



**HAL**  
open science

# Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène

Dimitri Komatitsch

► **To cite this version:**

Dimitri Komatitsch. Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène. Géophysique [physics.geo-ph]. Institut de physique du globe de paris - IPGP, 1997. Français. NNT : . tel-00007568

**HAL Id: tel-00007568**

**<https://theses.hal.science/tel-00007568>**

Submitted on 19 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Institut de Physique du Globe de Paris**

**Laboratoire de Sismologie**

*Groupe de Modélisation et de Tomographie Géophysique*

**THÈSE**

présentée par

**Dimitri KOMATITSCH**

pour l'obtention du

**TITRE DE DOCTEUR  
DE L'INSTITUT DE PHYSIQUE DU GLOBE DE PARIS**

**MÉTHODES SPECTRALES ET ÉLÉMENTS SPECTRAUX  
POUR L'ÉQUATION DE L'ÉLASTODYNAMIQUE 2D ET 3D  
EN MILIEU HÉTÉROGÈNE**

Soutenue le 5 mai 1997 devant la commission d'examen composée de MM.

**Claude JAUPART (Paris VII) :**

**Jean-Pierre VILOTTE (IPG Paris) :**

**Francisco-José SÁNCHEZ-SESMA (UNAM, Mexico) :**

**Michel BOUCHON (LGIT, Grenoble) :**

**Raúl MADARIAGA (Paris VII, ENS) :**

**Denis AUBRY (École Centrale de Paris) :**

**Président du jury**

**Directeur de thèse**

**Rapporteur**

**Rapporteur**

**Examineur**

**Examineur**

**Institut de Physique du Globe de Paris  
Laboratoire de Sismologie  
Tour 24 – Case 89  
4, place Jussieu  
75252 Paris Cedex 05 – France**



# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>7</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>I Approche pseudo-spectrale globale</b>	<b>13</b>
<b>1 Propagation d'ondes dans un milieu élastique</b>	<b>15</b>
1.1 Tenseur de déformation	15
1.2 Lois de conservation	16
1.2.1 Conservation de la masse	16
1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement	17
1.2.3 Conservation du moment angulaire	17
1.3 Équations de l'élastodynamique	18
1.3.1 Loi de comportement	18
1.3.2 Équation classique dans le cas de petites déformations	18
1.3.3 Milieu élastique isotrope	18
1.3.4 Système hyperbolique du premier ou du second ordre	19
1.3.5 Problème aux limites	20
1.3.6 Excitation du milieu - sources	21
1.3.7 Formulation variationnelle du problème aux limites	22
1.3.8 Énergie totale du système	23
1.4 Différents types d'ondes rencontrés	23
1.4.1 Ondes directes, réfléchies et réfractées	23
1.4.2 Ondes de Rayleigh, de Love et de Stoneley	24
<b>2 Méthode de Chebyshev en coordonnées curvilignes pour l'équation des ondes</b>	<b>25</b>
2.1 Résumé	25
2.2 Introduction	26
2.3 Formulation tensorielle de l'équation des ondes	27
2.3.1 L'équation des ondes sous forme tensorielle	27
2.3.2 Coût de calcul	28
2.4 Génération de la grille, calcul de la métrique et des symboles de Christoffel	29
2.5 Algorithme de résolution	30
2.5.1 Description de l'algorithme de Chebyshev	30
2.5.2 Insuffisance des schémas de différences finies	33
2.5.3 Vectorisation de l'algorithme et performances	33
2.6 Tests numériques à 2D	34
2.6.1 Validation de la formulation tensorielle	34
2.6.2 Simulation en présence d'une topographie de surface	35
2.7 Insuffisance de l'algorithme de Chebyshev pour des modèles réalistes	37
2.8 Conclusions	38
2.A Annexe A : Notions élémentaires sur la formulation tensorielle	43
2.B Annexe B : Génération de la grille	44
<b>II Éléments spectraux 2D et 3D</b>	<b>47</b>
<b>3 Méthode des éléments spectraux</b>	<b>49</b>
3.1 Introduction	49
3.2 Discrétisation spatiale et approximation de Galerkin	50
3.2.1 Discrétisation spatiale	50

3.2.2	Approximation de Galerkin	51
3.3	Algorithmes d'intégration en temps	54
3.3.1	La famille classique des schémas de Newmark	54
3.3.2	Algorithmes de Newmark en vitesse sous forme conservative	55
3.3.3	Algorithmes de type prédicteur-multicorrecteur	55
3.4	Implémentation et parallélisation naturelle de l'algorithme	56
3.5	Validation pour le problème de Lamb 2D	58
3.5.1	Source à l'intérieur du modèle	59
3.5.2	Source en surface	60
3.5.3	Comportement sur un maillage aléatoire	60
3.5.4	Effet d'un sous-échantillonnage spatial	62
3.6	Stabilité et dispersion du schéma numérique	62
3.6.1	Vérification numérique de la stabilité des schémas	62
3.6.2	Dispersion numérique de la méthode	66
3.7	Efficacité des bords absorbants	70
3.8	Validation pour le problème de Garvin 2D	71
3.8.1	Source à l'intérieur du modèle	72
3.8.2	Source en surface	74
3.8.3	Onde fantôme	74
3.9	Conclusions	74
3.A	Annexe A : Écriture détaillée du système algébrique dans le cas 2D	80
<b>4</b>	<b>Étude de milieux 2D réalistes par la méthode des éléments spectraux</b>	<b>85</b>
4.1	Introduction	85
4.2	Modélisation des ondes réfractées	85
4.3	Cas d'une onde de Rayleigh dispersive	86
4.4	Modèle des deux quarts d'espace	86
4.4.1	Onde d'interface réelle	88
4.4.2	Onde d'interface cachée	88
4.5	Discontinuité de la surface libre	89
4.6	Topographie de surface et interfaces courbes	89
4.6.1	Source à l'intérieur du modèle	90
4.6.2	Source en surface	92
4.7	Modèle réaliste dans les Andes péruviennes	92
4.7.1	Modèle homogène	94
4.7.2	Modèle hétérogène plus réaliste	94
4.8	Modélisation de quelques effets de site 2D	95
4.8.1	Résonance basse fréquence dans un bassin sédimentaire	95
4.8.2	Amplification des ondes planes P et SV par une topographie	113
4.9	Conclusions	115
<b>5</b>	<b>Étude des effets de site 3D par la méthode des éléments spectraux</b>	<b>127</b>
5.1	Introduction	127
5.2	Validation du code 3D sur un maillage aléatoire	129
5.3	Effet d'amplification dans une structure tridimensionnelle	129
5.3.1	Cas d'un milieu homogène	130
5.3.2	Cas d'une couche plane ou d'un bassin sédimentaire asymétrique	133
5.4	Conclusions	147
<b>III</b>	<b>Méthodes exotiques à 1D</b>	<b>151</b>
<b>6</b>	<b>Résolution de l'équation des ondes 1D par approximation sur une base d'ondelettes</b>	<b>153</b>
6.1	Introduction	153
6.2	Analyse multi-échelles	153
6.2.1	La fonction d'échelle	154
6.2.2	La fonction ondelette de base	154
6.2.3	Cas du domaine borné	154
6.2.4	Exemples de fonctions ondelettes	155

6.3	Algorithmes utilisés	155
6.3.1	Introduction	155
6.3.2	Interpolation	155
6.3.3	Décomposition	157
6.3.4	Coût de calcul	158
6.3.5	Visualisation du signal	158
6.4	Simulation numérique	159
6.4.1	Cas-test monodimensionnel	159
6.4.2	Algorithme de résolution	160
6.4.3	Matrice de dérivation	160
6.4.4	Résultats numériques	161
6.5	Conclusions	161
<b>7</b>	<b>Volumes finis : une implémentation directe des équations de conservation à 1D</b>	<b>165</b>
7.1	Introduction	165
7.2	Équations locales	166
7.3	Équations globales	166
7.4	La méthode des volumes finis	167
7.5	Contraintes élastiques	168
7.5.1	Définition du champ de déformation	168
7.5.2	Évaluation numérique du champ de déformation	168
7.6	Validation de la méthode : cas d'un milieu élastique 1D	169
7.6.1	Problème physique étudié	169
7.6.2	Algorithme utilisé à 1D	169
7.6.3	Résultats numériques	170
7.7	Conclusions	172
7.A	Annexe A : Interpolation de la masse et de la quantité de mouvement	175
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>177</b>
	<b>Liste de publications</b>	<b>179</b>



# Résumé

Le but de la présente thèse est avant tout d'ordre méthodologique : il s'agit de présenter et de valider une méthode de modélisation numérique pour l'équation des ondes élastiques (2D et 3D) dans des milieux réels. De tels milieux peuvent notamment présenter une forte topographie, ainsi que des couches de forme quelconque avec de forts contrastes de propriétés élastiques et de densité. Nous cherchons à modéliser l'ensemble du champ d'onde, c'est-à-dire tant les ondes de volume (compression et cisaillement) que les ondes de surface et d'interface.

Dans l'introduction générale, nous définissons les différents types de modèles géophysiques que nous souhaitons étudier, et rappelons l'intérêt qu'il peut y avoir à être capable de calculer le comportement des ondes sismiques dans de telles structures. Nous passons brièvement en revue les différentes techniques de modélisation numérique ordinairement utilisées pour résoudre les problèmes de propagation d'ondes dans de tels milieux, et rappelons sommairement leurs principales caractéristiques ainsi que leurs principales limitations. Les avantages potentiels de l'approche que nous introduisons dans cette thèse sont déduits de ce rapide tour d'horizon.

Dans une première partie, nous rappelons brièvement les lois essentielles de la mécanique des milieux continus et de l'élastodynamique. Nous mentionnons les principaux types d'ondes pouvant exister dans un milieu élastique. Les propriétés particulières des ondes de surface et d'interface dans de tels modèles sont également mentionnées.

Dans une deuxième partie, nous introduisons et validons une méthode pseudo-spectrale globale fondée sur la formulation différentielle tensorielle des équations de l'élastodynamique, adaptée au traitement de géométries déformées et de surfaces non planes. Nous montrons son application à quelques cas simples, nous mettons en évidence des effets intéressants liés à la topographie, mais soulignons aussi ses limitations intrinsèques. Nous en déduisons la nécessité d'utiliser une méthode plus souple que la formulation différentielle classique (différences finies, méthodes spectrales ou pseudo-spectrales) pour le traitement de cas réalistes (typiquement, une méthode variationnelle avec décomposition de domaine).

Dans une troisième partie, constituant le cœur de ce travail de thèse, nous introduisons et développons tant à 2D qu'à 3D une formulation variationnelle d'ordre élevé des équations de l'élastodynamique, dite « méthode des éléments spectraux », et nous mettons en évidence ses propriétés sur différents problèmes classiques de complexité croissante (problème de Lamb, problème de Garvin, onde de Rayleigh sur une surface courbe...). Puis nous présentons l'application de cette méthode à des modèles 2D et 3D plus complexes, pour lesquels de forts effets liés notamment à la topographie sont mis en évidence. Nous obtenons en particulier de fortes amplifications locales du champ d'accélération et de déplacement dans de tels modèles (effets de site). Dans le cas d'un modèle tridimensionnel, nous montrons que ces effets dépendent fortement de la polarisation du champ incident. L'efficacité de la méthode sur un ordinateur parallèle est également discutée et illustrée.

Dans une quatrième partie, nous avons regroupé deux petites études que nous avons menées au cours de nos recherches pour résoudre l'équation des ondes à 1D (ondelettes et volumes finis).



# Introduction générale

Dès que l'on s'intéresse à la propagation d'ondes dans des structures réelles, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour résoudre les équations de l'élastodynamique dans le milieu considéré. En effet, nous ne connaissons de solutions analytiques ou semi-analytiques à ces problèmes de propagation que dans des cas extrêmement simples (modèles homogènes ou formés de couches planes par exemple). Depuis le début des années 1970, avec l'avènement des techniques informatiques et l'augmentation spectaculaire des capacités des calculateurs tant du point de vue de leur vitesse de calcul que du point de vue de leur capacité mémoire, des techniques numériques sophistiquées ont vu le jour. Des méthodes approchées, telles que la théorie des rais par exemple, fondée sur une approximation haute fréquence, ou des méthodes calculant l'ensemble du champ d'onde (différences finies, méthodes spectrales et pseudo-spectrales, éléments finis, méthodes intégrales...) ont permis de rendre relativement classique le calcul de sismogrammes synthétiques dans des structures 2D complexes (hétérogènes) et d'aborder le calcul dans des structures 3D.

Il est cependant apparu clairement, durant ces dernières années, que la plupart des méthodes mentionnées, bien que très efficaces dans de nombreux cas, souffraient de limitations intrinsèques qui en restreignaient l'application à des modèles réalistes. Posons-nous en effet la question suivante : si nous souhaitons calculer l'ensemble des ondes se propageant dans un modèle 2D ou 3D complexe, présentant par exemple des couches non planes avec de forts contrastes de vitesse et de coefficient de Poisson, présentant également une topographie de surface accidentée, quelle méthode parmi celles disponibles pourra répondre à notre attente ? En particulier, comment pourrons nous prendre en compte la topographie ? Pourrons-nous modéliser une discontinuité de la surface libre ? Pourrons-nous résoudre le (difficile) problème de la propagation des ondes de surface (Rayleigh) et d'interface (Stoneley) dans une telle structure ? Dans le cas de propriétés élastiques fortement hétérogènes dans le milieu, serons-nous à même de définir un schéma spatial et un schéma temporel robustes ? Dans le cas d'un modèle 3D de taille réaliste (maillage de plusieurs millions de points), ne serons-nous pas fortement limités par le coût des méthodes proposées ? Pourrons-nous prédire les effets de site pour des structures tridimensionnelles réalistes ? Ces méthodes s'adapteront-elles bien aux architectures modernes des supercalculateurs (parallélisme massif) ?

