{diam}(K)}{d_{K,\sigma}}. \quad (\text{IV.4})$$

**Remarque 6 :** Remarquons que, pour tout  $K \in \mathcal{T}$ , il existe  $\alpha > 0$  ne dépendant que de  $\text{regul}(\mathcal{M})$  et de la dimension du domaine tel que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) \text{diam}(K) \leq \alpha m(K).$$

En effet nous avons

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) \text{diam}(K) \leq \text{regul}(\mathcal{M}) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) d_{K,\sigma} \leq d \text{regul}(\mathcal{M}) m(K) = \alpha m(K).$$

□

Pour simplifier les notations, nous ne considérerons dans ce qui suit (y compris au chapitre V) que des pas de temps constants. Les résultats établis peuvent être facilement étendus à des pas de temps variables.

**Définition IV.2.2 (Discrétisation en temps)** Une discrétisation de l'intervalle de temps  $[0, T]$  est donnée par un entier  $M \in \mathbb{N}$  tel que  $T = (M + 1)\delta t$ . La suite des dates  $(t_n)_{n \in \{0..M+1\}}$ , où nous calculerons une solution discrète, est alors donnée par  $t_n = n\delta t$ .

**Définition IV.2.3 (Discrétisation admissible en espace et en temps)** Une discrétisation admissible  $\mathcal{D}$  du domaine  $\Omega \times [0, T]$  se compose d'un couple  $(\mathcal{M}, M)$  où  $\mathcal{M}$  est une discrétisation du domaine  $\Omega$  au sens de la Définition IV.2.1 et où  $M \in \mathbb{N}$  définit une subdivision régulière de l'intervalle  $[0, T]$  (voir Définition IV.2.2). Nous notons  $\text{size}(\mathcal{D}) = \max(\text{size}(\mathcal{M}), \delta)$ .

## IV.3 Définition des schémas

### IV.3.1 Notations préliminaires

Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  (Définition IV.2.3),  $K \in \mathcal{T}$  et  $n \in \{0 \dots M\}$ . Pour une variable  $u$ , nous notons  $u_K^{n+1}$  son approximation sur l'élément  $K$  et sur l'intervalle de temps  $]n\delta, (n+1)\delta]$ ,  $u_K^0$  désignant une approximation constante par morceaux de la condition initiale. Nous désignons par

- $\mathcal{X}(\mathcal{T})$  l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur le maillage  $\mathcal{T}$  :  $u_{\mathcal{T}} \in \mathcal{X}(\mathcal{T})$  est définie, pour tout  $x \in \Omega$ , par  $u_{\mathcal{T}}(x) = u_K$  si  $x \in K$ ,
- $\mathcal{X}(\mathcal{D})$  l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur la discrétisation  $\mathcal{D}$  :  $u_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  est définie, pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$  tel que  $t \in ]n\delta, (n+1)\delta]$  par  $u_{\mathcal{D}}(\cdot, t) = u_{\mathcal{T}}^{n+1} \in \mathcal{X}(\mathcal{T})$  et  $u_{\mathcal{D}}(\cdot, 0) = u_{\mathcal{T}}^0 \in \mathcal{X}(\mathcal{T})$ .

Nous utilisons également la notation  $\delta u_{K,L} = u_L - u_K$ .

Il s'agit maintenant de définir un couple de fonctions  $(s_{\mathcal{D}}, p_{w,\mathcal{D}}) \in \mathcal{X}(\mathcal{D})^2$  qui constitueront une approximation des fonctions  $(s, p_w)$ .

### IV.3.2 Le schéma amont des pétroliers

#### Construction du schéma

En intégrant formellement les équations du système (IV.1) sur le volume  $K$  et l'intervalle de temps  $]n\delta, (n+1)\delta]$ , nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_K \phi(x) (s(x, t_{n+1}) - s(x, t_n)) dx + \\ \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \int_{\partial K} \Upsilon(x) (\eta_o(s)(\rho_o \vec{g} - \vec{\nabla} p_o))(x, t) \cdot \vec{n}(x) d\xi(x) dt = 0 \\ \\ - \int_K \phi(x) (s(x, t_{n+1}) - s(x, t_n)) dx + \\ \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \int_{\partial K} \Upsilon(x) (\eta_w(s)(\rho_w \vec{g} - \vec{\nabla} p_w))(x, t) \cdot \vec{n}(x) d\xi(x) dt = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.5})$$

où  $\vec{n}(x)$  désigne le vecteur normal unitaire extérieur au point  $x \in \partial K$ . En tenant compte des conditions aux limites et en utilisant une formulation implicite en temps pour la pression et explicite ou implicite en temps pour la saturation dans les termes de flux, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_K \phi(x) (s(x, t_{n+1}) - s(x, t_n)) dx + \\ \delta t \sum_{L \in N(K)} \int_{K|L} \Upsilon(x) \left( \eta_o(s)(x, t_{n,n+1}) (\rho_o \vec{g} - \vec{\nabla} p_o(x, t_{n+1})) \right) \cdot \vec{n}_{K,L} d\xi(x) = 0 \\ - \int_K \phi(x) (s(x, t_{n+1}) - s(x, t_n)) dx + \\ \delta t \sum_{L \in N(K)} \int_{K|L} \Upsilon(x) \left( \eta_w(s)(x, t_{n,n+1}) (\rho_w \vec{g} - \vec{\nabla} p_w(x, t_{n+1})) \right) \cdot \vec{n}_{K,L} d\xi(x) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{IV.6})$$

Enfin, en discrétisant les gradients par un schéma de type différences finies centré et en remplaçant les différents termes par leur approximation discrète, nous obtenons

$$\forall n \in \{0 \dots M\}, \forall K \in \mathcal{T}, \left\{ \begin{array}{l} m(K) \phi_K \frac{s_K^{n+1} - s_K^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} \Upsilon_{K|L} (\eta_o)_{K|L}^{n+1} (\rho_o g \delta z_{K,L} - \delta p_{o,K,L}^{n+1}) = 0 \\ -m(K) \phi_K \frac{s_K^{n+1} - s_K^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} \Upsilon_{K|L} (\eta_w)_{K|L}^{n+1} (\rho_w g \delta z_{K,L} - \delta p_{w,K,L}^{n+1}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.7})$$

où

- $\vec{g} \cdot \vec{x}_K x_L = g \delta z_{K,L}$ ,
- $p_{o,K}^{n+1} = p_{w,K}^{n+1} + \pi(s_K^{n+1})$ ,
- $\phi_K = \frac{1}{m(K)} \int_K \phi(x) dx$ ,
- $\frac{1}{\Upsilon_{K|L}} = \frac{1}{m(K|L)} \left( \frac{d_{K,K|L}}{\Upsilon(x_K)} + \frac{d_{L,K|L}}{\Upsilon(x_L)} \right)$ .

Pour tout  $\alpha \in \{o, w\}$ , les mobilités  $(\eta_\alpha)_{K|L}^{n+1}$  sont calculées en fonction du sens d'écoulement de la phase  $\alpha$ , i.e.,

$$(\eta_\alpha)_{K|L}^{n+1} = \begin{cases} (\eta_\alpha)_K^{n+1} = \eta_\alpha(s_K^{n,n+1}) & \text{si } \rho_\alpha g \delta z_{K,L} - \delta p_{\alpha,K,L}^{n+1} \geq 0 \\ (\eta_\alpha)_L^{n+1} = \eta_\alpha(s_L^{n,n+1}) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

**Remarque 7 :** Nous utilisons l'exposant  $n+1$  pour les mobilités  $(\eta_\alpha)_{K|L}$  car leur expression dépend de  $\delta p_{\alpha,K,L}^{n+1}$ . L'exposant  $n,n+1$  utilisé pour les saturations indique que ces valeurs peuvent être prises explicites ou implicites.  $\square$

La condition initiale discrète est donnée par

$$s_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K s_{\text{ini}}(x) dx, \quad \forall K \in \mathcal{T}. \quad (\text{IV.9})$$

**Expression du schéma à l'aide du flux total**

En sommant les équations du système (IV.7), nous obtenons

$$\sum_{L \in N(K)} \Upsilon_{K|L} \left( \begin{array}{l} \left( (\eta_o)_{K|L}^{n+1} \rho_o g + (\eta_w)_{K|L}^{n+1} \rho_w g \right) \delta z_{K,L} - \\ \left( (\eta_o)_{K|L}^{n+1} + (\eta_w)_{K|L}^{n+1} \right) \delta p_{w,K,L}^{n+1} - (\eta_o)_{K|L}^{n+1} \delta \pi_{K,L}^{n+1} \end{array} \right) = 0.$$

Nous pouvons réécrire cette égalité sous la forme

$$\forall n \in \{0 \dots M\}, \forall K \in \mathcal{T}, \sum_{L \in N(K)} Q_{K,L}^{n+1} = 0 \quad (\text{IV.10})$$

où  $Q_{K,L}^{n+1}$  désigne le flux total discret égal à la somme des flux des deux phases :

$$Q_{K,L}^{n+1} = \Upsilon_{K|L} \left( \begin{array}{l} \left( (\eta_o)_{K|L}^{n+1} \rho_o g + (\eta_w)_{K|L}^{n+1} \rho_w g \right) \delta z_{K,L} - \\ \left( (\eta_o)_{K|L}^{n+1} + (\eta_w)_{K|L}^{n+1} \right) \delta p_{w,K,L}^{n+1} - (\eta_o)_{K|L}^{n+1} \delta \pi_{K,L}^{n+1} \end{array} \right). \quad (\text{IV.11})$$

**Remarque 8 :**  $\forall K|L \in \mathcal{E}_{int}$ , nous avons  $Q_{K,L}^{n+1} = -Q_{L,K}^{n+1}$ . □

Notons  $G_{K,L} = \Upsilon_{K|L} (\rho_o - \rho_w) g \delta z_{K,L}$ . Grâce à l'égalité (IV.11) nous pouvons exprimer  $\delta p_{w,K,L}^{n+1}$  en fonction de  $Q_{K,L}^{n+1}$  et le système (IV.7) se réécrit sous la forme

$$m(K) \phi_K \frac{s_K^{n+1} - s_K^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} \frac{(\eta_o)_{K|L}^{n+1} \left( Q_{K,L}^{n+1} + (\eta_w)_{K|L}^{n+1} (G_{K,L} - \Upsilon_{K|L} \delta \pi_{K,L}^{n+1}) \right)}{(\eta_o)_{K|L}^{n+1} + (\eta_w)_{K|L}^{n+1}} = 0, \quad (\text{IV.12})$$

$$-m(K) \phi_K \frac{s_K^{n+1} - s_K^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} \frac{(\eta_w)_{K|L}^{n+1} \left( Q_{K,L}^{n+1} - (\eta_o)_{K|L}^{n+1} (G_{K,L} - \Upsilon_{K|L} \delta \pi_{K,L}^{n+1}) \right)}{(\eta_o)_{K|L}^{n+1} + (\eta_w)_{K|L}^{n+1}} = 0. \quad (\text{IV.13})$$

**Définition IV.3.1** *Compte tenu des relations (IV.8), nous introduisons la fonction  $F$*

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b, Q, R) & \mapsto F(a, b, Q, R), \end{cases}$$

définie par

1. si  $Q \geq 0$  et  $R \leq 0$  :

$$F(a, b, Q, R) = \begin{cases} \frac{\eta_o(a) (Q + R \eta_w(a))}{\eta_o(a) + \eta_w(a)} & \text{si } Q + R \eta_w(a) \geq 0, \quad (i) \\ \frac{\eta_o(b) (Q + R \eta_w(a))}{\eta_o(b) + \eta_w(a)} & \text{sinon,} \quad (ii) \end{cases}$$

2. si  $Q \geq 0$  et  $R > 0$  :

$$F(a, b, Q, R) = \begin{cases} \frac{\eta_o(a)(Q + R\eta_w(a))}{\eta_o(a) + \eta_w(a)} & \text{si } Q - R\eta_o(a) \geq 0, \quad (i) \\ \frac{\eta_o(a)(Q + R\eta_w(b))}{\eta_o(a) + \eta_w(b)} & \text{sinon.} \quad (ii) \end{cases}$$

Pour  $Q < 0$ , nous posons

$$F(a, b, Q, R) = -F(b, a, -Q, -R). \quad (\text{IV.14})$$

**Remarque 9 :**  $F$  est une fonction continue Lipschitzienne et croissante (resp. décroissante) par rapport à son premier argument (resp. son second argument). Ce résultat reste valable lorsque  $R$  est défini par

$$R(a, b) = G - \tau(\pi(b) - \pi(a)), \quad (\text{IV.15})$$

pour  $G \in \mathbb{R}$  et  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$  (voir Lemme B.1.1). Les constantes de Lipschitz de  $F$  sont bornées par  $C_\eta(|Q| + |R|)$ . La constante  $C_\eta$  est introduite dans le Lemme B.1.1.  $\square$

En utilisant cette nouvelle fonction, l'équation (IV.12) se réécrit sous la forme

$$m(K)\phi_K \frac{s_K^{n+1} - s_K^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} F(s_K^{n,n+1}, s_L^{n,n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L} - \Upsilon_{K|L} \delta \pi_{K,L}^{n+1}) = 0. \quad (\text{IV.16})$$

Le schéma amont des pétroliers définit ainsi des fonctions  $s_{\mathcal{D}}$  et  $p_{w,\mathcal{D}}$  solutions des équations (IV.7)-(IV.9) ou de façon équivalente solutions de (IV.9)-(IV.10)-(IV.11)-(IV.16).

**Remarque 10 :** Les équations de conservation du système continu (IV.1) peuvent également être reformulées grâce au flux total  $\vec{Q}$  défini par

$$\vec{Q} = \Upsilon \left( \left( \eta_o(s)\rho_o + \eta_w(s)\rho_w \right) \vec{g} - \eta_T(s) \vec{\nabla} p_w - \eta_o(s) \vec{\nabla} \pi(s) \right).$$

En exprimant  $\vec{\nabla} p_w$  en fonction de  $\vec{Q}$ , le système est équivalent à

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{Q}) = 0, \\ \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \left( f(s, \vec{Q}, \vec{G}) - \Upsilon(\phi) \vec{\nabla} \varphi(s) \right) = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

où

$$\bullet \vec{Q} = \Upsilon \left( \left( \eta_o(s)\rho_o + \eta_w(s)\rho_w \right) \vec{g} - \eta_T(s) \vec{\nabla} p \right),$$

- $\bar{p}$  désigne la pression globale introduite par (Chavent & Jaffré 1986) et définie par 
$$\bar{p} = p_w + \int_0^s \frac{\eta_o}{\eta_T}(v) \pi'(v) dv,$$
- $f(s, \vec{Q}, \vec{G}) = \frac{\eta_o}{\eta_T}(s) \vec{Q} + \frac{\eta_o \eta_w}{\eta_T}(s) \vec{G},$
- $\vec{G} = \Upsilon(\rho_o - \rho_w) \vec{g},$
- $\varphi'(s) = \frac{\eta_o(s) \eta_w(s)}{\eta_o(s) + \eta_w(s)} \pi'(s).$

C'est à partir des équations de conservation de l'huile et de l'eau exprimées sous la forme (IV.17) que nous allons définir le schéma à nombre de Péclet variable.  $\square$

### IV.3.3 Le schéma à nombre de Péclet variable

#### Construction du schéma

Considérons à nouveau une discrétisation admissible  $\mathcal{D}$  du domaine  $\Omega \times [0, T]$  (voir Définition IV.2.3), un volume  $K \in \mathcal{T}$  et un entier  $n \in \{0 \dots M\}$ . Comme pour le schéma amont des pétroliers, nous intégrons formellement les équations du système (IV.17) sur le volume  $K$  et l'intervalle de temps  $]n\delta t, (n+1)\delta t]$  :

$$\begin{cases} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{\partial K} \vec{Q}(x, t) \cdot \vec{n}(x) d\zeta(x) dt = 0, \\ \int_K \phi(x) (s(x, t_{n+1}) - s(x, t_n)) dx + \\ \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{\partial K} \left( f(s, \vec{Q}, \vec{G})(x, t) - \Upsilon(x) \vec{\nabla} \varphi(s)(x, t) \right) \cdot \vec{n}(x) d\zeta(x) dt = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

Compte tenu des conditions aux limites, nous avons pour la première équation du système (IV.18),

$$\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \sum_{L \in N(K)} \int_{K|L} \vec{Q}(x, t) \cdot \vec{n}_{K,L} d\zeta(x) dt = 0.$$

En discrétisant les gradients par un schéma de type différences finies centré et en calculant les mobilités sur les interfaces grâce à une moyenne harmonique, nous obtenons

$$\sum_{L \in N(K)} Q_{K,L}^{n+1} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

où

$$\bullet \quad Q_{K,L}^{n+1} = \Upsilon_{K|L} \left( \left( \tilde{\eta}_{o,K|L}^{n,n+1} \rho_o + \tilde{\eta}_{w,K|L}^{n,n+1} \rho_w \right) g \delta z_{K,L} - \tilde{\eta}_{T,K|L}^{n,n+1} \bar{p}_{K,L}^{n+1} \right), \quad (\text{IV.20})$$

$$\forall \alpha \in \{o, w, T\}, \frac{1}{\tilde{\eta}_{\alpha, K|L}^{n, n+1}} = \frac{1}{d_{K|L}} \left( \frac{d_{K, K|L}}{\eta_{\alpha}(s_K^{n, n+1})} + \frac{d_{L, K|L}}{\eta_{\alpha}(s_L^{n, n+1})} \right).$$

Déterminons maintenant le schéma associé à la seconde équation du système (IV.17). Dans cette équation, nous approchons la partie convective du flux à l'aide de la fonction  $F$  (voir Définition IV.3.1) et nous utilisons un schéma aux différences finies centré pour le terme  $\vec{\nabla} \varphi(s)$ . Nous avons alors

$$m(K)\phi_K \frac{s_K^{n+1} - s_K^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} \left( F(s_K^{n, n+1}, s_L^{n, n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - \Upsilon_{K|L}(\varphi(s_L^{n, n+1}) - \varphi(s_K^{n, n+1})) \right) = 0. \quad (\text{IV.21})$$

En l'absence de pression capillaire, le décentrage opéré au niveau de la fonction  $F$  introduit une diffusion numérique permettant de stabiliser le calcul des saturations. Ici il n'est pas nécessaire de décentrer systématiquement le schéma pour rester stable : lorsque la diffusion liée à la capillarité est suffisante, nous pouvons augmenter la précision du schéma en recentrant la partie convective du flux. Pratiquement, nous écrivons le terme de transport comme une combinaison linéaire entre le terme centré et le terme décentré. Le paramètre  $0 \leq \theta_{K|L}^{n+1} \leq 1$  intervenant dans cette combinaison linéaire dépend de la face du domaine et du gradient de pression capillaire sur cette face. Le flux convectif est alors donné par la

**Définition IV.3.2** *Soit :*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \mathbb{R}^5 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, a, b, Q, G) & \mapsto \mathcal{F}(\theta, a, b, Q, G), \end{cases}$$

définie par

$$\mathcal{F}(\theta, a, b, Q, G) = \left( \theta F(a, b, Q, G) + (1 - \theta) F\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, Q, G\right) \right) \quad (\text{IV.22})$$

où  $F(a, b, Q, G)$  est donnée par la Définition IV.3.1.

Grâce à cette nouvelle expression du flux, l'équation (IV.21) devient

$$m(K)\phi_K \frac{s_K^{n+1} - s_K^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} \mathcal{F}(\theta_{K|L}^{n+1}, s_K^{n, n+1}, s_L^{n, n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - \Upsilon_{K|L}(\varphi(s_L^{n, n+1}) - \varphi(s_K^{n, n+1})) = 0 \quad (\text{IV.23})$$

où

$$\theta_{K|L}^{n+1} = \max \left( 0, 1 - \frac{\Upsilon_{K|L}(\varphi(s_L^{n, n+1}) - \varphi(s_K^{n, n+1}))}{\Lambda_{K,L}^{n+1}(s_K^{n, n+1}, s_L^{n, n+1})} \right), \quad (\text{IV.24})$$

$$\Lambda_{K,L}^{n+1}(a, b) = F\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}\right) - F(a, b, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}).$$

A l'instant initial la solution discrète est donnée par la relation (IV.9).

Dans ce qui suit nous effectuons une première étude du schéma amont des pétroliers en l'absence de capillarité. Autrement dit, nous supposons que, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\pi(s) = 0$ . Remarquons que, dans ce cas, les équations (IV.12) et (IV.23) coïncident.

## IV.4 Etude du schéma amont des pétroliers en l'absence de capillarité

Dans ce paragraphe, nous travaillons uniquement avec la forme explicite du schéma (IV.9)–(IV.12). Les résultats que nous montrons restent valables dans le cas implicite.

Nous commençons par démontrer quelques estimations a priori sur la pression de l'eau et en particulier une borne sur sa norme dans  $L^2(\Omega)$ . Cette estimation nous permettra de montrer l'existence d'une solution discrète au système (IV.9)–(IV.12). Nous montrons également la stabilité du calcul des saturations. Nous ne sommes, par contre, pas encore en mesure de montrer la convergence du schéma dans le cas général. Nous détaillons, à la fin de cette première partie, quelques-unes des difficultés rencontrées.

### IV.4.1 Estimations sur la pression

Nous montrons, dans un premier temps, que la semi-norme  $H^1$ -discrète de la fonction  $p_{w,\mathcal{T}}^{n+1}$  est uniformément bornée pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ . Nous déduisons ensuite une majoration de sa norme dans  $L^2(\Omega)$  grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger.

La définition qui suit précise la notion de semi-norme  $H^1$ -discrète.

**Définition IV.4.1** *Soient un domaine  $\Omega$  vérifiant H1-1 et  $\mathcal{M}$  un maillage admissible au sens de la Définition IV.2.1. La semi-norme  $H^1$ -discrète d'une fonction  $u \in \mathcal{X}(\mathcal{T})$  est définie par*

$$|u|_{1,\mathcal{M}} = \left( \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (\delta u_{K,L})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , la fonction  $p_{w,\mathcal{T}}^{n+1}$  vérifie alors la proposition suivante :

**Proposition IV.4.1** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 vérifiées. Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , soient  $(p_{w,\mathcal{T}}^{n+1}, s_{\mathcal{T}}^{n+1}) \in (\mathcal{X}(\mathcal{T}))^2$  un couple de solutions des équations (IV.9)–(IV.12). Alors il existe une constante  $C_1$  indépendante de la discrétisation  $\mathcal{D}$  et de la solution  $(p_{w,\mathcal{T}}^{n+1}, s_{\mathcal{T}}^{n+1})$  telle que*

$$|p_{w,\mathcal{T}}^{n+1}|_{1,\mathcal{M}} \leq C_1. \tag{IV.25}$$

(Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , l'existence d'une solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, p_{w,\mathcal{T}}^{n+1})$  au système (IV.9)–(IV.12) est établie dans la Proposition IV.4.2.)

Preuve :

Nous montrons tout d'abord qu'il existe une constante  $C_2$  telle que, pour tout  $K \in \mathcal{T}$  et  $n \in \{0 \dots M\}$ ,  $p_{w,K}^{n+1}$  vérifie

$$\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} \eta_{T,K|L}^{n+1} (\delta p_{w,K,L}^{n+1})^2 \leq C_2^2. \quad (\text{IV.26})$$

En multipliant l'équation (IV.10) par  $p_{w,K}^{n+1}$  et en sommant sur l'ensemble des volumes du maillage, nous aboutissons à

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \Upsilon_{K|L} \left( (\eta_{o,K|L}^{n+1} \rho_o + \eta_{w,K|L}^{n+1} \rho_w) g \delta z_{K,L} - \eta_{T,K|L}^{n+1} \delta p_{w,K,L}^{n+1} \right) p_{w,K}^{n+1} = 0.$$

Ceci équivaut à

$$E_1 = E_2$$

avec

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \Upsilon_{K|L} \eta_{T,K|L}^{n+1} \delta p_{w,K,L}^{n+1} p_{w,K}^{n+1}, \\ E_2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \Upsilon_{K|L} \eta_{T,K|L}^{n+1} h_{K,L}^{n+1} p_{w,K}^{n+1} \end{aligned}$$

où

$$h_{K,L}^{n+1} = \begin{cases} \frac{(\eta_{o,K|L}^{n+1} \rho_o + \eta_{w,K|L}^{n+1} \rho_w) g \delta z_{K,L}}{\eta_{T,K|L}^{n+1}} & \text{si } \eta_{T,K|L}^{n+1} \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En regroupant les termes par face dans  $E_1$ , nous obtenons

$$E_1 = - \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} \eta_{T,K|L}^{n+1} (\delta p_{w,K,L}^{n+1})^2.$$

De la même façon, nous avons

$$E_2 = - \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} \eta_{T,K|L}^{n+1} h_{K,L}^{n+1} \delta p_{w,K,L}^{n+1}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz, nous obtenons

$$|E_2| \leq \left( \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} \eta_{T,K|L}^{n+1} (h_{K,L}^{n+1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} \eta_{T,K|L}^{n+1} (\delta p_{w,K,L}^{n+1})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Compte tenu des Hypothèses IV.1.1 et de l'inégalité

$$\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) d_{K|L} \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) d_\sigma = d m(\Omega),$$

nous pouvons majorer le premier terme du membre de droite par

$$\left( \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} \eta_{T,K|L}^{n+1} (h_{K,L}^{n+1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( C_{\Upsilon, sup} \gamma d m(\Omega) \right)^{\frac{1}{2}} \rho_w g = C_2.$$

En utilisant l'inégalité,  $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ , nous majorons  $E_2$  par

$$|E_2| \leq \frac{1}{2} C_2^2 + \frac{1}{2} \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} \eta_{T,K|L}^{n+1} (\delta p_{w,K,L}^{n+1})^2.$$

Enfin, en regroupant les majorations obtenues pour les termes  $E_1$  et  $E_2$ , nous obtenons la majoration (IV.26).

Maintenant considérons une face  $K|L \in \mathcal{E}_{int}$ . Si le choix de la maille amont (IV.8) sur cette face est le même pour les deux phases, alors nous avons, d'après H1-3

$$\eta_{T,K|L}^{n+1} \geq \beta.$$

Dans le cas contraire, les sens d'écoulement des deux phases sont opposés et nous avons soit

$$0 \leq \rho_o g \delta z_{K,L} \leq \delta p_{w,K,L}^{n+1} \leq \rho_w g \delta z_{K,L}$$

soit

$$\rho_w g \delta z_{K,L} \leq \delta p_{w,K,L}^{n+1} \leq \rho_o g \delta z_{K,L} \leq 0.$$

Nous en déduisons alors que

$$(\delta p_{w,K,L}^{n+1})^2 \leq (\rho_w g \delta z_{K,L})^2. \quad (\text{IV.27})$$

Notons

$$\begin{aligned} \varepsilon_{o,K|L} &= \text{sign}(\rho_o g \delta z_{K,L} - \delta p_{w,K,L}^{n+1}), \\ \varepsilon_{w,K|L} &= \text{sign}(\rho_w g \delta z_{K,L} - \delta p_{w,K,L}^{n+1}). \end{aligned}$$

En sommant (IV.27) sur l'ensemble des faces intérieures du domaine, nous obtenons

$$\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} \beta \chi_{\{\varepsilon_{o,K|L} \neq \varepsilon_{w,K|L}\}} (\delta p_{w,K,L}^{n+1})^2 \leq \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} \beta (\rho_w g \delta z_{K,L})^2$$

où  $\chi_A = 1$  si la condition  $A$  est vérifiée, 0 sinon. Or

$$\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} \beta (\rho_w g \delta z_{K,L})^2 \leq C_{\Upsilon, sup} \beta (\rho_w g)^2 d m(\Omega) = C_3.$$

De plus, nous avons

$$C_{\Upsilon, inf} \beta |p_{w, \mathcal{T}}^{n+1}|_{1, \mathcal{M}}^2 \leq \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} (\beta \chi_{\{\varepsilon_{o,K|L} \neq \varepsilon_{w,K|L}\}} + \eta_{T, K|L}^{n+1}) (\delta p_{w, K, L}^{n+1})^2 \leq C_3 + C_2^2.$$

Nous obtenons alors l'inégalité (IV.25) avec  $C_1 = \left( \frac{C_3 + C_2^2}{\beta C_{\Upsilon, inf}} \right)^{\frac{1}{2}}$ . ■

De l'inégalité (IV.25) nous pouvons maintenant déduire une majoration de  $\|p_{w, \mathcal{T}}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}$ .

**Corollaire IV.4.1** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 vérifiées. Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , une solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, p_{w, \mathcal{T}}^{n+1}) \in \mathcal{X}(\mathcal{T})^2$  du système (IV.9)–(IV.12) vérifie*

$$\|p_{w, \mathcal{T}}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4 \tag{IV.28}$$

où  $C_4$  est une constante indépendante de  $(s_{\mathcal{M}}^{n+1}, p_{w, \mathcal{M}}^{n+1})$  et de  $\mathcal{D}$ .

Preuve :

Avec des conditions de type Neumann sur le bord, la pression est connue à une constante près. Nous pouvons donc imposer

$$\int_{\Omega} p_{w, \mathcal{T}}^{n+1}(x) dx = 0.$$

Nous appliquons ensuite l'inégalité de Poincaré-Wirtinger démontrée dans (Eymard et al. 2000) et que nous rappelons ci-dessous :

**Lemme IV.4.1** *Soient  $\Omega$  vérifiant H1-1 et  $\mathcal{T}$  un maillage volumes finis admissible au sens de la Définition IV.2.1. Pour tout  $u \in \mathcal{X}(\mathcal{T})$ , il existe  $C_5 \in \mathbb{R}^+$  dépendant uniquement de  $\Omega$  telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_5 |u|_{1, \mathcal{M}}^2 + \frac{2}{m(\Omega)} \left( \int_{\Omega} u(x) dx \right)^2.$$

Nous obtenons le résultat en prenant  $C_4 = C_5 C_1^2$ . ■

Une autre conséquence importante de la Proposition IV.4.1 est le Corollaire IV.4.2 qui garantit l'existence d'un pas de temps  $\delta t > 0$  satisfaisant la condition CFL (IV.29) assurant la stabilité  $L^\infty$  du schéma (§ IV.4.3).

**Corollaire IV.4.2** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 vérifiées. Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Alors il existe une constante  $C_{\mathcal{T}}$  dépendante du maillage  $\mathcal{M}$  et des données du problème mais pas de  $\delta$  et ni d'une solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, p_{w, \mathcal{T}}^{n+1})$  de (IV.9)–(IV.12), telle que*

$$\forall n \in \{0 \dots M\}, \inf_{K \in \mathcal{T}} \left( \frac{m(K)}{\sum_{L \in N(K)} C_{\eta} (|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|)} \right) \geq C_{\mathcal{M}},$$

où  $C_{\eta}$  est définie dans le Lemme B.1.1.

Preuve :

De l'inégalité (IV.25), nous déduisons que

$$\forall n \in \{0 \dots M\}, \forall K|L \in \mathcal{E}_{int}, |\delta p_{w, K, L}^{n+1}| \leq \sqrt{\frac{C_1^2}{\tau_{K|L}}}.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \{0 \dots M\}, \forall K|L \in \mathcal{E}_{int}, \exists C_{K|L} \geq 0, |Q_{K,L}^{n+1}| \leq C_{K|L}$$

où  $C_{K|L}$  dépend entre autres du maillage  $\mathcal{M}$ . Finalement, nous avons

$$\exists C_{\mathcal{M}} > 0, \inf_{K \in \mathcal{T}} \left( \frac{m(K)}{\sum_{L \in N(K)} C_{\eta} (|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|)} \right) \geq C_{\mathcal{M}},$$

où  $C_{\mathcal{M}}$  dépend des mêmes paramètres que  $C_{K|L}$ . ■

#### IV.4.2 Existence d'une solution discrète au système couplé

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence d'une solution au système (IV.9)–(IV.12). La démonstration repose sur l'utilisation du degré topologique (voir (Deimling 1980), (Kavian 1993)).

**Proposition IV.4.2** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 vérifiées. Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , il existe au moins une solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, p_{w, \mathcal{T}}^{n+1})$  au système (IV.9)–(IV.12).*

Preuve :

Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , l'existence d'une solution  $s_{\mathcal{T}}^{n+1}$  découle directement de (IV.9)–(IV.12). Le problème se limite donc ici à montrer l'existence de  $p_{w, \mathcal{T}}^{n+1}$  où  $s_{\mathcal{T}}^n$  est considéré comme une donnée. Dans ce qui suit, nous supprimons les indices  $n+1$  et  $n$  :  $p_{w, \mathcal{T}}$  désignera  $p_{w, \mathcal{T}}^{n+1}$  et  $s_{\mathcal{T}}$ ,  $s_{\mathcal{T}}^n$ .

Notons  $N = \text{card}(\mathcal{T})$  et  $\omega = \{p_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^N, \|p_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} < C_4 + 1\}$ .

Soit  $K_0$  un élément arbitraire de l'ensemble  $\mathcal{T}$ . Considérons l'homotopie  $\psi_\lambda$  définie pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  par

$$\forall K \in \mathcal{T} \setminus \{K_0\}, (\psi_\lambda)_K = - \sum_{L \in N(K)} \sum_{\alpha \in \{o, w\}} \Upsilon_{K|L} \left( \begin{array}{c} \eta_{\alpha, \lambda, K}(p_L - p_K - \lambda \rho_\alpha g \delta z_{K,L})^{+-} \\ \eta_{\alpha, \lambda, L}(p_L - p_K - \lambda \rho_\alpha g \delta z_{K,L})^{-} \end{array} \right),$$

$$(\psi_\lambda)_{K_0} = \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) p_K$$

où

$$x^+ = \max(x, 0), \quad x^- = \max(-x, 0),$$

$$\forall \alpha \in \{o, w\}, \eta_{\alpha, \lambda, K} = \eta_\alpha((1 - \lambda) + \lambda s_K).$$

Comme les applications  $x^+$  et  $x^-$  sont continues, l'application  $\psi_\lambda$  est continue par rapport à  $p_{\mathcal{T}}$ . Elle est également continue par rapport à  $\lambda$  d'après H1-3. De plus  $0_{\mathbb{R}^N} \notin \psi(\partial\omega)$ . En reproduisant la preuve de la Proposition IV.4.1, nous obtenons l'estimation (IV.28) sur la solution du système  $\psi_\lambda = 0_{\mathbb{R}^N}$ . Nous pouvons donc définir le degré topologique  $d(\psi_\lambda, \omega, 0_{\mathbb{R}^N})$ . Pour  $\lambda = 0$ , le système  $\psi_\lambda = 0_{\mathbb{R}^N}$  se ramène à

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall K \in \mathcal{T} \setminus \{K_0\}, \sum_{L \in N(K)} \Upsilon_{K|L} \eta_T(1)(p_L - p_K) = 0 \\ \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) p_K = 0. \end{array} \right.$$

Le déterminant de ce système linéaire est non nul.

En effet, supposons que ce système s'écrive sous la forme

$$A p = 0$$

et qu'il admette une infinité de solutions. Notons  $p_0$  l'une d'entre elles. Alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le vecteur  $\lambda p_0$  est solution du système précédent. Mais

$$\|\lambda p_0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Ce dernier résultat est en contradiction avec la borne  $L^2$  obtenue sur la pression.  $0_{\mathbb{R}^N}$  est donc l'unique solution.

Enfin l'invariance du degré topologique par une homotopie nous donne

$$\forall \lambda \in [0, 1], d(\psi_0, \omega, 0_{\mathbb{R}^N}) = d(\psi_\lambda, \omega, 0_{\mathbb{R}^N}) \neq 0.$$

Pour  $\lambda = 1$ , nous retrouvons le système (IV.10)-(IV.11). Ce système admet donc au moins une solution. ■

**Remarque 11 :** Nous ne sommes pas encore en mesure de montrer l'unicité d'une solution discrète au système couplé (IV.9)-(IV.12). Par contre si nous supposons le flux total connu et donné, nous pouvons montrer l'unicité de la solution en saturation. Pour le schéma explicite, ce résultat découle directement de la relation (IV.12). Pour le schéma implicite, l'unicité s'obtient grâce à la monotonie des flux. En effet, pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , soient  $s_{\mathcal{T}}^{n+1}$  et  $\tilde{s}_{\mathcal{T}}^{n+1}$  deux solutions de l'équation (IV.12). Posons, pour tout  $K \in \mathcal{T}$ ,

$$\lambda_K = \frac{\delta t}{m(K)\phi_K} \sum_{L \in N(K)} \left( C_\eta (|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|) \right)$$

et considérons la fonction  $H_K(a, (a_L)_{L \in \mathcal{T}})$  définie par

$$H_K(a, (a_L)_{L \in \mathcal{T}}) = \frac{1}{1 + \lambda_K} \left( a + \lambda_K a_K - \frac{\delta t}{\phi_K m(K)} \sum_{L \in N(K)} F(a_K, a_L, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right).$$

Compte tenu de la définition de  $\lambda_K$ ,  $H_K$  est clairement croissante par rapport à chacun de ses arguments et les solutions  $s_{\mathcal{T}}^{n+1}$  et  $\tilde{s}_{\mathcal{T}}^{n+1}$  satisfont respectivement  $s_K^{n+1} = H_K(s_K^n, (s_L^{n+1})_{L \in \mathcal{T}})$  et  $\tilde{s}_K^{n+1} = H_K(s_K^n, (\tilde{s}_L^{n+1})_{L \in \mathcal{T}})$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \max(s_K^{n+1}, \tilde{s}_K^{n+1}) &\leq H_K(s_K^n, (\max(s_L^{n+1}, \tilde{s}_L^{n+1}))_{L \in \mathcal{T}}), \\ \min(s_K^{n+1}, \tilde{s}_K^{n+1}) &\geq H_K(s_K^n, (\min(s_L^{n+1}, \tilde{s}_L^{n+1}))_{L \in \mathcal{T}}). \end{aligned}$$

En retranchant ces deux inégalités, en multipliant le résultat obtenu par  $\phi_K m(K)(1 + \lambda_K)$  et en sommant sur l'ensemble des volumes du maillage nous obtenons

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \phi_K m(K) |s_K^{n+1} - \tilde{s}_K^{n+1}| \leq 0,$$

d'où l'unicité. □

### IV.4.3 Stabilité $L^\infty$

Nous allons maintenant montrer que quels que soient la maille et le pas de temps considérés les saturations calculées sont nécessairement comprises entre 0 et 1.

