



**HAL**  
open science

# Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires

Franck Pérignon

► **To cite this version:**

Franck Pérignon. Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires. Modélisation et simulation. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2004. Français. NNT : . tel-00007535

**HAL Id: tel-00007535**

**<https://theses.hal.science/tel-00007535>**

Submitted on 26 Nov 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LA MEDITERRANÉE (AIX-MARSEILLE II)

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

*Discipline : MÉCANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**Franck Pérignon**

le 06 juillet 2004

---

**VIBRATIONS FORCÉES DE STRUCTURES  
MINCES, ÉLASTIQUES, NON LINÉAIRES**

---

**Directeur et Codirecteur de thèse :**

Bruno Cochelin  
Sergio Bellizzi

**JURY**

MM.	Régis	DUFOUR	Président
	Pierre	ARGOUL	Rapporteur
	Étienne	BALMÈS	Rapporteur
	Sergio	BELLIZZI	Examineur
	Bruno	COCHELIN	Examineur
	Roger	OHAYON	Examineur
	Dominique	FERNIER	Invité







UNIVERSITÉ DE LA MEDITERRANÉE (AIX-MARSEILLE II)

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

*Discipline : MÉCANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**Franck Pérignon**

le 06 juillet 2004

---

**VIBRATIONS FORCÉES DE STRUCTURES  
MINCES, ÉLASTIQUES, NON LINÉAIRES**

---

**Directeur et Codirecteur de thèse :**

Bruno Cochelin  
Sergio Bellizzi

**JURY**

MM.	Régis	DUFOUR	Président
	Pierre	ARGOUL	Rapporteur
	Étienne	BALMÈS	Rapporteur
	Sergio	BELLIZZI	Examineur
	Bruno	COCHELIN	Examineur
	Roger	OHAYON	Examineur
	Dominique	FERNIER	Invité



*Contacts :*

franck.perignon@wanadoo.fr

bruno.cochelin@egim-mrs.fr

bellizzi@lma.cnrs-mrs.fr





## Remerciements

Mes premiers remerciements vont naturellement à mes deux directeurs de thèse, Bruno Cochelin et Sergio Bellizzi, pour leur soutien, leurs conseils et le partage de leurs compétences scientifiques. Ce fut un plaisir de travailler avec vous, que ce soit au bureau, en congrès (merci pour ces nombreux voyages !) ou encore durant les longues nuits de manip, heureusement agrémentées de chocolats et autres gateaux. J'ai également apprécié la grande liberté que vous m'avez accordé dans la gestion de ma thèse ainsi que votre passion pour la recherche et votre bonne humeur toujours présente. Bref, merci de m'avoir supporté ces (presque...) quatre années, et d'en avoir fait une période plus qu'agréable pour moi !

Merci également aux autres membres du jury, M. Régis Dufour, président, MM. Pierre Argoul et Etienne Balmès, rapporteurs, ainsi que MM. Régis Ohayon et Dominique Fernier, examinateurs, pour vous être intéressés à mon travail et pour vos appréciations concernant le mémoire.

Sans financement, pas de thèse, je remercie donc le CNRS, la région Provence-Alpes Côte d'Azur et l'entreprise Metravib RDS, grâce à qui j'ai bénéficié d'une bourse BDI.

Ma reconnaissance va également vers toutes les personnes de l'ESM2 ou du LMA avec qui j'ai eu l'occasion de travailler : les membres des équipes MN et SACADS bien sur mais aussi le personnel administratif, notamment Dominique, Christianne à l'ESM2, Michèle et Marie-Madeleine au LMA, merci pour votre disponibilité et votre gentillesse ! Merci également à Alain Cosquer et Jean-Marc Corneloup pour tout le travail effectué sur les bancs d'essai, ce fut une collaboration très sympathique !

De même, merci au service info de l'ESM2, Olivier, Geoffroy, David et tous les autres, pour leur aide face à la mauvaise volonté récurrente des machines... ou encore leur soutien au cours des cafés du matin, des pots du soir et des manifs de l'après midi.

Il me restera des ces années de thèse énormément de souvenirs, donc pour tous ces bons moments, pour l'ambiance chez MN, à l'ESM2, je tiens à remercier, en vrac, les locataires du bureau 109 et 110, les anciens, Seb, Vincent, Steph, Sameh, Christine, Jérôme et ceux qui y sont encore, Hélène et ses post-it, Lionel pour ses cours de guitare, ses "aventures" hors du commun, Rémi pour son esprit "joueur", à mi-temps seulement faut pas pousser non plus, Momo toujours près à débattre ; merci aussi au bureau canapé et à la machine à café, toujours présente dans les moments difficiles, et à tous les gens de passage, plus ou moins long, dans ces deux lieux de vie et de discussion pas toujours scientifiques ou encore de parties de mots-fléchés endiablées, Thierry et son accueil légendaire quelle que soit l'heure du jour ou de la nuit, Boubou le roi des fléchettes et de la casquette de montagne, Nono-de-Chambo, supporter de l'OM, il en faut bien, Manu le marionnettiste, Jean et ses blagues, sans oublier nos voisins les "ésimiens", Jean-Marc, Stéphane et Adnane, ou encore Cédric, guide touristique déterminant lors des congrès, Séverine reine de la star'ac et du "touillage" de choucroute. Merci aussi aux thésards de SACADS, Florence, Stéphane, Mathieu, Max et à tous les membres, y compris les jeunes retraités, de cette très sympathique équipe qui a bien voulu m'adopter lors de mes passages au LMA. Je n'oublierai pas non plus la "dream team" de foot de l'ESM2, avec coach Guillaume, Jean-Marc buteur des

grandes occasions, Boubou et ses bas noirs, Nono le raleur, Jean-Michel, Jacques, Florent, Olivier et tous les autres ... Merci aussi à l'équipe du "couloir du LATP" pour son accueil post-RU et son café.

Je tiens à remercier particulièrement Steph et Sandra (et Pitou !) pour beaucoup de choses, entre autres de m'avoir accueilli chez eux alors que je n'étais qu'un thésard sans abri. Les tripes de la Digne, les gratins de patates douces ou autres recettes du soir resteront à jamais gravées dans ma mémoire !

Merci aussi à Kéké, Philippe (courage, un jour l'USAP sera champion) Rachid, notre modèle à tous (ceux qui le connaissent comprendront), les jeunes mariés Max et Karine et tous ceux que je m'excuse d'avoir oublié !

Toute ma reconnaissance va aussi vers ma famille, en premier lieu ma mère et mes p'tites soeurs, Marlène et Nelly, qui sera bientôt à ma place ; merci aussi à Marie, Denis et à mon père. Merci à eux qui, bien que très peu concernés par les vibrations non linéaires ont accepté de venir subir ma soutenance.

Et pour clore cette liste de remerciements, un grand merci à Claire pour ... tout ... et notamment pour sa patience lors de mes derniers mois de rédaction ...

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I Dynamique et vibrations : introduction et rappels</b>	<b>5</b>
I.1 Dynamique et vibrations, généralités et rappels historiques . . . . .	7
I.1.1 Introduction . . . . .	7
I.1.2 Premières approches : du linéaire ... . . . .	7
I.1.3 ... vers le non linéaire . . . . .	8
I.2 Quels systèmes dynamiques non linéaires ? . . . . .	9
I.2.1 Excitation . . . . .	10
I.2.2 Types de non linéarités . . . . .	11
I.3 Oscillations libres de systèmes non linéaires . . . . .	12
I.3.1 Rappel du cas linéaire . . . . .	12
I.3.2 Définition et calcul des modes non linéaires . . . . .	16
I.3.3 Quelques illustrations sur un exemple à deux degrés de liberté . . . . .	23
I.4 Régime permanent harmonique . . . . .	27
I.4.1 Résonances non linéaires . . . . .	29
I.4.2 Quelques méthodes de calcul de la réponse approchée d'un système non linéaire discret . . . . .	33
I.5 Bilan du chapitre . . . . .	37
<b>Chapitre II Structures minces en non linéaire géométrique</b>	<b>39</b>
II.1 Introduction . . . . .	41
II.2 Non linéarités dans les structures minces . . . . .	41
II.3 Formulation du problème de l'élastodynamique . . . . .	43
II.3.1 Cas général . . . . .	43
II.3.2 Application aux structures minces . . . . .	46
II.3.3 Discrétisation éléments finis . . . . .	49
II.4 Prise en compte d'un défaut de forme et d'une précontrainte dans le modèle	50
II.5 Bilan du chapitre . . . . .	53

<b>Chapitre III Calcul de la réponse forcée non linéaire par la méthode EH-</b>	
<b>MAN</b>	<b>55</b>
III.1 Introduction . . . . .	57
III.2 Méthode de l'équilibrage harmonique . . . . .	59
III.2.1 Principe . . . . .	60
III.2.2 Application au problème de l'élastodynamique non linéaire . . . . .	60
III.3 Résolution du problème non linéaire par la méthode asymptotique numérique (MAN) . . . . .	63
III.3.1 Présentation générale de la MAN . . . . .	63
III.3.2 Application de la MAN au problème non linéaire obtenu par équilibrage harmonique . . . . .	69
III.4 Bilan du chapitre . . . . .	71
<b>Chapitre IV Introduction de la méthode EHMANN dans le code éléments finis</b>	
<b>Eve</b>	<b>73</b>
IV.1 Présentation générale du code Eve . . . . .	75
IV.1.1 Formulation et types de problèmes traités . . . . .	75
IV.1.2 Organisation du code . . . . .	75
IV.2 Calcul de vibrations non linéaires avec Eve . . . . .	77
IV.2.1 Elements EH . . . . .	77
IV.2.2 Résolution du système non linéaire . . . . .	79
IV.3 Autres développements . . . . .	79
IV.4 Quelques exemples de validation . . . . .	81
IV.4.1 Réponse forcée d'une plaque mince . . . . .	82
IV.4.2 Poutre encastree . . . . .	84
IV.5 Bilan du chapitre . . . . .	88
<b>Chapitre V Simulation numérique de la réponse forcée de structures minces :</b>	
<b>quelques exemples</b>	<b>91</b>
V.1 Introduction . . . . .	93
V.2 Étude d'une poutre encastree-encastree . . . . .	93
V.2.1 Calcul de la réponse libre . . . . .	94
V.2.2 Calcul de la réponse forcée harmonique . . . . .	98
V.2.3 Bilan des simulations sur la poutre . . . . .	106
V.3 Étude d'une poutre à composante non-linéaire . . . . .	106
V.3.1 Présentation du problème . . . . .	106
V.3.2 Calcul de la réponse forcée et prise en compte du poids propre . . . . .	107
V.4 Réponse d'un gong . . . . .	109

---

V.5 Bilan du chapitre . . . . .	111
<b>Chapitre VI Observation expérimentale de la réponse forcée de structures minces</b>	<b>113</b>
VI.1 Introduction . . . . .	115
VI.2 Remarques préliminaires concernant l'observation expérimentale du comportement non linéaire . . . . .	116
VI.3 Dispositif expérimental pour l'étude d'une poutre bi-encastree . . . . .	117
VI.3.1 La structure . . . . .	117
VI.3.2 Système d'excitation . . . . .	118
VI.3.3 Systèmes de mesure . . . . .	121
VI.3.4 Traitement, contrôle et visualisation des signaux . . . . .	121
VI.4 Essais sur la poutre . . . . .	121
VI.4.1 Description des essais . . . . .	121
VI.4.2 Résultats et commentaires . . . . .	123
VI.4.3 Variation des fréquences propres . . . . .	126
VI.4.4 Fluctuation de la réponse . . . . .	129
VI.4.5 Comparaison avec les simulations . . . . .	129
VI.5 Projet d'étude d'une plaque encastree . . . . .	135
VI.6 Bilan du chapitre . . . . .	138
<b>Conclusion générale</b>	<b>141</b>
<b>Table des figures</b>	<b>145</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>151</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>
<b>Annexes</b>	<b>161</b>
<b>Annexe A Quelques compléments à propos du système à deux ressorts</b>	<b>163</b>
A.1 Application de la méthode des échelles multiples . . . . .	164
A.2 Application de l'équilibre harmonique . . . . .	166
<b>Annexe B Construction des matrices "harmoniques"</b>	<b>171</b>
B.1 Calcul des $\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q})$ . . . . .	172
B.2 Calcul de la rigidité géométrique . . . . .	172

<b>Annexe C Etalonnage de l'excitateur bobine-aimant</b>	<b>175</b>
C.1 Objectifs . . . . .	175
C.2 Étalonnage . . . . .	177
C.3 Conclusions . . . . .	177

# Introduction générale

L'analyse des vibrations non linéaires est une thématique actuelle importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle et qui touche de nombreux domaines, tels que l'aéronautique, le génie civil, les transports, l'acoustique musicale ou encore le génie nucléaire. Ce sujet n'est pas nécessairement récent, les premières études datent du XIX<sup>e</sup> avec notamment Poincaré, mais connaît actuellement un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à des niveaux d'excitation importants, ou encore de traiter les nombreux problèmes non résolus de vibrations avec contacts, jeux ou frottements. Au final, les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions de dimensionnement (rupture, fatigue), ou de contrôle du bruit et des vibrations.

Pour les vibrations linéaires, la gamme de techniques ou de logiciels dédiés à l'étude expérimentale ou numérique est très large et permet de traiter un grand nombre de problèmes de rayonnement acoustique ou de structures; l'analyse modale en particulier constitue un outil puissant et largement utilisé. Bref, en linéaire les concepts théoriques sont clairs et de nombreux outils, classiques et bien maîtrisés, sont disponibles sur le marché.

En revanche, pour le traitement des vibrations non linéaires et ce quelque soient les non linéarités considérées, géométriques, matériau ou conditions aux limites, le contraste est flagrant et on se trouve rapidement limité, notamment pour les problèmes d'identification ou de calcul, d'où le besoin d'un effort de recherche.

Au cours des dernières années, une opération de recherche "vibrations non linéaires" a été initiée au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille, dans le but principal de construire des outils numériques pour le traitement de problèmes concrets de structures. Dans un premier temps, l'accent a été mis sur les non linéarités de type géométriques, du fait de leur simplicité d'écriture (formes polynômiales). Les principaux axes recherche sont au nombre de quatre. On s'intéresse d'une part à la définition et au calcul de modes non linéaires de structures minces. Leur utilisation, avec notamment la mise en place de techniques de réduction de modèle constitue une deuxième préoccupation. Le troisième axe concerne l'étude de la réponse de structures minces à une excitation forcée déterministe ou aléatoire. Enfin, on souhaite également progresser dans l'analyse du comportement et des bifurcations de modes de structures. En effet, celle du flambement de structures minces est bien établie (bifurcations et post-bifurcations). On sait notamment qu'il est la conséquence de compression de membrane et des scénari types sont disponibles pour chaque classe de structures, poutres, plaques ou coques. En revanche les bi-



furcations de “modes non linéaires”, bien qu’assez similaires sont nettement moins connues. Ce dernier point, entre autres, a conduit à la volonté de mettre en place des essais sur des structures susceptibles d’exhiber ce type de phénomènes (interaction de mode, doublement de période ...). Les domaines d’application sont bien sur les structures minces (notamment les vibrations de panneaux légers, ou encore de crayons combustibles en milieu fluide, en collaboration avec le CEA de Cadarache), mais aussi la modélisation d’instruments de musique tels que la clarinette (vibration de la hanche) ou le gong. Un projet de recherche concerne également l’étude des oscillations de grande amplitude de chaînes de molécules en collaboration avec l’IRPHE<sup>1</sup> à Marseille ; ces chaînes pouvant éventuellement être représentées par des modèles homogénéisés, s’apparentant aux structures minces.

Les travaux réalisés au cours de cette thèse et présentés dans ce mémoire, s’inscrivent dans cette thématique “vibrations non linéaires”. Les principaux objectifs sont d’une part, la réalisation d’un outil de simulation numérique pour le calcul de la réponse forcée de structures minces, en non linéaire géométrique, conduisant ensuite au calcul des modes non linéaires et d’autre part, la conception d’un banc d’essai ainsi que le démarrage des expériences.

Le mémoire est organisé en six chapitres.

Le premier chapitre traite de la dynamique et des vibrations, sans tout de suite s’attacher au cas des structures minces. On propose dans un premier temps quelques références bibliographiques et historiques à propos des vibrations linéaires et non linéaires, complétées par des généralités sur la dynamique. On traite ensuite le cas de la réponse libre d’un système, avec quelques rappels concernant l’analyse modale linéaire, puis une revue de différentes définitions et moyens de calcul de modes non linéaires. Enfin, on termine par l’étude du régime permanent de systèmes non linéaires, de la réponse forcée harmonique, en s’attachant à décrire les phénomènes caractéristiques des non linéarités, telles que les différents type de résonances. En complément, on propose également une revue non exhaustive des méthodes de résolutions approchées des systèmes d’équations différentielles non linéaires, caractéristiques des problèmes obtenus après discrétisation des modèles de structures. De plus, tout au long du chapitre, un exemple à deux degrés de liberté est utilisé pour illustrer certains des phénomènes et notions introduits.

Dans le deuxième chapitre, on aborde cette fois le cas des structures. Après une revue des différents types de non linéarités possibles, on écrit le problème de l’élastodynamique 3D en grands déplacements, particularisé ensuite au cas des structures minces. Puis, ces modèles sont discrétisés par éléments finis et on y ajoute deux paramètres, un défaut de forme et une précontrainte. Ce chapitre conduit donc à l’écriture d’un système discret d’équations différentielles du second ordre, non linéaires, représentant le comportement d’une structure élastique quelconque.

Au cours du chapitre trois, on propose une méthode de résolution du problème défini au chapitre précédent. Dans un premier temps, on applique la méthode de l’équilibrage harmonique, pour transformer le problème initial en un système algébrique non linéaire. On utilise un formalisme tel que la méthode est facilement implémentable dans un code, à un niveau élémentaire, et valable quelque soit le nombre d’harmoniques retenues. Ensuite, le système obtenu est résolu

---

<sup>1</sup>Institut de Recherche pour l’étude des Phénomènes Hors Equilibre

par une méthode de perturbation-continuation, la MAN (Méthode Asymptotique Numérique), qui permet de construire les solutions en fonctions des paramètres que sont l'amplitude et la pulsation de l'excitation.

Ensuite, le chapitre quatre est consacré à la présentation du code éléments finis utilisé, Eve, ainsi qu'à celle des développements ajoutés au cours de cette thèse, avec en particulier, l'introduction d'éléments "équilibre harmonique" et d'un module de calcul de la réponse forcée en non linéaire. Le chapitre cinq propose différentes études numériques de vibrations non linéaires de structures, basées sur l'utilisation de l'équilibrage harmonique et de la MAN. On y présente trois exemples, un gong, une poutre à composante non linéaire et une poutre bi-encastree, modèle de celle utilisée lors des essais expérimentaux. On s'attache dans ce chapitre à décrire les caractéristiques non linéaires des réponses libres et forcées de la structure considérée et aussi à mettre en valeur les points forts et faibles de notre outil numérique.

Le dernier chapitre traite de l'observation expérimentale de la réponse forcée de structures minces, susceptibles d'exhiber un comportement non linéaire. On y décrit deux bancs d'essai ; l'un préexistant, concerne une poutre bi-encastree, et a été utilisé essentiellement pour mettre au point un protocole expérimental. Le second, qui a été conçu au cours de cette étude, est constitué d'une plaque encastree, équipée d'un système de précontrainte, en vue de répondre au besoin d'observation d'interaction modale évoqué plus haut.



# CHAPITRE I

## Dynamique et vibrations : introduction et rappels

---

**C** e chapitre est consacré aux vibrations non linéaires de systèmes discrets. Son objectif est de donner une vision globale des phénomènes caractéristiques d'un comportement vibratoire non linéaire.

On propose dans un premier temps une brève revue bibliographique et historique à propos de l'étude des vibrations, ainsi que quelques généralités concernant les systèmes dynamiques, notamment les diverses formes possibles de l'excitation et des non linéarités. Ensuite on s'intéresse à la réponse libre, et en particulier au concept de "modes non linéaires". Après un bref rappel du cas linéaire, on donne quelques définitions et moyens de calcul de ces modes. Pour terminer, on traite le cas de la réponse forcée harmonique, en décrivant les différents phénomènes résultant des non linéarités, notamment les résonances internes ou secondaires. Cette dernière partie est complétée par une revue de quelques méthodes de calcul approchées de la réponse forcée d'un système discret. Dans la mesure du possible, les notions et phénomènes décrits, sont illustrés sur un exemple simple à deux degrés de liberté.

---

## PLAN DU CHAPITRE I

---

<b>I.1</b>	<b>Dynamique et vibrations, généralités et rappels historiques . . .</b>	<b>7</b>
I.1.1	Introduction . . . . .	7
I.1.2	Premières approches : du linéaire ... . . . .	7
I.1.3	... vers le non linéaire . . . . .	8
<b>I.2</b>	<b>Quels systèmes dynamiques non linéaires ? . . . . .</b>	<b>9</b>
I.2.1	Excitation . . . . .	10
I.2.2	Types de non linéarités . . . . .	11
<b>I.3</b>	<b>Oscillations libres de systèmes non linéaires . . . . .</b>	<b>12</b>
I.3.1	Rappel du cas linéaire . . . . .	12
I.3.1.a	Définition des modes et fréquences propres linéaires . . . . .	13
I.3.1.b	Oscillations libres . . . . .	13
I.3.1.c	Réponse forcée . . . . .	14
I.3.1.d	Bilan et compléments à propos des modes linéaires . . . . .	15
I.3.2	Définition et calcul des modes non linéaires . . . . .	16
I.3.2.a	Approche Rosenberg . . . . .	17
I.3.2.b	Approche Shaw et Pierre : invariants de l'espace des phases . . . . .	18
I.3.2.c	Approche "formes normales" . . . . .	19
I.3.2.d	Quelques méthodes de calcul des modes non linéaires . . . . .	20
I.3.3	Quelques illustrations sur un exemple à deux degrés de liberté . . . . .	23
I.3.3.a	Cas linéaire . . . . .	24
I.3.3.b	Cas complet . . . . .	24
<b>I.4</b>	<b>Régime permanent harmonique . . . . .</b>	<b>27</b>
I.4.1	Résonances non linéaires . . . . .	29
I.4.1.a	Résonance principale . . . . .	29
I.4.1.b	Résonances secondaires . . . . .	31
I.4.1.c	Résonances internes . . . . .	32
I.4.2	Quelques méthodes de calcul de la réponse approchée d'un système non linéaire discret . . . . .	33
<b>I.5</b>	<b>Bilan du chapitre . . . . .</b>	<b>37</b>

---

## I.1 Dynamique et vibrations, généralités et rappels historiques

### I.1.1 Introduction

L'approche présentée dans ce mémoire se limite à la mécanique des structures, et aux systèmes discrets dans ce premier chapitre, mais de nombreuses disciplines sont aussi concernées par la dynamique des systèmes, linéaires ou non. On peut citer entre autres l'automatique, l'électronique (oscillations dans un circuit RLC), l'électromagnétisme, voir même l'écologie (système proie-prédateurs). De manière générale il s'agit de déterminer pour un système quelconque la relation entre une entrée et la réponse du système, et toutes les caractéristiques relatives (stabilité, régime établi, points singuliers ...). Concrètement, cela aboutit à l'étude de systèmes d'équations différentielles non linéaires. Ainsi la plupart des phénomènes non linéaires et des méthodes présentés ici ne sont pas nécessairement limités à la mécanique. Parmi les nombreux ouvrages traitant de systèmes dynamiques non linéaires, on peut citer entre autres GUCKENHEIMER et HOLMES (1983), BLAQUIÈRE (1966), SEYDEL (1994) ou encore MANNEVILLE (1998-1999). Ce chapitre traite des systèmes dynamiques non linéaires à plusieurs degrés de liberté. Son objectif est de définir et de décrire ces systèmes et les différents phénomènes liés aux non linéarités sans tout de suite s'attacher au cas des systèmes continus et des structures minces qui sera traité au chapitre suivant. La plupart des notions présentées ici sont bien connues. Il ne s'agit donc que de rappels dans le but d'essayer de donner au lecteur une vision globale du problème des vibrations non linéaires, ainsi que des méthodes utilisées pour les traiter, sans pour autant entrer dans les détails, tout en fournissant des références bibliographiques pour un éventuel approfondissement.

Après un bref rappel historique sur l'étude des vibrations linéaires puis non linéaires, on présente le modèle de système utilisé en s'attachant en particulier à décrire les différentes formes de non linéarités et d'excitation possibles. Dans un deuxième temps, on décrit la réponse libre d'un système discret non linéaire, avec en particulier la notion de modes propres non linéaires. Ensuite, on traite le cas de la réponse forcée à une excitation périodique-harmonique, avec tout d'abord une présentation des différents phénomènes induits par les non linéarités puis une revue (non exhaustive ...) des méthodes de calcul approché de cette réponse. En outre, afin de faciliter leur compréhension, certains phénomènes sont illustrés sur un système à deux degrés de liberté, composé de deux ressorts. Les solutions sont calculées alternativement par la méthode des échelles multiples, en analytique, ou par une méthode numérique (équilibre harmonique plus méthode asymptotique numérique), présentée en détail au chapitre III.

### I.1.2 Premières approches : du linéaire ...

D'un point de vue historique, Rayleigh fut l'un des premiers, en 1877, (STRUTT (LORD RAYLEIGH) (1945)) a formulé la théorie des vibrations telle qu'on la connaît aujourd'hui. Il a introduit le concept fondamental d'oscillations d'un système linéaire autour d'une position d'équilibre, et la notion de fréquences et de modes propres, montrant leur existence pour des systèmes dis-

crets ou continus.

Ensuite, au cours des années 20, les besoins de structures légères en aéronautique ont permis de développer l'étude des problèmes de vibration et de dynamique. Il s'agissait entre autres de prédire le comportement aéroélastique des avions. Ainsi pendant une quarantaine d'années, on développa des méthodes plutôt analytiques avec des structures définies par un petit nombre de degrés de liberté (Rayleigh-Ritz ...), en linéaire.

Puis, la naissance et le développement de l'informatique au cours des années soixante a entraîné l'apparition des méthodes matricielles (discrétisation d'expressions variationnelles) puis le développement de codes éléments finis, s'adaptant à l'augmentation constante de la taille des systèmes traités. Ainsi on est aujourd'hui capable d'élaborer des modèles numériques performants pour prédire le comportement de structures en dynamique. De même, l'informatique a beaucoup apporté au traitement de résultats expérimentaux, avec entre autres le développement de techniques d'analyse modale (depuis 1960) et celui de logiciels dédiés à l'analyse vibratoire expérimentale de structures.

De nombreux ouvrages traitent du thème de la dynamique et des vibrations linéaires, entre autres celui de GERADIN (1993), avec en introduction une bibliographie importante sur le sujet. On peut également citer FERTIS (1995) ou encore TIMOSHENKO (1939), DEN HARTOG (1960), MEIROVITCH (1967) ...

Cependant, la limitation de l'étude au cas linéaire occulte de nombreux phénomènes physiques, et pour certains systèmes, la prise en compte des non linéarités s'avère rapidement nécessaire si l'on souhaite en modéliser correctement le comportement réel.

### I.1.3 ... vers le non linéaire

Historiquement, la découverte des aspects de la physique non linéaire classique a débuté au *XIX*<sup>ème</sup> avec, en mécanique céleste, la mesure ou plutôt l'observation des effets séculaires liés à la non linéarité de la loi d'attraction de Newton. Ces travaux ont servi de base d'inspiration à ceux de Poincaré, Lindstedt, Hill ou Liapunov et ont été ensuite prolongés en URSS et au Japon avec Krylov, Bogoliubov ou Hayashi ("Nonlinear oscillations in physical systems"), les progrès dans le traitement des équations différentielles conduisant à une amélioration dans l'analyse des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Ces premières études, et d'autres qui ont suivies, BLAQUIÈRE (1966), Minorski, Stoker, HAYASHI (1985) ..., ont essentiellement été consacrées aux systèmes à un degré de liberté, ou alors limitées à l'approche "single mode", où la forme de la solution est donnée par celle du premier mode linéaire (voir SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a) ou FERTIS (1995)). Cet hypothèse conduit aux mêmes phénomènes que pour un système à un degré de liberté. Ces approches ont permis de mettre en valeur des effets non linéaires sur des modèles ou avec des méthodes (relativement ...) simples. Cependant, certains phénomènes constatés expérimentalement, tels que des combinaisons de résonances ou des résonance internes, ne sont pas visibles sur des modèles à un degré de liberté. Des travaux de Yamamoto (1956), Arnold (1955) ou encore BENNETT et EISLEY (1970) ont montré les limites d'une telle approche et présenté des études de systèmes à plusieurs degrés

de liberté. ROSENBERG (1966) propose une approche originale, pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté, introduisant la notion de mode propre non linéaire. (voir également l'ouvrage de VAKAKIS *et al.* (1996) à ce sujet). Ce cas est traité plus en détail au paragraphe I.3. Pour terminer, il est important de citer deux livres qui font référence sur le sujet des vibrations, dédiés exclusivement au cas non linéaire et avec une approche plutôt analytique : NAYFEH et MOOK (1979) qui traite de manière générale des oscillations non linéaires et de tous les phénomènes qui s'y rapportent, présentant des études qualitatives et quantitatives de celles-ci et l'ouvrage en deux tomes de Szemplinska qui effectue un bilan des différentes méthodes analytiques approchées pour le calcul de la réponse de systèmes à un degré de liberté (SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a)) ou à plusieurs degrés de liberté (SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b)). On trouvera d'ailleurs dans ces ouvrages une bibliographie très complète sur le sujet.

## I.2 Quels systèmes dynamiques non linéaires ?

Dans ce mémoire, on s'intéresse au calcul de la réponse forcée à une excitation harmonique, pour des structures minces en non linéaire géométrique et, par extension avec une excitation très faible, à la réponse libre. Concrètement il s'agit de résoudre un système d'équations différentielles, avec des non linéarités polynomiales, obtenu par discrétisation des équations aux dérivées partielles non linéaires issues du problème de l'élastodynamique. L'objectif de cette partie est de décrire le modèle mathématique utilisé pour représenter le comportement dynamique d'un système discret quelconque, en s'attachant en particulier à définir les différents types d'excitation et de non linéarités possibles.

Le problème de l'élastodynamique (voir le chapitre II) conduit après discrétisation, par l'utilisation par exemple d'une méthode de discrétisation type Ritz ou éléments finis ou encore une projection sur la base modale<sup>1</sup>, au système d'équations différentielles non linéaires du deuxième ordre suivant :

$$M\ddot{\mathbf{U}} + C\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{F}_1(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) = \mathbf{0} \quad (\text{I.1})$$

$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$  représente l'ensemble des variables dépendantes de l'espace et du temps, caractérisant le système.  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{C}$  celle d'amortissement,  $\mathbf{K}$  celle de rigidité, et enfin  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  représentent les termes non linéaires et les sollicitations extérieures. Les matrices sont de taille  $n$ , nombre de degré de liberté du problème. Il s'agit alors de calculer  $\mathbf{U}$  (de manière approchée en général), mais aussi d'étudier la stabilité des solutions obtenues, afin de déterminer si elles ont un sens physique ou non. On appellera également système linéaire sous-jacent ou associé, le système (I.1) pour  $\mathbf{F}_2(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) = \mathbf{F}_2(t)$  et  $\mathbf{F}_1(\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{0}$ . L'étude de ce dernier est un préalable nécessaire au traitement du cas général non linéaire. En effet les solutions linéaires, bien que rapidement limitées, fournissent une base de départ (dans les méthodes de perturbation par exemple) ou peuvent tout au moins servir de référence pour identifier les comportements typiquement non linéaires.

<sup>1</sup>des précisions sur le traitement des systèmes continus sont données dans la partie III.1



Au final, on considère que (I.1) est suffisamment générale pour représenter le cas de n'importe quel système mécanique continu ou discret type masses-ressorts-amortisseurs.

Dans ce modèle, outre le nombre de degrés de liberté, les points déterminants sont d'une part la représentation de l'excitation et d'autre part le type de non linéarité inclus. Ainsi, l'étude de systèmes non linéaires à un degré de liberté a permis d'exhiber de nombreux phénomènes caractéristiques des non linéarités de manière relativement simple mais exclu toute une classe de phénomènes tels que les résonances internes, visibles pour des modèles à plusieurs degrés de liberté. On effectue ci-après une revue des différentes formes d'excitation et de non linéarité, pour les systèmes mécaniques. Il s'agit simplement de donner un aperçu général des quelques possibilités, avant de traiter en détail le cas d'une excitation harmonique, pour des non linéarités polynomiales (i.e. celles obtenues pour les structures minces en non linéaire géométrique).

### I.2.1 Excitation

On décrit ici, rapidement, deux types de modèle pour l'excitation : externe ou paramétrique.

- *excitation externe* :

si  $\mathbf{F}_2(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) = \check{\mathbf{F}}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{P}$ . De plus, lorsque la réponse du système n'a aucune influence (ou alors négligeable) sur la force excitatrice, on parle de source d'énergie idéale. Cela signifie que cette dernière est illimitée ou alors suffisamment importante pour ne pas dépendre de la réponse du système. Un cas particulièrement intéressant est celui de sollicitations périodiques sous la forme de séries harmoniques :

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cos(\Omega_k t + \theta_k) \quad (\text{I.2})$$

Dans le cas contraire, source non idéale, la réponse est susceptible de modifier l'excitation. En général il faut ajouter une équation décrivant le lien entre le système idéal et l'excitation. NAYFEH et MOOK (1979) traitent quelques exemples de cette situation et montrent en particulier que des sauts peuvent avoir lieu dans le cas linéaire.

- *excitation paramétrique* :

lorsque l'excitation apparaît dans les coefficients de l'équation aux dérivées partielles, et devient donc un paramètre. A un degré de liberté, on obtient par exemple les équations de Mathieu, largement traitées dans la littérature :  $\ddot{x} + (\delta + 2\epsilon \cos 2t)x = 0$ . C'est aussi le cas d'une plaque sollicitée dans son plan. Ce type de sollicitation conduit à des résonances dites paramétriques. Ce problème n'est pas traité dans cette thèse mais on trouvera plus de détails dans NAYFEH et MOOK (1979) (exemple entre autres du pendule avec un support mobile) ou SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b).

On peut également citer le cas où la pulsation ou l'amplitude de l'excitation varie en fonction du temps, à savoir celui d'une excitation *non stationnaire*. On s'intéresse alors à la déviation de la réponse par rapport à celle du système stationnaire, essentiellement autour de la résonance où le phénomène est le plus sensible. On observe alors un déplacement du pic de résonance et des phénomènes de battements. NAYFEH et MOOK (1979) proposent une bibliographie à ce sujet,

(en particulier l'ouvrage de Mitropolsky, *Problems of the asymptotic theory of nonstationary vibrations, 1965*) et traitent quelques exemples par la méthode des échelles multiples, pour des non linéarités cubiques.

Dans ce mémoire on se limite au cas d'une excitation externe, périodique, de la forme (I.2), avec éventuellement  $F_k$  très petit pour tendre vers la réponse libre.

### I.2.2 Types de non linéarités

En pratique, toute structure réelle est non linéaire, pour diverses raisons (matériau, géométrie, contacts, frottements, joints avec friction ou perte de contact, conditions limites, chocs, etc...). Cependant ces effets peuvent être plus ou moins négligeables. WORDEN et TOMLINSON (2001) effectuent une revue des principaux types de non linéarités, qui est brièvement présentée ici : amortissement ou raideur de type polynôme, jeux, impact, friction, effets de saturation. En général, les non linéarités dépendent de la fréquence, de l'amplitude des déplacements ou de l'excitation et de la vitesse.

- *raideur polynomiale (essentiellement quadratique ou cubique) :*

$$F(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) = k\mathbf{U} + k_p\mathbf{U}^p + \dots$$

Ce cas est typique des structures minces type plaques ou coques. Deux situations se présentent : soit la raideur diminue lorsque l'amplitude des déplacements augmente (adoucissement), soit c'est l'effet inverse (raidissement). L'équation de Duffing (1918) en est l'exemple le plus connu et le plus étudié :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku + k_3u^3 = P(t) \quad (\text{I.3})$$

Cette équation à un degré de liberté est relativement simple et surtout représentative de nombreux systèmes physiques du fait entre autre de sa symétrie impaire. Son étude permet de montrer quelques phénomènes non linéaires (voir WORDEN et TOMLINSON (2001), GUCKENHEIMER et HOLMES (1983) ...).

- *raideur (ou amortissement) bilinéaire :*

$$F(U) = \begin{cases} k_1U, \text{ pour } U > 0 \\ k_2U, \text{ pour } U < 0 \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

On rencontre ce genre de non linéarités lors de chocs.

- *raideur linéaire par morceaux :* en cas de secousses, perte de contact ...
- *amortissement non linéaire :*

$$F(U, \dot{U}) = C\dot{U}|\dot{U}| \quad (\text{I.5})$$

C'est le cas par exemple de l'amortissement introduit par l'écoulement d'un fluide autour des crayons combustibles d'un réacteur à eau pressurisée (PISAPIA (2004), PERIGNON (2000)).

- *frottement de Coulomb :* amortissement du type  $F(\dot{U}) = C\text{sign}(\dot{U})$ .

Dans la suite, on considérera des non linéarités de raideur de type polynomiales, essentiellement quadratiques ou cubiques, qui sont celles rencontrées pour les structures minces en non linéaire géométrique. On évoquera également le cas des non linéarités dans la chaîne de mesure au chapitre expérimental (VI).

### I.3 Oscillations libres de systèmes non linéaires

Afin de déterminer les caractéristiques d'un système, il est assez naturel de s'intéresser à la réponse de celui-ci à une excitation extérieure ou en régime libre. La réponse forcée d'un système est étudié au §I.4. On considère dans ce paragraphe les oscillations libres, soit donc la réponse d'un système à des conditions initiales données (un lâcher par exemple). En général, la structure vibre sur ses modes propres. En linéaire, les notions de modes et fréquences propres, caractéristiques dynamiques du comportement du système sont bien connues et maîtrisées. Leur calcul fournit notamment des informations sur les résonances, qui ont lieu autour des modes. Ils servent également de base à l'analyse modale qui constitue un outil puissant pour le calcul de la réponse d'un système et permettent la construction de modèles réduits (voir les nombreux ouvrages traitant de ce sujet : GERADIN (1993), FERTIS (1995) ...). Au final, on dispose aujourd'hui de nombreux outils, codes de calcul ou logiciels destinés aux essais expérimentaux, utilisant ces notions classiques et bien maîtrisées.

En revanche, en non linéaire la situation est plus compliquée. Il est nécessaire de donner une nouvelle définition des modes. En effet, les formes modales et les fréquences propres vont dépendre de l'amplitude du mouvement (conduisant à la fameuse "backbone curve", i.e. relation déplacements-fréquences), le théorème de superposition n'est plus applicable et de nouveaux phénomènes peuvent avoir lieu (bifurcations, résonances internes, etc...). Ainsi, la définition de "modes non linéaires", et leur utilisation, bien que restant un sujet largement ouvert, fait l'objet de nombreux travaux. L'intérêt de l'emploi de modes non linéaires est de définir, ou tout au moins d'essayer, un outil équivalent aux modes propres classiques mais pour les problèmes non linéaires. Ceci afin de traiter entre autres les résonances (celles de systèmes non linéaires ont lieu aussi autour des modes non linéaire, VAKAKIS *et al.* (1996)), de construire des modèles réduits, de définir un "principe de superposition" non linéaire. Il s'agit aussi d'utiliser cet outil pour traiter le cas des résonances internes, des couplages, les problèmes de stabilité et de bifurcation. Dans cette partie, après un bref rappel du cas linéaire, on introduit la notion de mode propre non linéaire, et quelques définitions existantes, puis on propose une revue de certaines méthodes disponibles pour leur calcul. Pour terminer, on traite le cas d'un système à deux degrés de liberté, constitué de deux ressorts, pour illustrer ce qui précède.

#### I.3.1 Rappel du cas linéaire

Le cas des systèmes linéaires est bien connu et largement traité dans la littérature, que ce soit pour les systèmes discrets ou continus. On rappelle ici brièvement quelques résultats pour des

systèmes conservatifs à plusieurs degrés de liberté. On s'intéresse aux notions fondamentales de modes et fréquences propres, dont l'extension en non linéaire sera présentée plus loin (I.3.2) et à l'utilisation de l'analyse modale pour le calcul de la réponse forcée. Il s'agit surtout de mettre en valeur les points forts de ces notions en vue de préparer et justifier une extension au non linéaire.

### I.3.1.a Définition des modes et fréquences propres linéaires

Les modes sont définis comme des solutions périodiques du problème libre conservatif,

$$M\ddot{U} + KU = \mathbf{0} \quad (\text{I.6})$$

données par :

$$U_k(t) = \Psi_k(a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) = \Psi_k q_k(t) \quad (\text{I.7})$$

Les  $\omega_k$  (fréquences propres) et  $\Psi_k$  (formes propres) sont des constantes indépendantes du temps, obtenues par la résolution du problème aux valeurs propres :

$$(K - \omega_k^2 M)\Psi_k = 0 \quad (\text{I.8})$$

$k$  variant de 1 à  $n$ , nombre de degrés de liberté du système (éventuellement infini pour un système continu).

### I.3.1.b Oscillations libres

Revenons maintenant au calcul des oscillations libres d'un système discret de la forme (I.6). Les modes définis ci-dessus constituent une base de l'espace des solutions et tout vecteur solution se décompose alors de manière unique :

$$U(t) = \sum_{k=1}^n \Psi_k q_k(t) \quad (\text{I.9})$$

Ce qui permet de découpler le système de départ en  $n$  oscillateurs à un degré de liberté :

$$\begin{cases} \ddot{Q} + \Lambda Q = \mathbf{0}, & \Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) \quad Q = \{q_1 \dots q_n\} \\ + \text{Conditions initiales} \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

dont les solutions sont :

$$q_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t \quad (\text{I.11})$$

les  $a_k$  et  $b_k$  étant déterminés par les conditions initiales. Ainsi, on peut reconstruire  $U(t)$  en utilisant (I.9). À noter que si les conditions initiales sont colinéaires à  $\Psi_k$ , le mouvement restera sur le mode  $k$ , le système se déforme alors colinéairement au vecteur propre  $\Psi_k$ , constant, tous ses points étant à la même pulsation  $\omega_k$ , et ce quelle que soit l'amplitude des oscillations. Souvent en pratique, pour les systèmes continus, quelques modes suffisent à décrire correctement

la réponse du système. On ne retient donc qu'un nombre limité de termes dans la somme (I.9) ("réduction" de modèle), ce qui permet de fortement réduire sa dimension et donc de faciliter sa résolution. Cette technique est largement utilisée pour discrétiser les systèmes continus d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement d'une structure, que le système soit linéaire ou non (approches dites "single-mode" ou "multi-mode", voir notamment SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a)). Bien entendu, dans ce dernier cas, seule la partie linéaire est découplée et (I.10) s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{Q}} + \Lambda \mathbf{Q} + \underbrace{NL(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})}_{\text{termes non linéaires}} = \mathbf{0} \quad (\text{I.12})$$

### I.3.1.c Réponse forcée

Soit le système non conservatif suivant :

$$M\ddot{\mathbf{U}} + C\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{KU} = \mathbf{F}(t) \quad (\text{I.13})$$

La réponse d'un tel système est la somme d'une réponse transitoire, fonction des conditions initiales et qui est la solution en régime libre obtenue pour  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$ , et d'une solution particulière qui correspond au régime établi, indépendante des conditions initiales. Dans la suite, on s'intéressera uniquement au régime permanent harmonique, c'est à dire celui obtenu pour une force<sup>2</sup>  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F} \cos \Omega t$  et après disparition du transitoire. On utilise à nouveau la décomposition (I.9) qui conduit au système découplé facilement résolvable<sup>3</sup>, (voir GERADIN (1993)) :

$$\ddot{\mathbf{Q}} + \xi \dot{\mathbf{Q}} + \Lambda \mathbf{Q} = \Psi^t \mathbf{F}(t) \quad \Psi \text{ matrice des formes propres,} \quad (\text{I.14})$$

$\xi$  étant une matrice diagonale, dont les solutions sont :

$$q_k(t) = a_k \cos(\Omega t + \nu_k) \quad (\text{I.15})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = \frac{\sum_j \Psi_{k,j}^t F_j}{\sqrt{(\omega_k^2 - \Omega^2)^2 + (\xi_k \Omega)^2}} \\ \tan \nu_k = \frac{\xi_k \Omega}{\Omega^2 - \omega_k^2} \end{array} \right. \quad (\text{I.16})$$

Ensuite, la réponse  $\mathbf{U}(t)$  est donnée par superposition des réponses modales (I.9). Pour  $\Omega = \omega_k$  et en l'absence d'amortissement,  $a_k$  tend vers l'infini, et on retrouve le phénomène bien connu de résonance autour du mode linéaire correspondant. Le point important est qu'une excitation harmonique conduit à une réponse harmonique de même pulsation, ce qui n'est pas nécessairement le cas en non linéaire comme on le verra plus loin.

<sup>2</sup>Comme toute excitation périodique peut s'exprimer à l'aide de série de Fourier, le cas plus général peut se déduire par application du principe de superposition

<sup>3</sup>dans la suite de l'étude l'amortissement ne sera pas pris en compte et le but de ce paragraphe est simplement de montrer l'intérêt des modes propres. C'est pourquoi on considère ici pour simplifier que l'amortissement est diagonalisable (Rayleigh ou autre), d'une forme qui permet l'écriture (I.14). Pour plus d'informations sur les différents type d'amortissements, voir FERTIS (1995) ou autres ouvrages généraux sur les vibrations

### I.3.1.d Bilan et compléments à propos des modes linéaires

En résumé, la connaissance des modes et fréquences propres d'un système linéaire :

- donne une ossature pour la réponse forcée (pic de résonance autour des modes),
- permet de découpler le système de départ, facilitant la résolution du problème (analyse modale), en régime libre ou forcé,
- permet la construction de modèles réduits.

De plus, ce calcul se résume à la résolution d'un simple problème aux valeurs propres, conduisant à des modes et fréquences propres constants, indépendants de l'amplitude des vibrations.

Nous allons maintenant préciser quelques propriétés importantes de ces modes, conduisant à trois définitions ou plutôt représentations graphiques de ceux-ci, utiles en vue de l'extension de la notion de mode au cas non linéaire : dans l'espace de configuration, dans l'espace de phase et dans le domaine fréquentiel.

Notant  $u_j^k, j = 1 \dots n$ , les coordonnées du vecteurs  $\mathbf{U}_k(t)$ , on a la propriété (voir (I.7)) importante suivante :

$$\frac{u_j^k(t)}{u_1^k(t)} = c_j^k \quad (\text{I.17})$$

$c_j^k$  constante indépendante du temps. Cela implique que le mouvement d'un degré de liberté détermine celui des autres de manière unique. Ainsi, dans *l'espace de configuration* ( $u_i$  en fonction de  $u_j$ ), le mode est représenté par une droite (ligne modale) (voir la courbe (b) de fig.I.1). Cette propriété constitue la base du paramétrage utilisé pour la définition des modes propres non linéaires (voir I.3.2)

*L'espace des phases* est constitué de l'union de l'espace des déplacements et de celui des vitesses, et sera donc de dimension  $2n$ . Dans cet espace on obtient une autre visualisation des modes, qui sert de base à la définition des modes propres non linéaires utilisée par Shaw et Pierre (voir I.3.2.b). Les équations du mouvement sont alors réécrites sous forme d'un système du premier ordre en posant  $\mathbf{Y}(t) = \dot{\mathbf{U}}(t)$ . (I.7) s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_k(t) \\ \mathbf{Y}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} q_k(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Psi}_k \end{bmatrix} \dot{q}_k(t) \quad (\text{I.18})$$

Le mode propre est ici représenté par une surface de dimension 2, variété invariante de l'espace de phase ((c) de fig I.1) ; invariante dans le sens où pour des conditions initiales sur cette surface, la trajectoire engendrée reste dans celle-ci. La dynamique sur le mode (i.e. la trajectoire  $q(t)$ ) est obtenue en projetant les équations du mouvement sur la surface. La représentation de  $q(t)$  en fonction de  $\dot{q}(t)$  pour des conditions initiales fixées dans la variété donne une orbite périodique circulaire, qui est un invariant de dimension 1 de l'espace des phases.

La représentation dans le domaine fréquentiel est plus classique ((a) de fig. I.1), avec des pics aux résonances. La figure I.1 montre trois visualisations pour un mode linéaire : domaine fréquentiel, espace de configuration et espace de phase. Les deux dernières permettent d'avoir une vision "géométrique" des modes et sont surtout pratiques en vue d'une extension au domaine non linéaire. Ces courbes sont à comparer à celles obtenues dans le cas non-linéaire et présentées

plus loin (figure I.3).

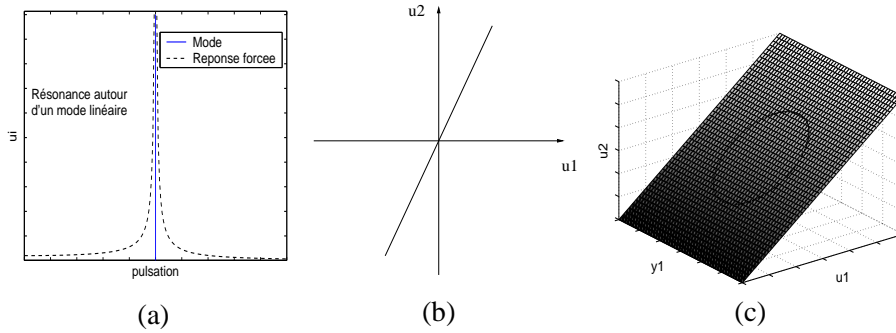


FIGURE I.1 - Diverses représentations pour les modes linéaires : (a) dans le domaine fréquentiel, complétée ici par la réponse forcée en régime permanent, (b) ligne modale dans l'espace de configuration, (c) surface plane invariante dans l'espace des phases et orbite périodique.

### I.3.2 Définition et calcul des modes non linéaires

Comme rappelé ci-dessus, en linéaire, la connaissance des modes et fréquences propres est déterminante pour celle du comportement libre ou forcé d'un système, et fournit avec l'analyse modale un outil de calcul puissant. En revanche, ces notions ne sont plus applicables pour un système non linéaire, du fait entre autres de la perte du principe de superposition et de la dépendance des formes modales vis à vis de l'amplitude des vibrations (voir par exemple les résultats expérimentaux proposés par BENAMAR *et al.* (1991) pour des poutres ou BENAMAR *et al.* (1993) pour des plaques). L'intérêt de définir des "modes non linéaires" est alors de décrire un outil aussi utile que les modes linéaires mais prenant en compte toutes les spécificités des systèmes non linéaires. Il s'agit d'une part de pouvoir donner une "ossature" pour la réponse forcée (les "backbone curves" décrites plus bas) incluant les différents types de résonances, les bifurcations, et d'autre part de construire des modèles réduits à partir de modes non linéaires et pourquoi pas d'aller vers des méthodes d'analyse modale non linéaires.

La définition et l'utilisation de modes non linéaires est un sujet encore largement ouvert mais pour lequel de nombreux travaux ont déjà été réalisés. Il existe plusieurs définitions ou approches des modes non linéaires, et on se propose ici d'en décrire quelques unes.

Tout d'abord, en parallèle directe avec leurs homologues linéaires, les modes non linéaires peuvent être définis comme les solutions périodiques d'un système libre et non amorti du type :

$$\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{F}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{0} \quad (\text{I.19})$$

A la différence du cas linéaire, les formes modales vont maintenant dépendre de l'amplitude des oscillations. Ces modes non linéaires peuvent être vus comme un prolongement continu des modes linéaires lorsque l'amplitude des oscillations augmente. Ils sont tangents aux modes linéaires associés et les résonances non linéaires ont lieu autour des modes non linéaires (VAKAKIS *et al.*

(1996)), ce qui constitue en partie l'intérêt de leur calcul. Cependant la présence de phénomènes de localisation (VAKAKIS *et al.* (1996)) et de bifurcations fait que le nombre de modes peut être supérieur au nombre de degrés de liberté.

Dans cette partie on s'est intéressé à trois autres approches pour décrire les modes non linéaires :

- l'approche de Rosenberg (ROSENBERG (1962), ROSENBERG (1966), RAND (1974), VAKAKIS *et al.* (1996))
- l'approche de Shaw et Pierre (SHAW et PIERRE (1993a), SHAW et PIERRE (1993b), BOIVIN *et al.* (1995), BOIVIN *et al.* (to appear), PESHEK *et al.* (2002))
- l'approche "formes normales" ( JEZEQUEL et LAMARQUE (1991), NAYFEH et NAYFEH (1994), TOUZÉ *et al.* (2003))

Après les avoir décrites, on propose une revue de quelques techniques de calcul de ces modes.

### I.3.2.a Approche Rosenberg

La généralisation du concept de modes normaux aux systèmes non linéaires a commencé avec les travaux de Lyapunov (1907) dont le théorème montre l'existence d'une famille de solutions périodiques (les modes normaux non linéaires), synchronisées, au voisinage de points d'équilibre stables de systèmes conservatifs à plusieurs degrés de liberté, sous réserve qu'il n'y ait pas de relations de résonance interne. Rosenberg a ensuite été le premier à avoir formulé et développé une théorie des modes normaux non linéaires. Il propose une approche radicalement nouvelle pour le calcul de vibrations de systèmes à plusieurs degrés de liberté. Plutôt que d'employer des méthodes d'approximation analytique, il utilise une approche géométrique et étudie les trajectoires dans l'espace de configuration. Considérant un système conservatif, composé de masses reliées par des ressorts non linéaires, il propose pour les modes normaux non linéaires la définition suivante (ROSENBERG (1966)) :

*"vibrations à l'unisson d'un système autonome."*

soit :

- la fréquence de chaque composante du système est la même
- toutes les masses passent par leur position d'équilibre 0 au même instant
- toutes les masses atteignent leur translation maximale au même instant
- le mouvement de chaque masse, à chaque instant  $t$ , est une fonction univoque du mouvement de l'une d'elles, qui peut être arbitrairement choisie à cet instant. Ce qui conduit à paramétrer le mouvement en posant :

$$u_i(t) = X_i(u_{ref}(t)) \tag{I.20}$$

$u_{ref}(t)$  étant un degré de liberté "référence" choisi arbitrairement.

Rosenberg introduit également le concept de *lignes modales* : celles-ci correspondant aux trajectoires des modes normaux de vibrations dans l'espace de configuration, pour une amplitude fixée. Son approche se limite aux systèmes conservatifs ou possédant une intégrale première du



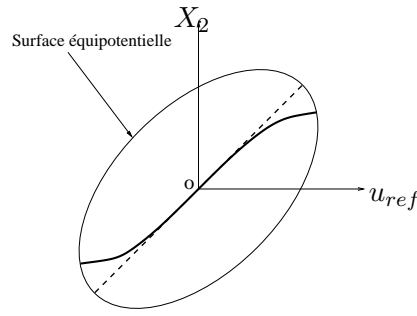


FIGURE I.2 - *Approche Rosenberg, ligne modale pour un système à deux degrés de liberté,  $u_2 = X_2(u_{ref})$  : courbes passant par l'origine et finissant sur les surfaces équipotentiellles pour un niveau d'énergie fixé. - - cas linéaire, — cas non linéaire.*

mouvement, non gyroscopiques, et pour des forces internes non linéaires impaires (sa définition ne s'applique donc pas à l'exemple décrit plus loin ((I.36)) qui possède des non linéarités quadratiques). Sous les hypothèses de Rosenberg, on recherche alors des solutions périodiques  $u_i(t)$  (les modes normaux), pour un système masses-ressorts, conservatif à  $n$  degrés de liberté du type :

$$\ddot{u}_i + \frac{\partial V(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1 \dots n \quad (\text{I.21})$$

$V$  étant l'énergie potentielle du système et  $n$  le nombre de degrés de liberté. L'introduction de la paramétrisation (I.20) conduit à un système ne dépendant plus explicitement du temps. Son report dans les équations du mouvement donne une représentation de  $X_i$  qui est la trajectoire du mode  $i$  dans le plan  $(u_{ref}, u_i)$ , la ligne modale, uniquement en fonction de  $u_{ref}$ ;  $X_i$  est cherché sous forme de développement asymptotique (ROSENBERG (1966), VAKAKIS *et al.* (1996) avec un exemple à deux degrés de liberté). La figure I.2 donne une représentation des lignes modales pour un exemple à deux degrés de liberté, pour le système non linéaire et le système linéarisé correspondant. A noter que les lignes modales passent en zéro et que la ligne non linéaire est tangente en ce point au mode linéaire. De plus, contrairement au cas linéaire, la période des vibrations et la déformée dépendent de l'amplitude du mouvement, (i.e. du niveau d'énergie), d'où la courbure des lignes.

Lorsque la relation (I.20) est linéaire (i.e.  $\frac{u_i}{u_{ref}} = \text{constante}$ ), les modes sont dit semblables, et les lignes modales sont alors des droites. Un mode semblable est indépendant de l'amplitude de vibration (ce qui n'est pas nécessairement le cas de la pulsation!). En particulier, les modes normaux linéaires sont semblables avec en plus une pulsation constante.

### I.3.2.b Approche Shaw et Pierre : invariants de l'espace des phases

Shaw et Pierre (SHAW et PIERRE (1993a), ...) ont proposé une définition et une méthode de calcul des modes normaux non linéaires basée sur le concept mathématique d'invariant de l'espace des phases et sur le théorème de la variété centrale (voir GUCKENHEIMER et HOLMES (1983)). Leur approche est valable pour des systèmes non conservatifs, sans hypothèse d'existence

d'une intégrale première du mouvement, à la différence de l'approche Rosenberg. Ils l'appliquent à des systèmes discrets, SHAW et PIERRE (1993a), ou continus, SHAW et PIERRE (1993b), BOIVIN *et al.* (to appear), PESHEK *et al.* (2002), VAKAKIS *et al.* (1996).

Avant tout, on rappelle que *l'espace des phases* est constitué de l'union de l'espace des déplacements et de celui des vitesses, et sera donc de dimension  $2n$ ,  $n$  étant le nombre de degrés de liberté du système de départ. Qualitativement, une surface est un invariant de l'espace des phases pour un système donné lorsque pour des conditions initiales dans l'invariant, la trajectoire obtenue reste dans cette surface. Un mode normal du mouvement pour un système autonome est donc défini comme :

*“ un mouvement sur une surface à deux dimensions, définie comme une variété invariante de l'espace des phases.”*

En outre, cet invariant est tangent en un point d'équilibre stable du système au sous espace plan correspondant au mode normal du système linéarisé autour de cet équilibre. La recherche des modes se résume donc à celle de ces sous espaces invariants et de la dynamique associée, dans le sous espace. Les détails pour le calcul de ces surfaces par différentes méthodes sont donnés plus loin (I.3.2.d).

### I.3.2.c Approche “formes normales”

L'approche “formes normales” consiste à proposer un changement de variable non linéaire, pour transformer le système non linéaire de départ en un système plus simple (relativement ...) où ne sont conservés que les termes non linéaires importants pour la dynamique. Ce changement est à rapprocher de la formule (I.9) utilisée en linéaire, toujours en vue de construire un modèle réduit par superposition modale. Le principe de cette méthode est issue de la théorie des formes normales, basée sur les théorèmes de Poincaré et Poincaré-Dulac (voir par exemple GUCKENHEIMER et HOLMES (1983)). Ce théorème affirme qu'en l'absence de relation de résonance<sup>4</sup> entre les valeurs propres de  $\mathbf{K}$ , opérateur linéaire, un système d'équations non linéaires du type

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{F}(\mathbf{U}) \quad (\text{I.22})$$

avec  $\mathbf{F}$  non linéaire tel que  $\mathbf{F}(0) = \mathbf{0}$ , il existe un changement de variable non linéaire,  $\mathbf{U} = \mathbf{Y} + \mathbf{h}(\mathbf{Y})$ , tel que (I.22) se réduise à sa partie linéaire et s'écrit :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{K}\mathbf{Y} \quad (\text{I.23})$$

Par contre, les termes résonants, s'ils existent ne peuvent être éliminés. L'application de ce principe aux vibrations de systèmes mécaniques consiste donc à chercher  $\mathbf{h}(\mathbf{Y})$  pour réécrire le système de départ comme la somme d'une partie linéaire et de termes résonants non linéaires. Cette méthode est décrite dans NAYFEH et NAYFEH (1994) ou JEZEQUEL et LAMARQUE (1991) avec un formalisme complexe, ou encore TOUZÉ (2003).

En complément de ces trois approches on peut également citer BOUC et BELLIZZI (2003) qui

<sup>4</sup>les notions de relation de résonance et de résonances internes sont définies au §I.4.1.c

définissent les modes non linéaires par la donnée d’une “fréquence”,  $\Omega$  et d’une “forme modale”,  $\Psi$ , dépendant toutes deux de deux variables amplitude,  $a$ , et phase,  $\Phi$ , et  $2\pi$ -périodiques par rapport à la phase. Ils recherchent alors les solutions périodiques du système (I.19) (pour une partie non linéaire antisymétrique) sous la forme :

$$\mathbf{U}(t) = a\Psi(a, \varphi(t)) \cos \Phi(t), \quad \dot{\Phi}(t) = \Omega(a, \Phi(t)) \quad (\text{I.24})$$

Le report de (I.24) dans les équations du mouvement fournit une représentation paramétrique du sous-espace invariant caractérisant le mode, la dynamique étant donnée par la deuxième équation de (I.24). La résolution numérique se fait à l’aide d’une méthode de Galerkin en  $\Phi$ .

Pour conclure cette partie on présente ci-dessous (figure I.3) le pendant en non linéaire de la figure I.1, avec les diverses représentations des modes non linéaires : dans le domaine fréquentiel, dans l’espace de configuration (Rosenberg) et dans l’espace de phase (Shaw et Pierre).