Aussi surprenant que cela puisse paraître, un inventaire des techniques existant dans la littérature, mené au début de ce travail de thèse, n'a pas permis de répondre positivement à l'ensemble de ces questions. Excluons d'emblée les méthodes approchées, telles que la théorie des rais, car nous souhaitons modéliser l'ensemble du champ d'onde, y compris les ondes de surface et d'interface, de plus sans faire d'hypothèse particulière sur les fréquences propagées. L'approche la plus classique consiste alors certainement à résoudre les équations de l'élastodynamique écrites sous forme différentielle, à l'aide par exemple d'une technique de type différences finies ou de type pseudo-spectrale. Les méthodes de différences finies ont été assez largement utilisées à 2D, et plus récemment à 3D, pour la modélisation de la propagation des ondes. Malheureusement, les schémas de différences finies classiques produisent des artefacts, appelés dispersion de grille ou encore dispersion numérique, dans les zones où le champ d'onde présente un fort gradient, ou encore lorsque des grilles de calcul trop grossières sont utilisées. Pour les schémas classiques de différences finies centrées, du deuxième ou du quatrième ordre, un minimum de 15 points par plus petite longueur d'onde du signal propagé (environ 8 points dans le cas d'un schéma du quatrième ordre) est nécessaire (Kelly *et al.*, 1976 ; Alford *et al.*, 1974 ; Dablain, 1986). La dispersion et l'anisotropie liées à la grille peuvent être réduites en utilisant, au lieu de la formulation centrée en déplacement classique, la formulation de la grille en quinconce (Madariaga, 1976 ; Virieux, 1984 ; Virieux, 1986 ; Levander, 1988) fondée sur l'écriture des équations de l'élastodynamique linéaire sous forme d'un système hyperbolique symétrique du premier ordre (Wilcox, 1966 ; Hughes et Marsden, 1978). Ces schémas sont cependant coûteux, en effet ils requièrent le stockage d'un nombre important de variables d'un point de vue informatique. Les schémas de différences finies centrés du quatrième ordre à la fois en espace et en temps, basés sur les techniques de l'équation d'onde modifiée (Dablain, 1986 ; Bayliss *et al.*, 1986 ; Kummer et Behle, 1988 ; Cohen, 1988 ; Cohen et Joly, 1990), permettent d'obtenir un gain significatif en précision et une diminution sensible du coût calcul. Des opérateurs optimisés ont également été proposés pour les schémas en quinconce, en maximisant la plage de fréquence pour laquelle l'erreur du schéma reste bornée par une valeur maximale que l'on se donne (Holberg, 1987), malheureusement de tels schémas sont basés sur un traitement séparé de l'erreur de discrétisation spatiale et de l'erreur de discrétisation temporelle (Kamel *et al.*, 1995).

Si l'on peut bien sûr diminuer autant qu'on le souhaite l'erreur du schéma en raffinant suffisamment la grille de calcul, tant en espace qu'en temps, le prix à payer est évidemment une augmentation proportionnelle du temps de calcul et de la taille mémoire nécessaire, ce qui peut s'avérer très pénalisant, surtout dans le cas d'un calcul 3D. Ainsi, pour les applications géophysiques qui requièrent un gros effort de calcul, telles que la propagation des ondes élastiques dans des structures géologiques 3D réalistes (Frankel et Vidale, 1992 ; Frankel, 1993 ; Rodrigues, 1993 ; Olsen *et al.*, 1995 ; Olsen et Archuleta, 1996), il est souvent difficile de trouver un équilibre entre une faible dispersion numérique et un temps de calcul raisonnable. Si le modèle présente une topographie de surface ou des interfaces courbes, le problème devient plus complexe encore. Même si diverses techniques ont été proposées pour incorporer de telles topographies ou des interfaces courbes dans les schémas de différences finies, par exemple une discrétisation en marches d'escalier de ces interfaces (Boore, 1972a ; Ohminato et Chouet, 1997), ou l'introduction d'un système de coordonnées curvilignes avec une transformation géométrique *ad hoc* (Jih *et al.*, 1988), ou encore « l'interpolation » du modèle de part et d'autre de l'interface courbe (Zahradník *et al.*, 1993 ; Zahradník *et al.*, 1994 ; Muir *et al.*, 1992), de tels traitements restent limités à des géométries simples, et conduisent à de la diffraction parasite. De plus, nombre de ces schémas deviennent rapidement instables dès que la courbure de la surface devient grande. Un autre inconvénient des schémas de différences finies est leur incapacité à implémenter la condition de surface libre avec la même précision numérique que dans l'intérieur du modèle (Bayliss *et al.*, 1986 ; Virieux, 1986 ; Levander, 1988 ; Rodrigues, 1993), particulièrement lorsque des schémas d'ordre élevé sont utilisés. Ainsi, les schémas de différences finies semblent particulièrement peu adaptés pour la modélisation des ondes de surface (Rayleigh) et d'interface (Stoneley) dans des modèles réalistes.

D'autre part, les méthodes d'éléments finis, basées sur une formulation variationnelle de l'équation d'onde, et qui permettent la prise en compte plus naturelle des conditions aux limites (en particulier la condition de surface libre), bien qu'elles soient plus adaptées au traitement de géométries complexes et de modèles réellement hétérogènes, ont été beaucoup moins utilisées dans le domaine de la sismologie (Lysmer et Drake, 1972 ; Belytschko et Mullen, 1978 ; Toshinawa et Ohmachi, 1992 ; Li *et al.*, 1992). En effet, les méthodes d'éléments finis classiques, limitées en pratique à des ordres d'approximation polynômiale faibles, restent peu précises et dispersives dans le cas de l'équation des ondes (Dupond, 1973 ; Backer, 1976 ; Marfurt, 1984). Les éléments finis classiques d'ordre plus élevé posent également des problèmes difficiles à résoudre, tels que l'apparition d'ondes parasites, et le fait qu'ils ne conduisent pas naturellement à des méthodes numériques totalement explicites, ce qui signifie qu'il est nécessaire d'inverser une matrice dont la largeur de bande croît avec l'ordre d'approximation polynômiale utilisé. Notons que récemment, des méthodes d'éléments finis espace-temps ont été introduites en élastodynamique (Hughes et Hulbert, 1988 ; Hulbert et Hughes, 1990 ; Richter, 1994) et ont ouvert des perspectives intéressantes.

En plus des méthodes présentées ci-dessus, il est également possible de chercher à résoudre l'équation des ondes en utilisant une représentation intégrale du problème, reliant entre elles des quantités discrétisées sur les frontières physiques du domaine considéré. Cela a conduit, ces dernières années, au développement de diverses méthodes de frontière basées soit sur la décomposition du champ sur une famille complète de fonctions, soit sur l'introduction des fonctions de Green. Suite à l'utilisation de cette méthode par Aki et Larner (1970), l'approche a été largement étendue par de nombreux auteurs (Bouchon, 1973 ; Bouchon, 1979 ; Bard, 1982 ; Géli *et al.*, 1988 ; Horike *et al.*, 1990 ; Ohori *et al.*, 1992) afin d'étudier le comportement de structures présentant des topographies irrégulières. Dans le même esprit, des méthodes de frontière basées sur la superposition de solutions obtenues pour des sources dont les singularités sont placées en dehors (proche de la frontière) de la région étudiée ont été proposées pour des problèmes bidimensionnels et tridimensionnels (Sánchez-Sesma et Rosenblueth, 1979 ; Dravinski et Mossessian, 1987 ; Luco et de Barros, 1995), les conditions aux limites étant alors satisfaites au sens des moindres carrés (Wong, 1982). Les méthodes d'éléments frontière directes ou indirectes, utilisant les solutions fondamentales comme des fonctions poids et faisant usage du théorème de Green, ont permis de calculer des solutions précises pour divers problèmes d'élastodynamique (Kobayashi, 1987 ; Manolis et Beskos, 1988 ; Bonnet, 1995).

Alors que les méthodes directes formulent le problème en terme de déplacements et tractions inconnus (Zhang et Chopra, 1991), les méthodes indirectes formulent le problème en terme de densité de force et de densité de moment inconnues sur la frontière (Sánchez-Sesma et Campillo, 1991 ; Sánchez-Sesma et Campillo, 1993). La combinaison de décompositions des fonctions de Green en nombre d'onde discret (Bouchon et Aki, 1977 ; Bouchon, 1979) soit avec une représentation intégrale indirecte, en utilisant des distributions de sources (Campillo et Bouchon, 1985 ; Bouchon, 1985), soit avec une méthode directe (Kawase, 1988 ; Kawase et Aki, 1989 ; Kim et Papageorgiou, 1993), a conduit au développement de nombreuses méthodes intéressantes pour la propagation des ondes élastiques, avec l'avantage que la solution est cherchée dans un espace qui a une dimension de moins que le domaine physique étudié (les interfaces seules étant considérées). Cependant, les méthodes de ce type sont très souvent limitées à la résolution de problèmes homogènes par couche dans le cas d'un comportement linéaire des matériaux (en raison de l'absence d'expression simple pour les fonctions de Green dans le cas contraire). De plus, les systèmes linéaires que l'on est conduit à résoudre sont très gros (pour des milieux géologiques réalistes), denses et généralement non symétriques. Le gain en terme de temps de calcul et de capacité mémoire nécessaire, que l'on s'attendrait intuitivement à trouver pour de telles méthodes, n'est ainsi pas toujours réalisé

dès lors que des modèles de taille et de structure réalistes sont étudiés. Pour remédier à cet inconvénient, il est possible de tronquer certains coefficients du système linéaire, ce qui conduit à une réduction significative de la taille du système à résoudre, mais au prix d'une dégradation plus ou moins importante de la précision des résultats numériques.

Les méthodes spectrales, introduites en mécanique des fluides il y a une vingtaine d'années par S. A. Orszag afin d'obtenir une précision élevée lors de la résolution numérique des équations différentielles, ont également été utilisées, plus récemment, en élastodynamique (Gazdag, 1981 ; Kosloff et Baysal, 1982 ; Kosloff *et al.*, 1984 ; Reshef *et al.*, 1988). L'idée initiale consistant à utiliser une décomposition du champ en série de Fourier tronquée ne permet pas de prendre en compte des conditions aux limites non périodiques, telles que la condition de surface libre par exemple. Quelques astuces numériques, comme le « zero padding » (Kosloff *et al.*, 1984) ont été proposées mais se sont révélées peu précises. Les bases de fonctions circulaires ont ainsi été rapidement remplacées par des bases de polynômes orthogonaux (polynômes de Chebyshev ou de Legendre pour la décomposition spatiale par exemple), ce qui a conduit à l'introduction de méthodes appelées pseudo-spectrales (Fornberg, 1988 ; Canuto *et al.*, 1988 ; Kosloff *et al.*, 1990). Cette technique a été beaucoup utilisée au cours des dix dernières années en raison notamment de sa précision, du faible nombre de points par longueur d'onde nécessaire pour obtenir une propagation ne présentant quasiment pas de dispersion numérique, et enfin en raison de la bonne adaptation de cette méthode aux architectures des calculateurs vectoriels (Carcione, 1994). Ces approches entrent dans la classe des méthodes de collocation, pour lesquelles la solution numérique doit satisfaire l'équation des ondes écrite sous forme différentielle (forme forte) en un ensemble de points convenablement choisis. Le choix des points de collocation est d'une importance cruciale pour la précision de la méthode, et il est important de noter que le nombre de points de collocation doit être égal à la dimension de l'espace d'approximation (c'est-à-dire le degré maximal des polynômes utilisés pour l'approximation de la solution).

Une autre remarque importante est que ces points de collocation, que ce soit pour les polynômes de Legendre ou pour les polynômes de Chebyshev, n'ont pas un espacement uniforme, mais se densifient sur les bords du domaine. Cela constitue une limitation importante des méthodes pseudo-spectrales globales car, les points étant très resserrés sur les bords de la grille, on peut montrer que la valeur maximale  $\Delta t$  du pas de temps, dans le cas d'un schéma en temps conditionnellement stable, se comporte comme  $N^{-2}$ , où  $N$  est le nombre de points de collocation dans une direction de la grille, et donc le critère de stabilité devient vite très défavorable lorsque l'on fait croître  $N$  pour augmenter la précision de la discrétisation spatiale. Des transformations de coordonnées ont été proposées pour contourner ce problème (Carcione, 1994), mais ces transformations non linéaires sur les bords du domaine (du type arcsinus par exemple) conduisent à des pertes de précision numérique dans cette zone, ce qui en réduit fortement l'intérêt.

De plus, dans le cas de domaines présentant une topographie et/ou des interfaces courbes, ces méthodes globales demeurent limitées à des géométries très simples, en pratique des carrés ou des cubes faiblement déformés, en raison de la difficulté à trouver une transformation de maillage globale suffisamment régulière vers un domaine de référence carré ou cubique. Ainsi, l'utilisation de grilles curvilignes dans cette approche pseudo-spectrale globale, initialement introduite par Fornberg (1988), et développée ensuite par de nombreux auteurs (Tessmer *et al.*, 1992 ; Carcione et Wang, 1993 ; Nielsen *et al.*, 1994), si elle conduit à des résultats intéressants pour des structures géométriques simples, reste peu adaptée au traitement de modèles géologiques de structure réellement compliquée. Enfin, les méthodes pseudo-spectrales globales, dans leur formulation forte, souffrent du même type de difficultés que les méthodes de différences finies pour la prise en compte des conditions de surface libre (Carcione et Wang, 1993). L'idée naturelle consistant à coupler techniques de décomposition de domaine et méthodes spectrales (Orszag, 1980) a rapidement été proposée. Cependant, la nécessité d'imposer explicitement les conditions de raccord entre sous-domaines alourdit alors considérablement l'algorithme.

Dans la première partie de cette thèse, nous montrerons donc qu'une approche de type pseudo-spectral globale permet d'obtenir des résultats intéressants pour des modèles suffisamment réguliers, mais nous constaterons également clairement les limitations de cette approche dès lors qu'un modèle réaliste devra être pris en compte. L'approche pseudo-spectrale introduite dans cette première partie sera originale dans le sens où nous utiliserons une écriture tensorielle des dérivées spatiales, dont nous montrerons qu'elle permet de réduire significativement le coût de calcul de la méthode par rapport aux formulations utilisées plus traditionnellement dans la littérature.

Dans ce contexte, en prenant conscience de la grande similitude existant entre les méthodes de collocation et une formulation variationnelle utilisant une quadrature consistante (Gottlieb, 1981 ; Maday et Quarteroni, 1982 ; Canuto et Quarteroni, 1982), il apparaît clairement que les méthodes spectrales sont très proches des méthodes d'éléments finis dans leurs versions d'ordre élevé appelées  $p$  et  $h-p$  (Babuška *et al.*, 1981 ; Babuška et Dorr, 1981 ; Guo et Babuška, 1986 ; Gui et Babuška, 1986). Cela a conduit au développement, initialement en mécanique des fluides, de la méthode des éléments spectraux (Patera, 1984 ; Maday et Patera, 1989 ; Rønquist, 1988), et pour l'élastodynamique aux approches récentes proposées par Seriani et Priolo (1994), Priolo *et al.* (1994) et Faccioli *et al.* (1996). Dans la deuxième partie de cette thèse, qui constitue sans nul doute le cœur de notre travail, nous introduirons une méthode d'éléments spectraux permettant de résoudre le système hyperbolique du second ordre décrivant la propagation des ondes élastiques dans un milieu compliqué, tant à 2D qu'à 3D. Les potentialités de la méthode ainsi introduite seront démontrées sur divers problèmes 2D classiques,

dont certains réputés difficiles à traiter par d'autres techniques de modélisation numérique, et des cas 3D réalistes seront analysés, pour lesquels de forts effets de site seront observés. À notre connaissance, les résultats 3D présentés pour un milieu hétérogène constituent un résultat original difficilement accessible par d'autres méthodes.