**Proposition IV.4.3** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 vérifiées. Soient  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3 et  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, p_{w,\mathcal{T}}^{n+1}) \in \mathcal{X}(\mathcal{T})^2$ ,  $n \in \{0 \dots M\}$ , une solution du système (IV.9)–(IV.12). Nous supposons que le pas de temps  $\delta t$  vérifie la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)*

$$\delta t \leq \inf_{K \in \mathcal{T}} \left( \frac{m(K)}{\sum_{L \in N(K)} C_\eta (|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|)} \right) \quad (\text{IV.29})$$

où  $C_\eta$  est définie dans le Lemme B.1.1. (Compte tenu du Corollaire IV.4.2, pour un maillage  $\mathcal{M}$  donné, il suffit de prendre  $\delta t \leq C_{\mathcal{M}}$  pour s'assurer qu'une solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, p_{w,\mathcal{T}}^{n+1})$  au système (IV.9)–(IV.12) satisfait (IV.29). L'existence de cette solution est établie dans la Proposition IV.4.2.) Alors  $s_{\mathcal{T}}^{n+1}$  vérifie

$$\forall K \in \mathcal{T}, 0 \leq s_K^{n+1} \leq 1. \quad (\text{IV.30})$$

Preuve :

Soit  $H$  définie par

$$\begin{aligned} \forall n \in \{0 \dots M\}, \forall K \in \mathcal{T}, s_K^{n+1} &= s_K^n - \frac{\delta}{\phi_K m(K)} \sum_{L \in N(K)} F(s_K^n, s_L^n, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \\ &= H(s_K^n; s_L^n, L \in N(K)). \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme B.1.1 et la condition (IV.29),  $H$  est une fonction croissante par rapport à chacun de ses arguments.

Nous démontrons alors (IV.30) par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 0$ , étant données l'Hypothèse H1-5 et la définition de  $s_K^0$  (voir (IV.9)), nous avons

$$\forall K \in \mathcal{T}, 0 \leq s_K^0 \leq 1.$$

Supposons qu'au rang  $n$ , (IV.30) soit vérifiée. Alors

$$s_K^{n+1} \leq H(\max_{K \in \mathcal{T}} s_K^n; \dots; \max_{K \in \mathcal{T}} s_K^n) \leq H(1; \dots; 1) = 1,$$

car

- $F(1, 1, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) = Q_{K,L}^{n+1}$ ,
- $\sum_{L \in N(K)} Q_{K,L}^{n+1} = 0$ .

Nous avons aussi

$$0 = H(0; \dots; 0) \leq H(\min_{K \in \mathcal{T}} s_K^n; \dots; \min_{K \in \mathcal{T}} s_K^n) \leq s_K^{n+1}$$

en utilisant l'égalité  $F(0, 0, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) = 0$ . ■

**Remarque 12 :** Plus généralement, nous avons pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et pour tout volume de contrôle  $K$  tel que  $m(\partial K \cap \partial \Omega) = 0$

$$\sum_{L \in N(K)} F(s, s, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) = 0.$$

L'égalité ci-dessus n'est plus vérifiée pour un élément  $K$  tel que  $m(\partial K \cap \partial \Omega) \neq 0$  car, dans ce cas,

$$\sum_{L \in N(K)} G_{K,L} \neq 0.$$

□

#### IV.4.4 Quelques remarques sur la convergence du schéma

A l'heure actuelle, nous ne sommes pas encore en mesure de montrer la convergence du schéma amont des pétroliers vers une solution faible du problème (IV.1). En fait comme nous allons le voir dans ce paragraphe, deux difficultés apparaissent.

Soit  $(\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de discrétisations admissibles (voir Définition IV.2.3) telle que

$$\text{size}(\mathcal{D}_m) \rightarrow 0 \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

Soient  $(s_{\mathcal{T}_m}^{n+1}, p_{w, \mathcal{T}_m}^{n+1})_{n \in \{0 \dots M_m\}} \in \mathcal{X}(\mathcal{T}_m)^2$  une suite de solutions aux équations (IV.9)–(IV.12) (sous la condition CFL (IV.29) pour le schéma explicite). Nous avons montré que cette suite vérifiait

$$\forall n \in \{0 \dots M_m\}, \forall K \in \mathcal{T}_m, 0 \leq s_K^{n+1} \leq 1. \quad (\text{IV.31})$$

Ainsi, il existe une fonction  $\bar{s} \in L^\infty(\Omega \times ]0, T[)$  et une sous-suite  $(s_{\mathcal{T}_{\varphi(m)}}^{n+1})_{n \in \{0 \dots M_{\varphi(m)}\}}$  convergeant dans  $L^\infty(\Omega \times ]0, T[)$  vers  $\bar{s}$  pour la topologie faible-\*. De la même façon, compte tenu de l'hypothèse H1-3, pour  $\alpha \in \{o, w\}$ , il existe une fonction  $\overline{kr_\alpha} \in L^\infty(\Omega \times ]0, T[)$  et une sous-suite  $(kr_\alpha(s_{\mathcal{T}_{\varphi(m)}}^n))_{n \in \{0 \dots M_{\varphi(m)}\}}$  convergeant vers  $\overline{kr_\alpha}$  au sens faible-\*. En général, nous n'avons pas  $\overline{kr_\alpha} = kr_\alpha(\bar{s})$  du fait de la nonlinéarité des mobilités.

La seconde difficulté est liée à la convergence en pression. Nous avons établi que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \{0 \dots M_m\}, \left\| p_{w, \mathcal{T}_m}^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad (\text{IV.32})$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend pas de la suite  $\mathcal{D}_m$ . Ainsi, pour presque tout  $t \in ]0, T[$ , il existe une fonction  $\bar{p}_{w,t} \in L^2(\Omega)$  et une sous-suite  $p_{w, \mathcal{T}_{\varphi(m)}}(\cdot, t)$  qui converge dans  $L^2(\Omega)$  vers  $\bar{p}_{w,t}$  pour la topologie faible. A partir de la semi-norme  $H^1$ , nous montrons que  $\bar{p}_{w,t} \in H^1(\Omega)$  et qu'à une sous-suite près,  $\vec{\nabla} p_{w, \mathcal{T}_m}(\cdot, t)$  converge également dans  $L^2(\Omega)$  vers  $\vec{\nabla} \bar{p}_{w,t}$  au sens faible. Ainsi, dans les termes de transport, les mobilités et le gradient de pression convergent faiblement mais nous ne pouvons rien dire sur leur produit. En fait nous ne pouvons montrer la convergence du schéma qu'en dimension  $d = 1$  où là, la monotonie des flux implique directement la convergence du schéma vers la solution entropique (Pfertzel 1987), (Sammon 1988), (Brenier & Jaffré 1991).

En supprimant le terme de gravité et en utilisant des mobilités linéaires de façon à ce que la mobilité totale reste constante, nous pouvons montrer la convergence du schéma en dimension quelconque (Vignal 1996), (Eymard et al. 2000). Dans le cas général, le problème reste ouvert.

Dans le paragraphe qui suit, nous nous plaçons à nouveau en présence de pression capillaire et nous présentons un nouveau schéma dont la construction s'inspire à la fois du schéma amont des pétroliers et du schéma des mathématiciens (Michel 2001). Moyennant une hypothèse de régularité sur le flux total nous allons pouvoir montrer que ce schéma converge en saturation vers une solution faible du problème (IV.17).

## IV.5 Etude du schéma à nombre de Péclet variable sur le modèle complet

Comme précédemment, nous débutons notre étude par quelques estimations en pression et saturation.

### IV.5.1 Estimations sur la pression

**Proposition IV.5.1** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 vérifiées. Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , soit  $\bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1} \in \mathcal{X}(\mathcal{T})$  telle que  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1})$  sont solutions de (IV.9)-(IV.19)-(IV.20)- (IV.22)-(IV.24). Alors il existe une constante  $C_6$  indépendante de la discrétisation  $\mathcal{D}$  et de la solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1})$  telle que*

$$|\bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1}|_{1, \mathcal{T}} \leq C_6. \quad (\text{IV.33})$$

(Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , l'existence d'une solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1})$  au système (IV.9)-(IV.19)-(IV.20)- (IV.22)-(IV.24) est établie dans la Proposition IV.5.3.)

*Preuve :*

Comme pour la Proposition IV.4.1, nous démontrons dans un premier temps qu'il existe une constante  $C_7$  telle que, pour tout  $K \in \mathcal{T}$  et  $n \in \{0 \dots M\}$ ,

$$\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \Upsilon_{K|L} \tilde{\eta}_{T, K|L}^{n+1} (\delta \bar{p}_{K, L}^{n+1})^2 \leq C_7^2. \quad (\text{IV.34})$$

Puis, grâce à H1-3, nous remarquons que

$$\Upsilon_{K|L} \geq C_{\Upsilon, inf} \text{ et } \tilde{\eta}_{T, K|L}^{n+1} \geq \min(\eta_T(s_K^{n+1}), \eta_T(s_L^{n+1})) \geq \beta.$$

Ainsi, en prenant  $C_6 = \left( \frac{C_7^2}{C_{\Upsilon, inf} \beta} \right)^{\frac{1}{2}}$ , nous obtenons l'inégalité (IV.33). ■

En supposant par exemple que

$$\int_{\Omega} \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1}(x) dx = 0,$$

l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (voir Lemme IV.4.1) et le résultat précédent nous permettent de déduire le corollaire suivant.

**Corollaire IV.5.1** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 vérifiées. Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , une solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1}) \in \mathcal{X}(\mathcal{T})^2$  du système (IV.9)-(IV.19)-(IV.20)- (IV.22)-(IV.24) vérifie*

$$\|\bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_8 \quad (\text{IV.35})$$

où  $C_8$  ne dépend pas de  $\mathcal{D}$  ni de  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1})$ .

L'inégalité (IV.33) nous assure également qu'il est toujours possible de calculer un pas de temps  $\delta t > 0$  qui satisfait (IV.38).

**Corollaire IV.5.2** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 vérifiées. Soient  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Alors il existe une constante  $C_{\mathcal{T}}$  dépendant uniquement du maillage  $\mathcal{M}$  et des données du problème et non de  $\delta t$  ni d'une solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1})$  de (IV.9)-(IV.19)-(IV.20)-(IV.22)-(IV.24), telle que*

$$\inf_{K \in \mathcal{T}} \left( \frac{m(K)}{\sum_{L \in N(K)} \left( 2C_{\eta}(|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|) + \Upsilon_{K|L} L_{\varphi} \right)} \right) \geq C_{\mathcal{M}}.$$

### IV.5.2 Stabilité $L^{\infty}$

Nous montrons maintenant la stabilité  $L^{\infty}$  du schéma en saturations.

**Proposition IV.5.2** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 vérifiées. Soient  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3,  $n \in \{0 \dots M\}$  et  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1})$  une solution du système (IV.9)-(IV.19)-(IV.20)-(IV.22)-(IV.23) où, pour tout  $K \in \mathcal{T}$  et  $L \in N(K)$ , le paramètre  $\theta_{K|L}^{n+1}$  satisfait*

$$1 - \frac{\Upsilon_{K|L}(\varphi(s_L^{n+1}) - \varphi(s_K^{n+1}))}{\Lambda_{K,L}^{n+1}(s_K^{n+1}, s_L^{n+1})} \leq \theta_{K|L}^{n+1} \leq 1. \quad (\text{IV.36})$$

(IV.24) et le schéma décentré satisfont la condition (IV.36).)

Nous avons alors

$$\forall n \in \{0 \dots M\}, \forall K \in \mathcal{T}, 0 \leq s_K^n \leq 1. \quad (\text{IV.37})$$

Le schéma explicite satisfait les inégalités (IV.37) sous la condition CFL

$$\delta t \leq \inf_{K \in \mathcal{T}} \left( \frac{\phi_K m(K)}{\sum_{L \in N(K)} \left( 2C_{\eta}(|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|) + \Upsilon_{K|L} L_{\varphi} \right)} \right). \quad (\text{IV.38})$$

(Compte tenu du Corollaire IV.5.2, il suffit de prendre, pour un maillage  $\mathcal{M}$  donné et  $n \in \{0 \dots M\}$ ,  $\delta t \leq C_{\mathcal{M}}$  pour s'assurer que la solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1})$  au système (IV.9)-(IV.19)-(IV.20)-(IV.22)-(IV.24) satisfait (IV.38).)

Preuve :

Nous effectuons la preuve dans le cas implicite.

Nous procédons par récurrence. Pour  $n = 0$ , compte tenu de H1-5 et de la définition de  $s_K^0$  donnée par (IV.9), la relation (IV.37) est vérifiée. Supposons les inégalités (IV.37) vérifiées jusqu'au rang  $n$ . Nous réécrivons tout d'abord l'équation (IV.23) sous la forme

$$s_K^n = s_K^{n+1} + \frac{\delta t}{\phi_K m(K)} \sum_{L \in N(K)} h_{K|L}^{n+1} (s_L^{n+1} - s_K^{n+1}) + F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L})$$

où

$$h_{K|L}^{n+1} = \frac{1}{s_L^{n+1} - s_K^{n+1}} \left( (1 - \theta_{K|L}^{n+1}) \left( \Lambda_{K,L}^{n+1}(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}) \right) - \Upsilon_{K|L} \left( \varphi(s_L^{n+1}) - \varphi(s_K^{n+1}) \right) \right).$$

S'il existe  $K \in \mathcal{T}$  tel que  $s_K^{n+1} < 0$  alors nous avons

$$s_{K_{\min}}^{n+1} = \min_{K \in \mathcal{T}} (s_K^{n+1}) < 0.$$

Le choix (IV.38) fait pour  $\theta_{K|L}^{n+1}$  et la monotonie du flux  $F$  suffisent à assurer la monotonie du schéma. Ainsi

$$s_{K_{\min}}^n < \frac{\delta t}{\phi_{K_{\min}} m(K_{\min})} \sum_{L \in N(K_{\min})} h_{K_{\min}|L}^{n+1} (s_L^{n+1} - s_{K_{\min}}^{n+1}) + F(s_{K_{\min}}^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K_{\min},L}^{n+1}, G_{K_{\min},L}).$$

En utilisant la décroissance de  $F(a, \cdot, \cdot, Q_{K_{\min},L}^{n+1}, G_{K_{\min},L})$  et en remarquant que  $h_{K_{\min}|L}^{n+1} \leq 0$ , nous avons :

$$s_{K_{\min}}^n < \frac{\delta t}{\phi_{K_{\min}} m(K_{\min})} \sum_{L \in N(K_{\min})} F(s_{K_{\min}}^{n+1}, s_{K_{\min}}^{n+1}, Q_{K_{\min},L}^{n+1}, G_{K_{\min},L}). \quad (\text{IV.39})$$

Mais, d'après H1-3, nous avons

$$\eta_o(s) = 0 \text{ et } \eta_w(s) = \eta_w(0), \forall s \leq 0.$$

Ainsi  $F(s_{K_{\min}}^{n+1}, s_{K_{\min}}^{n+1}, Q_{K_{\min},L}^{n+1}, G_{K_{\min},L}) = 0$  et donc l'inégalité (IV.39) se réduit à

$$s_{K_{\min}}^n < 0$$

qui est en contradiction avec l'hypothèse de récurrence.

De la même façon, supposons qu'il existe  $K \in \mathcal{T}$  tel que  $s_K^{n+1} > 1$ . Nous avons alors

$$s_{K_{\max}}^{n+1} = \max_{K \in \mathcal{T}} (s_K^{n+1}) > 1.$$

Un raisonnement analogue au précédent donne

$$s_{K_{\max}}^n > 1 + \frac{\delta t}{\phi_{K_{\max}} m(K_{\max})} \sum_{L \in N(K_{\max})} F(s_{K_{\max}}^{n+1}, s_{K_{\max}}^{n+1}, Q_{K_{\max},L}^{n+1}, G_{K_{\max},L}).$$

Mais remarquons que

$$F(s_{K_{\max}}^{n+1}, s_{K_{\max}}^{n+1}, Q_{K_{\max},L}^{n+1}, G_{K_{\max},L}) = Q_{K_{\max},L}^{n+1},$$

car, pour tout  $s \geq 1$ ,  $\eta_o(s) = \eta_o(1)$  et  $\eta_w(s) = 0$ .

Or, d'après (IV.19),

$$\sum_{L \in \mathcal{N}(K_{\max})} Q_{K_{\max},L}^{n+1} = 0.$$

D'où

$$s_{K_{\max}}^n > 1.$$

Cette dernière inégalité est encore en contradiction avec l'hypothèse de récurrence.

Nous sommes donc assurés que

$$\forall K \in \mathcal{T}, 0 \leq s_K^{n+1} \leq 1,$$

ce qui correspond au résultat annoncé. ■

Une conséquence immédiate du résultat précédent est que la pression discrète de l'eau,  $p_{w,\mathcal{T}}^{n+1}$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$  pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ . En effet nous avons le

**Corollaire IV.5.3** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 vérifiées. Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , une solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1})$  du système (IV.9)-(IV.19)-(IV.20)-(IV.22)-(IV.24) est telle que*

$$\left\| p_{w,\mathcal{T}}^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_9 \tag{IV.40}$$

où  $C_9$  est une constante indépendante du maillage  $\mathcal{M}$  et de la solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1})$ .

### IV.5.3 Existence d'une solution discrète au système couplé

Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , à l'aide des estimations précédentes sur la pression  $\bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1}$  (Corollaire IV.5.1) et sur la saturation  $s_{\mathcal{T}}^{n+1}$  (Proposition IV.5.2), nous montrons maintenant l'existence d'un couple de solutions  $(\bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1}, s_{\mathcal{T}}^{n+1})$ .

**Proposition IV.5.3** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 vérifiées. Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , il existe au moins une solution  $(s_{\mathcal{T}}^{n+1}, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1})$  au système (IV.19)-(IV.20)-(IV.22)-(IV.24).*

Preuve :

Rappelons que compte tenu des conditions aux limites, la pression  $\bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1}$  est connue à une constante près. Pour une maille  $K_0 \in \mathcal{T}$ , nous pouvons par exemple remplacer l'équation (IV.19) par

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \bar{p}_K^{n+1} = 0. \quad (\text{IV.41})$$

Soit  $N = \text{card}(\mathcal{T})$ . Considérons l'ensemble

$$\omega = \{(\bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1}, s_{\mathcal{T}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N / \|\bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} < C_8 + 1 \text{ et } \|s_{\mathcal{T}}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega)} < 2\}.$$

Soit  $\psi_\lambda$  l'application définie sur  $\omega$  et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  par

$$\psi_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N & \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ (\bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1}, s_{\mathcal{T}}^{n+1}) & \mapsto (\psi_{\lambda,1}, \psi_{\lambda,2}) \end{cases}$$

avec, pour tout  $K \in \mathcal{T}$  et  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} (\psi_{\lambda,1})_K &= \sum_{L \in N(K)} \Upsilon_{K|L} \left( \begin{aligned} &\lambda (\tilde{\eta}_{o,K|L}^{n,n+1} \rho_o + \tilde{\eta}_{w,K|L}^{n,n+1} \rho_w) g \delta z_{K,L}^- \\ &((1-\lambda)\eta_T(1) + \lambda \tilde{\eta}_{T,K|L}^{n,n+1}) \bar{\phi}_{K,L}^{n+1} \end{aligned} \right), \text{ pour } K \neq K_0, \\ (\psi_{\lambda,1})_K &= \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \bar{p}_K^{n+1}, \text{ pour } K = K_0, \\ (\psi_{\lambda,2})_K &= s_K^{n+1} + \frac{\delta \lambda}{\phi_K m(K)} \sum_{L \in N(K)} \left( \begin{aligned} &\theta_{K|L}^{n+1} F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L})^+ \\ &(1 - \theta_{K|L}^{n+1}) F\left(\frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, \frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}\right)^- \\ &\Upsilon_{K|L} (\varphi(s_L^{n+1}) - \varphi(s_K^{n+1})) \end{aligned} \right) - \lambda s_{\mathcal{T}}^n. \end{aligned}$$

L'application  $\psi_\lambda$  est continue par rapport à  $\lambda, \bar{p}_{\mathcal{T}}^{n+1}, s_{\mathcal{T}}^{n+1}$ . En procédant de la même façon que dans le Corollaire IV.5.1 et la Proposition IV.5.2, nous montrons que

$$\forall \lambda \in [0, 1], 0_{\mathbb{R}^{2N}} \notin \varphi(\partial\omega).$$

Le degré topologique  $d(\psi_\lambda, \omega, 0_{\mathbb{R}^{2N}})$  est donc bien défini. Pour  $\lambda = 0$ , le système linéaire  $\psi_\lambda = 0_{\mathbb{R}^{2N}}$  admet une unique solution. En effet, nous obtenons de façon immédiate que  $s_{\mathcal{T}}^{n+1} = 0$ . Quant au champ de pression,  $0_{\mathbb{R}^N}$  est clairement solution et cette solution est unique. Il suffit en effet d'utiliser l'inégalité (IV.35) et de reprendre l'argument utilisé dans la preuve de la Proposition IV.4.2. Ainsi, pour  $\lambda = 0$ , le système linéaire  $\psi_\lambda = 0_{\mathbb{R}^{2N}}$  admet une unique solution et  $d(\psi_0, \omega, 0_{\mathbb{R}^{2N}}) \neq 0$ . L'invariance du degré topologique par une homotopie donne

$$\forall \lambda \in [0, 1], d(\psi_\lambda, \omega, 0_{\mathbb{R}^{2N}}) = d(\psi_0, \omega, 0_{\mathbb{R}^{2N}}) \neq 0.$$

Pour  $\lambda = 1$ , nous retrouvons le système composé des équations (IV.19)-(IV.20)- (IV.22)-(IV.24) en remplaçant pour la maille  $K = K_0$  l'équation (IV.19) par l'équation (IV.41). Comme  $d(\psi_1, \omega, 0_{\mathbb{R}^{2N}}) \neq 0$ , ce système admet donc au moins une solution.  $\blacksquare$

#### IV.5.4 Convergence du schéma dans un cas simplifié

Nous nous proposons, ici, de montrer la convergence du schéma implicite en saturation (IV.9)-(IV.22)-(IV.23) dans le cas où le flux total est donné et régulier. Ainsi, tout au long de cette preuve, nous supposons que

##### Hypothèses IV.5.1

H5-1. La vitesse totale  $\vec{Q}$  est donnée dans  $C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])$  et vérifie

$$\begin{aligned} \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \operatorname{div}(\vec{Q}(x, t)) &= 0, \\ \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \vec{Q}(x, t) \cdot \vec{n}(x) &= 0. \end{aligned}$$

H5-2. La porosité  $\phi$  et la perméabilité  $\Upsilon$  sont constantes et égales à 1.

H5-3. Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times [0, T]$ . Nous supposons que

$$\begin{aligned} \forall n \in \{0 \dots M\}, \forall K|L \in \mathcal{E}_{int}, \\ \theta_{K|L}^{n+1} = \max \left( 0, 1 - \frac{(1 - \varepsilon)\tau_{K|L}(\varphi(s_L^{n+1}) - \varphi(s_K^{n+1}))}{\Lambda_{K,L}^{n+1}(s_K^{n+1}, s_L^{n+1})} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

avec  $0 < \varepsilon < 1$ .

**Notation IV.5.1** Nous notons

•

$$Q_{max} = \|\vec{Q}\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T])},$$

•

$$\forall n \in \{0 \dots M\}, \forall K|L \in \mathcal{E}_{int}, Q_{K,L}^{n+1} = \frac{1}{\delta t} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K|L} \vec{Q}(x, t) \cdot \vec{n}_{K,L} d\zeta(x) dt.$$

Ce résultat de convergence s'applique également au schéma explicite mais sous une condition CFL légèrement plus sévère que (IV.38), à savoir

$$\delta t \leq \inf_{K \in \mathcal{T}} \left( \frac{\varepsilon m(K)}{\sum_{L \in N(K)} 4 \left( 2C_\eta (|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|) + \tau_{K|L} L_\varphi \right)} \right). \quad (\text{IV.43})$$

La démonstration s'appuie essentiellement sur le théorème de Kolmogorov grâce auquel nous extrayons une sous-suite de solutions en saturation convergeant fortement dans  $L^2(\Omega \times ]0, T[)$ . Du fait du caractère non-linéaire du terme de diffusion, nous n'obtenons pas directement de la compacité à partir de la suite de  $(s_{\mathcal{D}_m})_{m \in \mathbb{N}}$  mais à partir de la

suite  $(\varphi(s_{\mathcal{D}_m}))_{m \in \mathbb{N}}$ . La fonction  $\varphi$  étant continue strictement croissante, la convergence de  $(\varphi(s_{\mathcal{D}_m}))_{m \in \mathbb{N}}$  implique celle de  $(s_{\mathcal{D}_m})_{m \in \mathbb{N}}$ . Pour appliquer le théorème de Kolmogorov, nous devons établir un certain nombre d'estimations. La stabilité du calcul des saturations dans  $L^\infty(\Omega \times ]0, T[)$  nous assure déjà que  $(\varphi(s_{\mathcal{D}_m}))$  reste bornée dans  $L^2(\Omega \times ]0, T[)$ . Il faut ensuite montrer que les translations en temps et en espace de cette même fonction tendent uniformément vers 0 lorsque le pas de la translation tend vers 0. La dernière étape consiste alors à montrer que la limite obtenue est solution du problème faible associé à la première équation du système (IV.17). Nous avons ainsi le

**Théorème IV.5.1** *Sous les Hypothèses IV.1.1 et IV.5.1, considérons une suite,  $(\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , de discrétisations admissibles (voir Définition IV.2.3). Nous supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\text{regul}(\mathcal{M}_m) \leq \alpha$  et que  $\text{size}(\mathcal{D}_m) \rightarrow 0$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Soit  $s_{\mathcal{D}_m} = s_m \in \mathcal{X}(\mathcal{D}_m)$  une solution des équations (IV.9)-(IV.22)-(IV.24) pour  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_m$ . Alors il existe une sous-suite de solutions approchées que nous désignerons également par  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$  et telle que*

- $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^q(\Omega \times ]0, T[)$  pour tout  $1 \leq q < \infty$  vers une fonction  $s \in L^\infty(\Omega \times ]0, T[)$  telle que  $\varphi(s) \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega))$ .
- $s$  est solution du problème faible

$$\forall \psi \in C_{test}, \quad \int_0^T \int_\Omega \left( s \psi_t + f(s, \vec{Q}, \vec{G}) \cdot \vec{\nabla} \psi - \vec{\nabla} \varphi(s) \cdot \vec{\nabla} \psi \right) dx dt + \int_\Omega s_{ini} \psi(\cdot, 0) dx = 0 \quad (\text{IV.44})$$

où  $C_{test} = \{\psi \in H^1(\Omega \times (0, T)) / \psi(\cdot, T) = 0\}$ .

### Translations en espace

Pour pouvoir majorer les translations en espace ou en temps de la fonction  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$ , nous devons tout d'abord montrer que sa semi-norme  $L^2(0, T, H^1(\Omega))$  discrète est bornée indépendamment de la discrétisation utilisée. Nous précisons ci-dessous la définition de cette semi-norme.

**Définition IV.5.1** *Soit  $\Omega \times [0, T]$  un domaine vérifiant H1-1 et  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible de ce domaine au sens de la Définition IV.2.3. La semi-norme  $L^2(0, T, H^1(\Omega))$  d'une fonction  $u_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  est définie par*

$$|u_{\mathcal{D}}|_{1, \mathcal{D}}^2 = \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (\delta u_{K,L}^{n+1})^2.$$

La fonction  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$  vérifie alors :

**Proposition IV.5.4** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 et IV.5.1 vérifiées et considérons une discrétisation admissible,  $\mathcal{D}$ , du domaine  $\Omega \times [0, T]$  (voir Définition IV.2.3). Soit  $s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  donnée par les équations (IV.9)-(IV.22)-(IV.24). Il existe alors une constante  $C_{10}$  indépendante de  $\mathcal{D}$  telle que la fonction  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$  vérifie*

$$|\varphi(s_{\mathcal{D}})|_{1, \mathcal{D}}^2 \leq C_{10}. \quad (\text{IV.45})$$

Preuve :

En multipliant l'équation (IV.23) par  $\delta s_K^{n+1}$  et en sommant sur l'ensemble des éléments du maillage  $\mathcal{T}$  et sur  $n \in \{0 \dots M\}$ , nous obtenons

$$E_1 + E_2 + E_3 = 0$$

avec

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (s_K^{n+1} - s_K^n) s_K^{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (s_K^{M+1})^2 - \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (s_K^0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (s_K^{n+1} - s_K^n)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (s_K^{M+1})^2 - \frac{1}{2} \|u_{\text{ini}}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ E_2 &= \sum_{n=0}^M \delta \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \left( \begin{array}{c} \theta_{K|L}^{n+1} F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) + \\ (1 - \theta_{K|L}^{n+1}) F\left(\frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, \frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}\right) \end{array} \right) s_K^{n+1}, \\ E_3 &= \sum_{n=0}^M \delta \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\varphi(s_K^{n+1}) - \varphi(s_L^{n+1})) s_K^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^M \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \tau_{K|L} (\varphi(s_K^{n+1}) - \varphi(s_L^{n+1})) (s_K^{n+1} - s_L^{n+1}) \\ &\geq \frac{1}{L_\varphi} \sum_{n=0}^M \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \tau_{K|L} (\varphi(s_K^{n+1}) - \varphi(s_L^{n+1}))^2 \end{aligned}$$

*Minoration du terme  $E_2$  :*

Remarquons tout d'abord que l'hypothèse H5-1 et la relation  $\text{div}(\vec{G}) = 0$  impliquent que

$$\forall u \in [0, 1], \forall K \in \mathcal{T}, \sum_{L \in N(K)} F(u, u, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}_K} F(u, u, 0, G_{K,\sigma}) = 0 \quad (\text{IV.46})$$

où

- $G_{K,\sigma} = \tau_\sigma (\rho_o - \rho_w) g(z_\sigma - z_K)$ ,
- $z_\sigma$  est la cote du point d'intersection de la droite perpendiculaire à la face  $\sigma$  passant par  $x_K$ .

Prenons  $u = s_K^{n+1}$  et multiplions (IV.46) par cette valeur. En retranchant à  $E_2$  la relation obtenue et en regroupant les termes selon les faces intérieures nous obtenons

$$E_2 = \sum_{n=0}^M \delta t \left[ \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \left( \theta_{K|L}^{n+1} (s_L^{n+1} - s_K^{n+1}) \Lambda_{K,L}^{n+1} (s_K^{n+1}, s_L^{n+1}) + \right. \right. \\ \left. \left( F\left(\frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, \frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}\right) - F(s_K^{n+1}, s_K^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right) s_K^{n+1} - \right. \\ \left. \left( F\left(\frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, \frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}\right) - F(s_L^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right) s_L^{n+1} \right) - \\ \left. \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K} F(s_K^{n+1}, s_K^{n+1}, 0, G_{K,\sigma}) s_K^{n+1} \right) \right].$$

Posons

$$E_{2,1} = \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \left( \left( F\left(\frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, \frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}\right) - F(s_K^{n+1}, s_K^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right) s_K^{n+1} - \right. \\ \left. \left( F\left(\frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, \frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}\right) - F(s_L^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right) s_L^{n+1} \right)$$

et considérons une primitive,  $\Phi_{K,L}^{n+1}(\cdot)$ , de la fonction  $(\cdot)F'(\cdot, \cdot, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L})$ . En intégrant par partie, nous avons

$$E_{2,1} = \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \left( \Phi_{K,L}^{n+1}(s_L^{n+1}) - \Phi_{K,L}^{n+1}(s_K^{n+1}) + \right. \\ \left. \int_{s_K^{n+1}}^{s_L^{n+1}} \left( F(s, s, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - F\left(\frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, \frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}\right) \right) ds \right).$$

Pour obtenir une minoration du membre de droite, nous utilisons le lemme suivant. (Pour une démonstration de ce lemme voir (Eymard et al. 2000).)

**Lemme IV.5.1** *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone, continue Lipschitzienne de constante de Lipschitz  $F > 0$ . Alors*

$$\forall c, d \in \mathbb{R}, \left| \int_c^d (f(x) - f(c)) dx \right| \geq \frac{1}{2F} (f(d) - f(c))^2.$$

Appliquons ce lemme à une fonction  $g(\cdot, \cdot)$  croissante (resp. décroissante) par rapport à son premier argument (resp. son deuxième argument) et de constantes de Lipschitz  $G_1$  et  $G_2$  pour son premier et son deuxième argument :

$$\int_c^d \left( g(s, s) - g(c, d) \right) ds \geq \frac{1}{2G_1} (g(d, d) - g(c, d))^2 \\ \geq \frac{1}{2G_2} (g(c, c) - g(c, d))^2.$$

En multipliant la première inégalité par  $\frac{G_1}{G_1 + G_2}$  et la seconde par  $\frac{G_2}{G_1 + G_2}$ , nous obtenons

$$\int_c^d \left( g(s, s) - g(c, d) \right) ds \geq \frac{1}{2(G_1 + G_2)} \left( (g(d, d) - g(c, d))^2 + (g(c, c) - g(c, d))^2 \right).$$

En remplaçant la fonction  $g(\cdot, \cdot)$  par la fonction  $F(\cdot, \cdot, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L})$ , nous avons

$$\begin{aligned} E_{2,1} \geq & \sum_{n=0}^M \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \left( \left( \Phi_{K,L}^{n+1}(s_L^{n+1}) - \Phi_{K,L}^{n+1}(s_K^{n+1}) \right) + \right. \\ & \frac{1}{4C_\eta(|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|)} \left( \left( F(s_K^{n+1}, s_K^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. \left( F(s_L^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Mais, en utilisant à nouveau les relations (IV.46), nous remarquons que

$$\begin{aligned} \forall n \in \{0 \dots M\}, \forall K \in \mathcal{T}, \\ \sum_{L \in N(K)} \Phi_{K,L}^n(s_K^{n+1}) = \sum_{L \in N(K)} \left( s_K^{n+1} F(s_K^{n+1}, s_K^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - \right. \\ \left. \int_0^{s_K^{n+1}} F(s, s, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) ds \right) = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K} \left( s_K^{n+1} F(s_K^{n+1}, s_K^{n+1}, 0, G_{K,\sigma}) - \right. \\ \left. \int_0^{s_K^{n+1}} F(s, s, 0, G_{K,\sigma}) ds \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} E_2 \geq & \sum_{n=0}^M \delta \left[ \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \left( (\theta_{K|L}^{n+1} - 1)(s_L^{n+1} - s_K^{n+1}) \Lambda_{K|L}^{n+1}(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}) + \right. \right. \\ & \frac{1}{4C_\eta(|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|)} \left( \left( F(s_K^{n+1}, s_K^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. \left( F(s_L^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right)^2 \right) \right) - \\ & \left. \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K} \int_0^{s_K^{n+1}} F(s, s, 0, G_{K,\sigma}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Notons que

$$\text{sign}\left(\Lambda_{K,L}^{n+1}(s_K^{n+1}, s_L^{n+1})\right) = \text{sign}\left(\varphi(s_K^{n+1}) - \varphi(s_L^{n+1})\right) \quad (\text{IV.47})$$

et que, compte tenu du choix (IV.42) fait pour  $\theta_{K|L}^{n+1}$ , nous avons

$$(1 - \theta_{K|L}^{n+1}) \left| \Lambda_{K,L}^{n+1}(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}) \right| \leq (1 - \varepsilon) \tau_{K|L} \left| \varphi(s_K^{n+1}) - \varphi(s_L^{n+1}) \right|. \quad (\text{IV.48})$$

Ainsi, en regroupant les majorations et minoration obtenues, en utilisant les deux égalités précédentes (IV.47) et (IV.48) et en remarquant que  $\varphi$  est Lipschitzienne nous aboutissons à

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{n=0}^M \delta t \left[ \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \left( \frac{1}{4C_\eta(|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|)} \times \right. \right. \\ & \left. \left( \left( F(s_K^{n+1}, s_K^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \left( F(s_L^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right)^2 \right) \right. \\ & \left. \frac{\tau_{K|L}}{L_\varphi} \left( \varphi(s_L^{n+1}) - \varphi(s_K^{n+1}) \right)^2 \right) - \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K} \int_0^{s_K^{n+1}} F(s, s, 0, G_{K,\sigma}) ds \right) \left. \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \|s_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\varepsilon}{L_\varphi} |\varphi(s_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D}}^2 - \left| \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K} \int_0^{s_K^{n+1}} F(s, s, 0, G_{K,\sigma}) ds \right| \leq \frac{1}{2} \|s_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Le terme intégral dans le membre de gauche peut-être majoré de la façon suivante

$$\left| \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K} \int_0^{s_K^{n+1}} F(s, s, 0, G_{K,\sigma}) ds \right| \leq 2TC_\eta(\rho_w - \rho_o)gm(\partial\Omega).$$

Grâce à cette majoration, nous avons

$$\frac{\varepsilon}{L_\varphi} |\varphi(s_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D}}^2 \leq \frac{1}{2} \|s_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2TC_\eta(\rho_w - \rho_o)gm(\partial\Omega).$$

Nous obtenons alors le résultat en prenant

$$C_{10} = \frac{L_\varphi}{\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \|s_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2TC_\eta(\rho_w - \rho_o)gm(\partial\Omega) \right),$$

CQFD. ■

**Remarque 13 :** Dans le cas explicite, la démonstration est légèrement plus longue puisque le terme  $E_1$  vaut

$$E_1 = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K)(s_K^{M+1})^2 - \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K)(s_K^0)^2 - E_{1,1}$$

avec

$$E_{1,1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (s_K^{n+1} - s_K^n)^2.$$

$E_{1,1}$  doit ici être majoré. En utilisant les Hypothèses H5-1, les relations (IV.42), (IV.43), (IV.47), (IV.48) nous obtenons

$$\begin{aligned} E_{1,1} \leq & \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=0}^M \mathfrak{A} \left[ \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \left( \frac{1}{4C_\eta(|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|)} \right. \right. \\ & \left. \left( F(s_K^n, s_K^n, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - F(s_K^n, s_L^n, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right)^2 + \right. \\ & \left. \left( F(s_L^n, s_L^n, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - F(s_K^n, s_L^n, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right)^2 \right) + \\ & \left. \frac{2\tau_{K|L}}{L_\varphi} \left( \varphi(s_K^n) - \varphi(s_L^n) \right)^2 \right] + 2 \left( TC_\eta(\rho_o - \rho_w)gd \right)^2 m(\Omega). \end{aligned}$$

La majoration (IV.45) s'obtient en prenant

$$C_{10} = \frac{L_\varphi}{\varepsilon} \left( \|s_{ini}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4 \left( TC_\eta(\rho_o - \rho_w)gd \right)^2 m(\Omega) + 4TC_\eta(\rho_w - \rho_o)gm(\partial\Omega) \right).$$

□

Considérons maintenant le domaine  $\Omega$  privé d'une couronne de largeur  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Sur ce domaine noté  $\Omega_\xi$ , le lemme qui suit donne une majoration des translations de la fonction  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$  de vecteur  $\xi$ . Cette majoration nous permet de déduire une borne dans  $L^2(\Omega)$  sur les translations de  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$  et de montrer que la limite  $\varphi(s)$  obtenue lorsque  $\text{size}(\mathcal{D}) \rightarrow 0$  appartient à  $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ . Ce lemme est démontré dans (Eymard et al. 2000) p.44-45.

