



**HAL**  
open science

# Bulles d'air dans l'eau : couplage d'oscillateurs harmoniques et excitation paramétrique

Valentin Leroy

► **To cite this version:**

Valentin Leroy. Bulles d'air dans l'eau : couplage d'oscillateurs harmoniques et excitation paramétrique. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2004. Français. NNT : . tel-00007437

**HAL Id: tel-00007437**

**<https://theses.hal.science/tel-00007437>**

Submitted on 17 Nov 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris 7 - Denis Diderot  
UFR de Physique

THÈSE

pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7  
Spécialité : Champs, Particules, Matières

présentée et soutenue publiquement par

**Valentin LEROY**

le 29 octobre 2004

---

**Bulles d'air dans l'eau :  
couplage d'oscillateurs harmoniques  
et excitation paramétrique**

---

JURY

<b>Jean-Claude Bacri</b>	Directeur de thèse
<b>Jean-François Berret</b>	Membre du jury
<b>Michel Boiteux</b>	Rapporteur
<b>Martin Devaud</b>	Co-directeur de thèse
<b>Mathias Fink</b>	Président du jury
<b>Xiaoping Jia</b>	Rapporteur



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>I Bulles d'air dans l'eau : couplage d'oscillateurs harmoniques</b>	<b>11</b>
<b>1 Une bulle d'air dans l'eau</b>	<b>13</b>
1.1 Modes propres radiaux d'une bulle d'air dans l'eau . . . . .	13
1.2 Modèle d'oscillateur harmonique . . . . .	17
1.3 Étude expérimentale de la résonance de Minnaert . . . . .	27
1.4 Retour sur la particularité de la résonance de Minnaert . . . . .	35
<b>2 Plusieurs bulles d'air dans l'eau</b>	<b>41</b>
2.1 Couplage de deux bulles . . . . .	41
2.2 Nuage de bulles . . . . .	51
<b>3 Propagation dans de l'eau bulleuse</b>	<b>69</b>
3.1 Relation de dispersion de Foldy . . . . .	70
3.2 Littérature sur la propagation en eau bulleuse . . . . .	76
3.3 Onde de bulles . . . . .	84
<b>II Excitations paramétriques</b>	<b>95</b>
<b>4 Étude d'un oscillateur modèle : le pendule</b>	<b>97</b>
4.1 Pourquoi étudier des pendules ? . . . . .	97
4.2 Un pendule . . . . .	99
4.3 Deux pendules couplés . . . . .	121
<b>5 Excitation paramétrique d'une bulle</b>	<b>153</b>
5.1 Principe de l'écho . . . . .	153
5.2 Non-linéarités d'une bulle d'air dans l'eau . . . . .	155
5.3 "Retournement" d'une bulle . . . . .	161
5.4 Vers les échos de bulles . . . . .	172

<b>Conclusion</b>	<b>175</b>
<b>Annexes</b>	<b>179</b>
<b>A Notations</b>	<b>179</b>
<b>B Bulle non sphérique</b>	<b>181</b>
<b>C Bulle sous une épuisette</b>	<b>189</b>
<b>D Bulle en milieu fini</b>	<b>193</b>
<b>E Appendices de l'article «Using Glauber Variables II »</b>	<b>197</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>206</b>

# Remerciements

La page de remerciements n'est pas, loin s'en faut, la plus facile à écrire. Il y a tant de personnes à remercier, pour leur soutien au jour la jour ou simplement pour une conversation un jour au détour d'un couloir, que je crains d'en oublier.

Mais s'il fallait ne remercier qu'une seule personne, ce serait Martin Devaud. Quand je me suis inscrit en licence de physique à Paris 7, en 1998, c'était une sorte de pari. Je pariais que la physique devait être une discipline intéressante... Jusque là, l'enseignement que j'en avais reçu ne m'avait pas du tout convaincu. Martin enseignait en licence cette année là. Pari gagné. S'il ne fut pas le seul à me faire aimer (et comprendre) la physique, c'est sans nul doute celui qui a le plus pesé, de tout le poids de ses démonstrations impeccables et de ses arguments précis. Le flou désagréable qui enveloppait invariablement les cours de physique que j'avais suivis auparavant se dissipait enfin. Quelques années plus tard, lorsque je cherchais un sujet de thèse, Martin m'a proposé de travailler avec lui sur les bulles. J'ai accepté sans hésiter. Aujourd'hui, je ne peux que me féliciter de ce choix. Si vous avez un problème de physique qui vous tracasse, même s'il vous paraît ridicule et que vous avez un peu honte, allez voir Martin dans son bureau. Il vous écoutera. Vous resterez peut-être plus longtemps que prévu. Mais vous sortirez avec une vision beaucoup plus claire de votre problème, voire avec la solution complète. Merci Martin. Merci non seulement pour tes qualités de pédagogues, mais aussi pour tes qualités humaines et pour le soutien que tu m'as apporté durant ces trois années.

J'ai également eu la chance d'être encadré par Jean-Claude Bacri. Merci Jean-Claude pour ton enthousiasme communicatif, pour ton incroyable faculté à imaginer des solutions expérimentales originales et performantes, et pour le soutien et la confiance que tu m'as témoignés. Enfin, le "groupe bulles" ne serait pas complet sans Thierry Hocquet. Merci Thierry pour ta grande disponibilité et pour la rigueur avec laquelle tu as suivi mes travaux.

Le bon déroulement de trois ans de thèse doit certainement autant à la qualité de l'encadrement scientifique qu'à la bonne ambiance de travail qui règne au sein du laboratoire. Ainsi, je tiens à remercier tous les membres de l'équipe "ferrofluides". Merci pour ces discussions animées, et pas forcément scientifiques, pendant les déjeuners ou les pauses thé.

Merci à Florence Gazeau, qui n'a pas usurpé son surnom de "maman Gazeau" tant son importance dans la cohésion de l'équipe est grande. Merci à Claire Wilhelm, notamment pour avoir eu l'idée des soirées Brassens. Merci aux "thésards de la bio" : Charlotte Rivière, Pierre Smirnov et Jean-Paul Fortin. L'atmosphère d'un couloir de laboratoire est tout de suite plus

sereine quand quelqu'un y travaille en chantant (bien) ; c'est une des raisons pour lesquelles je tiens à remercier Florence Elias. Également un grand merci à Cyrille Flament, Julien Browaeyns et Grégory Pacitto, à Caroline Derec, Maxime Igonin et Andrejs Cebers, ainsi qu'à Régine Perzinsky et Vincent Dupuis.

Il ne faut pas oublier celui qui était thésard juste avant moi, qui connaissait bien les rouages du labo et qui était toujours prêt à partager son expérience : Eric Janiaud. Merci Eric pour ton insatiable curiosité, ta gentillesse et ton opiniâtreté qui font que tu parviens toujours à trouver une solution quand on vient te voir avec un problème technique à résoudre. Je pense que pendant longtemps encore, dans l'équipe, on entendra les gens dire "Eric aurait su" quand il s'agira de retrouver comment fonctionne tel logiciel ou tel instrument...

Je voudrais également remercier les autres membres du LMDH, et plus particulièrement l'équipe granulaire, qui fut notre voisine jusqu'à une date récente. Merci à Evelyne Kolb, Anke Lindner, Gabriel Caballero, Philippe Claudin, Eric Clément, José Lanuza et Florent Malloggi. Merci aussi à Stéphane Laborde qui a mis en place les "séminaires thésards". Merci à Alain Mauger. Et merci à Jean Rajchenbach, Alain Bourdon et Jean-Louis Thomas pour quelques discussions ponctuelles mais enrichissantes.

Je dois également beaucoup, tant pour leur bonne humeur que pour l'aide matérielle et technique inestimable qu'ils m'ont apportée, à Jacques Servais, Patrick Lepers et Maurice Gilbert.<sup>1</sup> Et merci à celle sans qui l'équipe serait sans doute paralysée, celle qui se démène toujours pour que les tâches administratives ne soient un souci que pour elle. Merci à Claudine Héneaux.

Je tiens à remercier Jean-François Berret et Mathias Fink d'avoir accepté de faire partie de mon jury, et Michel Boiteux et Xiaopping Jia qui ont bien voulu être les rapporteurs attentifs de mon travail.

Enfin, merci à toute ma famille et à mes amis proches. Et je ne le dirai jamais assez : merci Julie.

---

<sup>1</sup>Patrick et Maurice, encore merci et bravo pour votre aide à concevoir et monter le système de deux pendules couplés !

*As a matter of fact we know little about  
the murmur of the brook, the roar of the  
cataract or the humming of the sea.*

M. Minnaert (1933)

# Introduction

Le système que nous allons étudier a ceci de fascinant qu'il présente une composition très simple tout en offrant une grande richesse de comportements. Qu'on en juge plutôt : la proposition «une bulle d'air dans l'eau » suffit à définir notre sujet d'étude. Et pourtant, cette simple inclusion gazeuse dans un liquide est à l'origine de phénomènes variés. Donnons en un rapide aperçu.

Pour commencer par un exemple de la vie de tous les jours, signalons que le murmure des ruisseaux, et la plupart des bruits d'écoulement, sont le fait de bulles d'air [Str56, LW87]. On retrouve ces manifestations acoustiques des bulles dans les océans. La composante basse fréquence du bruit de fond océanique est en effet attribuée à la présence de nuages de bulles, formées par le brisement des vagues et entraînées dans les profondeurs par des courants de Langmuir.<sup>2</sup> Mais les bulles ne proviennent pas que de la surface. Certains fonds marins sont les sources d'un bruit assourdissant dû aux bulles que crée *Alpeus heterochaelis*<sup>3</sup> [VSvdH00]. Cette espèce de crevette utilise en effet les bulles comme arme de chasse. Sa pince hypertrophiée se referme avec une vitesse telle qu'une bulle apparaît par cavitation ; et lorsqu'elle "éclate" à proximité de la proie, la surpression engendrée est suffisante pour assommer cette dernière. Avec la cavitation, on aborde un autre domaine où les bulles sont au rendez-vous. L'importance pratique du phénomène est de taille : les bulles créées par cavitation, lorsqu'elles éclatent, n'assomment pas seulement les proies des crevettes, elles infligent également des dommages aux hélices des engins marins et sous-marins. Les navires ont d'ailleurs un autre grief vis-à-vis des bulles : la présence de bulles dans de l'eau perturbe la propagation des ondes de leur sonar.

Quittons les océans pour gagner les laboratoires de recherche. Les bulles sont à l'origine d'un phénomène intrigant qui a longtemps tenu en haleine les physiciens : la sonoluminescence, production de lumière par une bulle de gaz fortement comprimée par des ultrasons. La compréhension de ce phénomène a nécessité de réunir les connaissances de plusieurs domaines (dynamique des fluides, acoustique, chimie et physique des plasmas).

Les bulles sont également présentes dans le champ médical. Leurs propriétés acoustiques en font en effet de bons agents de contraste pour l'imagerie ultrasonore. On injecte dans les veines du patient des bulles d'air de quelques micromètres, stabilisées par une capsule de polymère. La réponse non linéaire de ces bulles à une excitation ultrasonore permet d'obtenir une amélioration significative du contraste des images que l'on obtient [PPW<sup>+</sup>00]. L'imagerie cardiaque profite particulièrement de cette technique.

---

<sup>2</sup>Voir le livre de Leighton [Lei94], page 243 et suivantes.

<sup>3</sup>Des enregistrements sonores et des vidéos sur <http://stilton.tnw.utwente.nl/shrimp/>.

Enfin, la bulle est au coeur de travaux de recherche théoriques. On la retrouve dans l'étude de la localisation acoustique par exemple, phénomène par lequel une onde se propageant dans un milieu désordonné multiplement diffuseur se trouve piégée [KPE00]. Le caractère fortement non linéaire des oscillations de la bulle en fait également un candidat souvent cité dans les tentatives d'application à l'acoustique de phénomènes d'optique non linéaire (conjugaison de phase, effet laser acoustique) [BKL86, VZK97].

Il n'est bien sûr pas question d'aborder tous ces aspects de la physique de la bulle dans les pages qui suivent. Pour donner l'axe central de notre étude, il n'est peut-être pas inutile de mentionner l'origine de notre intérêt pour les bulles. Tout a commencé en enseignement. Jean-Claude Bacri et Martin Devaud, chargés d'enseigner les ondes en licence à l'université Denis Diderot (Paris 7), ont cherché des exemples originaux d'oscillateurs harmoniques, pour sortir des éternels exemples de pendules, systèmes masse-ressort et autres circuits RLC. Parmi les systèmes retenus figurait la bulle de gaz dans un liquide ; et il s'est avéré que ce qui n'était initialement qu'un simple exemple pédagogique méritait tout à fait une étude approfondie.

Cet aspect oscillateur harmonique de la bulle était le fil conducteur des travaux de recherche que nous avons entrepris. D'abord parce que, si la description d'une bulle en tant qu'oscillateur harmonique était déjà bien connue, il nous apparaissait d'une part qu'elle présentait des spécificités intéressantes à souligner, et d'autre part que l'étude du couplage entre bulles permettait d'aborder de façon originale le problème de la propagation du son dans un liquide comportant des inclusions gazeuses. Le modèle d'oscillateur harmonique avait donc son intérêt pour l'étude de la physique de la bulle elle-même. C'est l'objet de la première partie de cette thèse. Mais il existait un autre attrait à ce système. À partir d'une assemblée d'oscillateurs, il nous paraissait possible d'observer un effet d'échos, semblable aux échos de spins en IRM. Dans ce cadre, une assemblée de bulles était un parfait candidat pour une réalisation expérimentale. On exposera cet aspect de nos recherches dans la seconde partie.

Les objectifs étant définis, donnons maintenant un résumé détaillé de chacune des parties. La première partie concernera l'étude, expérimentale et théorique, d'une assemblée de bulles. Elle s'articulera en trois chapitres.

**Le premier chapitre** s'attachera à montrer qu'une bulle d'air dans l'eau peut être modélisée par un oscillateur harmonique dont la raideur est déterminée par la compressibilité de l'air, et la masse par l'inertie de l'eau. Cette modélisation, déjà entreprise par Minnaert dans les années 30, fera ici l'objet de confirmations expérimentales, ces premières expériences étant surtout l'occasion de valider le dispositif utilisé pour bloquer une bulle d'air sans modifier ses propriétés acoustiques.

**Le chapitre 2** présentera le passage à plusieurs bulles. Négligeant les degrés de liberté associés à l'eau, on considérera  $N$  bulles comme  $N$  oscillateurs harmoniques couplés. Les conséquences et les limites de ce modèle seront alors abordées et on présentera les résultats d'expériences réalisées avec des nuages bidimensionnels de bulles.

Nous aborderons, dans le **chapitre 3**, le problème de la propagation d'une onde dans un liquide bulleux. Ce chapitre revêtira, dans un premier temps, un caractère bibliographique

en proposant un aperçu relativement détaillé des théories et expériences sur le sujet. Ce sera l'occasion d'examiner le problème de la prise en compte des phénomènes de diffusion multiple dans un liquide bulleux. On osera ensuite une modeste contribution sur le sujet, en étudiant la propagation de ce que l'on appellera des "ondes de bulles".

La seconde partie aura pour but de mettre au point un mécanisme d'écho avec des bulles. Nous commencerons, dans **le chapitre 4**, par l'étude d'un oscillateur modèle : le pendule. Ce système modèle nous permettra de tester différentes solutions pour obtenir une conjugaison de phase, un ingrédient nécessaire à l'obtention des échos. Ce sera l'occasion d'introduire un formalisme fondé sur les variables de Glauber et d'en tester la pertinence pour l'étude des non-linéarités et de l'excitation paramétrique. Des expériences avec 1 ou 2 pendules couplés seront présentées.

**Le chapitre 5** appliquera à la bulle le formalisme mis au point pour les pendules. On verra qu'un mécanisme prometteur pour obtenir la conjugaison de phase est fondé sur l'excitation paramétrique de la bulle. La mise en évidence expérimentale de ce mécanisme avec une bulle sera détaillée. On conclura en montrant qu'un travail sur la prise en compte des interactions entre bulles est encore nécessaire pour espérer obtenir un "écho de bulles".



Première partie

**Bulles d'air dans l'eau : couplage  
d'oscillateurs harmoniques**



# Chapitre 1

## Une bulle d'air dans l'eau

Commençons cette partie, dédiée à l'étude du couplage entre bulles, par un chapitre sur une bulle seule. On considérera une bulle d'air dans l'eau, mais il va de soi que les conclusions seront généralisables à des gaz et liquides différents. D'autre part, on favorisera généralement dans notre étude les bulles de rayons millimétriques, puisque ce sont celles que l'on étudiera expérimentalement. Mais on s'efforcera tout de même de donner un aperçu des effets qui deviennent importants pour les bulles de plus petits rayons.

Une recherche détaillée des modes radiaux d'une bulle d'air dans l'eau nous amènera à nous intéresser à un mode particulier : la résonance de Minnaert. On s'attachera ensuite à montrer dans quelle mesure on peut décrire le comportement oscillant d'une bulle à l'aide d'un modèle d'oscillateur harmonique. Ce modèle fera l'objet d'une vérification expérimentale ; ce qui sera l'occasion de mettre au point un dispositif permettant de piéger des bulles sans pour autant perturber leurs oscillations. Enfin, nous concluons ce chapitre en abordant le problème du couplage entre la bulle et son champ de rayonnement acoustique.

### 1.1 Modes propres radiaux d'une bulle d'air dans l'eau

Considérons une bulle d'air de rayon  $R_0$  dans un volume infini d'eau. Ce système possède, de par les compressibilités respectives de l'air et de l'eau, une infinité de degrés de liberté, et compte par conséquent une infinité de modes propres d'oscillation. Certains de ces modes propres, à cause de la cavité que forme la bulle, sont caractérisés par un fort déplacement de la surface de la bulle : on parle de résonance. Une image généralement utilisée pour comprendre l'existence de ces résonances consiste à dire que, pour certaines fréquences, la longueur d'onde du son dans l'air est commensurable avec le rayon de la bulle, entraînant des interférences constructives entre les multiples réflexions de l'onde sonore. Par commodité, on désignera ces résonances sous le terme de "résonances de type Fabry-Pérot", par analogie avec le fonctionnement de l'interféromètre du même nom. Une bulle d'air dans l'eau présente de ce point de vue une particularité : la description ci-dessus s'applique très bien à toutes ses résonances, exceptée la résonance radiale fondamentale.

C'est ce qu'on se propose d'illustrer dans cette partie en déterminant tous les modes propres radiaux d'une bulle d'air dans l'eau et en montrant que, parmi les modes résonnants, celui de

la résonance fondamentale est particulier.

La pression d'équilibre est  $P_0$ , la température  $T_0$  et les masses volumiques de l'air et de l'eau sont notées  $\rho_a$  et  $\rho_e$ . On adopte le point de vue lagrangien : on désigne par  $p(\vec{r}, t)$  et  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  la surpression et le déplacement, au temps  $t$ , de l'élément de fluide qui se trouvait à la position  $\vec{r}$  à l'équilibre. La tension superficielle, la viscosité et la gravité sont, dans un premier temps, négligées. Enfin, on suppose que l'air de la bulle ainsi que l'eau subissent des transformations adiabatiques réversibles, de coefficients de compressibilité  $\chi_a$  et  $\chi_e$ .

Avec ces notations et ces hypothèses, les équations constitutives  $p = -\frac{1}{\chi_{a,e}}\text{div}\vec{u}$  et le principe fondamental de la dynamique  $\rho_{a,e}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}p$  permettent d'obtenir l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c_{a,e}^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0, \quad (1.1)$$

où  $c_{a,e} = (\rho_{a,e}\chi_{a,e})^{-1/2}$  est la vitesse du son. On recherche les modes propres radiaux sous la forme :

$$\begin{aligned} p(\vec{r}, t) &= \text{Re}\{\bar{p}(r)e^{i\omega t}\}, \\ \vec{u}(\vec{r}, t) &= \text{Re}\{\bar{u}(r)e^{i\omega t}\}\vec{e}_r, \end{aligned}$$

où  $\omega$  est la pulsation considérée,  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire radial et  $\text{Re}$  désigne la partie réelle. L'équation (1.1) s'écrit alors :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\omega^2}{c_{a,e}^2}\right)r\bar{p}(r) = 0, \quad (1.2)$$

dont une solution est :

$$\bar{p}(r) = \frac{A}{r}e^{iq_a r} + \frac{B}{r}e^{-iq_a r} \quad \text{pour } r \leq R_0, \quad (1.3a)$$

$$\bar{p}(r) = \frac{C}{r}e^{iq_e r} + \frac{D}{r}e^{-iq_e r} \quad \text{pour } r \geq R_0, \quad (1.3b)$$

avec  $q_{a,e} = \frac{\omega}{c_{a,e}}$  et  $A, B, C$  et  $D$  des constantes à déterminer en imposant des conditions aux limites.

La non-divergence de la pression en  $r = 0$  impose que  $B = -A$ ; en définissant  $A_a = 2iA$ , la solution (1.3a) s'écrit donc :

$$\bar{p}(r) = \frac{A_a}{r} \sin(q_a r) \quad \text{pour } r \leq R_0. \quad (1.4)$$

Les deux termes du membre de droite de l'équation (1.3b) s'interprètent comme une onde sphérique incidente et une onde sphérique réfléchie. Puisqu'il n'y a aucune source de dissipation,<sup>1</sup> il n'y a pas de perte d'énergie entre l'onde incidente et l'onde réfléchie et on a  $|C| = |D|$ . L'onde de pression dans l'eau est stationnaire, et on peut l'écrire sous la forme :

$$\bar{p}(r) = \frac{A_e}{r} \sin(q_e(r - R_0) + \varphi_e) \quad \text{pour } r \geq R_0, \quad (1.5)$$

où  $A_e$  est une constante fixée par l'amplitude de l'onde incidente et  $\varphi_e$  un déphasage à déterminer. À ce champ de pression correspond un champ de déplacement qui s'écrit :

<sup>1</sup>Le calcul est tout à fait généralisable à un cas incluant de la dissipation, mais les conclusions qui nous intéressent sont identiques. On se limite donc ici à un cas sans dissipation afin d'obtenir des expressions mathématiques plus simples.

$$\begin{aligned}\bar{u}(r) &= \frac{A_a}{\rho_a \omega^2 r} (q_a \cos(q_a r) - \frac{\sin(q_a r)}{r}) && \text{pour } r \leq R_0, \\ \bar{u}(r) &= \frac{A_e}{\rho_e \omega^2 r} (q_e \cos(q_e (r - R_0) + \varphi_e) - \frac{\sin(q_e (r - R_0) + \varphi_e)}{r}) && \text{pour } r \geq R_0.\end{aligned}$$

L'expression de la continuité de la pression et du déplacement à la frontière de la bulle permet alors de fixer les valeurs des deux constantes encore indéterminées  $A_a$  et  $\varphi_e$  :

$$\begin{aligned}A_a \sin(q_a R_0) &= A_e \sin(\varphi_e), \\ \frac{A_a}{\rho_a} (q_a R_0 \cos(q_a R_0) - \sin(q_a R_0)) &= \frac{A_e}{\rho_e} (q_e R_0 \cos(\varphi_e) - \sin(\varphi_e)),\end{aligned}$$

système qui a pour solution :

$$A_a = \frac{A_e \sin(\varphi_e)}{\sin(q_a R_0)}, \quad (1.6a)$$

$$\sin(\varphi_e) = \left( 1 + \left( \frac{1 + \frac{\rho_e}{\rho_a} (q_a R_0 \cotan(q_a R_0) - 1)}{q_e R_0} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (1.6b)$$

Pour chaque mode propre, les équations (1.4), (1.5) et (1.6) donnent donc le champ de pression dans l'air et dans l'eau. La figure 1.1 représente l'amplitude de pression à la surface de la bulle en fonction de la fréquence (ces deux grandeurs étant représentées par des variables adimensionnées).

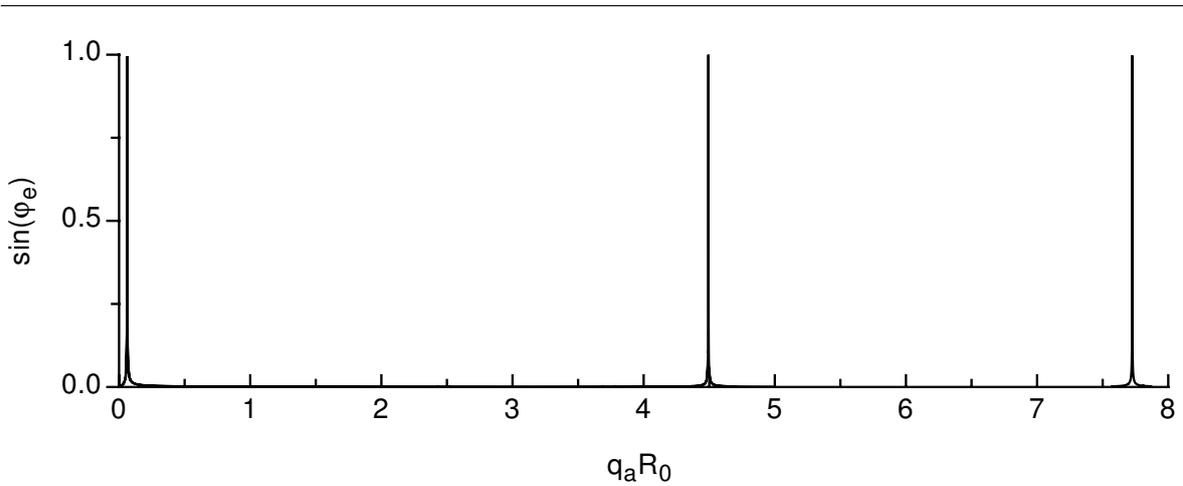


FIG. 1.1 – Les trois premières résonances de la bulle. En ordonnées, l'amplitude de pression à la surface de la bulle :  $\sin \varphi_e = \bar{p}(r = R_0) \times R_0 / A_e$ . En abscisses, la fréquence :  $q_a R_0 = 2\pi f R_0 / c_a$ .

Comme attendu, le système présente des résonances<sup>2</sup> pour certaines valeurs de la fréquence. Les positions de ces résonances se déterminent à partir de l'équation (1.6b) ;  $\sin(\varphi_e)$  est maximal pour :

$$\tan(q_a R_0) = \frac{q_a R_0}{1 - \rho_a / \rho_e}, \quad (1.7)$$

dont une résolution graphique est présentée figure 1.2. On constate sur cette figure que la droite

<sup>2</sup>On a choisi comme critère de résonance le passage de la pression à la surface par un maximum. Un critère plus satisfaisant serait d'étudier l'énergie totale dans la bulle ; mais on peut montrer que ces deux critères conduisent au même résultat.

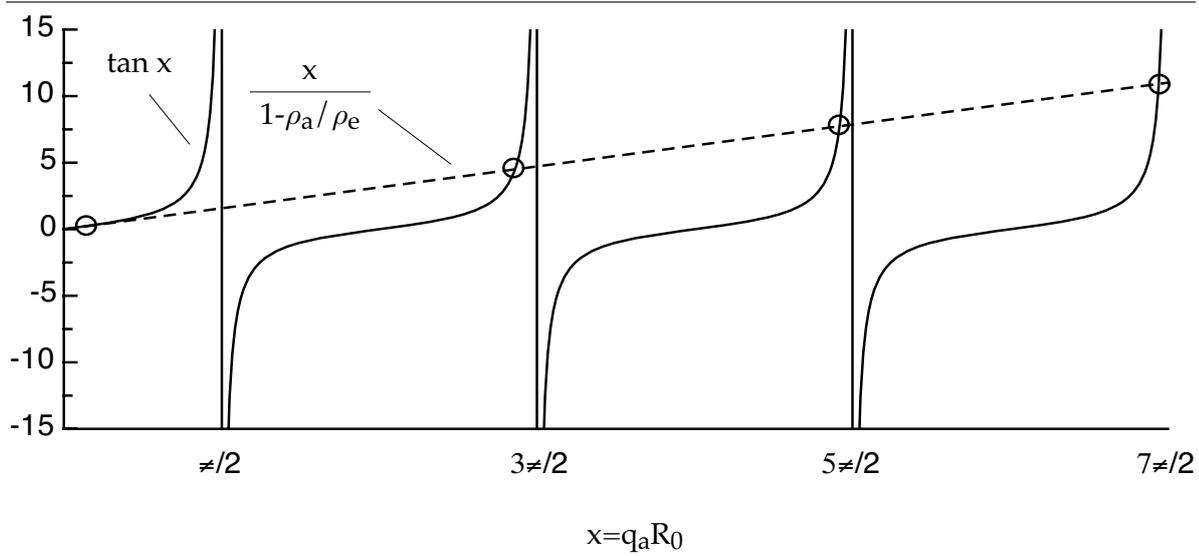


FIG. 1.2 – Détermination graphique des 4 premières résonances radiales d'une bulle d'air dans l'eau. En trait plein, la fonction  $\tan x$  et ses asymptotes verticales. En trait hachuré, la droite  $\frac{x}{1-\rho_a/\rho_e}$  de l'équation 1.7. Leurs intersections (○) donnent les positions des résonances.

coupe la fonction tangente un peu avant chaque asymptote, exceptée la première asymptote. Des résonances ont donc lieu pour des pulsations  $\omega_n$  vérifiant approximativement :

$$\frac{R_0 \omega_n}{c_a} = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad n \geq 1,$$

c'est à dire pour des longueurs d'onde dans l'air commensurables avec le rayon de la bulle ( $4R_0 = (2n+1)\lambda_{a,n}$ ). Mais il existe un autre point d'intersection, proche de l'origine, puisque la droite a une pente supérieure à l'unité. Un développement limité de (1.7) au deuxième ordre en  $q_a R_0$  permet de trouver la pulsation  $\omega_0$  de cette résonance fondamentale :

$$\frac{R_0 \omega_0}{c_a} = \sqrt{\frac{3\rho_a}{\rho_e}},$$

ce qui correspond, pour les longueurs d'onde, à :

$$2\pi \frac{R_0}{\lambda_{a,0}} = \sqrt{\frac{3\rho_a}{\rho_e}} \simeq 7 \times 10^{-2}, \quad (1.8a)$$

$$2\pi \frac{R_0}{\lambda_{e,0}} = \frac{c_a}{c_e} \sqrt{\frac{3\rho_a}{\rho_e}} \simeq 1,3 \times 10^{-2}. \quad (1.8b)$$

La résonance fondamentale d'une bulle d'air dans l'eau se situe donc à une fréquence correspondant à des longueurs d'onde dans l'air et dans l'eau très grandes devant la taille de la bulle. Cette fréquence de résonance s'appelle fréquence de Minnaert, du nom de son découvreur, et on la notera  $\omega_M$ . En utilisant  $c_a = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_a}$ , où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques de l'air, elle se met sous la forme, :

$$\omega_M = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_e}}. \quad (1.9)$$

Pour une bulle d'air de 1 millimètre de rayon dans l'eau et à pression atmosphérique, la formule (1.9) donne une fréquence de l'ordre de 3 kHz. C'est l'ordre de grandeur à retenir pour les bulles qui nous intéresseront dans les expériences.

Remarquons que la particularité de la résonance de Minnaert provient du fait que la masse volumique de l'air est très petite devant celle de l'eau. En effet, une résolution graphique comme celle de la figure 1.2 pour un système impliquant des masses volumiques  $\rho_1$  et  $\rho_2$  quelconques conduit à des solutions différentes si  $\rho_1$  est inférieure mais de l'ordre de  $\rho_2$ , ou si  $\rho_1$  est supérieure à  $\rho_2$ . Dans le premier cas, la résonance fondamentale se rapproche de  $q_a R_0 = \frac{\pi}{2}$  et devient donc de type Fabry-Pérot. Dans le second cas, qui correspond à une goutte d'eau dans l'air par exemple, la pente de la droite est négative et toutes les résonances sont de type Fabry-Pérot.

La résonance de Minnaert est donc particulière parce qu'elle intervient à des longueurs d'onde acoustiques dans l'air et dans l'eau très grandes devant la taille de la bulle. Cette particularité va avoir deux implications.

La première implication est l'importance des effets acoustiques liés à la présence de bulles d'air dans l'eau. Lorsqu'une onde rencontre un obstacle, on a coutume de comparer la longueur d'onde  $\lambda$  à la taille caractéristique  $L$  de l'obstacle. Dans le cas où  $\lambda \gg L$ , on peut considérer que l'onde "ne voit pas" l'obstacle et, aux (faibles) effets de diffraction près, la présence de l'obstacle n'a pas d'incidence sur la propagation de l'onde. Cette description ne vaut que si l'obstacle est simplement diffractant, c'est à dire s'il ne possède pas de degrés de liberté internes : une onde électromagnétique, même de grande longueur d'onde, peut être très perturbée par la présence d'un seul atome si sa fréquence correspond à une transition pour ce dernier. Il en va de même pour une bulle d'air dans l'eau : ce n'est pas en soi un objet très diffractant, mais l'inclusion d'une quantité, même infime, d'air dans l'eau suffit à modifier drastiquement les propriétés acoustiques du milieu (voir chapitre 3).

La seconde implication concerne la description du système {bulle d'air dans l'eau}. Pour des fréquences de l'ordre de la fréquence de Minnaert, la longueur d'onde dans l'eau est très grande devant le rayon de la bulle, ce qui justifie de n'étudier que les modes radiaux du système (les modes non radiaux ne sont pas excités par une onde sonore à ces fréquences). D'autre part, la longueur d'onde dans l'air est, elle aussi, très grande devant la taille de la bulle. Cela signifie que l'air y subit des compressions et dépressions uniformes. On peut donc n'associer qu'un seul degré de liberté à l'air de la bulle. C'est avec cette description, valable pour des fréquences basses mais incluant la fréquence de Minnaert, que l'on va aborder le système dans la partie suivante, en tenant compte cette fois des sources d'amortissement.

## 1.2 Modèle d'oscillateur harmonique

La résonance de Minnaert n'est pas une résonance de type Fabry-Pérot. On va voir en revanche qu'elle est bien décrite par un modèle d'oscillateur harmonique. Pour les raisons détaillées ci dessus, on considère que la bulle n'a qu'un seul degré de liberté et qu'elle oscille en gardant la symétrie sphérique. Notons  $R(t) = R_0 + \xi(t)$  son rayon à l'instant  $t$ . La variable dynamique décrivant le mouvement de la bulle est donc  $\xi$ .

### 1.2.1 Sphère pulsante

Décrivons tout d'abord la bulle comme une sphère pulsante : supposons que la variation de rayon  $\xi(t)$  est imposée. Quel est alors le champ de surpression  $p(r, t)$  engendré par une telle sphère pulsante ? Afin d'alléger les notations, on notera  $c$  et  $\rho$ , sans indices, la vitesse du son dans l'eau et la masse volumique de l'eau. Étant donné la symétrie radiale du système, l'équation de d'Alembert (1.1) s'écrit sous la forme :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) rp(r, t) = 0.$$

Puisque le milieu est infini, on ne considère que les ondes sortantes et on cherche une solution sous la forme :

$$p(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r - R_0}{c}\right) \quad \text{pour } r \geq R_0,$$

où  $f$  est une fonction quelconque. Le principe fondamental de la dynamique au niveau de la surface de la sphère (en  $r = R_0$ ) s'écrit alors :

$$\rho \ddot{\xi}(t) = -\frac{\partial p}{\partial r}(r = R_0) = \frac{1}{R_0^2} f(t) + \frac{1}{R_0 c} f'(t).$$

Une méthode par variation de la constante conduit à chercher une solution de la forme  $f(t) = A(t) \exp(-\frac{ct}{R_0})$ , où  $A(t)$  doit vérifier :

$$\dot{A}(t) = R_0 c \rho \ddot{\xi} \exp\left(\frac{ct}{R_0}\right).$$

En choisissant  $A(-\infty) = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{-\infty}^t R_0 c \rho \ddot{\xi}(u) \exp\left(\frac{cu}{R_0}\right) du \\ &= R_0^2 \rho \exp\left(\frac{ct}{R_0}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-R_0}{c}\right)^k \xi^{(2+k)}(t), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$p(r, t) = \frac{R_0^2 \rho}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-R_0}{c}\right)^k \xi^{(2+k)}\left(t - \frac{r - R_0}{c}\right) \quad \text{pour } r \geq R_0. \quad (1.10)$$

L'équation (1.10) donne donc le champ de pression créé en tout point de l'eau pour des variations  $\xi(t)$  quelconques du rayon de la bulle. Remarquons que cette solution est exacte. Intéressons nous à la pression au niveau de la surface de la sphère pulsante :

$$p(R_0, t) = R_0 \rho \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-R_0}{c}\right)^k \xi^{(2+k)}(t). \quad (1.11)$$

En multipliant cette pression par la vitesse de déplacement  $\dot{\xi}$ , on forme l'expression de la puissance instantanée fournie par la sphère pulsante. Ainsi, tous les termes en dérivées paires de  $\xi$  dans l'équation (1.11) donneront une puissance moyenne nulle (puissance réactive), tandis que les termes en dérivées impaires contribueront à une puissance moyenne non nulle (puissance active). Pour la bulle, ces puissances réactive et active correspondront respectivement à l'inertie et à l'amortissement par rayonnement acoustique.

On va maintenant obtenir les expressions des équations (1.10) et (1.11) dans le cas d'oscillations sinusoïdales :

$$\xi(t) = \operatorname{Re} \{ \xi_0 e^{i\omega t} \},$$

où  $\xi_0$  est une amplitude *a priori* complexe et  $\omega$  une pulsation réelle, et où la notation  $\operatorname{Re}$  signifie que l'on considère la partie réelle de la quantité complexe. Afin d'alléger les équations, le  $\operatorname{Re}$  sera dorénavant sous-entendu. La surpression engendrée par la sphère pulsante s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p(r, t) &= -\frac{R_0^2 \rho}{r} \omega^2 \xi_0 e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} \frac{e^{i\omega \frac{R_0}{c}}}{1 + i\frac{\omega R_0}{c}} \\ &= -3\gamma P_0 \left( \frac{\omega}{\omega_M} \right)^2 \frac{\xi_0}{r} \frac{e^{i\omega(t-\frac{r-R_0}{c})}}{1 + i\frac{\omega R_0}{c}}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

où on a introduit la pulsation de Minnaert  $\omega_M$  (équation (1.9)) pour obtenir une écriture plus élégante. La surpression à la surface de la sphère pulsante est alors :

$$p(R_0, t) = -3\gamma P_0 \left( \frac{\omega}{\omega_M} \right)^2 \frac{1}{1 + i(\omega R_0/c)} \frac{\xi_0}{R_0} e^{i\omega t}. \quad (1.13)$$

### 1.2.2 Thermodynamique

Redonnons à la sphère pulsante son statut de bulle :  $\xi(t)$  n'est plus imposée (mais toujours supposée monochromatique). Le comportement de l'air à l'intérieur de la bulle va alors donner une relation entre la surpression  $p$  et la variation de rayon  $\xi$ .

#### Modèle adiabatique.

Tout comme Minnaert dans son article historique [Min33], supposons dans un premier temps que l'air de la bulle subit des transformations adiabatiques. Notons  $\tilde{P}(t) = \tilde{P}_0 + \tilde{p}(t)$  la pression, toujours supposée uniforme, de l'air dans la bulle.<sup>3</sup> On a alors :

$$(\tilde{P}_0 + \tilde{p}(t)) \left( \frac{4}{3} \pi (R_0 + \xi(t))^3 \right)^\gamma = \tilde{P}_0 \left( \frac{4}{3} \pi R_0^3 \right)^\gamma,$$

où  $\gamma$  désigne le rapport des capacités calorifiques de l'air. Au premier ordre en  $\xi/R_0$ , on obtient la relation :

$$\tilde{p}(t) = -\frac{3\gamma \tilde{P}_0}{R_0} \xi(t). \quad (1.14)$$

Rappelons que l'on néglige la tension de surface. On a donc  $\tilde{P}_0 = P_0$  d'une part, et  $\tilde{p}(t) = p(R_0, t)$  d'autre part. L'égalité de (1.13) et (1.14) impose alors :

$$\begin{aligned} [\omega_M^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma] \xi_0 &= 0, \\ \text{avec } \Gamma &= \frac{R_0 \omega_M^2}{c}, \\ \text{et } \omega_M^2 &= \frac{3\gamma \tilde{P}_0}{\rho R_0^2}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

<sup>3</sup>La notation avec un tilde permet de différencier la pression dans la bulle de la pression  $P_0 + p(R_0, t)$  au niveau de la surface de la bulle mais dans l'eau, ces deux pressions étant *a priori* différentes.

On obtient donc une équation semblable à celle d'un oscillateur harmonique avec amortissement visqueux. Et on retrouve, pour la pulsation propre du modèle adiabatique, la pulsation  $\omega_M$  de la résonance fondamentale déterminée dans la partie 1.1 (équation (1.9)).

### Au delà du modèle adiabatique.

Les oscillations de la bulle s'accompagnent en fait d'échanges thermiques entre l'air et l'eau. Ces effets ont été étudiés, entre autres, par Devin [Dev59] et Prosperetti [Pro77], et Leighton les décrit dans son livre [Lei94], pages 175 à 188. Les calculs qui suivent reprennent largement cette dernière référence.

Le paramètre pour évaluer l'importance des phénomènes thermiques est le rapport du rayon de la bulle et de la longueur de pénétration thermique dans l'air  $l_D$ . La capacité calorifique de l'eau étant élevée, on considèrera que sa température durant les oscillations de la bulle reste constante (on se référera à Prosperetti [Pro77] pour une étude plus détaillée).

Voyons comment l'équation (1.14) est modifiée. L'équation de la chaleur, linéarisée, s'écrit :

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{K}{T} \Delta T,$$

où  $s$  désigne l'entropie par unité de masse et  $K$  la conductivité thermique du gaz. On a, en outre, la relation thermodynamique :

$$T ds = C_p dT + h dP,$$

avec  $h = -\frac{\alpha T}{\rho}$  et  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T}$ , pour un gaz parfait. On obtient alors une équation différentielle sur la température :

$$\frac{\partial}{\partial t} T(r, t) - D \Delta T(r, t) = \frac{1}{\rho C_P} \frac{d\tilde{P}}{dt}, \quad (1.16)$$

avec  $D = \frac{K}{\rho C_p}$ , le coefficient de diffusion thermique. Aux fréquences qui nous intéressent, on peut considérer que la pression dans la bulle est uniforme. Notons-la sous la forme  $\tilde{P}(t) = \tilde{P}_0 + \tilde{p} e^{i\omega t}$ . On cherche alors une solution de l'équation (1.16) de la forme :  $T(r, t) = T_0 + T_1(r) e^{i\omega t}$ , où  $T_0$  désigne la température à l'équilibre. L'équation vérifiée par  $T_1(r)$  est :

$$\frac{i\omega}{D} T_1 - \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r T_1) = \frac{i\omega}{D \rho C_P} \tilde{p},$$

dont une solution particulière s'écrit  $T_1 = \frac{\tilde{p}}{\rho C_P}$  et dont l'équation homogène associée admet pour solution  $T_1(r) = A \frac{\sinh(\sqrt{i\omega/D} r)}{r}$ ,<sup>4</sup> où  $A$  est une constante. Ainsi, en imposant la condition  $T_1(r = R_0) = 0$ , on obtient :

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\tilde{p}}{\rho C_P} e^{i\omega t} \left( 1 - \frac{R_0}{r} \frac{\sinh(r \sqrt{i\omega/D})}{\sinh(R_0 \sqrt{i\omega/D})} \right).$$

<sup>4</sup>On adopte la notation  $\sqrt{i}$  pour désigner  $e^{i\pi/4}$ .

Chaque pellicule de gaz de température  $T(r, t)$  et à la pression  $\tilde{P}(t)$  doit vérifier la loi des gaz parfaits. On a donc :

$$V(t) = \int_0^{R_0} \frac{\rho(C_P - C_V)}{\tilde{P}(t)} 4\pi r^2 T(r, t) dr;$$

Ce qui donne, au premier ordre en  $\frac{\tilde{p}}{\tilde{P}_0}$ ,

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \left[ 1 - \frac{\tilde{p}}{\gamma \tilde{P}_0} \exp(i\omega t) \left[ 1 + 3(\gamma - 1)i \left( \frac{l_D}{R_0} \right)^2 \left( 1 - \sqrt{i} \frac{R_0}{l_D} \coth(\sqrt{i} \frac{R_0}{l_D}) \right) \right] \right],$$

où  $l_D = \sqrt{D/\omega}$  est la longueur de pénétration thermique. L'équation (1.14) devient donc :

$$\tilde{p}(t) = -\rho R_0 \left( \omega_0^2(\omega) + i\omega \Gamma^{th}(\omega) \right) \xi_0 e^{i\omega t}, \quad (1.17)$$

avec les notations suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{\tilde{P}_0}{\rho R_0^2} \text{Re}\Phi, \quad (1.18)$$

$$\Gamma^{th}(\omega) = \frac{\tilde{P}_0}{\omega \rho R_0^2} \text{Im}\Phi, \quad (1.19)$$

$$\text{où } \Phi(\omega, R_0) = \frac{3\gamma}{1 + 3(\gamma - 1)i \left( \frac{l_D}{R_0} \right)^2 \left( 1 - \sqrt{i} \frac{R_0}{l_D} \coth(\sqrt{i} \frac{R_0}{l_D}) \right)}. \quad (1.20)$$

On définit l'exposant polytropique  $\kappa$  par :

$$\kappa = \frac{\text{Re}\Phi}{3}.$$

D'autre part, pour des fréquences de l'ordre de la fréquence de Minnaert de la bulle, on a vu que  $\omega R_0/c \ll 1$  (cf équation (1.8b)). On développe alors (1.13) au premier ordre en  $\omega R_0/c$  :

$$p(R_0, t) \simeq -3\gamma P_0 \left( \frac{\omega}{\omega_M} \right)^2 \frac{\xi_0}{R_0} \left( 1 - i \frac{\omega R_0}{c} \right) e^{i\omega t}. \quad (1.21)$$

La continuité de la pression nous donne une nouvelle équation de la dynamique de la bulle, semblable à l'équation (1.15), mais faisant intervenir une nouvelle "pulsation propre"  $\omega_0$ , un "taux d'amortissement thermique"  $\Gamma^{th}$ , et un "taux d'amortissement radiatif"  $\Gamma^{rad}$  :<sup>5</sup>

$$[\omega_0^2(\omega) - \omega^2 + i\omega \Gamma(\omega)] \xi_0 = 0, \quad (1.22)$$

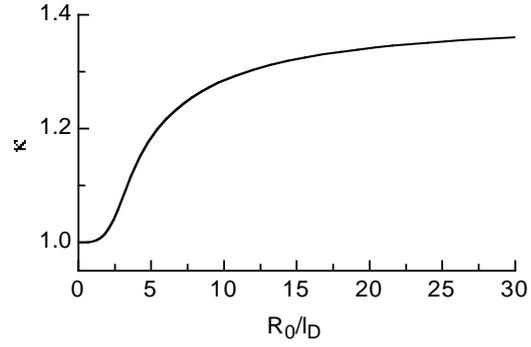
$$\text{avec } \omega_0^2 = \frac{\kappa}{\gamma} \omega_M^2, \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \Gamma(\omega) &= \Gamma^{rad} + \Gamma^{th} \\ &= \frac{R_0 \omega^2}{c} + \frac{\tilde{P}_0}{\omega \rho R_0^2} \text{Im}\Phi. \end{aligned}$$

La figure 1.3 présente les variations de  $\kappa$  en fonction de  $R_0/l_D$ . Les valeurs extrêmes de

<sup>5</sup>À strictement parler, l'équation (1.22) n'a plus rien d'une équation d'oscillateur harmonique puisqu'on y définit des paramètres qui dépendent de la fréquence. Mais on montrera un peu plus loin que, pour une large gamme de fréquences, on peut encore raisonner en termes d'oscillateur harmonique.

FIG. 1.3 – Exposant polytropique  $\kappa$  en fonction du rapport entre le rayon de la bulle et la longueur de pénétration thermique.



l'exposant polytropique correspondent à des transformations particulières. Pour une bulle très petite devant la longueur de pénétration thermique, on trouve un exposant de 1, ce qui correspond à une transformation isotherme. À l'autre extrême,  $\kappa$  se rapproche de  $\gamma$  (1,4 pour un gaz diatomique), ce qui correspond à une transformation adiabatique. Pour une bulle de 1 mm excitée à une fréquence de 3 kHz (*i.e.* à une fréquence proche de la fréquence de résonance prévue par Minnaert), le rapport  $R_0/l_D$  est de l'ordre de 30 : on peut voir sur la figure 1.3 que l'on commet une erreur inférieure à 5% en prenant  $\kappa = \gamma$ . Pour des bulles de rayon millimétrique et à des fréquences de l'ordre du kilohertz, le modèle adiabatique fournit donc une bonne description.

### 1.2.3 Raffinements

Il reste deux effets dont on n'a pas tenu compte et qui seront pour nous du raffinement dans la mesure où ils seront négligeables pour des bulles millimétriques. Ces deux effets concernent l'approximation selon laquelle la pression dans l'eau sur la surface de la bulle  $p(R_0, t)$  et la pression à l'intérieur de la bulle  $\tilde{p}(t)$  sont égales.

#### Tension superficielle

La présence de l'interface eau-air induit une pression de Laplace. La pression à l'intérieur de la bulle s'écrit en effet :

$$\tilde{p} = p + \frac{2\sigma}{R_0 + \xi}.$$

L'équation (1.17) devient donc :

$$\begin{aligned} p(R_0, t) &= \tilde{p}(t) - \frac{2\sigma}{R_0 + \xi} \\ &= -\frac{\Phi}{R_0} \left( P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \xi - \frac{2\sigma}{R_0} + \frac{2\sigma}{R_0^2} \xi, \end{aligned}$$

au premier ordre en  $\xi/R_0$ . Le terme constant de la dernière expression ne fait que changer la position d'équilibre ; par contre le terme en  $\xi$  modifie la fréquence de résonance, et  $\omega_0$  dans l'équation (1.22) se voit remplacée par :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{3\kappa\tilde{P}_0}{\rho R_0^2} - \frac{2\sigma}{R_0^3\rho} \\ &= \left( \frac{\kappa g}{\gamma} \right) \omega_M^2, \end{aligned} \tag{1.24}$$

où le paramètre  $g$ , qui inclus les effets de tension superficielle, est défini par :

$$g = \left( 1 + \frac{2\sigma}{R_0 P_0} - \frac{2\sigma}{R_0 P_0 \left( 1 + \frac{2\sigma}{R_0 P_0} \right)} \right). \quad (1.25)$$

La prise en compte de la tension superficielle n'est donc pas nécessaire tant que  $2\sigma/R_0 \ll P_0$ . Pour une bulle d'air dans l'eau ( $\sigma \simeq 70 \text{ mJ/m}^2$ ) et à pression atmosphérique, on peut négliger la tension superficielle pour un rayon de bulle supérieur à 0,1 mm.

### Viscosité

Les contraintes visqueuses dans un corps isotrope s'écrivent, en notation tensorielle standard :<sup>6</sup>

$$\sigma_{ik} = 2\eta(\dot{u}_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\dot{u}_{ll}) + \zeta\delta_{ik}\dot{u}_{ll},$$

où  $\sigma$  et  $u$  désigne respectivement les tenseurs des contraintes et des déformations, et où  $\eta$  et  $\zeta$  correspondent aux coefficients de première et seconde viscosité. À l'approximation de l'eau incompressible, on montre que le champ de déplacement créé par la bulle dans l'eau est en  $\frac{1}{r^2}$ . Les termes  $\dot{u}_{ll}$  sont alors nuls et la somme des contraintes visqueuses sur un élément de fluide est nulle dans le corps du liquide. Par contre, sur la paroi de la bulle on a une pression visqueuse :

$$\begin{aligned} p_{vis} &= -2\eta \frac{\partial \dot{u}}{\partial r}(r = R_0), \\ &= 4\eta \frac{\dot{\xi}}{R_0}. \end{aligned}$$

Cette pression s'ajoute au seconde membre de la formule (1.12) et donne une troisième composante au taux d'amortissement :

$$\Gamma^{vis} = \frac{4\eta}{\rho R_0^2}. \quad (1.26)$$

## 1.2.4 Équations du mouvement

### Régime libre

Un modèle relativement complet de la dynamique de la bulle conduit donc à l'équation :

$$\left[ \omega_0^2 - \omega^2 + i\omega(\Gamma^{th} + \Gamma^{rad} + \Gamma^{vis}) \right] \xi_0 = 0. \quad (1.27)$$

Cette équation donnera manifestement une solution  $\omega$  complexe. Afin de continuer à associer la notation  $\omega$  à une valeur réelle, on va remplacer  $\omega$  par  $\omega + i\frac{\Gamma}{2}$ , où  $\Gamma$  désigne le taux d'amortissement. Les quantités  $\omega_0$ ,  $\Gamma^{rad}$  et  $\Gamma^{th}$  sont *a priori* des fonctions de  $\omega$  et de  $\Gamma$ . Dans le cas d'oscillations faiblement amorties, on peut considérer que seule leur partie réelle importe. On doit alors résoudre :

$$\omega^2 = \omega_0^2(\omega) - \frac{\Gamma^2(\omega)}{4} \simeq \omega_0^2(\omega), \quad (1.28a)$$

$$\Gamma(\omega) = \Gamma^{th}(\omega) + \Gamma^{rad}(\omega) + \Gamma^{vis}. \quad (1.28b)$$

<sup>6</sup>Voir par exemple Landau [LL59] page 124.

La figure 1.4a donne la représentation de l'équation (1.28a) pour quelques valeurs du rayon, et la figure 1.4b présente la solution (obtenue numériquement) sous la forme du tracé de  $\frac{\omega_0}{\omega_M}$  en fonction du rayon de la bulle. On retrouve que, pour des bulles de rayon supérieur ou de

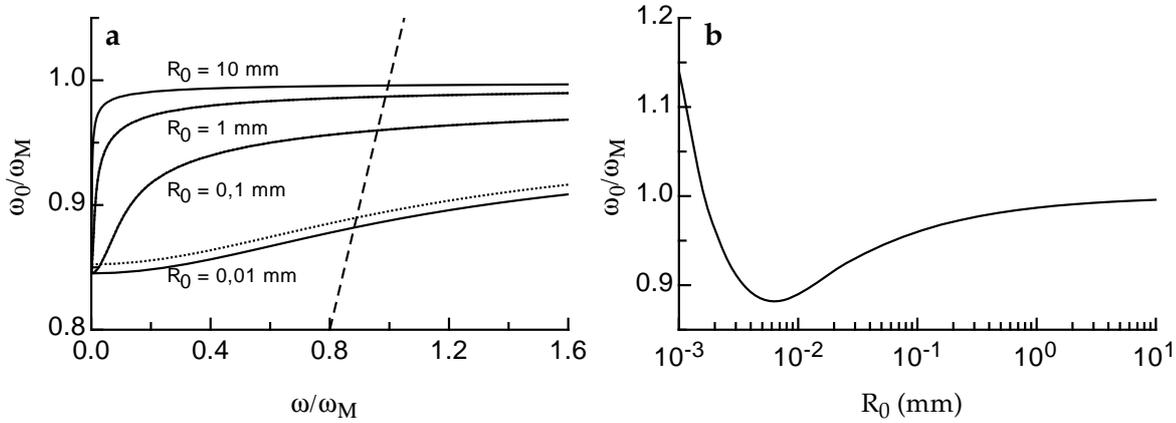


FIG. 1.4 – **a**- Détermination graphique de la fréquence de résonance d'une bulle d'air dans l'eau pour différents rayons de bulle. Les pulsations sont adimensionnées à l'aide de la pulsation de Minnaert (cf équation (1.9)). En trait plein, la fonction  $\omega_0$  sans tenir compte du terme de tension superficielle (cf équation (1.23)) . En pointillés, la fonction incluant les effets de la tension superficielle (cf équation (1.24)). À noter que, hormis pour le rayon de 0,01 mm, on ne voit pas de différence entre les modèles avec et sans tension superficielle. La droite représentée en trait hachuré est la première bissectrice. **b**- Fréquence de résonance en fonction du rayon (résolution numérique). Pour les grands rayons ( $> 10^{-1}$  mm), la pulsation de résonance est proche de celle de Minnaert (modèle adiabatique).

l'ordre de 1 mm, la fréquence de résonance est proche de la résonance de Minnaert. À mesure que la taille de la bulle diminue, on s'écarte du modèle adiabatique pour tendre vers un modèle isotherme. Notons également que la tension de surface ne joue pas pour des rayons supérieurs à 0,1 mm. En dessous de cette taille, l'effet de la tension de surface est d'augmenter la raideur de l'oscillateur harmonique et donc d'augmenter la fréquence de résonance comme cela est illustré sur la figure 1.4a pour un rayon de 0,01 mm.

La fréquence de résonance étant déterminée, on peut calculer le taux d'amortissement à cette fréquence et on a pour solution en régime libre :

$$\xi(t) = \xi(t=0)e^{(-\frac{\Gamma t}{2})}e^{i\omega t}, \quad (1.29)$$

où  $\omega$  et  $\Gamma$  dépendent du rayon de la bulle.

Étudions d'un peu plus près l'amortissement. On définit la constante d'amortissement sans dimension  $\delta(\omega)$  par :

$$\begin{aligned} \delta(\omega) &= \Gamma(\omega)/\omega, \\ &= \delta^{rad} + \delta^{th} + \delta^{vis}, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\delta^{rad} &= \frac{R_0\omega}{c}, \\ \delta^{th} &= \frac{1}{3\gamma} \left(\frac{\omega_M}{\omega}\right)^2 \text{Im}(\Phi), \\ \delta^{vis} &= \frac{4\eta}{\rho R_0^2\omega},\end{aligned}$$

et on note  $\delta_0$  la constante d'amortissement à résonance. On a donc  $\delta_0 = 1/Q$ , où  $Q$  est le facteur de qualité de l'oscillateur harmonique. Les fonctions  $\delta_0^{th}(R_0)$ ,  $\delta_0^{rad}(R_0)$  et  $\delta_0^{vis}(R_0)$  ne peuvent pas être exprimées simplement dans le cas général puisque la pulsation de résonance  $\omega_0$  n'a pas de loi simple en fonction de  $R_0$ . Mais on peut les calculer à partir du graphe de la figure 1.4b : le résultat est présenté figure 1.5. Regardons plus en détail les trois sources

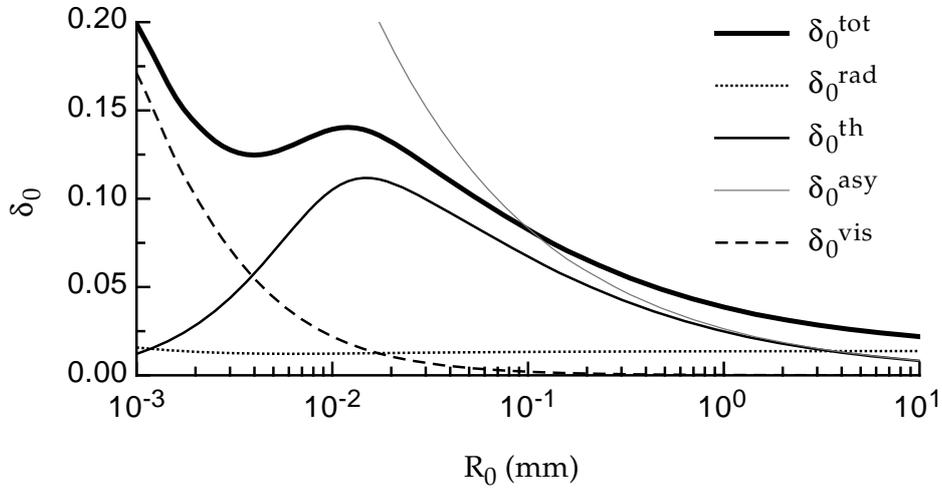


FIG. 1.5 – Les différentes composantes de la constante d'amortissement à résonance en fonction du rayon de la bulle. La fonction  $\delta_0^{asy}$  correspond à une expression asymptotique de la constante d'amortissement thermique.

d'amortissement.

En première approximation, la constante d'**amortissement radiatif** à résonance ne dépend pas du rayon de la bulle et peut s'écrire :

$$\delta_0^{rad} = 1,38 \cdot 10^{-2}. \quad (1.30)$$

La constante d'**amortissement thermique** à résonance passe par un maximum pour un rayon de l'ordre de dix microns. Notons que la courbe de la figure 1.5 n'est qu'approximativement bonne pour les petits rayons (*i.e.* pour  $R_0 < 10 \mu\text{m}$ ) puisqu'on n'a pas tenu compte de la variation du coefficient de diffusion thermique avec le rayon (*cf* Leighton [Lei94] page 187). Pour des rayons de l'ordre du millimètre, la constante d'amortissement thermique à résonance peut être estimée à l'aide de la formule :

$$\begin{aligned}\delta_0^{th} \simeq \delta_0^{asy} &= 4,61 \cdot 10^{-4} \sqrt{f_0}, \\ &= \frac{8,33 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{R_0}},\end{aligned} \quad (1.31)$$

avec  $f_0$  exprimée en Hz et  $R_0$  en mètres;  $\delta_0^{asy}$  est représentée sur la figure 1.5.

La constante d'**amortissement visqueux** à résonance est donnée par :

$$\delta_0^{vis} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{R_0}. \quad \text{avec } R_0 \text{ en mètres.}$$

Pour des rayons de l'ordre du millimètre, la contribution visqueuse à l'amortissement est donc négligeable.

Pour les bulles que nous considérerons expérimentalement, on pourra négliger l'amortissement visqueux et on utilisera les formules (1.30) et (1.31).

### Régime forcé

Si la bulle est soumise à une surpression externe  $P(t) = \epsilon P_0 e^{i\omega t}$ , l'équation (1.27) devient :

$$\left[ \omega_0^2 - (\omega + i\frac{\Gamma}{2})^2 + i(\omega + i\frac{\Gamma}{2})(\Gamma^{th} + \Gamma^{rad} + \Gamma^{vis}) \right] \xi_0 = \frac{\epsilon P_0}{\rho R_0}. \quad (1.32)$$

Le mouvement est alors la somme d'une composante transitoire de la forme de l'équation (1.29) et d'une composante permanente qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0(\omega) e^{i\omega t} \\ &= \frac{\epsilon R_0}{3\gamma} \times \frac{\omega_M^2}{\omega^2 - \omega_0^2(\omega) - i\omega\Gamma^{tot}(\omega)} \times e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Une fois de plus, on tombe sur une expression qui ressemble à celle donnant la courbe de résonance d'un oscillateur harmonique, au "détail" près que les "coefficients"  $\omega_0$  et  $\Gamma^{tot}$  dépendent de la pulsation  $\omega$ . Toutefois, la figure 1.4a montre que les variations de  $\omega_0$  sont faibles autour de la résonance. Par exemple, pour une bulle de 1 mm, qui résonne à  $\omega_0 = 0,987\omega_M$ , cette valeur reste constante à  $\pm 1\%$  pour une gamme de fréquence allant de  $0,3\omega_M$  à  $19\omega_M$ . On peut donc légitimement considérer que  $\omega_0$  est une constante pour des fréquences proches de la résonance. Mais il faut garder à l'esprit que pour les très basses fréquences  $\omega_0(\omega)$  se rapproche de la valeur donnée par un modèle isotherme des transformations subies par le gaz de la bulle. En ce qui concerne  $\Gamma^{tot}(\omega)$ , ses variations sont beaucoup plus significatives, comme le montre la figure 1.6a pour une bulle de 1 mm. Mais l'effet de ces variations sur la courbe de résonance est faible. La figure 1.6b permet d'apprécier l'erreur relative que l'on commet sur  $\xi_0(\omega)$ , calculée à partir de l'équation (1.34), selon que l'on considère que  $\omega_0$  et  $\Gamma^{tot}$  sont des paramètres fixes ou des fonctions de  $\omega$ . On voit que si l'on tolère une précision de l'ordre du pourcent, on peut décrire la bulle comme un oscillateur harmonique amorti.

Les équations (1.34) et (1.12) permettent d'écrire la surpression engendrée, à une distance  $r$ , par une bulle de rayon  $R_0$  excitée par une surpression  $\epsilon P_0 e^{i\omega t}$  :

$$p(r, t) = \epsilon P_0 \frac{R_0}{r} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma^{tot}} e^{i\omega t} \cdot \frac{e^{-i\omega(r-R_0)/c}}{1 + i\omega R_0/c}, \quad (1.34)$$

qui, si on néglige les termes de propagation, se met sous la forme :

$$p(r, t) = \epsilon P_0 \frac{R_0}{r} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma^{tot}} e^{i\omega t}. \quad (1.35)$$

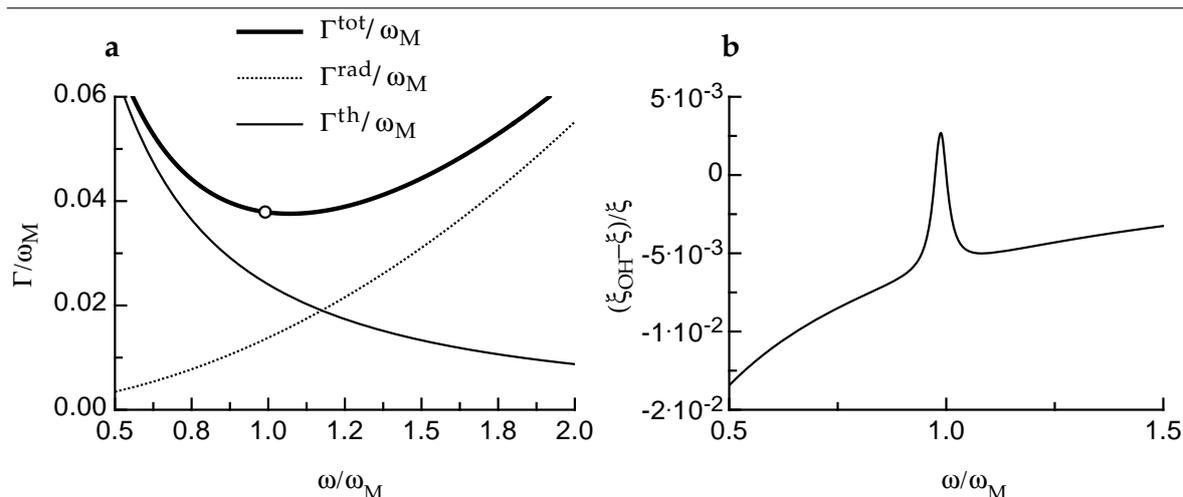
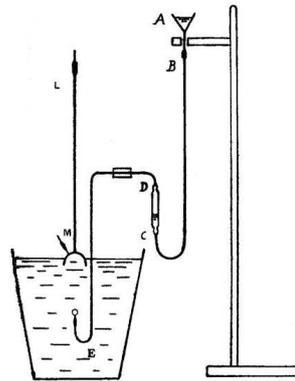


FIG. 1.6 – **a**-Le taux d’amortissement  $\Gamma$  d’une bulle de 1 mm en fonction de la pulsation. La position de la résonance est donnée par le point blanc. **b**- L’erreur relative que l’on commet sur  $\xi_0(\omega)$ , définie par l’équation (1.34), selon que l’on tient compte de la variation des coefficients avec la pulsation ou non. On commet une erreur inférieure au pourcent pour une large gamme de fréquences autour de la résonance.

### 1.3 Étude expérimentale de la résonance de Minnaert

En 1933, M. Minnaert publie un article intitulé «On Musical Air-Bubble and the Sounds of Running Water»[Min33]. Il y rapporte des expériences visant à déterminer si la résonance d’une bulle d’air est mieux décrite par sa théorie ou par celle de Sir R. Paget. En effet, Paget décrit la bulle comme un résonateur à murs rigides (“rigid theory” selon la dénomination de Minnaert), donc de type Fabry-Pérot, tandis que Minnaert propose un modèle d’oscillateur harmonique (“pulsating theory”). Le dispositif expérimental qu’il utilise est reproduit sur la figure 1.7. L’eau de l’entonnoir  $A$  pousse lentement l’air du tube  $CD$  qui s’échappe sous la forme d’une bulle dans un récipient rempli d’eau. Muni d’un diapason, Minnaert détermine la note émise par la bulle à la sortie du tube. Le volume de la bulle est ensuite mesuré à l’aide du tube capillaire  $LM$ . Minnaert montre alors que la fréquence de résonance de la bulle est inversement proportionnelle à son rayon, ce qui est prédit par les deux théories. Il étudie ensuite l’influence de la température, de la nature du liquide et de la nature du gaz. Les données de ces trois séries d’expériences confirment très nettement que la “pulsating theory” est la bonne théorie. D’autres expériences du même type ont été réalisées depuis. En 1956, Strasberg [Str56] analyse dans son article des expériences, effectuées par L. Bauer, au cours desquelles le son émis par une bulle à la sortie d’une canule est recueilli par un hydrophone, tandis qu’un équipement photographique à grande vitesse prend des images de la bulle. En 1987, T.G. Leighton et A. Walton reprennent ces expériences à titre de travaux pratiques sur l’oscillateur harmonique pour étudiants de second cycle universitaire [LW87]. Enfin, A.J. Hardwick et A. Walton, encore à des fins pédagogiques, reprennent le même type d’expériences mais en bloquant cette fois la bulle sous un verre de montre [HW94]. Le fait de bloquer la bulle

FIG. 1.7 – *Le dispositif expérimental de Minnaert.*



présente l'avantage de rendre possible une étude en régime forcé, à l'aide d'un haut-parleur et d'un hydrophone. L'inconvénient est que le verre de montre modifie la fréquence de résonance de la bulle.

Les expériences décrites dans la suite ne sont donc pas pionnières, loin s'en faut. Mais elles apportent tout de même une innovation : l'usage d'une époussette pour bloquer la bulle. L'intérêt de ces expériences, outre l'aspect pédagogique [LDB02], est de vérifier que l'époussette ne modifie pas sensiblement les propriétés acoustiques de la bulle. On valide ainsi un dispositif expérimental qui permettra d'étudier les interactions entre bulles (chapitre 2 et 3) et les effets non linéaires (chapitre 5).

### 1.3.1 Le dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est représenté figure 1.8a. Dans un aquarium en verre de dimensions  $60\text{ cm} \times 30\text{ cm} \times 30\text{ cm}$  rempli d'eau, on immerge un haut-parleur (tweeter Audax TW010) protégé par une enveloppe en latex (non représentée sur la figure), un microphone préalablement étanchéifié à l'aide d'un ballon de baudruche, et une époussette réalisée à l'aide de fil de fer et de dentelle. Avec une seringue, on injecte une bulle sous l'époussette ; un exemple de bulle est présenté figure 1.8b.

### Les mesures acoustiques

Le microphone utilisé ici n'est pas étalonné. On obtient donc des mesures de tension que l'on ne peut pas convertir en pression. Mais dans la mesure où seules les variations du signal, selon qu'une bulle est présente ou non, nous intéressent, cela n'est pas gênant. On mesure la réponse acoustique de la bulle en régime libre ou en régime forcé. Pour le régime libre, un générateur alimente un amplificateur audio connecté au haut-parleur et le signal du microphone est recueilli à l'aide d'un oscilloscope numérique (non représenté). En régime forcé, une détection synchrone, pilotée par ordinateur, délivre un signal de référence à l'amplificateur et analyse le signal du microphone.

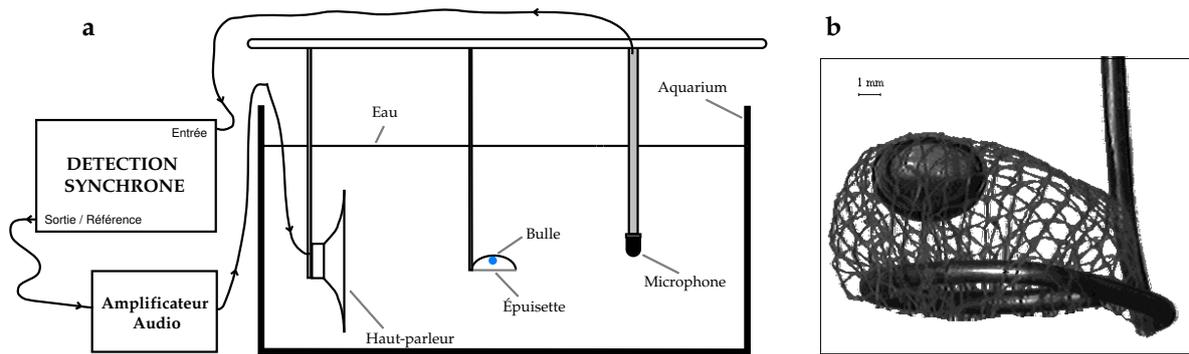


FIG. 1.8 – **a-** Le dispositif expérimental. **b-** Un exemple de bulle sous l'épauissette. À partir de cette image, on peut mesurer le demi-grand axe  $a$  et le demi-petit axe  $c$  (ici,  $a = 2,5$  mm et  $c = 1,9$  mm).

### Les mesures de rayon

On mesure les dimensions de la bulle à l'aide d'une caméra CCD (non représentée) reliée à un ordinateur, et les images sont analysées avec le programme NIH Image. Les bulles sont souvent non sphériques (comme celle de la figure 1.8b par exemple) : elles apparaissent à l'image sous une forme qu'on assimile à une ellipse dont on mesure le grand axe et le petit axe. La précision des mesures est surtout limitée par la difficulté qu'on a à déterminer les bords de la bulle, du fait de la présence de l'épauissette. On estime que les mesures sont à 0,1 mm près.

### 1.3.2 Les expériences

On peut se livrer, avec une bulle d'air bloquée sous l'épauissette, à toutes les expériences classiques sur les oscillateurs harmoniques amortis.

#### Le régime libre

Le régime libre est étudié en excitant la bulle avec un "burst". La figure 1.9a montre le signal obtenu lorsqu'on excite une bulle avec un burst à la fréquence de résonance (990 Hz), c'est à dire à résonance. On observe la montée du signal, l'atteinte d'un régime stationnaire<sup>7</sup>, puis la redescente du signal après la fin de l'excitation.

La figure 1.9b est une illustration du fait que la solution générale de l'équation d'un oscillateur harmonique forcé est la somme d'une solution forcée et d'une solution libre. Ici, la bulle est excitée à une fréquence de 1050 Hz, supérieure à sa fréquence de résonance. La montée du signal se fait donc avec une composante forcée à 1050 Hz et une composante libre à 990 Hz : on observe des battements. La descente du signal après l'excitation se fait toujours à la fréquence de résonance. Notons que, comme attendu, l'amplitude de l'excitation hors

<sup>7</sup>Le régime stationnaire est très court sur la figure parce que la longueur du burst a été choisie afin de faire apparaître la montée et la descente du signal sur la même figure.

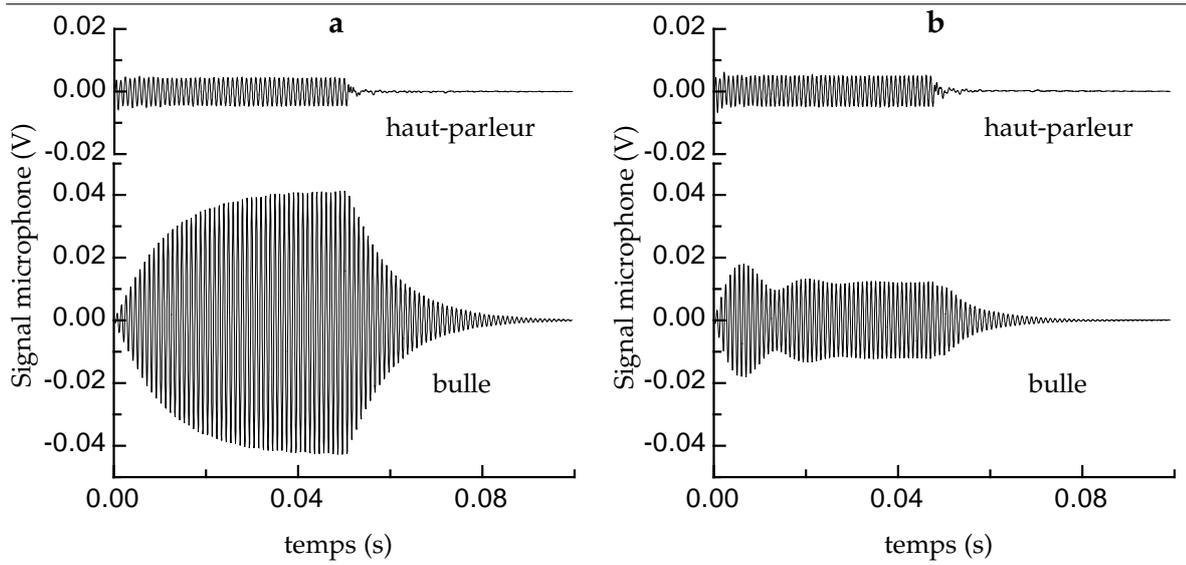


FIG. 1.9 – **a-** En haut, le signal délivré par le haut-parleur seul, en l'absence de bulle. En bas, le signal en présence de la bulle. L'excitation de la bulle par un burst à résonance (990 Hz) fait apparaître la montée du signal pour atteindre un régime stationnaire, suivi d'une descente exponentielle après la fin de l'excitation. **b-** Hors résonance (1050 Hz), la montée du signal fait apparaître des battements entre le signal forcé et le signal libre de la bulle.

résonance (figure 1.9b) est moins grande qu'à résonance (figure 1.9a).

### Le régime forcé

En régime forcé, on utilise une détection synchrone pour obtenir l'amplitude et la phase de la réponse de la bulle en fonction de la fréquence. Un exemple de la réponse d'une bulle est donné par les figures 1.10a (amplitude) et 1.10b (phase). On a également sur ces figures le résultat du même balayage en fréquence, mais en l'absence de bulle sous l'époussette ( $\times$ ). Cela permet de connaître le signal que le haut parleur impose à la bulle. Notons que ce signal n'est pas "plat" en fréquence. On n'obtient pas tout à fait les courbes telles que celles prévues par l'équation (1.34). En particulier, le signal en amplitude après résonance est plus bas qu'avant résonance, et même plus bas que le signal en l'absence de bulle. C'est là une belle mise en évidence qu'un oscillateur harmonique répond en phase avec l'excitation s'il est forcé à une fréquence inférieure à sa fréquence de résonance, mais en opposition de phase pour une fréquence de forçage supérieure à sa fréquence de résonance. Comme le signal  $p_{mic}$  recueilli par le microphone est la somme de la surpression  $p_{hp}$  engendrée par le haut-parleur et de la surpression  $p_{bulle}$  due à la bulle, la présence de la bulle a pour effet d'augmenter l'amplitude de surpression avant la résonance, mais de la diminuer immédiatement après. Pour pouvoir analyser les données, il faut réaliser la soustraction de  $p_{mic}$  et  $p_{hp}$ .