Les différences principales entre notre approche et celle proposée par Faccioli *et al.* (1996) résident dans la façon de formuler le problème variationnel, et surtout dans la façon d'imposer les conditions de couplage entre éléments (nous imposons seulement une continuité de type  $C^0$  par un assemblage du système, dans le même esprit que les méthodes d'éléments finis de type  $p$  ou  $h - p$ ). En comparaison avec la méthode proposée par Priolo *et al.* (1994), notre approche diffère par le choix de la base polynômiale (Legendre et non Chebyshev) et de la règle de quadrature numérique (Gauss-Lobatto-Legendre dans notre cas). Même si le choix particulier des polynômes et des points de collocation n'affecte pas sensiblement l'erreur commise pour la discrétisation spatiale, il affecte très fortement le conditionnement et la structure de graphe des matrices du système d'équations algébriques à résoudre, ce qui est critique pour l'efficacité de l'algorithme, notamment dans son degré de parallélisation (Fisher, 1990). À la différence du schéma de Priolo *et al.* (1994), notre approche conduit à un schéma réellement explicite (matrice de masse *exactement* diagonale), et permet de conserver le bénéfice des algorithmes de sommation-factorisation (Orszag, 1980 ; Fisher, 1990). La méthode d'éléments spectraux proposée dans cette thèse, dérivant d'une formulation faible des équations de l'élastodynamique, permet donc de combiner de manière naturelle la souplesse géométrique des méthodes variationnelles d'ordre faible avec le taux de convergence rapide caractérisant les approximations spectrales. Cette bonne propriété de convergence provient de la grande précision spatiale résultant de l'utilisation de la règle de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre. Cette précision spatiale est de plus préservée dans la plupart des situations pour lesquelles des coefficients non constants doivent être utilisés au sein de chaque élément (Maday et Rønquist, 1990), c'est-à-dire dans le cas d'un milieu hétérogène (propriétés élastiques du milieu non constantes), ou dans le cas d'une géométrie déformée (jacobien de transformation non constant). La solution discrète présente de plus une dispersion numérique minimale (Faccioli *et al.*, 1996 ; Cohen *et al.*, 1993 ; Tordjman, 1995).

Nous avons été motivés, dans ce travail de thèse, par l'étude de deux types de problèmes : le premier est celui de la modélisation complète (forme d'onde, ondes de volume, ondes de surface et d'interface) de la propagation des ondes élastiques dans des milieux compliqués, afin de comprendre et d'extraire l'information physique contenue dans les données sismiques provenant d'enregistrements effectués dans ces structures difficiles. L'étude de milieux géophysiques présentant de tels phénomènes (diffraction, couplage de modes, génération d'ondes de Rayleigh et d'ondes de surface, effets de localisation et d'amplification des champs de déplacement et d'accélération) doit faire appel à des techniques numériques fournissant des solutions très précises, prenant en compte de façon propre les conditions aux limites tant pour une surface déformée que pour des interfaces courbes dans un milieu hétérogène. Le deuxième problème est celui des effets de site. Les mouvements du sol peuvent être amplifiés de manière très significative (à différentes fréquences) en raison de la topographie ou de la géologie locales. Ceci a été observé sur le terrain pour de nombreux tremblements de terre, voir par exemple Spudich *et al.* (1996), Rial (1996), Catchings et Lee (1996), Pedersen (1994)... En particulier, les effets 3D liés à la topographie de surface, ou aux couches sédimentaires présentes dans le modèle, peuvent conduire à des phénomènes d'amplification et de « scattering » complexes. De tels effets peuvent modifier les mouvements du sol dans une très large proportion, et sont donc d'un intérêt primordial dans la prévention des risques sismiques et le calcul des structures susceptibles d'être édifiées dans de telles zones. Il est donc particulièrement intéressant de pouvoir développer des techniques numériques permettant de modéliser avec précision de tels effets.

**Première partie**

**Approche pseudo-spectrale globale**



# Chapitre 1

## Propagation d'ondes dans un milieu élastique

La modélisation de la propagation des ondes dans les milieux élastiques complexes peut faire appel à des techniques numériques très variées, dont les plus courantes sont rappelées dans la deuxième partie de ce chapitre, ainsi que leurs principales caractéristiques. Toutes ces techniques ayant pour point commun la description des corps considérés à l'aide de la *théorie de l'élasticité*, dont les fondements ont été établis par Cauchy et Poisson au début du XIXème siècle, nous rappelons dans la première partie de ce chapitre les principaux résultats de cette théorie. Notre description sera inévitablement succincte, pour plus de détails sur cette théorie, le lecteur pourra se référer à de nombreux ouvrages classiques (par exemple [Landau et Lifchitz, 1953](#) ; [Brillouin, 1964](#) ; [Germain et Muller, 1994](#) ; [Lemaitre et Chaboche, 1985](#) ; [Lublinter, 1990](#) ; [Duvaut, 1990](#) ; [Pilant, 1979](#) ; [Ben-Menahem et Singh, 1981](#) ; [Aki et Richards, 1980](#) ; [Achenbach, 1984...](#)), dont nous nous sommes largement inspirés ici.

### 1.1 Tenseur de déformation

Le but de la théorie de l'élasticité est l'étude de la mécanique des corps solides considérés comme des milieux continus (approche macroscopique). Sous l'effet de l'ensemble des forces qui leur sont appliquées, les corps considérés subissent une déformation, se traduisant tant par un changement de leur forme que par un changement de leur volume. Notons  $r$  le *vecteur position* d'un point du corps, notons  $x_i$  ses composantes dans un système de coordonnées que l'on se donne. Après déformation du corps, ses points se sont déplacés, notons alors  $r'$  (de composantes  $x'_i$ ) le nouveau vecteur position de ce point matériel. Le *vecteur déplacement* de ce point est alors :

$$u = r' - r \quad (1.1)$$

Généralement, la connaissance du vecteur déplacement en chaque point du corps suffit à déterminer la déformation de ce corps. Considérons deux points infiniment voisins. Notons  $dr$ , de composantes  $dx_i$ , le vecteur reliant ces deux points avant déformation, et  $dr'$ , de composantes  $dx'_i$ , le vecteur reliant ces deux mêmes points après déformation. La distance entre les deux points avant déformation est alors

$$dl = \sqrt{\sum_i dx_i^2} \quad (1.2)$$

et après déformation

$$dl' = \sqrt{\sum_i dx_i'^2} \quad (1.3)$$

En élevant au carré, en utilisant la relation  $dx'_i = dx_i + du_i$ , et en sous-entendant la sommation sur l'indice muet  $i$ , on obtient

$$dl^2 = dx_i^2 \quad (1.4)$$

et donc

$$dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2 \quad (1.5)$$

Si maintenant nous introduisons la relation  $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$ , nous pouvons réécrire l'élément de longueur sous la forme

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l \quad (1.6)$$

Notons au passage que nous avons utilisé ici, comme ce sera toujours le cas, sauf indication contraire, dans la suite de cette thèse, la *convention de sommation implicite sur les indices*, dite *convention d'Einstein*, qui a le mérite de permettre d'alléger considérablement les notations.

L'expression ci-dessus peut être simplifiée en remarquant que, les indices étant muets, il est possible dans le troisième terme d'intervertir les indices  $i$  et  $l$ , et de réécrire le deuxième terme sous la forme symétrique  $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dx_i dx_k$ , ce qui conduit à l'expression suivante

$$dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ik} dx_i dx_k \quad (1.7)$$

où le tenseur  $\varepsilon_{ik}$ , symétrique par définition ( $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ ), et appelé *tenseur de déformation*, est donné par

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (1.8)$$

Dans de nombreux cas pratiques, et notamment lorsque l'on étudie la propagation des ondes élastiques, on peut faire l'hypothèse de petites perturbations, et dans l'expression (1.8), le dernier terme, qui est du second ordre, peut être négligé, ce qui permet de retrouver l'expression classique pour des *déformations infinitésimales*

$$\varepsilon_{ik} \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.9)$$

qui est l'expression que nous utiliserons toujours par la suite.

## 1.2 Lois de conservation

À partir des lois de conservation fondamentales (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment angulaire), exprimées sous forme globale, nous pouvons retrouver leur expression locale dans l'hypothèse d'un milieu continu. Nous travaillons dans un espace euclidien muni d'un système de coordonnées cartésiennes. En sismologie, la distinction entre approche lagrangienne et eulérienne (toutes deux du reste développées par Leonhard Euler) est rarement nécessaire, car les fluctuations spatiales des déplacements, déformations et contraintes ont des longueurs d'onde beaucoup plus grandes que l'amplitude des déplacements des particules (Aki et Richards, 1980). Dans ce cas particulier, il n'existe en pratique aucune différence entre l'évaluation d'un gradient en un point fixe (approche eulérienne) ou pour une particule donnée que l'on suit dans son mouvement (approche lagrangienne).

### 1.2.1 Conservation de la masse

Soit  $M(t)$  la masse d'un objet de volume  $V(t)$  au cours du temps. Pour un système isolé, il n'y a pas de création de masse, la loi de conservation globale de la masse s'écrit donc

$$\frac{dM}{dt}(t) = 0 \quad (1.10)$$

Si nous introduisons la densité de masse  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , alors la masse totale du volume  $V(t)$  s'écrit

$$M(t) = \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (1.11)$$

Le volume  $V(t)$  suivant la matière dans son mouvement, la condition (1.11) se traduit par

$$\iiint_{V(t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \iint_{S(t)} \rho(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x}, t) n_j dS = 0 \quad (1.12)$$

en ayant noté  $S(t)$  le contour de  $V(t)$ ,  $n_j$  la  $j$ -ième composante de la normale extérieure à  $S(t)$ , et  $v_j(\mathbf{x}, t)$  la  $j$ -ième composante de la vitesse de la particule se trouvant en  $x$  à l’instant  $t$ . En utilisant alors le théorème de la divergence, nous obtenons

$$\iiint_{V(t)} \left( \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \partial_j(\rho(\mathbf{x}, t)v_j(\mathbf{x}, t)) \right) dV = 0 \quad (1.13)$$

Cette expression étant vraie pour tout volume  $V$ , et l’intégrand étant continu, on en déduit la loi de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (1.14)$$

### 1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

Par définition, la quantité de mouvement contenue dans le volume  $V(t)$  est donnée par

$$P(\mathbf{x}, t) = \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}, t)dV \quad (1.15)$$

La force qui agit sur ce volume est la somme des forces d’origine extérieure appliquées à ce volume

$$F_{ext}(t) = \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t)dV \quad (1.16)$$

et des forces intérieures résultant de la traction exercée à la surface  $S(t)$  du volume  $V(t)$

$$F_{int}(t) = \iint_{S(t)} \tau(\mathbf{x}, t)dS \quad (1.17)$$

où le vecteur traction est donné par

$$\tau_i = \sigma_{ij}n_j \quad (1.18)$$

le tenseur  $\sigma_{ij}$  étant appelé tenseur des contraintes, et  $n_j$  étant la  $j$ -ième composante de la normale extérieure à  $S(t)$ . En utilisant cette définition de la traction ainsi que le théorème de la divergence, nous avons

$$F_{int}(t) = \iint_{S(t)} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)n_j(\mathbf{x}, t)dS = \iiint_{V(t)} \partial_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}, t)dV \quad (1.19)$$

En écrivant maintenant la *conservation globale de la quantité de mouvement*, ou *deuxième loi de Newton*, nous obtenons

$$\frac{dP}{dt}(t) = F_{ext}(t) + F_{int}(t) \quad (1.20)$$

Avec l’expression de la quantité de mouvement (1.15) et des forces extérieures (1.16) et intérieures (1.17), nous en déduisons

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \partial_j(\rho v_i v_j) = f_i + \partial_j \sigma_{ji} \quad (1.21)$$

qui donne la forme habituelle de la conservation de la quantité de mouvement écrite sous forme locale

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \partial_j(\rho v_i v_j - \sigma_{ji}) = f_i \quad (1.22)$$

### 1.2.3 Conservation du moment angulaire

On peut montrer (voir par exemple [Germain et Muller, 1994](#), p. 86), et nous admettrons, que dans le cas de déformations infinitésimales, la loi de conservation du moment angulaire se traduit par la symétrie du tenseur des contraintes ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ).

## 1.3 Équations de l'élastodynamique

### 1.3.1 Loi de comportement

Pour pouvoir résoudre maintenant le système d'équations de conservation décrit ci-dessus, il est nécessaire de se donner une loi reliant les contraintes dans le milieu à l'histoire de ses déformations, c'est-à-dire de définir la *rhéologie* du milieu. Une telle loi est appelée *loi de comportement* du matériau. Il existe de nombreux modèles de rhéologie classiques, par exemple de type élastique, viscoélastique, plastique, viscoplastique, fluide... Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés plus particulièrement au modèle élastique.

Soit  $\sigma(\mathbf{x}, t) = \{\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)\}$  le tenseur des contraintes et  $\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)\}$  le tenseur des déformations en un point  $x$  du milieu à l'instant  $t$ . Le milieu est dit *élastique* si les contraintes à l'instant  $t$  (au point  $x$ ) ne dépendent que des déformations à l'instant  $t$  (en ce même point  $x$ ). Pour de petites déformations, un développement de Taylor donne

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} d_{ijklmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \dots \quad (1.23)$$

Pour des déformations suffisamment petites, on peut garder seulement le premier terme du développement, ce qui donne la loi de Hooke (parfois appelée loi de Hooke *généralisée*)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t_0) + c_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) \quad (1.24)$$

Le terme  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t_0)$  est appelé précontrainte, et correspond à l'état de contrainte du système lorsqu'il est à l'équilibre. Grâce à la loi de comportement, les tenseurs  $c_{ijkl}$ ,  $d_{ijklmn}$ , ... étant donnés, on peut à tout instant calculer le champ de contrainte  $\sigma$  à partir du champ de déformation  $\varepsilon$ . Si nous ajoutons cette loi aux lois de conservation énoncées ci-dessus en (1.14) et (1.22), ainsi qu'à la définition du tenseur des déformations (1.9), nous avons alors un ensemble complet d'équations permettant de décrire le système étudié.

