



HAL
open science

Quelques propriétés qualitatives de l'équation de Schrödinger non-linéaire

Pascal Bégout

► **To cite this version:**

Pascal Bégout. Quelques propriétés qualitatives de l'équation de Schrödinger non-linéaire. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2001. Français. NNT : . tel-00007378v1

HAL Id: tel-00007378

<https://theses.hal.science/tel-00007378v1>

Submitted on 11 Nov 2004 (v1), last revised 21 Feb 2005 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT
de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité

Mathématiques appliquées

présentée par

Pascal BÉGOUT

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE
CURIE**

Sujet de la thèse

**QUELQUES PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DE
L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON-LINÉAIRE**

Soutenue le Jeudi 6 Décembre 2001 devant le jury composé de

M.	Fabrice	BÉTHUEL	
M.	Thierry	CAZENAVE	Directeur de Thèse
Mme	Maria J.	ESTEBAN	Rapporteur
M.	Jean	GINIBRE	
M.	Yvan	MARTEL	
M.	Jean-Claude	SAUT	
M.	Fred B.	WEISSLER	Rapporteur

Remerciements

Je voudrais remercier mon directeur de thèse, Thierry Cazenave, pour m'avoir encadré durant ces trois années. Il a toujours été disponible pour répondre à mes questions (parfois naïves !) et ses conseils m'ont permis de gagner un temps précieux, m'orientant toujours dans une bonne direction lorsque j'étais bloqué, ou acceptant de changer de sujet lorsqu'il me voyait agonisant dans son bureau. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie également Maria J. Esteban et Fred B. Weissler qui ont bien voulu rapporter cette thèse. Les nombreuses et rigoureuses discussions avec ce dernier m'ont été très bénéfiques.

Mes remerciements s'adressent également à Fabrice Béthuel, Jean Ginibre, Yvan Martel et Jean-Claude Saut qui me font l'honneur de faire partie du jury.

Je tiens à remercier les membres du laboratoire et en particulier Mme Danielle Boulic, Mme Liliane Ruprecht et Mme Luce Loriller qui ont toujours résolu mes problèmes administratifs, ainsi que Mme Martine Legras pour son aide précieuse à la bibliothèque.

Monsieur Christian David a toujours été prompt et efficace. Je le remercie chaleureusement.

Je remercie enfin tous les thésards dont la folie de certains m'a permis de décompresser.

Enfin, merci à mes parents qui m'ont toujours encouragé sans compter. La thèse aurait pu durer encore plusieurs années, ils auraient été toujours présents.

Merci à la femme pas si sage que ça, mais qui l'a été quand même lorsqu'il lui fallait supporter les (désagréables ?) manifestations de mon stress.

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse concerne l'équation de Schrödinger avec puissance simple comme non-linéarité. Dans une première partie, on étudie des solutions globales en temps possédant un état de diffusion dans un espace de Sobolev à poids. Puisque le groupe de Schrödinger n'est pas une isométrie sur cet espace, on cherche à savoir si de telles solutions convergent vers leur état de diffusion. La réciproque est également étudiée. Dans une deuxième partie, on montre que la vitesse maximale de décroissance en temps des solutions est celle des solutions du problème linéaire associé. Une troisième partie traite de conditions suffisantes et de conditions nécessaires pour l'existence globale en temps de solutions dans le cas surcritique. Dans une quatrième partie, on simplifie la démonstration du résultat de Kenji Nakanishi qui montre que dans le cas dissipatif et sous des hypothèses adéquates sur la non-linéarité, on peut établir une théorie de la diffusion dans l'espace d'énergie en petite dimension d'espace. La simplification consiste à ne pas utiliser les espaces de Besov, puisque le résultat se produit dans l'espace d'énergie. Dans une dernière partie, on regarde la régularité de certaines solutions auto-similaires.

Mots-clés : équation non-linéaire de Schrödinger, état de diffusion, théorie de la diffusion, vitesse maximale de décroissance, explosion, existence globale, solution auto-similaire.

Abstract

The work presented in this thesis deals about the Schrödinger equation with single power of nonlinearity. In a first part, we study global solutions which have a scattering state in a weighted Sobolev space. Since the free operator of Schrödinger is not an isometry on this space, we would like to know if such solutions converge to their scattering state. The converse is also studied. In a second part, we show that the solutions decay at most as those of the linear Schrödinger equation. A third part gives necessary conditions and sufficient conditions to obtain global solutions in the supercritical case. In a fourth part, we simplify the result of Kenji Nakanishi. He shows in the dissipative case that under suitable conditions on the nonlinearity, each solution with finite energy has a scattering state. In this part, we give a proof which does not require the Besov spaces, unlike the original proof, since the result occurs in the energy space. A last part deals about the regularity of some self-similar solutions.

Key words : nonlinear Schrödinger equation, scattering state, scattering theory, maximum decay rate, blow-up, global existence, self-similar solution.

Notations

Pour $p \in [1, \infty]$, $p' \in [1, \infty]$ l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

\bar{z} le nombre complexe conjugué de z .

$\operatorname{Re}(z)$ la partie réelle du nombre complexe z .

$\operatorname{Im}(z)$ la partie imaginaire du nombre complexe z .

Ω un ouvert de \mathbb{R}^N non vide.

$B(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x - a| < R\}$, pour $a \in \mathbb{R}^N$ et $R \in (0, \infty)$, la boule ouverte de \mathbb{R}^N de centre a et de rayon R .

$\bar{B}(a, R) = \overline{B(a, R)} = \{x \in \mathbb{R}^N; |x - a| \leq R\}$, pour $a \in \mathbb{R}^N$ et $R \in (0, \infty)$, la boule fermée de \mathbb{R}^N de centre a et de rayon R .

α multi-index de longueur $|\alpha|$ si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ avec $\alpha_j \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in \{1; \dots; N\}$ et si

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = |\alpha|.$$

$$u_t = \partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

$$\partial_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

$$\partial_{jk}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}.$$

$$\partial_r u = u_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} x \cdot \nabla u, \text{ où } r = |x|.$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}, \alpha \text{ multi-index.}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right), \text{ l'opérateur gradient.}$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \text{ l'opérateur laplacien.}$$

IV

\mathcal{F} la transformée de Fourier sur \mathbb{R}^N définie par¹ $\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi x \cdot \xi} u(x) dx$.

\mathcal{F}^{-1} la transformée de Fourier inverse sur \mathbb{R}^N définie par $\mathcal{F}^{-1}u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2i\pi \xi \cdot x} u(\xi) d\xi$.

E' le dual topologique de l'espace E .

Pour E espace de Banach, E_w l'espace vectoriel E muni de sa topologie faible.

Pour E et F espaces topologiques, $E \hookrightarrow F$ si $E \subset F$ et si l'injection de E dans F est continue.

Si E est un espace de fonctions de Ω à valeurs dans \mathbb{C} , on notera E_{rad} l'espace des fonctions de E à symétrie radiale. Si de plus E est un espace vectoriel normé, on munit E_{rad} de la norme de E .

Pour E espace topologique et F espace vectoriel normé, $C(E; F)$ l'espace des fonctions continues de E vers F , noté aussi $C^0(E; F)$.

$C_b(E; F) = C_b^0(E; F) = \{f \in C(E; F); \|f\|_{C(E; F)} < \infty\}$ où $\|f\|_{C(E; F)} = \sup_{x \in E} \|f(x)\|_F$.

$C^k(\Omega) = C^k(\Omega; \mathbb{C}) = \{f \in C(\Omega; \mathbb{C}); D^\alpha f \in C(\Omega; \mathbb{C}), \forall \alpha \text{ multi-index tel que } |\alpha| \leq k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

$C_b^k(\Omega) = C_b^k(\Omega; \mathbb{C}) = \{f \in C^k(\Omega; \mathbb{C}); \|f\|_{C^k(\Omega)} < \infty\}$ où $\|f\|_{C^k(\Omega)} = \|f\|_{C_b^k(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C(\Omega; F)}$, $k \in \mathbb{N}$.

$C^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega; \mathbb{C}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega; \mathbb{C})$.

$C^k(\bar{\Omega}) = C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{C}) = \{f \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{C}); D^\alpha f \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{C}), \forall \alpha \text{ multi-index tel que } |\alpha| \leq k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

$C_b^k(\bar{\Omega}) = C_b^k(\bar{\Omega}; \mathbb{C}) = \{f \in C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{C}); \|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} < \infty\}$ où $\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C_b^k(\bar{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C(\bar{\Omega}; F)}$, $k \in \mathbb{N}$.

$C^{k, \alpha}(\bar{\Omega}) = C^{k, \alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{C}) = \{f \in C_b^k(\bar{\Omega}; \mathbb{C}); \|f\|_{C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})} < \infty\}$, les espaces de Hölder munis de la norme

$$\|f\|_{C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sup \left\{ \frac{|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)|}{|x - y|^\alpha}; (x, y) \in \Omega \times \Omega, x \neq y, |\beta| = k \right\},$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \alpha \leq 1$.

$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{C})$ l'espace des fonctions de $C^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ à support compact dans Ω .

$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{C})$ l'espace des distributions sur Ω , qui est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{C})$.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}); \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^m) |D^\alpha f(x)| < \infty, \forall m \in \mathbb{N}, \forall \alpha \text{ multi-index} \right\}$, l'espace de Schwartz.

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ l'espace des distributions tempérées sur \mathbb{R}^N , qui est le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$.

$L^p(\Omega) = L^p(\Omega; \mathbb{C}) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables}; \|f\|_{L^p} < \infty\}$, pour $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Le-

¹avec cette définition de la transformée de Fourier, $\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = 1$, $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}u \mathcal{F}v$ et $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ multi-index, $\mathcal{F}(D^\alpha u) = (2\pi i)^{|\alpha|} \prod_{j=1}^N x_j^{\alpha_j} \mathcal{F}u$.

besgue munis de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } p < \infty, \\ \sup \text{ess } \{|f(x)|; x \in \Omega\}, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour E et F deux espaces topologiques, $A \subset E$ une partie non vide de E et $f : E \longrightarrow F$ une application, $f|_A$ l'application f restreinte aux valeurs de A à valeurs dans F .

$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = L^p_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{C}) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables; } f|_K \in L^p(K; \mathbb{C}), \forall K \subset \Omega, K \text{ compact de } \mathbb{R}^N\}$, pour $1 \leq p \leq \infty$.

$(f, g) = \text{Re} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \overline{g(x)} dx$, le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, $f \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, $g \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$.

$W^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega; \mathbb{C}) = \{f \in L^p(\Omega; \mathbb{C}); D^\alpha f \in L^p(\Omega; \mathbb{C}), \forall |\alpha| \leq m, D^\alpha f \text{ pris au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)\}$, pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Sobolev munis de la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|=0}^m \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } p < \infty, \\ \sum_{|\alpha|=0}^m \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = W^{s,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}); \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} < \infty\}$, pour $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty$, les espaces de Sobolev à indice fractionnaire où $s = m + \sigma$ avec $m \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 1$ et où

$$\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

avec $D^\alpha f$ pris au sens des distributions.

$W^{0,p}(\mathbb{R}^N) = W^{0,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}) = L^p(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, pour $1 \leq p \leq \infty$.

$H^s(\Omega) = H^s(\Omega; \mathbb{C}) = W^{s,2}(\Omega) = W^{s,2}(\Omega; \mathbb{C})$, pour $s \in [0, \infty)$, les espace de Hilbert munis de la norme

$$\|\cdot\|_{H^s(\Omega)} = \|\cdot\|_{W^{s,2}(\Omega)}.$$

$H^0(\mathbb{R}^N) = H^0(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}) = W^{0,2}(\mathbb{R}^N) = W^{0,2}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}) = L^2(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$.

$W^{-s,p'}(\mathbb{R}^N) = W^{-s,p'}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ le dual topologique de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ et $H^{-s}(\mathbb{R}^N) = W^{-s,2}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, $s \in [0, \infty)$ et $1 \leq p < \infty$.

Dans tous les espaces fonctionnels précédents, on pourra oublier de noter Ω lorsque ce dernier sera égal à \mathbb{R}^N .

$C^k(\Omega; F) = \{f \in C(\Omega; F); D^\alpha f \in C(\Omega; F) \text{ pour tout multi-index } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq k\}$, $k \in \mathbb{N}$ et F espace vectoriel normé.

$C_b^k(\Omega; F) = \{f \in C^k(\Omega; F); \|f\|_{C^k(\Omega; F)} < \infty\}$ où $\|f\|_{C^k(\Omega; F)} = \|f\|_{C_b^k(\Omega; F)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C^k(\Omega; F)}$,

VI

$k \in \mathbb{N}$ et F espace vectoriel normé.

$C^k(\overline{\Omega}; F) = \{f \in C(\overline{\Omega}; F); D^\alpha f \in C(\overline{\Omega}; F) \text{ pour tout multi-index } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq k\}$, $k \in \mathbb{N}$ et F espace vectoriel normé.

$L^p(\Omega; F) = \{f : \Omega \rightarrow F \text{ mesurables}; \|f\|_{L^p(\Omega; F)} < \infty\}$, pour $1 \leq p \leq \infty$ et F espace vectoriel normé, les espaces de Lebesgue munis de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega; F)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} \|f(x)\|_F^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } p < \infty, \\ \sup \text{ess} \{\|f(x)\|_F; x \in \Omega\}, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

$L^p_{\text{loc}}(\Omega; F) = \{f : \Omega \rightarrow F \text{ mesurables}; f|_K \in L^p(K; F), \forall K \subset \Omega, K \text{ compact de } \mathbb{R}^N\}$, $1 \leq p \leq \infty$ et F espace vectoriel normé.

$Y = \{f \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}); \|f\|_Y < \infty\}$ avec $(f, g)_Y = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \overline{g(x)} dx + \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f(x) \overline{g(x)} dx$ et où

$$\|f\|_Y = \sqrt{(f, f)_Y}.$$

$X = \{f \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}); \|f\|_X < \infty\}$ avec

$$(f, g)_X = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \overline{g(x)} dx + \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla f(x) \cdot \overline{\nabla g(x)} dx + \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f(x) \overline{g(x)} dx$$

et où $\|f\|_X = \sqrt{(f, f)_X}$.

$(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est le groupe d'isométries de Schrödinger $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$ engendré par $i\Delta$ dans $L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$.

On désignera par C les constantes strictement positives susceptibles de changer d'une ligne à une autre et on notera $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pour préciser que C ne dépend que des paramètres a_1, a_2, \dots, a_n et que la dépendance est continue.

Table des matières

Résumé	I
Notations	III
Introduction	1
Motivations	1
Présentation des résultats	3
1 Convergence to Scattering States	13
1.1 Introduction and notations	13
1.2 The main results	15
1.3 A priori estimates	18
1.4 Proof of Theorems 1.2.1, 1.2.4, 1.2.5 and Proposition 1.2.8	20
1.5 Proof of Theorem 1.2.10	27
2 Maximum Decay Rate	29
2.1 Introduction and notations	29
2.2 Sharp lower bound	31
2.3 Main results in the Lebesgue space	33
2.4 Estimates at infinity	35
2.5 Proof of the results of Section 2.2	39
2.6 Proof of the results of Section 2.3	41
3 Necessary Conditions and Sufficient Conditions for Global Existence	43
3.1 Introduction and notations	43
3.2 Blow-up	45
3.3 Sharp estimate	46
3.4 Necessary condition and sufficient condition for global existence	48
3.5 Proof of Theorem 3.4.1	49
4 Simplification d'une démonstration de théorie de la diffusion en dimension $N \leq 2$	55
4.1 Introduction et notations	56
4.2 Autre démonstration des lemmes de Kenji Nakanishi	60
4.3 Applications des résultats de Kenji Nakanishi	78
4.4 Deux résultats de dépendance continue	82
4.5 Solutions radiales dans le cas dissipatif	89
5 Régularité de certaines solutions auto-similaires	95
5.1 Rappels	95
5.2 Régularité de certaines solutions auto-similaires	102
Bibliographie	112

Introduction

Motivations

Les travaux présentés dans cette thèse concernent l'équation de Schrödinger non-linéaire étudiée sur \mathbb{R}^N . Plus précisément, on regarde $iu_t + \Delta u + \lambda|u|^\alpha u = 0$. On s'est intéressé essentiellement au comportement asymptotique des solutions. Cependant, une partie traite de l'existence globale tandis qu'une autre, plus modeste, porte sur la régularité.

Le Chapitre 1 concerne la théorie de la diffusion dans l'espace de Sobolev à poids $X \stackrel{\text{déf}}{=} H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(|x|^2; dx)$. Une telle théorie existe dans l'espace d'énergie, à savoir que sous certaines hypothèses, il existe $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_{H^1} = 0$, où $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est le groupe d'isométries de Schrödinger $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$ engendré par $i\Delta$. Et puisque $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est une isométrie sur $H^1(\mathbb{R}^N)$, on a donc de façon équivalente $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - T(t)u_+\|_{H^1} = 0$. Ainsi, on peut dire qu'au voisinage de l'infini, la solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire se comporte comme une solution du problème linéaire associé. On sait aussi que sous des hypothèses adaptées, il existe $u_+ \in X$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_X = 0$. Mais $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ **n'** est **pas** une isométrie sur X . Ceci a motivé les questions suivantes. Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_X = 0$, que peut-on dire de $\|u(t) - T(t)u_+\|_X$ lorsque $t \rightarrow \infty$? Que peut-on dire de la réciproque? Le Chapitre 1 répond en partie à ces questions (voir également [6]). Les démonstrations reposent essentiellement sur des estimations *a priori*, obtenues à partir des hypothèses faites sur le comportement à l'infini, et sur les inégalités de Strichartz.

Dans le Chapitre 2, on considère des solutions globales en temps et on donne leur vitesse maximale de décroissance vers 0 dans les espaces de Lebesgue. Si l'on considère certaines équations non-linéaires de la chaleur ou de Ginzburg-Landau, on peut montrer que ces dernières admettent des solutions qui décroissent vers 0 plus vite que les solutions du problème linéaire correspondant. Il est donc naturel de se poser la question de savoir si un tel phénomène est vrai pour l'équation de Schrödinger non-linéaire. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, dans [4] on montre que toute solution non identiquement nulle de l'équation de Schrödinger décroît vers 0 **au plus** comme les solutions du problème linéaire.

Les démonstrations sont basées sur la transformée pseudo-conforme de la solution de l'équation non-linéaire de Schrödinger (on utilise notamment l'article de Cazenave et Weissler [25]).

Le Chapitre 3 porte sur l'existence de solutions globales en temps et sur l'explosion en temps fini. Dans le cas critique, Weinstein [77, 78] a établi un critère optimal pour obtenir des solutions globales. Mais qu'en est-il dans le cas surcritique? Existe-t-il un tel résultat? Dans le cas critique, on sait qu'il existe une constante explicite $C_* > 0$ telle que si la donnée initiale $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ vérifie $\|\varphi\|_{L^2} < C_*$, alors la solution correspondante est globale en temps. En particulier, $\|\nabla\varphi\|_{L^2}$ peut être prise aussi grande que l'on veut. De plus, cette condition est optimale. Dans [5], on prolonge partiellement ce résultat au cas surcritique. On montre qu'il existe une fonction positive γ_* telle que si $\|\varphi\|_{L^2} \leq \gamma_*(\|\nabla\varphi\|_{L^2})$, alors la solution correspondante est globale en temps. On montre également que l'on peut choisir $\|\varphi\|_{H^1}$ aussi grande que l'on veut, comme dans le cas critique. En revanche, on ne peut monter que le résultat est optimal. Cependant, dans le cas critique on retrouve les résultats de Weinstein [77, 78]. La démonstration est basée sur une méthode d'énergie et l'obtention de la meilleure constante dans une inégalité de Gagliardo-Nirenberg, comme pour Weinstein [77].

Dans le Chapitre 4, on considère de nouveau des solutions globales en temps. Il traite du résultat principal de Kenji Nakanishi [62] (voir aussi Nakanishi [63]). Ce dernier montre qu'en dimension d'espace $N \leq 2$, on peut établir une théorie de la diffusion dans l'espace d'énergie, comme l'ont fait Ginibre et Velo dans [39] pour $N \geq 3$. Cependant, la démonstration utilise fortement les espaces de Besov alors que le résultat obtenu est dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Le but de ce chapitre est donc de s'affranchir de l'utilisation de ces espaces en expliquant comment procéder. Dans un premier temps, on donnera une démonstration simplifiée du résultat de Nakanishi [62]. Grâce à ces simplifications, on pourra établir un résultat du même type que celui de l'auteur dans un cas critique. Puis, dans un deuxième temps, on fera le parallèle avec les solutions radiales. On verra comment, grâce à cette hypothèse supplémentaire, on peut obtenir facilement un comportement asymptotique pour de telles solutions.

Le dernier chapitre traite de la régularité des solutions auto-similaires. Cela change complètement le cadre dans lequel on travaille puisque de telles solutions ne peuvent avoir une énergie finie et ne peuvent même pas prendre leurs valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. À toute solution auto-similaire, on peut lui associer un profil qui vérifie une équation aux dérivées partielles. Dans [26], Cazenave et Weissler obtiennent des solutions auto-similaires qui, par construction, sont dans $L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$, avec $0 < \alpha < \infty$. Par conséquent, il en est de même pour le profil f . Et puisque ce dernier vérifie une équation aux dérivées partielles elliptique, il est naturel de se demander si l'on a $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dans le Chapitre 5, on montre que pour cette classe de solutions auto-similaires, la régularité obtenue est plus forte que

prévue, bien que l'on ne puisse pas obtenir de manière générale une borne $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Curieusement, les techniques classiques de régularité sur les équations elliptiques ne donnent rien. Ceci est dû à deux difficultés. D'une part, le profil f est à valeurs complexes et donc l'équation vérifiée par f est en fait un système que l'on ne peut totalement découpler. D'autre part l'équation considérée est posée dans \mathbb{R}^N tout entier. Les résultats obtenus se déduisent alors directement de l'équation d'évolution, via les inégalités de Strichartz.

Présentation des résultats

On considère l'équation de Schrödinger non-linéaire suivante.

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \lambda|u|^\alpha u = 0, & (t, x) \in (-T_*, T^*) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0) = \varphi, & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 \leq \alpha < \infty$ si $N = 1$) et φ une donnée initiale.

Rappelons quelques propriétés bien connues de l'équation (1). Pour tout $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, il existe une unique solution maximale $u \in C((-T_*, T^*); H^1(\mathbb{R}^N))$ de (1) qui satisfait les lois de conservation de la masse et de l'énergie. En effet, on a pour tout $t \in (-T_*, T^*)$, $\|u(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ et $E(u(t)) = E(\varphi)$, où $E(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{\alpha+2} \|\varphi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}$. La solution u est maximale dans le sens où si $T^* < \infty$ alors $\lim_{t \nearrow T^*} \|u(t)\|_{H^1} = \infty$. De même, si $T_* < \infty$ alors $\lim_{t \searrow -T_*} \|u(t)\|_{H^1} = \infty$. Et pour toute paire admissible (q, r) , $u \in L_{\text{loc}}^q((-T_*, T^*); W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$. De plus, si $\varphi \in X$ alors $u \in C((-T_*, T^*); X)$ et u satisfait la loi de transformation pseudo-conforme suivante. Pour tout $t \in (-T_*, T^*)$,

$$\|(x + 2it\nabla)u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{8\lambda t^2}{\alpha+2} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} = \|x\varphi\|_{L^2}^2 - 4\lambda \frac{4-N\alpha}{\alpha+2} \int_0^t s \|u(s)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} ds.$$

Enfin, si $\lambda \leq 0$, si $\alpha < \frac{4}{N}$ ou si $\|\varphi\|_{H^1}$ est suffisamment petite, alors $T^* = T_* = \infty$ et $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^1)} < \infty$ (Cazenave [19]; Cazenave et Weissler [21, 23]; Ginibre et Velo [33, 34, 35, 37, 38]; Hayashi, Nakamitsu et Tsutsumi [46]; Kato [50, 51]). Pour des résultats de régularité de type $C^n(\mathbb{R}^N)$, on pourra consulter Hayashi, Nakamitsu et Tsutsumi [44, 45] et pour d'autres non-linéarités, Ginibre et Velo [36]. On rappelle aussi que si $0 < \alpha \leq \frac{4}{N}$ alors pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, il existe une unique solution maximale $u \in C((-T_*, T^*); L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L_{\text{loc}}^q((-T_*, T^*); L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$ de (1), où $q = \frac{4(\alpha+2)}{N\alpha}$, qui satisfait également la loi de conservation de la masse ci-dessus. De plus, $u \in L_{\text{loc}}^q((-T_*, T^*); L^r(\mathbb{R}^N))$, pour toute paire admissible (q, r) . Enfin, si $\alpha < \frac{4}{N}$ alors $T^* = T_* = \infty$ (Cazenave et Weissler [22, 24], Tsutsumi [75]).

On rappelle également les inégalités de Strichartz et de Gagliardo-Nirenberg, souvent utilisées dans cette thèse.

On dira que (q, r) est une *paire admissible* si l'on a les propriétés suivantes.

- (i) $2 \leq r \leq \frac{2N}{N-2}$ ($2 \leq r < \infty$ si $N = 2$, $2 \leq r \leq \infty$ si $N = 1$),
- (ii) $\frac{2}{q} = N \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right)$.

Voici les inégalités de Strichartz.

Pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et pour toute paire admissible (q, r) , l'application $\mathcal{T} : t \mapsto T(t)\varphi$, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, vérifie $\mathcal{T} \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^q(\mathbb{R}; L^r(\mathbb{R}^N))$. De plus,

$$\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N), \|\mathcal{T}(\cdot)\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}; L^r)} \leq C\|\varphi\|_{L^2},$$

où $C = C(N, r)$.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} (borné ou non), $J = \bar{I}$, $t_0 \in J$, (γ, ρ) une paire admissible et soit $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$. Alors pour toute paire admissible (q, r) , l'application

$$t \mapsto \mathcal{T}_f(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{t_0}^t T(t-s)f(s)ds, \text{ pour } t \in I,$$

vérifie $\mathcal{T}_f \in C(J, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^q(I, L^r(\mathbb{R}^N))$. De plus,

$$\forall f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^N)), \|\mathcal{T}_f\|_{L^q(I, L^r)} \leq C\|f\|_{L^{\gamma'}(I, L^{\rho'})}.$$

où $C = C(N, r, \rho)$. On dira alors que $L^q(I, W^{m,r}(\mathbb{R}^N))$ est un *espace de Strichartz* (avec $m \in \{0; 1\}$).

Pour la démonstration, voir Keel et Tao [55].

On rappelle maintenant les inégalité de Gagliardo-Nirenberg.

Soient $2 \leq p \leq r \leq \frac{2N}{N-2}$ ($2 \leq p \leq r < \infty$ si $N = 2$, $2 \leq p \leq r \leq \infty$ si $N = 1$). Posons $a = \frac{1}{r} \frac{2N(r-p)}{2N-p(N-2)}$. Alors pour tout $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\|f\|_{L^r} \leq C\|f\|_{L^p}^{1-a} \|\nabla f\|_{L^2}^a,$$

où $C = C(N, r, p)$.

Chapitre 1. Convergence vers les états de diffusion

On fait les hypothèses suivantes.

$$\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \frac{2}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2} \text{ (} 2 < \alpha < \infty \text{ si } N = 1\text{)}, \varphi \in X, \\ u \in C((-\infty, T^*]; X) \text{ est la solution associée de (1),} \\ T^* = \infty \text{ et il existe } u_+ \in X \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_X = 0. \end{cases} \quad (2)$$

On voudrait alors savoir si l'on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - T(t)u_+\|_X = 0$. Le résultat obtenu est le suivant.

Théorème 0.1. *On suppose que $N \leq 5$. Sous les hypothèses (2), on a le résultat suivant.*

1. (a) Si $N \leq 2$ et si $\alpha > \frac{4}{N}$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - T(t)u_+\|_X = 0$.
- (b) Si $N \geq 3$ et si $\alpha > \frac{8}{N+2}$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - T(t)u_+\|_X = 0$.
2. (a) Si $N = 1$ et si $\alpha = 4$ alors $\sup_{t \geq 0} \|u(t) - T(t)u_+\|_X < \infty$.
- (b) Si $N \geq 3$ et si $\alpha = \frac{8}{N+2}$ alors $\sup_{t \geq 0} \|u(t) - T(t)u_+\|_X < \infty$.

On définit le réel suivant.

$$\gamma^* = \begin{cases} \frac{\alpha - 2}{2}, & \text{si } N = 1, \\ \frac{\alpha(N+2) - 4}{4}, & \text{si } N \geq 2. \end{cases} \quad (3)$$

À l'aide des inégalités de Strichartz et des estimations *a priori* obtenues à partir de (2), on montre la proposition suivante.

Proposition 0.2. *Soit γ^* défini par (3). Sous les hypothèses (2), on a les estimations suivantes.*

1. Si $N = 1$ alors on a pour tout $t > 0$, $\|T(-t)u(t) - u_+\|_{H^1} \leq Ct^{-\gamma^*}$.
2. Si $N = 2$ alors on a pour tout $\gamma < \gamma^*$ et pour tout $t > 0$, $\|T(-t)u(t) - u_+\|_{H^1} \leq Ct^{-\gamma}$.
3. Si $N \geq 3$ alors on a pour tout $t > 0$, $\|T(-t)u(t) - u_+\|_{H^1} \leq Ct^{-\gamma^*}$.

De celle-ci, on démontre aisément le Théorème 0.1.

On remarque que le Théorème 0.1 est très restrictif du point de vue de α et de la dimension d'espace N . On peut remédier à ceci de la façon suivante. En faisant essentiellement des développements asymptotiques au voisinage de l'infini sur les termes $\|xu(t)\|_{L^2}$ et $\|xT(t)u_+\|_{L^2}$, on montre que ces deux quantités se compensent lorsque $t \rightarrow \infty$.

Théorème 0.3. *Sous les hypothèses (2), on a $\sup_{t \geq 0} |\|u(t)\|_X - \|T(t)u_+\|_X| < \infty$.*

Ensuite, on étudie la réciproque. On fait donc les hypothèses suivantes.

$$\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \frac{2}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2} \quad (2 < \alpha < \infty \text{ si } N = 1), \varphi \in X, \\ u \in C((-T_*, T^*); X) \text{ est la solution associée de (1),} \\ T^* = \infty \text{ et il existe } u_+ \in X \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - T(t)u_+\|_X = 0. \end{cases} \quad (4)$$

On voudrait savoir si, sous ces hypothèses, on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_X = 0$. Voici ce que l'on obtient.

Théorème 0.4. *Soit $\alpha_0 = \frac{-(N-2) + \sqrt{N^2 + 12N + 4}}{2N}$. Sous les hypothèses (4), on a le résultat suivant.*

1. Si $\lambda < 0$ et si $\alpha \geq \alpha_0$ ($\alpha > \alpha_0$ si $N = 2$) alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_X = 0$.
2. Si $\lambda > 0$ et si $\alpha > \frac{4}{N}$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_X = 0$.

Pour démontrer le Théorème 0.4, on commence par remarquer que l'hypothèse (4) implique que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} = 0$. De ceci, on montre qu'en fait u satisfait

$$\forall t > 0, \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} \leq Ct^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}}.$$

A l'aide de l'équation intégrale vérifiée par u et de cette dernière estimation, on démontre facilement le Théorème 0.4.

Bien entendu, tous ces résultats s'adaptent au cas $t < 0$.

Chapitre 2. Vitesse maximale de décroissance

Énonçons le principal résultat pour les solutions à valeurs dans X , dans le cas dissipatif. Dans le cas attractif, on a un résultat similaire.

Théorème 0.5. Soient $\lambda \leq 0$, $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 \leq \alpha < \infty$ si $N = 1$), soit $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et soit $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ l'unique solution associée de (1). Si $\alpha \leq \frac{4}{N}$ alors on suppose de plus que $\varphi \in X$. Si $\varphi \not\equiv 0$ alors pour tout $r \in [2, \infty]$,

$$\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} |t|^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0, \quad (5)$$

où l'on a utilisé la convention $\|\psi\|_{L^r} = \infty$ si $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et si $\psi \notin L^r(\mathbb{R}^N)$.

L'idée générale de la démonstration est la suivante. Si (5) était faux, alors pour un $r > 2$ satisfaisant $(N-2)r < 2N$ et pour une suite $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, on aurait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v(t_n)\|_{L^r} = 0, \quad (6)$$

où v est la transformée pseudo-conforme de u . Ensuite, à partir des estimations sur v , on déduit que

$$\begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|v(t_n)\|_Y < \infty, & \text{si } \varphi \in X, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|v(t_n) - w\|_{L^2} = 0, & \text{si } \alpha > \frac{4}{N}, \end{cases} \quad (7)$$

pour un $w \in L^2(\mathbb{R}^N)$, où $Y \stackrel{\text{déf}}{=} L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^2(|x|^2; dx)$. Ainsi, (6) et (7) impliquent que $\varphi \equiv 0$.

On peut remarquer que lorsque $\alpha > \frac{4}{N}$, l'hypothèse sur la donnée initiale est optimale. Tandis que si $\alpha \leq \frac{4}{N}$, on doit supposer cette dernière dans X . On peut réduire cette condition, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 0.6. Soient $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{4}{N+2} < \alpha \leq \frac{4}{N}$ ($2 < \alpha \leq 4$ si $N = 1$), soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et soit $u \in C((-T_*, T^*); L^2(\mathbb{R}^N))$ l'unique solution associée de (1). Si $\alpha = \frac{4}{N}$ alors on suppose de plus que $T^* = \infty$. Supposons que pour tout $r \in \left[2, \frac{2N}{N-2}\right)$ ($r \in [2, \infty)$ si $N = 1$),

$$\forall t > 0, \|u(t)\|_{L^r} \leq C|t|^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}. \quad (8)$$

Alors on a pour tout $r \in [2, \infty]$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0,$$

où l'on a utilisé la convention $\|\psi\|_{L^r} = \infty$ si $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et si $\psi \notin L^r(\mathbb{R}^N)$. On un résultat similaire lorsque $t \rightarrow -\infty$ dès que $T_* = \infty$.

La démonstration repose encore sur la transformation pseudo-conforme. Grâce à l'hypothèse (8), on montre qu'il existe $u_+ \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_{L^2} = 0$ ce qui implique, via la transformation pseudo-conforme, le résultat.

Chapitre 3. Conditions nécessaires et conditions suffisantes d'existence globale

Dans ce chapitre, on considère l'équation (1) dans le cas attractif et surcritique. On fait donc les hypothèses suivantes.

$$\begin{cases} \lambda > 0, \frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2} \quad (4 < \alpha < \infty \text{ si } N = 1), \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ u \in C((-T_*, T^*); H^1(\mathbb{R}^N)) \text{ est la solution associée de (1).} \end{cases} \quad (9)$$

On considère aussi l'équation aux dérivées partielles suivante.

$$\begin{cases} -\Delta R + R = |R|^\alpha R, \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ R \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), R \not\equiv 0. \end{cases} \quad (10)$$

On rappelle que si $\lambda > 0$, si $\alpha = \frac{4}{N}$, si R est la solution fondamentale de (10) et si $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ vérifie $\|\varphi\|_{L^2} < \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \|R\|_{L^2}$, alors la solution associée u de (1) est globale en temps, c'est-à-dire que, $T^* = T_* = \infty$. De plus, ce critère est optimal (Weinstein [77, 78]). Pour le cas surcritique, on obtient le résultat suivant.

Théorème 0.7. Soient les hypothèses (9) et R la solution fondamentale de (10). On définit pour tout

$a > 0$,

$$\begin{cases} r_*(a) = \left(\frac{N\alpha}{4 - \alpha(N-2)} \right)^{\frac{N\alpha-4}{2(4-\alpha(N-2))}} \left(\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \|R\|_{L^2} \right)^{\frac{2\alpha}{4-\alpha(N-2)}} a^{-\frac{N\alpha-4}{4-\alpha(N-2)}}, \\ \gamma_*(a) = \left(\frac{N\alpha-4}{N\alpha} \right)^{\frac{N\alpha-4}{2(4-\alpha(N-2))}} r_*(a). \end{cases}$$

1. Si $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ vérifie $\|\varphi\|_{L^2} \leq \gamma_*(\|\nabla\varphi\|_{L^2})$ alors $T^* = T_* = \infty$.
2. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$ vérifiant $a > r_*(b)$, il existe $\varphi_{a,b} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ avec $\|\varphi_{a,b}\|_{L^2} = a$ et $\|\nabla\varphi_{a,b}\|_{L^2} = b$ telle que la solution associée $u_{a,b} \in C((-T_*, T^*); H^1(\mathbb{R}^N))$ de (1) explose en temps fini pour $t < 0$ et $t > 0$. Autrement dit, $T_* < \infty$ et $T^* < \infty$.

Le Théorème 0.7 offre donc une condition nécessaire et une condition suffisante d'existence globale. Cependant, comme $\gamma_* < r_*$, on sait pas si l'une des deux conditions de 1 ou de 2 est optimale. On remarquera tout de même que $\gamma_* \xrightarrow{\alpha \searrow \frac{4}{N}} \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \|R\|_{L^2}$ et $r_* \xrightarrow{\alpha \searrow \frac{4}{N}} \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \|R\|_{L^2}$. Par conséquent, notre résultat prolonge celui de Weinstein [77, 78]. De plus, comme pour le cas critique, on peut prendre $\|\varphi\|_{H^1}$ aussi grande que l'on veut du moment que la condition 1 du Théorème 0.7 est satisfaite.

La démonstration du 1 du Théorème 0.7 est simple. Comme pour le cas critique, on utilise la conservation de l'énergie. Dans cette identité, on applique une inégalité de Gagliardo-Nirenberg avec la meilleure constante ce qui donne le résultat voulu. Pour la démonstration de 2, on utilise la méthode employée par Berestycki et Cazenave [7]. Ces derniers ont montré que la solution fondamentale R de (10) est instable. En faisant des dilations et multiplications sur R , on obtient pour tout réel $\omega > 0$, la solution fondamentale R_ω de

$$\begin{cases} -\Delta R_\omega + \omega R_\omega = \lambda |R_\omega|^\alpha R_\omega, \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ R_\omega \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), R_\omega \neq 0. \end{cases}$$

Puis, en faisant varier le paramètre ω dans $(0, \infty)$, on remarque que R_ω parcourt la ligne de niveau $\|R_\omega\|_{L^2} = r_*(\|\nabla R_\omega\|_{L^2})$. Sachant que R_ω est instable pour tout $\omega > 0$, on en déduit 2. C'est aussi ce qui est fait dans le cas critique mais la situation est plus simple car les solutions R_ω ainsi construites ont une énergie strictement négative alors que notre cas, on doit construire des solutions de (1) explosant en temps fini et dont l'énergie est strictement positive. En particulier, les résultats de Glassey [41] ne s'appliquent pas.

En outre, on améliore aussi un résultat de condition suffisante d'explosion en temps fini. Il est bien connu que toute solution d'énergie strictement négative explose en temps fini, pourvu qu'elle appartienne à l'espace X ou bien qu'elle soit à symétrie radiale (Glassey [41], Ogawa et Tsutsumi [68]; à cet effet, on pourra consulter Martel [59] pour des hypothèses moins restrictives sur la donnée

initiale). On a légèrement réduit cette hypothèse en montrant que le résultat restait vrai pour toute solution non triviale d'énergie nulle.

Théorème 0.8. *Soient les hypothèses (9). On suppose que l'une des trois conditions est satisfaite. ($\varphi \in X$) ou bien ($N \geq 3$ et φ est à symétrie sphérique) ou bien ($N = 2$, $2 < \alpha \leq 4$ et φ est à symétrie sphérique). Si $\varphi \neq 0$ et si $E(\varphi) \leq 0$ alors $T_* < \infty$ et $T^* < \infty$.*

La démonstration repose toujours sur une identité de type virielle.

Chapitre 4. Simplification d'une démonstration de théorie de la diffusion en dimension d'espace $N \leq 2$

Dans ce chapitre, il est question de simplifier la démonstration du résultat obtenu par Kenji Nakanishi dans [62] dans le cas dissipatif. Soient les hypothèses suivantes.

$$\begin{cases} \lambda < 0, 0 < \alpha < \frac{4}{N-2} \text{ (} 0 < \alpha < \infty \text{ si } N = 1\text{), } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N)) \text{ est la solution associée de (1).} \end{cases} \quad (11)$$

Théorème (Kenji Nakanishi). *Soient les hypothèses (11). On suppose de plus que $N \leq 2$ et que $\alpha > \frac{4}{N}$. Alors il existe $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $u_- \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tels que $T(-t)u(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{H^1(\mathbb{R}^N)} u_{\pm}$.*

Pour cela, il lui a suffi de démontrer le résultat suivant.

Proposition (Kenji Nakanishi). *Soient les hypothèses (11). On suppose de plus que $N \leq 2$ et $\alpha > \frac{4}{N}$. On pose $a = \frac{\alpha(N+2)}{2}$. Alors $u \in L^a(\mathbb{R}; L^a(\mathbb{R}^N))$.*

Dans ce chapitre, on verra comment Kenji Nakanishi procède pour démontrer sa proposition, qui s'effectue par récurrence sur la taille de $E_T(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} 2E(\varphi) + \|\varphi\|_{L^2}^2$. On cite ici l'un de ses lemmes car son résultat s'étend au cas critique, après en avoir légèrement modifié l'énoncé. Ceci a permis d'obtenir un résultat sur le comportement asymptotique des solutions lorsque $\alpha = \frac{4}{N}$.

Lemme. *On se donne les hypothèses (11) et on suppose que $\alpha \geq \frac{4}{N}$. Soit (γ, ρ) la paire admissible telle que $\rho = \alpha + 2$. Soient $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et w solution de (1) avec $w(0) = w_0$. On suppose que $\varphi = w_0 + v_0$. Si $w \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N))$ alors il existe $\eta > 0$ tel que si $\|v_0\|_{L^2} \leq \eta$ on a*

$$u \in L^q(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N)) \cap L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N)),$$

pour toute paire admissible (q, r) .

À l'origine ce lemme n'a pas été établi pour $\alpha = \frac{4}{N}$. Grâce à cette extension, on a pu en déduire le corollaire suivant.

Corollaire 0.9. *On se donne les hypothèses (11) et on suppose que $\alpha = \frac{4}{N}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus X_{\text{rad}}$ avec $\|\varphi - \psi\|_{H^1} < \varepsilon$ telle que $v \in L^q(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$, pour toute paire admissible (q, r) , où v désigne la solution de (1) de donnée initiale ψ . De plus, il existe $v_+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)v(t) - v_+\|_{H^1} = 0.$$

Pour démontrer le Lemme de Nakanishi, on a besoin d'un résultat de dépendance continue dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ pour les solutions à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 0.10. *Soient les hypothèses (11). Pour $\varphi_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on note u_n la solution de (1) telle que $u_n(0) = \varphi_n$. Si $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\mathbb{R}^N)} \varphi$ et si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{H^1} < \infty$ alors pour tout intervalle borné $[-S, T] \subset \mathbb{R}$,*

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C([-S, T]; L^2(\mathbb{R}^N))} u.$$

Remarquons au passage que lorsqu'une solution possède un état de diffusion, cela signifie qu'elle se comporte "très bien" au voisinage de l'infini. Cela a une conséquence sur la dépendance continue par rapport à la donnée initiale, comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 0.11. *Soient les hypothèses (11). On suppose de plus que $\alpha > \frac{4}{N}$. Pour $\varphi_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on note u_n la solution de (1) telle que $u_n(0) = \varphi_n$.*

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{L^q(\mathbb{R}; W^{1,r})} = 0,$$

pour toute paire admissible (q, r) (avec $r < \frac{2N}{N-2}$ si $N \geq 3$). En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - u_n(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Enfin, en faisant une hypothèse supplémentaire de symétrie sphérique, on peut obtenir facilement le comportement asymptotique suivant.

Théorème 0.12. *Soient les hypothèses (11). On suppose de plus que $N \geq 3$. Si φ est à symétrie sphérique alors $u \in L^{p_0}(\mathbb{R}; L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$, où $p_0 = \frac{\alpha(N-1)+2}{\alpha(N-1)}(\alpha+2)$. En particulier, si $\alpha \leq \frac{2}{N} \frac{N-2}{N-1}$ alors $u \in L^q(\mathbb{R}; L^r(\mathbb{R}^N))$, pour toute paire admissible (q, r) telle que $2 \leq r \leq \alpha+2$.*

Le Théorème 0.10, qui sert dans la simplification de la Proposition de Nakanishi, se démontre simplement à partir des inégalités de Strichartz. Le Corollaire 0.11 se déduit du Théorème de Nakanishi et de la théorie de la diffusion dans le cas dissipatif (Ginibre et Velo [39], Nakanishi [62, 63]). Quant au Théorème 0.12, il se montre en utilisant les propriétés des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$ à symétrie sphérique et de l'inégalité de Morawetz (Morawetz et Strauss [61]).