**Lemme IV.5.2** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 et IV.5.1 vérifiées et considérons une discrétisation admissible,  $\mathcal{D}$ , du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Soit  $s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  donnée par les équations (IV.9)-(IV.22)-(IV.23)-(IV.42). Soit  $\xi \in \mathbb{R}^d$  et considérons le domaine  $\Omega_\xi$  défini par*

$$\Omega_\xi = \{x \in \Omega / [x, x + \xi] \subset \Omega\}.$$

*Alors il existe une constante  $C_{11}$  dépendant uniquement du nombre de faces de  $\Omega$  telle que la fonction  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$  vérifie*

$$\int_0^T \int_{\Omega_\xi} |\varphi(s_{\mathcal{D}}(x + \xi, t)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t))|^2 dx dt \leq |\xi| \left( |\xi| + C_{11} \text{size}(\mathcal{M}) \right) |\varphi(s)|_{1, \mathcal{D}}^2. \quad (\text{IV.49})$$

Grâce aux inégalités (IV.45) et (IV.49) nous sommes maintenant en mesure de prouver que les translations en espace de  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$  restent bornées dans  $L^2(\Omega \times ]0, T])$ .

**Proposition IV.5.5** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 et IV.5.1 vérifiées et considérons une discrétisation admissible,  $\mathcal{D}$ , du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Soit  $s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  donnée par les équations (IV.9)-(IV.22)-(IV.23)-(IV.42). Si nous étendons le domaine de définition de la fonction  $s_{\mathcal{D}}$  à 0 pour  $(x, t) \notin \Omega \times ]0, T[$  et si nous considérons un élément  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , alors la fonction  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$  vérifie*

$$\|\varphi(s_{\mathcal{D}}(\cdot + \xi, \cdot)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}^2 \leq C_{12} |\xi| \left( |\xi| + \text{size}(\mathcal{M}) + 1 \right) \quad (\text{IV.50})$$

où  $C_{12}$  dépend des constantes  $C_{10}$ ,  $C_{11}$ ,  $T$ ,  $L_{\varphi}$  et du domaine  $\Omega$ .

Preuve :

Nous avons

$$\begin{aligned} & \|\varphi(s_{\mathcal{D}}(\cdot + \xi, \cdot)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}^2 \leq \\ & \int_0^T \int_{\{x \in \Omega / [x, x+\xi] \not\subset \Omega\}} |\varphi(s_{\mathcal{D}}(x + \xi, t)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t))|^2 dx dt + \\ & \int_0^T \int_{\Omega_{\xi}} |\varphi(s_{\mathcal{D}}(x + \xi, t)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t))|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Dans l'inégalité précédente la première intégrale du membre de droite peut être majorée par  $T|\xi|L_{\varphi}^2 m(\partial\Omega)$  grâce à la stabilité  $L^{\infty}$  du schéma (voir inégalités (IV.37)). Cette majoration associée aux inégalités (IV.45) et (IV.49) nous donne

$$\|\varphi(s_{\mathcal{D}}(\cdot + \xi, \cdot)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}^2 \leq |\xi| \left( \left( |\xi| + C_{11} \text{size}(\mathcal{M}) \right) C_{10} + TL_{\varphi}^2 m(\partial\Omega) \right).$$

En prenant  $C_{12} = \max(TL_{\varphi}^2 m(\partial\Omega), C_{10}C_{11}, C_{10})$ , nous obtenons l'inégalité (IV.50). ■

Intéressons nous maintenant aux translations en temps.

### Translations en temps

Grâce à la semi-norme  $L^2(0, T, H^1(\Omega))$  discrète nous pouvons majorer les translations en temps de la fonction  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$ . En effet :

**Lemme IV.5.3** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 et IV.5.1 vérifiées et considérons une discrétisation admissible,  $\mathcal{D}$ , du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Soit  $s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  donnée par les équations (IV.9)-(IV.22)-(IV.23)-(IV.42). Soit  $\tau \in ]0, T[$  alors la fonction  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$  vérifie*

$$\int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} \left( \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t + \tau)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t)) \right)^2 dx dt \leq C_{13} \tau \quad (\text{IV.51})$$

où  $C_{13}$  est une constante dépendant de  $L_{\varphi}$ ,  $C_{\eta}$ ,  $C_{10}$ ,  $d$ ,  $\Omega$ ,  $T$ ,  $Q_{max}$ ,  $\rho_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \{o, w\}$  et  $g$ .

Preuve :

La fonction  $\varphi$  étant croissante et Lipschitzienne, nous avons

$$\int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} \left( \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t + \tau)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t)) \right)^2 dx dt \leq L_{\varphi} \int_0^{T-\tau} A(t) dt$$

où

$$A(t) = \int_{\Omega} \left( \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t + \tau)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t)) \right) \left( s_{\mathcal{D}}(x, t + \tau) - s_{\mathcal{D}}(x, t) \right) dx.$$

L'expression ci-dessus peut encore s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \left( \varphi(s_K^{n_1(t)+1}) - \varphi(s_K^{n_0(t)+1}) \right) \left( s_K^{n_1(t)+1} - s_K^{n_0(t)+1} \right) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \left( \varphi(s_K^{n_1(t)+1}) - \varphi(s_K^{n_0(t)+1}) \right) \sum_{n=n_0(t)+1}^{n_1(t)} \left( s_K^{n+1} - s_K^n \right) \end{aligned}$$

où  $n_0(t)$  et  $n_1(t)$  sont tels que  $n_0(t)\delta t < t \leq (n_0(t) + 1)\delta t$  et  $n_1(t)\delta t < t + \tau \leq (n_1(t) + 1)\delta t$ .

Posons

$$\mathcal{X}_n(t, t + \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } n\delta t \in [t, t + \tau], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons alors

$$A(t) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \left( \varphi(s_K^{n_1(t)+1}) - \varphi(s_K^{n_0(t)+1}) \right) \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \left( s_K^{n+1} - s_K^n \right).$$

En inversant les deux sommes puis en utilisant l'expression du schéma (IV.23), nous obtenons

$$\begin{aligned} A(t) \leq & \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \varphi(s_K^{n_1(t)+1}) - \varphi(s_K^{n_0(t)+1}) \right) \times \\ & \left( \sum_{L \in N(K)} \theta_{K|L}^{n+1} F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) + (1 - \theta_{K|L}^{n+1}) \times \right. \\ & \left. F\left(\frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, \frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}\right) - \tau_{K|L} \left( \varphi(s_L^{n+1}) - \varphi(s_K^{n+1}) \right) \right). \end{aligned}$$

Un regroupement des termes par face nous donne

$$\begin{aligned}
 A(t) &\leq \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \left( \varphi(s_K^{n_1(t)+1}) - \varphi(s_K^{n_0(t)+1}) - \varphi(s_L^{n_1(t)+1}) + \varphi(s_L^{n_0(t)+1}) \right) \\
 &\quad \left( \theta_{K|L}^{n+1} F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) + (1 - \theta_{K|L}^{n+1}) \times \right. \\
 &\quad \left. F\left(\frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, \frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}\right) - \tau_{K|L} \left( \varphi(s_L^{n+1}) - \varphi(s_K^{n+1}) \right) \right) \\
 &\leq \frac{3}{2} A_0(t) + \frac{3}{2} A_1(t) + A_2(t) + A_3(t) + A_4(t)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 A_0(t) &= \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} \left( \varphi(s_L^{n_0(t)+1}) - \varphi(s_K^{n_0(t)+1}) \right)^2, \\
 A_1(t) &= \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} \left( \varphi(s_L^{n_1(t)+1}) - \varphi(s_K^{n_1(t)+1}) \right)^2, \\
 A_2(t) &= \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \frac{(\theta_{K|L}^n)^2}{\tau_{K|L}} \left( F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right)^2, \\
 A_3(t) &= \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \frac{(1 - \theta_{K|L}^{n+1})^2}{\tau_{K|L}} \times \\
 &\quad \left( F\left(\frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, \frac{s_K^{n+1} + s_L^{n+1}}{2}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}\right) \right)^2, \\
 A_4(t) &= \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} \left( \varphi(s_L^{n+1}) - \varphi(s_K^{n+1}) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Majoration des termes  $\int_0^{T-\tau} A_0(t) dt$  et  $\int_0^{T-\tau} A_1(t) dt$  :

Soit  $m \in \{0 \dots M\}$ . Si  $m\delta < t \leq (m+1)\delta$  alors  $n_0(t) = m$  ce qui nous donne

$$\int_0^{T-\tau} A_0(t) dt \leq \sum_{m=0}^M \int_{m\delta}^{(m+1)\delta} \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} \left( \varphi(s_L^{m+1}) - \varphi(s_K^{m+1}) \right)^2 dt.$$

En effectuant le changement de variable  $t = s + (n - m)\delta$ , nous avons, pour tout  $m \in \{0 \dots M\}$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{m\delta}^{(m+1)\delta} \mathcal{X}_n(t, t + \tau) dt &= \int_{(2m-n)\delta}^{(2m-n+1)\delta} \mathcal{X}_n(s + (n - m)\delta, s + (n - m)\delta + \tau) ds \\
 &= \int_{(2m-n)\delta}^{(2m-n+1)\delta} \mathcal{X}_m(s, s + \tau) ds.
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{m\delta}^{(m+1)\delta} \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) dt \leq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_m(s, s + \tau) ds = \tau.$$

Grâce à cette inégalité nous obtenons la majoration

$$\int_0^{T-\tau} A_0(t) dt \leq \tau |\varphi(s_{\mathcal{D}})|_{1, \mathcal{D}}^2.$$

De la même façon nous avons

$$\int_0^{T-\tau} A_1(t) dt \leq \tau |\varphi(s_{\mathcal{D}})|_{1, \mathcal{D}}^2.$$

Majoration du terme  $\int_0^{T-\tau} A_4(t) dt$  :

Comme  $\int_0^{T-\tau} \mathcal{X}_n(t, t + \tau) dt \leq \tau$ , nous avons à nouveau

$$\int_0^{T-\tau} A_4(t) dt \leq \tau |\varphi(s_{\mathcal{D}})|_{1, \mathcal{D}}^2.$$

Majoration des termes  $\int_0^{T-\tau} A_2(t) dt$  et  $\int_0^{T-\tau} A_3(t) dt$  :

Nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \frac{(\theta_{K|L}^{n+1})^2}{\tau_{K|L}} \left( F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right)^2 \leq \\ & \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \delta \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \frac{8C_{\eta}^2}{\tau_{K|L}} \left( |Q_{K,L}^{n+1}|^2 + |G_{K,L}|^2 \right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} |Q_{K,L}^{n+1}|^2 & \leq Q_{max}^2 (m(K|L))^2, \\ |G_{K,L}|^2 & \leq \left( (\rho_o - \rho_w) g \delta z_{K|L} \right)^2 (\tau_{K|L})^2 \leq \left( (\rho_o - \rho_w) g \right)^2 (m(K|L))^2, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \frac{8C_{\eta}^2}{\tau_{K|L}} \left( |Q_{K,L}^{n+1}|^2 + |G_{K,L}|^2 \right) \leq 8C_{\eta}^2 dm(\Omega) \left( Q_{max}^2 + \left( (\rho_o - \rho_w) g \right)^2 \right).$$

En utilisant à nouveau l'inégalité  $\int_0^{T-\tau} \mathcal{X}_n(t, t + \tau) dt \leq \tau$ , nous avons

$$\int_0^{T-\tau} A_2(t) dt \leq 8C_\eta^2 \tau T dm(\Omega) \left( Q_{max}^2 + ((\rho_o - \rho_w)g)^2 \right).$$

En effectuant le même raisonnement nous aboutissons à

$$\int_0^{T-\tau} A_3(t) dt \leq 8C_\eta^2 \tau T dm(\Omega) \left( Q_{max}^2 + ((\rho_o - \rho_w)g)^2 \right).$$

Finalement, en prenant

$$C_{13} = L_\varphi \left( 4C_{10} + 16C_\eta^2 T dm(\Omega) \left( Q_{max}^2 + ((\rho_o - \rho_w)g)^2 \right) \right)$$

nous obtenons l'inégalité (IV.51). ■

Nous concluons cette partie consacrée aux translations en temps par la

**Proposition IV.5.6** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 et IV.5.1 vérifiées et considérons une discrétisation admissible,  $\mathcal{D}$ , du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Soit  $s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  donnée par les équations (IV.9)-(IV.22)-(IV.23)-(IV.42). En dehors du domaine  $\Omega \times [0, T]$ , nous posons  $s_{\mathcal{D}} = 0$ . Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , nous avons alors*

$$\|\varphi(s_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot + \tau)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}^2 \leq C_{14} |\tau| \quad (\text{IV.52})$$

où  $C_{14}$  dépend des mêmes paramètres que la constante  $C_{13}$ .

Preuve :

Nous distinguons deux cas.

$|\tau| \leq T :$

Si  $0 \leq \tau \leq T$  alors

$$\begin{aligned} \|\varphi(s_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot + \tau)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}^2 &\leq \int_{-\tau}^0 \int_{\Omega} |\varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t + \tau))|^2 dx dt + \\ &\int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} |\varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t + \tau)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t))|^2 dx dt + \int_{T-\tau}^T \int_{\Omega} |\varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t))|^2 dx dt \leq \\ &\tau C_{13} + 2\tau L_\varphi^2 m(\Omega) \end{aligned}$$

grâce à la stabilité  $L^\infty$  du schéma (voir inégalités (IV.37)). Le cas  $-T \leq \tau \leq 0$  se traite de la même façon à un changement de variable près.

$|\tau| > T :$

Supposons par exemple  $\tau > T$ . Nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t + \tau)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t)) \right)^2 dx dt = \\ & \int_{T-\tau}^T \int_{\Omega} (\varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t + \tau)))^2 dx dt + \\ & \int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} (\varphi(s_{\mathcal{D}}(x, t)))^2 dx dt \leq 2|\tau|m(\Omega)L_{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Nous obtenons la même majoration pour  $\tau \leq -T$ .

Finalement, en prenant  $C_{14} = C_{13} + 2L_{\varphi}^2 m(\Omega)$  nous obtenons l'inégalité (IV.52).  $\blacksquare$

Munis des relations (IV.45), (IV.49), (IV.50), (IV.52), nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème IV.5.1.

### Preuve du Théorème IV.5.1

Convergence d'une sous-suite de  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$  :

Posons  $\tilde{s}_m = s_m$  sur  $\Omega \times ]0, T[$  et  $\tilde{s}_m = 0$  sur  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus (\Omega \times ]0, T[)$ . Comme la fonction  $\varphi$  est continue et que  $\tilde{s}_m$  vérifie (IV.37) sur  $\Omega \times ]0, T[$  pour tout  $m \in \{0 \dots M\}$ , la suite  $\varphi(\tilde{s}_m)$  est donc bornée dans  $L^q(\mathbb{R}^{d+1})$ ,  $1 \leq q \leq +\infty$ . Des inégalités (IV.50) et (IV.52), nous déduisons que, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$  et  $\tau \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $C(\xi, \tau) \rightarrow 0$  lorsque  $\xi \rightarrow 0$  et  $\tau \rightarrow 0$  telle que

$$\|\varphi(\tilde{s}_m(\cdot + \xi, \cdot + \tau)) - \varphi(\tilde{s}_m(\cdot, \cdot))\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})}^2 \leq C(\xi, \tau).$$

pour  $1 \leq q < \infty$ . Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème de Kolmogorov que nous rappelons ci-dessous.

**Théorème IV.5.2** *Soit  $\omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ ,  $1 \leq q < \infty$  et  $A \subset L^q(\omega)$ . Alors  $A$  est relativement compact dans  $L^q(\omega)$  si et seulement si  $\{p(u), u \in A\} \subset L^q(\mathbb{R}^N)$  tel que*

- $p(u) = u$  p.p. sur  $\omega$ , pour tout  $u \in A$ ,
- $\{p(u) = u, u \in A\}$  est borné dans  $L^q(\mathbb{R}^N)$ ,
- $\|p(u)(\cdot + \xi) - p(u)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0$  lorsque  $\xi \rightarrow 0$  uniformément par rapport à  $u \in A$ .

En effet, en prenant  $N = d + 1$ ,  $\omega = \Omega \times ]0, T[$ ,  $1 \leq q < \infty$  et  $p(\varphi(s_m)) = \varphi(\tilde{s}_m)$ , nous en déduisons que la suite  $\varphi(s_m)$  est relativement compacte dans  $L^q(\Omega \times ]0, T[)$ . Il existe donc une sous-suite que nous noterons toujours  $(\varphi(s_m))$  convergeant fortement dans  $L^q(\Omega \times ]0, T[)$ . Comme la fonction  $\varphi$  est  $C^1$  strictement croissante, nous en déduisons également la convergence de la suite  $(s_m)$  vers une fonction  $s \in L^q(\Omega \times ]0, T[) \cap L^\infty(\Omega \times ]0, T[)$ .

Montrons que  $\varphi(s) \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$  :

Rappelons tout d'abord que, formellement, nous avons

$$\begin{aligned} \|\varphi(s)\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2 &= \int_0^T \|\varphi(s(\cdot, t))\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ &= \int_0^T \left( \|\varphi(s(\cdot, t))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \varphi(s(\cdot, t))}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \end{aligned}$$

où  $\frac{\partial \varphi(s(\cdot, t))}{\partial x}$  désigne la dérivée en espace de la fonction  $\varphi(s(\cdot, t))$  au sens des distributions.

Comme  $\varphi(s) \in L^2(\Omega \times ]0, T[)$ , il suffit de démontrer que

$$\frac{\partial \varphi(s)}{\partial x} \in L^2(\Omega \times ]0, T[).$$

Soient  $m \in \{0 \dots M\}$ ,  $\psi \in C_c^\infty(\Omega \times ]0, T[)$ , et  $\varepsilon > 0$  tel que  $\psi(x, t) = 0$  pour tout  $t \in ]0, T[$  si la distance entre le point  $x \in \Omega$  et le domaine  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$  est inférieure à  $\varepsilon$ . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (IV.49), nous obtenons

$$\int_{\Omega \times ]0, T[} \frac{\varphi(s_m(x + \xi, t)) - \varphi(s_m(x, t))}{|\xi|} \psi(x, t) dx dt \leq \frac{\sqrt{C_{12}} |\xi| (|\xi| + h_m)}{|\xi|} \|\psi\|_{L^2(\Omega \times ]0, T[)}.$$

Comme  $h_m \rightarrow 0$  lorsque  $m \rightarrow \infty$ , nous avons

$$\int_{\Omega \times ]0, T[} \frac{\varphi(s(x + \xi, t)) - \varphi(s(x, t))}{|\xi|} \psi(x, t) dx dt \leq \sqrt{C_{12}} \|\psi\|_{L^2(\Omega \times ]0, T[)}.$$

Un changement de variable permet d'écrire cette inégalité sous la forme

$$\int_{\Omega \times ]0, T[} \frac{\psi(x - \xi, t) - \psi(x, t)}{|\xi|} \varphi(s(x, t)) dx dt \leq \sqrt{C_{12}} \|\psi\|_{L^2(\Omega \times ]0, T[)}. \quad (\text{IV.53})$$

Notons  $\{e_i, i = 1 \dots d\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Prenons  $\xi = \lambda e_i$ ,  $i \in \{1 \dots d\}$ ,  $|\lambda| < \varepsilon$  dans (IV.53), nous avons alors, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$- \int_{\Omega \times ]0, T[} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x_i} \varphi(s(x, t)) dx dt \leq \sqrt{C_{12}} \|\psi\|_{L^2(\Omega \times ]0, T[)}, \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega \times ]0, T[).$$

De cette inégalité, nous déduisons que

$$\frac{\partial \varphi(s)}{\partial x} \in L^2(\Omega \times ]0, T[).$$

Montrons que  $s$  est solution du problème (IV.44) :

Considérons l'ensemble  $\tilde{C}_{test} = \{h \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T]) / h(\cdot, T) = 0\}$  dense dans  $C_{test}$ . Soient  $\psi \in \tilde{C}_{test}$  et  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$  la suite donnée par les équations (IV.9)-(IV.22)-(IV.23)-(IV.42).

Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}$ , nous multiplions l'équation (IV.23) par  $\psi_K^n = \psi(x_K, n\delta)$ . Nous sommes ensuite les égalités obtenues sur l'ensemble des volumes :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K)(s_K^{n+1} - s_K^n) \psi_K^n + \\ & \delta \sum_{L \in N(K)} \left( \mathcal{F}(\theta_{K|L}^{n+1}, s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - \tau_{K|L}(\varphi(s_L^{n+1}) - \varphi(s_K^{n+1})) \right) \psi_K^n = \\ & E_{1,m} + E_{2,m} + E_{3,m} = 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E_{1,m} &= \sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K)(s_K^{n+1} - s_K^n) \psi_K^n, \\ E_{2,m} &= \sum_{n=0}^M \delta \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \left( \mathcal{F}(\theta_{K|L}^{n+1}, s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right) \psi_K^n, \\ E_{3,m} &= - \sum_{n=0}^M \delta \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \left( \varphi(s_L^{n+1}) - \varphi(s_K^{n+1}) \right) \psi_K^n. \end{aligned}$$

Convergence du terme  $E_{1,m}$  :

Le terme  $E_{1,m}$  peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} E_{1,m} &= - \sum_{n=1}^{M+1} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) s_K^n \int_{(n-1)\delta}^{n\delta} \psi_t(x_K, t) dt - \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) s_K^0 \psi(x_K, 0) + \\ & \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) s_K^{M+1} \psi(x_K, (M+1)\delta) \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \int_0^T s_m(x_K, t) \psi_t(x_K, t) dt - \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) s_K^0 \psi(x_K, 0), \end{aligned}$$

car  $\psi(x, (M+1)\delta) = \psi(x, T) = 0$ .

Comparons maintenant ce terme avec  $F_{1,m}$  défini par

$$F_{1,m} = - \int_0^T \int_{\Omega} s_m(x, t) \psi_t(x, t) dx dt - \int_{\Omega} s_m^0(x) \psi(x, 0) dx.$$

Quand  $m \rightarrow +\infty$ ,  $s_m \rightarrow s$  dans  $L^1(\Omega \times ]0, T[)$  et  $s_m^0 \rightarrow s_{\text{ini}}$  dans  $L^1(\Omega)$ , d'où

$$F_{1,m} \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} s(x, t) \psi_t(x, t) dx dt - \int_{\Omega} s_{\text{ini}}(x) \psi(x, 0) dx.$$

Comme  $s_m \in L^\infty(\Omega \times ]0, T[)$ ,  $s_m(\cdot, 0) \in L^\infty(\Omega)$  et que la fonction  $\psi$  est suffisamment régulière, nous avons

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |E_{1,m} - F_{1,m}| = 0.$$

Convergence du terme  $E_{2,m}$  :

Soit

$$F_{2,m} = \int_0^T \int_{\Omega} f(s_m, \vec{Q}, \vec{G}) \cdot \vec{\nabla} \psi dx dt.$$

Comme, d'après H5-1,

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{Q}) = 0 \text{ sur } \Omega \times ]0, T[, \\ \vec{Q} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times ]0, T[, \\ \operatorname{div}(\vec{G}) = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.54})$$

ce terme peut se réécrire sous la forme

$$F_{2,m} = \sum_{n=0}^M \delta t \left( \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \sum_{L \in N(K)} m(K|L) f(s_K^{n+1}, (\psi \vec{Q})_{K,L}^{n+1}, (\psi \vec{G})_{K,L}^{n+1}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) f(s_K^{n+1}, 0, (\psi \vec{G})_{\sigma}^{n+1}) \right) \right)$$

où

$$(\psi \vec{u})_{\sigma}^n = \frac{1}{\delta t m(\sigma)} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{\sigma} \psi \vec{u}(x, t) \cdot \vec{n}_{\sigma} d\zeta(x) dt.$$

Considérons maintenant le terme  $\tilde{F}_{i,2,m}$  donné par

$$\tilde{F}_{2,m} = \sum_{n=0}^M \delta t \left( \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \sum_{L \in N(K)} m(K|L) f(s_K^{n+1}, \frac{Q_{K,L}^{n+1}}{m(K|L)}, \frac{G_{K,L}}{m(K|L)}) \psi_{K|L}^{n+1} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) f(s_K^{n+1}, 0, \frac{G_{K,\sigma}}{m(\sigma)} \psi_{\sigma}^{n+1}) \right) \right)$$

avec

$$\psi_{\sigma}^{n+1} = \frac{1}{\delta t m(\sigma)} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{\sigma} \psi(x, t) d\zeta(x) dt.$$

Nous montrons dans un premier temps que la différence  $|F_{2,m} - \tilde{F}_{2,m}|$  tend vers 0 lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Pour cela nous avons besoin du Lemme B.2.1. En effet, en regroupant les termes selon les faces intérieures, la différence  $dF_{2,m}$  entre les termes  $\tilde{F}_{2,m}$  et  $F_{2,m}$  est telle que

$$dF_{2,m} = dF_{2,m,int} + dF_{2,m,ext}$$

avec

$$\begin{aligned}
 dF_{2,m,int} &= \sum_{n=0}^M \delta \left( \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) \times \right. \\
 &\quad \left( f \left( s_K^{n+1}, \frac{Q_{K,L}^{n+1}}{m(K|L)} \psi_{K|L}^{n+1} - (\psi \vec{Q})_{K,L}^{n+1}, \frac{G_{K,L}}{m(K|L)} \psi_{K|L}^{n+1} - (\psi \vec{G})_{K,L}^{n+1} \right) - \right. \\
 &\quad \left. f \left( s_L^{n+1}, \frac{Q_{K,L}^{n+1}}{m(K|L)} \psi_{K|L}^{n+1} - (\psi \vec{Q})_{K,L}^{n+1}, \frac{G_{K,L}}{m(K|L)} \psi_{K|L}^{n+1} - (\psi \vec{G})_{K,L}^{n+1} \right) \right), \\
 dF_{2,m,ext} &= \sum_{n=0}^M \delta \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} m(\sigma) \times \right. \\
 &\quad \left. \left( f \left( s_K^{n+1}, 0, \frac{G_\sigma}{m(\sigma)} \psi_\sigma^{n+1} - (\psi \vec{G})_\sigma^{n+1} \right) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$|dF_{2,m,int}| \leq \sum_{n=0}^M \delta \left( \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} m(K|L) |s_L^{n+1} - s_K^{n+1}| \times \right. \\
 \left. 2C_\eta \left( \left| \frac{Q_{K,L}^{n+1}}{m(K|L)} \psi_{K|L}^{n+1} - (\psi \vec{Q})_{K,L}^{n+1} \right| + \left| \frac{G_{K,L}}{m(K|L)} \psi_{K|L}^{n+1} - (\psi \vec{G})_{K,L}^{n+1} \right| \right) \right).$$

Les fonctions  $\psi$  et  $\vec{Q}$  étant suffisamment régulières, il existe une constante  $C_{15}$  telle que

$$|dF_{2,m,int}| \leq C_{15} \sum_{n=0}^M \delta \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} m(K|L) \text{diam}(K) |s_L^{n+1} - s_K^{n+1}|$$

et le Lemme B.2.1 nous assure que

$$|dF_{2,m,int}| \rightarrow 0 \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

Pour le terme restant, la régularité des fonctions  $\psi$  et  $\vec{Q}$  et la stabilité  $L^\infty$  du schéma nous donnent

$$|dF_{2,m,ext}| \leq C_{16} \text{size}(\mathcal{M}).$$

Nous sommes donc assurés que

$$|F_{2,m} - \tilde{F}_{2,m}| \rightarrow 0 \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

D'autre part,  $\vec{Q}$  et  $\vec{G}$  étant bornés dans  $L^\infty(\Omega \times ]0, T[)$ ,  $f(\cdot, \vec{Q}, \vec{G})$  est donc Lipschitzienne. De plus, comme  $s_m \rightarrow s$  dans  $L^1(\Omega \times ]0, T[)$ , nous avons alors

$$F_{2,m} \rightarrow \int_0^T \int_\Omega f(s, \vec{Q}, \vec{G}) \cdot \vec{\nabla} \psi dx dt \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

En utilisant à nouveau les relations (IV.54), nous pouvons réécrire le terme  $\tilde{F}_{2,m}$  sous la forme

$$\tilde{F}_{2,m} = \sum_{n=0}^M \delta t \left( \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( \sum_{L \in N(K)} f(s_K^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) (\psi_{K|L}^{n+1} - \psi_K^n) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} f(s_K^{n+1}, 0, G_{K,\sigma}) (\psi_\sigma^{n+1} - \psi_K^n) \right) \right).$$

Mais remarquons que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \psi_{K|L}^{n+1} = 0.$$

$E_{2,m}$  peut alors se mettre sous la forme

$$E_{2,m} = \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \left( F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) \right) (\psi_K^n - \psi_{K|L}^{n+1}).$$

Nous avons alors

$$|E_{2,m} + \tilde{F}_{2,m}| \leq \sum_{n=0}^M \delta t \left( \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} C_\eta (|Q_{K,L}^{n+1}| + |G_{K,L}|) |s_L^{n+1} - s_K^{n+1}| |\psi_K^n - \psi_{K|L}^{n+1}| + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} |f(s_K^n, 0, G_{K,\sigma})| |\psi_\sigma^{n+1} - \psi_K^n| \right).$$

Il existe donc une constante  $C_\psi$  telle que

$$|E_{2,m} + \tilde{F}_{2,m}| \leq \sum_{n=0}^M \delta t \left( \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} C_\eta (Q_{max} + (\rho_w - \rho_o)g) m(K|L) |s_L^{n+1} - s_K^{n+1}| \times C_\psi \text{diam}(\mathbf{K}) + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} 2C_\eta (\rho_w - \rho_o) g m(\sigma) C_\psi \text{diam}(\mathbf{K}) \right).$$

De plus

$$\sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}} C_\eta (\rho_w - \rho_o) g m(\sigma) C_\psi \text{diam}(\mathbf{K}) \leq T m(\partial\Omega) C_\eta (\rho_w - \rho_o) g C_\psi \text{size}(\mathcal{M}).$$

Donc, finalement, nous avons  $E_{2,m} \rightarrow - \int_0^T \int_\Omega f(s, \vec{Q}, \vec{G}) \cdot \nabla \psi dx dt$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ .

*Convergence du terme  $E_{3,m}$  :*

En regroupant les termes de  $E_{3,m}$  par face, nous avons

$$E_{3,m} = \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} \left( \varphi(s_K^{n+1}) - \varphi(s_L^{n+1}) \right) \left( \psi_K^n - \psi_L^n \right).$$

Remarquons que la fonction  $\chi_\Omega$  définie par

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est un élément de  $L^2(\Omega_i)$ . Nous pouvons alors appliquer le Lemme B.2.2 avec  $v_{\mathcal{D}_m} = \varphi(s_{\mathcal{D}_m})$ ,  $v = \varphi(s)$ ,  $h = \chi_\Omega$ . Nous obtenons ainsi

$$E_{3,m} = \int_0^T \int_\Omega w_{\mathcal{D}_m}(x, t) dx dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_\Omega \vec{\nabla} \varphi(s)(x, t) \cdot \vec{\nabla} \psi(x, t) dx dt \quad (\text{IV.55})$$

où

$$w_{\mathcal{D}_m}(x, t) = \begin{cases} \frac{\tau_{K|L}}{D_{K|L}} (\varphi(s_K^{n+1}) - \varphi(s_L^{n+1})) (\psi_K^n - \psi_L^n), & \forall (x, t) \in D_{K|L} \times ]n\delta t, (n+1)\delta t], \\ 0, & \forall (x, t) \in D_\sigma \times ]n\delta t, (n+1)\delta t], \sigma \subset \partial\Omega. \end{cases}$$

CQFD ■

## IV.6 Tests numériques

### IV.6.1 Données numériques

Précisons, tout d'abord, les données relatives aux tests qui suivent.

- **Gravité** :  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ .
- **Propriétés des fluides** :  $\mu_o = 5 \text{ cP}$ ,  $\mu_w = 1 \text{ cP}$ ,  $\rho_o = 800 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho_w = 1100 \text{ kg.m}^{-3}$ .
- **Propriétés de la roche** :  $\Upsilon$  donnée par la loi de Kozeny-Karman avec  $S_{\text{spec}} = 5.10^6 \text{ m}^2.\text{m}^{-3}$ .
- **Propriétés communes à la roche et aux fluides** :  $kr_o(s) = s$ ,  $kr_w(s) = 1 - s$ ,  $\eta_o(s) = \frac{kr_o(s)}{\mu_o}$ ,  $\eta_w(s) = \frac{kr_w(s)}{\mu_w}$ ,  $\pi(s) = 0.3s$ .

### IV.6.2 Tests sur le schéma amont des pétroliers en l'absence de pression capillaire

#### Test 1

Considérons un domaine  $\Omega = ] - 500, 0[$  and  $D = ] - 500, -400[$ . Les bords sont imperméables, la porosité vaut  $\phi = 0.1$  et nous supposons ici la pression capillaire nulle.  $s_{ini}$  est donné par

$$s_{\text{ini}}(x) = \begin{cases} 1.0 & \text{si } x \in D, \\ 0.0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La colonne est discrétisée à l'aide d'une grille régulière de pas d'espace  $\Delta z$ .

Dans ce test, l'huile monte simplement par gravité jusqu'en  $z = 0$  où elle s'accumule. Les Figures IV.1 et IV.2 donnent les surpressions  $p - p_{\text{hydro}}$  et les saturations obtenues en  $t = 0.1 Ma$  pour différents pas d'espace. Rappelons que les surpressions sont définies par  $p_w - \rho_w g z$ . Pour chaque pas d'espace, nous avons ensuite calculé l'erreur commise sur la pression (Figure IV.3) et la saturation (Figure IV.4). Ces erreurs ont été estimées à l'aide d'une solution de référence correspondant à un pas d'espace  $\Delta z = 0.5 m$ .

