HAL
open science

Transport et bruit quantique dans les fils mésoscopiques

Julien Torrès

To cite this version:

Julien Torrès. Transport et bruit quantique dans les fils mésoscopiques. Matière Condensée [cond-mat]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2001. Français. NNT : . tel-00007395

HAL Id: tel-00007395

https://theses.hal.science/tel-00007395v1

Submitted on 14 Nov 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II
Centre de Physique Théorique

Thèse

présentée par

Julien Torrès

en vue d'obtenir le grade de

Docteur de l'Université de la Méditerranée

Spécialité : Physique Théorique

Transport et bruit quantique dans les fils mésoscopiques

Soutenue le 13 septembre 2001 devant le jury composé de :

Gilbert Albinet	*Président*
Christoph Bruder	
Philippe Dumas	
Thierry Martin	*Directeur de thèse*
Gilles Montambaux	*Rapporteur*
Jean-Louis Richard	
Marc Sanquer	*Rapporteur*

HORTZ FUR DËHN STËHKEN WEST
HORTZ ZÏ WËHR DÜNT DA HERTZ
HORTZ DA FELT DÖS FÜNKER
HORTZ ZEBËHN DE GEUSTAAH
HORTZ WÏRT TLAÏT ÜTS MÏTLAÏT
HORTZ WÏRT TLAÏT ÜTS MÏTLAÏT
HORTZ WÏRT TLAÏT ÜTS MÏTLAÏT
HORTZ WÏRT TLAÏT ÜTS MÏTLAÏT
HORTZ FUR DËHN STËHKEN WEST
HORTZ DA FELT DÖS FÜNKER
HORTZ ZEBËHN DE GEUSTAAH
HORTZ WLASÏK KOBAÏA

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à mon directeur de thèse Thierry Martin pour avoir réussi à me supporter pendant plus de trois ans sans perdre son enthousiasme, malgré mes nombreuses tentatives pour le décourager et le démoraliser.

Les remarques des rapporteurs et du jury m'ont été bien utiles pour améliorer et clarifier cette thèse. Je les en remercie grandement.

Je remercie le directeur du laboratoire Pierre Chiappetta de m'avoir accueilli au sein du Centre de Physique Théorique pendant les quatre années du DEA et de la thèse.

J'ai également beaucoup apprécié le dévouement des charmantes secrétaires du CPT. Sans leur aide, il aurait été bien difficile pour moi de démêler les mystères des procédures administratives. Je leur adresse donc un grand merci, et je fais des gros bisous à Sylvie.

Merci également à Rodolphe Guyon pour sa relecture attentive de la thèse et pour les corrections des innombrables fautes d'orthographe.

Je remercie enfin les thésards du CPT pour toutes les discussions oiseuses durant les pauses café réglementaires de 10 heures 30 et de 16 heures.

Table des matières

Introduction **11**

1 Courant et bruit **15**
1.1 Approche de Landauer 15
1.2 Courant et conductance 16
1.2.1 Calcul du courant moyen 16
1.2.2 Cas des électrons : formule de Landauer 19
1.3 Bruit et corrélations de bruit 21
1.3.1 Origine et définition 21
1.3.2 Cas classique : bruit poissonien 22
1.3.3 Calcul général du bruit dans un conducteur quantique 23
1.3.4 Bruit à fréquence nulle dans un conducteur à deux terminaux 25
1.3.5 Bruit à fréquence finie 27
1.3.6 Bruit dans un conducteur diffusif 28

2 Bruit dans une jonction N-S **31**
2.1 Introduction 31
2.2 Réflexion d'Andreev 31
2.3 Fonctions d'onde et calcul du courant 32
2.3.1 Hypothèses 32
2.3.2 Equations de Bogolubov-de Gennes 32
2.3.3 Etats dans un terminal normal 33
2.3.4 Courant moyen et conductance 34
2.4 Bruit et corrélations de bruit 35
2.5 Bruit dans une jonction N-S simple 37
2.5.1 Expression générale 37
2.5.2 Faibles tensions appliquées 37
2.5.3 Tensions plus élevées 38
2.6 Effet Aharonov-Bohm non-stationnaire 44

3 Analogue fermionique de l'expérience d'HBT **49**
3.1 L'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss 49
3.2 Analogue fermionique de l'expérience d'HBT 49
3.2.1 Introduction 49
3.2.2 Calcul des corrélations de bruit dans une jonction en forme de « Y » . 51
3.2.3 Résultats expérimentaux 52
3.3 Hanbury-Brown et Twiss avec un supraconducteur 52

3.3.1 Introduction . . . 52
3.3.2 Modèle . . . 53
3.3.3 Matrice S du miroir semi-transparent . . . 54
3.3.4 Faibles tensions appliquées . . . 55
3.3.5 Tensions plus élevées . . . 56
3.3.6 Système à deux canaux . . . 57

4 Courant et bruit hors de l'équilibre 63
4.1 Introduction . . . 63
4.2 Fonctions de Green hors de l'équilibre . . . 63
4.2.1 Définitions, contour de Keldysh . . . 63
4.2.2 Expression des fonctions de Green en représentation d'interaction . . . 65
4.2.3 Equation de Dyson . . . 65
4.3 Fil contenant une barrière . . . 69
4.3.1 Modèle . . . 69
4.3.2 Fonctions de Green à l'équilibre . . . 70
4.3.3 Relation entre les fonctions de Green à l'équilibre et la densité d'états 71
4.3.4 Courant moyen . . . 72
4.3.5 Bruit . . . 73

5 Transport dans les liquides de Luttinger 77
5.1 Introduction . . . 77
5.2 La théorie des liquides de Luttinger . . . 78
5.2.1 Hamiltonien sans interaction : linéarisation du spectre . . . 78
5.2.2 Bosonisation . . . 79
5.2.3 Hamiltonien cinétique en termes de champs bosoniques . . . 83
5.2.4 Hamiltonien avec interactions . . . 83
5.3 Conductance d'un liquide de Luttinger . . . 85
5.3.1 Fonction de partition . . . 85
5.3.2 Conductance . . . 85
5.4 Liquide de Luttinger chiral . . . 89
5.4.1 Introduction . . . 89
5.4.2 Modèle hydrodynamique . . . 90
5.4.3 Quantification . . . 91
5.5 Impureté dans deux liquides de Luttinger chiraux couplés . . . 93
5.5.1 Introduction . . . 93
5.5.2 Courant de rétrodiffusion d'une impureté étendue . . . 93
5.5.3 Courant de rétrodiffusion d'une impureté localisée . . . 96
5.5.4 Bruit . . . 97

Conclusion 99

A Etats dans le supraconducteur 103

B Le modèle BTK de la jonction N-S 107

C Matrice S d'une jonction N-S à trois terminaux 111

D Fonctions de Green de Keldysh d'un fil avec barrière **113**

Bibliographie **117**

Introduction

La physique de la matière condensée est une discipline très large. Elle prétend décrire les propriétés et les phénomènes physiques des solides. Mais la nature même du solide rend sa description difficile. En effet, un solide est en général un corps macroscopique suggérant une approche classique. Par ailleurs ses propriétés sont souvent liées à celles des atomes qui le composent et à leur arrangement dans le réseau cristallin. On se situe cette fois à une échelle microscopique pour laquelle le formalisme le mieux adapté est la mécanique quantique et même au-delà avec la théorie des champs. Enfin, le nombre considérable de particules constituant le solide permet d'appliquer les méthodes de la mécanique statistique. Bien évidemment, selon les systèmes ou les propriétés que l'on veut étudier, on peut utiliser une ou plusieurs de ces démarches. On parle ainsi d'approche semi-classique quand on introduit une part de mécanique quantique dans la théorie classique ou encore de mécanique statistique quantique lorsque l'on prend en compte la nature fermionique ou bosonique des particules qui composent le solide.

C'est dans ce cadre très large que s'inscrit la physique mésoscopique. Par « physique mésoscopique » on entend généralement la branche de la physique de la matière condensée qui décrit des systèmes dont la taille est intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Le système doit avoir des dimensions suffisamment petites pour être considéré comme microscopique et donc pour que la mécanique quantique s'applique, mais aussi suffisamment grandes avec un très grand nombre de particules pour pouvoir utiliser la mécanique statistique. Plus précisément, on peut généralement supposer qu'un système est mésoscopique lorsque ses dimensions sont inférieures à la longueur de cohérence de phase L_ϕ des électrons, c'est-à-dire la longueur moyenne sur laquelle la fonction d'onde d'un électron garde une phase bien définie. La mécanique quantique s'applique alors pleinement. Cette référence aux électrons n'est pas totalement innocente. En effet, nombre de phénomènes étudiés en physique mésoscopique sont directement liés aux propriétés électroniques du système considéré. L'exemple le plus naturel est le transport du courant électrique dans un conducteur quantique.

On situe généralement le point de départ de la physique mésoscopique en 1957 lorsque Rolf Landauer a suggéré une approche de diffusion très simple pour calculer le courant et la conductance dans un fil connecté à deux réservoirs thermalisés [1]. Plus précisément, la conductance G du fil est directement reliée à la probabilité de transmission T d'un électron d'un réservoir à l'autre à travers le conducteur :

$$G = \frac{2e^2}{h} T \ ,$$

où e est la charge de l'électron et h la constante de Planck. Cette formule est bien connue sous le nom de formule de Landauer. A l'époque, l'article de Landauer est passé quelque peu inaperçu. De fait, il faudra attendre les années quatre-vingts pour que ces travaux soient

enfin considérés avec intérêt et pour que la formule de Landauer prenne sa forme actuelle [2]. Cette longue période de relative indifférence à l'égard de ces travaux s'explique surtout par la très grande difficulté d'obtenir des résultats expérimentaux. En effet, au cours des années cinquante, les techniques ne permettaient pas de fabriquer des échantillons assez petits pour pouvoir espérer mettre en évidence des phénomènes quantiques. Il a donc fallu attendre les progrès des processus de fabrication, avec par exemple la lithographie électronique. Mais il ne suffit pas de fabriquer de bons échantillons, il faut pouvoir effectuer des mesures dans de bonnes conditions (de température ou d'isolation électromagnétique par exemple). Les techniques et les appareils de mesures ont également beaucoup progressé au cours des dernières décennies. Citons par exemple l'utilisation des réfrigérateurs à dilution qui permettent de descendre à des températures bien inférieures à celle de l'hélium liquide. Grâce aux progrès expérimentaux, la physique mésoscopique est devenue aujourd'hui une discipline très active.

Parallèlement à tous ces développements fondamentaux, il ne faut pas oublier l'essor considérable de la micro-électronique. La miniaturisation des composants est devenue un enjeu industriel et économique majeur. Actuellement, la taille des transistors des microprocesseurs est de l'ordre de $0.13\,\mu m$. Même si ces dimensions sont très petites, le fonctionnement des circuits intégrés repose avant tout sur une approche semi-classique du transport : les électrons sont vus comme des particules classiques subissant éventuellement des collisions pendant leur mouvement dans le conducteur. Cette démarche reste tout à fait correcte tant que les dimensions des circuits demeurent beaucoup plus grandes que la longueur de cohérence de phase des électrons. Dans le cas contraire, la nature ondulatoire des électrons ne peut plus être négligée. Par exemple, des interférences entre les fonctions d'onde électroniques peuvent apparaître. Il devient alors nécessaire d'utiliser une approche purement quantique pour décrire correctement le transport. Au rythme actuel de la miniaturisation des circuits, les limites quantiques seront atteintes d'ici quelques années, ce qui pourrait à nouveau renforcer l'intérêt pour la physique mésoscopique.

Même si les progrès industriels sont très importants, cette thèse aborde avant tout des sujets fondamentaux. On s'est tout particulièrement intéressé au transport électronique dans les systèmes unidimensionnels. Un système peut être considéré comme unidimensionnel quand le mouvement des particules mises en jeu dans le transport (électrons, phonons, photons) est limité à une seule direction. En pratique, il faut que l'étendue spatiale de la fonction d'onde transverse soit réduite à seulement un petit nombre de fois la longueur d'onde de Fermi. Cette limitation peut venir directement de la géométrie des échantillons. Par exemple, la longueur d'un nanotube (mono-paroi) de carbone est beaucoup plus grande que sa section, et il peut sans problème être assimilé à un système unidimensionnel. Mais on peut également confiner les particules grâce à un potentiel extérieur ou à un champ magnétique de façon à leur imposer un mouvement dans une seule direction. Les états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire en sont un bon exemple.

La quantité physique la plus naturelle pour caractériser le transport dans un échantillon mésoscopique est la conductance. Comme on l'a vu, elle a été calculée pour la première fois dans un fil quantique au cours des années cinquante par Landauer, mais c'est seulement en 1988 que des expériences sont venues confirmer ces prédictions [3, 4]. Depuis, la conductance a été calculée et mesurée dans des systèmes très variés. Cependant, la conductance est associée au caractère moyen du transport : elle ne contient aucune information temporelle. C'est pourquoi on s'intéresse à une autre quantité qu'on appelle le bruit, et qui mesure les fluctuations temporelles du courant autour de sa valeur moyenne. Si le bruit est maintenant largement étudié, les premiers travaux sur le sujet sont bien antérieurs à la physique

mésoscopique et même à la mécanique quantique. En effet, le premier résultat a été établi en 1918 par Walter Schottky [5] qui a calculé le bruit généré par une source de particules classiques. Il a ainsi montré que le bruit S était proportionnel au courant I et à la charge e des particules :

$$S = 2eI \ .$$

Les recherches sur le bruit ont longtemps accompagné le développement des télécommunications où le bruit est considéré comme un phénomène parasite. Son étude dans le cadre de la physique mésoscopique n'est venue qu'à la fin des années quatre-vingts dans la continuité des travaux sur la conductance. Ainsi, il est possible d'obtenir une formule analogue à celle de Schottky, où le bruit est toujours proportionnel au courant et à la charge des particules, avec cependant un facteur de réduction que dépend de la probabilité de transmission des électrons au travers de l'échantillon. La mesure du courant et du bruit permet donc de trouver la charge des porteurs. Par ailleurs, en allant au-delà de la formule de Schottky, on verra que le bruit contient aussi des informations sur la statistique des particules.

Les premières expériences de mesure de conductance étaient effectuées dans des échantillons semi-conducteurs ou métalliques. D'autres expériences ont étudié le transport dans un supraconducteur. Mais ce sont les systèmes hybrides, c'est-à-dire avec une partie normale et une partie supraconductrice qui ont suscité le plus d'intérêt ces dernières années. Si la supraconductivité (conventionnelle) est bien comprise, l'influence d'un supraconducteur sur le reste du système l'est beaucoup moins. En particulier, lorsqu'on a une jonction entre un métal normal et un supraconducteur, l'effet de proximité permet aux paires de Cooper de pénétrer du côté normal. D'autre part, un doublement de la conductance et du bruit a été observé dans ces jonctions, signature de la charge $2e$ des paires de Cooper.

Dans le passé, la plupart des résultats de la physique mésoscopique négligeaient les interactions électron-électron dans l'échantillon. En effet, inclure les interactions dans le calcul complique considérablement le problème, puisque des développements perturbatifs très lourds sont généralement nécessaires. C'est le cas par exemple dans la théorie des liquides de Fermi qui constitue pourtant une bonne approximation. En deux et trois dimensions, celle-ci permet de ramener le problème à un ensemble de quasi-particules sans interactions. Mais en une dimension, la théorie des liquides de Fermi n'est plus valable en raison des divergences de la série de perturbations. Heureusement, il existe d'autres modèles qui ont en plus le mérite d'être exactement solubles. Ainsi, la théorie des liquides de Luttinger permet de décrire un système unidimensionnel d'électrons en interaction. L'idée est d'introduire des champs bosoniques afin de mettre le Hamiltonien sous forme quadratique en terme de ces champs, tout en incluant les interactions.

Le premier chapitre de cette thèse introduit les principes de base de l'étude du transport en physique mésoscopique. Le calcul du courant, de la conductance et du bruit y sont détaillés et les résultats sont comparés avec l'expérience.

Dans le deuxième chapitre, on s'est intéressé au transport dans les jonctions entre un métal normal et un supraconducteur. Le calcul du courant et du bruit permet de mettre en évidence l'influence des paires de Cooper du supraconducteur sur le transport. On retrouve notamment le doublement du bruit à fréquence nulle. A fréquence finie, on peut également observer la signature de tous les processus de réflexion et de transmission au niveau de la jonction.

Le chapitre 3 traite des expériences du type Hanbury-Brown et Twiss. Il s'agit de mesurer les corrélations de bruit entre les deux branches d'un système en forme de « Y ». Le signe

des corrélations est directement relié à la statistique des particules : positif pour les bosons, négatif pour les fermions. Or, le simple fait d'introduire un supraconducteur permet d'obtenir des corrélations positives dans un système pourtant fermionique.

Pour qu'un courant circule dans un fil, il est nécessaire de maintenir une différence de potentiel entre ses extrémités. On crée donc ainsi une situation de déséquilibre. Pourtant, dans les premiers chapitres, toutes les valeurs moyennes (courant, bruit) ont été calculées dans un formalisme d'équilibre. Cela demeure une approximation valable tant que la différence de potentiel reste suffisamment faible. Mais si l'on recherche une approche plus systématique ou si l'on veut par exemple inclure des interactions inélastiques, il faut utiliser un formalisme de thermodynamique hors de l'équilibre. Le chapitre 4 présente le formalisme de Keldysh qui permet de réécrire la théorie des perturbations dans des systèmes hors de l'équilibre. On donnera un exemple de l'utilisation de ce formalisme avec le calcul du courant et du bruit dans un fil comportant une barrière.

Enfin, dans le chapitre 5, on s'est intéressé à l'influence des interactions sur le transport. Comme on l'a vu, en une dimension, la théorie des liquides de Luttinger est bien adaptée. On en donnera donc une présentation, puis on en verra une illustration avec le calcul de la conductance d'un fil. La dernière partie de ce chapitre s'inscrit dans la continuité du précédent, puisqu'on utilisera le formalisme de Keldysh pour calculer le courant et le bruit dans deux liquides de Luttinger chiraux couplés par une impureté.

Chapitre 1

Courant et bruit

1.1 Approche de Landauer

En 1957, Rolf Landauer a développé une théorie du transport du courant électrique dans les conducteurs quantiques [1]. Contrairement aux modèles semi-classiques qui décrivent les conducteurs macroscopiques comme le modèle de Drude ou de Sommerfeld, l'approche de Landauer est directement liée à la nature ondulatoire des électrons. L'échantillon se comporte comme un guide d'onde, comportant éventuellement plusieurs modes que l'on appelle des *canaux*. La conductance G de l'échantillon est alors proportionnelle à la probabilité de transmission d'un électron à travers le conducteur.

L'approche de Landauer s'applique directement si le conducteur est balistique. Pour que cette condition soit vérifiée, les dimensions de l'échantillon doivent rester inférieures au libre parcours moyen, c'est-à-dire plus petites que la distance moyenne parcourue par les électrons entre deux collisions avec une impureté ou un défaut du réseau cristallin. En pratique, le libre parcours moyen varie beaucoup selon les matériaux et la température. Il peut aller de quelques nanomètres dans les métaux à plusieurs dizaines de micromètres dans les semiconducteurs à haute mobilité à basse température. Toutefois, il est généralement difficile de fabriquer des échantillons balistiques permettant d'effectuer des mesures de transport. Cependant, l'approche de Landauer peut être généralisée à un échantillon diffusif. Il faut néanmoins que ses dimensions soient inférieures à la longueur de cohérence de phase des électrons. Pour cela, il est nécessaire que les collisions des électrons avec les impuretés restent élastiques. Dans ces conditions, la phase de la fonction d'onde est préservée et la mécanique quantique s'applique toujours. Par contre, si la taille de l'échantillon dépasse ces longueurs caractéristiques, il convient de revenir à des approches semi-classiques du type Boltzmann-Langevin par exemple.

Comme les échantillons que l'on considère sont des fils, leur longueur est en général beaucoup plus grande que les deux autres dimensions. Par conséquent, la fonction d'onde électronique peut en principe être décomposée en un produit de la fonction longitudinale par la fonction d'onde transverse. En général, on peut négliger cette dernière ou bien l'éliminer en intégrant sur les dimensions transverses et se ramener ainsi à un formalisme à une dimension. La section du fil W détermine alors le nombre de modes transverses (canaux) qui est de l'ordre de $2W/\lambda_F^2$ dans un fil de section rectangulaire.

Le fil est connecté de part et d'autre à deux réservoirs maintenus chacun à un potentiel chimique, par exemple μ_L et μ_R. Si l'on veut qu'un courant circule dans le conducteur, il faut appliquer une différence de potentiel entre les réservoirs $\mu_L - \mu_R = eV$. Si un courant

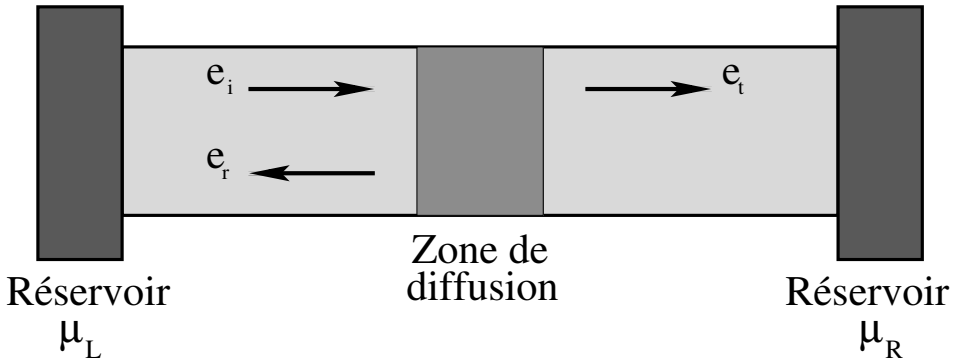

FIG. 1.1: *Fil quantique relié à deux réservoirs comportant une zone de diffusion. Un électron incident (e_i) a une probabilité R d'être réfléchi (e_r) et une probabilité T d'être transmis (e_t).*

circule, le fil se retrouve dans une situation hors de l'équilibre. En toute rigueur, il serait nécessaire d'appliquer la thermodynamique des systèmes hors-équilibre (comme on le fera dans les chapitres 4 et 5), mais si la tension n'est pas trop élevée, on peut quand même utiliser un formalisme d'équilibre, beaucoup plus simple.

Au milieu du fil peut se trouver une zone de diffusion (potentiel, constriction, jonction entre deux métaux, etc.). Une onde incidente est alors en partie réfléchie et en partie transmise (voir figure 1.1). Chaque conducteur de part et d'autre de la zone de diffusion s'appelle un terminal. Ce qui fait la force de l'approche de Landauer, c'est qu'il n'est pas réellement nécessaire de connaître ce qui se passe dans la zone de diffusion. Celle-ci se comporte comme une boîte noire, simplement décrite par une matrice S de diffusion, qui relie les états incidents aux états réfléchis et transmis. Dans le cas d'un simple fil (donc deux terminaux) à un seul canal, on recense deux états incidents et deux états réfléchis, donc la matrice S est une matrice 2×2. Mais on peut également imaginer un ensemble de N conducteurs reliés chacun à réservoir et connectés entre eux au niveau de la zone de diffusion. Le système pourra toujours être décrit grâce à une matrice S dont les dimensions seront cette fois de $N \times N$. Avec ce formalisme, on peut calculer toutes les quantités caractéristiques du fil, comme le courant, la conductance, ou encore le bruit.

1.2 Courant et conductance

1.2.1 Calcul du courant moyen

On cherche à calculer le courant et le courant moyen dans un conducteur mésoscopique. On va utiliser une méthode de type seconde quantification proposée il y a une dizaine d'années [6, 7]. D'autre méthodes sont bien sûr applicables, notamment l'approche du paquet d'onde [8] qui est peut-être plus « physique » car elle invoque des arguments de comptage des particules. Cependant, la seconde quantification a l'avantage d'être plus systématique et plus facilement généralisable.

On considère le cas *a priori* le plus général, celui de particules avec spin 1/2 se propageant dans un conducteur tridimensionnel comportant plusieurs canaux. L'opérateur de courant

dans le terminal m et dans le canal α est défini de façon habituelle :

$$\begin{aligned} I_{m,\alpha}(x_m,t) &= e\frac{\hbar}{2m_e i}\sum_\sigma \int dy_m\, dz_m \Bigg(\psi^+_{m,\alpha,\sigma}(\mathbf{r}_m,t)\frac{\partial \psi_{m,\alpha,\sigma}(\mathbf{r}_m,t)}{\partial x_m} \\ &\qquad - \frac{\partial \psi^+_{m,\alpha,\sigma}(\mathbf{r}_m,t)}{\partial x_m}\psi_{m,\alpha,\sigma}(\mathbf{r}_m,t)\Bigg) . \end{aligned} \tag{1.1}$$

x_m, y_m et z_m sont les coordonnées spatiales dans le terminal m. $\psi^+_{m,\alpha,\sigma}$ est l'opérateur de création d'une particule de spin σ dans le terminal m et dans le canal α. La fonction d'onde correspondante est la somme de l'état incident et de tous les états diffusés provenant des autres terminaux :

$$\begin{aligned} \psi_{m,\alpha,\sigma}(\mathbf{r}_m,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk_{m,\alpha}\,\chi_{m,\alpha}(y_m,z_m)\Bigg(e^{ik_{m,\alpha}x_m}c_{m,\alpha,\sigma}(k_{m,\alpha},t) \\ &\qquad + \sum_n \sum_{\beta=1}^{N_c(n)} \sqrt{\frac{k_{m,\alpha}}{k_{n,\beta}}}\, s_{m\alpha n\beta} e^{-ik_{m,\alpha}x_m} c_{n,\beta,\sigma}(k_{n,\beta},t)\Bigg) \\ &= \frac{m_e}{\hbar^2\sqrt{2\pi}}\int \frac{dE}{k_{m,\alpha}(E)}\,\chi_{m,\alpha}(y_m,z_m)\Bigg(e^{ik_{m,\alpha}(E)x_m}c_{m,\alpha,\sigma}(k_{m,\alpha}(E),t) \\ &\qquad + \sum_n \sum_{\beta=1}^{N_c(n)} \sqrt{\frac{k_{m,\alpha}(E)}{k_{n,\beta}(E)}}\, s_{m\alpha n\beta} e^{-ik_{m,\alpha}(E)x_m} c_{n,\beta,\sigma}(k_{n,\beta}(E),t)\Bigg) . \end{aligned}$$

$N_c(n)$ est le nombre de canaux dans le terminal n. $\chi_{m,\alpha}(y_m,z_m)$ est la fonction d'onde transverse dans le terminal m et le canal α, normalisée : $\int dy_m\, dz_m\, \chi_{m,\alpha}(y_m,z_m)\chi^*_{m,\beta}(y_m,z_m) = \delta_{\alpha,\beta}$. Enfin, $s_{m\alpha n\beta}$ est l'élément de la matrice de diffusion correspondant au coefficient de transmission d'un état incident dans le terminal n et le canal β et diffusé vers le terminal m et le canal α. L'échantillon est un fil conducteur, donc de forme allongée : sa dimension longitudinale est beaucoup plus grande que les deux autres. Cette géométrie (et la position des réservoirs) impose la direction de circulation du courant, c'est pourquoi on a intégré sur les dimensions transverses y_m et z_m dans la formule (1.1). Avec ces définitions, on peut calculer le courant :

$$\begin{aligned} I_{m,\alpha}(x_m,t) = e\frac{m_e}{\hbar^3 4\pi}\sum_\sigma \int dE\, dE' \left(\frac{1}{k_{m,\alpha}(E)} + \frac{1}{k_{m,\alpha}(E')}\right) \\ \times \Bigg[e^{-i(k_{m,\alpha}(E)-k_{m,\alpha}(E'))x_m}\, c^+_{m,\alpha,\sigma}(k_{m,\alpha}(E),t)c_{n,\alpha,\sigma}(k_{m,\alpha}(E'),t) \\ - \sum_{n,n'}\sum_{\beta,\beta'} \sqrt{\frac{k_{m,\alpha}(E)k_{m,\alpha}(E')}{k_{n,\beta}(E)k_{m,\beta'}(E')}}\, s^*_{m\alpha n\beta}(E)s_{m\alpha n'\beta'}(E') \\ e^{i(k_{m,\alpha}(E)-k_{m,\alpha}(E'))x_m}\, c^+_{n,\beta,\sigma}(k_{n,\beta}(E),t)c_{n',\beta',\sigma}(k_{n',\beta'}(E'),t)\Bigg] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(\frac{1}{k_{m,\alpha}(E)} - \frac{1}{k_{m,\alpha}(E')} \right) \\
&\times \Bigg[\sum_{n'} \sum_{\beta'} \sqrt{\frac{k_{m,\alpha}(E')}{k_{n',\beta'}(E')}} s_{m\alpha n'\beta'}(E') \\
&\qquad e^{-i(k_{m,\alpha}(E)+k_{m,\alpha}(E'))x_m}\, c^{+}_{m,\alpha,\sigma}(k_{m,\alpha}(E),t) c_{n',\beta',\sigma}(k_{n',\beta'}(E'),t) \\
&\quad - \sum_{n} \sum_{\beta} \sqrt{\frac{k_{m,\alpha}(E)}{k_{n,\beta}(E)}} s^{*}_{m\alpha n\beta}(E) \\
&\qquad e^{i(k_{m,\alpha}(E)+k_{m,\alpha}(E'))x_m}\, c^{+}_{n,\beta,\sigma}(k_{n,\beta}(E),t) c_{m,\alpha,\sigma}(k_{m,\alpha}(E'),t) \Bigg] \, .
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Les fonctions d'onde transverses ont disparu grâce à l'intégration sur y_m et z_m et à la normalisation. Telle quelle, cette formule est plutôt compliquée, mais elle peut être considérablement simplifiée. En effet, on s'intéresse généralement au courant moyen. Dans ce cas, les intégrales sur l'énergie ne contribuent de façon significative que sur un intervalle assez restreint au voisinage de l'énergie de Fermi. Sur ce domaine, les k ont une dépendance en énergie qui varie très lentement et que l'on pourra donc négliger. Tous les k de l'intégrale précédente sont donc les mêmes, ce qui permet de réécrire simplement :

$$
\begin{aligned}
I_{m,\alpha}(t) &= e \frac{m_e}{\hbar^3 2\pi} \sum_{\sigma} \int dE\, dE' \frac{1}{k(E)} \Bigg(c^{+}_{m,\alpha,\sigma}(k(E),t) c_{m,\alpha,\sigma}(k(E'),t) \\
&\qquad - \sum_{n,n'} \sum_{\beta,\beta'} s^{*}_{m\alpha n\beta}(E) s_{m\alpha n'\beta'}(E') c^{+}_{n,\beta,\sigma}(k(E),t) c_{n',\beta',\sigma}(k(E'),t) \Bigg) \, .
\end{aligned}
$$

Cette approximation est très pratique car elle permet de simplifier efficacement l'expression (1.2). Cependant, elle est à manier avec précautions. En effet, dans certains cas, il est nécessaire de conserver la dépendance en k du courant, par exemple quand on veut calculer sa divergence pour utiliser l'équation de continuité.

On veut maintenant calculer le courant moyen. On utilise la relation :

$$
\begin{aligned}
\langle c^{+}_{n,\beta,\sigma}(k(E),t) c_{n',\beta',\sigma}(k(E'),t) \rangle &= f_n(k(E))\, \delta(k(E)-k(E')) \delta_{nn'} \delta_{\beta\beta'} \\
&= \frac{\hbar^2 k(E)}{m_e} f_n(E)\, \delta(E-E') \delta_{nn'} \delta_{\beta\beta'} \, .
\end{aligned}
$$

$f_n(E)$ est la distribution de Fermi-Dirac ou de Bose-Einstein du terminal n avec le potentiel chimique μ_n : $f_n(E) = 1/[\exp(\beta(E-\mu_n)) \pm 1]$. Pour avoir le courant moyen total dans le terminal m, il faut sommer les courants de tous les canaux. On a par conséquent :

$$
\begin{aligned}
\langle I_m \rangle &= \sum_{\alpha} \langle I_{m,\alpha} \rangle \\
&= \frac{2e}{h} \int dE \sum_{\alpha} \left(f_m(E) - \sum_{n} \sum_{\beta} s^{*}_{m\alpha n\beta}(E) s_{m\alpha n\beta}(E) f_n(E) \right) \, .
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Or, la somme sur les canaux du produit des éléments de la matrice de diffusion peut s'écrire en termes de trace :

$$\sum_{\alpha,\beta} s^+_{m\alpha n\beta}(E) s_{m\alpha n\beta}(E) = \mathrm{tr}\left[s^+_{mn}(E) s_{mn}(E)\right] \ . \tag{1.4}$$

D'autre part, on a la propriété suivante :

$$\sum_{\alpha=1}^{N_c(m)} 1 = N_c(m) = \sum_n \mathrm{tr}\left[s^+_{mn}(E) s_{mn}(E)\right] \ .$$

Le courant moyen devient alors :

$$\begin{aligned} \langle I_m \rangle &= \frac{2e}{h} \sum_n \sum_{\alpha,\beta} \int dE \, |s_{m\alpha n\beta}(E)|^2 \left(f_m(E) - f_n(E)\right) \\ &= \frac{2e}{h} \sum_n \int dE \ T_{mn}(E) \left[f_m(E) - f_n(E)\right] \ . \end{aligned} \tag{1.5}$$

T_{mn} est la probabilité de transmission d'une particule du terminal n vers le terminal m.

1.2.2 Cas des électrons : formule de Landauer

On considère maintenant le cas des électrons. Si la tension n'est pas trop élevée, les échelles d'énergie mises en jeu sont relativement faibles. On peut alors faire l'hypothèse que la probabilité de transmission est indépendante de l'énergie : on choisit par exemple sa valeur à l'énergie de Fermi. Dans la limite de la température nulle, les fonctions de Fermi-Dirac deviennent des fonctions échelon de Heaviside et les intégrales sur l'énergie deviennent faciles à calculer. Dans le cas d'un conducteur à seulement deux terminaux et un seul canal avec une probabilité de transmission T, on obtient :

$$\langle I \rangle = \frac{2e}{h} T e V \ . \tag{1.6}$$

La conductance G s'obtient simplement en divisant par la tension :

$$G = \frac{2e^2}{h} T \ . \tag{1.7}$$

Cette formule est bien connue sous le nom de formule de Landauer [1, 2].

Si maintenant on suppose que l'échantillon comporte N_c canaux, avec T_α la probabilité de transmission du canal α, la formule devient :

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{\alpha=1}^{N_c} T_\alpha \ . \tag{1.8}$$

L'expérience a été réalisée [3, 4] sur un échantillon dont le nombre de canaux est contrôlé par l'application d'une tension de grille. Chaque canal possède une probabilité de transmission voisine de 1. La conductance présente alors des plateaux aux multiples de $2e^2/h$ qui correspondent à l'ouverture de canaux supplémentaires quand la tension de grille varie (voir figure 1.2).

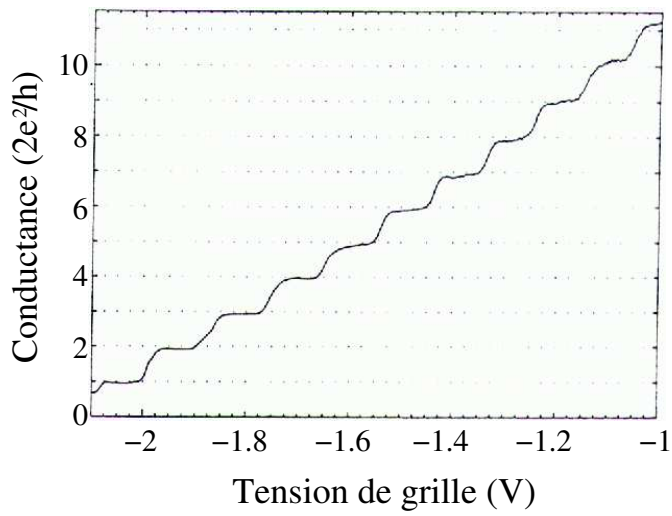

FIG. 1.2: *Conductance en fonction de la tension de grille. On voit clairement l'apparition de plateaux de conductance aux multiples de* $2e^2/h$ *correspondant à l'ouverture de canaux supplémentaires lorsque la tension de grille augmente. D'après Van Wees et al. [3].*

Dans un échantillon macroscopique, la conductance est donnée par la formule $G = \sigma W/L$, où σ est la conductivité, W la section et L la longueur. Plus un fil est long et fin, plus il est résistif. Si on essaie d'appliquer cette formule à un échantillon microscopique, la longueur devenant très petite, la résistance devrait être proche de zéro. Et intuitivement, on aurait tendance à penser qu'un conducteur ayant une probabilité de transmission 1 aurait une résistance nulle. Or, comme on l'a vu, ce n'est pas le cas, puisque la formule de Landauer (1.7) donne une résistance égale à $h/2e^2$ soit environ 12.9 $k\Omega$ pour un conducteur à un seul canal. Cette résistance est évidemment loin d'être négligeable. On peut donc légitimement se demander d'où provient cette résistance. Il faut se rappeler que l'échantillon est connecté à des réservoirs via des contacts. Ceux-ci ne doivent pas influer sur le transport, c'est-à-dire qu'un électron arrivant au niveau d'un contact est absorbé de façon certaine dans le réservoir : il ne peut pas être réfléchi dans l'échantillon. Par ailleurs, on peut décomposer la résistance de la façon suivante :

$$G^{-1} = \frac{h}{2e^2}\frac{1}{T} = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2}\frac{1-T}{T} = G_C^{-1} + G_S^{-1} \ . \tag{1.9}$$

La résistance totale est donc la somme de la résistance des contacts (G_C^{-1}) et de la résistance intrinsèque de l'échantillon (G_S^{-1}). La résistance des contacts a une valeur de 12.9 $k\Omega$ alors que la résistance de l'échantillon s'annule effectivement si la probabilité de transmission T tend vers 1. Très récemment, une expérience a permis de mesurer en même temps (sur le même échantillon) les deux types de résistance dans un conducteur balistique unidimensionnel de transmission presque parfaite [9], et a confirmé les valeurs théoriques prévues. Si on raisonne de nouveau en terme de conductance, la formule (1.9) donne $G_S = \frac{2e^2}{h}\frac{T}{R}$. Longtemps on s'est demandé quelle était la « bonne » formule de Landauer. En fait, cela dépend de la façon dont on effectue la mesure de conductance, suivant que l'on inclut les réservoirs ou pas. Soit on mesure le courant traversant la totalité de l'échantillon et on divise par la différence de potentiel, soit on place des sondes sur l'échantillon de part et d'autre de la zone de diffusion

et on mesure le courant. Ce point est particulièrement délicat et on pourra se reporter aux références [10, 11, 12] pour une discussion plus détaillée.

1.3 Bruit et corrélations de bruit

1.3.1 Origine et définition

La conductance G permet de bien caractériser un échantillon conducteur. Cependant, elle est liée à l'aspect *moyen* du transport : comme on l'a vu, la formule de Landauer (1.7) s'établit en calculant le courant moyen. De fait, on a complètement ignoré les fluctuations temporelles du courant par rapport à sa valeur moyenne. Le *bruit* mesure justement ces fluctuations autour de la valeur moyenne. De plus, il apporte des informations supplémentaires par rapport à la conductance, notamment sur les corrélations entre les particules, ainsi que sur leur statistique. On verra également que le bruit est proportionnel au courant moyen et à la charge effective des porteurs.

Le bruit a été particulièrement étudié du fait des enjeux technologiques liés à l'essor des télécommunications. En effet, il est généralement considéré comme un élément parasite, de telle sorte qu'on essaie de le réduire grâce à des dispositifs de filtrage. On recense généralement trois sources de bruit : le bruit en $1/f$, le bruit thermique (bruit Johnson-Nyquist) et le bruit de grenaille. Le bruit en $1/f$ a des origines variées, comme le désordre ou les défauts du réseau cristallin (notamment les défauts mobiles). Il est proportionnel à l'inverse de la fréquence et au carré de la tension appliquée [13, 14]. Ce bruit était observé à basse fréquence dans les premières expériences de physique mésoscopique et entraînait des limitations dans la qualité des mesures. D'autre part, l'agitation thermique provoque des fluctuations dans le nombre d'occupation d'un niveau énergétique d'un système, d'où l'apparition de bruit thermique. Enfin, le bruit de grenaille (shot noise) est une conséquence de la quantification de la charge électrique. Contrairement au bruit thermique, il faut une situation de déséquilibre dans le système, c'est-à-dire qu'une différence de potentiel doit être appliquée pour observer ce type de bruit. Le bruit de grenaille est donc directement lié au transport.

Dans un échantillon comportant une zone de diffusion, le faisceau de particules incidentes est transmis avec une probabilité T et réfléchi avec une probabilité R. Si le faisceau incident n'est pas bruyant, les faisceaux réfléchi et transmis le sont. C'est ce mécanisme de diffusion probabiliste qui est à l'origine du bruit. Si on appelle n_I le nombre d'occupation du faisceau incident, et que l'on suppose qu'il est occupé avec une probabilité 1, alors la valeur moyenne $\langle n_I \rangle$ vaut 1 et les fluctuations $\Delta n_I = n_I - \langle n_I \rangle$ sont nulles. Une particule est transmise ou bien réfléchie, donc soit $n_T = 1$ et $n_R = 0$ avec une probabilité T, soit $n_T = 0$ et $n_R = 1$ avec une probabilité $R = 1 - T$. Dans les deux cas, le produit $n_T n_R$ est nul. La valeur moyenne du nombre d'occupation du faisceau transmis est donc égale à T. De la même façon, $\langle n_R \rangle = R$ pour le faisceau réfléchi. D'autre part, puisque $n_T = 0$ ou $n_T = 1$, on a toujours $\langle n_T^2 \rangle = T$ et $\langle n_R^2 \rangle = R$. On obtient alors le résultat pour les fluctuations :

$$\begin{aligned} \langle (\Delta n_T)^2 \rangle &= \langle (\Delta n_R)^2 \rangle = T(1-T) \\ \langle \Delta n_T \Delta n_R \rangle &= -T(1-T) \ . \end{aligned}$$

Si cette discussion heuristique convient bien au cas de particules classiques, il est nécessaire de bien définir le bruit dès lors que l'on veut étudier des conducteurs quantiques. De

manière générale, le bruit et les corrélations de bruit sont définis comme :

$$\begin{aligned} S_{mn}(\omega) &= \lim_{T\to+\infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega t'} \langle \Delta I_m(t) \Delta I_n(t+t') \rangle \\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega t'} \Big[\langle I_m(t) I_n(t+t') \rangle - \langle I_m \rangle \langle I_n \rangle \Big] \ . \end{aligned} \tag{1.10}$$

$\Delta I_m(t)$ correspond aux fluctuations du courant par rapport à sa valeur moyenne :

$$\Delta I_m(t) = I_m(t) - \langle I_m \rangle \ .$$

Quand $m = n$, S_{mm} est le bruit dans le terminal m, et quand m et n sont différents, S_{mn} correspond aux fluctuations de bruit entre les terminaux m et n. Le bruit est donc la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation des fluctuations du courant autour de sa valeur moyenne.