Chapitre 5. Régularité de certaines solutions auto-similaires

Le principal résultat de ce chapitre est le suivant.

Théorème 0.13. *Soient $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$ et u est une solution auto-similaire positivement globale de (1) de donnée initiale $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et de profil $f \in L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$. On pose $2^* = \frac{2N}{N-2}$ si $N \geq 3$, 2^* n'importe quel réel dans l'intervalle $[\alpha + 2, \infty)$ si $N = 2$ et $2^* = \infty$ si $N = 1$. Si $T(1)\varphi \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ alors pour tout $t > 0$, $u(t) \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$. En particulier, pour tout $r \in [\alpha + 2, 2^*]$ avec $r < \infty$, $u \in C((0, \infty); L^r(\mathbb{R}^N))$.*

Le résultat suivant montre que de telles situations existent.

Corollaire 0.14. *Soient $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$ et φ une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $P_k(x)|x|^{-(p+k)}$, où P_k est un polynôme harmonique homogène de degré k (y compris $k = 0$). On suppose que $\|T(1)\varphi\|_{L^{\alpha+2}}$ est suffisamment petite, de sorte qu'il existe une unique solution auto-similaire u de (1) de donnée initiale φ . On pose $2^* = \frac{2N}{N-2}$ si $N \geq 3$, 2^* n'importe quel réel dans l'intervalle $[\alpha + 2, \infty)$ si $N = 2$ et $2^* = \infty$ si $N = 1$. Alors pour tout $t > 0$, $u(t) \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$. En particulier, pour tout $r \in [\alpha + 2, 2^*]$ avec $r < \infty$, $u \in C((0, \infty); L^r(\mathbb{R}^N))$.*

Notons que le Théorème 0.13 signifie que toute information d'intégration sur l'équation linéaire de Schrödinger se transmet, en partie, sur l'équation non-linéaire. La démonstration de ces résultats est une conséquence directe des inégalités de Strichartz.

Chapitre 1

Convergence to Scattering States

PASCAL BÉGOUT

Laboratoire d'Analyse Numérique
Université Pierre et Marie Curie
Boîte Courrier 187
4, place Jussieu 75252 Paris Cedex 05, FRANCE

e-mail : begout@ann.jussieu.fr

Abstract

In this paper, we consider global solutions of the nonlinear Schrödinger equation $iu_t + \Delta u + \lambda|u|^\alpha u = 0$, in \mathbb{R}^N , with $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, \frac{4}{N-2})$ ($\alpha \in (0, \infty)$ if $N = 1$) and $u(0) \in X$, where $X = H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(|x|^2; dx)$. We show that, under suitable conditions, if the solution u satisfies $e^{-it\Delta}u(t) - u_\pm \rightarrow 0$ in X as $t \rightarrow \pm\infty$ then $u(t) - e^{it\Delta}u_\pm \rightarrow 0$ in X as $t \rightarrow \pm\infty$. We also study the converse. Finally, we estimate $|\|u(t)\|_X - \|e^{it\Delta}u_\pm\|_X|$ under some less restrictive assumptions.

1.1 Introduction and notations

We consider the following Cauchy problem,

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \lambda|u|^\alpha u = 0, & (t, x) \in (-T_*, T^*) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0) = \varphi, & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 \leq \alpha < \infty$ if $N = 1$) and φ a given initial data.

It is well-known that if $\lambda < 0$, $\alpha > \frac{4}{N}$ and $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, then there exists $u_\pm \in H^1(\mathbb{R}^N)$ such that $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|e^{-it\Delta}u(t) - u_\pm\|_{H^1} = 0$ (Ginibre and Velo [39], Nakanishi [62, 63]). Since $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$ is an isometry on $H^1(\mathbb{R}^N)$, we also have $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - e^{it\Delta}u_\pm\|_{H^1} = 0$. Furthermore, if $\alpha > \frac{-(N-2) + \sqrt{N^2 + 12N + 4}}{2N}$ and if $\varphi \in X \equiv H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(|x|^2; dx)$, then there exist $u_\pm \in X$ such that $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|e^{-it\Delta}u(t) - u_\pm\|_X = 0$ (Tsutsumi [74]). The same result holds without assumption on the λ 's sign if the initial data is small

enough in X and if $\alpha > \frac{4}{N+2}$ (Cazenave and Weissler [25]). Note that to have these limits, we have to make a necessary assumption on α (Barab [3], Strauss [70, 72], Tsutsumi and Yajima [76]), $\frac{2}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($2 < \alpha < \infty$ if $N = 1$).

The purpose of this paper is to study the asymptotic behavior of $\|u(t) - e^{it\Delta}u_{\pm}\|_X$ under the assumption $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|e^{-it\Delta}u(t) - u_{\pm}\|_X = 0$, and the converse. In the linear case (*i.e.* : $\lambda = 0$) or if the initial data is 0, the answer is trivial since $e^{-it\Delta}u(t) - u_{\pm} \equiv u(t) - e^{it\Delta}u_{\pm} \equiv 0$, for all $t \in \mathbb{R}$. Since $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$ is an isometry on $H^1(\mathbb{R}^N)$, the equivalence on $H^1(\mathbb{R}^N)$ is trivial. But $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$ is **not** an isometry on X and so it is natural to wonder whether or not we have $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - e^{it\Delta}u_{\pm}\|_X = 0$ when $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|e^{-it\Delta}u(t) - u_{\pm}\|_X = 0$ and conversely.

This paper is organized as follows. In Section 1.2, we give the main results. In Section 1.3, we establish some *a priori* estimates. In Section 1.4, we prove Theorems 1.2.1, 1.2.4, 1.2.5 and Proposition 1.2.8. In Section 1.5, we prove Theorem 1.2.10.

Before closing this section, we give some notations which will be used throughout this paper and we recall some properties of the solutions of the nonlinear Schrödinger equation.

\bar{z} is the conjugate of the complex number z ; $\text{Re } z$ and $\text{Im } z$ are respectively the real and imaginary part of the complex number z ; $\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$; for $1 \leq p \leq \infty$, p' is the conjugate of the real number p defined by $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ and $L^p = L^p(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ with norm $\|\cdot\|_{L^p}$; $H^1 = H^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ with norm $\|\cdot\|_{H^1}$; for all $(f, g) \in L^2 \times L^2$, $(f, g) = \text{Re} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}dx$; $X = \{\psi \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}); \|\psi\|_X < \infty\}$ with norm $\|\psi\|_X^2 = \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx$; $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ is the group of isometries $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$ generated by $i\Delta$ on $L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$; C are auxiliary positive constants and $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ indicates that the constant C depends only on parameters a_1, a_2, \dots, a_n and that the dependence is continuous.

It is well-known that for every $\varphi \in X$, (1.1.1) has a unique solution $u \in C((-T_*, T^*); X)$ which satisfies the conservation of charge and energy, that is for all $t \in (-T_*, T^*)$, $\|u(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ and $E(u(t)) = E(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{\alpha+2} \|\varphi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}$. Moreover, if $\lambda \leq 0$, if $\alpha < \frac{4}{N}$ or if $\|\varphi\|_{H^1}$ is small enough then $T^* = T_* = \infty$ and $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^1)} < \infty$ (see for example Cazenave [19], Ginibre and Velo [33, 34, 35, 38], Kato [50]).

Definition 1.1.1. We say that (q, r) is an *admissible pair* if the following holds.

- (i) $2 \leq r \leq \frac{2N}{N-2}$ ($2 \leq r < \infty$ if $N = 2$, $2 \leq r \leq \infty$ if $N = 1$),
- (ii) $\frac{2}{q} = N \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right)$.

Note that in this case $2 \leq q \leq \infty$ and $q = \frac{4r}{N(r-2)}$.

Definition 1.1.2. We say that a solution $u \in C((-T_*, T^*); X)$ of (1.1.1) has a *scattering state* u_+ at $+\infty$ (respectively u_- at $-\infty$) if $T^* = \infty$ and if $u_+ \in X$ is such that $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_X = 0$ (respectively if $T_* = \infty$ and if $u_- \in X$ is such that $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|T(-t)u(t) - u_-\|_X = 0$).

We recall the Strichartz' estimates. Let $I \subseteq \mathbb{R}$, be an interval, let $t_0 \in \bar{I}$, let (q, r) and (γ, ρ) be two admissible pairs, let $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ and let $f \in L^{\rho'}(I; L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$. Then the following integral equation defined for all $t \in I$, $u(t) = T(t)\varphi + i \int_{t_0}^t T(t-s)f(s)ds$, satisfies the following inequality $\|u\|_{L^q(I, L^r)} \leq C_0 \|\varphi\|_{L^2} + C_1 \|f\|_{L^{\rho'}(I; L^{\rho'})}$, where $C_0 = C_0(N, r)$ and $C_1 = C_1(N, r, \rho)$. For more details, see Keel and Tao [55].

1.2 The main results

Theorem 1.2.1. Let $\lambda \neq 0$, $\frac{2}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($2 < \alpha < \infty$ if $N = 1$), $\varphi \in X$ and let u be the solution of (1.1.1) such that $u(0) = \varphi$. We assume that u has a scattering state u_{\pm} at $\pm\infty$ (see Definition 1.1.2). Then the following holds.

1. (a) If $N \leq 2$ and if $\alpha > \frac{4}{N}$ then $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - T(t)u_{\pm}\|_X = 0$.
- (b) If $3 \leq N \leq 5$ and if $\alpha > \frac{8}{N+2}$ then $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - T(t)u_{\pm}\|_X = 0$.
2. If $N = 1$ and $\alpha = 4$ or if $3 \leq N \leq 5$ and $\alpha = \frac{8}{N+2}$ then we have,

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t) - T(t)u_+\|_X < \infty \quad \text{and} \quad \sup_{t \leq 0} \|u(t) - T(t)u_-\|_X < \infty.$$

Remark 1.2.2. Remark that in Theorem 1.2.1, no hypothesis on the λ 's sign is made.

Remark 1.2.3. $N \in \{3, 4, 5\} \implies \frac{4}{N} < \frac{8}{N+2} < \frac{6}{N} < \frac{4}{N-2}$.
 $N \geq 6 \implies \frac{4}{N-2} \leq \frac{8}{N+2}$.

Despite the fact we do not know if $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - T(t)u_{\pm}\|_X = 0$ when $\alpha \leq \frac{8}{N+2}$ ($\alpha \leq 4/N$ if $N \leq 2$) or when $N \geq 6$, we can give an estimate of the difference of the norms, as shows the following theorem, without any restriction on the dimension space N and on α (except $\alpha > \frac{2}{N}$). Since under the scattering state assumption we always have $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - T(t)u_{\pm}\|_{H^1} = 0$, it is sufficient to estimate $|\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_{\pm}\|_{L^2}|$ as $t \rightarrow \pm\infty$.

Theorem 1.2.4. Let $\lambda < 0$, $\frac{2}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($2 < \alpha < \infty$ if $N = 1$), $\varphi \in X$ and let u be the associated solution of (1.1.1). Assume that u has a scattering state u_{\pm} at $\pm\infty$ (see Definition 1.1.2).

We define for all $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_\pm(t) = \|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_\pm\|_{L^2}$ and $h(t) = \|xu(t)\|_{L^2}^2$. Then we have the following result.

$$\sup_{t \geq 0} \| |u(t)\|_X - \|T(t)u_+\|_X | < \infty \quad \text{and} \quad \sup_{t \leq 0} \| |u(t)\|_X - \|T(t)u_-\|_X | < \infty,$$

with the following estimates.

1. If $\alpha < \frac{4}{N}$ then $-\frac{C}{\|\nabla u_\pm\|_{L^2}} \leq \liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{A}_\pm(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{A}_\pm(t) \leq \pm \frac{h'(0) + 4(xu_\pm, i\nabla u_\pm)}{4\|\nabla u_\pm\|_{L^2}}$.
2. If $\alpha > \frac{4}{N}$ then $\pm \frac{h'(0) + 4(xu_\pm, i\nabla u_\pm)}{4\|\nabla u_\pm\|_{L^2}} \leq \liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{A}_\pm(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{A}_\pm(t) \leq \frac{C}{\|\nabla u_\pm\|_{L^2}}$.
3. If $\alpha = \frac{4}{N}$ then $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{A}_\pm(t) = \pm \frac{h'(0) + 4(xu_\pm, i\nabla u_\pm)}{4\|\nabla u_\pm\|_{L^2}}$.

Furthermore, $h'(0) = 4\text{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi(x)} x \cdot \nabla \varphi(x) dx$ and $C = C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, \alpha, \lambda)$.

Theorem 1.2.5. Let $\lambda > 0$, $\frac{2}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($2 < \alpha < \infty$ if $N = 1$), $\varphi \in X$ and let u be the associated solution of (1.1.1). Assume that u has a scattering state u_\pm at $\pm\infty$ (see Definition 1.1.2).

We define for all $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_\pm(t) = \|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_\pm\|_{L^2}$ and $h(t) = \|xu(t)\|_{L^2}^2$. Then we have the following result.

$$\sup_{t \geq 0} \| |u(t)\|_X - \|T(t)u_+\|_X | < \infty \quad \text{and} \quad \sup_{t \leq 0} \| |u(t)\|_X - \|T(t)u_-\|_X | < \infty,$$

with the following estimates.

1. If $\alpha < \frac{4}{N}$ then $\pm \frac{h'(0) + 4(xu_\pm, i\nabla u_\pm)}{4\|\nabla u_\pm\|_{L^2}} \leq \liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{A}_\pm(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{A}_\pm(t) \leq \frac{C}{\|\nabla u_\pm\|_{L^2}}$.
2. If $\alpha > \frac{4}{N}$ then $-\frac{C}{\|\nabla u_\pm\|_{L^2}} \leq \liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{A}_\pm(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{A}_\pm(t) \leq \pm \frac{h'(0) + 4(xu_\pm, i\nabla u_\pm)}{4\|\nabla u_\pm\|_{L^2}}$.
3. If $\alpha = \frac{4}{N}$ then $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{A}_\pm(t) = \pm \frac{h'(0) + 4(xu_\pm, i\nabla u_\pm)}{4\|\nabla u_\pm\|_{L^2}}$.

Furthermore, $h'(0) = 4\text{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi(x)} x \cdot \nabla \varphi(x) dx$ and $C = C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, \alpha, \lambda)$.

Remark 1.2.6. By Theorem 1.2.1 and 2 of Theorems 1.2.4 and 1.2.5, if $\alpha > \frac{4}{N}$ when $N \leq 2$ or if $\alpha > \frac{8}{N+2}$ when $N \in \{3, 4, 5\}$, we have

$$\begin{aligned} \text{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u_-(x)} x \cdot \nabla u_-(x) dx &\leq \text{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi(x)} x \cdot \nabla \varphi(x) dx \leq \text{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u_+(x)} x \cdot \nabla u_+(x) dx, \quad \text{if } \lambda < 0, \\ \text{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u_+(x)} x \cdot \nabla u_+(x) dx &\leq \text{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi(x)} x \cdot \nabla \varphi(x) dx \leq \text{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u_-(x)} x \cdot \nabla u_-(x) dx, \quad \text{if } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Remark 1.2.7. If $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ satisfies $\varphi \equiv a\psi$ with $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ and $a \in \mathbb{C}$, then we have $h'(0) \equiv \frac{d}{dt} \|xu(t)\|_{L^2}^2|_{t=0} \equiv 4\text{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi(x)} x \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0$.

The following proposition offers others estimates.

Proposition 1.2.8. Let $\lambda \neq 0$, $\frac{2}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($2 < \alpha < \infty$ if $N = 1$), $\varphi \in X$ and let u be the solution of (1.1.1) such that $u(0) = \varphi$. Assume that u has a scattering state u_{\pm} at $\pm\infty$. Then the following estimates hold.

1. If $\lambda < 0$, $\limsup_{t \rightarrow \pm\infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_{\pm}\|_{L^2}) \leq \frac{\|xu_{\pm}\|_{L^2} \|\nabla u_{\pm}\|_{L^2} \pm (xu_{\pm}, i\nabla u_{\pm})}{\|\nabla u_{\pm}\|_{L^2}}$.
2. If $\lambda > 0$, $\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_{\pm}\|_{L^2}) \geq -\frac{\|xu_{\pm}\|_{L^2} \|\nabla u_{\pm}\|_{L^2} \mp (xu_{\pm}, i\nabla u_{\pm})}{\|\nabla u_{\pm}\|_{L^2}}$.

Remark 1.2.9. By 3 of Theorems 1.2.4 and 1.2.5 and by Proposition 1.2.8, if $\alpha = \frac{4}{N}$ then we have,

$$\begin{aligned} -\|xu_{-}\|_{L^2} \|\nabla u_{-}\|_{L^2} &\leq \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|xu(t)\|_{L^2}^2|_{t=0} \leq \|xu_{+}\|_{L^2} \|\nabla u_{+}\|_{L^2}, \quad \text{if } \lambda < 0, \\ -\|xu_{+}\|_{L^2} \|\nabla u_{+}\|_{L^2} &\leq \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|xu(t)\|_{L^2}^2|_{t=0} \leq \|xu_{-}\|_{L^2} \|\nabla u_{-}\|_{L^2}, \quad \text{if } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Now we give the result concerning the converse.

Theorem 1.2.10. Let $\lambda \neq 0$, $\frac{2}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($2 < \alpha < \infty$ if $N = 1$), $\varphi \in X$ and u be the associated solution of (1.1.1). Assume that u is global in time and there exists $u_{+} \in X$ and $u_{-} \in X$ such that $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - T(t)u_{\pm}\|_X = 0$. Let $\alpha_0 = \frac{-(N-2) + \sqrt{N^2 + 12N + 4}}{2N}$. Then, we have the following result.

1. If $\lambda < 0$ and if $\alpha \geq \alpha_0$ ($\alpha > \alpha_0$ if $N = 2$) then $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|T(-t)u(t) - u_{\pm}\|_X = 0$.
2. If $\lambda > 0$ and if $\alpha > \frac{4}{N}$ then $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|T(-t)u(t) - u_{\pm}\|_X = 0$.
3. If $\alpha > \frac{4}{N+2}$ and if $\|\varphi\|_X$ is small enough then $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|T(-t)u(t) - u_{\pm}\|_X = 0$.

Remark 1.2.11. Note that in the case 2, no hypothesis on the $\|\varphi\|_X$'s size is made.

Remark 1.2.12. Assume there exists $u_{\pm}, v_{\pm} \in X$ such that $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|T(-t)u(t) - u_{\pm}\|_X = 0$ and $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - T(t)v_{\pm}\|_X = 0$. Then we have, $u_{+} = v_{+}$ and $u_{-} = v_{-}$. Indeed, since $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ and $T(t)$ is an isometry on $L^2(\mathbb{R}^N)$, we have $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|T(-t)u(t) - u_{\pm}\|_{L^2} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|T(-t)u(t) - v_{\pm}\|_{L^2} = 0$. Hence the result.

Remark 1.2.13. $\alpha_0 \in \left(\frac{4}{N+2}, \frac{4}{N}\right)$ ($\alpha_0 \in \left(\frac{2}{N}, \frac{4}{N}\right)$ if $N = 1$).

1.3 A priori estimates

Throughout this section, we make the following assumptions.

$$\begin{cases} \lambda \neq 0, \frac{2}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2} \text{ (} 2 < \alpha < \infty \text{ if } N = 1\text{)}, \varphi \in X, u \in C(\mathbb{R}; X) \text{ is the} \\ \text{associated solution of (1.1.1) and has a scattering state } u_{\pm} \in X \text{ at } \pm \infty. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

We define the following real.

$$\gamma^* = \begin{cases} \frac{\alpha - 2}{2}, & \text{if } N = 1, \\ \frac{\alpha(N + 2) - 4}{4}, & \text{if } N \geq 2. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Proposition 1.3.1. *Assume u satisfies (1.3.1) (we can suppose instead of u has a scattering state that we only have $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X < \infty$). Let (q, r) be an admissible pair (see Definition 1.1.1). Then the following holds.*

1. For all $t \neq 0$, $\|u(t)\|_{L^r} \leq C|t|^{-\frac{2}{q}}$, where $C = C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, r)$.
2. If furthermore $\alpha > \frac{4}{N+2}$ then $u \in L^q(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$.

Proof. We follow the method of Cazenave [19] (see Theorem 7.2.1 and Corollary 7.2.4). We set $w(t, x) = e^{-i\frac{|x|^2}{4t}} u(t, x)$ and $f(u) = \lambda|u|^\alpha u$. We already know that for every admissible pair (q, r) , $u \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$ (see for example Cazenave [19]; Theorem 5.3.1 and Remark 5.3). We only prove the case $t > 0$, the case $t < 0$ following by applying the result for $t > 0$ to $\overline{u(-t)}$ solution of (1.1.1) with initial value $\overline{\varphi}$. We proceed in 2 steps.

Step 1. $\|u(t)\|_{L^r} \leq C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, r)|t|^{-\frac{2}{q}}$, for every admissible pair (q, r) and for all $t \neq 0$.

We have $\|xT(-t)u(t)\|_{L^2} = \|(x + 2it\nabla)u(t)\|_{L^2} \leq C$. Moreover, $(x + 2it\nabla)u(t, x) = 2ite^{-i\frac{|x|^2}{4t}} \nabla w(t, x)$.

Using the Gagliardo-Nirenberg's inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^r} &\equiv \|w(t)\|_{L^r} \leq C \|\nabla w(t)\|_{L^2}^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|w(t)\|_{L^2}^{1 - N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \\ &\leq C (\|(x + 2it\nabla)u(t)\|_{L^2} |t|^{-1})^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \\ &\leq C |t|^{-N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})}. \end{aligned}$$

Hence the result.

Step 2. $u \in L^q(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$ for every admissible pair (q, r) .

By the Strichartz' estimates and by Hölder's inequality (applying twice), we have

$$\|f(u)\|_{L^{q'}((0, \infty); W^{1, r'})} \leq C \left(\|u\|_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}((0, 1); L^{\frac{r\alpha}{r-2}})} + \|u\|_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}((1, \infty); L^{\frac{r\alpha}{r-2}})} \right)^\alpha \|u\|_{L^q((0, \infty); W^{1, r})}, \quad (1.3.3)$$

$$\|u\|_{L^q((S, \infty); W^{1, r})} \leq C + C \|u\|_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}((S, \infty); L^{\frac{r\alpha}{r-2}})}^\alpha \|u\|_{L^q((S, \infty); W^{1, r})}, \quad (1.3.4)$$

for all $S > 0$ and for every admissible pair (q, r) .

Case $N \geq 3$. We set $r = \frac{4N}{2N - \alpha(N-2)}$. Since $\alpha \in \left(0, \frac{4}{N-2}\right)$, we have $r \in \left(2, \frac{2N}{N-2}\right)$. So we can take q such that (q, r) is an admissible pair. For this choice of r , we have $\frac{r\alpha}{r-2} = \frac{2N}{N-2}$ and $\frac{q}{q-2} = \frac{4}{4 - \alpha(N-2)}$. By (1.3.4) and the first step we have for all $S > 0$,

$$\|u\|_{L^q((S, \infty); W^{1, r})} \leq C + C \left(\int_S^\infty t^{-\frac{4\alpha}{4 - \alpha(N-2)}} dt \right)^{\frac{q-2}{q}} \|u\|_{L^q((S, \infty); W^{1, r})}.$$

And $\frac{4\alpha}{4 - \alpha(N-2)} > 1 \iff \alpha > \frac{4}{N+2}$. Thus, there exists $S_0 > 0$ large enough such that

$$C \left(\int_{S_0}^\infty t^{-\frac{4\alpha}{4 - \alpha(N-2)}} dt \right)^{\frac{q}{q-2}} \leq \frac{1}{2},$$

and then,

$$\|u\|_{L^q((S_0, \infty); W^{1, r})} \leq 2C.$$

For this choice of (q, r) , we deduce from (1.3.3) that $\|f(u)\|_{L^{q'}((0, \infty); W^{1, r'})} < \infty$. Hence the result for every admissible pair by the Strichartz' estimates.

Case $N=2$. Since $\alpha > 1$ is fixed, we take $r > 2$ sufficiently close to 2 to have $\alpha > \frac{2(r-1)}{r}$. So, in particular, $\frac{r\alpha}{r-2} > 2$. Moreover, $\frac{q}{q-2} = \frac{r}{2}$ where q is such that (q, r) is an admissible pair. So by Hölder's inequality (twice), (1.3.4) and the first step, we have for all $S > 0$,

$$\|u\|_{L^q((S, \infty); W^{1, r})} \leq C + C \left(\int_S^\infty t^{-\frac{r\alpha - 2(r-2)}{2}} dt \right)^{\frac{2}{r}} \|u\|_{L^q((S, \infty); W^{1, r})}.$$

And $\frac{r\alpha - 2(r-2)}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{2(r-1)}{r}$. And we conclude exactly as the case $N \geq 3$.

Case $N=1$. We take (1.3.3) with the admissible pair $(\infty, 2)$ and apply the first step. So,

$$\begin{aligned} \|f(u)\|_{L^1((0, \infty); H^1)} &\leq C \left(\|u\|_{L^\alpha((0, 1); L^\infty)} + \|u\|_{L^\alpha((1, \infty); L^\infty)} \right)^\alpha \|u\|_{L^\infty((0, \infty); H^1)} \\ &\leq C + C \|u\|_{L^\alpha((1, \infty), L^\infty)}^\alpha \leq C + C \int_1^\infty t^{-\frac{\alpha}{2}} dt < \infty. \end{aligned}$$

Hence the result for every admissible pair by the Strichartz' estimates. \square

Remark 1.3.2. We set $v(t, x) = (x + 2it\nabla)u(t, x)$. In the same way as the above proof, we can show under the assumptions of Proposition 1.3.1 that if $\alpha > \frac{4}{N+2}$, then for every admissible pair (q, r) , $v \in L^q(\mathbb{R}; L^r(\mathbb{R}^N))$ (follow the step 2 of the proof of Corollary 7.2.4 of Cazenave [19]; consider separately the three cases $N = 1$, $N = 2$, $N \geq 3$ and replace the admissible pairs therein by the proof of Proposition 1.3.1 one).

Proposition 1.3.3. *Let γ^* be defined by (1.3.2). Assume u satisfies (1.3.1) and $\alpha > \frac{4}{N+2}$. Then, the following estimates hold.*

1. *If $N = 1$ then for all $t \neq 0$ we have $\|T(-t)u(t) - u_{\pm}\|_{H^1} \leq C|t|^{-\gamma^*}$.*
2. *If $N = 2$ then for all $t \neq 0$ and for any $\gamma < \gamma^*$, we have $\|T(-t)u(t) - u_{\pm}\|_{H^1} \leq C|t|^{-\gamma}$.*
3. *If $N \geq 3$ then for all $t \neq 0$ we have $\|T(-t)u(t) - u_{\pm}\|_{H^1} \leq C|t|^{-\gamma^*}$.*

Proof. Denote $f(u) = \lambda|u|^{\alpha}u$. We only prove the case $t > 0$, the case $t < 0$ following by applying the result for $t > 0$ to $v(t) = \overline{u(-t)}$ solution of (1.1.1) with $v(0) = \overline{\varphi}$. In this case, $v_+ = \overline{u_-}$ and the result follows. By applying the Strichartz' estimates and Hölder's inequality (twice), we have

$$\|u(t) - T(t)u_+\|_{H^1} \leq C\|f(u)\|_{L^{q'}(t,\infty);W^{1,r'}} \leq C\|u\|_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}(t,\infty);L^{\frac{r\alpha}{r-2}}}^{\alpha}\|u\|_{L^q(\mathbb{R};W^{1,r})},$$

for every admissible pair (q, r) and for all $t > 0$. Thus, by Proposition 1.3.1, 2, we have

$$\|u(t) - T(t)u_+\|_{H^1} \leq C\|u\|_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}(t,\infty);L^{\frac{r\alpha}{r-2}}}^{\alpha},$$

for every admissible pair (q, r) and for all $t > 0$.

Now, we conclude by the same way than for the step 2 of the proof of Proposition 1.3.1, using 1 of this proposition, considering separately the three cases $N = 1$, $N = 2$, $N \geq 3$, and using the same admissible pairs. This achieves the proof. \square

1.4 Proof of Theorems 1.2.1, 1.2.4, 1.2.5 and Proposition 1.2.8

Throughout this section, we assume that u satisfies (1.3.1).

Proof of Theorem 1.2.1. Since $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|T(-t)u(t) - u_{\pm}\|_X = 0$ and $T(t)$ is an isometry on H^1 , we have $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - T(t)u_{\pm}\|_{H^1} = 0$. Thus, it is sufficient to prove that $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|xu(t) - xT(t)u_{\pm}\|_{L^2} = 0$ to obtain 1 and that $\sup_{t \geq 0} \|xu(t) - xT(t)u_+\|_{L^2} < \infty$ and $\sup_{t \leq 0} \|xu(t) - xT(t)u_-\|_{L^2} < \infty$ to obtain 2. Suppose that the result is proved for $t > 0$. Then we apply it to $v(t) = \overline{u(-t)}$ solution of (1.1.1) with initial data $v(0) = \overline{\varphi}$. Then $v_+ = \overline{u_-}$ is the scattering state at $+\infty$ of $\overline{u(-t)}$. And using the identity $T(t)\overline{\psi} = \overline{T(-t)\psi}$ which holds for all $t \in \mathbb{R}$ and for every $\psi \in L^2$, we obtain the result for $t < 0$. So to conclude, it is sufficient to prove that $\lim_{t \rightarrow \infty} \|xu(t) - xT(t)u_+\|_{L^2} = 0$ to obtain 1 and $\sup_{t \geq 0} \|xu(t) - xT(t)u_+\|_{L^2} < \infty$ to obtain 2. We have

$$\begin{aligned} xu(t) - xT(t)u_+ &= xu(t) - T(t)xu_+ + 2itT(t)\nabla u_+ \\ &= xu(t) + 2it\nabla u(t) - T(t)xu_+ + 2itT(t)\nabla u_+ - 2it\nabla u(t) \\ &= T(t)[(xT(-t)u(t) - xu_+) + 2it(\nabla u_+ - T(-t)\nabla u(t))], \end{aligned}$$

for all $t > 0$. With Proposition 1.3.3, we obtain

$$\begin{aligned} \|xu(t) - xT(t)u_+\|_{L^2} &\leq \|xT(-t)u(t) - xu_+\|_{L^2} + 2t\|T(-t)\nabla u(t) - \nabla u_+\|_{L^2} \\ &\leq \|xT(-t)u(t) - xu_+\|_{L^2} + Ct^{-(\gamma-1)}, \end{aligned}$$

for all $t > 0$ and for all $\gamma \in (0, \gamma^*]$ if $N \neq 2$ and for all $\gamma \in (0, \gamma^*)$ if $N = 2$, where γ^* is defined by (1.3.2). And by assumption, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|xT(-t)u(t) - xu_+\|_{L^2} = 0$ and $\gamma^* - 1 > 0$ if and only if $\alpha > \frac{8}{N+2}$ if $N \geq 3$ and $\alpha > \frac{4}{N}$ if $N \leq 2$. Thus, in the above expression, it is sufficient to choose $\gamma = \gamma^*$ if $N \neq 2$, and $\gamma \in (0, \gamma^*)$ close enough to γ^* if $N = 2$. Hence the result. \square

Remark 1.4.1. Since we do not have the estimate 2 of Proposition 1.3.3 for $\gamma = \gamma^*$, we do not know whether or not $\sup_{t \geq 0} \|u(t) - T(t)u_+\|_X < \infty$ and $\sup_{t \leq 0} \|u(t) - T(t)u_-\|_X < \infty$ when $N = 2$ and $\alpha = \frac{4}{N}$.

We define the following function h by

$$\forall t \in (-T_*, T^*), \quad h(t) = \|xu(t)\|_{L^2}^2. \quad (1.4.1)$$

Lemma 1.4.2. *Let u satisfying (1.3.1) and let h be defined by (1.4.1). Then $h \in C^2(\mathbb{R})$, and we have*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} h'(t) &= 4\text{Im} \int \overline{u(t, x)} x \cdot \nabla u(t, x) dx, \\ h''(t) &= 2N\alpha \|\nabla u_+\|_{L^2}^2 - 2(N\alpha - 4) \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2. \end{cases}$$

Furthermore, if $\lambda < 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\nabla u(t)\|_{L^2} \leq \|\nabla u_+\|_{L^2}, \quad (1.4.2)$$

and if $\lambda > 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\nabla u(t)\|_{L^2} \geq \|\nabla u_+\|_{L^2}. \quad (1.4.3)$$

Proof. See Ginibre and Velo [35] or Cazenave [19], Proposition 6.4.2 to have $h \in C^2(\mathbb{R})$, the expression of h' and $\forall t \in \mathbb{R}$, $h''(t) = 4N\alpha E(\varphi) - 2(N\alpha - 4) \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2$. Furthermore, using the conservation of energy and $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} = 0$ (Proposition 1.3.1), we obtain $\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 = 2E(\varphi)$. Which gives, with the above identity, the desired expression of h'' . Finally, with the equality $\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 = 2E(\varphi)$ and the conservation of energy, we obtain (1.4.2) if $\lambda < 0$ and (1.4.3) if $\lambda > 0$. \square

Now, we establish 2 lemmas which will be used to prove Theorem 1.2.4.

Lemma 1.4.3. *Let u satisfying (1.3.1) and let h be defined by (1.4.1). Assume that $\lambda < 0$. Then the following holds.*

- (i) If $\alpha < \frac{4}{N}$ then $\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}) \leq \frac{h'(0) + 4(xu_+, i\nabla u_+)}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}}$.
- (ii) If $\alpha > \frac{4}{N}$ then $\liminf_{t \rightarrow \infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}) \geq \frac{h'(0) + 4(xu_+, i\nabla u_+)}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}}$.
- (iii) If $\alpha = \frac{4}{N}$ then $\lim_{t \rightarrow \infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}) = \frac{h'(0) + 4(xu_+, i\nabla u_+)}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}}$.

Proof. We proceed in 4 steps.

Step 1. (a) If $\alpha < \frac{4}{N}$ then $\forall t \geq 0$, $h'(t) \geq h'(0) + 2N\alpha\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t$.

(b) If $\alpha > \frac{4}{N}$ then $\forall t \geq 0$, $h'(t) \geq h'(0) + 8\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t$.

(c) If $\alpha = \frac{4}{N}$ then $\forall t \in \mathbb{R}$, $h'(t) = h'(0) + 8\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t$.

We integrate between 0 and $t \geq 0$ the function h'' of Lemma 1.4.2.

$\alpha < \frac{4}{N} \implies -2(N\alpha - 4) \geq 0 \implies$ (a).

$\alpha > \frac{4}{N} \implies -2(N\alpha - 4) \leq 0$ with (1.4.2) \implies (b).

$\alpha = \frac{4}{N} \implies -2(N\alpha - 4) = 0 \implies$ (c).

Step 2. (a) If $\alpha < \frac{4}{N}$ then $\forall t \geq 0$, $h'(t) \leq h'(0) + 8\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t$.

(b) If $\alpha > \frac{4}{N}$ then $\forall t \geq 0$, $h'(t) \leq h'(0) + 2N\alpha\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t$.

We integrate between 0 and $t \geq 0$ the function h'' of Lemma 1.4.2.

$\alpha < \frac{4}{N} \implies -2(N\alpha - 4) > 0$ and (1.4.2) \implies (a).

$\alpha > \frac{4}{N} \implies$ (b).

Step 3. (a) If $\alpha < \frac{4}{N}$ then $\forall t \geq 0$,

$$\|x\varphi\|_{L^2}^2 + h'(0)t + N\alpha\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2 \leq h(t) \leq \|x\varphi\|_{L^2}^2 + h'(0)t + 4\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2.$$

(b) If $\alpha > \frac{4}{N}$ then $\forall t \geq 0$,

$$\|x\varphi\|_{L^2}^2 + h'(0)t + 4\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2 \leq h(t) \leq \|x\varphi\|_{L^2}^2 + h'(0)t + N\alpha\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2.$$

(c) If $\alpha = \frac{4}{N}$ then $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \|x\varphi\|_{L^2}^2 + h'(0)t + 4\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2$.

It is sufficient to integrate between 0 and $t \geq 0$ the formulas of steps 1 and 2 to obtain the step 3.

Step 4. Conclusion.

We set : $g(t) = \sqrt{\|x\varphi\|_{L^2}^2 + h'(0)t + 4\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2}$, $t > 0$ large enough.

Then for $t > 0$ large enough, we have the following asymptotic development :

$$g(t) = 2\|\nabla u_+\|_{L^2} t + \frac{h'(0)}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}} + \frac{\|x\varphi\|_{L^2}^2}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t} + o\left(\frac{1}{t}\right). \quad (1.4.4)$$

In the same way, for $t > 0$ large enough, we have :

$$\|xT(t)u_+\|_{L^2} = 2\|\nabla u_+\|_{L^2}t - \frac{(xu_+, i\nabla u_+)}{\|\nabla u_+\|_{L^2}} + \frac{\|xu_+\|_{L^2}^2}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}t} + o\left(\frac{1}{t}\right). \quad (1.4.5)$$

And, applying the step 3 (a), (1.4.4) and (1.4.5) and taking $\limsup_{t \rightarrow \infty}$, we get (i). Indeed,

$$\begin{aligned} & \|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2} \\ \leq & 2\|\nabla u_+\|_{L^2}t + \frac{h'(0)}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}} + \frac{\|x\varphi\|_{L^2}^2}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}t} - 2\|\nabla u_+\|_{L^2}t + \frac{(xu_+, i\nabla u_+)}{\|\nabla u_+\|_{L^2}} - \frac{\|xu_+\|_{L^2}^2}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \\ = & \frac{h'(0)}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}} + \frac{\|x\varphi\|_{L^2}^2}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}t} + \frac{(xu_+, i\nabla u_+)}{\|\nabla u_+\|_{L^2}} - \frac{\|xu_+\|_{L^2}^2}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}t} + o\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Hence (i) by taking $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ in the above expression.

By applying the step 3 (b), (1.4.4) and (1.4.5) and taking $\liminf_{t \rightarrow \infty}$, we get (ii) by the same way.

By applying the step 3 (c), (1.4.4) and (1.4.5) and letting $t \rightarrow \infty$, we get (iii) by the same way. \square

Lemma 1.4.4. *Let u satisfying (1.3.1). Assume that $\lambda < 0$. Then the following holds.*

- (i) If $\alpha < \frac{4}{N}$ then $\liminf_{t \rightarrow \infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}) \geq -\frac{C}{\|\nabla u_{\pm}\|_{L^2}}$.
- (ii) If $\alpha > \frac{4}{N}$ then $\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}) \leq \frac{C}{\|\nabla u_{\pm}\|_{L^2}}$.

Furthermore, $C = C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, \alpha, \lambda)$.

Proof. We proceed in 2 steps. Let h be defined by (1.4.1).

Step 1. $\forall t \geq 1$, $-\int_1^t \int_1^s \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds \leq C + Ct^{-\frac{N\alpha-4}{2}} + Ct + \|\nabla u_+\|^2 t - \frac{1}{2}\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2$, where $C = C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, \alpha, \lambda)$.

By Proposition 1.3.1, we have $\|u(\sigma)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \leq C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, \alpha)\sigma^{-\frac{N\alpha}{2}}$, for all $\sigma > 0$. With the conservation of energy and the formula $\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 = 2E(\varphi)$, we deduce that for all $\sigma > 0$,

$$\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 - \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 \leq C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, \alpha, \lambda)\sigma^{-\frac{N\alpha}{2}}$$

(since $\lambda < 0$). Integrating this expression over $[1, t] \times [1, s]$, we obtain the desired result.

Step 2. Conclusion.

(i) Lemma 1.4.2 implies that for every $t \geq 0$,

$$h(t) = \|x\varphi\|_{L^2}^2 + h'(0)t + N\alpha\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2 - 2(N\alpha - 4) \int_0^t \int_0^s \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds. \quad (1.4.6)$$

By (1.4.6) and step 1, we obtain,

$$\forall t \geq 1, h(t) \geq C + h'(0)t + N\alpha\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2 + Ct^{\frac{4-N\alpha}{2}} - Ct + 2(N\alpha - 4)\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t - (N\alpha - 4)\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2.$$

And so for all $t > 1$, $h(t) \geq C + Ct^{\frac{4-N\alpha}{2}} + (h'(0) - 2(4 - N\alpha)\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 - C)t + 4\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2$. By an asymptotic development on this last inequality, we obtain

$$\|xu(t)\|_{L^2} \geq 2\|\nabla u_+\|_{L^2} t + Ct^{-1} + Ct^{-\frac{N\alpha-2}{2}} + \frac{h'(0) - 2(4 - N\alpha)\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 - C}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}} + o\left(\frac{1}{t}\right),$$

for all $t > 0$ large enough. From this last expression and (1.4.5), we obtain (i) (see the end of the proof of (i) of Lemma 1.4.3).

(ii) From (1.4.6) and step 1, we obtain, for all $t > 1$,

$$h(t) \leq C + h'(0)t + N\alpha\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2 + Ct^{\frac{4-N\alpha}{2}} + Ct + 2(N\alpha - 4)\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t - (N\alpha - 4)\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2.$$

And so, for all $t > 1$, $h(t) \leq C + Ct^{\frac{4-N\alpha}{2}} + (h'(0) + 2(N\alpha - 4)\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 + C)t + 4\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2$. By an asymptotic development on this last inequality, we obtain

$$\|xu(t)\|_{L^2} \leq 2\|\nabla u_+\|_{L^2} t + Ct^{-1} + Ct^{-\frac{N\alpha-2}{2}} + \frac{h'(0) + 2(4 - N\alpha)\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 + C}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}} + o\left(\frac{1}{t}\right),$$

for all $t > 0$ large enough. With this last expression and (1.4.5), we obtain (ii) (see the end of the proof of (i) of Lemma 1.4.3). \square

Now, we are able to prove Theorem 1.2.4.

Proof of Theorem 1.2.4. As for the proof of Theorem 1.2.1, it is sufficient to show that $|\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}|$ remains bounded as $t \rightarrow \infty$. Lemmas 1.4.3 and 1.4.4 achieve the proof and give the desired estimates. \square

Now, we establish 2 lemmas which will be used to prove Theorem 1.2.5. The proof is very similar to the Theorem 1.2.4 one.

Lemma 1.4.5. *Let u satisfying (1.3.1) and let h be defined by (1.4.1). Assume that $\lambda > 0$. Then the following holds.*

- (i) If $\alpha < \frac{4}{N}$ then $\liminf_{t \rightarrow \infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}) \geq \frac{h'(0) + 4(xu_+, i\nabla u_+)}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}}$.
- (ii) If $\alpha > \frac{4}{N}$ then $\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}) \leq \frac{h'(0) + 4(xu_+, i\nabla u_+)}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}}$.
- (iii) If $\alpha = \frac{4}{N}$ then $\lim_{t \rightarrow \infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}) = \frac{h'(0) + 4(xu_+, i\nabla u_+)}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}}$.

Proof. We proceed as for the proof of Lemma 1.4.3, using (1.4.3) instead of (1.4.2). \square

Lemma 1.4.6. *Let u satisfying (1.3.1). Assume that $\lambda > 0$. Then the following holds.*

- (i) If $\alpha < \frac{4}{N}$ then $\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}) \leq \frac{C}{\|\nabla u_\pm\|_{L^2}}$.
- (ii) If $\alpha > \frac{4}{N}$ then $\liminf_{t \rightarrow \infty} (\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}) \geq -\frac{C}{\|\nabla u_\pm\|_{L^2}}$.

Furthermore, $C = C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, \alpha, \lambda)$.

Proof. We proceed in 2 steps.

Step 1. $\forall t \geq 1$, $-\int_1^t \int_1^s \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds \geq -C - Ct^{-\frac{N\alpha-4}{2}} - Ct + \|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t - \frac{1}{2}\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 t^2$, where $C = C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, \alpha, \lambda)$.

By Proposition 1.3.1, we have $\|u(\sigma)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \leq C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, \alpha)\sigma^{-\frac{N\alpha}{2}}$, for all $\sigma > 0$. With the conservation of energy and the equality $\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 = 2E(\varphi)$, we deduce that for all $\sigma > 0$,

$$\|\nabla u_+\|_{L^2}^2 - \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 \geq -C(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(-t)u(t)\|_X, N, \alpha, \lambda)\sigma^{-\frac{N\alpha}{2}}$$

(since $\lambda > 0$). Integrating this expression over $[1, t] \times [1, s]$, we get the desired result.

Step 2. Conclusion.

First, note that we have for all $t > 1$,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^s \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds \\ = & \int_0^t \int_0^1 \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds + \int_0^1 \int_1^s \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds + \int_1^t \int_1^s \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds \\ \leq & \int_0^t \int_0^1 \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds + \int_1^t \int_1^s \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds. \end{aligned}$$

And so,

$$\int_0^t \int_0^s \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda)t + \int_1^t \int_1^s \|\nabla u(\sigma)\|_{L^2}^2 d\sigma ds,$$

for all $t > 1$. And we proceed as for the proof of Lemma 1.4.4. \square

Now, we are able to prove Theorem 1.2.5.