### 1.3.2 Équation classique dans le cas de petites déformations

En développant et en réordonnant les termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.22), l'on obtient

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \partial_j \sigma_{ji} + \rho v_j \partial_j v_i + v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j (\rho v_j) \right) = f_i \quad (1.25)$$

D'après l'équation de conservation de la masse (1.14), le dernier terme du membre de gauche est nul, donc

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \partial_j \sigma_{ji} + \rho v_j \partial_j v_i = f_i \quad (1.26)$$

Dans le cadre de l'étude de la propagation des ondes élastiques, nous pouvons raisonnablement faire l'hypothèse d'un milieu soumis à de petites perturbations. Cette approximation permet de négliger certains termes, et conduit à l'équation classique, que nous utiliserons toujours par la suite

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \partial_j \sigma_{ji} + f_i \quad (1.27)$$

### 1.3.3 Milieu élastique isotrope

Dans le cas d'un matériau élastique linéaire, la connaissance du tenseur des paramètres élastiques  $c_{ijkl}$  suffit à relier les contraintes aux déformations en tout point du matériau. Ce tenseur possède les symétries suivantes :

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{klij} && \text{(symétries majeures)} \\ c_{ijkl} &= c_{jikl} = c_{ijlk} && \text{(symétries mineures)} \end{aligned} \quad (1.28)$$

De plus,  $c$  est défini positif :

$$c_{ijkl} \psi_{ij} \psi_{kl} > \alpha |\psi|^2 \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \quad \forall \psi, \psi_{ij} = \psi_{ji} \neq 0 \quad (1.29)$$

Le cas le plus simple pour un milieu élastique est le cas où les propriétés de ce milieu sont les mêmes suivant toutes les directions de l’espace. Un tel milieu est dit *isotrope*. Dans un tel cas, deux paramètres élastiques seulement suffisent à caractériser la relation liant les contraintes aux déformations. On peut par exemple utiliser les deux *paramètres de Lamé*  $\lambda$  et  $\mu$  (Lamé, 1852) et écrire la loi de Hooke sous la forme

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.30)$$

ce qui revient à dire que

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \quad (1.31)$$

où  $\delta_{ij}$  représente le symbole de Kronecker, défini par  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  sinon.

Si les deux paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  sont une des paramétrisations possibles dans le cas élastique isotrope, ce n’est évidemment pas la seule. Un des défauts majeurs des paramètres de Lamé est qu’ils ne sont pas reliés de manière directe à une grandeur physique facilement mesurable. Parmi les autres paramètres mesurables fréquemment utilisés, citons par exemple :

- le module de rigidité à la compression  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$
- le module de Young  $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$
- le coefficient de Poisson  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$
- la vitesse des ondes de compression (ondes P)  $c_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$
- la vitesse des ondes de cisaillement (ondes S)  $c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

Quelques propriétés utiles de ces paramètres peuvent être mentionnées. Le coefficient de Poisson est tel que

$$-1 < \nu \leq \frac{1}{2} \quad (1.32)$$

Le voisinage de la limite  $\nu = \frac{1}{2}$  correspond à un milieu très faiblement consolidé. Il est intéressant de remarquer que la nécessité de pouvoir définir une densité d’énergie qui soit une forme définie positive impose seulement la contrainte  $\nu > -1$  et non pas  $\nu > 0$  (Lemaître et Chaboche, 1985, p. 127). Notons que pour la plupart des roches, le coefficient de Poisson se situe entre 0.20 et 0.35.

Les vitesses de propagation des ondes S et P sont telles que

$$c_S < \frac{c_P}{\sqrt{2}} \quad (1.33)$$

d’où le nom de ces ondes (P=Primary, S=Secondary), les ondes P directes arrivant toujours en premier, avant les ondes S directes. On attribue également la signification P=Pressure et S=Shear à ces noms, les ondes P étant des ondes de compression et les ondes S des ondes de cisaillement.

### 1.3.4 Système hyperbolique du premier ou du second ordre

Nous venons de voir que l’équation des ondes dans le cas élastique linéaire isotrope peut s’écrire sous la forme du système

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \partial_j \sigma_{ji} + f_i \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \\ \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

Nous sommes donc en présence d’un système hyperbolique du deuxième ordre pour le champ de déplacement inconnu  $u$ . Nous nous attendons donc à trouver des solutions de type propagatif, en particulier l’existence d’ondes planes comme solutions particulières du système dans le cas homogène.

Notons qu'il est possible de réécrire les équations ci-dessus sous la forme d'un système hyperbolique du premier ordre en temps en choisissant comme inconnues le déplacement, la vitesse et les contraintes (Hughes et Marsden, 1978). Si l'on ne s'intéresse qu'à la vitesse et aux contraintes, le système peut être reformulé très simplement (Virieux, 1986 ; Carcione et Wang, 1993), par exemple à 2D en écrivant :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + S \quad (1.34)$$

avec

$$U = [v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}]^T \quad (1.35)$$

et

$$S = [f_x, f_y, 0, 0, 0]^T \quad (1.36)$$

en ayant posé

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

### 1.3.5 Problème aux limites

En pratique, dans le cas d'un calcul numérique, le domaine étudié n'est jamais infini, mais est borné du fait même de la capacité mémoire limitée de la machine sur laquelle est effectué le calcul. On distingue les frontières physiques du domaine (essentiellement les surfaces libres, correspondant à une condition de Neumann, et les bords rigides, correspondant à une condition de Dirichlet), et les frontières numériques du domaine, limitant le milieu de manière artificielle, et sur lesquelles doivent être posées des conditions absorbantes.

Définissons donc maintenant le problème aux limites que nous serons amenés à résoudre. Soit  $\Omega$  un domaine élastique inhomogène ouvert borné,  $\partial\Omega$  sa frontière,  $\bar{\Omega}$  le domaine fermé correspondant,  $\Gamma^{int}$  la frontière physique,  $\Gamma_{abs}^{ext}$  la frontière numérique sur laquelle des conditions absorbantes doivent être introduites, et  $\mathbf{I} = [0, T] \subset \mathbf{R}_+$  l'intervalle de temps que l'on souhaite étudier. Suivant les problèmes physiques que l'on souhaite modéliser, trois types de conditions aux limites peuvent exister :

#### 1. Conditions aux limites en contrainte sur $\Gamma_{\tau}^{int}$

$$\tau_i \doteq \sigma_{ij} n_j \quad \text{sur } \Gamma_{\tau}^{int} \times \mathbf{I} \quad (1.39)$$

où  $\tau = \tau(\mathbf{x}, t)$  est la traction imposée sur la frontière, et  $n$  est la normale sortante sur  $\Gamma$ . Une condition de traction nulle sur la frontière, *i.e.*  $\tau(\mathbf{x}, t) = 0; \forall t \in \mathbf{I}$ , correspondra par exemple au cas particulier, très important en pratique, d'une condition de surface libre, dans le cas où l'on néglige l'influence de la gravité.

#### 2. Conditions aux limites de Dirichlet (déplacement imposé) sur $\Gamma_g^{int}$

$$u_i = g_i \quad \text{sur } \Gamma_g^{int} \times \mathbf{I} \quad (1.40)$$

où  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  est le déplacement imposé sur la frontière. Ces conditions correspondent au cas d'un bord rigide par exemple.

#### 3. Conditions de radiation (conditions absorbantes) sur $\Gamma_{abs}^{ext}$

Quand on suppose que le domaine physique étudié s'étend jusqu'à l'infini dans une ou plusieurs directions (ce qui n'est qu'une vue de l'esprit, puisqu'en réalité tout domaine physique est forcément borné), il n'est pas possible d'utiliser directement la méthode des éléments spectraux sans se heurter au problème de la modélisation numérique de la propagation des ondes dans un milieu infini ou semi-infini. Les approches classiques pour résoudre cette difficulté remplacent le problème

aux limites initial par un problème posé sur un domaine borné en introduisant une frontière fictive (bord absorbant) sur laquelle sont posées des conditions aux limites appropriées. Une condition de radiation doit être introduite sur ce bord fictif  $\Gamma_{abs}^{ext}$  afin de remplacer le domaine extérieur. L’écriture correcte d’une condition de ce type est un problème complexe qui ne sera pas étudié ici, on pourra se référer à [Givoli \(1991\)](#) pour une étude très complète sur ce sujet.

Récemment, des conditions de bord non-locales exactes, utilisant un développement asymptotique de la solution dans le domaine extérieur ([Bayliss et Turkel, 1980](#) ; [Givoli et Keller, 1994](#)) ont été proposées, mais elles présentent l’inconvénient d’être particulièrement compliquées à mettre en œuvre. Nous avons donc préféré utiliser une approximation locale fondée sur une formulation variationnelle de l’approximation paraxiale classique introduite par [Clayton et Engquist \(1977\)](#) et [Engquist et Majda \(1977\)](#). En suivant [Aubry et al. \(1985\)](#) et [Modaresi et Benzenati \(1994\)](#), un développement en nombre d’onde des équations de l’élastodynamique écrites dans le domaine de Fourier est effectué, afin d’obtenir une expression locale de l’impédance de la frontière fictive. Une telle approximation est précise seulement pour des fréquences relativement élevées, et surtout pour des ondes incidentes sur la frontière absorbante suivant sa normale, ou au voisinage de celle-ci. À l’ordre zéro (utilisé dans cette thèse), une telle approximation est très similaire aux amortisseurs classiques proposés par [Lysmer et Kuhlemeyer \(1969\)](#) :

$$\tau = c_p(\rho\mathbf{v})_N + c_s(\rho\mathbf{v})_T \quad \text{sur } \Gamma_{abs}^{ext} \times \mathbf{I} \quad (1.41)$$

où  $\tau$  est la traction sur la frontière, et  $(\rho\mathbf{v})_N$  ainsi que  $(\rho\mathbf{v})_T$  sont respectivement les composantes normales et tangentielles de la quantité de mouvement sur la surface absorbante.

En considérant des bords absorbants plans, la condition que nous avons utilisée est celle proposée de manière *ad hoc* par [Stacey \(1988\)](#), écrite ici à 2D par exemple pour un bord plan situé suivant  $z$  minimal :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} &= c_s \frac{\partial u_x}{\partial z} + (c_p - c_s) \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} &= c_p \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_p - c_s) \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Cette condition constitue une amélioration de la condition proposée précédemment par [Clayton et Engquist \(1977\)](#) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} &= c_s \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} &= c_p \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Dans nombre de simulations numériques que nous montrerons dans la suite de ce travail, le problème lié à l’introduction de conditions absorbantes constituera souvent la principale source d’erreur numérique, en raison des réflexions parasites en provenance des bords absorbants. Une amélioration certaine consisterait à utiliser une approximation paraxiale d’ordre plus élevé ([Stacey, 1988](#)), une combinaison d’approximations paraxiales ([Higdon, 1991](#)), ou bien encore une approche radicalement différente, à caractère non local, telle que celle proposée par [Givoli et Keller \(1990\)](#) ou encore [Givoli et Vidergauz \(1993\)](#), mais au prix d’une complication algorithmique importante.

### 1.3.6 Excitation du milieu - sources

Une source d’excitation peut être introduite dans le milieu soit comme une force colloquée (située alors en un point de la grille), soit comme une explosion (compression pure ponctuelle). La dépendance temporelle de la source peut en théorie être n’importe quel signal ayant une bande de fréquence limitée. La plupart du temps, comme c’est souvent le cas en géophysique lors de campagnes sismiques, une fonction de type Ricker (dérivée seconde de gaussienne en temps) sera utilisée. Nous pourrions également, comme ce sera le cas pour une onde plane par exemple, ne pas introduire explicitement de source, mais imposer à l’instant initial un champ de déplacement, de vitesse et d’accélération.

Plus généralement, il est possible d’introduire comme source un tenseur de moment sismique quelconque  $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t)$ , tenseur symétrique de rang deux ayant toutes les propriétés d’un tenseur de contraintes, et pour lequel la force équivalente est donnée par

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = - \operatorname{div} \mathbf{m}(\mathbf{x}, t) \quad (1.44)$$

### 1.3.7 Formulation variationnelle du problème aux limites

Nous avons vu précédemment que les équations de l'élastodynamique linéaire pouvaient s'écrire sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \rho \dot{\mathbf{v}} &= \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{f} \\ \rho \dot{\mathbf{u}} &= \rho \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbf{I} \quad (1.45)$$

avec les conditions initiales

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.46)$$

où nous avons noté comme précédemment  $\Omega$  le domaine élastique ouvert étudié,  $\bar{\Omega}$  le domaine fermé,  $\Gamma^{int}$  sa frontière physique,  $\Gamma_{abs}^{ext}$  la frontière numérique sur laquelle sont posées des conditions absorbantes, et  $\mathbf{I} = [0, T] \subset \mathbf{R}_+$  l'intervalle de temps que l'on souhaite étudier.  $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}^{n_d}$  représente le champ de déplacement ;  $\mathbf{v} : \Omega \times \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}^{n_d}$  le champ de vitesse ;  $\mathbf{u}_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}^{n_d}$  le champ de déplacement initial ; et  $\mathbf{v}_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}^{n_d}$  le champ de vitesse initial. Soit également  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+^{n_d}$  le champ de densité, et  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n_d}$  le champ de force volumique. Nous supposons que le milieu est libre de toute contrainte initiale, c'est-à-dire  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, 0) = 0$ .

Rappelons aussi que le tenseur des contraintes est déterminé dans le cas linéaire par la loi de Hooke généralisée qui, en raison des symétries du tenseur  $\mathbf{c}$ , peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}(\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{c} : \nabla \mathbf{u} \quad (1.47)$$

soit encore

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.48)$$

où l'on a introduit la notation du produit contracté de deux tenseurs, noté par le symbole « : », et tel que  $\mathbf{c} = \mathbf{a} : \mathbf{b}$  soit équivalent à écrire que  $c_{ij} = a_{ijkl} b_{kl}$ .