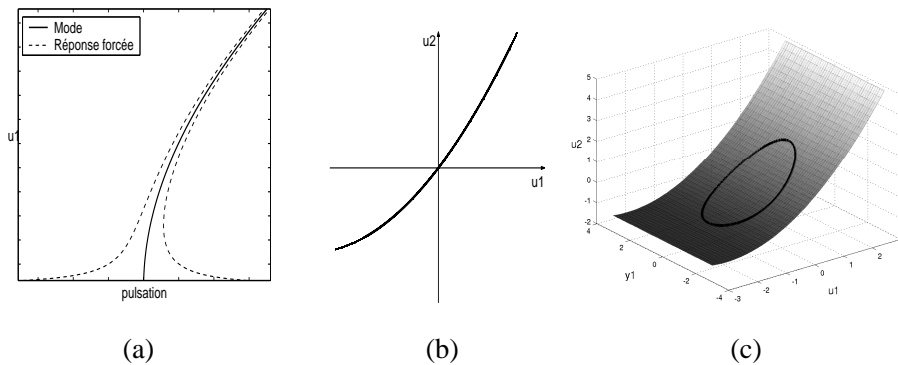


FIGURE I.3 - Diverses représentations pour les modes non linéaires : (a) dans le domaine fréquentiel, complété ici par la réponse forcée en régime permanent, (b) ligne modale dans l’espace de configuration, (c) surface plane invariante dans l’espace des phases et orbite périodique

### I.3.2.d Quelques méthodes de calcul des modes non linéaires

On a retenu ici quatre “familles” de méthodes pour calculer les modes non linéaires (voir COCHELIN (2003)) :

- **méthodes de perturbation**, NAYFEH et MOOK (1979), NAYFEH et NAYFEH (1994), (voir I.4.2 pour plus de détails), qui ont l’avantage de fournir des solutions analytiques, d’où une meilleure compréhension des phénomènes, mais au prix de calculs rapidement lourds et pour un domaine de validité assez limité.
- **méthodes type Galerkin, équilibrage harmonique** (voir également I.4.2), qui bien que nécessitant une hypothèse sur la forme des solutions de départ, conduisent à des solutions valides sur un domaine plus important que les méthodes ci-dessus. SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b) utilise ce genre d’approche. Elle introduit une dépendance du mode naturel vis à vis de l’amplitude des vibrations, avec une généralisation de la méthode de Ritz, pour calculer la réponse libre de systèmes non linéaires à plusieurs degré de liberté.

La méthode de calcul des modes non linéaires proposée dans ce mémoire est également basée sur l'équilibrage harmonique et sera présentée plus en détails au chapitre III. Elle consiste à calculer la réponse forcée pour une excitation quasiment nulle, et permet le calcul des "backbone curves" par continuation sur le paramètre pulsation, ainsi que la représentation des sous-espaces invariants.

- **méthodes géométriques** où l'on recherche directement les sous-espaces invariants. On décrit ici les approches proposées par SHAW et PIERRE (1993a), puis par TOUZÉ *et al.* (2003).

Shaw et Pierre ont développé une méthode constructive pour le calcul des modes qui se rapproche de celle de Rosenberg mais utilise deux variables de référence, déplacement et vitesse. Le système d'équations différentielles du deuxième ordre représentant le mouvement doit donc être mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{u}_i = v_i \\ \ddot{v}_i + f_i(u, v), i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

On suppose ensuite que chaque déplacement et vitesse est paramétrable en fonction d'une paire déplacement-vitesse de référence :

$$\dot{u}_i = X_i(u_{ref}, v_{ref}), \quad \dot{v}_i = Y_i(u_{ref}, v_{ref}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{I.26})$$

Le report de ce paramétrage dans les équations du mouvement (I.25) conduit à un système d'équations aux dérivées partielles de dimension  $2n-2$ , (ne dépendant plus explicitement du temps mais paramétré par  $u_{ref}$  et  $v_{ref}$ ) de la forme :

$$\mathbf{R}(X_i(u_{ref}, v_{ref}), Y_i(u_{ref}, v_{ref})) = 0, \quad i = 1..n \quad (\text{I.27})$$

La résolution de ce système, i.e. le calcul des  $(X_i, Y_i)$ , donne les équations des surfaces invariantes et donc des modes normaux non linéaires. La dynamique du mode  $i$  sur le sous-espace est obtenue en reportant les expressions de  $X_i, Y_i$  dans les équations du mouvement pour les degrés de liberté de référence, ce qui permet de calculer  $u_{ref}$  et  $v_{ref}$  puis de déduire les autres  $u_i, v_i$  en utilisant (I.26).

La principale difficulté réside donc dans le calcul des  $(X_i, Y_i)$ . SHAW et PIERRE (1993a) proposent entre autres trois exemples d'application pour des systèmes à deux degrés de liberté : un cas linéaire non conservatif, puis non linéaire conservatif et enfin non linéaire non conservatif. Les surfaces invariantes sont calculées en utilisant des développements asymptotiques :

$$\begin{cases} X_i(u_{ref}, v_{ref}) = a_{1i}u_{ref} + a_{2i}v_{ref} + a_{3i}u_{ref}^2 + a_{4i}v_{ref}u_{ref} + \dots \\ Y_i(u_{ref}, v_{ref}) = b_{1i}u_{ref} + b_{2i}v_{ref} + b_{3i}u_{ref}^2 + b_{4i}v_{ref}u_{ref} + \dots \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

Dans BOIVIN *et al.* (to appear), la même méthode est utilisée pour des systèmes continus. Simplement le système de départ est discrétisé en utilisant une décomposition sur la base des modes propres linéaires, ce qui conduit à un système discret auquel on applique la

démarche décrite plus haut.

Enfin, PESHEK *et al.* (2002) proposent une méthode de résolution numérique de (I.27), en posant :

$$u_{ref} = a \cos \Phi, \quad v_{ref} = -a\omega_k \sin \Phi \quad (\text{I.29})$$

ce qui conduit à la paramétrisation suivante :

$$\dot{u}_i = P_i(a, \Phi), \quad \dot{v}_i = Q_i(a, \Phi), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{I.30})$$

Ils emploient ensuite une méthode de Galerkin pour le calcul des  $P_i$  et  $Q_i$  qui sont cherchés sous forme de double séries asymptotiques, produit d'un coefficient et d'une fonction de forme connue, dépendante de  $a$  et  $\Phi$ . La solution est obtenue en minimisant l'erreur sur un domaine fixé. Bien que nécessitant plus de temps de calcul numérique, les résultats sont plus précis que ceux obtenus avec les développements asymptotiques ; de plus le domaine de convergence est connu à priori, tout ceci étant valable à un niveau local, pour de faibles non linéarités. De plus, la paramétrisation n'est possible qu'en l'absence de résonance interne (SHAW et PIERRE (1993a)). Dans le cas contraire, il y a couplage non linéaire d'un certain nombre de NNMs<sup>5</sup> et la variété invariante est alors de dimension supérieure à deux. De plus la présence de résonances internes entraîne celle de bifurcations des NNMs, compliquant ainsi la dynamique du système et empêchant la paramétrisation. Cependant, la présence de singularités dans les développements asymptotiques permet de détecter la présence de telles résonances (BOIVIN *et al.* (1995)).

NAYFEH et NAYFEH (1994) proposent également une reformulation de la méthode dans un cadre complexe. Son intérêt est entre autre de pouvoir calculer des modes non linéaires en résonance interne.

TOUZÉ (2003) et TOUZÉ *et al.* (2003) utilisent une approche forme normale pour le calcul des modes, qui s'apparente au formalisme complexe présenté dans JEZEQUEL et LAMARQUE (1991). Les modes non linéaires sont ici aussi considérés comme des invariants de l'espace des phases. Partant des équations du mouvement projetées sur la base des modes propres linéaires (en utilisant (I.9)), données par :

$$\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{\Lambda Q} + \mathbf{QUAD}(q_i, q_j) + \mathbf{CUB}(q_i, q_j, q_k) = 0 \quad (\text{I.31})$$

**QUAD** : termes quadratiques, **CUB** : termes cubiques, ils proposent un changement de variable du type

$$q_p = r_p + F(\mathbf{R}, \mathbf{S}) \quad \dot{q}_p = s_p + G(\mathbf{R}, \mathbf{S}) \quad (\text{I.32})$$

avec  $\mathbf{Q} = [q_1 q_2 \dots]$ , de même pour  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{S}$ . La dynamique du p-ième mode non linéaire est alors donnée par le report de (I.32) dans (I.31), avec  $R_k = S_k = 0, \quad \forall k \neq p$ , (I.32) pour les mêmes conditions ce qui conduit à l'équation du sous-espace invariant pour le mode p.

- **continuation des orbites périodiques**, (SEYDEL (1994), ARQUIER *et al.* (2004)) : le mode (i.e. la variété invariante) peut être engendré par continuation des orbites périodiques

---

<sup>5</sup>NNMs : Nonlinear Normal Modes, notation habituelle dans la littérature qu'on utilisera parfois ici

pour des niveaux d'énergie croissants. La méthode consiste à rechercher les solutions par une méthode d'intégration temporelle type Runge-Kutta limitée à une période ("shooting method"), puis à résoudre le système non linéaire obtenu par une méthode de continuation (par rapport à l'énergie mécanique par exemple).

### I.3.3 Quelques illustrations sur un exemple à deux degrés de liberté

On introduit ici un exemple destiné à illustrer les différents phénomènes présentés ci-dessus pour la réponse libre et plus loin pour la réponse forcée. Il s'agit d'un système à deux degrés de liberté, composé d'une masse  $m$ , mobile sur un plan, reliant deux ressorts (voir figure I.4). Les non linéarités sont polynomiales de type quadratique et cubique. Ce système est utilisé comme cas test par le groupe de recherche "modes non linéaires" et pour le congrès Euromech 457, *Nonlinear modes of vibrating systems*.

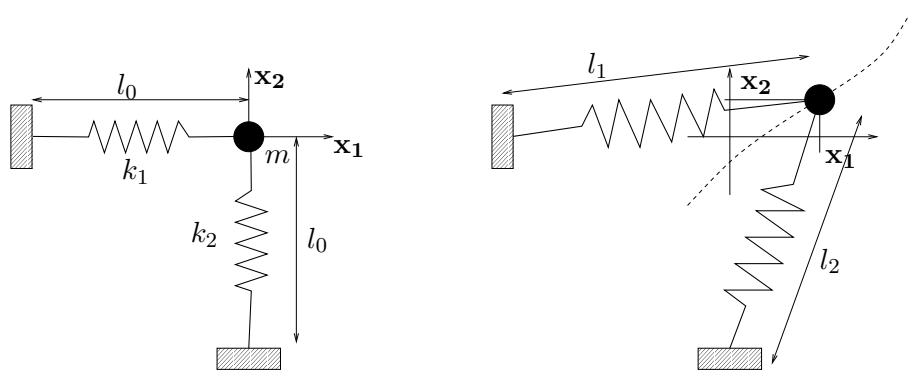


FIGURE I.4 - Système non linéaire à deux degrés de liberté, au repos (gauche), déformé (droite)

On note :

- $u_1 = \frac{x_1}{l_0}$  et  $u_2 = \frac{x_2}{l_0}$ ,  $x_1$  et  $x_2$  étant les coordonnées de la masse  $m$ ,
- $e_i = \frac{1}{2} \frac{l_i^2 - l_0^2}{l_0^2}$  les déformations de Green-Lagrange<sup>6</sup> pour chaque ressort, avec  $l_i$  la longueur du ressort déformé et  $l_0$  la longueur à vide,
- $E_i(t)$  la force appliquée au système sur le degré de liberté  $i$ .

On a

$$e_i = u_i + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) \quad (\text{I.33})$$

et l'énergie de déformation du système est donnée par :

$$W = \frac{1}{2} k_1 l_0^2 e_1^2 + \frac{1}{2} k_2 l_0^2 e_2^2 \quad (\text{I.34})$$

<sup>6</sup>Ce choix de définition pour les déformations des ressorts, permet d'aboutir à un formalisme "non linéaire géométrique", similaire à celui des structures minces présentées au chapitre II

avec  $k_1, k_2$  les constantes de raideur. On en déduit les équations du mouvement :

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + \frac{\partial W_{def}}{\partial u_1} = E_1(t) \\ m\ddot{u}_2 + \frac{\partial W_{def}}{\partial u_2} = E_2(t) \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

soit, en fonction uniquement des déplacements :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_{01}^2 u_1 + \alpha_2 \left( \frac{3}{2} \omega_{01}^2 u_1^2 + \frac{1}{2} \omega_{01}^2 u_2^2 + \omega_{02}^2 u_1 u_2 \right) + \alpha_3 \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2} (u_1^2 + u_2^2) u_1 = E_1(t) \\ \ddot{u}_2 + \omega_{02}^2 u_2 + \alpha_2 \left( \frac{3}{2} \omega_{02}^2 u_2^2 + \frac{1}{2} \omega_{02}^2 u_1^2 + \omega_{01}^2 u_1 u_2 \right) + \alpha_3 \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2} (u_1^2 + u_2^2) u_2 = E_2(t) \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

Les non linéarités présentes sont polynomiales, quadratiques ou cubiques. Les coefficients  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  ont été introduits afin de quantifier l'influence respective de ces deux types de non linéarités. Pour  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$  on retrouve le système linéaire associé, dont les fréquences propres sont  $\omega_{0i}^2 = \frac{k_i}{m}$ ,  $i = 1, 2$ . Le cas  $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$  correspond au système "complet".

L'intérêt de cet exemple est double : il s'agit d'une part de l'utiliser pour illustrer de manière simple les phénomènes non linéaires que nous serons susceptibles de rencontrer dans le cas des structures minces, et d'autre part de traiter ce cas particulier, qui sert de cas test pour le groupe "modes non linéaires" et pour lequel nous disposons de résultats obtenus par diverses méthodes (voir TOUZÉ (2003) entre autres). La partie nous concernant est l'application de la méthode de l'équilibre harmonique, complétée par la méthode asymptotique numérique, pour l'obtention des modes propres non linéaires.

### I.3.3.a Cas linéaire

On considère ici le système (I.36) pour  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , en régime libre ( $E_i(t) = 0$ ,  $\forall t$ ), linéaire et découplé :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_{01}^2 u_1 = 0 \\ \ddot{u}_2 + \omega_{02}^2 u_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

On effectue alors un essai de lâcher (vitesse initiale nulle), dont les résultats sont donnés figure I.5 : pour des conditions initiales sur le mode 1 (i.e.  $u_2 = 0$ ), le mouvement reste sur le mode, soit dans le sous espace invariant, quelque soit  $t$ . Les trajectoires (ou orbites périodiques) obtenues sont des lignes dans l'espace de configuration (figure (b)) et des cercles dans l'espace de phase  $(u_1, u_2, y_1)$  (figure (a), on rappelle que  $y_i = \dot{u}_i$ ). Le sous espace invariant correspondant au mode 1 est le plan  $(u_1, y_1)$ . En revanche, des conditions initiales quelconques, en dehors du sous-espace invariant, engendrent une trajectoire multi-modale. Au passage, le lien entre les deux représentations est assez évident : la seconde (b) n'est qu'une projection de la première (a) dans l'espace de configuration. Enfin la courbe (c) représente le mode de manière plus "classique", comme un pic dans le domaine fréquentiel : le mode donne une "ossature" pour la réponse forcée.

### I.3.3.b Cas complet

On traite maintenant le système non linéaire complet, avec  $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ , toujours en régime libre, par l'application de la méthode que nous nommerons EHMAN (équilibre harmonique +

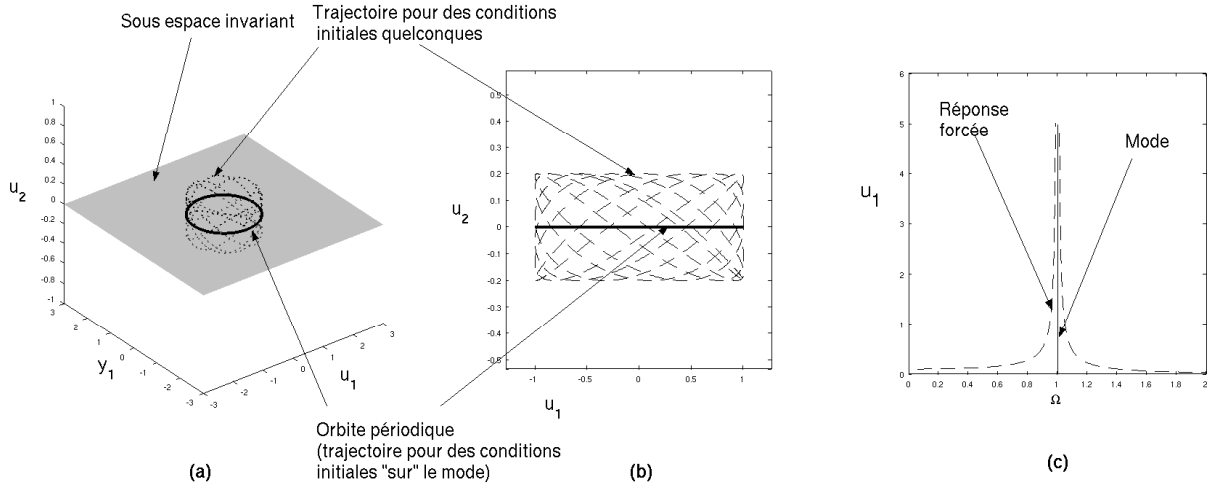


FIGURE I.5 - *Système à deux ressorts, cas linéaire, pour  $\omega_{01} = 1$ ,  $\omega_{02} = \sqrt{2}$ . Premier mode linéaire. (a) surface plane invariante dans l'espace des phases et orbite périodique (b) ligne modale dans l'espace de configuration, (c) dans le domaine fréquentiel, complété ici par la réponse forcée en régime permanent.*

méthode asymptotique numérique) décrite au chapitre III. La réponse du système est supposée harmonique de la forme :

$$u_i(t) = \sum_{k=0}^{N-1} u_i^k \cos k\Omega t \quad (\text{I.38})$$

La résolution donne les  $u_i^k$  en fonction de  $\Omega$ . Les termes prépondérants dans la réponse sont ceux en  $\cos \Omega t$ ,  $u_1^1$  et  $u_2^1$ , et sont représentés dans le plan fréquentiel, sur la figure I.6, à proximité de la première et deuxième pulsation propre, pour  $N = 2, 3, 4, 8$ ,  $\omega_{01} = 1$ , et  $\omega_{02} = \sqrt{2}$ . Les courbes sont tangentes au mode linéaire (droite verticale) pour de faibles amplitudes puis s'incurvent. Le mode 1 est mollissant (figure (a)), tandis que le mode 2 (figure (b)) est mollissant au début puis raidissant à partir d'une certaine amplitude. On remarque également une zone d'accumulation de points, qui signale la présence d'une bifurcation. La nouvelle branche, représentée sur la figure (c), a été obtenue en perturbant légèrement les paramètres de départ. En ce qui concerne le nombre d'harmoniques retenues,  $N = 2$  est clairement insuffisant, tandis que le modèle avec  $N = 3$  est correct mais que les résultats convergent vraiment à partir de  $N = 4$  (i.e. prise en compte des termes en  $\cos 3\Omega t$ , importants du fait de la présence de non linéarités cubiques). On construit ensuite  $u_i(t) = u_i(t; \Omega)$ , surface paramétrée par le temps et la pulsation. Pour  $\Omega$  fixé, on obtient une orbite périodique. La surface complète donne le sous-espace invariant. Ces résultats sont représentés sur la figure I.7, pour  $N = 4$ , et les mêmes valeurs des  $\omega_{0i}$  que ci-dessus. A la différence du cas linéaire (figure I.5), le sous-espace invariant représentant le mode n'est plus un plan mais une surface courbe, tangente au sous-espace linéaire en 0, et les lignes modales sont incurvées. Les orbites sont des cercles pour de petites amplitudes puis se déforment ensuite.

On compare ensuite les résultats obtenus par l'EHMAN à ceux donnés dans TOUZÉ *et al.*



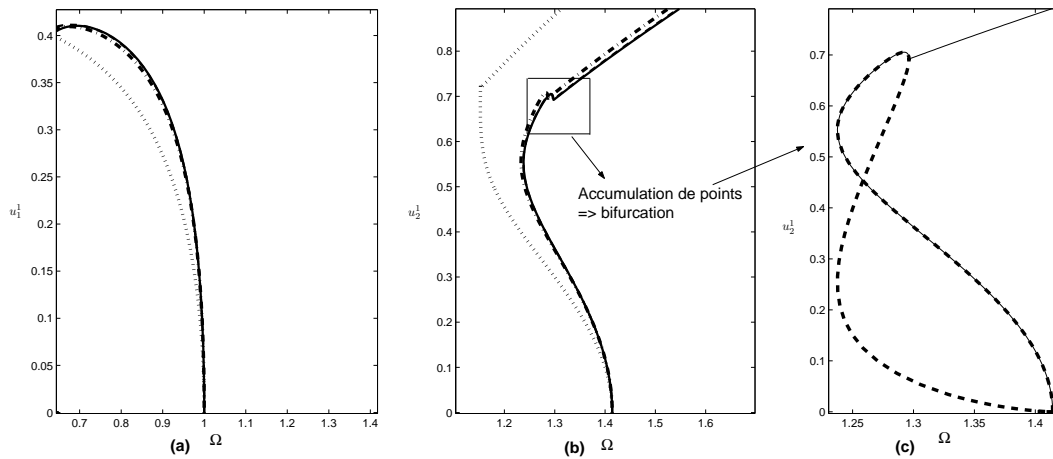


FIGURE I.6 - Relation amplitude-fréquence ( $u_i^1 = f(\Omega)$ ) pour le système à deux ressorts avec  $\omega_{01} = 1$ , et  $\omega_{02} = \sqrt{2}$ , calculée par l'EHMAN avec  $N$  termes dans les développements harmoniques. (..) :  $N = 2$ , (-.) :  $N = 3$ , (- -) :  $N = 4$ , traits pleins :  $N = 8$ . (a) mode 1, (b) mode 2, (c) mode 2 avec une nouvelle branche.

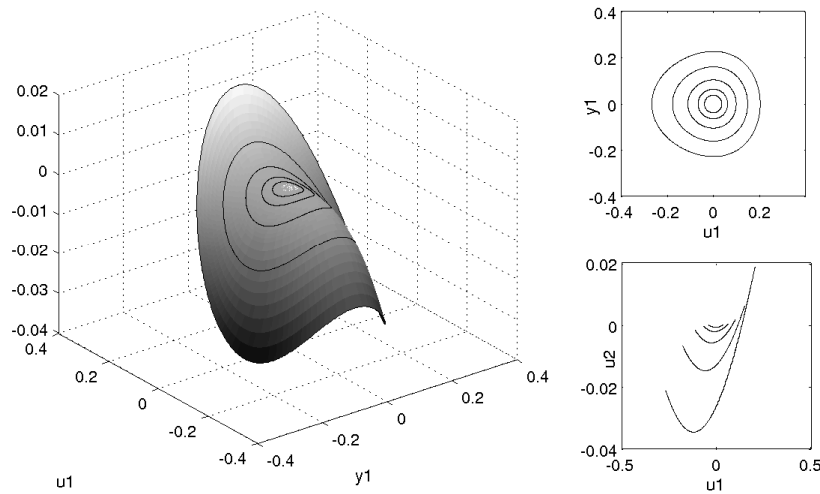


FIGURE I.7 - Représentation du sous-espace invariant correspondant au premier mode non linéaire du système à deux ressorts, obtenu par la méthode EHMANN. A gauche dans l'espace de phase, avec quelques orbites périodiques (lignes noires). En haut à droite, projection des orbites périodiques dans le plan  $u_1, y_1$ . En bas à droite, orbites périodiques dans le plan  $(u_1, u_2)$  : lignes modales à la Rosenberg.

(2003), toujours sur le problème des deux ressorts. Dans cet article, les auteurs utilisent une approche “forme normale” (voir I.3.2.c) pour calculer directement la géométrie des sous-espaces invariants. La dynamique est réduite à celle obtenue sur un seul mode non linéaire. La relation amplitude-fréquence est ensuite obtenue par application d’une méthode de perturbation. Les auteurs comparent également leurs résultats à ceux obtenus en utilisant une méthode de Galerkin limitée au premier mode linéaire (ie projection des équations différentielles non linéaires du mouvement sur le sous-espace linéaire), et montrent les limites d’une telle approche, qui peut conduire à des résultats erronés sur le comportement durcissant ou mollissant du système. Pour

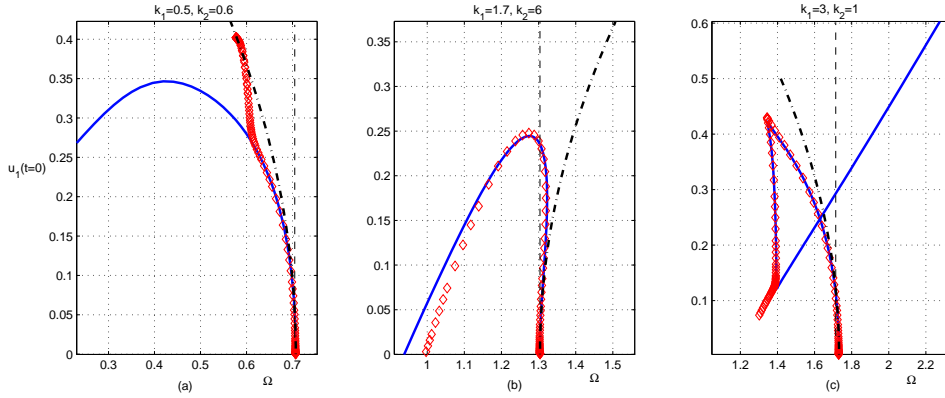


FIGURE I.8 - Premier mode du système à deux ressorts. (...) : mode linéaire, traits pleins : EHMANN, (-.-) : TOUZÉ *et al.* (2003),  $\diamond$  continuation des orbites périodiques. (a) :  $\omega_{01} = \sqrt{0.5}$ ,  $\omega_{02} = \sqrt{6}$ , (b) :  $\omega_{01} = \sqrt{1.7}$ ,  $\omega_{02} = \sqrt{6}$ , (c) :  $\omega_{01} = \sqrt{3}$ ,  $\omega_{02} = 1$ ,

de faibles amplitudes, les résultats obtenus par l’EHMAN sont similaires à ceux de TOUZÉ *et al.* (2003), qui sont validés, jusqu’à une certaine valeur de  $u_1^1$ , par une solution obtenue par intégration directe. Pour des amplitudes plus importantes, des solutions de référence obtenues par continuation des orbites périodiques semblent confirmer les résultats donnés par l’équilibrage harmonique. De même, d’après SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b), qui compare les deux types de méthodes, utilisant une solution de référence obtenue par intégration numérique, le domaine de validité des solutions données par l’équilibrage harmonique est largement supérieur à celui de celles obtenues par les méthodes de perturbation.

## I.4 Régime permanent harmonique

Le comportement asymptotique, lorsque le temps tend vers l’infini, est appelé régime permanent ou établi (“steady-state”) et est atteint après passage par un régime dit transitoire. Les solutions en régime établi peuvent être périodiques, quasi-périodiques (sommées de termes harmoniques, dont les pulsations n’ont pas de rapport entier) ou chaotiques (solutions bornées, qui ne sont ni périodiques, ni quasi-périodiques). Le type de réponse est souvent dépendant d’un ou de plusieurs paramètres (l’amplitude de l’excitation entre autres). Pour certaines valeurs de

ce(s) paramètre(s), la réponse passera par exemple d'un régime périodique à un régime chaotique. Un tel changement est appelé bifurcation. Plus précisément on nomme bifurcation tout changement qualitatif, en fonction d'un paramètre de contrôle, du comportement du système tel que par exemple une modification du nombre de solutions. L'étude mathématique des systèmes dynamiques, des bifurcations, des régimes chaotiques etc..., constitue un vaste problème. Pour de plus amples détails à ce sujet, on pourra consulter par exemple GUCKENHEIMER et HOLMES (1983), SEYDEL (1994), NAYFEH et BALACHANDRAN (1995)... On se contente ici de l'étude des solutions périodiques en fonction de certains paramètres (amplitude et pulsation de l'excitation) qui fournit déjà de nombreuses informations sur le système.

En ce qui concerne la réponse forcée, la connaissance du comportement d'une structure en régime établi est cruciale, afin de connaître, d'éviter ou tout au moins de contrôler les comportements résonants et par exemple, son endommagement. Dans le cas linéaire le calcul de la réponse forcée est relativement simple et bien maîtrisé, grâce à l'analyse modale qui permet de décomposer un système à  $N$  degrés de liberté en  $N$  oscillateurs linéaires découplés (voir le rappel du §I.3.1.c). Tout comme pour la réponse libre, le cas non linéaire est plus compliqué. De nouveaux phénomènes ont lieu, en particulier d'autres types de résonances.

On considère dans cette partie le cas de la réponse d'un système à plusieurs degrés de liberté, soumis à une excitation multi-harmonique du type :

$$E(t) = \sum_{k=1}^N F_k \cos \Omega_k t \quad (\text{I.39})$$

Lorsque  $N = 1$ , la réponse du système en régime linéaire est la superposition de la solution en régime libre et d'une solution particulière. En présence d'amortissement, la réponse libre tend vers 0. Si le système est conservatif, un choix approprié des conditions initiales permet également d'annuler ce terme. Le régime établi est donc donné par la solution particulière qui est périodique, de même pulsation que l'excitation. Les résonances (ie amplification de la réponse du système pour une certaine valeur de la pulsation d'excitation) ont alors lieu autour des fréquences propres, indépendantes de l'amplitude des oscillations. En particulier, pour le système à deux ressorts (I.36), avec  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$  (ie linéaire),  $E_1(t) = F_1 \cos \Omega t$  et  $E_2(t) = 0$ , on a :

$$\begin{cases} u_1(t) &= \frac{F_1}{\omega_{01}^2 - \Omega^2} \cos \Omega t + A \cos \omega_{01} t + B \sin \omega_{01} t \\ u_2(t) &= C \cos \omega_{01} t + D \sin \omega_{01} t \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

puis, par un choix "approprié" des conditions initiales,  $A = B = C = D = 0$ , ce qui conduit à la réponse linéaire en régime établi, avec un pic de résonance en  $\Omega = \omega_{01}$ .

En régime non linéaire la situation est différente et de nouveaux phénomènes apparaissent. Le système résonne toujours à proximité des modes propres mais la valeur de la fréquence de résonance est fonction de l'amplitude des oscillations, ce qui conduit à une courbure de la réponse fréquentielle, et, physiquement à des phénomènes de saut. En outre de nouveaux types de résonances ont lieu lorsqu'il existe des relations linéaires entre les fréquences propres (résonances internes, conduisant à des couplages entre les modes) ou entre les fréquences d'excitation et les

fréquences propres (résonances secondaires : la réponse libre n'est plus nulle en régime établi).

Ainsi pour une excitation mono-harmonique de pulsation  $\Omega$ , on distingue les cas suivants :

- $\Omega \approx \omega_i$ , résonance principale ou primaire, identique au cas linéaire,
- $\Omega \approx k\omega_i$ , résonance sous-harmonique,
- $\Omega \approx \frac{\omega_i}{k}$ , résonance super-harmonique,
- $m\Omega \approx \sum_i k_i\omega_i$ , combinaison de résonances,
- $\sum_i k_i\omega_i \approx 0$ , résonances internes.

les  $\omega_i$  étant les pulsations propres linéaires et les  $m$ ,  $k$ ,  $k_i$  des entiers fixés.

Les exemples classiques, de “référence”, d’oscillateurs non linéaires à un degré de liberté sont ceux de Van der Pol et Duffing, largement traités dans la littérature (voir par exemple BLAQUIÈRE (1966) ou MANNEVILLE (1998-1999)). NAYFEH et MOOK (1979) (par la méthode des échelles multiples) ou SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b) (méthodes de la moyenne ou de Ritz), abordent également de nombreux cas avec en particulier les résonances secondaires de l’oscillateur de Duffing.

Dans cette partie, on présente dans un premier temps les différents types de résonances, avec quelques illustrations toujours dans le cas du système à deux ressorts<sup>7</sup>, puis on effectue une synthèse des différentes méthodes de calcul des solutions en régime forcé.

## I.4.1 Résonances non linéaires

### I.4.1.a Résonance principale

La résonance principale, ou primaire, a lieu lorsque le système est soumis à une excitation mono-harmonique de pulsation proche de l’une des fréquences propres :  $\Omega \approx \omega_i$ . A la différence du cas linéaire, où la valeur de la fréquence de résonance est constante, la valeur pour laquelle le système entre en résonance va dépendre de l’amplitude de la réponse. Cette situation va conduire à des phénomènes de saut, avec l’existence de plusieurs solutions permanentes pour une même valeur de la fréquence d’excitation. Par contre, comme nous l’avons précisé plus haut, la résonance a toujours lieu à proximité des modes et donc autour de la fréquence propre du système linéaire sous-jacent.

Pour le système à deux ressorts (I.36), la réponse à l’ordre 1, par la méthode des échelles multiples (pour les détails voir l’annexe A) est :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \epsilon a_1 \cos \Omega t + O(\epsilon^2) \\ u_2(t) &\approx 0 \end{aligned} \tag{I.41}$$

avec

$$\sigma = P_1 a_1^2 \pm \sqrt{\frac{F_1^2}{4\omega_{01}^2 a_1^2} - \frac{\mu_1^2}{4}} \quad \Omega = \omega_{01} + \sigma \tag{I.42}$$

$P_1$  est une fonction connue de  $\omega_{01}$  et  $\omega_{02}$ . La réponse est donc mono-harmonique, à la même pulsation que l’excitation. Considérons la figure I.9 où est tracée la réponse forcée du système à

<sup>7</sup>mais sans détailler les calculs qui sont donnés dans l’annexe A

deux ressorts pour  $F_1 = 0.01N$ . Nous avons représenté ici  $a_1$ , amplitude de la fondamentale, en fonction de  $\sigma$ , qui est l'écart de  $\Omega$  par rapport à  $\omega_{01}$ , première pulsation propre linéaire. Pour "arrêter" la courbe, nous avons également introduit de l'amortissement dans le système (I.36) (qui va déterminer la position du point E, la courbe tendant vers l'infini lorsque le système est non amorti). La courbe en pointillés représente la réponse libre (le "mode non linéaire"). Il s'agit de la relation entre les déplacements et la pulsation en l'absence d'excitation (couramment appelée "backbone curve"). Elle part de 0, i.e.  $\Omega = \omega_{01}$ , reste tangente au mode linéaire pour de faibles valeurs de  $a_1$  puis s'incline vers la gauche : il y a mollissement du système, la raideur diminue avec l'amplitude. Le caractère durcissant ou mollissant dépend du type de non linéarités présentent dans le modèle. La réponse forcée est en traits pleins. On distingue trois zones différentes : une zone où une seule solution existe (avant le point F et après le point C), une zone où deux solutions existent (points C et B) et enfin une autre où trois solutions sont possibles : entre F et B ou E et C). Une étude de stabilité permet alors de déterminer quelles solutions sont réellement observables : ici, la partie BE est instable, le reste stable.

Expérimentalement, la solution observée est fonction des conditions initiales : pour un balayage en fréquence dans le sens croissant, partant de A, la valeur de  $a_1$  va augmenter de A à B puis sauter de B à C et décroître jusqu'en D. Inversement si la pulsation diminue, partant de D,  $a_1$  augmente jusqu'en E et saute en F pour finir en direction de A. Il y a donc une rupture de la continuité de la solution, les sauts, facilement observable et typique des non linéarités.

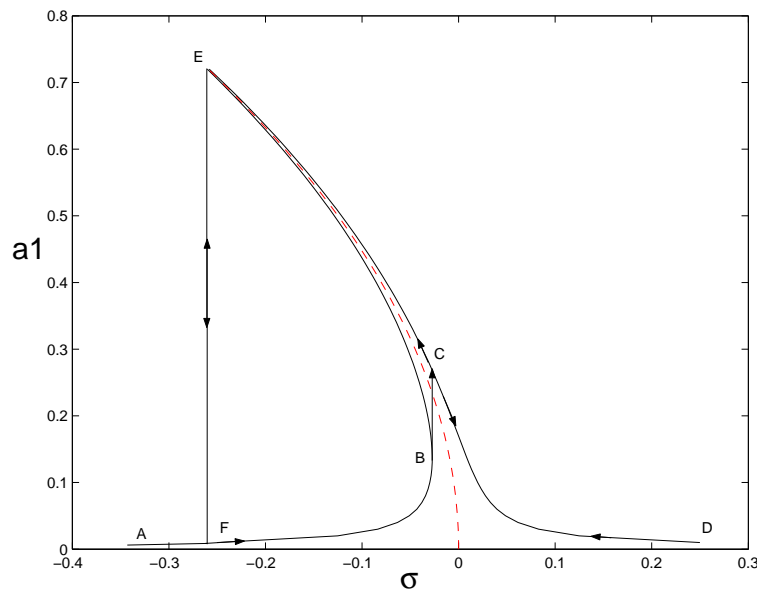


FIGURE I.9 - Réponse forcée du système (I.4) - Résonance primaire autour du premier mode

### I.4.1.b Résonances secondaires

A priori, lorsqu'un système est excité par une force dont la pulsation est éloignée des fréquences propres, sa réponse est celle obtenue en régime linéaire établi (type (I.40) pour le système à deux ressorts). Cependant, il existe certaines valeurs de la pulsation d'excitation pour lesquelles le système entrera en résonance, dite secondaire. Von Kärman, entre autres, a observé ce phénomène et constaté que certaines parties d'un avion pouvaient être excitées violemment par les vibrations d'un moteur, de vitesse angulaire largement supérieure aux fréquences propres.

Plus précisément, on parle de résonance secondaire lorsque, en régime établi, la partie correspondant à la réponse libre du système est non nulle, quelles que soient les conditions initiales. Des valeurs précises de la pulsation d'excitation (ou des pulsations pour une excitation multi-harmonique) conduisent à l'apparition de nouveaux termes résonants dans la réponse. Celle-ci, pseudo-périodique mais non harmonique, s'écrit alors

$$u(t) = a_1 \cos(\Omega t + \theta) + \sum_{j=2}^n a_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \quad (\text{I.43})$$

SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b) montre que la condition nécessaire d'existence de ce type de solution établie (ie avec les termes "libres",  $a_j$  non nuls) est une relation linéaire du type :

$$N\Omega = \sum_{j=1}^n p_j \omega_j, \quad N, p_j = \pm 1, \pm 2, \dots \quad p_j \neq N$$

avec  $N + \sum_{j=1}^n |p_j| = M$ ,  $M - 1$  l'ordre de la non linéarité,  $n$  le nombre de degrés de liberté. (I.44)

Selon ces valeurs on distinguera divers cas, avec en particulier :

- *résonance super-harmonique* :  $\Omega \approx \frac{\omega_i}{p}$

Considérons à nouveau le système à deux ressorts (I.36). Les non linéarités sont cubiques et quadratiques, d'où la présence (théorique) de résonances super-harmoniques pour  $p = 2$  et  $p = 3$ . Par exemple, pour  $2\Omega \approx \omega_{01}$ , la réponse approchée (échelles multiples à l'ordre 1) est :

$$u_1 = \underbrace{\epsilon \frac{f}{\omega_{01}^2 - \Omega^2}}_{a_1} \cos \Omega t + \underbrace{\epsilon \frac{3}{8} \frac{f^2 \omega_{01} \alpha_2}{\sigma(\omega_{01}^2 - \Omega^2)^2}}_{a_2} \cos 2\Omega t + O(\epsilon^2) \quad (\text{I.45})$$

Ainsi, une excitation à  $\Omega = \frac{\omega_{01}}{2}$ , conduit à une réponse établie composée de deux termes : l'un, équivalent de la partie linéaire, de pulsation  $\Omega$  et le second, dû à la non linéarité, de pulsation  $\omega_{01}$ . La non linéarité "ajuste" la fréquence de la solution homogène à deux fois celle de l'excitation, ce qui rend la solution périodique. De plus lorsque  $f$  diminue, la réponse libre qui est en  $f^2$  décroît plus rapidement que la solution particulière et pour de faibles amplitudes d'excitation, on retrouve la réponse linéaire. Le signal temporel est donc modulé par ce terme supplémentaire, tandis que la présence d'une résonance sur-harmonique se traduit par l'apparition d'un pic dans le domaine fréquentiel (voir figure I.10).

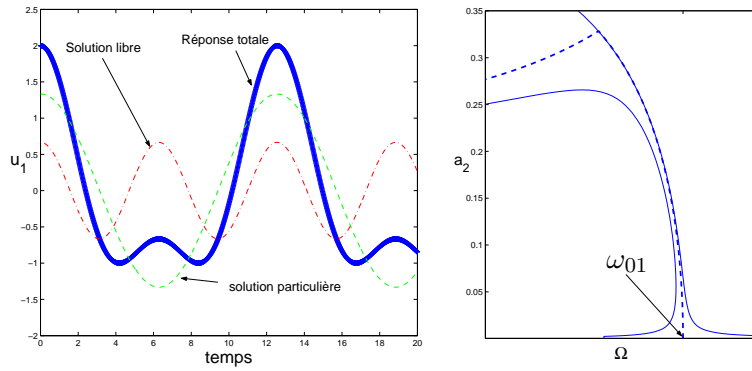


FIGURE I.10 - Réponse forcée du système à deux ressorts, pour  $2\Omega \approx \omega_{01}$  : résonance super-harmonique - Signal temporel (à gauche) et coefficient  $a_2$  (obtenu par la méthode de l'équilibre harmonique) en fonction de la pulsation d'excitation (à droite), pour  $F_1 = 0.01N$

- résonance sous-harmonique :  $\Omega \approx p\omega_j$

L'idée est la même que pour les résonances super-harmoniques, et la réponse s'écrit :

$$u(t) = a_1(t) \cos \Omega t + a_2(t) \cos \frac{\Omega t}{p} \quad (\text{I.46})$$

Cependant, pour un système amorti, il existe une valeur seuil de la force (voir NAYFEH et MOOK (1979)) pour laquelle ce type de résonance apparaît.

Nous ne sommes pas parvenu à représenter ces résonances pour notre exemple, théoriquement présentes pour  $p = 2$  ou  $p = 3$ . La solution obtenue par la méthode des échelles multiples n'est pas bornée et tend donc vers l'infini, ce qui n'a pas de sens dans la mesure où la méthode se limite à des non linéarités faibles, et donc pour de petites amplitudes. La continuation des branches de solution par la méthode d'équilibrage harmonique plus MAN n'a rien donné non plus. En fait il semblerait que les branches de solutions ne "démarrèrent" pas de la branche  $u = 0$ . Une étude plus approfondie permettant de trouver un point solution de départ, serait donc nécessaire.

- combinaison de résonances :

On est en présence de ce type de résonance lorsque  $\Omega = \sum_{j>1} p_j \omega_j$  ou, pour une excitation multi-fréquences, quand  $\omega_i = \sum_{j>1} p_j \Omega_j, \forall i$ . La situation est similaire aux cas précédents, avec l'apparition de termes résonants de pulsations différentes de  $\Omega$ .

#### I.4.1.c Résonances internes

Les systèmes continus ou à plusieurs degrés de liberté possèdent plusieurs fréquences propres linéaires, pouvant être commensurables. C'est à dire qu'on peut avoir des relations du type  $\omega_2 \approx p\omega_1$  ou  $\omega_3 \approx p\omega_1 \pm n\omega_2$ ,  $p, n$  étant des entiers. Ces relations peuvent conduire à des phénomènes de couplage plus ou moins important entre les modes, ce en fonction de l'ordre des non-linéarités du système. On parle alors de résonance interne. En fait l'énergie est constamment échangée entre les modes impliqués dans la résonance interne, avec une décroissance en présence

d'amortissement. Ce phénomène, combiné à des résonances primaires ou secondaires, conduit à des situations équivalentes à celles décrites plus haut : résonance super ou sous harmonique, réponse pseudo-périodique etc.

Considérons à nouveau le système à deux ressorts et supposons que  $\omega_{02} \approx 2\omega_{01}$ . Pour une excitation  $\Omega$  proche de la première fréquence propre, la réponse au premier ordre, calculée par la méthode des échelles multiples est donnée par :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \epsilon \sqrt{\frac{8a}{\alpha_2 \omega_2} (\sigma_2 + 2\sigma_1)} \cos \Omega t + O(\epsilon^2) \\ u_2(t) &= \epsilon a \cos 2\Omega t + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

a solution de :

$$a^3 \pm \frac{8a^2 \omega_1 \sigma_1}{\omega_2^2 \alpha_2} + \frac{16\omega_1^2 a \sigma_1^2}{\alpha_2^2 \omega_2^4} - \frac{1}{2} \frac{\pm f^2}{\alpha_2 \omega_2^3 (\sigma_2 + 2\sigma_1)} = 0 \quad (\text{I.48})$$

A la différence du cas sans résonance interne (voir (I.41)), le deuxième degré de liberté est non nul, l'énergie est répartie entre les deux modes (on parle alors de résonance  $i:j$ ,  $i$  et  $j$  étant les modes impliqués).

De même lorsque  $\Omega \approx \omega_{01} + \omega_{02}$  (combinaison de résonance), et  $\omega_2 \approx 2\omega_{01}$ , la réponse est :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \epsilon \frac{F_1}{\omega_{01}^2 - \Omega^2} \cos \Omega t + \epsilon a_1 \cos \frac{\Omega t}{3} + O(\epsilon^2) \\ u_2(t) &= \epsilon a_2 \cos \frac{2\Omega t}{3} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{I.49})$$

les  $a_i$  étant des fonctions entre autre de  $\Omega$  (voir A). A nouveau, les deux modes sont impliqués dans la résonance, avec en plus une réponse dont la pulsation est une fraction de celle de l'excitation. A noter que, pour un système plus réaliste (ie en présence d'amortissement), il existe une valeur critique de la force d'excitation (voir NAYFEH et MOOK (1979)) en deçà de laquelle les seules solutions possibles sont  $a_1 = a_2 = 0$ .

Après ce rapide aperçu de l'influence des non linéarités sur la réponse forcée d'un système, on s'intéresse maintenant aux méthodes de calcul des solutions.

#### I.4.2 Quelques méthodes de calcul de la réponse approchée d'un système non linéaire discret

Pour le calcul de la réponse forcée de structures minces en non linéaire géométrique, on sera amené à résoudre un système d'équations différentielles du second ordre, non linéaire. L'écriture de ce dernier par application des éléments finis est décrite au chapitre II. En général on ne sait pas calculer de solutions exactes pour les systèmes non linéaires, sauf dans des cas particuliers bien précis. Le grand nombre de degrés de liberté des systèmes réels, les non linéarités et les phénomènes complexes qui en découlent (voir le paragraphe précédent) font qu'on doit se contenter de solutions approchées. Un rappel des différentes méthodes pour traiter le cas des systèmes continus en dynamique est donné dans l'introduction du chapitre III. Dans ce mémoire, pour résoudre le système discret (I.1), on utilise la méthode de l'équilibre harmonique, qui permet d'obtenir un système algébrique, lui même résolu par la MAN (Méthode Asymptotique Numérique). Tout ceci est décrit au chapitre III. On décrit donc dans ce paragraphe les



principales méthodes analytiques de résolution d'un système non linéaire discret du type (I.1), en vue de les comparer à la méthode de l'équilibre harmonique. On commence ici par présenter les méthodes dites de perturbation (BLAQUIÈRE (1966), BOGOLIUBOV et MITROPOLSKI (1962), NAYFEH (1973)...). Elles consistent à chercher des solutions du problème non linéaire à partir de celles du système linéaire sous-jacent, en perturbant ces dernières. On distingue au sein de ces méthodes deux catégories (SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a)) :

- d'une part les méthodes valables pour des systèmes faiblement non linéaires (ie les termes linéaires sont proportionnels à un petit paramètre  $\epsilon \ll 1$ ), (I.1) s'écrit alors :

$$M\ddot{U} + KU = \epsilon F(U, \dot{U}, t) \quad (\text{I.50})$$

La non linéarité est vue comme une perturbation du système linéaire sous-jacent dont les solutions sont harmoniques. Ce sont les méthodes type échelles multiples ou moyenne : on détermine un système d'équations fonction du temps, qui donne les variations de la phase et l'amplitude. Le problème est transformé en un système autonome, dont les points singuliers correspondent aux solutions en régime établi,

- d'autre part les méthodes nécessitant une hypothèse sur la forme de départ de la partie temporelle de la solution, mais valables pour des non linéarités "fortes". Dans ce cas on cherche directement les solutions périodiques.

Nous effectuons ici une revue rapide de ces méthodes avec une attention particulière pour les échelles multiples utilisées pour traiter l'exemple (I.36) et l'équilibre harmonique. Pour plus de détails sur les méthodes de perturbation, on pourra consulter les ouvrages cités plus haut (en particulier ceux de NAYFEH (1973), NAYFEH et MOOK (1979) ou NAYFEH (1985) où elles sont largement décrites et appliquées à de nombreux problèmes).

Les quatre premières méthodes présentées ci-dessous consistent à rechercher la solution sous forme d'une série entière d'un petit paramètre  $\epsilon$ , de reporter ces développements dans le problème initial, puis d'identifier à zéro les coefficients des  $\epsilon^i$  et de résoudre consécutivement les systèmes obtenus.

- *Développement asymptotique simple ("straightforward")*

On recherche la solution  $U$  du système sous la forme d'une série d'un petit paramètre  $\epsilon$  :

$$U(t; \epsilon) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \epsilon^2 u_2(t) + \dots \quad (\text{I.51})$$

$u_0(t)$  étant la solution périodique du système non perturbé (i.e. pour  $\epsilon = 0$ ). Les développements sont effectués jusqu'à l'ordre auquel on souhaite obtenir la solution. Cela conduit à l'apparition de termes séculaires, c'est à dire de la forme  $t^m \sin \theta(t)$  ou  $t^m \cos \theta(t)$ . Ces derniers tendent vers l'infini avec  $t$  et sont à éliminer, d'où l'idée de la méthode suivante.

- *Méthode de Lindstedt-Poincaré*

Il s'agit ici d'une amélioration de la méthode précédente, où la dépendance de la fréquence vis à vis de l'amplitude n'est pas prise en compte. Pour y remédier, on recherche également la pulsation  $\omega$  sous forme d'une série de  $\epsilon$  :

$$\omega(\epsilon) = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \dots \quad (\text{I.52})$$

puis on procède de la même manière, avec :

$$\mathbf{U}(t; \epsilon) = \epsilon \mathbf{u}_1(\tau) + \epsilon^2 \mathbf{u}_2(\tau) + \dots, \quad \tau = \omega t \quad (\text{I.53})$$

On choisit ensuite les  $\omega_n$  afin d'éliminer les termes séculaires. NAYFEH (1973) propose également une variante, nommée méthode de renormalisation, qui conduit aux mêmes résultats mais qui est généralement plus simple à mettre en oeuvre.

- *Méthode asymptotique* (BOGOLIUBOV et MITROPOLSKI (1962), SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a)).

On cherche la solution sous forme d'une somme de la solution périodique du système linéaire sous-jacent et d'une série entière du petit paramètre  $\epsilon$  :

$$\mathbf{U} = a \cos \psi + \epsilon u_1(a, \psi) + \epsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots \quad (\text{I.54})$$

mais les  $u_i$  sont des fonctions périodiques de  $\psi$ , de période  $2\pi$ , et de  $a$ , avec  $a$  et  $\psi$  fonctions du temps, données par :

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \epsilon A_1(a) + \epsilon^2 A_2(a) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega + \epsilon B_1(a) + \epsilon^2 B_2(a) + \dots \end{cases} \quad (\text{I.55})$$

Le problème consiste donc à trouver les  $u_i, A_i, B_i$  tels que (I.54) vérifie l'équation de départ jusqu'à un certain ordre,  $a$  et  $\psi$  étant solutions du système différentiel (I.55).

- *Méthode des échelles multiples*

Cette méthode est largement utilisée dans NAYFEH et MOOK (1979) pour traiter de nombreux exemples. Nous l'appliquerons également pour calculer les solutions analytiques du système à deux ressorts (I.36), et comparer celles-ci aux résultats numériques obtenus par la méthode EHMAN.

Il s'agit toujours de développements asymptotiques mais cette fois de plusieurs variables (les échelles) : on introduit en effet  $T_0, T_1, T_2, \dots$ , tels que  $T_i = \epsilon^i t$ , puis on cherche une solution :

$$\mathbf{U}(t; \epsilon) = \epsilon \mathbf{u}_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 \mathbf{u}_2(T_0, T_1, T_2) \dots \quad (\text{I.56})$$

Le nombre d'échelles varie en fonction de la précision souhaitée (une précision en  $O(\epsilon^{i+1})$  est obtenue en allant jusqu'à l'échelle  $T_i$ ).

A noter que, bien que plus lourdes en calculs que les précédentes, les échelles multiples permettent de traiter les systèmes non conservatifs. Une application détaillée de la méthode des échelles multiples, pour le cas du système à deux ressorts (I.36) est donnée annexe A.

- *Méthodes de la moyenne*

Il existe plusieurs variantes de ces méthodes (Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky, moyenne ou centrage etc, voir BOGOLIUBOV et MITROPOLSKI (1962), BLAQUIÈRE (1966), SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a), NAYFEH (1973) ...). On présente ici le principe général, pour plus de précisions on pourra consulter les ouvrages cités ci-dessus.

Soit un système d'équations différentielles du premier ordre<sup>8</sup> :

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \epsilon \mathbf{U}_i(u_1 \dots u_m, t), \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{I.57})$$

L'idée est de remplacer ce dernier par un système approché, toujours non linéaire mais plus facilement analysable, en effectuant une moyenne sur le temps :

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{T} \int_0^T \mathbf{U}_i(u_1 \dots u_m, t) = \mathbf{U}_{0i}(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m), i = 1, \dots, m \quad (\text{I.58})$$

En général on pose :

$$\begin{cases} u = a(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) \\ \dot{u} = -\omega a(t) \sin \omega t + \dot{\varphi}(t) \end{cases} \quad (\text{I.59})$$

$\omega$ , pulsation propre, ce qui correspond aux solutions du système linéaire associé mais avec  $a$  et  $\varphi$  variables. Le report de cette écriture dans (I.1) conduit à un système du type (I.57) avec  $a$  et  $\varphi$  pour inconnues.

On trouvera des exemples d'application de cette méthode dans SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a), SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b), BOGOLIUBOV et MITROPOLSKI (1962).

- *Méthodes de Rayleigh-Ritz, Galerkin en temps*

Pour ces méthodes, on suppose que les déplacements s'écrivent comme la somme de produits d'un coefficient et d'une fonction du temps donnée :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_k \psi_k(t) \quad (\text{I.60})$$

On recherche ensuite les  $\mathbf{U}_k$  qui minimisent le résidu obtenu par application du principe d'Hamilton ou des équations de Lagrange pour le système considéré. Le choix des  $\psi_k$  est l'étape déterminante de ces méthodes. On présente ci-après la méthode de l'équilibre harmonique qui peut être vu comme un cas particulier de ces méthodes, pour des fonctions  $\Psi_k$  harmoniques.

- *Méthode de l'équilibrage harmonique (EH)*

Cette méthode consiste à rechercher des solutions périodiques sous forme de séries de Fourier :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=0}^N \mathbf{U}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{V}_k \sin(k\omega t) \quad (\text{I.61})$$

Le report de ces développements dans (I.1) conduit, après identification à zéro des coefficients des sinus et cosinus, à l'écriture d'un système algébrique de taille  $N + 1$ , avec pour inconnues les  $\mathbf{U}_k$  et  $\mathbf{V}_k$ . La difficulté réside dans le choix a priori du nombre de termes retenus dans le développement de départ.

---

<sup>8</sup> auquel peut toujours se ramener un système du deuxième ordre, forme généralement obtenue en mécanique

Nous utiliserons cette méthode combinée avec une méthode itérative (la MAN, Méthode Asymptotique Numérique) pour le calcul des solutions périodiques de la réponse forcée de structures minces. Tout ceci est présenté plus en détail au chapitre III, avec des résultats de simulations dans le chapitre V.

- *Méthode de linéarisation équivalente* (BLAQUIÈRE (1966), BOGOLIUBOV et MITROPOLSKI (1962), WORDEN et TOMLINSON (2001), NAYFEH et MOOK (1979))

Il s'agit ici de rechercher le meilleur système linéaire approchant (I.1). Par exemple, pour un système à un degré de liberté type

$$m\ddot{u} + f(u) = 0,$$

on écrit l'équation linéaire équivalente :

$$m\ddot{u} + ku = 0, \tag{I.62}$$

puis on minimise l'erreur sur une période,  $e = \int_0^T (ku - f(u))^2 dt$ . Le calcul de la solution du système linéaire complété par la valeur de  $k$  donnée par la minimisation de l'erreur conduit à une solution approchée du système initial.

Parmi les méthodes de calcul de la réponse forcée présentées ici, nous avons choisi d'utiliser l'équilibrage harmonique, écrite et appliquée de façon à faciliter sa programmation (voir les détails au chapitre IV). Quelques résultats sont également présentés en annexe A sur le système à deux ressorts et la méthode est comparée à celle des échelles multiples.

Les méthodes de perturbation présentent l'avantage de conduire à des solutions analytiques et procurent également une meilleure compréhension des phénomènes. En effet, le déroulement des calculs, bien qu'assez lourd dès que l'ordre augmente, permet de bien évaluer l'importance des différents termes, ce qui facilite par exemple l'étude de phénomènes tels que les résonances internes.

En revanche, bien qu'elle nécessite une hypothèse a priori sur la forme des solutions et surtout le choix d'un ordre de troncature, la méthode de l'équilibre harmonique possède un domaine de validité bien plus important que les méthodes de perturbation pour lesquelles il est rapidement difficile d'aller à des ordres élevés et où les résultats sont limités à des cas faiblement non linéaires.

## I.5 Bilan du chapitre

Ce chapitre est constitué de rappels et de définitions de notions liées aux vibrations non linéaires de systèmes discrets, dans le but de donner au lecteur une vision assez large des différents phénomènes caractéristiques d'un comportement non linéaire. Notamment, on utilise régulièrement en guise d'illustration, un "petit" système à deux degrés de liberté, possédant des non linéarités cubiques et quadratiques. Tout ceci est fait en vue de préparer la suite de l'étude consacrée aux structures minces.

Dans un premier temps, on a considéré le cas des oscillations libres et des modes non linéaires.

Quelques définitions et méthodes de calcul de ces derniers ont été présentées. L'intérêt de celles-ci est de fournir un outil équivalent aux modes linéaires mais capable de prendre en compte toutes les spécificités des cas non linéaires.

Ensuite, le cas de la réponse forcée harmonique a été traité, en mettant l'accent sur les points caractéristiques du comportement non linéaire, tels que les résonances secondaires ou internes. Une revue de quelques méthodes pour la résolution approchée de systèmes d'équations différentielles non linéaires a également été faite. On s'est intéressé en particulier à la méthode des échelles multiples, dont le principal atout est de donner une bonne compréhension des phénomènes, et à celle de l'équilibrage harmonique, qui est celle que nous utiliserons pour traiter le cas des structures minces et dont le domaine de validité est supérieur aux méthodes de perturbation.

## CHAPITRE II

# Structures minces en non linéaire géométrique

---

**A**près un premier chapitre consacré au comportement vibratoire des systèmes discrets, on traite ici le cas qui nous intéresse directement, à savoir celui des structures minces. L'objectif de ce chapitre est justement l'écriture d'un modèle discret, qui sera utilisé pour le calcul de la réponse forcée de structures.

Après une rapide revue des différents types de non linéarités de structures, on écrit le problème de l'élastodynamique en grands déplacements, dans un premier temps pour des structures quelconques puis particularisé aux poutres et plaques. Le modèle est ensuite discrétisé par une méthode éléments finis. Pour terminer, on inclut également dans celui-ci un défaut de forme et une précontrainte, qui permettent de paramétrer la réponse, notamment en vue des comparaisons avec les résultats expérimentaux.

A la fin de ce chapitre, on dispose donc d'un système d'équations différentielles du second ordre, non linéaires, sur lequel la méthode EHMAN décrite au chapitre suivant sera appliquée, en vue de calculer la réponse forcée de structures minces.

---

## PLAN DU CHAPITRE II

---

<b>II.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>41</b>
<b>II.2</b>	<b>Non linéarités dans les structures minces</b>	<b>41</b>
<b>II.3</b>	<b>Formulation du problème de l'élastodynamique</b>	<b>43</b>
II.3.1	Cas général	43
II.3.1.a	Description du problème	43
II.3.1.b	Déformation de Green-Lagrange en non-linéaire géométrique	44
II.3.1.c	Contraintes et loi de comportement	45
II.3.1.d	Écriture des équations du mouvement	45
II.3.2	Application aux structures minces	46
II.3.2.a	Quelques précisions sur les notations...	46
II.3.2.b	Modèle de poutres en non linéaire géométrique et de plaques de Von Kármán	46
II.3.3	Discrétisation éléments finis	49
<b>II.4</b>	<b>Prise en compte d'un défaut de forme et d'une précontrainte dans le modèle</b>	<b>50</b>
<b>II.5</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>53</b>

---

## II.1 Introduction

L'emploi de structures minces, poutres, plaques et coques, est aujourd'hui largement répandu dans de nombreux domaines, en particulier les transports, le génie civil ou encore les instruments de musique. Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue de contrôler ou d'éviter divers phénomènes (endommagement, bruit ...). En ingénierie ou en recherche, la plupart des modèles utilisés sont en général linéaires et fournissent une bonne approximation, au premier ordre, du comportement vibratoire. La littérature sur le thème des vibrations libres ou forcées en linéaire est abondante. Concernant le cas particulier des plaques, les premières études ont été menées par Chladni (1787), qui a étudié les vibrations libres d'une plaque carrée en "libre-libre", puis Rayleigh (1877) ou encore Ritz (1909). LEISSA (1973), propose un article de revue des vibrations libres de plaques rectangulaires, et de leur solutions analytiques lorsque celles-ci existent. HUTCHINSON (1988), LIEW *et al.* (1995) pour les plaques épaisses, fournissent également un grand nombre de références sur le sujet.

Cependant, l'hypothèse des vibrations linéaires a un domaine de validité restreint. En effet, les structures couramment utilisées sont de plus en plus légères tout en étant soumises à des niveaux d'excitation toujours plus importants. Cela conduit à des mouvements de grande amplitude, pour lesquels l'approximation des petits déplacements n'est plus valable, et nécessitant une modélisation non linéaire. C'est le cas par exemple, des panneaux légers utilisés en aéronautique, soumis à de hauts niveaux de bruit et conduisant à des amplitudes importantes, présentés dans RIBEIRO (1998).

L'objet de ce chapitre est d'écrire un modèle discret représentant le comportement de structures, en non linéaire géométrique. Après une présentation des différentes non linéarités de structures possibles, on rappelle donc l'écriture des équations de l'élastodynamique pour une structure quelconque puis pour des poutres et plaques. Le système obtenu est ensuite discrétisé par éléments finis. Enfin, on introduit dans ce modèle un défaut de forme et une précontrainte initiale, pour aboutir au système qui sera résolu par la méthode EHMANN présentée au chapitre III.

