



**HAL**  
open science

# Amplification paramétrique d'images en cavité: Effets classiques et quantiques

Sylvain Gigan

► **To cite this version:**

Sylvain Gigan. Amplification paramétrique d'images en cavité: Effets classiques et quantiques. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT: . tel-00007425v1

**HAL Id: tel-00007425**

**<https://theses.hal.science/tel-00007425v1>**

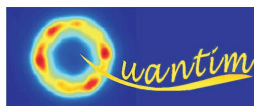
Submitted on 16 Nov 2004 (v1), last revised 16 Nov 2004 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laboratoire Kastler-Brossel

Université Pierre et Marie Curie



Thèse de doctorat de l'Université Paris VI

Spécialité : Laser et Matière

*présentée par*

**Sylvain Gigan**

*Pour obtenir le grade de  
DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6*

**Amplification paramétrique d'images en cavité :**

**Effets classiques et quantiques**

*Soutenue le 27 Octobre 2004 devant le jury composé de :*

M. Claude FABRE ..... *Directeur de thèse*  
M. Philippe JACQUIER ..... *Examineur*  
M. Eric LANTZ ..... *Rapporteur*  
M. Juan Ariel LEVENSON ..... *Rapporteur*  
M. Luigi LUGIATO ..... *Examineur*  
Mme Agnès MAÎTRE ..... *Examinatrice*  
M. Alexander V. SERGIENKO ..... *Examineur*



Ce travail de thèse a été effectuée entre avril 2001 et octobre 2004 au sein du Laboratoire Kastler-Brossel, à l'université Pierre et Marie Curie, dans l'équipe d'optique quantique paramétrique, dirigée par Claude Fabre. Je remercie en tout premier lieu mon jury d'avoir jugé mon travail. Je suis en particulier très reconnaissant à Ariel Levenson et Eric Lantz d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, pour la lecture attentive de mon manuscrit et les corrections qu'ils ont pu y apporter.

J'ai eu la chance d'arriver juste au moment où les efforts de l'équipe ont permis de mettre en évidence les premiers effets quantiques transverses, aboutissement de plusieurs années de recherches, et où l'expérience s'est orientée vers le thème qui a été le mien : l'amplification d'image. Au même moment a commencé le projet européen QUANT(um)IM(aging), auquel nous avons participé. Je remercie l'Union Européenne de cette manne financière qui m'a permis de réaliser ma thèse dans un aisance matérielle appréciable par les temps qui courent, tant au tout début de ma thèse lorsque j'ai remonté l'expérience sur la table optique flambante neuve, que dans les "coups durs" -je pense en particulier à mon défunt laser qui un matin ne s'est jamais rallumé, et qu'on a pu remplacer sans tergiverser.

Je remercie tout d'abord Frank Laloë de m'avoir accueilli au Laboratoire Kastler-Brossel. Au sein du laboratoire, mes remerciements vont en premier à mon groupe. Claude Fabre tout d'abord, qui m'a accueilli dans son équipe, qui a toujours été disponible, même quand il ne l'était pour personne, et de qui j'ai énormément (tout?) appris. Agnès Maître qui, aussi très prise, a su trouver le temps de m'encadrer et de m'encourager pendant ces trois ans. Nicolas Treps, auquel j'ai succédé sur la manip, et qui, tant pendant son escapade australienne qu'une fois recruté dans l'équipe, est resté en première ligne pour m'aider et me prodiguer, toujours avec bonne humeur, de judicieux conseils. Je les remercie en particulier pour la relecture attentive de cette thèse. Je remercie également Marcello Martinelli, avec qui j'ai commencé à travailler sur la manip, et qui malgré sa taille inhabituelle pour l'équipe a su se mettre à ma hauteur pour m'apprendre le métier. Pour leur disponibilité, leur ténacité, leur participation précieuse aux travaux de cette thèse, et pour le plaisir que j'ai eu à travailler avec eux, je remercie chaleureusement Gaël Moneron, Vincent Delaubert, et tout particulièrement Laurent Lopez qui, après un an de travail en commun, prend ma suite. Remerciements également à Thomas Coudreau, Sara Ducci, Laurent Longchambon et Julien Laurat pour nos fructueuses discussions, ainsi qu'à Gaëlle Keller et Antonino Chiummo. Un grand merci collectif à tous les membres de l'équipe sans exception pour la chaleureuse et productive ambiance de travail.

Au sein du laboratoire, mes remerciements vont tout d'abord aux "drôles de dames" du secrétariat, Monique Bonamy et Laetitia Morel, pour leur bonne hu-



meur quotidienne, et pour m'avoir fait croire pendant trois ans que l'administration c'était facile et que passer une commande était presque aussi simple que poster une lettre. Je remercie ensuite mes co-bureaux successifs, Cyriaque Genet, Tristan Briant et son robot, Brahim Lamine et... enfin Brahim quoi, Pierre-François Cohadon et son équipe (pudiquement désignés par leurs initiales JPH et NT), et bien sur mes compères Julien "hotline" Le Bars et Riccardo "ipod" Sapienza, pour m'avoir supporté, ainsi qu'Abdallah puis Flipper pour leur soutien sans failles (de sécurités). Je remercie également mes voisins de manip, Vincent Josse et Aurélien Dantan pour notre exemplaire cohabitation dans cet espace exigu et malgré nos légers désaccords sur l'ambiance musicale du lieu. Malgré leur réticence à libérer certains ports (port 4662, etc...) indispensables à notre travail quotidien, et une tentative avortée d'assassinat (oui Serge), Corinne Poisson et Serge Begon m'ont toujours aidé plus vite que leur ombre, merci encore! Merci aussi aux mécaniciens Christophe Rafaillac, Pascal Travers et Chris Lelong, ainsi qu'à Jean-Pierre Okpiz en électronique pour leurs réalisations, leur aide et leurs conseils.

L'ambiance du laboratoire a toujours été excellente, et j'ai énormément apprécié la disponibilité et la gentillesse des chercheurs confirmés qui, quelle que soit leur équipe et leur occupation du moment, n'ont jamais compté leur temps pour répondre à mes questions, voire à me donner un coup de main, aussi bien lors des discussions à bâtons rompus dans la salle café que lorsque je venais les déranger. Je remercie donc tout particulièrement et dans le désordre François F2 Nez, François F1 Biraben, Catherine Schwob, Michel Pinard, Paul Indelicato, Antoine Heidmann, Jean-Michel Courty Jean-Pierre Hermier, Alberto Bramati, Dominique Delande, Benoit Grémaud, Saida Guellati-Khélifa, Pierre-François Cohadon, Nicolas Billy, Laurent Hilico, Lucile Julien, Astrid Lambrecht et Serge Reynaud. Je remercie enfin le professeur Bernard Cagnac pour sa gentillesse et son stoïcisme devant les bruyants et envahissants thésards que nous avons été.

Je remercie également tous les thésards du laboratoire. J'ai été ravi de côtoyer ceux qui étaient déjà là : Bruno Manil, Isabelle Maurin, Jean-Philippe Karr, Augustin Baas, Eric-Olivier Le Bigot, Gaëtan Messin, Laurent Vernac, Olivier Sigwarth, Remy Battesti, d'assister à leur pot de thèse et pour certains de continuer à les côtoyer comme membres à part entière du laboratoire, mais aussi ceux qui n'étaient pas encore là : Olivier Arcize, Thomas Caniard, Pierre Cladé, Aurélien Dantan, Rémy Hervé, Francesco Intravaia, Senem Kilic, Julien Le Bars, Marco Romanelli, Martino Trassinelli, et tous les nouveaux que je n'ai pas encore eu le temps de bien connaître, auxquels je souhaite bonne chance pour la suite, et à la thèse et au pot desquels j'espère pouvoir assister. Merci également à tous les visiteurs et post-docs étrangers, Thomas Wellens, Robert Kühn, Vladimir Yerokhin et tous les autres. Je n'ai pas hélas de petit mot pour chacun, mais tout le monde a participé et se reconnaîtra dans l'ambiance (franco-italienne principalement),

les ragots, les bouffes, les coinches, les soirées, les discussions sans queue ni tête en salle café. Mention spéciale à Brahim Lamine et à Julien Laurat avec qui on s'est mutuellement épaulé durant ces trois ans, et à Olivier Arnoult avec qui ça remonte à bien avant la thèse!

Bonjour et merci à Florence pour sa gentillesse, sa disponibilité et son aide précieuse pour le pot, à Maxime pour ses corrections, à mes amis (enfin les vrais, ceux qui ont assisté sans comprendre à ma thèse), à mes frères et à mes parents! Tant qu'on y est et en vrac merci à Pandora, aux petites souris du laboratoire, au restaurant "la comédia", au club, à L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, à Steve et à un peu à Bill.

Merci enfin et surtout à Carole pour son soutien inconditionnel avant, pendant et après ces trois ans.



---

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<i>Première partie</i>	
<b>Imagerie et cavités</b>	<b>5</b>
<b>1 Optique Transverse</b>	<b>7</b>
A Optique des faisceaux lasers . . . . .	8
A.1 Optique paraxiale . . . . .	8
A.2 Faisceaux gaussiens . . . . .	9
A.3 Optique géométrique . . . . .	10
A.4 Formalisme des matrices de Gauss . . . . .	11
B Imagerie . . . . .	12
B.1 Qu'entendons nous par une image? . . . . .	12
B.2 Exemple d'objets . . . . .	13
B.3 Propagation d'une image . . . . .	14
B.4 Imagerie paraxiale . . . . .	19
<b>2 Cavités dégénérées</b>	<b>21</b>
A Généralités . . . . .	22
A.1 Qu'est ce qu'une cavité? . . . . .	22
A.2 Stabilité d'une cavité . . . . .	22
A.3 Modes propres d'une cavité linéaire stable . . . . .	23
A.4 Cavité paraxiale à deux miroirs sphériques . . . . .	24
B Dégénérescence transverse . . . . .	25
B.1 Qu'est ce que la dégénérescence transverse? . . . . .	25
B.2 Finesse et quasi-dégénérescence . . . . .	28
C Cavités particulières à deux miroirs . . . . .	29

C.1	Cavité plan-plan . . . . .	29
C.2	Cavité concentrique . . . . .	29
C.3	Cavité confocale symétrique . . . . .	30
C.4	Cavité symétriques dégénérées . . . . .	32
C.5	hémi-cavités . . . . .	33
C.6	Cavité totalement dégénérée . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Transmission d'une image à travers une cavité</b>	<b>35</b>
A	Généralités . . . . .	36
A.1	Notations . . . . .	36
A.2	Cavité monomode . . . . .	37
A.3	Cavité totalement dégénérée . . . . .	38
A.4	Cavité balayée . . . . .	39
B	Cavité partiellement imageante . . . . .	39
B.1	Fonctions "Auto-Transformes" . . . . .	39
B.2	Cavité partiellement dégénérée . . . . .	42
B.3	Perte d'information sur l'image . . . . .	44
B.4	Cavités simples . . . . .	44
C	Cavité hémi-confocale . . . . .	45
C.1	Transmission à travers la cavité . . . . .	46
C.2	Transmission de l'image d'une fente par la cavité . . . . .	48
	 <i>Deuxième partie</i>	
	<b>Amplification d'image en cavité : Théorie</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Amplification optique sans bruit</b>	<b>59</b>
A	Amplification paramétrique classique . . . . .	60
A.1	L'effet paramétrique . . . . .	60
A.2	Interaction à trois champs . . . . .	60
A.3	Amplification en type II . . . . .	62
B	Amplification paramétrique quantique . . . . .	64
B.1	Quelques éléments d'optique quantique . . . . .	64
B.2	Équations de propagation quantiques . . . . .	67
C	Amplification et facteur de bruit . . . . .	70
C.1	Bruit et signal dans un faisceau . . . . .	70
C.2	Facteur de bruit d'un amplificateur . . . . .	70
D	Bruit et amplification paramétrique . . . . .	72
D.1	Amplification insensible à la phase . . . . .	72
D.2	Amplification sensible à la phase . . . . .	74

<b>5</b>	<b>Amplification paramétrique en cavité monomode</b>	<b>77</b>
A	Résolution classique . . . . .	78
A.1	Équations d'évolution . . . . .	79
A.2	Équations stationnaires sous le seuil . . . . .	80
A.3	Résolution intracavité . . . . .	81
A.4	Gain pour une modulation . . . . .	85
B	Traitement quantique . . . . .	86
B.1	Équations hémi-classiques . . . . .	86
B.2	Relation entrée-sortie sur les fluctuations . . . . .	87
B.3	Bruit sur les quadratures . . . . .	88
B.4	Compression optimale en présence d'injection . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Amplificateur paramétrique optique multimode</b>	<b>93</b>
A	Optique quantique transverse . . . . .	94
A.1	Quantification transverse . . . . .	94
A.2	Décomposition en modes . . . . .	95
A.3	Observables locales . . . . .	96
A.4	Effets quantiques dans les images . . . . .	98
B	Caractérisation du caractère multimode d'un faisceau . . . . .	100
B.1	Faisceau multimode classique . . . . .	100
B.2	Faisceau multimode quantique . . . . .	101
B.3	Caractérisation formelle . . . . .	101
B.4	Caractérisation expérimentale . . . . .	101
C	Faisceau multimode produit par la cavité hémi-confocale . . . . .	103
C.1	Commutateur de la cavité vide . . . . .	104
C.2	Interaction paramétrique . . . . .	106
D	Génération de vide comprimé multimode . . . . .	107
D.1	Détection homodyne . . . . .	107
D.2	Bruit sur un détecteur circulaire . . . . .	110
	 <i>Troisième partie</i>	
	<b>Amplification d'image en cavité: Expérience</b>	<b>115</b>
<b>7</b>	<b>Dispositif Expérimental</b>	<b>117</b>
A	Les sources . . . . .	119
A.1	Laser maître . . . . .	119
A.2	Laser esclave . . . . .	122
A.3	Cavité de doublage . . . . .	123
B	Filtrage spatial . . . . .	124

B.1	Principe de la cavité de filtrage . . . . .	125
B.2	Montage expérimental . . . . .	126
C	Génération de l'image . . . . .	127
D	Les détecteurs . . . . .	128
D.1	Caméra CCD . . . . .	128
D.2	Matrice de photodiodes . . . . .	130
D.3	Photodiodes . . . . .	130
E	Asservissements . . . . .	131
E.1	Isolation passive . . . . .	131
E.2	Asservissement en température . . . . .	132
E.3	Asservissement des cavités . . . . .	133
E.4	Asservissement des phases relatives . . . . .	134
<b>8</b>	<b>Expérience en cavité confocale</b>	<b>135</b>
A	OPO confocal triplement résonnant . . . . .	136
A.1	Configuration expérimentale . . . . .	136
A.2	Résultats . . . . .	141
A.3	Conclusion . . . . .	144
B	Amplification dans un OPA confocal . . . . .	144
B.1	Configuration expérimentale . . . . .	144
B.2	La triple dégénérescence . . . . .	146
B.3	Résultats : Amplification monomode en cavité balayée . . . . .	150
B.4	Résultats: Amplification monomode en cavité asservie . . . . .	152
<b>9</b>	<b>La double cavité</b>	<b>155</b>
A	Étude théorique . . . . .	155
A.1	Principe . . . . .	155
A.2	Bibliographie . . . . .	156
A.3	Intérêt . . . . .	157
B	Étude expérimentale . . . . .	158
B.1	Configuration Expérimentale . . . . .	158
B.2	Alignement des cavités séparées . . . . .	162
B.3	Alignement des deux cavités ensemble . . . . .	163
B.4	Cavités Fabry-Perot Parasites . . . . .	165
<b>10</b>	<b>Amplification d'image en cavité hémi-confocale</b>	<b>171</b>
A	Amplification en cavité doublement résonnante . . . . .	172
A.1	Configuration expérimentale . . . . .	172
A.2	Réglages . . . . .	174
A.3	Résultats classiques et quantiques . . . . .	175

B	Amplification en double cavité . . . . .	177
B.1	Configuration expérimentale . . . . .	177
B.2	Transmission d'image . . . . .	179
B.3	Amplification d'image: Résultats classiques . . . . .	181
C	Bruit de l'amplification . . . . .	185
C.1	Dispositif expérimental . . . . .	185
C.2	Caractère non-classique des images amplifiées . . . . .	185
C.3	Résultats . . . . .	187
 <b>Conclusion</b>		<b>189</b>
 <b>Bibliographie</b>		<b>191</b>





---

# Introduction

---

**L**A QUESTION de la transmission d'une image a toujours été un point crucial de l'optique. Comment voyons nous? Comment fonctionne une loupe ou une lunette astronomique? Toutes ces questions se ramènent en fait à savoir comment se propage la lumière. Ce problème a été abordé par Descartes, Newton, Fresnel, etc ... Le phénomène-clef de la propagation libre, la diffraction, se comprend très bien grâce à la théorie ondulatoire du champ électromagnétique. Mais si on veut comprendre l'ensemble des phénomènes en jeu dans la propagation d'une image (et en particulier la détection), il faut aussi tenir compte de la nature corpusculaire de la lumière, que l'on sait constituée de photons, et qui est associée à sa nature quantique. Cette approche a été développée par Einstein, Dirac etc... Bien entendu les visions ondulatoires et corpusculaires ne sont pas contradictoires, mais complémentaires et ont été réunies par la théorie quantique des champs. La vision moderne en est l'optique quantique. Dans ce travail de thèse on va voir dans une étude d'*imagerie quantique* un exemple particulier de l'intérêt et de la richesse des phénomènes liées à cette double approche, qui consiste à utiliser ce que nous apprend l'optique quantique pour améliorer une mesure sur une image.

Les problématiques classiques de l'imagerie sont liées à la transmission des images et à la résolution du système optique. Repousser par exemple la limite de résolution nécessite des techniques très avancées qui sont des sujets d'intérêt très actifs dans la physique actuelle. L'amélioration de la résolution, en astronomie par exemple, requiert non seulement des ouvertures très larges, mais également le recours à l'optique adaptative. En microscopie, on peut citer de nouvelles techniques, comme l'absorption à deux photons ou la microscopie confocale. Toutes ces mesures peuvent être en général interprétées sans l'aide de l'optique quantique. Cependant, le bruit inhérent à la nature quantique de la lumière est inévitablement le facteur limitant ultime dans ces mesures.

Parallèlement, le domaine de l'optique quantique a pris son essor depuis les années 60, en particulier grâce à deux révolutions: le laser tout d'abord, source de lumière cohérente quasi parfaite, et l'optique non-linéaire. Grâce à ces techniques ont été obtenus des effets purement quantiques qui ont ouvert la voie à de nombreuses avancées, parmi lesquelles on peut citer le dégroupement de photon (1977) ou la violation des inégalités de Bell. Cependant, l'interaction

non-linéaire étant faible, les effets quantiques obtenus avec un laser continu passant dans un cristal ou un nuage atomique sont très faibles. Les expériences d'optique quantique se sont développées suivant deux directions parallèles :

- le régime du comptage de photon, c'est à dire pour des faisceaux très peu intenses, où les photons arrivent sur les détecteurs "un par un". En général, l'aspect spatial du problème n'est pas important, mais il est présent et peut être utilisé à travers la mesure de coïncidences spatiales. Par exemple les corrélations spatiales entre deux photons peuvent être mises à profit pour imager un objet : un des photons est envoyé vers un objet et détecté sur un détecteur qui ne donne aucune information spatiale tandis que l'autre est détecté par une caméra CCD mais n'a pas rencontré l'objet. Les mesures des coïncidences permettent cependant de reconstruire une image de l'objet. C'est le principe de l'imagerie à deux photons ou "ghost imaging", sujet d'étude bouillonnant lors de la rédaction de ce manuscrit [Gatti04].
- le régime dit des "variables continues", où on manipule les fluctuations quantiques de faisceaux intenses : compression de bruit sous la limite quantique, corrélations quantiques. Ce domaine a été rendu possible grâce à diverses techniques permettant des effets quantiques importants : citons en particulier les lasers pulsés (1961), le développement des fibres optiques, l'utilisation de cavités résonnantes, l'amélioration des matériaux non-linéaires, les progrès de l'optique atomique. Parmi ces techniques, l'Oscillateur Paramétrique Optique, ou OPO (1965), constitué d'un matériau paramétrique placé dans une cavité résonnante, a joué un rôle majeur.

Un nouveau domaine de recherche a fait son apparition : l'information quantique, avec en particulier le premier protocole de cryptographie quantique (1984), dont l'inviolabilité absolue est assurée par les lois de la physique. Ont suivi tous les protocoles de téléportation quantique, et d'informatique quantique. Tout d'abord limité au domaine des photons uniques, la plupart des protocoles et des expériences en information quantique ont pu être au cours des dix dernières années étendus au domaine des variables continues.

Cependant, à ce domaine a longtemps fait défaut un paramètre très important de l'optique, qui est justement cette dimension multimode spatiale de l'optique, nécessaire à l'imagerie. En effet les cavités optiques et les fibres optiques sont intrinsèquement des filtres spatiaux, qui possèdent une base spatiale propre et qui sélectionnent les modes spatiaux. Elles ne sont donc pas adaptées au traitement d'une image, par définition multimode, ni à la génération d'états présentant des effets quantiques spatiaux. Récemment des efforts ont été menés au sein la communauté des variables continues pour aller vers l'optique quantique multimode, c'est à dire l'*imagerie quantique*. En fait, on peut montrer qu'à toute mesure sur une image est associée une limite quantique standard, et qu'on peut construire un faisceau multimode dont les propriétés quantiques permettent de réaliser cette mesure avec une précision meilleure que la limite quantique standard. C'est dans le cadre de cet effort que s'inscrit ce travail de thèse.

On s'intéressera ici à l'utilisation pour l'optique quantique de cavités particulières -dites

dégénérées transverses- qui ont la propriétés de pouvoir fonctionner de manière multimode, c'est à dire de générer (ou de conserver) des faisceaux multimodes, tant au niveau classique qu'au niveau quantique. De telles cavités dans lesquelles on a placé un milieu paramétrique peuvent se comporter en amplificateur paramétrique. Ce système est bien connu pour produire des faisceaux non-classiques, et également pour pouvoir amplifier de la lumière sans lui ajouter de bruit. Ces faisceaux multimodes amplifiés sont d'un double intérêt. Pour l'information quantique, de tels faisceaux multimodes sont la voie vers un traitement en parallèle de l'information quantique où chaque mode spatial est un canal d'information à part entière. Pour l'imagerie, de tels faisceaux peuvent permettre de surpasser la limite quantique standard dans diverses mesures effectuées sur des images.

Dans une première partie, on s'intéressera d'un point de vue classique à l'utilisation de telles cavités dégénérées pour l'imagerie. On rappellera tout d'abord au chapitre 1 ce qu'on entend par une image, et comment on étudie sa propagation à travers un système optique paraxial. On y développera en particulier les notions cruciales en imagerie de champ proche et de champ lointain. Dans le chapitre 2, on étudie les cavités multimodes transverses et en particulier la propagation d'un rayon dans de telles cavités. On en déduira au chapitre 3 un formalisme original permettant de résoudre de manière complète le problème de la transmission d'une image à travers une cavité. Une comparaison entre la théorie et l'expérience viendra étayer ces résultats.

Dans une seconde partie, on va s'intéresser, d'un point de vue théorique, au phénomène de l'amplification paramétrique. Le chapitre 4 passe en revue les principaux aspects de l'amplification paramétrique à travers un milieu à gain, d'un point de vue classique et quantique, et s'intéresse tout particulièrement aux propriétés d'amplification sans bruit d'un tel système. Le chapitre 5 présente le comportement sous le seuil d'un OPO monomode, c'est à dire non-dégénéré transversalement. Dans certaines conditions, celui-ci se comporte comme un amplificateur paramétrique pour un faible signal injecté. On présentera en particulier le traitement quantique des fluctuations, et on y montre qu'il permet d'amplifier sans bruit un signal et produit en sortie des faisceaux non-classiques. Enfin on présentera au chapitre 6 le formalisme de l'optique quantique transverse en variables continues, développé dans la thèse précédente sur ce sujet de Nicolas Treps, ainsi que le traitement quantique d'une cavité dégénérée particulière, la cavité hémi-confocale.

Enfin dans une troisième partie expérimentale, on présentera les expériences réalisées au cours de ce travail. Le chapitre 7 présente l'ensemble du dispositif expérimental utilisé. Le chapitre 8 présente les résultats obtenus en cavité confocale : au dessus du seuil, la production de faisceaux jumeaux multimodes et en dessous du seuil, les premiers résultats d'amplification paramétrique. Dans les chapitres 9 et 10 seront montrés les résultats expérimentaux obtenus pour l'amplification d'une image en cavité hémi-confocale.



*Première partie*

## Imagerie et cavités



---

# Optique Transverse

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Optique des faisceaux lasers</b>	<b>8</b>
A.1	Optique paraxiale	8
A.2	Faisceaux gaussiens	9
A.3	Optique géométrique	10
A.4	Formalisme des matrices de Gauss	11
<b>B</b>	<b>Imagerie</b>	<b>12</b>
B.1	Qu'entendons nous par une image?	12
B.2	Exemple d'objets	13
B.3	Propagation d'une image	14
B.4	Imagerie paraxiale	19

---

## Introduction

Ce travail s'intéresse à la lumière issue de lasers. La plupart du temps le laser n'est qu'un outil permettant d'interagir avec la matière. On se contente généralement de le modéliser par un faisceau lumineux monochromatique, caractérisé par sa pulsation  $\omega$ , se propageant dans une direction privilégiée de l'espace  $z$ .

Si on choisit une base de l'espace adaptée à la propagation  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , une position étant repérée par :

$$O\vec{M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

les trois coordonnées vont jouer vis à vis de la propagation un rôle très différent:

- la dimension longitudinale est la direction de propagation du faisceau (ici l'axe  $z$ ),



– la dimension transverse est le plan  $(x, y)$ , perpendiculaire à l'axe de propagation.

Le champ s'écrit avec les notations usuelles :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = A(x, y, z, t)\vec{\varepsilon}(x, y, z, t)e^{i(kz - \omega t)}.$$

$A(x, y, z, t)$  est la valeur de l'amplitude du champ instantané transverse, le vecteur unitaire  $\vec{\varepsilon}$ , perpendiculaire à la direction de propagation  $z$ , représente la polarisation du champ.

En général modéliser le champ transverse par une onde d'intensité transverse constante, de phase plane, polarisée, suffit pour la plupart des applications. Si on veut affiner, on peut prendre en compte la forme transverse du faisceau, en particulier le fait que l'énergie du faisceau est localisée aux alentours de son axe de propagation (donc que son intensité est négligeable sauf aux alentours de l'axe  $Oz$ ).

Nous allons rappeler rapidement dans la section **A** le cadre théorique permettant d'étudier la propagation et la production de tels faisceaux. On définira ensuite dans la section **B** ce qu'on entend par une "image", et quelles sont les règles pour la propager.

Aucun des résultats présentés dans cette partie n'est à proprement parler nouveau. Cependant, certains, qui dérivent pourtant toujours de manière simple et rapide de résultats très connus, n'ont pas toujours été traités (à notre connaissance) dans la littérature. Comme ils ont été très utiles à ce travail tant au plan théorique qu'expérimental, nous allons donc les détailler autant qu'il est nécessaire à la bonne compréhension de l'ensemble.

## A Optique des faisceaux lasers

### A.1 Optique paraxiale

L'équation de propagation libre du champ électromagnétique est:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (1.1)$$

Considérons un faisceau se propageant dans une direction privilégiée ( $Oz$ ) (dans le sens des  $z$  croissant). On va supposer que l'onde est "presque" plane, c'est à dire que la normale en tout point à la surface d'onde ( $\Sigma$ ) fait un angle petit avec l'axe ( $Oz$ ). Les surfaces d'ondes sont perpendiculaires à la direction de propagation, et donc environ perpendiculaires à ( $Oz$ ).

La composante du champ  $\vec{E}$  suivant ( $Oz$ ) peut donc être négligée.  $\vec{E}$  est donc contenu dans le plan transverse. On peut également se restreindre au cas où la polarisation est uniforme dans le plan transverse. On va alors noter:

$$E(x, y, z, t) = A(x, y, z)e^{-i(kz - \omega t)}\vec{\varepsilon}. \quad (1.2)$$

où  $A(x, y, z)$  est l'enveloppe du champ, supposée indépendante du temps (cependant toute notre discussion reste valable dans le cadre de l'approximation de l'enveloppe lentement variable). Si de plus les distances caractéristiques de la variation transverse du champ sont

grandes devant  $\lambda$ , alors  $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll 2k \frac{\partial A}{\partial z}$  et l'équation de propagation de l'enveloppe devient :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

Un faisceau est dit paraxial si il est localisé autour de l'axe ( $Oz$ ). Avec toutes les hypothèses énoncées précédemment, la propagation suivant  $z$  conservera le caractère paraxial du faisceau. On est alors dans le cadre de l'optique paraxiale.

## A.2 Faisceaux gaussiens

### A.2.1 Modes de Hermite-Gauss

Les modes de Hermite-Gauss sont des modes propres de l'équation de propagation paraxiale de l'enveloppe:

$$A_{mn}(x, y, z) = C_{mn} \frac{1}{w(z)} H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{ik \frac{x^2+y^2}{2q(z)}} e^{-i(n+m+1) \arctan \frac{z}{z_R}} \quad (1.4)$$

où :

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{1}{\sqrt{\pi 2^{m+n-1} m! n!}} \\ z_R &= \frac{\pi w_0}{\lambda} \\ q(z) &= z - iz_R \\ w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2} \\ \Psi(z) &= (n + m + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$w_0$  est la taille du col du faisceau au point de focalisation, appelé aussi waist propre.  $q$  est le rayon de courbure complexe. Il est important de noter que  $q$  est indépendant de  $m$  et  $n$ , et ne dépend que de la taille et de la position du waist propre. On peut également introduire le rayon de courbure réel  $R(z)$  qui vaut  $R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$ . Enfin  $\Psi(z)$  est la phase de Gouy, et jouera un rôle important dans la suite de la discussion.

Les  $H_n$  sont les polynômes d'Hermite, donnés par:

$$H_n(X) = (-1)^n e^{X^2} \frac{d^n}{dX^n} \left( e^{-X^2} \right). \quad (1.6)$$

### A.2.2 Propriétés des faisceaux gaussiens

L'allure des modes gaussiens est bien connue et on peut en trouver une étude complète dans [Siegman] par exemple. La propriété principale qui nous intéresse ici est que, quel que

soit  $z_0$  fixé, les  $A_{mn}(x, y, z_0)$  forment une base complète orthonormée du plan, ce qui permet une **décomposition unique de toute distribution transverse du champ électrique sur les  $A_{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}_0)$** .

Un mode  $A_{mn}(x, y, z_0)$  a  $m$  et  $n$  zéros, sur les axes  $x$  et  $y$ . Par conséquent il a  $(n+1)(m+1)$  lobes, de signes alternativement positifs et négatifs (correspondant à une différence de phase de  $\pi$ ). L'extension spatiale du mode  $A_{mn}$ , quantité qui nous sera utile pour évaluer le nombre de modes composant une image, peut être évaluée approximativement par la position du lobe le plus éloigné, situé à environ  $(x, y) = (\pm\sqrt{n}w, \pm\sqrt{m}w)$  de l'axe.

Lorsque l'on traite sans ambiguïté d'une base de mode d'Hermite-Gauss (dont la position et la taille du waist, la direction et de longueur d'onde sont fixés), on parle de la base des  $\{TEM_{pq}\}$ , et on appelle  $TEM_{mn}$  le mode associé à la forme transverse  $A_{mn}(x, y, z, t)$ .

### A.2.3 Modes de Laguerre-Gauss

Si l'ensemble du problème est à symétrie de révolution autour de l'axe du faisceau, une autre base peut être plus adaptée. C'est la base de Laguerre-Gauss. On se place en coordonnées cylindriques  $(O, r, \theta, z)$ . On a alors :

$$A_{pl}(r, \theta, z) = \left( \frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w(z)^2} \right) e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{il\theta} e^{-i(2p+|l|+1) \arctan \frac{z}{z_R}} . \quad (1.7)$$

C'est également une base complète et orthonormée du plan transverse.

## A.3 Optique géométrique

Dans le cas où  $\lambda$  est petit devant toutes les grandeurs caractéristiques transverses du champ, on est également dans l'approximation de l'optique géométrique. Cette approximation est valable lorsque les faisceaux ne sont pas trop focalisés, et que le champ transverse ne varie pas trop vite.

Le problème de la propagation d'une onde à partir d'une surface d'onde  $(\Sigma)$  dont la répartition d'intensité est  $I(\vec{r})$  est alors traité de la manière suivante:

- les rayons suivent les trajectoires normales à  $(\Sigma)$  au départ, et minimise le chemin optique  $[s] = \int n(\vec{r}) ds$ , conformément au principe de Fermat (dans un milieu homogène, c'est la ligne droite),
- la propagation sur un chemin optique  $[s]$  ajoute un facteur de phase  $\phi = 2\pi[s]/\lambda$ ,
- la répartition d'intensité se propage par conservation de la puissance dans chaque "tube" formé par un rayon.

C'est l'optique des rayons. Elle constitue une approximation de l'optique paraxiale valable loin des zones de focalisation, et constitue une bonne approche à la compréhension des phénomènes.

## A.4 Formalisme des matrices de Gauss

### A.4.1 Définition

Lorsqu'on étudie la propagation d'un rayon lumineux paraxial à travers un système optique simple, on peut utiliser le formalisme des matrices de Gauss (aussi appelées matrices ABCD).

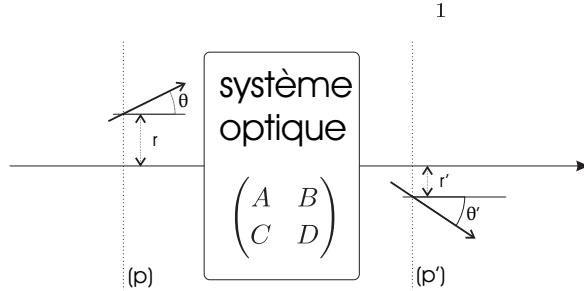


Fig. 1.1: formalisme des matrices ABCD

Les matrices de Gauss permettent de traiter la propagation d'un rayon dans un système optique paraxial à une dimension (donc tout système optique à une dimension transverse, ou à symétrie de révolution). La généralisation à deux dimensions transverses est aisée mais sans grand intérêt pratique dans le cas où on n'utilise que des optiques à symétrie de révolution. On va donc pour simplifier considérer un rayon paraxial à l'axe  $z$ . Il est caractérisé dans un plan  $(P)$  perpendiculaire à  $(Oz)$  par sa distance  $r$  à l'axe et l'angle  $\theta$  qu'il fait avec l'axe  $(Oz)$ . Le passage par un système optique paraxial linéaire donne dans le plan de sortie  $(P')$  le rayon caractérisé par  $r'$  et  $\theta'$  selon la relation linéaire:

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

où en notant  $n$  et  $n'$  les indices des milieux en  $(P)$  et  $(P')$ , on a :

$$AD - BC = \frac{n}{n'}. \quad (1.9)$$

La matrice est donc de déterminant unité si les indices des milieux de départ et d'arrivée sont les mêmes.

### A.4.2 Matrices de Gauss élémentaires

Voilà les deux matrices de Gauss élémentaires:

- propagation sur une distance  $L$  (indice  $n$ )

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

– Traversée d'un dioptre de sphérique de rayon  $R$ :

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{n'R} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

On peut obtenir la matrice de Gauss d'une succession quelconque de ces éléments en multipliant les matrices de Gauss de chaque élément (de droite à gauche).

On déduit en particulier la traversée d'une lentille mince de focale  $f$ :

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

et à partir de là, on peut trouver la matrice de Gauss de tout système optique linéaire (toute succession de milieu homogènes, de dioptres sphériques, lentilles, et en dépliant les chemins optiques, de miroirs sphériques).

### A.4.3 Matrice de Gauss et faisceau gaussien

Il est montré dans [Siegman] que le rayon de courbure complexe  $q(z)$  d'un faisceau gaussien se propageant dans un système de matrice ABCD se transforme selon:

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D}, \quad (1.13)$$

c'est-à-dire que le formalisme des matrices ABCD est valable pour l'optique paraxiale, et inclut donc les effets de diffraction.

## B Imagerie

### B.1 Qu'entendons nous par une image?

Une image, telle qu'un oeil, une caméra ou une plaque photographique la perçoit est une forme transverse complexe, en général polychromatique. C'est le résultat de la réflexion sur des objets de lumière naturelle (soleil) ou artificielle (lampe), c'est à dire des sources incohérentes. Les images dont il sera question dans ce travail seront plus simples. On va commencer par décrire comment on génère ces images, et on en déduira leurs propriétés.

On va considérer un laser émettant un faisceau continu, monochromatique, et de forme transverse gaussienne (mode  $TEM_{00}$ ):

$$E(x, y, z, t) = E_0 e^{-\frac{r^2}{2w^2}} e^{-i(kz - \omega t)} \quad (1.14)$$

où  $r$  est la distance à l'axe et  $w$  est la taille du mode gaussien. Si ce mode est de grande taille, on a au centre du faisceau, en première approximation, une onde plane, d'intensité  $E_0$ . On

va placer dans le plan transverse de ce faisceau un objet d'intensité et de phase, autrement dit un filtre défini par une fonction de transfert:

$$T(x, y) = \rho(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \quad (1.15)$$

où  $\rho(x, y)$  est la transmission en intensité à la position  $(x, y)$ , vérifiant  $0 \leq \rho(x, y) \leq 1$ , et  $\phi(x, y)$  est le déphasage local dû à l'objet. La technique moderne (lithographie de précision, MEMS, cristaux liquides, etc) met à notre disposition de tels objets. On peut disposer non seulement d'objets d'intensité purs, de phase purs, ou de phase et d'intensité à la fois, et de forme arbitraire.

Ce que nous appellerons l'image est le champ transmis juste après cet objet. Une image, dans ce travail, sera donc:

- une onde monochromatique, cohérente, à proximité d'un axe mais pas forcément paraxiale (puisque la fonction de transfert  $T(x, y)$  peut être en contradiction avec les conditions de l'optique paraxiale),
- d'intensité et de phase transverse quelconque, mais d'enveloppe gaussienne (cependant, afin de simplifier, on pourra considérer en première approximation la gaussienne comme très étendue, donc quasi-plane),
- dont la forme transverse ne dépend pas du temps. Cependant rien n'empêche théoriquement de considérer un objet dont la fonction de transfert dépend du temps (comme une matrice de cristaux liquides par exemple), ce qui permet de contrôler en temps réel l'image, ou de moduler localement l'intensité ou la phase.

Dans la suite de la discussion et afin d'être cohérent avec le vocabulaire de l'imagerie, on confondra le champ transmis et l'objet lui-même; on appellera donc "objet" ce champ, et on parlera de son "image" par un système optique.

## B.2 Exemple d'objets

On va montrer dans cette partie quelques exemples d'objet, non pas que nous avons utilisés, mais auxquels s'appliquent tous les résultats de ce travail. On distinguera les objets fixes qu'on essaie d'observer (diapositive, échantillon), des objets adressables c'est à dire qu'on peut contrôler à volonté.

### B.2.1 Objets de phase purs

Un objet de phase pur va déphaser localement un champ électrique, sans changer son intensité locale. Des exemples de tels objets sont représentés sur la figure 1.2. La lame de phase est réalisée à l'aide d'une lame demi-onde coupée et recollée. La matrice de micro-miroirs est un autre exemple de ce que la micro-électronique permet de réaliser en terme d'objet de phase quelconque. Les miroirs déformables sont les outils privilégiés de l'optique adaptative pour corriger les fronts d'ondes, en particulier en astronomie.

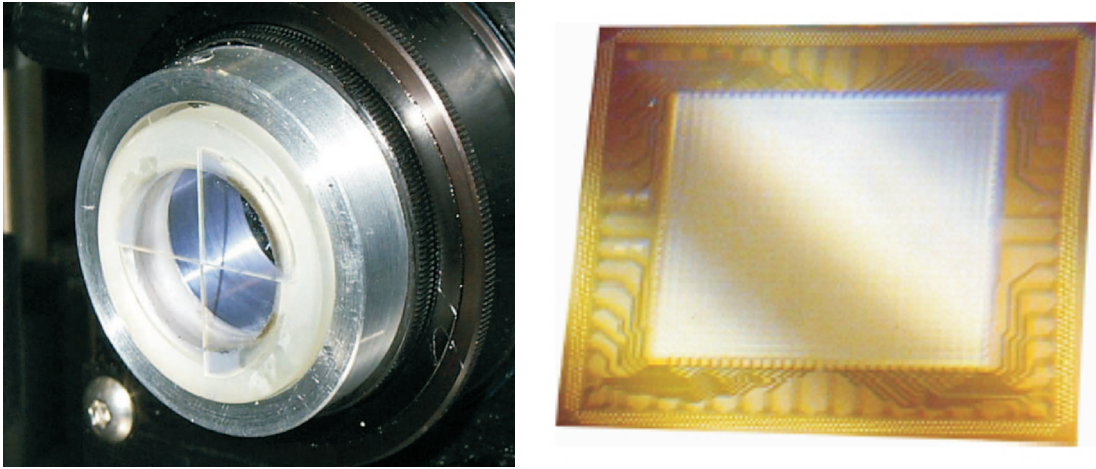


Fig. 1.2: Exemples d'objets de phase purs. à gauche : lame de phase utilisée en Australie pour l'amélioration de la mesure de petits déplacements. à droite: miroir déformable  $\mu\text{SLM}1024$  à 1024 pixels (course de  $2\mu\text{m}$ ), développé par Boston Micromachines Corporation

### B.2.2 Objets d'intensité purs

Dans cette catégorie, on retrouve tous les objets d'intensité habituels, qu'ils soient fixes (mire, masque, diapositives) ou adressables ( voir sur 1.3 des exemples de matrices de micro-miroirs, ou de cristaux liquides [Crossland97]).

### B.2.3 Objet de phase et d'intensité

On peut mettre dans cette catégorie tous les objets qui ne sont ni des objets purs d'intensité, ni de purs objets de phase. En particulier, pour la microscopie, tout les échantillons biologiques sont des objets non seulement d'intensité (ils laissent plus ou moins passer la lumière) mais aussi de phase (ils sont localement d'indice variable). On peut voir sur la figure 1.4 que l'observation d'un objet biologique en intensité uniquement n'apporte pas toute l'information.

## B.3 Propagation d'une image

### B.3.1 Signification de la phase de Gouy

Les modes propres de la propagation paraxiale sont les modes gaussiens. Une image n'est pas un mode propre de la propagation, et va donc se déformer au cours de sa propagation sous l'effet de la diffraction.

Cependant les  $TEM_{pq}$  forment une base orthonormée du plan transverse. On peut décomposer l'image sur cette base, qui est une base propre de la propagation. Pourquoi alors



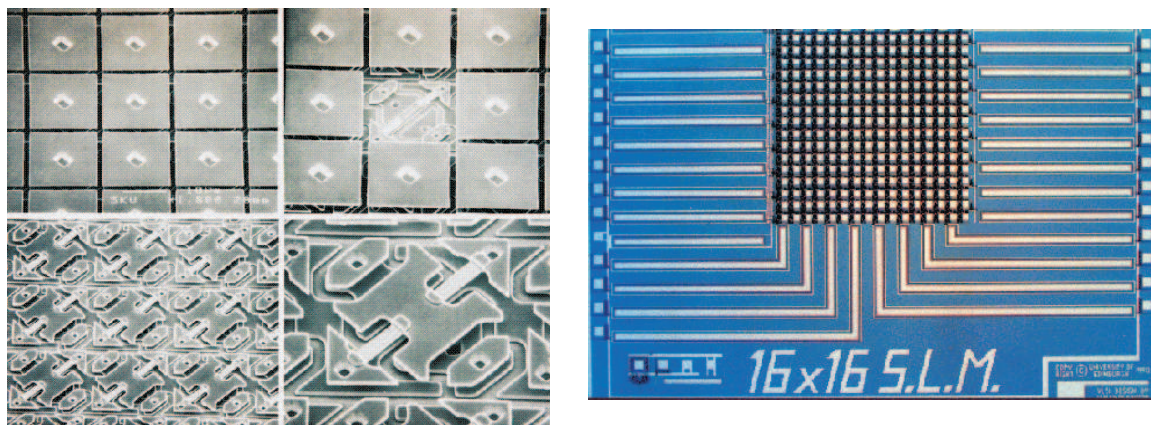


Fig. 1.3: Exemples d'objets d'intensité purs. à gauche : Texas Instruments Micromirror Array (orientables). à droite : Liquid Crystal Spatial light modulator (LC-SLM) de 16x16 pixels

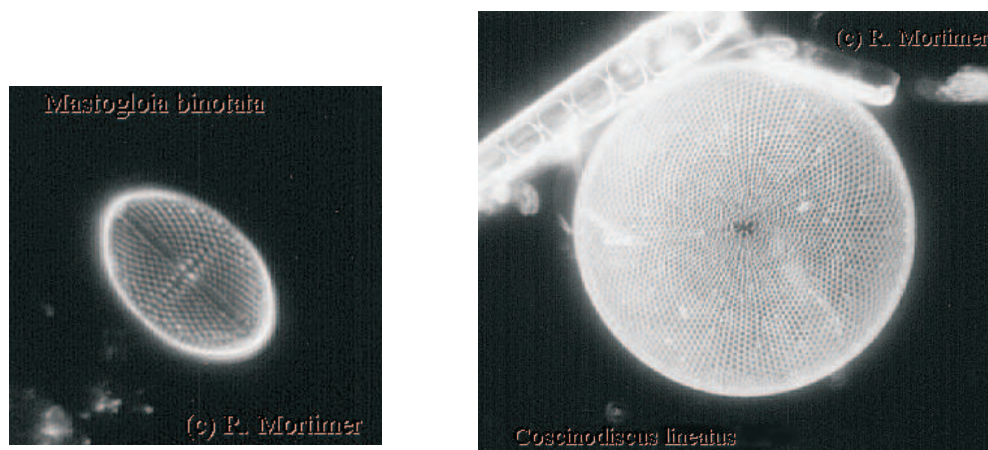


Fig. 1.4: Microscopie directe (à gauche) et de contraste de phase (à droite) de plantes unicellulaires (frustules).



une image ne se propage-t-elle donc pas sans déformation? Cela est dû à la phase de Gouy.

À la fin du  $XIX^e$  siècle, Gouy montra [Gouy1891], grâce à l'expérience qui porte son nom, qu'un faisceau passant par un point de focalisation acquiert une phase additionnelle totale de  $\pi$ . Cette phase est en fait d'origine topologique, et n'est pas limitée à l'optique et s'applique à toutes les ondes propagatives (en acoustique par exemple). Des études supplémentaires montrèrent que cette phase de Gouy dépendait de la structure transverse du champ focalisé. La phase de Gouy totale prise par un mode  $TEM_{mn}$  est en fait donnée par le dernier terme de l'équation (1.4). Elle est donc  $n + m + 1$  fois plus grande que celle du  $TEM_{00}$ . La phase de Gouy a par conséquent une signification physique fondamentale en terme de diffraction. C'est le fait que les différents éléments de la base propre de la propagation (les  $TEM_{pq}$ ) se propagent avec une phase variable qui permet de prendre en compte les effets de diffraction en optique gaussienne.

Il faut remarquer que si la phase de Gouy à la traversée d'une focalisation est de  $\pi$ , dans le cas de la focalisation de seulement une des dimensions transverses (par exemple au travers d'une lentille cylindrique), et en général en optique astigmatique, la phase de Gouy élémentaire à une dimension n'est que de  $\pi/2$ . De manière générale, on verra que les équations de la diffraction à une et à deux dimensions sont différentes, en particulier à cause de la phase de Gouy.

### B.3.2 Propagation d'une image

L'équation régissant la propagation d'un champ transverse  $A(\vec{r})$  (à ne pas confondre avec le coefficient A de la matrice ABCD) dans l'approximation paraxiale, où  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$  représente la coordonnée transverse, dérive de l'équation de Huygens-Fresnel dans l'espace libre (voir [Siegman] p. 778). Elle s'exprime uniquement en fonction de la matrice ABCD du système.

A deux dimensions elle s'écrit pour le passage de  $z_1$  à  $z_2$ , en fonction des coefficients de la matrice de Gauss entre ces deux positions

$$A_2(\vec{r}_2) = -e^{-ik(z_2-z_1)} \frac{i}{B\lambda} \iint d^2\vec{r}_1 A_1(\vec{r}_1) \exp \left[ -i \frac{\pi}{B\lambda} (A\vec{r}_1^2 - 2\vec{r}_1\vec{r}_2 + D\vec{r}_2^2) \right] \quad (1.16)$$

si  $B \neq 0$ , et :

$$A_2(\vec{r}_2) = -M u_1(M\vec{r}_1) e^{\frac{ikCM\vec{r}_2^2}{2}} \quad (1.17)$$

si  $B = 0$ , où la matrice de Gauss est écrite  $T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ C & \frac{1}{M} \end{pmatrix}$ .

On n'a pas besoin de tous les coefficients puisque la matrice de Gauss est de déterminant unité.

On va maintenant introduire les notions de champ lointain (ou Far-Field, encore noté FF) et de champ proche (ou Near-Field, NF), qui sont des plans particuliers de la propagation, relativement au plan de référence qui est le plan où on a placé l'objet.

### B.3.3 Transformation champ proche

Cette notion a été définie en terme d'imagerie. Nous appelons champ proche (aussi appelé plan conjugué) un plan où on retrouve la forme exacte de l'image **en intensité**, à un facteur d'échelle près puisque bien entendu le faisceau change de taille au cours de la propagation. Les équations 1.16 et 1.17 nous montrent qu'il faut que la matrice ABCD vérifie

$$B = 0.$$

En effet si  $B = 0$  alors d'après 1.17 on récupère bien la forme en intensité, et si  $B \neq 0$  alors on peut se convaincre d'après 1.16 que ce n'est jamais le cas. Si l'on se réfère à la matrice de Gauss d'une propagation libre, B est homogène à une distance et est égal, dans le cas d'une propagation libre, à la distance parcourue. Le facteur de grandissement de l'image est noté M et est égal à A. Notons que le plan objet est son propre champ proche.

Néanmoins on voit également qu'à la phase du champ a été ajoutée une courbure constante due au terme  $e^{\frac{ikCM\bar{r}_2^2}{2}}$ . Cette courbure correspond à une focale équivalente  $f_{eq} = -\frac{1}{C}$ , et la matrice ABCD d'un champ proche est donc de la forme:

$$T_{NF} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ -\frac{1}{f_{eq}} & \frac{1}{M} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

L'image n'est donc reproduite qu'en intensité.

Une condition supplémentaire pour récupérer exactement l'objet de phase et d'intensité est donc que:

$$C = 0,$$

et on l'appelle alors Champ Proche Complet (qu'on notera CNF) un tel plan. La matrice ABCD d'un champ proche complet est donc de la forme:

$$T_{CNF} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Le système le plus simple pour réaliser un CNF est le montage dit  $2f - 2f$  (lentille de focale  $f$ , suivie et précédée d'une distance égale à  $2f$ ), dont la matrice de Gauss est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui réalise un champ proche complet, avec un grandissement  $M = -1$ .

### B.3.4 Transformation champ lointain

Toujours en imagerie, on définit le champ lointain (ou plan de Fourier) comme un plan où la propagation de l'image reproduit, toujours en intensité, la transformée de Fourier spatiale de l'image.

L'équation (1.16) dans le cas où  $B \neq 0$  peut se récrire:

$$u_2(\vec{r}_2) = -e^{-ik(z_2-z_1)} \frac{i}{B\lambda} e^{-iD\vec{r}_2^2} \iint d^2\vec{r}_1 u_1(\vec{r}_1) e^{-i\frac{\pi}{B\lambda}(-2\vec{r}_1\vec{r}_2)} e^{-i\frac{\pi}{B\lambda}(A\vec{r}_1^2)}. \quad (1.20)$$

On voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour avoir un champ lointain est de pouvoir sortir de l'intégrale la deuxième exponentielle. Il faut donc avoir :

$$A = 0.$$

La façon la plus simple d'obtenir le champ lointain est de propager à l'infini. Ceci n'apparaît d'ailleurs pas clairement dans notre traitement par les matrices de Gauss, car propager à l'infini fait diverger  $r(z)$  (il faut alors considérer la variable angulaire  $r/z$ ).

Avec des optiques, le système le plus simple est, après une propagation libre quelconque, de regarder dans le plan focal d'une lentille. La matrice de propagation est:

$$\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 1 - L/f \end{pmatrix}$$

Néanmoins, comme pour le champ proche, on obtient la transformée de Fourier **en l'intensité** du champ, c'est à dire la transformée de Fourier du champ, à laquelle s'ajoute une courbure de la phase due au terme  $e^{-i\frac{\pi}{B\lambda}D\vec{r}_2^2}$  de l'équation (1.16), cette courbure étant invisible sur la figure en intensité.

Pour récupérer la transformée de Fourier exacte du champ, il faut donc la condition supplémentaire :

$$D = 0.$$

Le montage le plus simple pour réaliser une transformée de Fourier complète de l'image (amplitude et phase) est donc le montage dit  $f - f$  (lentille de focale  $f$ , précédée et suivie d'une distance  $f$ ) de matrice de Gauss:

$$T_{AF} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

### B.3.5 Transformation afocale

Un autre plan d'intérêt est le plan correspondant à une transformation ne modifiant pas la courbure de la répartition de phase globale de l'image. On a vu que la modification de courbure globale vient du terme  $C$ . Si on considère un système vérifiant  $C = 0$ , on voit qu'un rayon sortant d'un tel système aura d'après 1.8 une inclinaison  $\theta' = D\theta$  donc indépendante de la distance  $r$  à l'axe à l'entrée. Ce système transformera donc des rayons parallèles en entrée en rayons parallèles en sortie, et sera donc bien afocal.

Un système afocal vérifie donc

$$C = 0$$

et sa matrice de Gauss s'écrit:

$$T_{CNF} = \begin{pmatrix} M & B \\ 0 & \frac{1}{M} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

et correspond à une propagation libre sur une distance  $L = B$  suivie d'un grandissement transverse de facteur  $M$ . Le système optique le plus courant pour réaliser cette transformation consiste en deux lentilles  $f_1$  et  $f_2$  séparées d'une distance  $f_1 + f_2$ , de matrice de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & f_1 + f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2/f_1 & f_1 + f_2 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{pmatrix}$$

qui réalise un grandissement  $-f_2/f_1$ . En particulier on peut remarquer qu'une transformation afocale suivie d'un champ lointain est un champ lointain. En effet :

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix}$$

On a interprété en terme d'imagerie les transformations  $A = 0$ ,  $B = 0$  et  $C = 0$ . Le dernier cas de figure, celui où  $D = 0$  n'a pas été interprété. On peut le comprendre dans l'équation 1.20 comme un terme de courbure du champ lointain. On peut également remarquer que :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

ce qui signifie qu'une telle transformation correspond à un champ lointain, mais parcouru à l'envers (dans le sens des  $z$  négatifs).

#### B.4 Imagerie paraxiale

Les transformations champ proche et champ lointain sont des notions reliées à l'intensité. Ce sont des notions trompeuses car elles ne se composent pas simplement. Elles peuvent induire en erreur lorsqu'on construit un système optique d'imagerie. En effet, le champ lointain du champ proche d'une image par exemple n'est PAS le champ lointain de cette image. Par contre une transformation champ proche complète ou champ lointain complète reproduit complètement le champ, et on peut les composer librement. Résumons:

$A = 0 \Leftrightarrow$  Champ lointain

$B = 0 \Leftrightarrow$  Champ proche

$C = 0 \Leftrightarrow$  Système afocal

$D = 0 \Leftrightarrow$  Champ lointain parcouru à l'envers

Construire expérimentalement un système d'imagerie nécessite de passer à travers un grand nombre d'optiques. On peut calculer la matrice ABCD totale du système, et s'efforcer d'obtenir  $A = 0$  ou  $B = 0$ , mais la sensibilité du calcul aux incertitudes expérimentales peut être grande et n'est pas facile à quantifier. Il est beaucoup plus facile et pratique de concevoir la propagation de l'image par association de transformations FF, NF, CFF, CNF et afocales. On résume dans la liste suivante les possibilités d'association :

$$\begin{aligned}
 \text{CFF}(\text{CFF}) &= \text{NFF} \\
 \text{FF}(\text{CFF}) &= \text{NF} \\
 \text{NF}(\text{CFF}) &= \text{FF} \\
 \text{NF}(\text{NF}) &= \text{NF} \\
 \text{FF}(\text{FF}) &= \text{rien} \\
 \text{NF}(\text{FF}) &= \text{FF} \\
 \text{FF}(\text{NF}) &= \text{rien} \\
 \text{NF}(\text{afocal}) &= \text{rien} \\
 \text{FF}(\text{afocal}) &= \text{FF} \\
 \text{afocal}(\text{afocal}) &= \text{afocal} \\
 \text{afocal}(\text{NF}) &= \text{rien} \\
 \text{afocal}(\text{FF}) &= \text{rien}
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Par "rien" on entend une matrice de Gauss quelconque n'ayant aucune propriété particulière (c'est à dire dont aucun coefficient n'est nul), et donc à partir de laquelle il sera très malaisé de construire un système d'imagerie autrement qu'en calculant la matrice totale du système.

## Conclusion

Dans ce chapitre on a donc développé les notions de bases de l'imagerie paraxiale. Ces notions permettent de comprendre comment se transforme un champ quelconque au cours d'une propagation par un système optique simple. On a également défini ce qu'on entend par "image" pour l'ensemble de ce travail de thèse, c'est à dire une répartition quelconque de champ, que l'on veut reproduire en champ et pas seulement en intensité. Cette définition nous a amené à introduire les notions de "vrai" champ proche et de "vrai" champ lointain, et à définir des règles permettant de les conjuguer. Ces petites règles très simples permettent expérimentalement de construire un système d'imagerie paraxiale, de manière modulaire. Ce système sera facile à concevoir, à modifier, ainsi qu'à expliquer autrement que par le calcul de la matrice ABCD totale.

---

# Cavités dégénérées

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Généralités</b> . . . . .	<b>22</b>
A.1	Qu'est ce qu'une cavité? . . . . .	22
A.2	Stabilité d'une cavité . . . . .	22
A.3	Modes propres d'une cavité linéaire stable . . . . .	23
A.4	Cavité paraxiale à deux miroirs sphériques . . . . .	24
<b>B</b>	<b>Dégénérescence transverse</b> . . . . .	<b>25</b>
B.1	Qu'est ce que la dégénérescence transverse? . . . . .	25
B.2	Finesse et quasi-dégénérescence . . . . .	28
<b>C</b>	<b>Cavités particulières à deux miroirs</b> . . . . .	<b>29</b>
C.1	Cavité plan-plan . . . . .	29
C.2	Cavité concentrique . . . . .	29
C.3	Cavité confocale symétrique . . . . .	30
C.4	Cavité symétriques dégénérées . . . . .	32
C.5	hémi-cavités . . . . .	33
C.6	Cavité totalement dégénérée . . . . .	33

---

*"cavity : space that is surrounded by something"* (WordNet ® 1.6, © 1997 Princeton University)

## Introduction

Dans ce chapitre, on va tout d'abord définir ce qu'on appelle une cavité optique **A** et introduire la base transverse permettant de décrire les cavités les plus simples, qui sont les cavités à deux miroirs sphériques. On introduit ensuite dans la section **B** la notion de

dégénérescence transverse d'une cavité. Enfin dans la section **C**, on passera rapidement en revue les cavités dégénérées à deux miroirs.

## A Généralités

### A.1 Qu'est ce qu'une cavité?

En optique, une cavité est un milieu dans lequel peut se propager une onde électromagnétique, limité par des discontinuités de l'espace. Sur ces discontinuités, l'onde est partiellement réfléchiée et transmise. Une onde interférera donc avec elle-même, de manière constructive ou destructive, en fonction de ses caractéristiques (longueur d'onde, direction, amplitude, propriétés de la cavité ...). Les configurations qui correspondent à une interférence constructive maximale sont appelées modes propres de la cavité.

Dans le domaine des longueurs d'ondes optiques, il suffit de prendre deux miroirs plans ou sphériques de coefficient de réflexion non-nuls qui se font face pour obtenir une cavité, aussi appelée résonateur. Les modes gaussiens sont des modes propres de ce type de cavité, qui est donc paraxiale. Il n'est pas nécessaire de confiner transversalement la cavité par d'autres surfaces réfléchissantes, à cause de l'annulation naturelle des modes gaussiens à une certaine distance de l'axe naturel de la cavité.

### A.2 Stabilité d'une cavité

On considère un résonateur paraxial de matrice de propagation sur un tour ABCD, obtenue en "dépliant" la cavité (en remplaçant les miroirs par leur lentille équivalente). Ce résonateur est dit géométriquement stable si tout rayon paraxial reste au voisinage de l'axe après un nombre quelconque de tours  $N$  dans la cavité, c'est à dire à travers un système de matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^N.$$

Lorsqu'on cherche à étudier la stabilité de la cavité, on est donc amené à étudier les valeurs propres et les vecteurs propres (qui sont en fait des rayons propres) de la matrice ABCD. On peut montrer que ses deux valeurs propres doivent être de module inférieur à l'unité afin que le rayon reste confiné. On montre ainsi que la cavité est stable si  $|A + D| < 2$  et instable si  $|A + D| > 2$  [Cagnac]. De plus :

- si la cavité est instable, ses modes transverses sont bien décrits en première approximation par l'optique géométrique, c'est à dire par l'étude de la propagation de ses rayons propres.
- si la cavité est stable, ses modes propres sont les modes gaussiens.

Toutes ces considérations sont bien connues, cependant il est utile de les rappeler car les cavités multimodes, qui vont nous intéresser, sont souvent à la limite de ces deux domaines.

### A.3 Modes propres d'une cavité linéaire stable

Un faisceau qui est un mode propre d'un résonateur se reproduira à l'identique sur un tour dans celui-ci. Dans l'espace de propagation des faisceaux gaussiens, on sépare la dimension longitudinale de la dimension transverse, car elles jouent des rôles très différents. De la même façon dans une cavité s'opère une double sélection :

#### A.3.1 Sélection en modes transverses

Un mode propre de la cavité est donc nécessairement un mode dont le rayon de courbure complexe est invariant par propagation sur un tour de cavité. Les modes propres d'une cavité stable à miroirs sphériques sont les modes gaussiens.

Déterminer tous les modes propres d'une cavité linéaire revient à déterminer la position et la taille du waist propre du mode  $TEM_{00}$  adapté à la cavité. En effet, tous les modes d'ordres supérieurs seront décrits par le même rayon de courbure complexe, et seront donc également résonnants.

#### A.3.2 Sélection longitudinale

Tous les modes propres transverses se reproduisent identiques à eux-mêmes après un tour de cavité, à une phase près. Pour que le mode soit résonnant il faut également que cette phase soit un multiple de  $2\pi$ .

En notant  $L$  la longueur de cavité (entre les positions initiales  $z_1$  et finale  $z_2$ ), la longueur d'un aller-retour est  $2L$  et les modes transverses résonnants sont les  $A_{mn,p}$  de fréquence  $\nu_{mnp}$  vérifiant sur un demi tour :

$$2\pi \frac{L}{c} \nu_{mnp} - (n + m + 1)\alpha = p\pi, \quad (2.1)$$

où  $\alpha = \arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right)$  est la phase de Gouy accumulée sur une longueur de cavité pour le mode  $TEM_{00}$ , et  $2\pi \frac{L}{c} \nu_{mnp}$  est la phase totale prise par une onde plane sur la longueur  $L$ .

On peut la réécrire :

$$\nu_{mnp} = \frac{c}{2L} \left( p + (n + m + 1) \frac{\alpha}{2\pi} \right) \quad (2.2)$$

Comme dans la propagation d'un champ, on voit que la phase de Gouy joue ici encore un rôle très important. Une fois déterminée la base des modes transverses  $\{TEM_{pq}\}$  adaptée à la cavité, c'est la phase de Gouy qui va déterminer si le mode est résonnant dans la cavité, pour une longueur donnée de cavité.



#### A.4 Cavité paraxiale à deux miroirs sphériques

On va rappeler les principaux résultats du calcul bien connu [Siegman] des modes propres du résonateur paraxial à deux miroirs sphériques. On reviendra plus en détail sur les configurations fortement dégénérées transversalement.

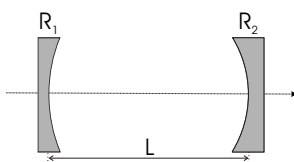


Fig. 2.1: Cavité à deux miroirs sphérique.

On considère deux miroirs sphériques  $M_1$  et  $M_2$  de rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  séparés par une distance  $L$  (2.1). On introduit les deux quantités adimensionnées  $g_1$  et  $g_2$  définies par

$$g_i = 1 - \frac{L}{R_i}.$$

On retrouve par des considérations géométriques simples le domaine de stabilité de la cavité, défini par  $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$  et représenté sur la figure 2.2.

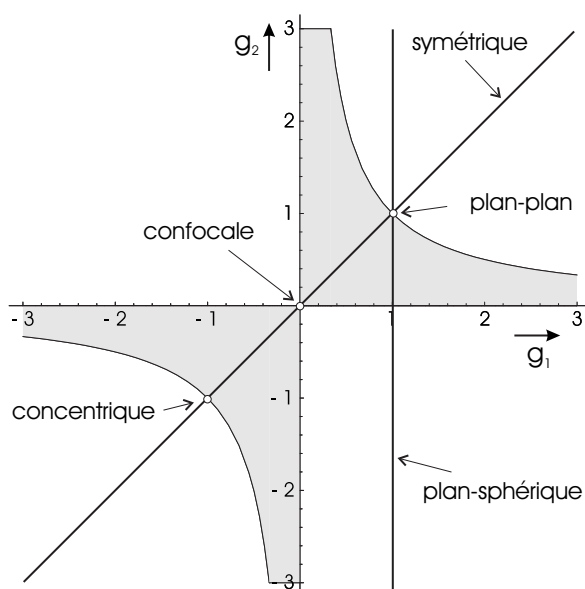


Fig. 2.2: Diagramme de stabilité d'un résonateur à deux miroirs. La région grisée  $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$  correspond aux configurations stables. On a indiqué les configurations particulières les plus usuelles.

La base des modes propres de la cavité est la base des modes de gaussiens. En plaçant le waist propre de la cavité à la position  $z = 0$ , les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont placés aux abscisses  $z_1$  et  $z_2$ . Les quantités importantes, en particulier pour la phase de Gouy, sont les ratios  $z_1/z_R$  et  $z_2/z_R$ . Exprimés en fonction de  $g_1$  et  $g_2$ , on a :

$$w_0^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \sqrt{\frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2}} \quad (2.3)$$

$$\frac{z_{1,2}}{z_R} = \frac{g_{2,1}(1 - g_{1,2})}{\sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}} \quad (2.4)$$

$$\alpha = 2 \arccos(\pm \sqrt{g_1 g_2}). \quad (2.5)$$

La matrice ABCD d'un tour complet de cavité vaut, en choisissant le miroir  $M_1$  comme référence :

$$T = \begin{pmatrix} -1 + 2g_2 & 2Lg_2 \\ 2\frac{2g_1 g_2 - g_1 - g_2}{L} & 4g_1 g_2 - 2g_2 - 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

On notera que ces équations se simplifient si on considère une cavité symétrique ( $g_1 = g_2 = g$ ), ou plan-sphérique, auquel cas on aura  $g_1 = 1$ .