1.3.2 Cas classique : bruit poissonien

En 1918, Walter Schottky a calculé le bruit produit par une source de particules classiques [5]. Dans ce cas, la probabilité pour que l'intervalle de temps entre l'émission de deux particules soit égal à t est donnée par :

$$p(t) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \ .$$

τ est l'intervalle de temps moyen entre deux particules. La probabilité $P(N, \tau_N)$ pour comptabiliser N particules pendant le temps τ_N sur le détecteur suit une loi de Poisson :

$$P(N, \tau_N) = \frac{\tau_N^N}{\tau^N \, N!} e^{-\tau_N/\tau} \ . \tag{1.11}$$

La démonstration s'effectue (par exemple) par récurrence. On commence par écrire la probabilité $P(N)$ de détecter N particules pendant τ_N en fonction de la probabilité de détecter $N-1$ particules pendant $\tau_N - t_1$:

$$P(N, \tau_N) = \int_0^{\tau_N} dt_1 \, p(t_1) \, P(N-1, \tau_N - t_1) \ . \tag{1.12}$$

Si on suppose que la probabilité de détecter $N-1$ particules pendant $\tau_N - t_1$ est donnée par :

$$P(N-1, \tau_N - t_1) = \frac{(\tau_N - t_1)^{N-1}}{\tau^{N-1} \, (N-1)!} e^{-(\tau_N - t_1)/\tau} \ ,$$

on peut calculer l'intégrale (1.12), et on obtient effectivement la loi de Poisson (1.11). Par ailleurs, le nombre moyen de particules comptabilisées pendant le temps τ_N est : $\langle N \rangle = \tau_N/\tau$. La loi (1.11) devient alors :

$$P(N, \tau_N) = \frac{\langle N \rangle^N}{N!} e^{-\langle N \rangle} \ . \tag{1.13}$$

Si les particules ont une charge électrique e, le courant moyen est proportionnel à cette charge et au nombre moyen de particules comptabilisées pendant τ_N :

$$\langle I \rangle = e \, \frac{\langle N \rangle}{\tau_N} = \frac{e}{\tau} \ .$$

Quand une variable aléatoire suit une loi de Poisson, sa variance est égale à sa valeur moyenne : $\langle(\Delta N)^2\rangle = \langle(N - \langle N\rangle)^2\rangle = \langle N\rangle$. En termes de courant, on obtient :

$$\langle \Delta I^2\rangle = e\langle I\rangle \frac{1}{\tau_N} \ .$$

On pose $1/\tau_N = 2\Delta f_N$. Le bruit est alors :

$$S_P(N) = \frac{\langle \Delta I^2\rangle}{\Delta f_N} = 2e\langle I\rangle \ . \tag{1.14}$$

Ce résultat bien connu s'appelle tout simplement la formule de Schottky. Le bruit est donc proportionnel à la charge électrique e et au courant moyen $\langle I\rangle$. Cette relation de proportionnalité est importante car elle va servir de référence et de point de comparaison pour tous les résultats sur le bruit à fréquence nulle dans les conducteurs quantiques.

1.3.3 Calcul général du bruit dans un conducteur quantique

On considère d'abord le produit des opérateurs de courant à deux temps différents $I_m(t)I_n(t+t')$. Ce terme fait intervenir des produits de quatre opérateurs de création et d'annihilation dont il va falloir prendre la valeur moyenne. Pour cela, on apparie les opérateurs en utilisant le théorème de Wick. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
&\langle c^+_{p_1,\beta_1,\sigma}(k(E_1),t)c_{p_2,\beta_2,\sigma}(k(E_2),t)c^+_{p_3,\beta_3,\sigma'}(k(E_3),t+t')c_{p_4,\beta_4,\sigma'}(k(E_4),t+t')\rangle = \\
&\quad \frac{\hbar^4 k(E_1)k(E_3)}{m_e^2} f_{p_1}(E_1)f_{p_3}(E_3)\delta_{p_1,p_2}\delta_{p_3,p_4}\delta_{\beta_1,\beta_2}\delta_{\beta_3,\beta_4}\delta(E_1-E_2)\delta(E_3-E_4) \\
&\quad + \frac{\hbar^4 k(E_1)k(E_2)}{m_e^2} f_{p_1}(E_1)(1\mp f_{p_2}(E_3)) \\
&\qquad \times \delta_{p_1,p_4}\delta_{p_2,p_3}\delta_{\beta_1,\beta_4}\delta_{\beta_2,\beta_3}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta(E_1-E_4)\delta(E_3-E_2)e^{-i(E_1-E_2)t'/\hbar} \ .
\end{aligned}$$

Dans le produit $f(1\mp f)$ le « $-$ » correspond aux fermions et le « $+$ » aux bosons. En utilisant l'expression ci-dessus, on obtient la valeur moyenne du produit des courants :

$$\begin{aligned}
\langle I_m(t)I_n(t+t')\rangle = \frac{e^2}{h^2}\int dE\, dE' \Bigg[& \\
& 4\sum_{\alpha,\alpha'} f_m(E)f_n(E') + 2\sum_{\alpha} f_m(E)(1\mp f_m(E'))e^{-i(E-E')t'/\hbar}\delta_{mn} \\
& - 4\sum_{p}\sum_{\alpha,\beta} s^*_{m\alpha p\beta}(E)s_{m\alpha p\beta}(E)f_p(E)f_m(E') \\
& - 2\sum_{\alpha,\alpha'} s^*_{m\alpha n\alpha'}(E)s_{m\alpha n\alpha'}(E')f_n(E)(1\mp f_n(E'))e^{-i(E-E')t'/\hbar} \\
& - 4\sum_{\alpha'}\sum_{p}\sum_{\beta} s^*_{n\alpha' p\beta}(E')s_{n\alpha' p\beta}(E')f_m(E)f_p(E') \\
& - 2\sum_{\alpha,\alpha'} s^*_{n\alpha' m\alpha}(E')s_{n\alpha' m\alpha}(E)f_m(E)(1\mp f_m(E'))e^{-i(E-E')t'/\hbar}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+4\sum_{\alpha,\alpha'}\sum_{p_1,p_3}\sum_{\beta_1,\beta_3} s^*_{m\alpha p_1\beta_1}(E)s_{m\alpha p_1\beta_1}(E)s^*_{n\alpha' p_3\beta_3}(E')s_{n\alpha' p_3\beta_3}(E') \\
&\qquad\qquad \times f_{p_1}(E)f_{p_3}(E') \\
&+2\sum_{\alpha,\alpha'}\sum_{p_1,p_2}\sum_{\beta_1,\beta_2} s^*_{m\alpha p_1\beta_1}(E)s_{m\alpha p_2\beta_2}(E')s^*_{n\alpha' p_2\beta_2}(E')s_{n\alpha' p_1\beta_1}(E) \\
&\qquad\qquad \times f_{p_1}(E)(1\mp f_{p_2}(E'))e^{-i(E-E')t'/\hbar}\Bigg] . \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

Les termes indépendants du temps dans l'équation (1.15) correspondent exactement au produit des courants moyens (1.3). Or, dans l'expression des corrélations de bruit (1.10), le produit des courants moyens est justement retranché. Par conséquent, ces termes indépendants du temps disparaissent, et les corrélations de bruit s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
S_{mn}(\omega) \;=\; & \frac{4e^2}{h^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega t'}\int dE\, dE' e^{-i(E-E')t'/\hbar}\Bigg[\sum_{\alpha} f_m(E)(1\mp f_m(E'))\delta_{mn} \\
& -\sum_{\alpha,\alpha'} s^*_{m\alpha n\alpha'}(E)s_{m\alpha n\alpha'}(E')f_n(E)(1\mp f_n(E')) \\
& -\sum_{\alpha,\alpha'} s^*_{n\alpha' m\alpha}(E')s_{n\alpha' m\alpha}(E)f_m(E)(1\mp f_m(E')) \\
& +\sum_{\alpha,\alpha'}\sum_{p_1,p_2}\sum_{\beta_1,\beta_2} s^*_{m\alpha p_1\beta_1}(E)s_{m\alpha p_2\beta_2}(E')s^*_{n\alpha' p_2\beta_2}(E')s_{n\alpha' p_1\beta_1}(E) \\
& \qquad\qquad \times f_{p_1}(E)(1\mp f_{p_2}(E'))\Bigg] .
\end{aligned}
$$

Or, l'intégrale sur t' donne une fonction δ de l'énergie qui permet d'effectuer l'intégrale sur E'. On utilise ensuite la propriété (1.4) sur les traces et on obtient l'expression générale du bruit et des corrélations de bruit à fréquence finie [7] :

$$
\begin{aligned}
S_{mn}(\omega) \;=\; & \frac{4e^2}{h}\int dE\Bigg[\sum_{\alpha} f_m(E)(1\mp f_m(E-\hbar\omega))\delta_{mn} \\
& -\mathrm{tr}\Big[s^+_{mn}(E)s_{mn}(E-\hbar\omega)\Big]f_n(E)(1\mp f_n(E-\hbar\omega)) \\
& -\mathrm{tr}\Big[s^+_{nm}(E-\hbar\omega)s_{nm}(E)\Big]f_m(E)(1\mp f_m(E-\hbar\omega)) \\
& +\sum_{p_1,p_2}\mathrm{tr}\Big[s^+_{mp_1}(E)s_{m\alpha p_2}(E-\hbar\omega)s^+_{np_2}(E-\hbar\omega)s_{np_1}(E)\Big] \\
& \qquad\qquad \times f_{p_1}(E)(1\mp f_{p_2}(E-\hbar\omega))\Bigg] . \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

Telle quelle, cette formule n'est pas directement exploitable. Il faut maintenant étudier quelques cas spécifiques pour lesquels le bruit ou les corrélations de bruit s'expriment plus simplement.

1.3.4 Bruit à fréquence nulle dans un conducteur à deux terminaux

Formule générale

On considère le bruit à fréquence nulle dans un conducteur à deux terminaux (L et R). D'après l'expression (1.16), le bruit dans l'un ou l'autre des deux terminaux est [15] :

$$\begin{aligned} S_{LL}(0) = S_{RR}(0) &= \frac{4e^2}{h}\sum_{\alpha=1}^{N_c}\int dE\Big[T_\alpha(E)^2\left[f_L(1\mp f_L)+f_R(1\mp f_R)\right] \\ &\qquad +T_\alpha(E)(1-T_\alpha(E))\left[f_L(1\mp f_R)+f_R(1\mp f_L)\right]\Big] \\ &= \frac{4e^2}{h}\sum_{\alpha=1}^{N_c}\int dE\Big[T_\alpha(E)\left[f_L(1\mp f_L)+f_R(1\mp f_R)\right] \\ &\qquad \pm T_\alpha(E)(1-T_\alpha(E))(f_L-f_R)^2\Big] \ . \end{aligned} \tag{1.17}$$

Le premier terme correspond à la partie thermique du bruit. En effet, dans le cas des fermions, ce terme s'annule quand la température tend vers 0. Le second terme correspond à la partie hors-équilibre du bruit, car il est nul si la tension appliquée est nulle.

Bruit thermique ou bruit Johnson-Nyquist

A partir de maintenant, on ne considère plus que le cas des électrons. Le bruit Johnson-Nyquist est une conséquence des fluctuations thermiques des nombres d'occupation dans les réservoirs. Cependant, il s'agit d'un bruit d'équilibre. En effet, on suppose que la tension est nulle ($\mu_L = \mu_R$), mais que la température est non-nulle. Cette hypothèse demeure valable tant que la tension reste très faible devant la température : $eV \ll k_B\Theta$. D'autre part, on suppose que les probabilités de transmission sont indépendantes de l'énergie. En utilisant l'identité $f(1-f) = -k_B\Theta\,\partial f/\partial E$, on intègre l'équation (1.17) et on obtient :

$$\begin{aligned} S_{LL}(0) = S_{RR}(0) &= 4k_B\Theta\,\frac{2e^2}{h}\sum_{\alpha=1}^{N_c}T_\alpha \\ &= 4k_B\Theta\,G \ . \end{aligned}$$

On peut relier ce résultat au théorème de fluctuation-dissipation. En effet, les fluctuations à l'équilibre sont proportionnelles à la susceptibilité généralisée correspondante, ici la conductance.

Bruit de grenaille

Contrairement au bruit Johnson-Nyquist, le bruit de grenaille est un bruit qui a pour origine une situation de déséquilibre. Il est donc nécessaire d'appliquer une différence de potentiel $eV = \mu_L - \mu_R$ entre les deux réservoirs. A température nulle, le bruit est donc [6, 8, 7] :

$$S_{LL}(0) = \frac{4e^2}{h}eV\sum_{\alpha=1}^{N_c}T_\alpha(1-T_\alpha) \ . \tag{1.18}$$

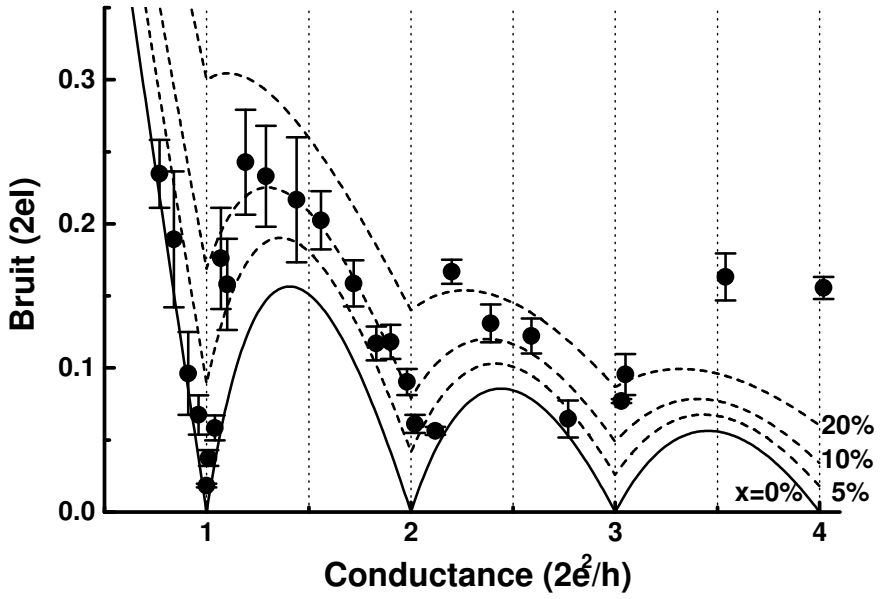

FIG. 1.3: *Bruit en fonction de la conductance. On voit nettement l'annulation du bruit quand la conductance est un multiple de* $2e^2/h$*. En pointillés, la courbe théorique incluant les effets de bruit thermique. D'après van den Brom et van Ruitenbeek [19].*

On a vu au paragraphe 1.2.2 que la conductance est quantifiée : elle présente des plateaux quand tous les canaux ont une probabilité de transmission voisine de 1 (figure 1.2). Dans ce cas, le terme $\sum_{\alpha=1}^{N_c} T_\alpha(1-T_\alpha)$ dans l'expression du bruit (1.18) s'annule. Des mesures sont venues confirmer cette annulation du bruit [16, 17, 18, 19] quand la conductance est un multiple de $2e^2/h$ (voir figure 1.3).

Dans le cas d'un seul canal, en utilisant l'expression du courant (1.6), l'équation (1.18) devient :

$$S_{LL}(0) = 2e\langle I\rangle(1-T) \ . \tag{1.19}$$

Par rapport au résultat poissonien (1.14) vu au paragraphe 1.3.2, l'expression du bruit présente un facteur de réduction $1-T$. Le bruit est dit alors *sous-poissonien*. Dans la mesure où la probabilité de transmission est très petite ($T \ll 1$), on peut négliger T et on retrouve bien le bruit poissonien.

Cependant, même avec le facteur de réduction $1-T$, le bruit reste proportionnel au courant moyen et à la charge des porteurs. Ce point est particulièrement intéressant, car mesurer le courant et le bruit permet de remonter à la charge effective des particules dans un système donné. Ainsi, la charge effective des quasi-particules des états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire a été mesurée de cette façon [20, 21] (voir le chapitre 5, paragraphe 5.5).

Transition entre les deux régimes de bruit

Dans la mesure où l'on continue de supposer que les probabilités de transmission sont indépendantes de l'énergie, on peut effectuer l'intégrale (1.17) à température et à tension

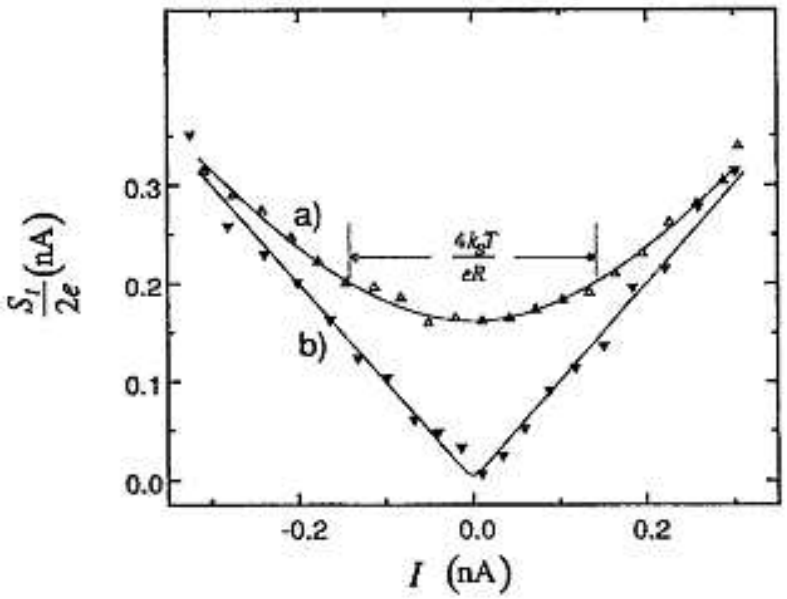

FIG. 1.4: *Bruit en fonction du courant : en haut* $\Theta = 300\ K$ *et* $R \simeq 0.32\ G\Omega$ *; en bas* $\Theta = 77\ K$ *et* $R \simeq 2.7\ G\Omega$. *Les traits pleins correspondent aux valeurs théoriques données par l'équation (1.21). D'après Birk et al. [22].*

quelconques. On obtient [8] :

$$S_{LL}(0) = \frac{4e^2}{h}\left[2k_B\Theta \sum_{\alpha=1}^{N_c} T_\alpha^2 + eV \coth\left(\frac{eV}{2k_B\Theta}\right)\sum_{\alpha=1}^{N_c} T_\alpha(1-T_\alpha)\right] . \tag{1.20}$$

Dans le cas des faibles probabilités de transmission ($T_\alpha \ll 1$), on peut négliger les termes proportionnels à T_α^2. La formule (1.20) devient alors :

$$\begin{aligned} S_{LL}(0) &= \frac{4e^2}{h} eV \coth\left(\frac{eV}{2k_B\Theta}\right)\sum_{\alpha=1}^{N_c} T_\alpha \\ &= 2e\langle I\rangle \coth\left(\frac{eR\langle I\rangle}{2k_B\Theta}\right) , \end{aligned} \tag{1.21}$$

où l'on a utilisé l'équation (1.6) et où l'on a introduit la résistance $R = 1/G$.

Des mesures ont été effectuées pour vérifier l'équation (1.21) [18, 19, 22]. Dans la référence [22], le système considéré était une barrière tunnel constituée d'une pointe de microscope à effet tunnel à proximité d'une surface métallique. Les deux séries de mesures représentées sur la figure 1.4 montrent la transition entre le bruit thermique (a) et le bruit de grenaille (b). Dans le premier cas ($eV \ll k_B\Theta$), le bruit n'est proportionnel au courant que si ce dernier est suffisamment grand. Dans le second cas ($eV \gg k_B\Theta$), le bruit est toujours proportionnel au courant.

1.3.5 Bruit à fréquence finie

Si on se place à température nulle, mais à fréquence finie, et qu'on suppose que la probabilité de transmission est indépendante de l'énergie, on peut effectuer l'intégrale de la

formule (1.16) et on obtient [23, 24] :

$$\begin{aligned} S_{LL}(\omega) &= \frac{4e^2}{h} T(1-T)\,(eV - \hbar\omega) \quad \text{si } 0 \leq \omega \leq eV/\hbar \\ S_{LL}(\omega) &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si } \omega > eV/\hbar \ . \end{aligned} \tag{1.22}$$

Le bruit décroît linéairement avec la fréquence jusqu'à $eV/\hbar$. Au delà, il est nul. Il présente donc une singularité à la fréquence $eV/\hbar$. On notera que le résultat de la référence [23] est différent de l'équation (1.22). En effet la définition du bruit est choisie symétrisée, contrairement à la formule (1.10). Cependant, la singularité à la fréquence $eV/\hbar$ est bien présente dans le résultat de la référence [23]. Expérimentalement, il est plus facile de mesurer le bruit en fonction de la tension pour plusieurs fréquences bien précises plutôt que de mesurer le bruit en fonction de la fréquence pour une tension déterminée. De la même façon, l'équation (1.22) prédit une singularité quand la tension est égale à la fréquence de mesure du bruit : $eV = \hbar\omega$. Cette singularité a bien été observée expérimentalement [25] dans un échantillon diffusif.

1.3.6 Bruit dans un conducteur diffusif

On considère maintenant le cas d'un conducteur dont les dimensions transverses sont grandes devant la longueur d'onde de Fermi : $W \gg \lambda_F^2$. Le nombre de canaux N_c est donc très grand. D'autre part on suppose que ce conducteur contient du désordre et qu'il est donc diffusif mais que les collisions restent élastiques. Pour être dans ce régime, la longueur du fil L doit être beaucoup plus grande que le libre parcours moyen l des électrons. A cause du désordre, les états électroniques sont localisés. On définit alors la longueur de localisation $L_\xi = N_c l$. Pour que l'approche de Landauer soit encore valide, il faut que la longueur du fil soit beaucoup plus petite que la longueur de localisation : $L \ll L_\xi$.

La conductance de Drude est donnée par :

$$\langle G \rangle = \frac{n\, e^2 \tau}{m} \frac{W}{L} \ , \tag{1.23}$$

où n est la densité d'électrons et τ le temps moyen entre deux collisions : $\tau = l/v_F$. En fait, il s'agit d'une conductance moyennée par rapport au désordre. Si on la compare avec la formule de Landauer (1.8), on trouve une valeur moyenne (par rapport au désordre) de la probabilité de transmission d'un canal : $\langle T \rangle = l/L$. On pourrait croire que la plupart des probabilités de transmission T_n sont de l'ordre de cette valeur moyenne, donc très petites. En conséquence de quoi le bruit serait poissonien. En fait, ce n'est pas le cas. La théorie des matrices aléatoires [26] permet de montrer que la distribution de probabilité des coefficients de transmission est donnée par :

$$P(T) = \frac{l}{2L} \frac{1}{T\sqrt{1-T}} \ . \tag{1.24}$$

Cette distribution est bimodale. On trouve de nombreux canaux très ouverts ($T \simeq 1$) ou très fermés ($T \simeq 0$), mais très peu de canaux à ouverture intermédiaire (voir figure 1.5). Avec cette distribution (1.24), on peut effectivement calculer la valeur moyenne de la probabilité de transmission :

$$\langle T \rangle = \frac{l}{L} \ ,$$

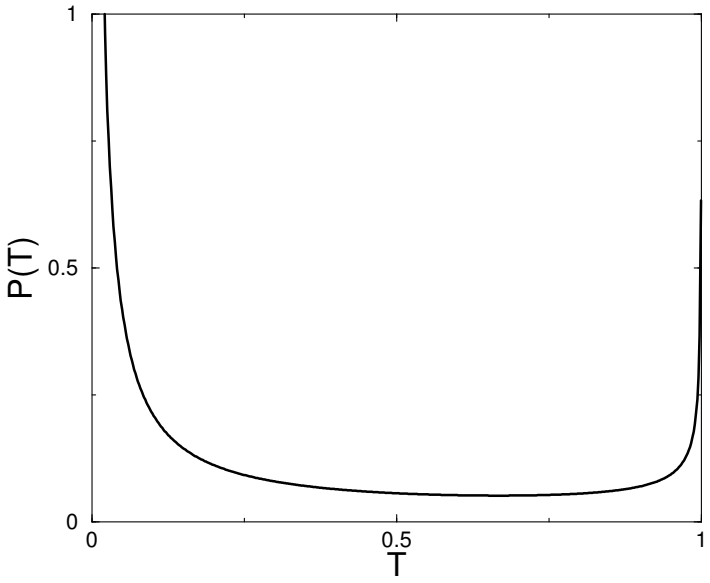

FIG. 1.5: *Fonction de distribution des probabilités de transmission (1.24), avec* $l/L = 1/25$.

ce qui confirme la valeur trouvée en comparant la conductance de Drude (1.23) et de Landauer (1.8). De la même façon, on trouve [27] :

$$\langle T(1-T)\rangle = \frac{l}{3L} \ .$$

Donc d'après l'équation (1.18), on obtient :

$$S = \frac{4e^2}{h} eV \frac{l}{3L} \ .$$

Or, le bruit poissonien (donc sans le facteur $1-T$) est :

$$S_P = \frac{4e^2}{h} eV \frac{l}{L} \ .$$

On a donc une réduction du bruit d'un facteur 1/3. Ce facteur de réduction 1/3 est très général. Tant que la géométrie de l'échantillon est pratiquement unidimensionnelle, ce facteur ne dépend ni du matériau, ni du degré de désordre, ni du nombre de canaux. On notera enfin que l'on peut obtenir des résultats similaires avec une approche semi-classique du type Boltzmann-Langevin [28, 29].

Chapitre 2

Bruit dans une jonction entre un métal normal et un supraconducteur

2.1 Introduction

Dans un supraconducteur, le courant circule sans dissipation (super-courant). Ce processus est une propriété de l'état fondamental. Ainsi, ce courant ne fluctue pas et il n'est donc pas bruyant. En revanche, si l'on accole un métal normal avec un supraconducteur (jonction N-S), des phénomènes de diffusion apparaissent au niveau de l'interface et vont générer du bruit. Outre la réflexion et la transmission normale, le transport dans les jonctions N-S implique la prise en compte d'un nouveau phénomène qui n'existe pas dans les jonctions entre deux métaux normaux et qui est appelé la réflexion d'Andreev [30]. Le formalisme présenté au chapitre 1 doit donc être étendu pour prendre en compte ces nouveaux processus et également pour décrire la supraconductivité. Ainsi, l'approche la mieux adaptée est la supraconductivité inhomogène avec les équations de Bogolubov-de Gennes.

On va d'abord voir le principe de la réflexion d'Andreev, puis on présentera la supraconductivité inhomogène qui permettra de calculer le courant et le bruit.

2.2 Réflexion d'Andreev

Le principe de la réflexion d'Andreev est le suivant : un électron incident est réfléchi sous forme de trou au niveau de l'interface entre le métal normal et le supraconducteur. La charge n'est donc pas conservée, contrairement à la réflexion normale. La charge $2e$ qui manque est absorbée dans le supraconducteur par la création d'une paire de Cooper. En revanche, le moment est conservé. Plus précisément, au niveau de Fermi, la vitesse du trou est l'opposée de celle de l'électron incident. En fait, une jonction N-S est l'analogue « électronique » du miroir à conjugaison de phase [31]. L'énergie est également conservée puisque l'électron a une énergie ϵ et le trou une énergie $-\epsilon$ (par rapport à l'énergie de Fermi). La réflexion d'Andreev est donc un processus élastique. Enfin, il y a aussi conservation de spin, car le trou réfléchi a un spin opposé par rapport à celui de l'électron incident. On peut noter que le processus inverse existe, c'est-à-dire qu'un trou incident peut être réfléchi sous forme d'électron. Les différences entre réflexion normale et réflexion d'Andreev sont résumées sur la figure 2.1.

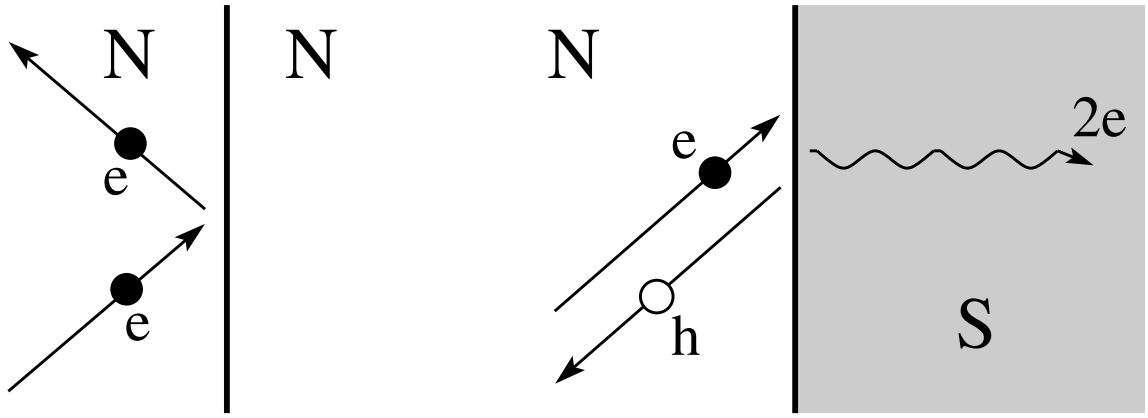

FIG. 2.1: *A gauche, la réflexion normale : un électron incident est réfléchi en électron. La charge est conservée, mais pas le moment. A droite, la réflexion d'Andreev : un électron incident est réfléchi sous forme de trou. Le moment est conservé, mais pas la charge. La charge* $2e$ *qui manque est absorbée dans le supraconducteur par la création d'une paire de Cooper.*

2.3 Fonctions d'onde et calcul du courant

2.3.1 Hypothèses

Le supraconducteur est connecté à un nombre quelconque de terminaux normaux et l'échantillon est supposé suffisamment petit pour être balistique et cohérent. Cette fois, on se restreint au cas d'un seul canal, même si une généralisation au cas multi-canal est tout à fait possible. De plus, on se place dans le cas complètement unidimensionnel, c'est-à-dire qu'on suppose que l'on a déjà intégré sur les dimensions transverses comme on l'a fait au chapitre 1. Le transport est donc dominé par les propriétés de la jonction N-S [10, 32, 33, 34]. Le supraconducteur est maintenu à un potentiel chimique constant μ_S et chacun des terminaux normaux est fixé au même potentiel μ_N. Pour des raisons de simplicité, les énergies sont mesurées à partir de μ_S. La tension appliquée est donc $eV = \mu_N - \mu_S$ et elle est choisie positive.

2.3.2 Equations de Bogolubov-de Gennes

L'approche de Bogolubov-de Gennes [35, 36] de la supraconductivité inhomogène constitue le formalisme le mieux adapté pour traiter les électrons et les trous simultanément. Le système est décrit par un Hamiltonien effectif H_{eff} sur lequel on effectue la transformation de Bogolubov suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \psi_{i,\uparrow}(x) & = & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\sum_j \sum_\beta \int dk \, \left[u_{i\,j\,\beta}(x) c_{j\,\beta\uparrow}(k) - v^*_{i\,j\,\beta}(x) c^+_{j\,\beta\downarrow}(k) \right] \ , \\ \\ \psi_{i,\downarrow}(x) & = & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\sum_j \sum_\beta \int dk \, \left[u_{i\,j\,\beta}(x) c_{j\,\beta\downarrow}(k) + v^*_{i\,j\,\beta}(x) c^+_{j\,\beta\uparrow}(k) \right] \ . \end{array} \right.$$

L'état $u_{i\,j\,\beta}$ ($v_{i\,j\,\beta}$) correspond à la fonction d'onde d'un électron (d'un trou) diffusé dans le terminal i, et issu d'une quasi-particule de type β (électron ou trou, $\beta = e, h$) incidente dans le terminal j. $v_e^j(E) = \hbar k_e^j(E)$ est la vitesse dans le terminal j. Les opérateurs $c(k)$ et $c^+(k)$ sont de type fermionique, et satisfont les relations d'anticommutation habituelles :

$$\begin{aligned}\left\{c_{i\,\alpha\,\sigma}(k), c^+_{j\,\beta\,\sigma'}(k')\right\} &= \delta_{i,j}\,\delta_{\alpha,\beta}\,\delta_{\sigma,\sigma'}\,\delta(k-k')\ ,\\ \left\{c_{i\,\alpha\,\sigma}(k), c_{j\,\beta\,\sigma'}(k')\right\} &= 0\ .\end{aligned}$$

En effectuant un changement de variable vers les énergies et en introduisant la variable de spin $\sigma = \pm 1$, on obtient :

$$\psi_{i,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_j\sum_\beta\int_0^{+\infty} dE\left(\frac{u_{i\,j\,\beta}(x)}{\sqrt{\hbar v_e^j(E)}}\,c_{j\,\beta\,\sigma}(E) - \sigma\frac{v^*_{i\,j\,\beta}(x)}{\sqrt{\hbar v_h^j(E)}}\,c^+_{j\,\beta\,-\sigma}(E)\right)\ . \tag{2.1}$$

La transformation de Bogolubov doit diagonaliser le Hamiltonien effectif :

$$H_{eff} = E_g + \sum_j\sum_\beta\sum_\sigma\int_0^{+\infty} dE\,E\,c^+_{j\,\beta\,\sigma}(E)c_{j\,\beta\,\sigma}(E)\ ,$$

où E_g est l'énergie de l'état fondamental. Cela implique que $E(k)$ est nécessairement positive. Finalement, les équations de Bogolubov-de Gennes s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} Eu_{i\,j\,\beta}(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_S + V(x)\right)u_{i\,j\,\beta}(x) + \Delta(x)v_{i\,j\,\beta}(x)\ ,\\ Ev_{ij\beta}(x) &= -\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_S + V(x)\right)v_{i\,j\,\beta}(x) + \Delta^*(x)u_{i\,j\,\beta}(x)\ .\end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

Elles décrivent l'évolution des états $u_{i\,j\,\beta}$ et $v_{i\,j\,\beta}$. Le potentiel de paire $\Delta(x)$ doit en principe être calculé de façon self-consistante, mais pour des raisons de simplicité, on le choisit égal au gap dans le supraconducteur et nul dans le métal normal.

2.3.3 Etats dans un terminal normal

Les états qui apparaissent dans la transformation de Bogolubov (2.1) sont déterminés grâce à la matrice de diffusion (matrice S) décrivant la jonction. On choisit $\Delta(x) = 0$ et $V(x) = 0$ et les équations de Bogolubov-de Gennes (2.2) se réduisent à une simple équation de Schrödinger pour les électrons (états $u_{i\,j\,\beta}$) et à une équation de Schrödinger avec renversement du temps pour les trous (états $v_{i\,j\,\beta}$). On choisit des solutions en ondes planes de la forme $e^{ik_e^N x}$ et $e^{ik_h^N x}$, avec $k_e^N = \sqrt{2m\,(\mu_S + E)}/\hbar$ et $k_h^N = \sqrt{2m\,(\mu_S - E)}/\hbar$ les vecteurs d'onde des électrons et des trous respectivement. Ainsi, les électrons et les trous dans le terminal i issus d'une quasi-particule de type β ($\beta = e, h$) dans le terminal j et diffusée vers i sont décrits par :

$$u_{i\,j\,\beta}(x) = \delta_{i,j}\delta_{e,\beta}e^{ik_e^N x} + s_{ije\beta}\sqrt{\frac{k_\beta^j}{k_e^N}}e^{-ik_e^N x}\ , \tag{2.3}$$

$$v_{i\,j\,\beta}(x) = \delta_{i,j}\delta_{h,\beta}e^{-ik_h^N x} + s_{ijh\beta}\sqrt{\frac{k_\beta^j}{k_h^N}}e^{ik_h^N x}\ . \tag{2.4}$$

On notera le signe opposé des moments pour chaque type de particule. D'autre part, on a supprimé les indices sur les positions x pour simplifier la notation. $s_{ij\alpha\beta}$ est l'élément de la matrice de diffusion exprimant l'amplitude de la fonction d'onde d'une particule de type α sortant dans le terminal i et issue d'une quasi-particule de type β dans j.

2.3.4 Courant moyen et conductance

L'opérateur de courant dans le terminal i est défini par :

$$I_i(x) = e\frac{\hbar}{2mi}\sum_\sigma \left(\psi^+_{i,\sigma}(x)\frac{\partial\psi_{i,\sigma}(x)}{\partial x} - \frac{\partial\psi^+_{i,\sigma}(x)}{\partial x}\psi_{i,\sigma}(x)\right) .$$

En remplaçant ψ par son expression après la transformation de Bogolubov (2.1), l'opérateur de courant devient :

$$\begin{aligned} I_i(x) \;=\; & \frac{e\hbar}{2miv_F}\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^{+\infty} dE_1 \int_0^{+\infty} dE_2 \sum_{m,n}\sum_\sigma \Big[\Big(u^*_{im}\partial_x u_{in} - \partial_x u^*_{im} u_{in}\Big) c^+_{m\,\sigma} c_{n\,\sigma} \\ & -\Big(u^*_{im}\partial_x v^*_{in} - \partial_x u^*_{im} v^*_{in}\Big)\sigma\, c^+_{m\,\sigma} c^+_{n\,-\sigma} - \Big(v_{im}\partial_x u_{in} - \partial_x v_{im} u_{in}\Big)\sigma\, c_{m\,-\sigma} c_{n\,\sigma} \\ & +\Big(v_{im}\partial_x v^*_{in} - \partial_x v_{im} v^*_{in}\Big) c_{m\,-\sigma} c^+_{n\,-\sigma}\Big] , \end{aligned} \tag{2.5}$$

où les sommes sur j et β ont été remplacées par une unique somme sur l'indice m. Les expressions contenant l'indice m (n) ont une dépendance en énergie E_1 (E_2). D'autre part, on peut négliger la dépendance en énergie des vecteurs d'onde. En effet, d'après leurs expressions calculées au paragraphe 2.3.3 et dans l'appendice A avec l'équation (A.1), et puisque le potentiel chimique du supraconducteur μ_S est très grand devant toutes les autres échelles d'énergie du système, on peut faire l'approximation qu'ils sont égaux au vecteur d'onde de Fermi : $k^N_e = k^N_h = k^S_e = k^S_h = k_F$.

D'autre part, le calcul du courant moyen fait intervenir la moyenne de produits d'opérateurs de création et d'annihilation tels que $\langle c^+_{m\,\sigma}(E_1) c_{n\,\sigma}(E_2)\rangle = f_m(E_1)\delta_{mn}\delta(E_1 - E_2)$. f_m représente la distribution de Fermi-Dirac. Elle dépend du type de particule et du terminal considéré (normal ou supraconducteur). $f_m(E) = 1/[1 + e^{\beta(E-eV)}]$ pour les électrons du côté normal. $f_m(E) = 1/[1 + e^{\beta(E+eV)}]$ pour les trous du côté normal. Le « $+eV$ » peut paraître étonnant mais se justifie simplement : la probabilité d'avoir un trou est la probabilité qu'il manque un électron d'énergie $-E$, ce que l'on peut écrire comme $f_m(E) = 1 - 1/[1 + e^{\beta(-E-eV)}] = 1/[1 + e^{\beta(E+eV)}]$. Enfin, $f_m(E) = 1/[1 + e^{\beta E}]$ dans le supraconducteur, puisque l'énergie est mesurée à partir de μ_S. Le courant moyen est donc :

$$\begin{aligned} \langle I_i(x)\rangle \;=\; & \frac{e}{2\pi miv_F}\int_0^{+\infty} dE \sum_m \Bigg[\Big(u^*_{im}\partial_x u_{im} - \partial_x u^*_{im} u_{im}\Big) f_m \\ & +\Big(v_{im}\partial_x v^*_{im} - \partial_x v_{im} v^*_{im}\Big)(1 - f_m)\Bigg] . \end{aligned} \tag{2.6}$$

On considère le cas d'une jonction simple (un terminal normal et un supraconducteur). On remplace u_m et v_m dans l'expression (2.6) ci-dessus par leur expression (2.3) et (2.4). On se place à température nulle et on suppose que la tension appliquée est faible devant le gap

du supraconducteur ($eV \ll \Delta$). Cette dernière hypothèse a deux conséquences importantes. D'une part, les éléments de la matrice S de la jonction varient peu sur l'intervalle d'énergie mis en jeu dans l'intégrale (2.6), donc on fait l'approximation qu'ils sont constants. D'autre part, la transmission de quasi-particules vers le supraconducteur est impossible. Tous les éléments de la matrice S correspondant à la transmission sont donc nuls : $s_{12\alpha\beta} = 0$. En utilisant l'unitarité de la matrice S, on obtient finalement :

$$\langle I \rangle = \frac{4e}{h} R_A \, eV \ ,$$

où $R_A = |s_{11he}|^2$ est la probabilité de réflexion d'Andreev. La conductance d'une jonction N-S simple est donc [38, 39] :

$$G = \frac{4e^2}{h} R_A \ .$$

Par rapport à la formule de Landauer (1.7) dans une jonction entre deux métaux normaux, on remarque un doublement de la conductance dans le cas d'un échantillon à un seul canal. Ce doublement est une première signature de la réflexion d'Andreev et du transfert de charge $2e$ au lieu de e.

2.4 Bruit et corrélations de bruit

Le bruit dans un terminal donné, ou les corrélations de bruit entre deux terminaux (normaux) sont définis de la même façon qu'au chapitre 1 comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation courant-courant :

$$S_{ij}(\omega) = \lim_{T \to +\infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega t'} \Big[\langle I_i(t) I_j(t+t') \rangle - \langle I_i \rangle \langle I_j \rangle \Big] \ . \tag{2.7}$$

Quand $i = j$, $S_{ii}(\omega)$ correspond au bruit dans le terminal i, alors que si i et j sont différents, $S_{ij}(0)$ représente les corrélations de bruit entre les terminaux i et j (à fréquence nulle).