Le microphone délivre une tension  $V_{mic}(t)$  qui est une fonctionnelle linéaire de la surpres-

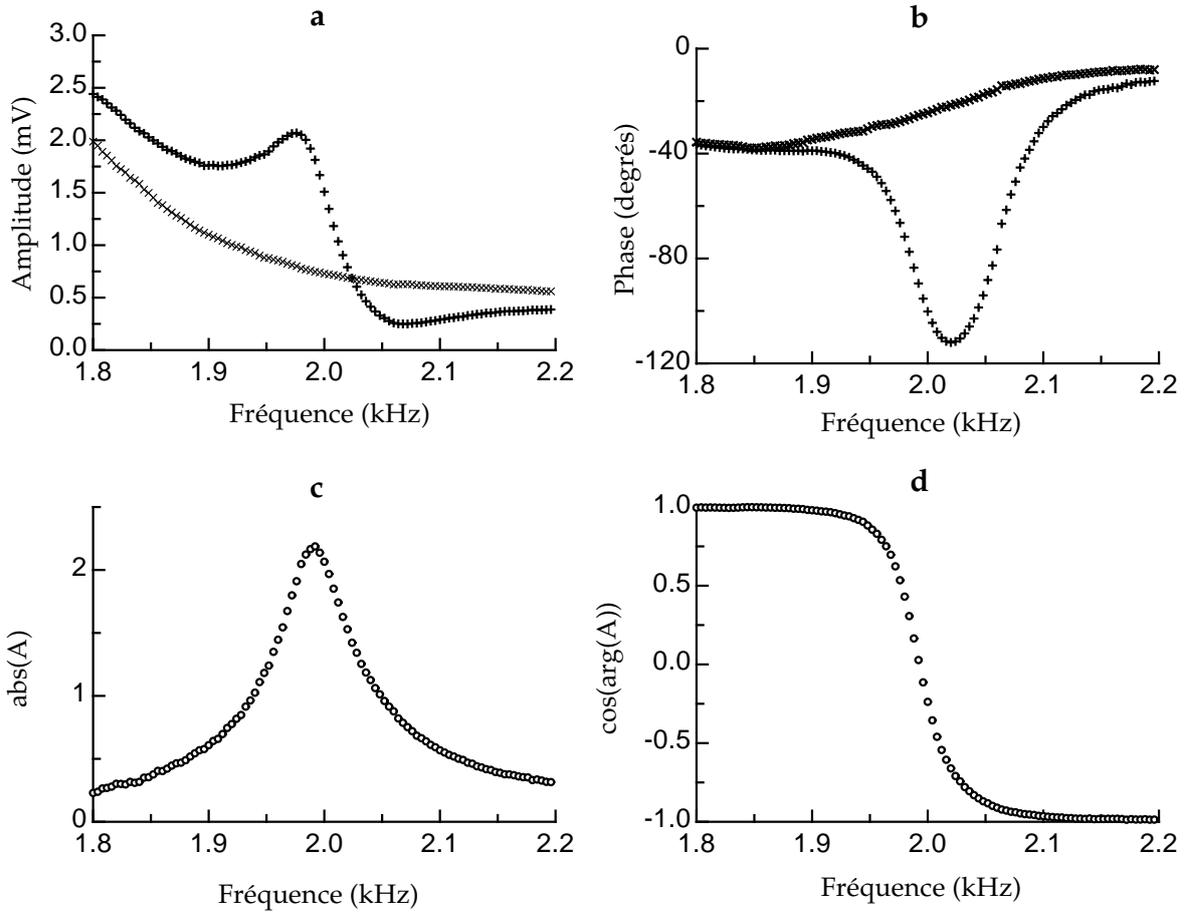


FIG. 1.10 – **a-** L'amplitude du signal recueilli par le microphone en fonction de la fréquence, sans bulle ( $\times$ ) et avec bulle ( $+$ ). **b-** La phase du signal recueilli par le microphone en fonction de la fréquence, sans bulle ( $\times$ ) et avec bulle ( $+$ ). **c-** Le module de la fonction  $A$ , construite à partir des points expérimentaux (équation (1.38)), en fonction de la fréquence. **d-** Le cosinus de l'argument de  $A$  en fonction de la fréquence.

sion qu'il subit :

$$V_{mic}(t) = \int_{-\infty}^t g_{mic}(t-t')p_{mic}(t')dt', \quad (1.36)$$

où on désigne par  $g_{mic}$  la fonction de réponse du microphone. La transformée de Fourier de l'équation (1.36) donne :

$$\tilde{V}_{mic}(\omega) = \tilde{g}_{mic}(\omega)\tilde{p}_{mic}(\omega). \quad (1.37)$$

Notons  $\tilde{V}_{mic}^0$  le signal obtenu lors du balayage sans bulle et définissons la fonction  $A(\omega)$ , que l'on peut construire à partir des données des figures 1.10a et 1.10b, par :

$$A(\omega) = \frac{\tilde{V}_{mic}(\omega) - \tilde{V}_{mic}^0(\omega)}{\tilde{V}_{mic}^0(\omega)}.$$

Cette fonction réalise la soustraction et la déconvolution du signal du haut-parleur. En utilisant

l'équation (1.37), on obtient :

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{\tilde{g}_{mic}(\omega) (\tilde{p}_{mic}(\omega) - \tilde{p}_{mic}^0(\omega))}{\tilde{g}_{mic}(\omega) \tilde{p}_{mic}^0(\omega)} \\ &= \frac{\tilde{p}_{bulle}(\omega)}{\tilde{p}_{mic}^0(\omega)} \end{aligned} \quad (1.38)$$

La fonction  $A(\omega)$  permet donc de déterminer le rapport de la surpression due à la bulle et de la surpression due au haut-parleur, quelle que soit la fonction de réponse du microphone. Son amplitude et le cosinus de sa phase sont donnés sur les figures 1.10c et 1.10d dans le cas de l'expérience des figures 1.10a et 1.10b. D'après l'équation (1.35), notre modèle prévoit une fonction  $A(\omega)$  qui s'écrit :

$$A(\omega) = \frac{\tilde{p}_{hp \rightarrow bulle}(\omega)}{\tilde{p}_{mic}^0(\omega)} \frac{R_0}{r} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma^{tot}},$$

où  $\tilde{p}_{hp \rightarrow bulle}(\omega)$  désigne la transformée de Fourier de la surpression que le haut-parleur exerce sur la bulle. A priori,  $\tilde{p}_{hp \rightarrow bulle}(\omega) \neq \tilde{p}_{bulle}^0(\omega)$  : le microphone n'est pas à la même position que la bulle. Mais, dans le cadre de nos expériences, on peut considérer que  $\tilde{p}_{hp \rightarrow bulle}(\omega) = \lambda \tilde{p}_{bulle}^0(\omega)$ , où  $\lambda$  est un facteur géométrique de l'ordre de 1 (le microphone n'est pas très loin de la bulle). On prévoit donc que :

$$A(\omega) = \lambda \frac{R_0}{r} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma^{tot}},$$

où les valeurs de  $\lambda$ ,  $\omega_0$  et  $\Gamma^{tot}$  peuvent être déterminées par le fit des points expérimentaux.

### 1.3.3 Les résultats

À partir des expériences décrites précédemment, on peut déterminer la fréquence de résonance  $f_0$  et la constante d'amortissement à résonance  $\delta_0$  d'une bulle. Ces mesures sont d'une bonne précision : mieux que le pourcent pour  $f_0$  et 2% pour  $\delta_0$ . Par contre, les mesures de rayons sont moins précises, pouvant aller jusqu'à une imprécision de l'ordre de 10% pour les bulles les plus petites. La figure 1.11a permet de tester la validité de la loi de Minnaert sur une décade : de 500 Hz à 5 kHz. D'après l'équation (1.9), on attend une loi :

$$\begin{aligned} f_M &= \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho}} \\ &= \frac{3,26}{R_0}, \quad (R_0 \text{ en m et } f_0 \text{ en Hz}), \end{aligned}$$

en prenant  $\gamma = 1,4$  (gaz diatomique),  $P_0 = 10^5$  Pa et  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. La régression linéaire des points de la figure 1.11a donne une pente de  $3,22 \pm 0,02$  kHz/mm. Le léger écart obtenu est dû au fait que les transformations du gaz de la bulle se font avec un exposant polytropique  $\kappa$  légèrement différent de  $\gamma$ . Sur la figure 1.3 (page 22), on avait remarqué que  $\kappa$  était légèrement inférieur à  $\gamma$  pour des bulles de rayon millimétrique. Si on regarde la courbe théorique de  $\omega_0/\omega_M$  en fonction de  $R_0$ , sur la figure 1.4b (page 24), on peut considérer que  $\omega_0/\omega_M \simeq 0,988 \pm 10^{-3}$

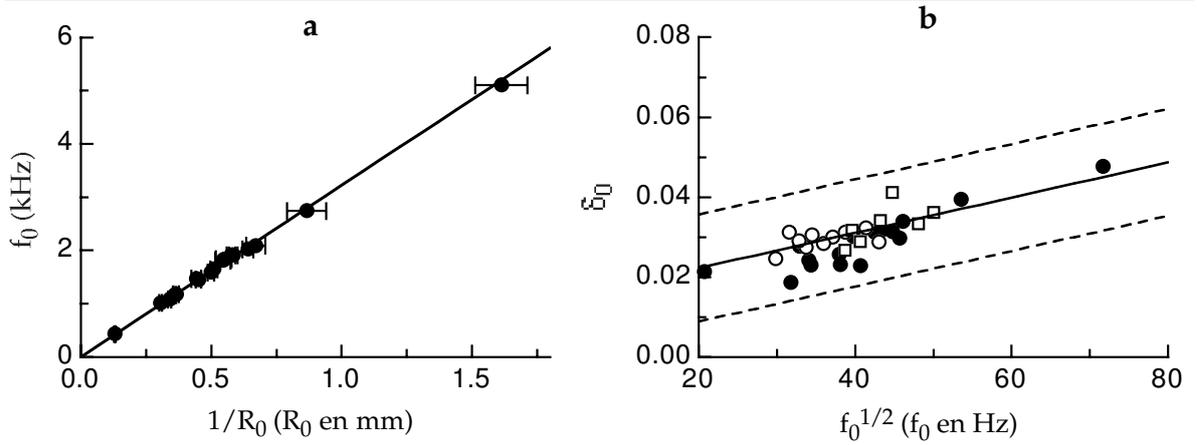


FIG. 1.11 – Les résultats expérimentaux. **a**-La fréquence de résonance en fonction de l'inverse du rayon. Les barres d'erreur sur la fréquence sont inférieures à la taille des points. En trait plein, le résultat de la régression linéaire. L'accord entre théorie et expérience est très bon. **b**-La constante d'amortissement à résonance en fonction de la racine carré de la fréquence de résonance. On a effectué trois types de mesure : avec une bulle sous l'épuisette en régime forcé ( $\bullet$ ) et en régime libre ( $\circ$ ), et avec une bulle à la sortie d'une aiguille ( $\square$ ), en régime libre. Les barres d'erreur, non représentées, sont inférieures ou de l'ordre de la taille des points. En trait plein, la prévision théorique. En traits hachurés, la loi théorique sans amortissement radiatif, ou avec un amortissement radiatif double (voir La taille finie de l'aquarium, page 34).

pour des rayons compris entre 1 et 3 mm. On attend donc un comportement de la fréquence de résonance en :

$$f_0 = 3,26 \times 0,988 \frac{1}{R_0} = \frac{3,22}{R_0} \quad (R_0 \text{ en m et } f_0 \text{ en Hz}).$$

L'accord est donc particulièrement bon. Précisons que le point de la figure 1.11a correspondant à une bulle résonnant vers 5 kHz n'a pas été pris en compte pour la régression linéaire puisque cette bulle est en dehors de la gamme de rayons sur laquelle on s'est concentré. On peut toutefois noter que ce point reste très proche de la droite théorique.

En revanche, l'accord entre théorie et expérience pour la détermination de  $\delta_0$  n'est pas satisfaisant, comme en témoigne la figure 1.11b. On a représenté la constante d'amortissement à résonance en fonction de la racine carré de la fréquence de résonance. La droite en trait plein correspond à la prédiction théorique (équations 1.30 et 1.31 page 25) :

$$\delta_0 = 1,38 \cdot 10^{-2} + 4,61 \cdot 10^{-4} \sqrt{f_0} \quad (f_0 \text{ exprimé en Hz}).$$

Si les mesures sont bien autour de la fonction théorique, elle forment tout de même un nuage de points assez étendu.

Munis de ces deux résultats expérimentaux, il nous faut discuter trois points importants qui sont autant de différences entre les conditions de nos calculs théoriques et les conditions de nos expériences : les bulles ne sont pas sphériques, elles sont retenues par une époussette, et l'aquarium est de taille finie.

### La non-sphéricité des bulles

Du fait de la gravité, les bulles ne sont pas sphériques mais aplaties, comme on peut le voir sur la photo de la figure 1.8b (page 29). La fréquence de résonance d'une bulle d'air aplatie a été étudiée par Strasberg [Str53]. On trouvera dans l'annexe B une étude des effets de l'aplatissement. On montre que le paramètre qui contrôle la fréquence de résonance d'une bulle n'est pas son rayon, mais plutôt son volume. Ainsi, en assimilant la bulle à un sphéroïde de demi-grand axe  $a$  et de demi-petit axe  $c$ , on définit son rayon  $R_0$  comme étant celui de la boule ayant le même volume :

$$R_0 = (a^2c)^{1/3}.$$

C'est cette définition du rayon qui est utilisée dans la figure 1.11a. Concernant l'effet de l'aplatissement sur l'amortissement, on s'attend qualitativement à une augmentation des échanges thermiques entre l'air et l'eau. Cela n'explique pourtant pas le désaccord de la figure 1.11b puisqu'on trouve aussi bien des mesures de  $\delta_0$  au dessus qu'en dessous de la prédiction théorique.

### L'épaissette

L'étude détaillée de l'influence de l'épaissette sur la dynamique de la bulle est présentée dans l'annexe C. On n'en donne ici que les conclusions. Une première idée de modèle peut être de considérer que, puisque l'épaissette retient la bulle, les oscillations de cette dernière ne vont pas se faire avec pour point fixe le centre de la bulle, mais le point d'attache sur l'épaissette. On montre (annexe C) que cela conduirait à une fréquence de résonance multipliée par un facteur  $\sqrt{6/7}$ , soit une valeur de 7% inférieure à la fréquence de Minnaert. Or les données expérimentales ne font pas apparaître une telle différence ; ce qui invalide ce modèle. De fait, le remarquable accord entre la théorie et l'expérience, en ce qui concerne la fréquence de résonance, conduit à penser que l'épaissette ne contraint pas les oscillations de la bulle. L'épaissette, avec sa structure ajourée, se comporterait comme une pellicule d'eau. On trouvera dans l'annexe C une étude qui justifie cette image.

L'épaissette ne modifie donc pas la fréquence de résonance, mais on peut la soupçonner de perturber l'amortissement de la bulle. Là encore, les expériences viennent infirmer ce soupçon : les points expérimentaux de la figure 1.11b ont été obtenus à partir de bulles coincées sous une épaisseur ( $\circ$  en régime libre,  $\bullet$  en régime forcé) ou avec des bulles sortant d'une aiguille ( $\square$ ). On constate que, même en l'absence d'épaissette, les mesures de  $\delta_0$  s'écartent de la prédiction théorique.

### La taille finie de l'aquarium

Tous les calculs que nous avons présentés jusqu'ici considèrent une bulle d'air dans un volume infini d'eau. Expérimentalement, le volume d'eau est limité par les parois de l'aquarium, et les ondes émises par la bulle et le haut-parleur vont subir des réflexions sur ces parois, ce qui complique énormément la situation. Il est intéressant de noter que l'influence des parois sur la physique de la bulle n'a été étudiée expérimentalement que très récemment [LWM<sup>+</sup>02] ; les études précédentes n'envisageaient que rarement le problème. L'annexe D présente le calcul

de la fréquence de résonance d'une bulle de rayon  $R_0$  placée au centre d'une cuve sphérique de rayon  $d$ , remplie d'eau, et dont la paroi est molle ou dure. Dans le cas de nos expériences, les parois de l'aquarium ne sont pas parfaitement rigides comme on pourrait s'y attendre. En fait, elles sont même plus proches de parois molles. On est donc plutôt dans le cas d'une bulle dans une cuve à parois molles et, étant donné les dimensions de l'aquarium, l'influence de la taille finie sur la fréquence de résonance est négligeable.

Par contre, le terme d'amortissement radiatif n'a de sens qu'en milieu infini ! Dans l'aquarium, l'énergie rayonnée par la bulle lui est renvoyée par les parois. A strictement parler, si les parois étaient parfaitement rigides ou parfaitement molles, il n'y aurait pas d'amortissement radiatif du tout. C'est uniquement parce qu'il existe un couplage entre les surfaces de l'aquarium et l'air du laboratoire qu'une partie de l'énergie acoustique est effectivement rayonnée (la meilleure preuve étant qu'on entend de l'extérieur ce qui se passe dans l'aquarium). On verra dans le chapitre suivant que les deux cas extrêmes où une paroi modifie le terme d'amortissement radiatif correspondent à une bulle dans un demi espace infini d'eau avec une paroi parfaitement rigide ou parfaitement molle. Dans le cas de la paroi rigide, on a un terme de rayonnement double ; avec la paroi molle, le rayonnement disparaît. Ce sont ces deux situations extrêmes que représentent les droites en traits discontinus de la figure 1.11b. On vérifie ainsi que les valeurs de  $\delta_0$  mesurées sont toutes comprises entre une situation sans rayonnement et une situation avec rayonnement double. L'énergie effective que la bulle perd par rayonnement est donc liée au rayonnement de l'aquarium, lui-même *a priori* dépendant de la fréquence à laquelle on excite le système. Ajoutons à cela que la position de la bulle dans l'aquarium joue aussi un rôle important, et on conçoit que la valeur de  $\delta_0^{rad}$  puisse être très variable d'une bulle à l'autre. C'est notre proposition pour expliquer la grande dispersion des mesures de la figure 1.11b.

## 1.4 Retour sur la particularité de la résonance de Minnaert

On a élaboré dans la section 1.2 un modèle d'oscillateur harmonique qui a pu être vérifié par les expériences décrites dans la section 1.3. On pourrait s'en tenir là. Mais les équations développées dans la section 1.2, si elles ont l'intérêt de pouvoir intégrer les effets d'amortissement de manière précise, ne permettent pas de dégager une image physique claire de l'oscillateur harmonique qu'est la bulle. En d'autres termes, puisqu'on a un oscillateur harmonique, on a un système masse-ressort. On aimerait voir clairement où sont la masse et le ressort dans la bulle. On aimerait également trouver les bonnes variables permettant d'analyser clairement le couplage qui existe entre une bulle et son rayonnement.

### 1.4.1 Renormalisation de la masse

On va utiliser le formalisme lagrangien. On renonce donc à tenir compte des sources de dissipation : les amortissements thermique et visqueux seront négligés. Cependant, on a vu que la bulle était un oscillateur harmonique faiblement amorti : son amortissement ne modifie pas sensiblement la valeur de sa pulsation propre. Le cas échéant, il est toujours possible d'ajouter

phénoménologiquement de la dissipation dans nos équations.

Pour des variations de rayon  $\xi$ , en prenant un modèle de transformations adiabatiques, on a une variation de pression dans la bulle qui s'écrit :

$$\tilde{p}(\xi) = -3\gamma\tilde{P}_0\frac{\xi}{R_0}.$$

D'autre part, en notant  $\vec{u}(\vec{r}, t) = u(r, t)\vec{e}_r$  le déplacement d'un élément de gaz ( $r \leq R_0$ ), on a :

$$\operatorname{div}\vec{u} = -\chi_a\tilde{p} \implies u(r, t) = \frac{r}{R_0}\xi(t).$$

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle associées à l'air de la bulle peuvent donc s'écrire :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int_0^{R_0} 4\pi\rho_a r^2 dr \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (r, t) = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 \quad \text{avec } m = \frac{4}{5} \rho_a \pi R_0^3, \\ E_p &= - \int_0^\xi 4\pi R_0^2 \tilde{p}(\xi') d\xi' = \frac{1}{2} K \xi^2 \quad \text{avec } K = 12\pi\gamma R_0 P_0. \end{aligned}$$

On a donc un oscillateur harmonique avec une raideur  $K$  et une inertie  $m$ , toutes deux liées à l'air. Mais il faut également inclure un terme d'énergie potentielle due à la pression  $p(R_0, t)$  qu'exerce l'eau sur la bulle. L'énergie potentielle devient alors :

$$E_p = \frac{1}{2} K \xi^2 + 4\pi R_0^2 \xi p(R_0, t).$$

L'équation dynamique de Lagrange nous donne :

$$m\ddot{\xi} + K\xi = -4\pi R_0^2 p(R_0, t).$$

On a déjà calculé la pression exercée par l'eau lorsqu'on s'est intéressé au problème de la sphère pulsante (section (1.2.1)). On a obtenu (équation 1.11) :

$$p(R_0, t) = \rho_e R_0 \left( \ddot{\xi} - \frac{R_0}{c_e} \dddot{\xi} + \left( \frac{R_0}{c_e} \right)^2 \dots \ddot{\xi} - \dots \right).$$

L'équation vérifiée par  $\xi$  s'écrit donc :

$$m\ddot{\xi} + K\xi = -M \left( \ddot{\xi} - \frac{R_0}{c_e} \dddot{\xi} + \left( \frac{R_0}{c_e} \right)^2 \dots \ddot{\xi} + \dots \right). \quad (1.39)$$

$$\text{avec } M = 4\pi\rho_e R_0^3.$$

La bulle est ainsi soumise à une force de type "Abraham-Lorentz". On retrouve dans le membre de droite de l'équation (1.39) des termes en dérivées paires de  $\xi$ , qui vont contribuer à l'inertie de la bulle, et des termes en dérivées impaires, qui vont correspondre à une perte d'énergie par rayonnement de la bulle. Comme pour l'électron, la bulle va voir son inertie modifiée par son rayonnement. La grande différence est que, pour la bulle, la renormalisation est très importante puisque  $M \gg m$ .

On trouve ici l'origine de la particularité de la résonance de Minnaert : n'était le facteur  $M$  du second membre, on obtiendrait une résonance à la pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ , qui serait du type

Fabry-Pérot. C'est parce que la raideur et la masse de la bulle sont données par deux fluides différents<sup>8</sup> que l'on obtient une résonance particulière. Une telle situation se rencontre dans un autre exemple en acoustique. Le résonateur de Helmholtz possède lui aussi une résonance fondamentale qui n'est pas de type Fabry-Pérot. Mais dans ce cas, il n'y a qu'un seul fluide et il faut chercher l'origine de la particularité dans la géométrie du système : la raideur est donnée par le corps de la bouteille tandis que la masse provient du goulot.

### 1.4.2 Le point de vue radiatif

Abordons maintenant le problème du couplage entre une bulle et son champ de rayonnement. Une implication des calculs précédents est que, entre le système {bulle d'air}, qui possède un seul degré de liberté, et le système {eau compressible}, qui possède une infinité de degrés de liberté radiaux, la frontière n'est pas très facile à tracer. On voit en effet qu'une partie du déplacement de l'eau contribue à donner sa masse à l'oscillateur harmonique. Il n'est donc pas question de considérer un découpage "géographique" simple qui serait {air de la bulle} d'un côté, et {eau qui l'entoure} de l'autre. On aimerait décrire le système d'une bulle d'air dans de l'eau compressible en utilisant 3 lagrangiens : un lagrangien  $L_b$  qui soit associé au degré de liberté de la bulle, un lagrangien  $L_r$  qui corresponde au rayonnement, et un troisième lagrangien  $L_{int}$  qui réalise le couplage entre les deux. Il faudrait, bien sûr, qu'à la limite de l'eau incompressible, seul  $L_b$  soit non nul et qu'il corresponde à l'oscillateur de masse  $M + m$  et de raideur  $K$  que nous avons trouvé.

Une première idée pour réaliser ce projet, calquée sur une technique couramment utilisée en électrodynamique, consiste à adopter ce que l'on appellera le point de vue radiatif. Découpons le champ de déplacement  $u$  de l'eau en une partie *incompressible*  $u_i$  et une partie *radiative*  $u_r$  :

$$\vec{u}(r, t) = \vec{u}_i(r, t) + \vec{u}_r(r, t),$$

$$\text{avec } \operatorname{div} \vec{u}_i(r, t) = 0 \implies \vec{u}_i(r, t) = \left( \frac{R_0}{r} \right)^2 \xi \vec{e}_r.$$

Avec ce découpage, on peut écrire le lagrangien :

$$\begin{aligned} L &= \int d^3r \left( \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2\chi} (\operatorname{div} \vec{u})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} K \xi^2 + \int_{r \geq R_0} d^3r \left( \frac{1}{2} \rho_e \left( \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u}_r + \vec{u}_i) \right)^2 - \frac{1}{2\chi_e} (\operatorname{div}(\vec{u}_r + \vec{u}_i))^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (m + M) \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} K \xi^2 + \int_{r \geq R_0} d^3r \left( \frac{1}{2} \rho_e \left( \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2\chi_e} (\operatorname{div} \vec{u}_r)^2 \right) + \int_{r \geq R_0} d^3r \rho_e \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial t} \\ &= L_b + L_r + L_{int}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

L'objectif semble atteint : on a le lagrangien de la bulle, avec la variable  $\xi$ , le lagrangien du rayonnement, avec la variable  $\vec{u}_r$ , et le lagrangien d'interaction. Pourtant, le point de vue

<sup>8</sup>Remarquons que, pour une goutte d'eau dans l'air, le terme d'inertie due à l'air n'est pas prépondérant. C'est la raison pour laquelle on ne trouve pas de résonance particulière dans ce cas, comme on l'a déjà remarqué page 17.

radiatif n'est pas le bon. On va voir en effet que le passage au hamiltonien fait apparaître une pathologie.

Introduisons les moments conjugués :

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \quad \text{et} \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial t} \right)}. \quad (1.41)$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\begin{aligned} \pi &= m\dot{\xi} + A \quad \text{avec} \quad A = \int_{r>R_0} d^3r \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi} \cdot \vec{p}, \\ \vec{p} &= \rho_e \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Le hamiltonien s'écrit alors :

$$\begin{aligned} H &= -L + \pi\dot{\xi} + \int_{r>R_0} d^3r \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial t} \\ &= \frac{\pi^2}{2m} + \frac{1}{2} K \xi^2 + \int_{r>R_0} d^3r \left( \frac{\vec{p}^2}{2\rho_e} + \frac{1}{2\chi_e} (\text{div} \vec{u}_r)^2 \right) + \frac{A^2}{2m} - \frac{\pi A}{m} \\ &= H_b + H_r + H_i. \end{aligned}$$

On constate que nos variables  $\xi$  et  $\vec{u}_r$  ne découpent pas le problème comme on le voudrait : on isole en effet un hamiltonien  $H_b$  de bulle "nue" (avec une masse  $m$ ) et non un hamiltonien de bulle "habillée" (avec une masse  $M + m$ ).

### 1.4.3 Un modèle "en couches"

Il apparaît que le problème que l'on rencontre lors du passage du Lagrangien au Hamiltonien provient du fait que notre choix de variables donne un couplage entre la bulle et le rayonnement qui se traduit sous une forme inertielle. Il semble donc qu'il faille chercher de nouvelles variables pour lesquelles le couplage ne soit pas inertiel mais potentiel.

Une solution consiste à s'inspirer du découplage, bien connu pour 2 corps, en modes "centre de gravité" et "relatif". On découpe pour ce faire l'eau autour de la bulle d'air en pelures d'oignon sphériques concentriques et on généralise ce découplage, d'abord pour une somme discrète de pelures, puis en passant au continu. Ces opérations conduisent à introduire une masse dépendant de la distance  $r$  au centre de la bulle et donnée par :

$$M(r) = m + \int_{R_0 < r' < r} d^3r' \rho \left( \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi}(\vec{r}') \right)^2,$$

ainsi que les variables dynamiques :

$$\xi(r) = \frac{1}{M(r)} \left[ m\xi + \int_{R_0 < r' < r} \rho \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi} \cdot \vec{u}(\vec{r}') \right].$$

On remarque que la masse  $M(r)$  est égale à la masse nue  $m$  pour  $r = R_0$ , et à la masse habillée  $m + M$  pour  $r = +\infty$ . Quant aux variables  $\xi(r)$ , elles s'identifient toutes à l'ancienne variable  $\xi$  dans le cas où l'eau est incompressible.

Avec ces notations, la nouvelle variable qui décrit la bulle habillée est  $\xi(\infty)$ , cependant que le nouveau champ radiatif est défini par :

$$\vec{u}_r(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r}, t) - \xi(r) \left( \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi} \right) (\vec{r}).$$

On vérifie que ce jeu de variables permet d'obtenir un terme d'énergie cinétique qui ne contient plus de couplage :

$$E_c = \frac{1}{2} M(\infty) \dot{\xi}^2(\infty) + \frac{1}{2} \int d^3r \rho \left( \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial t} \right)^2.$$

Pour obtenir l'écriture du lagrangien (1.40) avec ces nouvelles variables, il suffit d'exprimer  $\xi$  et  $\text{div} \vec{u}$  :

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_\infty - \int d^3r \frac{\rho}{M(r)} \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \xi} \cdot \vec{u}_r, \\ \text{div} \vec{u} &= \frac{1}{M(r)} \text{div}(M(r) \vec{u}_r). \end{aligned}$$

La transformation de Legendre conduit alors à un hamiltonien qui ne présente plus de pathologie, puisque le couplage est de nature élastique.

On est donc parvenu à séparer le système en une composante {bulle habillée} et une composante {champ de rayonnement acoustique}. Mais le prix à payer est un jeu de variables compliqué et qui n'offre pas d'image intuitive simple. La variable de la bulle habillée ( $\xi(\infty)$ ) par exemple, ne correspond plus simplement à la variation de rayon de la bulle, comme dans la description initiale, mais à une variable "centre de gravité" du déplacement des pellicules d'eau.



## Chapitre 2

# Plusieurs bulles d'air dans l'eau

Nous avons donc un modèle d'oscillateur harmonique qui décrit bien le comportement d'une bulle et un dispositif expérimental qui permet de tester ce modèle. L'étape suivante consiste à étendre notre système à plusieurs bulles et à étudier les effets du couplage.

On commencera par une description du système de 2 bulles couplées pour analyser ensuite des systèmes comportant un nombre  $N$  quelconque de bulles. Les prédictions du modèle d'oscillateurs harmoniques couplés feront l'objet de vérifications expérimentales.

### 2.1 Couplage de deux bulles

Le comportement de deux bulles à proximité l'une de l'autre fait l'objet d'une littérature abondante. Un des effets les plus étudiés est ce qu'on appelle la force de Bjerknes secondaire [Bje06]. Il s'agit de la force causée par la pression de radiation que deux bulles exercent l'une sur l'autre durant leurs oscillations. Cette force, en  $1/r^2$ , peut être attractive si les deux bulles oscillent en phase, ou répulsive si elles oscillent en opposition de phase. Une telle similitude avec les forces électrostatiques amena d'ailleurs Bjerknes à essayer d'expliquer les interactions entre particules chargées en terme de force de Bjerknes. On n'abordera pas ici le problème des forces de pression de radiation. Citons tout de même sur le sujet l'article de Barbat et al [BAL99] qui présente une description théorique simple et comprend surtout de très belles expériences d'oscillations d'un couple de bulles en interaction.

Un autre effet, lorsqu'on approche deux bulles l'une de l'autre, est la variation des fréquences propres du système. Strasberg [Str53] est le premier à avoir calculé, à l'aide d'une analogie électrostatique, les fréquences propres de deux bulles voisines ainsi que la fréquence propre d'une bulle proche d'une surface rigide ou d'une surface libre. En 1965, Howkins [How65] effectue des expériences avec une bulle proche d'une frontière rigide. Plus récemment, avec le développement de l'intérêt pour le rôle des bulles en acoustique sous-marine, des études théoriques de l'influence de la surface de l'océan sur la fréquence de résonance d'une bulle d'air ont été publiées [OP90, LH90]. Citons également nos expériences [HDB01, LDB02] qui permettent de mesurer avec précision les rayons et distances des bulles en les bloquant à l'aide d'épuisettes.

Tout comme on a décrit une bulle d'air dans l'eau en terme d'oscillateur harmonique, on va

montrer que deux bulles d'air forment un système de deux oscillateurs harmoniques couplés. On décrira ensuite les expériences permettant de mettre en évidence ce couplage.

### 2.1.1 Modes propres d'un système de deux bulles

Dans le chapitre 1, on a obtenu l'équation de la dynamique d'une bulle en écrivant la continuité de la pression à la surface de la bulle (page 19). On emploie la même démarche pour deux bulles. Mais cette fois, le bilan des surpressions s'enrichit pour chaque bulle de la contribution de la bulle voisine.

Rappelons la formule de la surpression  $p(r, t)$  engendrée par une bulle animée d'oscillations  $\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega t}$ , à une distance  $r$  et au temps  $t$  (voir équation 1.12) :

$$p(r, t) = -3\gamma P_0 \left( \frac{\omega}{\omega_M} \right)^2 \frac{\xi_0}{r} \frac{e^{i\omega(t - \frac{r-R_0}{c})}}{1 + i\frac{\omega R_0}{c}}. \quad (2.1)$$

Rappelons nous que la longueur d'onde acoustique, dans la gamme de fréquences qui nous occupe, est grande devant la taille de la bulle. L'équation (2.1) prend alors, en négligeant les termes du deuxième ordre en  $\omega \frac{R_0}{c}$ , la forme :

$$p(r, t) = -3\gamma P_0 \left( \frac{\omega}{\omega_M} \right)^2 \frac{\xi_0}{r} e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega r}{c}}. \quad (2.2)$$

Pour la surpression  $\tilde{p}$  dans une bulle, on avait l'expression (voir équation 1.17) :

$$\tilde{p}(t) = -\rho R_0 \left( \omega_0^2 + i\omega \Gamma^{th} \right) \xi_0 e^{i\omega t}.$$

Pour deux bulles de rayons  $R_{0i}$  séparées par une distance  $d$ , animées d'oscillations  $\xi_{0i} e^{i\omega t}$  ( $i = 1, 2$ ) et soumises à des pressions extérieures  $p_{ei} e^{i\omega t}$ , la continuité de la pression conduit alors au système d'équations :

$$\left( \omega_{01}^2 - \omega^2 e^{-i\frac{\omega R_{01}}{c}} + i\omega \Gamma_1^{th} \right) \xi_{01} - \frac{R_{02}^2}{d R_{01}} \omega^2 e^{-i\frac{\omega d}{c}} \xi_{02} = -\frac{p_{e1}}{\rho R_{01}}, \quad (2.3a)$$

$$-\frac{R_{01}^2}{d R_{02}} \omega^2 e^{-i\frac{\omega d}{c}} \xi_{01} + \left( \omega_{02}^2 - \omega^2 e^{-i\frac{\omega R_{02}}{c}} + i\omega \Gamma_2^{th} \right) \xi_{02} = -\frac{p_{e2}}{\rho R_{02}}. \quad (2.3b)$$

On peut encore simplifier cette expression dans le cas où  $\omega d/c \ll 1$ . Ce cas est courant : à la fréquence de Minnaert d'une bulle de rayon  $R_0$  par exemple, on a  $\omega R_0/c \simeq 1/80$ . Pour deux bulles séparées par une distance inférieure à  $80R_0$ , on peut donc considérer que les interactions sont quasi-instantanées. Le développement au premier ordre en  $\omega d/c$  (ainsi qu'en  $\omega R_{0i}/c$ ) des équations (2.3) donne :

$$\left( \omega_{01}^2 - \omega^2 + i\omega(\Gamma_1^{th} + \Gamma_1^{rad}) \right) \xi_{01} - \frac{R_{02}}{R_{01}} \left( \frac{R_{02}}{d} \omega^2 + i\omega \Gamma_2^{rad} \right) \xi_{02} = -\frac{p_{e1}}{\rho R_{01}} \quad (2.4a)$$

$$-\frac{R_{01}}{R_{02}} \left( \frac{R_{01}}{d} \omega^2 + i\omega \Gamma_1^{rad} \right) \xi_{01} + \left( \omega_{02}^2 - \omega^2 + i\omega(\Gamma_2^{th} + \Gamma_2^{rad}) \right) \xi_{02} = -\frac{p_{e2}}{\rho R_{02}}. \quad (2.4b)$$

### Deux bulles identiques

Dans le cas de 2 bulles identiques, le système (2.4) se découple en introduisant les variables  $\Phi_s = \xi_1 + \xi_2$  et  $\Phi_a = \xi_1 - \xi_2$ . On obtient les deux équations découplées :

$$\left[ \omega_0^2 - \omega^2(1 + \beta) + i\omega(\Gamma^{th} + 2\Gamma^{rad}) \right] \Phi_{0s} = - \left( \frac{pe_1 + pe_2}{\rho R_0} \right), \quad (2.5a)$$

$$\left[ \omega_0^2 - \omega^2(1 - \beta) + i\omega\Gamma^{th} \right] \Phi_{0a} = - \left( \frac{pe_1 - pe_2}{\rho R_0} \right), \quad (2.5b)$$

où  $\beta = \frac{R_0}{d}$  est le paramètre de couplage. Le système a donc deux modes propres dont les pulsations propres vérifient :

$$\frac{1}{\omega_{a,s}^2} = \frac{1}{\omega_0^2} (1 \mp \beta). \quad (2.6)$$

Le mode symétrique, avec deux bulles oscillant en phase, est à la pulsation propre  $\omega_s < \omega_0$ , et le mode antisymétrique, avec deux bulles oscillant en opposition de phase, à la pulsation propre  $\omega_a > \omega_0$ . Remarquons que les variations des pulsations propres par rapport à la pulsation propre d'une bulle seule s'interprètent en analysant l'inertie de chacun des modes. Dans le mode symétrique, les deux bulles déplacent beaucoup d'eau et l'inertie du mode est importante. Dans le mode antisymétrique au contraire, les deux bulles déplacent peu d'eau et l'inertie est moindre. Du point de vue de l'amortissement, le mode symétrique possède un taux d'amortissement radiatif double de celui d'une bulle (on parle de super-radiance), tandis que le mode symétrique possède un taux d'amortissement radiatif nul.<sup>1</sup> Cette différence s'explique par les interférences entre les pressions rayonnées par les bulles, qui sont constructives pour le mode symétrique et destructives pour l'antisymétrique.

Ce système de deux bulles identiques permet également de résoudre un autre problème. Dans le plan-miroir entre les deux bulles, la composante du déplacement de l'eau normale au plan est nulle dans le cas symétrique; tandis que la pression  $y$  est nulle dans le cas antisymétrique. Ce sont exactement les conditions aux limites qu'il faut imposer pour résoudre le problème d'une bulle à une distance  $d/2$  d'une surface rigide (mode symétrique), ou d'une surface libre (mode antisymétrique).

### Deux bulles différentes

Le système (2.4) se met sous la forme matricielle :

$$\Xi - \omega^2 \mathbb{M} \Xi = P,$$

$$\text{avec } \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_{01}^2} & \frac{R_{02}^2}{dR_{01}} \frac{1}{\omega_{01}^2} \\ \frac{R_{01}^2}{dR_{02}} \frac{1}{\omega_{02}^2} & \frac{1}{\omega_{02}^2} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_1^{th} + \Gamma_1^{rad}}{\omega \omega_{01}^2} & \frac{\Gamma_2^{rad}}{\omega \omega_{01}^2} \frac{R_{02}}{R_{01}} \\ \frac{\Gamma_1^{rad}}{\omega \omega_{02}^2} \frac{R_{01}}{R_{02}} & \frac{\Gamma_2^{th} + \Gamma_2^{rad}}{\omega \omega_{02}^2} \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad P = - \begin{bmatrix} \frac{pe_1}{\rho R_{01} \omega_{01}^2} \\ \frac{pe_2}{\rho R_{02} \omega_{02}^2} \end{bmatrix}.$$

<sup>1</sup>C. Feuillade emploie alors le terme de mode "super-résonnant" [Feu95].

On pourrait diagonaliser directement la matrice  $\mathbb{M}$ . Mais il convient d'attirer l'attention sur un point que le système de deux bulles identiques ne laissait pas apparaître, du fait de sa symétrie. La partie imaginaire de la matrice  $\mathbb{M}$  n'est pas indépendante de la pulsation. Si l'on cherche les vecteurs propres de cette matrice, on va obtenir des vecteurs dont les composantes dépendent de la fréquence : ce ne seront donc pas des modes propres du système. Ce problème est dû à notre volonté de prendre en compte les effets d'amortissement. On a en effet couplé notre système de  $N$  bulles à un continuum (les phonons thermiques pour le terme  $\Gamma^{th}$  et les phonons acoustiques pour  $\Gamma^{rad}$ ), rendant nos  $N$  variables insuffisantes à décrire exactement le système. Mais heureusement les bulles sont des oscillateurs harmoniques faiblement amortis. Les termes d'amortissement ne vont donc pas avoir une grande influence sur les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\mathbb{M}$ . On se propose donc de chercher les modes propres du système en négligeant les termes imaginaires. La partie réelle de  $\mathbb{M}$  ne faisant pas intervenir  $\omega$ , nos vecteurs propres seront bien indépendants de la pulsation à laquelle on force le système.

En posant le changement de variable  $v_{0i} = \sqrt{R_{0i}}\xi_{0i}$ , on obtient alors :

$$\Upsilon - \omega^2 \mathbb{N} \Upsilon = Q, \quad (2.7)$$

où on utilise les notations :

$$\mathbb{N} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_{01}^2} & \frac{\beta}{\omega_{01}\omega_{02}} \\ \frac{\beta}{\omega_{01}\omega_{02}} & \frac{1}{\omega_{02}^2} \end{pmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = - \begin{bmatrix} \frac{p_{e1}}{\rho\omega_{01}^2\sqrt{R_{01}}} \\ \frac{p_{e2}}{\rho\omega_{02}^2\sqrt{R_{02}}} \end{bmatrix},$$

et avec la généralisation du paramètre de couplage :  $\beta = \sqrt{\frac{R_{01}R_{02}}{d}}$ . Le changement de variable a permis d'obtenir une matrice  $\mathbb{N}$  symétrique. Ainsi, on peut la décomposer à l'aide de la matrice identité et des matrices de Pauli, dont on rappelle les définitions :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} \right] \mathbb{I} + \frac{\beta}{\omega_{01}\omega_{02}} \sigma_x + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\omega_{01}^2} - \frac{1}{\omega_{02}^2} \right] \sigma_z \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} \right] \mathbb{I} + A (\sin \Phi \sigma_x + \cos \Phi \sigma_z), \end{aligned}$$

avec

$$A = \sqrt{\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\omega_{01}^2} - \frac{1}{\omega_{02}^2} \right]^2 + \frac{\beta^2}{\omega_{01}^2\omega_{02}^2}}, \quad \cos \Phi = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\omega_{01}^2} - \frac{1}{\omega_{02}^2}}{A}, \quad \sin \Phi = \frac{\beta}{\omega_{01}\omega_{02}A}.$$

Les valeurs propres de  $(\sin \Phi \sigma_x + \cos \Phi \sigma_z)$  sont  $+1$  et  $-1$ , et les vecteurs propres sont donnés par la matrice de passage :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Phi}{2} & -\sin \frac{\Phi}{2} \\ \sin \frac{\Phi}{2} & \cos \frac{\Phi}{2} \end{pmatrix}.$$

On a donc un mode "symétrique" à la pulsation  $\omega_s$  et avec le vecteur propre  $v_s$  :

$$\frac{1}{\omega_s^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{\omega_{01}^2} - \frac{1}{\omega_{02}^2} \right)^2 + \left( \frac{2\beta}{\omega_{01}\omega_{02}} \right)^2} \quad (2.8a)$$

$$v_s = \cos \frac{\Phi}{2} \sqrt{R_{01}} \xi_{01} + \sin \frac{\Phi}{2} \sqrt{R_{02}} \xi_{02}, \quad (2.8b)$$

et un mode “antisymétrique” à la pulsation propre  $\omega_a$  et avec le vecteur propre  $v_a$  :

$$\frac{1}{\omega_a^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{\omega_{01}^2} - \frac{1}{\omega_{02}^2} \right)^2 + \left( \frac{2\beta}{\omega_{01}\omega_{02}} \right)^2} \quad (2.9a)$$

$$v_a = -\sin \frac{\Phi}{2} \sqrt{R_{01}} \xi_{01} + \cos \frac{\Phi}{2} \sqrt{R_{02}} \xi_{02}. \quad (2.9b)$$

Nous aurons l’occasion de revenir plus en détail sur les modes propres de deux oscillateurs

	$R_{01}$ (mm)	$R_{02}$ (mm)	$f_{01}$ (kHz)	$f_{02}$ (kHz)
Couple 1	1	1	3,22	3,22
Couple 2	0,9	1,1	3,54	2,90
Couple 3	0,5	1,5	6,44	2,15

TAB. 2.1 – Les caractéristiques de 3 couples de bulles. On donne les rayons  $R_{0i}$  des bulles et leur fréquence de résonance  $f_{0i}$  lorsqu’elles sont seules dans un milieu infini.

harmoniques couplés, dans le chapitre 4. Pour l’heure, insistons seulement sur un aspect des équations (2.8a) à (2.9b) : l’influence mutuelle de deux bulles n’est pas seulement pilotée par le paramètre de couplage  $\beta$ , mais dépend également de la différence des rayons. Les figures 2.1a et 2.1b illustrent cette dépendance. Considérons les trois couples de bulles dont les caractéristiques sont données dans la table 2.1.

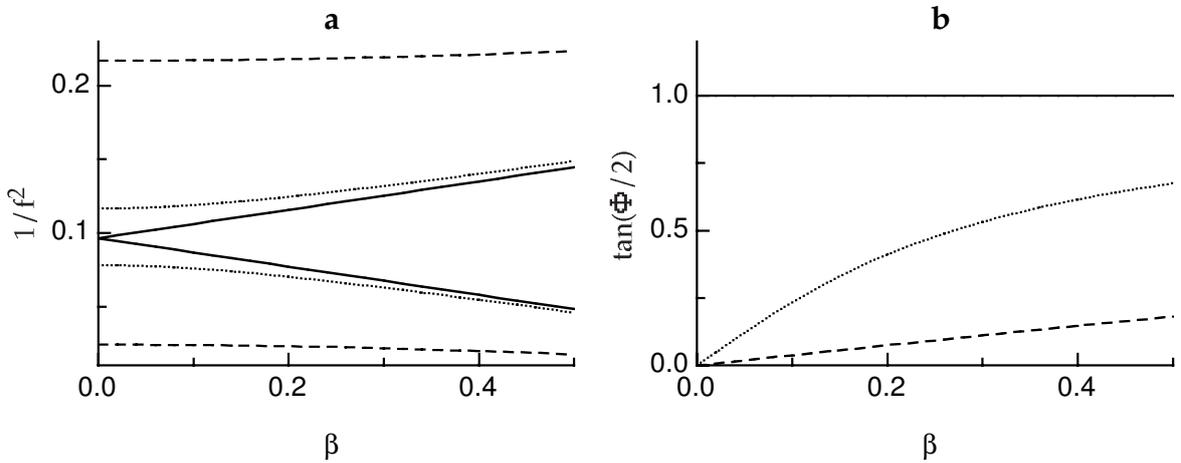


FIG. 2.1 – L’influence mutuelle des bulles en fonction du paramètre de couplage  $\beta$  et de leur différence de rayons. Le couple 1 est en trait plein, le couple 2 en pointillés et le couple 3 en trait hachuré. **a-** Écartement des fréquences propres lorsqu’on approche les deux bulles. **b-** Variations des vecteurs propres lorsqu’on approche les deux bulles.

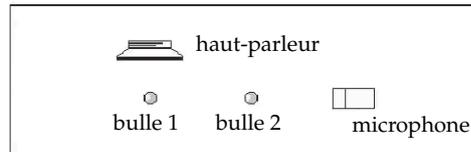
La figure 2.1a permet d’apprécier les variations des fréquences propres des différents couples lorsque le paramètre de couplage  $\beta$  varie. Quand  $\beta = 0$ , les 2 bulles sont infiniment éloignées et donc découplées ; on trouve alors comme fréquences propres les fréquences de Minnaert des bulles. Quand  $\beta$  augmente (avec  $1/2$  pour valeur maximale), les fréquences propres s’écartent.

On remarque que si cet écartement est marqué pour le couple 1, il faut en revanche atteindre une distance minimale avant d'avoir un écartement significatif pour le couple 2. Quant aux bulles du couple 3, elles semblent rester quasiment découplées quelle que soit la valeur de  $\beta$ . Toutefois, l'écartement des fréquences propres n'est pas le meilleur moyen d'évaluer le couplage. La figure 2.1b montre comment la différence de rayons des 2 bulles influe sur les vecteurs propres du système. On a en effet représenté, pour chacun des trois couples,  $\tan \frac{\Phi}{2}$  en fonction de  $\beta$ , c'est-à-dire le rapport des termes rectangulaires aux termes diagonaux de la matrice de passage  $\mathbb{P}$ . Lorsque  $\tan \frac{\Phi}{2} = 0$ ,  $\mathbb{P}$  est diagonale et les deux vecteurs propres sont  $\xi_{01}$  et  $\xi_{02}$  : les bulles sont découplées. Dans le cas où  $\tan \frac{\Phi}{2} = 1$ , les deux vecteurs propres correspondent à ceux des modes symétrique et antisymétrique et les bulles sont fortement couplées. On constate que si les vecteurs propres dans les cas des couples 2 et 3 ne se réduisent pas à deux bulles indépendantes, comme le suggérait la figure 2.1a, on a tout de même des bulles de plus en plus indépendantes à mesure que leur différence de rayons s'accroît.

### 2.1.2 Mise en œuvre expérimentale

Le dispositif expérimental utilisé pour mettre en évidence le couplage de deux bulles d'air est semblable à celui des expériences avec une seule bulle (voir page 29). On utilise deux épuisettes pour piéger 2 bulles de rayons proches (figure 2.3). Il est nécessaire d'apporter une

FIG. 2.2 – *Un exemple de configuration pour exciter et entendre le mode antisymétrique.*



attention particulière à la disposition du haut-parleur et du microphone. En effet, l'excitation efficace du mode antisymétrique nécessite d'appliquer des pressions différentes sur chacune des bulles (voir équation (2.5b)). Puisqu'on travaille à une longueur d'onde grande devant la distance entre les deux bulles, il faut jouer sur le profil du champ de pression créé par le haut-parleur. La figure 2.2 propose un exemple de configuration pour laquelle la bulle 1 est préférentiellement excitée. Le microphone doit lui aussi être dirigé préférentiellement vers une des deux bulles. Le mode antisymétrique est en effet non seulement difficile à exciter, mais il crée également une pression faible puisque les deux bulles oscillent en opposition de phase.

### Régime libre

En régime libre, on peut observer des battements et un transfert d'énergie entre les bulles. On utilise deux microphones placés chacun près d'une bulle et on enregistre les signaux reçus après un burst d'excitation. La figure 2.4 montre le résultat de l'expérience avec deux bulles dont les fréquences propres individuelles sont  $f_0 = 740$  Hz. On observe des battements amortis et un transfert d'énergie d'une bulle à l'autre : quand le signal reçu par le premier microphone est à un minimum de son enveloppe, celui détecté par le second microphone est quasiment à un maximum (on interprète le léger décalage comme étant dû au fait que chaque microphone,

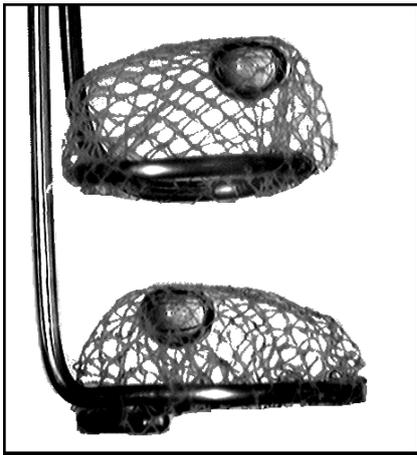


FIG. 2.3 – Deux bulles de rayons identiques piégées sous deux épauissettes.

s'il entend préférentiellement une bulle, est tout de même sensible à l'autre bulle). On peut évaluer les deux fréquences  $f$  et  $f'$  des deux modes en mesurant la fréquence des battements  $\frac{|f'-f|}{2}$  et celle du signal rapide  $\frac{f'+f}{2}$ . On trouve  $f = 694$  Hz et  $f' = 794$  Hz. On vérifie que ces deux fréquences correspondent bien à celles qu'on attend pour les modes symétrique et antisymétrique puisqu'elles respectent l'égalité :  $\frac{1}{f^2} + \frac{1}{f'^2} = \frac{2}{f_0^2}$ .

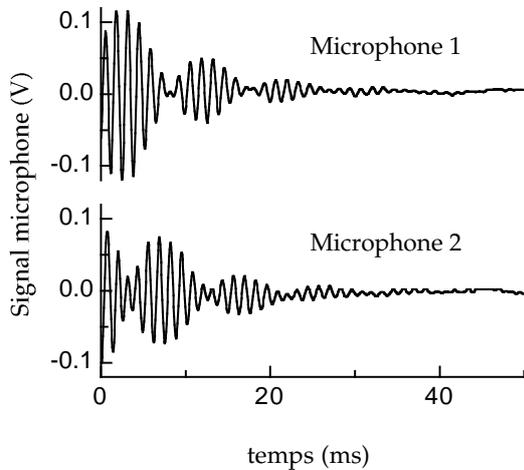


FIG. 2.4 – Battements pendant la décroissance du régime libre d'un système de deux bulles. L'origine des temps correspond à la fin de l'excitation.

### Régime forcé

L'étude du système de 2 bulles en régime forcé est l'occasion de vérifier la validité de l'équation (2.6) qui prédit les fréquences propres des deux modes en fonction du paramètre de couplage  $\beta$ , mais également de tester l'analogie entre 1 bulle proche d'une surface rigide et le mode symétrique de 2 bulles d'une part, et entre 1 bulle proche d'une surface libre et le mode antisymétrique de 2 bulles d'autre part.

Les figures 2.5a et 2.5b présentent l'amplitude de la pression mesurée en fonction de la fréquence pour les deux bulles de la table 2.2 à une distance  $d = 47,5$  mm (soit  $\beta \simeq 5.10^{-2}$ ). Les mesures brutes (figure 2.5a, croix verticales) laissent apparaître trois pics. Mais le premier pic n'est pas le fait du système de bulles, comme on s'en persuade en regardant le résultat

du balayage sans bulle (figure 2.5a, points simples). On peut réaliser la soustraction des deux signaux, comme nous l'avons fait pour une bulle dans le chapitre 1 (voir page 32). Par contre, la déconvolution du signal du haut-parleur n'est pas possible puisqu'on ne connaît pas les pressions subies par les deux bulles.<sup>2</sup> La figure 2.5b donne le résultat de la soustraction : on

Bulle	$a$ (mm)	$c$ (mm)	$R_0$ (mm)	$f_0$ mesurée (kHz)	$f_0$ théorique (kHz)
1	2,5	1,9	2,3	1,47	1,41
2	2,5	1,8	2,2	1,45	1,44

TAB. 2.2 – Les caractéristiques des 2 bulles. On rappelle que les mesures de longueurs sont à 0,1 mm près, ce qui explique l'écart entre les valeurs mesurées et théoriques de  $f_0$ .

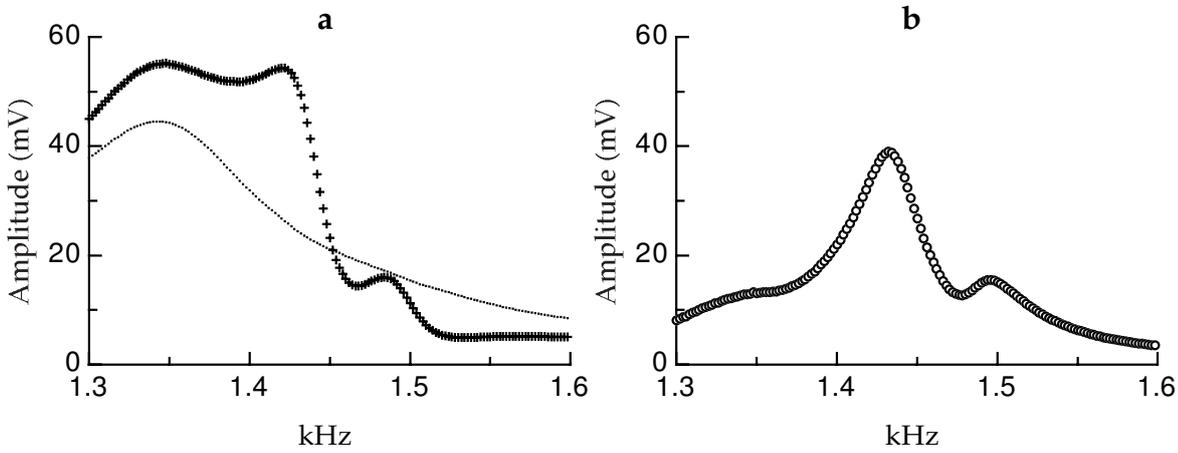


FIG. 2.5 – Balayage en fréquence pour un système de deux bulles. **a**-Le résultat brut avec une bulle (croix verticales) et sans bulle (points simples). **b**-En soustrayant le signal dû au haut-parleur, on obtient les 2 pics attendus.

voit bien apparaître deux pics, de part et d'autre de la fréquence de Minnaert des bulles seules. Comme attendu, le pic de plus haute fréquence, qu'on attribue au mode antisymétrique, est d'amplitude plus faible que le pic de plus basse fréquence. En répétant le balayage en fréquence pour différentes distances entre les deux bulles, on peut mesurer les positions des deux pics en fonction du paramètre de couplage  $\beta$ . Le résultat est présenté dans la figure 2.6a qui donne l'inverse du carré des fréquences des deux modes en fonction du paramètre de couplage  $\beta$ . Les deux bulles étant quasiment identiques, on attend deux droites données par l'équation (2.6). On obtient effectivement deux droites avec les bonnes pentes (1 et  $-1$ ) mais leur intersection ne se fait pas sur l'axe des ordonnées comme attendu. Plus précisément, la droite suivie par le mode antisymétrique est conforme à la théorie (elle passe entre les deux fréquences des bulles seules pour  $\beta = 0$ ), mais la droite du mode symétrique ne l'est pas. On explique ce décalage

<sup>2</sup>Pour une bulle seule, on considérerait que la pression ressentie par la bulle était, à un facteur géométrique près, la même que celle mesurée par le microphone en l'absence de bulle ; mais le dispositif utilisé pour repérer les deux modes du système de deux bulles rend cette hypothèse non valide.

par un effet d'image dû à la surface libre de l'aquarium.

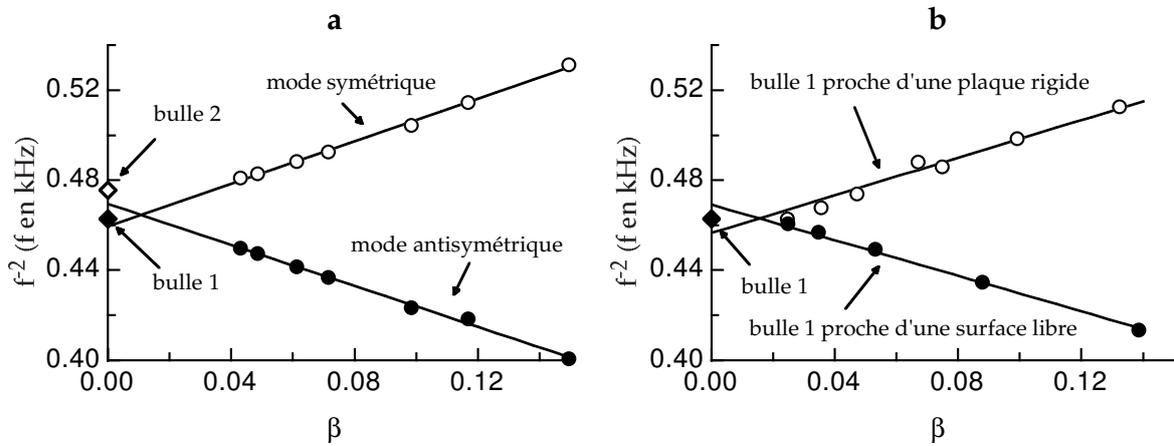


FIG. 2.6 – **a**-Fréquences des modes symétrique et antisymétrique en fonction du paramètre de couplage  $\beta = R_0/d$ . Les fréquences propres des bulles seules sont rappelées (losanges). Les ajustements des deux droites conduisent à  $1/f_s^2 = (1/1,48 \text{ kHz})^2 \times (1 + 1,03\beta)$  pour le mode symétrique, et à  $1/f_a^2 = (1/1,46 \text{ kHz})^2 \times (1 - 0,97\beta)$  pour l'antisymétrique. La branche symétrique est donc légèrement décalée vers les hautes fréquences par rapport à ce que prévoit la théorie. **b**- Fréquences de résonance de la bulle 1 en fonction de la distance à son image, dans le cas d'une surface rigide et d'une surface libre. Les ajustements des deux droites conduisent à  $1/f_r^2 = (1/1,48 \text{ kHz})^2 \times (1 + 0,92\beta)$  pour la plaque rigide, et à  $1/f_l^2 = (1/1,46 \text{ kHz})^2 \times (1 - 0,89\beta)$  pour la surface libre. On a donc un couplage inférieur à celui prévu théoriquement. Et on observe le même léger décalage pour la surface rigide que pour le mode symétrique.

Avant d'expliquer plus avant cet effet, intéressons nous justement à la vérification expérimentale de l'analogie entre un système de deux bulles et une bulle proche d'une paroi. La figure 2.6b fait le bilan des mesures de la fréquence de résonance de la bulle 1 en fonction de la distance  $d/2$  qui la sépare d'une surface rigide ou libre. La surface libre utilisée expérimentalement est bien sûr la surface de l'eau de l'aquarium. Pour la surface rigide, une première tentative en utilisant les parois de l'aquarium conduit à un résultat décevant : la fréquence de résonance de la bulle est peu affectée par la proximité d'une paroi, et plutôt dans le sens d'une augmentation. Cela signifie que les parois de l'aquarium ne sont pas suffisamment rigides, et qu'elles sont même plus molles que rigides. On utilise plutôt une plaque en duralumin de dimensions  $157 \text{ mm} \times 157 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ , qui se révèle suffisamment rigide. Les expériences confirment bien la pertinence de l'analogie : les fréquences de la bulle proche de la paroi rigide s'alignent selon une droite semblable à celle du mode symétrique pour deux bulles, tandis que les fréquences de la bulle proche d'une surface libre suivent la droite du mode antisymétrique. Toutefois, les pentes des droites pour la bulle seule ne sont pas aussi marquées qu'attendu, laissant à penser que le couplage avec la bulle image n'est pas aussi bon qu'espéré. Une explication réside peut-être dans le fait que les parois (la surface libre aussi bien que la plaque en dural) ne sont non seulement pas de dimensions transversales infinies comme le réclame le calcul théorique, mais même de longueurs inférieures à la longueur d'onde

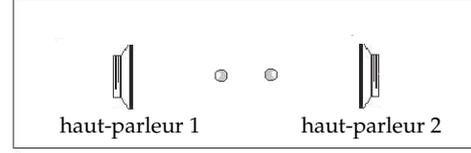
acoustique.

Revenons maintenant sur le décalage que l'on constate expérimentalement pour la droite du mode symétrique de deux bulles, et également sur celle de la bulle proche d'une surface rigide. On l'explique par la dimension finie de l'aquarium. Si les parois latérales et le fond de l'aquarium s'avèrent ne pas donner naissance à des images, la surface de l'eau, en revanche constitue bien une sorte d'anti-miroir pour une bulle dans l'aquarium : elle voit une bulle image en opposition de phase. Pour un système de 2 bulles, il faut tenir compte des deux images. Lorsque les deux bulles sont dans le mode antisymétrique, le couple de bulles images a une influence très faible sur leur dynamique puisqu'elles oscillent en opposition de phase. Par contre, lorsque les deux bulles sont dans le mode symétrique, les deux images contribuent à augmenter la fréquence de résonance du mode. On peut mettre des ordres de grandeur sur le phénomène : les expériences avec deux bulles et celle avec une bulle proche de la plaque de duralumin ont été réalisées à une profondeur de l'ordre de 10 cm. Étant donné le rayon des bulles, cela donne une augmentation d'un peu plus de 1% de la fréquence, ce qui correspond bien au décalage observé. Bien sûr, cet effet était déjà présent lors de nos expériences avec une seule bulle. Mais il était suffisamment faible (notons qu'il n'y avait alors qu'une seule bulle image) pour ne rien changer à nos conclusions.

Dans les expériences précédentes, on a fait varier la profondeur d'immersion de nos bulles. Il faudrait donc, en toute rigueur, tenir compte de la variation de pression hydrostatique pour calculer la fréquence de Minnaert. Mais les effets hydrostatiques sont de l'ordre de dix fois plus faibles que les effets de couplage ; on les a donc négligés. On a de même négligé l'influence de la non-sphéricité des bulles sur le couplage. On pourrait en effet s'attendre à ce qu'une bulle aplatie engendre un champ de pression plus important dans la direction verticale que dans la direction horizontale. Ainsi deux bulles superposées seraient, à distance égale, mieux couplées que deux bulles juxtaposées horizontalement. L'effet existe, mais il est très faible : dès que l'on s'éloigne de quelques rayons de la bulle, on retrouve un champ de pression isotrope (voir l'annexe B).

Notre dispositif expérimental permet donc bien d'avoir accès aux fréquences des deux modes d'un système de deux bulles. Il serait intéressant de pouvoir également étudier l'amortissement de ces deux modes. On s'attend en effet à un mode symétrique plus amorti (parce que *super-radiant*) et un mode antisymétrique moins amorti (voir équations (2.5)). Malheureusement, on ne peut pas mettre ces effets en évidence pour deux raisons. La première raison, technique, provient de la difficulté d'évaluer correctement la largeur des pics tels que ceux de la figure 2.5b par exemple. On peut imaginer un dispositif qui permettrait de résoudre ce problème en excitant sélectivement un seul des deux modes. En utilisant deux haut-parleurs et deux bulles disposés comme dans la figure 2.7, on excite uniquement le mode symétrique si les haut-parleurs sont alimentés en phase, et uniquement le mode antisymétrique s'ils sont alimentés en opposition de phase. En pratique, on parvient à exciter préférentiellement un mode, mais sans jamais éteindre tout à fait l'autre, le réglage de la phase entre les haut-parleurs étant trop délicat. La seconde raison est liée à la taille finie de l'aquarium. On a vu dans l'étude expérimentale d'une seule bulle que l'amortissement par rayonnement dans notre aquarium était différent de ce qu'on attend pour une bulle dans un milieu infini (cf page 34).

FIG. 2.7 – Un dispositif à deux haut-parleurs pour obtenir une excitation sélective des modes. Si les deux haut-parleurs sont alimentés en phase, on excite les deux bulles en phase et seul le mode symétrique est excité. En revanche, si les deux haut-parleurs sont alimentés en opposition de phase, on n’excite que le mode antisymétrique.



On n’est donc pas dans de bonnes conditions pour étudier des effets de super-radiance du mode symétrique.

## 2.2 Nuage de bulles

On parlera de nuage de bulles lorsqu’on aura un système comprenant plusieurs bulles, même si le nombre de bulles ne sera jamais très important dans nos expériences (une cinquantaine au maximum). On va voir que, pour une grande gamme de fréquences, la description en termes d’oscillateurs harmoniques couplés reste en général valide.

### 2.2.1 Modes propres d’un nuage de bulles

Considérons  $N$  bulles d’air. La bulle  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) a un rayon  $R_{0i}$ , se trouve en  $\vec{r}_i$  et est soumise à une pression extérieure  $p_{ei}e^{i\omega t}$ . En exprimant la continuité de la pression à la surface de chaque bulle du nuage, on obtient un système d’équations analogue à celui établi pour deux bulles (voir l’équation (2.7)) :

$$\Upsilon - \omega^2 \mathbb{N}_N \Upsilon = Q, \quad (2.10)$$

avec :

$$(\mathbb{N}_N)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_{0i}^2} \left( 1 - i \frac{\Gamma_i^{tot}}{\omega} \right) & \text{pour } i = j \\ \frac{1}{\omega_{0i}\omega_{0j}} \frac{\sqrt{R_{0i}R_{0j}}}{d_{ij}} e^{-i \frac{\omega d_{ij}}{c}} & \text{pour } i \neq j \end{cases}, \quad (2.11)$$

$$(\Upsilon)_i = \sqrt{R_{0i}} \xi_{0i}, \quad (Q)_i = -\frac{p_{ei}}{\rho \omega_{0i}^2 \sqrt{R_{0i}}} \quad \text{et} \quad d_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|.$$

L’équation (2.10) permet de déterminer la réponse du nuage de  $N$  bulles à une champ de pression extérieur quelconque : il “suffit” d’inverser la matrice  $\mathbb{I} - \omega^2 \mathbb{N}_N$ . Il nous faut faire ici une remarque déjà faite à propos du système de 2 bulles. Dans le cas général, la matrice  $\mathbb{N}_N$  dépend de la pulsation  $\omega$ ; ce qui implique, a priori, que ses vecteurs propres en dépendent également. On n’a donc pas un système présentant de vrais modes propres. La raison en a déjà été évoquée :  $\mathbb{N}_N$  ne tient pas uniquement compte des degrés de liberté associés aux  $N$  bulles,

mais également de ceux associés à la compressibilité de l'eau et aux phonons thermiques. Pour ce qui est de la dépendance de  $\mathbb{N}_N$  en  $\omega$  due aux termes d'amortissement (les termes  $\Gamma_i^{tot}/\omega$ ), on peut légitimement la négliger puisque les bulles sont des oscillateurs harmoniques **faiblement** amortis. On a également vu que les  $\omega_0$  comportaient une dépendance en  $\omega$  mais que l'on pouvait les considérer comme constants sur une large gamme de fréquence (voir la figure 1.4, page 24). Mais les termes de propagation (les  $\exp(-i\frac{\omega d_{ij}}{c})$ ) ne sont eux a priori pas négligeables. On va toutefois s'intéresser au cas limite d'un nuage de bulles se trouvant dans de l'eau incompressible. Définissons alors  $\mathbb{N}_N^0$ , la limite de  $\mathbb{N}_N$  en eau incompressible (et sans amortissement thermique ni radiatif) :

$$(\mathbb{N}_N^0)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_{0i}^2} & \text{pour } i = j \\ \frac{1}{\omega_{0i}\omega_{0j}} \frac{\sqrt{R_{0i}R_{0j}}}{d_{ij}} & \text{pour } i \neq j \end{cases} . \quad (2.12)$$

Cette nouvelle matrice est indépendante de  $\omega$ , et un nuage de bulles en eau incompressible pourra donc être décrit en termes de  $N$  oscillateurs couplés présentant  $N$  modes propres (chaque mode propre étant donné par un vecteur propre de  $\mathbb{N}_N^0$ ). Il se trouve que ce cas limite n'est pas éloigné de la réalité dans de nombreuses situations. En effet, tant que  $\omega d/c \ll 1$  (où  $d$  désigne la plus grande distance entre deux bulles au sein du nuage), on peut considérer que l'eau est incompressible. Donnons un exemple. Prenons un nuage de  $5 \times 5 \times 5$  bulles identiques organisées selon un réseau cubique avec une distance de  $5R_0$  entre plus proches voisines. La distance maximale entre les bulles est alors de  $d \simeq 30R_0$ . Si on excite le nuage à la pulsation de Minnaert  $\omega_M$  d'une bulle individuelle, la limite au delà de laquelle la propagation doit être prise en compte est de  $80R_0$  (voir page 42). On peut donc, à cette fréquence (et *a fortiori* pour les fréquences plus basses), négliger la compressibilité de l'eau.

### 2.2.2 Réalisations expérimentales de nuages bidimensionnels

L'étude de la propagation d'une onde mécanique dans un milieu constitué d'un liquide contenant des inclusions gazeuses (milieu qu'on appellera "liquide bulleux") fait l'objet d'une littérature abondante. Mais, parmi tous les articles publiés sur ce sujet, la part des contributions expérimentales est très modeste. On en proposera une courte revue par la suite, à l'occasion d'une comparaison entre théorie et expérience (section 3.2). Dans la très grande majorité des cas, les nuages expérimentaux sont obtenus en injectant de l'air à l'aide d'un dispositif de type "bulleur d'aquarium" plus ou moins sophistiqué, et leurs caractéristiques (rayons des bulles, fraction volumique de gaz, etc...) sont déduites d'analyses d'images. Ce type de procédé présente l'inconvénient d'imposer de travailler avec un nuage sans cesse renouvelé, dont on ne connaît que les caractéristiques moyennes. Et encore, la stabilité des caractéristiques du nuage au cours du temps et la reproductibilité des expériences sont loin d'être aisément assurées.<sup>3</sup> Les expériences que nous allons décrire ici présentent au contraire l'avantage d'être réalisées avec des nuages très bien caractérisés et stables. Insistons sur le fait que l'on est capable de déterminer les positions et rayons de **toutes** les bulles. Mais le prix à payer est une limitation à des nuages  $2D$ .

<sup>3</sup>Voir par exemple la thèse de Preston Scott Wilson [Wil02], pages 177 à 181.

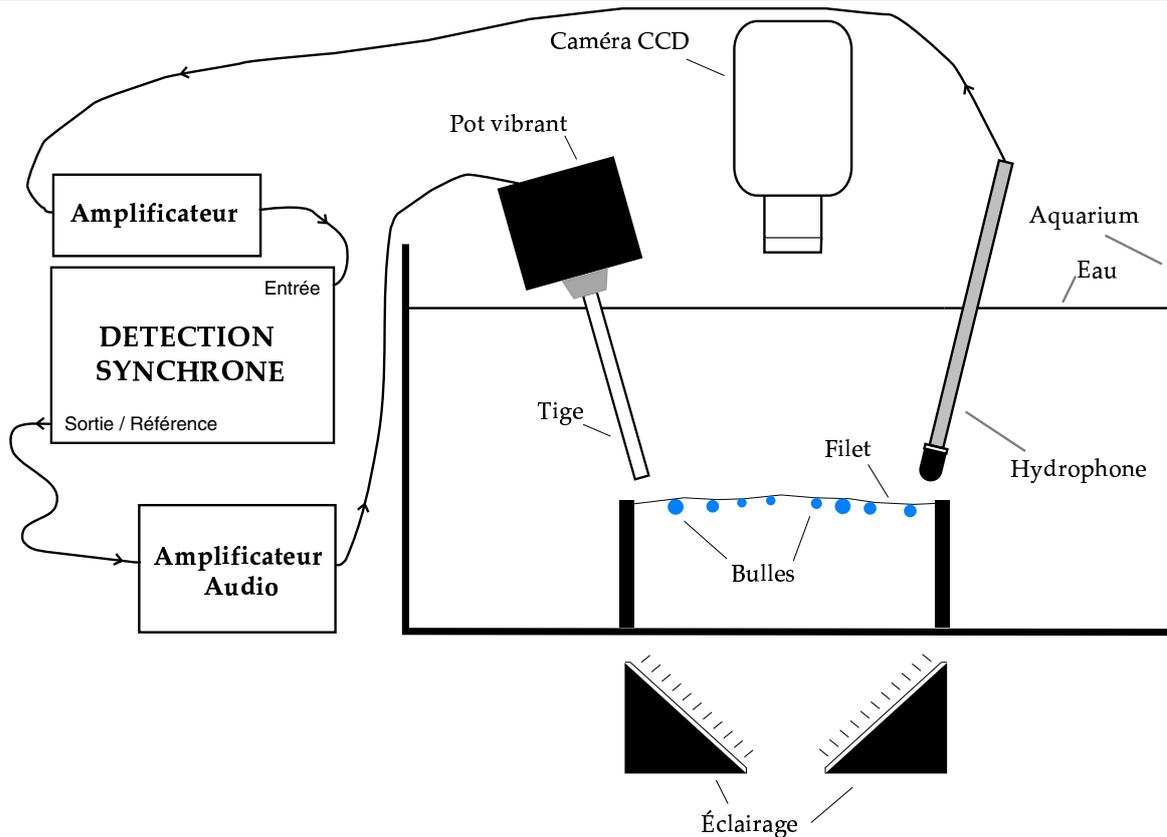


FIG. 2.8 – Le dispositif expérimental pour l'étude de nuages de bulles bidimensionnels. Les bulles sont piégées à l'aide d'un filet. Un éclairage homogène et une caméra CCD permettent d'obtenir des images que l'on analyse pour connaître les rayons et positions des bulles. Un pot vibrant et un hydrophone, connectés à une détection synchrone, permettent d'étudier la réponse du nuage à une excitation acoustique.

Le dispositif expérimental utilisé est présenté sur la figure 2.8. Il présente de nombreux points communs avec celui développé pour l'étude d'une bulle (voir figure 1.8 page 29), mais quelques changements sont intervenus. Notons tout d'abord l'acquisition de matériel plus adéquat : le microphone et le haut-parleur étanchéifiés artisanalement ont cédé la place à un hydrophone (Brüel et Kjær 8103) et à un haut-parleur sous-marin (non représenté sur le schéma). Pour l'excitation des bulles, on préfère au haut-parleur un pot vibrant (Brüel et Kjær 4810) sur lequel est fixée une tige en altuglas de 16,5 cm de longueur pour un diamètre de 0,8 cm. Les époussettes sont remplacées par un filet de  $9 \times 10 \text{ cm}^2$  appuyé sur deux pieds constitués de plaques en duralumin de 7 cm de haut. Deux projecteurs situés sous l'aquarium éclairent le nuage qu'une caméra CCD photographie. Enfin, l'aquarium a changé : il est en plexiglas, pour limiter les réflexions sur les parois, et de dimensions réduites ( $22,5 \times 17,5 \times 18,5 \text{ cm}^3$ ).

### Création du nuage

Après le remplissage de l'aquarium avec de l'eau du robinet, il convient d'attendre au moins une demi-journée afin de laisser à l'eau le temps de dégazer. Cette période de dégazage s'accompagne dans un premier temps d'apparition de bulles sur les parois ; bulles qui finissent par disparaître dans un second temps. Notons qu'il est préférable d'immerger tous les composants (hydrophone, filet, etc...) pendant cette phase de dégazage. Si on ne les introduit qu'après dégazage, ils apportent avec eux une quantité de gaz qui génèrera de nouvelles bulles. Le dispositif ainsi préparé, on peut réaliser des nuages qui resteront stables durant plusieurs heures (à condition de veiller à ne pas brancher l'éclairage en permanence).

Le filet est constitué d'un rectangle de dentelle cousu sur une armature rigide. Il doit être suffisamment tendu pour que l'on puisse le considérer comme plan, mais suffisamment lâche pour ne pas perturber les oscillations des bulles par sa rigidité. En pratique, ce second point est toujours rempli, et il est souvent nécessaire de "lisser" quelque peu le filet pour ne pas laisser de creux et bosses trop marqués. La nécessité d'avoir un filet plan est motivée par deux raisons : d'une part le dispositif utilisé pour mesurer les distances ne permet pas d'apprécier une quelconque différence de hauteurs entre bulles ; et d'autre part, la surface utile du filet se réduit aux parties planes, toutes les parties en pente risquant de laisser glisser les bulles.

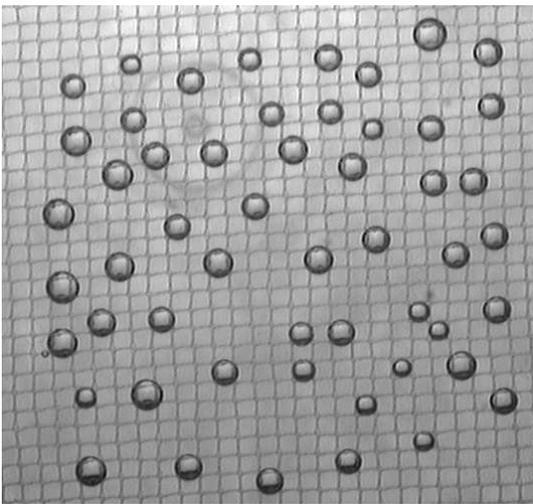


FIG. 2.9 – *Le nuage-exemple : une assemblée de 53 bulles. À noter que chaque bulle est piégée sous une maille du filet. Une analyse de l'image par seuillage permet d'obtenir les rayons et positions de toutes les bulles.*

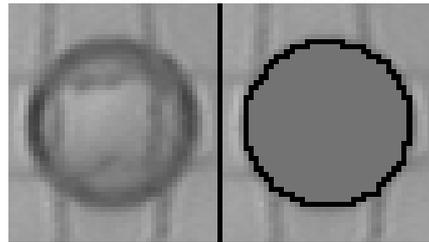
On crée le nuage en injectant de l'air sous le filet à l'aide d'une seringue munie d'une pipette courbée (la courbure permet de s'approcher suffisamment du plan du filet pour être capable de choisir la position de la bulle que l'on veut injecter). On peut mettre ainsi sur le filet jusqu'à une centaine de bulles ; la photo de la figure 2.9 montre un exemple d'un nuage de 53 bulles. Le rayon typique des bulles qu'il est possible de piéger correctement sous le filet est dicté par la taille de la maille. Les bulles de diamètres inférieurs à la maille ne sont bien sûr pas retenues. Les bulles trop grosses posent un autre problème : elles ne sont pas piégées par une maille et peuvent glisser sous la surface du filet, grossissant en absorbant les autres bulles sur leur passage. Une fausse manœuvre conduisant à l'injection d'une grosse bulle peut donc aboutir à la transformation d'un nuage patiemment élaboré bulle à bulle en une seule bulle énorme.

Quelques astuces et précautions rendent la création d'un nuage plus aisée. Il est tout d'abord conseillé d'amorcer la seringue un peu à l'écart du filet, la première salve de bulles étant souvent brutale. Ensuite, en pressant la seringue amorcée avec douceur, on peut obtenir une série de bulles qui s'échappent lentement et que l'on peut déposer tour à tour sous le filet. Les rayons des bulles peuvent ensuite être ajustés en aspirant un peu d'air ou en déposant une petite bulle qui viendra *coalescer*. À noter que la création de très petites bulles peut être obtenue en savonnant préalablement le bout de la pipette.<sup>4</sup>

### Mesures optiques

Les nuages sont photographiés à l'aide d'une caméra CCD placée au dessus de l'aquarium. Grâce aux deux sources lumineuses placées sous l'aquarium, on peut obtenir un éclairage uniforme du nuage, permettant un seuillage efficace de l'image. Remarquons qu'à ce titre, la photographie de la figure 2.9 est un mauvais exemple puisque on y remarque clairement un gradient d'intensité du fond lumineux. Cette image a nécessité une analyse plus laborieuse... Le traitement des images est réalisé avec la fonction 'Analyse Particle' du logiciel *NIH Image*. La précision que l'on obtient est directement liée au nombre de pixels : pour la photographie

FIG. 2.10 – À gauche, un zoom d'une des bulles du nuage de la figure 2.9. À droite, le contour de l'ellipse qu'en déduit *NIH Image*. Un pixel correspond à 0,08 mm.



de la figure 2.9, la résolution est d'environ 12 pixels par millimètre. On a donc une précision de l'ordre du dixième de millimètre. Le résultat d'une analyse d'image est donné sur la figure 2.10, où on a fait un agrandissement d'une des bulles du nuage-exemple. À partir d'un seuillage, le logiciel permet de trouver l'ellipse ajustant au mieux la bulle isolée et donne sa position  $(x, y)$ , son grand axe  $2a$  et son petit axe  $2b$ . On trouve systématiquement des ellipses quasi circulaires et on prend  $R_0 = (a + b)/2$ . Comme l'illustre la figure 2.10, on détermine ainsi le rayon avec une précision de l'ordre d'un pixel.

