Modèles et schémas numériques pour la modélisation de genèse de bassins sédimentaires

Thèse présentée par G. Enchéry le 9 Septembre 2004

Université de Marne-la-Vallée - Laboratoire Analyse et Mathématiques Appliquées Institut Français du Pétrole - DTIMA

La simulation de genèse de bassins sédimentaires

Objectifs

- Intégrer les lois issues de la géochimie, géologie, mécanique des sols... dans un même simulateur.
- Valider les modèles à partir de données issues de bassins connus.
- Améliorer l'exploration pétrolière dans des zones inconnues.

Phénomènes à modéliser

- Dépôt, compaction et érosion des sédiments
- Craquage des hydrocarbures au sein des roches mères
- Migration des hydrocarbures à l'intérieur du bassin
- Formation des réservoirs













































Vers une amélioration des modèles et des schémas numériques existants

Difficultés actuelles

- Complexité des modèles actuels (hétérogénéités, anisotropies, déformation du milieu au cours du temps...)
- Les résultats mathématiques obtenus sur les schémas industriels correspondent rarement à des cas réalistes.

Axes de recherche

- Vérifier que les schémas actuels présentent de bonnes propriétés mathématiques sur des modèles de plus en plus complexes.
- S'assurer que ces schémas modélisent fidèlement la physique des bassins.

Plan

- 1. Le modèle Dead-Oil
- 2. Un schéma à nombre de Péclet variable
- 3. Pression capillaire et changement de type de roches
- 4. Conclusions et perspectives

Plan

- 1. Le modèle Dead-Oil
- 2. Un schéma à nombre de Péclet variable
- 3. Pression capillaire et changement de type de roches
- 4. Conclusions et perspectives

Le modèle Dead-Oil

Hypothèses

- Un milieu poreux isotrope Ω
- La porosité ϕ et la perméabilité Υ ne dépendent que de la variable d'espace.
- Les écoulements sont diphasiques (s : saturation en huile) immiscibles et incompressibles
- Ils sont soumis aux gradients des pressions des phases, $\overrightarrow{\nabla} p_{\alpha}$, $\alpha \in \{o, w\}$, et à la gravité \overrightarrow{g} .
- Pas de termes sources

Les équations de Darcy

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\Upsilon \ \eta_o(s) (\rho_o \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\nabla} p_o) \right) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T) \\ -\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\Upsilon \ \eta_w(s) (\rho_w \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\nabla} p_w) \right) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T) \\ p_o = p_w + \pi(s) \end{cases}$$

Conditions aux limites

$$\forall \alpha \in \{o, w\}, \ \Upsilon\left(\eta_{\alpha}(s)(\rho_{\alpha}\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\nabla}p_{\alpha})\right) . \overrightarrow{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T)$$

Condition initiale

 $s(.,0)=s_{\rm ini} \ {\rm sur} \ \Omega$

Le système découplé

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\overrightarrow{Q}) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0,T) \\ \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \left(f(s,\overrightarrow{Q},\overrightarrow{G}) - \Upsilon \overrightarrow{\nabla} \varphi(s) \right) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0,T) \end{cases}$$

où

•
$$\overrightarrow{Q} = \Upsilon\left(\left(\eta_o(s)\rho_o + \eta_w(s)\rho_w\right)\overrightarrow{g} - \eta_T(s)\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{p}\right),$$

• $\overline{p} = p + \int_0^s \frac{\eta_o}{\eta_T}(v)\pi'(v)dv,$
• $f(s, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{G}) = \frac{\eta_o}{\eta_T}(s)\overrightarrow{Q} + \frac{\eta_o\eta_w}{\eta_T}(s)\overrightarrow{G},$
• $\overrightarrow{G} = \Upsilon(\rho_o - \rho_w)\overrightarrow{g},$
• $\varphi'(s) = \frac{\eta_o(s)\eta_w(s)}{\eta_o(s) + \eta_w(s)}\pi'(s).$

Plan

- 1. Le modèle Dead-Oil
- 2. Un schéma à nombre de Péclet variable
- 3. Pression capillaire et changement de type de roches
- 4. Conclusions et perspectives

Plan

- 1. Le modèle Dead-Oil
- 2. Un schéma à nombre de Péclet variable
- 3. Pression capillaire et changement de type de roches
- 4. Conclusions et perspectives

Le schéma amont des pétroliers

$$m(K)\phi_{K}\frac{s_{K}^{n+1}-s_{K}^{n}}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} F(s_{K}^{n+1}, s_{L}^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - \Upsilon_{K|L}(\varphi(s_{L}^{n+1}) - \varphi(s_{K}^{n+1})) = 0$$

où

•
$$F(s_K^{n+1}, s_L^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) = \frac{(\eta_o)_{K|L}^{n+1} \left(Q_{K,L}^{n+1} + (\eta_w)_{K|L}^{n+1} G_{K,L}\right)}{(\eta_o)_{K|L}^{n+1} + (\eta_w)_{K|L}^{n+1}},$$

•
$$G_{K,L} = \Upsilon_{K|L}(\rho_o - \rho_w)g\delta z_{K,L}$$
.