Puisque l'opérateur de courant est composé de produits de deux créateurs ou d'annihilateurs, $\langle I_i(x,t) I_j(x,t+t') \rangle$ est une somme de valeurs moyennes de quatre opérateurs de création ou d'annihilation. Ces valeurs moyennes sont exprimées à l'aide de distributions de Fermi-Dirac en utilisant le théorème de Wick. Il est alors pratique de définir les éléments de matrice suivants :

$$\begin{aligned}
A_{imjn}(E,E',t) &= u_{jn}(E',t) \partial_x u^*_{im}(E,t) - u^*_{im}(E,t) \partial_x u_{jn}(E',t) \ , \\
B_{imjn}(E,E',t) &= v^*_{jn}(E',t) \partial_x v_{im}(E,t) - v_{im}(E,t) \partial_x v^*_{jn}(E',t) \ , \\
C_{imjn}(E,E',t) &= u_{jn}(E',t) \partial_x v_{im}(E,t) - v_{im}(E,t) \partial_x u_{jn}(E',t) \ .
\end{aligned}$$

On calcule toutes les moyennes et la différence $\langle I_i(t) I_j(t+t') \rangle - \langle I_i \rangle \langle I_j \rangle$, et on obtient le

bruit ou les corrélations de bruit :

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(\omega) \;=\; & \frac{e^2\hbar^2}{m^2 v_F^2}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}dt\int_{-\infty}^{+\infty}dt' e^{i\omega t'}\int_0^{+\infty}dE\int_0^{+\infty}dE'\sum_{m,n}\Bigg\{ \\
& f_m(E)(1-f_n(E'))e^{i(E'-E)t'/\hbar} \\
& \quad\times\Big[A_{imjn}(E,E',t)A^*_{imjn}(E,E',t+t') + B^*_{imjn}(E,E',t)B_{imjn}(E,E',t+t') \\
& \qquad + A_{imjn}(E,E',t)B_{imjn}(E,E',t+t') + B^*_{imjn}(E,E',t)A^*_{imjn}(E,E',t+t')\Big] \\
& + f_m(E)f_n(E')e^{-i(E+E')t'/\hbar} \\
& \quad\times C^*_{imjn}(E,E')\Big[C_{jnim}(E',E,t+t') + C_{imjn}(E,E',t+t')\Big] \\
& + (1-f_m(E))(1-f_n(E'))e^{i(E+E')t'/\hbar} \\
& \qquad\times\Big[C_{jnim}(E',E,t) + C_{imjn}(E,E',t)\Big]C^*_{imjn}(E,E',t+t')\Bigg\}\,. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Tant que le processus reste stationnaire (par exemple si aucun champ externe dépendant du temps n'est appliqué), les éléments de matrice A_{imjn}, B_{imjn} et C_{imjn} sont indépendants du temps. Par conséquent, l'intégration sur t' donne une fonction δ de l'énergie. Ainsi, les termes proportionnels à $(1-f_m)(1-f_n)$ s'annulent car les quasi-particules ont une énergie positive. On a donc :

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(\omega) \;=\; & \frac{e^2\hbar^2}{m^2 v_F^2}\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^{+\infty}dE\sum_{m,n}\Bigg\{ \\
& \Theta(E+\hbar\omega)f_m(E+\hbar\omega)(1-f_n(E))\,\big|A_{imjn}(E+\hbar\omega,E) + B^*_{imjn}(E+\hbar\omega,E)\big|^2 \\
& + \Theta(\hbar\omega-E)f_m(\hbar\omega-E)f_n(E) \\
& \qquad\times C^*_{imjn}(\hbar\omega-E,E,t)\Big[C_{jnim}(E,\hbar\omega-E) + C_{imjn}(\hbar\omega-E,E)\Big]\Bigg\}\,,
\end{aligned}
$$

après intégration sur E'. Cette expression correspond au bruit si les indices i et j sont égaux :

$$
\begin{aligned}
S_{ii}(\omega) \;=\; & \frac{e^2\hbar^2}{m^2 v_F^2}\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^{+\infty}dE\sum_{m,n}\Bigg\{ \\
& \Theta(E+\hbar\omega)f_m(E+\hbar\omega)(1-f_n(E))\,\big|A_{imin}(E+\hbar\omega,E) + B^*_{imin}(E+\hbar\omega,E)\big|^2 \\
& + \Theta(\hbar\omega-E)f_m(\hbar\omega-E)f_n(E) \\
& \qquad\times C^*_{imin}(\hbar\omega-E,E,t)\Big[C_{inim}(E,\hbar\omega-E) + C_{imin}(\hbar\omega-E,E)\Big]\Bigg\}\,. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Dans cette expression, on peut noter que les termes proportionnels à $f_n f_m$ ou à $(1-f_n)(1-f_m)$ n'apparaîssent qu'à fréquence non-nulle du fait des fonctions de Heaviside. Les corrélations de bruit entre les terminaux i et j s'obtiennent en prenant la limite des fréquences nulles [40, 41, 42, 43] :

$$
S_{ij}(0) = \frac{e^2\hbar^2}{m^2 v_F^2}\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^{+\infty}dE\sum_{m,n}f_m(E)(1-f_n(E))\big|A_{imjn}(E,E) + B^*_{imjn}(E,E)\big|^2\,. \qquad (2.10)
$$

2.5 Bruit dans une jonction N-S simple

2.5.1 Expression générale

On calcule le bruit d'après l'équation (2.9) en se plaçant à température nulle pour pouvoir effectuer facilement l'intégrale sur l'énergie. En réécrivant A_{mn}, B_{mn} et C_{mn} en fonction de ces éléments de matrice, on trouve trois expressions différentes pour le bruit à cause de la dépendance en fréquence des fonctions de Heaviside de l'équation (2.9). Si $\hbar\omega < eV$:

$$\begin{aligned} S(\omega) \;=\; & \frac{2e^2}{h}\Bigg\{\int_0^{eV-\hbar\omega} dE \\ & \times\Big[|s_{NNee}(E+\hbar\omega)|^2\left(1-|s_{NNee}(E)|^2\right)+|s_{NNhe}(E+\hbar\omega)|^2\left(1-|s_{NNhe}(E)|^2\right) \\ & \quad +s^*_{NNee}(E+\hbar\omega)\; s_{NNee}(E)\; s_{NNhe}(E+\hbar\omega)\; s^*_{NNhe}(E) \\ & \quad +s^*_{NNee}(E)\; s_{NNee}(E+\hbar\omega)\; s_{NNhe}(E)\; s^*_{NNhe}(E+\hbar\omega)\Big] \\ & +\int_0^{\hbar\omega} dE\Big[|s_{NNee}(E)|^2|s_{NNhe}(\hbar\omega-E)|^2 \\ & \qquad +s_{NNee}(\hbar\omega-E)\; s^*_{NNee}(E)\; s_{NNhe}(E)\; s^*_{NNhe}(\hbar\omega-E)\Big]\Bigg\}\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si $eV < \hbar\omega < 2eV$, on obtient :

$$\begin{aligned} S(\omega) \;=\; & \frac{2e^2}{h}\int_{\hbar\omega-eV}^{eV} dE\Big[|s_{NNee}(E)|^2|s_{NNhe}(\hbar\omega-E)|^2 \\ & \qquad +s_{NNee}(\hbar\omega-E)s^*_{NNee}(E)\; s_{NNhe}(E)\; s^*_{NNhe}(\hbar\omega-E)\Big]\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Si $\hbar\omega > 2eV$ le bruit s'annule.

Telles quelles, ces formules ne sont pas directement utilisables. Il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires sur le système pour obtenir un résultat exploitable. On va donc distinguer deux cas : les faibles tensions appliquées, puis les tensions plus importantes, éventuellement supérieures au gap du supraconducteur.

2.5.2 Faibles tensions appliquées

On suppose que l'on applique une faible tension ($eV \ll \Delta$). On peut donc faire la même approximation qu'au paragraphe 2.3.4 en prenant les éléments de la matrice S de la jonction constants. De plus on se place à température nulle pour pouvoir effectuer facilement l'intégrale sur l'énergie dans l'expression (2.11) et (2.12). On obtient ainsi l'expression du bruit à fréquence finie [44, 45] :

$$\begin{cases} S(\omega) \;=\; \dfrac{8e^2}{h}(2eV-\hbar\omega)R_A(1-R_A) & \text{si } \hbar\omega < 2eV\ , \\[2ex] S(\omega) \;=\; 0 & \text{si } \hbar\omega > 2eV\ , \end{cases} \tag{2.13}$$

où $R_A = |s_{NNhe}|^2$ est la probabilité de réflexion d'Andreev. Le bruit décroît donc linéairement avec la fréquence et s'annule au delà de la fréquence Josephson $2eV/\hbar$ (figure 2.2 à

gauche en traits pleins). A cette fréquence, le bruit présente donc une « singularité » au sens où la courbe change brutalement de comportement. Ce résultat doit être comparé d'une part au bruit dans une jonction entre deux métaux normaux [23, 24], et d'autre part avec le résultat analogue pour une jonction Josephson [46, 47]. Dans le premier cas (figure 2.3 au centre), les fonctions d'onde ont une dépendance temporelle en $\psi_{1,2} \sim \exp[-i\mu_{1,2}t/\hbar]$, de sorte que bien que le courant résultant soit constant, le bruit à fréquence finie met en jeu la superposition $\psi_1\psi_2^*$ qui conduit à une singularité à la fréquence $|\mu_2 - \mu_1|/\hbar = eV/\hbar$. Dans le second cas, une tension continue appliquée à la jonction entre les deux supraconducteurs génère un courant oscillant. Le paramètre d'ordre oscille de chaque côté comme $\psi_{1,2} \sim \exp[-i2\mu_{S_{1,2}}t/\hbar]$ avec μ_{S_1} et μ_{S_2} le potentiel chimique de chaque supraconducteur (figure 2.3 à droite). Le courant résultant fait intervenir la superposition de ces deux états $\psi_1\psi_2^*$, et ainsi il oscille à la fréquence $2|\mu_{S_2} - \mu_{S_1}|/\hbar$. La caractéristique de bruit présente un pic à $2eV/\hbar$ dont la largeur a été calculée dans la référence [47].

Dans le cas d'une jonction N-S, on peut réécrire la formule (2.13) à fréquence nulle comme $S = 4e\langle I\rangle(1 - R_A)$. On retrouve bien le doublement du bruit [40, 48, 49, 50] par rapport à la formule (1.19) pour une jonction entre deux métaux normaux (figure 2.2 à gauche en pointillés). Dans le cas d'une jonction diffusive, l'expression du bruit comporte un facteur supplémentaire 1/3 à cause de la moyenne sur les canaux (voir paragraphe 1.3.6 pour une jonction normale), et dans la limite des faibles probabilités de réflexion d'Andreev ($R_A \simeq 0$), elle devient : $S = (1/3)4e\langle I\rangle$. On peut alors définir la température effective de bruit :

$$T_N = \frac{S}{4k_B G} = \frac{(2e)V}{6k_B} \ . \tag{2.14}$$

Ce doublement a récemment été observé expérimentalement d'abord dans des jonctions S-N-S [51, 52] (voir figure 2.4), puis les résultats ont été confirmés dans des jonctions N-S simples [52, 53, 54] (voir figure 2.5).

Puisque la tension appliquée est inférieur au gap, seule la réflexion d'Andreev contribue au courant par l'intermédiaire de l'émission ou de l'absorption de paires de Cooper (de charge $2e$) du côté du supraconducteur. Un électron incident du côté normal d'énergie $\mu_S + eV$ se combine avec un autre électron d'énergie $\mu_S - eV$ pour former un trou réfléchi d'énergie $\mu_S - eV$. Les deux électrons ont une énergie totale $2\mu_S$ correspondant à une paire de Cooper et ils peuvent alors traverser la jonction vers le supraconducteur. On peut reprendre l'argument de l'oscillation temporelle des fonctions d'onde : l'électron incident a une fonction d'onde qui oscille comme $\psi_e \sim \exp[-i(\mu_S + eV)t/\hbar]$, alors que celle du trou oscille comme $\psi_h \sim \exp[-i(\mu_S - eV)t/\hbar]$ (figure 2.3 à gauche). Le bruit combine ces deux dépendances dans le produit $\psi_e\psi_h^*$ qui oscille à la fréquence Josephson $2eV/\hbar$ correspondant à la singularité trouvée. Dans une jonction contenant un seul supraconducteur, la singularité apparaît alors dans le bruit plutôt que dans le courant, mais la détection de cette fréquence peut être considérée comme un analogue de l'effet Josephson.

2.5.3 Tensions plus élevées

On cherche maintenant à modéliser la jonction N-S de façon plus réaliste. Le modèle de Blonder, Tinkham et Klapwijk (BTK) [37] est particulièrement bien adapté, d'autant qu'il permet une bonne description de la jonction avec un minimum de paramètres. De plus, il permet d'expliciter la dépendance en énergie des éléments de la matrice S. On pourra ainsi s'intéresser au cas des tensions plus importantes, pouvant même être supérieures au

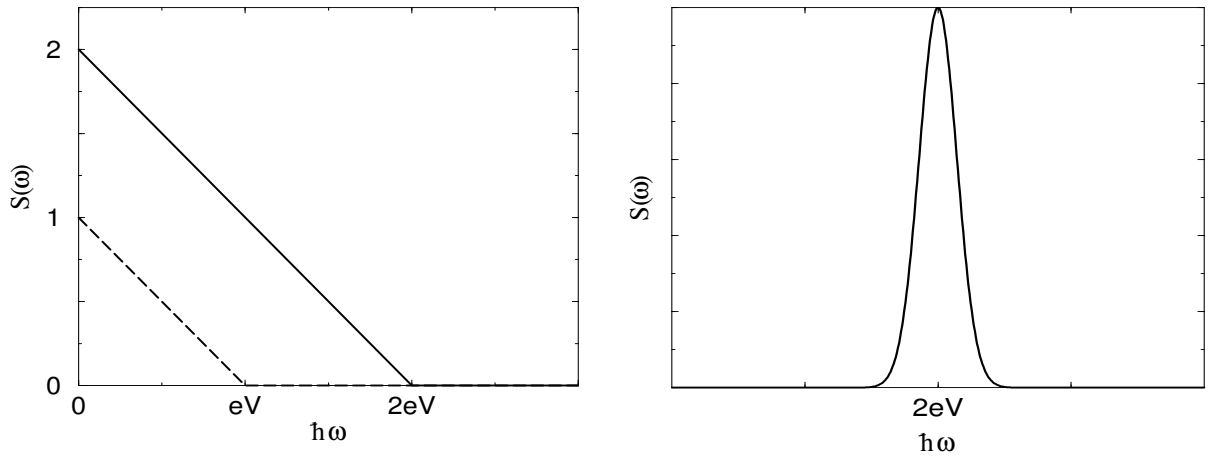

FIG. 2.2: *Bruit en fonction de la fréquence. A gauche, en traits pleins, le bruit dans une jonction N-S avec une singularité à la fréquence* $\omega = 2eV/\hbar$ *(en unités de* $2e\langle I\rangle(1-R_A)$*); en pointillés, le bruit dans une jonction entre deux métaux normaux avec une singularité à la fréquence* $\hbar\omega = eV$ *(en unités de* $2e\langle I\rangle(1-T)$*). A droite, le bruit dans une jonction Josephson, avec un pic à la fréquence* $\hbar\omega = 2eV$*.*

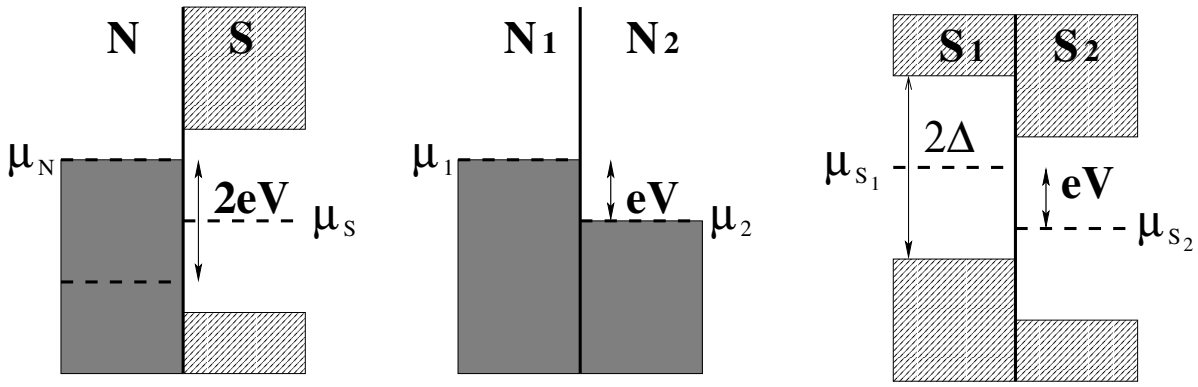

FIG. 2.3: *Diagramme en énergie de trois différents types de jonctions : à gauche, un métal normal* (μ_N) *connecté à un supraconducteur* (μ_S)*; au centre, deux métaux normaux aux potentiels chimiques* μ_1 *et* μ_2 *; à droite, deux supraconducteurs en contact (effet Josephson), avec leurs potentiels chimiques* μ_{S_1} *et* μ_{S_2}*.*

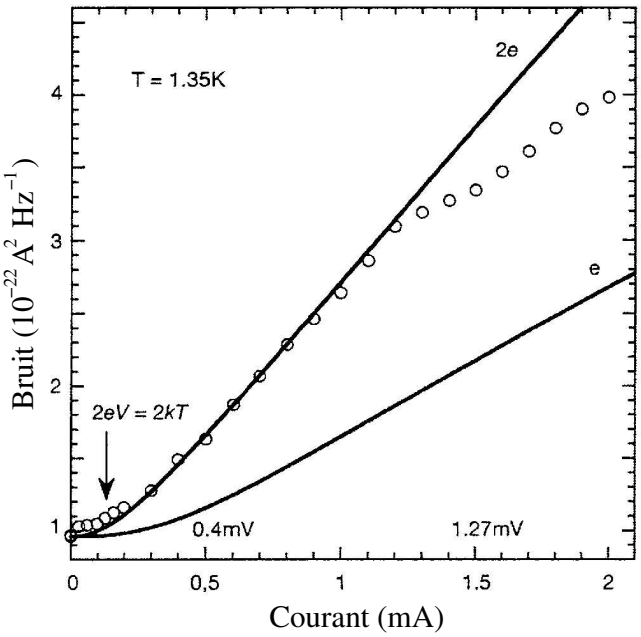

FIG. 2.4: *Bruit dans une jonction N-S en fonction du courant pour deux températures. En traits pleins les courbes théoriques pour une charge* $2e$*, et en pointillés les courbes pour une charge* e*. Les points expérimentaux sont nettement mieux prédits avec une charge* $2e$*. D'après Jehl et al. [51].*

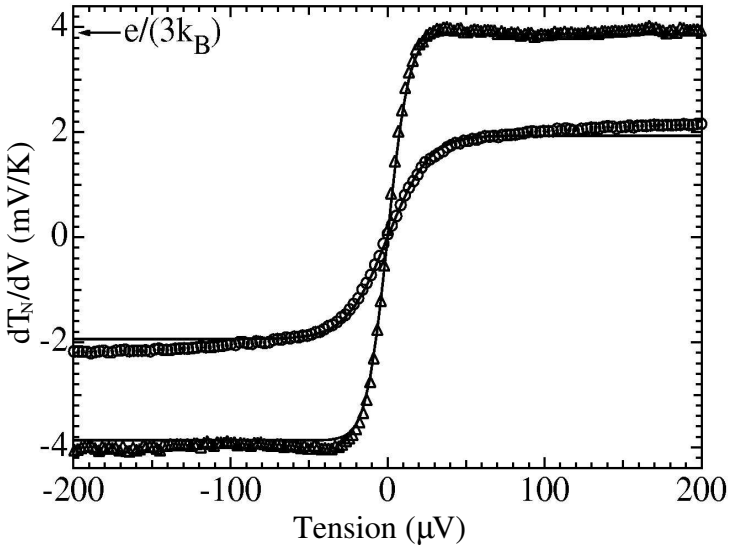

FIG. 2.5: *Dérivée de la température effective de bruit (2.14) par rapport à la tension* dT_N/dV*. Cercles : jonction entre deux métaux normaux (*$T = 100$ *mK) ; triangles : jonction N-S (*$T = 70$ *mK) ; traits pleins : courbes théoriques dans les deux cas. A température nulle, dans le cas normal* $dT_N/dV = e/(6k_B)sgn(V)$*, et dans le cas d'une jonction N-S* $dT_N/dV = (2e)/(6k_B)sgn(V)$*. On voit très bien le doublement du bruit dans le cas N-S. D'après Kozhevnikov et al. [54].*

gap. Dans ce modèle, une barrière tunnel est introduite au niveau de l'interface N-S. Elle est décrite par un potentiel en fonction delta $V_B(x) = V_B\delta(x)$, avec $V_B = Z\hbar^2 k_F/m$. Le paramètre Z est la hauteur (ou la transparence) de la barrière. Connaissant les états dans le supraconducteur (voir l'appendice A), on peut écrire les relations de continuité des fonctions d'onde et de leur dérivée de part et d'autre de l'interface N-S. Les calculs des éléments de la matrice S de la jonction sont détaillés dans l'appendice B.

Connaissant la dépendance en énergie des éléments de la matrice S, on calcule numériquement les intégrales (2.11) et (2.12). Si on trace le bruit en fonction de la fréquence, on remarque des singularités supplémentaires aux fréquences $\omega = (eV - \Delta)/\hbar$, $\omega = (2\Delta)/\hbar$, $\omega = (eV + \Delta)/\hbar$, et il reste la singularité à la fréquence Josephson $\omega = 2eV/\hbar$ (figure 2.6). Toutes ces fréquences peuvent se retrouver sur un diagramme en énergie (figure 2.7). Pour appréhender ces nouvelles singularités, l'argument de l'oscillation temporelle des fonctions d'onde peut être à nouveau utilisé. Cette fois, à cause de la tension élevée, plusieurs phénomènes ont lieu :

- La réflexion d'Andreev est toujours présente et elle implique la même singularité à la fréquence Josephson $2eV/\hbar$.

- Les électrons du côté normal sont transmis en quasi-particules de type électron vers le supraconducteur. Les fonctions d'onde oscillent comme $\psi_{N,e} \sim \exp[-i(\mu_S + eV)t/\hbar]$ et $\psi_{S,e} \sim \exp[-i(\mu_S + \Delta)t/\hbar]$ et leur recouvrement donne une singularité à $(eV - \Delta)/\hbar$. Il faut noter que le même processus de transfert se passe également avec les trous et les quasi-particules de type trou, ce qui mène à la même singularité.

- Les électrons du côté normal sont transmis en quasi-particules de type trou vers le supraconducteur (transmission d'Andreev). Dans ce cas la dépendance temporelle des fonctions d'onde est $\psi_{N,e} \sim \exp[-i(\mu_S + eV)t/\hbar]$ et $\psi_{S,h} \sim \exp[-i(\mu_S - \Delta)t/\hbar]$, ce qui donne une singularité à $(eV + \Delta)/\hbar$. Et le même processus de transfert existe avec les trous transmis en quasi-particules de type électron.

- La réflexion d'Andreev a lieu aussi du côté supraconducteur quand les quasi-particules de type électron sont réfléchies en quasi-particules de type trou et vice versa. Les fonctions d'onde oscillent comme $\psi_{S,e} \sim \exp[-i(\mu_S + \Delta)t/\hbar]$ et $\psi_{S,h} \sim \exp[-i(\mu_S - \Delta)t/\hbar]$ et cela crée une singularité à la fréquence $2\Delta/\hbar$.

Cette intégration numérique peut bien sûr se faire pour de faibles tensions appliquées. Les résultats obtenus sont en bon accord avec l'équation (2.13) calculée au paragraphe 2.5.2 (voir figure 2.8).

Une autre limite intéressante est celle des grandes tensions quand $eV \gg \Delta$. Dans ce cas, le transport est dominé par la transmission de quasi-particules de charge e, alors que la contribution de la réflexion d'Andreev est faible. On peut donc s'attendre à des résultats similaires à ceux d'une jonction entre deux métaux normaux. C'est effectivement le cas (figure 2.9), même si on peut encore distinguer les singularités supplémentaires. On peut objecter que si la différence de potentiel appliquée est trop élevée, les processus hors-équilibre dominent et les hypothèses de ce calcul ne sont plus valables à cause des effets de chauffage. Cependant, cette limite reste valide pour des supraconducteurs à petit gap ($\Delta/k_B \sim 0.1K$) car dans ce cas, la condition $eV \gg \Delta$ peut être satisfaite dans une situation proche de l'équilibre.

Enfin, on peut également faire varier la température. Quand la température augmente, les singularités sont toujours présentes, mais elles sont atténuées par le bruit thermique (figure 2.10).

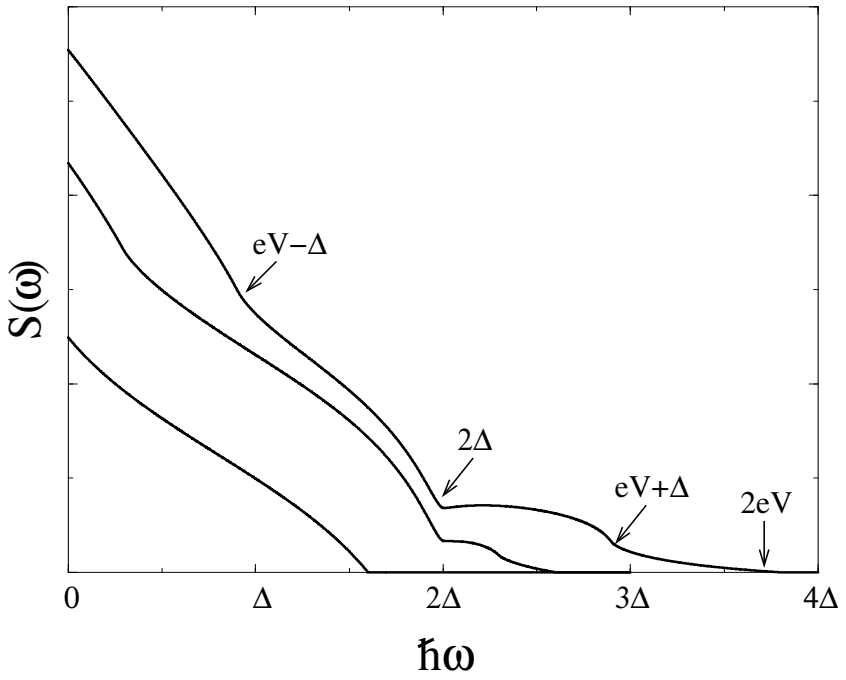

FIG. 2.6: *Bruit dans une jonction N-S en fonction de la fréquence, avec une barrière de transparence intermédiaire ($Z = 1$), pour plusieurs valeurs de la tension : de bas en haut $eV = 0.8\Delta$, $eV = 1.3\Delta$, $eV = 1.9\Delta$.*

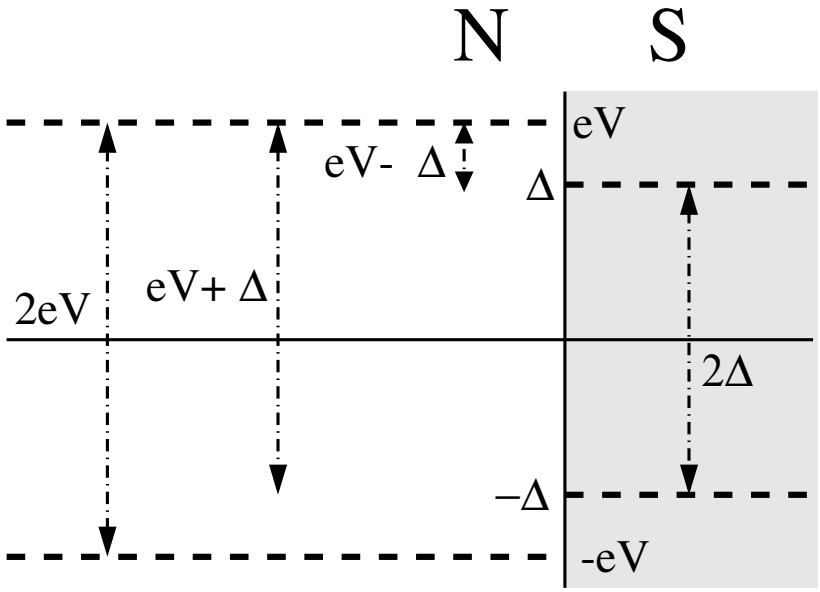

FIG. 2.7: *Diagramme en énergie de la jonction N-S quand on applique une tension est supérieure au gap. Les intervalles d'énergie peuvent être identifiés aux différents phénomènes de réflexion ou de transmission et associés aux singularités observées.*

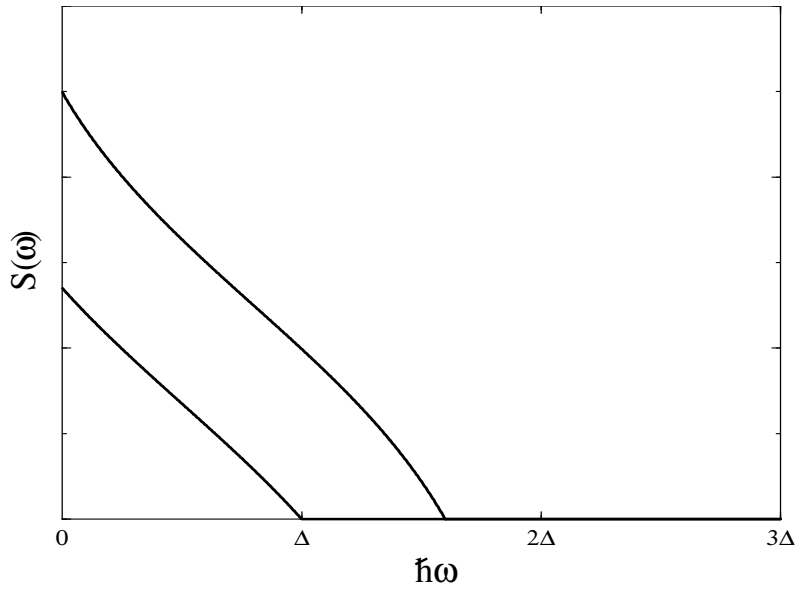

FIG. 2.8: *Bruit dans une jonction N-S en fonction de la fréquence avec une barrière de transparence intermédiaire ($Z = 1$). La tension appliquée est inférieure au gap (de bas en haut, $eV = 0.5\Delta$ et $eV = 0.8\Delta$). On retrouve une variation presque linéaire comme le prévoit l'équation (2.13).*

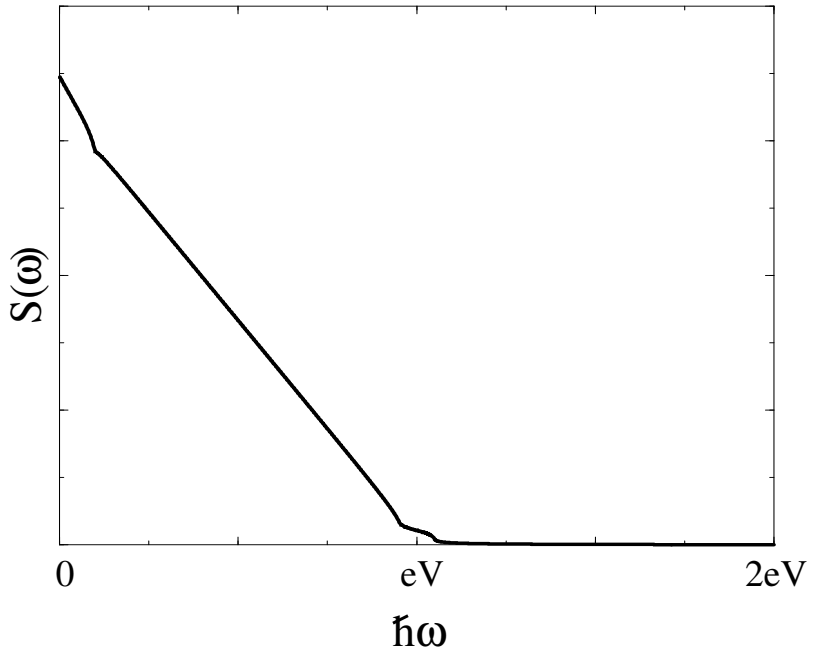

FIG. 2.9: *Bruit dans une jonction N-S en fonction de la fréquence avec une barrière de transparence intermédiaire ($Z = 1$), pour une tension élevée ($eV = 20\Delta$).*

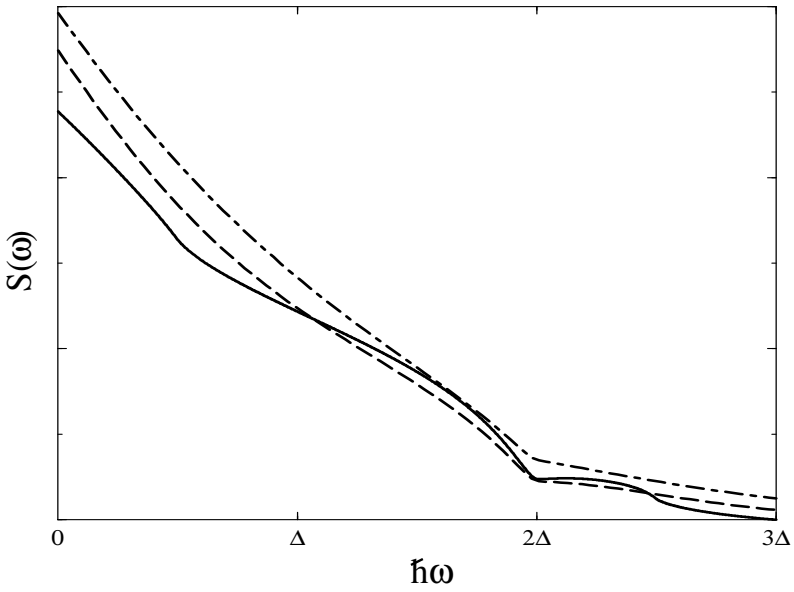

FIG. 2.10: *Bruit dans une jonction N-S en fonction de la fréquence, avec une barrière de transparence intermédiaire ($Z = 1$), pour différentes valeurs de la température (traits pleins : $k_B\Theta = 0$; pointillés : $k_B\Theta = 0.3\Delta$; petits pointillés : $k_B\Theta = 0.5\Delta$). Le bruit thermique atténue les singularités.*

2.6 Effet Aharonov-Bohm non-stationnaire

Les mesures de bruit à fréquence finie sont particulièrement difficiles à réaliser. Il est donc intéressant d'imaginer un système dans lequel on pourrait mettre en évidence la fréquence Josephson mais à travers des mesures de bruit à fréquence nulle. Ainsi, l'effet Aharonov-Bohm non-stationnaire a été proposé il y a plusieurs années dans le cas d'un conducteur normal connecté à des réservoirs [55]. Dans un tel système, un potentiel vecteur dépendant du temps (périodique) est appliqué dans une région confinée $[x_1, x_2]$ du conducteur. Cela ajoute une phase périodique en temps aux électrons et aux trous $\Phi(t) = \Phi_a \sin(\Omega t)$ avec $\Phi_a \equiv 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx A_x/\phi_0$, et avec $\phi_0 = hc/e$ le quantum de flux. La conséquence la plus importante est la présence de plateaux dans la dérivée du bruit par rapport à la tension $\partial S/\partial eV$ la tension eV est un multiple de la fréquence de la perturbation $\hbar\Omega$. Cet effet a été observé expérimentalement dans des échantillons diffusifs [56].

On veut maintenant étendre ce résultat à une jonction N-S. La perturbation reste confinée dans une région $[x_1, x_2]$ près de l'interface (figure 2.11). La principale différence avec le cas précédent est la présence de la réflexion d'Andreev. La fonction d'onde d'un électron incident accumule une phase $\Phi(t)$ dans la région où le potentiel est confiné, mais après une réflexion normale, cette phase est annulée. En revanche, si l'électron subit une réflexion d'Andreev, le trou réfléchi accumule encore une phase Φ, totalisant ainsi une phase 2Φ pour tout le processus de réflexion. Donc dans le régime d'Andreev la matrice S de la jonction peut s'écrire comme :

$$S = \begin{pmatrix} s_{ee} & s_{eh}\, e^{-2i\Phi(t)} \\ s_{he}\, e^{2i\Phi(t)} & s_{hh} \end{pmatrix} , \tag{2.15}$$

où s_{ee}, s_{eh}, s_{he} et s_{hh} sont les éléments de matrice standards décrivant la jonction N-S seule

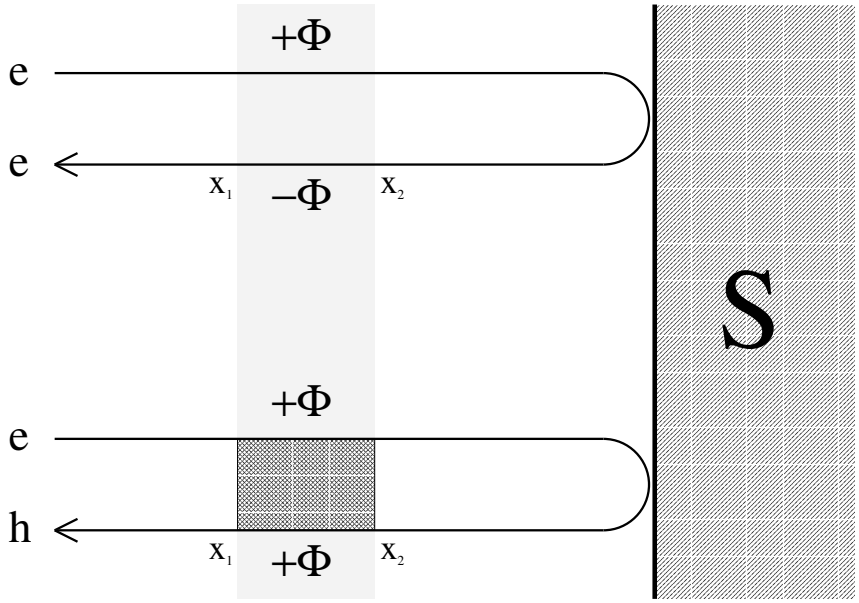

FIG. 2.11: *L'interface N-S. Un potentiel vecteur périodique en temps est appliqué dans la région grisée. La fonction d'onde de l'électron ou du trou y accumule une phase. Cette phase est doublée dans le cas de la réflexion d'Andreev (en bas), mais s'annule dans le cas de la réflexion normale (en haut).*

(sans la perturbation externe).

Contrairement à l'effet Aharonov-Bohm usuel, il n'y a pas besoin d'une géométrie fermée. Le flux n'est pas maintenu dans une boucle et le courant n'est pas périodique dans la phase $2\Phi(t)$. De plus, dans la limite où la probabilité de réflexion d'Andreev R_A ne dépend que faiblement de l'énergie, la perturbation module simplement le courant de façon périodique : $\Delta I = (4e^2/h)R_A[\hbar\Omega/e]\Phi_a \cos(\Omega t)$. En revanche, la perturbation conduit à un effet non-monotone (vis à vis de la phase) sur le bruit.

A cause de de cette perturbation périodique, l'invariance par translation dans le temps est brisée dans le corrélateur (2.7) et le processus devient non-stationnaire. Le bruit dépend donc en général de deux fréquences et peut être écrit comme :

$$\widetilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) = \int\int dt_1 dt_2 e^{i(\Omega_1 t_1 + \Omega_2 t_2)} \Big(\langle I(t_1) I(t_2) \rangle - \langle I \rangle^2 \Big) \ .$$

Cette double transformée de Fourier peut se réécrire comme :

$$\widetilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega_1 + \Omega_2 - m\Omega) S^{(m)}(\Omega_2) \ .$$

L'harmonique zéro, proportionnelle à $\delta(\Omega_1 + \Omega_2)$, est la quantité la plus naturelle à étudier.

D'après l'équation (2.8), son expression à fréquence nulle est donnée par :

$$\begin{aligned}
S^{(0)}(0) \;=\; & \frac{e^2\hbar^2}{2m^2v_F^2}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int_0^{+\infty}dE\int_0^{+\infty}dE'\sum_{m,n}\Bigg\{ \\
& f_m(E)(1-f_n(E'))e^{i(E'-E)(t'-t)/\hbar} \\
& \quad\times\Big[A_{NmNn}(E,E',t)A^*_{NmNn}(E,E',t')+B^*_{NmNn}(E,E',t)B_{NmNn}(E,E',t') \\
& \qquad +A_{NmNn}(E,E',t)B_{NmNn}(E,E',t')+B^*_{NmNn}(E,E',t)A^*_{NmNn}(E,E',t')\Big] \\
& +f_m(E)f_n(E')e^{-i(E+E')(t'-t)/\hbar} \\
& \quad\times C^*_{NmNn}(E,E')\Big[C_{NnNm}(E',E,t')+C_{NmNn}(E,E',t')\Big] \\
& +(1-f_m(E))(1-f_n(E'))e^{i(E+E')(t'-t)/\hbar} \\
& \quad\times\Big[C_{NnNm}(E',E,t)+C_{NmNn}(E,E',t)\Big]C^*_{NmNn}(E,E',t')\Bigg\}\ .
\end{aligned}$$

On calcule cette intégrale à température finie, et en utilisant les fonctions de Bessel J_n, on obtient [44, 45] :

$$S^{(0)}(0)=\frac{4e^2}{h}R_A(1-R_A)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m^2(2\Phi_a)F_V(m\hbar\Omega)+\frac{8e^2}{h}R_A^2k_B\Theta\ . \tag{2.16}$$

où la dépendance en température apparaît sous la forme :

$$F_V(m\hbar\Omega)=(2eV-m\hbar\Omega)\coth[(2eV-m\hbar\Omega)/2k_B\Theta]\ . \tag{2.17}$$

On peut noter le facteur 2, signature de la charge des paires de Cooper dans l'argument de la fonction de Bessel, qui provient de la phase 2ϕ accumulée. La dérivée du bruit par rapport à la tension est :

$$\frac{\partial S^{(0)}(0)}{\partial V}\simeq\frac{8e^3}{h}R_A(1-R_A)\sum_{m=-M}^{+M}J_m^2(2\Phi_a)\ . \tag{2.18}$$

Dans l'équation (2.18), la somme sur les harmoniques admet une coupure à $M=\lfloor 2eV/\hbar\Omega\rfloor$. Expérimentalement [56], il est plus pratique de prendre la dérivée seconde du bruit par rapport à la tension et de voir des pics, plutôt que d'essayer d'observer des plateaux en prenant simplement la dérivée première. Ceci est illustré sur la figure 2.12 pour deux températures différentes. A basse température ($k_B\Theta<\hbar\Omega/2$), les pics sont bien séparés et ils sont bien localisés à des fréquences multiples de $2eV/\hbar$. A température plus élevée ($k_B\Theta>\hbar\Omega/2$), on ne peut plus distinguer les pics clairement.

L'expérience a été réalisée récemment dans un conducteur diffusif [54]. En pratique, il est difficile d'appliquer un flux magnétique localisé sur une partie de l'échantillon. Par conséquent, on superpose une tension dépendant du temps à la différence de potentiel continue appliquée entre les bornes de l'échantillon. Pour la comparaison avec la théorie, on prend la moyenne sur les canaux de transmission et l'équation (2.16) devient :

$$S^{(0)}(0)=4k_B\Theta\,G_{NS}(1-\eta)+2\eta\,G_{NS}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m^2(2\Phi_a)F_V(m\hbar\Omega)\ ,$$

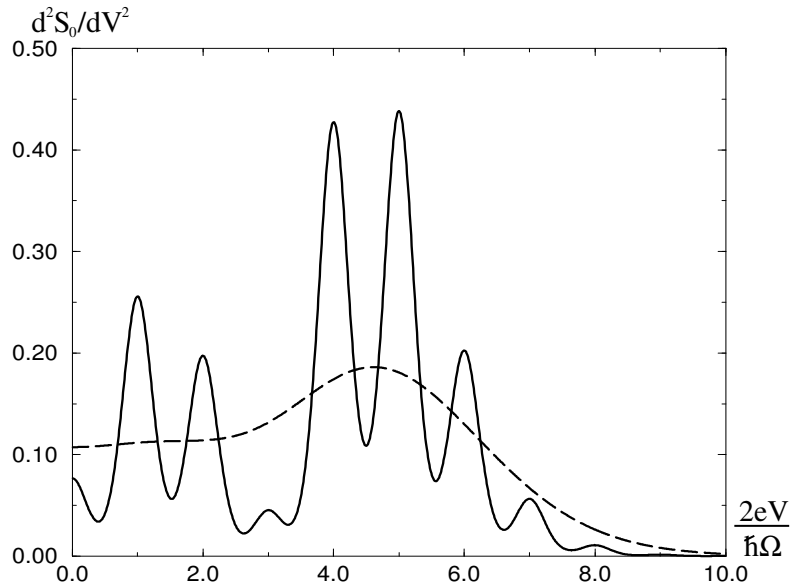

FIG. 2.12: *Effet Aharonov-Bohm non-stationnaire. Dérivée seconde du bruit* $\partial^2 S/\partial V^2$ *en fonction de* $2eV/\hbar\Omega$ *(en unités* $(16e^4/\pi\hbar^2\Omega)R_A(1-R_A)$ *avec le choix de* $\Phi_a = 3$*) Pour* $2k_B\Theta = 0.2\ \hbar\Omega$ *(traits pleins), on observe des pics quand le rapport* $2eV/\hbar\Omega$ *est entier. En pointillés* $2k_B\Theta = \hbar\Omega$*.*

où G_{NS} est la conductance différentielle de l'échantillon, et $\eta = 1/3$ le facteur de suppression normal pour un conducteur diffusif. La dérivée seconde du bruit par rapport à la tension montre clairement des pics à la fréquence Josephson (voir figure 2.13). Sur la figure 2.14 on peut voir que le premier pic est toujours situé à une tension $V = \hbar\Omega/(2e)$, quelle que soit la fréquence Ω de la perturbation. Ce résultat constitue une vérification expérimentale concluante de la présence de la charge effective $2e$ dans le spectre du bruit d'une jonction N-S.