Pour que ces mesures de rayon soient pertinentes, il faut bien sûr que les bulles soient très faiblement aplaties. Une série d'expériences avec des bulles seules permet de trouver la taille maximale que l'on peut mesurer par cette méthode sans commettre une grosse erreur. On a représenté sur la figure 2.11 la fréquence de résonance de différentes bulles piégées (seules) sous le filet, en fonction de leur rayon apparent (*i.e.* le rayon mesuré par l'analyse d'image). La courbe en trait plein correspond à la valeur théorique attendue. Pour des rayons apparents inférieurs à 2 mm, l'accord est bon. Par contre on constate que, pour les bulles de rayons supérieurs à 2 mm, notre méthode conduit à une surestimation du rayon. On veillera donc à n'utiliser que des bulles pour lesquelles  $R_0 < 2\text{mm}$ .

<sup>4</sup>Cette méthode suppose que l'on puisse se permettre de négliger les effets de tension superficielle, comme c'est le cas pour nos bulles millimétriques.

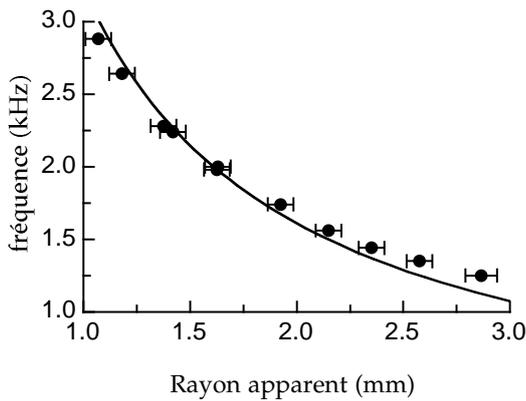


FIG. 2.11 – Fréquence de résonance mesurée en fonction du rayon apparent, pour des bulles piégées seules sous le filet. En trait plein, la courbe théorique vérifiée dans le chapitre 1 :  $\frac{3,22}{R_0}$ . Pour les bulles de rayons apparents supérieurs à 2 mm, on surestime le rayon.

À partir d'une photographie du nuage, on peut donc obtenir les rayons et positions de toutes les bulles. La répartition en rayon pour le nuage-exemple est présentée dans la figure 2.12. Le rayon moyen est de 1,13 mm et l'écart type de 0,13 mm. À titre indicatif, on a fait figurer la gaussienne<sup>5</sup> qui ajuste au mieux l'histogramme.

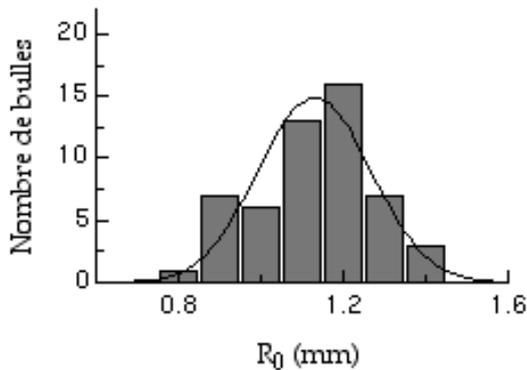


FIG. 2.12 – Histogramme des rayons des bulles du nuage-exemple (nuage de la figure 2.9). Le rayon moyen est de 1,13 mm pour un écart type de 0,13 mm.

## Mesures acoustiques

Les mesures acoustiques sont réalisées selon une méthode indentique à celle utilisée pour l'étude du régime forcé d'une bulle. Une détection synchrone, pilotée par un ordinateur, délivre un signal de référence à l'amplificateur et analyse le signal de l'hydrophone. On peut ainsi réaliser un balayage en fréquence et obtenir la réponse du nuage en fonction de la fréquence d'excitation.

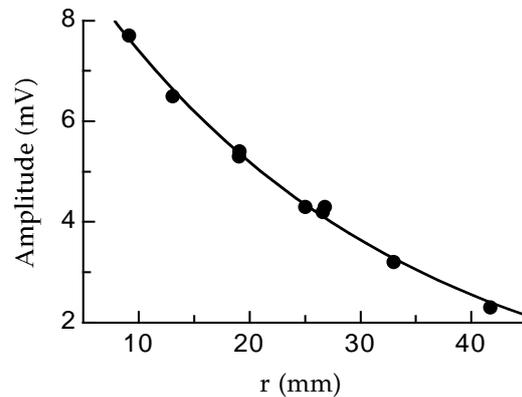
L'hydrophone est alimenté par un ampli à boucle de courant. Cette fois, contrairement au microphone des expériences précédentes, notre capteur est étalonné et les mesures de tension peuvent être interprétées en termes de surpression : on a de l'ordre de 10 Pa / V (pour le calibre le plus souvent utilisé). Malgré tout, nous laisserons les mesures d'amplitude en mV dans la suite, parce qu'en régime linéaire, la valeur absolue de la surpression ne nous intéresse

<sup>5</sup>En toute rigueur, les rayons étant des quantités positives, on devrait prendre en loi log-normale. Mais la largeur de la répartition étant relativement faible, les deux lois donnent des résultats similaires.

pas beaucoup. La connaissance des amplitudes de surpression sera par contre indispensable lorsque l'on abordera les non-linéarités de la bulle (chapitre 5).

L'excitation du nuage peut être obtenue grâce à un haut-parleur sous-marin. Mais on rencontre alors le même problème que pour le système de deux bulles : le haut-parleur a tendance, aux fréquences auxquelles on travaille, à exciter toutes les bulles en phase. Ce dispositif est donc très mauvais pour exciter d'autres modes que le mode fondamental. L'utilisation du pot vibrant muni d'une tige fine cylindrique permet d'obtenir une excitation beaucoup plus localisée. On peut réaliser la cartographie grossière du champ de pression que crée le pot vibrant lorsqu'on place l'extrémité de la tige à faible distance du filet. Le résultat est donné dans la figure 2.13 où on a reporté l'amplitude de la pression relevée sur le filet en fonction de la distance  $r$  à la tige. On peut ajuster les points obtenus par une exponentielle décroissante  $\exp(-r/r_0)$  avec une distance caractéristique  $r_0$  de l'ordre de 28 mm. Notons que cette loi est purement phénoménologique ; elle nous permettra d'essayer de prédire avec quelle efficacité le pot vibrant pourra exciter chacun des modes du nuage.

FIG. 2.13 – L'amplitude de pression sur le filet en fonction de la distance  $r$  à la tige fixée sur le pot vibrant. La courbe en trait plein correspond à une loi en  $\exp(-r/r_0)$ , avec  $r_0 = 28$  mm.



### 2.2.3 Résultats expérimentaux et interprétations

#### Expérience avec le nuage-exemple

Présentons ce que l'on obtient lors d'une expérience avec le nuage de la figure 2.9. On place la tige du pot vibrant à très faible distance de la bulle la plus basse de la photographie. L'hydrophone est placé de l'autre côté du nuage. On effectue alors un balayage en fréquence de 1 kHz à 10 kHz. Le résultat est donné dans la figure 2.14 (courbe en trait plein). On observe une série de 4 pics bien séparés, suivis d'un signal faible entre 3 et 7 kHz, puis quelques pics réapparaissent en fin de balayage. Sur la même figure, on trouve en pointillés le même balayage en l'absence de bulles sous le filet. La différence est frappante : les 4 premiers pics sont absents (ce qui confirme qu'ils sont bien à attribuer au nuage) et le signal entre 3 et 10 kHz est beaucoup plus fort qu'en présence du nuage, passant même par des pics qu'on attribue à des résonances de l'aquarium.

La présence du nuage se manifeste donc par deux effets : l'apparition de résonances entre 1 et 3 kHz, et une atténuation très forte après 3 kHz.

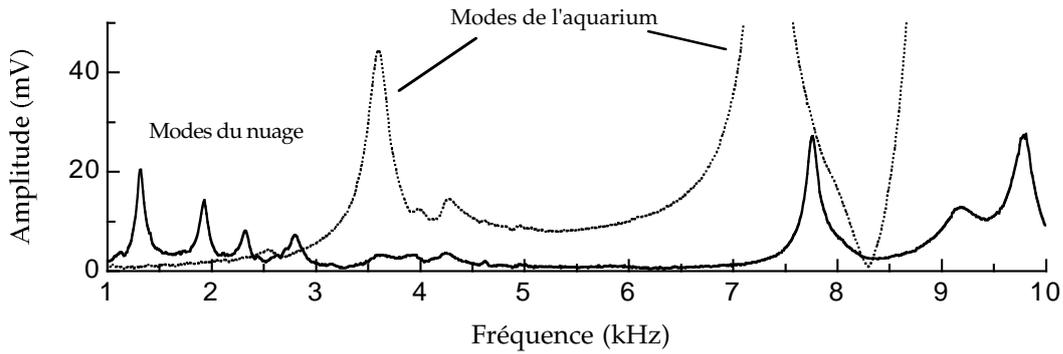


FIG. 2.14 – Amplitude du signal mesuré par l'hydrophone en fonction de la fréquence d'excitation. En trait plein, le balayage obtenu en présence du nuage-exemple : on observe 4 pics suivis d'un signal faible. En pointillés, le même balayage sans nuage : on observe des résonances de l'aquarium.

### Les modes attendus

La connaissance des positions et rayons des bulles du nuage permet de calculer sa matrice  $N_N^0$  telle que définie par la formule (2.12). Les vecteurs propres de cette matrice correspondent aux modes propres du nuage, dont les fréquences propres se déduisent des valeurs propres de la matrice. La figure 2.15 présente les fréquences propres que l'on calcule pour chaque mode propre. On a classé les modes par ordre croissant de fréquence : le mode fondamental est numéroté 1 et le mode 53 est celui de plus haute fréquence. La figure 2.16 permet de visualiser quelques exemples de modes. Chaque bulle du nuage est d'autant plus foncée que sa contribution dans le mode est importante. Ainsi, si on imaginait un mode où seule une

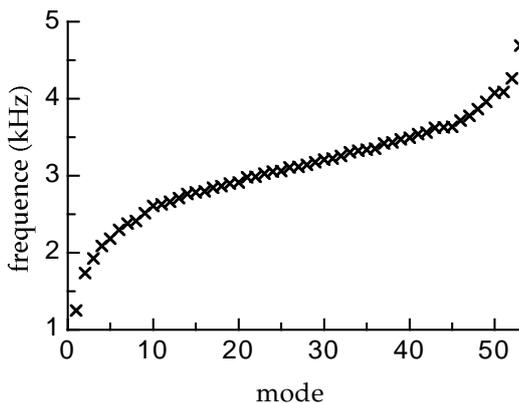


FIG. 2.15 – Fréquences propres des modes calculés pour le nuage-exemple. Les modes se répartissent sur une gamme de fréquences comprises entre 1,3 et 4,7 kHz.

bulle du nuage oscillait, sa représentation consisterait en une bulle noire et toutes les autres blanches. En outre, afin de pouvoir rendre compte des différences de signes, on a adopté un second code. Si la composante du vecteur propre sur une bulle du nuage est positive, celle-ci est marquée d'un signe + ; dans le cas contraire, on fait figurer le signe -. Par exemple, toutes les bulles du mode 1 portent un +. Cela signifie qu'elles oscillent toutes en phase. On remarque également que l'intensité varie d'une bulle à l'autre et on retrouve à peu près ce que

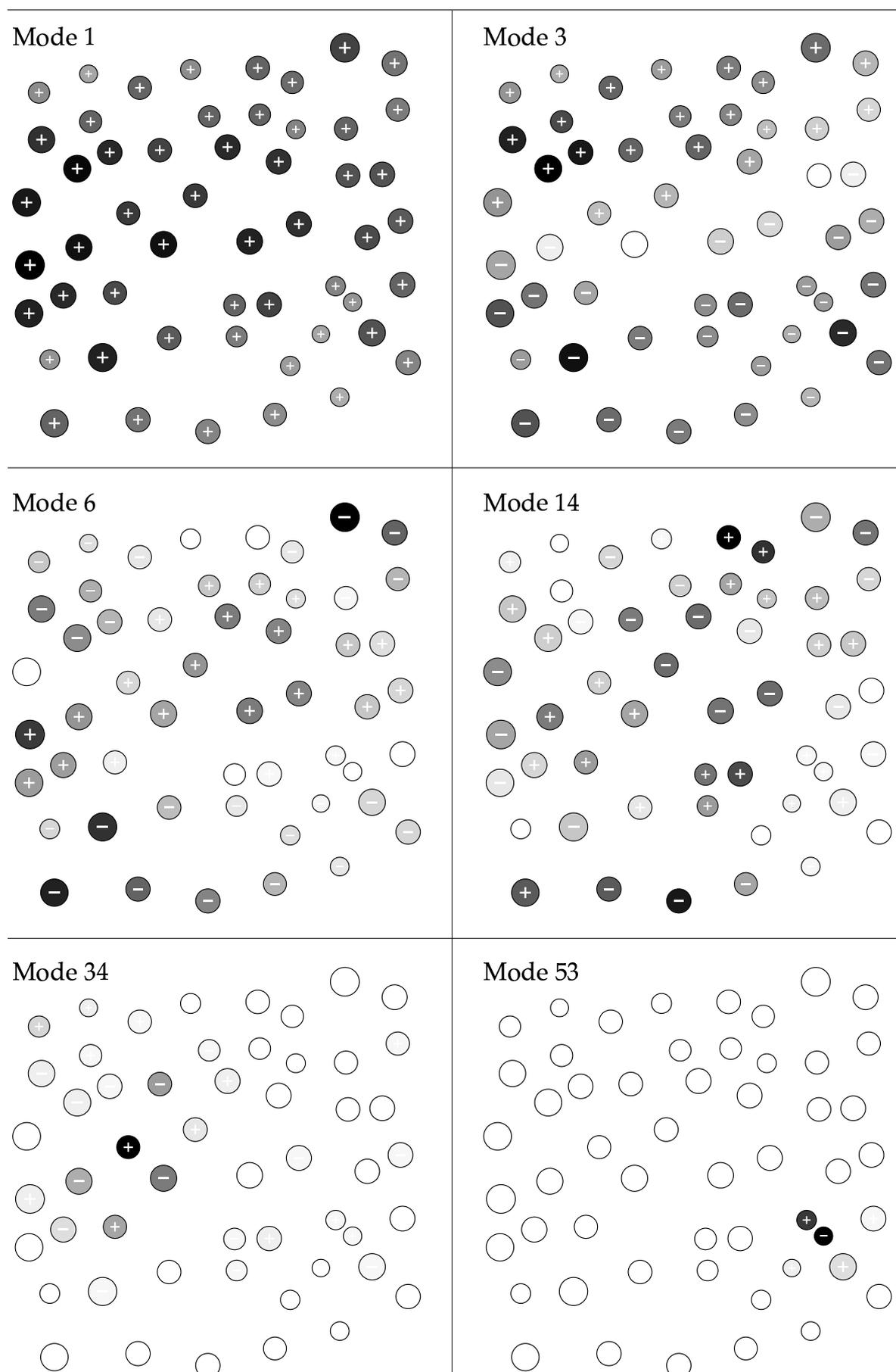


FIG. 2.16 – Visualisation de quelques modes du nuage-exemple.

l’on attend d’un mode fondamental : les bords du nuage sont plus clairs que le centre.

Les quatre premiers modes représentés sur la figure 2.16 sont ceux que l’on suspecte d’être responsables des résonances observées expérimentalement. Le tableau 2.3 permet une comparaison entre les fréquences de ces modes et les fréquences de résonance expérimentales. Pour

Pic Fréquence (kHz)		Mode Fréquence (kHz)	
1	1,31	1	1,25
2	1,93	3	1,93
3	2,32	6	2,30
4	2,80	14(?)	2,77

TAB. 2.3 – Fréquences de 4 pics expérimentaux et des 4 modes théoriques correspondants. À noter que l’attribution du mode 14 pour le quatrième pic n’est pas certaine.

les trois premiers pics, les arguments permettant de sélectionner ces modes en particulier ne se limitent pas à la seule coïncidence entre fréquences ; les géométries des modes sont également cohérentes avec notre géométrie d’excitation. Ainsi, les modes 3 et 6 sont organisés selon des bandes horizontales, structures qui respectent bien la symétrie de l’excitation (*i.e.* pot vibrant en bas, au milieu, et hydrophone en haut, au milieu également). Le mode 2 en revanche (non représenté), qui est à une fréquence de 1,73 kHz, correspond à un nuage organisé selon deux bandes verticales. On conçoit donc qu’il ne donne pas lieu à un pic lors du balayage en fréquence.

Les premiers modes du nuage présentent des structures avec des ‘ventres’ et des ‘noeuds’, semblables aux modes d’une corde vibrante par exemple (voir les modes 1, 3 et 6 de la figure 2.16). Par contre, au delà d’une certaine fréquence, on ne distingue plus de structure nette (modes 34 et 53 par exemple). Tout se passe comme si on entraît dans un domaine où les détails du nuage se faisaient sentir. Ainsi, on est tenté de définir une longueur d’onde effective  $\lambda_{eff}$ , qui ne correspond en rien à la longueur d’onde acoustique dans l’eau. Rappelons à ce propos que les calculs conduisant à ces modes sont faits en eau incompressible ; la longueur d’onde acoustique est par conséquent infinie. Dans les premiers modes,  $\lambda_{eff}$  est grande devant la distance caractéristique entre bulles et l’allure des modes est fixée par la géométrie globale du nuage. Mais lorsque  $\lambda_{eff}$  devient suffisamment faible pour “sonder” les détails du nuage, les modes deviennent beaucoup plus compliqués.

L’analyse du nuage en termes de modes permet également d’expliquer le signal particulièrement faible pour les fréquences au-delà de 3 kHz. Insistons tout d’abord sur le fait que l’effet est important : la présence du nuage est capable de gommer totalement le premier mode de résonance de l’aquarium et atténue sévèrement les suivants. Pourtant, la seule différence entre les balayages en trait plein et en pointillés de la figure 2.14 est la présence d’une cinquantaine de bulles millimétriques (soit une fraction volumique de gaz dans l’aquarium de l’ordre de  $3.10^{-5}$ ). La raison de cette forte atténuation est une réponse collective des bulles en opposition de phase par rapport à l’onde excitatrice. En effet, la réponse du nuage à une fréquence d’excitation particulière correspond à la somme des contributions des modes propres

du nuage, chacun se comportant comme un oscillateur harmonique indépendant possédant sa propre fréquence de résonance. La géométrie de l'excitation du nuage a une grande importance. Imaginons par exemple une excitation dont le profil correspond exactement au mode 1 du nuage, c'est à dire toutes les bulles excitées en phase, avec de légères variations d'amplitudes d'une bulle à l'autre (voir figure 2.16). Dans ce cas, seul le mode fondamental serait excité, la projection de l'excitation sur les autres modes se réduisant à 0. Dans l'exemple de notre expérience, il semble que l'excitation se décompose essentiellement sur les modes 1, 3, 6 et (peut-être) 14, et que ses composantes sur les autres modes soient faibles. Ainsi, lorsqu'on excite le nuage au delà de la fréquence du mode 14, on peut considérer qu'on est en train d'exciter 4 oscillateurs harmoniques à une fréquence supérieure à leur fréquence de résonance. Les OH répondent par conséquent en opposition de phase. La combinaison de ces 4 composantes donnent alors un nuage répondant avec la même géométrie que l'excitation, mais en opposition de phase. Ce phénomène est à l'origine de l'atténuation observée. Notons que la fréquence à partir de laquelle l'atténuation intervient est a priori sensible au profil de l'excitation. Imaginons en effet une expérience de pensée durant laquelle on parvienne à n'exciter qu'une seule bulle ; et choisissons une des bulles participant activement au modes 53. Le nuage ne répondrait alors en opposition de phase qu'après une fréquence de 4,7 kHz.

### La précision des mesures

Si on laisse de côté le cas particulier du mode fondamental, on constate que l'accord entre les fréquences théoriques et expérimentales est de l'ordre du pourcent (voir le tableau 2.3). Pourtant, on a vu que nos mesures de rayon étaient à 0,08 mm près, pour un rayon moyen de 1,1 mm, soit une imprécision de l'ordre de 7%. L'explication tient au nombre "important" de bulles dans le nuage : l'erreur commise sur le rayon d'une bulle a des chances d'être compensée par une erreur sur une autre bulle. On peut vérifier cet effet en modifiant les rayons de chaque bulle du nuage-exemple d'une valeur aléatoire comprise entre  $-0,08$  et  $0,08$  mm et en recalculant les fréquences propres pour le nouveau nuage obtenu. La figure 2.17 montre les résultats pour 10 nouveaux nuages différents en donnant l'écart relatif en fréquence par rapport au nuage initial, pour les 53 modes. On constate que, pour les premiers modes, l'écart en fréquence est inférieure à 2%. Les derniers modes sont plus sensibles aux variations de rayon parce que, n'impliquant qu'un petit nombre de bulles du nuage, ils profitent moins de l'effet de "compensation des erreurs".

### L'influence de la surface

Si l'on en croit l'étude du paragraphe précédent, on comprend mal le désaccord entre la prédiction et l'expérience concernant la fréquence du mode fondamental (voir tableau 2.3). L'explication rejoint l'effet de décalage que l'on avait observé pour la fréquence du mode symétrique d'un système de deux bulles (voir page 49). La présence d'une surface libre à une distance  $h$  au dessus du nuage influe sur la réponse en fréquence du nuage. On peut tenir compte de la surface libre en considérant qu'elle agit comme un miroir inversé : le nuage voit une image qui oscille en opposition de phase à une distance  $2h$ . Comme dans le cas de deux

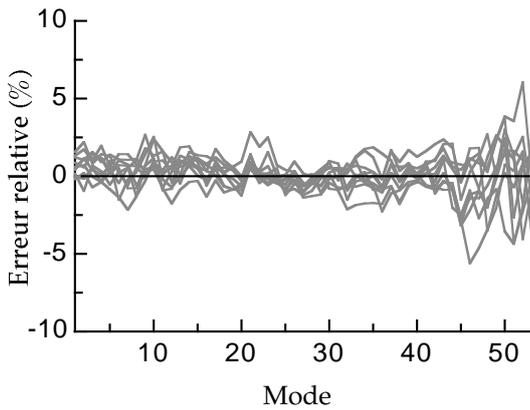


FIG. 2.17 – Variations relatives des fréquences propres des modes du nuage-exemple lorsque l'on modifie indépendamment les rayons des bulles d'une valeur aléatoire comprise entre  $-0,08$  et  $0,08$  mm.

bulles, cette image a une influence forte pour le mode fondamental, parce que toutes les bulles images sont alors en phase, mais elle affecte peu les autres modes.

On se propose, pour conclure l'étude expérimentale de notre nuage-exemple, d'aller plus loin que l'analyse en termes de vecteurs propres et valeurs propres de la matrice  $\mathbb{N}_N^0$ . Un calcul en utilisant la matrice plus générale  $\mathbb{N}_N$  est en effet possible. On peut alors tenir compte des effets d'amortissement thermique et du fait que les "fréquences propres" des bulles possèdent une dépendance en fréquence. On restera par contre dans l'hypothèse de l'eau incompressible, en se limitant à des fréquences d'excitation inférieures à 5 kHz. Notons que cela se justifie : la distance maximale entre bulles est de l'ordre de 5 cm alors que la longueur d'onde acoustique dans l'eau à 5 kHz est de l'ordre de 30 cm. La figure 2.18 donne le résultat d'une résolution numérique de l'équation (2.10) pour le nuage-exemple. On a pris une excitation (vecteur  $Q$ ) avec une variation spatiale donnée par la loi phénoménologique de la figure 2.13, la position de la tige du pot vibrant étant connue, et une variation fréquentielle donnée par le balayage sans bulle de la figure 2.14. À partir du calcul du vecteur  $\Upsilon$ , on détermine alors la pression engendrée par le nuage sur l'hydrophone (dont la position est également connue), pression à laquelle on ajoute la pression directe due au pot vibrant. Enfin, précisons que la présence de la surface libre à une distance  $h = 7$  cm du nuage a été prise en compte en calculant la contribution d'un nuage image.

L'accord entre cette simulation et l'expérience est très satisfaisant. On retrouve 3 des 4 pics observés (figure 2.18a). Et si le quatrième pic en amplitude n'est pas présent dans la résolution numérique, la figure 2.18b montre qu'on a bien un quatrième événement, mis en évidence par l'accident sur la phase. Remarquons que non seulement la position des pics est bien prédite (y compris le mode fondamental), mais que l'on a également un bon accord sur leur amplitude. Une fois encore, le mode fondamental fait exception puisqu'on attend une amplitude du pic beaucoup plus forte. La raison peut être attribuée à un effet de super-radiance. On a vu que les oscillations en phase du nuage conduisaient à un amortissement radiatif plus important. Dans un milieu infini, cet effet serait beaucoup plus marqué (comme le prouve une simulation analogue à celle présentée mais en tenant compte de la compressibilité de l'eau), mais il est ici affaibli par la taille finie de l'aquarium.

Au delà d'environ 3,5 kHz, l'accord entre théorie et expérience devient moins bon, surtout

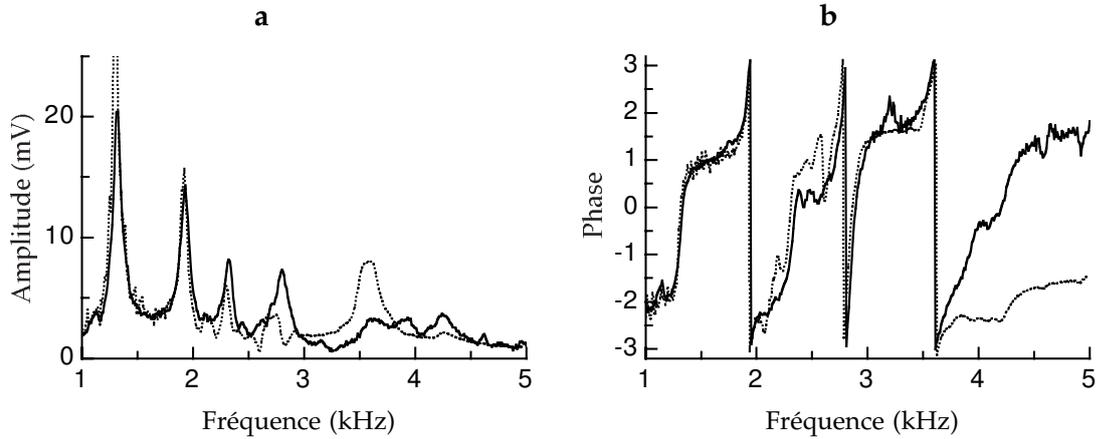


FIG. 2.18 – Comparaison entre l’expérience (trait plein) et la résolution numérique (pointillés). **a-** L’amplitude du signal reçu par l’hydrophone. **b-** La phase du signal.

sur la phase. Notons que cette fréquence correspond à une résonance de l’aquarium (voir figure 2.14). Cela indique qu’il faudrait sans doute inclure les effets de bord dans le modèle pour obtenir une bonne prédiction théorique. Mais l’effet de l’atténuation du signal par le nuage est tout de même qualitativement bien prédit par notre résolution en milieu infini.

#### 2.2.4 Limite de validité de la décomposition en modes propres

L’analyse du nuage de bulles en termes de modes propres suppose que l’on puisse oublier les degrés de liberté associés à l’eau, c’est à dire que l’on puisse considérer que l’eau est incompressible. Mathématiquement, cela se traduit par le remplacement de tous les termes en  $\exp(-i\frac{\omega d_{ij}}{c})$  par 1 dans la matrice  $\mathbb{N}_N$  de l’équation (2.10) pour aboutir à la matrice  $\mathbb{N}_N^0$ . On voit que cette approximation n’est valide que si  $\frac{\lambda}{2\pi}$  reste grand devant toutes les distances bulle à bulle du nuage. Dans le nuage-exemple de notre étude expérimentale par exemple, la distance maximale entre bulles est de l’ordre de 5 cm ; alors que le mode de plus haute fréquence correspond à une longueur d’onde acoustique dans l’eau telle que  $\frac{\lambda}{2\pi} \simeq 5$  cm. Une analyse en termes de modes propres était donc tout à fait justifiée pour les basses fréquences ; mais les modes de plus hautes fréquences n’étaient que des approximations brutales, les effets de propagation devant commencer à se faire sentir.

De façon générale, on peut définir une “fréquence de coupure”  $f_c = \frac{c}{2\pi d_{max}}$ , où  $d_{max}$  est la distance entre les 2 bulles les plus éloignées du nuage. Les modes propres de fréquences inférieures à  $f_c$  sont pertinents. Au delà de  $f_c$ , la matrice  $\mathbb{N}_N^0$  n’a plus de validité physique et il faut tenir compte de la compressibilité de l’eau. On va étudier deux cas dans lesquels l’hypothèse de l’eau incompressible peut être mise en défaut.

#### Le mode fondamental

Lorsque la taille du nuage est grande, la fréquence de coupure peut devenir particulièrement basse. On peut donc imaginer des nuages de bulles tels qu’une description en modes propres

ne s'applique pas du tout. Pourtant, on va voir que le mode fondamental d'un nuage de bulles suffisamment dense et en trois dimensions peut toujours s'interpréter en termes de bulles oscillant dans de l'eau incompressible ; et ce quelle que soit la taille du nuage.

Considérons l'expérience suivante : on piège un nombre croissant de bulles sous le filet et on mesure la fréquence du mode fondamental pour chaque bulle ajoutée. La figure 2.19a montre l'exemple d'un nuage de 8 bulles et on donne dans la figure 2.19b la fréquence mesurée en fonction du nombre de bulles. À mesure que le nombre de bulles augmente, la fréquence du mode fondamental diminue. Cet effet s'interprète de la même façon que dans le cas du mode symétrique d'un système de 2 bulles : les bulles du mode fondamental oscillent toutes en phase et déplacent donc une grande quantité d'eau, donnant une inertie importante au système. La question que l'on se pose est la suivante. Cette décroissance est-elle suffisamment rapide pour que l'hypothèse d'incompressibilité reste valide quel que soit le nombre de bulles ?

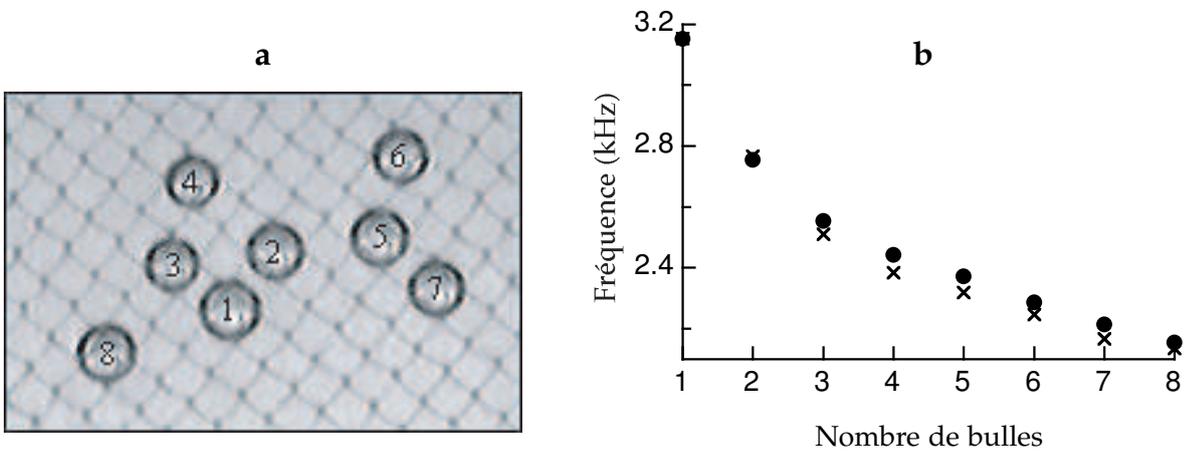


FIG. 2.19 – a- Un nuage de 8 bulles. b- À chaque bulle ajoutée sous le filet, la fréquence du mode fondamental décroît. La comparaison entre expérience (points) et prédiction théorique (croix) est bonne.

On peut répondre à cette question avec des arguments de type champ moyen. Considérons le mode fondamental d'un nuage monodisperse de  $N$  bulles de rayons  $R_0$ . Si le nuage est homogène, on peut s'intéresser à une bulle  $i$  quelconque sans perte de généralité. Son amplitude vérifie l'équation (voir l'équation (2.10) dans le cas de bulles identiques) :

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \xi_i - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sum_{j \neq i} \frac{R_0}{d_{ij}} \xi_j = 0. \quad (2.13)$$

Pour le mode fondamental, on peut considérer que les bulles oscillent toutes avec la même amplitude  $\xi$ . La fréquence du mode fondamental s'écrit alors :

$$f_{fond} = \frac{f_0}{\sqrt{1 + \eta}} \quad \text{avec} \quad \eta = \sum_{i \neq j} \frac{R_0}{d_{ij}}.$$

Pour évaluer  $\eta$ , on passe à une répartition continue de bulles : notons  $D$  la dimension du nuage

et  $\rho_D d^D r$  le nombre de bulles dans le volume élémentaire  $d^D r$ . On trouve alors :

$$\eta = \int_{\text{nuage}} \frac{R_0}{r} \rho_D d^D r \sim \begin{cases} \beta \ln(N) & \text{pour } D = 1 \\ \beta N^{1/2} & \text{pour } D = 2 \\ \beta N^{2/3} & \text{pour } D = 3, \end{cases} \quad (2.14)$$

avec  $\beta = \frac{R_0}{d}$  et où  $d$  est la distance moyenne entre bulles voisines.

On peut tester la validité des lois (2.14) en procédant au calcul exact des valeurs propres de  $N_N^0$  dans le cas d'une assemblée périodique de  $N$  bulles, avec une distance  $d$  entre bulles voisines. La figure 2.20 présente les résultats des calculs pour des nuages de dimensions 1, 2 et 3, avec  $\beta = 0,1$ . Les exposants des lois (2.14) sont bien vérifiés. Il est également possible de vérifier la dépendance linéaire en  $\beta$  des équations. On peut donc comparer les évolutions

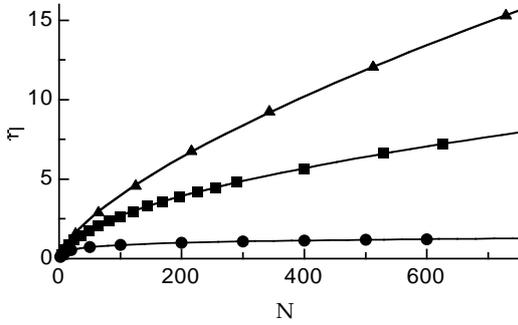


FIG. 2.20 – La quantité  $\eta$  en fonction du nombre de bulles  $N$  pour  $\beta = 0,1$ . En  $D = 1$ , l'ajustement logarithmique est correct. En  $D = 2$  on ajuste avec une loi de puissance d'exposant 0,53. En  $D = 3$  on trouve un exposant de 0,68.

de la fréquence du mode fondamental et de la fréquence de coupure avec le nombre de bulles du nuage :

$$\begin{aligned} f_{fond} &\sim \frac{f_0}{\beta^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{\ln(N)}} & \text{et } f_c &\sim \frac{c}{2\pi d} \frac{1}{N} & \text{pour } D = 1, \\ f_{fond} &\sim \frac{f_0}{\beta^{1/2}} \frac{1}{N^{1/4}} & \text{et } f_c &\sim \frac{c}{2\pi d} \frac{1}{N^{1/2}} & \text{pour } D = 2, \\ f_{fond} &\sim \frac{f_0}{\beta^{1/2}} \frac{1}{N^{1/3}} & \text{et } f_c &\sim \frac{c}{2\pi d} \frac{1}{N^{1/3}} & \text{pour } D = 3. \end{aligned}$$

On trouve donc le résultat annoncé. Pour des nuages 1D ou 2D, la taille du nuage augmente plus vite que la longueur d'onde acoustique à la fréquence du mode fondamental : pour de grandes valeurs de  $N$ , il faut tenir compte de la propagation du son. Mais pour des nuages 3D, les deux grandeurs augmentent à la même vitesse : l'hypothèse d'incompressibilité demeure valide quel que soit le nombre de bulles, pourvu que le nuage soit suffisamment dense (*i.e.* que  $\beta$  soit assez grand).

### L'atténuation

Nos expériences avec un nuage bidimensionnel ont permis de mettre en évidence un effet d'atténuation de l'onde excitatrice à partir d'une certaine fréquence. Cet effet d'atténuation peut également être affecté par la prise en compte de la propagation. En effet, tant que les longueurs d'onde acoustiques restent grandes devant la taille du nuage, l'analyse en termes de modes du nuage tient, et toutes les bulles répondent en opposition de phase par rapport à l'excitation lorsque la fréquence est supérieure à la fréquence du plus haut mode excité. Mais si

des effets de propagation interviennent, la mise en phase parfaite des bulles va être perturbée.

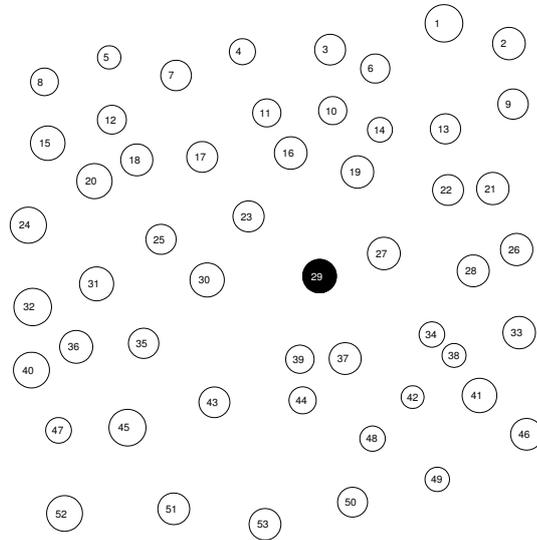


FIG. 2.21 – La numérotation des 53 bulles du nuage-exemple. On réalise une “expérience numérique” consistant à exciter uniquement la bulle 29, située au centre du nuage.

On peut mettre en évidence ce phénomène en utilisant le nuage-exemple. La figure 2.21 reprend la répartition en bulles du nuage en leur affectant un numéro (de 1 à 53). On peut réaliser “l’expérience numérique” suivante. On excite uniquement la bulle 29, située au centre du nuage, et on s’intéresse à la phase de chaque bulle du nuage en fonction de la fréquence d’excitation, la référence de phase étant donnée par la bulle 29.

Le résultat pour des fréquences allant de 100 Hz à 50 kHz est présenté dans la figure 2.22, où on a tracé le cosinus de la phase des 52 autres bulles du nuage en fonction de la fréquence. Comme attendu, toutes les bulles répondent en phase pour une fréquence inférieure à la fréquence du mode fondamental (de 100 Hz à 1,3 kHz). De 1,3 à environ 5 kHz, certains modes répondent en phase tandis que d’autres répondent en opposition de phase : la phase varie beaucoup d’une bulle à l’autre. Au delà de 5 kHz, on excite tous les modes en opposition de phase et on voit donc apparaître une remise en phase des bulles : elles répondent toutes en opposition de phase par rapport à l’excitation, conduisant à l’effet d’atténuation observé. Mais ce régime d’oscillations en phase meurt progressivement à mesure qu’on augmente la

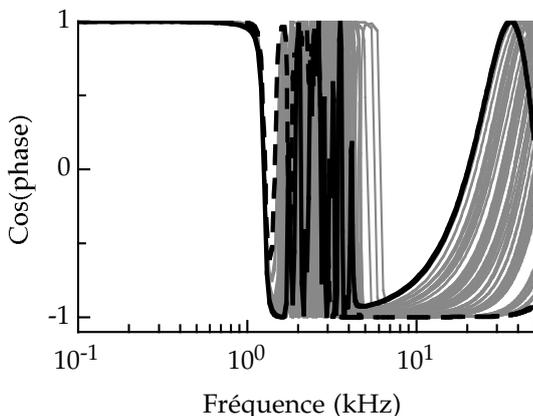


FIG. 2.22 – Phases des 52 bulles du nuage (autres que la bulle 29) en fonction de la fréquence d’excitation pour une expérience consistant à n’exciter que la bulle 29. La référence de phase est celle de la bulle 29. Les deux courbes en trait gras correspondent aux bulles 8 (trait plein) et 27 (trait hachuré).

fréquence de l'excitation. En effet, la longueur d'onde acoustique devient alors plus petite et un déphasage de chaque bulle due à la propagation se fait sentir. Si bien que vers 40 kHz, les bulles ont de nouveau des phases réparties entre 0 et  $2\pi$ . La position des bulles dans le nuage intervient bien sûr dans le phénomène. Ainsi, la première bulle affectée (courbe en trait plein gras dans la figure 2.22) est la numéro 8, c'est à dire une des plus éloignées de la bulle 29. À l'opposé, la bulle 27 en est très proche et elle reste bloquée à une phase de  $\pi$  pour des fréquences plus élevées (courbe en trait hachuré gras). Pour chaque bulle, on peut vérifier que l'évolution de la phase après 5 kHz se fait en  $\frac{\omega c}{d}$  où  $d$  est leur distance à la bulle 29.

On a donc observé la succession de 4 régimes : *i*) bulles en phase, répondant avec un déphasage nul par rapport à l'excitation ; *ii*) bulles sans relation de phase ; *iii*) bulles en phase, répondant avec un déphasage de  $\pi$  par rapport à l'excitation et *iv*) réapparition d'une phase aléatoire. Notons que le passage par le régime *iii*) correspond exactement aux "transitions de phase" observées (numériquement) par Zhen Ye et al dans des nuages de bulles désordonnés [YA98, YHH00] ou ordonnés [YH01].



## Chapitre 3

# Propagation dans de l'eau bulleuse

Lorsque le nombre de bulles présentes dans l'eau devient important, on est tenté de passer à une description du système en termes de milieu effectif. On considère alors non plus un système de  $N$  bulles placées dans un volume infini d'eau, mais un milieu effectif, constitué d'un mélange de gaz et d'eau, placé dans un volume infini d'eau. Le milieu effectif est caractérisé par une relation de dispersion  $k_{eff} = f(\omega)$  qui donne le vecteur d'onde avec lequel se propage une onde plane de pulsation  $\omega$  dans ce milieu. Le travail de modélisation consiste donc à proposer une relation de dispersion pour un milieu bulleux, en fonction de paramètres décrivant le contenu en bulles du milieu : fraction volumique de gaz et répartition en rayons par exemple.

On peut déterminer la vitesse effective du son dans un liquide bulleux à l'aide d'un modèle simple. Pour une fraction volumique  $s$  de gaz, on a un milieu de masse volumique  $\rho_{eff} = s\rho_a + (1 - s)\rho_e$  et de compressibilité  $\chi_{eff} = s\chi_a + (1 - s)\chi_e$ . On définit alors une vitesse effective :

$$c_{eff} = \frac{1}{\sqrt{\rho_{eff}\chi_{eff}}} = ((s\rho_a + (1 - s)\rho_e)(s\chi_a + (1 - s)\chi_e))^{-1/2}. \quad (3.1)$$

Cette formule est connue sous le terme de vitesse de Wood [Woo32]. Elle n'est valable que pour des fréquences basses devant les fréquences de Minnaert des bulles présentes dans le liquide. Pour des fractions volumiques vérifiant :  $\frac{\chi_e}{\chi_a} \simeq 10^{-4} \ll s \ll 1$ , on peut considérer que la masse volumique du mélange est celle de l'eau et que sa compressibilité est celle du gaz, et on obtient l'expression simplifiée :

$$c_{eff} \simeq \frac{1}{\sqrt{\rho_e s \chi_a}} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho s}}, \quad (3.2)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique de l'eau et  $P_0$  la pression à l'équilibre dans le liquide. Remarquons que l'on a pris  $1/P_0$  pour  $\chi_{air}$  parce que les transformations que subit le gaz des bulles sont isothermes à basse fréquence (voir figure 1.4a).

L'inclusion d'une quantité de gaz, même infime, dans un liquide conduit à un mélange dont les propriétés acoustiques sont très différentes de celle du liquide pur. Une fraction volumique de  $10^{-3}$  d'air dans de l'eau pure fait ainsi passer la vitesse du son d'environ 1500 m/s à 300 m/s, d'après la formule de Wood. On a donc une diminution de la vitesse de 80% pour un changement de fraction volumique de 0,1%! Cet effet peut être mis en évidence par une expérience de tous les jours que F.S. Crawford a baptisée "l'effet chocolat chaud" [Cra82]. Il

s'agit de s'intéresser à la note que l'on entend lorsque l'on excite le mode fondamental d'un mug rempli de chocolat chaud préparé à partir de poudre lyophilisée. La fréquence  $f$  de ce mode dépend de la hauteur  $h$  de liquide et de la vitesse du son  $c$  dans le liquide ( $f = \frac{c}{4h}$ , si l'on suppose que l'on a une cavité fermée-ouverte). L'excitation répétée de ce mode donne une note basse juste après la préparation du chocolat chaud, puis de plus en plus haute au cours du temps jusqu'à atteindre une hauteur constante. Cet effet est à attribuer à l'évolution du nombre de bulles d'air présentes dans le liquide. Juste après la préparation de la boisson, l'air qui était piégé dans la poudre gagne le liquide. On a alors une concentration importante en bulles qui donne une vitesse effective du son basse, et donc une note basse. Ensuite, à mesure que les bulles remontent, leur concentration diminue : la vitesse du son ainsi que la hauteur de la note augmentent. Finalement, quand les bulles ont toutes disparu, on retrouve une note constante. Notons que cette expérience est également possible pour les non-buveurs de chocolat chaud. De l'eau sortant d'un robinet avec suffisamment de pression donne également un excellent liquide bulleux, particulièrement avec de l'eau chaude. En outre, cela offre l'avantage de permettre la visualisation de la présence de bulles ; on peut ainsi noter le lien entre la concentration en bulles et la hauteur de la note. Précisons finalement que cette expérience n'est pas aussi facile à réaliser qu'il y paraît, dans la mesure où il faut parvenir à repérer la note correspondant au mode de la colonne de liquide, alors que les vibrations des parois du mug font beaucoup plus de bruit...

Le modèle de Wood est tout à fait performant pour déterminer la vitesse effective du son dans un nuage de bulles tant que l'on se limite à des fréquences faibles devant la fréquence de Minnaert des bulles individuelles qui composent le nuage. Au delà, la dynamique des bulles doit être prise en compte. Cela peut être fait en incluant dans l'expression de la compressibilité du milieu des termes liés à la dynamique des bulles. Plutôt que de réaliser ce programme, nous allons utiliser une autre approche, due à Foldy[Fol45]. Le résultat final sera identique. Mais les calculs de Foldy apportent l'avantage non négligeable de permettre une meilleure identification des hypothèses conduisant au résultat. Après avoir établi la relation de dispersion de Foldy, nous donnerons un aperçu de la littérature sur la propagation en eau bulleuse, en proposant une revue d'articles expérimentaux, théoriques et numériques. La majeure partie de ce chapitre sera donc essentiellement bibliographique. Après cet état des lieux, nous exposerons un calcul alternatif de la relation de dispersion pour un liquide bulleux. Il s'agira, pour résumer hardiment, non plus d'étudier en quoi la présence de bulles modifie la propagation du son dans l'eau, mais en quoi la compressibilité de l'eau vient perturber une onde de bulles.

### 3.1 Relation de dispersion de Foldy

En 1945, Foldy publie un article sur la diffusion multiple des ondes qui reste aujourd'hui encore une référence sur le sujet. Nous proposons un résumé détaillé des calculs aboutissant à la relation de dispersion de Foldy, ainsi qu'une application du résultat au cas des bulles. On discutera ensuite la principale hypothèse de cet article.

### 3.1.1 Cas général

Considérons un champ scalaire  $\Psi(\vec{r})e^{i\omega t}$  qui vérifie, en l'absence de diffuseurs, l'équation d'onde :

$$\nabla^2\Psi + k_0^2\Psi = 0. \quad (3.3)$$

Nous allons traiter le problème d'une onde incidente  $\Psi_0(\vec{r})$  arrivant sur un nuage de  $N$  diffuseurs. Chaque diffuseur  $j$ , repéré par sa position  $\vec{r}_j$ , crée en  $\vec{r}$  un champ  $A_j \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}_j|}}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} e^{i\omega t}$ . L'amplitude  $A_j$  du champ diffusé est donnée par  $A_j = f_j\Psi^j(\vec{r}_j)$ , où  $f_j$  est le coefficient de diffusion du diffuseur  $j$  et où on désigne par  $\Psi^j(\vec{r}_j)$  le champ agissant sur le diffuseur  $j$ . On peut exprimer ce champ comme étant le champ total duquel est soustraite la participation du diffuseur  $j$  lui-même :

$$\Psi^j(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) - A_j \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}_j|}}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}.$$

En introduisant la fonction de propagation  $E(\vec{r}, \vec{r}')$  définie par :

$$E(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

on obtient les équations :

$$\Psi^j(\vec{r}_j) = \Psi_0(\vec{r}_j) + \sum_{j' \neq j} f_{j'} \Psi^{j'}(\vec{r}_{j'}) E(\vec{r}_j, \vec{r}_{j'}) \quad (3.4a)$$

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_0(\vec{r}) + \sum_j f_j \Psi^j(\vec{r}_j) E(\vec{r}, \vec{r}_j). \quad (3.4b)$$

Notons que les  $N + 1$  équations (3.4a) et (3.4b) contiennent la solution exacte du problème. Pour un nombre restreint de diffuseurs, on peut envisager une résolution complète. Mais quand  $N$  est important, la tâche devient insurmontable. On peut toutefois obtenir une expression du champ moyen  $\langle \Psi(\vec{r}) \rangle$ , la moyenne étant effectuée ici sur les différentes réalisations possibles du nuage.

Afin de pouvoir considérer le cas d'un nuage polydisperse, on introduit un paramètre de diffusion  $s_j$  pour chaque diffuseur (ce paramètre serait le rayon dans le cas d'une bulle par exemple). On définit  $n(\vec{r}, s)ds$ , le nombre moyen de diffuseurs par unité de volume au voisinage de  $\vec{r}$  ayant un paramètre de diffusion compris entre  $s$  et  $s + ds$ . En intégrant, on obtient  $n(\vec{r}) = \int n(\vec{r}, s)ds$ , le nombre de diffuseurs par unité de volume autour du point  $\vec{r}$ , et  $N = \int_V \int n(\vec{r}, s)dsd^3r$  le nombre total de diffuseurs. On fait l'hypothèse que la probabilité d'avoir un diffuseur en une position  $\vec{r}$  et avec un paramètre  $s$  est indépendante des positions et paramètres des autres diffuseurs. L'évènement  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, s_1, s_2, \dots, s_N\}$  a donc la probabilité :

$$\begin{aligned} P_{tot} &= P(\vec{r}_1, s_1) \dots P(\vec{r}_N, s_N) \\ &= \left(\frac{1}{N}\right)^N n(\vec{r}_1, s_1)n(\vec{r}_2, s_2) \dots n(\vec{r}_N, s_N). \end{aligned}$$

On définit alors la valeur moyenne d'une quantité  $g$  quelconque dépendant des  $\vec{r}_j$  et des  $s_j$  par :

$$\langle g \rangle = \int_V \dots \int_V \int \dots \int g(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, s_1, \dots, s_N) P(\vec{r}_1, s_1) \dots P(\vec{r}_N, s_N) ds_1 \dots ds_N d^3r_1 \dots d^3r_N,$$

et on utilise la notation  $\langle g \rangle_j$  pour désigner la moyenne sur les positions et paramètres de tous les diffuseurs excepté le diffuseur  $j$ . En appliquant ces formules à  $\Psi(\vec{r})$ , on obtient donc :

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \Psi_0(\vec{r}) + \sum_j \int_V \int f_j \langle \Psi^j(\vec{r}_j) \rangle_j E(\vec{r}, \vec{r}_j) \frac{n(\vec{r}_j, s_j)}{N} ds_j d^3 r_j, \quad (3.5)$$

expression dans laquelle  $\langle \Psi^j(\vec{r}_j) \rangle_j$  désigne donc l'action sur le  $j^{\text{ème}}$  diffuseur du champ moyenné sur toutes les configurations possibles des **autres** diffuseurs. Puisque l'on a fait l'hypothèse de probabilités indépendantes, la sommation dans (3.5) contient  $N$  fois le même terme et on peut écrire :

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \Psi_0(\vec{r}) + \int_V G(\vec{r}_j) \langle \Psi^j(\vec{r}_j) \rangle_j E(\vec{r}, \vec{r}_j) d^3 r_j, \quad (3.6)$$

où on a posé  $G(\vec{r}, \omega) = \int f(s, \omega) n(\vec{r}, s) ds$ . L'équation (3.6) est encore compliquée. Mais Foldy propose de la remplacer par une expression très simple en considérant que :

$$\langle \Psi^j(\vec{r}_j) \rangle_j \simeq \langle \Psi(\vec{r}_j) \rangle. \quad (3.7)$$

Cette égalité peut être formulée ainsi : le champ total moyen que ressent un diffuseur  $j$  placé en  $\vec{r}_j$  est le même que le champ moyen qui régnerait en ce point  $\vec{r}_j$  en l'absence du diffuseur. On reviendra sur la pertinence de cette hypothèse. Notons que Foldy reconnaît ne pas avoir de démonstration mathématique de sa validité. Toujours est-il qu'avec l'égalité (3.7), la formule (3.6) s'écrit simplement :

$$\langle \Psi(\vec{r}) \rangle = \Psi_0(\vec{r}) + \int_V G(\vec{r}') \langle \Psi(\vec{r}') \rangle E(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r'. \quad (3.8)$$

En se rappelant que :

$$(\nabla^2 + k_0^2) E(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

où  $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  est la fonction de Dirac, on trouve donc que  $\langle \Psi(\vec{r}) \rangle$  est une solution de l'équation d'onde :

$$\nabla^2 \langle \Psi(\vec{r}) \rangle + k^2(\vec{r}) \langle \Psi(\vec{r}) \rangle = 0, \quad (3.9)$$

avec

$$k^2(\vec{r}) = k_0^2 + 4\pi G(\vec{r}). \quad (3.10)$$

L'équation (3.10) est connue sous le nom de relation de dispersion de Foldy. On a donc une description du nuage en termes de milieu effectif avec un vecteur d'onde  $k$ , fonction de la concentration en diffuseurs, ainsi que de leur paramètre de diffusion. Dans le cas d'un nuage de diffuseurs identiques, (3.10) devient :

$$k^2 = k_0^2 + 4\pi\mathcal{N}f, \quad (3.11)$$

où  $\mathcal{N}$ , qui dépend éventuellement de la position  $\vec{r}$ , désigne le nombre de diffuseurs par unité de volume. Le vecteur d'onde  $k$  est a priori un nombre complexe, dont la partie imaginaire est associée à l'atténuation de l'onde à la traversée du nuage. On définit la vitesse de phase effective  $v$  et l'atténuation  $A$  par :

$$v = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}, \quad (3.12a)$$

$$A = -20 \log(\exp(1)) \text{Im}(k). \quad (3.12b)$$

### 3.1.2 Cas particulier des bulles

La fonction de diffusion pour une bulle de rayon  $R_0$  s'écrit, au premier ordre en  $\omega R_0/c$  (voir l'équation (1.35)) :

$$f = \frac{R_0 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma^{tot}}. \quad (3.13)$$

Les figures 3.1a et 3.1b donnent un exemple de ce que la relation de Foldy prévoit (courbes en trait plein) pour la vitesse effective et l'atténuation dans un nuage de bulles de 1 mm de rayon contenant 125 000 bulles/m<sup>3</sup> (soit une fraction volumique en gaz de  $5,2 \cdot 10^{-4}$ ). On s'est limité à une fréquence maximale de 100 kHz ; au delà, il faut ajouter dans l'équation (3.13) les autres résonances des bulles (la suivante est à 200 kHz).

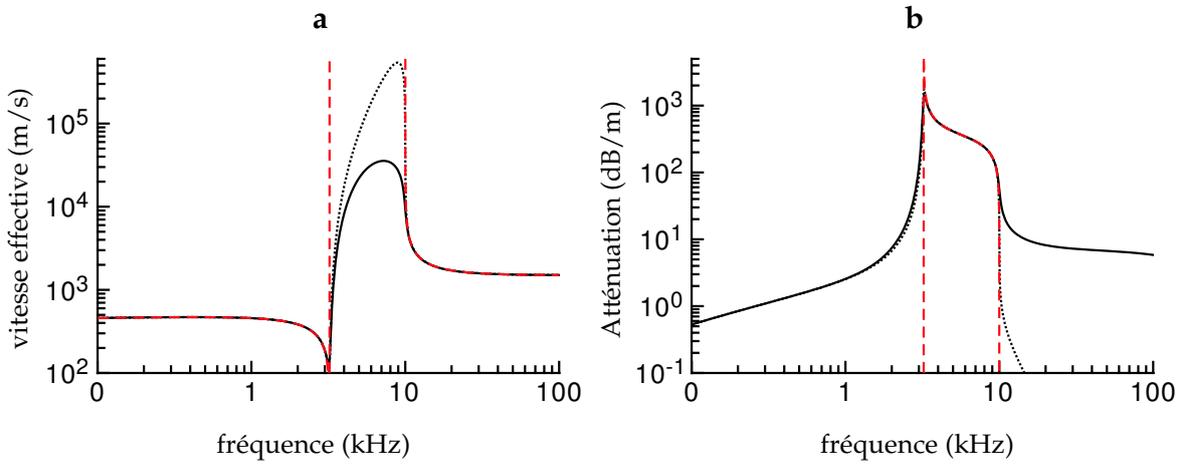


FIG. 3.1 – La vitesse de phase effective (figure a) et l'atténuation (figure b) en fonction de la fréquence dans un liquide contenant une fraction volumique de  $5,2 \cdot 10^{-4}$  en gaz avec des bulles de 1 mm de rayon. Les différentes courbes correspondent à différents cas d'amortissement des bulles : en trait plein, on tient compte des amortissements thermique et radiatif ; en pointillés, seul l'amortissement thermique intervient ; en trait hachuré, un modèle sans amortissement.

Manifestement, un nuage de bulles est un milieu dispersif. À basse fréquence, on a une vitesse de phase effective à peu près constante, de l'ordre de 500 m/s dans notre exemple (c'est la vitesse de Wood). Autour de 3 kHz, *i.e.* autour de la fréquence de résonance individuelle d'une bulle, apparaît un comportement très dispersif qui s'accompagne d'une forte atténuation. Pour les plus hautes fréquences, on retrouve une vitesse de l'ordre de 1500 m/s, c'est-à-dire la vitesse du son dans l'eau.

On a également tracé les courbes obtenues en modifiant l'expression de la dynamique de la bulle : sans amortissement radiatif (courbes en pointillés) et sans aucun amortissement (courbes en trait hachuré). Cela permet de distinguer les processus responsables de l'atténuation pour les trois domaines en fréquence qui se dessinent. À basse fréquence, l'amortissement est dominé par les effets thermiques ; tandis qu'à haute fréquence, c'est le rayonnement acoustique qui apporte la plus grande contribution à l'atténuation du son dans le liquide bulleux. Pour des fréquences intermédiaires, il est remarquable que le régime d'atténuation

forte subsiste malgré l'absence de mécanisme d'amortissement des bulles. Dans cette gamme de fréquences, l'atténuation est liée au processus que l'on a déjà rencontré (voir page 60) : les bulles oscillent toutes en opposition de phase par rapport à l'onde incidente, conduisant à une atténuation par interférence destructive.

On verra dans la section 3.2 que les mesures expérimentales de la vitesse et de l'atténuation du son dans un liquide bulleux sont bien décrites par la formule de Foldy pour les basses fréquences et les hautes fréquences. Pour le régime de forte atténuation, l'accord n'est pas bon lorsque l'on considère des nuages trop concentrés en bulle et/ou trop monodisperses.

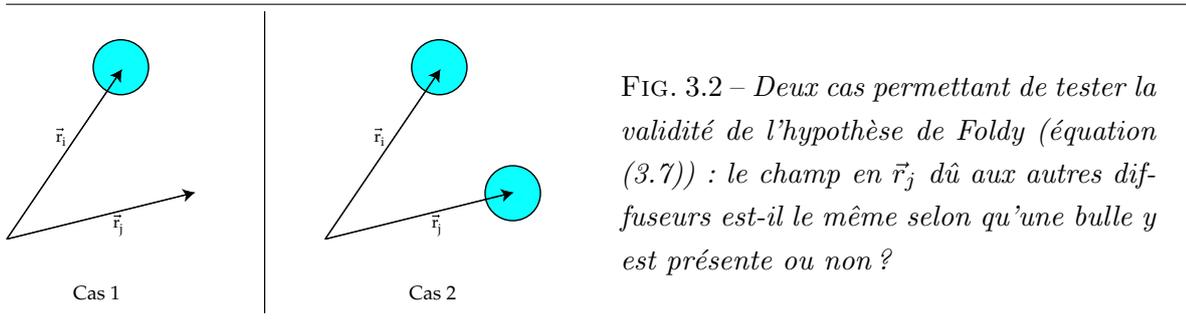
### 3.1.3 Les processus à boucles

$$\langle \Psi^j(\vec{r}_j) \rangle_j \simeq \langle \Psi(\vec{r}_j) \rangle.$$

On a alors supposé que l'action sur le  $j^{\text{ème}}$  diffuseur du champ total, moyenné sur toutes les configurations des autres diffuseurs, était égale à celle du champ total en  $\vec{r}_j$  (*i.e.* à la position du  $j^{\text{ème}}$  diffuseur, mais **sans** le diffuseur) moyenné sur toutes les configurations possibles desdits diffuseurs. Cette égalité suppose deux approximations :

- $\langle \Psi(\vec{r}_j) \rangle$  inclut la contribution des  $N$  diffuseurs alors que  $\langle \Psi^j(\vec{r}_j) \rangle_j$  n'en compte que  $N - 1$  ;
- cela suppose que la présence du  $j^{\text{ème}}$  diffuseur en  $\vec{r}_j$  ne modifie pas la réponse des diffuseurs environnants.

La première approximation entraîne une erreur relative en  $1/N$  et elle est donc tout à fait légitime si le nombre de diffuseurs est suffisant. Mais la seconde approximation est beaucoup moins évidente. Elle revient en fait à négliger tous les processus de diffusion multiple impliquant des boucles. On peut l'illustrer à l'aide d'un calcul très simple avec deux bulles. La figure 3.2 présente deux situations différentes pour lesquelles on va calculer le champ régnant en  $\vec{r}_j$ .



**Dans le cas 1**, il n'y a pas de diffuseur en  $\vec{r}_j$ . On calcule alors directement :

$$\Psi^j(\vec{r}_j) = \Psi_0(\vec{r}_j) + \Psi_0(\vec{r}_i) f_i \frac{e^{-i \frac{\omega |\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{c}}}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}, \quad (3.14)$$

où  $f_i$  est la fonction de diffusion de la bulle  $i$  (voir équation (3.13)). Le champ en  $\vec{r}_j$  est simplement la somme du champ incident et du champ diffusé par la bulle  $i$ .

Dans le cas 2, la présence de la bulle en  $\vec{r}_j$  va induire des termes supplémentaires de diffusion multiple. On a d'une part les termes commençant par  $\Psi_0(\vec{r}_j)$ , qui correspondent aux processus décrits par la figure 3.3a et qui s'écrivent :

$$\Psi_0(\vec{r}_j) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_i f_j)^k \left( \frac{e^{-2i\omega \frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{c}}}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} \right)^k \right], \quad (3.15)$$

et d'autre part les termes commençant par  $\Psi_0(\vec{r}_i)$  (figure 3.3b) :

$$\Psi_0(\vec{r}_i) f_i \frac{e^{-i\omega \frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{c}}}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \sum_{k=0}^{\infty} (f_i f_j)^k \left( \frac{e^{-2i\omega \frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{c}}}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} \right)^k. \quad (3.16)$$

En invoquant soit que  $\frac{f_i f_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} < 1$ , soit que  $\omega/c$  comporte une petite partie imaginaire (due à

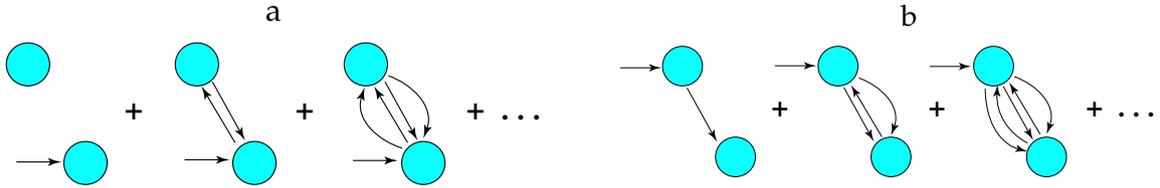


FIG. 3.3 – Champ total en  $\vec{r}_j$ . **a-** Les processus de diffusion multiple commençant par la bulle  $j$ . **b-** Ceux commençant par la bulle  $i$ .

l'atténuation du son dans l'eau pure), on peut faire converger les sommes dans les équations (3.15) et (3.16). On obtient alors l'expression :

$$\Psi^j(\vec{r}_j) = \Psi_0(\vec{r}_j) + \frac{\Psi_0(\vec{r}_j) f_i f_j \frac{e^{-2i\omega \frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{c}}}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} + \Psi_0(\vec{r}_i) f_i \frac{e^{-i\omega \frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{c}}}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}}{1 - f_i f_j \frac{e^{-2i\omega \frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}{c}}}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}}. \quad (3.17)$$

Les équations (3.14) et (3.17) sont a priori différentes. Toutefois, on note que si on peut négliger les termes en  $\frac{f_i f_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}$  dans (3.17), on retombe sur l'expression (3.14). On dispose donc d'un critère pour savoir si l'hypothèse de Foldy est valide ou non.

### Nuage monodisperse

Dans le cas d'un nuage monodisperse, on peut écrire ce critère sous la forme :

$$\frac{R_0}{d} \frac{\omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma^{tot}|} \ll 1,$$

où  $d$  désigne la distance moyenne entre bulles. C'est au voisinage de la résonance de Minnaert des bulles que ce critère est le plus difficile à remplir. Il faut alors en effet que

$$R_0/d \ll \delta_0. \quad (3.18)$$

Pour un nuage de bulles de rayon de 1 mm, cela impose une distance entre bulles très grande devant 27 mm, ce qui correspond à une fraction volumique en gaz très inférieure à  $2.10^{-4}$ .

En fait, ce problème de la prise en compte de la diffusion multiple est directement lié à nos considérations du chapitre 2 sur le couplage de deux bulles. On peut en effet s'amuser à développer l'expression (3.17) pour deux bulles identiques ( $f_i = f_j = f$ ) excitées avec le même champ extérieur ( $\Psi_0(\vec{r}_i) = \Psi_0(\vec{r}_j) = \Psi_0$ ). On obtient l'expression :

$$\begin{aligned}\Psi^j(\vec{r}_j) &= \Psi_0 \left[ 1 + \frac{f}{d} e^{-i\frac{\omega d}{c}} \frac{1}{1 - \frac{f}{d} e^{-i\frac{\omega d}{c}}} \right] \\ &= \Psi_0 + \Psi_0 \frac{f'}{d} e^{-i\frac{\omega d}{c}},\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\text{avec } f' = \frac{f}{1 - \frac{f}{d} e^{-i\frac{\omega d}{c}}} = \frac{R_0 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 (1 + \beta) - i\omega \Gamma^{th}},$$

en développant au premier ordre en  $\omega d/c$ . On retrouve donc une expression de la forme de celle issue d'un calcul sans boucles (équation (3.14)), mais en remplaçant la fonction de diffusion  $f$  de la bulle seule par la fonction de diffusion  $f'$  du mode symétrique d'un système de deux bulles. Ce résultat nous rappelle que l'on n'a pas la simple juxtaposition de deux bulles individuelles  $i$  et  $j$ , mais un système présentant deux modes : un mode symétrique et un mode antisymétrique. On peut alors être tenté de reprendre les calculs de Foldy en considérant comme diffuseurs non plus les bulles individuelles, mais des couples de bulles en mode symétrique. Cela ne fait bien sûr que déplacer le problème puisqu'on est aussitôt amené à se pencher sur la question des processus à boucles entre couples de bulles... Comme nous le verrons, c'est dans ce sens que Feuillade [Feu96] aborde le problème des processus à boucles.

### Nuage polydisperse

Pour les nuages polydispersés, les processus de diffusions multiples impliquant des boucles sont généralement moins importants. En effet, puisque deux bulles voisines  $i$  et  $j$  ont généralement des rayons différents,  $f_i$  et  $f_j$  ne prennent pas des valeurs importantes pour les mêmes fréquences et  $\frac{f_i f_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}$  reste faible. Encore une fois, cela rejoint les calculs du chapitre 2 sur un système de deux bulles : on a vu que le couplage était beaucoup moins efficace pour deux bulles de rayons différents.

## 3.2 Littérature sur la propagation en eau bulleuse

On propose ici une brève revue d'articles expérimentaux, théoriques et numériques abordant le sujet de la propagation du son dans un liquide bulleux. Cette revue n'est pas exhaustive, mais on espère n'avoir laissé de côté aucune contribution majeure.

### 3.2.1 Les articles expérimentaux

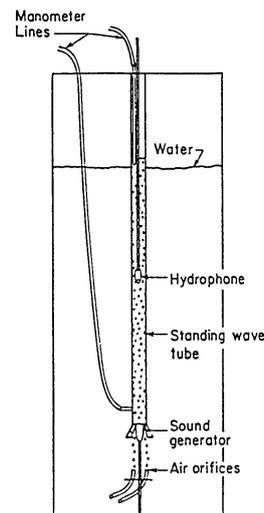
On distinguera deux types de contributions expérimentales. Certaines s'attachent à collecter des données concernant la vitesse effective et l'atténuation du son dans un liquide bulleux. D'autres concernent l'étude des fréquences de résonance de nuages de bulles.

### Vitesse et atténuation

Les travaux expérimentaux sur la propagation dans de l'eau bulleuse ne sont pas très nombreux. Pour en juger, il suffit de constater que pratiquement tous les articles proposant de nouveaux modèles les confrontent aux mêmes données expérimentales acquises par Silberman en 1957.

Le dispositif expérimental de **Silberman** [Sil57] est reproduit dans la figure 3.4. Il consiste en un long tube d'acier immergé dans un réservoir d'eau et alimenté en bulles par un système délivrant de l'air à un faible débit contrôlé. Le rayon des bulles est mesuré par l'analyse d'images. La fraction volumique de gaz est obtenue par mesure de la différence de pression entre le haut et le bas du tube. Pour la partie acoustique, un haut-parleur placé en bas du tube excite le milieu à une fréquence comprise entre 100 Hz et 10 kHz, et les mesures de pression sont réalisées par un hydrophone que l'on peut déplacer le long du tube. La vitesse de phase et l'atténuation sont mesurées en générant des ondes stationnaires dans le tube et en déterminant les positions des noeuds et des ventres de pression. Pour certaines fréquences, on a

FIG. 3.4 – *Le dispositif expérimental utilisé par Silberman. La mesure des positions et amplitudes des ventres de pression dans le tube permet de déterminer la vitesse de phase et l'atténuation en fonction de la fréquence. Cette figure est une reproduction de la figure 1 de l'article original de Silberman [Sil57].*



vu que la présence de bulles engendrait une forte atténuation. Lorsque le son est complètement atténué sur moins d'un quart de longueur d'onde, on ne peut plus mesurer de vitesse effective avec ce dispositif; par contre, on peut toujours évaluer l'atténuation. On a reproduit dans la figure 3.5 une série de mesures de l'atténuation correspondant à une fraction volumique de  $3,77 \cdot 10^{-4}$  pour des bulles de rayons de l'ordre de 1 mm. La courbe correspond à la prédiction théorique donnée par le modèle de Commander et Prosperetti [CP89], qui est, à peu de choses près, équivalent à celui de Foldy. On constate que le désaccord entre théorie et expérience est très marqué pour le régime de forte atténuation (à noter l'échelle logarithmique qui peut donner une impression trompeuse de bon accord) : le modèle prédit une atténuation plus forte que celle mesurée. D'autres comparaisons pour des fractions volumiques plus importantes confirment cette observation. Ce désaccord est généralement attribué aux effets de diffusion multiple évoqués précédemment.

D'autres expériences utilisant le même type de dispositif que Silberman ont été réalisées.

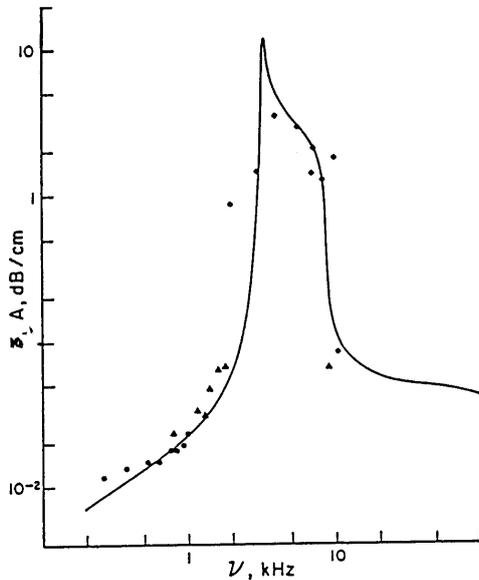


FIG. 3.5 – Comparaison entre les mesures et le modèle pour l'atténuation. La fraction volumique en bulles est de  $3,77 \cdot 10^{-4}$  et les rayons de 0,994 mm (diamants) et 1,07 mm (triangles et cercles). La courbe théorique est tracée pour un rayon de 0,994 mm. Cette figure est une reproduction de la figure 1 de l'article de Commander et Prosperetti [CP89].

Mais généralement, leur manque de précision concernant les rayons des bulles rendent leur interprétation difficile. Une liste détaillée peut être trouvée parmi les références de l'article de Commander et Prosperetti [CP89].

Une équipe dirigée par Ronald A. Roy développe depuis quelques années des expériences innovantes pour réaliser des mesures de vitesse de phase et d'atténuation dans les liquides bulleux. L'une de ces techniques consiste à remplacer l'hydrophone par un dispositif interférométrique mesurant le déplacement d'une membrane. Cela a permis de réaliser des mesures de vitesse de phase qui se révèlent être en accord avec le modèle théorique [CSR95]. Curieusement, ce résultat n'est jamais mentionné dans les articles théoriques postérieurs.

La seconde technique, développée plus récemment par **Wilson**, durant sa thèse<sup>1</sup> [Wil02], repose sur l'utilisation d'un tube à impédance. Il s'agit de déterminer le profil de pression le long d'un tube rempli d'un milieu d'impédance connue (ici de l'eau), mis en contact avec le milieu dont on veut déterminer l'impédance ; et de déduire de ce profil l'impédance du milieu testé. Cette technique présente le gros avantage, par rapport à l'expérience de Silberman, de rendre possible la mesure de la vitesse du son même en régime de forte atténuation, puisque l'on travaille en réflexion. Les tubes à impédance à air sont d'un usage très classique en acoustique, mais lorsque l'on remplace l'air par de l'eau, les choses se compliquent. Il faut en effet s'assurer que les parois soient suffisamment rigides pour que l'on puisse considérer que les ondes qui se propagent dans le tube sont planes. Pour un système air-acier (par exemple), cela ne pose pas de problème, mais cela est moins évident pour un système eau-acier. Wilson a donc utilisé un tube en acier ( $7970 \text{ kg/m}^3$ ) particulièrement épais : 2,54 cm de rayon interne pour 5,08 cm de rayon externe [WRC03].

La figure 3.6 donne un exemple de mesures obtenues par Wilson pour un nuage contenant

<sup>1</sup>Disponible sur internet : «<http://www.bu.edu/paclab/abm/diss.pdf/>».

une fraction volumique de  $3,3 \cdot 10^{-4}$  en bulles de rayons de l'ordre de 0,6 mm. Notons que les mesures sont exactement dans la gamme de fréquences où les données expérimentales faisaient défaut auparavant, c'est à dire autour de la fréquence de Minnaert d'une bulle individuelle. L'accord avec la théorie, représentée en trait plein sur la figure, est cette fois très bon pour

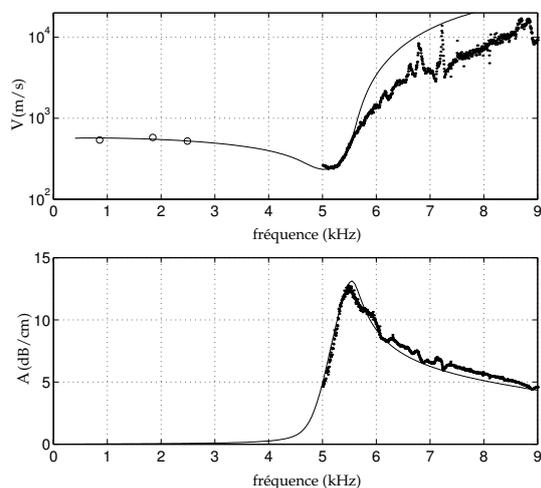


FIG. 3.6 – Mesures de la vitesse et de l'atténuation pour une fraction volumique de  $3,3 \cdot 10^{-4}$ . Les points sont issus d'expérience avec le tube à impédance et les cercles correspondent à des mesures du même type que celles de Silberman. En trait plein, les courbes théoriques obtenues en ajustant les paramètres de la répartition en rayons de bulles. Ces courbes correspondent à la figure 4.26 de la thèse de P.S. Wilson [Wil02], page 203.

l'atténuation mais mauvais pour la vitesse. Pour le désaccord sur la vitesse, l'auteur invoque la possibilité d'une limite de validité de l'hypothèse de parois rigides (voir [Wil02], pages 171 à 174).<sup>2</sup> Il faut également noter que les courbes théoriques tracées dans la figure 3.6 ne sont pas obtenues à partir des mesures de rayons des bulles mais en ajustant les 4 paramètres de la gaussienne tronquée utilisée pour décrire la répartition en rayon des bulles. L'usage d'un tube avec des parois suffisamment rigides a en effet un prix : l'acquisition d'images *in situ* n'est plus possible. Wilson pensait pouvoir étalonner son système d'injection à l'aide d'expériences dans un aquarium transparent. Mais le passage d'un réceptacle à un autre s'avère être source d'incertitude. Toutefois, l'écart entre les valeurs mesurées dans l'aquarium et celles nécessaires au bon ajustement de la courbe d'atténuation n'est jamais très important, laissant tout de même quelque crédit aux résultats. En outre, Wilson montre que si ses mesures de rayons et d'impédance ne sont pas compatibles en valeurs absolues, leurs variations temporelles sont elles tout à fait compatibles. En effet, les mesures de rayons révèlent un comportement non stationnaire de la production de bulles. Il est alors possible de comparer les prédictions théoriques et les mesures concernant les variations d'impédance liées à ces variations de rayon. L'accord se révèle satisfaisant, apportant une validation indirecte du modèle.

Alors que Silberman trouve des écarts significatifs avec la théorie pour des fractions volumiques allant de  $3,77 \cdot 10^{-4}$  à  $10^{-2}$ , les expériences de Wilson, qui vont jusqu'à des fractions volumiques de  $5,4 \cdot 10^{-4}$ , conduisent toujours à un bon accord entre théorie et expérience pour l'atténuation. Alors, le modèle de Foldy est-il finalement suffisant pour décrire la propagation en eau bulleuse, même pour des fréquences proches de la fréquence de Minnaert des bulles ? La concision des conclusions de Wilson à ce propos est assez surprenante : l'auteur se contente

<sup>2</sup>La raison pour laquelle cela affecte les mesures de vitesse mais pas celle d'atténuation n'est pas donnée.

de constater un accord entre la théorie de Foldy et ses expériences, sans s'appesantir sur le caractère inattendu de ce résultat...

Pourtant, si l'on en croit le critère simple que l'on a établi pour un système monodisperse de bulles (équation (3.18)), les processus à boucles devraient se faire sentir dans les expériences de Wilson lorsque la fraction volumique devient de l'ordre de  $4.10^{-4}$ . On a vu que la polydispersité jouait un rôle important. Mais, à notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de critère pour évaluer l'importance des processus à boucles dans un nuage polydispersé. L'explication de la différence entre les résultats de Silberman et de Wilson réside peut-être là, Silberman laissant entendre que ses nuages sont parfaitement monodispersés.<sup>3</sup> Un autre point doit être souligné : le tube utilisé par Silberman avait une épaisseur de 6,35 mm pour un diamètre interne de 7,5 cm, ce qui rend l'hypothèse d'un tube à parois rigides sans doute discutable.

On voit que la question est encore ouverte et qu'elle nécessite d'autres expériences relevant le défi de réaliser des mesures de rayons précises et *in situ*, avec un dispositif permettant d'acquérir des données acoustiques dans une gamme de fréquence correspondant à une forte atténuation, en contrôlant bien les effets de paroi.

### Résonances de nuages de bulles

On a longtemps considéré que la présence de bulles dans les océans était marginale. Mais de nombreux phénomènes contribuent à la création de bulles, parmi lesquels le plus important est l'entraînement d'air par les vagues lorsqu'elles se brisent. La présence de bulles dans l'océan a alors des conséquences sur la propagation du son. Mais les bulles ainsi créées sont généralement hors équilibre et elles participent donc activement au bruit de fond ambiant de l'océan.