Proof of Theorem 1.2.5. As for the proof of Theorem 1.2.1, it is sufficient to show that $\|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2}$ remains bounded as $t \rightarrow \infty$. Lemmas 1.4.5 and 1.4.6 achieve the proof and give the desired estimates. \square

Proof of Proposition 1.2.8. By Cauchy-Schwarz' inequality, we have

$$\|xu(t)\|_{L^2} - 2t\|\nabla u(t)\|_{L^2} \leq \|xT(-t)u(t)\|_{L^2}, \quad (1.4.7)$$

for all $t \in \mathbb{R}$ and for every $\lambda \neq 0$.

We have also the following estimate.

$$\|xT(t)u_+\|_{L^2} = 2t\|\nabla u_+\|_{L^2} - \frac{(xu_+, i\nabla u_+)}{\|\nabla u_+\|_{L^2}} + \frac{\|xu_+\|_{L^2}^2}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}t} + o\left(\frac{1}{t}\right), \quad (1.4.8)$$

for all $t > 0$ large enough and for every $\lambda \neq 0$.

We first establish 1 in the case $t > 0$ that we note in this proof 1_+ . 1 in the case $t < 0$ is obviously noted 1_- . By (1.4.7), (1.4.8) and (1.4.2), we have

$$\begin{aligned} & \|xu(t)\|_{L^2} - \|xT(t)u_+\|_{L^2} \\ \leq & 2t\|\nabla u(t)\|_{L^2} + \|xT(-t)u(t)\|_{L^2} - 2t\|\nabla u_+\|_{L^2} + \frac{(xu_+, i\nabla u_+)}{\|\nabla u_+\|_{L^2}} - \frac{\|xu_+\|_{L^2}^2}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \\ \leq & \|xT(-t)u(t)\|_{L^2} + \frac{(xu_+, i\nabla u_+)}{\|\nabla u_+\|_{L^2}} - \frac{\|xu_+\|_{L^2}^2}{4\|\nabla u_+\|_{L^2}t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

for all $t > 0$ large enough.

Hence 1_+ by taking $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ in the above expression. 1_- follows by applying 1_+ to v solution of (1.1.1)

such that $v(0) = \bar{\varphi}$. Indeed, by uniqueness $v(t) = \overline{u(-t)}$ and so $v_+ = \bar{u}_-$. Then, using 1_+ and the identity $T(t)\bar{\psi} = \overline{T(-t)\psi}$ which holds for all $t \in \mathbb{R}$ and $\psi \in L^2$, we obtain 1_- .

Using (1.4.3) instead of (1.4.2), we obtain 2 by the same way. \square

1.5 Proof of Theorem 1.2.10

Proof of Theorem 1.2.10. We proceed in 2 steps.

Step 1. We have 1 and 3.

It is well-known that there exist $v_{\pm} \in X$ such that $T(-t)u(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{X} v_{\pm}$ (Cazenave and Weissler [25]). The result follows from Remark 1.2.12.

Step 2. We have 2.

We set $v(t, x) = (x + 2it\nabla)u(t, x)$, $w(t, x) = e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}u(t, x)$ and $f(u) = \lambda|u|^\alpha u$. Since $T(t)$ is an isometry on $H^1(\mathbb{R}^N)$, we only have to show that $xT(-t)u(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{L^2(\mathbb{R}^N)} xu_{\pm}$. We have $X \hookrightarrow L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$, thus $u(t) - T(t)u_{\pm} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)} 0$ and so $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|T(t)u_{\pm}\|_{L^{\alpha+2}} = 0$. Therefore, since $\alpha > \frac{4}{N}$,

$$u \in L^q(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N)), \quad (1.5.1)$$

$$v \in L^q(\mathbb{R}; L^r(\mathbb{R}^N)), \quad (1.5.2)$$

for every admissible pair (q, r) (see for example Cazenave [19], Theorem 7.5.3 for (1.5.1); following the proof of this theorem with v instead of u , yields (1.5.2)).

From (1.5.2) we have in particular, $v \in L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N))$ and so by Proposition 1.3.1, 1,

$$\|u(t)\|_{L^r} \leq C|t|^{-\frac{2}{q}}, \quad (1.5.3)$$

for every admissible pair (q, r) and for all $t \neq 0$.

We have the following integral equation. For all $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = T(t)u_{\pm} - i \int_t^{\pm\infty} T(t-s)f(u(s))ds,$$

from which we deduce,

$$\forall t \in \mathbb{R}, T(t)(xT(-t)u(t) - xu_{\pm}) = -i \int_t^{\pm\infty} T(t-s)(x + 2is\nabla)f(u(s))ds. \quad (1.5.4)$$

We also have $(x + 2it\nabla)u(t, x) = 2ite^{i\frac{|x|^2}{4t}}\nabla w(t, x)$. Moreover, $e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}f(u(t, x)) = f(w(t, x))$. Thus, $(x + 2it\nabla)f(u(t, x)) = 2ite^{i\frac{|x|^2}{4t}}\nabla f(w(t, x))$, and so $|(x + 2it\nabla)f(u(t, x))| = 2|t||\nabla f(w(t, x))|$. Finally,

$\|(x+2it\nabla)f(u)\|_{L^{r'}} = 2|t|\|\nabla f(w)\|_{L^{r'}} \leq C|t|\|w\|^\alpha \|\nabla w\|_{L^{r'}}$. From this inequality, by using the Hölder's inequality twice, we deduce that (note that $|w| = |u|$)

$$\|(x+2it\nabla)f(u)\|_{L^{q'}(I, L^{r'})} \leq C\|u\|_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}(I, L^{\frac{r\alpha}{r-2})}^\alpha \|(x+2it\nabla)u\|_{L^q(I, L^r)}, \quad (1.5.5)$$

for every admissible pair (q, r) and for any interval $I \subseteq \mathbb{R}$. From (1.5.4), from the Strichartz' estimates, from (1.5.5) and from (1.5.2), we have

$$\begin{aligned} \|xT(-t)u(t) - xu_+\|_{L^2} &= \|T(t)(xT(-t)u(t) - xu_+)\|_{L^2} \\ &\leq C\|(x+2is\nabla)f(u)\|_{L^{q'}((t, \infty); L^{r'})} \\ &\leq C\|u\|_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}((t, \infty); L^{\frac{r\alpha}{r-2})}^\alpha \|v\|_{L^q(\mathbb{R}; L^r)} \\ &\leq C\|u\|_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}((t, \infty); L^{\frac{r\alpha}{r-2})}^\alpha, \end{aligned}$$

for every admissible pair (q, r) and for all $t > 0$.

We use this inequality with the admissible pair (q, r) such that $r = \alpha + 2$ and we apply (1.5.3). Then,

$$\|xT(-t)u(t) - xu_+\|_{L^2} \leq C \left(\int_t^\infty s^{-\frac{2\alpha}{q-2}} ds \right)^{\frac{q-2}{q}} \leq Ct^{-\frac{2\alpha-(q-2)}{q}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

since $\alpha > \frac{4}{N} \implies 2\alpha > q - 2$. Hence the result. The case $t < 0$ follows with the same method. \square

Chapitre 2

Maximum Decay Rate

PASCAL BÉGOUT

Laboratoire d'Analyse Numérique
Université Pierre et Marie Curie
Boîte Courrier 187
4, place Jussieu 75252 Paris Cedex 05, FRANCE

e-mail : begout@ann.jussieu.fr

Abstract

In this paper, we consider global solutions for the following nonlinear Schrödinger equation $iu_t + \Delta u + \lambda|u|^\alpha u = 0$, in \mathbb{R}^N , with $\lambda \in \mathbb{R}$ and $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 \leq \alpha < \infty$ if $N = 1$). We show that no nontrivial solution can decay faster than the solutions of the free Schrödinger equation, provided that $u(0)$ lies in the weighted Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(|x|^2; dx)$, in the energy space, namely $H^1(\mathbb{R}^N)$, or in $L^2(\mathbb{R}^N)$, according to the different cases.

2.1 Introduction and notations

We consider global solutions of the following nonlinear Schrödinger equation,

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \lambda|u|^\alpha u = 0, & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0) = \varphi, & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 \leq \alpha < \infty$ if $N = 1$) and φ a given initial data.

It is well-known that if we denote by $T(t)$ the Schrödinger's free operator, then for every $r \in [2, \infty]$ and for every $\varphi \in L^{r'}(\mathbb{R}^N)$,

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \|T(t)\varphi\|_{L^r} \leq (4\pi|t|)^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|\varphi\|_{L^{r'}}, \quad (2.1.2)$$

where $r' = \frac{r}{r-1}$. Note that for every $r \in [2, \frac{2N}{N-2})$ ($r \in [2, \infty)$ if $N = 1$), if $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^2(|x|^2; dx)$ then $\varphi \in L^{r'}(\mathbb{R}^N)$ and $\|\varphi\|_{L^{r'}} \leq C(\|\varphi\|_{L^2}, \|x\varphi\|_{L^2})$. Furthermore, the estimate (2.1.2) is optimal in

the following sense. For every $r \in [2, \infty]$ and for every $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, if $\varphi \neq 0$ then

$$\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} |t|^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|T(t)\varphi\|_{L^r} > 0. \quad (2.1.3)$$

For the proof, see Strauss [70]. See also Kato [52]. In the same way, there exist some solutions of the nonlinear Schrödinger equation (2.1.1) which have a linear decay (in the sense of (2.1.2)). See for example Cazenave [19], Theorem 7.2.1; Hayashi and Naumkin [47]. In particular, these solutions lie in $H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(|x|^2; dx)$. On the other hand, we know that there exist solutions of some heat, Ginzburg-Landau and Schrödinger type equations which have a decay rate faster than the corresponding linear problem (Hayashi, Kaikina and Naumkin [42, 43]). Take an example. Let u be a classical solution of the heat equation $u_t - \Delta u + |u|^\alpha u = 0$, $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^N$, with initial datum $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \neq 0$ and $u_0 \geq 0$ a.e. Then we have by the maximum principle, $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq (\alpha t)^{-\frac{1}{\alpha}}$, for every $t > 0$, whereas for every $t \geq 1$, $\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^\infty} \geq C t^{-\frac{N}{2}}$, for some constant $C > 0$. Thus, if $0 < \alpha < \frac{2}{N}$ then $u(t)$ decays faster than $e^{t\Delta} u_0$. So, it is natural to wonder if some solutions of the nonlinear Schrödinger equation (2.1.1) may have faster decay than the solutions of the linear equation. We will see that such solutions do not exist (except the trivial solution). There exist partial results in this direction. This is the case for $\alpha = \frac{2}{N}$ and $N = 1$ (Hayashi and Naumkin [47]), or for $\alpha > \alpha_0$, where α_0 is given by $\alpha_0 = \frac{-(N-2) + \sqrt{N^2 + 12N + 4}}{2N}$ (Cazenave and Weissler [28], Corollary 3.9).

This paper is organized as follows. In Section 2.2, we give the main results concerning the solutions lying in $H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(|x|^2; dx)$ and in $H^1(\mathbb{R}^N)$. In Section 2.3, we give the main results concerning the solutions lying in $L^2(\mathbb{R}^N)$. In Section 2.4, we give several estimates for large times and establish Lemma 2.4.5, which asserts that the existence of a scattering state in $L^2(\mathbb{R}^N)$ implies a maximum rate decay which is linear (in the sense that the solution satisfies (2.1.3)). Lemma 2.4.5 is at the heart of the results of this paper. Finally, we will prove the results for solutions in $H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(|x|^2; dx)$ and $H^1(\mathbb{R}^N)$ in Section 2.5, and those for solutions in $L^2(\mathbb{R}^N)$ in Section 2.6.

We finish this section by giving some notations and we recall an embedding property of the weighted Sobolev space $L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^2(|x|^2; dx)$, which will be used to prove the results for solutions lying in this space, and some results of the solutions of the nonlinear Schrödinger equation (2.1.1).

We design by \bar{z} the conjugate of the complex number z and $\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. For $p \in [1, \infty]$, we denote by p' the conjugate of p defined by $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ and by $L^p(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, with norm $\|\cdot\|_{L^p}$, the Lebesgue spaces. $H^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ with norm $\|\cdot\|_{H^1}$, is the well-known Sobolev space and we use the convention $W^{0,p}(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N)$ and $H^0(\mathbb{R}^N) = W^{0,2}(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N)$. We define the Hilbert spaces $Y = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}); \|\psi\|_Y < \infty\}$ with norm $\|\psi\|_Y^2 = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx$

and $X = \{\psi \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}); \|\psi\|_X < \infty\}$ with norm $\|\psi\|_X^2 = \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx$. For a functional space $E \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ with norm $\|\cdot\|_E$, we write $\|f\|_E = \infty$ if $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ and if $f \notin E$. We design by $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ the group of isometries $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$ generated by $i\Delta$ on $L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ and by C the auxiliary positive constants. Finally $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ indicates that the constant C depends only on parameters a_1, a_2, \dots, a_n and that the dependence is continuous.

It is clear that Y is a separable Hilbert space and that $Y \hookrightarrow L^{r'}(\mathbb{R}^N)$ with dense embedding, if $r \in [2, \frac{2N}{N-2})$ ($r \in [2, \infty]$ if $N = 1$).

We recall that for every $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, (2.1.1) has a unique solution $u \in C((-T_*, T^*); H^1(\mathbb{R}^N))$ which satisfies the conservation of charge and energy, that is, for all $t \in (-T_*, T^*)$, $\|u(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ and $E(u(t)) = E(\varphi)$, where $E(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{\alpha+2} \|\varphi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}$. Moreover, for every admissible pair (q, r) (see Definition 2.1.1 below), $u \in L_{\text{loc}}^q((-T_*, T^*); W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$. In addition, if $\lambda \leq 0$, if $\alpha < \frac{4}{N}$ or if $\|\varphi\|_{H^1}$ is small enough then $T^* = T_* = \infty$ and $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^1)} < \infty$. Finally, if $\varphi \in X$ then $u \in C((-T_*, T^*); X)$. See Ginibre and Velo [33, 34, 35, 37, 38], Kato [50, 51]. See also Cazenave and Weissler [21, 23]. We are also interested by solutions in $L^2(\mathbb{R}^N)$. We recall that if $0 < \alpha \leq \frac{4}{N}$ and if $q = \frac{4(\alpha+2)}{N\alpha}$, then for every $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, equation (2.1.1) has a unique solution $u \in C((-T_*, T^*); L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L_{\text{loc}}^q((-T_*, T^*); L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$, which satisfies the above conservation of charge. In addition, for every admissible pair (q, r) , $u \in L_{\text{loc}}^q((-T_*, T^*); L^r(\mathbb{R}^N))$. Finally, if $\alpha < \frac{4}{N}$ then $T^* = T_* = \infty$. See Tsutsumi [75]. See also Cazenave and Weissler [22, 24].

Definition 2.1.1. We say that (q, r) is an *admissible pair* if the following holds.

- (i) $2 \leq r \leq \frac{2N}{N-2}$ ($2 \leq r < \infty$ if $N = 2$, $2 \leq r \leq \infty$ if $N = 1$),
- (ii) $\frac{2}{q} = N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})$.

Note that in this case $2 \leq q \leq \infty$ and $q = \frac{4r}{N(r-2)}$.

Finally, we recall the Strichartz' estimates. Let $I \subseteq \mathbb{R}$, be an interval, let $t_0 \in \bar{I}$, let (q, r) and (γ, ρ) be two admissible pairs, let $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ and let $f \in L^{r'}(I; L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$. Then the following integral equation defined for all $t \in I$, $u(t) = T(t)\varphi + i \int_{t_0}^t T(t-s)f(s)ds$, satisfies the following inequality $\|u\|_{L^q(I; L^r)} \leq C_0 \|\varphi\|_{L^2} + C_1 \|f\|_{L^{\gamma'}(I; L^{\rho'})}$, where $C_0 = C_0(N, r)$ and $C_1 = C_1(N, r, \rho)$. For more details, see Keel and Tao [55].

2.2 Sharp lower bound

Theorem 2.2.1. Let $\lambda \leq 0$, $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 \leq \alpha < \infty$ if $N = 1$), $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ and u be the corresponding solution of (2.1.1). If $\alpha \leq \frac{4}{N}$ then assume further that $\varphi \in X$. If $\varphi \neq 0$ then for every

$r \in [2, \infty]$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0.$$

Theorem 2.2.2. *Let $\lambda > 0$, $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 \leq \alpha < \infty$ if $N = 1$) and $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ be such that the corresponding solution u of (2.1.1) is positively global in time. If $\alpha \leq \frac{4}{N}$ then assume further that $\varphi \in X$. If $\varphi \not\equiv 0$ then for every $r \in [\alpha + 2, \infty]$,*

$$\begin{cases} \liminf_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0, & \text{if } \alpha \leq \frac{4}{N}, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0, & \text{if } \alpha > \frac{4}{N}. \end{cases}$$

And if there exists $\rho \in [\alpha + 2, \infty]$ such that $\limsup_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{\rho})} \|u(t)\|_{L^\rho} < \infty$ then for every $r \in [2, \infty]$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0.$$

Remark 2.2.3. Theorems 2.2.1 and 2.2.2 assert that if u is a solution of (2.1.1) with $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha = 0$ and initial data $\varphi \in X$, then for every $r \in [2, \infty]$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0$.

In the attractive case and when $\alpha > \frac{4}{N+2}$ ($\alpha > 2$ if $N = 1$), we may obtain an optimal lower bound. It is sufficient to choose $\|\varphi\|_X$ small enough (see corollary below).

Corollary 2.2.4. *Let $\lambda > 0$, $\frac{4}{N+2} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($2 < \alpha < \infty$ if $N = 1$), $\varphi \in X$ and u be the corresponding solution u of (2.1.1). If $\varphi \not\equiv 0$ and if $\|\varphi\|_X$ is small enough then u is global in time and for every $r \in [2, \infty]$,*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0.$$

When $\alpha = \frac{4}{N}$, we may suppose that $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ instead of $\varphi \in X$, as shows the following proposition, provided that $\|\varphi\|_{H^1}$ is small enough.

Proposition 2.2.5. *Let $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha = \frac{4}{N}$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ and u be the associated solution of (2.1.1). If $\varphi \not\equiv 0$ and if $\|\varphi\|_{H^1}$ is small enough then u is global in time and for every $r \in [2, \infty]$,*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0.$$

Remark 2.2.6. The lower bounds obtained in Theorems 2.2.1 and 2.2.2 are optimal with respect to the decay. In particular, if u is any nontrivial solution of (2.1.1), then the following estimate never occurs.

$$\forall t > 0, \|u(t)\|_{L^r} \leq C|t|^{-N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} (\ln |t|)^{-\delta}, \quad (2.2.1)$$

for some $r > 2$ and $\delta > 0$. This is very surprising since some above results are established for solutions of some heat or Ginzburg-Landau equations (see the beginning of Section 2.1). For example, such estimates are obtained for the solutions u of the Schrödinger equation

$$u_t - u_{xx} + i|u|^2u = 0, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R},$$

if $\|u(0)\|_X$ is sufficiently small (Theorem 1.1 of Hayashi, Kaikina and Naumkin [43]). Furthermore, if $\alpha > \frac{4}{N}$ then Theorems 2.2.1 and 2.2.2 are optimal with respect to the assumption on the initial data φ , that is $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, in the sense that $H^1(\mathbb{R}^N)$ is the smallest functional space in which we must take φ to have a solution. On the other hand, when $\alpha \leq \frac{4}{N}$, we have to make the additional assumption on initial data φ , that is $\varphi \in X$. This request is very reasonable since this is in this functional space that we obtain solutions of (2.1.1) which have a linear decay (see the references cited in Section 2.1).

Remark 2.2.7. Note that all the results of this section and Section 2.3 hold for $t < 0$ as soon as the solution u is negatively global in time. Indeed, it is sufficient to apply the case $t > 0$ to the solution positively global in time \tilde{u} solution of (2.1.1) with initial data $\bar{\varphi}$. Since $\tilde{u}(t) = \overline{u(-t)}$, the result for $t < 0$ follows.

2.3 Main results in the Lebesgue space

As show the results of Section 2.2, if we suppose a suitable asymptotic behavior of the initial value ($u(0) \in X$ if $\alpha \leq \frac{4}{N}$, $u(0) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ if $\alpha > \frac{4}{N}$), then we have a sharp lower bound. In particular, under the hypotheses of Section 2.2, such results do not allow estimates of type (2.2.1), for any nontrivial solution of (2.1.1), for some $r > 2$ and $\delta > 0$ (see Remark 2.2.6). In this section, we establish some lower bounds which eventually allow estimates on the above type, only if α is small enough (see Theorem 2.3.5 below). The loss of sharp estimate is compensated by a weaker assumption on $u(0)$, that is $u(0) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ if $\alpha \leq \frac{4}{N}$. As we can see, this hypothesis is optimal with respect to the integrability of the initial data, in the sense that we make the minimal assumption on $u(0)$ to have existence of a solution. But when $\alpha > \frac{4}{N}$, Theorems 2.2.1 and 2.2.2 are optimal with respect to the lower bound and to the assumption on $u(0)$. So we only have to consider the case $\alpha \leq \frac{4}{N}$. On the other hand, if $\alpha > \frac{4}{N+2}$ ($\alpha > 2$ if $N = 1$), then the sharp estimate still holds (see Theorems 2.3.1 and 2.3.2 below). However, we have to make an additional decay assumption on the solution u (u must satisfy (2.3.1)).

Theorem 2.3.1. *Let $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{4}{N+2} < \alpha \leq \frac{4}{N}$ ($2 < \alpha \leq 4$ if $N = 1$), $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ and u be the corresponding solution of (2.1.1). If $\alpha = \frac{4}{N}$ then assume further that u is positively global in time.*

Suppose that for every $r \in \left[2, \frac{2N}{N-2}\right)$ ($r \in [2, \infty)$ if $N = 1$),

$$\forall t > 0, \|u(t)\|_{L^r} \leq C|t|^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}. \quad (2.3.1)$$

Then we have for every $r \in [2, \infty]$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0.$$

Theorem 2.3.2. Let $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, let $\alpha_0 = \frac{-(N-2)+\sqrt{N^2+12N+4}}{2N}$, $\alpha_0 < \alpha \leq \frac{4}{N}$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ and u be the corresponding solution of (2.1.1). If $\alpha = \frac{4}{N}$ then assume further that u is positively global in time. If there exists $r \in [\alpha + 2, \infty]$ such that u satisfies (2.3.1) then for every $r \in [2, \infty]$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0.$$

Remark 2.3.3. When $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, the condition (2.3.1) makes sense. Indeed, we have by the Strichartz' estimates that $u \in L^q_{\text{loc}}([0, \infty); L^r(\mathbb{R}^N))$, for every admissible pair (q, r) . This yields, $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^N)$, for almost every $t > 0$ and for all $r \in \left[2, \frac{2N}{N-2}\right]$ ($r \in [2, \infty)$ if $N = 2$, $r \in [2, \infty]$ if $N = 1$).

Remark 2.3.4. As shows Lemma 2.4.3, Theorem 2.3.2 has less restrictive assumptions than Theorem 2.3.1 when $\alpha > \alpha_0$. Indeed, we do not have to suppose that u satisfies (2.3.1) for all r . We may only assume that it is satisfied for $r = \alpha + 2$. Furthermore, estimates of type (2.2.1) do not occur. This lightly improves the result given by Cazenave and Weissler [28] (see Corollary 3.9 of this reference). Finally, Theorem 2.3.2 can be extended for $\alpha = \alpha_0$ in the following sense. If there exists $r \in [\alpha_0 + 2, \infty]$ and $\varepsilon > 0$ such that for all $t > 0$,

$$\|u(t)\|_{L^r} \leq C|t|^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\varepsilon}, \quad (2.3.2)$$

then for all $t \in \mathbb{R}$, $u(t) \equiv 0$. See the proof of Theorem 2.3.2 for the justification.

Remark 2.3.5. In the case where $\alpha \leq \frac{4}{N+2}$ ($\alpha \leq 1$ if $N = 1$), we have the following result. Let $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \alpha \leq \frac{4}{N+2}$ ($0 < \alpha \leq 1$ if $N = 1$), $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ and u be the corresponding solution of (2.1.1). Let $r \in [2, \infty]$. If there exists $\varepsilon > 0$ such that

$$\begin{cases} \|u(t)\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \leq C|t|^{-(1+\frac{4-\alpha(N+2)}{4\alpha}+\varepsilon)}, & \text{if } N \geq 3, \\ \|u(t)\|_{L^r} \leq C|t|^{-2(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{r(1-\alpha)+\alpha}{r\alpha}-\varepsilon}, & \text{if } N = 2, \\ \|u(t)\|_{L^\infty} \leq C|t|^{-(\frac{1}{2}+\frac{2-\alpha}{2\alpha}+\varepsilon)}, & \text{if } N = 1, \end{cases} \quad (2.3.3)$$

for all $t > 0$, then for all $t \in \mathbb{R}$, $u(t) \equiv 0$. See the proof of Theorem 2.3.2 for the justification. When $N \geq 3$ and $\alpha = \frac{4}{N+2}$, the result is the same if we have (2.3.3) for some $r \in \left[\frac{2N}{N-2}, \infty\right]$. Indeed,

by Lemma 2.4.3 this hypothesis leads to (2.3.3) with $r = \frac{2N}{N-2}$. When $\alpha < \frac{4}{N+2}$ ($\alpha \leq 1$ if $N = 1$), estimate (2.3.3) is a very strong assumption since it implies that u decays faster than the solution of the linear equation. Furthermore, there is a gap between the admissible and the non-admissible powers of decay (compare (2.3.1) with (2.3.3)).

2.4 Estimates at infinity

Proposition 2.4.1. *Let $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m \in \{0; 1\}$, $0 < \alpha \leq \frac{4}{N-2m}$ ($0 < \alpha < \infty$ if $N = m = 1$ and $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ if $N \geq 2$ and $m = 1$), $\varphi \in H^m(\mathbb{R}^N)$ and $u \in C((-T_*, T^*); H^m(\mathbb{R}^N))$ be the unique corresponding solution of (2.1.1). Assume that $T^* = \infty$. If there exist $t_0 \geq 0$ and (γ, ρ) an admissible pair with $\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2} < \infty$ and $2 \leq \frac{\rho\alpha}{\rho-2} \leq \frac{2N}{N-2}$ ($2 \leq \frac{\rho\alpha}{\rho-2} < \infty$ if $N = 2$, $2 \leq \frac{\rho\alpha}{\rho-2} \leq \infty$ if $N = 1$) such that $u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((t_0, \infty); L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}^N))$, then the following properties hold.*

1. $u \in L^q((0, \infty); W^{m,r}(\mathbb{R}^N))$, for every admissible pair (q, r) ,
2. There exists $u_+ \in H^m(\mathbb{R}^N)$ such that $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_{H^m} = 0$.

A similar result holds for $t < 0$.

Proof. By remark 2.2.7, we only have to show the case $t > 0$. We proceed in 2 steps. Set $f(u) = \lambda|u|^\alpha u$.

Step 1. $f(u) \in L^{\gamma'}((t_0, \infty); W^{m,\rho'}(\mathbb{R}^N))$.

We first show that $u \in L^\gamma((0, \infty); W^{m,\rho}(\mathbb{R}^N))$. We already know that $u \in L^q_{\text{loc}}([0, \infty); W^{m,r}(\mathbb{R}^N))$, for every admissible pair (q, r) . We have the following integral equation.

$$\forall S \geq 0, \forall t \geq 0, u(t) = T(t-S)u(S) + i \int_S^t T(t-s)f(u(s))ds.$$

So we have by the Hölder's inequality (applied in space-time) and Strichartz' estimates,

$$\|f(u)\|_{L^{\gamma'}((t_0,t); W^{m,\rho'})} \leq C \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((t_0,\infty); L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}})}^\alpha \|u\|_{L^\gamma((0,t); W^{m,\rho})}, \quad (2.4.1)$$

$$\|u\|_{L^\gamma((S,t); W^{m,\rho})} \leq C + C_0 \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((S,\infty); L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}})}^\alpha \|u\|_{L^\gamma((S,t); W^{m,\rho})}, \quad (2.4.2)$$

for every $t_0 \leq S < t < \infty$. Since $u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((t_0, \infty); L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}^N))$, there exists $S_0 > t_0$ large enough such that $C_0 \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((S_0,\infty); L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}})}^\alpha \leq 1/2$, where C_0 is the constant in (2.4.2). So with (2.4.2), we obtain $\|u\|_{L^\gamma((S_0,t); W^{m,\rho})} \leq 2C$, for every $t > S_0$. It follows that $\|u\|_{L^\gamma((S_0,\infty); W^{m,\rho})} \leq 2C$ and so we have $u \in L^\gamma((0, \infty); W^{m,\rho}(\mathbb{R}^N))$. Hence the result by letting $t \nearrow \infty$ in (2.4.1).

Step 2. Conclusion.

By Step 1 and Strichartz' estimates, $u \in L^q((0, \infty); W^{m,r}(\mathbb{R}^N))$, for every admissible pair (q, r) . Then

1 follows. From the Strichartz' estimates and by the fact that $T(t)$ is an isometry on $H^m(\mathbb{R}^N)$, we obtain for every $\tau > t > t_0$,

$$\|T(-t)u(t) - T(-\tau)u(\tau)\|_{H^m} \leq C\|f(u)\|_{L^{\gamma'}((t,\tau);W^{m,\rho'})} \xrightarrow{t,\tau \rightarrow \infty} 0,$$

by Step 1. Hence 2. This concludes the proof. \square

Remark 2.4.2. Note that by assumption, one always have $\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2} > 0$. However, it may happen that $\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2} < 1$. This is clearly not a problem since the above proof still holds and that we do not use the triangular inequality.

Lemma 2.4.3. Let $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in \{0;1\}$, $0 \leq \alpha \leq \frac{4}{N-2m}$ ($0 \leq \alpha < \infty$ if $N = m = 1$ and $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ if $N \geq 2$ and $m = 1$), $\varphi \in H^m(\mathbb{R}^N)$ and $u \in C((-T_*, T^*); H^m(\mathbb{R}^N))$ be the corresponding solution of (2.1.1). Assume that $T^* = \infty$. If there exist $r \in (2, \infty]$, $\varepsilon \geq 0$ and a constant $C = C(t) > 0$ such that $u(t)$ satisfies (2.3.2) for some $t > 0$, then for every $\rho \in (2, r]$, there exist $\varepsilon(\rho) \geq 0$ and $C_0(t) > 0$ such that

$$\|u(t)\|_{L^\rho} \leq C_0(t)t^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho})-\varepsilon(\rho)}, \quad (2.4.3)$$

where the function $\rho \mapsto \varepsilon(\rho)$ is continuous from $(2, r]$ to $[0, \infty)$ and satisfies $\varepsilon(\rho) > 0 \iff \varepsilon > 0$. If C is independent on t then C_0 is also independent on t . Finally, if (2.3.2) is satisfied for every $t > 0$ then (2.4.3) is satisfied for every $t > 0$, and if $\liminf_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$ then $\liminf_{t \rightarrow \infty} C_0(t) = 0$.

Proof. Let $\rho \in (2, r]$. Set $\theta = \frac{r}{\rho} \frac{\rho-2}{r-2}$, $\varepsilon(\rho) = \varepsilon\theta$ and $C_0(t) = C(t)^\theta$. Then $\theta \in (0, 1]$ and θ satisfies $\frac{1}{\rho} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{r}$. By Hölder's inequality and conservation of charge, we obtain

$$\|u(t)\|_{L^\rho} \leq \|u(t)\|_{L^2}^{1-\theta} \|u(t)\|_{L^r}^\theta \leq C(t)^\theta |t|^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(1-\theta)-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})\theta-\varepsilon\theta} \leq C_0(t) |t|^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho})-\varepsilon(\rho)}.$$

Hence the result. \square

Lemma 2.4.4. Let $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m \in \{0;1\}$, $0 < \alpha \leq \frac{4}{N-2m}$ ($0 < \alpha < \infty$ if $N = m = 1$ and $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ if $N \geq 2$ and $m = 1$), $\varphi \in H^m(\mathbb{R}^N)$ and $u \in C((-T_*, T^*); H^m(\mathbb{R}^N))$ be the corresponding solution of (2.1.1). Assume that $T^* = \infty$. If u satisfies (2.3.1) for every $r \in \left[2, \frac{2N}{N-2}\right)$ ($r \in [2, \infty)$ if $N = 1$) and if $\alpha > \frac{4}{N+2}$ ($\alpha > 2$ if $N = 1$), then there exists an admissible pair (γ, ρ) with $1 < \frac{\gamma\alpha}{\gamma-2} < \infty$ and $2 < \frac{\rho\alpha}{\rho-2} < \frac{2N}{N-2}$ ($2 < \frac{\rho\alpha}{\rho-2} < \infty$ if $N = 1$) such that $u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((1, \infty); L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}^N))$.

Proof. We distinguish 3 cases : $N \geq 3$, $N = 2$ and $N = 1$.

Case $N \geq 3$. Set $\rho_* = \frac{4N}{2N-\alpha(N-2)}$. Since $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ then $2 < \rho_* < \frac{2N}{N-2}$. Let $\gamma_* > 2$ be such that

(γ_*, ρ_*) is an admissible pair. For this choice of ρ_* , we have $\frac{\rho_*\alpha}{\rho_*-2} = \frac{2N}{N-2}$ and $\frac{\gamma_*}{\gamma_*-2} = \frac{4}{4-\alpha(N-2)}$. When $\alpha < \frac{N+2}{N}$, we have $\rho_* < \frac{2N}{(N+2)-N\alpha} \iff \alpha > \frac{4}{N+2}$. Let $\rho > \rho_*$, ρ sufficiently close to ρ_* to have $\frac{\rho\alpha}{\rho-2} > 2$. If $\alpha < \frac{N+2}{N}$, then we also choose $\rho < \frac{2N}{(N+2)-N\alpha}$. Since $\rho > \rho_*$ then $\frac{\rho\alpha}{\rho-2} < \frac{2N}{N-2}$ and so there exists $\gamma > 2$ such that (γ, ρ) is an admissible pair. Then $\frac{\gamma}{\gamma-2} = \frac{2\rho}{2N-\rho(N-2)}$. By (2.3.1) we have,

$$\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((1,\infty);L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}})}^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}} = \int_1^\infty \|u(t)\|_{L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}}^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}} dt \leq C \int_1^\infty t^{-N\frac{\rho\alpha-2(\rho-2)}{2N-\rho(N-2)}} dt < \infty.$$

Indeed, if $\alpha < \frac{N+2}{N}$ then $N\frac{\rho\alpha-2(\rho-2)}{2N-\rho(N-2)} > 1 \iff \rho < \frac{2N}{(N+2)-N\alpha}$ and if $\alpha \geq \frac{N+2}{N}$ then we always have $N\frac{\rho\alpha-2(\rho-2)}{2N-\rho(N-2)} > 1$. So, for this choice of (γ, ρ) , $u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((1, \infty); L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}^N))$.

Case $N=2$. Since $\alpha > 1$ is fixed, we can choose $\rho > 2$ sufficiently close to 2 to have $\alpha > \frac{2(\rho-1)}{\rho}$. In particular, this implies that $\frac{\rho\alpha}{\rho-2} > 2$. Moreover, $\frac{\gamma}{\gamma-2} = \frac{\rho}{2}$ where $\gamma > 2$ is such that (γ, ρ) is an admissible pair. By (2.3.1) we have,

$$\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((1,\infty);L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}})}^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}} = \int_1^\infty \|u(t)\|_{L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}}^{\frac{\rho\alpha}{2}} dt \leq C \int_1^\infty t^{-\frac{\rho\alpha-2(\rho-2)}{2}} dt < \infty,$$

since $\frac{\rho\alpha-2(\rho-2)}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{2(\rho-1)}{\rho}$. So $u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((1, \infty); L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}^2))$ for this choice of (γ, ρ) .

Case $N=1$. Since $\alpha > 2$ is fixed, we can choose $\rho > 2$ sufficiently close to 2 to have $\alpha > \frac{3\rho-2}{\rho}$. In particular, this implies that $\frac{\rho\alpha}{\rho-2} > 2$. Moreover, $\frac{\gamma}{\gamma-2} = \frac{2\rho}{\rho+2}$ where $\gamma > 2$ is such that (γ, ρ) is an admissible pair. By (2.3.1) we have,

$$\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((1,\infty);L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}})}^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}} = \int_1^\infty \|u(t)\|_{L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}}^{\frac{2\rho\alpha}{\rho+2}} dt \leq C \int_1^\infty t^{-\frac{\rho\alpha-2(\rho-2)}{\rho+2}} dt < \infty,$$

since $\frac{\rho\alpha-2(\rho-2)}{\rho+2} > 1 \iff \alpha > \frac{3\rho-2}{\rho}$. So for this choice of (γ, ρ) , $u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((0, \infty); L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}))$. \square

As seen in Section 2.1, the crux of the proof of results of this paper is based on the following lemma.

Lemma 2.4.5. *Let $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m \in \{0;1\}$, $0 < \alpha \leq \frac{4}{N-2m}$ ($0 < \alpha < \infty$ if $N = m = 1$ and $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ if $N \geq 2$ and $m = 1$), $\varphi \in H^m(\mathbb{R}^N)$ and $u \in C((-T_*, T^*); H^m(\mathbb{R}^N))$ be the corresponding solution of (2.1.1). Assume that $T^* = \infty$. If $\varphi \neq 0$ and if there exists $u_+ \in L^2(\mathbb{R}^N)$ such that $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_{L^2} = 0$, then for every $r \in [2, \infty]$,*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0.$$

The proof of Lemma 2.4.5 is based on the pseudo-conformal transformation.

For every positively global solution u of (2.1.1) with initial data $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, we define the function $v \in C([0, 1]; L^2(\mathbb{R}^N))$ by

$$\forall t \in [0, 1), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^N, v(t, x) = (1-t)^{-\frac{N}{2}} u\left(\frac{t}{1-t}, \frac{x}{1-t}\right) e^{-i\frac{|x|^2}{4(1-t)}}. \quad (2.4.4)$$

A straightforward calculation gives for every $p \in [1, \infty]$ and for all $t \in [0, 1)$,

$$\|v(t)\|_{L^p} = (1-t)^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left\| u\left(\frac{t}{1-t}\right) \right\|_{L^p}, \quad (2.4.5)$$

$$\|v(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}, \quad (2.4.6)$$

where the last identity comes from (2.4.5) and from conservation of charge for u . Note that (2.4.5) makes sense as soon as $u\left(\frac{t}{1-t}\right) \in L^p(\mathbb{R}^N)$. When $\varphi \in X$, we obviously have $v \in C([0, 1); X)$ and so we may define for all $t \in [0, 1)$,

$$E_1(t) = \frac{1}{2}(1-t)^{\frac{4-N\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{\alpha+2} \|v(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2},$$

$$E_2(t) = \frac{1}{8} \|(x + 2i(1-t)\nabla)v(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{\alpha+2} (1-t)^{\frac{N\alpha}{2}} \|v(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}.$$

Then for all $t \in [0, 1)$,

$$\frac{d}{dt} E_1(t) = \frac{N\alpha - 4}{4} (1-t)^{\frac{2-N\alpha}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^2}^2, \quad (2.4.7)$$

$$\frac{d}{dt} E_2(t) = 0. \quad (2.4.8)$$

For the proof, see Proposition 3.8 and formulas (3.20) and (3.21) of Cazenave and Weissler [25].

Proof of Lemma 2.4.5. We argue by contradiction. Let $v \in C([0, 1); L^2(\mathbb{R}^N))$ be the function defined by (2.4.4). Assume that there exists $r \geq 2$ such that

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} = 0.$$

Then, we shall show that $\varphi \equiv 0$.

By conservation of charge and Lemma 2.4.3, we may assume that $2 < r < \frac{2N}{N-2}$ ($2 < r < \infty$ if $N = 1$).

Since $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^N)$ for almost every $t > 0$, it follows that $v(t) \in L^r(\mathbb{R}^N)$, for almost every $t \in (0, 1)$.

By (2.4.5), we have

$$\liminf_{t \nearrow 1} \|v(t)\|_{L^r} = 0. \quad (2.4.9)$$

By hypothesis, there exists $u_+ \in L^2(\mathbb{R}^N)$ such that $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_{L^2} = 0$. From Proposition 3.14 of Cazenave and Weissler [25], this implies that there exists $w \in L^2(\mathbb{R}^N)$ such that

$$\lim_{t \nearrow 1} \|v(t) - w\|_{L^2} = 0. \quad (2.4.10)$$

From (2.4.9) and (2.4.10) we deduce that $\lim_{t \nearrow 1} \|v(t)\|_{L^2} = 0$, from which it follows with the conservation of charge (2.4.6), $\|\varphi\|_{L^2} = 0$. This is absurd since $\varphi \not\equiv 0$. Hence the result. \square

2.5 Proof of the results of Section 2.2

Our strategy is the following. We show that if a solution u of (2.1.1) has a decay rate too fast, then the corresponding function v given by the pseudo-conformal transformation must converge to 0 in a Lebesgue space $L^p(\mathbb{R}^N)$, for some $2 < p < \infty$. But these functions also satisfy the conservation of charge. And by using the embedding $Y \hookrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ or the existence of a strong limit for $v(t)$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ as $t \nearrow 1$, we deduce that $v(t) \equiv 0$, that is $u(t) \equiv 0$, for all $t \in \mathbb{R}$.

In order to show Theorems 2.2.1 and 2.2.2, we split the proof in 2 cases, which are $\alpha \leq \frac{4}{N}$ and $\alpha > \frac{4}{N}$.

Lemma 2.5.1. *Let $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq \frac{4}{N}$, $\varphi \in X$ and let $u \in C((-T_*, T^*); X)$ be the corresponding solution of (2.1.1). If $\alpha = \frac{4}{N}$ then we suppose that $T^* = \infty$. If $\varphi \neq 0$ then*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |t|^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0,$$

for every $r \in [2, \infty]$ if $\lambda \leq 0$, and for every $r \in [\alpha + 2, \infty]$ if $\lambda > 0$.

Proof. We argue by contraposition. Let $v \in C([0, 1); X)$ be the function defined by (2.4.4). Assume there exists $r \geq 2$ if $\lambda \leq 0$, and $r \geq \alpha + 2$ if $\lambda > 0$, such that

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} = 0.$$

Then, we have to show that $\varphi \equiv 0$.

By conservation of charge, if $r = 2$ then $\varphi \equiv 0$. So we may assume that $r > 2$. Furthermore, by Lemma 2.4.3, we also may assume that $r < \frac{2N}{N-2}$ ($r < \infty$ if $N = 1$) if $\lambda \leq 0$ or if $\alpha = 0$, and $r = \alpha + 2$, if $\lambda > 0$ and if $\alpha > 0$. Since $\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} = 0$, it follows from (2.4.5) that $\liminf_{t \nearrow 1} \|v(t)\|_{L^r} = 0$. Thus, there exists a sequence $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$ satisfying $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v(t_n)\|_{L^r} = 0. \quad (2.5.1)$$

If $\lambda \leq 0$ or if $\alpha = 0$ then by (2.4.6) and (2.4.7), we have $\sup_{t \in [0, 1)} (1-t) \|\nabla v(t)\|_{L^2} < \infty$, which leads with (2.4.8) and (2.4.6), $\sup_{t \in [0, 1)} \|v(t)\|_Y < \infty$. If $\lambda > 0$ and if $\alpha > 0$ then by (2.4.7) and (2.5.1), we have for all $n \in \mathbb{N}$, $\|\nabla v(t_n)\|_{L^2} \leq C(1-t_n)^{\frac{N\alpha-4}{4}}$. It follows that,

$$(1-t_n) \|\nabla v(t_n)\|_{L^2} \leq C(1-t_n)^{\frac{N\alpha}{4}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

and with (2.5.1) and (2.4.8), we deduce that $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|xv(t_n)\|_{L^2} < \infty$. This last estimate yields with (2.4.6),

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|v(t_n)\|_Y < \infty. \quad (2.5.2)$$

It follows that for $\lambda \in \mathbb{R}$ and for $\alpha \in [0, \frac{4}{N}]$, we have (2.5.2). From (2.4.6), Hölder's inequality, from the embedding $Y \hookrightarrow L^{r'}(\mathbb{R}^N)$, from (2.5.2) and (2.5.1), we obtain

$$\|\varphi\|_{L^2} = \|v(t_n)\|_{L^2} \leq \|v(t_n)\|_{L^{r'}}^{\frac{1}{2}} \|v(t_n)\|_{L^r}^{\frac{1}{2}} \leq C \|v(t_n)\|_Y^{\frac{1}{2}} \|v(t_n)\|_{L^r}^{\frac{1}{2}} \leq C \|v(t_n)\|_{L^r}^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

So $\|\varphi\|_{L^2} = 0$ which is $\varphi \equiv 0$. Hence the result. \square

Proof of Theorem 2.2.1. If $\alpha \leq \frac{4}{N}$ then the result comes from Lemma 2.5.1. So we may assume that $\alpha > \frac{4}{N}$. Since $\lambda < 0$ and $\alpha > \frac{4}{N}$, there exists $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ such that $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_{H^1} = 0$ (Ginibre and Velo [39], Nakanishi [62, 63]). The result comes from Lemma 2.4.5. \square

Proof of Theorem 2.2.2. We proceed in 4 steps. Let $v \in C([0, 1]; L^2(\mathbb{R}^N))$ be the function defined by (2.4.4).