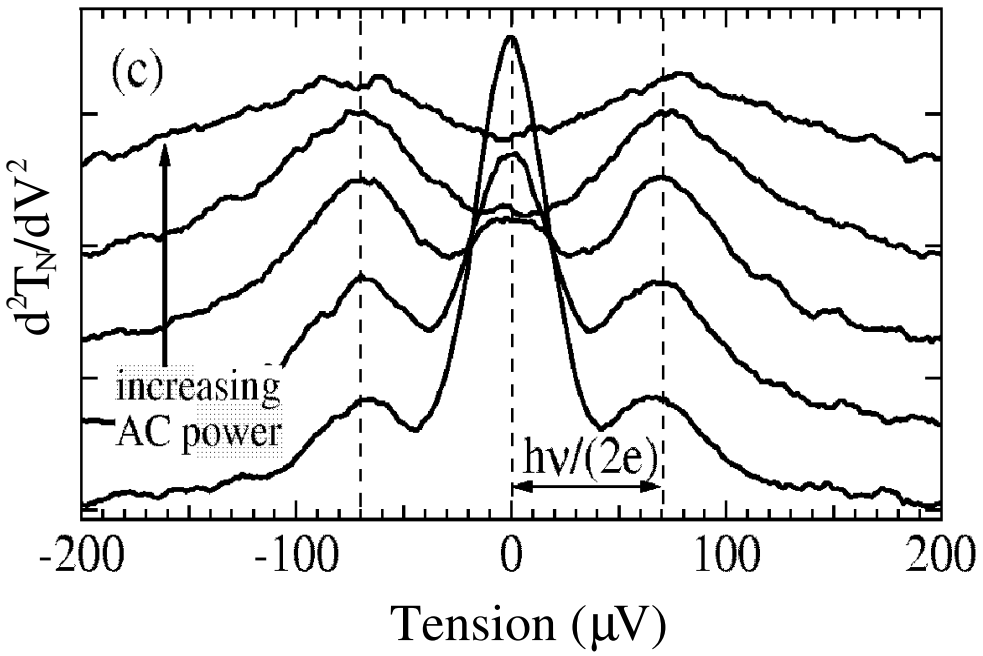

FIG. 2.13: *Effet Aharonov-Bohm non-stationnaire. Dérivée seconde de la température effective de bruit* $\partial^2 T_N/\partial V^2$ *en fonction de la tension* V*, pour* $2\Phi_a = 1.1,\ 1.4,\ 1.7,\ 2.2,\ 2.8$*. On observe un pic quand* $V = \pm\hbar\Omega/(2e)$*. D'après Kozhevnikov et al. [54].*

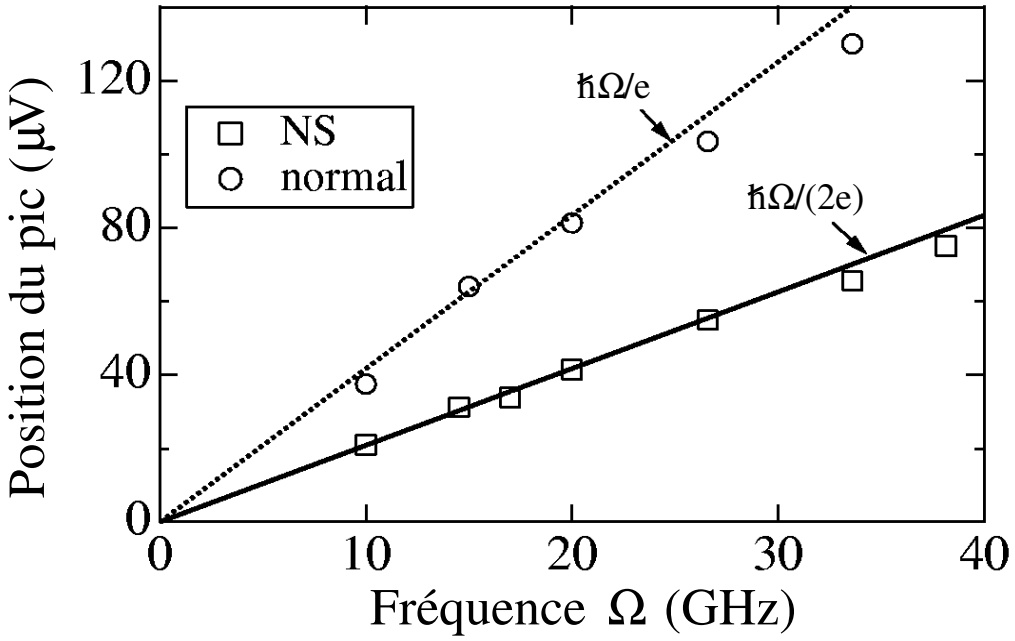

FIG. 2.14: *Position du premier pic de l'effet Aharonov-Bohm non-stationnaire en fonction de la fréquence de la perturbation. Dans le cas d'une jonction N-S (traits pleins) le pic est toujours situé à une tension* $V = \hbar\Omega/(2e)$*. Pour une jonction normale (pointillés), le pic apparaît pour une tension* $V = \hbar\Omega/e$*. D'après Kozhevnikov et al. [54].*

Chapitre 3

Analogue fermionique de l'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss

3.1 L'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss

Dans les deux premiers chapitres, on s'est intéressé principalement au bruit. On a vu que le bruit est en général proportionnel au courant et à la charge effective des porteurs. Si le bruit contient également des informations sur la statistique des particules, il est plus facile de mettre celle-ci en évidence en mesurant les corrélations de bruit entre deux terminaux différents.

La première expérience de mesure de corrélations remonte aux années 50. R. Hanbury-Brown et R. Q. Twiss (HBT) [57] ont proposé un nouveau type d'interféromètre pour déterminer la taille d'une étoile radio en mesurant les corrélations des signaux provenant de deux antennes distinctes. Cette expérience a été suivie d'une autre utilisant une source de lumière cohérente fournie par une lampe à mercure dont le faisceau était séparé en deux par un miroir semi-transparent (voir figure 3.1). Les corrélations mesurées entre les deux faisceaux se sont révélées positives. Ce résultat peut être expliqué par les propriétés de statistique quantique des photons, qui sont des bosons. Les particules de chaque faisceau de bosons ont tendance à se regrouper (bunching), donc la probabilité de détecter simultanément deux photons (un dans chaque faisceau) est non-nulle, et ainsi les corrélations sont positives.

3.2 Analogue fermionique de l'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss

3.2.1 Introduction

On a vu que les corrélations mesurées entre deux faisceaux de photons issus du même faisceau de lumière cohérente sont positives. Puisque ce résultat est lié à la statistique bosonique des particules mises en jeu, il est intéressant de refaire l'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss avec des fermions. En effet, contrairement aux bosons, les fermions s'excluent mutuellement à cause du principe de Pauli (antibunching). Ainsi, on s'attend à ce que les corrélations soient négatives (voir figure 3.2). De manière générale, on peut donc relier le signe des corrélations à la statistique des particules.

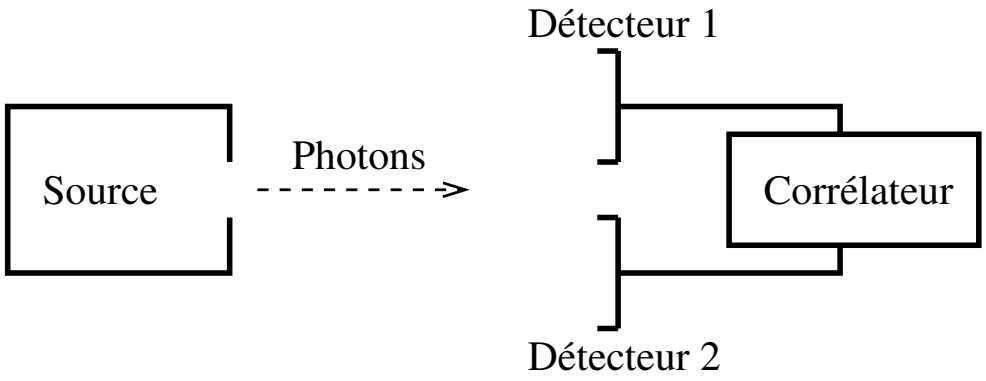

FIG. 3.1: *L'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss. Un faisceau de lumière cohérente est envoyé sur deux détecteurs. Les corrélations mesurées sont positives.*

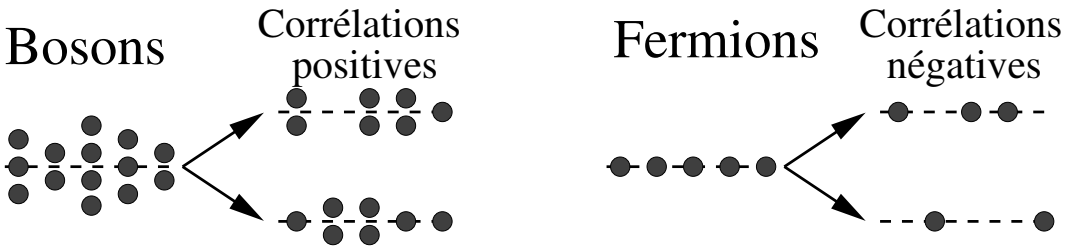

FIG. 3.2: *Les particules d'un faisceau de photons ont tendance à se regrouper (bunching). Les corrélations entre les deux faisceaux sont donc positives. En revanche, les fermions s'excluent mutuellement du fait du principe d'exclusion de Pauli (antibunching). Les corrélations sont donc négatives.*

En pratique, l'analogue fermionique de l'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss est réalisé grâce à un système en forme de « Y », c'est-à-dire comportant trois terminaux. Par exemple, on injecte des électrons dans le premier terminal et un miroir semi-transparent les diffuse dans l'un ou l'autre des deux terminaux restant. Les mesures de corrélations de bruit sont effectuées entres ces deux terminaux.

3.2.2 Calcul des corrélations de bruit dans une jonction en forme de « Y »

Les corrélations de bruit entre deux terminaux distincts à fréquence nulle et dans le cas d'un seul canal s'expriment à partir de l'expression (1.16) :

$$\begin{aligned} S_{mn}(0) &= \frac{4e^2}{h}\int dE \Big[f_m(E)(1-f_m(E))\,\delta_{mn} - s^*_{mn}(E)s_{mn}(E)f_n(E)(1-f_n(E)) \\ &\quad - s^*_{nm}(E)s_{nm}(E)f_m(E)(1-f_m(E)) \\ &\quad + \sum_{p_1,p_2} s^*_{mp_1}(E)s_{mp_2}(E)s^*_{np_2}(E)s_{np_1}(E)f_{p_1}(E)(1-f_{p_2}(E)) \Big] \,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dans un système à N terminaux, à température nulle, et en faisant l'hypothèse que les éléments de matrice sont indépendants de l'énergie, on peut calculer l'intégrale (3.1) :

$$\begin{aligned} S_{mm} &= \frac{2e^2}{h}\sum_{p,p',\,p\neq p'} |s_{mp}|^2|s_{mp'}|^2|\mu_p-\mu_{p'}| \\ &= \frac{4e^2}{h}\sum_{p=1}^{N}\sum_{p'=p+1}^{N} |s_{mp}|^2|s_{mp'}|^2|\mu_p-\mu_{p'}| \,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Puisqu'on s'intéresse à une jonction en forme de « Y », celle-ci comporte trois terminaux. De plus, pour des raisons de simplicité on fait l'hypothèse que les terminaux 1 et 2 sont au même potentiel chimique : $\mu_1 = \mu_2$. On peut alors définir la tension appliquée $eV = \mu_3 - \mu_{1,2}$. D'après l'expression (3.2), on a :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{4e^2}{h}eV\Big[|s_{11}|^2|s_{13}|^2 + |s_{12}|^2|s_{13}|^2\Big] \\ &= \frac{4e^2}{h}eV\; T_{13}(1-T_{13}) \,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

De la même façon, on obtient le bruit dans le terminal 2 :

$$S_{22} = \frac{4e^2}{h}eV\; T_{23}(1-T_{23}) \,. \tag{3.4}$$

D'autre part, l'équation (3.1) permet aussi de montrer que les corrélations de bruit entre les terminaux 1 et 2 sont données par :

$$\begin{aligned} S_{12} = S_{21} &= -\frac{4e^2}{h}eV|s_{13}|^2|s_{23}|^2 \\ &= -\frac{4e^2}{h}eV\; T_{13}T_{23} \,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Il est naturel de normaliser les corrélations entre les terminaux 1 et 2 par rapport au bruit dans ces mêmes terminaux. On trouve ainsi :

$$\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{11}S_{22}}} = -\frac{\sqrt{T_{13}T_{23}}}{\sqrt{(1-T_{13})(1-T_{23})}} \ . \tag{3.6}$$

On a donc montré explicitement que ces corrélations sont négatives, signature de la nature fermionique des électrons. Ce résultat traduit le fait que détecter un électron dans une branche implique une faible probabilité d'en observer un autre dans l'autre branche (voir figure 3.2 à droite).

3.2.3 Résultats expérimentaux

Deux expériences ont récemment vérifié le signe négatif des corrélations dans un système fermionique. La première a été réalisée dans les états de bord de l'effet Hall quantique entier [60, 61], et la seconde dans un gaz bidimensionnel d'électrons [62] avec un miroir semi-transparent utilisé pour séparer un faisceau incident d'électrons en un faisceau réfléchi et un faisceau transmis. Dans l'expérience décrite dans la référence [60], les probabilités de transmission étaient choisies telles que $T_{33} = 0$ et $T_{13} = T_{23} = T = 1/2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle I_3 \rangle &= \frac{2e}{h} eV \ , \\ \langle I_1 \rangle &= \langle I_2 \rangle = \frac{2e}{h} eV \ T \ . \end{aligned}$$

Les équations (3.3), (3.4) et (3.5) deviennent alors :

$$S_{11} = S_{22} = -S_{12} = \frac{4e^2}{h} eV \ T(1-T) = 2e\langle I_3 \rangle \ T(1-T) \ . \tag{3.7}$$

Les corrélations de bruit entre les terminaux 1 et 2 sont donc exactement l'opposé du bruit dans le terminal 1 ou 2. Et c'est effectivement ce qui a été observé expérimentalement (voir figure 3.3).

3.3 Analogue fermionique de l'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss avec un supraconducteur

3.3.1 Introduction

On va maintenant modifier l'analogue fermionique de l'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss en ajoutant un supraconducteur dans une des branches de la jonction. La présence du supraconducteur entraîne l'apparition de nouveaux phénomènes de diffusion au niveau de l'interface N-S. En particulier, pour de faibles tensions, la réflexion d'Andreev contribue majoritairement au transport. Il est donc légitime de se demander quelles vont en être les conséquences sur les corrélations de bruit. On va voir qu'il est possible d'observer des corrélations négatives mais aussi positives suivant la probabilité de transmission du miroir semi-transparent.

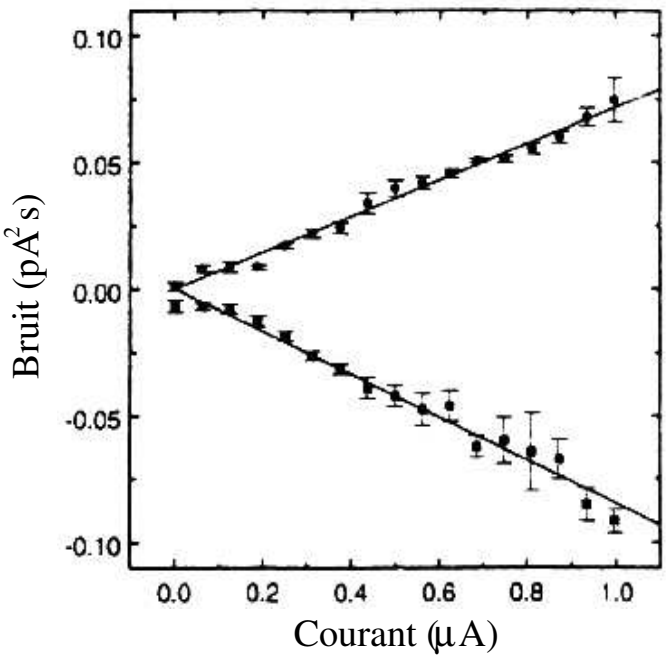

FIG. 3.3: *Bruit S_{11} et corrélations de bruit S_{12} dans l'analogue fermionique de l'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss. en fonction du courant $\langle I_3 \rangle$. Les pentes mesurées sont de* $0.23 \times 2e$ *et de* $-0.26 \times 2e$ *en très bon accord avec l'équation (3.7) pour* $T = 1/2$. *D'après Henny et al. [60]*

3.3.2 Modèle

Le système est constitué de deux terminaux normaux (1 et 2, voir figure 3.4) reliés par un miroir semi-transparent (BS) et connectés à un supraconducteur par l'intermédiaire d'un autre terminal normal (3). c^+_{ie} désigne l'état d'un électron incident dans le terminal i, alors que c^-_{ie} correspond à un électron sortant de ce même terminal. De la même façon, un trou incident dans i est désigné par c^-_{ih} et un trou sortant par c^+_{ih} (voir figure 3.4). Avec cette convention, la matrice S du système complet (miroir semi-transparent et jonction N-S) relie les états incidents aux états sortants :

$$\begin{pmatrix} c^-_{1e} \\ c^+_{1h} \\ c^-_{2e} \\ c^+_{2h} \\ c^-_{4e} \\ c^+_{4h} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} c^+_{1e} \\ c^-_{1h} \\ c^+_{2e} \\ c^-_{2h} \\ c^+_{4e} \\ c^-_{4h} \end{pmatrix} . \tag{3.8}$$

On veut maintenant calculer les corrélations de bruit entre les terminaux 1 et 2. En partant de l'équation (2.10) et en prenant la limite de la température nulle, on peut montrer que

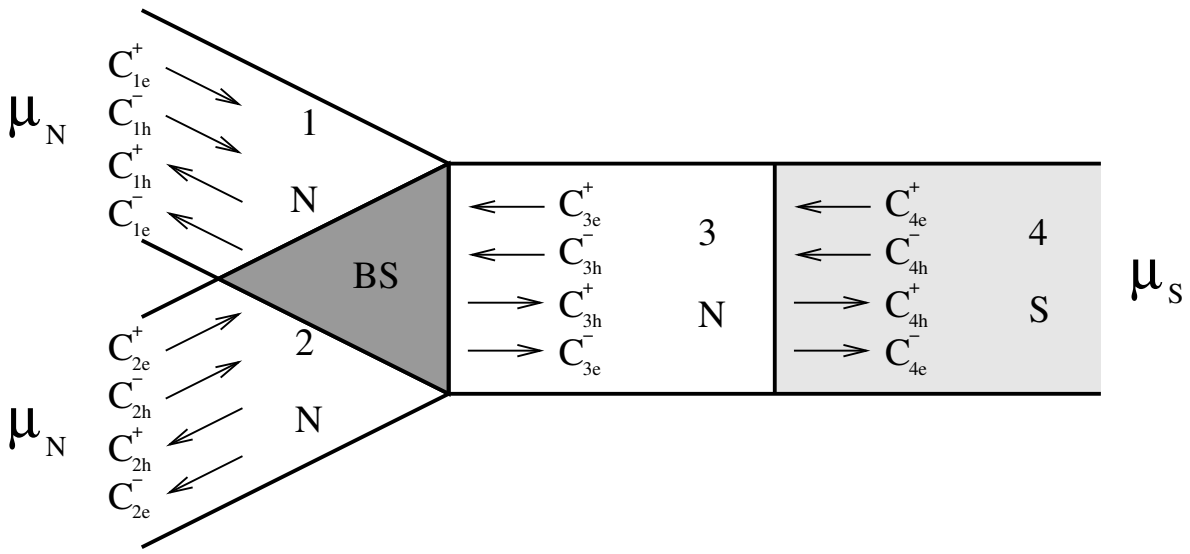

FIG. 3.4: *Deux terminaux normaux (1 et 2) sont reliés par un miroir semi-transparent (BS) et connectés à un supraconducteur (4) par l'intermédiaire d'une région normale (3).*

l'expression des corrélations se réduit à :

$$S_{12}(0) = \frac{2e^2}{h}\int_0^{eV} dE\Big[\sum_{i,j=1,2}\Big(s^*_{1iee}s_{1jeh} - s^*_{1ihe}s_{1jhh}\Big)\Big(s^*_{2jeh}s_{2iee} - s^*_{2jhh}s_{2ihe}\Big) + \sum_{i=1,2\,;\,\gamma=e,h}\Big(s^*_{1iee}s_{14e\gamma} - s^*_{1ihe}s_{14h\gamma}\Big)\Big(s^*_{24e\gamma}s_{2iee} - s^*_{24h\gamma}s_{2ihe}\Big)\Big] \ . \quad (3.9)$$

Le signe des corrélations ne peut pas être déterminé directement d'après l'équation (3.9) ci-dessus. Il va dépendre de la forme spécifique de la matrice S choisie. On va donc choisir un modèle simple dans lequel le miroir semi-transparent est dissocié de la jonction N-S (voir figure 3.4). Pour construire la matrice S du système complet, on combine la matrice S du miroir semi-transparent avec celle de la jonction N-S en utilisant l'analogie avec un interféromètre de type Fabry-Pérot.

3.3.3 Matrice S du miroir semi-transparent

La partie électronique de la matrice S du miroir semi-transparent est donnée par :

$$\begin{pmatrix} c^-_{1e} \\ c^-_{2e} \\ c^-_{3e} \end{pmatrix} = S_{BS_e}\begin{pmatrix} c^+_{1e} \\ c^+_{2e} \\ c^+_{3e} \end{pmatrix} \ . \quad (3.10)$$

L'expression de S_{BS_e} est choisie identique à celle des références [58, 59] :

$$S_{BS_e} = \begin{pmatrix} a & b & \sqrt{\varepsilon} \\ b & a & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & \sqrt{\varepsilon} & -(a+b) \end{pmatrix} \ , \quad (3.11)$$

avec $a = \left(\sqrt{1-2\varepsilon}-1\right)/2$, $b = \left(\sqrt{1-2\varepsilon}+1\right)/2$ et ε pouvant varier de 0 à 1/2. Puisque le miroir semi-transparent est choisi symétrique, la matrice S_{BS_e} ne dépend que d'un seul paramètre ε qui détermine la transparence du miroir. Par exemple si $\varepsilon = 0$, la transmission des terminaux 1 et 2 vers le terminal 3 n'est pas permise. On a une relation similaire pour les trous :

$$\begin{pmatrix} c_{1h}^{+} \\ c_{2h}^{+} \\ c_{3h}^{+} \end{pmatrix} = S_{BS_h} \begin{pmatrix} c_{1h}^{-} \\ c_{2h}^{-} \\ c_{3h}^{-} \end{pmatrix} . \tag{3.12}$$

On notera que le miroir semi-transparent ne couple pas les électrons et les trous. L'expression de la matrice des trous est donnée par la relation $S_{BS_h}(E) = S^*_{BS_e}(-E)$, car aucun champ magnétique n'est appliqué. Puisque S_{BS_e} est réelle et qu'elle ne dépend pas de l'énergie, on a $S_{BS_h} = S_{BS_e}$.

3.3.4 Faibles tensions appliquées

Quand la tension appliquée est très inférieure au gap du supraconducteur ($eV \ll \Delta$), la réflexion d'Andreev entre les régions 3 et 4 est le processus dominant. On peut alors écrire [39] :

$$\begin{pmatrix} c_{3e}^{+} \\ c_{3h}^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{3e}^{-} \\ c_{3h}^{+} \end{pmatrix} , \tag{3.13}$$

avec $\gamma = e^{-i\arccos(E/\Delta)}$. Dans ce cas, les éléments de matrice tels que $s_{14\alpha\beta}$ ou $s_{24\alpha\beta}$ (avec $\alpha\beta = e, h$) sont nuls. En posant $x = \sqrt{1-2\varepsilon}$ on montre que :

$$s_{11ee} = s_{11hh} = s_{22ee} = s_{22hh} = \frac{(x-1)(1+\gamma^2 x)}{2(1-\gamma^2 x^2)} , \tag{3.14}$$

$$s_{21ee} = s_{21hh} = s_{12ee} = s_{12hh} = \frac{(x+1)(1-\gamma^2 x)}{2(1-\gamma^2 x^2)} , \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} s_{11eh} = s_{21eh} &= s_{12eh} = s_{22eh} = s_{11he} = s_{21he} = s_{12he} = s_{22he} \\ &= \frac{\gamma(1-x)(1+x)}{2(1-\gamma^2 x^2)} . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Puisque $E \ll \Delta$ on peut faire l'hypothèse que $\gamma \simeq -i$. Les éléments de la matrice S ne dépendent donc plus de l'énergie, et l'intégrale (3.9) peut être calculée facilement. On obtient finalement [45, 63] :

$$S_{12}(0) = \frac{2e^2}{h} eV \frac{\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon)^4} \left(-\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1\right) . \tag{3.17}$$

Les corrélations de bruit s'annulent si $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire quand les conducteurs 1 et 2 sont équivalents à un système à deux terminaux découplés du supraconducteur. D'autre part, S_{12} s'annule quand $\varepsilon = \sqrt{2}-1$. Si on trace S_{12} (normalisé au bruit dans 1 ou dans 2 à $\varepsilon = 1/2$) en fonction de la transparence du miroir semi-transparent ε (figure 3.5), on remarque que les corrélations sont *positives* si $0 < \varepsilon < \sqrt{2}-1$ et négatives pour $\sqrt{2}-1 < \epsilon < 1/2$. Quand la transmission est maximale, les corrélations sont négatives et minimales (-1) : c'est la signature d'un système purement fermionique. Les électrons et les trous n'interfèrent pas

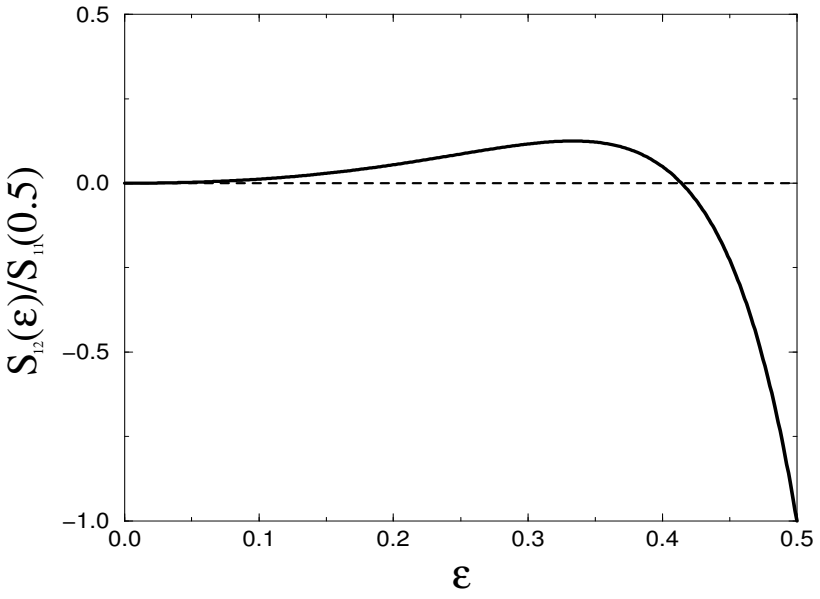

FIG. 3.5: *Corrélations de bruit entre les deux terminaux normaux (normalisées au bruit dans 1 ou dans 2 à $\varepsilon = 1/2$) en fonction de la transparence du miroir semi-transparent ε. Les corrélations peuvent être négatives ou positives suivant la valeur de ε.*

et se propagent indépendamment dans les terminaux normaux. L'expression (3.17) prévoit un maximum des corrélations à $\epsilon = 1/3$.

Ces corrélations positives peuvent s'expliquer par le processus de réflexion d'Andreev. En effet, la réflexion d'Andreev d'un trou revient à transférer une paire de Cooper vers le métal normal [64] sous la forme d'une paire d'électrons corrélés. De même, la réflexion d'Andreev d'un électron crée une paire de trous corrélés du côté normal. Et la propagation séparée de ces paires corrélées dans chacune des branches de la jonction tend à rendre les corrélations de bruit positives (voir figure 3.6).

3.3.5 Tensions plus élevées

Si on applique une tension supérieure au gap, la transmission de quasi-particules vers le supraconducteur devient possible. D'autre part, dans ce cas, les intervalles d'énergie mis en jeu deviennent trop importants pour que l'on puisse négliger la dépendance en énergie des éléments de la matrice S de la jonction N-S. Comme au chapitre précédent, on choisit le modèle BTK [37] (voir appendice B) pour décrire la jonction. Un barrière d'opacité (ou de hauteur) Z est introduite au niveau de la jonction et les éléments de la matrice S dépendent explicitement de l'énergie. En revanche, pour des raisons de simplicité, on garde le même modèle de miroir semi-transparent indépendant de l'énergie. On peut alors combiner les deux matrices de diffusion pour obtenir la matrice S du système complet. Celle-ci est calculée dans l'appendice C.

On calcule numériquement l'intégrale sur l'énergie de l'équation (3.9). Si on considère tout d'abord une barrière très transparente ($Z = 0.1$) et une faible tension appliquée, on

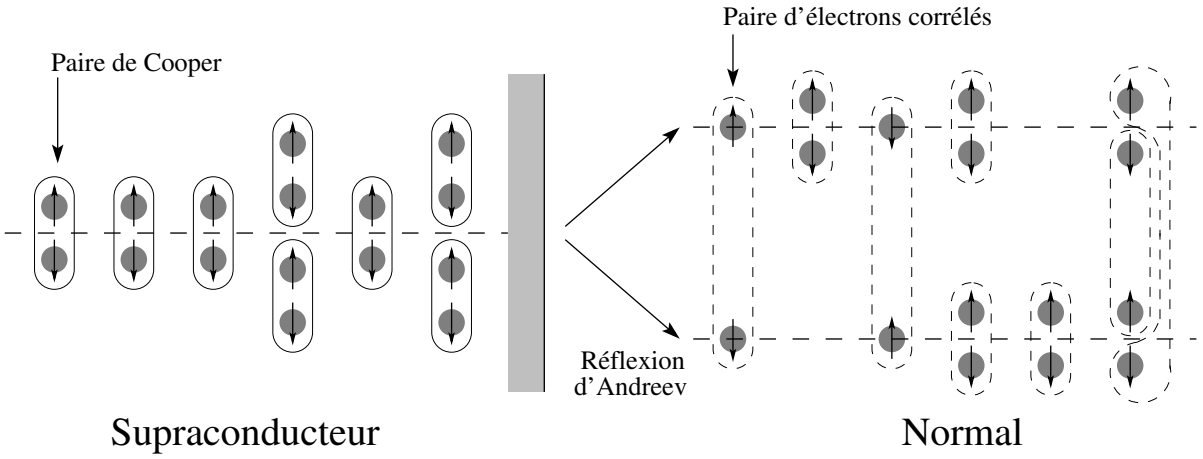

FIG. 3.6: *La réflexion d'Andreev génère des paires d'électrons corrélés qui tendent à rendre les corrélations positives lorsque chaque électron de la paire part dans une branche différente de la jonction en forme de « Y ».*

trouve une courbe des corrélations de bruit en fonction de ε en bon accord avec les résultats analytiques du paragraphe précédent (figure 3.7), sauf que les corrélations n'atteignent plus la valeur minimale -1 pour $\varepsilon = 1/2$. C'est une première signature de la barrière au niveau de l'interface N-S. Plus on augmente la tension, plus la région sur laquelle les corrélations sont positives devient petite. Si la tension est augmentée suffisamment (au delà du gap), les corrélations restent négatives sur tout l'intervalle de ε. Dans ce cas, la transmission de particules des terminaux normaux vers le supraconducteur prend le pas sur la réflexion d'Andreev. La jonction se comporte alors comme un système normal purement fermionique.

On considère maintenant le cas des barrières plus opaques ($Z = 1$, figure 3.8) et on obtient un comportement différent des corrélations de bruit. Pour des faibles tensions, les corrélations restent positives sur tout l'intervalle de ε. Il est même possible de trouver une valeur de la tension (par exemple $eV = 0.95\Delta$) pour laquelle les corrélations présentent des oscillations entre des valeurs positives et négatives. En augmentant davantage la tension, les corrélations redeviennent négatives sur tout l'intervalle de ε. Les calculs pour des valeurs plus grandes de Z confirment la tendance du système à donner des corrélations positives à faible tension appliquée. Le phénomène des corrélations positives dans un système fermionique avec un supraconducteur est donc *renforcé* par l'opacité de la barrière. Cependant, avec des barrières opaques, l'amplitude de S_1 et S_{12} devient très faible, ce qui limite la possibilité de faire des mesures expérimentales dans ce régime.

3.3.6 Système à deux canaux

Motivation

Le modèle proposé pour observer des corrélations positives dans un système fermionique est très difficile à réaliser expérimentalement. Cependant, une possibilité pour le réaliser serait d'utiliser un nanotube de carbone mono-paroi de type métallique ou semi-conducteur. On peut imaginer connecter les extrémités à deux contacts C1 et C2 et ensuite déplacer le

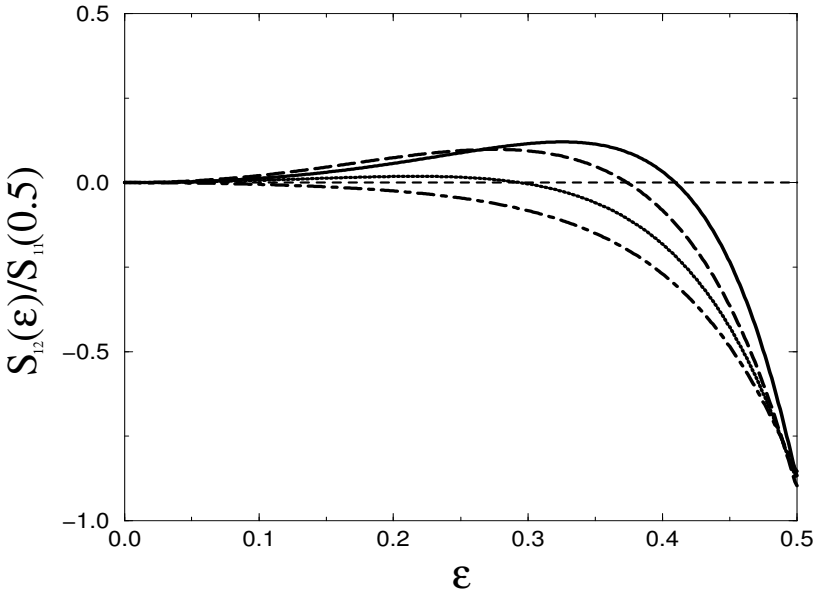

FIG. 3.7: *Corrélations de bruit entre les terminaux 1 et 2 (normalisées au bruit dans 1 ou dans 2 à $\varepsilon = 1/2$) en fonction de la transparence du miroir semi-transparent ε. La jonction N-S est décrite par le modèle BTK avec une barrière très transparente ($Z = 0.1$). De haut en bas, $eV/\Delta = 0.5, 0.95, 1.2, 1.8$.*

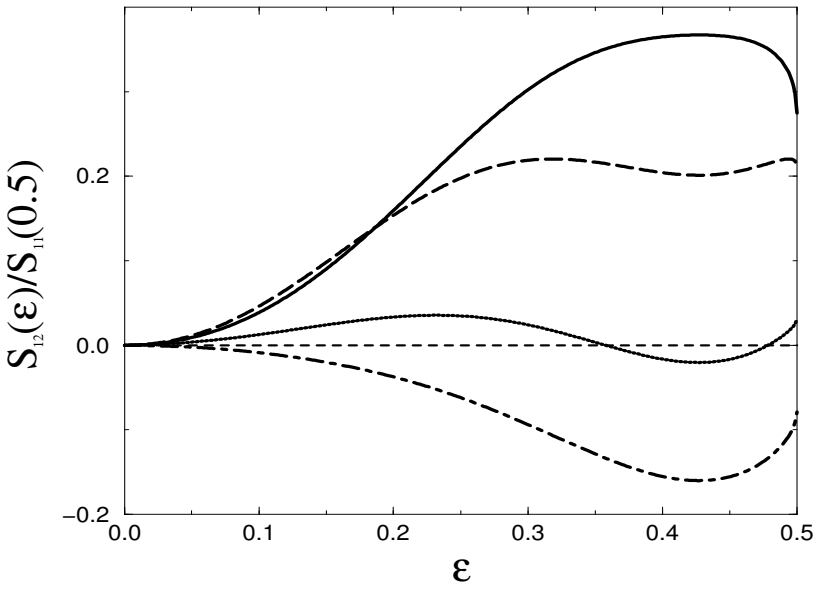

FIG. 3.8: *Corrélations de bruit entre les terminaux 1 et 2 (normalisées au bruit dans 1 ou dans 2 à $\varepsilon = 1/2$) en fonction de ε pour une barrière d'opacité $Z = 1$ (mêmes tensions que sur la figure 3.7).*

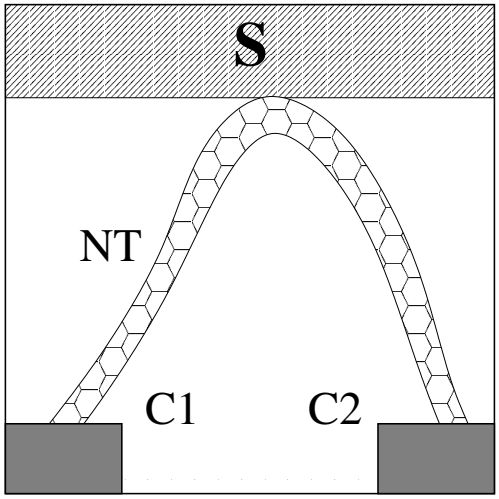

FIG. 3.9: *Proposition de système fermionique pour observer des corrélations positives : un nanotube (NT) est connecté à deux contacts C1 et C2 et rapproché d'un supraconducteur (S).*

corps du nanotube vers un supraconducteur à l'aide de la pointe d'un microscope à force atomique (AFM) (voir figure 3.9). Cependant, un nanotube comporte deux modes qui ont la même énergie de Fermi. De plus, en présence d'impuretés, il peut y avoir de la diffusion d'un mode à l'autre provoqué par du désordre. Or, le modèle proposé ci-dessus ne comporte qu'un seul mode. Il convient donc de le généraliser à deux canaux, voire même à un nombre de canaux quelconque avec une paramétrisation simple du désordre.

On considère donc une généralisation à plusieurs canaux du système présenté au paragraphe 3.3.2. Le mélange entre les canaux a lieu dans deux diffuseurs D1 et D2 situées aux extrémités des deux branches du « Y » (voir figure 3.10). Ces deux diffuseurs sont décrits par des matrices S. En combinant ces matrices de diffusion avec les autres matrices décrivant le miroir semi-transparent et la jonction N-S, on obtient la matrice de diffusion du système global et on peut ainsi calculer les corrélations de bruit.

Matrices S des diffuseurs

On va maintenant présenter une méthode qui permet d'implémenter des matrices aléatoires à désordre fixe de manière numérique. La matrice S des diffuseurs est une matrice unitaire $2N \times 2N$ où N est le nombre de canaux. Elle doit modéliser le désordre en couplant les canaux entre eux et doit dépendre d'un paramètre qui contrôle quantitativement ce désordre. Plus le désordre est fort, plus le mélange entre les canaux est important. Pour générer ces matrices, on va utiliser la méthode décrite dans la référence [65].

Si une matrice S est telle que :

$$S = \exp(iH) \ ,$$

avec H une matrice hermitique, alors S est unitaire. Par exemple, si on choisit :

$$H_0 = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_N & -\mathbf{1}_N \\ -\mathbf{1}_N & \mathbf{1}_N \end{pmatrix} \ , \tag{3.18}$$

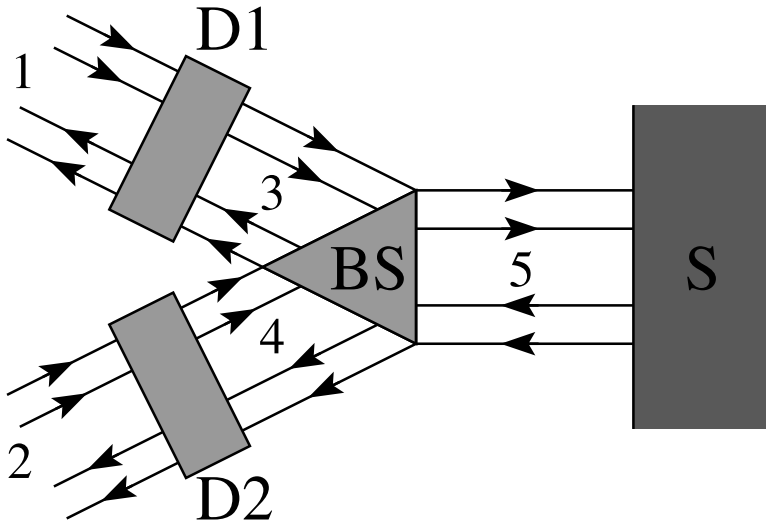

FIG. 3.10: *Jonction en forme de « Y » à deux canaux connectée à un supraconducteur. Les diffuseurs D1 et D2 permettent le mélange entre les deux canaux.*

alors on a :

$$S = \exp(iH_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{1}_N \\ \mathbf{1}_N & \mathbf{0}_N \end{pmatrix} = S_0 \ ,$$

qui est la matrice de transmission parfaite (à un facteur de phase près) sans mélange entre les canaux. Le désordre est introduit grâce à une matrice aléatoire R et un paramètre δ (réel et positif) qui contrôle le taux de désordre. Pour une matrice R donnée, plus δ est grand, plus le désordre est important. Cependant, le désordre varie aussi beaucoup avec le choix de R. On définit donc une norme de matrice :

$$||X|| = \sqrt{\sum_{\alpha,\beta} X_{\alpha\beta}^2} \ .$$

Avec cette définition, la norme de H_0 est égale à $\pi\sqrt{N}$. En choisissant $H = H_0 + \delta\,\pi\sqrt{N}\,R$ avec R normée à 1, on a :

$$\frac{||H - H_0||}{||H_0||} = \delta \ .$$

Puisque le choix (3.18) n'est pas la seule façon d'obtenir la matrice de transmission parfaite S_0 (donc sans désordre), il est possible de retrouver S_0 avec une valeur de δ non nulle, ce qui évidemment n'est pas souhaitable (voir figure 3.11). En pratique, il ne faut pas que δ soit trop grand. On peut d'ailleurs montrer qu'il existe une majoration de δ : $\delta < 1/\sqrt{N}$.

En tirant aléatoirement des matrices R de norme 1, on peut obtenir des matrices S de diffuseurs avec un bon contrôle du désordre. On calcule alors numériquement les corrélations de bruit entre les deux branches 1 et 2 de la jonction en forme de « Y ».

Calcul des corrélations

On combine les matrices S des diffuseurs d'abord avec la matrice S du miroir semi-transparent vue au paragraphe 3.3.3 et ensuite avec la matrice S de la jonction N-S. Pour des

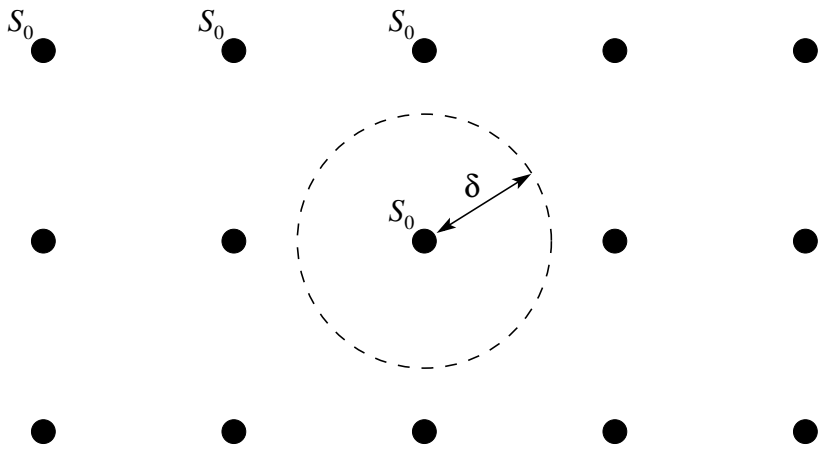

FIG. 3.11: *Matrices de transmission parfaite S_0. Les matrices désordonnées se situent « entre » les matrices S_0. δ contrôle le taux de désordre. On voit que si δ est trop grand, on peut retrouver la matrice S_0.*

raisons de simplicité, on suppose que l'énergie est faible devant le gap du supraconducteur. Comme au paragraphe 3.3.4, on peut faire l'hypothèse que seule la réflexion d'Andreev contribue au transport. On choisit donc une matrice S de la jonction N-S du même type que la matrice (3.13), avec $\gamma = -i$. Ainsi, on obtient la matrice S de tout le système qui va permettre de calculer les corrélations de bruit.