## B Dégénérescence transverse

Un résonateur est toujours dégénéré en fréquence car il est résonnant à  $m$  et  $n$  fixés pour plusieurs longueurs d'ondes. C'est ce qu'on appelle la dégénérescence longitudinale.

### B.1 Qu'est ce que la dégénérescence transverse ?

#### B.1.1 Définition

D'après l'équation (2.2) on voit que, à  $m$  et  $n$  donnés, les  $\nu_{mnp}$  forment un peigne de pas  $\frac{c}{2L}$ . Par ailleurs, à  $p$  donné, les  $\nu_{mnp}$  forment un peigne de pas  $\frac{c\alpha}{2L\pi}$ .

A une longueur de cavité donnée, plusieurs modes  $\nu_{mnp}$  peuvent être simultanément résonnants. Certaines cavités, pour une longueur et pour une onde de pulsation fixée, sont résonnantes pour plusieurs valeurs des nombres  $p$ ,  $n$  et  $m$ . Autrement dit ces cavités sont résonnantes pour plusieurs modes transverses gaussiens à la même fréquence, donc pour des ondes monochromatiques de formes transverses potentiellement complexes. Il faut noter que pour une cavité à symétrie cylindrique, il existe une dégénérescence naturelle des modes de Hermite-Gauss de  $s = n + m = Cte$ , qui correspond en fait à se placer dans la base de Laguerre-Gauss.

L'équation (2.2) nous montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la cavité soit dégénérée pour différentes valeur de  $s$  est que la phase de Gouy sur un tour  $\alpha$  soit une

fraction rationnelle de  $2\pi$ . On va noter dans la suite :

$$\alpha = 2\pi \frac{K}{N} [2\pi]. \quad (2.7)$$

La quantité  $K/N$  est l'**ordre de dégénérescence de la cavité**, où il faut bien noter pour la suite de la discussion que  $K$  et  $N$  doivent être pris de sorte que la fraction  $K/N$  soit irréductible.

Cette quantité est à rapprocher du nombre de modes transverses par intervalle spectral libre  $N_{tr} = \alpha/2\pi$ , qui nous servira plus loin.

### B.1.2 Propriétés de l'ordre de dégénérescence

On a déjà :

$$0 < \frac{K}{N} < 1. \quad (2.8)$$

L'ordre de dégénérescence ne dépend que des propriétés géométriques de la cavité et a été étudié en particulier dans [DingjanPhD]. Il représente le rapport du pas du peigne transverse sur le pas du peigne longitudinal. On peut le voir en récrivant l'équation (2.2) sous la forme :

$$\nu_{mnp} = \frac{c}{2LN} (Np + K(s+1)) \quad (2.9)$$

Si on augmente de  $N$  unités l'indice  $s = n + m$  transverse, et qu'on diminue de  $K$  l'indice longitudinal  $p$ , la fréquence de résonance reste inchangée.

En terme de modes, on peut comprendre la dégénérescence comme la coïncidence de pics des deux peignes de résonance (voir figure 2.3). Si on représente les peignes de résonances, que ce soit en fonction de la longueur de cavité ou en fonction de la fréquence, l'écartement du peigne des modes longitudinaux sera de  $N$  (unités arbitraires), et l'écartement des modes transverses sera de  $K$ . Il s'ensuit donc que la répartition du peigne est périodique de période  $K * N$  unités. Il y a coïncidence entre deux séries de pics (à  $p$  ou  $s$  fixé) tous les  $K * N$  unités. La fraction  $K/N$  est irréductible donc il n'y a pas de coïncidences accidentelles avant  $K * N$ .

En fait on peut montrer [DingjanPhD] qu'une cavité d'ordre de dégénérescence  $K/N$  reproduit un champ transverse quelconque identiquement à lui même en  $N$  tours, à une phase près. Autrement dit, sa matrice de Gauss vérifie :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Pour une telle cavité, une vision en terme de rayon lumineux de l'équation (2.10) nous dit qu'un rayon paraxial quelconque reviendra sur lui même après  $N$  tours dans la cavité. Autrement dit il suit un trajet fermé, d'où la notion, introduite dans [DingjanPhD], d'**orbite**. On donnera des exemples d'orbites pour des cavités dégénérées simples.

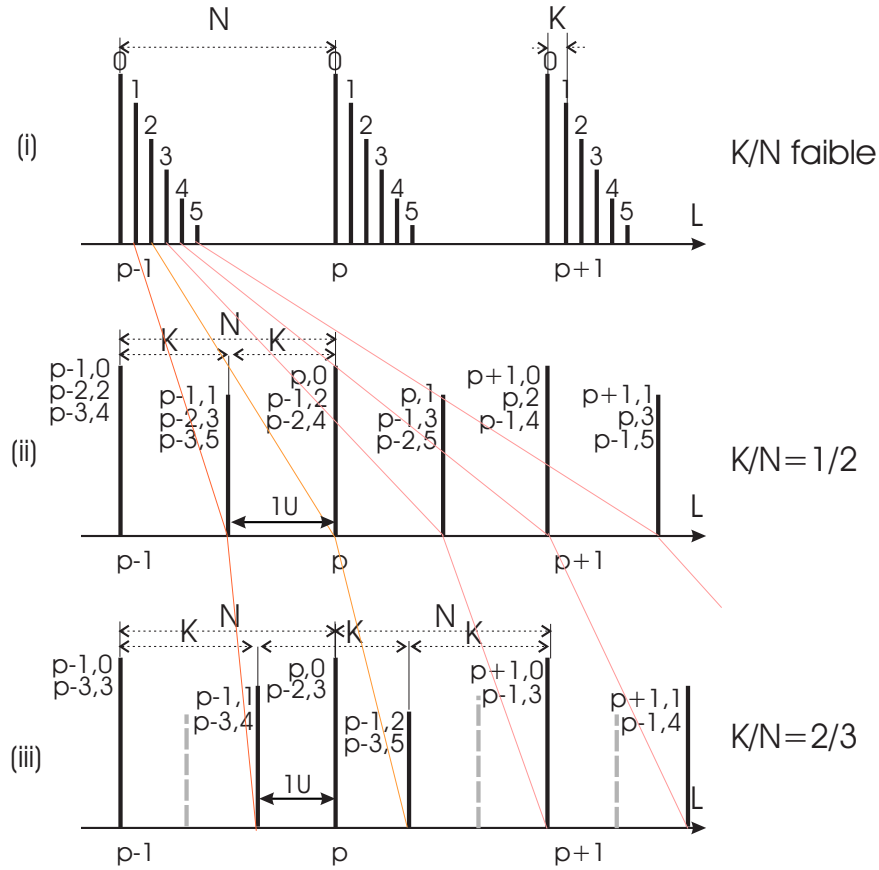


Fig. 2.3: représentation des peignes transverses et longitudinaux dans 3 cas. (i) cavité d'ordre  $K/N$  faible type quasi plan-plan (les chiffres à côté des pics de résonances correspondent à différentes valeurs de  $s$  possibles) (ii) cavité d'ordre  $K/N=1/2$  par exemple confocale (iii) cavité d'ordre  $K/N=2/3$ .  $K$  et  $N$  sont des entiers, et  $L$  est une échelle de longueur relative sans dimensions, dont l'unité est donnée par la distance notée " $1U$ ". Pour (ii) et (iii) on a indiqué à côté des pics les premiers couples  $(p, s)$  de résonances. Par souci de lisibilité on a représenté sur (iii) les autres peignes de résonance en pointillé et grisé.

Cependant la matrice de Gauss ne prend pas en compte la phase totale sur un tour. La phase accumulée au bout d'une orbite ( $N$  tours) est de  $2\pi/K$  (modulo  $2\pi$ ), comme on peut le voir sur l'équation 2.9.

Autrement dit, il faudra donc  $K$  orbites, soit  $K * N$  tours, à un champ pour revenir identique à lui même.

Plusieurs remarques s'imposent:

- L'ordre de dégénérescence est la fraction irréductible, reste de la phase de Gouy modulo  $2\pi$ . À un ordre de dégénérescence donné correspond donc une infinité de cavité.
- bien qu'il n'apparaît pas dans la formule 2.10,  $K$  est un paramètre macroscopique de la cavité puisque la forme du peigne 2.3 en dépend. Par conséquent la matrice ABCD de cavités de différents  $K$  mais de même  $N$  sera bien évidemment différente. Ce seront juste des racines  $N$ -ièmes différentes de  $I_2$ .
- Plus  $N$  est grand, moins la cavité est dégénérée, puisque la base des modes (décrite par les nombres  $n, m, et p$ ), bien qu'infinie, est décomposée en  $N$  familles qui sont les

$$s[N]$$

- $K$  ne change pas la dégénérescence de la cavité.

Les fractions rationnelles sont denses dans  $\mathbb{R}$  donc si on varie un paramètre de la cavité (par exemple sa longueur), les cavités dégénérées forment un sous-ensemble dense des cavités [SapienzaPhD]. Cependant les cavités dégénérées à  $N$  grand sont en fait dégénérées pour très peu de modes. Les cavités coupent en effet les modes d'ordre trop élevé (car elles sont de taille transverse finie, ce qui est représenté par leur nombre de Fresnel  $N_F$ ). Il y a donc en fait un nombre restreint de cavités fortement dégénérées (à  $N$  faible).

## B.2 Finesse et quasi-dégénérescence

La finesse, notée  $F$ , d'un résonateur est reliée au nombre moyen d'aller-retours qu'effectue la lumière dans la cavité avant de sortir. Elle est reliée aux pertes en intensité par tour de cavité. Dans la limite d'une cavité de bonne finesse, en notant  $\gamma \ll 1$  les pertes sur un tour, on a

$$F \approx \frac{2\pi}{\gamma}.$$

Elle se caractérise par un élargissement lorentzien des résonances. La condition de dégénérescence transverse stricte, qui est que l'ordre de dégénérescence soit rationnel, est donc beaucoup moins stricte lorsque l'on prend en compte la finesse. En effet, des pics séparés d'une largeur inférieure à la largeur imposée par la finesse de la cavité seront de facto simultanément résonnants.

On peut comprendre cet effet de manière intuitive en comparant le nombre moyen de tours effectivement réalisés par la lumière (environ égal à  $F/2\pi$ ) et le nombre de tours  $K * N$

nécessaires à un rayon pour revenir sur lui même. Si  $K * N \gg F$  alors parler de cavité dégénérée d'ordre  $K/N$  n'a pas de sens, en effet les photons sortent avant d'avoir pu revenir sur eux-mêmes. Par contre dans le cas où la finesse est faible, la condition moins stricte de résonance permet d'observer des dégénérescences plus facilement. En effet le photon sort au bout d'un nombre de tours moyens faible devant le nombre de tours nécessaire pour que les rayons appartenant à deux modes dont les résonances sont proches se différencient.

## C Cavités particulières à deux miroirs

### C.1 Cavité plan-plan

Cette cavité est constituée de deux miroirs plans, parallèles, séparés par une distance  $L$ .

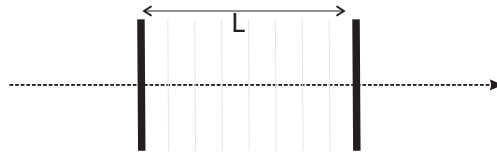


Fig. 2.4: cavité plane

Ses caractéristiques sont, en reprenant les formules (2.3) et (2.6) :

- $g_1 = g_2 = 1$  donc à la limite de stabilité sur la figure 2.2. En fait, elle est instable, comme l'on peut s'en convaincre facilement par le trajet d'un rayon.
- Cette cavité n'a pas de modes propres gaussiens, en fait ses modes propres sont les ondes planes.
- La matrice ABCD d'un tour de cavité est  $\begin{pmatrix} 1 & 2L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- la phase de Gouy sur un tour est nulle.

Cette cavité est bien dégénérée, mais elle n'est pas adaptée à l'étude transverse, et elle est rarement utilisée en régime continu. Néanmoins du point de vue théorique elle suffit à comprendre de nombreux phénomènes. Cependant elle peut présenter un intérêt expérimental. En effet, une lentille thermique, créée par exemple par le passage d'un faisceau dans un cristal, peut suffire à la stabiliser. Si la lentille thermique est convergente, elle fait passer le résonateur du bon côté du domaine de stabilité, et si elle est suffisamment faible, la cavité reste quasi-dégénérée.

### C.2 Cavité concentrique

Cette cavité est constituée de deux miroirs sphériques de rayon  $R$ , placés à une distance  $L = 2R$ , donc dont les centres de courbures coïncident.

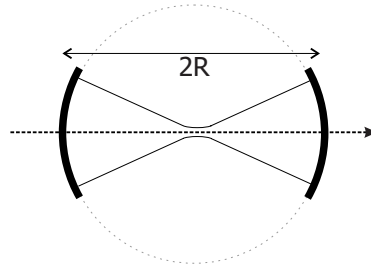


Fig. 2.5: cavité concentrique

Ses caractéristiques sont, toujours d'après les équations 2.3:

- $g_1 = g_2 = -1$  donc encore en limite du domaine de stabilité.
- La matrice ABCD associée à un tour de cavité est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4/R & 1 \end{pmatrix}$  (en partant du centre de la cavité). Elle est bien en limite de stabilité puisque  $A + D = 2$ , mais on va voir que le traitement par les matrices ABCD n'est pas valable ici.
- la phase de Gouy sur un demi-tour est  $\alpha = \pi$

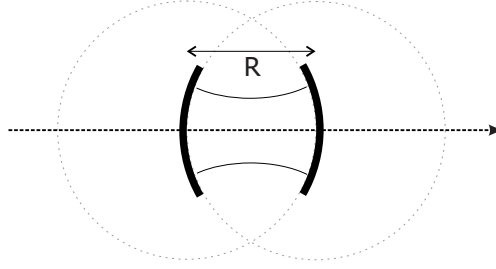
Cette cavité sort donc, tout comme la cavité plane, du cadre de notre étude. On peut le voir simplement en prenant une cavité légèrement plus courte qu'une cavité concentrique, par exemple de longueur  $2L - \epsilon$ , et en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0. On voit, en regardant la formule (2.3), que son waist propre va tendre vers 0, et à un moment va devenir de l'ordre de la longueur d'onde. On sort alors du cadre de l'optique paraxiale, puisque cette approximation nécessite des faisceaux pas trop focalisés. Néanmoins une cavité en limite de concentricité va être quasi dégénérée, et on peut y voir des effets de dégénérescence transverse. La cavité concentrique parfaite, bien que dégénérée, est trop instable et sera mal adaptée à l'étude transverse.

### C.3 Cavité confocale symétrique

Cette cavité est constituée de deux miroirs de rayon de courbure  $R$ , séparés par une distance  $L = R$ , et donc partageant le même point focal.

On va voir que cette cavité est très intéressante, tant théoriquement qu'expérimentalement.

Tout d'abord, on a  $g_1 = g_2 = 0$ . Sur le graphe (2.2) on voit qu'on est également en limite de stabilité. Mais alors que la cavité concentrique est instable par variation de la longueur de la cavité (d'un côté), la cavité confocale est stable par variation de la longueur de cavité (qui déplace la position sur le graphe 2.2 suivant la première diagonale du plan). Par contre, si l'on considère une cavité confocale non symétrique, elle sera instable (car alors on est dans les domaines  $g_1.g_2 < 0$  qui sont instables). Bien qu'en limite de domaine de stabilité, la cavité

Fig. 2.6: *cavité confocale*

confocale symétrique est donc stable par rapport aux perturbations expérimentales.

Ses caractéristiques sont, d'après 2.3:

$$w_0^2 = \frac{\lambda R}{2\pi} \quad (2.11)$$

$$\alpha = \arccos(0) = +\frac{\pi}{2} \quad (2.12)$$

Notons que contrairement à la cavité quasi-concentrique, où le waist propre de la cavité varie extrêmement vite avec  $L$ , la cavité confocale a un waist très grand devant  $\lambda$ . Si l'on considère une cavité à deux miroirs symétriques de rayon de courbure  $R$ , dans son domaine de stabilité, et que l'on trace la taille du waist en fonction de  $L$  (figure 2.7), on voit que la position confocale est la position où le waist est le plus large.

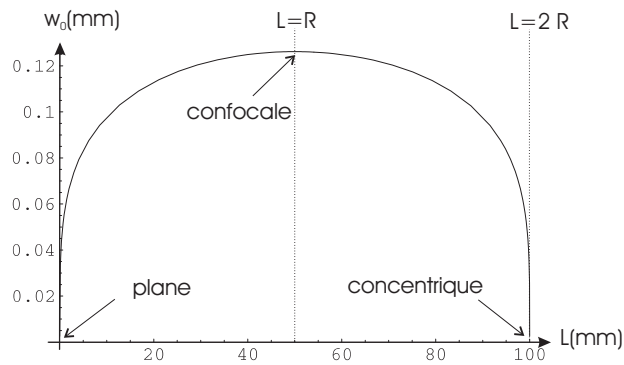


Fig. 2.7: *Waist d'une cavité à deux miroirs symétriques de rayon  $R = 50\text{mm}$ , en fonction de la longueur  $L$  les séparant ( $\lambda = 1\mu\text{m}$ ).*

De plus celui-ci varie très peu lorsqu'on change la longueur de cavité dans un sens ou dans l'autre car on a

$$\left( \frac{dw_0}{dL} \right)_{L=R} = 0.$$



La cavité confocale est donc adaptée au traitement dans l'approximation paraxiale, ainsi que dans l'approximation de l'optique géométrique. On pourra donc raisonner intuitivement dans cette cavité aussi bien sur les modes gaussiens que sur les rayons.

Sa matrice de propagation est:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

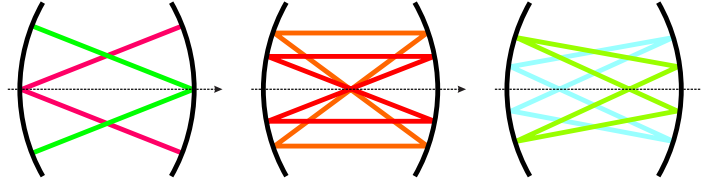


Fig. 2.8: orbites possibles en cavité confocale. (i) rayons passant par le centre des miroirs (ii) rayon passant par le centre de la cavité (iii) rayon quelconque

On a  $T^2 = 1$ , donc la cavité confocale symétrique est une cavité d'ordre de dégénérescence  $K/N = 1/2$ . Tous les rayons bouclent sur eux même en deux tours de cavité, comme on peut le voir sur la figure 2.8. Il est facile de se convaincre que c'est l'unique cavité à deux miroirs vérifiant  $T^2 = 1$ , et qu'il n'existe pas de cavité à deux miroirs d'ordre de dégénérescence inférieur car il faudrait pour cela que sa matrice de Gauss soit la matrice unité. La cavité confocale est donc la cavité à deux miroirs la plus dégénérée transversalement qu'on puisse trouver.

Expérimentalement on verra en outre que cette cavité est à la fois facile à aligner et robuste à de nombreuses perturbations expérimentales.

#### C.4 Cavité symétriques dégénérées

On considère une cavité symétrique de deux miroirs de rayon de courbure  $R$  séparés par une longueur  $L$ . La phase de Gouy sur une longueur de cavité vaut:

$$\cos \alpha = \frac{(R - L)^2}{R^2} \quad (2.14)$$

Posons  $L = 2R \sin^2(x)$ . On peut alors écrire:

$$\cos(\alpha) = 1 - 2 \sin^2(x) = \cos(2x). \quad (2.15)$$

Par conséquent, pour ce type de cavité, la longueur  $L$  pour lesquelles la cavité est dégénérée d'ordre  $K/N$  est:

$$L = 2R \sin^2 \left( \frac{\pi K}{2N} \right) \quad (2.16)$$

Ces cavités sont stables pour  $\frac{K}{N} < \frac{1}{2}$ , c'est à dire pour les cavités plus courtes que la cavité confocale.

La matrice ABCD correspondante à un tour de cavité, écrite depuis le centre de la cavité, s'écrit:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{K\pi}{N}\right) & R \cos\left(\frac{K\pi}{2N}\right) \sin^2\left(\frac{K\pi}{2N}\right) \\ -\frac{4}{R} \cos\left(\frac{K\pi}{2N}\right) & \cos\left(\frac{K\pi}{N}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Le théorème de Sylvester (voir [Arnaud69]) nous permet de calculer la puissance N-ième de cette matrice, et de vérifier qu'elle est bien l'unité. Pour une matrice ABCD quelconque, le théorème de Sylvester nous dit que sa puissance N-ième vaut:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^N = \frac{1}{\sin\Theta} \begin{pmatrix} A \sin(N\Theta) - \sin((N-1)\Theta) & B \sin(N\Theta) \\ C \sin(N\Theta) & D \sin(N\Theta) - \sin((N-1)\Theta) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

où  $\cos\Theta = \frac{1}{2}(A+D)$ . Ici on a  $\Theta = \frac{K\pi}{N}$ , par conséquent  $\sin(N\theta) = 0$  et  $\sin((N-1)\Theta) = -\sin\Theta$  dans notre cavité. On retrouve donc bien que  $T^N = I_2$ , quelle que soit la valeur de  $K$ .

Pour  $K/N = 1/2$ , on retrouve la cavité confocale. Si on veut la cavité d'ordre de dégénérescence 1/3, on voit qu'il faut prendre  $L = R/2$ .

### C.5 héli-cavités

On a traité le cas de résonateurs symétriques (où  $R_1 = R_2 = R$ ). On a vu qu'ils se trouvaient sur la première bissectrice de la figure 2.2. Ces cavités présentent un plan de symétrie. Si on place un miroir plan dans ce plan de symétrie, et qu'on considère la cavité allant d'un des miroirs de rayon de courbure  $R$  à ce miroir plan, on a ce qu'on définit comme étant la héli-cavité de la précédente (ou demi-cavité). Réciproquement une cavité plan-concave ou plan convexe est toujours la demi-cavité d'une unique cavité symétrique.

Il est clair que la base des modes transverses d'un tel couple de cavités est la même. Si l'une est dégénérée, l'autre le sera également. Par contre l'ordre de dégénérescence peut changer. La longueur comme la phase de Gouy sont divisés par deux dans la formule 2.2, donc on pourrait penser que  $K/N$  est inchangée, mais en fait en raison du fait que l'ordre de dégénérescence est définie modulo  $2\pi$ , il peut être modifié. On verra plus loin un traitement complet de la cavité héli-confocale. En fait c'est  $N_{tr}$ , nombre de modes transverses par intervalle spectral libre qui double, l'ordre de dégénérescence, lui ne double pas forcément.

### C.6 Cavité totalement dégénérée

La cavité à deux miroirs la plus dégénérée est la cavité confocale. Elle est d'ordre de dégénérescence 1/2. Elle est donc résonnante pour la moitié des modes à la fois.

On a montré qu'une cavité de matrice de transfert unité à deux miroirs est impossible. Cependant dans la référence [Arnaud69] ont été étudiées les cavités totalement dégénérées,

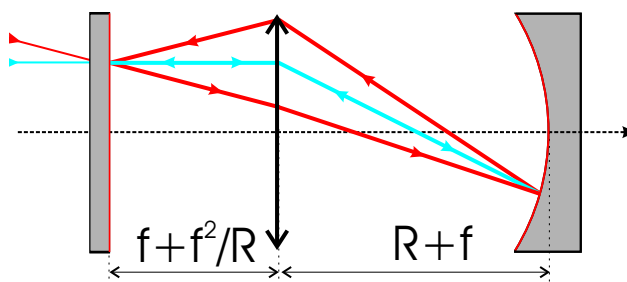


Fig. 2.9: cavité linéaire totalement dégénérée à deux miroirs et une lentille

linéaires et en anneaux. La plus simple est une cavité à deux miroirs et une lentille (figure 2.9).

On peut vérifier que sa matrice de Gauss sur un tour, à partir de n'importe quel plan, est bien:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Conclusion

Une cavité optique possède donc une base propre, qui est pour une cavité à deux miroirs sphériques la base des modes de Laguerre-Gauss adaptée à cette cavité. Pour une longueur d'onde donnée, ces modes ne résonnent en général pas pour la même longueur de cavité, cependant dans certaines configurations géométriques on peut observer des dégénérescences de modes. On a fait le lien entre la dégénérescence d'une cavité et le trajet d'un rayon dans cette cavité. Si la cavité est dégénérée, alors un rayon aura une trajectoire fermée appelée orbite. On va faire dans le chapitre suivant le lien entre ces cavités dégénérées et toutes les notions d'imagerie introduites au chapitre 1.

---

# Transmission d'une image à travers une cavité

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Généralités</b> . . . . .	<b>36</b>
A.1	Notations . . . . .	36
A.2	Cavité monomode . . . . .	37
A.3	Cavité totalement dégénérée . . . . .	38
A.4	Cavité balayée . . . . .	39
<b>B</b>	<b>Cavité partiellement imageante</b> . . . . .	<b>39</b>
B.1	Fonctions "Auto-Transformes" . . . . .	39
B.2	Cavité partiellement dégénérée . . . . .	42
B.3	Perte d'information sur l'image . . . . .	44
B.4	Cavités simples . . . . .	44
<b>C</b>	<b>Cavité hémi-confocale</b> . . . . .	<b>45</b>
C.1	Transmission à travers la cavité . . . . .	46
C.2	Transmission de l'image d'une fente par la cavité . . . . .	48

---

## Introduction

Contrairement à l'espace libre, dans lequel peut se propager (dans l'approximation paraxiale) une forme transverse quelconque du champ, une cavité est un **filtre spatial**. Si on considère une image (voir chapitre 1), la base naturelle pour étudier son interaction avec une cavité est la base propre des modes spatiaux de cette cavité (voir chapitre 2). En fonction de

la longueur de la cavité les modes propres seront résonnants ou non (voir 2.2). La composante correspondante de l'image sera alors réfléchié ou transmise.

Une cavité monomode (résonnante pour un seul mode transverse) ne transmettra de l'image que sa projection sur ce mode, et réfléchira les autres modes. Autrement dit l'image sera en général totalement détruite. Une cavité dégénérée transmettra la projection de l'image sur le sous-espace de dégénérescence. Si la cavité est suffisamment dégénérée, l'image pourra donc être partiellement reconstruite.

Par contre, on va voir qu'il est nécessaire afin de transmettre totalement n'importe quelle image d'avoir une cavité totalement dégénérée en modes transverses. En effet cette cavité, amenée à résonance, peut résonner pour une distribution transverse quelconque du champ. La cavité totalement dégénérée sera donc une cavité imageante.

Le traitement classique du problème de la transmission d'une image à travers une cavité fait apparaître des effets qui peuvent être abordés par deux approches complémentaires, développées dans les deux chapitre précédents. Le formalisme des modes propres de cavité d'une part, plus adapté au calcul et qui permet une première compréhension du comportement transverse, et le formalisme de l'optique géométrique (c'est à dire les matrices ABCD) d'autre part. Celui-ci, peu adapté dans la cas d'une cavité monomode transverse, se montre ici très utile à la bonne compréhension du phénomène. A l'aide du formalisme des fonction dites "auto-transforme", on développera dans la section B une théorie originale permettant de comprendre la transmission d'une image à travers une cavité dégénérée quelconque. Enfin dans la section C, on étudiera à titre d'exemple la transmission d'une image à travers une cavité héli-confocale.

## A Généralités

### A.1 Notations

On va définir pour la suite de ce chapitre notre image comme étant une distribution transverse du champ électrique monochromatique dont on fait l'image exacte (le vrai champ proche, voir page 17) dans un plan quelconque de la cavité, qu'on appellera plan de référence (qui peut être par exemple le plan d'entrée ou de sortie, ou encore le waist de la cavité). On se placera par la suite toujours dans ce plan lorsque l'on écrit le champ dans la cavité. Dans ce plan le champ est de la forme:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_{in}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \vec{u} \quad (3.1)$$

On l'a supposé stationnaire par commodité, polarisé rectilignement.  $\vec{x}$  est la coordonnée transverse. L'intensité locale est donc:

$$I(\vec{x}) = 2\epsilon_0 c E_{in}(\vec{x}) E_{in}^*(\vec{x}) \quad (3.2)$$

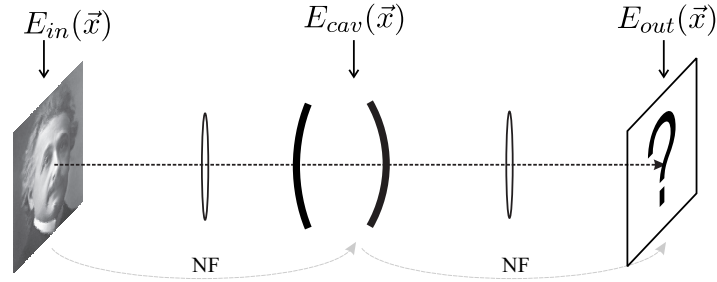


Fig. 3.1: Schéma de principe de la transmission d'une image à travers une cavité. On fait le vrai champ proche de l'image dans la cavité, puis le champ proche du même plan de la cavité sur une caméra CCD.

La base  $\{u_{pq}\}$  des modes  $TEM_{pq}$  à laquelle on fera référence sera toujours la base des modes propres de la cavité. C'est la base adéquate afin d'étudier l'interaction du champ avec la cavité. Soit  $a_{p,q}$  la projection de l'image sur le mode  $TEM_{pq}$  de la cavité.

on a:

$$a_{p,q} = \int_{\text{espace}} E_{in}(\vec{x}) u_{p,q}^*(\vec{x}) d^2\vec{x} \quad (3.3)$$

et

$$E_{in}(\vec{x}) = \sum_{p,q} a_{p,q} u_{p,q}(\vec{x}) \quad (3.4)$$

On considère la transmission à travers une cavité linéaire adaptée en impédance, c'est à dire dont les miroirs sont de même réflectivité (à résonance, un mode est alors transmis avec une efficacité de 1). L'action d'une cavité sur l'image peut être comprise comme une transmission et/ou un déphasage partiel sur chaque mode  $u_{p,q}$ . Autrement dit on a en sortie (dans un plan où on a imagé le plan de référence de la cavité) :

$$E_{out}(\vec{x}, t) = \sum_{p,q} t_{p,q} a_{p,q} u_{p,q}(\vec{x}) \quad (3.5)$$

où  $t_{p,q}$  est la fonction de transmission en amplitude de la cavité pour le mode  $TEM_{pq}$ , fonction de la longueur et de la géométrie de la cavité. Le schéma de principe de l'expérience est représenté sur la figure 3.1.

Si on prend une cavité non adaptée en impédance, alors la transmission maximale est réduite, mais les résultats sont qualitativement les mêmes. On va également noter par  $T$  la matrice ABCD de la cavité, par rapport au plan de référence.

## A.2 Cavité monomode

Considérons une cavité monomode de grande finesse. Pour une longueur où elle résonne, elle ne résonnera que pour un mode donné. On va supposer qu'on se place à résonance par

exemple du  $TEM_{00}$ . Autrement dit, la fonction de transmission de la cavité sera, pour une finesse infinie :

$$t_{p,q} = \delta_{p0}\delta_{q0} \quad (3.6)$$

Par conséquent le champ en sortie sera:

$$E_{out}(\vec{x}, t) = \sum_{p,q} t_{p,q} a_{p,q} u_{p,q}(\vec{x}) = a_{0,0} u_{0,0}(\vec{x}) \quad (3.7)$$

et toute l'information transverse sur le champ  $E_{in}$  sera perdue.

En terme de rayons, on a vu au chapitre précédent qu'une cavité monomode est telle qu'un rayon ne revient jamais sur lui-même, quel que soit le nombre de tour dans la cavité. Cela revient à dire, en terme de matrice ABCD, que pour tout N,  $T^N$  n'est pas la matrice identité.

$$T^N \neq I_2 \quad (3.8)$$

où  $I_2$  est la matrice identité de taille  $2 \times 2$ .

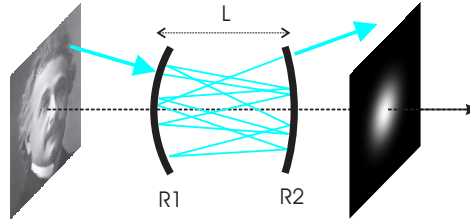


Fig. 3.2: Transmission d'une image à travers une cavité monomode, résonnante pour le  $TEM_{00}$ .

On peut alors comprendre cette perte de toute information spatiale en cavité monomode comme le fait qu'un rayon sortant de la cavité, caractérisé par distance à l'axe  $r'$ , et l'angle  $\theta'$  (voir la figure 1.1, aura perdu lors de ses nombreux allers-retours dans la cavité toute information spatiale relative au rayon entrant, caractérisé par  $r$  et  $\theta$  (voir figure 3.2).

### A.3 Cavité totalement dégénérée

Si on considère maintenant une cavité complètement dégénérée, par exemple la cavité de la figure 2.9, alors tous les modes sont résonnants pour une même longueur de cavité. Par conséquent la fonction de transmission de la cavité, amenée à résonance, sera :

$$t_{p,q} = 1 \quad (3.9)$$

et le champ en sortie sera :

$$E_{out}(\vec{x}) = \sum_{p,q} t_{p,q} a_{p,q} u_{p,q}(\vec{x}) = E_{in}(\vec{x}) \quad (3.10)$$

Une cavité totalement dégénérée sera donc totalement imageante. En terme de matrice ABCD, on a vu que la matrice de la cavité totalement dégénérée vaut  $T = I_2$ . Par conséquent, un rayon sortira après un nombre quelconque de tours dans la cavité avec les mêmes caractéristiques  $(r, \theta)$  qu'à l'entrée (dans le plan de référence). Toute l'information spatiale est conservée.

C'est pour cette raison que cette cavité est appelée cavité Auto-Imageante.

#### A.4 Cavité balayée

En général la longueur des cavités est contrôlée par une cale piézo-électrique. On peut balayer (à l'aide d'une rampe de tension) la longueur de cette cavité sur quelques dizaines de microns, à une fréquence allant jusqu'à quelques centaines de Hertz.

Lorsque l'on balaye une cavité sur un intervalle spectral libre, on va successivement transmettre tous les modes propres de la cavité, les uns après les autres. Le champ transmis moyenné dans le temps sur une caméra CCD sera donc en un point du plan transverse, pour une cavité monomode:

$$\langle I_{out}(\vec{x}) \rangle \propto \sum_{p,q} |a_{p,q}|^2 |u_{p,q}(\vec{x})|^2 \quad (3.11)$$

En effet chaque mode sera transmis à un instant différent. Par conséquent les modes sont détectés en intensité les uns après les autres sur chaque pixel de la caméra CCD, et n'interfèrent donc pas. On obtient donc la somme des intensités de chaque mode  $TEM_{pq}$ , et on perd les termes d'interférence entre les différents modes puisque  $\sum_{p,q} |a_{p,q}|^2 |u_{p,q}(\vec{x})|^2 \neq \left| \sum_{p,q} a_{p,q} u_{pq}(\vec{x}) \right|^2$ . Par conséquent on ne retrouve pas l'image.

Pour une cavité dégénérée balayée par contre, les modes transmis simultanément interfèrent. Si la cavité est totalement dégénérée on peut récupérer l'image.

## B Cavité partiellement imageante

L'étude des cavités dégénérées s'est principalement restreinte à des cavités qui n'étaient pas totalement dégénérées, telles que la cavité confocale. On va ici s'intéresser à la transmission d'une image à travers une cavité d'ordre K/N (voir page 25). On va utiliser, à notre connaissance pour la première fois, un formalisme mathématique adapté à la description de telles cavités, celui des fonctions auto-transformées.

### B.1 Fonctions "Auto-Transformées"

#### B.1.1 Fonctions self-Fourier

La transformée de Fourier est un des outils naturels de l'optique. Dans la littérature, l'optique de Fourier est un domaine à part entière (voir par exemple [Goodman]). Par conséquent,



il est naturel de s'intéresser aux objets qui sont leur propre transformée de Fourier. Une telle fonction  $f(x)$  vérifiera:

$$\tilde{f}(u) = f(u) \quad (3.12)$$

où la transformée de Fourier  $\tilde{f}$  est définie par:

$$\tilde{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2\pi i u x} dx. \quad (3.13)$$

Les deux exemples bien connus sont la gaussienne  $f(x) = e^{-\pi x^2}$  et le peigne de Dirac infini  $f(x) = \sum_n \delta(x - n)$ . Ces fonctions sont appelées Self-Fourier functions ou SFFs. Caola dans [Caola91], montra que, pour une fonction  $g(x)$  quelconque, alors la fonction paire :

$$f(x) = g(x) + g(-x) + \tilde{g}(x) + \tilde{g}(-x) \quad (3.14)$$

est une SFF. Dans [Lohmann92a], Lohmann et Mendlovic ont de plus montré que la structure de construction d'une SFF par l'équation 3.14 est non seulement suffisante pour construire une SFF, mais également nécessaire. Autrement dit toute SFF  $f(x)$  peut être générée par l'équation 3.14 à partir d'une autre fonction  $g(x)$ . Cette fonction n'est cependant pas unique. En particulier toute fonction de la forme  $g(x) = \frac{1}{4}f(x) + h(x)$  où  $h(x)$  est une fonction quelconque impaire par exemple, est une génératrice de  $f(x)$ . Lipson [Lipson93] montra qu'on peut trouver de telles distributions dans le plan médian d'un résonateur confocal. Enfin il souligne le fait que ces fonctions permettent de décrire des états très généraux en physique. Par exemple un oscillateur harmonique simple permet d'observer de telles fonctions. Si, avec les bonnes unités, on prend un Hamiltonien symétrique en  $x$  et  $p$  (position et impulsion)

$$H = p^2 + x^2$$

et qu'on résout l'équation de schrodinger

$$H\Psi = E\Psi$$

en unité  $\hbar = 1$ , la solution est de la forme

$$\Psi(x) = K \exp(-iEx + ix^2/2)$$

qui est une SFF. Par conséquent les SFFs sont des fonctions intéressantes non seulement pour l'optique, mais aussi pour d'autres domaines de la physique.

Enfin l'utilité de tels objets est un sujet qui a été l'objet de peu d'études. On peut cependant citer [Lohmann94], où est étudiée l'imagerie et l'amélioration de la résolution attendue pour un champ SFF.

### B.1.2 Généralisation

On peut généraliser cette approche aux transformations cycliques d'ordre  $N$ .

**Définition 1** Une transformation  $\mathcal{T}$  est dite cyclique d'ordre  $N$ , si appliquée  $N$  fois à une fonction  $F$  quelconque on retrouve la fonction initiale :

$$\mathcal{T}[\mathcal{T}[\mathcal{T} \dots [\mathcal{T}[F(x)]] \dots]] = \mathcal{T}^N[F(x)] = F(x)$$

On peut généraliser la méthode précédente de construction des fonctions SFFs pour créer à partir d'une fonction quelconque des fonctions que nous appellerons "auto-transformes" pour toute transformation cyclique.

**Définition 2** Soit une transformation  $\mathcal{T}$ , cyclique d'ordre  $N$ , une fonction  $F$  est dite Auto-Transforme pour la transformation  $\mathcal{T}$  si

$$\mathcal{T}[F(x)] = F(x)$$

Soit  $\mathcal{T}$  une transformation cyclique d'ordre  $N$ , et soit  $g(x)$  une fonction quelconque à laquelle on peut appliquer la transformation  $\mathcal{T}$ . On a donc par définition :

$$\mathcal{T}^N[g(x)] = g(x) \quad (3.15)$$

par conséquent La fonction  $F(x)$  définie par :

$$F(x) = g(x) + \mathcal{T}[g(x)] + \mathcal{T}^2[g(x)] + \dots + \mathcal{T}^{N-1}[g(x)] \quad (3.16)$$

est une fonction auto-transforme pour la transformation  $\mathcal{T}$ , puisque :

$$\mathcal{T}[F(x)] = \mathcal{T}[g(x)] + \mathcal{T}^2[g(x)] + \dots + \mathcal{T}^{N-1}[g(x)] + \mathcal{T}^N[g(x)] = F(x). \quad (3.17)$$

Et comme précédemment il est facile de se convaincre que toute fonction auto-transforme pour  $\mathcal{T}$  peut être générée de cette façon.

La transformée de Fourier est cyclique d'ordre  $N = 4$ . Parmi les autres transformations cycliques intéressantes, on peut citer la transformation de Hartley, ou la transformée de Hartley  $f_H$  de la fonction  $f(x)$  s'écrit :

$$f_H(u) = \int f(x)(\cos(2\pi ux) + \sin(2\pi ux)) \quad (3.18)$$

d'ordre  $N = 2$ , également mise en oeuvre en optique dans [Bracewell83]. On peut aussi citer la transformée de Fraunhofer (Fraunhofer holotransform) et de Fresnel (Fresnel holotransform) qui sont également cycliques d'ordre  $N = 2$ , ainsi que la transformée de Talbot fractionnelle. On pourra trouver une bonne introduction à toutes ces transformations dans [Patorski89].

Cependant générer des fonctions auto-transformes est plus délicat, et les méthodes proposées dans [Lipson93, Lohmann92b] sont assez complexes, et ne s'appliquent qu'au cas par cas.

On va montrer dans cette partie que les cavités dégénérées génèrent naturellement de telles fonctions auto-transformes, par la transformation 3.17. On va également étudier l'effet d'une telle transformation sur une image. L'étude de tels objets en cavité nous permettra d'étudier plus en détails le lien entre SFF et modes d'Hermite-Gauss.

## B.2 Cavité partiellement dégénérée

On va considérer une cavité d'ordre de dégénérescence  $K/N$ . On a vu au chapitre précédent qu'un rayon dans une cavité d'ordre  $K/N$  va parcourir une orbite (de  $N$  tours)  $K$  fois, avant de revenir identique à lui-même. On prend en compte la finesse finie de la cavité. On va noter par  $\gamma$  les pertes en amplitude sur un tour de cavité, qu'on va supposer faibles ( $\gamma \ll 1$ ). La finesse est alors  $\mathcal{F} = \frac{\pi}{\gamma}$ . Si on considère que les seules pertes sont associées aux deux miroirs identiques, alors la transmission en amplitude d'un miroir est  $\sqrt{\gamma}$ . On verra dans la suite de la discussion des conditions plus strictes sur la finesse.

On appelle  $\mathcal{T}_{cav}$  la transformation du champ associée à un tour de cavité. On fera attention à ne pas confondre la transformation  $\mathcal{T}_{cav}$  avec la matrice de Gauss  $T$  d'un tour dans la cavité, caractérisée par ses coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Ces quantités sont reliées par la relation de Huygens-Fresnel associée à la matrice de Gauss  $T$  d'un tour dans la cavité (formule 1.16):

$$\mathcal{T}_{cav} : u(\vec{r}_1) \rightarrow -e^{+ikL} \frac{i}{B\lambda} \iint d^2\vec{r}_2 u(\vec{r}_2) \exp \left[ -i \frac{\pi}{B\lambda} (A\vec{r}_1^2 - 2\vec{r}_1\vec{r}_2 + D\vec{r}_2^2) \right] \quad (3.19)$$

où  $L$  est la longueur de la cavité. Il faut ajouter à cette transformation une atténuation d'un facteur  $1 - \gamma$ , due au fait que sur un tour le champ subit des pertes  $\gamma$ . Si on considère un champ  $E_{in}(\vec{x})$  à l'entrée dans la cavité, alors on aura:

$$|\mathcal{T}_{cav}^N[E_{in}(\vec{x})]| = |E_{in}(\vec{x})| \quad (3.20)$$

puisque au bout de  $N$  tours le champ se reproduit identique à lui-même à une phase près. Le facteur de phase est de la forme  $e^{i\frac{2p\pi}{K}}$ , où  $p/K$  est irréductible. De plus:

$$\mathcal{T}_{cav}^{N*K}[E_{in}(\vec{x})] = E_{in}(\vec{x}) \quad (3.21)$$

puisque'on a vu qu'il fallait parcourir  $K$  fois l'orbite pour revenir sur soi-même avec la même phase. Autrement dit on peut voir la transformation  $\mathcal{T}_{cav}$  de deux manières:

1. comme une transformation cyclique d'ordre  $N * K$  sur le champ,
2. ou comme une transformation quasi-cyclique d'ordre  $N$  sur le champ (à une phase près).

Le champ résonnant dans la cavité sera de la forme:

$$E_{cav}(\vec{x}) = \sqrt{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - \gamma)\mathcal{T}_{cav}]^n E_{in}(\vec{x}) \quad (3.22)$$

où on a pris en compte à chaque tour les pertes  $1 - \gamma$  sur le champ. Le champ en sortie de la cavité sera proportionnel au champ résonnant, et vaudra :

$$E_{out}(\vec{x}) = \sqrt{\gamma} E_{cav}(\vec{x}) = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \gamma)^n \mathcal{T}_{cav}^n [E_{in}(\vec{x})]. \quad (3.23)$$

qui, en raison de la relation 3.21, est donc de la forme:

$$E_{out}(\vec{x}) \propto E_{in}(\vec{x}) + (1 - \gamma) \mathcal{T}_{cav} [E_{in}(\vec{x})] + ((1 - \gamma) \mathcal{T}_{cav})^2 [E_{in}(\vec{x})] + \dots + ((1 - \gamma) \mathcal{T}_{cav})^{N * K - 1} [E_{in}(\vec{x})] \quad (3.24)$$

On voit donc bien que, dans la limite où la finesse vérifie

$$\mathcal{F} \gg N * K \quad (3.25)$$

alors on aura  $(1 - \gamma)^n \simeq 1 - n\gamma \simeq 1$  pour  $n \leq N * K$ . Par conséquent le champ en sortie sera le champ auto-transforme pour  $\mathcal{T}_{cav}$ .

On peut également regrouper les termes de cette expression comme pour un Fabry-Perot, en utilisant le fait que

$$\mathcal{T}_{cav}^N [E_{in}(\vec{x})] = e^{i \frac{2p\pi}{K}} E_{in}(\vec{x}) \quad (3.26)$$

et le mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} E_{out}(\vec{x}) &= \gamma \left( \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \gamma)^{NK n} \right) \left( \sum_{n=0}^{K-1} \left[ (1 - \gamma)^N e^{i \frac{2ip\pi}{K}} \right]^n \right) \sum_{n=0}^{N-1} (1 - \gamma)^n \mathcal{T}_{cav}^n [E_{in}(\vec{x})] \\ &= \gamma \frac{1}{1 - (1 - \gamma)^{NK}} \frac{1 - (1 - \gamma)^{KN}}{1 - (1 - \gamma)^N e^{2ip\pi/K}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (1 - \gamma)^n \mathcal{T}_{cav}^n [E_{in}(\vec{x})] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Cette formule mérite des explications. Elle est constituée d'un produit de deux termes. La somme est responsable de la forme transverse du champ en sortie. On peut voir qu'à part le terme  $(1 - \gamma)^n$ , c'est la fonction qui génère, à partir du champ  $E_{in}(\vec{x})$ , la fonction auto-transforme pour la transformation quasi-cyclique d'ordre N  $\mathcal{T}_{cav}$ . La condition sur la finesse pour que le champ dans la cavité soit effectivement le champ auto-transforme pour  $\mathcal{T}_{cav}$  est donc :

$$\mathcal{F} \gg N \quad (3.28)$$

auquel cas on a bien  $(1 - \gamma)^n \simeq 1$  pour  $n < N$ .

Le coefficient est un facteur multiplicatif du champ en sortie, où il est important de noter qu'on a été obligé d'introduire les pertes  $\gamma$ . Si on néglige l'atténuation à chaque tour, on récupère en effet  $\sum_{n=0}^{K-1} e^{i \frac{2inp\pi}{K}}$  qui vaut toujours zéro. Ce facteur est la somme de K termes, et correspond à l'interférence des K orbites. Le champ en sortie est donc à ce facteur de phase près, auto-transforme pour  $\mathcal{T}_{cav}$ .

Le facteur  $K$  de l'ordre de dégénérescence  $K/N$  n'est donc pas responsable de la forme du champ  $E_{out}$  en sortie. Notons que l'équation 3.27 se simplifie, pour des pertes  $\gamma$  faibles et pour  $K = 1$ , sous la forme simple intuitive:

$$E_{out}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{T}_{cav}^n[E_{in}(\vec{x})] \quad (3.29)$$

La cavité génère à partir de l'image d'entrée  $E_{in}$  la fonction auto-transforme correspondante à la fonction  $\mathcal{T}_{cav}$  de transfert de la cavité cyclique d'ordre  $N$  pour le champ, à une phase près.

En résumé:

1. Des cavités fortement dégénérées ( $K, N$  faibles), et de grande finesse ( $\mathcal{F} \gg K * N$ ), génèrent les fonction auto-transformes exactes pour la transformation  $\mathcal{T}_{cav}$  d'ordre  $K * N$  du champ d'une part, et pour la transformation  $|\mathcal{T}_{cav}|$  d'ordre  $N$  du champ à une phase près du champ d'autre part.
2. Du point de vue de l'imagerie, la phase exacte du champ est de peu d'importance. Par conséquent c'est surtout la propriété auto-transforme à une phase près qui nous intéressera.
3. Les cavités d'ordre de dégénérescence  $1/N$  donc où  $K = 1$  vérifient également toutes les propriétés citées précédemment.

### B.3 Perte d'information sur l'image

En terme de traitement d'image, on a vu qu'une cavité d'ordre  $K/N$  effectue une transformation sur l'image. En terme d'information, la transmission à travers une cavité partiellement résonnante ne transmet qu'une partie des modes, plus exactement  $\frac{1}{NK}$  modes. Par conséquent de l'information a été perdue lors de cette transformation. La nature de cette perte d'information peut être comprise grâce à l'équation 3.23. Le champ à la position  $\vec{x}$  en sortie est la somme de  $N * K$  termes. Lorsque l'on détecte un photon à la position  $\vec{x}$ , on ne sait pas duquel des  $N * K$  termes il est issu. Cette information est contenue dans les autres modes de la cavité qui n'ont pas été transmis.

Néanmoins dans certains cas, la connaissance d'informations a priori sur l'image envoyée dans la cavité permet de compenser la perte d'information sur l'image. Par exemple si on envoie une image qu'on sait être paire dans la cavité confocale, on ne perd aucune information à la traversée de la cavité.

### B.4 Cavités simples

On va étudier la transmission d'une images sur quelques cas simples. Dans la section suivante on étudiera en détail la cavité héli-confocale.

### B.4.1 Cavité confocale

On a vu au chapitre précédent que la cavité confocale est une cavité dont la matrice de Gauss  $T$  vaut :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Par conséquent la transformation  $\mathcal{T}_{cav}$  du champ associé à un tour de cavité s'écrit :

$$\mathcal{T}_{cav} : u(\vec{r}) \rightarrow au(-\vec{r}) \quad (3.31)$$

c'est à dire une simple inversion, assortie d'un facteur de phase  $a = e^{i\varphi_{cav}}$  vérifiant  $2\varphi_{cav} = 0[2\pi]$ . Ici on a donc  $a = \pm 1$ . L'ordre de dégénérescence est bien entendu  $K/N = 1/2$ . Les modes  $f_{pq}$  se séparent en deux groupes, qui résonnent pour des longueurs différentes. En notant  $p + q = n[2]$ ,  $n = 0$  correspond à la famille des modes pairs, et  $n = 1$  correspond à la famille des modes impairs. La valeur du facteur de phase  $\varphi_{cav}$  dépend donc du pic sur lequel on se place, c'est à dire de la famille de modes qui résonne. Si on se place à résonance des modes pairs/impairs, alors  $a = \pm 1$  et le champ résonnant correspond à la partie paire/impair du champ puisqu'en sortie on a

$$E_{out} = \frac{1}{2} (E_{in}(\vec{x}) \pm E_{in}(-\vec{x})) \quad (3.32)$$

Autrement dit on voit sur cet exemple que le traitement par les modes ou par les fonctions  $\mathcal{T}_{cav}$  de la cavité confocale donne les mêmes résultats.

En terme de modes, on ne transmet qu'un mode sur deux, ce qui veut dire qu'on perd la moitié de l'information. Ici l'information qui a été perdue apparaît clairement sur l'équation 3.32. La cavité ne gardant que la partie paire ou impaire de l'image, on n'a en sortie plus aucune information sur la parité.

### B.4.2 Cavité symétrique

On considère une cavité symétrique d'ordre  $K/N$  soit deux miroirs de rayon de courbure  $R$ , séparés par une distance  $L = 2R \sin^2\left(\frac{K\pi}{2N}\right)$ , telle qu'on l'a définie dans le chapitre précédent. Sa matrice de Gauss et sa fonction de transfert  $\mathcal{T}_{cav}$  sont données par les équations 3.19 et 2.17. On sait que  $T^N = I_2$ , et on voit que  $\mathcal{T}_{cav}$  n'a pas une expression simple. Par contre on sait que  $\mathcal{T}_{cav}^N$  est un simple déphasage d'un facteur  $e^{i\frac{2p\pi}{K}}$ , et que  $\mathcal{T}_{cav}^{NK}$  est l'identité. Les modes  $f_{pq}$  se séparent en  $N$  groupes, qui résonnent pour des longueurs différentes. Cependant la forme de la matrice  $T$  d'un tour ne permet pas de comprendre de manière simple et intuitive le comportement sur une image d'une telle cavité.

## C Cavité héli-confocale

On considère habituellement la cavité confocale, une cavité dégénérée classique, composée de deux miroirs courbes de rayon de courbure  $R$ , séparés par une distance  $R$ . Elle est appelée

ainsi car les points focaux des deux miroirs, situés à  $\frac{R}{2}$  des miroirs, coïncident.

Cette cavité est symétrique, donc prendre la moitié de cette cavité -ce qui revient à placer un miroir dans son plan de symétrie- ne modifiera pas les trajets des rayons, ni la base des modes propres. La cavité ainsi obtenue, c'est la cavité héli-confocale (voir Figure 3.3) et c'est celle que nous allons étudier ici.

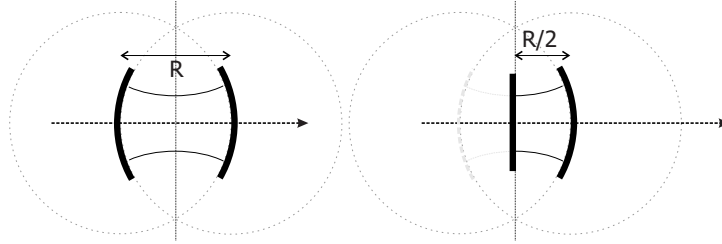


Fig. 3.3: La cavité confocale (à gauche) présente un plan de symétrie. Si on place un miroir dans ce plan, on obtient la cavité héli-confocale (à droite).

Elle est constituée d'un miroir plan, et d'un miroir courbe de rayon de courbure  $R$  placée à une distance de  $\frac{R}{2}$ . Bien que les modes propres ne sont pas modifiés, le comportement transverse de cette cavité est néanmoins fort différent de celui de la cavité confocale. A notre connaissance, la littérature à propos de cette cavité est assez succincte. En dehors de cavités Fabry-Perot héli-confocales pour la spectroscopie [Chu94, Boderman98], où ne sont pas étudiées les propriétés transverses, on peut néanmoins citer [Chen04], où sont étudiées les orbites géométriques d'un faisceau laser dans une telle cavité. Néanmoins le traitement qui est fait dans ce travail est à notre sens plus complet. En effet en nous appuyant sur les résultats précédents pour les cavités très dégénérées, on va traiter de manière exhaustive le comportement transverse de la cavité héli-confocale.

## C.1 Transmission à travers la cavité

### C.1.1 En terme de modes propres de cavité

Cette cavité est dégénérée en mode transverse, c'est à dire que des familles de modes  $u_{pq}$  sont résonnantes pour les mêmes longueurs de cavités.

On a vu que la cavité confocale était dégénérée d'ordre 2. Dans le cas de la cavité héli-confocale, cette dégénérescence est d'ordre 4, c'est à dire qu'il existe 4 familles distinctes de modes. En notant  $p+q = n$  [4]. Cependant il est difficile de prédire le comportement en terme de transmission d'image uniquement avec cette information. On va voir que le traitement en terme de matrice de propagation apporte beaucoup plus d'informations.

### C.1.2 En terme de matrice de propagation

La matrice ABCD d'un aller-retour, au départ du miroir plan, est:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{R}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{R}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{R}{2} \\ -\frac{2}{R} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Deux aller-retours donnent -logiquement- la matrice de propagation d'une cavité confocale:

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui revient à dire que deux aller-retour donnent le symétrique du champ à l'entrée. On retrouve également que

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le champ revient identique à lui-même en quatre allers-retours, ce qui revient à dire que l'ordre de dégénérescence est de 4. La cavité hémi-confocale a donc les mêmes propriétés de symétrie que la cavité confocale, plus les siennes propres, qui viennent de la transformation du champ sur un seul aller-retour. Sur ce trajet, où la matrice ABCD de propagation est calculée en 3.33 la lumière effectue l'équivalent d'une transformation par un système f-f (le miroir jouant le rôle de la lentille de focale  $f = \frac{R}{2}$ ), soit le système classique d'imagerie donnant le champ lointain exact.

En notant  $B(\vec{x})$  le champ initial, le système effectue donc sur un aller retour une transformée de Fourier spatiale à 2D, et donne donc le champ  $\tilde{B}(\vec{y})$ :

$$\tilde{B}(\vec{y}) = \frac{2}{\lambda R} \int B(\vec{x}) e^{-i\frac{4\pi}{\lambda R}\vec{y}\vec{x}} d^2\vec{x} \quad (3.34)$$

Dans une propagation, la phase absolue n'est pas importante, mais dans une cavité le champ doit boucler sur lui-même. Il faut donc prendre en compte le déphasage  $e^{i\frac{2\pi}{\lambda}2\delta}$  dû à la propagation, et le facteur  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  dû à la transformée de Fourier. La condition de résonance de la cavité est donc, en notant  $a = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\delta + \frac{\pi}{2}}$ :

$$a^4 = 1, \quad (3.35)$$

soit  $a = 1, i, -1$  ou  $-i$ .

Soit  $E_{in}(\vec{x})$  le champ à l'entrée de la cavité. Le champ sortant (voir figure 3.4) de la cavité sera:

$$E(\vec{x}) = \frac{1}{4} (E_{in}(\vec{x}) + a^2 E_{in}(-\vec{x})) + a (\tilde{E}_{in}(\vec{x}) + a^2 \tilde{E}_{in}(-\vec{x})) \quad (3.36)$$

Cette équation permet de connaître le comportement en terme d'imagerie de la cavité:

- la valeur de  $a^2$  est 1 ou  $-1$  et détermine la parité du champ.



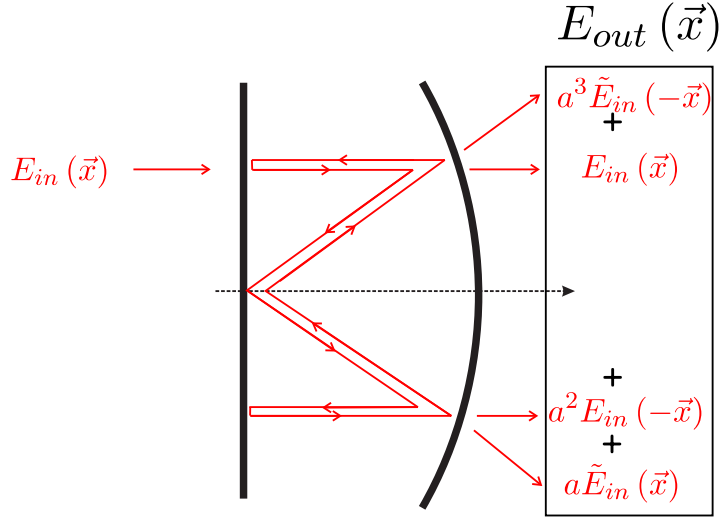


Fig. 3.4: Trajet d'un rayon dans la cavité héli-con focale

- la valeur de  $a$  détermine la phase entre la partie paire/impair du champ et de sa transformée de Fourier.

Un parallèle avec le traitement en terme de modes propres permet de voir que la valeur de  $a$  correspond à la famille de mode résonnante.

$$\begin{cases} a = 1 & \longrightarrow \text{modes } p + q = 0[4] \\ a = i & \longrightarrow \text{modes } p + q = 1[4] \\ a = -1 & \longrightarrow \text{modes } p + q = 2[4] \\ a = -i & \longrightarrow \text{modes } p + q = 3[4] \end{cases} \quad (3.37)$$

En terme d'imagerie la cavité héli-concentrique, résonnante pour les modes  $p + q = 0[4]$ , transmet la partie paire du champ, et de sa transformée de Fourier.

## C.2 Transmission de l'image d'une fente par la cavité

On va étudier en détail la transmission d'une image à travers la cavité. Tout d'abord on peut simuler théoriquement le passage de l'image d'une fente à travers cette cavité. On comparera ensuite avec les résultats expérimentaux.

### C.2.1 Configuration expérimentale

Expérimentalement, on réalise la transmission d'une image à travers la cavité, comme schématisé sur la figure 3.5, de la manière suivante:

1. On réalise l'image en interceptant un mode gaussien  $TEM_{00}$  issu d'un laser par une

mire.

2. On image le champ juste après la mire (notre image) sur le miroir plan de la cavité par un champ proche complet (voir page 17).
3. On image le miroir plan de la cavité sur une caméra CCD par un nouveau champ proche complet.

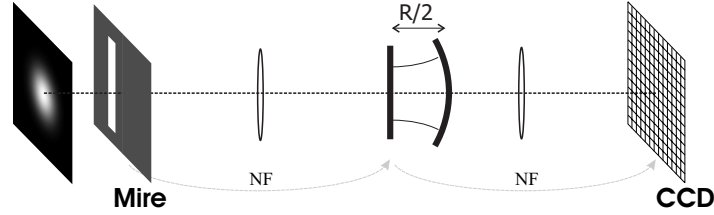


Fig. 3.5: Schéma de l'expérience de transmission d'une image à travers la cavité

### C.2.2 Simulation

On peut simuler avec une très bonne précision les résultats attendus pour la transmission d'une image. On choisit comme image de base l'interception du mode  $TEM_{00}$  d'un laser (qui est envoyé dans la cavité avec un waist trois fois plus gros que le mode propre de la cavité) par la mire. Pour faciliter la décomposition analytique sur les modes de Laguerre-Gauss, on choisit comme mire une fente infinie, décalée d'une largeur de waist du centre de la cavité, afin que l'image ne soit pas paire. Le champ entrant dans la cavité est représenté sur la figure 3.6, ainsi que sa décomposition sur les 400 premiers modes gaussiens dans la cavité (on se limite donc aux modes  $TEM_{pq}$  avec  $0 < p, q < 20$ ). On traite l'effet de la cavité grâce à l'équation 3.5.

On peut également simuler les pics attendus pour cette cavité (voir figure 3.7), où chaque pic correspond à une famille de modes (3.37). Il y a donc 4 pics par intervalle spectral libre.

On a représenté sur la figure 3.8 la transmission de la cavité pour les différentes résonances  $i[4]$ , où on a reconstruit l'image à partir des modes  $TEM_{pq}$  transmis par la cavité. On a également reporté le champ attendu correspondant aux différentes valeurs possibles de  $a$  (voir 3.37). On voit donc que les deux approches (modale et géométrique) coïncident parfaitement : si on prend par exemple le champ correspondant à la résonance  $p + q = 0[4]$ , la figure reconstruite par les modes transmis apparaît bien comme la partie paire du champ entrant (les deux bosses très allongées), et la partie paire de la transformée de Fourier (les trois bosses étroites centrales, qui reproduisent le champ lointain bien connu de la double fente).

La figure en intensité attendue est le carré du champ. On a les quatre champs correspondant aux quatre familles de modes (graphes de la figure 3.8). On voit toujours les fentes, et la transformée de Fourier. Tout d'abord on voit que la transformée de Fourier est beaucoup plus intense que le champ. En fait, en terme d'énergie, il est aisé de se convaincre qu'elle est

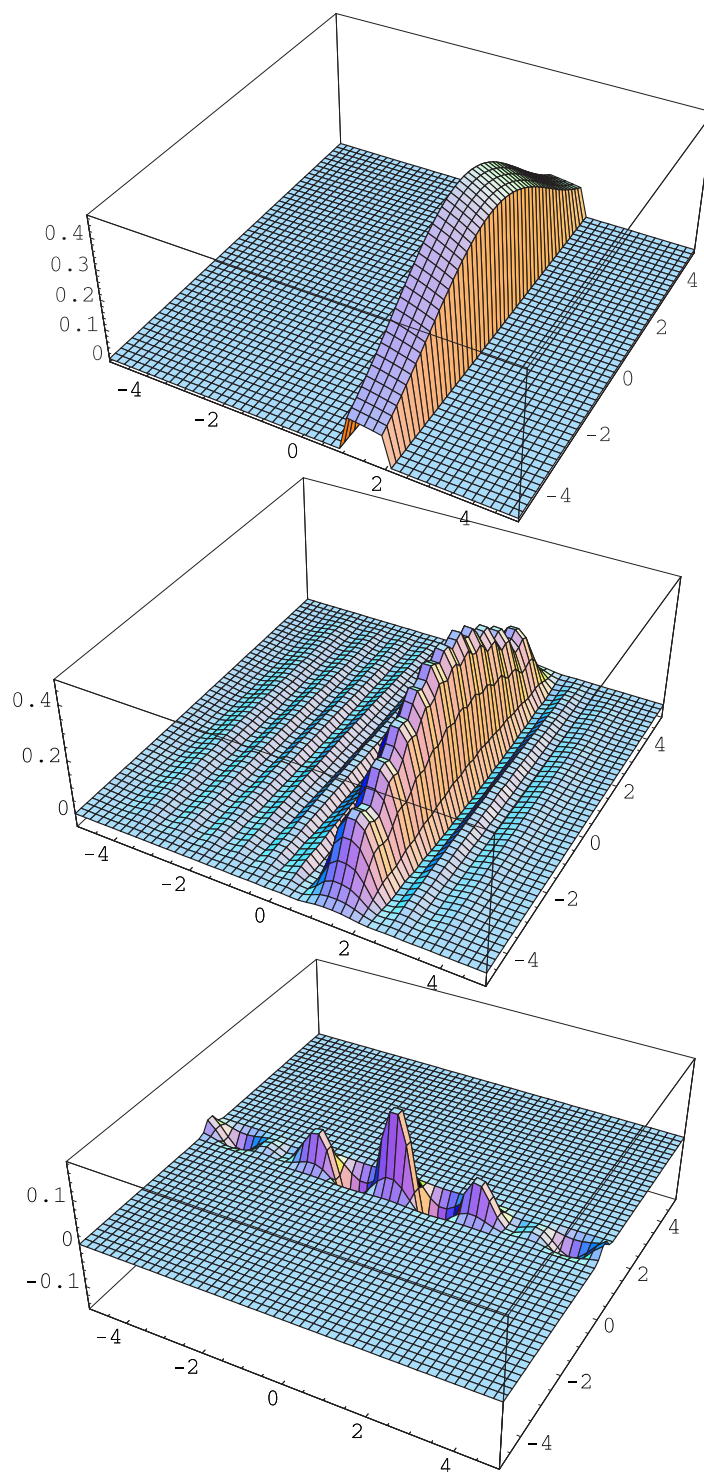


Fig. 3.6: Gaussienne interceptée par une fente infinie (en haut), sa projection sur les 400 premiers modes de la cavité (milieu), et sa transformée de Fourier spatiale (en bas).