Il est alors possible d'écrire le problème sous *forme variationnelle* (aussi appelée *forme faible*). Étant donné l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  formé de toutes les fonctions qui, ainsi que leur dérivée première au sens des distributions, appartiennent à  $L^2(\Omega)$ , nous pouvons introduire l'ensemble des déplacements admissibles  $\mathcal{S}_t$  à un instant fixé  $t \in \mathbf{I}$  :

$$\mathcal{S}_t = \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in H^1(\Omega)^{n_d} : \Omega \times \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}^{n_d} ; \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \text{ sur } \Gamma_g^{int} \times \mathbf{I} \} \quad (1.49)$$

où  $\mathbf{g}$  est le déplacement imposé sur la partie de la frontière sur laquelle sont posées des conditions de Dirichlet. Notons  $\mathcal{V}$  l'espace des variations admissibles pour les déplacements (fonctions test) associé à  $\mathcal{S}_t$  et défini classiquement comme :

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{w}(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)^{n_d} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n_d} ; \mathbf{w}(\mathbf{x}) = 0 \text{ sur } \Gamma_g^{int} \} \quad (1.50)$$

On notera au passage que les fonctions  $\mathbf{w}$  ne dépendent pas du temps. La formulation variationnelle est alors obtenue en formant le produit interne défini dans  $L^2(\Omega)$  des équations décrites ci-dessus avec l'ensemble des variations admissibles. Cela conduit, en utilisant le théorème de la divergence, à résoudre le problème suivant : étant donnés  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\tau$ ,  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$ , trouver  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}_t$ ,  $\forall t \in \mathbf{I}$ , tel que  $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}$  :

$$(\mathbf{w}, \rho \dot{\mathbf{v}}) + a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{f}) + (\mathbf{w}, \tau)_{\Gamma_\tau^{int}} + (\mathbf{w}, \tau)_{\Gamma_{abs}^{ext}} \quad (1.51)$$

$$(\mathbf{w}, \rho \dot{\mathbf{u}}) = (\mathbf{w}, \rho \mathbf{v}) \quad (1.52)$$

avec les conditions initiales

$$(\mathbf{w}, \rho \mathbf{u}(\cdot, t)|_{t=0}) = (\mathbf{w}, \rho \mathbf{u}_0) \quad (1.53)$$

$$(\mathbf{w}, \rho \mathbf{v}(\cdot, t)|_{t=0}) = (\mathbf{w}, \rho \mathbf{v}_0) \quad (1.54)$$

où

$$(\mathbf{w}, \rho \dot{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} dV ; a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} dV = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \mathbf{c} : \nabla \mathbf{u} dV \quad (1.55)$$

et

$$(\mathbf{w}, \mathbf{f}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dV ; (\mathbf{w}, \tau)_{\Gamma_\tau^{int}} = \int_{\Gamma_\tau^{int}} \tau \cdot \mathbf{w} d\Gamma ; (\mathbf{w}, \tau)_{\Gamma_{abs}^{ext}} = \int_{\Gamma_{abs}^{ext}} \tau \cdot \mathbf{w} d\Gamma \quad (1.56)$$

On notera que la formulation donnée ici a été écrite dans le cas linéaire quelconque (*a priori* anisotrope), le cas isotrope étant simplement obtenu en particulierisant l'expression du tenseur  $\mathbf{c}$ . Notons au passage également une propriété très importante de l'écriture variationnelle du problème, et résultant directement de la formulation exposée ci-dessus : la contribution des bords sur lesquels une condition en traction est fixée a été écrite sous la forme  $(\mathbf{w}, \tau)_{\Gamma_\tau^{int}}$ , où  $\tau$  est le vecteur traction sur cette frontière ; Donc, dans le cas particulier d'une surface libre, la traction sur cette frontière est nulle, et le terme considéré disparaît, cette condition étant ainsi prise en compte de manière automatique.

### 1.3.8 Énergie totale du système

À tout instant dans un système élastique, l’énergie cinétique par unité de volume peut s’écrire

$$U_c = \frac{1}{2}\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \quad (1.57)$$

et la densité d’énergie de déformation

$$U_p = \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (1.58)$$

En l’absence de source extérieure, si l’on se donne des conditions initiales non nulles par exemple, l’énergie totale contenue dans le système doit se conserver, ce qui se traduit par

$$\int_V (U_c + U_p)dV = \text{constante} \quad (1.59)$$

Dans le cas où le comportement est élastique linéaire, pour un milieu homogène et infini, et en l’absence de terme source, une relation encore plus forte existe, à savoir que l’énergie cinétique totale et l’énergie potentielle totale sont égales (Achenbach, 1984).

## 1.4 Différents types d’ondes rencontrés

Dans le cas de la propagation d’ondes dans un milieu élastique linéaire isotrope, il peut exister différents types d’ondes que nous rencontrerons constamment dans la suite de cette thèse. Essayons de détailler dès à présent les types principaux. Dans la suite de ce manuscrit, nous nous placerons toujours dans le cas d’un solide élastique linéaire isotrope.

### 1.4.1 Ondes directes, réfléchies et réfractées

Dans le cas d’une source placée dans un milieu homogène infini, deux types d’ondes existent, appelées ondes directes P et ondes directes S. Pour un récepteur placé en champ lointain, l’onde P arrive la première, elle a voyagé à la vitesse  $c_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  et correspond à une compression pure. Le déplacement des particules est parallèle à la direction de propagation (onde longitudinale). L’onde S arrive en second, elle a voyagé à la vitesse  $c_S = \sqrt{\mu/\rho}$  et correspond à un cisaillement pur. Le déplacement des particules est perpendiculaire à la direction de propagation (onde transversale). Si maintenant le domaine considéré n’est plus infini, mais borné, lorsque l’une ou l’autre de ces ondes rencontre une frontière du domaine, un couplage entre les modes P et S se produit à cette frontière, et il en résulte dans le cas général des ondes réfléchies des deux types (P et S) pour une onde incidente purement P ou purement S. Dans le cas d’une onde S incidente sur une interface cependant, comme  $c_P$  est toujours plus grand que  $c_S$ , il existe un *angle critique*

$$\theta_c = \arcsin \left( \frac{c_S}{c_P} \right) \quad (1.60)$$

au-delà duquel il n’existe pas d’onde P réfléchie excitée par l’onde S incidente. Qualitativement, le même type de phénomène se produit lorsqu’une onde P ou une onde S rencontre une discontinuité de propriétés élastiques au sein du milieu (interface). Dans un tel cas, et suivant la valeur de l’angle d’incidence, une onde P ou S incidente peut donner naissance à quatre ondes : P réfléchie, S réfléchie, P transmise et S transmise. Cette propriété de conversion de mode aux interfaces dans un modèle géologique est à l’origine de la grande complexité de bons nombres d’enregistrements sismiques, le nombre de phases observées pouvant devenir rapidement très important.

Dans le cas particulier où l’onde est incidente avec l’angle critique, pour une onde passant d’un milieu de vitesse plus faible à un milieu de vitesse plus grande, l’onde transmise va ressortir avec un angle de 90 degrés par rapport à la normale à l’interface. L’énergie voyage alors le long de l’interface avec la vitesse du milieu le plus rapide, et les récepteurs placés au delà d’une distance appelée *distance critique* vont enregistrer une onde appelée *onde réfractée*, qui est très utilisée en pratique dans de nombreuses campagnes sismiques.

### 1.4.2 Ondes de Rayleigh, de Love et de Stoneley

Lorsqu'un domaine élastique homogène est limité par une surface libre (correspondant à une condition de traction nulle à la surface), il existe un type d'ondes particulier, mis en évidence par Lord Rayleigh (Rayleigh, 1887), et correspondant à des ondes se propageant le long de la surface du milieu, dans un voisinage de celle-ci, sans toutefois pénétrer dans le milieu (onde évanescence avec la profondeur). Ces ondes sont appelées *ondes de surface*, ou *ondes de Rayleigh*. On peut montrer que ces ondes voyagent à une vitesse  $c_R$  toujours plus faible que celle de l'onde S (Landau et Lifchitz, 1953), solution de

$$\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^6 - 8\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^4 + 8\left(\frac{c_R}{c_s}\right)^2 \left(3 - 2\frac{c_s^2}{c_p^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_s^2}{c_p^2}\right) = 0 \quad (1.61)$$

Comme  $c_s/c_p$  ne dépend que du coefficient de Poisson, puisque

$$\frac{c_s}{c_p} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}} \quad (1.62)$$

le rapport  $c_R/c_s$  peut être calculé numériquement comme une fonction du seul coefficient de Poisson. Viktorov (1967) trouve par ajustement la loi empirique suivante

$$\frac{c_R}{c_s} = \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} \quad (1.63)$$

et les valeurs typiques suivantes peuvent être données (d'après Harker, 1988) :

$\nu$	$c_s/c_p$	$c_R/c_s$
0.00	0.707	0.862
0.25	0.577	0.919
0.33	0.500	0.932
0.40	0.408	0.941
0.50	0.000	0.955

Notons au passage quelques propriétés importantes de l'onde de Rayleigh

- L'onde de Rayleigh à la surface d'un milieu homogène plan est non dispersive. L'onde ne sera dispersive que si des hétérogénéités de propriétés élastiques sont présentes dans l'épaisseur où se propage l'onde de Rayleigh, par exemple dans la cas d'une fine couche de vitesse lente située sur un demi-espace homogène de vitesse plus rapide.
- Dans le cas d'un milieu dont la surface présente une courbure (topographie), celle-ci induit une dispersion de l'onde de Rayleigh même si le milieu est homogène (Pilant, 1979). La dispersion est alors fortement influencée par la valeur de la courbure relativement à la longueur d'onde caractéristique de l'onde de Rayleigh se propageant dans le milieu. Notons que dans le cas d'une onde de Rayleigh rencontrant une forte courbure de la surface, des conversions de mode d'ondes de Rayleigh en ondes de volume peuvent également se produire (Rulf, 1969).
- L'onde de Rayleigh est aisément reconnaissable à sa polarisation elliptique rétrograde dans le plan de propagation. Un enregistreur tricomposantes placé à la surface du sol l'enregistrera donc à la fois sur la composante horizontale parallèle à la direction de propagation, et sur la composante verticale.

Love (1911) a également montré qu'une onde de surface, oscillant perpendiculairement au plan de propagation, peut exister lorsqu'une couche de propriétés élastiques différentes est située à la surface d'un demi-espace. Une telle onde est appelée *onde de Love*. À la différence de l'onde de Rayleigh, l'onde de Love ne peut exister si le demi-espace est totalement homogène. L'onde de Love est de plus toujours dispersive. Ces ondes s'accompagnent d'un mouvement horizontal du sol. Un enregistreur tricomposantes placé à la surface du sol les enregistrera sur la composante horizontale perpendiculaire à la direction de propagation.

Dans le cas d'une interface entre deux solides, ou entre un fluide et un solide, une solution évanescence peut également exister et se propager le long de l'interface. De tels modes sont appelés *ondes d'interface*, ou encore *ondes de Stoneley* (Stoneley, 1924). Il convient cependant de noter que des telles solutions n'existent avec une amplitude significative que pour une plage de valeurs assez réduite des densités et des propriétés élastiques des matériaux en contact (Pilant, 1979). Par exemple, dans le cas de deux solides en contact, il faut que les vitesses  $S$  des deux milieux soient proches pour qu'une onde d'interface significative se propage.

## Chapitre 2

# Méthode de Chebyshev en coordonnées curvilignes pour l'équation des ondes

*Ce chapitre a été publié sous la référence : D. Komatitsch, F. Coutel and P. Mora (1996), Tensorial formulation of the wave equation for modelling curved interfaces, Geophysical Journal International, 127, pp 156-168.*

### 2.1 Résumé

Dans le présent chapitre, qui correspond à la première partie de notre travail de thèse, nous avons cherché à utiliser (en l'améliorant) une technique classique de modélisation basée sur la formulation différentielle des équations de l'élastodynamique et sur l'utilisation d'une base polynomiale d'ordre élevé (méthode pseudo-spectrale) pour la résolution spatiale. En effet, dans de nombreux cas que l'on souhaite étudier dans la pratique, il est nécessaire de prendre en compte des modèles présentant des interfaces courbes ainsi qu'une topographie de surface. Les méthodes de collocation, par exemple les algorithmes de type pseudo-spectral ou de différences finies, sont alors des approches séduisantes pour modéliser la propagation des ondes dans ces milieux complexes, notamment en raison de la relative facilité d'implémentation de tels algorithmes.

Cependant, de telles méthodes formulées en coordonnées cartésiennes ne sont pas très adaptées à l'étude de modèles présentant des interfaces courbes, en raison du fait que les interfaces et la surface libre ne coïncident pas avec le maillage cartésien. Cela conduit à un taux de convergence faible dont la conséquence la plus visible est l'apparition d'artefacts tels que la diffraction parasite par les marches d'escalier résultant de la discrétisation des interfaces et de la surface libre par une grille à mailles rectangulaires. De tels problèmes peuvent être évités par l'utilisation de grilles curvilignes dont les lignes suivent les interfaces et la surface libre, et dont la densité de mailles augmente au voisinage de ces interfaces. Une approche possible consiste à écrire l'équation des ondes en coordonnées cartésiennes et à utiliser la règle de dérivation composée pour exprimer les dérivées partielles cartésiennes en fonction des dérivées partielles calculées dans le système de coordonnées curvilignes. Cependant, il est plus naturel de résoudre directement dans le système de coordonnées curvilignes choisi l'équation des ondes écrite sous forme tensorielle, après avoir défini une transformation géométrique permettant de passer du domaine de travail curviligne au domaine physique étudié.

L'approche tensorielle, qui par définition est indépendante du système de coordonnées choisi, nécessite le calcul du même nombre de dérivées partielles que dans le cas cartésien, alors que l'approche utilisant la règle de dérivation composée nécessite 25 % de calculs en plus à 2D et 50 % en plus à 3D. Du point de vue du calcul numérique, l'approche tensorielle nécessite cependant l'utilisation d'un plus grand nombre de tableaux de stockage, donc consomme plus de mémoire de travail d'un point de vue informatique. Dans ce chapitre, l'approche tensorielle est validée en comparant les résultats obtenus pour le problème de Lamb incliné (Lamb, 1904) à la solution analytique du problème. Un bon accord est trouvé. Des calculs numériques effectués sur des modèles 2D plus complexes montrent ensuite la capacité de cette méthode à modéliser la propagation des ondes en présence d'interfaces courbes et/ou d'une topographie de surface. Des conversions de mode, d'onde de Rayleigh en onde de volume, sont par exemple observées lorsque la surface du modèle présente une concavité.

Nous expliquons également dans ce chapitre pourquoi la méthode employée est particulièrement bien adaptée au calcul sur un supercalculateur de type vectoriel, et nous donnons une estimation des performances que nous avons obtenues.

Cependant, en conclusion de ce chapitre, nous constatons clairement la limitation de l'approche différentielle globale, notamment en raison de la difficulté de trouver, pour un modèle réaliste, une transformation géométrique régulière entre le domaine physique considéré et le domaine de travail. Nous en déduisons la nécessité d'utiliser une approche plus fine, par exemple de type calcul par sous-domaines ou de type variationnel, dès lors que l'on souhaite étudier des modèles réellement complexes.