Puisque le courant total dans un terminal est la somme des courants de chaque canal (équation (1.3)), les corrélations totales sont la somme des corrélations entre chaque canal des deux terminaux considérés :

$$S_{12} = \sum_{\alpha\beta} S_{1\alpha 2\beta} \ .$$

D'après l'équation (3.9) et avec l'hypothèse des faibles énergies, on peut écrire la formule donnant les corrélations :

$$\begin{aligned} S_{12} \ = \ & \frac{2e^2}{h} eV \sum_{\alpha\beta} \Big[\\ & \Big(s^*_{11\alpha\alpha ee} s_{11\alpha\alpha eh} - s^*_{11\alpha\alpha he} s_{11\alpha\alpha hh}\Big)\Big(s^*_{21\beta\alpha eh} s_{21\beta\alpha ee} - s^*_{21\beta\alpha hh} s_{21\beta\alpha he}\Big) \\ & + \Big(s^*_{11\alpha\alpha ee} s_{12\alpha\beta eh} - s^*_{11\alpha\alpha he} s_{12\alpha\beta hh}\Big)\Big(s^*_{22\beta\beta eh} s_{21\beta\alpha ee} - s^*_{22\beta\beta hh} s_{21\beta\alpha he}\Big) \\ & + \Big(s^*_{12\alpha\beta ee} s_{11\alpha\alpha eh} - s^*_{12\alpha\alpha he} s_{12\alpha\beta hh}\Big)\Big(s^*_{21\beta\alpha eh} s_{22\beta\beta ee} - s^*_{21\beta\beta hh} s_{21\beta\alpha he}\Big) \\ & + \Big(s^*_{12\alpha\beta ee} s_{12\alpha\beta eh} - s^*_{12\alpha\beta he} s_{12\alpha\beta hh}\Big)\Big(s^*_{22\beta\beta eh} s_{22\beta\beta ee} - s^*_{22\beta\beta hh} s_{22\beta\beta he}\Big)\Big] \ . \end{aligned} \tag{3.19}$$

On calcule numériquement ces corrélations dans un système à deux canaux (comme dans un nanotube) pour différentes valeurs du désordre en moyennant sur quelques centaines de matrices R tirées aléatoirement. Si on trace les corrélations de bruit entre les terminaux 1 et 2 en fonction de la transparence ε du miroir semi-transparent, on constate que l'on obtient toujours des corrélations positives tant que le désordre reste faible. Plus le désordre augmente, plus le domaine dans lequel on retrouve des corrélations positives se restreint. Si

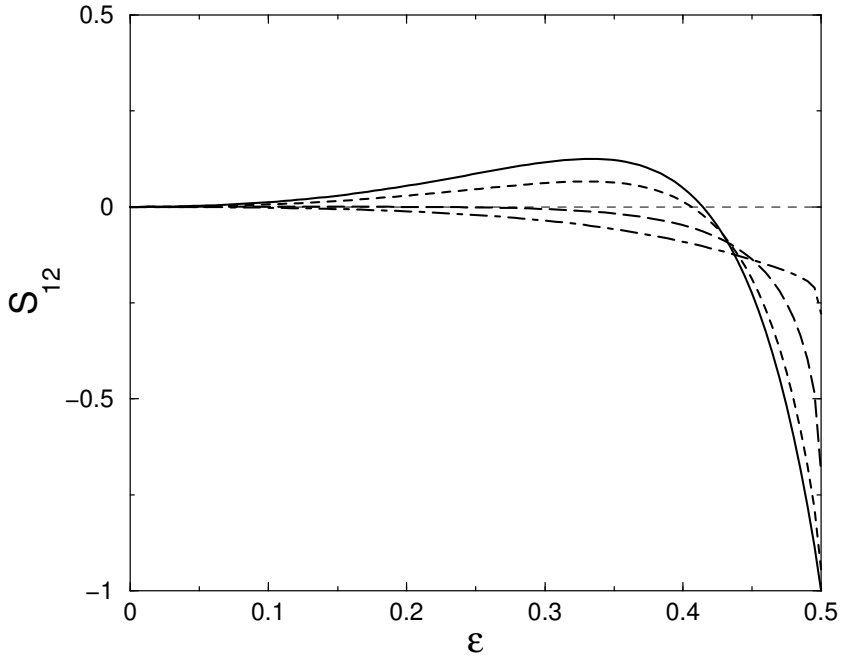

FIG. 3.12: *Corrélations de bruit entre les terminaux 1 et 2 (normalisées au bruit dans 1 ou dans 2) en fonction de la transparence du miroir semi-transparent ε, pour différentes valeurs du désordre : $\delta = 0$, $\delta = 0.1$, $\delta = 0.2$ et $\delta = 0.3$ (de haut en bas). Si le désordre est suffisamment important, les corrélations redeviennent négatives sur toit l'intervalle de ε. Le calcul numérique a été moyenné sur 200 matrices aléatoires.*

le désordre devient suffisamment important ($\delta \gtrsim 0.2$), les corrélations redeviennent négatives quelle que soit la valeur de ε. Dans le cas d'un désordre nul ($\delta = 0$), les deux canaux ne sont pas couplés et on retrouve le résultat (3.17) présenté sur la figure 3.5.

Dans la référence [66], les auteurs ont étudié un système à plusieurs canaux constitué d'une jonction entre un métal normal et un supraconducteur, et la pointe d'un microscope à effet tunnel. Ils ont calculé les corrélations entre le métal normal et la pointe du microscope, montrant que celles-ci pouvaient effectivement être positives, mais que le phénomène disparaît avec l'augmentation du nombre de canaux. Dans notre cas, les calculs numériques à désordre fixé mais avec un nombre de canaux variable tendent à confirmer ce résultat.

Chapitre 4

Courant et bruit dans un formalisme hors de l'équilibre

4.1 Introduction

Au début des années 60, une méthode de théorie des champs a été proposée pour calculer les fonctions de Green d'un système hors de l'équilibre [67, 68, 69]. Cette technique généralement appelée formalisme de Keldysh est une extension directe de la théorie des perturbations [70, 71] au cas des situations hors-équilibre. Elle permet de ramener formellement une situation hors de l'équilibre à une théorie diagrammatique de perturbations à l'équilibre. La méthode de Keldysh a l'avantage d'être assez générale et systématique. Elle constitue une approche perturbative de la mécanique statistique hors-équilibre qui permet d'aller au-delà de la théorie de la réponse linéaire.

Cette méthode est déjà assez ancienne et a donc été utilisée dans des systèmes assez variés. Citons par exemple le calcul de l'équation du transport dans les métaux [72] ou encore le courant tunnel dans un système à deux barrières [73]. Elle a également fait l'objet de plusieurs articles de revue [74, 75, 76]. Suite aux récents progrès expérimentaux en physique mésoscopique, notamment dans l'étude des phénomènes de transport (mesure de conductance, de courant ou de bruit), cette méthode a connu un fort regain d'intérêt, par exemple dans les points quantiques supraconducteurs [77, 78]. En effet, le transport est typiquement une situation où le système est hors de l'équilibre. En général, on considère que le déséquilibre n'est pas trop important, et que l'on peut toujours appliquer la thermodynamique de l'équilibre. C'est exactement ce que l'on a fait dans les précédents chapitres. Mais si le déséquilibre est important, la technique de Keldysh est particulièrement bien adaptée.

Dans ce chapitre, on va d'abord présenter un résumé de la méthode du formalisme de Keldysh, puis on en verra une illustration avec le calcul du courant tunnel et du bruit dans un fil contenant une barrière (modèle unidimensionnel sur sites).

4.2 Fonctions de Green hors de l'équilibre

4.2.1 Définitions, contour de Keldysh

En théorie des perturbations « habituelle », le système évolue de façon réversible. Par conséquent, l'état final (au temps $t = +\infty$) est le même – à une phase près – que l'état

initial (au temps $t = -\infty$). Les valeurs moyennes intervenant par exemple dans les fonctions de Green s'écrivent comme [70] :

$$\begin{aligned} \langle\phi_0|A_H(t)B_H(t')...|\phi_0\rangle &= \langle\phi_0|U_I(-\infty,+\infty)T\left[A_I(t)B_I(t')...U_I(+\infty,-\infty)\right]|\phi_0\rangle \quad (4.1)\\ &= \frac{\langle\phi_0|T\left[A_I(t)B_I(t')...U_I(+\infty,-\infty)\right]|\phi_0\rangle}{\langle\phi_0|U_I(+\infty,-\infty)|\phi_0\rangle}\ , \quad (4.2)\end{aligned}$$

où A et B sont des opérateurs quelconques. L'indice H désigne la représentation de Heisenberg et l'indice I la représentation d'interaction. T est l'opérateur d'ordre chronologique usuel :

$$T\left[A(t)B(t')\right] = \begin{cases} A(t)B(t') & \text{si } t > t' \\ \pm B(t')A(t) & \text{si } t < t' \end{cases}\ ,$$

où le signe supérieur désigne les bosons et le signe inférieur désigne les fermions. Mais si le système évolue de façon irréversible (hors de l'équilibre), l'état final est *différent* de l'état initial, et le passage de la ligne (4.1) à la ligne (4.2) n'est plus vrai. Cependant, il est quand même possible de trouver une relation analogue à (4.2). L'idée est de faire évoluer le système de $t = -\infty$ à $t = +\infty$ puis de revenir au temps $t = -\infty$. Suivant cette logique, il est pratique d'introduire le contour de Keldysh C pour le temps (voir figure 4.1). On définit alors T_C l'opérateur d'ordre chronologique sur le contour :

$$T_C\left[A(t)B(t')\right] = \begin{cases} A(t)B(t') & \text{si } t >_C t' \\ \pm B(t')A(t) & \text{si } t <_C t' \end{cases}\ .$$

On a introduit ici le signe « $>_C$ » (et bien évidemment son contraire « $<_C$ ») qui signifie que si $t' >_C t$ alors t' arrive après t en suivant le contour de Keldysh, même si $t' < t$ dans l'absolu, comme c'est le cas sur la figure 4.1. Dans l'équation (4.1), si l'on considère que les temps dans le premier opérateur $U_I(-\infty,+\infty)$ appartiennent à la branche inférieure du contour de Keldysh, et que les temps sous l'opérateur T appartiennent à la branche supérieure, alors tous les opérateurs de (4.1) sont dans l'ordre chronologique sur le contour C. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\langle\phi_0|U_I(-\infty,+\infty)T\left[A_I(t)B_I(t')...U_I(+\infty,-\infty)\right]|\phi_0\rangle = \\ \langle\phi_0|T_C\left[A_I(t)B_I(t')...S_C\right]|\phi_0\rangle\ . \quad (4.3)\end{aligned}$$

S_C est le produit des opérateurs d'évolution sur chacune des branches :

$$S_C = U_I(-\infty,+\infty)U_I(+\infty,-\infty) = T_C \exp -\frac{i}{\hbar}\int_C dt\ H_{int\ I}(t)\ . \quad (4.4)$$

Dans la mesure où l'opérateur T_C ordonne les autres opérateurs sur le contour de Keldysh, on peut choisir des temps sur l'une ou l'autre des branches. Ainsi, les fonctions de Green font intervenir deux temps différents. Il existe donc quatre façons de les définir :

$$G^{\eta\eta'}(r,t_\eta,r',t'_{\eta'}) = -i\langle T_C\left[\Psi_H(r,t_\eta)\Psi_H^+(r',t'_{\eta'})\right]\rangle\ ,$$

où η et η' sont les indices de branche ($\eta = \pm$). En tenant compte des positions des temps sur les branches du contour, les fonctions de Green de Keldysh peuvent s'exprimer comme :

$$\begin{cases} G^{++}(r,t_+,r',t'_+) &= -i\langle T\left(\Psi_H(r,t)\Psi_H^+(r',t')\right)\rangle \\ G^{+-}(r,t_+,r',t'_-) &= \mp i\langle\Psi_H^+(r',t')\Psi_H(r,t)\rangle \\ G^{-+}(r,t_-,r',t'_+) &= -i\langle\Psi_H(r,t)\Psi_H^+(r',t')\rangle \\ G^{--}(r,t_-,r',t'_-) &= -i\langle\widetilde{T}\left(\Psi_H(r,t)\Psi_H^+(r',t')\right)\rangle \end{cases}\ ,$$

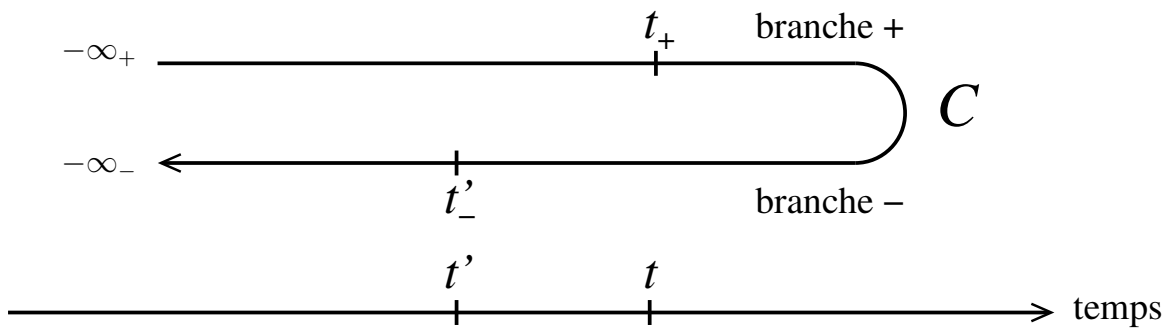

FIG. 4.1: *Contour de Keldysh C. Ici, $t > t'$ mais $t'_- >_C t_+$.*

où T est l'opérateur d'ordre chronologique habituel et $\widetilde{T}$ l'opérateur d'ordre anti-chronologique. D'après ces définitions, on peut montrer que :

$$G^{++} + G^{--} = G^{+-} + G^{-+} \ .$$

Ces fonctions de Green se rangent naturellement dans une matrice :

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} G^{++} & G^{+-} \\ G^{-+} & G^{--} \end{pmatrix} \ .$$

Cette notation matricielle sera très utile par la suite pour condenser les notations, notamment pour écrire les développements en équation de Dyson.

4.2.2 Expression des fonctions de Green en représentation d'interaction

En général, la plupart des quantités physiques d'un système peuvent s'exprimer à l'aide de fonctions de Green. Mais il est rarement possible de calculer explicitement celles-ci dès lors que le système subit une perturbation. Par contre, la fonction de Green du système non-perturbé est en principe bien connue. L'idée est donc d'effectuer un développement perturbatif des fonctions de Green du système perturbé en les réécrivant à partir de la fonction de Green du système non-perturbé. La première étape consiste à les reformuler en représentation d'interaction. Ce passage se fait en utilisant l'équation (4.3). La fonction de Green de Keldysh se met alors sous la forme suivante :

$$G^{\eta\eta'}(r, t_\eta, r', t'_{\eta'}) = -i\langle T_C \left[\Psi_I(r, t_\eta)\Psi_I^+(r', t'_{\eta'})S_C\right]\rangle \ . \tag{4.5}$$

On a donc obtenu une expression de la fonction de Green de Keldysh similaire à l'équation (4.2). C'est cette expression qui va servir de base au développement perturbatif.

4.2.3 Equation de Dyson

Comme dans la théorie des perturbations usuelle, il est possible d'établir une équation de Dyson pour la fonction de Green. On prend par exemple le cas où la perturbation est un

potentiel instantané :

$$H_{int\ I}(t) = \int dr_1\ dr_1'\ U(r_1, r_1')\Psi_I^+(r_1, t+\epsilon)\Psi_I(r_1', t)\ .$$

ϵ est une constante positive très petite introduite pour évaluer les fonctions de Green à deux temps différents. On la fera tendre vers 0 à la fin du calcul. L'intégration sur le contour se décompose en deux parties :

$$\int_C dt = \int_{-\infty_+}^{+\infty_+} dt_+ - \int_{-\infty_-}^{+\infty_-} dt_-\ .$$

Le développement perturbatif de la fonction de Green de Keldysh repose généralement sur le développement de l'opérateur d'évolution (4.4). Au premier ordre, la fonction de Green devient :

$$\begin{aligned}
-i\langle T_C\left[\Psi_I(r,t_\eta)\Psi_I^+(r',t'_{\eta'})S_C\right]\rangle &= -i\langle T_C\left[\Psi_I(r,t_\eta)\Psi_I^+(r',t'_{\eta'})\right]\rangle \\
&\quad +(-i)\left(\frac{-i}{\hbar}\right)\int dr_1\ dr_1'\int_{-\infty_+}^{+\infty_+} dt_{1+}\ U(r_1,r_1') \\
&\quad \langle T_C\left[\Psi_I(r,t_\eta)\Psi_I^+(r',t'_{\eta'})\Psi_I^+(r_1,t_{1+}+\epsilon)\Psi_I(r_1',t_{1+})\right]\rangle \\
&\quad -(-i)\left(\frac{-i}{\hbar}\right)\int dr_1\ dr_1'\int_{-\infty_-}^{+\infty_-} dt_{1-}\ U(r_1,r_1') \\
&\quad \langle T_C\left[\Psi_I(r,t_\eta)\Psi_I^+(r',t'_{\eta'})\Psi_I^+(r_1,t_{1-}+\epsilon)\Psi_I(r_1',t_{1-})\right]\rangle\ .
\end{aligned}$$

On applique alors le théorème de Wick afin de regrouper les opérateurs de création et d'annihilation sous forme de valeurs moyennes :

$$\begin{aligned}
&\langle T_C\left[\Psi_I(r,t_\eta)\Psi_I^+(r',t'_{\eta'})\Psi_I^+(r_1,t_{1+}+\epsilon)\Psi_I(r_1',t_{1+})\right]\rangle \\
&\quad = \langle T_C\left[\Psi_I(r,t_\eta)\Psi_I^+(r',t'_{\eta'})\right]\rangle\langle\Psi_I^+(r_1,t_{1+}+\epsilon)\Psi_I(r_1',t_{1+})\rangle \\
&\qquad +\langle T_C\left[\Psi_I(r,t_\eta)\Psi_I^+(r_1,t_{1+}+\epsilon)\right]\rangle\langle T_C\left[\Psi_I^+(r',t'_{\eta'})\Psi_I(r_1',t_{1+})\right]\rangle \\
&\quad = ig^{\eta\eta'}(r,t_\eta,r',t'_{\eta'})(-i)g^{++}(r_1',t_{1+},r_1,t_{1+}+\epsilon) \\
&\qquad + ig^{\eta+}(r,t_\eta,r_1,t_{1+}+\epsilon)ig^{+\eta'}(r_1',t_{1+},r',t'_{\eta'})\ ,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

où $g^{\eta\eta'}(r,t_\eta,r',t'_{\eta'}) = -i\langle T_C\left[\Psi_I(r,t_\eta)\Psi_I^+(r',t'_{\eta'})\right]\rangle$ est la fonction de Green non-perturbée (donc à l'équilibre). De la même façon :

$$\begin{aligned}
&\langle T_C\left[\Psi_I(r,t_\eta)\Psi_I^+(r',t'_{\eta'})\Psi_I^+(r_1,t_{1-}+\epsilon)\Psi_I(r_1',t_{1-})\right]\rangle \\
&\quad = g^{\eta\eta'}(r,t_\eta,r',t'_{\eta'})g^{--}(r_1',t_{1-},r_1,t_{1-}+\epsilon) \\
&\qquad - g^{\eta-}(r,t_\eta,r_1,t_{1-}+\epsilon)g^{-\eta'}(r_1',t_{1-},r',t'_{\eta'})\ .
\end{aligned} \tag{4.7}$$

En regroupant les équations (4.6) et (4.7), on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
G^{\eta\eta'}(r,t_\eta,r',t'_{\eta'}) &= g^{\eta\eta'}(r,t_\eta,r',t'_{\eta'}) \\
&\quad +\frac{1}{\hbar}\int dr_1\ dr_1'\int_{-\infty_+}^{+\infty_+} dt_{1+}\ U(r_1,r_1')g^{\eta+}(r,t_\eta,r_1,t_{1+}+\epsilon)g^{+\eta'}(r_1',t_{1+},r',t'_{\eta'}) \\
&\quad -\frac{1}{\hbar}\int dr_1\ dr_1'\int_{-\infty_-}^{+\infty_-} dt_{1-}\ U(r_1,r_1')g^{\eta-}(r,t_\eta,r_1,t_{1-}+\epsilon)g^{-\eta'}(r_1',t_{1-},r',t'_{\eta'})\ .
\end{aligned}$$

On peut réécrire ce résultat sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(r,t,r',t') &= \boldsymbol{g}(r,t,r',t') \\ &\quad + \int dr_1\ dr_1' \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\ \boldsymbol{g}(r,t,r_1,t_1+\epsilon)\boldsymbol{\Sigma}(r_1,r_1')\boldsymbol{g}(r_1',t_1,r',t')\ ,\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\boldsymbol{\Sigma}(r_1,r_1') = \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} U(r_1,r_1') & 0 \\ 0 & -U(r_1,r_1') \end{pmatrix}\ ,$$

qui correspond à la matrice de self-énergie.

En poursuivant le développement aux ordres supérieurs, on obtient une équation intégrale de Dyson matricielle :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(r,t,r',t') &= \boldsymbol{g}(r,t,r',t') \\ &\quad + \int dr_1\ dr_1' \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\ \boldsymbol{g}(r,t,r_1,t_1+\epsilon)\boldsymbol{\Sigma}(r_1,r_1')\boldsymbol{G}(r_1',t_1,r',t')\ . \qquad (4.8)\end{aligned}$$

Si aucun champ magnétique n'est appliqué, les fonctions de Green ne dépendent que de la différence des temps. Il est alors naturel de réécrire l'équation (4.8) ci-dessus en transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(r,r',\omega) &= \boldsymbol{g}(r,r',\omega) \\ &\quad + \int dr_1\ dr_1'\ \boldsymbol{g}(r,r_1,\omega)\boldsymbol{\Sigma}(r_1,r_1')\boldsymbol{G}(r_1',r',\omega)\ . \qquad (4.9)\end{aligned}$$

On peut généraliser cette équation avec un potentiel quelconque. On obtient (en notation formelle, c'est-à-dire en omettant les sommes, les intégrales et les variables d'espace et de temps ou de fréquence) :

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{g}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{G}\ . \qquad (4.10)$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ est la matrice de self-énergie. Ses éléments se notent de façon analogue à ceux de la matrice $\boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma^{++} & \Sigma^{+-} \\ \Sigma^{-+} & \Sigma^{--} \end{pmatrix}\ ,$$

et on a la relation :

$$\Sigma^{++} + \Sigma^{--} = -(\Sigma^{+-} + \Sigma^{-+})\ . \qquad (4.11)$$

Il est pratique d'effectuer une transformation unitaire :

$$\overline{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{G}\boldsymbol{L}^{-1}\ ,$$

où :

$$L = \frac{1 - i\boldsymbol{\sigma}_y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ ,$$

avec la matrice de Pauli :

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Ainsi :

$$\overline{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{G}\boldsymbol{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & G^a \\ G^r & G^k \end{pmatrix}\ .$$

G^a est la fonction de Green avancée :

$$\begin{aligned} G^a(r,t,r',t') &= G^{++}(r,t,r',t') - G^{-+}(r,t,r',t') && (4.12)\\ &= G^{+-}(r,t,r',t') - G^{--}(r,t,r',t') && (4.13)\\ &= i\theta(t'-t)\langle\left\{\Psi_H(r,t),\Psi_H^+(r',t')\right\}_{\mp}\rangle\ , \end{aligned}$$

où $\{...\}_-$ désigne le commutateur et $\{...\}_+$ l'anticommutateur. G^r est la fonction de Green retardée :

$$\begin{aligned} G^r(r,t,r',t') &= G^{++}(r,t,r',t') - G^{+-}(r,t,r',t') && (4.14)\\ &= G^{-+}(r,t,r',t') - G^{--}(r,t,r',t') && (4.15)\\ &= -i\theta(t-t')\langle\left\{\Psi_H(r,t),\Psi_H^+(r',t')\right\}_{\mp}\rangle\ . \end{aligned}$$

G^k est la fonction de Green de Keldysh :

$$\begin{aligned} G^k(r,t,r',t') &= G^{++}(r,t,r',t') + G^{--}(r,t,r',t') && (4.16)\\ &= G^{+-}(r,t,r',t') + G^{-+}(r,t,r',t') && (4.17)\\ &= -i\langle\left\{\Psi_H(r,t),\Psi_H^+(r',t')\right\}_{\pm}\rangle\ . \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} G^{+-}(r,t,r',t') &= \frac{1}{2}\left[G^k(r,t,r',t') + G^a(r,t,r',t') - G^r(r,t,r',t')\right]\ , && (4.18)\\ G^{-+}(r,t,r',t') &= \frac{1}{2}\left[G^k(r,t,r',t') - G^a(r,t,r',t') + G^r(r,t,r',t')\right]\ . && (4.19) \end{aligned}$$

De la même façon, la matrice de self-énergie est transformée :

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma^k & \Sigma^r \\ \Sigma^a & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

avec cette fois :

$$\begin{cases} \Sigma^k &= \Sigma^{++} + \Sigma^{--} \\ \Sigma^r &= \Sigma^{++} + \Sigma^{+-} \\ \Sigma^a &= \Sigma^{++} + \Sigma^{-+} \end{cases}\ ,$$

où l'on a utilisé l'identité (4.11). Avec l'exemple précédent du potentiel instantané, on obtient $\Sigma^a(r_1,r_1') = \Sigma^r(r_1,r_1') = U(r_1,r_1')$ et $\Sigma^k = 0$.

L'unitarité de la transformation préserve la validité de l'équation de Dyson (4.10) :

$$\overline{\boldsymbol{G}} = \overline{\boldsymbol{g}} + \overline{\boldsymbol{g}}\,\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\,\overline{\boldsymbol{G}}\ . \tag{4.20}$$

On développe cette équation et on obtient pour chaque élément de matrice :

$$\begin{cases} G^a &= g^a + g^a\Sigma^a G^a \\ G^r &= g^r + g^r\Sigma^r G^r \\ G^k &= g^k + g^r\Sigma^r G^k + g^k\Sigma^a G^a + g^r\Sigma^k G^a\ . \end{cases}$$

On a donc trois équations de Dyson qui vont permettre de calculer les fonctions de Green de Keldysh, soit explicitement si on connaît la self-énergie et les fonctions de Green non-perturbées soit en faisant un développement perturbatif.

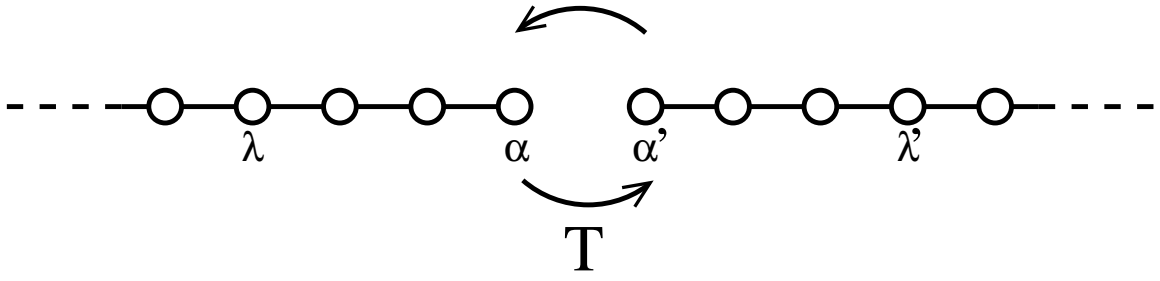

FIG. 4.2: *Modèle de fil avec des sites discrets comportant une barrière. Deux chaînes semi-infinies sont en contact par l'intermédiaire d'une perturbation $\mathcal{H}_{int}$ (4.21). Les électrons ne peuvent pas circuler entre les sites α et α' tant que la perturbation n'est pas activée.*

4.3 Fil contenant une barrière

4.3.1 Modèle

On va maintenant voir une application du formalisme de Keldysh sur un modèle de fil contenant une barrière, directement inspiré de celui de la référence [73]. Dans ce cas, les auteurs ont étudié une jonction métal-isolant-métal (deux barrières) dans laquelle ils ont calculé le courant tunnel. Pour ces deux modèles, les fonctions de Green de Keldysh s'expriment à partir des fonctions de Green à l'équilibre grâce à l'équation de Dyson (4.10) et (4.20). En transformée de Fourier, il n'est pas nécessaire de faire un développement perturbatif des fonctions de Green. On pourra alors calculer exactement le courant tunnel traversant la barrière ainsi que le bruit dans le cas des fermions et des bosons.

On considère un fil unidimensionnel composé de sites discrets (par exemple des sites atomiques) et séparé en deux chaînes semi-infinies (deux électrodes) par une barrière (voir figure 4.2). Les particules circulent le long du fil en passant de site en site. Il n'y a pas d'interaction donc le Hamiltonien est purement cinétique :

$$\mathcal{H}_0 = T_0 \sum_{\lambda} \left(c_{\lambda}^{+} c_{\lambda+1} + c_{\lambda+1}^{+} c_{\lambda} \right) + T_0 \sum_{\lambda'} \left(c_{\lambda'}^{+} c_{\lambda'+1} + c_{\lambda'+1}^{+} c_{\lambda'} \right) \ .$$

Le premier terme correspond aux Hamiltoniens de l'électrode de gauche et le second à celle de droite. On introduit ensuite adiabatiquement une perturbation qui autorise le passage du courant d'une chaîne à l'autre. Le Hamiltonien $\mathcal{H}_{int}$ de cette perturbation couple les deux extrémités des électrodes (sites α et α'). A l'instar de $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_{int}$ est également cinétique, mais avec une constante de couplage différente :

$$\mathcal{H}_{int} = \hbar T \left(c_{\alpha}^{+} c_{\alpha'} + c_{\alpha'}^{+} c_{\alpha} \right) \ . \tag{4.21}$$

Le Hamiltonien total est la somme des deux Hamiltoniens :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \ .$$

Tant que l'on n'établit pas une différence de potentiel entre les deux électrodes, le système – même avec la perturbation – reste à l'équilibre et aucun courant ne circule.

4.3.2 Fonctions de Green à l'équilibre

La plupart des quantités physiques peuvent s'exprimer à partir des fonctions de Green. On va donc calculer celles-ci d'abord à l'équilibre, puis hors de l'équilibre à partir du résultat à l'équilibre (appendice D). La fonction de Green non-perturbée est définie comme :

$$g_{\lambda\mu}(t,t') = -i\langle c_\lambda(t) c_\mu^+(t')\rangle_0 \ ,$$

où la valeur moyenne est prise par rapport au Hamiltonien sans perturbation. Les deux chaînes étant totalement déconnectées, les fonctions de Green mettant en jeu un site de la première chaîne et un site de la deuxième chaîne sont nulles :

$$g_{\lambda\mu'}(t,t') = 0 \ .$$

Lorsqu'on inclut la perturbation, on définit la fonction de Green totale comme :

$$G_{\lambda\mu}(t,t') = -i\langle c_\lambda(t) c_\mu^+(t')\rangle \ ,$$

où cette fois, la valeur moyenne est prise par rapport au Hamiltonien total. Malgré la perturbation, le système est toujours à l'équilibre, car aucune différence de potentiel n'est appliquée.

Ces fonctions de Green obéissent à une équation de Dyson que l'on préférera écrire en transformée de Fourier pour éviter de manipuler une équation intégrale :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} G_{\lambda\mu}(\omega) & = & g_{\lambda\mu}(\omega) & + & g_{\lambda\alpha}(\omega) T\, G_{\alpha'\mu}(\omega) \\ G_{\lambda'\mu'}(\omega) & = & g_{\lambda'\mu'}(\omega) & + & g_{\lambda'\alpha'}(\omega) T\, G_{\alpha\mu'}(\omega) \\ G_{\lambda\mu'}(\omega) & = & & & g_{\lambda\alpha}(\omega) T\, G_{\alpha'\mu'}(\omega) \\ G_{\lambda'\mu}(\omega) & = & & & g_{\lambda'\alpha'}(\omega) T\, G_{\alpha\mu}(\omega) \end{array}\right. \ . \tag{4.22}$$

Ici, T correspond à la self-énergie. On peut résoudre le système (4.22). On trouve (en omettant ω pour alléger la notation) :

$$\begin{aligned} G_{\alpha\alpha} &= \frac{g_{\alpha\alpha}}{1 - T^2 g_{\alpha\alpha} g_{\alpha'\alpha'}} \ , \\ G_{\alpha'\alpha'} &= \frac{g_{\alpha'\alpha'}}{1 - T^2 g_{\alpha\alpha} g_{\alpha'\alpha'}} \ , \\ G_{\lambda\mu} &= g_{\lambda\mu} + \frac{g_{\lambda\alpha} g_{\alpha\mu} g_{\alpha'\alpha'} T^2}{1 - T^2 g_{\alpha\alpha} g_{\alpha'\alpha'}} \ , \\ G_{\lambda'\mu'} &= g_{\lambda'\mu'} + \frac{g_{\lambda'\alpha'} g_{\alpha'\mu'} g_{\alpha\alpha} T^2}{1 - T^2 g_{\alpha\alpha} g_{\alpha'\alpha'}} \ , \\ G_{\lambda\mu'} &= \frac{g_{\lambda\alpha} g_{\alpha'\mu'} T}{1 - T^2 g_{\alpha\alpha} g_{\alpha'\alpha'}} \ , \\ G_{\lambda'\mu} &= \frac{g_{\lambda'\alpha'} g_{\alpha\mu} T}{1 - T^2 g_{\alpha\alpha} g_{\alpha'\alpha'}} \ . \end{aligned}$$

L'interprétation physique de ces fonctions de Green peut être faite en termes de probabilité de présence. En effet le carré du module de la fonction de $G_{\lambda\mu}(t,t')$ correspond à la probabilité de trouver une particule sur le site μ au temps t' sachant qu'elle était sur le site λ au temps t. Ainsi, $G_{\alpha\alpha}$ peut être vue comme la probabilité pour un électron de revenir du site α en restant sur la même branche (terme $g_{\alpha\alpha}$) multipliée par la probabilité de revenir du site α en passant par l'autre branche (terme $1/[1 - T^2 g_{\alpha\alpha} g_{\alpha'\alpha'}]$). Le dénominateur correspond à la sommation d'une série géométrique comme dans le cas des aller-retours multiples d'un interféromètre de type Fabry-Pérot.

4.3.3 Relation entre les fonctions de Green à l'équilibre et la densité d'états

Supposons qu'il existe une base de fonctions d'onde $|\phi_n\rangle$ dans laquelle le Hamiltonien soit diagonal :

$$\mathcal{H}|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle \ .$$

On appelle γ_n l'opérateur d'annihilation associé à la fonction d'onde $|\phi_n\rangle$. On peut alors décomposer les opérateurs c_λ et c_λ^+ sur cette base :

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_\lambda(t) & = & \displaystyle\sum_n e^{-iE_n t/\hbar}\langle\phi_n|\lambda\rangle\gamma_n \\ \\ c_\lambda^+(t) & = & \displaystyle\sum_n e^{iE_n t/\hbar}\langle\lambda|\phi_n\rangle\gamma_n^+ \end{array}\right. .$$

On s'intéresse aux fonctions de Green au même site :

$$\begin{aligned} g_{\lambda\lambda}^{+-}(t,t') &= \mp i\langle c_\lambda^+(t')c_\lambda(t)\rangle \\ &= \mp i\sum_{n,n'} e^{-iE_n t/\hbar}e^{iE_{n'}t'/\hbar}\langle\lambda|\phi_{n'}\rangle\langle\phi_n|\lambda\rangle\langle\gamma_{n'}^+\gamma_n\rangle \\ &= \mp i\sum_n e^{-iE_n(t-t')/\hbar}|\langle\lambda|\phi_n\rangle|^2 n_F(E_n) \ , \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\langle\gamma_n^+\gamma_{n'}\rangle = n(E_n)\delta_{n,n'}$, avec $n(E_n)$ le facteur d'occupation, qui est la distribution de Fermi-Dirac ou de Bose-Einstein suivant la statistique. On pose alors $\tau = t - t'$ et on passe en transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} g_{\lambda\lambda}^{+-}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau} g_{\lambda\lambda}^{+-}(\tau) \\ &= \mp\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, i\sum_n e^{i(\omega - E_n/\hbar)\tau}|\langle\lambda|\phi_n\rangle|^2 n_F(E_n) \\ &= \mp 2\pi i\sum_n |\langle\lambda|\phi_n\rangle|^2 n(E_n)\delta(\omega - E_n/\hbar) \ . \end{aligned} \tag{4.23}$$

De même :

$$g_{\lambda\lambda}^{-+}(\omega) = -2\pi i\sum_n |\langle\lambda|\phi_n\rangle|^2(1 \pm n(E_n))\delta(\omega - E_n/\hbar) \ . \tag{4.24}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} g_{\lambda\lambda}^{a}(t,t') &= i\theta(t'-t)\langle\{c_\lambda(t), c_\lambda^+(t')\}_\mp\rangle \\ &= i\theta(t'-t)\sum_{n,n'} e^{-iE_n t/\hbar}e^{iE_{n'}t'/\hbar}\langle\lambda|\phi_{n'}\rangle\langle\phi_n|\lambda\rangle\langle\gamma_{n'}^+\gamma_n \mp \gamma_n\gamma_{n'}^+\rangle \\ &= i\theta(t'-t)\sum_n e^{-iE_n(t-t')/\hbar}|\langle\lambda|\phi_n\rangle|^2 \ , \end{aligned}$$

avec $\gamma_{n'}^{+}\gamma_n \mp \gamma_n\gamma_{n'}^{+} = \delta_{n,n'}$. On passe en transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} g_{\lambda\lambda}^{a}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau} g_{\lambda\lambda}^{a}(\tau) \\ &= i\int_{-\infty}^{0} d\tau \sum_n e^{i(\omega - E_n/\hbar - i\eta)\tau} |\langle\lambda|\phi_n\rangle|^2 \\ &= i\sum_n \frac{1}{i(\omega - E_n/\hbar - i\eta)} |\langle\lambda|\phi_n\rangle|^2 \\ &= -\sum_n |\langle\lambda|\phi_n\rangle|^2 \mathcal{P}\left(\frac{1}{E_n/\hbar - \omega}\right) + i\pi \sum_n |\langle\lambda|\phi_n\rangle|^2 \delta(E_n/\hbar - \omega)\ , \end{aligned} \tag{4.25}$$

où η est une constante introduite pour faire converger l'intégrale. $\mathcal{P}$ désigne la partie principale de Cauchy. En comparant les équations (4.23) et (4.25), on peut écrire :

$$\begin{aligned} g_{\lambda\lambda}^{+-}(\omega) &= \mp 2\pi i\, n(\omega) \frac{\mathrm{Im}\,(g_{\lambda\lambda}^{a}(\omega))}{\pi} \\ &= \mp 2\pi i\, n(\omega)\rho(\omega)\ , \end{aligned} \tag{4.26}$$

où l'on a posé :

$$\rho(\omega) = \frac{\mathrm{Im}\,(g_{\lambda\lambda}^{a}(\omega))}{\pi} = \sum_n |\langle\lambda|\phi_n\rangle|^2 \delta(E_n/\hbar - \omega)\ .$$

Sous la forme d'une somme de fonctions δ de l'énergie, on reconnaît que $\rho(\omega)$ correspond à la densité d'états locale (au niveau du site λ).

De la même façon que ci-dessus, on montre que :

$$g_{\lambda\lambda}^{-+}(\omega) = -2\pi i(1 \pm n(\omega))\rho(\omega)\ . \tag{4.27}$$

4.3.4 Courant moyen

On applique une différence de potentiel V entre les deux extrémités du fil. Un courant circule alors et le système se retrouve hors de l'équilibre. De manière générale, le courant s'écrit comme la différence du nombre d'électrons allant dans un sens avec le nombre d'électrons allant dans l'autre sens en un site donné :

$$I_\mu(t) = eC\left(c_{\mu-1}^{+}(t)c_\mu(t) - c_\mu^{+}(t)c_{\mu-1}(t)\right)\ , \tag{4.28}$$

où e est la charge de l'électron et C une constante à déterminer. L'équation de continuité donne :

$$I_{\mu+1} - I_\mu + e\frac{\partial\rho_\mu}{\partial t} = 0\ . \tag{4.29}$$

La différence des courants sur deux sites voisins correspond à l'équivalent discret de la divergence. D'autre part, l'évolution temporelle de l'opérateur densité est donnée par le commutateur suivant :

$$\frac{\partial\rho_\mu}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\rho_\mu, \mathcal{H}] = \frac{T'}{i\hbar}\left(c_\mu^{+}c_{\mu+1} - c_{\mu-1}^{+}c_\mu + c_\mu^{+}c_{\mu-1} - c_{\mu+1}^{+}c_\mu\right)\ . \tag{4.30}$$

En comparant les trois équations (4.28), (4.29) et (4.30), on trouve que $C = iT$. Lorsque l'on prend la valeur moyenne de l'équation (4.28), on constate que le courant moyen (en

transformée de Fourier) peut se mettre sous la forme d'une différence des deux fonctions de Green $G^{+-}_{\alpha'\alpha}(\omega)$ et $G^{+-}_{\alpha\alpha'}(\omega)$. Dans l'appendice D, on exprime ces deux fonctions de Green de Keldysh grâce aux fonctions de Green à l'équilibre (équations (D.2) et (D.3)). Le courant moyen devient donc :

$$\begin{aligned}
\langle I\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \langle I(\omega)\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, eT\left(G^{+-}_{\alpha'\alpha}(\omega) - G^{+-}_{\alpha\alpha'}(\omega)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, eT\frac{T\left(g^{+-}_{\alpha\alpha}g^{-+}_{\alpha'\alpha'} - g^{-+}_{\alpha\alpha}g^{+-}_{\alpha'\alpha'}\right)}{(1-T^2g^a_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'})(1-T^2g^r_{\alpha\alpha}g^r_{\alpha'\alpha'})} \\
&= \mp\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, eT\frac{4\pi^2T\rho_\alpha(\omega-eV/\hbar)\rho_{\alpha'}(\omega)\left[n_\alpha(\omega-eV/\hbar)-n_{\alpha'}(\omega)\right]}{\left[1-T^2g^a_{\alpha\alpha}(\omega-eV/\hbar)g^a_{\alpha'\alpha'}(\omega)\right]\left[1-T^2g^r_{\alpha\alpha}(\omega-eV/\hbar)g^r_{\alpha'\alpha'}(\omega)\right]}\ ,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

où l'on a utilisé les relations (4.13), (4.15) et (4.17), ainsi que les résultats (4.26) et (4.27). Or, d'après l'équation (1.5) du chapitre 1 le courant moyen est proportionnel à la différence des facteurs d'occupation :

$$\langle I(\omega)\rangle = \mp e\mathcal{T}(\omega,V)\left(n_\alpha(\omega-eV/\hbar)-n_{\alpha'}(\omega)\right) \tag{4.32}$$

En identifiant les équations (4.31) et (4.32), on trouve le coefficient de transmission :

$$\mathcal{T}(\omega,V) = \frac{4\pi^2T^2\rho_\alpha(\omega-eV/\hbar)\rho_{\alpha'}(\omega)}{\left[1-T^2g^a_{\alpha\alpha}(\omega-eV/\hbar)g^a_{\alpha'\alpha'}(\omega)\right]\left[1-T^2g^r_{\alpha\alpha}(\omega-eV/\hbar)g^r_{\alpha'\alpha'}(\omega)\right]}\ .$$

On peut remarquer que ce coefficient dépend de la fréquence, donc de l'énergie, mais tant que la différence de potentiel eV reste faible devant l'énergie T de la barrière, $\mathcal{T}$ varie peu. De fait, si on suppose que le coefficient de transmission est constant, on retrouve effectivement le courant moyen (1.6) et la formule de Landauer (1.7) [1] vus au chapitre 1 dans la limite des températures nulles.

4.3.5 Bruit

On cherche maintenant à calculer le bruit généré par la présence de la barrière. Le bruit fait intervenir un corrélateur courant-courant à deux temps différents (voir la définition (1.10) au chapitre 1). Ces deux temps doivent être choisis sur chacune des branches du contour de Keldysh. Il est alors naturel d'utiliser un corrélateur symétrisé :

$$S(t,t') = \frac{1}{2}\langle I(t_-)I(t'_+) + I(t'_-)I(t_+)\rangle - \langle I\rangle^2\ . \tag{4.33}$$

Grâce à la conservation du courant, on pourrait calculer ce corrélateur en un site quelconque du fil. Cependant, il est naturel (et techniquement plus facile) de le calculer avec le courant pris au niveau de la barrière (site α ou α') :

$$I_\alpha(t) = ieT\left(c^+_\alpha(t)c_{\alpha'}(t) - c^+_{\alpha'}(t)c_\alpha(t)\right)\ .$$

1. à un facteur 2 près, dû au fait que l'on n'a pas tenu compte du spin ici.