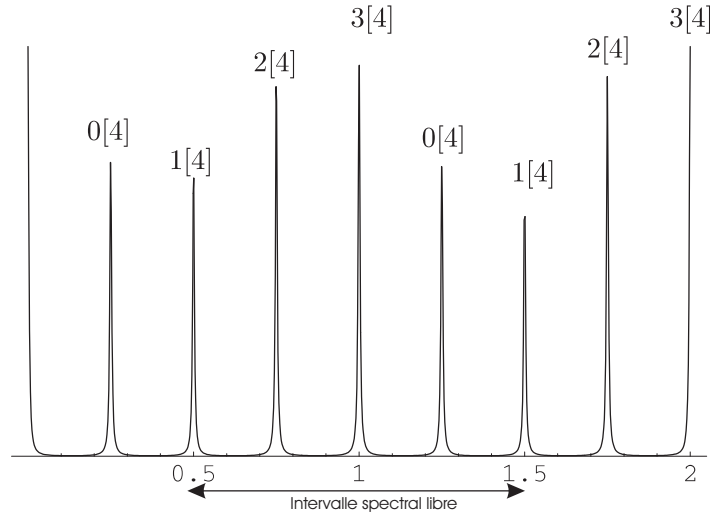


Fig. 3.7: Pics de transmission théoriques de la fente de la figure 3.5, pour une finesse  $\mathcal{F} = 500$ .

quasiment identique, puisque c'est la parité du nombre de tours dans la cavité qui détermine si un photon sortira en champ proche ou en champ lointain (TF) de l'image. Cependant la transformée de Fourier est ici plus condensée dans l'espace (peu de fréquences spatiales élevées), et donc son intensité locale est plus grande.

On peut voir que l'information sur la parité du champ disparaît en intensité (figure 3.9), puisque toutes les figures semblent paires. Le seul endroit où on peut détecter une différence entre les deux figures est au niveau de l'interférence entre le champ et sa transformée de Fourier, mais il est difficile de savoir en observant l'intensité du champ sur quelle résonance on se trouve.

Plusieurs remarques:

1. Tout d'abord, on voit que l'on retrouve facilement les résultats de la cavité confocale en additionnant les champs correspondants à  $p + q = i[4]$  et  $p + q = i + 2[4]$ . On retrouve le  $p + q = i[2]$ , et donc on récupère la partie paire ou impaire du champ. En terme de champ en sortie, on voit sur l'équation 3.36 que la partie paire/impaire de la transformée de Fourier disparaît lorsque l'on additionne les champs. Il est donc intéressant de noter que pour faire disparaître la transformée de Fourier, il faut donc transmettre plus de modes.
2. Par contre aucun sous-ensemble de modes ne transmet que la transformée de Fourier de l'image.
3. En terme de mode, si on se donne un mode  $TEM_{pq}$  quelconque, il vérifie l'équation 3.36 correspondant à sa valeur de  $p + q[4]$ , et présente donc toutes les symétries correspondantes. Par exemple le  $TEM_{00}$  est pair et est sa propre transformée de Fourier, et le  $TEM_{12}$  est impair et est sa propre transformée de Fourier déphasée de  $\pi/2$ .

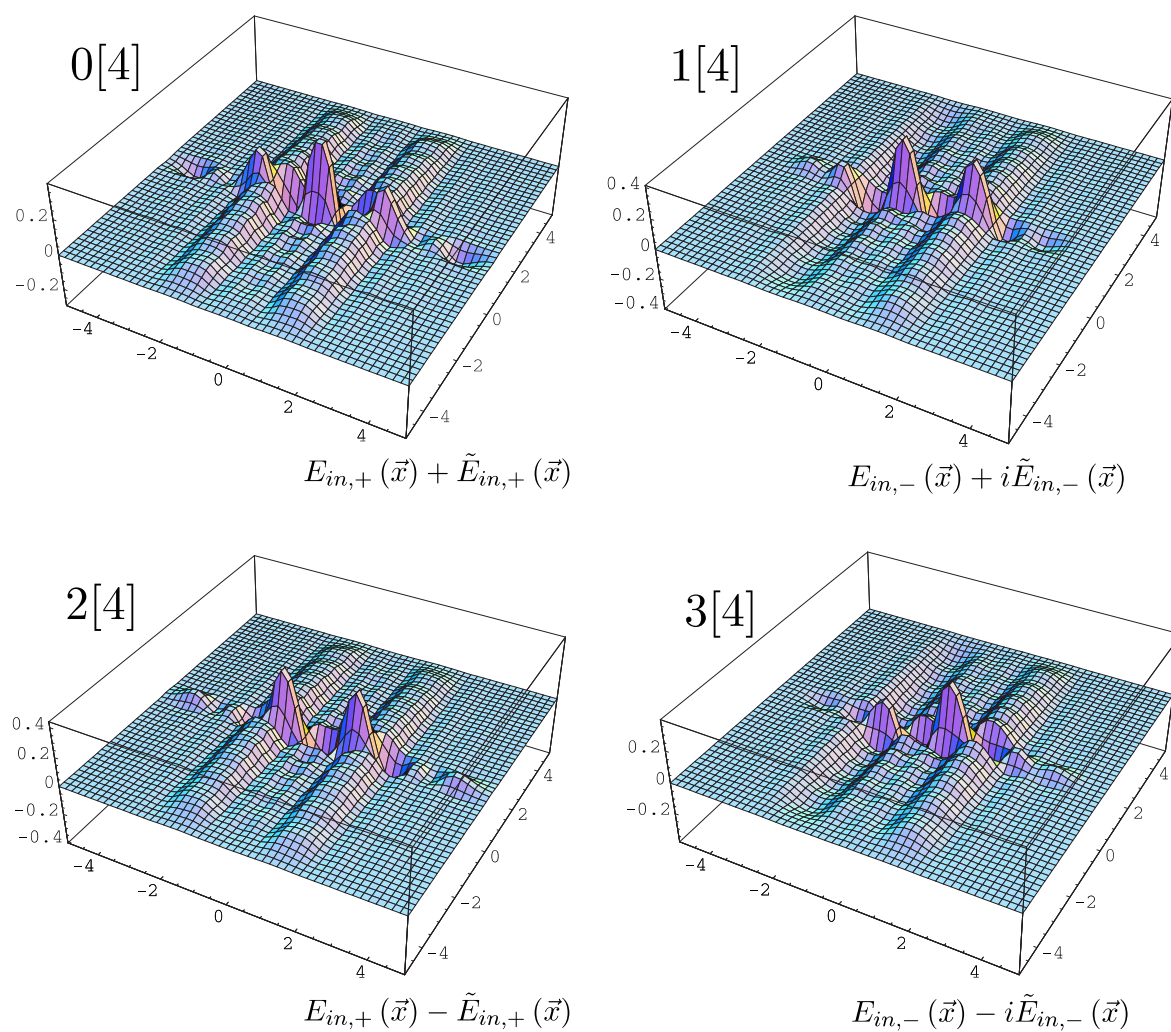


Fig. 3.8: Transmission théorique (en champ) de la fente par la cavité hémiconfocale, pour les différentes familles de modes  $p + q = i[4]$ .

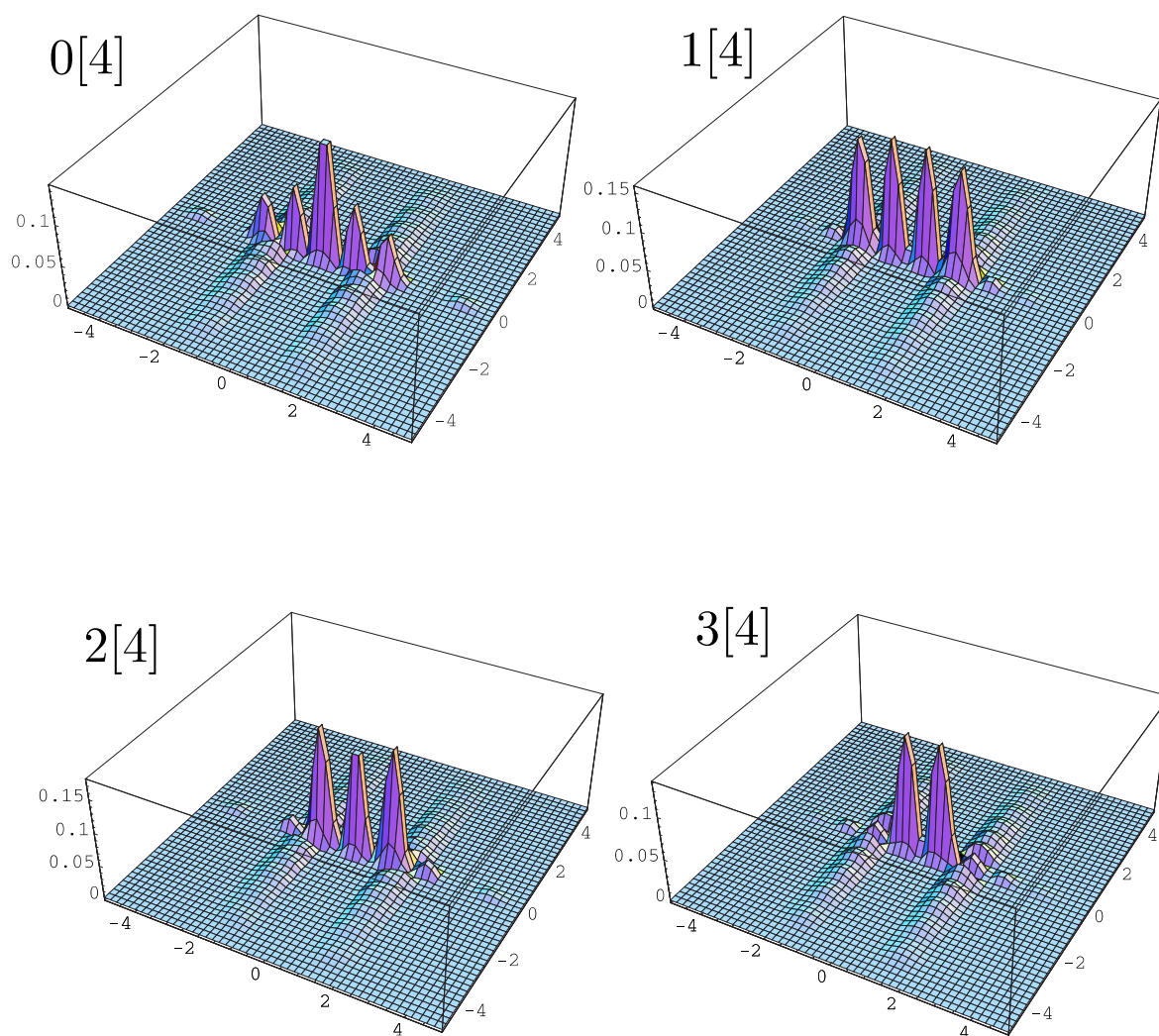


Fig. 3.9: Transmission théorique (en intensité) de la fente par la cavité héli-confocale, pour les différentes familles de modes  $p + q = i[4]$ .



Il est aussi intéressant de se demander où est l'information perdue, puisque l'on observe la partie paire/impair de l'image ET de sa transformée de Fourier. Ici on sait quelle image on envoie, donc on peut différencier facilement l'image de sa transformée de Fourier, car on dispose d'informations a priori sur la forme de l'image envoyée. Par contre pour une image quelconque, on ne saura pas en sortie dissocier a priori l'image de sa transformée de Fourier. De plus, ici, image et transformée de Fourier se recouvrent peu, on ne perd réellement de l'information qu'aux endroits où image et transformée de Fourier se superposent. Mais pour une image quelconque, la situation est pire puisque le champ est quasiment partout susceptible d'être la somme de l'image et de sa transformée de Fourier.

Enfin, si on considère en sortie, on a généré la fonction auto-transforme pour la transformation d'un tour dans la cavité. En particulier pour la résonance  $p + q = 0$ [4], on obtient un champ auto-Fourier, donc un SFF.

### C.2.3 Expérience

Pour les détails expérimentaux précis, on se reportera à la troisième partie, On va juste ici exposer les résultats expérimentaux permettant de valider les simulations théoriques. On a pu réaliser l'expérience consistant à transmettre une image à travers la cavité héli-confocale, qui très simplifiée peut se résumer au schéma 3.5. La mire utilisée est montrée sur la figure 7.7. Les résultats obtenus sont montrés sur la figure 3.10. On voit qu'on récupère bien toujours la partie paire de l'image et de la transformée de Fourier. La taille du  $TEM_{00}$  n'est pas indiquée sur les graphes, mais peut être évaluée grâce à la taille de la tache centrale de la transformée de Fourier.

## Conclusion

Une cavité monomode n'est pas adaptée à la transmission d'une image. Pour des cavités dégénérées on a développé une méthode (valable dans l'approximation paraxiale, pour des cavités stables) permettant de comprendre son effet sur une image. Sur l'exemple de la cavité héli-confocale, on voit que les résultats sont, aux limitations expérimentales près (taille finie de la cavité, dégénérescence transverse imparfaite, asservissement...) en accord parfait avec la théorie développée précédemment. On a donc validé expérimentalement le modèle développé dans les deux premières sections de ce chapitre.

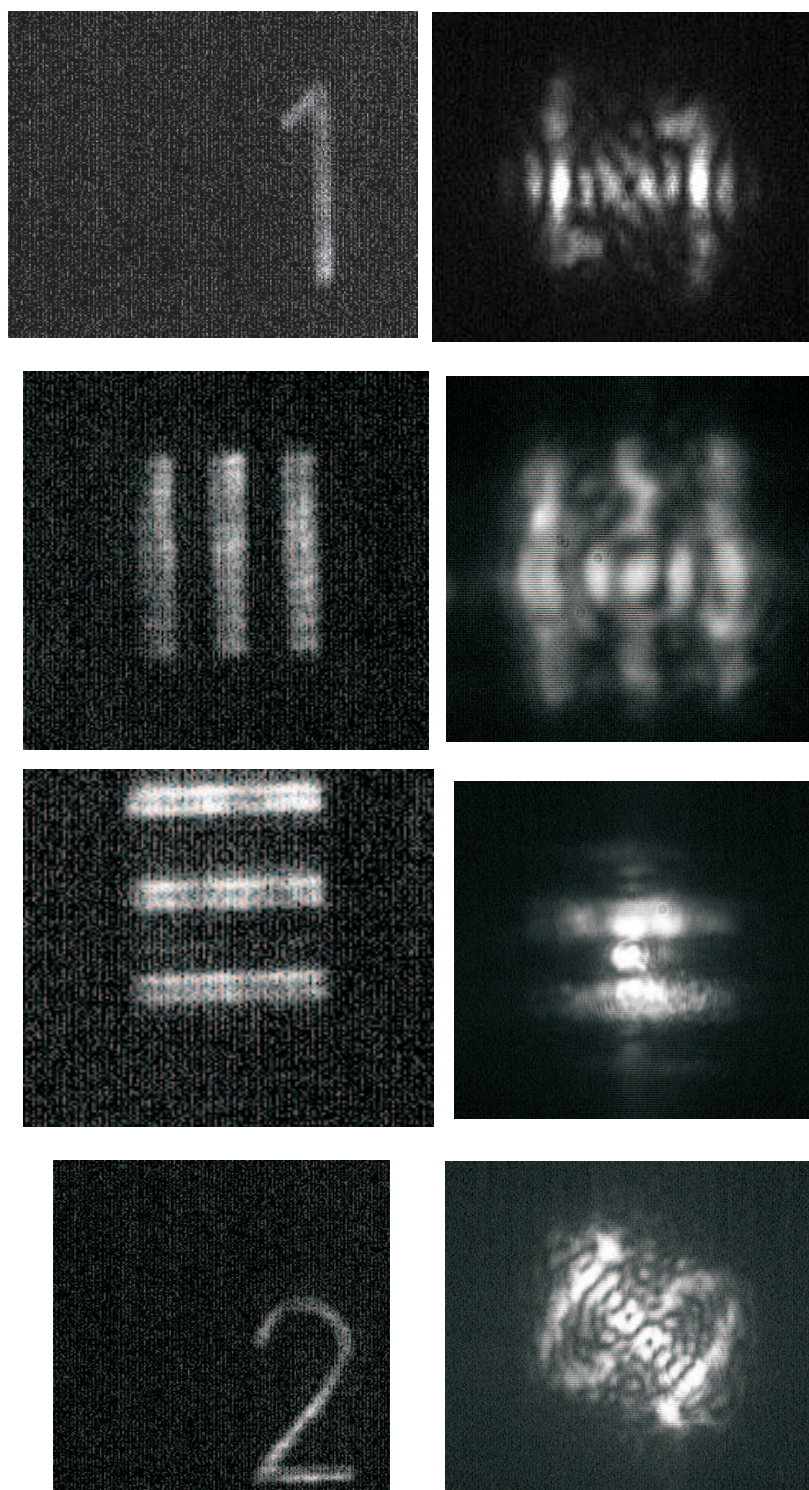


Fig. 3.10: Détail de la mire (à gauche) et leur transmission à travers la cavité confocale en champ proche (à droite).





*Deuxième partie*

**Amplification d'image en cavité :  
Théorie**



---

# Amplification optique sans bruit

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Amplification paramétrique classique</b> . . . . .	<b>60</b>
A.1	L'effet paramétrique . . . . .	60
A.2	Interaction à trois champs . . . . .	60
A.3	Amplification en type II . . . . .	62
<b>B</b>	<b>Amplification paramétrique quantique</b> . . . . .	<b>64</b>
B.1	Quelques éléments d'optique quantique . . . . .	64
B.2	Équations de propagation quantiques . . . . .	67
<b>C</b>	<b>Amplification et facteur de bruit</b> . . . . .	<b>70</b>
C.1	Bruit et signal dans un faisceau . . . . .	70
C.2	Facteur de bruit d'un amplificateur . . . . .	70
<b>D</b>	<b>Bruit et amplification paramétrique</b> . . . . .	<b>72</b>
D.1	Amplification insensible à la phase . . . . .	72
D.2	Amplification sensible à la phase . . . . .	74

---

## Introduction

L'amplification d'un signal optique est un phénomène qui est très riche du point de vue quantique. On va voir dans les sections **A** et **B** que l'effet paramétrique permet de réaliser l'amplification paramétrique d'un faible signal grâce à un faisceau de pompe, et que cette amplification est une manière très commode pour réaliser des états comprimés du rayonnement. Dans les sections **C** et **D**, on va voir le rapport entre facteur de bruit de l'amplification et ses propriétés quantiques.

## A Amplification paramétrique classique

### A.1 L'effet paramétrique

$\chi^{(2)}$ , tenseur d'ordre 3, va caractériser l'interaction à trois ondes dans un milieu diélectrique. Si on note  $\omega_s$ ,  $\omega_i$  et  $\omega_p$  la pulsation des trois ondes en interaction, on peut comprendre la conversion paramétrique en terme de photons : c'est l'absorption d'un photon d'énergie  $\hbar\omega_p$  par un dipole électronique, et la ré-émission de deux photons d'énergie  $\hbar\omega_s$  et  $\hbar\omega_i$ , ou le processus inverse :

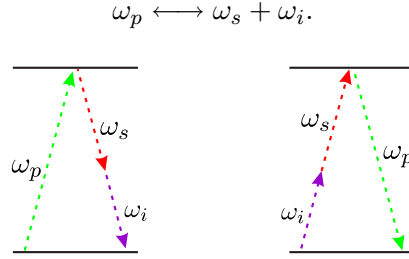


Fig. 4.1: Interaction paramétrique à 3 ondes : un photon pompe est converti en un photon signal  $s$  et un photon complémentaire  $i$ , et le processus inverse.

L'indice  $p$  désigne l'onde **pompe**, et les deux ondes créées notées  $s$  et  $i$ , pour **signal** et **complémentaire** (idler).

La conservation de l'énergie impose la condition

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i. \quad (4.1)$$

### A.2 Interaction à trois champs

#### A.2.1 Équations de propagation

On va étudier le modèle le plus simple d'interaction paramétrique, c'est à dire la propagation sur une longueur  $L$  d'un milieu diélectrique d'ondes planes pompe, signal et complémentaire, colinéaires suivant un axe ( $z$ ).

On va supposer le milieu sans absorption. Le tenseur  $\chi_{ijk}^{(2)}$  se réduit dans cette configuration, et pour l'interaction entre ces trois ondes, à un scalaire. On note:

$$\chi^{(2)}(\omega_p, \omega_s, \omega_i) = \chi^{(2)}(\omega_s, \omega_p, -\omega_i) = \chi^{(2)}(\omega_i, \omega_p, -\omega_s) = \chi^{(2)}$$

On va se restreindre tout d'abord au cas où les trois ondes sont distinctes (c'est à dire que les modes signal et complémentaire ne sont pas dégénérés).

Les champs électriques sont des ondes planes, polarisées rectilignement. On désignera par l'indice  $j$  un quelconque des trois champs  $s$ ,  $i$  ou  $p$ . Le champ  $E_j$  peut s'écrire :

$$\vec{E}_j(z, t) = \frac{1}{2} \left( E_j(z) \vec{\epsilon}_j e^{-i(\omega_j t - k_j z)} + C.C \right) \quad (4.2)$$

où  $\vec{\varepsilon}_j$  est le vecteur unitaire de polarisation du champ  $j$ .

On peut faire l'hypothèse des enveloppes lentement variables à l'échelle de la longueur d'onde (qui est que  $\frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} \ll 2k_j \frac{\partial E_j}{\partial z}$ ).

les équations de la propagation des champs se mettent sous la forme particulièrement simple [FabreLasers]:

$$\begin{aligned}\frac{dE_s(z)}{dz} &= i \frac{\omega_s}{2n_s c} \chi^{(2)} E_p(z) E_i^*(z) e^{-i\Delta k z} \\ \frac{dE_i(z)}{dz} &= i \frac{\omega_i}{2n_i c} \chi^{(2)} E_p(z) E_s^*(z) e^{-i\Delta k z} \\ \frac{dE_p(z)}{dz} &= i \frac{\omega_p}{2n_p c} \chi^{(2)} E_i(z) E_s(z) e^{i\Delta k z}\end{aligned}\quad (4.3)$$

où  $\Delta k = k_i + k_s - k_p$  est le désaccord de phase.

Si signal et complémentaire sont dégénérés, il n'y a plus alors que deux champs et les équations sont légèrement différentes. En notant par l'indice  $si$  le mode correspondant au signal et au complémentaire on a:

$$\begin{aligned}\frac{dE_{si}(z)}{dz} &= i \frac{\omega_{si}}{n_{si} c} \chi^{(2)} E_p(z) E_{si}^*(z) e^{-i\Delta k z} \\ \frac{dE_p(z)}{dz} &= i \frac{\omega_p}{2n_p c} \chi^{(2)} E_{si}^2(z) e^{i\Delta k z}\end{aligned}\quad (4.4)$$

### A.2.2 Accord de phase

Lorsqu'on veut réaliser une interaction paramétrique de manière efficace, on veut que les trois ondes  $p, s$  et  $i$  interagissent constructivement sur une longue distance. Il est donc avantageux que la condition d'accord de phase soit vérifiée pour les trois ondes se propageant colinéairement, soit :

$$\Delta k = k_p - k_s - k_i = 0. \quad (4.5)$$

D'après (4.1), et sachant que  $k_j = \frac{\omega_j}{c} n_j(\omega_j)$ , on doit donc avoir

$$n_p(\omega_p)\omega_p = n_s(\omega_s)\omega_s + n_i(\omega_i)\omega_i. \quad (4.6)$$

On va noter par  $n_j(\omega_j)$  l'indice vu par l'onde  $j = s, i$  ou  $p$ . Dans un milieu anisotrope, l'indice  $n_j$  vu par une onde dépend non seulement de sa longueur d'onde, mais aussi de sa direction et de sa polarisation par rapport aux axes propres du cristal. On peut calculer cet indice de réfraction à toute température, connaissant les indices de réfraction  $n_X(T), n_Y(T)$  et  $n_Z(T)$  suivant ses axes principaux  $X, Y$  et  $Z$ , par la formule de Fresnel (voir [Born&Wolf] p. 841). Des logiciels (parmi lesquels SNLO [SNLO]) permettent également, à partir de ces formules, de déterminer les indices à toute température dans les cristaux les plus courants, et donc de calculer les angles de coupes pour toutes les situations.

Expérimentalement, la coupe du cristal va déterminer l'axe, le domaine de température d'utilisation, ainsi que la fréquence et la polarisation des ondes pouvant interagir efficacement. On travaille en configuration dite d'accord de phase non critique (NCPM en anglais) par rapport au vecteur d'onde signal, c'est à dire où les trois ondes se propagent dans la même direction, et où l'acceptance angulaire est grande. On distingue deux types d'accords de phase non critiques particulièrement utiles (voir Figure 4.2):

- **Type-I:** Le signal et le complémentaire ont la même polarisation, la pompe est polarisée orthogonalement.
- **Type-II:** Le signal et le complémentaire sont polarisés orthogonalement, et la pompe est polarisée perpendiculairement au signal (ou au complémentaire).

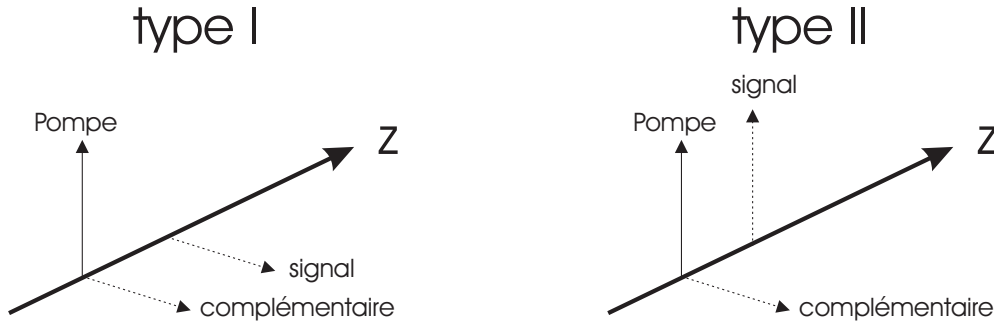


Fig. 4.2: Configurations d'accords de phase de type I/II, l'axe Z est l'axe de propagation, et les flèches correspondent à des directions de polarisations orthogonales

Dans ce travail, on considère principalement le cas dégénéré en fréquence, c'est à dire avec  $\omega_s = \omega_j$ . On étudie alors la conversion de fréquence  $\omega \rightleftharpoons 2\omega$ . On voit alors qu'en type I, signal et complémentaire sont totalement dégénérés donc obéissent aux équations 4.4. En type II, ce sont deux ondes de même fréquence, mais de polarisation orthogonales. Ce sont donc deux modes différents qu'on peut séparer, qui obéissent donc aux équations 4.3. C'est dans ce dernier cas qu'on va se placer pour la suite.

Enfin on doit bien-sûr mentionner l'interaction paramétrique à accord de phase artificiel, dans le PPLN par exemple [BarracoPhD, BencheikhPhD, Levenson95], qui permet d'avoir une interaction constructive bien que dans cette situation  $\Delta k \neq 0$ . Nous ne l'avons pas utilisé dans ce travail.

### A.3 Amplification en type II

On va maintenant s'intéresser plus particulièrement à l'amplification, c'est à dire à une situation où le processus qu'on cherche à réaliser est la conversion paramétrique (c'est à dire dans le sens  $2\omega \rightarrow \omega + \omega$ ), où on injecte non seulement la pompe à  $2\omega$  mais aussi l'onde signal et/ou complémentaire à  $\omega$ . On va montrer que le signal injecté peut alors être amplifié

par ce processus. On va se placer dans un régime où la pompe est suffisamment intense et l'interaction est suffisamment faible pour qu'on puisse considérer que l'intensité pompe n'a pas varié sur la longueur de l'interaction, elle est donc constante et on note son amplitude  $E_0$ .

On va choisir la phase de l'ensemble de façon à ce que  $E_0$  soit imaginaire pur. La résolution dans ce cas des équations (4.3) dans une propagation de longueur  $L$  donne :

$$\begin{aligned} E_s(L) &= E_s(0) \cosh(gL) + \rho E_i^*(0) \sinh(gL) \\ E_i(L) &= E_i(0) \cosh(gL) + \frac{1}{\rho} E_s^*(0) \sinh(gL) \end{aligned}$$

$$\text{où } g = \sqrt{\frac{\omega_i \omega_s}{n_i n_s} \frac{\chi^{(2)} |E_0|}{2c}} \text{ et } \rho = \sqrt{\frac{n_i \omega_s}{n_s \omega_i}}.$$

Si on injecte sur une seule des deux polarisations, par exemple si on prend  $E_i(0) = 0$ , alors on a en sortie :

$$\begin{aligned} E_s(L) &= E_s(0) \cosh(gL) \\ E_i(L) &= \frac{1}{\rho} E_s(0) \sinh(gL) \end{aligned}$$

Soit une amplification du signal (puisque  $E_s(L) > E_s(0)$ ) avec apparition du mode complémentaire. Cette amplification est appelée amplification paramétrique. Elle se produit indépendamment de la phase du champ  $E_s(0)$  injecté.

Une base intéressante pour l'étude de cette amplification est la base découplée. On la définit par

$$E_+ = \frac{\sqrt{n_i} E_i + \sqrt{n_s} E_s}{\sqrt{2}} \text{ et } E_- = \frac{\sqrt{n_i} E_i - \sqrt{n_s} E_s}{\sqrt{2}} \quad (4.7)$$

Dans laquelle les équations se découpent en :

$$\begin{aligned} E_+(L) &= E_+(0) \cosh(gL) + E_+^*(0) \sinh(gL) \\ E_-(L) &= E_-(0) \cosh(gL) - E_-^*(0) \sinh(gL) \end{aligned}$$

Elle correspond à injecter à  $\pm 45^\circ$  des axes de polarisation signal et complémentaire à l'entrée du cristal. Dans le cristal, on peut voir d'après 4.7 que la polarisation n'est pas à  $45^\circ$  sauf si  $n_i = n_s$ , mais le nombre de photons est le même sur les polarisations signal et complémentaire. si on injecte sur  $E_+$  uniquement, et qu'on note  $E_+(0) = |E_+(0)| e^{i\phi_+}$ , alors en sortie on a un gain  $G$  en amplitude, égal à :

$$G = \frac{E_+(L)}{E_+(0)} = \cos(\phi_+) e^{gL} + \sin(\phi_+) e^{-gL}.$$

On voit que le gain est maintenant dépendant de la phase du champ entrant, et varie entre  $e^{gL}$  pour  $\phi_+ = 0$  et  $e^{-gL}$  pour  $\phi_+ = \pi/2$ .



## B Amplification paramétrique quantique

### B.1 Quelques éléments d'optique quantique

#### B.1.1 État cohérent

Considérons un mode du champ électromagnétique dans un volume  $V$ . La quantification du champ nous permet d'écrire l'opérateur champ électrique restreint à un mode du champ à la pulsation  $\omega$ , polarisé rectilignement suivant un vecteur  $\vec{\varepsilon}$  sous la forme :

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\vec{\varepsilon}\left(\hat{a}e^{+i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}+i\omega t}\right) = (\hat{E}^{(+)} + \hat{E}^{(-)})\vec{\varepsilon} \quad (4.8)$$

où  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  sont les opérateurs destruction et création de photon dans le mode considéré. Lorsqu'on mesure directement un faisceau à l'aide d'une photodiode, on détecte un photocourant proportionnel à la valeur moyenne de l'opérateur intensité :

$$\hat{I} = 2\varepsilon_0 c \hat{E}^{(-)} \cdot \hat{E}^{(+)} = \frac{\hbar\omega c}{V} \hat{N} \text{ où } \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

Dans le cas où on dispose d'un détecteur d'efficacité quantique parfaite, on aura en plus directement accès à la variance des fluctuations  $\Delta N^2$ . On va supposer pour l'instant que l'état du champ est un état monomode cohérent  $|\alpha\rangle$ , produit par exemple par un laser très au dessus du seuil. Le nombre moyen de photons vaut :

$$N = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (4.9)$$

Les fluctuations quantiques autour de cette valeur sont poissonniennes et seront données par

$$\Delta N^2 = \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle^2 = N. \quad (4.10)$$

$\Delta N^2 = N$  définit ce que nous appellerons le bruit quantique standard d'intensité.

Lorsqu'on mesure directement un faisceau à l'aide d'une photodiode, on détecte un photocourant proportionnel à la valeur moyenne de la quadrature intensité :

$$\hat{I} = 2\varepsilon_0 c \hat{E}^{(-)} \cdot \hat{E}^{(+)}$$

Dans le cas où on dispose d'un détecteur d'efficacité quantique parfaite, on aura en plus directement accès à la variance des fluctuations  $\Delta N^2$ .

On peut aussi effectuer une mesure homodyne, ce qui permet d'accéder aux opérateurs quadratures :

$$\hat{X} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger \text{ et } \hat{Y} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i} \quad (4.11)$$

Leur commutateur vaut  $[\hat{X}, \hat{Y}] = 2i$ . L'inégalité de Heisenberg pour les quadratures s'écrit :

$$\langle \Delta X^2 \rangle \langle \Delta Y^2 \rangle \geq 1 \quad (4.12)$$

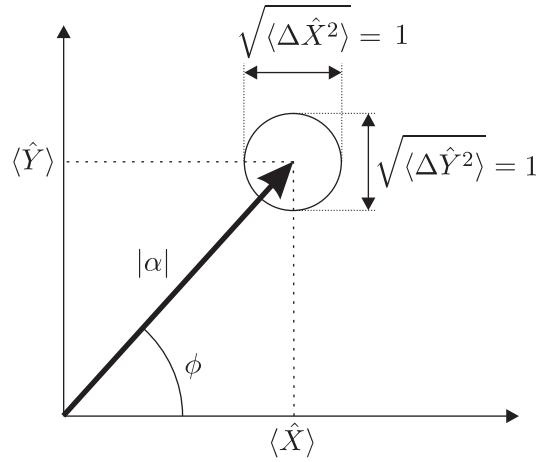


Fig. 4.3: Représentation dans le diagramme des phases d'un champ cohérent et de ses fluctuations

Pour un champ cohérent, l'inégalité de Heisenberg entre ces deux opérateurs se réduit à l'égalité :

$$\langle \Delta X^2 \rangle \langle \Delta Y^2 \rangle = 1 \quad (4.13)$$

où les fluctuations sont également réparties entre les deux quadratures. Autrement dit  $\sqrt{\langle \Delta X^2 \rangle} = \sqrt{\langle \Delta Y^2 \rangle} = 1$ . Pour les états où les fluctuations sont également répartis sur toutes les quadratures, on aura donc  $\langle \Delta X^2 \rangle \geq 1$ , et on appellera limite quantique standard (LQS) cette valeur. La représentation la plus courante des fluctuations d'un état cohérent dans l'espace des quadratures est donné sur la figure 4.3.

### B.1.2 État comprimé du champ

En 1976, Yuen [Yuen76] montre qu'il existe des états, appelés états comprimés, qui sont des états d'incertitude minimale, donc vérifiant (4.13), mais dont les fluctuations sur les deux quadratures orthogonales ne sont pas identiques.

On peut écrire:

$$\begin{aligned} \langle \Delta X^2 \rangle &= e^{-2R} \\ \text{et } \langle \Delta Y^2 \rangle &= e^{+2R}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

où  $R$ , réel positif, représente l'écart à un état cohérent.

Ces états sont notés  $|\alpha, R\rangle$ . Ce sont des états propres de l'opérateur

$$\hat{A}_R = \hat{a} \cosh(R) + \hat{a}^\dagger \sinh(R) \quad (4.15)$$

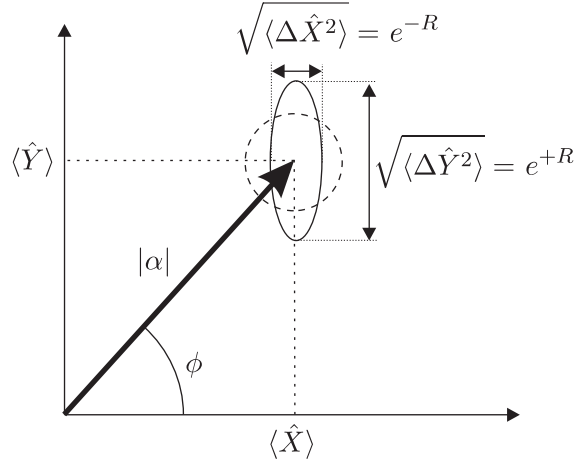


Fig. 4.4: Représentation dans le diagramme des phases d'un champ comprimé  $|\alpha, R\rangle$  et de ses fluctuations

de valeur propre  $\alpha$ . Ces états sont des états non-classiques de la lumière. On peut aussi les représenter sur un diagramme de phase (voir Figure 4.4), la zone d'incertitude étant représentée par une ellipse et non plus par un cercle.

### B.1.3 Opérateur compression

Un état comprimé s'obtient par application d'un opérateur compression du bruit sur un état cohérent:

$$|\alpha, R\rangle = \hat{S}(R)|\alpha\rangle \quad (4.16)$$

avec

$$\hat{S}(R) = \exp\left(R(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})/2\right). \quad (4.17)$$

Cela correspond à faire agir l'hamiltonien indépendant du temps

$$\hat{H} = i\frac{\hbar}{2}\left(\lambda^* \hat{a}^2 - \lambda \hat{a}^{\dagger 2}\right) \quad (4.18)$$

pendant un temps  $t$  tel que  $R = \lambda t$ , ou sur une longueur  $L$  de propagation telle que  $R = \lambda \frac{Ln}{c}$ . Cet Hamiltonien correspond à la destruction ou à la création simultanée de deux photons et fait donc intervenir des processus non-linéaires. En dehors des processus paramétriques (doublage de fréquence, conversion paramétrique), comme phénomène possible à l'origine de tels états il faut aussi citer les non-linéarités Kerr. On va voir le lien entre un tel opérateur, et le processus d'amplification paramétrique.

## B.2 Équations de propagation quantiques

### B.2.1 État quantique initial du système

On va étudier du point de vue quantique l'interaction à 3 ondes, en se restreignant au cas où les modes signal et complémentaire sont dégénérés en fréquence, mais distincts par la polarisation (en type II typiquement).

### B.2.2 Équations de propagation quantiques

On remplace dans les équations 4.3 les champs complexes  $E_j(z)$  par l'opérateur associé  $i\sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{2n_j\varepsilon_0L^3}}\hat{a}_j(z)$  afin d'obtenir les équations quantiques de propagation. On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{a}_s(z)}{dz} &= \kappa\hat{a}_p(z)\hat{a}_i^\dagger(z)e^{i\Delta kz} \\ \frac{d\hat{a}_i(z)}{dz} &= \kappa\hat{a}_p(z)\hat{a}_s^\dagger(z)e^{i\Delta kz} \\ \frac{d\hat{a}_p(z)}{dz} &= -\kappa\hat{a}_i(z)\hat{a}_s(z)e^{-i\Delta kz}\end{aligned}\quad (4.19)$$

où  $\kappa = \sqrt{\frac{\hbar\omega_p\omega_s\omega_i}{2\varepsilon_0L^3n_s n_i n_p}} \frac{\chi^{(2)}}{2c}$ , et où  $\hat{a}_j(z)$  est l'opérateur destruction d'un photon du mode  $j$  au point  $z$ .

### B.2.3 Etat initial du système

On va prendre comme état quantique initial pour chaque champ un état cohérent. L'état quantique total est le produit tensoriel de ces trois états. On a :

$$|\psi\rangle = |\alpha_s, \alpha_i, \alpha_p\rangle = |\alpha_s\rangle \otimes |\alpha_i\rangle \otimes |\alpha_p\rangle$$

On notera  $N_s = |\alpha_s|^2$ ,  $N_i = |\alpha_i|^2$  et  $N_p = |\alpha_p|^2$  les nombres moyens de photons dans chaque état, et on notera  $\hat{a}_s$ ,  $\hat{a}_s^\dagger$ ,  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{a}_i^\dagger$ ,  $\hat{a}_p$  et  $\hat{a}_p^\dagger$  les opérateurs destruction et création de photon dans chaque mode.

### B.2.4 Approche Hamiltonienne

Une autre approche possible consiste à utiliser un hamiltonien décrivant le couplage des trois ondes dans le cristal.

Le Hamiltonien total du système est la somme de l'Hamiltonien libre d'évolution, et de l'Hamiltonien d'interaction paramétrique:

$$H = H_{libre} + H_{int}$$

L'Hamiltonien libre s'écrit:

$$H_{libre} = \sum_{k=s,i,p} \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (4.20)$$

L'Hamiltonien d'interaction paramétrique s'écrit:

$$H_{int} = i\hbar\gamma'(\hat{a}_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_s \hat{a}_i). \quad (4.21)$$

Le premier terme se comprend comme étant l'annihilation d'un photon pompe pour créer un photon signal et un photon complémentaire (génération paramétrique), et le second terme comme l'effet contraire.  $\gamma'$  est proportionnel à l'intensité de l'interaction paramétrique et sera explicité plus loin.

On peut cependant faire deux approximations. Comme dans le traitement classique, on va se placer dans le cas de la pompe non-deplétée. Autrement dit celle-ci varie très peu lors de l'interaction. On va de plus la considérer comme un champ classique, et on peut la considérer uniquement comme un paramètre de l'évolution. On peut alors remplacer  $\hat{a}_p$  par l'amplitude (complexe)  $\alpha_p e^{-2i\omega t}$  du champ.

Le hamiltonien simplifié total devient alors:

$$H = \hbar\omega(\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i) + i\hbar\gamma(\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger e^{2i\omega t} - \hat{a}_s \hat{a}_i e^{-2i\omega t}) \quad (4.22)$$

où  $\gamma = \alpha_p \gamma' = \frac{2}{3} \chi^{(2)} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \frac{\hbar 2\omega}{2\varepsilon_0 V}} \alpha_p$  est le terme de couplage paramétrique.

L'évolution de l'état  $|\psi\rangle$  est régie par l'équation de Shrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (4.23)$$

Pour passer en représentation d'interaction, on utilise l'opérateur évolution libre qui vaut :

$$\hat{U}(t) = e^{-iH_{libre}t/\hbar} \quad (4.24)$$

On a noté les opérateurs par un tilde dans la représentation d'interaction pour les distinguer de l'opérateur correspondant en représentation de Shrödinger. Les opérateurs destruction s'écrivent :

$$\hat{\tilde{a}}_j(t) = \hat{U}(t) \hat{a}_j \hat{U}^\dagger(t) \hat{a}_j e^{-iE_j t/\hbar} = \hat{a}_j e^{-i\omega_j t}$$

L'Hamiltonien  $\tilde{H}$  dans cette représentation se réduit à  $H_{int}$  :

$$\tilde{H} = \hat{U}(t) H \hat{U}^\dagger(t) = i\hbar\gamma(\hat{\tilde{a}}_s^\dagger \hat{\tilde{a}}_i^\dagger - \hat{\tilde{a}}_s \hat{\tilde{a}}_i). \quad (4.25)$$

et les équations d'évolution des opérateurs s'écrivent:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\tilde{a}}_j(t) = \left[ \tilde{H}, \hat{\tilde{a}}_j(t) \right]. \quad (4.26)$$

Par la suite on les notera sans le tilde afin d'alléger les notations.

On peut montrer [FabreLasers] l'analogie formelle entre les équations 4.19 et celles dérivant de l'hamiltonien 4.25. En effet on peut relier évolution spatiale et évolution temporelle par la relation  $t = \frac{nL}{c}$ . Cependant le faire rigoureusement est long et pénible, et ne présente pas d'intérêt majeur pour la discussion. On retiendra donc seulement que les deux approches sont également valables et mènent aux mêmes équations.

### B.2.5 Résolution des équations de propagation

On peut étudier l'évolution des champs sur deux bases particulièrement intéressantes : la base des polarisations signal et complémentaire, et la base des polarisations linéaires à  $\pm 45^\circ$  des axes.

### B.2.6 Résolution sur la base $\hat{a}_s$ et $\hat{a}_i$

Les équations 4.19 sur les opérateurs se résolvent en :

$$\begin{aligned}\hat{a}_s(L) &= \hat{a}_s \cosh(\kappa|\alpha_p|L) + \hat{a}_i^\dagger \sinh(\kappa|\alpha_p|L) \\ \hat{a}_i(L) &= \hat{a}_i \cosh(\kappa|\alpha_p|L) + \hat{a}_s^\dagger \sinh(\kappa|\alpha_p|L)\end{aligned}\quad (4.27)$$

### B.2.7 Résolution sur la base $\hat{a}_+$ et $\hat{a}_-$

on définit les modes de polarisation  $\hat{a}_+$  et  $\hat{a}_-$  à  $\pm 45^\circ$  des polarisations signal et complémentaire. On a :

$$\begin{aligned}\hat{a}_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_s + \hat{a}_i) \\ \hat{a}_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_i - \hat{a}_s).\end{aligned}\quad (4.28)$$

Le Hamiltonien d'interaction s'écrit, en terme de mode  $\hat{a}_+$  et  $\hat{a}_-$ , sous la forme simple :

$$H_{int} = i\hbar\frac{\gamma}{2} \left[ (\hat{a}_+^\dagger{}^2 - \hat{a}_+^2) - (\hat{a}_-^\dagger{}^2 - \hat{a}_-^2) \right]. \quad (4.29)$$

De la même façon que dans la partie précédente, on trouve :

$$\begin{aligned}\hat{a}_+(L) &= \hat{a}_+ \cosh(\kappa|\alpha_p|L) + \hat{a}_+^\dagger \sinh(\kappa|\alpha_p|L) \\ \hat{a}_-(L) &= \hat{a}_- \cosh(\kappa|\alpha_p|L) - \hat{a}_-^\dagger \sinh(\kappa|\alpha_p|L).\end{aligned}\quad (4.30)$$

À la différence de la base signal/complémentaire, on voit que les modes  $\hat{a}_+$  et  $\hat{a}_-$  sont découplés. On reconnaît en (4.29) la forme de deux Hamiltoniens de compression sur  $\hat{a}_+$  et  $\hat{a}_-$  de forme analogue à celle de l'équation (4.17). Il est par conséquent logique que la forme des opérateurs de l'équation (4.30) corresponde à des états comprimés du champ sur les modes de polarisation à  $\pm 45^\circ$ . Le facteur de compression est

$$R = \kappa|\alpha_p|L.$$

## C Amplification et facteur de bruit

L'amplification d'un signal optique est d'un grand intérêt pratique, et a été l'objet de nombreuses études. Lorsqu'on cherche à propager sur une longue distance un signal optique, ou lorsqu'on cherche à le détecter plus efficacement sur un détecteur à fort bruit d'obscurité, on est amené à l'amplifier optiquement.

Encore plus important, le processus d'amplification (dans un milieu à gain comme un verre dopé ou un gaz) est à la base du principe du laser même. L'étude de l'amplification optique et du bruit induit par cette amplification est donc une préoccupation majeure de l'optique moderne.

### C.1 Bruit et signal dans un faisceau

Un faisceau optique continu, d'intensité  $I(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c |E(t)|^2$ , à une longueur d'onde donnée, est caractérisé par sa densité spectrale de bruit d'intensité :

$$S_I[\Omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\Omega\tau} \langle I(t)I(t+\tau) \rangle \quad (4.31)$$

où  $\langle I(t)I(t+\tau) \rangle$  est la fonction d'autocorrélation classique en intensité du champ.

$S_I[\Omega]$  est constitué pour une part du bruit quantique du faisceau, égal pour un faisceau cohérent à un bruit blanc poissonnien (indépendant de la fréquence) proportionnel à l'intensité détectée

$$S_I[\Omega] = 2\varepsilon_0 c \langle I \rangle.$$

A cela s'ajoute un bruit classique, somme de tous les bruits techniques à cette fréquence, et d'une éventuelle modulation (porteuse d'information) à cette fréquence. On va se placer pour toute cette discussion dans le cas où on a éliminé tout le bruit technique. Il ne reste alors à une fréquence d'analyse donnée que le bruit venant de la statistique quantique des photons.  $S_I[\Omega]$  peut aussi contenir une partie déterministe, sous la forme d'une modulation à cette fréquence, et qui contient l'information véhiculée par le faisceau : nous l'appellerons le signal.

On est amené à définir le rapport signal-à-bruit  $R_{S/B}$  sur cette information comme le rapport de la puissance du signal de modulation sur la puissance de bruit totale mesurée dans les mêmes conditions en l'absence du signal.

### C.2 Facteur de bruit d'un amplificateur

On définit le facteur de bruit d'un système comme le ratio du rapport signal-à-bruit en sortie sur le signal-à-bruit en entrée :

$$F_B = \frac{R_{S/B_{in}}}{R_{S/B_{out}}}. \quad (4.32)$$

L'amplification d'un signal ne permet pas d'améliorer le rapport signal-à-bruit, car elle ne peut pas amplifier préférentiellement le signal par rapport au bruit. On aura donc au mieux:

$$F_B = 1.$$

Par contre l'amplification est un processus physique qui peut rajouter son bruit propre et dégrader le rapport signal-à-bruit. Si on considère un laser par exemple, le milieu amplificateur doit être excité par une pompe. Cette pompe possède un bruit propre d'origine classique, qui peut être partiellement transmis au signal amplifié.

Mais même si on considère un amplificateur parfait (sans bruit classique), Caves [Caves82] a montré qu'il devait (en raison du caractère quantique des fluctuations intrinsèques du faisceau) nécessairement dégrader le rapport signal-à-bruit, sauf dans des configurations très particulières. Dès lors le facteur de bruit, même d'un amplificateur parfait, vérifiera forcément :

$$F_B \geq 1.$$

Lorsque le signal est noyé dans un bruit d'origine principalement classique, ou lorsque le rapport signal-à-bruit est très grand, cette dégradation est de peu d'importance. Cependant, les progrès technologiques permettent aujourd'hui de s'affranchir de plus en plus des bruits techniques (bruit thermique, inhomogénéités, etc), et d'arriver à la limite ultime du bruit d'un faisceau, qui est le bruit quantique. Le comportement du bruit quantique vis-à-vis de l'amplification dépend de la méthode d'amplification.

On peut montrer simplement que si on amplifie par un processus indépendant de la phase (On parle alors de Phase-Insensitive Amplification, ou PIA), alors la dégradation du rapport signal-à-bruit est inévitable. Soit  $\hat{a}_{in}$  l'opérateur destruction du mode entrant, et  $\hat{a}_{out}$  l'opérateur du champ amplifié, en représentation d'interaction. Soit  $G$  le gain en intensité. Si on écrit la relation la plus simple  $\hat{a}_{out} = \sqrt{G}\hat{a}_{in}$ , alors le commutateur du champ en sortie n'est pas unitaire. Afin de respecter les relations de commutation à la sortie, on doit introduire un deuxième mode du champ décrit par l'opérateur  $\hat{b}$ . La relation entrée-sortie s'écrit alors :

$$\hat{a}_{out} = \sqrt{G}\hat{a}_{in} + \sqrt{G-1}\hat{b}^\dagger$$

Dans le cas où le mode  $b$  est initialement vide, et  $a$  est un état cohérent, on trouve que les fluctuations en sortie valent :

$$\Delta N_{out}^2 = 2G - 1$$

et par conséquent que le facteur de bruit vaut :

$$F_B = 2 - \frac{1}{G}.$$

Dans la limite d'un gain infini, la dégradation du facteur de bruit est d'un facteur 2, soit 3 dB. On peut également montrer que dans certaines conditions, une amplification dépendante de la phase permet de ne pas dégrader le rapport signal-à-bruit.



L'amplification paramétrique est une amplification à deux modes. L'idée de l'utiliser pour réduire la dégradation du facteur de bruit date des années 60 comme le montre la référence [Louisell60]. Cependant à l'époque l'idée ne s'appliquait qu'à l'électronique. Ce n'est qu'en 1982 que C.M Caves [Caves82] transposa ce concept à l'optique. L'idée étant que si on injecte les deux voies d'entrée à la fois de manière cohérente, on réalise une amplification dépendante de la phase (aussi appelé Phase-Sensitive Amplification, ou PSA) et il n'y a pas de voie sans signal dont on amplifie les fluctuations. Les références [BencheikhPhD, Levenson95] présentent une étude détaillée de l'amplification paramétrique, dont nous allons rappeler les principaux résultats utiles à la compréhension de la suite de ce travail.

## D Bruit et amplification paramétrique

On a vu dans le traitement classique de l'amplification paramétrique que la base propre de l'amplification est la base de polarisation à  $\pm 45^\circ$  des polarisations signal et complémentaire. On a vu également que si on injecte le signal ou le complémentaire on a une amplification indépendante de la phase, et que si on injecte sur un des modes propres on a une amplification dépendante de la phase. On va maintenant étudier l'évolution du bruit pour ces deux types d'amplification.

### D.1 Amplification insensible à la phase

On se place dans les conditions initiales du paragraphe B.2.1 (en type II, dégénéré en fréquence). On injecte sur le mode signal uniquement. Autrement dit en entrée on a  $|\alpha_s, \alpha_i\rangle = |\alpha, 0\rangle$ . Avant le cristal le nombre de photon sur le mode signal en entrée est

$$N_{s,in} = \langle \alpha, 0 | \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s | \alpha, 0 \rangle = |\alpha|^2. \quad (4.33)$$

On a en sortie, d'après l'équation (4.27) :

$$\begin{aligned} N_{s,out} &= \langle \alpha, 0 | \hat{a}_s^\dagger(L) \hat{a}_s(L) | \alpha, 0 \rangle \\ &= |\alpha|^2 \cosh^2(R) + \sinh^2(R). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Le second terme vient de l'émission spontanée. C'est la fluorescence paramétrique. On se placera dans la limite où  $|\alpha| \gg 1$  et on négligera ce terme par la suite pour le champ moyen. Le gain en intensité sur le mode signal est défini comme

$$G_{PIA} = \left( \frac{signal_{out}}{signal_{in}} \right)^2 > 1$$

où le signal considéré est dans notre cas l'amplitude du champ. Noter que le gain est toujours supérieur à 1. On le note  $G_{PIA}$  (pour Phase Insensitive Amplification) :

$$G_{PIA} = \cosh^2(R). \quad (4.35)$$

Les fluctuations de  $N_{s,out}$  sont données par:

$$\Delta N_{s,out}^2 = |\alpha|^2 \cosh^2(R) [\cosh^2(R) + \sinh^2(R)] \quad (4.36)$$

où  $\Delta N_{s,in}^2 = |\alpha|^2$  pour l'état cohérent initial. Le bruit quantique d'un état cohérent de même nombre de photon en sortie  $N_{s,out}$  vaut  $\Delta N_{s,out}^2 = |\alpha|^2 \cosh(R)^2$ . Le champ en sortie a donc des fluctuations d'intensité au dessus de la limite quantique standard.

Si on regarde n'importe quelle quadrature  $\hat{X}_{out} = \hat{X}(L)$ , on a

$$\langle X_{out} \rangle = \langle X_{in} \rangle \sqrt{G_{PIA}} \quad (4.37)$$

$$\langle \Delta X_{out}^2 \rangle = 2G_{PIA} - 1. \quad (4.38)$$

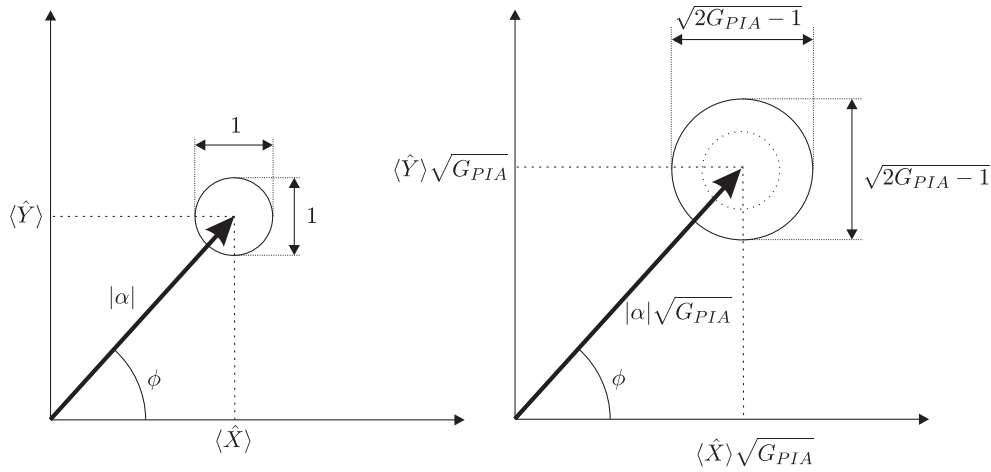


Fig. 4.5: Représentation dans le diagramme des phases du champ signal avant, initialement cohérent (à gauche) et après (à droite) une amplification insensible à la phase

Comme résumé sur la figure 4.5, le gain est donc indépendant de la quadrature. Le signal amplifié n'est plus un état minimal pour l'inégalité de Heisenberg.

Le facteur de bruit de cet amplificateur indépendant de la phase vaut:

$$F_{B_{PIA}} = \frac{R_{S/B_{in}}}{R_{S/B_{out}}} = 2 - \frac{1}{G_{PIA}}. \quad (4.39)$$

On voit que quel que soit le gain ( $> 1$ ), le rapport signal-à-bruit est dégradé, et que comme indiqué au début de cette partie, il tend pour un gain infini vers

$$F_{B_{PIA}} \rightarrow 3\text{dB}.$$

Cet excès de bruit provient de l'amplification du bruit venant des fluctuations du vide de la voie ne portant pas le signal.

## D.2 Amplification sensible à la phase

Si maintenant on injecte un champ cohérent à  $+45^\circ$  des directions de polarisation signal et complémentaire, l'état initial est  $|\alpha_+, \alpha_-\rangle = |\alpha, 0\rangle$ . On note  $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ . À l'entrée du cristal le nombre de photons sur le mode signal est :

$$N_{+,in} = \langle \alpha, 0 | \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ | \alpha, 0 \rangle = |\alpha|^2. \quad (4.40)$$

En sortie, on a d'après l'équation (4.30), et en négligeant le terme d'émission spontanée :

$$\begin{aligned} N_{+,out} &= \langle \alpha, 0 | \hat{a}_s^\dagger(L) \hat{a}_s(L) | \alpha, 0 \rangle \\ &= |\alpha|^2 (\cosh(2R) + \sinh(2R) \cos(2\phi)) \end{aligned} \quad (4.41)$$

notons que pour le champ sur la polarisation à  $-45^\circ$ , on n'a initialement aucun photon, et à la sortie on a uniquement les photons créés par l'émission spontanée et amplifiés.

Le gain en intensité est défini comme précédemment. On le note  $G_{PSA}$  (pour Phase Sensitive Amplification). Cette fois il dépend de la quadrature, et pour l'intensité il vaut :

$$G_{PSA} = \cosh(2R) + \sinh(2R) \cos(2\phi) \quad (4.42)$$

On voit que le gain en intensité dans cette configuration dépend de la phase relative  $\phi$  entre le champ cohérent et la pompe :

- sa valeur maximum  $G_{max} = G_0 = e^{+2R}$  atteinte lorsque  $\phi = 0$ .
- sa valeur minimum  $G_{min} = \frac{1}{G_0} = e^{-2R}$  atteinte lorsque  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Noter que cette valeur est inférieure à l'unité. Le champ est alors désamplifié.

les fluctuations de  $N_{+,out}$  sont données par :

$$\Delta N_{+,out}^2 = |\alpha|^2 (\cosh(4R) + \sinh(4R) \cos(2\phi)) \quad (4.43)$$

On voit que le bruit varie également en fonction de la phase relative  $\phi$ . Rapporté au bruit quantique standard (BQS), c'est à dire au bruit d'un état cohérent de même intensité  $\Delta N_{+,coh}^2 = N_{+,out}$ , on a :

$$\frac{\Delta N_{+,out}^2}{\Delta N_{+,coh}^2} = \frac{\cosh(4R) + \sinh(4R) \cos(2\phi)}{\cosh(2R) + \sinh(2R) \cos(2\phi)} \quad (4.44)$$

En fait si on regarde les quadratures du champ incident  $\hat{X}_{out} = \hat{X}(L)$  et  $\hat{Y}_{out} = \hat{Y}(L)$ , on aura

$$\hat{X}_{+,out} = \hat{X}_{+,in} \sqrt{G_0} \quad (4.45)$$

$$\hat{Y}_{+,out} = \hat{Y}_{+,in} / \sqrt{G_0} \quad (4.46)$$

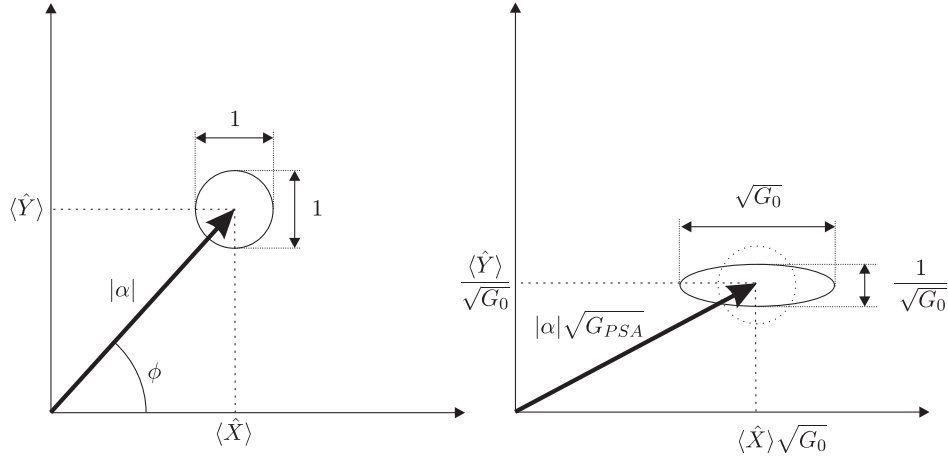


Fig. 4.6: Représentation dans le diagramme des phases du champ injecté à  $45^\circ$  avant (à gauche) et après (à droite) une amplification sensible à la phase

On a donc comme résumé sur la figure 4.6, un gain différent selon la quadrature:

$$\langle \hat{X}_{+,out} \rangle = |\alpha| \cos(\phi) \sqrt{G_0} \quad (4.47)$$

$$\langle \hat{Y}_{+,out} \rangle = |\alpha| \sin(\phi) / \sqrt{G_0} \quad (4.48)$$

et des variances:

$$\langle \Delta X_{+,out}^2 \rangle = G_0 \quad (4.49)$$

$$\langle \Delta Y_{+,out}^2 \rangle = \frac{1}{G_0} \quad (4.50)$$

qui reste un état minimal puisque:

$$\langle \Delta X_{+,out}^2 \rangle \langle \Delta Y_{+,out}^2 \rangle = 1 \quad (4.51)$$

On a donc en sortie un état comprimé du champ sur la polarisation à  $+45^\circ$  (notre mode  $\alpha_+$ ). Si on regarde le mode à  $-45^\circ$  (mode  $\alpha_-$ ), qui est initialement du vide, on a également en sortie un champ de valeur moyenne nulle, mais dont les quadratures sont comprimées, avec un facteur de compression  $1/G_0$ .

Le facteur de bruit de l'amplification 4.7 dépend aussi de la phase relative  $\phi$  et vaut:

$$F_{BPSA} = \frac{\cosh(4R) + \sinh(4R) \cos(2\phi)}{(\cosh(2R) + \sinh(2R) \cos(2\phi))^2} \quad (4.52)$$

On peut voir que pour  $\phi = \pi/2$  et  $\phi = 0$  qui correspondent aux cas d'un gain respectivement  $1/G_0$  et  $G_0$ , on a:

$$F_{BPSA} = 1 \quad (4.53)$$

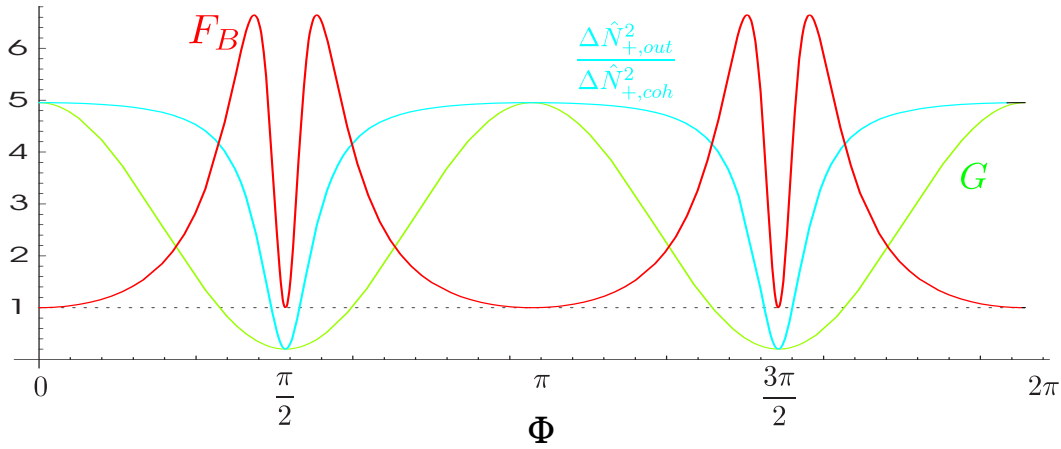


Fig. 4.7: Représentation (pour  $R = 0.8$ ) en fonction de la phase relative  $\phi$ , du facteur de bruit, de l'excès de bruit sur l'intensité et du Gain, pour l'amplification sensible à la phase (PSA).

Un amplificateur paramétrique optique permet donc de réaliser une amplification sans bruit d'un signal injecté sur une de ses polarisations propres. Le facteur de bruit ne se conserve que lorsque  $\phi = \pi/2$  et  $\phi = 0$ , de plus on voit sur la figure 4.7 que le facteur de bruit est beaucoup plus sensible à la phase relative pour la désamplification ( $\phi = \pi/2$ ) que pour l'amplification.

## Conclusion

L'amplification paramétrique d'un signal est donc un phénomène au comportement quantique très riche. Tout d'abord c'est un phénomène à deux voies d'entrée. Si on injecte sur une seule de ces voies un signal, alors du vide cohérent entre tout de même par l'autre voie, et vient dégrader le rapport signal-à-bruit de l'amplification : on a alors de l'amplification insensible à la phase. Si les deux voies d'entrée sont injectées également (cas idéal), alors il n'y a pas d'autres fluctuations que celles du signal qui entrent dans l'amplificateur, et on peut donc observer une amplification dite "sans bruit" : c'est l'amplification sensible à la phase. Sur ce cas simple on a introduit la plupart des concepts nécessaires à la compréhension des phénomènes d'amplification qu'on rencontrera dans les chapitres suivants. Néanmoins du point de vue du signal injecté, l'amplification paramétrique en libre propagation est un phénomène linéaire. On va voir au chapitre suivant que les résultats sont différents dans le cas d'un système à seuil comme un Oscillateur paramétrique sous le seuil.