Vers la fin des années 60, des mesures révèlent une dépendance entre le vent et le bruit de fond océanique pour des fréquences de l'ordre de quelques centaines de hertz. La nature de la source de cette émission acoustique basse fréquence restait inconnue. Si les bulles semblaient être de bonnes candidates, on comprenait mal comment une bulle pouvait émettre un son à des fréquences si basses : si on en croit la formule de Minnaert, il faut des bulles de 1 cm de rayon pour obtenir une fréquence de l'ordre de 300 Hz. Dans les années 80, Carey [CB85] et Prosperetti [Pro85] proposent, indépendamment, une explication basée sur les oscillations collectives des bulles. Leur argument consiste à invoquer le fait bien connu qu'un système d'oscillateurs couplés possède des modes dont les fréquences sont substantiellement plus basses que celle des oscillateurs individuels.

Des expériences avec des nuages cylindriques créés en laboratoire [YCPL91, NRC<sup>+</sup>94], ou en forme de goutte dans un lac [RCN<sup>+</sup>92] ont confirmé l'existence de résonances basse fréquence. Les fréquences de résonance sont d'ailleurs bien prédites par un modèle de milieu effectif : on considère que le nuage est un milieu dont l'indice est fonction de la fraction volumique de gaz (formule de Wood) et on obtient des résonances de type Fabry-Pérot.

Avec son fort pouvoir diffusant, le nuage de bulles est également à l'étude pour être utilisé comme une cible sous-marine peu coûteuse, pour la calibration des sonars par exemple. On

---

<sup>3</sup>«It should be observed that each experiment was made with a single bubble size [...]». Mais Silberman ne fait pas mention de la précision de ses mesures de rayon.

peut en effet réaliser des nuages stables, et flottant entre deux eaux, en piégeant des bulles dans un gel [HRC95].

### 3.2.2 Les articles théoriques

Les contributions théoriques sur la propagation dans un liquide bulleux sont, elles, très nombreuses. On a déjà fait une revue détaillée d'une partie du contenu de l'article de Foldy [Fol45] qui constitue la référence la plus souvent citée. Le plupart des recherches théoriques partent en effet des résultats de Foldy et cherchent à les compléter. Parmi les contributions dans cette veine, citons celles de Lax [Lax51] et de Waterman et Truell [WT61]. Le principal résultat que nous retiendrons de cette dernière référence est l'élaboration d'un critère de validité de l'hypothèse de Foldy (égalité (3.7)) qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{4\pi\mathcal{N}|f|^2}{k_0} \ll 1,$$

où  $\mathcal{N}$  désigne le nombre de bulles par unité de volume,  $f$  la fonction de diffusion d'une bulle et  $k_0$  le vecteur d'onde dans le liquide pur. Ce critère est établi à partir de considérations semblables à celles que l'on a faites pour un système de deux bulles (voir page 75), mais il considère l'influence de plusieurs bulles voisines. Notons qu'en conséquence, il est plus sévère que notre critère.

Un autre modèle, développé par Cafilisch et al [CMPT85], incorpore les non-linéarités dans la relation de dispersion. C'est cette théorie que Prosperetti et Commander utilisent dans leur article de comparaison entre théorie et expériences [CP89]. Mais comme la comparaison se fait avec les équations linéarisées, le modèle est en fait équivalent à celui de Foldy, avec une amélioration significative concernant la description de la dynamique de la bulle (particulièrement des effets thermiques). On a déjà montré une courbe issue de cet article (voir figure 3.5). Prosperetti et Commander tirent de leur comparaison la conclusion suivante : *«Les données concernant la vitesse de phase, l'atténuation et le coefficient de transmission à travers une couche de fluide bulleux. Il apparaît que le modèle fonctionne très bien jusqu'à des fractions volumiques de 1% – 2% pourvu que les résonances des bulles jouent un rôle négligeable. C'est le cas pour un mélange de nombreuses tailles de bulles ou, quand seulement un faible nombre de rayons est présent, en dehors des régions de fréquences de résonance pour ces tailles. En présence d'effets de résonance, l'exactitude du modèle est sévèrement affaiblie.»*

Abordons maintenant les articles essayant de résoudre le problème de la prise en compte des processus de diffusion à boucles. On peut grossièrement les classer suivant 3 catégories, chaque catégorie correspondant à une approche différente du problème.

Feuillade est l'un des premiers à prétendre apporter une correction à la formule de Foldy qui tienne compte de tous les ordres de diffusion [Feu96]. L'intérêt de Feuillade pour la diffusion multiple dans les nuages de bulles provient de son étude de la diffusion du son par des bancs de poissons. Un modèle assez performant pour décrire la diffusion d'une onde sonore par un poisson consiste en effet à considérer que ce dernier se comporte, du point de vue de l'acoustique, comme une bulle. Une assemblée de poissons étant souvent constituée d'individus très rapprochés les uns des autres, Feuillade devait faire face à des effets de diffusion multiple

d'ordre élevé. Sa façon d'appréhender le problème part d'une étude proche de celle que l'on a menée dans le chapitre 2 : Feuillade étudie tout d'abord les propriétés de quelques bulles couplées [Feu95]. Outre la prédiction d'un phénomène de superrésonance, il tire de ses calculs le constat suivant : une assemblée de bulles excitée par une onde sonore répond, pour une très grande gamme de fréquences, par une oscillation en phase des bulles. Autrement dit, on n'excite généralement que le mode fondamental. Feuillade modifie alors la relation de dispersion de Foldy en introduisant une réponse de toutes les bulles en phase. Devant les divergences qu'il obtient, il invoque ensuite un argument de portée effective des interactions : les bulles lointaines sentent peu leur influence mutuelle puisqu'elles sont dans un milieu, le liquide bulleux, qui atténue fortement le son. L'argument n'est pas très convaincant et le modèle de Feuillade est d'ailleurs très controversé [Ye97, Feu97, Hen99, Feu02, Hen02].

Un deuxième angle d'attaque du problème est le recours à des méthodes *diagrammatiques*, fréquemment employées en physique statistique ou en physique des particules. Ye et Ding [YD95] calculent la correction à la relation de Foldy lorsque l'on prend en compte les diagrammes à une boucle. Ils obtiennent la nouvelle relation :

$$k^2 = k_0^2 + 4\pi\mathcal{N}F, \quad \text{avec} \quad F = f + i\frac{4\pi\mathcal{N}f^3}{2k_0}.$$

Il s'agit donc de remplacer la fonction de diffusion  $f$  d'une bulle par une fonction effective  $F$  qui tient compte des processus à une boucle. Cette nouvelle relation de dispersion donne, entre autres, une atténuation plus forte du son dans un liquide bulleux. La correction va donc dans le mauvais sens pour expliquer les données expérimentales. Mais Ye et Ding ne prétendent pas que la seule prise en compte des processus à une seule boucle soit suffisante. Il faudrait mener à bien un travail prenant tous les diagrammes possibles en compte. Il semblerait, à la lecture d'articles postérieurs de Ye, que ce travail n'ait pas pu être mené à bien. Henyey [Hen99] reprend l'étude diagrammatique. Sa prise en compte des processus à boucles va plus loin que celle de ses prédécesseurs. Pour faire simple, on peut dire qu'il somme tous les diagrammes du type de ceux de la figure 3.3a, mais qu'il néglige ceux de la figure 3.3b. Il obtient alors :

$$F = f + i\frac{4\pi\mathcal{N}fF^2}{k_0 + k}, \quad (3.20)$$

résultat qui redonne bien celui de Ye et Ding si on développe à l'ordre 3 en  $f$ . L'équation (3.20) a une interprétation simple intéressante. Elle consiste en fait à remplacer  $k_0$  par  $k$  dans l'expression de l'amortissement radiatif de la bulle. On a en effet montré (voir page 19 par exemple) qu'un phénomène responsable de l'amortissement des oscillations d'une bulle était le rayonnement acoustique. Cela se traduit par un taux d'amortissement  $\Gamma^{rad}$  que l'on peut écrire sous la forme :

$$\Gamma^{rad} = \frac{R_0\omega^2}{c} = R_0\omega k_0.$$

Le résultat de Henyey consiste donc à remplacer  $k_0$  par  $k$  : la bulle ne rayonne pas dans le liquide pur mais dans un milieu effectif. Considérant que, pour la plupart des bulles, l'amortissement est dominé par des effets thermiques et non pas radiatifs, Henyey en conclut que son expression donne des résultats très proches de ceux de Foldy. Cet argument est intrigant

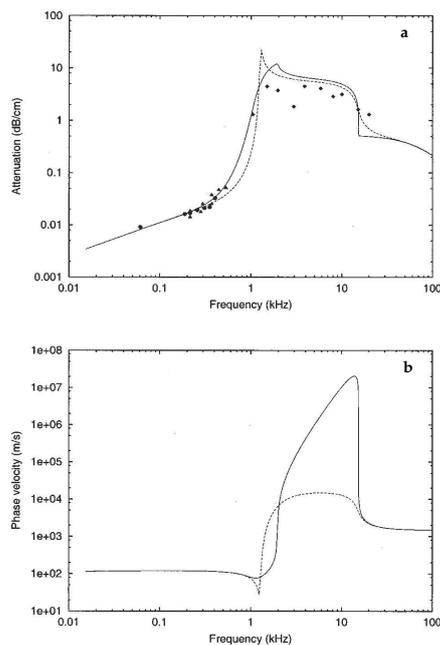


FIG. 3.7 – Kargl et Henyey proposent un modèle dans lequel les bulles ne rayonnent pas dans l'eau pure mais dans le milieu effectif. La relation de dispersion peut être tracée par itération. **a-** Atténuation en fonction de la fréquence d'après la formule de Foldy (pointillés) et la nouvelle relation (trait plein) pour un milieu comprenant une fraction volumique de 1% en bulles de 2,68 mm de rayon (expérience de Silberman). **b-** Vitesse de phase en fonction de la fréquence pour le même milieu. Les courbes sont extraites de la figure 1 de l'article de Kargl [Kar02].

parce que le  $k$  du milieu effectif est très différent de  $k_0$  : il comporte une partie imaginaire ! On peut donc s'attendre à des effets très forts lorsque l'on substitue l'un à l'autre.

Kargl [Kar02] aboutit au même résultat que Henyey mais par une méthode différente. Il constate que la relation de dispersion obtenue est effectivement très différente de celle de Foldy. L'approche de Kargl consiste à reprendre les calculs de Commander et Prosperetti, mais en considérant qu'une bulle n'oscille pas dans de l'eau pure, mais dans un milieu effectif caractérisé par un nombre d'onde  $k$ . Ainsi, toutes les expressions dans la dynamique de la bulle faisant intervenir l'eau doivent être modifiées. Pour la fréquence de Minnaert, l'effet est faible puisqu'il s'agit de remplacer la masse volumique de l'eau par celle du milieu effectif, qui est à peu de chose près la même. Les taux d'amortissement thermique et visqueux sont eux aussi très peu affectés. Mais le taux d'amortissement radiatif s'en trouve, lui, grandement modifié. On a reproduit la figure 1 de l'article de Kargl où il compare sa nouvelle théorie à celle de Foldy, pour des données expérimentales de Silberman (avec une fraction volumique de 1%). Le résultat sur l'atténuation est présenté figure 3.7a. La relation de Kargl a le mérite d'éliminer le pic d'atténuation que fait apparaître la relation de Foldy. Mais dans l'ensemble de la zone correspondant à une forte atténuation, l'atténuation reste plus grande que celle mesurée, et même plus grande que celle prévue par Foldy. Quant à la vitesse (figure 3.7b), elle suit, toujours dans la zone de forte atténuation, une courbe très différente de celle de Foldy. En outre, si l'on se réfère à Henyey, qui trouve le même résultat, la nouvelle relation de dispersion ne prend que partiellement en compte les processus de diffusion à boucles.

La recherche d'une relation de dispersion pour la propagation dans un liquide bulleux ne paraît donc pas terminée. Mais tous les articles cités font surtout apparaître le grand manque de données expérimentales auxquelles confronter les modèles.

### 3.2.3 Les articles “numériques”

Le problème de la propagation d'une onde dans un liquide bulleux peut également être abordé par une approche numérique. Ruffa [Ruf92] utilise une analyse en éléments finis pour obtenir la vitesse de phase et l'atténuation en fonction de la fréquence dans un milieu bulleux infini. Cela suppose bien sûr de s'intéresser à une organisation des bulles en cristal, et pas à une assemblée désordonnée. Mais tant que la longueur d'onde reste grande devant la distance moyenne entre bulles, l'ordre n'a pas d'influence sur la relation de dispersion. L'article comporte une comparaison avec une expérience de Silberman qui s'avère bonne, malgré une sous-estimation de l'atténuation en régime de forte atténuation.

L'intérêt des numériciens pour les bulles semble surtout lié aux possibilités qu'elles offrent d'étudier la “localisation”. Découverte par Anderson pour les électrons, la localisation est le phénomène par lequel une onde se trouve piégée dans un milieu désordonné. On n'entreprendra pas ici une revue détaillée des articles sur ce sujet, la localisation n'étant pas le thème de cette thèse. Notons simplement que l'existence, dans les milieux bulleux, de bandes interdites qui survivent en présence de désordre est souvent analysée comme un signe de localisation... Ye a mis en évidence numériquement ce qu'il a appelé des transitions de phase [YA98, YHH00, YH01]. D'autres articles abordent, avec des outils numériques venus de la physique du solide, le calcul des bandes interdites dans des cristaux de bulles [KDRD98, KPE00].

## 3.3 Onde de bulles

On parlera d'onde de bulles par opposition aux ondes sonores. Les calculs que nous avons exposés jusqu'ici dans ce chapitre portaient tous de l'idée suivante : lorsque l'on introduit des bulles dans un liquide, on modifie la propagation du son dans le milieu. C'est se placer du point de vue du son... On va maintenant se placer du point de vue des bulles. On considère un milieu infini formé d'inclusions gazeuses dans un liquide **incompressible**. Des ondes, qu'on nommera “ondes de bulles”, peuvent se propager dans un tel milieu. L'idée est alors de regarder dans quelle mesure l'introduction de la compressibilité de l'eau modifie la propagation de ces ondes.

Cette démarche est motivée par deux résultats que nous avons précédemment obtenus. On a pu constater d'une part, lors de notre étude de nuages de bulles, que la compressibilité de l'eau pouvait être négligée dans un grand nombre de cas. Le second résultat concerne le calcul complet de la diffusion multiple pour un système de deux bulles identiques excitées avec le même champ incident, page 75. Ce calcul nous a conduit à retrouver le mode symétrique déjà rencontré. Autrement dit, il y a deux façons de prendre en compte la diffusion multiple. La première consiste à considérer que les bulles répondent à un champ de pression extérieur avec une fonction de diffusion  $f$  donnée, qui dépend du rayon de la bulle. Il faut alors s'atteler à exprimer correctement ledit champ extérieur, en tenant compte de tous les aller-retours de l'onde entre les bulles. La seconde façon consiste à ne pas avoir d'a priori sur la fonction de diffusion des bulles. Chaque bulle est soumise à un champ de pression incident. Leurs réponses vont se manifester par des oscillations d'amplitude  $\xi_n$  qu'il faut déterminer. C'est la détermination des  $\xi_n$  qui conduit alors à tenir compte de toutes les diffusions multiples. La

différence d'efficacité des deux méthodes apparaît nettement pour le système de deux bulles : la première nécessite la sommation d'une infinité de processus de diffusion, tandis que la seconde est quasi immédiate...

On se propose donc de regarder dans quelle mesure la seconde méthode peut répondre au problème de la propagation dans un liquide bulleux, en tenant compte de tous les ordres de diffusion multiple.

### 3.3.1 Chaîne linéaire de bulles

Commençons par considérer une chaîne infinie de bulles. On va appliquer la même démarche que lors du calcul classique de la relation de dispersion pour une chaîne de masses et de ressorts.<sup>4</sup> La grande différence sera ici que les bulles n'interagissent pas uniquement avec leur plus proches voisines. On considère une excitation en  $e^{i\omega t}$  et note  $\xi_n$  l'amplitude complexe de la variation de rayon de la bulle  $n$ . Les bulles sont toutes identiques, de rayon  $R_0$ , et la chaîne est parfaitement ordonnée, avec une distance  $d$  entre plus proches voisines (voir la figure 3.8). On a alors un système présentant une invariance par translation et on peut chercher les

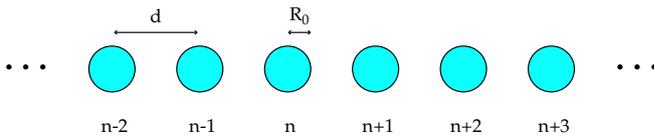


FIG. 3.8 – Une chaîne infinie de bulles de rayon  $R_0$ , avec une distance  $d$  entre plus proches voisines.

$\xi_n$  sous la forme

$$\xi_n = \xi_0 e^{-iknd}, \quad (3.21)$$

avec un nombre d'onde  $k$  qui dépend de  $\omega$  et que l'on cherche à déterminer. L'expression de la continuité de la pression s'écrit donc, pour chaque bulle, sous la forme (en utilisant les équations (1.12) et (1.17)) :

$$R_0 \omega^2 \frac{e^{i\frac{\omega R_0}{c}}}{1 + i\frac{\omega R_0}{c}} \left[ \frac{e^{-i\frac{\omega R_0}{c}}}{R_0} + \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-i\frac{\omega nd}{c}}}{nd} (e^{iknd} + e^{-iknd}) \right] = \omega_0^2 + i\omega \Gamma^{th}. \quad (3.22)$$

Il nous faut calculer la somme infinie qui apparaît dans l'équation (3.22), en espérant qu'elle soit convergente. Considérons la somme finie :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{e^{inx}}{n}.$$

On reconnaît le développement d'un logarithme et on trouve :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n} = -\ln(1 - e^{ix}).$$

<sup>4</sup>Voir par exemple Ashcroft et Mermin [AM76] page 430 et suivantes.

En appliquant ce résultat à la somme de (3.22), on calcule :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-i\frac{\omega nd}{c}}}{nd} \left( e^{iknd} + e^{-iknd} \right) = i\frac{\omega}{c} - \frac{\ln \left( 2 \cos\left(\frac{\omega d}{c}\right) - 2 \cos(kd) \right)}{d}.$$

Tous calculs faits, on obtient la relation de dispersion pour la chaîne infinie de bulles :

$$\cos(kd) = \cos(k_0 d) - \frac{1}{2} \exp \left( \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega \Gamma^{th}}{\beta \omega^2} \right), \quad (3.23)$$

avec  $k_0$  le nombre d'onde dans l'eau pure :  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ . On peut tirer de cette relation de dispersion une vitesse de phase et une atténuation pour les ondes de bulles se propageant sur la chaîne. Limitons nous pour l'instant à un cas de bulles parfaites, pour lesquelles  $\Gamma^{th} = 0$ . La figure 3.9 présente la relation de dispersion de cette chaîne parfaite en faisant apparaître le nombre d'onde  $k$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . Les trois courbes représentées correspondent

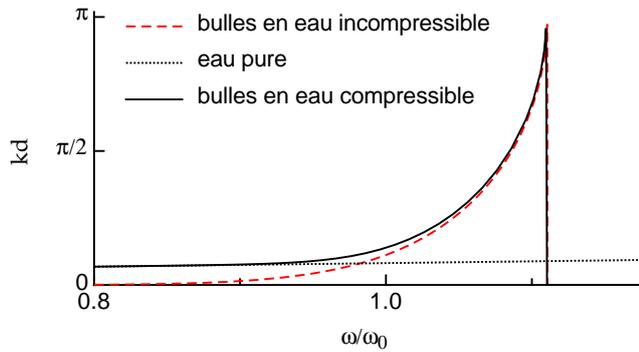


FIG. 3.9 – Relation de dispersion pour une chaîne de bulles. À basse fréquence, l'onde qui se propage sur la chaîne est de type "onde sonore". Pour des fréquences intermédiaires, on a des "ondes de bulles". Au delà d'une fréquence de coupure, la propagation n'est plus possible.

à l'équation (3.23) pour trois cas différents : de l'eau pure sans bulles (pointillés), une chaîne infinie de bulles dans de l'eau incompressible (trait hachuré) et une chaîne infinie de bulles dans de l'eau compressible (trait plein). La comparaison de ces trois courbes permet de faire apparaître deux domaines distincts dans la propagation d'une onde le long d'une chaîne de bulle dans de l'eau compressible : à basse fréquence, ce sont les effets liés à la compressibilité de l'eau qui dominent, mais à plus haute fréquence, on a des ondes de bulles "pures". La relation de dispersion présente également une fréquence de coupure haute, au delà de laquelle la propagation n'est plus possible.

### Le passage à la chaîne finie

Dans le cas de la chaîne de masses et de ressort, on peut aisément tirer de la relation de dispersion pour une chaîne infinie les modes d'une chaîne finie de  $N$  éléments. Il suffit d'imposer des conditions particulières sur les comportements des masses 0 et  $N + 1$ . Ainsi, les  $N$  modes d'une chaîne finie se lisent sur la courbe de la relation de dispersion de la chaîne infinie. Pour la chaîne de bulles, cette démarche n'est malheureusement pas possible. La raison en est simple : les bulles n'interagissent pas uniquement avec leur plus proches voisines. Il n'y a donc pas de méthode simple pour déterminer, à l'aide de la courbe de la figure 3.9, où se situent les modes

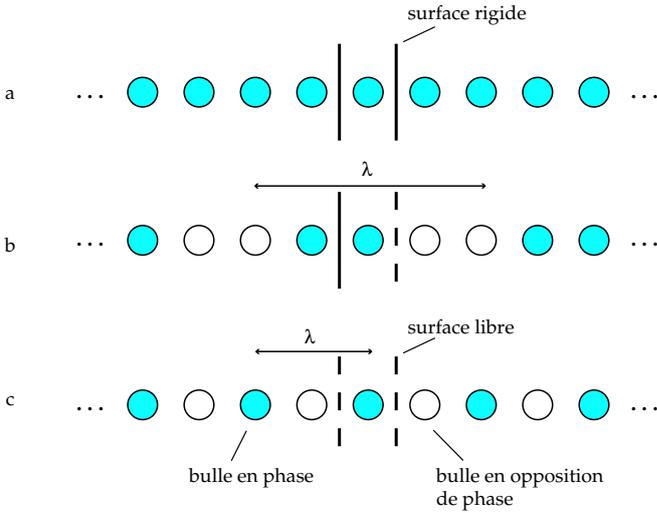


FIG. 3.10 – Exemples de configurations se calculant à l’aide de la chaîne infinie. **a-** Une bulle entre deux surfaces rigides correspond à la chaîne infinie avec une longueur d’onde infinie. **b-** Une bulle entre une surface rigide et une libre correspond à la chaîne infinie avec  $\lambda = 4d$ . **c-** Une bulle entre deux surfaces libres correspond à la chaîne infinie avec  $\lambda = 2d$ .

d’un système de deux bulles par exemple. En revanche, on peut utiliser avec profit la méthode des images pour résoudre d’autres problèmes. La figure 3.10 en donne quelques illustrations. Le cas d’une bulle placée à mi-distance de deux parois parfaitement rigides par exemple (figure 3.10a), constitue une chaîne infinie avec une longueur d’onde infinie ( $k = 0$ ) : sa pulsation propre est nulle. Pour une bulle à mi-distance d’une surface rigide et d’une surface libre, sa pulsation propre correspond à une chaîne infinie avec une longueur d’onde de  $4d$  (figure 3.10b). Quant au cas d’une bulle entre deux surfaces libres, il correspond à une longueur d’onde de  $2d$  (figure 3.10c) et c’est le dernier mode qui se propage sur la chaîne infinie, pour une fréquence de coupure égale à  $\frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\beta \ln(2)}}$ .

Si la courbe de la figure 3.9 ne permet pas de trouver les modes d’une chaîne finie en eau infinie, elle permet en revanche de résoudre des problèmes de bulles en milieu confiné. Considérons une chaîne de  $N$  bulles, avec une distance  $d$  entre plus proches voisines, et plaçons des surfaces infinies, par exemple toutes les deux libres, à des distances  $d/2$  de la première et de la dernière bulle (figure 3.11). Notons  $x$  la position le long de la chaîne et prenons pour origine la surface de gauche. Les bulles sont à des positions  $x_n = (\frac{1}{2} + n)d$  et la surface de droite est en  $x = Nd$ . Pour satisfaire les conditions de surpressions nulles sur les deux surfaces, on sait qu’il faut que les bulles et leurs images vérifient :

$$\xi(x) = -\xi(-x),$$

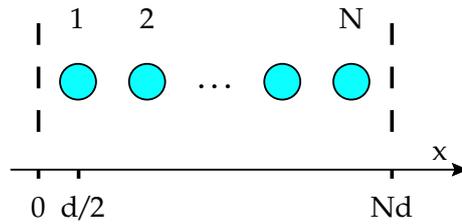
et  $\xi(x) = -\xi(2Nd - x).$

Ces deux conditions sont bien remplies si on prend une solution en  $\sin(kx)$ , avec  $k$  tel que  $2kNd = 2n\pi$ , où  $n$  est un entier naturel. On a donc  $N$  nombres d’onde qui conviennent :

$$k_n = \frac{n\pi}{Nd} \quad \text{avec} \quad 1 \leq n \leq N.$$

Remarquons que l’on retrouve bien le mode de la figure 3.10c pour  $N = 1$ .

FIG. 3.11 – Une chaîne finie de  $N$  bulles avec des surfaces libres de part et d'autre.



### La convergence

Pour obtenir la relation de dispersion, nous avons implicitement supposé que les séries qui apparaissent dans l'équation (3.22) étaient convergentes. Pour que cela soit vrai, il faut que les termes  $k_0 - k$  et  $k_0 + k$  comportent tous deux une partie imaginaire non nulle et négative. Si on invoque une atténuation du son lors de sa propagation dans l'eau pure,  $k_0$  comportera la petite partie imaginaire négative nécessaire. Mais il faut alors que l'atténuation due aux bulles ne soit pas plus forte. On peut résumer le problème de la façon suivante. On s'est intéressé à une onde plane se propageant de gauche à droite sur la chaîne (voir équation (3.21)). Considérant une bulle de la chaîne, on a pris en compte les pressions qu'engendraient sur elle l'ensemble de toutes les autres bulles. Le nombre de bulles étant infini et le couplage entre bulles étant en  $1/r$ , la somme de toutes les pressions est a priori divergente. Toutefois, en ajoutant de l'atténuation, on peut considérer que les bulles très lointaines ne participent pas au couplage, et l'intégrale devient convergente. Mais si on s'autorise une atténuation due aux bulles, que ce soit en tenant compte de l'amortissement thermique ou en considérant des fréquences supérieures à la fréquence de coupure haute, la convergence est perdue.

L'équation (3.23) n'est donc légitime que dans le cas de bulles parfaites, *i.e.* sans source d'amortissement. Et il faut se restreindre à des fréquences inférieures à la fréquence de coupure : les ondes évanescentes que l'on attend après cette fréquence "ne sont pas physiques". Cette tentative de détermination d'une relation de dispersion est donc un semi-échec. Essayons toutefois d'appliquer la même méthode à un système tridimensionnel. On constatera que nos problèmes de séries divergentes persistent. Mais si on les néglige, on retrouve la relation de Foldy.

### 3.3.2 Milieu tridimensionnel

Considérons donc cette fois un milieu infini d'eau pure contenant une infinité de bulles identiques. On va s'intéresser à deux cas : un milieu désordonné et un cristal de bulles.

#### Milieu désordonné

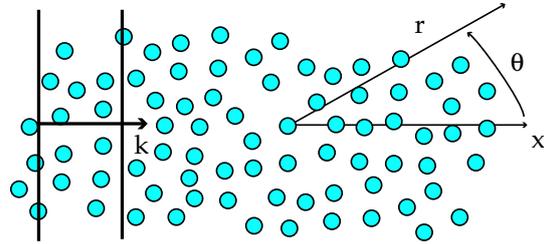
Le milieu étant supposé homogène, on peut s'intéresser à une bulle en particulier sans perte de généralité. On l'appelle bulle 0 et on suppose qu'elle oscille en  $\xi_0 e^{i\omega t}$ . En notant  $\xi_n$  l'amplitude complexe des oscillations de la bulle  $n$ , la continuité de la pression à la surface de

la bulle 0 s'écrit, de façon analogue à (3.22) :

$$\omega^2 \left( \xi_0 + R_0 e^{i\frac{\omega R_0}{c}} \sum_{n \neq 0} \xi_n \frac{e^{i\frac{\omega r_n}{c}}}{r_n} \right) = (\omega_0^2 + i\omega\Gamma^{th})(1 + i\frac{\omega R_0}{c})\xi_0, \quad (3.24)$$

où  $r_n$  est la distance entre la bulle 0 et la bulle  $n$ . On va considérer une onde plane suivant l'axe  $x$  :  $\xi_n = \xi_0 e^{-ikx_n}$ . Cela se justifierait parfaitement pour un nuage cristallin. Ici, le désordre nous fait perdre la stricte invariance par translation et les vrais modes du milieu s'écartent sans doute de l'onde plane. Mais pour des longueurs d'onde grandes devant la distance caractéristique entre bulles, on peut considérer que l'effet du désordre est suffisamment faible pour que des ondes planes se propagent. Notons  $S$  La somme à calculer dans (3.24) :

FIG. 3.12 – Propagation d'une onde plane dans un milieu désordonné de bulles. On utilise les coordonnées sphériques, avec pour origine la bulle 0.



$$S = \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-i(\frac{\omega r_n}{c} + kx_n)}}{r_n}.$$

Évaluons cette somme en passant à la limite d'une distribution continue de bulles. Ce passage à la limite continue peut être vu comme l'équivalent de la moyenne sur les configurations chez Foldy. On a alors, pour  $\mathcal{N}$  bulles par unité de volume :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi \int_a^{+\infty} 2\pi r^2 dr \sin\theta d\theta \mathcal{N} \frac{e^{-i(k_0 + k \cos\theta)r}}{r} \\ &= \frac{4\pi\mathcal{N}}{k^2 - k_0^2} \frac{\cos(ka) + i\frac{k_0}{k} \sin(ka)}{\cos(ka) + i \sin(ka)}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

où on a introduit la borne inférieure d'intégration  $a$  pour tenir compte de la distance minimale à laquelle on peut trouver une bulle :  $a = 2R_0$ . Remarquons que, comme pour la chaîne linéaire de bulles, la convergence de l'intégrale nécessite de supposer une légère atténuation du son. Et on rencontre le même problème de divergence si on tient compte de l'atténuation supplémentaire due aux bulles. Si on injecte malgré tout (3.25) dans (3.24), on obtient (en développant au premier ordre en  $k_0 R_0$ ) :

$$k^2 = k_0^2 + 4\pi\mathcal{N} \frac{R_0 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega(\Gamma^{th} + \Gamma^{rad})} \frac{\cos(ka) + i\frac{k_0}{k} \sin(ka)}{\cos(ka) + i \sin(ka)}. \quad (3.26)$$

On retrouve donc, à un facteur multiplicatif près (qui est toujours de l'ordre de 1), la relation de Foldy. Comme pour la chaîne de bulles, traçons le nombre d'onde en fonction de la pulsation (figure 3.13), en négligeant les termes d'amortissement des bulles. On trouve de nouveau une relation de dispersion qui résulte d'un couplage entre les ondes sonores dans l'eau pure

et les ondes de bulles dans de l'eau incompressible. À basse fréquence, la compressibilité de l'eau influe d'ailleurs très peu sur la valeur de  $k$  : jusqu'à la fréquence de Minnaert d'une bulle individuelle, les ondes qui se propagent dans le milieu sont des ondes de bulles. Au delà de de la fréquence de Minnaert, on entre dans un régime d'ondes évanescentes : l'atténuation est forte. On ressort de ce régime pour une pulsation égale à  $\sqrt{\omega_0^2 + 4\pi\mathcal{N}c^2R_0}$  (de l'ordre de 10 kHz sur la figure) pour entrer dans une gamme de fréquences où la propagation est due à la compressibilité de l'eau, avec une perturbation apportée par la présence des bulles. Remarquons

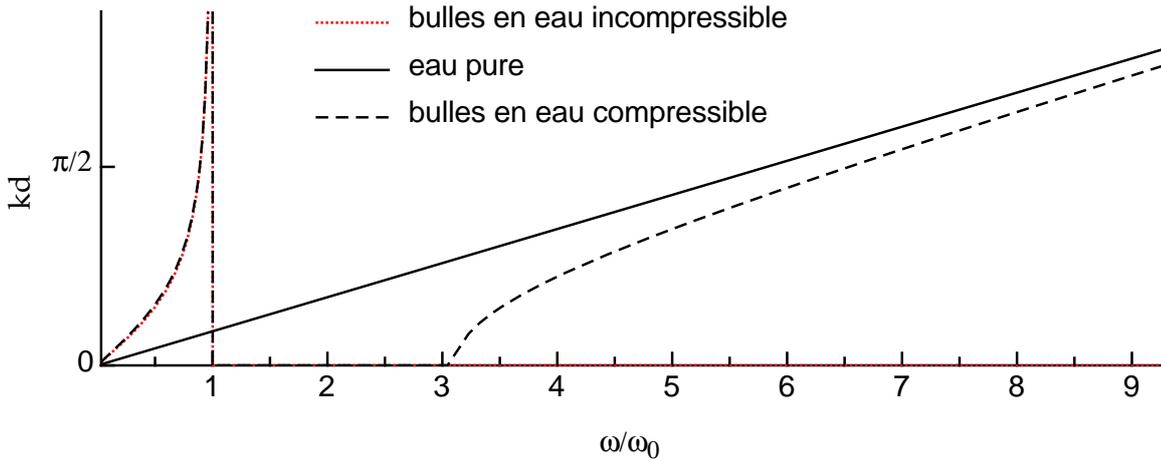


FIG. 3.13 – Relation de dispersion pour un milieu désordonné de bulles. On a pris ici  $\beta = 0,05$ , c'est à dire une fraction volumique de  $5,2 \cdot 10^{-4}$ . Cela correspond à 125 bulles par litre. On note l'existence d'une branche acoustique, décrivant la propagation d'ondes de bulles ; et d'une branche optique, qui correspond aux ondes sonores.

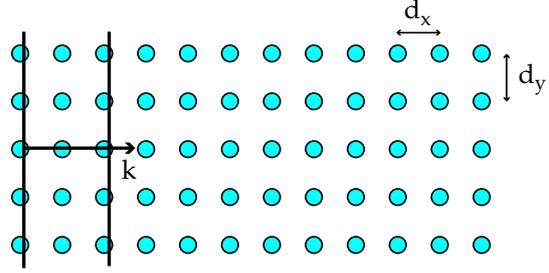
la ressemblance entre cette relation de dispersion et celle d'un système diatomique. On retrouve en effet une branche acoustique (les ondes de bulles) et une branche optique (les ondes "sonores").

Notre calcul de la relation de dispersion est donc faux, puisqu'il comporte des intégrales divergentes, mais redonne la relation de Foldy. La prise en compte correcte des interactions multiples passerait sans doute par un travail sur les quantités divergentes. Le programme que l'on s'était fixé n'est donc pas rempli. Mais on a tout de même gagné une vision plus claire de la relation de dispersion.

### Milieu cristallin

Considérons maintenant un milieu constitué de bulles parfaitement ordonnées. On prendra une maille cubique simple, avec des distances  $d_x$ ,  $d_y$  et  $d_z$  entre bulles voisines, respectivement selon les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . On s'intéresse à une onde plane qui se propage selon l'axe des  $x$ . Cette fois, l'onde plane se justifie parfaitement, quelles que soient les longueurs d'onde, étant donné l'invariance par translation du système. L'écriture de la continuité de la pression au niveau de la surface de la bulle redonne l'équation (3.24). La difficulté reste toujours d'évaluer la

FIG. 3.14 – Propagation d'une onde plane dans un milieu cristallin de bulles.



somme, infinie, des contributions de toutes les autres bulles. On propose de calculer cette fois la quantité  $S$  en deux étapes.

Une première partie de la somme est donnée par la contribution de toutes les bulles situées dans le même plan, contribution que l'on note  $S_1$  :

$$S_1 = \sum_{\substack{n \in \{\text{plan } x=0\} \\ n \neq 0}} \frac{e^{-ik_0 r_n}}{r_n}. \quad (3.27)$$

On note  $S_2$  la contribution des bulles des autres plans :

$$S_2 = \sum_{m \geq 1} \sum_{\substack{n \in \{\text{plan} \\ x=md_x\}}} \frac{e^{-ik_0 r_n}}{r_n} \left( e^{-ikmd_x} + e^{ikmd_x} \right). \quad (3.28)$$

Le calcul de la contribution de chaque plan de bulles peut se faire en prenant, une fois encore, un modèle de distribution surfacique continue de bulles, avec  $\frac{1}{d_z d_y}$  bulles par unité de surface. Cela se justifie pour les bulles lointaines : lorsque la distance entre bulles devient petite par rapport à leur distance à la bulle 0. Pour les bulles plus proches, on commet une erreur. Un calcul plus précis consisterait à tenir compte des positions exactes des bulles proches, et à considérer une distribution continue pour les bulles lointaines.

On obtient, la convergence des intégrales étant toujours à remettre en question :

$$S = \frac{2i\pi c}{\omega d_y d_z} \left[ 1 - e^{-ik_0 a} + i \frac{\sin(k_0 d_x)}{\cos(kd_x) - \cos(k_0 d_x)} \right],$$

où  $a$  est une nouvelle coupure basse dans les intégrales. On trouve alors une relation de dispersion qui s'écrit :

$$\cos(kd_x) = \cos(k_0 d_x) - \frac{2\pi R_0}{d_y d_z k_0} \sin(k_0 d_x) \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 \left( 1 - \frac{2\pi R_0}{k_0 d_y d_z} \sin(k_0 a) \right) + i\omega \left( \Gamma^{rad} + \Gamma^{th} + \frac{2\pi R_0 c}{d_y d_z} (\cos(k_0 a) - 1) \right)} \quad (3.29)$$

La valeur de la coupure  $a$  qu'il convient de prendre n'est pas claire. Des considérations sur lesquelles nous reviendrons suggèrent une valeur de  $\sqrt{d_y d_z}/\pi$ . Quoi qu'il en soit,  $a$  est de l'ordre de la distance entre bulles voisines dans les plans perpendiculaires à la direction de propagation. En se limitant aux fréquences pour lesquelles la longueur d'onde du son dans

l'eau pure est grande devant cette distance typique, on obtient une approximation de (3.29) :

$$\cos(kd_x) = 1 - \frac{(k_0 d_x)^2}{2} - 2\pi \frac{R_0 d_x}{d_y d_z} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega(\Gamma^{rad} + \Gamma^{th})}. \quad (3.30)$$

Et, comme attendu, cette dernière formule se réduit à la relation de dispersion dans un milieu désordonné si  $kd_x \ll 1$ . La figure 3.15 présente la formule (3.29), mais avec  $a = 0$  et sans amortissement pour les bulles. La comparaison avec la formule pour le milieu désordonné confirme que les relations sont très proches. Cette similitude peut paraître surprenante, mais il ne faut pas oublier que, dans la figure 3.15, on reste quasiment toujours en centre de zone de Brillouin : la longueur d'onde est grande devant la distance typique entre bulles et l'effet de l'ordre n'est donc pas important. Le prolongement des deux courbes pour des fréquences plus élevées ferait bien entendu apparaître des comportements très différents. En particulier, le milieu cristallin présente toute une série de bandes interdites, tandis que le milieu désordonné ne connaît que la première. À ce propos, la présence d'une bande interdite pour un milieu désordonné est peu courante. D'ordinaire, les interférences destructives à l'origine des bandes interdites sont rendues possibles par l'ordre régnant dans le milieu. Mais ici, ces interférences proviennent de la réponse des bulles en opposition de phase par rapport à l'onde incidente, selon un mécanisme tout à fait analogue à celui conduisant à l'atténuation, pour certaines gammes de fréquences, d'une onde électromagnétique dans un milieu.

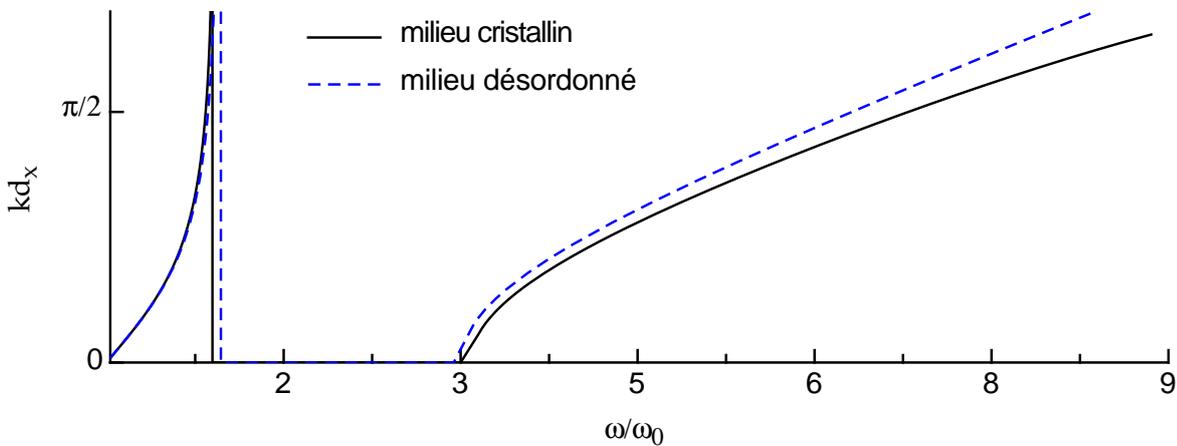


FIG. 3.15 – Comparaison entre la relation de dispersion pour un milieu désordonné et celle pour un milieu cristallin. Les deux relations sont équivalentes si  $kd_x \ll 1$  et  $k_0 d_x \ll 1$ .

Pour conclure sur le cas du milieu cristallin, remarquons que, comme dans le cas de la chaîne, certains systèmes ont des modes immédiatement identifiables sur la courbe de la figure 3.15. On peut imaginer une ligne de  $N$  bulles disposées selon l'axe d'un tube rigide de section rectangulaire  $d_y \times d_z$ , avec une distance  $d_x$  entre bulles, et des parois (rigides ou libres) fermant le tube à des distances  $d_x/2$  des bulles des extrémités. La construction de toutes les images conduit à un milieu cristallin infini dans lequel une onde plane se propage selon l'axe  $x$ . Il faut alors sélectionner les bonnes longueurs d'onde donnant les bonnes conditions sur les deux surfaces fermant le tube. Cette équivalence entre le milieu infini et un système fini amène

d'ailleurs à se poser la question de l'amortissement radiatif des bulles. Les  $N$  bulles enfermées dans un tube ne peuvent pas rayonner et on s'attend donc à ce que le terme  $\Gamma^{rad}$  disparaisse de la relation de dispersion, tout comme il avait disparu pour la relation de dispersion de la chaîne de bulles. En regardant (3.29), on s'aperçoit que cela peut être réalisé si on prend  $a = \sqrt{d_y d_z}/\pi$ . Toutefois, la relation que l'on a obtenue souffre de trop d'approximations (à commencer par la négligence des divergences) pour que l'on puisse prétendre donner une valeur précise à la coupure  $a$ .



Deuxième partie

**Excitations paramétriques**



## Chapitre 4

# Étude d'un oscillateur modèle : le pendule

La deuxième partie de notre étude aurait dû s'intituler «Échos de bulles ». Malheureusement, l'observation expérimentale des échos n'était pas au rendez-vous. On peut néanmoins espérer que ce n'est qu'une question de temps. On verra en effet au chapitre 5 que les difficultés qui demeurent paraissent surmontables. Mais avant d'aborder ce point, nous traiterons tout d'abord d'un oscillateur plus commun : le pendule.

### 4.1 Pourquoi étudier des pendules ?

La physique du pendule est bien connue. À telle enseigne qu'il constitue, avec le système masse-ressort, l'archétype de l'oscillateur harmonique. Tout étudiant en physique connaît donc le pendule simple. L'excitation paramétrique du pendule fait également partie du bagage standard des connaissances. Il ne s'agit donc pas, dans ce chapitre, de mettre en évidence des effets nouveaux avec un dispositif que l'on pourrait juger "sans mystère".

Alors, pourquoi dédier tout un chapitre de cette thèse à l'étude du pendule ?

Notre recherche d'un mécanisme d'échos de bulles nous a conduits à aborder l'étude des non-linéarités et de l'excitation paramétrique d'une bulle. En fait, le pendule va nous permettre d'introduire de façon simple les variables de Glauber. Ces variables se révèlent particulièrement commodes pour l'étude de l'excitation paramétrique. Elles permettent également d'aborder les non-linéarités d'un oscillateur de façon très efficace.

C'est donc avec un formalisme fondé sur l'utilisation des variables de Glauber que nous envisageons d'étudier l'excitation paramétrique des bulles, et les effets non-linéaires. Mais les premiers résultats montraient clairement que les expériences avec les bulles n'étaient pas des plus simples ; et ce pour deux raisons. La première tient à l'amortissement des oscillations d'une bulle, qui est assez important. La seconde raison vient de la difficulté à concevoir l'excitation paramétrique d'une bulle. Pour un pendule, un paramètre simple que l'on peut faire varier est la longueur. On excite alors paramétriquement l'oscillateur sans lui imposer de couple, donc sans le forcer. Mais pour une bulle, la variation d'un paramètre s'accompagne

nécessairement d'un forçage direct, qui a de grandes chances de venir masquer l'effet de l'excitation paramétrique.

Notre recherche d'un oscillateur plus approprié pour tester la pertinence de l'utilisation des variables de Glauber nous a alors tout naturellement conduits au pendule. Le dispositif est en effet facile à mettre en place, il peut présenter un excellent facteur de qualité, et son excitation paramétrique est des plus simples à réaliser.

Les deux sections qui suivent sont dédiées respectivement à l'étude d'un pendule, et à celle de deux pendules couplés. Ces deux systèmes sont une occasion de démontrer l'intérêt des variables de Glauber, qui conduisent à des équations simples. Chacune des deux sections correspond à un article soumis à la revue *American Journal of Physics* («Using Glauber Variables I : the one-degree of freedom case » et «Using Glauber Variables II : the two-degree of freedom harmonic oscillator as a tutorial introduction to quantum effects »). On s'est d'ailleurs contenté d'insérer les textes de ces articles, à l'identique, leur contenu correspondant exactement à notre propos. C'est la raison pour laquelle les deux prochaines sections sont rédigées en anglais.

Dans la section 4.2, nous utilisons les variables de Glauber pour étudier l'excitation paramétrique d'un pendule dans deux cas : pour une variation adiabatique, puis pour une variation résonnante. On montre également que la correction au premier ordre de la période du pendule pour les grands angles se retrouve facilement avec les variables de Glauber.

La section 4.3 est dévolue à l'étude d'un système de deux pendules couplés. On montre que ce système à deux degrés de liberté se révèle, sous certaines conditions (quasi-dégénérescence des deux pulsations propres) formellement équivalent à un spin 1/2. On définit en effet un espace de Hilbert (de dimension 2) dont les vecteurs décrivent les états physiques du système, la dynamique correspondante obéissant à une équation de type Schrödinger. Par ailleurs, utilisant l'isomorphisme entre les groupes  $SU(2)$  et  $SO(3)$ , on peut construire un espace de représentation (isomorphe à  $\mathbb{R}$ ), appelé espace de Larmor, dans lequel l'état du système est représenté par un vecteur s'apparentant à une aimantation. Les battements entre modes propres du di-pendule sont alors décrits par une précession, dite de Larmor, en tous points analogue à celle d'un spin 1/2 dans un champ magnétique statique  $\vec{B}_0$ . Par ailleurs, une excitation paramétrique du di-pendule (en l'occurrence, la modulation à une fréquence voisine de celle de Larmor de la longueur d'un des deux pendules couplés) conduit à un mouvement entièrement calculable, représenté dans l'espace de Larmor par une précession de type Rabi.

Avant de passer à l'anglais, il ne nous paraît pas superflu d'insérer ici un petit guide de lecture. Un lecteur désireux de s'en tenir aux résultats ayant une implication directe pour les bulles pourra ne lire que la section sur un seul pendule (4.2). La section sur deux pendules (4.3) présente en effet des pistes que nous avons explorées mais qui n'ont pas débouché sur une d'application pour les bulles. On peut donc, dans une première lecture, sauter cette partie sans répercussion sur la compréhension de la suite.

## 4.2 Un pendule

The harmonic oscillator (HO) is one of the simplest paradigms of classical one-degree of freedom dynamical systems. Hence its perfectly justified omnipresence in physics introductory textbooks. At least in the case of mechanical oscillators, the equation of motion is derived first using Newton's principle, then, with increasing sophistication at the undergraduate level, lagrangian and hamiltonian formalisms. In the latter formalism, grouping together the dynamical variable  $q$  and its conjugate momentum  $p$ , Glauber has introduced [Gla63] a complex variable  $\alpha$  that describes by itself the physical state of the oscillator. Nevertheless, the Glauber variable is scarcely mentioned in undergraduate level textbooks and, as far as we know, never used to derive HO's properties or solve HO problems. Two good reasons at least can be put forward to explain this observation. The first reason is rather straightforward. Strictly speaking, one does not *need* it : all properties or problems about the HO can be derived or solved without using  $\alpha$ . The second reason is more historical. Glauber introduced his formalism in the quantum mechanics domain, when trying to describe the quasi-classical ("coherent") states of the HO. Hence the presence of the quantum constant  $\hbar$  in the definition itself of  $\alpha$ , which is just the classical transposition of the boson annihilation operator  $a$  :  $\alpha$  is thus, unfortunately, associated with *mere* quantum mechanics.

The aim of this present paper I, devoted to the one-degree of freedom harmonic oscillator (HO1) is to stress the simplicity, and even the elegance, of derivations using the Glauber formalism, particularly when parametric excitation is concerned. The theoretical discussion is illustrated by experiments that can be easily reproduced and analysed by undergraduate students, as we experienced in our university. With this aim, this article is organized as follows.

In section 4.2.1 we present the experimental device we used to illustrate the purpose (and check the theoretical predictions) of this paper, and we find the equation of the problem.

In section 4.2.2 we briefly introduce the Glauber formalism in the case of the free undamped HO1's movement (4.2.2). Then we phenomenologically add viscous damping (4.2.2), and take advantage of this opportunity to present the secular approximation that we shall use throughout this paper.

In section 4.2.3 we consider two different kinds of parametric excitations of our HO1, and show that both kinds lead, in the Glauber formalism, to the same equation (4.2.3). We solve this equation in two particular cases : adiabatic excitation (4.2.3) and resonant excitation (4.2.3). Each case is illustrated by an experiment. We finish with a remark about non linearity (4.2.3).

The companion paper II is devoted to the two-degree of freedom harmonic oscillator (HO2). It is shown that, under certain conditions, its dynamics presents tight resemblances with that of a half-one spin : the Glauber variables then play a central role in this comparison.

Let us now describe our experimental device.

### 4.2.1 The experimental device

In fact, any HO1 could be used to illustrate the purpose of the present paper, provided that the damping be weak enough for a sufficient number of free oscillations to be observed.

The latter condition being not so easy to fulfil, we finally chose the pendulum and set up the device displayed in figure 4.1. This pendulum is made of a couple of light parallel metallic rods with mass  $m$ . A heavy cylinder with mass  $M_C$  can be slid along the rods. The whole set can rotate freely around one horizontal axis (A) thanks to ball-bearings. The position of the pendulum is defined by the angle  $\theta$  that the rods make with the vertical. This angle is measured by means of a potentiometric device connected to a numerical oscilloscope.

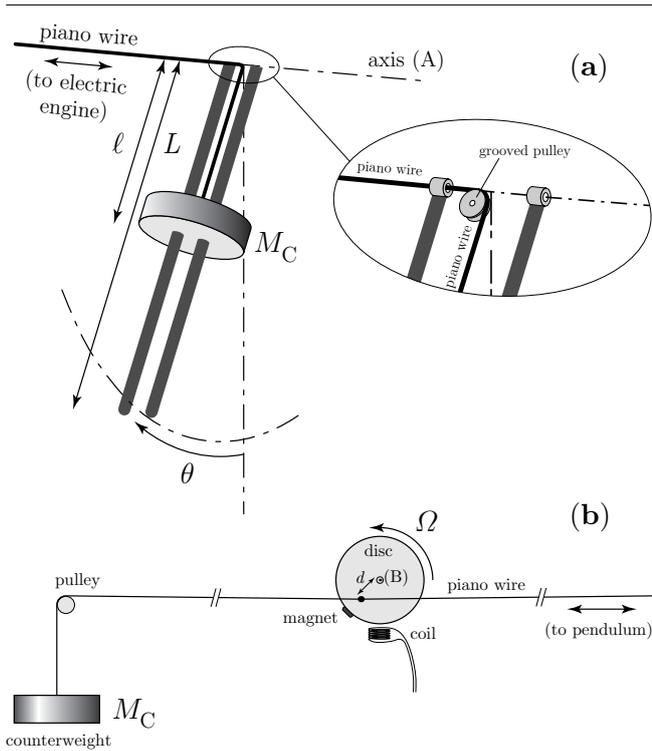


FIG. 4.1 – *Experimental device.* (a) The pendulum can rotate freely around axis (A). The cylindrical mass  $M_C$  is held, and can be slid, along a couple of rods thanks to a piano wire through a grooved pulley in such a way that no torque at all is exerted upon (A). (b) The piano wire's second extremity is fastened on a vertical disc, at a distance  $d$  from its horizontal axis (B). The disc's rotation is carried out by an electric engine and facilitated by a counterweight system. The phase of the disc's rotation is marked thanks to a {magnet-coil} device.

The cylinder is held, and slid along the rods, thanks to a piano wire dragged through a grooved pulley located on axis (A), so that no torque at all is exerted onto this axis by the wire's doing : moving mass  $M_C$  along the rods simply changes its distance  $\ell_C$  to axis (A) and should thus be regarded as a pure parametric excitation of the pendulum. In our experiment, we performed a sinusoidal modulation of length  $\ell_C$ . With this aim, the second extremity of the piano wire is fastened on a vertical disc, at a distance  $d$  from its (horizontal) axis (B). An electric engine rotates the disc at any desired angular frequency  $\Omega$ . The disc is placed far enough from the pendulum for length  $\ell_C(t)$  to be consequently ruled by :  $\ell_C(t) = \ell_{C0} + d \sin \Omega t$ . In order to mark the phase of the disc rotation, we glued a small magnet on its edge and put a coil under the disc, at the vertical of its axis (B) (see (b) in figure 4.1). The disc being rotated counterclockwise, we thus obtain a peak voltage roughly when the cylinder is at its mean position ( $\ell_C = \ell_{C0}$ ) and descending. Let us add that, in order to balance the torque exerted by the cylinder weight onto axis (B), and hence to facilitate the engine rotation, we disposed the counter-weight device displayed in the figure.

To begin with, let us write down the equation of the problem. The dynamic variable is naturally chosen to be angle  $\theta$ . Let  $J$  be the inertia momentum with respect to axis (A),  $\ell$

the {center of mass to axis (A)} distance and  $M = M_C + 2m$  the total mass of the pendulum. The dissipation-free equation of motion reads, in the absence of external torque :

$$J\ddot{\theta} = -Mg\ell \sin \theta. \quad (4.1)$$

From now on, we shall consider only small oscillations, allowing us to substitute  $\theta$  for  $\sin \theta$  in above equation (4.1). Our oscillator is thus a HO1.

As concerns dissipation, two kinds of friction mechanisms combine to damp the oscillations : solid friction characteristic of ball-bearing binding, and viscous friction against surrounding air. As far as the mere study of our *experimental* apparatus is concerned, both dissipation processes should be taken into account. Nevertheless, for the sake of simplicity (and in view of our further comparisons with Bloch equations in paper II), we shall deliberately ignore solid friction throughout the *theoretical* part of this paper. As a consequence, the dissipated power will read

$$\mathcal{P}_f = \gamma J \dot{\theta}^2, \quad (4.2)$$

where  $\gamma$  is a positive friction coefficient (with unit  $t^{-1}$ ).

It will be convenient to introduce the new dynamical variable

$$q = \sqrt{J} \theta, \quad (4.3a)$$

and to set

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\ell}{J}}. \quad (4.3b)$$

With these new notations, the equation of motion reads :

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (4.4)$$

Above equation (4.4) is real and of second order. In next section, we shall substitute for it a first-order but complex differential equation.

### 4.2.2 The Glauber variable

As well known, equation (4.4) does not derive from either a lagrangian or an hamiltonian (although it can be obtained as a lagrange-like equation). For this reason, we shall ignore damping in a first step, and recall the dissipation-free formalism. *In fine* dissipation will be phenomenologically taken into account in the equation of motion by means of the  $\gamma \dot{q}$  term, thus yielding equation (4.4).

#### The undamped HO1

From the lagrangian

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2), \quad (4.5a)$$

we can build the hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \quad (4.5b)$$

where  $p = \dot{q}$  is the conjugate momentum of the dynamical variable  $q$ . Hamilton's equations read :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q, \quad (4.6)$$

which combine in the dissipation-free motion equation  $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ .

It will turn out to be particularly convenient to introduce the Glauber variables  $(\alpha, \alpha^*)$  defined as :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\sqrt{\omega} q + \frac{i}{\sqrt{\omega}} p) \quad (\text{and conjugated complex equation for } \alpha^*). \quad (4.7)$$

Using Glauber variables, hamiltonian  $H$  reads :

$$H = \hbar\omega |\alpha|^2. \quad (4.8)$$

The dimensionless quantity  $|\alpha|^2$  can thus be regarded as the number  $N$  of (semi-classical) oscillation quanta. Moreover, the Poisson's bracket  $\{\alpha, \alpha^*\} = \frac{\partial \alpha}{\partial q} \frac{\partial \alpha^*}{\partial p} - \frac{\partial \alpha}{\partial p} \frac{\partial \alpha^*}{\partial q}$  being equal to  $\frac{1}{i\hbar}$ , the equation verified by  $\alpha$  reads :

$$\dot{\alpha} = \{\alpha, H\} = -i\omega\alpha \quad \rightsquigarrow \quad \alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}, \quad (4.9)$$

so that  $|\alpha(t)|^2 = |\alpha(0)|^2$  : the quanta number is a constant of the motion, which, allowing for equation (4.8), contains the energy conservation in the dissipation-free movement. In the complex plane of the Glauber variable  $\alpha$ , the trajectory of the representative point (the "phase portrait") is a circle, with center at the origin and followed clockwise uniformly. Observe that the above conclusion as well as equation (4.9) is perfectly independent of the numerical value of  $\hbar$ , as expected for a classical result.

### Adding viscous damping

In order to now take damping into account, let us add the phenomenological  $-\gamma\dot{q}$  ( $= -\gamma p$ ) viscous friction term to the right-hand side of the second of Hamilton's equations (4.6). Keeping definition (4.7) of  $\alpha$  unchanged, we easily get :

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{\omega} p + \frac{i}{\sqrt{\omega}} (-\omega^2 q - \gamma p) \right) = -i\omega\alpha - \frac{\gamma}{2}(\alpha - \alpha^*). \quad (4.10)$$

Above equation (4.10) is not difficult to solve, despite the  $\alpha^*$  term in its right-hand side. Its exact solution is, as can easily be checked :

$$\alpha(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[ \alpha(0) (\cos \omega' t - i \frac{\omega}{\omega'} \sin \omega' t) + \frac{\gamma}{2\omega'} \alpha^*(0) \sin \omega' t \right], \quad (4.11a)$$

with

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (4.11b)$$

Provided that the damping is weak enough (*i.e.*  $\gamma \ll \omega$ ), exact expression (4.11a) can be approximated by

$$\alpha(t) \simeq \alpha(0) e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{-i\omega t}. \quad (4.12)$$

It is remarkable that above approximate solution (4.12) is exactly what is obtained when neglecting the  $\alpha^*$  term in the right-hand side of equation (4.10). This can be understood as follows. Let us set up a perturbative resolution of this equation, with damping being regarded as the perturbation. The zero-order (*i.e.* unperturbed) solution, as displayed in equation (4.9), is  $\alpha(t) = Ae^{-i\omega t}$ , where  $A$  is a constant. Damping is then taken into account by allowing  $A$  to vary *slowly*, *i.e.* with a rate typically of order of  $\gamma$ , which yields :

$$\dot{A} = -\frac{\gamma}{2} (A - A^* e^{2i\omega t}). \quad (4.13)$$

In above equation (4.13), the oscillations of the  $e^{2i\omega t}$  phase factor average to zero the  $A^*$  term's contribution to the time-evolution of  $A$ , as can be seen by time-integration

$$A(t) = A(0) - \frac{\gamma}{2} \int_0^t dt' (A(t') - A^*(t') e^{2i\omega t'}). \quad (4.14)$$

The above equation is satisfied by  $A(t) = A(0)e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ , provided that condition  $\frac{\gamma}{2} \ll |2i\omega - \frac{\gamma}{2}|$  (*i.e.*  $\gamma \ll \omega$ ) is fulfilled, which we assume. *In fine*, equation (4.13) can be simplified in  $\dot{A} = -\frac{\gamma}{2}A$ , and approximate result (4.12) is directly obtained. Neglecting the  $A^*$  term in the right-hand side of (4.13) is known as the Secular Approximation (SA). We shall use it frequently throughout the present paper I (and its companion paper II), as often as available.

At the SA, and as a consequence of result (4.12), the oscillation quanta number  $N = |\alpha|^2$  decays exponentially with the rate  $\gamma$ . Thus, in the complex plane of Glauber variable  $\alpha$ , due to the weak viscous friction, the circular phase portrait is changed into a uniformly followed logarithmic spiral (with center at the origin).

Let us now consider what happens if the oscillator is parametrically excited.

### 4.2.3 Parametric excitation of the HO1

We suppose in this section that one parameter of the pendulum is changed in the course of the oscillation. This parameter can be either gravity  $g$  or length  $\ell$ . The former situation can be simulated by an *ad hoc* acceleration (up or down) of horizontal axis ( $A$ ). The latter excitation can be implemented by sliding (up or down again) the cylinder along the rods. Let us derive in each case the new equation of motion.

#### Motion equations

It is not difficult to show that equation (4.1) is still valid in a vertically accelerated frame, provided that the acceleration be added to that of true gravity, thus leading to a time-dependent value  $g(t)$ . Linearized equation (4.1) then reads :

$$\ddot{\theta} + \omega^2(t)\theta = 0, \quad \text{with } \omega(t) = \sqrt{\frac{Mg(t)\ell}{J}}, \quad (4.15)$$

and obviously derives from the lagrangian :

$$L(t) = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}Mg(t)\ell\theta^2. \quad (4.16)$$

Equation (4.15) admits the trivial solution  $\theta = 0 \forall t$ . Nevertheless, as soon as  $\omega$  depends on time, its stability should be carefully questioned. When  $\omega(t)$  is a periodic function of time, (4.15) is known as the Hill equation. The particular Hill equation in which  $g(t)$  reads  $g_0 + g_1 \cos \Omega t$  is called the Mathieu equation.

The second possible parametric excitation is achieved when changing  $\ell$  (and consequently  $J$ , which is roughly equal to  $M\ell^2$ ). In this case we should observe that lagrangian  $L$  displayed in (4.5a) is no longer available, and should be substituted by :

$$L(t) = \frac{1}{2}J(t)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}Mg\ell(t)\theta^2, \quad (4.17)$$

where  $\ell$  and  $J$  do explicitly depend on time, and where an additional term (roughly  $\frac{1}{2}M\dot{\ell}^2$ ) has been deliberately omitted in the kinetic energy part of the right-hand side inasmuch as it plays no role in the dynamics of variable  $\theta$ . Hence the equation of motion satisfied by  $\theta$  :

$$\frac{1}{J} \frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) + \omega^2(t)\theta = 0, \quad \text{with } \omega(t) = \sqrt{\frac{Mg\ell(t)}{J(t)}}. \quad (4.18)$$

It should be noticed that changing  $g$  or  $\ell$  does not lead to the same motion equation.<sup>1</sup> If, in both cases, angular frequency  $\omega$  becomes time-dependent, the latter equation (4.18) displays the additional viscous friction-like force term  $-\frac{\dot{J}}{J}\dot{\theta}$ . Should quantity  $\frac{\dot{J}}{J}$  be negative, the angular amplitude of the oscillation is amplified. This feature can be turned to profit on the playground by children when they go on a swing : sinking deep into the seat or flexing knees (*i.e.* increase  $J$ ) when the angular velocity  $\dot{\theta}$  is zero (at swing's maximum amplitude) and standing up straight or straightening knees (*i.e.* decrease  $J$ ) when  $|\dot{\theta}|$  is maximum (for  $\theta = 0$ ). So doing, they would<sup>2</sup> implement a resonant  $2\omega$ -parametric excitation of the swing, an analogue of which is discussed in subsection (4.2.3).

Let us now perform a Legendre's transformation of lagrangians (4.16) and (4.17). In both cases we get :

$$H(t) = \frac{\sigma^2}{2J} + \frac{1}{2}Mg\ell\theta^2, \quad (4.19)$$

where  $\sigma$  stands for the conjugate momentum of angle  $\theta$ , and where either  $g$  or  $(J, \ell)$  depends on time. It is noteworthy that expression (4.5b) of hamiltonian  $H(t)$  is still valid, with  $p = \frac{\sigma}{\sqrt{J}}$  and  $q = \sqrt{J}\theta$ . As a consequence, with definition (4.7) of the Glauber variable  $\alpha$  generalized in :

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{(J\omega)(t)} \theta + \frac{i}{\sqrt{(J\omega)(t)}} \sigma \right), \quad (4.20)$$

this hamiltonian reads :

$$H(t) = \hbar\omega(t)|\alpha(t)|^2, \quad (4.21)$$

<sup>1</sup>In fact, equation (4.18) can be given the same *form* as (4.15) by substituting variable  $\tau$ , defined by  $d\tau = dt/J(t)$ , for time  $t$ . We then get :  $\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (J\omega)^2(\tau)\theta = 0$ . Nevertheless, such a "time dilatation", should rather be regarded as an artful mathematical trick.

<sup>2</sup>In fact the children's instinctive movement is more complex. For a detailed discussion of this question, see [CS90] and [Cas96].

and the motion equation (4.9) becomes

$$\dot{\alpha}(t) = \{\alpha, H\} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -i\omega(t)\alpha + f(t)\alpha^*, \quad (4.22a)$$

where

$$f(t) = \frac{(\dot{J}\omega)}{2J\omega} = \frac{d}{dt} \ln \sqrt{(J\omega)(t)}. \quad (4.22b)$$

In order to simultaneously allow for a *weak* viscous damping and a parametric excitation of the pendulum, equations (4.10) (in the right-hand side of which the non secular  $\frac{\gamma}{2}\alpha^*$  viscous term is henceforth neglected) and (4.22a) are combined into

$$\dot{\alpha} = -i\omega(t)\alpha - \frac{\gamma}{2}\alpha + f(t)\alpha^*. \quad (4.23)$$

In conclusion, both kinds of parametric excitation lead to the *same* motion equation (4.23) for the Glauber variable  $\alpha$ . We shall now discuss this equation in two particular cases.

### Adiabatic parametric excitation

To begin with, let us consider a *slow* (adiabatic in the Ehrenfest's sense) variation of whichever parameter ( $g$  or  $\ell$ ). This means that the parameter and its time-derivatives have small variations on the time-scale of one period  $\frac{2\pi}{\omega}$  of the free oscillations, which can be summarized in the following twofold condition. On the one hand  $|f(t)| \ll \omega$  and, on the other hand, all non zero components of the Fourier spectrum of  $f(t)$  correspond to angular frequencies well *below*  $\omega$ . If this condition is fulfilled, the same arguments as in subsection (4.2.2) (when discussing the relevance of keeping the  $\frac{\gamma}{2}\alpha^*$  term in the right-hand side of equation (4.10)) hold : the  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = f(t)\alpha^*$  term in equation (4.23) brings no secular contribution to the time-evolution of  $\alpha(t)$ , which reads *in fine* at the SA :

$$\alpha(t) = \alpha(0) e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\varphi(t)}, \quad (4.24a)$$

with

$$\varphi(t) = \int_0^t dt' \omega(t'). \quad (4.24b)$$

The portrait phase is a logarithmic spiral, still followed clockwise, but no longer uniformly. Let us provisionally neglect dissipation : the above spiral becomes a circle. The quanta number  $N = |\alpha|^2$  is therefore an adiabatic invariant of the undamped movement. Let  $\Theta$  be the angular amplitude of the oscillation. The slowly varying total energy of the oscillator reads :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} J(t) \omega^2(t) \Theta^2(t). \quad (4.25a)$$

Allowing for (4.21) and (4.24), we get :

$$|\alpha|^2 = \frac{\mathcal{E}(t)}{\hbar\omega(t)} = \frac{1}{2\hbar} J(t) \omega(t) \Theta^2(t) = cst, \quad (4.25b)$$

so that, owing to (4.15) or (4.18), amplitude  $\Theta$  varies with  $\ell$  and  $g$  like  $[g\ell J(\ell)]^{-1/4}$ .

An experimental verification of result (4.25b) was attempted. Its principle is as follows. During the pendulum oscillation, length  $\ell(t)$  is modulated about its mean value  $\ell_0$  :

$$\ell(t) = \ell_0 (1 + \epsilon \sin \Omega t), \quad (4.26)$$

with  $\epsilon \ll 1$ .<sup>3</sup> If  $\Omega \ll \omega$  the SA is valid, and the expected variation of amplitude  $\Theta$  is then :

$$\Theta(t) = \Theta_0 \left( 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{J' \ell_0}{J} + 1 \right) \epsilon \sin \Omega t \right), \quad (4.27a)$$

where  $J$  and  $J'$  respectively stand for  $J(\ell_0)$  and  $J'(\ell_0) = \left( \frac{dJ}{d\ell} \right)_{\ell=\ell_0}$ . If the rods are considered as massless and the sliding cylinder as a point-mass, then  $J = M\ell_0^2$ . Expression (4.27a) is finally simplified into :

$$\Theta(t) = \Theta_0 \left( 1 - \frac{3}{4} \epsilon \sin \Omega t \right). \quad (4.27b)$$

In fact things are not that simple, and expected result (4.27b) must be revised in the following threefold way.

First, the amplitude of the oscillations is modified not only by modulation of length  $\ell(t)$ , but also by damping. In our experiment, the decay appeared to be *linear*, indicating that *solid* friction is the dominating damping process. In any case, to take this linear decay into account, equation (4.27b) should be modified into

$$\Theta(t) = (\Theta_0 - rt) \left( 1 - \frac{3}{4} \epsilon \sin \Omega t \right), \quad (4.28)$$

where  $r$  is the linear damping rate.

The second revision is more subtle. Despite its small linear mass ( $\mu = 209$  g/m), each rod, with length  $L$ , has a non zero mass  $m = \mu L$ . Thus the couple of rods contributes to the total mass of the pendulum ( $M = M_C + 2m$ ), to its inertia momentum  $J$  (by an amount of  $2 \times \frac{1}{3}mL^2$ ) and to the position of its center of mass ( $M\ell = M_C\ell_C + 2 \times m\frac{L}{2}$ ). As a consequence of this last point, and with a view to comparing with experiment, the *true* modulation depth  $\epsilon$  (which is the amplitude of  $\frac{\delta\ell(t)}{\ell_0}$ , as displayed in (4.26)) should be expressed as a function of the *experimental* one  $\epsilon_C$  (i.e. the amplitude of  $\frac{\delta\ell_C(t)}{\ell_{C0}}$ ), namely :

$$\epsilon = \frac{M_C\ell_{C0}}{M\ell_0} \epsilon_C < \epsilon_C = \frac{d}{\ell_{C0}}. \quad (4.29a)$$

All calculations carried out, equation (4.27a) is then turned into

$$\Theta(t) = (\Theta_0 - rt) (1 - \eta \epsilon_C \sin \Omega t), \quad (4.29b)$$

with

$$\eta = \frac{1}{4} \left( \frac{2M_C\ell_{C0}^2}{J} + \frac{M_C\ell_{C0}}{M_C\ell_{C0} + mL} \right) < \frac{3}{4}. \quad (4.29c)$$

---

<sup>3</sup>Note that, in this subsection, it is never assumed that the adiabatic variation of the pendulum parameters (distance  $\ell$  under the circumstances) should be *small*. It is only for the convenience of our experimental implementation that we chose  $\epsilon$  to be small.

A third improvement should be brought to the above analysis. The sliding mass is a cylinder with height  $h$  and radius  $R$ . Consequently its inertia momentum with respect to axis (A) is not merely  $M_C \ell_{C0}^2$ , as admitted above in the *simple* pendulum model framework. Including the rods contribution,  $J$  reads indeed :

$$J = M_C \left( \ell_{C0}^2 + \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) + \frac{2}{3} m L^2. \quad (4.30)$$

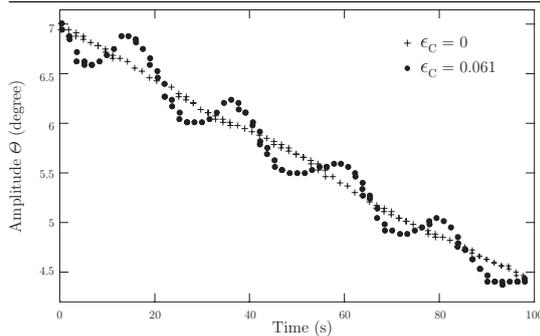


FIG. 4.2 – Decay of the oscillation amplitude  $\Theta(t)$  without (+,  $\epsilon_C = 0$ ) and with (•,  $\epsilon_C = 0.061$ ) pendulum's length modulation.

In our experiment, the ratio  $\Omega/\omega$  was about 0.07 : the parametric excitation was therefore adiabatic. Moreover,  $\ell_{C0}$  was equal to 60.2 cm ( $\pm 2$ mm). So we calculate, using the numerical values listed in table 4.1, a parameter  $\eta$  (see (4.29c)) equal to 0.64. A first amplitude measurement (figure 4.2) without modulation of the length ( $\epsilon = 0$ ) led to a linear decay rate  $r = 2.6 \times 10^{-2}$  deg/s. Then experiments with modulation ( $\epsilon \neq 0$ ) were performed, the resulting curves being fitted with the law :

$$\Theta(t) = (\Theta_0 - rt) (1 - a \sin \Omega t), \quad (4.31)$$

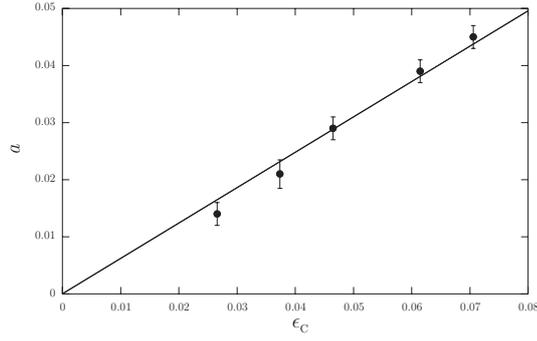
where the values of  $r$  and  $\Omega$  are known, and that of  $a$  is determined by the fit. Figure 4.3 displays the fitted parameter  $a$  as a function of the experimental modulation depth  $\epsilon_C$ . We obtain a straight line, with a slope of  $0.62 \pm 0.02$ . Now, according to (4.29b), the expected curve is a straight line with a slope of  $\eta = 0.64$ , so in particularly satisfying agreement with experiment.

Length of the rods	$L$	82.2 cm $\pm 2$ mm
Height of the cylinder	$h$	2 cm $\pm 1$ mm
Radius of the cylinder	$R$	5.2 cm $\pm 1$ mm
Mass of the rods	$m$	177 g $\pm 5$ g
Mass of the cylinder	$M_C$	1.38 kg $\pm 10$ g

TAB. 4.1 – Characteristics of the pendulum.

To complete the theoretical part of the present subsection, we would now strike an energy balance of the adiabatic parametric excitation, including again viscous friction.

FIG. 4.3 – Fitted parameter  $a$  (as explained in the text) as a function of the experimental modulation depth  $\epsilon_C$ . The slope of the solid straight line is  $0.62 \pm 0.02$ , to be compared with the  $0.64$  theoretically predicted value.



To begin with, let us consider the oscillation energy  $\mathcal{E}(t)$ , which scarcely varies on time-scale  $\frac{2\pi}{\omega(t)}$  of one period :

$$\mathcal{E}(t) = \hbar\omega(t)|\alpha|^2. \quad (4.32)$$

By time-derivation we get :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \hbar\dot{\omega}(t)(\dot{\alpha}\alpha^* + \text{c.c.}) + \hbar\dot{\omega}(t)|\alpha|^2, \quad (4.33a)$$

which reads at the SA, allowing for properly secularized equation (4.23) :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \left(-\gamma + \frac{\dot{\omega}}{\omega}\right) \mathcal{E}. \quad (4.33b)$$

We shall now determine the power  $\mathcal{P}_e$  consumed by the engine to move the cylinder along the rods. Let  $T$  be the tension of the piano wire. When projected along the rods axis, Newton's law reads :

$$M_C(\ddot{\ell}_C - \ell_C\dot{\theta}^2) = -T + M_Cg \cos \theta. \quad (4.34)$$

Consequently, since  $|\sin \theta| \ll 1$ , we have :

$$\mathcal{P}_e = -T\dot{\ell}_C = M_C\dot{\ell}_C \left( \ddot{\ell}_C - \ell_C\dot{\theta}^2 - g + g\frac{\theta^2}{2} \right). \quad (4.35)$$

In the above formula (4.35), terms  $M_C\dot{\ell}_C\ddot{\ell}_C$  and  $-M_C\dot{\ell}_Cg$  are exact time-derivatives the meaning of which is very simple :  $\frac{1}{2}M_C\dot{\ell}_C^2$  is the additional kinetic energy and  $-M_C\ell_Cg$  is the zero-point gravitational potential energy of the cylinder. The latter term can be withdrawn provided that the experimental setup is equipped with a counter-weight system, as displayed in figure 4.1 (the former term should then be doubled). In any case, they are not involved in the energy oscillation  $\mathcal{E}$  and will therefore be ignored. Averaging  $\mathcal{P}_e(t)$  over a  $\frac{2\pi}{\omega}$  duration, we get :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = M_C\dot{\ell}_C \left\langle -\ell_C\dot{\theta}^2 + g\frac{\theta^2}{2} \right\rangle, \quad (4.36)$$

or equivalently in the Glauber formalism and using :

$$\theta = \sqrt{\frac{\hbar}{2J\omega}}(\alpha + \alpha^*), \quad \dot{\theta} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2J}}(\alpha - \alpha^*), \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P}_e \rangle &= M_C \dot{\ell}_C \frac{\hbar \omega}{2J} \left\langle \ell_C (\alpha - \alpha^*)^2 + \frac{g}{2\omega^2} (\alpha + \alpha^*)^2 \right\rangle \\
&= \left( -\frac{M_C \ell_C \dot{\ell}_C}{J} + \frac{M_C \dot{\ell}_C g}{2J\omega^2} \right) \hbar \omega |\alpha|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left( -\frac{\dot{J}}{J} + \frac{\dot{\ell}}{\ell} \right) \hbar \omega |\alpha|^2 \\
&= \frac{\dot{\omega}}{\omega} \mathcal{E}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

The energy balance is then straightforward. As expected :

$$\frac{d\langle \mathcal{E} \rangle}{dt} = -\langle \mathcal{P}_f \rangle + \langle \mathcal{P}_e \rangle, \tag{4.39}$$

where  $\langle \mathcal{P}_f \rangle$  is the average dissipated power (see (4.2)).

We shall discuss, in the next subsection, a well known example of non adiabatic parametric excitation of the pendulum in which the Glauber formalism will reveal, once again, to be a quite convenient tool.

### Resonant parametric excitation

We now come back to general equations (4.22)-(4.23), and consider a situation in which the  $f(t)\alpha^*$  term in the right-hand side brings in a secular contribution to the time-evolution of  $\alpha$ . Our experimental implementation will consist again in modulating the {sliding cylinder to axis (A)} distance  $\ell_C$  during the pendulum oscillation :

$$\ell_C(t) = \ell_{C0} (1 + \epsilon_C \sin \Omega t), \quad \text{with } |\epsilon_C| < 1 \tag{4.40a}$$

(just as in the foregoing illustration of the adiabatic invariance in subsection (4.2.3), but now with angular frequency  $\Omega$  chosen to be in speaking terms with  $\omega$ ). Nevertheless, for the sake of generality, our theoretical discussion will cover both types of modulation considered in subsection (4.2.3), namely the above modulation (4.40a) of  $\ell_C(t)$  and that of apparent gravity  $g(t)$  :

$$g(t) = g_0 (1 + \epsilon_g \sin \Omega t), \quad \text{with } |\epsilon_g| < 1. \tag{4.40b}$$

As a consequence, according to which type of modulation is performed, angular frequency  $\omega(t)$  as defined in (4.15) or (4.18) reads as a power series of  $\epsilon_C \sin \Omega t$  or  $\epsilon_g \sin \Omega t$ . So does quantity  $J(t)\omega(t)$ . To fix ideas, let us write, *at first order* in modulation depth :

$$\omega(t) = \omega_0 (1 + \epsilon_\omega \sin \Omega t), \tag{4.41}$$

with, as a consequence of definition (4.24b) :

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \epsilon_\omega \frac{\omega_0}{\Omega} (1 - \cos \Omega t), \tag{4.42}$$

and, from definition (4.22b) of function  $f(t)$  :

$$f(t) = \epsilon_f \Omega \cos \Omega t, \tag{4.43}$$

where dimensionless coefficients  $\epsilon_\omega$  and  $\epsilon_f$  can be simply expressed as functions of  $\epsilon_C$  or  $\epsilon_g$ .

