

---

# Etude de la solution stationnaire de l'équation

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n \text{ à coefficients aléatoires}$$

Benoîte de Saporta

Soutenance de thèse - 10 novembre 2004

- Introduction
- Renouvellement pour les systèmes
- L' équation à coefficients markoviens
- Modèle analogue en temps continu
- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.
- Perspectives

Modèle AR(1) :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad Y_n \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 1.$$

$(a_n, b_n)$  va sur  $Gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ .

- séries chronologiques,
- processus de branchement,
- marches en milieu aléatoire,
- modèles AR(d), GARCH...

BRANDT 1986, BOUGEROL et PICARD 1992,

$(a_n, b_n)$  stationnaire

Si

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|a_1 \cdots a_n\| < 0$$

et

$$\mathbb{E} \log^+ \|b_0\| < \infty,$$

unique solution stationnaire

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n-1} \cdots a_{n-k} b_{n-k-1},$$

$(a_n, b_n)$  i.i.d.

•  $\forall s > 0,$

$$\mathbb{E}\|R_1\|^s \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\|a_0 a_{-1} \cdots a_{-k+1}\|^s \mathbb{E}\|b_{-k}\|^s \quad \text{si } s < 1,$$

$$(\mathbb{E}\|R_1\|^s)^{1/s} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{E}\|a_0 a_{-1} \cdots a_{-k+1}\|^s)^{1/s} (\mathbb{E}\|b_{-k}\|^s)^{1/s} \quad \text{si } s \geq 1.$$

• Si  $b_0$  a des moments à tout ordre,  $R$  a un moment d'ordre  $s$  si

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|a_1 a_2 \cdots a_n\|^s)^{1/n} < 1$$

KESTEN 1973, 1974

LE PAGE 1983

GOLDIE 1991

•  $\mathbb{E}\|R^s\| < \infty$  si et seulement si  $k(s) < 1$

• Si  $k(\kappa) = 1$ , queue polynômiale :

$$\mathbb{P}(\|R\| > t) \sim Ct^{-\kappa}$$

- Introduction
- **Renouvellement pour les systèmes**
- L' équation à coefficients markoviens
- Modèle analogue en temps continu
- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.
- Perspectives

$F = (F_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$  matrice de distributions.

$G = {}^t(G_1, \dots, G_p)$  vecteur de fonctions réelles, bornées sur les compacts.

$Z = {}^t(Z_1, \dots, Z_p)$  vecteur de fonctions inconnues qui vérifie

$$Z_i(t) = G_i(t) + \sum_{k=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} Z_k(t-u) F_{ik}(du),$$

$\implies$  comportement asymptotique de  $Z$  en  $+\infty$ .

FELLER 1971 :  $p = 1$ ,  $F_{11}$  probabilité :

CRUMP 1970, ATHREYA et RAMA MURTHY 1976 :

$p > 1$ ,  $F_{ij} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$



- Produit de convolution matriciel  $F * H$  :  
 $H$  matrice  $p \times r$  de fonctions réelles mesurables

$$(F * H)_{ij}(t) = \sum_{k=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} H_{kj}(t-u) F_{ik}(du).$$

- Espérance de  $F$  :  $\Gamma = (\gamma_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$  avec  $\gamma_{ij} = \int u F_{ij}(du)$ .
- $F^{(0)}(t) = \text{diag}(\mathbf{1}_{t \geq 0}, \dots, \mathbf{1}_{t \geq 0})$ .
- $F^{(n)}(t) = F * F^{(n-1)}(t)$ .
- Fonction de renouvellement  $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t)$ .

$F$  est arithmétique si :

- pour tout  $i \neq j$ ,  $F_{ij}$  est concentrée sur un ensemble de la forme  $b_{ij} + \lambda_{ij}\mathbb{Z}$ ,
- pour tout  $i$ ,  $F_{ii}$  est concentrée sur  $\lambda_{ii}\mathbb{Z}$ ,
- les  $\lambda_{ii}$  sont multiple entiers d'un même nombre,

$\lambda$  le plus grand de ces nombres,

- pour tous  $a_{ij}$ ,  $a_{jk}$ ,  $a_{ik}$  points d'accroissement de  $F_{ij}$ ,  $F_{jk}$  et  $F_{ik}$ ,  
 $a_{ij} + a_{jk} - a_{ik}$  est un multiple entier de  $\lambda$ .