---

# Amplification paramétrique en cavité monomode

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Résolution classique</b> . . . . .	<b>78</b>
A.1	Équations d'évolution . . . . .	79
A.2	Équations stationnaires sous le seuil . . . . .	80
A.3	Résolution intracavité . . . . .	81
A.4	Gain pour une modulation . . . . .	85
<b>B</b>	<b>Traitement quantique</b> . . . . .	<b>86</b>
B.1	Équations hémi-classiques . . . . .	86
B.2	Relation entrée-sortie sur les fluctuations . . . . .	87
B.3	Bruit sur les quadratures . . . . .	88
B.4	Compression optimale en présence d'injection . . . . .	90

---

## Introduction

Si on met en rapport la puissance des lasers continus disponibles avec le coefficient  $\chi^{(2)}$  des matériaux non-linéaires dont on dispose, on s'aperçoit que les effets paramétriques sont en fait très faibles, pour des longueurs de propagation raisonnables. Une solution possible est l'utilisation de sources laser pulsées. Les intensités crête sont très élevées, et il est possible d'obtenir une conversion paramétrique et des effets quantiques appréciables sur quelques millimètres de propagation, comme par exemple dans [Grangier87, Kumar90] ou dans [Levenson93, Levenson95].

En 1984, Yurke [Yurke84] proposa de mettre le cristal dans une cavité afin de renforcer les effets quantiques. On va s'intéresser dans cette partie aux propriétés d'amplificateur sans bruit d'un tel système. On va se restreindre dans cette partie à une cavité monomode transverse. L'amplification multimode en cavité d'une image, étudiée dans le cas confocal dans [Mancini00] par exemple, sera étudiée au chapitre suivant.

## A Résolution classique

On va considérer un cristal paramétrique caractérisé par son coefficient  $\chi^{(2)}$ , coupé pour l'accord de phase de type II et placé dans une cavité en anneau constituée de miroirs plans. Tous les miroirs sont parfaitement réfléchissants, sauf le miroir de couplage. L'interaction paramétrique va se faire entre des champs pompe, signal et complémentaire notés 0, 1 et 2 respectivement, et toutes les variables se rapportant aux champs seront notées de l'indice correspondant. L'indice  $i$  désignera un quelconque de ces indices. On va se restreindre au fonctionnement sous le seuil d'un tel système. Une étude d'un tel système dans un cas moins général peut être trouvée dans [Zhang99].

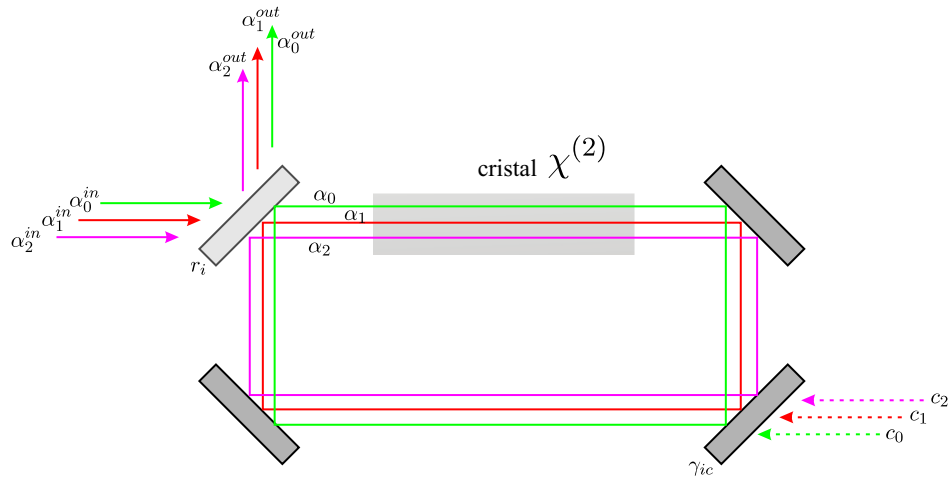


Fig. 5.1: Transmission théorique (en intensité) de la fente par la cavité hémiconfocale, pour les différentes familles de modes  $p + q = i$  [4].

On caractérise par  $\gamma_i$  les pertes par transmission sur le miroir de couplage. On suppose de plus la finesse grande pour tous les modes (soit  $\gamma_i \ll 1$ ) donc  $r_i \simeq 1 - \gamma_i$  et  $t_i = \sqrt{2\gamma_i}$ .

Le système sera également considéré non-parfait, c'est à dire avec des pertes. L'ensemble de ces pertes (dues au traitement imparfait des miroirs, mais aussi à l'absorption du cristal, ou à la diffusion) est modélisé par un couplage avec l'extérieur sur un des miroirs. On note  $\gamma_{ic}$  les couplages des champs  $i$  avec l'extérieur, qui couplent la cavité avec des modes  $c_i$  du champ, vides.

On va se limiter au cas dégénéré

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega_0}{2} = \omega.$$

On va désigner par  $\alpha_i^{in}$ ,  $\alpha_i^{out}$ , et  $\alpha_i$  le champ à l'entrée, à la sortie, et dans la cavité.

### A.1 Équations d'évolution

On désigne par  $\alpha'_i$  le champ après un tour dans la cavité. Les champs dans le cristal voient des indices différents. La longueur optique de la cavité vue par le champ  $i$  est notée  $L_i$ . On aura :

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= r_1 e^{-i\omega_1 L_1/c} (1 - \gamma_{1c}) ((\alpha_1 + g\alpha_0\alpha_2^*) + t_1\alpha_1^{in} + \sqrt{2\gamma_{1c}c_1}) \\ \alpha'_2 &= r_2 e^{-i\omega_2 L_2/c} (1 - \gamma_{2c}) (\alpha_2 + g\alpha_0\alpha_1^*) + t_2\alpha_2^{in} + \sqrt{2\gamma_{2c}c_2} \\ \alpha'_0 &= r_0 e^{-i\omega_0 L_0/c} (1 - \gamma_{0c}) (\alpha_0 + g\alpha_1\alpha_1) + t_0\alpha_0^{in} + \sqrt{2\gamma_{0c}c_0} \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $g$  caractérise le couplage paramétrique entre les trois champs qui ont interagi sur la longueur du cristal. On a supposé que les champs variaient peu lors de l'interaction.

Si les champs varient lentement, on peut écrire que  $\alpha'_i - \alpha_i = \tau d\alpha_i/dt$ , où  $\tau_i = L_i/c$  est le temps nécessaire à la lumière pour faire un tour de cavité. On peut récrire :

$$\begin{aligned} \tau_1 \frac{d\alpha_1}{dt} &= -(\gamma_1 + \gamma_{1c} - i\delta_i)\alpha_1 + g\alpha_0\alpha_2^* + t_1\alpha_1^{in} + \sqrt{2\gamma_{1c}c_1} \\ \tau_2 \frac{d\alpha_2}{dt} &= -(\gamma_2 + \gamma_{2c} - i\delta_2)\alpha_2 + g\alpha_0\alpha_1^* + t_2\alpha_2^{in} + \sqrt{2\gamma_{2c}c_2} \\ \tau_0 \frac{d\alpha_0}{dt} &= -(\gamma_0 + \gamma_{0c} - i\delta_0)\alpha_0 + g\alpha_1\alpha_2 + t_0\alpha_0^{in} + \sqrt{2\gamma_{0c}c_0} \end{aligned} \quad (5.2)$$

où on a noté  $\delta_i$  le désaccord à résonance du champ  $i$ , qui est donné par la relation  $\omega_i L_i/c = 2p_i\pi + \delta_i$ , avec  $p_i$  entier. On a supposé qu'on était résonnant ou quasi-résonnant pour les trois champs donc que  $\delta_i \ll 2\pi$  et on a développé  $e^{i\delta_i} \simeq 1 + i\delta_i$ .

Le champ en sortie s'écrit simplement:

$$\alpha_i^{out} = -r_i\alpha_i^{in} + t_i\alpha_i \simeq -\alpha_i^{in} + \sqrt{2\gamma_i} \alpha_i$$

Ces équations sont très générales et permettent de décrire classiquement le comportement de la cavité avec milieu paramétrique dans un grand nombre de situations. En particulier on peut montrer à partir de ces équations le fonctionnement en tant qu'oscillateur paramétrique optique de ce système, lorsque la puissance de pompe injectée dépasse le seuil de fonctionnement en OPO. On va ici ne s'intéresser qu'au fonctionnement sous le seuil, et considérer tout d'abord les solutions stationnaires.



## A.2 Équations stationnaires sous le seuil

On est intéressé ici par l'amplification d'un très faible signal, injecté avec une polarisation quelconque, par une pompe puissante. On va donc maintenant introduire quelques hypothèses simplificatrices :

- La pompe peut être considérée comme peu modifiée par l'interaction.  $\alpha_0$  est alors un paramètre, et le système se réduit à deux équations. Cette approximation est valable uniquement dans le cas de l'amplification d'un petit signal. Elle permet d'éviter un grand nombre de problèmes théoriques, en particulier l'apparition de bistabilités à l'approche du seuil, dont on peut trouver une étude dans [Schiller95, Protsenko95].
- On va supposer que la transmission du miroir de sortie sur les modes signal et complémentaire sont les mêmes, soit  $\gamma_1 = \gamma_2$ . On va également supposer les pertes dans la cavité  $\gamma_{ic}$  égales. On va noter  $\gamma = \gamma_i + \gamma_{ic}$  pour les champs signal et complémentaire.
- On va chercher également des solutions stationnaires des champs. On considère qu'on injecte à l'entrée des champs stationnaires (ou très lentement variables par rapport aux constantes de temps de la cavité). Les dérivées par rapport au temps sont donc nulles.
- Les modes  $c_i$  sont des modes vides du rayonnement. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'au champ moyen, le terme de couplage en  $\sqrt{2\gamma_{ic}c_i}$  disparaît. Lorsque l'on s'intéressera aux fluctuations par contre il faudra en tenir compte.

Les équations (5.2) deviennent donc au premier ordre :

$$(1 - i\Delta_1)\alpha_1 = \sigma\alpha_2^* + e_1 \quad (5.3)$$

$$(1 - i\Delta_2)\alpha_2 = \sigma\alpha_1^* + e_2 \quad (5.4)$$

où on a posé

$$\Delta_i = \delta_i/\gamma_i, \quad \sigma = g\alpha_0/\gamma \quad \text{et} \quad e_i = \frac{t}{\gamma}\alpha_i^{in} = \frac{\sqrt{2\gamma_i}}{\gamma}\alpha_i^{in}.$$

Remarquons que si on définit les champs  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  à  $\pm 45^\circ$  par:

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1 \pm \alpha_2)$$

alors si  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ , les équations 5.3 se découpent en:

$$(1 - i\Delta)\alpha_+ = \sigma\alpha_+^* + e_+ \quad (5.5)$$

$$(1 - i\Delta)\alpha_- = -\sigma\alpha_-^* + e_- \quad (5.6)$$

### A.3 Résolution intracavité

On va se placer dans le cas idéal de la double résonance parfaite  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ . Le système se résout alors simplement en :

$$\alpha_1 = \frac{e_1 + \sigma e_2^*}{1 - |\sigma|^2} \quad (5.7)$$

$$\alpha_2 = \frac{e_2 + \sigma e_1^*}{1 - |\sigma|^2} \quad (5.8)$$

et dans la base à  $\pm 45^\circ$  :

$$\alpha_+ = \frac{e_+ + \sigma e_+^*}{1 - |\sigma|^2} \quad (5.9)$$

$$\alpha_- = \frac{e_- + \sigma e_-^*}{1 - |\sigma|^2} \quad (5.10)$$

La solution dépend donc, tous les paramètres de la cavité étant fixés, de  $\sigma$ , c'est à dire de la puissance de pompe. On voit immédiatement qu'on doit avoir  $|\sigma| < 1$  afin que nos équations soient valables. On peut donc interpréter  $\sigma$  comme la puissance de pompe normalisée au seuil.  $e_1$  et  $e_2$  sont les champs intracavité signal et complémentaire sans amplification. On va supposer qu'au moins une de ces deux polarisations est injectée, et on choisit le signal (toute la discussion reste valable si on prend le complémentaire). Si on définit le gain, fonction de la puissance de pompe, comme:

$$G_i = \frac{\alpha_i(\sigma)}{\alpha_i(0)}$$

Alors on a sur signal et complémentaire :

$$G_1 = \frac{1 + \sigma \frac{e_2^*}{e_1}}{1 - |\sigma|^2} \text{ et } G_2 = \frac{1 + \sigma \frac{e_1^*}{e_2}}{1 - |\sigma|^2} \quad (5.11)$$

On voit donc que, à pompe constante, le gain dépend uniquement de  $\frac{e_2^*}{e_1}$ . Il est donc déterminé par l'état de polarisation en entrée. On va maintenant supposer qu'on injecte un champ cohérent  $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$ , linéairement polarisé, dont la direction de polarisation fait un angle  $\beta$  avec la polarisation signal. On prend comme référence de phase la phase de la pompe :  $\sigma$  est réel et  $\varphi$  est la phase relative de l'injection par rapport à la pompe . On peut alors récrire:

$$G_1(\sigma, \beta, \varphi) = \frac{1 + \sigma \tan \beta e^{-2i\varphi}}{1 - \sigma^2} \text{ et } G_2(\sigma, \beta, \varphi) = \frac{1 + \sigma \tan(\pi/2 - \beta) e^{-2i\varphi}}{1 - \sigma^2} \quad (5.12)$$

et symétriquement dans la base  $\pm 45^\circ$  :

$$G_+ = \frac{1 + \sigma e^{2i\varphi}}{1 - \sigma^2} \text{ et } G_- = \frac{1 - \sigma e^{2i\varphi}}{1 - \sigma^2} \quad (5.13)$$

On voit que le gain dépend de la phase dès que  $\beta \neq 0$ , donc dès que l'injection se décompose à la fois sur les polarisations signal et complémentaire (voir figure 5.2). La généralisation aux autres états de polarisation est aisée ( $\frac{e_2^*}{e_1}$  sera alors complexe).

On peut distinguer plusieurs cas:

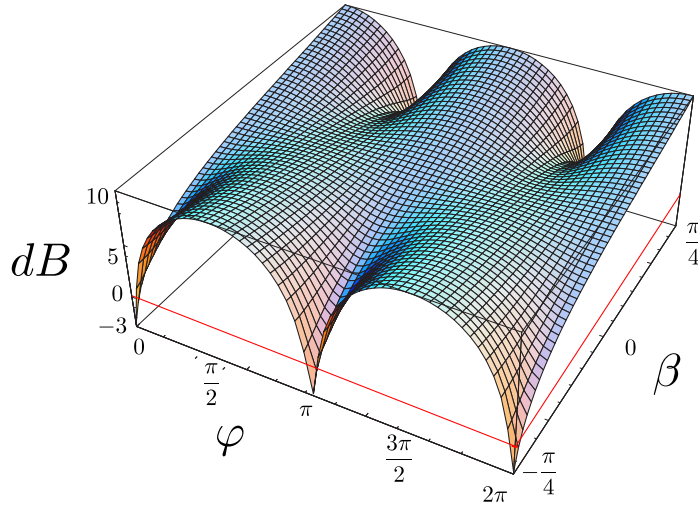


Fig. 5.2: Simulation du gain  $G$  en dB sur le signal en fonction de la phase relative entre pompe et signal/complémentaire  $\phi$ , et en fonction de l'angle d'injection  $\beta$ .  $\beta = \pm\pi/4$  correspond à l'amplification maximum sensible à la phase, et  $\beta = 0$  à l'amplification insensible à la phase. On a pris  $\sigma = 0.9$ . La droite rouge correspond au Gain unité

- Si  $\beta = 0$ , alors l'amplification est insensible à la phase (PIA), et le gain vaut  $G = \frac{1}{1-\sigma^2}$ .
- Si  $\beta = \pm\pi/4$ , alors l'amplification dépend de la phase et oscille entre un gain maximum  $G_{max} = \frac{1}{1-\sigma}$  obtenu pour  $\varphi = 0^\circ$  et un gain minimum  $G_{min} = \frac{1}{1+\sigma} < 1$  qui correspond à une désamplification et qui est obtenu pour  $\varphi = \pm\pi/2$ . Notons que cette désamplification est d'au maximum de 3 dB.
- Si  $\beta = \pi/2$  alors on est dans le cas où on injecte sur  $e_2$  uniquement et  $e_1 = 0$  donc nos équations ne sont plus valables. Il faut alors définir le gain sur le complémentaire et non plus sur le signal.
- Entre ces positions, on a un mélange d'amplification dépendante et indépendante de la phase. On a donc toujours une amplification dépendante dans l'ensemble de la phase. On va étudier ce cas en détail plus loin.

On retrouve donc que les axes à  $\pm 45^\circ$  des axes signal et complémentaire sont également en cavité les axes propres de l'amplification dépendante de la phase. C'est normal car la cavité ne couple pas les polarisations. Il est donc logique que les polarisations propres ne soient pas modifiées.

Un autre paramètre expérimental sensible est le paramètre  $\beta$ , qui est l'angle de la polarisation du signal injecté par rapport aux polarisations signal et complémentaire. En fait c'est plutôt le rapport des intensités intracavité signal et complémentaire qui est important, donc la quantité  $\arctan \beta$ . Mais on a supposé qu'on avait  $\gamma_1 = \gamma_2$  et  $r_1 = r_2$ , hypothèse vérifiée en général, et qui permet de considérer indifféremment le rapport des intensités sur les polarisations signal et complémentaire à l'intérieur ou à l'extérieur de la cavité. Un déséquilibre d'intensité signifie qu'on n'injecte pas uniquement le mode à  $+45^\circ$ , mais également le mode à  $-45^\circ$  qui sont amplifiés et désamplifiés pour des phases relatives  $\varphi$  opposées. Par conséquent la polarisation en sortie tourne avec le gain. Si on regarde le signal ou le complémentaire, il est clair que la désamplification d'une polarisation propre est rapidement modifiée par l'amplification simultanée de l'autre. Si cette amplification est constructive, la désamplification du signal/complémentaire (qui n'est que d'un facteur 2 au maximum) est rapidement détruite. Néanmoins si le mode à  $-45^\circ$ , amplifié, est en opposition de phase avec le mode à  $+45^\circ$ , désamplifié, alors leur interférence peut être destructive. On peut alors annuler complètement le Gain. En regardant l'équation 5.12, il est aisé de voir que c'est lorsque  $\frac{e_2^*}{e_1} = -\frac{1}{\sigma}$  soit  $\tan \beta = \pm \frac{1}{\sigma}$  et  $\varphi = \mp \pi/2$ . Ce sont donc des annulations ponctuelles, comme on peut le voir sur la figure 5.3. La désamplification maximum est bien supérieure à 3 dB, et ne se produit pas exactement pour  $\beta = \pm 45^\circ$ . On vérifie aisément que le gain correspondant sur la polarisation complémentaire est alors  $G=1$ .

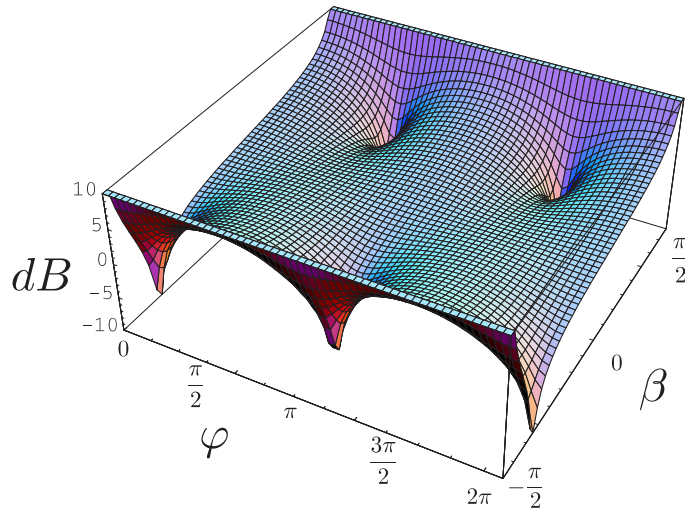


Fig. 5.3: Simulation du gain  $G$  en dB sur le signal en fonction de la phase relative entre pompe et signal/complémentaire  $\phi$ , et en fonction de l'angle d'injection  $\beta$ .  $\beta = \pm\pi/4$  correspond à l'amplification maximum sensible à la phase, et  $\beta = 0$  à l'amplification insensible à la phase. Ici on varie  $\beta$  entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ . On a pris  $\sigma = 0.5$ .

Quelle est la robustesse de l'amplification sensible à la phase par rapport à la variation

des paramètres expérimentaux? On peut tout d'abord étudier l'effet d'une triple-résonance imparfaite. En effet, dans une cavité où on dispose de peu de degrés de libertés, assurer la triple résonance est difficile, comme nous le verrons sur la partie expérimentale. La dégénérescence de la pompe n'est pas cruciale car nous avons supposé que la pompe n'était pas déplétée, et donc seule la puissance pompe intracavité compte dans les équations 5.3. Nous allons supposer qu'on asservit la cavité sur la résonance d'une des polarisations (signal par exemple), et on va regarder la sensibilité par rapport à l'écart à résonance normalisé  $\Delta_2$  du complémentaire.

L'équation du gain devient alors:

$$G_1(\sigma, \beta, \varphi, \Delta_2) = \frac{1 + \sigma \tan \beta \frac{e^{-2i\varphi}}{1+i\Delta_2}}{1 - \frac{\sigma^2}{1+i\Delta_2}} \quad (5.14)$$

et les résultats sont montrés sur la figure 5.4. On voit que à désaccord nul ( $\Delta_2 = 0$ ), la désamplification est bien de près de 3 dB pour une injection à  $45^\circ$ , mais qu'elle est bien meilleure pour des  $\beta$  légèrement supérieures. C'est l'annulation accidentelle du gain dont on a parlé, et qu'on voit sur la figure 5.4. Cependant dès qu'on a un léger désaccord la désamplification diminue très vite. Pour  $\Delta = 0.2$ , l'effet d'annulation accidentelle du gain à complètement disparu, et la désamplification est très faible (moins d'un dB). L'amplification diminue également lorsque l'on augmente le désaccord, mais dans de moindres proportions.

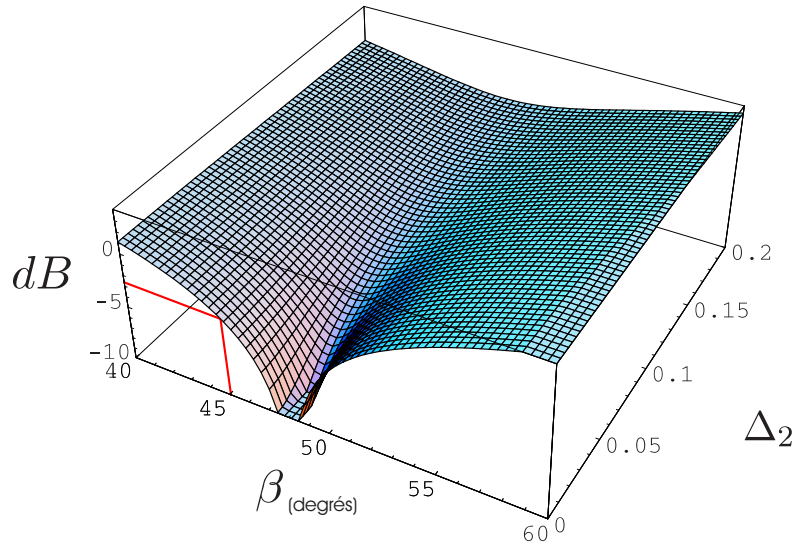


Fig. 5.4: Simulation du gain  $G$  en dB sur le signal en fonction de la phase relative entre pompe et signal/complémentaire  $\phi$ , et en fonction du désaccord  $\delta_2$  d'un des champ, avec  $\sigma = 0.9$  et  $\varphi = \pi/2$ . On a représenté par un trait rouge la position correspondant à la désamplification idéale (3dB de désamplification pour  $\beta = 45^\circ$ ,  $\Delta_2 = 0$ ).

#### A.4 Gain pour une modulation

Si on reprend les équations 5.2 à 5.3, et qu'on passe dans l'espace de Fourier, on obtient les équations d'évolution de la composante en fréquence à  $\omega$  du champ, définie par :

$$\delta\alpha_i(\omega) = \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \delta\alpha_i(t) e^{-i(\omega+\omega_i)t}$$

Avec les mêmes hypothèses simplificatrices que pour le champ moyen, on obtient les équations:

$$(1 - i\Delta_1 + i\Omega_1)\alpha_1(\omega) = \sigma\alpha_2^*(\omega) + e_1(\omega) \quad (5.15)$$

$$(1 - i\Delta_2 + i\Omega_2)\alpha_2(\omega) = \sigma\alpha_1^*(\omega) + e_2(\omega) \quad (5.16)$$

où  $\Omega_i = \frac{\tau_i\omega}{\gamma}$ , c'est à dire la fréquence normalisée à la bande passante de la cavité. On peut négliger la différence de temps de parcours  $\tau_i$  entre signal et complémentaire. Par conséquent  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$  et les gains sur signal et complémentaire prennent la forme simple, à résonance ( $\Delta = 0$ ):

$$G_1 = \frac{1 + \frac{\sigma}{1+i\Omega} \frac{e_2^*}{e_1}}{1 + i\Omega - |\sigma|^2} \text{ et } G_2 = \frac{1 + \frac{\sigma}{1+i\Omega} \frac{e_1^*}{e_2}}{1 + i\Omega - |\sigma|^2} \quad (5.17)$$

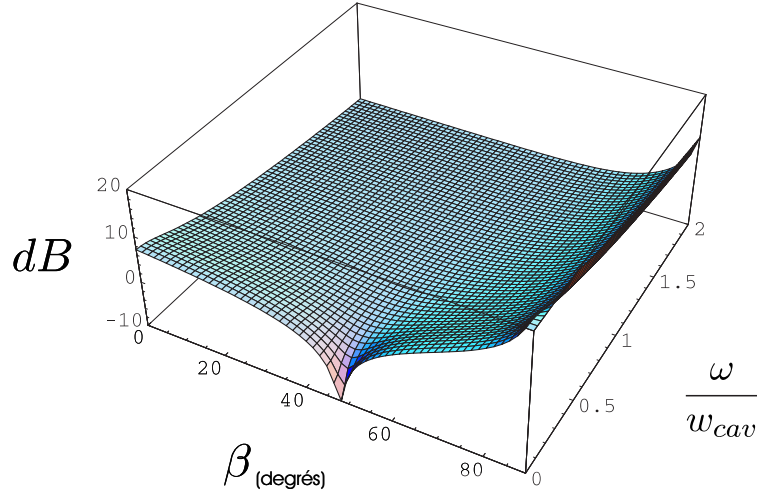


Fig. 5.5: Simulation du gain  $G$  en dB sur le signal en fonction de l'angle de la polarisation d'entrée  $\beta$ , et en fonction de la fréquence d'analyse  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_{cav}}$ , avec  $\sigma = 0.9$  et  $\varphi = \pi/2$ .

Les résultats sont synthétisés sur la figure 5.5. A fréquence nulle on retrouve les résultats pour le champ moyen. On voit que les effets de désamplification disparaissent rapidement avec la fréquence. Par exemple avec  $\Omega = 0.1$ , la désamplification maximum n'est plus que de 3 dB. Le gain diminue également, mais dans de moindres proportions.

## B Traitement quantique

On va reprendre les équations précédentes à l'aide de la méthode hémi-classique, afin d'obtenir les équations sur les fluctuations. On en déduira ensuite les propriétés quantiques des faisceaux en sortie de l'OPO sous le seuil injecté.

### B.1 Équations hémi-classiques

La méthode hémi-classique permet d'écrire l'opérateur  $\hat{a}_j$  sous la forme

$$\hat{a}_j = \alpha_j + \delta\hat{\alpha}_j$$

comme somme de sa valeur moyenne, classique, et d'un opérateur fluctuation. On peut linéariser les équations d'évolution autour des valeurs moyennes, afin de trouver les équations régissant les fluctuations. Il a été montré [Reynaud92] que ce problème peut être traité par une méthode entrée-sortie. Cette fois il n'est pas possible de laisser de côté les champs  $c_i$ . Bien que de valeurs moyennes nulles, ces champs ont les fluctuations associées au vide.

En linéarisant les équations 5.2 on trouve que:

$$\begin{aligned} \tau_1 \frac{d\delta\alpha_1}{dt} &= -(\gamma_1 + \gamma_{1c} - i\delta_i)\delta\alpha_1 + g\alpha_0\delta\alpha_2^* + g\alpha_2^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma_1}\delta\alpha_1^{in} + \sqrt{2\gamma_{1c}}\delta c_1 \\ \tau_2 \frac{d\delta\alpha_2}{dt} &= -(\gamma_2 + \gamma_{2c} - i\delta_2)\delta\alpha_2 + g\alpha_0\delta\alpha_1^* + g\alpha_1^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma_2}\delta\alpha_2^{in} + \sqrt{2\gamma_{2c}}\delta c_2 \quad (5.18) \\ \tau_0 \frac{d\delta\alpha_0}{dt} &= -(\gamma_0 + \gamma_{0c} - i\delta_0)\alpha_0 + g\delta\alpha_1\alpha_2 + g\alpha_1\delta\alpha_2 + t_1\delta\alpha_0^{in} + \sqrt{2\delta\gamma_{0c}}c_0 \end{aligned}$$

On va maintenant faire les mêmes hypothèses simplificatrices que dans la partie stationnaire. On va supposer la triple résonance acquise, les pertes totales  $\gamma$  égales pour le signal et le complémentaire. On supposera l'injection et la pompe au bruit quantique standard. Nous supposons aussi la pompe non-deplétée, ce qui permet en fait de négliger les fluctuations du champ  $c_0$  car elles ne vont pas modifier celles de la pompe. Autrement dit les équations précédentes se simplifient en:

$$\tau_1 \frac{d\delta\alpha_1}{dt} = -\gamma\delta\alpha_1 + g\alpha_0\delta\alpha_2^* + g\alpha_2^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma_1}\delta\alpha_1^{in} + \sqrt{2\gamma_{1c}}\delta c_1 \quad (5.19)$$

$$\tau_2 \frac{d\delta\alpha_2}{dt} = -\gamma\delta\alpha_2 + g\alpha_0\delta\alpha_1^* + g\alpha_1^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma_2}\delta\alpha_2^{in} + \sqrt{2\gamma_{2c}}\delta c_2 \quad (5.20)$$

où la valeur des champs moyens est donnée par les équations 5.7. On va prendre la transformée de Fourier des équations 5.19 afin d'analyser en fréquence les fluctuations  $\delta\alpha_i(\omega)$  définies par:

$$\delta\alpha_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \delta\alpha_i(t) e^{-i(\omega+\omega_i)t}$$

On a supposé que le champ était un champ stationnaire et on a effectué la transformée de Fourier autour de la fréquence  $\omega_i$ . Pour simplifier on notera les champs sans spécifier si l'on parle du champ ou de sa transformée de Fourier, lorsque le contexte est sans équivoque.

Les équations 5.19 deviennent alors:

$$\gamma(1 + i\Omega)\delta\alpha_1 = \gamma\sigma\delta\alpha_2^* + g\alpha_2^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma_1}\delta\alpha_1^{in} + \sqrt{2\gamma_{1c}}\delta c_1 \quad (5.21)$$

$$\gamma(1 + i\Omega)\delta\alpha_2 = \gamma\sigma\delta\alpha_1^* + g\alpha_1^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma_2}\delta\alpha_2^{in} + \sqrt{2\gamma_{2c}}\delta c_2 \quad (5.22)$$

où on a posé  $\Omega = \omega\tau/\gamma$ , et  $\sigma = g\alpha_0/\gamma$ .

Les équations se découpent sur la base  $\pm 45^\circ$ , en supposant  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma'$ ,  $\gamma_{1c} = \gamma_{2c} = \gamma_c$ :

$$\gamma(1 + i\Omega)\delta\alpha_+ = \gamma\sigma\delta\alpha_+^* + g\alpha_+^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma'}\delta\alpha_+^{in} + \sqrt{2\gamma_c}\delta c_+ \quad (5.23)$$

$$\gamma(1 + i\Omega)\delta\alpha_- = -\gamma\sigma\delta\alpha_-^* + g\alpha_-^*\delta\alpha_0 + \sqrt{2\gamma'}\delta\alpha_-^{in} + \sqrt{2\gamma_c}\delta c_- \quad (5.24)$$

## B.2 Relation entrée-sortie sur les fluctuations

On va se placer dans la base des modes  $\hat{a}_+$  et  $\hat{a}_-$ , plus adaptée au traitement quantique. Ils sont définis comme dans 4.28 par  $\hat{a}_\pm = 1/\sqrt{2}(\hat{a}_1 \pm \hat{a}_2)$ . Leurs quadratures seront notées:

$$\hat{X}_\pm = \frac{\hat{a}_\pm + \hat{a}_\pm^\dagger}{\sqrt{2}} \text{ et } \hat{Y}_\pm = \frac{\hat{a}_\pm - \hat{a}_\pm^\dagger}{\sqrt{2}i}.$$

Les fluctuations sur les quadratures seront :

$$\begin{aligned} \gamma(1 + i\Omega)\delta\hat{X}_+ &= \gamma\sigma\delta\hat{X}_+ + g\frac{\sqrt{\gamma'}}{\gamma} \left[ \frac{\hat{X}_+^{in}\delta\hat{X}_0}{1-\sigma} + \frac{\hat{Y}_+^{in}\delta\hat{Y}_0}{1+\sigma} \right] + \sqrt{2\gamma'}\delta\hat{X}_+^{in} + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{X}_+^c \\ \gamma(1 + i\Omega)\delta\hat{Y}_+ &= -\gamma\sigma\delta\hat{Y}_+ + g\frac{\sqrt{\gamma'}}{\gamma} \left[ \frac{\hat{X}_+^{in}\delta\hat{Y}_0}{1-\sigma} + \frac{\hat{Y}_+^{in}\delta\hat{X}_0}{1+\sigma} \right] + \sqrt{2\gamma'}\delta\hat{Y}_+^{in} + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{Y}_+^c \quad (5.25) \\ \gamma(1 + i\Omega)\delta\hat{X}_- &= -\gamma\sigma\delta\hat{X}_- - g\frac{\sqrt{\gamma'}}{\gamma} \left[ \frac{\hat{X}_-^{in}\delta\hat{X}_0}{1+\sigma} + \frac{\hat{Y}_-^{in}\delta\hat{Y}_0}{1-\sigma} \right] + \sqrt{2\gamma'}\delta\hat{X}_-^{in} + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{X}_-^c \\ \gamma(1 + i\Omega)\delta\hat{Y}_- &= \gamma\sigma\delta\hat{Y}_- - g\frac{\sqrt{\gamma'}}{\gamma} \left[ \frac{\hat{X}_-^{in}\delta\hat{Y}_0}{1+\sigma} + \frac{\hat{Y}_-^{in}\delta\hat{X}_0}{1-\sigma} \right] + \sqrt{2\gamma'}\delta\hat{Y}_-^{in} + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{Y}_-^c \end{aligned}$$

Les conditions de couplage à la sortie de la cavité sur les quadratures sont, en supposant les miroirs fortement réfléchissants:

$$\begin{aligned} \delta\hat{X}_\pm^{out} &= -\delta\hat{X}_\pm^{in} + \sqrt{2\gamma_1}\delta\hat{X}_\pm \\ \delta\hat{Y}_\pm^{out} &= -\delta\hat{Y}_\pm^{in} + \sqrt{2\gamma_1}\delta\hat{Y}_\pm \end{aligned} \quad (5.26)$$

On peut donc exprimer les fluctuations sortant de la cavité en fonction des fluctuations des champs entrants.



Dans le cas où on suppose les pertes dans la cavité nulles, on a  $\gamma_c = 0$  donc  $\gamma' = \gamma$ .  
Les fluctuations des champs sortants s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}
\delta\hat{X}_+^{out} &= -\frac{1+\sigma-i\Omega}{1-\sigma+i\Omega}\delta\hat{X}_+^{in} + \frac{\sqrt{2}}{1-\sigma+i\Omega}\frac{g}{\gamma}\left[\frac{\hat{X}_+^{in}\delta\hat{X}_0}{1-\sigma} + \frac{\hat{Y}_+^{in}\delta\hat{Y}_0}{1+\sigma}\right] \\
\delta\hat{Y}_+^{out} &= -\frac{1-\sigma-i\Omega}{1+\sigma+i\Omega}\delta\hat{Y}_+^{in} + \frac{\sqrt{2}}{1+\sigma+i\Omega}\frac{g}{\gamma}\left[\frac{\hat{X}_+^{in}\delta\hat{Y}_0}{1-\sigma} + \frac{\hat{Y}_+^{in}\delta\hat{X}_0}{1+\sigma}\right] \\
\delta\hat{X}_-^{out} &= -\frac{1-\sigma-i\Omega}{1+\sigma+i\Omega}\delta\hat{X}_-^{in} - \frac{\sqrt{2}}{1+\sigma+i\Omega}\frac{g}{\gamma}\left[\frac{\hat{X}_-^{in}\delta\hat{X}_0}{1+\sigma} + \frac{\hat{Y}_-^{in}\delta\hat{Y}_0}{1-\sigma}\right] \\
\delta\hat{Y}_-^{out} &= -\frac{1+\sigma-i\Omega}{1-\sigma+i\Omega}\delta\hat{X}_+^{in} - \frac{\sqrt{2}}{1-\sigma+i\Omega}\frac{g}{\gamma}\left[\frac{\hat{X}_-^{in}\delta\hat{Y}_0}{1+\sigma} + \frac{\hat{Y}_-^{in}\delta\hat{X}_0}{1-\sigma}\right]
\end{aligned} \tag{5.27}$$

### B.3 Bruit sur les quadratures

On suppose que les fluctuations entrantes sont les fluctuations d'un état cohérent, donc minimales. On les normalise au bruit quantique standard :

$$\langle(\delta\hat{X}_i^{in})^2\rangle = \langle(\delta\hat{Y}_i^{in})^2\rangle = 1 \text{ pour } i = 0, 1, 2, +, - \tag{5.28}$$

On suppose également que ces fluctuations sont décorréliées:

$$\langle\delta\hat{X}_i^{in}\delta\hat{X}_j^{in}\rangle = 0 \tag{5.29}$$

$$\langle\delta\hat{Y}_i^{in}\delta\hat{Y}_j^{in}\rangle = 0 \tag{5.30}$$

$$\langle\delta\hat{X}_i^{in}\delta\hat{Y}_i^{in}\rangle = 0 \tag{5.31}$$

pour  $i, j = 0, 1, 2, +$  ou  $-$  et  $i \neq j$ .

Les variances de ces fluctuations, normalisées, sont alors de la forme  $V(\delta\hat{X}_i^{out}) = \langle|\delta\hat{X}_i^{out}|^2\rangle$  et valent :

$$\begin{aligned}
V(\delta\hat{X}_+^{out}) &= \frac{(1+\sigma)^2 + \Omega^2}{(1-\sigma)^2 + \Omega^2} + \frac{2}{(1-\sigma)^2 + \Omega^2}\frac{\sigma^2}{\alpha_0^2}\left[\frac{|\hat{X}_+^{in}|^2}{(1-\sigma)^2} + \frac{|\hat{Y}_+^{in}|^2}{(1+\sigma)^2}\right] \\
V(\delta\hat{Y}_+^{out}) &= \frac{(1-\sigma)^2 + \Omega^2}{(1+\sigma)^2 + \Omega^2} + \frac{2}{(1+\sigma)^2 + \Omega^2}\frac{\sigma^2}{\alpha_0^2}\left[\frac{|\hat{X}_+^{in}|^2}{(1-\sigma)^2} + \frac{|\hat{Y}_+^{in}|^2}{(1+\sigma)^2}\right] \\
V(\delta\hat{X}_-^{out}) &= \frac{(1-\sigma)^2 + \Omega^2}{(1+\sigma)^2 + \Omega^2} + \frac{2}{(1+\sigma)^2 + \Omega^2}\frac{\sigma^2}{\alpha_0^2}\left[\frac{|\hat{X}_-^{in}|^2}{(1+\sigma)^2} + \frac{|\hat{Y}_-^{in}|^2}{(1-\sigma)^2}\right] \\
V(\delta\hat{Y}_-^{out}) &= \frac{(1+\sigma)^2 + \Omega^2}{(1-\sigma)^2 + \Omega^2} + \frac{2}{(1-\sigma)^2 + \Omega^2}\frac{\sigma^2}{\alpha_0^2}\left[\frac{|\hat{X}_-^{in}|^2}{(1+\sigma)^2} + \frac{|\hat{Y}_-^{in}|^2}{(1-\sigma)^2}\right]
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Les variances sont donc des sommes de deux termes. Le premier terme dans les équations 5.32 est le terme habituel apparaissant sous le seuil (voir par exemple [Lugiato97]). Il est responsable de la production sous le seuil de vide comprimé sur les modes  $\hat{a}_+$  et  $\hat{a}_-$ . Le deuxième terme est proportionnel au champ intracavité (c'est à dire au signal/complémentaire injecté et amplifié/désamplifié), et aux fluctuations de la pompe. C'est donc un terme de couplage aux fluctuations de la pompe dû à l'injection, spécifique donc à l'injection d'un champ. Il est toujours positif, par conséquent la variance du bruit pour un champ injecté est toujours supérieure à celle du vide comprimé produit par le même système. Noter également que pour  $\sigma$  pas trop petit, on a  $\frac{1}{(1+\sigma)^2} \ll \frac{1}{(1-\sigma)^2}$ , par conséquent le terme de bruit supplémentaire se réduit à un seul terme.

On peut le voir par exemple sur la figure 5.6. La différence entre les deux courbes représente le bruit ajouté par l'injection. On voit qu'à faible puissance d'injection on a la même variance que pour le vide comprimé. Le bruit est d'autant plus fort que l'injection est intense et que le gain est fort. Il faut noter que ce calcul n'est valable que pour une pompe non déplétée, c'est à dire pour une injection et un gain limités. On n'a pas représenté l'ajout de bruit sur les quadratures amplifiées (comparativement faible), ni sur l'autre quadrature désamplifiée où la figure d'ajout de bruit est comparable.

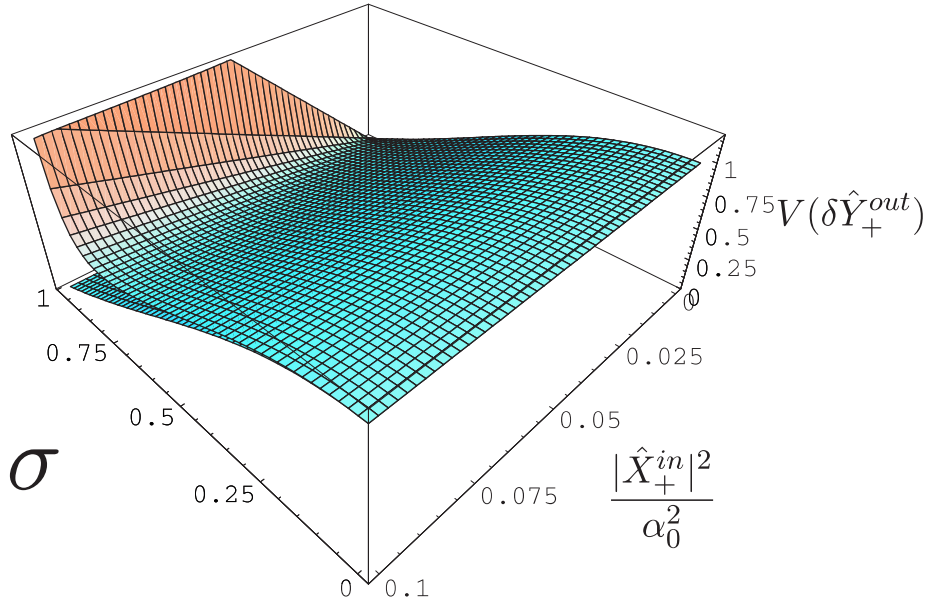


Fig. 5.6: Variance  $V(\delta\hat{Y}_+^{out})$  en fonction de la puissance de pompe normalisée  $\sigma$  et du rapport puissance injectée sur la puissance de pompe. La courbe du bas est la courbe obtenue pour le vide comprimé (sans injection) et permet de voir le terme de bruit ajouté par l'injection.

Dans les équations 5.27, ces termes qui viennent des fluctuations de la pompe rajoutent du bruit sur toutes les quadratures. Par conséquent si on regarde les corrélations entre les

différentes quadratures de sorties, elles ne seront pas nulles :

$$\begin{aligned}
 \langle \delta \hat{X}_{\pm}^{out} \delta \hat{Y}_{\pm}^{out} \rangle &= \frac{2}{(1-\sigma)^2 + \Omega^2 + 2i\sigma\Omega} \frac{\sigma^2}{\alpha_0^2} \frac{2\hat{X}_{\pm}^{in}\hat{Y}_{\pm}^{in}}{1-\sigma^2} \\
 \langle \delta \hat{X}_{+}^{out} \delta \hat{X}_{-}^{out} \rangle = \langle \delta \hat{Y}_{+}^{out} \delta \hat{Y}_{-}^{out} \rangle &= -\frac{2}{(1-\sigma)^2 + \Omega^2 + 2i\sigma\Omega} \frac{\sigma^2}{\alpha_0^2} \frac{\hat{X}_{-}^{in}\hat{X}_{+}^{in} + \hat{Y}_{-}^{in}\hat{Y}_{+}^{in}}{1-\sigma^2} \quad (5.33) \\
 \langle \delta \hat{X}_{+}^{out} \delta \hat{Y}_{-}^{out} \rangle &= -\frac{2}{(1-\sigma)^2 + \Omega^2} \frac{\sigma^2}{\alpha_0^2} \left[ \frac{\hat{X}_{+}^{in}\hat{Y}_{-}^{in}}{(1-\sigma)^2} + \frac{\hat{Y}_{+}^{in}\hat{X}_{-}^{in}}{(1+\sigma)^2} \right] \\
 \langle \delta \hat{Y}_{+}^{out} \delta \hat{X}_{-}^{out} \rangle &= -\frac{2}{(1+\sigma)^2 + \Omega^2} \frac{\sigma^2}{\alpha_0^2} \left[ \frac{\hat{X}_{+}^{in}\hat{Y}_{-}^{in}}{(1-\sigma)^2} + \frac{\hat{Y}_{+}^{in}\hat{X}_{-}^{in}}{(1+\sigma)^2} \right]
 \end{aligned}$$

On a donc des corrélations entre les deux quadratures d'un même champ, et des anticorrélations entre tous les autres couples de quadratures.

Tant dans les équations 5.33 que 5.32, on peut évaluer l'importance de ces termes spécifiques à l'OPO injecté. En effet les termes du type  $\frac{|\hat{X}_{\pm}^{in}|^2}{(1\pm\sigma)^2}$  ou équivalents sont des termes proportionnels à l'intensité dans les modes amplifiés (ou désamplifiés), et on a également un terme en  $1/\alpha_0^2$ , donc inversement proportionnel à l'intensité pompe. Par conséquent ces termes de bruit sont proportionnels au rapport entre la puissance pompe et signal/complémentaire. Nous nous sommes placé dans l'approximation de la pompe non-déplétée, ce qui signifie que ces termes sont faibles.

Cependant des corrélations entre quadratures signifient qu'on n'est plus sur la base optimale pour observer de la compression de bruit. On va donc dans la section suivante chercher la quadrature de compression optimale, et voir si l'injection améliore ou détériore la compression par rapport à un système non injecté.

## B.4 Compression optimale en présence d'injection

On a calculé les variances et les corrélations entre des paires de quadratures conjuguées pour deux polarisations orthogonales. On peut donc chercher le mode le plus comprimé, et sur ce mode la quadrature la plus comprimée [Fabre90]. On va utiliser le formalisme de la matrice de covariance. On ne rappellera pas ici ses propriétés, qu'on pourra trouver dans [LauratPhD] par exemple. Rappelons juste que la matrice de covariance suffit à décrire les propriétés de bruit d'un d'état gaussien. pour un état à deux modes 1 et 2 de quadratures conjuguées  $p$  et  $q$ , elle s'écrit:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \langle p_1^2 \rangle & \langle p_1 q_1 \rangle & \langle p_1 p_2 \rangle & \langle p_1 q_2 \rangle \\ \langle p_1 q_1 \rangle & \langle q_1^2 \rangle & \langle q_1 p_2 \rangle & \langle q_1 q_2 \rangle \\ \langle p_1 p_2 \rangle & \langle q_1 p_2 \rangle & \langle p_2^2 \rangle & \langle p_2 q_2 \rangle \\ \langle p_1 q_2 \rangle & \langle q_1 q_2 \rangle & \langle p_2 q_2 \rangle & \langle q_2^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Rappelons tout d'abord les résultats sur le vide comprimé. Dans ce cas la matrice de covariance  $\Gamma$  pour les deux modes de polarisation  $+$  et  $-$ , et pour les quadratures  $X$  et  $Y$  s'écrit:

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} \frac{(1+\sigma)^2+\Omega^2}{(1-\sigma)^2+\Omega^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\sigma)^2+\Omega^2}{(1+\sigma)^2+\Omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\sigma)^2+\Omega^2}{(1+\sigma)^2+\Omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\sigma)^2+\Omega^2}{(1-\sigma)^2+\Omega^2} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

Autrement dit cette base est la base la plus découplée: la compression de bruit est donc optimale. Dans cette même base la matrice de covariance correspondant à un système injectée (qu'on n'écrit pas ici, vu sa complexité) s'écrit simplement grâce aux équations 5.33 et 5.32. A priori aucun terme n'est nul puisque la pompe ajoute des termes de corrélations entre toutes les quadratures. Chercher la base de mode optimale (c'est à dire tenter de trouver la base où la matrice de covariance est diagonale) est un problème complexe qui dépasse le cadre de cette étude (On pourra se reporter à [Simon90] ou [Arvind95] qui vont dans cette direction). On va donc se contenter de chercher la quadrature où la compression est optimum sur cette base  $+$  et  $-$ . On va chercher la paire de quadratures non-corrélées. Sur la matrice de covariance, cela signifie trouver une base où les termes  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{21}$ ,  $\Gamma_{34}$  et  $\Gamma_{43}$  sont nuls. La sous-matrice  $\Gamma'$  limitée au mode à  $+45^\circ$  (c'est à dire la sous-matrice  $2 \times 2$  supérieure gauche) s'écrit:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{(1+\sigma)^2+\Omega^2}{(1-\sigma)^2+\Omega^2} + \frac{2}{(1-\sigma)^2+\Omega^2} \frac{\sigma^2}{\alpha_0^2} \left[ \frac{|\hat{X}_+^{in}|^2}{(1-\sigma)^2} + \frac{|\hat{Y}_+^{in}|^2}{(1+\sigma)^2} \right] & \frac{2}{(1-\sigma)^2+\Omega^2+2i\sigma\Omega} \frac{\sigma^2}{\alpha_0^2} \frac{2\hat{X}_+^{in}\hat{Y}_+^{in}}{1-\sigma^2} \\ \frac{2}{(1-\sigma)^2+\Omega^2+2i\sigma\Omega} \frac{\sigma^2}{\alpha_0^2} \frac{2\hat{X}_+^{in}\hat{Y}_+^{in}}{1-\sigma^2} & \frac{(1-\sigma)^2+\Omega^2}{(1+\sigma)^2+\Omega^2} + \frac{2}{(1+\sigma)^2+\Omega^2} \frac{\sigma^2}{\alpha_0^2} \left[ \frac{|\hat{X}_+^{in}|^2}{(1-\sigma)^2} + \frac{|\hat{Y}_+^{in}|^2}{(1+\sigma)^2} \right] \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Le problème se ramène donc à rechercher les valeurs propres de cette matrice, qui donnent, dans le repère de Fresnel, les dimensions du petit et du grand axe de l'ellipse représentant le bruit (voir figure 4.4). En se plaçant pour simplifier à fréquence nulle, ces valeurs propres sont:

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-\sigma)^2}{(1+\sigma)^2} + \frac{(1+\sigma)^2}{(1-\sigma)^2} + \frac{\sigma^2}{\alpha_0^2} \left[ \frac{|\hat{X}_+^{in}|^2}{(1-\sigma)^2} + \frac{|\hat{Y}_+^{in}|^2}{(1+\sigma)^2} \right] \left( \frac{1}{(1+\sigma)^2} + \frac{1}{(1-\sigma)^2} \right) \right] \\ &\pm 4 \frac{1}{(1-\sigma^2)^2} \sqrt{\frac{\sigma^2 (1-\sigma)^4}{\alpha_0^2 (1+\sigma)^4} \hat{X}_+^{in} \hat{Y}_+^{in} + \frac{A}{(1-\sigma^2)^4}} \end{aligned}$$

où  $A = \sigma^2 \left( (1-\sigma)^2 \left( (1+\sigma)^2(1+\sigma^2) + \frac{\sigma^2}{\alpha_0^2} |\hat{Y}_+^{in}|^2 \right) + (1+\sigma)^2 \frac{\sigma^2}{\alpha_0^2} |\hat{X}_+^{in}|^2 \right)^2$  (5.37)

Cette expression est compliquée mais on peut néanmoins en tirer de nombreuses informations. Tout d'abord le produit des valeurs propres est le déterminant  $\det \Gamma$ , et est forcément

supérieur ou égal à l'unité pour vérifier l'inégalité de Heisenberg. Ici on peut vérifier que  $\lambda_1 \times \lambda_2$  est strictement supérieur à 1 dès qu'on injecte un champ sur le mode polarisé à  $+45^\circ$ . Par conséquent, à cause du bruit supplémentaire dû au couplage avec la pompe, ce mode amplifié n'est plus un état minimal du rayonnement. Par ailleurs la valeur propre la plus faible nous donne la compression de bruit sur la meilleure quadrature, et on peut vérifier qu'elle est toujours moins bonne que pour le vide comprimé produit dans les mêmes conditions.

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a donc étudié spécifiquement les propriétés amplificatrices d'un oscillateur paramétrique triplement résonnant monomode transverse sous le seuil. Le paramètre important est la puissance de pompe normalisée au seuil  $0 < \sigma < 1$ . Les principales différences avec le cas de l'interaction paramétrique libre sont, d'une part, le gain infini au seuil lorsque l'on néglige la dépletion de la pompe, et d'autre part, la désamplification intracavité limitée à  $3dB$ . Par rapport à la littérature, cette partie est originale car on y étudie le comportement vis-à-vis d'une injection quelconque pour un OPO de type-II, alors que tous les travaux à notre connaissance ne considèrent qu'une injection sur un des modes propres de l'amplificateur (soit les modes de polarisations signal et complémentaire, soit les modes de polarisation à  $\pm 45^\circ$ ). Cette approche est plus proche des conditions expérimentales rencontrées et on met en évidence plusieurs effets :

- du point de vue classique, si on regarde l'amplification suivant une polarisation fixe, on peut voir apparaître une désamplification apparente bien au delà de la limite des 3 dB. On peut la comprendre en terme de rotation de la polarisation de sortie par rapport à la polarisation d'entrée : la désamplification parfaite correspond à une polarisation de sortie orthogonale à la polarisation d'analyse.
- du point de vue quantique, amplifier du vide cohérent et un signal injecté n'est pas équivalent : si le champ moyen entrant n'est pas nul, des termes de couplage au bruit de la pompe apparaissent. L'état en sortie, bien que toujours non-classique n'est alors plus un état minimum du rayonnement, et sa compression optimale s'en trouve diminuée. Néanmoins dans la limite d'une pompe non-deplétée ces effets sont relativement faibles.

Dans le chapitre suivant, on étudiera l'amplification dans un OPO multimode transverse sous le seuil. Les calculs devenant aisément compliqués, on n'étudiera que les propriétés de cet amplificateur injecté par du vide cohérent. Les effets particuliers dus à l'injection ont été illustrés ici dans le cas monomode, et on n'attend a priori pas d'effet spécifiquement transverse notable dû à l'injection.

---

# Amplificateur paramétrique optique multimode

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Optique quantique transverse</b> . . . . .	<b>94</b>
A.1	Quantification transverse . . . . .	94
A.2	Décomposition en modes . . . . .	95
A.3	Observables locales . . . . .	96
A.4	Effets quantiques dans les images . . . . .	98
<b>B</b>	<b>Caractérisation du caractère multimode d'un faisceau</b> . . . . .	<b>100</b>
B.1	Faisceau multimode classique . . . . .	100
B.2	Faisceau multimode quantique . . . . .	101
B.3	Caractérisation formelle . . . . .	101
B.4	Caractérisation expérimentale . . . . .	101
<b>C</b>	<b>Faisceau multimode produit par la cavité héli-confocale</b> . . . . .	<b>103</b>
C.1	Commutateur de la cavité vide . . . . .	104
C.2	Interaction paramétrique . . . . .	106
<b>D</b>	<b>Génération de vide comprimé multimode</b> . . . . .	<b>107</b>
D.1	Détection homodyne . . . . .	107
D.2	Bruit sur un détecteur circulaire . . . . .	110

---

## Introduction

Ce chapitre fait le lien entre la première partie, où est étudiée d'un point de vue classique la propagation et la transmission d'une image, et le début de la partie 2, qui étudie d'un point de

vue totalement monomode l'amplification et le comportement de l'Oscillateur paramétrique optique sous le seuil. Dans la section **A**, on introduira les notions et les notations propres à l'optique quantique transverse. On verra ensuite dans la section **B** un critère expérimental permettant de mettre en évidence le caractère multimode d'un faisceau. Enfin dans les deux dernières sections on mettra en application ces notions sur l'exemple de l'OPO héli-confocal, puisque c'est celui qui sera utilisé expérimentalement (voir chapitre **10**).

## A Optique quantique transverse

On va présenter les concepts généraux décrivant les états multimodes du rayonnement, tout au moins ceux nécessaires à la compréhension des expériences présentées ici. On se base principalement sur le travail effectué par Nicolas Treps durant sa thèse [TrepsPhD], dont la vision est principalement "pratique", c'est à dire axée vers l'expérience. Pour un traitement parfaitement rigoureux, on pourra se reporter à [Kolobov95], voire à [Cohen87].

### A.1 Quantification transverse

#### A.1.1 Quantification du champ

Soit un champ électromagnétique dans l'espace, de polarisation bien déterminée. L'opérateur champ électrique  $\hat{E}(\vec{r}, t)$  s'écrit :

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}^{(+)\dagger}(\vec{r}, t), \quad (6.1)$$

où  $\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t)$  est l'opérateur de fréquence positive. La quantification du champ électrique dans le vide et dans tout l'espace (sans considérer une boîte de côté  $L$ ) donne comme expression pour cet opérateur :

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\omega(k)} \hat{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t)}. \quad (6.2)$$

Dans cette équation,  $\omega(k)$  est donné par la relation de dispersion dans le vide  $\omega(k) = c.k$  et  $\hat{a}(\vec{k})$  et  $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$  sont les opérateurs d'annihilation et de création d'un photon de vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Ces opérateurs vérifient les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] &= (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] &= 0 \\ [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Notons qu'on n'a fait jusqu'à présent aucune approximation.

### A.1.2 quantification transverse

Comme au chapitre 1, on considère un champ laser stationnaire, se propageant dans une direction privilégiée de l'espace  $z$  (vecteur unitaire  $\vec{z}$ ), de pulsation centrée sur  $\omega_0$ , et de direction centrée autour du vecteur d'onde  $\vec{k}_0 = k_0\vec{z}$ . On va maintenant se placer également dans l'approximation paraxiale, c'est à dire qu'on suppose que le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est principalement longitudinal, et on va noter  $\vec{k} = k_z\vec{z} + \vec{q}$  où  $\vec{q}$  est la partie transverse du vecteur d'onde (supposée petite devant  $k_0$ ). On suppose également que sa fréquence est centrée dans une bande  $\delta\omega$  autour de  $\omega_0$ , autrement dit on va poser  $\omega(k) = \omega_0 + \Omega$ , avec  $\Omega < \delta\omega \ll \omega_0$ .

Par conséquent on peut écrire:

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}, z, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0}}\hat{a}(\vec{\rho}, z, t)e^{-i\omega_0(t-\frac{z}{c})} \quad (6.4)$$

où  $\hat{a}(\vec{\rho}, z, t)$  est l'opérateur enveloppe du champ. Pour un faisceau à la pulsation  $\omega_0$  il est normalisé en  $\sqrt{\text{nombre de photons}}$ .

On se place à partir de maintenant dans un plan particulier  $z = z_0$  de l'axe de propagation, c'est à dire qu'on ne s'intéresse dans la suite qu'aux propriétés quantiques dans un plan transverse donné et pas entre différents plans transverses. On ne spécifiera donc plus la coordonnée longitudinale  $z$ .

On peut alors introduire l'opérateur destruction d'un photon d'énergie  $\hbar\omega$  à la position transverse  $\vec{\rho}$ , noté  $\hat{a}_\omega(\vec{\rho})$ , défini par:

$$\hat{a}_\omega(\vec{\rho}) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\hat{a}(\vec{q}, k_z)e^{i\vec{q}\cdot\vec{\rho}}, \quad (6.5)$$

où  $\omega = ck_z$ . On peut montrer que son commutateur vaut :

$$[\hat{a}_\omega(\vec{\rho}), \hat{a}_{\omega'}^\dagger(\vec{\rho}')] = 2\pi c\delta(\omega - \omega')\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \quad (6.6)$$

et comme :

$$\hat{a}(\vec{\rho}, z, t) = \int_{-\delta\omega}^{+\delta\omega} \frac{\delta\Omega}{2\pi c} \sqrt{\frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0}} \hat{a}_\omega(\vec{\rho}) e^{-i\Omega(t-\frac{z}{c})}, \quad (6.7)$$

on peut écrire le commutateur de l'opérateur enveloppe  $\hat{a}(\vec{\rho}, z, t)$  dans le plan transverse :

$$[\hat{a}(\vec{\rho}, z, t), \hat{a}^\dagger(\vec{\rho}', z, t')] = \frac{1}{c}\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}')\delta_1(t - t') \quad (6.8)$$

où  $\delta_1(t - t')$  peut être dans certaines conditions approché par une fonction de Dirac.

## A.2 Décomposition en modes

On se donne une famille de modes  $\{u_i\}$  du plan transverse, telle que les modes  $u_i(\rho)$  forment une base orthonormale, on aura donc en particulier la relation d'orthonormalité :

$$\int u_i^*(\rho)u_j(\rho)d^2\rho = \delta_{ij}. \quad (6.9)$$



Si on considère la famille des modes gaussiens (voir 1.4), alors dans n'importe quel plan transverse ( $z$  fixé) ils constituent une base orthonormée du plan. C'est la base naturelle pour étudier la propagation libre d'un champ (comme les ondes planes), ou son interaction en cavité<sup>1</sup>.

On définit l'opérateur  $\hat{a}_i$  de destruction sur le mode  $u_i$  pendant une durée  $T$  (c'est à dire entre les instants  $t_0$  et  $t_0 + T$ ).  $T$  est un temps très supérieur à tous les temps optiques  $1/\delta\omega$  et  $1/\omega_0$ , et comme on considère un champ stationnaire, le résultat ne dépend pas du temps  $t_0$  initial. Il vaut :

$$\hat{a}_i = \sqrt{\frac{c}{T}} \int_{t_0}^{t_0+T} \int \hat{a}_i(\rho, t) u_i(\rho) dt d^2\rho. \quad (6.10)$$

où le facteur  $\sqrt{\frac{c}{T}}$  sert à assurer l'homogénéité avec un  $\sqrt{\text{nombre de photons}}$ . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \delta_{ij} \\ \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}} \hat{a}(\rho) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}} \sum_i \hat{a}_i u_i(\vec{\rho}) \\ \hat{I}_{tot} &= \hbar\omega_0 \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \end{aligned} \quad (6.11)$$

où  $I_{tot}$  représente bien l'énergie du champ contenue dans la tranche  $[t_0, t_0 + T]$ .  $\hat{a}(\rho)$  est l'opérateur destruction à la position  $\vec{\rho}$ ; c'est celui qui nous servira principalement par la suite.

### A.3 Observables locales

À partir des opérateurs destruction de photon locaux  $\hat{a}(\rho)$  ou modaux  $\hat{a}_i$ , on peut définir des observables locales ou modes, qui seront effectivement mesurées.

L'opérateur de fluctuation associé à un opérateur s'écrit par exemple dans le cas du champ électrique :

$$\delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}, t) = \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}, t) - \langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}, t) \rangle \quad (6.12)$$

Il est de valeur moyenne nulle et possède les mêmes relations de commutation que l'opérateur d'origine.

---

1. Noter qu'en fait qu'il n'est pas nécessaire que cette famille de modes soit une base, et qu'il existe une autre base du plan transverse intéressante. Si on considère un pavage disjoint complet  $S_i$  du plan transverse, alors on définit les modes  $u_i$  par

$$u_i(\rho) = \frac{1}{\sqrt{s_i}} \chi_i(\rho),$$

où  $\chi_i(\rho)$  est la fonction caractéristique du pavé  $S_i$ , d'aire  $s_i$ . Le pavage n'a pas besoin d'être régulier, c'est à dire que les zones n'ont pas spécialement à être de la même taille ni de la même forme. On a alors bien la relation d'orthonormalité, mais pas la relation de complétude, néanmoins tous les résultats restent valables, à part la relation sur  $I_{tot}$  des relations 6.11. qui n'est valable que dans la limite où le champ peut être considéré comme constant sur chaque pixel. On pourra donc aussi bien considérer les pixels dans le plan d'une caméra CCD, qu'un détecteur à plusieurs quadrants. C'est donc la famille naturelle de détection (d'étude) d'une image.

### A.3.1 Opérateurs densité d'énergie

Sur un détecteur on accède à l'énergie du champ. L'opérateur densité d'énergie par unité de surface s'écrit :

$$\hat{J}(\vec{\rho}) = 2\epsilon_0 c \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}) \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}). \quad (6.13)$$

On peut l'écrire  $\hat{J}(\vec{\rho}) = \langle \hat{J}(\vec{\rho}) \rangle + \delta \hat{J}(\vec{\rho})$  avec :

$$\langle \hat{J}(\vec{\rho}) \rangle = 2\epsilon_0 c \langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}) \rangle \langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) \rangle \quad (6.14)$$

et dans la limite des petites fluctuations:

$$\delta \hat{J}(\vec{\rho}) = 2\epsilon_0 c \left( \langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}) \rangle \delta \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) + \langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) \rangle \delta \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}) \right) \quad (6.15)$$

Sous forme modale on aura:

$$\hat{J}(\vec{\rho}) = \hbar \omega_0 \sum_{i,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j u_i^*(\vec{\rho}) u_j(\vec{\rho}) \quad (6.16)$$

et pour les fluctuations:

$$\delta \hat{J}(\vec{\rho}) = -i \sqrt{\frac{2\epsilon_0 c}{\hbar \omega_0}} \sum_i \delta \hat{a}_i^\dagger u_i^*(\vec{\rho}) \langle \hat{\mathcal{E}}(\vec{\rho}) \rangle + h.c. \quad (6.17)$$

On accède donc à l'opérateur fluctuations locales du champ électrique. Si on veut l'exprimer en nombre de photons, on peut utiliser l'observable sans dimension  $\mathcal{N}(\vec{\rho}) = \frac{\mathcal{J}(\vec{\rho})}{\hbar \omega_0}$

### A.3.2 Opérateurs de quadratures

Par une détection directe, c'est à dire lorsque le faisceau frappe directement la photodiode, on n'accède qu'à l'intensité du champ. Cependant, si on mélange sur une lame 50/50 notre faisceau avec un oscillateur local (un champ cohérent intense), on réalise ce qu'on appelle une détection homodyne équilibrée (voir schema 6.1). On peut alors détecter l'intensité sur deux photodiodes placées sur les deux voies de sortie de la lame. Pour une description plus détaillée, voir [Fabre95].