## II.2 Non linéarités dans les structures minces

Dans la suite on s'intéressera uniquement aux non linéarités géométriques mais on présente auparavant les différentes sources de non linéarités possibles dans les structures minces. On a distingué trois cas :

- les non linéarités liées au matériau,
- celles liées aux conditions limites,
- celles liées à la géométrie.

Les premières concernent les matériaux pour lesquels les contraintes sont des fonctions non linéaires des déplacements, on parle alors selon les cas d'élasticité non linéaire, d'élasto-plasticité, de fluage, de visco-élasticité ou de visco-plasticité (voir par exemple HALPHEN et NGUYEN



(1975)). Ces problèmes sont en général résolus par l'utilisation de méthodes itératives. L'étude présentée ici se limite aux matériaux ayant une loi de comportement élastique linéaire. Pour plus de détails on pourra cependant consulter, entre autres, ZIENKIEWICZ et TAYLOR (1991), CRISFIELD (1997a) et CRISFIELD (1997b) ou encore BATHE (1996), où ces problèmes sont introduits dans un cadre éléments finis. Dans la seconde catégorie, on classe tous les problèmes pour lesquels les conditions limites changent au cours du chargement. C'est le cas notamment des chocs, frottements, contacts, etc... Ce type de conditions peut entraîner par exemple un amortissement non linéaire. On trouvera des informations à ce sujet dans les mêmes ouvrages que ceux cités pour les non-linéarités matériau.

Enfin, des amplitudes de déplacement importantes conduisent soit à une grande courbure soit à l'étirement du plan moyen pour certaines conditions limites restreignant le mouvement. On parle alors de non linéarités géométriques. La relation entre les déformations et les déplacements n'est plus linéaire, c'est à dire qu'on sort de l'hypothèse des petites déformations ou perturbations (HPP) pour lesquelles on considère une approximation au premier ordre, linéaire, des déformations qui devient rapidement limitée pour des structures élancées ou très minces, soumises à des déplacements importants. Dans ce cas, la partie non linéaire du tenseur des déformations n'est plus négligeable, ce qui conduit à un couplage entre la partie membrane et la partie flexion.

Comme exposé dans le chapitre I, la présence de non linéarités implique l'apparition de phénomènes totalement ignorés en linéaire : d'une part, les formes modales et les fréquences de résonances varient avec l'amplitude du mouvement, et d'autre part, la réponse à une excitation harmonique peut comporter des résonances sous ou sur-harmoniques, ou encore des résonances internes.

Historiquement, les premières études en non linéaire géométrique ont concerné les problèmes de flambement, où l'utilisation de modèles non linéaires est nécessaire pour la détermination de la charge limite. Depuis, de nombreuses études ont été menées, en particulier pour les vibrations libres ou forcées de structures minces. Outre les ouvrages généraux de NAYFEH et MOOK (1979), SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a), SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b) précédemment cités, on trouve dans SATHYAMOORTHY (1987) une revue bibliographique sur les vibrations non linéaires géométriques, ainsi que sur l'influence sur celles-ci de différents paramètres tels que la température, un défaut de forme, l'anisotropie du matériau ou encore un environnement fluide. Les vibrations libres et forcées sont également traitées dans SRINIVASAN (1966) (poutres), LAU et CHEUNG (1981) (coques) ou REDDY *et al.* (1981) (plaques circulaires et annulaires). La dépendance des fréquences et des formes modales vis à vis de l'amplitude du mouvement est montrée numériquement et expérimentalement dans WHITE (1971), qui utilise un modèle de Duffing pour le comportement des poutres. BENAMAR *et al.* (1991) et BENAMAR *et al.* (1993) étudient les vibrations libres de poutres et de plaques et montrent, entre autres, qu'une amplitude de l'ordre de l'épaisseur conduit à 18% de décalage sur les fréquences propres. Ces travaux sont complétés par des résultats expérimentaux. HAN et PETYT (1997a) et HAN et PETYT (1997b) s'intéressent au calcul des trois premiers modes de vibrations libres pour des plaques rectangulaires. Dans plusieurs articles, Lewandowski traite le cas de la réponse libre ou forcée de poutres,

(LEWANDOWSKI (1992), LEWANDOWSKI (1994), LEWANDOWSKI (1997b)). VAN DOOREN (1975) et VAN DOOREN et BOUC (1975) décrivent la réponse sous-harmonique d'une poutre pour une excitation bi-modale. Les résonances internes sont étudiées dans BENNETT et EISLEY (1970), pour des vibrations libres et forcées de poutres, pour des plaques circulaires dans SRIDHAR *et al.* (1975), rectangulaires dans LAU *et al.* (1984b). De manière générale, les résonances internes modifient la courbure de branches de solution déjà existantes ou conduisent à l'apparition de branches secondaires (avec éventuellement des boucles, (LAU *et al.* (1984a) résonances 1 :3). Le couplage entraîne également un changement dans les formes modales (RIBEIRO et PETYT (1999b)).

## II.3 Formulation du problème de l'élastodynamique

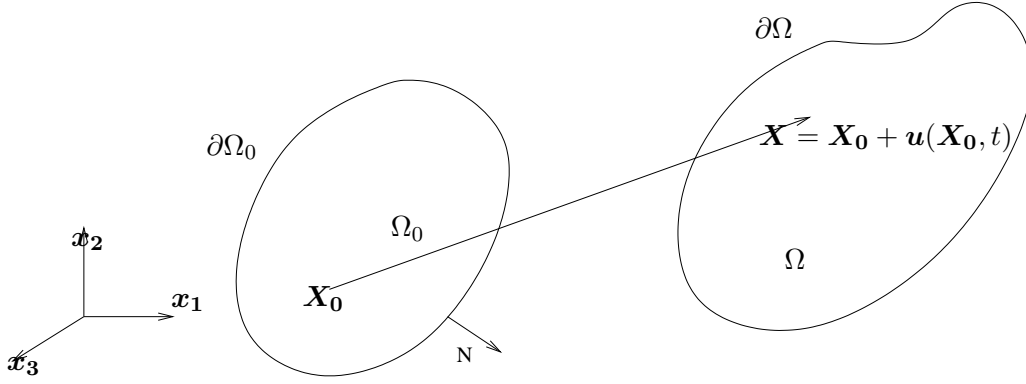
Après une brève présentation du problème, on applique le principe de Hamilton à un système continu quelconque, à comportement linéaire élastique. Aucune restriction n'est effectuée sur les déformations et rotations, c'est à dire qu'on se place dans le cas non linéaire géométrique. On utilise donc la forme complète du tenseur des déformations de Green-Lagrange. On en déduit les équations du mouvement sous forme variationnelle et locale. La première forme est préférée, car plus adaptée à la discrétisation par éléments finis qui vient ensuite. De plus, le problème est formulé avec le couple d'inconnues  $(\mathbf{u}, \mathbf{S})$ , déplacements-contraintes<sup>1</sup>, conduisant à des équations quadratiques, facilitant l'application de la méthode de l'équilibrage harmonique exposée au chapitre suivant (III). Les équations sont dans un premier temps écrites dans un cadre général puis particularisées au cas des poutres et des plaques. Pour terminer, on introduit de nouveaux paramètres, à savoir un défaut de forme (pour les plaques ou poutres) et une précontrainte, ceci en vue d'avoir un modèle plus adapté au montage expérimental (voir chapitre VI). L'introduction du défaut de forme permet de quantifier son influence sur la réponse (notamment dans l'apparition d'harmoniques d'ordre deux, non prévues par le modèle parfait de poutre ou plaque). L'intérêt de la précontrainte est de pouvoir modifier les fréquences propres afin de les rendre commensurables et d'observer des phénomènes de couplage et de résonance interne. Enfin, on constate expérimentalement que les variations de température ont une influence non négligeable sur la réponse de la structure, ce qui peut-être modélisé par la précontrainte (voir le §VI.4.5).

### II.3.1 Cas général

#### II.3.1.a Description du problème

Considérant un corps solide déformable, on utilise une formulation Lagrangienne du problème, c'est à dire que toutes les grandeurs sont données en référence à une configuration initiale, avec  $\Omega_0$  le volume initial et  $\partial\Omega_0$  sa frontière. On note  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  le repère cartésien utilisé et  $(x, y, z)$  les coordonnées correspondantes.  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  représente le champ de vecteurs des déplacements dans ce repère.

<sup>1</sup>Par contre on n'utilise pas d'éléments finis mixtes et on ne discrétise que les déplacements



### II.3.1.b Déformation de Green-Lagrange en non-linéaire géométrique

On se place dans le cadre des transformations finies, sans hypothèses restrictives sur les déformations et rotations. On utilise le tenseur du second ordre des déformations de Green-Lagrange<sup>2</sup>, quadratique en  $\mathbf{u}$ , lié au champ de déplacements par :

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\nabla^t\mathbf{u}\nabla\mathbf{u} \quad \text{et} \quad \delta\gamma = \gamma^l(\delta\mathbf{u}) + \gamma^{nl}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \\ &= \underbrace{\gamma^l(\mathbf{u})}_{\text{linéaire}} + \underbrace{\gamma^{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u})}_{\text{non linéaire}}\end{aligned}$$

ou, en écrivant  $\gamma$  sous forme vectorielle (avec  $u, v, w$  les coordonnées de  $\mathbf{u}$ )

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1})$$

$\gamma^l$  et  $\gamma^{nl}$  désignant respectivement les parties linéaires et non linéaires du tenseur. Si on applique l'hypothèse des petites perturbations (HPP i.e. déformations infinitésimales et rotations de faible amplitude), on retrouve le cas linéaire avec  $\gamma^{nl} = 0$ . Dans le cas complet,  $\gamma$  est quadratique en  $\mathbf{u}$ .

<sup>2</sup>l'opérateur  $\nabla$  désigne le gradient par rapport à  $\mathbf{X}_0$

### II.3.1.c Contraintes et loi de comportement

Pour un matériau isotrope linéaire élastique, la densité d'énergie de déformation est donnée par

$$W(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\gamma} \quad (\text{II.2})$$

avec

$$\mathbf{S} = \mathbf{D} \boldsymbol{\gamma} \quad (\text{loi de Hooke}) \quad (\text{II.3})$$

$\mathbf{S}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et  $\mathbf{D}$  matrice de raideur du matériau s'écrit :

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

$E$  désigne le module d'Young du matériau et  $\nu$  le coefficient de Poisson, et  $\mathbf{S} = \{S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}\}$ , pour  $\boldsymbol{\gamma}$  décrit par II.1.

### II.3.1.d Écriture des équations du mouvement

Soit  $\mathcal{T}$  l'énergie cinétique et  $\mathcal{V}$  l'énergie potentielle totale égale à la somme de l'énergie de déformation du corps et de l'énergie potentielle des forces extérieures (supposées conservatives) :

$$\mathcal{T}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{u}_i \dot{u}_i d\Omega_0 \quad (\text{II.5})$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{int} + \mathcal{V}_{ext} \quad (\text{II.6})$$

$$\mathcal{V}_{int} = \int_{\Omega_0} W(\boldsymbol{\gamma}) d\Omega_0 \quad (\text{II.7})$$

$$\mathcal{V}_{ext} = - \int_{\Omega_0} \bar{\mathbf{F}}(t) \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{f}}(t) \mathbf{u} dS_0 \quad (\text{II.8})$$

$\bar{\mathbf{F}}$  représente les forces de volume et  $\bar{\mathbf{f}}$  les tractions de surface appliquées sur  $\partial\Omega$

Le principe de Hamilton stipule que :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{V}) dt = 0, \quad \text{pour } \delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0 \quad (\text{II.9})$$

L'application du principe à un système continu, avec les énergies données ci-dessus, conduit alors aux équations du mouvement, écrites sous forme variationnelle (principe des puissances virtuelles) :

$$\underbrace{- \int_{\Omega_0} \mathbf{S} \delta \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) d\Omega_0}_{\mathcal{P}_{int}(\delta \mathbf{u})} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_0} \bar{\mathbf{f}} \delta \mathbf{u} dS_0 + \int_{\Omega_0} \bar{\mathbf{F}} \delta \mathbf{u} d\Omega_0}_{\mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u})} = \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho \ddot{u} \delta \mathbf{u} d\Omega_0}_{\mathcal{P}_{acc}(\delta \mathbf{u})} \quad \forall \delta \mathbf{u} C.A.0 \quad (\text{II.10})$$

ou sous forme locale :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{T}) + \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}} & \text{dans } \Omega_0 \\ \mathbf{T}\mathbf{N} = \mathbf{f} & \text{sur } \partial\Omega_0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Avec  $\mathbf{T} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{N}$  normale unitaire en un point de la surface,  $\mathbf{I}$  matrice unité,  $\mathbf{T}$  premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

En résumé de ce qui précède, le problème complet, et bien posé, de l'élastodynamique est le suivant :

Étant données  $\bar{\mathbf{f}}$  et  $\bar{\mathbf{F}}$ , on cherche  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\gamma$  vérifiant :

→  $\mathbf{u}$  cinématiquement admissible (C.A.), soit  $\mathbf{u}$  égale aux déplacements imposés sur la frontière  $\partial\Omega_0$

→ la relation déformations-déplacements :

$$\gamma(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\nabla^t \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}$$

→ le principe des puissances virtuelles :

$$-\int_{\Omega_0} \mathbf{S} \delta \gamma(\mathbf{u}) d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} \bar{\mathbf{f}} \delta \mathbf{u} dS_0 + \int_{\Omega_0} \bar{\mathbf{F}} \delta \mathbf{u} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Omega_0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \text{ C.A. à } 0$$

→ la loi de comportement

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\gamma$$

## II.3.2 Application aux structures minces

A partir de l'écriture générale présentée ci-dessus, et sous certaines hypothèses, on déduit l'écriture du modèle élastodynamique pour les poutres (avec l'hypothèse des rotations modérées) et les plaques (Von Kármán). Ces deux cas sont rappelés ci-dessous, sans entrer dans les détails de la démarche de calcul, qu'on pourra trouver par exemple dans GERADIN (1993), CHIA (1980), ou encore REDDY (1997).

### II.3.2.a Quelques précisions sur les notations...

On considère une poutre droite de section  $\Sigma$  et de longueur  $l$  et une plaque de surface moyenne  $\omega$  et d'épaisseur  $h$  (voir figure II.1). On conserve toutes les notations utilisées auparavant dans ce chapitre. Cependant, pour faciliter l'écriture, on utilisera la convention d'Einstein pour les indices :  $u_{ij}u_{ik}$  signifie  $\sum_{i=1..3} u_{ij}u_{ik}$ . Les sommes vont de 1 à 3 par défaut et de 1 à 2 lorsque les indices sont notés en lettres grecques. Du fait de leur similitude, les deux modèles sont présentés en même temps.

### II.3.2.b Modèle de poutres en non linéaire géométrique et de plaques de Von Kármán

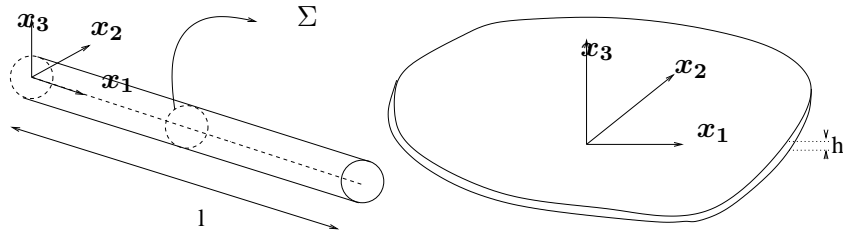


FIGURE II.1 - Modèle de poutre et de plaque

### Contraintes

On utilise l'hypothèse des contraintes planes. Celles-ci se réduisent donc à la composante  $S_{xx}$  pour une poutre et pour une plaque, s'écrivent :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & 0 \\ S_{xy} & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

### Déplacements :

On se limite au cas où les sections droites ont un mouvement de corps rigide et restent normales à la déformée de la ligne moyenne (hypothèses de Love-Kirchhoff). Les déplacements sont alors entièrement déterminés, par ceux de la ligne moyenne pour la poutre et par ceux de la surface moyenne pour la plaque, notés  $(\bar{\mathbf{u}}, w)$  dans  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ , avec  $\bar{\mathbf{u}} = u_1(x, t)$ ,  $w = w(x, t)$  pour une poutre et  $\bar{\mathbf{u}} = \{u_1(x, y, t), u_2(x, y, t)\}$ ,  $w = w(x, y, t)$  pour une plaque. On a alors :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \left[ u_\alpha - z \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right] \mathbf{x}_\alpha + w \mathbf{x}_3, \quad (\text{II.13})$$

avec  $\alpha = 1$  pour une poutre et variant de 1 à 2 pour une plaque.

### Déformations

A cela on ajoute l'hypothèse des rotations modérées (ie les termes de rotations sont petits mais non négligeables par rapport aux gradients des déplacements), ce qui conduit à l'écriture de  $\gamma$  :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \underbrace{e_{\alpha\beta}^l(\bar{\mathbf{u}}) + e_{\alpha\beta}^{nl}(w, w)}_{e_{\alpha\beta}} + z k_{\alpha\beta}(w) \quad (\text{II.14})$$

pour

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta}^l(\bar{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \\ e_{\alpha\beta}^{nl}(w, w) &= \frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta} \\ k_{\alpha\beta}(w) &= -w_{,\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$\mathbf{e}$  représente les déformations de membrane (tension pour une poutre) et  $\mathbf{k}$  celles de flexion parfois appelées courbure. On introduit ensuite les contraintes généralisées suivantes (avec  $\Delta = [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$  pour une plaque et  $\Delta = \Sigma$  pour une poutre) :

$$N_{\alpha\beta} = \int_{\Delta} S_{\alpha\beta} d\Delta \quad \text{et} \quad M_{\alpha\beta} = \int_{\Delta} z S_{\alpha\beta} d\Delta \quad (\text{II.16})$$

nommés respectivement efforts normaux et moments de flexion.

### Principe des puissances virtuelles

On déduit alors de II.10 et II.3 la formulation variationnelle du problème pour les structures minces ainsi que la loi de comportement correspondante :

$$- \int_{\Gamma} (N_{\alpha\beta} (e_{\alpha\beta}^l(\delta\bar{\mathbf{u}}) + 2e_{\alpha\beta}^{nl}(w, \delta w)) + M_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}(\delta w)) d\Gamma + \mathcal{P}_{ext}(\delta\bar{\mathbf{u}}, \delta w) = \int_{\Gamma} \rho_{\Gamma} (\ddot{u}_{\alpha} \delta u_{\alpha} + \ddot{w} \delta w) d\Gamma$$

$$\forall \delta\bar{\mathbf{u}} \text{ et } \delta w \text{ C.A. à } 0 \tag{II.17}$$

$\Gamma = [0, l]$  pour une poutre et  $\Gamma = \omega$  pour une plaque.  $\rho_{\Gamma}$  désigne respectivement la masse linéique (poutre) ou surfacique (plaque), définie par :

$$\rho_{\Gamma} = \int_{\Sigma} \rho d\Sigma \text{ (poutre) ou } \rho_{\Gamma} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz \text{ (plaque)} \tag{II.18}$$

A noter qu'on néglige également l'énergie d'inertie de rotation.

### Loi de comportement

Poutres ( $I$  désigne le moment d'inertie quadratique) :

$$\begin{aligned} N_{11} &= E\Sigma e_{11} \\ M_{11} &= EI k_{11} \end{aligned} \tag{II.19}$$

Plaques :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} ((1-\nu)e_{\alpha\beta} + \nu e_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}) \\ M_{\alpha\beta} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} ((1-\nu)k_{\alpha\beta} + \nu k_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}) \end{aligned} \tag{II.20}$$

Ce qui donne, pour les équations du mouvement sous forme locale :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta} + \bar{F}_{\alpha} &= \rho_{\Gamma} \ddot{u}_{\alpha} \text{ dans } \Gamma \\ M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + (N_{\alpha\beta} w_{,\alpha(x)})_{,\beta} + \bar{F}_z &= \rho_{\Gamma} \ddot{w} \text{ + conditions aux limites.} \end{aligned} \tag{II.21}$$

Les deux formulations rappelées ci-dessus pour les poutres et les plaques appellent quelques brefs commentaires. Tout d'abord, dans les deux cas, le problème est découpé en deux parties : celui de membrane, ou tension pour les poutres, ( $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{N}$ ) et celui de flexion ( $k$  et  $M$ ). Dans le cas linéaire, ces deux aspects sont découplés, et donc résolubles indépendamment l'un de l'autre. En non linéaire géométrique des termes de couplage interviennent et compliquent donc la résolution. En outre, le fait de considérer un matériau isotrope, linéaire élastique simplifie fortement le problème. D'autres couplages ont lieu, par exemple dans le cas des composites. Mais ce n'est pas le propos de cette thèse et on pourra trouver plus de détails à ce sujet, entre autres dans REDDY (1997).

Quoiqu'il en soit, au final les équations de poutres et de plaques ont la même structure que celles du cas général, (II.10), il suffit pour passer d'un cas à l'autre "d'adapter" les écritures (passage de  $\mathbf{S}$  à  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  etc ...). Dans la suite, on utilisera le formalisme "trois dimensions" de (II.10) sans se préoccuper du cas considéré (général, poutre ou plaque).

### II.3.3 Discrétisation éléments finis

Le problème de l'élastodynamique est discrétisé spatialement par la méthode classique et bien connue des éléments finis (BATHE (1996), ZIENKIEWICZ et TAYLOR (1994), ZIENKIEWICZ et TAYLOR (1991), etc.), en introduisant le développement suivant :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{N}(x, y, z)\mathbf{q}(t) \quad (\text{II.22})$$

$\mathbf{N}$  désignant la matrice des fonctions de forme correspondant à l'élément choisi et  $\mathbf{q}$  le vecteur des degrés de liberté, à savoir les déplacements aux noeuds. Soit la matrice  $\mathbf{B}$  définie par la relation<sup>3</sup> :

$$d\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}(\mathbf{q})d\mathbf{q} \text{ avec } \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}) \quad (\text{II.23})$$

$\mathbf{B}^l$  et  $\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})$  désignant respectivement les parties linéaires et non linéaires de  $d\boldsymbol{\gamma}$ . A noter que  $\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})$  est linéaire en  $\mathbf{q}$ .

Les déformations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= (\mathbf{B}^l + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}))\mathbf{q} \\ \delta\boldsymbol{\gamma} &= (\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}))\delta\mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Finalement, II.3 et II.10 deviennent :

$$\begin{cases} - \int_{\Omega_0} {}^t(\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}))\mathbf{S}_d d\Omega_0 + \mathbf{F}_{ext} = M\ddot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{S} = \mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D}(\mathbf{B}^l + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}))\mathbf{q} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{F}_{ext} = \int_{\partial\omega_0} {}^t\mathbf{N}\bar{\mathbf{f}} dS_0 + \int_{\Omega_0} {}^t\mathbf{N}\bar{\mathbf{F}} d\Omega_0 \\ M = \int_{\Omega_0} \rho\mathbf{N}^t\mathbf{N} d\Omega_0 \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Si on reporte la loi de comportement dans les équations du mouvement, on retrouve l'expression générale I.1 donnée au chapitre I, formulée uniquement en déplacements :

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{q}} &= - \int_{\Omega_0} \underbrace{{}^t\mathbf{B}^l\mathbf{D}\mathbf{B}^l\mathbf{q}} + \underbrace{\frac{1}{2}{}^t\mathbf{B}^l\mathbf{D}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{q}} + \underbrace{{}^t\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{B}^l\mathbf{q}} + \underbrace{\frac{1}{2}{}^t\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q})\mathbf{q}} d\Omega_0 + \mathbf{F}_{ext} \\ \iff \\ M\ddot{\mathbf{q}} &+ \mathbf{L}(\mathbf{q}) + \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{F}_{ext} \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

avec  $M$  la matrice de masse,  $\mathbf{L}$  la rigidité linéaire,  $\bar{\mathbf{Q}}$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}$  et  $\mathbf{C}$  les rigidités non linéaires quadratiques et cubiques en déplacement.

Pour la suite, on ne se préoccupera pas des problèmes liés à la convergence du modèle éléments finis, qui sort du cadre de cet exposé, et on considérera que le maillage utilisé est suffisant pour que le système continu et le système discret conduisent à des solutions similaires.

<sup>3</sup>Pour alléger les expressions, on ne précisera pas toujours la dépendance en temps du vecteur  $\mathbf{q}$



## II.4 Prise en compte d'un défaut de forme et d'une précontrainte dans le modèle

Pour introduire ce paragraphe, considérons l'exemple suivant, une poutre droite sur appuis, de longueur  $L$  et de section rectangulaire  $\Sigma$ . On introduit la discrétisation à un degré de liberté :

$$\begin{cases} u_1(x, t) = 0 & w(x, t) = \bar{w}(x)q(t) \\ \delta u_1 = 0 & \delta w = \bar{w}(x)\delta q \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

$\bar{w}(x)$  est le premier mode propre linéaire,  $\bar{w}(x) = h \sin \frac{\pi x}{L}$ , normalisé tel que  $\max_{x \in [0, L]} (|\bar{w}_1(x)|) = h$ ,  $h$  épaisseur de la poutre. Après report dans II.17 et II.19 et simplifications, on obtient une équation type Duffing, cubique en  $q$  :

$$m\ddot{q} + k_1q + k_3q^3 = f_{ext} \quad (\text{II.28})$$

avec :

$$m = -\frac{1}{2}L\rho h\Sigma \quad , \quad k_1 = -\frac{1}{2}\frac{IEh\pi^4}{L^3} \quad , \quad k_3 = -\frac{3}{16}\frac{Eh^3\pi^4\Sigma}{L^3} = \frac{9}{2}k_1 \quad (\text{II.29})$$

$I$  désigne le moment d'inertie quadratique de la section.

On pose ensuite  $q(t) = a \cos \Omega t$  (équilibre harmonique à un terme), ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \omega^2(a) &= \omega_{01}^2 + \frac{3}{4}\frac{k_3}{m}a^2 && \text{pour la réponse libre } (\omega_{01} : \text{fréquence propre linéaire}). \\ a &= \frac{\frac{f}{m}}{\omega^2(a) - \Omega^2} && \text{pour la réponse forcée avec } f_{ext} = f \cos \Omega t \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Ce modèle simplifié montre que, dans le cas parfait, les seules non linéarités présentes sont cubiques en déplacement, ce qui est le cas en général pour les modèles de poutres et plaques décrits plus haut. En outre, le calcul au premier ordre (II.30) illustre la dépendance de la fréquence vis à vis de l'amplitude des vibrations, conduisant à la "courbure" de la réponse.

Ces constatations sont confirmées par la plupart des études analytiques ou numériques de vibrations de plaques ou poutres en non linéaire géométrique, qui donnent une réponse contenant uniquement des harmoniques impaires. Or, de nombreuses études expérimentales (voir par exemple SASSI et OSTIGUY (1994), ou encore la notre, présentée au chapitre VI, montrent la présence d'harmoniques deux dans la réponse forcée harmonique. RIBEIRO (2001) propose deux origines à ce phénomène, dans le cas des vibrations de poutres : soit l'excitation n'est pas parfaitement perpendiculaire à la structure, soit elle n'est pas purement harmonique (présence d'un terme constant), ce qui explique la présence de termes quadratiques dans les équations du mouvement. Ainsi, si l'on reprend maintenant le petit exemple de départ en y introduisant un défaut initial, de la forme du premier mode linéaire, noté  $w^*$ , et une précontrainte,  $(N^*, M^*)$ , tels que :

$$w^* = \eta \bar{w}(x) \quad (\text{II.31})$$

$\eta = 1$  correspond à un défaut de l'ordre de l'épaisseur au milieu de la poutre. On reporte<sup>4</sup> maintenant dans II.44 et II.45 pour obtenir :

$$m\ddot{q} + k_1^*q + k_2^*q^2 + k_3q^3 = f_{ext} \quad (\text{II.32})$$

<sup>4</sup>les équations générales avec défaut et précontrainte sont définies plus loin

avec :

$$k_1^* = k_1 \left( 1 + \underbrace{9\eta^2}_{\text{défaut } (L_1^*)} + \underbrace{\frac{9}{2}\eta^2}_{\text{précontrainte } (L_2^*)} \right) \quad (\text{II.33})$$

$$k_2^* = \frac{27}{2}\eta k_1$$

Le défaut et la précontrainte conduisent d'une part, à une modification des termes linéaires ( $k_1^*$ ) et d'autre part, à l'apparition de termes quadratiques ( $k_2^*$ ). Pour cet exemple, une amplitude du défaut de l'ordre du tiers de l'épaisseur conduit à l'ajout de termes du même ordre de grandeur que  $k_1$  dans  $k_1^*$ , et conduit à  $k_1^* = 2.5k_1$ . Quand à  $k_2^*$ , il est de l'ordre de grandeur de  $k_1$  dès que le défaut vaut 2/27 de l'épaisseur.

Dans le modèle décrit ci-après, on introduit un défaut de forme initial, conduisant à des termes quadratiques supplémentaires dans le modèle. En effet, les structures minces type poutres ou plaques utilisées réellement sont rarement idéales. Des défauts de conceptions faussant la planéité, des conditions aux limites mal ajustées (serrage, mauvaise symétrie ...), ou les variations de température influencent le comportement de la structure de manière significative. En plus des harmoniques paires dans la réponse, on observe également un décalage des fréquences propres linéaires par rapport à leur valeur théorique. Ces variations avec la température (ou autre) sont prises en compte en incluant dans la modélisation une précontrainte initiale en plus du défaut de forme. En outre, cette dernière permet de contrôler les positions de ces fréquences et donc de les rendre commensurables pour éventuellement observer des phénomènes de couplage, de résonance interne tels que ceux décrits au chapitre I.

En résumé, le défaut et la précontrainte sont introduits essentiellement en vue d'obtenir un modèle paramétré, plus proche de la réalité expérimentale. Bien entendu les résultats obtenus avec un modèle de plaque plus un défaut de forme sont identiques à ceux que donnerait un modèle de coque. En fait les équations sont plus simples et surtout, la présence d'un défaut comme paramètre permet de mieux quantifier son influence.

On se place dans le cadre général, en trois dimensions, décrit au paragraphe II.3.1. On considère deux situations (voir figure II.2) : soit il existe un défaut de forme initial de la structure, noté ici  $\mathbf{d}$ , par rapport à la configuration dite parfaite, soit la structure est précontrainte et son état initial est donné par le champ de déplacement  $\mathbf{d}^*$  et celui de contrainte  $\mathbf{S}^*$ . Le mouvement de la structure est ensuite étudié, relativement à son état avec défaut et/ou précontrainte, qui devient donc la configuration de référence, de volume toujours noté  $\Omega_0$ .

On réécrit ensuite le problème de l'élastodynamique en prenant en compte les paramètres  $\mathbf{d}^*$  et  $\mathbf{S}^{*5}$ . La relation déformations-déplacements (II.1) s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u} + \mathbf{d}^*) - \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{d}^*) \quad (\text{II.34})$$

$$= \boldsymbol{\gamma}^L(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}^{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\gamma}^{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{d}^*) \quad (\text{II.35})$$

et sa variation :

$$\delta\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\gamma}^L(\delta\mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\gamma}^{nl}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\gamma}^{nl}(\mathbf{d}^*, \delta\mathbf{u}) \quad (\text{II.36})$$

---

<sup>5</sup>Le cas avec simplement un défaut  $\mathbf{d}$  étant obtenu pour  $\mathbf{S}^* = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{d}^* = \mathbf{d}$

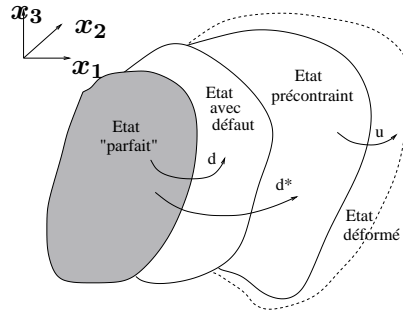


FIGURE II.2 - Différents états de la structure : parfaite, avec défaut initial, précontrainte et déformée

ou encore, sous forme discrète :

$$\gamma_d = (\mathbf{B}^L + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\mathbf{q} \quad (\text{II.37})$$

$$\delta\gamma_d = (\mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\delta\mathbf{q} \quad (\text{II.38})$$

Finalement, (II.10) et (II.3) deviennent :

$$\begin{cases} - \int_V {}^t(\mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\mathbf{S}dV + \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{S} = \mathbf{S}^* + \mathbf{D}(\mathbf{B}^L + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{d}^*))\mathbf{q} \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Cette formulation en contraintes et déplacements est plus adaptée à l'application de la méthode de l'équilibrage harmonique, présentée au chapitre suivant, car les termes non linéaires sont au maximum d'ordre 2, quadratiques pour les inconnues  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{S}$ . Cependant, en reportant la loi de comportement dans le principe des puissances virtuelles, on obtient une forme permettant de mieux visualiser les diverses influences (non linéarité, défaut ...) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1^*(\mathbf{S}^*) + \mathbf{L}_2^*(\mathbf{d}^*))\mathbf{q} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \mathbf{Q}_1^*(\mathbf{d}^*, \mathbf{q}, \mathbf{q}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{F}_{ext} \quad (\text{II.40})$$

Les opérateurs  $\mathbf{L}_i$  sont linéaires,  $\mathbf{Q}_i$  quadratiques et  $\mathbf{C}$  est cubique. La présence de la précontrainte modifie la raideur linéaire, ce qui entraînera un décalage des fréquences propres. Quant au défaut, il joue sur la raideur linéaire et sur la partie quadratique avec l'ajout du terme  $\mathbf{Q}_1^*$ . Enfin, la partie cubique n'est pas du tout modifiée. Dans le cas de structures planes et symétriques telles que des plaques ou des poutres, le terme  $\mathbf{Q}$  s'annule, et le modèle pour une structure parfaite conduit à un système sans linéarités quadratiques du type :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{F}_{ext} \quad (\text{II.41})$$

mais, en présence de  $\mathbf{d}^*$  il reste un terme quadratique,  $\mathbf{Q}_1$ , qui conduira à l'apparition d'harmoniques paires dans la réponse forcée. A noter que l'écriture exacte de (II.40) contient également un terme constant mais que celui-ci s'annule en écrivant l'équilibre de la structure après application de la précontrainte.

Pour le cas particulier des poutres et des plaques en non linéaire géométrique, on introduit les nouvelles grandeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{3D} & \text{structures minces} \\ d^* & \rightarrow \bar{\mathbf{u}}^*, w^* \\ S^* & \rightarrow N_{\alpha\beta}^*, M_{\alpha\beta}^* \end{array} \quad (\text{II.42})$$

et on a la relation déformations-déplacements :

$$\gamma_{\alpha\beta}^d = \underbrace{e_{\alpha\beta}^L(\bar{\mathbf{u}}) + e_{\alpha\beta}^{nl}(w, w) + 2e_{\alpha\beta}^{nl}(w, w^*)}_{e_{\alpha\beta}^*} + zk_{\alpha\beta}(w) \quad (\text{II.43})$$

A noter que le défaut n'intervient que dans la partie membrane, avec  $w^*$ . Ensuite, (II.39) devient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} (N_{\alpha\beta}^d (e_{\alpha\beta}^L(\delta\bar{\mathbf{u}}) + 2e_{\alpha\beta}^{nl}(w, \delta w) + 2e_{\alpha\beta}^{nl}(w^*, \delta w)) + M_{\alpha\beta}^d k_{\alpha\beta}(\delta w)) d\Gamma + \mathcal{P}_{ext}(\delta\bar{\mathbf{u}}, \delta w) \\ = & \int_{\Gamma} \rho_{\Gamma} (\ddot{u}_{\alpha} \delta u_{\alpha} + \ddot{w} \delta w) d\Gamma \quad \forall \delta\bar{\mathbf{u}} \text{ et } \delta w \text{ C.A. à } 0 \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

et

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta}^d &= N_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta}^d &= M_{\alpha\beta}^* + M_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

$N_{\alpha\beta}$  et  $M_{\alpha\beta}$  donnés par (II.19) et (II.20), avec  $e_{\alpha\beta}^*$  à la place de  $e_{\alpha\beta}$ .

## II.5 Bilan du chapitre

Au cours de ce chapitre, après une introduction bibliographique et une présentation des non linéarités de structures, on a rappelé l'écriture du problème de l'élastodynamique, en non linéaire géométrique, c'est à dire avec prise en compte de la partie non linéaire du tenseur de Green-Lagrange. Dans un premier temps, on traite le cas général en trois dimensions, puis celui des structures minces (poutres et plaques). On utilise une formulation variationnelle, le principe des puissances virtuelles, complété par la loi de comportement du matériau. Le système est ensuite discrétisé par éléments finis (en déplacements) mais formulé en utilisant le couple déplacements-contraintes, ceci pour des raisons pratiques liées à l'application de la méthode de l'équilibre harmonique présentée au chapitre suivant. Au final, cela nous conduit à un système d'équations différentielles non linéaires quadratiques. En outre, on introduit dans le modèle un défaut de forme et une précontrainte, paramètres de contrôle qui rendent le modèle plus général et permettent de mieux représenter la réalité expérimentale.

Au final, on obtient le système (II.39), rappelé ci-dessous, sur lequel on va appliquer la méthode EHMAN.

$$\begin{cases} - \int_V (\mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{d}^*))^t \mathbf{S} dV + \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{S} = \mathbf{S}^* + \mathbf{D}(\mathbf{B}^L + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}^{NL}(\mathbf{d}^*)) \mathbf{q} \end{cases}$$



## CHAPITRE III

# Calcul de la réponse forcée non linéaire par la méthode EHMAN

---

**A**u cours de ce chapitre, on décrit une méthode de résolution numérique pour le calcul de la réponse forcée harmonique de structures minces en non linéaire géométrique, et donc directement applicable au modèle décrit au chapitre précédent.

On utilise dans un premier temps la méthode de l'équilibrage harmonique, qui permet de transformer le système d'équations différentielles non linéaires de départ en un système algébrique. Ensuite, la MAN, Méthode Asymptotique Numérique permet de résoudre ce dernier système par continuation des branches de solutions, ce qui appliqué au problème du chapitre 2, conduit au calcul des déplacements et contraintes en fonction des paramètres de l'excitation, son amplitude et sa fréquence.

---

## PLAN DU CHAPITRE III

---

<b>III.1 Introduction</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>III.2 Méthode de l'équilibrage harmonique</b> . . . . .	<b>59</b>
III.2.1 Principe . . . . .	60
III.2.2 Application au problème de l'élastodynamique non linéaire . . . . .	60
<b>III.3 Résolution du problème non linéaire par la méthode asymptotique numérique (MAN)</b> . . . . .	<b>63</b>
III.3.1 Présentation générale de la MAN . . . . .	63
III.3.1.a Méthode de Newton-Raphson . . . . .	64
III.3.1.b Méthode Asymptotique Numérique : principe général . . . . .	65
III.3.1.c Pourquoi utiliser la MAN? . . . . .	67
III.3.1.d Quelques compléments à propos des points limites et bifurcations . . . . .	67
III.3.2 Application de la MAN au problème non linéaire obtenu par équilibrage harmonique . . . . .	69
<b>III.4 Bilan du chapitre</b> . . . . .	<b>71</b>

---

### III.1 Introduction

Comme rappelé au chapitre I, le calcul de la réponse libre ou forcée d'un système linéaire est relativement aisée, entre autres grâce à des outils tels que l'analyse modale (voir §I.3.1). En revanche, le comportement vibratoire de structures en non linéaire est régi par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, sans application possible du théorème de superposition et pouvant avoir plusieurs solutions (stables ou non). On ne dispose de solutions analytiques exactes que pour des cas simples et très particuliers. La taille des systèmes réels, les non linéarités et les phénomènes complexes qui en découlent (voir I) font que l'on doit la plupart du temps se contenter de solutions approchées. Pour obtenir ces dernières, deux démarches sont possibles ; la première consiste en un traitement purement numérique utilisant des discrétisations type éléments ou différences finis en temps et en espace. Ces méthodes sont très coûteuses en temps de calcul et surtout il est difficile d'obtenir les comportements particuliers liés au non linéaire, tels que ceux décrits au chapitre I (résonances internes ou autre). On préfère en général la seconde démarche, à savoir l'emploi de méthodes dites analytiques-numériques. Il n'existe pas d'approche systématique pour le cas des structures non linéaires mais, la plupart du temps, on cherche la solution  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  sous forme d'un produit d'une fonction d'espace et de temps :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k,l} \Psi_k(\mathbf{x}) U_l(t) \quad (\text{III.1})$$

Ensuite diverses hypothèses sur la forme des  $\Psi_k(\mathbf{x})$  ou des  $U_l(t)$  sont possibles, et les principales sont rappelées ci-après.

Si on se limite à un  $l = 1$  et  $U_1(t)$  harmonique, on aboutit à un problème aux conditions limites en  $\Psi_k$ , résolu ensuite par une méthode numérique. Ce type de méthode est très utilisé car il permet de transformer un système dynamique en un problème d'équations algébriques, comme en statique, avec toutes les méthodes "classiques" de résolution correspondantes (les éléments finis pour REDDY *et al.* (1981) ou MEI (1973), qui étudie les vibrations libres de poutres et plaques, Galerkin dans BENAMAR *et al.* (1991) ou encore Ritz pour LEWANDOWSKI (1987), entres autres).

Une autre option consiste à fixer les  $\Psi_k(x)$  pour transformer le problème aux dérivées partielles initial en un système d'équations différentielles non linéaires du deuxième ordre, de la forme générale I.1 :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t), t) = \mathbf{0} \quad (\text{III.2})$$

Pour cela on dispose de nombreuses méthodes assez proches les unes des autres, type Ritz ou résidus pondérés (Galerkin, moindres carrés, collocation, sous-domaines) qui consistent à rechercher les  $\Phi_l$  qui minimisent une fonctionnelle ou un résidu obtenu à partir de la formulation variationnelle du problème. Pour plus de détails sur ces méthodes, voir par exemple BATHE (1996). Une approche assez répandue, consiste à choisir pour les  $\Psi_k$  les modes propres linéaires (ou éventuellement non linéaire, voir SHAW et PIERRE (1993b)), en essayant de se limiter à ceux qui sont excités (réduction de modèle). La réduction à un seul mode est largement utilisé dans la



littérature (CHIA (1980), SRINIVASAN (1966), NAGESWARA RAO et PILLAI (1992) ...), et conduit à une équation à un degré de liberté type Duffing, pouvant être résolu par une des méthodes temporelles décrites au §I.4.2, ou par intégration directe (voir par exemple HSU (1960) pour l'utilisation de fonctions elliptiques conduisant à des solutions exactes de l'équation de Duffing). L'inconvénient principal de cette réduction à un seul mode est qu'on ne prend pas en compte la dépendance de la forme modale vis à vis de l'amplitude des vibrations, ni l'influence (couplage) que peuvent avoir d'autres modes.

Dans le même but, on peut également utiliser les méthodes d'éléments finis, qui font l'objet de nombreux ouvrages : ZIENKIEWICZ et TAYLOR (1994), BATHE (1996), BATOZ et DHATT (1990) etc... on ne s'étendra donc pas sur le sujet. Une fois le système (III.2) obtenu, celui-ci est résolu soit par une méthode d'intégration directe, (Runge-Kutta, Newmark ou autre, voir par exemple GERADIN (1993), BATHE (1996), FERTIS (1995)), soit par une des méthodes analytiques décrites au paragraphe I.4.2 (échelles multiples, moyenne, équilibrage harmonique ...).

La méthode proposée dans ce mémoire s'inscrit dans la catégorie décrite ci-dessus, et utilise une discrétisation éléments finis du problème spatial, pour aboutir à un système de la forme (III.2) (sans l'amortissement), puis la méthode de l'équilibrage harmonique, qui conduit à l'écriture d'un système algébrique non linéaire, résolu par une méthode de continuation, la MAN (méthode asymptotique numérique).

A noter qu'on peut également traiter directement le problème aux dérivées partielles initial, sans passer par la décomposition (III.1), en appliquant une méthode de perturbation. Ce genre d'approche est décrit dans NAYFEH et MOOK (1979), SRIDHAR *et al.* (1975), échelles multiples puis développement en série de Fourier, ou LACARBONARA (1997) qui applique la méthode des échelles multiples directement aux équations de poutres, et obtient une succession de systèmes d'équations aux dérivées partielles, résolus en utilisant une projection sur les modes linéaires.

La littérature est assez abondante en ce qui concerne le calcul de la réponse libre de structures non linéaires, un peu moins pour la réponse forcée. On présente ci-dessous une revue des principaux articles sur le sujet, auxquels s'ajoutent ceux cités précédemment.

Une revue bibliographique du cas des plaques élastiques en non linéaire géométrique est proposée dans CHIA (1980), en statique et en dynamique. REDDY *et al.* (1981) traitent le cas des plaques et coques laminées et anisotropes par la méthode des éléments finis. HAN et PETYT (1997a), HAN et PETYT (1997b), utilisent des éléments finis hiérarchiques et l'équilibrage harmonique (un seul terme) pour le calcul des premiers modes d'une plaque rectangulaire. Dans une série d'articles (RIBEIRO et PETYT (1999a), RIBEIRO et PETYT (1999b), RIBEIRO et PETYT (1999c), RIBEIRO et PETYT (2000)), la même démarche est reprise et appliquée aux vibrations libres et forcées de poutres et plaques rectangulaires. BENAMAR *et al.* (1991), BENAMAR *et al.* (1993), étudient les vibrations libres de poutres et de plaques, en supposant que la partie temporelle du déplacement est harmonique puis en développant ce dernier en série de modes linéaires. Ces travaux sont prolongés dans les papier de EL KADIRI *et al.* (1999), EL KADIRI *et al.* (2002), EL BIKRI *et al.* (2003). LEWANDOWSKI (1987) utilise pour le calcul de vibrations libre de poutres, une méthode de Ritz pour la partie spatiale puis l'équilibre harmonique, ce qui conduit à un problème aux

valeurs propres résolu par une méthode itérative. AZRAR *et al.* (1999) utilisent la même approche avec la MAN comme méthode de résolution du système algébrique final. Lewandowski étudie également la réponse forcée harmonique de poutres, en combinant éléments finis, équilibrage harmonique et méthode de Newton-Raphson (LEWANDOWSKI (1997b) et LEWANDOWSKI (1997a)). Le même type de méthode est employé par LEUNG et FUNG (1989), qui étudient l'influence du nombre de termes retenus dans les développements harmoniques. PILLAI et NAGESWARA RAO (1992) comparent les méthodes type Galerkin en temps à l'équilibre harmonique pour les vibrations libres de poutres. Dans SARMA et VARADAN (1984), le terme d'inertie de membrane, lorsqu'il est maximal, est supposé proportionnel à un paramètre  $\omega$ , i.e.  $\ddot{u}_{max} = -\omega^2 u_{max}$  pour  $\dot{u}_{max} = 0$ . ce qui conduit à un problème aux valeurs propres en  $\omega^2$ . LAU *et al.* (1984b) proposent une approche basée sur l'équilibre harmonique et une méthode incrémentale-itérative, pour l'étude de plaques minces. Cet article est complété par LAU *et al.* (1984a) où est traité le cas des résonances internes. Enfin, LEUNG et MAO (1995) ou NAYFEH et BALACHANDRAN (1995) proposent des méthodes d'intégration directes.

Dans ce chapitre, on présente une méthode de résolution du problème de la réponse forcée de structures minces en non linéaire géométrique (méthode que nous nommerons EHMAN, Équilibre Harmonique plus Méthode Asymptotique Numérique, pour simplifier les écritures). La première partie concerne la méthode de l'équilibre harmonique, et son application au système discrétisé par éléments finis présenté au chapitre II. Dans la seconde on présente la méthode asymptotique numérique, comparée au passage à celle plus classique de Newton-Raphson, utilisée ensuite pour calculer les branches de solution du problème initial, à savoir les déplacements en fonction soit de l'amplitude de la charge, soit de sa pulsation.

## III.2 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibre harmonique ("harmonic balance" en anglais) est une des plus anciennes méthodes utilisée pour le traitement des systèmes non linéaires. Ses exemples d'application sont très nombreux dans la littérature (LANGLEY (1988), WORDEN (1996) ...). Nous avons montré sur l'exemple du système à deux ressorts (§I.3.3) qu'elle présentait divers avantages : entres autres le fait qu'elle n'est pas limitée aux systèmes faiblement non linéaires, et que l'inclusion d'un nombre suffisant d'harmoniques permet d'obtenir facilement l'essentiel du comportement du système, en particulier la relation non linéaire entre la fréquence et l'amplitude du mouvement ("backbone curve"). Cependant elle est souvent présentée comme une méthode purement analytique, moins intéressante que d'autres (les échelles multiples pour NAYFEH et MOOK (1979), ou la méthode de la moyenne pour SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990a)), et utilisée avec peu de termes, souvent l'harmonique principale, éventuellement la troisième, sur des systèmes ayant peu de degrés de liberté. Essentiellement parce que l'écriture des développements devient rapidement compliquée lorsqu'on augmente le nombre de termes.

Nous avons appliqué la méthode de l'équilibre harmonique pour des systèmes ayant un grand nombre de degrés de liberté, des structures minces, et ce pour un nombre d'harmonique quel-

conque. La méthode est intégrée dans un code éléments finis, et intervient, comme nous le verrons plus précisément au chapitre IV, au niveau élémentaire. On présente ici la réécriture du système (II.39) obtenu au chapitre II, telle qu'on puisse appliquer l'équilibre harmonique de manière systématique et automatique.

### III.2.1 Principe

L'objectif de cette méthode est de transformer un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires en un système algébrique, dépendant d'un ou plusieurs paramètres. On recherche donc les solutions périodiques d'un système excité par une force multi-harmoniques de la forme :

$$\mathbf{F}_{ext} = \lambda \sum_{k=0}^{k=H-1} \mathbf{F}_k \cos k\Omega t \quad (\text{III.3})$$

Deux paramètres caractérisent cette excitation :  $\lambda$  qui détermine son amplitude et qu'on appellera *paramètre de charge* et  $\Omega$ , pulsation de la fondamentale. La méthode de l'équilibre harmonique consiste à rechercher les solutions périodiques  $\mathbf{U}$  d'un système forcé sous forme de séries de Fourier :

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{k=0}^{k=H-1} \mathbf{u}_k \cos k\Omega t + \mathbf{v}_k \sin k\Omega t \quad (\text{III.4})$$

On reporte ensuite cette expression dans le système de départ et on équilibre les coefficients des sinus et cosinus jusqu'à l'ordre souhaité, les autres termes étant négligés. L'équilibre harmonique peut également être vu comme un cas particulier de Ritz-Galerkin : si  $\{\epsilon_i\}_{i=1..n}$  désigne le système d'équations différentielles initial, il s'agit alors de chercher les  $\{u_k, v_k\}$  tels que :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \epsilon_i(t) \cos k\Omega t dt = 0 \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \epsilon_i(t) \sin k\Omega t dt = 0 \quad (\text{III.5})$$

$$i = 1..n \quad k = 0..H-1$$

Les harmoniques supérieures à  $H-1$  ne sont pas prises en compte (i.e. développements harmoniques à  $H$  termes).

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle demande une connaissance a priori de la forme de la solution, afin de choisir un nombre approprié de termes dans les développements. D'après LEUNG et FUNG (1989), pour assurer la convergence des séries vers la solution exacte, il est nécessaire de remplir deux conditions : d'une part inclure tous les termes de 0 jusqu'à l'ordre de l'harmonique dominante (par exemple pour traiter le cas d'une résonance super-harmonique d'ordre 3, on doit prendre en compte les termes de 0 à  $3\Omega$ ), d'autre part s'assurer que les termes ignorés lors de l'équilibrage sont effectivement négligeables. Divers exemples illustrant ces points sont présentés dans leur article.

### III.2.2 Application au problème de l'élastodynamique non linéaire

On considère ici le système discret (II.39), obtenu au chapitre II et représentant le comportement d'une structure non linéaire. Les inconnues sont les déplacements et les contraintes, écrits

sous la forme suivante :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=0}^{k=H-1} \mathbf{q}^k \cos k\Omega t \quad , \quad \mathbf{s}(t) = \sum_{k=0}^{k=H-1} \mathbf{s}^k \cos k\Omega t \quad (\text{III.6})$$

Au vu de la forme des systèmes traités, et de l'absence d'amortissement, les termes en sinus ne sont pas pris en compte. Par contre, on inclut toutes les harmoniques, paires et impaires, à la différence de ce qui est fait la plupart du temps (voir bibliographie dans l'introduction). Ceci pour les raisons précédemment données, à savoir la prise en compte des termes quadratiques, même pour les poutres et plaques.

On introduit alors de nouveaux vecteurs degrés de liberté,  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{S}$ , définis par :

$$\mathcal{Q} = {}^t\{q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0, \dots, \underbrace{q_1^j, \dots, q_n^j}_{{}^t\mathbf{q}^j}, \dots, q_n^{H-1}\} \quad , \quad \mathcal{S} = {}^t\{s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0, \dots, \underbrace{s_1^j, \dots, s_n^j}_{{}^t\mathbf{s}^j}, \dots, s_n^{H-1}\} \quad (\text{III.7})$$

$q_i^j$  désigne le j-ième terme (ou j-ième harmonique) de la i-ème coordonnée du vecteur  $\mathbf{q}$ . Les nouveaux vecteurs inconnus sont de taille  $\mathcal{N} = n \times H$ . On pose également

$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{H-1} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Ainsi un produit  $A(t) \times B(t)$ ,  $A$  et  $B$  étant développés en séries de la forme (III.6) avec  $H = 3$ , va s'écrire :

$$\begin{aligned} A(t)B(t) &= (A^0B^0 + \frac{1}{2}(A^1B^1 + A^2B^2)) \\ &+ (A^0B^1 + A^1B^0 + \frac{1}{2}(A^1B^2 + A^2B^1)) \cos(\Omega t) \\ &+ (A^0B^2 + \frac{1}{2}(A^1B^1 + A^2B^0)) \cos(2\Omega t) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

qui peut se réécrire, en utilisant une forme du type (III.7) :

$$\begin{array}{ll} \text{termes constants} & \rightarrow \begin{bmatrix} (AB)^0 \\ (AB)^1 \\ (AB)^2 \end{bmatrix} \\ \text{" en } \cos \Omega t & \rightarrow \begin{bmatrix} A^0 & \frac{1}{2}A^1 & \frac{1}{2}A^2 \\ A^1 & A^0 + \frac{1}{2}A^2 & \frac{1}{2}A^1 \\ A^2 & \frac{1}{2}A^1 & A^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^0 \\ B^1 \\ B^2 \end{bmatrix} \\ \text{" en } \cos 2\Omega t & \rightarrow \begin{bmatrix} (AB)^0 \\ (AB)^1 \\ (AB)^2 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} A^0 & \frac{1}{2}A^1 & \frac{1}{2}A^2 \\ A^1 & A^0 + \frac{1}{2}A^2 & \frac{1}{2}A^1 \\ A^2 & \frac{1}{2}A^1 & A^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^0 \\ B^1 \\ B^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (AB)^0 \\ (AB)^1 \\ (AB)^2 \end{bmatrix} \end{array} \quad (\text{III.10})$$

En utilisant cette algèbre, l'insertion des développements (III.6) et l'équilibre harmonique des équations conduit à la réécriture du système (II.39) sous la forme<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} - \int_V {}^T(\mathcal{B}^l + \mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) + \mathcal{B}^{nl}(\mathbf{d}^*)) \mathcal{S} dV - \Omega^2 \mathcal{M} \mathcal{Q} = \lambda \mathcal{F} \\ \mathcal{S} = \mathcal{S}^* + \mathcal{D}(\mathcal{B}^l + \frac{1}{2}\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) + \mathcal{B}^{nl}(\mathbf{d}^*)) \mathcal{Q} \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

<sup>1</sup>Bien qu'on n'ait pas changé la notation pour éviter des complications d'écriture, le vecteur  $\mathbf{d}^*$  est "réorganisé" de manière identique à  $\mathbf{q}$  (qui est devenu  $\mathcal{Q}$ ).

Les matrices  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{B}^l$ , sont des matrices symétriques et diagonales par blocs constituées de  $H \times H$  blocs, et construites à partir des opérateurs  $M$ ,  $D$  et  $B^l$  :

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & D & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad \mathcal{B}^l = \begin{bmatrix} B^l & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & B^l & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \\ \mathbf{0} & M & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & \mathbf{0} & 4M & \\ \vdots & & & 9M & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Le terme diagonal de  $\mathcal{M}$  vaut  $(H-1)^2 M$ ,  $H$  numéro de la ligne du bloc. En revanche  $\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q})$ , n'est pas symétrique. Ses blocs dépendent des opérateurs  $B^{nl}$  (définis par (II.23)) et sont fonctions de l'élément choisi pour la discrétisation) appliqués aux  $q^j$ . Sa construction est détaillée dans l'annexe B. Celle-ci se fait assez simplement et de manière itérative, quelque soit le nombre d'harmoniques retenues dans les développements. A titre d'exemple, pour  $H = 3$ , on a :

$$\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) = \begin{bmatrix} B^{nl}(q^0) & \frac{1}{2}B^{nl}(q^1) & \frac{1}{2}B^{nl}(q^2) \\ B^{nl}(q^1) & B^{nl}(q^0 + \frac{1}{2}q^2) & \frac{1}{2}B^{nl}(q^1) \\ B^{nl}(q^2) & \frac{1}{2}B^{nl}(q^1) & B^{nl}(q^0) \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

On introduit également l'opérateur transposée " $T$ " qui signifie qu'on prend la transposée de chaque bloc, et non pas la transposée de la matrice totale. Pour l'exemple ci-dessus, on a :

$${}^T\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) = \begin{bmatrix} {}^tB^{nl}(q^0) & \frac{1}{2}{}^tB^{nl}(q^1) & \frac{1}{2}{}^tB^{nl}(q^2) \\ {}^tB^{nl}(q^1) & {}^tB^{nl}(q^0 + \frac{1}{2}q^2) & \frac{1}{2}{}^tB^{nl}(q^1) \\ {}^tB^{nl}(q^2) & \frac{1}{2}{}^tB^{nl}(q^1) & {}^tB^{nl}(q^0) \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Avec (III.11), on aboutit donc à un système algébrique, où le temps n'intervient plus explicitement, de la même forme que (II.39). Ce sont simplement les opérateurs utilisés qui ont changé ( $B^l$  devient  $\mathcal{B}^l$  etc.). Cette similitude est très pratique d'un point de vue programmation. En effet, l'introduction de l'équilibrage harmonique n'est visible qu'au niveau local, élémentaire, et rien ne change au niveau global (assemblage, solveur ...) par rapport au traitement d'un problème éléments finis classique. Simplement, le nombre de degrés de liberté est multiplié par le nombre d'harmoniques. Ces points, ayant trait directement avec la programmation, sont détaillés au chapitre IV.

Le système (III.11) est un système algébrique, fonction des inconnues  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{S}$  et d'un certain nombre de paramètres (défaut, précontrainte, amplitude et pulsation de l'excitation), qui peut s'écrire simplement sous la forme :

$$R(\mathcal{Q}, \mathcal{S}, \lambda, \Omega, d^*, S^*) = 0 \quad (\text{III.15})$$

On propose dans la partie suivante une méthode de résolution de ce système non linéaire, la MAN (méthode asymptotique numérique), par perturbation et continuation, qui aboutit au calcul de  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{S}$  en fonction des paramètres.

### III.3 Résolution du problème non linéaire par la méthode asymptotique numérique (MAN)

La MAN est une méthode de perturbation-discrétisation-continuation, permettant de résoudre des systèmes algébriques non linéaires dépendant d'un ou plusieurs paramètres. Elle est donc à comparer avec des méthodes plus classiques, incrémentales itératives, type Newton-Raphson. Son principe consiste à développer les inconnues et paramètres en séries entières (perturbation) ce qui permet de décomposer le système initial en une série de problèmes linéaires, facilement résolubles. La validité des solutions est donnée par le calcul du rayon de convergence des séries. On obtient ainsi une branche de solution, (i.e. inconnue en fonction d'un paramètre). Ensuite pour obtenir la solution complète, on réitère l'opération (continuation) à partir d'un nouveau point solution de départ, à la limite du rayon de convergence de la branche précédente. L'aspect discrétisation est lui aussi très important car c'est la combinaison de la MAN avec une méthode élément fini qui fait son efficacité.

La MAN a été utilisée initialement pour le calcul des branches bifurquées, pour des problèmes de flambement et post-flambement de structures (DAMIL et POTIER-FERRY (1990), AZRAR *et al.* (1993) pour des plaques ou coques élastiques). COCHELIN (1994) et COCHELIN *et al.* (1994a) l'ont généralisée au cas de l'élastostatique non linéaire (application à la compression de panneaux cylindriques). Ensuite la méthode a été utilisée avec succès pour traiter différents cas : statique des coques en grandes rotations (ZAHROUNI *et al.* (1999), vibrations de plaques (AZRAR *et al.* (1998), etc...). Le traitement spécifique des bifurcations par la MAN fait également l'objet de différents papiers : VANNUCCI *et al.* (1998), BAGUET et COCHELIN (2003).

On présente ici le principe général de la MAN, pour un système algébrique non linéaire quelconque, après avoir rappelé celui de la méthode de Newton-Raphson. On montre ensuite les avantages et les inconvénients relatifs des deux méthodes. Enfin on termine en traitant avec la MAN le système (III.11) obtenu plus haut, après application de l'équilibre harmonique au cas de l'élastodynamique.

#### III.3.1 Présentation générale de la MAN

Soit donc le système algébrique non linéaire :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \eta) = \mathbf{0} \quad (\text{III.16})$$

$\mathbf{R}$  et  $\mathbf{U}$  sont de dimension  $n$ ,  $\eta$  est un paramètre quelconque (dans le cas de l'élastodynamique, on prendra soit le paramètre de charge  $\lambda$ , soit la pulsation de l'excitation  $\Omega$ ). On a donc un système

avec plus d'inconnues que d'équations, qui va être résolu par une méthode de continuation, qui conduira au calcul de branches de solution  $\mathbf{U}$  en fonction du paramètre  $\eta$ .