A perturbative resolution of equation (4.23) is then set up as follows. Let us set :

$$\alpha(t) = A(t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\varphi(t)} \rightsquigarrow A(0) = \alpha(0). \quad (4.44)$$

Without parametric excitation,  $A(t)$  would be a constant. Due to the excitation, it is solution of the differential equation :

$$\dot{A} = f(t)e^{2i\varphi(t)}A^*. \quad (4.45)$$

According to (4.42), the phase factor  $e^{2i\varphi(t)}$  can be expanded as follows :

$$e^{2i\varphi(t)} = e^{2i\omega_0 t} \left( 1 + 2i\epsilon_\omega \frac{\omega_0}{\Omega} (1 - \cos \Omega t) + \dots \right). \quad (4.46)$$

Moreover, when expanding  $f(t)$  also, function  $f(t)e^{2i\varphi(t)}$  is of the general form :

$$f(t)e^{2i\varphi(t)} = \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i(2\omega_0 - n\Omega)t}. \quad (4.47)$$

The right-hand side of equation (4.45) therefore gives a secular contribution to the time-evolution of  $A$  only for a discrete series of values of  $\Omega$ , namely  $\Omega_n = \frac{2\omega_0}{n}$ , with  $n = 1, 2, 3, \dots$ . These values are the resonant parametric excitation angular frequencies. At *first order* in modulation depth  $\epsilon$ , the only non zero coefficient  $c_n$  in (4.47) is  $c_1$ . The main resonance is thus obtained for  $\Omega = 2\omega_0$ . Higher order resonances ( $n = 2, 3, \dots$ ) are but the consequence of harmonic generation in the full expansions of  $\omega(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $f(t)$  and  $e^{2i\varphi(t)}$  (previously limited to first order in formulas (4.41) through (4.43) and (4.46)). In that sense they can be regarded as “secondary”. In our experimental check, we shall focus on the “primary”  $n = 1$  resonance. Nevertheless, by care of generality, we write the following theoretical treatment in such a way that it can apply as well to any integer value of  $n$ . Setting

$$2\delta_n = n\Omega - 2\omega_0, \quad (4.48)$$

and assuming  $|\delta_n| \ll \omega_0$ , equation (4.45) reads at the SA, henceforth omitting index  $n$  in  $c_n$  and  $\delta_n$  :

$$\dot{A} = \Omega c e^{-2i\delta t} A^*. \quad (4.49)$$

Then setting

$$A = B e^{-i\delta t} \rightsquigarrow B(0) = A(0) = \alpha(0), \quad (4.50a)$$

equation (4.49) becomes

$$\dot{B} = i\delta B + \Omega c B^*. \quad (4.50b)$$

Writing  $B$  as  $X + iY$  and  $c = |c| e^{i\psi} = c' + ic''$ , equation (4.50b) is turned into the linear system :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \mathbb{M} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad \text{with } \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \Omega c' & \Omega c'' - \delta \\ \Omega c'' + \delta & -\Omega c' \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

This system is easily solved using standard methods. Let  $\pm\lambda$  be the eigenvalues of matrix  $\mathbb{M}$  ( $\lambda^2 = \Omega^2|c|^2 - \delta^2$ ). The solution of (4.50b) reads, all calculations carried out :

$$B(t) = B_+(t) + B_-(t) = \alpha_+(0) e^{\lambda t} + \alpha_-(0) e^{-\lambda t} \quad (4.52)$$

with :

$$\alpha_+(0) = \frac{1}{2\lambda} [(\lambda + i\delta)\alpha(0) + \Omega c \alpha^*(0)], \quad (4.53a)$$

$$\alpha_-(0) = \frac{1}{2\lambda} [(\lambda - i\delta)\alpha(0) - \Omega c \alpha^*(0)]. \quad (4.53b)$$

Then, allowing for (4.44), (4.48) and (4.50a), we set :

$$\alpha(t) = \alpha_+(t) + \alpha_-(t) \quad (4.54a)$$

with :

$$\alpha_{\pm}(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i[\varphi(t)+\delta t]} B_{\pm}(t) = \alpha_{\pm}(0) e^{(\pm\lambda - \frac{\gamma}{2})t} e^{-i(\frac{n\Omega t}{2} + \varphi(t) - \omega_0 t)}. \quad (4.54b)$$

It is noteworthy that difference  $\varphi(t) - \omega_0 t$  is determined by the phase  $\Omega t$  of the external modulation (4.40a or b) : as shown by result (4.42), it is due to the collapse of the  $\omega_0 t$  term in the subtraction. Moreover, as suggested by (4.46), the phase factor  $e^{i(\omega_0 t - \varphi(t))}$  can be approximated by unity if  $|\epsilon_{\omega}| \ll 1$ .

From above result (4.52), two regimes are possible, according as  $\Omega|c|$  is smaller or larger than  $|\delta|$ .

- (i). If  $\Omega|c| < |\delta|$ , then  $\lambda = i\sqrt{\delta^2 - \Omega^2|c|^2}$  is *imaginary* and function  $B(t)$  oscillates with angular frequency  $\sqrt{\delta^2 - \Omega^2|c|^2}$ . By way of check, observe that in the limit case  $|c| = 0$  (*i.e.* when no parametric excitation is implemented at all), we have  $\varphi(t) = \omega_0 t$ ,  $\lambda = i|\delta|$ ,  $B(t) = \alpha(0) e^{i\delta t}$ , and thus (4.54b) reads :

$$\alpha(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i[\omega_0 t + \delta t]} \alpha(0) e^{i\delta t} = \alpha(0) e^{-(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0)t}, \quad (4.55)$$

and result (4.12) is recovered, as expected.

- (ii). If  $\Omega|c| > |\delta|$ , then  $\lambda = \sqrt{\Omega^2|c|^2 - \delta^2}$  is *real* and  $B(t)$ , as displayed in (4.52), is thus the sum of two terms with constant arguments, the former growing like  $e^{\lambda t}$ , the latter decaying like  $e^{-\lambda t}$ . Setting

$$\lambda + i\delta = \Omega|c|e^{i\chi} (= \Omega c e^{i(\chi - \psi)}), \quad \text{with } \cos \chi = \frac{\lambda}{\Omega|c|} \text{ and } \sin \chi = \frac{\delta}{\Omega|c|}, \quad (4.56)$$

numbers  $\alpha_{\pm}(0)$  defined in (4.53) read :

$$\alpha_+(0) = \frac{1}{\cos \chi} e^{i\frac{\psi+\chi}{2}} \Re \left\{ e^{-i\frac{\psi-\chi}{2}} \alpha(0) \right\}, \quad (4.57a)$$

$$\alpha_-(0) = \frac{1}{\cos \chi} e^{i\frac{\psi-\chi}{2}} i \Im \left\{ e^{-i\frac{\psi+\chi}{2}} \alpha(0) \right\}. \quad (4.57b)$$

For times  $t$  longer than  $\lambda^{-1}$ ,  $B_-(t)$  vanishes and we are left with an “asymptotic” regime (ii) in which the Glauber variable  $\alpha$  reads, allowing for (4.54) :

$$\alpha(t \gg \lambda^{-1}) = \alpha_+(t) = \alpha_+(0) e^{(\lambda - \frac{\gamma}{2})t} e^{-i(\frac{n\Omega t}{2} + \varphi(t) - \omega_0 t)}. \quad (4.58)$$

The above features of regime (ii) deserve at least three comments.

- First, contrary to regime (i), the *phases* of variables  $\alpha_+$  and  $\alpha_-$  are entirely fixed by that of the modulation (*e.g.* the phase of the engine's rotation in our experimental implementation), as displayed by formula (4.54b) when  $\lambda$  is real. There is a slow drift, with rate  $\lambda$ , of the phase of their sum  $\alpha = \alpha_+ + \alpha_-$ , due to the different time-evolutions of prefactors  $e^{\pm\lambda t}$ , so that the *very* phase locking of  $\alpha$  is reached only for times longer than  $\lambda^{-1}$ . In this respect, it is interesting to recall that an analogous locking of the phase also occurs in the case of any HO simply driven by an external sinusoidal force. However, in this case, the forced regime is reached for times  $t$  longer than  $\gamma^{-1}$  (decay time of the damped *free* motion, independent of both the amplitude and the detuning of the external force).
- Second, these locked phases of  $\alpha_+$  and  $\alpha_-$  are independent of the initial conditions, as shown off by the presence of amplitude prefactors  $\Re\{\alpha(0)e^{-i\frac{\psi-\chi}{2}}\}$  and  $\Im\{\alpha(0)e^{-i\frac{\psi+\chi}{2}}\}$  in expressions (4.57) of  $\alpha_{\pm}(0)$ . In this respect, parametric excitation in regime (ii) acts like a sort of polarizer : in the complex plan of variable  $\alpha$ , the projection of “vector”  $\alpha(0)e^{-i\frac{\psi-\chi}{2}}$  onto real axis is multiplied by the growing factor  $e^{\lambda t}$  while the projection of  $\alpha(0)e^{-i\frac{\psi+\chi}{2}}$  onto imaginary axis is multiplied by the decaying factor  $e^{-\lambda t}$ . This comparison with polarization is even more eloquent at parametric resonance (*i.e.* for  $\delta = 0 \rightsquigarrow \chi = 0$ ) : formulas (4.57) show that the complex number  $\alpha(0)e^{-i\frac{\psi}{2}}$  is then split into its real and imaginary parts, the former being amplified by  $e^{\lambda t}$  and the latter attenuated by  $e^{-\lambda t}$ . It is interesting again to make a comparison with the simply sinusoidally driven HO case. In this case indeed the *forced* oscillation is utterly independent of the initial movement, but for a quite different reason : any “memory” of this initial movement is lost as soon as  $t$  gets longer than  $\gamma^{-1}$ .
- Third, as shown by formula (4.58), two cases are to be distinguished as concerns the long time behavior of the pendulum in regime (ii). Either  $\lambda < \frac{\gamma}{2}$  and then the oscillation dies out when  $t \rightarrow \infty$ , or  $\lambda > \frac{\gamma}{2}$  and then the oscillation is amplified. Thus, implementing a parametric modulation of the (4.40a or b) type at given  $\Omega$  and increasing  $\epsilon$  (*i.e.* increasing all the  $c_n$  coefficients introduced in (4.47)), threshold values  $c_{nT}$  for the parametric amplification to occur are defined by :

$$\lambda_T = \sqrt{\Omega^2 |c_{nT}|^2 - \delta_n^2} = \frac{\gamma}{2} \quad \rightsquigarrow \quad |c_{nT}| = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\left(\frac{n\Omega}{2} - \omega_0\right)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \\ \simeq \frac{n}{2\omega_0} \sqrt{\left(\frac{n\Omega}{2} - \omega_0\right)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (4.59)$$

Consequently, as well known, the curve  $|c_{nT}|(\Omega)$  separates, in the vicinity of abscissa  $\Omega_n = \frac{2\omega_0}{n}$ , the  $(|c_n|, \Omega)$  plane in two domains : beneath this curve an initial oscillation ( $\alpha(0) \neq 0$ ) of the pendulum dies out whatever  $\alpha(0)$ ; above this curve the amplitude may exponentially increase (until its growth is limited by some non-linearity the discussion of which is out of the scope of the present paper). Curves  $|c_{nT}|(\Omega)$  are plotted in figure 4.4 for  $n = 1, 2, 3$ .

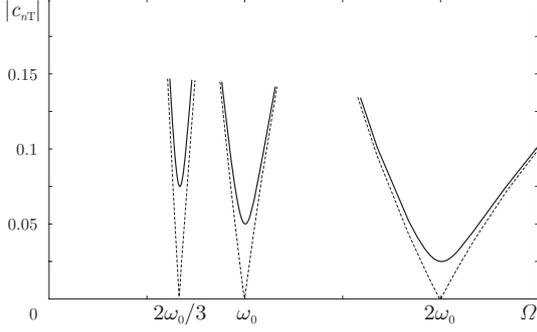


FIG. 4.4 – Threshold values  $|c_{nT}|(\Omega)$  for the parametric amplification for  $n = 1$ ,  $n = 2$  and  $n = 3$  resonances (dotted lines :  $\gamma = 0$ ; solid lines :  $\gamma \neq 0$ ). If  $|c| < |c_T|(\Omega)$ , any initial oscillation dies out when  $t \rightarrow \infty$ . If  $|c| > |c_T|(\Omega)$ , an initial oscillation of the pendulum may be exponentially amplified.

From now on, we shall consider only modulation (4.40a) of the {sliding cylinder to axis (A)} distance  $\ell_C$  (our experimental implementation). Furthermore, we shall limit any calculation to *first order* in modulation depth  $\epsilon_C$ , and thus focus on main parametric resonance  $n = 1$ . From the considerations (and with the notations and numerical values) of subsection (4.2.3), it is easy to derive the coefficients  $\epsilon_\omega$  and  $\epsilon_f$  introduced in (4.41) and (4.43). We get

$$\epsilon_\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{M_C \ell_{C0}}{M_C \ell_{C0} + mL} - \frac{2M_C \ell_{C0}^2}{J} \right) \epsilon_C \simeq -\frac{1}{2} \epsilon_C, \quad (4.60a)$$

and

$$\epsilon_f = \eta \epsilon_C, \quad (4.60b)$$

with parameter  $\eta$  displayed in (4.29c). Moreover, due to (4.43) and to be consistent at first order in  $\epsilon_C$ , we have to substitute  $e^{2i\omega_0 t}$  for the phase factor  $e^{2i\varphi(t)}$  in (4.47), thus leading to :

$$c_1 = \frac{\epsilon_f}{2} = \eta \frac{\epsilon_C}{2}. \quad (4.61)$$

Coefficient  $c_1$  is then found to be real. It should be kept in mind that this is due to our choice of time origin : should phase  $\Omega t - \psi$  be substituted for  $\Omega t$  in formula (4.40a), then  $c_1$  would be multiplied by  $e^{i\psi}$ . This remark will be found application below.

Let us now consider the experimental observations. We set  $\ell_{C0}$  to  $67.1 \text{ cm} \pm 2 \text{ mm}$ . Using again the characteristics of the pendulum listed in table 4.1, we calculate the period  $T_0 = 1.626 \text{ s}$ . The measured value is  $1.624 \text{ s}$  ( $\omega_0 = 3.87 \text{ rad.s}^{-1}$ ). We calculate also a value of  $\eta$  equal to 0.66. With an experimental length modulation depth  $\epsilon_C = 5 \cdot 10^{-2}$ , owing to (4.60b) and (4.61), we have  $\epsilon_f = \eta \epsilon_C = 3.3 \cdot 10^{-2}$  and  $|c_1| = \frac{\epsilon_f}{2} = 1.65 \cdot 10^{-2}$ . We choose the time origin to be the instant when the signal on the coil is maximum, which, allowing for the experimental setup described in section 4.2.1, is supposed to yield length modulation (4.40a) :  $c_1$  is thus expected to be real as explained above, *i.e.* argument  $\psi$  to be zero.

Figures 4.5a and 4.6a show the evolution of the measured angle  $\theta$  as a function of time, for two different values of angular frequency  $\Omega$ . From the  $\theta(t)$  signal, we numerically construct  $\dot{\theta}(t)$  and calculate the complex function  $\alpha_{\text{exp}}$  defined as :

$$\alpha_{\text{exp}}(t) = \left( \theta(t) + i \frac{\dot{\theta}(t)}{\omega_0} \right). \quad (4.62)$$

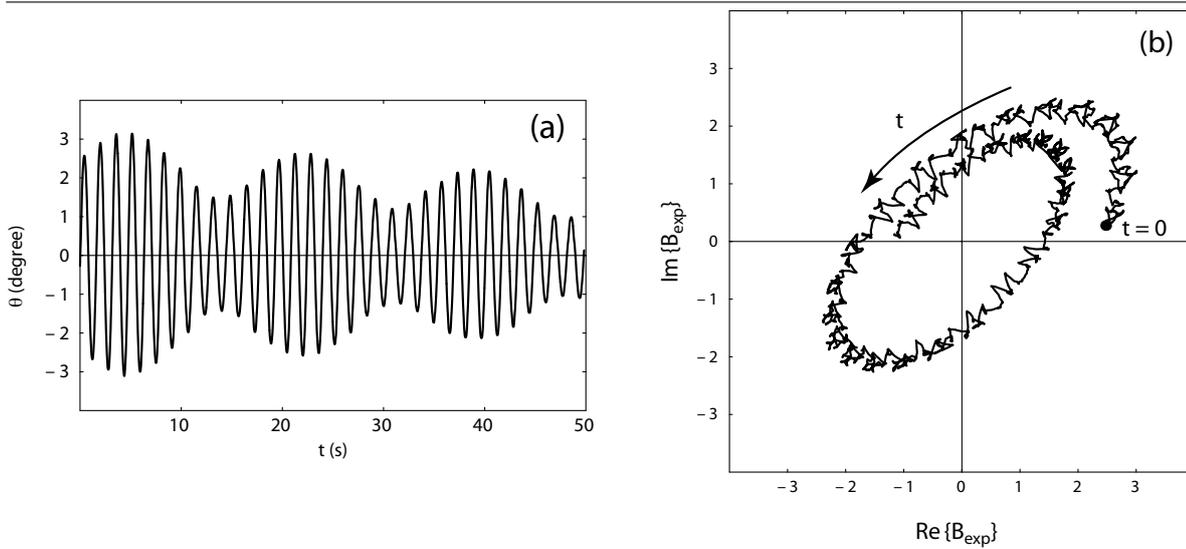


FIG. 4.5 – Regime (i). **a-** Measured oscillation angle  $\theta(t)$ . **b-** Trajectory of variable  $B_{\text{exp}}(t)$  in the complex plane. The unevennesses of the curve are due to an imperfect numerical calculation of derivative  $\dot{\theta}(t)$ .

Function  $\alpha_{\text{exp}}(t)$  is, save a multiplicative factor, the Glauber variable  $\alpha(t)$ . Observe that, to be consistent at first order,  $\omega_0$  and  $J(\ell_{C_0})$  are substituted for  $\omega(t)$  and  $J(t)$  in definition (4.20).

From  $\alpha_{\text{exp}}(t)$ , we then construct the complex function  $B_{\text{exp}}(t)$  :

$$B_{\text{exp}}(t) = \alpha_{\text{exp}}(t) e^{i\frac{\Omega}{2}t}. \quad (4.63)$$

According to formulas (4.52) and (4.54), and equalling  $\varphi(t)$  and  $\omega_0 t$  for first order consistency again, we expect  $B_{\text{exp}}$  to follow the law :

$$B_{\text{exp}}(t) = \left( \alpha_{\text{exp}+}(0)e^{\lambda t} + \alpha_{\text{exp}-}(0)e^{-\lambda t} \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t}. \quad (4.64)$$

Let us recall that, with our experimental device, dissipation is dominated by solid friction, so that the  $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$  factor in equation (4.64) is not realistic. But the qualitative behavior remains valid.

In figures 4.5 (a and b),  $\Omega = 2.13 \omega_0$  and thus  $\delta = 0.065 \omega_0 > \Omega|c_1| = 0.035 \omega_0$  : we are in regime (i). The effect of length modulation is only a modulation of oscillations magnitude. In figure 4.5b, we show the trajectory followed by  $B_{\text{exp}}$ , as calculated from the curve of figure 4.5a. As expected in regime (i),  $\lambda$  is imaginary and  $B_{\text{exp}}$  follows a trajectory spiralling with the angular frequency  $|\lambda|$ . Note that the curve is not well smoothed because of unavoidable errors in our numerical evaluation of  $\dot{\theta}(t)$ .

In figures 4.6 (a and b),  $\Omega \simeq 2 \omega_0$  and thus  $\delta \simeq 0$  : we are in regime (ii). The effect of modulation is “strong”. In this example, the magnitude of the oscillations begins by decaying, then grows exponentially after a while. Figure 4.6b shows the trajectory of  $B_{\text{exp}}$  for this experiment. Let us analyse this trajectory. The experiment being performed near parametric resonance, we have  $\chi \simeq 0$ . Now, with these values of arguments  $\psi$  and  $\chi$ , equations

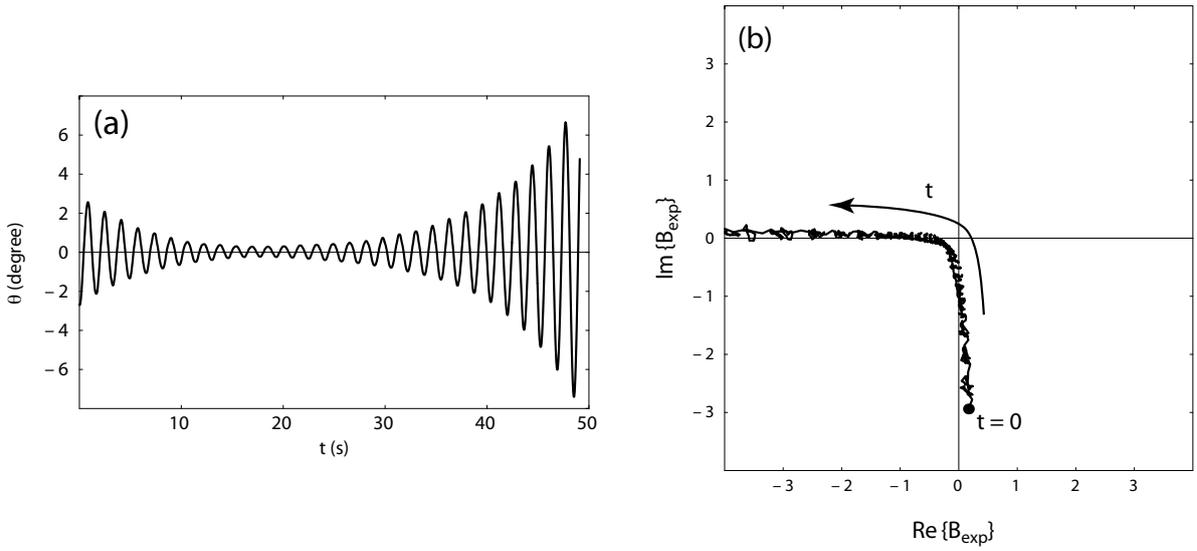


FIG. 4.6 – Regime (ii). **a-** Measured oscillation angle  $\theta(t)$ . **b-** Trajectory of variable  $B_{\text{exp}}(t)$  in the complex plane.

(4.57) yield :  $\alpha_+(0) = \Re\{\alpha(0)\}$  and  $\alpha_-(0) = i \Im\{\alpha(0)\}$ . In figure 4.6b, we can see that  $|\Re\{B_{\text{exp}}(0)\}| \ll |\Im\{B_{\text{exp}}(0)\}|$ . So  $|\alpha_+(0)| \ll |\alpha_-(0)|$  and the  $e^{-\lambda t}$  term dominates. As a consequence, the magnitude of the oscillations decays. But since  $\alpha_+(0) \neq 0$ , the  $e^{\lambda t}$  term becomes finally dominant, and the magnitude of the oscillations grows again exponentially. This asymptotic regime goes with a locking of the phase, which tends towards an asymptotic value, almost  $\pi$  in this example.<sup>4</sup>

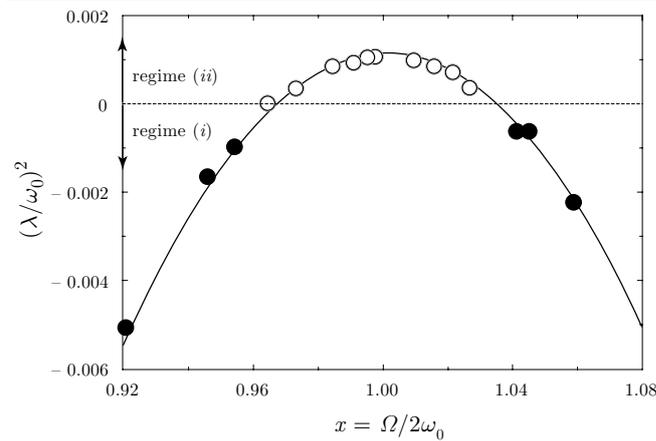


FIG. 4.7 –  $(\frac{\lambda}{\omega_0})^2$  as a function of  $x = \Omega/2\omega_0$  in both regimes (i) and (ii). The solid line is the parabola  $(\frac{\lambda}{\omega_0})^2 = (\epsilon_f^2 - 1)x^2 + 2x - 1$ , with  $\epsilon_f = 3.3 \times 10^{-2}$ , as calculated in the text using numerical values listed in table 4.1.

We can check that the agreement between theory and experiments is quantitatively good by measuring the values of  $\lambda$  and  $\chi$  for different values of  $\Omega$ . Figure 4.7 shows the result for  $\lambda$  by displaying  $(\frac{\lambda}{\omega_0})^2$  as a function of  $x = \Omega/2\omega_0$ . Since  $\lambda^2 = \Omega^2|c|^2 - \delta^2$  and allowing for

<sup>4</sup>Owing to (4.52) and (4.57a), the asymptotic argument of  $B_{\text{exp}}(t)$  should be that of  $\alpha_+(0)$ , i.e.  $\frac{\psi+\chi}{2}$  or  $\frac{\psi+\chi}{2} + \pi$ , according as  $\Re\{e^{-i\frac{\psi-\chi}{2}}\alpha_0\}$  is positive or negative. Figure 4.6b should be analysed keeping in mind that  $\chi$  is not exactly zero, and  $\psi$  not either as discussed below.

(4.61), the theoretical curve (solid line) is the parabola :  $(\frac{\lambda}{\omega_0})^2 = (\epsilon_f^2 - 1)x^2 + 2x - 1$ . One can appreciate the {experiment - theory} agreement. Note that the way we measure  $\lambda$  depends on which regime is concerned :

- in regime (i),  $\lambda$  is imaginary and we evaluate it by measuring the period of magnitude variations.<sup>5</sup>
- In regime (ii),  $\lambda$  is real and we evaluate it by a fit of the asymptotic exponential growth of the magnitude.

As for angle  $\chi$  (defined in regime (ii) only), it can be derived from the measurement of the asymptotic argument of  $B_{\text{exp}}$ . According to (4.52) and (4.57a),  $\text{Arg}\{B_{\text{exp}}(t \gg \lambda^{-1})\}$  is theoretically expected to be equal to  $\frac{\psi + \chi}{2}$ . Figure 4.8 displays  $\sin [2\text{Arg}\{B_{\text{exp}}(t \gg \lambda^{-1})\}]$  as a function of  $1/x = 2\omega_0/\Omega$ . The solid line is a fit performed as follows. From (4.56) we have  $\sin \chi = \frac{\delta}{\Omega|c_1|} = \frac{1-x^{-1}}{\epsilon_f}$ , then  $\sin(\psi + \chi) = \frac{1-x^{-1}}{\epsilon_f} \cos \psi + \sqrt{1 - (\frac{1-x^{-1}}{\epsilon_f})^2} \sin \psi$ . Experimental measurements are best fitted choosing  $\psi = 0.29$  rad. One may wonder why we do not find  $\psi = 0$ , as expected with modulation (4.40a). This discrepancy is due to our time origin unperfect marking. Let us come back to the device we use to detect the passing of the cylinder at its mean position when it is descending. As the coil and the magnet have finite sizes, the first voltage peak (on which we start counting time) is reached when the magnet makes a non-zero angle  $\psi$  with the vertical, slightly *before* the cylinder is at its mean position. The remark we made about formula (4.61) finds here its application, with  $\psi$  positive. Moreover, given disc, magnet and coil diameters (respectively 20 cm, 2.8 cm and 5 cm), we can evaluate  $\psi$  to be about 0.35 rad, which is roughly confirmed by the fit.

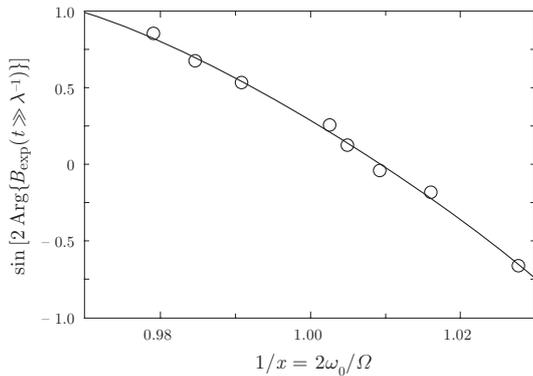


FIG. 4.8 – Regime (ii) :  $\sin [2 \text{Arg} \{B_{\text{exp}}(t \gg \lambda^{-1})\}]$  versus  $1/x = 2\omega_0/\Omega$ . The solid line is a fit :  $\sin(\psi + \chi)$  as a function of  $1/x$ , obtained with  $\psi = 0.29$  rad.

To end the theoretical part of the present subsection, we would now strike an energy balance of the resonant parametric excitation process. To begin with, let us consider the oscillation energy  $\mathcal{E}(t)$  of the pendulum, and its average value over a  $\frac{2\pi}{\Omega}$  duration,  $\langle \mathcal{E} \rangle$ . Owing to (4.21) we have :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \hbar \omega(t) |\alpha|^2 \rangle = \hbar \omega_0 |\alpha|^2. \quad (4.65)$$

<sup>5</sup>Note that, in this regime,  $B_{\text{exp}}$  spirals with the angular frequency  $\lambda$  so that  $|B_{\text{exp}}|$  oscillates with the angular frequency  $2\lambda$ .

Let us determine the time-derivative of  $\langle \mathcal{E} \rangle$ . We have, allowing for (4.23) :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \mathcal{E} \rangle}{dt} &= \hbar\omega_0(\dot{\alpha}\alpha^* + \text{c.c.}) \\ &= -\gamma\langle \mathcal{E} \rangle + (f(t)\alpha^{*2} + \text{c.c.}) \\ &= -\gamma\langle \mathcal{E} \rangle + e^{-\gamma t}\Omega(c_1 B^{*2} + \text{c.c.}). \end{aligned} \quad (4.66)$$

We shall now, as we did in the adiabatic parametric excitation case, determine the power  $\mathcal{P}_e$  consumed by the engine to move the cylinder along the rods. Using equations (4.34) and (4.35), averaging  $\mathcal{P}_e(t)$  over a  $\frac{2\pi}{\Omega}$  duration, and substituting  $\ell_{C0}$  for  $\ell_C$  to be consistent at first order in  $\epsilon_C$ , we get :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = M_C \left\langle \dot{\ell}_C \left( -\ell_{C0} \dot{\theta}^2 + g \frac{\theta^2}{2} \right) \right\rangle, \quad (4.67)$$

or equivalently in the Glauber formalism, and substituting  $\omega_0$  for  $\omega$  in (4.37) :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_e \rangle &= \epsilon_C \Omega \frac{M_C \ell_{C0}^2}{2J} \hbar\omega_0 \left\langle \left( (\alpha - \alpha^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g}{\ell_{C0} \omega_0^2} (\alpha + \alpha^*)^2 \right) \cos \Omega t \right\rangle \\ &= \eta \epsilon_C \Omega \hbar\omega_0 \langle (\alpha^2 + \alpha^{*2}) \cos \Omega t \rangle \\ &= \epsilon_f \frac{\Omega}{2} \langle e^{i\Omega t} \alpha^2 + \text{c.c.} \rangle \\ &= \hbar\omega_0 e^{-\gamma t} \Omega (c_1 B^{*2} + \text{c.c.}). \end{aligned} \quad (4.68)$$

(We have written formulas (4.66) and (4.68) in order that they be true even if  $c_1$  is complex, resulting from an arbitrary choice of time origin.) The energy balance is, as expected, given by (4.39) again, where  $\langle \mathcal{P}_f \rangle$  is now the dissipated power (see (4.2)) averaged over a  $\frac{2\pi}{\Omega}$  duration.

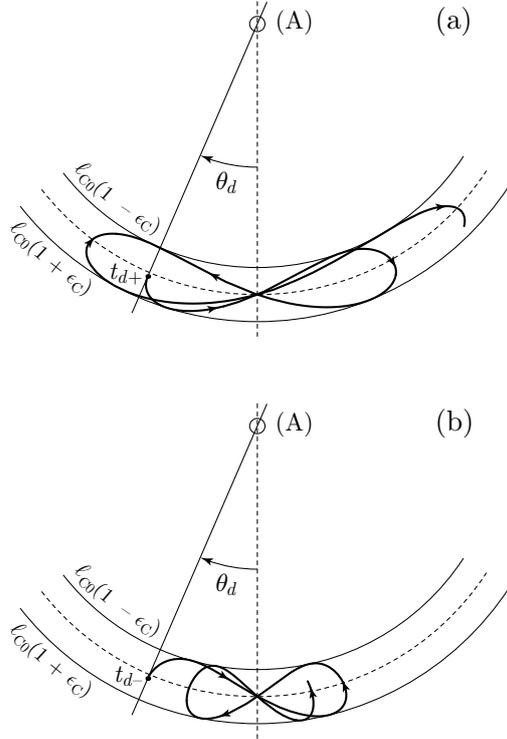


FIG. 4.9 – Trajectory of the cylinders' center of mass in the plane perpendicular to axis (A) in regime (ii) at parametric resonance ( $\delta = \chi = 0$ ), with  $\lambda = \Omega|c| \gg \frac{\gamma}{2}$ . The pendulum is dropped with no angular velocity from angle  $\theta_d$  at ad hoc time  $t = t_{d+}$  (a) or  $t = t_{d-}$  (b). In the energy absorption configuration (a), the pendulum increases its energy at the expense of the engine. In the energy stimulated emission configuration (b), the pendulum decreases its energy to the profit of the engine. Both trajectories are in fact identical, save a time-reversal operation.

Let us now focus on regime (ii). Using the energy balance, it is easy to bring out the inner meaning of solutions  $B_+$  and  $B_-$  introduced in (4.52).

To begin with, let us suppose that  $e^{-i\frac{\psi+\chi}{2}}\alpha(0)$  is *real*, so that  $B_-(t)$  is zero (see (4.57b)). Then, according to (4.65) and (4.68), we find :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \mathcal{E}_+ \rangle = \hbar\omega_0|\alpha_+|^2 = e^{-\gamma t}\hbar\omega_0|B_+|^2, \quad (4.69a)$$

and

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_e \rangle = \langle \mathcal{P}_{e+} \rangle &= e^{-\gamma t}\hbar\omega_0\Omega(c_1B_+^{*2} + \text{c.c.}) \\ &= e^{-\gamma t}\hbar\omega_0|B_+|^2\Omega(c_1e^{-i(\psi+\chi)} + \text{c.c.}) \\ &= 2\Omega|c_1|\cos\chi\langle \mathcal{E}_+ \rangle \\ &= 2\lambda\langle \mathcal{E}_+ \rangle. \end{aligned} \quad (4.69b)$$

In this configuration,  $\langle \mathcal{P}_e \rangle$  is positive : the pendulum increases its energy at the *expense* of the engine, and  $2\lambda$  can be regarded as the energy *absorption rate* of the process. Figure (4.9a) displays the trajectory of the cylinder's center of mass in the plan perpendicular to axis (A) in regime (ii) at parametric resonance ( $\Omega = 2\omega_0$ ) in this absorption configuration. With length modulation (4.40a) we then have :  $\theta(t) = \theta_+(t) = \theta(0)e^{(\lambda-\frac{\gamma}{2})t}\cos\frac{\Omega t}{2}$ . One could, at least in principle, implement this configuration by dropping the pendulum at time  $t = 0$  with an initial angle  $\theta(0)$  and no initial angular velocity ( $\dot{\theta}(0) = 0$ ). In practise, we dropped the pendulum at time  $t_{d+}$  at angle  $\theta_d$  (with  $\dot{\theta}_d = 0$ ). The figure displays the cylinders's trajectory after the dropping time ( $t > t_{d+}$ ).

Let us now consider the opposite case and suppose that  $e^{-i\frac{\psi-\chi}{2}}\alpha(0)$  is *imaginary*, so that  $B_+(t)$  is zero (see (4.57a)). Then we find in an analogous way :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \mathcal{E}_- \rangle = \hbar\omega_0|\alpha_-|^2 = e^{-\gamma t}\hbar\omega_0|B_-|^2, \quad (4.70a)$$

and

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_e \rangle = \langle \mathcal{P}_{e-} \rangle &= e^{-\gamma t}\hbar\omega_0\Omega(c_1B_-^{*2} + \text{c.c.}) \\ &= -e^{-\gamma t}\hbar\omega_0|B_-|^2\Omega(c_1e^{-i(\psi-\chi)} + \text{c.c.}) \\ &= -2\Omega|c_1|\cos\chi\langle \mathcal{E}_- \rangle \\ &= -2\lambda\langle \mathcal{E}_- \rangle. \end{aligned} \quad (4.70b)$$

In the latter configuration  $\langle \mathcal{P}_e \rangle$  is negative : the pendulum decreases its energy to the *profit* of the engine, and  $2\lambda$  can be regarded as the energy *stimulated emission* of the process. Figure (4.9b) displays the corresponding trajectory of the cylinder's center of mass in the same conditions (parametric resonance, modulation (4.40a)), but in the stimulated emission configuration. We then have :  $\theta(t) = \theta_-(t) = \frac{\dot{\theta}(0)}{\omega_0}e^{-(\lambda+\frac{\gamma}{2})t}\sin\frac{\Omega t}{2}$ . One could in principle obtain this configuration by kicking the pendulum at time  $t = 0$  from its equilibrium position ( $\theta(0) = 0$ ). In practise, we dropped the pendulum at time  $t_{d-}$  at angle  $\theta_d$  (with  $\dot{\theta}_d = 0$ ). The figure displays the cylinders's trajectory for  $t > t_{d-}$ . It should be remarked that, provided that

the viscous friction is negligible ( $\gamma \ll 2\lambda$ ), trajectory (4.9b) is but trajectory (4.9a) followed in the opposite direction (see time arrows).<sup>6</sup>

In the general case where neither  $B_+$  nor  $B_-$  is zero, a rather straightforward calculation of  $\langle \mathcal{P}_e \rangle$  yields :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = e^{-\gamma t} \hbar \omega_0 2\lambda (|B_+|^2 - |B_-|^2) = \hbar \omega_0 2\lambda (|\alpha_+|^2 - |\alpha_-|^2). \quad (4.71)$$

Above result (4.71) enables us to re-interpret the *a priori* puzzling behavior of the pendulum experimentally observed in figures (4.6) in regime (ii) above the parametric amplification threshold (*i.e.* in the case  $2\lambda > \gamma$ ). The initial movement of the pendulum being fixed in such a way that  $|\alpha_+(0)|$  be smaller than  $|\alpha_-(0)|$ ,  $\langle \mathcal{P}_e \rangle$  begins by being negative, so that the oscillations amplitude decreases even though  $2\lambda > \gamma$ . After a while,  $|\alpha_+(t)|^2 = |\alpha_+(0)|^2 e^{(2\lambda - \gamma)t}$  gets larger than  $|\alpha_-(t)|^2 = |\alpha_-(0)|^2 e^{-(2\lambda + \gamma)t}$ , and  $\langle \mathcal{P}_e \rangle$  becomes increasingly positive. When  $\langle \mathcal{P}_e \rangle$  gets larger than  $\langle \mathcal{P}_f \rangle$ , the oscillation amplitude begins to increase in its turn. The smaller  $|\alpha_+(0)|$ , the more spectacular this oscillation revival seems.

To complete the above {engine-pendulum} energy exchange considerations, we can include the viscous friction dissipation as a third mechanism, and regard  $\gamma$  as the energy *spontaneous emission* rate of this process. One has thus drawn a very nice mechanical parallel with the famous threefold {matter-radiation} interaction mechanism introduced by Einstein in the early twentieth century, the pendulum playing, under the circumstances, the role of the atom and the engine the role of the electromagnetic radiation.

### Glimpse of non linearity

So far in this paper, we have stressed a few insights of the virtues of the Glauber variable in the case of an *harmonic* oscillator, thus neglecting any non linearity. We would now suggest that the latter variable can be a convenient calculation tool *also* when non linearities are concerned. In this subsection, we shall deliberately limit to the mere calculation of the lowest order correction to the period formula. It reads :<sup>7</sup>

$$T(\theta_M) = T_0 \left( 1 + \frac{\theta_M^2}{16} + O(\theta_M^4) \right), \quad (4.72)$$

where  $\theta_M$  is the maximum amplitude of the oscillation and  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  is the HO limit value. Equation (4.72) is known as the Borda formula. Our aim is just to show that the above correction can be obtained with the Glauber formalism in a very simple way. If non linearities are taken into account, hamiltonian (4.19) should be modified into

$$H = \frac{\sigma^2}{2J} + Mgl(1 - \cos \theta) = \frac{\sigma^2}{2J} + J\omega_0^2 \left( \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \dots \right). \quad (4.73)$$

<sup>6</sup>It can be checked that this “time reversal” is observed whatever  $\chi$ , *i.e.* is relevant out of parametric resonance *also*.

<sup>7</sup>See for instance [KKR].

Keeping definition (4.7) (or equivalently (4.20)) of  $\alpha$  unchanged, and allowing for (4.37), formula (4.8) is generalized into :

$$H = \hbar\omega_0|\alpha|^2 - \frac{J\omega_0^2}{4!} \left[ \left( \frac{\hbar}{2J\omega_0} \right)^2 \frac{(\alpha + \alpha^*)^4}{4!} - \left( \frac{\hbar}{2J\omega_0} \right)^3 \frac{(\alpha + \alpha^*)^6}{6!} + \dots \right]. \quad (4.74)$$

Since

$$\{\alpha, (\alpha + \alpha^*)^n\} = \frac{n}{i\hbar} (\alpha + \alpha^*)^{n-1}, \quad (4.75)$$

the equation of motion of  $\alpha$  is easily derived from hamiltonian (4.74). Henceforth we keep only the first corrective term, regarded as a perturbation. In equation

$$\dot{\alpha} = \{\alpha, H\} = -i\omega_0 \left[ \alpha - \frac{1}{12} \frac{\hbar}{2J\omega_0} (\alpha + \alpha^*)^3 \right], \quad (4.76)$$

it is then interesting to select in the expansion of  $(\alpha + \alpha^*)^3$  the term that gives a *secular* contribution to the time-evolution of  $\alpha$ , *i.e.*  $3\alpha^2\alpha^* = 3|\alpha|^2\alpha$ . At the SA, equation (4.76) reads :

$$\dot{\alpha} = -i\omega_0 \left( 1 - \frac{\hbar|\alpha|^2}{8J\omega_0} \right) \alpha, \quad (4.77a)$$

an obvious solution of which is :

$$\alpha(t) = \alpha(0) e^{-i\omega t} \quad \text{with } \omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\hbar|\alpha|^2}{8J\omega_0} \right). \quad (4.77b)$$

Note that the maximum amplitude  $\theta_M$  of the oscillations is linked to the quanta number  $|\alpha|^2$  by :

$$\hbar\omega_0|\alpha|^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2\theta_M^2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\hbar|\alpha|^2}{8J\omega_0} = \frac{\theta_M^2}{16}, \quad (4.78a)$$

so that, according with (4.77b) :

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\theta_M^2}{16} \right), \quad (4.78b)$$

and result (4.72) is thus recovered without any further calculation.

#### 4.2.4 Conclusion

In this paper, we have stressed the simplicity and the handiness of the Glauber formalism in several situations in which the classical HO1 is concerned. Using this formalism requires rather little knowledge about analytical mechanics. In fact Hamilton's equations and Poisson's brackets are enough. So that it would not be unrealistic to introduce it as soon as the undergraduate level is reached. Although the classical quanta number  $N = |\alpha|^2$  has, strictly speaking, no particular relevance in non quantum physics, it turns out to be *the* very adiabatic invariant of the undamped HO1, as shown in subsection (4.2.3), and its exponential decrease in the case of a weak viscous friction suggests a good mental picture of markovian relaxation. Moreover, the dimensionless Glauber variable provides a universal description of the HO1, whatever its physical nature. This is checked for instance in the case of parametric excitation of the HO1, as shown in subsection (4.2.3), where two different kinds of excitation (modulating  $g$  or  $\ell$  under the circumstances) lead to two different forms of motion equations in variable  $\theta$ , but to the

same one in variable  $\alpha$ . Besides, the latter variable is likely to be handy when investigating non linear effects as it reveals to be the case when looking at the period correction in subsection (4.2.3).

For the above reasons we suggest that the Glauber formalism would deserve a better place in undergraduate level teaching and textbooks. Further arguments for this trial are proposed in companion paper II.

Some of the experimental implementations of this article have been performed with the help of Méline Le Guerriec and Ryan Mahdaoui during their stay in our laboratory. Let them be acknowledged too for their testing, as Paris 6 University undergraduate students, our presentation of the Glauber formalism. We would also acknowledge Patrick Lepers and Maurice Gilbert for their deciding contribution in achieving the experimental device.

### 4.3 Deux pendules couplés

After teaching the properties of the one-degree of freedom harmonic oscillator (HO1), the probably most famous and simple classical dynamical system, a further step towards complexity is reached when considering a set of two coupled such oscillators. As well known, if the coupling is bilinear, the set itself is a two-degree of freedom harmonic oscillator (HO2) and it is a time-honored undergraduate level exercise to determine its two eigenmodes, normal variables and so on. Roughly round about this stage of their university progress, physics students are faced with quantum mechanics primers. Their first contact with quantum formalism is often disturbing - even if not explicitly admitted - probably due to a temporary loss of intuitive support. Nevertheless, new mental pictures quickly settle whenever the quantum system under consideration has some classical equivalent. Such is the case for the HO or the hydrogen atom. This is not the case for half-integer angular momenta or for the two level system (TLS) (which can all the same be analyzed in terms of a half-one fictitious spin). A fascinating peculiarity of the latter systems is their displaying purely quantum behaviors. The Rabi precession of a sinusoidally perturbed TLS, for instance. In this context, any classical analogy illustrating the quantum effect to be understood - eventually to be taught - is welcome, especially if this illustration is reinforced by some everyday life (or almost everyday life) experiment.

*Prima facie*, a (classical) HO2 and a (necessarily quantum) TLS have nothing in common. Except the factor 2, of course. Our aim in the present paper is to show that, under certain conditions that we shall specify later, their dynamics present tight resemblances. Moreover, we shall take advantage of these resemblances to describe the free and parametrically forced motions of the former (the HO2) in terms of the Larmor-Bloch description of the dynamics of the latter (the TLS). The price to pay for these resemblances to be shown off is the use of dynamical variables first introduced by Glauber and the classical adaptation of a trick by Schwinger.

This paper II is the companion of a foregoing one devoted to the illustration of Glauber's variables handiness in the case of the HO1. Although written, as far as possible, in a self-

consistent way, it should nevertheless be regarded as the continuation of paper I.<sup>8</sup> With this aim, it is organized as follows.

In section 4.3.1 we present the device we used for our experimental implementation to illustrate the theory. We introduce our notations and generalize the motion equations derived in paper I in the HO1 case.

In section 4.3.2 we discuss these coupled equations of motion in the general two-degree of freedom case and we recall some standard topics : determination of both eigenfrequencies, eigenmodes and normal variables, uncoupling procedure and parametric excitation.

We focus in section 4.3.3 on the particular case where these eigenfrequencies are very close to each other (in a sense that will be specified in the text), and show that the free HO2 is then formally analogous to a half-one spin precessing in a static magnetic field. We define a (pseudo) angular momentum vector the motion of which is described in terms of the Larmor representation. Furthermore, we show that an adiabatic parametric excitation of the HO2 can be allowed for by the action of a time-dependent magnetic field on the afore-mentioned half-one spin. The case of a small sinusoidal variation (perpendicular to the static part) is shown to correspond to the Rabi situation. All (the) theoretical predictions of this section 4.3.3 are compared to the experimental results.

For the sake of lightness, we neglect damping in sections 4.3.2 and 4.3.3. Nevertheless, a weak viscous friction is considered in appendix 1,<sup>9</sup> and analysed within the framework of Bloch-like equations.

### 4.3.1 The experimental device

In principle, any HO2 could be used to illustrate the purpose of the present paper. Nevertheless, in view of our attempt to observe the (classical) Rabi precession, a high quality factor of our oscillator is of primary importance. In fact we chose the same device as in paper I, just slightly modified in order to obtain a HO2. We therefore used a set of two pendula and set up the apparatus displayed in figure 4.10.

Each pendulum is made of a couple of light parallel metallic rods with mass  $m$ . A heavy cylinder with mass  $M_C$  is fixed on the rods. The whole set can rotate freely around one horizontal axis (A) thanks to ball-bearings. In one of the pendula, say number 1, the cylinder can be slid along the rods thanks to a piano wire drawn (up or down) by an electric engine. We should precise that, in the latter movement, the wire is dragged through a grooved pulley located on axis (A), so that no torque at all is exerted onto this axis by the wire's doing : moving the mass along the rod simply changes its distance to axis (A) and should thus be regarded as a pure parametric excitation of the pendulum. The coupling between both pendula is obtained by means of a simple torsion wire. Two potentiometers connected to a numerical oscilloscope provide the angles  $\theta_1$  and  $\theta_2$  that the rods of each pendulum make with the vertical.

---

<sup>8</sup>Il s'agit de l'article reproduit dans la section 4.2.

<sup>9</sup>Les appendices de cet article sont regroupés dans l'annexe E.

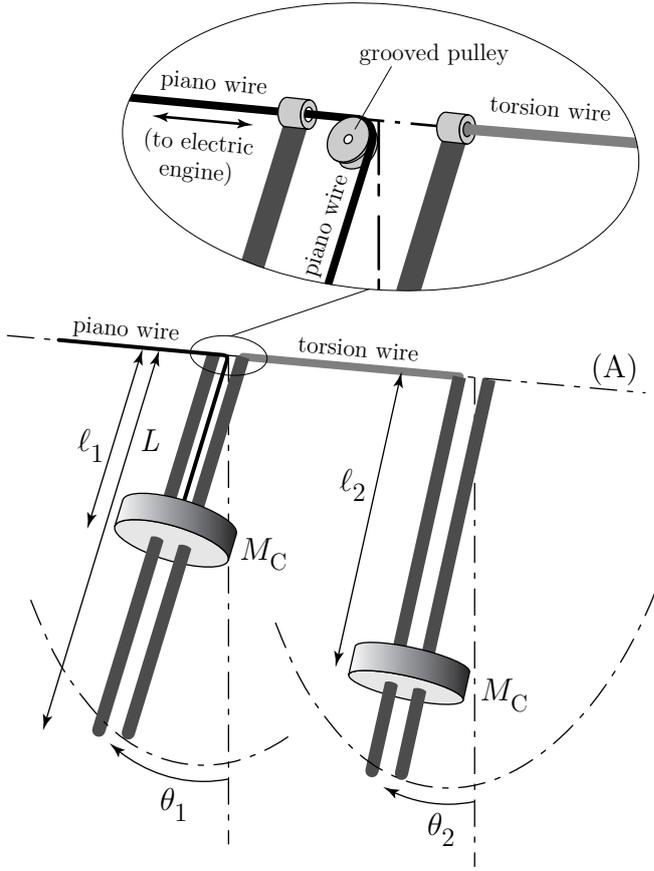


FIG. 4.10 – *Experimental device.* Both pendula can rotate freely around axis (A). They are coupled through a torsion wire. In the left pendulum, labelled 1, the cylindrical mass  $M_C$  can be slid along a couple of rods thanks to a piano wire dragged by an electric engine through a grooved pulley in such a way that no torque at all is exerted upon (A) : sliding mass  $M_C$  thus implements a pure parametric excitation of pendulum 1.

### Basic equations

To begin with, let us write down the equations of the problem. The dynamic variables are chosen to be angles  $\theta_1$  and  $\theta_2$ . Let  $J_1$  and  $\ell_1$  (resp.  $J_2$  and  $\ell_2$ ) be the inertia momentum with respect to axis (A) and the {center of mass to axis (A)} distance of pendulum 1 (resp. 2).  $C$  standing for the angular stiffness of the torsion wire and  $M = M_C + 2m$  being the total mass of each pendulum, the dissipation-free equations of motion read, in absence of external torques :

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -Mg\ell_1 \sin \theta_1 - C(\theta_1 - \theta_2), \quad (4.79a)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = -Mg\ell_2 \sin \theta_2 - C(\theta_2 - \theta_1). \quad (4.79b)$$

From now on, we shall consider only small oscillations, allowing us to substitute  $\theta_1$  (resp.  $\theta_2$ ) for  $\sin \theta_1$  (resp.  $\sin \theta_2$ ) in above equations (4.79). Our two-pendulum oscillator is thus a HO2.

### Taking dissipation into account

As concerns dissipation (and as explained in paper I), two kinds of friction mechanisms combine to damp the oscillations : solid friction due to the potentiometer and the ball-bearing binding, and viscous friction against surrounding air. One should add to the latter kind the damping associated with the visco-elastic linear response of the torsion wire. From the *experimental* viewpoint, both dissipation processes should be taken into account. Nevertheless, in

view of the further comparison with the Bloch equations, only the viscous damping is relevant : neither a spin nor a TLS ever undergo solid friction, so that we shall deliberately ignore it throughout the *theoretical* part of this paper. As a consequence, the most general expression for the dissipated power  $\mathcal{P}$  is the positive quadratic form :

$$\mathcal{P} = J_1\gamma_{11}\dot{\theta}_1^2 + 2\sqrt{J_1J_2}\gamma_{12}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + J_2\gamma_{22}\dot{\theta}_2^2, \quad (4.80a)$$

where  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{22}$ ,  $\gamma_{12}$  are viscous friction coefficients (with unit  $\text{time}^{-1}$ ) which satisfy the inequalities :

$$\gamma_{11}, \gamma_{22} > 0; \quad \gamma_{12}^2 < \gamma_{11}\gamma_{22}. \quad (4.80b)$$

It will be convenient to introduce the new dynamical variables ( $k = 1, 2$ ), referred to as “standard” :

$$q_k = \sqrt{J_k}\theta_k, \quad (4.81a)$$

to set :

$$\omega_k^2 = \frac{Mg\ell_k + C}{J_k}, \quad (4.81b)$$

and to define the dimensionless coupling constant  $\kappa$  by :

$$\frac{C}{\sqrt{J_1J_2}} = \kappa\omega_1\omega_2 \quad \rightsquigarrow \quad \kappa = \frac{C}{\sqrt{(Mg\ell_1 + C)(Mg\ell_2 + C)}} \leq 1. \quad (4.81c)$$

With these new notations, the equations of motion read :

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & -\kappa\omega_1\omega_2 \\ -\kappa\omega_1\omega_2 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.82)$$

Now that the stage and some basic notations are set, we provisionally forget dissipation and focus in next section on the free and parametrically excited motions of the HO2 in the general case.

### 4.3.2 Brief recall of standard topics

We now take the opportunity offered by the hereafter quick overflight of standard notions to introduce in (4.3.2) some further notations that we shall need in the course of this paper, and to discuss in (4.3.2) the following topic : what is the adiabatic invariant of the HO2 ?

#### The free HO2

Setting :

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & -\kappa\omega_1\omega_2 \\ -\kappa\omega_1\omega_2 & \omega_2^2 \end{pmatrix}, \quad (4.83)$$

the dissipation-free matricial equation of motion reads :

$$\ddot{q} + B^2q = 0. \quad (4.84)$$

This equation can be derived from the lagrangian

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}\dot{q} - \dot{q}B^2q) \quad (4.85a)$$

(superscript  $t$  indicating matricial transposition) or from the hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}({}^t p p + {}^t q B^2 q), \quad (4.85b)$$

where  $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  are the conjugate momenta of variables  $q$ .

Unless the coupling constant  $\kappa$  is zero, dynamic variables  $q_1$  and  $q_2$  are coupled together. In order to unravel their entangled evolutions, the standard procedure consists in introducing two independent linear combinations of them,  $\varphi_+$  and  $\varphi_-$ , known as the “normal variables”, which evolve independently from each other. Let  $P_e$  be the passage matrix that diagonalizes  $B^2$ , that is :

$$P_e^{-1} B^2 P_e = \Omega^2, \quad \text{with } \Omega = \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix}. \quad (4.86a)$$

Then, making the linear variables change

$$q = P_e \varphi \quad \text{with} \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}, \quad (4.86b)$$

we turn equation (4.84) into

$$\ddot{\varphi} + P_e^{-1} B^2 P_e \varphi = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}_+ + \omega_+^2 \varphi_+ = 0 \\ \ddot{\varphi}_- + \omega_-^2 \varphi_- = 0 \end{cases}, \quad (4.87)$$

which shows that, as announced above,  $\varphi_+$  and  $\varphi_-$  are uncoupled variables. The diagonalization of matrix  $B^2$  leads to the following results. Setting

$$G = \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + \kappa^2 \omega_1^2 \omega_2^2}, \quad \cos \phi_e = \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{G}, \quad \sin \phi_e = \frac{\kappa \omega_1 \omega_2}{G}, \quad (4.88a)$$

and using the  $\{\mathbb{I}, \sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z\}$  Pauli matrices basis :

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.88b)$$

matrix  $B^2$  reads :

$$B^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)\mathbb{I} + G(\cos \phi_e \sigma_Z - \sin \phi_e \sigma_X). \quad (4.88c)$$

One thus obtains its eigen (angular) frequencies  $\omega_{\pm}$  (displayed in figure 4.11 as functions of the coupling constant  $\kappa$ ) :

$$\omega_+^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + G, \quad \omega_-^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - G, \quad (4.89a)$$

and the (normalized to unity) eigenvectors passage matrix  $P_e$  :

$$P_e = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi_e}{2} & \sin \frac{\phi_e}{2} \\ -\sin \frac{\phi_e}{2} & \cos \frac{\phi_e}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.89b)$$

Observe that  $P_e$  is an orthogonal matrix, so that  $P_e^{-1} = {}^tP_e$ . In normal variables  $\varphi$ , lagrangian  $L$  (see (4.85a)) reads :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} ({}^t\dot{\varphi} {}^tP_e P_e \dot{\varphi} - {}^t\varphi {}^tP_e B^2 P_e \varphi) = \frac{1}{2} ({}^t\dot{\varphi} \dot{\varphi} - {}^t\varphi \Omega^2 \varphi) \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_+^2 - \omega_+^2 \varphi_+^2) + \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_-^2 - \omega_-^2 \varphi_-^2), \end{aligned} \quad (4.90)$$

which is the sum of two HO1 lagrangians. Consequently,  $\pi = \begin{pmatrix} \pi_+ \\ \pi_- \end{pmatrix}$  standing for the conjugate momenta of  $\varphi$ , one has :

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} = P_e^{-1} \dot{q} = P_e^{-1} p \quad \rightsquigarrow \quad p = P_e \pi, \quad (4.91)$$

and hamiltonian  $H$  (see (4.85b)) reads :

$$H = \frac{1}{2} ({}^t\pi \pi + {}^t\varphi \Omega^2 \varphi) = \frac{1}{2} (\pi_+^2 + \omega_+^2 \varphi_+^2) + \frac{1}{2} (\pi_-^2 + \omega_-^2 \varphi_-^2), \quad (4.92)$$

which is just the same the sum of the two aforesaid HO1 hamiltonians.

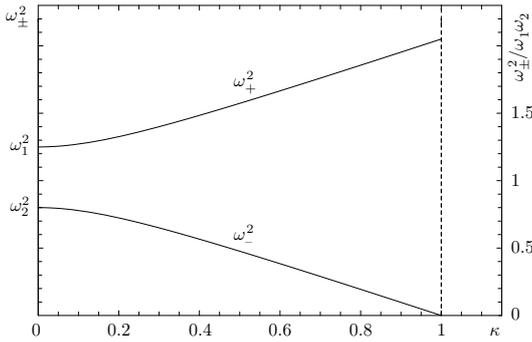


FIG. 4.11 – Square of the eigen angular frequencies  $\omega_+$ ,  $\omega_-$  as a function of the dimensionless coupling constant  $\kappa$ . The figure corresponds to a ratio  $\omega_1/\omega_2 = 1.25$ . Note the soft mode in the lower branch at maximum coupling :  $\omega_-(\kappa = 1) = 0$ .

At this step of the paper, it is interesting to note what turns out when use is made of the Glauber<sup>10</sup> variables  $\alpha_1, \alpha_2$  of the pendula to express hamiltonian (4.85b). Defining

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{\omega_k} q_k + \frac{i}{\sqrt{\omega_k}} p_k \right) \quad (k = 1, 2), \quad (4.93a)$$

one readily obtains :

$$H = \hbar\omega_1 |\alpha_1|^2 + \hbar\omega_2 |\alpha_2|^2 - \kappa \frac{\hbar}{2} \sqrt{\omega_1 \omega_2} (\alpha_1 + \alpha_1^*) (\alpha_2 + \alpha_2^*). \quad (4.93b)$$

From above hamiltonian (4.93b), and considering the Poisson's brackets :

$$\{\alpha_k, \alpha_{k'}\} = \{\alpha_k^*, \alpha_{k'}^*\} = 0; \quad \{\alpha_k, \alpha_{k'}^*\} = \frac{1}{i\hbar} \delta_{kk'}, \quad (4.94)$$

it is easy to derive the following equations of motion :

$$\dot{\alpha}_1 = \{\alpha_1, H\} = -i\omega_1 \alpha_1 + i \frac{\kappa}{2} \sqrt{\omega_1 \omega_2} (\alpha_2 + \alpha_2^*), \quad (4.95a)$$

$$\dot{\alpha}_2 = \{\alpha_2, H\} = -i\omega_2 \alpha_2 + i \frac{\kappa}{2} \sqrt{\omega_1 \omega_2} (\alpha_1 + \alpha_1^*). \quad (4.95b)$$

<sup>10</sup>For an introduction to the Glauber formalism, see [Gla63, Gla65] or [CTDL77].

In the general case, no particular simplification can be introduced on above equations (4.95) the uncoupling of which is not straightforward due to the starred terms in the right-hand sides. Let us just note that, due to the coupling ( $\kappa \neq 0$ ), the total quanta number  $N = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2$  is not conserved :

$$\frac{dN}{dt} = -i\kappa\sqrt{\omega_1\omega_2}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^*\alpha_2^*) \neq 0. \quad (4.96)$$

Of course, it is possible to introduce the eigenmodes proper Glauber variables. Defining

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{\omega_{\pm}}\varphi_{\pm} + \frac{i}{\sqrt{\omega_{\pm}}}\pi_{\pm} \right), \quad (4.97a)$$

one easily derives from equation (4.92) :

$$H = \hbar\omega_+|\alpha_+|^2 + \hbar\omega_-|\alpha_-|^2. \quad (4.97b)$$

Since the Poisson's relations (4.94) are still valid with  $k$  and  $k'$  standing for  $+$  or  $-$  (instead of 1 or 2), one consequently has :

$$\dot{\alpha}_{\pm} = \{\alpha_{\pm}, H\} = -i\omega_{\pm}\alpha_{\pm} \rightsquigarrow \alpha_{\pm}(t) = \alpha_{\pm}(0) e^{-i\omega_{\pm}t}, \quad (4.98)$$

which are the expected generalizations of the one-degree of freedom study (see paper I). Thus  $|\alpha_+|^2$  and  $|\alpha_-|^2$  are separately constants of motion. Nevertheless one should note that, despite the simple relations  $q = P_e\varphi$  and  $p = P_e\pi$  (see (4.86b) and (4.91)) between  $(q, p)$  and  $(\varphi, \pi)$ , the relation between

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \beta = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

is not simple. Using definitions (4.93a) and (4.97a) one indeed derives :

$$\alpha = \frac{1}{2}(Q_e + {}^tQ_e^{-1})\beta + \frac{1}{2}(Q_e - {}^tQ_e^{-1})\beta^*, \quad (4.100a)$$

where  $Q_e$  is the  $(2 \times 2)$  matrix defined as :

$$Q_e = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_2} \end{pmatrix} P_e \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\omega_+} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\omega_-} \end{pmatrix}. \quad (4.100b)$$

It is noteworthy that, due to the presence of the *different*  $\sqrt{\omega}$  factors (with  $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_+ \neq \omega_-$ ) in definition (4.100b),  $Q_e$  does not equal  $P_e$ . Nor does it be orthogonal. Hence the above-mentioned difficulty of uncoupling equations (4.95). Such a difficulty will be removed in the framework of section 4.3.3's approximations.

### Parametric excitation of the HO2 in the general case

Let us now consider what happens when the mass of pendulum 1 is slid along the rods during the oscillation of the two-pendulum system. We have to substitute lagrangian (4.85a) by :

$$L(t) = \frac{1}{2} \left[ J_1(t)\dot{\theta}_1^2 + J_2\dot{\theta}_2^2 - (Mg\ell_1(t) + C)\theta_1^2 - (Mg\ell_2 + C)\theta_2^2 + 2C\theta_1\theta_2 \right]. \quad (4.101a)$$

Through a standard Legendre's transformation, we obtain the hamiltonian

$$H(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_1^2}{J_1(t)} + \frac{\sigma_2^2}{J_2} + {}^t q(t) B^2(t) q(t) \right], \quad (4.101b)$$

where  $\sigma_k = J_k \dot{\theta}_k$  ( $k = 1, 2$ ) is the conjugate momentum of  $\theta_k$ , where definition (4.81a) of variable  $q_1$  simply becomes :

$$q_1(t) = \sqrt{J_1(t)} \theta_1, \quad (4.102a)$$

and where matrix  $B^2(t)$  reads like  $B^2$  (see equation (4.83)), with  $\omega_1$  and  $\kappa$  simply changed in  $\omega_1(t)$  and  $\kappa(t)$  given by :

$$\omega_1^2(t) = \frac{Mg\ell_1(t) + C}{J_1(t)}, \quad (4.102b)$$

$$\kappa(t)\omega_1(t)\omega_2 = \frac{C}{\sqrt{J_1(t)J_2}}. \quad (4.102c)$$

Then, redefining

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{J_1(t)\omega_1(t)} \theta_1 + \frac{i}{\sqrt{J_1(t)\omega_1(t)}} \sigma_1 \right) \quad (\text{and } \alpha_2 \text{ unchanged with respect to (4.93a)}), \quad (4.103a)$$

we can write hamiltonian (4.101b) as a function of the Glauber variables and thus generalize expression (4.93b) which now reads :

$$H(t) = \hbar\omega_1(t)|\alpha_1(t)|^2 + \hbar\omega_2|\alpha_2|^2 - \kappa(t)\frac{\hbar}{2}\sqrt{\omega_1(t)\omega_2}(\alpha_1(t) + \alpha_1^*(t))(\alpha_2 + \alpha_2^*). \quad (4.103b)$$

Motion equations (4.95a and b) consequently become :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \{\alpha_1(t), H(t)\} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = -i\omega_1(t)\alpha_1(t) + i\frac{\kappa(t)}{2}\sqrt{\omega_1(t)\omega_2}(\alpha_2 + \alpha_2^*) + \alpha_1^*(t)\frac{d}{dt} \ln \sqrt{J_1(t)\omega_1(t)}, \\ \dot{\alpha}_2 &= \{\alpha_2(t), H(t)\} = -i\omega_2(t)\alpha_2(t) + i\frac{\kappa(t)}{2}\sqrt{\omega_1(t)\omega_2}(\alpha_1(t) + \alpha_1^*(t)). \end{aligned} \quad (4.104b)$$

We shall not solve the above system in the general case, but simply try to find out an adiabatic invariant of the movement, and thus generalize the “ $N = |\alpha|^2 = \text{constant}$ ” result obtained in subsection (IV B) of paper I for the HO1. The first idea that springs to mind is to use equations (4.104) to calculate  $\frac{d}{dt}(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)$ , but equation (4.96) shows that the result *is not zero*, *even though* no parametric excitation of the system is achieved. A more promising attempt consists in considering the derivative  $\frac{d}{dt}(|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2)$ , which is zero in the *free* HO2 case ( $|\alpha_+|^2$  and  $|\alpha_-|^2$  being then constant, as already mentioned about result (4.98)). With this aim, we have to determine the time-evolutions of  $\alpha_+$  and  $\alpha_-$ . It is not simple because, due to the parametric excitation, the eigenmodes themselves (as well as their angular frequency and Glauber variable) *explicitly* depend on time. Nevertheless the hamiltonian reads, generalizing (4.97b) :

$$H(t) = \hbar\omega_+(t)|\alpha_+(t)|^2 + \hbar\omega_-(t)|\alpha_-(t)|^2, \quad (4.105)$$

with the subsequent equations, generalizing (4.98) :

$$\dot{\alpha}_\pm(t) = \{\alpha_\pm(t), H(t)\} + \frac{\partial}{\partial t} \alpha_\pm(t). \quad (4.106)$$

All calculations carried out, above equations (4.106) have the following form :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_+ \\ \dot{\alpha}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega_+ & \mathcal{A}_{+-} \\ -\mathcal{A}_{+-} & -i\omega_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} + \mathcal{S} \begin{pmatrix} \alpha_+^* \\ \alpha_-^* \end{pmatrix}, \quad (4.107a)$$

where  $\mathcal{S}$  is a symmetrical (real) matrix and  $\mathcal{A}_{+-}$  the coefficient :

$$\mathcal{A}_{+-} = \frac{1}{4} \left[ \left( \sqrt{\frac{\omega_+}{\omega_-}} - \sqrt{\frac{\omega_-}{\omega_+}} \right) \cos \frac{\phi_e}{2} \sin \frac{\phi_e}{2} \frac{\dot{J}_1}{J_1} - \left( \sqrt{\frac{\omega_+}{\omega_-}} + \sqrt{\frac{\omega_-}{\omega_+}} \right) \dot{\phi}_e \right], \quad (4.107b)$$

both proportional to  $\dot{\ell}_1/\ell_1$ .

In order not to weighten too much this first reading of the text, we do not justify above results (4.107) here. Nevertheless, we propose a complete derivation of these results in appendix 2, as well as a detailed discussion of the conditions at which the starred column-vector in the right-hand side of equation (4.107a) can be neglected (Secular Approximation, SA<sup>11</sup>). If these conditions are fulfilled, the parametric excitation of the two-pendulum system is said to be *adiabatic* (in the Ehrenfest's sense), and it is easy to check that the *total* eigen quanta number  $N_e = |\alpha_+(t)|^2 + |\alpha_-(t)|^2$  is a constant of the motion.

Let us now forsake the *general* HO2 problem and focus on what turns on when both eigenfrequencies are *close* to each other.

### 4.3.3 The two-pendulum system in the quasi-degeneracy case

The aim of the present section is threefold : (i) we show what substantial simplifications of the two-degree of freedom problem occur when eigen angular frequencies  $\omega_+$  and  $\omega_-$  of the two-pendulum system are close to each other in a sense specified below, and we conclude that the motion equations of the HO2 are then ‘‘Schrödinger-like’’ ; (ii) we recall the Schwinger-Larmor geometrical representation of the resulting motion, including a pastiche of the well-known Rabi precession ; (iii) we present our own experimental attempt to illustrate this {classical-quantum} analogy.

#### New simplifications. The Hilbert space

Let us begin with the *free* movement, set

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Delta = \omega_1 - \omega_2, \quad (4.108)$$

and assume that

$$|\Delta| \ll \omega_0 \quad (\text{small detuning}) \quad \text{and} \quad \textit{simultaneously} \quad \kappa \ll 1 \quad (\text{small coupling}). \quad (4.109)$$

It is not difficult to show that formulas (4.88a) can then be approximated by

$$G \simeq \omega_0 \Omega_0, \quad \cos \phi_e \simeq \frac{\Delta}{\Omega_0}, \quad \sin \phi_e \simeq \frac{\kappa \omega_0}{\Omega_0} \quad (4.110a)$$

---

<sup>11</sup>The SA is introduced, discussed at some length and used in paper I. Moreover it will be used again throughout this companion paper II, as often as available.

where

$$\Omega_0 = \sqrt{\Delta^2 + \kappa^2 \omega_0^2}, \quad (4.110b)$$

so that the eigen angular frequencies  $\omega_{\pm}$  displayed in formula (4.89a) read

$$\omega_{\pm} \simeq \omega_0 \pm \frac{1}{2} \Omega_0. \quad (4.111)$$

Thus, allowing for conditions (4.109), the angular frequency splitting  $\omega_+ - \omega_- \simeq \Omega_0$  is much smaller than  $\omega_0 \simeq \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$ . We leave it to the reader to check that, reciprocally, condition  $\Omega_0 \ll \omega_0$  implies both conditions (4.109). Observe that the product  $\omega_1 \omega_2$  is given by

$$\omega_1 \omega_2 = \left( \omega_0 + \frac{\Delta}{2} \right) \left( \omega_0 - \frac{\Delta}{2} \right) = \omega_0^2 - \frac{\Delta^2}{4}, \quad (4.112)$$

so that it differs from  $\omega_0^2$  by an order  $\Delta^2$  additional term that we will henceforth neglect. Hamiltonian (4.93b) will thus read :

$$H \simeq \hbar \omega_1 |\alpha_1|^2 + \hbar \omega_2 |\alpha_2|^2 - \kappa \frac{\hbar \omega_0}{2} (\alpha_1 + \alpha_1^*) (\alpha_2 + \alpha_2^*). \quad (4.113)$$

The motion equations satisfied by the  $\alpha_k$  are thus derived by substituting  $\omega_0$  for  $\sqrt{\omega_1 \omega_2}$  in the right-hand sides of equations (4.95). Nevertheless, a further simplification is provided by the SA as can be justified as follows. Should the coupling constant  $\kappa$  be exactly zero, these equations would then be uncoupled and admit straightforward solutions  $\alpha_k = A_k e^{-i\omega_k t}$  ( $k = 1, 2$ ), with  $A_1$  and  $A_2$  constant. Coupling is then taken into account by allowing the  $A_k$  to vary with time, exactly as we did in paper I to set up perturbative resolutions of motion equations. However, due to the angular frequency splitting  $\Delta$ , it is convenient to set

$$\alpha_1(t) = A_1(t) e^{-i(\omega_0 + \frac{\Delta}{2})t} = B_1(t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (4.114a)$$

$$\alpha_2(t) = A_2(t) e^{-i(\omega_0 - \frac{\Delta}{2})t} = B_2(t) e^{-i\omega_0 t}. \quad (4.114b)$$

The equations verified by the  $B_k(t)$  are then :

$$\dot{B}_1 = -i \frac{\Delta}{2} B_1 + i \frac{\kappa \omega_0}{2} (B_2 + B_2^* e^{2i\omega_0 t}), \quad (4.115a)$$

$$\dot{B}_2 = i \frac{\Delta}{2} B_2 + i \frac{\kappa \omega_0}{2} (B_1 + B_1^* e^{2i\omega_0 t}). \quad (4.115b)$$

It is easy to check that, provided that condition  $\Omega_0 = \sqrt{\Delta^2 + \kappa^2 \omega_0^2} \ll \omega_0$  is fulfilled, the  $B_k^* e^{2i\omega_0 t}$  terms in the right-hand sides of above equations (4.115) give no secular contribution (more precisely, their contribution ends up smaller than that of the secular terms by a factor of order of  $\frac{\Omega_0}{\omega_0}$ ), and should therefore be neglected in the framework of this section 4.3.3. Exact equations (4.95) are then simplified in :

$$\dot{\alpha}_1 \simeq -i\omega_1 \alpha_1 + i\kappa \frac{\omega_0}{2} \alpha_2, \quad (4.116a)$$

$$\dot{\alpha}_2 \simeq -i\omega_2 \alpha_2 + i\kappa \frac{\omega_0}{2} \alpha_1. \quad (4.116b)$$

The above equations deserve two remarks.

First, they derive from the secular approximation  $H^{\text{Sec}}$  of hamiltonian  $H$  (see (4.113)) :

$$H^{\text{Sec}} = \hbar\omega_1|\alpha_1|^2 + \hbar\omega_2|\alpha_2|^2 - \kappa\frac{\hbar\omega_0}{2}(\alpha_1\alpha_2^* + \alpha_1^*\alpha_2). \quad (4.117)$$

Second, if one considers  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  as the components of a “state” vector  $|\psi\rangle$  in a given (orthonormalized) basis  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  of a two-dimension Hilbert space  $\widehat{\mathcal{E}}$ , *i.e.* :

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_1(t)|1\rangle + \alpha_2(t)|2\rangle, \quad (4.118)$$

then  $|\psi(t)\rangle$  obeys the Schrödinger-like equation :

$$i\hbar\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \widehat{\mathcal{H}}|\psi(t)\rangle, \quad (4.119a)$$

where  $\widehat{\mathcal{H}}$  is an hermitian operator represented in basis  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  by the matrix :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & -\kappa\frac{\hbar\omega_0}{2} \\ -\kappa\frac{\hbar\omega_0}{2} & \hbar\omega_2 \end{pmatrix}. \quad (4.119b)$$

The time-evolution of vector  $|\psi(t)\rangle$  is therefore unitary, and its norm consequently constant (as can be checked directly from equations (4.116)) :

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = N = \text{cst}. \quad (4.120)$$

In other words : both pendula, due to their coupling, do exchange energy in the course of time, but, *at the secular approximation*, the *total* quanta number is conserved. Observe that this result is consistent with equation (4.96), the right-hand side of which involves the *non secular* term  $(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^*\alpha_2^*)$ . This term is relevant in the general case considered in section 4.3.2, but should be neglected in the framework of this section 4.3.3.

Moreover, let us compare, in the framework of the quasi-degeneracy approximation, matrices  $B^2$  (see (4.83)) and  $\mathcal{H}$  (see (4.119b)). Expanding both of them on the Pauli matrices basis, there comes :

$$B^2 = \begin{pmatrix} \left(\omega_0 + \frac{\Delta}{2}\right)^2 & -\kappa\left(\omega_0^2 - \frac{\Delta^2}{4}\right) \\ -\kappa\left(\omega_0^2 - \frac{\Delta^2}{4}\right) & \left(\omega_0 - \frac{\Delta}{2}\right)^2 \end{pmatrix} \simeq \omega_0^2\mathbb{I} + \omega_0\Omega_0(\cos\phi_e\sigma_Z - \sin\phi_e\sigma_X), \quad (4.121a)$$

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_0\mathbb{I} + \frac{\hbar\Omega_0}{2}(\cos\phi_e\sigma_Z - \sin\phi_e\sigma_X). \quad (4.121b)$$

It turns out that  $B^2$  and  $\mathcal{H}$  have obviously the same eigenvectors displayed by the passage matrix  $P_e$  (see (4.89b) with  $\phi_e$  given by (4.110a)). Since we have (as it were by definition of  $P_e$ ) :

$$P_e^{-1}(\cos\phi_e\sigma_Z - \sin\phi_e\sigma_X)P_e = \sigma_Z, \quad (4.122)$$

the variables change

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = P_e \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} \quad (4.123)$$

uncouples equations (4.116) which become :  $\dot{\alpha}_{\pm} = -i\omega_{\pm}\alpha_{\pm}$ , *i.e.* precisely the motion equations obtained in (4.98) for the eigenmodes Glauber variables. This coincidence, which justifies *a posteriori* the choice of the notation  $\alpha_{\pm}$  for the new variables in definition (4.123), is not fortuitous at all as displayed by equations (4.100) : since the four  $\sqrt{\omega}$  factors in definition (4.100b) of matrix  $Q_e$  are *grosso modo* equal to  $\sqrt{\omega_0}$ , then we have  $Q_e \simeq P_e$  and consequently  $Q_e - {}^tQ_e^{-1} \simeq 0$  in equation (4.100a), thus yielding above formula (4.123).

Equivalently, rewriting  $H^{\text{Sec}}$  (see (4.117)) in the form :

$$\begin{aligned} H^{\text{Sec}} &= \hbar \left[ \left( \omega_0 + \frac{\Delta}{2} \right) |\alpha_1|^2 + \left( \omega_0 - \frac{\Delta}{2} \right) |\alpha_2|^2 - \frac{\kappa\omega_0}{2} (\alpha_1\alpha_2^* + \alpha_1^*\alpha_2) \right] \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* \end{pmatrix} \left[ \omega_0 \mathbb{I} + \frac{\Delta}{2} \sigma_Z - \frac{\kappa\omega_0}{2} \sigma_X \right] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \langle \psi | \hat{\mathcal{H}} | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (4.124)$$

we obtain, with variables change (4.123) and relation (4.122) :

$$\begin{aligned} H^{\text{Sec}} &= \hbar \begin{pmatrix} \alpha_+^* & \alpha_-^* \end{pmatrix} \left( \omega_0 \mathbb{I} + \frac{\Omega_0}{2} \sigma_Z \right) \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} \\ &= \hbar\omega_+ |\alpha_+|^2 + \hbar\omega_- |\alpha_-|^2, \end{aligned} \quad (4.125)$$

*i.e.* exactly result (4.97b).