En utilisant cette expression du courant sur le site α, le corrélateur (4.33) se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S(t,t') &= -\frac{e^2T^2}{2}\langle\left[c_\alpha^+(t_-)c_{\alpha'}(t_-)-c_{\alpha'}^+(t_-)c_\alpha(t_-)\right]\left[c_\alpha^+(t'_+)c_{\alpha'}(t'_+)-c_{\alpha'}^+(t'_+)c_\alpha(t'_+)\right] \\ &\quad +\left[c_\alpha^+(t'_-)c_{\alpha'}(t'_-)-c_{\alpha'}^+(t'_-)c_\alpha(t'_-)\right]\left[c_\alpha^+(t_+)c_{\alpha'}(t_+)-c_{\alpha'}^+(t_+)c_\alpha(t_+)\right]\rangle \\ &\quad -\langle I\rangle^2 \ . \end{aligned}$$

On applique le théorème de Wick pour regrouper les opérateurs de création et d'annihilation sous forme de valeurs moyennes que l'on réexprime à l'aide des fonctions de Green. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} S(t,t') &= \pm\frac{e^2T^2}{2}\left[G_{\alpha'\alpha}^{-+}(t_-,t'_+)G_{\alpha'\alpha}^{+-}(t'_+,t_-)-G_{\alpha'\alpha'}^{-+}(t_-,t'_+)G_{\alpha\alpha}^{+-}(t'_+,t_-)\right. \\ &\quad -G_{\alpha\alpha}^{-+}(t_-,t'_+)G_{\alpha'\alpha'}^{+-}(t'_+,t_-)+G_{\alpha\alpha'}^{-+}(t_-,t'_+)G_{\alpha\alpha'}^{+-}(t'_+,t_-) \\ &\quad +G_{\alpha'\alpha}^{-+}(t'_-,t_+)G_{\alpha'\alpha}^{+-}(t_+,t'_-)-G_{\alpha'\alpha'}^{-+}(t'_-,t_+)G_{\alpha\alpha}^{+-}(t_+,t'_-) \\ &\quad \left.-G_{\alpha\alpha}^{-+}(t'_-,t_+)G_{\alpha'\alpha'}^{+-}(t_+,t'_-)+G_{\alpha\alpha'}^{-+}(t'_-,t_+)G_{\alpha\alpha'}^{+-}(t_+,t'_-)\right] \ , \end{aligned}$$

On passe maintenant en transformée de Fourier en appliquant la définition (1.10) :

$$\begin{aligned} S(\Omega) &= \pm\frac{e^2T^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\left[G_{\alpha'\alpha}^{-+}(\omega)G_{\alpha'\alpha}^{+-}(\omega-\Omega)-G_{\alpha'\alpha'}^{-+}(\omega)G_{\alpha\alpha}^{+-}(\omega-\Omega)\right. \\ &\quad -G_{\alpha\alpha}^{-+}(\omega)G_{\alpha'\alpha'}^{+-}(\omega-\Omega)+G_{\alpha\alpha'}^{-+}(\omega)G_{\alpha\alpha'}^{+-}(\omega-\Omega) \\ &\quad +G_{\alpha'\alpha}^{-+}(\omega)G_{\alpha'\alpha}^{+-}(\omega+\Omega)-G_{\alpha'\alpha'}^{-+}(\omega)G_{\alpha\alpha}^{+-}(\omega+\Omega) \\ &\quad \left.-G_{\alpha\alpha}^{-+}(\omega)G_{\alpha'\alpha'}^{+-}(\omega+\Omega)+G_{\alpha\alpha'}^{-+}(\omega)G_{\alpha\alpha'}^{+-}(\omega+\Omega)\right] \ . \end{aligned}$$

Pour des raisons de simplicité, on ne s'intéresse qu'au bruit à fréquence nulle :

$$S(0) = \pm\frac{e^2T^2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\left[G_{\alpha'\alpha}^{-+}G_{\alpha'\alpha}^{+-}-G_{\alpha'\alpha'}^{-+}G_{\alpha\alpha}^{+-}-G_{\alpha\alpha}^{-+}G_{\alpha'\alpha'}^{+-}+G_{\alpha\alpha'}^{-+}G_{\alpha\alpha'}^{+-}\right] \ .$$

On calcule successivement les quatre termes qui composent cette somme. On pose :

$$A=\frac{1}{(1-T^2g_{\alpha\alpha}^a g_{\alpha'\alpha'}^a)(1-T^2g_{\alpha\alpha}^r g_{\alpha'\alpha'}^r)} \ .$$

Finalement, le bruit s'écrit :

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{e^2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\Big[T^2A4\pi^2\rho_\alpha\rho_{\alpha'}\left(n_\alpha(1\pm n_{\alpha'})+n_{\alpha'}(1\pm n_\alpha)\right) \\ &\qquad \pm T^4A^2 16\pi^4\rho_\alpha^2\rho_{\alpha'}^2\left(n_\alpha-n_{\alpha'}\right)^2\Big] \\ &= \frac{e^2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\Big[\mathcal{T}\big(n_\alpha(1\pm n_{\alpha'})+n_{\alpha'}(1\pm n_\alpha)\big)\pm\mathcal{T}^2\left(n_\alpha-n_{\alpha'}\right)^2\Big] \ . \end{aligned}$$

En réordonnant les facteurs d'occupation et en effectuant un changement de variable vers les énergies, on trouve :

$$S(0)=\frac{2e^2}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}dE\Big[\mathcal{T}\big(n_\alpha(1\pm n_\alpha)+n_{\alpha'}(1\pm n_{\alpha'})\big)\mp\mathcal{T}(1-\mathcal{T})\left(n_\alpha-n_{\alpha'}\right)^2\Big] \ .$$

Ce résultat est très intéressant. En effet, l'approche utilisée ici est tout à fait différente de celle du chapitre 1 et les méthodes de calcul utilisées n'ont rien à voir. Malgré tout, on retrouve une expression identique à l'équation (1.17), tant pour les fermions que pour les bosons (à un facteur 2 près car on n'a pas tenu compte du spin). Même si le système étudié n'est que le cas particulier de deux chaînes semi-infinies couplées au niveau d'une barrière, ce résultat renforce, si besoin était, la généralité de l'expression du bruit (1.17).

Chapitre 5

Transport dans les liquides de Luttinger

5.1 Introduction

Les métaux usuels à deux et trois dimensions sont en général bien décrits par la théorie des liquides de Fermi [79, 80, 81]. Bien qu'approximatif, ce modèle reste très réaliste. Les interactions « habillent » les électrons, et le problème se ramène à un gaz de quasi-particules sans interactions qui possèdent les mêmes nombres quantiques que les particules libres. Si la distribution en énergie est quelque peu modifiée par les interactions, cette dernière reste très similaire à celle de Fermi-Dirac au sens où elle possède un saut au niveau de Fermi à température nulle. Ainsi, on peut considérer que les quasi-particules obéissent toujours à une statistique fermionique. En revanche, certaines quantités comme la masse effective ou la chaleur spécifique sont renormalisées par les interactions. Mais en une dimension, la théorie des liquides de Fermi n'est plus valable, en particulier à cause d'une instabilité analogue à celle de Peierls [82] pour l'interaction électron-phonon : la surface de Fermi d'un gaz unidimensionnel d'électrons libres se réduit à deux points et l'introduction d'interactions électron-électron – même arbitrairement faibles – provoque l'ouverture d'un gap au niveau de Fermi. Dans ce cas, la théorie perturbative diverge.

Au cours des années cinquante et soixante, des modèles alternatifs pour décrire un gaz d'électrons en une dimension (fil quantique) avec des interactions ont été proposé par Tomonaga [83] puis par Luttinger [84] et résolus par Mattis et Lieb [85]. L'idée fondamentale de ces modèles est de linéariser le spectre au voisinage de l'énergie de Fermi. On obtient deux branches qui correspondent aux électrons se propageant dans chacune des directions sur le fil. Les excitations collectives électron-trou ont alors un comportement de type bosonique. Le Hamiltonien peut être reformulé en termes de champs bosoniques (d'où le terme de « bosonisation »), et il prend ainsi une forme quadratique, beaucoup plus facile à manipuler dès lors que l'on veut calculer des quantités physiques. Plus tard, Haldane [86] a montré que ce modèle en termes de bosons était plus général et pouvait décrire des systèmes unidimensionnels de fermions en interaction ou même des bosons à cœur dur pour peu que le spectre sans interaction possède certaines propriétés (pas de gap notamment). C'est également Haldane qui a introduit le terme de « liquide de Luttinger ». Depuis, le modèle a été appliqué – avec plus ou moins de succès – à des systèmes très variés. Citons par exemple les nanotubes de carbone, certains conducteurs organiques ou encore les états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire. Dans ce dernier cas, les électrons ne circulent que dans un sens, et

le spectre ne comporte qu'une seule branche. Le liquide de Luttinger est alors chiral [87].

Plusieurs articles de revue ont été écrits sur la théorie des liquides de Luttinger et sur la bosonisation [88, 89, 90, 91, 92, 93]. On n'en donnera donc ici que les étapes essentielles. On verra ensuite comment on peut décrire les phénomènes de transport en réponse linéaire dans cette théorie avec le calcul de la conductance d'un fil propre. Enfin, on appliquera le formalisme de Keldysh présenté au chapitre 4 au calcul du courant et du bruit dans deux liquides de Luttinger chiraux couplés par une impureté.

5.2 La théorie des liquides de Luttinger

5.2.1 Hamiltonien sans interaction : linéarisation du spectre

On considère un système unidimensionnel d'électrons en interaction. Ce système est décrit par un Hamiltonien qui peut se décomposer en un terme cinétique plus un terme d'interactions :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \ .$$

Pour des raisons de simplicité, on va ignorer la variable de spin, bien qu'il soit parfaitement possible de l'inclure. Pour pouvoir appliquer la théorie des liquides de Luttinger, le spectre énergétique du système doit posséder plusieurs propriétés fondamentales. Tout d'abord, il ne doit pas comporter de gap. De plus, il doit être symétrique : le niveau de Fermi se réduit ainsi à deux points : $E(k_F) = E(-k_F) = E_F$. Un exemple bien connu est modèle d'électrons sur sites discrets au demi-remplissage (N sites et $N/2$ électrons) avec des interactions entre premiers voisins [90, 94]. Dans ce cas, l'énergie est $E(k) = -\hbar\frac{v_F}{a}\cos(ka)$, avec a le pas du réseau. Un tel spectre possède effectivement les propriétés mentionnées ci-dessus.

Les propriétés du système dans l'état fondamental ou à basse énergie dépendent essentiellement des états dont l'énergie est proche du niveau de Fermi. De plus, dans la mesure où la température reste suffisamment basse, les fluctuations thermiques ont également lieu près de l'énergie de Fermi. L'idée principale de la théorie des liquides de Luttinger est donc de linéariser le spectre au voisinage de l'énergie de Fermi. Puisqu'il y a deux points de Fermi, on obtient deux branches :

$$\begin{cases} E(k) & \simeq & \hbar v_F(k-k_F) & \text{pour } k>0 \\ E(k) & \simeq & -\hbar v_F(k-k_F) & \text{pour } k<0 \end{cases} \ . \tag{5.1}$$

Physiquement, la branche droite (notée 1) peut être vue comme celle correspondant aux électrons allant de droite à gauche sur le fil ($k > 0$) avec la vitesse v_F, et inversement ($k < 0$) pour la branche gauche (notée 2) (voir figure 5.1). Avec un spectre ainsi linéarisé, on a ce qu'on appelle le modèle de Tomonaga [83]. L'approche du modèle du liquide de Luttinger consiste à étendre la linéarisation (les branches) à tous les k, y compris les k négatifs pour la branche droite, et les k positifs pour la branche gauche (voir figure 5.1). On a donc ajouté une infinité d'états fictifs d'énergie négative. Même si ces états ne sont pas physiques, le modèle du liquide de Luttinger présente un avantage certain par rapport au modèle de Tomonaga : il peut être résolu grâce à une technique appelée la bosonisation, au prix tout de même de l'introduction de certains facteurs de convergence comme on le verra plus loin.

D'après la forme du spectre linéarisé (5.1), le Hamiltonien sans interaction $\mathcal{H}_0$ peut s'écrire comme :

$$\mathcal{H}_0 = \hbar v_F \sum_k \left(k a^+_{1,k} a_{1,k} - k a^+_{2,k} a_{2,k} \right) \ , \tag{5.2}$$

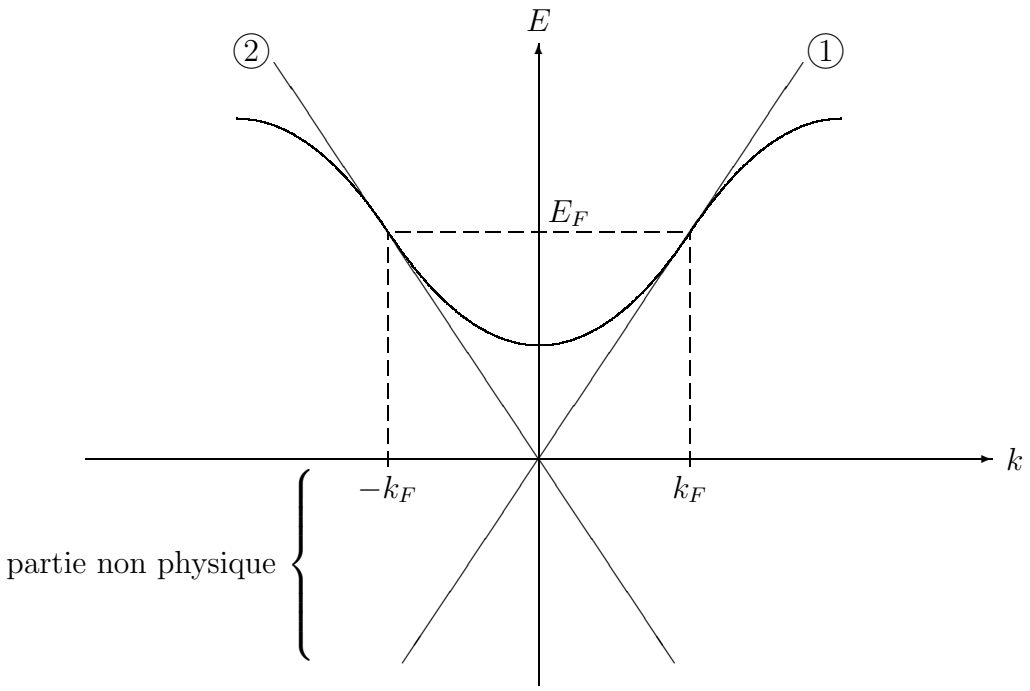

FIG. 5.1: *Modèle du liquide de Luttinger : linéarisation du spectre au voisinage du niveau de Fermi. On obtient deux branches correspondant aux particules se propageant vers la gauche et vers la droite.*

où $a^+_{1,k}$ (ou $a^+_{2,k}$) est l'opérateur de création d'un électron sur la branche 1 (ou 2). On définit maintenant les opérateurs de création et d'annihilation d'un électron dans l'espace réel par la transformée de Fourier inverse des opérateurs $a^+_{r,k}$ et $a_{r,k}$:

$$\begin{cases} \psi_r(x) &= \dfrac{1}{\sqrt{L}} \displaystyle\sum_k e^{ikx} a_{r,k} \\ \\ \psi_r^+(x) &= \dfrac{1}{\sqrt{L}} \displaystyle\sum_k e^{-ikx} a^+_{r,k} \end{cases} .$$

Les opérateurs $\psi_r(x)$ et $\psi_r^+(x)$ obéissent aux relations d'anticommutation fermioniques usuelles :

$$\left\{\psi_r^+(x), \psi_{r'}(x')\right\} = \delta_{r,r'}\delta(x-x') \tag{5.3}$$

$$\left\{\psi_r(x), \psi_{r'}(x')\right\} = 0 \ . \tag{5.4}$$

Avec ces définitions, on peut réécrire le Hamiltonien sans interaction dans l'espace réel :

$$\mathcal{H}_0 = -i\hbar v_F \int_0^L dx \left(\psi_1^+(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x) - \psi_2^+(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(x) \right) \ . \tag{5.5}$$

5.2.2 Bosonisation

La bosonisation consiste à introduire de nouveaux opérateurs qui permettront de réexprimer les quantités physiques (densité, Hamiltonien). Ces opérateurs obéissent à des relations

de commutation de type bosonique. On commence par écrire la densité d'électrons sur la branche r :

$$\rho_r(x) = \psi_r^+(x)\psi_r(x) \ .$$

En transformée de Fourier, la densité devient :

$$\begin{aligned} \rho_r(p) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L dx\, e^{ipx} \psi_r^+(x)\psi_r(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k a_{r,k+p}^+ a_{r,k} \ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

L'équation (5.6) montre bien que $\rho_r(p)$ correspond à une excitation collective électron-trou : tous les électrons de la branche r sont décalés d'un moment p. Le commutateur de $\psi_r(x)$ avec la densité se calcule simplement avec les relations d'anticommutation des opérateurs de création et d'annihilation (5.3) et (5.4) :

$$[\psi_r(x), \rho_r(x')] = \delta(x - x')\, \psi_r(x) \ , \tag{5.7}$$

et en transformée de Fourier :

$$[\psi_r(x), \rho_r(p)] = \frac{1}{\sqrt{L}}\, e^{ipx} \psi_r(x) \ .$$

D'autre part, l'équation (5.6) permet de calculer les commutateurs de la densité avec elle-même en transformée de Fourier :

$$\left\{ \begin{aligned} [\rho_1(p), \rho_1(p')] &= -\frac{p}{2\pi}\, \delta_{p,-p'} \\ [\rho_2(p), \rho_2(p')] &= \frac{p}{2\pi}\, \delta_{p,-p'} \end{aligned} \right. \ . \tag{5.8}$$

Introduisons maintenant les opérateurs bosoniques suivants :

$$\left\{ \begin{aligned} b_k^+ &= i\sqrt{\frac{2\pi}{k}} \rho_1(k) && \text{pour } k > 0 \\ b_k^+ &= -i\sqrt{\frac{2\pi}{-k}} \rho_2(k) && \text{pour } k < 0 \\ b_k &= -i\sqrt{\frac{2\pi}{k}} \rho_1(-k) && \text{pour } k > 0 \\ b_k &= i\sqrt{\frac{2\pi}{-k}} \rho_2(-k) && \text{pour } k < 0 \ . \end{aligned} \right.$$

D'après les relations (5.8), on a bien :

$$\begin{aligned} \left[b_k, b_{k'}^+\right] &= \delta_{k,k'} \\ \left[b_k, b_{k'}\right] &= 0 \ , \end{aligned}$$

qui sont des relations de commutation bosoniques. On introduit alors les champs bosoniques $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$, combinaisons linéaires des opérateurs densité ou des opérateurs bosoniques en transformée de Fourier :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \phi_1(x) & = & \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{L}} \displaystyle\sum_{k>0} \frac{e^{-\alpha k/2}}{k}\, i \left[e^{-ikx}\rho_1(k) - e^{ikx}\rho_1(-k)\right] \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{2L}} \displaystyle\sum_{k>0} \frac{e^{-\alpha k/2}}{\sqrt{k}} \left[b_k^+ e^{-ikx} + b_k e^{ikx}\right] \\ \phi_2(x) & = & \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{L}} \displaystyle\sum_{k<0} \frac{e^{\alpha k/2}}{k}\, i \left[e^{-ikx}\rho_2(k) - e^{ikx}\rho_2(-k)\right] \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{2L}} \displaystyle\sum_{k<0} \frac{e^{\alpha k/2}}{\sqrt{-k}} \left[b_k^+ e^{-ikx} + b_k e^{ikx}\right] \end{array}\right. , \tag{5.9}$$

avec α une constante que l'on fera tendre vers 0 à la fin du calcul. Ce facteur de convergence doit être introduit à cause des états d'énergie négative introduits au paragraphe 5.2.1. On notera par ailleurs que ces champs sont hermitiques. Les commutateurs (5.8) permettent de calculer les relations de commutation entre les champs ϕ et la densité :

$$\begin{aligned} [\phi_1(x), \rho_1(p)] &= -\frac{i}{\sqrt{4\pi L}}\, e^{ipx} , \\ [\phi_2(x), \rho_2(p)] &= \frac{i}{\sqrt{4\pi L}}\, e^{ipx} . \end{aligned}$$

Dans l'espace réel, on obtient :

$$[\phi_1(x), \rho_1(x')] = -\frac{i}{\sqrt{4\pi}}\, \delta(x - x') , \tag{5.10}$$

$$[\phi_2(x), \rho_2(x')] = \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\, \delta(x - x') . \tag{5.11}$$

ϕ et ρ sont donc deux champs conjugués canoniques (à un facteur $\sqrt{4\pi}$ près). Les relations de commutation usuelles des opérateurs bosoniques permettent de calculer le commutateur de ϕ_1 (ou ϕ_2) avec lui même à deux positions différentes :

$$[\phi_1(x), \phi_1(x')] = \frac{1}{2L} \sum_{k<0} \frac{e^{-\alpha k}}{k} \left[e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')}\right] .$$

Cette somme peut être approximée par une intégrale sur k :

$$\begin{aligned} [\phi_1(x), \phi_1(x')] &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} dk\, \frac{e^{-\alpha k}}{k} \left[e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')}\right] \\ &= \frac{i}{2\pi} \arctan\left(\frac{x - x'}{\alpha}\right) . \end{aligned}$$

En faisant tendre α vers zéro, on trouve :

$$[\phi_1(x), \phi_1(x')] = \frac{i}{4}\, \mathrm{sgn}(x - x') . \tag{5.12}$$

De la même façon, on obtient le commutateur de ϕ_2 avec lui même aux points x et x' :

$$[\phi_2(x), \phi_2(x')] = -\frac{i}{4}\,\mathrm{sgn}(x - x') \ .$$

Lorsque deux opérateurs p et q sont conjugués, on a l'identité suivante :

$$[p(\lambda), q(\lambda')] = -i\delta(\lambda - \lambda') \quad \Rightarrow \quad \left[p(\lambda), e^{iq(\lambda')}\right] = \delta(\lambda - \lambda')e^{iq(\lambda)} \ . \tag{5.13}$$

Et si on compare le commutateur (5.7) avec les commutateurs (5.10) et (5.11), la relation (5.13) permet de poser par identification :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \psi_1(x) & = & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\, e^{ik_F x}\, e^{i\sqrt{4\pi}\phi_1(x)} \\ \\ \psi_2(x) & = & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\, e^{-ik_F x}\, e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_2(x)} \end{array} \right. \ . \tag{5.14}$$

On a donc réécrit les opérateurs fermioniques en termes des champs bosoniques (5.9). Le facteur $1/\sqrt{2\pi\alpha}$ est nécessaire pour retrouver les relations d'anticommutation (5.3) et (5.4). Quant au facteur $\exp(\pm ik_F x)$, il se justifie par le calcul de la valeur moyenne $\langle \psi_r^+(x)\psi_r(x')\rangle_0$ dans le cas d'un système sans interaction [71]. Les opérateurs ψ_1 et ψ_2 ont été définis par une transformée de Fourier inverse des opérateurs d'annihilation sur une branche. Mais cette transformée de Fourier inverse n'est que partielle puisqu'on n'a sommé que sur une partie du spectre. L'opérateur fermionique total est donc la somme de ψ_1 et ψ_2 :

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) \ . \tag{5.15}$$

On définit maintenant les champs totaux :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi(x) & = & \phi_1(x) + \phi_2(x) \\ \\ \Theta(x) & = & \phi_2(x) - \phi_1(x) \end{array} \right. \ . \tag{5.16}$$

Il est d'usage de définir également le champ $\Pi(x)$ comme :

$$\Pi(x) = \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x) \ .$$

Enfin, on calcule le commutateur Π avec ϕ :

$$[\Pi(x), \phi(x')] = -i\delta(x - x') \ . \tag{5.17}$$

Les champs Π (ou $\partial_x\Theta$) et ϕ sont donc conjugués canoniques. Cette propriété est très importante pour la suite. Elle permet de passer d'un formalisme hamiltonien à un formalisme lagrangien nécessaire pour calculer des actions qui interviennent dans des intégrales fonctionnelles.

5.2.3 Hamiltonien cinétique en termes de champs bosoniques

Au paragraphe précédent, on a réexprimé les opérateurs fermioniques ψ_1 et ψ_2 grâce aux champs bosoniques ϕ_1 et ϕ_2 (voir l'identité (5.14)). On va utiliser cette nouvelle représentation pour réécrire le Hamiltonien (5.5) avec les champs bosoniques (5.14). On calcule tout d'abord les relations de commutation de $\mathcal{H}_0$ avec les opérateurs densité de chaque branche :

$$[\mathcal{H}_0, \rho_1(p)] = \hbar v_F \, p \, \rho_1(p) \ , \tag{5.18}$$

$$[\mathcal{H}_0, \rho_2(p)] = -\hbar v_F \, p \, \rho_2(p) \ . \tag{5.19}$$

Ces relations signifient que les états créés par $\rho_1(p)$ (ou $\rho_2(p)$) sont des états propres de $\mathcal{H}_0$ avec l'énergie $\hbar v_F \, p$ (ou $-\hbar v_F \, p$). Le Hamiltonien cinétique peut donc s'écrire [71, 89] :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \pi \hbar \, v_F \sum_{p>0} [\rho_1(p)\rho_1(-p) + \rho_2(p)\rho_2(-p)] \tag{5.20}$$

$$= \frac{1}{4} \pi \hbar \, v_F \int_0^L dx \ \left[[\rho_1(x)]^2 + [\rho_2(x)]^2 \right] \ . \tag{5.21}$$

L'équivalence entre les Hamiltoniens (5.2) et (5.20) s'appelle l'identité de Kronig [95]. En dérivant la définition (5.9), la densité sur chaque branche peut s'exprimer en fonction des champs bosoniques ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\rho_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x) \ , \tag{5.22}$$

$$\rho_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x) \ . \tag{5.23}$$

En remplaçant la densité dans l'équation (5.21) par les expressions (5.22) et (5.23), on obtient :

$$\mathcal{H}_0 = \hbar v_F \int_0^L dx \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x) \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x) \right)^2 \right] \ .$$

Avec les définitions (5.16), le Hamiltonien cinétique se met finalement sous la forme :

$$\mathcal{H}_0 = \hbar \frac{v_F}{2} \int_0^L dx \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x) \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}(x) \right)^2 \right] \ . \tag{5.24}$$

Le Hamiltonien $\mathcal{H}_0$ est donc quadratique en termes des champs bosoniques ϕ et Θ.

5.2.4 Hamiltonien avec interactions

Le but de la théorie des liquides de Luttinger est de pouvoir traiter les interactions électron-électron. Il faut donc pouvoir les incorporer facilement au Hamiltonien (5.24). On commence par réexprimer le Hamiltonien des interactions grâce aux champs bosoniques introduits précédemment.

De manière générale, le Hamiltonien d'une interaction instantanée à deux corps (par exemple coulombienne) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{H}_{int} = \int_0^L dx \int_0^L dx' \, V(x - x') \rho(x) \rho(x') \ . \tag{5.25}$$

La densité totale d'électrons s'exprime grâce à l'opérateur fermionique total :

$$\rho(x) = \psi^+(x)\psi(x) \ .$$

En remplaçant $\psi(x)$ par sa définition (5.15), on trouve que $\rho(x)$ est le produit des opérateurs de création et d'annihilation sur chaque branche, plus des termes croisés. Mais en général, on néglige ces termes croisés. La densité totale d'électrons est donc la somme des densités sur chaque branche :

$$\rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x) \ . \tag{5.26}$$

En utilisant la définition (5.9), on peut réécrire cette densité totale grâce aux champs bosoniques ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}(x) + \frac{\partial\phi_2}{\partial x}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial\phi}{\partial x}(x) \ .$$

Mais le potentiel bosonisé dépend spécifiquement de la forme de V. Par exemple, si on suppose que V est à courte portée (ce serait le cas pour un modèle sur sites avec des interactions limitées aux premiers voisins), on peut faire l'approximation que $V(x-x') = V_0\delta(x-x')$. Le Hamiltonien des interactions (5.25) devient alors :

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{V_0}{\pi}\int_0^L dx\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x)\right)^2 \ . \tag{5.27}$$

En additionnant le Hamiltonien libre (5.24) et le Hamiltonien des interactions (5.27), on obtient le Hamiltonien des liquides de Luttinger :

$$\mathcal{H} = \hbar\int_0^L dx\left[\frac{v}{2g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x)\right)^2 + \frac{vg}{2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x)\right)^2\right] \ , \tag{5.28}$$

avec :

$$g = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2V_0}{\pi\hbar v_F}}} \ , \tag{5.29}$$

et :

$$v = v_F\sqrt{1+\frac{2V_0}{\pi\hbar v_F}} \ .$$

g est un paramètre qui dépend explicitement des interactions. Mais quelle que soit leur nature, g conserve toujours une forme analogue à l'équation (5.29), et sa valeur caractérise complètement l'interaction :

- si V_0=0 alors on est dans le cas des électrons libres et g=1.
- si $V_0 > 0$, les interactions sont répulsives (par exemple de type coulombien) et $g < 1$.
- si $V_0 < 0$, les interactions sont attractives et $g > 1$.

v est la vitesse des excitations de charge. Elle correspond à une vitesse de Fermi renormalisée par les interactions. Si on avait tenu compte du spin, on aurait trouvé une autre vitesse d'excitation de spin, différente de la vitesse des excitations de charge.

A l'instar du Hamiltonien cinétique (5.24), le Hamiltonien total (5.28) avec les interactions est quadratique. Il est donc facilement diagonalisable et ses états propres sont ceux de l'oscillateur harmonique.

5.3 Conductance d'un liquide de Luttinger

5.3.1 Fonction de partition

Un liquide de Luttinger décrit un système d'électrons en interaction dans un fil. Il est donc naturel de calculer la principale propriété du fil – à savoir la conductance – et de la comparer à celle d'un conducteur décrit par l'approche de Landauer.

Les grandeurs physiques sont en général des valeurs moyennes qui se calculent par rapport à la fonction de partition. Celle-ci s'écrit [96, 97] :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\Pi \, \exp\left(iS(\phi,\Pi)/\hbar\right) \ .$$

où $S(\phi,\Pi)$ est l'action, définie comme l'intégrale sur le temps du Lagrangien $\mathcal{L}$ du système :

$$S(\phi,\Pi) = \int dt\mathcal{L} \ .$$

Dans le cas des liquides de Luttinger, la relation de conjugaison canonique (5.17) implique que le Lagrangien s'écrive :

$$\mathcal{L} = -\int_0^L dx \ \hbar \left[\frac{v}{2g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x)\right)^2 + \frac{vg}{2}\Big(\Pi(x)\Big)^2\right] + \hbar\int_0^L dx\,\Pi(x)\frac{\partial\phi}{\partial t}(x) \ .$$

On passe en temps imaginaire avec $\tau = it$. La fonction de partition s'écrit par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} \ &= \ \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\Pi \, \exp\Bigg\{-\int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^L dx \left[\frac{v}{2g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,\tau)\right)^2 + \frac{vg}{2}\Big(\Pi(x,\tau)\Big)^2\right] \\ &\qquad +i\int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^L dx\,\Pi(x,\tau)\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(x,\tau)\Bigg\} \ . \end{aligned} \tag{5.30}$$

5.3.2 Conductance

Pour calculer la conductance, on applique un potentiel sur le fil. Le système subit donc une perturbation dont le Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}'(t) = e\int_0^L dx\rho(x,t)V(x,t) \ .$$

Dans la mesure où le système n'est pas soumis à une perturbation magnétique, le courant (électrique) total satisfait à l'équation de continuité :

$$e\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial J}{\partial x}(x,t) = 0 \ .$$

Or, l'évolution temporelle de ρ est gouvernée par l'équation de Schrödinger :

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) \ &= \ [\rho_e(x,t),\mathcal{H}(t)] \\ &= \ \frac{\hbar}{\sqrt{\pi}}\frac{vg}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^L dx' \left[\phi(x),\Pi^2(x')\right] \ , \end{aligned}$$

où l'on a inséré l'expression de la densité (5.26) en termes du champ bosonique ϕ. En utilisant la relation (5.17), on peut calculer le commutateur de l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned}\left[\phi(x),\Pi^2(x')\right] &= [\phi(x),\Pi(x')]\,\Pi(x') + \Pi(x')\,[\phi(x),\Pi(x')] \\ &= 2i\delta(x-x')\Pi(x')\ .\end{aligned}$$

On obtient ainsi $\partial\rho/\partial t$ et en insérant le résultat dans l'équation de continuité, on trouve finalement le courant :

$$J(x) = -e\frac{vg}{\sqrt{\pi}}\,\Pi(x)\ . \tag{5.31}$$

La valeur moyenne du courant est donnée par :

$$\begin{aligned}\langle J(x,t)\rangle &= \langle\psi'(t)|J(x,t)|\psi'(t)\rangle \\ &= \langle\psi_0|S^+(t,-\infty)J(x,t)S(t,-\infty)|\psi_0\rangle\ ,\end{aligned}$$

où ψ' est la fonction d'onde perturbée, ψ_0 la fonction d'onde non-perturbée, et S l'opérateur de diffusion qui a pour expression :

$$\begin{aligned}S(t,-\infty) &= T\exp-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\mathcal{H}'(t') \\ &\simeq 1-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\mathcal{H}'(t') \qquad \text{(au premier ordre)},\end{aligned}$$

avec T l'opérateur d'ordre chronologique. On va calculer le courant moyen $\langle J(x,t)\rangle$ en réponse linéaire, c'est-à-dire au premier ordre en V :

$$\langle J(x,t)\rangle \simeq \langle\psi_0|J(x,t)|\psi_0\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle\psi_0|\int_{-\infty}^{t}dt'\Big(\mathcal{H}'(t')J(x,t) - J(x,t)\mathcal{H}'(t')\Big)|\psi_0\rangle\ .$$

Le premier terme est nul car il n'y a pas de courant dans le fil sans perturbation. On peut réécrire le second terme à l'aide d'un commutateur, ce qui donne :

$$\langle J_P(x,t)\rangle = \frac{ie}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_0^L dx'V(x',t')\langle[\rho(x',t'),J(x,t)]\rangle_0\ .$$

La valeur moyenne est invariante sous l'effet des translations spatiales et temporelles. De plus, il est pratique d'introduire une fonction échelon $\theta(t)$ pour étendre l'intégration temporelle jusqu'à $+\infty$:

$$\langle J(x,t)\rangle = -\frac{ie}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int_0^L dx'V(x',t')\theta(t-t')\langle[J(x-x',t-t'),\rho(0,0)]\rangle_0\ .$$

On reconnaît un double produit de convolution entre V et la valeur moyenne. Par conséquent, on peut réécrire l'équation en transformée de Fourier comme un simple produit de ces deux quantités :

$$\begin{aligned}\langle J(q,\omega)\rangle &= -\frac{ie}{\hbar}V(q,\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_0^L dx\ e^{-i(qx+\omega t)}\theta(t)\langle[J(x,t),\rho(0,0)]\rangle_0 \\ &= \frac{ie^2vg}{\pi\hbar}V(q,\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_0^L dx\ e^{-i(qx+\omega t)}\theta(t)\langle[\Pi(x,t),\partial_x\phi(0,0)]\rangle_0\ .\end{aligned}$$

On passe en temps imaginaire en effectuant une rotation de Wick [96] :

$$\langle J(q,\omega)\rangle = \frac{e^2 vg}{\pi\hbar} V(q,\omega) \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^L dx\; e^{-i(qx+(\omega-i\epsilon)\tau)} T_\tau \langle \Pi(x,\tau)\partial_x\phi(0,0)\rangle_0 \;. \tag{5.32}$$

avec $it \to \tau$ et $\omega \to -i\omega - i\epsilon$, où τ est le temps imaginaire, ϵ une constante positive tendant vers zéro pour assurer la convergence de l'intégrale, et T_τ l'opérateur d'ordre chronologique en temps imaginaire. Pour obtenir la conductance (en transformée de Fourier), il suffit de diviser le courant par le potentiel $V(q,\omega)$.

Il faut maintenant calculer la valeur moyenne $T_\tau\langle \Pi(x,\tau)\partial_x\phi(0,0)\rangle_0$. Pour cela, on rajoute deux termes de source $\eta_1(x,\tau)$ et $\eta_2(x,\tau)$ à la fonction de partition (5.30) :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} \;=\; \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\Pi\, \exp\Bigg\{ -\int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^L dx \Bigg[\frac{v}{2g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,\tau)\right)^2 + \frac{vg}{2}\Big(\Pi(x,\tau)\Big)^2 \\ -i\Pi(x,\tau)\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(x,\tau) - \Pi(x,\tau)\eta_1(x,\tau) - \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,\tau)\eta_2(x,\tau)\Bigg]\Bigg\}\end{aligned} \tag{5.33}$$

Ainsi, le corrélateur $\langle \partial_\tau\Pi(x,\tau)\partial_x\phi(0,0)\rangle_0$ peut s'écrire sous la forme d'une dérivée fonctionnelle de la fonction de partition par rapport aux champs auxiliaires $\eta_1(x,\tau)$ et $\eta_2(x,\tau)$:

$$\begin{aligned}\langle \Pi(x,\tau)\partial_x\phi(0,0)\rangle_0 &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \left.\frac{\delta^2\mathcal{Z}}{\delta\eta_1(x,\tau)\delta\eta_2(0,0)}\right|_{\eta_1=0,\eta_2=0} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{q,\,q'}\sum_{\omega,\,\omega'} e^{iqx}e^{i\omega\tau} \left.\frac{\partial^2\mathcal{Z}}{\partial\eta_1(-q,-\omega)\partial\eta_2(-q',-\omega')}\right|_{\eta_1=0,\eta_2=0} \;.\end{aligned} \tag{5.34}$$

On réécrit la fonction de partition en utilisant le terme source (5.33) avec la transformée de Fourier spatiale et temporelle des champs Π, ϕ, η_1 et η_2. Puisque le Hamiltonien (et donc le Lagrangien) des liquides de Luttinger est quadratique, on peut calculer ces intégrales fonctionnelles. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} \;=\; C_\Pi C_\phi\, \exp\Bigg\{ -\frac{1}{\beta\hbar L}\frac{1}{2vg}\sum_q\sum_\omega \left(\frac{\omega^2}{\omega^2+v^2q^2} - 1\right)\eta_1(q,\omega)\eta_1(-q,-\omega) \\ -\frac{v^2g^2q^2}{\omega^2+v^2q^2}\,\eta_2(q,\omega)\eta_2(-q,-\omega) \\ +\frac{ivgq\omega}{\omega^2+v^2q^2}\Big(\eta_1(q,\omega)\eta_2(-q,-\omega) + \eta_1(-q,-\omega)\eta_2(q,\omega)\Big)\Bigg\}\;,\end{aligned}$$

où C_Π et C_ϕ sont les constantes obtenues après intégration sur Π et ϕ. On dérive alors ce résultat par rapport à $\eta_1(-q_1,-\omega_1)$:

$$\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\eta_1(-q_1,-\omega_1)} \;=\; \mathcal{Z}\frac{1}{\beta\hbar L}\frac{1}{vg}\left\{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2+v^2q_1^2}\right)\eta_1(q_1,\omega_1) - \frac{ivgq_1\omega_1}{\omega_1^2+v^2q_1^2}\,\eta_2(q_1,\omega_1)\right\}\;.$$

A ce niveau, on peut remarquer que d'après l'équation (5.31), le courant moyen sans perturbation est proportionnel à la valeur moyenne du champ Π. Or cette valeur moyenne peut s'exprimer à l'aide de la dérivée première de la fonction de partition $\mathcal{Z}$ par rapport au champ

auxiliaire η_1. Et d'après le résultat ci-dessus, la dérivée de la fonction de partition est nulle quand on annule η_1 (et η_2 qui ne sert pas dans ce cas). Cela confirme effectivement qu'aucun courant ne circule dans le fil en l'absence de potentiel.

On prend ensuite la dérivée par rapport à $\eta_2(-q_2,-\omega_2)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathcal{Z}}{\partial\eta_1(-q_1,-\omega_1)\partial\eta_2(-q_2,-\omega_2)} &= \mathcal{Z}\frac{1}{\beta\hbar L}\frac{1}{vg}\left\{\frac{v^2g^2q_2^2}{\omega_2^2+v^2q_2^2}\,\eta_2(q_2,\omega_2)-\frac{ivgq_2\omega_2}{\omega_2^2+v^2q_2^2}\,\eta_1(q_2,\omega_2)\right\}\\ &\quad -\mathcal{Z}\frac{1}{\beta\hbar L}\frac{iq_1\omega_1}{\omega_1^2+v^2q_1^2}\delta_{q_1,-q_2}\omega_1,-\omega_2\ .\end{aligned}$$

En annulant les champs auxiliaires η_1 et η_2, on trouve le corrélateur intervenant dans la conductance :

$$\langle\Pi(x,\tau)\partial_x\phi(0,0)\rangle=-\frac{1}{\beta\hbar L}\sum_q\sum_\omega e^{i(qx+\omega\tau)}\frac{iq\omega}{\omega^2+v^2q^2}\ .$$

On approxime la somme sur q par une intégrale :

$$\frac{1}{L}\sum_q e^{iqx}\frac{iq\omega}{\omega^2+v^2q^2}\simeq-\frac{1}{2\pi}\,\omega\int_{-\infty}^{+\infty}dq\,\sin(qx)\frac{q}{\omega^2+v^2q^2}=-\mathrm{sgn}(x)\frac{\omega}{2v^2}e^{-|x|\omega/v}\ ,$$

où l'intégrale se calcule par la méthode des résidus. On remplace ensuite le corrélateur dans le courant par le résultat ci-dessus. La somme sur ω s'élimine alors avec l'intégrale sur τ. On obtient finalement la conductance :

$$G(q,\omega)=\frac{e^2g}{h}\frac{\omega}{v}\int_0^L dx\ e^{-iqx}e^{-x\omega/v}\ .$$

Puisqu'on s'intéresse à la conductance du fil, il faut prendre la limite des grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire $q\to 0$. On trouve donc après intégration sur x :

$$G(0,\omega)=g\,\frac{e^2}{h}\left(1-e^{-\omega L/v}\right)\ .$$

Si l'on fait tendre la longueur du fil vers l'infini, le deuxième terme de l'équation ci-dessus tend vers 0 et on trouve finalement :

$$G=g\,\frac{e^2}{h}\ .$$

Dans le cas où $g=1$ (électrons libres) on retrouve bien la formule de Landauer (1.7) pour une transmission parfaite[1]. Mais dans le cas d'interactions électron-électron répulsives, g est inférieur à 1. Par conséquent, les interactions électroniques provoquent une diminution de la conductance.

Ce résultat avait déjà été trouvé par Kane et Fisher [98] à partir de la formule de Fisher-Lee [99]. Mais pour y parvenir, il est nécessaire de prendre d'abord la limite des fréquences nulles puis celle du fil infiniment long. Dans notre cas, on a fait l'inverse, ce qui est quelque peu problématique. Par ailleurs, pour obtenir ce résultat, on doit faire l'hypothèse que le fil est infini et qu'un champ électrique est appliqué sur une partie du fil. En revanche, si l'on suppose que le fil est connecté à des réservoirs, il a été montré que la conductance est simplement $G=e^2/h$ [100, 101, 102]. Pourtant, expérimentalement, les mesures dans les états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire tendent à confirmer la réduction de la conductance par le facteur g [20]. D'autres résultats dans des fils quantiques à haute mobilité [103] montrent également une réduction de la conductance.