Step 1. If $\alpha > \frac{4}{N}$ and if $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+2})} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} \leq C$ then there exists $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_{H^1} = 0. \quad (2.5.3)$$

Let $q = \frac{4(\alpha+2)}{N\alpha}$. Then $(q, \alpha+2)$ is an admissible pair. Since $u \in C([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^N))$ and that $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$, then $u \in L_{\text{loc}}^{\frac{q\alpha}{q-2}}([0, \infty); L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$. Since $\alpha > \frac{4}{N}$, then $\frac{N\alpha^2}{4-\alpha(N-2)} > 1$ and it follows that

$$\|u\|_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}([0, \infty); L^{\alpha+2})}^{\frac{q\alpha}{q-2}} = \int_1^\infty \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\frac{q\alpha}{q-2}} dt \leq C \int_1^\infty t^{-\frac{N\alpha^2}{4-\alpha(N-2)}} dt < \infty.$$

Therefore, $u \in L^{\frac{q\alpha}{q-2}}([0, \infty); L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$ and the result comes from Proposition 2.4.1.

Step 2. If $\varphi \neq 0$ and if $\alpha \leq \frac{4}{N}$ then for all $r \geq \alpha+2$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0$.

The result comes from Lemma 2.5.1.

Step 3. If $\varphi \neq 0$ and if $\alpha > \frac{4}{N}$ then for all $r \geq \alpha+2$, $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} > 0$.

We argue by contraposition. Assume that there exists $r \geq \alpha+2$ such that

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} = 0.$$

Then, we have to show that $\varphi \equiv 0$.

By Lemma 2.4.3, we may assume that $r = \alpha+2$. Step 1 implies that there exists $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfying (2.5.3). Then $\varphi \equiv 0$ by Lemma 2.4.5, which is the desired result.

Step 4. If $\varphi \neq 0$ and if there exists $\rho \geq \alpha+2$ such that $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{\rho})} \|u(t)\|_{L^\rho} < \infty$ then

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{\rho})} \|u(t)\|_{L^\rho} > 0,$$

for all $r \in [2, \infty]$.

If $\alpha = 0$ then Step 2 gives the result and so we consider the case $\alpha > 0$. By Lemma 2.4.3, we may assume that $\rho = \alpha + 2$. We argue by contradiction. Suppose that there exists $r \geq 2$ such that $\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \|u(t)\|_{L^r} = 0$. Then $2 < r < \frac{2N}{N-2}$ ($2 < r < \infty$ if $N = 1$). Indeed, this comes from conservation of charge and Lemma 2.4.3. We obtain with (2.4.5),

$$\sup_{t \in [0,1]} \|v(t)\|_{L^{\alpha+2}} < \infty, \quad (2.5.4)$$

$$\liminf_{t \nearrow 1} \|v(t)\|_{L^r} = 0. \quad (2.5.5)$$

Note that since $u \in C([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^N))$ and that the embedding $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N) \cap L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ holds, then we have $v \in C([0, 1]; L^r(\mathbb{R}^N) \cap L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$.

Case 1 : $0 < \alpha \leq \frac{4}{N}$.

From (2.4.6), (2.4.7), (2.4.8) and (2.5.4), $\sup_{t \in [0,1]} \|v(t)\|_Y < \infty$. From (2.4.6), from Hölder's inequality and the embedding $Y \hookrightarrow L^{r'}(\mathbb{R}^N)$, we have for all $t \in [0, 1)$,

$$\|\varphi\|_{L^2} = \|v(t)\|_{L^2} \leq \|v(t)\|_{L^{r'}}^{\frac{1}{2}} \|v(t)\|_{L^r}^{\frac{1}{2}} \leq C \|v(t)\|_Y^{\frac{1}{2}} \|v(t)\|_{L^r}^{\frac{1}{2}} \leq C \|v(t)\|_{L^r}^{\frac{1}{2}}.$$

Thus $\|\varphi\|_{L^2} \leq C \liminf_{t \nearrow 1} \|v(t)\|_{L^r}^{\frac{1}{2}} = 0$ by (2.5.5) and so $\|\varphi\|_{L^2} = 0$, which is absurd.

Case 2 : $\alpha > \frac{4}{N}$.

By Step 1, there exists $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfying (2.5.3), which gives $\varphi \equiv 0$ by Lemma 2.4.5. This result being absurd, Step 4 is true. This concludes the proof. \square

Proof of Corollary 2.2.4. By Cazenave and Weissler [25], we know that if $\|\varphi\|_X$ is sufficiently small, then u is global in time and there exists $u_+ \in X$ such that $T(-t)u(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{X} u_+$. Then, Lemma 2.4.5 gives the result. \square

Proof of Proposition 2.2.5. It is well-known that if $\|\varphi\|_{H^1}$ is sufficiently small then u is global in time and $u \in L^{\alpha+2}(\mathbb{R}; L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$ (Remark 7.7.6 of Cazenave [19]). Then $T(-t)u(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{H^1(\mathbb{R}^N)} u_+$, for some $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (Proposition 2.4.1), and the result comes from Lemma 2.4.5. \square

2.6 Proof of the results of Section 2.3

Our strategy is the same as for Section 2.5. However, we could give an other proof as follows, without requiring the pseudo-conformal transformation. We would show that if a solution u of (2.1.1) had a decay rate too fast, then u would have a scattering state u_∞ whose corresponding solution of the linear problem (that is (2.1.1) with $\lambda = 0$) would have a decay rate of the same order of u . In

particular, $\alpha > \frac{2}{N}$ otherwise $u_\infty \equiv 0$ (Barab [3], Strauss [70, 72]). This rate being too fast, we would have $u_\infty \equiv 0$ (by (2.1.3)). And from conservation of charge, we would deduce that $u(t) \equiv 0$, for all $t \in \mathbb{R}$. Furthermore, in the case $N = 1$, we would have to make the additional assumption $\varphi \in X$ when $1 < \alpha \leq 2$ (in order to apply the result of Barab [3]). But this case falls into the scope of Theorems 2.2.1 and 2.2.2 where there is a better result. It follows that in this case, the result would not be interesting.

Proof of Theorems 2.3.1 and 2.3.2 and Remarks 2.3.4 and 2.3.5. We proceed in 2 steps.

Step 1. There exists $u_+ \in L^2(\mathbb{R}^N)$ such that $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_{L^2} = 0$.

Case of Theorems 2.3.1. Since u satisfies (2.3.1) for every $r \in \left[2, \frac{2N}{N-2}\right)$ ($r \in [2, \infty)$ if $N = 1$), it follows from Lemma 2.4.4 that there exists an admissible pair (γ, ρ) such that $u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((1, \infty); L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}^N))$.

The result follows from Proposition 2.4.1.

Case of Theorems 2.3.2 and Remark 2.3.4. Set $q = \frac{4(\alpha+2)}{N\alpha}$. Thus $(q, \alpha+2)$ is an admissible pair. By Lemma 2.4.3, we may assume that $r = \alpha+2$ in (2.3.1) and in (2.3.2). Let $\varepsilon > 0$ as in (2.3.2) ($\varepsilon = 0$ in (2.3.1)). We set $\varepsilon_0 = \frac{q\alpha}{q-2}\varepsilon$. And since $\frac{N\alpha^2}{4-\alpha(N-2)} \geq 1 \iff \alpha \geq \alpha_0$, it follows from (2.3.1) or (2.3.2) that,

$$\|u\|_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}((1, \infty); L^{\alpha+2})}^{\frac{q\alpha}{q-2}} = \int_1^\infty \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\frac{q\alpha}{q-2}} dt \leq C \int_1^\infty t^{-\frac{N\alpha^2}{4-\alpha(N-2)} - \varepsilon_0} dt < \infty.$$

Then $u \in L^{\frac{q\alpha}{q-2}}((1, \infty); L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$ and the result comes from Proposition 2.4.1.

Case of Remark 2.3.5. Let $r \geq 2$ and $\varepsilon > 0$ be as in (2.3.3). By conservation of charge, $r > 2$. Furthermore when $N = 2$, we may assume that $r < \infty$ (Lemma 2.4.3). Let $(\gamma, \rho) = \left(\frac{8}{\alpha(N-2)}, \frac{4N}{2N-\alpha(N-2)}\right)$ if $N \geq 3$, $(\gamma, \rho) = \left(\frac{2r}{\alpha}, \frac{2r}{r-\alpha}\right)$ if $N = 2$ and $(\gamma, \rho) = (\infty, 2)$ if $N = 1$. Then, $\frac{\rho\alpha}{\rho-2} = \frac{2N}{N-2}$ if $N \geq 3$, $\frac{\rho\alpha}{\rho-2} = r$ if $N = 2$ and $\frac{\rho\alpha}{\rho-2} = \infty$ if $N = 1$. Applying (2.3.3), it follows that for these choices of (γ, ρ) , $u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((1, \infty); L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}^N))$. The result comes from Proposition 2.4.1.

Step 2. Conclusion.

The result comes from Step 1 and Lemma 2.4.5. This achieves the proof. \square

Chapitre 3

Necessary Conditions and Sufficient Conditions for Global Existence

PASCAL BÉGOUT

Laboratoire d'Analyse Numérique
Université Pierre et Marie Curie
Boîte Courrier 187
4, place Jussieu 75252 Paris Cedex 05, FRANCE

e-mail : begout@ann.jussieu.fr

Abstract

In this paper, we consider the nonlinear Schrödinger equation with the super critical power of nonlinearity in the attractive case. We give a sufficient condition and a necessary condition to obtain global or blowing up solutions. These conditions coincide in the critical case, thereby extending the results of Weinstein [77, 78]. Furthermore, we improve a blow-up condition.

3.1 Introduction and notations

We consider the following nonlinear Schrödinger equation,

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \lambda|u|^\alpha u = 0, & (t, x) \in (-T_*, T^*) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0) = \varphi, & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 \leq \alpha < \infty$ if $N = 1$) and φ a given initial data.

We recall that for every $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, (3.1.1) has a unique solution $u \in C((-T_*, T^*); H^1(\mathbb{R}^N))$ which satisfies the blow-up alternative and the conservation of charge and energy. In other words, if $T^* < \infty$ then $\lim_{t \nearrow T^*} \|u(t)\|_{H^1} = \infty$. In the same way, if $T_* < \infty$ then $\lim_{t \searrow -T_*} \|u(t)\|_{H^1} = \infty$. And for all $t \in (-T_*, T^*)$, $\|u(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ and $E(u(t)) = E(\varphi)$, where $E(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{\alpha+2} \|\varphi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}$. If $\varphi \in X \stackrel{\text{def}}{=} H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(|x|^2; dx)$ then $u \in C((-T_*, T^*); X)$. Moreover, if $\lambda \leq 0$, if $\alpha < \frac{4}{N}$ or if

$\|\varphi\|_{H^1}$ is small enough then $T^* = T_* = \infty$ and $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^1)} < \infty$. Finally, if $\alpha \geq \frac{4}{N}$ then there exist initial values $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ such that the corresponding solution of (3.1.1) blows up in finite time. See Cazenave [19], Ginibre and Velo [33, 34, 35, 38], Glassey [41], Kato [50].

In the attractive and critical case ($\lambda > 0$ and $\alpha = \frac{4}{N}$), there is a sharp condition to obtain global solutions (see Weinstein [77, 78]). It is given in terms of the solution of a related elliptic problem. But in the super critical case ($\alpha > \frac{4}{N}$), we only know that there exists $\varepsilon > 0$ sufficiently small such that if $\|\varphi\|_{H^1} \leq \varepsilon$, then the corresponding solution is global in time.

In this paper, we try to extend the results of Weinstein [77, 78] to the super critical case $\alpha > \frac{4}{N}$. As we will see, we are not able to establish such a result, but we can give two explicit real values functions γ_* and r_* with $0 < \gamma_* < r_*$ such that if $\|\varphi\|_{L^2} \leq \gamma_*(\|\nabla\varphi\|_{L^2})$, then the corresponding solution is global in time. Furthermore, for every $(a, b) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ such that $a > r_*(b)$, there exists $\varphi_{a,b} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ with $\|\varphi_{a,b}\|_{L^2} = a$ and $\|\nabla\varphi_{a,b}\|_{L^2} = b$ such that the associated solution blows up in finite time for both $t < 0$ et $t > 0$ (see Theorem 3.4.1 below). Despite of the fact we do not obtain a sharp condition (since $\gamma_* < r_*$), we recover the results of Weinstein [77, 78] as $\alpha \searrow \frac{4}{N}$. Setting $\mathcal{A} = \{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N); \|\varphi\|_{L^2} \leq \gamma_*(\|\nabla\varphi\|_{L^2})\}$, it follows that for every $\varphi \in \mathcal{A}$, the corresponding solution of (3.1.1) is global in time and uniformly bounded in $H^1(\mathbb{R}^N)$. It is interesting to note that \mathcal{A} is an unbounded subset of $H^1(\mathbb{R}^N)$ as for the case $\alpha = \frac{4}{N}$. We also improve some results about blow-up (Theorems 3.2.1 and 3.2.2).

This paper is organized as follows. In Section 3.2, we give a sufficient blow-up condition. In Section 3.3, we recall the best constant in a Gagliardo-Nirenberg's inequality. In Section 3.4, we give the main result of this paper, that is necessary conditions and sufficient conditions to obtain global solutions. In Section 3.5, we prove the result given in Section 3.4.

The following notations will be used throughout this paper. $\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ and we denote by $B(0, R)$, for $R > 0$, the ball of \mathbb{R}^N of center 0 with radius R . For $1 \leq p \leq \infty$, we design by $L^p(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, with norm $\|\cdot\|_{L^p}$, the usual Lebesgue spaces and by $H^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, with norm $\|\cdot\|_{H^1}$, the Sobolev space. For $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $0 < \gamma < 1$, we denote by $C^{k,\gamma}(\mathbb{R}^N) = C^{k,\gamma}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ the Hölder spaces and we introduce the Hilbert space $X = \{\psi \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}); \|\psi\|_X < \infty\}$ with norm $\|\psi\|_X^2 = \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx$. For a normed functional space $E \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$, we denote by E_{rad} the space of functions $f \in E$ such that f is spherically symmetric. E_{rad} is endowed with the norm of E . Finally, C are auxiliary positive constants.

3.2 Blow-up

The first two results are an improvement of a blow-up condition (see Glassey [41], Ogawa and Tsutsumi [68]). We know that if a solution has a negative energy, then it blows up in finite time. We extend this result for any nontrivial solution with nonpositive energy.

Theorem 3.2.1. *Let $\lambda > 0$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 < \alpha < \infty$ if $N = 1$) and $\varphi \in X$, $\varphi \neq 0$. If $E(\varphi) \leq 0$ then the corresponding solution $u \in C((-T_*, T^*); X)$ of (3.1.1) blows up in finite time for both $t < 0$ and $t > 0$. In other words, $T_* < \infty$ and $T^* < \infty$.*

Theorem 3.2.2. *Let $\lambda > 0$, $N \geq 2$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($2 < \alpha \leq 4$ if $N = 2$) and $\varphi \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \neq 0$. If $E(\varphi) \leq 0$ then the corresponding solution $u \in C((-T_*, T^*); H^1(\mathbb{R}^N))$ of (3.1.1) blows up in finite time for both $t < 0$ and $t > 0$. In other words, $T_* < \infty$ and $T^* < \infty$.*

Remark 3.2.3. When $E(\varphi) = 0$, the conclusion of Theorems 3.2.1 and 3.2.2 is false for $\alpha = \frac{4}{N}$. Indeed, let $\varphi \in X_{\text{rad}}$, $\varphi \neq 0$, be a solution of $-\Delta\varphi + \varphi = \lambda|\varphi|^{\frac{4}{N}}\varphi$, in \mathbb{R}^N . Then $E(\varphi) = 0$ from (3.3.5) but $u(t, x) = \varphi(x)e^{it}$ is the solution of (3.1.1) and so $T^* = T_* = \infty$.

Similar results exist for the critical case. See Nawa [64, 66]. It is shown that if $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfies $E(\varphi) < \frac{(\varphi', i\varphi)^2}{\|\varphi\|_{L^2}^2}$, when $N = 1$, or if $E(\varphi) < 0$, when $N \geq 2$, then the corresponding solution of (3.1.1) blows up in finite time or grows up at infinity, the first case always occurring when $N = 1$. Here, (\cdot, \cdot) denotes the scalar product in $L^2(\mathbb{R}^N)$. See also Nawa [65, 67]. Note that in the case $N = 1$, the result of Nawa [66] slightly improves that of Ogawa and Tsutsumi [69], since it allows to make blow-up some solution with nonnegative energy.

Proof of Theorem 3.2.1. We argue by contradiction. Set for every $t \in (-T_*, T^*)$, $h(t) = \|xu(t)\|_{L^2}^2$. Then $h \in C^2((-T_*, T^*); \mathbb{R})$ and

$$\forall t \in (-T_*, T^*), \quad h''(t) = 4N\alpha E(\varphi) - 2(N\alpha - 4)\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \quad (3.2.1)$$

(Glassey [41]). Since $E(\varphi) \leq 0$, we have by Gagliardo-Nirenberg's inequality (Proposition 3.3.1) and conservation of energy and charge, $\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{2\lambda}{\alpha+2}\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \leq C\|\nabla u(t)\|_{L^2}^{\frac{N\alpha}{2}}$, for every $t \in (-T_*, T^*)$. Since $\alpha > \frac{4}{N}$, we deduce that $\inf_{t \in (-T_*, T^*)} \|\nabla u(t)\|_{L^2} > 0$ and with (3.2.1), we obtain

$$\forall t \in (-T_*, T^*), \quad h''(t) \leq -C.$$

So, if $T_* = \infty$ or if $T^* = \infty$ then there exists $S \in \mathbb{R}$ such that $h(S) < 0$ which is absurd since $h > 0$. Hence the result. \square

Proof of Theorem 3.2.2. For $\Psi \in W^{4,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, $\Psi \geq 0$, we set

$$\forall t \in (-T_*, T^*), V(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Psi(x) |u(t, x)|^2 dx.$$

We know that there exists $\Psi \in W^{4,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, $\Psi \geq 0$, such that $V \in C^2((-T_*, T^*); \mathbb{R})$ and

$$\forall t \in (-T_*, T^*), V''(t) \leq 2N\alpha E(\varphi) - 2(N\alpha - 4) \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2,$$

(see the proof of Theorem 2.7 of Cazenave [18] and Remark 2.13 of this reference). We conclude in the same way that for Theorem 3.2.1. \square

3.3 Sharp estimate

In this section, we recall the sharp estimate in a Gagliardo-Nirenberg's inequality (Proposition 3.3.1) and a result concerning the *ground states*.

Let $\lambda > 0$, $\omega > 0$ and $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ if $N = 1$). We consider the following elliptic equations.

$$\begin{cases} -\Delta R + R = |R|^\alpha R, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ R \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), R \neq 0, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

$$\begin{cases} -\Delta \Phi + \omega \Phi = \lambda |\Phi|^\alpha \Phi, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ \Phi \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \Phi \neq 0. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

It is well-known that the equation (3.3.2) possesses at least one solution ψ . Furthermore, each solution ψ of (3.3.2) satisfies $\psi \in C^{2,\gamma}(\mathbb{R}^N) \cap W^{3,p}(\mathbb{R}^N)$, $\forall \gamma \in (0, 1)$, $\forall p \in [2, \infty)$, $|\psi(x)| \leq C e^{-\delta|x|}$, for all $x \in \mathbb{R}^N$, where C and δ are two positive constants which do not depend on x , $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |D^\beta \psi(x)| = 0$, $\forall |\beta| \leq 2$ multi-index. Finally, ψ satisfies the following identities.

$$\|\nabla \psi\|_{L^2}^2 = \frac{\omega N \alpha}{4 - \alpha(N-2)} \|\psi\|_{L^2}^2, \quad (3.3.3)$$

$$\|\psi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} = \frac{2\omega(\alpha+2)}{\lambda(4 - \alpha(N-2))} \|\psi\|_{L^2}^2, \quad (3.3.4)$$

$$\|\psi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} = \frac{2(\alpha+2)}{\lambda N \alpha} \|\nabla \psi\|_{L^2}^2. \quad (3.3.5)$$

Such solutions are called *bound states* solutions. Furthermore, (3.3.2) has a unique solution Φ satisfying the following additional properties. $\Phi \in \mathcal{S}_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$; $\Phi > 0$ over \mathbb{R}^N ; Φ is decreasing with respect to $r = |x|$; for every multi-index $\beta \in \mathbb{N}^N$, there exists two constants $C > 0$ and $\delta > 0$ such that for every $x \in \mathbb{R}^N$, $|\Phi(x)| + |D^\beta \Phi(x)| \leq C e^{-\delta|x|}$. Finally, for every solution ψ of (3.3.2), we have

$$\|\Phi\|_{L^2} \leq \|\psi\|_{L^2}. \quad (3.3.6)$$

Such a solution is called a *ground state* of the equation (3.3.2).

Equation (3.3.2) is studied in the following references. Berestycki, Gallouët and Kavian[8]; Berestycki and Lions [9, 10]; Berestycki, Lions and Peletier [11]; Gidas, Ni and Nirenberg [31]; Jones and Küpper [49]; Kwong [57]; Strauss [71]. See also Cazenave [19], Section 8.

Proposition 3.3.1. *Let $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ if $N = 1$) and R be the ground state solution of (3.3.1). Then the best constant $C_* > 0$ in the Gagliardo-Nirenberg's inequality,*

$$\forall f \in H^1(\mathbb{R}^N), \|f\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \leq C_* \|f\|_{L^2}^{\frac{4-\alpha(N-2)}{2}} \|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{N\alpha}{2}}, \quad (3.3.7)$$

is given by

$$C_* = \frac{2(\alpha+2)}{N\alpha} \left(\frac{4-\alpha(N-2)}{N\alpha} \right)^{\frac{N\alpha-4}{4}} \|R\|_{L^2}^{-\alpha}. \quad (3.3.8)$$

See Weinstein [77] for the proof in the case $N \geq 2$. See also Lemma 3.4 of Cazenave [18] in the case $\alpha = \frac{4}{N}$. But for convenience, we give the proof. It makes use of a compactness result which is an adaptation of the compactness lemma due to Strauss (Strauss [71]).

Proof of Proposition 3.3.1. We define for every $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $w \neq 0$, the functional

$$J(w) = \frac{\|w\|_{L^2}^{\frac{4-\alpha(N-2)}{2}} \|\nabla w\|_{L^2}^{\frac{N\alpha}{2}}}{\|w\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}},$$

and we set $\sigma = \inf_{w \in H^1 \setminus \{0\}} J(w)$. Then $\sigma \in (0, \infty)$ by (3.3.7). We have to show that $\sigma = C_*^{-1}$ where C_* is defined by (3.3.8). Let $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ be a minimizing sequence. Let

$$\mu_n = \frac{\|w_n\|_{L^2}^{\frac{N-2}{2}}}{\|\nabla w_n\|_{L^2}^{\frac{N}{2}}}, \quad \lambda_n = \frac{\|w_n\|_{L^2}}{\|\nabla w_n\|_{L^2}} \quad \text{and} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, v_n(x) = \mu_n w_n(\lambda_n x).$$

Then $\|v_n\|_{L^2} = \|\nabla v_n\|_{L^2} = 1$ and $J(w_n) = J(v_n) = \|v_n\|_{L^{\alpha+2}}^{-(\alpha+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma$. Let v_n^* be the symmetrization of Schwarz of $|v_n|$ (see Bandle [2]; Berestycki and Lions [9], Appendix A.III). Then $J(v_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma$ and by compactness, $v_{n_l}^* \rightharpoonup v$ in $H_w^1(\mathbb{R}^N)$ as $l \rightarrow \infty$ and $v_{n_l}^* \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{L^{\alpha+2}} v$, for a subsequence $(v_{n_l})_l \subset (v_n^*)_n$ and for some $v \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$. Indeed, setting $w_l = v_{n_l}^* - v$, it follows that $w_l \rightarrow 0$ in $H_w^1(\mathbb{R}^N)$ as $l \rightarrow \infty$. Since $(w_l)_{l \in \mathbb{N}}$ is bounded in $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$ and nonincreasing with respect to $|x|$, then $\forall l \in \mathbb{N}$ and $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $|w_l(|x|)| \leq C|x|^{-\frac{N}{2}}$, where $C > 0$ does not depend on l and x (Berestycki and Lions [9], Appendix A.II, Radial Lemma A.IV). From this and Hölder's inequality, we deduce that $\forall l \in \mathbb{N}$ and $\forall R > 0$, $\|w_l\|_{L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N \setminus B(0, R))} \leq CR^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}}$, for a constant $C > 0$ which does not depend on l . The strong convergence in $L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ follows easily from the above estimate and from the compact embedding $H^1(B(0, R)) \hookrightarrow L^{\alpha+2}(B(0, R))$, which holds for every $R > 0$. Since $\|v_n\|_{L^{\alpha+2}} = \|v_n^*\|_{L^{\alpha+2}}$, it follows

that $\|v\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} = \sigma^{-1}$ and then $v \neq 0$. Thus, $J(v) = \sigma$ and $\|v\|_{L^2} = \|\nabla v\|_{L^2} = 1$. It follows that $\forall w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\frac{d}{dt}J(v+tw)|_{t=0} = 0$. So v satisfies $-\Delta v + \frac{4-\alpha(N-2)}{N\alpha}v = \sigma \frac{2(\alpha+2)}{N\alpha}|v|^\alpha v$, in \mathbb{R}^N . Set $a = \left(\frac{N\alpha}{4-\alpha(N-2)}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{2\sigma(\alpha+2)}{4-\alpha(N-2)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ and $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $u(x) = bv(ax)$. Then $u \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$ is a solution of (3.3.1) and $J(u) = \sigma$. By (3.3.3)–(3.3.4), we obtain $J(u) = C_*^{-1} \frac{\|u\|_{L^2}^\alpha}{\|R\|_{L^2}^\alpha} = \sigma$ and $J(R) = C_*^{-1} \geq \sigma$ (since R also satisfies (3.3.1)). Then $\|u\|_{L^2} \leq \|R\|_{L^2}$ and so with (3.3.6), $\|u\|_{L^2} = \|R\|_{L^2}$. Hence the result. \square

3.4 Necessary condition and sufficient condition for global existence

Theorem 3.4.1. *Let $\lambda > 0$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 < \alpha < \infty$ if $N = 1$) and R be the ground state solution of (3.3.1). We define for every $a > 0$,*

$$r_*(a) = \left(\frac{N\alpha}{4-\alpha(N-2)}\right)^{\frac{N\alpha-4}{2(4-\alpha(N-2))}} \left(\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\|R\|_{L^2}\right)^{\frac{2\alpha}{4-\alpha(N-2)}} a^{-\frac{N\alpha-4}{4-\alpha(N-2)}}, \quad (3.4.1)$$

$$\gamma_*(a) = \left(\frac{N\alpha-4}{N\alpha}\right)^{\frac{N\alpha-4}{2(4-\alpha(N-2))}} r_*(a). \quad (3.4.2)$$

1. If $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfies

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq \gamma_*(\|\nabla\varphi\|_{L^2}), \quad (3.4.3)$$

then the corresponding solution $u \in C((-T_*, T^*); H^1(\mathbb{R}^N))$ of (3.1.1) is global in time, that is $T^* = T_* = \infty$, and the following estimates hold.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 < \frac{2N\alpha}{N\alpha-4}E(\varphi), \\ \|\nabla u(t)\|_{L^2} < r_*^{-1}(\|\varphi\|_{L^2}), \end{cases}$$

where r_*^{-1} is the function defined by (3.4.5). In particular, $E(\varphi) > \frac{N\alpha-4}{2N\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2$.

2. For every $a > 0$ and for every $b > 0$ satisfying $a > r_*(b)$, there exists $\varphi_{a,b} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ with $\|\varphi_{a,b}\|_{L^2} = a$ and $\|\nabla\varphi_{a,b}\|_{L^2} = b$ such that the associated solution $u_{a,b} \in C((-T_*, T^*); H^1(\mathbb{R}^N))$ of (3.1.1) blows up in finite time for both $t < 0$ et $t > 0$. In other words, $T_* < \infty$ and $T^* < \infty$. Furthermore, $E(\varphi_{a,b}) > 0 \iff r_*(b) < a < \rho_*(b)$ and $E(\varphi_{a,b}) = 0 \iff a = \rho_*(b)$, where for every $a > 0$,

$$\rho_*(a) = \left(\frac{N\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{4-\alpha(N-2)}} r_*(a). \quad (3.4.4)$$

Finally, $E(\varphi_{a,b}) < \frac{N\alpha-4}{2N\alpha}\|\nabla\varphi_{a,b}\|_{L^2}^2$.

Remark 3.4.2. Let γ_* be the function defined by (3.4.2). Set

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N); \|\varphi\|_{L^2} \leq \gamma_*(\|\nabla\varphi\|_{L^2})\}.$$

By Theorem 3.4.1, for every $\varphi \in \mathcal{A}$, the corresponding solution of (3.1.1) is global in time and uniformly bounded in $H^1(\mathbb{R}^N)$. It is interesting to note that \mathcal{A} is an unbounded subset of $H^1(\mathbb{R}^N)$. So Theorem 3.4.1 gives a general result for global existence for which we can take initial values with the $H^1(\mathbb{R}^N)$ norm large as we want.

Remark 3.4.3. Let γ_* , r_* , and ρ_* be the functions defined respectively by (3.4.2), (3.4.1) and (3.4.4). It is clear that since $\alpha > \frac{4}{N}$, γ_* , γ_*^{-1} , r_* , r_*^{-1} , ρ_* and ρ_*^{-1} are decreasing and bijective functions from $(0, \infty)$ to $(0, \infty)$ and for every $a > 0$,

$$\begin{aligned} \gamma_*^{-1}(a) &= \left(\frac{N\alpha - 4}{N\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} r_*^{-1}(a), \\ r_*^{-1}(a) &= \left(\frac{N\alpha}{4 - \alpha(N-2)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \|R\|_{L^2}\right)^{\frac{2\alpha}{N\alpha-4}} a^{-\frac{4-\alpha(N-2)}{N\alpha-4}}, \\ \rho_*^{-1}(a) &= \left(\frac{N\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{N\alpha-4}} r_*^{-1}(a). \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

So the condition condition (3.4.3) is equivalent to the condition $\|\nabla\varphi\|_{L^2} \leq \gamma_*^{-1}(\|\varphi\|_{L^2})$. Furthermore, $\gamma_* < r_* < \rho_*$ and $\gamma_*^{-1} < r_*^{-1} < \rho_*^{-1}$.

Remark 3.4.4. Let γ_* , r_* , and ρ_* be the functions defined respectively by (3.4.2), (3.4.1) and (3.4.4). Then $\gamma_* \xrightarrow{\alpha \searrow \frac{4}{N}} \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \|R\|_{L^2}$ and $r_* \xrightarrow{\alpha \searrow \frac{4}{N}} \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \|R\|_{L^2}$ (and even, $\rho_* \xrightarrow{\alpha \searrow \frac{4}{N}} \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \|R\|_{L^2}$). So we obtain the sharp condition for global existence, $\|\varphi\|_{L^2} < \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \|R\|_{L^2}$ which coincide with the results obtained by Weinstein [77, 78]. However, we do not know if γ_* or r_* are optimum.

3.5 Proof of Theorem 3.4.1

In order to prove the blowing up result (2 of Theorem 3.4.1), we need of several lemmas. We follow the method of Berestycki and Cazenave [7] (see also Cazenave [17] and Cazenave [19], Section 8.2). *A priori*, we would expect to use Theorem 3.2.1, that is to construct initial values in X with nonpositive energy, which is the case for $\alpha = \frac{4}{N}$. But it will not be enough because we have to make blow-up some solutions whose the initial values have a positive energy.

We define the following functionals and sets. Let $\lambda > 0$, $\omega > 0$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$

if $N = 1$) and $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^*(\psi)^{\frac{N\alpha-4}{2}} = \frac{2(\alpha+2)}{\lambda N\alpha} \frac{\|\nabla\psi\|_{L^2}^2}{\|\psi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}}, \text{ if } \psi \neq 0, \\ Q(\psi) = \|\nabla\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda N\alpha}{2(\alpha+2)} \|\psi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}, \\ S(\psi) = \frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{\alpha+2} \|\psi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} + \frac{\omega}{2}\|\psi\|_{L^2}^2, \\ \mathcal{P}(\beta, \psi)(x) = \beta^{\frac{N}{2}}\psi(\beta x), \text{ for almost every } x \in \mathbb{R}^N, \\ M = \{\psi \in H^1(\mathbb{R}^N); \psi \neq 0 \text{ and } Q(\psi) = 0\}, \\ A = \{\psi \in H^1(\mathbb{R}^N); \psi \neq 0 \text{ and } -\Delta\psi + \omega\psi = \lambda|\psi|^\alpha\psi, \text{ in } \mathbb{R}^N\}, \\ G = \{\psi \in A; \forall\phi \in A, S(\psi) \leq S(\phi)\}. \end{array} \right.$$

Note that by the discussion at the beginning of Section 3.3 and (3.3.3)–(3.3.6), $M \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$ and $G \neq \emptyset$.

Lemma 3.5.1. *We have the following results.*

1. $\forall\beta > 0$, $\beta \neq \beta^*(\psi)$, $S(\mathcal{P}(\beta, \psi)) < S(\mathcal{P}(\beta^*(\psi), \psi))$.
2. *The following equivalence holds.*

$$\psi \in G \iff \begin{cases} \psi \in M, \\ S(\psi) = \min_{\phi \in M} S(\phi), \end{cases}$$

3. Let $m \stackrel{def}{=} \min_{\phi \in M} S(\phi)$. Then $\forall\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ with $Q(\phi) < 0$, $Q(\phi) \leq S(\phi) - m$.

See Cazenave [19], Lemma 8.2.5 for the proof of 1; Proposition 8.2.4 for the proof of 2; Corollary 8.2.6 for the proof of 3. There is a mistake in the formula (8.2.4) of this reference. Replace in this expression $\lambda^*(u)^{\frac{n\alpha-4}{2}} = \frac{\alpha+2}{2} (\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2) (\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha+2})^{-1}$ with $\lambda^*(u)^{\frac{n\alpha-4}{2}} = \frac{2(\alpha+2)}{n\alpha} (\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2) (\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha+2})^{-1}$.

The proof of 1 of Theorem 3.4.1 relies on the following lemma.

Lemma 3.5.2. *Let $I \subseteq \mathbb{R}$, be an open interval, $t_0 \in I$, $p > 1$, $a > 0$, $b > 0$ and $\Phi \in C(I; \mathbb{R}^+)$. We set, $\forall x \geq 0$, $f(x) = a - x + bx^p$, $\underline{x} = (bp)^{-\frac{1}{p-1}}$ and $b_* = \frac{p-1}{p}\underline{x}$. Assume that $\Phi(t_0) < \underline{x}$, $a \leq b_*$ and that $f \circ \Phi > 0$. Then, $\forall t \in I$, $\Phi(t) < \underline{x}$.*

Proof. Since $\Phi(t_0) < \underline{x}$ and Φ is a continuous function, there exists $\eta > 0$ with $(t_0 - \eta, t_0 + \eta) \subseteq I$ such that, $\forall t \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$, $\Phi(t) < \underline{x}$. If $\Phi(t_*) = \underline{x}$ for some $t_* \in I$, then $f \circ \Phi(t_*) = f(\underline{x}) = a - b_* \leq 0$. But $f \circ \Phi > 0$. Then, $\forall t \in I$, $\Phi(t) < \underline{x}$. \square

The proof of 2 of Theorem 3.4.1 makes use the following lemma.

Lemma 3.5.3. *Let $\lambda > 0$, $\omega > 0$ and $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 < \alpha < \infty$ if $N = 1$). We set for every $\beta > 0$ and for every $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi_\beta = \mathcal{P}(\beta, \psi)$. Let $u_\beta \in C((-T_*, T^*); H^1(\mathbb{R}^N))$ be the solution of (3.1.1) with initial value φ_β . Then we have, $\forall \psi \in G$, $\forall \beta > 1$, $T_* < \infty$ and $T^* < \infty$.*

Proof. Let $\psi \in G$. By (3.3.5), we have

$$\begin{aligned} \beta^*(\varphi_\beta)^{\frac{N\alpha-4}{2}} &= \frac{2(\alpha+2)}{\lambda N \alpha} \frac{\beta^2 \|\nabla \psi\|_{L^2}^2}{\beta^{\frac{N\alpha}{2}} \|\psi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}}, \\ Q(\varphi_\beta) &= \beta^2 \left(\|\nabla \psi\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda N \alpha}{2(\alpha+2)} \beta^{\frac{N\alpha-4}{2}} \|\psi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \right), \\ \frac{\lambda N \alpha}{2(\alpha+2)} \|\psi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} &= \|\nabla \psi\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

So, $\beta^*(\varphi_\beta)^{\frac{N\alpha-4}{2}} = \beta^{-\frac{N\alpha-4}{2}}$, $Q(\varphi_\beta) = -\beta^2 \|\nabla \psi\|_{L^2}^2 \left(\beta^{\frac{N\alpha-4}{2}} - 1 \right)$ and $\beta^*(\psi) = 1$. From these three last equalities, from 1 and 2 of Lemmas 3.5.1 and by conservation of charge and energy, we have

$$\forall \beta > 1, Q(\varphi_\beta) < 0, \quad (3.5.1)$$

$$\forall \beta \neq 1, S(\varphi_\beta) < S(\psi) \equiv m, \quad (3.5.2)$$

$$\forall \beta > 0, \forall t \in (-T_*, T^*), S(u_\beta(t)) = S(\varphi_\beta). \quad (3.5.3)$$

By continuity of u_β , by (3.5.1)–(3.5.3) and from 3 of Lemma 3.5.1, we have for every $\beta > 1$,

$$\forall t \in (-T_*, T^*), Q(u_\beta(t)) \leq S(\varphi_\beta) - m < 0. \quad (3.5.4)$$

Set $\forall t \in (-T_*, T^*)$, $h(t) = \|xu_\beta(t)\|_{L^2}^2$. Then we have by Glassey [41], $h \in C^2((-T_*, T^*); \mathbb{R})$ and $\forall t \in (-T_*, T^*)$, $h''(t) = 8\|\nabla u_\beta(t)\|_{L^2}^2 - \frac{4\lambda N \alpha}{\alpha+2} \|u_\beta(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \equiv 8Q(u_\beta(t))$. So with (3.5.4),

$$\forall t \in (-T_*, T^*), h''(t) \leq 8(S(\varphi_\beta) - m) < 0,$$

for every $\beta > 1$. It follows that $T_* < \infty$ and $T^* < \infty$. Hence the result. \square

Proof of Theorem 3.4.1. We proceed in two steps.

Step 1. We have 1.

We set $I = (-T_*, T^*)$, $t_0 = 0$, $p = \frac{N\alpha}{4}$, $a = \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2$, $b = \frac{2\lambda}{\alpha+2} C_* \|\varphi\|_{L^2}^{\frac{4-\alpha(N-2)}{2}}$, $\underline{x} = (bp)^{-\frac{1}{p-1}}$, $b_* = \frac{p-1}{p} \underline{x}$, $\forall t \in I$, $\Phi(t) = \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2$ and $\forall x \geq 0$, $f(x) = a - x + bx^p$. Then by conservation of energy, by Proposition 3.3.1 and by conservation of charge, we have

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 &= 2E(\varphi) + \frac{2\lambda}{\alpha+2} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \\ &< \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2 + \frac{2\lambda}{\alpha+2} C_* \|\varphi\|_{L^2}^{\frac{4-\alpha(N-2)}{2}} (\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2)^{\frac{N\alpha}{4}}. \end{aligned}$$

And so, $\forall t \in I$, $a - \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + b(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2)^p > 0$, that is $f \circ \Phi > 0$. Furthermore, $\Phi(t_0) \equiv a \leq b_* < \underline{x}$. Indeed, by Remark 3.4.3, we have

$$\Phi(t_0) \leq b_* \iff \|\nabla \varphi\|_{L^2} \leq \gamma_*^{-1}(\|\varphi\|_{L^2}) \iff \|\varphi\|_{L^2} \leq \gamma_*(\|\nabla \varphi\|_{L^2}).$$

So by Lemma 3.5.2, $\Phi(t) < \underline{x} \equiv [r_*^{-1}(\|\varphi\|_{L^2})]^2$, $\forall t \in I$. Thus, $I = \mathbb{R}$ and for every $t \in \mathbb{R}$,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} < r_*^{-1}(\|\varphi\|_{L^2}).$$

It follows from conservation of charge and energy, (3.3.7), (3.3.8), and the above inequality, that

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, E(\varphi) &\geq \frac{1}{2} \left(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+2} C_* \|\varphi\|_{L^2}^{\frac{4-\alpha(N-2)}{2}} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^{\frac{N\alpha}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \left(1 - \frac{4}{N\alpha} [r_*^{-1}(\|\varphi\|_{L^2}) \|\nabla u(t)\|_{L^2}^{-1}]^{-\frac{N\alpha-4}{2}} \right) \\ &> \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \left(1 - \frac{4}{N\alpha} \right) \\ &= \frac{N\alpha-4}{2N\alpha} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Hence 1.

Step 2. We have 2.