1. Mesures finies :

$$\forall 1 \leq i, j \leq p, \quad F_{ij}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_{ij}(t) < \infty.$$

2. Transience :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) < \infty.$$

3.  $F(\infty)$  irréductible à puissances bornées en norme.

4. Rayon spectral :  $\rho(F(\infty)) = 1$ .

$m$  et  $u$  vecteurs propres de Perron-Frobenius :

$$F(\infty)m = m, \quad {}^t u F(\infty) = {}^t u,$$

$$\sum_{i=1}^p m_i = 1, \quad \sum_{i=1}^p u_i m_i = 1.$$

**Théorème 1 (Première forme)**

- *hypothèses 1-4*
  - *$F$  non arithmétique*
  - *espérance  $\Gamma$  existe*
- alors,  $\gamma = {}^t u \Gamma m > 0$  et*

$$U_{ij}(t+h) - U_{ij}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{m_i u_j}{\gamma} h.$$

**Théorème 2 (Deuxième forme)**

- *Mêmes hypothèses*
  - *$G$  directement Riemann intégrable*
  - *$Z = U * G$  existe,*
- alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_i(t) = \frac{1}{\gamma} m_i \sum_{j=1}^p \left[ u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(u) du \right].$$

- Incréments de  $U$  uniformément bornés  
 $\implies \exists(t_n) \rightarrow +\infty$  et  $V_{ij}$  mesures t.q.

$$U_{ij}(t_n + dt) \longrightarrow V_{ij}(dt)$$

- Identification des  $V_{ij}$   
 $G = {}^t(0, \dots, G_k, \dots, 0)$  avec  $G_k$  continue à support compact  
 $t_n \rightarrow +\infty$  dans l'équation de renouvellement  
solutions de  $Z = F * Z$   
 $\implies V_{ij}$  multiples de la mesure de Lebesgue :  $V_{ij} = a_{ij}\ell$

- Identification des coefficients de proportionnalité  
 $G = {}^t(0, \dots, G_k, \dots, 0)$  avec  $G_k(t) = \mathbf{1}_{[0, 1]}(t) \implies a_{ij} = cm_i u_j$

$$G(t) = (F(\infty)\mathbf{1}_{t \geq 0} - F(t))m \implies c = \gamma^{-1}$$

Extension de DELLACHERIE et MEYER 1983 en dimension  $p$  :

Noyau sur  $\mathbb{R}^p$  :  $N = (N_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ , avec  $N_{i,j}(t, A)$  noyaux sur  $\mathbb{R}$

Noyau unité  $N^0 = I$  :

$$\begin{cases} I_{ij}(t, A) = 0 & \text{si } i \neq j, \\ I_{ii}(t, A) = \mathbf{1}_A(t). \end{cases}$$

Produit des noyaux :  $MN = ((MN)_{ij})$  avec

$$(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^p M_{ik} N_{kj}.$$

Noyau Potentiel

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} N^k.$$

Relation d'ordre sur les fonctions mesurables de  $\mathbb{R}$  dans  $(\mathbb{R}_+)^p$

$$u \preceq v \quad \text{si} \quad \forall 1 \leq i \leq p, \quad u_i \leq v_i.$$

Si  $u \preceq v$  alors  $Nu \preceq Nv$

$u : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}_+)^p$  est excessive pour le noyau  $N$  si

$$Nu \preceq u.$$

**Théorème 3 (Principe du Maximum)** Si  $\mathbf{1} = {}^t(1, 1, \dots, 1)$  est excessive, alors pour toute fonction  $f$  à coordonnées positives,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} Gf(t) = \sup_{t \in A} Gf(t),$$

où  $A$  est le support de  $f$  :

$$A = \bigcup_{i=1}^p \{f_i > 0\}$$

- Introduction
- Renouvellement pour les systèmes
- **L' équation à coefficients markoviens**
- Modèle analogue en temps continu
- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.
- Perspectives



Processus auto-régressif à régime markovien :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$(a_n)$  : chaîne de Markov irréductible, apériodique, stationnaire sur  $E = \{e_1, \dots, e_p\} \subset \mathbb{R}_+^*$ , matrice de transition  $P = (p_{ij})$ , loi stationnaire  $\mu$ .