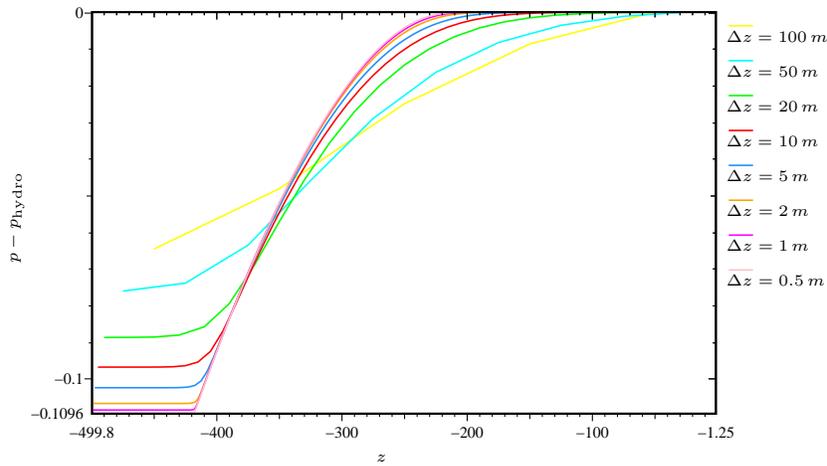


Figure IV.1:  $p - p_{\text{hydro}}$  à  $t = 0.1 Ma$  pour différents pas d'espace

## Test 2

Soit  $\Omega = ]0, 6000[ \times ] - 3000, 0[$ . Nous supposons que l'axe ( $0z$ ) fait un angle  $\theta = 0.5$  radian avec le vecteur gravité  $\vec{g}$ . Soit  $D_1 = ]2000, 4000[ \times ] - 2000, -1000[$  et  $D_2 = ]4000, 6000[ \times ] - 3000, -2000[$ , deux sous-ensembles de  $\Omega$ . La porosité est ici donnée par

$$\phi(x) = \begin{cases} 0.05 & \text{si } x \in D_1, \\ 0.1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$s_{\text{ini}}$  est définie par

$$s_{\text{ini}}(x) = \begin{cases} 1.0 & \text{si } x \in D_2, \\ 0.0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

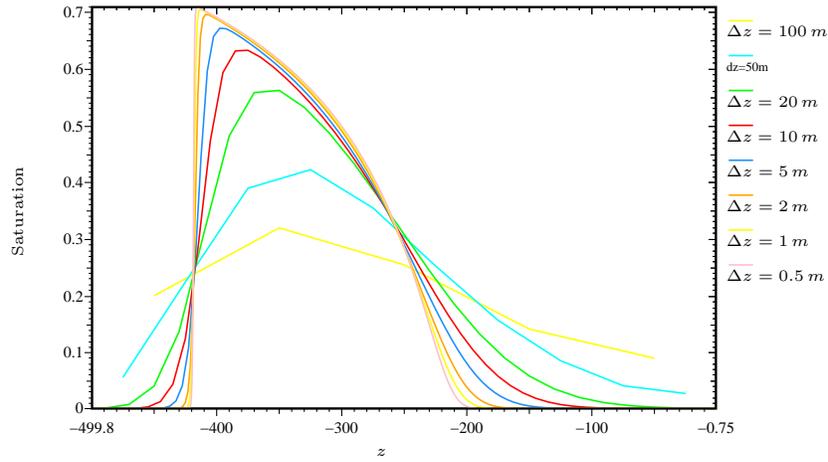


Figure IV.2: Saturation à  $t = 0.1 Ma$  pour différents pas d'espace

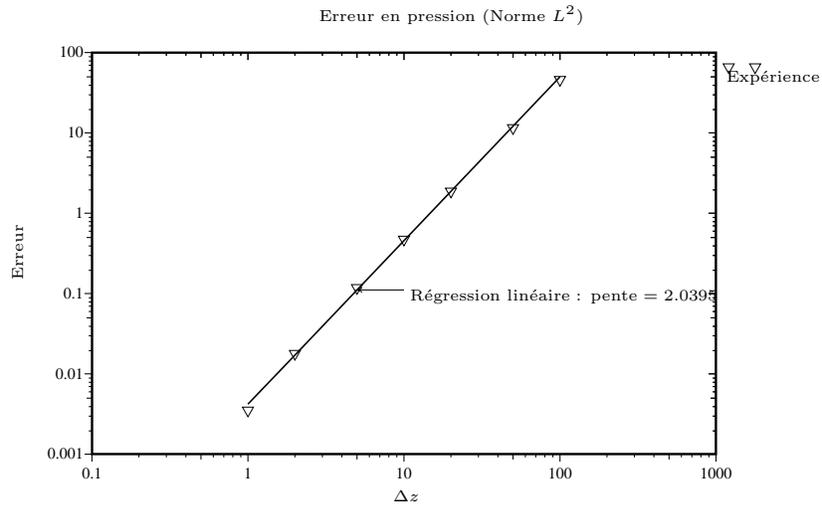


Figure IV.3: Convergence numérique en pression

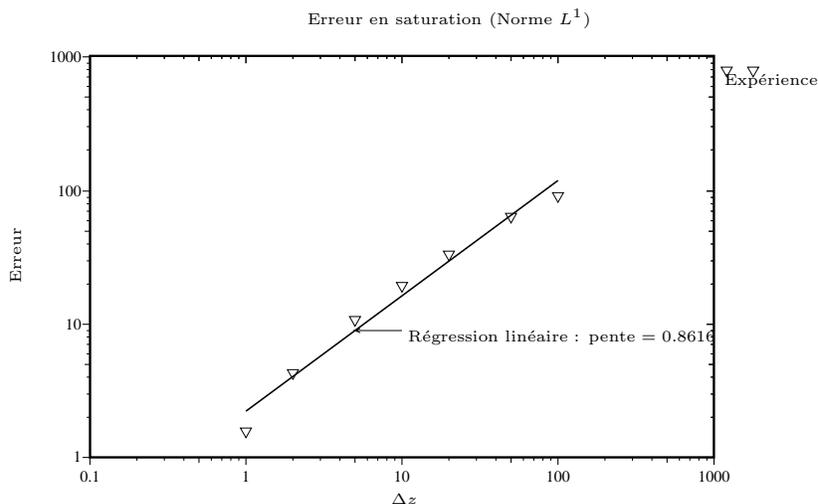


Figure IV.4: Convergence numérique en saturation

Là encore, nous ne tenons pas compte de la capillarité. Le domaine est discrétisé à l'aide d'une grille cartésienne régulière de pas d'espace égal à  $100\text{ m}$  ( $60 \times 30$ ). La figure IV.5 donne un aperçu (plus grossier) du maillage et des différentes zones qui constituent le bassin.

La situation que nous étudions ici est proche de cas rencontrés en genèse de bassin : après génération, les hydrocarbures migrent au travers du bassin sous l'effet de la gravité et des hétérogénéités de la roche. Au début de la simulation, l'huile se concentre dans le coin inférieur droit du domaine que nous avons noté  $D_2$ . Sous l'effet de la gravité, l'huile se déplace vers le coin supérieur gauche en contournant la zone  $D_1$  où les perméabilités sont plus faibles. Une petite partie de l'huile traverse cette zone. A l'état final, toute l'huile s'est accumulée dans le coin supérieur gauche. Les Figures IV.6, IV.7, IV.8, IV.9, IV.10, IV.11 montrent l'évolution de la saturation au cours du temps. Les calculs ont été effectués avec la forme implicite en saturation du schéma amont des pétroliers.

### IV.6.3 Tests sur le schéma à nombre de Péclet variable en présence de pression capillaire

#### Test 1

Nous comparons ici l'évolution de la saturation au cours du temps pour différents schémas à savoir : le schéma à Nombre de Péclet Variable dans sa forme implicite et explicite, les schémas décentrés explicite et implicite (où  $\theta_{K|L}^{n+1} = 1$ ) et un schéma explicite muni d'un

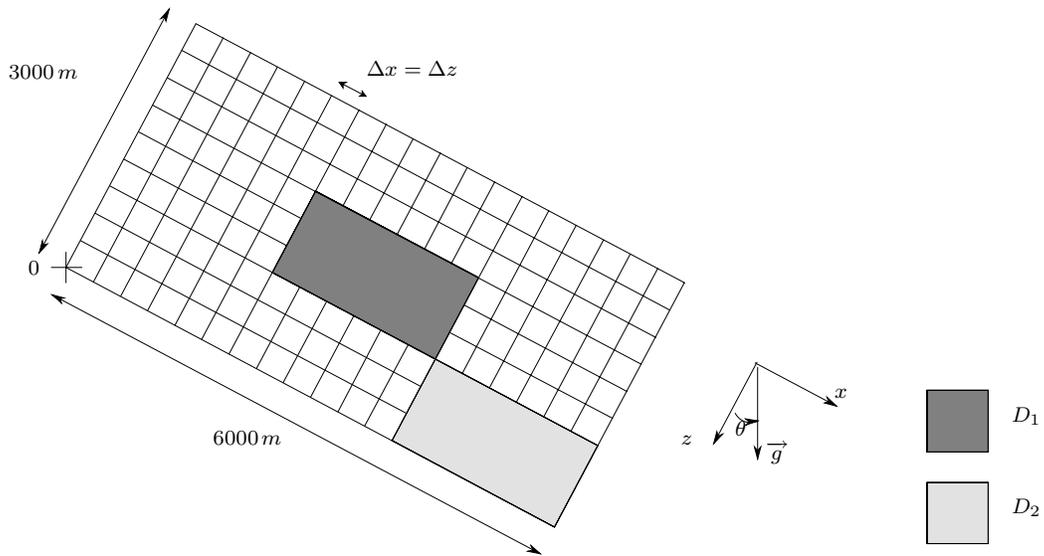


Figure IV.5: Maillage et zones particulières du domaine  $\Omega$

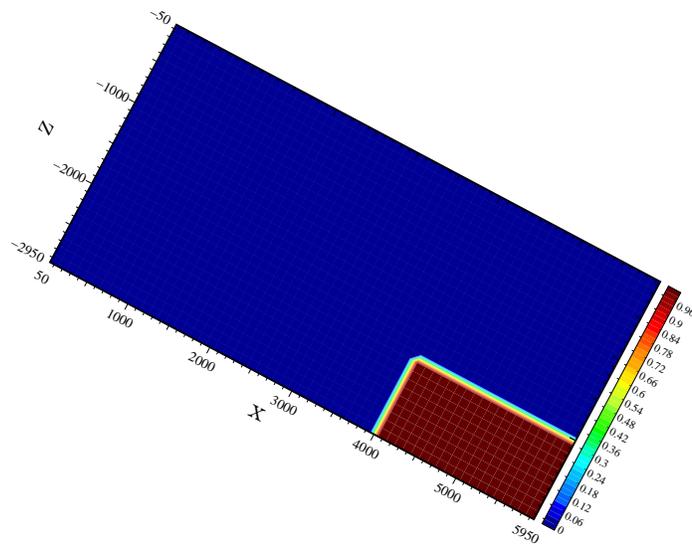
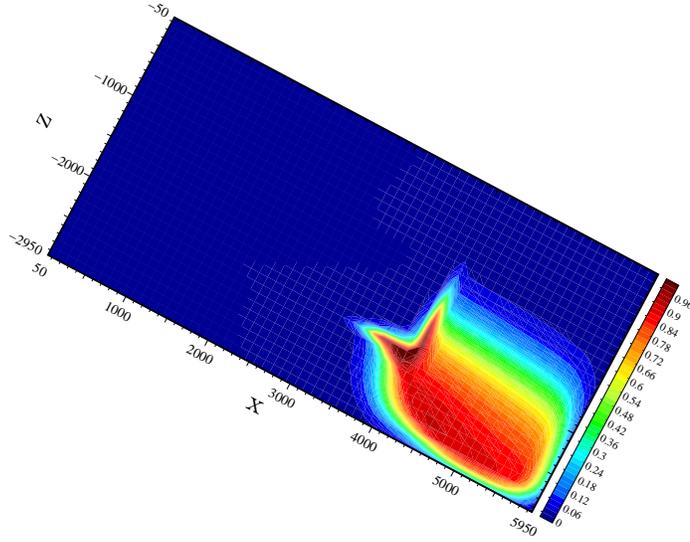


Figure IV.6: Saturation en  $t = 0.0 Ma$

limiteur de pente sur les mobilités (schéma MUSCL).

Soient  $\Omega = ]0, 3000[$  et  $D = ]2600, 3000[$ . La porosité est constante dans le domaine et égale à 0.1. La condition initiale est donnée par


 Figure IV.7: Saturation en  $t = 0.3 Ma$ 

$$s_{\text{ini}}(x) = \begin{cases} 1.0 & \text{si } x \in D, \\ 0.0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'axe  $(Oz)$  est à nouveau orienté dans le même sens que le vecteur gravité  $\vec{g}$ . Comme le domaine est monodimensionnel et que les bords sont imperméables, la vitesse totale est égale à 0 sur  $\Omega \times [0, T]$ . Le domaine est discrétisé à l'aide d'une grille régulière de pas d'espace  $\Delta z$ . Soit  $N = \text{card}(T)$ .

Le schéma à limiteur de pente que nous utilisons pour discrétiser (IV.17) est défini, pour tout  $i \in \{1 \dots N\}$ , par

$$\Delta z \phi \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\delta t} + F_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + \Upsilon \frac{\varphi(s_{i+1}^{n+1}) - \varphi(s_i^{n+1})}{\Delta z} - \Upsilon \frac{\varphi(s_i^{n+1}) - \varphi(s_{i-1}^{n+1})}{\Delta z} = 0$$

où

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \begin{cases} \frac{\tilde{\eta}_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left( Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + G \tilde{\eta}_{w,i+\frac{1}{2}}^{n+1} \right)}{\tilde{\eta}_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} + \tilde{\eta}_{w,i+\frac{1}{2}}^{n+1}} & \text{pour } i \in \{1 \dots N-1\}, \\ 0 & \text{pour } i=0 \text{ ou } i=N, \end{cases}$$

- $G = \Upsilon(\rho_o - \rho_w)g$  et  $Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$  est donné par (IV.20),
- **pour**  $Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} < 0$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \tilde{\eta}_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1,+}, \\ \tilde{\eta}_{w,i+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \begin{cases} \tilde{\eta}_{w,i+\frac{1}{2}}^{n+1,-} & \text{si } Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - G\tilde{\eta}_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} \geq 0, \\ \tilde{\eta}_{w,i+\frac{1}{2}}^{n+1,+} & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

- **pour**  $Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \geq 0$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{w,i+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \tilde{\eta}_{w,i+\frac{1}{2}}^{n+1,-}, \\ \tilde{\eta}_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \begin{cases} \tilde{\eta}_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1,-} & \text{si } Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + G\tilde{\eta}_{w,i+\frac{1}{2}}^{n+1} \geq 0, \\ \tilde{\eta}_{o,i+\frac{1}{2}}^{n+1,+} & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

- pour tout  $\alpha \in \{w, o\}$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{\alpha,i+\frac{1}{2}}^{n+1,+} &= \eta_\alpha(s_{i+1}^n) - d(z_{i+\frac{1}{2}}, z_{i+1})\delta\eta_{\alpha,i+1}^n, \\ \tilde{\eta}_{\alpha,i+\frac{1}{2}}^{n+1,-} &= \eta_\alpha(s_i^n) + d(z_i, z_{i+\frac{1}{2}})\delta\eta_{\alpha,i}^n, \end{aligned}$$

•

$$\delta\eta_{\alpha,i}^n = \begin{cases} \text{signe}(\delta\hat{\eta}_{\alpha,i}^n) \min \left( |\delta\hat{\eta}_{\alpha,i}^n|, \frac{|\eta_\alpha(s_{i+1}^n) - \eta_\alpha(s_i^n)|}{d(z_i, z_{i+1})}, \frac{|\eta_\alpha(s_i^n) - \eta_\alpha(s_{i-1}^n)|}{d(z_{i-1}, z_i)} \right) \\ \text{si ces trois quantités ont même signe,} \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

•

$$\delta\hat{\eta}_{\alpha,i}^n = \frac{|\eta_\alpha(s_{i+1}^n) - \eta_\alpha(s_{i-1}^n)|}{d(z_{i-1}, z_{i+1})}.$$

Pour  $\Delta z = 50 m$ , les Figures IV.12, IV.13, IV.14 montrent la montée de l'huile par gravité le long de la colonne  $\Omega$  à différentes dates. Pour chacune de ces dates nous indiquons les saturations calculées par les différents schémas. Nous constatons sur ce premier test que la précision atteinte par le schéma à nombre de Péclet variable est proche de celle du schéma avec limiteur de pente. La forme implicite diffuse un peu plus mais la solution obtenue reste quand même meilleure que celle obtenue avec les schémas décentrés.

## Test 2

Nous allons maintenant essayer d'estimer la vitesse de convergence du schéma à nombre de Péclet variable explicite. Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que le test précédent en considérant un domaine plus petit où  $\Omega = ] - 500, 0[$  et  $D = ] - 500, -100[$ . Les autres données sont inchangées. Pour évaluer la vitesse de convergence nous avons calculé une solution de référence en  $t = 0.1$  pour un pas d'espace  $\Delta z = 0.5 m$ . La Figure IV.15 montre l'erreur obtenue pour différents pas d'espace.

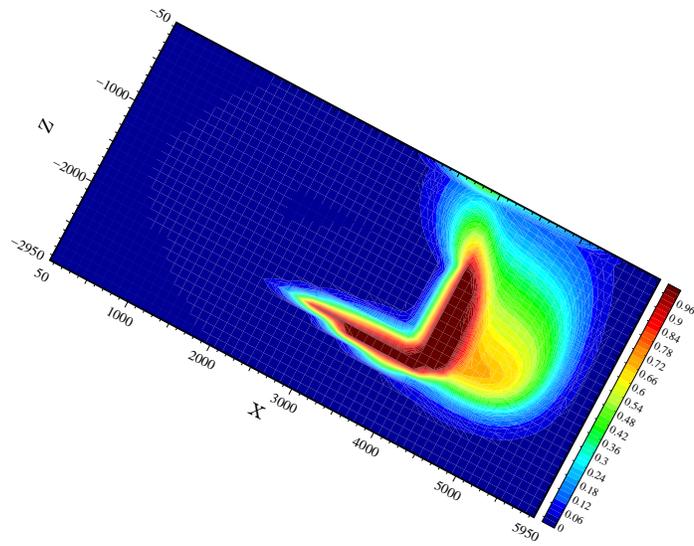


Figure IV.8: Saturation en  $t = 1.0 \text{ Ma}$

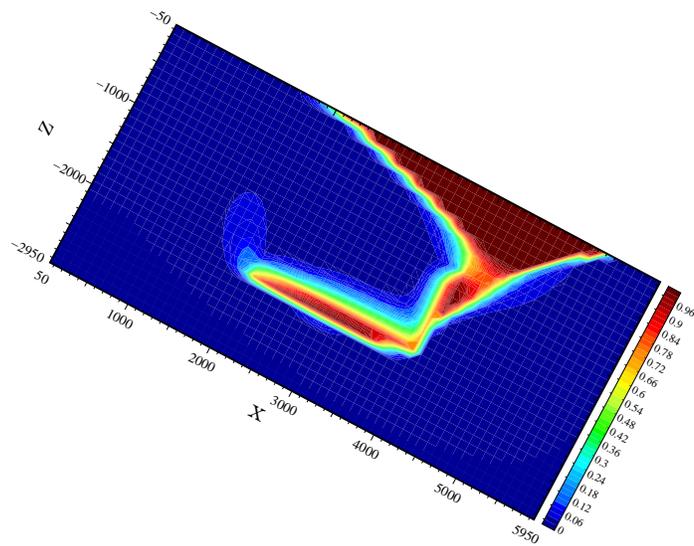


Figure IV.9: Saturation en  $t = 2.0 \text{ Ma}$

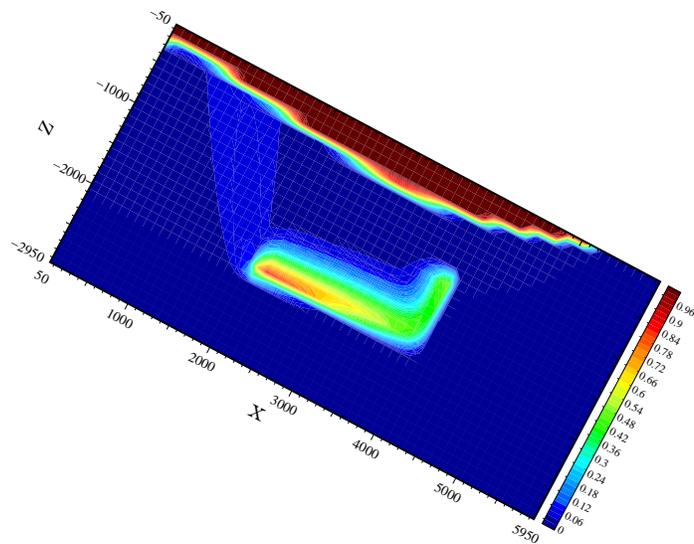


Figure IV.10: Saturation en  $t = 3.7 \text{ Ma}$

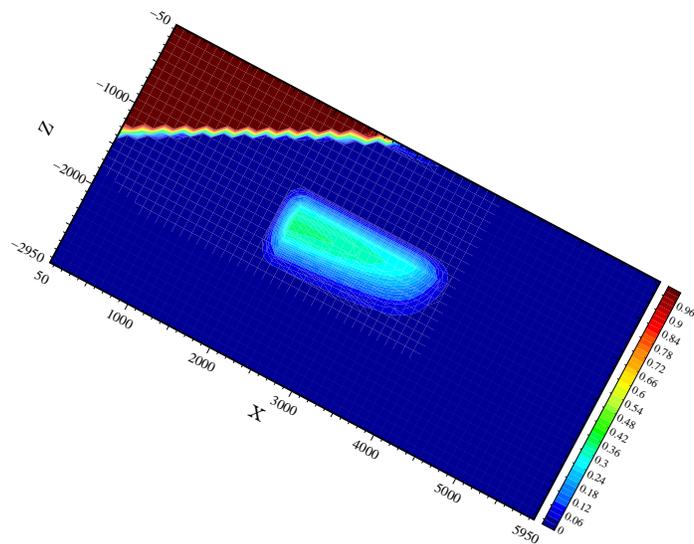


Figure IV.11: Saturation en  $t = 10.0 \text{ Ma}$

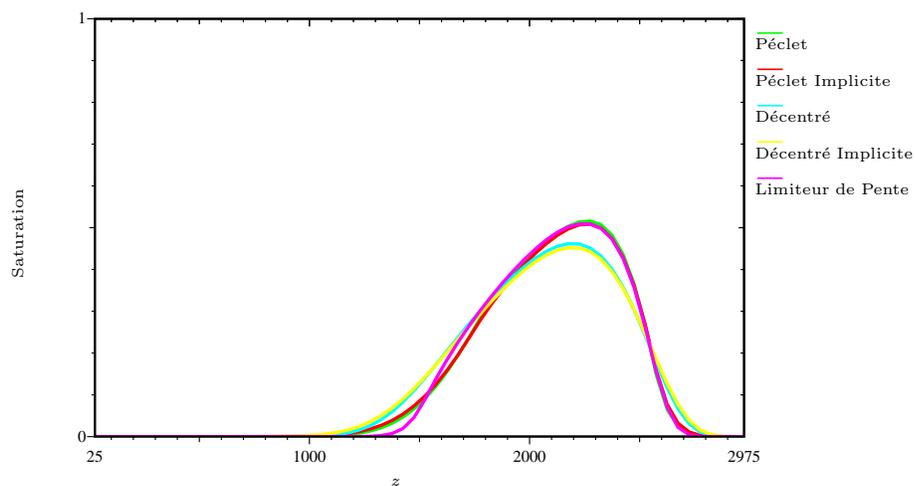


Figure IV.12: Saturations obtenues par les différents schémas en  $t = 0.5$

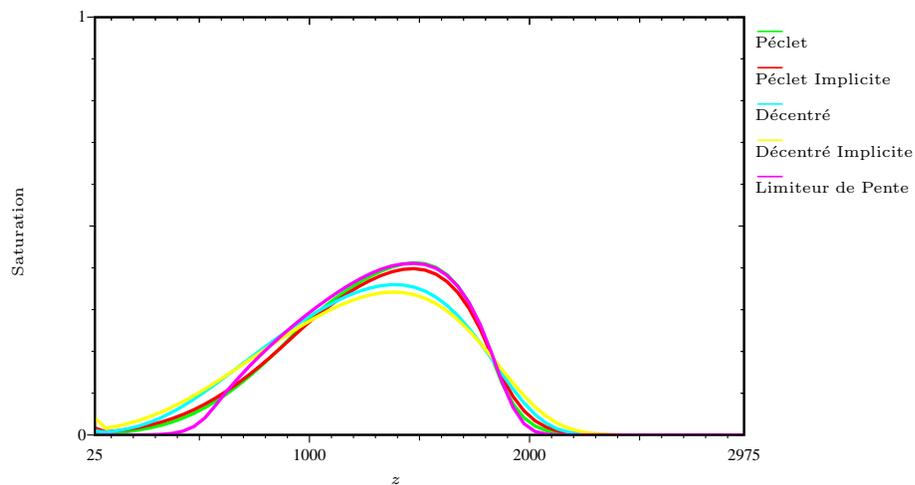


Figure IV.13: Saturations obtenues par les différents schémas en  $t = 1.0$

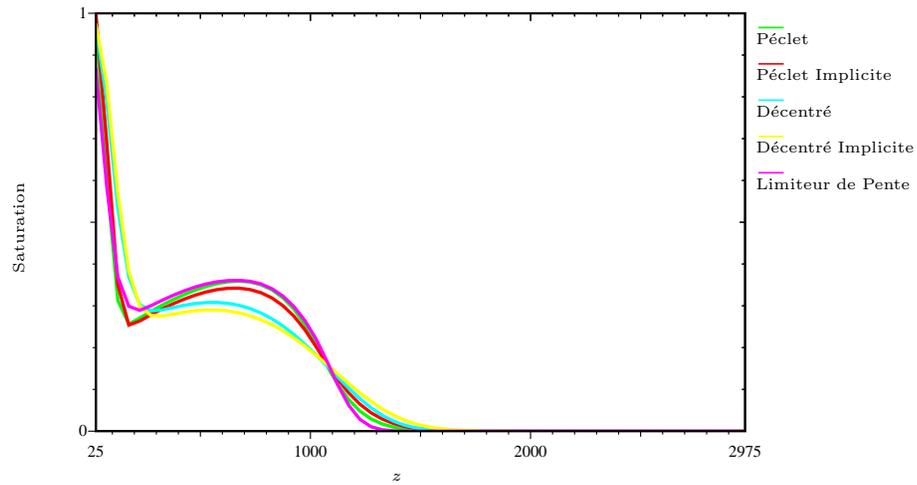


Figure IV.14: Saturations obtenues par les différents schémas en  $t = 1.5$

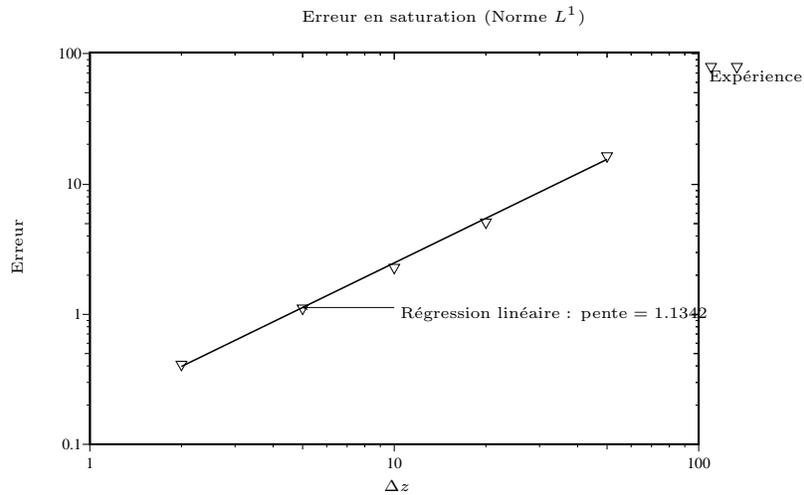


Figure IV.15: Convergence numérique en saturation

## Chapitre V

# Pressions capillaires et changement de type de roche

---

Ce chapitre aborde le cas où la pression capillaire et les perméabilités relatives sont des fonctions dépendant à la fois de la variable d'espace et de la saturation. Cette situation est très fréquente en genèse de bassin où les changements de lithologie induisent des changements de courbes de pressions capillaires et de perméabilités relatives. Ces hétérogénéités jouent un rôle important au cours de la migration des hydrocarbures puisqu'elles conditionnent leur passage ou leur retenue au niveau de certaines couches et donc la formation de réservoirs.

Nous considérons ici à nouveau un écoulement de type Dead Oil au travers d'un milieu poreux composé de deux types de roche. Dans un premier temps, nous établissons précisément les conditions que doit satisfaire la solution en saturation sur l'interface marquant le changement de roche. Nous déduisons ensuite une formulation faible originale qui généralise des études menées précédemment sur des cas simplifiés dans un cadre fonctionnel plus restreint. Sur ce problème, nous montrons l'existence d'une solution faible obtenue par convergence d'un schéma volumes finis. Nous énonçons quelques-unes des propriétés de ce schéma et nous illustrons son fonctionnement en fin de chapitre à l'aide de quelques tests numériques.

### V.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre II, les changements de roche induisent des changements de géométrie du réseau poreux, de mouillabilité... Les courbes de pression capillaire et de perméabilités relatives peuvent donc dépendre, dans certains modèles (voir (Schneider, Wolf, Faille & Pot 2000b)), à la fois de la saturation et de la variable d'espace. Ce type de dépendance est très important en simulation de bassin puisqu'il est à l'origine des phénomènes de barrières capillaires qui conditionnent en grande partie la formation des réservoirs.

Nous considérons ici un écoulement diphasique, incompressible et immiscible au travers d'un milieu poreux  $\Omega$  hétérogène et isotrope. Ce domaine peut être de dimension  $d = 1 \dots 3$ . En tenant compte du fait que les perméabilités relatives et les pressions capillaires dépendent de la variable d'espace, la conservation des phases aqueuse et hydrocarbure s'écrit

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial s}{\partial t} - \operatorname{div}(\eta_o(\cdot, s)(\vec{\nabla} p_o - \rho_o \vec{g})) = 0, \\ -\phi \frac{\partial s}{\partial t} - \operatorname{div}(\eta_w(\cdot, s)(\vec{\nabla} p_w - \rho_w \vec{g})) = 0, \\ p_o - p_w = \pi(\cdot, s). \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

Nous détaillerons un peu plus tard les hypothèses faites sur les données. Pour le moment, nous supposons simplement que, pour  $x \in \Omega$  fixé, les fonctions  $\pi(x, \cdot)$  et  $\eta_o(x, \cdot)$  sont strictement croissantes sur  $[0, 1]$ , que la fonction  $\eta_w(x, \cdot)$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$  et que  $\eta_o(x, 0) = \eta_w(x, 1) = 0$ .

Dans ce chapitre, nous portons une attention particulière à la modélisation des écoulements intervenant sur les interfaces de changement de roche. Aussi nous supposerons que notre milieu poreux  $\Omega$  se compose de deux domaines homogènes  $\Omega_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  correspondant chacun à une roche particulière. Nous notons  $\Gamma$  l'interface séparant ces deux sous-domaines. Les fonctions  $\phi$ ,  $\eta_\beta$ ,  $\beta \in \{o, w\}$  et  $\pi$  sont telles que, pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , il existe des réels  $0 < \phi_i \leq 1$  et des fonctions  $\eta_{\beta,i}$  et  $\pi_i$  vérifiant pour tout  $x \in \Omega_i$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}$

$$\phi(x, s) = \phi_i(s), \quad \eta_\beta(x, s) = \eta_{\beta,i}(s), \quad \pi(x, s) = \pi_i(s).$$

Les phénomènes de retenue observés au niveau des barrières capillaires apparaissent dès lors que les courbes  $\pi_i$  sont "décalées" (voir figure V.1).

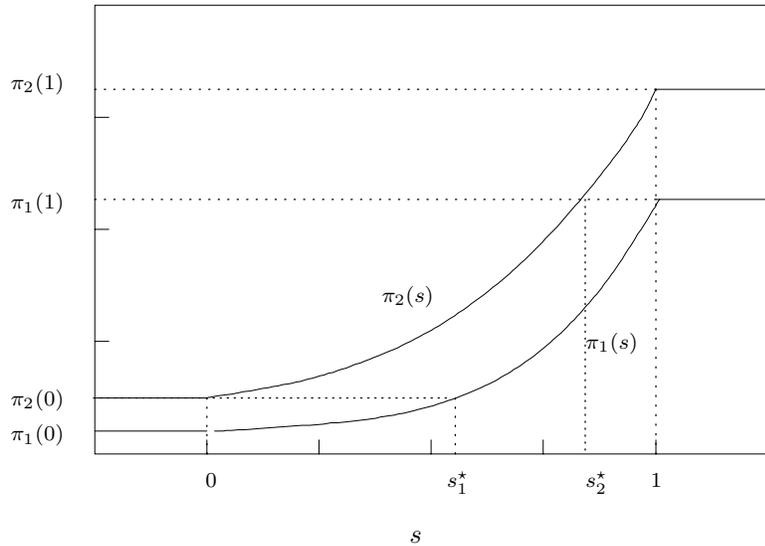


Figure V.1: Exemple de courbes de pression capillaire

Supposons, par exemple, que les courbes  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont telles que  $\pi_1(0) \leq \pi_2(0) \leq \pi_1(1) \leq \pi_2(1)$  et notons  $s_1^*$  la valeur de la saturation d'huile telle que  $\pi_1(s_1^*) = \pi_2(0)$  et  $s_2^*$  la saturation telle que  $\pi_2(s_2^*) = \pi_1(1)$ .

Sur l'interface  $\Gamma$  deux conditions doivent être satisfaites. Tout d'abord la conservation des masses des deux phases implique la continuité du flux. Ainsi en notant  $s_{i,\Gamma}$ ,  $p_{\beta,i,\Gamma}$  et  $(\vec{\nabla} p)_{\beta,i,\Gamma}$  les traces respectives des fonctions  $s_i$ ,  $p_{\beta,i}$  et  $\vec{\nabla} p_{\beta,i}$  sur  $\Gamma \times (0, T)$ , nous avons

$$\eta_{\beta,1}(s_{1,\Gamma}) \left( (\vec{\nabla} p)_{\beta,1,\Gamma} - \rho_{\beta} \vec{g} \right) \cdot \vec{n}_{1,\Gamma} = -\eta_{\beta,2}(s_{2,\Gamma}) \left( (\vec{\nabla} p)_{\beta,2,\Gamma} - \rho_{\beta} \vec{g} \right) \cdot \vec{n}_{2,\Gamma}. \quad (\text{V.2})$$

D'autre part, si le flux d'une des deux phases sur l'interface est non nul alors la pression de la phase doit être continue au passage de l'interface (voir (Bear 1972)). Si ce n'est pas le cas, la mobilité amont de la phase (car la saturation n'est pas nécessairement continue de part et d'autre de  $\Gamma$ ) doit être nulle. Nous avons alors

$$\eta_{\beta,1}(s_{1,\Gamma})(p_{\beta,1,\Gamma} - p_{\beta,2,\Gamma})^+ - \eta_{\beta,2}(s_{2,\Gamma})(p_{\beta,2,\Gamma} - p_{\beta,1,\Gamma})^+ = 0 \quad (\text{V.3})$$

avec pour tout  $i = 1, 2$   $p_{o,i,\Gamma} - p_{w,i,\Gamma} = \pi_i(s_{i,\Gamma})$ , et pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a^+ = \max(a, 0)$ . Du fait de la stricte monotonie des mobilités, les relations (V.3) s'expriment simplement en fonction de  $s_{i,\Gamma}$  et  $p_{\beta,i,\Gamma}$ , pour tous  $\beta = o, w$  et  $i = 1, 2$ . En effet :

1. Si  $0 \leq s_{1,\Gamma} < s_1^*$  alors  $\eta_{w,1}(s_{1,\Gamma}) > 0$  d'où  $p_{w,1,\Gamma} \leq p_{w,2,\Gamma}$ . Comme  $\pi_1(s_{1,\Gamma}) < \pi_2(0) \leq \pi_2(s_{2,\Gamma})$ , nous avons  $p_{o,1,\Gamma} < p_{o,2,\Gamma}$ , d'où  $\eta_{o,2}(s_{2,\Gamma}) = 0$  et donc  $s_{2,\Gamma} = 0$ . Ainsi  $\eta_{w,2}(s_{2,\Gamma}) > 0$ , et  $p_{w,2,\Gamma} \leq p_{w,1,\Gamma}$ . Par conséquent  $p_{w,2,\Gamma} = p_{w,1,\Gamma}$ . Dans ce cas, la phase hydrocarbure est bloquée en  $\Omega_1$  et l'eau s'écoule au travers de  $\Gamma$ .
2. Si  $s_1^* \leq s_{1,\Gamma}$  et  $s_{2,\Gamma} \leq s_2^*$  alors  $\pi_2(0) \leq \pi_1(s_{1,\Gamma})$  et  $\pi_2(s_{2,\Gamma}) \leq \pi_1(1)$ . Comme  $\eta_{o,1}(s_{1,\Gamma}) > 0$  alors  $p_{o,1,\Gamma} \leq p_{o,2,\Gamma}$  et  $\eta_{o,2}(s_{2,\Gamma}) = 0$  ou  $p_{o,1,\Gamma} = p_{o,2,\Gamma}$ . De la même façon, comme  $\eta_{w,2}(s_{2,\Gamma}) > 0$  alors  $p_{w,1,\Gamma} \geq p_{w,2,\Gamma}$  et  $\eta_{w,1}(s_{1,\Gamma}) = 0$  ou  $p_{w,1,\Gamma} = p_{w,2,\Gamma}$ . Ainsi, nous avons  $p_{o,1,\Gamma} - p_{w,1,\Gamma} \leq p_{o,2,\Gamma} - p_{w,2,\Gamma}$ , ce qui donne  $\pi_1(s_{1,\Gamma}) \leq \pi_2(s_{2,\Gamma})$ . Si nous envisageons le cas  $\eta_{o,2}(s_{2,\Gamma}) = 0$ , nous avons  $s_{2,\Gamma} = 0$  et donc  $\pi_2(0) = \pi_1(s_{1,\Gamma})$ . De même  $\eta_{w,1}(s_{1,\Gamma}) = 0$  implique  $\pi_2(s_{2,\Gamma}) = \pi_1(1)$ . Si nous avons à la fois  $\eta_{o,2}(s_{2,\Gamma}) > 0$  et  $\eta_{w,1}(s_{1,\Gamma}) > 0$  alors  $p_{o,1,\Gamma} = p_{o,2,\Gamma}$  et  $p_{w,1,\Gamma} = p_{w,2,\Gamma}$  et ainsi  $\pi_1(s_{1,\Gamma}) = \pi_2(s_{2,\Gamma})$ . Par conséquent dans tous les cas nous avons  $\pi_1(s_{1,\Gamma}) = \pi_2(s_{2,\Gamma})$ , et donc  $p_{o,1,\Gamma} = p_{o,2,\Gamma}$  et  $p_{w,1,\Gamma} = p_{w,2,\Gamma}$ . Ici les deux phases traversent l'interface  $\Gamma$ .
3. Si  $s_2^* < s_{2,\Gamma} \leq 1$ , une discussion identique aboutit à  $s_{1,\Gamma} = 1$  et  $p_{o,1,\Gamma} = p_{o,2,\Gamma}$ . Dans ce cas l'eau reste bloquée en  $\Omega_2$  et seule l'huile est mobile.