1. Contrairement au chapitre 1, on n'a pas de facteur 2 car on n'a pas tenu compte du spin

5.4 Etats de bord de l'effet Hall quantique : liquide de Luttinger chiral

5.4.1 Introduction

L'effet Hall quantique a été découvert en 1980 par Klaus von Klitzing [104] dans un gaz bidimensionnel d'électrons soumis à un champ magnétique perpendiculaire. Les états propres d'un tel système d'électrons (sans interaction) forment des bandes appelées niveaux de Landau séparées par l'énergie $\hbar\omega_c$, où $\omega_c = eB/m^*$ est la fréquence cyclotron. Ces niveaux sont hautement dégénérés puisque le nombre d'états N dans chaque niveau de Landau correspond au nombre de quanta de flux ϕ_0 dans le système : $N = BA/\phi_0 = An_\phi$, où A est la taille du système et $n_\phi = B/\phi_0 = Be/h$ la densité de quanta de flux. On définit alors le facteur de remplissage ν comme le rapport de la densité d'électrons sur la densité de quanta de flux : $\nu = n_s/n_\phi$. Ce facteur de remplissage peut être contrôlé expérimentalement en jouant sur le champ magnétique ou sur la densité d'électrons. Si le champ magnétique est suffisamment intense, ν prend des valeurs entières et la résistance transverse de l'échantillon (c'est-à-dire le rapport de la tension transversale sur le courant circulant dans l'échantillon) appelée aussi résistance de Hall présente des plateaux :

$$R_H = \frac{1}{\nu}\frac{h}{e^2} \ .$$

Dans le même temps, la résistance longitudinale s'annule. Il est tout à fait remarquable que cette quantification de la valeur de la résistance ne dépende ni des paramètres extérieurs comme la température ou la fréquence, ni même des paramètres intrinsèques de l'échantillon comme le désordre ou encore la géométrie. D'autre part, les plateaux sont particulièrement robustes, et la résistance de Hall peut être mesurée avec un très grande précision, à tel point que l'effet Hall quantique s'est naturellement imposé comme nouvelle définition du standard de résistance.

Deux ans après la première expérience d'effet Hall quantique, Tsui, Stormer et Gossard ont découvert [105] dans des échantillons désordonnés que ν pouvait prendre des valeurs fractionnaires du type p/q avec q un entier impair. Cependant, les plateaux fractionnaires sont beaucoup moins robustes que les plateaux entiers.

L'étude détaillée de l'effet Hall quantique a révélé de nombreux phénomènes et sa physique est très riche. Dans ce paragraphe, on va s'intéresser plus particulièrement aux états de bord. En effet, l'échantillon est de taille finie, et les bords confinent les électrons avec un champ électrique. Dans un gaz bidimensionnel sous champ magnétique, les électrons décrivent des orbites cyclotron dont le centre est immobile, sauf près des bords en raison du confinement. En effet, le champ électrique provoque la dérive du centre des orbites cyclotron. Le mouvement des électrons du bord se décompose en un mouvement circulaire de pulsation ω_c et un mouvement linéaire de dérive le long des bords.

En pratique, les états de bord de l'effet Hall quantique constituent d'excellents systèmes unidimensionnels dans lesquels on peut très bien étudier les phénomènes de transport. On va présenter ici le modèle de Wen des états de bord [87, 106]. Contrairement à ce qu'on pourrait attendre, il s'agit d'un modèle phénoménologique qui n'est nullement basé sur une théorie microscopique. On part d'un modèle hydrodynamique en considérant les excitations élémentaires d'une goutte de fluide de Hall, puis on quantifie en identifiant les variables

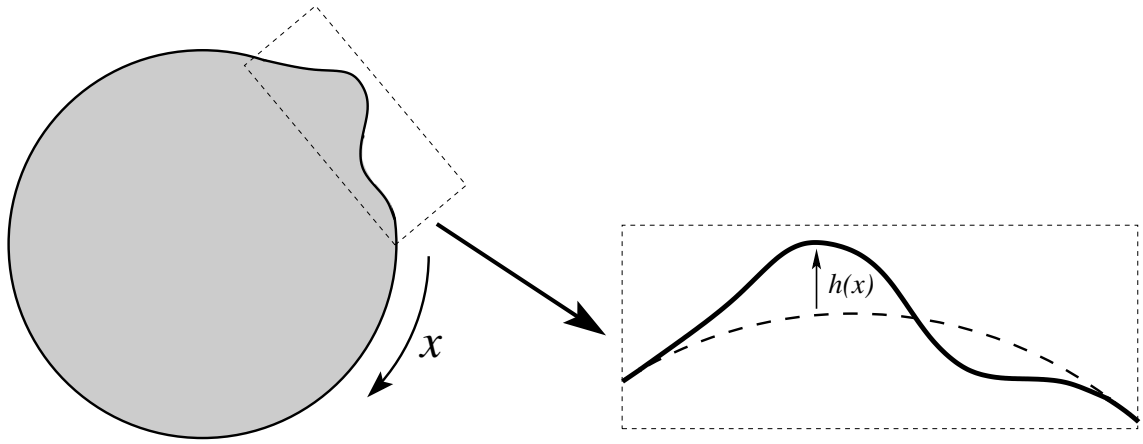

FIG. 5.2: *Modèle hydrodynamique des états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire. Une goutte de liquide de Hall subit des déformations qui se propagent sur le bord dans une seule direction.*

conjuguées du système. On obtient alors un Hamiltonien sur lequel on peut appliquer la bosonisation pour aboutir au Hamiltonien d'un liquide de Luttinger chiral.

5.4.2 Modèle hydrodynamique

On considère une goutte de liquide de Hall. C'est un fluide incompressible à deux dimensions de densité fixée $n_s = \nu n_\phi$ (voir figure 5.2). Les seules excitations possibles sont des ondes se propageant sur le bord de la goutte et dans une seule direction. Si on appelle $h(x)$ la hauteur de déformation de la goutte (voir figure 5.2), la densité de particules sur le bord est :

$$\rho(x) = n_s h(x) \ .$$

La densité satisfait à l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \ , \tag{5.35}$$

avec v la vitesse des particules sur le bord de la goutte.

L'énergie n'est autre que le potentiel électrique multiplié par la charge totale :

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L dx \, V(x) e \rho(x) \ .$$

Dans un système sous effet Hall, le champ électrique est relié au champ magnétique par la relation :

$$E = \frac{1}{n_s e} B \, J \ ,$$

où J est la densité de courant. Or sur le bord, on a $J = e n_s v$, si bien que la relation ci-dessus devient simplement $E = vB$. Par conséquent le potentiel électrique s'écrit $V(x) = Eh(x) = vBh(x)$, et l'énergie se met sous la forme :

$$H = \frac{1}{2} evB \int dx h(x) \rho(x) = \frac{1}{2} \frac{evB}{n_s} \int_0^L dx \, [\rho(x)]^2 \ .$$

Or, la densité électronique est proportionnelle au champ magnétique :

$$n_s = \frac{\nu e B}{h} \ .$$

Donc le Hamiltonien devient :

$$H = \frac{1}{2}\frac{hv}{\nu}\int_0^L dx\,[\rho(x)]^2 \ . \tag{5.36}$$

On passe en transformée de Fourier et la densité s'écrit comme :

$$\rho(k) = \frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^L dx\, e^{ikx}\rho(x) \ .$$

Le Hamiltonien s'écrit finalement :

$$H = \frac{1}{2}\frac{hv}{\nu}\sum_k \rho(k)\rho(-k) \ .$$

D'autre part, on peut réécrire l'équation de continuité (5.35) en transformée de Fourier comme :

$$\dot{\rho}(k) = -ivk\rho(k) \ . \tag{5.37}$$

On considère maintenant un formalisme lagrangien gouverné par les équations de Hamilton :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \ , \tag{5.38}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \ . \tag{5.39}$$

Si on identifie $\rho(k)$ à la coordonnée généralisée q, alors les équations (5.39) et (5.37) permettent de trouver le moment conjugué canonique p :

$$p(k) = i\frac{h}{\nu k}\rho(-k) \ .$$

5.4.3 Quantification

Puisqu'on connaît les coordonnées généralisées et le moment conjugué, on peut quantifier la théorie classique. $\rho(k)$ et $p(k)$ deviennent des opérateurs conjugués canoniques qui satisfont à la relation de commutation suivante :

$$[p(k), \rho(k')] = i\hbar\delta_{k,k'} \ .$$

Par conséquent on a :

$$[\rho(k), \rho(k')] = -\frac{\nu}{2\pi}k\delta_{k,-k'} \ .$$

Le commutateur du Hamiltonien avec la densité vaut alors :

$$[H, \rho(k)] = \hbar v k\rho(k) \ .$$

Cette relation est similaire aux commutateurs (5.18) et (5.19). Il est donc légitime d'appliquer la bosonisation comme au paragraphe 5.2.2. On commence par introduire le champ bosonique $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{L}} \sum_{k>0} \frac{e^{-\alpha k/2}}{k} \, i \left[e^{-ikx} \rho(k) - e^{ikx} \rho(-k) \right] \ . \tag{5.40}$$

Avec cette définition, le Hamiltonien (5.36) peut s'écrire :

$$H = \frac{\hbar v}{\nu} \int_0^L dx \left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right)^2 \ .$$

On retrouve donc un Hamiltonien quadratique de la même forme que celui d'un liquide de Luttinger sans interaction (voir paragraphe 5.2.3). Mais contrairement à un liquide de Luttinger usuel, on n'a introduit qu'un seul champ et le spectre ne comporte qu'une seule branche. Le liquide de Luttinger est alors dit chiral. Physiquement, cela traduit l'hypothèse que les particules ne circulent que dans une seule direction.

D'après la définition (5.40) le commutateur du champ ϕ avec la densité ρ vaut :

$$[\phi(x), \rho(x')] = -\frac{i}{\sqrt{4\pi}} \, \nu \, \delta(x - x') \ .$$

L'identification de ce commutateur et du commutateur (5.7) avec la relation (5.13) permet de poser :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \, e^{ik_F x} e^{i \frac{\sqrt{4\pi}}{\nu} \phi(x)} \ . \tag{5.41}$$

$\psi(x)$ est un opérateur fermionique qui détruit un électron au point x. Le commutateur du champ ϕ avec lui-même à deux points distincts se calcule de la même manière qu'au paragraphe 5.2.2 et donne un résultat similaire à la relation (5.12) :

$$[\phi(x), \phi(x')] = -\frac{i}{4} \, \nu \, \mathrm{sgn}(x - x') \ .$$

Il est intéressant de calculer les produit des opérateurs d'annihilation afin de vérifier qu'ils satisfont aux relations d'anticommutation fermioniques. Ainsi on a :

$$\psi(x)\psi(x') = \frac{1}{2\pi\alpha} \, e^{ik_F(x+x')} \, \exp\left(i \frac{\sqrt{4\pi}}{\nu} \left[\phi(x) + \phi(x') \right] \right) \exp\left(-i \frac{\pi}{2\nu} \mathrm{sgn}(x - x') \right) \ ,$$

et :

$$\psi(x')\psi(x) = \frac{1}{2\pi\alpha} \, e^{ik_F(x+x')} \, \exp\left(i \frac{\sqrt{4\pi}}{\nu} \left[\phi(x) + \phi(x') \right] \right) \exp\left(i \frac{\pi}{2\nu} \mathrm{sgn}(x - x') \right) \ ,$$

où on a utilisé l'identité de Baker-Campbell-Hausdorff : $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$, valable quand $[A, [A, B]] = 0$ et $[B, [A, B]] = 0$. Par conséquent :

$$\psi(x)\psi(x') = \psi(x')\psi(x) e^{\pm i \frac{\pi}{\nu}} \ .$$

Pour retrouver les relations d'anticommutation usuelles entre les opérateurs fermioniques, il faut que $\nu = 1/m$, avec m un entier impair, ce qui est effectivement compatible avec le facteur de remplissage de l'effet Hall quantique fractionnaire.

On définit maintenant les opérateurs d'annihilation de quasi-particules au point x à l'instar de la définition (5.14) dans le cas d'un liquide de Luttinger usuel :

$$\widetilde{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{ik_F x} e^{i\sqrt{4\pi}\phi(x)} \ . \tag{5.42}$$

Si on calcule le commutateur de la densité avec l'opérateur de création de quasi-particules, on trouve :

$$\left[\rho(x), \widetilde{\psi}^+(x')\right] = \nu\delta(x - x')\widetilde{\psi}^+(x) \ .$$

Le facteur ν supplémentaire par rapport au résultat (5.7) signifie que $\widetilde{\psi}^+(x)$ crée une quasi-particule de charge fractionnaire en x. Par ailleurs, il est intéressant d'étudier la statistique de ces quasi-particules. Pour cela, on procède comme ci-dessus en échangeant deux particules entre les points x et x'. Avec la définition (5.42), on trouve :

$$\widetilde{\psi}(x)\widetilde{\psi}(x') = \widetilde{\psi}(x')\widetilde{\psi}(x)e^{\pm i\pi\nu} \ .$$

Puisque ν est l'inverse d'un entier impair, l'échange de deux quasi-particules fait intervenir un facteur de phase $e^{\pm i\pi\nu}$. Les quasi-particules ont donc une statistique *fractionnaire* [107].

5.5 Impureté dans deux liquides de Luttinger chiraux couplés

5.5.1 Introduction

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, un liquide de Luttinger chiral constitue un bon modèle des états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire. Puisqu'un échantillon de Hall comporte deux bords, il faut deux liquides de Luttinger chiraux de sens opposés pour le modéliser. Si l'on introduit une constriction dans l'échantillon, les deux liquides se couplent et des quasi-particules peuvent être rétrodiffusées d'un bord à l'autre (voir figure 5.3). En pratique, on peut même contrôler la probabilité de rétrodiffusion en appliquant une tension de grille ajustable. Comme dans l'approche de Landauer, les processus de diffusion au niveau de la constriction provoquent une diminution de la conductance et génèrent du bruit de grenaille.

Formellement, le couplage entre les deux bords rajoute un terme au Hamiltonien qui, une fois bosonisé, prend une forme en $\cos\phi$. Le Hamiltonien total n'est donc plus quadratique, mais il se ramène au Hamiltonien de Sine-Gordon. Dans le passé, plusieurs approches ont été utilisées pour étudier le problème : une approche basée sur les intégrales fonctionnelles [108] ou encore la solution exacte du Hamiltonien de Sine-Gordon pour obtenir la conductance [109, 110] et le bruit [111]. Ici, le formalisme de Keldysh va permettre d'effectuer un développement perturbatif de l'opérateur d'évolution afin de calculer le courant et le bruit.

5.5.2 Courant de rétrodiffusion d'une impureté étendue

Considérons deux liquides de Luttinger chiraux modélisant par exemple les états de deux bords d'un gaz bidimensionnel d'électrons en régime d'effet Hall quantique fractionnaire. A un endroit de l'échantillon se trouve une impureté ou une constriction (voir figure 5.3).

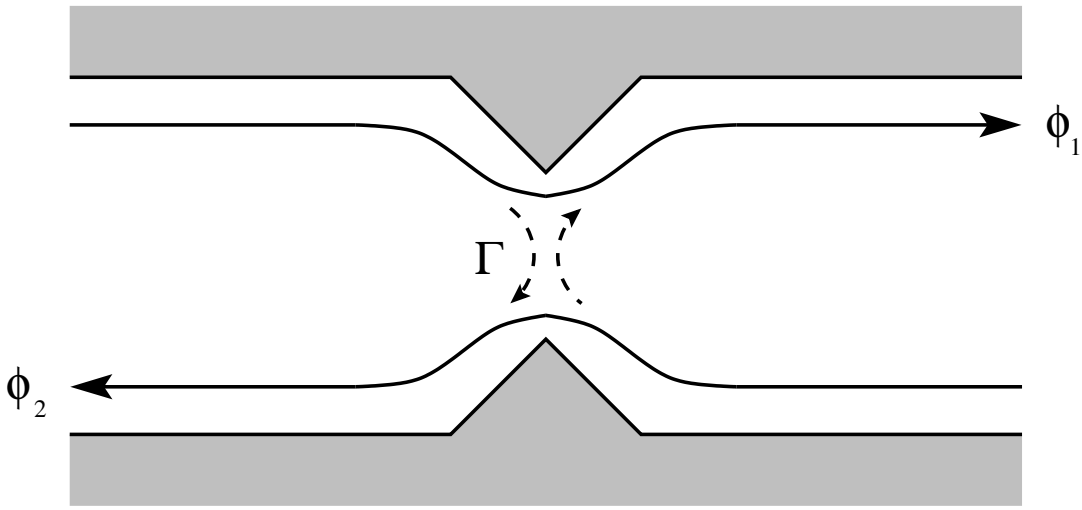

FIG. 5.3: *Etats de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire modélisés par deux liquides de Luttinger chiraux couplés par l'intermédiaire d'une constriction.*

L'impureté a pour effet de coupler les deux liquides de Luttinger entre eux, ce qui génère un courant de rétrodiffusion. De manière générale, le Hamiltonien de rétrodiffusion s'écrit :

$$\mathcal{H}_B = \int dxdy\, \Gamma(x,y) \left[\psi_1^+(x)\psi_2(y) + \psi_2^+(y)\psi_1(x)\right] \ . \tag{5.43}$$

$\Gamma(x,y)$ est l'intensité du couplage et dépend du type de rétrodiffusion. $\psi_r(x)$ est l'opérateur d'annihilation d'une quasi-particule au point x sur le bord r. Pour une impureté localisée en 0, $\Gamma(x,y) = \Gamma\delta(x)\delta(y)$, donc :

$$\mathcal{H}_B = \Gamma \left[\psi_1^+(0)\psi_2(0) + \psi_2^+(0)\psi_1(0)\right] \ . \tag{5.44}$$

On cherche à calculer le courant de rétrodiffusion. Pour cela, on commence par effectuer une transformation de jauge :

$$\vec{A} = \vec{\nabla}\chi \tag{5.45}$$

$$V = -\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \ . \tag{5.46}$$

En intégrant l'équation (5.46), on trouve la dépendance temporelle de χ :

$$\chi(t) = -cVt \ .$$

Ainsi, les termes du Hamiltonien de rétrodiffusion deviennent :

$$\psi_1^+(x)\psi_2(y) \to e^{-ie^*\frac{\chi}{\hbar c}}\psi_1^+(x)\psi_2(y) \ ,$$

avec $e^* = \nu e$, où e^* est la charge effective des quasi-particules et ν le facteur de remplissage. On pose alors :

$$\omega_0 = \frac{e^*V}{\hbar c} \ .$$

On va réexprimer le Hamiltonien de rétrodiffusion (5.43) à l'aide du champ bosonique ϕ introduit au paragraphe 5.4.3. Pour des raisons de simplicité de notation, on effectue un changement d'échelle sur ϕ :

$$\phi(x) \to \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{4\pi}}\,\phi(x)\ .$$

Dans ces conditions, l'opérateur d'annihilation (5.42) d'une quasi-particule sur le bord r devient :

$$\psi_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\,e^{ik_F x}e^{i\sqrt{\nu}\phi_r(x)}\ ,$$

où l'on a supprimé le « $\sim$ » pour alléger la notation. Ainsi, le Hamiltonien de rétrodiffusion (5.43) peut se réécrire comme :

$$\mathcal{H}_B(t) = \frac{1}{2\pi\alpha}\int dxdy\,\sum_{\epsilon} e^{i\epsilon\omega_0 t}\Gamma(x,y)e^{-i\epsilon k_F(x-y)}e^{-i\epsilon\sqrt{\nu}\phi_1(x,t)}e^{i\epsilon\sqrt{\nu}\phi_2(y,t)}\ .$$

Le courant de rétrodiffusion est défini par [112] :

$$\begin{aligned} I_B(t) &= -c\frac{\delta\mathcal{H}_B}{\delta\chi} \\ &= \frac{ie^*}{2\pi\alpha\hbar}\int dxdy\,\sum_{\epsilon=\pm1}\epsilon\,e^{i\epsilon\omega_0 t}\Gamma(x,y)e^{-i\epsilon k_F(x-y)}e^{-i\epsilon\sqrt{\nu}\phi_1(x,t)}e^{i\epsilon\sqrt{\nu}\phi_2(y,t)}\ . \end{aligned}$$

Un courant circule dans l'échantillon. C'est donc typiquement une situation où le système est hors de l'équilibre et pour laquelle on peut appliquer le formalisme de Keldysh vu au chapitre 4. Pour calculer le courant moyen, il est naturel de prendre la demi-somme du courant sur la branche + et du courant sur la branche −. Le courant moyen est donc :

$$\begin{aligned} \langle I_B(t)\rangle &= \frac{1}{2}\big(\langle I_B(t^+)\rangle + \langle I_B(t^-)\rangle\big) \\ &= \frac{ie^*}{4\pi\alpha\hbar}\int dxdy\,\sum_{\epsilon,\eta}\Gamma(x,y)\epsilon\ e^{i\epsilon\omega_0 t^\eta} \\ &\qquad\times\langle T_C\left[e^{-\frac{i}{\hbar}\int_C dt'\,\mathcal{H}_B(t')}e^{-i\epsilon k_F(x-y)}e^{-i\epsilon\sqrt{\nu}\phi_1(x,t^\eta)}e^{i\epsilon\sqrt{\nu}\phi_2(y,t^\eta)}\right]\rangle\ . \end{aligned}$$

On va développer l'opérateur d'évolution $e^{-\frac{i}{\hbar}\int_C dt'\,\mathcal{H}_B(t')}$. Pour calculer les valeurs moyennes, on introduit les fonctions de Green de Keldysh sur le champ ϕ :

$$G^{\eta\,\eta'}(x,t^\eta,x',t'^{\eta'}) = \langle T_C\big[\phi_\alpha(x,t^\eta)\phi_\alpha(x',t^{\eta'})\big]\rangle\ .$$

α n'apparaît pas dans la notation des fonctions de Green car celles-ci sont identiques quel que soit le bord. Par ailleurs, les produits des exponentielles des champs ϕ peuvent être regroupés en utilisant la propriété suivante [113, 114, 115] :

$$\langle T_C\big[e^{i\epsilon\sqrt{\nu}\phi_\alpha(x,t^\eta)}e^{i\epsilon'\sqrt{\nu}\phi_{\alpha'}(x',t^{\eta'})}\big]\rangle = e^{-\epsilon\epsilon'\nu G^{\eta\,\eta'}(x,t^\eta,x',t'^{\eta'})}\,\delta_{\alpha,\alpha'}\delta_{\epsilon,-\epsilon'}\ . \tag{5.47}$$

En vertu de cette propriété, l'ordre 0 du courant est nul. A l'ordre 1, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle I_B(t)\rangle_1 &= \frac{e^*}{8\pi^2\alpha^2\hbar^2}\sum_{\epsilon,\eta}\sum_{\epsilon',\eta'}\epsilon\eta'\int_{-\infty}^{+\infty}dt'^{\eta'}\,e^{i\omega_0(\epsilon t^\eta+\epsilon' t'^{\eta'})}\int dxdy\int dx'dy'\,\Gamma(x,y)\Gamma(x',y') \\
&\quad\times e^{-i\epsilon' k_F(x'-y')}e^{-i\epsilon k_F(x-y)} \\
&\quad\times\langle T_C\left[e^{-i\epsilon'\sqrt{\nu}\phi_1(x',t'^{\eta'})}e^{i\epsilon'\sqrt{\nu}\phi_2(y',t'^{\eta'})}e^{-i\epsilon\sqrt{\nu}\phi_1(x,t^\eta)}e^{i\epsilon\sqrt{\nu}\phi_2(y,t^\eta)}\right]\rangle \\
&= \frac{e^*}{8\pi^2\alpha^2\hbar^2}\sum_{\epsilon,\eta}\sum_{\epsilon',\eta'}\epsilon\eta'\int_{-\infty}^{+\infty}dt'^{\eta'}\;e^{i\omega_0(\epsilon t^\eta+\epsilon' t'^{\eta'})}\int dxdy\int dx'dy'\,\Gamma(x,y)\Gamma(x',y') \\
&\quad\times e^{-i\epsilon k_F(x-y)}e^{-i\epsilon' k_F(x'-y')}e^{-\epsilon\epsilon'\nu G^{\eta\,\eta'}(x,t^\eta,x',t'^{\eta'})}e^{-\epsilon\epsilon'\nu G^{\eta\,\eta'}(y,t^\eta,y',t'^{\eta'})}\;.
\end{aligned}$$

D'après la propriété (5.47), ces exponentielles de fonctions de Green ne sont non-nulles que si $\epsilon\neq\epsilon'$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\langle I_B(t)\rangle_1 &= \frac{ie^*}{4\pi^2\alpha^2\hbar^2}\sum_{\eta}\sum_{\eta'}\eta'\int_{-\infty}^{+\infty}dt'^{\eta'}\int dxdy\int dx'dy'\,\Gamma(x,y)\Gamma(x',y') \\
&\quad\times\sin\Big(\omega_0(t^\eta-t'^{\eta'})-k_F(x-y-x'+y')\Big)\,e^{\nu G^{\eta\,\eta'}(x,t^\eta,x',t'^{\eta'})}e^{\nu G^{\eta\,\eta'}(y,t^\eta,y',t'^{\eta'})}\;.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Ce résultat pour le courant à l'ordre le plus bas (non-nul) est assez général. Pour avoir un résultat plus précis, il faut choisir un cas particulier d'impureté.

5.5.3 Courant de rétrodiffusion d'une impureté localisée

On choisit le cas d'une rétrodiffusion par une impureté localisée décrite par le Hamiltonien (5.44). Puisque $\Gamma(x,y)=\Gamma\delta(x)\delta(y)$, les intégrales sur les coordonnées spatiales disparaissent dans l'équation (5.48). En passant en transformée de Fourier (à fréquence nulle) dans l'expression (5.48), on a :

$$\begin{aligned}
\langle I_B(0)\rangle_1 &= \frac{ie^*\Gamma^2}{4\pi^2\alpha^2\hbar^2}\sum_{\eta}\sum_{\eta'}\eta'\int_{-\infty}^{+\infty}dt'^{\eta'}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}dt^\eta \\
&\quad\times\sin\Big(\omega_0(t^\eta-t'^{\eta'})\Big)\,e^{2\nu G^{\eta\,\eta'}(0,t^\eta,0,t'^{\eta'})}\;.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, les fonctions de Green de Keldysh d'un liquide de Luttinger chiral sont données par [113, 115] :

$$\begin{aligned}
G^{++}(0,t) &= -\ln\left(1+\frac{i|t|}{\tau_0}\right)\;, \\
G^{+-}(0,t) &= -\ln\left(1-\frac{it}{\tau_0}\right)\;, \\
G^{-+}(0,t) &= -\ln\left(1+\frac{it}{\tau_0}\right)\;, \\
G^{--}(0,t) &= -\ln\left(1-\frac{i|t|}{\tau_0}\right)\;.
\end{aligned}$$

τ_0 est un temps très court qui sert de facteur de coupure. Les fonctions de Green ne dépendent que de la différence de temps. On effectue alors le changement de variables $\tau = t^\eta - t'^{\eta'}$ et $\tau' = t^\eta$, qui permet de simplifier l'intégrale sur t^η. De plus, $G^{\eta\eta'}$ est paire si $\eta = \eta'$, donc $G^{\eta\eta'}(0,\tau)\sin(\omega_0\tau)$ est impaire et par conséquent, l'intégrale s'annule pour $\eta = \eta'$. On obtient alors :

$$\langle I_B(0)\rangle_1 = \frac{ie^*\Gamma^2}{4\pi^2\alpha^2\hbar^2}\sum_{\eta'}\eta'\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{\sin(\omega_0\tau)}{(1+i\eta'\tau/\tau_0)^{2\nu}} \ .$$

Cette intégrale est tabulée [116] et on trouve :

$$\langle I_B(0)\rangle_1 = \frac{e^*\Gamma^2}{8\pi^2\alpha^2\hbar^2} 2\frac{2\pi(\omega_0\tau_0)^{2\nu}e^{-\omega_0\tau_0}}{\omega_0\Gamma(2\nu)} \ . \tag{5.49}$$

Dans ce résultat, la tension appliquée apparaît dans ω_0. On constate donc que le courant dépend de la tension de façon totalement non-triviale puisque $I \sim V^{2\nu-1}$. Bien évidemment, il serait intéressant de retrouver expérimentalement cette dépendance. Cependant, l'expression (5.49) a peu de chances d'être prédictive quantitativement. En effet, elle dépend explicitement des facteurs de convergence ou de coupure α et τ_0 qui en principe doivent tendre vers zéro. Ce problème peut être vu comme le prix à payer pour avoir rajouté une infinité d'états fictifs d'énergie négative dans le spectre (voir paragraphe 5.2.1).

5.5.4 Bruit

La présence de l'impureté génère du bruit dans le système. Comme au chapitre 4, il est naturel d'utiliser un corrélateur symétrisé du même type que l'équation (4.33) :

$$\begin{aligned}
S_B(t,t') &= \frac{1}{2}\sum_\eta \langle I_B(t^\eta) I_B(t'^{-\eta})\rangle - \langle I_B\rangle^2 \\
&= -\frac{e^{*2}}{8\pi^2\alpha^2\hbar^2}\int dx_1 dy_1 \int dx_2 dy_2\, \Gamma(x_1,y_1)\Gamma(x_2,y_2) \\
&\quad \times \sum_{\epsilon_1}\sum_{\epsilon_2}\sum_\eta \epsilon_1\epsilon_2 e^{i\omega_0(\epsilon_1 t^\eta + \epsilon_2 t'^{-\eta})} e^{i\epsilon_1 k_F(x_1-y_1)} e^{i\epsilon_2 k_F(x_2-y_2)} \\
&\quad \times \langle T_C e^{-\frac{i}{\hbar}\int_C dt'\,\mathcal{H}_B(t')} e^{i\epsilon_1\sqrt{\nu}\phi_1(x_1,t^\eta)} e^{-i\epsilon_1\sqrt{\nu}\phi_2(y_1,t^\eta)} e^{i\epsilon_2\sqrt{\nu}\phi_1(x_2,t'^{-\eta})} e^{-i\epsilon_2\sqrt{\nu}\phi_2(y_2,t'^{-\eta})}\rangle \\
&\quad -\langle I_B\rangle^2 \ .
\end{aligned}$$

On effectue un développement de l'opérateur d'évolution de la même façon qu'au paragraphe 5.5.2. Cette fois, l'ordre 0 n'est pas nul :

$$\begin{aligned}
S_{B0}(t,t') &= -\frac{e^{*2}}{8\pi^2\alpha^2\hbar^2}\int dx_1 dy_1 \int dx_2 dy_2\, \Gamma(x_1,y_1)\Gamma(x_2,y_2) \\
&\quad \times \sum_{\epsilon_1}\sum_{\epsilon_2}\sum_\eta \epsilon_1\epsilon_2 e^{i\omega_0(\epsilon_1 t^\eta + \epsilon_2 t'^{-\eta})} e^{i\epsilon_1 k_F(x_1-y_1)} e^{i\epsilon_2 k_F(x_2-y_2)} \\
&\quad \times e^{-\epsilon_1\epsilon_2\nu G^{\eta\,-\eta}(x_1,t^\eta,x_2,t'^{-\eta})} e^{-\epsilon_1\epsilon_2\nu G^{\eta\,-\eta}(y_1,t^\eta,y_2,t'^{-\eta})} \\
&= \frac{e^{*2}}{4\pi^2\alpha^2\hbar^2}\int dx_1 dy_1 \int dx_2 dy_2\, \Gamma(x_1,y_1)\Gamma(x_2,y_2) \\
&\quad \times \sum_\eta \cos\Big(\omega_0(t^\eta - t'^{-\eta}) + k_F(x_1 - y_1 - x_2 + y_2)\Big) \\
&\quad \times e^{\nu G^{\eta\,-\eta}(x_1,t^\eta,x_2,t'^{-\eta})} e^{\nu G^{\eta\,-\eta}(y_1,t^\eta,y_2,t'^{-\eta})} \ ,
\end{aligned} \tag{5.50}$$

où on a utilisé le fait que $\langle I_B \rangle^2 = 0$ à l'ordre 0. Si on poursuit le développement de l'opérateur d'évolution aux ordres supérieurs, on se rend compte que l'ordre 1 est nul car on aura trois ϕ_1 et trois ϕ_2 et on ne pourra donc pas les regrouper par deux en prenant les valeurs moyennes. Il faudrait donc poursuivre le développement de l'opérateur d'évolution à l'ordre 2.

Considérons maintenant le cas de l'impureté localisée. D'après la définition (1.10) donnée au chapitre 1 et d'après l'expression (5.50), le bruit en fréquence est :

$$\begin{aligned} S_{B0}(0) &= \frac{e^{*2}\Gamma^2}{2\pi^2\alpha^2\hbar^2} \sum_\eta \int_{-\infty}^{+\infty} dt^\eta \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt'^{-\eta} \\ &\quad \times \cos\Big(\omega_0(t^\eta - t'^{-\eta})\Big)\, e^{2\nu G^{\eta\,-\eta}(0,t^\eta,0,t'^{-\eta})} \ . \end{aligned}$$

Un changement de variables similaire à celui utilisé pour le courant permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} S_{B0}(0) &= \frac{e^{*2}\Gamma^2}{4\pi^2\alpha^2\hbar^2} \sum_\eta \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}}{(1 - i\eta\tau/\tau_0)^{2\nu}} \\ &= \frac{e^{*2}\Gamma^2}{4\pi^2\alpha^2\hbar^2} 2 \frac{2\pi(\omega_0\tau_0)^{2\nu} e^{-\omega_0\tau_0}}{\omega_0\Gamma(2\nu)} \ . \end{aligned} \tag{5.51}$$

Comme pour le courant, le bruit dépend explicitement des facteurs de coupure et de convergence τ_0 et α. Cependant, en comparant les équations (5.49) et (5.51), on trouve que le bruit est proportionnel au courant : $S_{B0}(0) = 2e^*\langle I_B(0)\rangle_1$. Ce résultat est similaire à celui des références [108, 111] (dans le cas des faibles rétrodiffusions) puisque l'on retrouve cette proportionnalité entre le courant, le bruit et la charge effective $e^* = \nu\, e$. Cette relation a permis de mesurer la charge des quasi-particules de Laughlin dans l'effet Hall quantique fractionnaire [20, 21]. En revanche, dans le cas d'un liquide de Luttinger non-chiral (décrivant par exemple un nanotube), il a été montré que le bruit est également proportionnel au courant, mais que le paramètre g n'intervient pas dans la relation [121].

Par ailleurs, le résultat ci-dessus n'est autre que le bruit poissonien (1.14). Or, ici, dans la mesure où il s'agit d'un système quantique, on s'attendrait à avoir un facteur de réduction $1-T$ par rapport au bruit poissonien. Mais pour obtenir un tel facteur, il faudrait développer l'opérateur d'évolution à l'ordre 2.

Conclusion

Dans le premier chapitre, on a présenté l'approche de Landauer à travers le formalisme de diffusion en seconde quantification. Ce formalisme permet de calculer le courant moyen et la conductance d'un fil quantique, et on peut ainsi retrouver la formule de Landauer. Cette approche permet également de calculer le bruit. On obtient une formule similaire à celle de Schottky, c'est-à-dire que le bruit est proportionnel au courant et à la charge effective, mais avec un facteur de réduction. Ce résultat est intéressant car il peut être exploité pour retrouver la charge des porteurs. Ainsi, la charge effective des quasi-particules de Laughlin dans les états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire a pu être mesurée grâce à cette méthode [20, 21].

Dans le chapitre 2, les expressions du bruit à fréquence finie et des corrélations de bruit dans un conducteur contenant un nombre quelconque de terminaux et connecté à un supraconducteur ont été calculées. On a d'abord étudié le cas le plus simple d'une jonction entre un métal normal et un supraconducteur. Si la tension appliquée reste faible devant le gap du supraconducteur (régime d'Andreev), on retrouve le doublement du bruit à fréquence nulle par rapport à une jonction entre deux métaux normaux [48, 51]. De plus, le spectre du bruit présente une singularité à la fréquence Josephson et s'annule au-delà de cette fréquence. Ces résultats peuvent être interprétés comme la signature du transfert d'une charge effective $2e$ à travers la jonction correspondant à celle des paires de Cooper. Cependant, cet argument n'est plus valable si la tension est augmentée au-delà du gap du supraconducteur. Dans ce cas, les transferts de charges e et $2e$ sont tous les deux possibles et parler de charge effective n'a plus réellement de sens. En revanche, dans ces conditions, la courbe du bruit exhibe des singularités à plusieurs fréquences auxquelles on peut chaque fois faire correspondre un processus de réflexion ou de transmission au niveau de la jonction.

L'effet Aharonov-Bohm non-stationnaire consiste à appliquer une perturbation sinusoïdale sur un échantillon. Il constitue un bon moyen d'explorer les phénomènes dont la trace ne s'observe qu'à fréquence finie en effectuant uniquement des mesures à fréquence nulle. Ainsi, dans une jonction N-S, on peut observer des pics dans la dérivée seconde du bruit (à fréquence nulle) par rapport à la tension quand la fréquence de la perturbation est un multiple de la fréquence Josephson. Ces pics ont d'ailleurs été observés expérimentalement [54]. Une jonction N-S simple est finalement un système dans lequel on peut observer la fréquence Josephson avec un seul supraconducteur au lieu de deux comme c'est le cas dans l'effet Josephson usuel.

Les résultats du chapitre 2 présentent cependant quelques limitations. Tous les calculs ont été effectués dans le cas d'un seul canal, même si une généralisation à un nombre quelconque de canaux est tout à fait faisable. On pourrait également étendre ces résultats au cas diffusif, pour lequel il faudrait calculer des moyennes sur le désordre en utilisant la théorie des matrices aléatoires. Cependant, il ne faut pas s'attendre à des changements majeurs du

fait de ces extensions. En revanche, il serait intéressant d'étudier le transport dans des jonctions entre un métal normal et un supraconducteur non-conventionnel (par exemple un supraconducteur à haute température critique). Récemment, le cas d'un supraconducteur de type onde d a été étudié [117, 118]. Le gap d'un tel supraconducteur varie dans l'espace des moments et donc change avec l'orientation de la jonction. Le calcul du courant et du bruit nécessite alors un modèle tridimensionnel, ce qui n'a pas été fait ici.

Dans le chapitre 3, on a présenté l'analogue fermionique de l'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss. Un miroir semi-transparent sépare un faisceau incident d'électrons en un faisceau réfléchi et un faisceau transmis. Les corrélations de bruit entre le faisceau réfléchi et le faisceau transmis sont alors négatives, conséquence de la nature fermionique des électrons qui tendent à s'exclure mutuellement du fait du principe de Pauli. Mais on a vu qu'en rajoutant un supraconducteur dans un tel système, les corrélations de bruit peuvent être soit positives soit négatives, selon la valeur du coefficient de réflexion du miroir semi-transparent. Ainsi, un système fermionique peut exhiber un comportement bosonique. Une interprétation possible de ce résultat est que les paires de Cooper peuvent se comporter comme des bosons dans la mesure où un nombre quelconque d'entre elles peuvent avoir le même moment. Les expériences [60, 61, 62] sur l'analogue fermionique « normal » de l'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss laissent espérer une possibilité d'extension au cas supraconducteur pour observer pour la première fois des corrélations positives dans un système fermionique. Comme on l'a vu, une autre possibilité pour réaliser cette expérience serait de mettre en contact un nanotube de carbone avec un supraconducteur. Dans ce cas, on obtient toujours des corrélations positives, même si l'effet est un peu atténué en raison de la diffusion entre les deux modes du nanotube.

Les expériences du type Hanbury-Brown et Twiss ont prouvé être un outil efficace pour étudier la statistique des particules. Si pour l'instant les résultats sont limités aux cas des bosons et des fermions, il serait intéressant d'étendre l'étude aux particules de statistique intermédiaire. Les particules satisfaisant une statistique d'exclusion [119] présentent par exemple une transition entre le régime de bruit de grenaille et de bruit thermique différente de celle des fermions [120]. D'autre part, comme on l'a vu au chapitre 5 (dans le paragraphe 5.4.3), les quasi-particules de Laughlin présentes dans l'effet Hall quantique fractionnaire sont supposées obéir à une statistique fractionnaire qu'une expérience du type Hanbury-Brown et Twiss pourrait révéler [114, 115].

Par ailleurs, les corrélations de bruit ont été calculées chaque fois à fréquence nulle uniquement. La question est maintenant de savoir si on peut gagner une quelconque information supplémentaire en étudiant les corrélations de bruit à fréquence finie. Cette quantité combinerait les caractéristiques dynamiques des fluctuations temporelles du courant avec les aspects statistiques des corrélations entre des terminaux différents.

Dans le chapitre 4, on a présenté le formalisme de Keldysh. Il s'agit d'une méthode permettant de traiter des problèmes relevant de la thermodynamique hors de l'équilibre en se ramenant à un formalisme d'équilibre. On peut ainsi écrire une théorie des perturbations de la même façon qu'à l'équilibre. On a donné un exemple d'utilisation de cette technique avec le problème de deux électrodes modélisées par deux chaînes semi-infinies de sites discrets. L'introduction d'un couplage entre les chaînes et le maintien d'une différence de potentiel entre les deux amènent le système dans une situation de déséquilibre. Grâce au formalisme de Keldysh, on a pu calculer le bruit pour les fermions et les bosons et parvenir à une formule similaire à celle obtenue dans le cadre de l'approche de Landauer. Cet exemple peut paraître un peu académique, mais il permet de bien comprendre l'application de la méthode

de Keldysh.

Enfin, le chapitre 5 présente un rappel de la théorie des liquides de Luttinger. Celle-ci permet de traiter le problème des électrons en interaction dans un système unidimensionnel. La technique de la bosonisation permet de réécrire le Hamiltonien sous forme quadratique en termes de champs bosoniques qui représentent des excitations collectives électron-trou. On a montré ensuite que la conductance d'un liquide de Luttinger (de longueur infinie) est généralement inférieure à celle d'un conducteur quantique sans interaction. D'autre part, un liquide de Luttinger chiral constitue un bon modèle des états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire. On a étudié l'influence d'une impureté localisée couplant deux liquides de Luttinger chiraux sur le courant et le bruit. Le formalisme de Keldysh permet alors d'appliquer une théorie des perturbations. Au premier ordre, on obtient une formule de type Schottky pour le bruit. Cependant, pour retrouver un facteur de réduction comme dans l'approche de Landauer, il faudrait pousser le développement à un ordre supérieur, ce que l'on n'a pas pu faire ici.

Dans cette thèse, on a abordé des sujets plutôt théoriques, et actuellement, la physique mésoscopique a peu d'applications industrielles directes. Mais la miniaturisation des circuits intégrés progresse rapidement et les limites quantiques seront atteintes prochainement. Une bonne compréhension des phénomènes fondamentaux sera alors nécessaire si l'on veut pleinement exploiter les nouvelles propriétés quantiques des conducteurs. Par exemple, le bruit de grenaille est généralement négligé dans les approches semi-classiques du transport utilisées actuellement en micro-électronique. Cette approximation ne sera plus valable dès lors que les dimensions des circuits approcheront les échelles où la mécanique quantique prend totalement le pas sur la physique classique.

Annexe A

Etats dans le supraconducteur

Dans un supraconducteur, les fonctions d'onde des quasi-particules n'existent que si l'énergie est supérieure au gap. Leur évolution est gouvernée par les équations de Bogolubov-de Gennes (2.2) que l'on réécrit sous forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_s & \Delta \\ \Delta & -\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_s\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}(x) = E \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}(x) \ .$$

On a simplifié la notation en remplaçant la série d'indices $i\,j\,\beta$ par n. Avec des solutions de la forme $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik^S x}$, et en annulant le déterminant du système obtenu, on a :

$$E^2 = \left(\frac{\left(\hbar k^S\right)^2}{2m} - \mu_s\right)^2 + \Delta^2 \ ,$$

ce qui donne deux valeurs de k^S :

$$\begin{cases} k_e^S = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\left(\mu_s + \left(E^2 - \Delta^2\right)^{1/2}\right)^{1/2} & \text{pour les électrons} \\ k_h^S = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\left(\mu_s - \left(E^2 - \Delta^2\right)^{1/2}\right)^{1/2} & \text{pour les trous .} \end{cases} \tag{A.1}$$

On remarque que si $|E| < \Delta$, les vecteurs d'onde ont une partie imaginaire. On peut également obtenir les paramètres BCS u_0 et v_0 :

$$u_0^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}}{E}\right) = 1 - v_0^2 \ ,$$

ou :

$$v_0^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}}{E}\right) = 1 - u_0^2 \ .$$

Du fait de la symétrie de ces solutions, on peut sans problème choisir la première, et donc les solutions des équations de Bogolubov-de Gennes ont pour forme $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_e^S x}$ et $\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{ik_h^S x}$.