$(b_n)$  i.i.d. non nulles, indépendantes de  $(a_n)$

Si  $\mathbb{E} \log(a_0) = \sum \log(e_i) \mu(e_i) < 0$  et  $\mathbb{E} \log^+(b_0) < \infty$  unique solution stationnaire :

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_{n-k} b_{n-1-k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

**Théorème 4**

1. *il existe  $\kappa > 0$  tel que la matrice  $P_\kappa = \text{diag}(e_i^\kappa)^t P$  soit de rayon spectral 1,*
2. *les  $\log e_i$  ne sont pas tous multiples entiers d'un même nombre,*
3.  $\mathbb{E}|b_0|^\kappa < \infty,$

*alors pour  $x \in \{-1, 1\}$  on a :*

$$t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} L(x),$$

*où  $L(1) + L(-1) > 0$ .*

***Si  $b_0 \geq 0$ , alors  $L(-1) = 0$ , et  $L(1) > 0$ . Si  $b_0 \leq 0$ , alors  $L(1) = 0$ , et  $L(-1) > 0$ .***

LE PAGE 1983, GOLDIE 1991

$$z(x, t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > u) du.$$

$x = \pm 1$ , même comportement asymptotique que  $t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t)$ .

$z(x, t) = \sum_{i=1}^p Z_i(x, t)$ , où :

$$Z_i(x, t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) du.$$

Alors

$$\begin{aligned} Z_i(x, t) &= e_i^\kappa \sum_{j=1}^p \left[ p_{ji} Z_j(x, t - \log e_i) \right] + G_i(x, t) \\ &= \sum_{j=1}^p \int Z_j(x, u) F_{ij}(du) + G_i(x, t), \end{aligned}$$

avec

$$F_{ij}(t) = e_i^\kappa p_{ji} \mathbf{1}_{t \geq \log e_i},$$

et

$$G_i(x, t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \left[ \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(xa_0R_0 > u, a_0 = e_i) \right] du.$$

Théorème de renouvellement pour les systèmes :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} z(x, t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p Z_i(x, t) \\ &= \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^p \left[ u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(x, s) ds \right].\end{aligned}$$

Limite non nulle ?

● Première étape :  
GRINCEVICIUS 1980, GOLDIE 1991

$$\mathbb{P}(|R_1| > t) \geq C \mathbb{P}\left(\sup_n a_0 \cdots a_{1-n} > \frac{2t}{\varepsilon}\right).$$

Inégalité de symétrisation de Lévy  
Lemme de Feller Chung

● Deuxième étape :

Evaluer  $\mathbb{P}\left(\sup_n a_0 \cdots a_{1-n} > \frac{2t}{\varepsilon}\right)$ .

Marche aléatoire

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \log(a_{1-k}) = \log(a_0 \cdots a_{1-n}).$$

Etude du processus d'échelle  $S_{\tau_n}$  où :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}, \\ \tau_n &= \inf\{k > \tau_{n-1} : S_k > S_{\tau_{n-1}}\}. \end{aligned}$$

Renouvellement

$$\implies e^{\kappa t} \mathbb{P}(\max(S_n) > t) = e^{\kappa t} \mathbb{P}(\max(S_{\tau_n}) > t) \geq C > 0,$$

$C > 0$  constante explicite.

- Introduction
- Renouvellement pour les systèmes
- L' équation à coefficients markoviens
- **Modèle analogue en temps continu**
- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.
- Perspectives



- $X$  processus Markovien de saut ergodique.
  - espace d'états  $E = \{1, \dots, N\}$ ,  $N > 1$
  - fonction d'intensité  $\lambda > 0$  sur  $E$
  - noyau de saut  $q$  irréductible, à diagonale nulle
  - loi stationnaire  $\mu$
- $W$  mouvement brownien standard indépendant de  $X$ ,  
( $\mathcal{F}_t$ ) filtration associée

Processus de Ornstein-Uhlenbeck à régime markovien :

$$\begin{cases} Y_0 \mathcal{F}_0 - \text{mesurable} \\ dY_t = e(X_t)Y_t dt + \sigma(X_t)dW_t \end{cases}$$

GUYON, IOVLEFF, YAO 2004 :

Si

$$\mathbb{E}_\mu[e(X_t)] = \sum_{i \in E} e(i)\mu(i) < 0,$$

alors  $Y$  a une unique loi stationnaire  $\nu$ .