### III.3.1.a Méthode de Newton-Raphson

On rappelle ici le principe de la méthode de Newton-Raphson qui est la plus utilisée des méthodes incrémentales itératives. De manière générale, celles-ci consistent à chercher une succession de points  $(\mathbf{U}_j, \eta_j)$  solutions de (III.16) et vérifiant le critère suivant :

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{U}_j, \eta_j)\| \leq \epsilon \quad (\text{III.17})$$

Le calcul se fait en deux étapes, une prédiction puis une série de corrections, l'ensemble étant fonction d'un paramètre de chemin, noté  $a$ , abscisse curviligne le long de la courbe. Pour Newton-Raphson,  $(\mathbf{U}_j, \eta_j)$  étant supposé connu<sup>2</sup>, le point suivant est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{j+1} &= \mathbf{U}_j + \Delta \mathbf{U}_{pre} + \sum_{i=1}^k \Delta \mathbf{U}_i \\ \eta_{j+1} &= \eta_j + \underbrace{\Delta \eta_{pre}}_{\text{prédiction}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k \Delta \eta_i}_{k \text{ corrections}} \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Soit  $\mathbf{T}_j$  le vecteur (de taille  $n+1$ ) tangent à la courbe représentant  $\mathbf{U}(\eta)$  en  $(\mathbf{U}_j, \eta_j)$  et  $\mathbf{K}_{t(j)}$  la matrice jacobienne, (de taille  $n \times (n+1)$ ), de  $\mathbf{R}$  en ce point, autrement dit sa matrice de rigidité tangente<sup>3</sup> :

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_j \\ \Delta \eta_j \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{t(j)} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_j & \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \right|_j \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

On se contente ici de rappeler brièvement les étapes de calcul, sans entrer dans les détails. Pour cela, on pourra consulter par exemple CRISFIELD (1997a). La démarche est donc la suivante :

- **prédiction :**

On effectue un pas de prédiction, tangent à la courbe qui conduit à la résolution de :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_j \Delta \mathbf{U}_{pre} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \right|_j \Delta \eta_{pre} = 0 \quad (\text{III.20})$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbf{K}_{t(j)} \mathbf{T}_{pre} = \mathbf{0} \quad (\text{III.21})$$

Ce système est sous-déterminé, on le complète donc par une équation qui donne la longueur du pas tangent :

$$\|\Delta \mathbf{U}_{pre}\|^2 + (\Delta \eta_{pre})^2 = \Delta a^2 \quad (\text{III.22})$$

<sup>2</sup>le premier point peut être obtenu par exemple par homotopie

<sup>3</sup>On note  $\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_j = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}_j, \eta_j)$

• **corrections :**

On effectue  $k$  corrections, jusqu'à ce que le critère (III.17) soit vérifié. Pour chaque itération, il s'agit de résoudre le système :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_i \Delta \mathbf{U}_i + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \right|_i \Delta \eta_i = -\mathbf{R}(\mathbf{U}_i, \eta_i) \quad (\text{III.23})$$

ou

$$\mathbf{K}_{t(i)} \mathbf{T}_i = -\mathbf{R}(\mathbf{U}_i, \eta_i) \quad (\text{III.24})$$

Ce système doit aussi être complété ; on fixe une condition qui permet de piloter l'algorithme. On peut par exemple choisir des pas de corrections orthogonaux à la prédiction, soit

$$\Delta \mathbf{U}_i \cdot \Delta \mathbf{U}_{pre} + \Delta \eta_i \cdot \Delta \eta_{pre} = 0 \quad (\text{III.25})$$

A noter que les systèmes (III.20) et (III.23) sont obtenus en se limitant aux développements au premier ordre. Le principe de la méthode de Newton-Raphson est résumé sur la figure III.1.

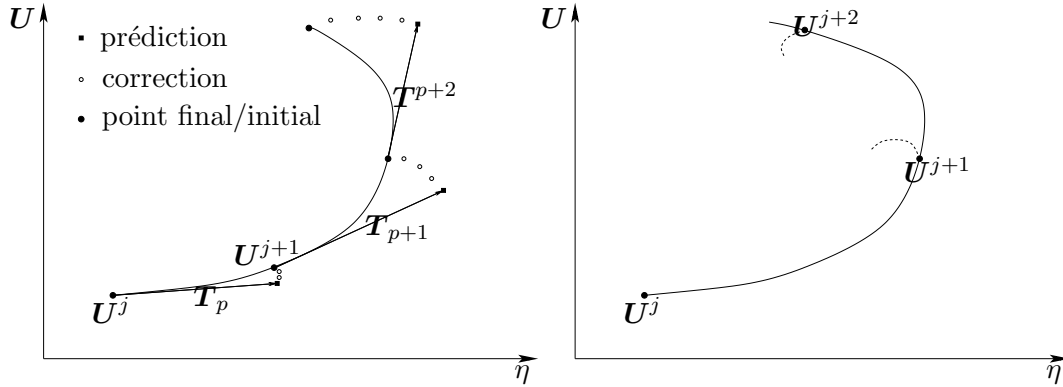


FIGURE III.1 - Prédiction et corrections pour les méthodes incrémentales-itératives (à gauche) - Calcul des branches de solutions par la MAN (à droite)

### III.3.1.b Méthode Asymptotique Numérique : principe général

On recherche les solutions du système (III.16) sous forme de séries entières d'un paramètre de chemin  $a$  :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \mathbf{U}_k \quad \eta = \eta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \eta_k \quad (\text{III.26})$$

$(\mathbf{U}_0, \eta_0)$  est un point solution de départ, connu. Le théorème des fonctions implicites nous garantit l'existence de solutions lorsque la branche est unique au voisinage du point initial. Le cas des points limites et des bifurcations est traité au §III.3.1.d

L'introduction des développements (III.26) dans (III.16) conduit à :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \eta) = a \mathbf{R}_1 + a^2 \mathbf{R}_2 + \dots = \mathbf{0} \quad (\text{III.27})$$



ceci étant valable pour tout  $a$ , on obtient une série de problèmes linéaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_0 \mathbf{U}_1 + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \right|_0 \eta_1 = \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{R}_p &= \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_0 \mathbf{U}_p + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \right|_0 \eta_p - \mathbf{F}_p^{nl} = \mathbf{0} \\ \dots \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

A noter que, en utilisant  $\mathbf{K}_t$  précédemment définie,  $\mathbf{R}_p = \mathbf{0}$  est équivalent à :

$$\mathbf{K}_{t(0)} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \eta_p \end{bmatrix} = \mathbf{F}_p^{nl} \quad (\text{III.29})$$

Les  $\mathbf{F}_p^{nl}$ , sont des termes non linéaires mais dépendent exclusivement des ordres précédents et sont donc entièrement déterminés à l'ordre  $p$ . Le calcul de ces "seconds membres" est le point crucial de la MAN. Comme dans le cas de Newton-Raphson, ces systèmes sont sous-déterminés. On ajoute donc une condition qui correspond à la définition du paramètre de chemin  $a$ . On l'écrit sous la forme générale, inspirée de la définition du paramètre de longueur d'arc classique :

$$a = {}^t \mathbf{U}_1 \mathbf{P} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0) + \alpha \eta_1 (\eta - \eta_0) \quad (\text{III.30})$$

$\mathbf{P}$  est une matrice diagonale et  $\alpha$  un scalaire. En fixant ces deux grandeurs, on choisit quelles composantes de  $\mathbf{U}$  on souhaite faire intervenir dans la longueur d'arc.

La validité des solutions obtenues par les résolutions successives des systèmes (III.28) est donnée par le calcul du rayon de convergence des séries (III.26). Deux critères sont proposés dans COCHELIN *et al.* (1994b) et VANNUCCI *et al.* (1998). Le premier est basé sur une constatation empirique : l'écart entre deux solutions tronquées à deux ordres consécutifs reste faible en deçà du rayon de convergence et augmente brutalement au delà. On cherche donc  $a_{max}$ , amplitude maximale de  $a$ , telle que<sup>4</sup> :

$$\frac{\|\mathbf{U}_{(N)} - \mathbf{U}_{(N-1)}\|}{\|\mathbf{U}_{(N)} - \mathbf{U}_{(0)}\|} = \frac{\|a^N \mathbf{U}_N\|}{\|a \mathbf{U}_1 + \dots + a^N \mathbf{U}_N\|} \leq \epsilon \quad (\text{III.31})$$

soit, en approchant le dénominateur par  $\|a \mathbf{U}_1\|$  :

$$a_{max} = \left( \epsilon \frac{\|\mathbf{U}_1\|}{\|\mathbf{U}_N\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (\text{III.32})$$

Le second critère est obtenu en minimisant l'augmentation du résidu d'une branche à l'autre. Soit donc  $\mathbf{R}_0$  le résidu initial, on veut :

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = a \mathbf{R}_1 + \dots + a^{n+1} \mathbf{R}_{n+1} + \dots \leq \epsilon \quad (\text{III.33})$$

Pour des séries (III.26) tronquées à l'ordre  $n$ , les  $R_i$  sont nuls pour  $i = 1..n$  (simple application de (III.28)). Le terme déterminant est  $a^{n+1} \mathbf{R}_{n+1}$  et on montre facilement que  $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{nl}$

<sup>4</sup>Attention : on note  $\mathbf{U}_{(N)}$  la série (III.26) tronquée à l'ordre  $N$  et  $\mathbf{U}_N$  le  $N$ -ième terme de cette série.

et donc :

$$a_{max} = \left( \frac{\epsilon}{\|F_{N+1}^{nl}\|} \right)^{\frac{1}{N+1}} \quad (\text{III.34})$$

Concrètement, on calcule les termes des séries (III.26) en résolvant (III.28) puis on évalue  $a_{max}$  avec (III.34). Ensuite  $(U(a_{max}), \eta(a_{max}))$  donne un nouveau point de départ pour une nouvelle perturbation.

A noter qu'il existe également une variante de la MAN, permettant d'améliorer la convergence des séries. Il s'agit d'utiliser des approximants de Padé, et donc de remplacer les termes des séries (III.26) par des fractions rationnelles (voir par exemple COCHELIN *et al.* (1994b)).

### III.3.1.c Pourquoi utiliser la MAN ?

Les principaux points forts de la MAN, relativement à Newton-Raphson, se résument en trois points :

- *simplicité d'utilisation et du pilotage* : ce point constitue le principal avantage de la MAN. En effet, le choix de la longueur du pas est entièrement automatique et adaptative ("ralentissement" à proximité des points limites, augmentation du pas dans les zones linéaires, voir par exemple la figure IV.11), et se fait a posteriori, avec le calcul du rayon de convergence  $a_{max}$ . Il n'est donc pas nécessaire de se préoccuper de la longueur du pas, comme avec Newton-Raphson où un pas trop petit ralentit l'algorithme, et trop grand le fait diverger. Finalement, du point de vue de l'utilisateur, il suffit de fixer l'ordre des séries,  $N$ , un critère de convergence et le nombre de pas souhaité, soit le nombre de tronçons calculés.
- *une seule inversion de la matrice  $K_{t(o)}$*  par pas de MAN, quand il en faut 1 (prédiction) plus  $k$  (corrections) pour Newton-Raphson, ce qui peut représenter un gain en temps de calcul conséquent. En fait, l'essentiel de ce temps est utilisé pour le calcul des seconds membres  $F_p^{nl}$ , en sachant que le calcul d'un de ceux-ci correspond approximativement à celui du résidu de Newton-Raphson.
- *solutions analytiques* des branches de solutions plutôt que des valeurs ponctuelles. De fait, les séries tronquées sont riches en information, notamment en ce qui concerne les bifurcations.

On remarque également qu'une MAN à l'ordre 1 correspond à un pas de prédiction de Newton-Raphson (voir (III.20) et la première équation de (III.28)). En fait, la possibilité de prendre un grand nombre de termes dans les séries (en pratique, entre 20 et 40) permet d'avoir une précision importante sans avoir recours à des corrections.

### III.3.1.d Quelques compléments à propos des points limites et bifurcations

On considère ici deux cas particuliers, mais courants lors de la résolution de systèmes non linéaires, ceux des points limites et des points de bifurcation. On donne ici un rapide aperçu de ces deux situations et du comportement de la MAN en leur présence. Pour des définitions

et un traitement plus poussé on pourra consulter SEYDEL (1994), MANNEVILLE (1998-1999) ou GUCKENHEIMER et HOLMES (1983). Revenons donc au système défini par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \eta) = \mathbf{0} \quad (\text{III.35})$$

et sa matrice tangente, donnée par (III.19).

Un *point limite*  $(\mathbf{U}_0, \eta_0)$  est un point solution de (III.35) tel que  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_0$  soit de rang  $n - 1$  et que  $\mathbf{K}_t(\mathbf{0})$  soit de rang  $n$ . Du point de vue géométrique, cela correspond à un maximum de  $\eta$ , et donc un “tournant” de la courbe. En fait il suffit de considérer  $\eta = U_{n+1}$  comme une inconnue parmi les autres  $\mathbf{U}_k$  et grâce au théorème des fonctions implicites on est toujours en mesure d’exprimer  $\mathbf{U}_{k, k \neq j}$  en fonction de  $\mathbf{U}_j$  de manière univoque. Ce changement de paramètre correspond finalement à une rotation du graphique  $\mathbf{U}_j(\eta)$  qui devient  $\eta(\mathbf{U}_j)$  (voir figure III.2). La MAN passe sans problème ce genre de point, il y a simplement un éventuel ralentissement de

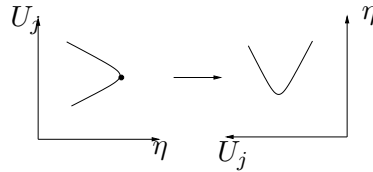


FIGURE III.2 - *Point limite*

la continuation, visible par une accumulation des pas dans la zone concernée. C’est notamment le cas sur la figure IV.6, pour la branche inférieure.

Un *point de bifurcation* correspond à une singularité de la matrice  $K_t$  et conduit à l’apparition de nouvelles branches. Avec Newton-Raphson, le passage d’un point de bifurcation n’est pas nécessairement visible ; cela dépend fortement du premier pas tangent et de sa longueur. En revanche, avec la MAN, la longueur du pas s’adapte et il y a accumulation de points à proximité d’une bifurcation, puis on suit la nouvelle branche. Tout ceci est illustré sur la figure III.3 : les branches de solutions exactes sont notées en pointillés, les branches réellement suivies par le calcul approché sont en traits pleins. Considérant un point de départ noté A, un pas de Newton “saute” la bifurcation et conduit en B, toujours sur la branche principale, tandis que la MAN va suivre la nouvelle branche de A vers E. En revanche, on ne maîtrise pas encore bien le choix de la branche qui sera suivie au passage d’un point de bifurcation. De manière empirique, on constate qu’un changement du signe de la perturbation imposée (i.e. l’excitation) permet de passer d’une branche à l’autre, c’est à dire du point A au point C.

En conclusion il est intéressant de combiner les deux méthodes, puisque la MAN permet de détecter les bifurcations et de suivre facilement les nouvelles branches, tandis qu’avec Newton on reste sur la branche principale. Au final on obtient l’ensemble des solutions.

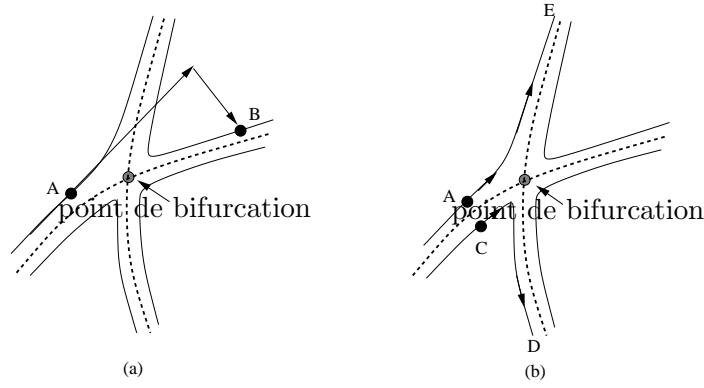


FIGURE III.3 - Passage d'une bifurcation par Newton-Raphson (a) et la MAN (b)

### III.3.2 Application de la MAN au problème non linéaire obtenu par équilibrage harmonique

Nous allons maintenant utiliser la MAN pour résoudre le système (III.11), rappelé ci-dessous, obtenu après application de l'équilibrage harmonique au problème de l'élastodynamique en non linéaire géométrique. Les inconnues développées en séries sont les déplacements discrétisés,  $\mathcal{Q}$  et les contraintes correspondantes,  $\mathcal{S}$  (voir (III.7)). Pour simplifier les écritures, on note :

$$\mathcal{B}^*(\mathcal{Q}) = \mathcal{B}^l + \mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) + \mathcal{B}^{nl}(d^*) \quad (\text{III.36})$$

et (III.11) s'écrit

$$\begin{cases} - \int_{\Omega_0} {}^T \mathcal{B}^*(\mathcal{Q}) \mathcal{S} d\Omega_0 - \Omega^2 \mathcal{M} \mathcal{Q} = \lambda \mathcal{F} \\ \mathcal{S} = \mathcal{S}^* + \mathcal{D}(\mathcal{B}^l + \frac{1}{2} \mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) + \mathcal{B}^{nl}(d^*)) \mathcal{Q} \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

Ce système dépend de deux paramètres,  $\lambda$  et  $\Omega$ , les solutions sont donc des surfaces. Pour la continuation de branches de solution, l'un des deux va être fixé et l'autre servira de paramètre de continuation, noté ici  $\eta$ . On pose donc :

$$\eta = \sum_{k=1}^N a^k \eta_k = \begin{cases} \lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^N a^k \lambda_k & \text{pour } \Omega = \Omega_0 \text{ fixé} \\ \text{ou} \\ \Omega^2 = \Omega_0^2 + \sum_{k=1}^N a^k \nu_k & \text{pour } \lambda = \lambda_0 \text{ fixé} \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Ensuite, les développements suivants sont introduits dans III.37 :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 + \sum_{k=1}^N a^k \mathcal{Q}_k, \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \sum_{k=1}^N a^k \mathcal{S}_k \quad (\text{III.39})$$

A l'ordre 0, quel que soit le type de continuation, on obtient :

$$\begin{cases} - \int_{\Omega_0} {}^T \mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0) \mathcal{S}_0 d\Omega_0 - \Omega_0^2 \mathcal{M} \mathcal{Q}_0 = \lambda_0 \mathcal{F} \\ \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}^* + \mathcal{D}(\mathcal{B}^l + \frac{1}{2} \mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}_0) + \mathcal{B}^{nl}(d^*)) \mathcal{Q}_0 \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

qui est toujours vérifié puisque le point  $(\mathcal{Q}_0, \mathcal{S}_0, \lambda_0, \Omega_0)$  est solution de (III.37).

Ensuite, pour les ordres supérieurs à 1, on a :

### Contraintes

En utilisant la symétrie de  $\mathcal{B}^{nl}$ , on obtient les contraintes linéarisées à chaque ordre :

Ordre 1

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{D}\mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0)\mathcal{Q}_1 \quad (\text{III.41})$$

Ordre  $p$

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{D}\mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0)\mathcal{Q}_p + \underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{D}\sum_{r=1}^{p-1}\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}_{p-r})\mathcal{Q}_r}_{\mathcal{S}_p^{nl}} \quad (\text{III.42})$$

A noter que le terme  $\mathcal{S}_p^{nl}$  ne dépend que des ordres strictement inférieurs à  $p$ .

### Forces internes

On écrit ici les développements du terme  $-\int_{\Omega_0} {}^T\mathcal{B}^*(\mathcal{Q})\mathcal{S}d\Omega_0$  de (III.37), correspondant à la puissance des forces internes. On a donc :

Ordre 1

$$-\int_{\Omega_0} ({}^T\mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0)\mathcal{S}_1 + {}^T\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}_1)\mathcal{S}_0)d\Omega_0 \quad (\text{III.43})$$

Soit en utilisant le résultat (B.13) donné en annexe B :

$$-\int_{\Omega_0} ({}^T\mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0)\mathcal{S}_1 + {}^T\mathcal{G}\hat{\mathcal{S}}_0\mathcal{G}\mathcal{Q}_1)d\Omega_0 \quad (\text{III.44})$$

Ordre  $p$

$$-\int_{\Omega_0} ({}^T\mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0)\mathcal{S}_p + {}^T\mathcal{G}\hat{\mathcal{S}}_0\mathcal{G}\mathcal{Q}_p + \sum_{r=1}^{p-1} {}^T\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}_{p-r})\mathcal{S}_r)d\Omega_0 \quad (\text{III.45})$$

### Écriture globale

Le report des contraintes linéarisées obtenues ci-dessus dans l'expression des forces internes, puis le développement complet de (III.37), complété par la condition (III.30), conduisent, à chaque ordre, à l'écriture des systèmes linéarisés (III.28).

Ordre 1 :

$$\begin{cases} [\mathcal{K}_{t(0)} - \Omega_0^2\mathcal{M}]\mathcal{Q}_1 = \eta_1\mathcal{F}_{man} \\ {}^t\mathcal{Q}_1\mathcal{P}\mathcal{Q}_1 + \alpha\eta_1^2 = 1 \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

Ordre  $p$  :

$$\begin{cases} [\mathcal{K}_{t(0)} - \Omega_0^2\mathcal{M}]\mathcal{Q}_p = \eta_p\mathcal{F}_{man} + \mathcal{F}_p^{nl} \\ {}^t\mathcal{Q}_1\mathcal{P}\mathcal{Q}_p + \alpha\eta_1\eta_p = 0 \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

On y retrouve la matrice de rigidité tangente, calculée au point initial et donnée par :

$$\mathcal{K}_{t(0)} = -\int_{\Omega_0} {}^T\mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0)\mathcal{D}\mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0)d\Omega_0 - \underbrace{\int_{\Omega_0} {}^T\mathcal{G}\hat{\mathcal{S}}_0\mathcal{G}d\Omega_0}_{\mathcal{K}_\sigma : \text{rigidité géométrique}} \quad (\text{III.48})$$

Les autres grandeurs, fonctions du type de continuation choisie, sont données dans le tableau ci-dessous :

Continuation ...	en force	en pulsation
$\eta_k = \dots$	$\lambda_k$	$\nu_k$
$\mathcal{F}_{man} = \dots$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{M}\mathcal{Q}_0$
$\mathcal{F}_p^{nl} = \dots$	$f_p^{nl}$	$f_p^{nl} + \sum_{r=1}^{p-1} \nu_r \mathcal{M}\mathcal{Q}_{p-r}$

(III.49)

avec :

$$f_p^{nl} = - \int_{\Omega_0} ({}^T\mathcal{B}^*(\mathcal{Q}_0)\mathcal{S}_p^{nl} + \sum_{r=1}^{p-1} {}^T\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}_{p-r})\mathcal{S}_r) d\Omega_0 \quad (III.50)$$

On remarque que pour une continuation en pulsation, le terme  $\Omega^2\mathcal{M}\mathcal{Q}$  conduit à des expressions quadratiques apparaissant dans les seconds membres, ce qui n'est pas le cas pour une continuation en force.

De ce qui précède on déduit l'algorithme de résolution pour un pas de MAN, donné par :

- calcul de  $\left[ \mathcal{K}_{t(0)} - \Omega_0^2 \mathcal{M} \right]$
- résolution à l'ordre 1 :
  1. résolution de  $\left[ \mathcal{K}_{t(0)} - \Omega_0^2 \mathcal{M} \right] \mathcal{Q}_E = \mathcal{F}_{man}$
  2. calcul de  $\eta_1^2 = \frac{1}{\mathcal{Q}_E^t P \mathcal{Q}_E + \alpha}$  (issu de (III.46))
  3. construction de  $\mathcal{Q}_1 = \eta_1 \mathcal{Q}_E$
  4. calcul de  $\mathcal{S}_1$ , (III.41), et du second membre pour l'ordre suivant.
- résolution à l'ordre p :
  1. résolution de  $\left[ \mathcal{K}_{t(0)} - \Omega_0^2 \mathcal{M} \right] \mathcal{Q}_p^{nl} = \mathcal{F}_p^{nl}$
  2. calcul de  $\eta_p = -\eta_1 \mathcal{Q}_1^t P \mathcal{Q}_p^{nl}$  (vient de (III.47))
  3. construction de  $\mathcal{Q}_p = \mathcal{Q}_p^{nl} + \frac{\eta_p}{\eta_1} \mathcal{Q}_1$
  4. calcul de  $\mathcal{S}_p$ , (III.42),  $\mathcal{F}_{p+1}^{nl}$ , (III.49) et  $\mathcal{S}_{p+1}^{nl}$ , (III.42) pour l'ordre suivant.
- calcul de  $a_{max}$ , (III.34)

## III.4 Bilan du chapitre

Ce chapitre est consacré à la présentation d'une méthode de calcul de la réponse forcée harmonique de structures non linéaires, nommée EHMANN et basée sur la méthode de l'équilibre harmonique (EH) et la méthode asymptotique numérique (MAN), appliqué au système (II.39). L'EHMANN conduit au calcul des déplacements et contraintes en fonction de deux paramètres, l'amplitude et la pulsation de l'excitation.

Outre l'utilisation des éléments finis pour discrétiser le problème, les points clés de la méthode sont l'utilisation de l'équilibre harmonique et la résolution par la MAN.

Le premier point implique une augmentation conséquente de la taille des systèmes à résoudre et nécessite un choix a priori sur la forme des solutions et sur le nombre de termes retenus dans les développements harmoniques. De plus, par construction on se limite aux solutions harmoniques. L'équilibrage harmonique est introduit au niveau élémentaire, et permet la construction d'un système algébrique non linéaire, de manière simple et automatique, quelque soit le nombre de termes retenus dans les développements harmoniques.

Quant à la résolution par la MAN, solveur non linéaire à comparer avec des méthodes type Newton-Raphson, ses avantages sont d'une part le choix du pas qui est automatique et adaptatif, ce qui conduit à une méthode robuste et un pilotage de la continuation facile, d'autre part la détection des bifurcations, et enfin le fait qu'une seule inversion de matrice par pas de MAN ne soit nécessaire, d'où un gain en temps de calcul.

Mises à part les limitations liées aux deux premiers points concernant l'équilibre harmonique, on dispose au final d'une méthode robuste et efficace, assez simple à utiliser et à intégrer dans un code élément fini. Ce dernier aspect est développé au chapitre suivant.

L'ensemble de la démarche est résumé sur la figure III.4.

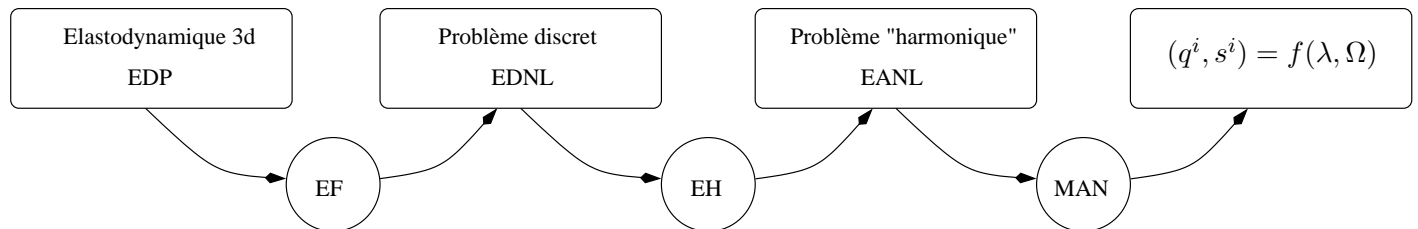


FIGURE III.4 - Calcul de la réponse forcée non linéaire : rappel de la démarche. *EDP* : équation aux dérivées partielles - *EDNL* : équations différentielles non linéaires, (II.39), ( $n$  équations) - *EANL* : équations algébriques non linéaires, (III.11) ( $n \times H$  équations).

## CHAPITRE IV

# Introduction de la méthode EHMAN dans le code éléments finis Eve

---

**C** e chapitre est dédié à la présentation du code éléments finis Eve et des développements numériques effectués au cours de cette thèse, avec notamment l'implémentation de la méthode "EHMAN" décrite au chapitre précédent, basée sur deux points :

- le développements d'éléments "équilibre harmonique"
- l'écriture d'un module de calcul de vibrations non linéaires

*Pour terminer, quelques simulations sont présentées et comparées avec des résultats de la littérature.*

---



## PLAN DU CHAPITRE IV

---

<b>IV.1 Présentation générale du code Eve</b> . . . . .	<b>75</b>
IV.1.1 Formulation et types de problèmes traités . . . . .	75
IV.1.2 Organisation du code . . . . .	75
<b>IV.2 Calcul de vibrations non linéaires avec Eve</b> . . . . .	<b>77</b>
IV.2.1 Elements EH . . . . .	77
IV.2.2 Résolution du système non linéaire . . . . .	79
<b>IV.3 Autres développements</b> . . . . .	<b>79</b>
<b>IV.4 Quelques exemples de validation</b> . . . . .	<b>81</b>
IV.4.1 Réponse forcée d'une plaque mince . . . . .	82
IV.4.2 Poutre encastree . . . . .	84
<b>IV.5 Bilan du chapitre</b> . . . . .	<b>88</b>

---

## IV.1 Présentation générale du code Eve

Eve est un code éléments finis pour le calcul de structures, développé à l'origine en Fortran 77, puis aujourd'hui en Fortran 90, par des enseignants-chercheurs, des doctorants ou des étudiants au cours de projets d'étude. Ce logiciel est essentiellement destiné à la recherche et à l'enseignement et est particulièrement pratique pour développer et tester de nouveaux éléments ou algorithmes de calcul. Cependant, il est aussi capable de traiter des problèmes de calcul sur des structures réelles, pour des géométries "compliquées", et avec un grand nombre de degrés de liberté, bien que ce ne soit pas sa vocation principale.

### IV.1.1 Formulation et types de problèmes traités

Le code Eve est basé sur une formulation Lagrangienne totale des équations du mouvement. Les grandeurs mécaniques utilisées sont les déplacements, les déformations de Green-Lagrange et les contraintes de Piola-Kirchhoff II. Les problèmes traités par Eve (i.e. les éléments disponibles) sont :

- élasticité 3D (briques à 8 et 20 noeuds),
- élasticité 2D en contraintes ou déformations planes, ou en axisymétrique (triangles à 3 et 6 noeuds, quadrangles à 4 et 8 noeuds),
- plaques et coques (triangles (DKT) et **quadrangles (DKQ)** à facettes planes<sup>1</sup>), plus **éléments "harmoniques"** (i.e. incluant l'application de la méthode de l'équilibre harmonique) correspondants,
- barres (ressorts à 2 noeuds).

Quant aux options de calcul, elles sont les suivantes :

- statique linéaire et non linéaire géométrique,
- calcul des fréquences et modes propres,
- flambage,
- dynamique transitoire linéaire ou non (méthode de Newmark et Newton-Raphson),
- vibrations forcées (réponse à une sollicitation harmonique) en linéaire,
- **calcul de la réponse forcée harmonique en non linéaire, en utilisant un solveur MAN ou Newton-Raphson,**

les modules en gras sont ceux qui ont été développés au cours de cette thèse.

### IV.1.2 Organisation du code

Eve est un code sur lequel travaillent, ou ont travaillé, plusieurs personnes et qui est amené à évoluer en permanence. De plus, ce n'est pas un code commercial, il est plutôt destiné à la recherche, au test de nouveaux éléments ou algorithmes. Pour toutes les raisons énumérées ci-dessus, le code doit être bien structuré, avec une organisation suffisamment propre et simple, telle que l'implémentation de nouvelles fonctionnalités n'implique pas une intervention partout

---

<sup>1</sup>voir BATOZ et DHATT (1990).

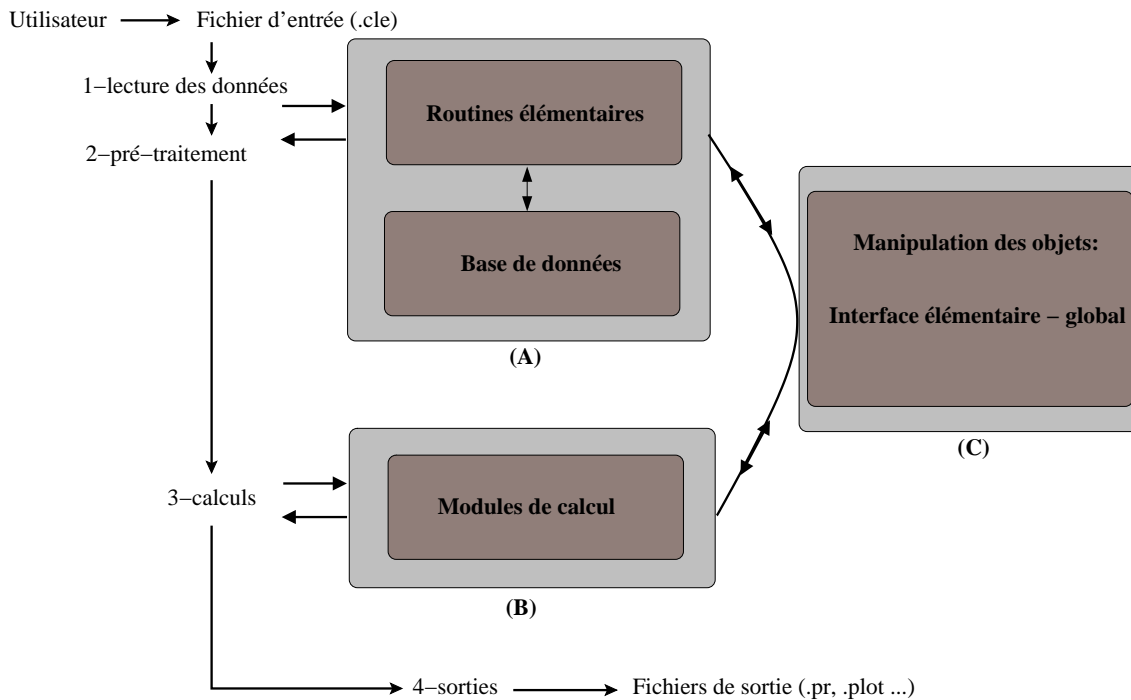


FIGURE IV.1 - Architecture du code Eve

dans le code. La lisibilité des algorithmes est elle aussi importante. Le Fortran 90 comporte des caractéristiques qui permettent de répondre à ces exigences ; notamment l'orientation objet de ce langage, avec l'organisation en modules et la possibilité de définir des structures évoluées et les méthodes associées, ainsi que celle de surcharger les opérateurs.

Plus précisément, Eve est organisé en deux blocs principaux, le niveau élémentaire, noté (A), et le niveau global, (B), plus un bloc, noté (C), qui permet de faire le lien entre les deux, (voir la figure IV.1).

Dans le bloc (A), on trouve tout ce qui a trait à la construction des éléments : écriture des fonctions de formes, calcul des  $\mathbf{B}^l$ ,  $\mathbf{G}$ , etc..., qui conduisent à celle de la rigidité élémentaire.

Le bloc (B) concerne les modules de calcul et on y manipule uniquement des objets globaux, tels que des vecteurs contraintes, degrés de liberté ou encore des matrices de rigidité globales, sans qu'apparaisse explicitement le type d'élément choisi. De plus, à ce niveau, la possibilité de sur-définir des opérateurs apporte beaucoup pour la lisibilité des programmes : en effet, on peut écrire des formules presque "comme sur le papier". Par exemple, l'évaluation du résidu (vecteur de taille égale au nombre de degrés de liberté) après un calcul non linéaire s'écrira : "résidu=lambda\*F\_ext-forces\_internes(u,s)+(omega\*\*2)\*M\*u".

Quant au bloc (C), il contient les définitions des diverses structures utilisées et de toutes les routines associées (surcharge d'opérateurs, passage du niveau élémentaire au global, appel des solveurs, etc...).

La figure IV.1 présente une synthèse de l'architecture du code, avec en particulier le déroulement d'un calcul et les blocs intervenant à chaque étape. Au final, l'ajout d'un élément n'entraînera

une intervention que sur le bloc (A) et d'un nouveau type de calcul que sur le bloc (B).

## IV.2 Calcul de vibrations non linéaires avec Eve

On rappelle que notre objectif est de résoudre le problème présenté au chapitre II, à savoir le calcul de la réponse forcée de structures minces en non linéaire géométrique, par application des méthodes de l'équilibre harmonique et de la MAN. Cependant, afin d'éviter d'obtenir un outil trop spécialisé, et donc limité, nous avons distingué deux points complètement indépendants :

- l'écriture d'éléments "équilibre harmonique", conduisant à un modèle du type (III.11) et donc transformant un système d'équations aux dérivées partielles en un système discret, algébrique (mais toujours non linéaire),
- la programmation d'un "solveur" non linéaire, dont l'action peut-être résumée par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{S}, \eta) = \mathbf{0} \longrightarrow \boxed{\text{SOLVEUR}} \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{q}(\eta) \\ \mathbf{S}(\eta) \end{cases}$$

$\mathbf{R}$  étant un système algébrique discret, d'inconnues  $\mathbf{q}$  (déplacements) et  $\mathbf{S}$  (contraintes), et avec  $\eta$  une liste de paramètres, donnés ou non, dont un servira à la continuation.

La stricte séparation de ces deux points permet d'obtenir un programme plus général, plus modulable. Ainsi on pourra utiliser les éléments "EH" pour n'importe quel calcul (dans la limite où celui-ci à un sens physique), ajouter de nouveaux éléments "EH" indépendamment du solveur utilisé, et, réciproquement, modifier le solveur sans avoir à se préoccuper du type d'élément utilisé pour aboutir au système algébrique de départ. Le solveur sera donc valable aussi bien pour un calcul en statique non linéaire, en dynamique, etc... Au final, le calcul de la réponse forcée harmonique d'une structure mince résultera d'une part du choix d'un élément harmonique, adapté à la structure considérée, et d'autre part de l'appel de la procédure de calcul "solveur non linéaire", appliquée au système (III.11) (la démarche globale est résumée sur la figure III.4, à la fin du chapitre III).

Conformément à l'architecture de Eve présentée figure IV.1, les développements pour les éléments "EH" ont tous lieu au niveau du bloc (A) et ceux du solveur au niveau du bloc (B). Dans chaque cas, des routines d'aiguillage ou de passage du global à l'élémentaire sont également ajoutées au bloc (C).

Dans cette partie on présente successivement les deux points cités ci-dessus, puis on décrit les développements complémentaires liés à ce calcul, avec en particulier l'introduction du défaut et de la précontrainte.

### IV.2.1 Elements EH

On a montré au chapitre III que l'introduction des développements harmoniques dans les équations discrétisées du mouvement, revenait à écrire un nouveau système,  $H$  fois plus grand que celui d'origine ( $H$  nombre de termes dans les développements (III.6)), mais ayant la même forme

que ce dernier, ce qui va s'avérer particulièrement pratique d'un point de vue programmation. En effet, les matrices composant le nouveau système sont construites à partir de celles de l'ancien, par assemblage de différents blocs. Il suffit donc de partir d'un élément connu, puis de construire le système harmonique correspondant. La démarche est donc la suivante :

- récupération des matrices élémentaires  $\mathbf{B}^l$ ,  $\mathbf{B}^{nl}$ ,  $\mathbf{M}$ , etc ... pour un élément connu, déjà disponible dans le code,
- construction des matrices "harmoniques" correspondantes,  $\mathcal{B}^l$ ,  $\mathcal{B}^{nl}$ ,  $\mathcal{M}$ , etc... en suivant la démarche présentée au chapitre III (i.e. passage de (II.39) à (III.11)). Le cas des matrices diagonales par bloc ne pose aucun problème. Celui des  $\mathcal{B}^{nl}$  est un peu plus compliqué, puisqu'il faut prendre en compte la dépendance des matrices vis à vis des  $\mathbf{q}^i$  mais reste assez facilement programmable, quel que soit  $H$ . La méthode de construction est présentée en annexe B.

Cette démarche s'applique pour le calcul :

- des matrices de rigidité élémentaires (  $\mathbf{B}^l$ ,  $\mathbf{B}^{nl}$  puis sommation sur les points de Gauss des produits  ${}^T\mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}$  et  ${}^T\mathbf{g}\hat{\mathbf{S}}\mathbf{g}$ ),
- des matrices de masse élémentaires ,
- des seconds membres  $\mathcal{F}_p^{nl}$  pour la MAN,
- des contraintes.

A chaque fois, on travaille avec des vecteurs degrés de liberté élémentaires de taille  $N_e \times n_e \times H$  ( $n_e$  étant le nombre de degré de liberté par noeud et  $N_e$  le nombre de noeuds de l'élément de base) qui doivent être mis au format adéquat pour le traitement par bloc décrit plus haut. Il y a donc une réorganisation systématique au niveau élémentaire pour les matrices et vecteurs degrés de liberté (voir la figure IV.2 pour les vecteurs).

Au final, les nouveaux éléments ont donc  $n_e \times H$  degrés de liberté par noeud. La construction Format "harmonique" :

$$\mathbf{U}^{eh} = \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Noeud 1} & \dots & \text{Noeud N} \\ \hline \text{ddl 1 à } n_e & & \text{ddl 1 à } n_e \\ \hline \end{array}}_{\text{Harmonique 0}} \dots \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Noeud 1} & \dots & \text{Noeud N} \\ \hline \text{ddl 1 à } n_e & & \text{ddl 1 à } n_e \\ \hline \end{array}}_{\text{Harmonique H}} \right\}$$

Format "classique" :

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \text{Noeud 1} \\ \hline \text{ddl 1 à } n_e \times H \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|} \hline \text{Noeud N} \\ \hline \text{ddl 1 à } n_e \times H \\ \hline \end{array} \right\}$$

FIGURE IV.2 - Réorganisation des vecteurs degré de liberté pour l'application de l'équilibre harmonique

est automatique et valable quel que soit le nombre d'harmoniques  $H$  retenu. La seule limite à ce niveau est l'augmentation de la taille des systèmes et donc du temps de calcul nécessaire pour la résolution.

On a développé pour l'instant deux types d'éléments, des triangles et des quadrangles, basés

sur les DKT et DKQ décrits respectivement dans BATOZ *et al.* (1980) et BATOZ et BEN TAHAR (1982). Cependant, il est important de noter que tous les développements liés à l'équilibre harmoniques ont été fait dans un cadre aussi général que possible et sont indépendants du type d'élément choisi (toujours grâce à l'organisation en modules). Il serait donc assez facile de créer de nouveaux éléments "harmoniques", tout simplement en proposant plusieurs cas lors de l'appel des routines de construction des blocs ( $\mathbf{B}^l$ ,  $\mathbf{B}^{nl}$  ...), en fonction de l'élément de base souhaité. Du point de vue de l'utilisateur, il suffit de sélectionner l'option "équilibre harmonique" (comme on aurait choisi contraintes planes, coques ou autres), le nombre de termes pour les développements ( $H$ ) puis un élément (pour l'instant soit DKT+EH, soit DKQ+EH).

## IV.2.2 Résolution du système non linéaire

On s'intéresse maintenant au solveur non linéaire destiné, comme précisé en introduction de cette partie, à résoudre un système d'équations algébriques non linéaires par une méthode de continuation. On considère donc qu'on dispose d'un modèle élément fini, conduisant à l'écriture de ce système et de sa matrice de rigidité tangente, entre autres.

Dans Eve, le calcul est décomposé en séquences. Chaque objet séquence est caractérisé par :

- un "point" de départ,
- un "point" de fin,
- une méthode de calcul et les paramètres correspondants,
- diverses options (prise en compte d'un défaut, d'une précontrainte ...).

L'objet "point" contient quatre champs : ( $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\lambda$ ,  $\omega$ ). Une séquence se décompose elle même en deux phases : une continuation en charge et une en pulsation.

Du point de vue de l'utilisateur, il faut préciser le nombre de séquences et, pour chacune d'elles, un point de départ (éventuellement solution d'une séquence précédente), une méthode et les paramètres correspondants, pour chaque phase.

Les méthodes disponibles dans le code sont la MAN et Newton-Raphson. En pratique, pour le calcul de la réponse forcée harmonique, on part du point  $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, \Omega)$ , on effectue une continuation avec  $\lambda$  comme paramètre, jusqu'à une valeur seuil fixée par l'utilisateur, ce qui fournit un point solution de départ pour la continuation en  $\Omega$  qui conduit finalement aux courbes déplacements-fréquences.

Les algorithmes de résolution par la MAN ou Newton sont détaillés au chapitre III. Pour la MAN, l'essentiel du temps de calcul est consommé dans la résolution des systèmes linéaires à chaque ordre et pour le calcul des seconds membres.

## IV.3 Autres développements

L'essentiel du travail de développement réalisé au cours de cette thèse concerne les deux points exposés dans les paragraphes précédents. Cependant, d'autres modifications ont également été apportées au code Eve. On les résume brièvement ci-après :

### Prise en compte du défaut de forme et de la précontrainte

On a ajouté la possibilité de lire dans un fichier un défaut de forme et/ou une précontrainte, qui sont ensuite pris en compte lors de l'appel des routines de calcul de la rigidité ou des contraintes, selon le modèle donné au §II.4. Les fichiers “défaut” et “précontrainte” sont soit le résultat d'un calcul précédent, soit remplis directement par l'utilisateur.

### Introduction d'un nouvel élément de plaque :

pour traiter le cas des structures minces, on a ajouté un élément de plaque mince, quadrilatère à 4 noeud et 6 degrés de liberté par noeud. Pour la partie flexion on utilise le DKQ décrit dans BATOZ et BEN TAHAR (1982), basé sur une formulation de Kirchhoff, et le Q4 classique (voir par exemple BATOZ et DHATT (1990)) pour la partie membrane. L'intégration se fait sur 4 points de Gauss, sauf pour la matrice de masse intégrée sur 9 points.

### Modification du type de stockage des matrices :

L'introduction des développements harmoniques dans les équations du mouvement implique une augmentation de la taille des systèmes et conduit, à cause de la définition des  $\mathcal{B}^{nl}$ , à des matrices de rigidité non symétriques, et à un nombre plus grand de données à mémoriser. Il était donc nécessaire de revoir la méthode de stockage des matrices assemblées (format ligne de ciel dans la version précédente de Eve). Nous avons utilisé un stockage sous forme de chaîne de matrices élémentaires. Plus précisément, au niveau global on travaille avec des objets “Matrice\_globale”, structure composée de trois champs :

- le nombre de degrés de liberté total du modèle éléments finis,
- le nombre d'éléments,  $n_{ele}$ ,
- un tableau, de taille  $n_{ele}$ , de matrices élémentaires.

L'objet “matrice élémentaire” est lui aussi défini par trois champs :

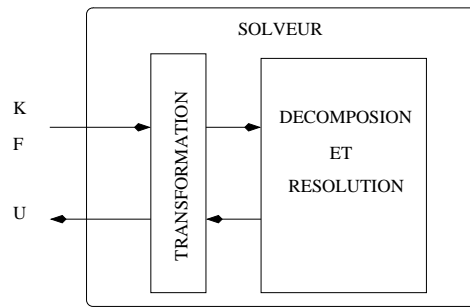
- le nombre de lignes d'une matrice élémentaire,
- la table de connectivité élémentaire,
- la matrice de rigidité de l'élément.

Le gros avantage de ce type de stockage est qu'il n'y a pas systématiquement d'étape d'assemblage, on ne stocke que les rigidités élémentaires, ce qui d'une part simplifie fortement la programmation en minimisant le nombre d'opérations et d'autre part évite de manipuler des matrices de grande taille. Ensuite, en fonction du type de calcul retenu (statique, dynamique ou autre), on choisira le solveur le plus adapté et l'assemblage (éventuel) aura lieu au niveau de ce solveur.

### Ajout d'un solveur pour matrices non symétriques.

Après application de la MAN, on est amené à résoudre à chaque ordre des systèmes linéaires. Or, comme précisé ci-dessus, les matrices de rigidité obtenues après application de l'équilibre harmonique sont non symétriques, ce qui est incompatible avec le solveur disponible dans la version 3.1 de Eve (basé sur la méthode de Crout). Nous avons donc utilisé la routine DGKFS de la bibliothèque ESSL<sup>2</sup>, disponible sur serveur IBM, et compatible avec différents langages dont le Fortran90. La routine DGKFS permet de résoudre le système linéaire  $KU = F$  avec

<sup>2</sup>Engineering and Scientific Subroutine Library for AIX.

FIGURE IV.3 - Résolution de  $KU = F$  - Intérêt du stockage "chaîne".

$K$  une matrice quelconque, rangée au format ligne de ciel, et utilise une factorisation LU. L'inconvénient de l'appel de cette routine est que le code n'est plus portable et ne fonctionne que sur une machine disposant d'ESSL. Cependant, grâce au stockage en chaîne décrit plus haut, on peut facilement changer de solveur et faire appel à une autre bibliothèque de fonction. Il suffit de coder la partie "transformation" (voir figure IV.3), qui correspond en fait à l'assemblage, adaptée au solveur choisi. Notre principal souci était de gagner du temps de calcul sans pour autant s'attacher à optimiser celui-ci et atteindre la meilleure performance. C'est pourquoi nous avons utilisé par défaut les routines ESSL, disponible sur notre calculateur. A terme il serait intéressant de coder un solveur traitant directement la chaîne de matrices élémentaires, ce qui apporterait un gain considérable en temps de calcul.

#### Écriture d'un pre/post traitement sous Matlab

L'inconvénient principal de Eve est qu'il ne dispose pas de pré ou de post traitement. Pour remédier à cela, nous avons développé un outil de post traitement basique, sous Matlab, qui traite les fichiers de sorties de Eve et permet de visualiser :

- le maillage initial, avec la numérotation des noeuds et des éléments,
- les modes propres pour un calcul de vibrations libres,
- les déformées pour un calcul statique ou dynamique,
- les déplacements aux noeuds (chaque harmonique ou le signal reconstruit, lors d'un calcul avec des éléments EH) en fonction de divers paramètres (temps,  $\lambda$ ,  $\Omega$ ), selon le type de calcul effectué.

La figure IV.4 donne un aperçu de l'outil en question.

## IV.4 Quelques exemples de validation

On présente dans cette partie des l'application à des exemples des développements introduits dans Eve et exposés au cours de ce chapitre. Il s'agit d'une part de valider ceux-ci et d'autre part d'illustrer le fonctionnement et les possibilités du code, en comparant les résultats obtenus par Eve à ceux fournis par la littérature sur des cas précis (des exemples plus complets et entièrement traités sont présentés au chapitre suivant). Toutes les nouvelles fonctionnalités ont été vérifiées et



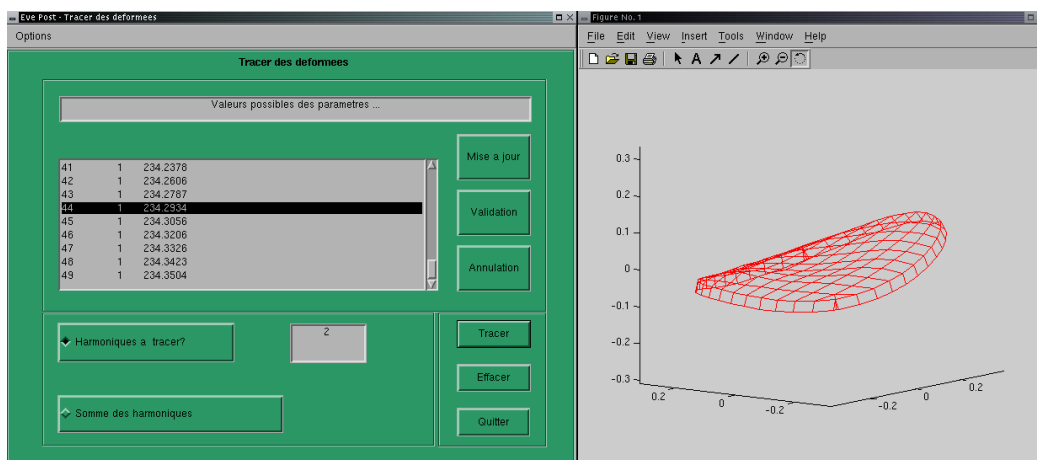


FIGURE IV.4 - Post-traitement pour Eve

validées, en particulier l'élément DKQ à l'aide du patch test présenté dans BATOZ et BEN TAHAR (1982), mais on ne se concentre ici que sur les deux principaux ajouts : les éléments EH et le module de calcul de la réponse forcée non linéaire. On traite donc deux cas, issus de la littérature : celui d'une plaque en acier, présenté dans AZRAR *et al.* (2002) et celui d'une poutre encastree à ses deux extrémités, proposé par RIBEIRO et PETYT (1999c).

#### IV.4.1 Réponse forcée d'une plaque mince

On considère ici les deux situations traitées dans AZRAR *et al.* (2002) :

- une plaque carrée, en acier ( $E = 2.1e11Pa, \nu = 0.3, \rho = 7800kg.m^{-3}$ ), en appuis sur ses quatre cotés,
- une plaque rectangulaire (de ratio longueur sur largeur égale à 2), elle aussi en acier, entièrement encastree.

Le rapport longueur/épaisseur vaut 240, dans les deux cas. On s'intéresse à la réponse forcée à une excitation mono-harmonique au milieu de la plaque :

$$F_{ext} = \lambda F \cos \Omega t \quad (IV.1)$$

La réponse est calculée dans Eve en utilisant des éléments DKQ-EH, avec 3 termes dans les développements, et la MAN comme solveur non linéaire.

##### Plaque carrée en appuis simples

Les solutions obtenues sont comparées à celles fournies par AZRAR *et al.* (2002), qui utilisent également la méthode de l'équilibre harmonique (les déplacements de membrane sont de la forme  $\mathbf{a}(x, y) \sin \Omega t^2$  et ceux de flexion  $\mathbf{w}(x, y) \sin \Omega t$ ) et la MAN. Les résultats d'études antérieures sont également présentés dans ce même papier : réponse obtenue en utilisant une méthode éléments finis plus une linéarisation (MEI (1985)), une méthode de perturbation (MEI (1985) et HSU (1960)) et une approximation au premier mode (méthode "single-mode") et des fonctions

elliptiques (HSU (1960)). Le tableau IV.1 récapitule les valeurs obtenues par ces diverses méthodes, y compris la nôtre, pour la plaque carrée sur appui. La figure IV.5 donne l'amplitude des déplacements, soit le terme  $q^1$  des développements III.6 (la structure étant symétrique,  $q^0$  et  $q^2$  sont nuls), divisé par l'épaisseur, en fonction du rapport  $\frac{\Omega}{\omega_1}$ ;  $\omega_1$  est la première pulsation propre linéaire de la plaque.

$\frac{q^1}{h}$ \ $\frac{\Omega}{\omega_1}$	Eve	Azrar	Elliptique	Perturbation	MEF +lin
-1	1.50	1.56	1.49	1.49	1.39
-0.8	1.39	1.44	1.39	1.39	1.32
-0.6	1.33	1.36	1.32	1.32	1.28
-0.4	1.33	1.33	1.33	1.33	1.30
-0.2	1.45	1.45	1.50	1.50	1.49
0.4	0.69	0.69	0.73	0.73	0.71
0.6	0.97	0.97	0.96	0.97	0.92
0.8	1.16	1.17	1.14	1.15	1.06
1.	1.33	1.35	1.31	1.32	1.21

TABLEAU IV.1 - Plaque carrée, en appuis sur ses quatre côtés, soumise en son centre à une excitation harmonique - Relation déplacements-fréquences calculée par différentes méthodes - Voir figure IV.5

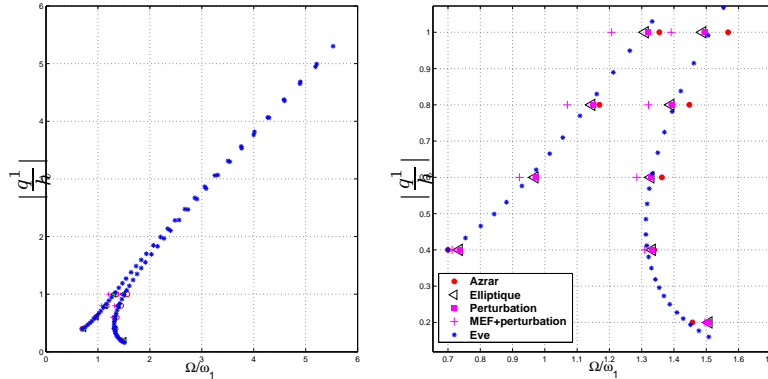


FIGURE IV.5 - Valeur absolue de la réponse forcée d'une plaque carrée soumise à une excitation harmonique ponctuelle en son centre. Comparaison des résultats fournis dans AZRAR et al. (2002) et par Eve.

### Plaque rectangulaire, encastrée sur ses quatre côtés

On procède de même avec la plaque rectangulaire pour obtenir les résultats donnés dans le tableau IV.2 et tracés sur la figure IV.6. On a également tracé la réponse forcée autour du mode 3. La structure étant excitée en son centre, le mode 2 n'est quasiment pas visible, cependant on distingue une accumulation de pas de MAN autour de l'abscisse 1.3, qui correspond à ce

mode. Enfin la courbe est complétée par les branches asymptotiques correspondant aux modes non linéaires 1 et 3, obtenues en prenant une force d'excitation très petite, ce qui conduit à la réponse libre de la structure. Dans les deux cas, appuis ou encastré, les résultats obtenus avec

$\frac{q^1}{h}$	$\frac{\Omega}{\omega_1}$ (Eve)	$\frac{\Omega}{\omega_1}$ (Azrar)	$\frac{q^1}{h}$	$\frac{\Omega}{\omega_1}$ (Eve)	$\frac{\Omega}{\omega_1}$ (Azrar)
-0.2	1.181	1.179	0.2	0.568	0.568
-0.4	1.132	1.132	0.4	0.875	0.872
-0.6	1.136	1.139	0.6	0.966	0.969
-0.8	1.171	1.171	0.8	1.045	1.044
-1	1.221	1.221	1	1.112	1.119
-1.5	1.391	1.400	1.5	1.320	1.330
-2	1.629	1.628	2	1.569	1.575
-2.5	1.867	1.882	2.5	1.842	1.840
-3.	2.154	2.152	3	2.101	2.118

TABLEAU IV.2 - Plaque rectangulaire ( $\frac{L}{T} = 2$ ), complètement encastrée, soumise en son centre à une excitation harmonique - Relation déplacements-fréquences calculée par l'EHMANN et la méthode proposée dans AZRAR *et al.* (2002) - Voir figure IV.6.

Eve sont très proches de ceux donnés dans AZRAR *et al.* (2002), ce qui va dans le sens de la validité de notre outil.

A travers l'exemple présenté ci-dessus, nous allons maintenant montrer comment tracer les réponses forcées en jouant sur les deux paramètres,  $\lambda$  et  $\Omega$ . La solution tracée sur la figure IV.5 comporte deux branches, tendant vers l'infini. Pour obtenir chacune d'elle, il est nécessaire de fixer un point de départ puis deux phases : une continuation en chargement ( $\lambda$  paramètre) et une en pulsation ( $\Omega$  paramètre). Tout point  $A = (\mathcal{Q} = 0, \mathcal{S} = 0, \lambda = 0, \Omega \text{ quelconque})$  est solution. Il suffit donc de choisir une pulsation initiale avant et une après la résonance linéaire en fonction de la branche à tracer, d'appliquer la force souhaitée à pulsation constante (passage du point A au point B sur la figure IV.7, continuation de  $\lambda = 0$  à 1) puis, partant du point B de "suivre" la branche  $q^1(\Omega)$  à force constante. Pour chaque branche, il est donc nécessaire de fournir, outre le  $\Omega$  de départ, le nombre de pas de calcul souhaité, un critère de convergence ( $\epsilon$  dans (III.34)), un ordre pour les séries. Pour donner au lecteur une idée des ordres de grandeur des paramètres d'un calcul MAN, ceux-ci sont donnés dans le tableau IV.3, pour la construction de la branche supérieure de la courbe IV.5. On utilise un maillage  $20 \times 20$  éléments, ce qui correspond (avec un équilibre harmonique à 3 termes et la plaque en appuis) à 6498 degrés de liberté.

#### IV.4.2 Poutre encastrée

Considérons maintenant le cas d'une poutre en aluminium ( $E = 0.7e11Pa$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 2778kg.m^{-3}$ ), de longueur 580mm, largeur 20mm et d'épaisseur=2mm. Elle est encastrée à ses deux extrémités, et soumise à une excitation harmonique de la forme (IV.1), telle que présentée

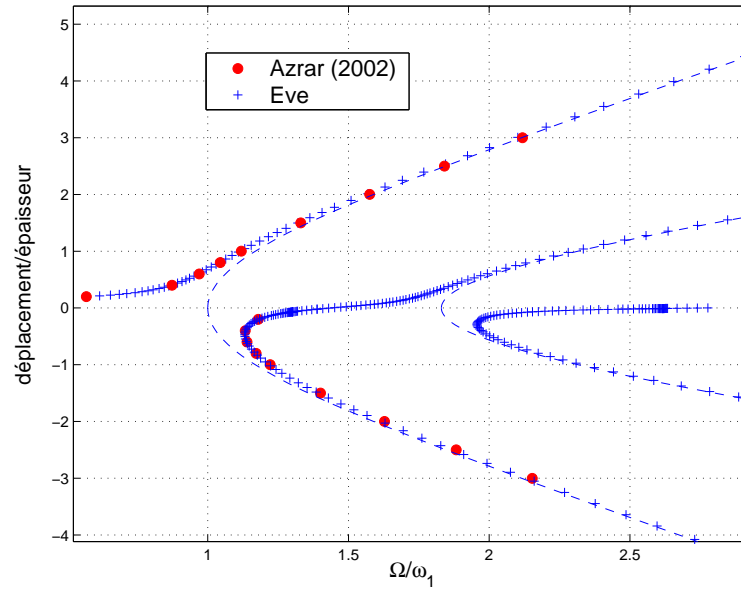


FIGURE IV.6 - Comparaison des résultats donnés par AZRAR *et al.* (2002) et par Eve- les pointillés fins représentent les modes non linéaires

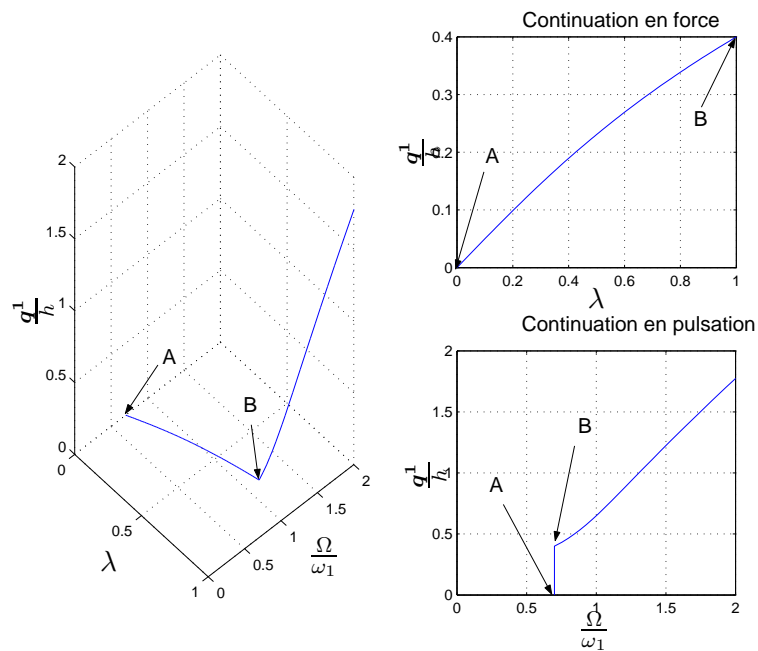


FIGURE IV.7 - Calcul d'une branche de solution avec Eve

MAN chargement			MAN pulsation			Temps de calcul (CPU) MAN
nombre de pas	ordre des séries	critère	nombre de pas	ordre des séries	critère	
2	20	1e-4	9	21	1e-9	11min30s

TABLEAU IV.3 - Paramètres du calcul pour la branche supérieure de la figure IV.5

dans RIBEIRO et PETYT (1999c). Les auteurs utilisent une méthode basée sur les éléments finis hiérarchiques, l'équilibre harmonique et une méthode de Newton. On compare les résultats obtenus avec Eve avec des éléments DKQ-EH (avec 4 termes, c'est à dire qu'on prend en compte les termes en  $\cos 3\Omega t$ ) et la MAN, pour divers cas, représentés sur les figures IV.8 à IV.11.