Ce chapitre est le résultat d'une collaboration étroite avec Fabien Coutel et Peter Mora de l'Université de Brisbane (Australie). Nous tenons également à remercier pour de nombreuses suggestions et discussions fructueuses José Carcione, Dominique Rodrigues, Albert Tarantola, Christophe Doursat et Emmanuel Dormy. La plupart des calculs utilisant la méthode pseudo-spectrale exposée dans ce chapitre ont été effectués sur le Cray J90 du Centre de Calcul et Réseaux de Jussieu (CCR). Les tests en différences finies ont été effectués sur la Connection Machine CM5 du Centre National de Calcul Parallèle en Sciences de la Terre (CNCPT).

## 2.2 Introduction

Dans de nombreuses situations présentant un intérêt d'un point de vue géophysique, il est important de pouvoir simuler la propagation d'ondes dans des modèles comprenant des interfaces courbes et/ou une topographie de surface. Dans de tels cas, l'utilisation de méthodes de collocation classiques (faisant appel à des grilles cartésiennes) présente l'inconvénient de produire des artefacts numériques tels que de la diffraction parasite résultant de la discrétisation en marches d'escalier des interfaces et de la surface. Dans le cas où le modèle présente des interfaces courbes, ces artefacts peuvent être atténués en introduisant des traitements numériques particuliers pour les mailles échantillonnant l'interface (voir par exemple [Muir et al., 1992](#) ; [Zahradník et al., 1993](#) ; [Zahradník et al., 1994](#)), sans cependant augmenter la précision du schéma discret dans cette zone, la discrétisation restant toujours uniforme. De plus, dans le cas particulier (important) de la surface libre, il ne semble pas qu'il existe de moyen simple d'introduire des conditions de surface libre correctes dans le schéma numérique si la surface est discrétisée en marches d'escalier.

Une approche permettant de contourner ces problèmes, initialement introduite par [Fornberg \(1988\)](#), et développée ensuite par de nombreux auteurs ([Tessmer et al., 1992](#) ; [Carcione, 1994](#) ; [Tessmer et Kosloff, 1994](#) ; [Nielsen et al., 1994](#) ; [Hestholm et Ruud, 1994](#)), consiste à résoudre l'équation des ondes sur une grille curviligne dont les lignes coïncident avec les interfaces. Cela est mené à bien classiquement en résolvant l'équation des ondes écrite dans un repère cartésien, et en faisant appel à la règle de dérivation composée pour calculer les dérivées spatiales cartésiennes dans le domaine de travail (grille curviligne). Cette méthode permet de prendre en compte des interfaces courbes, mais présente l'inconvénient d'être plus coûteuse que dans le cas d'une grille cartésienne, car un plus grand nombre de dérivées spatiales doivent être évaluées numériquement.

Une approche plus naturelle, et qui permet d'éviter cet inconvénient, c'est-à-dire de conserver le même coût de calcul que dans le cas d'une grille régulière, consiste à résoudre l'équation des ondes écrite directement dans le domaine curviligne. Pour cela, il est nécessaire d'écrire l'équation des ondes sous forme tensorielle, qui par définition est indépendante du système de coordonnées choisi. Une transformation de coordonnées permet de rapporter la grille curviligne, dont les lignes coïncident avec les interfaces du modèle ainsi qu'avec la surface libre, à un domaine de travail carré. Cela permet de calculer, en tout point du milieu, le tenseur métrique qui apparaît dans l'équation des ondes écrite sous forme tensorielle. La résolution numérique de l'équation des ondes posée sous cette forme tensorielle nécessite l'évaluation du même nombre de dérivées partielles que dans le cas d'une grille régulière.

La méthode algébrique de génération de grille employée permet de s'assurer que les lignes du maillage suivent bien les différentes interfaces du modèle, ce qui permet ainsi de faire disparaître les diffractions numériques parasites résultant de la discrétisation en marches d'escalier des interfaces dans le cas d'un maillage régulier. De plus, un raffinement local de la grille au voisinage des différentes interfaces (en particulier au voisinage de la surface libre) permet d'augmenter significativement la précision du schéma numérique dans ces zones par rapport au cas d'un maillage cartésien.

Il pourrait également être envisagé de discrétiser de tels domaines complexes en utilisant des grilles qui soient orthogonales en tout point du domaine. Cela permettrait de réduire le nombre de termes apparaissant dans les équations à résoudre (les termes non-diagonaux du tenseur métrique étant alors nuls) mais, d'une part, il est très difficile de générer de telles grilles pour des modèles réalistes même dans le cas 2D ([Ryskin et Leal, 1983](#)), et, de plus, comme le soulignent [Thompson et al. \(1985\)](#) ainsi que [Nielsen et Skovgaard \(1990\)](#), l'orthogonalité de la grille n'est pas le point essentiel pour obtenir une faible erreur dans les calculs numériques. Il est beaucoup plus important que la variation de la taille des mailles de la grille soit lisse, ce qui est assuré par la méthode algébrique que nous avons utilisée (voir annexe 2.B).

## 2.3 Formulation tensorielle de l'équation des ondes

### 2.3.1 L'équation des ondes sous forme tensorielle

L'équation des ondes est le plus souvent écrite en utilisant des coordonnées cartésiennes. Cependant, l'introduction d'un système de coordonnées particulier n'est pas rigoureusement nécessaire. Si l'on peut définir une métrique, il est possible d'utiliser le formalisme tensoriel pour écrire un système d'équations décrivant la propagation des ondes dans un milieu hétérogène et qui soit valable en tout point de l'espace indépendamment du système de coordonnées. Le choix des coordonnées particularise simplement le tenseur métrique  $g_{ij}$  mais les équations elles-mêmes demeurent inchangées. Dans le cas d'un milieu élastique linéaire isotrope, et en supposant des déformations infinitésimales, l'expression générale de ces équations tensorielles (voir [McConnell, 1957](#) et [Brillouin, 1964](#)) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \nabla_j \sigma_i^j + \varphi_i \quad (2.1)$$

la relation déplacement-déformation (dans le cadre de l'approximation des déformations infinitésimales)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \quad (2.2)$$

et la relation déformation-contrainte linéaire isotrope (ou loi de Hooke)

$$\sigma_i^j = \lambda g_i^j \varepsilon_k^k + 2\mu \varepsilon_i^j \quad (2.3)$$

où la dérivée covariante  $\nabla_m$  d'un tenseur  $T_{ij\dots}^{kl\dots}$  est donnée par l'expression générale

$$\begin{aligned} \nabla_m T_{ij\dots}^{kl\dots} &= \partial_m T_{ij\dots}^{kl\dots} \\ &\quad - \Gamma_{mi}^s T_{sj\dots}^{kl\dots} - \Gamma_{mj}^s T_{is\dots}^{kl\dots} - \dots \\ &\quad + \Gamma_{ms}^k T_{ij\dots}^{sl\dots} + \Gamma_{ms}^l T_{ij\dots}^{ks\dots} + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour mener à bien nos calculs numériques, nous réécrivons l'équation des ondes en formulation vitesse-contraintes ([Vierieux, 1986](#) ; [Carcione et Wang, 1993](#)). À 2D, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_\xi}{\partial t} &= \nabla_\xi \sigma_\xi^\xi + \nabla_\eta \sigma_\xi^\eta + \varphi_\xi \\ &= \partial_\xi \sigma_\xi^\xi + \partial_\eta \sigma_\xi^\eta + \Gamma_{\eta\xi}^\eta \sigma_\xi^\xi + \Gamma_{\eta\eta}^\eta \sigma_\xi^\eta - \Gamma_{\xi\xi}^\eta \sigma_\eta^\xi - \Gamma_{\eta\xi}^\eta \sigma_\eta^\eta + \varphi_\xi \\ \rho \frac{\partial v_\eta}{\partial t} &= \nabla_\xi \sigma_\eta^\xi + \nabla_\eta \sigma_\eta^\eta + \varphi_\eta \\ &= \partial_\xi \sigma_\eta^\xi + \partial_\eta \sigma_\eta^\eta + \Gamma_{\xi\xi}^\xi \sigma_\eta^\xi + \Gamma_{\xi\eta}^\xi \sigma_\eta^\eta - \Gamma_{\xi\eta}^\xi \sigma_\xi^\xi - \Gamma_{\eta\eta}^\xi \sigma_\xi^\eta + \varphi_\eta \end{aligned} \quad (2.5)$$

la relation déformations-contraintes isotrope s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_\xi^\xi &= (\lambda + 2\mu) \dot{\varepsilon}_\xi^\xi + \lambda \dot{\varepsilon}_\eta^\eta \\ \dot{\sigma}_\eta^\eta &= \lambda \dot{\varepsilon}_\xi^\xi + (\lambda + 2\mu) \dot{\varepsilon}_\eta^\eta \\ \dot{\sigma}_\xi^\eta &= 2\mu \dot{\varepsilon}_\xi^\eta \\ \dot{\sigma}_\eta^\xi &= 2\mu \dot{\varepsilon}_\eta^\xi \end{aligned} \quad (2.6)$$

la relation vitesse-déformation s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\xi\xi} &= \nabla_\xi v_\xi = \partial_\xi v_\xi - \Gamma_{\xi\xi}^\xi v_\xi - \Gamma_{\xi\xi}^\eta v_\eta \\ \dot{\varepsilon}_{\eta\eta} &= \nabla_\eta v_\eta = \partial_\eta v_\eta - \Gamma_{\eta\eta}^\xi v_\xi - \Gamma_{\eta\eta}^\eta v_\eta \\ \dot{\varepsilon}_{\xi\eta} &= \dot{\varepsilon}_{\eta\xi} = \frac{1}{2} (\nabla_\xi v_\eta + \nabla_\eta v_\xi) = \frac{1}{2} (\partial_\xi v_\eta + \partial_\eta v_\xi) - \Gamma_{\xi\eta}^\xi v_\xi - \Gamma_{\xi\eta}^\eta v_\eta \end{aligned} \quad (2.7)$$

et l'équation de transformation du tenseur des déformations entre sa forme covariante et sa forme mixte s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\xi^\xi &= g^{\xi\xi} \dot{\varepsilon}_{\xi\xi} + g^{\eta\xi} \dot{\varepsilon}_{\xi\eta} \\ \dot{\varepsilon}_\eta^\eta &= g^{\xi\eta} \dot{\varepsilon}_{\eta\xi} + g^{\eta\eta} \dot{\varepsilon}_{\eta\eta} \\ \dot{\varepsilon}_\xi^\eta &= g^{\xi\eta} \dot{\varepsilon}_{\xi\xi} + g^{\eta\eta} \dot{\varepsilon}_{\xi\eta} \\ \dot{\varepsilon}_\eta^\xi &= g^{\xi\xi} \dot{\varepsilon}_{\eta\xi} + g^{\eta\xi} \dot{\varepsilon}_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dans les équations ci-dessus,  $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées curvilignes,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les paramètres de Lamé du milieu,  $\rho$  est la densité,  $v_i$  représente les composantes covariantes du vecteur vitesse,  $\varphi_i$  le terme source covariant,  $\varepsilon_{ij}$  le tenseur des déformations covariant,  $\varepsilon_i^j$  le tenseur des déformations mixte (c'est-à-dire ayant un indice covariant et un indice contravariant) et  $\sigma_i^j$  est le tenseur des contraintes mixte. Un point situé au-dessus d'un tenseur représente une dérivation par rapport au temps.  $\Gamma_{ij}^k$  est le connexion affine (symboles de Christoffel de deuxième espèce), qui peut être obtenue à partir du tenseur métrique par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) \quad (2.9)$$

Notons au passage que nous utilisons la convention de sommation d'Einstein, c'est-à-dire qu'une sommation est implicitement sous-entendue quand un indice figure dans un monôme à la fois en position inférieure et en position supérieure. Les symboles  $\nabla_\xi$  et  $\nabla_\eta$  représentent la dérivée covariante, qui est égale par exemple à la dérivée partielle correspondante plus une somme des composants du champ lui-même multipliés par les symboles de Christoffel, comme le montre l'équation (2.4). L'information sur le système de coordonnées est contenue dans le tenseur métrique,  $g_{ij}$  représentant ce tenseur en composantes covariantes et  $g^{ij}$  ce tenseur en composantes contravariantes. L'annexe 2.A fournit un bref résumé des principales règles de manipulation concernant les tenseurs.

En supposant qu'il soit possible de définir un système de coordonnées qui s'adapte naturellement au modèle physique considéré (c'est-à-dire un système pour lequel les axes de coordonnées coïncident avec les interfaces et la surface du modèle géologique), l'ensemble d'équations présenté ci-dessus peut être utilisé pour résoudre directement l'équation des ondes dans ce système de coordonnées adapté. Cela revient à résoudre l'équation des ondes sur une grille de travail carrée  $(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  qui s'adapte à l'espace physique  $(x, z)$  considéré par une transformation donnée. À la différence de la méthode de dérivation composée pour laquelle l'équation des ondes écrite en coordonnées cartésiennes (c'est-à-dire écrite avec les composantes  $v_x$  et  $v_z$  de la vitesse et les composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{xz}$  du tenseur des contraintes dans le cas 2D) est résolue en utilisant les dérivées spatiales calculées dans le repère curviligne, la formulation tensorielle résout directement l'équation dans le repère curviligne (c'est-à-dire que l'équation est écrite directement en utilisant les composantes  $v_\xi$  et  $v_\eta$  de la vitesse et les composantes  $\sigma_{\xi\xi}$ ,  $\sigma_{\eta\eta}$  et  $\sigma_{\xi\eta}$  du tenseur des contraintes) à l'aide des dérivées spatiales calculées dans le même repère curviligne.

### 2.3.2 Coût de calcul

Bien que l'approche tensorielle soit plus satisfaisante, dans sa philosophie, que l'approche utilisant la règle de dérivation composée, car les équations sont écrites dans le même système de coordonnées que celui dans lequel sont effectués les calculs, le coût de calcul des deux approches doit être comparé. Il est toujours difficile de comparer les coûts de calcul de deux méthodes, en raison du grand nombre d'implémentations possibles pour chaque méthode. Dans l'analyse présentée ici à titre indicatif, nous supposons des implémentations relativement similaires dans lesquelles les coefficients indépendants du temps sont stockés plutôt que recalculés à chaque pas de temps (par exemple  $\Gamma_{ij}^k$  dans le cas de l'approche tensorielle et  $\partial\xi_m/\partial x_i$  dans le cas de la méthode de dérivation composée).