Caractéristiques du flux $F(.,.,Q_{K,L}^{n+1},G_{K,L})$

• Le calcul des mobilités $(\eta_{\alpha})_{K|L}^{n+1}$ s'effectue en fonction du sens d'écoulement de la phase α :

$$(\eta_{\alpha})_{K|L}^{n+1} = \begin{cases} \eta_{\alpha}(S_{\mathbf{K}}^{n+1}) & \text{si } \rho_{\alpha}g\delta z_{K,L} - \delta(p_{\alpha})_{K,L}^{n+1} \ge 0, \\ \eta_{\alpha}(S_{\mathbf{L}}^{n+1}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le choix des mobilités amont est complétement déterminé par la donnée de $Q_{K,L}^{n+1}$ et de $G_{K,L}$ (A. Pfertzel, 1987).

• Le flux est monotone : $F(.,.,Q_{K,L}^{n+1},G_{K,L})$ est croissante par rapport à son premier argument et décroissante par rapport à son second argument.

Le schéma à nombre de Péclet variable

$$\begin{split} m(K)\phi_{K}\frac{s_{K}^{n+1}-s_{K}^{n}}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} & \mathcal{F}(\theta_{K|L}^{n+1}, s_{K}^{n+1}, s_{L}^{n+1}, Q_{K,L}^{n+1}, G_{K,L}) - \\ & \Upsilon_{K|L}(\varphi(s_{L}^{n+1}) - \varphi(s_{K}^{n+1})) = 0 \end{split}$$

où

•
$$\mathcal{F}(\theta, a, b, Q, G) = \theta F(a, b, Q, G) + (1 - \theta) F(\frac{a + b}{2}, \frac{a + b}{2}, Q, G),$$

• le paramètre $\theta_{K|L}^{n+1}$ est choisi de façon à centrer au maximum la partie convective du flux tout en assurant la monotonie du schéma.

Résultats mathématiques

- Stabilité L^{∞} du calcul des saturations, existence d'une solution discrète.
- Convergence du schéma :

1.
$$s_{\mathcal{D}_{m}} \stackrel{m \to +\infty}{\longrightarrow} s \in L^{\infty}(\Omega \times (0,T)) \cap L^{q}(\Omega \times (0,T)),$$

pour tout $1 \leq q < \infty$,
2.
$$\varphi(s) \in L^{2}(0,T,H^{1}(\Omega)),$$

3.
$$\begin{array}{c} \forall \psi \in C_{\text{test}}, \\ \int_{0}^{T} \int_{\Omega} s\psi_{t} + f(s,\overrightarrow{Q},\overrightarrow{G}).\overrightarrow{\nabla}\psi - \overrightarrow{\nabla}\varphi(s)\overrightarrow{\nabla}\psi \, dxdt + \\ \int_{\Omega} s_{\text{ini}}\psi(.,0)dx = 0, \end{array}$$

où $C_{\text{test}} = \{h \in H^1(\Omega \times (0,T)) / h(.,T) = 0\}.$

Preuve de convergence

• La semi-norme $L^2(0,T,H^1(\Omega))$ discrète de la fonction $\varphi(s_{\mathcal{D}})$ est bornée :

$$|\varphi(s_{\mathcal{D}})|_{1,\mathcal{D}}^2 = \sum_{n=0}^M \delta t \sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (\varphi(s_L^{n+1}) - \varphi(s_K^{n+1}))^2 \le C.$$

• Les translations en temps et en espace de la fonction $\varphi(s_{\mathcal{D}})$ sont également bornées :

$$- \|\varphi(s_{\mathcal{D}}(x+\xi,t)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(x,t))\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} \le C(\xi),$$

 $- \|\varphi(s_{\mathcal{D}}(x,t+\tau)) - \varphi(s_{\mathcal{D}}(x,t))\|_{L^{2}(\Omega \times (0,T))} \leq C(\tau).$

• Grâce au théorème de Kolmogorov, nous en déduisons l'existence d'une sous-suite convergeant dans $L^2(\Omega \times (0,T))$ vers une solution faible. La régularité de la fonction $\varphi(s)$ est obtenue grâce à la semi-norme $L^2(0,T,H^1(\Omega))$ discrète.