Dans tous les cas, nous constatons que  $\hat{\pi}_1(s_{1,\Gamma}) = \hat{\pi}_2(s_{2,\Gamma})$  où  $\hat{\pi}_1 = \max(\pi_1(s), \pi_2(0))$  et  $\hat{\pi}_2 = \min(\pi_2(s), \pi_1(1))$ . En utilisant la pression globale introduite par Chavent (Chavent & Jaffré 1986) et définie par

$$\bar{p}_i = p_{w,i} + \int_0^{s_i} \frac{\eta_{o,i}(a)}{\eta_{o,i}(a) + \eta_{w,i}(a)} \pi'_i(a) da$$

le système (V.1) se réécrit sur  $\Omega_i \times (0, T)$  sous la forme

$$\begin{cases} \phi_i \frac{\partial s_i}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \eta_{o,i}(s_i) (\vec{\nabla} \bar{p}_i - \rho_o \vec{g}) \right) - \Delta \varphi_i(s_i) = 0, \\ -\operatorname{div} \left( \sum_{\beta=o,w} \eta_{\beta,i}(s_i) \vec{\nabla} \bar{p}_i - \sum_{\beta=o,w} \eta_{\beta,i}(s_i) \rho_\beta \vec{g} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

avec  $\lambda_i(s) = \frac{\eta_{o,i}(s)\eta_{w,i}(s)}{\eta_{o,i}(s) + \eta_{w,i}(s)}$  et  $\varphi_i(s) = \int_0^s \lambda_i(a)\pi'_i(a)da$ . Dans la première équation du système (V.4) nous négligeons le terme  $\operatorname{div} [\eta_{o,i}(s_i)(\vec{\nabla} \bar{p}_i - \rho_o \vec{g})]$  par rapport à  $\Delta \varphi_i(s_i)$  afin d'alléger notre étude. Mais l'ensemble des résultats qui suivent s'étendent facilement à des écoulements soumis aux gradients de pression et à la gravité. Sous ces hypothèses, le système composé des équations (V.2)–(V.4) se réécrit en un système où les inconnues sont les saturations  $s_i$ ,  $i = 1, 2$  et donné par

$$\phi_i \frac{\partial s_i}{\partial t} - \Delta \varphi_i(s_i) = 0, \quad (\text{V.5})$$

$$\vec{\nabla} \varphi_1(s_{1,\Gamma}) \cdot \vec{n}_{1,\Gamma} = -\vec{\nabla} \varphi_2(s_{2,\Gamma}) \cdot \vec{n}_{2,\Gamma} \quad (\text{V.6})$$

et

$$\hat{\pi}_1(s_{1,\Gamma}) = \hat{\pi}_2(s_{2,\Gamma}). \quad (\text{V.7})$$

Nous ne tenons donc plus compte que de l'équation de conservation de la phase hydrocarbure. Afin d'alléger les notations, nous notons désormais  $\eta$  les mobilités  $\eta_o$ . L'équation (V.7) découle de la discussion soulevée par la condition (V.3). Sur les bords nous imposons des conditions de Neumann homogènes, i.e.

$$\eta(\cdot, s) \vec{\nabla} \pi(\cdot, s) \cdot \vec{n} = 0. \quad (\text{V.8})$$

La condition initiale sur  $s$  est donnée par

$$s(\cdot, 0) = s_{\text{ini}}. \quad (\text{V.9})$$

Pour définir rigoureusement une solution faible du problème (V.5)–(V.9), nous faisons les hypothèses suivantes.

### Hypothèses V.1.1

H1-1. *Les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont des ensembles ouverts, disjoints bornés et connexes de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ). Le domaine  $\Omega$  est défini par  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  et leur frontière commune  $\Gamma$  par  $\bar{\Gamma} = \partial\bar{\Omega}_1 \cap \partial\bar{\Omega}_2$ . Nous supposons que  $\Gamma$  a une mesure (au sens de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^{d-1}$ ) strictement positive. La durée  $T$  de l'écoulement est un réel strictement positif.*

H1-2. *Sur chaque domaine  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$  nous avons  $\phi = \phi_i$  avec  $0 < \phi_i \leq 1$ .*

H1-3. Pour  $i = 1, 2$ , la fonction  $\lambda_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est continue et vérifie  $\lambda_i(s) = \lambda_i(0)$  pour tout  $s \leq 0$ ,  $\lambda_i(s) = \lambda_i(1)$  pour tout  $s \geq 1$  et  $\lambda_i(s) > 0$  pour tout  $s \in ]0, 1[$ . La fonction  $\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est alors définie par  $(x, s) \mapsto \lambda_i(s)$  pour tous  $x \in \Omega_i$ ,  $i = 1, 2$  et  $s \in \mathbb{R}$ . Nous notons  $C_\lambda = \max_{i=1,2} \sup_{s \in \mathbb{R}} |\lambda_i(s)|$ .

H1-4. Pour  $i = 1, 2$ , la fonction  $\pi_i(s) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est telle que sa restriction  $\pi_i|_{[0,1]}$  à l'intervalle  $[0, 1]$  est strictement croissante et vérifie  $\pi_i|_{[0,1]} \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $\pi_i(s) = \pi_i(0)$  pour tout  $s \leq 0$  et  $\pi_i(s) = \pi_i(1)$  pour tout  $s \geq 1$ . Nous supposons de plus que  $\pi_1(0) \leq \pi_2(0) \leq \pi_1(1) \leq \pi_2(1)$ . La fonction  $\pi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est alors définie par  $(x, s) \mapsto \pi_i(s)$  pour tous  $x \in \Omega_i$ ,  $i = 1, 2$  et  $s \in \mathbb{R}$ . Nous notons  $s_1^*$  le réel appartenant à  $[0, 1]$  et vérifiant  $\pi_1(s_1^*) = \pi_2(0)$ . Ainsi, pour tout  $s \in [0, s_1^*]$ , nous avons  $\pi_1(s) \leq \pi_2(s)$ . De la même façon nous notons  $s_2^*$  le réel appartenant à  $[0, 1]$  et vérifiant  $\pi_2(s_2^*) = \pi_1(1)$ . Ainsi, pour tout  $s \in [s_2^*, 1]$ , nous avons  $\pi_1(s) < \pi_2(s)$ .

H1-5. La condition initiale  $s_{\text{ini}}$  vérifie  $s_{\text{ini}} \in L^\infty(\Omega)$  and  $0 \leq s_{\text{ini}}(x) \leq 1$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .

Avant de préciser la formulation faible du problème, nous avons besoin de définir quelques fonctions de la saturation.

**Définition V.1.1** Sous les hypothèses V.1.1 et pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , considérons les applications

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ s \mapsto \int_0^s \lambda_i(a) \pi_i'(a) da \end{cases}$$

strictement croissante sur  $[0, 1]$  et

$$\hat{\pi}_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto \max(\pi_1(s), \pi_2(0)), \end{cases} \quad \hat{\pi}_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto \min(\pi_2(s), \pi_1(1)). \end{cases}$$

Nous notons  $L_\varphi$  une constante de Lipschitz commune aux fonctions  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$ . Nous introduisons également la fonction  $\Psi$  strictement croissante définie par

$$\Psi : \begin{cases} [\pi_2(0), \pi_1(1)] \rightarrow \mathbb{R} \\ p \mapsto \int_{\pi_2(0)}^p \min(\lambda_1(\pi_1^{(-1)}(a)), \lambda_2(\pi_2^{(-1)}(a))) da. \end{cases}$$

La fonction  $\Psi$  a été définie de façon à ce que les fonctions  $\Psi \circ \hat{\pi}_i \circ \varphi_i^{(-1)}$ ,  $i = 1, 2$  soient Lipschitziennes et de constantes de Lipschitz inférieures à 1. Cette propriété est démontrée dans le Lemme qui suit.

**Lemme V.1.1** Sous les Hypothèses V.1.1, la fonction  $\Psi$  introduite dans la Définition V.1.1 est Lipschitzienne et sa constante de Lipschitz est inférieure à 1.

Preuve :

Soit  $a$  un réel tel que  $\varphi_1(s_1^*) < a < \varphi_1(1)$  si  $i = 1$  et  $0 < a < \varphi_2(s_2^*)$  si  $i = 2$ . Sous cette condition, nous avons  $\hat{\pi}_i(\varphi_i^{(-1)}(a)) = \pi_i(\varphi_i^{(-1)}(a))$  pour tout  $i = 1, 2$ . Examinons maintenant la dérivée de la fonction  $\pi_i \circ \varphi_i^{(-1)}$ . Soit  $b \neq a$  un réel tel que  $\varphi_1(s_1^*) < b < \varphi_1(1)$  si  $i = 1$  et  $0 < b < \varphi_2(s_2^*)$  si  $i = 2$ . Si nous posons  $A = \varphi_i^{(-1)}(a)$  et  $B = \varphi_i^{(-1)}(b)$ , nous avons

$$\frac{\pi_i(\varphi_i^{(-1)}(b)) - \pi_i(\varphi_i^{(-1)}(a))}{b - a} = \frac{\pi_i(B) - \pi_i(A)}{\varphi_i(B) - \varphi_i(A)}.$$

Notons  $I(A, B)$  l'intervalle  $[A, B]$  si  $B \geq A$ ,  $[B, A]$  le cas échéant. La définition de la fonction  $\varphi_i$  implique que

$$\left( \min_{C \in I(A, B)} \lambda_i(C) \right) (\pi_i(B) - \pi_i(A)) \leq \varphi_i(B) - \varphi_i(A) \leq \left( \max_{C \in I(A, B)} \lambda_i(C) \right) (\pi_i(B) - \pi_i(A)).$$

Il existe donc  $C \in I(A, B)$  tel que  $\varphi_i(B) - \varphi_i(A) = \lambda_i(C)(\pi_i(B) - \pi_i(A))$ . Ainsi

$$\frac{\pi_i(\varphi_i^{(-1)}(b)) - \pi_i(\varphi_i^{(-1)}(a))}{b - a} = \frac{1}{\lambda_i(C)},$$

et, donc, lorsque  $b \rightarrow a$ , nous obtenons  $(\pi_i \circ \varphi_i^{(-1)})'(a) = \frac{1}{\lambda_i(\varphi_i^{(-1)}(a))}$ . La fonction  $\Psi \circ \hat{\pi}_i \circ \varphi_i^{(-1)}$  a donc une dérivée en  $a$  égale à

$$(\Psi \circ \hat{\pi}_i \circ \varphi_i^{(-1)})'(a) = \Psi'(\pi_i(\varphi_i^{(-1)}(a))) (\pi_i \circ \varphi_i^{(-1)})'(a) = \frac{\Psi'(\pi_i(\varphi_i^{(-1)}(a)))}{\lambda_i(\varphi_i^{(-1)}(a))}.$$

Compte tenu de l'expression de  $\Psi$ ,  $\Psi'(\pi_i(y)) \leq \lambda_i(y)$  pour  $y = \varphi_i^{(-1)}(a)$ . Donc, finalement, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  vérifiant  $\varphi_1(s_1^*) < a < \varphi_1(1)$  et  $0 < a < \varphi_2(s_2^*)$  nous avons

$$(\Psi \circ \hat{\pi}_i \circ \varphi_i^{(-1)})'(a) \leq 1.$$

Remarquons que si  $i = 1$  et  $0 < a < \varphi_1(s_1^*)$  ou si  $i = 2$  et  $\varphi_2(s_2^*) < a < 1$  alors la fonction  $\Psi \circ \hat{\pi}_i \circ \varphi_i^{(-1)}$  est constante, donc de dérivée nulle.  $\blacksquare$

Le système composé des équations (V.5)–(V.9) est un problème parabolique non linéaire défini sur un domaine hétérogène. Dans le cas général, ce type de problème n'admet pas de solution classique. La définition qui suit précise donc la notion de solution faible.

**Définition V.1.2** *Sous les Hypothèses V.1.1, une solution faible  $s$  au problème (V.5)–(V.9) est définie par*

1. pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $s = s_i$  sur  $\Omega_i \times (0, T)$  avec

$$s_i \in L^\infty(\Omega_i \times (0, T)), \quad 0 \leq s_i \leq 1 \text{ et } \varphi_i(s_i) \in L^2(0, T; H^1(\Omega_i)),$$

2. pour tout  $\psi \in C_{test} = \{\psi \in H^1(\Omega \times ]0, T[), \psi(\cdot, T) = 0\}$ ,

$$\sum_{i=1}^2 \left[ \int_0^T \int_{\Omega_i} [\phi_i s_i(x, t) \psi_t(x, t) - \vec{\nabla} \varphi_i(s_i(x, t)) \cdot \vec{\nabla} \psi(x, t)] dx dt + \int_{\Omega_i} \phi_i s_{ini}(x, 0) \psi(x, 0) dx \right] = 0,$$

3. la fonction  $w : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  définie, sur  $\Omega_i \times (0, T)$ , par  $w = \Psi(\hat{\pi}_i(s_i))$  appartient à  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .

**Remarque 14 :** Cette formulation faible suffit à imposer (V.5)-(V.6)-(V.8)-(V.9) pour des solutions régulières. La dernière condition est une méthode fonctionnelle pour imposer (V.7).  $\square$

Remarquons que, pour le cas homogène où  $\phi_1 = \phi_2$ ,  $\pi_1 = \pi_2$  et  $\eta_1 = \eta_2$ , l'existence et l'unicité d'une solution a déjà été établie (voir, par exemple, (Alt & Luckhaus 1983) et (Carrillo 1999)). Un cas particulier de (V.5)–(V.9) a déjà été traité dans (van Duijn, Molenaar & de Neef 1995), (van Duijn & de Neef 1998), (Bertsch, Passo & van Duijn 2003) pour un milieu hétérogène où  $d = 1$ ,  $\Omega_1 = (-\infty, 0)$ ,  $\Omega_2 = (0, +\infty)$ , et où, pour  $i = 1, 2$ ,  $\phi_i = 1$ ,  $\eta_i(s) = k_i s$  et  $\pi_i(s) = (1 + s)/\sqrt{k_i}$  ( $0 < k_2 < k_1$ ). En ajoutant quelques hypothèses de régularité sur les données initiales dans (Bertsch et al. 2003), les auteurs ont montré l'existence et l'unicité d'une solution au problème (V.5)–(V.9).

Ici nous nous intéressons plus particulièrement à la convergence d'un schéma volumes finis qui calcule une approximation de la solution en saturation  $s$  sous les Hypothèses V.1.1. A une sous-suite près, nous montrons (voir Théorème V.2.1) la convergence du schéma défini par les équations (V.10)–(V.12) vers une solution faible au sens de la Définition V.1.2. Une conséquence immédiate de ce résultat est l'existence d'une solution au problème (V.5)–(V.9) (voir Corollaire V.2.1). Sur ce type de problème, des résultats de convergence ont déjà été obtenus dans (Eymard, Gallouët, Hilhorst & Slimane 1998), (Michel 2001) mais pour un milieu homogène. L'originalité du problème (V.5)–(V.9) tient ici à la présence des deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  reliés entre eux par les équations (V.6)-(V.7) (ou par les équations (V.12) dans le cas discret).

La suite de ce chapitre s'organise donc de la façon suivante. Nous présentons tout d'abord un nouveau schéma de type volumes finis discrétisant le modèle (V.5)–(V.9) (voir équations (V.10)–(V.12)) et nous montrons que ce schéma est stable (Proposition V.2.1), admet une unique solution discrète (Lemme V.2.1, Proposition V.2.2) et converge vers une solution faible (Théorème V.2.1). Nous obtenons ainsi l'existence d'une solution au problème faible (Corollaire V.2.1). L'unicité de cette solution reste encore un problème ouvert. Nous pouvons l'établir dans un cas particulier en ajoutant quelques hypothèses de régularité sur la solution (voir Annexe C, Proposition C.1). Nous terminons ce chapitre par quelques tests numériques illustrant le fonctionnement du schéma et des conditions d'interface que nous avons introduites (§V.3).

## V.2 Etude du schéma volumes finis

Dans ce paragraphe, nous présentons et étudions un schéma volumes finis discrétisant les équations (V.5)–(V.9). Tout d’abord, nous rappelons rapidement la notion de discrétisation admissible au sens des volumes finis.

**Définition V.2.1 (Discrétisation Admissible)** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  satisfaisant les Hypothèses V.1.1. Une discrétisation admissible de  $\Omega$ , que nous noterons  $\mathcal{M}$ , se compose d’un triplet  $(\mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$  où*

- $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ,
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ ,
- $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ ,
- les triplets  $(\mathcal{T}_i, \mathcal{E}_i, \mathcal{P}_i)$ ,  $i = 1, 2$  et  $(\mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$  constituent respectivement des maillages volumes finis admissible des domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega$  au sens de la Définition IV.2.1.

Nous notons

- $\mathcal{E}_\Gamma = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{T}_\Gamma = \{(K, L), K \in \Omega_1, L \in \Omega_2, K|L \in \mathcal{E}_\Gamma\}$ ,
- $\mathcal{E}_{int} = \mathcal{E}_{int,1} \cup \mathcal{E}_{int,2} \cup \mathcal{E}_\Gamma$ ,
- $\mathcal{E}_{ext} = (\mathcal{E}_{ext,1} \cup \mathcal{E}_{ext,2}) \setminus \mathcal{E}_\Gamma$ ,
- pour  $i = 1, 2$ ,  $N(K) = \{L \in \mathcal{T}_i, K|L \in \mathcal{E}_K\}$ ,
- $\text{size}(\mathcal{M}) = \max_{i=1,2}(\text{size}(\mathcal{M}_i))$ ,  $\text{regul}(\mathcal{M}) = \max_{i=1,2}(\text{regul}(\mathcal{M}_i))$ .

**Définition V.2.2 (Discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times ]0, T[$ )** *Une discrétisation admissible  $\mathcal{D}$  du domaine  $\Omega \times ]0, T[$  se compose d’un couple  $(\mathcal{M}, M)$  où  $\mathcal{M}$  est une discrétisation admissible du domaine  $\Omega$  (voir Définition V.2.1) et où  $M \in \mathbb{N}$  définit une discrétisation régulière de l’intervalle  $]0, T[$  (voir Définition IV.2.2). Nous notons  $\text{size}(\mathcal{D}) = \max(\text{size}(\mathcal{M}), \mathfrak{d})$ .*

### V.2.1 Un schéma implicite

La discrétisation de la condition initiale est donnée par

$$s_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K s_{ini}(x) dx, \quad \forall K \in \mathcal{T}. \quad (\text{V.10})$$

Pour les pas de temps suivants, le schéma en saturation qui définit une solution discrète  $s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  (voir Notations Préliminaires § IV.3.1) est donné, pour tous  $i = 1, 2$  et  $K \in \mathcal{T}_i$  par

$$\begin{aligned}
 m(K)\phi_i \frac{s_K^{n+1} - s_K^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_L^{n+1})) + \\
 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\Gamma \cap \mathcal{E}_K} \tau_{K,\sigma} (\varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_{K,\sigma}^{n+1})) = 0.
 \end{aligned} \tag{V.11}$$

Pour tout  $(K, L) \in \mathcal{T}_\Gamma$ , et pour  $s_K^{n+1}$  et  $s_L^{n+1}$  données, les valeurs  $s_{K,K|L}^{n+1}, s_{L,K|L}^{n+1} \in [0, 1]$  sont les solutions (pour l'existence et l'unicité voir le Lemme V.2.1) du système

$$\begin{cases} \tau_{K,K|L}(\varphi_1(s_K^{n+1}) - \varphi_1(s_{K,\sigma}^{n+1})) = \tau_{L,K|L}(\varphi_2(s_{L,\sigma}^{n+1}) - \varphi_2(s_L^{n+1})), \\ \hat{\pi}_1(s_{K,\sigma}^{n+1}) = \hat{\pi}_2(s_{L,\sigma}^{n+1}). \end{cases} \tag{V.12}$$

**Lemme V.2.1** *Sous les Hypothèses V.1.1, soient  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ , deux réels donnés. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Alors il existe un et un seul couple  $(c, d) \in [0, 1]^2$  tel que*

$$\alpha_1(\varphi_1(a) - \varphi_1(c)) = \alpha_2(\varphi_2(d) - \varphi_2(b))$$

et

$$\hat{\pi}_1(c) = \hat{\pi}_2(d).$$

Si nous notons  $c = U_1(a, b, \alpha_1, \alpha_2)$  et  $d = U_2(a, b, \alpha_1, \alpha_2)$  alors les fonctions  $U_1$  et  $U_2$  sont continues et croissantes par rapport à  $a$  et  $b$ . De plus nous avons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
 0 \leq (\varphi_1(a) - \varphi_1(c))(\pi_1(a) - \pi_1(c)) &\leq (\varphi_1(a) - \varphi_1(c))(\pi_1(a) - \pi_2(b)), \\
 0 \leq (\varphi_2(d) - \varphi_2(b))(\pi_2(d) - \pi_2(b)) &\leq (\varphi_2(d) - \varphi_2(b))(\pi_1(a) - \pi_2(b)).
 \end{aligned} \tag{V.13}$$

Preuve :

Prenons comme inconnues les valeurs  $C = \varphi_1(c)$  et  $D = \varphi_2(d)$  et notons  $A = \varphi_1(a)$  et  $B = \varphi_2(b)$ . Alors  $(C, D)$  est solution de

$$\alpha_1 C + \alpha_2 D = \alpha_1 A + \alpha_2 B, \tag{V.14}$$

$$\hat{\pi}_1(\varphi_1^{(-1)}(C)) = \hat{\pi}_2(\varphi_2^{(-1)}(D)). \tag{V.15}$$

Considérons tout d'abord le cas où  $\alpha_1 A + \alpha_2 B \leq \alpha_1 \varphi_1(s_1^*)$ . Comme  $C \leq \varphi_1(s_1^*)$ , nous avons donc  $D = 0$  d'après (V.15). Ainsi la solution est donnée par  $D = 0$  et  $C = (\alpha_1 A + \alpha_2 B)/\alpha_1$ . Dans ce cas, comme  $D \leq B$ , nous avons  $C \geq A$  et comme  $\pi_2(b) \geq \pi_2(0) \geq \pi_1(c) \geq \pi_1(a)$  nous obtenons (V.13). Considérons maintenant le cas où  $\alpha_1 \varphi_1(s_1^*) < \alpha_1 A + \alpha_2 B < \alpha_1 \varphi_1(1) + \alpha_2 \varphi_2(s_2^*)$ . Ces inégalités impliquent  $\varphi_1(s_1^*) < C$  and  $D < \varphi_2(s_2^*)$  (d'après (V.15)) et donc  $C = \varphi_1(\pi_1^{(-1)}(\pi_2(\varphi_2^{(-1)}(D))))$ . Comme la fonction  $D \mapsto \alpha_1 \varphi_1(\pi_1^{(-1)}(\pi_2(\varphi_2^{(-1)}(D)))) + \alpha_2 D$  est continue strictement croissante, le système admet une et une seule solution  $(C, D)$ . Nous avons donc dans ce cas  $\pi_1(c) = \pi_2(d)$  et comme  $\pi_1(a) - \pi_1(c)$  a le même signe que  $\pi_2(d) - \pi_2(b)$ , les inégalités (V.13) sont vérifiées. Enfin

le cas  $\alpha_1\varphi_1(1) + \alpha_2\varphi_2(s_2^*) \leq \alpha_1A + \alpha_2B$  est le symétrique du premier et nous avons  $C = \varphi_1(1)$  et  $D = (\alpha_1(A - \varphi_1(1)) + \alpha_2B)/\alpha_2$ . Ainsi  $C \geq A$  et donc  $D \leq B$  et comme  $\pi_2(b) \geq \pi_2(d) \geq \pi_1(1) \geq \pi_1(a)$  nous obtenons à nouveau (V.13).

Dans tous les cas,  $C$  et  $D$  (resp.  $c$  et  $d$ ) sont des fonctions continues croissantes par rapport à  $A$  et  $B$  (resp.  $a$  et  $b$ ). ■

**Remarque 15 :** A partir de l'étude précédente nous pouvons également montrer que  $C$  et  $D$ , vues comme des fonctions de  $A = \varphi_1(a)$  et  $B = \varphi_2(b)$ , satisfont, pour presque tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial A} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{\partial D}{\partial A} \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad 0 \leq \frac{\partial C}{\partial B} \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{\partial D}{\partial B} \leq 1.$$

□

Nous allons maintenant établir la stabilité  $L^\infty$  du schéma ainsi que l'existence et l'unicité d'une solution discrète aux équations (V.10)–(V.12).

## V.2.2 Stabilité $L^\infty$

Si  $\Omega$  était un domaine homogène nous pourrions montrer que la solution discrète en saturation satisfait un principe du maximum où intervient la donnée initiale (Eymard et al. 1998). Ici, en présence d'une hétérogénéité, ce résultat n'est plus vérifié et nous montrons que les saturations restent comprises entre 0 et 1.

**Proposition V.2.1** *Sous les Hypothèses V.1.1, soient  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times ]0, T[$  (voir Définition V.2.2) et, pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ ,  $s_{\mathcal{M}}^{n+1} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$  la solution du système (V.10)–(V.12) (l'existence et l'unicité de cette solution sont établies dans la Proposition V.2.2). Alors  $s_{\mathcal{M}}^{n+1}$  satisfait*

$$\forall K \in \mathcal{T}, \quad 0 \leq s_K^{n+1} \leq 1. \quad (\text{V.16})$$

*Preuve :*

Compte tenu des équations (V.10)–(V.12), pour tout  $K \in \mathcal{T}_i$ ,  $i = 1, 2$ , la saturation  $s_K^{n+1}$  est donnée par

$$s_K^{n+1} = H_K(s_K^n, (s_L^{n+1})_{L \in \mathcal{T}})$$

avec

$$H_K(a, (a_L)_{L \in \mathcal{T}}) = \frac{1}{1 + \lambda_K} \left( a + \lambda_K a_K + \frac{\delta}{m(K)\phi_i} \left( \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\varphi_i(a_L) - \varphi_i(a_K)) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\Gamma \cap \mathcal{E}_K} \tau_{K,\sigma} (\varphi_i(a_{K,\sigma}) - \varphi_i(a_K)) \right) \right),$$

$$\lambda_K = \frac{\delta L_\varphi}{m(K)\phi_i} \left( \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\Gamma \cap \mathcal{E}_K} \tau_{K,\sigma} \right)$$

et où, pour tout  $(K, L) \in \mathcal{T}_\Gamma$ ,  $a_{K,K|L}$  est donné par  $a_{K,K|L} = U_1(a_K, a_L, \tau_{K,K|L}, \tau_{L,K|L})$  et  $a_{L,K|L} = U_2(a_K, a_L, \tau_{K,K|L}, \tau_{L,K|L})$  (les fonctions  $U_1$  et  $U_2$  ont été introduites dans le Lemme V.2.1). Une des conséquences du Lemme V.2.1 est que la fonction  $H_K(a, (a_L)_{L \in \mathcal{T}})$  est croissante par rapport à  $a$  et  $a_L$  pour tout  $L \in \mathcal{T}$  (y compris pour  $L = K$ ).

Démontrons maintenant l'inégalité (V.16) par induction sur  $n$ . Cette inégalité est clairement vérifiée pour  $n = 0$ . Supposons maintenant qu'elle soit vérifiée jusqu'à un rang  $n$  et qu'il existe  $K_{\max} \in \mathcal{T}$  tel que  $K_{\max} = \max_{K \in \mathcal{T}}(s_K^{n+1})$  et  $s_{K_{\max}}^{n+1} > 1$ . La monotonie de la fonction  $H_K$  entraîne

$$1 < s_{K_{\max}}^{n+1} \leq H_K(1, (s_{K_{\max}}^{n+1})_{L \in \mathcal{T}}) = \frac{1 + \lambda_K s_{K_{\max}}^{n+1}}{1 + \lambda_K},$$

ce qui est en contradiction avec le fait que  $s_{K_{\max}}^{n+1} > 1$ . De la même façon nous montrons qu'il ne peut y avoir un élément  $K_{\min} \in \mathcal{T}_i$  tel que  $K_{\min} = \min_{K \in \mathcal{T}}(s_K^{n+1})$  et  $s_{K_{\min}}^{n+1} < 0$ . ■

### V.2.3 Existence et unicité de la solution discrète

**Proposition V.2.2** *Sous les Hypothèses V.1.1, soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times ]0, T[$  (voir Définition V.2.2). Alors, pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$ , il existe une et une seule solution  $s_{\mathcal{T}}^{n+1} \in \mathcal{X}(\mathcal{T})$  au système (V.10)–(V.12).*

*Preuve :*

Le système composé des équations (V.10)–(V.12) peut être vu comme un système dépendant uniquement des inconnues  $(s_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}$  compte tenu du Lemme V.2.1. Posons  $N = \text{card}(\mathcal{T})$  et considérons l'application  $\psi : \mathbb{R}^N \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$  définie par  $((s_K)_{K \in \mathcal{T}}, \lambda) \mapsto (v_K)_{K \in \mathcal{T}}$  avec, pour tout  $K \in \mathcal{T}$ ,

$$\begin{aligned} v_K = & m(K) \phi_i \frac{s_K - \lambda s_K^n}{\delta} + \lambda \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\varphi_i(s_K) - \varphi_i(s_L)) + \\ & \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\Gamma \cap \mathcal{E}_K} \tau_{K,\sigma} (\varphi_i(s_K) - \varphi_i(s_{K,\sigma})), \end{aligned}$$

où, pour tout  $(K, L) \in \mathcal{T}_\Gamma$ , nous prenons  $s_{K,K|L} = U_1(s_K, s_L, \tau_{K,K|L}, \tau_{L,K|L})$  et  $s_{L,K|L} = U_2(s_K, s_L, \tau_{K,K|L}, \tau_{L,K|L})$  (les fonctions  $U_1$  et  $U_2$  ont été introduites dans le Lemme V.2.1). La fonction  $\psi$  est continue par rapport à chacun de ses arguments. De plus, en reprenant la preuve de la Proposition V.2.1, nous pouvons montrer que, pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , l'égalité  $\psi((s_K)_{K \in \mathcal{T}}, \lambda) = (0)_{K \in \mathcal{T}}$  implique  $s_K \in [0, 1]$  pour tout  $K \in \mathcal{T}$ . Ainsi, comme  $\psi((s_K)_{K \in \mathcal{T}}, 0)$  est linéaire, un argument de type degré topologique (voir (Eymard et al. 2000) et les références qui y sont citées) nous permet de conclure que le système  $\psi((s_K)_{K \in \mathcal{T}}, 1) = (0)_{K \in \mathcal{T}}$  admet au moins une solution.

Montrons l'unicité de cette solution et supposons que, pour un entier  $n \in \{0 \dots M\}$  donné, nous disposons de deux solutions  $(s_K)_{K \in \mathcal{T}}$  et  $(\tilde{s}_K)_{K \in \mathcal{T}}$  aux équations (V.10)–(V.12). En utilisant les fonctions  $H_K$ ,  $K \in \mathcal{T}$ , définies dans la preuve de la Proposition V.2.1, nous avons

$$\max(s_K, \tilde{s}_K) \leq H_K(s_K^n, (\max(s_L, \tilde{s}_L))_{L \in \mathcal{T}})$$

et

$$\min(s_K, \tilde{s}_K) \geq H_K(s_K^n, (\min(s_L, \tilde{s}_L))_{L \in \mathcal{T}}).$$

Si nous multiplions les inégalités ci-dessus par  $(1 + \lambda_K)m(K)\phi_i$ , si nous soustrayons la seconde à la première et si nous sommes les inégalités obtenues sur l'ensemble des éléments  $K \in \mathcal{T}$ , nous constatons que les termes d'interface s'annulent mutuellement (en particulier les termes relatifs à  $\lambda_K$ ) et nous obtenons

$$\sum_{i=1,2} \sum_{K \in \mathcal{T}_i} m(K)\phi_i |s_K - \tilde{s}_K| \leq 0,$$

d'où l'unicité de la solution. ■

### V.2.4 Convergence

Nous allons maintenant nous intéresser à la convergence du schéma (V.10)–(V.12). La première étape consiste à montrer l'existence d'une sous-suite de solutions approchées qui soit relativement compacte dans  $L^2(\Omega \times ]0, T[)$ . Pour cela nous appliquons la même méthodologie qu'au paragraphe IV.5.4 et nous montrons que les translations en espace et en temps de la fonction  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$  restent bornées et tendent uniformément vers 0 lorsque le pas de la translation tend vers 0. Ces deux résultats font l'objet des Propositions V.2.4 et V.2.5.

#### Majoration des translations en espace

Tout d'abord, nous montrons que, dans chacun des sous-domaines  $\Omega_i$ , la semi-norme  $L^2(0, T, H^1(\Omega_i))$  de la fonction  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$  reste bornée indépendamment de la discrétisation.

**Proposition V.2.3** *Sous les Hypothèses V.1.1, soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times ]0, T[$  (voir Définition V.2.2). Soit  $s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  la solution des équations (V.10)–(V.12). Sous ces hypothèses, il existe une constante  $C_{17} > 0$  dépendant uniquement de  $\eta_j, \pi_j, \Omega_j, j \in \{1, 2\}$  telle que*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{(K,L) \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \tau_{K,K|L} \left( \varphi_1(s_K^{n+1}) - \varphi_1(s_{K,K|L}^{n+1}) \right) \left( \pi_1(s_K^{n+1}) - \pi_2(s_L^{n+1}) \right) = \\ &\quad \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{(K,L) \in \mathcal{E}_{\Gamma}} \tau_{L,K|L} \left( \varphi_2(s_{L,K|L}^{n+1}) - \varphi_2(s_L^{n+1}) \right) \left( \pi_1(s_K^{n+1}) - \pi_2(s_L^{n+1}) \right) \leq C_{17} \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

et, pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , il existe une constante  $C_{18} > 0$  dépendant de  $C_{17}$  et de  $C_{\lambda}$  telle que

$$|\varphi_i(s_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D},i}^2 = \sum_{n=0}^M \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{\text{int},i}} \tau_{K|L} |\varphi_i(s_L^{n+1}) - \varphi_i(s_K^{n+1})|^2 \leq C_{18}. \quad (\text{V.18})$$

*Preuve :*

Pour tous  $n \in \{0 \dots M\}$  et  $K \in \mathcal{T}_i$ , nous multiplions l'équation (V.11) par  $\pi_i(s_K^{n+1})$  et nous sommes sur l'ensemble des éléments de la discrétisation  $\mathcal{D}$ . Nous aboutissons alors à

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}_i} \left( \left( m(K) \phi_i(s_K^{n+1} - s_K^n) + \delta t \left( \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \left( \varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_L^{n+1}) \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\Gamma \cap \mathcal{E}_K} \tau_{K,\sigma} \left( \varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_{K,\sigma}^{n+1}) \right) \right) \right) \pi_i(s_K^{n+1}) \right) = 0.$$

*Terme d'accumulation*

La fonction  $\pi_i(\cdot)$  étant croissante, la fonction  $g_i$  définie par  $g_i(s) = \int_0^s \pi_i(a) da$  est donc convexe. Nous avons alors

$$(s_K^{n+1} - s_K^n) \pi_i(s_K^{n+1}) \geq g_i(s_K^{n+1}) - g_i(s_K^n).$$

D'où

$$\sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}_i} m(K) \phi_i(s_K^{n+1} - s_K^n) \pi_i(s_K^{n+1}) \geq \sum_{K \in \mathcal{T}_i} m(K) \phi_i(g_i(s_K^{M+1}) - g_i(s_K^0)).$$

De plus nous constatons que

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}_i} m(K) \phi_i(g_i(s_K^{M+1}) - g_i(s_K^0)) \right| \leq m(\Omega_i) \left( \int_0^1 |\pi_i(a)| da \right).$$

*Terme de diffusion*

Comme  $\varphi_i(b) - \varphi_i(a) \leq C_\lambda \int_a^b \pi_i'(u) du$ , nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int,i}} \tau_{K|L} \left( \varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_L^{n+1}) \right) \left( \pi_i(s_K^{n+1}) - \pi_i(s_L^{n+1}) \right) \geq \\ & \frac{1}{C_\lambda} \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int,i}} \tau_{K|L} \left( \varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_L^{n+1}) \right)^2. \end{aligned}$$

Pour  $(K, L) \in \mathcal{T}_\Gamma$ , les inégalités (V.13) donnent

$$\tau_{K,\sigma} (\varphi_1(s_K^{n+1}) - \varphi_1(s_{K,\sigma}^{n+1})) (\pi_1(s_K^{n+1}) - \pi_2(s_L^{n+1})) \geq 0.$$

Ainsi, en regroupant les majorations et les minorations obtenues, nous avons

$$\sum_{i=1}^2 |\varphi_i(s_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D},i}^2 \leq C_\lambda \sum_{i=1}^2 m(\Omega_i) \left( \int_0^1 |\pi_i(a)| da \right) = C_{18}$$

et

$$0 \leq \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_\Gamma} \tau_{K,\sigma} \left( \varphi_1(s_K^{n+1}) - \varphi_1(s_{K,\sigma}^{n+1}) \right) \left( \pi_1(s_K^{n+1}) - \pi_2(s_L^{n+1}) \right) \leq \sum_{i=1}^2 m(\Omega_i) \left( \int_0^1 |\pi_i(a)| da \right) = C_{17},$$

d'où le résultat.  $\blacksquare$

La proposition qui suit est une conséquence directe de la Proposition V.2.3. Pour la démontrer, il suffit de reprendre les preuves du Lemme IV.5.2 et de la Proposition IV.5.5.