Il reste maintenant à déterminer les constantes devant ces états. Pour cela, on va utiliser la conservation du courant de probabilité. De plus, pour des raisons de simplicité (allègement de notation), on va considérer une jonction N-S simple, même si le raisonnement est le même pour une jonction à plusieurs terminaux. Supposons que l'on envoie un électron côté normal. Une partie de l'onde est réfléchie au niveau de l'interface sous forme d'électron et sous forme de trou. De même, une autre partie est transmise dans le supraconducteur sous forme d'électron et sous forme de trou. Les états correspondant s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} u^N \\ v^N \end{pmatrix}(x) = e^{ik_e^N x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_{NNee}e^{-ik_e^N x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_{NNhe}\sqrt{\frac{k_e^N}{k_h^N}}e^{ik_h^N x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

du côté normal, et :

$$\begin{pmatrix} u^S \\ v^S \end{pmatrix}(x) = A\ s_{SNee}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}e^{-ik_e^S x} + B\ s_{SNhe}\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix}e^{ik_h^S x} ,$$

du côté supraconducteur. Les constantes A et B restent à déterminer. On peut montrer que le courant de probabilité est donné par [37] :

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\left[\left(u^+\nabla u - u\nabla u^+\right) - \left(v^+\nabla v - v\nabla v^+\right)\right] .$$

On trouve par conséquent :

$$J^N = \frac{\hbar}{m}k_e^N\left(1 - |s_{NNee}|^2 - |s_{NNhe}|^2\right) ,$$

et :

$$J^S = \frac{\hbar}{m}\left(k_e^S|A|^2|s_{SNee}|^2(u_0^2 - v_0^2) + k_h^S|B|^2|s_{SNhe}|^2(u_0^2 - v_0^2)\right) .$$

On égale ces deux expressions, puis on utilise l'unitarité de la matrice S, et on trouve A et B. Un exemple de solution de est :

$$A = \sqrt{\frac{k_e^N}{k_e^S}}\frac{1}{\sqrt{u_0^2 - v_0^2}} \qquad \text{et} \qquad B = \sqrt{\frac{k_e^N}{k_h^S}}\frac{1}{\sqrt{u_0^2 - v_0^2}} .$$

On peut recommencer le même raisonnement pour les autres états possibles.

Finalement, les états s'écrivent :

– électrons incidents du côté supraconducteur :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_{SSe} \\ v_{SSe} \end{pmatrix}(x) &= \frac{1}{\sqrt{u_0^2 - v_0^2}}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}e^{ik_e^S x} + s_{SSee}\frac{1}{\sqrt{u_0^2 - v_0^2}}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}e^{-ik_e^S x} \\ &\quad + s_{SShe}\sqrt{\frac{k_e^S}{k_h^S}}\frac{1}{\sqrt{u_0^2 - v_0^2}}\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix}e^{ik_h^S x} , \end{aligned} \tag{A.2}$$

– trous incidents du côté supraconducteur :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_{SSh} \\ v_{SSh} \end{pmatrix}(x) &= \frac{1}{\sqrt{u_0^2 - v_0^2}}\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix}e^{-ik_h^S x} + s_{SShh}\frac{1}{\sqrt{u_0^2 - v_0^2}}\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix}e^{ik_h^S x} \\ &\quad + s_{SSeh}\sqrt{\frac{k_h^S}{k_e^S}}\frac{1}{\sqrt{u_0^2 - v_0^2}}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}e^{-ik_e^S x} , \end{aligned} \tag{A.3}$$

– électrons incidents côté normal et transmis du côté supraconducteur :

$$\begin{pmatrix} u_{SNe} \\ v_{SNe} \end{pmatrix}(x) = s_{SNee}\sqrt{\frac{k_e^N}{k_e^S}}\frac{1}{\sqrt{u_0^2-v_0^2}}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{-ik_e^S x} + s_{SNhe}\sqrt{\frac{k_e^N}{k_h^S}}\frac{1}{\sqrt{u_0^2-v_0^2}}\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{ik_h^S x} \ , \quad \text{(A.4)}$$

– trous incidents côté normal et transmis du côté supraconducteur :

$$\begin{pmatrix} u_{SNh} \\ v_{SNh} \end{pmatrix}(x) = s_{SNeh}\sqrt{\frac{k_h^N}{k_e^S}}\frac{1}{\sqrt{u_0^2-v_0^2}}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{-ik_e^S x} + s_{SNhh}\sqrt{\frac{k_h^N}{k_h^S}}\frac{1}{\sqrt{u_0^2-v_0^2}}\begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{ik_h^S x} \ . \quad \text{(A.5)}$$

Annexe B

Le modèle BTK de la jonction N-S

Le modèle de Blonder, Tinkham et Klapwijk (BTK) [37] permet de modéliser une jonction N-S de façon réaliste. En effet, une barrière de hauteur (ou de transparence) Z est introduite au niveau de l'interface N-S. Elle est décrite par un potentiel $V_B(x) = Z(\hbar^2 k_F/m)\,\delta(x)$. Les fonctions d'onde (2.3) et (2.4) côté normal et (A.2) à (A.5) côté supraconducteur sont continues. On peut donc écrire pour l'exemple d'un électron incident du côté normal :

$$\begin{pmatrix} u_{NNe} \\ v_{NNe} \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u_{SNe} \\ v_{SNe} \end{pmatrix}(0) \ . \tag{B.1}$$

On peut également obtenir des conditions sur les dérivées des fonctions d'ondes en intégrant les équations de Bogolubov-de Gennes (2.2) de part et d'autre de la jonction N-S. Pour l'exemple précédent, on obtient :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u_{SNe} \\ v_{SNe} \end{pmatrix}(0) - \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u_{NNe} \\ v_{NNe} \end{pmatrix}(0)\right] = V\begin{pmatrix} u_{NNe} \\ v_{NNe} \end{pmatrix}(0) \ . \tag{B.2}$$

En écrivant ces conditions pour chaque type de particule et pour chaque côté de la jonction, on obtient quatre systèmes d'équations dont les solutions sont les éléments de la matrice S :

$$s_{NNee} = s_{SSee} = -\frac{(u_0^2 - v_0^2)(Z^2 + iZ)}{\gamma} = -\frac{2(E^2-\Delta^2)^{1/2}(Z^2+iZ)}{E + (1+2Z^2)(E^2-\Delta^2)^{1/2}} \ , \tag{B.3}$$

$$s_{NNhh} = s_{SShh} = -\frac{(u_0^2 - v_0^2)(Z^2 - iZ)}{\gamma} = -\frac{2(E^2-\Delta^2)^{1/2}(Z^2-iZ)}{E + (1+2Z^2)(E^2-\Delta^2)^{1/2}} \ , \tag{B.4}$$

$$s_{NNhe} = s_{NNeh} = -s_{SShe} = -s_{SSeh} = \frac{u_0 v_0}{\gamma} = \frac{\Delta}{E + (1+2Z^2)(E^2-\Delta^2)^{1/2}} \ , \tag{B.5}$$

$$s_{SNee} = s_{NSee} = \frac{u_0\sqrt{u_0^2 - v_0^2}(1-iZ)}{\gamma} = \frac{\sqrt{2}\left[E(E^2-\Delta^2)^{1/2} + E^2 - \Delta^2\right]^{1/2}(1-iZ)}{E + (1+2Z^2)(E^2-\Delta^2)^{1/2}} \ , \tag{B.6}$$

$$s_{SNhh} = s_{NShh} = \frac{u_0\sqrt{u_0^2 - v_0^2}(1+iZ)}{\gamma} = \frac{\sqrt{2}\left[E(E^2-\Delta^2)^{1/2} + E^2 - \Delta^2\right]^{1/2}(1+iZ)}{E + (1+2Z^2)(E^2-\Delta^2)^{1/2}} \ , \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned} s_{SNhe} = -s_{SNeh} = -s_{NShe} = s_{NSeh} &= \frac{iv_0\sqrt{u_0^2 - v_0^2}Z}{\gamma} \\ &= \frac{i\sqrt{2}\left[E(E^2-\Delta^2)^{1/2} - E^2 + \Delta^2\right]^{1/2} Z}{E + (1+2Z^2)(E^2-\Delta^2)^{1/2}} \ , \end{aligned} \tag{B.8}$$

avec :

$$\gamma \equiv u_0^2 + (u_0^2 - v_0^2)Z^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + Z^2\right)\frac{(E^2-\Delta^2)^{1/2}}{E} \ ,$$

et :

$$u_0^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(E^2-\Delta^2)^{1/2}}{E}\right) = 1 - v_0^2 \ .$$

On notera que l'unitarité de la matrice S est satisfaite.

On définit alors : $R_A = |s_{NNhe}|^2$, $R = |s_{NNee}|^2$, $T = |s_{SNee}|^2$ et $T_A = |s_{SNhe}|^2$. R_A est la probabilité de réflexion d'Andreev, R est la probabilité de réflexion normale, T est la probabilité de transmission normale, et T_A est la probabilité de transmission d'Andreev. La conservation des probabilités implique : $R_A + R + T_A + T = 1$. Pour apprécier l'influence de la hauteur Z de la barrière, on trace ces probabilités en fonction de l'énergie (ou plus exactement du rapport E/Δ) pour différentes valeurs de Z (voir figure B.1). Quand $E < \Delta$, il n'y a pas de transmission vers le supraconducteur : $T = 0$ et $T_A = 0$ quelle que soit la hauteur de la barrière. En l'absence de barrière ($Z = 0$), seule la réflexion d'Andreev est présente ($R_A = 1$, $R = 0$), mais dès qu'une barrière est introduite, l'influence du supraconducteur diminue, et la probabilité de réflexion d'Andreev R_A décroît en même temps la probabilité de réflexion normale R augmente. Pour des barrières assez hautes ($Z = 3$), le supraconducteur est presque totalement isolé et il n'y a pratiquement plus de réflexion d'Andreev ($R_A \simeq 0$). Quand $E > \Delta$, la transmission vers le supraconducteur devient possible. Pour des énergies suffisamment grandes, la réflexion et la transmission d'Andreev deviennent négligeables et le supraconducteur a tendance à se comporter comme un métal normal. D'autre part, plus la barrière est haute, plus la transmission normale vers le supraconducteur est faible.

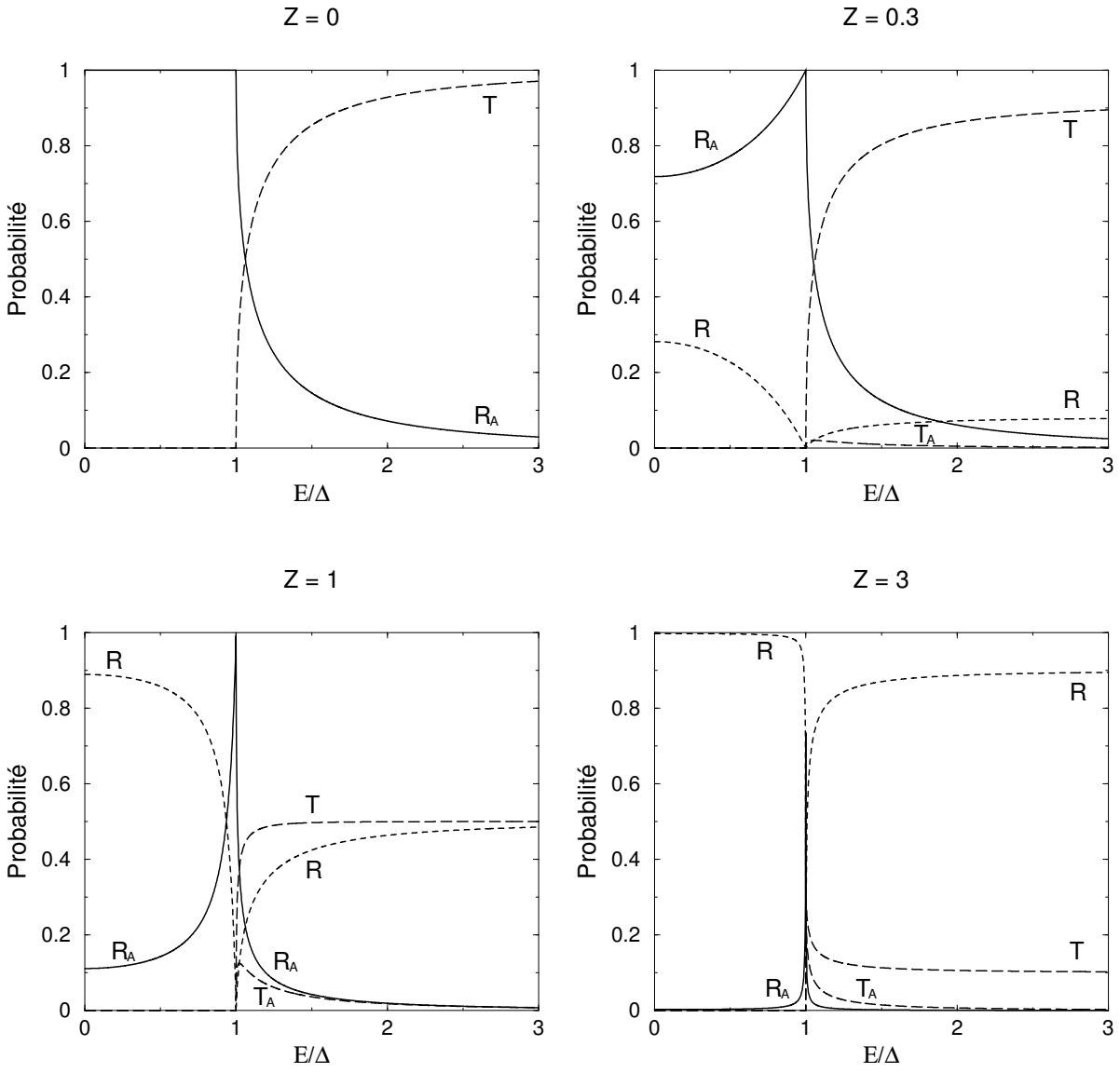

FIG. B.1: *Probabilités de réflexion et de transmission dans le modèle BTK pour différentes hauteurs de barrière :* $Z = 0$, $Z = 0.3$, $Z = 1$, $Z = 3$.

Annexe C

Matrice S d'une jonction N-S à trois terminaux avec une barrière

La matrice S de la jonction en forme de « Y » se détermine en combinant la matrice S du miroir semi-tansparent S_{BS} avec celle de la jonction N-S S_{NS} calculée dans l'appendice B. On a:

$$S_{BS} = \begin{pmatrix} S_{BS_e} & 0 \\ 0 & S_{BS_h} \end{pmatrix} .$$

L'expression de S_{BS_e} est choisie identique à celle des références [58, 59] :

$$S_{BS_e} = \begin{pmatrix} a & b & \sqrt{\varepsilon} \\ b & a & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & \sqrt{\varepsilon} & -(a+b) \end{pmatrix} , \tag{C.1}$$

où $a = \left(\sqrt{1-2\varepsilon} - 1\right)/2$, $b = \left(\sqrt{1-2\varepsilon} + 1\right)/2$ et ε pouvant varier de 0 à 1/2. ε détermine la transparence du miroir semi-tansparent.

Pour calculer la matrice S totale, on cherche quels états sortants sont obtenus quand une particule est incidente dans un terminal donné. Par exemple, en injectant un électron dans 4 (c'est-à-dire l'état c^+_{4e}), on obtient les ondes réfléchies (c^-_{4e} et c^+_{4h}) et les ondes transmises (c^-_{1e}, c^+_{1h}, c^-_{2e} et c^+_{2h}) (voir figure 3.4). On peut en déduire les éléments de matrice correspondants : s_{44ee}, s_{44he}, s_{14ee}, s_{14he}, s_{24ee} et s_{24he}. On recommence cette opération pour l'ensemble des terminaux et pour chaque type de particule. On obtient finalement :

$$\begin{pmatrix} s_{44ee} & s_{44eh} \\ s_{44he} & s_{44hh} \end{pmatrix} = S_{SS} - (a+b) S_{SN} \left[1 + (a+b) S_{NN}\right]^{-1} S_{NS} , \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s_{14ee} & s_{14eh} \\ s_{14he} & s_{14hh} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s_{24ee} & s_{24eh} \\ s_{24he} & s_{24hh} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\varepsilon}\Big(S_{NS} - (a+b) S_{NN} \left[1 + (a+b) S_{NN}\right]^{-1} S_{NS}\Big) , \end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{pmatrix} s_{41ee} & s_{41eh} \\ s_{41he} & s_{41hh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{42ee} & s_{42eh} \\ s_{42he} & s_{42hh} \end{pmatrix} = \sqrt{\varepsilon}\, S_{SN} \left[1 + (a+b) S_{NN}\right]^{-1} , \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} s_{11ee} \\ s_{11he} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s_{22ee} \\ s_{22he} \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon + a(a+b) & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} S_{NN}\right] [1 + (a+b)S_{NN}]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} s_{11ee} \\ s_{11he} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s_{22ee} \\ s_{22he} \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon + a(a+b) \end{pmatrix} S_{NN}\right] [1 + (a+b)S_{NN}]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,\end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{pmatrix} s_{12ee} & s_{12eh} \\ s_{12he} & s_{12hh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{21ee} & s_{21eh} \\ s_{21he} & s_{21hh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11ee} + 1 & s_{11eh} \\ s_{11he} & s_{11hh} + 1 \end{pmatrix} . \tag{C.7}$$

Ici, S_{NS}, S_{SN}, S_{NN} et S_{SS} sont des matrices 2×2 dont les éléments ont été calculés dans l'appendice B. Il est intéressant de noter que si on pose

$$S_{NN} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} ,$$

avec $\gamma = e^{-i \arccos(E/\Delta)} \simeq -i$, et $S_{NS} = S_{SN} = S_{SS} = 0$, on retrouve les équations (3.14), (3.15) et (3.16) dans le cas des faibles tensions appliquées.

Annexe D

Fonctions de Green de Keldysh d'un fil avec barrière

Le fil est constitué de deux chaînes semi-infinies avec des sites discrets (voir figure 4.2). Les deux chaînes sont séparées par une barrière. Le Hamiltonien de ce système est purement cinétique :

$$\mathcal{H}_0 = T_0 \sum_{\lambda} \left(c_{\lambda}^{+} c_{\lambda+1} + c_{\lambda+1}^{+} c_{\lambda} \right) + T_0 \sum_{\lambda'} \left(c_{\lambda'}^{+} c_{\lambda'+1} + c_{\lambda'+1}^{+} c_{\lambda'} \right) \ ,$$

où la somme sur λ (λ') est effectuée sur les sites de la première (deuxième) chaîne. On rajoute une perturbation pour permettre le passage du courant à travers la barrière. Le Hamiltonien de cette perturbation s'écrit :

$$\mathcal{H}_{int} = T \left(c_{\alpha}^{+} c_{\alpha'} + c_{\alpha'}^{+} c_{\alpha} \right) \ ,$$

et le Hamiltonien total est la somme des deux Hamiltoniens :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \ .$$

On maintient chaque fil à un potentiel chimique donné. Puis on autorise le passage du courant d'un fil à l'autre. Puisque les deux potentiels chimiques sont différents, on se retrouve dans une situation hors de l'équilibre, et on applique le formalisme de Keldysh.

D'après l'équation de Dyson en notation matricielle (4.20) écrite en en transformée de Fourier, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{\boldsymbol{G}}_{\alpha'\alpha} & = & \overline{\boldsymbol{g}}_{\alpha'\alpha'} \overline{\boldsymbol{\Sigma}}\, \overline{\boldsymbol{G}}_{\alpha\alpha} \\ \overline{\boldsymbol{G}}_{\alpha\alpha} & = & \overline{\boldsymbol{g}}_{\alpha\alpha} + \overline{\boldsymbol{g}}_{\alpha\alpha} \overline{\boldsymbol{\Sigma}}\, \overline{\boldsymbol{G}}_{\alpha'\alpha} \end{array} \right. \ , \tag{D.1}$$

avec $\overline{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T & 0 \end{pmatrix}$ et $\overline{\boldsymbol{G}} = \begin{pmatrix} 0 & G^a \\ G^r & G^k \end{pmatrix}$. Les fonctions G^a, G^r et G^k sont définies comme dans le chapitre 4 :

$$\begin{array}{rcl} G^a_{\alpha'\alpha}(t,t') & = & i\theta(t'-t) \langle \left\{ c_{\alpha'}(t), c_{\alpha}^{+}(t') \right\}_{\mp} \rangle \ , \\ G^r_{\alpha'\alpha}(t,t') & = & -i\theta(t-t') \langle \left\{ c_{\alpha'}(t), c_{\alpha}^{+}(t') \right\}_{\mp} \rangle \ , \\ G^k_{\alpha'\alpha}(t,t') & = & -i \langle \left\{ c_{\alpha'}(t), c_{\alpha}^{+}(t') \right\}_{\pm} \rangle \ , \end{array}$$

où le signe supérieur est valable pour les bosons et le signe inférieur pour les fermions. La valeur moyenne est prise par rapport au Hamiltonien total $\mathcal{H}$. En développant l'équation

(D.1), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} G^a_{\alpha'\alpha} & = & g^a_{\alpha'\alpha'} T G^a_{\alpha\alpha} \\ G^r_{\alpha'\alpha} & = & g^r_{\alpha'\alpha'} T G^r_{\alpha\alpha} \\ G^k_{\alpha'\alpha} & = & g^r_{\alpha'\alpha'} T G^k_{\alpha\alpha} + g^k_{\alpha'\alpha'} T G^a_{\alpha\alpha} \end{array}\right. ,$$

et :

$$\left\{\begin{array}{lcl} G^a_{\alpha\alpha} & = & g^a_{\alpha\alpha} + g^a_{\alpha\alpha} T G^a_{\alpha'\alpha} \\ G^r_{\alpha\alpha} & = & g^r_{\alpha\alpha} + g^r_{\alpha\alpha} T G^r_{\alpha'\alpha} \\ G^k_{\alpha\alpha} & = & g^k_{\alpha\alpha} + g^r_{\alpha\alpha} T G^k_{\alpha'\alpha} + g^k_{\alpha\alpha} T G^a_{\alpha'\alpha} \end{array}\right. .$$

On résout ce système et on trouve finalement :

$$\begin{aligned}
G^a_{\alpha\alpha} &= \frac{g^a_{\alpha\alpha}}{1 - T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'}} , \\
G^a_{\alpha'\alpha} &= \frac{T g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'}}{1 - T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'}} , \\
G^r_{\alpha\alpha} &= \frac{g^r_{\alpha\alpha}}{1 - T^2 g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'}} , \\
G^r_{\alpha'\alpha} &= \frac{T g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'}}{1 - T^2 g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'}} , \\
G^k_{\alpha\alpha} &= \frac{g^k_{\alpha\alpha} + T^2 g^k_{\alpha'\alpha'} g^a_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha\alpha}}{(1 - T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'})(1 - T^2 g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'})} , \\
G^k_{\alpha'\alpha} &= \frac{T(g^r_{\alpha'\alpha'} g^k_{\alpha\alpha} + g^k_{\alpha'\alpha'} g^a_{\alpha\alpha})}{(1 - T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'})(1 - T^2 g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'})} , \\
G^k_{\alpha\alpha'} &= \frac{T(g^r_{\alpha\alpha} g^k_{\alpha'\alpha'} + g^k_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'})}{(1 - T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'})(1 - T^2 g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'})} .
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de G^{+-} et G^{-+} en fonction de G^a, G^r et G^k (équations (4.18) et (4.19)), on obtient :

$$\begin{aligned}
G^{+-}_{\alpha\alpha} &= \frac{g^k_{\alpha\alpha} + g^a_{\alpha\alpha} - g^r_{\alpha\alpha} + T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha\alpha} (g^k_{\alpha'\alpha'} + g^a_{\alpha'\alpha'} - g^r_{\alpha'\alpha'})}{2(1 - T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'})(1 - T^2 g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'})} \\
&= \frac{g^{+-}_{\alpha\alpha} + T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha\alpha} g^{+-}_{\alpha'\alpha'}}{(1 - T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'})(1 - T^2 g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'})} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{-+}_{\alpha\alpha} &= \frac{g^k_{\alpha\alpha} - g^a_{\alpha\alpha} + g^r_{\alpha\alpha} + T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha\alpha} (g^k_{\alpha'\alpha'} - g^a_{\alpha'\alpha'} + g^r_{\alpha'\alpha'})}{2(1 - T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'})(1 - T^2 g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'})} \\
&= \frac{g^{-+}_{\alpha\alpha} + T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha\alpha} g^{-+}_{\alpha'\alpha'}}{(1 - T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'})(1 - T^2 g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'})} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{+-}_{\alpha'\alpha} &= \frac{T\left(g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'} - g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'} + g^r_{\alpha'\alpha'} g^k_{\alpha\alpha} + g^k_{\alpha'\alpha'} g^a_{\alpha\alpha}\right)}{2(1 - T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'})(1 - T^2 g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'})} \\
&= \frac{T\left(g^{+-}_{\alpha\alpha} g^{-+}_{\alpha'\alpha'} + g^{+-}_{\alpha\alpha} g^{+-}_{\alpha'\alpha'} - g^{--}_{\alpha\alpha} g^{+-}_{\alpha'\alpha'} - g^{+-}_{\alpha\alpha} g^{--}_{\alpha'\alpha'}\right)}{(1 - T^2 g^a_{\alpha\alpha} g^a_{\alpha'\alpha'})(1 - T^2 g^r_{\alpha\alpha} g^r_{\alpha'\alpha'})} ,
\end{aligned} \tag{D.2}$$

$$
\begin{aligned}
G^{+-}_{\alpha\alpha'} &= \frac{T\left(g^a_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'} - g^r_{\alpha\alpha}g^r_{\alpha'\alpha'} + g^r_{\alpha\alpha}g^k_{\alpha'\alpha'} + g^k_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'}\right)}{2(1-T^2g^a_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'})(1-T^2g^r_{\alpha\alpha}g^r_{\alpha'\alpha'})} \\
&= \frac{T\left(g^{-+}_{\alpha\alpha}g^{+-}_{\alpha'\alpha'} + g^{+-}_{\alpha\alpha}g^{+-}_{\alpha'\alpha'} - g^{--}_{\alpha\alpha}g^{+-}_{\alpha'\alpha'} - g^{+-}_{\alpha\alpha}g^{--}_{\alpha'\alpha'}\right)}{(1-T^2g^a_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'})(1-T^2g^r_{\alpha\alpha}g^r_{\alpha'\alpha'})} \,, \qquad \text{(D.3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{-+}_{\alpha'\alpha} &= \frac{T\left(g^r_{\alpha'\alpha'}g^k_{\alpha\alpha} + g^k_{\alpha'\alpha'}g^a_{\alpha\alpha} - g^a_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'} + g^r_{\alpha\alpha}g^r_{\alpha'\alpha'}\right)}{2(1-T^2g^a_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'})(1-T^2g^r_{\alpha\alpha}g^r_{\alpha'\alpha'})} \\
&= \frac{T\left(g^{+-}_{\alpha\alpha}g^{-+}_{\alpha'\alpha'} + g^{-+}_{\alpha\alpha}g^{-+}_{\alpha'\alpha'} - g^{-+}_{\alpha\alpha}g^{--}_{\alpha'\alpha'} - g^{--}_{\alpha\alpha}g^{-+}_{\alpha'\alpha'}\right)}{(1-T^2g^a_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'})(1-T^2g^r_{\alpha\alpha}g^r_{\alpha'\alpha'})} \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{-+}_{\alpha\alpha'} &= \frac{T\left(g^r_{\alpha\alpha}g^k_{\alpha'\alpha'} + g^k_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'} - g^a_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'} + g^r_{\alpha\alpha}g^r_{\alpha'\alpha'}\right)}{2(1-T^2g^a_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'})(1-T^2g^r_{\alpha\alpha}g^r_{\alpha'\alpha'})} \\
&= \frac{T\left(g^{-+}_{\alpha\alpha}g^{+-}_{\alpha'\alpha'} + g^{-+}_{\alpha\alpha}g^{-+}_{\alpha'\alpha'} - g^{-+}_{\alpha\alpha}g^{--}_{\alpha'\alpha'} - g^{--}_{\alpha\alpha}g^{-+}_{\alpha'\alpha'}\right)}{(1-T^2g^a_{\alpha\alpha}g^a_{\alpha'\alpha'})(1-T^2g^r_{\alpha\alpha}g^r_{\alpha'\alpha'})} \,.
\end{aligned}
$$

Bibliographie

[1] R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957).

[2] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams et D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).

[3] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel et C. T. Foxon, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988).

[4] D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newburry, M. Pepper, H. Ahmed, J. E. F. Frost, D.G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Ritchie et G. A. C. Jones, J. Phys. C **21**, L209 (1988).

[5] W. Schottky, Ann. Phys. (Leipzig) **57**, 541 (1918).

[6] M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **65**, 2901 (1990).

[7] M. Büttiker, Phys. Rev. B **46**, 12485 (1992).

[8] T. Martin et R. Landauer, Phys. Rev. B **45**, 1742 (1992).

[9] R. de Picciotto, H. L. Stormer, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin et K. W. West, Nature **411**, 51 (2001).

[10] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge University Press, 1995).

[11] Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics* (Oxford University Press, 1997).

[12] A. M. Chang, Nature **411**, 39 (2001).

[13] S. Feng, dans *Mesoscopic Phenomena in Solids*, édité par B. Altshuler, P. A. Lee et R. A. Webb, North-Holland, 1991.

[14] Sh. M. Kogan, *Electronic Noise and Fluctuations in Solids* (Cambridge University Press, 1996).

[15] G. B. Lesovik, Pis'ma Zh. Éksp. Teor. Fiz. **49** 513 (1989) [JETP Lett. **49** 592 (1989)].

[16] Y. P. Li, D. C. Tsui, J. J. Heremans, J. A. Simmons et G. W. Weimann, Appl. Phys. Lett. **57**, 774 (1990).

[17] M. Reznikov, M. Heiblum, H. Shtrikman et D. Mahalu, Phys. Rev. Lett. **75**, 3340 (1995).

[18] A. Kumar, L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin et B. Etienne, Phys. Rev. Lett. **76**, 2778 (1996).

[19] H. E. van den Brom et J. M. van Ruitenbeek, Phys. Rev. Lett. **82**, 1526 (1999).

[20] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin et B. Etienne, Phys. Rev. Lett. **79**, 2526 (1997).

[21] R. de Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umansky, G. Bunin et D. Mahalu, Nature **389**, 162 (1997).

[22] H. Birk, M. J. M. de Jong et C. Schönenberger, Phys. Rev. Lett. **75**, 1610 (1995).

[23] S.-R. Eric Yang, Sol. State Commun. **81**, 375 (1992).

[24] G. B. Lesovik, JETP Lett. **70**, 208 (1999).

[25] R. J. Schoellkopf, P. J. Burke, A. A. Kozhevnikov, D. E. Prober et M. J. Rooks, Phys. Rev. Lett. **78**, 3370 (1997).

[26] C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys **69**, 731 (1997).

[27] C. W. J. Beenakker et M. Büttiker, Phys. Rev. B **46**, 1889 (1992).

[28] K. E. Nagaev, Phys. Lett. A **169**, 103 (1992).

[29] M. J. M. de Jong et C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. B **51**, 16867 (1995).

[30] A. F. Andreev, J. Exp. Theor. Phys. **46**, 1823 (1964) [Sov. Phys. JETP **19**, 1228 (1964)].

[31] C. W. J. Beenakker, dans *Quantum Mesoscopic Phenomena and Mesoscopic Devices in Microelectronics*, édité par I. O. Kulik et R. Ellialtioglu, NATO Science Series C559 (Kluwer, Dordrecht, 2000).

[32] R. Landauer, Philos. Mag. **21**, 863 (1970).

[33] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer et S. Pinhas, Phys. Rev. B **31**, 6207 (1985).

[34] Y. Imry, *Directions in Condensed Matter Physics*, édité par G. Grinstein et G. Mazenko (World Scientific, Singapore, 1986).

[35] N. N. Bogolubov, V. V. Tolmachev et D. V. Shirkov, *A New Method in the Theory of Superconductivity*, Consultant Bureau, New York, 1959.

[36] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, Addison Wesley, 1966, 1989.

[37] G. E. Blonder, M. Tinkham et T. M. Klapwijk, Phys. Rev. B **25**, 4515 (1982).

[38] C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. B **46**, 12841 (1992).

[39] C. W. J. Beenakker, dans *Mesoscopic Quantum Physics*, édité par E. Akkermans *et al.*, p. 279 (Les Houches LXI, North-Holland 1995).

[40] T. Martin, Phys. Lett. A **220**, 137 (1996).

[41] M. P. Anantram et S. Datta, Phys. Rev. B **53**, 16 390 (1996).

[42] S. Datta, P. Bagwell et M. P. Anantram, Phys. Low-Dim. Struct. **3**, 1 (1996).

[43] Ya. M. Blanter et M. Büttiker, Phys. Rep. **336**, 1-2 (2000).

[44] G. B. Lesovik, T. Martin et J. Torrès, Phys. Rev. B **60**, 11935 (1999).

[45] J. Torrès, T. Martin et G. B. Lesovik, Phys. Rev. B **63**, 134517 (2001).

[46] B. D. Josephson, Phys. Rev. Lett. **1**, 251 (1962).

[47] A. I. Larkin et Yu. N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **26**, 1219 (1968).

[48] V. A. Khlus, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **93**, 2179 (1987) [Sov. Phys. JETP **66**, 1243 (1987)].

[49] M. J. M. de Jong et C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. B **49**, 16070 (1994).

[50] B. A. Muzykantskii et D. E. Khmelnitskii, Phys. Rev. B **50**, 3982 (1994).

[51] X. Jehl, P. Payet-Burin, C. Baraduc, R. Calemczuk et M. Sanquer, Phys. Rev. Lett. **83**, 1660 (1999).

[52] X. Jehl, *Bruit de grenaille dans les jonctions métal normal/supraconducteur*, thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I (1999).

[53] X. Jehl, M. Sanquer, R. Calemczuk et D. Mailly, Nature (London) **405**, 50 (2000).

[54] A. A. Kozhevnikov, R. J. Shoelkopf et D. E. Prober, Phys. Rev. Lett. **84**, 3398 (2000).

[55] G. B. Lesovik et L. S. Levitov, Phys. Rev. Lett. **72**, 724 (1994).

[56] R. J. Schoelkopf, A. A. Kozhevnikov, D. E. Prober et M. J. Rooks, Phys. Rev. Lett. **80**, 2437 (1998).

[57] R. Hanbury-Brown et R. Q. Twiss, Nature **177**, 27 (1956).

[58] Y. Gefen, Y. Imry et M. Ya. Azbel, Phys. Rev. Lett. **52**, 129 (1984).

[59] M. Büttiker, Y. Imry et M. Ya. Azbel, Phys. Rev. A, **30**, 1982 (1984).

[60] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland et C. Schönenberger, Science **284**, 296 (1999).

[61] S. Oberholzer, M. Henny, C. Strunk, C. Schönenberger, T. Heinzel, K. Ensslin et M. Holland, Physica E **6**, 314 (2000).

[62] W. D. Oliver, J. Kim, R. C. Liu et Y. Yamamoto, Science **284**, 299 (1999).

[63] J. Torrès et T. Martin, Eur. Phys. J. B **12**, 319 (1999).

[64] B. Pannetier et H. Courtois, J. of Low Temp. Phys. **118**, 599 (2000).

[65] G. Siffert, rapport de stage de DEA, Centre de Physique Théorique (1997).

[66] T. Gramespacher et M. Büttiker, Phys. Rev. B **61**, 8125 (2000).

[67] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).

[68] L. P. Kadanoff et G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics* (W. A. Benjamin Inc., New York, 1962).

[69] L. V. Keldysh, J. Exp. Theor. Phys. **47**, 1515 (1964) [Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965)].

[70] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov et I. E. Dzyaloshinski, *Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics*, deuxième édition (Permagon, 1965).

[71] G. D. Mahan, *Many Particle Physics* (Plenum Press, 1990).

[72] V. N. Fleurov et A. N. Kozlov, J. Phys. F **8**, 1899 (1978).

[73] C. Caroli, R. Combescot, P. Nozières et D. Saint-James, J. Phys. C **4**, 916 (1971).

[74] D. C. Langreth, dans *Linear and Nonlinear Electron Transport in Solids*, édité par J. T. Devreese et V. E. van Doren, volume 17 de *NATO Advanced Study Institues, Series B: Physics* (Plenum, New York, 1976).

[75] P. Danielewicz, Ann. Phys. **152**, 239 (1984).

[76] J. Rammer et H. Smith, Rev. Mod Phys. **58**, 323 (1986).

[77] J. C. Cuevas, A. Martin-Rodero et A. Levy Yeyati, Phys. Rev. Lett. **82**, 4086 (1999).

[78] J. C. Cuevas, *Electronic transport in normal and superconducting nanostructures*, thèse de l'Universidad Autonoma de Madrid (1999).

[79] L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **3**, 920 (1957).

[80] L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **8**, 70 (1959).

[81] P. Nozières, *Interacting Fermi Systems* (W. A. Benjamin Inc., New York, 1964).

[82] R. Peierls, *Quantum Theory of Solids* (Oxford University Press, 1955).

[83] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5**, 544 (1950).

[84] J. M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).

[85] D. C. Mattis et E. H. Lieb, J. Math. Phys. **6**, 304 (1965).

[86] F. D. M. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981).

[87] X.-G. Wen, Int. J. Mod. Phys. B **6**, 1711 (1992).

[88] J. Voit, Rep. Prog. Phys. **58**, 977 (1995).

[89] H. J. Schulz, dans *Physique Quantique Mésoscopique*, édité par E. Akkermans, G. Montanbaux, J. L. Pichard et J. Zinn-Justin, Les Houches, 1994, Session LXI, (North Holland, Elsevier, 1995).

[90] M. P. A. Fisher et L. I. Glazman, dans *Mesoscopic Electron Transport*, édité par L. Kowenhoven, G. Schön et L. Sohn, NATO ASI Series E, (Kluwer Ac. Publ., Dordrecht, 1996).

[91] I. Safi, *Propriétés d'un fil quantique connecté à des fils de mesure*, thèse de doctorat et Ann. Phys. Fr. **22**, 463 (1997).

[92] K. Schönhammer, cond-mat/9710330 (1997).

[93] J. von Delft et H. Schoeller, Ann. Phys. **7**, 225 (1998).

[94] V. J. Emery, dans *Highly conducting one dimensional solids*, édité par J. T. Devresse, R. P. Evrard et V. E. van Doren, (Plenum, New York, 1979).

[95] L. de R. Kronig, Physica **2**, 968 (1935).

[96] J. W. Negele et H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems* (Addison Wesley, 1988).

[97] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems* (Addison Wesley, 1991).

[98] C. L. Kane et M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **46**, 15233 (1992).

[99] D. S. Fisher et P. A. Lee, Phys. Rev. B **23**, 6851 (1981).

[100] D. L. Maslov et M. Stone, Phys. Rev. B **52**, R5539 (1995).

[101] V. V. Ponomarenko, Phys. Rev. B **52**, R8666 (1995).

[102] I. Safi et H. J. Schulz, Phys. Rev. B **52**, R17040 (1995).

[103] S. Tarucha, T. Honda, T. Saku, Sol. State Commun. **94**, 413 (1995).

[104] K. von Klitzing, G. Dorda et M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).

[105] D. C. Tsui, H. L. Stormer et A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).

[106] L. Saminadayar, *Fluctuations temporelles quantiques du courant dans des nanostructures*, thèse de doctorat de l'Université de Paris XI (1997).

[107] G. S. Canright et S. Girvin, Science **247**, 1197 (1990).

[108] C. L. Kane et M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **72**, 724 (1994).

[109] P. Fendley, A. W. W. Ludwig et H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **74**, 3005 (1995).

[110] P. Fendley, A. W. W. Ludwig et H. Saleur, Phys. Rev. B **52**, 8934 (1995).

[111] P. Fendley, A. W. W. Ludwig et H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **75**, 2196 (1995).

[112] R. Shankar, Int. J. Mod. Phys. B **4**, 2371 (1990).

[113] C. de C. Chamon, D. E. Freed et X.-G. Wen, Phys. Rev. B **51**, 2363 (1995).

[114] I. Safi, P. Devillard et T. Martin, Phys. Rev. Lett. **86**, 4628 (2001).

[115] I. Safi, P. Devillard et T. Martin, en préparation (2001).

[116] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, San Diego, 1980).

[117] J.-X. Zhu et C. S. Ting, Phys. Rev. B **59**, R14165 (1999).

[118] J.-X. Zhu et C. S. Ting, Phys. Rev. B **61**, 1456 (2000).

[119] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **67**, 937 (1991).

[120] S. B. Isakov, T. Martin et S. Ouvry, Phys. Rev. Lett. **83**, 580 (1999).

[121] B. Trauzettel, R. Egger et H. Grabert, cond-mat/0109022 (2001).

formule de Landauer. Mais le bruit contient davantage d'informations que la conductance : il mesure les fluctuations temporelles du courant autour de sa valeur moyenne. De plus, le signe des corrélations de bruit est lié à la statistique des porteurs de charge.

Dans une jonction entre un métal normal et un supraconducteur, le bruit présente une singularité à la fréquence Josephson, signature de la charge $2e$ des paires de Cooper impliquées dans le transport. Lorsque la tension appliquée est supérieure au gap du supraconducteur, la courbe du bruit exhibe des singularités à plusieurs fréquences auxquelles on peut associer un processus de réflexion ou de transmission. L'analogue fermionique de l'expérience d'Hanbury-Brown et Twiss avec un supraconducteur permet d'observer à la fois des corrélations positives et négatives dans un même système.

Maintenir une différence de potentiel entre les deux extrémités d'un fil crée une situation relevant de la thermodynamique hors de l'équilibre. Formellement, on peut se ramener à un calcul à l'équilibre et écrire une théorie des perturbations grâce à la méthode de Keldysh.

La théorie des liquides de Luttinger décrit les systèmes unidimensionnels d'électrons en interaction. Le Hamiltonien peut se mettre sous forme quadratique grâce à la bosonisation. D'autre part, un liquide de Luttinger chiral constitue un bon modèle des états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire. Grâce au formalisme de Keldysh, on peut retrouver une formule de type Schottky et identifier la charge des quasiparticules de Laughlin.

Transport and quantum noise in mesoscopic wires

Abstract: The conductance is the most natural quantity to characterize a quantum conductor. It is given by the Landauer formula. Yet, noise contains more information than conductance: it measures the current fluctuations around its average value. Moreover, the sign of the noise correlations is related to the statistics of the carriers.

In a junction between a normal metal and a superconductor the noise exhibits a singularity at the Josephson frequency, a signature of the charge $2e$ of the Cooper pairs involved in the transport. When the voltage is larger than the gap of the superconductor, the noise characteristics shows other singularities at several frequencies which can be associated to a reflection or transmission process at the junction. The fermionic analog of the Hanbury-Brown and Twiss experiment with a superconductor allows to observe both positive and negative correlations in the same system.

Applying a voltage between the terminals of a wire leads to a non-equilibrium situation. But formally, it is possible to use equilibrium quantities in a perturbative scheme called the Keldysh technique.

Luttinger liquids theory describes the one-dimensional interacting electrons systems. The Hamiltonian can be rewritten in a quadratic form using bosonization. The edge states of the fractional quantum Hall effect can be described by a chiral Luttinger liquid. Using the Keldysh technique, one may recover a Schottky formula in order to identify the charge of Laughlin quasiparticles.

Spécialité : physique théorique

Mots clés : transport quantique, approche de Landauer, courant, conductance, bruit quantique, bruit de grenaille, corrélations de bruit, jonction N-S, expérience d'Hanbury-Brown et Twiss, formalisme de Keldysh, liquides de Luttinger.

Centre de Physique Théorique, Luminy case 907, 13288 Marseille cedex 9