Résultats numériques

- $\Omega = (0, 3000)$, D = (2600, 3000)
- $\phi = 0.1$
- $\mu_o = 5 \text{ cP}$, $\mu_w = 1 \text{ cP}$, $\rho_o = 800 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_w = 1100 \text{ kg.m}^{-3}$
- Υ donnée par la loi de Kozeny Karman,

•
$$kr_o(s) = s$$
, $kr_w(s) = 1 - s$, $\eta_o(s) = \frac{kr_o(s)}{\mu_o}$, $\eta_w(s) = \frac{kr_w(s)}{\mu_w}$, $\pi(s) = 0.3s$

$$s_{\rm ini}(x) = \begin{cases} 1.0 & \text{si } x \in D \\ 0.0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Marne-la-Vallée, le 9 Septembre 2004



Conclusion

Caractéristiques du schéma :

- précis et simple à mettre en œuvre
- Il peut être utilisé sous une forme implicite ou explicite.
- Ses propriétés mathématiques sont valables pour des domaines de dimension quelconque.

Plan

- 1. Le modèle Dead-Oil
- 2. Un schéma à nombre de Péclet variable
- 3. Pression capillaire et changement de type de roches
- 4. Conclusions et perspectives

Plan

- 1. Le modèle Dead-Oil
- 2. Un schéma à nombre de Péclet variable
- 3. Pression capillaire et changement de type de roches
- 4. Conclusions et perspectives

Discontinuité des forces capillaires





Equations de Darcy

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial s}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\eta_o(.,s)(\overrightarrow{\nabla} p_o - \rho_o \overrightarrow{g}) \right) = 0\\ -\phi \frac{\partial s}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\eta_w(.,s)(\overrightarrow{\nabla} p_w - \rho_w \overrightarrow{g}) \right) = 0\\ p_o - p_w = \pi(.,s) \end{cases}$$

Conditions d'interface

• Conservation de la masse

$$\eta_{\beta,1}(s_{1,\Gamma})\Big((\overrightarrow{\nabla}p)_{\beta,1,\Gamma}-\rho_{\beta}\overrightarrow{g}\Big).\overrightarrow{n}_{1,\Gamma}=-\eta_{\beta,2}(s_{2,\Gamma})\Big((\overrightarrow{\nabla}p)_{\beta,2,\Gamma}-\rho_{\beta}\overrightarrow{g}\Big).\overrightarrow{n}_{2,\Gamma}$$

• Condition en pression (1^{ère} écriture)

$$\eta_{\beta,1}(s_{1,\Gamma})(p_{\beta,1,\Gamma} - p_{\beta,2,\Gamma})^+ - \eta_{\beta,2}(s_{2,\Gamma})(p_{\beta,2,\Gamma} - p_{\beta,1,\Gamma})^+ = 0$$

• Condition en pression (2^{nde} écriture)



En effet,

si $0 \le s_{1,\Gamma} \le s_1^*$

- $p_{o,1,\Gamma} < p_{o,2,\Gamma}$ et $p_{w,2,\Gamma} = p_{w,1,\Gamma}$
- $s_{2,\Gamma} = 0$

L'huile est piégée en Ω_1 .

$\underline{\mathsf{si}} \ s_1^* \le s_{1,\Gamma}, s_{2,\Gamma} \le s_2^*$

• $p_{o,1,\Gamma} = p_{o,2,\Gamma}$ et $p_{w,2,\Gamma} = p_{w,1,\Gamma}$

L'huile et l'eau traversent Γ .

si $s_2^* \leq s_{2,\Gamma}$

• $p_{o,1,\Gamma} = p_{o,2,\Gamma}$ et $p_{w,2,\Gamma} < p_{w,1,\Gamma}$

• $s_{1,\Gamma} = 1$

L'eau est piégée en Ω_2 .

Simplification du modèle

Le modèle continu

- Un milieu poreux $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$
- Un écoulement diphasique, immiscible, incompressible uniquement soumis aux effets capillaires
- Pour tout $i \in \{1,2\}$ sur chaque domaine Ω_i , nous avons

$$\phi(x) = \phi_i, \quad \eta_\beta(x, s) = \eta_{\beta,i}(s), \quad \pi(x, s) = \pi_i(s).$$

• La frontière $\partial \Omega$ est imperméable.