Let us remark, by the way, that equation (4.123) suggests to introduce, in our two-dimension Hilbert space  $\hat{\mathcal{E}}$ , the new (orthonormalized) basis  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  defined as :

$$|+\rangle = \cos \frac{\phi_e}{2} |1\rangle - \sin \frac{\phi_e}{2} |2\rangle, \quad (4.126a)$$

$$|-\rangle = \sin \frac{\phi_e}{2} |1\rangle + \cos \frac{\phi_e}{2} |2\rangle, \quad (4.126b)$$

so that the state vector  $|\psi\rangle$  displayed in (4.118) also reads :

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_+(t)|+\rangle + \alpha_-(t)|-\rangle. \quad (4.127)$$

Moreover, since matrix  $P_e$  is orthogonal, the squared norm  $\langle \psi | \psi \rangle$  of this state vector indifferently reads  $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2$  (as in (4.120)) or  $|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2$ . It is noteworthy that vectors  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ ,  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$  of Hilbert space  $\hat{\mathcal{E}}$  have very simple meanings : vector  $|1\rangle$  describes a state of the two-pendulum system in which pendulum 1 oscillates, with an oscillation energy corresponding to one quantum  $\hbar\omega_1$ , pendulum 2 being at rest ( $\alpha_2 = 0$ ) ; vector  $|2\rangle$  describes a state with pendulum 1 at rest ( $\alpha_1 = 0$ ) and one oscillation quantum  $\hbar\omega_2$  for pendulum 2. In the same way, vector  $|+\rangle$  (resp.  $|-\rangle$ ) describes a state with one quantum  $\hbar\omega_+$  in mode (+) and  $\alpha_- = 0$  (resp. one quantum  $\hbar\omega_-$  in mode (-) and  $\alpha_+ = 0$ ).

Our study of the free movement of the HO2 could be considered as complete. Nevertheless we would now take advantage of the foregoing remarks to set up a very simple and suggestive description of this movement.

**Geometrical description of the free movement**

**Pseudo angular momentum.** To begin with, let us introduce the density operator :

$$\widehat{D}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (4.128a)$$

In basis  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ ,  $\widehat{D}$  is represented by the matrix :

$$D = \alpha^t \alpha^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_1^* & \alpha_1 \alpha_2^* \\ \alpha_2 \alpha_1^* & \alpha_2 \alpha_2^* \end{pmatrix}. \quad (4.128b)$$

Expanding  $D$  in terms of the  $\{\mathbb{I}, \sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z\}$  Pauli basis (see (4.88b)), one gets

$$D = \frac{1}{2}(N\mathbb{I} + m_{X_0}\sigma_X + m_{Y_0}\sigma_Y + m_{Z_0}\sigma_Z) = \frac{1}{2}(N\mathbb{I} + \vec{m} \cdot \vec{\sigma}), \quad (4.129a)$$

with

$$\begin{aligned} N &= \alpha_1 \alpha_1^* + \alpha_2 \alpha_2^* \quad (\text{total quanta number}), \\ m_{X_0} &= \alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2^*, \\ m_{Y_0} &= -i(\alpha_1^* \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2^*), \\ m_{Z_0} &= \alpha_1 \alpha_1^* - \alpha_2 \alpha_2^*. \end{aligned} \quad (4.129b)$$

With the above definitions,<sup>12</sup> it is easy to check that

$$N^2 = m_{X_0}^2 + m_{Y_0}^2 + m_{Z_0}^2. \quad (4.130a)$$

Moreover, using Poisson's brackets (4.94), one can establish the following relations :

$$\{m_{X_0}, m_{Y_0}\} = \frac{2}{\hbar} m_{Z_0}, \quad \{m_{Y_0}, m_{Z_0}\} = \frac{2}{\hbar} m_{X_0}, \quad \{m_{Z_0}, m_{X_0}\} = \frac{2}{\hbar} m_{Y_0}, \quad (4.130b)$$

as well as

$$\{N, m_{X_0}\} = \{N, m_{Y_0}\} = \{N, m_{Z_0}\} = 0. \quad (4.130c)$$

At this step, it is noteworthy that equations (4.128) through (4.130) owe nothing to quasi-degeneracy and could as well have been introduced among the topics of section 4.3.2 : quasi-degeneracy's approximations appear only to justify the SA in our substituting the secular hamiltonian  $H^{\text{Sec}}$  (see (4.117)) for  $H$  (see (4.113)). With the above notations,  $H^{\text{Sec}}$  reads :

$$\begin{aligned} H^{\text{Sec}} &= \hbar\omega_1 \frac{N + m_{Z_0}}{2} + \hbar\omega_2 \frac{N - m_{Z_0}}{2} - \hbar \frac{\kappa\omega_0}{2} m_{X_0} \\ &= N\hbar\omega_0 + \frac{\hbar\Omega_0}{2} (\cos \phi_e m_{Z_0} - \sin \phi_e m_{X_0}). \end{aligned} \quad (4.131)$$

**The Larmor space.** The above different relations of the present subsection suggest a geometrical representation. Let us consider a *fictitious*  $\mathbb{R}^3$  space that will be referred to as the "Larmor space"  $\mathbb{L}$ . In this space, we choose an orthonormalized basis  $\{\vec{e}_{X_0}, \vec{e}_{Y_0}, \vec{e}_{Z_0}\}$  (see figure 4.12), and we define vectors

$$\vec{\Omega}_0 = -\kappa\omega_0 \vec{e}_{X_0} + \Delta \vec{e}_{Z_0} = \Omega_0 \vec{e}_Z \quad (4.132a)$$

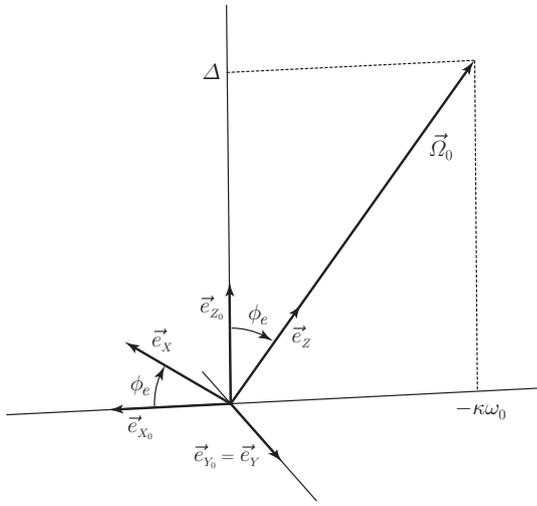


FIG. 4.12 – Precession angular velocity  $\vec{\Omega}_0 = \Delta \vec{e}_{z_0} - \kappa\omega_0 \vec{e}_{x_0} = \Omega_0 \vec{e}_Z$  in the Larmor space. Basis  $\{\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$  is derived from  $\{\vec{e}_{X_0}, \vec{e}_{Y_0}, \vec{e}_{Z_0}\}$  through a rotation with angle  $-\phi_e$  around common axis  $\vec{e}_{Y_0} = \vec{e}_Y$ .

and

$$\vec{m} = m_{X_0} \vec{e}_{X_0} + m_{Y_0} \vec{e}_{Y_0} + m_{Z_0} \vec{e}_{Z_0}. \quad (4.132b)$$

Equations (4.130) suggest that  $m_{X_0}$ ,  $m_{Y_0}$ ,  $m_{Z_0}$  behave like the components of a (dimensionless, and “living” in the Larmor space) pseudo angular momentum  $\vec{m}$ . According to (4.130a), the modulus of vector  $\vec{m}$  is equal to the total quanta number  $N$ . The secular hamiltonian (see (4.131)) reads :

$$H^{\text{Sec}} = N\hbar\omega_0 + \frac{\hbar}{2} \vec{\Omega}_0 \cdot \vec{m}. \quad (4.133)$$

Moreover, allowing for (4.130c),

$$\frac{dN}{dt} = \{N, H^{\text{Sec}}\} = 0. \quad (4.134a)$$

Number  $N$  (and therefore  $|\vec{m}|$ ) is thus a constant of the movement. Besides, according to (4.130b), we have

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \{\vec{m}, H^{\text{Sec}}\} = \vec{\Omega}_0 \times \vec{m}, \quad (4.134b)$$

the solution of which reads symbolically, with  $\vec{m}_0$  standing for  $\vec{m}(0)$  :

$$\vec{m}(t) = e^{\vec{\Omega}_0 t \times} \{\vec{m}_0\}, \quad (4.134c)$$

*i.e.* :

$$\vec{m}(t) = \cos \Omega_0 t \vec{m}_0 + \sin \Omega_0 t \vec{e}_Z \times \vec{m}_0 + (1 - \cos \Omega_0 t) (\vec{e}_Z \cdot \vec{m}_0) \vec{e}_Z. \quad (4.134d)$$

The motion of the representative vector  $\vec{m}$  is thus a rotation with a (constant) angular velocity  $\vec{\Omega}_0$ . As seen above,  $|\vec{m}|$  is constant, and the angle between  $\vec{\Omega}_0$  and  $\vec{m}$  is constant too. This motion will be referred to as a “Larmor precession”. This Larmor precession is illustrated in figure 4.13 in the particular case where  $\vec{m}(0) = N\vec{e}_{z_0}$ , *i.e.* where only pendulum 1 is initially excited with  $N$  oscillation quanta as can be easily derived from definitions (4.129b). From this figure, it is particularly obvious that a maximum excitation transfer from pendulum 1 to

<sup>12</sup>These definitions are the classical adaptation of an algebra introduced by Schwinger : J. Schwinger, *On Angular Momentum* (unpublished), reprinted in [BD65], pp 229-279.

pendulum 2 occurs at times  $t'_n = (2n + 1)\frac{\pi}{\Omega_0} = (n + \frac{1}{2})T_0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). This transfer is *total* ( $N$  oscillation quanta for pendulum 2 with pendulum 1 at rest, *i.e.*  $\vec{m}(t'_n) = -N\vec{e}_{Z_0}$ ) only if the detuning  $\Delta$  is zero ( $\leftrightarrow \phi_e = \frac{\pi}{2}$ ). We shall come back to the Larmor precession in subsection (4.3.3), adding an experimental illustration of this movement with exactly the same above initial conditions.

An other particular movement can be easily visualized from figure 4.13. Suppose that  $\vec{m}(0) = \pm N\vec{e}_Z$ . Obviously  $\vec{m}$  remains parallel (or antiparallel) to  $\vec{\Omega}_0$  and does not move at all. This situation corresponds to the initial excitation of stationary eigenmodes (+) or (-).

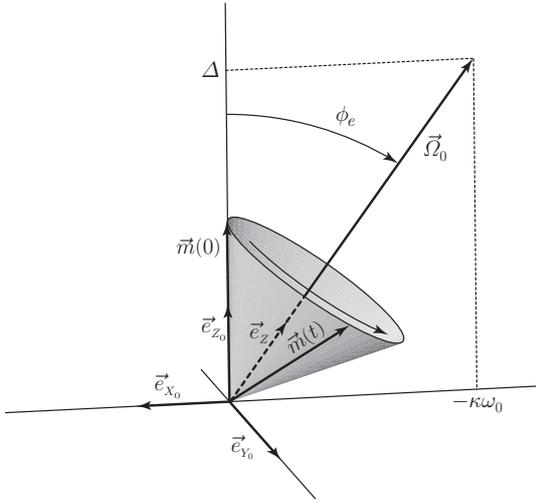


FIG. 4.13 – Representation of the movement in the Larmor space in the particular case where  $\vec{m}(0) = N\vec{e}_{Z_0}$  (*i.e.* only pendulum 1 excited, with  $N$  oscillation quanta). Pseudo angular momentum  $\vec{m}$  undergoes a rotation around axis  $\vec{e}_Z$  with constant angular velocity  $\Omega_0$ . At times  $t_n = n\frac{2\pi}{\Omega_0} = nT_0$  ( $n$  integer),  $\vec{m} = N\vec{e}_{Z_0}$  : only mode (1) is excited. A full transfer from mode (1) to mode (2) (*i.e.*  $\vec{m} = -N\vec{e}_{Z_0}$ ) occurs (at times  $t'_n = (2n + 1)\frac{\pi}{\Omega_0} = (n + \frac{1}{2})T_0$ ) only if  $\phi_e = \frac{\pi}{2}$ , *i.e.* if the detuning  $\Delta = 0$  is zero.

**Modes of the HO2.** So far, we have interpreted the correspondance between states ( $|1\rangle, |2\rangle, |+\rangle, |-\rangle$ ) of the Hilbert space  $\hat{\mathcal{E}}$  and vectors ( $\vec{e}_{Z_0}, -\vec{e}_{Z_0}, \vec{e}_Z, -\vec{e}_Z$ ) of the Larmor space  $\mathbb{L}$  in terms of four particular movements of the HO2. We would now complete this correspondance table and be able to associate a movement to any direction of  $\mathbb{L}$ . With this aim, we shall preliminarily introduce the notion of “mode” of the HO2, which generalizes that of “eigenmode”.

Let us come back to our HO2 and consider the monochromatic movement ( $k = 1, 2$ ) :

$$q_k(t) = \Re\{Q_k e^{-i\omega t}\} \quad \text{with} \quad Q_k = |Q_k| e^{i\varphi_k}, \quad (4.135a)$$

where the  $Q_k$  are complex amplitudes and  $\omega$  a – yet to be chosen – angular frequency. Of course, above movement (4.135a) has *a priori* strictly no reason to be a solution of motion equation (4.84) : forcing the HO2 in this movement requires external torques, exerted by engines for instance. Furthermore, let us impose the amplitudes ratio to be equal to the complex number :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{i\varphi} \quad \text{where} \quad \phi \in [0, \pi] \text{ and } \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (4.135b)$$

Last, we impose the energy equipartition : the mean value (over a  $2\pi/\omega$  period) of the kinetic energy should be equal to the mean potential energy. Which reads (see (4.85a) for instance) :

$$\left\langle \frac{1}{2} {}^t\dot{q}\dot{q} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} {}^tqB^2q \right\rangle. \quad (4.135c)$$

In order to set prescriptions (4.135b) and (4.135c) compatible with each other, we have to choose  $\omega$  such that :

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{\omega_1^2|Q_1|^2 + \omega_2^2|Q_2|^2 - 2\kappa\omega_1\omega_2|Q_1||Q_2|\cos\varphi}{|Q_1|^2 + |Q_2|^2} \\ &= \omega_1^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} + \omega_2^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} - 2\kappa\omega_1\omega_2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \cos \varphi \\ &= \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + G(\cos \phi \cos \phi_e - \sin \phi \sin \phi_e \cos \varphi),\end{aligned}\quad (4.136)$$

where  $G$ ,  $\cos \phi_e$  and  $\sin \phi_e$  are displayed in (4.88a). In the framework of the quasi-degeneracy approximations, above formula (4.136) is simplified, using (4.110a), in :

$$\omega = \omega(\phi, \varphi) = \omega_0 + \frac{1}{2}\Omega_0(\cos \phi \cos \phi_e - \sin \phi \sin \phi_e \cos \varphi). \quad (4.137)$$

Henceforth, we shall call movement (4.135a), with prescriptions (4.135b and c) fulfilled, a “mode”. It is noteworthy that, with such a definition, a mode is entirely defined by the ratio  $Q_2/Q_1$ , *i.e.* by angles  $\phi$  and  $\varphi$ . It is thus convenient to represent mode  $(\phi, \varphi)$  as direction  $\vec{e}(\phi, \varphi)$  in a  $\mathbb{R}^3$  space,  $\phi$  and  $\varphi$  being under the circumstances the usual spherical coordinates angles with respect to some basis  $\{\vec{e}_{X_0}, \vec{e}_{Y_0}, \vec{e}_{Z_0}\}$  (see figure 4.14). As yet, four such modes have been encountered in this paper.

- (i) Mode (1) corresponds to the oscillation of mere pendulum 1. It is consequently associated with the ratio  $Q_2/Q_1 = 0$ , hence  $\phi = 0$  : this mode (which can be observed by simply locking pendulum 2 at position  $\theta_2 = 0$ ) will thus be described by direction  $\vec{e}_{Z_0}$ . Its angular frequency is checked, using (4.136), to be  $\omega_1$ .
- (ii) Mode (2) corresponds to pendulum 2 mere oscillating. It is consequently associated with the ratio  $Q_2/Q_1 = \infty$ , hence  $\phi = \pi$  : this mode (which can be observed by simply locking pendulum 1 at position  $\theta_1 = 0$ ) will thus be described by direction  $-\vec{e}_{Z_0}$ . Its angular frequency is checked, using (4.136), to be  $\omega_2$ .

Modes (+) and (−) are eigenmodes. As so, they can be observed without exerting any torque on the pendula. The ratio  $Q_2/Q_1$  for each of them can be read directly on passage matrix  $P_e$  (formula (4.89b)).

- (iii) For mode (+), we have  $Q_2/Q_1 = -\tan \frac{\phi_e}{2}$ , hence  $\phi = \phi_e$  and  $\varphi = \pi$ . The associated angular frequency is calculated using (4.136) :  $\omega_+^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + G$ , which is, by the way, in agreement with (4.89a). This mode (+) is described by direction  $\vec{e}_Z$ .
- (iv) For mode (−), we have  $Q_2/Q_1 = \cot \frac{\phi_e}{2}$ , hence  $\phi = \pi - \phi_e$  and  $\varphi = 0$ . Formula (4.136) yields :  $\omega_-^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - G$ , as expected from (4.89a). Mode (−) is described by direction  $-\vec{e}_Z$ .

Futhermore, an interesting result is obtained when calculating the Glauber variables  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  when mode  $(\phi, \varphi)$  is activated. Considering definition (4.93a) and movement (4.135a), we have ( $k = 1, 2$ ) :

$$\alpha_k(t) = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}}|Q_k|\left(\cos(\omega_k t - \varphi_k) - \frac{i\omega}{\omega_k} \sin(\omega_k t - \varphi_k)\right). \quad (4.138)$$

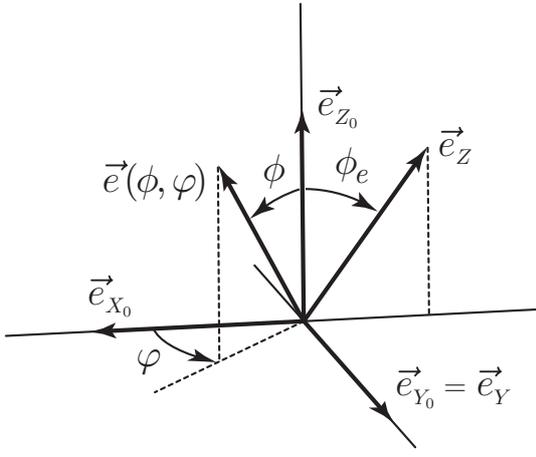


FIG. 4.14 – *Modes representative space.* Direction  $\vec{e}(\phi, \varphi)$  corresponds to “mode”  $(\phi, \varphi)$  as defined in the text. Modes (1) and (2) are respectively associated with  $\phi = 0$  and  $\phi = \pi$  : they correspond to directions  $+\vec{e}_{Z_0}$  and  $-\vec{e}_{Z_0}$ . (Eigen)modes (+) and (–) are respectively associated with  $\{\phi = \phi_e, \varphi = \pi\}$  and  $\{\phi = \pi - \phi_e, \varphi = 0\}$  : they correspond to directions  $+\vec{e}_Z$  and  $-\vec{e}_Z$ .

Restricting henceforth to the quasi-degeneracy framework (*i.e.*  $\omega_k \simeq \omega \simeq \omega_0$ ), the above expression simplifies in :

$$\alpha_k(t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{2\hbar}} Q_k e^{-i\omega t}. \quad (4.139)$$

Let us then calculate the components of the associated pseudo angular momentum  $\vec{m}$  as defined in (4.129b). We get, using also (4.135b) :

$$\begin{aligned} N &= \frac{\omega_0}{2\hbar} (|Q_1|^2 + |Q_2|^2) = \frac{\omega_0}{2\hbar} |Q_1|^2 (1 + \tan^2 \frac{\phi}{2}), \\ m_{X_0} &= \frac{\omega_0}{2\hbar} (Q_1^* Q_2 + \text{c.c.}) = N \sin \phi \cos \varphi, \\ m_{Y_0} &= -i \frac{\omega_0}{2\hbar} (Q_1^* Q_2 - \text{c.c.}) = N \sin \phi \sin \varphi, \\ m_{Z_0} &= \frac{\omega_0}{2\hbar} (|Q_1|^2 - |Q_2|^2) = N \cos \phi. \end{aligned} \quad (4.140)$$

The three last lines of above relations (4.140) mean that

$$\vec{m}(\phi, \varphi) = N \vec{e}(\phi, \varphi). \quad (4.141)$$

In other words, the Larmor space  $\mathbb{L}$  displayed in figures 4.12 and 4.13 and the representation space displayed in figure 4.14 *do coincide*. Observe that this result is far from trivial, and valid *only* in the quasi-degeneracy limit. Within this limit, any direction of  $\mathbb{L}$  corresponds to one particular mode, in the sense defined above. In this respect, the cone displayed in figure 4.13 on which pseudo angular momentum  $\vec{m}$  slides during its motion can be regarded as the envelop surface of its tangent modes. Besides, it is noteworthy that the set of these tangent modes taken in the course of time obeys a very simple prescription. Using (4.140) and (4.141), formula (4.137) reads indeed :

$$\omega(\phi, \varphi) = \omega_0 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_0 \cdot \vec{e}(\phi, \varphi), \quad (4.142a)$$

so that (4.133) may be rewritten :

$$H^{\text{Sec}} = N \hbar \omega(\phi, \varphi). \quad (4.142b)$$

This means that, in the course of its Larmor precession, the HO2 goes round the iso- $\omega(\phi, \varphi)$  modes  $(\phi, \varphi)$  (*e.g.*  $\omega(\phi, \varphi) = \omega_1$  in the case considered in figure 4.13), which falls in full accordance with the energy conservation requirement.

We would now make a few further remarks about the  $\hat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{L}$  correspondance.

**The Hilbert space  $\rightsquigarrow$  Larmor space correspondance.** First, if definitions (4.129b) allow us to associate a pseudo angular momentum  $\vec{m}$  to any state vector  $|\psi\rangle$  of  $\hat{\mathcal{E}}$ , it should nevertheless be noticed that this correspondance is *not* biunivocal : the *same* pseudo angular momentum  $\vec{m}$  is associated to state vectors  $|\psi\rangle$  and  $e^{i\chi}|\psi\rangle$  ( $\chi$  real). In other words, the phase factor  $e^{i\chi}$  is *lost* in the Larmor representation. This is due to the cancellation of this factor in the definition itself of the density operator  $\hat{D}$  or matrix  $D$  (see equations (4.128)).

Second, let us consider the (normalized) state vector of  $\hat{\mathcal{E}}$  :

$$|\psi(\phi, \varphi)\rangle = \cos \frac{\phi}{2} |1\rangle + \sin \frac{\phi}{2} e^{i\varphi} |2\rangle, \quad (4.143a)$$

and calculate, using (4.129b), the associated pseudo angular momentum  $\vec{m}$  of  $\mathbb{L}$ . We find :

$$\vec{m}(\phi, \varphi) = \sin \phi \cos \varphi \vec{e}_{X_0} + \sin \phi \sin \varphi \vec{e}_{Y_0} + \cos \phi \vec{e}_{Z_0} = \vec{e}(\phi, \varphi), \quad (4.143b)$$

which is just the (unitary) vector displayed in figure 4.14. Thus, save as above mentioned an arbitrary phase factor  $e^{i\chi}$ , we can associate a normalized state vector of  $\hat{\mathcal{E}}$  to any direction of  $\mathbb{L}$ . For example, it can easily be checked that both columns of matrix  $P_e$  displayed in (4.89b) can be obtained using (4.143a) with  $\{\phi = \phi_e, \varphi = \pi\}$  for the first column (state  $|+\rangle$ ) and  $\{\phi = \pi - \phi_e, \varphi = 0\}$  for the second column (state  $|-\rangle$ ). More generally, to obtain the state vector associated to non unitary pseudo angular momentum  $\vec{m} = N\vec{e}(\phi, \varphi)$ , one just has to multiply (4.143a) by  $\sqrt{N}$ .

As a last point, it should be noticed that two states are orthogonal in the Hilbert space if, and only if, their representative pseudo angular momenta make an angle equal to  $\pi$  in the Larmor space.

In order to illustrate the above considerations, we shall now discuss a situation in which mere mode (1) is excited at  $t = 0$ . After a brief recall of the well-known standard solution and some considerations about energy, we will show how this motion can be visualized in the Larmor space.

### Illustration of the formalism

**A well known movement.** Let us, then, come back to our two-pendulum system and consider for instance a motion with the following initial conditions : at  $t = 0$ , pendulum 1 is shifted (with no initial velocity) from its equilibrium position ( $\theta_{10} \neq 0, \dot{\theta}_{10} = 0$ ), while pendulum 2 is at rest ( $\theta_{20} = 0, \dot{\theta}_{20} = 0$ ). The subsequent dynamics of the system is easily calculated using the standard (exact) procedure recalled in subsection (4.3.2) : the initial state is expanded in terms of both eigenmodes, which leads, using the normal variables  $\varphi_{\pm}$  introduced in (4.86b) and the passage matrix  $P_e$  (see (4.89b)) :

$$\begin{pmatrix} \varphi_+(0) \\ \varphi_-(0) \end{pmatrix} = {}^tP_e \begin{pmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{pmatrix} = q_{10} \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi_e}{2} \\ \sin \frac{\phi_e}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{with } q_{10} = \sqrt{J_1}\theta_{10}), \quad (4.144a)$$

and

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_+(0) \\ \dot{\varphi}_-(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.144b)$$

Each eigenmode then oscillates independently of the other with its own eigenfrequency. Owing to the above initial conditions we have :

$$\varphi_{\pm}(t) = \varphi_{\pm}(0) \cos \omega_{\pm} t. \quad (4.145)$$

Then, coming back to variables  $q_1$  and  $q_2$  one finally gets :

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = P_e \begin{pmatrix} \varphi_+(t) \\ \varphi_-(t) \end{pmatrix} = q_{10} \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\phi_e}{2} \cos \omega_+ t + \sin^2 \frac{\phi_e}{2} \cos \omega_- t \\ -\sin \frac{\phi_e}{2} \cos \frac{\phi_e}{2} (\cos \omega_+ t - \cos \omega_- t) \end{pmatrix}. \quad (4.146)$$

Since  $\theta_1$  and  $\theta_2$  are linear combinations of normal variables  $\varphi_+$  and  $\varphi_-$ , the movement of

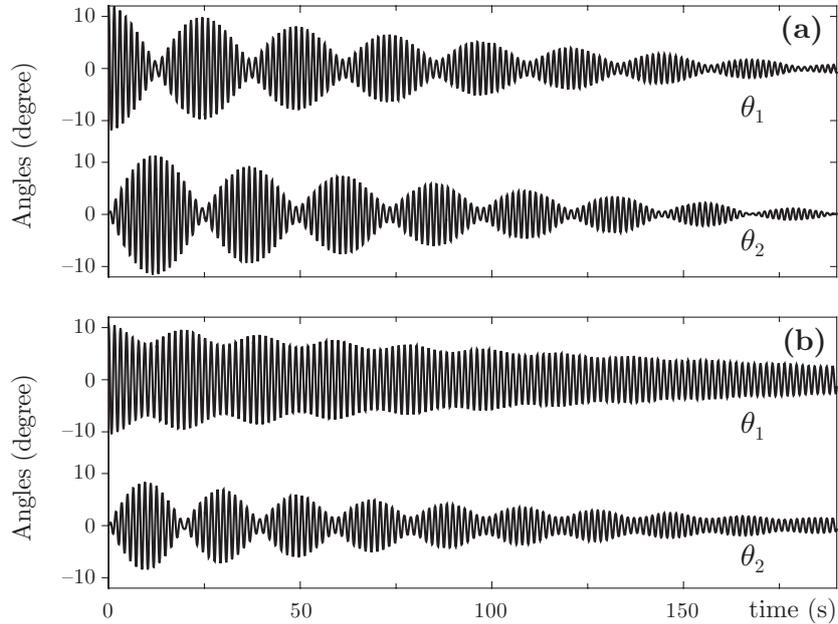


FIG. 4.15 – *Examples of Larmor precessions : angles  $\theta_1$  and  $\theta_2$  as functions of time. Initially,  $\theta_1 \neq 0$  while  $\theta_2 = 0$ . The length  $\ell_1$  of pendulum 1 is fixed to  $58.2 \pm 0.2$  cm. In (a), the length  $\ell_2$  of pendulum 2 is  $58.1 \pm 0.2$  cm  $\simeq \ell_1$  :  $\cos \phi_e \simeq 0$  and the energy transfer is complete. In (b),  $\ell_2 = 64.4 \pm 0.2$  cm  $\neq \ell_1$  :  $\cos \phi_e = -0.59$  and the energy transfer is but partial (pendulum 1 never stops totally).*

each pendulum results, as displayed by above formulas (4.146), from beats between harmonic oscillations at angular frequencies  $\omega_+$  and  $\omega_-$ . (This conclusion holds, of course, if one chooses more general  $\{\theta_k(0), \dot{\theta}_k(0)\}$  ( $k = 1, 2$ ) initial conditions.) It can be noticed that formulas (4.146) can be written in the following equivalent form :

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_{10} \left[ \cos \left( \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t \right) - \cos \phi_e \sin \left( \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t \right) \right], \\ q_2(t) &= q_{10} \sin \phi_e \sin \left( \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t \right). \end{aligned} \quad (4.147)$$

In the general case considered in section 4.3.2, angular frequencies  $\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$  and  $\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}$  are *a priori* of comparable orders of magnitude, so that expressions (4.147) are of no major interest. On the other hand, in the particular case of quasi-degeneracy considered in the present section 4.3.3, angular frequencies  $\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$  and  $\omega_+ - \omega_-$  approximately correspond to  $\omega_0$  and  $\Omega_0$  respectively, with  $\omega_0 \gg \Omega_0$ . Consequently the time-evolution of variables  $q_1$  and  $q_2$ , which reads, according to (4.147) :

$$q_1(t) \simeq q_{10} \left[ \cos \frac{\Omega_0 t}{2} \cos \omega_0 t - \cos \phi_e \sin \frac{\Omega_0 t}{2} \sin \omega_0 t \right], \quad (4.148a)$$

$$q_2(t) \simeq q_{10} \sin \phi_e \sin \frac{\Omega_0 t}{2} \sin \omega_0 t, \quad (4.148b)$$

is characterized by a brisk oscillation (angular frequency  $\omega_0$ ) under a slowly varying (angular frequency  $\frac{\Omega_0}{2}$ ) envelop. This is illustrated in figure 4.15 where measured angles  $\theta_1$  and  $\theta_2$  are displayed as functions of time in two different configurations.

(i) In figure 4.15a both pendula have the same length; consequently  $\cos \phi_e = 0$  and, according to (4.148), the oscillation transfer from one pendulum to the other is complete. This can be seen on the envelop curve of variable  $\theta_1(t)$ , which appears to be sharply “pinched”.

(ii) In figure 4.15b the pendula have different lengths; consequently  $\cos \phi_e \neq 0$  and pendulum 1 never stops totally : the envelop curve of  $\theta_1(t)$  displays a periodic series of finite waists.

It should be noticed that the envelop curve of variable  $\theta_2(t)$  is pinched whatever the configuration, which can be regarded as a piece of check of formula (4.148b) : pendulum 2 is expected to stop totally at times  $t_n = n \frac{2\pi}{\Omega_0} = nT_0$ . This feature can be turned to profit to measure  $\Omega_0$  with some accuracy. We have implemented such measurements of  $\Omega_0$  for different values of the detuning  $\Delta$ . In practise, we varied the length  $\ell_2$  of pendulum 2 with  $\ell_1$  (and consequently  $\omega_1$ ) fixed. For each value of  $\ell_2$ , angular frequency  $\omega_2$  was directly measured (with pendulum 1 locked in position  $\theta_1 = 0$ ). In figure 4.16, we have plotted  $\Omega_0^2$  *versus*  $\Delta$ . The solid curve corresponds to formula (4.110b).

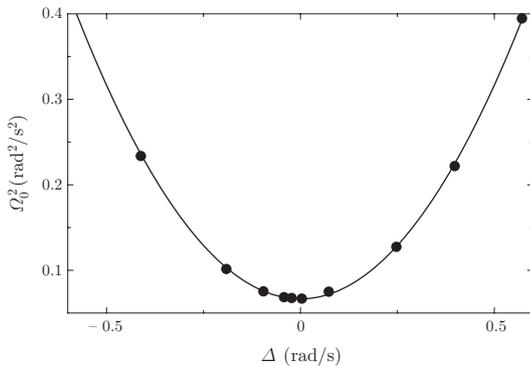


FIG. 4.16 – Square of the angular frequency  $\Omega_0$  of the energy transfer as a function of detuning  $\Delta$ . Experimentally, the detuning is obtained by varying the length of pendulum 2. The solid curve displayed is the expected law given by (4.110b) with the parameters  $\kappa = 6.08 \times 10^{-2}$  (measured separately) and  $\omega_0 = 4.22$  rad/s.

**Energy considerations.** We would now use approximate result (4.148) to derive a simple calculation of the mechanical energy of the pendula. A more sophisticated discussion is presented in appendix 3. Let us consider formulas (4.148). Neglecting the small variation of the

envelops on a time scale of order  $1/\omega_0$  (*i.e.* short compared to  $1/\Omega_0$ ) we can approximate the conjugate momenta  $p_1 = \dot{q}_1$  and  $p_2 = \dot{q}_2$  by :

$$p_1(t) \simeq -\omega_0 q_{10} \left[ \cos \frac{\Omega_0 t}{2} \sin \omega_0 t + \cos \phi_e \sin \frac{\Omega_0 t}{2} \cos \omega_0 t \right], \quad (4.149a)$$

$$p_2(t) \simeq \omega_0 q_{10} \sin \phi_e \sin \frac{\Omega_0 t}{2} \cos \omega_0 t. \quad (4.149b)$$

We can then define a slowly varying energy for each pendulum, which reads :

$$\mathcal{E}_1(t) \simeq \frac{1}{2} (p_1^2 + \omega_0^2 q_1^2) \simeq \frac{1}{2} \omega_0^2 q_{10}^2 (1 - \sin^2 \phi_e \sin^2 \frac{\Omega_0 t}{2}), \quad (4.150a)$$

$$\mathcal{E}_2(t) \simeq \frac{1}{2} (p_2^2 + \omega_0^2 q_2^2) \simeq \frac{1}{2} \omega_0^2 q_{10}^2 \sin^2 \phi_e \sin^2 \frac{\Omega_0 t}{2}. \quad (4.150b)$$

Simply adding above expressions (4.150), we get the total energy  $\mathcal{E}$  of the two-pendulum system :

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t) \simeq \frac{1}{2} \omega_0^2 q_{10}^2. \quad (4.151)$$

We would now illustrate the solution of the equation of motion using the geometrical representation introduced in subsection (4.3.3).

**Representation in the Larmor space.** We begin with a simple remark. The right-hand side of equation (4.134b), namely  $\vec{\Omega}_0 \times \vec{m}$ , is proportional to  $\Omega_0$ . With the aim of being consistent at first order in  $\Omega_0$ , angular momentum  $\vec{m}$  should then be determined at order zero in  $\Omega_0$  (the same conclusion can be made by considering the perturbation term  $\frac{\hbar}{2} \vec{\Omega}_0 \cdot \vec{m}$  in the right-hand side of equation (4.133)). At this order, the total quanta number  $N$  is then given by :

$$N \hbar \omega_0 = \mathcal{E} = \frac{1}{2} \omega_0^2 q_{10}^2 \quad \rightsquigarrow \quad N = \frac{\omega_0 q_{10}^2}{2 \hbar}. \quad (4.152)$$

At instant  $t = 0$ , only mode (1) is excited ( $|\alpha_1|^2(0) = N$ ,  $|\alpha_2|^2(0) = 0$ ). Therefore  $m_{X_0}(0) = m_{Y_0}(0) = 0$ , and  $m_{Z_0}(0) = N$  : the representative vector  $\vec{m}(0)$  is  $N \vec{e}_{Z_0}$ . Its subsequent motion is a Larmor precession with the angular velocity  $\vec{\Omega}_0 = \Omega_0 \vec{e}_Z$  of figure 4.12. Vector  $\vec{m}(t)$  is simply derived from  $\vec{m}(0)$  by means of a rotation of angle  $\Omega_0 t$  around axis  $\vec{e}_Z$  and moves on a cone with apex half-angle  $\phi_e$ , as displayed in figure 4.13. Equation (4.134d) can be rewritten in the form :

$$\vec{m}(t) = N \left\{ -\sin \phi_e \cos \phi_e (1 - \cos \Omega_0 t) \vec{e}_{X_0} + \sin \phi_e \sin \Omega_0 t \vec{e}_{Y_0} + (\cos^2 \phi_e + \sin^2 \phi_e \cos \Omega_0 t) \vec{e}_{Z_0} \right\}. \quad (4.153)$$

Therefore, using definitions (4.129b) and the above result for  $m_{Z_0}(t)$ , we get :

$$|\alpha_1|^2 = \frac{N + m_{Z_0}}{2} = N \left( 1 - \sin^2 \phi_e \sin^2 \frac{\Omega_0 t}{2} \right), \quad (4.154a)$$

$$|\alpha_2|^2 = \frac{N - m_{Z_0}}{2} = N \sin^2 \phi_e \sin^2 \frac{\Omega_0 t}{2}, \quad (4.154b)$$

which can be regarded as a purely geometrical derivation of equations (4.150).

We would now complete our study of the *free* two-pendulum system in the quasi-degeneracy situation with a last remark.

**“Fermionic” behavior.** Although the phase factor of the state vector  $|\psi\rangle$  is lost in the Larmor representation, as already mentioned in (4.3.3), it is nevertheless observable when looking at the experimental device oscillations, as can be brightly illustrated in the following situation. Let us suppose that pendula 1 and 2 are strictly identical. Thus  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$  (no detuning), and angle  $\phi_e$  is equal to  $\frac{\pi}{2}$  (see figure 4.12 for instance). We start observing the oscillations with our foregoing initial conditions ( $\theta_{10} \neq 0, \theta_{20} = 0, \dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20} = 0$ ). The subsequent motion is then, according to equations (4.148) :

$$\theta_1(t) = \theta_{10} \cos \frac{\Omega_0 t}{2} \cos \omega_0 t, \quad (4.155a)$$

$$\theta_2(t) = \theta_{10} \sin \frac{\Omega_0 t}{2} \sin \omega_0 t. \quad (4.155b)$$

After a first full energy transfer from pendulum 1 to pendulum 2, occurring at  $t'_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} = \frac{T_0}{2}$ , pendulum 2 is motionless again at time  $2t'_1 = T_0$ , which corresponds to a complete Larmor precession of vector  $\vec{m}(t)$  around  $\vec{e}_Z = -\vec{e}_{X_0}$  (imagine figure 4.13 with  $\phi_e = \frac{\pi}{2}$ ). Nevertheless, since  $\cos \Omega_0 t'_1 = -1$ , pendulum 1's oscillation is then  $180^\circ$  out of phase with that of a reference oscillation obtained with a twin device started with the same initial conditions, but with pendulum 2 *locked* ( $\theta_2 = 0, \forall t$ ). In terms of the state vector  $|\psi\rangle$ , this reads :

$$|\psi(T_0)\rangle = -|\psi(0)\rangle, \quad (4.156)$$

as well known in quantum mechanics when considering a  $2\pi$ -rotation of any half-integer angular momentum. One could nevertheless wonder that such a  $180^\circ$  dephasing occurs *also* with our two-pendulum system : after all, as above mentioned about equations (4.142), this HO2 goes under the circumstances round its  $\omega(\phi, \varphi) = \omega_0$  modes in the course of the Larmor precession, so that the cumulated oscillation phase is  $\omega_0 t$ , as displayed by formulas (4.155). The explanation of the minus sign in (4.156) is the following : when the HO2 “skips” from one tangent mode to the neighbor, it undergoes a phase shift. These successive phase shifts cumulate exactly to  $\pi$  in the course of a full precession. This effect, frequently encountered in a wealth of domains in Physics, has strictly speaking nothing particular to do with quantum mechanics.

We shall now, in next subsection, pursue our schedule and consider the effect of a parametric excitation of the two-pendulum system.

### Parametric excitation in the quasi-degeneracy limit

Exactly as we did in subsection (4.3.2), we suppose that movable mass  $M_C$  is slid along the rods of pendulum 1 in such a manner that conditions (4.109) remain fulfilled throughout the variation of length  $\ell_1(t)$ . General equations (4.107a) for the Glauber variables  $\alpha_\pm(t)$  are available, with expression (4.107b) of coefficient  $\mathcal{A}_{+-}$  simplified into :

$$\mathcal{A}_{+-} \simeq -\frac{1}{2} \dot{\phi}_e. \quad (4.157)$$

**General adiabatic excitation.** If the excitation is (always in the Ehrenfest's sense) adiabatic, then the general results of subsection (4.3.2) apply and  $N_e = |\alpha_+(t)|^2 + |\alpha_-(t)|^2$  is a constant of the motion. Now, in the framework of quasi-degeneracy, we have :

$$N_e = N = |\alpha_1(t)|^2 + |\alpha_2(t)|^2 = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle, \quad (4.158)$$

so that, in the Hilbert space  $\hat{\mathcal{E}}$ , the evolution of state vector  $|\psi(t)\rangle$  is unitary, exactly as in the induction-free case of subsection (4.3.3). This evolution is still ruled by Schrödinger-like equation (4.119a) in which hamiltonian operator  $\hat{\mathcal{H}}(t)$  is now time-dependent, and is represented in basis  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  by matrix (4.119b), where  $\omega_1, \kappa$  and  $\omega_0$  are simply substituted by  $\omega_1(t), \kappa(t)$  (given by equations (4.102b, c)) and  $\omega_0(t) = \frac{\omega_1(t) + \omega_2}{2}$  (as in definition (4.108)). The subsequent time-dependence of the eigenstates of  $\hat{\mathcal{H}}(t)$  is at the origin of transitions of  $|\psi(t)\rangle$  between  $|+\rangle$  and  $|-\rangle$ , associated with the off-diagonal term  $\mathcal{A}_{+-}$  in the right-hand side of secularized (*i.e.* truncated of its starred terms) equation (4.107a).

Correlatively, in the Larmor space  $\mathbb{L}^3$ , the movement of pseudo angular momentum  $\vec{m}$  is still governed by equation (4.134b) in which  $\vec{\Omega}_0(t)$  now depends on time not only in intensity but also in *direction*. In the latter dependence originate  $\vec{m}$ -flips between  $+\vec{e}_Z$  and  $-\vec{e}_Z$ , which are the exact representation of the above-mentioned  $|\psi\rangle$ -transitions between  $|+\rangle$  and  $|-\rangle$ , and which can be simply apprehended as follows. To begin with, let us consider in the Larmor space the new orthonormalized basis  $\{\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$  defined as :

$$\begin{aligned} \vec{e}_X &= \cos \phi_e \vec{e}_{X_0} + \sin \phi_e \vec{e}_{Z_0}, \\ \vec{e}_Y &= \vec{e}_{Y_0}, \\ \vec{e}_Z &= -\sin \phi_e \vec{e}_{X_0} + \cos \phi_e \vec{e}_{Z_0}, \end{aligned} \quad (4.159a)$$

*i.e.* derived from  $\{\vec{e}_{X_0}, \vec{e}_{Y_0}, \vec{e}_{Z_0}\}$  through a rotation with angle  $-\phi_e$  around common axis  $\vec{e}_{Y_0} = \vec{e}_Y$  (see figure 4.12). Then we expand pseudo angular momentum  $\vec{m}$  on this basis :

$$\vec{m} = m_X \vec{e}_X + m_Y \vec{e}_Y + m_Z \vec{e}_Z. \quad (4.159b)$$

The total quanta number  $N$  as well as the components  $m_X, m_Y, m_Z$  of vector  $\vec{m}$  are derived from  $(\alpha_+, \alpha_-)$ , in perfect analogy with (4.129b) :

$$\begin{aligned} N &= \alpha_+^* \alpha_+ + \alpha_-^* \alpha_-, \\ m_X &= \alpha_+^* \alpha_- + \alpha_+ \alpha_-^*, \\ m_Y &= -i(\alpha_+^* \alpha_- - \alpha_+ \alpha_-^*), \\ m_Z &= \alpha_+^* \alpha_+ - \alpha_-^* \alpha_-, \end{aligned} \quad (4.160a)$$

with of course (see (4.130a)) :

$$N^2 = m_X^2 + m_Y^2 + m_Z^2. \quad (4.160b)$$

Let us write down equation (4.134b) in (time-dependent) basis  $\{\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$ . Owing to :

$$\dot{\vec{e}}_X = \dot{\phi}_e \vec{e}_Z, \quad \dot{\vec{e}}_Y = 0, \quad \dot{\vec{e}}_Z = -\dot{\phi}_e \vec{e}_X, \quad (4.161a)$$

there comes :

$$\begin{aligned}\dot{m}_X &= -\Omega_0(t)m_Y + \dot{\phi}_e m_Z, \\ \dot{m}_Y &= +\Omega_0(t)m_X, \\ \dot{m}_Z &= -\dot{\phi}_e m_X.\end{aligned}\tag{4.161b}$$

Above equations (4.161b) are but the transposition in the Larmor space of (secularized) equations (4.107a) : since  $\dot{\phi}_e \neq 0$ ,  $m_Z$  is no longer constant as it was the case in the free Larmor precession with static angular frequency  $\vec{\Omega}_0$ . We shall now focus on a particular case of adiabatic parametric excitation of our HO2 inducing the classical equivalent of the ‘‘Rabi precession’’. In this case the machinery of the aforesaid transitions/flips can be clearly demonstrated and calculated, as well in the Hilbert space as in the Larmor one.

**A Rabi-like adiabatic excitation.** Let us *slightly* modulate distance  $\ell_1$  at angular frequency  $\Omega \ll \omega_0$ . This reads (omiting index 0 for the mean value) :

$$\ell_1 + \delta\ell_1(t) = \ell_1(1 + \epsilon \sin(\Omega t)), \quad \text{with } \epsilon \ll 1.\tag{4.162}$$

We then get, after simple calculations :

$$\omega_1 + \delta\omega_1(t) = \omega_1 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{Mg\ell_1}{Mg\ell_1 + C} - \frac{J'_1\ell_1}{J_1} \right) \epsilon \sin \Omega t \right),\tag{4.163a}$$

$$\kappa\omega_0 + \delta(\kappa\omega_0)(t) = \kappa\omega_0 \left( 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{Mg\ell_1}{Mg\ell_1 + C} + \frac{J'_1\ell_1}{J_1} \right) \epsilon \sin \Omega t \right),\tag{4.163b}$$

where  $J'_1 = \frac{dJ_1}{d\ell_1}$ . One has in addition, as a consequence of (4.108) :

$$\delta\omega_0(t) = \frac{1}{2}\delta\omega_1(t), \quad \delta\Delta(t) = \delta\omega_1(t).\tag{4.163c}$$

Observe that above expressions (4.163a,b) can be drastically simplified, at least in first approximation : the coupling is *small*, then (see (4.81c))  $C \ll Mg\ell_1$  ; the pendula are quasi *simple* ones, thus  $J_1 \simeq M\ell_1^2 \rightsquigarrow \frac{J'_1\ell_1}{J_1} \simeq 2$  ; in addition  $\omega_1 \simeq \omega_0$  (quasi-degeneracy). As a consequence of the above approximations, we have *roughly* :

$$\delta\Delta(t) = \delta\omega_1(t) \simeq -\frac{1}{2}\omega_0\epsilon \sin \Omega t,\tag{4.164a}$$

$$\delta(\kappa\omega_0) \simeq -\frac{3}{4}\kappa\omega_0\epsilon \sin \Omega t.\tag{4.164b}$$

Above relations (4.164) show that, since  $\kappa \ll 1$ , the modulation of  $\kappa\omega_0$  is small compared to that of  $\Delta$ , and therefore can be neglected. Consequently :

$$\delta\vec{\Omega}_0(t) \simeq \delta\Delta(t)\vec{e}_{Z_0}, \quad \delta\Omega_0(t) \simeq \delta\Delta(t) \cos \phi_e, \quad \delta\phi_e(t) \simeq -\delta\Delta(t) \frac{\sin \phi_e}{\Omega_0}.\tag{4.165}$$

We shall now consider the physical consequences of the above-described (equations (4.162) through (4.165)) slight modulation of length  $\ell_1$ . For the sake of completeness and to underline the high suggestion power of the Larmor representation, we shall successively carry out the calculations in the Hilbert space  $\hat{\mathcal{E}}$ , then in the Larmor space  $\mathbb{L}$ . In the meantime, we shall illustrate our purpose with the results of our experimental implementation.

To begin with, let us consider the situation in the Hilbert space.

**Calculation in the Hilbert space.** Setting (note the analogy with (4.114)) :

$$\alpha_+(t) = C_+(t) e^{-i(\omega_0 + \frac{\Omega}{2})t}, \quad (4.166a)$$

$$\alpha_-(t) = C_-(t) e^{-i(\omega_0 - \frac{\Omega}{2})t}, \quad (4.166b)$$

and using secularized equations (4.107a), we obtain the system :

$$i \begin{pmatrix} \dot{C}_+ \\ \dot{C}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -ib \\ ib & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}, \quad (4.167)$$

where

$$a(t) = \frac{\Omega_0 - \Omega}{2} - \frac{1}{4}\omega_0\varepsilon \cos \phi_e \sin \Omega t, \quad (4.168a)$$

$$b(t) = \frac{1}{4}\omega_0\varepsilon \sin \phi_e \frac{\Omega}{\Omega_0} \cos \Omega t e^{-i\Omega t}. \quad (4.168b)$$

From now on, to be consistent at first order in  $\varepsilon$ , the time-dependance of angle  $\phi_e$  will be neglected in above system (4.168). Moreover, (4.167) can be further simplified, provided that conditions (quite analogous with (4.109)) :

$$|\Omega_0 - \Omega|, \quad \Omega_R = \frac{1}{4}\omega_0\varepsilon \sin \phi_e \ll \Omega_0 \quad (4.169a)$$

( $\Omega_R$  is the so-called ‘‘Rabi angular frequency’’) are *simultaneously* fulfilled, or equivalently that :

$$\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{(\Omega_0 - \Omega)^2 + \Omega_R^2} \ll \Omega_0. \quad (4.169b)$$

In return indeed for above conditions (4.169) fulfilment, system (4.167) is simplified into :

$$i \begin{pmatrix} \dot{C}_+ \\ \dot{C}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [(\Omega_0 - \Omega)\sigma_Z + \Omega_R\sigma_Y] \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix}. \quad (4.170)$$

Then setting, in analogy with (4.110a) :

$$\cos \beta = \frac{\Omega_0 - \Omega}{\Omega_{\text{eff}}}, \quad \sin \beta = \frac{\Omega_R}{\Omega_{\text{eff}}}, \quad (4.171)$$

above Schrödinger-like equation (4.170) is satisfied by the unitary evolution law :

$$\begin{pmatrix} C_+(t) \\ C_-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega_{\text{eff}}t}{2} - i \cos \beta \sin \frac{\Omega_{\text{eff}}t}{2} & -\sin \beta \sin \frac{\Omega_{\text{eff}}t}{2} \\ \sin \beta \sin \frac{\Omega_{\text{eff}}t}{2} & \cos \frac{\Omega_{\text{eff}}t}{2} + i \cos \beta \sin \frac{\Omega_{\text{eff}}t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+(0) \\ C_-(0) \end{pmatrix}. \quad (4.172)$$

Let us suppose, for instance, that the two-pendulum system is initially prepared in eigenmode (+), with  $N$  quanta, say :  $\alpha_-(0) = 0$ ,  $\alpha_+(0) = C_+(0) = \sqrt{N}$ . Then we have :

$$|\alpha_+(t)|^2 = |C_+(t)|^2 = N(1 - \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\Omega_{\text{eff}}t}{2}), \quad (4.173a)$$

$$|\alpha_-(t)|^2 = |C_-(t)|^2 = N \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\Omega_{\text{eff}}t}{2}, \quad (4.173b)$$

which is, by the way, the perfect transposition of formulas (4.154).

Thus the system undergoes transitions between modes (+) and (-). These transitions are complete only for  $\beta = \frac{\pi}{2}$  ( $\Omega_0 = \Omega$ ), *i.e.* at *resonance*. This parametrically induced movement

is known as the ‘‘Rabi precession’’. Let us observe that, at resonance, the effective angular frequency  $\Omega_{\text{eff}}$  is minimum (and equal to  $\Omega_{\text{R}}$ ) and that, after an *odd* number of full Rabi precessions (*i.e.* at instants  $t'_n = (2n+1)\frac{2\pi}{\Omega_{\text{eff}}}$ , with  $n$  integer), the state vector  $|\psi\rangle$  of the system is left  $180^\circ$  out of phase with that of a twin device undergoing no parametrical excitation at all. An analogous remark has already been made about the induction-free movement (see (4.156)). Moreover, let us keep in mind that the classical analogy of the Rabi precession we propose in the present paper relies on a twofold SA.<sup>13</sup> As a consequence and in prospect of an experimental check of results (4.172 - 4.173), we should, whatever the circumstances, maintain the twofold conditions fulfilled :

$$\Omega_{\text{R}} \ll \Omega_0 \ll \omega_0, \quad (4.174a)$$

or equivalently (see (4.110b) and (4.169a)) :

$$\varepsilon \ll \kappa \ll 1. \quad (4.174b)$$

Let us now describe our experimental implementation of the Rabi precession

**Experimental results.** As displayed by (4.157) or (4.161b), the most effective manner to induce transitions between modes (+) and (–) of the HO2 is to maximize derivative  $\dot{\phi}_e$ , which corresponds, in the Larmor space, to  $\delta\vec{\Omega}_0(t)$  perpendicular to  $\vec{\Omega}_0$ . Since, with our length modulation (4.162),  $\delta\vec{\Omega}_0(t)$  is parallel to  $\vec{e}_{Z_0}$  (see (4.165)), we could set  $\vec{\Omega}_0$  parallel to  $\vec{e}_{X_0}$ , *i.e.* have  $\phi_e = \frac{\pi}{2}$ . Consequently, the mean value  $\ell_1$  of  $\ell_1(t)$  is fixed equal to  $\ell_2$ , both pendula being thus identical in absence of parametric excitation. Allowing for (4.86b) and (4.89b), the normal variables are then given by :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} = {}^t P_e q = \sqrt{\frac{J}{2}} \begin{pmatrix} \theta_1 - \theta_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (4.175)$$

According to above equation (4.175), mode (–) corresponds to both pendula in phase ( $\theta_1 = \theta_2$ ) and mode (+) to both pendula  $180^\circ$  out of phase with each other ( $\theta_1 = -\theta_2$ ).

In figure 4.17, we have displayed the quantities  $\theta_1 + \theta_2$  and  $\theta_1 - \theta_2$  (respectively proportional to normal variables  $\varphi_-$  and  $\varphi_+$ ) calculated with the numerical oscilloscope from the signals  $\theta_1(t)$  and  $\theta_2(t)$  delivered by the potentiometers. The two-pendulum system is initially prepared in its (symmetrical) mode (–). In (a) the angular frequency  $\Omega$  of the engine is set as close as possible to the Larmor angular frequency  $\Omega_0$  : then  $\cos\beta$  (see (4.171)) is approximately zero ; we are at resonance and the energy transfer from mode (–) to mode (+) is total (the envelop of the curve labelled ‘‘ $\theta_1 + \theta_2$ ’’ is pinched). In (b) the engine rotation is deliberately detuned :  $\cos\beta = 0.67$  ; we are out of resonance and the energy transfer from mode (–) to mode (+) is but partial. One may notice that the maximum of the envelop curve of  $\theta_1 - \theta_2$  does not coincide exactly with the waist of the envelop curve of  $\theta_1 + \theta_2$ , contrary to what was observed in the (very analogous) curves of figure 4.15 : this should be attributed to the effect of solid

<sup>13</sup>The simplification consists, once more, in neglecting non secular terms. It is noteworthy that the SA was *already* used to modified system (4.107a) into (4.167), which required the adiabatic condition  $\Omega \ll \omega_0$ . Further simplifying (4.167) into (4.170), which requires  $\Omega_{\text{eff}} \ll \Omega_0$ , should consequently be regarded as a *second* secularization of (4.107a).

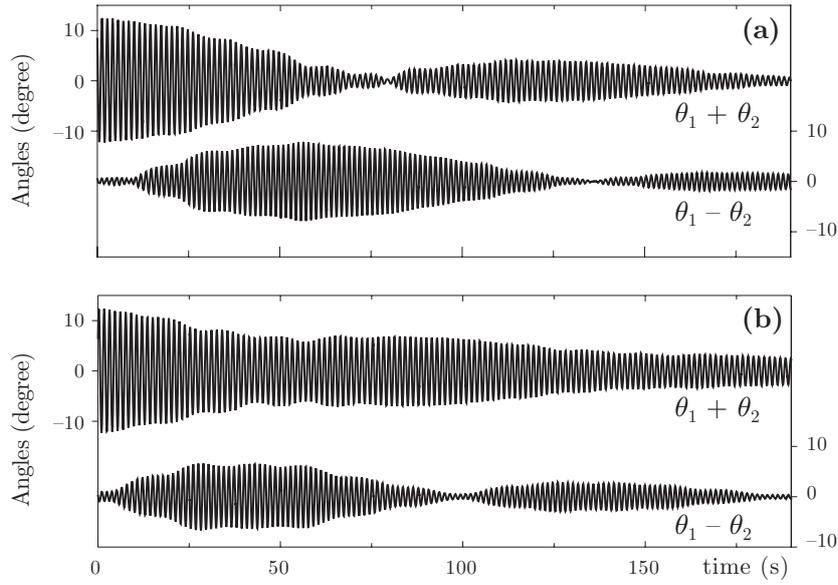


FIG. 4.17 – *Examples of Rabi precessions : normal variables  $\varphi_+$  and  $\varphi_-$  (respectively represented by  $\theta_1 - \theta_2$  and  $\theta_1 + \theta_2$ ) associated with modes (+) and (-), as functions of time. Both pendulum lengths are 53 cm and  $\Omega_0 = 0.231 \pm 0.003$  rad/s. Initially, only mode (-) is excited. In (a), the angular frequency of the engine is  $\Omega = 0.228 \pm 0.003$  rad/s  $\simeq \Omega_0$  :  $\cos \beta \simeq 0$  and the transfer from mode (-) to mode (+) is total. In (b),  $\Omega = 0.190 \pm 0.003$  rad/s  $\neq \Omega_0$  :  $\cos \beta = 0.67$  and the transfer is but partial.*

friction which occurs to be more effective on the time-scale  $\frac{2\pi}{\Omega_{\text{eff}}} = T_{\text{eff}}$  of the Rabi precession than on the time-scale  $\frac{2\pi}{\Omega_0} = T_0$  of the Larmor precession (since  $T_{\text{eff}} \gg T_0$ , see conditions (4.169)).

Notwithstanding this perturbing effect of solid friction, it turns out to be easy to measure  $T_{\text{eff}}$  (time interval between two consecutive pinches of the  $\theta_1 - \theta_2$  curves in figures 4.17). We have plotted the corresponding values of  $\Omega_{\text{eff}}^2$  versus the engine's angular frequency  $\Omega$  in figure 4.18a. The experimental points are fitted with the expected law (4.169b) (solid curve in the figure). Observe the tight resemblance with figure 4.16.

The minimum value of  $\Omega_{\text{eff}}$  is  $\Omega_R$ . It is obtained at resonance ( $\Omega = \Omega_0$ ). As expected from formula (4.169a),  $\Omega_R$  should be proportional to the length modulation depth  $\varepsilon$  introduced in (4.162). We have measured  $T_R = \frac{2\pi}{\Omega_R}$  from different value of  $\varepsilon$  and displayed the ration  $\Omega_R/\omega_0$  as function of  $\varepsilon$  in figure 4.18b. According to formula (4.169a) this ratio should be equal to  $\frac{\varepsilon}{4}$  (let us recall that  $\sin \phi_e = 1$  in this experiment). In fact our pendula are not *simple* pendula, due to the non zero mass of the rods and the finit extent of the cylinders. This feature has been discussed at some length in paper I. We shall not take this detailed discussion again here, but just give its conclusion : allowing for the characteristics of the pendula listed in table I of paper I and for exact formula (4.163a), the expected slope of the  $\Omega_R/\omega_0$  versus  $\varepsilon$  law is 0.217. The fit (solid line in figure 4.18b) has a slope of 0.214.

We shall now use our geometrical representation of the two-pendulum's dynamics to resume the calculation carried out in the Hilbert space.

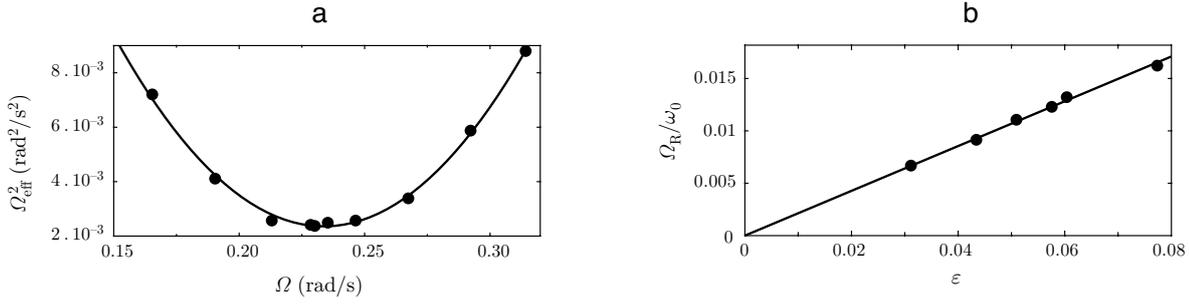


FIG. 4.18 – **a-** Square of the effective angular frequency  $\Omega_{\text{eff}}$  of the Rabi precession as a function of the angular frequency  $\Omega$  of the engine. The expected law is given by (4.169b) with  $\Omega_0 = 0.231 \text{ rad/s}$  and  $\Omega_R = 4.85 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$ . The fit (solid curve) gives  $\Omega_0 = 0.234 \text{ rad/s}$  and  $\Omega_R = 4.85 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$ . **b-** Influence of the length modulation depth  $\varepsilon$  on the reduced Rabi angular frequency  $\Omega_R/\omega_0$ . According to (4.169a), a straight line with a slope of 0.25 is expected. Taking the fact that the pendula are not simple into account, the theoretical slope is brought down to 0.217. The fit (solid straight line) gives a slope of 0.214.

**Geometrical description of the Rabi precession.** What does the Rabi precession look like in the Larmor space? To avoid any confusion, we recall hereafter the standard answer and deliberately choose a picture slightly different from that adopted to establish equations (4.161) : for the following discussion, we note  $\{\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z\}$  the *static* basis defined in (4.159a) in *absence* of any parametric excitation. Let us now consider the frame which rotates around axis  $\vec{e}_Z$  with angular velocity  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_Z$ . In this frame, labelled “r”, we define a static basis  $\{\vec{e}_{X'}, \vec{e}_{Y'}, \vec{e}_{Z'}\}$  by :

$$\begin{aligned}\vec{e}_{X'} &= \cos \Omega t \vec{e}_X + \sin \Omega t \vec{e}_Y, \\ \vec{e}_{Y'} &= -\sin \Omega t \vec{e}_X + \cos \Omega t \vec{e}_Y, \\ \vec{e}_{Z'} &= \vec{e}_Z.\end{aligned}\tag{4.176}$$

In the rotating frame, equation (4.134b) reads :

$$\left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_r = \frac{d\vec{m}}{dt} - \vec{\Omega} \times \vec{m} = (\vec{\Omega}_0 + \delta\vec{\Omega}_0(t) - \vec{\Omega}) \times \vec{m},\tag{4.177}$$

where, allowing for (4.159a), (4.164a), (4.165) and (4.176) :

$$\begin{aligned}\delta\vec{\Omega}_0(t) &= \delta\Delta(t) \vec{e}_{Z_0} \\ &= -\frac{1}{2}\omega_0\varepsilon \sin \Omega t (\cos \phi_e \vec{e}_Z + \sin \phi_e \vec{e}_X) \\ &= -\frac{1}{2}\omega_0\varepsilon [\cos \phi_e \sin \Omega t \vec{e}_{Z'} + \sin \phi_e (\sin \Omega t \cos \Omega t \vec{e}_{X'} - \sin^2 \Omega t \vec{e}_{Y'})] \\ &= -\frac{1}{2}\omega_0\varepsilon \cos \phi_e \sin \Omega t \vec{e}_{Z'} + \Omega_R [\vec{e}_{Y'} - (\sin 2\Omega t \vec{e}_{X'} + \cos 2\Omega t \vec{e}_{Y'})].\end{aligned}\tag{4.178}$$

Thus, the precession vector  $\vec{\Omega}_0 + \delta\vec{\Omega}_0(t) - \vec{\Omega}$  reads, in the rotating frame, as the sum of three terms :

- (i) a term parallel to  $\vec{e}_{Z'}$  and *oscillating* with angular frequency  $\Omega$ ,
- (ii) a term *rotating* around  $\vec{e}_{Z'}$  with angular frequency  $2\Omega$ ,
- (iii) a *static* term :

$$\vec{\Omega}_{\text{eff}} = (\Omega_0 - \Omega) \vec{e}_{Z'} + \Omega_R \vec{e}_{Y'}. \quad (4.179)$$

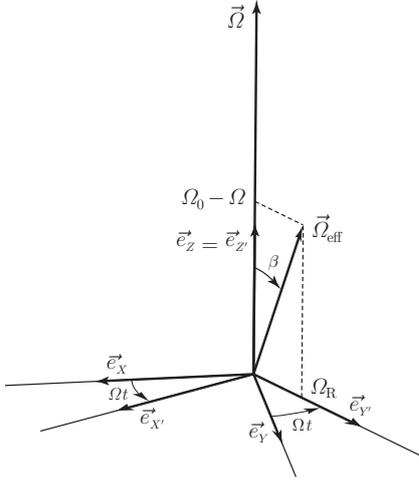


FIG. 4.19 – Effective precession angular velocity  $\vec{\Omega}_{\text{eff}}$  in the rotating frame with basis  $\{\vec{e}_{X'}, \vec{e}_{Y'}, \vec{e}_{Z'}\}$ . At resonance  $\Omega = \Omega_0$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , and  $\vec{\Omega}_{\text{eff}} = \Omega_R \vec{e}_{Y'}$ .

Provided that  $\Omega_{\text{eff}} \ll \Omega_0$ , we can neglect the time-dependent above terms (*i.e.* the first two terms) and keep only the static one. This is in fact, once more, the SA, known under the circumstances as the “Rotating Wave Approximation” (RWA). Equation (4.177) is then simplified into :

$$\left( \frac{d\vec{m}}{dt} \right)_{\text{r}} = \vec{\Omega}_{\text{eff}} \times \vec{m}. \quad (4.180)$$

In the rotating frame, the movement of  $\vec{m}$  is thus a simple precession with a constant angular frequency  $\vec{\Omega}_{\text{eff}}$  (see figure 4.19). This result justifies *a posteriori* the “Rabi precession” appellation and it provides a straightforward geometrical interpretation of formulas (4.173). In the static (non rotating) frame, the movement results from the combination of two rotations with respective angular velocities  $\vec{\Omega}_{\text{eff}}$  and  $\vec{\Omega}$ . Vector  $\vec{m}$  is then given by

$$\vec{m}(t) = e^{\vec{\Omega}t} \left\{ e^{\vec{\Omega}_{\text{eff}}t} \{ \vec{m}_0 \} \right\} \quad (4.181)$$

(which, as expected, reduces to (4.134c) in absence of Rabi precession, *i.e.* for  $\Omega_R = 0 \rightsquigarrow \vec{\Omega}_{\text{eff}} = (\Omega_0 - \Omega) \vec{e}_Z$ ). The tip of vector  $\vec{m}$  moves on a sphere with radius  $N$ , the so-called “Bloch sphere”, as shown in figure 4.20 in the particular case where  $\vec{m}_0 = N \vec{e}_Z$  (*i.e.* the case considered above with  $\alpha_-(0) = 0$  and  $\alpha_+(0) = \sqrt{N}$ , and yielding results (4.173)). In both figures 4.20 the representative point is initially the north pole (*i.e.* direction  $+\vec{e}_Z$ ) of the Bloch sphere. In figure 4.20a  $\Omega = \Omega_0$  (resonance) this point actually reaches the south pole (*i.e.* direction  $-\vec{e}_Z$ , representing  $N$  oscillation quanta in mode  $(-)$ ). If  $\Omega \neq \Omega_0$  (out of resonance), the  $\vec{m}$ -flip is not complete and the south pole of the Bloch sphere is never reached, as displayed in figure 4.20b.

To complete the present subsection, we would now strike an energy balance of the above process.

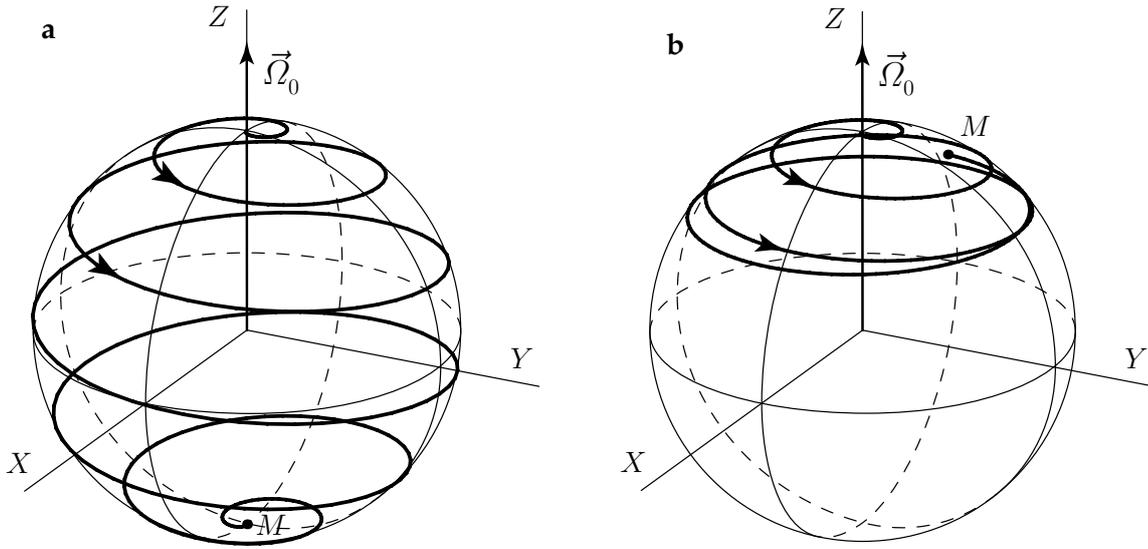


FIG. 4.20 – Trajectory of the tip  $M$  of pseudo angular momentum  $\vec{m}$  on the Bloch sphere. Departing from north pole, point  $M$  reaches a maximum colatitude  $2 \min\{\beta, \pi - \beta\}$ . **a-** Resonance ( $\Omega = \Omega_0$ ). **b-** Out of resonance ( $\Omega \neq \Omega_0$ ). The south pole is reached only at resonance ( $\beta = \frac{\pi}{2}$ ).

**Energy balance of the Rabi precession** Let  $T$  be the tension of the piano wire. When projected along pendulum 1 rods axis, Newton's law reads :

$$M_C(\ddot{\ell}_1 - \ell_1 \dot{\theta}_1^2) = -T + M_C g \cos \theta_1. \quad (4.182)$$

Consequently, since  $|\sin \theta_1| \ll 1$ , the power  $\mathcal{P}_e$  consumed by the engine to move the cylinder along these rods is :

$$\mathcal{P}_e = -T \dot{\ell}_1 = M_C \dot{\ell}_1 \left( \ddot{\ell}_1 - \ell_1 \dot{\theta}_1^2 - g + g \frac{\theta_1^2}{2} \right). \quad (4.183)$$

Next, averaging  $\mathcal{P}_e$  over a  $\frac{2\pi}{\Omega}$  (engine rotation's period) duration, we get

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = M_C \left\langle \dot{\ell}_1 \left( -\ell_1 \dot{\theta}_1^2 + g \frac{\theta_1^2}{2} \right) \right\rangle, \quad (4.184a)$$

or equivalently in the Glauber formalism, and deriving  $\theta_1$  and  $\dot{\theta}_1$  from expression (4.103a) of  $\alpha_1$  (with  $\omega_1 \simeq \omega_0$  in the quasi-degeneracy limit) :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = M_C \frac{\hbar}{2J_1 \omega_0} \left\langle \dot{\ell}_1 \left( \ell_1 \omega_0^2 (\alpha_1 - \alpha_1^*)^2 + \frac{g}{2} (\alpha_1 + \alpha_1^*)^2 \right) \right\rangle. \quad (4.184b)$$

Using (4.162), neglecting the non secular terms  $\alpha_1^2$  and  $\alpha_1^{*2}$  (which average to zero anyway), and since  $M_C \ell_1^2 \simeq J_1$  and  $g/\ell_1 \simeq \omega_0^2$ , we finally have :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = -\frac{\varepsilon \omega_0}{2} \hbar \Omega \langle \alpha_1 \alpha_1^* \cos \Omega t \rangle. \quad (4.185a)$$

Since  $\alpha_1 \alpha_1^* = \frac{N+mZ_0}{2}$ , and using basis change (4.159a),  $\langle \mathcal{P}_e \rangle$  reads :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = -\frac{\varepsilon \omega_0}{4} \sin \phi_e \hbar \Omega \langle m_X \cos \Omega t \rangle, \quad (4.185b)$$

or equivalently, owing to (4.169a) and (4.176) :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{P}_e \rangle &= -\hbar\Omega\Omega_R \langle (m_{X'} \cos \Omega t - m_{Y'} \sin \Omega t) \cos \Omega t \rangle \\ &= -\frac{1}{2}\hbar\Omega\Omega_R m_{X'}(t).\end{aligned}\quad (4.185c)$$

Now, with the particular initial conditions considered previously, namely  $\vec{m}_0 = N\vec{e}_Z$ , and with definition (4.171) of angle  $\beta$ , the solution of dynamical equation (4.180) reads :

$$\vec{m}(t) = N[\sin \beta \sin \Omega_{\text{eff}} t \vec{e}_{X'} + \sin \beta \cos \beta (1 - \cos \Omega_{\text{eff}} t) \vec{e}_{Y'} + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos \Omega_{\text{eff}} t) \vec{e}_{Z'}], \quad (4.186)$$

so that  $\langle \mathcal{P}_e \rangle$  is finally given by :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = -\frac{1}{2}N\hbar\Omega\Omega_R \sin \beta \sin \Omega_{\text{eff}} t. \quad (4.187)$$

As expected, this power is *negative* for the first half of the Rabi precession ( $0 < t < \frac{\pi}{\Omega_{\text{eff}}} = \frac{T_{\text{eff}}}{2}$ ), which corresponds to a *stimulated emission* of energy by the two-pendulum system. The total work *received* by the engine between times  $t = 0$  and  $t = \frac{T_{\text{eff}}}{2}$  is :

$$-\int_0^{\frac{T_{\text{eff}}}{2}} dt \langle \mathcal{P}_e \rangle(t) = +N\hbar\Omega \sin^2 \beta. \quad (4.188)$$

During the second half of the Rabi precession ( $\frac{T_{\text{eff}}}{2} < t < T_{\text{eff}}$ ), power  $\langle \mathcal{P}_e \rangle$  is *positive*, which corresponds to an *absorption* of energy by the system. The total work *furnished* by the engine during this second process is  $N\hbar\Omega \sin^2 \beta$ . At resonance ( $\Omega = \Omega_0 \rightsquigarrow \sin \beta = 1$ ) this work is  $N\hbar\Omega_0$ , *i.e.* exactly the energy splitting between states  $\sqrt{N}|+\rangle$  and  $\sqrt{N}|-\rangle$  of our classical TLS, as required by energy conservation.

This paper is over. Let us now summarize its main results in next section.

#### 4.3.4 Conclusion

In this work, we have considered a basic, well known and long time taught *classical* device, namely two coupled harmonic oscillators, with which rather simple calculations and experiments can be performed at the undergraduate level. We have shown that considerable simplifications can be brought in the problem as soon as both HOs are weakly coupled and have their proper angular frequencies close to each other, *i.e.* as soon as both eigenfrequencies are quasi-degenerate. In this quasi-degeneracy configuration, the physical state of the HO2 can be described by means of a state vector  $|\psi\rangle$  belonging to some Hilbert space  $\hat{\mathcal{E}}$ . The time-evolution of this state vector is then shown to be unitary, as well in the case of the free movement as in the case of an adiabatic parametric excitation of the oscillator, thus obeying a Schrödinger-like equation of motion. Space  $\hat{\mathcal{E}}$  being of dimension 2, this motion is naturally paralleled with that of a half-one spin evolving in a static or time-dependent magnetic field. This parallel includes the well known  $180^\circ$  dephasing of the state vector  $|\psi\rangle$  after a complete Larmor precession.

Nevertheless, our pastiche of the quantum formalism is imperfect. For example, in the present paper, the squared norm  $\langle \psi|\psi\rangle$  bears a physical meaning (the total quanta number

$N$ ), contrary to the case of a “true” quantum system. Moreover, no attempt is made (and probably could be made) here to propose a classical equivalent of quantum correlations or quantum measurement. Even our simulating Bloch equations (see Appendix 1) relies on a thought-device.

Notwithstanding these imperfections, it is our opinion that section 4.3.3's considerations and results may constitute an entertaining familiarization with (as well as a tutorial introduction to) the vocabulary and the concepts of quantum mechanics : Hilbert space, state vector, unitarity, Schrödinger equation, density operator, free (Larmor) and parametrically induced (Rabi) precessions, transitions, commutators, quanta numbers etc... Moreover, the  $SU(2) \leftrightarrow SO(3)$  group isomorphism provides an opportunity to introduce the notion of *representation*. The Larmor-Bloch representation of the motion may then enable us to introduce a wealth of useful knowledge in the NMR domain : FID, spin echoes, population inversion and so on. Besides, the energy balance presented in the Rabi precession study may be used to suggest a classical equivalent of processes like energy absorption or stimulated emission, essential to any understanding of the LASER effect for example.

In so far as most of the technical machinery of the present paper relies on the use of the Glauber variables, we end up with the same conclusion as in companion paper I : these variables (and the attached formalism) would deserve a better place in undergraduate level teaching and textbooks.

The experimental device used in this paper II (as well as in paper I) was achieved by Patrice Lepers and Maurice Gilbert. Let they be acknowledged for their valuable contribution to this work.

## Chapitre 5

# Excitation paramétrique d'une bulle

Forts de notre succès avec les pendules, nous allons maintenant utiliser les variables de Glauber pour étudier l'oscillateur bulle. Le but de cette étude sera, rappelons-le, de trouver un mécanisme permettant de réaliser des échos. On commencera donc par expliquer (enfin!) ce que l'on entend par échos de bulles. L'exposition du principe de l'écho sera l'occasion de montrer qu'un ingrédient indispensable est un mécanisme de "retournement". La suite du chapitre sera alors consacrée à l'élaboration de cet ingrédient, pour constater finalement que son obtention n'est pas suffisante et qu'il manque encore des étapes pour parvenir aux échos de bulles.

### 5.1 Principe de l'écho

Le principe d'une expérience d'écho est bien illustré par l'image suivante. Mettons sur la ligne de départ d'une piste d'athlétisme un grand nombre de coureurs. À  $t = 0$ , on donne le signal du départ et les coureurs s'élancent. Pendant la course, du fait de leur différence de conditions physiques, les coureurs ne vont pas à la même vitesse, et le groupe compact qu'ils formaient au début s'étale de plus en plus. Si au temps  $t = \tau$ , on donne un second signal qui a pour effet de faire repartir tous les coureurs instantanément en sens inverse, on va voir le groupe se reformer. Et à  $t = 2\tau$ , tous les coureurs franchissent la ligne de départ ensemble. C'est cet effet de "remise en phase" de tous les coureurs que l'on appelle écho.

L'application la plus connue de cet effet est l'écho de spin tel qu'il est utilisé en IRM (Imagerie par Résonance Magnétique). Il s'agit cette fois non plus de coureurs mais de spins. L'IRM permet de réaliser une image en mesurant le temps de relaxation des spins du matériau étudié. Ce temps de relaxation est en effet fonction de l'environnement des spins, et les divers tissus biologiques, par exemple, ne donneront pas le même temps de relaxation. Une séquence typique d'IRM<sup>1</sup> consiste, dans un premier temps, à appliquer un fort champ magnétique à l'échantillon à imager : on aligne tous les spins le long du champ. On applique alors un champ magnétique tournant perpendiculaire au premier, pendant le temps nécessaire pour faire basculer les spins de  $90^\circ$  (précession de Rabi) ; on les place donc tous dans le plan perpendiculaire au champ magnétique principal. Après ce basculement, tous les spins tournent ensemble dans

---

<sup>1</sup>Pour plus de précisions sur l'IRM, consulter par exemple le manuel de B. Kastler [KVP03].