Le premier cas (IV.8) concerne la réponse forcée autour du premier mode, pour une excitation de  $0.03N$ , au quart de la longueur de la poutre. La correspondance entre nos résultats et ceux de Ribeiro est très bonne. Par contre on observe l'apparition d'une nouvelle branche pour  $\frac{\Omega}{\omega_1} = 0.925$ , valeur à partir de laquelle l'harmonique 3 croît au détriment de l'harmonique 1 (figure IV.9). Cette valeur de la pulsation correspond à  $\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_2$ , on est donc en présence d'une résonance sur-harmonique pour le mode 2. On s'intéresse ensuite à la réponse pour la même force mais

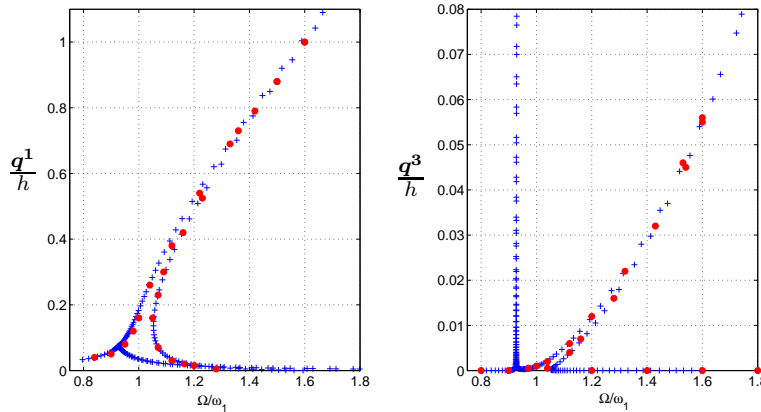


FIGURE IV.8 - Poutre encastree-encastree - Valeur absolue de la réponse forcée autour du premier mode - Harmonique 1 (à gauche) et 3 (à droite) - Mesure et excitation au quart de la longueur - Comparaison avec les résultats de RIBEIRO et PETYT (1999c)

appliquée au centre de la poutre, et mesurée en ce même point (figure IV.10). Les résultats concordent toujours parfaitement avec ceux de Ribeiro. Il n'y a plus de bifurcation comme dans le cas précédent, mais en revanche on note la forme particulière de l'harmonique 3 : celle-ci augmente brusquement à partir de l'abscisse 1.8, qui correspond au tiers de la troisième fréquence propre : il y a interaction entre les modes 1 et 3. Nous reviendrons sur ces aspects plus en détails dans le chapitre V, lors de l'étude complète d'une poutre encastree-encastree.

Pour terminer, on trace sur la figure IV.11 la réponse pour une très faible amplitude d'excitation, ce qui correspond au premier mode non linéaire de la structure. On représente les résultats

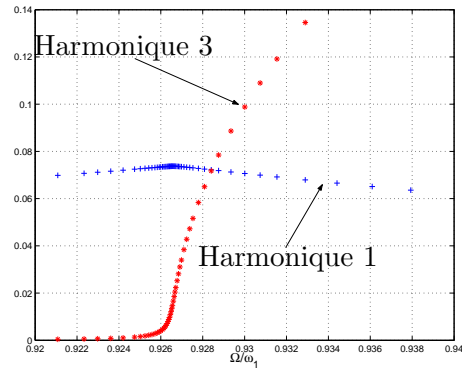


FIGURE IV.9 - Poutre encastree-encastree - Valeur absolue de la reponse forcee autour du premier mode - Bifurcation super-harmonique

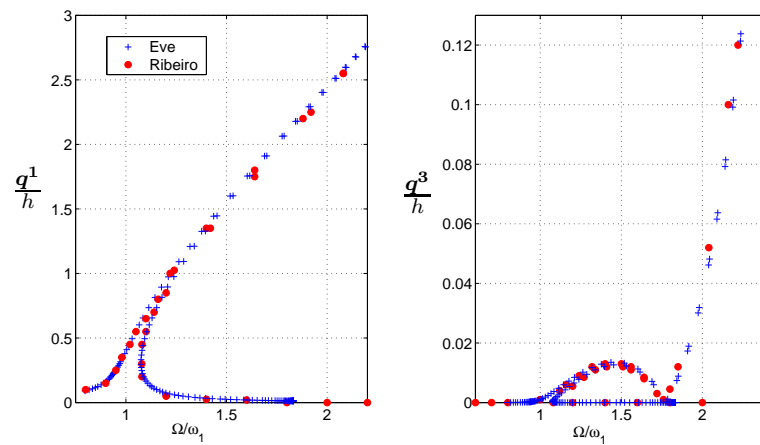


FIGURE IV.10 - Poutre encastree-encastree - Valeur absolue de la reponse forcee autour du premier mode - Mesure et excitation au milieu de la poutre

obtenus en utilisant 4 termes dans les développements harmoniques et la MAN, 6 termes et la MAN et enfin 6 termes et Newton-Raphson. De son côté Ribeiro inclut les termes en  $\cos \Omega t$ ,  $\cos 3\Omega t$  et  $\cos 5\Omega t$ . Nos résultats concordent toujours avec les siens.

Sur la courbe, on observe deux branches : la principale et une bifurcation pour  $\Omega/\omega_1 \approx 1.13$ , qui correspond à une résonance interne 1 :5. La bifurcation n'est obtenue que pour la MAN et 6 termes dans l'équilibre harmonique, ce qui illustre les propos tenus au §III.2.1 et III.3.1.d : d'une part il est nécessaire de prendre en compte le  $\cos 5\Omega t$  pour voir une résonance interne d'ordre 5 et d'autre part la MAN tourne sur la branche tandis que Newton reste sur la fondamentale. On remarque également l'accumulation de pas à proximité des points limites et des bifurcations, lors de l'utilisation de la MAN.

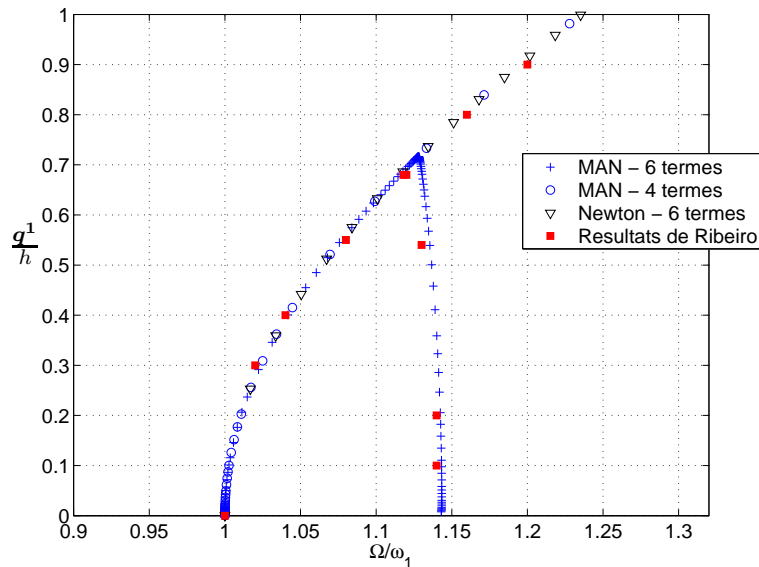


FIGURE IV.11 - Poutre encastée-encastée - Bifurcation de l'harmonique 1 - Comparaison avec les résultats de RIBEIRO et PETYT (1999c)

## IV.5 Bilan du chapitre

Ce chapitre est dédié à la présentation du code élément finis Eve et des développements numériques réalisés au cours de cette thèse et liés entre autre à l'intégration de la méthode EHMAN dans le code.

Le premier aspect concerne l'introduction d'éléments "équilibre harmonique", c'est à dire intégrant directement les développements harmoniques, au niveau élémentaire, et ce indépendamment du nombre de termes  $H$  retenus. Par contre, la taille des systèmes à résoudre est sensiblement augmenté; le nombre de degrés de liberté est multiplié par  $H$ .

Un module de calcul de vibrations non linéaires a été développé, basé sur la MAN, et applicable à des structures maillées avec les éléments décrits ci-dessus. Enfin, la prise en compte d'un défaut

---

de forme et d'une précontrainte dans le modèle éléments finis a également été introduite.

Les deux exemples traités montrent que l'outil est fiable et permet de retrouver des résultats donnés dans la littérature.

Au final on dispose d'un outil flexible, fonctionnant pour un nombre d'harmoniques quelconque et de manière automatique, avec une résolution robuste grâce à la MAN.





## CHAPITRE V

# Simulation numérique de la réponse forcée de structures minces : quelques exemples

---

**C**e chapitre propose quelques simulations de la réponse libre ou forcée de structures minces en non linéaire. Le principal exemple traité est celui d'une poutre bi-encastrée, étudiée expérimentalement au chapitre VI. On traite ensuite plus sommairement le cas d'une poutre à composante non linéaire et celui d'un gong. Pour les calculs on utilise la méthode EHMAN et le logiciel éléments finis Eve, présenté au chapitre précédent. On montre quelques caractéristiques du comportement non linéaire des structures considérées, en particulier des bifurcations de modes et des résonances internes ou super-harmoniques.

---

PLAN DU CHAPITRE V

---

<b>V.1 Introduction</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>V.2 Étude d'une poutre encastree-encastree</b> . . . . .	<b>93</b>
V.2.1 Calcul de la réponse libre . . . . .	94
V.2.1.a Premier mode non linéaire . . . . .	94
V.2.1.b Deuxième et troisième modes non linéaires . . . . .	97
V.2.2 Calcul de la réponse forcée harmonique . . . . .	98
V.2.3 Bilan des simulations sur la poutre . . . . .	106
<b>V.3 Étude d'une poutre à composante non-linéaire</b> . . . . .	<b>106</b>
V.3.1 Présentation du problème . . . . .	106
V.3.2 Calcul de la réponse forcée et prise en compte du poids propre . . . . .	107
<b>V.4 Réponse d'un gong</b> . . . . .	<b>109</b>
<b>V.5 Bilan du chapitre</b> . . . . .	<b>111</b>

---

## V.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente les résultats de simulation de la réponse libre ou forcée pour différentes structures. Les cas traités sont les suivants :

- une poutre droite bi-encastée
- une poutre à composante non linéaire
- un gong

Toutes les simulations sont réalisées avec Eve, en utilisant la méthode EHMAN. On rappelle que les déplacements aux noeuds et les contraintes aux points de Gauss s'écrivent :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=0}^{H-1} \mathbf{q}^j \cos j\Omega t \quad , \quad \mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{H-1} \mathbf{s}^j \cos j\Omega t \quad (\text{V.1})$$

pour une excitation  $\lambda \mathbf{F} \cos \Omega t$ . Les paramètres importants pour le calcul sont donc l'amplitude de la force,  $\lambda \mathbf{F}$ , sa pulsation  $\Omega$  et  $H$ , le nombre d'harmoniques<sup>1</sup>. A cela s'ajoutent les divers paramètres pour la MAN (ordre des séries etc ...). Cette dernière permet d'effectuer le suivi des branches de solutions, par continuation sur le paramètre  $\Omega$ . On s'intéressera principalement aux grandeurs suivantes :

- les déplacements “harmoniques” aux noeuds,  $\mathbf{q}^j$ , fonctions de  $\Omega$
- les déplacements “complets”,  $\mathbf{q}(t, \Omega)$ , construits en utilisant (V.1), en particulier ceux en  $t = 0$ , qu'on notera  $\mathbf{q}_0(\Omega) = \sum_{j=0}^{H-1} \mathbf{q}^j(\Omega)$ .
- les déformées de la structure, en fonction de  $\Omega$

Sauf mention contraire, on gardera ces notations pour les trois exemples à suivre. On notera également  $\omega_k$  la  $k$ -ième pulsation propre linéaire de la structure étudiée. Pour finir, on rappelle que, comme expliqué au chapitre IV, pour obtenir la réponse libre et les “modes non linéaires” on simule la réponse forcée pour une amplitude d'excitation très faible. Au cours de ce chapitre, on parlera de “mode” sans qualificatif pour désigner le mode propre linéaire, ou sa déformée modale, et on précisera “mode non linéaire” le cas échéant.

## V.2 Étude d'une poutre encastée-encastée

On revient dans cette partie sur l'exemple d'une poutre encastée à ses deux extrémités, précédemment abordé au §IV.4.2, où les résultats sont comparés avec ceux de RIBEIRO et PE-TYT (1999c). La structure étudiée ici est celle sur laquelle nous avons mené une campagne d'essais expérimentaux, présentée au chapitre VI. Il s'agit d'un poutre mince en aluminium ( $E = .7e11Pa$ ,  $\nu = 0.33$ ,  $\rho = 2762.4kg.m^{-3}$ ), de longueur 60cm, de largeur 3cm et d'épaisseur 2 mm. Une photo et un schéma du montage sont donnés sur la figure VI.1 du chapitre suivant. On simule avec Eve et la méthode EHMAN la réponse libre puis forcée de la structure soumise à une excitation harmonique selon l'axe  $\mathbf{x}_3$ , en flexion. Pour diminuer les temps de calcul, on

---

<sup>1</sup>attention : il est important de noter qu'un développement à l'ordre  $H$  signifie qu'on inclue dans (V.1) tous les termes jusqu'au  $\cos((H-1)\Omega t)$  mais pas les  $\cos H\Omega t$

utilise la symétrie de la poutre et seule la moitié de la structure est maillée, avec 40 éléments DKQ ou DKQ-EH. De manière similaire à ce qui est fait expérimentalement, la force est appliquée à 5cm du bord gauche de la poutre et les résultats mesurés à 37 cm de ce même bord. Les valeurs des premières fréquences propres linéaires sont rappelées dans le tableau V.1.

fréq.(Hz)	28.98	80.04	157.39	261.30	351.08	392.51	451.79	551.92	704.31
puls.(rad/s)	182.11	502.92	988.93	1641.83	2205.93	2466.23	2838.72	3467.82	4425.36
$\omega_k/\omega_1$	1	2.76	5.43	9.01	12.11	13.54	15.59	19.04	24.30

TABLEAU V.1 - Premières fréquences et pulsations propres de la poutre bi-encastree

## V.2.1 Calcul de la réponse libre

On s'intéresse ici à la réponse libre à proximité des trois premières fréquences propres linéaires.

### V.2.1.a Premier mode non linéaire

Pour  $H$  variant de 2 à 8, partant d'un  $\Omega$  proche de la première pulsation propre, on "suit" la branche correspondant au mode non linéaire. Les résultats sont représentés sur la figure V.1 où est tracé le rapport  $\frac{q_0}{h}$ ,  $h$  étant l'épaisseur de la poutre, en fonction de  $\frac{\Omega}{\omega_1}$ . La figure V.1(a) montre qu'il est nécessaire d'aller jusqu'à  $H = 4$  pour que la solution ne dépende plus de  $H$ , même pour des amplitudes importantes. Cela signifie qu'il est nécessaire d'inclure les termes en  $\cos 3\Omega t$ , ce qui est cohérent pour un modèle de poutre comportant des non linéarités cubiques. Cependant,  $H = 3$  donne des résultats corrects jusqu'à une amplitude de l'ordre de 2.5 fois l'épaisseur, tandis que  $H = 2$  est très rapidement insuffisant. A noter que, quelque soit  $H$ , tous les  $q^k$  pour  $k$  pair sont identiquement nuls, ce qui s'explique par la symétrie du problème. Mais malgré cela, la prise en compte des termes pairs reste importante : en effet, les contraintes sont elles aussi développées en séries, et les  $s^k$  pairs ne sont pas nuls, ce qui justifie par exemple la différence entre les déplacements pour  $H = 2$  et  $H = 3$ . Les déformées<sup>2</sup> de la poutre sont représentées figure V.2(a), en différents points de la branche principale. On remarque que la structure vibre<sup>3</sup> sur un mode 1 pour de faibles amplitudes puis évolue vers un mode 3. Ceci s'explique par l'importance croissante prise par l'harmonique 3 relativement à la 1 lorsque l'amplitude augmente, comme l'illustrent les figures V.1(b) et V.2(b).

<sup>2</sup>Pour faciliter la lisibilité des déformées, les valeurs selon  $\mathbf{x}_3$  sont amplifiées et ce ne sont donc que des ordres de grandeur relatifs. Cette remarque est valable pour toutes les déformées présentées dans cette partie.

<sup>3</sup>Par "vibrer sur le mode  $i$ " on entend que la déformée de la structure est similaire à la déformée modale du  $i$ -ème mode linéaire. Dans la suite de cette partie, en particulier pour la réponse forcée, par abus de langage on parlera donc parfois de vibration sur tel ou tel mode plutôt que de "déformée ayant la forme de la déformée modale de tel ou tel mode linéaire"

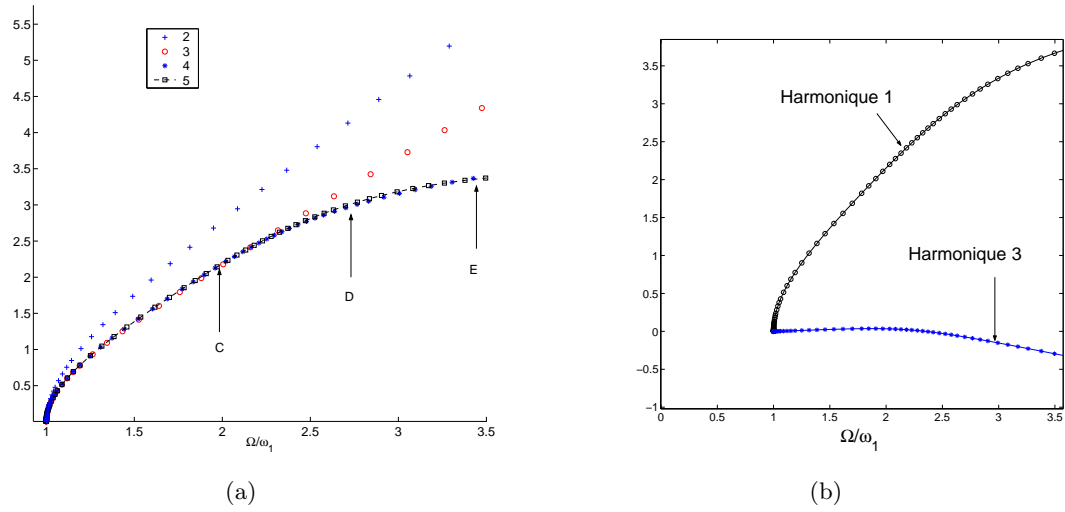


FIGURE V.1 - Réponse libre de la poutre bi-encastrée - (a) :  $q_0/h$  pour  $H$  variant de 2 à 5 - (b) :  $q^1/h$  et  $q^3/h$  pour  $H=5$

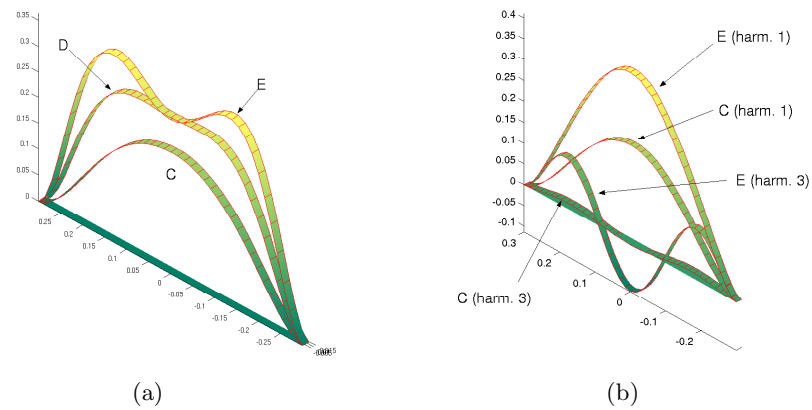


FIGURE V.2 - Réponse libre de la poutre bi-encastrée autour de  $\omega_1$  - Déformées relevées pour diverses valeurs de la fréquence, en C, D et E (voir les points sur la figure V.1), pour  $H=5$  - (a) :  $q_0/h$  - (b) :  $q^1/h$  et  $q^3/h$ .

Ensuite, l'utilisation d'un modèle plus "riche" permet de voir de nouvelles branches de solutions. En effet, lorsque  $H$  est supérieure à 6, la solution bifurque pour l'abscisse 1.11 (figure V.3). Cette valeur correspond à une pulsation de 202 rad/s soit environ  $\frac{\omega_3}{5}$ . Il s'agit d'une résonance interne 1 : 5 entre le mode 1 et le mode 3. Le point de bifurcation correspond au démarrage de l'harmonique 5, au détriment de l'harmonique 1 (figure V.3(b)). Quand à l'harmonique 3 elle est négligeable ( $q^3 \approx 0$ ). Le phénomène est bien visible lorsqu'on observe les déformées (figure

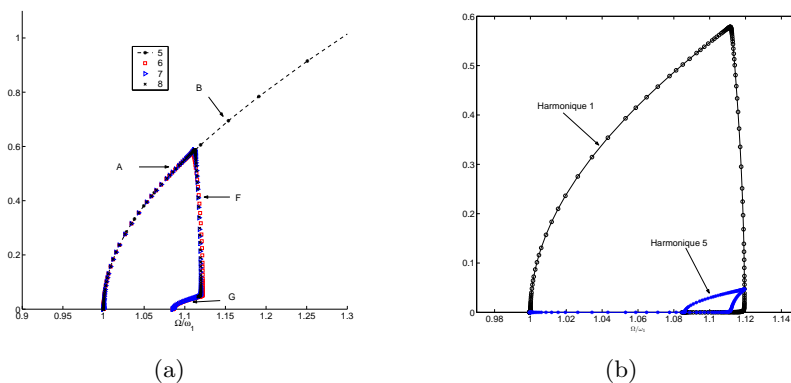


FIGURE V.3 - Réponse libre de la poutre bi-encastée autour de  $\omega_1$  - (a) :  $q_0/h$  pour  $H$  variant de 5 à 8, bifurcation - (b)  $q^1/h$  et  $q^5/h$  correspondants, pour  $H = 5$ .

V.4(a)) avant (A) et après le point de bifurcation, sur la branche principale (B) ou sur la branche bifurquée (F et G) : on passe d'un mode 1 à un mode 3, à cause de l'apparition du terme  $q^5$  qui était nul sur la branche principale. On remarque également une nouvelle bifurcation entre F et G, à l'abscisse 1.119 puis  $q_0$  s'annule en 1.08. Sur cette dernière partie, l'harmonique 1 est nulle et seule reste la 5, avec une déformée de la forme uniquement d'un mode 3 (figure V.4(b)). Or l'abscisse 1.08 correspond à  $\Omega = 197.8rad/s$ , soit une vibration de l'harmonique 5 à  $5\Omega = 989rad/s \approx \omega_3$ . Au final on est donc en mesure d'interpréter chacune des branches : la fondamentale, contenant les points A et B, correspond au mode non linéaire 1, la branche bifurquée contenant le point G au 3 et celle contenant le point F est une branche de liaison entre ces deux modes.

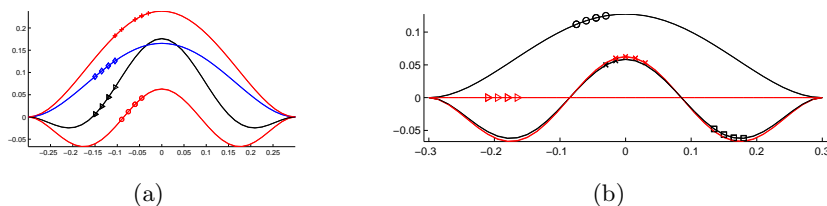


FIGURE V.4 - Réponse libre de la poutre bi-encastée autour de  $\omega_1$  - Déformées relevées pour diverses valeurs de la fréquence, en A, B, F et G (voir les points sur la figure V.3), pour  $H=8$  - (a)  $q_0/h$  en A( $\square$ ), B(+), F( $\triangleleft$ ) et G(o)- (b)  $q^1/h$  en F (o), G ( $\triangleright$ ) et  $q^5/h$  en F ( $\square$ ) et G ( $\times$ ) .

## V.2.1.b Deuxième et troisième modes non linéaires

Des résultats similaires sont obtenus pour les résonances à proximité de  $\omega_2$ , figure V.5, et  $\omega_3$ , figure V.7. En ce qui concerne le nombre d'harmoniques, 5 sont suffisantes pour obtenir la

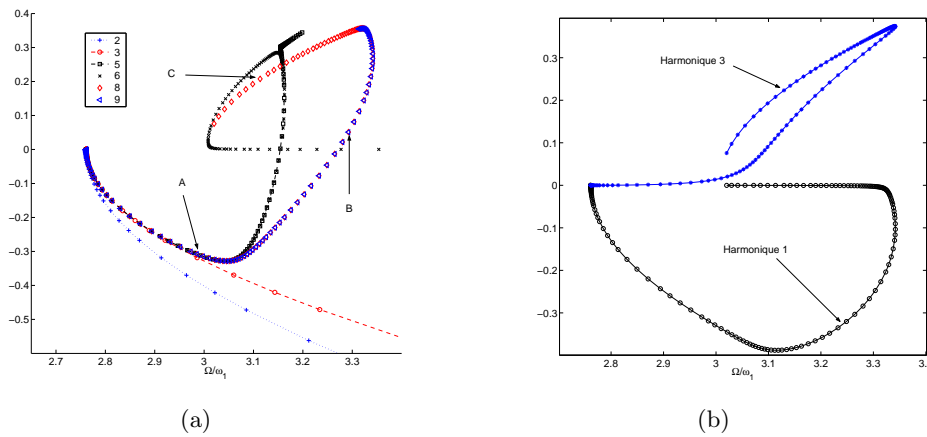


FIGURE V.5 - Réponse libre de la poutre bi-encastrée à proximité de  $\omega_2$  - (a)  $q_0/h$  pour  $H=2,3,5,6,8,9$  - (b)  $q^1/h$  et  $q^3/h$ , pour  $H=8$ .

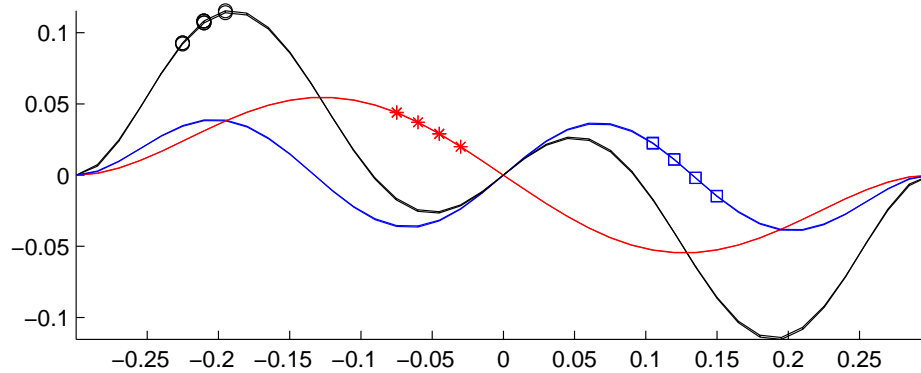


FIGURE V.6 - Réponse libre de la poutre bi-encastrée à proximité de  $\omega_2$  - Déformées correspondant à la figure V.5 pour  $H=8$  en A(\*), B(o) et C(□)

branche principales mais 8 sont nécessaires pour accéder à une nouvelle branche. Pour le mode 2, on observe une bifurcation à l'abscisse 3.01, valeur correspondant à  $\frac{1}{3}\omega_4$ . Il s'agit encore d'une résonance interne, cette fois du type 1 : 3, entre le mode 2 et le mode 4, visible sur les déformées. Plus précisément, le passage de A vers B correspond à l'augmentation de l'harmonique 3 au détriment de la première, (voir la figure V.6) avec des déformées évoluant d'un mode 2 vers un mode 4. Le passage de B vers C implique la baisse de l'harmonique 3, tandis que l'harmonique 1 est nulle, avec une vibration sur un mode 4 uniquement. Là encore on retrouve une situation équivalente à celle obtenue au paragraphe précédent, pour le premier mode non linéaire : la branche contenant A correspond au mode non linéaire 2, celle contenant C au mode non linéaire 4, tandis



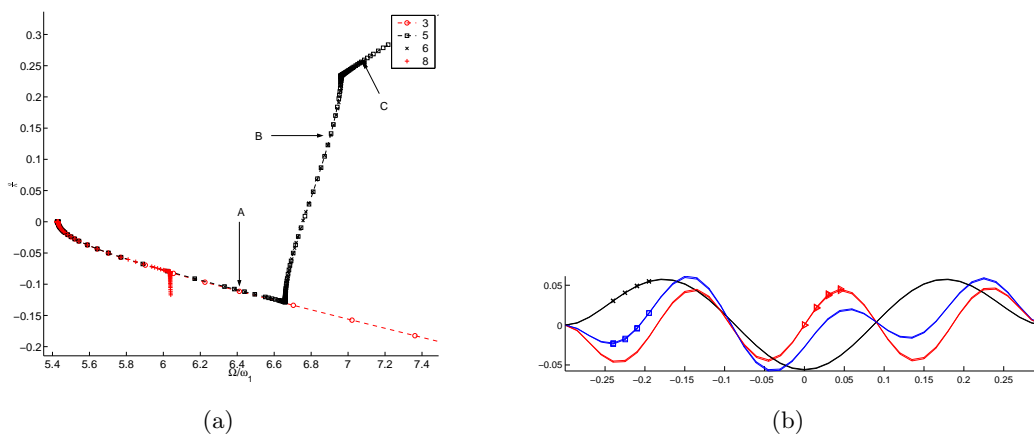


FIGURE V.7 - Réponse libre de la poutre bi-encastree à proximité de  $\omega_3$  - (a)  $q_0/h$  à proximité de  $\omega_3$  pour  $H=3,5,6,8$  (b) Déformées pour  $H=6$  en A (×), B(◁) et C(□).

que celle contenant B est une branche de liaison entre ces deux modes. De même, l’abscisse où la branche “C” s’annule correspond à  $\Omega = 547.25 \text{ rad/s}$ , soit une vibration de l’harmonique 3 correspondant exactement à la pulsation propre du mode 4 :  $3 \times 547.25 = 1641.75 \approx \omega_3$ .

Enfin, pour le mode 3, on obtient une résonance 1 : 2 entre le mode 3 et le mode 6, au point d’abscisse 6.7 (soit pour  $\frac{1}{2}\omega_6$ ), qui se traduit par une évolution des déformées d’un mode 3 vers un mode 6. On observe également une seconde bifurcation (passage de B vers C), pour  $\Omega/\omega_1 = 7$ , qui correspond à l’annulation de l’harmonique 1, la 3 restant seule. On note également une bifurcation pour l’abscisse 6.1, mais nous n’avons pas pu identifier son origine (on ne parvient pas à aller assez loin sur la branche à cause de limitations dues au calculateur).

## V.2.2 Calcul de la réponse forcée harmonique

On s’intéresse maintenant au calcul de la réponse forcée, sur une plage de fréquence englobant les trois premiers modes. Le diagramme obtenu,  $q_0/h$  en fonction de  $\Omega/\omega_1$ , pour  $\Omega$  variant de 0 à 1200 rad/s est présenté sur la figure V.8, pour une amplitude de la force d’excitation de 1N. Il s’agit de la superposition de plusieurs continuations, à partir de conditions initiales différentes. La couleur des branches indique le nombre d’harmoniques incluses pour les obtenir<sup>4</sup> : rouge,  $H = 8$ , noir,  $H = 6$ , magenta,  $H = 4$  et bleu,  $H = 3$ . En fait, la plupart des branches ont été construites avec  $H = 8$  ou  $H = 6$  mais pour franchir certaines bifurcations, le nombre d’harmoniques a été réduit, en prenant garde toutefois à ce que les résultats restent indépendants de  $H$  sur la branche fondamentale.

On distingue deux situations ; d’une part les branches de solutions dans les zones de résonances principales, autour des modes 1 à 3 (voir les “zooms” autour de ceux-ci sur les figures

<sup>4</sup>Ce code de couleur est conservé pour toutes les courbes amplitude-fréquence de ce paragraphe

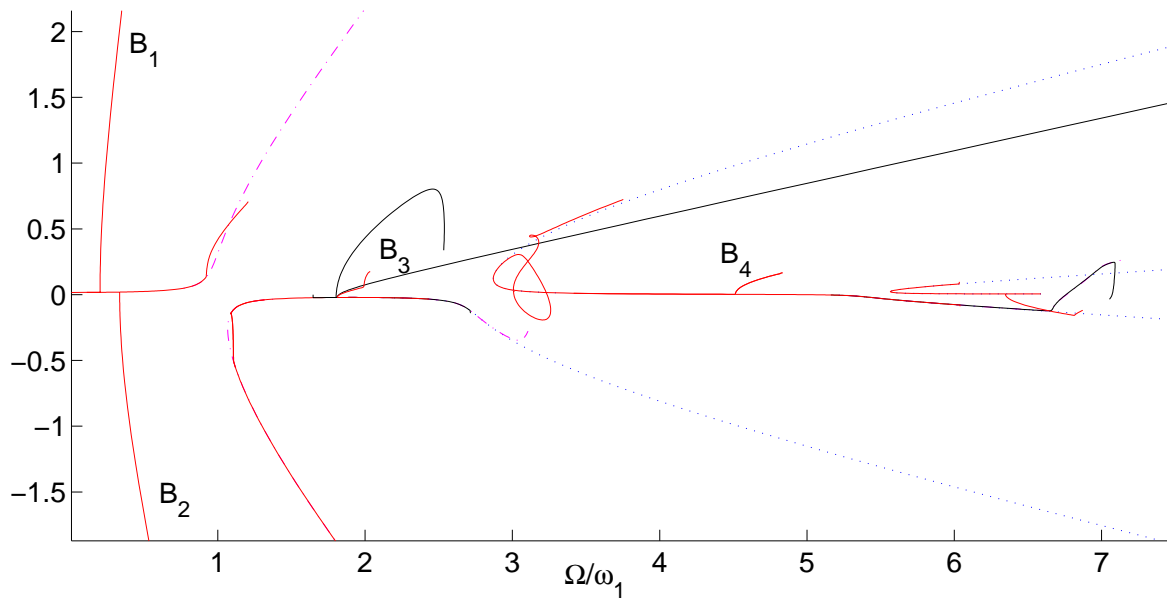


FIGURE V.8 - Poutre bi-encastrée, réponse forcée -  $q_0/h$  en fonction de la pulsation d'excitation

V.10 et V.11), avec des bifurcations, liées à celles des modes non linéaires décrites au §V.2.1, et notées  $RI_i$  sur les figures. D'autre part des branches correspondant à des résonances secondaires, en particulier telles que la valeur de la pulsation d'excitation soit du type  $\Omega = \frac{\omega_i}{p}$ ,  $p$  étant un entier. Ces dernières sont notées  $B_i$  sur les figures. Les comportements d'un  $B_i$  ou d'un  $RI_i$  à l'autre étant assez similaires, on ne détaillera pas tous les cas, dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau V.2.

Considérons dans un premier temps le cas d'une bifurcation du type  $B_i$ . Soit donc la branche qui démarre en  $\Omega = 329.7$  rad/s, notée  $B_3(2)$  et  $B_3(3)$  sur la figure V.9(a). En ce point, on a  $\Omega \approx \frac{\omega_3}{3}$ . Une deuxième branche démarre ensuite en  $\Omega = 362$  rad/s  $\approx \frac{\omega_5}{6}$ . La déformée (figure V.9(c)), initialement dominée par le mode 2, évolue vers un mode 3 après la première bifurcation, qui coïncide avec le démarrage de l'harmonique 3, puis vers un mode 5 après la seconde, où l'harmonique 7 devient prépondérante (figure V.9(b)). Ces deux cas correspondent à des résonances super-harmoniques.

On s'intéresse maintenant à la réponse à proximité des  $\omega_{i,i=1\dots 3}$ . On trace  $|\frac{q_0}{h}|$  en fonction de la pulsation, à proximité de chacun de ces modes (figures V.10(a), V.11(c) et V.10(b)). On superpose également à ces résultats ceux obtenus à faible amplitude d'excitation (résultats du §V.2.1), représentant les modes non linéaires. Les branches  $B_5$  à  $B_9$  correspondent à des résonances secondaires similaires à  $B_3$  décrit ci-dessus, on ne reviendra donc pas sur ces cas. Pour le reste, on constate dans un premier temps que, comme attendu, la réponse forcée "suit" le mode non linéaire, qui constitue une ossature de celle-ci. En conséquence, on retrouve les

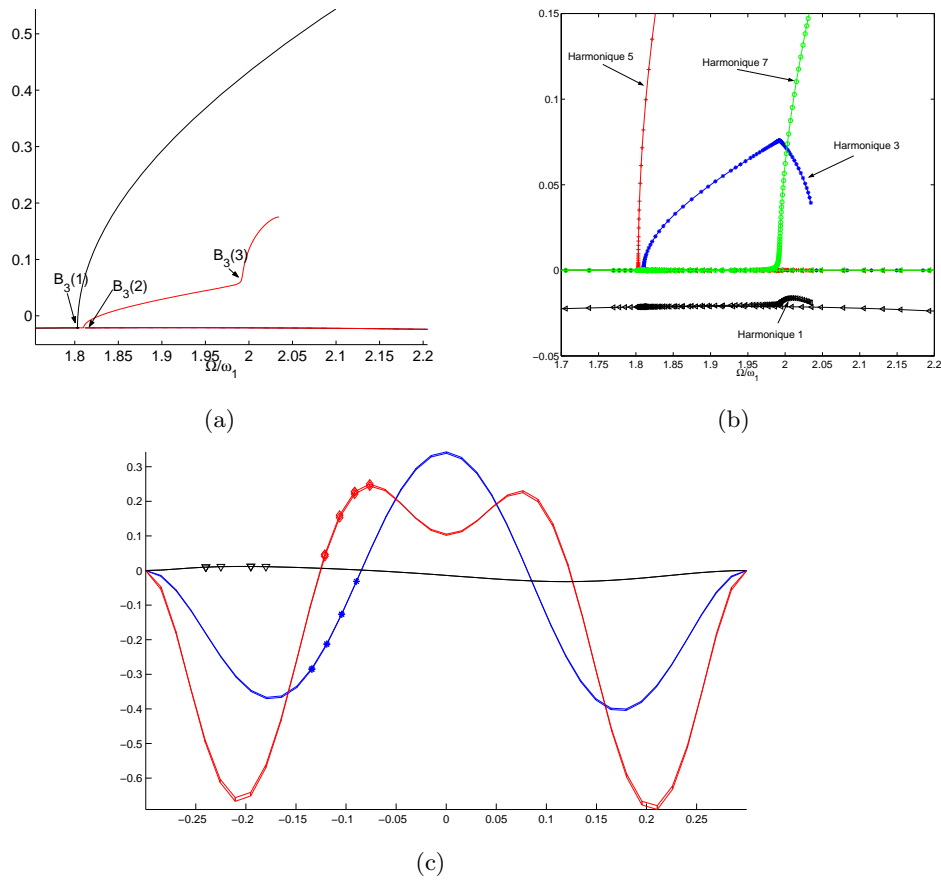
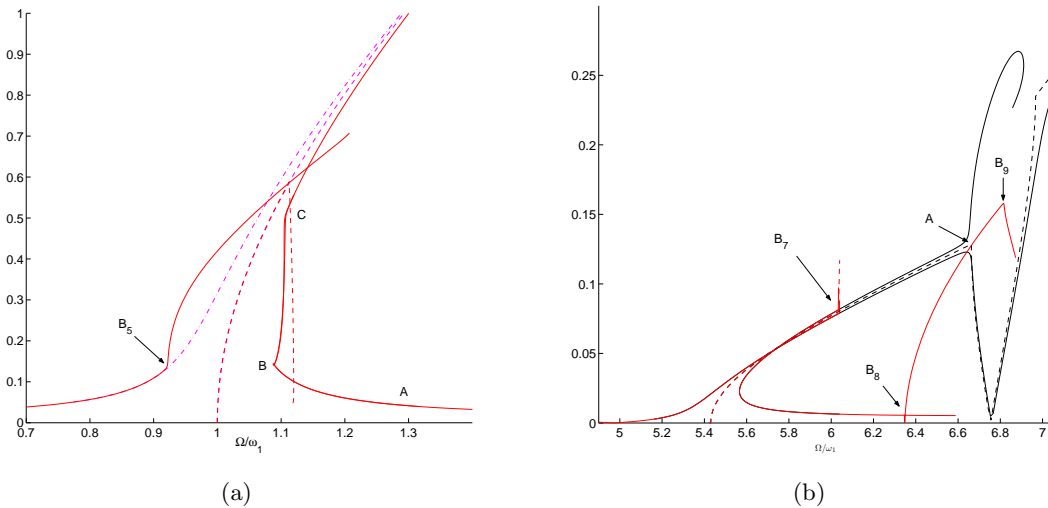


FIGURE V.9 - Réponse forcée de la poutre bi-encastée dans la zone  $B_3$  de la figure V.8 - (a)  $q_0/h$  - (b) Harmoniques :  $q^1/h$  ( $\triangleright$ ),  $q^3/h$  (\*),  $q^5/h$  (+) et  $q^7/h$  (o) (les autres étant nulles) - (c) Déformées correspondantes pour  $\Omega < 330$ rad/s ( $\nabla$ ),  $330 < \Omega < 362$ rad/s (\*) et  $\Omega > 362$ rad/s, ( $\diamond$ ).

	pulsation de bifurcation ( $\Omega$ en rad/s)	$\Omega/\omega_1$	type de résonance
$B_1$	36	0.20	superharmonique, $\frac{\omega_1}{5}$
$B_2$	60.8	0.33	superharmonique, $\frac{\omega_1}{3}$
$B_3(1)$	328.3	1.8	superharmonique, $\frac{\omega_4}{5}$
$B_3(2)$	329.7	1.81	superharmonique, $\frac{\omega_3}{3}$
$B_3(3)$	362	1.99	superharmonique, $\frac{\omega_5}{6}$
$B_4$	822	4.51	superharmonique, $\frac{\omega_4}{2}$
$B_5$	167.6	0.92	superharmonique, $\frac{\omega_2}{3}$
$B_6$	494	2.71	superharmonique, $\frac{\omega_3}{2}$
$B_7$	1098	6.03	??
$B_8$	1156	6.35	??
$B_9$	1242	6.82	??
$RI_1$	198.5 et 201.4	1.09 et 1.106	résonance interne 1 : 5 entre les modes 1 et 3
$RI_2$	entre 546 et 601	3-3.3	résonance interne 1 : 3 entre les modes 2 et 4
$RI_3$	1209-1216	6.64-6.68	résonance interne 1 : 2 entre les modes 3 et 6

TABLEAU V.2 - Caractéristiques des zones de bifurcation identifiées sur les figure V.8 et V.10.

FIGURE V.10 - Réponse forcée de la poutre bi-encastree.  $|\frac{q_0}{h}|$  en fonction de la pulsation d'excitation, à proximité des modes (a) : 1 (b) : 3. (- -) : mode non linéaire, (-) réponse forcée pour  $H=6$  ou 8, (-.-), réponse forcée pour  $H=4$

mêmes bifurcations sur la réponse forcée, correspondant aux résonances internes (notées  $RI_{1..3}$ ) décrites au §V.2.1. Pour chacun des trois cas, on est dans une situation du type  $\Omega \approx \omega_i \approx \omega_j/p$ ,  $p$  un entier. Selon la fréquence considérée, le mouvement est dominé par un mode lorsqu'on est sur la branche fondamentale ou une combinaison de modes pour les branches bifurquées. Les figures V.12 (à proximité de  $\omega_1$ ), V.13 ( $\omega_2$ ) et V.14 ( $\omega_3$ ) donnent l'évolution des déformées lors du passage de bifurcations correspondant à des résonances internes ainsi que celles des harmoniques non nulles.

Nous allons maintenant préciser ces points en détaillant le cas de la réponse autour du mode 2. Considérons donc les figures V.11(a),(b) et (c). La première reprend la figure V.5(a), en ajoutant la partie symétrique du mode, non tracée auparavant. On a également distingué sur la courbe les parties correspondant au mode 1 (traits pleins), au mode 3 (pointillés) et à la jonction entre les deux (points) (voir les explications à ce sujet au §V.2.1). Sur (b) on trace la réponse forcée,  $\mathbf{q}_0/h$  en fonction de  $\Omega/\omega_1$ , complétée par le mode non linéaire (V.11(a)) en pointillés, en distinguant les zones correspondant aux modes et à leurs liaisons. Enfin, V.11(c) est identique à V.11(b) si ce n'est qu'on trace maintenant la valeur absolue de  $\mathbf{q}_0/h$ ; ceci pour obtenir une représentation plus classique, plus "parlante", de la résonance. Sur ces deux dernières courbes, on observe bien que la réponse forcée est "guidée" par les branches de la réponse libre et suit entre autres les mêmes bifurcations. Tout comme pour le mode non linéaire, on obtient des branches correspondant au mode 2, d'autres au mode 4 et certaines à la jonction entre les deux. Pour préciser cela, on définit un certain nombre de points et de branches.  $A$ ,  $C$  et  $D$  sont des points de bifurcations. On note  $E_1$  la branche  $BA$ ,  $E_2$  la branche  $AD$  dans le sens des  $\Omega$  décroissants,  $E_3$  la branche allant de l'abscisse 0 à celle du point  $D$  et  $E_4$  la branche partant du point  $C$  pour  $\Omega$  croissant. La réunion des  $E_i$  constitue la branche fondamentale, sur laquelle la réponse est dominée par le mode 2. On note également  $F_1$  la branche "verticale" passant par  $A$  en direction de  $C$  et  $F_2$  la branche  $DA$ , pour les  $\Omega$  croissants.

Dans la zone d'abscisse 3-3.2, on a  $\Omega \approx \omega_2 \approx \omega_4/3$ , ce qui correspond à une résonance interne 1 : 3 entre les modes 2 et 4 (voir la courbe V.5). En  $A$ , deux branches se coupent,  $F_1$  et la fondamentale. On représente sur la figure V.13(a) l'évolution des déformées lors du passage d'une branche à l'autre, avec ici la transition de  $E_1$  à  $F_1$ , via  $A$ , puis de  $F_1$  à  $E_4$  par la boucle  $C$ . Sur la fondamentale,  $E_1$ , le mouvement est dominé par la déformée du deuxième mode linéaire. Le passage de  $A$  se traduit par l'apparition puis la prise d'importance croissante du mode 4, qui va ensuite diminuer à l'approche de  $C$  pour disparaître et conduire à nouveau au mode 2 sur  $E_4$ . L'apparition de la résonance interne correspond au démarrage de l'harmonique 3 (voir figure V.13(b)), dont la déformée correspond à un mode 4 (figure V.15), tandis que celle de l'harmonique 1 est un mode 2. Ensuite en fonction de l'importance relative de l'une par rapport à l'autre, le mouvement est guidé par le mode 2, le 4 ou les deux à la fois.

En résumé : les branches  $E_i$  correspondent à un mode non linéaire 2 (traits pleins sur la figure V.5(b)). La branche  $F_1$  relie le mode non linéaire 2 au 4 (trait-point sur V.5(b)).  $F_2$  est divisée en deux sections : une branche de liaison du mode non linéaire 2 au 4 (pointillés sur la figure V.5(b)) et une partie correspondant au mode non linéaire 4 (++) .

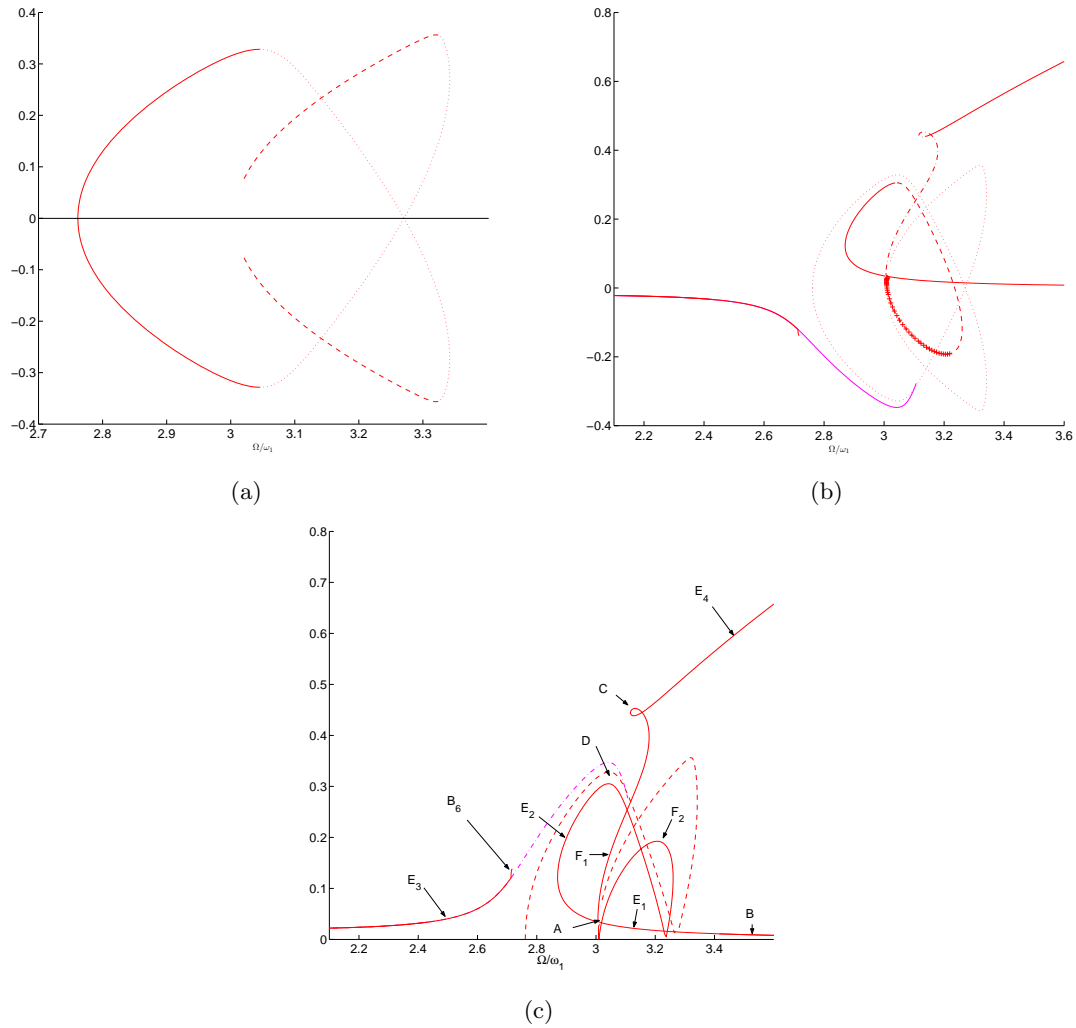


FIGURE V.11 - Poutre bi-encastrée - (a) Mode non linéaire 2, reprise de la courbe V.5(a) pour  $H=8$  - (b) Réponse autour de  $\omega_2 : \frac{q_0}{h}$ , ( $\cdots$ ) : mode non linéaire ; réponse forcée : (-) sur la fondamentale (mode 2), (++) mode 4, (- -) liaison 2-4, (-.-) liaison 4-2 - (c)  $|\frac{q_0}{h}|$ , (- -) : mode non linéaire, (-) réponse forcée pour  $H=6$  ou 8, (-.-), réponse forcée pour  $H=4$ .

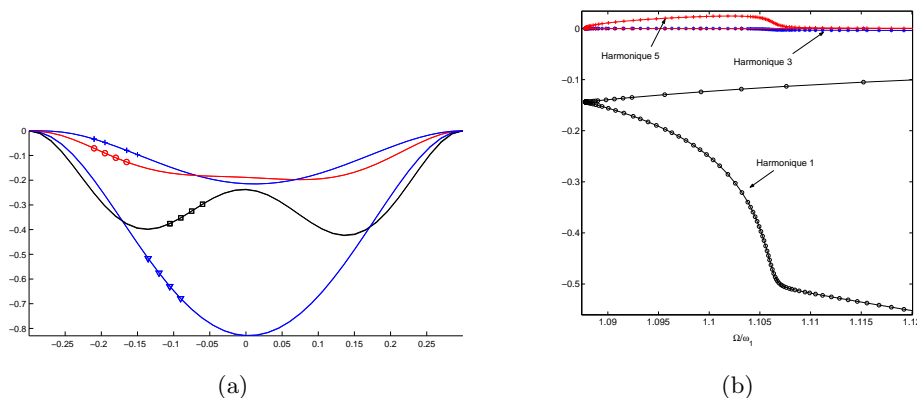


FIGURE V.12 - Réponse forcée de la poutre bi-encastée à proximité de  $\omega_1$  - (a) Déformées sur la branche AB (+), passage de la bifurcation B (o), sur BC ( $\square$ ) et après C ( $\nabla$ ) - (b) Harmoniques correspondant à cette branche :  $\mathbf{q}^1/h$ ,  $\mathbf{q}^3/h$ ,  $\mathbf{q}^5/h$  (les autres étant nulles)

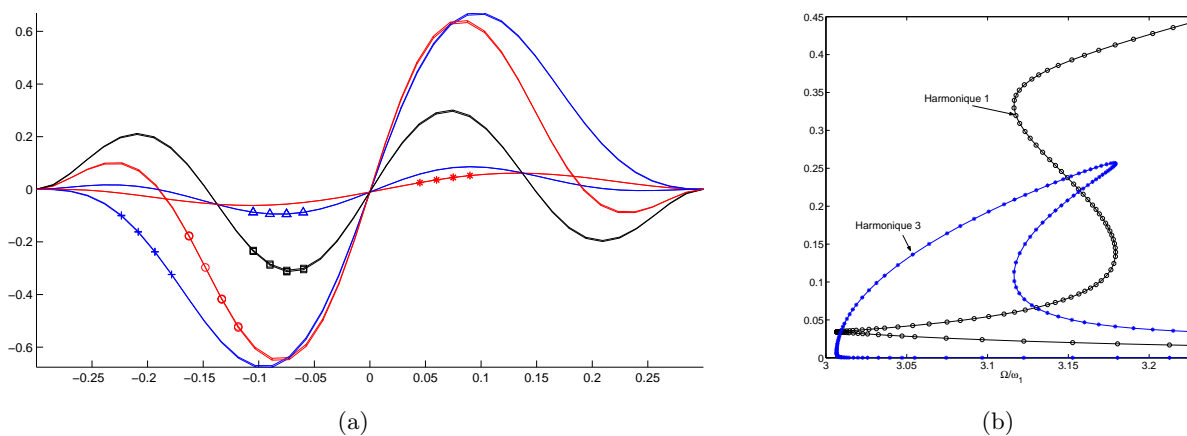


FIGURE V.13 - Réponse forcée de la poutre bi-encastée à proximité de  $\omega_2$  - (a) Déformées sur la branche  $E_1$  (\*), passage de la bifurcation A ( $\nabla$ ), sur  $F_1$  ( $\square$ ), passage de C (o), sur  $E_4$  (+) - (b) Harmoniques correspondant à ces branches :  $\mathbf{q}^1/h$  et  $\mathbf{q}^3/h$  (les autres étant nulles)

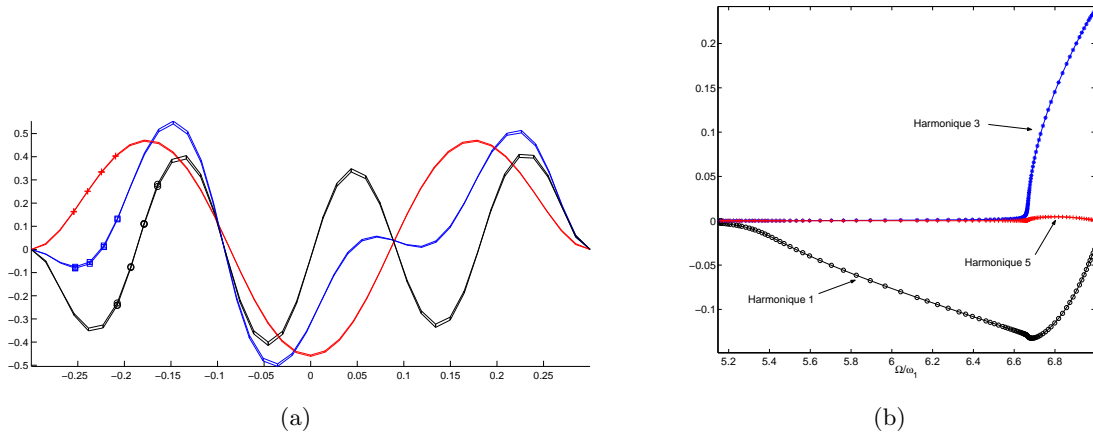


FIGURE V.14 - Réponse forcée de la poutre bi-encastrée à proximité de  $\omega_3$  - (a) Déformées avant le point A ( $++$ ), passage de A ( $\square$ ), après A ( $o$ ) - (b) Harmoniques correspondantes :  $\mathbf{q}^1/h$ ,  $\mathbf{q}^3/h$ ,  $\mathbf{q}^5/h$  (les autres étant nulles)

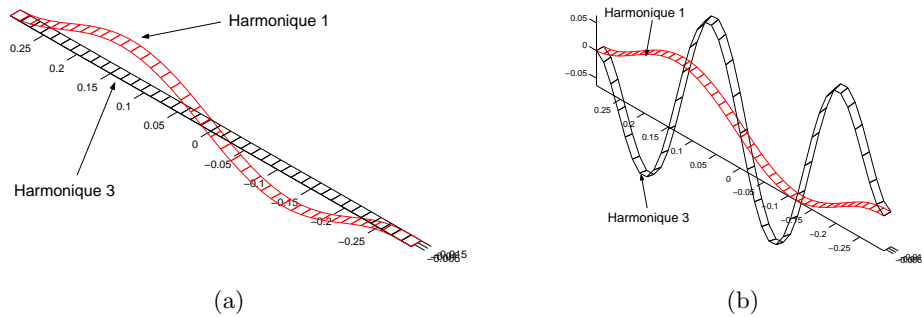


FIGURE V.15 - Réponse forcée de la poutre bi-encastrée à proximité de  $\omega_2$ , harmoniques 1 ( $\mathbf{q}^1/h$ ) et 3 ( $\mathbf{q}^3/h$ ) - (a) Déformées sur la branche fondamentale  $E_1$  - (b) Déformées sur  $F_1$ .



### V.2.3 Bilan des simulations sur la poutre

Les simulations présentées ci-dessus concernent uniquement une plage de fréquences englobant les trois premiers modes. Que ce soit pour la réponse libre ou forcée, on y observe des scénari compliqués, avec des déplacements dépendant fortement de la fréquence d'excitation, et de nombreuses bifurcations. Parmi celles-ci on a identifié des résonances super-harmoniques et internes, conduisant à des interaction entre les modes. On observe également que les résonances principales se font autour des modes non linéaires, qui constituent une partie de l'ossature de la réponse forcée. Bien sûr ces résultats restent limités par l'absence d'une étude de la stabilité des solutions obtenues. A noter également que l'étude est complétée au chapitre VI, par la prise en compte d'un défaut géométrique et d'une précontrainte et la comparaison avec des résultats expérimentaux.

En plus de ces constatations, ces simulations nous permettent également de tirer quelques conclusions pratiques quant à l'utilisation de l'équilibrage harmonique, essentiellement sur le choix du nombre de termes à retenir dans les développements. En effet,  $H$  joue un double rôle ; d'une part son augmentation permet bien entendu d'améliorer la qualité de la solution et d'autre part conduit au passage ou non de bifurcations, en fonction des harmoniques prises en compte. En ce qui concerne le premier point, sur l'exemple de la poutre,  $H = 4$  semble suffisant pour obtenir la branche fondamentale. Ensuite lorsqu'on enrichit le modèle au delà de cette valeur, on obtient de nouvelles branches de solutions, correspondant à des résonances secondaires, en accord avec ce qui est dit au §III.2.1 : pour voir une résonance superharmonique d'ordre  $p$ , il est nécessaire d'inclure tous les termes jusqu'à  $p\Omega$ . La variation du nombre  $H$  est donc un moyen pratique pour passer ou non sur une branche secondaire, à condition de rester prudent en gardant un modèle suffisamment riche pour ne pas modifier les résultats. A noter que grâce à une amélioration récente de la MAN, les bifurcations peuvent être franchies facilement et le passage d'une branche à l'autre est plus aisé à piloter. Cela nous permettra donc à l'avenir d'obtenir toutes les branches sans faire varier le  $H$ .

## V.3 Étude d'une poutre à composante non-linéaire

### V.3.1 Présentation du problème

On considère ici une poutre avec non linéarité localisée, qui correspond à la modélisation d'un des "benchmark" proposé par le COST F3 "Dynamique des structures", (voir F3 (2003)). Le montage expérimental se trouve à l'école centrale de Lyon, et les informations relatives sont disponibles à l'adresse suivante : <http://www.ulg.ac.be/ltras-vis/costf3/WGroups/WG3/wg3.htm>. L'objectif de ce cas test était d'étudier diverses méthodes d'identification de paramètres non linéaires. Les principaux résultats ont été publié dans Kas (2001).