Si on écrit l'oscillateur local sous la forme  $\mathcal{E}_{loc}^{(+)}(\vec{\rho}) = \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}) e^{i\theta(\vec{\rho})}$  où  $\mathcal{E}_{loc} = |\mathcal{E}_{loc}^{(+)}|$ , alors la différence des intensités s'écrit :

$$\hat{J}_\theta(\vec{\rho}) = 2\epsilon_0 c \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}) \hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}) \quad (6.18)$$

où  $\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho})$  est l'observable de quadrature, et vaut:

$$\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}) = e^{i\theta} \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}) + e^{-i\theta} \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) \quad (6.19)$$

pour  $\theta = 0$  cette observable correspond à la quadrature du champ parallèle à son amplitude et quand  $\theta = \pi/2$  il donne un signal proportionnel à la quadrature perpendiculaire (la phase).

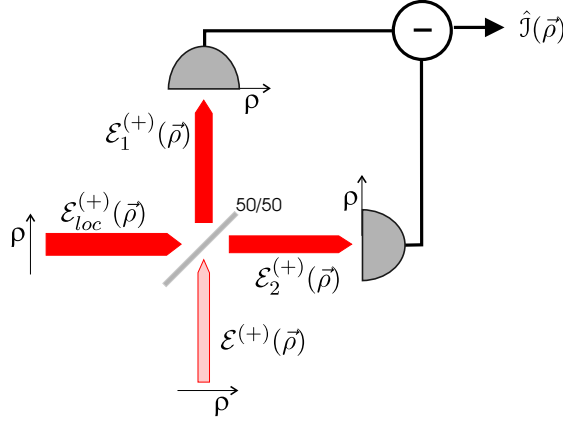


Fig. 6.1: Détection homodyne : un champ intense  $\mathcal{E}_{loc}$  et le champ analysé  $\mathcal{E}$  sont incidents sur une lame séparatrice. Le signal de différence  $i_1 - i_2$  donne une quantité proportionnelle aux fluctuations d'une quadrature du champ analysé.

On peut alors écrire les relations de commutation vérifiées par l'opérateur  $\hat{J}_\theta$  pour deux valeurs de  $\theta$  séparées de  $\pi/2$  :

$$[\hat{J}_\theta(\vec{\rho}), \hat{J}_{\theta+\pi/2}(\vec{\rho}')] = 4\epsilon_0^2 c^2 \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}) \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}') \times 2i[\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}), \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}')] \quad (6.20)$$

Nous avons défini le formalisme des opérateurs et observables locaux et modaux du plan transverse, nous allons maintenant nous intéresser à la caractérisation des effets quantiques non-classiques spatiaux.

## A.4 Effets quantiques dans les images

### A.4.1 Bruit local

On considère un ensemble de photodiodes  $D_i$ , disjointes, qui couvrent l'ensemble du plan transverse. L'intensité associée à l'opérateur quadrature détectée sur le détecteur  $D_i$  est :

$$\hat{I}_\theta(D_i) = \int_{D_i} 2\epsilon_0 c \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}) \hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}) d^2\rho \quad (6.21)$$

L'expression variance du bruit associé à cette mesure est alors :

$$\langle \delta \hat{I}_\theta(D_i)^2 \rangle = 4\epsilon_0^2 c^2 \iint_{D_i \times D_i} \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}) \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}') \langle \delta \hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}) \delta \hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}') \rangle d^2\vec{\rho} d^2\vec{\rho}' \quad (6.22)$$

Sous forme modale, en notant  $C_i^k = \int_{D_i} \int u_k(\rho') \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}') d^2\rho d^2\rho'$  l'intégrale de recouvrement entre un mode  $k$  de l'oscillateur local et le détecteur  $i$ , on obtient :

$$\langle \delta \hat{I}_\theta(D_i)^2 \rangle = \hbar\omega_0 I_{loc}(D_i) + (\hbar\omega_0)^2 \sum_{k,k'} \langle : (\delta \hat{a}_k C_i^k e^{-i\theta} + h.c.) (\delta \hat{a}_{k'} C_i^{k'} e^{-i\theta} + h.c.) : \rangle \quad (6.23)$$

où  $::$  représente l'ordre normal des opérateurs. Le premier terme est le bruit quantique standard associé à cette mesure, et le deuxième terme est un terme de corrélation entre les opérateurs de quadratures.

#### A.4.2 Corrélations spatiales

On peut écrire de la même façon la fonction de corrélation symétrisée la plus générale possible: c'est à dire entre deux quadratures sur deux détecteurs  $D_i$  et  $D_j$  de deux champs  $n$  et  $m$  (qui peuvent être le même champ), sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{I}_\theta^n(D_i) \delta \hat{I}_{\theta'}^m(D_j) \rangle_s &= \delta_{nm} \delta_{ij} \hbar \omega_0 I_{loc}(D_i) \cos(\theta - \theta') \\ &+ (\hbar \omega_0)^2 \sum_{k,k'} \langle : (\delta \hat{a}_k^n C_i^{n,k} e^{-i\theta} + h.c.) (\delta \hat{a}_{k'}^m C_i^{m,k'} e^{-i\theta'} + h.c.) : \rangle \end{aligned} \quad (6.24)$$

Cette forme fait apparaître un bruit quantique standard pour cette fonction de corrélation (le premier terme), et un terme de corrélations (le deuxième terme). Pour l'exploitation des résultats, la fonction qui nous intéresse est la fonction de corrélation normalisée, que nous noterons

$$\left\langle \delta \hat{I}_\theta^n(D_i) \delta \hat{I}_{\theta'}^m(D_j) \right\rangle_N = \frac{\left\langle \delta \hat{I}_\theta^n(D_i) \delta \hat{I}_{\theta'}^m(D_j) \right\rangle_s}{\sqrt{\left\langle \delta \hat{I}_\theta^n(D_i) \right\rangle^2 \left\langle \delta \hat{I}_{\theta'}^m(D_j) \right\rangle^2}} \quad (6.25)$$

qui vérifie :

$$0 \leq \left| \left\langle \delta \hat{I}_\theta^n(D_i) \delta \hat{I}_{\theta'}^m(D_j) \right\rangle_N \right| \leq 1 \quad (6.26)$$

#### A.4.3 Champ monomode transverse

On va rappeler les caractéristiques transverses d'un champ monomode. Un état monomode signifie qu'il existe une base  $\{u_i\}$  dans laquelle tous les modes sont vides, sauf un que nous supposons être le mode  $u_0$ .

En utilisant l'opérateur  $\hat{N}(\vec{\rho})$  nombre de photons, on peut évaluer la fonction de corrélation sur les fluctuations:

$$\langle \delta \hat{N}(\vec{\rho}) \delta \hat{N}(\vec{\rho}') \rangle = N_0 |u_0(\vec{\rho})|^2 \delta(\rho - \rho') + R_0 |u_0(\vec{\rho})|^2 |u_0(\vec{\rho}')|^2 \quad (6.27)$$

où  $R_0 = \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^2 \rangle - \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle^2$  représente la réduction de bruit en intensité ( $R_0 = 0$ ). Autrement dit:

1. un état cohérent est toujours au bruit quantique standard, et ne présente pas de corrélations entre points transverses.
2. un état comprimé présentera des corrélations ( $R_0 > 0$ ) ou des anticorrélations ( $R_0 < 0$ ) entre points distants.

La variance du nombre de photons détecté sur un détecteur  $D_i$  peut s'écrire:

$$\Delta \hat{N}_{D_i}^2 = N_0 \mu_0(D_i) + R_0 \mu_0(D_i)^2 \quad (6.28)$$

où  $\mu_0(D_i) = \int_{D_i} u_0^*(\vec{\rho}) u_0(\vec{\rho}) d^2 \rho$  représente la fraction du mode  $u_0$  sur le détecteur  $D_i$ . Le premier terme est le bruit quantique standard associé à la mesure de la fraction d'intensité incidente sur le détecteur. Le second terme est proportionnel à  $R_0$  c'est à dire à la réduction du bruit du faisceau, et à la fraction détectée d'intensité ( $\mu_0(D_i)^2$ ). Cette expression est très intéressante car on voit que ce terme varie proportionnellement à l'intensité, donc de la même manière que si on avait atténué le faisceau avec une filtre gris. On verra plus tard l'intérêt de cette propriété d'un faisceau monomode.

Pour les fonctions de corrélations, on ne donnera pas les formules, mais on retrouve qualitativement le même résultat, c'est à dire que le terme de corrélation ne dépend pas de la position, mais uniquement de la fraction d'intensité détectée.

## B Caractérisation du caractère multimode d'un faisceau

### B.1 Faisceau multimode classique

Un faisceau est dit multimode dans la base  $TEM_{pq}$  quand le faisceau est la somme de plusieurs modes  $TEM_{pq}$ . En général cela signifie que le champ proche et le champ lointain sont différents, mais ce n'est pas forcément le cas. La partie positive de l'enveloppe complexe d'un tel champ,  $E^{(+)}(\vec{r}, z)$ , peut être décomposée sur la base  $u_{p,q}(\vec{r}, z)$  des  $TEM_{pq}$  selon :

$$E^{(+)}(\vec{r}, z) = \sum_{pq} \alpha_{p,q} u_{p,q}(\vec{r}, z) \quad (6.29)$$

où au moins deux coefficients  $\alpha_{p,q}$  sont non-nuls.

Néanmoins, si la superposition des modes est cohérente, les coefficients  $\alpha_{p,q}$  sont fixés et le champ est en fait monomode. En effet si on définit le mode  $v_0(\vec{r}, z)$  par:

$$v_0(\vec{r}, z) = \frac{E^{(+)}(\vec{r}, z)}{\int |E^{(+)}(\vec{r}, z)|^2 d^2 r} \quad (6.30)$$

et qu'on construit une base orthonormale des  $\{v_i(\vec{r}, z)\}$  dont le premier élément est  $v_0(\vec{r}, z)$ , alors dans cette base le champ  $E^{(+)}(\vec{r}, z)$  se décompose sur un seul vecteur de la base, et est donc en fait monomode. Le caractère multimode ou monomode est donc dépendant de la base dans laquelle on regarde. Il faut noter que ce raisonnement ne s'applique pas au cas où les quantités  $\alpha_{p,q}$  fluctuent, puisque dans ce cas là  $v_0$  change constamment. D'un point de vue quantique les choses sont différentes. On va voir qu'on peut définir de manière intrinsèque un état monomode et un état multimode.

## B.2 Faisceau multimode quantique

On définit un état monomode de la manière suivante:

**Définition 3** *l'état  $|\Psi\rangle$  est un état monomode si il existe une base de mode  $\{v_i(\vec{r}, z)\}$  dans laquelle il peut s'écrire:*

$$|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots$$

*où le premier mode de la base est dans un état  $|\Psi_0\rangle$  qui n'est pas du vide, et tous les autres modes sont des états vides du rayonnement.*

Un faisceau multimode est un faisceau qui n'est pas monomode, par conséquent:

**Définition 4** *Un état  $|\Psi\rangle$  est un état multimode s'il ne peut s'écrire dans aucune base sous la forme précédente  $|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots$ .*

## B.3 Caractérisation formelle

On peut montrer [TrepsPhD] que l'action sur un état monomode de tous les opérateurs annihilation de n'importe quelle base transverse donne des vecteurs proportionnels, et que cette condition est nécessaire et suffisante pour montrer qu'un état est monomode. Par conséquent pour un état multimode, il existe au moins une base dans laquelle cette propriété n'est pas vraie.

Cette propriété mathématique des états monomodes et multimodes est difficile à vérifier expérimentalement. On va exhiber une condition expérimentale suffisante, mais pas nécessaire, afin de montrer qu'un faisceau est multimode (réciproquement une condition nécessaire mais pas suffisante pour montrer qu'un faisceau est monomode).

## B.4 Caractérisation expérimentale

La différence majeure entre la description classique et la description quantique vient du fait que la description classique ne s'intéresse qu'au champ moyen, alors que la description quantique apporte en plus une information sur la répartition des fluctuations. Un faisceau monomode est caractérisé par la forme transverse du mode  $v_0(\vec{r}, z)$  qui le porte, qui décrit aussi bien la répartition du champ moyen que celle de ses fluctuations. Dans un champ multimode, chaque mode peut avoir des fluctuations différentes, par conséquent la répartition spatiale des fluctuations et des corrélations ne peut être déduite de la forme transverse du champ moyen.

On va utiliser la mesure partielle en intensité pour caractériser le caractère multimode d'un faisceau, c'est à dire le fait que le bruit et le champ moyen n'ont pas forcément la même répartition spatiale.

### B.4.1 Sur les fluctuations en intensité d'un faisceau

On va considérer un détecteur d'extension transverse  $S_A$ . Ce détecteur est supposé parfait, et détecte l'intensité (c'est à dire le nombre moyen de photons  $N_A$ ) de la partie du faisceau

le frappant.

Si ce faisceau est monomode, on connaît le bruit sur une mesure partielle spatiale du faisceau [Fouet00] :

$$\Delta N_A^2 = \langle \hat{N}_A \rangle + \frac{\langle \hat{N}_A \rangle^2}{\langle \hat{N}_{tot} \rangle^2} (\Delta \hat{N}_{tot}^2 - \langle \hat{N}_{tot} \rangle) \quad (6.31)$$

où  $\hat{N}_{tot}$  est l'opérateur nombre de photons total du faisceau et  $\hat{N}_A$  est l'opérateur nombre de photons détectés. Le bruit d'intensité normalisé au bruit quantique standard  $\Delta \hat{N}_A^2 / \langle \hat{N}_A \rangle$  varie linéairement avec la transmission  $T = \langle \hat{N}_A \rangle / \langle \hat{N}_{tot} \rangle$  du détecteur, c'est à dire la fraction de l'énergie du faisceau tapant effectivement la photodiode. On peut donc récrire 6.31 sous la forme :

$$\frac{\Delta N_A^2}{\langle \hat{N}_A \rangle} = 1 - T \left( 1 - \frac{\Delta \hat{N}_{tot}^2}{\langle \hat{N}_{tot} \rangle} \right) \quad (6.32)$$

Ce résultat s'interprète comme suit : les photons sont répartis aléatoirement dans le plan transverse, donc une détection spatiale partielle introduit un bruit de partition, équivalent à un atténuateur de transmission  $T$  placé devant le détecteur.

Pour un faisceau multimode, la fraction détectée des différents modes spatiaux pourra être différente sur un détecteur de forme bien choisie. Par conséquent l'équation 6.31 ne sera plus valable.

#### B.4.2 Sur les corrélations en intensité de faisceaux jumeaux

Dans un OPO au dessus du seuil, les faisceaux signal et complémentaire sont fortement corrélés en intensité, et on les appelle faisceaux jumeaux. Sur le bruit, cela signifie que la variance sur la différence des intensités  $\hat{N}_{diff,tot} = \hat{N}_{1,tot} - \hat{N}_{2,tot}$  entre signal (noté 1) et complémentaire (noté 2) est inférieure à la limite quantique standard pour cette mesure, qui est la somme des bruit quantique standard associés à la mesure de l'intensité sur chaque faisceau  $\langle \hat{N}_{1,tot} \rangle + \langle \hat{N}_{2,tot} \rangle$ . Si on considère deux détecteurs partiels de mêmes surfaces transverses  $S_A$ , et qu'on mesure les intensités respectivement du signal et du complémentaire, on aura :

$$\Delta N_{diff,A}^2 = (\langle \hat{N}_{1,A} \rangle + \langle \hat{N}_{2,A} \rangle) + \frac{(\langle \hat{N}_{1,A} \rangle + \langle \hat{N}_{2,A} \rangle)^2}{(\langle \hat{N}_{1,tot} \rangle + \langle \hat{N}_{2,tot} \rangle)^2} (\Delta \hat{N}_{diff,tot}^2 - (\langle \hat{N}_{1,A} \rangle + \langle \hat{N}_{2,A} \rangle)) \quad (6.33)$$

Cette formule s'interprète comme 6.31, par le fait que dans deux faisceaux jumeaux monomodes, il n'y a pas de corrélations spatiales entre les photons jumeaux. La sélection spatiale des photons sur le détecteur est donc équivalente à une atténuation  $T = \frac{(\langle \hat{N}_{1,A} \rangle + \langle \hat{N}_{2,A} \rangle)^2}{(\langle \hat{N}_{1,tot} \rangle + \langle \hat{N}_{2,tot} \rangle)^2}$ .

On retrouve donc qu'un critère du caractère multimode des faisceaux jumeaux est que l'évolution des corrélations à la fermeture du diaphragme ne soit pas linéaire avec l'intensité. C'est ce critère qui sera mis en oeuvre au chapitre 8 pour montrer qu'un OPO confocal au dessus du seuil produit des faisceaux multimodes.

## C Faisceau multimode produit par la cavité héli-confocale

On va reprendre le traitement de la cavité héli-confocale, du chapitre 3, mais quantiquement cette fois. Rappelons que la cavité confocale est constituée d'un miroir plan, et d'un miroir de rayon de courbure  $R$ , séparés d'une distance  $R/2$ . La coordonnée transverse sera notée  $\vec{x}$ . Les champs sont maintenant des opérateurs. On note respectivement  $\hat{B}^{in,+}(\vec{x}, t)$ ,  $\hat{B}^{(+)}(\vec{x}, t)$ ,  $\hat{B}^{out,+}(\vec{x}, t)$  les opérateurs de fréquence positive à l'entrée, dans, et sortant de la cavité. Ils sont repérés dans un plan transverse de référence, dans notre cas le miroir plan, qui sera le plan où on placera le cristal. Afin d'alléger les notations et surtout d'éviter les confusions, on omettra dans toute la suite la notation  $(+)$  associée aux fréquences positives. Les opérateurs champs électriques correspondants sont:

$$\hat{E}(\vec{x}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}} \hat{B}(\vec{x}, t) \quad (6.34)$$

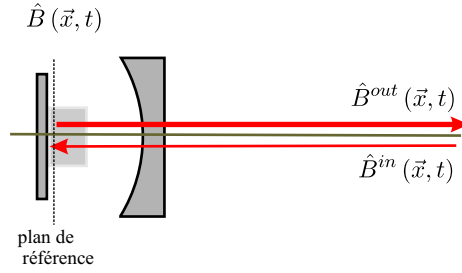


Fig. 6.2: Schéma de l'injection dans la cavité OPO héli-confocale type I.

On peut voir sur la figure 6.2 le schéma de l'expérience. On se place en type I afin de simplifier au maximum le problème. Le miroir plan est supposé parfaitement réfléchissant, et l'entrée et la sortie se font par le miroir courbe. On utilise un circulateur optique (par exemple un isolateur optique) pour injecter et récupérer le signal sur le même miroir.

les opérateurs  $\hat{B}^k(\vec{x}, t)$  (où  $k = in, out$  ou rien) on étés normés de façon à ce que le commutateur pour un état cohérent vaille :

$$\left[ \hat{B}^k(\vec{x}, t), \hat{B}^{k\dagger}(\vec{x}', t') \right] = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \quad (6.35)$$

Le traitement quantique de la cavité se fait, du moins au début, de manière similaire au traitement classique mais sur les opérateurs champ et non sur le champ classique. Nous allons en reprendre succinctement les étapes. Soit  $\lambda$  la longueur d'onde. La cavité est dégénérée et boucle sur elle-même en 4 Aller-Retours (le nombre de mode par intervalle spectral libre est de 4). Notons la longueur exacte de la cavité  $L = \frac{n}{2}\lambda + \delta$ . Sur un aller-retour de cavité, la



lumière effectue l'équivalent d'une transformation par un système f-f (le miroir jouant le rôle de la lentille de focale  $f = \frac{R}{2}$ ). La matrice ABCD d'un Aller retour s'écrit:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{R}{2} \\ -\frac{2}{R} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

c'est à dire que le système effectue une transformée de Fourier spatiale à 2D:

$$\hat{\hat{B}}(\vec{y}, t) = \frac{2}{\lambda R} \int \hat{B}^\dagger(\vec{x}, t) e^{-i\frac{4\pi}{\lambda R}\vec{y}\vec{x}} d^2\vec{x} \quad (6.37)$$

à laquelle s'ajoute un déphasage  $e^{i\frac{2\pi}{\lambda}2\delta}$  dû à la propagation, et un facteur  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  correspondant à un déphasage dû à la transformée de Fourier.

Comme on a  $M^2 = -Id$  et  $M^4 = Id$ , il découle que deux tours correspondent à une inversion de coordonnées, et que la cavité boucle sur elle-même en quatre tours. La condition de résonance de la cavité est donc, en notant  $a = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\delta + \frac{\pi}{2}}$ :

$$a^4 = 1 \quad (6.38)$$

et le champ  $\{\hat{B}(\vec{x}, t)\}$  dans la cavité s'écrit comme somme:

$$\hat{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4} \left( \hat{B}^{in}(\vec{x}, t) + a^2 \hat{B}^{in}(-\vec{x}, t) + a \left( \hat{\hat{B}}^{in}(\vec{x}, t) + a^2 \hat{\hat{B}}^{in}(-\vec{x}, t) \right) \right) \quad (6.39)$$

on a  $a = 1, i, -1$  ou  $-i$ . La valeur de  $a$  correspond à la résonance sur laquelle on se place, et se comprend en terme de parité du champ de sortie.

La base des modes  $TEM_{pq}$  est une base des modes de cavité, base orthonormée de plus. Soit  $\hat{B}(\vec{x}, t)$  un champ. La projection sur la famille de mode  $i$  vérifiant  $p+q = i$  [4] sera notée  $\hat{B}_i(\vec{x}, t)$ . Notons que la famille des  $\{\hat{B}_i(\vec{x}, t)\}$  est aussi orthogonale car elle projette sur des espaces disjoints.

Lorsque la cavité est de longueur telle que la famille des modes résonnants soit la famille  $i$ , la partie  $\hat{B}_i(\vec{x}, t)$  du champ résonne dans la cavité, et la partie non résonnante du champ est réfléchi.

### C.1 Commutateur de la cavité vide

On prendra par la suite  $a = 1$ , ce qui correspond à faire résonner dans la cavité la partie paire du champ et de sa transformée de Fourier, c'est à dire dans l'interprétation classique, les modes  $f_{pq}$  vérifiant  $n = p + q = 0$  [4].

Le champ résonnant s'écrira:

$$\begin{aligned} \hat{B}_0(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4} \left( \hat{B}^{in}(\vec{x}, t) + \hat{B}^{in}(-\vec{x}, t) + \left( \hat{\hat{B}}^{in}(\vec{x}, t) + \hat{\hat{B}}^{in}(-\vec{x}, t) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \hat{B}_+^{in}(\vec{x}, t) + \hat{B}_+^{in}(\vec{x}, t) \right) \end{aligned} \quad (6.40)$$

où on note  $\hat{B}_\pm(\vec{x}, t) = \frac{1}{2}(\hat{B}(\vec{x}, t) \pm \hat{B}(-\vec{x}, t))$  et  $\hat{\tilde{B}}_\pm(\vec{x}, t) = \frac{1}{2}(\hat{\tilde{B}}(\vec{x}, t) \pm \hat{\tilde{B}}(-\vec{x}, t))$  la partie paire (resp. impaire) du champ et de sa transformée de Fourier.

Cherchons maintenant le commutateur de  $\hat{B}_0$ .

$$\left[ \hat{B}_0(\vec{x}, t), \hat{B}_0^\dagger(\vec{x}', t') \right] = \frac{1}{4} \left[ \hat{B}_+^{in}(\vec{x}, t) + \hat{\tilde{B}}_+^{in}(\vec{x}, t), \hat{B}_+^{in\dagger}(\vec{x}', t') + \hat{\tilde{B}}_+^{in\dagger}(\vec{x}', t') \right] \quad (6.41)$$

où  $\delta_\pm(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{2}(\delta(\vec{x} - \vec{x}') \pm \delta(\vec{x} + \vec{x}'))$  les diracs symétrisés et antisymétrisés.

Les termes non croisés couplent les positions symétriques:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{B}_+^{in}(\vec{x}, t), \hat{B}_+^{in\dagger}(\vec{x}', t') \right] &= \frac{1}{2}(\delta(\vec{x} - \vec{x}') + \delta(\vec{x} + \vec{x}')) \delta(t - t') \\ &= \delta_+(\vec{x}, \vec{x}') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (6.42)$$

et

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\tilde{B}}_+^{in}(\vec{x}, t), \hat{\tilde{B}}_+^{in\dagger}(\vec{x}', t') \right] &= \frac{4}{\lambda^2 R^2} \iint \left[ \hat{B}_+^{in}(\vec{x}, t), \hat{B}_+^{in\dagger}(\vec{x}', t') \right] e^{i\frac{4\pi}{\lambda R}\vec{x}\vec{y}} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda R}\vec{y}'\vec{x}'} d^2\vec{y} d^2\vec{y}' \\ &= \frac{4}{\lambda^2 R^2} \delta_+ \left( \frac{2}{\lambda R}\vec{x}, \frac{2}{\lambda R}\vec{x}' \right) \delta(t - t') \\ &= \delta_+(\vec{x}, \vec{x}') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (6.43)$$

Les termes croisés couplent tous les points transverses:

$$\begin{aligned} \left[ \hat{B}_+^{in}(\vec{x}, t), \hat{\tilde{B}}_+^{in\dagger}(\vec{x}', t') \right] &= \left[ \hat{B}_+^{in}(\vec{x}, t), \frac{2}{\lambda R} \int \hat{B}_+^{in\dagger}(\vec{y}', t') e^{-i\frac{4\pi}{\lambda R}\vec{y}'\vec{x}'} d^2\vec{y}' \right] \\ &= \frac{2}{\lambda R} \int \left[ \hat{B}_+^{in}(\vec{x}, t), \hat{B}_+^{in\dagger}(\vec{y}', t') \right] e^{-i\frac{4\pi}{\lambda R}\vec{y}'\vec{x}'} d^2\vec{y}' \\ &= \frac{2}{\lambda R} \frac{1}{2} \delta(t - t') \int (\delta(\vec{x} - \vec{y}') + \delta(\vec{x} + \vec{y}')) e^{-i\frac{4\pi}{\lambda R}\vec{y}'\vec{x}'} d^2\vec{y}' \\ &= \frac{2}{\lambda R} \cos \left( \frac{4\pi}{\lambda R}\vec{x} \cdot \vec{x}' \right) \delta(t - t') \end{aligned} \quad (6.44)$$

Si on veut remonter du facteur  $\frac{4\pi}{\lambda R}$  à une grandeur caractéristique de la dimension transverse de la cavité, on peut remarquer que la taille du mode propre  $TEM_{00}$  de la cavité est  $w_0^2 = \frac{R\lambda}{2\pi}$ . d'où finalement le commutateur :

$$\boxed{\left[ \hat{B}_0(\vec{x}, t), \hat{B}_0^\dagger(\vec{x}', t') \right] = \frac{1}{2} \left( \delta_+(\vec{x}, \vec{x}') + \frac{1}{\pi w_0^2} \cos \left( \frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{w_0^2} \right) \right) \delta(t - t') = \delta_0(\vec{x}, \vec{x}') \delta(t - t')} \quad (6.45)$$

et de manière similaire :

$$\left[ \hat{B}_1(\vec{x}, t), \hat{B}_1^\dagger(\vec{x}', t') \right] = \frac{1}{2} \left( \delta_-(\vec{x}, \vec{x}') + \frac{1}{\pi w_0^2} \sin \left( \frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{w_0^2} \right) \right) \delta(t - t') = \delta_1(\vec{x}, \vec{x}') \delta(t - t') \quad (6.46)$$

$$\left[ \hat{B}_2(\vec{x}, t), \hat{B}_2^\dagger(\vec{x}', t') \right] = \frac{1}{2} \left( \delta_+(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{\pi w_0^2} \cos\left(\frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{w_0^2}\right) \right) \delta(t - t') = \delta_2(\vec{x}, \vec{x}') \delta(t - t') \quad (6.47)$$

$$\left[ \hat{B}_3(\vec{x}, t), \hat{B}_3^\dagger(\vec{x}', t') \right] = \frac{1}{2} \left( \delta_-(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{\pi w_0^2} \sin\left(\frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{w_0^2}\right) \right) \delta(t - t') = \delta_3(\vec{x}, \vec{x}') \delta(t - t') \quad (6.48)$$

où les  $\delta_i(\vec{x}, \vec{x}')$  sont définis implicitement. Enfin,

$$\left[ \hat{B}_i(\vec{x}, t), \hat{B}_j^\dagger(\vec{x}', t') \right] = 0 \text{ pour tout } i \neq j \quad (6.49)$$

La forme du commutateur confirme les résultats classiques de transmission d'image par la cavité héli-confocale. Elle y ajoute une information importante : la cavité héli-confocale couple non seulement les positions paires, mais tous les points du plan transverses entre eux.

On retrouve également que le commutateur du champ total  $\sum_i \delta_i(\vec{x}, \vec{x}')$  vaut bien  $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ .

## C.2 Interaction paramétrique

Nous allons maintenant étudier l'effet paramétrique proprement dit. On va le faire par une méthode Hamiltonienne, proche de la méthode utilisée au chapitre 4. On se donne une pompe de forme transverse  $\bar{A}_P(\vec{x}, t)$ , paire.

Pour cela on repart de l'hamiltonien de l'interaction paramétrique pour le champ résonnant  $\hat{B}_0(\vec{x}, t)$  dans la cavité :

$$H^{int} = \frac{i\hbar g}{2} \int d^2\vec{x} \{ \bar{A}_P(\vec{x}) [\hat{B}_0^\dagger(\vec{x}, t)]^2 - \bar{A}_P^*(\vec{x}) [\hat{B}_0(\vec{x}, t)]^2 \} \quad (6.50)$$

et de celui de l'évolution libre dans la cavité :

$$H_{free} = \hbar\gamma\Delta \int d^2\vec{x} \hat{B}_0^\dagger(\vec{x}, t) \hat{B}_0(\vec{x}, t) \quad (6.51)$$

L'équation de Langevin donnant l'évolution temporelle dans la cavité est alors :

$$\frac{\delta}{\delta t} \hat{B}_0(\vec{x}, t) = -\gamma \left[ (1 + i\Delta) \hat{B}_0(\vec{x}, t) - A_P(\vec{x}) \hat{B}_0^\dagger(\vec{x}, t) \right] + \sqrt{2\gamma} \hat{B}_0^{in}(\vec{x}, t) \quad (6.52)$$

où  $A_P(\vec{x}) = (g/\gamma) \bar{A}_P(\vec{x})$  est la puissance de pompe normalisée telle que  $A_P = 1$  au seuil. Le champ sortant de l'OPO est :

$$\hat{B}_i^{out}(\vec{x}, t) = \sqrt{2\gamma} \hat{B}_i(\vec{x}, t) - \hat{B}_i^{in}(\vec{x}, t) \quad (6.53)$$

On résout ces deux équations en passant dans le domaine des fréquences et on obtient une relation entrée-sortie pour le champ résonnant :

$$\boxed{\hat{B}_i^{out}(\vec{x}, \Omega) = U(\vec{x}, \Omega) \hat{B}_0^{in}(\vec{x}, \Omega) + V(\vec{x}, \Omega) \hat{B}_0^{in\dagger}(\vec{x}, -\Omega)} \quad (6.54)$$

où

$$\hat{B}_i^{out}(\vec{x}, \Omega) = \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \hat{B}_i^{out}(\vec{x}, t) e^{-i\Omega t} \quad (6.55)$$

et

$$U(\vec{x}, \Omega) = \frac{(1 - i(\Delta - \frac{\Omega}{\delta}))(1 - i(\Delta + \frac{\Omega}{\delta})) + A_P^2(\vec{x})}{(1 + i(\Delta + \frac{\Omega}{\delta}))(1 - i(\Delta - \frac{\Omega}{\delta})) - A_P^2(\vec{x})} \quad (6.56)$$

$$V(\vec{x}, \Omega) = \frac{2A_P^2(\vec{x})}{(1 + i(\Delta + \frac{\Omega}{\delta}))(1 - i(\Delta - \frac{\Omega}{\delta})) - A_P^2(\vec{x})}. \quad (6.57)$$

En se plaçant pour simplifier à résonance parfaite ( $\Delta = 0$ ) et à fréquence nulle  $\Omega = 0$  le résultat se simplifie en :

$$U(\vec{x}, \Omega = 0) = \frac{1 + A_P^2(\vec{x})}{1 - A_P^2(\vec{x})} \quad (6.58)$$

$$V(\vec{x}, \Omega = 0) = \frac{2A_P^2(\vec{x})}{1 - A_P^2(\vec{x})}. \quad (6.59)$$

On peut reconnaître une relation proche de l'équation 5.32 du chapitre 5, où le mode d'injection en type I correspond au mode à  $+45^\circ$  des axes signal et complémentaire en type II, et qui est maintenant "locale". L'effet de la cavité sur les modes non résonnants du champ est une simple réflexion sur la face d'entrée:

$$\hat{B}_{1/2/3}^{out}(\vec{x}, t) = -\hat{B}_{1/2/3}^{in}(\vec{x}, t) \quad (6.60)$$

## D Génération de vide comprimé multimode

On va considérer notre OPO type I, héli-confocal, sous le seuil, non injecté. On sait qu'un tel OPO, monomode, produit du vide comprimé monomode sur le mode résonnant de la cavité (voir par exemple [Reynaud92]).

Dans cette partie on prendra du vide cohérent en entrée :

$$\langle \hat{B}^{in\dagger}(\vec{x}, t) \hat{B}^{in}(\vec{x}, t) \rangle = 0 \quad (6.61)$$

et une puissance de pompe inférieure au seuil, soit pour la puissance normalisée :

$$0 \leq A_P(x) < 1 \quad (6.62)$$

### D.1 Détection homodyne

Afin de détecter les fluctuations du vide, on va effectuer une détection homodyne du spectre de bruit. On mélange sur un cube séparateur de polarisation (BS) le champ sortant

de l'OPO à un oscillateur local (OL), intense, stationnaire, d'enveloppe  $\alpha_L(\vec{x})$  et de phase plane au niveau du cube.

À l'aide de lentilles, on image également sur le cube le plan de sortie de l'OPO, avec une phase plane (figure 6.3) Les deux sorties du cube sont également imagées sur deux photodétecteurs. Noter qu'on peut facilement imager le champ lointain du plan du cristal, également avec une phase plane (figure 6.4) en changeant la distance avant et après la lentille. Il faut également en pratique prendre en compte l'effet du miroir de sortie (qui se comporte comme une lentille divergente), qu'on n'a pas représenté ici par souci de simplicité.

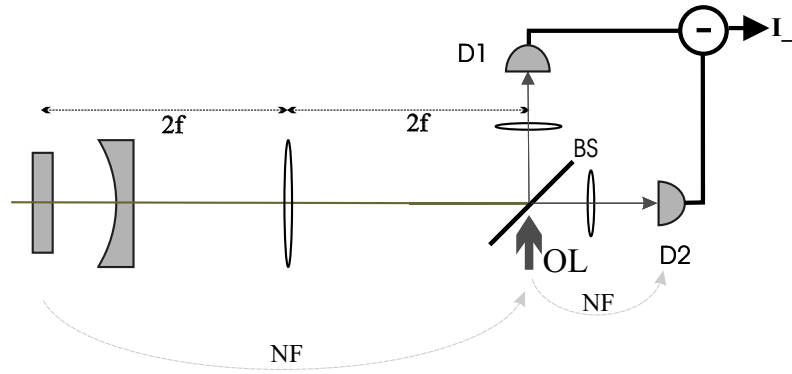


Fig. 6.3: Imagerie sur le cube du plan du cristal de l'OPO.

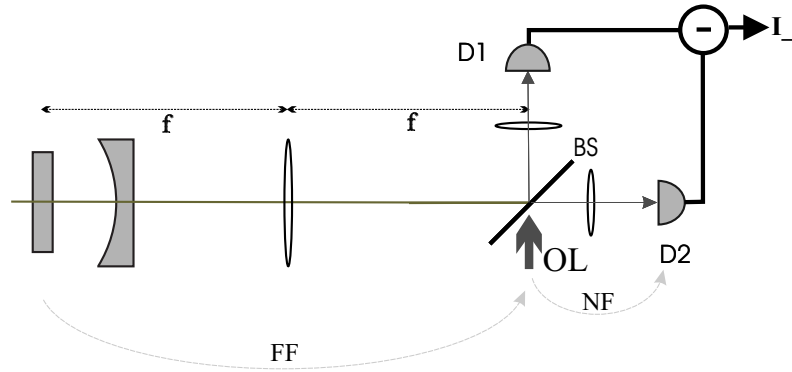


Fig. 6.4: Imagerie sur le cube du champ lointain plan du cristal de l'OPO.

La différence des photocourants est une mesure de l'opérateur quadrature du champ et s'écrit (en prenant une efficacité quantique parfaite de  $\eta = 1$  pour les détecteurs) :

$$\hat{I}_-(\Omega) = \int_{s_{det}} d^2\vec{x} \left[ \hat{B}^{out}(\vec{x}, \Omega) \alpha_L^*(\vec{x}) + \hat{B}^{out\dagger}(\vec{x}, \Omega) \alpha_L(\vec{x}) \right] \quad (6.63)$$

où  $s_{det}$  est l'image réciproque de la surface du détecteur sur le cube, où le champ  $\hat{B}^{out}(\vec{x}, \Omega)$  est le champ total issu de l'OPO:

$$\hat{B}^{out}(\vec{x}, \Omega) = \hat{B}_1^{out}(\vec{x}, \Omega) + \hat{B}_2^{out}(\vec{x}, \Omega) + \hat{B}_3^{out}(\vec{x}, \Omega) + \hat{B}_4^{out}(\vec{x}, \Omega) \quad (6.64)$$

Le spectre de bruit de cette mesure est donnée par:

$$V(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega' \langle \delta \hat{I}_-(\Omega) \delta \hat{I}_-(\Omega') \rangle \quad (6.65)$$

où

$$\delta \hat{I}_-(\Omega) = \hat{I}_-(\Omega) - \langle \delta \hat{I}_-(\Omega) \rangle = \hat{I}_-(\Omega) \quad (6.66)$$

En développant  $V(\Omega)$  on obtient:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega' \int_{s_{det}} d^2\vec{x} \int_{s_{det}} d^2\vec{x}' \\ &\quad \left( \langle \left( \hat{B}_0^{out}(\vec{x}, \Omega) \alpha_L^*(\vec{x}) + \hat{B}_0^{out\dagger}(\vec{x}, \Omega) \alpha_L(\vec{x}) \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \hat{B}_0^{out}(\vec{x}', \Omega') \alpha_L^*(\vec{x}') + \hat{B}_0^{out\dagger}(\vec{x}', \Omega') \alpha_L(\vec{x}') \right) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{i \neq 0} \alpha_L(\vec{x}) \alpha_L^*(\vec{x}') \langle \hat{B}_i^{out}(\vec{x}, \Omega) \hat{B}_i^{out\dagger}(\vec{x}', \Omega') \rangle \end{aligned} \quad (6.67)$$

où on a éliminé tous les termes de la forme  $\langle \hat{B}_i^\dagger(\vec{x}, \Omega) \hat{B}_{j \neq i}(\vec{x}', \Omega') \rangle$  qui sont nuls car les opérateurs sont appliqués au vide et agissent dans des espaces différents.

Avec les relations d'entrée-sortie pour les modes résonnants et non-résonnants, on obtient:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega' \int_{s_{det}} d^2\vec{x} \int_{s_{det}} d^2\vec{x}' \\ &\quad \left( \delta(\Omega + \Omega') \delta_0(\vec{x}, \vec{x}') (U(\vec{x}, \Omega) \alpha_L^*(\vec{x}) + V^*(\vec{x}, \Omega) \alpha_L(\vec{x})) \right. \\ &\quad \left( U^*(\vec{x}', -\Omega') \alpha_L(\vec{x}') + V(\vec{x}', \Omega') \alpha_L^*(\vec{x}') \right) \\ &\quad \left. + \alpha_L(\vec{x}) \alpha_L^*(\vec{x}') \delta(\Omega + \Omega') \sum_{i \neq 0} \delta_i(\vec{x}, \vec{x}') \right) \end{aligned} \quad (6.68)$$

Cette expression se simplifie en faisant apparaître  $\sum_i \delta_i(\vec{x}, \vec{x}')$  qui est le commutateur du champ complet et vaut  $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ . Le bruit associé à ce terme est donc le bruit quantique standard (BQS) associé à la détection d'un état cohérent de même intensité.

$$N = \int_{s_{det}} d^2\vec{x} |\alpha_L(\vec{x})|^2 \quad (6.69)$$

on a alors:

$$V(\Omega) = N + S(\Omega) \quad (6.70)$$

où

$$\begin{aligned}
 S(\Omega) = \int_{s_{det}} d^2\vec{x} \int_{s_{det}} d^2\vec{x}' \delta_0(\vec{x}, \vec{x}') & \left[ \alpha_L^*(\vec{x}) \alpha_L(\vec{x}') U(\vec{x}, \Omega) U^*(\vec{x}', -\Omega') \right. \\
 & + \alpha_L^*(\vec{x}) \alpha_L^*(\vec{x}') U(\vec{x}, \Omega') V(\vec{x}', \Omega') \\
 & + \alpha_L(\vec{x}) \alpha_L(\vec{x}') V^*(\vec{x}, -\Omega) U^*(\vec{x}', -\Omega') \\
 & \left. + \alpha_L(\vec{x}) \alpha_L^*(\vec{x}') (V^*(\vec{x}, \Omega) V(\vec{x}', \Omega') - 1) \right] \quad (6.71)
 \end{aligned}$$

est le spectre de bruit associé à l'ordre normal. Le terme dans l'intégrale est la fonction de corrélation spatiale du champ en sortie.

Dans le cas d'une pompe et d'un oscillateur local à symétrie paire, on peut la réécrire :

$$\begin{aligned}
 S(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{s_{det}} d^2\vec{x} \int_{s_{det}} d^2\vec{x}' \delta_+(\vec{x}, \vec{x}') & \left[ |\alpha_L(\vec{x})|^2 \left( |V(\vec{x}, \Omega)|^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + |V(\vec{x}, -\Omega)|^2 + \text{Re} \left[ e^{-2i\phi_L(\vec{x})} U(\vec{x}, \Omega) V(\vec{x}, -\Omega) \right] \right) \right. \\
 & + \int_{s_{det}} d^2\vec{x} \int_{s_{det}} d^2\vec{x}' \cos\left(\frac{2\vec{x}\vec{x}'}{\omega_0^2}\right) \left[ \alpha_L^*(\vec{x}) \alpha_L(\vec{x}') U(\vec{x}, \Omega) U^*(\vec{x}', -\Omega') \right. \\
 & + \alpha_L^*(\vec{x}) \alpha_L^*(\vec{x}') U(\vec{x}, \Omega') V(\vec{x}', \Omega') + \alpha_L(\vec{x}) \alpha_L(\vec{x}') V^*(\vec{x}, -\Omega) U^*(\vec{x}', -\Omega') \\
 & \left. \left. + \alpha_L(\vec{x}) \alpha_L^*(\vec{x}') (V^*(\vec{x}, \Omega) V(\vec{x}', \Omega') - 1) \right] \quad (6.72)
 \end{aligned}$$

où le premier terme est un terme que l'on trouve pour une cavité confocale, et le deuxième terme vient du mélange dans la cavité héli-confocale de l'image avec sa transformée de Fourier spatiale.

Comment interpréter ce deuxième terme, qui semble indiquer qu'il existe des corrélations entre toutes les positions transverses? Si on regarde l'évolution de ces corrélations en fonction de la distance entre les points on voit que le terme en  $\cos\left(\frac{2\vec{x}\vec{x}'}{\omega_0^2}\right)$  oscille toujours entre  $-1$  et  $1$ , par contre il n'oscille lentement que pour  $|\vec{x}|$  et  $|\vec{x}'|$  bien inférieurs à  $\omega_0$ . Dès qu'on regarde les corrélations entre deux points éloignés de l'axe, on voit que ce terme oscille très vite (entre corrélations et anticorrélations). Par conséquent si on considère des détecteurs de taille données, la corrélation va toujours tendre vers 0 si on place ces détecteurs loin de l'axe, car le cosinus oscillant très vite, les corrélations et les anticorrélations vont se moyenner sur la surface des détecteurs.

## D.2 Bruit sur un détecteur circulaire

Un détecteur de taille variable accessible expérimentalement est un détecteur ponctuel, précédé d'un diaphragme. La géométrie adaptée à l'intégration sur une telle surface est la géométrie cylindrique.

En notant  $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x}' = \begin{pmatrix} r' \cos \theta' \\ r' \sin \theta' \end{pmatrix}$  il vient que :

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \quad (6.73)$$

le commutateur  $\delta_0(\vec{x}, \vec{x}')$  devient :

$$\begin{aligned} \delta_0(r, r', \theta, \theta') &= \frac{1}{4r} (\delta(r - r') \delta(\theta - \theta') + \delta(r - r') \delta(\theta - \theta' + \pi)) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi w_0^2} \cos\left(\frac{2rr' \cos(\theta - \theta')}{w_0^2}\right) \end{aligned} \quad (6.74)$$

Le diaphragme ne sélectionne pas angulairement, on peut donc considérer le commutateur correspondant à deux anneaux situés à  $r$  et  $r'$  respectivement:

$$\delta_0(r, r') = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta_0(r, r', \theta, \theta') d\theta d\theta' \quad (6.75)$$

sachant que:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta') d\theta d\theta' = 2\pi \quad (6.76)$$

et d'autre part d'après [AbramowitzStegun] que :

$$\int_0^\pi dx \cos(z \cos x) = \pi J_0(z) \quad (6.77)$$

où  $J_0(z)$  est la fonction de Bessel d'ordre 0, il découle pour le commutateur entre deux anneaux situés à  $r$  et  $r'$  :

$$\delta_0(r, r') = \pi \left[ \frac{1}{r} \delta(r - r') + \frac{2}{w_0^2} J_0\left(\frac{2rr'}{w_0^2}\right) \right] \quad (6.78)$$

Avec ce commutateur, on peut reprendre l'expression 6.71 et obtenir la fonction de corrélation entre deux anneaux situés à  $r$  et  $r'$ , d'épaisseur  $dr$  et  $dr'$ , qui dans le cas où pompe et oscillateur local sont à symétrie circulaire devient :

$$\begin{aligned} S(r, r') &= rr' \delta_0(r, r') \quad (6.79) \\ &\quad \left[ \alpha_L^*(r) \alpha_L(r') U(r, \Omega) U^*(r', -\Omega') + \alpha_L^*(r) \alpha_L^*(r') U(r, \Omega') V(r', \Omega') \right. \\ &\quad \left. + \alpha_L(r) \alpha_L(r') V^*(r, -\Omega) U^*(r', -\Omega') + \alpha_L(r) \alpha_L^*(r') (V^*(r, \Omega) V(r', \Omega') - 1) \right] \end{aligned}$$

Un exemple de simulation, réalisée pour une pompe et un oscillateur local plan, puis avec une pompe gaussienne de taille  $w_p = 3w_0$  et un oscillateur local plan, et pour une intensité de pompe  $A_p = 0.8$  soit à 80% du seuil, est donné sur la Figure 6.5, où on a représenté les corrélations entre anneaux sur la quadrature comprimée, normalisées de la même manière que pour l'équation 6.25, c'est à dire qu'on a représenté la quantité :

$$S_{norm}(r, r') = \frac{S(r, r')}{\sqrt{S(r, r)S(r', r')}} \quad (6.80)$$



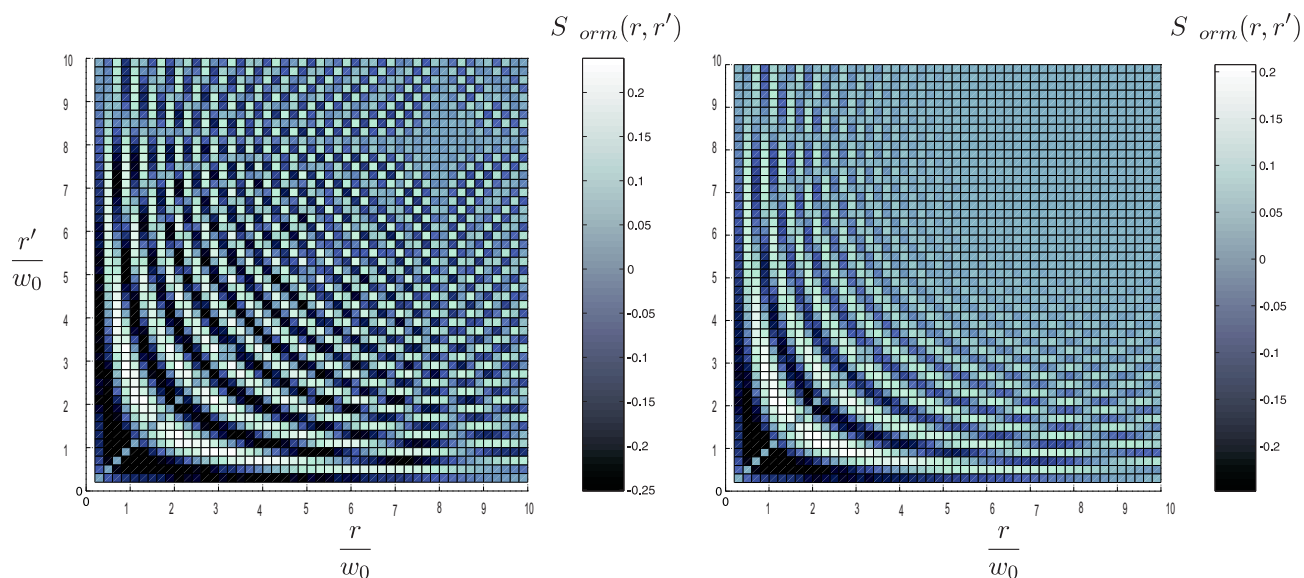


Fig. 6.5: Corrélations normalisées entre les quadratures comprimées pour deux anneaux situés à  $r$  et  $r'$  de largeur  $w_0/5$ . à gauche: pompe et oscillateur local plan. à droite: pompe gaussienne avec  $w_P = 3w_0$ .

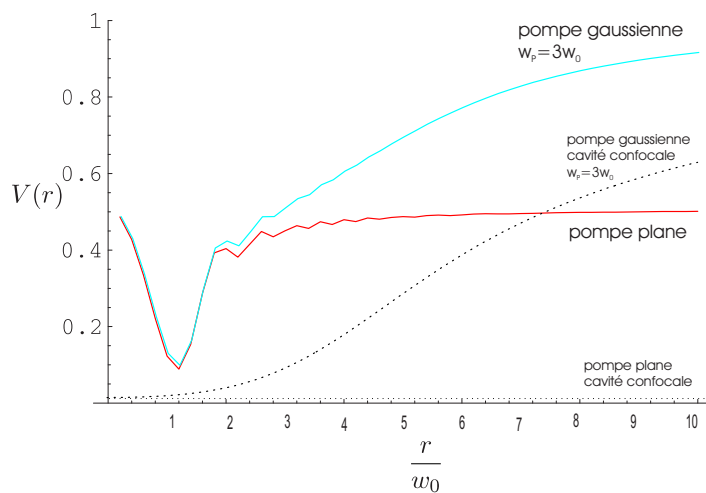


Fig. 6.6: bruit normalisé pour un diaphragme ouvert en fonction de la largeur d'ouverture (oscillateur local plan, pompe plane et gaussienne). En pointillé les mêmes courbes pour une cavité confocale.

Sur la diagonale, on regarde la corrélation entre un anneau et lui-même, qui est forcément égale à l'unité. Pour améliorer la lecture, on a mis à zéro les valeurs des points sur la diagonale. Hors diagonale, on peut voir que les corrélations spatiales sont présentes, mais sont faibles sauf à proximité de l'axe.

On a également représenté sur la figure 6.6 le bruit normalisé au bruit quantique standard pour la même quadrature à la fermeture du diaphragme. On voit que le faisceau total (quand  $r$  grand) est comprimé sur cette quadrature, mais que le bruit n'est pas uniformément réparti. Par rapport au critère que nous avons défini, notre faisceau est donc bien multimode. On voit que la taille caractéristique de la compression est de l'ordre de  $w_0$ , ce qu'on peut comprendre facilement car c'est la taille caractéristique de la tache centrale de la transformée de Fourier. Lorsque la taille du diaphragme est beaucoup plus grande ou plus petite que  $w_0$ , on décompose l'oscillateur local transmis sur les modes  $p + q = 0$ [2], c'est à dire qu'on détecte non seulement la quadrature du champ  $\hat{B}_0$  (qui est comprimée), mais aussi celle du champ  $\hat{B}_2$  (qui est cohérente), par conséquent on ne détecte que la moitié de la compression totale sur le détecteur. Lorsque le diaphragme est d'une taille proche de  $w_0$ , alors la décomposition de l'oscillateur local coupé par le diaphragme se fait principalement sur le mode  $TEM_{00}$  de la cavité, donc plutôt sur le champ  $\hat{B}_0$  que sur  $\hat{B}_2$ , d'où une meilleure compression. Lorsque la pompe est gaussienne, on voit que les effets sont plus localisés autour de l'axe.

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a donc introduit les principales notions de l'optique quantique transverse, ainsi qu'un critère permettant de montrer qu'un faisceau est bien multimode. Enfin, on a étudié d'un point de vue quantique la cavité héli-confocale, qu'on avait précédemment étudiée classiquement au chapitre 3. On a étudié le vide comprimé émis par une telle cavité dans laquelle on a placé un cristal paramétrique (c'est à dire un OPO héli-confocal), et on a montré que ce vide comprimé remplit bien le critère précédemment introduit et est donc bien multimode. Le comportement de ce système pour amplifier une image n'a pas été abordé ici, mais cependant, à part des effets de bruit et de corrélation venant de la pompe (tels qu'étudiés dans un OPO monomode au chapitre 5), les effets multimodes auxquels on s'attend devraient être peu différents pour un signal amplifié et pour du vide comprimé.



*Troisième partie*

**Amplification d'image en cavité :  
Expérience**



---

# Dispositif Expérimental

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Les sources</b>	<b>119</b>
A.1	Laser maître	119
A.2	Laser esclave	122
A.3	Cavité de doublage	123
<b>B</b>	<b>Filtrage spatial</b>	<b>124</b>
B.1	Principe de la cavité de filtrage	125
B.2	Montage expérimental	126
<b>C</b>	<b>Génération de l'image</b>	<b>127</b>
<b>D</b>	<b>Les détecteurs</b>	<b>128</b>
D.1	Caméra CCD	128
D.2	Matrice de photodiodes	130
D.3	Photodiodes	130
<b>E</b>	<b>Asservissements</b>	<b>131</b>
E.1	Isolation passive	131
E.2	Asservissement en température	132
E.3	Asservissement des cavités	133
E.4	Asservissement des phases relatives	134

---

## Introduction

Les différentes expériences menées dans ce travail utilisent l'effet  $\chi^{(2)}$  pour créer des états particuliers de la lumière (états comprimés par exemple), mais toujours en s'intéressant

plus particulièrement aux propriétés transverses de ces effets. Deux paramètres sont donc importants:

- Pour avoir un effet non-négligeable avec une puissance de pompe raisonnable (accessible avec les lasers continus disponibles) on place le cristal  $\chi^{(2)}$  en cavité. Pour la conversion paramétrique  $2\omega \rightarrow \omega$ , un cristal en cavité est un système à seuil. On notera  $I_0$  la puissance pompe seuil à  $2\omega$  du mode  $TEM_{00}$  de la cavité. Au dessus du seuil il peut osciller spontanément et émettre signal et complémentaire: on a un Oscillateur Paramétrique Optique. Sous le seuil il n'oscille pas spontanément, mais peut amplifier un faible faisceau injecté: On a un Amplificateur paramétrique Optique.
- Pour conserver les propriétés transverses en cavité, on a vu qu'il est nécessaire de travailler en cavité dégénérée. On veut faire résonner la cavité pour un grand nombre de modes transverses.

L'ordre de grandeur du seuil de fonctionnement multimode (nécessaire pour atteindre le seuil sur  $N$  modes) dans une cavité dont le seuil monomode est  $I_0$  est

$$I_{pompe} \sim N * I_0.$$

Par conséquent, pour avoir des effets multimodes appréciables, il est donc nécessaire:

- d'avoir un seuil monomode aussi bas que possible,
- de disposer d'une puissance de pompe grande.

La première condition va nous obliger à travailler dans des cavités triplement résonnantes (résonnantes simultanément pour la pompe, le signal et le complémentaire). C'est la configuration de cavité dont le seuil est minimum, le seuil typique étant de quelques mW (typiquement 10 mW).

Si maintenant on se fixe comme objectif l'amplification d'une centaine de modes (soit environ  $10*10$  pixels), on voit que la puissance de pompe nécessaire est de l'ordre du Watt.

L'expérience se fait dans un OPO conçu pour être pompé par un laser à 532 nm et injecté par une image à 1064 nm. On étudie l'amplification dépendante de la phase, il faut donc que les faisceaux pompe et injection soient cohérents entre eux, c'est à dire qu'ils doivent être issus de la même source laser. Il existe des lasers YAG commerciaux avec deux sorties cohérentes à 532nm et 1064nm, cependant aucun n'est à ce jour suffisamment puissant pour correspondre à nos exigences. Partant d'un laser Nd:Yag non-doublé commercial, nous avons donc conçu et réalisé un système de sources adaptées à nos besoins. Ce système sera décrit dans les sections **A** et **B**. Le système -assez basique- permettant de générer les images et de les détecter seront développées dans les parties **C** et **D**. Enfin, l'ensemble de l'expérience nécessite un contrôle très poussé de tous les paramètres expérimentaux. On a donc consacré une section (**E**) aux asservissements.

	LightWave 122	Mephisto 1200
Puissance (mW)	300	1250
Largeur spectrale	<5 kHz/msec	<1 kHz/100ms
Dérive en fréquence	<50 Mhz/h	<45 MHz/3h
Bruit d'intensité relatif (dB)	<-85	<-110
Excursion en fréquence (PZT)	30 MHz	100 Mhz

TAB. 7.1: *comparatif des performances comparées de l'ancien et du nouveau laser*

## A Les sources

Ce système existait déjà avant le début de ce travail, mais nous l'avons amélioré et complété. Il consiste en un système maître/esclave où un laser primaire dit "maître", stable et monomode, va être injecté sur un laser secondaire dit "esclave", de plus forte puissance, afin de forcer son fonctionnement sur le mode du laser maître.

### A.1 Laser maître

La source laser originelle que nous utilisons est un laser Nd:YAG (grenat Yttrium-Aluminium, dopé Néodyme). Piégé dans le cristal de YAG, le néodyme présente une transition dans l'infrarouge proche à 1064 nm. Cette transition peut être pompée via une transition à quatre niveaux par une diode laser ou par une lampe autour de 800 nm [Svelto]. On l'utilise en fonctionnement continu.

La stabilité et la pureté de ce laser est primordiale pour l'ensemble de l'expérience puisqu'il va servir à injecter et à asservir plusieurs cavités [Kane85]. La pureté spatiale du faisceau (très peu d'astigmatisme, faisceau quasiment à la limite de la diffraction), ainsi que le fonctionnement monomode longitudinal sont obtenus grâce à une géométrie de cavité en anneau non plane (non-planar ring cavity ou NPRO). Cette cavité est pompée par des diodes laser qui comparativement à des lampes flash ont une efficacité d'absorption bien meilleure (car elles ont un spectre d'émission monochromatique), d'où des effets thermiques réduits. La stabilité en fréquence est due au fait que la cavité est monolithique, et que la température des diodes laser et du cristal de Nd:YAG est contrôlée précisément en température.

La première partie de ce travail a été réalisée avec un laser commercial de marque Light-wave modèle 122, qui délivrait 300 mW à 1064nm. Après une défaillance technique fatale, il a été remplacé par un laser Mephisto 1200 de chez Innolight, qui délivrait 1250 mW, avec des performances et une stabilité accrue (voir tableau 7.1).

De plus, le Mephisto comporte un circuit dit "noise-eater", qui est en fait un asservissement en intensité du laser. Il permet de réduire le bruit dû aux oscillations de relaxation du laser, autour de 600 kHz, jusque "quasiment au bruit quantique" ainsi que le spécifie la notice. En fait il est possible de régler en usine le gain de la boucle d'asservissement à notre convenance,



comme on peut le voir sur la figure 7.1.

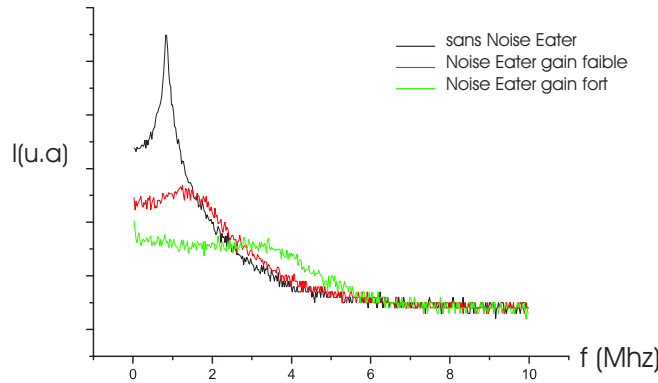


Fig. 7.1: Spectre du bruit en intensité sans et avec Noise Eater, pour différentes valeurs de gain (données Innolight). On voit qu'un gain fort permet une meilleure atténuation du pic de relaxation jusqu'à environ 2-3 MHz, mais rajoute du bruit à plus haute fréquence

La bande passante de la boucle d'asservissement est d'environ 3MHz. On sait d'après la théorie de l'asservissement d'intensité [MertzPhD] que l'abaissement du bruit basse fréquence (dans la bande passante du noise-eater) se fait généralement au détriment du bruit haute-fréquence (au delà de la bande passante de l'asservissement). Sans noise-eater, le laser est au bruit quantique standard à partir de 4 MHz (c'est à dire qu'il n'y a plus de bruit classique à partir de cette fréquence), par contre le pic de relaxation à environ 1 MHz donne un bruit classique. Avec le Noise-Eater activé, on a du bruit classique jusqu'à des fréquences plus élevées (5-6 MHz). Par ailleurs même avec un gain fort, l'asservissement réduit le bruit classique, mais ne l'annule pas. On est dans la meilleure des configurations à 5 dB du bruit quantique standard.

Ici nous avons fait le compromis d'un asservissement lâche qui supprime le pic de relaxation sans pour autant ajouter trop de bruit à haute fréquence. Ce réglage peut bien sûr être modifié par la suite si on veut travailler à plus basse fréquence. Les mesures (figure 7.2) sont faites après une lame 50/50. La différence entre la somme et la différence des photocourants nous donne le bruit classique. On voit que sans Noise-Eater on est au bruit quantique standard à partir de 4.5 MHz environ tandis qu'avec Noise-Eater on est au bruit quantique standard à 5.5 MHz environ (et le pic de relaxation est atténué de 15 dB environ).

A la sortie on place un isolateur optique afin d'éviter les phénomènes de retour qui peuvent déstabiliser le laser. On ajoute également un modulateur électro-optique (Gsanger LM0202-PHAS) qui nous permet d'ajouter une importante modulation de phase à 14,7 MHz. Cette modulation va nous permettre de réaliser une partie de nos asservissements.

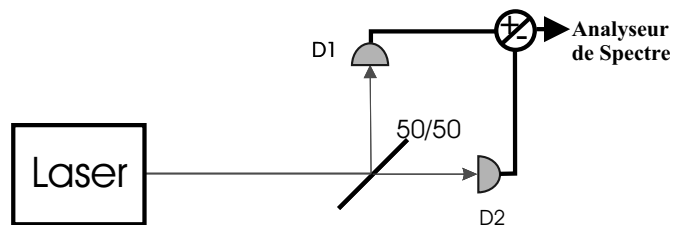
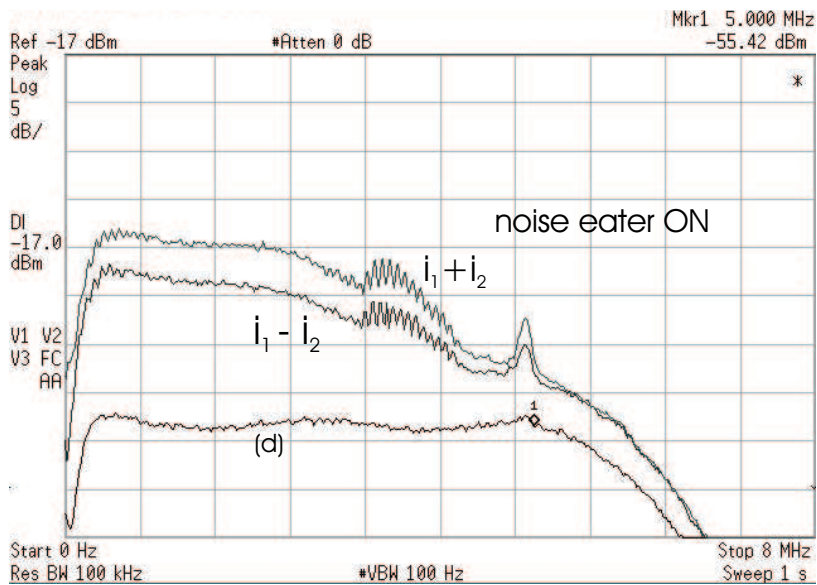
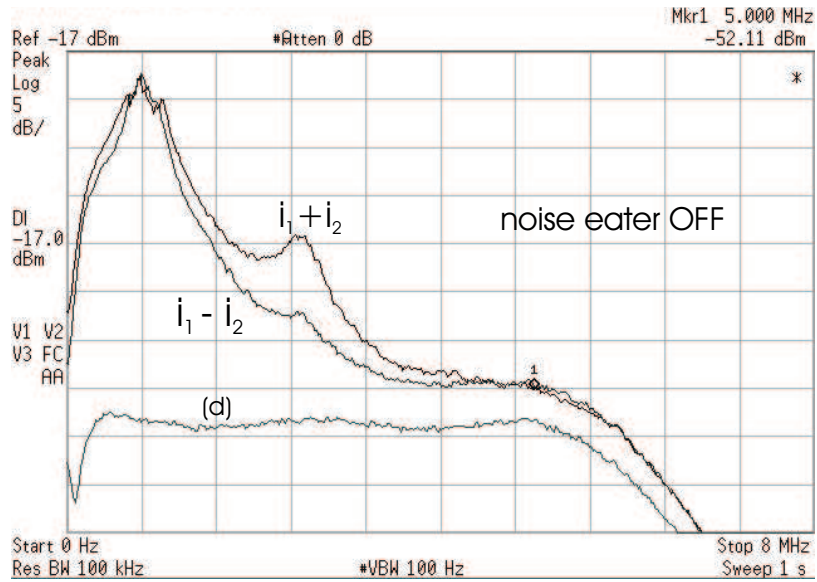


Fig. 7.2: Spectre du bruit en intensité sans (en haut) et avec (en bas) Noise Eater de notre laser. On à séparé le faisceau émis sur une lame 50/50 et fait la somme et la différence des photocourants. (d) désigne le spectre en l'absence de signal (le dark).