Let R be the ground state solution of (3.3.1). Let first remark from the assumptions and from Remark 3.4.3, we have $b > r_*^{-1}(a)$. We set

$$\nu = [r_*^{-1}(a)]^{\frac{N}{2}} \left(\frac{4-\alpha(N-2)}{N\alpha} \right)^{\frac{N}{4}} a^{-\frac{N-2}{2}} \|R\|_{L^2}^{-1}, \quad \omega = [r_*^{-1}(a)]^2 \frac{4-\alpha(N-2)}{N\alpha} a^{-2} = \left(\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \|R\|_{L^2} a^{-1} \right)^{\frac{4\alpha}{N\alpha-4}},$$

and for every $x \in \mathbb{R}^N$, $\psi(x) = \nu R(\sqrt{\omega}x)$. Then $\psi \in \mathcal{S}_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N) \cap A$. Since R satisfies (3.3.1)–(3.3.6), it follows that $\psi \in G$. Furthermore, $\|\psi\|_{L^2} = a$ and $\|\nabla \psi\|_{L^2} = r_*^{-1}(a)$. Let $\beta = \frac{b}{r_*^{-1}(a)} > 1$. Set for every $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi_{a,b}(x) = \varphi_\beta(x) = \mathcal{P}(\beta, \psi)(x)$. In particular, $\varphi_{a,b} \in \mathcal{S}_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N)$ and $\varphi_{a,b}$ satisfies

$$-\Delta \varphi_{a,b} + \omega \beta^2 \varphi_{a,b} = \lambda \beta^{-\frac{N\alpha-4}{2}} |\varphi_{a,b}|^\alpha \varphi_{a,b}, \quad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

Denote $u_{a,b} \in C((-T_*, T^*); H^2(\mathbb{R}^N) \cap X_{\text{rad}})$ the solution of (3.1.1) with initial value $\varphi_{a,b}$. Then by Lemma 3.5.3, $T_* < \infty$ and $T^* < \infty$. Moreover, $\|\varphi_{a,b}\|_{L^2} = a$, $\|\nabla \varphi_{a,b}\|_{L^2} = b$ and by (3.3.5),

$$\begin{aligned} E(\varphi_{a,b}) &= \frac{1}{2} \|\nabla \varphi_{a,b}\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{\alpha+2} \|\varphi_{a,b}\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla \varphi_{a,b}\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{\alpha+2} \beta^{\frac{N\alpha}{2}} \|\psi\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \\ &= \frac{\|\nabla \varphi_{a,b}\|_{L^2}^2}{2N\alpha} \left(N\alpha - 4\beta^{\frac{N\alpha-4}{2}} \right) \\ &= \frac{\|\nabla \varphi_{a,b}\|_{L^2}^2}{2N\alpha} \left(N\alpha - 4\beta^{\frac{N\alpha-4}{2}} \right). \end{aligned}$$

By Remark 3.4.3, it follows that

$$E(\varphi_{a,b}) \leq 0 \iff \beta \geq \left(\frac{N\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{N\alpha-4}} \iff b \geq \left(\frac{N\alpha}{4}\right)^{\frac{2}{N\alpha-4}} r_*^{-1}(a) \equiv \rho_*^{-1}(a) \iff a \geq \rho_*(b).$$

Hence the result. □

Chapitre 4

Simplification d'une démonstration de théorie de la diffusion en dimension $N \leq 2$

Ce chapitre est dédié à la simplification de la démonstration du principal résultat obtenu par Kenji Nakanishi dans [62] (voir le Théorème 4.1.1 ci-dessous). L'inconvénient de la démonstration du Théorème 4.1.1 est que l'auteur utilise fortement les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ (avec $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$), alors que le seul espace fonctionnel mentionné dans ce théorème est $H^1(\mathbb{R}^N)$. Il semble donc naturel de tenter de simplifier cette démonstration. Dans son article, l'auteur utilise principalement les espaces fonctionnels suivants.

$$\begin{aligned}(B, I) &= L^\infty(I, B_{\infty, \infty}^{-\sigma}(\mathbb{R}^N)), & (X, I) &= L^a(I, L^a(\mathbb{R}^N)), \\ (K, I) &= L^\eta(I, B_{\eta, 2}^1(\mathbb{R}^N)), & (K', I) &= L^{\eta'}(I, B_{\eta', 2}^1(\mathbb{R}^N)), \\ (Y, I) &= L^a(I, B_{\eta, 2}^{\sigma_Y}(\mathbb{R}^N)), & (\tilde{Y}, I) &= L^{\frac{a}{p}}(I, B_{\eta', 2}^{\sigma_Y}(\mathbb{R}^N)),\end{aligned}$$

où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle, $\sigma = \frac{2}{N\alpha}$, $a = \frac{\eta\alpha}{\eta-2} = \frac{\alpha(N+2)}{2}$, $\eta = \frac{2(N+2)}{N}$, $\sigma_Y = N \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{a} \right)$ et $\frac{p-1}{a} + \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta'}$. On rappelle que α est la puissance de la non-linéarité de l'équation de Schrödinger (4.1.1) et donc $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$). La démonstration que l'on offre ne requière que l'utilisation des 3 espaces de Sobolev suivants.

$$(B_*, I) = L^\infty(I, W^{-(N+1), p_0}(\mathbb{R}^N)), \quad (X_*, I) = L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}^N)), \quad (K_*, I) = L^\gamma(I, W^{1, \rho}(\mathbb{R}^N)),$$

pour un certain $p_0 \in (2, \alpha + 2)$ et où (γ, ρ) est la paire admissible $\left(\frac{4(\alpha+2)}{N\alpha}, \alpha + 2 \right)$. On peut dire que les espaces E_* que l'on a pris correspondent aux espaces E de Kenji Nakanishi. Les espaces que l'on a choisis sont ceux qui semblent être les plus naturels pour l'équation de Schrödinger (4.1.1), alors

que ceux qui n'avaient qu'une utilité technique ont été abandonnés. En effet, l'espace (K_*, I) est un espace de Strichartz, alors que (K, I) n'en est pas un ¹. L'espace (K_*, I) est celui qui apparaît dans les estimations de Strichartz. En effet, en utilisant ces dernières et l'inégalité de Hölder, on obtient pour toute solution u de (4.1.1) de donnée initiale $\varphi \in H^m(\mathbb{R}^N)$ avec $m \in \{0; 1\}$,

$$\|u\|_{L^q(I, W^{m,r})} \leq C\|\varphi\|_{H^m} + C\|u\|_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}(I, L^{\frac{r\alpha}{r-2})} \|u\|_{L^q(I, W^{m,r})},$$

pour toute paire admissible (q, r) . Dans l'article [62], Kenji Nakanishi a choisi la paire admissible $(q, r) = (\eta, \eta) = \left(\frac{2(N+2)}{N}, \frac{2(N+2)}{N}\right)$, et donc $\frac{\eta\alpha}{\eta-2} = \frac{\alpha(N+2)}{2} \equiv a$. D'où le choix pour l'auteur de (X, I) . Dans cette thèse, notre choix s'est porté sur la paire admissible $(q, r) = (\gamma, \rho) = \left(\frac{4(\alpha+2)}{N\alpha}, \alpha+2\right)$. Quant à l'espace (B_*, I) , c'est le seul espace un peu abstrait que l'on utilise. Cependant, il ne sert qu'une seule fois (pour démontrer le Lemme 4.2.3) et est le dual topologique de l'espace de Sobolev $L^1(I, W^{N+1, p'_0}(\mathbb{R}^N))$ (Appendice de Brezis et Cazenave [16]). Tandis que les espaces (K', I) , (Y, I) et (\tilde{Y}, I) ne sont dans l'article que pour l'aspect technique. Dans ce chapitre, on va donc considérablement simplifier le cadre fonctionnel dans lequel on se place puisque l'on utilisera essentiellement que les espaces (X_*, I) et (K_*, I) .

Pour éviter toute confusion, les différents lemmes, propositions et théorèmes démontrés par Kenji Nakanishi dans [62], et non par l'auteur de cette thèse, porteront son nom. De plus, afin d'alléger les notations, les paramètres N , α et λ étant donnés et fixés, on ignorera la dépendance des constantes vis-à-vis de ces derniers.

4.1 Introduction et notations

On rappelle que l'équation que nous étudions est la suivante.

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \lambda|u|^\alpha u = 0, & (t, x) \in (-T_*, T^*) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0) = \varphi, & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$) et φ une donnée initiale.

Dans tout ce chapitre, les notations suivantes seront utilisées. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $u \in \mathbb{C}$. Alors on pose,

$$\begin{cases} E_T(\varphi) = 2E(\varphi) + \|\varphi\|_{L^2}^2, \\ (\gamma, \rho) \text{ est la paire admissible } \left(\frac{4(\alpha+2)}{N\alpha}, \alpha+2\right), \\ f(u) = \lambda|u|^\alpha u. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

¹mais presque, puisque $B_{\eta,2}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,\eta}(\mathbb{R}^N)$ et que $L^\eta(I, W^{1,\eta}(\mathbb{R}^N))$ est un espace de Strichartz.

Le résultat obtenu par Kenji Nakanishi dans [62] est le suivant (voir le Théorème 11.2 de cet article).

Théorème 4.1.1 (Kenji Nakanishi). *Soient $\lambda < 0$, $N \in \{1; 2\}$, $\alpha > \frac{4}{N}$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et soit $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution associée de (4.1.1). Alors il existe $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $u_- \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tels que*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|T(-t)u(t) - u_{\pm}\|_{H^1} = 0.$$

Un tel résultat en dimension d'espace $N \geq 3$ est également valable (avec $\alpha < \frac{4}{N-2}$) et fut établi par Ginibre et Velo dans [39]. Remarquons qu'une telle démonstration ne peut en aucun cas être analogue à celle du cas de la dimension $N \geq 3$. En effet, comme mentionné par l'auteur dans son article, la différence essentielle réside dans la non-intégrabilité en temps des solutions de l'équation linéaire de Schrödinger. Une deuxième difficulté était que l'inégalité de Morawetz n'était pas établie pour $N \in \{1; 2\}$. Cette dernière fut contournée par l'auteur qui obtient une inégalité de type Morawetz valable en toute dimension d'espace N . À cet effet, voir le Lemme 5.2 de Nakanishi [62] (ainsi que l'estimation (4.2.12) de cette thèse).

Afin de démontrer le Théorème 4.1.1, l'auteur a constaté qu'il suffisait d'établir le résultat suivant (voir la Proposition 10.1 de Nakanishi [62]).

Proposition 4.1.2 (Kenji Nakanishi). *Soient $\lambda < 0$, $N \in \{1; 2\}$, $\alpha > \frac{4}{N}$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et soit $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution associée de (4.1.1). On pose $a = \frac{\alpha(N+2)}{2}$. Alors $u \in L^a(\mathbb{R}; L^a(\mathbb{R}^N))$ et*

$$\|u\|_{L^a(\mathbb{R}; L^a)} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda).$$

En effet, à l'aide de cette proposition, la Proposition 2.4.1 permet de conclure. Cependant, nous montrerons un résultat analogue qui se démontre de façon identique et mène à la même conclusion, toujours grâce à la Proposition 2.4.1 (voir Proposition 4.1.3). Remarquons auparavant que l'estimation de la Proposition 4.1.2 a été démontrée dans le cas dissipatif pour $N = 3$ par Bourgain dans [13]. Dans [63], Nakanishi a donné une démonstration pour cette estimation (toujours dans le cas dissipatif) valable en toute dimension d'espace $N \geq 1$.

Proposition 4.1.3. *Soient $\lambda < 0$, $N \in \{1; 2\}$, $\alpha > \frac{4}{N}$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution associée de (4.1.1). Soit (γ, ρ) la paire admissible telle que $\rho = \alpha + 2$. Alors $u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N))$ et*

$$\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho)} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda).$$

De plus, pour toute paire admissible (q, r) , $u \in L^q(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$ et

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}; W^{1,r})} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, r, \lambda).$$

La démonstration de la Proposition 4.1.3 se fait par récurrence sur la taille de $E_T(\varphi)$ (voir les notations (4.1.2)). Cette méthode fut employée d'abord par Bourgain [14]. Puis Kenji Nakanishi l'a appliquée aux équations de Schrödinger et Klein-Gordon non-linéaires dans [62].

Le fait de simplifier certaines démonstrations des lemmes de Kenji Nakanishi dans [62] a permis de les étendre au cas critique et a conduit à un nouveau résultat sur le comportement asymptotique des solutions (voir le Corollaire 4.3.1 de cette thèse).

Avant de passer aux différentes étapes qui permettent de démontrer la Proposition 4.1.3, on va donner une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ pour $m \in \mathbb{Z}$ et $1 < p < \infty$. Elle ressemble fortement aux normes des espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ ($s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$) et le lecteur intéressé pourra consulter Bergh et Löfström [12], Triebel [73]. De même voir Adams [1], Bergh et Löfström [12], Gilbarg et Trudinger [32], Maz'ja [60] et Triebel [73] pour plus de détails sur les espaces de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ ($s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$).

Soit $h \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $0 \leq h \leq 1$, telle que $h(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et $h'(t) > 0$ pour tout $t \in (0, 1)$ et telle que

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0, \\ 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Il suffit de poser, par exemple, $h(t) = e^{-\frac{1}{t}} e^{-\frac{1}{1-t}}$, pour tout $t \in (0, 1)$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} h_n(\xi) &= h(2 - 2^{-n}|\xi|), \\ \psi_n &= \mathcal{F}^{-1}h_n, \\ \varphi_n &= \psi_n - \psi_{n-1}, \quad n \geq 1, \\ \varphi_0 &= \psi_0. \end{aligned}$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} h_n, \psi_n, \varphi_n &\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \\ \mathcal{F}\varphi_n &\geq 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}\varphi_n(\xi) &= 1, \\ h_n(\xi) = 1 &\iff |\xi| \leq 2^n, \\ \text{supp } h_n &= \text{supp } \mathcal{F}\psi_n = \{\xi \in \mathbb{R}^N; |\xi| \leq 2^{n+1}\}, \\ \text{supp } \mathcal{F}\varphi_n &= \{\xi \in \mathbb{R}^N; 2^{n-1} \leq |\xi| \leq 2^{n+1}\}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

On rappelle un résultat concernant les normes de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$. Avec les notations ci-dessus, on a les équivalences suivantes. Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ et $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$. Alors

$$\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \sim \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2^{sn} |(\varphi_n * f)(x)|)^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \text{ si } s \in \mathbb{Z}, \quad (4.1.4)$$

$$\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \sim \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2^{sn} \|\varphi_n * f\|_{L^p})^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \text{ si } s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \quad (4.1.5)$$

De plus, un simple calcul donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\varphi_n\|_{L^2}^2 \leq C(N)2^{nN}. \quad (4.1.6)$$

Pour la démonstration de (4.1.4) et de (4.1.5), voir Triebel [73].

Remarque 4.1.4. Il faut bien noter la différence pour $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ lorsque s est entier et lorsqu'il ne l'est pas. Si s est entier alors la définition pour $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ est la définition classique (voir page V des notations de cette thèse). Cette convention est utilisée à l'unanimité. Mais lorsque s n'est pas entier alors les espaces $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ ont une définition différente selon les auteurs. Certains choisissent la définition que nous utilisons dans cette thèse (page V des notations), c'est-à-dire que $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $1 < p < \infty$, $s = m + \sigma$, $m \in \mathbb{N}$ et $0 < \sigma < 1$ si et seulement si $\|f\|_{W^{s,p}} < \infty$ avec

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \left(\|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.1.7)$$

Cette définition est notamment utilisée dans Brezis [15] et ces espaces sont appelés *espaces de Sobolev à indice fractionnaire*. Or cette norme est équivalente à celle des espaces de Besov $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^N)$ définie par (4.1.5) (toujours pour s non-entier). D'autres choisissent comme définition $W_*^{s,p}(\mathbb{R}^N) = H^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, où $\|f\|_{H_p^s} = \|\mathcal{F}^{-1}\{(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f\}\|_{L^p}$. Cette définition est notamment utilisée dans Bergh et Löfström [12] et est équivalente à celle des espaces de Triebel $F_{p,2}^s(\mathbb{R}^N)$, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ (voir (4.1.4) ou Triebel [73] pour plus de détails), et coïncide avec celle des $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ classiques, lorsque $s \in \mathbb{N}$. Mais lorsque $s \notin \mathbb{N}$, les normes des $W_*^{s,p}(\mathbb{R}^N) (\equiv H^{s,p}(\mathbb{R}^N) \equiv F_{p,2}^s(\mathbb{R}^N))$ ne sont pas équivalentes à celles des $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) (\equiv B_{p,p}^s(\mathbb{R}^N))$, sauf si $p = 2$. Comme le montre (4.1.5), on peut prendre dans cette thèse comme définition équivalente des espaces $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $s \notin \mathbb{Z}$ et $1 < p < \infty$ les espaces de Besov $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^N)$. Signalons néanmoins que nous n'utiliserons pas l'équivalence (4.1.5) mais que nous avons voulu souligner la différence entre le cas s entier et la cas s non-entier. L'équivalence (4.1.4) ne sera utilisée qu'une seule fois, pour démontrer le Lemme 4.2.3.

Remarque 4.1.5. Notre choix sur les espaces de Sobolev à indice fractionnaire s'est porté sur la définition (4.1.7) plutôt que celle donnée par Bergh et Löfström [12] car elle semble plus naturel. En effet, on peut faire une analogie des extensions des espaces de Fréchet $C^k(\mathbb{R}^N)$ aux espaces de Hölder $C^{k,\beta}(\mathbb{R}^N)$ ($k \in \mathbb{N}$ et $0 < \beta < 1$) avec celles des espaces de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, pour $m \in \mathbb{N}$, aux espaces de Sobolev à indice fractionnaire $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, pour $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.

4.2 Autre démonstration des lemmes de Kenji Nakanishi

Dans cette section, on va donner une autre démonstration aux lemmes de Kenji Nakanishi qui permettront de démontrer la Proposition 4.1.2 de celui-ci. On aura aussi besoin d'un résultat de dépendance continue dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ pour des solutions $H^1(\mathbb{R}^N)$. Ce résultat (Théorème 4.4.7) sera temporairement admis et démontré à la Section 4.4.

Le premier lemme est une estimation basique, conséquence directe des inégalités de Strichartz (voir le Lemme 3.1 de Nakanishi [62]). On a retiré les estimations sur les normes d'espaces de Besov.

Lemme 4.2.1 (Kenji Nakanishi). *Soient $\lambda < 0$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$) et (γ, ρ) la paire admissible telle que $\rho = \alpha + 2$. Pour $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on note $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution de (4.1.1) de donnée initiale φ . Alors il existe $\eta_0 \in (0, 1)$ tel que pour tout $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, si l'on a $\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^\rho)} \leq \eta_0$ pour un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, alors pour toute paire admissible (q, r) , $u \in L^q(I, W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$ et*

$$\|u\|_{L^q(I, W^{1,r})} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, r).$$

Remarque 4.2.2. Le résultat est encore vrai pour $\lambda > 0$ et $I \subseteq (-T_*, T^*)$, où $(-T_*, T^*)$ est l'intervalle de temps maximal d'existence de u . De plus, $\eta_0 = \eta_0(N, \alpha, \lambda)$.

Démonstration du Lemme 4.2.1. Rappelons que l'on a déjà pour toute paire admissible (q, r) , $u \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$. On pose $I = (S, T)$ et $v(t) = T(t - S)u(S)$. On suppose donc que $S > -\infty$. Si $S = -\infty$ et $T < \infty$, il suffit d'appliquer la démonstration en échangeant les rôles de S et T . Si $I = \mathbb{R}$, on démontre le résultat d'abord sur $(0, \infty)$ puis on l'applique à $w(t) = \overline{u(-t)}$ solution de (4.1.1) avec $w(0) = \overline{\varphi}$. On obtient donc le résultat sur $(-\infty, 0)$ et donc sur \mathbb{R} . On pose $f(u) = \lambda|u|^\alpha u$. Alors par l'inégalité de Hölder, on a

$$\|f(u)\|_{L^{\gamma'}(I, W^{1,\rho'})} \leq C\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^\rho)}^\alpha \|u\|_{L^\gamma(I, W^{1,\rho})}. \quad (4.2.1)$$

$$\|u\|_{L^\gamma(I, W^{1,\rho})} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}) + C_0 \eta_0^\alpha \|u\|_{L^\gamma(I, W^{1,\rho})}, \quad (4.2.2)$$

où (4.2.2) provient des inégalités de Strichartz, de (4.2.1) et de l'hypothèse $\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^\rho)} \leq \eta_0$. Soit $\eta_0 \in (0, 1)$ tel que $C_0\eta_0^\alpha \leq 1/2$. Alors (4.2.1), via (4.2.2), devient

$$\|f(u)\|_{L^\gamma(I, W^{1, \rho})} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}). \quad (4.2.3)$$

Soit (q, r) une paire admissible quelconque. En utilisant les inégalités de Strichartz, (4.2.1) et (4.2.3), on obtient, $\|u\|_{L^q(I, W^{1, r})} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, r) + C(r)\|f(u)\|_{L^{\gamma'}(I, W^{1, \rho'})} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, r)$. D'où le résultat. \square

On va maintenant donner une autre démonstration au lemme suivant. Dans cette preuve, on s'affranchit de l'utilisation des espaces de Besov (voir Nakanishi [62], Lemme 4.1). En effet, la démonstration originale repose fortement sur ces derniers alors que ni l'hypothèse et ni la conclusion n'en contiennent. Dans cette nouvelle preuve, on a gardé l'idée générale, tandis que l'on a changé le côté technique.

Lemme 4.2.3 (Kenji Nakanishi). Soient $E > 0$, $\lambda < 0$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), (γ, ρ) la paire admissible telle que $\rho = \alpha + 2$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution associée de (4.1.1) telle que $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1)} \leq E$. Soient η_0 donné par le Lemme 4.2.1, $\eta \in (0, \eta_0]$ et $s \in [1, \infty)$. Si l'on a $\frac{\eta}{2} \leq \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^\rho)} \leq \eta$ pour un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ alors il existe un sous-intervalle J avec $\bar{J} \subset I$, il existe $R > 0$ et il existe $c \in \mathbb{R}^N$ avec $|J| \geq C(E, \eta)$ et $R \leq C(E, \eta)$ tels que

$$\forall t \in \bar{J}, \quad \int_{B(c, R)} \min\{|u(t, x)|, |u(t, x)|^s\} dx \geq C(E, \eta, s).$$

Remarque 4.2.4. Le résultat est encore vrai pour $\lambda > 0$, si $\|u\|_{L^\infty(L, H^1)} \leq E$ pour un intervalle $L \subseteq (-T_*, T^*)$, et si $I \subseteq L$. Ici, $(-T_*, T^*)$ désigne l'intervalle de temps maximal d'existence de u .

Démonstration du Lemme 4.2.3. On procède en 5 étapes.

Étape 1. $C(E, \eta, r) \leq \|u\|_{L^q(I, L^r)} \leq \|u\|_{L^q(I, W^{1, r})} \leq C(r)\|\varphi\|_{H^1}$ pour toute paire admissible (q, r) .

La dernière inégalité provient du Lemme 4.2.1. La condition $\alpha > 4/N$ est équivalente à la condition $\rho > \gamma$. Par l'inégalité de Hölder,

$$\eta/2 \leq \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^\rho)} \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^\rho)}^{\frac{\rho-\gamma}{\alpha}} \|u\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}^{\frac{\gamma-2}{\alpha}} \leq C(E) \|u\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}^{\frac{\gamma-2}{\alpha}},$$

et donc $\|u\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} \geq C(E, \eta)$, d'où l'on tire la première inégalité grâce à l'inégalité de Hölder et au Lemme 4.2.1.

Étape 2. $\exists t_0 \in I$, $\exists p_0 \in (2, \rho)$ avec $p_0 = p_0(N, \alpha)$, tels que $\|u(t_0)\|_{W^{-(N+1), p_0}} \geq C(E, \eta)$.

Puisque $\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2} > \gamma$, on peut écrire $\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2} = \gamma + \delta$ où $\delta = \frac{\gamma}{\gamma-2}(\rho - \gamma) > 0$. Soit $n_0 = n_0(N, \alpha)$ le plus petit entier non nul tel que $\gamma + \delta \geq \gamma \frac{N+n_0+1}{N+n_0}$. Soit alors (q, r) une paire admissible telle que $q < \gamma$

soit suffisamment proche de γ pour avoir $q \frac{N+n_0+1}{N+n_0} > \gamma$ et $r = r(N, \alpha)$. Soit enfin $\varepsilon \in (0, \delta)$ tel que $\gamma + \varepsilon = q \frac{N+n_0+1}{N+n_0}$. Alors $\varepsilon = \varepsilon(N, \alpha)$. Puis, en interpolant l'espace $L^{\gamma+\delta}$ avec les espaces $L^{\gamma+\varepsilon}$ et L^∞ , on obtient $\|u\|_{L^{\gamma+\varepsilon}(I, L^\rho)} \geq C(E, \eta)$. Par interpolation complexe, on a alors

$$\text{p.p } t \in I, \|u(t)\|_{L^\rho} \leq C \|u(t)\|_{W^{-(N+n_0), p_0}}^{\frac{1}{N+n_0+1}} \|u(t)\|_{W^{1, r}}^{\frac{N+n_0}{N+n_0+1}}, \quad (4.2.4)$$

où $p_0 = r\rho \frac{(\gamma + \varepsilon) - q}{r(\gamma + \varepsilon) - q\rho}$. On pose $f(t) = r\rho \frac{t - q}{rt - q\rho}$. Alors $f(\gamma) = 2$ et $f(\gamma + \varepsilon) = p_0$. De plus, $f' > 0$ sur $[\gamma, \gamma + \delta]$. On a donc $2 < p_0 < \rho < r < \infty$ (et $r < \frac{2N}{N-2}$ si $N \geq 3$). De (4.2.4) on tire

$$C(E, \eta) \leq \|u\|_{L^{\gamma+\varepsilon}(I, L^\rho)} \leq C \|u\|_{L^\infty(I, W^{-(N+n_0), p_0})}^{\frac{1}{N+n_0+1}} \|u\|_{L^q(I, W^{1, r})}^{\frac{N+n_0}{N+n_0+1}}, \quad (4.2.5)$$

et par l'Étape 1, on tire de (4.2.5)

$$\|u\|_{L^\infty(I, W^{-(N+n_0), p_0})} \geq C(E, \eta).$$

Le résultat vient alors de l'injection de Sobolev $W^{-(N+1), p_0}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{-(N+n_0), p_0}(\mathbb{R}^N)$ et de l'estimation ci-dessus.

On introduit maintenant les fonctions $h, h_n, \varphi_n, \psi_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ définies en Section 4.1 pour l'équivalence (4.1.4).

Étape 3. $\exists J$ un sous-intervalle avec $\bar{J} \subset I$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $\exists c \in \mathbb{R}^N$ avec $|J| \geq C(E, \eta)$ et $n_0 \leq C(E, \eta)$ tels que $\forall t \in \bar{J}$, $|(\varphi_{n_0} * u(t))(c)| \geq C(E, \eta)$.

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v(t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-(N+1)n} |\varphi_n * u(t)|)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$. Notons que d'après (4.1.4), v est définie presque partout et mesurable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. D'après l'Étape 2, (4.1.4), l'inégalité de Hölder et la conservation de la masse, on a

$$C(E, \eta) \leq \|u(t_0)\|_{W^{-(N+1), p_0}} \equiv \|v(t_0)\|_{L^{p_0}} \leq \|\varphi\|_{L^2}^{\frac{2}{p_0}} \|v(t_0)\|_{L^\infty}^{1 - \frac{2}{p_0}} \leq C(E) \|v(t_0)\|_{L^\infty}^{1 - \frac{2}{p_0}}.$$

Donc il existe $c \in \mathbb{R}^N$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-(N+1)n} |(\varphi_n * u(t_0))(c)|)^2 \geq C(E, \eta)$. Alors

$$C(E, \eta) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-(N+1)n} |(\varphi_n * u(t_0))(c)|)^2 \leq \frac{4}{3} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(2^{-(N+1)n} |(\varphi_n * u(t_0))(c)|^2 \right),$$

d'où

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } |(\varphi_{n_0} * u(t_0))(c)|^2 \geq C(E, \eta) 2^{(N+1)n_0} \geq C(E, \eta). \quad (4.2.6)$$

Or d'après l'inégalité de Young, (4.1.6) et la conservation de la masse, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\varphi_n * u(t_0)\|_{L^\infty}^2 \leq 2^{nN} C(E),$$

ce qui donne avec (4.2.6), $2^{n_0} \leq 2^{-n_0 N} C(E, \eta) |(\varphi_{n_0} * u(t_0))(c)|^2 \leq C(E, \eta)$, et donc $n_0 \leq C(E, \eta)$. Or par l'équation (4.1.1), $\|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^{-1})} \leq C(E)$. En interpolant, il vient alors

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \|u(t) - u(s)\|_{L^2} \leq C(E) |t - s|^{1/2}. \quad (4.2.7)$$

De plus, de l'inégalité de Young, on obtient l'estimation

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \|\varphi_{n_0} * (u(t) - u(s))\|_{L^\infty} \leq \|\varphi_{n_0}\|_{L^2} \|u(t) - u(s)\|_{L^2},$$

de laquelle on tire avec (4.1.6), le fait que $n_0 \leq C(E, \eta)$ et (4.2.7),

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \|\varphi_{n_0} * (u(t) - u(s))\|_{L^\infty} \leq C(E, \eta) |t - s|^{1/2}. \quad (4.2.8)$$

Or par l'Étape 1, on a $C(E, \eta) \leq \|u\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} \leq |I|^{1/\gamma} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; L^\rho)} \leq C(E) |I|^{1/\gamma}$ et donc $|I| \geq C(E, \eta)$.

De cette dernière inégalité, de (4.2.6) et de (4.2.8), on obtient l'Étape 3.

Étape 4. $\exists R \in (0, C(E, \eta))$ tel que $\forall t \in \bar{J}$, $\|u(t)\|_{L^1(B(c, R))} \geq C(E, \eta)$.

De l'Étape 3 on a,

$$\begin{aligned} \forall t \in \bar{J}, C(E, \eta) &\leq |(\varphi_{n_0} * u(t))(c)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_{n_0}(x)| |u(t, c-x)| dx \\ &\leq \|\varphi_{n_0}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u(t)\|_{L^1(B(c, R))} + \|\varphi_{n_0}\|_{L^2(|x| \geq R)} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C(n_0) \|u(t)\|_{L^1(B(c, R))} + \|\varphi_{n_0}\|_{L^2(|x| \geq R)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C(E, \eta) (\|u(t)\|_{L^1(B(c, R))} + \|\varphi_{n_0}\|_{L^2(|x| \geq R)}), \end{aligned}$$

d'où

$$\forall t \in \bar{J}, \|u(t)\|_{L^1(B(c, R))} \geq C(E, \eta) - \|\varphi_{n_0}\|_{L^2(|x| \geq R)}. \quad (4.2.9)$$

Or $\varphi_{n_0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $n_0 \leq C(E, \eta)$ donc

$$\exists R > 0 \text{ avec } R \leq C(E, \eta) \text{ tel que } \|\varphi_{n_0}\|_{L^2(|x| \geq R)} \leq \frac{C(E, \eta)}{2}, \quad (4.2.10)$$

où $C(E, \eta)$ est la constante de (4.2.9). Ainsi on conclut à l'aide de (4.2.9) et de (4.2.10).

Étape 5. Conclusion. Soit $s \in (1, \infty)$.

On pose $\Omega_1 = \{x \in B(c, R); |u(x)| \leq 1\}$, $\Omega_2 = \{x \in B(c, R); |u(x)| > 1\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$A(t) = \int_{\Omega_1} |u(t, x)|^s dx$ et $B(t) = \int_{\Omega_2} |u(t, x)| dx$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, A(t) + B(t) = \int_{B(c, R)} \min\{|u(t, x)|, |u(t, x)|^s\} ds. \quad (4.2.11)$$

D'après l'Étape 4, (4.2.11) et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \forall t \in \bar{J}, C(E, \eta) &\leq B(t) + \int_{\Omega_1} |u(t, x)| dx \leq B(t) + (CR^N)^{1/s'} A(t)^{1/s} \\ &\leq C(E, \eta, s) \left[(A(t) + B(t)) + (A(t) + B(t))^{1/s} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi $A(t) + B(t) \geq C(E, \eta, s)$, $\forall t \in \bar{J}$, ce qui avec (4.2.11) permet de conclure. \square

Le lemme suivant est une estimation de type Morawetz qui est valable en toute dimension d'espace $N \geq 1$ (voir Nakanishi [62], Lemme 5.2). On redonne aussi l'inégalité originale (4.2.14) qui fut établie en premier par Morawetz et Strauss [61] (voir aussi Ginibre et Velo [39, 40], Lin et Strauss [58]).

Lemme 4.2.5 (Estimations de type Morawetz – Kenji Nakanishi). *On se donne les notations (4.1.2). Soient $\lambda < 0$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution associée de (4.1.1). On a les estimations suivantes.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|2it\nabla u(t, x) + xu(t, x)|^2}{1 + |t|^3 + |x|^3} dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(1+t^2)|u(t, x)|^{\alpha+2}}{1 + |t|^3 + |x|^3} dx dt \leq C, \quad (4.2.12)$$

où $C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda)$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^2 |u(t, x)|^r}{|t|^3 + |x|^3} dx dt \leq CE_T(\varphi)^{\frac{r}{2}}, \quad (4.2.13)$$

pour tout $r \in \left[2 + \frac{4}{N}, \frac{2N}{N-2} \right]$ ($r \in \left[2 + \frac{4}{N}, \infty \right)$ si $N \leq 2$), où $C = C(N, r, \lambda)$. Si de plus $N \geq 3$ alors on a,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(t, x)|^{\alpha+2}}{|x|} dx dt \leq C(N, \alpha, \lambda) \|\varphi\|_{L^2} E(\varphi)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2.14)$$

Démonstration. On ne démontre pas l'estimation (4.2.13) car ce sera l'inégalité (4.2.12) que l'on utilisera. Voir le Lemme 2.6 de Nakanishi [63] pour (4.2.13). Pour (4.2.14), voir Morawetz et Strauss [61]. Voir aussi Ginibre et Velo [39, 40], Lin et Strauss [58]. Pour (4.2.12), on ne donne que les grandes lignes puisque la démonstration est standard. En effet, elle repose sur la méthode des multiplicateurs, comme pour l'inégalité de Morawetz originale. On remarque d'abord que, par dépendance continue, il suffit de montrer le résultat pour des données initiales dans $H^2(\mathbb{R}^N)$ et sur l'intervalle de temps $(1, \infty)$. On multiplie l'équation (4.1.1) par

$$\frac{2r}{\sqrt{t^2 + r^2}} u_r + \left(\frac{N-1-it}{\sqrt{t^2 + r^2}} + \frac{t^2}{(t^2 + r^2)^{3/2}} \right) u$$

(contre $u_r + \frac{N-1}{2r}u$ pour l'estimation originale (4.2.14)), puis l'on intègre par parties en (t, x) sur $(1, \infty) \times \mathbb{R}^N$. D'où le résultat. \square

Le résultat suivant est une conséquence directe de l'inégalité de Hölder et de l'estimation de type Morawetz (4.2.12) (voir le Lemme 5.3 de Nakanishi [62]).

Lemme 4.2.6 (Kenji Nakanishi). Soient $\lambda < 0$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), soit $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et soit $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution associée de (4.1.1). On a l'estimation suivante.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(t, x)|^2}{1+|x|^2} dx \right)^{\frac{\alpha+2}{2}} dt \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda).$$

Démonstration. D'après l'inégalité de Hölder, on a pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^N$,

$$\int_A \frac{|u(t, x)|^2}{1+|x|^2} dx \leq \left[\int_A |u(t, x)|^{\alpha+2} dx \right]^{\frac{2}{\alpha+2}} \left[\int_A (1+|x|^2)^{-\frac{\alpha+2}{\alpha}} dx \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+2}} \leq C \left[\int_A |u(t, x)|^{\alpha+2} dx \right]^{\frac{2}{\alpha+2}},$$

car $\frac{2(\alpha+2)}{\alpha} > N \iff \alpha(N-2) < 4$. Ceci implique avec (4.2.12),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \left(\int_{\{|x| \leq t\}} \frac{|u(t, x)|^2}{1+|x|^2} dx \right)^{\frac{\alpha+2}{2}} dt \leq C(\|\varphi\|_{H^1}). \quad (4.2.15)$$

De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \left(\int_{\{|x| > t\}} \frac{|u(t, x)|^2}{1+|x|^2} dx \right)^{\frac{\alpha+2}{2}} dt \leq C(E) \int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^2)^{-\frac{\alpha+3}{2}} dt \leq C(\|\varphi\|_{H^1}). \quad (4.2.16)$$

En mettant ensemble (4.2.15) et (4.2.16), on obtient le résultat voulu. \square

Une autre conséquence de (4.2.12) est le lemme suivant. Il correspond au Lemme 6.1 de Nakanishi [62] dont l'énoncé et la démonstration ne contiennent qu'un seul espace de Sobolev. Par conséquent, on ne donne que les grandes lignes de la preuve.

Lemme 4.2.7 (Kenji Nakanishi). Soient $E > 0$, $\lambda < 0$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution associée de (4.1.1) telle que $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1)} \leq E$ et η_0 donné par le Lemme 4.2.1. Soient $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n < T_{n+1} < \dots$, $I_n = (T_{n-1}, T_n)$ et $0 < \eta < \eta_0$ tels que pour tout n , $\frac{\eta}{2} \leq \|u\|_{L^{\frac{\gamma}{\gamma-2}}(I_{n+1}, L^\rho)} \leq \eta$, où (γ, ρ) est la paire admissible telle que $\rho = \alpha + 2$. Soit S l'ensemble (fini ou infini) des indices n . Alors pour tout $n \in S$, il existe $t_n \in I_n$ tel que

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{(t_n + 1) \ln(t_n + 2)} \leq C(E, \eta).$$

La démonstration de ce lemme requiert l'utilisation du suivant (Lemme 6.2 de Nakanishi [62]).

Lemme 4.2.8 (Kenji Nakanishi). Soient $E > 0$, $\lambda < 0$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution associée de (4.1.1) telle que $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1)} \leq E$ et K un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^N . On pose pour $R > 0$, $K(R) = \{x \in \mathbb{R}^N; \exists y \in K \text{ tel que } |x - y| \leq R\}$. Alors pour tout $R > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $s \leq t$,

$$\int_{K(R)} |u(t, x)|^2 dx \geq \int_K |u(s, x)|^2 dx - C(E) \frac{t-s}{R}. \quad (4.2.17)$$

Démonstration. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $d(x) = \inf_{y \in K} |x - y|$ et $\chi(x) = h\left(1 - \frac{d(x)}{R}\right)$, où $h \in C^\infty(\mathbb{R}^N; [0, 1])$ vérifie (4.1.3). Alors $d \in \dot{W}^{1, \infty}(\mathbb{R}^N)$, $\chi \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1, \infty}(\mathbb{R}^N)$, $\|\nabla d\|_{L^\infty} \leq 1$, $\|\nabla \chi\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{R}$ et

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus K(R), \\ 1, & \text{si } x \in K. \end{cases}$$

Par l'équation (4.1.1), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les estimations sur χ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\chi u(t)\|_{L^2}^2 &= 2 \langle \chi u_t, \chi u \rangle_{H^{-1}, H^1} = 2 \langle \chi u, \chi(i\Delta u + if(u)) \rangle_{H^1, H^{-1}} \\ &\geq -4 \|\chi\|_{L^\infty} \|\nabla \chi\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^2} \|\nabla u(t)\|_{L^2} \geq -\frac{C(E)}{R}. \end{aligned}$$

En intégrant ainsi entre s et t et en utilisant les estimations sur χ , on obtient

$$\|u(t)\|_{L^2(K(R))}^2 \geq \|u(s)\|_{L^2(K)}^2 - C(E) \frac{t-s}{R},$$

ce qui est le résultat voulu. \square

Démonstration du Lemme 4.2.7. La démonstration originale de ce lemme, bien que technique, ne contient pas d'espace de Besov. Cependant, par soucis de clarté, on redonne preuve. On note $C_1 = C_1(E)$ la constante dans (4.2.17). D'après le Lemme 4.2.3, pour tout $n \in S$, il existe un sous-intervalle J_n , $c_n \in \mathbb{R}^N$ et $R_0 > 1$ avec $\overline{J_n} \subset I_n$, $|J_n| \geq C(E, \eta)$ et $R_0 \leq C(E, \eta)$ tels que

$$\forall n \in S, \forall t \in \overline{J_n}, \int_{B(c_n, R_0)} \min\{|u(t, x)|^2; |u(t, x)|^{\alpha+2}\} dx \geq C_2(E, \eta). \quad (4.2.18)$$

Soit $M = M(E, \eta) > 1$ tel que $\frac{C_2}{2} \geq \frac{C_1}{M}$. On pose pour tout $n \in S$, $t_n = \min\{t; t \in \overline{J_n}\}$. Pour $n \in S$ et $k \in S$, on considère les assertions suivantes.

$$|c_n - c_k| \leq M|t_n - t_k| + 2R_0, \quad (4.2.19)$$

$$|c_n - c_k| > M|t_n - t_k| + 2R_0. \quad (4.2.20)$$

On pose $p_1 = 1$ et on définit par récurrence p_{a+1} de la façon suivante. Pour tout $n \in \{p_1, \dots, p_a\}$, p_{a+1} est le plus petit entier $k \in S$ satisfaisant (4.2.20). On pose ensuite $P = \{p_1, p_2, \dots, p_a, p_{a+1}, \dots\}$. Puis pour $n \in P$, on pose $A_n = \{k \in S; k \geq n \text{ et } k \text{ satisfait (4.2.19)}\}$. Alors par définition de P , on a $S = \bigcup_{n \in P} A_n$. Enfin, pour $k \in P$, on pose $P_k = \{n \in P; n \leq k\}$. D'une part, à l'aide de (4.2.12) et de (4.2.18), on obtient

$$\begin{aligned} \text{Card}(P)C(E, \eta) &\geq \sum_{n \in P} \int_0^{+\infty} \int_{\{|x-c_n| \leq M|t-t_n|+3R_0\}} \frac{|u(t, x)|^{\alpha+2}}{C(M, R_0)(|t-t_n|+1) \ln(|t-t_n|+2)} dx dt \\ &\geq \sum_{n \in P} \sum_{k \in A_n, J_k} \int \frac{C(E, \eta)}{(t+1) \ln(t+2)} dt \\ &\geq \sum_{k \in S} \frac{C(E, \eta)}{(t_k+1) \ln(t_k+2)}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $k \in P$ on applique le Lemme 4.2.8 avec

$$K = B(c_n, R_0), \quad K(R) = B(c_n, R_0 + M|t_k - t_n|), \quad t = t_k \quad \text{et} \quad s = t_n,$$

pour tout $n \in P_k$. Alors en utilisant la conservation de la masse, (4.2.18) et l'inégalité sur C_1 et C_2 , on obtient pour tout $k \in P$,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^2}^2 &\geq \int_{\bigcup_{n \in P} B(c_n, R_0 + M|t_k - t_n|)} |u(t_k, x)|^2 dx \\ &\geq \sum_{n \in P_k, B(c_n, R_0)} \int |u(t_n, x)|^2 dx - \frac{C_1(E)}{M(E, \eta)} \text{Card}(P_k) \\ &\geq \frac{1}{2} C_2(E, \eta) \text{Card}(P_k). \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k \in P$, $\text{Card}(P_k) \leq C(E, \eta)$ et donc $\text{Card}(P) \leq C(E, \eta)$, ce qui termine la démonstration. \square

Le lemme suivant correspond au Lemme 7.1 de Nakanishi [62]. Si la solution de (4.1.1) est suffisamment grande pour une norme en espace-temps, alors il existe un intervalle de temps aussi grand que l'on veut sur lequel la solution possède une norme espace-temps aussi petite que l'on veut, d'une part, et inférieure à l'énergie localisée, d'autre part.

Lemme 4.2.9 (Kenji Nakanishi). Soient $E > 0$, $\lambda < 0$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution associée de (4.1.1) telle que $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1)} \leq E$ et (γ, ρ) la paire admissible telle que $\rho = \alpha + 2$. Pour tout $\nu > 0$, $\varepsilon > 0$ et tout $M > 0$, il existe $\nu_1 = \nu_1(E) > 0$ et $N_1 = N_1(E, \nu, M, \varepsilon) > 0$ ayant les propriétés suivantes. Si $\nu \leq \nu_1$ et si $\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^\rho)} \geq N_1$ pour un

intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, alors il existe un intervalle $(S, T) \subset I$, $c \in \mathbb{R}^N$ et $R > 1$ tels que $|T - S| > MR$ et

$$\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((S,T);L^\rho)} + \|u\|_{L^\gamma((S,T);W^{1,\rho})} < \nu^2 < \|u(t_*)\|_{H^1(B(c,R))}^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+2} \|u(t_*)\|_{L^{\alpha+2}(B(c,R))}^{\alpha+2}, \quad (4.2.21)$$

$$\left\| \frac{u(t_*)}{\sqrt{1+|x-c|^2}} \right\|_{L^2} < \varepsilon, \quad (4.2.22)$$

où $t_* \in \{S; T\}$.

L'énoncé original de ce lemme ainsi que sa démonstration ne contiennent qu'un seul espace de Besov, l'espace (K, I) et l'espace de Lebesgue (X, I) , donnés au début de ce chapitre. Cependant, en remplaçant ces derniers par les nôtres (les espaces (K_*, I) et (X_*, I)) et en procédant de la même façon que l'auteur de ce lemme, on aboutit au même résultat. C'est plus un exercice de forme qu'un travail de fond. Par conséquent, on ne donne que les éléments nécessaires à la preuve.