• Pour tout $i \in \{1, 2\}$,

$$\phi_i \frac{\partial s}{\partial t} - \Delta \varphi_i(s) = 0 \text{ on } \Omega_i \times (0,T)$$

avec
$$\varphi_{i}^{'}(s) = \frac{\eta_{o,i}\eta_{w,i}}{\eta_{o,i} + \eta_{w,i}}(s)\pi_{i}^{'}(s).$$

- Sur l'interface $\Gamma = \partial \Omega_1 \bigcap \partial \Omega_2$, nous imposons
 - la <u>continuité du flux</u> :

$$\overrightarrow{\nabla}\varphi_1(s_{1,\Gamma}).\overrightarrow{n}_{1,2} = -\overrightarrow{\nabla}\varphi_2(s_{2,\Gamma}).\overrightarrow{n}_{2,1},$$

- la condition en pression :

$$\hat{\pi}_1(s_{1,\Gamma}) = \hat{\pi}_2(s_{2,\Gamma}).$$

La formulation faible

1. Pour tout
$$i \in \{1, 2\}$$
, $s = s_i \text{ sur } \Omega_i \times (0, T)$ avec
 $s_i \in L^{\infty}(\Omega_i \times (0, T))$, $0 \le s_i \le 1$, $\varphi_i(s_i) \in L^2(0, T, H^1(\Omega_i))$,

2. Pour tout $\psi \in C_{test} = \{\psi \in H^1(\Omega \times (0,T)) / \psi(.,T) = 0\}$,

$$\int_{0}^{T} \int_{\Omega_{1}} s_{1}\psi_{t} - \overrightarrow{\nabla}\varphi_{1}(s_{1}).\overrightarrow{\nabla}\psi \, dxdt + \int_{\Omega} s_{1}v_{1}(s_{1}).\overrightarrow{\nabla}\psi \, dxdt + \int_{\Omega} s_{1}v_{1}(s_{1}).\overrightarrow{\nabla}\psi \, dxdt + \int_{\Omega} s_{1}v_{1}(s_{1}).$$

3. La fonction $w = \Psi(\hat{\pi}_i(s_i))$ sur $\Omega_i \times (0, T)$ avec

$$\Psi: \left\{ \begin{array}{l} [\pi_2(0), \pi_1(1)] \to \mathbb{R} \\ p \mapsto \int_{\pi_2(0)}^p \min(\lambda_1(\pi_1^{(-1)}(a)), \lambda_2(\pi_2^{(-1)}(a))) da \end{array} \right.$$

appartient à $L^2(0,T,H^1(\Omega))$.

Schéma volumes finis

Principe



Définition

Pour tous $n \in \{0, \dots, M\}$, $K \in \mathcal{T}_i$, $i \in \{1, 2\}$, $(s_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}$ satisfait

$$m(K)\phi_{i}\frac{s_{K}^{n+1}-s_{K}^{n}}{\delta t} + \sum_{\substack{L \in N(K), L \in \mathcal{T}_{i}}}\tau_{K|L}\left(\varphi_{i}(s_{K}^{n+1})-\varphi_{i}(s_{L}^{n+1})\right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int,1,2}} \frac{m(\sigma)}{d_{K,\sigma}}\left(\varphi_{i}(s_{K}^{n+1})-\varphi_{i}(s_{K,\sigma}^{n+1})\right) = 0$$

où, pour tous $K|L \in \mathcal{E}_{int,1,2}$, $K \in \mathcal{T}_1$ et $L \in \mathcal{T}_2$, $s_{K,K|L}^{n+1}$ et $s_{L,K|L}^{n+1}$ sont solutions de

$$\begin{cases} \frac{\varphi_1(s_K^{n+1}) - \varphi_1(s_{K,K|L}^{n+1})}{d_{K,K|L}} = \frac{\varphi_2(s_{L,K|L}^{n+1}) - \varphi_2(s_L^{n+1})}{d_{L,K|L}},\\ \hat{\pi}_1(s_{K,K|L}^{n+1}) = \hat{\pi}_2(s_{L,K|L}^{n+1}). \end{cases}$$

Résultats

- Stabilité du calcul des saturations, existence d'une solution discrète.
- A une sous-suite près $(s_{\mathcal{D}_m})_{m\in\mathbb{N}}$ est telle que

$$s_{\mathcal{D}_m} \stackrel{m \to +\infty}{\longrightarrow} s_1 \text{ dans } L^q(\Omega_1 \times (0,T)) \bigcap L^{\infty}(\Omega_1 \times (0,T)),$$
$$s_{\mathcal{D}_m} \stackrel{m \to +\infty}{\longrightarrow} s_2 \text{ dans } L^q(\Omega_2 \times (0,T)) \bigcap L^{\infty}(\Omega_2 \times (0,T))$$

pour tout $1 \leq q < \infty$.