## A.2 Laser esclave

La puissance du laser maître est insuffisante pour obtenir suffisamment de puissance à 532 nm (même les 1,2 W du laser Mephisto). Cependant les lasers Nd:YAG commerciaux plus puissants n'ont pas la pureté spectrale et spatiale nécessaire. On a donc construit un système amplificateur qui préserve la qualité du faisceau tout en l'amplifiant.

On utilise pour cela un autre laser Nd:YAG plus puissant dit "esclave" qu'on injecte et qu'on asservit sur le laser dit "maître". Ce laser est constitué d'un barreau de Nd:YAG pompé par une lampe flash, et refroidi par eau, de marque Spectron. Placé en cavité linéaire le barreau est capable de délivrer plusieurs dizaines de Watts à 1064 nm, mais est très multimode, tant spatialement qu'en fréquence. On le place dans une cavité en anneau à 4 miroirs plans, et à un seul miroir de couplage. Cette cavité est à priori instable, mais la lampe flash crée un fort gradient de température dans le barreau, donc une lentille thermique qui stabilise la cavité. Cette lentille thermique détermine le mode propre de la cavité. Son waist est situé au point opposé dans la cavité de la lentille thermique. Pour une intensité  $I = 14,7A$  dans la lampe flash, courant nominal d'utilisation du laser, on a évalué la taille du waist à environ 300 microns, ce qui correspond à une lentille thermique de focale d'environ  $f = 1m$ .

Dans cette configuration le laser esclave délivre environ 2 à 3 Watts à 1064 nm dans chacun des deux sens de rotation possibles de la cavité. L'asservissement sur le laser esclave consiste à injecter sur le mode  $TEM_{00}$  de la cavité suffisamment de puissance, et à ajouter des pertes sur tous les autres modes, afin de favoriser le mode qu'on injecte. De cette manière, le laser ne peut laser que sur ce mode, en amplifiant l'injection et non plus l'émission spontanée (voir figure 7.3).

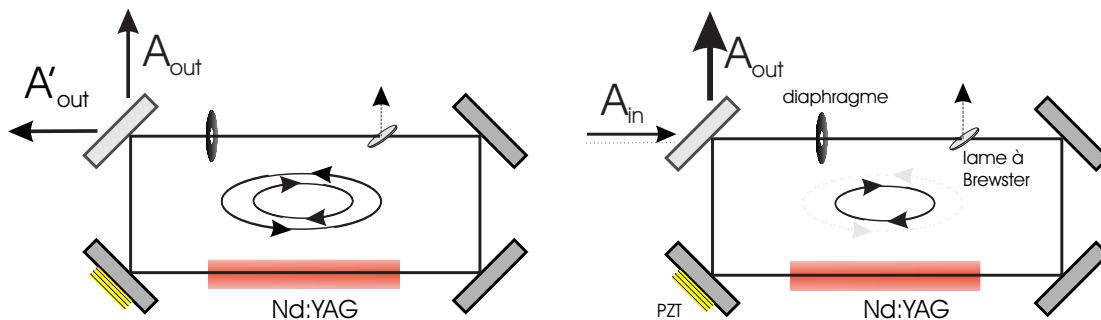


Fig. 7.3: à gauche: Sans injection, le laser esclave n'a pas de direction privilégiée donc lase dans les deux sens, et est très multimode. À droite: injecté, il ne lase que dans le sens imposé par l'injection, en l'amplifiant

Il faut noter que:

- La sélection en polarisation se fait en mettant une lame à incidence de Brewster dans la cavité. (qui favorise en fait une polarisation devant l'autre).

- La sélection spatiale est obtenue à l'aide de diaphragmes. Centrés et fermés au maximum, ils créent des pertes d'autant plus grandes que le mode transverse est étendu, ce qui favorise le  $TEM_{00}$  devant les autres modes.
- La sélection spectrale et le sens de rotation sont imposés par l'injection. En effet le laser YAG est un laser à élargissement homogène. En injectant des photons sur le mode du laser correspondant à un sens de rotation, à un mode spatial, et à une fréquence donnée (celle du laser maître), on diminue le gain sur tous les autres modes, jusqu'à les empêcher de laser : Seul le mode injecté est alors amplifié. Il est clair que la puissance injectée est déterminante : on a beaucoup gagné sur ce processus en changeant le laser maître pour un Mephisto.

La cavité est asservie en longueur sur la fréquence du laser maître par un PZT (Piezo-Electric Transducer) agissant sur un des miroirs. Cet asservissement est fait par la méthode des bandes latérales (voir page 133 pour une description complète de cette méthode) sur la modulation de phase à 14,7 MHz présente sur le laser maître.

Une fois le laser esclave bien injecté, et asservi, on dispose en sortie de ce laser de 4 à 6 W à 1064 nm, avec la même pureté spectrale que le laser de départ. Cette puissance est suffisante pour le doublage et pour l'injection.

### A.3 Cavité de doublage

La plus grande partie de la puissance laser issue du laser esclave va être doublée afin de nous fournir la puissance de pompe nécessaire à 532 nm. Après avoir prélevé la partie nécessaire à l'injection, on envoie entre 3 et 4 Watts de faisceau infrarouge à 1064 nm vers la cavité de doublage. Un jeu de lentilles et de miroirs permet d'adapter le faisceau au mode de la cavité. On fait également passer le faisceau dans un isolateur Faraday (de marque Gsanger), car une puissance non-négligeable d'infrarouge peut revenir en suivant le chemin inverse et déstabiliser le laser esclave en l'injectant dans le sens inverse.

La cavité de doublage est une cavité héli-monolithique, d'une longueur d'environ 3 cm, et constituée :

- d'un cristal de  $LiNbO_3$  dopé  $MgO$  de  $2 * 2 * 10$  mm, placé dans un four réglé en température aux alentours de  $100^\circ C$ , coupé pour la conversion  $532 \rightleftharpoons 1064$  de type I avec accord de phase non-critique autour de la température de régulation. La face arrière du cristal est traitée HR (Haute-Réflexivité) pour 1064 et 532 nm, et constitue la face arrière de la cavité. La face avant est traitée anti-reflet pour ces deux longueurs d'ondes.
- d'un miroir d'entrée plan-concave dont la face concave, de rayon de courbure  $R_C = 50$  mm, est traitée pour 96 % de réflectivité à 1064 nm, et anti-reflet à 532 nm.

Cette cavité est donc une cavité résonnante pour l'infrarouge, pas pour le faisceau à 532 nm. Elle est donc adaptée au doublage de fréquence  $1064 + 1064 \rightarrow 532$ .

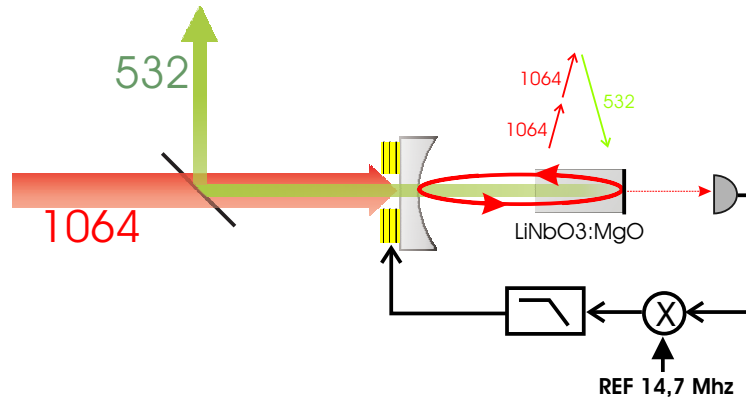


Fig. 7.4: Schéma de la cavité de doublage

On utilise pour l'asservir la méthode des bandes latérales (voir page 133) sur la modulation à 14,7 MHz sur le faisceau infrarouge résiduel transmis à travers le traitement HR déposé sur le fond du cristal.

Une lame dichroïque placée avant la cavité permet de séparer le faisceau à 532 nm (réfléchi) du faisceau 1064 nm (transmis) .

## B Filtrage spatial

On veut amplifier une image dans notre expérience, c'est à dire une forme transverse non-triviale dans notre amplificateur paramétrique. Il est donc crucial d'avoir un faisceau de départ dont on connaît parfaitement la forme transverse. De plus ce faisceau doit être cohérent avec la pompe. Il est donc logique qu'il soit issu du prélèvement d'une partie du faisceau issu du laser esclave.

Ce prélèvement se fait en plaçant une lame demi-onde et un cube polariseur en sortie du laser esclave. On peut alors détourner tout ou partie du faisceau sortant du laser esclave afin qu'il serve pour l'injection. Notons que, malgré la lame à Brewster dans la cavité du laser esclave qui sélectionne la polarisation, il reste une émission résiduelle sur la polarisation orthogonale, avec une forme transverse caractéristique à quatre lobes. Lorsqu'on ne prélève qu'une petite partie du faisceau esclave, cela signifie qu'on tourne peu la lame demi-onde. On récupère donc sur la partie du faisceau détournée la plus grande partie de ce mode parasite. On peut s'affranchir de ce mode en plaçant avant la lame d'onde un cube polariseur qui va ne laisser passer que la polarisation principale.

Cependant, même ainsi nettoyé, le faisceau prélevé n'est pas parfait. Le profil gaussien est légèrement elliptique, et le faisceau présente de l'astigmatisme. On peut résumer et caractériser la propreté d'un mode gaussien par le paramètre  $M^2$ , qui caractérise l'écart à un faisceau gaussien parfait (le faisceau diverge  $M^2$  fois plus vite et converge  $M^2$  fois moins

bien qu'un faisceau à la limite de diffraction). Bien entendu pour un  $TEM_{00}$  le paramètre  $M^2$  vaut 1, et on aura toujours  $M^2 > 1$ . A l'aide d'un ModeMaster (société Cohérent) on peut mesurer le paramètre  $M^2$ , ainsi que l'astigmatisme d'un faisceau. A la sortie du Laser Esclave asservi sur l'injection, on a mesuré un  $M^2$  de 1,5. Ce  $M^2$  n'empêche pas d'injecter la cavité de doublage, puisqu'elle va le filtrer spatialement. Par contre cela signifie que le profil présente des imperfections incontrôlées. Elle sera impropre à porter une image.

Pour disposer d'un faisceau parfaitement gaussien (à la limite de la diffraction), on est donc amené à purifier spatialement l'injection, à l'aide d'une cavité de filtrage.

### B.1 Principe de la cavité de filtrage

Une telle cavité est en fait une cavité Fabry-Perot passive. L'effet de filtre spatial vient du fait qu'une telle cavité ne résonne pas pour tous les modes spatiaux à la fois. C'est d'ailleurs cet effet de filtre spatial qu'on essaie de contourner dans les cavités transverses dégénérées. De manière évidente, cette cavité ne devra donc pas être dégénérée pour être un bon filtre spatial. Un faisceau arrivant à l'entrée de cette cavité va se trouver décomposé sur la base des modes propres (gaussiens) de la cavité. Suivant la longueur exacte de la cavité ces modes seront transmis ou réfléchis.

Elle constitue un filtre : une de ses caractéristiques doit donc être que le miroir d'entrée et le miroir de sortie soient distincts. De cette façon elle ne mélange pas la sortie de la cavité avec le champ réfléchi à l'entrée. La cavité de filtrage peut être aussi bien linéaire qu'en anneau. Cependant on va préférer une cavité en anneau. En effet l'incidence du faisceau sur les miroirs d'entrée et de sortie n'est pas normale. Par conséquent les coefficients de transmission pour les polarisation incidentes parallèlement et perpendiculairement à la surface vont être différents. Cela nous permet de choisir aisément entre deux finesses de cavité, suivant l'usage qu'on veut en faire. De plus une telle cavité évite les retours.

Le schéma de principe d'une cavité de filtrage en anneau est représenté sur la figure 7.5.

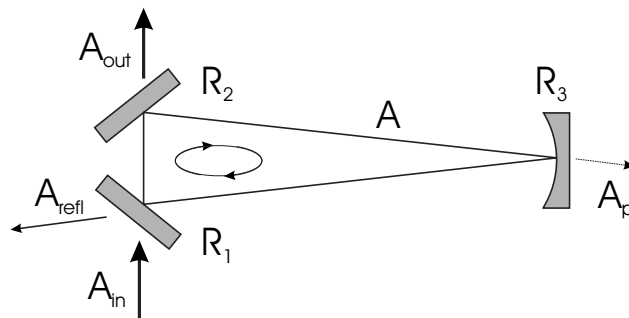


Fig. 7.5: Schéma de principe de la cavité de Filtrage. Les  $R_i$  sont les coefficients de réflexion en intensité des différents miroirs. On note  $L$  la longueur totale de la cavité

De plus, afin que l'efficacité de transmission à travers le filtre soit maximum, il est né-

cessaire de bien adapter l'impédance d'entrée et de sortie de la cavité : la transmission du miroir d'entrée et du miroir de sortie doivent être aussi identiques que possible. En notant  $r_1 = 1 - \gamma_1$  les coefficients de réflexion des miroirs  $i = 1, 2$  ou  $3$ , l'équation de bouclage de la cavité s'écrit, en régime stationnaire et à résonance :

$$\tau \frac{dA}{dt} = 0 = -(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)A + \sqrt{2\gamma_1}A_{in} \text{ avec } \tau = \frac{L}{c} \quad (7.1)$$

soit avec la condition de couplage sur le miroir de sortie :

$$A_{out} = \sqrt{2\gamma_2}A = \frac{2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}A_{in} \quad (7.2)$$

On voit que pour que la transmission soit maximale, il est nécessaire de limiter les pertes  $\gamma_3$  à la valeur la plus petite possible. Dans le cas idéal d'une cavité parfaitement adaptée en impédance  $\gamma_1 = \gamma_2$  et sans pertes ( $\gamma_3 = 0$ ), la transmission d'un tel système sera optimale : elle vaudra 1 pour une injection parfaitement adaptée au mode propre de la cavité. Pour un mode astigmatique et/ou elliptique, la transmission ne sera limitée que par l'adaptation au mode propre de la cavité.

Il est important de noter que cette cavité effectue en plus du filtrage spatial un filtrage du bruit classique du faisceau à haute-fréquence, et que c'est souvent pour cette propriété que ce type de cavité de filtrage est utilisé. En effet on peut montrer aisément ([ZhangPhD]) à partir des équations de bouclage, et en passant dans l'espace de Fourier, que le spectre de bruit en sortie normalisé au bruit quantique standard s'écrit :

$$V_{out}(\omega) = \frac{V_{in} + \left(\frac{\omega}{\omega_{cav}}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{cav}}\right)^2} \quad (7.3)$$

où

$$\omega_{cav} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{\tau} \quad (7.4)$$

soit un filtre passe-bas pour le bruit, de fréquence de coupure égale à l'inverse du temps de vie d'un photon dans la cavité  $\omega_{cav}$ . Une cavité longue et de haute finesse, donc dans laquelle le temps de vie est long, va permettre de diminuer la fréquence à partir de laquelle on est au bruit quantique standard.

## B.2 Montage expérimental

Nous avons récupéré la monture d'une ancienne cavité de filtrage du type de la figure 7.5, sur laquelle nous avons monté un jeu de miroirs adapté à nos besoins. La longueur totale d'un tour dans la cavité est d'environ 75 cm, et les caractéristiques des miroirs sont résumées sur le tableau 7.2.

	$M_1, M_2$	$M_3$
Rayon de courbure	plan $R = \infty$	Concave -1m
Diamètre	1 pouce	1/2 pouce
Transmission polarisation p	non fournie	>50 ppm
Transmission polarisation s	700 ppm	>50 ppm

TAB. 7.2: *Caractéristiques constructeur des miroirs de la cavité de filtrage. Les polarisations p et s désignent les polarisation respectivement parallèles et perpendiculaires au plan d'incidence du faisceau avec le miroir à 45°.*

Le waist du mode propre de la cavité est situé au plus loin du miroir courbe, c'est à dire à mi-chemin des deux miroirs plans, et vaut  $w_0 = 400\mu m$ . Cette cavité n'est pas dégénérée et sera donc parfaitement monomode en sortie.

On utilise la fraction du faisceau sortant par le miroir courbe afin d'asservir la cavité, toujours par la méthode des bandes latérales.

Les pics de transmission de la cavité sont montrés sur la figure 7.6. Les pics secondaires correspondent d'une part à l'adaptation du mode à la cavité (injection, taille), que nous avons pu optimiser, d'autre part aux imperfections spatiales inhérentes au faisceau.

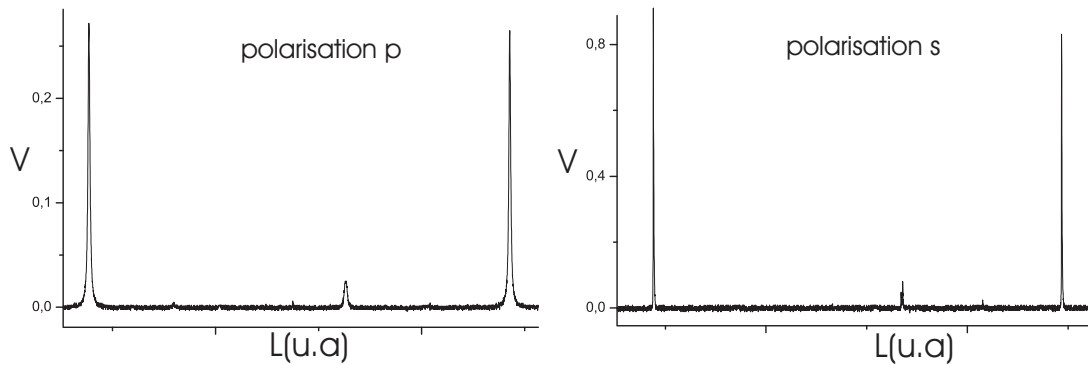


Fig. 7.6: *Transmission de la cavité de filtrage pour les deux polarisations p et s de la cavité. L'abscisse est la longueur de la cavité (balayée), la distance entre les deux pics étant égale à  $\lambda$ , la hauteur est l'intensité détectée sur la photodiode, en Volts, proportionnelle à l'intensité transmise.*

La finesse mesurée sur les polarisations p et s sont résumées sur la table 7.3.

## C Génération de l'image

A la sortie de notre cavité de filtrage, nous disposons d'un faisceau gaussien à la limite de diffraction, intense (jusqu'à 1 Watt en continu), stable et monochromatique à 1064 nm.



	polarisation p	polarisation s
Finesse théorique	non fournie	4300
Finesse mesurée	213	2400
Fréquence de coupure	5 Mhz	580 kHz
Transmission	$\sim 100\%$	96.5 %
Transmission mesurée	70 %	non-mesurée

TAB. 7.3: *Finesse et transmission de la cavité de filtrage*

A l'aide de miroirs, on peut l'injecter vers la cavité multimode, et un jeu de lentilles permet d'adapter la taille et la position de son waist afin de l'adapter à la cavité, c'est à dire le projeter aussi parfaitement que possible sur le mode fondamental  $TEM_{00}$  de la cavité.

Pour injecter de manière multimode, deux options sont possibles. La première consiste à envoyer ce faisceau tel quel dans la cavité, mais à ne pas l'adapter. Par exemple en ne l'injectant pas dans l'axe de la cavité, ou en l'injectant dans l'axe, mais pas avec la bonne taille. Cette méthode ne requiert pas de matériel particulier.

La seconde consiste à intercepter le faisceau par notre objet, et à en faire l'image dans la cavité.

Nous avons choisi comme image une mire de résolution USAF. On l'a représentée sur la figure 7.7. Cette mire est la mire de résolution utilisée pour caractériser le pouvoir de résolution d'un système optique.

## D Les détecteurs

Après le passage dans le système amplificateur, la détection de l'image amplifiée se heurte à deux exigences contradictoires : Celle d'une résolution spatiale élevée (grand nombre de pixels), et celle d'une mesure quantique à haute fréquence (c'est à dire une détection avec une bonne efficacité quantique, d'un bruit à haute fréquence).

La détection spatiale peut se faire de plusieurs façons :

- Sur une caméra CCD (charged CMOS Device).
- Sur une matrice de photodiodes
- Sur une photodiode unique avec atténuation spatiale

Chacune a ses avantages et ses inconvénients en fonction de ce que l'on veut mesurer.

### D.1 Caméra CCD

Une caméra CCD est une matrice de sites photosensibles. L'image est enregistrée sous la forme de charges électriques contenues dans les sites. La lecture est effectuée de manière **séquentielle** par l'électronique de la caméra (appelée horloge) qui balaye ligne par ligne et point par point les capteurs.

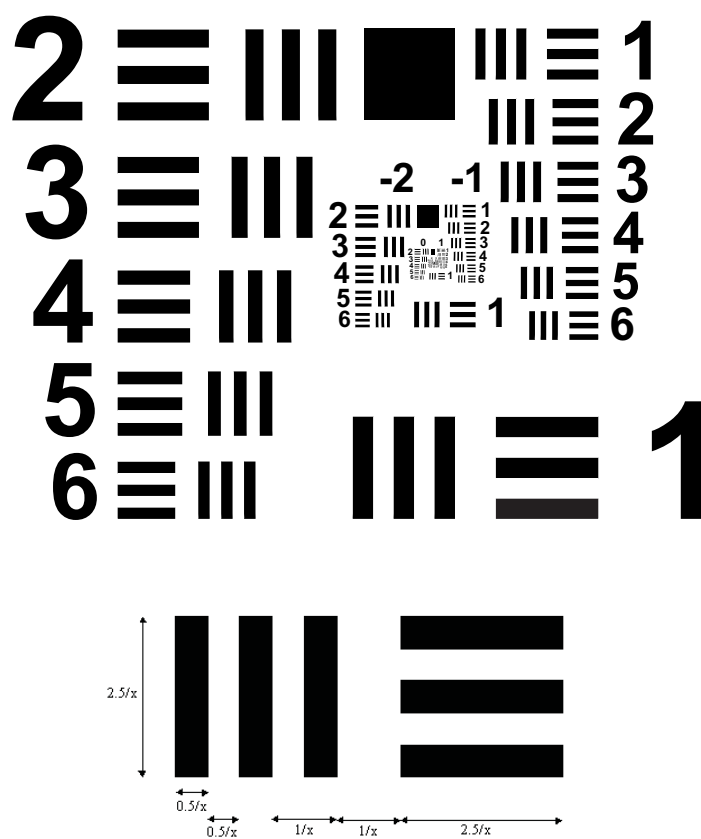


Fig. 7.7: Mire USAF (en bas l'échelle normalisé de chaque élément de la mire)

Par conséquent une caméra CCD ne renvoie que la valeur moyenne locale de l'intensité (la fréquence maximum d'analyse est la fréquence de rafraîchissement de l'image). À  $1.06 \mu m$ , c'est le silicium qui est utilisé, et son efficacité quantique de détection est faible. Par conséquent une simple caméra CCD n'est pas l'outil adapté aux mesures quantiques sur des faisceaux continus. Cependant pour une étude qualitative et/ou classique de l'amplification, c'est un outil irremplaçable.

Nous avons utilisé une Caméra CCD de marque PULNIX (CCIR, monochrome, analogique) associée d'une part avec un moniteur standard et un magnétoscope, d'autre part avec un système d'acquisition informatique constitué d'une carte d'acquisition National instruments PXI-1408 (convertisseur Analogique/Numérique 8 bits, 50 Hz, 48 dB SNR ratio).

Nous obtenons 25 images par secondes  $640*480$  pixels en 256 niveaux d'intensité.

## D.2 Matrice de photodiodes

Pour des mesures spatiales du bruit, on doit utiliser des matrices de photodiodes adressées séparément. Le prix d'un tel système, ainsi que de l'électronique d'acquisition étant prohibitif lorsque l'on augmente le nombre de voies, on se limite à des photodiodes à quadrants (4 détecteurs).

Ces photodiodes sont des EPITAXX ETX 505Q, en InGaAs, Ce sont des détecteurs à 4 quadrants, donc à 4 voies séparées. Pour chacune des voies, on sépare la partie basse-fréquence (DC) de la partie haute-fréquence (HF). Les deux voies sont amplifiées séparément. Cependant pour réaliser des mesures quantiques, les 4 voies doivent être équilibrées. On trouvera en annexe les circuits des photodiodes. Les détails de la procédure de calibration peuvent être trouvés dans [\[MartinelliNote\]](#).

## D.3 Photodiodes

Une photodiode n'apporte a priori aucune information transverse sur le faisceau, elle ne mesure que l'intensité  $i(t)$  la frappant.

Cependant si on place un masque d'intensité spatial avant la photodiode, on ne mesure que l'intensité et le bruit associés à la partie transmise par le masque. Un masque ne laissant passer qu'une petite zone de l'image (un pixel) nous donnera accès au bruit local de cette zone.

On peut ainsi accéder à la répartition spatiale du bruit et des corrélations dans le faisceau, pourvu qu'on le coupe de manière appropriée. On peut le faire à l'aide d'un diaphragme à iris par exemple, ou encore d'une lame de rasoir (voir par exemple [\[MaurinPhD\]](#)).

Le circuit électronique des photodiodes est le circuit standard. On l'a cependant modifié pour abaisser le bruit électronique afin de pouvoir détecter des signaux plus faibles.

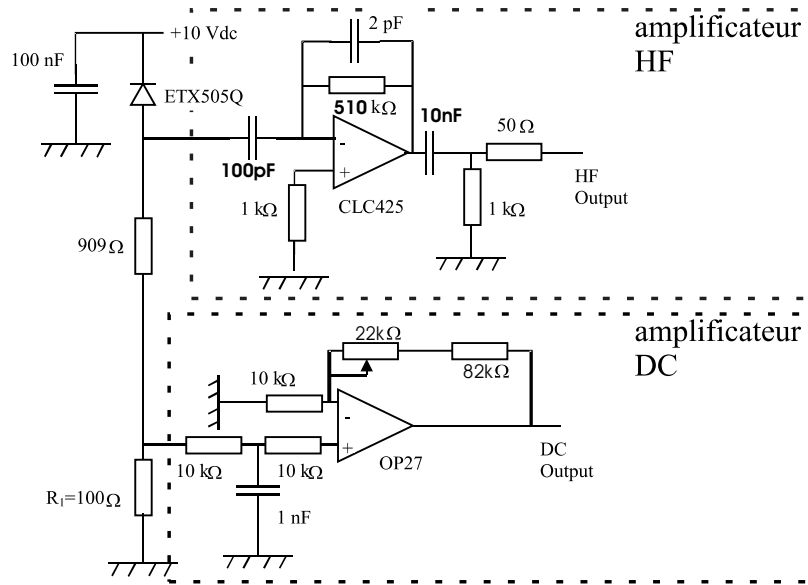


Fig. 7.8: Électronique des photodiodes.

## E Asservissements

L'expérience ne compte pas moins de 5 cavités, deux cristaux, et plusieurs longueurs qui doivent être asservies à une fraction de longueur d'onde. La stabilité de l'expérience requiert donc le contrôle et l'asservissement d'un grand nombre de paramètres. Un gros travail a été réalisé, tant sur l'isolation générale de l'expérience que sur l'amélioration des asservissements.

### E.1 Isolation passive

Avant les asservissements, il est nécessaire d'isoler au mieux le systèmes des sources ambiantes de fluctuations (de température, de vibration).

La table optique, sur laquelle nous avons remonté l'expérience, est une RS-1000 de la compagnie Newport (de dimension  $3,6 * 1,2m$ ). Une structure en nid d'abeille lui assure en même temps une bonne rigidité et un poids modéré (environ 500 kg), et une atténuation des vibrations. L'isolation sismique est assurée par des pieds I-2000 également de chez Newport. Un système d'amortissement pneumatique assure une importante isolation des vibrations tant verticales qu'horizontales. Par exemple à 10 Hz l'amortissement atténue déjà 99 % des vibrations verticales et 95% des vibrations horizontales.

Les parties particulièrement sensibles de l'expérience, comme les cavités, sont en plus isolées des vibrations résiduelles de la table par une épaisseur de caoutchouc isolant spécial.

La stabilisation thermique de la pièce se fait grâce à une climatisation (pièce maintenue aux alentours de  $20^{\circ}C$ ) afin d'éviter la dilatation et le dérèglement de l'expérience lors des

changements importants de température. Les cristaux devant être stabilisés en température sont insérés dans des fours en Cuivre, eux-mêmes régulés en température (voir plus loin).

Les mouvements de l'air induisent des changements locaux rapides de pression et de température. Dans la libre propagation d'un faisceau, ces effets sont de peu d'importance. Dans une cavité de finesse  $F$ , la longueur totale de la cavité doit être asservie à une fraction de  $\lambda/F$ . Il est donc important d'éviter les mouvements d'air. Toutes les cavités ont donc été placées dans des boîtes en plexiglas. Une très légère surpression dans les boîtes (à l'aide d'un flux d'air comprimé) évite les mouvements d'air et assure la propreté de l'ensemble.

La seule source de vibrations mécaniques restante sur la table est le circuit de refroidissement du laser esclave, produisant des vibrations jusqu'à quelques dizaines de Hz. On a pris grand soin de l'isoler au maximum de la table. L'ensemble du laser esclave est posé sur une plaque isolée de la table par du caoutchouc. De plus nous avons réalisé un système hydraulique permettant de réduire les tourbillons dans le tuyau en rendant le flux plus laminaire.

Enfin les vibrations sonores dues au circuit d'eau d'alimentation du laser Esclave (volume sonore élevé autour de 200 Hz, visible sur les asservissements) ont été réduites par la construction d'un caisson d'isolation phonique. La climatisation émet également un ronronnement sensible sur les asservissements. Lors des acquisitions on a été amené à l'éteindre.

Toutes ces mesures visant à réduire les sources de fluctuations (de température ou de bruit mécanique) nous ont permis d'améliorer grandement la stabilité générale des asservissements.

## E.2 Asservissement en température

Nous avons trois asservissements en température sur l'expérience. Le premier est celui du cristal du laser maître, il est asservi par une régulation en température intégrée au boîtier d'alimentation. La température du barreau de YAG n'est pas asservie mais s'avère, une fois stabilisée, suffisamment stable.

L'asservissement de la température du cristal de  $LiNbO_3$  de la cavité de doublage est réalisé par un asservissement P.I.D (proportionnel intégrateur différentiel) maison. Le cristal est inséré dans un four en laiton. Une thermistance placée aussi proche que possible du cristal est insérée dans le four. La température est asservie par une résistance chauffante placée sur la partie supérieure du four (pour le chauffage). La différence de température avec la température ambiante étant importante, le refroidissement se fait par convection. La stabilité atteinte est supérieure à  $0.1^\circ C$ .

La cavité amplificatrice contient un cristal de KTP. Nous disposons de plusieurs cristaux différents, mais tous sont coupés de façon à fonctionner autour de la température ambiante (entre  $20^\circ C$  et  $40^\circ C$ ). Ils sont également placés dans un four. La température du cristal est contrôlée par une thermistance insérée dans le four, aussi près que possible du cristal. La régulation peut alors se faire grâce à un dispositif à effet Peltier. L'électronique d'asservissement est un P.I.D commercial de chez Innolight, similaire à celui présent dans l'alimentation des lasers Série Prometheus. Les contacts thermiques entre le Peltier et le four, entre le Peltier

et la source froide, et entre la thermistance de contrôle sont favorisés par l'emploi d'une pâte conductrice type silicone argenté (Artic Alumina, de ArcticSilver).

Cette régulation, associée à l'isolation par une boîte de plexiglas de la cavité nous a permis de réguler en température autour de  $30^{\circ}C$  avec une stabilité de la température mesurée au niveau de la thermistance à la limite de la précision de l'Ohm-mètre, soit une impressionnante stabilité de  $\pm 0,06mK$  sur plusieurs minutes.

La stabilité de la température au niveau du cristal ne peut pas être mesurée directement, mais néanmoins en l'absence d'effet de chauffage par un faisceau, nous avons pu observer une stabilité meilleure que le millikelvin.

### E.3 Asservissement des cavités

L'asservissement des cavités se fait par la méthode Pound-Drever-Hall [Black01, Drever83]. Le signal d'erreur est obtenu en modulant en phase le faisceau à une fréquence  $\Omega$  sur lequel on asservit la cavité. La modulation de phase revient à ajouter autour de  $\omega_L$  des bandes latérales aux fréquences  $\omega_L \pm \Omega$ . Aux alentours d'une résonance de cavité pour la fréquence du laser, les bandes latérales sont également quasi-résonnantes. La modulation en phase peut être récupérée en réflexion ou en transmission de la cavité sous forme de modulation d'intensité. Elle est en général utilisée en réflexion car on n'est alors pas limité par la bande-passante de la cavité. Dans notre cas, la modulation est suffisamment importante, et la bande passante suffisamment large, et on travaille en transmission. Cette modulation d'intensité est proportionnelle à la dérivée du pic de résonance.

Ce signal doit être démodulé pour être utilisable. Nous disposons de circuit de démodulation maison, pré-amplifiant le signal avant de le démoduler. Mais dans le cas où le signal est suffisamment intense, un simple mélangeur ZAD-1 suivi d'un passe-bas type PLP-1.9 (minicircuit) donne une démodulation très propre. L'ajustement de la phase est fait en variant la longueur des câbles BNC. Cependant lorsque nous avons travaillé à des fréquences de modulation où un circuit déphaseur était disponible (minicircuit JPHAS-18-26 par exemple), nous les avons également utilisés avec des résultats similaires. Une fois démodulée, la modulation d'intensité constitue notre signal d'erreur.

L'électronique d'asservissement est un P.I (Proportionnel-Intégrateur) maison. Le troisième étage différentiel n'est pas vraiment nécessaire à l'asservissement rapide d'une cavité (pas de dérive à long terme à corriger). Il n'a donc pas été inclus.

Le signal d'asservissement final est envoyé sur un amplificateur Haute-Tension, également maison, qui contrôle une cale piézo-électrique (PZT) sur laquelle est fixée un des miroirs de la cavité. On rétro-agit ainsi sur la longueur de la cavité. Le système cale+miroir présentant des résonances mécaniques à quelques kHz, l'amplificateur HT effectue un filtre passe-bas de fréquence de coupure typiquement de l'ordre de quelques kiloHertz.

La cavité esclave et la cavité de doublage étaient déjà asservies par cette méthode depuis longtemps. Lors de ce travail nous avons asservi par cette méthode la cavité de filtrage ainsi

que l'OPO.

#### E.4 Asservissement des phases relatives

La phase relative entre l'image et la pompe doit être contrôlée précisément afin de réaliser l'amplification dépendante de la phase. Une différence d'une demi-longueur d'onde change l'amplification en désamplification. Par rapport à une cavité, l'asservissement n'a donc pas à être aussi précis ( $\lambda/F$  dans le cas d'une cavité). Par contre, il se fait sur une plage beaucoup plus grande puisqu'il faut contrôler la phase d'un trajet de plusieurs mètres, donc beaucoup plus sensible aux perturbations (mouvement d'air, déformation de la table, vibrations), et susceptible de varier de plusieurs longueurs d'onde.

De plus, contrairement à l'asservissement d'une cavité, il n'est pas facile de trouver un signal d'erreur afin d'asservir cette longueur. En fait le seul signal d'erreur disponible expérimentalement vient du phénomène qu'on cherche à asservir, c'est à dire de l'amplification elle-même. C'est la méthode utilisée dans [PingKoyLamPhD] afin d'asservir en désamplification le vide comprimé émis par un OPA type I. Dans notre expérience, nous avons donc ajouté sur la pompe une modulation en phase (à 19.5 MHz) qui nous sert à asservir la pompe dans l'OPO. Cette modulation ne se trouve donc pas initialement sur le faisceau infrarouge. Si après amplification on démodule à cette fréquence le signal infrarouge, on détecte un signal proportionnel à l'amplification. C'est sur ce signal qu'on va s'asservir. Comparé aux asservissements de cavité, cet asservissement est très sensible à la stabilité générale de l'expérience, l'amplification devant être très stable afin de pouvoir asservir efficacement.

## Conclusion

On a donc passé en revue dans ce chapitre l'ensemble de l'expérience, à part la cavité OPO proprement dite qui sera développée dans les chapitres suivants. La maîtrise de cette partie (en particulier les sources et les asservissements) est loin d'être triviale et a représenté une part non-négligeable du travail expérimental. Les progrès des lasers commerciaux (progression de la puissance des lasers série Diabolo développé par Innolight, en particulier) peut faire espérer dans les années à venir une grande simplification de toute cette partie de l'expérience.

---

# Expérience en cavité confocale

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>OPO confocal triplement résonnant</b>	<b>136</b>
A.1	Configuration expérimentale	136
A.2	Résultats	141
A.3	Conclusion	144
<b>B</b>	<b>Amplification dans un OPA confocal</b>	<b>144</b>
B.1	Configuration expérimentale	144
B.2	La triple dégénérescence	146
B.3	Résultats: Amplification monomode en cavité balayée	150
B.4	Résultats: Amplification monomode en cavité asservie	152

---

## Introduction

Ce travail fait suite à la thèse de Nicolas Treps [[TrepsPhD](#)], et s'articule en deux parties. La première (partie **A**), réalisée juste avant le changement de table, est la continuation des travaux concernant l'émission multimode de l'OPO dégénéré transversalement au dessus du seuil. Elle a fait l'objet d'un article [[Martinelli03](#)], et nous en rappellerons les principaux résultats utiles à la suite. Ces travaux ont été réalisés dans différents types de cavités (plane, concentrique, confocale). La cavité confocale a donné les meilleurs résultats. L'émission de structures transverses spontanées y a été observée pour la première fois [[Ducci01](#), [Vaupel99](#)], caractéristiques d'un fonctionnement multimode. Ce type de structures est bien connu et compris classiquement comme résultat de l'interaction non-linéaire. Elles ont été observées dans de nombreux domaines de la physique, et de nombreux articles théoriques les prévoient



dans l'OPO multimode [Gatti95, Gatti97, SuretPhD, Staliunas95]. La partie B étudie l'amplification dans cette cavité d'un signal, sous le seuil. On travaille donc avec un Amplificateur Paramétrique Optique (OPA).

## A OPO confocal triplement résonnant

Nous allons étudier la conversion paramétrique quasi-dégénérée dans un OPO de type II, autour de la confocalité. On va montrer que l'OPO confocal opérant au dessus du seuil émet des faisceaux jumeaux multimodes.

### A.1 Configuration expérimentale

#### A.1.1 Schéma général

Le schéma général de l'expérience est représenté sur la figure 8.1. La partie source est la partie décrite au chapitre précédent. On va décrire plus en détail la cavité et le système de détection.

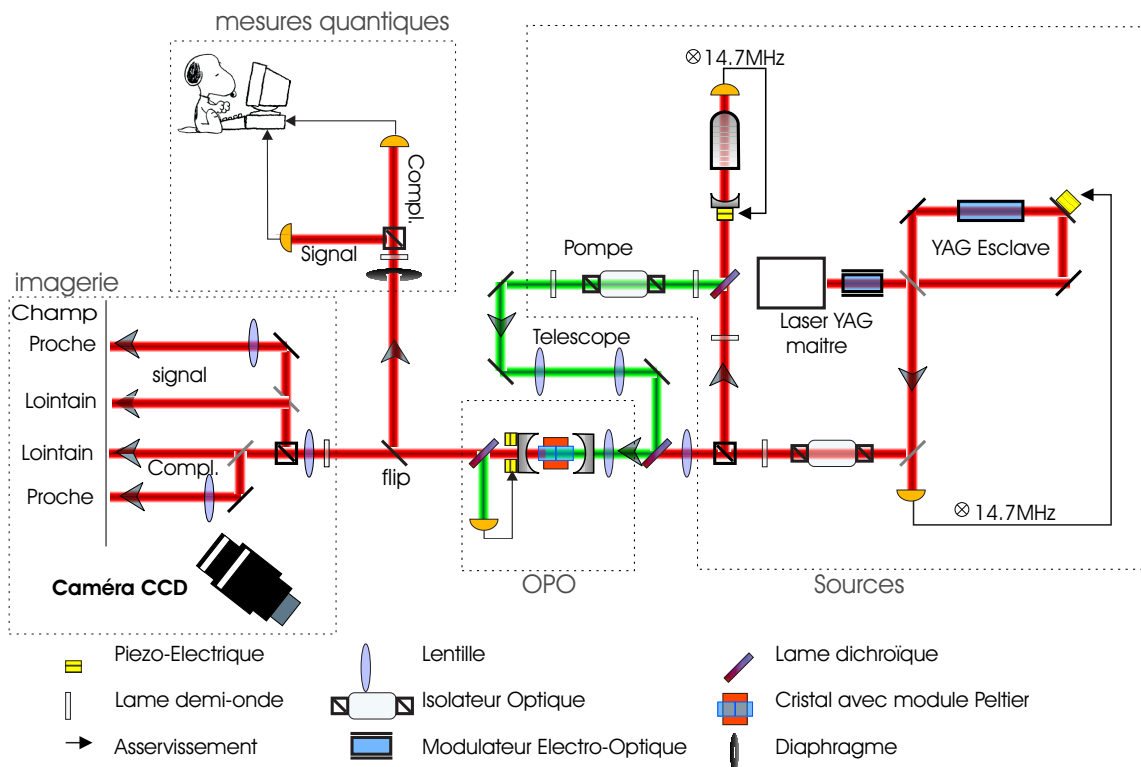


Fig. 8.1: Schéma général de l'expérience

	532 nm	1064 nm
Coefficient de réflexion $R_1$	0.9	0.999
Coefficient de réflexion $R_2$	0.999	0.99
Finesse cavité vide	70	450

TAB. 8.1: Caractéristique des miroirs de l'OPO.

### A.1.2 La cavité

La cavité optique est une cavité à deux miroirs, notés  $M_1$  et  $M_2$ , représentée sur la figure 8.2 et dont les caractéristiques sont résumées sur le tableau 8.1. Les faces arrières de miroirs sont traitées anti-reflet pour les deux longueurs d'onde.

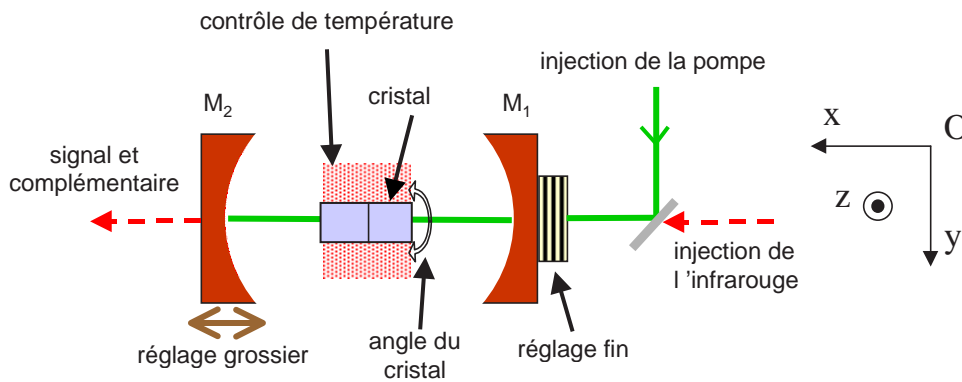


Fig. 8.2: L'oscillateur paramétrique optique : schéma technique

La cavité est donc triplement résonnante, c'est à dire qu'elle est résonnante pour les trois faisceaux : la pompe à 532 nm, et les faisceaux signal et complémentaire qui sont quasiment dégénérés en fréquence autour de 1064 nm. Le miroir  $M_1$  est donc le miroir d'entrée pour le faisceau pompe à 532 nm. Les faisceaux signal et complémentaire, émis autour de 1064 nm, sortent principalement par le miroir  $M_2$ .

Géométriquement, les miroirs sont concaves, de rayon de courbure 100 mm, la cavité confocale vide aura donc une longueur  $L = 100\text{mm}$ . Les miroirs sont placés sur des platines de translation permettant un positionnement précis macroscopique (précision d'environ  $10\ \mu\text{m}$ ). Le miroir d'entrée est monté sur une cale piézo-électrique permettant une excursion d'environ  $5\ \mu\text{m}$ , et un réglage à l'échelle du nanomètre afin d'asservir la longueur de la cavité sur une résonance d'une des longueurs d'onde.

### A.1.3 Le cristal

Le cristal utilisé est un cristal KTP de type II, de marque Cristal Laser, coupé pour la conversion de fréquence  $1064nm \rightleftharpoons 532nm$  à température ambiante. On distingue dans ce cristal les axes de polarisation Ordinaires ( $o$ ) et Extraordinaire ( $e$ ). Les faisceaux de polarisation extraordinaire subissent la double-réfraction (ou "walk-off") : il existe un angle  $\vartheta_{walk-off}$  entre le vecteur de Poynting (direction de propagation de l'énergie) et le vecteur  $\vec{k}$ , c'est à dire qu'ils subissent un déplacement latéral. Dans le cas du type II, l'accord de phase se fait pour :

$$\text{pompe}(e) \longrightarrow \text{signal}(o) + \text{complémentaire}(e) \quad (8.1)$$

son paramètre  $d_{eff}$  vaut  $3,58pm/V$  et les angles de walk-off sont :

$$\vartheta_{walk-off,532} \simeq 4.13mrad \text{ et } \vartheta_{walk-off,1064} \simeq 3.16mrad$$

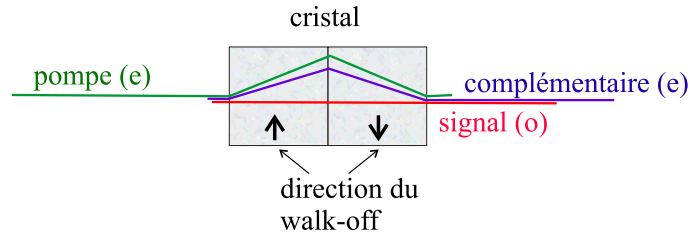


Fig. 8.3: Principe du cristal à Walk-Off compensé

La pompe et le complémentaire subissent donc ce déplacement latéral. Géométriquement c'est un problème pour les cavités triplement résonnantes car les axes propres des cavités vont être différents pour les différents faisceaux. Une solution afin de compenser géométriquement en dehors du cristal les effets du walk-off est d'utiliser un cristal dit "à walk-off compensé", constitué de deux cristaux de même longueur retournés l'un par rapport à l'autre de façon à ce que le walk-off de l'un soit compensé par celui de l'autre (voir figure 8.3). La longueur totale du cristal est de 10 mm. De plus on veut minimiser les pertes sur les interfaces. Dans le cas d'un cristal de laser il est commun de travailler à incidence de Brewster afin de limiter les pertes à l'interface air-cristal. Ici on travaille avec plusieurs longueurs d'ondes et plusieurs polarisations, donc on a traité les faces avant et arrière du cristal anti-reflet à 532 comme à 1064nm.

Les indices optiques sont résumés sur le tableau 8.2. On y a aussi reporté les modifications apportées à la cavité :

- L'indice du cristal modifie la longueur optique de la cavité pour les modes transverses. la longueur apparente  $L_{app}$  vaut :

$$L_{app} = L_{tot} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) L_{cristal}$$

	pompe	signal	complémentaire
$\lambda$	532	1064	1064
polarisation	(e)	(o)	(e)
Finesse cavité sans (avec) cristal	70 (40)	450 (300)	450 (300)
Absorption (%)	3 %	0.45 %	0.45 %
indice du cristal	1.7881	1.8296	1.7467
Longueur de confocalité (mm)	104.41	104.28	104.53
Plage de confocalité $\Delta_L$	4mm	500 $\mu$ m	500 $\mu$ m

TAB. 8.2: *Caractéristiques du cristal KTP en cavité confocale (à 300°K)*

où  $L_{tot}$  est la longueur de la cavité réelle, et  $L_{cristal}$  est la longueur du cristal. Comme  $n > 1$ , la longueur réelle pour laquelle on est à confocalité est plus longue que la longueur de la cavité confocale vide ( $L = 100mm$ ).

- La baisse de finesse lorsque l'on place le cristal dans la cavité est due à l'absorption dans le cristal, et à la diffusion à l'interface ainsi que dans le cristal. De notre point de vue, il n'est pas utile de les distinguer et on considère uniquement les pertes totales.

Les indices du cristal étant différents pour les trois ondes, on voit bien que la longueur réelle exacte de la confocalité (définie comme la position de dégénérescence transverse exacte) varie d'une onde à l'autre. On a donc été amené à introduire dans le tableau 8.2 la plage de confocalité  $\Delta_L$ , qui est définie comme la plage autour de la position de dégénérescence exacte où la cavité est quand même multimode. Le critère que nous avons retenu est que la distance entre le mode fondamental et le premier mode transverse soit inférieure à la largeur d'un pic de résonance (lié à la finesse F), qu'on peut montrer être égal à:

$$\Delta_L = \frac{\pi R_c}{2F} \quad (8.2)$$

où R est le rayon de courbure. Sur le tableau 8.2, on peut voir que la plage de confocalité pour la pompe est grande car sa finesse est relativement faible. Pour le signal et le complémentaire, la plage de confocalité ne fait que 500 $\mu$ m. Cependant les longueurs de confocalité exacte sont suffisamment proches pour permettre une triple confocalité pour les trois champs avec les finesesses de notre cavité.

Le cristal est placé dans un four, dont la température est contrôlée aux alentours de 30°C via un Peltier afin de travailler à proximité de la dégénérescence de fréquence. Il est placé sur une platine de translation/rotation à 5 degrés de liberté.

#### A.1.4 Injection

Cette expérience a été effectuée avant le changement de table optique et de laser. La pompe à 532 nm est injectée via un télescope dans la cavité OPO, à travers le miroir  $M_1$ . La

pompe n'est pas injectée sur le mode  $TEM_{00}$  de la cavité, mais elle est défocalisée afin de pomper plusieurs modes à la fois : on a choisi une taille de waist double de celle du  $TEM_{00}$  de la cavité.

Par ailleurs une faible partie du laser esclave est prélevée et sert à injecter la cavité également via  $M_1$  à fins d'alignements. En effet la finesse est bien meilleure dans l'infrarouge, aussi toutes les procédures d'alignement et de réglage de la confocalité sont beaucoup plus précises sur l'infrarouge.

### A.1.5 Réglage et asservissement

La cavité confocale est relativement aisée à régler. On l'aligne à l'aide du faisceau infrarouge à 1064 nm, sans pompe. La procédure à suivre est la suivante:

1. Régler la cavité vide à peu près à la longueur de confocalité, et l'aligner.
2. L'amener à la confocalité exacte à l'aide de la vis micrométrique. Noter la position de la vis micrométrique et l'augmenter jusqu'à la longueur de la cavité dégénérée avec cristal (voir 8.2).
3. La réaligner précisément. Ensuite la position des miroirs et de l'injection ne doit plus changer.
4. Ajouter le cristal au centre de la cavité. Sans le cristal, la cavité est alignée, On peut donc la réaligner uniquement à l'aide des deux degrés de rotation du cristal.
5. Ajuster la longueur de la cavité pour retrouver la dégénérescence transverse.

La cavité est maintenant alignée et dégénérée, mais "froide" c'est à dire sans la pompe, qui en raison de son absorption non négligeable dans le cristal (3% voir 8.2) va chauffer de manière inhomogène la cavité et donc changer ses propriétés géométriques. Il y a apparition d'une lentille thermique convergente (de focale équivalente  $\sim 1m$ ), qui va raccourcir la longueur géométrique de la cavité. On note  $L_{conf}$  la longueur de la cavité confocale, avec cristal, froide. Le seuil de fonctionnement de l'OPO mesuré est d'environ 30 mW. Pour  $I_{532} = 250mW$ , le raccourcissement apparent de la cavité est d'environ  $2mm$ . La confocalité est donc obtenue pour des longueurs de cavité plus courte que la cavité à confocalité froide.

À partir de cette étape, l'optimisation du réglage de la cavité se fait en obtenant le seuil minimal d'oscillation.

On élimine du faisceau de sortie la pompe résiduelle à  $532nm$  à l'aide d'une lame dichroïque. La lame dichroïque réfléchit également 2% du signal et du complémentaire. Sur ce faisceau réfléchi, on sépare sur une deuxième lame dichroïque la pompe de l'infrarouge et on les envoie sur deux photodiodes. Le signal de la photodiode à  $532nm$  sert à asservir la cavité sur une résonance de la pompe. Le signal sur la photodiode détectant l'infrarouge noté  $i_{IR}(t)$ , nous servira de référence pour la transmission du diaphragme (voir section suivante).

### A.1.6 Imagerie et mesures quantiques

La partie imagerie et la partie mesures quantiques ne sont pas utilisées en même temps. On bascule de l'une à l'autre par un miroir pivotant. La stabilité (l'OPO reste asservi sur un temps de l'ordre de la minute) et la répétabilité de l'expérience (si l'asservissement tombe et qu'on le remet en route, le système se remet à la même position) sont cependant suffisamment bonnes pour qu'on puisse prendre l'image et faire la mesure et considérer que le système n'a pas changé.

La partie imagerie (schématisée sur la figure 8.1) permet d'observer à la caméra CCD le champ proche et lointain du signal et du complémentaire. Nous avons en fait construit un système d'imagerie plus compact permettant d'avoir sur la même caméra les quatre images à la fois (voir figure 8.4).

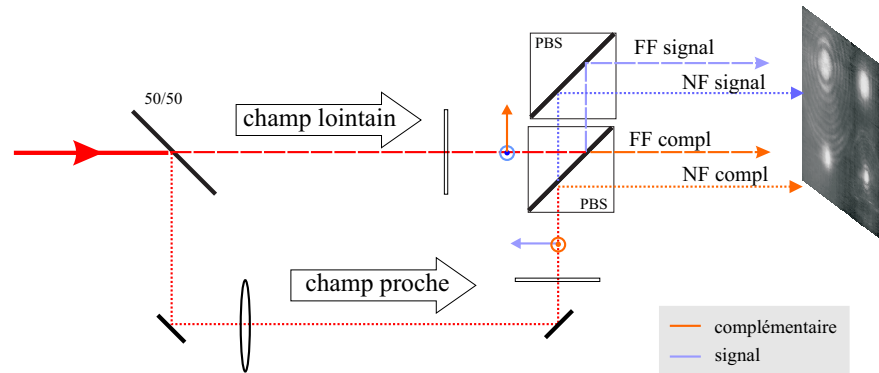


Fig. 8.4: Système d'imagerie à deux voies et deux cubes polarisateurs (PBS). La voie du haut donne le FF, la voie du bas comporte une lentille qui fait du plan de la caméra un NF. Les cubes de polarisation séparent signal et complémentaire

La partie mesure quantique est une détection classique à deux photodiodes (voir 8.1). Les polarisations sont séparées à l'aide d'un cube de polarisation et d'une lame d'onde. La sélection spatiale se fait à l'aide d'un diaphragme placé avant le cube. Cette sélection spatiale par le diaphragme équivaut à prendre un détecteur de taille variable.

## A.2 Résultats

On a réalisé plusieurs séries de mesures dans deux configurations de l'OPO:

- *Configuration 1* : On fait osciller l'OPO de manière continue (en l'asservissant) pour une longueur de cavité en dehors de la plage de confocalité (mais plus longue, de manière à ce que les effets thermiques ne nous rapprochent pas de la confocalité), donc dans une configuration où l'OPO n'est pas dégénéré transversalement. Expérimentalement on choisit  $L_1 = L_{conf} + 0.5mm$ .

- *Configuration 2* : On fait osciller l'OPO de manière continue (en l'asservissant) pour une longueur de cavité suffisamment proche de la longueur de confocalité (dans la plage de confocalité) pour avoir la dégénérescence transverse. Cet état est caractérisé par l'apparition de motifs complexes, étudiés dans [Ducci01]. Expérimentalement on prend  $L_2 = L_{conf} - 0.4mm$ , meilleur compromis entre effets thermiques et confocalité.

Dans ces deux configurations on enregistre en continu (fréquence d'acquisition de 200 kHz, sur 2 secondes soit 400000 points) les intensités  $i_s(t)$  et  $i_i(t)$ , ainsi que leur fluctuations  $\delta i_s(t)$  et  $\delta i_i(t)$ , sur les photodiodes 1 et 2, lors de la fermeture du diaphragme. Par un traitement informatique a posteriori des données (en faisant une moyenne sur 10000 points), on accède à la valeur instantanée du bruit normalisé sur la différence des intensités:

$$n_d = \frac{\langle (\delta \hat{i}_i - \delta \hat{i}_s)^2 \rangle}{4(i_i + i_s)\Delta^2 E_v} \quad (8.3)$$

où  $\Delta^2 E_v$  est la variance du bruit associé au vide (ou à un état cohérent).

En notant

$$r = \frac{\langle i_s + i_i \rangle}{i_{IR}} \quad (8.4)$$

le rapport entre la puissance totale détectée sur la paire de photodiodes de mesure sur la puissance moyenne détectée sur la photodiode de référence, on accède à la transmission instantanée à travers le diaphragme  $T(t)$ .

$$T(t) = \frac{r}{r_{ouvert}}$$

où  $r_{ouvert}$  est la valeur de  $r$  lorsque le diaphragme est totalement ouvert.

On a tracé les résultats des mesures de corrélations dans les deux configurations sur la figure 8.5, ainsi que l'image des champs proches et lointains du signal et du complémentaire dans la même configuration. Chaque point correspond à une mesure sur 10000 points, donc une moyenne sur 50 ms, de  $n_d$  et de  $T$ . La droite correspond à la variation de  $n_d$  pour des faisceaux signal et complémentaire monomodes de même corrélations en intensité sur l'ensemble du faisceau (diaphragme ouvert). Noter qu'en dessous d'une transmission  $T = 0.1$  l'intensité signal et complémentaire devient de l'ordre du bruit d'obscurité de la mesure. Pour une transmission  $T < 0.1$ , les mesures ne sont plus significatives et ont été supprimées.

Dans la configuration 1 (en haut), on a sur le faisceau total un bruit normalisé sur la différence des intensités de 0.8, correspondant à des corrélations entre signal et complémentaire 20 % sous la limite quantique standard. Ce résultat est en accord avec les caractéristiques (pertes, etc...) de notre cavité. En effet celle-ci a été optimisée pour le fonctionnement multimode et non pour des effets quantiques maximums. De plus, on constate que les points expérimentaux lors de la fermeture du diaphragme sont en accord avec la droite théorique correspondant à un comportement monomode. Ce résultat est cohérent avec la configuration expérimentale (cavité non-dégénérée), et avec l'imagerie, où on peut observer un  $TEM_{00}$  tant sur le signal que sur le complémentaire.

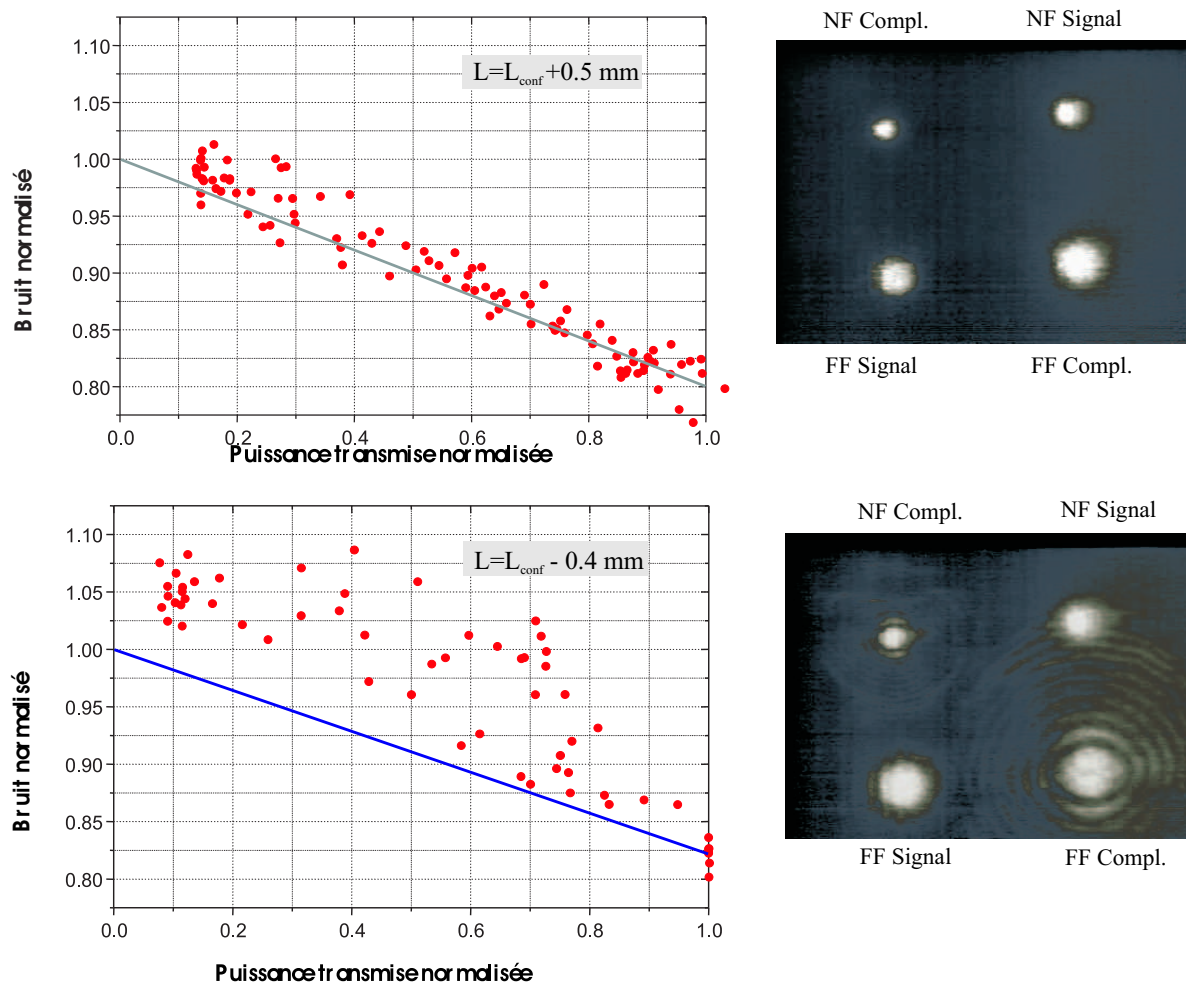


Fig. 8.5: Bruit normalisé sur la différence des intensités  $n_d$  en fonction de la transmission du diaphragme  $T$ , et allure des champs proches et lointains du signal et du complémentaire pour une cavité non dégénérée (en haut) et pour une cavité dans le domaine de confocalité (en bas).



Dans la configuration 2 (en bas), on voit que les corrélations en intensité sur l'ensemble des faisceaux sont de 0.85, toujours sous la limite quantique standard. La cavité est dégénérée transversalement, et on voit qu'on a à l'écran des formes transverses complexes sur le signal et le complémentaire. De plus le champ proche et le champ lointain ont des formes différentes, critère classique permettant de conclure qu'un faisceau est multimode dans la base  $TEM_{pq}$ . On voit que l'évolution de  $n_d$  à la fermeture du diaphragme n'est pas linéaire. Sachant qu'on est en même temps sous la limite quantique standard, c'est la preuve non équivoque que le faisceau est multimode du point de vue quantique. L'interprétation du fait que le bruit normalisé est au dessus de la droite est qu'il y a des corrélations en intensités à l'extérieur du faisceau. En effet lorsque l'on ferme le diaphragme, les corrélations remontent plus vite vers le bruit quantique standard que ce qui est prévu pour un faisceau monomode. Par conséquent nous ne pouvons qu'en déduire qu'il existe des corrélations quantiques en intensité entre les parties extérieures du faisceau. Nous n'avons pas d'explications théoriques à ce phénomène jusqu'à présent.

### A.3 Conclusion

On savait qu'un OPO dégénéré transversalement produisait au dessus du seuil une superposition de modes transverses  $TEM_{pq}$ . Dans cette partie, l'étude de la répartition transverse des corrélations en intensité nous a permis de montrer que cette superposition de modes ne peut être interprétée quantiquement comme un seul mode du champ. L'OPO dégénéré produit donc au dessus du seuil des faisceaux jumeaux continus signal et complémentaire qui sont, d'un point de vue quantique, multimodes.

D'où l'idée d'exploiter les propriétés transverses d'un tel système pour amplifier sous le seuil une faible image injectée.

## B Amplification dans un OPA confocal

### B.1 Configuration expérimentale

Le cadre expérimental de cette expérience est le même que pour l'OPO au dessus du seuil, excepté que cette expérience a eu lieu après le déménagement et le changement de table. Il y a donc eu des différences et des améliorations (voir figure 8.6).

#### B.1.1 Injection

La principale modification est l'ajout de la cavité de filtrage sur l'injection dans la cavité du faisceau à  $1064nm$ . Dans toute cette partie pendant on a commencé par tester l'amplification monomode : on injecte donc la pompe et l'injection en les adaptant au mode  $TEM_{00}$  de la cavité.



On a ajouté un modulateur électro-optique de phase sur l'injection, qui va nous servir à asservir la cavité. On lui injecte une modulation de  $5V_{pp}$  à  $4MHz$ .

### B.1.2 Cavité

La cavité est la même que précédemment. Cependant le réglage va être différent. En effet la cavité doit être amenée à la triple résonance. Le problème de la triple résonance, principale difficulté de cette étude, fera l'objet d'une partie séparée.

### B.1.3 Réglages et asservissements

Le réglage géométrique de la cavité se fait comme précédemment.

Contrairement à l'OPO au dessus du seuil qui devait être asservi sur la pompe, sous le seuil on a le choix de l'asservir sur l'injection ou la pompe. Dans notre cas la finesse est meilleure à  $1064nm$  qu'à  $532nm$  (facteur 8). Il est logique d'asservir sur la plus grande des finesse, car l'asservissement est ainsi plus précis. La cavité est donc asservie sur une résonance de l'injection par la méthode des bandes latérales sur la modulation à  $4MHz$ . Cette modulation n'est présente que sur l'infrarouge.

La photodiode de la pompe est placée sur le faisceau réfléchi.

## B.2 La triple dégénérescence

L'OPO au dessus du seuil oscille sur un couple de modes signal et complémentaire de pulsations  $\omega_s$  et  $\omega_i$  vérifiant (voir [Debuisschert93]):

- La conservation de l'énergie

$$\omega_s + \omega_i = \omega_p$$

- La condition d'accord de phase du cristal (où l'interaction paramétrique est maximum). Dans notre cas le KTP est coupé pour la dégénérescence de fréquence donc on a  $\omega_s = \omega_p/2 - \delta\omega$  et  $\omega_i = \omega_p/2 + \delta\omega$  avec  $\delta\omega \ll \omega_p/2$ . Dans la pratique  $\delta\omega$  est de l'ordre de quelques centaines de MHz à quelques GHz.
- La résonance dans la cavité. Dans la bande d'accord de phase le couple de fréquence  $\omega_s$  et  $\omega_i$  doit être résonnant ou quasi-résonnant dans la cavité, ainsi que la pompe à  $\omega_p$ .