Le système est constitué d'une poutre principale, encastree à une extrémité et se prolongeant de l'autre côté par une lame mince encastree, ce qui induit un comportement non linéaire géométrique lorsque les amplitudes de déplacement sont importantes. Tous les éléments sont en

acier ( $E = 2.1e11Pa$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800kg.m^{-3}$ ), et les dimensions sont données sur la figure V.16. Pour modéliser le système dans Eve, nous avons utilisé des éléments de plaques, DKQ

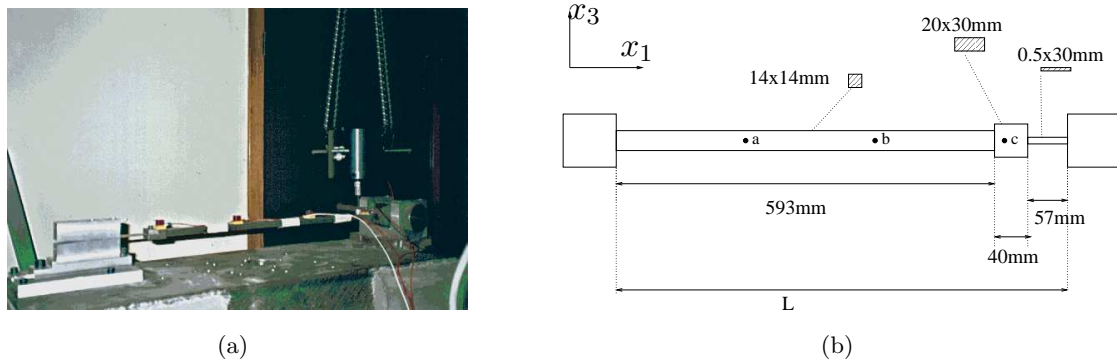


FIGURE V.16 - Montage expérimental et schéma de la poutre à composante non linéaire

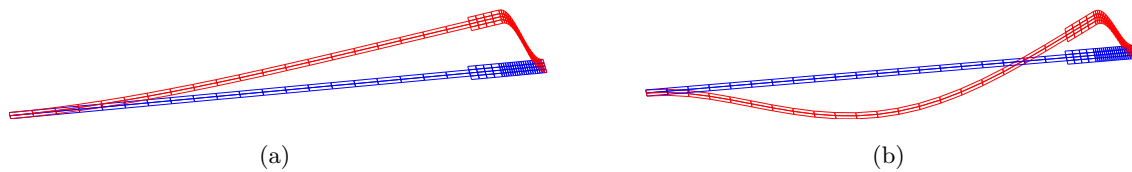


FIGURE V.17 - Poutre à composante non linéaire : déformées modales (mode 1 : 29Hz, mode 2 : 158 Hz)

et DKQ-EH, avec  $H = 4$ . Un premier calcul linéaire donne les fréquences et modes propres linéaires, dont les deux premiers sont représentés figure V.17.

### V.3.2 Calcul de la réponse forcée et prise en compte du poids propre

On s'intéresse maintenant à la réponse forcée pour une excitation harmonique,  $f = f_{ext} \cos \Omega t$ , appliquée en  $x_p = 6.3cm$  du bord gauche et pour  $f_{ext} = 1N$ . La réponse est mesurée en trois points, notés a, b et c, d'abscisses respectives 0.22m, 0.42m et 0.605m, relativement au bord gauche et on note  $h$  l'épaisseur de la lame mince. Les résultats sont donnés figure V.18. Les deux réponses s'incurvent vers la droite, et correspondent donc à un comportement raidissant, ce qui est conforme aux constatations expérimentales présentées au cours du COST. En revanche, d'après ces même études et en désaccord avec la théorie et nos résultats, le mode 2 est censé être faiblement mollissant. Nous avons vu, (A), sur l'exemple du système à deux ressorts qu'un comportement mollissant était dû à la présence de termes quadratiques dans le modèle. Celle d'un défaut de forme pourrait donc expliquer l'apparition de ces termes. On présente ci-dessous la réponse obtenue lorsqu'on introduit un défaut initial dû au poids propre de la structure. La configuration initiale de celle-ci est donnée figure V.19(a). On introduit également un facteur  $\eta$ , donnant l'amplitude du défaut initial, et tel que  $\eta = 1$  corresponde au poids propre seul. Ensuite on calcule la réponse autour du mode 2 pour diverses valeurs de ce paramètre, allant de 0 à

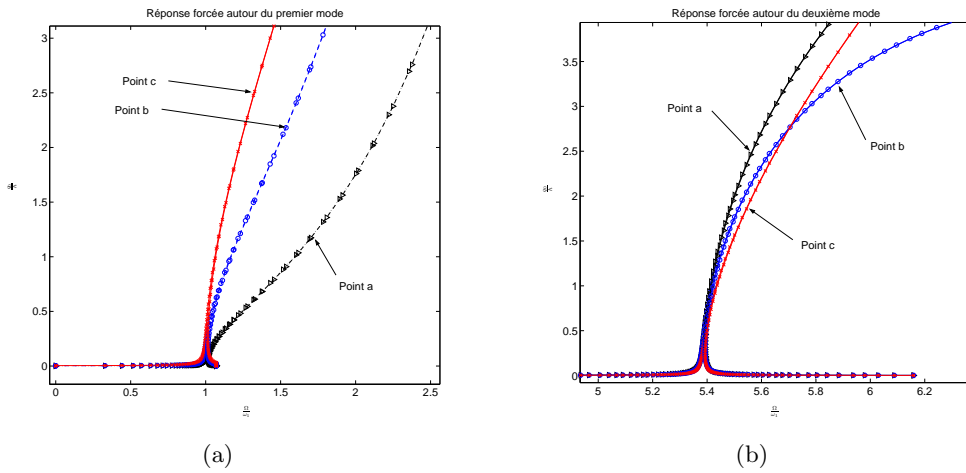


FIGURE V.18 - Poutre à composante non linéaire - Réponse forcée autour des modes 1 et 2, valeurs prises aux points a, b et c

6. L'amplitude des déplacements selon  $x_3$ , divisée par l'épaisseur de la lame mince, est tracée en fonction du rapport  $\Omega/\omega_1$  sur la figure V.19(b). On constate que le mode 2 reste raidissant pour  $\eta = 1$ . Par contre, à partir de  $\eta = 3$ , la réponse est mollissante au moins pour de faibles amplitudes. Ensuite lorsque l'amplitude augmente, on retrouve un comportement raidissant : l'effet du défaut n'est plus sensible. On remarque cependant un décalage en fréquence (de l'ordre de 1% pour  $\eta = 3$ ), dû aux termes  $L_1^*$  et  $L_2^*$  de (II.40). Pour préciser les ordres de grandeur, le déplacement maximal dû au poids propre vaut 0.26mm, et donc 0.78mm pour  $\eta = 3$ . Un déplacement de cet ordre paraît tout à fait réaliste et pourrait donc expliquer le comportement mollissant du mode 2, non prévu par un modèle "parfait".

Pour conclure sur cet exemple, il est nécessaire de garder à l'esprit que le modèle est limité par

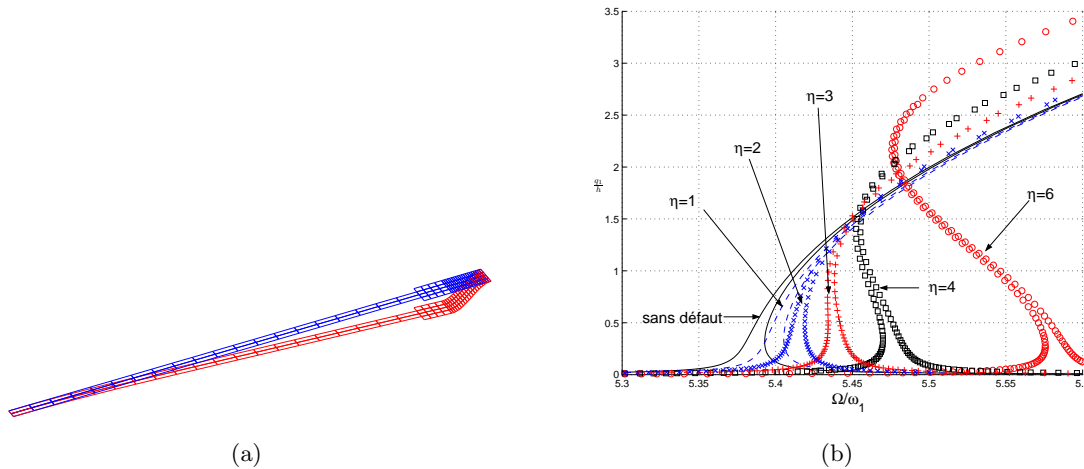


FIGURE V.19 - Poutre à composante non linéaire - (a) : Configuration parfaite et configuration avec défaut de forme dû au poids propre - (b) : Réponse forcée pour différentes amplitudes du défaut

certaines hypothèses, en particulier l'absence d'amortissement. Il paraît donc plus réaliste de dire que le poids propre, ou un éventuel défaut géométrique, est un élément expliquant l'aspect mollissant du mode 2, parmi une combinaison d'autres effets non abordés ici (des conditions aux limites imparfaites par exemple).

## V.4 Réponse d'un gong

Le dernier exemple considéré dans ce chapitre est inspiré du cas traité par THOMAS (2001), avec lequel nous avons eu l'occasion de collaborer. Il s'agit d'un gong circulaire, en bronze ( $E = 120e9 Pa$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 8420 kg.m^{-3}$ ) dont la géométrie et les dimensions sont données figure V.20. L'intérêt de cet exemple est de sortir du cas des plaques rectangulaires traité jusqu'à présent, en appliquant notre outil à une structure plus complexe, une coque avec un rebord en l'occurrence.

Les premières fréquences propres du gong sont données dans le tableau V.3. On remarque

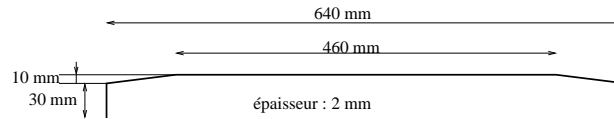


FIGURE V.20 - Géométrie et dimensions du gong

qu'elles sont assez proches les unes des autres et qu'il existe des relations de résonance internes entre certaines ( $f_8 = 6f_1$ ,  $f_2 + f_3 \approx f_5 \dots$ ). Au vu des résultats obtenus sur le cas relativement plus simple de la poutre, on imagine facilement les scénarios compliqués qu'on va obtenir sur le gong. Celui-ci nécessiterait une étude complète, avec un traitement systématique des premiers modes. Ce n'est pas notre objectif ici et nous avons choisi ici de considérer simplement  $f_2$  et  $f_5$ , de manière arbitraire ; les déformées modales correspondantes sont données figure V.21. On

fréq.(Hz)	48.07 (2)	67.3	120.4 (2)	142.57 (2)	190.1 (2)	223.37	274.8	288 (2)	295 (2)
-----------	-----------	------	-----------	------------	-----------	--------	-------	---------	---------

TABLEAU V.3 - Quelques fréquences propres du gong - (2) signifie qu'il s'agit d'une fréquence double.

calcule donc la réponse forcée à proximité de ces deux fréquences, en utilisant Eve et l'EHMAN, avec un maillage de 152 éléments de plaques (DKQ et DKT ou DKQ\_EH et DKT\_EH). On applique au gong une force de 4N à 13 cm de son centre. La réponse forcée, obtenue avec  $H = 5$ , à proximité de  $f_2$  et  $f_5$  est donnée respectivement sur les figures V.22(a) et (b). On complète ceci en traçant les harmoniques 0 à 4 sur V.23. On constate donc que la réponse est raidissante autour de  $\omega_2$ , à la différence de celle autour de  $\omega_5$  qui est mollissante. On retrouve, comme pour la poutre des scénarios compliqués avec de nombreuses bifurcations qui apparaissent, et qui coïncident avec le démarrage d'harmoniques supérieures. À noter également que cette fois les harmoniques paires ne sont pas nulles (voir la figure V.23), en particulier  $q^2$  qui est du même

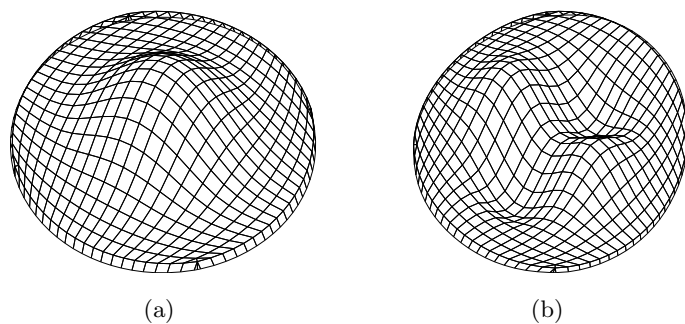


FIGURE V.21 - Déformées modales du gong - (a)  $f_2=67.3$  Hz - (b)  $f_5=190.1$  Hz.

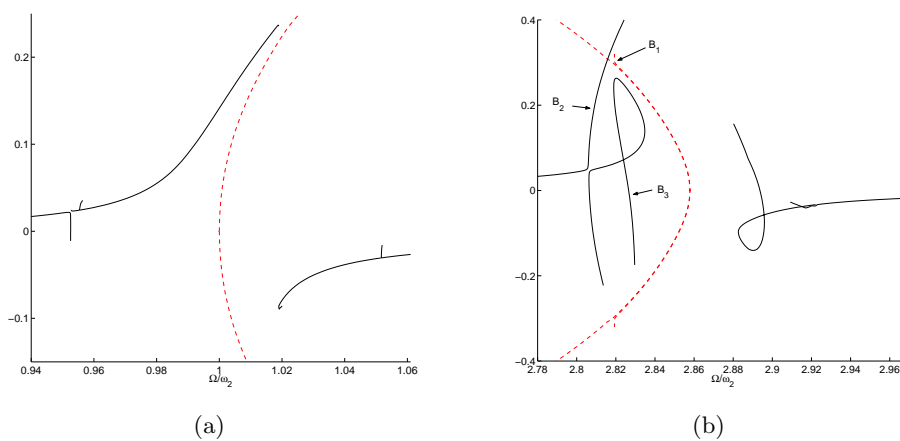


FIGURE V.22 - Réponse forcée du gong,  $q_0/h$  en fonction de  $\Omega/\omega_2$  : (- -) modes non linéaires (-) réponse forcée - (a) À proximité de  $\omega_1$  - (b) Vers  $\omega_2$

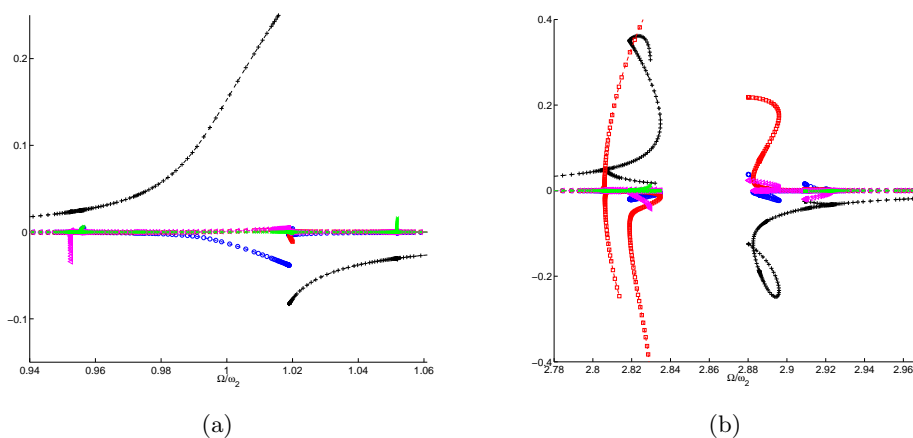


FIGURE V.23 - Réponse forcée du gong, harmoniques, (bleu, o) :  $q^0/h$ , (noir, +) :  $q^1/h$ , (rouge,  $\square$ ) :  $q^2/h$ , (magenta,  $\triangleleft$ ) :  $q^3/h$ , (vert,  $\times$ ) :  $q^4/h$  - (a) À proximité de  $\omega_1$  - (b) Vers  $\omega_2$

ordre de grandeur que  $q^1$ . On ne détaillera pas plus ce cas. On peut cependant conclure en observant la proximité des modes linéaires et le nombre de bifurcations qui apparaissent sur les deux exemples ci-dessus que le comportement risque d'être perturbé et probablement pas périodique mais chaotique, conformément aux résultats expérimentaux montrés dans THOMAS (2001).

L'apport principal de cet exemple est de montrer que notre outil numérique fonctionne aussi pour des cas plus généraux qu'une plaque plane et symétrique. On y retrouve, en plus complexe, les situations observées sur la poutre : courbure de la réponse et nombreuses bifurcations. Ce cas permet aussi d'illustrer une des limites de notre code, qui pour des maillages trop fins et  $H$  supérieur à 4 ne parvient pas à poursuivre la continuation suffisamment loin (d'où certaines branches de bifurcation tronquées sur V.22). Ce problème est dû à des lacunes dans la désallocation de mémoire liées au fortran 90, mais devrait être résolu à l'avenir en optimisant correctement notre code.

## V.5 Bilan du chapitre

Ce chapitre était destiné à illustrer le comportement non linéaire de quelques structures particulières, en simulant leur réponse par application de la méthode EHMAN et de l'outil numérique développé dans Eve.

Pour ce qui est de l'outil numérique, il s'est avéré robuste, assez simple à piloter et capable de traiter divers types de structures. Il permet d'effectuer des simulations en incluant un "grand" nombre d'harmoniques, jusqu'à 8 dans les exemples traités, et d'obtenir des diagrammes de réponse assez complets, incluant les branches bifurquées. Cependant, les simulations montrent qu'il est limité dès que la taille des systèmes devient trop importante, c'est à dire dès qu'on augmente  $H$  ou la finesse du maillage. Ce problème pourra être résolu facilement à l'avenir en optimisant mieux le code.

En ce qui concerne les résultats proprement dit, seul le cas de la poutre a été détaillé. On a simulé les réponses libres, les "modes non linéaires", et forcées à proximité de quelques fréquences propres linéaires pour une excitation périodique mono-harmonique. On montre la forte dépendance des réponses vis à vis de la pulsation d'excitation, avec des zones où plusieurs solutions sont possibles. On observe également des phénomènes de résonances internes sur les modes non linéaires. Ces dernières se traduisent par l'apparition de branches de bifurcation, reliant un mode non linéaire à l'autre, conduisant à des changements de comportement visibles notamment sur les déformées de la structure. Ces modes non linéaires constituent également l'ossature de la réponse forcée et en conséquence, celle-ci subit aussi les effets des résonances internes, avec des interactions entre les différents modes. On observe également sur cette même réponse forcée plusieurs branches de bifurcation correspondant à des résonances super-harmoniques. Pour terminer, on illustre également l'influence d'un défaut de forme sur la poutre à composante non linéaire, ce dernier ayant un effet "adoucissant" sur la réponse.

Pour la poutre encastree-encastree, ces resultats de simulations constituent une base interessante en vue des comparaisons avec les resultats des essais presentes au chapitre suivant. On reste cependant limite par l'absence d'une etude de stabilite des differentes branches, ainsi que d'un modele d'amortissement, perspectives a realiser pour completer notre outil numerique.

## CHAPITRE VI

# Observation expérimentale de la réponse forcée de structures minces

---

**C**e chapitre est consacré à l'étude expérimentale de la réponse forcée de structures minces, soumises à une excitation mono-harmonique sinusoïdale.

Après quelques remarques d'ordre général sur l'observation du comportement non linéaire, on décrit le premier dispositif, une poutre bi-encastée ainsi que les essais, leurs résultats et les problèmes rencontrés au cours de ceux-ci. On propose ensuite des résultats de simulations, avec prise en compte d'un défaut de forme et/ou d'une précontrainte, permettant de recalibrer les valeurs numériques et expérimentales. Pour terminer, on décrit le second banc d'essai, dont la conception et l'exploitation était notre principal objectif, dédié à l'étude d'une plaque mince encastée sur ses quatre côtés et pouvant être précontrainte.

---



PLAN DU CHAPITRE VI

---

<b>VI.1 Introduction</b> . . . . .	<b>115</b>
<b>VI.2 Remarques préliminaires concernant l'observation expérimentale du comportement non linéaire</b> . . . . .	<b>116</b>
<b>VI.3 Dispositif expérimental pour l'étude d'une poutre bi-encastree</b>	<b>117</b>
VI.3.1 La structure . . . . .	117
VI.3.2 Système d'excitation . . . . .	118
VI.3.2.a Essais non concluants ... . . . .	119
VI.3.2.b Système d'excitation sans contact . . . . .	119
VI.3.3 Systèmes de mesure . . . . .	121
VI.3.4 Traitement, contrôle et visualisation des signaux . . . . .	121
<b>VI.4 Essais sur la poutre</b> . . . . .	<b>121</b>
VI.4.1 Description des essais . . . . .	121
VI.4.2 Résultats et commentaires . . . . .	123
VI.4.3 Variation des fréquences propres . . . . .	126
VI.4.4 Fluctuation de la réponse . . . . .	129
VI.4.5 Comparaison avec les simulations . . . . .	129
VI.4.5.a Défaut géométrique . . . . .	130
VI.4.5.b Effet d'une précontrainte . . . . .	133
<b>VI.5 Projet d'étude d'une plaque encastree</b> . . . . .	<b>135</b>
<b>VI.6 Bilan du chapitre</b> . . . . .	<b>138</b>

---

## VI.1 Introduction

Ce chapitre traite de l'étude expérimentale de structures minces, soumises à une excitation harmonique, dont les caractéristiques conduisent à un comportement non linéaire. Il s'agit donc d'observer les phénomènes décrits au chapitre I et simulés au chapitre V.

Parmi les études expérimentales similaires précédemment réalisées, on peut citer celles de WHITE (1971), BENNOUNA et WHITE (1984) et CHEN *et al.* (1996), qui étudient les effets des grandes amplitudes de vibration sur les déformations d'une poutre. THOMAS (2001), s'intéresse aux vibrations forcée d'un gong, et met en évidence la transition du régime périodique au régime chaotique. Le même genre de phénomène est observé par LACARBONARA (1997) sur une poutre en flambement, bi-encastree. Enfin, une approche plus générale de l'étude expérimentale des phénomènes non linéaires est proposée par VIRGIN (2000) ou WORDEN (1996). Le cas des vibrations sinusoïdales est également abordé dans LALANNE (1999), avec une présentation générale des méthodes d'analyses pour ce type d'essais.

L'intérêt principal d'une étude expérimentale est qu'elle implique une approche différente du problème, relativement à la modélisation numérique, et donc une nouvelle vision, nécessairement plus réelle, des phénomènes et de leurs origines. Cela permet entre autres soit une validation soit un recalage du modèle, voire une amélioration de celui-ci par la prise en compte de nouveaux paramètres. Réciproquement, le modèle numérique est lui aussi fondamental, d'une part parce que la mise en place d'essais n'est pas toujours possible, mais aussi comme une aide à la conception de bancs d'essai et à l'orientation des recherches expérimentales.

Comme évoqué en introduction générale, on s'intéresse aux phénomènes de bifurcation et d'interaction de modes, et c'est la possibilité de les observer qui a motivée la mise en place d'essais. Notre principal objectif était donc de concevoir et d'exploiter un banc adapté à ce besoin, dédié à l'étude d'une plaque mince, entièrement encastree et pouvant être précontrainte, afin de pouvoir modifier les fréquences propres et d'éventuellement les rendre commensurables. Comme nous le verrons, le choix de conditions aux limites d'encastrement complique singulièrement la conception et l'étude expérimentale. Cependant, ce cas est le plus représentatif de l'utilisation courante de structures minces, c'est pourquoi nous l'avons choisi.

Ce banc a bien été conçu mais l'exploitation n'a pas réellement commencée. En parallèle, une première étude a été menée sur un montage préexistant, une poutre bi-encastree, en attendant la disponibilité du banc de plaque et en vue de préparer les essais sur celui-ci.

Après cette introduction, complétée par quelques remarques préliminaires sur l'observation expérimentale de la réponse forcée, on commence par décrire le dispositif expérimental utilisé pour l'étude de la poutre. Les résultats de la campagne d'essais sont ensuite présentés et on en déduit un mode opératoire qui sera appliqué à l'étude de la plaque, dont le dispositif est décrit à la fin de ce chapitre.

## VI.2 Remarques préliminaires concernant l'observation expérimentale du comportement non linéaire

On souhaite observer le comportement vibratoire non linéaire de structures minces, lié à leur géométrie. On est donc amené à se poser, entre autres, les questions suivantes : comment exhiber l'influence des non linéarités géométriques ? Que va t'on réellement voir et est-ce que les phénomènes observés sont bien des conséquences de ces non linéarités ?

Le choix de l'excitation est un premier point déterminant. Pour la présente étude, on s'intéresse à la réponse forcée à une excitation sinusoïdale, caractérisée par son amplitude et sa pulsation. L'intérêt d'une telle excitation est qu'elle est assez facilement pilotable, par le biais des deux paramètres de contrôle que sont l'amplitude et la pulsation de l'excitation, et donc aisément reproductible. De plus elle permet d'observer bon nombre de phénomènes typiquement non linéaires, comme l'ont montrées les simulations présentées au chapitre précédent. En parallèle, on utilisera également une excitation type "bruit blanc", consistant à envoyer un signal aléatoire au contenu fréquentiel constant sur la bande de fréquences considérée, qui fournit un moyen simple et rapide pour obtenir le spectre linéaire de la structure, étape initiale indispensable de toute étude.

Au cours des chapitres précédents, et en particulier lors des simulations, on s'est limité, avec l'utilisation de la méthode de l'équilibrage harmonique, à la recherche de solutions périodiques ou quasi-périodiques. Ces simulations nous apportent déjà un premier éclairage sur ce que nous sommes susceptibles d'observer : dépendance de l'amplitude de la réponse vis à vis de la fréquence, sauts, apparition d'harmoniques ... Cependant l'étude des systèmes dynamiques (GUCKENHEIMER et HOLMES (1983), SEYDEL (1994)) montre que d'autres régimes sont possibles. En effet, la réponse dépend de certains paramètres, dont l'évolution conduit à des changements de comportements, des bifurcations. Dans notre cas, la réponse forcée à une excitation harmonique, ces paramètres sont la pulsation et l'amplitude de l'excitation imposée. En fonction des valeurs de ces derniers, le régime peut être linéaire, avec une réponse périodique de même pulsation que l'excitation (par exemple pour de très faibles amplitudes d'excitation), non linéaire périodique ou quasi-périodique (réponse multi-harmonique mais telle que les fréquences impliquées soient commensurables), ou chaotique (régime aperiodique, sensible aux conditions initiales). Expérimentalement, tous ces cas sont observables, à conditions que la réponse soit stable et que les conditions initiales menant à cette réponse soient accessibles (notion de bassin d'attraction). On n'entrera pas plus dans les détails de ces notions liées aux systèmes dynamiques, domaine qui sort largement du cadre de notre étude. A titre d'exemple plus concret, une transition vers le chaos est notamment observée pour le cas d'un gong dans le manuscrit de thèse de THOMAS (2001), lorsqu'on augmente l'amplitude d'excitation à pulsation fixée. De même LACARBONARA (1997) relève une perte de périodicité et des solutions chaotiques, lors de l'étude d'une poutre, à amplitude d'excitation fixée et pour une fréquence variable.

Concrètement, pour les essais il est surtout important d'avoir une idée du type de réponse qu'on est susceptible d'obtenir. Ensuite une étude théorique plus poussée pourra être menée en fonc-

tion des résultats.

En conclusion de ce paragraphe et en réponses aux questions posées au début de celui-ci, pour observer le comportement non linéaire d'une structure mince, on choisit de lui appliquer une excitation périodique-harmonique, caractérisée par son amplitude et sa pulsation, qui seront les paramètres de contrôle de la réponse. Les résultats des simulations du chapitre V et des remarques générales issues de l'étude théorique des systèmes dynamiques, nous permettent de conclure que les principales manifestations d'un comportement non linéaire seront :

- des phénomènes d'hystérésis (sauts) lors de balayage en fréquence,
- l'apparition d'harmoniques dans la réponse,
- des changements de régime éventuels (périodique, pseudo-périodique, chaotique) en fonction des valeurs des paramètres de contrôle.

Au cours des essais on s'intéressera donc aux valeurs des déplacements dans la direction d'excitation, à leur périodicité et à leur contenu harmonique. De plus, on restera également attentif à l'influence éventuelle d'autres paramètres "parasites" tels que la température ambiante, un défaut de forme ou encore d'autres non linéarités liées au montage, telles que des conditions aux limites imparfaites, ou à l'excitation.

## VI.3 Dispositif expérimental pour l'étude d'une poutre bi-encastree

Cette partie est dédiée à la description du banc d'essai utilisé pour l'étude d'une poutre bi-encastree. L'objectif principal est bien entendu l'étude du comportement non linéaire de la structure mais également la définition d'un mode opératoire "efficace". Il s'agit en fait de mettre à jour tous les éventuels problèmes, de choisir les appareils les plus adaptés etc..., le tout en vue de la conception et de l'utilisation du banc d'essai "plaque". On s'attardera donc sur les points déterminants pour le bon déroulement des essais, notamment le choix de l'excitation ou encore la réalisation des conditions aux limites.

### VI.3.1 La structure

La structure étudiée est une poutre droite en aluminium de section rectangulaire et dont les dimensions sont données sur la figure VI.1, avec un rapport épaisseur/largeur très petit, 1/300, conduisant, a priori, à un comportement non linéaire. Aucune étude n'a été menée pour déterminer les caractéristiques matériau de la structure ; pour les simulations on se basera donc sur les valeurs références de l'aluminium, données dans la littérature :  $E$  entre 69000 et 74000 MPa et  $\nu = 0.33$ . Quand à la masse volumique, obtenue en pesant la poutre, elle vaut  $2760 \text{ kg.m}^{-3}$ . La structure est excitée perpendiculairement à sa ligne moyenne, selon la direction  $z$  de la figure et disposée "verticalement" afin de s'affranchir autant que possible de l'influence du poids propre. Le point d'excitation est situé à 5 cm du bord gauche. Enfin, elle est encastree à ses deux extrémités, par serrage entre deux cales, maintenues par des vis. Le bâti, en aluminium lui aussi, est posé sur un bloc de béton. Les deux extrémités, où est encastree la poutre, sont mobiles dans le plan  $xz$ .

En ce qui concerne la mise en place de la structure, il faut être attentif au serrage et à l'ali-

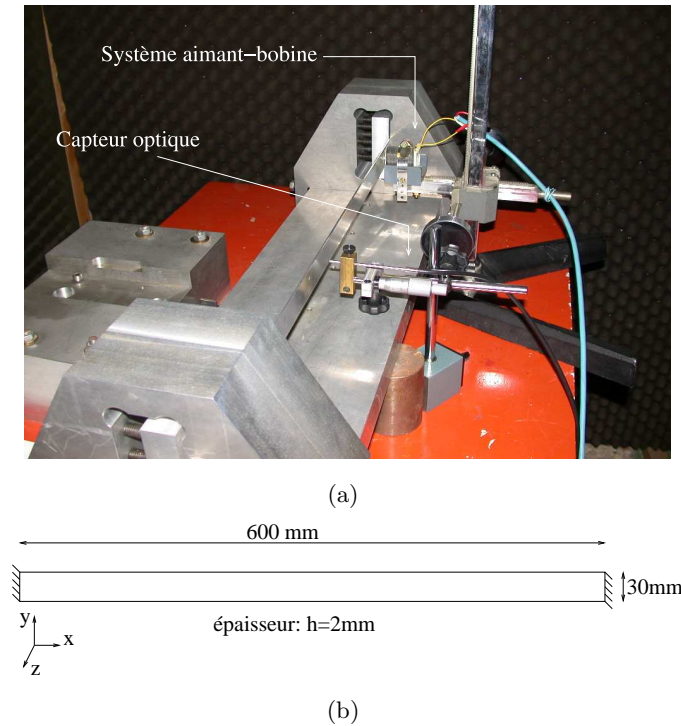


FIGURE VI.1 - Poutre droite bi-encastree, (a) dispositif expérimental - (b) dimensions

gnement des mords. Plus précisément, si les deux côtés du montage ne sont pas parfaitement symétriques, (figure VI.2(b)) on risque d'introduire un défaut ou une précontrainte dans la structure et en conséquence de modifier son comportement. Pour ce qui concerne le serrage, la poutre doit être suffisamment maintenue pour empêcher un glissement, mais pas trop pour éviter un écrasement qui modifierait l'encastrement vers un appui simple.

### VI.3.2 Système d'excitation

Pour chaque essai, on souhaite appliquer à la structure une excitation sinusoïdale, monoharmonique d'amplitude et de pulsation fixées. On s'intéresse aux premiers modes de la structure et la plage de fréquences utiles est donc située entre 0 et quelques centaines de Hertz. Quant à l'amplitude, elle doit pouvoir prendre des valeurs suffisamment faibles pour conduire au régime linéaire et réciproquement assez élevées pour amener un comportement pseudo périodique ou chaotique (conduisant à des amplitudes de vibrations allant de quelques dixièmes de l'épaisseur à 2 ou 3 fois celle-ci). Ces derniers points sont importants car il n'est pas facile de trouver une alimentation capable de fournir une bande d'amplitude aussi large, sans rencontrer des problèmes de saturation ou autre. La gamme de fréquence ne pose en revanche pas de problème.

Nous avons essayé différents systèmes, en commençant par ceux disponibles au laboratoire, à

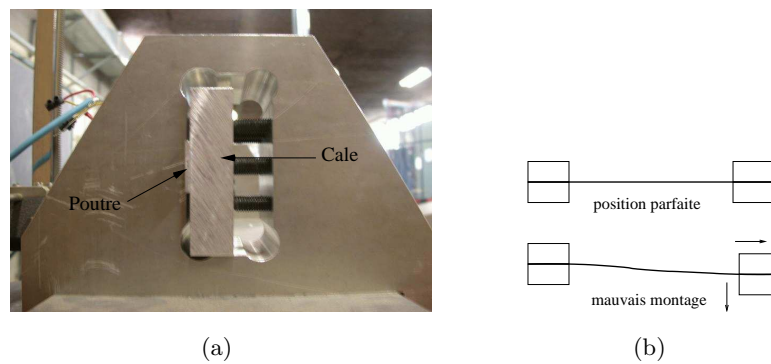


FIGURE VI.2 - Mise en place de la structure, encastrement et positionnement des mors - (b) vue dans le plan  $xz$ .

savoir un vérin hydraulique et un pot vibrant. Ensuite, à l'instar de ce qui est fait dans CHEN *et al.* (1996), un système d'excitation sans contact, constitué d'une bobine et d'un aimant a été utilisé.

### VI.3.2.a Essais non concluants ...

Le vérin hydraulique permet d'appliquer l'excitation directement sur le bâti, mais a rapidement été abandonné car on ne pouvait obtenir une amplitude suffisamment faible pour avoir une réponse linéaire.

Plusieurs essais ont été réalisés avec deux types de pot vibrant (BK 4809 et 4810). Le pot est alimenté (via un amplificateur BK 2706) par un courant sinusoïdal et relié à la structure par une tige horizontale, vissée sur une masse collée à la poutre. L'extrémité de la tige est également équipée d'une tête d'impédance (BK 8001), fournissant une mesure de la force imposée. La plupart du temps, la valeur de la force appliquée ne respecte pas la consigne fournie et contient des harmoniques. Il semble qu'il y ait interaction entre la structure et l'excitateur. Ce phénomène peut s'expliquer par un mauvais positionnement de la tige, pas parfaitement perpendiculaire au plan moyen de la structure et conduisant donc à des efforts transverses parasites. De plus la masse ajoutée (tête d'impédance, tige et masse collée) a une influence non négligeable sur le comportement, et notamment sur les valeurs des fréquences propres. En bref ce système est difficile à mettre en place et à piloter correctement et introduit, à cause du contact avec la structure excitée, des vibrations parasites et a donc été abandonné au profit du système présenté ci-après.

### VI.3.2.b Système d'excitation sans contact

Au final nous avons utilisé un excitateur électro-magnétique, constitué d'une bobine et d'un aimant. La bobine, (Mécaelectro 8.M17.02.73 12Vcc), est alimentée par un courant sinusoïdale, et crée un champ magnétique dans lequel est plongé l'aimant, collé à la structure, ce qui induit une force dans ce dernier, et permet de faire vibrer la poutre. Le dispositif est représenté figure VI.3. Ce système possède l'avantage d'être sans contact ce qui implique aussi qu'on ne dispose

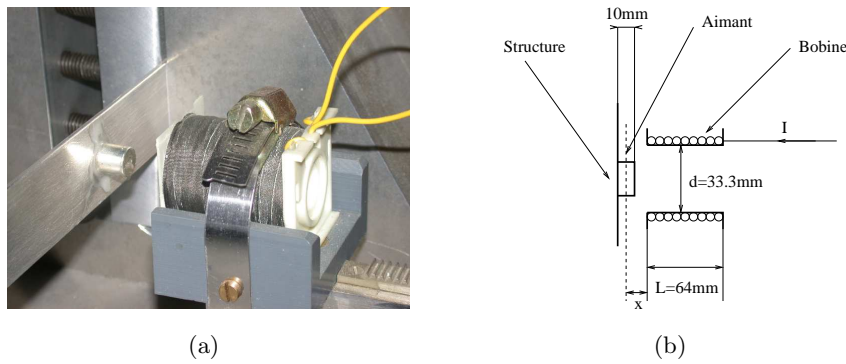


FIGURE VI.3 - Dispositif d'excitation sans contact : bobine-aimant (photo et schéma)

pas d'informations directes concernant la force exercée sur la structure. Il est donc nécessaire d'étalonner le dispositif, d'une part afin de déterminer la relation entre la tension aux bornes de la bobine, ou l'intensité d'entrée, et la force résultante, et d'autre part pour connaître la position optimale de la bobine par rapport à l'aimant, et obtenir une force d'amplitude maximale, si possible stationnaire.

Les résultats présentés en annexe C montrent que l'amplitude de la force dépend de  $x$ , distance entre le centre de gravité de l'aimant et la bobine et est maximale pour  $x = 0$ , c'est à dire lorsque le milieu de l'aimant est aligné avec le bord de la bobine. De même c'est autour de cette position que les variations de la force sont les plus faibles. Pour l'aimant (diamètre 5mm, longueur 10mm) utilisé lors des essais présentés ci-après, on obtient une relation linéaire entre la force  $F$  et la tension aux bornes de la bobine,  $F = 0.18U$ , ne dépendant pas de la pulsation d'excitation (voir la figure VI.4) Ceci n'est cependant qu'une approximation, et donne une estimation de la force

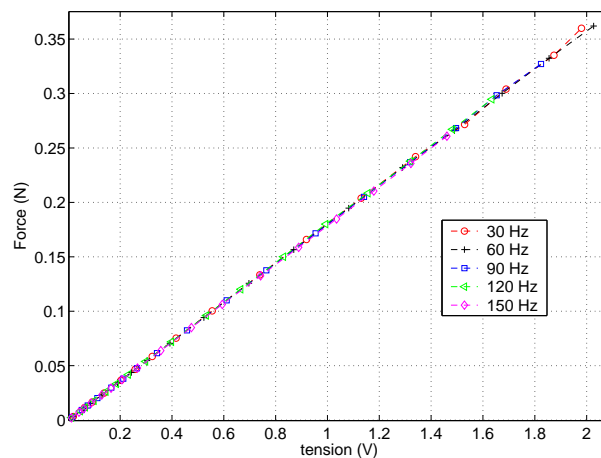


FIGURE VI.4 - Étalonnage du système bobine-aimant, force appliquée à l'aimant en fonction de la tension aux bornes de la bobine pour différentes fréquences d'excitation.

réellement appliquée à la structure. En effet, à partir d'une certaine amplitude la relation force-

tension peut devenir non linéaire. De même, la force varie lentement avec la pulsation, pour la plage considérée dans l'étude, du fait de la dissipation par échauffement de la bobine.

### VI.3.3 Systèmes de mesure

On dispose de deux systèmes de mesure, tous deux sans contact, un capteur optique ("MTI-2000 Fotonic sensor") fournissant le déplacement transverse en un point de la structure, et un vibromètre laser, composé d'une "tête" ("scanning head Politec OFV 303), émettrice du faisceau laser en direction de la structure, et d'un boîtier de contrôle (OFV-3001) où sont récupérés les signaux de sortie (déplacements et vitesses).

Ces systèmes possèdent l'avantage d'être complètement indépendants du banc d'essai et donc de ne pas interférer avec la structure. L'utilisation de deux appareils paraît redondante mais permet en fait d'obtenir pour un même essai des mesures en deux points différents. C'est également un bon moyen de s'assurer de l'indépendance des résultats vis à vis de l'appareil de mesure.

### VI.3.4 Traitement, contrôle et visualisation des signaux

Les signaux à traiter sont les sorties du laser (déplacements et vitesse), celles du capteur optique (déplacement), et la source, i.e. le courant fourni à la bobine ou la tension aux bornes de celle-ci. Tous sont collectés sur une chaîne d'acquisition, HP 35650, reliée à un PC, équipé d'un logiciel disposant de tous les outils classiques de traitement du signal. En plus de cet appareil, on utilise un démodulateur synchrone, "Stanford SR830, DSP lock-in amplifier". Il permet d'isoler dans un signal la partie correspondant à une fréquence référence et à ses multiples, par "démodulation synchrone". Concrètement, si le signal d'entrée est celui fournit par le capteur optique ou le laser, on peut donc lire directement l'amplitude et la phase de chaque harmonique, la pulsation d'excitation servant de référence. L'appareil sert également de source pour le signal d'entrée et fournit un sinus mono-harmonique à pulsation et amplitude fixé, transmis à la bobine via un amplificateur B2100 MK1. Le Stanford présente l'avantage d'être très facilement pilotable, notamment grâce au réglage de l'amplitude et de la pulsation par des potentiomètres, avec la possibilité de pas très petits (1mHz en fréquence, 2mVrms en amplitude). Un oscilloscope permet également de visualiser le signal d'entrée de la bobine, essentiellement pour contrôler sa stabilité. On utilise aussi une sonde thermique pour relever la température lors des divers essais.

Le montage complet utilisé pour les essais sinus est donné figure VI.5.

## VI.4 Essais sur la poutre

### VI.4.1 Description des essais

Notre objectif est de caractériser le comportement vibratoire de la poutre. Pour obtenir le spectre linéaire de celle-ci, on utilise une excitation aléatoire large bande, un bruit blanc, signal fourni par la chaîne HP. La mesure de la réponse en fréquence (en pratique, moyenne sur une trentaine d'acquisitions) conduit classiquement aux valeurs des fréquences propres. Le



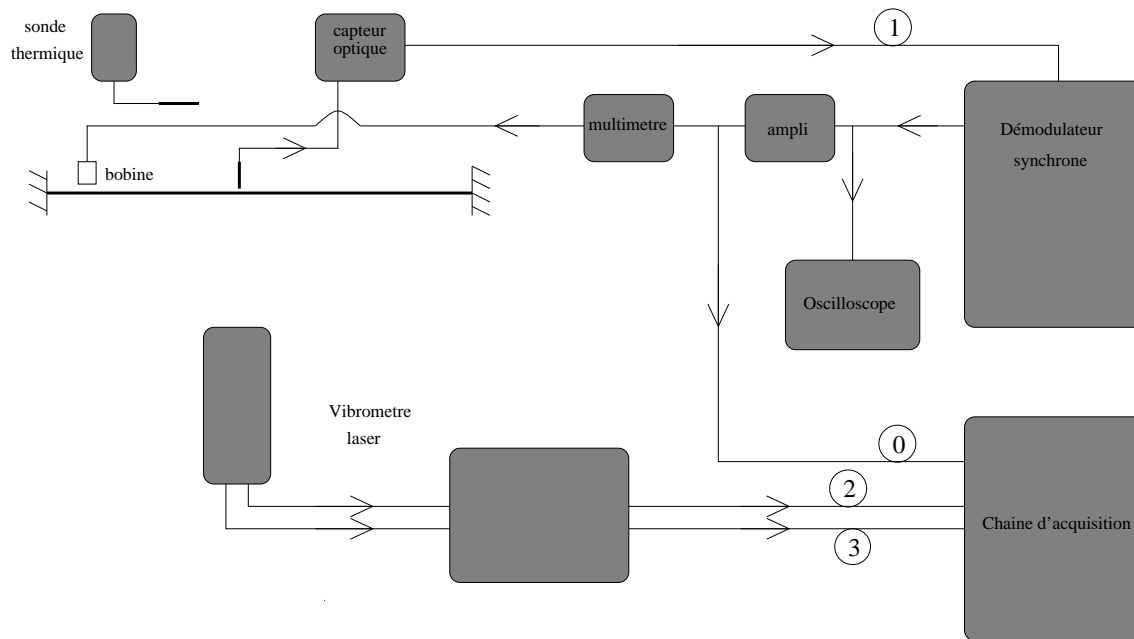


FIGURE VI.5 - Montage expérimental, pour entrée de type sinus

bruit blanc permet de contrôler l'état de la structure, et de vérifier l'évolution de ses fréquences propres, censées rester constantes, ce qui n'est pas toujours le cas comme nous le verrons plus loin.

Pour observer la réponse non linéaire proprement dite, une excitation sinusoïdale, caractérisée par sa fréquence  $f$  et son amplitude notée  $A$ , est fournie à la bobine par le Stanford. Pour les essais décrits ci-après, on travaille à amplitude constante en effectuant un balayage en fréquence autour de la résonance considérée. Le mode opératoire précis est le suivant : on fixe  $A$  au début de l'essai, et on incrémente régulièrement, toutes les 30s,  $f$  de 0.02 Hz. Ensuite tout les 0.1 Hz on lance l'acquisition des déplacements fournis par le capteur optique et des vitesses données par le laser. On relève les amplitudes<sup>1</sup> des harmoniques 1, 2 et 3 ainsi que le déphasage relativement à l'excitation. Pour chaque acquisition, on note également la tension exacte aux bornes de la bobine et la température ambiante à proximité de la structure. Après une première étape de montée, les mêmes opérations sont répétées pour les fréquences décroissantes, afin d'obtenir la courbe complète.

Au final, un essai complet se décompose en cinq phases, deux balayages en sinus, une montée et une descente, alternés avec des bruits blancs avant et après chaque phase sinus et dure environ cinq heures. A noter qu'avant chaque essai, un balayage rapide est effectué pour repérer les sauts, montant et descendant, en utilisant par exemple un oscilloscope pour visualiser la réponse temporelle.

Le tableau VI.1 résume les caractéristiques des six essais dont les résultats sont commentés ci-

<sup>1</sup>par "amplitude", on entend la valeur absolue du maximum du signal temporel

après. Les cinq premiers essais concernent la résonance autour du mode 1, avec une amplitude conduisant au régime linéaire (essai 0) et trois autres à une réponse non linéaire (essais 1 à 3) ; le cinquième (essai 4) montre la résonance autour du mode 2. L'essai 5 est presque identique à l'essai 1, mais conduit à des résultats "perturbés" sur lesquels nous reviendrons au §VI.4.4. Les valeurs de la force d'entrée sont celles obtenues en utilisant la courbe VI.4, avec un rapport force-tension égale à 0.18.

nom	A(N)	Saut montant (Hz)	Saut descendant (Hz)	Température (°)
Essai 0	0.032	linéaire : pas de saut		23±0.1
Essai 1	0.12	29.1	28.5	21±0.1
Essai 2	0.18	28.94	28.4	20.8±0.1
Essai 3	0.35	28.80	27.67	21.2±0.2
Essai 4	0.32	79.7	79.3	20.9±0.1
Essai 5	0.12	29.5	29.1	21.1±0.2

TABLEAU VI.1 - *Caractéristiques des essais*

## VI.4.2 Résultats et commentaires

Le tableau VI.2 donne les valeurs des fréquences propres pour les différents cas. Pour les calculer, on utilise la formule approchée suivante (GERADIN (1993)) :

$$f_k^2 = \mu_k^4 \frac{EI}{4\pi^2 \rho S L^4} \quad (\text{VI.1})$$

avec  $\mu_k = 4.73, 7.853, 10.996$  pour  $k = 1, 2, 3$  et  $E$  le module d'Young,  $\rho$  la masse volumique,  $I$  le moment d'inertie quadratique,  $L$  la longueur et  $S$  la surface de la section droite de la poutre. On donne dans le tableau les valeurs obtenues par cette formule et avec Eve, pour  $E$  variant entre 0.69e11 et 0.74e11 Pa. On ne s'attarde pas pour l'instant sur les écarts de valeurs d'un essai à l'autre, ce point sera abordé un peu plus loin (§VI.4.3).

Le premier essai, pour une amplitude d'excitation très faible, conduit à une réponse linéaire, présentée figure VI.6. Les harmoniques 2 et 3 sont quasiment nulles (de l'ordre de  $10^{-5}$  fois l'épaisseur) et n'ont pas été représentées. La réponse présente un pic à la résonance, et la phase passe de 0 à  $-\pi$ , toujours autour de la fréquence de résonance. A noter que le régime linéaire est assez difficile à obtenir, et comme en témoigne l'instabilité de la réponse dans la zone de résonance, le cas présenté ci-dessus n'est pas parfaitement linéaire.

La réponse pour des amplitudes plus importantes, essais 1 à 3, est représentée figure VI.7 pour l'amplitude et la phase de l'harmonique 1, et figure VI.8 pour les harmoniques 2 et 3. Les indices "m" et "d" repèrent respectivement les phases de montée (balayage croissant en fréquence) et de descente des essais. Cette fois, pour des amplitudes d'excitation plus importantes, on obtient les caractéristiques non linéaires attendues. On remarque que pour des amplitudes de vibrations

nom	$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)
Essai 0	31.4	83.2	160.4
Essai 1	28.4	79	156
Essai 2	28.2	78.7	155.5
Essai 3	27.5	78	155
Essai 4	27.8 (28.3)	78.3 (78.9)	154.9 (155.4)
Essai 5	28.1 (29.5)	78.2 (80.75)	155.25 (157.5)
Simulations (Eve)	28.8-29.8	79.5-82.3	156.2-161.8
GERADIN (1993)	28.5 - 29.6	78.7-81.5	154.3-159.8

TABLEAU VI.2 - Fréquences propres relevées pour chaque essai, en utilisant une excitation bruit blanc. Valeurs relevées avant application de l'excitation sinus. Lorsque les valeurs obtenues à la fin de l'essai sont sensiblement différentes, elles sont indiquées entre parenthèses.

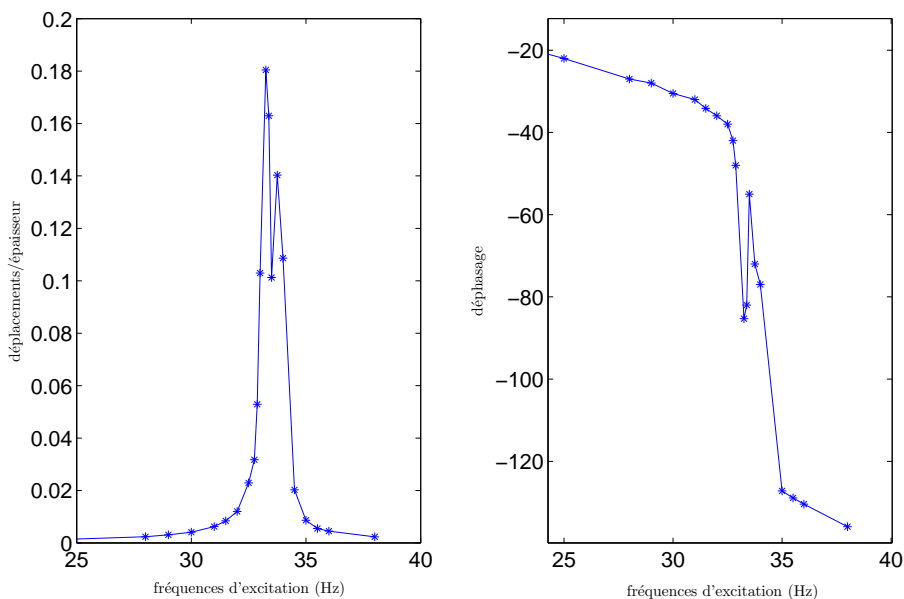


FIGURE VI.6 - Harmonique 1 de la réponse de la poutre en régime linéaire - (a) rapport déplacement/épaisseur en fonction de la fréquence d'excitation - (b) déphasage par rapport à l'excitation

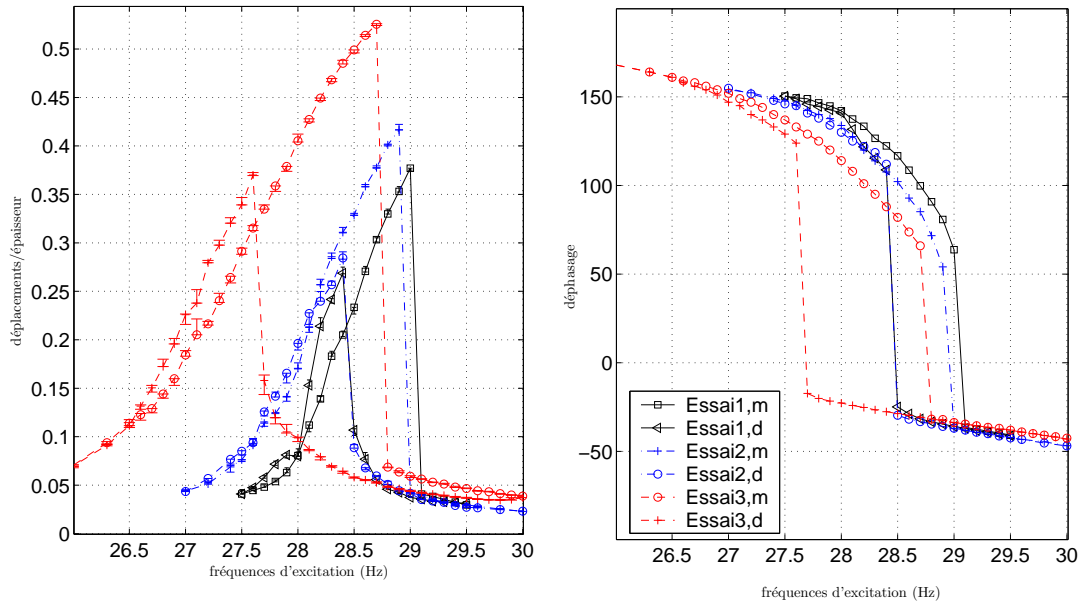


FIGURE VI.7 - Harmonique 1 de la réponse de la poutre pour différentes amplitudes d'excitation (voir le tableau VI.1 pour les caractéristiques précises des essais) - (a) rapport déplacement/épaisseur en fonction de la fréquence d'excitation - (b) déphasage par rapport à l'excitation

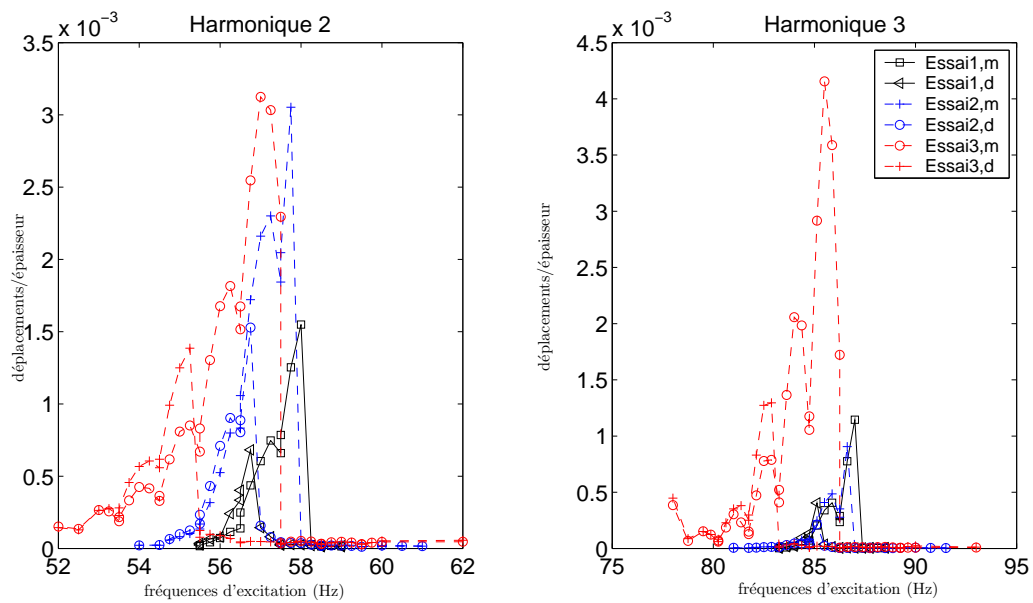


FIGURE VI.8 - Harmoniques 2 et 3 (a) rapport déplacement/épaisseur en fonction de la fréquence d'excitation - (b) déphasage par rapport à l'excitation

de l'ordre de  $1/5$  de l'épaisseur, le comportement est déjà non linéaire. On observe des hystérésis sur l'amplitude et la phase de la réponse, avec des sauts d'une branche d'équilibre à l'autre. Selon le sens de balayage, la réponse est différente. En revanche la troisième solution d'équilibre prévue par la théorie et les simulations n'est jamais atteinte, dans la mesure où elle est instable. Bien qu'elles soient plus perturbées, les mêmes phénomènes sont observés sur les harmoniques 2 et 3. Cependant leur amplitude reste assez faible et il faudrait augmenter encore fortement l'excitation pour voir des harmoniques du même ordre de grandeur que la fondamentale. On remarque également que l'harmonique 2 n'est pas nulle, en contradiction avec l'hypothèse d'une structure parfaitement plane. Ceci peut indiquer la présence d'un défaut de forme ou d'une précontrainte.

Pour terminer, la figure VI.9 donne l'amplitude et la phase de l'harmonique 1 de la réponse autour du mode 2, les harmoniques 2 et 3 étant représentées figure VI.10. Le comportement est similaire à celui du mode 1.

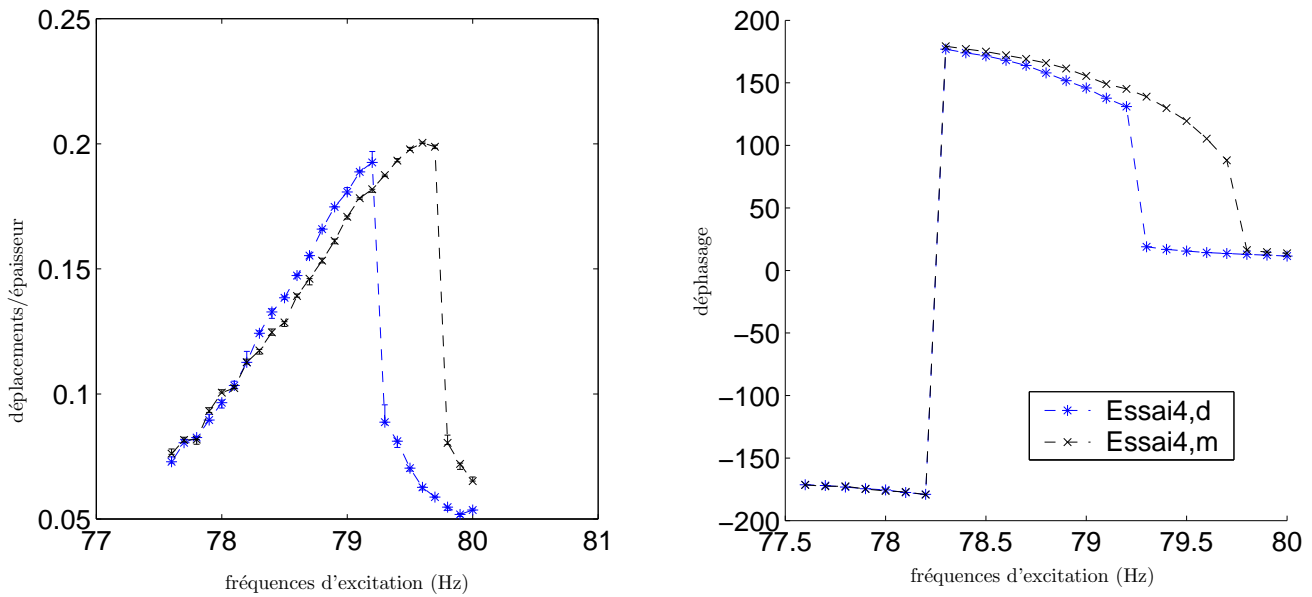


FIGURE VI.9 - Harmonique 1 de la réponse de la poutre autour du mode 2 - (a) rapport déplacement/épaisseur en fonction de la fréquence d'excitation - (b) déphasage par rapport à l'excitation

### VI.4.3 Variation des fréquences propres

Les essais présentés ci-dessus conduisent à des résultats assez satisfaisants, et nous ont permis de mettre en valeur un comportement non linéaire de la poutre en régime forcé conforme à nos attentes. Cependant, ces essais sont le fruit d'un mode opératoire précis, décrit au §VI.4.1, mis en place après plusieurs tentatives vaines mais riches en informations qui à défaut de résoudre les problèmes ont au moins permis de les identifier. Nous avons notamment observé deux effets inattendus ou tout au moins indésirables, perturbant les mesures et qui ne sont pas des consé-

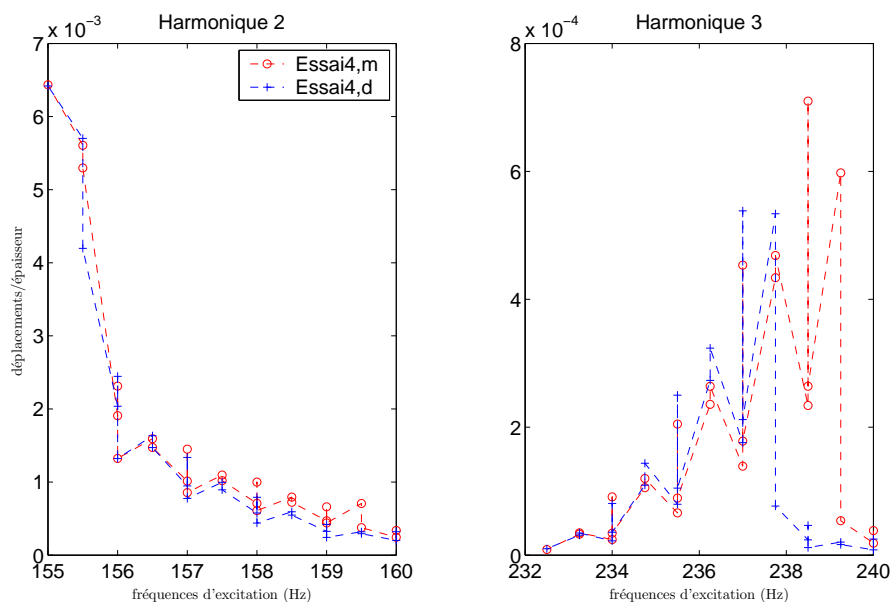


FIGURE VI.10 - Harmoniques 2 et 3 du mode 2 (a) rapport déplacement/épaisseur en fonction de la fréquence d'excitation - (b) déphasage par rapport à l'excitation

quences directes des non linéarités géométriques : d'une part des variations dans les valeurs des fréquences propres et d'autre part une instabilité de la réponse à amplitude et fréquence d'excitation constante. On discute dans ce paragraphe et le suivant de ces deux effets et de leurs éventuelles origines ainsi que des solutions proposées pour les éviter.