Démonstration du Lemme 4.2.9. On divise l'intervalle I en N_0 sous-intervalles $I_n = (T_{n-1}, T_n)$ ($1 \leq N_0 \leq \infty$), tels que pour tout n , $\frac{\eta_0}{2} \leq \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I_n, L^\rho)} \leq \eta_0$, où η_0 est donné dans le Lemme 4.2.1. Alors, d'après le Lemme 4.2.3, pour tout $n \in \{1; \dots; N_0\}$, il existe $t_n \in I_n$, $c_n \in \mathbb{R}^N$ et $R_0 \in (1, C(E))$, tels que

$$\forall n \in \{1; \dots; N_0\}, \|u(t_n)\|_{L^2(B(c_n, R_0))}^2 \geq C_1(E). \quad (4.2.23)$$

On pose alors $\nu_1 = \sqrt{\frac{C_1(E)}{2}}$. Par le Lemme 4.2.8, on a pour tout $n \in \{1; \dots; N_0\}$ et pour tout $t > t_n$,

$$\|u(t)\|_{L^2(B(c_n, R_0 + \mu_0|t-t_n|))}^2 \geq \|u(t_n)\|_{L^2(B(c_n, R_0))}^2 - \frac{C_2(E)}{\mu_0}, \quad (4.2.24)$$

où $\mu_0 = \mu_0(E) > 1$ est une constante telle que $\frac{C_2(E)}{\mu_0} < \frac{C_1(E)}{2}$. De (4.2.23), (4.2.24) et de l'inégalité sur $C_1(E)$ et $C_2(E)$, on en déduit que pour tout $n \in \{1; \dots; N_0\}$,

$$\forall t \in I, \|u(t)\|_{H^1(B(c_n, R_0 + \mu_0|t-t_n|))}^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+2} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}(B(c_n, R_0 + \mu_0|t-t_n|))}^{\alpha+2} > \nu_1^2. \quad (4.2.25)$$

On divise maintenant chaque intervalle I_n en sous-intervalles $J_k^n = (S_{k-1}^n, S_k^n)$ avec $k \in P_n \subset \mathbb{Z}$, tels que $\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(J_k^n, L^\rho)} + \|u\|_{L^\gamma(J_k^n, W^{1,\rho})} < \nu^2$ et $\text{Card}(P_n) \leq C(E, \nu)$. Ensuite, à partir du Lemme 4.2.6, on obtient qu'il existe $L \in (0, C(E, \varepsilon))$ et un T_k^n vérifiant

$$\begin{cases} T_k^n \in \left(S_{k-1}^n, S_{k-1}^n + L\sqrt{1+|S_{k-1}^n - t_n|^2} \right), & \text{si } k > 0, \\ T_k^n \in \left(S_k^n - L\sqrt{1+|S_k^n - t_n|^2}, S_k^n \right), & \text{si } k \leq 0, \end{cases}$$

tels que pour tout $n \in \{1; \dots; N_0\}$,

$$\left\| \frac{u(T_k^n)}{\sqrt{1+|x-c_n|^2}} \right\|_{L^2} < \varepsilon. \quad (4.2.26)$$

Soit $M_0 = M_0(E, M, \varepsilon) > 1$ tel que $M_0\mu_0 - L > M\mu_0(L+1)$ et $M_0R_0 - L > M(R_0 + \mu_0(L+1))$. Alors en raisonnant par l'absurde et en utilisant le Lemme 4.2.7, on montre qu'il existe $N_1 = N_1(E, \nu, M, \varepsilon) > 0$ tel que si $\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^\rho)} \geq N_1$, alors la propriété suivante NE tient PAS. Pour tout $n \in \{1; \dots; N_0\}$ et tout $k \in P_n$,

$$\begin{cases} |S_{k-1}^n - S_k^n| < M_0(R_0 + \mu_0|S_{k-1}^n - t_n|), & \text{si } k > 0, \\ |S_{k-1}^n - S_k^n| < M_0(R_0 + \mu_0|S_k^n - t_n|), & \text{si } k \leq 0. \end{cases} \quad (4.2.27)$$

Il existe alors $n_0 \in \{1; \dots; N_0\}$, $n_0 < \infty$, et $k_0 \in P_{n_0}$ tels que (4.2.27) NE tient PAS. On pose alors

$$\begin{cases} t_* = S = T_{k_0}^{n_0}, & T = S_{k_0}^{n_0}, & \text{si } k_0 > 0, \\ S = S_{k_0-1}^{n_0}, & t_* = T = T_{k_0}^{n_0}, & \text{si } k_0 \leq 0, \end{cases}$$

$c = c_{n_0}$ et $R = R_0 + \mu_0|T_{k_0}^{n_0} - t_{n_0}|$. On vérifie ensuite que ces valeurs satisfont bien (4.2.21) et (4.2.22), notamment grâce à (4.2.25)–(4.2.27). \square

Le lemme suivant (Lemme 8.1 de Nakanishi [62]) peu s'adapter au cas critique. Malheureusement, aucune application n'a été trouvée dans ce cas.

Lemme 4.2.10 (Kenji Nakanishi). *Soient les notations (4.1.2), $E > 0$, $\lambda < 0$, $N \in \{1; 2\}$, $\alpha \geq \frac{4}{N}$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution associée de (4.1.1) telle que $E_T(\varphi) \leq E$. On suppose qu'il existe $\nu > 0$, $\varepsilon > 0$, $c \in \mathbb{R}^N$, $R > 1$ et $T > S > 0$ tels que u satisfait (4.2.21) et (4.2.22) en $t_* = S$. Alors il existe $\nu_2 = \nu_2(E) > 0$ et $\varepsilon_2(E, \nu) > 0$ tels que si $\nu \leq \nu_2$ et si $\varepsilon \leq \varepsilon_2$, alors il existe $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaisant les propriétés suivantes.*

$$\|u(T) - v(T)\|_{H^1}^2 - \frac{2\lambda}{\alpha + 2} \|u(T) - v(T)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} < E - \frac{\nu^2}{4}, \quad (4.2.28)$$

$$\|v_0\|_{H^1}^2 < 2\nu^2, \quad (4.2.29)$$

$$\|v\|_{L^\gamma((T, \infty); L^\rho)} < C(E, \nu) \left(\frac{R^4}{|T - S|} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (4.2.30)$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v(t) \stackrel{\text{déf}}{=} T(t)v_0$. Si u satisfait (4.2.21) et (4.2.22) en $t_* = T$, alors on a le même résultat en remplaçant T par S dans (4.2.28) et l'intervalle (T, ∞) par l'intervalle $(-\infty, S)$ dans (4.2.30).

Si l'énoncé originale ne contient qu'un seul espace de Besov (l'espace (K, I) donné au début de ce chapitre), la démonstration en utilise abondamment $(B_{a,2}^{s_0}, B_{a,2}^{s_1}, B_{\infty,2}^0, B_{\infty,2}^{-3})$ et bien-sûr (K, I) . En travaillant sur les estimations originales, on peut se passer de tous ces espaces pour n'utiliser que ceux cités au début de ce chapitre.

Démonstration du Lemme 4.2.10. La preuve de ce lemme est très technique.

Établissons (4.2.29). Puisque l'énergie est finie, il existe $c' \in \mathbb{R}^N$ avec $d \stackrel{\text{déf}}{=} |c - c'| \leq C(E, \nu)$ tel que

$$\|u(S)\|_{H^1(B(c', 2))}^2 - \frac{2\lambda}{\alpha + 2} \|u(S)\|_{L^{\alpha+2}(B(c', 2))}^{\alpha+2} < \frac{\nu^2}{2}. \quad (4.2.31)$$

Soit $h \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ satisfaisant (4.1.3). On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\chi_\Gamma(x) = h\left(2 - \frac{|x - c'|}{\Gamma}\right)$ et $v_0 = T(-S)(\chi_\Gamma u(S))$, où $\Gamma \in (1, R + d)$ est tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\Gamma^2 \left(|u(S)|^2 + |\nabla u(S)|^2 - \frac{2\lambda}{\alpha + 2} |u(S)|^{\alpha+2} \right) dx = \nu^2. \quad (4.2.32)$$

On vérifie qu'un tel choix est possible grâce à (4.2.31) et (4.2.21), en regardant ce qu'il se passe pour $\Gamma = 1$ et $\Gamma = R + d$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v(t) = T(t)v_0$. À l'aide de (4.2.22) et (4.2.32), on montre que

$$\|v(S)\|_{H^1}^2 < \nu^2 + C(E, \nu)\varepsilon.$$

Par conséquent, il existe $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(E, \nu) > 0$ tel que l'on ait (4.2.29).

On pose ensuite $w = u - v$. Alors de la même façon que ci-dessus, on montre que

$$\|w(S)\|_{H^1}^2 - \frac{2\lambda}{\alpha + 2} \|w(S)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} < E - \nu^2 + C(E, \nu)\varepsilon_2.$$

Quitte à choisir $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(E, \nu)$ plus petit, on obtient alors.

$$\|w(S)\|_{H^1}^2 - \frac{2\lambda}{\alpha + 2} \|w(S)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} < E - \frac{\nu^2}{2}. \quad (4.2.33)$$

Établissons (4.2.30). En utilisant la propriété de dispersion du groupe de Schrödinger, on obtient

$$\|v\|_{L^\gamma((T, \infty); L^{\rho'})}^\gamma \leq \int_T^\infty (t - S)^{-2} \|v(S)\|_{L^{\rho'}}^\gamma dt. \quad (4.2.34)$$

Puis, en utilisant le fait que $\|\chi_\Gamma\|_{L^\infty} \leq 1$ et $\text{supp } v(S) \subseteq \overline{B}(c', 2\Gamma)$, on obtient avec l'inégalité de Hölder,

$$\|v(S)\|_{L^{\rho'}}^\gamma \leq C(E, \nu)R^4. \quad (4.2.35)$$

Ainsi (4.2.34) et (4.2.35) donnent (4.2.30).

Établissons (4.2.28). On pose $I = (S, T)$ et pour tout $t \in (S, T)$, $E(u, t) = E_T(\varphi)$. On alors

$$E(w, T) = E(w, S) + 2 \int_S^T \langle f(w) - f(u), -i\Delta w - if(w) + iw \rangle dt. \quad (4.2.36)$$

En utilisant les inégalités de Hölder, Strichartz et l'estimation (4.2.21), on obtient

$$\int_S^T | \langle f(w), -i\Delta w - if(w) + iw \rangle | dt \leq C(E) \|w\|_{L^\gamma(I, W^{1,\rho})}^\gamma, \quad (4.2.37)$$

$$\int_S^T | \langle -f(u), -i\Delta w \rangle | dt \leq C(E) \|u\|_{L^\gamma(I, W^{1,\rho})}^{\gamma-1}. \quad (4.2.38)$$

Soient (a, b) une paire admissible telle que $\rho < b < \rho(\rho - 1)$, $\theta = \frac{a}{\gamma}$ et $p \in (\rho(\rho - 1), \infty)$ tel que $\frac{1}{\rho(\rho-1)} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{b}$. On choisit $b = b(N, \alpha)$ suffisamment proche de $\rho(\rho - 1)$ pour qu'un tel choix de $p = p(N, \alpha)$ soit possible. Par les inégalités de Hölder et de Strichartz, il existe $C_0 = C_0(N, \alpha) \geq 1$ telle que l'on ait

$$\|w\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^\rho)} \leq \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^\rho)} + \|v\|_{L^{\frac{\gamma-2}{\alpha}}(I, L^\rho)} \|v\|_{L^\infty(I, L^\rho)}^{\frac{\rho-\gamma}{\alpha}} \leq \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^\rho)} + C_0 \|v_0\|_{H^1}.$$

On peut supposer que $3C_0\nu_2 \leq \eta_0$, où η_0 est donné par le Lemme 4.2.1. Alors par (4.2.21), (4.2.29) et le Lemme 4.2.1, $\|w\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(I, L^\rho)} \leq \eta_0$ et donc $\|w\|_{L^q(I, W^{1,r})} \leq C(E, r)$, pour toute paire admissible (q, r) . Ainsi avec l'inégalité de Hölder, on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_S^T | \langle -f(u), -if(w) \rangle | dt &\leq C \int_S^T \|u(t)\|_{L^\rho}^{\rho-1} \|w(t)\|_{L^{\rho(\rho-1)}}^{\rho-1} dt \\ &\leq C \int_S^T \|u(t)\|_{L^\rho}^{\rho-1} \|w(t)\|_{L^p}^{\frac{(\gamma-a)(\rho-1)}{\gamma}} \|w(t)\|_{L^b}^{\frac{a}{\gamma}(\rho-1)} dt \leq C(E) \int_S^T \|u(t)\|_{L^\rho}^{\rho-1} \|w(t)\|_{L^b}^{\frac{a}{\gamma}} dt \\ &\leq C(E) \|w\|_{L^a(I, L^b)}^{\frac{a}{\gamma}} \left(\int_S^T \|u(t)\|_{L^\rho}^{\frac{\gamma(\rho-1)}{\gamma-1}} dt \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Or, $\frac{\gamma(\rho-1)}{\gamma-1} \geq \gamma \iff \alpha \geq \frac{4}{N}$. Par conséquent, on obtient avec l'inégalité de Hölder,

$$\int_S^T | \langle -f(u), -if(w) \rangle | dt \leq C(E) \|u\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}^{\gamma-1}, \quad (4.2.39)$$

$$\int_S^T | \langle -f(u), iw \rangle | dt \leq C(E) \|u\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}^{\gamma-1} \|w\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}. \quad (4.2.40)$$

En mettant ensemble les estimations (4.2.36)–(4.2.40) et en utilisant l'inégalité de Strichartz, (4.2.21),

(4.2.29) et (4.2.33), il vient

$$\begin{aligned}
E(w, T) &\leq E(w, S) + C(E) \|u\|_{L^\gamma(I, W^{1, \rho})}^{\gamma-1} + C(E) \|v_0\|_{H^1}^\gamma \\
&\leq E - \frac{\nu^2}{2} + C(E) \nu^{2(\gamma-1)} + C(E) \nu^\gamma \\
&\leq E - \frac{\nu^2}{2} + C(E) \nu^\gamma \\
&\leq E - \frac{\nu^2}{2} + C_0(E) \nu^2 \nu_2^{\gamma-2}.
\end{aligned}$$

Soit alors $\nu_2 = \nu_2(E) > 0$ tel que $C_0(E) \nu_2^{\gamma-2} < \frac{1}{4}$. Il vient donc,

$$E(w, T) < E - \frac{\nu^2}{4},$$

qui est (4.2.28). Ceci termine la démonstration. \square

Voici maintenant une autre démonstration du Lemme 9.1 de Nakanishi [62]. Ce lemme est intéressant car il s'étend au cas critique et l'on en donnera une application à la Section 4.3 (Corollaire 4.3.1).

Lemme 4.2.11 (Kenji Nakanishi). *Soient les notations (4.1.2), $E > 0$, $\lambda < 0$, $\frac{4}{N} \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 \leq \alpha < \infty$ si $N = 1$), w solution de (4.1.1) de donnée initiale w_0 avec $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $E_T(w_0) \leq E$, $v(t) = T(t)v_0$ avec $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et u solution de (4.1.1) de donnée initiale $u_0 = w_0 + v_0$. On a alors le résultat suivant.*

Pour toute solution w de (4.1.1) vérifiant les hypothèses ci-dessus et pour tout $L > 0$, il existe $\kappa > 0$ tel que si $\|v_0\|_{L^2} \leq \kappa$ et si $\|w\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho)} \leq L$ alors

$$u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N)) \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho)} \leq C(E, L).$$

De plus, pour toute paire admissible (q, r) ,

$$u \in L^q(\mathbb{R}; W^{1, r}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}; W^{1, r})} \leq C(E, L, r).$$

En particulier, $w \in L^q(\mathbb{R}; W^{1, r}(\mathbb{R}^N))$.

On le même résultat si l'on remplace \mathbb{R} par l'intervalle $(0, \infty)$ ou par l'intervalle $(-\infty, 0)$.

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat sur $(0, \infty)$ et de l'appliquer à \tilde{u} solution de (4.1.1) telle que $\tilde{u}(0) = \bar{w}_0 = \bar{w}_0 + \bar{v}_0$. Par unicité, $\tilde{u}(t) = \overline{u(-t)}$ et alors on obtient le résultat sur $(-\infty, 0)$. De plus, on admettra temporairement un résultat de convergence uniforme dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ pour des solutions d'énergie finie (Théorème 4.4.7). Soient $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_{N_0} = \infty$ tels que pour tout $n \in \{1; \dots; N_0\}$,

$$\frac{\eta_0}{2} \leq \|w\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((T_{n-1}, T_n); L^\rho)} \leq \eta_0, \quad (4.2.41)$$

où η_0 est donné par le Lemme 4.2.1. En particulier, $N_0^{\frac{\gamma-2}{\gamma\alpha}} \frac{\eta_0}{2} \leq L$ et donc $N_0 \leq C(L, \eta_0)$. Alors d'après le Lemme 4.2.1, $w \in L^\gamma((0, \infty); W^{1,\rho}(\mathbb{R}^N))$ et $\|w\|_{L^\gamma((0,\infty);W^{1,\rho})} \leq C(E, L)$. On démontre d'abord la seconde partie du lemme. On peut supposer que $E \geq \eta_0$. On a l'équation intégrale suivante.

$$\begin{aligned} \forall S > 0, \forall t > S, \quad u(t+S) &= T(t)(v(S) - w(S)) + w(t+S) \\ &\quad + i \int_0^t T(t-s)(f(u(s+S)) - f(w(s+S)))ds. \end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Strichartz et de Hölder à l'équation ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} \\ &\leq \|w\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} + \|T(\cdot)(u(S) - w(S))\|_{L^\gamma((0, T-S); L^\rho)} + C\|f(u) - f(w)\|_{L^{\gamma'}(I, L^{\rho'})} \\ &\leq \|w\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} + C\|u - w\|_{L^\infty((0, S); L^2)} + C\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; L^\rho)}^{\rho-\gamma} \|u\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}^{\gamma-1} + C\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}; L^\rho)}^{\rho-\gamma} \|w\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}^{\gamma-1}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $I = (S, t)$. On en déduit alors que pour tout $S > 0$, et pour tout $t > S$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\gamma((S,t); L^\rho)} &\leq \|w\|_{L^\gamma((S,t); L^\rho)} + C_0\|u - w\|_{L^\infty((0,S); L^2)} \\ &\quad + C_1(E) \left(\|u\|_{L^\gamma((S,t); L^\rho)}^{\gamma-1} + \|w\|_{L^\gamma((S,t); L^\rho)}^{\gamma-1} \right). \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

De même,

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^\gamma((0,S); L^\rho)} \\ &\leq C\|v_0\|_{L^2} + C\|w_0\|_{L^2} + \|w\|_{L^\gamma(\mathbb{R}; L^\rho)} + C\|f(u) - f(w)\|_{L^{\gamma'}((0,S); L^{\rho'})} \\ &\leq C(E, L) + C \left(\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; L^\rho)}^{\rho-\gamma} \|u\|_{L^\gamma((0,S); L^\rho)}^{\gamma-2} + \|w\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho)}^\alpha \right) \|u - w\|_{L^\gamma((0,S); L^\rho)}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \forall S > 0, \quad \|u\|_{L^\gamma((0,S); L^\rho)} &\leq C(E, L) + C_2(E, L)\|u - w\|_{L^\gamma((0,S); L^\rho)} \\ &\quad + C_3(E)\|u\|_{L^\gamma((0,S); L^\rho)}^{\gamma-2} \|u - w\|_{L^\gamma((0,S); L^\rho)}. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Puisque $\gamma > 2$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(E, L) > 0$ tel que

$$2^{\gamma-1} C_1(E) \varepsilon^{\gamma-2} < 1, \quad (4.2.44)$$

$$\varepsilon(2(C_2(E, L) + 1))^{\gamma-2} < C_2(E, L) + 1, \quad (4.2.45)$$

où $C_1(E)$ est la constante de (4.2.42) et $C_2(E, L)$ celle de (4.2.43).

Puisque $w \in L^\gamma(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N))$, on peut trouver $S_0 > 0$ suffisamment grand pour avoir

$$\|w\|_{L^\gamma((S_0, \infty); L^\rho)} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad (4.2.46)$$

$$\|w\|_{L^\gamma((S_0, \infty); L^\rho)}^{\gamma-1} \leq \frac{\varepsilon}{3C_1(E)}, \quad (4.2.47)$$

où $C_1(E)$ est la constante de (4.2.42). Enfin, d'après le Théorème 4.4.7, il existe $\kappa > 0$ suffisamment petit tel que si $\|v_0\|_{L^2} \leq \kappa$ alors

$$\|u - w\|_{L^\infty((0, S_0); L^2)} \leq \frac{\varepsilon}{3C_0}, \quad (4.2.48)$$

$$\|u - w\|_{L^\gamma((0, S_0); L^\rho)} \leq \frac{\varepsilon}{C_3(E)}, \quad (4.2.49)$$

$$\|u - w\|_{L^\gamma((0, S_0); L^\rho)} \leq \frac{1}{C_2(E, L)}, \quad (4.2.50)$$

où C_0 est la constante de (4.2.42) et $C_3(E)$ et $C_2(E, L)$ celles de (4.2.43).

On applique (4.2.46)–(4.2.48) à (4.2.42) avec $S = S_0$, ce qui donne

$$\forall t > S_0, \|u\|_{L^\gamma((S_0, t); L^\rho)} \leq \varepsilon + C_1(E) \|u\|_{L^\gamma((S_0, t); L^\rho)}^{\gamma-1}. \quad (4.2.51)$$

De (4.2.51) on déduit aisément que

$$u \in L^\gamma((0, \infty); L^\rho(\mathbb{R}^N)) \text{ et } \|u\|_{L^\gamma((S_0, \infty); L^\rho)} \leq 2\varepsilon \leq C(E, L). \quad (4.2.52)$$

Sinon, par continuité de l'application $t \mapsto \|u\|_{L^\gamma((S_0, t); L^\rho)}$ sur (S_0, ∞) , on peut trouver $T_0 > S_0$ tel que $\|u\|_{L^\gamma((S_0, T_0); L^\rho)} = 2\varepsilon$. Ce qui donne dans (4.2.51) avec $t = T_0$ et (4.2.44),

$$2\varepsilon \leq \varepsilon + 2^{\gamma-1} C_1(E) \varepsilon^{\gamma-2} \varepsilon < 2\varepsilon,$$

ce qui est absurde. D'où (4.2.52). Dans (4.2.43) on applique (4.2.49) et (4.2.50). Alors pour tout $S \in (0, S_0)$,

$$\|u\|_{L^\gamma((0, S); L^\rho)} \leq C(E, L) + 1 + \varepsilon \|u\|_{L^\gamma((0, S); L^\rho)}^{\gamma-2},$$

et donc en procédant comme ci-dessus et en utilisant (4.2.45),

$$\|u\|_{L^\gamma((0, S_0); L^\rho)} \leq 2(C(E, L) + 1). \quad (4.2.53)$$

Ainsi, de (4.2.52) et (4.2.53) on en déduit que $u \in L^\gamma((0, \infty); L^\rho(\mathbb{R}^N))$ et

$$\|u\|_{L^\gamma((0, \infty); L^\rho)} \leq C(E, L).$$

En utilisant cette dernière inégalité et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((0, \infty); L^\rho(\mathbb{R}^N)) \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((0, \infty); L^\rho)} \leq C(E, L).$$

Soit alors $0 = T'_0 < T'_1 < \dots < T'_{N'_0} = \infty$ tels que u satisfasse (4.2.41) pour tout $n \in \{1; \dots; N'_0\}$. Alors $N'_0 \leq C(E, L)$ et d'après le Lemme 4.2.1, pour toute paire admissible (q, r) , $u \in L^q((0, \infty); W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$ et $\|u\|_{L^q((0, \infty); W^{1,r})} \leq C(E, L, r)$. \square

Remarque 4.2.12. La formulation du lemme que l'on a donnée est plus faible que la version originale. En fait, on peut montrer que $\kappa = \kappa(E, L)$. Les idées sont les mêmes (argument de continuité et inégalités de Strichartz) sauf que l'on utilise le découpage (4.2.41) et l'on travaille sur les N_0 intervalles (T_{n-1}, T_n) , au lieu de n'utiliser que $(0, S_0)$ et (S_0, ∞) . La preuve que l'on donne s'en trouve simplifiée. De plus, on peut supposer v petite seulement dans $L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N))$ au lieu de $L^2(\mathbb{R}^N)$, ce qui, par les inégalités Hölder et de Strichartz, est plus faible. En revanche, cette version du lemme est valable pour $\alpha = 4/N$ ce qui ne l'était pas à l'origine. Cependant, par soucis de rigueur, on donne le lemme sous sa version originale (sauf que l'on travaille avec $L^\gamma(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N))$ au lieu de $L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N))$). Dans cette démonstration, on n'utilise pas bien-sûr les espaces de Besov (Y, I) et (\tilde{Y}, I) (donnés au début de ce chapitre) qui sont très présents dans la preuve originale.

Lemme 4.2.13 (Kenji Nakanishi). Soient les notations (4.1.2), $E > 0$, $\lambda < 0$, $\frac{4}{N} \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 \leq \alpha < \infty$ si $N = 1$), w solution de (4.1.1) de donnée initiale w_0 avec $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $E_T(w_0) \leq E$, $v(t) = T(t)v_0$ avec $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $\|v_0\|_{H^1} \leq E$ et soit u la solution de (4.1.1) de donnée initiale $u_0 = w_0 + v_0$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v(t) = T(t)v_0$. On a alors le résultat suivant.

Pour toute solution w de (4.1.1) vérifiant les hypothèses ci-dessus et pour tout $L > 0$, il existe $\kappa = \kappa(E, L) > 0$ tel que si $\|v\|_{L^\gamma((0, \infty); L^\rho)} \leq \kappa$ et si $\|w\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((0, \infty); L^\rho)} \leq L$ alors

$$u \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((0, \infty); L^\rho(\mathbb{R}^N)) \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((0, \infty); L^\rho)} \leq C(E, L).$$

On le même résultat si l'on remplace l'intervalle $(0, \infty)$ par un l'intervalle $(-\infty, 0)$ ou par \mathbb{R} .

Démonstration. Comme pour la démonstration du Lemme 4.2.11, il suffit de considérer le cas $t > 0$. Soit η_0 donné par le Lemme 4.2.1. Soit $\eta \in (0, \eta_0)$ à choisir plus tard. Puisque $\|w\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((0, \infty); L^\rho)} \leq L$, il existe $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_{N_0+1} = \infty$ tels que pour tout $n \in \{1; \dots; N_0 + 1\}$,

$$\frac{\eta}{2} \leq \|w\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((T_{n-1}, T_n); L^\rho)} \leq \eta \quad \text{et} \quad (N_0 + 1)^{\frac{\gamma-2}{\gamma\alpha}} \frac{\eta}{2} \leq L. \quad (4.2.54)$$

Ainsi, $N_0 = N_0(L, \eta)$.

On pose $g = u - (w + v)$ et $\forall n \in \{0; \dots; N_0\}$, $\forall t \geq T_n$, $g_n(t) = T(t - T_n)g(T_n)$. Alors on a,

$$\begin{aligned} \forall t \geq T_n, \quad g(t) &= g_n(t) + \int_{T_n}^t T(t-s)(f(u(s)) - f(w(s)))ds, \\ \forall t \geq T_n, \quad g_{n+1}(t) &= g_n(t) + \int_{T_n}^{T_{n+1}} T(t-s)(f(u(s)) - f(w(s)))ds. \end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Strichartz et de Hölder aux deux équations intégrales ci-dessus, on montre que les estimations suivantes sont satisfaites.

$$\begin{aligned} & \|g\|_{L^\gamma((T_n,t);L^\rho)} \leq \|g_n\|_{L^\gamma((T_n,t);L^\rho)} \\ & + C \left(\|g + w + v\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((T_n,t);L^\rho)}^\alpha + \|w\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((T_n,t);L^\rho)}^\alpha \right) \|g + v\|_{L^\gamma((T_n,t);L^\rho)}, \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

$$\begin{aligned} & \|g_{n+1}\|_{L^\gamma((T_{n+1},\infty);L^\rho)} \leq \|g_n\|_{L^\gamma((T_n,\infty);L^\rho)} \\ & + C \left(\|g + w + v\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((T_n,T_{n+1});L^\rho)}^\alpha + \|w\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((T_n,T_{n+1});L^\rho)}^\alpha \right) \|g + v\|_{L^\gamma((T_n,T_{n+1});L^\rho)} \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

On pose alors $p_n = \|g_n\|_{L^\gamma((T_n,\infty);L^\rho)}$ et $\forall t \in [T_n, T_{n+1}]$, $q_n(t) = \|g\|_{L^\gamma((T_n,t);L^\rho)}$. Alors q_n est continue sur $[T_n, T_{n+1}]$, $p_0 = 0$ et pour tout $n \in \{0; \dots; N_0\}$, $q_n(T_n) = 0$. En utilisant respectivement (4.2.55) et (4.2.56) puis l'inégalité de Hölder, on a pour tout $n \in \{0; \dots; N_0\}$,

$$\forall t \in [T_n, T_{n+1}], \quad q_n(t) \leq p_n + C_0(E)((q_n(t))^{\gamma-2} + \eta^\alpha + \kappa^{\gamma-2})(q_n(t) + \kappa), \quad (4.2.57)$$

$$p_{n+1} \leq p_n + C_0(E)((q_n(T_{n+1}))^{\gamma-2} + \eta^\alpha + \kappa^{\gamma-2})(q_n(T_{n+1}) + \kappa). \quad (4.2.58)$$

Soit $\eta \in (0, 1)$ suffisamment petit pour avoir $C_0(E)(2\eta^{\gamma-2} + \eta^\alpha) < \frac{1}{4}$. Soit alors $\kappa \in (0, \eta)$ tel que $2^{N_0}\kappa < \eta$. Il est clair que $\eta = \eta(E)$, $N_0 = N_0(E, L)$ et $\kappa = \kappa(E, L)$.

Soit $n \in \{0; \dots; N_0\}$. On va montrer que si $p_n < \frac{\eta}{2}$ alors

$$\forall t \in [T_n, T_{n+1}], \quad q_n(t) \leq \max\{\kappa; 2p_n\}. \quad (4.2.59)$$

On a $q_n(T_n) = 0$. Par continuité de q_n , il existe $t_0 \in (T_n, T_{n+1})$ tel que pour tout $t \in [T_n, t_0]$, $0 \leq q_n(t) < \kappa$. Supposons qu'il existe $T_* \in [t_0, T_{n+1}]$ tel que $q_n(T_*) \geq \kappa$. Alors par continuité de q_n , on peut supposer que $q_n(T_*) < \eta$. En appliquant alors (4.2.57) avec $t = T_*$, on obtient $q_n(T_*) < 2p_n$. De plus, s'il existait $T_0 \in (T_*, T_{n+1}]$ tel que $q_n(T_0) = \eta$, alors par (4.2.57) avec $t = T_0$ on aurait $p_n > \frac{\eta}{2}$, ce qui est absurde. D'où (4.2.59).

Soit $n \in \{0; \dots; N_0 - 1\}$. Supposons que $p_n < \frac{\eta}{2}$. Alors $q_n(T_{n+1}) \leq \max\{\kappa; 2p_n\}$ par (4.2.59), ce qui donne avec (4.2.58), $p_{n+1} \leq \max\{\kappa; 2p_n\}$. Or $p_0 = 0$. On obtient donc par récurrence que pour tout $n \in \{0; \dots; N_0\}$, $p_n \leq 2^{N_0-1}\kappa < \frac{\eta}{2}$. Ainsi on a par (4.2.59),

$$\|g\|_{L^\gamma((0,\infty);L^\rho)}^\gamma = \sum_{n=0}^{N_0} \|g\|_{L^\gamma((T_n,T_{n+1});L^\rho)}^\gamma = \sum_{n=0}^{N_0} (q_n(T_{n+1}))^\gamma \leq (N_0 + 1)\eta^\gamma \leq C(E, L).$$

Par (4.2.54), le Lemme 4.2.1 et l'estimation ci-dessus, il vient $\|u\|_{L^\gamma((0,\infty);L^\rho)} \leq C(E, L)$. Puis, par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((0,\infty);L^\rho)} \leq \|u\|_{L^\gamma((0,\infty);L^\rho)}^{\frac{\gamma-2}{\alpha}} \|u\|_{L^\infty((0,\infty);L^\rho)}^{\frac{\rho-\gamma}{\alpha}} \leq C(E, L).$$

D'où le résultat. \square

Maintenant, tous les éléments nécessaires à la démonstration de la Proposition 4.1.2 sont réunis. Elle se fait par récurrence sur la taille de l'énergie totale de la donnée initiale.

Démonstration de la Proposition 4.1.3. Soient les notations (4.1.2). On procède par récurrence sur $E_T(u_0)$, où u_0 est la donnée initiale de la solution u de (4.1.1). Pour les petites données initiales, le résultat vient des inégalités de Strichartz. Soit $E > 0$. Soit alors $\nu = \min \{ \nu_1(E); \nu_2(E); \frac{E}{2} \}$, où $\nu_1(E)$ et $\nu_2(E)$ sont donnés respectivement par les Lemmes 4.2.9 et 4.2.10. On pose ensuite $\delta = \frac{\nu^2}{4}$. On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante. Pour toute solution \tilde{u} de (4.1.1) de donnée initiale \tilde{u}_0 vérifiant $E_T(\tilde{u}_0) \leq E - \delta$, on a

$$\tilde{u} \in L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N)) \quad \text{et} \quad \|\tilde{u}\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho)} \leq C_1(E). \quad (4.2.60)$$

Soit u une solution de (4.1.1) de donnée initiale u_0 vérifiant $E_T(u_0) \leq E$. Soit alors $\kappa = \kappa(E, C_1(E))$ donné par le Lemme 4.2.13. Supposons alors que $\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho)} > 3B$. Alors il existe $T_0 < T_1$ tels que $\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((-\infty, T_0); L^\rho)} > B$, $\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((T_0, T_1); L^\rho)} > B$ et $\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((T_1, \infty); L^\rho)} > B$. Dans le Lemme 4.2.9, on choisit $I = (T_0, T_1)$. Ainsi, il existe $M = M(E)$ tel que le membre de droite de (4.2.30) soit plus petit que κ , si $|T - S| > MR$. Soit $\varepsilon = \varepsilon_2(E, \nu(E))$ donné par le Lemme 4.2.10. On peut utiliser alors le Lemme 4.2.9 si l'on suppose que $B \geq N_1(E, \nu(E), M(E), \varepsilon(E))$. Supposons alors que dans (4.2.21)–(4.2.22), $t_* = S$. D'après le Lemme 4.2.10, il existe $v_1 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\begin{aligned} E_T(u(T) - v_\ell(T)) &< E - \delta, \\ \|v_1\|_{H^1}^2 &< 2\nu^2 < E^2, \\ \|v_\ell\|_{L^\gamma((T, \infty); L^\rho)} &< \kappa, \end{aligned}$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v_\ell(t) = T(t)v_1$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence (4.2.60) avec $\tilde{u} = w$ telle que $\tilde{u}_0 = u(T) - v_\ell(T)$. On utilise ensuite le Lemme 4.2.13 avec $w_0 = u(T) - v_\ell(T)$ et $v_0 = v_\ell(T)$. On obtient alors,

$$\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((T, \infty); L^\rho)} \leq C_2(E).$$

Et puisque $T \leq T_1$, on obtient

$$\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}(\mathbb{R}; L^\rho)} \leq B_0(E) = 3 \max\{N_1; C_2\}.$$

Et si l'on a $t_* = T$ dans (4.2.21)–(4.2.22), alors on obtient de façon similaire,

$$\|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((-\infty, S); L^\rho)} \leq C_2(E),$$

avec $S \geq T_0$. D'où le résultat.

Soient η_0 donné par le Lemme 4.2.1 et $-\infty = T_{-M_0} < \dots < T_{-1} < T_0 < T_1 < \dots < T_{N_0} = \infty$ tels que pour tout $n \in \{-M_0; \dots; N_0\}$,

$$\frac{\eta_0}{2} \leq \|u\|_{L^{\frac{\gamma\alpha}{\gamma-2}}((T_{n-1}, T_n); L^p)} \leq \eta_0.$$

En particulier, $(M_0 + N_0)^{\frac{\gamma-2}{\gamma\alpha}} \frac{\eta_0}{2} \leq C(E)$ et donc $M_0 + N_0 \leq C(E)$. Alors d'après le Lemme 4.2.1, pour toute paire admissible (q, r) , $u \in L^q(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$ et $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}; W^{1,r})} \leq C(E, r)$. Ceci termine la démonstration. \square

Démonstration du Théorème 4.1.1. Les Propositions 4.1.3 et 2.4.1 permettent de conclure. \square

En suivant pas à pas la démonstration de la Proposition 4.1.3, on constate que la seule obstruction à l'extension au cas $\alpha = \frac{4}{N}$ est le Lemme 4.2.3 (Lemme 4.1 de Kenji Nakanishi [62]). Malheureusement, nous n'avons pas réussi à améliorer la démonstration originale. Par conséquent, si une théorie de la diffusion dans l'espace d'énergie n'est pas possible dans ce cas, cela veut dire que l'on peut trouver un contre exemple au Lemme 4.2.3. Remarquons néanmoins que les opérateurs d'onde sont bien définis et continus de $H^1(\mathbb{R}^N)$ vers $H^1(\mathbb{R}^N)$, lorsque $\alpha = \frac{4}{N}$ (et ce en toute dimension d'espace N). À cet effet, voir par exemple le Théorème 7.6.5 de Cazenave [19]. Bien que les hypothèses de ce théorème soient avec $N \geq 3$ et $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$, la démonstration est valable pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\frac{4}{N} \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 \leq \alpha < \infty$ si $N = 1$).

4.3 Applications des résultats de Kenji Nakanishi

Dans cette section, on donne une application du Lemme 4.2.11 de Kenji Nakanishi. Grâce à l'extension de ce dernier au cas critique, on peut donner un début d'étude asymptotique des solutions de l'équation de Schrödinger (4.1.1). Malheureusement, on ne peut obtenir ce résultat que pour "beaucoup" de solutions, et non pour toutes. Ceci est dû au fait que le Lemme 4.1 de Kenji Nakanishi [62] n'a pu être démontré dans le cas critique. Par conséquent, on ne sait pas si, dans ce cas, un résultat tel que celui du Théorème 4.1.1 est encore vrai.

Corollaire 4.3.1. *Soit $\lambda < 0$. On suppose que $\alpha = \frac{4}{N}$. Soit E un sous-espace fonctionnel strict de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus E$ satisfaisant les propriétés suivantes.*

1. $\|\varphi - \psi\|_{H^1} < \varepsilon$,
2. $\|\psi\|_{H^1} > \|\varphi\|_{H^1}$,

3. Pour toute paire admissible (q, r) , $v \in L^q(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$, où v désigne la solution de (4.1.1) de donnée initiale ψ ,

4. Il existe $v_+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $v_- \in H^1(\mathbb{R}^N)$ telles que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|T(-t)v(t) - v_{\pm}\|_{H^1} = 0$.

Remarque 4.3.2. Ce corollaire veut dire que l'on peut approcher des solutions aussi grandes que l'on veut en norme $H^1(\mathbb{R}^N)$ par des solutions possédant un état de diffusion dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ en $+\infty$ et $-\infty$. La nouveauté est que ces solutions peuvent être aussi irrégulières que l'on veut, du moment qu'elles sont dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Le résultat est évident si $\psi \in X$. On peut donc choisir par exemple $E = X_{\text{rad}}$, ce qui donne un résultat non trivial.

Démonstration du Corollaire 4.3.1. Soient $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$ et (q, r) une paire admissible. On pose $\rho = \alpha + 2$ de sorte que (ρ, ρ) est une paire admissible. Par densité, il existe $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que $\phi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^1(\mathbb{R}^N)} \varphi$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $\lambda_n = \frac{n+1}{n} \frac{\|\varphi\|_{H^1}}{\|\phi_n\|_{H^1}}$ et $\psi_n = \begin{cases} \phi_n, & \text{si } \|\phi_n\|_{H^1} > \|\varphi\|_{H^1}, \\ \lambda_n \phi_n, & \text{si } \|\phi_n\|_{H^1} \leq \|\varphi\|_{H^1}. \end{cases}$ Alors $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, $\psi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^1(\mathbb{R}^N)} \varphi$, $\|\psi_n\|_{H^1} > \|\varphi\|_{H^1}$ et $u_{\psi_n} \in L^\rho(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N)) \equiv L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N))$, pour tout $n \geq 1$, où u_{ψ_n} désigne la solution de (4.1.1) de donnée initiale ψ_n (Ginibre et Velo [35], Tsutsumi [74]; voir aussi le Corollaire 7.2.4 de Cazenave [19]).

Soit n_0 tel que $\|\psi_{n_0} - \varphi\|_{H^1} < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après le Lemme 4.2.11, il existe $\kappa \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ tel que pour tout $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, si $\|v_0\|_{H^1} \leq \kappa$ alors $u_{\psi_{n_0}+v_0} \in L^q(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$, où $u_{\psi_{n_0}+v_0}$ désigne la solution de (4.1.1) de donnée initiale $\psi_{n_0} + v_0$.

Soit $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus E$ telle que $\|v_0\|_{H^1} \leq \kappa$ et $(\psi_{n_0}|v_0)_{H^1, H^1} \geq 0$, où $(\cdot | \cdot)_{H^1, H^1}$ désigne le produit scalaire dans H^1 . On pose alors $\psi = \psi_{n_0} + v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus E$ et on appelle v la solution de (4.1.1) telle que $v(0) = \psi$. D'après ce qui précède, $u_\psi \in L^q(\mathbb{R}; W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$, $\|\varphi - \psi\|_{H^1} < \varepsilon$ et $\|\psi\|_{H^1}^2 = \|\psi_{n_0}\|_{H^1}^2 + 2(\psi_{n_0}|v_0)_{H^1, H^1} + \|v_0\|_{H^1}^2 > \|\psi_{n_0}\|_{H^1}^2 > \|\varphi\|_{H^1}^2$. On a donc montré 1, 2 et 3.

Et puisque $u \in L^\rho(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N)) \equiv L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}; L^{\frac{\rho\alpha}{\rho-2}}(\mathbb{R}^N))$, 4 vient alors de la Proposition 2.4.1. Ceci termine la démonstration. \square

Remarque 4.3.3. Comme on l'a vu à la section précédente, l'inégalité de Morawetz est nécessaire pour établir la théorie de la diffusion le cas dissipatif. Lorsque $N \geq 3$, cette estimation est suffisante puisqu'elle permet de montrer que $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)} 0$, ce qui implique l'existence d'un état de diffusion dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ en $+\infty$ et $-\infty$ (Cazenave [19], Théorèmes 7.5.1, 7.5.3, 7.6.1, 7.6.5 et 7.6.7). Alors que dans le cas $N \leq 2$, à cause de la non-intégrabilité en temps des solutions de l'équation linéaire de Schrödinger, l'inégalité de Morawetz ne suffit plus. On peut cependant constater une conséquence immédiate de cette dernière. Soient $\lambda < 0$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et u la solution associée de (4.1.1). Soit $r \in \left(2, \frac{2N}{N-2}\right)$ ($r \in (2, \infty]$ si $N = 1$). Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout

$A > 0$, il existe $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} t_n = -\infty$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \max_{[t_n-A, t_n+A]} \|u(t)\|_{L^r} < \varepsilon. \quad (4.3.1)$$

En particulier, cela implique

$$\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t)\|_{L^r} = 0,$$

pour tout $r \in \left(2, \frac{2N}{N-2}\right)$ ($r \in (2, \infty]$ si $N = 1$).

Remarquons d'abord que sous les hypothèses ci-dessus, on a le résultat suivant.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \theta > 1, \forall \Lambda > \theta, \exists T > \Lambda \text{ tel que } \int_{T-\theta}^{T+\theta} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} dt < \varepsilon. \quad (4.3.2)$$

La démonstration est à peu de choses près identique à celle du Théorème 7.5.1 de Cazenave [19]. On procède en 4 étapes.

Étape 1. Pour tout $r \in [2, \frac{2N}{N-2})$ ($r \in [2, \infty)$ si $N = 1$), $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^r(|x|^3 \geq t^3 \ln t)} = 0$.

Cette étape est identique à l'Étape 1 de la démonstration du Théorème 7.5.1 de Cazenave [19]. Soit

$M > 0$. On pose $\theta_M(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{M}, & \text{si } |x| \leq M, \\ 1, & \text{si } |x| \geq M. \end{cases}$ Alors $\theta_M \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ et $\|\nabla \theta_M\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{M}$. Donc

$\theta_M u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$. On prend alors le produit de dualité de (4.1.1) avec $i\theta_M u$. Alors

$$\begin{aligned} & \langle iu_t + \Delta u + \lambda|u|^\alpha u, i\theta_M u \rangle_{H^{-1}, H^1} = 0, \\ & \langle iu_t, i\theta_M u \rangle_{H^{-1}, H^1} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \theta_M |u|^2 dx, \\ & \langle \lambda|u|^\alpha u, i\theta_M u \rangle_{H^{-1}, H^1} = 0 \text{ et} \\ & |\langle \Delta u, i\theta_M u \rangle_{H^{-1}, H^1}| = \text{Im} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u} \nabla u \cdot \nabla \theta_M dx \right| \leq \frac{1}{M} \|u(t)\|_{H^1} \leq \frac{C}{M}. \end{aligned}$$

De ces 4 dernières relations, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \theta_M(x) |u(t, x)|^2 dx \leq \frac{C}{M} t + \int_{\mathbb{R}^N} \theta_M(x) |\varphi(x)|^2 dx.$$

On choisit dans cette dernière inégalité $M = t(\ln t)^{1/3}$ et on fait tendre t vers ∞ (dans la démonstration originale, $M = t \ln t$). En utilisant le fait que $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \theta_{t(\ln t)^{1/3}}(x) |\varphi(x)|^2 dx = 0$ (Théorème de convergence dominée de Lebesgue), on obtient donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^2(|x|^3 \geq t^3 \ln t)} = 0.$$

Le cas général s'obtient en utilisant les inégalités de Hölder et Gagliardo-Nirenberg et le fait que $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^1)} < \infty$.

Étape 2. $\forall \varepsilon_1 > 0, \forall \theta > 1, \exists T_1 > \theta$ tel que $\forall S \geq T_1, \int_{S-\theta}^{S+\theta} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}(|x|^3 \geq t^3 \ln t)}^{\alpha+2} dt < \varepsilon_1$.

Ceci se déduit immédiatement de la 1^{ère} étape.