Sous le seuil, une figure typique des résonances en cavité de la pompe, du signal et du complémentaire est la figure 8.7. On peut voir sur cette figure que, en raison des indices différents dans le cristal pour les trois ondes, celles-ci résonnent pour des longueurs différentes de cavité. Par conséquent, si on asservit la longueur de la cavité sur une des ondes, par exemple le complémentaire, alors signal et pompe ne seront a priori pas résonnants.

On peut comprendre ce phénomène en terme de degré de libertés du système. Au dessus du seuil, on pompe la cavité à  $532nm$  et on l'asservit sur la résonance. La cavité est à longueur fixée, donc les fréquences possibles d'oscillation pour signal et complémentaire forment un

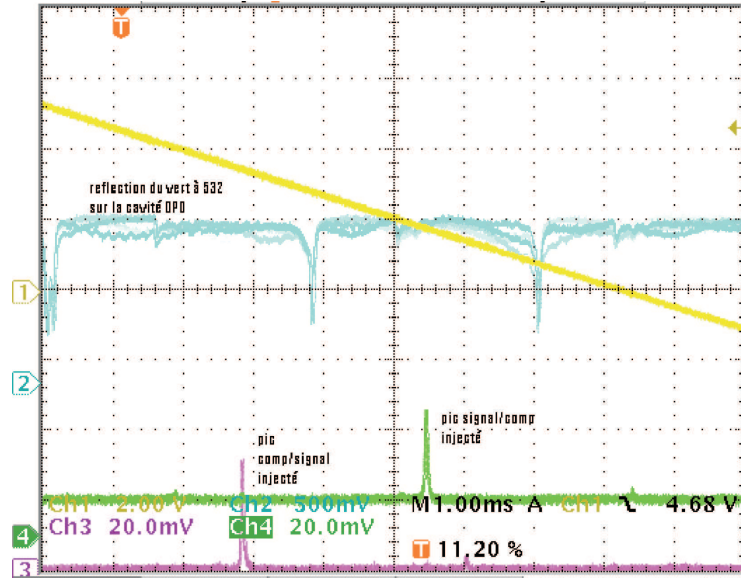


Fig. 8.7: Forme typique des résonances lorsque l'on balaye la longueur de la cavité. On voit les pics de résonance de la pompe, du signal et du complémentaire injectés.

ensemble discret de valeurs (c'est le peigne de fréquence). Le système choisit néanmoins librement le couple  $\{\omega_s, \omega_i\}$  qui minimise le seuil (c'est à dire aussi résonnant que possible) et vérifie la conservation de l'énergie. C'est pourquoi il est facile de faire fonctionner un OPO triplement résonnant au dessus du seuil si on ne cherche pas à imposer la valeur précise de la fréquence d'oscillation.

Lorsque l'on veut amplifier un signal en configuration dégénérée, on fixe les deux conditions supplémentaires

$$\omega_s = \omega_i = \frac{\omega_p}{2}.$$

Il est donc nécessaire d'avoir deux degrés de liberté de plus sur le réglage de la cavité (si possible indépendants), afin d'obtenir la triple résonance simultanée. La cavité ayant déjà une longueur fixée, on doit donc agir sur le cristal.

### B.2.1 Température du cristal

La température du cristal est asservie par un Peltier, et contrôlée par une thermistance. On a vu que cet asservissement est précis (au  $mK$ ), rapide (temps de réaction de l'ordre de la seconde), et de grande amplitude (de  $20^\circ C$  à  $40^\circ C$ ).

Les coefficients thermo-optiques (c'est à dire  $\frac{dn}{dT}$ ) des trois ondes sont donnés dans le tableau 8.3. On les a calculés à partir des coefficients thermo-optiques des axes propres du cristal [Dimitriev] et des équations de Sellmeier.

signal	complémentaire	pompe
$1.6 * 10^{-5}$	$1.3 * 10^{-5}$	$1.3 * 10^{-5}$

TAB. 8.3: *Coefficients thermo-optiques du KTP ( en  $^{\circ}K^{-1}$ )*

Les coefficients thermo-optiques pour la pompe et pour le signal sont donc très proches, et assez différents de celui du complémentaire. Lorsque l'on fait varier la température, on change donc la longueur effective de la cavité de manière différente pour les trois ondes. Complémentaire et pompe changent peu l'un par rapport à l'autre, par contre le signal lui varie beaucoup plus en valeur relative.

On dispose donc avec la température du cristal d'un paramètre permettant de changer la position de la résonance du signal relativement aux deux autres. Ce n'est pas exactement un paramètre idéal car les variations de longueur relatives restent couplées (donc les positions des pics sur la figure 8.7).

### B.2.2 Angle du cristal

Le dernier degré de liberté pour assurer la triple dégénérescence est l'angle du cristal. En effet le cristal est coupé pour l'accord de phase non-critique, et on peut tourner le cristal de quelques milliradians (l'acceptance angulaire est de 13 mrad.cm suivant  $\phi$  et de 75 mrad.cm suivant  $\theta$  environ [SNLO]). L'excursion est donc faible, cependant ce degré de liberté est assez bien découplé des autres. Le cristal et son four sont montés sur une platine permettant de changer légèrement  $\theta$  et  $\phi$ , ce qui change les indices ainsi que la longueur effective du cristal. On peut ainsi changer légèrement la position relative des résonances du complémentaire par rapport aux résonances du signal et de la pompe. Ce degré de liberté est très destructif, tant pour l'effet paramétrique que géométriquement pour la confocalité ou pour l'alignement des faisceaux (il désaligne rapidement la cavité).

Notons qu'on pourrait utiliser l'effet électro-optique pour assurer la triple résonance. En effet les coefficients électro-optiques du KTP sont élevés [SNLO], et permettraient en théorie de varier indépendamment les uns des autres les indices des différentes polarisations. Cependant, techniquement, il faut pour cela déposer une couche d'or sur le cristal afin de pouvoir appliquer la différence de potentiel (ce qui n'était pas le cas des cristaux dont nous disposions), et idéalement il faudrait un asservissement supplémentaire. Mais contrairement à la variation de température ou d'angle, l'effet électro-optique a un temps de réponse très faible et on peut l'asservir. A terme on pourrait imaginer disposer d'une cavité triplement résonnante asservie en longueur, et à l'aide de l'effet électro-optique suivant les directions des polarisations ordinaire et extraordinaire.

### B.2.3 Réglage

La méthode pour atteindre la triple résonance (en balayant) est donc la suivante:

1. On injecte la cavité avec le faisceau à  $1064\text{nm}$  (dont on a choisi la polarisation de manière à injecter le signal et le complémentaire à la fois) et avec la pompe.
2. On cherche dans le domaine d'excursion en température (entre  $20$  et  $40^\circ\text{C}$ ) une position où pompe et complémentaire sont simultanément résonnants, et où la résonance du signal n'est pas trop éloignée.
3. On ajuste la triple résonance en inclinant légèrement le cristal de manière à amener le signal à résonance avec les deux autres.

On obtient alors une figure du type 8.8. Les coïncidences signal/pompe arrivent, au vu des coefficients thermo-optiques et de la longueur du cristal, tous les  $8^\circ\text{C}$  environ. Par conséquent dans le domaine d'utilisation du KTP (de  $20$  à  $40^\circ\text{C}$ ), on n'a que deux ou trois résonances possibles. Si pour ces températures particulières où signal et pompe sont simultanément résonnants, le signal et le complémentaire ne sont pas quasi-résonnants, alors le domaine d'excursion en rotation du cristal ne permet pas de rattraper ce désaccord. Expérimentalement nous avons eu la chance de trouver une position de dégénérescence quasi-parfaite pour  $T = 35.6^\circ\text{C}$  sans tourner le cristal. Une légère rotation permet alors d'obtenir la triple résonance exacte.

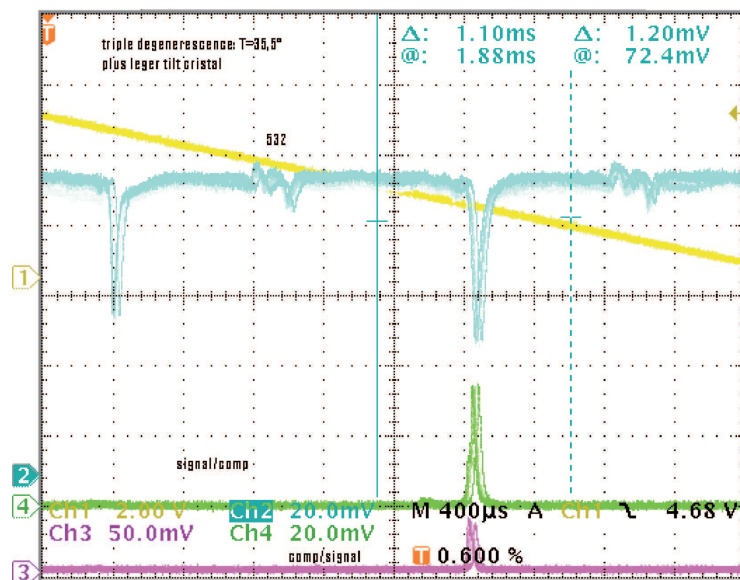


Fig. 8.8: Pics de résonance de la cavité, amenée à la triple résonance signal/complémentaire et pompe.

### B.3 Résultats : Amplification monomode en cavité balayée

On se place comme expliqué précédemment à la triple résonance (dans cette configuration les pics de pompe sont les pics en transmission). On règle la puissance de pompe de manière à être aussi près que possible du seuil (aux alentours de  $\sigma = 0.9$  où  $\sigma$  est la puissance de pompe normalisée), soit aux alentours de  $30mW$ .

La procédure de mesure est la suivante:

1. On injecte l'infrarouge dans la cavité, sans la pompe. La hauteur du pic donne la puissance injectée dans la cavité, sans amplification.
2. On ajoute la pompe, et on ajuste la puissance afin de se rapprocher autant que possible du seuil, ce qui a pour effet de maximiser le gain.
3. Enfin on contrôle qu'on est bien en dessous du seuil : on cache l'infrarouge injecté et on vérifie qu'on n'a pas d'émission paramétrique.

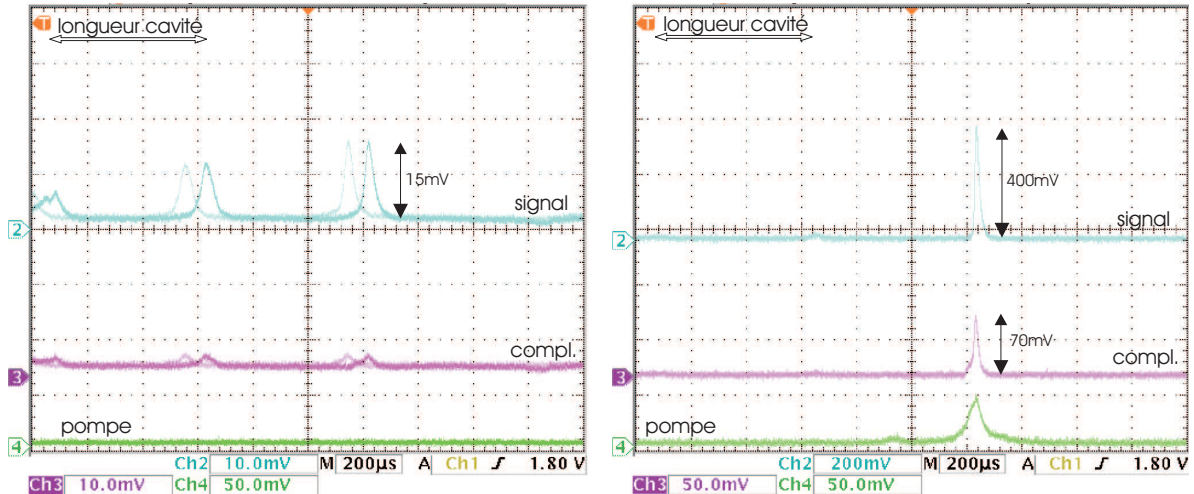


Fig. 8.9: Amplification en configuration insensible à la phase : sans pompe (à gauche) et avec pompe (à droite).

La figure 8.9 présente des résultats typiques dans la configuration où on injecte sur une des deux polarisations seulement (c'est à dire en configuration d'amplification insensible à la phase). On observe donc l'amplification du signal d'un facteur  $G \simeq 25$  pour le signal et le complémentaire.

Plusieurs remarques s'imposent pour interpréter ces résultats. Tout d'abord il est difficile de s'assurer la triple résonance sans injecter sur le complémentaire (puisqu'on n'a alors plus de pics). On est donc amené à injecter sur les deux polarisations et à mettre toute la puissance sur le signal au dernier moment. Ensuite la triple résonance s'obtient en inclinant le cristal. Expérimentalement dès que le cristal est un peu tourné, il devient difficile de faire disparaître totalement le complémentaire, puisque on n'est plus exactement en configuration type II.



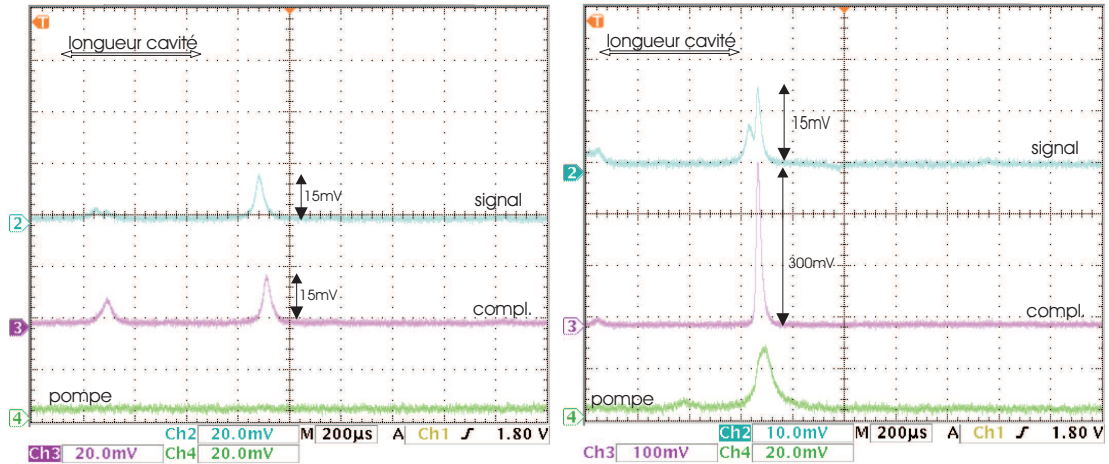


Fig. 8.10: Amplification en configuration sensible à la phase : sans pompe (à gauche) et avec pompe (à droite).

D'autres résultats pour la configuration sensible à la phase (donc où la puissance injectée sur signal et complémentaire est la même) sont montrés sur la figure 8.10. On voit que les gains sont sensiblement les mêmes, de l'ordre de  $G = 20$ . On peut également observer sur la figure de droite que la triple dégénérescence n'est pas parfaite, et que ce n'est pas le centre du pic du signal qui est amplifié, mais le bord. Autrement dit, le signal amplifié n'est pas parfaitement résonnant dans la cavité.

Le contrôle de la triple dégénérescence est la principale limitation de l'expérience. En effet la triple dégénérescence n'est pas asservie. Par conséquent on ne dispose que de quelques secondes de stabilité (qui vient du fait que toutes les conditions expérimentales sont stables), voire, on doit parfois profiter du passage transitoire par la triple résonance pour observer l'amplification. Or, on balaie la cavité, et la phase relative entre l'injection et la pompe n'est pas asservie. Par conséquent il nous est impossible d'observer précisément la dépendance en phase de l'amplification dans cette configuration.

Néanmoins on a pu observer des gains importants. En injectant environ  $5\mu W$  sur le signal et le complémentaire (soit  $5mV$  de hauteur de pic), on a pu observer  $1mW$  en sortie sur chaque polarisation soit un gain de

$$G_{balay} = 23dB.$$

Bien que très inférieur aux facteurs d'amplifications en simple passage (en impulsion), de l'ordre de  $10^5$ , ces facteurs sont néanmoins importants, et pourraient être a priori améliorés, en gagnant sur la stabilité de la cavité et de la triple dégénérescence.



### B.4 Résultats: Amplification monomode en cavité asservie

On a asservi la cavité en longueur afin de pouvoir observer la dépendance en phase de l'amplification. Pour cela on utilise la modulation à 4 MHz présente sur l'injection, qu'on démodule. On récupère un signal d'erreur (voir figure 8.11). On asservit donc la cavité sur la résonance du signal.

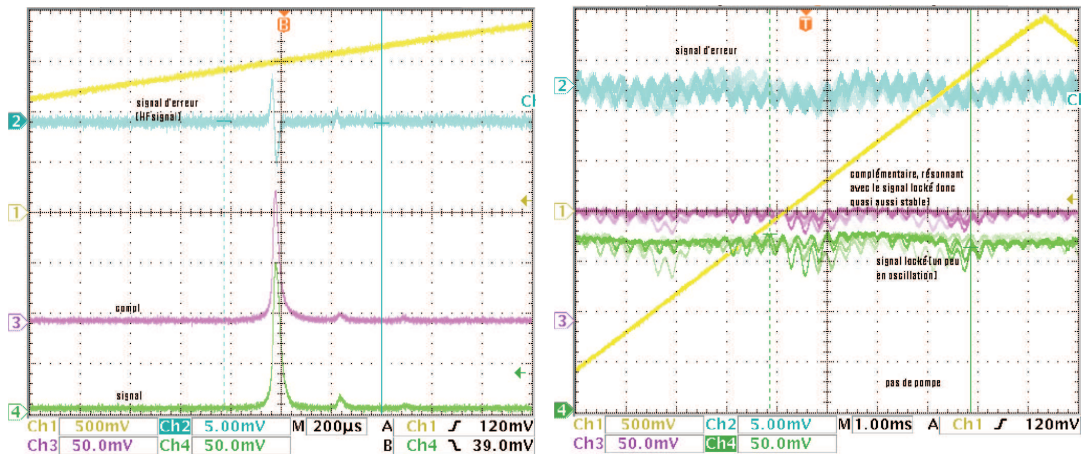


Fig. 8.11: Signal d'erreur sur le signal (à gauche), et cavité asservie sur le signal (à droite).

Lorsque la cavité n'est pas triplement résonnante, seul le signal résonne alors. La procédure est alors de se placer à proximité de la triple résonance, et d'asservir la cavité. Le signal est alors asservi, par contre la pompe et le complémentaire ne sont pas parfaitement résonnants. On peut alors optimiser la température et l'angle du cristal et se rapprocher autant que possible de la triple résonance. L'amplification est alors obtenue en continu. Sur la voie d'injection, un des miroirs est collé sur un cale piézo-électrique (voir 8.6) qui nous permet de balayer la phase relative entre l'injection et la pompe.

Un résultat typique obtenu est montré sur la figure 8.12. Bien que le complémentaire ne soit pas parfaitement résonnant avec le signal, on a quand même une amplification fortement dépendante de la phase (le signal oscille entre 40 et 300 mV), tant sur le signal que sur le complémentaire. En amplification continue (c'est à dire à triple résonance pendant un temps de quelques secondes), les effets thermiques dus à la pompe chauffent le cristal et on ne peut pas s'approcher beaucoup du seuil. Le gain observé est donc plus faible, et au maximum on a observé

$$G_{asservi} = 6dB.$$

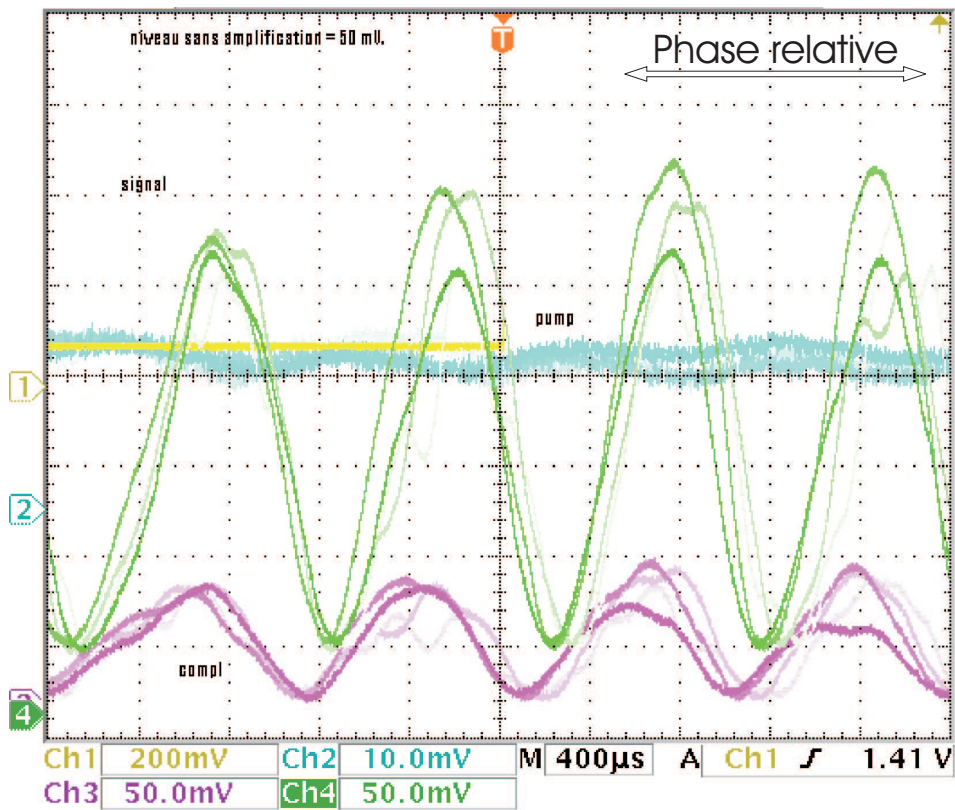


Fig. 8.12: Amplification sensible à la phase. Sans la pompe, le niveau du signal et complémentaire asservi est constant, et égal environ à 50 mV.

### B.4.1 Interprétation

Ce gain est bien inférieur au gain observé en cavité balayée. Plusieurs raisons expérimentales peuvent expliquer ce gain relativement faible :

- La triple dégénérescence imparfaite, qui limite fortement le gain (voir la partie théorique sur le sujet).
- Les asservissements (la partie proportionnelle-intégratrice en particulier) n'ont pas une dynamique en intensité permettant d'asservir un signal dont l'intensité varie sur plusieurs ordres de grandeurs. Si on considère un asservissement dont le gain est optimisé pour le niveau non-amplifié du signal, il va saturer lors de l'amplification. Si au contraire on le règle pour ne pas saturer lors de l'amplification, il aura tendance à ne pas être assez fort pour garder la cavité à résonance lorsque le signal ne sera pas amplifié.

À noter que la stabilité n'est pas assez bonne en cavité asservie et n'a pas permis de réaliser de mesures sur le bruit dans cette configuration. Noter également que, bien que le niveau moyen du signal, lorsque l'amplification est minimum, soit inférieur au niveau sans amplification (50 mV), on ne peut pas affirmer que l'on ait de la désamplification. En effet si, la cavité n'est pas exactement à résonance, le niveau moyen asservi est en dessous du maximum, sans pour autant pouvoir affirmer qu'il y a de désamplification. Seule une mesure sur le bruit peut permettre d'affirmer avec certitude la présence de désamplification.

## Conclusion

On a montré dans ce chapitre que l'OPO confocal produisait bel et bien des faisceaux multimodes transverses, caractérisés au niveau classique par une superposition de modes et par l'apparition de motifs, et au niveau quantique grâce au critère défini à la section **B** du chapitre **6**. On a également mis en évidence l'amplification sensible à la phase d'un faible signal injecté. L'étape suivante est l'amplification classique avec une pompe et une injection défocalisée. Cependant on voit que l'amplification monomode asservie est déjà à la limite des possibilités expérimentales, en raison du problème de la triple résonance des trois ondes. Le chapitre **9** apporte une solution à ce problème expérimental : c'est l'utilisation d'une double cavité.

---

# La double cavité

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Étude théorique</b>	<b>155</b>
A.1	Principe	155
A.2	Bibliographie	156
A.3	Intérêt	157
<b>B</b>	<b>Étude expérimentale</b>	<b>158</b>
B.1	Configuration Expérimentale	158
B.2	Alignement des cavités séparées	162
B.3	Alignement des deux cavités ensemble	163
B.4	Cavités Fabry-Perot Parasites	165

---

## A Étude théorique

### A.1 Principe

Dans un OPO, les miroirs des cavités doivent être traités pour les différentes longueurs d'onde. Dans le cas d'un OPO triplement résonnant, opérant proche de la dégénérescence en fréquence pour le signal et le complémentaire, on n'a que deux longueurs d'onde à considérer ( $532nm$  et  $1064nm$  dans notre expérience), et on traite les miroirs de la cavité pour la triple résonance (signal, complémentaire et pompe). Les trois longueurs d'ondes résonnent donc dans la même cavité. Cependant, on peut très bien faire résonner chaque longueur d'onde dans des cavités différentes, avec des traitements adaptés. Il faut pour cela imbriquer les cavités pour chaque longueur d'onde, de façon à ce qu'elles se recouvrent dans le cristal. C'est ce qu'on appellera double cavité. Dans cette partie, on va en détailler le principe et les

avantages qui nous ont conduit à adopter cette géométrie. Les aspects expérimentaux seront détaillés dans la deuxième section de ce chapitre.

On a représenté sur la figure 9.1 les différentes configurations possibles de doubles cavités linéaires. On peut aussi bien imaginer deux cavités partageant un même miroir (3 miroirs au total), que des cavités à 4 miroirs. Dans le cas d'une cavité à 4 miroirs, les cavités peuvent soit être l'une à l'intérieur de l'autre, soient entrelacées.

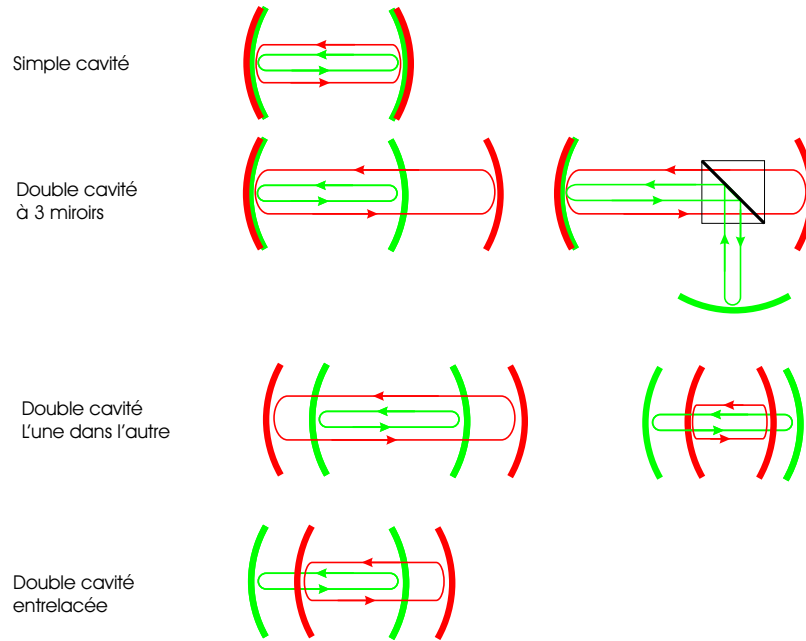


Fig. 9.1: Représentation schématique de différentes doubles cavités possibles. En haut on a représenté la simple cavité où les miroirs sont réfléchissants pour les deux longueurs d'onde.

Notons qu'on ne parle dans cette discussion que de double cavité car on n'a que deux longueurs d'ondes, mais on pourrait imaginer de multiples cavités imbriquées pour de multiples longueurs d'onde. On peut même imaginer des cavités différentes pour signal et complémentaire dégénérés, en séparant les polarisations à l'aide d'un cube dans la cavité par exemple.

## A.2 Bibliographie

La double cavité telle qu'on l'a définie n'est pas utile pour un laser car il n'y a qu'une seule longueur d'onde qui résonne, à part dans des cas très particuliers [Ahufinger00]. Cependant dans la littérature on trouve de nombreuses références à des doubles cavités pour les lasers comme dans [Gunning82] par exemple, qui font en fait référence à des cavités successives, voire jointives, mais qui ne se recouvrent pas. On ne s'y intéressera pas ici.

Dans un OPO, cette idée est mentionnée à notre connaissance pour la première fois dans [Colville94], où est réalisée expérimentalement une telle cavité. Elle sera ensuite utilisée dans

un OPO continu afin de produire des faisceaux jumeaux [Wong98], puis dans [Rosencher00] où il est montré qu'un tel système permet une émission monomode en régime pulsé, ainsi que dans [Turnbull00], où l'usage de la double cavité permet un fonctionnement de l'OPO sans sauts de modes, donc accordable continûment. A noter que dans la littérature anglophone, ce que nous appelons double cavité est appelée "dual cavity".

### A.3 Intérêt

L'intérêt principal d'une cavité multiple est qu'elle permet beaucoup plus de latitudes de réglages. Suivant la géométrie choisie, les deux cavités peuvent être soit totalement indépendantes (4 miroirs), soit partiellement indépendantes. On va détailler ici les avantages dans le cas d'une double cavité à 4 miroirs.

#### A.3.1 Sur les longueurs de cavités

Tout d'abord, les deux cavités peuvent être contrôlées en longueur indépendamment:

- Sur la longueur macroscopique, cela signifie qu'on peut atteindre la dégénérescence pour les deux longueurs d'ondes séparément. On n'est donc plus gêné par le problème qu'on avait en cavité simple qui était que, du fait des indices différents dans le cristal pour les différentes longueurs d'onde, la longueur de la dégénérescence exacte n'était pas la même. On peut même choisir des cavités complètement différentes.
- À l'échelle de la longueur d'onde, cela signifie qu'on peut asservir les deux cavités indépendamment pour faire résonner les deux cavités à la fois pour deux longueurs d'onde différentes. On a donc très facilement la double dégénérescence.

#### A.3.2 Rapport des tailles de modes propres

Dans une cavité simple, par exemple dans l'OPO confocal considéré précédemment, la taille du waist du  $TEM_{00}$ , pour un rayon de courbure  $R$  des deux miroirs et une longueur d'onde  $\lambda$ , est donnée par:

$$w_0^2 = \frac{\lambda R}{4\pi}.$$

Par conséquent la taille des modes pompe à  $532nm$  et signal et complémentaire à  $1064nm$  sont dans un rapport fixé, égal à :

$$\frac{w_p}{w_s} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le mode propre du vert est donc  $\sqrt{2}$  fois plus petit que le mode propre de l'infrarouge, et leur waists sont forcément situés au même endroit. Dans une double cavité, les rayons de courbures des miroirs des cavités peuvent être différents, et les longueurs peuvent être différentes également. On peut donc avoir des tailles de modes propres de cavité aussi différents

que l'on veut pour chaque longueur d'onde, et en général les waists ne sont pas situés dans le même plan (voir 9.2).

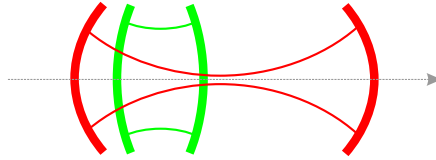


Fig. 9.2: Exemple de double cavité dans laquelle le rapport des tailles des modes propres est grand.

Pour pomper de nombreux modes de la cavité infrarouge, on a donc deux solutions. On peut faire comme en cavité simple, c'est à dire travailler en cavité dégénérée pour la pompe, injectée de manière multimode (c'est à dire avec une pompe large). On peut aussi, et c'est la solution qu'on a retenue, construire une double cavité dont le rapport des waists est bien choisi. En l'occurrence, on va construire une double cavité où la taille du mode propre de la cavité verte est supérieure à la taille du mode propre dans la cavité infrarouge dans le cristal. Cette méthode est intéressante car elle permet de pomper sur de nombreux modes la cavité infrarouge, tout en travaillant avec une cavité verte monomode transverse. On a alors une grande liberté quant à la géométrie de la cavité verte, pourvu que le mode soit de grande taille au niveau du cristal, ainsi qu'une grande simplicité de mise en oeuvre .

### A.3.3 Axes des cavités

Dans notre cas on travaille avec des faisceaux colinéaires, le cristal étant coupé pour l'accord de phase. On peut imaginer toutes sortes de géométries pour la double cavité, et on pourrait en particulier travailler avec des cavités non colinéaires, c'est à dire dont les axes ne sont pas parallèles. On pourrait alors imaginer de travailler en dehors de l'accord de phase colinéaire.

## B Étude expérimentale

La double cavité présente des particularités qui la rendent pour certains aspects plus facile à régler, mais elle comporte également des particularités de réglage que nous allons détailler.

### B.1 Configuration Expérimentale

On travaille avec un OPO triplement résonnant, pour la conversion  $2\omega \rightarrow \omega$ . Le cristal doit être placé dans la région où les deux cavités se superposent.

On a choisi une géométrie où les deux cavités sont entrelacées. Le schéma de la double cavité que nous avons utilisée est reporté en 9.3. La cavité verte est entre les miroirs M1

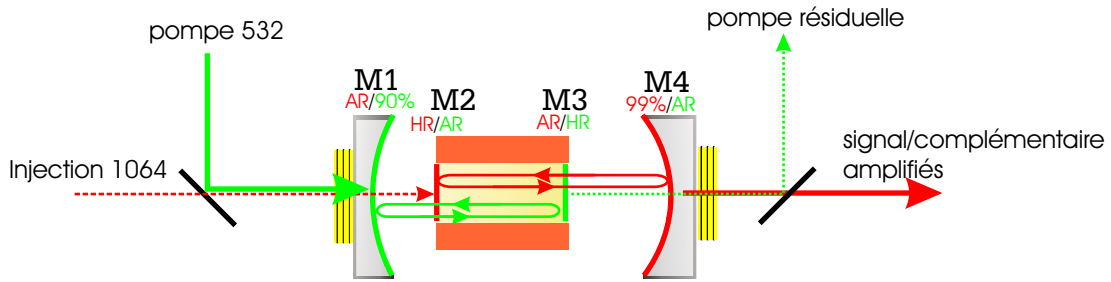


Fig. 9.3: Schéma de la double cavité réalisée expérimentalement. Le rouge/vert correspond aux faisceaux ou traitements à 1064/532 nm.

et M3, et la cavité infrarouge entre les miroirs M2 et M4. On a choisi une configuration expérimentale où deux des miroirs (M2 et M3) sont directement déposés sur les faces du cristal de KTP, ce qui nous évite de travailler avec 4 miroirs plus un cristal. Les avantages en sont multiples :

1. La compacité. Le four du cristal est volumineux, les montures de précisions encombrantes. Dans cette configuration on peut faire des cavités à peine plus longues que le cristal, ce qui ne serait pas possible avec 4 miroirs séparés.
2. La stabilité. Le fait qu'on n'ait que trois éléments au lieu de 5, ainsi que la compacité du montage le rendent beaucoup plus stable.
3. La performance. On limite également le nombre d'interfaces à l'intérieur des cavités : avec 4 miroirs et un cristal, il y aurait 4 traitements antireflets à l'intérieur de chaque cavité (à l'entrée et à la sortie du cristal, et à l'entrée et à la sortie du miroir de l'autre cavité). Sur les optiques ces traitements sont forcément des doubles traitements puisque toutes les optiques sont traversées par les deux longueurs d'onde. Par conséquent ils ne seront jamais excellents (car ils résultent d'un compromis) et dégraderont les performances des cavités (en particulier les effets quantiques). Dans notre configuration, chaque cavité ne comporte qu'une interface (air-cristal).
4. La simplicité de réglage. Déposés sous forme de traitement sur les faces du cristal, les deux miroirs intérieurs de la double cavité sont donc par construction plans et parallèles. L'alignement des deux cavités sera donc facilité.
5. Enfin des miroirs plans au niveau du cristal nous assurent que les waists sont tous deux situés dans le cristal, c'est à dire que les faisceaux sont relativement plans et focalisés dans le cristal, situation idéale pour l'interaction paramétrique.

### B.1.1 Cristal

Tout comme dans la partie précédente en OPO confocal, on utilise un cristal de KTP taillé pour l'accord de phase non-critique. Celui-ci, fabriqué et traité par Cristal Laser, n'est



pas un cristal à Walk-Off compensé (on verra plus loin les conséquences). Les traitements des faces entrée et sortie sont rassemblés sur le tableau 9.1.

	face 1 (M2)	face 2 (M3)
Traitement à 532nm	AR (5.25 %)	HR (99.3 %)
Traitement à 1064nm	HR (99.96 %)	AR (0.11 %)

TAB. 9.1: Coefficients de réflexion des faces du cristal de KTP utilisé dans la double cavité

Il est de dimensions 3 \* 3 \* 10 mm et est placé dans le four qui servait pour le cristal de la cavité confocale. L'asservissement en température est également le même, et assure une précision supérieure à 0.1°C. Le parallélisme des faces, d'habitude peu critique est ici important.

### B.1.2 Miroirs

Les miroirs sont traités pour la longueur d'onde correspondant à la cavité dans laquelle ils sont placés. Néanmoins il est important de noter qu'ils doivent également être traités antireflets pour l'autre longueur d'onde. L'injection de l'infrarouge dans la cavité infrarouge traverse la cavité verte. Il est donc nécessaire que cette dernière (et particulièrement M1) ne réfléchisse pas l'infrarouge. Pour la cavité verte le problème est différent : le miroir du fond (déposé sur le cristal) est HR, par conséquent le faisceau est principalement réfléchi sur le fond du cristal (M3). Cependant si on place derrière cette face HR un autre miroir fortement réfléchissant pour le vert (M4), on crée une cavité Fabry-Perot de haute finesse, qui lorsqu'elle est résonnante laisse passer une grande partie de la puissance (d'autant plus grande que la cavité est adaptée en impédance, voir ref(Modecleaner)).

Pour le miroir M4 de sortie, on garde un rayon de courbure  $R = 100mm$  (comme dans la cavité confocale). De cette façon tout le système d'imagerie développé pour l'OPO reste adapté. Pour le miroir M1 par contre on dispose de tout un jeu de miroirs de rayons de courbure divers (de  $R = 100mm$  à  $R = -1000mm$ ), permettant de varier le rapport des tailles de modes propres. La taille du mode  $TEM_{00}$  d'une cavité plan-concave, de longueur  $L$ , dont le rayon de courbure du miroir concave est  $R$ , est donné par la relation

$$w_0(R, L, \lambda) = \left( (R - z) \frac{z\lambda^2}{\pi^2} \right)^{1/4} .$$

On a reporté sur le graphe 9.4 la taille du mode propre dans la cavité verte en fonction des miroirs dont on dispose. Il est difficile de faire un mode de pompe beaucoup plus gros que le mode propre infrarouge pour plusieurs raisons:

- La taille du mode est, à cavité donnée, en  $\sqrt{\lambda}$ .
- La cavité héli-confocale est la cavité qui, à rayon de courbure donné de miroir, a le mode propre le plus gros.

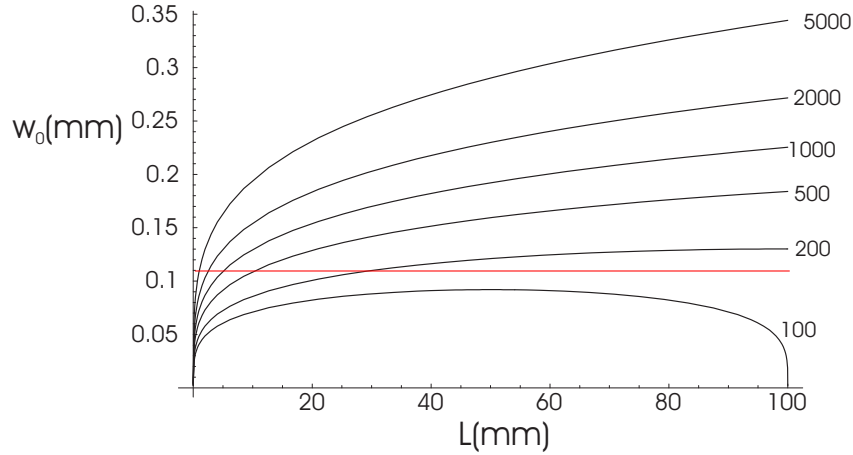


Fig. 9.4: taille  $w_0$  du mode  $TEM_{00}$  de la cavité verte en fonction de sa longueur  $L$ , pour différents rayons de courbure du miroir concave (en mm). Le trait rouge est la taille du mode propre dans la cavité infrarouge.

- Un mode gros divergera peu, donc les rayons de courbure nécessaires deviennent rapidement énormes. Avec un miroir concave de rayon de courbure  $R = 5m$ , dans une cavité de longueur  $10cm$ , le mode propre de la cavité ne sera que 3 fois plus gros que le  $TEM_{00}$  de la cavité infrarouge héli-confocale.
- L'absorption dans le cristal du vert ( $\sim 1\%$  par passage), crée une lentille thermique, de focale de l'ordre du mètre, qui fera converger le faisceau. Cette lentille thermique permet par contre de rendre stable les cavités plan-convexes.

Il sera par conséquent difficile de se placer dans l'approximation de la pompe plane, sauf à changer de géométrie pour la cavité infrarouge. Les traitements sont reportés sur le tableau 9.2.

	M1 (face1)	M1 (face2)	M4 (face1)	M4 (face2)
Rayon de courbure	$\infty$	variable	100mm	$\infty$
Traitement à 532nm	AR	90%	6.6%	AR
Traitement à 1064nm	AR	5%	98.93 %	AR

TAB. 9.2: Coefficients de réflexion des miroirs M1 et M4

Les miroirs M1 et M4 sont montés sur les mêmes montures que dans l'expérience de l'OPO confocal, cependant on a ajouté cette fois un PZT sur le miroir de sortie, puisque les deux cavités doivent être asservies séparément.

### B.1.3 Récapitulatif

La cavité verte, qui va de M1 à M3, est donc une cavité monomode plan-concave de longueur d'environ 50mm, à waist grand. La cavité infrarouge est une cavité multimode, allant du miroir plan M2 au miroir M4 de rayon de courbure  $R = 100mm$ . La cavité multimode la plus simple à partir de ces deux miroirs est la cavité héli-con focale, où les deux miroirs sont séparés d'une distance  $L = 50mm$ . Cette cavité a été étudiée en détail au chapitre 3. Les finesesses des deux cavités sont reportées dans le tableau B.1.3. On a reporté la finesse des cavités lorsque le cristal est retourné. Dans cette configuration on inverse M2 et M3. Par conséquent les deux cavités sont des cavités Fabry-Pérot (le cristal n'est à l'intérieur d'aucune des deux cavités). On mesure alors la finesse à vide. Lorsque l'on met le cristal dans le bon sens, on a alors la finesse de la cavité avec cristal, ce qui correspond à ajouter les pertes dans le cristal, plus les pertes à la traversée de l'interface air-cristal.

	Cavité verte	Cavité IR
Finesse cristal retourné	60	450
Coefficient de transmission sortie	10%	1%
Pertes $\gamma_e$ sur le miroir HR	$\simeq 5\%$	0.4%
Finesse avec cristal	39	350
perdes $\gamma_c$ dues au cristal	5%	0.4%
Bande passante ( $L = 50mm$ )	150 MHz	17 MHz

TAB. 9.3: *Finesse et pertes mesurées des cavités verte et infrarouge*

## B.2 Alignement des cavités séparées

Contrairement à l'OPO habituel, pour la double cavité, sans cristal point de cavité. Il n'est donc pas question d'aligner la cavité vide, puis d'insérer le cristal. La procédure est donc la suivante:

1. On aligne les faisceaux de pompe et infrarouge.
2. On insère le cristal (miroirs M2 et M3).
3. On place ensuite le miroir M4, et on aligne avec la procédure habituelle la cavité infrarouge.
4. On insère le miroir M1 et on aligne la cavité verte.

Cette méthode nous assure le réglage séparément des deux cavités. Le parallélisme de M2 et M3 nous assure par ailleurs que les deux cavités ont des axes parallèles. Par contre rien ne nous assure que les deux cavités sont co-axiales. En général on est dans la configuration représentée sur la figure 9.5.

On se retrouve donc dans une situation où les deux cavités sont injectées, et où elles sont quasiment coaxiales car on a pris soin d'aligner injection et pompe.

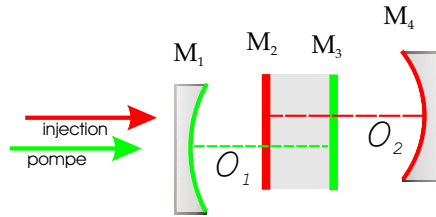


Fig. 9.5: Alignement séparé des deux cavités. Les lignes pointillées symbolisent les axes des cavités.

### B.3 Alignement des deux cavités ensemble

L'alignement de la double cavité, c'est à dire des deux cavités l'une sur l'autre, revient à faire coïncider parfaitement les axes propres (c'est à dire avec une précision bien meilleure que la taille du plus petit mode propre). Partant d'une situation où les deux cavités sont alignées l'une et l'autre avec leur injection, on va voir les différentes stratégies possibles d'alignement.

#### B.3.1 Par le cristal

Les axes propres des cavités sont forcément dans l'axe du cristal, puisque parallèles aux miroirs plans M2 et M3. A partir de la situation 9.5, on va voir qu'il est possible d'aligner la double cavité en tournant le cristal uniquement. M1 et M4 sont des miroirs sphériques, on va noter  $O_1$  et  $O_2$  les centres de courbures respectifs. Tout rayon passant par le  $O_1$  (respectivement  $O_2$ ) sera d'incidence normale sur M1 (resp. M2). Par conséquent l'axe  $(O_1O_2)$  sera un axe propre possible pour la double cavité. Si on tourne le cristal de façon à le placer suivant la direction  $(O_1O_2)$ , les deux cavités seront alignées.

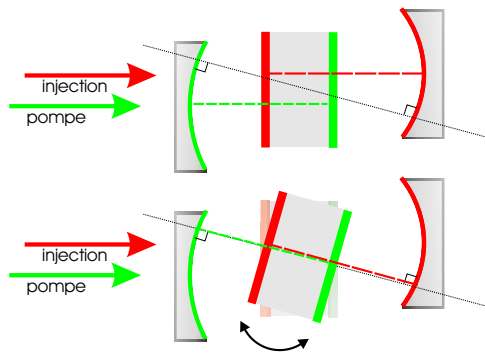


Fig. 9.6: Alignement par rotation du cristal.

La figure 9.6 schématise le réglage par l'inclinaison du cristal. Cependant cette méthode désaligne complètement l'injection. Si les cavités ne sont pas quasiment alignées, l'angle du

cristal peut être trop important pour qu'on puisse réaligner l'injection. De plus elle désaligne les deux cavités à la fois. En pratique nous ne l'utiliserons pas.

### B.3.2 Par les miroirs

Plutôt que d'aligner les deux cavités en même temps, une deuxième stratégie consiste à en garder une fixe (c'est à dire qu'on doit garder fixe le cristal et un miroir), et à aligner la deuxième cavité sur celle-ci. En effet l'axe d'une cavité plan-concave (ou plan convexe) est l'axe d'incidence normal sur les deux miroirs. Cet axe est donc normal au miroir plan et sa position transverse est définie par le point du miroir concave parallèle au miroir plan.

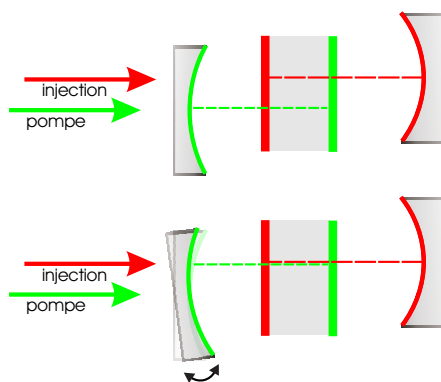


Fig. 9.7: Alignement par rotation d'un des miroirs.

Lorsque l'on change l'orientation d'un des miroirs (M1 ou M4), on change la position du point du miroir dont la normale est perpendiculaire au miroir plan, donc on change l'axe de la cavité. On peut donc aligner la double cavité par cette méthode, comme indiqué sur la figure 9.7. Cette méthode a l'avantage de ne pas désaligner les axes des deux cavités par rapport à l'injection. L'axe d'une des deux cavités est légèrement translaté, et on peut facilement réinjecter. C'est donc cette méthode qui a été utilisée expérimentalement.

### B.3.3 Paramètres de contrôle

On a donc une méthode pour aligner les deux cavités ensemble. Cependant il faut également disposer d'un paramètre permettant de contrôler et d'optimiser ce réglage. La première méthode, assez grossière, consiste à injecter nos deux cavités, et à aligner visuellement à l'oeil ou sur la caméra CCD la pompe et l'injection. Une fois que les deux cavités se superposent (c'est à dire que la distance entre les deux axes est de l'ordre ou inférieure à la taille des waists), alors des méthodes quantitatives prennent le relais et on peut aligner les cavités beaucoup plus précisément, en utilisant le fait que des cavités alignées se perturbent mutuellement.

La première méthode utilise le fait que les traitements anti-reflets ne sont pas parfaits. Lorsque les deux cavités sont alignées, la cavité infrarouge (resp. verte) est une cavité de basse finesse pour le faisceau vert (resp. infrarouge). Cet effet, bien que parasite, peut être exploité pour aligner les deux cavités ; il est important et sera développé dans une partie à part.

La deuxième méthode, la plus précise, repose sur l'optimisation du seuil. Si les deux cavités ne sont pas alignées, alors la cavité verte est un OPO simplement résonnant, car signal et complémentaire résonnent très mal dans la cavité infrarouge. Par conséquent il peut osciller, mais avec un seuil très haut, en pratique inaccessible. Lorsque les cavités sont alignées, l'OPO devient triplement résonnant, par conséquent son seuil est très bas. Si on aligne suffisamment bien les cavités, par les deux méthodes précédentes, et qu'on superpose les axes des cavités à mieux que la taille des modes propres, alors le seuil d'oscillation diminue car les photons signal et complémentaire peuvent être partiellement recyclés par la cavité infrarouge (partiellement car ils résonnent dans une cavité qui ne se superpose que partiellement avec la cavité verte). On peut alors obtenir l'oscillation pour un seuil accessible avec la puissance de pompe dont nous disposons. On optimise ensuite l'alignement de la cavité infrarouge sur la cavité verte (fixe), en diminuant au maximum le seuil d'oscillation.

## B.4 Cavités Fabry-Perot Parasites

Les cavités Fabry-Pérot parasites sont des effets parasites dans la double cavité. Cependant on va les étudier en détail ; tout d'abord parce qu'on va voir qu'elles sont quasi-inévitables, ensuite parce qu'elle nous sont utiles pour régler la cavité.

### B.4.1 Origine

L'origine principale des cavités parasites vient des réflexions parasites sur les interfaces où le faisceau arrive à incidence normale. Dans un trajet optique on peut voir apparaître de telles interfaces à la traversée de lames, d'atténuateurs, etc. Entre de telles optiques peut se former une cavité type Fabry-Perot de basse finesse. En inclinant très légèrement les optiques responsables, et en utilisant des optiques traitées antireflets, on évite en général facilement ce phénomène.

Dans la double cavité, cet effet est important, et inévitable. Tout d'abord les traitements des miroirs et des faces du cristal se font à deux longueurs d'onde, ils sont donc plus délicats et la qualité des traitements à chaque longueur d'onde résulte d'un compromis. En particulier les traitements AR sont souvent mauvais. Ainsi dans notre double cavité, le traitement AR à  $1064nm$  sur M1 n'est que de 5%, et sur le KTP le traitement AR à  $532nm$  sur M2 est également de 5%. Par conséquent la cavité M1-M2 sera une cavité parasite pour l'infrarouge, extérieure à la cavité de haute finesse pour l'infrarouge (M2-M4). De manière similaire, le miroir M2, placé dans la cavité résonnante verte M1-M3, la sépare en deux sous-cavités de basses finesse M1-M2 et M2-M3. Enfin il est bien sûr impossible d'incliner même légèrement

les optiques pour éviter ces résonances, puisque ces interfaces sont des miroirs pour l'autre longueur d'onde, et qu'on désalignerait la double cavité.

#### B.4.2 Caractérisation

L'expression générale de la finesse pour une cavité linéaire limitée par des miroirs de coefficients de réflexion  $R_1$  et  $R_2$  est:

$$F = \frac{\pi(R_1 R_2)^{1/4}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}}$$

Pour une cavité Fabry-Perot très résonante, l'expression approchée de la finesse est

$$F = \frac{2\pi}{T}$$

où  $T$  sont les pertes totales en intensité sur un tour de la cavité. La transmission d'une telle cavité est donné par [FabreLasers]:

$$T = \left| \frac{E_t}{E_i} \right|^2 = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(kL)} \quad (9.1)$$

Dans notre cas, toutes les cavités parasites se font entre un miroir  $R_1$  (HR ou très réfléchissant), et un miroir  $R_2$  très réfléchissant. On a reporté les pics de cavité Fabry-Perot pour différentes valeurs de  $R_2$  sur la figure 9.8. Pour une finesse faible, on voit qu'on n'a pas des pics (comme pour la courbe correspondant à  $R_2 = 80\%$ ), mais une modulation sur l'intensité. Même pour  $R_2 = 0.1\%$ , on voit que l'intensité subit une modulation d'environ 10%, et que cette modulation atteint 50% pour seulement 5% de réflexion sur  $R_2$ .

Expérimentalement, on observe cette modulation tant sur l'infrarouge que sur le vert transmis par la double cavité. Lorsque l'on asservit la cavité verte, et qu'on balaie la cavité infrarouge, l'effet de la cavité parasite entre M3 et M4 est représentée sur la figure 9.9.

Il existe aussi une cavité parasite intérieure à la cavité verte, entre M2 et M3. Cette cavité ne peut pas être balayée en longueur à l'aide d'une cale, cependant lorsque la température du cristal change, son indice  $n(T)$  donc sa longueur optique change également, et on a pu observer une modulation de l'intensité pompe transmise en fonction de la température (voir figure 9.10).

Cette modulation est différente pour les deux polarisations, et est en accord avec les valeurs des coefficient thermo-optiques de la pompe.

Pour la cavité Infrarouge, on a également une double cavité entre M1 et M2, similaire à celle de la pompe. Par contre le traitement AR à 1064 nm du miroir M3 est très bon, et on n'a pas observé de double cavité entre M2 et M3 pour l'infrarouge.

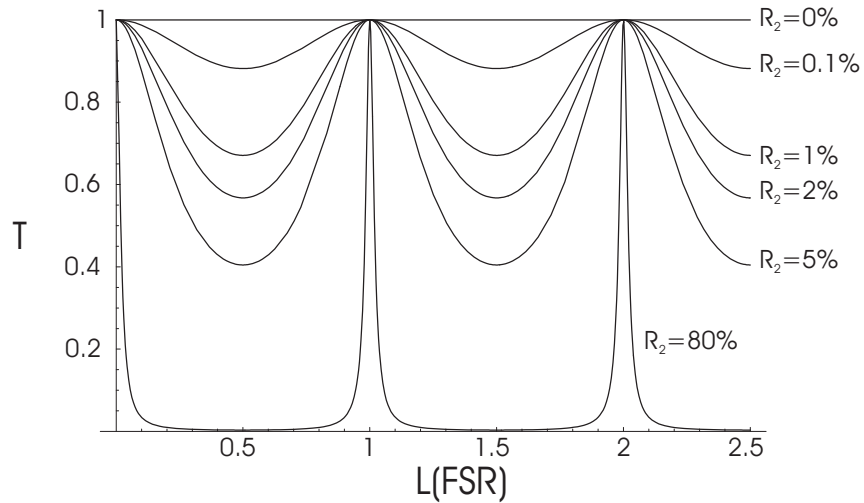


Fig. 9.8: Pics de transmission théorique (normalisé) d'une cavité parasite, avec  $R_1 = 99\%$  et pour différentes valeurs de  $R_2$ .

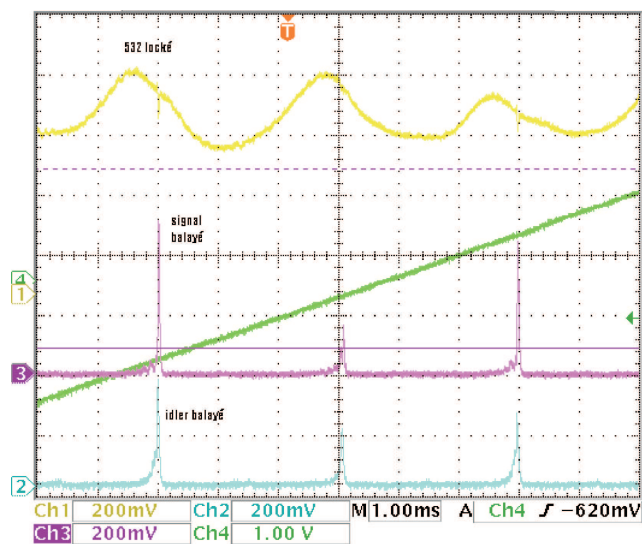


Fig. 9.9: Modulation en intensité de la cavité verte asservie, lorsque l'on balaye la longueur de la cavité infrarouge



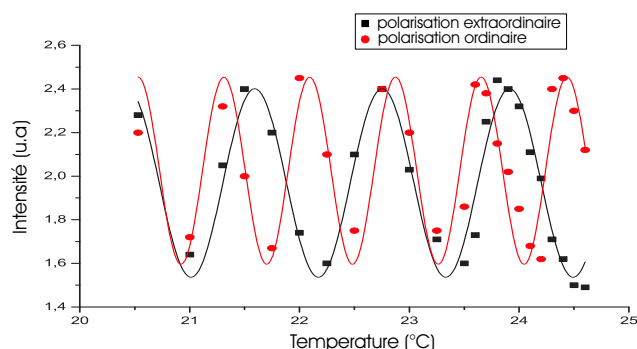


Fig. 9.10: variation de l'intensité transmise (valeurs expérimentales, et fit) par la cavité verte, en fonction de la température, pour les polarisations ordinaires et extraordinaires, pour une puissance de pompe de 300 mW.

### B.4.3 Intérêt et inconvénients

Comme on l'a vu précédemment, le principal intérêt de la double cavité est de nous donner un paramètre permettant d'optimiser le réglage de la double cavité. Expérimentalement en asservissant une cavité, et en balayant l'autre, on voit cette modulation. Plus la modulation est importante et mieux les cavités verte et infrarouge sont alignées.

L'inconvénient majeur des cavités Fabry-Perot parasites est que, à puissance de pompe ou d'injection constante, la puissance dans chaque cavité dépend de la longueur de l'autre cavité, de la température, etc. Par conséquent:

- Sur la cavité infrarouge: il est difficile d'avoir une référence de puissance en cavité. Par exemple lorsque l'on cherche à déterminer si on a amplification ou désamplification, le fait de mettre la pompe ou pas va modifier (par effet thermique) les conditions expérimentales, donc le niveau de référence. Il sera donc plus difficile de conclure à l'amplification ou à la désamplification sur la seule comparaison des niveaux moyens sans ou en présence de pompe.
- Sur la cavité verte: le problème est identique.
- Sur le seuil de fonctionnement en OPO de la double cavité: une conséquence des deux propriétés précédentes est que, contrairement à une cavité simple, le seuil de la double cavité dépend fortement des cavités parasites.

## Conclusion

La double cavité est donc l'outil quasiment idéal pour réaliser une amplification stable avec un seuil bas. Elle est également bien adaptée à l'amplification d'une image. Par rapport à une cavité simple elle requiert cependant plus de réglages. La qualité des traitements optiques est un paramètre crucial pour le bon fonctionnement d'un OPO en double cavité. C'est la

---

principale limitation expérimentale rencontrée. On va voir dans le dernier chapitre comment on a pu néanmoins amplifier une image dans cette cavité.



---

# Amplification d'image en cavité hémi-confocale

---

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Amplification en cavité doublement résonnante</b>	<b>172</b>
A.1	Configuration expérimentale	172
A.2	Réglages	174
A.3	Résultats classiques et quantiques	175
<b>B</b>	<b>Amplification en double cavité</b>	<b>177</b>
B.1	Configuration expérimentale	177
B.2	Transmission d'image	179
B.3	Amplification d'image : Résultats classiques	181
<b>C</b>	<b>Bruit de l'amplification</b>	<b>185</b>
C.1	Dispositif expérimental	185
C.2	Caractère non-classique des images amplifiées	185
C.3	Résultats	187

---

## Introduction

Dans ce chapitre, on va utiliser tous les éléments développés au cours des chapitres précédents. Le but est d'amplifier de manière stable, continue et contrôlable une image dans un oscillateur paramétrique optique. Ce travail est en fait très proche des travaux réalisés sur l'amplification d'image pulsée (en particulier [Lantz97, Lantz00] ainsi que [Kumar99]), mais en continu.

On a vu au chapitre 8 que l'amplification sous le seuil dans un OPO triplement résonnant était impossible de manière stable à cause du trop grand nombre de paramètres nécessaires pour contrôler la triple résonance. Nous sommes donc passés en configuration double cavité. Cette configuration a amené ses problèmes propres, mais aussi ses avantages, développés au chapitre précédent. La cavité dégénérée la plus simple en configuration de double cavité (miroir plan déposé sur le cristal) a été la cavité hémi-confocale, dont le traitement classique sur une image a été montré au chapitre 3, et dont le traitement quantique théorique est développé au chapitre 6.

Nous avons tout d'abord réalisé une expérience préliminaire en cavité hémi-confocale avec une pompe non résonnante, dont les résultats sont rassemblés dans la première partie de ce chapitre. L'expérience en double cavité sera développée dans la seconde.

Les aspects expérimentaux du réglage et du fonctionnement de l'OPO, du réglage et du fonctionnement de la double cavité ont été développés aux deux chapitres précédents. On ne les détaillera donc pas ici, et on s'intéressera plus particulièrement aux résultats, tout d'abord dans une cavité doublement résonnante hémi-confocale (partie A) puis dans une double cavité triplement résonnante (B).

## A Amplification en cavité doublement résonnante

Pour des raisons techniques (indisponibilité de certains composants optiques en particulier), on a réalisé une expérience préliminaire en cavité doublement résonnante. Cette expérience est relativement simple, mais a donné des résultats intéressants et nous a permis de mettre en évidence de nombreux effets.

### A.1 Configuration expérimentale

La cavité est la double cavité décrite au chapitre précédent, mais dont le miroir d'entrée M1 (réfléchissant pour 532nm) n'est pas présent. Dans cette configuration le faisceau vert effectue donc un double passage dans le cristal, puisque la face arrière du cristal (miroir M3) est de haute réflectivité pour le faisceau vert.

Au moment de l'expérience on ne disposait pas d'une mire (voir figure 7.7). L' "image" considérée est donc un faisceau d'injection gaussien, injecté dans l'axe de la cavité, dont le waist (de taille  $w_{inj}$ ) est placé au niveau du waist propre de la cavité (de taille  $w_0$ ), où on a choisi

$$w_{inj} \simeq 3w_0.$$

Il n'y a pas de cavité pour la pompe. Il est donc difficile d'évaluer précisément la taille du mode par rapport au waist propre de la cavité infrarouge. Néanmoins, la pompe est adaptée de manière à obtenir au niveau du cristal un mode gaussien d'environ la même taille que le mode d'injection, soit  $w_p \simeq w_0$ .

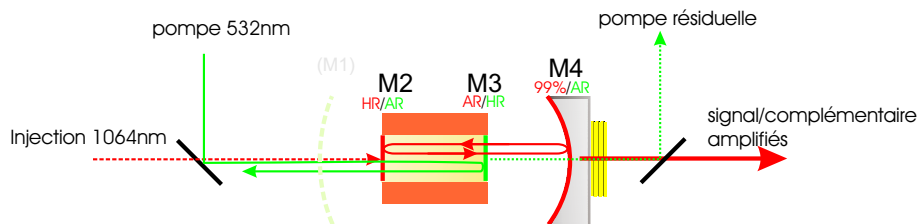


Fig. 10.1: Schéma de la double cavité réalisée expérimentalement. Le rouge/vert correspond aux faisceaux ou traitements à 1064/532 nm.

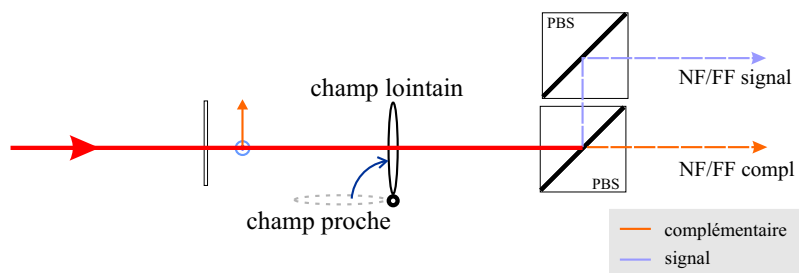


Fig. 10.2: Système d'imagerie à deux cubes polarisateurs (PBS). Une lentille orientable judicieusement placée permet de choisir si on veut imager le champ proche ou le champ lointain sur la caméra.

Au niveau de la détection, on envoie d'une part signal et complémentaire sur deux photodiodes équilibrées, pour une détection classique des corrélations en intensité. D'autre part, on ajoute également pour visualiser la forme transverse des faisceaux une lame partiellement réfléchissante ( $R \simeq 50\%$ ) placée sur un miroir pivotant, qui permet d'envoyer à la demande une partie de signal et complémentaire vers la Caméra CCD. Un système de deux cubes permet d'imager côte à côte sur la caméra signal et complémentaire, comme sur la figure 8.4 du chapitre 8. On a cependant simplifié le dispositif. Une lentille placée sur un support escamotable est installée peu avant la paire de cube. Le système d'imagerie est prévu de telle sorte que sans cette lentille la caméra CCD soit un champ proche du plan d'entrée du cristal (M3), et que lorsque la lentille est en place, la caméra CCD est le champ lointain de ce même plan.

## A.2 Réglages

On observe plusieurs cavités parasites:

1. dans le cristal: on ne contrôle pas sa longueur, mais un changement de température permet d'observer une variation de transmission du faisceau vert.
2. entre le cristal et le miroir de sortie de la cavité infrarouge: comme détaillé au chapitre précédent, lorsque l'on balaye la cavité infrarouge, on a une modulation du signal à 532nm.

Par rapport à la double cavité, le faisceau vert n'effectue ici qu'un double passage dans le cristal. Sachant que l'unique élément fixe est le cristal, la meilleure manière pour l'aligner proprement et rapidement est la suivante:

1. Aligner l'infrarouge sur le cristal (en alignant avec l'injection le faisceau réfléchi sur M3 par exemple), et le centrer.
2. Ajouter le miroir M4, et l'aligner avec le faisceau infrarouge et le cristal de manière à obtenir une cavité infrarouge alignée avec l'injection.
3. Ajouter la pompe, et l'aligner visuellement avec le faisceau infrarouge.
4. Normalement l'effet de la cavité parasite M3-M4 est suffisamment visible, et on peut aligner précisément la pompe avec la cavité infrarouge en maximisant la modulation d'intensité lorsque l'on balaie cette dernière. Si le réglage est suffisamment bon, en augmentant la puissance de pompe, on atteint le seuil.
5. En modifiant légèrement M4, on peut alors optimiser le seuil, et donc l'alignement de la cavité infrarouge sur la pompe.
6. On réinjecte l'infrarouge dans la cavité.