Solution explicite :

$$Y_t = a(0, t) \left[ Y_0 + \int_0^t a(0, u)^{-1} \sigma(X_u) dW_u \right]$$

où

$$a(s, t) = a_{s,t} = \exp \int_s^t e(X_u) du.$$

$\delta > 0$ , discrétisation  $Y^{(\delta)} = (Y_{n\delta})$  vérifie

$$Y_{(n+1)\delta} = a_n Y_{n\delta} + b_n,$$

avec  $b_n = V_n^{1/2} \xi_n$ ,  $(\xi_n)$  i.i.d.  $\mathcal{N}(0, 1)$  et

$$\begin{aligned} a_n &= \exp \left[ \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} e(X_u) du \right], \\ V_n &= \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \exp \left[ 2 \int_u^{(n+1)\delta} e(X_v) dv \right] \sigma^2(X_u) du. \end{aligned}$$

**Théorème 5**

1. Si  $\forall i, e(i) \leq 0$ , alors  $\forall s > 0$  :

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^s \nu(dx) < \infty.$$

2. Si  $\exists i$  tel que  $e(i) > 0$ , alors  $\exists \kappa > 0$  et  $L > 0$  :

$$\begin{aligned} t^\kappa \nu(]t, +\infty[) &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} L, \\ t^\kappa \nu(]-\infty, -t]) &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} L. \end{aligned}$$

Si  $\exists i$  tel que  $e(i) > 0$ .

$$s_1 = \min \left\{ \frac{\lambda(i)}{e(i)} \mid e(i) > 0 \right\}$$

Pour  $s < s_1$ ,  $M_s = ((M_s)_{ij})$  avec

$$(M_s)_{ij} = \frac{q(i, j)\lambda(i)}{\lambda(i) - se(i)}$$

$\kappa$  est l'unique  $0 < s < s_1$  tel que

$$\rho(M_s) = 1$$

- Introduction
- Renouvellement pour les systèmes
- L' équation à coefficients markoviens
- Modèle analogue en temps continu
- **Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.**
- Perspectives

Travail en collaboration avec Y. GUIVARC'H et E. LE PAGE

Processus auto-régressif multidimensionnel :

$$Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$(A_n, B_n)$  i.i.d. sur  $Gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ .

Si

- $\lim_n \frac{1}{n} \log \|A_1 A_2 \cdots A_n\| = \alpha < 0$  presque sûrement,
- $\mathbb{E} \log^+ \|B_1\| < \infty$ ,

unique solution stationnaire de même loi que :

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} A_1 A_2 \cdots A_{k-1} B_k$$

KESTEN, 1973

$A_n$  matrices **positives**

LE PAGE, 1983

Matrices inversibles quelconques

Condition de **récurrence** :

Pour tout  $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ , la chaîne

$$X_n = x \cdot A_1 \cdots A_n, \quad x \cdot A = \frac{x A}{\|x A\|}$$

visite tous les ouverts de la sphère.



- $k(s) = \lim_n (\mathbb{E} \|A_1 \cdots A_n\|^s)^{1/n}$ ,
- On suppose que  $\sigma = \sup\{s \geq 0; k(s) < \infty\} > 0$ .
- $\Gamma_\mu$  semi-groupe engendré par le support  $S_\mu$  de la loi  $\mu$  de  $A_1$  vérifie la condition **i-p-e** :
  - $\Gamma_\mu$  **i**rréductible : pas de sous-espace invariant non trivial
  - $\Gamma_\mu$  **p**roximal sur l'espace projectif  $\mathcal{P}^{d-1}$  :
$$\forall v, v' \in \mathcal{P}^{d-1}, \quad \exists (a_n) \in \Gamma_\mu \text{ t.q. } \delta(va_n, v'a_n) \rightarrow 0$$
  - $\Gamma_\mu$  **e**xpansif : contient un élément de rayon spectral  $> 1$ .