**Proposition V.2.4** *Sous les Hypothèses V.1.1, soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times ]0, T[$  (voir Définition V.2.2). Soit  $s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  donnée par les équations (V.10)–(V.12),  $i = 1, 2$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  et  $\Omega_{i,\xi}$  le domaine défini par*

$$\Omega_{i,\xi} = \{x \in \Omega_i / [x, x + \xi] \subset \Omega_i\}.$$

Alors il existe une constante  $C_{19}$  dépendant uniquement du nombre de faces de  $\Omega_i$  telle que la fonction  $\varphi_i(s_{\mathcal{D}})$  vérifie

$$\int_0^T \int_{\Omega_{i,\xi}} |\varphi_i(s_{\mathcal{D}}(x + \xi, t) - \varphi_i(s_{\mathcal{D}}(x, t))|^2 dx dt \leq |\xi| \left( |\xi| + C_{19} \text{size}(\mathcal{M}) \right) |\varphi_i(s_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D},i}^2. \quad (\text{V.19})$$

Considérons maintenant, pour tout  $i = 1, 2$ , un ouvert  $\omega_i$  borné de  $\Omega_i$  muni d'une frontière suffisamment régulière. Soit  $\varphi_{\mathcal{D},\omega_i}$  la fonction définie par  $\varphi_{\mathcal{D},\omega_i}(x, t) = \varphi_i(s_{\mathcal{D}}(x, t))$  pour presque tout  $(x, t) \in \omega_i \times (0, T)$  et  $\varphi_{\mathcal{D},\omega_i}(x, t) = 0$  pour  $(x, t) \notin \omega_i \times (0, T)$ . Alors, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , il existe  $C_{20} > 0$  dépendant de  $T$ ,  $\eta_j$ ,  $\pi_j$ ,  $\Omega_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$  et de  $\omega_i$  telle que

$$\|\varphi_{\mathcal{D},\omega_i}(\cdot + \xi, \cdot) - \varphi_{\mathcal{D},\omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}^2 \leq C_{20} |\xi| \left( |\xi| + \text{size}(\mathcal{M}_i) + 1 \right). \quad (\text{V.20})$$

### Majoration des translations en temps

Nous démontrons maintenant que les translations en temps restent bornées. Ce résultat est également une conséquence de la Proposition V.2.3. Nous commençons par démontrer ce premier Lemme.

**Lemme V.2.2** *Supposons les Hypothèses V.1.1 vérifiées et considérons une discrétisation admissible,  $\mathcal{D}$ , du domaine  $\Omega \times ]0, T[$  au sens de la Définition V.2.2. Soit  $s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  donnée par les équations (V.10)–(V.12). Soient  $\tau \in ]0, T[$ ,  $i \in \{1, 2\}$  et  $\Theta_i \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  telle que*

- $\text{supp } \Theta_i \subset \Omega_{i,\text{size}(\mathcal{M})} = \{x \in \Omega_i / [x, x + \text{size}(\mathcal{M})] \in \Omega_i\}$ ,
- $0 \leq \Theta_i \leq 1$ .

Alors la fonction  $\varphi_i(s_{\mathcal{D}})$  vérifie

$$\int_0^{T-\tau} \int_{\Omega_i} \Theta_i(x) \left( \varphi_i(s_{\mathcal{D}}(x, t + \tau)) - \varphi_i(s_{\mathcal{D}}(x, t)) \right)^2 dx dt \leq C_{21} \tau \quad (\text{V.21})$$

où  $C_{21}$  est une constante dépendant de  $\Theta_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $C_{18}$ ,  $d$ ,  $\Omega$ ,  $T$ .

Preuve :

Soient  $i \in \{1, 2\}$  et  $K \in \mathcal{T}_i$ . Posons  $\Theta_{i,K} = \frac{1}{m(K)} \int_K \Theta_i(x) dx$ . La fonction  $\varphi_i$  étant Lipschitzienne, nous avons

$$\int_0^{T-\tau} \int_{\Omega_i} \Theta_i(x) \left( \varphi_i(s(x, t + \tau)) - \varphi_i(s(x, t)) \right)^2 dx dt \leq L_{\varphi_i} \int_0^{T-\tau} A(t) dt$$

avec

$$A(t) = \int_{\Omega_i} \Theta_i(x) \left( \varphi_i(s(x, t + \tau)) - \varphi_i(s(x, t)) \right) \left( s(x, t + \tau) - s(x, t) \right) dx.$$

$A(t)$  peut être réécrit sous la forme

$$A(t) = \sum_{K \in \mathcal{T}_i} m(K) \Theta_{i,K} \left( \varphi_i(s_K^{n_1(t)+1}) - \varphi_i(s_K^{n_0(t)+1}) \right) \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) (s_K^{n+1} - s_K^n)$$

où

- $n_0(t)$  et  $n_1(t)$  sont tels que

$$\begin{aligned} n_0(t)\delta < t \leq (n_0(t) + 1)\delta, \\ n_1(t)\delta < t + \tau \leq (n_1(t) + 1)\delta, \end{aligned}$$

- 

$$\mathcal{X}_n(t, t + \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } n\delta \in [t, t + \tau[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La définition du schéma donne

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_i} \Theta_{i,K} \left( \varphi_i(s_K^{n_1(t)+1}) - \varphi_i(s_K^{n_0(t)+1}) \right) \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \times \\ &\quad \sum_{L \in N(K)} \frac{\delta}{\phi_i} \tau_{K|L} \left( \varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_L^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

En regroupant les termes par face, nous avons

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{n=0}^M \frac{\delta}{\phi_i} \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int,i}} \tau_{K|L} \left[ \Theta_{i,K} \left( \varphi_i(s_K^{n_1(t)+1}) - \varphi_i(s_K^{n_0(t)+1}) \right) - \right. \\ &\quad \left. \Theta_{i,L} \left( \varphi_i(s_L^{n_1(t)+1}) - \varphi_i(s_L^{n_0(t)+1}) \right) \right] \left( \varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_L^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Décomposons  $A(t)$  en

$$A(t) = A_1(t) - A_0(t)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(t) = \sum_{n=0}^M \frac{\delta t}{\phi_i} \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int,i}} \tau_{K|L} \left[ \begin{array}{l} \left( \varphi_i(s_K^{n_0(t)+1}) - \varphi_i(s_L^{n_0(t)+1}) \right) \left( \frac{\Theta_{i,K} + \Theta_{i,L}}{2} \right)_+ \\ \left( \Theta_{i,K} - \Theta_{i,L} \right) \frac{\varphi_i(s_K^{n_0(t)+1}) + \varphi_i(s_L^{n_0(t)+1})}{2} \end{array} \right] \times \\ \left( \varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_L^{n+1}) \right), \\ \\ A_1(t) = \sum_{n=0}^M \frac{\delta t}{\phi_i} \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int,i}} \tau_{K|L} \left[ \begin{array}{l} \left( \varphi_i(s_K^{n_1(t)+1}) - \varphi_i(s_L^{n_1(t)+1}) \right) \left( \frac{\Theta_{i,K} + \Theta_{i,L}}{2} \right)_+ \\ \left( \Theta_{i,K} - \Theta_{i,L} \right) \frac{\varphi_i(s_K^{n_1(t)+1}) + \varphi_i(s_L^{n_1(t)+1})}{2} \end{array} \right] \times \\ \left( \varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_L^{n+1}) \right). \end{array} \right.$$

Considérons par exemple le terme  $A_0$ . En utilisant l'inégalité  $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ , nous avons

$$|A_0(t)| \leq \frac{1}{2} (A_{0,1}(t) + A_{0,2}(t)) + A_{0,3}(t)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{0,1}(t) &= \sum_{n=0}^M \frac{\delta t}{\phi_i} \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int,i}} \tau_{K|L} \left( \left( \varphi_i(s_K^{n_0(t)+1}) - \varphi_i(s_L^{n_0(t)+1}) \right) \frac{\Theta_{i,K} + \Theta_{i,L}}{2} \right)^2, \\ A_{0,2}(t) &= \sum_{n=0}^M \frac{\delta t}{\phi_i} \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int,i}} \tau_{K|L} \left( \left( \Theta_{i,K} - \Theta_{i,L} \right) \frac{\varphi_i(s_K^{n_0(t)+1}) + \varphi_i(s_L^{n_0(t)+1})}{2} \right)^2, \\ A_{0,3}(t) &= \sum_{n=0}^M \frac{\delta t}{\phi_i} \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int,i}} \tau_{K|L} \left( \varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_L^{n+1}) \right)^2. \end{aligned}$$

Si  $m\delta t < t \leq (m+1)\delta t$  alors  $n_0(t) = m$ , d'où

$$\begin{aligned} \int_0^{T-\tau} A_{0,1}(t) dt &\leq \sum_{m=0}^M \int_{m\delta t}^{(m+1)\delta t} \sum_{n=0}^M \frac{\delta t}{\phi_i} \mathcal{X}_n(t, t + \tau) \times \\ &\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int,i}} \tau_{K|L} \left( \left( \varphi_i(s_K^m) - \varphi_i(s_L^m) \right) \frac{\Theta_{i,K} + \Theta_{i,L}}{2} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Mais comme (voir preuve Lemme IV.5.3)

$$\int_{m\delta t}^{(m+1)\delta t} \sum_{n=0}^M \mathcal{X}_n(t, t + \tau) dt \leq \tau$$

nous en déduisons que

$$\int_0^{T-\tau} A_{0,1}(t) dt \leq \frac{\tau}{\phi_i} \|\Theta_i\|_\infty^2 |\varphi_i(s_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D},i}^2.$$

Pour les termes restants nous utilisons le fait que

$$\int_0^{T-\tau} \mathcal{X}_n(t, t + \tau) dt \leq \tau.$$

Ainsi nous obtenons

$$\int_0^{T-\tau} A_{0,2}(t) dt \leq \frac{\tau}{\phi_i} \|\varphi_i\|_\infty^2 T dm(\Omega_i) \|\nabla \Theta_i\|_\infty^2$$

et

$$\int_0^{T-\tau} A_{0,3}(t) dt \leq \frac{\tau}{\phi_i} |\varphi_i(s_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D},i}^2.$$

Ceci nous permet de majorer  $\int_0^{T-\tau} |A_0(t)| dt$ . Nous procédons de la même façon pour  $\int_0^{T-\tau} |A_1(t)| dt$ . ■

Grâce au Lemme V.2.2, nous sommes maintenant en mesure de montrer que, dans chaque sous-domaine  $\Omega_i$ , les translations en temps de la fonction  $\varphi(s_{\mathcal{D}})$  restent bornées.

**Proposition V.2.5** *Supposons les Hypothèses V.1.1 vérifiées et considérons une discrétisation admissible,  $\mathcal{D}$ , du domaine  $\Omega \times ]0, T[$  au sens de la Définition V.2.2. Pour chaque  $i \in \{1, 2\}$  soit  $\omega_i$  un ouvert borné de  $\Omega_i$ . Supposons de plus que  $\text{size}(\mathcal{M})$  est suffisamment petit et vérifie pour tout  $i \in \{1, 2\}$*

$$\omega_i \subset \Omega_{i, \text{size}(\mathcal{M})} = \{x \in \Omega_i / [x, x + \text{size}(\mathcal{M})] \subset \Omega_i\}.$$

Soit  $s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  donnée par les équations (V.10)–(V.12). Posons

$$\varphi_{\mathcal{D}, \omega_i} = \begin{cases} \varphi_i(s_{\mathcal{D}}) & \text{sur } \omega_i \times ]0, T[, \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{d+1} \setminus (\omega_i \times ]0, T[). \end{cases}$$

Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , nous avons l'inégalité

$$\|\varphi_{\mathcal{D}, \omega_i}(\cdot, \cdot + \tau) - \varphi_{\mathcal{D}, \omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}^2 \leq C_{22} |\tau| \quad (\text{V.22})$$

où  $C_{22}$  dépend des mêmes paramètres que la constante  $C_{21}$ .

Preuve :

Soit  $\Theta_i \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  telle que

- $\text{supp } \Theta_i \subset \Omega_{i, \text{size}(\mathcal{M})}$ ,
- $0 \leq \Theta_i \leq 1$  sur  $\Omega_{i, \text{size}(\mathcal{M})}$ ,

- $\Theta_i = 1$  sur  $\omega_i$ .

Nous avons

$$\|\varphi_{\mathcal{D},\omega_i}(\cdot, \cdot + \tau) - \varphi_{\mathcal{D},\omega_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_i} \Theta_i(x) \left( \varphi_i(s_{\mathcal{D}}(x, t + \tau)) - \varphi_i(s_{\mathcal{D}}(x, t)) \right)^2 dx dt.$$

L'inégalité (V.21) nous permet alors de conclure de la même façon que pour la Proposition IV.5.6.  $\blacksquare$

### Majoration de la semi-norme $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ de la fonction $w_{\mathcal{D}}$

Avant d'aborder la convergence du schéma vers la formulation faible, nous montrons une dernière estimation concernant la fonction discrète  $w_{\mathcal{D}}$  associée à la fonction  $w$ .

Soit  $s_{\mathcal{D}}$  la solution des équations (V.10)–(V.12). La fonction  $w_{\mathcal{D}}$  est définie par  $w_K^{n+1} = \Psi(\hat{\pi}_i(s_K^{n+1}))$  pour tous  $i = 1, 2$  et  $K \in \mathcal{T}_i$ . Nous avons alors la Proposition suivante.

**Proposition V.2.6** *Sous les Hypothèses V.1.1, soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible du domaine  $\Omega \times ]0, T[$  (voir Définition V.2.2). Soit  $s_{\mathcal{D}} \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  la solution des équations (V.10)–(V.12). Alors il existe  $C_{23} > 0$  dépendant de  $\eta_j, \pi_j, \Omega_j, j \in \{1, 2\}$  telle que*

$$|w_{\mathcal{D}}|_{1,\mathcal{D}}^2 \leq C_{23}. \quad (\text{V.23})$$

Preuve :

Pour tous  $K \in \mathcal{T}_i$  et  $L \in N(K)$ , le caractère Lipschitzien de la fonction  $\Psi \circ \hat{\pi}_i \circ \varphi_i^{(-1)}$  (voir Lemme V.1.1) nous assure que

$$(w_K^{n+1} - w_L^{n+1})^2 \leq (\varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_L^{n+1}))^2$$

et, par conséquent, grâce à (V.18), nous avons

$$|w_{\mathcal{D}}|_{1,\mathcal{D},i}^2 \leq C_{18}.$$

Considérons maintenant le cas où  $(K, L) \in \mathcal{T}_{\Gamma}$ . Comme  $\hat{\pi}_1(s_{K,K|L}^{n+1}) = \hat{\pi}_2(s_{L,K|L}^{n+1})$ , nous avons

$$\begin{aligned} \tau_{K|L}(\Psi(\hat{\pi}_1(s_K^{n+1})) - \Psi(\hat{\pi}_2(s_L^{n+1})))^2 &\leq \tau_{K,K|L}(\Psi(\hat{\pi}_1(s_K^{n+1})) - \Psi(\hat{\pi}_1(s_{K,K|L}^{n+1})))^2 \\ &\quad + \tau_{L,K|L}(\Psi(\hat{\pi}_2(s_{L,K|L}^{n+1})) - \Psi(\hat{\pi}_2(s_L^{n+1})))^2, \end{aligned}$$

du fait de la convexité de la fonction  $x \mapsto x^2$  et de la relation  $1/\tau_{K|L} = 1/\tau_{K,K|L} + 1/\tau_{L,K|L}$ . A nouveau les propriétés de la fonction  $\Psi \circ \hat{\pi}_i \circ \varphi_i^{(-1)}$  (voir Lemme V.1.1) impliquent que

$$(\Psi(\hat{\pi}_1(s_K^{n+1})) - \Psi(\hat{\pi}_1(s_{K,K|L}^{n+1})))^2 \leq (\varphi_1(s_K^{n+1}) - \varphi_1(s_{K,K|L}^{n+1}))^2$$

et que

$$(\Psi(\hat{\pi}_2(s_{L,K|L}^{n+1})) - \Psi(\hat{\pi}_2(s_L^{n+1})))^2 \leq (\varphi_2(s_L^{n+1}) - \varphi_2(s_{L,K|L}^{n+1}))^2.$$

Si nous tenons compte maintenant des inégalités (V.13), nous avons pour tout  $(K, L) \in \mathcal{T}_\Gamma$ ,

$$\begin{aligned} (\varphi_1(s_K^{n+1}) - \varphi_1(s_{K,K|L}^{n+1}))^2 &\leq \left( \varphi_1(s_K^{n+1}) - \varphi_1(s_{K,K|L}^{n+1}) \right) C_\lambda \left( \pi_1(s_K^{n+1}) - \pi_1(s_{K,K|L}^{n+1}) \right) \\ &\leq \left( \varphi_1(s_K^{n+1}) - \varphi_1(s_{K,K|L}^{n+1}) \right) C_\lambda \left( \pi_1(s_K^{n+1}) - \pi_2(s_L^{n+1}) \right). \end{aligned} \quad (\text{V.24})$$

Les inégalités (V.17) et (V.24) donnent

$$\sum_{n=0}^M \delta t \sum_{(K,L) \in \mathcal{T}_\Gamma} \tau_{K,K|L} \left( \Psi(\hat{\pi}_1(s_K^{n+1})) - \Psi(\hat{\pi}_1(s_{K,K|L}^{n+1})) \right)^2 \leq C_\lambda C_{17},$$

et de la même façon, nous avons

$$\sum_{n=0}^M \delta t \sum_{(K,L) \in \mathcal{T}_\Gamma} \tau_{L,K|L} \left( \Psi(\hat{\pi}_2(s_{L,K|L}^{n+1})) - \Psi(\hat{\pi}_2(s_L^{n+1})) \right)^2 \leq C_\lambda C_{17}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\sum_{n=0}^M \delta t \sum_{(K,L) \in \mathcal{T}_\Gamma} \tau_{K|L} (w_K^{n+1} - w_L^{n+1})^2 \leq 2C_{17} C_\lambda.$$

Les majorations précédentes impliquent donc l'existence d'une constante  $C_{24} > 0$  dépendant de  $\eta_j, \pi_j, \Omega_j, j \in \{1, 2\}$  et telle que

$$|w_{\mathcal{D}}|_{1,\mathcal{D}}^2 \leq C_{24},$$

d'où le résultat. ■

### Convergence du schéma vers la formulation faible

Les Propositions V.2.4 et V.2.5 nous permettent d'appliquer le théorème de Kolmogorov. Nous montrons alors que la sous-suite obtenue converge vers une solution faible du problème (V.5)–(V.9).

**Théorème V.2.1** *Sous les Hypothèses V.1.1, considérons une suite,  $(\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , de discrétisations admissibles au sens de la Définition V.2.2. Nous supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\text{regul}(\mathcal{M}_m) \leq \alpha$  et que  $\text{size}(\mathcal{M}_m) \rightarrow 0$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Soit  $s_{\mathcal{D}_m} = s_m \in \mathcal{X}(\mathcal{D}_m)$  solution des équations (V.10)–(V.12) pour  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_m$ . Alors il existe une sous-suite de solutions approchées que nous désignerons également par  $(\mathcal{D}_m, s_m)_{m \in \mathbb{N}}$  telle que  $s_m \rightarrow s$  dans  $L^q(\Omega \times ]0, T[)$  pour tout  $1 \leq q < \infty$ . La limite obtenue  $s : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par*

$$s = \begin{cases} s_1 & \text{sur } \Omega_1 \times ]0, T[, \\ s_2 & \text{sur } \Omega_2 \times ]0, T[, \end{cases}$$

est une solution faible du problème (V.5)–(V.9) (voir Définition V.1.2).

Preuve :

Tout au long de cette preuve,  $\mathcal{D}$  désigne  $\mathcal{D}_m$ .

Convergence d'une sous-suite de  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ .

Soient  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\omega_i$  un ouvert borné de  $\Omega_i$  et  $\varphi_{\mathcal{D}, \omega_i}(x, t)$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  par

$$\varphi_{\mathcal{D}, \omega_i} = \begin{cases} \varphi_i(s_m) & \text{sur } \omega_i \times ]0, T[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite  $(s_m)_{m \in \{0 \dots M\}}$  vérifie (V.16) sur  $\Omega \times ]0, T[$ . La suite  $\varphi_{\mathcal{D}, \omega_i}$  est donc bornée dans  $L^q(\mathbb{R}^{d+1})$ ,  $1 \leq q < +\infty$ . Supposons  $\text{size}(\mathcal{M})$  suffisamment petit pour que  $\omega_i \subset \Omega_{i, \text{size}(\mathcal{M})}$ . Des inégalités (V.20) et (V.22), nous déduisons que, pour tous  $\xi \in \mathbb{R}^d$  et  $\tau \in \mathbb{R}$ , il existe une fonction  $C(\xi, \tau) \rightarrow 0$  lorsque  $\xi \rightarrow 0$  et  $\tau \rightarrow 0$  telle que

$$\|\varphi_{\mathcal{D}, \omega_i}(\cdot + \xi, \cdot + \tau) - \varphi_{\mathcal{D}, \omega_i}\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})}^2 \leq C(\xi, \tau).$$

Nous sommes donc en mesure d'appliquer le Théorème de Kolmogorov IV.5.2. En effet, en prenant  $N = d + 1$ ,  $\omega = \omega_i \times ]0, T[$ ,  $1 \leq q < \infty$ ,  $u = (\varphi_i(s_m))$  et  $p(\varphi_i(s_m)) = \varphi_{\mathcal{D}, \omega_i}$ , nous en déduisons que la suite  $(\varphi_i(s_m))$  est relativement compacte dans  $L^q(\omega_i \times ]0, T[)$ . Considérons maintenant une suite  $(\omega_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-domaines de  $\Omega_i$  convergeant vers  $\Omega_i$ . Par un procédé diagonal, nous pouvons extraire une sous-suite toujours notée  $(\mathcal{D}_m, s_m)$  telle que  $(\varphi_i(s_m)) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \tilde{\varphi}_i$  dans  $L^q(\omega_{i,n} \times ]0, T[)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent la suite extraite  $(\varphi_i(s_m))$  converge vers  $\tilde{\varphi}_i$  dans  $L^q(\Omega_i \times ]0, T[)$ . Comme la fonction  $\varphi_i$  est continue strictement croissante, ceci implique que la suite  $(s_m)$  converge elle-même vers une fonction  $s_i \in L^q(\Omega_i \times ]0, T[) \cap L^\infty(\Omega_i \times ]0, T[)$ .

Montrons que, pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\varphi_i(s_i) \in L^2(0, T; H^1(\Omega_i))$ .

En utilisant l'inégalité (V.2.4) et en reprenant la preuve du Théorème IV.5.1 nous montrons que, pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\varphi_i(s_i) \in L^2(0, T; H^1(\Omega_i))$ .

Montrons que  $s$  est une solution faible.

Considérons l'ensemble  $\tilde{C}_{test} = \{\psi \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T]) / \psi(\cdot, T) = 0\}$  dense dans  $C_{test}$ . Soient  $\psi \in \tilde{C}_{test}$  et  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$  la suite donnée par les équations (V.10)–(V.12). Pour tout  $n \in \{0 \dots M\}$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}$ , nous multiplions l'équation (V.11) par  $\psi_K^n = \psi(x_K, n\delta)$ . Nous sommes ensuite les égalités obtenues sur l'ensemble des volumes :

$$\sum_{i=1}^2 (E_{i,1,m} + E_{i,2,m}) + E_{1|2,m} = 0$$

où, pour  $i \in \{1, 2\}$ ,

$$\begin{aligned}
 E_{i,1,m} &= \sum_{n=0}^M \sum_{K \in \mathcal{T}_i} \phi_i m(K) (s_K^{n+1} - s_K^n) \psi_K^n, \\
 E_{i,2,m} &= - \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_i} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \left( \varphi_i(s_L^{n+1}) - \varphi_i(s_K^{n+1}) \right) \psi_K^n, \\
 E_{1|2,m} &= \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{(K,L) \in \mathcal{T}_\Gamma} \tau_{K,K|L} \left( \varphi_1(s_K^{n+1}) - \varphi_1(s_{K,K|L}^{n+1}) \right) \left( \psi_K^n - \psi_{K|L}^n + \psi_{K|L}^n - \psi_L^n \right).
 \end{aligned}$$

Comme dans la preuve du Théorème IV.5.1, nous montrons que

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow +\infty} E_{i,1,m} &= - \int_0^T \int_{\Omega_i} \phi_i s_i(x, t) \psi_t(x, t) dx dt - \int_{\Omega_i} \phi_i s_{\text{ini}}(x) \psi(x, 0) dx, \\
 \lim_{m \rightarrow +\infty} E_{i,2,m} &= \int_0^T \int_{\Omega_i} \vec{\nabla} \varphi_i(s_i)(x, t) \cdot \vec{\nabla} \psi(x, t) dx dt.
 \end{aligned}$$

Examinons plus en détail le terme  $E_{1|2,m}$ .

Nous avons

$$\begin{aligned}
 E_{1|2,m}^2 &\leq \left( \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{(K,L) \in \mathcal{T}_\Gamma} \tau_{K,K|L} \left( \varphi_1(s_K^{n+1}) - \varphi_1(s_{K,K|L}^{n+1}) \right)^2 \right) \times \\
 &\quad \left( \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{(K,L) \in \mathcal{T}_\Gamma} m(K|L) \left( d_{K,K|L} \left( \frac{\psi_K^n - \psi_{K|L}^n}{d_{K,K|L}} \right)^2 + d_{L,K|L} \left( \frac{\psi_L^n - \psi_{K|L}^n}{d_{L,K|L}} \right)^2 \right) \right)
 \end{aligned}$$

avec

$$\psi_{K|L}^n = \frac{1}{m(K|L) \delta t} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K|L} \psi(x, t) d\zeta dt.$$

Mais remarquons que, puisque la fonction  $\psi$  est suffisamment régulière, il existe une constante  $C_\psi > 0$  telle que  $|\psi_K^n - \psi_{K,K|L}^n| \leq C_\psi d_{K,K|L}$  et nous obtenons alors

$$\sum_{n=0}^M \delta t \sum_{(K,L) \in \mathcal{T}_\Gamma} m(K|L) d_{K,K|L} \left( \frac{\psi_K^n - \psi_{K,K|L}^n}{d_{K,K|L}} \right)^2 \leq T m(\Gamma) C_\psi^2 \text{size}(\mathcal{M}).$$

De plus, compte tenu de (V.17), nous avons

$$\sum_{n=0}^M \delta t \sum_{(K,L) \in \mathcal{T}_\Gamma} \tau_{K,K|L} \left( \varphi_i(s_K^{n+1}) - \varphi_i(s_{K,K|L}^{n+1}) \right)^2 \leq C_\lambda C_{17}$$

d'où

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E_{1|2,m} = 0.$$

*Montrons que  $w \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .*

Nous obtenons ce résultat en adaptant les preuves du Lemme IV.5.2 et de la propriété  $\varphi(s_i) \in L^2(0, T; H^1(\Omega_i))$  (voir Etape 2) et en utilisant la majoration (V.23). ■

Une conséquence immédiate du Théorème V.2.1 est le

**Corollaire V.2.1** *Sous les hypothèses V.1.1, le problème (V.5)–(V.9) admet au moins une solution faible au sens donné par la Définition V.1.2.*

**Remarque 16 :** Nous ne sommes pas encore en mesure de démontrer l’unicité de cette solution dans le cas général mais, en supposant que la solution est suffisamment régulière, nous pouvons quand même montrer ce résultat. La démonstration suit la méthode proposée par (Bertsch et al. 2003) (voir Annexe C Proposition C.1). □

## V.3 Tests numériques

### V.3.1 Test1

Considérons un domaine  $\Omega$  tel que  $\Omega_1 = ]0, 1[$  et  $\Omega_2 = ]1, 2[$ . Les porosités sont telles que  $\phi_1 = \phi_2 = 1$ . Les mobilités vérifient  $\eta_o(s) = s$  et  $\eta_w(s) = 1 - s$ . Les pressions capillaires sont données par  $\pi_1(s) = 5s^2$  et  $\pi_2(s) = 5s^2 + 1$ . Dans ce cas,  $s_1^* = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $s_2^* = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . La condition initiale vérifie

$$s_{\text{ini}}(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{si } x < 0.9, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les domaines  $\Omega_i$  sont discrétisés à l’aide d’une grille régulière de pas  $dx = \text{size}(\mathcal{M}) = 10^{-2}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Nous utilisons un pas de temps constant  $\delta t = \frac{1}{6} \cdot 10^{-3}$ . Les Figures V.2 donnent les fonctions  $s(\cdot, t)$ ,  $\pi(\cdot, s(\cdot, t))$ ,  $\varphi(\cdot, s(\cdot, t))$  aux dates  $t = 0.007$  et  $t = 0.05$ . Dans le premier cas l’huile est bloquée sous l’interface  $\Gamma$  située en  $x = 1$  et la pression capillaire est discontinue alors que, dans le second cas, l’huile traverse l’interface et la continuité de la pression capillaire est assurée. La Figure V.4 donne l’évolution du flux et des saturations de part et d’autre de l’interface.

### V.3.2 Test2

Considérons maintenant la condition initiale

$$s_{\text{ini}}(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{si } x > 1.2, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où l’huile est déjà présente dans la barrière. Les Figures V.3, V.5 montrent les résultats obtenus. Remarquons que, même si la pression capillaire est discontinue l’huile peut circuler au travers de l’interface, du domaine  $\Omega_2$  vers le domaine  $\Omega_1$ , tout en vérifiant les conditions (V.12) car pour tout  $t \in [0, 0.05]$ ,  $s_2(t) = 0$ .

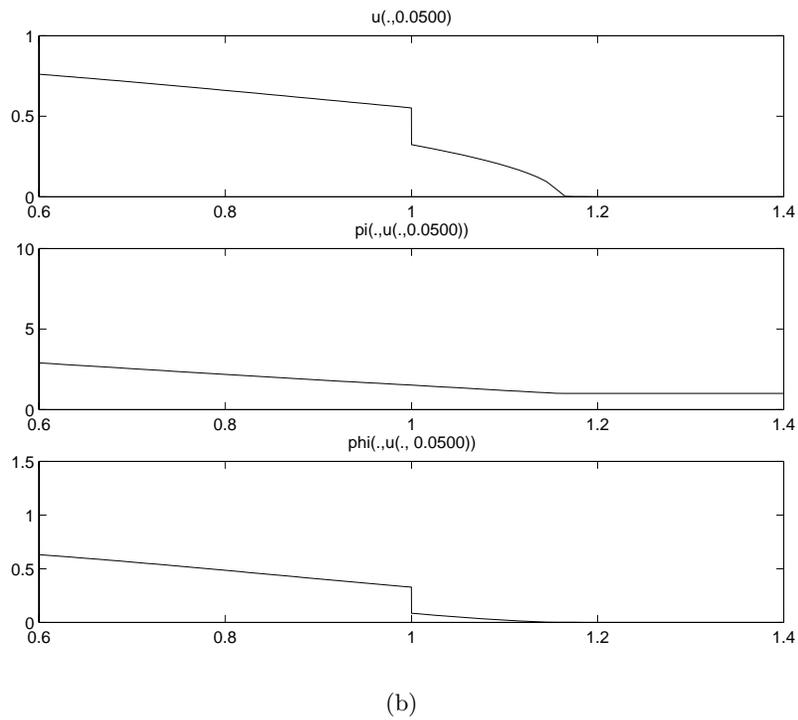
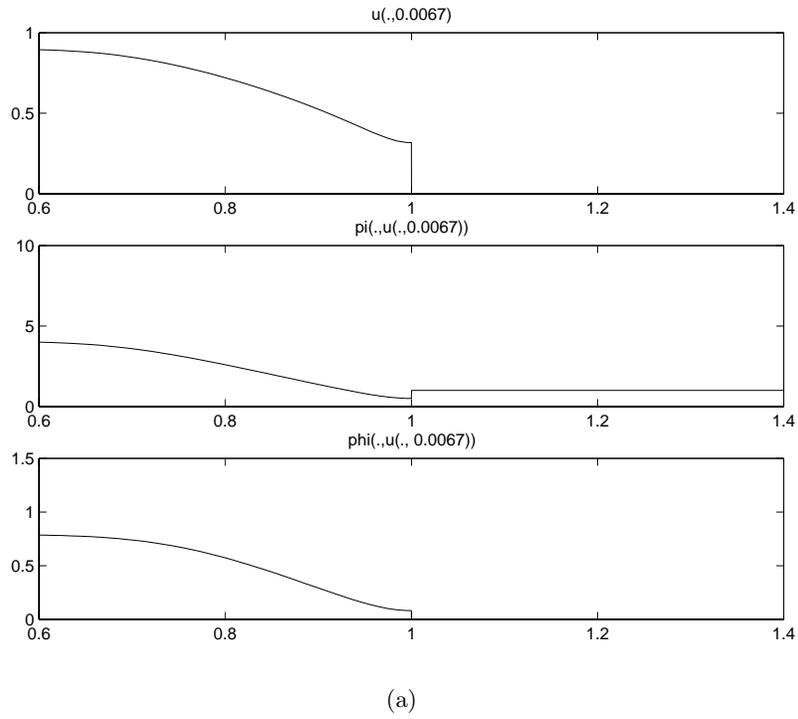


Figure V.2: Test1 :  $u(., t)$ ,  $\pi(., u(., t))$ ,  $\varphi(., u(., t))$  pour  $t = 0.007$  (a) et  $t = 0.05$  (b)

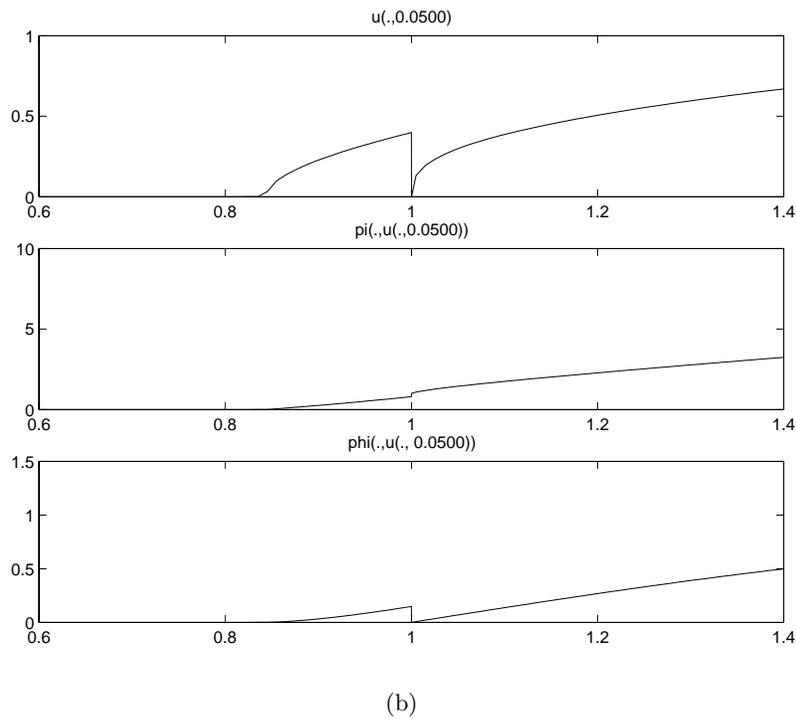
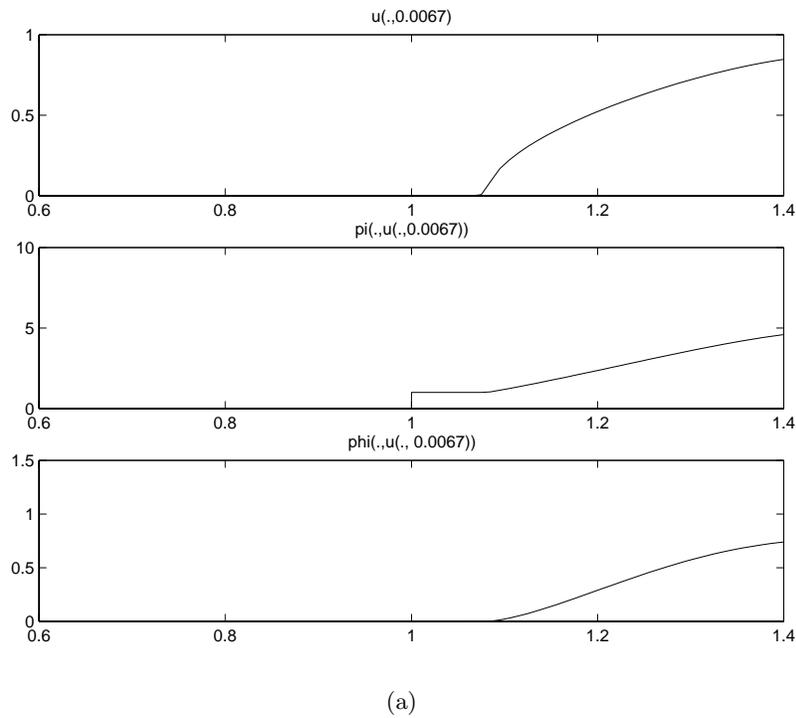


Figure V.3: Test 2 :  $u(\cdot, t)$ ,  $\pi(\cdot, u(\cdot, t))$ ,  $\varphi(\cdot, u(\cdot, t))$  pour  $t = 0.007$  (a) et  $t = 0.05$  (b)

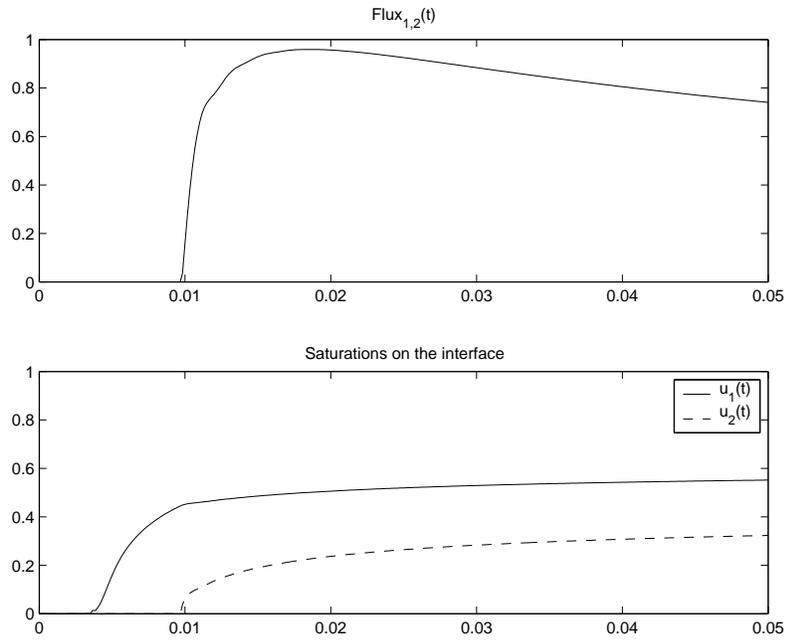


Figure V.4: Test 1 : Evolution du flux et des saturations sur l'interface

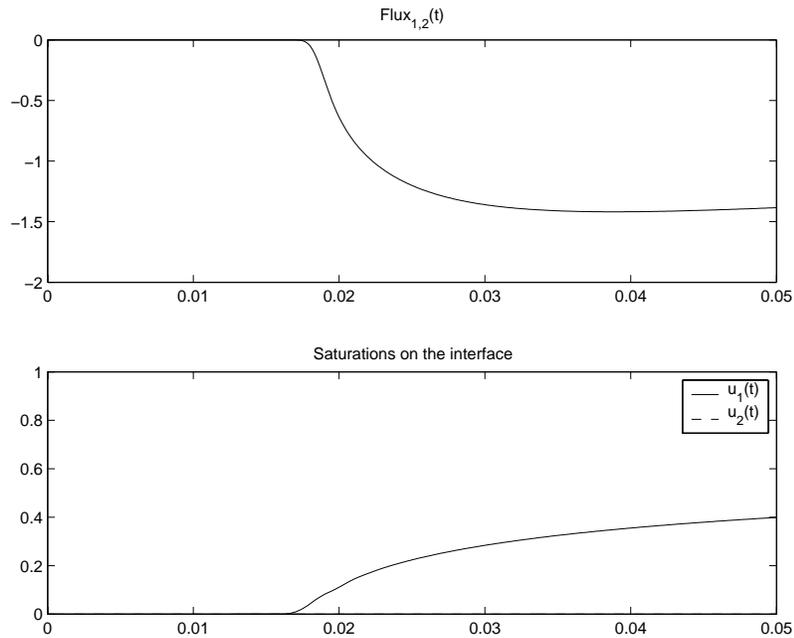


Figure V.5: Test 2 : Evolution du flux et des saturations sur l'interface



## Chapitre VI

# Conclusions et perspectives

---

Les modèles de genèse de bassins qui sont actuellement mis en œuvre dans le cadre du projet *Temis*, aboutissent à des problèmes mathématiques difficiles et l'analyse mathématique des schémas utilisés pour leur résolution est encore très incomplète.