• Les fonctions s_i , $i \in \{1, 2\}$, satisfont le problème faible.

Preuve de convergence

• Pour tout $i \in \{1,2\}$, $|\varphi_i(s_D)|_{1,D,i}$ est bornée et sur l'interface Γ , nous avons

$$0 \leq \sum_{n=0}^{M} \delta t \sum_{(K,L)\in\mathcal{E}_{\Gamma}} \tau_{K,K|L} \left(\varphi_{1}(s_{K}^{n+1}) - \varphi_{1}(s_{K,K|L}^{n+1}) \right) \left(\pi_{1}(s_{K}^{n+1}) - \pi_{2}(s_{L}^{n+1}) \right) = \sum_{n=0}^{M} \delta t \sum_{(K,L)\in\mathcal{E}_{\Gamma}} \tau_{L,K|L} \left(\varphi_{2}(s_{L,K|L}^{n+1}) - \varphi_{2}(s_{L}^{n+1}) \right) \left(\pi_{1}(s_{K}^{n+1}) - \pi_{2}(s_{L}^{n+1}) \right) \leq C.$$

• Soit $w_{\mathcal{D}}$ la fonction définie pour tous $n \in \{0, ..., M\}$, $i \in \{1, 2\}$, $K \in \mathcal{T}_i$ par $w_K^{n+1} = \Psi(\hat{\pi}_i(s_K^{n+1}))$. Nous avons

$$|w_{\mathcal{D}}|_{1,\mathcal{D}} \leq C.$$

Résultats numériques

Test 1

•
$$\Omega_1 =]0, 1[, \Omega_2 =]1, 2[, \phi_1 = \phi_2 = 1]$$

• $\eta_o(s) = s, \eta_w(s) = 1 - s, \pi_1(s) = 5s^2, \pi_2(s) = 5s^2 + 1$
• $s_{ini}(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{si } x < 0.9 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
• $\delta t = \frac{1}{6} \cdot 10^{-3}, \, \delta x = 10^{-2}$







Test 2

•
$$\Omega_1 =]0, 1[$$
, $\Omega_2 =]1, 2[$, $\phi_1 = \phi_2 = 1$

•
$$\eta_o(s) = s, \ \eta_w(s) = 1 - s, \ \pi_1(s) = 5s^2, \ \pi_2(s) = 5s^2 + 1$$

• $s_{ini}(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{si } x > 1.2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
• $\delta t = \frac{1}{6} \cdot 10^{-3}, \ \delta x = 10^{-2}$







Conclusion

- Meilleure compréhension des pièges capillaires
- Définition des conditions d'interface permettant d'améliorer la précision des schémas
- Extension possible à un modèle tenant compte de la gravité et d'un flux total
- L'unicité de la solution faible n'a été démontrée que dans un cas particulier (C.J. van Duijn, 2003).

Plan

- 1. Le modèle Dead-Oil
- 2. Un schéma à nombre de Péclet variable
- 3. Pression capillaire et changement de type de roches
- 4. Conclusions et perspectives

Plan

- 1. Le modèle Dead-Oil
- 2. Un schéma à nombre de Péclet variable
- 3. Pression capillaire et changement de type de roches
- 4. Conclusions et perspectives

Conclusions

- Extension des résultats mathématiques existants sur le schéma amont des pétroliers à des modèles d'écoulements plus proches de la simulation de bassin
- Mise au point d'un schéma peu coûteux et plus précis que le schéma amont des pétroliers
- Meilleure compréhension des mécanismes de barrières capillaires

Perspectives

- Extension de l'étude du schéma amont des pétroliers à des écoulements plus complexes (compressibles, compositionnels...)
- Amélioration des modèles existants par la prise en compte d'autres phénomènes physiques (diffusion, dispersion des espèces hydrocarbures, migration du gaz par diffusion dans l'eau...)
- Diminution des temps de calcul