Considérons les résultats du tableau VI.2; les valeurs obtenues pour les essais 1 à 4 sont correctes et proches des simulations. Par contre, les essais 0 et 5 présentent un écart de plusieurs Hertz avec les autres. Ceci est représentatif d'un fait que nous avons observé à plusieurs reprises, sur des cas non présentés ici, à savoir que les fréquences propres varient relativement aux valeurs simulées, d'un essai à l'autre et parfois même au cours d'un même essai, entre la phase de montée et de descente. C'est notamment le cas pour l'essai 5, où  $f_1$  vaut 28,1 Hz avant la montée, 29.5 Hz juste après et 28.4 Hz après la descente.

Nous aborderons le cas des variations au cours d'un même essai à la fin de ce paragraphe. Considérons tout d'abord les deux autres situations; l'écart vis à vis des valeurs "théoriques" ne peut s'expliquer que par une mauvaise modélisation de la réalité expérimentale, quant aux différences entre les essais, elles proviennent nécessairement d'une modification des conditions expérimentales. Pour expliquer l'un ou l'autre de ces deux cas, nous avons distingué cinq causes possibles : la masse ajoutée par l'aimant, des erreurs sur les constantes du matériau (essentiellement le module d'Young), des conditions aux limites imparfaites, un défaut de forme initial et l'influence de la température.

A propos du premier point, des essais au marteau à chocs avec ou sans aimant ne montrent pas de différences significatives. Quand au module d'Young, la plage des valeurs possibles pour l'aluminium entraîne une variation de 1Hz environ sur les fréquences propres, ce qui est insuffisant

pour expliquer les écarts. Quoiqu'il en soit ce dernier point peut facilement être corrigé et le modèle recalé.

Concernant les conditions aux limites, deux points sont à considérer : d'une part la réalisation de l'encastrement et d'autre part le positionnement des mords. En effet, un encastrement imparfait (glissement ou écrasement), tendant plutôt vers une liaison appui simple, conduira à une diminution des fréquences propres, ce qui semble être le cas des essais 1 à 4, où les fréquences sont plus faibles que les valeurs théoriques. De même, comme nous l'avons expliqué plus haut (§VI.3), un mauvais positionnement des mords conduit à un déplacement imposé sur les bords et à une précontrainte dans la structure, modifiant ainsi ses fréquences propres et son comportement.

La structure réelle n'est pas nécessairement parfaite et peut présenter une légère déformation initiale. De même, au fil des essais, ou des manipulation elle peut se déformer de manière irréversible. Hors, on a montré qu'un défaut de forme, d'une amplitude de 0.5 mm pouvait entraîner un décalage des fréquences propres de plusieurs Hertz (voir les résultats des simulations au §VI.4.5). Passons maintenant aux effets des variations de température ambiante. Le banc est composé de quatre parties : le socle en béton, le bâti, les mords et la structure. Dans la mesure où ils ne sont pas faits du même matériau, un différentiel entre les déplacements de chaque élément peut intervenir à long terme. Cela conduit d'une part à une déformation de la poutre (flèche) et à l'apparition d'une précontrainte (en compression pour une augmentation de température). Nous reviendrons sur ces effets au §VI.4.5.

Il est difficile d'affirmer, à travers les différents cas pathologiques que nous avons observés, que les variations de température ambiante ont un effet sensible. Quoiqu'il en soit, une manière simple de s'en affranchir est de démonter et remonter la structure avant chaque essai et d'essayer de travailler dans un environnement où la température reste assez stable. D'ailleurs, les meilleurs résultats (essais 1 à 4) ont été obtenus pour des essais réalisés la nuit.

Finalement, on peut facilement s'affranchir du décalage des fréquences d'un essai à l'autre, tout simplement en représentant les résultats non pas en fonction de la fréquence mais en fonction du rapport de celle-ci à la première fréquence propre. Ainsi les réponses obtenues restent comparables.

La variation des fréquences propres au cours d'un même essai est beaucoup plus gênante : en effet, cela signifie que la structure change au cours du balayage et que les phases de montée et de descente ne sont plus vraiment comparables. Pour expliquer cela, les effets de variation de température ambiante sont à exclure : il suffit d'observer le cas de l'essai 5 où la température est quasiment constante. Par contre, une variation locale de température peut avoir un impact. Une expérience simple et rapide confirme ce point : il suffit d'approcher une lampe de la structure pour observer une augmentation des fréquences propres de plusieurs Hertz très rapidement. Hors, pour des amplitudes d'excitation importantes, la bobine chauffe, et ce de plus en plus lorsque la fréquence augmente, en conséquence de quoi les fréquences propres avant et après l'essai sont différentes.

### VI.4.4 Fluctuation de la réponse

Le deuxième problème observé concerne l'instabilité de la réponse. En effet, pour une excitation d'amplitude et de pulsation fixée, le signal met du temps à atteindre une valeur à peu près constante. On observe en fait à la fois une dérive lente de celui-ci et des oscillations rapides de sa valeur maximale. Le passage d'un régime périodique à un comportement chaotique peut expliquer cette situation. Cependant, au vu des faibles amplitudes d'excitation des essais présentés cela paraît peu probable. De plus, pour les essais 1 et 5 l'amplitude d'excitation est la même mais l'un est instable et perturbé et l'autre non (voir la figure VI.11), ce qui nous a orienté plutôt vers une erreur de mode opératoire. En fait, lors des premiers essais, nous ne respections pas un temps d'attente assez long entre les incréments, permettant d'atteindre le régime permanent, après disparition du transitoire. De même, en particulier à proximité des

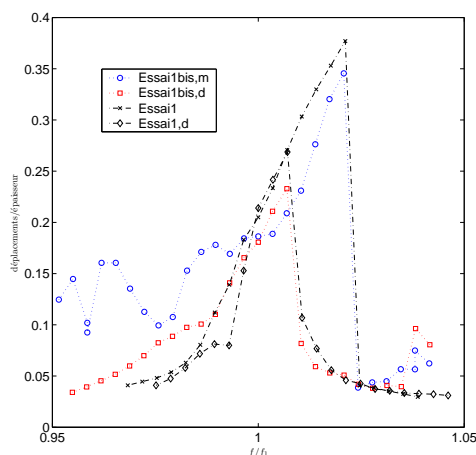


FIGURE VI.11 - Harmonique 1 de la réponse forcée, comparaison des essais 1 et 5

sauts, la taille des pas en fréquences doit être petite, pour éviter de perturber trop violemment le système. Le respect de ces deux points nous a permis de considérablement améliorer la qualité de nos résultats. D'ailleurs, la taille des pas et le temps d'attente sont les principales différences entre les essais 1 et 5, ce qui confirme nos dires.

Pour terminer, la non stationnarité de la force d'excitation peut également être mise en question ; en effet, la force risque de décroître en fonction de la fréquence, à cause des pertes de puissance par dissipation, due à l'échauffement de la bobine. Cependant ceci est valable pour des amplitudes d'excitation importantes, et pour les essais présentés plus haut, la force reste relativement stable (variations de quelques millivolts au cours de l'essai).

### VI.4.5 Comparaison avec les simulations

On considère à nouveau dans cette partie le modèle décrit au §V.2, afin de comparer les simulations aux résultats expérimentaux. On étudie ensuite les effets d'un défaut de forme initial de la structure, puis ceux d'une précontrainte, en vue de recalibrer les simulations sur les essais.



Les données sont celles de l'essai 3. La superposition des résultats est présentée sur la figure VI.12. L'amplitude de la force pour les simulations est de 0.3N, au lieu des 0.32 N prévus en

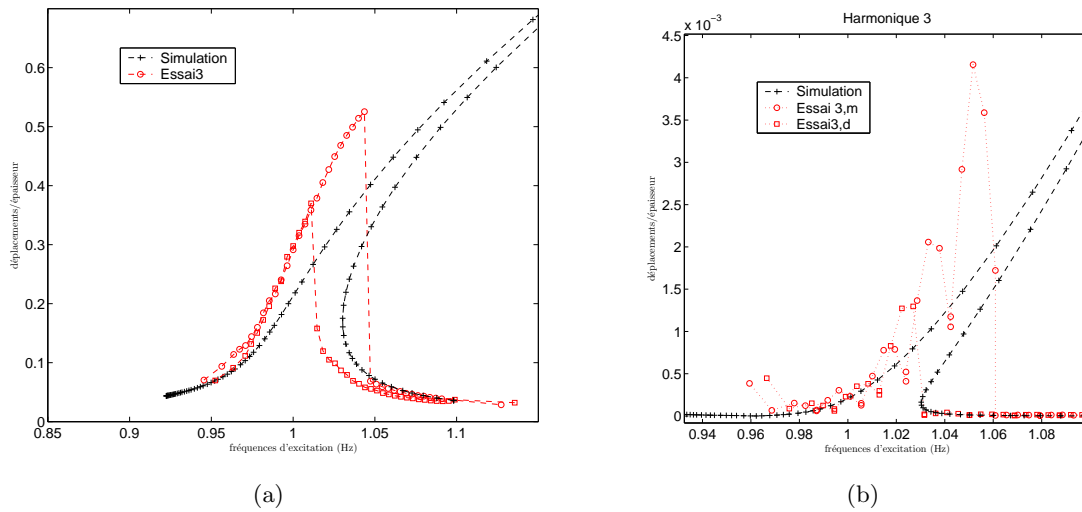


FIGURE VI.12 - Comparaison des résultats expérimentaux et simulés pour l'essai 3 (a) harmonique 1 (b) harmonique 3

utilisant le coefficient obtenu par étalonnage de la bobine. Ce faible écart s'explique soit par un positionnement de la bobine imparfait, d'où un coefficient  $k$  plus faible (0.16 en l'occurrence), soit par l'absence d'amortissement dans le modèle.

Pour cet essai, les fréquences propres sont inférieures à celles obtenues en simulation (tableau VI.2). En ce qui concerne la réponse forcée, les résultats numériques et expérimentaux sont assez proches (après adimensionnement de la fréquence), bien que la réponse expérimentale soit moins rigide (moins incurvée). De plus, en simulation sur la poutre parfaite, l'harmonique 2 est nulle, ce qui n'est pas le cas pour les essais.

Nous avons montré au chapitres II et V, qu'un défaut de forme et/ou une précontrainte impliquaient la présence de termes quadratiques dans le modèle, conduisant à l'apparition d'harmonique deux et à un assouplissement de la réponse. De même, nous avons évoqué dans ce chapitre l'influence que pouvaient avoir les variations de température, la géométrie imparfaite de la structure ou encore un mauvais positionnement des mords, tous ces points conduisant au final à un défaut ou une précontrainte. C'est pourquoi nous avons essayé de recalibrer le modèle sur les résultats expérimentaux en introduisant l'un, l'autre ou ces deux paramètres. A chaque fois, deux effets sont considérés : celui sur le positionnement des fréquences propres puis celui sur la réponse forcée.

#### VI.4.5.a Défaut géométrique

On suppose ici que la poutre étudiée n'est pas parfaitement plane, ce qui est assez réaliste, soit d'origine, soit suite aux manipulations qu'elle a subies. On étudie l'effet sur le comportement de la

structure de trois défauts de formes différents, représentés figure VI.13. Le premier (noté  $d_1$ ) est la déformée obtenue en statique après application d'une force selon  $z$  au même point d'excitation que pour les essais sinus. Le deuxième, ( $d_2$ ), a la forme du premier mode linéaire et enfin le dernier ( $d_3$ ) est le résultat d'un déplacement imposé du mord droit dans la direction  $z$ , correspondant à une mise en place imparfaite des mords et donc de la structure. Les valeurs des fréquences

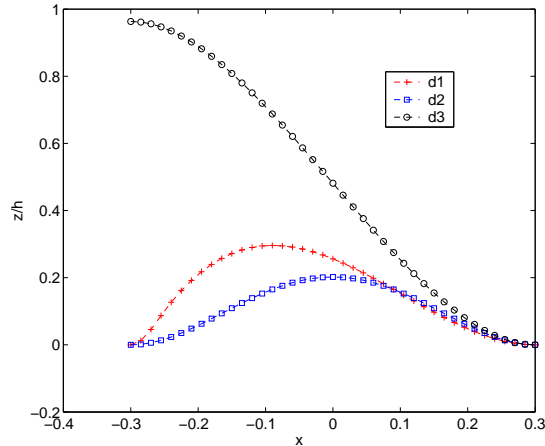


FIGURE VI.13 - Déformées géométriques ( $h$  : épaisseur)

propres pour ces différents défauts sont consignées dans le tableau VI.3,  $\eta$  représente l'amplitude du déplacement maximal selon  $z$ , relativement à la position parfaite.  $d_1$  et  $d_2$  conduisent à une

$\eta$ (mm)	défaut 1			$\eta$ (mm)	défaut 2			$\eta$ (mm)	défaut 3		
	$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)		$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)		$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)
0.4	29.54	80.4	157.4	0.4	29.81	80	157.5	1	29	80.2	157.4
0.6	30.1	80.7	157.4	0.5	30.27	80	157.5	2	29	80.6	157.4
1.6	35.9	85.5	157.5	1	33.8	80	158	5	29	91.9	157.3

TABEAU VI.3 - Influence d'un défaut de forme sur les premières fréquences propres

augmentation de  $f_1$ , et laissent  $f_2$  et  $f_3$  à peu près constantes.  $d_3$  ne joue que sur  $f_2$ . On trace ensuite la réponse forcée, prenant en compte ces défauts. Les résultats sont donnés figures VI.14 (harmonique 1) et VI.15 (harmoniques 2 et 3) et comparés avec les valeurs expérimentales et le cas parfait pour des valeurs de  $\eta$  permettant de recaler au mieux les résultats. Le défaut 3 ne modifie pas du tout la réponse (pour des amplitudes réalistes tout au moins) et n'a donc pas été représenté. Les défauts 1 et 2 ont des effets similaires, et permettent de recaler la réponse sur les valeurs expérimentales, mais de manière imparfaite toutefois. L'harmonique 2 en particulier ne correspond pas.

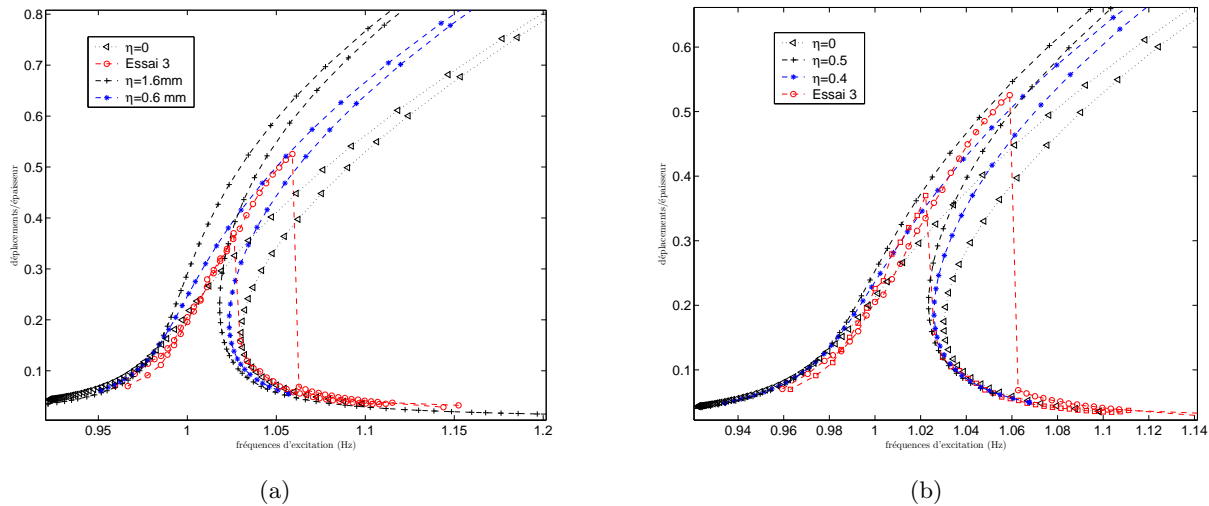


FIGURE VI.14 - Réponse forcée avec prise en compte d'un défaut géométrique, harmonique 1 - (a)  $d_1$  (b)  $d_2$

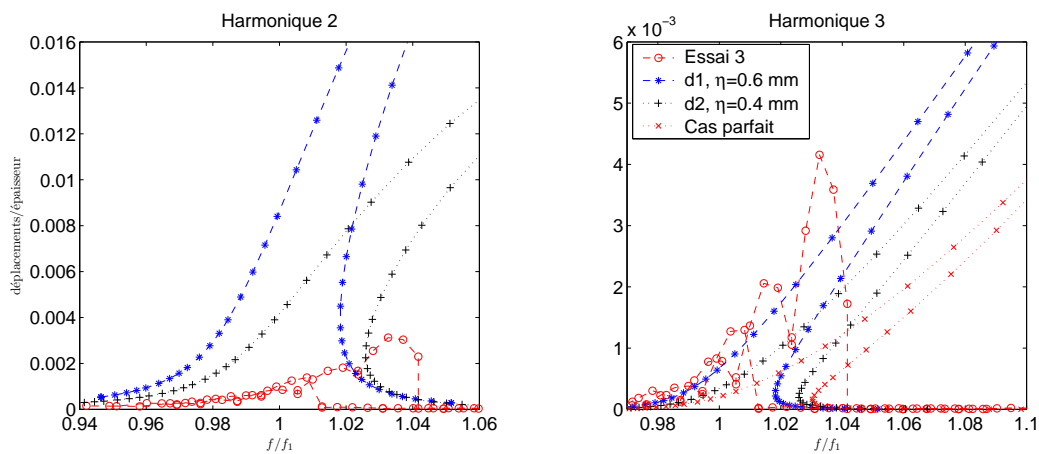


FIGURE VI.15 - Réponse forcée avec prise en compte des défauts  $d_1$  et  $d_2$  un défaut géométrique, harmonique 2 et 3

### VI.4.5.b Effet d'une précontrainte

Une augmentation de température conduit à l'apparition d'une précontrainte et au fléchissement de la structure. Un mauvais positionnement des mords entraîne les mêmes effets. Pour modéliser ces situations, on traite ici le cas de la structure soumise à un déplacement imposé sur un de ses bords, dans les directions  $x$  et/ou  $z$ , situations les plus vraisemblables expérimentalement. Un premier calcul en statique conduit à une configuration déformée, sur laquelle on effectue la simulation de la réponse forcée. Trois cas sont considérés : déplacement du mord selon  $x$ , en compression, selon  $z$  et une combinaison des deux. Pour chaque cas, on a retenu les valeurs conduisant soit à un recalage des fréquences propres soit à celui de la réponse forcée sur les résultats expérimentaux. Les caractéristiques de chaque cas, notées  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$ , sont données dans le tableau VI.4. Le cas  $s_4$  est à part et sera traité plus loin. A la différence du cas avec défaut,

	$d_x$ (mm)	$d_z$ (mm)	$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)
$s_1$	0	2	31.2	83.6	160.8
$s_2$	2.3e-3	0	27.5	78	155.2
$s_3$	0.25	0.53	27.5	78.1	155.3
$s_4$	4.6e-3	0	27.52	76.3	153.5

TABLEAU VI.4 - Prise en compte d'une précontrainte, caractéristiques des cas considérés.  $d_x$  et  $d_z$  sont les déplacements du bord gauche, respectivement dans les directions  $x$  et  $z$ .

toutes les fréquences propres sont affectées par la présence d'une précontrainte. La mise en compression de la structure entraîne une décroissance de ses fréquences, tandis qu'un déplacement selon  $z$  les augmentent ( $s_1$ ). Considérons maintenant la réponse forcée, tracée figure VI.16(a) et VI.17. Les situations  $s_1$  et  $s_3$  conduisent à une courbure plus importante de la réponse. En revanche  $s_2$  permet un recalage avec les résultats expérimentaux, au moins pour l'harmonique 1. Quant à l'harmonique 2 elle n'est plus nulle mais largement supérieure aux valeurs réelles.

Résumons la situation : un défaut géométrique, de forme égale ou proche de celle du mode 1, permet de corriger la réponse forcée simulée et ce pour des amplitudes réalistes (moins de 1mm). En revanche ce défaut entraîne une augmentation des fréquences propres, ce qui n'est pas conforme aux résultats expérimentaux. Un déplacement imposé selon  $z$  de l'une des extrémités de la poutre conduit aux mêmes résultats. A l'inverse, la présence d'une précontrainte en compression permet de recalibrer les fréquences mais n'influe pas sur la réponse forcée. A noter que dans tous les cas l'harmonique 2 apparaît en simulation mais est différente de celle obtenue expérimentalement.

Prenant cela en compte, on propose donc un dernier cas,  $s_4$ , incluant les deux effets : la structure initiale présente un défaut géométrique, du type  $d_2$ , d'amplitude 0.4 mm au milieu de la poutre, et on lui applique une précontrainte en compression, dans la direction  $x$  (similaire au cas  $s_1$ ). Les caractéristiques de l'essai sont données dans le tableau VI.4 et la réponse forcée est tracée sur les figures VI.16(b) pour l'harmonique 1 et VI.18 pour les harmoniques 2 et 3. Cette fois,

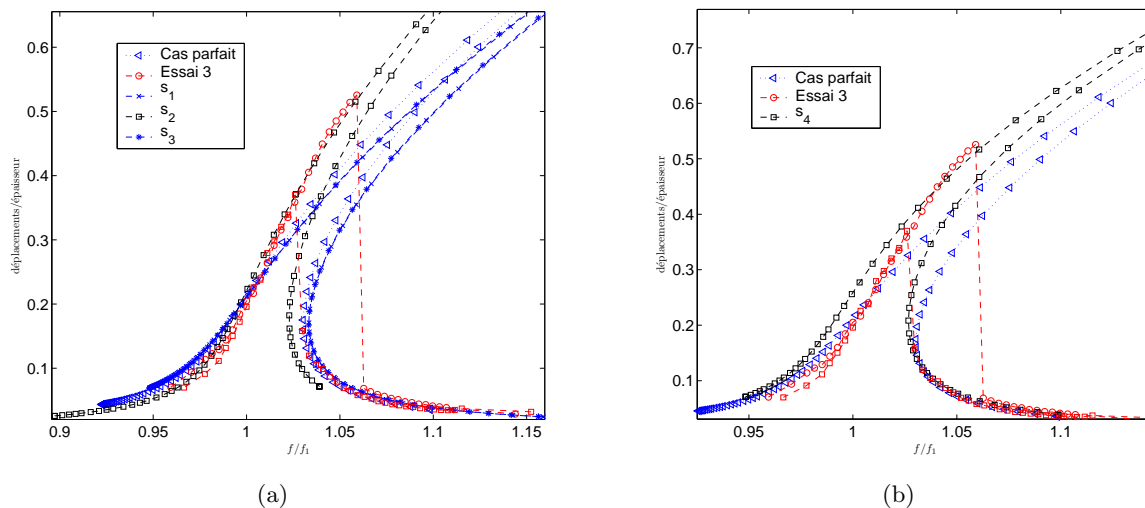


FIGURE VI.16 - Réponse forcée avec prise en compte d'une précontrainte, harmonique 1 - (a) cas  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  (b) cas  $s_4$  : ajout d'un défaut géométrique

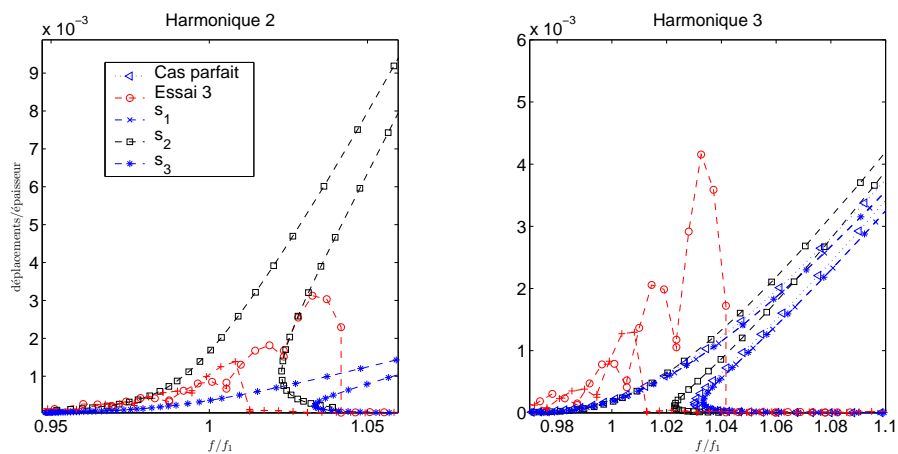


FIGURE VI.17 - Réponse forcée avec prise en compte d'une précontrainte, harmoniques 2 et 3 pour les cas  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$

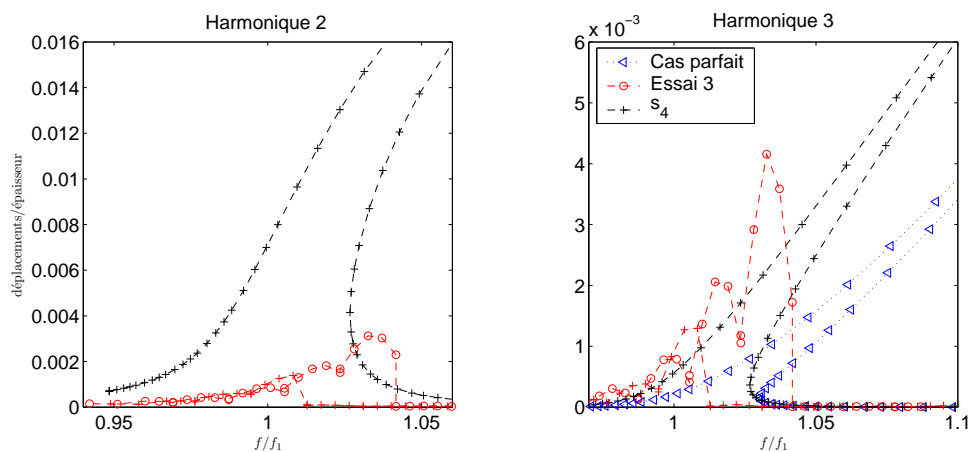


FIGURE VI.18 - Réponse forcée avec prise en compte d'une précontrainte et d'un défaut géométrique, cas  $s_4$  - (a) harmonique 2 (b) harmonique 3

on parvient à recalibrer en même temps la première fréquence propre et l'harmonique 1 de la réponse forcée. Par contre l'harmonique deux reste supérieure aux valeurs expérimentales. À noter que lors des simulations, l'amortissement n'est jamais pris en compte, ce qui peut expliquer les valeurs plus faibles obtenues pour les harmoniques supérieures lors des essais.

## VI.5 Projet d'étude d'une plaque encadrée

Le deuxième dispositif (figure VI.19) dont nous disposons est voué à l'étude de plaque ou coque en vibration, éventuellement précontrainte. Ce montage a entièrement été conçu et réalisé au cours de cette thèse (et je remercie au passage Alain Cosquer et Jean-Marc Corneloup qui en sont les auteurs principaux!) et n'est disponible que depuis peu. Nous ne présenterons donc aucun résultat expérimental mais simplement la description du dispositif, et de ses particularités. Comme précisé plus haut, pour ce montage nous sommes partie de zéro, et avons donc eu tout loisir pour réfléchir et concevoir le banc le plus adapté à nos besoins. Les principales difficultés concernent deux points : la réalisation de l'encastrement, déjà évoqué pour le premier montage et la mise en place d'un dispositif de précontrainte, pour des raisons que nous précisons plus loin, le tout en adéquation avec le choix d'une structure de géométrie adaptée à ce qu'on souhaite observer. Concernant ce dernier point, on souhaite pouvoir étudier des structures de différentes dimensions, en particulier d'épaisseur variable (entre 0.5 et 2mm), planes ou galbées, pour balayer tous les types de comportements.

Plus précisément, le système d'encastrement doit donc être adapté aux divers types de structures, aussi proche que possible d'un encastrement parfait (et donc éviter le glissement ou l'écrasement au vu de la finesse des plaques) et enfin avec des liaisons mobiles, pour pouvoir appliquer la précontrainte. Pour cette dernière, on souhaite pouvoir appliquer un déplacement uniforme d'un côté de la structure, à des ordres de grandeur assez faible ( $\approx 10^{-5}mm$ ). La question est donc



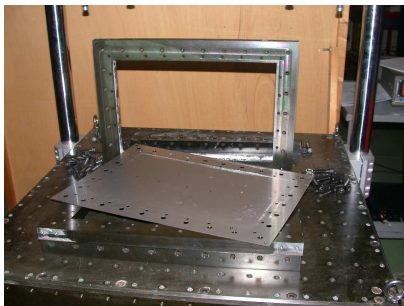
FIGURE VI.19 - *Dispositif expérimental pour l'étude d'une plaque mince, éventuellement précontrainte*

comment transmettre, et mesurer, ce mouvement ?

Les solutions que nous avons adoptées pour l'encastrement et la précontrainte sont décrit ci-après. Quand au bâti, il s'agit d'un bloc de béton armé, coulé dans un coffrage en acier usiné (pour faciliter la fixation des divers dispositifs), posé sur 4 silent-blocs, censés assurer l'isolement du montage vis à vis des vibrations extérieures.

- **encastrement de la structure dans un cadre** (figure VI.20(b)).

Pour obtenir des conditions aux limites d'encastrement aussi proches que possible du modèle parfait (ce qui en pratique est très difficile voir impossible), la plaque est maintenue dans un cadre en acier. Ce dernier est constitué de deux mords, maintenus par 30 vis et écrous de part et d'autre de la structure. Celle-ci, perforée sur toute sa périphérie, est donc de dimensions supérieures à la surface "utile", de façon à être bien recouverte par le cadre. Enfin, ce dernier est vissé par sa partie inférieure sur le bâti, et maintenu en haut par le système de précontrainte, empêchant tout mouvement horizontal. On note également que le plan moyen de la structure est vertical, toujours pour s'affranchir du poids propre. De plus, le cadre est dimensionné pour que l'application d'une force en deux points, en



(a)



(b)

FIGURE VI.20 - (a) *Ensemble plaque/cadre pour réaliser l'encastrement* - (b) *Dispositif de précontrainte.*

haut des colonnes, conduite à un mouvement de corps solide et implique un déplacement vertical uniforme de la partie supérieure de la plaque, ceci pour la pré-contraindre.

Ce système cadre+structure est interchangeable et donc pratique, car indépendant du reste du montage et répond aux besoins listés plus haut. On constate de plus qu'il est possible de passer facilement à un encastrement sur deux côtés uniquement. A noter que la fabrication de l'ensemble plaque/cadre en un seul bloc a été évoquée (par électroérosion par exemple) mais abandonnée pour des raisons financières et surtout technologiques, l'épaisseur de la plaque étant trop faible pour que cela soit réalisable.

- **système de précontrainte** (figure VI.20(b)).

Pour commencer, on rappelle que l'intérêt d'un tel système est de pouvoir modifier les valeurs des fréquences propres linéaires de la structure, afin de les rendre commensurables et d'observer d'éventuelles résonances internes ou autres interactions de modes. Ce système assure également un rôle de maintien du cadre, comme décrit plus haut.

Pour précontraindre la structure, via le cadre, on applique une force verticale, en deux points. Le système est constitué de deux colonnes verticales, fixées sur le bâti, sur lesquelles peut glisser une traverse en acier, dont la position est réglable par deux vis sans fin. Sur cette traverse sont montés deux rotules équipées de capteurs de force, qui vont appuyer sur le cadre. La position de ces deux points d'appuis est elle aussi réglable.

Dans un premier temps, l'ensemble plaque+cadre a été modélisé par éléments finis sous Abaqus (figure VI.21), afin entre autres de dimensionner le cadre. On n'entrera pas ici dans les détails de ces études. Simplement, on vérifie que pour deux plaques d'épaisseur respectives 1.2 mm et 0.5 mm, la présence du cadre ne modifie que très peu les valeurs des fréquences propres, (entre 0.5 et 1 Hz) et les modes restent les mêmes.

Quelques essais ont été réalisés afin de mesurer l'évolution des fréquences propres avec la précontrainte. Les résultats sont consignés dans le tableau VI.5, pour une plaque d'épaisseur 0.5 mm. A titre de comparaison, les trois premières fréquences propres de la plaque seule valent respectivement 50.9 Hz, 75.2 Hz et 116.9 Hz (en simulation). Dans les deux cas, simulations et

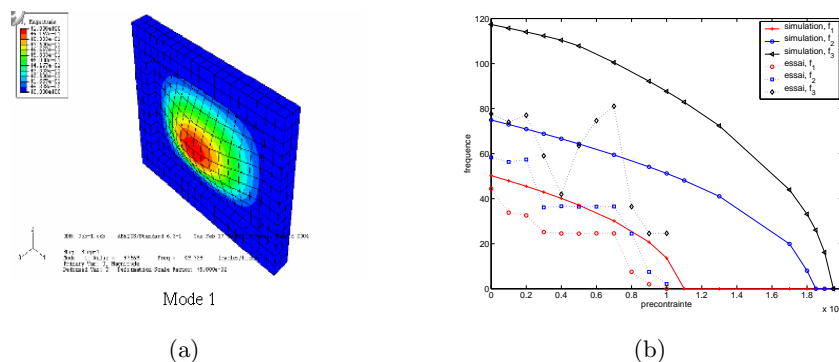


FIGURE VI.21 - (a) *Modèle éléments finis de l'ensemble plaque+cadre* (b) *Evolution des fréquences propres avec la précontrainte, résultats des essais et simulations.*



Précontrainte (N)	Essais			Simulations Plaque +cadre		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0	44.4	58.3	77.7	50.2	75	117.4
1000	33.8	56.3	74	47.9	72.9	115.7
3000	25.15	36.1	59	42.9	68.8	112.3
5000	24.5	36.4	63.5	37.12	64.3	107.8
7000	24.6	36.5	81	30.1	59.4	100.5
9000	2	7.5	24.5	20.7	54.1	92.14
10000	0	2.1	24.6	13.6	51.2	87.6

TABLEAU VI.5 - *Fréquences propres (Hz) de la plaque encastrée pour différentes valeurs de la précontrainte*

expérimental, on obtient la décroissance attendue des fréquences propres avec la précontrainte, même si les valeurs expérimentales sont un peu plus “chahutées”. En revanche tout comme lors des essais sur la poutre, les simulations ne concordent pas avec les valeurs expérimentales, qui sont inférieures, ce qui pourrait signifier que l’encastrement n’est pas parfait. Mais dans l’état d’avancement actuel nous ne sommes pas en mesure de conclure à ce sujet. A noter tout de même que le système permet bien d’atteindre le but fixé, à savoir rendre les fréquences commensurables : par exemple pour une précontrainte à 7000N, on obtient  $f_1 = \frac{2}{3}f_2$ .

En conclusion, concernant les essais sur la plaque, les objectifs sont loin d’avoir été atteints puisqu’aucune campagne d’essai sinus n’a été lancée. Quelques points positifs ressortent tout de même de cette étude : d’une part le banc est maintenant opérationnel et semble en mesure de répondre à nos attentes. De plus, grâce aux essais sur la poutre le mode opératoire à suivre est mieux maîtrisé et nous sommes en mesure d’expliquer à défaut de résoudre, certains problèmes communs aux deux montages, en particulier la dérive des fréquences propres.

## VI.6 Bilan du chapitre

L’objectif de ce chapitre était de présenter les montages et les résultats expérimentaux dont nous disposons pour l’étude de la réponse forcée de structures minces. Deux bancs y sont décrits : une poutre bi-encastrée et une plaque précontrainte. Ce dernier dispositif est dédié à l’observation de caractéristiques non linéaires et en particulier à celles de bifurcations de modes, théoriquement accessibles grâce au dispositif de précontrainte, et a été conçu dans cet objectif. Le montage poutre, préexistant était destiné au départ à “s’initier” aux manipulations expérimentales, en attendant la réalisation du banc plaque.

Le montage plaque est maintenant disponible, mais seules quelques études préliminaires ont été menées et aucun résultat intéressant n’a été présenté ici. En effet, les essais sur la poutre ont été beaucoup plus longs que prévu au détriment de résultats sur la plaque, mais ont permis de

dégager un certain nombre d'informations, constituant une aide importante pour la conception du deuxième banc.

Ces premiers essais sur la poutre droite nous ont permis d'observer quelques phénomènes intéressants, caractéristiques des non linéarités géométriques, notamment l'hysteresis de la réponse forcée pour un balayage en fréquence. Divers problèmes ont également été mis à jour, tels que la variations des fréquences propres d'un essai à l'autre ou au cours d'un même essai. Quelques pistes ont été proposées pour expliquer cela, essentiellement la présence simultanée d'un défaut géométrique et d'une précontrainte; ces deux points pouvant s'expliquer par les variations de température ou une mauvaise mise en place de la structure. L'influence de ces deux paramètres est étudiée en simulation et on parvient à recalibrer le modèle sur un essai de manière assez satisfaisante, en introduisant un défaut de la forme du mode 1, complété par une précontrainte en compression.

Pour conclure, les essais présentés ici sont récents et les résultats proposés incomplets mais offrant plusieurs perspectives. En effet, les essais sur la poutre ont permis de déterminer quel matériel utiliser, notamment en ce qui concerne l'excitation, et de mettre en place un mode opératoire efficace, bien que quelques points restent encore à préciser, en particulier l'influence réelle de la température. En parallèle, la conception et la réalisation du banc plaque ont été achevées et celui-ci va donc pouvoir être exploité pleinement. Pour compléter les essais sur la poutre il serait également intéressant d'observer la réponse pour des amplitudes plus importantes - pour aller par exemple vers un comportement chaotique - et sur plus modes, ou encore de visualiser les déformées.



# Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire est une contribution à l'étude des vibrations non linéaires de structures minces, par des approches numériques et expérimentales.

Un outil destiné au calcul de la réponse forcée harmonique de structures minces, en non linéaire géométrique, a été développé. Dans un premier temps, le problème de l'élastodynamique en grands déplacements est classiquement discrétisé par une méthode éléments finis. Ensuite, l'application de la méthode de l'équilibrage harmonique (EH) permet de chercher les solutions périodiques et conduit à l'écriture d'un système d'équations algébriques non linéaires dépendant des paramètres de l'excitation. Enfin, par application de la méthode asymptotique numérique (MAN), on effectue la continuation des branches de solutions en fonction soit de l'amplitude, soit de la pulsation de l'excitation. Ces deux méthodes, EH et MAN, ont été introduites indépendamment l'une de l'autre dans un code éléments finis existant. Pour l'EH, des éléments "harmoniques" ont été développés, valables quelque soit le nombre de termes retenus dans les séries harmoniques, d'où une souplesse d'utilisation appréciable. Quant à la MAN, elle fournit une méthode de calcul robuste et performante, facile à piloter, et permettant un traitement efficace des points de bifurcation et des branches secondaires. Au final on obtient l'expression des inconnues (déplacements et contraintes) en fonction des paramètres de la force d'excitation. De plus, un défaut de forme géométrique et une précontrainte ont également été introduits dans le modèle, afin de paramétrer celui-ci, notamment en vue des comparaisons expérimentales.

On dispose donc d'un outil numérique robuste, assez simple à utiliser et qui permet de traiter une large classe de structures (poutres, plaques et coques). Les résultats obtenus ont notamment été comparés avec succès à des exemples issus de la littérature et ont permis d'illustrer les caractéristiques d'un comportement non linéaire, en particulier les phénomènes d'hysteresis sur la résonance principale ou encore l'apparition de résonances secondaires et de bifurcations de branches. De plus, pour une amplitude d'excitation très faible, on est en mesure d'obtenir une représentation des modes non linéaires de structure.

Le code n'a pas été complètement optimisé, ce qui constitue une première limite, puisque la taille des systèmes traités, et donc le temps de calcul, augmente assez rapidement avec le nombre d'harmoniques. L'absence de prise en compte de l'amortissement constitue également une limite importante, surtout en vue des comparaisons expérimentales. Ces deux limitations sont cependant assez facile à résoudre, il ne s'agit que de questions "techniques", et de temps. En par-

ticulier pour l'amortissement, il "suffit" de choisir<sup>2</sup> un modèle et de l'implémenter dans le code, en introduisant notamment les termes en sinus dans l'équilibre harmonique. Enfin, dernier point important, aucune étude de stabilité n'a été présentée ici, bien qu'il s'agisse d'un complément indispensable au calcul de la réponse forcée. La démarche à suivre consisterait à introduire une perturbation dans le modèle et à étudier le comportement de la réponse au premier ordre (voir par exemple SZEMPLINSKA-STUPNICKA (1990b) ou SEYDEL (1994)).

En parallèle à l'approche numérique, une étude expérimentale a également été amorcée. Un banc d'essai pour l'étude de la réponse forcée de plaque ou de panneau galbé a été réalisé et est maintenant disponible. Il est équipé d'un dispositif de précontrainte, en vue de l'observation de phénomènes d'interaction de modes. En préalable, une première série d'essais a été effectuée sur un autre banc, une poutre bi-encastree, qui a permis l'observation des phénomènes non linéaires attendus : hysteresis ou encore apparition d'harmoniques. Mais le principal apport de ces essais a été la mise en place d'un mode opératoire fiable pour l'observation de la réponse forcée non linéaire. Quelques phénomènes indésirables ont également été observés, en particulier une variation des fréquences propres linéaires d'un essai à l'autre ou pendant les essais. L'introduction d'un défaut géométrique et d'une précontrainte dans le modèle numérique a permis de prendre en compte ces faits et de recalculer les simulations sur les essais de manière satisfaisante.

A court terme, les perspectives de ce travail sont d'une part de poursuivre l'étude expérimentale de la poutre et d'exploiter pleinement le banc d'essai "plaque précontrainte", en s'attachant particulièrement aux phénomènes de bifurcation et d'interaction de mode. Ensuite, d'un point de vue numérique, il faudrait répondre aux trois limites évoquées plus haut : optimisation du code, introduction de l'amortissement et étude de stabilité, ce qui a été exclu dans un premier temps en faveur de l'étude expérimentale.

A plus long terme, les perspectives principales de ce travail concernent divers points. Dans un premier temps, il serait intéressant de comparer les résultats donnés par l'équilibrage harmonique avec ceux fournis par d'autres méthodes, que ce soit pour la réponse libre ou forcée, et de voir notamment si les mêmes bifurcations sont obtenues. A ce sujet, une thèse a été initiée récemment, concernant le calcul de modes non linéaires par des méthodes d'intégration directe, type "shooting methods", et les premiers résultats concordent avec ceux obtenus par la méthode EHMAN. Une autre confrontation avec les méthodes de calcul de modes comme sous-espaces invariants de l'espace des phases sera à conduire.

Une deuxième perspective sera d'étendre la méthode pour la réponse à une excitation multi-harmonique (ce qui est faisable avec notre outil) ou aléatoire.

Enfin, le dernier point concerne l'utilisation des modes non linéaires pour la réduction de modèle. En effet, dans ce mémoire, ceux-ci n'ont pas été abordés directement, mais simplement calculés en cherchant la réponse forcée à une excitation très faible, conduisant à une expression "numérique" de ces modes. Avec quelques aménagements, on serait capable de fournir des expressions analytiques des modes. Il suffit pour cela d'améliorer à l'aide d'approximants de

---

<sup>2</sup>un choix simple serait celui d'un amortissement linéaire visqueux, obtenu par identification sur la réponse forcée pour de faibles niveaux d'excitation

Padé les développements en séries effectués à partir du point de départ du mode non linéaire. Cependant, comme constaté sur les exemples présentés dans ce mémoire, les modes comportent de nombreuses bifurcations et la façon de les utiliser dans une réduction de modèle reste un problème ouvert.



# TABLE DES FIGURES

I.1	Diverses représentations pour les modes linéaires : (a) dans le domaine fréquentiel, complétée ici par la réponse forcée en régime permanent, (b) ligne modale dans l'espace de configuration, (c) surface plane invariante dans l'espace des phases et orbite périodique. . . . .	16
I.2	Approche Rosenberg, ligne modale pour un système à deux degrés de liberté, $u_2 = X_2(u_{ref})$ : courbes passant par l'origine et finissant sur les surfaces équipotentielles pour un niveau d'énergie fixé. - - -cas linéaire, — cas non linéaire. . . . .	18
I.3	Diverses représentations pour les modes non linéaires : (a) dans le domaine fréquentiel, complété ici par la réponse forcée en régime permanent, (b) ligne modale dans l'espace de configuration, (c) surface plane invariante dans l'espace des phases et orbite périodique . . . . .	20
I.4	Système non linéaire à deux degrés de liberté, au repos (gauche), déformé (droite)	23
I.5	Système à deux ressorts, cas linéaire, pour $\omega_{01} = 1$ , $\omega_{02} = \sqrt{2}$ . Premier mode linéaire. (a) surface plane invariante dans l'espace des phases et orbite périodique (b) ligne modale dans l'espace de configuration, (c) dans le domaine fréquentiel, complété ici par la réponse forcée en régime permanent. . . . .	25
I.6	Relation amplitude-fréquence ( $u_i^1 = f(\Omega)$ ) pour le système à deux ressorts avec $\omega_{01} = 1$ , et $\omega_{02} = \sqrt{2}$ , calculée par l'EHMAN avec $N$ termes dans les développements harmoniques. (..) : $N = 2$ , (-.) : $N = 3$ , (- -) : $N = 4$ , traits pleins : $N = 8$ . (a) mode 1, (b) mode 2, (c) mode 2 avec une nouvelle branche. . . . .	26
I.7	Représentation du sous-espace invariant correspondant au premier mode non linéaire du système à deux ressorts, obtenu par la méthode EHMEN. A gauche dans l'espace de phase, avec quelques orbites périodiques (lignes noires) . En haut à droite, projection des orbites périodiques dans le plan $u_1, y_1$ . En bas à droite, orbites périodiques dans le plan $(u_1, u_2)$ : lignes modales à la Rosenberg. . . . .	26
I.8	Premier mode du système à deux ressorts. (...) : mode linéaire, traits pleins : EHMEN, (-.-) : TOUZÉ <i>et al.</i> (2003), $\diamond$ continuation des orbites périodiques. (a) : $\omega_{01} = \sqrt{0.5}$ , $\omega_{02} = \sqrt{6}$ , (b) : $\omega_{01} = \sqrt{1.7}$ , $\omega_{02} = \sqrt{6}$ , (c) : $\omega_{01} = \sqrt{3}$ , $\omega_{02} = 1$ ,	27
I.9	Réponse forcée du système (I.4) - Résonance primaire autour du premier mode .	30



I.10 Réponse forcée du système à deux ressorts, pour $2\Omega \approx \omega_{01}$ : résonance super-harmonique - Signal temporel (à gauche) et coefficient $a_2$ (obtenu par la méthode de l'équilibre harmonique) en fonction de la pulsation d'excitation (à droite), pour $F_1 = 0.01N$ . . . . .	32
II.1 Modèle de poutre et de plaque . . . . .	47
II.2 Différents états de la structure : parfaite, avec défaut initial, précontrainte et déformée . . . . .	52
III.1 Prédiction et corrections pour les méthodes incrémentales-itératives (à gauche) - Calcul des branches de solutions par la MAN (à droite) . . . . .	65
III.2 Point limite . . . . .	68
III.3 Passage d'une bifurcation par Newton-Raphson (a) et la MAN (b) . . . . .	69
III.4 Calcul de la réponse forcée non linéaire : rappel de la démarche. EDP : équation aux dérivées partielles - EDNL : équations différentielles non linéaires, (II.39), ( $n$ équations) - EANL : équations algébriques non linéaires, (III.11) ( $n \times H$ équations). . . . .	72
IV.1 Architecture du code Eve . . . . .	76
IV.2 Réorganisation des vecteurs degré de liberté pour l'application de l'équilibre harmonique . . . . .	78
IV.3 Résolution de $KU = F$ - Intérêt du stockage "chaîne". . . . .	81
IV.4 Post-traitement pour Eve . . . . .	82
IV.5 Valeur absolue de la réponse forcée d'une plaque carrée soumise à une excitation harmonique ponctuelle en son centre. Comparaison des résultats fournis dans AZRAR <i>et al.</i> (2002) et par Eve. . . . .	83
IV.6 Comparaison des résultats donnés par AZRAR <i>et al.</i> (2002) et par Eve- les pointillés fins représentent les modes non linéaires . . . . .	85
IV.7 Calcul d'une branche de solution avec Eve . . . . .	85
IV.8 Poutre encastree-encastree - Valeur absolue de la réponse forcée autour du premier mode - Harmonique 1 (à gauche) et 3 (à droite) - Mesure et excitation au quart de la longueur - Comparaison avec les résultats de RIBEIRO et PETYT (1999c) . . . . .	86
IV.9 Poutre encastree-encastree - Valeur absolue de la réponse forcée autour du premier mode - Bifurcation super-harmonique . . . . .	87
IV.10 Poutre encastree-encastree - Valeur absolue de la réponse forcée autour du premier mode - Mesure et excitation au milieu de la poutre . . . . .	87
IV.11 Poutre encastree-encastree - Bifurcation de l'harmonique 1 - Comparaison avec les résultats de RIBEIRO et PETYT (1999c) . . . . .	88
V.1 Réponse libre de la poutre bi-encastree - (a) : $q_0/h$ pour H variant de 2 à 5 - (b) : $q^1/h$ et $q^3/h$ pour H=5 . . . . .	95

V.2	Réponse libre de la poutre bi-encastree autour de $\omega_1$ - Déformées relevées pour diverses valeurs de la fréquence, en C, D et E (voir les points sur la figure V.1), pour H=5 - (a) : $\mathbf{q}_0/h$ - (b) : $\mathbf{q}^1/h$ et $\mathbf{q}^3/h$ . . . . .	95
V.3	Réponse libre de la poutre bi-encastree autour de $\omega_1$ - (a) : $\mathbf{q}_0/h$ pour H variant de 5 à 8, bifurcation - (b) $\mathbf{q}^1/h$ et $\mathbf{q}^5/h$ correspondants, pour $H = 5$ . . . . .	96
V.4	Réponse libre de la poutre bi-encastree autour de $\omega_1$ - Déformées relevées pour diverses valeurs de la fréquence, en A, B, F et G (voir les points sur la figure V.3), pour H=8 - (a) $\mathbf{q}_0/h$ en A( $\square$ ), B(+), F( $\triangleleft$ ) et G(o)- (b) $\mathbf{q}^1/h$ en F (o), G ( $\triangleright$ ) et $\mathbf{q}^5/h$ en F ( $\square$ ) et G ( $\times$ ) . . . . .	96
V.5	Réponse libre de la poutre bi-encastree à proximité de $\omega_2$ - (a) $\mathbf{q}_0/h$ pour H=2,3,5,6,8,9 - (b) $\mathbf{q}^1/h$ et $\mathbf{q}^3/h$ , pour H=8. . . . .	97
V.6	Réponse libre de la poutre bi-encastree à proximité de $\omega_2$ - Déformées correspondant à la figure V.5 pour H=8 en A(*), B(o) et C( $\square$ ) . . . . .	97
V.7	Réponse libre de la poutre bi-encastree à proximité de $\omega_3$ - (a) $\mathbf{q}_0/h$ à proximité de $\omega_3$ pour H=3,5,6,8 (b) Déformées pour H=6 en A ( $\times$ ), B( $\triangleleft$ ) et C( $\square$ ). . . . .	98
V.8	Poutre bi-encastree, réponse forcée - $\mathbf{q}_0/h$ en fonction de la pulsation d'excitation . . . . .	99
V.9	Réponse forcée de la poutre bi-encastree dans la zone B3 de la figure V.8 - (a) $\mathbf{q}_0/h$ - (b) Harmoniques : $\mathbf{q}^1/h$ ( $\triangleright$ ), $\mathbf{q}^3/h$ (*), $\mathbf{q}^5/h$ (+) et $\mathbf{q}^7/h$ (o) (les autres étant nulles) - (c) Déformées correspondantes pour $\Omega < 330rad/s$ ( $\nabla$ ), $330 < \Omega < 362rad/s$ (*) et $\Omega > 362rad/s$ , ( $\diamond$ ). . . . .	100
V.10	Réponse forcée de la poutre bi-encastree. $ \frac{q_0}{h} $ en fonction de la pulsation d'excitation, à proximité des modes (a) : 1 (b) : 3. (- -) : mode non linéaire, (-) réponse forcée pour H=6 ou 8, (-.-), réponse forcée pour H=4 . . . . .	101
V.11	Poutre bi-encastree - (a) Mode non linéaire 2, reprise de la courbe V.5(a) pour H=8 - (b) Réponse autour de $\omega_2$ : $\frac{q_0}{h}$ , ( $\cdots$ ) : mode non linéaire; réponse forcée : (-) sur la fondamentale (mode 2), (++) mode 4, (- -) liaison 2-4, (-.-) liaison 4-2 - (c) $ \frac{q_0}{h} $ , (- -) : mode non linéaire, (-) réponse forcée pour H=6 ou 8, (-.-), réponse forcée pour H=4. . . . .	103
V.12	Réponse forcée de la poutre bi-encastree à proximité de $\omega_1$ - (a) Déformées sur la branche AB (++) , passage de la bifurcation B (o), sur BC ( $\square$ ) et après C ( $\nabla$ ) - (b) Harmoniques correspondant à cette branche : $\mathbf{q}^1/h$ , $\mathbf{q}^3/h$ , $\mathbf{q}^5/h$ (les autres étant nulles) . . . . .	104
V.13	Réponse forcée de la poutre bi-encastree à proximité de $\omega_2$ - (a) Déformées sur la branche $E_1$ (*), passage de la bifurcation A ( $\nabla$ ), sur $F_1$ ( $\square$ ), passage de C (o), sur $E_4$ (+) - (b) Harmoniques correspondant à ces branches : $\mathbf{q}^1/h$ et $\mathbf{q}^3/h$ (les autres étant nulles) . . . . .	104
V.14	Réponse forcée de la poutre bi-encastree à proximité de $\omega_3$ - (a) Déformées avant le point A (++) , passage de A ( $\square$ ), après A (o) - (b) Harmoniques correspondantes : $\mathbf{q}^1/h$ , $\mathbf{q}^3/h$ , $\mathbf{q}^5/h$ (les autres étant nulles) . . . . .	105

V.15 Réponse forcée de la poutre bi-encastree à proximité de $\omega_2$ , harmoniques 1 ( $\mathbf{q}^1/h$ ) et 3 ( $\mathbf{q}^3/h$ ) - (a) Déformées sur la branche fondamentale $E_1$ - (b) Déformées sur $F_1$ . . . . .	105
V.16 Montage expérimental et schéma de la poutre à composante non linéaire . . . . .	107
V.17 Poutre à composante non linéaire : déformées modales (mode 1 :29Hz, mode 2 : 158 Hz) . . . . .	107
V.18 Poutre à composante non linéaire - Réponse forcée autour des modes 1 et 2, valeurs prises aux points a, b et c . . . . .	108
V.19 Poutre à composante non linéaire - (a) : Configuration parfaite et configuration avec défaut de forme dû au poids propre - (b) : Réponse forcée pour différentes amplitudes du défaut . . . . .	108
V.20 Géométrie et dimensions du gong . . . . .	109
V.21 Déformées modales du gong - (a) $f_2=67.3$ Hz - (b) $f_5= 190.1$ Hz. . . . .	110
V.22 Réponse forcée du gong, $\mathbf{q}_0/h$ en fonction de $\Omega/\omega_2$ : (- -) modes non linéaires (-) réponse forcée - (a) À proximité de $\omega_1$ - (b) Vers $\omega_2$ . . . . .	110
V.23 Réponse forcée du gong, harmoniques, (bleu,o) : $\mathbf{q}^0/h$ , (noir,+ ) : $\mathbf{q}^0/h$ , (rouge, $\square$ ) : $\mathbf{q}^2/h$ , (magenta, $\triangleleft$ ) : $\mathbf{q}^3/h$ , (vert, $\times$ ) : $\mathbf{q}^4/h$ - (a) À proximité de $\omega_1$ - (b) Vers $\omega_2$ . . . . .	110
VI.1 Poutre droite bi-encastree, (a) dispositif expérimental - (b) dimensions . . . . .	118
VI.2 Mise en place de la structure, encastrement et positionnement des mords - (b) vue dans le plan $xz$ . . . . .	119
VI.3 Dispositif d'excitation sans contact : bobine-aimant (photo et schéma) . . . . .	120
VI.4 Étalonage du système bobine-aimant, force appliquée à l'aimant en fonction de la tension aux bornes de la bobine pour différentes fréquences d'excitation. . . . .	120
VI.5 Montage expérimental, pour entrée de type sinus . . . . .	122
VI.6 Harmonique 1 de la réponse de la poutre en régime linéaire - (a) rapport déplacement/épaisseur en fonction de la fréquence d'excitation - (b) déphasage par rapport à l'excitation . . . . .	124
VI.7 Harmonique 1 de la réponse de la poutre pour différentes amplitudes d'excitation (voir le tableau VI.1 pour les caractéristiques précises des essais) - (a) rapport déplacement/épaisseur en fonction de la fréquence d'excitation - (b) déphasage par rapport à l'excitation . . . . .	125
VI.8 Harmoniques 2 et 3 (a) rapport déplacement/épaisseur en fonction de la fréquence d'excitation - (b) déphasage par rapport à l'excitation . . . . .	125
VI.9 Harmonique 1 de la réponse de la poutre autour du mode 2 - (a) rapport déplacement/épaisseur en fonction de la fréquence d'excitation - (b) déphasage par rapport à l'excitation . . . . .	126
VI.10 Harmoniques 2 et 3 du mode 2 (a) rapport déplacement/épaisseur en fonction de la fréquence d'excitation - (b) déphasage par rapport à l'excitation . . . . .	127

VI.11	Harmonique 1 de la réponse forcée, comparaison des essais 1 et 5 . . . . .	129
VI.12	Comparaison des résultats expérimentaux et simulés pour l'essai 3 (a) harmonique 1 (b) harmonique 3 . . . . .	130
VI.13	Défauts géométriques (h : épaisseur) . . . . .	131
VI.14	Réponse forcée avec prise en compte d'un défaut géométrique, harmonique 1 - (a) d1 (b) d2 . . . . .	132
VI.15	Réponse forcée avec prise en compte des défauts $d_1$ et $d_2$ un défaut géométrique, harmonique 2 et 3 . . . . .	132
VI.16	Réponse forcée avec prise en compte d'une précontrainte, harmonique 1 - (a) cas $s_1, s_2$ et $s_3$ (b) cas $s_4$ : ajout d'un défaut géométrique . . . . .	134
VI.17	Réponse forcée avec prise en compte d'une précontrainte, harmoniques 2 et 3 pour les cas $s_1, s_2$ et $s_3$ . . . . .	134
VI.18	Réponse forcée avec prise en compte d'une précontrainte et d'un défaut géométrique, cas $s_4$ - (a) harmonique 2 (b) harmonique 3 . . . . .	135
VI.19	Dispositif expérimental pour l'étude d'une plaque mince, éventuellement précontrainte . . . . .	136
VI.20	(a) Ensemble plaque/cadre pour réaliser l'encastrement - (b) Dispositif de précontrainte. . . . .	136
VI.21	(a) Modèle éléments finis de l'ensemble plaque+cadre (b) Evolution des fréquences propres avec la précontrainte, résultats des essais et simulations. . . . .	137
A.1	Réponse forcée du système I.4 - Comparaison échelles multiples/équilibre harmoniques pour H variable : $a_1$ en fonction de $\Omega/\omega_{01}$ . . . . .	167
A.2	Réponse forcée du système I.4 pour différentes amplitudes de l'excitation . . . . .	168
A.3	Réponse forcée du système I.4 pour $\alpha_2 = 0$ (non linéarités cubiques)- Comparaison EH-EM . . . . .	168
A.4	Réponse forcée du système I.4 pour $\alpha_3 = 0$ (non linéarités quadratiques)- Comparaison EH-EM . . . . .	169
C.1	Dispositifs utilisés pour l'étalonnage de l'excitateur (a) support fixe - (b) support mobile . . . . .	176
C.2	Solénoïde parfait parcouru par un courant $I$ . . . . .	176
C.3	Solénoïde parfait : (a) champ $\mathbf{B}$ en fonction de $x$ (b) $\frac{d\mathbf{B}}{dx}$ (ie force) en fonction de $x$ - $I=0.366$ A . . . . .	176
C.4	Relation force-tension aux bornes de la bobine (a) pour différentes positions de la bobine - (b) pour $x = 0$ et différentes fréquences d'excitation. Les valeurs de la légende sont en Hertz. . . . .	178



# LISTE DES TABLEAUX

IV.1	Plaque carrée, en appuis sur ses quatre côtés, soumise en son centre à une excitation harmonique - Relation déplacements-fréquences calculée par différentes méthodes - Voir figure IV.5 . . . . .	83
IV.2	Plaque rectangulaire ( $\frac{L}{l} = 2$ ), complètement encastrée, soumise en son centre à une excitation harmonique - Relation déplacements-fréquences calculée par l'EHMAN et la méthode proposée dans AZRAR <i>et al.</i> (2002) - Voir figure IV.6. . . . .	84
IV.3	Paramètres du calcul pour la branche supérieure de la figure IV.5 . . . . .	86
V.1	Premières fréquences et pulsations propres de la poutre bi-encastrée . . . . .	94
V.2	Caractéristiques des zones de bifurcation identifiées sur les figure V.8 et V.10. . .	101
V.3	Quelques fréquences propres du gong - (2) signifie qu'il s'agit d'une fréquence double. . . . .	109
VI.1	Caractéristiques des essais . . . . .	123
VI.2	Fréquences propres relevées pour chaque essai, en utilisant une excitation bruit blanc. Valeurs relevées avant application de l'excitation sinus. Lorsque les valeurs obtenues à la fin de l'essai sont sensiblement différentes, elles sont indiquées entre parenthèses. . . . .	124
VI.3	Influence d'un défaut de forme sur les premières fréquences propres . . . . .	131
VI.4	Prise en compte d'une précontrainte, caractéristiques des cas considérés. $d_x$ et $d_z$ sont les déplacements du bord gauche, respectivement dans les directions $x$ et $z$ . . . . .	133
VI.5	Fréquences propres (Hz) de la plaque encastrée pour différentes valeurs de la précontrainte . . . . .	138



# BIBLIOGRAPHIE

- R. ARQUIER, F. PÉRIGNON, ET B. COCHELIN. Numerical continuation of non linear modes of elastic structures. *Proceedings of EUROMECH Colloquium 457 on nonlinear modes of vibrating systems*, June 7-9 2004.
- L. AZRAR, R. BENAMAR, ET M. POTIER-FERRY. An asymptotic-numerical method for large-amplitude free vibrations of thin elastic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1998.
- L. AZRAR, R. BENAMAR, ET R.G. WHITE. A semi-analytical approach to the non-linear dynamic response of s-s and c-c beams at large vibration amplitudes part 1 : general theory and application to the single mode approach to free and forced vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 224(2) :183–207, 1999.
- L. AZRAR, E.H. BOUTYOUR, ET M. POTIER-FERRY. Non-linear forced vibrations of plates by an asymptotic-numerical method. *Journal of Sound and Vibration*, 252(4) :657–674, 2002.
- L. AZRAR, B. COCHELIN, N. DAMIL, ET M. POTIER-FERRY. An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behavior of elastic plates and shells. *International journal for numerical methods in engineering*, 36 :1251–1277, 1993.
- S. BAGUET ET B. COCHELIN. On the behaviour of the anm continuation in the presence of bifurcations. *Communications in numerical methods in engineering*, (19) :459–471, 2003.
- K-J. BATHE. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Inc., 1996.
- J-L. BATOZ, K-J. BATHE, ET L-W. HO. A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for numerical methods in engineering*, 15 :1771–1812, 1980.
- J.L. BATOZ ET M. BEN TAHAR. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *International Journal for numerical methods in engineering*, 18 :1655–1677, 1982.
- J.L. BATOZ ET G. DHATT. *Modélisations des structures par éléments finis - volume 2 : poutres et plaques*. Hermès, 1990.
- R. BENAMAR, M.M.K. BENNOUNA, ET R.G. WHITE. The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic structures - part 1 : simply supported and clamped-clamped beams. *Journal of Sound and Vibration*, 149(2) :179–195, 1991.