**Théorème 6**

1.  $\Gamma_\mu$  vérifie la condition i-p-e,
2.  $\Gamma_\mu$  ne laisse pas de cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide invariant,
3.  $\forall x$  vecteur colonne de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathbb{P}(A_1 x + B_1 = x) < 1$

Alors  $k(s) = 1$  a une unique solution  $\kappa$  sur  $]0, \sigma[$ .

Si  $\mathbb{E}[\|A_1\|^\kappa \log \det |A_1|] > -\infty$  et  $\mathbb{E}\|B_1\|^\kappa < +\infty$ , alors

$$\forall x \in \mathbb{S}^{d-1} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \mathbb{P}(xR > t) = \ell e_\kappa(x),$$

où  $\ell > 0$  et  $e_\kappa > 0$  continue symétrique sur  $\mathbb{S}^{d-1}$

Equation de renouvellement :  $Z(x, t) = QZ(x, t) + G(x, t)$  avec

$$Qf(x, t) = \frac{1}{e_\kappa(x)} \int \|xa\|^\kappa e_\kappa(x \cdot a) f(x \cdot a, t - \log \|xa\|) \mu(da).$$

Définition de  $e_\kappa$ , étude de  $Q$  sur  $\mathcal{P}^{d-1}$  : GUIVARC'H, LE PAGE 2004.

Propriétés de  $Q$  sur  $\mathbb{S}^{d-1}$  : étudier les fermés  $\Gamma_\mu$ -invariants sur  $\mathbb{S}^{d-1}$   
 $\implies$  hypothèse 2.

- matrices positives :  $\exists$  cône  $\Gamma_\mu$ -invariant
- $\mu = (\delta_a + \delta_{a'})/2$  avec  $a$  positive,  $a'$  négative,  $x$  vecteur positif  
alors  $x \cdot A_1 \cdots A_n$  ne visite pas l'ouvert des vecteurs non positifs et non négatifs.

Ex :

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a' = \begin{pmatrix} -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_n \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

vérifie toutes les hypothèses du théorème.

**Modèle AR(2)**

$$X_n = a_{1,n}X_{n-1} + a_{2,n}X_{n-2} + b_n \iff Y_n = A_{n-1}Y_{n-1} + B_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

avec

$$\begin{aligned} Y_n &= {}^t(X_n, X_{n-1}), \\ B_n &= {}^t(b_n, 0), \end{aligned} \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} & a_{2,n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ex :**  $\mu = \frac{1}{4}\delta_a + \frac{3}{4}\delta_{a'}$  avec

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a' = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$b_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ou discrète prenant des valeurs autres que 2 et 9/8.

## Question de KESTEN 1973

- dimension  $d = 2$
- $m_1, m_2$  matrices strictement positives
- $m_3 = r_\theta$  rotation d'angle  $\theta$

Est-ce que  $\mu = p_1\delta_{m_1} + p_2\delta_{m_2} + p_3\delta_{m_3}$  peut donner une queue polynômiale ?

$\implies \Gamma_\mu$  vérifie la condition i-p sans cône invariant dès que :

$$\theta \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}, \text{ et } \frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \frac{\theta}{\pi} = \frac{2k+1}{n}.$$

- Introduction
- Renouvellement pour les systèmes
- L' équation à coefficients markoviens
- Modèle analogue en temps continu
- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.
- **Perspectives**