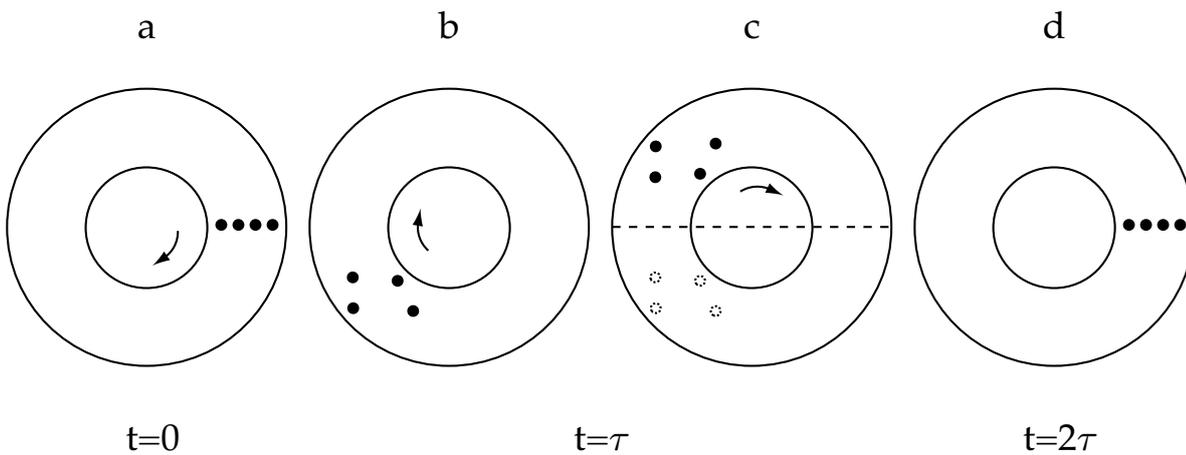


FIG. 5.1 – *Illustration du principe de l'écho. On place 4 coureurs sur la ligne de départ (a). Contre toutes les lois de l'athlétisme, on supposera que les coureurs sont caractérisés par leur vitesse angulaire. Au bout d'un temps  $\tau$ , tous les coureurs n'ayant pas la même vitesse angulaire, le peloton s'est étalé (b). Si, à cet instant, on déplace tous les coureurs par symétrie axiale (c), on inverse leur rang : le premier devient dernier et inversement. La symétrie a donc le même effet que si les coureurs repartaient en sens inverse. Au temps  $2\tau$ , tous les coureurs reviennent en même temps sur la ligne de départ (d).*

ce même plan transverse, sous l'action du champ magnétique (précession de Larmor). Cette rotation s'accompagne d'une variation de flux magnétique que l'on peut mesurer. On s'intéresse alors au temps caractéristique d'amortissement de la fem induite (le  $T_2$ ), que l'on espère pouvoir relier à la relaxation des spins. Le problème est que l'amortissement du signal n'est pas seulement le fait de la relaxation ; un autre effet domine. À cause des inhomogénéités locales du champ, les spins ne tournent en effet pas tous à la même vitesse dans le plan transverse, tout comme les athlètes ne couraient pas tous aussi vite sur la piste. Ces différences de vitesses angulaires entraînent un étalement des spins dans le plan, étalement qui se manifeste par des variations de flux plus faibles. C'est là qu'intervient l'effet d'écho. Au temps  $\tau$ , on applique de nouveau un champ tournant, mais sur une durée double de celle de la première fois. On fait alors tourner les spins de  $180^\circ$ . Dans le plan transverse, cela se traduit par un déplacement des spins par symétrie axiale. Cette symétrie a le même effet que le retour en arrière des coureurs, comme l'illustre la figure 5.1 (on retrouve d'ailleurs l'aspect "retournement du temps" associé à la conjugaison de phase).

On a alors, au temps  $2\tau$ , un écho : les spins se rejoignent et les variations de flux deviennent plus abruptes. Au moment de l'écho, la diminution de la fem induite est due au seul effet de la relaxation ; on a gommé momentanément les effets d'inhomogénéité. La réalisation d'une séquence d'écho permet donc d'obtenir la valeur du temps de relaxation  $T_2$ .

Une application aux bulles consisterait à utiliser une assemblée polydisperse de bulles. Les bulles ayant des pulsations propres différentes, on aurait alors un étalement de leurs positions

dans l'espace des phases, analogue à l'étalement du peloton de coureurs. Il ne manquerait alors plus qu'un effet de symétrie à  $t = \tau$ , comme dans le schéma c de la figure 5.1, pour pouvoir remettre en phase les bulles à  $t = 2\tau$  et observer une remontée du signal. C'est ce mécanisme de symétrie, que l'on nomme abusivement "retournement" par analogie avec le cas des spins, que nous nous sommes efforcés de mettre au point.

Nous avons suivi trois pistes pour atteindre ce but. La première consistait à utiliser des systèmes de di-bulles pour profiter des effets que nous avons mis en évidence avec les pendules couplés. Le vocabulaire que nous avons utilisé dans la section 4.3 n'est en effet pas innocent. La mise en évidence de précessions de Larmor et de Rabi avec un système de deux oscillateurs couplés laisse entrevoir la possibilité de reproduire le mécanisme de l'écho de spins. En pratique, cette démarche ne peut malheureusement pas aboutir avec des bulles. On a en effet vu que, pour être valide, notre description en termes de précessions devait respecter la hiérarchie suivante :  $\Omega_R \ll \Omega_0 \ll \omega_0$ , où les trois pulsations correspondent respectivement à celle de Rabi, de Larmor et à la pulsation propre de l'oscillateur (Minnaert dans le cas de la bulle). Pour l'oscillateur bulle, l'amortissement est trop fort pour pouvoir respecter cette contrainte : le système de di-bulle aura cessé d'osciller avant que le temps nécessaire au retournement ne se soit écoulé...

La seconde piste prenait le chemin des non-linéarités. Une façon d'obtenir un retournement consiste en effet à passer d'un signal en  $e^{i\omega\tau}$  à un signal en  $e^{-i\omega\tau}$  ; autrement dit, à faire de la conjugaison de phase (la figure 5.1 l'illustre bien si on transforme la piste d'athlétisme en espace des phases et les coureurs en représentations des bulles dans cet espace). On peut espérer réaliser ce programme en utilisant des non-linéarités. Mais il faut aller chercher des non-linéarités d'ordre relativement élevé. Expérimentalement, il faut être capable d'avoir des non-linéarités suffisamment développées pour voir de la génération d'harmonique 3. Or on verra que notre système expérimental ne nous permet pas d'aller au delà de l'harmonique 2 (voir page 160).

La troisième piste fut plus fructueuse. Elle est apparue de façon fortuite, lors de l'étude de l'excitation paramétrique du pendule. Chronologiquement, l'étude des pendules ne suit d'ailleurs pas le déroulement du chapitre 4. Nous avons d'abord abordé le di-pendule, avec une arrière-pensée toujours tournée vers les échos. L'étude du pendule seul avec les variables de Glauber n'a été réalisée que dans un souci de complétude, sans arrière-pensée. Il est alors apparu que l'excitation paramétrique, avec sa modulation à  $2\omega$ , permettait de réaliser une forme de conjugaison de phase. On exposera comment dans la section 5.3.

## 5.2 Non-linéarités d'une bulle d'air dans l'eau

On l'a vu dans le chapitre 3, la présence de bulles dans un liquide a pour effet de rendre le milieu très dispersif. Mais les bulles sont également des sources de non-linéarités importantes. Un liquide bulleux constitue donc un milieu dispersif non linéaire. On comprend l'engouement qu'il a pu susciter. C'est un candidat fréquemment cité pour proposer une application à l'acoustique de phénomènes d'optique non linéaire.[ZS67, VZK83, Lop80]

### 5.2.1 Équation de Rayleigh-Plesset

Même dans sa description la plus simple, la bulle présente un caractère non linéaire prononcé. Reprenons en effet notre modèle d'oscillateur, mais en incluant les termes non linéaires.

On a vu que l'énergie cinétique de la bulle était largement dominée par le déplacement de l'eau. Pour de l'eau incompressible, calculons le déplacement imposé par une variation du rayon de la bulle en  $R(t) = R_0 + \xi(t)$ . Puisqu'on a adopté les variables lagrangiennes, l'écriture de l'incompressibilité, quand on veut tenir compte des termes non linéaires, ne se réduit pas à  $\text{div} \vec{u} = 0$ . L'invariance de volume de la pellicule d'eau en  $r$  et d'épaisseur  $dr$  à l'équilibre, s'écrit, pour un déplacement  $u(r)$  :

$$4\pi r^2 dr = 4\pi (r + u(r))^2 d(r + u(r)).$$

Ce qui donne, par intégration :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_0^3) &= \frac{4}{3}\pi [(r + u(r))^3 - (R_0 + \xi)^3] \\ \implies u(r, \xi) &= [r^3 + (R_0 + \xi)^3 - R_0^3]^{1/3} - r. \end{aligned}$$

On calcule donc une énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{R_0}^{\infty} 4\pi r^2 dr \dot{\xi}^2 \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho 4\pi (R_0 + \xi)^4 \dot{\xi}^2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{r^2 dr}{(r + u(r))^4}.$$

Cette dernière intégrale se calcule aisément à l'aide d'un changement de variable,<sup>2</sup> et on obtient que :

$$E_c = \frac{1}{2} M(\xi) \dot{\xi}^2 \quad \text{avec} \quad M(\xi) = \rho 4\pi (R_0 + \xi)^3.$$

D'autre part, en supposant que la pression  $\tilde{P}(t)$  est uniforme au sein de la bulle et qu'elle suit une loi du type :

$$\tilde{P}(t) = \tilde{P}_0 \left( \frac{R_0}{R(t)} \right)^{3\kappa},$$

on calcule une énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E_p(\xi) &= - \int_0^\xi (\tilde{P}(t) - \tilde{P}_0) 4\pi (R_0 + \xi')^2 d\xi' \\ &= \tilde{P}_0 4\pi R_0^3 \left( \frac{(1 + \xi/R_0)^3 - 1}{3} - \frac{(1 + \xi/R_0)^{3-3\kappa} - 1}{3 - 3\kappa} \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Enfin, l'interaction entre la bulle et une surpression extérieure  $p_e(t)$  s'écrit :

$$E_i(\xi, t) = -4\pi \int_0^\xi -p_e(t) (R_0 + \xi')^2 d\xi' = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \left( 1 + \frac{\xi}{R_0} \right)^3 p_e(t).$$

<sup>2</sup>Remarquons que ce changement de variable correspond justement à un passage des coordonnées lagrangiennes aux coordonnées eulériennes. De fait, le calcul de l'énergie cinétique est immédiat avec les coordonnées d'Euler. Nous avons cependant tenu à exposer le calcul en coordonnées lagrangiennes par souci de continuité des notations.

On peut donc écrire le lagrangien :

$$L = \frac{1}{2}M(\xi)\dot{\xi}^2 - E_p(\xi) - \frac{4}{3}\pi R_0^3 \left(1 + \frac{\xi}{R_0}\right)^3 p_e(t). \quad (5.2)$$

Et on obtient une équation du mouvement multiplement non linéaire :

$$\rho R_0 \left(1 + \frac{\xi}{R_0}\right)^3 \ddot{\xi} + \frac{3}{2}\rho\dot{\xi}^2 + \tilde{P}_0 \left(1 - \left(1 + \frac{\xi}{R_0}\right)^{-3\gamma}\right) = -p_e(t). \quad (5.3)$$

Remarquons que, à l'approximation linéaire, on retrouve bien :

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -\frac{p_e(t)}{\rho R_0} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{3\kappa\tilde{P}_0}{\rho R_0^2}.$$

La relation (5.3) est l'équation de Rayleigh-Plesset, généralement formulée en utilisant  $R(t)$  :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left( \tilde{P}_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa} - \tilde{P}_0 - p_e(t) \right). \quad (5.4)$$

On peut inclure sans peine de la viscosité et de la tension superficielle dans le modèle; et l'équation de Rayleigh-Plesset ainsi complétée est généralement écrite sous la forme :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left( \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0}\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa} - P_0 - \frac{2\sigma}{R} - p_e(t) - \frac{4\eta}{R}\dot{R} \right).$$

Par contre cette dernière expression ne tient compte ni du rayonnement acoustique ni de l'amortissement thermique.<sup>3</sup> On trouve dans la littérature des équations tenant compte de ces deux sources d'amortissement en introduisant des termes de viscosités "thermique" et "acoustique".<sup>4</sup> On se contentera ici d'une prise en compte phénoménologique de l'amortissement. Reprenant l'équation (5.3), on introduit un terme de friction visqueuse :

$$(1+x)\ddot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2 + \frac{\omega_0^2}{3\kappa} (1 - (1+x)^{-3\kappa}) + \Gamma\dot{x} = \omega_0^2 y(t), \quad (5.5)$$

où on a utilisé les notations sans dimension  $x = \frac{\xi}{R_0}$  et  $y(t) = -\frac{p_e(t)}{3\kappa P_0}$ . On prendra pour  $\Gamma$  le taux d'amortissement que l'on a défini en régime linéaire. Cette façon d'introduire l'amortissement est quelque peu arbitraire : on néglige les éventuelles sources de non-linéarités provenant des termes de friction. Toutefois, puisque  $\Gamma/\omega_0 \ll 1$ , on peut penser que les non-linéarités déjà incluses dans (5.5) dominant.

### 5.2.2 Génération d'harmoniques

L'équation (5.5) permet d'estimer l'ordre de grandeur des non-linéarités auxquelles on peut s'attendre : le rapport entre la variation de rayon et le rayon à l'équilibre ( $x = \frac{\xi}{R_0}$ ) sera de l'ordre du rapport entre la surpression que l'on impose et la pression à l'équilibre

<sup>3</sup>Il faudrait également inclure dans les équations un terme de pression de vapeur saturante ([Lei94] page 303). Mais, tant que la température n'est pas trop élevée, on pourra le négliger.

<sup>4</sup>Voir par exemple l'article de Prosperetti [Pro74] et les références qui y sont citées. Des modèles plus élaborés existent également : voir Leighton [Lei94] page 306, ou encore [PCC88].

( $y(t) = -\frac{p_e(t)}{3\kappa P_0}$ ). En pratique,  $y(t)$  sera toujours très inférieur à 1 dans nos expériences. On restera donc dans des conditions où  $x \ll 1$ ; ce qui nous permet d'envisager une résolution perturbative de (5.5).

Introduisons tout d'abord la fonction de Green causale de l'oscillateur harmonique, qui permet d'obtenir une écriture formelle des solutions pour une excitation quelconque. Considérons l'équation de l'oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F(t), \quad (5.6)$$

où  $F(t)$  est une fonction d'excitation quelconque. La solution de cette équation s'écrit :

$$x(t) = (g * F)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t')g(t-t')dt', \quad \text{avec} \quad g(t) = \frac{\sin(\omega'_0 t)e^{-\frac{\Gamma}{2}t}}{\omega'_0}\theta(t),$$

où  $\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{2\omega_0}\right)^2} \simeq \omega_0$  et où  $\theta(t)$  est la fonction de Heavyside. La fonction  $g(t)$  est appelée fonction de Green causale.

On peut utiliser cette méthode pour résoudre (5.5) ordre par ordre. Décomposons  $x(t)$  sous la forme :

$$x(t) = x_{[1]}(t) + x_{[2]}(t) + x_{[3]}(t) + \dots,$$

où  $x_i(t)$  désigne la réponse à l'ordre  $i$ . L'équation (5.5) s'écrit alors, jusqu'à l'ordre 3 :

- ordre 1 :  $\ddot{x}_{[1]} + \Gamma \dot{x}_{[1]} + \omega_0^2 x_{[1]} = \omega_0^2 y(t)$

dont la solution est :  $x_{[1]}(t) = \omega_0^2 (g * y)(t)$ .

- ordre 2 :  $\ddot{x}_{[2]} + x_{[1]}\ddot{x}_{[1]} + \Gamma \dot{x}_{[2]} + \frac{3}{2}\dot{x}_{[1]}^2 + \omega_0^2 \left(x_{[2]} - \frac{3\kappa+1}{2}x_{[1]}^2\right) = 0$ ,

soit encore :  $\ddot{x}_{[2]} + \Gamma \dot{x}_{[2]} + \omega_0^2 x_{[2]} = \omega_0^2 y_{[2]}(t)$  avec  $y_{[2]}(t) = \frac{3\kappa+1}{2}x_{[1]}^2 - x_{[1]}\frac{\ddot{x}_{[1]}}{\omega_0^2} - \frac{3}{2}\frac{\dot{x}_{[1]}^2}{\omega_0^2}$ ,

dont la solution est :  $x_{[2]}(t) = \omega_0^2 (g * y_{[2]})(t)$ .

- ordre 3 :  $\ddot{x}_{[3]} + x_{[1]}\ddot{x}_{[2]} + x_{[2]}\ddot{x}_{[1]} + \Gamma \dot{x}_{[3]} + 3\dot{x}_{[1]}\dot{x}_{[2]} + \omega_0^2 \left(x_{[3]} - (3\kappa+1)x_{[1]}x_{[2]} + \frac{(3\kappa+1)(3\kappa+2)}{6}x_{[1]}^3\right) = 0$ ,

soit encore :  $\ddot{x}_{[3]} + \Gamma \dot{x}_{[3]} + \omega_0^2 x_{[3]} = \omega_0^2 y_{[3]}(t)$

avec  $y_{[3]}(t) = (3\kappa+1)x_{[1]}x_{[2]} - \frac{(3\kappa+1)(3\kappa+2)}{6}x_{[1]}^3 - x_{[1]}\frac{\ddot{x}_{[2]}}{\omega_0^2} - x_{[2]}\frac{\ddot{x}_{[1]}}{\omega_0^2} - 3\frac{\dot{x}_{[1]}}{\omega_0}\frac{\dot{x}_{[2]}}{\omega_0}$ ,

dont la solution est :  $x_{[3]}(t) = \omega_0^2 (g * y_{[3]})(t)$ .

On a donc une écriture simple dans laquelle chaque ordre sert d'excitation à l'ordre suivant. Cette cascade d'excitations donne lieu à un spectre de réponse de l'oscillateur plus large que le spectre de son excitation. On va considérer par exemple le cas d'une excitation monochromatique  $p_e(t) = \epsilon P_0 \text{Re}(e^{i\omega t})$ . La solution à l'ordre 1 s'écrit :

$$\begin{aligned} x_{[1]}(t) &= \frac{\epsilon}{3\kappa} \text{Re} \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\Gamma} e^{i\omega t} \right) \\ &= \frac{\epsilon}{3\kappa} A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \end{aligned} \quad (5.7)$$

avec  $A_1 = \text{abs} \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\Gamma} \right)$  et  $\varphi_1 = \arg \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\Gamma} \right)$ . Notons que l'on retrouve l'équation (1.34) page 26.

Avec cette solution à l'ordre 1, on trouve que :

$$y_{[2]}(t) = \left(\frac{\epsilon A_1}{3\kappa}\right)^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{3\kappa+1}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right) \cos(2\omega t + 2\varphi_1) + \left( \frac{3\kappa+1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right) \right].$$

On a donc, au deuxième ordre, une excitation à  $2\omega$ . Écrivons la réponse à  $2\omega$  à cette excitation sous la forme :

$$x_{[2]}(t) = A_2 e^{2i\omega t + 2i\varphi_2},$$

où  $A_2$  est une amplitude réelle. La relation entre  $A_2$  et  $A_1$  s'écrit :

$$A_2 = \left(\frac{\epsilon A_1}{3\kappa}\right)^2 \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 4\omega^2\Gamma^2}} \frac{1}{2} \left( \frac{3\kappa+1}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right). \quad (5.8)$$

On peut bien sûr poursuivre et calculer ainsi la génération d'harmonique 3, 4 etc. Toutefois, les ordres sont de plus en plus faibles : expérimentalement, nous ne mettrons en évidence que l'harmonique 2.

### 5.2.3 Mise en évidence expérimentale

La détection synchrone est un outil très performant pour étudier la génération d'harmonique. On peut exciter la bulle avec un signal à la pulsation  $\omega$ , et extraire de la réponse le signal à  $2\omega$  ou  $3\omega$ . Le dispositif expérimental est donc identique à celui utilisé pour l'étude linéaire d'une ou plusieurs bulles : un haut-parleur sous-marin excite la bulle, piégée sous le filet, à la pulsation désirée et on recueille le signal à l'aide d'un hydrophone.

Une expérience se déroule de la façon suivante. On piège une bulle sous le filet et on détermine sa fréquence de résonance en effectuant un balayage en fréquence. On soumet alors la bulle à une rampe en amplitude, en l'excitant à sa fréquence de résonance. On effectue plus exactement 2 rampes : une pour mesurer la réponse à la fréquence d'excitation (rampe à  $1f$ ) et une pour mesurer la réponse à la fréquence double (rampe à  $2f$ ). Notons  $V_{1f}$  et  $V_{2f}$  les réponses, complexes et en volts, correspondant respectivement aux signaux à  $1f$  et à  $2f$ . Dans un second temps, on enlève la bulle et on refait les mesures : on note  $V_{1f}^0$  et  $V_{2f}^0$  les signaux acquis.

Pour le signal à  $1f$ , la mesure que l'on obtient en présence de la bulle est la somme du signal émis par la bulle et du signal direct du haut-parleur. On définit alors  $V_{1f}^b$ , le signal dû à la bulle, par :

$$V_{1f}^b = V_{1f} - V_{1f}^0.$$

La figure 5.2a montre le résultat de la rampe à  $1f$  : on a tracé  $V_{1f}^b$  en fonction de  $V_{1f}^0$ . Comme attendu, on obtient une droite. La conversion de la tension mesurée en pression se fait suivant la loi :

$$P = wV \quad \text{avec} \quad w = 100 \text{ Pa/V.}$$

D'après la relation (1.10), on relie la surpression  $p^b$  engendrée par la bulle à une distance  $r$  à la variable  $x$  par :

$$p^b(r, t) = \frac{R_0}{r} \rho R_0^2 \ddot{x}(t).$$

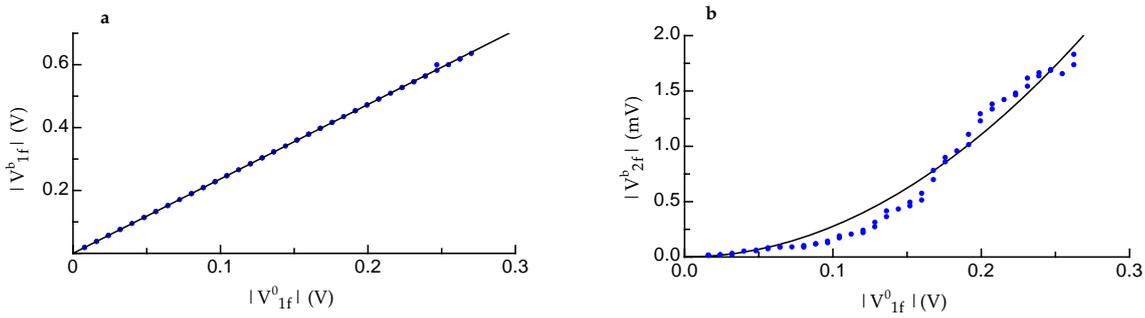


FIG. 5.2 – a- Module du signal à  $1f$  généré par la bulle en fonction du signal imposé par le haut-parleur. On a bien une loi linéaire. b- Module du signal à  $2f$ . On a cette fois, comme attendu, un comportement quadratique.

En utilisant (5.7), on obtient donc, en supposant que la pression mesurée sans bulle est sensiblement la même que celle qui excite la bulle ( $\epsilon P_0 = |p_{1f}^0|$ ) :

$$V_{1f}^b = \frac{R_0}{r} \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\Gamma)^2}} V_{1f}^0,$$

et à résonance :

$$V_{1f}^b = \frac{R_0}{r\delta_0} V_{1f}^0.$$

D'après la régression linéaire de la figure 5.2a, on obtient  $\frac{R_0}{r\delta_0} = 2,4$ . D'autre part, grâce au balayage en fréquence initial, on peut estimer la valeur de  $\delta_0$  à  $2,5 \cdot 10^{-2}$ . Cela correspond à une distance entre la bulle et l'hydrophone de l'ordre de  $r = 17R_0$ , ce qui est cohérent avec la disposition effectivement adoptée lors de l'expérience.

Dans la figure 5.2b, on a reporté le résultat de la rampe à  $2f$ . Là encore, on ne mesure pas directement le signal dû à la bulle. En fait, la mesure à  $2f$  en l'absence de bulle donne un signal du même ordre de grandeur que le signal en présence de bulle. Cela signifie qu'il existe d'autres sources de non-linéarité dans le dispositif (vraisemblablement le haut-parleur). On propose de remonter au signal à  $2f$  généré par la bulle en utilisant la formule :

$$V_{2f}^b = V_{2f} - V_{2f}^0.$$

En toute rigueur, il nous faudrait soustraire deux contributions : celle du signal à  $2\omega$  directement généré par le haut-parleur, et celle de la diffusion par la bulle de ce signal direct. Toutefois, cette deuxième contribution est faible, ladite diffusion étant non résonnante. La figure 5.2b donne le résultat de la procédure en faisant figurer  $V_{2f}^b$  en fonction de  $V_{1f}^0$ . On obtient une loi quadratique, caractéristique d'une non-linéarité d'ordre 2. D'après l'équation (5.8), le calcul montre que l'on attend :

$$\begin{aligned} V_{2f}^b &= \frac{w}{P_0} \frac{R_0}{r} \frac{\kappa + 2}{3\kappa} (V_{1f}^0)^2 \\ &\simeq 7,6 \cdot 10^{-2} (V_{1f}^0)^2. \end{aligned}$$

L'ajustement des points expérimentaux conduit à un coefficient de  $2,8 \cdot 10^{-2}$ . L'accord n'est donc pas très bon, mais on trouve le bon ordre de grandeur. Le désaccord s'explique peut-être

par notre hypothèse selon laquelle le signal qui excite la bulle est le même que celui mesuré par l’hydrophone en l’absence de bulle.

### 5.3 “Retournement” d’une bulle

Venons-en maintenant à l’excitation paramétrique d’une bulle. On va montrer que l’application d’une surpression à  $2f$  à une bulle, préalablement excitée à  $f$ , réalise une conjugaison de phase partielle du signal. L’utilisation des variables de Glauber, largement commentée au chapitre 4, s’avère particulièrement efficace pour étudier ce phénomène.

#### 5.3.1 Introduction des variables de Glauber

Reprenons le lagrangien de la bulle (5.2) en l’exprimant à l’aide de la variable  $x$  :

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}M_0(1+x)^3 R_0^2 \dot{x}^2 - 4\pi P_0 R_0^3 \left[ \frac{(1+x)^3 - 1}{3} - \frac{(1+x)^{(3-3\kappa)} - 1}{3-3\kappa} \right] - \frac{4}{3}\pi R_0^3 (1+x)^3 p_e(t),$$

où  $M_0 = 4\pi\rho R_0^3$ . On calcule alors le moment conjugué de  $x$  :

$$p = I(1+x)^3 \dot{x},$$

avec  $I = M_0 R_0^2$ . Une transformation de Legendre permet d’obtenir le Hamiltonien :

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2I(1+x)^3} + 4\pi P_0 R_0^3 \left[ \frac{(1+x)^3 - 1}{3} - \frac{(1+x)^{(3-3\kappa)} - 1}{3-3\kappa} \right] + \frac{4}{3}\pi R_0^3 (1+x)^3 p_e(t).$$

On introduit les variables de Glauber :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{I\omega_0} x + \frac{i}{\sqrt{I\omega_0}} p \right) \quad \text{et complexe conjugué pour } \alpha^*,$$

et on développe le Hamiltonien jusqu’au troisième ordre :

$$H_{[3]} = H_0 + W + H_e(t),$$

avec  $H_0 = \hbar\omega_0 |\alpha|^2$ ,

$$W = \hbar\omega_0 \sqrt{\frac{\hbar}{2I\omega_0}} \left( \frac{3}{4}(\alpha - \alpha^*)^2 (\alpha + \alpha^*) - \frac{1}{4}(\kappa - 1)(\alpha + \alpha^*)^3 \right),$$

$$\text{et } H_e(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 p_e(t) \left( 1 + 3\sqrt{\frac{\hbar}{2I\omega_0}} (\alpha + \alpha^*) + 3\frac{\hbar}{2I\omega_0} (\alpha + \alpha^*)^2 + \left( \frac{\hbar}{2I\omega_0} \right)^{3/2} (\alpha + \alpha^*)^3 \right).$$

À partir de ce hamiltonien, on peut tout à fait retrouver la génération d’harmonique 2 : l’équation vérifiée par  $\alpha$  va contenir des termes en  $\alpha^2$  qui seront sources d’une excitation à fréquence double. Mais on va se limiter ici à un développement à l’ordre 2, suffisant pour voir apparaître l’excitation paramétrique. On a :

$$H_{[2]} = \hbar\omega_0 |\alpha|^2 + \frac{4}{3}\pi R_0^3 \left( 1 + 3\sqrt{\frac{\hbar}{2I\omega_0}} (\alpha + \alpha^*) + 3\frac{\hbar}{2I\omega_0} (\alpha + \alpha^*)^2 \right) p_e(t).$$

À cet ordre, l'équation vérifiée par  $\alpha$  s'écrit :

$$\dot{\alpha} = \{\alpha, H_{[2]}\} = -i\omega_0\alpha - i\omega_0\sqrt{\frac{I\omega_0}{2\hbar}} \left( 1 + \sqrt{\frac{2\hbar}{I\omega_0}}(\alpha + \alpha^*) \right) \frac{p_e(t)}{3\kappa P_0}. \quad (5.9)$$

Cette équation est analogue à la formule (4.23) que nous avons trouvée pour le pendule. Le premier terme du membre de droite correspond à l'évolution libre de la bulle, le terme en  $p_e(t)$  correspond à une excitation directe de la bulle, et le terme en  $\alpha^*p_e(t)$  correspond à une excitation paramétrique. L'application d'une surpression peut en effet être vue comme une modulation du paramètre  $P_0$  qui intervient dans l'expression de la pulsation propre de la bulle. Cela explique l'existence d'un terme d'excitation paramétrique, en plus du terme d'excitation directe.

### 5.3.2 Principe de l'expérience de retournement

Excitons une bulle à l'aide d'un signal tel que celui de la figure 5.3. Il s'agit de deux impulsions. La première commence à  $t = 0$  et dure un temps  $\Delta t_1$ . Elle a une amplitude  $P_1$  et porte un signal sinusoïdal à la pulsation  $\omega$  avec une phase  $\varphi_1$ . On règle  $\omega$  de façon à exciter efficacement la bulle :  $\omega \simeq \omega_0$ . La deuxième impulsion commence à  $t = \tau$  pour s'achever au bout d'un temps  $\Delta t_2$ . Elle a une amplitude  $P_2$  et oscille cette fois à  $2\omega$ , avec une phase  $\varphi_2$ . Reprenons l'équation (5.9), en y ajoutant un terme de friction, et en posant

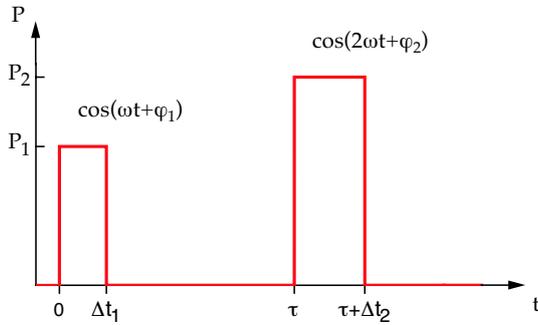


FIG. 5.3 – On soumet une bulle à une séquence de deux impulsions. La première, d'une largeur  $\Delta t_1$ , est à une pulsation  $\omega$  proche de la pulsation de résonance de la bulle. La seconde, d'une largeur  $\Delta t_2$ , est réalisée à la pulsation double  $2\omega$  : elle réalise une excitation paramétrique de la bulle.

$$\Omega(t) = \frac{4\pi R_0^3}{I\omega_0} p_e(t) = \omega_0 \frac{p_e(t)}{3\kappa P_0} :$$

$$\dot{\alpha} = -i\omega_0\alpha - \frac{\Gamma}{2}\alpha - i\sqrt{\frac{I\omega_0}{2\hbar}}\Omega(t) \left( 1 + \sqrt{\frac{2\hbar}{I\omega_0}}(\alpha + \alpha^*) \right). \quad (5.10)$$

#### Première impulsion

La première impulsion excite la bulle de façon résonnante. On écrit  $\Omega(t)$  sous la forme :

$$\Omega_1(t) = \Pi_1(t) \cos(\omega t + \varphi_1),$$

où  $\Pi_1$  est l’enveloppe de l’impulsion. En ne gardant que les termes séculaires<sup>5</sup> dans (5.10), on écrit :

$$\dot{\alpha}_1 = -i\omega_0\alpha_1 - \frac{\Gamma}{2}\alpha_1 - i\sqrt{\frac{I\omega_0}{2\hbar}}\Omega_1(t),$$

équation dans laquelle l’indice 1 de  $\alpha$  signifie qu’il s’agit de la réponse à l’impulsion 1. La solution, pour  $t > \Delta t_1$ , s’écrit :

$$\alpha_1(t) = e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} A_1, \quad \text{avec} \quad A_1 = -i\sqrt{\frac{I\omega_0}{2\hbar}} \frac{e^{-i\varphi_1}}{2} \int_0^{\Delta t_1} dt_1 \Pi_1(t_1) e^{i(\omega_0 - \omega)t_1 + \frac{\Gamma}{2}t_1}.$$

### Seconde impulsion

Pour la seconde impulsion, on a :

$$\Omega_2(t) = \Pi_2(t) \cos(2\omega t + \varphi_2),$$

et le terme  $\Omega_2(t)\alpha^*$  va apporter une contribution séculaire. On aura bien sûr également un terme de forçage à  $2\omega$ . Mais on va le laisser de côté pour le moment. D’une part parce que, étant non résonnant, sa contribution doit être relativement faible ; d’autre part parce que notre équation sur  $\alpha$  est linéaire et que la solution totale sera une simple superposition de toutes les composantes, sans “contamination” d’une composante à l’autre. On a donc à résoudre :

$$\dot{\alpha} = -i\omega_0\alpha - \frac{\Gamma}{2}\alpha - i\Omega_2(t)\alpha^*, \quad (5.11)$$

dont on cherche la solution sous la forme  $\alpha(t) = e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} A(t)$ .  $A(t)$  doit alors vérifier :

$$\dot{A} = -\frac{i}{2}\Pi_2(t)e^{-i\varphi_2}e^{2i(\omega_0 - \omega)t} A^*. \quad (5.12)$$

Remarquons que l’on retrouve la même équation que pour l’excitation paramétrique résonnante du pendule (voir équation (4.46) page 110). La deuxième impulsion est donc bien formellement une excitation paramétrique résonnante de la bulle. Toutefois, on ne va pas obtenir le même effet. Pour comprendre pourquoi, il faut se pencher sur le temps caractéristique  $\lambda^{-1}$  que l’on a introduit lors de notre étude du pendule (page 111). Ce temps sera d’autant plus long que la modulation paramétrique sera faible. Pour espérer obtenir une amplification, il faut que ce temps soit plus court que le temps de décroissance des oscillations. Dans le cas contraire, les effets d’amplification n’ont pas commencé à se manifester que la bulle est déjà au repos. C’est la raison pour laquelle l’amplification paramétrique n’apparaît qu’à partir d’un seuil (voir la figure 4.4). Dans nos expériences avec une bulle, l’amplitude de la suppression de l’impulsion 2 ne sera jamais assez forte pour atteindre ce seuil. D’autre part, l’impulsion sera de courte durée et on aura :  $\Delta t_2 \ll \lambda^{-1}$ . À ce titre, on peut voir notre effet de retournement de la bulle comme une excitation paramétrique limitée aux temps courts. Une caractéristique importante sera l’absence de blocage de phase. Pour l’excitation paramétrique, on a vu en effet que, en régime asymptotique, on atteignait une phase qui était fixée par la modulation paramétrique,

<sup>5</sup>L’Approximation Séculaire (AS) est longuement justifiée et utilisée dans le premier article du chapitre 4 : «Using Glauber variable I ».

et qui ne portait plus aucune trace de la phase initiale. Pour la bulle, on restera au delà de ce régime asymptotique et la phase des oscillations gardera le souvenir de la phase initiale. Ce point aura une très grande importance pour la mise au point de notre système de détection.

On va donc considérer que le terme  $A^*$  dans (5.12) reste constant, égal à  $A_1^*$ . On a alors :

$$\dot{A} \simeq -\frac{i}{2}\Pi_2(t)e^{-i\varphi_2}e^{2i(\omega_0-\omega)t}A_1^*,$$

et on obtient que la réponse à l'impulsion 2, que l'on note  $\alpha_{1+2}(t)$ , s'écrit, pour  $t > \tau + \Delta t_2$  :

$$\alpha_{1+2}(t) = A_{1+2}e^{-i\omega_0 t}e^{-\frac{\Gamma}{2}t},$$

$$\text{avec } A_{1+2} = \sqrt{\frac{I\omega_0}{2\hbar}}\frac{1}{4}e^{-2i(\omega-\omega_0)\tau-i(\varphi_2-\varphi_1)}\int_0^{\Delta t_1} dt_1\Pi_1(t_1)e^{i(\omega_0-\omega)t_1+\frac{\Gamma}{2}t_1}\int_0^{\Delta t_2} dt_2\Pi_2(t_2)e^{-2i(\omega-\omega_0)t_2}$$

### Suppression engendrée par la bulle

Repassons maintenant des variables de Glauber à  $x$ . Pour  $t > \tau + \Delta t_2$ , on calcule donc :

$$\begin{aligned} x_{1+2}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2I\omega_0}}(\alpha_{1+2} + \alpha_{1+2}^*) \\ &= \frac{1}{4}\text{Re}\left(e^{-i(\omega_0(t-2\tau)+2\omega\tau+\varphi_2-\varphi_1)}e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\tilde{\Pi}_1(\omega_0-\omega)\tilde{\Pi}_2^*(2\omega_0-2\omega)\right), \end{aligned}$$

où on a utilisé la notation tilde pour désigner les transformées de Fourier. Si la pulsation  $\omega$  est proche de celle de résonance, *i.e.* si  $(\omega_0 - \omega)\Delta t_1 \ll 1$  et  $(\omega_0 - \omega)\Delta t_2 \ll 1$ , on a :

$$\tilde{\Pi}_1(\omega_0 - \omega) \simeq \Delta t_1 \Omega_{01} \quad \text{et} \quad \tilde{\Pi}_2^*(2\omega_0 - 2\omega) \simeq \Delta t_2 \Omega_{02},$$

où  $\Omega_{01}$  et  $\Omega_{02}$  désignent respectivement les amplitudes de  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$ . En termes de pression, en notant  $p_1^b$  et  $p_{1+2}^b$  les suppressions engendrées par la bulle (respectivement dues à l'impulsion 1 seule et aux impulsions 1 + 2), on obtient donc :

$$p_1^b(t) = P_1 \frac{R_0 \omega_0 \Delta t_1}{r} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (5.13a)$$

$$p_{1+2}^b(t) = -P_1 \frac{R_0 \omega_0 \Delta t_1}{r} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \frac{P_2 \omega_0 \Delta t_2}{3\kappa P_0} \frac{1}{2} \cos(\omega_0(t - 2\tau) + \varphi_2 - \varphi_1 + 2\omega\tau) \quad (5.13b)$$

Ce sont ces deux expressions que nous utiliserons pour analyser les résultats expérimentaux. Mais avant d'aborder les expériences, on se propose de résumer les calculs précédents de façon plus imagée.

### Portrait de phase

La figure 5.4 propose de suivre  $\alpha$  dans son plan complexe pendant la séquence d'impulsions auxquelles on soumet la bulle. On a fait figurer 4 étapes :

- À  $t = 0$ , la bulle est au repos :  $\alpha = 0$ .
- À  $t = \Delta t_1$ , on a excité la bulle avec la première impulsion. Pour fixer les idées, imaginons que nous l'avons préparée avec une variable de Glauber purement réelle. Après la fin de l'excitation, la bulle suit, dans l'espace des phases, un cercle (on néglige la dissipation).

- À  $t = \tau$ , la deuxième impulsion intervient : on commence à fabriquer la composante  $\alpha_{1+2}$  ;
- À  $t = \tau + \Delta t_2$ , c’est la fin de l’impulsion 2 et on a obtenu une composante  $\alpha_{1+2}$ , complexe-conjuguée de la composante principale  $\alpha_1$ , mais avec une amplitude plus faible.<sup>6</sup> Ces deux composantes tournent ensuite toutes les deux à la vitesse angulaire  $\omega_0$ .

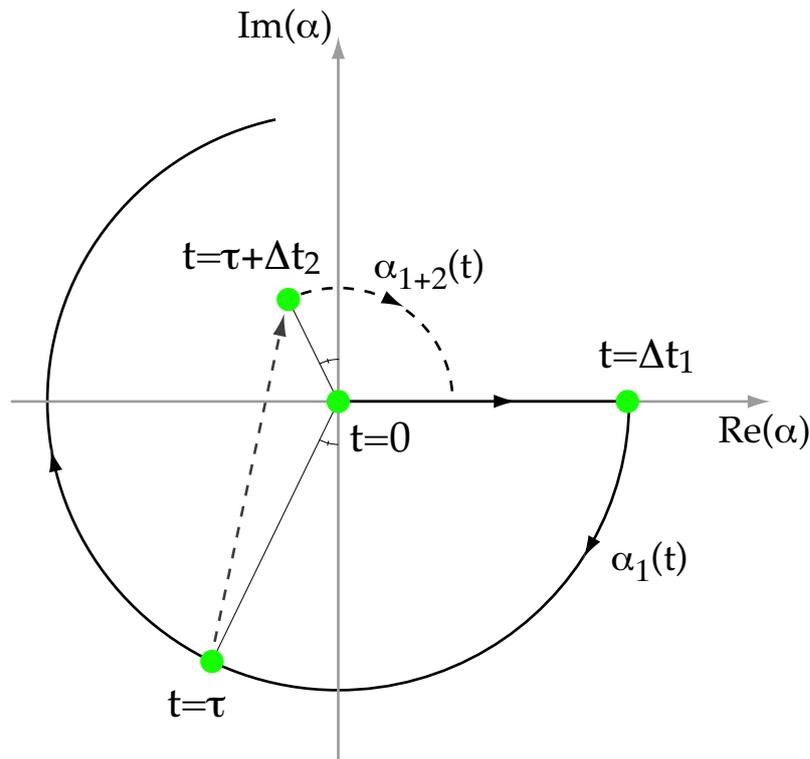


FIG. 5.4 – Portrait de phase de la bulle soumise aux deux impulsions. En trait plein, la composante principale  $\alpha_1$ , générée par la première impulsion à  $\omega$ . En trait hachuré, la composante “retournée”  $\alpha_{1+2}$ .

### 5.3.3 Méthode de mesure et résultats

La mise en évidence expérimentale du retournement nécessite de mettre au point une méthode de mesure particulière. On voit en effet, d’après les équations (5.13), qu’on s’attend à une composante retournée de bien plus faible amplitude que la composante principale :

$$\frac{|p_{1+2}^b|}{|p_1^b|} = \frac{P_2}{3\kappa P_0} \frac{\omega_0 \Delta t_2}{2}. \quad (5.14)$$

Le signal qui nous intéresse est masqué par le signal principal. Pour rendre le rapport plus favorable à la détection, on peut jouer sur deux paramètres : l’amplitude  $P_2$  de l’impulsion 2, et sa durée  $\Delta t_2$ . Expérimentalement, notre système ne nous permet d’atteindre que des pressions

<sup>6</sup>En fait, la conjugaison de phase s’accompagne également d’un déphasage, comme on le voit dans l’équation (5.11). On a donc supposé ici que la deuxième impulsion intervenait avec une phase nulle.

de l'ordre de 1000 Pa, au grand maximum. D'autre part, la durée maximale de l'impulsion 2 est limitée par l'accord que l'on est capable d'obtenir entre la pulsation de résonance de la bulle ( $\omega_0$ ) et la pulsation d'excitation ( $\omega$ ). On a en effet supposé, pour obtenir les formules (5.13), que la condition  $(\omega_0 - \omega)\Delta t_2 \ll 1$  était remplie. Des impulsions d'une durée invalidant cette condition n'amélioreront pas le rapport  $\frac{|p_{1+2}^b|}{|p_1^b|}$ .

Heureusement, les équations (5.13) laissent apparaître une autre possibilité : jouer sur la phase. Les deux pressions ne portent en effet pas la même phase. La composante principale ( $p_1^b$ ) a une phase  $\varphi_1$ , tandis que la composante retournée ( $p_{1+2}^b$ ) porte la phase  $\varphi_2 - \varphi_1 + 2(\omega - \omega_0)\tau - \frac{\pi}{2}$ .

### Homodynage avec référence de phase

La méthode que l'on utilise pour profiter de cette différence de phase s'apparente à de l'homodynage, mais en jouant sur la référence de phase. L'idée est la suivante. On soumet une bulle à une série de  $N$  séquences de deux impulsions, en changeant aléatoirement les phases  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  des impulsions d'une séquence à l'autre. On note  $\varphi_{1i}$  et  $\varphi_{2i}$  les phases utilisées lors de la séquence  $i$ . Chaque séquence donne donc un signal de réponse de la bulle, que l'on note  $f_i(t)$ , qui contient la composante retournée qui nous intéresse, mais également d'autres composantes (dont la principale), ainsi que du bruit.

Pour extraire une composante particulière, on multiplie chaque réponse par une fonction de référence. On définit la quantité :

$$\Sigma_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(t) \times \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi),$$

où il est important de noter que  $\varphi_i$  est une phase variable d'une séquence à l'autre, tandis que  $\varphi$  est une phase fixe.

Regardons ce que donne  $\Sigma(t)$  pour un signal purement sinusoïdal :  $f_i(t) = A \cos(\omega t + \varphi'_i)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \Sigma_N(t) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A \cos(\omega t + \varphi'_i) \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N A \cos(2\omega t + \varphi'_i + \varphi_i + \varphi) + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N A \cos(\varphi'_i - \varphi_i - \varphi). \end{aligned}$$

La partie oscillante de  $\Sigma_N(t)$  ne nous intéresse pas. On peut l'éliminer en effectuant un lissage de la fonction avec un temps caractéristique  $\pi/\omega$ . La partie qui nous concerne se résume alors à

$$\Sigma_N(t) = \frac{A}{2N} \sum_{i=1}^N \cos(\varphi'_i - \varphi_i - \varphi) \begin{cases} = \frac{A}{2} \cos(\varphi) & \text{si } \varphi'_i = \varphi_i \\ \rightarrow 0 & \text{si } \varphi'_i \neq \varphi_i \end{cases}, \quad (5.15)$$

où, par  $\varphi'_i \neq \varphi_i$ , on entend que les deux phases sont non seulement différentes mais également que leur différence est aléatoire d'une séquence à l'autre. Dans ce cas, on voit en effet que l'on somme des termes aléatoirement compris entre  $-1$  et  $+1$ ; et  $\Sigma_N(t)$  tend vers 0. Par contre, si

l’accord de phase est bon, on obtient la moitié de l’amplitude de la composante (en prenant  $\varphi = 0$ ).

$\Sigma_N(t)$  permet donc d’extraire l’enveloppe de la composante qui nous intéresse. Pour extraire la composante retournée, on prendra  $\varphi_i = \varphi_{2i} - \varphi_{1i}$  (la partie de la phase en  $2(\omega - \omega_0)\tau - \frac{\pi}{2}$  étant constante, on peut l’absorber en réglant correctement  $\varphi$ ). Si on ne veut que la composante excitée par la première impulsion, on prendra  $\varphi_i = \varphi_{1i}$ . Toutes les autres combinaisons linéaires des phases des deux impulsions sont possibles, mais elles ne donnent a priori pas toutes lieu à un signal. Remarquons que, à moins d’avoir  $\varphi'_i = -\varphi_i - \varphi$ , la partie oscillante de  $\Sigma_N(t)$  tendra elle aussi vers 0. Le lissage n’est donc pas indispensable.

### Efficacité de la méthode

Essayons d’évaluer l’efficacité avec laquelle cette méthode nous permet de séparer les composantes. On va commencer par supposer que, pour une composante ne portant pas la bonne phase, la somme que l’on effectue consiste en une somme de  $+1$  ou de  $-1$ . On a alors une situation de mouvement brownien à une dimension. Sur  $N$  pas, le nombre de réalisations faisant  $n^+$  pas sur la droite ( $+1$ ) est  $C_N^{n^+}$ . Et dans ce cas, on s’est déplacé de  $n = n^+ - n^- = 2n^+ - N$  pas. Le nombre de réalisations aboutissant à un déplacement de  $n$  s’écrit donc :

$$\mathcal{N}(n) = \frac{N!}{\left(\frac{N+n}{2}\right)! \left(\frac{N-n}{2}\right)!}$$

En utilisant la formule de Stirling ( $N! \simeq \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$ ) et en supposant que  $n \ll N$ , on obtient une probabilité de s’être déplacé de  $n$ , après  $N$  pas, de :

$$\mathcal{P}(n, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left(-\frac{n^2}{2N}\right).$$

Si  $N$  est suffisamment grand, on peut considérer que notre somme de  $\cos(\varphi_i - \varphi'_i)$  est, lorsque les deux phases sont indépendantes, un mouvement brownien avec un pas de  $1/2$ . On obtient alors de la même façon une répartition gaussienne des valeurs possibles de la somme. On montre que l’on a une probabilité de 0,95 d’avoir un  $\Sigma_N(t)$  inférieur, en valeur absolue, à  $\frac{A}{\sqrt{N}}$ . Cela signifie que pour  $10^4$  séquences, les composantes que l’on veut écarter sont réduites d’un facteur 100. On voit que la méthode n’est pas très rapide : pour espérer obtenir un facteur 1000 de réduction, il faut 1 million de séquences. Pour nos expériences, la durée d’une séquence est de l’ordre de 50 ms. Cela impliquerait donc une expérience de 14 heures, ce qui est trop long pour espérer garder une bulle stable durant toute l’acquisition.

### Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est en grande partie le même que précédemment : on utilise un haut-parleur sous-marin et un hydrophone, et la bulle est bloquée sous un filet. Par contre, l’application de la méthode de détection impose une analyse du signal plus conséquente. La création des signaux d’excitation et l’enregistrement de la réponse de la bulle sont effectués grâce à une carte d’acquisition PCI4451 (National Instrument), pilotée par un programme que l’on a développé sous LabView.

Le programme permet de choisir les paramètres des séquences d'impulsions : pulsation, largeurs, hauteurs et phases des impulsions, temps séparant les impulsions, temps de répétition de la séquence. L'aspect primordial est que les phases  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  des deux impulsions sont modifiées aléatoirement à chaque séquence. Ces phases sont enregistrées dans un fichier qui permet, une fois l'acquisition terminée, de reconstruire les signaux de référence. Bien sûr, on pourrait imaginer une procédure de calcul en temps réel ; mais cela nécessiterait un temps de répétition suffisamment long pour laisser à l'ordinateur le temps d'effectuer les calculs. Le nombre de séquences nécessaires étant élevé, on ne peut se permettre d'avoir un temps de répétition si long.

D'autre part, le programme gère l'acquisition de la réponse de la bulle. Le temps de déclenchement et la durée d'acquisition sont réglables. L'enregistrement de chaque séquence est effectué dans un fichier.

Un autre programme, toujours développé sous LabView, permet ensuite d'analyser la série de séquences. Il s'agit de construire la fonction  $\Sigma_N(t)$  exposée précédemment. On peut régler trois paramètres, qui correspondent aux caractéristiques de la fonction de référence : la pulsation  $\omega$ , la phase variable  $\varphi_i$  et la phase constante  $\varphi$ .

- $\omega$  doit être choisie la plus proche possible de la pulsation de résonance de la bulle ; cela fait l'objet d'une mesure indépendante préliminaire ;
- $\varphi_i$  est une combinaison linéaire de  $\varphi_{1i}$  et  $\varphi_{2i}$ , fonction de la composante du signal que l'on cherche à extraire ;
- $\varphi$  peut être réglée entre  $-180^\circ$  et  $180^\circ$  ; elle permet de maximiser le signal en absorbant une éventuelle phase constante (on verra qu'elle peut également permettre de discriminer deux réponses différentes).

En outre, le programme d'analyse permet de lisser la courbe obtenue, en remplaçant la valeur calculée au temps  $t$  par la moyenne du signal sur une fenêtre d'une largeur de quelques périodes, centrée autour de  $t$ .

### Exemple d'application

Avant d'aborder les expériences mettant en évidence le retournement d'une bulle, donnons une illustration de l'utilisation de la méthode d'homodynage. La figure 5.5 présente le résultat brut d'une acquisition (a) et deux analyses faites à partir de cette mesure (b et c). L'expérience a consisté à exciter une bulle à résonance (période de 0,64 ms), avec deux impulsions carrées de largeur 5 ms, séparées par un temps  $\tau$  de 10 ms. On a donc excité la bulle une première fois avec l'impulsion 1 ; puis on l'a laissée osciller librement avant de l'exciter de nouveau avec une deuxième impulsion. Bien sûr, les deux impulsions ont des phases  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  indépendantes. Le résultat brut de l'acquisition (figure 5.5a) est donc la superposition de la surpression engendrée par la bulle et des deux impulsions. La figure 5.5b donne le résultat d'une analyse avec un signal de référence portant la phase  $\varphi_1$ . On constate que, comme espéré, seule la première partie du signal subsiste : toute trace de l'existence de la seconde impulsion a disparu. On peut même aller plus loin puisque le réglage de la phase constante  $\varphi$  permet de faire apparaître soit le signal dû au haut-parleur (*i.e.* la première impulsion), soit le signal dû à la bulle. Cela

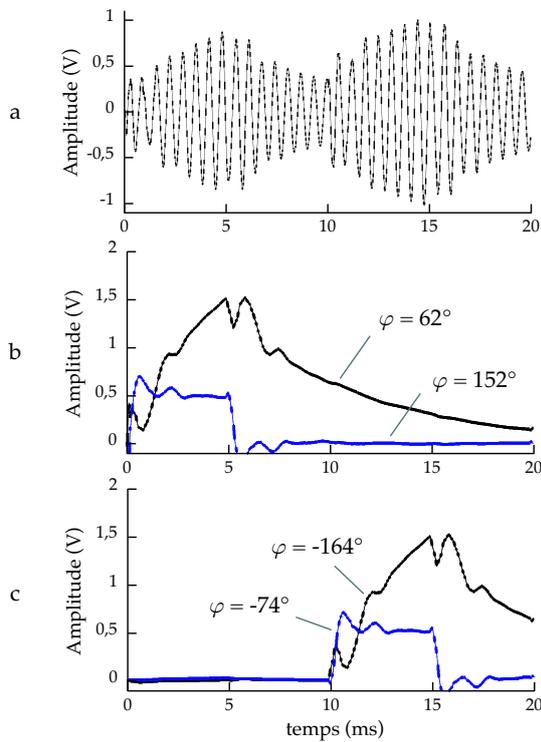


FIG. 5.5 – Un exemple d’application de la méthode d’homodynage avec référence de phase. On soumet la bulle à deux impulsions résonnantes de durée 5 ms, avec  $\tau = 10$  ms. **a-** Le résultat brut d’une mesure de la réponse de la bulle, pour une séquence. On observe la superposition des impulsions générées par le haut-parleur et les réponses de la bulle. **b-** L’application de la méthode d’analyse avec une référence de phase réglée sur celle de la première impulsion permet d’extraire le signal dû à la seule impulsion 1. En outre, on parvient à différencier la réponse de la bulle du signal direct du haut-parleur en jouant sur le fait qu’une bulle excitée à résonance répond en quadrature de phase par rapport à l’excitation. **c-** On peut réaliser la même analyse avec cette fois la phase de l’impulsion 2 comme référence.

est possible parce que, à résonance, la bulle répond avec un déphasage de  $-\pi/2$  par rapport à l’excitation. La figure 5.5c donne le résultat des mêmes opérations avec pour référence la phase de la deuxième impulsion.

### Expériences de retournement

La méthode de détection étant en place, on peut mettre en évidence le phénomène de retournement. Le choix de la bulle à utiliser s’avère important. On a vu en effet que l’accord entre la pulsation  $\omega$  de l’excitation et la pulsation propre  $\omega_0$  de la bulle devait être suffisamment bon pour que la durée de la deuxième impulsion ( $\Delta t_2$ ) puisse être longue (d’après (5.14), le rapport entre la composante retournée et la composante principale étant proportionnel à  $\Delta t_2$ ). Or la carte d’acquisition PCI4451 possède un taux de rafraîchissement (“update rate”) de 51,2 kS/s. La base de temps du signal de sortie que l’on peut générer est donc de 0,02 ms. Pour que les impulsions à  $\omega$  et à  $2\omega$  soient donc bien résonnantes, il faut choisir une bulle dont la période de résonance soit un multiple de 0,04 ms.<sup>7</sup> En pratique, on crée une bulle sous le filet puis on mesure sa période de résonance. Si nécessaire, on ajuste alors sa taille (en injectant ou pompant de l’air) pour s’approcher d’une valeur de la période multiple de 0,04 ms. Au cours des expériences avec une même bulle, il faut régulièrement s’assurer que sa fréquence

<sup>7</sup>Un multiple de 0,02 ne suffit pas : une bulle de période 0,82 ms, par exemple, nécessite une seconde impulsion avec une période de 0,41 ms, valeur qui n’est pas accessible avec la carte d’acquisition.

de résonance n'a pas trop changé : une bulle piégée sous le filet reste stable pendant plusieurs heures, mais lorsqu'on lui impose des surpressions relativement fortes, elle a tendance à voir son rayon diminuer.

Une autre contrainte pour espérer observer le retournement est d'avoir une amplitude de surpression de la seconde impulsion suffisamment grande. La formule (5.14) nous apprend en effet que le rapport entre la composante retournée et la composante principale sera de l'ordre du rapport entre la surpression  $P_2$  et la pression atmosphérique  $P_0$ . En théorie, notre méthode de détection nous permet d'extraire un signal aussi petit que l'on veut, pourvu que le nombre  $N$  de séquences soit suffisant. Mais dans la pratique, une bulle ne reste pas stable un temps infini et on se limite à un nombre maximal de séquence de l'ordre de  $10^4$ . Comme l'efficacité de la méthode de détection est en  $\sqrt{N}$ , il nous faut être en mesure d'imposer des surpressions de l'ordre du centième de la pression atmosphérique. Pour remplir cette condition, le choix de la taille de bulle intervient à nouveau. On parvient en effet à atteindre des surpressions de l'ordre de 1000 Pa pour des fréquences correspondant à des résonances de l'aquarium. Il faut donc choisir une bulle telle que l'impulsion à  $2\omega$  corresponde à une résonance de l'aquarium.<sup>8</sup>

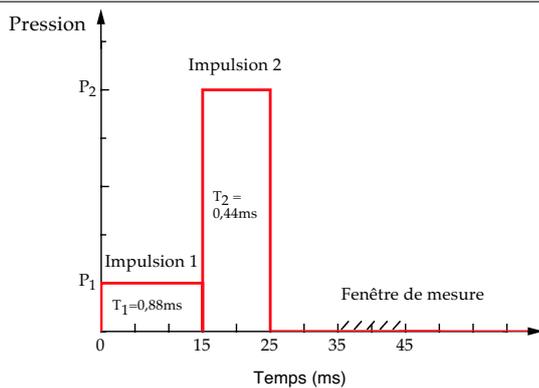


FIG. 5.6 – *Un exemple de séquence d'impulsions. L'impulsion 2 suit immédiatement la première. On enregistre la réponse de la bulle sur une fenêtre de 10 ms qui commence 10 ms après la fin de la deuxième impulsion.*

Donnons maintenant un exemple d'expérience. La figure 5.6 indique les paramètres choisis pour la séquence. On a une bulle avec une période de 0,882 ms. On règle donc les périodes des deux impulsions respectivement à 0,88 ms et 0,44 ms. Une mesure de la surpression engendrée par la seconde impulsion au niveau de la bulle indique qu'on atteint une valeur de  $P_2 \simeq 1200$  Pa. Remarquons que l'on a choisi de réaliser les deux impulsions à la suite ( $\tau = \Delta t_1$ ). Cela permet de construire une composante retournée à partir d'un signal encore fort. Pour chaque séquence, on enregistre le signal généré par la bulle entre 35 et 45 ms. L'acquisition ne débute donc que 10 ms après la fin de la deuxième impulsion. Ce délai est nécessaire parce que l'impulsion 2, étant de forte amplitude, ne s'éteint pas instantanément et est suivie d'une "queue" bruitée. La figure 5.7a présente le résultat brut d'une mesure pour une séquence. On effectue une série de 3000 séquences. Ces séquences sont analysées dans un premier temps en s'intéressant à la composante principale. La courbe en trait plein de la

<sup>8</sup>Les résonances de l'aquarium constituent un réel problème pour ces expériences. Pour des raisons que nous n'avons pas pu identifier, les fréquences de résonance de l'aquarium se sont révélées très fluctuantes. Ces fluctuations n'interviennent pas sur une même série d'expériences ; mais d'une journée à l'autre par exemple, on peut observer des différences très importantes.

figure 5.7b correspond à l’enveloppe de la décroissance de la composante principale de la bulle (l’échelle étant logarithmique, la décroissance exponentielle apparaît linéaire). Cette enveloppe est obtenue en réglant  $\varphi_i = \varphi_{1i}$  lors de l’analyse. On cherche alors la phase constante  $\varphi$  qui rend l’enveloppe maximale.<sup>9</sup> Sur la même figure, on a tracé en pointillés la limite des résultats ayant une signification physique. Elle est obtenue en prenant l’enveloppe de la composante principale et en la divisant par la racine carré de  $N$ . Les combinaisons de phase donnant un signal inférieur à cette courbe ne peuvent a priori pas être retenues comme ayant une signification physique : le signal reste en dessous de la limite de ce que notre méthode permet d’extraire. En trait hachuré, on a fait apparaître ce que donne la combinaison de phase  $\varphi_i = \varphi_{2i} - \varphi_{1i}$ . On vérifie bien que la courbe obtenue est supérieure à la limite de résolution. Il existe donc bien une

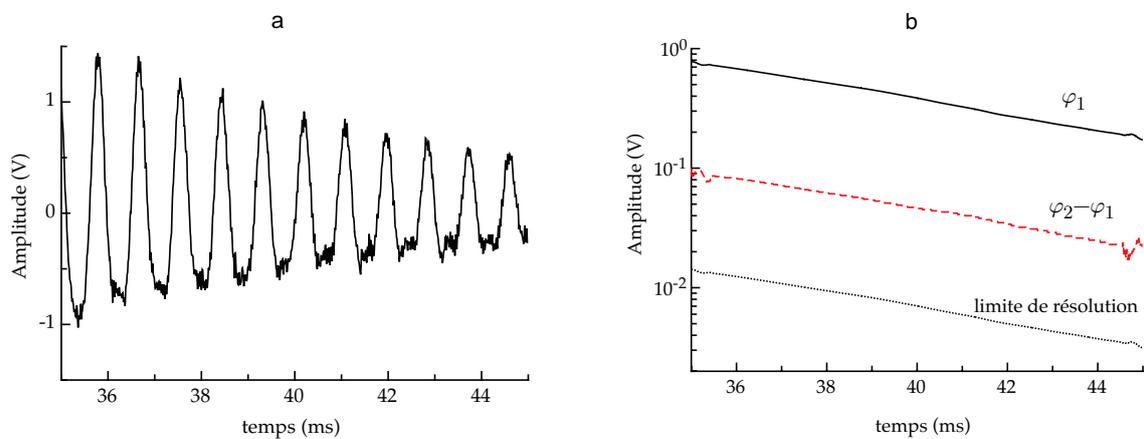


FIG. 5.7 – **a-** Un exemple de signal mesuré entre 35 et 45 ms pour une séquence d’impulsions. **b-** Le résultat de l’analyse de 3000 séquences. En trait plein, l’enveloppe de la composante principale, obtenue en fixant la phase de référence à  $\varphi_1$ . En trait hachuré, l’enveloppe de la composante retournée (pour une référence à  $\varphi_2 - \varphi_1$ ). En pointillés, la limite de résolution de notre méthode, obtenue en divisant par  $\sqrt{N}$  la composante principale. Les références de phase donnant une enveloppe inférieure à cette courbe n’ont a priori pas de signification physique.

composante retournée qui porte la phase  $\varphi_2 - \varphi_1$ . On vérifie que les autres combinaisons de phase donnent un signal en dessous de la limite de résolution. Notons toutefois qu’en prenant  $\varphi_i = \varphi_{i2}$ , on obtient un signal au dessus de cette limite : il s’agit de la composante directe que l’impulsion 2 a créée. En effet, la deuxième impulsion n’est certes pas résonnante, mais elle excite tout de même la bulle directement, et cette excitation porte la phase  $\varphi_2$ .

L’importance de la composante retournée est, d’après (5.14), proportionnelle à l’amplitude de la suppression de l’impulsion 2, ainsi qu’à la durée de cette impulsion. La figure 5.8 permet de vérifier cette dépendance. On constate un bon accord entre la théorie et l’expérience.

<sup>9</sup>Une méthode efficace pour trouver le maximum de l’enveloppe consiste à chercher la phase qui l’annule. On obtient alors la phase recherchée en ajoutant  $\pi/2$ .

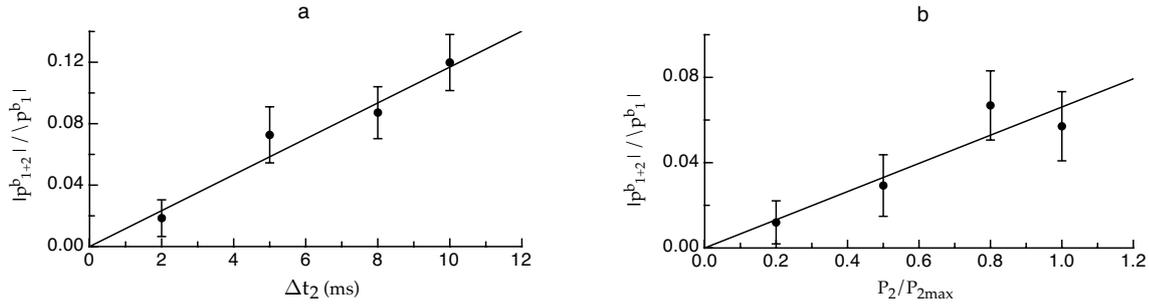


FIG. 5.8 – Tests expérimentaux de la relation (5.14). **a-** Dépendance en  $\Delta t_2$ . La régression linéaire donne une pente de  $1,2 \cdot 10^{-2} \pm 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$  alors qu'on attend une pente de  $10^{-2} \text{ ms}^{-1}$ . **b-** Dépendance en pression. La durée de la deuxième impulsion est fixe ( $\Delta t_2 = 10 \text{ ms}$ ) et on fait varier la pression  $P_2$ , avec une valeur maximale de  $P_{2max} = 780 \text{ Pa}$ . Le rapport des composantes varie bien linéairement, avec une pente de  $6,6 \cdot 10^{-2} \pm 10^{-3}$  qui correspond à la valeur théorique. Pour les deux séries de mesures, les barres d'erreur correspondent à  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  (avec  $N$  le nombre de séquences analysées), la limite de résolution de la méthode.

## 5.4 Vers les échos de bulles

On est donc parvenu à retourner une bulle. La similitude entre les figures 5.4 et 5.1 le montre bien. Même si, au lieu de retourner totalement la bulle, on se contente de créer une composante retournée, cette composante remplit les conditions pour donner lieu à un écho. Cela se traduit d'ailleurs dans l'expression de la pression engendrée. Rappelons (voir l'équation (5.13b)) que l'on a :

$$p_{1+2}^b(t) = -P_1 \frac{R_0 \omega_0 \Delta t_1}{r} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \frac{P_2 \omega_0 \Delta t_2}{3\kappa P_0} \cos(\omega_0(t - 2\tau) + \varphi_2 - \varphi_1 + 2\omega\tau).$$

Pour  $t = 2\tau$ , l'argument du cosinus se réduit à  $\varphi_2 - \varphi_1 + 2\omega\tau$ . On a donc le même argument quelle que soit la pulsation propre  $\omega_0$  de la bulle. Une assemblée de bulles de rayons différents donnera donc bien lieu à des interférences constructives pour  $t = 2\tau$ .

Pourtant, il reste un problème de taille. Dans notre description de l'effet d'écho, nous avons supposé que les coureurs, et les spins, n'interagissaient pas entre eux. Or pour les bulles, nous savons bien, pour y avoir consacré toute une partie de cette thèse, que les interactions sont loin d'être négligeables. Quand on excite une assemblée de bulles, la trajectoire de chacune dans l'espace des phases ne correspond pas du tout à celle qu'elle suivrait si elle était seule. On peut bien sûr imaginer une situation dans laquelle les bulles seraient suffisamment éloignées les unes des autres pour que l'on puisse les considérer comme quasiment indépendantes. Mais les interactions étant à longue portée, cela nécessite de se limiter à des nuages très dilués. Les premiers essais expérimentaux dans ce sens, avec 2 bulles à grande distance l'une de l'autre, ont montré que le retournement était possible mais délicat. En outre, pour peu que l'on désire avoir un grand nombre de bulles (pour avoir un écho fort), les dimensions nécessaires rendent rapidement le nuage difficilement réalisable expérimentalement. Ainsi, il manque encore une étape à notre raisonnement : il nous faut tenir compte des interactions.

Il s'agit là d'un problème que nous n'avons pas encore résolu. Mais il y a une piste prometteuse. Pour aborder la question plus simplement, intéressons nous d'abord à un système de deux bulles. On peut reprendre l'équation en variable de Glauber (5.9) en y ajoutant des termes d'interaction. On obtient alors le système suivant (toujours en limitant le hamiltonien à l'ordre 2 en  $\alpha, \alpha^*$ ) :

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= -i\omega_1\alpha_1 - i\omega_1\sqrt{\frac{I_1\omega_1}{2\hbar}}\left(1 + \sqrt{\frac{2\hbar}{I_1\omega_1}}(\alpha_1 + \alpha_1^*)\right)\frac{p_e(t)}{3\kappa P_0} - i\omega_2\frac{\beta}{2}(\alpha_2 - \alpha_2^*) \\ \dot{\alpha}_2 &= -i\omega_2\alpha_2 - i\omega_2\sqrt{\frac{I_2\omega_2}{2\hbar}}\left(1 + \sqrt{\frac{2\hbar}{I_2\omega_2}}(\alpha_2 + \alpha_2^*)\right)\frac{p_e(t)}{3\kappa P_0} - i\omega_1\frac{\beta}{2}(\alpha_1 - \alpha_1^*),\end{aligned}$$

où  $\beta = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{d}$  est le paramètre de couplage et où les indices 1 et 2 se rapportent respectivement à la bulle 1 et à la bulle 2. Remarquons que l'on a supposé que la surpression imposée  $p_e(t)$  était la même pour les deux bulles. Cela correspond à la situation que l'on a généralement expérimentalement. En ne gardant que les termes séculaires (pour une surpression imposée à  $2\omega$ ) on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix} = -i \begin{pmatrix} \omega_1 & \frac{\beta\omega_2}{2} \\ \frac{\beta\omega_1}{2} & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} - i \frac{p_e(t)}{3\kappa P_0} \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \end{bmatrix}.$$

La question est donc de savoir si, à partir de ce nouveau jeu d'équations, on peut retrouver un phénomène de retournement. À première vue, cela semble compromis. On peut diagonaliser la première matrice pour découpler partiellement les équations, retrouvant ainsi les deux modes propres du système de deux bulles. Mais le terme de retournement ne sera plus diagonal dans cette base. Toutefois, dans le cas particulier de deux bulles identiques, la matrice des termes étoilés devient proportionnelle à l'identité, et donc diagonale dans toute base. Dans ce cas, le retournement s'appliquerait sans problème. Il reste à déterminer quelle est la tolérance sur l'égalité des rayons... Mais ce constat donne de l'espoir parce qu'il se généralise à un nombre quelconque de bulles : la matrice des termes étoilés sera toujours diagonale. Si cette piste pour les échos s'avérait fructueuse, il faudrait alors non plus utiliser des nuages de bulles polydisperses mais, au contraire, des nuages monodisperses. Notons que l'on retrouverait tout de même un effet d'étalement puisque les différents modes du nuage n'auraient pas les mêmes pulsations propres.

Pour conclure ces considérations sur les échos de bulles, abordons l'aspect "applications pratiques". On peut envisager d'utiliser les échos en imagerie. Les bulles sont déjà couramment utilisées comme agents de contraste en imagerie ultrasonore. On exploite généralement leur caractère non linéaire en mesurant la réponse à  $2f$  à une excitation à  $f$ . Toutefois, ce procédé ne permet pas d'éliminer tous les effets parasites. La propagation dans les tissus, par exemple, s'accompagne également de génération d'harmonique. Une séquence d'écho pourrait permettre de sélectionner avec précision le signal dû aux seules bulles, ce dernier ayant une signature en phase bien déterminée.



# Conclusion et perspectives

Notre étude d'une ou plusieurs bulles de gaz dans un liquide nous a conduit à aborder de nombreux aspects de la physique de ce système (oscillations harmoniques, couplage, interaction avec une onde sonore, non-linéarité, excitation paramétrique), et même à étudier en profondeur des systèmes modèles (un pendule et deux pendules couplés). Essayons de dégager les éléments qui nous paraissent les plus importants. En d'autres termes : que retenir de cette étude sur les bulles d'air dans l'eau ?

D'abord, une image. Celle d'une bulle comme un oscillateur harmonique étonnant : une masse d'eau fixée à un ressort en air. Cette image traduit bien le malaise que l'on éprouve lorsque l'on cherche à déterminer précisément la frontière entre la bulle et le milieu qui l'entoure. La bulle d'air, d'un point de vue acoustique, ne se limite pas à la surface qui sépare l'air de l'eau. On a plutôt, d'après le "modèle en couches" (page 38), une frontière diffuse qui n'a pas de réalité géographique mais qui se trace par la partition du mouvement de l'eau entre une partie attachée à la bulle, et une partie procédant du rayonnement acoustique.

Le deuxième point qui nous paraît important concerne la description d'un système de  $N$  bulles comme une assemblée d'oscillateurs harmoniques couplés, les degrés de liberté associés à la compressibilité de l'eau étant négligés. Les expériences avec des nuages bidimensionnels nous ont permis de montrer la validité de ce modèle pour un large domaine de fréquences. Elles ont en outre été l'occasion de mettre en évidence le fort pouvoir d'atténuation du son d'une assemblée, même réduite, de bulles. Poussée jusqu'au cas d'un système infini, cette description d'oscillateurs harmoniques couplés nous a permis d'aborder le problème de la propagation d'une onde dans un liquide bulleux. Si la prise en compte de tous les processus de diffusion multiple n'a finalement pas été obtenue, notre approche a néanmoins permis d'aboutir à une image claire des deux branches de propagation : à basse fréquence on a propagation d'ondes de bulles, perturbées par la compressibilité de l'eau ; et à plus haute fréquence, propagation d'ondes sonores, perturbées par la présence de bulles.

Le troisième point, s'il n'a finalement pas trouvé d'application au cas de la bulle, n'en présente pas moins, à nos yeux, un bel apport conceptuel. Il s'agit de l'équivalence formelle entre un système de deux oscillateurs harmoniques couplés à quasi-dégénérescence et un spin  $1/2$  dans un champ magnétique. Cette équivalence nous a permis d'interpréter des expériences de battements et d'excitation paramétrique de deux pendules couplés en termes de précessions

respectives de Larmor et de Rabi.

Enfin, notre quête d'un effet d'écho de bulle nous a conduit à étudier l'excitation paramétrique d'une bulle. Par l'application d'un formalisme original utilisant les variables de Glauber, nous avons pu proposer un mécanisme de conjugaison de phase, mis en évidence expérimentalement, qui semble prometteur pour obtenir un effet d'échos. Un travail sur la prise en compte des interactions s'avère toutefois nécessaire. Rappelons que cet effet d'écho pourrait avoir un intérêt pratique, en imagerie médicale par exemple, dans la mesure où il permettrait de sélectionner avec efficacité la réponse des bulles.

Par ailleurs, nous avons vu au chapitre 4 (page 118), à l'occasion du bilan énergétique, que la puissance fournie par le moteur au pendule pouvait être négative, en d'autres termes que le moteur pouvait recevoir du travail de la part du pendule (configuration dite d'émission stimulée). L'équivalent de cette situation dans le cas de la bulle est le suivant : préalablement excitée (à  $\omega$ ) avec une phase *ad hoc*, la bulle est susceptible de **fournir** du travail à l'onde d'excitation paramétrique (à  $2\omega$ ), en d'autres termes d'amplifier cette onde. Nous avons là une analogie parfaite avec l'effet LASER. On peut donc envisager la possibilité de préparer un nuage de bulles dans son mode fondamental (pulsation  $\omega_0$ ) avec une phase convenablement choisie, puis d'utiliser ce liquide bulleux comme milieu actif interagissant avec une onde-sonde de pulsation  $2\omega_0$ . Si l'intensité de cette dernière est telle que la probabilité par unité de temps d'émission stimulée devient supérieure aux taux d'amortissement  $\Gamma$ , cette interaction se traduira par une **amplification** de l'onde-sonde.

# Annexes



# Annexe A

## Notations

Tab. A.1 – Notations pour les grandeurs physiques concernant la bulle.

Symbole	Dénomination	Ordre de grandeur
$R_0$	rayon	1 mm
$\xi_0$	amplitude des variations de rayon	$6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^a$
$f_0$	fréquence de résonance	3 kHz
$f_M$	fréquence de Minnaert	3 kHz
$\omega_0$	pulsation de résonance	$2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$
$\omega_M$	pulsation de Minnaert	$2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$
$K$	raideur de l'oscillateur harmonique	$5 \cdot 10^3 \text{ N/m}$
$M$	masse de l'oscillateur harmonique	$1,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$
$\Gamma$	taux d'amortissement	$700 \text{ s}^{-1}$
$\Gamma^{rad}$	taux d'amortissement radiatif	$250 \text{ s}^{-1}$
$\Gamma^{vis}$	taux d'amortissement visqueux	$0,4 \text{ s}^{-1}$
$\Gamma^{th}$	taux d'amortissement thermique	$450 \text{ s}^{-1}$
$\delta_0$	constante d'amortissement à résonance	$3,7 \cdot 10^{-2}$
$\delta_0^{rad}$	constante d'amortissement radiatif à résonance	$1,4 \cdot 10^{-2}$
$\delta_0^{vis}$	constante d'amortissement visqueux à résonance	$2 \cdot 10^{-4}$
$\delta_0^{th}$	constante d'amortissement thermique à résonance	$2,3 \cdot 10^{-2}$
$e$	aplatissement	1
$\epsilon$	amplitude relative de la surpression imposée	$10^{-4b}$

<sup>a</sup>En régime forcé à résonance, et avec la valeur de  $\epsilon$  choisie.

<sup>b</sup>Cette valeur correspond à l'ordre de grandeur pour les expériences en régime linéaire.

TAB. A.2 – Grandeurs physiques diverses.

Symbole	Dénomination	Valeur
$\rho$ ou $\rho_e$	masse volumique de l'eau	1000 kg/m <sup>3</sup> <sup>a</sup>
$\rho_a$	masse volumique de l'air	1,2 kg/m <sup>3</sup> <sup>b</sup>
$\chi_e$	compressibilité de l'eau	5.10 <sup>-10</sup> Pa <sup>-1</sup>
$\chi_a$	compressibilité de l'air	7,6.10 <sup>-6</sup> Pa <sup>-1</sup>
$c$ ou $c_e$	vitesse du son dans l'eau	1482 m/s <sup>a</sup>
$c_a$	vitesse du son dans l'air	343 m/s <sup>a</sup>
$\tilde{p}$	pression dans la bulle	
$p$	pression dans l'eau	
$D$	coefficient de diffusion thermique de l'air	$\simeq 2.10^{-5}$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
$\gamma$	rapport des capacités calorifiques à pression et à volume constant	1,4
$P_0$	pression atmosphérique	10 <sup>5</sup> Pa

<sup>a</sup>À 20°C<sup>b</sup>À 20°C et à pression atmosphérique

## Annexe B

# Bulle non sphérique

La forme que prend une bulle d'air dans l'eau est déterminée par la compétition entre la tension superficielle, qui favorise une forme à surface minimale, donc sphérique, et la gravité, qui favorise une forme aplatie. L'importance relative de deux effets peut être qualitativement déterminée en comparant la taille caractéristique  $R_0$  de la bulle à la longueur capillaire  $l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_e g}}$ .<sup>1</sup> Si  $R_0 \ll l_c$ , les effets de tension superficielle dominent. Si, au contraire,  $R_0 \gg l_c$ , la bulle prendra la forme d'une "crêpe". Dans les cas intermédiaires, les deux effets doivent être pris en compte. La longueur capillaire  $l_c$  pour l'interface air-eau vaut 2 mm. Pour les bulles de rayon millimétrique qui nous intéressent, les effets de la gravité vont donc se faire sentir : les bulles sont légèrement aplaties, comme en témoigne la photo de la figure 1.8b. Remarquons que l'aplatissement n'est pas seulement due à la présence du filet : même libres, les grosses bulles sont aplaties.