- R. BENAMAR, M.M.K. BENNOUNA, ET R.G. WHITE. The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic structures - part 2 : fully clamped isotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 164(2) :295–316, 1993.
- J.A. BENNETT ET J.G. EISLEY. A multiple degree of freedom approach to nonlinear beam vibration. *AIAA Journal*, 8 :734–739, 1970.
- M.M. BENNOUNA ET R.G. WHITE. The effects of large vibration amplitudes on the dynamic strain response of a clamped-clamped beam with consideration on fatigue life. *Journal of sound and vibration*, 96 :281–308, 1984.
- A. BLAQUIÈRE. *Analyse des systèmes non linéaires*. I.N.S.T.N.-P.U.F., 1966.
- N.N BOGOLIUBOV ET Y.A. MITROPOLSKI. *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires*. Gauthier-villars, 1962.
- N. BOIVIN, C. PIERRE, ET S.W. SHAW. Non-linear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. *Journal of Sound and Vibration*, 182(2) :336–341, 1995.
- N. BOIVIN, C. PIERRE, ET S.W. SHAW. Non-linear normal modes, invariance and modal dynamics approximations of a linear beam connected to a non-linear spring. *Nonlinear dynamics*, to appear.
- R. BOUC ET S. BELLIZZI. Une nouvelle approche pour l'existence et le calcul des modes non linéaires. *Publications du LMA*, 156 :39–58, 2003.
- R.R. CHEN, C. MEI, ET H.F. WOLFE. Comparison of finite element non-linear beam random response with experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 195(5) :719–737, 1996.
- C.Y. CHIA. *Nonlinear analysis of plates*. McGraw-Hill, 1980.
- B. COCHELIN. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers and structures*, 53(5) :1181–1192, 1994.
- B. COCHELIN. Modes non linéaires des structures élastiques : quelques définitions et méthodes de calcul. *Publications du LMA*, 156 :1–14, 2003.
- B. COCHELIN, D. DAMIL, ET M. POTIER-FERRY. The asymptotic-numerical method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics. *Revue européenne des éléments finis*, vol 3(2) :281–297, 1994a.
- B. COCHELIN, N. DAMIL, ET M. POTIER-FERRY. Asymptotic numerical methods and pade approximants for non-linear elastic structures. *International journal for numerical methods in engineering*, 37 :1187–1213, 1994b.
- B. COCHELIN ET F. PÉRIGNON. Résolution de petits systèmes algébriques par la man sous matlab. *Revue européenne des éléments finis*, à paraître, 2004.

- 
- M.A. CRISFIELD. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1. John Wiley and Sons, 1997a.
- M.A. CRISFIELD. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, advanced topics*, volume 2. John Wiley and Sons, 1997b.
- N. DAMIL ET M. POTIER-FERRY. A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Science*, 28(9) :943–957, 1990.
- J.P. DEN HARTOG. *Vibrations mécaniques*. Dunod, 1960.
- K. EL BIKRI, R. BENAMAR, ET M. BENNOUNA. Geometrically non-linear free vibrations of clamped simply supported rectangular plates. part i : the effects of large vibration on the fundamental mode shape. *Computers and structures*, 81 :2029–2043, 2003.
- M. EL KADIRI, R. BENAMAR, ET R.G. WHITE. The non-linear free vibration of fully clamped rectangular plates : second non-linear modes for various aspect ratios. *Journal of Sound and Vibration*, 228(2) :333–358, 1999.
- M. EL KADIRI, R. BENAMAR, ET R.G. WHITE. Improvement of the semi-analytical method, for determining the geometrically non-linear response of thin straight structures. part i : application to clamped-clamped and simply supported-clamped beams. *Journal of Sound and Vibration*, 249(2) :263–305, 2002.
- COST F3. Numéro spécial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1), 2003.
- D.G. FERTIS. *Mechanical and structural vibrations*. Wiley interscience, 1995.
- D. GERADIN, M. RIXEN. *Théorie des vibrations - Application à la dynamique des structures*. Masson, 1993.
- J. GUCKENHEIMER ET P. HOLMES. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag - Applied Mathematical sciences, 1983.
- B. HALPHEN ET Q.S. NGUYEN. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de Mécanique*, 14(1) :39–63, 1975.
- W. HAN ET M. PETYT. Geometrically nonlinear vibration analysis of thin rectangular plates using the hierarchical finite element method - 1 : the fundamental mode of isotropic plates. *Computers and structures*, 63(2) :295–308, 1997a.
- W. HAN ET M. PETYT. Geometrically nonlinear vibration analysis of thin rectangular plates using the hierarchical finite element method - 2 : 1st mode of laminated plates and higher modes of isotropic and laminated plates. *Computers and structures*, 63(2) :309–318, 1997b.
- C. HAYASHI. *Nonlinear oscillations in physical systems*. Princeton univ. press, 1985.

- C.S. HSU. On the application of elliptic functions in nonlinear forced oscillations. *Journal Quarterly journal of applied mathematics*, 17 :393–407, 1960.
- J.R. HUTCHINSON. Vibration of plates. *invited paper, BEM X, Springer-verlag 1988, vol 4*, 1988.
- L. JEZEQUEL ET C.H. LAMARQUE. Analysis of nonlinear structural vibrations by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149 :429–459, 1991.
- W. LACARBONARA. A theoretical and experimental investigation of nonlinear vibrations of buckled beam. Master's thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic institute and State university, 1997.
- C. LALANNE. *Vibrations sinusoidales*. Hermès, 1999.
- R.S. LANGLEY. Harmonic linearisation of geometrically non-linear finite element models. *Computers and Structures*, 28(2) :165–172, 1988.
- S.L. LAU ET Y.K. CHEUNG. Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 48 :959–964, 1981.
- S.L. LAU, Y.K. CHEUNG, ET S.Y. WU. Nonlinear vibration of thin elastic plates part 2 : Internal resonance by amplitude-incremental finite element. *Journal of Applied Mechanics*, 51 :845–851, 1984a.
- S.L. LAU, Y.K. CHEUNG, ET S.Y. WU. Nonlinear vibration of thin elastic plates part1 : Generalized incremental hamilton's principle and element formulation. *Journal of Applied Mechanics*, 51 :837–844, 1984b.
- A.W. LEISSA. The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 31(3) : 257–293, 1973.
- A.Y.T. LEUNG ET T.C. FUNG. Non-linear steady state vibration of frames by finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 28 :1599–1618, 1989.
- A.Y.T. LEUNG ET S.G. MAO. A symplectic galerkin method for non-linear vibration of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 183(3) :475–491, 1995.
- R. LEWANDOWSKI. Application of the ritz method to the analysis of non-linear free vibrations of beams. *Journal of Sound and Vibration*, 114(1) :91–101, 1987.
- R. LEWANDOWSKI. Non-linear, steady-state vibration of structures by harmonic balance/finite element method. *Computers and structures*, 44(1) :287–296, 1992.
- R. LEWANDOWSKI. Solutions with bifurcation points for free vibration of beams : an analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 177(2) :239–249, 1994.

- 
- R. LEWANDOWSKI. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures - part 1 : numerical strategy and examples. *International Journal of Solids and Structures*, 34(15) :1949–1964, 1997a.
- R. LEWANDOWSKI. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures - part 1 : Theoretical background. *International Journal of Solids and Structures*, 34(15) :1925–1947, 1997b.
- K.M. LIEW, Y. XIANG, ET S. KITIPORNCHAI. Research on thick plate vibration : a literature survey. *Journal of Sound and Vibration*, 180(1) :163–176, 1995.
- P. MANNEVILLE. Systèmes dynamiques et chaos. Disponible sur internet : <http://www.ladhyx.polytechnique.fr/people/pops/dnl.pdf>, 1998-1999.
- C. MEI. Finite element displacement method for large amplitude free flexural vibrations of beams and plates. *Computers and Structures*, 3 :163–174, 1973.
- C. MEI. A finite element method for non-linear forced vibrations of rectangular plates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 23 :1104–1110, 1985.
- L. MEIROVITCH. *Analytical Methods in Vibrations*. The Macmillan Company, 1967.
- B. NAGESWARA RAO ET S.R.R. PILLAI. Large-amplitude vibrations of laminated anisotropic thin plates based on harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 154(1) : 173–177, 1992.
- A.H. NAYFEH. *perturbation methods*. Wiley, 1973.
- A.H. NAYFEH. *Problems in perturbation*. 1985.
- A.H. NAYFEH ET B. BALACHANDRAN. *Applied Nonlinear dynamics - Analytical, computational and experimental methods*. Wiley, 1995.
- A.H. NAYFEH ET D.T. MOOK. *Nonlinear Oscillations*. Wiley interscience, New York, 1979.
- A.H. NAYFEH ET S.A. NAYFEH. On nonlinear modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116 :129–136, 1994.
- F PERIGNON. Vibrations non-linéaires d'un assemblage combustible r.e.p. sous écoulement : identification et comportement sous séisme. *Mémoire de DEA*, 2000.
- E. PESHEK, C. PIERRE, ET S.W. SHAW. A new galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 249(5) :971–993, 2002.
- S.R.R. PILLAI ET B. NAGESWARA RAO. On nonlinear free vibrations of simply supported uniform beams. *Journal of Sound and Vibration*, 159(3) :527–531, 1992.

- S. PISAPIA. *Identification du comportement vibratoire non-linéaire d'un assemblage combustible de réacteur à eau pressurisée*. PhD thesis, Thèse de l'université de la Méditerranée, Marseille, 2004.
- R.H. RAND. A direct method for non-linear normal modes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 9 :363–368, 1974.
- J.N. REDDY. *Mechanics of laminated composite plates - Theory and analysis*. CRC Press, Inc., 1997.
- J.N. REDDY, C.L. HUANG, ET I.R. SINGH. Large deflections and large amplitude vibrations of axisymmetric circular plates. *International journal for numerical methods in engineering*, 17 :527–531, 1981.
- P RIBEIRO. *Geometrical nonlinear vibration of beams and plates by the hierarchical finite element method*. PhD thesis, University of Southampton - Institute of Sound and Vibration Research, 1998.
- P. RIBEIRO. The second harmonic and the validity of duffing's equation for vibration of beams with large displacements. *Computers and structures*, 79 :107–117, 2001.
- P. RIBEIRO ET M. PETYT. Geometrical non-linear, steady state, forced, periodic vibration of plates, part 1 : model and convergence studies. *Journal of Sound and Vibration*, 226(5) : 955–983, 1999a.
- P. RIBEIRO ET M. PETYT. Geometrical non-linear, steady state, forced, periodic vibration of plates, part 2 : stability study and analysis of multi-modal response. *Journal of Sound and Vibration*, 226(5) :985–1010, 1999b.
- P. RIBEIRO ET M. PETYT. Non-linear vibration of beams with internal resonance by the hierarchical finite-element method. *Journal of Sound and Vibration*, 224(4) :591–624, 1999c.
- P. RIBEIRO ET M. PETYT. Non-linear free vibration of isotropic plates with internal resonances. *International journal of non-linear mechanics*, 35 :263–278, 2000.
- R.M. ROSENBERG. The normal modes of nonlinear n-degrees-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 29 :7–14, 1962.
- R.M. ROSENBERG. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in applied mechanics*, pages 155–242, 1966.
- B.S. SARMA ET T.K. VARADAN. Ritz finite element approach to nonlinear vibrations of beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20 :353–367, 1984.
- S. SASSI ET G.L. OSTIGUY. Effects of initial geometric imperfections on the interactions between forced and parametric vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 178(1) :41–54, 1994.

- 
- M. SATHYAMOORTHY. Nonlinear vibration analysis of plates : a review and survey of current developments. *Applied Mechanics Review*, 40(11) :1553–1561, 1987.
- R. SEYDEL. *Practical Bifurcation and Stability Analysis, from equilibrium to chaos*. Springer-Verlag, second edition, 1994.
- S.W. SHAW ET C. PIERRE. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1) :85–124, 1993a.
- S.W. SHAW ET C. PIERRE. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169 :319–347, 1993b.
- S. SRIDHAR, D.T. MOOK, ET A.H. NAYFEH. Non-linear resonances in the forced response of plates, part i : symmetric responses of circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 41(3) : 359–373, 1975.
- A.V. SRINIVASAN. Non-linear vibrations of beams and plates. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1 :179–191, 1966.
- J.S. STRUTT (LORD RAYLEIGH). *Theory of sound*. Dover publications, 1945.
- W. SZEMPLINSKA-STUPNICKA. *The behavior of nonlinear vibrating systems - Volume I - Fundamental concepts and methods : application to single-degree-of-freedom systems*. Kluwer academic publishers, 1990a.
- W. SZEMPLINSKA-STUPNICKA. *The behavior of nonlinear vibrating systems - Volume II - Advanced concepts and application to multi-degree-of-freedom-systems*. Kluwer academic publishers, 1990b.
- O. THOMAS. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Octobre 2001.
- S. TIMOSHENKO. *Théorie des vibrations*. Librairie polytechnique Ch. Béranger, 1939.
- C. TOUZÉ. A normal form approach for non-linear normal modes. *Publications du LMA*, 156 : 15–38, 2003.
- C. TOUZÉ, THOMAS O., ET CHAIGNE A. Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, in press, corrected proof, 2003.
- Universität Gesamthochschule Kassel - ISBN 3-89792-055-7. *Proceedings of the International Conference on Structural System Identification*, September 2001.

- A.F. VAKAKIS, L.I. MANEVITCH, Y.V. MIKHLIN, V.N. PILIPCHUK, ET A.A. ZEVIN. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. John Wiley and Sons, inc., Wiley Series in Nonlinear Science, 1996.
- R. VAN DOOREN. Two modes subharmonic vibrations of order 1/9 of a nonlinear beam forced by a two modes harmonic load. *Journal of Sound and Vibration*, 41 :133–142, 1975.
- R. VAN DOOREN ET R. BOUC. Two modes subharmonic and harmonic vibrations of a nonlinear beam forced by a two mode harmonic load. *International Journal of nonlinear mechanics*, 10 :271–280, 1975.
- P. VANNUCCI, B. COCHELIN, N. DAMIL, ET M. POTIER-FERRY. An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. *International journal for numerical methods in engineering*, 41 :1365–1389, 1998.
- L.N. VIRGIN. *Introduction to Experimental Nonlinear Dynamics A case Study in Mechanical Vibration*. Cambridge University Press, 2000.
- R.G. WHITE. Effects of non-linearity due to large deflections in the resonance testing of structures. *Journal of Sound and Vibration*, 16(2) :255–267, 1971.
- K. WORDEN. On jump frequencies in the response of the duffing oscillator. *Journal of Sound Vibration*, 198(4) :522–525, 1996.
- K. WORDEN ET G.R. TOMLINSON. *Nonlinearity in structural dynamics*. IOP, 2001.
- H. ZAHROUNI, B. COCHELIN, ET M. POTIER-FERRY. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 175 :71–85, 1999.
- O.C. ZIENKIEWICZ ET R.L. TAYLOR. *The Finite Element Method - Vol.2 Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-linearity*. McGraw-Hill Book Company, fourth edition edition, 1991.
- O.C. ZIENKIEWICZ ET R.L. TAYLOR. *The Finite Element Method - Vol.1, Basic Formulation and linear problems*. McGraw-Hill Book Company, fourth edition edition, 1994.

# Annexes





# ANNEXE A

## Quelques compléments à propos du système à deux ressorts

On reprend dans cette annexe le cas du système à deux ressorts (schéma I.4), pour lequel on calcule la réponse forcée de manière analytique. Il s'agit d'une part de détailler la méthode des échelles multiples et d'autre part de comparer cette dernière avec la méthode de l'équilibre harmonique, qui est celle utilisée tout au long de ce mémoire.

On considère donc le système (I.36), rappelé ci-dessous, avec une force mono-harmonique appliquée selon la direction  $\boldsymbol{x}_1$  telle que  $E_1(t) = F \cos \Omega t$  :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_{01}^2 u_1 + \alpha_2 \left( \frac{3}{2} \omega_{01}^2 u_1^2 + \frac{1}{2} \omega_{01}^2 u_2^2 + \omega_{02}^2 u_1 u_2 \right) + \alpha_3 \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2} (u_1^2 + u_2^2) u_1 = E_1(t) \\ \ddot{u}_2 + \omega_{02}^2 u_2 + \alpha_2 \left( \frac{3}{2} \omega_{02}^2 u_2^2 + \frac{1}{2} \omega_{02}^2 u_1^2 + \omega_{01}^2 u_1 u_2 \right) + \alpha_3 \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2} (u_1^2 + u_2^2) u_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

## A.1 Application de la méthode des échelles multiples

On traite ici en détail le calcul de la réponse forcée autour de la première pulsation propre,  $\omega_{01}$ . La méthode consiste à rechercher les solutions sous la forme d'un développement asymptotique d'un petit paramètre  $\epsilon$ . Pour cela, on commence par poser :

$$F = \epsilon^3 f, \quad \Omega = \omega_{01} + \epsilon^2 \sigma, \quad T_i = \epsilon^i t$$

et

$$u_i(t; \epsilon) = \epsilon u_{i1}(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 u_{i2}(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^3 u_{i3}(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (\text{A.2})$$

L'introduction du paramètre  $\epsilon$  permet de fixer l'ordre de grandeur de la force et de faire apparaître celle-ci au même niveau que les non linéarités dans les schémas obtenus par application des échelles multiples. En outre,  $\sigma$  définit l'écart par rapport à la résonance principale autour du mode 1.

On reporte les séries A.2 dans A.1 et on égale les coefficients de  $\epsilon$  à chaque ordre, ce qui conduit à :

**ordre 1 :**

$$\begin{aligned} D_{00}u_{11} + \omega_{01}^2 u_{11} &= 0 \\ D_{00}u_{21} + \omega_{02}^2 u_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

**ordre 2 :**

$$\begin{aligned} D_{00}u_{12} + \omega_{01}^2 u_{12} &= -2D_{01}u_{11} - \alpha_2 \left( \frac{3}{2} \omega_{01}^2 u_{11}^2 + \frac{1}{2} \omega_{01}^2 u_{21}^2 + \omega_{02}^2 u_{11} u_{21} \right) \\ D_{00}u_{22} + \omega_{02}^2 u_{22} &= -2D_{01}u_{21} - \alpha_2 \left( \frac{3}{2} \omega_{02}^2 u_{21}^2 + \frac{1}{2} \omega_{02}^2 u_{11}^2 + \omega_{01}^2 u_{11} u_{21} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

**ordre 3 :**

$$\begin{aligned} D_{00}u_{13} + \omega_{01}^2 u_{13} &= -2D_{01}u_{12} - D_{11}u_{11} - 2D_{20}u_{11} - \alpha_3 \frac{1}{2} (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) (u_{11}^2 + u_{21}^2) u_{11} \\ &\quad - \alpha_2 \omega_{02}^2 (u_{12} u_{21} + u_{11} u_{22}) - \alpha_2 \omega_{01}^2 (3u_{11} u_{12} + u_{21} u_{22}) + f \cos \Omega t \\ D_{00}u_{23} + \omega_{02}^2 u_{23} &= -2D_{01}u_{22} - D_{11}u_{21} - 2D_{20}u_{21} - \alpha_3 \frac{1}{2} (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) (u_{11}^2 + u_{21}^2) u_{21} \\ &\quad - \alpha_2 \omega_{01}^2 (u_{12} u_{21} + u_{11} u_{22}) - \alpha_2 \omega_{02}^2 (3u_{21} u_{22} + u_{11} u_{12}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Avec :  $D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial T_i \partial T_j}$ .

La solution générale de (A.3) s'écrit :

$$u_{i1} = F_i(T_1, T_2) e^{(i\omega_{i0} T_0)} + \bar{F}_i(T_1, T_2) e^{(-i\omega_{i0} T_0)} \quad (\text{A.6})$$

On reporte ce résultat dans (A.4) :

$$\begin{aligned} D_{00}u_{12} + \omega_{01}^2 u_{12} &= -2i\omega_{01} \frac{\partial F_1}{\partial T_1} e^{i\omega_{01} T_0} \\ &\quad - \frac{3}{2} \alpha_2 \omega_{01}^2 (F_1 \bar{F}_1 + F_1^2 e^{2i\omega_{01} T_0}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_{01}^2 (F_2 \bar{F}_2 + F_2^2 e^{2i\omega_{02} T_0}) \\ &\quad - \alpha_2 \omega_{02}^2 F_1 (F_2 e^{i(\omega_{01} + \omega_{02}) T_0} + \bar{F}_2 e^{i(\omega_{01} + \omega_{02}) T_0}) \\ &\quad + \text{termes conjugués} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

et un terme similaire pour la deuxième équation ...

On commence par éliminer les éléments qui conduisent à des termes séculaires (i.e. non bornées dans le temps) dans la réponse. En l'absence de résonance interne, cela conduit à :

$$\frac{\partial F_i}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow F_i(T_1, T_2) = F_i(T_2) \quad (\text{A.8})$$

Ensuite la résolution de (A.4) donne  $u_{12}$  et  $u_{22}$  :

$$\begin{aligned} \frac{u_{12}}{\alpha_2} &= \frac{1}{2} F_1(T_2)^2 e^{2i\omega_{01}T_0} + \frac{1}{2} \frac{\omega_{01}^2}{(2\omega_{02}-\omega_{01})(2\omega_{02}+\omega_{01})} F_2(T_2)^2 e^{2i\omega_{02}T_0} + \frac{\omega_{02}}{\omega_{02}+2\omega_{01}} F_1(T_2) F_2(T_2) e^{i(\omega_{02}+\omega_{01})T_0} \\ &\quad + \frac{\omega_{02}}{\omega_{02}-2\omega_{01}} \overline{F_1(T_2)} F_2(T_2) e^{iT_0(\omega_{02}-\omega_{01})} - \frac{1}{2} |F_2(T_2)|^2 - \frac{3}{2} |F_1(T_2)|^2 + \text{termes conjugués} \\ \frac{u_{22}}{\alpha_2} &= \frac{1}{2} \frac{\omega_{02}^2}{(2\omega_{01}-\omega_{02})(2\omega_{01}+\omega_{02})} F_1(T_2)^2 e^{2i\omega_{01}T_0} + \frac{1}{2} F_2(T_2)^2 e^{2i\omega_{02}T_0} + \frac{\omega_{01}}{\omega_{01}-2\omega_{02}} \overline{F_1(T_2)} F_2(T_2) e^{iT_0(\omega_{02}-\omega_{01})} \\ &\quad + \frac{\omega_{01}}{\omega_{01}+2\omega_{02}} F_1(T_2) F_2(T_2) e^{i(\omega_{02}+\omega_{01})T_0} - \frac{1}{2} |F_1(T_2)|^2 - \frac{3}{2} |F_2(T_2)|^2 + \text{termes conjugués} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

On pose alors  $F_i(T_2) = a_i(T_2) e^{i\beta_i(T_2)}$  et on obtient après report de (A.6) et (A.9) dans (A.2) :

$$\begin{aligned} u_1 &= \epsilon a_1 \cos \Omega t + \alpha_2 \epsilon^2 \left( \frac{a_1^2}{4} \cos 2\Omega t + \frac{1}{2} \frac{\cos(\Omega+\omega_{02})t}{\omega_{02}+2\omega_{01}} + \frac{1}{4} \frac{a_2^2 \omega_{01}^2}{4\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2} \cos 2\omega_{02}t \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{a_1 a_2 \omega_{02}}{\omega_{02}-2\omega_{01}} \cos(\Omega - \omega_{02})t - \frac{3a_1^2}{4} - \frac{a_2^2}{4} + O(\epsilon^3) \\ u_2 &= \epsilon a_2 \cos \omega_{02}t + \alpha_2 \epsilon^2 \left( \frac{a_2^2}{4} \cos 2\omega_{02}t + \frac{1}{2} \frac{\cos(\Omega+\omega_{02})t}{\omega_{01}+2\omega_{02}} + \frac{1}{4} \frac{a_1^2 \omega_{02}^2}{4\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2} \cos 2\Omega t \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{a_1 a_2 \omega_{01}}{\omega_{01}-2\omega_{02}} \cos(\Omega - \omega_{02})t - \frac{3a_2^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Pour calculer les  $a_i$ , on utilise (A.5) qui s'écrit maintenant (en posant  $\gamma(T_2) = \sigma T_2 - \beta_1$ ) :

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial \gamma}{\partial T_2} &= \sigma a_1 + P_1 a_1^3 + P_2 a_1 a_2^2 + \frac{k \cos \gamma}{2\omega_{01}} \\ \frac{\partial a_1}{\partial T_2} &= \frac{k \sin \gamma}{2\omega_{01}} \\ a_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial T_2} &= P_3 a_2^3 + P_4 a_2 a_1^2 \\ \frac{\partial a_2}{\partial T_2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Avec

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{3}{16} \frac{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \alpha_3}{\omega_{01}} + \frac{1}{16} \frac{(60\omega_{01}^4 - 7\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - 3\omega_{02}^4) \alpha_2^2}{(2\omega_{01} - \omega_{02})(2\omega_{01} + \omega_{02}) \omega_{01}} \\ P_2 &= -\frac{1}{8} \frac{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \alpha_3}{\omega_{01}} + \frac{1}{8} \frac{(4\omega_{02}^6 + 4\omega_{01}^6 - 37\omega_{01}^2 \omega_{02}^4 - 37\omega_{01}^4 \omega_{02}^2) \alpha_2^2}{(\omega_{01} - 2\omega_{02})(2\omega_{01} + \omega_{02})(2\omega_{02} + \omega_{01})(2\omega_{01} - \omega_{02}) \omega_{01}} \\ P_3 &= \frac{3}{16} \frac{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \alpha_3}{\omega_{02}} + \frac{1}{16} \frac{(60\omega_{02}^4 - 3\omega_{01}^4 - 7\omega_{01}^2 \omega_{02}^2) \alpha_2^2}{(\omega_{01} - 2\omega_{02})(2\omega_{02} + \omega_{01}) \omega_{02}} \\ P_4 &= -\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} P_2 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

On s'intéresse au régime permanent, qui correspond à  $\frac{\partial \gamma}{\partial T_2} = \frac{\partial a_1}{\partial T_2} = \frac{\partial \beta_2}{\partial T_2} = \frac{\partial a_2}{\partial T_2} = 0$ , et donc aux points d'équilibre du système (A.11). Deux cas se présentent (en plus du cas  $a_1 = a_2 = 0$ ) :

Soit  $a_2 = 0$  et  $a_1$  solution de :

$$\sigma = \pm \frac{F}{2\omega_{01}a_1} - P_1 a_1^2 \quad (\text{A.13})$$

Soit  $a_1$  et  $a_2$  non nuls et solutions de :

$$\begin{aligned} \sigma a_1 + P_5 a_1^3 &= \pm \frac{F}{2\omega_{01}} \\ a_2^2 &= -\frac{P_4}{P_3} a_1^2 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

avec

$$P_5 = -\alpha_2^2 \frac{(\omega_2 - \omega_{01})(\omega_{01} + \omega_{02})(3\omega_{01}^4 - 14\omega_{02}^2\omega_{01}^2 + 3\omega_{02}^4)}{(\omega_{02} - 2\omega_{01})(\omega_{02} + 2\omega_{01})\omega_{01}(2\omega_{02} + \omega_{01})(2\omega_{02} - \omega_{01})} \quad (\text{A.15})$$

Dans ce cas, des solutions existent pour :

$$\omega_{01} \neq 2\omega_{02} \text{ et } \omega_{02} \in [0, \frac{\sqrt{3}}{3}\omega_{01}[ \cup ]2\omega_{01}, \infty[ \quad (\text{A.16})$$

Pour  $\omega_{01} = 1$ ,  $\omega_{02} = \sqrt{2}$ , seul le premier cas est possible et conduit à la représentation de  $a_1$  en fonction de  $\sigma$  de la figure I.9, avec, à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} u_1 &\approx \epsilon a_1 \cos \Omega t \\ u_2 &\approx 0 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Pour le calcul de la réponse en présence de résonance super-harmonique, la démarche est similaire à celle présentée ci-dessus si ce n'est qu'on dimensionne maintenant la force pour qu'elle apparaisse en même temps que la réponse libre, caractéristique de la réponse sur-harmonique. On pose donc  $F = \epsilon f$  et on se place à proximité de  $\frac{\omega_{01}}{2}$ , i.e.  $2\Omega = \omega_{01} + \sigma\epsilon$ . De même en présence de résonance interne on introduit un nouveau paramètre,  $\sigma_2$ , tel que  $\omega_{02} = 2\omega_{01} - \epsilon\sigma_2$ . Les calculs pour aboutir à (I.45) ou (I.49) sont proches de ceux donnés plus haut et ne seront pas détaillés ici.

## A.2 Application de l'équilibre harmonique

On se propose maintenant d'utiliser la méthode de l'équilibre harmonique à un terme pour calculer la réponse forcée, à la résonance principale, afin de comparer les résultats à ceux fournis par la méthode des échelles multiples. En posant  $u_i(t) = a_i \cos \Omega t$ , (A.1) conduit à :

$$a_1 = \frac{F}{\omega(a_1)^2 - \Omega^2}, \quad \text{pour } \omega(a_1) = \sqrt{\omega_{01}^2 + \frac{3}{8}\alpha_3(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)a_1^2} \quad (\text{A.18})$$

$\omega(a_1)$  donne la réponse libre ("backbone curve"), ossature de la résonance. Avec  $\Omega = \omega_{01} + \sigma$ , puis  $\Omega^2 \approx \omega_{01}^2 + 2\omega_{01}\sigma$ , (A.18) se réécrit sous un format plus adapté à une comparaison avec (A.13) :

$$\sigma \approx \pm \frac{F}{2\omega_{01}a_1} + \frac{3}{16} \frac{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)\alpha_3}{\omega_{01}} a_1^2 \quad (\text{A.19})$$

Les corrections apportées par les non linéarités cubiques sont identiques dans les deux méthodes (termes proportionnels à  $\alpha_3$ ). Par contre, le comportement obtenu par application de l'équilibre harmonique à un terme est raidissant, ce qui est en contradiction avec le résultat "échelles multiples". En fait les non linéarités issues des termes quadratiques ne sont pas prises en compte dans (A.19) (pas de terme en  $\alpha_2$ ), ce qui conduit à un résultat faux. Pour pallier à ce dernier

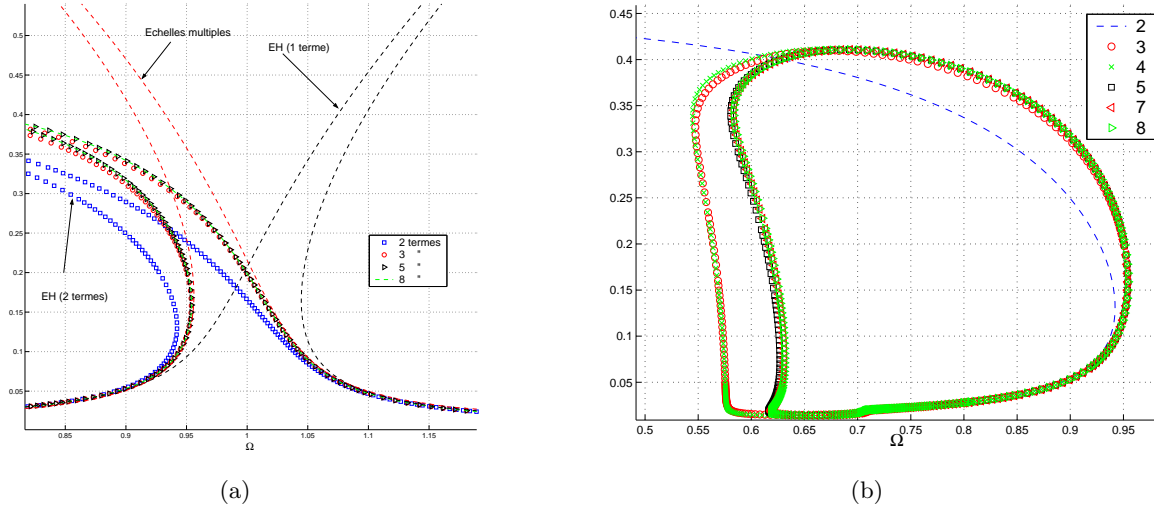


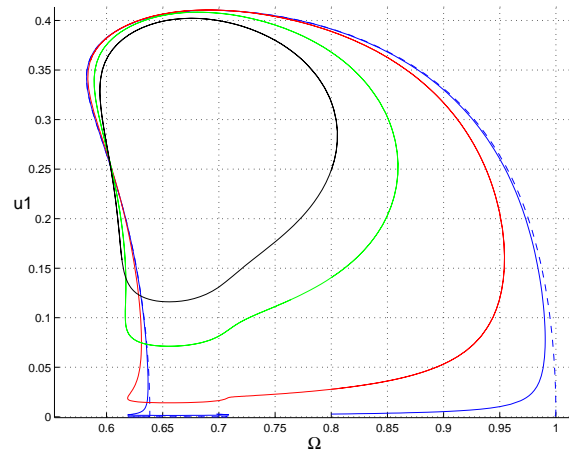
FIGURE A.1 - Réponse forcée du système I.4 - Comparaison échelles multiples/équilibre harmoniques pour  $H$  variable :  $a_1$  en fonction de  $\Omega/\omega_{01}$

point, on applique cette fois la méthode en incluant plus de termes, et en calculant les solutions par continuation sur la pulsation en utilisant le logiciel ManLab<sup>1</sup>. Les résultats sont tracés sur la figure A.1(a), pour  $H=2, 3, 5$  et  $8$  termes<sup>2</sup>. On trace le coefficient du terme en  $\cos \Omega t$ ,  $a_1$ , en fonction de la pulsation d'excitation. Cette fois, dès que  $H$  supérieur ou égal à 2, c'est à dire dès l'instant où des harmoniques paires sont incluses dans le modèle, la réponse est molissante, les non linéarités quadratiques sont bien prises en compte et on obtient le bon comportement. Pour de faibles amplitudes, les modèles échelles multiples et équilibre harmonique concordent à partir de  $H=3$ . Observons maintenant la figure (b) de A.1 : la courbe  $a_1(\Omega)$  atteint un maximum puis décroît pour former une boucle, et la solution converge vraiment à partir de  $H=7$ . On retrouve ces différents cycles lorsque l'amplitude de l'excitation varie : plus celle-ci est grande, plus le "diamètre" de la boucle décroît (voir figure A.2).

Enfin, pour confirmer l'influence respective des termes cubiques et quadratiques, la réponse du système pour  $\alpha_2$  ou  $\alpha_3 = 0$  est représentée sur les figures A.3 et A.4. On retrouve une bonne concordance entre équilibre harmonique et échelles multiples pour de faibles amplitudes, ainsi que le caractère molissant des non linéarités quadratiques, et raidissant des cubiques.

<sup>1</sup>Il s'agit d'une version de la MAN sous matlab, adaptée pour des systèmes à peu de degrés de liberté. Voir COCHELIN et PÉRIGNON (2004)

<sup>2</sup>On rappelle que  $H=j$  signifie que tous les termes jusqu'à  $\cos(j-1)\Omega t$  sont inclus dans les développements harmoniques



(a)

FIGURE A.2 - Réponse forcée du système I.4 pour différentes amplitudes de l'excitation

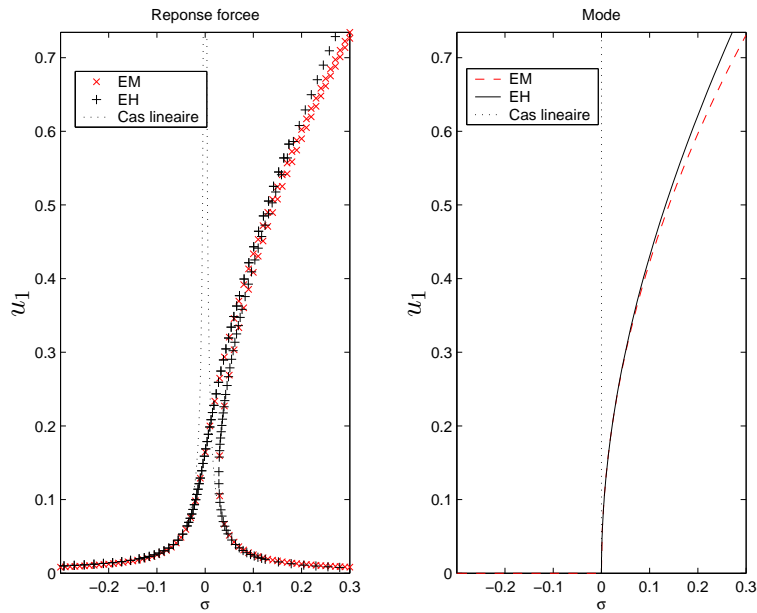


FIGURE A.3 - Réponse forcée du système I.4 pour  $\alpha_2 = 0$  (non linéarités cubiques)- Comparaison EH-EM

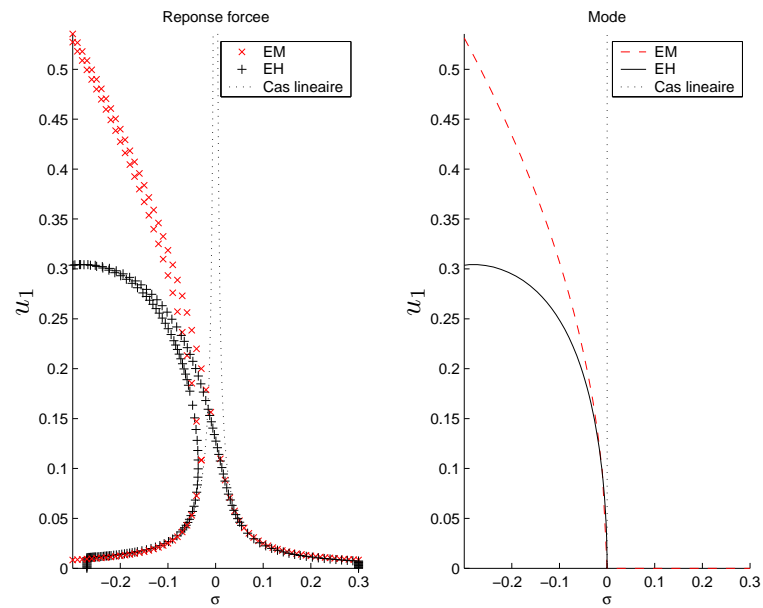


FIGURE A.4 - Réponse forcée du système I.4 pour  $\alpha_3 = 0$  (non linéarités quadratiques)- Comparaison EH-EM





## ANNEXE B

# Construction des matrices “harmoniques”

On détaille dans cette annexe les construction des matrices  $\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q})$  et  $\mathcal{K}_\sigma \mathcal{Q}$ , obtenues après application de l'équilibrage harmonique au problème de l'élastodynamique (voir le chapitre III).

## B.1 Calcul des $\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q})$

Soit  $\mathbf{B}^{nl}(\cdot)$  l'opérateur défini par (II.23). L'introduction des développements (III.6) dans les équations (II.25) conduit au système :

$$\begin{cases} - \int_V (\mathcal{B}^L + \mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) + \mathcal{B}^{nl}(d^*))^t \mathcal{S} dV - \Omega^2 \mathcal{M} \mathcal{Q} = \lambda \mathcal{F} \\ \mathcal{S} = \mathcal{S}^* + \mathcal{D}(\mathcal{B}^L + \frac{1}{2} \mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) + \mathcal{B}^{nl}(d^*)) \mathcal{Q} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Les matrices  $\mathcal{B}^{nl}$  sont des matrices de taille  $(n \times N) \times (n \times N)$ , composées de  $N \times N$  bloc. Chaque bloc est de la taille d'une matrice  $\mathbf{B}^{nl}$ . On note  $Bloc(i, j)$  le bloc de la ligne  $i$ , colonne  $j$ . Elles sont construites par itération à partir de  $\mathcal{B}^{nl}$  pour  $N = 2$ . La démarche est la suivante :

Cas  $N = 2$  :

$$\mathcal{B}^{nl}(\mathcal{Q}) = \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^0) & \frac{1}{2} {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^1) \\ {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^1) & {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^0) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

On suppose la matrice à l'état  $N$  connue. Construction de la matrice  $N + 1$  :

- Construction de la dernière colonne :
  - $Bloc(N + 1, N + 1) = {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^0)$
  - $Bloc(j, N + 1) = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^{N+1-j})$ , pour  $j = 1 \dots N$
- Construction de la dernière ligne
  - $Bloc(N + 1, 1) = {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^N)$
  - $Bloc(N + 1, j) = Bloc(j, N + 1)$ , pour  $j = 1 \dots N$
- Modification des termes de l'autre diagonale :
  - $Bloc(i, j) = Bloc(i, j) + \frac{1}{2} {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^N)$  pour  $i = 2 \dots N$  et  $j = N + 2 - i$ .

## B.2 Calcul de la rigidité géométrique

Pour l'application de la MAN, on est amené à calculer un terme de la forme :

$$\kappa_\sigma \mathcal{Q} = \int_{\Omega_0} {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathcal{Q}) \mathcal{S} d\Omega_0 \quad (\text{B.3})$$

correspondant à la matrice de rigidité géométrique (voir ZIENKIEWICZ et TAYLOR (1991)). Afin de réécrire cette matrice sous une forme plus appropriée, on introduit les grandeurs suivantes :

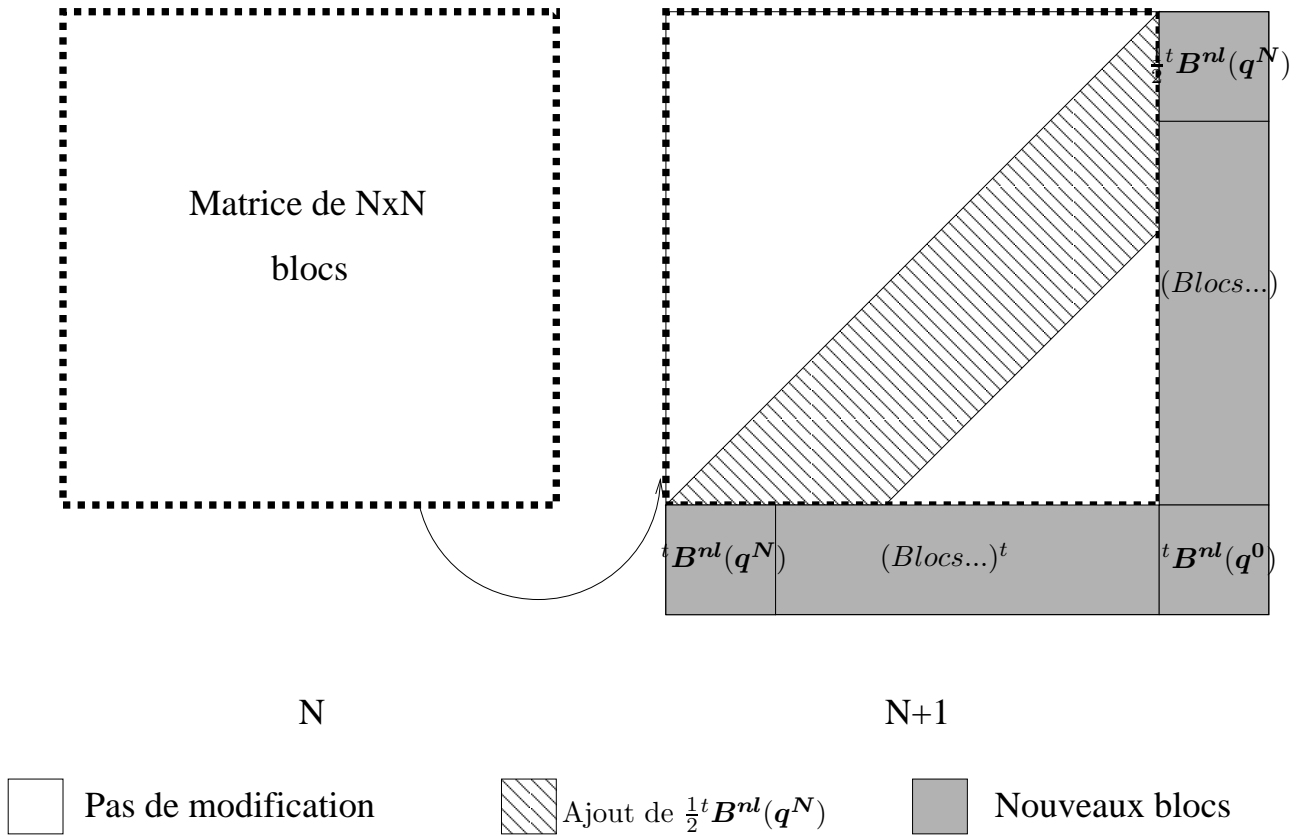
- le gradient des déplacements :

$${}^t \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}) = {}^t \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \quad (\text{B.4})$$

- les opérateurs<sup>1</sup> linéaire ( $\mathbf{H}$ ) et non linéaire ( $\mathbf{A}$ ) reliant les déplacements et les déformations :

$$\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}))) \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}) \quad (\text{B.5})$$

<sup>1</sup> ces notations sont assez classiques, on les retrouve notamment dans ZIENKIEWICZ et TAYLOR (1991)



avec :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & 0 & \theta_4 & 0 & \theta_7 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & 0 & \theta_5 & 0 & 0 & \theta_8 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & 0 & 0 & \theta_6 & 0 & 0 & \theta_9 \\ \theta_2 & \theta_1 & 0 & \theta_5 & \theta_4 & 0 & \theta_8 & \theta_7 & 0 \\ \theta_3 & 0 & \theta_1 & \theta_6 & 0 & \theta_4 & \theta_9 & 0 & \theta_7 \\ 0 & \theta_3 & \theta_2 & 0 & \theta_6 & \theta_5 & 0 & \theta_9 & \theta_8 \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

On rappelle que  $\mathbf{S} = \{S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}\}$  et on montre facilement que :

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}))\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}) \tag{B.8}$$

Avec

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

On discrétise ensuite ces grandeurs :

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (\text{B.10})$$

$\mathbf{G}$  est fonction du type d'élément choisi et dépend des dérivées des fonctions de forme. Et on en déduit :

$$\mathbf{B}^l \mathbf{q} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} \text{ et } \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} \quad (\text{B.11})$$

Et donc, en utilisant (B.11), (B.8), (B.10), on montre que :

$$\int_{\Omega_0} {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}) \mathbf{S} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} {}^t \mathbf{G}^t \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} {}^t \mathbf{G}^t \hat{\mathbf{S}} \mathbf{G} \mathbf{q} d\Omega_0 = \mathbf{K}_\sigma \mathbf{q} \quad (\text{B.12})$$

Ensuite, il suffit de remplacer chaque bloc de  $\int_{\Omega_0} \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{Q}) \mathbf{S} d\Omega_0$  en utilisant (B.12), et on obtient :

$$\boldsymbol{\kappa}_\sigma \mathbf{Q} = \int_{\Omega_0} {}^T \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{Q}) \mathbf{S} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} {}^T \mathbf{g} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{g} \mathbf{Q} \quad (\text{B.13})$$

avec

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$\hat{\mathbf{S}}$  est construite à partir des  $\hat{\mathbf{S}}$  définis plus haut, de manière similaire à  $\mathbf{B}^{nl}$ . On reprend le cas  $H = 2$  pour illustrer cette situation :

$$\begin{aligned} {}^T \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{Q}) \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^0) & \frac{1}{2} {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^1) & \frac{1}{2} {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^2) \\ {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^1) & {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{q}^2) & \frac{1}{2} {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^1) \\ {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^2) & \frac{1}{2} {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^1) & {}^t \mathbf{B}^{nl}(\mathbf{q}^0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}^0 \\ \mathbf{S}^1 \\ \mathbf{S}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^t \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}^0 & \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}^1 & \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}^2 \\ \hat{\mathbf{S}}^1 & \hat{\mathbf{S}}^0 + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}^2 & \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}^1 \\ \hat{\mathbf{S}}^2 & \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}^1 & \hat{\mathbf{S}}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^0 \\ \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{q}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

# ANNEXE C

## Étalonnage de l'excitateur bobine-aimant

### C.1 Objectifs

On décrit ici sommairement la procédure utilisée pour étalonner le système d'excitation bobine-aimant. Celle-ci est inspirée de ce qui est fait dans THOMAS (2001).

L'intérêt de l'étalonnage est de déterminer la valeur de la force exercée sur la structure, en fonction de la tension aux bornes de la bobine, de la pulsation du courant parcourant celle-ci et de la position de cette dernière.

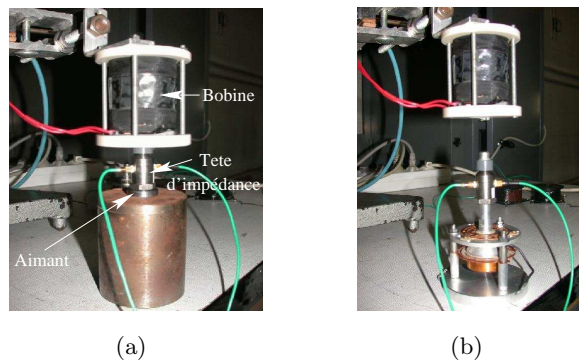


FIGURE C.1 - Dispositifs utilisés pour l'étalonnage de l'excitateur (a) support fixe - (b) support mobile

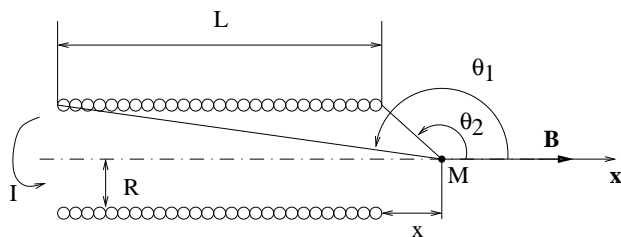


FIGURE C.2 - Solénoïde parfait parcouru par un courant  $I$ .

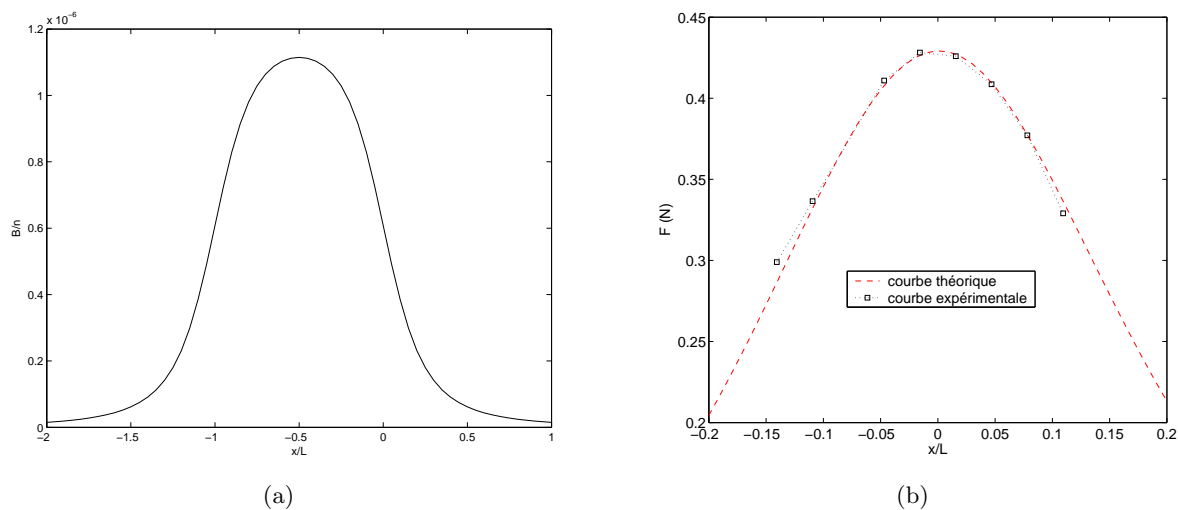


FIGURE C.3 - Solénoïde parfait : (a) champ  $B$  en fonction de  $x$  (b)  $\frac{dB}{dx}$  (ie force) en fonction de  $x$  -  $I=0.366$  A

## C.2 Étalonnage

Le système utilisé est représenté sur la figure C.1(a) : on mesure la force à l'aide d'une tête d'impédance (BK 8001), vissée sur l'aimant, lui même collé sur un support fixe. La bobine est alimentée par un signal sinusoïdal. Ensuite on relève les valeurs de la force en fonction du paramètre variable (intensité, position ou pulsation), les deux autres étant fixés.

Pour commencer, on rappelle que le champ créé en un point  $M$  par un solénoïde de longueur  $L$ , de rayon  $R$ , à  $n$  spires et parcouru par un courant  $I$ , (figure C.2) est donné par :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 n i}{2} \left( \frac{x + L}{\sqrt{(x + L)^2 + R^2}} - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + R^2)}} \right) \mathbf{x} \quad (\text{C.1})$$

Un aimant de moment magnétique  $\mathbf{M}$ , placé dans ce champ  $\mathbf{B}$ , subira alors la force suivante :

$$\mathbf{F} = M \frac{dB}{dx} \mathbf{x} \quad (\text{C.2})$$

à condition que la taille de l'aimant soit négligeable devant le rayon de la bobine. Ces résultats sont tracés sur la figure C.3. On rappelle que  $x$  représente la distance entre le bord de la bobine et le centre de gravité de l'aimant.

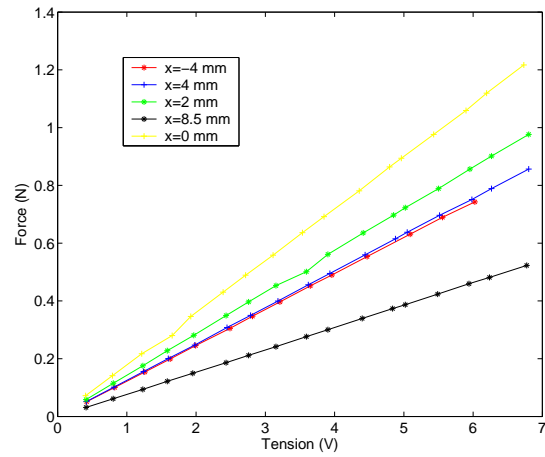
On constate donc que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  et la force atteignent leur maximum en  $x = 0$ . Même si l'aimant n'est pas de taille négligeable, ce modèle est assez représentatif du comportement réel du système, comme le montre la superposition des résultats expérimentaux et théoriques (figure C.3(b)). On représente ensuite la force obtenue expérimentalement, en fonction de la tension aux bornes de la bobine pour plusieurs valeurs de  $x$ , figure C.4(a), et pour  $x = 0$  à différentes fréquences d'excitation, figure C.4(b). La relation tension-force est linéaire, quasiment indépendante de la fréquence.

## C.3 Conclusions

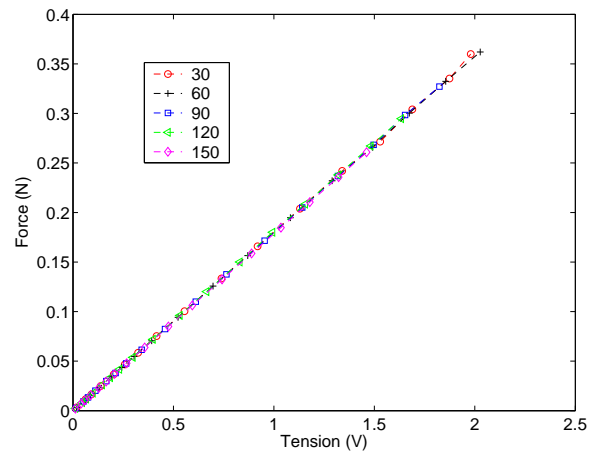
Au final, le meilleur positionnement de la bobine est obtenu pour  $x = 0$ , c'est à dire lorsque le centre de gravité de l'aimant est aligné avec le bord de la bobine. Les résultats obtenus montrent que la relation intensité-force est linéaire et ne dépend quasiment pas de la pulsation du signal de départ. Pour l'aimant utilisé lors des essais présentés au chapitre VI, on obtient  $F = kU$  avec  $k = 0.18$ .

Ces conclusions sont cependant à modérer ; en effet, le banc d'étalonnage est à support fixe, ce qui n'est pas parfaitement représentatif de la situation expérimentale, vu que l'aimant est fixé sur une structure vibrante. Un deuxième dispositif d'étalonnage, à support mobile (figure C.1(b)) a été mis en place mais non encore utilisé. En fait le coefficient  $k$  va dépendre faiblement de la position  $x$  et pour de grandes amplitudes de variations, la relation  $F - U$  n'est pas parfaitement linéaire. De plus lorsque la fréquence augmente, on observe une légère diminution de la force, due à la dissipation d'énergie, par échauffement, dans la bobine. Tous ces faits ont été vérifiés et sont consignés dans THOMAS (2001). Finalement la valeur  $k$  que nous avons retenu ne donne





(a)



(b)

FIGURE C.4 - Relation force-tension aux bornes de la bobine (a) pour différentes positions de la bobine - (b) pour  $x = 0$  et différentes fréquences d'excitation. Les valeurs de la légende sont en Hertz.

---

qu'une estimation de la force réellement appliquée à la bobine.

A noter que nous avons également testé un aimant plus gros (longueur 10 mm, diamètre 10 mm), ce qui permet d'obtenir des valeurs plus élevées de la force, à tension égale.





# Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires

**Résumé :** le travail présenté dans ce mémoire est une contribution à l'étude des vibrations non linéaires de structures minces, par des approches numériques et expérimentales. Un outil destiné au calcul de la réponse forcée harmonique de structures minces, en non linéaire géométrique, a été développé. Le problème de l'élastodynamique en grands déplacements, avec prise en compte d'un défaut de forme et d'une précontrainte, est discrétisé par une méthode éléments finis. Les solutions périodiques sont obtenues par application de la méthode de l'équilibrage harmonique (EH) puis de la méthode asymptotique numérique (MAN) pour la continuation des branches de solutions. Ces deux méthodes ont été introduites indépendamment l'une de l'autre dans un code éléments finis existant, *Eve*. Au final on obtient l'expression des inconnues (déplacements et contraintes) en fonction des paramètres de la force d'excitation (pulsation et amplitude). Au terme de ce travail, on dispose donc d'un outil numérique qui permet de traiter une large classe de structures (poutres, plaques et coques). Son application à quelques exemples a permis d'illustrer les caractéristiques d'un comportement non linéaire, en particulier les phénomènes d'hysteresis sur la résonance principale ou encore l'apparition de résonances secondaires et de bifurcations de branches. De plus, pour une amplitude d'excitation très faible, on est en mesure d'obtenir une représentation des modes non linéaires de structure. En parallèle, une étude expérimentale a été menée. Un banc d'essai pour l'étude de la réponse forcée de plaques ou de panneaux galbés a été réalisé ; il est équipé d'un dispositif de précontrainte en vue de l'observation d'interaction modale. Des essais préalables sur une poutre bi-encastée, ont également permis l'observation de phénomènes non linéaires caractéristiques.

**Mots-clés :** Vibrations, non linéaire géométrique, structures minces, réponse forcée, modélisation numérique, éléments finis, étude expérimentale, précontrainte, modes non linéaires, résonance.

## Forced vibration of elastic nonlinear thin structures

**Abstract :** this work is devoted to the study of nonlinear vibration of thin structures, by both numerical and experimental approaches. First, we developed a numerical tool to calculate the harmonic forced response of thin structures including geometrical nonlinearities. The Finite Element Method is used to treat the large displacements elastodynamic problem, taking into account a shape default and a prestressed initial state. Periodical solutions are obtained thanks to the Harmonic Balance Method and branches continuation is performed with the Asymptotic Numerical Method. These two methods are implemented in an existent Finite Element software, *Eve*. At the end, the unknowns, displacements and stresses, are expressed in terms of the amplitude and pulsation of the excitation. This work results in a quite general numerical tool, able to deal with a large range of structures (beams, plates and shells). Typical nonlinear behaviors, such as hysteresis or secondary resonances and bifurcation branches are presented on several instances. Moreover, the response simulated for a weak excitation amplitude, leads to structural nonlinear modes. At the same time, we proceeded with an experimental study. An experimental set-up has been designed and built, to observe the forced response of plates or shells, fitted with a prestress mechanism in order to obtain modal interaction. Previously, we observed nonlinear behaviors on a clamped-clamped beam under harmonic excitation.

**Keywords :** Vibration, geometrical nonlinearities, thin structures, forced response, numerical modelling, finite elements, experimental study, prestress, resonance, nonlinear modes.