Étape 3. $\forall \varepsilon_2 > 0, \forall \theta > 1, \forall a \geq \theta + 1, \exists T > a$ tel que $\int_{T-\theta}^{T+\theta} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}(|x|^3 \leq t^3 \ln t)}^{\alpha+2} dt < \varepsilon_2$.

Ici encore, on suit l'Étape 2 de la démonstration du Théorème 7.5.1 de Cazenave [19].

Soient $\varepsilon_2 > 0, \theta > 1$ et $a \geq \theta + 1$. On peut supposer sans perte de généralité que a est entier. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}, c_k = 1 + 2k\theta$. Par l'inégalité de type Morawetz (4.2.12), on a

$$\begin{aligned} +\infty &> \int_1^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^3+t^3 \ln t} \int_{\{|x|^3 \leq t^3 \ln t\}} |u(t,x)|^{\alpha+2} dx dt \\ &\geq \sum_{k=a}^{\infty} \frac{1+c_{k+1}^2}{1+c_{k+1}^3+c_{k+1}^3 \ln c_{k+1}} \int_{c_k}^{c_{k+1}} \int_{\{|x|^3 \leq t^3 \ln t\}} |u(t,x)|^{\alpha+2} dx dt, \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{k=a}^{\infty} \frac{1}{c_k \ln c_k} \int_{c_k}^{c_{k+1}} \int_{\{|x|^3 \leq t^3 \ln t\}} |u(t,x)|^{\alpha+2} dx dt < \infty. \quad (4.3.3)$$

Or,

$$\forall a \in \mathbb{N}, \sum_{k=a}^{\infty} \frac{1}{c_k \ln c_k} = \infty. \quad (4.3.4)$$

Donc de (4.3.3) et (4.3.4), on en déduit,

$$\forall a \in \mathbb{N} \text{ avec } a \geq \theta + 1, \exists k_a \in \mathbb{N}, k_a \geq a \text{ tel que } \int_{c_{k_a}}^{c_{k_a+1}} \int_{\{|x|^3 \leq t^3 \ln t\}} |u(t,x)|^{\alpha+2} dx dt < \varepsilon_2. \quad (4.3.5)$$

D'où le résultat en utilisant (4.3.5) avec $T \equiv 1 + \theta(2k_a + 1)$ car alors $T - \theta = c_{k_a}$ et $T + \theta = c_{k_a+1}$.

Étape 4. Conclusion.

Soient $\varepsilon > 0, \theta > 1$ et $\Lambda > \theta$. On applique la 2^{ème} étape avec $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Alors,

$$\exists T_1 > \theta \text{ tel que } \forall S \geq T_1, \int_{S-\theta}^{S+\theta} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}(|x|^3 \geq t^3 \ln t)}^{\alpha+2} dt < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.3.6)$$

Puis on applique la 3^{ème} étape avec $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ et $a = \max\{T_1, \Lambda + 1\}$. Alors,

$$\exists T > \max\{T_1, \Lambda + 1\} \text{ tel que } \int_{T-\theta}^{T+\theta} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}(|x|^3 \leq t^3 \ln t)}^{\alpha+2} dt < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.3.7)$$

On obtient alors (4.3.2) en choisissant $S = T$ dans (4.3.6) et en sommant cette expression avec (4.3.7).

Puis, on constate que (4.3.1) est une conséquence directe de (4.3.2). En effet, en utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, il suffit de démontrer (4.3.1) pour $r = \alpha + 2$. On ne montre également le résultat que pour $t > 0$. Il suffira de l'appliquer à $\overline{u(-t)}$ solution de (4.1.1) de donnée initiale $\bar{\varphi}$ pour obtenir le cas $t < 0$. On obtient par l'équation (4.1.1) que $\|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^{-1})} < \infty$ et donc par interpolation, $\|u(t) - u(s)\|_{L^2} \leq \|u(t) - u(s)\|_{H^1}^{1/2} \|u(t) - u(s)\|_{H^{-1}}^{1/2} \leq C|t - s|^{-1/2}$. Ainsi avec l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on a

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \|u(t) - u(s)\|_{L^{\alpha+2}} \leq C|t - s|^{\frac{4-\alpha(N-2)}{4(\alpha+2)}}.$$

D'où (4.3.1) grâce à (4.3.2).

Remarque 4.3.4. On rappelle que lorsque $\alpha > \frac{4}{N}$ alors on a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t)\|_{L^r} = 0$. Mais on ne sait pas si oui ou non $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t)\|_{L^r} = 0$ lorsque $\alpha \leq \frac{4}{N}$. Cependant, si φ est à symétrie sphérique et si $N \geq 3$ alors on peut montrer que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t)\|_{L^r} = 0$ lorsque $\alpha \leq \frac{4}{N}$ (voir la Section 4.5).

4.4 Deux résultats de dépendance continue

Dans cette section, on montre que lorsqu'une théorie de diffusion peut être établie, alors on peut améliorer les résultats classiques de dépendance continue, dans le sens où cette dernière a lieu sur un intervalle de temps **non borné**.

Définition 4.4.1. Pour toute donnée initiale $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on note $u \in C((-T_*, T^*); H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution associée de (4.1.1).

1. On dira que l'opérateur $U_+ : \varphi \mapsto u_+$ est bien défini sur un voisinage non vide \mathcal{O} de $H^1(\mathbb{R}^N)$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{O}$, $T^* = \infty$ et s'il existe un unique $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(-t)u(t) - u_+\|_{H^1} = 0.$$

2. On dira que l'opérateur $U_- : \varphi \mapsto u_-$ est bien défini sur un voisinage non vide \mathcal{O} de $H^1(\mathbb{R}^N)$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{O}$, $T_* = \infty$ et s'il existe un unique $u_- \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|T(-t)u(t) - u_-\|_{H^1} = 0.$$

Théorème 4.4.2. Soient $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), \mathcal{O} un ouvert non vide de $H^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in \mathcal{O}$ et $u \in C((-T_*, T^*); H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution de (4.1.1) telle que $u(0) = \varphi$. Pour $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on note v la solution de (4.1.1) telle que $v(0) = \psi$.

1. On suppose que l'opérateur $U_+ : \varphi \mapsto u_+$ est bien défini et continu de \mathcal{O} dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. On a le résultat suivant.

$$\forall T < T_*, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall \psi \in H^1(\mathbb{R}^N), \|\varphi - \psi\|_{H^1} < \eta \implies \|u - v\|_{C([-T, \infty); H^1)} < \varepsilon.$$

2. On suppose que l'opérateur $U_- : \varphi \mapsto u_-$ est bien défini et continu de \mathcal{O} dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. On a le résultat suivant.

$$\forall T < T^*, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall \psi \in H^1(\mathbb{R}^N), \|\varphi - \psi\|_{H^1} < \eta \implies \|u - v\|_{C([-T, \infty); H^1)} < \varepsilon.$$

Corollaire 4.4.3. Soient $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et u la solution de (4.1.1) de donnée initiale φ . Pour $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on note v la solution de (4.1.1) de donnée initiale ψ . Soit (q, r) une paire admissible ($r < \infty$ et $q > 2$). On a le résultat suivant.

1. Si $\lambda < 0$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall \psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\|\varphi - \psi\|_{H^1} < \eta \implies \|u - v\|_{C(\mathbb{R}; H^1)} + \|u - v\|_{L^q(\mathbb{R}; W^{1, r})} < \varepsilon.$$

2. Si $\lambda > 0$ et si $\|\varphi\|_{H^1} < \delta$ avec $\delta > 0$ assez petit alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall \psi \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

$$\|\varphi - \psi\|_{H^1} < \eta \implies \|u - v\|_{C(\mathbb{R}; H^1)} + \|u - v\|_{L^q(\mathbb{R}; W^{1, r})} < \varepsilon.$$

Remarque 4.4.4. Il est clair que dans le cas linéaire (*i.e.* $\lambda = 0$), la situation est plus simple car alors $\|u - v\|_{L^q(\mathbb{R}; W^{1, r})} \leq C(N, r)\|\varphi - \psi\|_{H^1}$, pour toute paire admissible (q, r) .

Démonstration du Théorème 4.4.2. On ne montre que 1, 2 s'obtenant en appliquant 1 avec $U_+ = \overline{U_-}$ à \tilde{u} et \tilde{v} de donnée initiale respective $\overline{\varphi}$ et $\overline{\psi}$. D'où 1, puis que $\tilde{u}(t) = \overline{u(-t)}$ et $\tilde{v}(t) = \overline{v(-t)}$. D'après les résultats classiques de dépendance continue, on peut démontrer 1 avec $T = 0$. Il est évident que 1 signifie que l'opérateur $\mathcal{A} : \varphi \mapsto u$ est continu de \mathcal{O} vers $C([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^N))$ pour la topologie forte. Puisque $C([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^N))$ est un espace métrique, il suffit de démontrer la continuité séquentielle de l'opérateur \mathcal{A} . Soient $\varphi \in \mathcal{O}$, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution de (4.1.1) telle que $u(0) = \varphi$ et u_n la solution de (4.1.1) telle que $u_n(0) = \varphi_n$. Il s'agit de montrer que si $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ dans $C([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^N))$. On procède en 2 étapes. On fixe $\varepsilon > 0$. On note $u_n^+ = U_+(\varphi_n)$ et $u_+ = U_+(\varphi)$. Par hypothèse,

$$\exists T_0 > 0 \text{ tel que } \forall t \geq T_0, \|T(-t)u(t) - u_+\|_{H^1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.4.1)$$

$$\forall \varepsilon' > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists T_n > 0 \text{ tel que } \forall t \geq T_n, \|T(-t)u_n(t) - u_n^+\|_{H^1} < \frac{\varepsilon'}{2}. \quad (4.4.2)$$

De plus, par continuité de U_+ ,

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > N_0, \|u_n^+ - u_+\|_{H^1} < \frac{\varepsilon'}{2}. \quad (4.4.3)$$

Étape 1. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \geq T_0} \|T(-t)u_n(t) - u_+\|_{H^1} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ et $(t_n^j)_{j \in \mathbb{N}} \subset [T_0, \infty)$ tels que

$$\forall n > N_0, \lim_{j \rightarrow \infty} \|T(-t_n^j)u_n(t_n^j) - u_+\|_{H^1} = \sup_{t \geq T_0} \|T(-t)u_n(t) - u_+\|_{H^1}. \quad (4.4.4)$$

On peut supposer que

$$\exists M_0 > N_0 \text{ tel que } \forall n > M_0, \sup_{j \in \mathbb{N}} t_n^j < \infty, \quad (4.4.5)$$

où $N_0 \in \mathbb{N}$ est donné par (4.4.3). Sinon, c'est qu'il existe deux sous-suites $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(j_k^l)_{l \in \mathbb{N}}$ avec

$\inf_{k \in \mathbb{N}} n_k > N_0$, $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ et $j_k^l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, telles que $t_{n_k}^{j_k^l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{l \rightarrow \infty} \|T(-t_{n_k}^{j_k^l})u_{n_k}(t_{n_k}^{j_k^l}) - u_+\|_{H^1} = \|u_{n_k}^+ - u_+\|_{H^1} < \frac{\varepsilon'}{2},$$

par (4.4.3). Puis, on passe à la limite supérieure sur k . On a donc par l'inégalité ci-dessus et par (4.4.4),

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq T_0} \|T(-t)u_{n_k}(t) - u_+\|_{H^1} \leq \frac{\varepsilon'}{2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

qui est le résultat voulu. D'où (4.4.5). Par (4.4.5), il existe une sous-suite $(t_n^{j_l})_{l \in \mathbb{N}} \subset (t_n^j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que $t_n^{j_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} t_n$, pour tout $n > M_0$. Par conséquent, cela donne avec (4.4.4),

$$\forall n > M_0, \|T(-t_n)u_n(t_n) - u_+\|_{H^1} = \sup_{t \geq T_0} \|T(-t)u_n(t) - u_+\|_{H^1}. \quad (4.4.6)$$

On peut aussi supposer qu'il existe une sous-suite $(t_{n_l})_{l \in \mathbb{N}} \subset (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $t_{n_l} \nearrow \infty$ lorsque $l \rightarrow \infty$. Sinon c'est que $T_0 \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} t_n \leq A < \infty$, et donc par (4.4.6)

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \geq T_0} \|T(-t)u_n(t) - u_+\|_{H^1} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T(-t_n)u_n(t_n) - u_+\|_{H^1} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [T_0, A]} \|T(-t)u_n(t) - u_+\|_{H^1} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [T_0, A]} \|T(-t)u_n(t) - T(-t)u(t)\|_{H^1} + \max_{t \in [T_0, M]} \|T(-t)u(t) - u_+\|_{H^1} \\ &< \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [T_0, A]} \|u_n(t) - u(t)\|_{H^1} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

par dépendance continue et par (4.4.1), ce qui est le résultat voulu.

Ainsi, il existe une sous-suite $(t_{n_l})_{l \in \mathbb{N}} \subset (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\inf_{l \in \mathbb{N}} t_{n_l} > M_0$ et $t_{n_l} \nearrow \infty$, lorsque $l \rightarrow \infty$.

Ceci donne avec (4.4.6),

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|T(-t_{n_l})u_{n_l}(t_{n_l}) - u_+\|_{H^1} = \sup_{t \geq T_0} \|T(-t)u_{n_l}(t) - u_+\|_{H^1}.$$

On choisit successivement $\varepsilon' = 1, \varepsilon' = \frac{1}{2}, \dots, \varepsilon' = \frac{1}{2^l}, \varepsilon' = \frac{1}{2^{l+1}}, \dots$ dans (4.4.3) et (4.4.2). Alors, puisque $t_{n_l} \nearrow \infty$ lorsque $l \rightarrow \infty$, on construit une injection strictement croissante $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\lim_{l \rightarrow \infty} \|T(-t_{\psi(n_l)})u_{\psi(n_l)}(t_{\psi(n_l)}) - u_+\|_{H^1} = 0$. Puis, par un argument classique d'unicité de la limite, on montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(-t_n)u_n(t_n) - u_+\|_{H^1} = 0$. D'où le résultat par (4.4.6).

Étape 2. Conclusion.

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \geq T_0} \|u_n(t) - u(t)\|_{H^1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \geq T_0} \|T(-t)u_n(t) - T(-t)u(t)\|_{H^1} \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \geq T_0} \|T(-t)u_n(t) - u_+\|_{H^1} + \sup_{t \geq T_0} \|u_+ - T(-t)u(t)\|_{H^1} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

d'après l'Étape 1 et d'après (4.4.1). D'où, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \geq T_0} \|u_n(t) - u(t)\|_{H^1} \leq \varepsilon$. Par dépendance continue sur le compact $[0, T_0]$, on en déduit que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} \|u_n(t) - u(t)\|_{H^1} \leq \varepsilon.$$

Or $\varepsilon > 0$ est arbitraire. On obtient donc le résultat en faisant $\varepsilon \searrow 0$. \square

Démonstration du Corollaire 4.4.3. 1. Étant données les hypothèses sur α , on sait que si $\lambda < 0$ alors les opérateurs U_- et U_+ sont bien définis et continus de $H^1(\mathbb{R}^N)$ vers $H^1(\mathbb{R}^N)$. D'où le résultat en appliquant le Théorème 4.4.2.

2. Étant données les hypothèses sur α , on sait que si $\lambda > 0$ alors les opérateurs U_- et U_+ sont bien définis et continus de \mathcal{O} vers $H^1(\mathbb{R}^N)$, où \mathcal{O} est un voisinage ouvert non vide de 0 dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. D'où le résultat en appliquant le Théorème 4.4.2. \square

En appliquant la démonstration du Théorème 4.4.2, en utilisant les résultats de Cazenave et Weissler [25], Tsutsumi [74] et en utilisant le fait que les espaces de Strichartz s'interpolent, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 4.4.5. Soient $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), $\varphi \in X$ et u la solution de (4.1.1) de donnée initiale φ . Pour $\psi \in X$, on note v la solution de (4.1.1) de donnée initiale ψ . Soit $\alpha_0 = \frac{-(N-2) + \sqrt{N^2 + 12N + 4}}{2N}$ et soit (q, r) une paire admissible (avec $r < \frac{2N}{N-2}$ si $N \geq 3$).

1. Si $\lambda < 0$ et si $\alpha_0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($\alpha_0 < \alpha < \infty$ si $N = 2$, $\alpha_0 \leq \alpha < \infty$ si $N = 1$) alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall \psi \in X,$$

$$\|\varphi - \psi\|_X < \eta \implies \|u - v\|_{C(\mathbb{R}; H^1)} + \|u - v\|_{L^q(\mathbb{R}; W^{1,r})} < \varepsilon.$$

2. Si $\frac{4}{N+2} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($2 < \alpha < \infty$ si $N = 1$) et si $\|\varphi\|_X < \delta$ avec $\delta > 0$ assez petit alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall \psi \in X,$$

$$\|\varphi - \psi\|_X < \eta \implies \|u - v\|_{C(\mathbb{R}; H^1)} + \|u - v\|_{L^q(\mathbb{R}; W^{1,r})} < \varepsilon.$$

Le théorème de convergence uniforme est, en général, faux si $\lambda > 0$, même dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et même si les données initiales sont régulières avec une décroissance raisonnable à l'infini.

Proposition 4.4.6. *Pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), il existe $\varphi \in \mathcal{S}_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ avec $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ dans $X \cap H^m(\mathbb{R}^N) \cap C_b^k(\mathbb{R}^N)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, telles que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - u_n(t)\|_{L^2} > 0,$$

où $u, u_n \in C_b^k(\mathbb{R}; X \cap H_{\text{rad}}^m(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})) \cap C_b^k(\mathbb{R}^{N+1}; \mathbb{C})$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, sont solutions de (4.1.1) telles que $u(0) = \varphi$ et $u_n(0) = \varphi_n$.

Si de plus $\alpha < \frac{4}{N}$ (respectivement $\alpha < \frac{4}{N+2}$) alors on peut choisir $\|\varphi\|_{H^1}$ (respectivement $\|\varphi\|_X$) aussi petite que l'on veut.

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{S}_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, $\psi > 0$, solution de

$$-\Delta\psi + \psi = \lambda|\psi|^\alpha\psi, \text{ dans } \mathbb{R}^N,$$

avec ψ strictement décroissante par rapport à $|x|$ et vérifiant,

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^N \text{ multi-index, } \exists C > 0, \exists \delta > 0 \text{ telles que } \forall x \in \mathbb{R}^N, |D^\beta\psi(x)| \leq C e^{-\delta|x|} \quad (4.4.7)$$

(voir le début de la Section 3.3). On pose

$$\forall \omega > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, \psi_\omega(x) = \omega^{1/\alpha}\psi(\sqrt{\omega}x).$$

Alors, on a pour tout $\omega > 0$, $\psi_\omega > 0$, $\psi_\omega \in \mathcal{S}_{\text{rad}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ et ψ_ω vérifie

$$-\Delta\psi_\omega + \omega\psi_\omega = \lambda|\psi_\omega|^\alpha\psi_\omega, \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

En utilisant (4.4.7) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on montre facilement que, $\forall \omega > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{\mu \rightarrow \omega} \|\psi_\mu - \psi_\omega\|_{X \cap H^m \cap C_b^k} = 0$. Soient $\omega > 0$ et $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ telle que $\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega_n \neq \omega$. On pose, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi = \psi_\omega$, $\varphi_n = \psi_{\omega_n}$, $u(t) = \varphi e^{i\omega t}$ et $u_n(t) = \varphi_n e^{i\omega_n t}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u, u_n \in C^\infty(\mathbb{R}; X \cap H_{\text{rad}}^m(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})) \cap C_b^k(\mathbb{R}^{N+1}; \mathbb{C})$$

et u et u_n sont solutions de (4.1.1) de donnée initiale respective φ et φ_n . Soit $t_n = \frac{\pi}{\omega_n - \omega}$. Alors, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{X \cap H^m \cap C_b^k} = 0$, par ce qui précède. Cependant,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - u_n(t)\|_{L^2} \geq \|u(t_n) - u_n(t_n)\|_{L^2} = \|\varphi_n + \varphi\|_{L^2},$$

et donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - u_n(t)\|_{L^2} \geq 2\|\varphi\|_{L^2} > 0.$$

D'où le résultat. De plus, $\lim_{\omega \rightarrow 0} \|\psi_\omega\|_{H^1} = 0 \iff \alpha < \frac{4}{N}$ et $\lim_{\omega \rightarrow 0} \|\psi_\omega\|_X = 0 \iff \alpha < \frac{4}{N+2}$. Il suffit donc de choisir $\omega > 0$ suffisamment petit pour avoir $\|\varphi\|$ aussi petite que l'on veut dans l'espace désiré. \square

Le résultat suivant concerne la dépendance continue dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, utile pour donner une autre démonstration au Lemme 4.2.11 de Kenji Nakanishi.

Théorème 4.4.7. *Soient $E > 0$, $\lambda < 0$, $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 \leq \alpha < \infty$ si $N = 1$). Pour $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et pour $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on note $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution de (4.1.1) telle que $u(0) = \varphi$ et v la solution de (4.1.1) telle que $v(0) = \psi$. Alors pour tout $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaisant $\max\{\|\varphi\|_{H^1}, \|\psi\|_{H^1}\} \leq E$, pour tout intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$ et pour toute paire admissible (q, r) , on a*

$$\|u - v\|_{C(\bar{I}, L^2)} + \|u - v\|_{L^q(I, L^r)} \leq C\|\varphi - \psi\|_{L^2},$$

où $C = C(E, N, |I|, r, \alpha, \lambda) > 0$.

Démonstration. D'après les Théorèmes 6.3.1 de Cazenave [19] et 3.5 de Cazenave [18], on peut supposer $\alpha > \frac{4}{N}$ ou $\alpha = 0$. Soient $E > 0$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaisant $\max\{\|\varphi\|_{H^1}, \|\psi\|_{H^1}\} \leq E$. Alors $\max\{\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^1)}; \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^1)}\} \leq C(E, N, \alpha, \lambda)$. Soient (q, r) une paire admissible, $S \in (0, \infty)$, $T \in (0, \infty)$ et soit $t_0 > 0$ à choisir plus tard. On pose $I = (-S, T)$ et $f(u) = \lambda|u|^\alpha u$. Traitons d'abord le cas $\alpha \neq 0$. Soit (a, b) la paire admissible $(\frac{4b}{N\alpha}, \alpha + 2)$. D'après l'équation (4.1.1) et l'inégalité de Hölder, on a pour tout ℓ ,

$$u, v \in L^\infty(I, H^1(\mathbb{R}^N)) \cap W^{1, \infty}(I, H^{-1}(\mathbb{R}^N)), \quad (4.4.8)$$

$$\begin{aligned} & \|f(u) - f(v)\|_{L^{a'}((\ell, \ell+t_0); L^{b'})} \\ & \leq C \left(\|u\|_{L^{\frac{a\alpha}{\alpha-2}}((\ell, \ell+t_0); L^b)}^\alpha + \|v\|_{L^{\frac{a\alpha}{\alpha-2}}((\ell, \ell+t_0); L^b)}^\alpha \right) \|u - v\|_{L^a((\ell, \ell+t_0); L^b)}, \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

où $C = C(N, \alpha, \lambda)$.

De (4.4.8) et (4.4.9) après avoir appliqué l'inégalité de Hölder à (4.4.9), on déduit que

$$\begin{aligned} & \|f(u) - f(v)\|_{L^{a'}((\ell, \ell+t_0); L^{b'})} \\ & \leq Ct_0^{\frac{a-2}{a}} \left(\|u\|_{L^\infty((\ell, \ell+t_0); L^b)}^\alpha + \|v\|_{L^\infty((\ell, \ell+t_0); L^b)}^\alpha \right) \|u - v\|_{L^a((\ell, \ell+t_0); L^b)} \\ & \leq Ct_0^{\frac{a-2}{a}} \left(\|u\|_{L^\infty(I, H^1)}^\alpha + \|v\|_{L^\infty(I, H^1)}^\alpha \right) \|u - v\|_{L^a((\ell, \ell+t_0); L^b)}, \end{aligned}$$

et ainsi pour tout ℓ ,

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^{a'}((\ell, \ell+t_0); L^{b'})} \leq C t_0^{\frac{a-2}{a}} \|u - v\|_{L^a((\ell, \ell+t_0); L^b)}, \quad (4.4.10)$$

où $C = C(E, N, \alpha, \lambda)$.

On applique ensuite l'inégalité de Strichartz et (4.4.10) avec $\ell = 0$. On obtient

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{L^a((0, t_0); L^b)} &\leq C \|\varphi - \psi\|_{L^2} + C \|f(u) - f(v)\|_{L^{a'}((0, t_0); L^{b'})} \\ &\leq C \|\varphi - \psi\|_{L^2} + C_0 t_0^{\frac{a-2}{a}} \|u - v\|_{L^a((0, t_0); L^b)}. \end{aligned}$$

Donc il existe $t_0 = t_0(E, N, \alpha, \lambda) > 0$ assez petit pour avoir $C_0 t_0^{\frac{a-2}{a}} \leq \frac{1}{2}$ et donc

$$\|u - v\|_{L^a((0, t_0); L^b)} \leq 2C \|\varphi - \psi\|_{L^2}.$$

En utilisant cette dernière inégalité, (4.4.10) et en appliquant de nouveau l'inégalité de Strichartz, on obtient

$$\|u - v\|_{L^q((0, t_0); L^r)} \leq C \|\varphi - \psi\|_{L^2} + C \|f(u) - f(v)\|_{L^{a'}((0, t_0); L^{b'})} \leq C \|\varphi - \psi\|_{L^2},$$

où $C = C(E, N, r, \alpha, \lambda)$. Et donc par récurrence finie on en déduit que

$$\exists C > 0 \text{ telle que } \|u - v\|_{L^q((0, T); L^r)} \leq C \|\varphi - \psi\|_{L^2},$$

où $C = C(E, N, T, r, \alpha, \lambda)$. Le résultat sur $(-S, 0)$ s'obtient de façon identique. Ainsi,

$$\exists C > 0 \text{ telle que } \|u - v\|_{L^q(I, L^r)} \leq C \|\varphi - \psi\|_{L^2},$$

où $C = C(E, N, |I|, r, \alpha, \lambda)$. D'où le résultat.

Si $\alpha = 0$ alors la démonstration est plus facile. On a

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^1((0, t_0); L^2)} \leq C t_0 \|u - v\|_{L^\infty((0, t_0); L^2)},$$

et donc (après avoir utilisé l'inégalité de Strichartz),

$$\|u - v\|_{L^\infty((0, t_0); L^2)} \leq C \|\varphi - \psi\|_{L^2} + C_0 t_0 \|u - v\|_{L^\infty((0, t_0); L^2)}.$$

Par récurrence finie en utilisant de nouveau l'inégalité de Strichartz (après avoir choisi $t_0 = \frac{1}{2C_0}$), on obtient

$$\|u - v\|_{L^q(I, L^r)} \leq C \|\varphi - \psi\|_{L^2},$$

où $C = C(N, |I|, r, \lambda)$. Ceci termine la démonstration. \square

4.5 Solutions radiales dans le cas dissipatif

Le but de cette section est d'étudier le comportement asymptotique des solutions radiales dans le cas dissipatif (*i.e.* $\lambda < 0$). Dans le cas attractif et lorsque $\alpha \geq 4/N$, les données initiales radiales permettent de construire des solutions explosant en temps fini, autant pour les $t < 0$ que pour les $t > 0$ (Ogawa et Tsutsumi [68]). Il en est de même pour l'espace X (Glasse [41]). On peut donc faire une analogie entre $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$ et X . On connaît également des résultats d'intégrabilité en temps dans le cas dissipatif, lorsque les solutions sont à valeurs dans X (voir par exemple le Théorème 7.2.1 de Cazenave [19]). De façon similaire, on va obtenir un résultat du même genre pour les solutions radiales.

La démonstration du principal théorème de cette section n'utilise essentiellement que deux estimations : une estimation concernant le comportement asymptotique des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$ à symétrie radiale et l'inégalité de Morawetz (4.2.14). En dimension $N = 1$, les fonctions de $H^1(\mathbb{R})$ à symétrie radiale n'ont pas de comportement asymptotique particulier. C'est pourquoi on suppose dans un premier temps que $N \geq 2$. De plus, l'inégalité de Morawetz n'est vraie que pour $N \geq 3$. Il existe cependant une inégalité plus faible de type Morawetz pour $N \geq 1$ (voir (4.2.12)). Mais elle n'est pas utilisable à cause d'un terme en $1/t$ alors que dans l'inégalité originale ce terme est *constant*. C'est pourquoi on suppose dans un deuxième temps que $N \geq 3$. Enfin, on pourra remarquer que l'hypothèse supplémentaire de symétrie sphérique permet considérablement de simplifier la démonstration qui permet d'obtenir que $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)} 0$. On pourra comparer les démonstrations de la Proposition 4.1.3 (Section 4.2 de cette thèse) et du Théorème 7.5.1 de Cazenave [19] avec celle du Théorème 4.5.1 ci-dessous.

Théorème 4.5.1. *Soient $\lambda < 0$, $N \geq 3$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ l'unique solution de (4.1.1) telle que $u(0) = \varphi$. Si $\varphi \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$ alors on a les résultats suivants.*

1. *On pose $p_0 = \frac{\alpha(N-1)+2}{\alpha(N-1)}(\alpha+2)$. Alors $u \in L^{p_0}(\mathbb{R}; L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$ et on a l'estimation suivante.*

$$\|u\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}; L^{\alpha+2})} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda).$$

2. *Si de plus $0 < \alpha \leq \frac{2}{N} \frac{N-2}{N-1}$ alors $u \in L^q(\mathbb{R}; L^r(\mathbb{R}^N))$, pour toute paire admissible (q, r) telle que $2 \leq r \leq \alpha + 2$ et on a l'estimation suivante.*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}; L^r)} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda).$$

3. $\forall r \in \left(2, \frac{2N}{N-2}\right)$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t)\|_{L^r} = 0$.

Remarque 4.5.2. On a toujours pour tout $N \geq 2$, $\frac{2}{N} \frac{N-2}{N-1} < \frac{2}{N}$. Par conséquent, l'hypothèse faite dans 2 sur α est très restrictive car on suppose que ce dernier est "très petit". Ceci est d'ailleurs surprenant car, moralement, il faut supposer α "grand" pour obtenir ce type de résultat. Ainsi, on ne sait pas si pour $\frac{2}{N} \frac{N-2}{N-1} < \alpha \leq \frac{4}{N}$, $u \in L^q(\mathbb{R}; L^r(\mathbb{R}^N))$, pour au moins une paire admissible (q, r) telle que $r > 2$. Remarquons néanmoins que les résultats donnés par 1 et 2 sont très intéressants dans le sens où l'on a un résultat d'intégrabilité pour tout α (suffisamment petit si l'on se place dans les espaces de Strichartz). Encore un fois, on peut faire une analogie entre les espaces $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$ et X où, pour des données initiales à valeurs dans ce dernier, de tels résultats existent.

On rappelle que pour tout $\varepsilon > 0$, $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,1/2}(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}(0, \varepsilon))$. De plus, on a pour tout $f \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\forall r > 0, |f(r)| \leq C(N) r^{-\frac{N-1}{2}} \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^N \setminus B(0, r))} \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{N-1}{2}} |f(r)| = 0,$$

où l'on a noté $r = |x|$. Enfin,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, |\dot{f}(x) - \dot{f}(y)| \leq C \max\left(|x|^{-\frac{(N-1)}{2}}, |y|^{-\frac{(N-1)}{2}}\right) \|\nabla f\|_{L^2} |x| - |y|^{-\frac{1}{2}},$$

où $C = C(N)$ et où $f = \dot{f}$ p.p.

Voir par exemple Kavian [53], Strauss [71]. Et puisque $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^1)} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda)$, on déduit immédiatement un corollaire de ces propriétés.

Corollaire 4.5.3. Soient $\lambda < 0$, $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 \leq \alpha < \infty$, si $N = 1$), soit $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et soit $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ la solution de (4.1.1) telle que $u(0) = \varphi$. Si $\varphi \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$ alors pour tout $r > 0$,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t, r)| \leq C r^{-\frac{N-1}{2}},$$

où $C = C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda)$.

On va voir maintenant que les solutions radiales sont "presque" dans X .

Proposition 4.5.4. On suppose que $N \geq 2$. Soient $\lambda < 0$, $0 \leq \alpha < \frac{4}{N-2}$, soit $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et soit $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^N))$ l'unique solution de (4.1.1) telle que $u(0) = \varphi$. Si $\varphi \in H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$ alors on a le résultat suivant.

$$\forall \delta \in \left[0, \frac{2(N-1)}{N-2}\right], \forall k \in \left[2 + \frac{2\delta}{N-1}, \frac{2N}{N-2}\right] \quad (\forall \delta \in [0, \infty), \forall k \in [2 + 2\delta, \infty) \text{ si } N = 2),$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\delta |u(t, x)|^k dx \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, k, \lambda).$$

Démonstration. En utilisant l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^k(\mathbb{R}^N)$, on obtient,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^N} \int_{B(0,1)} |x|^\delta |u(t, x)|^k dx \leq C(N, k) \sup_{t \in \mathbb{R}^N} \|u(t)\|_{H^1}^k \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, k, \lambda). \quad (4.5.1)$$

De plus, d'après le Corollaire 4.5.3,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} |x|^\delta |u(t, x)|^k dx = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} |x|^\delta |u(t, x)|^{k-2} |u(t, x)|^2 dx \\ & \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda) \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} \frac{|x|^\delta}{|x|^{\frac{(k-2)(N-1)}{2}}} |u(t, x)|^2 dx \\ & = C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda) \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\frac{(k-2)(N-1)}{2} - \delta}} |u(t, x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Or $\frac{(k-2)(N-1)}{2} - \delta \geq 0 \iff k \geq 2 + \frac{2\delta}{N-1}$. Donc on obtient avec la conservation de la masse

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,1)} |x|^\delta |u(t, x)|^k dx \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda). \quad (4.5.2)$$

Ainsi (4.5.1) et (4.5.2) permettent de conclure.

Notons que si $N \geq 3$ alors $2 + \frac{2\delta}{N-1} \leq \frac{2N}{N-2} \iff \delta \leq \frac{2(N-1)}{N-2}$ et donc si $N \geq 3$ alors $\forall \delta \in \left(0, \frac{2(N-1)}{N-2}\right], \left[2 + \frac{2\delta}{N-1}, \frac{2N}{N-2}\right] \neq \emptyset$. \square

On va maintenant démontrer le Théorème 4.5.1. La démonstration repose essentiellement sur deux résultats : la Proposition 4.5.4 et le Lemme 4.2.5 (inégalité de Morawetz). On donnera aussi une autre démonstration plus courte du 3 du Théorème 4.5.1 qui ne nécessite pas de démontrer d'abord le 1 de ce théorème comme on va le voir. Cependant, la démonstration requiert encore l'inégalité de Morawetz.

Démonstration du Théorème 4.5.1. On procède en 3 étapes.

Étape 1. On a 1.

Par hypothèse, $(\alpha + 2) \in \left(2, \frac{2N}{N-2}\right)$. On pose $\delta = \frac{\alpha(N-1)}{2}$. Alors $\delta \in \left(0, \frac{2(N-1)}{N-2}\right)$ et $\alpha + 2 = 2 + \frac{2\delta}{N-1}$. D'après la Proposition 4.5.4, on a donc

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\delta |u(t, x)|^{\alpha+2} dx \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda). \quad (4.5.3)$$

On pose $p = \delta + 1$. Donc $p' = \frac{\delta + 1}{\delta}$ et d'après l'inégalité de Hölder, (4.5.3) et l'inégalité de Morawetz

(4.2.14), on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t, x)|^{\alpha+2} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{\frac{\delta}{\delta+1}} |u(t, x)|^{\frac{\alpha+2}{\delta+1}} \right) \left(\frac{|u(t, x)|^{\frac{\delta}{\delta+1}(\alpha+2)}}{|x|^{\frac{\delta}{\delta+1}}} \right) dx \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\delta |u(t, x)|^{\alpha+2} dx \right]^{\frac{1}{\delta+1}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(t, x)|^{\alpha+2}}{|x|} dx \right]^{\frac{\delta}{\delta+1}} \\ &\leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda) \left[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(t, x)|^{\alpha+2}}{|x|} dx \right]^{\frac{\delta}{\delta+1}}, \end{aligned}$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui donne donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\frac{\delta+1}{\delta}(\alpha+2)} dt &\leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(t, x)|^{\alpha+2}}{|x|} dx dt \\ &\leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda). \end{aligned}$$

D'où 1 en posant $p_0 = \frac{\delta+1}{\delta}(\alpha+2) = \frac{\alpha(N-1)+2}{\alpha(N-1)}(\alpha+2)$.

Étape 2. On a 2.

Soit q_0 tel que $(q_0, \alpha+2)$ soit une paire admissible. Notons d'abord que puisque $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$, alors $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; L^{\alpha+2})} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda)$. Ensuite, comme $q_0 \geq p_0 \iff \alpha \leq \frac{2}{N} \frac{N-2}{N-1}$, on a par l'inégalité de Hölder et par la 1^{ère} étape,

$$\|u\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}; L^{\alpha+2})} \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; L^{\alpha+2})}^{1-\frac{p_0}{q_0}} \|u\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}; L^{\alpha+2})}^{\frac{p_0}{q_0}} \leq C(\|\varphi\|_{H^1}, N, \alpha, \lambda).$$

Le cas général s'obtient en utilisant l'inégalité de Hölder et la conservation de la masse L^2 .

Étape 3. On a 3.

Puisque $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^1)} < \infty$, on obtient par l'équation (4.1.1) que $\|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^{-1})} < \infty$ et donc par interpolation, $\|u(t) - u(s)\|_{L^2} \leq \|u(t) - u(s)\|_{H^1}^{1/2} \|u(t) - u(s)\|_{H^{-1}}^{1/2} \leq C|t - s|^{1/2}$. Ainsi avec l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on a

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \|u(t) - u(s)\|_{L^{\alpha+2}} \leq C|t - s|^{\frac{4-\alpha(N-2)}{4(\alpha+2)}}.$$

Donc $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} = 0$ grâce à 1. Puis, en utilisant ce résultat, le fait que $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^1)} < \infty$ et l'inégalité d'interpolation,

$$\forall f \in H^1(\mathbb{R}^N), \|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^{\alpha+2}}^\nu \|f\|_{L^p}^{1-\nu},$$

pour un certain $\nu \in (0, 1]$ et un certain $p \geq 2$ tel que $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, on obtient alors

$$\|u(t)\|_{L^r} \leq C \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^\nu \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Autre démonstration de 3. D'après l'inégalité de Morawetz (4.2.14), on a $u(t) \rightarrow 0$ dans $H_w^1(\mathbb{R}^N)$ lorsque $t \rightarrow \pm\infty$ (Corollaire 7.4.6 de Cazenave [19]). Or, l'injection $H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ est compacte (Strauss [71]) et donc $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t)\|_{L^r} = 0$. D'où le résultat. \square

Chapitre 5

Régularité de certaines solutions auto-similaires

Le but de ce chapitre est d'établir la régularité du profil des solutions auto-similaires à valeurs dans $L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha > 0$ (voir les Définitions 5.1.2 et 5.1.4). Avant d'aller plus loin, faisons quelques rappels sur les solutions auto-similaires.

5.1 Rappels

On rappelle que l'équation que nous étudions est la suivante.

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \lambda |u|^\alpha u = 0, & (t, x) \in (-T_*, T^*) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0) = \varphi, & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$) et φ une donnée initiale. On rappelle aussi la valeur de α_0 .

$$\alpha_0 = \frac{-(N-2) + \sqrt{N^2 + 12N + 4}}{2N}. \quad (5.1.2)$$

Parfois, on aura à considérer des solutions de l'équation intégrale associée.

$$u(t) = T(t-\varepsilon)u(\varepsilon) + i\lambda \int_{\varepsilon}^t T(t-s)\{|u(s)|^\alpha u(s)\} ds, \quad (5.1.3)$$

pour tout $t \in (0, T^*]$ et tout $\varepsilon \in (0, T^*]$, ou bien pour tout $t \in [-T_*, 0)$ et tout $\varepsilon \in [-T_*, 0)$.

Considérons la transformation suivante. Soient $\nu > 0$, $p \in \mathbb{C}$ et $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Pour tout $u \in \mathcal{S}(I \times \mathbb{R}^N)$, on pose pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^N$,

$$\begin{cases} u_\nu(t, x) = \nu^p u(\nu^2 t, \nu x), & \text{si } t \geq 0, \\ u_\nu(t, x) = \nu^p \overline{u(-\nu^2 t, \nu x)}, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Par dualité, on peut encore définir la transformation (5.1.4) pour $u \in \mathcal{S}'(I \times \mathbb{R}^N)$, pour tout $\nu > 0$. Si $\operatorname{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$ alors l'équation de Schrödinger (5.1.1) est invariante par le groupe de transformation $u \mapsto u_\nu$. Autrement dit, si u est une solution de (5.1.1), alors pour tout $\nu > 0$, u_ν est aussi une solution de (5.1.1). Ceci motive la Définition 5.1.2.

Définition 5.1.1. Soit $p \in \mathbb{C}$. Une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dite *homogène de degré $-p$* ou *p -homogène* si pour tout $\nu > 0$, $f_\nu = f$, où f_ν est définie par

$$f_\nu(x) = \nu^p f(\nu x), \quad (5.1.5)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ alors f_ν se définit par dualité.

Définition 5.1.2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\alpha > 0$ et soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$ si $\lambda \neq 0$. Une solution $u \in \mathcal{S}'(I \times \mathbb{R}^N)$ de (5.1.1) ou de (5.1.3), sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ avec $0 \notin I$, est dite *auto-similaire* si pour tout $\nu > 0$, $u_\nu = u$, où u_ν est définie par (5.1.4). Si de plus φ est la donnée initiale de u alors φ est homogène de degré $-p$.

Pour un étude précise des solutions auto-similaires de (5.1.3), voir Cazenave et Weissler [26, 27, 28].

Dans tout ce qui suit, on ne considérera que des solutions définies sur un intervalle de temps ouvert $I \subseteq (0, \infty)$. Toutes les définitions et tous les résultats sont transposables sur un intervalle de temps ouvert $I \subseteq (-\infty, 0)$ en remplaçant chaque fonction $t \mapsto g(t)$ par $t \mapsto \overline{g(-t)}$.

Si u est une solution auto-similaire, alors un rapide calcul permet d'établir la proposition suivante.

Proposition 5.1.3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$ si $\lambda \neq 0$ et $u \in \mathcal{S}'(I \times \mathbb{R}^N)$ une solution de (5.1.1) ou de (5.1.3), sur un intervalle ouvert $I \subseteq (0, \infty)$. Alors u est auto-similaire si et seulement si u satisfait

$$u(t, x) = t^{-\frac{p}{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad (5.1.6)$$

où $f(\cdot) = u(1, \cdot)$.

Si de plus il existe $1 \leq r \leq \infty$ tel que $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$ alors pour tout $t \in I$, $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^N)$ et l'on a pour tout $t \in I$,

$$\begin{cases} \|u(t)\|_{L^r} = t^{\frac{N}{2r} - \frac{1}{\alpha}} \|f\|_{L^r}, & \text{si } \lambda \neq 0, \\ \|u(t)\|_{L^r} = t^{\frac{N}{2r} - \frac{\operatorname{Re}(p)}{2}} \|f\|_{L^r}, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases} \quad (5.1.7)$$

Enfin, si $1 < r < \infty$ alors $u \in C(I, L^r(\mathbb{R}^N))$.

Démonstration. Il reste à voir la continuité. Soit $1 < r < \infty$. Soit $t \in I$ et soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ telle que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$. Par (5.1.6), on montre facilement que $u(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(t)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Puisque $(u(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$

est bornée dans $L^r(\mathbb{R}^N)$ (par (5.1.7)), on en déduit que $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ dans $L^r_w(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Par (5.1.7), $\|u(t_n)\|_{L^r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^r}$. Or $L^r(\mathbb{R}^N)$ est uniformément convexe, donc $u(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^r(\mathbb{R}^N)} u(t)$. D'où la continuité de u en t . Ainsi, $u \in C(I, L^r(\mathbb{R}^N))$. \square

Définition 5.1.4. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$ si $\lambda \neq 0$, $u \in \mathcal{S}'(I \times \mathbb{R}^N)$ une solution auto-similaire de (5.1.1) ou de (5.1.3), sur un intervalle ouvert $I \subseteq (0, \infty)$, et $f(\cdot) = u(1, \cdot)$. On dit que f est le *profil* de u . En particulier, si $\lambda = 0$ et si φ est la donnée initiale alors $f = T(1)\varphi$.