Dans notre description d'une bulle sphérique en termes d'oscillateur harmonique, on a pris comme variable dynamique sa variation de rayon  $\xi$ . On a vu que la raideur de l'oscillateur était associée à l'énergie potentielle de compressibilité du gaz, et que son inertie provenait de l'énergie cinétique du déplacement de l'eau (cf section 1.4). Pour étudier une bulle non sphérique,  $\xi$  n'est plus une bonne variable. Nous allons choisir le volume  $V$  de la bulle. On a alors une équation du type :

$$M\ddot{V} + \Gamma\dot{V} + KV = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}M\dot{V}^2 \\ E_p &= \frac{1}{2}KV^2. \end{aligned}$$

Notons qu'avec notre nouvelle variable, les termes  $M$  et  $K$  n'ont plus leur dimension usuelle ( $M$  est en  $\text{kg/m}^4$  et  $K$  en  $\text{N/m}^5$ ).

On suppose que la bulle prend la forme d'un ellipsoïde oblate avec deux axes identiques : un sphéroïde oblate. Rien n'indique qu'une bulle aplatie par la gravité doit prendre cette forme, mais le sphéroïde oblate possède la bonne géométrie cylindrique et permet d'avoir une forme

---

<sup>1</sup>La masse volumique de l'air, à strictement parler, intervient également et il faudrait remplacer  $\rho_e$  par  $\rho_e - \rho_a$ . Mais on peut négliger  $\rho_a$ .

aplatie puisque le demi-grand axe  $a$  est plus grand que le demi-petit axe  $c$  (voir figure B.1a). On définit l'aplatissement  $e = a/c \geq 1$  et le rayon  $R_0 = ce^{2/3}$  (le rayon de la bulle sphérique de même volume). La figure B.1b donne les valeurs de l'aplatissement  $e$  en fonction du rayon pour les bulles de l'expérience du chapitre 1. En excluant la plus grosse bulle, on peut avoir un ordre de grandeur de l'aplatissement en fonction du rayon avec la formule  $e \simeq 0,84 R_0 + 0,22$  avec  $R_0$  en mm.

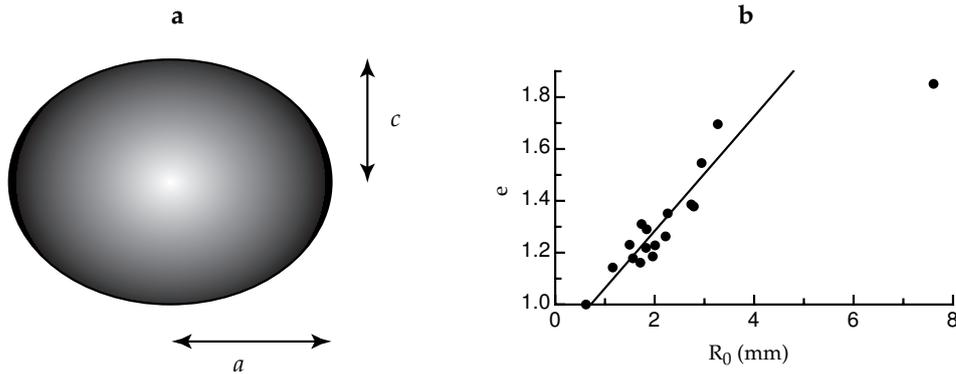


FIG. B.1 – **a-** On assimile la bulle aplatie à un sphéroïde de demi-grand axe  $a$  et de demi-petit axe  $c$ . **b-** L'aplatissement  $e$  en fonction du rayon de la bulle sphérique de même volume, pour les bulles utilisées pour vérifier la loi de Minnaert (figure 1.11a, page 33). Si on exclut la très grosse bulle, on a un comportement linéaire (droite en trait plein).

Voyons comment la raideur  $K$  et la masse  $M$  sont modifiées par l'aplatissement.

## Terme de raideur

Si on néglige les effets de tension superficielle, la raideur de la bulle est liée à la compressibilité du gaz. En invoquant, une fois encore, le fait qu'aux fréquences qui nous intéressent les longueurs d'onde acoustiques (dans l'air et dans l'eau) sont grandes devant la taille de la bulle, on s'aperçoit que les compressions et dépressions que subit la bulle sont uniformes et que, par conséquent, la géométrie précise de la bulle n'importe pas. On a d'ailleurs vu que les transformations du gaz se font suivant la loi  $PV^\kappa = \text{cst}$ , où  $\kappa$  est l'exposant polytropique, ce qui montre bien que c'est le volume de la bulle qui détermine sa raideur.

Malgré tout, on peut envisager que la forme de la bulle ait une incidence sur la raideur dans la mesure où elle peut modifier les échanges thermiques, et par conséquent changer la valeur de  $\kappa$ . On a introduit, pour les bulles sphériques, le paramètre  $R_0/l_D$ , rapport entre le rayon de la bulle et la longueur de pénétration thermique (voir page 20). On a vu que quand ce rapport est grand,  $\kappa$  se rapproche de  $\gamma$ . C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les "grosses" bulles ( $R_0 > 1$  mm) subissent des transformations quasi adiabatiques. Une généralisation de ce paramètre pour une bulle non sphérique est  $3 \frac{\text{Volume}}{\text{Surface}} \frac{1}{l_D}$ .<sup>2</sup> Un indicateur qualitatif de l'influence

<sup>2</sup>Le facteur 3 est là pour retrouver  $R_0/l_D$  dans le cas sphérique.

de l'aplatissement de la bulle sur le terme de raideur  $K$  est donc le rapport entre la surface de la bulle oblate et la surface de la bulle sphérique de volume égal.

La surface  $S$  d'un ellipsoïde oblate de révolution de demi-grand axe  $a$  et de demi-petite axe  $c = a/e$  s'écrit :

$$S = 2\pi a^2 \left( 1 + \frac{\operatorname{argsh}(\sqrt{e^2 - 1})}{e\sqrt{e^2 - 1}} \right).$$

La boule de même volume a une surface  $S_0$  qui s'écrit :

$$S_0 = 4\pi a^2 e^{-2/3}.$$

Le rapport de ces deux surfaces en fonction de l'aplatissement  $e$  est donné par la courbe de la

FIG. B.2 – Rapport des surfaces en fonction de l'aplatissement  $e$ .

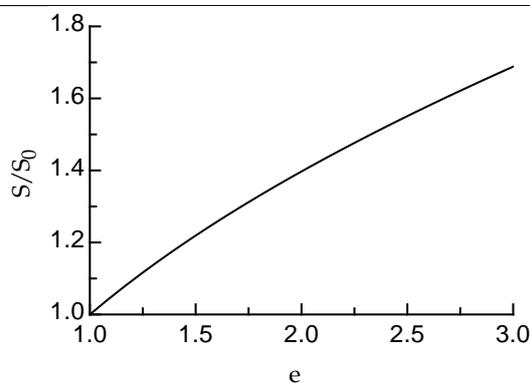


figure B.2. Pour un aplatissement de 1,3, on obtient un rapport surface/volume de l'ordre de 15% plus grand que pour la bulle sphérique de même volume. C'est une variation importante. Mais il apparaît que l'exposant polytropique  $\kappa$  varie très peu avec  $R_0/l_D$  pour des bulles de rayon millimétrique, comme l'illustre la figure 1.3 (page 22) et doit donc de même être peu sensible à des variations du rapport surface/volume. En revanche, on peut s'attendre à ce que l'aplatissement de la bulle s'accompagne d'une augmentation significative de l'amortissement thermique. Les expériences du chapitre 1 ne permettent malheureusement pas de tester cette prédiction, les mesures d'amortissement étant perturbées par la taille finie de l'aquarium.

## Terme d'inertie

On a vu que l'inertie de la bulle était déterminée par le déplacement de l'eau durant les oscillations. La nouvelle géométrie est susceptible de modifier l'allure de ce déplacement. On va considérer que la bulle oscille sans se déformer, et que le déplacement de l'eau se fait selon les lois de l'écoulement incompressible,<sup>3</sup> et ce toujours en vertu du fait que les longueurs d'onde acoustiques sont grandes. Notons  $\vec{v}(\vec{r})$  la vitesse de l'élément de fluide au point  $\vec{r}$ . On a :

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{V}^2 = \int \int \int_{eau} \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2(\vec{r}) d^3 r.$$

<sup>3</sup>Noter qu'à la différence du reste du texte de ce mémoire, les calculs de cette annexe seront conduits, pour se conformer à l'usage dominant, en variables eulériennes.

L'écoulement étant incompressible, on sait qu'il existe un potentiel des vitesses  $\Phi$  tel que  $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ . On a donc :

$$E_c = \int \int \int_{eau} \frac{1}{2} \rho \left( \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \right)^2 d^3r,$$

or  $\text{div}(\Phi \vec{\nabla}\Phi) = \Phi \text{div}(\vec{\nabla}\Phi) + \left( \vec{\nabla}\Phi \right)^2 = \left( \vec{\nabla}\Phi \right)^2$  puisque l'écoulement est incompressible. On obtient donc :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\dot{V}^2} \int \int \int_{eau} \rho \text{div} \left( \Phi \vec{\nabla}\Phi \right) d^3r \\ &= \frac{1}{\dot{V}^2} \int_{\Sigma} \rho \Phi \vec{\nabla}\Phi d\vec{S}, \end{aligned}$$

où  $\Sigma$  est la surface de la bulle (la surface "à l'infini" est de contribution nulle puisque  $\Phi \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow \infty$ ). Or la surface de la bulle est justement une équipotentielle, de potentiel  $\Phi_{bulle}$ . On a alors :

$$M = \frac{\rho \Phi_{bulle}}{\dot{V}^2} \int_{\Sigma} \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{S},$$

qui s'écrit encore :

$$M = \rho \frac{\Phi_{bulle}}{\int_{\Sigma} \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{S}}, \quad (\text{B.1})$$

puisque, par définition,  $\dot{V} = \int_{\Sigma} \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{S}$ .

L'équation (B.1) donne lieu à une analogie avec l'électrostatique que Strasberg a exploitée [Str53]. Si on calcule la capacité d'un condensateur de forme quelconque et de charge  $q$ , on a  $C = q/U_c$  où  $U$  désigne le potentiel électrostatique et  $U_c$  le potentiel du condensateur. Or, d'après le théorème de Gauss, en notant  $\Sigma_c$  la surface du condensateur, on a :

$$q = \epsilon_0 \int \int_{\Sigma_c} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\epsilon_0 \int \int_{\Sigma_c} \vec{\nabla}U \cdot d\vec{S},$$

d'où on tire que :

$$\frac{1}{C} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{U_c}{\int_{\Sigma_c} \vec{\nabla}U \cdot d\vec{S}}. \quad (\text{B.2})$$

Il apparaît en comparant les équations (B.1) et (B.2), que  $M$  est formellement analogue à  $\frac{1}{C}$ . Reste à calculer la capacité d'un condensateur sphéroïdal oblate, ou à consulter Landau ([LL60] page 39) :

$$C = -\epsilon_0 c \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{\arccos(1/e)}. \quad (\text{B.3})$$

On en déduit que

$$M = \rho \frac{\arccos(1/e)}{c\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{\rho}{R_0} \frac{e^{2/3} \arccos(1/e)}{\sqrt{e^2 - 1}}. \quad (\text{B.4})$$

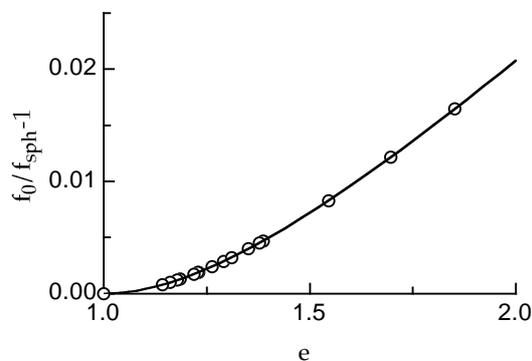
## Fréquence propre

On considère donc que la raideur de la bulle ne dépend que de son volume et que son inertie est donnée par l'équation B.4. En notant  $f_{sph}$  la fréquence de résonance de la bulle sphérique ayant le même volume, on obtient que la fréquence  $f_0$  de la bulle aplatie est alors donnée par :

$$f_0 = f_{sph} \cdot \frac{(e^2 - 1)^{1/4}}{e^{1/3} \sqrt{\arccos(1/e)}}, \quad (\text{B.5})$$

expression pour laquelle on peut vérifier qu'on retrouve bien  $f_0 \rightarrow f_{sph}$  quand  $e \rightarrow 1$ . La figure B.3 donne, en fonction de l'aplatissement  $e$ , l'erreur relative  $\frac{f_0 - f_{sph}}{f_{sph}}$  que l'on commet en assimilant la fréquence de résonance d'une bulle aplatie à celle de la bulle sphérique de même volume. On voit que pour la grande majorité des bulles des expériences du chapitre 1 (cercle

FIG. B.3 – *Différence relative théorique entre la fréquence de résonance d'une bulle aplatie et celle de la bulle sphérique de même volume, en fonction de l'aplatissement  $e$ . Les cercles correspondent aux bulles de la figure 1.11a, page 33.*



o sur la figure), la différence entre les deux fréquences est inférieure à 1%.

## Champ de pression

La raideur et l'inertie d'une bulle aplatie sont donc quasiment celles de la bulle sphérique ayant le même volume. Mais on peut se demander si le champ de pression qu'engendre une bulle palatie n'est pas pour autant différent de celui de la bulle sphérique équivalente. En particulier, on s'attend à ce que le champ de pression perde sa symétrie sphérique. Cela aurait pour conséquence que le couplage entre 2 bulles aplaties ne dépendrait plus seulement de leur distance, mais également de leur orientation.

La pression se calcule à partir du potentiel des vitesses :  $p = \rho \dot{\Phi}$ . Il faut donc déterminer  $\Phi$ , ce qui est un calcul classique : il suffit de résoudre l'équation de Poisson  $\Delta \Phi = 0$  avec les bonnes conditions aux limites. Toutefois, la géométrie ellipsoïdale rend les choses délicates. Heureusement et comme souvent, Landau a déjà traité ce problème ([LL60], page 20 et suivantes). On utilise les coordonnées ellipsoïdales. L'équation cubique en  $u$

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1 \quad (a > b > c)$$

possède trois racines réelles  $(\xi, \eta, \zeta)$  comprises dans les intervalles suivants :

$$\xi \geq -c^2, \quad -c^2 \geq \eta \geq -b^2, \quad -b^2 \geq \zeta \geq -a^2.$$

Si deux des demi-axes sont égaux, le système est dégénéré. En prenant  $a = b > c$ , on a :<sup>4</sup>

$$\frac{\rho^2}{a^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1 \quad (\text{avec } \rho^2 = x^2 + y^2),$$

qui possède 2 racines :  $\xi \geq -c^2$  et  $-c^2 \geq \eta \geq -a^2$ . Les surfaces des coordonnées  $\xi$  constant et  $\eta$  constant sont respectivement des ellipsoïdes de révolution confocaux aplatis et des hyperboloïdes de révolution à une nappe. Pour la troisième coordonnée, on peut introduire l'angle polaire  $\varphi$  dans le plan  $(x, y)$ . On a :

$$\begin{aligned} z &= \pm \sqrt{\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)}{c^2 - a^2}}, \\ \rho &= \sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)}{a^2 - c^2}}. \end{aligned}$$

Comme la bulle se déforme en gardant sa forme ellipsoïdale, on va chercher un potentiel  $\Phi$  qui ne dépende que de  $\xi$ . Le laplacien en coordonnées ellipsoïdales pour une fonction qui ne dépend que de  $\xi$  se réduit à :

$$\Delta\Phi = \frac{d}{d\xi} \left( R_\xi \frac{d\Phi}{d\xi} \right) \quad \text{avec } R_\xi = (a^2 + \xi)\sqrt{c^2 + \xi}.$$

On a donc pour solution de l'équation de Poisson :

$$\Phi(\xi) = A \int_\xi^\infty \frac{d\xi'}{R_{\xi'}},$$

où  $A$  est une constante et où on a choisi la borne supérieure pour que le potentiel s'annule à l'infini. En électrostatique, on veut que le potentiel créé par une charge totale  $q$  ait un comportement asymptotique :

$$\Phi(r) \sim_{+\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Comme  $R_\xi \sim_{+\infty} \xi^{3/2}$  et  $\xi \sim_{+\infty} r^2$ , on en déduit que  $A = \frac{q}{8\pi\epsilon_0}$ . Pour la bulle, l'équivalent de  $\frac{q}{\epsilon_0}$ , c'est  $\dot{V} = 4\pi e^2 c^2 \dot{c}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{1}{2} c^2 e^2 \dot{c} \int_\xi^\infty \frac{d\xi'}{R_{\xi'}} \\ &= \frac{1}{2} R_0^3 \dot{c} \int_\xi^\infty \frac{d\xi'}{R_{\xi'}}, \end{aligned} \tag{B.6}$$

si on note  $c(t) = c_0(1 + \epsilon(t))$ . L'équation B.6 s'intègre en :

$$\Phi = \frac{R_0^3}{\sqrt{e^1 - 1}} \frac{\dot{c}}{c} \arctan \sqrt{\frac{e^2 - 1}{1 + \xi/c^2}}.$$

Plutôt que de repasser en coordonnées cylindriques, comparons seulement l'allure de  $\Phi$  sur l'axe  $z$  et dans le plan  $z = 0$  par rapport au cas sphérique. Dans le cas d'une bulle sphérique, on a :

$$\Phi = R_0^2 \dot{c} \frac{R_0}{r}; \tag{B.7}$$

<sup>4</sup>Attention, dans ce calcul  $\xi$  et  $\rho$  n'ont pas leur signification *habituelle*.

pour une bulle d'aplatissement  $e$ , quand on se place sur l'axe verticale, à une distance  $z$  :

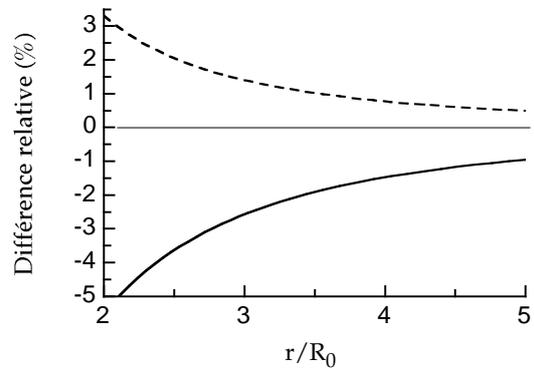
$$\Phi = R_0^2 \dot{\epsilon} \frac{e^{2/3}}{\sqrt{e^2 - 1}} \arctan \left( \frac{\sqrt{e^2 - 1} R_0}{e^{2/3} z} \right); \quad (\text{B.8})$$

et si on se place dans le plan  $z = 0$ , à une distance  $\rho$  :

$$\Phi = R_0^2 \dot{\epsilon} \frac{e^{2/3}}{\sqrt{e^2 - 1}} \arctan \left( \left( \left( \frac{\rho}{R_0} \frac{e^{2/3}}{\sqrt{e^2 - 1}} \right)^2 - 1 \right)^{-1} \right). \quad (\text{B.9})$$

On vérifie aisément que les équations B.8 et B.9 redonnent bien le même résultat que B.7 pour  $e = 1$ , et leur comportement asymptotique à l'infini est également le même. La figure B.4

FIG. B.4 – *Différence relative entre le champ de pression créé par une bulle aplatie (sur le côté, en trait discontinu, et à la verticale, en trait plein) et le champ créé par une bulle sphérique de même volume. On a pris ici un aplatissement de 1,5.*



permet d'apprécier la différence entre le champ créé sur les côtés et le champ à la verticale pour une bulle d'aplatissement  $e = 1,5$  (*i.e.* l'ordre de grandeur pour les bulles aplaties rencontrées dans le chapitre 1). On y a représenté la différence relative entre le champ à la verticale et le champ pour une bulle sphérique équivalente (trait plein) ; et entre le champ à l'horizontal et le champ pour une bulle sphérique équivalente (trait discontinu). On note que, comme attendu, le champ sur les côtés d'une bulle aplatie est plus important qu'à la verticale. Mais la différence devient très vite peu significative à mesure que l'on s'éloigne de la bulle.



## Annexe C

# Bulle sous une épaisseur

Cette annexe est une étude du rôle éventuel de l'épaissette ou du filet lors des oscillations de la bulle. Les deux cas sont très similaires et on ne parlera que de l'épaissette par la suite, les conclusions auxquelles on aboutit étant valables pour le filet également.

### Bulle à point fixe

Une première idée de modèle peut être de considérer que, puisque l'épaissette bloque la bulle, le point fixe de cette dernière au cours des oscillations n'est plus son centre mais son point d'attache.

Considérons la bulle de la figure C.1, dont le point  $F$  est fixe. On suppose que l'eau est incompressible. Le champ de pression  $p$  vérifie alors (en utilisant les coordonnées sphériques) :

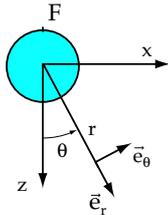


FIG. C.1 – Bulle avec son “sommets” pour point fixe.

---

$$\Delta p = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (\text{C.1})$$

Cherchons une solution sous la forme  $p(r, \theta) = f(r)g(\theta)$  ( $\varphi$  n'intervient pas étant donné la symétrie cylindrique). L'équation (C.1) devient alors :

$$\frac{r}{f} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{\sin \theta g(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Les deux termes de cette équation dépendent chacun d'une variable différente. L'annulation de leur somme impose donc qu'ils soient séparément constants; notons  $k$  cette constante. On

a alors à résoudre le système :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{k}{r^2} \right) r f &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + k \sin \theta g &= 0. \end{aligned}$$

La résolution de ce système conduit à une solution générale :

$$p(r, \theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left( A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos \theta,$$

où  $A_0, B_0, A_1$  et  $B_1$  sont des constantes à déterminer grâce aux conditions aux limites. Pour empêcher la divergence de la pression à l'infini, on impose  $A_0 = A_1 = 0$ .

En notant  $\vec{u}(\vec{r}, t) = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta$  le déplacement, on a :

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_r &= -\overrightarrow{\text{grad}} p \cdot \vec{e}_r = \frac{B_0}{r^2} + \frac{2B_1}{r^3} \cos \theta, \\ \rho \ddot{u}_\theta &= \frac{B_1}{r^3} \sin \theta. \end{aligned}$$

Les constantes  $B_0$  et  $B_1$  sont alors déterminées en exprimant la continuité du déplacement radial au niveau de la surface de la bulle. On obtient :

$$B_0 = \rho R_0^2 \ddot{\xi} \quad \text{et} \quad B_1 = \rho \frac{R_0^3}{2} \ddot{\xi}.$$

On a donc le champ de déplacement :

$$\begin{aligned} u_r &= \xi \left( \frac{R_0^2}{r^2} + \frac{R_0^3}{r^3} \cos \theta \right), \\ u_\theta &= \xi \frac{R_0^3}{2r^3} \sin \theta; \end{aligned} \tag{C.2}$$

ce qui donne bien un point  $F$  ( $r = R_0, \theta = \pi$ ) fixe. On peut maintenant calculer la nouvelle énergie cinétique liée au déplacement de l'eau pour la bulle. On trouve :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int d^3 r \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} M' \dot{\xi}^2,$$

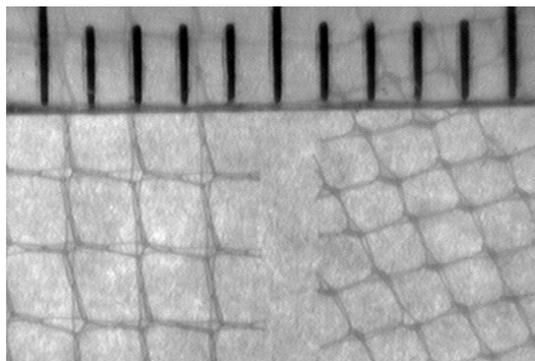
avec  $M' = \frac{7}{6} M$ . L'énergie potentielle associée à la compressibilité du gaz est, elle, inchangée. Une bulle dont le point fixe est le sommet, et non plus le centre, voit donc sa fréquence de résonance multiplié par un facteur  $\sqrt{6/7}$ . Les expériences du chapitre 1 montrent que ce modèle à point fixe ne rend pas bien compte de l'effet de l'épaissette.

## Raideur de l'épaissette

Un modèle plus fin consiste à inclure, dans le lagrangien du système, les termes d'énergie de l'épaissette. Étant donné sa faible masse et sa structure très ajourée, la contribution de l'épaissette à l'énergie cinétique est négligeable. D'autre part, les variations du rayon de la bulle entraînent une déformation de l'épaissette, à laquelle est associé un terme d'énergie potentielle.

On peut modéliser l'épuisette comme une demi-sphère de rayon  $R = 1$  cm composée de  $N$  fils de nylon de rayon  $r$ . La raideur de l'épuisette est alors  $N$  fois la raideur d'un fil :  $K_{epui} = N \frac{E\pi r^2}{\pi R}$ , où  $E = 2 \cdot 10^9$  Pa est le module d'Young du nylon. La figure C.2 montre les deux types de dentelle utilisés pour la construction des épuisettes. Pour un seul fil de 0,1 mm de rayon, on a  $K_{fil} = \frac{E\pi r^2}{\pi R} \simeq 1$  kN/m. Ce résultat est à comparer aux 5 kN/m de la raideur associée à la compressibilité du gaz. On voit que le rôle du fil dans ce modèle est loin d'être négligeable, surtout que le nombre de fils est de l'ordre de plusieurs dizaines.

FIG. C.2 – Les deux types de dentelles utilisées. On note  $l_m$  la longueur d'une maille et  $\varnothing$  le diamètre du fil. À gauche :  $l_m \simeq 1,5$  mm et  $\varnothing \simeq 0,2$  mm. À droite :  $l_m \simeq 1$  mm et  $\varnothing \simeq 0,15$  mm.



En réalité, une expérience simple permet d'invalider le modèle précédent. On a réalisé une mesure de la raideur de l'épuisette avec le dispositif suivant. L'épuisette est maintenue "à l'envers" par une pince et on suspend un fil de fer (de masse 960 mg) à une maille du bas. Ce fil de fer permet de repérer la position de la maille : il est muni d'un marqueur et filmé par une caméra. On mesure alors le déplacement du marqueur lorsqu'on ajoute de petites masses dans l'épuisette. On a reporté sur la figure C.3 le déplacement  $\Delta z$  observé en fonction de la force  $F$  qu'on applique. On trouve une droite de pente 16 N/m, soit une raideur de l'ordre de 1000 fois plus faible que celle du modèle. En fait, l'expérience montre que c'est la structure de l'épuisette

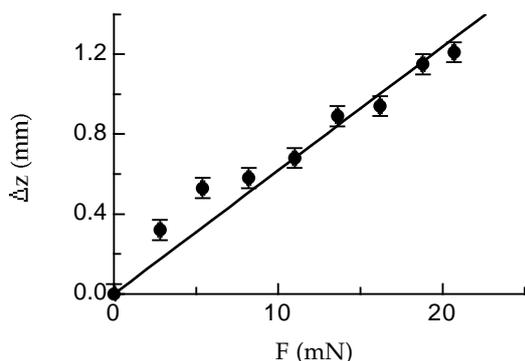


FIG. C.3 – Mesure de la raideur de l'épuisette. La régression linéaire donne une droite de pente  $6,2 \cdot 10^{-2}$  m/N, soit une raideur de 16 N/m.

qui se déforme, et non les fils de nylon qui s'étirent. Pour des valeurs plus importantes de  $F$  on entrerait sans doute dans un domaine de déformation des fils, avec une raideur plus forte. Mais pour une bulle de 1 mm retenue par l'épuisette, la force d'Archimède est de l'ordre de  $40 \mu\text{N}$ . On est donc bien dans le domaine peu raide et on peut négliger le rôle de l'épuisette.



## Annexe D

# Bulle en milieu fini

Le calcul de la fréquence de Minnaert suppose que la bulle se trouve dans un milieu infini. Cette annexe propose de regarder dans quelle mesure la dimension finie de l'aquarium dans lequel nous avons fait nos expériences peut modifier le résultat du calcul.

Bien que l'aquarium soit rectangulaire, nous regarderons le cas d'une cuve sphérique, afin de rendre les calculs plus aisés. On abordera ensuite le cas d'une cuve cubique, en appliquant la méthode des images, pour montrer que le résultat est similaire.

## Bulle dans une cuve sphérique

Considérons une bulle de rayon  $R_0$ , placée au centre d'une cuve sphérique de rayon  $R_1$ , remplie d'eau. On peut reprendre le même calcul que dans la section 1.1, mais en imposant cette fois des conditions aux limites différentes. On recherche la pression  $p(r, t)$  créée par les oscillations  $\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega t}$  de la bulle sous la forme :

$$p(r, t) = \frac{A}{r} e^{i\omega(t - \frac{r}{c})} + \frac{B}{r} e^{i\omega(t + \frac{r}{c})}.$$

Le déplacement radial  $u(r, t)$  vérifie alors :

$$\rho \ddot{u}(r, t) = A \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{rc} \right) e^{i\omega(t - \frac{r}{c})} + B \left( \frac{1}{r^2} - \frac{i\omega}{rc} \right) e^{i\omega(t + \frac{r}{c})}.$$

Considérons deux cas particuliers : une cuve à paroi parfaitement rigide et une cuve à paroi parfaitement molle.

## Paroi rigide

Pour une sphère rigide, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\xi} &= A \left( \frac{1}{R_0^2} + \frac{i\omega}{R_0 c} \right) e^{i\omega(t - \frac{R_0}{c})} + B \left( \frac{1}{R_0^2} - \frac{i\omega}{R_0 c} \right) e^{i\omega(t + \frac{R_0}{c})}, \\ 0 &= A \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{i\omega}{R_1 c} \right) e^{i\omega(t - \frac{R_1}{c})} + B \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{i\omega}{R_1 c} \right) e^{i\omega(t + \frac{R_1}{c})}. \end{aligned}$$

Tous calculs faits, on obtient une pression  $p(r, t)$  qui s'écrit :

$$p(r, t) = -\rho \frac{R_0^2}{r} \omega^2 \xi_0 e^{i\omega t} \frac{\sin\left(\omega \frac{R_1-r}{c}\right) - \frac{\omega R_1}{c} \cos\left(\omega \frac{R_1-r}{c}\right)}{\left(1 + \frac{\omega R_0}{c} \frac{\omega R_1}{c}\right) \sin\left(\omega \frac{R_1-R_0}{c}\right) + \omega \frac{R_0-R_1}{c} \cos\left(\omega \frac{R_1-R_0}{c}\right)}.$$

Concernant la pression dans la bulle, on considère toujours que les transformations du gaz sont adiabatiques et on obtient :

$$\tilde{p}(t) = -\frac{3\gamma\tilde{P}_0}{R_0} \xi_0 e^{i\omega t}.$$

En négligeant la tension de surface, la continuité de la pression à la surface de la bulle s'écrit donc :

$$\tilde{p}(t) = p(R_0, t) \implies [x_0^2 - x^2 F(x)] \xi_0 = 0,$$

$$\text{avec } F(x) = \frac{\sin(x(n-1)) - nx \cos(x(n-1))}{(1+nx^2) \sin(x(n-1)) - x(n-1) \cos(x(n-1))},$$

et où on a introduit les notations  $x = \frac{\omega R_0}{c}$ ,  $x_0 = \frac{\omega_0 R_0}{c}$  et  $n = \frac{R_1}{R_0}$ .

On a donc une résonance du système quand la fonction  $x_0^2 - x^2 F(x)$  s'annule. La figure D.1a présente l'exemple de cette fonction pour  $n = 40$  (*i.e.* une cuve d'un rayon 40 fois plus grand que le rayon de la bulle). Les résonances sont nombreuses, comme on s'y attend pour une cuve de dimension finie. Mais il en existe une particulière : la première (pas très visible sur la figure). Notons  $x'_0$  la position de cette résonance. La figure D.1b montre l'évolution de  $x'_0$  en fonction de  $n$  en présentant son écart relatif à la valeur en milieu infini ( $x_0$ ). On constate que la bulle en milieu confiné voit sa fréquence de résonance significativement augmentée.

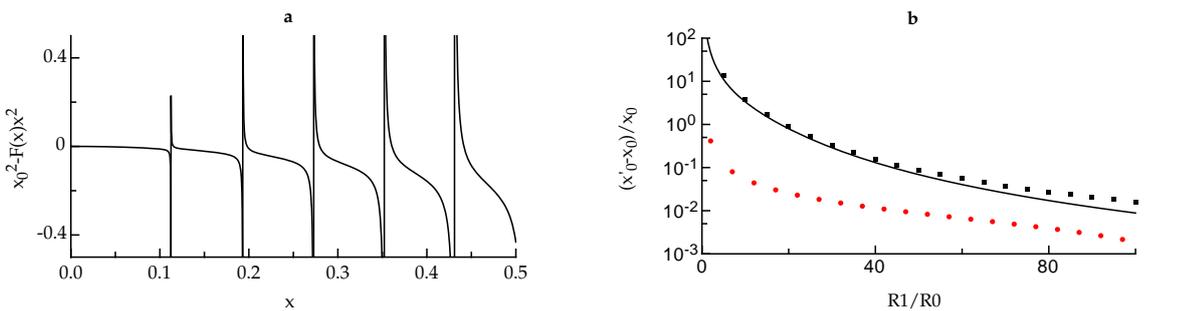


FIG. D.1 – **a-** La fonction  $x_0^2 - x^2 F(x)$  pour  $n = 40$ . Les passages de la courbe par 0 correspondent à une résonance du système. **b-** On détermine l'écart relatif entre la pulsation de la première résonance et la pulsation de Minnaert, pour différentes valeurs de  $n$ , dans le cas d'une cavité sphérique rigide (carrés) et molle (ronds). On trace également en trait plein le résultat obtenu à partir de la méthode des images pour une cavité cubique rigide de même volume que la cuve sphérique rigide.

## Paroi molle

Pour une sphère avec une paroi molle, il suffit d'imposer une condition de surpression nulle en  $r = R_0$ . Les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\rho\ddot{\xi} &= A\left(\frac{1}{R_0^2} + \frac{i\omega}{R_0c}\right)e^{i\omega(t-\frac{R_0}{c})} + B\left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{i\omega}{R_0c}\right)e^{i\omega(t+\frac{R_0}{c})}, \\ 0 &= Ae^{i\omega(t-\frac{R_1}{c})} + Be^{i\omega(t+\frac{R_1}{c})}.\end{aligned}$$

On obtient alors une pression  $p(r, t)$  :

$$p(r, t) = -\rho\frac{R_0^2}{r}\omega^2\xi_0e^{i\omega t}\frac{\sin\left(\omega\frac{R_1-r}{c}\right)}{\sin\left(\omega\frac{R_1-R_0}{c}\right) + \frac{\omega R_0}{c}\cos\left(\omega\frac{R_1-R_0}{c}\right)}.$$

Cette fois, on trouve les résonances du système en annulant la fonction  $x_0^2 - x^2F'(x)$ , avec :

$$F'(x) = \frac{1}{1 + x\cotan(x(n-1))}.$$

La figure D.1b comprend également l'évolution de la position de la première résonance en fonction de la taille de la cavité. Dans le cas d'une surface molle, on constate que l'effet est beaucoup moins fort : pour un rapport de 40, la fréquence de résonance de la bulle n'est augmentée que de 1 pourcent. Dans le cas des expériences du chapitre 1, si on assimile grossièrement notre aquarium à une sphère de rayon  $R_1 = 15$  cm avec des parois molles, on obtient un rapport de l'ordre de 150. Dans ces conditions, on s'attend à un effet négligeable de la part des parois.

Remarquons cependant que pour les expériences comportant plusieurs bulles, nous sommes amenés à considérer l'effet de la surface de l'aquarium (du moins pour les modes symétriques), mais pas des autres surfaces. On justifie qualitativement ce fait en remarquant que si la fréquence de résonance d'une bulle approchée de la surface de l'eau traduit bien un effet d'image, il n'en est pas de même lorsqu'on approche une bulle d'une des parois de l'aquarium. Dans ce dernier cas, la fréquence est très peu modifiée, ce qui nous conduit à négliger les effets des parois.

## Bulle dans une cuve rectangulaire

On peut calculer la fréquence de résonance d'une bulle placée au centre d'une cuve cubique (d'arête  $d$ ) en utilisant la méthode des images. Pour des surfaces parfaitement rigides, la bulle se trouve au milieu d'un réseau infini d'image oscillant en phase avec elle. Une première constatation s'impose : si on considère que l'eau est incompressible, l'ensemble de ces images vont engendrer une surpression infinie au niveau de la bulle ; et la fréquence de résonance sera par conséquent nulle. Cela n'est pas surprenant : ni l'eau ni les parois ne pouvant être comprimées, la bulle ne peut pas osciller. Cette situation est à rapprocher du fait que la relation de dispersion de bulles en eau incompressible (voir la figure 3.13 page 90) donne une pulsation nulle pour un nombre d'onde nul.

Si l'eau est compressible, en revanche, la méthode des images aboutit à une fréquence non nulle. Le calcul de la contribution de toutes les images correspond au calcul sur la relation de

dispersion en milieu cristallin (page 91 et suivantes), avec un nombre d'onde nulle.<sup>1</sup> On trouve alors :

$$x'_0 = \sqrt{x_0 + 4\pi \left(\frac{R_0}{d}\right)^3}.$$

Bien que les deux géométries soient différentes, on peut essayer de comparer le cas de la cuve rectangulaire à celui de la cuve sphérique. On choisit une relation entre l'arête du cube et le rayon de la boule de façon à avoir le même volume. La relation s'écrit alors, en fonction de  $n$  :

$$x'_0 = \sqrt{x_0 + 3n^{-3}}.$$

On a reporté cette fonction sur la figure D.1. On retrouve bien le comportement de la sphère à paroi rigide.

---

<sup>1</sup>Il s'agit donc de la pulsation pour laquelle, dans le calcul de la relation de dispersion, on sort du régime de forte atténuation.

## Annexe E

# Appendices de l'article «Using Glauber Variables II »

### Appendix 1 : Adding visous damping

Except in subsection (4.3.1), dissipation has been deliberately neglected in the text of this paper. The aim of this appendix is to take account of a weak viscous damping and complete in consequence several dissipation-free equations established in the course of our study of the HO2.

We begin with the damped HO2 in the general case adressed in section 4.3.2.

Let us, then, include viscous friction in our description of the two-pendulum system, the motion of which is therefore ruled by equations (4.82), namely  $\ddot{q} + \gamma\dot{q} + B^2q = 0$ , where  $\gamma = (\gamma_{kk'})$  ( $k, k' = 1, 2$ ) is the dissipation matrix. We can all the same use the Glauber variables  $\alpha_k$  and determine the damping terms which, added to the hamiltonian evolution equations (4.95), provide the full time-evolution of the system. All calculations carried out, we get, with no *a priori* possible simplification :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}\right)_{\text{dissipation}} &= -\frac{1}{2} \left[ \gamma_{11}(\alpha_1 - \alpha_1^*) + \gamma_{12}\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}(\alpha_2 - \alpha_2^*) \right], \\ \left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}\right)_{\text{dissipation}} &= -\frac{1}{2} \left[ \gamma_{22}(\alpha_2 - \alpha_2^*) + \gamma_{12}\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}(\alpha_1 - \alpha_1^*) \right]. \end{aligned} \tag{E1.1}$$

It is noteworthy that, unless matrices  $B^2$  and  $\gamma$  commute (and then be *simultaneously* diagonalizable), equations (4.82) cannot be thoroughly uncoupled. If friction is *weak*, a reasonable partial uncoupling is performed by making the *same* linear variables change (4.86b) (*i.e.*  $q = P_e\varphi$ , with  $P_e$  given by equation (4.89b)). Equations (4.82) are then turned into :

$$\ddot{\varphi} + f\dot{\varphi} + \Omega^2\varphi = 0, \tag{E1.2a}$$

with

$$f = P_e^{-1}\gamma P_e = \begin{pmatrix} f_{++} & f_{+-} \\ f_{+-} & f_{--} \end{pmatrix}. \tag{E1.2b}$$

Since matrix  $f$  is non diagonal ( $f_{+-} \neq 0$ ), equations (E1.2a) are still coupled, but only through viscous friction, which also reads, using the eigenmodes Glauber variables :

$$\begin{aligned} (\dot{\alpha}_+) &= -i\omega_+\alpha_+ - \frac{1}{2} \left[ f_{++}(\alpha_+ - \alpha_+^*) + f_{+-}\sqrt{\frac{\omega_-}{\omega_+}}(\alpha_- - \alpha_-^*) \right], \\ (\dot{\alpha}_-) &= -i\omega_-\alpha_- - \frac{1}{2} \left[ f_{--}(\alpha_- - \alpha_-^*) + f_{+-}\sqrt{\frac{\omega_+}{\omega_-}}(\alpha_+ - \alpha_+^*) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E1.2c})$$

Setting up a perturbative resolution of above equations (E1.2c) (namely setting  $\alpha_{\pm}(t) = A_{\pm}(t)e^{-i\omega_{\pm}t}$  with  $A_{\pm}$  slowly varying) it is easy to show that the starred terms in the right-hand side bring no secular contribution to the time-evolution of  $\alpha_{\pm}$ , and consequently can be neglected, provided that  $f_{++} \ll \omega_+$ ,  $f_{--} \ll \omega_-$  and  $f_{+-} \ll \sqrt{\omega_+\omega_-}$ . However, even with these conditions fulfilled, equations (E1.2c) are still coupled. We shall come back to this point below.

It is difficult to take viscous friction and parametric excitation simultaneously into account since equations (4.82) (and *a fortiori* (E1.2a)) are then no longer available : due to length modulation, definition (4.81a) of dynamical variables  $q_k$  becomes time-dependent (see *e.g.* (4.102a)), as well as dissipation matrices  $\gamma$  and *a fortiori*  $f$ . Nevertheless, if this length modulation is *small*, one can simply *juxtapose* dissipation and parametric excitation. Technically speaking, one just has to add (E1.1) to the right-hand side of equations (4.104) when using Glauber variables  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , or to complete above equations (E1.2c) with the parametric excitation terms displayed in the right-hand side of equation (4.107a) when using Glauber variables  $(\alpha_+, \alpha_-)$ . However, even in this light modulation case, no simple equation can be derived as concerns the decay of the total quanta number  $N_e$ .

Let us now consider the dissipation problem in the quasi-degeneracy framework. In this framework indeed, and provided that  $|\gamma_{kk'}| \ll \omega_0$ , equations (E1.1) are simplified into

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \end{pmatrix}_{\text{dissipation}} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \gamma \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{E1.3})$$

so that the state vector  $|\psi\rangle$  undergoes a non-unitary evolution<sup>1</sup> ruled by :

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \left( \hat{\mathcal{H}} - i\hbar \frac{\hat{\gamma}}{2} \right) |\psi(t)\rangle, \quad (\text{E1.4})$$

where  $\hat{\gamma}$  is an hermitian operator represented in basis  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  by matrix  $\gamma$ . In basis  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , equation (E1.4) reads (as could be directly derived from (simplified) equation (E1.2c)) :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_+ \\ \dot{\alpha}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega_+ - \frac{1}{2}f_{++} & -\frac{1}{2}f_{+-} \\ -\frac{1}{2}f_{+-} & -i\omega_- - \frac{1}{2}f_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}. \quad (\text{E1.5})$$

The above system can be exactly uncoupled. Nevertheless the eigenvalues of the  $2 \times 2$  matrix in the right-hand side of equation (E1.5) differ from its diagonal terms by a quantity of order

<sup>1</sup>In this respect, the situation is much simpler than in “true” quantum mechanics. Due to quantum correlations indeed between the (small) relaxing system  $\mathcal{S}$  and its (large) reservoir  $\mathcal{R}$ , the physical state of the former is no longer a “pure” state associated with some ket  $|\psi\rangle$  of its hilbert space  $\hat{\mathcal{E}}_{\mathcal{S}}$ , but should be described by a density operator  $\hat{D}_{\mathcal{R}+\mathcal{S}}$ .

$(\frac{f_{+-}}{\Omega_0})^2$ . Ditto as concerns the eigenvectors : provided that condition  $|f_{+-}| \ll \Omega_0$  is fulfilled, both eigenmodes (+) and (-) decay independently from each other, namely :

$$\alpha_+(t) = \alpha_+(0)e^{-\frac{1}{2}f_{++}t}e^{-i\omega_+t}; \quad \alpha_-(t) = \alpha_-(0)e^{-\frac{1}{2}f_{--}t}e^{-i\omega_-t}. \quad (\text{E1.6})$$

How does viscous damping look like in the Larmor representation ? From equations (E1.5) and above definitions (4.160a) we get :

$$\dot{m}_X = -\Omega_0 m_Y - \Gamma m_X - f_{+-}N, \quad (\text{E1.7a})$$

$$\dot{m}_Y = +\Omega_0 m_X - \Gamma m_Y, \quad (\text{E1.7b})$$

$$\dot{m}_Z = -\frac{1}{2}(f_{++} - f_{--})N - \Gamma m_Z, \quad (\text{E1.7c})$$

$$\dot{N} = -\frac{1}{2}(f_{++} + f_{--})m_Z - \Gamma N - f_{+-}m_X, \quad (\text{E1.7d})$$

where

$$\Gamma = \frac{1}{2}(f_{++} + f_{--}) = (\gamma_{11} + \gamma_{22}). \quad (\text{E1.8})$$

Equations (A1.7) deserve a few comments.

First, one easily checks that  $\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}} = N\dot{N}$ , as required by relation (4.160b). Secondly, provided that  $|f_{+-}| \ll \Omega_0$ , the right-hand side of equation (E1.7a) (resp. (E1.7d)) can be simplified by neglecting the non secular term  $-f_{+-}N$  (resp.  $-f_{+-}m_X$ ), thus yielding the simple combinations :

$$\frac{N + m_Z}{2} = |\alpha_+|^2(t) = |\alpha_+|^2(0)e^{-f_{++}t}, \quad \frac{N - m_Z}{2} = |\alpha_-|^2(t) = |\alpha_-|^2(0)e^{-f_{--}t}, \quad (\text{E1.9})$$

which could all the same be directly derived from equations (E1.6). Observe that the decays of  $N$  and  $m_Z$  involve both *a priori* different exponential rates  $f_{++}$  and  $f_{--}$ . Thirdly, we should acknowledge that, even with the latter SA simplification, equations (A1.7) *are not* analogous to the Bloch equations of the Free Induction Decay (FID) of a TLS. This is due to the fact that, in our classical HO2, the total quanta number  $N$  is liable to decay whereas  $\text{Tr}\{D\} = 1 \forall t$  for any true quantum system. Nevertheless, should some restoring mechanism (yet to contrive) balance damping and maintain  $N$  at its initial value, then equation (E1.7d) would cancel and (E1.7c) would read :

$$\dot{m}_Z = -\Gamma(m_Z - m_Z^{\text{ss}}), \quad (\text{E1.10})$$

where  $m_Z^{\text{ss}} = -\frac{f_{++}-f_{--}}{f_{++}+f_{--}}N$  would stand for the steady state value of  $m_Z$ . Thus equations (E1.7a, b, c) would really resemble FID Bloch equations (yet in the particular case where transverse ( $X, Y$ ) and longitudinal ( $Z$ ) relaxation rates are equal to each other).

We would now complete this discussion by considering the effect of a parametric excitation of the two-pendulum system. Exactly as explained above in general case, there is no simple formalism allowing simultaneously for viscous friction and parametric excitation, unless the latter be *small*. This is the case *inter alia* of the Rabi-like excitation. Regarding the time-evolution of pseudo angular momentum  $\vec{m}$  in the Larmor space, we have, in the non rotating frame :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \left( \vec{\Omega}_0 + \delta\vec{\Omega}_0(t) \right) \times \vec{m} + \left( \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} \right)_{\text{dissipation}}, \quad (\text{E1.11})$$

with  $\left(\frac{\partial \bar{m}}{\partial t}\right)_{\text{dissipation}}$  displayed in the right-hand sides of equations (E1.7a, b, c), with the same remarks as above.

As a conclusion, when trying to take viscous friction into account in order to simulate markovian relaxation, we come up against the total quanta number  $N$  non-conservation problem. Should this difficulty be removed, *i.e.*  $N$  be set constant by some smart maintenance mechanism, then equation (E1.11) would be Bloch-like and, more generally, our paralleling the quasi degenerate HO2 on the one hand and the half-one spin or TLS on the other hand could be extended to the NMR or optical fields.

## Appendix 2 : Adiabatic invariant of the HO2 in the Glauber formalism

The purpose of the present appendix is to show that, in the most general case of parametric excitation of any undamped HO2, the total eigen quanta number  $N_e = |\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2$  is an adiabatic invariant. By care of consistency, we use as far as possible the same notations as in section 4.3.2.

Let us consider then any HO2, with dynamical variables  $\theta_1$  and  $\theta_2$ . Setting

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{E2.1})$$

its lagrangian reads

$$L = \frac{1}{2}({}^t\dot{\theta}M\dot{\theta} - {}^t\theta K\theta), \quad (\text{E2.2})$$

where  $M$  and  $K$  respectively stand for the effective mass and effective stiffness matrices.  $M$  and  $K$  are  $2 \times 2$  symmetrical matrices of “positive type”, *i.e.* associated with positive quadratic forms.  $M$  and  $K$  can be diagonalized. Their eigenvalues are real and positive, associated with orthogonal real eigenvectors. Of course, if a parametric excitation of the HO2 is performed,  $M$  and  $K$  may both depend on time.

Let us consider in particular the effective mass matrix  $M$ . As for any positive-type symmetrical matrix there exist an orthogonal matrix  $P$  diagonalizing  $M$ , *i.e.* such that

$$P^{-1}MP = D = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \text{with } m_1 \text{ and } m_2 \text{ positive.} \quad (\text{E2.3})$$

Setting  $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix}$ , we can then write :

$$M = PDP^{-1} = A^2, \quad \text{with } A = P\sqrt{D}P^{-1}. \quad (\text{E2.4})$$

Since  $P^{-1} = {}^tP$ ,  $A$  is itself a  $2 \times 2$  positive-type symmetrical matrix. Equation (E2.4) is known as the Cholewsky's factorization of matrix  $M$ ; matrix  $A$  can thus be regarded as  $M$ 's square root. We then define standard dynamical variables by

$$q = A\theta, \quad (\text{E2.5})$$

which is just the generalization of definition (4.81a).

In these new variables, lagrangian  $L$  reads :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} {}^t \overline{(A^{-1} \dot{q})} M \overline{(A^{-1} \dot{q})} - \frac{1}{2} {}^t q A^{-1} K A^{-1} q \\ &= \frac{1}{2} {}^t \dot{q} \dot{q} + {}^t \dot{q} A \overline{\dot{A}^{-1}} q - \frac{1}{2} {}^t q (B^2 - \overline{\dot{A}^{-1}} M \overline{\dot{A}^{-1}}) q, \end{aligned} \quad (\text{E2.6})$$

where matrix  $B^2$ , which is now time-dependent, is defined (as in (4.83)) by :

$$B^2 = A^{-1} K A^{-1}. \quad (\text{E2.7})$$

Let  $\sigma = M\dot{\theta}$  be the conjugate momenta of variables  $\theta$ , and  $p$  the conjugate momenta of variables  $q$ . We have :

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} + A \overline{\dot{A}^{-1}} q \\ &= \dot{q} - \dot{A} A^{-1} q \quad (\text{since } A A^{-1} = \mathbb{I} = \text{cst.}) \\ &= \overline{\dot{A} \theta} - \dot{A} \theta = A \dot{\theta} \\ &= A^{-1} M \dot{\theta} = A^{-1} \sigma. \end{aligned} \quad (\text{E2.8})$$

Then, performing a Legendre's transformation of  $L$ , we obtain the hamiltonian  $H$  which equally reads :

$$H = \frac{1}{2} ({}^t \sigma M^{-1} \sigma + {}^t \theta K \theta) = \frac{1}{2} ({}^t p p + {}^t q B^2 q). \quad (\text{E2.9})$$

We shall now introduce the normal variables. Let  $P_e$  be the orthogonal passage matrix that diagonalizes  $B^2$ . Equation (4.86a) is still valid, but now with  $P_e$ ,  $B^2$ ,  $\Omega^2$ ,  $\omega_+$ ,  $\omega_-$  time-dependent. On hamiltonian (E2.9), let us perform the variables change

$$q = P_e \varphi, \quad p = P_e \pi. \quad (\text{E2.10})$$

It is noteworthy that the above variables change is canonical : indices  $i$  and  $j$  ranging over  $+$  and  $-$ , indices  $k$  and  $\ell$  ranging over 1 and 2, with understood summation over repeated indices and using  $\{q_k, p_\ell\} = \delta_{k\ell}$ , we calculate the Poisson's brackets

$$\begin{aligned} \{\varphi_i, \pi_j\} &= \{(P_e^{-1})_{ik} q_k, (P_e^{-1})_{j\ell} p_\ell\} \\ &= (P_e^{-1})_{ik} (P_e^{-1})_{j\ell} \delta_{k\ell} \\ &= (P_e^{-1})_{ik} (P_e)_{kj} \quad (\text{since } P_e^{-1} = {}^t P_e) \\ &= \delta_{ij} \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned} \quad (\text{E2.11})$$

With (E2.10) we get the hamiltonian :

$$H = \frac{1}{2} ({}^t \pi \pi + {}^t \varphi \Omega^2 \varphi). \quad (\text{E2.12})$$

We then define the Glauber variables of the eigenmodes as in (4.97a) :

$$\alpha_m = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\sqrt{\omega_m} \varphi_m + \frac{i}{\sqrt{\omega_m}} \pi_m) \quad (m = + \text{ or } -), \quad (\text{E2.13})$$

or, in matricial form with  $\beta = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}$  (see (4.99)) and  $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix}$  (see (4.86a)) :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{\Omega} \varphi + \frac{i}{\sqrt{\Omega}} \pi \right) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{\Omega} P_e^{-1} A \theta + \frac{i}{\sqrt{\Omega}} P_e^{-1} A^{-1} \sigma \right). \quad (\text{E2.14})$$

Consequently, formula (4.105) holds, and equations (4.106) read in matricial form :

$$\dot{\beta} = \{\beta, H\} + \frac{\partial \beta}{\partial t} = -i\Omega\beta + \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad (\text{E2.15})$$

with, after a time-derivation of (E2.14) :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\Omega} \left( \sqrt{\Omega} \varphi - \frac{i}{\sqrt{\Omega}} \pi \right) + \left( \sqrt{\Omega} \dot{P}_e^{-1} A \theta + \frac{i}{\sqrt{\Omega}} \dot{P}_e^{-1} A^{-1} \sigma \right) + \left( \sqrt{\Omega} P_e^{-1} \dot{A} \theta + \frac{i}{\sqrt{\Omega}} P_e^{-1} \dot{A}^{-1} \sigma \right) \right\}. \quad (\text{E2.16})$$

Since  $AA^{-1} = \mathbb{I} \rightsquigarrow \dot{A}^{-1} = -A^{-1} \dot{A} A^{-1}$  and  $P_e^{-1} P_e = \mathbb{I} \rightsquigarrow \dot{P}_e^{-1} P_e = -P_e^{-1} \dot{P}_e$ , one finds, all calculations carried out :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} \beta^* + \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left\{ \sqrt{\Omega} P_e^{-1} (\dot{A} A^{-1} P_e - \dot{P}_e) \varphi - \frac{i}{\sqrt{\Omega}} P_e^{-1} (A^{-1} \dot{A} P_e + \dot{P}_e) \pi \right\}. \quad (\text{E2.17})$$

Now, using (E2.14) to substitute  $\beta$ ,  $\beta^*$  for  $\varphi$ ,  $\pi$  in above expression (E2.17) and setting :

$$T = \sqrt{\Omega} P_e^{-1} (\dot{A} A^{-1} P_e - \dot{P}_e) \frac{1}{\sqrt{\Omega}}, \quad (\text{E2.18})$$

we finally obtain :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \beta^* + \frac{1}{2} (T - {}^t T) \beta + \frac{1}{2} (T + {}^t T) \beta^* = \mathcal{A} \beta + \mathcal{S} \beta^*, \quad (\text{E2.19})$$

where  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} (T - {}^t T)$  is an antisymmetrical matrix and  $\mathcal{S} = \frac{1}{2} (\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + T + {}^t T)$  a symmetrical one. Hence, the motion equation (see (E2.15)) :

$$\dot{\beta} = -i\Omega\beta + \mathcal{A}\beta + \mathcal{S}\beta^*. \quad (\text{E2.20})$$

Above formula is in fact the corner-stone of the derivation, as will appear below.

It can be argued indeed that, provided that matrices  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{S}$  introduced in (E2.19) are *small* compared to matrix  $\Omega$ , more precisely :  $|\mathcal{A}_{mm'}|, |\mathcal{S}_{mm'}| \ll \omega_m, \omega_{m'}$  with  $m, m' = +$  or  $-$  (which implies *inter alia* that  $\dot{\omega}_m \ll \omega_m^2, \forall m$ ),  $\beta(t)$  can read as :

$$\beta(t) = e^{-i \int_0^t dt' \Omega(t')} \beta_0(t), \quad (\text{E2.21})$$

where the column-vector  $\beta_0(t)$  varies *slowly* compared to matrix  $e^{-i \int_0^t dt' \Omega(t')}$ .

If in addition the parametric excitation of the HO2 is performed in such a way that there be no Fourier component of  $\mathcal{S}_{mm'}$  at angular frequencies in speaking terms with  $(\omega_m + \omega_{m'})$  – in other words if the latter excitation is adiabatic in the Ehrenfest's sense – then the oscillations of the phase factor  $e^{i(\omega_m + \omega_{m'})t}$  average to zero the contribution to  $\dot{\alpha}_m$  of the  $\mathcal{S}_{mm'} \alpha_{m'}^*$  term in (E2.20). *In fine* the  $\mathcal{S}\beta^*$  term can be neglected at the SA in the right-hand side of this

equation. This conclusion entails the following consequence. If we introduce the total *eigen* quanta number

$$N_e = {}^t\beta^*\beta = |\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2, \quad (\text{E2.22})$$

and calculate its exact time-derivative, there comes, allowing for (E2.20) :

$$\begin{aligned} \dot{N}_e &= {}^t\dot{\beta}^*\beta + \text{c.c.} = (-i{}^t\beta^*\Omega\beta + {}^t\beta^*\mathcal{A}\beta + {}^t\beta^*\mathcal{S}\beta^*) + \text{c.c.} \\ &= 2\Re\{{}^t\beta\mathcal{S}\beta\} = 2\Re\{\beta_{0m}\beta_{0m'}\mathcal{S}_{mm'}e^{-i(\omega_m+\omega_{m'})t}\}. \end{aligned} \quad (\text{E2.23})$$

The above result shows that only symmetrical matrix  $\mathcal{S}$ , *i.e.* the prefactor of  $\beta^*$  in the right-hand sides of (E2.19), (E2.20), brings in a time-variation of  $N_e$ .<sup>2</sup> Should this  $\mathcal{S}\beta^*$  term's contribution be non secular, and therefore negligible, then the total eigen quanta number  $N_e$  has thus no secular time-evolution and is consequently an adiabatic invariant.

At this step of the present appendix, we would stress that the number of degrees of freedom of the harmonic oscillator under consideration plays in fact no particular role in the above derivation, which is therefore utterly general : the total eigen quanta number  $N_e = {}^t\beta^*\beta$  of any HOn is an adiabatic invariant,  $\forall n$ .

Let us now apply the general considerations of the present appendix to the particular case of the length modulation of pendulum 1. In this case, the effective mass matrix and its square root read :

$$M(t) = \begin{pmatrix} J_1(t) & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A(t) = \sqrt{M(t)} = \begin{pmatrix} \sqrt{J_1(t)} & 0 \\ 0 & \sqrt{J_2} \end{pmatrix}. \quad (\text{E2.24})$$

All calculations carried out allowing for definition (E2.18), matrix  $T$  is found to be :

$$T = \frac{1}{4} \frac{\dot{J}_1}{J_1} \begin{pmatrix} 1 + \cos \phi_e & \sqrt{\frac{\omega_+}{\omega_-}} \sin \phi_e \\ \sqrt{\frac{\omega_-}{\omega_+}} \sin \phi_e & 1 - \cos \phi_e \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \dot{\phi}_e \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\omega_+}{\omega_-}} \\ -\sqrt{\frac{\omega_-}{\omega_+}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{E2.25})$$

hence expression (4.107) of its antisymmetrical part  $\mathcal{A}$ .

### Appendix 3 : Justifying the quasi-degeneracy approximations

In section 4.3.3 of the text, we have introduced the quasi-degeneracy approximations (see *e.g.* (4.109)) which, roughly speaking, can be summarized by :  $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega_+ \simeq \omega_- \simeq \omega(\phi, \varphi) \simeq \omega_0$ . Nevertheless *small* (compared to  $\omega_0$ ) quantities like  $\Delta$  or  $\kappa\omega_0$  play an important role, for instance when discussing the Larmor precession. The consistency of the approximations made may thus be questioned.

It is the aim of the present appendix to raise and answer a couple of questions that have been eluded in the text for the sake of simplicity.

---

<sup>2</sup>Of course antisymmetrical matrix  $\mathcal{A}$  plays a role in the individual time-evolutions of  $|\alpha_+|^2$  and  $|\alpha_-|^2$  : if  $\mathcal{A}$  contains in its Fourier spectrum angular frequencies in speaking terms with quantity  $\omega_+ - \omega_-$  (which can be regarded, in quantum words, as the Bohr angular frequency associated with transition  $+ \leftrightarrow -$ ), then  $|\alpha_+|^2$  and  $|\alpha_-|^2$  do vary with time, but their sum  $N_e$  remains constant.

First, let us come back to the energy considerations. In fact things are a bit more subtle than what we have insinuated. Expressions (4.150) and (4.151) are but the zero-order term of the series expansion of the energy in increasing powers of the dimensionless parameter  $\frac{\Omega_0}{\omega_0}$ . In order to determine the first order term, one should not neglect the time derivatives of the envelop factors  $\cos \frac{\Omega_0 t}{2}$  and  $\sin \frac{\Omega_0 t}{2}$  in formulas (4.148) when calculating the conjugate momenta  $p_k = \dot{q}_k$ , and consequently we should complete expressions (4.149) with first order terms (prefactor  $\Omega_0$  instead of  $\omega_0$ ). Moreover, the coupling term  $-\kappa\omega_0^2 q_1 q_2$  ( $= -\omega_0 \Omega_0 \sin \phi q_1 q_2$ ) should be also considered in the full energy balance. At last, when the detuning  $\Delta = \omega_1 - \omega_2$  is not strictly zero (*i.e.* if  $\cos \phi_e \neq 0$ ), the total mechanical energy of pendulum  $k$  ( $k = 1, 2$ ) is  $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}(p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2)$ , with  $\omega_k = \omega_0 \pm \frac{\Delta}{2} \neq \omega_0$  : it is then necessary to add  $\frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_0^2)q_1^2 \simeq \frac{1}{2}\omega_0 \Omega_0 \cos \phi_e q_1^2$  (resp.  $\frac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega_0^2)q_2^2 \simeq -\frac{1}{2}\omega_0 \Omega_0 \cos \phi_e q_2^2$ ) to expression (4.150a) of  $\mathcal{E}_1(t)$  (resp. expression (4.150b) of  $\mathcal{E}_2(t)$ ). Up to first (included) order in  $\frac{\Omega_0}{\omega_0}$  the full hamiltonian of the HO2 then reads :

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \omega_0^2(q_1^2 + q_2^2)) + \omega_0 \Omega_0 (\cos \phi_e \frac{q_1^2 - q_2^2}{2} - \sin \phi_e q_1 q_2). \quad (\text{E3.1})$$

The above hamiltonian can thus be regarded as the free hamiltonian  $\sum_{k=1,2} \frac{1}{2}(p_k^2 + \omega_0^2 q_k^2)$  of a system of two identical (same angular frequency  $\omega_0$ ) and uncoupled H01s, *plus* a perturbation hamiltonian proportional to  $\Omega_0$ . A tedious but easy calculation of the total energy, consistent up to first order, yields the following result :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\omega_0^2 q_{10}^2 (1 + \frac{\Omega_0}{\omega_0} \cos \phi_e). \quad (\text{E3.2})$$

This result is not surprising. The energy is found to be constant, as expected for an isolated system. Moreover one has :

$$\omega_0^2 \left(1 + \frac{\Omega_0}{\omega_0} \cos \phi_e\right) = \omega_0^2 + \omega_0 \Delta = \left(\omega_0 + \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \mathcal{O}(\Delta)^2, \quad (\text{E3.3})$$

so that  $\mathcal{E}$  is equal to  $\frac{1}{2}\omega_1^2 q_{10}^2$ , exactly as expected from the initial conditions.

The second point we would precise and complete concerns the apparent simplicity of variables change (4.123). In this connection let us consider again hamiltonian (E3.1) which is, as explained above, equivalent to (4.85b) up to first included order in  $\frac{\Omega_0}{\omega_0}$ . Then, defining

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{\omega_0} q_k + \frac{i}{\sqrt{\omega_0}} p_k \right) \quad (k = 1, 2), \quad (\text{E3.4})$$

this hamiltonian reads, all non secular terms withdrawn :

$$\tilde{H}^{\text{Sec}} = \hbar\omega_0 (|\tilde{\alpha}_1|^2 + |\tilde{\alpha}_2|^2) + \frac{\hbar\Omega_0}{2} \left[ \cos \phi_e (|\tilde{\alpha}_1|^2 - |\tilde{\alpha}_2|^2) - \sin \phi_e (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2^* + \tilde{\alpha}_1^* \tilde{\alpha}_2) \right]. \quad (\text{E3.5})$$

It should be noted that although Glauber variables  $\alpha_k$  and  $\tilde{\alpha}_k$  differ from each other by a first order term, for instance :

$$\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_1^* \frac{\Delta}{4\omega_0} + \mathcal{O}(\Delta^2), \quad (\text{E3.6})$$

substituting  $\tilde{\alpha}_k$  for  $\alpha_k$  in motion equations, say equations (4.116), brings in but non secular terms (up to first included order), and thus does not change their secular solution. Equivalently, the difference

$$|\alpha_1|^2 - |\tilde{\alpha}_1|^2 = \frac{\Delta}{4\hbar} \left( q_1^2 - \frac{p_1^2}{\omega_0^2} \right) = \frac{\Delta}{4\omega_0} (\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_1^{*2}) \quad (\text{E3.7})$$

is non significant at the secular approximation. The same remark holds for any coefficient of matrix  $D$ . For instance :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2^* - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2^* &= -i \frac{\Delta}{4\hbar\omega_0} (q_1 p_2 + q_2 p_1) + \mathcal{O}(\Delta^2) \\ &= -\frac{\Delta}{4\omega_0} (\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1^* \tilde{\alpha}_2^*) + \mathcal{O}(\Delta^2), \end{aligned} \quad (\text{E3.8})$$

so that no distinction should be made between  $D$  and  $\tilde{D}$ ,  $N$  and  $\tilde{N}$ ,  $\vec{m}$  and  $\tilde{\vec{m}}$ , and consequently  $H^{\text{Sec}}$  and  $\tilde{H}^{\text{Sec}}$ , in the framework of section 4.3.3's approximations. At last, defining

$$\tilde{\alpha}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{\omega_0} \varphi_{\pm} + \frac{i}{\sqrt{\omega_0}} \pi_{\pm} \right), \quad (\text{E3.9})$$

and on quite analogous grounds, we shall make no more distinction between  $\alpha_{\pm}$  and  $\tilde{\alpha}_{\pm}$ , and henceforth deliberately omit superscript  $\tilde{\phantom{x}}$ . Thus variables change (4.123) simply appears as a straightforward consequence of (4.86b) and (4.123).



# Bibliographie

- [AM76] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin. *Solid State Physics*. Holt-Saunders, London, 1976.
- [BAL99] T. Barbat, N. Ashgriz, and C.-S. Liu. Dynamics of two interacting bubbles in an acoustic field. *J. Fluid Mech.*, 389 :137–168, 1999.
- [BD65] L.C. Biedenharn and H. Van Dam. *Quantum theory of angular momentum*. Academic Press, New York, 1965.
- [Bje06] V. F. K. Bjerknes. *Fields of force*. Columbia university press, New York, 1906.
- [BKL86] F. V. Bunkin, Yu A. Kravtsov, and G. A. Lyakhov. Acoustic analogues of nonlinear-optics phenomena. *Sov. Phys. Usp.*, 29(7) :607–619, 1986.
- [Cas96] William B. Case. The pumping of a swing from the standing position. *Am. J. Phys.*, 64(3) :215–220, 1996.
- [CB85] W. Carey and M. Bradley. Low-frequency ocean surface noise sources. *J. Acoust. Soc. Am. Suppl. 1*, 78 :S1–S2, 1985.
- [CMPT85] R.E. Caffisch, M.J. Miksis, G.C. Papanicolaou, and L. Ting. Effective equations for wave propagation in bubbly liquids. *J. FLui. Mech.*, 153 :259–273, 1985.
- [CP89] K.W. Commander and A. Prosperetti. Linear pressure waves in bubbly liquids : comparison between theory and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(2) :732–746, 1989.
- [Cra82] F.S. Crawford. The hot chocolate effect. *Am. J. Phys.*, 50(5) :398–404, 1982.
- [CS90] William B. Case and Mark A. Swanson. The pumping of a swing from the seated position. *Am. J. Phys.*, 58(5) :463–467, 1990.
- [CSR95] Stanley A. Cheyne, Carl T. Stebbings, and Ronald A. Roy. Phase velocity measurements in bubbly water liquids using a fiber optic laser interferometer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(3) :1621–1624, 1995.
- [CTDL77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum mechanics*. John Wiley, New York, 1977.
- [Dev59] C. Devin. Survey of thermal, radiation, and viscous damping of pulsating air bubbles in water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 31 :1654–1667, 1959.
- [Feu95] C. Feuillade. Scattering from collective modes of air bubbles in water and the physical mechanism of superresonances. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(2) :1178–1190, 1995.

- [Feu96] C. Feuillade. The attenuation and dispersion of sound in water containing multiply interacting bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(6) :3412–3430, 1996.
- [Feu97] C. Feuillade. Response to “comments on ‘the attenuation and dispersion of sound in water containing multiply interacting air bubbles’ ”. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(2) :1242–1245, 1997.
- [Feu02] C. Feuillade. Comment on “corrections to foldy’s effective medium theory for propagation in bubble clouds and other collections of very small scatterers”. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(4) :1552–1555, 2002.
- [Fol45] L.L. Foldy. The multiple scattering of waves. *Physical Review*, 67 :107–119, 1945.
- [Gla63] R. J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131 :2766–2788, 1963.
- [Gla65] R. J. Glauber. *Optical coherence and photon statistics in quantum optics and electronics*. Gordon and Breach, New York, 1965.
- [HDB01] P.-Y. Hsiao, M. Devaud, and J.-C. Bacri. Acoustic coupling between air bubbles in water. *Eur. Phys. J. E*, 4 :5–10, 2001.
- [Hen99] Franck S. Henyey. Corrections to foldy’s effective medium theory for propagation in bubble clouds and other collections of very small scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(4) :2149–2154, 1999.
- [Hen02] Franck S. Henyey. Reply to “comment on ‘corrections to foldy’s effective medium theory for propagation in bubble clouds and other collections of very small scatterers’ ”. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(4) :1556–1559, 2002.
- [How65] S.D. Howkins. Measurements of the resonant frequency of a bubble near a rigid boundary. *J. Acoust. Soc. Am.*, 37(3) :504–508, 1965.
- [HRC95] P.A. Hwang, R.A. Roy, and L.A. Crum. Artificial bubble cloud targets for underwater acoustic remote sensing. *J. Atm. Oc. Tech.*, 12 :1287–1302, 1995.
- [HW94] A.J. Hardwick and A.J. Walton. Forced oscillations of a bubble in a liquid. *Eur. J. Phys.*, 15 :325–328, 1994.
- [Kar02] Steven G. Kargl. Effective medium approach to linear acoustics in bubbly liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(1) :168–173, 2002.
- [KDRD98] M. S. Kushwaha, B. Djafari-Rouhani, and L. Dobrzynski. Sound isolation from cubic arrays of air bubbles in water. *Physics Letters A*, 248 :252–256, 1998.
- [KKR] C. Kittel, W. D. Knight, and M. A. Ruderman. *Berkeley Physics Course, volume 1, Mechanics*. McGraw-Hill, ?
- [KPE00] M. Kafesaki, R.S. Penciu, and E.N. Economou. Air bubbles in water : a strongly multiple scattering medium for acoustic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 84(26) :6050–6053, 2000.
- [KVPG03] B. Kastler, D. Vetter, Z. Patay, and P. Germain. *Comprendre l’IRM*. Masson, Paris, 2003.

- [Lax51] M. Lax. Multiple scattering of waves. *Rev. Mod. Phys.*, 23(4) :287–310, 1951.
- [LDB02] V. Leroy, M. Devaud, and J.-C. Bacri. The air bubble : experiments on an unusual harmonic oscillator. *Am. J. Phys.*, 70(10) :1012–1019, 2002.
- [Lei94] T.G. Leighton. *The Acoustic Bubble*. Academic Press, London, 1994.
- [LH90] M.S. Longuet-Higgins. The sound field due to an oscillating bubble near an intended free surface. *J. Fluid Mech.*, 221 :675–683, 1990.
- [LL59] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Theory of elasticity*. Pergamon Press, London, 1959.
- [LL60] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Electrodynamics of continuous media*. Pergamon Press, London, 1960.
- [Lop80] S.L. Lopatnikov. Acoustic phase echo in a liquid with gas bubbles. *Sov. Tech. Phys. Lett.*, 6(5) :270, 1980.
- [LW87] T.G. Leighton and A.J. Walton. An experimental study of the sound emitted from gas bubbles in a liquid. *Eur. J. Phys.*, 8 :98–104, 1987.
- [LWM<sup>+</sup>02] T.G. Leighton, P.R. White, C.L. Morfey, J.W.L. Clarke, G.J. Heald, H.A. Dumbrell, and K.R. Holland. The effect of reverberation on the damping of bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(4) :1366–1376, 2002.
- [Min33] M. Minnaert. Air-bubbles and sounds of running water. *Phil. Mag.*, 16 :235–248, 1933.
- [NRC<sup>+</sup>94] M. Nicholas, R.A Roy, L.A. Crum, H. Oğuz, and A. Prosperetti. Sound emissions by a laboratory bubble cloud. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95(6) :3171–3182, 1994.
- [OP90] H.N. Oguz and A. Prosperetti. Bubble oscillations in the vicinity of a nearly plane free surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87(5) :2085–2092, 1990.
- [PCC88] A. Prosperetti, L.A. Crum, and K.W. Commander. Nonlinear bubble dynamics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83(2) :502–514, 1988.
- [PPW<sup>+</sup>00] J. Powers, T. R. Porter, S. Wilson, M. Averkiou, D. Skyba, and M. Bruce. Ultrasound contrast imaging. *Medica Mundi*, 44(2) :28–36, 2000.
- [Pro74] A. Prosperetti. Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids : steady-state solutions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56(3) :878–885, 1974.
- [Pro77] A. Prosperetti. Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 61(1) :17–27, 1977.
- [Pro85] A. Prosperetti. bubble-related ambient noise in the ocean. *J. Acoust. Soc. Am. Suppl. 1*, 78 :S2, 1985.
- [RCN<sup>+</sup>92] R.A. Roy, W. Carey, M. Nicholas, J. Schindall, and L.A. Crum. Low frequency scattering from submerged bubble clouds. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(5) :2993–2996, 1992.
- [Ruf92] Anthony A. Ruffa. Acoustic wave propagation through periodic bubbly liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(1) :1–11, 1992.

- [Sil57] E. Silberman. Sound velocity and attenuation in bubbly mixture measured in standing wave tubes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 29(8) :925–933, 1957.
- [Str53] M. Strasberg. The pulsation frequency of nonspherical gas bubbles in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 25(3) :536–537, 1953.
- [Str56] M. Strasberg. Gas bubbles as sources of sound in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 28(1) :20–26, 1956.
- [VSvdH00] Michel Versluis, Barbara Schmitz, and Anna von der Heydt. How snapping shrimp snap : through cavitation bubbles’. *Science*, 289 :2114–2117, 2000.
- [VZK83] D. V. Vlasov, E. A. Zabolotskaya, and Yu. A. Kravtsov. Acoustic phase conjugation in water containing bubbles. *Sov. Phys. Acoust.*, 29(1) :69–70, 1983.
- [VZK97] I. V. Volkov, S. T. Zavtrak, and I. S. Kuten. Theory of sound amplification by stimulated emission of radiation with consideration for coagulation. *Phys. Rev. E*, 56(1) :1097–1101, 1997.
- [Wil02] P.S. Wilson. *Sound propagation and scattering in bubbly liquids*. PhD thesis, Boston University, College of Engineering, 2002.
- [Woo32] A.B. Wood. *A Textbook of sound*. Bell, London, 1932.
- [WRC03] Preston S. Wilson, Ronald A. Roy, and William M. Carey. An improved water-filled impedance tube. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(6) :3245–3252, 2003.
- [WT61] P.C. Waterman and R. Truell. Multiple scattering of waves. *J. Math Phys.*, 2(4) :512–537, 1961.
- [YA98] Z. Ye and A. Alvarez. Acoustic localization in bubbly liquid media. *Phys. Rev. Lett.*, 80(16) :3503–3506, 1998.
- [YCPL91] S.W. Yoon, L.A. Crum, A. Prosperetti, and N.Q. Lu. An investigation of the collective oscillations of bubble cloud. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(2) :700–706, 1991.
- [YD95] Z. Ye and L. Ding. Acoustic dispersion and attenuation relations in bubbly mixture. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(3) :1629–1635, 1995.
- [Ye97] Z. Ye. Comments on “the attenuation and dispersion of sound in water containing multiply interacting air bubbles”. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(2) :1239–1241, 1997.
- [YH01] Z. Ye and H. Hsu. Phase transition and acoustic localization in arrays of air bubbles in water. *Applied Physics Lett.*, 79(11) :1724–1726, 2001.
- [YHH00] Z. Ye, H. Hsu, and E. Hoskinson. Phase order and energy localization in acoustic propagation in random bubbly liquids. *Physics Letters A*, 275 :452–458, 2000.
- [ZS67] E. A. Zabolotskaya and S. I. Soluyan. A possible approach to the amplification of sound waves. *Sov. Phys. Acoust.*, 13(2) :254–255, 1967.



**Résumé** - Une bulle de gaz dans un liquide est un acteur acoustique important. Par exemple, les bulles d'air créées par les remous d'une rivière sont responsables du bruit caractéristique de ces écoulements. En 1933, Minnaert a proposé un modèle d'oscillateur harmonique simple pour décrire les oscillations d'une bulle d'air dans l'eau.

La première partie de cette thèse est dédiée à l'étude de cet oscillateur particulier, qui peut être vu comme une masse d'eau accrochée à un ressort d'air, et au couplage entre plusieurs de ces oscillateurs. Nous présentons un dispositif expérimental original qui permet de piéger une ou plusieurs bulles d'air, à l'aide d'un filet, afin d'étudier la réponse de ce système à une excitation acoustique. L'originalité de notre approche théorique consiste à traiter le nuage de  $N$  bulles comme un système d'oscillateurs couplés à  $N$  degrés de liberté, ce qui revient à négliger les degrés de liberté associés à la compressibilité de l'eau. Ce modèle rend bien compte des principales observations : l'existence de pics de résonance à basse fréquence et d'une forte atténuation à plus haute fréquence. Le prolongement du modèle au cas de la propagation dans un milieu infini est également présenté.

Dans la seconde partie, l'étude de l'excitation paramétrique d'une bulle est abordée. Nous développons un formalisme original, fondé sur les variables de Glauber, propice à l'étude des non-linéarités d'un oscillateur. Une parenthèse sur un système modèle (deux pendules couplés) permet de valider expérimentalement ce formalisme. Nous montrons finalement que l'excitation paramétrique d'une bulle permet de réaliser une conjugaison de phase. Ce mécanisme pourrait être mis à profit pour réaliser des échos de bulles, de façon analogue aux échos de spins utilisés en IRM.

---

**Abstract** - A gas bubble in a liquid is a major acoustic source. For example, air bubbles created by the swirls of a river are responsible for the characteristic sound of these flows. In 1933, Minnaert proposed a simple harmonic oscillator model to describe the oscillations of an air bubble in water.

The first part of this work is devoted to the study of this particular oscillator, which can be seen as a water mass fastened on an air spring, and to the coupling between several of such oscillators. We present an original experimental device allowing to catch one or several bubbles, with a net, in order to study this system response to an acoustic excitation. The originality of our theoretical approach consists in considering the cloud of  $N$  bubbles as a system of coupled harmonic oscillators with  $N$  degrees of freedom, what amounts to neglect the degrees of freedom associated with water compressibility. This model properly accounts for the main observations : resonance peaks at low frequencies and strong attenuation for higher frequencies. The extension of the model to the case of propagation in an infinite medium is also presented.

In the second part, the study of bubble parametric excitation is tackled. We develop an original formalism, based on Glauber variables, convenient to study the non-linear behavior of an oscillator. A parenthesis on a model system (two coupled pendula) permits to validate experimentally this formalism. Finally, we show that with the parametric excitation of a bubble one can obtain a phase conjugation phenomenon. This mechanism could be turned to account to realize bubbles echoes, in a way similar to spins echoes used in MRI.