Le coût de calcul d'une méthode numérique de résolution directe de l'équation des ondes écrite sous forme différentielle dépend principalement du nombre de dérivées spatiales, noté  $n_\partial$ , devant être calculées à chaque pas de temps pour cette méthode (en supposant qu'un opérateur de dérivation discrète suffisamment précis soit utilisé, par exemple un opérateur pseudo-spectral ou un opérateur de différences finies d'ordre élevé). Ainsi, nous pouvons utiliser le nombre de dérivations spatiales que nécessite une approche comme une mesure indicative de son coût de calcul, c'est-à-dire que

$$\text{Coût de calcul} \simeq \text{constante} \times n_\partial(N) \quad (2.10)$$

où  $N$  représente le nombre de dimensions spatiales.

Pour la formulation tensorielle, le nombre de dérivées spatiales nécessaires au calcul de la divergence du tenseur des contraintes est  $N^2$  et le nombre de dérivées nécessaire au calcul du tenseur des déformations à partir du déplacement est aussi  $N^2$ , ce qui donne un total de

$$n_\partial^{\text{tensorielle}} = 2N^2 \quad (2.11)$$

dérivations discrètes. Cela est identique au nombre de dérivées nécessaires dans le cas cartésien, qui est un cas particulier de l'approche tensorielle pour lequel  $g_{ij} = \delta_{ij} = \text{constante}$ , ce qui signifie simplement que tous les symboles de Christoffel sont nuls.

Dans l'approche utilisant la règle de dérivation composée, on effectue le calcul des dérivées cartésiennes en fonction des dérivées dans le domaine de travail en écrivant

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (2.12)$$

où  $\xi_m$  représente les coordonnées dans le domaine de travail et  $f$  le champ à dériver. La divergence du tenseur des contraintes est ensuite calculée en utilisant

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \quad (2.13)$$

ce qui implique le calcul de  $N^2 \times (N + 1)/2$  dérivées spatiales indépendantes. Dans le cas du calcul des déformations en utilisant la règle de dérivation composée, la méthode la plus efficace en terme de coût calcul consiste à calculer et à stocker les  $N^2$  dérivées partielles  $\partial u_i / \partial \xi_m$ , et à utiliser ensuite l'équation (2.12). Ainsi, le nombre total de dérivées discrètes devant être calculées lorsque l'on utilise la règle de dérivation composée est

$$n_{\partial}^{composée} = N^2 \left( \frac{3}{2} + \frac{N}{2} \right) \quad (2.14)$$

Il en résulte que le coût calcul additionnel résultant de l'utilisation de la règle de dérivation composée par rapport à l'approche tensorielle peut s'écrire

$$\frac{\text{Coût dérivation composée}}{\text{Coût dérivation tensorielle}} \sim \frac{n_{\partial}^{composée}}{n_{\partial}^{tensorielle}} = \frac{3}{4} + \frac{N}{4} \equiv \begin{cases} 125\%, & N = 2 \\ 150\%, & N = 3 \end{cases} \quad (2.15)$$

Si l'on considérait une grille dont seules les lignes horizontales seraient courbes, et dont les lignes verticales resteraient droites, comme cela se fait souvent pour réduire le coût calcul lorsque la règle de dérivation composée est utilisée pour des modèles dont la topographie est suffisamment lisse, le coût additionnel de l'approche de dérivation composée par rapport à l'approche tensorielle se réduirait à 112.5 % à 2D et 122.2 % à 3D, en raison du fait que dans ce cas certains des  $\partial \xi_m / \partial x_i$  seraient alors égaux à zéro.

L'approche tensorielle requiert donc un coût de calcul similaire au cas cartésien, mais cependant plus de mémoire de travail est nécessaire d'un point de vue informatique pour stocker le tenseur métrique  $g^{ij}$  et les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ . Si l'on se rappelle que le tenseur métrique est symétrique et que les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport aux indices du bas, la mémoire de stockage nécessaire est de  $N(N + 1)/2$  champs pour la métrique et de  $N^2(N + 1)/2$  pour les symboles de Christoffel. Cela s'applique au cas général pour lequel aucune composante de  $g^{ij}$  n'est nulle. Notons la mémoire supplémentaire nécessaire pour l'approche tensorielle afin de stocker la métrique et les symboles de Christoffel par

$$\Delta M^{tensorielle} = \frac{N(N + 1)^2}{2} \quad (2.16)$$

De même, l'utilisation de la règle de dérivation composée requiert le stockage des  $N^2$  champs  $\partial \xi_m / \partial x_i$  par rapport au cas cartésien, donc

$$\Delta M^{composée} = N^2 \quad (2.17)$$

Cela est inférieur à la mémoire additionnelle nécessitée par l'approche tensorielle, la différence entre les deux étant

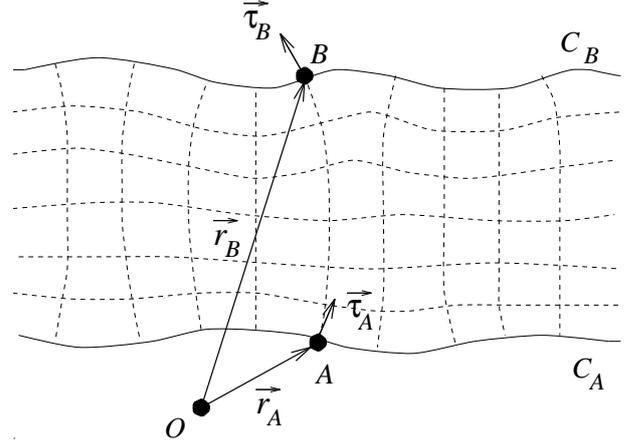
$$\Delta M^{tensorielle} - \Delta M^{composée} = \frac{N(N^2 + 1)}{2} = \begin{cases} 5 \text{ tableaux,} & N = 2 \\ 15 \text{ tableaux,} & N = 3 \end{cases} \quad (2.18)$$

Le nombre total de tableaux nécessaires pour stocker toutes les composantes des déplacements, vitesse, accélération, contraintes et déformations, étant de l'ordre de 15 à 2D et de 25 à 3D, nous pouvons noter que le coût mémoire additionnel imposé par l'approche tensorielle est important, surtout à 3D, et constitue sans aucun doute l'inconvénient principal de cette approche. La solution à ce problème pourrait être l'utilisation de grilles orthogonales pour lesquelles les termes non diagonaux de la métrique sont nuls, mais de telles grilles sont extrêmement difficiles à générer pour des modèles réalistes, particulièrement à 3D (Ryskin et Leal, 1983).

## 2.4 Génération de la grille, calcul de la métrique et des symboles de Christoffel

Considérons un modèle géologique donné par un ensemble de points définissant les interfaces courbes des couches du modèle et de la surface de celui-ci. Dans l'annexe 2.B, en utilisant un algorithme d'interpolation basé sur les polynômes de Hermite de degré trois, nous décrivons une méthode simple pour générer une grille dont les lignes « horizontales » suivent les différentes interfaces, et dont les lignes « verticales » ont des vecteurs tangents donnés à ces interfaces, comme illustré sur la figure 2.1.

FIG. 2.1 – L’algorithme de génération de grille détermine une courbe reliant les points  $A$  et  $B$  avec des vecteurs tangents  $\vec{\tau}_A$  et  $\vec{\tau}_B$  donnés. Ces vecteurs tangents peuvent par exemple correspondre aux normales aux points  $A$  et  $B$  aux deux courbes notées  $C_A$  et  $C_B$  délimitant une couche donnée.



Il est alors possible de définir une transformation analytique depuis un domaine de calcul carré  $(\xi, \eta)$  vers le domaine physique  $\vec{r} = (x, z)$ , et par suite les fonctions de transformation des coordonnées  $x = x(\xi, \eta)$  et  $z = z(\xi, \eta)$ .

Afin d’obtenir une bonne précision pour la modélisation des ondes de surface et d’interface, il est souvent nécessaire de raffiner la grille au voisinage des différentes interfaces et de la surface libre (Jastram et Behle, 1992 ; Rodrigues et Mora, 1993) afin d’augmenter le nombre de points par longueur d’onde dans ces zones. La méthode de génération de grille utilisée est intéressante de ce point de vue là, car la grille peut être raffinée ou étirée au voisinage de la frontière d’une couche, ce qui permet d’augmenter le nombre de points de grille près des diverses interfaces et près de la surface libre, et de diminuer ce même nombre de points de grille par exemple au voisinage des frontières absorbantes.

Connaissant les fonctions de transformation  $x = x(\xi, \eta)$  et  $z = z(\xi, \eta)$  permettant de passer du domaine de travail à l’espace physique, les vecteurs de base du repère naturel associé au point dont la position est  $\vec{M}$  sont donnés par

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \vec{e}_j \quad (2.19)$$

avec  $x^j \in \{x, z\}$  et  $\xi^i \in \{\xi, \eta\}$ , où les  $\vec{e}_j$  sont les vecteurs de base d’un repère cartésien orthonormé. Cela signifie que le tenseur métrique dans un espace euclidien est donné par

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \vec{e}_k \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} \vec{e}_l = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} \delta_{kl} \quad (2.20)$$

puisque  $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = \delta_{kl}$  dans le repère cartésien orthonormé.

Cette expression permet de calculer  $g_{ij}$  et  $g^{ij}$  en fonction des dérivées partielles des fonctions de transformation (voir aussi l’annexe 2.A). Comme les fonctions  $x_i = x_i(\xi, \eta)$  sont connues analytiquement, il est possible de calculer le tenseur métrique  $g_{ij}$  en utilisant les expressions analytiques des dérivées partielles des fonctions de transformation. Le tenseur métrique peut évidemment aussi être calculé en utilisant le même opérateur de dérivation discrète que celui qui sera utilisé pour résoudre l’équation des ondes (dans notre cas un opérateur de Chebyshev). Bien que cela puisse paraître surprenant, le travail de Thompson *et al.* (1985) a montré que la deuxième approche conduisait à une erreur numérique globalement moins élevée lors du calcul des dérivées partielles dans le domaine curviligne. Pour cette raison, nous avons choisi de calculer le tenseur métrique numériquement et non analytiquement. Le même opérateur de dérivation discrète est ensuite appliqué aux composantes de  $g_{ij}$  afin de calculer les symboles de Christoffel en utilisant l’équation (2.9).

## 2.5 Algorithme de résolution

### 2.5.1 Description de l’algorithme de Chebyshev

Nous utilisons une méthode pseudo-spectrale globale faisant appel à une base de polynômes de Chebyshev (voir par exemple Carcione, 1994) afin de résoudre l’équation des ondes écrite sous forme tensorielle. Les différents champs sont écrits sur une base formée d’une somme finie de fonctions orthogonales qui sont les polynômes de Chebyshev. L’extrapolation en temps est menée à bien en utilisant un schéma de Runge-Kutta explicite d’ordre quatre, qui donne une condition de stabilité du type  $dt = O(N^{-1})$ , où  $N$  est le nombre de points de grille dans chaque direction de la grille de calcul. L’algorithme utilisant les polynômes de Chebyshev a été choisi principalement parce qu’il est pratiquement exempt de toute dispersion numérique jusqu’à la fréquence de Nyquist.

### Calcul d'une dérivée spatiale par l'opérateur de Chebyshev

Le domaine de calcul est une région carrée  $(\xi, \eta) \in [-1, 1]$  sur laquelle la distribution des points de grille est définie par les points de Gauss-Lobatto-Chebyshev. Illustrons à 1D ce qui se passe (Canuto *et al.*, 1988 ; Carcione et Wang, 1993) : définissant le symbole  $(\sum)'$  comme une somme finie dont le premier et le dernier terme sont divisés par deux, le champ considéré  $u(\xi)$ ,  $\xi \in [-1, 1]$  est décomposé sur une base de polynômes de Chebyshev  $T_n(\xi)$ , les points de collocation étant les points de Gauss-Lobatto-Chebyshev

$$u(\xi_j) = \left( \sum_{n=0}^N \right)' a_n T_n(\xi_j) \quad (2.21)$$

où

$$T_n(\xi_j) = \cos n\theta_j$$

avec les points de Gauss-Lobatto-Chebyshev donnés par

$$\xi_j = \cos \theta_j, \quad \theta_j = \frac{\pi j}{N}, \quad j = 0, \dots, N$$

La dérivée partielle d'ordre  $q$  est donnée par

$$\frac{\partial^q u(\xi)}{\partial \xi^q} = \sum_{n=0}^N a_n^{(q)} T_n(\xi)$$

où les coefficients de la série dérivée sont donnés par

$$c_{n-1} a_{n-1}^{(q)} - a_{n+1}^{(q)} = 2n a_n^{(q-1)}, \quad n \geq 1$$

avec

$$c_0 = 2, \quad c_n = 1 \quad (n > 0)$$

Ainsi, en définissant  $a_n = a_n^{(0)}$  et  $b_n = a_n^{(1)}$ , la dérivée première peut s'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \left( \sum_{n=0}^N \right)' b_n T_n(\xi) \quad (2.22)$$

où la série dérivée est donnée par

$$b_{n-1} = b_{n+1} + 2n a_n, \quad n = N, \dots, 1, \quad b_{N+1} = b_N = 0 \quad (2.23)$$

On peut alors écrire explicitement

$$u(\xi_j) = \left( \sum_{n=0}^N \right)' a_n \cos \frac{\pi n j}{N}$$

et

$$a_n = \frac{2}{N} \left( \sum_{j=0}^N \right)' u(\xi_j) \cos \frac{\pi n j}{N}$$

Posons alors  $N' = 2N$ , et  $u(\xi_j) = 0$  pour  $j = \frac{N'}{2} + 1, \dots, N' - 1$ , et nous pouvons écrire

$$a_n = \frac{4}{N'} \sum_{j=0}^{N'-1} u(\xi_j) \cos \frac{2\pi n j}{N'} \quad (2.24)$$

Nous reconnaissons ici une transformée de Fourier discrète réelle (transformée en cosinus) qui peut être calculée en utilisant un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT). Ensuite, nous pouvons obtenir les coefficients  $b_n$  de la série dérivée à partir des coefficients du champ  $a_n$  à l'aide de la formule de récurrence (2.23). L'évaluation de la dérivée aux points de Gauss-Lobatto-Chebyshev est ensuite obtenue par (2.22) à nouveau à l'aide d'une FFT. On peut également montrer qu'il est possible de calculer la dérivée du champ en faisant le produit de celui-ci par une matrice de coefficients appelée *matrice de dérivation*. Pour l'expression analytique de celle-ci dans le cas des polynômes de Chebyshev, on pourra se référer à Canuto *et al.* (1988), p. 65.