Cette thèse nous a toutefois permis de compléter des travaux existants en étudiant des modèles d'écoulement plus complexes et plus proches des modèles de bassins actuels.

Nous avons tout d'abord considéré un modèle de type Dead-Oil incompressible défini sur un domaine fixe isotrope. En négligeant dans un premier temps les effets capillaires mais, en tenant compte des effets conjugués de la pression et de la gravité, nous avons établi des résultats nouveaux concernant le schéma amont des pétroliers.

L'introduction de la pression capillaire nous a permis ensuite de définir un nouveau schéma à nombre de Péclet variable plus précis que le schéma amont des pétroliers. Le schéma à Péclet variable présente de bonnes propriétés mathématiques mais aussi l'avantage de pouvoir être facilement mis en œuvre sous une forme implicite ou explicite en temps.

Sur ces deux modèles, quelques résultats doivent encore être établis. Le tableau qui suit dresse un bilan des travaux réalisés et présentés dans ce mémoire.

	Dead-Oil incompressible sans pression capillaire (Amont des pétroliers)	Dead-Oil incompressible avec pression capillaire (Péclet variable)
Stabilité $L^\infty$ saturations.	✓	✓
Estimations a priori pressions.	✓	?
Existence solution discrète au système couplé.	✓	✓
Unicité solution discrète au système couplé.	?	?
Convergence schéma en saturation. (Flux total régulier donné.)	✓	✓
Convergence système couplé.	?	?

Ces deux modèles possèdent de nombreuses extensions qui pourraient à l'avenir faire l'objet d'autres travaux très intéressants. Citons, par exemple, les cas où

- la phase hydrocarbure est compressible : la densité d'huile dépend de la pression de la phase,
- l'écoulement est compositionnel : la densité et la viscosité de l'huile dépendent des compositions,
- la sédimentation et la compaction du domaine sont pris en compte : la porosité n'est plus une donnée mais une variable dépendant de la contrainte effective.

Une grande partie de ce travail a également été consacrée au phénomène de barrière capillaire. Des tests numériques ont montré que, dans ce cas, le schéma amont des pétroliers peut donner une très mauvaise estimation des réservoirs en place lorsque le pas du maillage est trop grossier. Nous avons ainsi été amenés à définir une nouvelle condition d'écoulement au niveau de ces barrières. Nous avons ensuite conçu un nouveau schéma qui satisfait cette condition et converge vers la solution faible du problème. Par souci de clarté, nous n'avons ici présenté que le cas où l'écoulement subit uniquement les effets capillaires. Mais nous avons pu montrer des résultats identiques dans le cas où les deux phases migrent sous l'influence des trois moteurs, i.e. d'un flux total, de la gravité et de la pression capillaire. Dans tous les cas l'unicité de la solution obtenue reste à démontrer.

Parallèlement à ces travaux, une réflexion sur une amélioration des modèles de bassins existants doit être menée. En effet, il n'est pas exclu que certains phénomènes physiques, qui ne sont pas pris en compte actuellement, aient une influence non négligeable sur le processus de migration. Des tests numériques préliminaires peuvent permettre de mesurer leur impact sur les solutions calculées. Parmi ces phénomènes, mentionnons

- l'hystérésis des courbes de pression capillaire et de perméabilités relatives,
- la diffusion et la dispersion des espèces hydrocarbures,

- la dissolution dans l'eau d'hydrocarbures gazeux comme le méthane et leur migration par diffusion au sein de cette phase,
- la diminution des pressions capillaires d'entrée pour les couches géologiques subissant une fracturation hydraulique.

Enfin, sur un plan purement numérique, des solutions doivent être mises en place afin de diminuer les temps de calcul. Certaines simulations peuvent en effet durer plusieurs heures voire plusieurs jours. Ceci est en partie dû aux faibles valeurs des pas de temps, de l'ordre de  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  millions d'années alors que la durée totale des simulations porte sur des dizaines voire quelques centaines de millions d'années. Quelques tests réalisés avec notre prototype ont montré que la sous-relaxation de l'algorithme de Newton permettait d'augmenter sensiblement ces valeurs. Des algorithmes de type Quasi-Newton peuvent aussi être envisagés pour diminuer le coût de résolution des systèmes discrets.



## Annexe A

# La modélisation de bassin sédimentaire

---

### A.1 Un exemple d'algorithme de backstripping

*Données connues :*

**Durée des événements :**  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0 \dots N$ .

Un événement correspond au dépôt d'une couche monolithologique, à une absence de dépôt ou encore à une érosion qui peut affecter éventuellement plusieurs couches. Si  $[-T, 0]$  correspond à la période de formation du bassin, nous avons  $[-T, 0] = \bigcup_{i=0}^N [t_i, t_{i+1}]$ .

**Données de l'eustatisme et de la paléobathymétrie.**

Pour un événement  $i$ , la paléobathymétrie  $b_i$  correspond à l'épaisseur d'eau, supposée constante, qui recouvre le bassin au cours de cet événement. L'eustatisme,  $e_i$ , correspond à la variation du niveau de la mer par rapport au niveau actuel (négatif si supérieur, positif si inférieur). Là encore cette donnée est supposée constante au cours d'un événement.

**Hauteurs réelles des séries sédimentaires.**

On suppose que le bassin a subi  $M$  dépôts de lithologies différentes ou non. Chacune de ces couches a une hauteur réelle  $h_{r,i}$ ,  $i = 0 \dots M$ , dépendant du temps. Ces données sont connues à l'âge actuel par l'intermédiaire des données de terrain ou des images sismiques. Elles peuvent être nulles en l'absence de dépôt ou après une érosion qui aurait effacé toute la série. On note  $h_{\text{sed},i}$ ,  $i = 0 \dots M$  la hauteur solide totale d'une couche  $i$  déposée avant érosion.

**Hauteurs réelles de sédiments disparus.**

On suppose que le bassin a connu  $L$  érosions. On note  $h_{r,e,i}$ ,  $i = 0 \dots L$  les hauteurs

réelles érodées. Ces données dépendent normalement du temps mais sont ici supposées constantes (voir *Hypothèses*). On note  $h_{\text{sed},e,i}$ ,  $i = 0 \dots L$ , les hauteurs solides érodées.

**Courbes  $\phi_j(z)$ .**

Pour chaque lithologie  $j = 0 \dots K$ , la courbe  $\phi_j(z)$  donne l'évolution de la porosité d'un sédiment de type  $j$  en fonction de la profondeur.

*Hypothèses :*

***Hauteurs réelles.***

Nous supposons que le socle ne se déforme pas, que seule l'accumulation des sédiments a une influence sur la géométrie et que ces dépôts sont verticaux. Ainsi, seule la hauteur du bassin varie au cours du temps. Nous négligeons également les phénomènes de diagenèse. En l'absence d'érosion, la hauteur solide  $dh_{\text{sed}}$  d'un volume élémentaire de roche reste donc constante au cours du temps. Soient  $\phi$  la porosité de ce volume supposée constante à l'intérieur de l'échantillon et  $dh_r$  sa hauteur réelle (i.e. la hauteur associée au volume de roche et au volume poreux). Nous avons

$$dh_{\text{sed}} = (1 - \phi)dh_r$$

ou encore

$$h_{\text{sed}} = \int_0^{h_r} (1 - \phi(z))dz. \quad (\text{A.1})$$

**Courbes  $\phi_j(z)$ .**

Dans une colonne de sédiments, les courbes  $\phi_j(z)$  diffèrent d'une lithologie à l'autre. Nous supposons que la hauteur réelle d'une couche de lithologie  $j$ ,  $j = 0 \dots M$  se déduit de la relation (A.1) et de la courbe  $\phi_j(z)$ . En pratique, l'estimation de ces courbes est très délicate. Pour certaines lithologies, nous disposons de données de puits donnant la valeur de la porosité à une certaine profondeur et sur quelques dizaines de mètres. Si, en plus, nous disposons en surface du même type de sédiments avec le même environnement de dépôt, nous pouvons compléter ces données à l'aide de points proches de la surface. Une interpolation permet alors de déduire une évolution de la porosité en fonction de la profondeur pour un sédiment particulier. Mais ce calcul reste très approximatif et nous ne disposons généralement pas de données pour tous les types de dépôt. De plus, le fait de choisir une loi de porosité dépendante de la profondeur présente quelques inconvénients. Elle suppose en particulier que l'évolution de la porosité d'un sédiment est la même pour une colonne composée d'une seule roche ou de roches différentes.

***Erosions.***

Lors d'une érosion, la couche érodée et les couches sous-jacentes conservent leur porosité. Les couches sont simplement translatées vers le sommet de la colonne (voir Figure A.1 courbe de gauche).

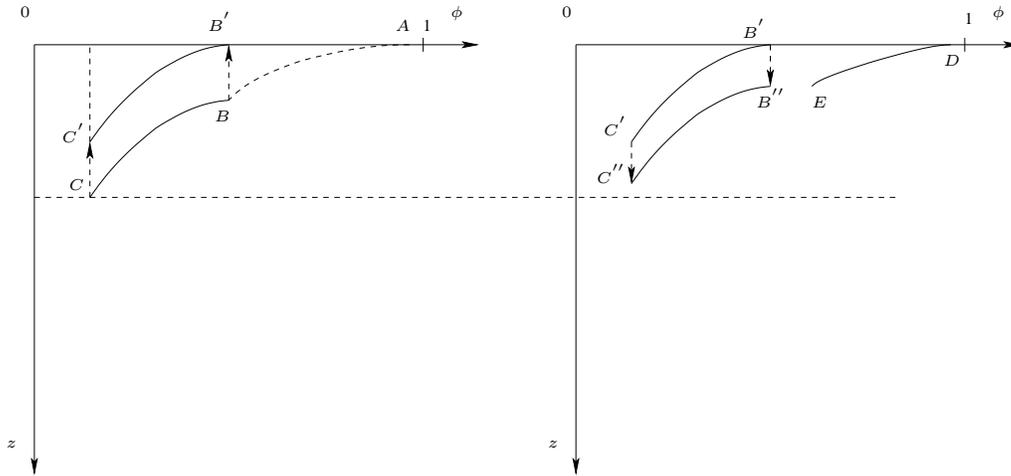


Figure A.1: Translation courbe  $[BC]$  en  $[B'C']$  suite à l'érosion de  $[AB]$  (courbe de gauche). Translation courbe  $[B'C']$  en  $[B''C'']$  suite au dépôt de  $[DE]$  (courbe de droite).

On suppose de plus que les hauteurs réelles érodées correspondent aux hauteurs réelles érodées observées à l'âge actuel. En toute rigueur, ceci est faux puisque ces couches se sont généralement compactées entre temps. Mais la prise en compte de la compaction donne lieu à des calculs relativement lourds et il n'est pas certain, vu les approximations précédentes, que cela améliore sensiblement la qualité des données (voir (Demeter 1993)).

### ***Vitesses de sédimentation.***

Les vitesses de sédimentation sont supposées constantes au cours d'un événement.

### ***Déroulement de l'algorithme :***

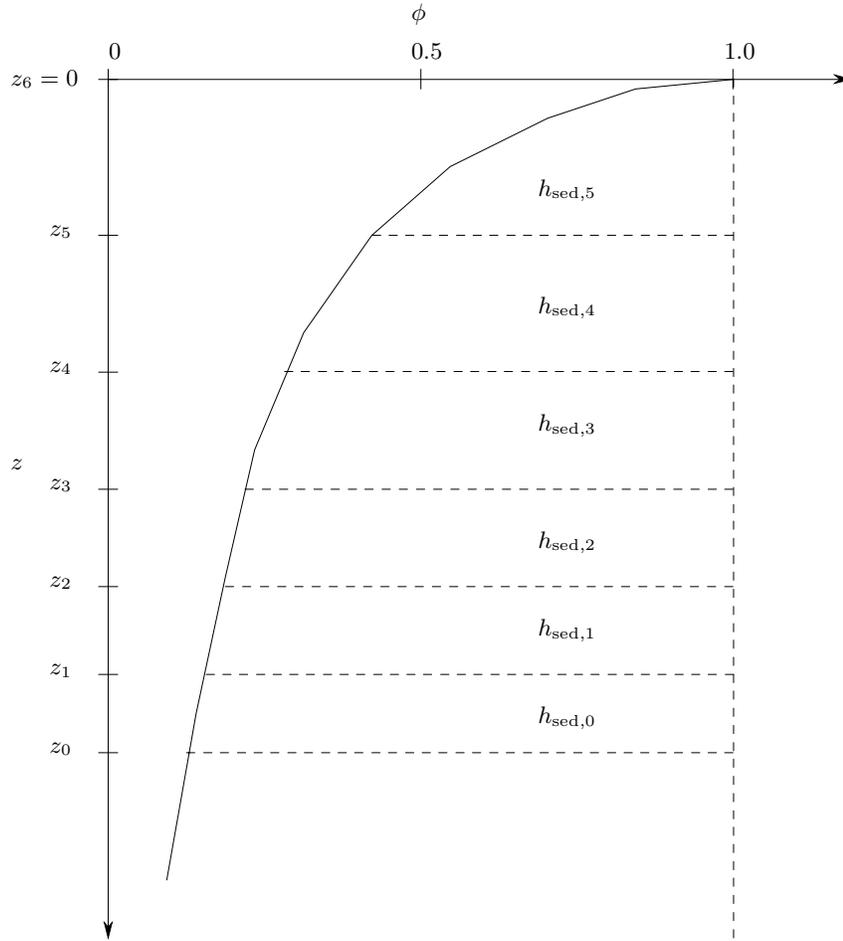
L'algorithme se déroule en trois temps. On calcule tout d'abord les hauteurs solides érodées (Algorithme 2), puis les hauteurs et les vitesses solides de chaque couche avant érosion (Algorithme 3). Enfin on détermine les hauteurs réelles et les cotes des couches présentes à chaque événement (Algorithme 4). L'Algorithme 4 constitue, dans une certaine mesure, une validation des deux algorithmes précédents puisque, à l'issue du dernier événement, nous devons retrouver la géométrie actuelle.

Précisons un peu le calcul des hauteurs réelles et plaçons nous, dans un premier temps, dans une situation sans érosion. Lors du premier dépôt, la hauteur réelle de la première couche  $h_{r,0}$  est donnée par

$$h_{r,0} = z_0$$

où  $z_0$  se déduit de

$$h_{\text{sed},0} = \int_0^{z_0} (1 - \phi_0) dz.$$

Figure A.2: Calcul des hauteurs réelles à partir d'une courbe  $\phi_i(z)$ 

Lorsque la seconde couche se dépose, la première couche commence à s'enfouir et donc à se compacter (voir figure A.2). Nous avons alors

$$h_{r,1} = z_1 \text{ et } h_{r,0} = z_0 - z_1$$

où  $z_0$  et  $z_1$  sont donnés par

$$h_{sed,0} = \int_{z_1}^{z_0} (1 - \phi_0) dz,$$

$$h_{sed,1} = \int_0^{z_1} (1 - \phi_1) dz.$$

Et nous procédons de la même façon pour les dépôts suivants. Lorsqu'intervient un phénomène d'érosion, les couches restantes dans le bassin sont translattées d'une hauteur correspondant à la hauteur réelle érodée. Leurs porosités et leurs hauteurs réelles restent identiques et la hauteur réelle érodée s'ajoute au cumul de leurs translations (noté  $tr_k$  dans l'Algorithme 4). Si, par la suite, des sédiments viennent à se redéposer au-dessus,

ces couches vont à nouveau s'enfouir. Il faut alors regarder si elles retrouvent leur enfouissement maximal (voir Figure A.1, courbe de droite). Si c'est le cas, le processus de compaction peut reprendre et les hauteurs réelles diminuent à nouveau. Dans le cas contraire (cas où  $tr_k > 0$ ), ces couches s'enfouissent sans se compacter.

*Conclusion et autres approches possibles*

Certaines de nos hypothèses (vitesses de sédimentation constantes au cours d'un événement, non prise en compte de la transformation des minéraux ou de la subsidence tectonique...) sont, dans certains cas, trop simplificatrices et il peut arriver qu'en sortie de l'algorithme les hauteurs réelles calculées ne correspondent pas aux hauteurs réelles observées. Il faut alors modifier les courbes  $\phi_i(z)$  et relancer la procédure. Cette méthodologie reste très approximative et nous n'avons aucune garantie qu'il existe, dans tous les cas, des courbes solutions du problème.

**Algorithme 2:** *Calcul des hauteurs solides érodées*

**Entrée :**  $(h_{r,e,i})_{0 \leq i \leq L}$ ,  $(\phi_i)_{0 \leq i \leq K}$

**Sortie :**  $(h_{\text{sed},e,i})_{0 \leq i \leq L}$

**Déroulement :**

Initialement la colonne ne contient aucun sédiment.

Pour  $i = 0$  à  $N$  :

Si  $i =$  "dépôt couche  $j$ " :

- Dépôt couche  $j$ .

Fin Si

Si  $i =$  "érosion  $j$ " :

- Boucle sur les couches érodées et calcul de  $h_{\text{sed},e,j}$  grâce à (A.1),  $h_{r,e,j}$  et aux données  $(\phi_k)_{0 \leq k \leq K}$ .

Fin Si

Fin Pour

**Algorithme 3:** *Calcul de  $(h_{\text{sed},i})_{0 \leq i \leq M}$  et  $(v_{\text{sed},i})_{0 \leq i \leq N}$*

**Entrée :**  $(h_{r,i}(0))_{0 \leq i \leq M}$ ,  $(h_{r,e,i})_{0 \leq i \leq L}$ ,  $(h_{\text{sed},e,i})_{0 \leq i \leq L}$ ,  $(\phi_i)_{0 \leq i \leq K}$ ,  $([t_i, t_{i+1}])_{0 \leq i \leq N}$

**Sortie :**  $(h_{\text{sed},i})_{0 \leq i \leq M}$ ,  $(v_{\text{sed},i})_{0 \leq i \leq N}$

**Déroulement :**

Initialisation de la colonne avec les hauteurs réelles actuelles  $(h_{r,i}(0))_{0 \leq i \leq M}$ .

Pour  $i = N$  à  $0$  :

Si  $i =$  "érosion  $j$ " :

- $v_{\text{sed},i} = \frac{h_{\text{sed},e,j}}{t_{i+1} - t_i}$

Fin Si

Si  $i =$  "dépôt couche  $j$  de lithologie  $l$ " :

Si  $i + 1 =$  "érosion  $k$ " :

- Dépôt couches érodées correspondant à  $h_{r,e,k}$ .

Soit  $h$  la hauteur réelle obtenue pour la couche  $j$ .

Fin Si

- Calcul  $h_{\text{sed},j}$  grâce à (A.1),  $h$  et  $\phi_l$ .

- Retrait de la couche  $j$ .

- $v_{\text{sed},i} = \frac{h_{\text{sed},j}}{t_{i+1} - t_i}$

Fin Si

Fin Pour

**Algorithme 4:** Calcul de  $(h_{r,i}(t))_{0 \leq i \leq M}$ ,  $(z_i(t))_{0 \leq i \leq M}$  pour  $t = \{t_0, \dots, t_N\}$

**Entrée :**  $(h_{\text{sed},i})_{0 \leq i \leq M}$ ,  $(h_{r,e,i})_{0 \leq i \leq L}$ ,  $(\phi_i)_{0 \leq i \leq K}$ ,  $(e_i)_{0 \leq i \leq N}$ ,  $(b_i)_{0 \leq i \leq N}$

**Sortie :**  $(h_{r,i}(t))_{0 \leq i \leq M}$ ,  $(z_i(t))_{0 \leq i \leq M}$ ,  $t = \{t_0, \dots, t_N\}$

**Déroulement :**

Initialement la colonne ne contient aucun sédiment.

Initialisation du cumul des translations des couches,  $(tr_k)_{0 \leq k \leq M}$ , à 0.

Pour  $i = 0$  à  $N$  :

Si  $i = \text{"dépôt couche } j\text{"}$  :

• Dépôt de la couche  $j$  de lithologie  $l$ .

Boucle sur les couches (indiquées  $k$  et  $m$  pour leur lithologie) présentes dans le bassin :

Si  $tr_k = 0$  :

• Calcul de  $h_{r,k}(t_i)$  grâce à (A.1), à la donnée  $\phi_m$  et à la hauteur solide restante dans la couche.

Sinon

•  $h_{r,k}(t_i) = h_{r,k}(t_{i-1})$ .

Fin Si

• Calcul de la cote  $z_k(t_i)$  grâce à  $e_i$ ,  $b_i$ ,  $h_{r,k}(t_i)$  et aux hauteurs réelles des couches susjacentes.

Si  $tr_k > 0$  :

• Déduire  $h_{r,j}(t_i)$  de  $tr_k$ .

Fin Si

Fin Boucle

Fin Si

Si  $i = \text{"érosion } j\text{"}$  :

• Erosion des couches concernées et mise à jour de leur hauteur solide.

Boucle sur les couches (indiquées  $k$  et  $m$  pour leur lithologie) restantes dans le bassin :

•  $h_{r,k}(t_i) = h_{r,k}(t_{i-1})$ .

• Translations vers le haut de la couche  $k$  :  $tr_k + = h_{r,e,j}$ .

• Mise à jour de  $z_k(t_i)$  grâce à  $e_i$ ,  $b_i$ ,  $h_{r,k}(t_i)$  et aux hauteurs réelles des couches susjacentes.

Fin Boucle

Fin Si

Fin Pour



# Etude du schéma industriel

---

## B.1 Propriétés de la fonction $F(., ., Q, R)$

Il s'agit ici de démontrer quelques-unes des propriétés de la fonction  $F(., ., Q, R)$  introduite dans le chapitre IV. Nous considérons ici le cas où l'argument  $R$  regroupe à la fois les moteurs de gravité et de pression capillaire (voir équation (IV.15)). Les résultats qui suivent restent, bien entendu, valables en l'absence de capillarité.

**Lemme B.1.1** *Plaçons nous sous les Hypothèses IV.1.1 et considérons un triplet  $(Q, G, \tau) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+$ . Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , posons*

$$R(a, b) = G - \tau(\pi(b) - \pi(a)).$$

Soit  $H$  la fonction définie, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , par

$$H(a, b) = F(a, b, Q, R(a, b))$$

où  $F(., ., Q, R(., .))$  est donnée par la Définition IV.3.1. Sous ces hypothèses,  $H(., .)$  est continue Lipschitzienne et croissante (resp. décroissante) par rapport à son premier (resp. son second) argument. Ses constantes de Lipschitz sont majorées par  $C_\eta(|Q| + |G| + \tau|L_\pi|)$  où  $C_\eta$  est une constante ne dépendant que des fonctions  $\eta_o$  et  $\eta_w$ .

Preuve :

Soit  $b \in \mathbb{R}$ . La fonction  $H(., b)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $C^1$  par morceaux<sup>1</sup>. Pour montrer que cette fonction est Lipschitzienne, il suffit de calculer ses dérivées là où elles sont définies et de s'assurer qu'elles restent bornées. Nous procédons de même pour la fonction  $H(a, .)$ . Soient  $a, b \in \mathbb{R}^2$ . On distingue plusieurs cas.

**1.  $Q \geq 0$  et  $R(a, b) \leq 0$  :**

---

<sup>1</sup>Une fonction  $f$  est  $C^1$  par morceaux s'il existe une suite de réels  $\{a_0, a_1, \dots, a_J\}$ ,  $J \in \mathbb{N}$  telle que  $f \in C^1([a_i, a_{i+1}])$ ,  $i = 0 \dots J$ .

**1.a.**  $Q + R(a, b)\eta_w(a) \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(a, b)}{\partial a} &= \left( \frac{\eta_o(a)}{\eta_o(a) + \eta_w(a)} \right)' (Q + R(a, b)\eta_w(a)) + \\ &\quad \left( \frac{\eta_o(a)}{\eta_o(a) + \eta_w(a)} \right) (\eta_w'(a)R(a, b) + \tau\pi'(a)\eta_w(a)) \geq 0, \\ \frac{\partial H(a, b)}{\partial b} &= 0. \end{aligned}$$

**1.b.**  $Q + R(a, b)\eta_w(a) < 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(a, b)}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\eta_o(b)}{\eta_o(b) + \eta_w(a)} \right) Q + \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\eta_o(b)\eta_w(a)}{\eta_o(b) + \eta_w(a)} \right) R(a, b) + \\ &\quad \left( \frac{\eta_o(b)\eta_w(a)}{\eta_o(b) + \eta_w(a)} \right) \tau\pi'(a) \geq 0, \\ \frac{\partial H(a, b)}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\eta_o(b)}{\eta_o(b) + \eta_w(a)} \right) (Q + R(a, b)\eta_w(a)) - \tau\pi'(b) \frac{\eta_o(b)\eta_w(a)}{\eta_o(b) + \eta_w(a)} \leq 0. \end{aligned}$$

**2.**  $Q \geq 0$  et  $R(a, b) > 0$  :

**2.a.**  $Q - R(a, b)\eta_o(a) \geq 0$  :

Remarquons que

$$F(a, b, Q, R(a, b)) = \frac{\eta_o(a)(Q - R(a, b)\eta_o(a))}{\eta_o(a) + \eta_w(a)} + R(a, b)\eta_o(a).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(a, b)}{\partial a} &= \left( \frac{\eta_o(a)}{\eta_o(a) + \eta_w(a)} \right)' (Q - R(a, b)\eta_o(a)) + \\ &\quad \left( \frac{\eta_w(a)}{\eta_o(a) + \eta_w(a)} \right) \frac{\partial}{\partial a} (R(a, b)\eta_o(a)) \geq 0, \\ \frac{\partial H(a, b)}{\partial b} &= 0. \end{aligned}$$

**2.b.**  $Q - R(a, b)\eta_o(a) < 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(a, b)}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\eta_o(a)}{\eta_o(a) + \eta_w(b)} \right) (Q + R(a, b)\eta_w(b)) + \\ &\quad \tau\pi'(a) \left( \frac{\eta_o(a)}{\eta_o(a) + \eta_w(b)} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Ici, aussi, remarquons que

$$F(a, b, Q, R(a, b)) = \frac{\eta_o(a)(Q - R(a, b)\eta_o(a))}{\eta_o(a) + \eta_w(b)} + R(a, b)\eta_o(a).$$

Ainsi

$$\frac{\partial H(a, b)}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\eta_o(a)}{\eta_o(a) + \eta_w(b)} \right) (Q - R(a, b)\eta_o(a)) + \frac{\partial}{\partial b} (R(a, b)\eta_o(a)) \left( \frac{\eta_w(b)}{\eta_o(a) + \eta_w(b)} \right) \leq 0.$$

Dans tous les cas, nous constatons que la fonction  $H(., .)$  est croissante (resp. décroissante) par rapport à son premier argument (resp. son second argument) et que ses constantes de Lipschitz sont majorées par  $C_\eta(|Q| + |G| + \tau|L_\pi|)$  où  $C_\eta$  est une constante ne dépendant que des fonctions  $\eta_o$  et  $\eta_w$ . En l'absence de capillarité,  $L_\pi = 0$  et les constantes de Lipschitz de  $F$  sont majorées par  $C_\eta(|Q| + |G|)$ . ■

## B.2 Lemmes de convergence

**Lemme B.2.1** *Supposons les Hypothèses IV.1.1 et IV.5.1 vérifiées. Soit  $(\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de discrétisations admissibles du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3 telle que  $\text{size}(\mathcal{D}_m) \rightarrow 0$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$  et telle qu'il existe  $\alpha > 0$  vérifiant  $\text{regul}(\mathcal{M}_m) \leq \frac{\alpha}{d}$ . Soit  $s_m \in \mathcal{X}(\mathcal{D})$  donnée par les équations (IV.9)-(IV.22)-(IV.23)-(IV.42). Nous avons alors*

$$\sum_{n=0}^M \delta \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} m(K|L) \text{diam}(K) |s_L^{n+1} - s_K^{n+1}| \rightarrow 0 \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty. \quad (\text{B.1})$$

Preuve :

Comme la suite  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge vers  $s$  dans  $L^1(\Omega \times (0, T))$ , il existe une fonction  $\tilde{s} \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T])$  telle que, pour un réel  $\nu > 0$  donné, on ait

$$\|s - \tilde{s}\|_{L^1(\Omega \times (0, T))} \leq \nu.$$

Considérons ensuite un entier  $m_0$  vérifiant

•

$$\forall m \geq m_0, \|s_m - s\|_{L^1(\Omega \times (0, T))} \leq \nu,$$

•

$$\forall m \geq m_0, Tdm(\Omega) \text{size}(\mathcal{M}_m) \left\| \overrightarrow{\nabla} \tilde{s} \right\|_{L^\infty(\Omega \times ]0, T])} \leq \nu.$$

Sous les hypothèses du lemme B.2.1, nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^M \delta \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} m(K|L) \text{diam}(K) |s_L^n - s_K^n| \leq \\ & \sum_{n=0}^M \delta \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} m(K|L) \text{diam}(K) \left( |s_L^n - \tilde{s}_L^n| + |\tilde{s}_L^n - \tilde{s}_K^n| + |\tilde{s}_K^n - s_K^n| \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où

$$\tilde{s}_K^n = \frac{1}{\delta t m(K)} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_K \tilde{s}(x, t) dx dt.$$

Or, compte tenu des propriétés du maillage  $\mathcal{M}_m$ , nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} |\tilde{s}_K^n - s_K^n| \sum_{L \in N(K)} m(K|L) \text{diam}(K) \leq \\ & \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \alpha m(K) |\tilde{s}_K^n - s_K^n|. \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $m \geq m_0$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \alpha m(K) |\tilde{s}_K^n - s_K^n| \leq \\ & \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \alpha m(K) \left( |\tilde{s}_K^n - \bar{s}_K^n| + |\bar{s}_K^n - s_K^n| \right) \leq \\ & \alpha \left( \|\tilde{s} - s\|_{L^1(\Omega \times (0, T))} + \|s - s_m\|_{L^1(\Omega \times (0, T))} \right) \leq \\ & 2\alpha\nu \end{aligned}$$

où

$$\bar{s}_K^n = \frac{1}{\delta t m(K)} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_K s(x, t) dx dt.$$

De la même façon, nous montrons que

$$\sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} m(K|L) \text{diam}(K) |s_L^n - \tilde{s}_L^n| \leq 2\alpha\nu.$$

Concernant le second terme dans le membre de droite de (B.2), nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} m(K|L) \text{diam}(K) |\tilde{s}_L^n - \tilde{s}_K^n| \leq \\ & \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} d_{K|L} m(K|L) \text{size}(\mathcal{M}_m) \left\| \vec{\nabla} \tilde{s} \right\|_{L^\infty(\Omega \times ]0, T])} \leq \\ & T \text{size}(\mathcal{M}_m) dm(\Omega) \left\| \vec{\nabla} \tilde{s} \right\|_{L^\infty(\Omega \times ]0, T])} \end{aligned}$$

et donc, finalement pour tout  $m \geq m_0$ ,

$$\sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} m(K|L) \text{diam}(K) |s_L^n - s_K^n| \leq (4\alpha + 1)\nu.$$

D'où (B.1). ■

**Lemme B.2.2** *Sous l'hypothèse H1-1, soit  $(\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , une suite de discrétisations admissibles du domaine  $\Omega \times [0, T]$  au sens de la Définition IV.2.3. Soit  $v_{\mathcal{D}_m} \in \mathcal{X}(\mathcal{D}_m)$  telle que*

- *il existe  $C_{25} \geq 0$  avec, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $K \in \mathcal{T}_m$  et  $n \in \{0 \dots M_m\}$ ,*

$$|v_K^{n+1}| \leq C_{25},$$

- *il existe  $C_{26} \geq 0$  telle que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,*

$$|v_{\mathcal{D}_m}|_{1, \mathcal{D}_m} \leq C_{26},$$

- *$v_{\mathcal{D}_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} v$  dans  $L^q(\Omega \times ]0, T[)$ ,  $1 \leq q < \infty$  avec  $v \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$ .*

Soit  $\psi \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T])$ . Considérons la fonction  $w_{\mathcal{D}_m}$  définie par

$$w_{\mathcal{D}_m}(x, t) = \begin{cases} \frac{\tau_{K|L}}{m(D_{K|L})}(v_K^{n+1} - v_L^{n+1})(\psi_K^n - \psi_L^n), & \forall (x, t) \in D_{K|L} \times ]n\delta, (n+1)\delta], \\ 0, & \forall (x, t) \in D_\sigma \times ]n\delta, (n+1)\delta], \sigma \subset \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, pour tout  $\xi \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ , nous avons

$$\int_0^T \int_\Omega \xi(x) w_{\mathcal{D}_m}(x, t) dx dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_\Omega \xi(x) w(x, t) dx dt$$

avec

$$w(x, t) = -\vec{\nabla} v(x, t) \cdot \vec{\nabla} \psi(x, t).$$

Preuve :

Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $\xi \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ . (Au cours de cette démonstration  $\mathcal{D}$  désignera  $\mathcal{D}_m$ .) Posons

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{D}} &= \int_0^T \int_\Omega \xi(x) w_{\mathcal{D}}(x, t) dx dt \\ &= \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \frac{1}{m(D_{K|L})} \left( \int_{D_{K|L}} \xi(x) dx \right) \tau_{K|L} (v_K^{n+1} - v_L^{n+1})(\psi_K^n - \psi_L^n), \\ B_{\mathcal{D}} &= \int_0^T \int_\Omega v_{\mathcal{D}}(x, t) \operatorname{div}(\xi(x) \vec{\nabla} \psi(x, t)) dx dt \\ &= \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \left( \frac{1}{\delta t} \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \int_{K|L} \xi(x) \vec{\nabla} \psi(x, t) \cdot \vec{n}_{K,L} d\gamma dt \right) (v_K^{n+1} - v_L^{n+1}). \end{aligned}$$