Le seuil de l'OPO minimum mesuré est d'environ 180 mW. La puissance de pompe dans le cristal, ainsi que sa forme transverse ne changent pas lorsque l'on asservit la cavité infrarouge, puisque les effets thermiques de la pompe ne sont alors pas énormément modifiés, et que ceux

dus à l'infrarouge sont imperceptibles. On peut donc, à pompe fixée, aligner et amener à dégénérescence la cavité infrarouge.

La température de dégénérescence, c'est à dire pour laquelle les pics du signal et du complémentaire coïncident, est de  $T = 34.7^{\circ}C$ . On doit abaisser cette température avant d'asservir la pompe, de manière à compenser les effets thermiques de celle-ci et de retrouver la dégénérescence. Ces effets thermiques sont dans notre cas de l'ordre d'un degré Celsius.

### A.3 Résultats classiques et quantiques

#### A.3.1 Résultats monomodes

Injecté de manière monomode (c'est à dire sur le mode  $TEM_{00}$  de la cavité), on peut réaliser simplement l'amplification monomode dans la cavité. On accède ainsi aux performances typiques de la cavité monomode. On obtient une amplification doublement résonnante en cavité asservie, dont une courbe typique à l'oscilloscope est montrée sur la figure 10.3.

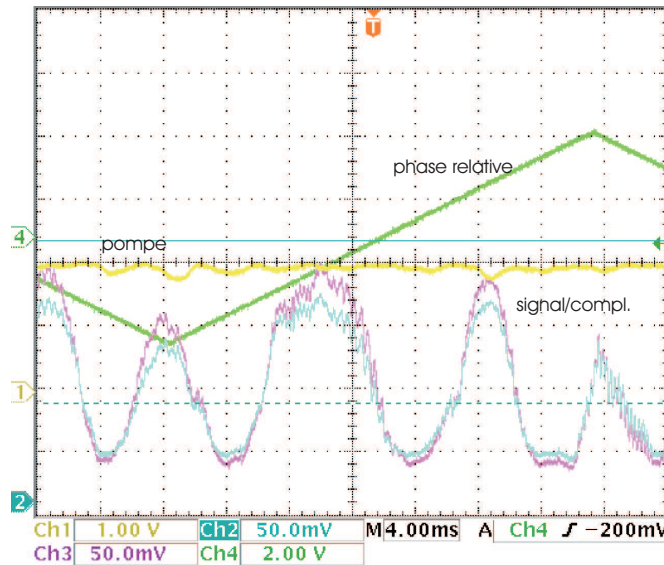


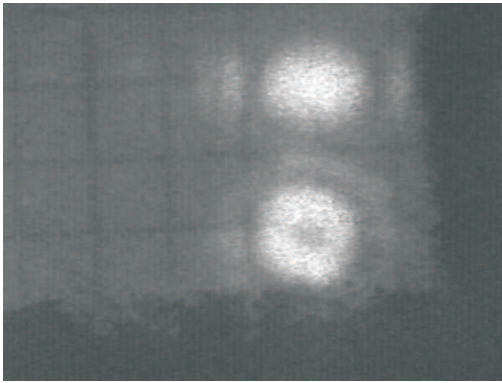
Fig. 10.3: amplification monomode en cavité doublement résonnante

La forme transverse du mode amplifié est bien un  $TEM_{00}$ , le système est stable sur plusieurs minutes à double résonance, sans autre asservissement que celui de la longueur de cavité. On a enregistré des gains en intensité jusqu'à 18 dB, pas forcément très stable (les asservissements tenant mal pour les gains forts). Pour un gain en intensité d'environ 4, on a mesuré 35% de corrélations sous la limite quantique standard entre signal et complémentaire amplifiés. Ce résultat est en accord avec les caractéristiques de notre cavité (pertes d'environ 1%), avec les pertes sur le trajet et avec l'efficacité quantique des photodiodes ( $\approx 95\%$ ). En

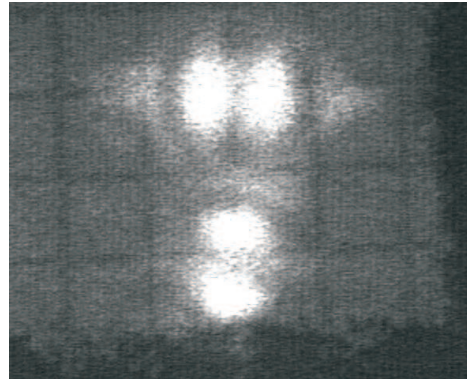


effet en l'absence de pertes, les corrélations en intensité des faisceaux amplifiés sont (voir figure 4.6) de  $1/G$  où  $G$  est le gain. En cavité on a  $\gamma' \simeq 0.8\%$  de pertes (cristal, face arrière, diffraction, voir tableau B.1.3) et  $\gamma = 1\%$  de transmission sur le miroir de sortie. La corrélation maximum théorique avec un gain  $G = 4$  est donc  $\frac{1}{G} \frac{\gamma + \gamma'}{\gamma} \simeq 0.45$ , qu'il faut diminuer des pertes de détection.

### A.3.2 Résultats multimodes



Gain = 1.5  
16% de corrélations quantiques  
sous le bruit quantique standard



Gain = 2  
11% de corrélations quantiques  
sous le bruit quantique standard

Fig. 10.4: amplification multimode en cavité doublement résonnante.

On défocalise maintenant la pompe de manière à ce qu'elle pompe plus de modes. Vu que le seuil monomode est de 180 mW, on ne peut pas la défocaliser de plus d'un facteur 2 ou 3, sinon le seuil est beaucoup trop haut et on ne voit pas d'amplification. Des résultats typiques sont montrés sur la figure 10.4, pour deux longueurs de cavité. On a représenté l'image obtenue à la CCD (signal et complémentaire) lorsque l'on balaie la phase relative. On a également indiqué le gain, et les corrélations en intensité entre signal et complémentaire lorsque le gain est maximum. On peut voir que les faisceaux signaux et complémentaires sont quantiquement corrélés, et que leur forme transverse n'est pas triviale (c'est à dire n'est pas descriptible par un seul mode  $TEM_{pq}$  de la cavité).

Enfin un autre effet récurrent est illustré sur la figure 10.5. On voit que, sans doute en raison des effets de cavité parasite, lorsque l'on balaie la cavité on peut être pour certaines longueurs au dessus du seuil, et pour d'autres en dessous. Par conséquent lorsque l'on asservit la cavité pour amplifier notre image, on peut très bien avoir une puissance de pompe suffisante pour être en fait au dessus du seuil pour d'autres longueurs de cavité. Cependant il est facile de contrôler qu'on n'a pas d'émission spontanée lorsque l'on amplifie.

Les faisceaux signal et complémentaire ne reproduisent pas la forme du faisceau entrant. On ne peut donc pas parler d'amplification d'image. Cependant la forme non-triviale est la preuve que l'amplification est *multimode*. Au niveau du facteur de bruit, les 16% seulement de corrélation quantiques en intensité ne laissent pas espérer d'effets mesurables sur le bruit.

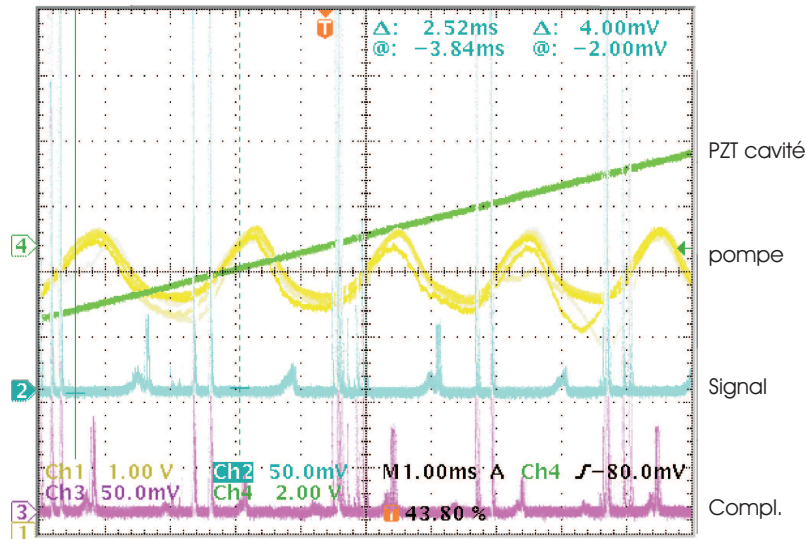


Fig. 10.5: balayage de la cavité à proximité du seuil. On voit sur le signal et le complémentaire les pics d'injection, ainsi que l'émission spontanée qui indique qu'on est localement au dessus du seuil.

## B Amplification en double cavité

Fort de l'expérience acquise en cavité doublement résonnante, l'étape suivante est la double cavité triplement résonnante, dont le seuil bas permet d'espérer des résultats en amplification plus multimodes.

### B.1 Configuration expérimentale

Par rapport à la cavité doublement résonnante, on ajoute uniquement le miroir M1, qui nous place dans la configuration détaillée au chapitre 9. La mire de résolution (figure 7.7) permet d'envoyer une image complexe, de taille connue, dans la cavité (voir le schéma 10.6).

Divers rayons de courbure pour le miroir M1 ont été essayés, les meilleurs résultats ont été obtenus pour  $R = 2000\text{mm}$ , pour lequel la taille du mode propre est (d'après la figure 9.4), d'environ 2 à 3 fois la taille du mode infrarouge.

Les effets thermiques sur la pompe sont très importants et il est difficile de trouver un point de fonctionnement stable pour la triple résonance. En effet la lentille thermique a tendance à

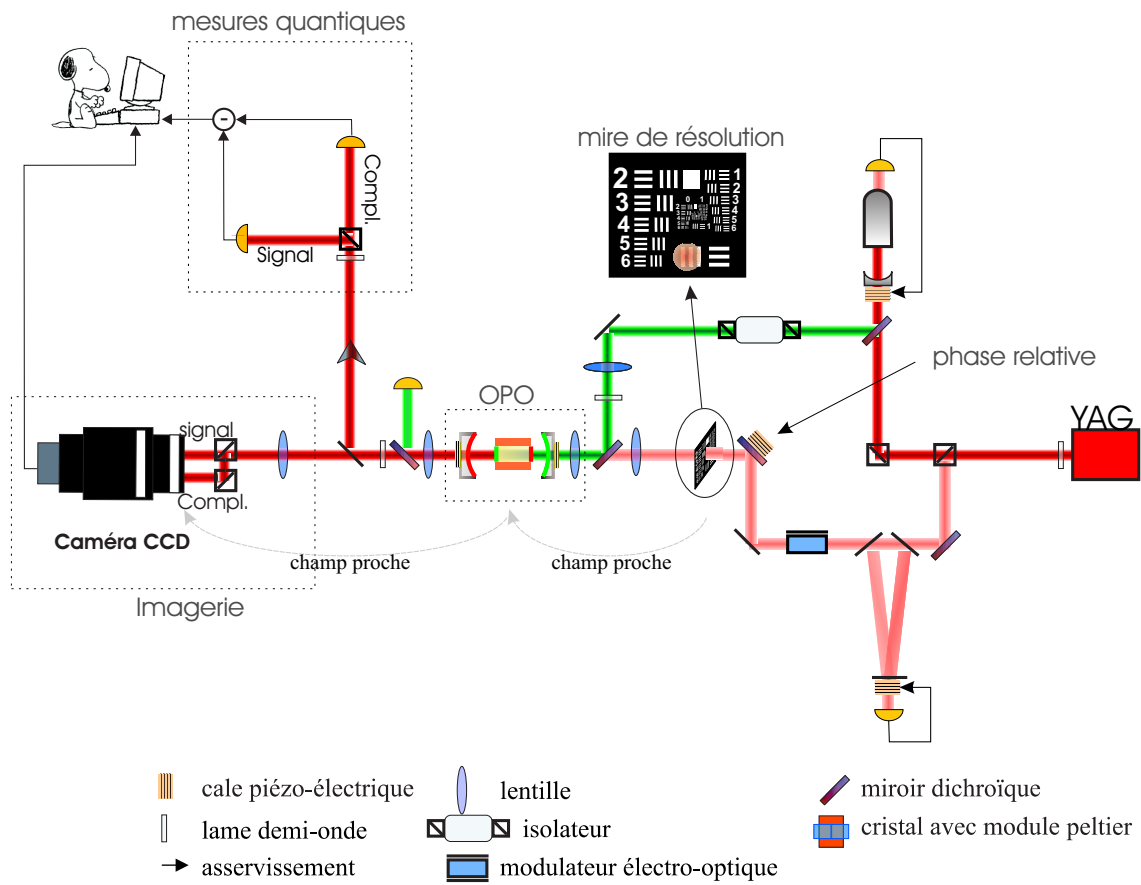


Fig. 10.6: Schéma de principe de l'expérience d'amplification d'image. Le système de source maître-esclave n'est pas représenté.

focaliser (voir [Zondy99] pour une étude exhaustive de l'effet de lentille thermique) et donc à rendre le mode propre plus petit. Il est très difficile d'évaluer la taille réelle du mode propre de la cavité lorsque celle-ci est asservie. Par ailleurs la température dans le cristal modifie la double résonance signal/complémentaire, ainsi que l'effet Fabry-Perot parasite dans le cristal (entre M2 et M3) pour la pompe, voire désaligne les cavités. Suivant l'adaptation de la pompe, la température, etc, ce système peut donc être très instable.

Expérimentalement on constate même de nombreux phénomènes d'hystérésis lorsque l'on varie la puissance de pompe. Le seuil balayé (sans effets thermiques) est toujours d'environ 25-30 mW. Lorsque à partir de cette configuration on asservit la cavité, suivant le point dans le cristal, la température, etc, on peut très bien ne jamais obtenir le seuil de fonctionnement de la cavité asservie même avec l'intensité maximum de pompe disponible. A l'inverse, on peut aussi se trouver dans une situation où la situation stable est une situation très au dessus du seuil, donc impropre à l'amplification. Enfin, malgré nos efforts nous n'avons pas pu trouver de méthode fiable et reproductible pour trouver un point de fonctionnement. Néanmoins, en essayant différents points dans le cristal, et différentes températures, on peut trouver des positions et une température où le système peut s'asservir de manière reproductible. De plus si on trouve un point de fonctionnement stable, celui-ci pourra rester asservi pendant plusieurs minutes.

Il faut donc garder à l'esprit, pour l'interprétation des résultats, qu'il est très ardu de trouver un point de fonctionnement pour la triple résonance sous le seuil. De plus, en raison des effets thermiques et des cavités parasites, définir un seuil de fonctionnement, une taille de mode propre ou une intensité moyenne en cavité asservie n'est pas chose aisée.

## B.2 Transmission d'image

Si l'on envoie une image dans la cavité héli-confocale, on a vu au chapitre 3 que si on asservissait la cavité sur la résonance du mode propre  $TEM_{00}$  de la cavité, on récupérerait en transmission la partie paire de l'image, plus sa transformée de Fourier. On va voir ici plus en détail le comportement de cette cavité, plus complexe que la cavité type Fabry-Perot du chapitre 3, en particulier à cause de la présence d'un cristal, et de la taille transverse finie.

### B.2.1 Effet du walk-off

L'étude de la transmission d'image à travers la cavité permet de mettre en évidence l'effet du walk-off sur les images, effet différent sur le signal et sur le complémentaire. On a réalisé la transmission par la cavité de différentes images. La cavité étant héli-confocale, l'axe propre de la cavité est aisément repérable : c'est le centre de symétrie de la figure. On peut voir sur la figure 10.7 que si on injecte une image sur les deux polarisations à la fois, l'axe de symétrie de l'image complémentaire transmise est légèrement décalé verticalement. En effet le cristal utilisé (voir chapitre précédent) n'est pas compensé pour le walk-off. On injecte à  $45^\circ$ , par la

face arrière du cristal. Par conséquent, l'image ne peut pas être injectée de la même manière sur les deux polarisations.

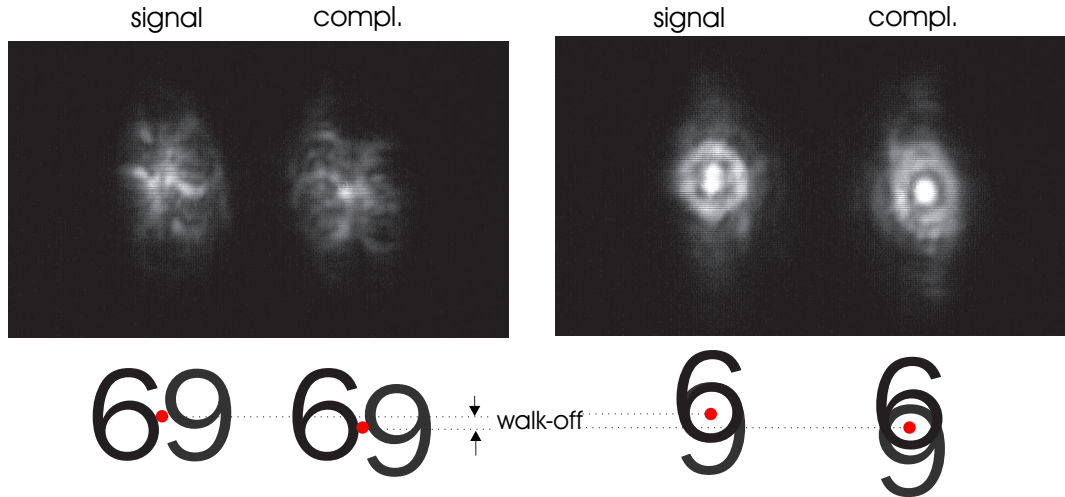


Fig. 10.7: Mise en évidence de l'effet du walk-off sur la transmission d'une image (ici chiffre 6).

Les différentes solutions possibles seraient :

- injecter l'image par le miroir M4 (lors de la réflexion sur la face HR du cristal, la polarisation subissant le walk-off reviendrait sur ses pas, comme dans un cristal à walk-off compensé).
- utiliser un cristal à walk-off compensé.
- compenser le walk-off en ajoutant sur le trajet un cristal de même longueur traité anti-reflet.
- Utiliser un cristal type I, où signal et complémentaire ne subissent plus le walk-off (mais où la pompe continue à le subir).

Dans notre cas, il n'était pas possible simplement de s'affranchir de cet effet. Pour ne pas être gêné dans la suite de notre étude, et quand c'était un problème, on a travaillé avec des images qui sont peu modifiées par le walk-off (des fentes verticales par exemple).

### B.2.2 Limite de résolution

Les principales sources limitant la résolution sont :

- La diffraction : caractérisée par le nombre de Fresnel  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$  du système optique.
- Les imperfections dues aux optiques (qualité de surface des miroirs, des lentilles), ainsi qu'au cristal.
- La qualité de la dégénérescence qui limite le nombre de modes simultanément résonnants dans la cavité, donc la reconstruction des petits détails de l'image.

- La qualité du système d'imagerie : si on n'est pas exactement au champ proche, cela se traduit par une perte de résolution dans l'image.

La mire de résolution dont on dispose permet d'étudier et de caractériser la résolution d'un système optique. Le réseau de fentes de plus en plus serrées permet de tester toutes les fréquences spatiales. On caractérisera la qualité de transmission du système optique en déterminant les fentes les plus petites qu'on peut distinguer à la caméra en transmission. Dans notre cas on est cependant limité par l'effet de la cavité, qui en mélangeant champ proche et champ lointain, va brouiller les petits détails situés en particulier au centre. Cette étude ne pourra donc pas être vraiment quantitative.

On a représenté sur la figure 10.8 la transmission de la mire dans différentes configurations. La taille du  $TEM_{00}$  de la cavité donne l'échelle de cette image dans le plan du cristal. Sans cavité, on voit que la limite de résolution est bien inférieure à la taille du mode propre de la cavité. Par contre, dès qu'on ajoute la cavité (avec ou sans cristal), on voit qu'on a du mal à résoudre des détails de taille plus petite que le waist de la cavité (qui nécessite des modes d'ordre élevés).

### B.3 Amplification d'image : Résultats classiques

Dans cette partie on va montrer les résultats de l'amplification d'une double fente. Cette image a de nombreux avantages :

- Elle est déjà paire, et transmet une quantité appréciable de lumière, ce qui permet suffisamment d'intensité en cavité pour permettre de l'asservir.
- Elle est peu sensible au walk-off.
- Sa transformée de Fourier est perpendiculaire aux fentes, donc aisément distinguable de ces dernières.
- En se déplaçant sur la mire on varie simplement la taille et l'écartement des fentes, et on peut choisir facilement des fentes verticales ou horizontales.

#### B.3.1 Amplification d'image

On a observé une amplification sensible à la phase de cette image. Une courbe typique à l'oscilloscope numérique est montrée sur la figure 10.9. Le gain maximum est de l'ordre de  $G_{max} = 6$ .

L'asservissement de la phase relative, bien qu'assez peu stable (de l'ordre de quelques secondes), permet de prendre une acquisition grâce à la CCD du profil transverse du faisceau (signal et complémentaire) au maximum ou au minimum de la courbe d'amplification. On peut également prendre une image lorsque la phase relative est balayée, ou sans la pompe. Des images typiques obtenues sont montrées sur la figure 10.10.

Notons qu'on voit principalement la partie centrale de l'image (le reste étant beaucoup moins intense, n'apparaît pas sur la photo). Sur l'image la plus basse, on ne voit que le

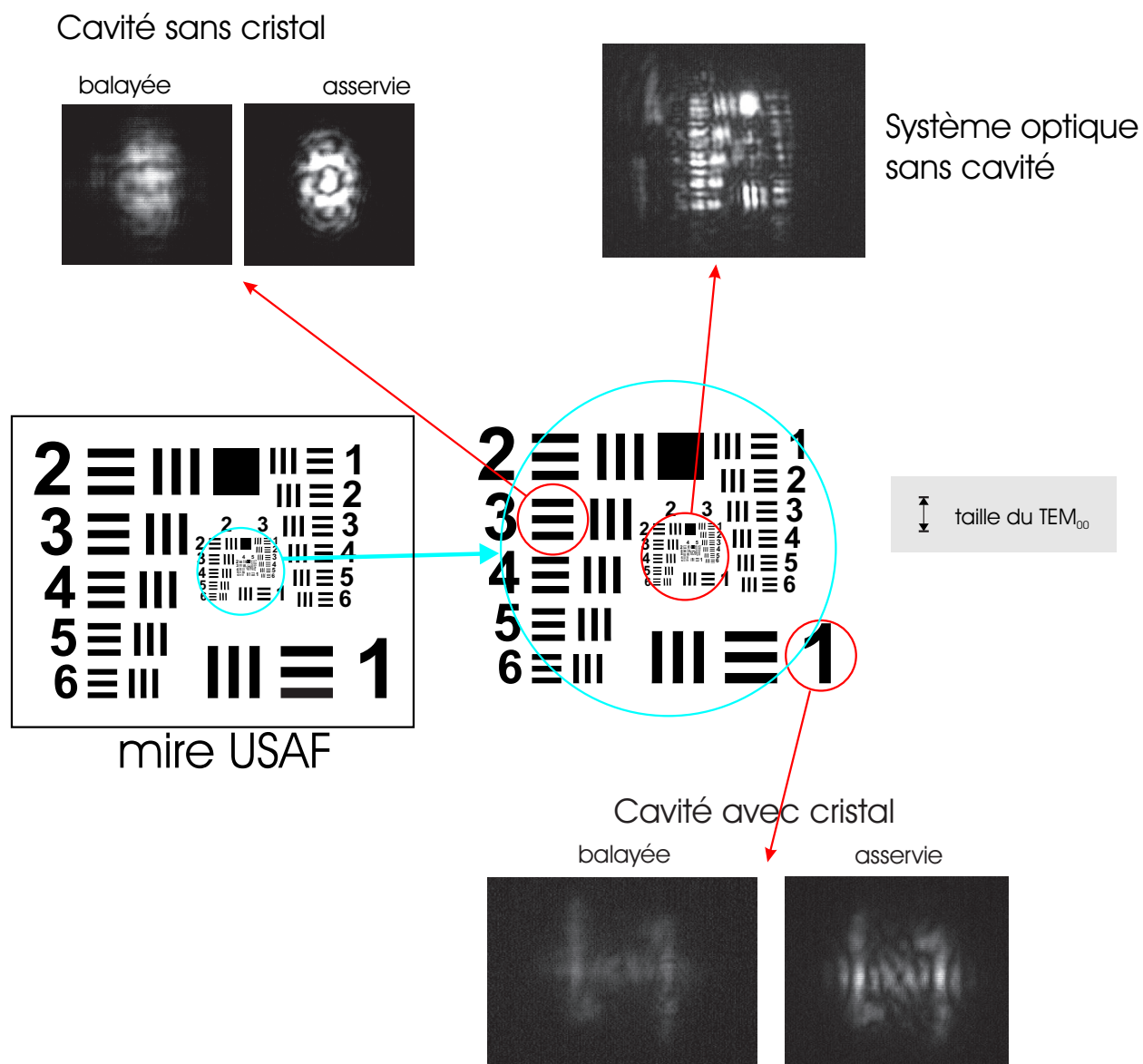


Fig. 10.8: Champ proche de la fente dans différentes configurations.



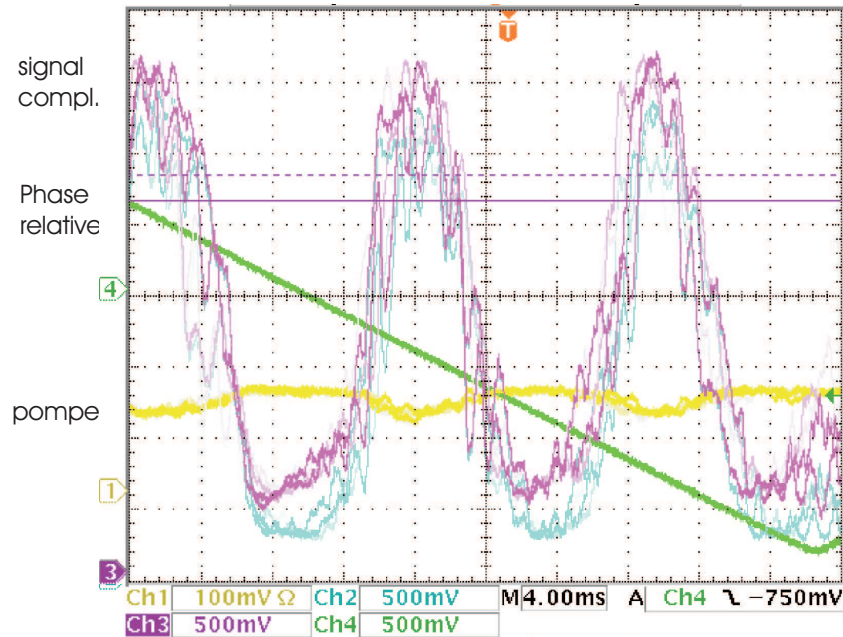


Fig. 10.9: Amplification sensible à la phase d'une image injectée (ici une triple fente).

signal, et pas le complémentaire puisque sans pompe ils ne sont pas résonnants pour la même longueur de cavité.

### B.3.2 Gain local

On peut alors traiter informatiquement les images obtenues afin d'en déduire le gain local. L'image étant en 8 bit, on a donc une matrice de points dont les valeurs sont comprises entre 0 et 255. Si on prend les images et qu'on divise point à point les intensités, les données sont inexploitable, ne serait-ce qu'à cause du bruit de fond de l'image. On effectue donc les opérations suivantes:

- On supprime le bruit de fond: en analysant une zone sombre de l'image (un coin par exemple), on obtient la valeur moyenne du bruit de fond ( $I_{dark}$ ), qu'on peut soustraire à toutes les autres valeurs. En prenant le maximum de l'intensité dans cette zone, on obtient une valeur pour distinguer entre le bruit de fond et notre signal. Tous les points dont l'intensité est inférieure à cette valeur sont remplacés par cette valeur. De cette manière on obtient un gain unité pour le bruit.
- On effectue un "binning", c'est à dire une association de pixels, afin de réduire le bruit. Nous avons fait un binning (a posteriori) dans des zones de taille  $2 \times 2$  pixels, c'est à dire qu'on a divisé par 4 le nombre de points. Notons qu'il est tout à fait licite d'effectuer cette opération, qui revient juste à considérer des pixels plus gros. Il ne s'agit donc pas



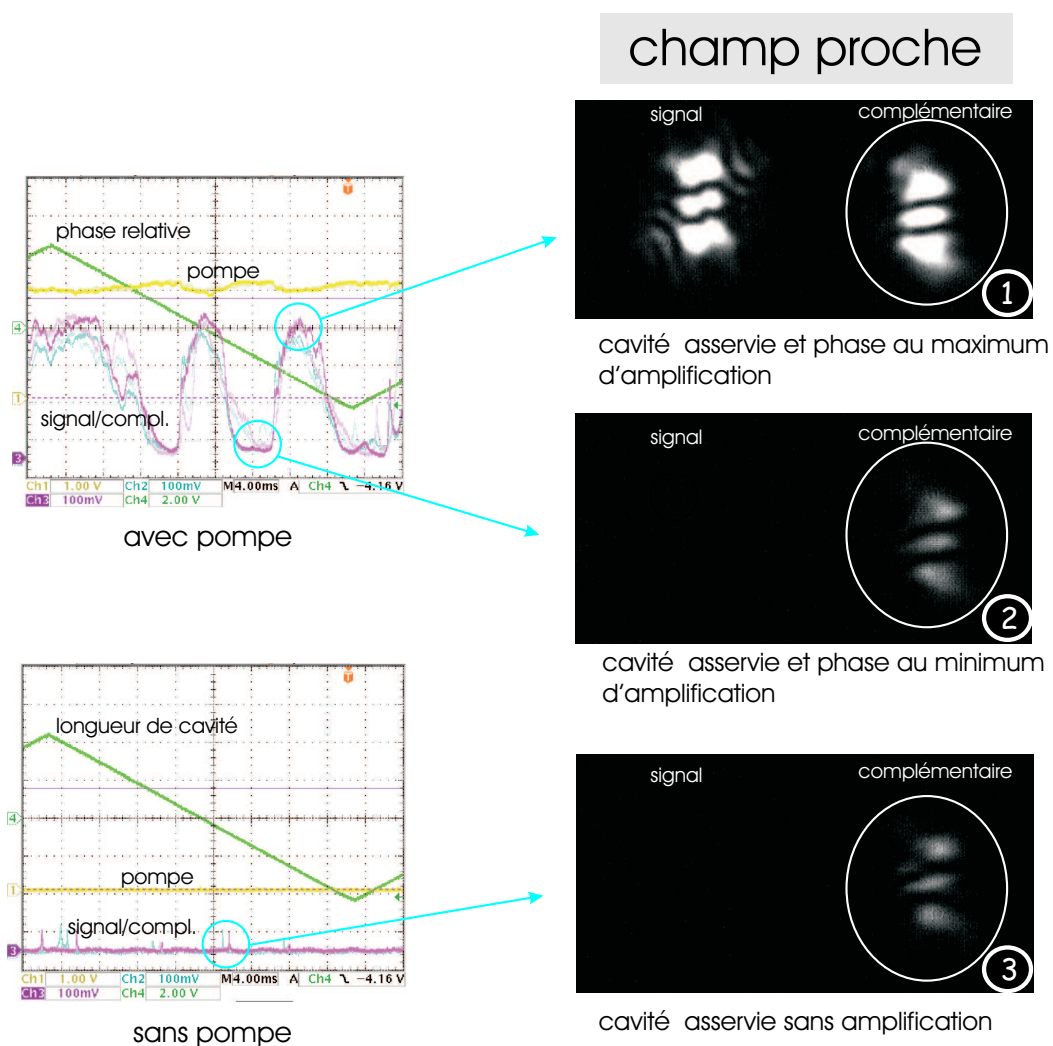


Fig. 10.10: Comparaison de la transmission d'une image dans trois situations (ici une double fente horizontale).

d'un "lissage" de nos courbes.

Les résultats sont rassemblés sur la figure 10.11. On a également indiqué la taille du  $TEM_{00}$  de la cavité. On voit que la figure de gain  $\frac{\text{amplifié}}{\text{non-amplifié}}$  est moins uniforme. En effet la pompe modifie la géométrie de la cavité. Cette figure nous donne en fait indirectement accès à la déformation de l'image en présence de la pompe. Par contre si l'on regarde le gain  $\frac{\text{amplifié}}{\text{dé-amplifié}}$ , où seule la phase relative a changé, et où l'effet de la pompe est quasiment le même, on obtient une figure de gain local régulière. Le gain étant plus étendu que le mode  $TEM_{00}$  de la cavité infrarouge, on a donc bien une amplification multimode de notre image.

## C Bruit de l'amplification

On a vu au chapitre 4 qu'en théorie le facteur de bruit d'un amplificateur parfait n'est pas dégradé lors d'une amplification sensible à la phase. L'amplificateur n'ajoute donc pas de bruit propre, et l'amplification est dite sans bruit. L'amplification sensible à la phase que nous avons réalisée peut, si le gain est suffisamment fort et les pertes dans la cavité suffisamment faibles, dégrader moins le rapport signal à bruit qu'un amplificateur habituel. Le but de cette section est d'essayer de montrer cette propriété.

### C.1 Dispositif expérimental

On a ajouté sur l'injection un modulateur acousto-optique (ou AOM) de marque A&A modèle MT/110/A1.1064. Rappelons en le principe: une onde sonore stationnaire crée un réseau de diffraction qui, suivant l'intensité de la modulation, envoie une partie du faisceau sur les ordres supérieurs de diffraction du réseau. En modulant l'intensité pilotant l'AOM, on peut obtenir sur l'ordre 0 de diffraction un faisceau modulé en intensité de typiquement quelques pour-cent (avec presque la totalité de l'intensité), ou sur les ordres supérieurs on peut obtenir une modulation en intensité de 100%, mais avec des intensités beaucoup plus faibles. Dans notre cas on veut simplement ajouter une petite modulation en intensité, sans diminuer trop l'intensité du faisceau. On utilise donc l'ordre 0. Dans notre cas on pilote l'AOM avec une tension de 20 mV pics à pics à 5 MHz, avec un offset de 1 V, On obtient ainsi au niveau de la détection un signal de quelques décibels seulement au dessus du bruit quantique.

### C.2 Caractère non-classique des images amplifiées

En coupant le modulateur acousto-optique, on vérifie que les faisceaux amplifiés sont bien non-classiques. A l'aide du système d'acquisition informatique, on a pu mesurer des corrélations en intensités entre les images signal et complémentaire, jusqu'à 10% sous la limite quantique standard sur l'ensemble du faisceau (toujours pour des gains d'environ 6). Ces effets sont faibles, mais en accord avec les effets attendus compte tenu des pertes dans la cavité.

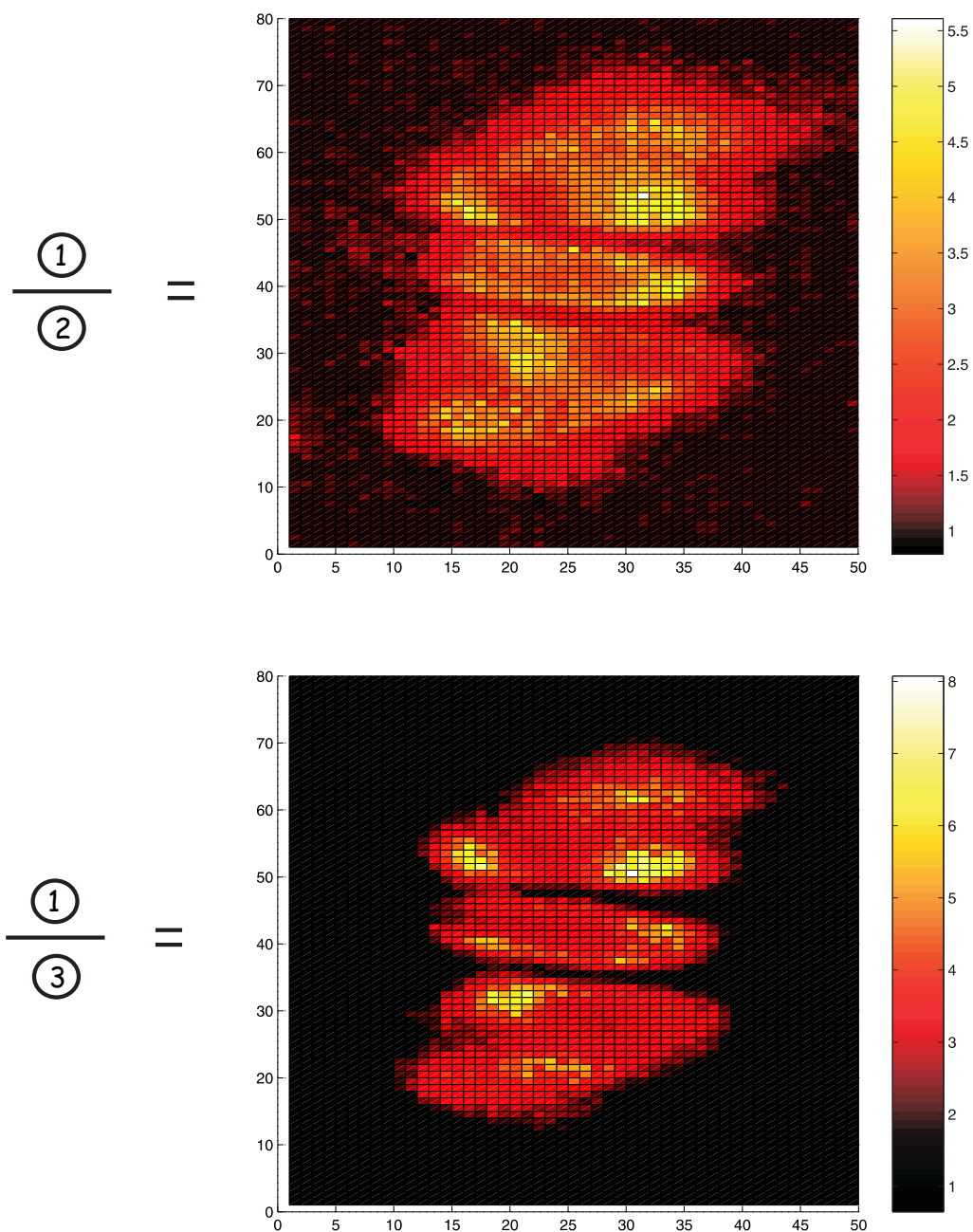


Fig. 10.11: Comparaison du gain local (c'est à dire le rapport des intensité pixel à pixel) entre le maximum et le minimum de l'amplification (en haut), et le maximum de l'amplification et l'image transmise non-amplifiée (en bas). Les numéros correspondent aux images de la figure 10.10.

### C.3 Résultats

Avec une telle modulation, on obtient en sortie une modulation à 5 MHz de quelques décibels au dessus du niveau du bruit quantique. On a représenté sur la figure 10.12 les résultats obtenus. La courbe la plus basse est le bruit d'obscurité, la courbe intermédiaire est le signal transmis à travers la cavité en l'absence de pompe (donc sans amplification), et la courbe du dessus est la courbe transmise en configuration d'amplification sensible à la phase. On se place aussi près que possible de la phase pour laquelle l'amplification est maximum, grâce à l'asservissement de la phase relative (voir section E.4 du chapitre 7).

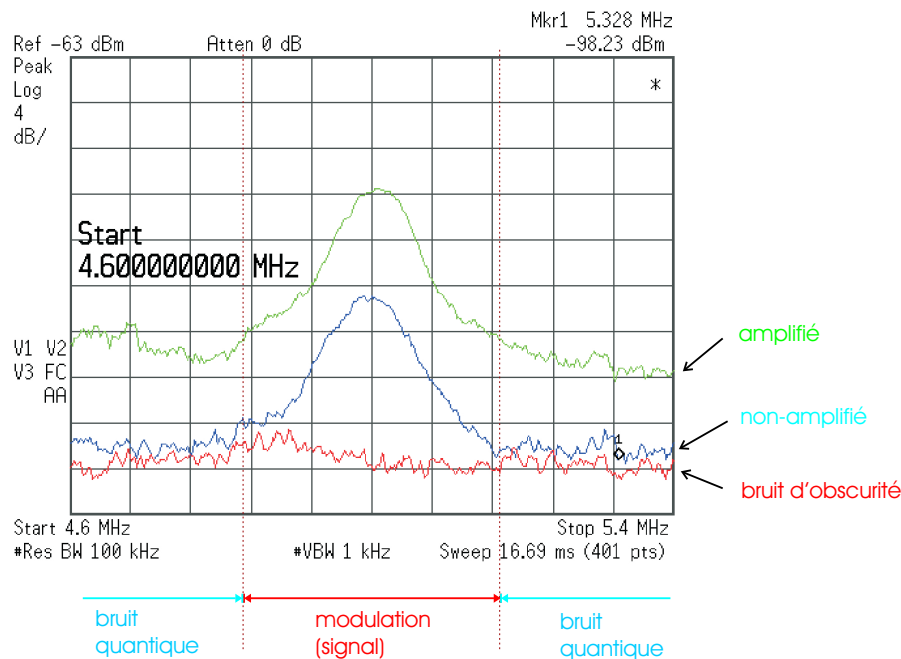


Fig. 10.12: Figure typique de l'amplification d'une faible modulation d'amplitude.

Cependant les résultats ne sont pas exploitables en l'état à cause des trop grandes incertitudes expérimentales :

- le niveau du signal non amplifié n'est pas stable à cause des effets de cavités parasites.
- le niveau d'amplification est difficile à contrôler car l'asservissement de la phase relative est très difficile à maintenir lorsque la triple résonance n'est pas stabilisée.

On peut le voir sur la figure par le fait que le niveau du bruit quantique, qui devrait être quasiment plat en fonction de la fréquence, varie. Il est donc difficile d'évaluer précisément le gain tant pour le signal que pour le bruit (on a une incertitude d'au moins 2 dB). On ne peut donc conclure pour l'instant sur le facteur de bruit de notre amplification.

De plus, compte tenu des faibles effets quantiques mesurés, la réduction du facteur de bruit de notre amplification devrait être très faible et ne peut être mesurée pour l'instant. Il

est donc nécessaire d'augmenter le gain et de diminuer les pertes, et d'améliorer la stabilité durant la mesure avant de conclure à l'amplification sans bruit.

## Conclusion

Cette expérience est l'aboutissement de ce travail de thèse. Elle n'est encore qu'au stade exploratoire, mais elle a déjà permis de montrer qu'on avait amplification sensible à la phase d'une image en cavité. La figure de gain spatial est la preuve que cette amplification n'est pas monomode, et on a montré le caractère quantique des faisceaux produits. Dans cette partie on a montré expérimentalement pour la première fois qu'il est possible de réaliser l'amplification d'une image de manière continue dans une cavité dégénérée.

Deux résultats manquent cependant encore : tout d'abord la caractérisation du facteur de bruit de cette amplification, dont nous sommes proches, enfin la mise en évidence d'effets locaux au niveau du bruit. Si on peut imaginer de faire simplement une expérience de fermeture du diaphragme, comme dans l'OPO confocal, la mesure d'effets quantiques locaux semble encore hors de portée des détecteurs actuels. En effet on est sur l'ensemble des faisceaux à quelques dB seulement (3 à 6 sur notre expérience) du bruit d'obscurité des photodiodes. Détecter une partie de l'image seulement nous donnera un signal plus faible que ce bruit d'obscurité, donc non-exploitable.

Les problèmes techniques sont nombreux, mais des pistes existent pour les surmonter : ainsi améliorer les traitements devrait permettre d'éliminer le problème des cavités parasites et de limiter les pertes. Quand à la stabilité de fonctionnement, le passage à un cristal de type I, et l'utilisation des propriétés électro-optiques du cristal lui-même (voir page 148) sont des pistes prometteuses. Enfin la dégradation de l'image dans la cavité hémi-confocale, comprise et étudiée dans ce travail de thèse, n'est pas une limite à l'imagerie puisqu'on peut imaginer de passer simplement à la cavité auto-imageante (figure 2.9). En effet dans notre configuration de double-cavité, la face d'entrée du cristal est plane, il suffirait donc d'allonger la cavité hémi-confocale et d'y insérer une lentille pour obtenir cette cavité. Le comportement de cette cavité a fait l'objet d'une expérience séparée dans notre groupe et est donc déjà en partie maîtrisée.

---

# Conclusion

---

C E TRAVAIL DE THÈSE s'est fait suivant deux directions. La première a consisté en l'étude de l'effet sur une image d'une cavité (d'un point de vue classique), point qui avait été peu ou pas abordé dans la littérature. Il nous a été auparavant nécessaire d'étudier (sous un angle plus original que vraiment nouveau) la propagation paraxiale d'une image et la dégénérescence d'une cavité. Cette partie a été tout à fait concluante et a donné des résultats nouveaux et originaux, tant du point de vue de la théorie que de l'expérience. La cavité héli-confocale en particulier a été traitée en détail, et l'expérience est venue confirmer en tous points les simulations. De plus les perspectives sur cette partie, à travers la cavité totalement dégénérée qui a été étudiée expérimentalement dans notre groupe, sont prometteuses.

La compréhension du comportement en terme d'imagerie de nos cavités nous a permis d'aborder la deuxième partie, qui s'intéresse au phénomène de l'amplification d'image dans un Oscillateur Paramétrique Optique sous le seuil. La partie transverse étant bien comprise, nous nous sommes intéressés tout d'abord aux propriétés spécifiques de notre système pour ce qui est de l'amplification d'un signal. Les résultats les plus importants sont l'ajout d'un bruit dû au couplage de l'injection au bruit de la pompe, et la rotation de la polarisation moyenne lorsque l'on n'injecte pas sur une polarisation propre. Du point de vue expérimental, l'amplification dans un OPO type II triplement résonnant nous a mis devant un grand nombre de difficultés techniques, dont la principale est le problème de la triple résonance. Nous avons donc étudié en détail la configuration de double-cavité, solution élégante qui apporte une grande souplesse expérimentale mais qui a également fait apparaître de nouveaux problèmes, en particulier celui traité en profondeur des cavités parasites. On a pu alors mener à bien l'amplification sensible à la phase d'une image amplifiée, et mettre en évidence le caractère multimode de l'amplification, ainsi que le caractère non-classique des faisceaux produits.

Cependant de nombreux points restent à étudier. Ceux dont nous sommes le plus loin sont les effets quantiques locaux. Plusieurs raisons permettent d'expliquer pourquoi : la mesure de bruit quantique nécessite des détecteurs rapides et de bonne efficacité quantique, donc la mesure de bruit d'un pixel nécessite une matrice de photodiode et non une CCD. Or ces matrices de photodiodes sont très limitées en terme de nombre de pixels, et excessivement

coûteuses. Ensuite, nos faisceaux, mêmes amplifiés, restent d'intensité faible et on est souvent à la limite du bruit d'obscurité des photodiodes. Plus on voudra considérer un pixel petit dans l'image, plus le bruit d'obscurité de la photodiode sera un problème. Par contre au niveau des résultats classiques, une caméra CCD numérique, peu coûteuse permettra sans doute dans un futur proche d'obtenir de bons résultats.

Le point dont nous sommes le plus proche est la mesure expérimentale du facteur de bruit de l'amplification, afin de démontrer que celle-ci dégrade moins qu'une amplification classique (c'est à dire qu'elle est bien "sans bruit"). Cependant avant d'obtenir des résultats probants sur les images, de nombreuses pistes devront être explorées, parmi lesquelles :

- le passage à un système de type I : dans ce cas signal et complémentaire sont en fait le même mode, ce qui simplifiera de manière importante l'expérience. La triple dégénérescence devient alors une simple double dégénérescence. On peut alors soit repasser en simple cavité, soit profiter des avantages de la double cavité. Dans ce dernier cas l'asservissement des deux longueurs de cavité suffit à assurer l'amplification sensible à la phase. Au niveaux des résultats attendus par contre, il n'est plus question de corrélation entre signal et complémentaire, mais de compression locale du bruit, et d'amplification sans bruit.
- l'amélioration des traitements qui sera un facteur déterminant : bien sûr il permettra d'éviter de nombreux effets parasites mais en limitant les pertes dans la cavité, il devrait surtout permettre d'avoir un facteur de bruit réellement intéressant.
- le passage à une cavité auto-imageante. Celle-ci s'est montrée jusqu'ici complexe à aligner et à contrôler, mais a donné des résultats de transmission de modes prometteurs.

Pour ce qui est des applications possibles de l'expérience, elles sont encore assez lointaines. En terme d'amplification pratique d'image, elles sont de plus relativement faibles. On peut néanmoins citer la pré-amplification optique d'une image avant détection, qui pourrait à terme être implémentée, et qui permet de s'affranchir des effets dû à l'efficacité quantique limitée des détecteurs. En terme d'optique quantique cependant, ces images amplifiées sont des faisceaux corrélés localement, qui pourraient avoir quantité d'applications en information quantique. Pour ce qui est de son intérêt en terme d'*ingénierie quantique*, il semblerait par contre que la démarche sous-jacente à cette expérience, qui est de tenter de générer les états non-classiques les plus multimodes possibles, soit moins fructueuse pour l'instant que celle (adoptée dans notre collaboration avec le groupe d'Optique Quantique de Camberra par exemple) consistant à générer un état non-classique à peu de modes (jusqu'à 3 actuellement maximum), mais adaptée à une mesure transverse bien précise comme un petit déplacement par exemple, et qui a déjà donné de bons résultats. Néanmoins ce type expérience est la seule manière d'obtenir des faisceaux très multimodes quantiques, et elle mérite donc d'être poursuivie.

---

# Bibliographie

---

- [AbramowitzStegun] Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Wileys and Son (93)
- [Ahufinger00] V. Ahufinger, J. Mompart, and R. Corbalán, *Lasing without inversion in three-level systems without external coherent driving*, Phys. Rev. A **61**, 053814 (2000)
- [Arnaud69] J.A. Arnaud, *Degenerate Optical Cavities*, Applied Optics, Vol **8**. Issue 1, page 189 (1969)
- [Arvind95] Arvind, B. Dutta, N. Mukunda, R. Simon, *Two-mode quantum systems: invariant classification of squeezing transformations and squeezed states*, Phys. Rev. A **52**, 1609 (1995)
- [Bachor] Bachor H., Ralph., *Experimental Quantum Optics*
- [BarracoPhD] Laurent Barraco, *Source Laser tout solide accordables à base de matériau Nd:PPLN*, Thèse de l'école polytechnique (2001)
- [BencheikhPhD] Kamel Bencheikh, *traitement non destructif de signaux optiques*, Thèse de Paris XIII (1996)
- [Black01] Black E.D., *An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization*, Am. J. Phys. **69** (1) 79 (2001)
- [Boderman98] B. Bodermann, M. Klug, H. Knöckel, E. Tiemann, T. Trebst, H.R. Telle, *Frequency measurement of I2 lines in the NIR using Ca and CH4 optical frequency standards*, Applied Physics B: Lasers and Optics, Volume **67**, Number 1 ,Pages: 95 - 99(1998)
- [Born&Wolf] *Principles of Optics*, Cambridge Press, Born and Wolf (7th edition)
- [Bracewell83] R.N. Bracewell, *Discrete Hartley transform*, J. Opt. Soc. Am. **73**, 1832 (1983)
- [Cagnac] *Lasers, Interaction lumière atomes*,EDP Science, CNRS Edition, B. Cagnac, J.P. Faroux
- [Caola91] M.J. Caola, *Self-Fourier functions*, J.Phys. A: Math. Gen. **24**, L1143 (1991)



- [Caves82] C.M. Caves, *Quantum limits on noise in linear amplifiers*, Phys. Rev. D, **26**, 1817-1839 (1982)
- [Chen04] Y. F. Chen, C. H. Jiang, Y. P. Lan, and K. F. Huang , *Wave representation of geometrical laser beam trajectories in a hemiconfocal cavity*, Phys. Rev. A **69**, 053807 (2004)
- [Chu94] Hong Chu, Dong Hwan Kim, Young Min Jhon, Sang Sam Choi, A.Z.Obidin, Dae Yoon Park, *Injection Locking of a Modified Unstable Resonator XeCl Laser by Using a Line-Narrowed Hemi-Confocal Oscillator*, Jap.J.Appl.Phys., Vol.**33**, pp.4617-4621 (1994), Pt.1.
- [Cohen87] *Photons et atomes : Introduction à l'optique quantique*, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg, *InterÉditions/Éditions du CNRS*, Paris (1987).
- [Colville94] F. G. Colville , M. J. Padgett , and M. H. Dunn , *Cw dual-cavity doubly resonant optical parametric oscillator* , Appl. Phys. Lett. **64** , 1490-1492 (1994)
- [Crossland97] WA Crossland, TD Wilkinson, TM Coker, TCB Yu and M. Stanley , *The fast bitplane SLM: A new ferroelectric liquid crystal on silicon spatial light modulator designed for high yield and low cost manufacturability*, OSA TOPS Vol. **14** Spatial light modulators, (1997), pp102-106
- [Debuisschert93] *Type-II continuous-wave optical parametric oscillator : oscillation and frequency-tuning characteristics*, T. Debuisschert, A. Sizmann, E. Giacobino et C. Fabre, *J. Opt. Soc. Am. B*, **10** 1668 (1993).
- [Dimitriev] Dimitriev V.G., Gurzadyan G.G., Nikogosyan D.N., *Handbook of nonlinear optical crystals*, (1993)
- [DingjanPhD] *Multi-mode optical resonators and wave chaos*, PhD thesis, Leiden University, J. Dingjan (2003)
- [Drever83] Drever R. W. P, Hall J.L.,Kowalski F.V., Hough J., Ford G.M., Murrell A.J. et Ward H.,*Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator* , Applied Physics B **31**, 97-105 (1983)
- [Ducci01] *Pattern formation in optical parametric oscillators*, S. Ducci, N. Treps, A. Maître, and C. Fabre, Phys. Rev. **64**,023803 (2001)
- [FabreLasers] Grynberg G., Aspect A., Fabre C., *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*, Ellipse
- [Fabre90] C Fabre, E Giacobino, A Heidmann, L Lugiato, S Reynaud, M Vaccchino et Wang Kaige, *Squeezing in detuned degenerate optical parametric oscillators*, Quantum Opt. **2** 159-187 (1990)
- [Fabre95] *Quantum fluctuations in Light Beam*, C. Fabre, dans *Quantum fluctuations*, proceedings de l'école d'été des Houches, 1995, éditée par

- S. Reynaud, E. Giacobino et J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1997).
- [Fouet00] Fabre C., Fouet J.B., Maître A., *Optics Letters* **25**, 76 (2000)
- [Gatti95] A.Gatti and L.A.Lugiato, *Quantum images and critical fluctuations in the optical parametric oscillator below threshold* *Phys.Rev.A* **52**,1675 (1995)
- [Gatti97] Gatti A., Lugiato L.A., Oppo G.L., Martin R., Di Trapani P., Berzanskis A., *Optics Express* **1**, 21 (1997)
- [Gatti04] A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, and L. A. Lugiato *Correlated imaging, quantum and classical*, *Phys. Rev. A* **70**, 013802 (2004)
- [Gouy1891] Gouy, L.G ,*sur la propagation anormale des ondes*, *Annales de Chimie et Physique*, **24**, à145 (1891)
- [Goodman] J. W. Goodman, *Introduction To Fourier Optics*,McGraw-Hill Science.
- [Grangier87] R. E. Slusher, P. Grangier, A. LaPorta, B. Yurke, and M. J. Potasek, *Pulsed Squeezed Light* ,*Phys. Rev. Lett.* **59**, 2566-2569 (1987)
- [Gunning82] William J. Gunning, *Double-cavity electrooptic Fabry-Perot tunable filter*, *Applied Optics*, Volume **21**, Issue 17, 3129- September 1982
- [Kane85] Kane T.J., Byer R.L., monolithic, unidirectional single-mode Nd:Yag ring laser, *Opt. Lett.* **10**, 65 (1985)
- [Kogelnik66] H. Kogelnik, T. Li , *Laser beams and resonators*, *Applied Optics*, Vol. **5** Issue 10 Page 1550 (October 1966)
- [Kolobov95] M. Kolobov and L. Lugiato, *Noiseless amplification of optical images* , *Phys. Rev. A* **52**,4930 (1995)
- [Kolobov99] Kolobov M., *The spatial behavior of nonclassical light*, Vol. **71**, No. 5, pp. 1539-1589 (1999)
- [Kumar90] O. Aytür and P. Kumar ,*Pulsed twin beams of light* ,*Phys. Rev. Lett.* **65**, 1551-1554 (1990)
- [Kumar99] S.-K. Choi, M. Vasilyev, and P. Kumar, *Noiseless Optical Amplification of Images* *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1938-1941 (1999)
- [Lantz97] E Lantz and F Devaux*Parametric amplification of images*, *Quantum semiclass. Opt.* **9** 279-286 (1997)
- [Lantz00] F. Devaux and E. Lantz, *Gain in Phase Sensitive Parametric Image Amplification* , *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2308-2311 (2000)
- [Levenson93] J. A. Levenson, I. Abram, T. Rivera, P. Fayolle, J. C. Garreau, and P. Grangier, *Quantum optical cloning amplifier* *Phys. Rev. Lett.* **70**, 267-270 (1993)

- [Levenson95] K. Bencheikh, E. Huntziger, J. A. Levenson, *Quantum noise reduction in quasi-phase-matched optical parametric amplification*, JOSA B, Vol. **12** Issue 5 Page 847 (1995)
- [PingKoyLamPhD] Ping Koy Lam, *Applications of quantum electro-optic control and squeezed light*, Thesis of the Australian National University (1998)
- [LauratPhD] J.Laurat, *Etats non-classiques et intrication en variables continues à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique*, Thèse de l'université Paris 6 (2004)
- [Lipson93] S.G. Lipson, *Self-Fourier objects and other self transform objects: comment*, J. Opt. Soc. Am. A Vol **10**, 9, 2088 (1993)
- [Lohmann92a] A. Lohmann and D. Mendlovic, *Self-Fourier objects and other self transform objects*, J. Opt. Soc. Am. A Vol **9**, 11, 2009 (1992)
- [Lohmann92b] A. Lohmann and D. Mendlovic, *An optical self-transform with odd cycles*, Optics Communications **93**, 25 (1992)
- [Lohmann94] A. Lohmann and D. Mendlovic, *Image formation of a self-Fourier object*, Applied Optics **33**, No 2, 153 (1994)
- [Louisell60] W.H. Louisell, *coupled modes and parametric electronic*, Wiley and sons, (1960)
- [Lugiato97] L. A. Lugiato, Ph. Grangier, *Improving quantum-noise reduction with spatially multimode squeezed light*, JOSA B, Vol. **14** Issue 2 Page 225 (February 1997)
- [Mancini00] S.Mancini, A.Gatti, L.A.Lugiato, Eur.Phys.J.D 12, 499 (2000)
- [Martinelli03] Martinelli M., Treps N., Ducci S., Gigan S., Maître A., Fabre C., *Experimental study of the spatial distribution of quantum correlations in a confocal optical parametric oscillator* Phys. Rev. A **67**, 023808 (2003)
- [MartinelliNote] Martinelli M., *User's guide to quadrant photodetectors and demodulation circuit*, Document interne à l'équipe. Disponible sur demande à treps@spectro.jussieu.fr
- [MaurinPhD] I. Maurin, *bruit quantique dans les VCSELS*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI (2001).
- [Mendlovic94] D. Mendlovic, H.M. Ozaktas, A.W. Lohmann, *Self-Fourier functions and fractional Fourier transforms*, Optics Communications **105**, 36 (1994)
- [MertzPhD] J. Mertz, *Photon noise reduction using active control on twin beams generated by an optical parametric oscillator*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI (1991)
- [Patorski89] K. Patorski, *the self-imaging phenomenon and its applications*, Progress in optics, Vol **28**, 3 (1989)

- [Petsas03] K.I. Petsas, A. Gatti, L.A. Lugiato, and C. Fabre, *Multimode squeezed states produced by a confocal parametric oscillator*, Eur. Phys. J. D **22**, 501-512 (2003)
- [Protsenko95] I. E. Protsenko, L. A. Lugiato, and C. Fabre, *Spectral analysis of the degenerate optical parametric oscillator as a noiseless amplifier*, Phys. Rev. A **50**, 1627-1645 (1994)
- [Reynaud92] Reynaud S. et Al, *Quantum fluctuations in optical systems*, Progress in Optics XXX, 3-81 (1992)
- [Rosencher00] Bruno Scherrer, Isabelle Ribet, Antoine Godard, Emmanuel Rosencher, Michel Lefebvre, *Dual-cavity doubly resonant optical parametric oscillators: demonstration of pulsed single-mode operation* JOSA B, Volume **17**, Issue 10, 1716-1729 (2000)
- [SapienzaPhD] *mode-coupling and perturbations in a degenerate optical resonator*, Master thesis, Leiden University, R. Sapienza (2000)
- [Schiller95] Schiller S., Koher S., Paschotta R., Mlynek J., Applied physics B **60** (1995), 755
- [Siegman] Siegman A.E., *Lasers*, University Science Books, Mill Valley 1986
- [Simon90] R. Simon, N. Mukunda, *Minimal three-component SU(2) gadget for polarization optics*, Phys. Lett. A **143**, 165 (1990)
- [Sokolov89] M.I. Kolobov and I.V. Sokolov, Sov. Phys. JETP **69**, 1097 (1989)
- [SNLO] **SNLO**, developpé par Sandia National Laboratories, disponible sur <http://www.sandia.gov/imrl/X1118/xxtal.htm>
- [Staliunas95] *Transverse pattern formation in optical parametric oscillator*, K. Staliunas, *J. Mod. Opt.*, **42**, 1261 (1995).
- [SuretPhD] *Dynamique temporelle et effets transverse dans les oscillateurs paramétriques optiques continus: observations expérimentale et modélisation*, Pierre Suret, thèse de doctorat de l'Université de Paris Sud (Paris XI) 2000.
- [Svelto] Svelto, *Principles of Laser*, 4th edition, Plenum Press
- [TrepPhD] *Effets quantiques dans les images optiques*, Thèse de doctorat de l'université Paris VI, Trep Nicolas (2001)
- [Turnbull00] G. A. Turnbull, D. McGloin, I. D. Lindsay, M. Ebrahimzadeh, M. H. Dunn, *Extended mode-hop-free tuning by use of a dual-cavity, pump-enhanced optical parametric oscillator* Optics Letters, Vol. **25** Issue 5 Page 341 (March 2000)
- [Vaupel99] Vaupel M., Maître A., Fabre C., Phys. Rev. Lett. **83**, 5278 (1999)
- [Wong98] J. Teja and Ngai C. Wong, *Twin-beam generation in a triply resonant dual-cavity optical parametric oscillator* OpticsExpress Vol. **2**, No. 3, Page 65 (1998)

- [Yuen76] Phys. Rev. A **13**, 2226 (1976), H.P. Yuen
- [Yurke84] Yurke B., Phys. Rev. A **29**, 408 (1984)
- [Zhang99] Zhang Y., Su H., Xie C., and Peng K., *Quantum variances and squeezing of output field from NOPA*, Phys. Let. A, **259** 171-177 (1999)
- [ZhangPhD] Zhang K.S, *Intracavity optical nonlinear devices using  $\chi^{(2)}$  quasi-phase-matched material: Classical and quantum properties and application to all-optical regeneration*, Thèse de l'université Paris 6 (2002)
- [Zondy99] A. Douillet, J.-J. Zondy, A. Yelisseyev, S. Lobanov, L. Isaenko, *Stability and frequency tuning of thermally loaded continuous-wave AgGaS<sub>2</sub> optical parametric oscillators*, JOSA B, Volume 16, Issue **9**, 1481-1498 (Septembre 1999)

## Résumé

Cette thèse étudie l'amplification d'une image par un processus paramétrique. Réaliser cette amplification de manière continue nécessite de placer le milieu paramétrique dans une cavité optique. En théorie, cette amplification est sans bruit, et permet de générer des états non-classiques du champ.

On étudie tout d'abord classiquement la propagation d'une image dans un système paraxial, puis les cavités dégénérées transversalement. On en déduit un formalisme permettant de décrire la transmission d'une image à travers une cavité paraxiale quelconque. Ce formalisme est illustré par l'étude théorique et expérimentale de la transmission d'une image à travers une cavité particulière: la cavité héli-confocale. Une partie théorique s'intéresse ensuite aux spécificités de l'amplification d'image. L'amplificateur paramétrique en cavité sous le seuil d'oscillation, connu pour générer du vide comprimé, peut également amplifier un faible signal injecté. On montre l'apparition de bruit supplémentaire sur le signal amplifié, spécifique à l'amplification, dû au couplage au bruit de la pompe. On étudie ensuite du point de vue quantique le comportement multimode transverse d'un amplificateur paramétrique optique en cavité héli-confocale.

Enfin, une partie expérimentale étudie le comportement d'un oscillateur paramétrique optique confocal au dessus du seuil et on prouve qu'il produit des faisceaux non-classiques multimodes transverses. On montre ensuite qu'il est possible d'amplifier de manière sensible à la phase un signal dans cette même cavité sous le seuil d'oscillation. Dans une seconde expérience en configuration de double cavité héli-confocale, plus stable, on réalise la première amplification paramétrique multimode d'une image en cavité.

**Mots-clés :** image quantique, oscillateur paramétrique optique, amplification sans bruit, amplification sensible à la phase, dégénérescence transverse, imagerie paraxiale, bruit quantique transverse, corrélations quantiques spatiales, variables continues.

## Abstract

This thesis studies image amplification by a parametric process. Performing this amplification continuously requires placing the parametric medium inside an optical cavity. Theoretically, this amplification is noiseless and produces non-classical states of light.

First, we study classically the propagation of an image through a paraxial system, and transverse degenerate cavities. We develop a formalism to understand the transmission of an image through any paraxial cavity. We illustrate this formalism by studying theoretically and experimentally a particular cavity: the semi-confocal cavity.

In a theoretical part we then focus on some particularities of image amplification. we find that below threshold, the optical parametric amplifier in a cavity, which is well-known to produce squeezed vacuum, can also amplify a weak injected signal. We show that, due to coupling to the pump noise, there is extra noise added to the amplified signal during the amplification process. We also study from a quantum point a view the transverse multimode behaviour of the optical parametric amplifier in a semi-confocal cavity.

Finally, in the experimental part we study the behaviour of the confocal optical parametric oscillator above threshold and we prove that it produces multimode non-classical beams. We then show that it is possible to amplify a signal in a phase-sensitive configuration in this cavity below threshold. In a second experiment using a more stable dual-cavity semi-confocal configuration, we demonstrate the first multimode parametric amplification of an optical image.

**Keywords :** quantum images, optical parametric oscillator, noiseless amplification, phase-sensitive amplification, transverse degeneracy, paraxial imaging, transverse quantum noise, spatial quantum correlations, continuous variables.