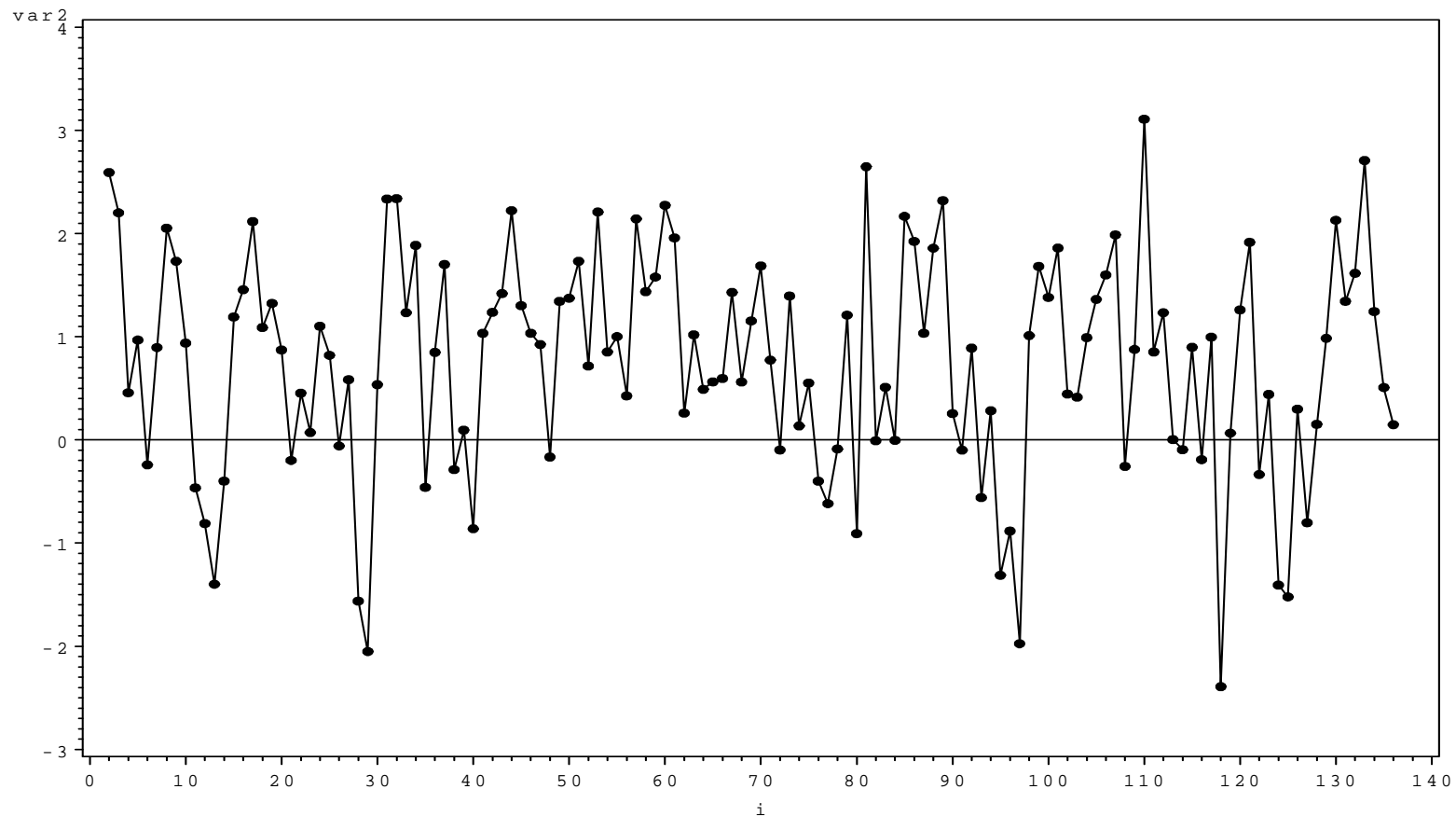
- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d. :
  - matrices positives : cône invariant des vecteurs positifs
  - pas de cône invariant
  - **cône invariant général ?**



## Cas multidimensionnel à coefficients markoviens

- exemple de HAMILTON 1989

PIB américain entre 1952 et 1984 : variation trimestrielle



## ● Modèle :

$$X_n = a_n(0) + a_n(1)X_{n-1} + \dots + a_n(4)X_{n-4} + b_n$$

- $X_n = 100 \log \frac{\text{PIB}_n}{\text{PIB}_{n-1}}$

- $a_n = (a_n(j), j = 0, \dots, 4)$  chaîne de Markov à deux états

$$(909, 265, 29, -126, -110)/1000$$

$$(-420, 216, 628, -73, 97)/1000$$

- Matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0.882 & 0.118 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix}$$

## ● Interprétation des états :

1=croissance, 2=récession  $\implies$  Cycles économiques