Remarquons, tout d'abord, que

$$\left| \frac{\psi_K^n - \psi_L^n}{d_{K|L} m(D_{K|L})} \int_{D_{K|L}} \xi(x) dx - \frac{1}{\delta t m(K|L)} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K|L} \xi(x) \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}_{K,L} d\gamma(x) dt \right| \leq \left( \|\xi\|_\infty \|\nabla^2 \psi\|_\infty + \left\| \vec{\nabla} \xi \right\|_\infty \left\| \vec{\nabla} \psi \right\|_\infty \right) \text{size}(\mathcal{M})$$

où  $\nabla^2 \psi$  désigne la matrice hessienne de  $\psi$ . Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la semi-norme  $L^2(0, T, H^1(\Omega))$  de la fonction  $v_{\mathcal{D}}$ , nous obtenons

$$|A_{\mathcal{D}} - B_{\mathcal{D}}| \leq \sqrt{T d m(\Omega)} C_{26} \left( \|\xi\|_\infty \|\nabla^2 \psi\|_\infty + \left\| \vec{\nabla} \xi \right\|_\infty \left\| \vec{\nabla} \psi \right\|_\infty \right) \text{size}(\mathcal{M}).$$

D'où

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |A_{\mathcal{D}} - B_{\mathcal{D}}| = 0.$$

Par ailleurs les fonctions  $\xi$  et  $\psi$  étant suffisamment régulières et comme  $v_{\mathcal{D}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} v$  dans  $L^1(\Omega \times ]0, T[)$ , nous avons

$$B_{\mathcal{D}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} v(x, t) \text{div}(\xi(x) \vec{\nabla} \psi(x, t)) dx dt.$$

Mais, comme  $v \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$  et que  $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ , nous pouvons réécrire cette dernière intégrale sous la forme

$$\int_0^T \int_{\Omega} v(x, t) \text{div}(\xi(x) \vec{\nabla} \psi(x, t)) dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \xi(x) \vec{\nabla} v(x, t) \cdot \vec{\nabla} \psi(x, t) dx dt,$$

d'où le résultat. ■

**Lemme B.2.3** *Sous les hypothèses du Lemme B.2.2, soit  $h \in L^2(\Omega)$ . Alors*

$$\int_0^T \int_{\Omega} h(x) w_{\mathcal{D}_m}(x, t) dx dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} h(x) w(x, t) dx dt.$$

Preuve :

Soient  $\epsilon > 0$  et  $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$  tels que

$$\|h - \xi\|_\infty \leq \epsilon.$$

Nous avons

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} h(x) (w_{\mathcal{D}_m}(x, t) - w(x, t)) dx dt \right| \leq \int_0^T \int_{\Omega} |h(x) - \xi(x)| |w_{\mathcal{D}_m}(x, t)| dx dt + \left| \int_0^T \int_{\Omega} \xi(x) (w_{\mathcal{D}_m}(x, t) - w(x, t)) dx dt \right| + \int_0^T \int_{\Omega} |h(x) - \xi(x)| |w(x, t)| dx dt.$$

Remarquons que

$$\int_0^T \int_{\Omega} |w_{\mathcal{D}_m}(x, t)| dx dt = \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} |v_K^{n+1} - v_L^{n+1}| |\psi_K^n - \psi_L^n| \leq C_{26} \sqrt{T dm(\Omega)} \left\| \vec{\nabla} \psi \right\|_{\infty} \text{size}(\mathcal{M}_m).$$

Donc  $w_{\mathcal{D}_m} \in L^1(\Omega \times ]0, T[)$ . De même  $w \in L^1(\Omega \times ]0, T[)$  du fait de la régularité des fonctions  $v$  et  $\psi$ . Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |h(x) - \xi(x)| |w_{\mathcal{D}_m}(x, t)| dx dt &\leq \epsilon \|w_{\mathcal{D}_m}\|_{L^1(\Omega \times ]0, T[)}, \\ \int_0^T \int_{\Omega} |h(x) - \xi(x)| |w(x, t)| dx dt &\leq \epsilon \|w\|_{L^1(\Omega \times ]0, T[)}. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le Lemme B.2.2, nous montrons qu'il existe un entier  $m_0$  tel que pour tout  $m \geq m_0$ ,

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \xi(x) (w_{\mathcal{D}_m}(x, t) - w(x, t)) dx dt \right| \leq \epsilon.$$

En regroupant les inégalités précédentes, nous obtenons finalement, pour tout  $m \geq m_0$ ,

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} h(x) (w_{\mathcal{D}_m}(x, t) - w(x, t)) dx dt \right| \leq \epsilon (\|w\|_{L^1(\Omega \times ]0, T[)} + \|w_{\mathcal{D}_m}\|_{L^1(\Omega \times ]0, T[)} + 1).$$

Donc

$$\int_0^T \int_{\Omega} h(x) w_{\mathcal{D}_m}(x, t) dx dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} h(x) w(x, t) dx dt,$$

CQFD. ■



# Pressions capillaires et changement de type de roche

---

## C.1 Unicité de la solution

**Proposition C.1.1** *Sous les hypothèses V.1.1, soit  $s$  une solution aux équations (V.5)–(V.9) presque partout sur  $\Omega_i \times ]0, T[$ ,  $i \in \{1, 2\}$  avec*

- $$s_i \in C^0(\overline{\Omega}_i \times [0, T]), \tag{C.1}$$

- $$\varphi_i(s_i) \in C^{1,0}(\overline{\Omega}_i \times [0, T]), \tag{C.2}$$

- $$\frac{\partial s_i}{\partial t} \in L^2(\Omega_i \times ]0, T[), \tag{C.3}$$

- $$\Delta \varphi_i(s_i) \in L^2(\Omega_i \times ]0, T[). \tag{C.4}$$

*Sous ces hypothèses,  $s$  est unique.*

*Preuve :*

Cette preuve est une adaptation de la preuve d'unicité établie dans (Bertsch et al. 2003). On se place dans le cas  $d = 1$  avec  $\Omega_1 = ]-L, 0[$  et  $\Omega_2 = ]0, L[$ . (La preuve est identique pour les cas  $d = 2, 3$ .) Soient  $u$  et  $v$  deux solutions vérifiant les équations (V.5)–(V.9) presque partout sur  $\Omega_i \times ]0, T[$ ,  $i \in \{1, 2\}$  et les conditions (C.1)–(C.2)–(C.3)–(C.4). Pour  $0 \leq \delta \leq L$ , considérons les fonctions

- $\xi(x) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$  paire avec

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\delta}{2}, \\ 1 & \text{si } x \geq \delta, \end{cases}$$

et  $\xi'(x) \geq 0$  sur  $[\frac{\delta}{2}, \delta]$ ,

•

$$S_\epsilon(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0, \\ \frac{u}{\sqrt{u^2 + \epsilon^2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que la fonction  $S_\epsilon(u) \rightarrow \mathcal{X}_{u>0}(u)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  avec

$$\mathcal{X}_{u>0}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , nous multiplions l'équation (V.5) par  $\xi(x)S_\epsilon(\varphi_i(u_i) - \varphi_i(v_i))$  nous intégrons l'égalité obtenue sur  $\Omega_i \times ]0, T[$  et nous ajoutons les deux égalités ce qui nous donne

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\Omega_i} \phi_i \frac{\partial(u_i - v_i)}{\partial t} \xi S_\epsilon(\varphi_i(u_i) - \varphi_i(v_i)) dx dt - \\ & \int_0^T \int_{\Omega_i} \Delta(\varphi_i(u_i) - \varphi_i(v_i)) \xi S_\epsilon(\varphi_i(u_i) - \varphi_i(v_i)) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Une intégration par partie du deuxième terme intégral nous donne

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\Omega_i} \phi_i \frac{\partial(u_i - v_i)}{\partial t} \xi S_\epsilon(\varphi_i(u_i) - \varphi_i(v_i)) dx dt + \\ & \int_0^T \int_{\Omega_i} \frac{\partial(\varphi_i(u_i) - \varphi_i(v_i))}{\partial x} \frac{\partial(\xi S_\epsilon(\varphi_i(u_i) - \varphi_i(v_i)))}{\partial x} dx dt = 0. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \frac{\partial(\varphi_i(u_i) - \varphi_i(v_i))}{\partial x} \frac{\partial S_\epsilon(\varphi_i(u_i) - \varphi_i(v_i))}{\partial x} \xi dx dt \geq 0,$$

il nous reste

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\Omega_i} \phi_i \frac{\partial(u_i - v_i)}{\partial t} \xi S_\epsilon(\varphi_i(u_i) - \varphi_i(v_i)) dx dt + \\ & \int_0^T \int_{-\frac{\delta}{2}}^{-\frac{\delta}{2}} \frac{\partial(\varphi_1(u_1) - \varphi_1(v_1))}{\partial x} S_\epsilon(\varphi_1(u_1) - \varphi_1(v_1)) \xi' dx dt + \\ & \int_0^T \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \frac{\partial(\varphi_2(u_2) - \varphi_2(v_2))}{\partial x} S_\epsilon(\varphi_2(u_2) - \varphi_2(v_2)) \xi' dx dt \leq 0. \end{aligned}$$

Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  le théorème de convergence dominée donne

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\Omega_i} \phi_i \frac{\partial(u_i - v_i)}{\partial t} \xi \mathcal{X}_{\varphi_i(u_i) > \varphi_i(v_i)} dx dt + \\ & \int_0^T \int_{-\delta}^{-\frac{\delta}{2}} \frac{\partial(\varphi_1(u_1) - \varphi_1(v_1))}{\partial x} \mathcal{X}_{\varphi_1(u_1) > \varphi_1(v_1)} \xi' dx dt + \\ & \int_0^T \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \frac{\partial(\varphi_2(u_2) - \varphi_2(v_2))}{\partial x} \mathcal{X}_{\varphi_2(u_2) > \varphi_2(v_2)} \xi' dx dt \leq 0. \end{aligned}$$

Posons, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} I_{-\delta}(t) &= \int_{-\delta}^{-\frac{\delta}{2}} \frac{\partial(\varphi_1(u_1(\cdot, t)) - \varphi_1(v_1(\cdot, t)))}{\partial x} \mathcal{X}_{\varphi_1(u_1) > \varphi_1(v_1)} (\varphi_1(u_1(\cdot, t)) - \varphi_1(v_1(\cdot, t))) \xi' dx, \\ I_{\delta}(t) &= \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \frac{\partial(\varphi_2(u_2(\cdot, t)) - \varphi_2(v_2(\cdot, t)))}{\partial x} \mathcal{X}_{\varphi_2(u_2) > \varphi_2(v_2)} (\varphi_2(u_2(\cdot, t)) - \varphi_2(v_2(\cdot, t))) \xi' dx. \end{aligned}$$

Soient  $\bar{t} \in [0, T]$  et, pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\bar{u}_i = u_i(0, \bar{t})$  et  $\bar{v}_i = v_i(0, \bar{t})$ . Deux cas sont à envisager. Si  $\bar{u}_2 \neq \bar{v}_2$ , par exemple  $\bar{u}_2 > \bar{v}_2$  alors comme  $\hat{\pi}_2(\bar{u}_2) = \hat{\pi}_1(\bar{u}_1)$  et  $\hat{\pi}_2(\bar{v}_2) = \hat{\pi}_1(\bar{v}_1)$  nous avons  $\bar{u}_1 > \bar{v}_1$ . Donc, pour  $\delta$  suffisamment petit, nous avons  $\varphi_1(u_1) > \varphi_1(v_1)$  sur  $[-\delta, -\frac{\delta}{2}]$  et  $\varphi_2(u_2) > \varphi_2(v_2)$  sur  $[\frac{\delta}{2}, \delta]$ . Ainsi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I_{-\delta} + I_{\delta} = \frac{\partial(\varphi_1(u_1) - \varphi_1(v_1))}{\partial x}(0, \bar{t}) - \frac{\partial(\varphi_2(u_2) - \varphi_2(v_2))}{\partial x}(0, \bar{t}) = 0$$

par continuité du flux en  $x = 0$ . Si  $\bar{u}_2 = \bar{v}_2$ , là il faut distinguer trois sous-cas. Tout d'abord supposons que  $\frac{\partial\varphi_2(u_2)}{\partial x}(0, \bar{t}) = \frac{\partial\varphi_2(v_2)}{\partial x}(0, \bar{t})$ . Alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I_{\delta} = 0$$

et par continuité du flux en  $x = 0$  nous avons aussi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I_{-\delta} = 0.$$

Si  $\frac{\partial\varphi_2(u_2)}{\partial x}(0, \bar{t}) > \frac{\partial\varphi_2(v_2)}{\partial x}(0, \bar{t})$ , comme  $\varphi(\bar{u}_2) = \varphi(\bar{v}_2)$  alors pour  $\delta$  suffisamment petit nous avons  $\varphi_2(u_2) > \varphi_2(v_2)$  sur  $[\frac{\delta}{2}, \delta]$ . De l'autre côté de l'interface nous avons également  $\frac{\partial\varphi_1(u_1)}{\partial x}(0, \bar{t}) > \frac{\partial\varphi_1(v_1)}{\partial x}(0, \bar{t})$ , donc

$$\begin{aligned} I_{-\delta} &\geq \int_{-\delta}^{-\frac{\delta}{2}} \frac{\partial(\varphi_1(u_1) - \varphi_1(v_1))}{\partial x} \xi' dx, \\ I_{\delta} &= \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \frac{\partial(\varphi_2(u_2) - \varphi_2(v_2))}{\partial x} \xi' dx, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} I_{-\delta} + I_{\delta} \geq 0.$$

Inversement si  $\frac{\partial \varphi_2(u_2)}{\partial x}(0, \bar{t}) < \frac{\partial \varphi_2(v_2)}{\partial x}(0, \bar{t})$  alors  $I_\delta = 0$ . De l'autre côté de l'interface nous avons également  $\frac{\partial \varphi_1(u_1)}{\partial x}(0, \bar{t}) < \frac{\partial \varphi_1(v_1)}{\partial x}(0, \bar{t})$ , donc à nouveau pour  $\delta$  suffisamment petit nous déduisons que  $\frac{\partial \varphi_1(u_1)}{\partial x}(x, \bar{t}) < \frac{\partial \varphi_1(v_1)}{\partial x}(x, \bar{t})$  sur  $[-\delta, -\frac{\delta}{2}]$ . De plus rappelons que  $\xi'(x) \leq 0$  pour  $x \leq 0$  donc finalement  $I_{-\delta} \geq 0$ . De cette discussion, il ressort que lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , par le théorème de convergence dominée nous avons

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\Omega_i} \phi_i \frac{\partial(u_i - v_i)}{\partial t} \chi_{\varphi_i(u_i) > \varphi_i(v_i)} dx dt = \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{\Omega_i} \phi_i \frac{\partial |u_i - v_i|_+}{\partial t} dx dt \leq 0.$$

Maintenant, supposons que les données initiales soient telles que  $u_i(\cdot, 0) \leq v_i(\cdot, 0)$  sur  $\Omega_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Alors  $u_i(\cdot, T) \leq v_i(\cdot, T)$  sur  $\Omega_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . De ce principe de comparaison découle l'unicité d'une solution aux équations (V.5)–(V.9) et vérifiant les conditions (C.1)–(C.2)–(C.3)–(C.4). ■

# Bibliographie

- L. Agelas, I. Faille, & S. Wolf. Calcul de la température dans le logiciel visco3d : mise en oeuvre du o-schéma. Rapport Technique 56168, Institut Français du Pétrole (2001).
- H. W. Alt & E. di Benedetto. *Nonsteady flow of water and oil through inhomogeneous porous media*, pages 335–392. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (1985).
- H. W. Alt & S. Luckhaus. *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, pages 311–341. Math. Z. (1983).
- S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, & V. N. Monakhov. *Boundary value problems in the mechanics of nonuniform fluids*. Studies in Mathematics and its Applications, North Holland, Amsterdam (1990).
- T. Arbogast, M. F. Wheeler, & N. Y. Zhang. A nonlinear mixed finite element method for a degenerate parabolic equation arising in flow in porous media. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33:1669–1687 (1996).
- L.F. Athy. Density, porosity and compaction of sedimentary rocks. *A.A.P.G. Bull.*, 14(1):1–24 (1930).
- K. Aziz & A. Settari. *Petroleum Reservoir Simulation*. Elsevier Applied Science Publishers, London (1979).
- J. Bear. *Dynamic of fluids in porous media*. Dover publications, New York (1972).
- M. Bertsch, R. Dal Passo, & C.J. van Duijn. Analysis of oil trapping in porous media flow. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 35(1):245–267 (2003).
- F. Bessis. Some remarks on the study of subsidence of sedimentary basins. *Marine and Petroleum Geology*, 3:37–63 (1986).
- M.A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Applied Physics*, 12:155–164 (1941).
- M. Boutéca & J-P. Sarda. Etat de l’art en fracturation hydraulique. *Oil & Gas Science and Technology–Rev. IFP*, 42(1):39–75 (1987).
- V. Bouvier. *Modélisation bidimensionnelle des phénomènes de transport dans les bassins sédimentaires par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (1989).

- Y. Brenier & J. Jaffré. Upstream differencing for multiphase flow in reservoir simulation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(3):685–696 (1991).
- J. Carrillo. Entropy solutions for nonlinear degenerate problems. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 147:269–361 (1999).
- G. Chavent & J. Jaffré. *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation*. Studies in Mathematics and its Applications, North Holland, Amsterdam (1986).
- Z. Chen. Degenerate two phase incompressible flow: existence, uniqueness and regularity of a weak solution. *J. Differ. Equations*, 171:203–232 (2001).
- Z. Chen & R. Ewing. Mathematical analysis for reservoir models. *SIAM J. Math. Anal.*, 30:431–453 (1999).
- H. Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris (1856).
- G. de Marsily. *Hydrogéologie quantitative*. Masson (1981).
- K. Deimling. *Nonlinear functional analysis*. Springer Verlag, New York (1980).
- Projet Demeter. Projet demeter backstripping 1d. Rapport Technique 40299, Institut Français du Pétrole (1993).
- G. Enchéry. A finite volume scheme with variable pécelet number for a nonlinear convection-diffusion equation arising in petroleum engineering (soumis).
- G. Enchéry, R. Eymard, R. Masson, & S. Wolf. Mathematical and numerical study of an industrial scheme for two-phase flows in porous media under gravity. *Comput. Methods Appl. Math.*, 2:325–353 (2002).
- G. Enchéry, R. Eymard, & A. Michel. Numerical approximation of a two-phase flow problem in a porous medium with discontinuous capillary forces (soumis).
- R. E. Ewing & R. F. Heinemann. Mixed finite element approximation of phase velocities in compositionnal reservoir simulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 47:161–176 (1984).
- R. E. Ewing & M. F. Wheeler. Galerkin methods for miscible displacement problems with point sources and sinks—unit mobility ratio case. In *Mathematical methods in energy research*, pages 40–58. SIAM, Philadelphia (1984).
- R. Eymard, T. Gallouët, & R. Herbin. *The finite volume method*. Ph. Ciarlet J.L. Lions eds, North Holland (2000).
- R. Eymard, T. Gallouët, D. Hilhorst, & Y. Naït Slimane. Finite volumes and nonlinear diffusion equations. *M2AN*, 32(6):747–761 (1998).
- R. Eymard, R. Herbin, & A. Michel. Mathematical study of a petroleum-engineering scheme. *ESAIM: M2AN*, 37(6):937–972 (2003).

- I. Faille. *Modélisation bidimensionnelle de la genèse et la migration des hydrocarbures dans un bassin sédimentaire*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I (1992).
- X. Feng. On existence and uniqueness for a coupled system modelling miscible displacements in porous media. *J. Math. Anal. Appl.*, 10:441–469 (1995).
- P. A. Forsyth. A control volume finite element approach to napl groundwater contamination. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 12:1029–1057 (1989a).
- P. A. Forsyth. A control volume finite element method for local mesh refinements. *SPE*, 18415:85–96 (1989b).
- O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, chapitre 2, pages 97–130. Mathématiques et Applications, Springer-Verlag (1993).
- D. Kroener & S. Luckhaus. Flow of oil and water in a porous medium. *J. Differential Equations*, 55:276–288 (1984).
- V. Lamoureux-Var, S. Wolf, F. Schneider, & A. Prinzhofer. Modélisation de la diffusion du gaz dans les systèmes pétroliers : étude bibliographique et implémentation. Rapport Technique 44763, Institut Français du Pétrole (1998).
- D. Langlo & M. Espedal. Heterogeneous reservoir models, two-phase immiscible flow in 2d, in mathematical modeling in water resources,. In T.F. Russell, R.E. Ewing, C.A. Brebbia, & W.G. Gray G.F. Pinder, editors, *Computational Methods in Water Resources*, volume 2, chapitre 9, pages 71–80. Elsevier Applied Science, London (1992).
- C. Marle. *Cours de Production Tome IV - Les écoulements polyphasiques en milieu poreux*. Publications de l'Institut Français du Pétrole (1972).
- A. Michel. *Convergence de schémas volumes finis pour des problèmes de convection diffusion non linéaires*. Thèse de doctorat, Université de Provence (2001).
- K. Nakayama. *Two dimensional basin analysis for petroleum exploration*. Thèse de doctorat, University of South Carolina (1987).
- D. W. Peaceman. *Fundamentals of numerical reservoir simulation*. Elsevier Scientific Publishing Company, The Netherlands (1977).
- R. Perrier & J. Quiblier. Thickness changes in sedimentary layers during compaction history; methods for quantitative evaluation. *AAPG Bull.*, 58(3):507–520 (1974).
- A. Pfertzel. *Sur quelques schémas numériques pour la résolution des écoulements multiphasiques en milieu poreux*. Thèse de doctorat, Université Paris 6 (1987).
- P. H. Sammon. An analysis of upstream differencing. *SPE Reservoir Engrg.*, 3:1053–1056 (1988).

- F. Schneider. Modèle de compaction élastoplastique et viscoplastique pour simulateur de bassins sédimentaires. Rapport technique, IFP (1993).
- F. Schneider, M. Boutéca, & J-P. Sarda. Hydraulic fracturing at sedimentary basin scale. *Oil & Gas Science and Technology-Rev. IFP*, 54(6):797–806 (1999).
- F. Schneider, J.L. Potdevin, S. Wolf, & I. Faille. Modèle de compaction élastoplastique et viscoplastique pour simulateur de bassins sédimentaires. Rapport Technique 40811, Institut Français du Pétrole (1993).
- F. Schneider & S. Wolf. Modélisation physique et numérique de la fracturation hydraulique dans un modèle de bassin. Rapport Technique 43518, Institut Français du Pétrole (1997).
- F. Schneider, S. Wolf, I. Faille, & D. Pot. A 3d basin model for hydrocarbon potential evaluation: Application to congo offshore. *Oil & Gas Science and Technology-Rev. IFP*, 55:3–13 (2000a).
- F. Schneider, S. Wolf, I. Faille, & D. Pot. A 3d basin model for hydrocarbon potential evaluation: Application to congo offshore. *Oil & Gas Science and Technology-Rev. IFP*, 55(1):3–13 (2000b).
- T. T. Schowalter. Mechanics of secondary hydrocarbon migration and entrapment. *AAPG Bull.*, 63(5) (1979).
- N. Seguin & J. Vovelle. Analysis and approximation of a scalar conservation law with a flux function with discontinuous coefficient. *M3AS*, 13(2) (2003).
- Projet Temis. *GEOM\_VISCO3D v93b*. Institut Français du Pétrole (2002).
- K. Terzaghi. Die verechnung der durchlässigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungerscheinungen. *Szgeber Akad. Wiss. Vien, Mathnaturwiss. Klasse Iia*, 132(3–4):125–138 (1923).
- Groupe Themis. Modèle themis. Rapport technique, IFP (1986).
- B. Tissot. Premières données sur les mécanismes et la cinétique de la formation du pétrole dans les sédiments. simulation d'un schéma réactionnel sur ordinateur. *Oil & Gas Science and Technology-Rev. IFP*, 24(4):470–501 (1969).
- B. Tissot & J. Espitalié. L'évolution thermique de la matière organique des sédiments : applications d'une simulation mathématique. *Oil & Gas Science and Technology-Rev. IFP*, 30(5) (1975).
- P. Ungerer, F. Bessis, P.Y. Chenet, B. Durand, E. Nogaret, A. Chiarelli, J.L. Oudin, & J.F. Perrin. Geological models and geochemical models in oil exploration ; principles and practical examples. *Am. Assoc. Pet. Geol.*, 35:53–78 (1984).

- P. Ungerer, J. Burrus, B. Doligez, P.Y. Chénet, & F. Bessis. Basin evaluation by integrated two-dimensional modeling of heat transfer, fluid flow, hydrocarbon, and migration. *The American Association of Petroleum Geologists Bulletin*, 74:309–335 (1990).
- P. Ungerer, B. Doligez, P.Y. Chénet, J. Burrus, F. Bessis E. Lafargue, G. Giroir, O. Heum, & S. Eggen. A 2d model of basin scale petroleum migration by two-phase fluid flow. application to some case studies. In B. Doligez, editor, *Migration of hydrocarbons in sedimentary basins*, pages 415–456. Technip, Paris (1987).
- P. Ungerer & R. Pelet. Extrapolation of the kinetics of oil and gaz formation from laboratory experiments to sedimentary basins. *Nature*, 327(6117):52–54 (1987).
- C.J. van Duijn & M.J. de Neef. Self-similar profiles for capillary diffusion driven flow in heterogeneous porous media. *Advances in water resources*, 21:451–461 (1998).
- C.J. van Duijn, J. Molenaar, & M.J. de Neef. The effect of capillary forces on immiscible two-phase flow in heterogeneous porous media. *Transport in Porous Media* (1995).
- M. H. Vignal. Convergence of a finite volume scheme for an elliptic-hyperbolic system. *RAIRO Modelisation Math. Anal. Numer.*, 30:841–872 (1996).
- M. Wangen, B. Antonsen, B. Fossum, & L.K. Alm. A model for compaction of sedimentary basins. *Appl. Math. Modelling*, 14 (1990).
- D.W. Waples. Thermal models for oil generation. *Advances in petroleum geochemistry*, 1:7–67 (1984).
- S. Wolf. Principes physiques et numériques de temiscomp triphasique. Rapport technique, Institut Français du pétrole (1995).
- W. Woodside & J.H. Messmer. Thermal conductivity of porous media, i : unconsolidated sands. *J. Applied Physics*, 32:1688–1699 (1961).
- M.A. Yüklér, C. Cornford, & D.J. Welte. One-dimensional model to simulate geologic, hydrodynamic and thermodynamic development of a sedimentary basin. *Geol. Rundschau*, 67:960–979 (1978).
- M.A. Yüklér & D.H. Welte. Petroleum origin and accumulation in basin evolution. a quantitative model. *A.A.P.G. Bull*, 65:1387–1396 (1981).



# Nomenclature

## Notations maillage

$(u_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}$	Approximation constante par morceaux de la variable $u$ sur le maillage $\mathcal{T}$ pour l'intervalle de temps $]t_n, t_{n+1}]$
$\mathcal{T}$	Ensemble des volumes du maillage
$\delta(u)_{K,L}$	Différence $u_L - u_K$
$\delta t$	Pas de temps
$\mathcal{D}$	Discrétisation volumes finis admissible
$\mathcal{E}$	Ensemble des faces du maillage
$\mathcal{E}_K$	Ensemble des faces de la maille $K$
$\mathcal{E}_{\text{ext}}$	Ensemble des faces situées sur le bord du domaine
$\mathcal{E}_{\text{int}}$	Ensemble des faces situées à l'intérieur du domaine
$\text{diam}(K)$	Diamètre d'une maille $K$
$\text{regul}(\mathcal{M})$	Régularité du maillage
$\text{size}(\mathcal{M})$	Diamètre maximal des mailles du maillage
$\vec{n}_\sigma$	Normale unitaire extérieure au domaine pour une face $\sigma$ située sur le bord
$\vec{n}_{K,L}$	Normale à $K L$ , unitaire et orientée de $K$ vers $L$
$\mathcal{P}$	Ensemble des points du maillage
$s_\sigma$	Saturation d'huile imposée sur une face $\sigma \subset \partial\Omega$
$s_{K,\sigma}$	Saturation sur l'interface $\sigma$ pour la maille $K$ dans le schéma pression capillaire et changement de type de roche
$\sigma$	Une face
$\mathcal{M}$	Maillage

---

$\tau_{K L}$	Transmissivité face $K L$
$\tau_{K,\sigma}$	Transmissivité d'une maille $K$ et d'une face $\sigma$ situées sur le bord
$A_K$	Aire de base d'une cellule $K$
$D_\sigma$	Cône de sommet $x_K$ et de base $\sigma$ , $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$
$D_{K L}$	Réunion des deux cônes de sommet $x_K$ et $x_L$ et ayant pour base commune l'interface $K L$
$d_{K L}$	Distance entre les centres des cellules $K$ et $L$
$d_{K,\sigma}$	Distance entre la cellule $K$ et la face $\sigma$
$h_{sed,K}$	Hauteur solide cellule $K$
$K L$	Une face intérieure située entre les mailles $K$ et $L$
$K$	Une maille
$M$	Discrétisation en temps
$m(\sigma)$	Mesure (aire) face $\sigma$
$m(K)$	Mesure (Volume) maille $K$
$N(K)$	Ensemble des mailles voisines de la maille $K$
$p_{\alpha,\sigma}$	Pression phase $\alpha$ imposée sur une face $\sigma \subset \partial\Omega$
$t_n$	Instant où est calculé une solution discrète
$x_\sigma$	Intersection d'une face $\sigma \subset \partial\Omega$ et de sa perpendiculaire passant par le point $x_K$ , $K$ volume voisin de $\sigma$
$x_K$	Centre maille $K$
$z_K$	Cote du centre d'une cellule $K$

### Grandeurs Physiques

$\alpha$	Proportion composé léger généré par craquage primaire
$\alpha(\alpha, \sigma)$	Composante viscoplastique de la loi de compaction
$\alpha_{o,\gamma}$	Compressibilité composé $\gamma$
$\beta(\phi, \sigma)$	Composante élastoplastique de la loi de compaction
$\eta_\alpha$	Mobilité phase $\alpha$
$\Gamma$	Interface de changement de roche

$\gamma_{w,o}$	Tension superficielle eau-huile
$\gamma_{sed,o}$	Tension superficielle solide-huile
$\gamma_{sed,w}$	Tension superficielle solide-eau
$\lambda_x$	Composante selon $(0x)$ du tenseur $\overline{\overline{\lambda}}_b$
$\lambda_y$	Composante selon $(0y)$ du tenseur $\overline{\overline{\lambda}}_b$
$\lambda_z$	Composante selon $(0z)$ du tenseur $\overline{\overline{\lambda}}_b$
$\mu_b$	Paramètre composante viscoplastique
$\mu_{o,\gamma,a}$	Paramètre viscosité composé $\gamma$ (loi de Bingham)
$\mu_{o,\gamma,b}$	Paramètre viscosité composé $\gamma$ (loi de Bingham)
$\mu_{o,h}$	Viscosité composé lourd
$\mu_{o,l}$	Viscosité composé léger
$\mu_o$	Viscosité de l'huile
$\mu_w$	Viscosité de l'eau
$\nu$	Coefficient de compression isotherme
$\overline{\overline{\lambda}}_b$	Conductivité thermique de la roche
$\overline{\overline{\Upsilon}}$	Tenseur perméabilité intrinsèque
$\Omega$	Le domaine d'étude
$\Omega_i$	Sous-domaine de $\Omega$ correspondant à un type de roche
$\overrightarrow{\nabla}$	Gradient dans repère solide
$\overrightarrow{g}$	Vecteur gravité
$\overrightarrow{u}_o$	Vitesse de filtration huile
$\overrightarrow{u}_w$	Vitesse de filtration eau
$\overrightarrow{v}_o$	Vitesse huile
$\overrightarrow{v}_w$	Vitesse eau
$\overrightarrow{v}_{sed}$	Vitesse solide
$\partial\Omega$	Frontière de $\Omega$
$\Upsilon$	Facteur intervenant dans la définition de $\overline{\overline{\Upsilon}}$

---

$\Upsilon_a$	Composante tenseur $\overline{\Upsilon}$ dans la direction orthogonale à la stratification
$\Upsilon_s$	Composante tenseur $\overline{\Upsilon}$ dans la direction de la stratification
$\phi$	Porosité du milieu
$\phi^{min}$	Paramètre composante viscoplastique
$\phi_a$	Paramètre composante élastoplastique
$\phi_b$	Paramètre composante élastoplastique
$\phi_r$	Paramètre composante élastoplastique
$\pi$	Pression capillaire (écoulement diphasique)
$\pi_{o,w}$	Pression capillaire eau-huile
$\rho c_b$	Capacité calorifique du milieu
$\rho_\alpha c_\alpha$	Capacité calorifique de la phase $\alpha$
$\rho_{o,\gamma}^*$	Paramètre densité d'un composé $\gamma$
$\rho_{o,h}$	Densité composé lourd
$\rho_{o,l}$	Densité composé léger
$\rho_o$	Densité huile
$\rho_w$	Densité eau
$\rho_{sed}$	Densité solide
$s$	Saturation d'huile
$s_i$	Saturation critique
$s_r$	Saturation résiduelle
$s_{i,\Gamma}$	Trace fonction $s$ sur $\Gamma$ du côté $\Omega_i$
$\sigma$	Contrainte effective
$\sigma_m$	Contrainte effective maximale
$\sigma_z$	Contrainte verticale
$\theta$	Angle de mouillage
$\tilde{u}$	Notation grandeur $u$ dans repère fully compacted
$\xi$	Cote exprimée en hauteur solide dans le repère fully compacted

$A_i$	Coefficient préexponentiel dans la loi d'Arrhénius
$c$	Concentration massique composé léger
$E_a$	Paramètre composante élastoplastique
$E_b$	Paramètre composante élastoplastique
$E_e$	Paramètre composante élastoplastique
$E_i$	Energie d'activation
$h_{\text{sed}}$	Hauteur solide de sédiment
$h_r$	Hauteur réelle
$k_1$	Vitesse de réaction craquage primaire
$k_2$	Vitesse de réaction craquage secondaire
$kr_\alpha$	Perméabilité relative de la phase $\alpha$ (écoulement diphasique)
$kr_{\alpha,\beta}$	Perméabilité relative entre phases $\alpha$ et $\beta$
$p_\gamma$	Paramètre densité d'un composé $\gamma$
$p_f$	Pression du fluide
$p_o$	Pression de l'huile
$p_w$	Pression de l'eau
$q_{o,c,1}$	Terme source composé léger dû au craquage primaire
$q_{o,c,2}$	Terme source composé léger dû au craquage secondaire
$q_o$	Terme source dû au craquage primaire
$q_{T,o}$	Terme source lié au craquage d'hydrocarbures dans l'équation de la chaleur
$q_{T,\text{sed}}$	Terme source lié au dépôt ou à l'érosion de sédiments dans l'équation de la chaleur
$q_{T,r}$	Terme source lié à la radioactivité dans l'équation de la chaleur
$R$	Constante des gaz parfaits
$r$	Rayon de courbure
$S_{\text{spec}}$	Surface spécifique
$T$	Durée de la simulation
$T$	Température

$u$	Fraction massique de kérogène réactif
$v$	Fraction massique d'huile dans le fluide
$w$	Fraction massique de composé léger produite à partir de composé lourd

# Index

- algorithme
  - de backstripping, 151–157
  - de Newton, 54
- angle de mouillage, 22
- backstripping, 39–40, *voir* algorithme de backstripping
- barrière capillaire, 58–61
- bitume, 24
- catagenèse, 24
- compaction, 21, 38–40
  - élastoplastique, 38
  - élastoviscoplastique, 38
- conditions
  - aux bords, 40–41
  - initiales, 41
- conduction thermique, 36
- convection thermique, 36
- craquage
  - primaire, 24, 26
  - secondaire, 25, 27
- Darcy, *voir* loi de Darcy
  - unité, 30
- degré topologique, 82
- densité
  - eau, 29
  - huile, 29
- diagenèse, 24
- discrétisation
  - en temps, 71
  - volumes finis admissible, 71
- dismigration, *voir* migration tertiaire
- drainage, 32
- eustatisme, 151
- formule
  - d’Andrade, 30
  - de Bingham, 30
- gradient géothermique de température, 37
- hystérésis
  - perméabilité relative, 32
  - pression capillaire, 34
- imbibition, 32
- inégalité de Poincaré-Wirtinger, 81
- kérogène, 18, 24, 34
- lithologie, 18
- loi
  - d’Arrhenius, 35
  - de Darcy, 25, 28–29
  - de Fourier, 36
  - de Kozeny-Karman, 31
  - de Laplace, 23
- métagenèse, 24
- méthode numérique
  - éléments finis, 43, 69
  - différences finies, 69
  - volumes finis, 43, 69
- maillage, 44
  - coïncidant, 46–47
  - multi1D, 45
  - volumes finis admissible, 70
- marge passive, 18
- migration
  - primaire, 20
  - secondaire, 20
  - tertiaire, 20
- mobilité, 33

- modèle Dead-Oil, 67
- paléobathymétrie, 151
- perméabilité
- intrinsèque, 29–31
  - relative, 29, 31–34
- potentiel pétrolier, 35
- pression capillaire, 22, 34
- pyrobitume, 24
- réflectance de la vitrinite, 38
- rayon de courbure, 23
- repère fully compacted, 27
- rhéologie, *voir* compaction
- ride médio-océanique, 18
- rift, 18
- roche mère, 20
- schéma
- à nombre de Péclet variable, 76–78, 87–110
  - amont des pétroliers, 51, 72–76, 78–86
  - causal, 51
  - MUSCL ou à limiteur de pente, 115
  - pression capillaire et changement de roche, 128–142
- subsidence, 18
- tectonique, 18
  - thermique, 18
- surface spécifique, 21, 31
- tension superficielle, 22
- théorème de Kolmogorov, 104
- TOC, 24
- TR, 34
- VER, 25
- viscosité
- eau, *voir* formule de Bingham
  - huile, *voir* formule d'Andrade