Remarque 5.1.5. Remarquons que si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et si u est une solution auto-similaire de profil $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ alors par (5.1.7), $\|u(t)\|_{L^2} = t^{\frac{N\alpha-4}{4\alpha}} \|f\|_{L^2}$. Par conséquent, à cause de la conservation de la masse des solutions $L^2(\mathbb{R}^N)$, si $\alpha \neq \frac{4}{N}$ alors toute solution auto-similaire de (5.1.1) non triviale **ne peut pas** être une solution classique $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Rappelons que le but de ce chapitre est de gagner de la régularité en espace de certaines solutions auto-similaires de (5.1.1), dont les profils sont dans $L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha > 0$. Ces solutions vérifiant l'équation aux dérivées partielles (5.1.1), dans un sens à préciser, nous aurons également besoin de considérer l'équation intégrale associée (5.1.3). Réciproquement, il nous faudra utiliser le fait que les solutions auto-similaires de l'équation intégrale (5.1.3) construites dans les articles de Cazenave et Weissler [26, 28], sont également solutions de l'équation aux dérivées partielles (5.1.1), toujours dans un sens à préciser. Par conséquent, nous avons besoin d'établir les deux lemmes suivants.

Lemme 5.1.6. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, soit $0 < \alpha \leq \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N \in \{1; 2\}$), soit $T^* \in (0, \infty)$, soit $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et soit $u \in C((0, T^*]; L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$ satisfaisant

$$\forall t \in (0, T^*], u(t) = T(t)\varphi + i\lambda \int_0^t T(t-s)\{|u(s)|^\alpha u(s)\} ds, \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N). \quad (5.1.8)$$

Alors u est également solution de

$$\begin{cases} u \in C((0, T^*]; L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)) \cap C^1((0, T^*]; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)), \\ i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \lambda |u|^\alpha u = 0, \forall t \in (0, T^*]. \end{cases}$$

Remarque 5.1.7. L'hypothèse (5.1.8) peut être remplacée par

$$\forall t \in (0, T^*], \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], u(t) = T(t-\varepsilon)u(\varepsilon) + i\lambda \int_\varepsilon^t T(t-s)\{|u(s)|^\alpha u(s)\} ds, \quad (5.1.9)$$

pour un $\varepsilon_0 \in (0, T^*]$. En effet, l'hypothèse (5.1.8) implique (5.1.9) (avec $\varepsilon_0 = T^*$). Puis l'on utilise cette identité pour démontrer le lemme. En particulier, il n'est pas nécessaire de supposer l'existence d'une donnée initiale φ .

Lemme 5.1.8. Soient $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \alpha \leq \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N \in \{1; 2\}$), $T^* \in (0, \infty)$ et u une solution de

$$\begin{cases} u \in C((0, T^*]; L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)) \cap C^1((0, T^*]; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)), \\ i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \lambda |u|^\alpha u = 0, \text{ dans } \mathcal{S}'((0, T^*] \times \mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Alors on a

$$\forall t \in (0, T^*], \forall \varepsilon \in (0, T^*], u(t) = T(t - \varepsilon)u(\varepsilon) + i\lambda \int_{\varepsilon}^t T(t - s)\{|u(s)|^\alpha u(s)\} ds.$$

Si de plus $u \in X_\alpha$ de donnée initiale $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et si $\alpha > \alpha_0$ alors $\varphi \in W_\alpha$, $u \in C([0, T^*]; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$ et u est solution de

$$\forall t \in [0, T^*], u(t) = T(t)\varphi + i\lambda \int_0^t T(t - s)\{|u(s)|^\alpha u(s)\} ds,$$

où X_α est défini par (5.1.18), W_α par (5.1.17) et α_0 par (5.1.2).

Pour démontrer ces deux lemmes, nous avons besoin de la théorie sur les opérateurs non-bornés. Pour $\alpha \geq 0$, on pose $X = H^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}-2}(\mathbb{R}^N)$ et l'on définit l'opérateur non-borné suivant.

$$\begin{cases} D(A) = H^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}}(\mathbb{R}^N), \\ Au = i\Delta u, \forall u \in D(A). \end{cases} \quad (5.1.10)$$

Alors $(A, D(A))$ est un opérateur non-borné de domaine dense dans X et est anti-adjoint. En particulier, $(A, D(A))$ est m -accréitif et m -dissipatif. On notera toujours $T(t)$ l'isométrie $e^{it\Delta}$ engendré sur X , puisqu'il coïncide sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ avec l'opérateur de Schrödinger usuel, que l'on étend par dualité sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. On rappelle aussi que pour $\alpha \geq 0$, on a l'injection dense $H^{\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ et par conséquent, $L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}}(\mathbb{R}^N) \equiv D(A)$.

Démonstration du Lemme 5.1.6. Soient les notations (5.1.10). Soit $\varepsilon \in (0, T^*)$ arbitrairement petit. On pose $g(u) = i\lambda |u|^\alpha u$. Par (5.1.8) (ou (5.1.9)), on a

$$\forall t \in [\varepsilon, T^*], u(t) = T(t - \varepsilon)u(\varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} T(t - \varepsilon - s)g(u(s + \varepsilon)) ds.$$

On fait le changement de variable $\tau = t - \varepsilon$. Alors $t \in [\varepsilon, T^*] \iff \tau \in [0, T^* - \varepsilon]$. On pose $\forall t \in [\varepsilon, T^*], \forall \tau \in [0, T^* - \varepsilon], v_\varepsilon(t) = T(t - \varepsilon)u(\varepsilon)$, $u_\varepsilon(\tau) = u(\tau + \varepsilon)$, $\tilde{w}_\varepsilon(\tau) = \int_0^\tau T(\tau - s)g(u_\varepsilon(s)) ds$, $w_\varepsilon(t) = \tilde{w}_\varepsilon(t - \varepsilon) = \tilde{w}_\varepsilon(\tau)$. Alors

$$\forall t \in [\varepsilon, T^*], u(t) = v_\varepsilon(t) + w_\varepsilon(t). \quad (5.1.11)$$

Notons d'abord que v_ε est solution de

$$\begin{cases} v_\varepsilon \in C^1([\varepsilon, \infty); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)), \\ i \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + \Delta v_\varepsilon = 0, \quad \forall t \geq \varepsilon, \\ v_\varepsilon(\varepsilon) = u(\varepsilon). \end{cases} \quad (5.1.12)$$

Puisque $u \in C((0, T^*]; L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$, il est clair que $g(u_\varepsilon) \in C([0, T^* - \varepsilon]; D(A))$ et par conséquent $g(u_\varepsilon) \in L^1((0, T^* - \varepsilon); D(A))$. Ainsi d'après la Proposition 4.1.6 de Cazenave et Haraux [20], \tilde{w}_ε est solution de

$$\begin{cases} \tilde{w}_\varepsilon \in C([0, T^* - \varepsilon]; D(A)) \cap C^1([0, T^* - \varepsilon]; X), \\ i \frac{\partial \tilde{w}_\varepsilon}{\partial t} + \Delta \tilde{w}_\varepsilon + \lambda |u_\varepsilon|^\alpha u_\varepsilon = 0, \quad \forall t \in [0, T^* - \varepsilon], \\ \tilde{w}_\varepsilon(0) = 0, \end{cases}$$

ce qui se donne pour w_ε ,

$$\begin{cases} w_\varepsilon \in C([\varepsilon, T^*]; D(A)) \cap C^1([\varepsilon, T^*]; X), \\ i \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} + \Delta w_\varepsilon + \lambda |u|^\alpha u = 0, \quad \forall t \in [\varepsilon, T^*], \\ w_\varepsilon(\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (5.1.13)$$

En sommant les équations (5.1.12)–(5.1.13) et en utilisant (5.1.11), on obtient que u est solution de

$$\begin{cases} u \in C((0, T^*]; L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([\varepsilon, T^*]; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)), \\ i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \lambda |u|^\alpha u = 0, \quad \forall t \in [\varepsilon, T^*]. \end{cases}$$

D'où le résultat lorsque $\varepsilon \searrow 0$. □

Démonstration du Lemme 5.1.8. Soient les notations (5.1.10). Soit $\varepsilon \in (0, T^*]$. On pose pour tout $t \in (-\varepsilon, T^* - \varepsilon]$, $v_\varepsilon(t) = T(t)u(\varepsilon)$, $u_\varepsilon(t) = u(t + \varepsilon)$ et

$$\forall t \in (-\varepsilon, T^* - \varepsilon], \quad w_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t). \quad (5.1.14)$$

On pose également $g(u) = i\lambda|u|^\alpha u$. D'après les équations satisfaites par v_ε et u_ε , w_ε est solution de

$$\begin{cases} w_\varepsilon \in C^1((-\varepsilon, T^* - \varepsilon]; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)), \\ i \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} + \Delta w_\varepsilon + \lambda |u_\varepsilon|^\alpha u_\varepsilon = 0, \quad \forall (t, x) \in (-\varepsilon, T^* - \varepsilon] \times \mathbb{R}^N, \\ w_\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \quad (5.1.15)$$

Or $g(u_\varepsilon) \in C((-\varepsilon, T^* - \varepsilon]; D(A))$. Donc d'après la démonstration du Lemme 4.1.1 de Cazenave et Haraux [20], $w_\varepsilon \in C((-\varepsilon, T^* - \varepsilon]; D(A))$ et l'on a

$$\forall t \in (-\varepsilon, T^* - \varepsilon], \quad w_\varepsilon(t) = \int_0^t T(t-s)g(u_\varepsilon(s))ds,$$

ce qui donne avec (5.1.14),

$$\forall t \in (-\varepsilon, T^* - \varepsilon], u_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t) + \int_0^t T(t-s)g(u_\varepsilon(s))ds.$$

On obtient alors

$$\forall t \in (0, T^*], u(t) = T(t-\varepsilon)u(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t T(t-s)g(u(s))ds.$$

D'où le résultat. Pour la dernière partie du lemme, voir la démonstration de la Proposition 3.3, (iii), de Cazenave et Weissler [28]. Ceci termine la démonstration. \square

On rappelle maintenant un résultat d'existence et d'unicité. Soit $\alpha > 0$. Pour obtenir des solutions auto-similaires, l'espace dans lequel sont prises les données initiales est W_α , et l'espace des solutions est X_α . En voici leur définition. On définit le réel β par

$$\beta = \frac{4 - \alpha(N-2)}{2\alpha(\alpha+2)}. \quad (5.1.16)$$

On définit les espaces fonctionnels suivants.

$$W_\alpha = \left\{ \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N); \sup_{t>0} t^\beta \|T(t)\varphi\|_{L^{\alpha+2}} < \infty \right\}, \quad (5.1.17)$$

muni de la norme,

$$\|\varphi\|_{W_\alpha} = \sup_{t>0} t^\beta \|T(t)\varphi\|_{L^{\alpha+2}},$$

et

$$X_\alpha = \left\{ u \in L_{\text{loc}}^\infty((0, \infty); L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)); \sup_{t>0} t^\beta \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} < \infty \right\}, \quad (5.1.18)$$

muni de la norme,

$$\|u\|_{X_\alpha} = \sup_{t>0} t^\beta \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}.$$

Les espaces W_α et X_α munis de leur norme respective sont des espaces de Banach. De plus, une condition nécessaire pour que $W_\alpha \neq \{0\}$ est $\alpha_0 \leq \alpha \leq \frac{4}{N-2}$ ($\alpha_0 \leq \alpha < \infty$ si $N \in \{1, 2\}$), où α_0 est défini par (5.1.2). Voir la Remarque 2.2 de Cazenave et Weissler [28] pour la justification.

Dans le cas linéaire ($\lambda = 0$), on a le résultat suivant.

Proposition 5.1.9. *Soit $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = T(t)\varphi$. Si φ est homogène de degré $-p$, $p \in \mathbb{C}$, alors u est l'unique solution auto-similaire de l'équation de Schrödinger linéaire (i.e. de (5.1.1) avec $\lambda = 0$) de profil $f = T(1)\varphi$. Et s'il existe $1 \leq r \leq \infty$ tel que $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$ alors pour tout $t > 0$, $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^N)$ et l'on a*

$$\forall t > 0, \|u(t)\|_{L^r} = t^{\frac{N}{2r} - \frac{\text{Re}(p)}{2}} \|f\|_{L^r}. \quad (5.1.19)$$

Si de plus $1 < r < \infty$ alors $u \in C((0, \infty); L^r(\mathbb{R}^N))$.

Démonstration. L'unicité de la solution vient de la Proposition 5.1.3, (5.1.6), et de la définition du profil. Un simple calcul sur $T(t)\varphi$ montre que si φ est homogène de degré $-p$, alors $u(t) \equiv T(t)\varphi$ est une solution auto-similaire de l'équation de Schrödinger linéaire. La régularité et la continuité viennent de la Proposition 5.1.3. \square

Remarque 5.1.10. Remarquons que si $\varphi \neq 0$ et $\varphi \in L^{r'}(\mathbb{R}^N)$, pour un $2 \leq r \leq \infty$, alors d'après (2.1.2) et (2.1.3), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t > 0$,

$$Ct^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \leq \|T(t)\varphi\|_{L^r} \leq t^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|\varphi\|_{L^{r'}}.$$

En particulier, $\|f\|_{L^r} = \|T(1)\varphi\|_{L^r} \leq \|\varphi\|_{L^{r'}} < \infty$, et donc $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, par (5.1.19) on doit avoir $0 \leq \frac{\operatorname{Re}(p)}{2} - \frac{N}{2r} \leq N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})$, ce qui est équivalent à $\frac{N}{r} \leq \operatorname{Re}(p) \leq N\frac{r-1}{r}$. Cela implique que p doit vérifier $0 < \operatorname{Re}(p) < N$.

Pour plus de détails sur les solutions linéaires auto-similaires, voir Cazenave et Weissler [26], Section 3.

Théorème 5.1.11 (Cazenave et Weissler). Soient $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\alpha_0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($\alpha_0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), où α_0 est défini par (5.1.2). Alors il existe $\rho > 0$ et $M = M(\rho, N, \alpha, \lambda) > 0$ satisfaisant les propriétés suivantes.

Pour tout $\varphi \in W_\alpha$ tel que $\|\varphi\|_{W_\alpha} \leq \rho$, il existe une unique solution positivement globale $u \in X_\alpha$ de l'équation intégrale (5.1.8), définie pour tout $t \geq 0$, de donnée initiale φ . De plus, u satisfait les propriétés suivantes.

1. $\|u\|_{X_\alpha} \leq M$,
2. $u(\cdot) - T(\cdot)\varphi \in C([0, \infty); H^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}}(\mathbb{R}^N))$,
3. $u(t) \xrightarrow[t \searrow 0]{S'(\mathbb{R}^N)} \varphi$.

Si $p \in \mathbb{C}$ est tel que $\operatorname{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$ et si de plus φ est homogène de degré $-p$, alors u est l'unique solution auto-similaire de (5.1.1) et

$$u \in C((0, \infty); L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)).$$

On peut choisir $\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \mu_k P_k(x) |x|^{-(p+k)}$, avec $n \in \mathbb{N}$, où $\mu_k \in \mathbb{C}$, où P_k est un polynôme harmonique homogène de degré k et où $\|T(1)\varphi\|_{L^{\alpha+2}} \leq \rho$.

Démonstration. Sous les hypothèses du Théorème 5.1.11 et d'après le Théorème 2.1 de Cazenave et Weissler [26], il existe une unique solution $u \in X_\alpha$ de (5.1.8), définie pour tout $t \geq 0$, satisfaisant

les propriétés 1, 2 et 3.

Si de plus φ est homogène de degré $-p$ avec $\operatorname{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$, alors par unicité u est auto-similaire. Et puisque $u \in X_\alpha$, on en déduit de (5.1.6) que $u \in C((0, \infty); L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$ (voir la démonstration de la Proposition 5.1.3). D'après le Lemme 5.1.6, u est donc une solution de l'équation aux dérivées partielles (5.1.1).

Voyons maintenant l'unicité pour (5.1.1). Soit u et v deux éléments de X_α solutions auto-similaires de (5.1.1) de même donnée initiale $\varphi \in W_\alpha$ satisfaisant les hypothèses du Théorème 5.1.11. Alors d'après le Lemme 5.1.8, u et v sont solutions de (5.1.8). Par unicité pour cette équation intégrale, on a alors $u(t) \equiv v(t)$, pour tout $t \geq 0$.

La dernière assertion du théorème vient de la Proposition 4.3 de Cazenave et Weissler [26]. Ceci termine la démonstration. \square

Si u est une solution auto-similaire de (5.1.1) de profil f , alors on déduit de (5.1.6) et de (5.1.1) que f satisfait une équation aux dérivées partielles.

Proposition 5.1.12. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$ si $\lambda \neq 0$ et u une solution auto-similaire de (5.1.1) de profil $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Alors f est solution du problème suivant.*

$$-\Delta f + \frac{ip}{2}f + \frac{i}{2}x \cdot \nabla f = \lambda |f|^\alpha f, \quad (5.1.20)$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

5.2 Régularité de certaines solutions auto-similaires

L'équation (5.1.20) a été étudiée dans les cas suivants (avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ si $N \geq 3$, $0 < \alpha < \infty$ si $N \in \{1, 2\}$ et $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$).

1. $f \in C_{\text{rad}}^2(\mathbb{R}^N)$ est solution de (5.1.20) avec $\lambda > 0$ et $\alpha = \frac{4}{N}$.
2. $f \in C_{\text{rad}}^2(\mathbb{R}^N)$ est solution de (5.1.20) avec $\lambda > 0$, $N \geq 3$ et $\alpha > \frac{4}{N}$.

Dans les deux cas, il a été démontré que l'on avait

$$\begin{cases} |f(r)| \leq Cr^{-\frac{2}{\alpha}}, \\ |f'(r)| \leq Cr^{-\frac{2}{\alpha}+1}, \end{cases}$$

pour tout $r > 0$, où l'on a utilisé la convention $f(r) = f(|x|)$ avec $r = |x|$. À cet effet, voir Johnson et Pan [48]; Kavian et Weissler [54]; Kopell et Landman [56]. Remarquons qu'aucune hypothèse de comportement asymptotique n'est faite alors que l'on obtient $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pour

toute une famille de $p > 2$. Pour l'équation de la chaleur, il a été montré (sous des conditions adéquates) que les profils ainsi que leurs dérivées premières ont une décroissance exponentielle (Escobedo et Kavian [30]). De plus, il n'est pas nécessaire de supposer ces profils à symétrie sphérique.

En utilisant la démonstration de (i) et (iii) du Théorème 8.1.1 de Cazenave [19] qui montre que toute solution de (3.3.2) est $W^{3,p}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $2 \leq p < \infty$, on peut établir un résultat de régularité locale pour les profils. Cependant, par soucis de clarté, on redonne la démonstration.

Proposition 5.2.1. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$ si $\lambda \neq 0$ et u une solution auto-similaire de (5.1.1) de profil $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.*

1. *Si $\lambda \neq 0$ et si $f \in L_{\text{loc}}^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ alors pour tout $r \in [1, \infty)$, $f \in W_{\text{loc}}^{3,r}(\mathbb{R}^N)$. En particulier, pour tout $\gamma \in (0, 1)$, $f \in C_{\text{loc}}^{2,\gamma}(\mathbb{R}^N)$ et f est une solution classique de (5.1.20).*
2. *Si $\lambda = 0$ et s'il existe $1 < r_0 \leq \infty$ tel que $f \in L_{\text{loc}}^{r_0}(\mathbb{R}^N)$ alors $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. En particulier, f est une solution classique de (5.1.20).*

Démonstration. On pose $f_1 = \operatorname{Re}(f)$, $f_2 = \operatorname{Im}(f)$, $p_1 = \operatorname{Re}(p)$ et $p_2 = \operatorname{Im}(p)$. De (5.1.20), on en déduit que f_1 et f_2 satisfont

$$\begin{cases} -\Delta f_1 - \frac{1}{2}p_2 f_1 - \frac{1}{2}p_1 f_2 - \frac{1}{2}x \cdot \nabla f_2 = \lambda |f|^\alpha f_1, & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta f_2 - \frac{1}{2}p_2 f_2 + \frac{1}{2}p_1 f_1 + \frac{1}{2}x \cdot \nabla f_1 = \lambda |f|^\alpha f_2, & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Puis, en posant pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, $g(x) = f(x)e^{-i\frac{|x|^2}{8}}$, $g_1 = \operatorname{Re}(g)$ et $g_2 = \operatorname{Im}(g)$, on déduit de (5.1.20) que g , g_1 et g_2 satisfont

$$-\Delta g - \frac{1}{16}|x|^2 g - \frac{i}{4}(N-2p)g = \lambda |g|^\alpha g, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \quad (5.2.2)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta g_1 - \frac{1}{2}p_2 g_1 - \frac{1}{16}|x|^2 g_1 + \frac{N-2p_1}{4}g_2 = \lambda |g|^\alpha g_1, & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta g_2 - \frac{1}{2}p_2 g_2 - \frac{1}{16}|x|^2 g_2 - \frac{N-2p_1}{4}g_1 = \lambda |g|^\alpha g_2, & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Traisons le cas $\lambda \neq 0$. On sait que si $g \in L_{\text{loc}}^a(\mathbb{R}^N)$ pour un $\alpha + 1 < a < \infty$ alors par (5.2.3), $\Delta g_j \in L_{\text{loc}}^{\frac{a}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $j \in \{1, 2\}$, et donc $g \in W_{\text{loc}}^{2, \frac{a}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N)$ (voir par exemple Chen et Wu [29], Gilbarg et Trudinger [32]). En utilisant les injections de Sobolev, on obtient donc

$$\begin{cases} g \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^N), \text{ pour tout } q \in [1, \infty) \text{ tel que } \frac{1}{q} \geq \frac{\alpha+1}{a} - \frac{2}{N}, & \text{si } \frac{\alpha+1}{a} - \frac{2}{N} \geq 0, \\ g \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^N), \text{ pour tout } q \in [1, \infty], & \text{si } \frac{\alpha+1}{a} - \frac{2}{N} < 0. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $q_0 = \alpha + 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{q_n} = (\alpha + 1)^n \left(\frac{1}{\alpha + 2} - \frac{2}{N\alpha} + \frac{2}{N\alpha(\alpha + 1)^n} \right).$$

On pose $\delta = -\left(\frac{1}{\alpha+2} - \frac{2}{N\alpha}\right)$. Puisque $\alpha(N-2) < 4$ alors $\delta > 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + 1}{q_n} - \frac{2}{N} &= \frac{1}{q_{n+1}}, \\ \frac{1}{q_{n+1}} - \frac{1}{q_n} &= -\alpha(\alpha + 1)^n \delta < -\alpha\delta. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

En particulier, la suite $\left(\frac{1}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} = -\infty$. Et puisque $q_0 > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que

$$\forall n \in \{0; \dots; n_0\}, \frac{1}{q_n} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_{n_0+1}} \leq 0.$$

Montrons par récurrence finie que pour tout $n \in \{0; \dots; n_0\}$, $g \in L_{\text{loc}}^{q_n}(\mathbb{R}^N)$.

En effet, par hypothèse $g \in L_{\text{loc}}^{q_0}(\mathbb{R}^N)$ (on rappelle que $f \in L_{\text{loc}}^{q_0}(\mathbb{R}^N)$ et que $|g| = |f|$). Supposons alors que pour un $j \in \{0; \dots; n_0 - 1\}$, $g \in L_{\text{loc}}^{q_j}(\mathbb{R}^N)$. Alors par (5.2.3)–(5.2.5), $g \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^N)$, pour tout $q \in [1, \infty)$ tel que

$$\frac{1}{q} \geq \frac{\alpha + 1}{q_j} - \frac{2}{N} \equiv \frac{1}{q_{j+1}}.$$

Par conséquent $g \in L_{\text{loc}}^{q_{j+1}}(\mathbb{R}^N)$, ce qui est le résultat voulu.

En particulier, $g \in L_{\text{loc}}^{q_{n_0}}(\mathbb{R}^N)$. Par (5.2.3)–(5.2.5), on a donc $g \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^N)$, pour tout $q \in [1, \infty)$ tel que $\frac{1}{q} > \frac{1}{q_{n_0+1}}$. Or $\frac{1}{q_{n_0+1}} \leq 0$ et donc $g \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^N)$, pour tout $q \in [1, \infty)$. Par (5.2.3), cela implique que $g \in W_{\text{loc}}^{2,q}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $q \in [1, \infty)$. En utilisant cette dernière estimation, les injections de Sobolev et le fait que $|\nabla|g|^\alpha g_j| \leq C|g|^\alpha |\nabla g|$, pour tout $j \in \{1; 2\}$, on obtient que $|g|^\alpha g_j \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $j \in \{1; 2\}$. Donc par (5.2.3), $g \in W_{\text{loc}}^{3,q}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $q \in [1, \infty)$. En particulier, $g \in C^2(\mathbb{R}^N)$ et donc $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Ainsi $|f|^\alpha f_j \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $j \in \{1; 2\}$, ce qui donne avec (5.2.1), $\Delta f_j \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $j \in \{1; 2\}$. Donc pour tout $r \in [1, \infty)$, $f \in W_{\text{loc}}^{3,r}(\mathbb{R}^N)$. Ceci implique avec les injections de Sobolev que pour tout $\gamma \in (0, 1)$, $f \in C_{\text{loc}}^{2,\gamma}(\mathbb{R}^N)$.

Traitons le cas $\lambda = 0$. Par l'inégalité de Hölder, on peut supposer sans perte de généralité que $r_0 < \infty$. Par hypothèse et par (5.2.3), $\Delta g_j \in L_{\text{loc}}^{r_0}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $j \in \{1; 2\}$, et donc $g \in W_{\text{loc}}^{2,r_0}(\mathbb{R}^N)$. Puis par *bootstrap*, on montre que $g \in W_{\text{loc}}^{2m,r_0}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par les injections de Sobolev, cela implique que $g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et donc $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Ceci termine la démonstration de la proposition. \square

Remarque 5.2.2. Faisons quelques commentaires sur la Proposition 5.2.1.

1. Soient $(a, b, \lambda) \in \mathbb{C}^3$, $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$ si $N = 1$) et $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ une solution de

$$-\Delta f + af + bx \cdot \nabla f = \lambda |f|^\alpha f, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N). \quad (5.2.6)$$

Alors il est clair que les conclusions de la Proposition 5.2.1 sont encore valables pour f .

2. La démonstration de la Proposition 5.2.1 montre que si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $N \geq 3$, $\alpha = \frac{4}{N-2}$ et si $f \in L_{\text{loc}}^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ est solution de (5.1.20), (ou de (5.2.6)) alors $f \in W_{\text{loc}}^{2, \frac{\alpha+2}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N)$. Mais le gain de régularité est faible puisque les injections de Sobolev ne donnent que $W_{\text{loc}}^{2, \frac{\alpha+2}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N) \subset L_{\text{loc}}^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$.

On va maintenant étudier l'intégrabilité des solutions auto-similaires. Remarquons tout d'abord que d'après la formule (5.1.6), étudier l'intégrabilité (en x) d'une solution auto-similaire u ou celle de son profil f sont deux choses équivalentes. Comme on va le voir, on ne va pas utiliser des techniques de régularités elliptiques mais on va se servir directement de l'équation intégrale. En effet, les techniques de régularité ont bien fonctionné pour obtenir de la dérivabilité, comme on l'a vu dans la Proposition 5.2.1. Mais pour l'intégrabilité, cela ne fonctionne pas, et ce pour deux raisons. La première est que le profil f d'une solution auto-similaire est à valeurs complexes, et par conséquent on obtient un système de deux équations qu'on ne peut totalement dissocier. La seconde est que f est définie sur \mathbb{R}^N tout entier, et même si l'on appliquait les résultats d'estimations intérieures, on aurait des normes sur $x \cdot \nabla f$, dont on ne sait absolument rien au voisinage de l'infini. Le problème est le même si l'on considère l'équation (5.2.2) plutôt que (5.1.20). Notons aussi que, formellement, en multipliant (5.1.20) par \bar{f} et en intégrant par parties, il vient les quatre normes $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, $\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, $\|xf\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ et $\|f\|_{L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)}$, dont on sait que la première et, au moins dans certains cas, la seconde sont infinies. La situation est pire si l'on applique (toujours formellement) l'identité de Pohozaev (on multiplie (5.1.20) par $x \cdot \overline{\nabla f}$ et l'on intègre par parties). En effet, à cause du caractère complexe de l'équation, il apparaît des parties imaginaires d'intégrale sur \mathbb{R}^N dont on ne sait rien dire. Le seul moyen que l'on ait trouvé est de travailler directement sur l'équation intégrale vérifiée par la solution auto-similaire.

Le résultat suivant fait le lien entre l'équation linéaire (*i.e.* (5.1.1) avec $\lambda = 0$) et non-linéaire. Auparavant, définissons le réel suivant. Soit $\alpha > 0$. Soit alors $r \in [\alpha + 2, \infty)$. On pose,

$$\begin{cases} 2^* = \frac{2N}{N-2}, & \text{si } N \geq 3, \\ 2^* = r, & \text{si } N = 2, \\ 2^* = \infty, & \text{si } N = 1. \end{cases} \quad (5.2.7)$$

Théorème 5.2.3. Soient $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), 2^* défini par (5.2.7), $p \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$ et u est une solution auto-similaire positivement globale de (5.1.1) de donnée

initiale $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et de profil $f \in L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$. Si $T(1)\varphi \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ alors on a le résultat suivant.

1. $u \in C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$. En particulier, $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ et u est une solution classique de l'équation de Schrödinger (5.1.1).
2. Pour tout $r \in [\alpha + 2, 2^*]$ et pour tout $t > 0$, $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^N)$. En particulier, $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$. Si de plus $r < \infty$, alors $u \in C((0, \infty); L^r(\mathbb{R}^N))$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que φ est homogène de degré $-p$ et que, puisque l'on a $f \in L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$, alors $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ (Proposition 5.2.1). Ainsi, 1 est une conséquence de l'identité (5.1.6). Il reste donc à établir 2. On sait que u vérifie l'équation intégrale suivante (Lemme 5.1.8).

$$\forall t \geq 0, u(t) = T(t)\varphi + i\lambda \int_0^t T(t-s)\{|u(s)|^\alpha u(s)\} ds.$$

En lui appliquant les inégalités de Strichartz, on obtient

$$\|u\|_{L^{q^*}((0,t);L^{2^*})} \leq \|T(\cdot)\varphi\|_{L^{q^*}((0,t);L^{2^*})} + C\| |u|^\alpha u \|_{L^{q'}((0,t);L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}})},$$

pour tout $t > 0$, où q est tel que $(q, \alpha + 2)$ est une paire admissible et où

$$\begin{cases} q^* = 2, & \text{si } N \geq 3, \\ q^* = \frac{4r}{N(r-2)}, & \text{si } N = 2, \\ q^* = 4, & \text{si } N = 1. \end{cases}$$

Cela donne avec (5.1.7),

$$\|u\|_{L^{q^*}((0,t);L^{2^*})} \leq \|T(1)\varphi\|_{L^{2^*}} \left(\int_0^t s^{-q^*(\frac{1}{\alpha} - \frac{N}{2^*2})} ds \right)^{\frac{1}{q^*}} + C\|f\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+1} \left(\int_0^t s^{-q'\beta(\alpha+1)} ds \right)^{\frac{1}{q'}},$$

pour tout $t > 0$, où β est défini par (5.1.16). Or $q^*(\frac{1}{\alpha} - \frac{N}{2^*2}) < 1 \iff \alpha > \frac{4}{N}$ et de même, $q'\beta(\alpha+1) < 1 \iff \alpha > \frac{4}{N}$. Par conséquent, $u \in L_{\text{loc}}^{q^*}([0, \infty); L^{2^*}(\mathbb{R}^N))$ et donc pour tout $t > 0$, $u(t) \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ (on rappelle que $u \in C((0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$ par 1). Par l'inégalité de Hölder, $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$, pour tout $r \in [\alpha + 2, 2^*]$. La Proposition 5.1.3 permet de conclure. \square

Le résultat suivant montre que de telles situations existent.

Corollaire 5.2.4. Soient $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($4 < \alpha < \infty$ si $N = 1$), 2^* défini par (5.2.7), $p \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(p) = \frac{2}{\alpha}$ et $\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \mu_k P_k(x) |x|^{-(p+k)}$, avec $n \in \mathbb{N}$, où $\mu_k \in \mathbb{C}$ et où P_k est un polynôme harmonique homogène de degré k . On suppose que $\|T(1)\varphi\|_{L^{\alpha+2}} \leq \rho$, où ρ est donné par le Théorème 5.1.11, de sorte qu'il existe une unique solution auto-similaire $u \in C((0, \infty); L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$ de (5.1.1) de donnée initiale φ et de profil f . On a alors le résultat suivant.

1. $u \in C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$. En particulier, $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ et u est une solution classique de l'équation de Schrödinger (5.1.1).
2. Pour tout $r \in [\alpha + 2, 2^*]$ et pour tout $t > 0$, $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^N)$. En particulier, $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$. Si de plus $r < \infty$, alors $u \in C((0, \infty); L^r(\mathbb{R}^N))$.

Démonstration. Notons d'abord que d'après le Théorème 5.1.11 et la Proposition 4.3 de Cazenave et Weissler [26], on a $T(1)\varphi \in L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ et si $\|T(1)\varphi\|_{L^{\alpha+2}} \leq \rho$ alors il existe une unique solution auto-similaire $u \in C((0, \infty); L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$ de (5.1.1) de donnée initiale φ . Or, par la Proposition 3.9 de Cazenave et Weissler [26], $T(1)\varphi \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Le Théorème 5.2.3 permet de conclure. \square

On peut remarquer que le Théorème 5.2.3 signifie que toute information d'intégration sur l'équation de Schrödinger linéaire (respectivement, sur l'équation (5.1.20) avec $\lambda = 0$) se transmet, en partie, sur l'équation non-linéaire (5.1.1) (respectivement, sur l'équation (5.1.20) avec $\lambda \neq 0$). La démonstration de ce résultat est une conséquence directe des inégalités de Strichartz. Cependant, on ne sait pas ce qu'il se passe pour $0 < \alpha \leq \frac{4}{N}$. En revanche, l'hypothèse $\alpha > \frac{4}{N}$ ne provient pas du choix de la paire admissible (voir la démonstration du Théorème 5.2.3). En effet, comme le montre le calcul pour $N = 2$, le problème vient de l'intégrabilité en temps des termes linéaires et non-linéaires au voisinage de 0. Or

$$\int_0^1 t^{-q(\frac{1}{\alpha} - \frac{N}{2r})} dt < \infty \iff \alpha > \frac{4}{N},$$

pour toute admissible (q, r) avec $(q, r) \neq (\infty, 2)$, et ce indépendamment de la dimension d'espace N . Remarquons enfin que le cas $\alpha < \alpha_0$ n'est pas élucidé contrairement à ce qui est dit dans la Proposition 3.3 et la Remarque 3.5 de Cazenave et Weissler [28]. Il n'est pas évident que dans ce cas, toute solution auto-similaire de (5.1.1) à valeurs dans $L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ soit identiquement nulle. En effet, le fait que $\alpha < \alpha_0$ pose un réel problème pour établir la convergence du terme intégral.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [2] C. Bandle. *Isoperimetric inequalities and applications*. Pitman, London, 1980.
- [3] J. E. Barab. Nonexistence of asymptotically free solutions for a nonlinear Schrödinger equation. *J. Math. Phys.*, 25(11) :3270–3273, 1984.
- [4] P. Bégout. Maximum decay rate for the nonlinear Schrödinger equation. To appear in *Nonlinear Differential Equations and Applications*.
- [5] P. Bégout. Necessary conditions and sufficient conditions for global existence in the nonlinear Schrödinger equation. To appear in *Advances in Mathematical Sciences and Applications*.
- [6] P. Bégout. Convergence to scattering states in the nonlinear Schrödinger equation. *Commun. Contemp. Math.*, 3(3) :403–418, 2001.
- [7] H. Berestycki and T. Cazenave. Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 293(9) :489–492, 1981.
- [8] H. Berestycki, T. Gallouët, and O. Kavian. Équations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 297(5) :307–310, 1983.
- [9] H. Berestycki and P.-L. Lions. Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 82(4) :313–345, 1983.
- [10] H. Berestycki and P.-L. Lions. Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 82(4) :347–375, 1983.
- [11] H. Berestycki, P.-L. Lions, and L. A. Peletier. An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in \mathbb{R}^N . *Indiana Univ. Math. J.*, 30(1) :141–157, 1981.
- [12] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation spaces. An introduction*. Springer, New York, 1976.
- [13] J. Bourgain. Scattering in the energy space and below for 3D NLS. *J. Anal. Math.*, 75 :267–297, 1998.
- [14] J. Bourgain. Global wellposedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1) :145–171, 1999.
- [15] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [16] H. Brezis and T. Cazenave. Nonlinear evolution equations. In preparation.
- [17] T. Cazenave. Stability and instability of stationary states in nonlinear Schrödinger equations. In *Contributions to nonlinear partial differential equations I*, volume 89 of *Research Notes in Mathematics*, pages 123–129. Pitman, Boston, Mass., 1983.
- [18] T. Cazenave. *Blow-up and scattering in the nonlinear Schrödinger equation*, volume 30 of *Textos de Métodos Matemáticos*. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, second edition, 1996.
- [19] T. Cazenave. *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, volume 26 of *Textos de Métodos Matemáticos*. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, third edition, 1996.

- [20] T. Cazenave and A. Haraux. *An introduction to semilinear evolution equations*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Translated from the 1990 French original by Yvan Martel and revised by the authors.
- [21] T. Cazenave and F. B. Weissler. The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation in H^1 . *Manuscripta Math.*, 61(4) :477–494, 1988.
- [22] T. Cazenave and F. B. Weissler. Some remarks on the nonlinear Schrödinger equation in the critical case. In T. Gill and W. Zachary, editors, *Nonlinear semigroups, Partial Differential Equations and Attractors*, volume 1394 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 18–29. Springer, Berlin, 1989.
- [23] T. Cazenave and F. B. Weissler. Some remarks on the nonlinear Schrödinger equation in the subcritical case. In J.-P. D. Ph. Blanchard and J. Stubbe, editors, *New Methods and Results in Nonlinear Field Equations*, volume 347 of *Lect. Notes in Phys.*, pages 59–69. Springer, Berlin, 1989.
- [24] T. Cazenave and F. B. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s . *Nonlinear Anal.*, 14(10) :807–836, 1990.
- [25] T. Cazenave and F. B. Weissler. Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 147(1) :75–100, 1992.
- [26] T. Cazenave and F. B. Weissler. Asymptotically self-similar global solutions of the nonlinear Schrödinger and heat equations. *Math. Z.*, 228(1) :83–120, 1998.
- [27] T. Cazenave and F. B. Weissler. More self-similar solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 5(3) :355–365, 1998.
- [28] T. Cazenave and F. B. Weissler. Scattering theory and self-similar solutions for the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 31(3) :625–650 (electronic), 2000.
- [29] Y.-Z. Chen and L.-C. Wu. *Second order elliptic equations and elliptic systems*, volume 174 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [30] M. Escobedo and O. Kavian. Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation. *Nonlinear Anal.*, 11(10) :1103–1133, 1987.
- [31] B. Gidas, W. M. Ni, and L. Nirenberg. Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in \mathbb{R}^N . In *Mathematical analysis and applications, Part A*, pages 369–402. Academic Press, New York, 1981.
- [32] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.
- [33] J. Ginibre and G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. III. Special theories in dimensions 1, 2 and 3. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, 28(3) :287–316, 1978.
- [34] J. Ginibre and G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case. *J. Funct. Anal.*, 32(1) :1–32, 1979.
- [35] J. Ginibre and G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. II. Scattering theory, general case. *J. Funct. Anal.*, 32(1) :33–71, 1979.
- [36] J. Ginibre and G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interaction. *Math. Z.*, 170(2) :109–136, 1980.
- [37] J. Ginibre and G. Velo. On the global Cauchy problem for some nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(4) :309–323, 1984.
- [38] J. Ginibre and G. Velo. The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2(4) :309–327, 1985.
- [39] J. Ginibre and G. Velo. Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 64(4) :363–401, 1985.

- [40] J. Ginibre and G. Velo. Time decay of finite energy solutions of the nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 43(4) :399–442, 1985.
- [41] R. T. Glassey. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, 18(9) :1794–1797, 1977.
- [42] N. Hayashi, E. I. Kaikina, and P. I. Naumkin. Large time behavior of solutions to the Landau-Ginzburg type equations. In *Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostela, 2000)*, pages 315–319. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [43] N. Hayashi, E. I. Kaikina, and P. I. Naumkin. Large time behaviour of solutions to the dissipative nonlinear Schrödinger equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 130(5) :1029–1043, 2000.
- [44] N. Hayashi, K. Nakamitsu, and M. Tsutsumi. On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension. *Math. Z.*, 192 :637–650, 1986.
- [45] N. Hayashi, K. Nakamitsu, and M. Tsutsumi. On solutions on the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations. *J. Funct. Anal.*, 71 :218–245, 1987.
- [46] N. Hayashi, K. Nakamitsu, and M. Tsutsumi. Nonlinear Schrödinger equations in weighted Sobolev spaces. *Funkc. Ekvacioj, Ser. Int.*, 31(3) :363–381, 1988.
- [47] N. Hayashi and P. I. Naumkin. Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations. *Amer. J. Math.*, 120(2) :369–389, 1998.
- [48] R. Johnson and X. B. Pan. On an elliptic equation related to the blow-up phenomenon in the nonlinear Schrödinger equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 123(4) :763–782, 1993.
- [49] C. Jones and T. Küpper. On the infinitely many solutions of a semilinear elliptic equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 17(4) :803–835, 1986.
- [50] T. Kato. On nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 46(1) :113–129, 1987.
- [51] T. Kato. Nonlinear Schrödinger equations. In *Schrödinger operators*, volume 345 of *Lect. Notes Phys.*, pages 218–263. Springer, Berlin, 1989.
- [52] T. Kato. An $L^{q,r}$ -theory for nonlinear Schrödinger equations. In *Spectral and scattering theory and applications*, pages 223–238. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1994.
- [53] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [54] O. Kavian and F. B. Weissler. Self-similar solutions of the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation. *Michigan Math. J.*, 41(1) :151–173, 1994.
- [55] M. Keel and T. Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5) :955–980, 1998.
- [56] N. Kopell and M. Landman. Spatial structure of the focusing singularity of the nonlinear Schrödinger equation : a geometrical analysis. *SIAM J. Appl. Math.*, 55(5) :1297–1323, 1995.
- [57] M. K. Kwong. Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in \mathbb{R}^N . *Arch. Rational Mech. Anal.*, 105(3) :243–266, 1989.
- [58] J. E. Lin and W. A. Strauss. Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equation. *J. Funct. Anal.*, 30(2) :245–263, 1978.
- [59] Y. Martel. Blow-up for the nonlinear Schrödinger equation in nonisotropic spaces. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 28(12) :1903–1908, 1997.
- [60] V. G. Maz'ja. *Sobolev spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [61] C. S. Morawetz and W. A. Strauss. Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 25 :1–31, 1972.
- [62] K. Nakanishi. Energy scattering for nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations in spatial dimensions 1 and 2. *J. Funct. Anal.*, 169(1) :201–225, 1999.
- [63] K. Nakanishi. Remarks on the energy scattering for nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations. *Tohoku Math. J. (2)*, 53(2) :285–303, 2001.

- [64] H. Nawa. Asymptotic profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger. In R. Caflisch and G. Papanicolaou, editors, *Singularities in Fluids, Plasmas and Optics*, NATO ASI series Kluwer, pages 221–253. Dordrecht, 1993.
- [65] H. Nawa. Asymptotic profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity. *J. Math. Soc. Japan*, 46(4) :557–586, 1994.
- [66] H. Nawa. Limiting profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 73(10) :171–175, 1997.
- [67] H. Nawa. Asymptotic and limiting profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52(2) :193–270, 1999.
- [68] T. Ogawa and Y. Tsutsumi. Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation. *J. Differential Equations*, 92(2) :317–330, 1991.
- [69] T. Ogawa and Y. Tsutsumi. Blow-up of H^1 solutions for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 111(2) :487–496, 1991.
- [70] W. A. Strauss. Nonlinear scattering theory. In J. Lavita and J.-P. Planchard, editors, *Scattering Theory in Mathematical Physics*, pages 53–78, Reidel, 1974.
- [71] W. A. Strauss. Existence of solitary waves in higher dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 55(2) :149–162, 1977.
- [72] W. A. Strauss. Nonlinear scattering theory at low energy. *J. Funct. Anal.*, 41(1) :110–133, 1981.
- [73] H. Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.
- [74] Y. Tsutsumi. Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 43(3) :321–347, 1985.
- [75] Y. Tsutsumi. L^2 -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups. *Funkcial. Ekvac.*, 30(1) :115–125, 1987.
- [76] Y. Tsutsumi and K. Yajima. The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 11(1) :186–188, 1984.
- [77] M. I. Weinstein. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates. *Comm. Math. Phys.*, 87(4) :567–576, 1983.
- [78] M. I. Weinstein. On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive evolution equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 11(5) :545–565, 1986.