### Déformation de la grille - Mapping

Dans le cas des points de Gauss-Lobatto-Chebyshev donnés par

$$\xi_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) \quad j = 0, \dots, N \quad (2.25)$$

la taille minimale d'une maille dans le domaine de travail est obtenue au bord du domaine, soit

$$\Delta\xi_{min} = \left|1 - \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right| \simeq \frac{\pi^2}{2N^2} \quad (2.26)$$

pour  $N$  suffisamment grand, ce qui est toujours le cas en pratique. On voit que la taille de la plus petite maille diminue comme  $1/N^2$ , où  $N$  est le nombre de points dans une direction de la grille. Dans le cas d'un schéma d'intégration en temps conditionnellement stable, pour lequel le critère de stabilité sera dicté par la taille de la plus petite maille de la grille, cette particularité peut rapidement devenir très handicapante, voire rédhibitoire. Pour contourner ce problème, les points de Gauss-Lobatto-Chebyshev sont rapportés à l'intervalle  $[-1, 1]$  par une transformation très non-linéaire sur les bords du domaine (« mapping »), permettant un étirement local des plus petites mailles. Dans la direction  $x$  par exemple, les points d'échantillonnage sont donnés par (Carcione et Wang, 1993)

$$x_j = \frac{x_{max}}{2}[1 - g_x(\xi_j)], \quad j = 0, \dots, N_x$$

avec

$$g_x(\xi) = \frac{\arcsin(\gamma\xi)}{\arcsin(\gamma)}$$

une fonction d'étirement symétrique qui satisfait  $g_x(1) = 1$  et  $g_x(-1) = -1$ , où  $\gamma$  le paramètre d'étirement est pris très proche de 1, typiquement 0.99 en pratique. La dérivée spatiale est ainsi donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{2 \arcsin(\gamma)}{\gamma x_{max}} \sqrt{1 - \gamma^2 \xi^2} \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

### Schéma d'intégration en temps

Comme nous l'avons vu précédemment, les équations de l'élastodynamique ont été réécrites sous la forme d'un système hyperbolique du premier ordre en temps en vitesse-contraintes, que l'on peut noter symboliquement sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} = MU + S$$

où  $U$  est le vecteur vitesse-contraintes inconnu,  $S$  le vecteur source, et  $M$  un opérateur différentiel. Pour ce genre de systèmes du premier ordre, un schéma d'intégration en temps efficace est le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre (Canuto *et al.*, 1988 ; Carcione et Wang, 1993), qui est un schéma explicite conditionnellement stable. Soit  $\Delta t$  le pas de temps, la solution  $U^{n+1}$  à l'instant  $(n+1)\Delta t$  est obtenue à partir de la solution  $U^n$  à l'instant  $n\Delta t$  en écrivant

$$U^{n+1} = U^n + \frac{1}{6} \Delta t (\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 + \delta_4)$$

où

$$\begin{aligned} \delta_1 &= MU^n + S^n \\ \delta_2 &= M \left( U^n + \frac{\Delta t}{2} \delta_1 \right) + S^{n+1/2} \\ \delta_3 &= M \left( U^n + \frac{\Delta t}{2} \delta_2 \right) + S^{n+1/2} \\ \delta_4 &= M (U^n + \Delta t \delta_3) + S^{n+1} \end{aligned}$$

Nous voyons que quatre modélisations (application de l'opérateur différentiel  $M$  à un champ) sont nécessaires à chaque pas de temps dans la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. La condition de stabilité de ce schéma sera contrôlée essentiellement par la taille de la plus petite maille de la grille (après étirement par la fonction de « mapping » non-linéaire décrite dans la section précédente). Pour plus de détails, on pourra se référer à la description très précise de cette méthode donnée dans l'article de Carcione et Wang (1993).

Dans le cas d'une force ponctuelle, le terme source  $\vec{\varphi}$  de l'équation des ondes (2.5) peut être écrit

$$\vec{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) f(t - \tau) \vec{n} \quad (2.27)$$

où  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$  est la distribution de Dirac au point source  $\mathbf{x}_s$ ,  $f(t)$  est une fonction causale décrivant la dépendance temporelle de la source,  $\tau$  est l'instant où démarre la simulation, et  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire déterminant la direction de la force source. Le terme source est converti des coordonnées cartésiennes aux coordonnées curvilignes en utilisant

$$\begin{aligned} \varphi_\xi &= \varphi_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + \varphi_z \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \varphi_\eta &= \varphi_x \frac{\partial x}{\partial \eta} + \varphi_z \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Le schéma d'extrapolation en temps est initialisé avec des conditions nulles  $v(\mathbf{x}, t_0) = 0$  et  $\sigma(\mathbf{x}, t_0) = 0$ , l'instant  $t_0 = 0$  correspondant au début de la simulation. La stabilité du schéma en temps est assurée par une condition de Courant classique

$$\Delta t \left( \frac{v_P}{\Delta x} \right)_{max} \leq \varepsilon \quad (2.29)$$

où  $\Delta x$  est la distance entre points de grille dans le domaine physique,  $v_P$  est la vitesse des ondes P dans le milieu et  $\varepsilon$  est le nombre de Courant.

Le schéma est pratiquement libre de dispersion numérique jusqu'à la fréquence de Nyquist. On s'assure de cette condition en choisissant un pas de grille maximal tel que le nombre minimum de points par longueur d'onde vérifie la relation

$$n_\lambda^{min} = \frac{1}{f_{max}} \left( \frac{v_S}{\Delta x} \right)_{min} \geq n_\lambda^{schema} \quad (2.30)$$

où  $\Delta x$  est la distance entre points de grille dans le domaine physique,  $v_S$  est la vitesse des ondes S dans le milieu,  $f_{max}$  est la fréquence maximale de la source, et  $n_\lambda^{schema} \geq 2$  est le nombre minimum de points de grille par longueur d'onde nécessaire à une modélisation correcte (de l'ordre de 4 pour un opérateur de Chebyshev).

Les conditions aux limites sont des conditions absorbantes sur tous les bords du modèle à l'exception de la surface libre. Ces conditions ainsi que la condition de surface libre sont implémentées dans l'algorithme de Chebyshev en décomposant le champ à l'aide d'une équation paraxiale suivant la perpendiculaire au bord, comme cela est décrit en détail dans l'article de [Carcione et Wang \(1993\)](#).

## 2.5.2 Insuffisance des schémas de différences finies

Des tests ont également été effectués en utilisant une méthode de différences finies « non staggered », mais l'algorithme conduisait à des artefacts numériques dans le cas de forts contrastes de vitesse à l'interface, en raison du fait qu'une grille qui n'est pas en quinconce est en fait composée de deux grilles faiblement couplées – voire totalement découplées dans le cas d'un maillage régulier – ([Magnier et al., 1994](#)). Cette approche a par suite été abandonnée. Les algorithmes de différences finies en quinconce ne sont pas bien adaptés pour résoudre l'équation des ondes sur une grille curviligne (que ce soit en utilisant la formulation tensorielle ou en utilisant la règle de dérivation composée), en raison du fait que de nombreuses interpolations doivent dans ce cas être effectuées, ce qui réduit fortement la précision globale du schéma et augmente significativement le coût de calcul. Dans le cas de la formulation tensorielle utilisée sur une grille en quinconce, il est nécessaire de procéder à des interpolations pour calculer la dérivée covariante qui est égale, en un point de grille, à la somme de la dérivée partielle du champ et des composantes du champ lui-même multipliées par les symboles de Christoffel. Dans le cas de l'utilisation de la règle de dérivation composée sur une grille en quinconce, il est également nécessaire de procéder à des interpolations pour calculer les dérivées cartésiennes du champ, pour lesquelles il faut sommer en un même point de grille les dérivées partielles calculées suivant des axes différents de la grille de travail.

## 2.5.3 Vectorisation de l'algorithme et performances

Comme nous l'avons vu précédemment, il existe deux méthodes permettant de calculer la dérivée d'un champ en utilisant l'algorithme de Chebyshev avec collocation aux points de Gauss-Lobatto. La première approche consiste à calculer les coefficients de la décomposition du champ en série de Chebyshev à l'aide d'une FFT (voir équation 2.24), puis de calculer les coefficients de la série dérivée par récurrence, et ensuite d'obtenir la dérivée du champ à partir de ces coefficients par

une seconde FFT (équation 2.22). La deuxième méthode consiste à multiplier directement le champ par la matrice de dérivation dont les coefficients ont été calculés une fois pour toutes (Canuto *et al.*, 1988).

Du point de vue du nombre d'opérations à 2D, la première approche nécessite le calcul de  $2N$  FFTs de longueur  $N$  (2 FFTs pour chacune des  $N$  colonnes, soit un coût en  $O(N^2 \log N)$ ), et  $N$  récurrences de longueur  $N$ , pour un coût en  $O(N^2)$ . Le coût total de la première approche est donc en  $O(N^2 \log N)$ . La deuxième approche est un simple produit de matrices, dont le coût est  $O(N^3)$  dans le cas 2D. Une première analyse semblerait donc privilégier l'approche par FFT. C'est sans nul doute la conclusion qu'il faudrait tirer dans le cas d'un code de calcul séquentiel devant être exécuté sur une station de travail. Cependant, dans le cas très fréquent d'un supercalculateur de type vectoriel, il est bien connu qu'une relation de récurrence se vectorise extrêmement mal, voire pas du tout en raison des dépendances existant entre éléments du vecteur résultat du fait de cette relation de récurrence. Dans ce cas, le calcul par produit de matrice de dérivation, bien que nécessitant plus d'opérations, est très sensiblement plus rapide. En effet, un produit de matrice est une opération qui se vectorise bien, surtout si la taille de la grille, donc la valeur de  $N$ , est grande. De plus, le constructeur de la machine fournit souvent des algorithmes particulièrement optimisés, appelés BLAS (*Basic Linear Algebra Subroutines*), qui permettent de tirer parti au maximum de la puissance de la machine pour ce type d'opérations.

Sur un nœud du Cray J90 du CCR par exemple, dont la puissance crête est de 200 MFlops, nous obtenons par appel aux bibliothèques BLAS une performance globale du code de 185 MFlops pour l'algorithme basé sur la matrice de dérivation, soit plus de 90 % de la puissance maximale de la machine, ce qui est exceptionnel (une valeur de 50 % étant traditionnellement considérée comme excellente sur une architecture vectorielle). Notons au passage qu'aucune des deux approches ne semble bien adaptée au calcul sur un supercalculateur de type parallèle à mémoire distribuée ; en effet, que ce soit pour une FFT ou pour un produit de matrice, en tout point de la grille le calcul nécessite la connaissance des valeurs du champ sur toute la ligne et toute la colonne auxquels appartient ce nœud. Ainsi, tout processeur devra échanger en permanence des informations avec un grand nombre d'autres processeurs, et une faible performance globale est donc probable (Pelz, 1990). Nous verrons au chapitre suivant que la méthode des éléments spectraux permet, entre autres, de résoudre élégamment ce problème.

## 2.6 Tests numériques à 2D

Des tests numériques ont été menés à 2D en utilisant deux modèles différents, le premier modèle servant à valider l'approche tensorielle en comparant les résultats obtenus à la solution analytique du problème, et le deuxième permettant de démontrer la capacité de cette approche à prendre en compte un modèle présentant une surface libre avec topographie.

### 2.6.1 Validation de la formulation tensorielle

Afin de valider la méthode utilisant la formulation tensorielle de l'équation des ondes, nous comparons les résultats obtenus sur le problème de Lamb incliné (Lamb, 1904), c'est-à-dire un demi-espace élastique homogène dans lequel une force source est placée dans le milieu avec une direction normale à la surface de celui-ci, à la solution analytique du problème. La grille utilisée est représentée sur la figure 2.2, et a une taille de  $187 \times 187$ . La pente fait un angle de  $10^\circ$  avec la direction horizontale. Le milieu est homogène, la vitesse des ondes P est de  $3200 \text{ m.s}^{-1}$  et la vitesse des ondes S est de  $1847.5 \text{ m.s}^{-1}$ , ce qui correspond à un coefficient de Poisson de  $\sigma = 0.25$ . La densité est prise égale à  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$ .

La source est une force ayant une direction normale à la pente. Elle est placée en  $x_s = 665 \text{ m}$  juste sous la surface, à une profondeur de  $z_s = 8 \text{ m}$ . L'un des récepteurs ( $R_1$ ) est placé juste à la surface libre en  $x_{R_1} = 1793.3 \text{ m}$ . L'autre récepteur ( $R_2$ ) est situé dans le milieu en  $x_{R_2} = 1028.9 \text{ m}$  à une profondeur de  $z_{R_2} = 832.5 \text{ m}$ . Ainsi, le premier récepteur enregistrera principalement une très forte onde de Rayleigh, alors que le second récepteur enregistrera l'onde P et l'onde S directes se propageant dans la grille curviligne. Cela permettra de valider la formulation tensorielle pour les trois principaux types d'ondes qui se propagent dans un solide.

Le calcul numérique correspond à une durée totale de  $0.875 \text{ s}$ , c'est-à-dire 2500 pas de temps d'une durée de  $\Delta t = 0.35 \text{ ms}$  chacun. La longueur des côtés des mailles de la grille curviligne dans le domaine physique varie de  $\Delta x_{min} = 1.4 \text{ m}$  à  $\Delta x_{max} = 16.3 \text{ m}$  le long des lignes « horizontales » de la grille, et de  $\Delta z_{min} = 0.9 \text{ m}$  à  $\Delta z_{max} = 14.1 \text{ m}$  le long des lignes « verticales ». L'angle entre les lignes horizontales et verticales de la grille varie entre  $\theta_{min} = 80.8^\circ$  et  $\theta_{max} = 90.0^\circ$ .

La fonction source est une dérivée seconde de gaussienne en temps, ayant une fréquence centrale de  $f_0 = 20.0 \text{ Hz}$  et une fréquence maximum de  $f_{max} = 50.0 \text{ Hz}$  (définie comme la fréquence pour laquelle le spectre d'amplitude est égal à 5 %

de sa valeur maximum). Le nombre minimum de points de grille par longueur d'onde fondamentale (correspondant aux mailles les plus grosses) est de 9.7 pour l'onde P et de 5.6 pour l'onde S.

Des instantanés du vecteur vitesse sont présentés sur la figure 2.3, et montrent l'onde P directe, l'onde S directe ainsi qu'une forte onde de Rayleigh qui se propage le long de la surface inclinée. Les sismogrammes enregistrés aux deux récepteurs sont présentés sur la figure 2.4. Un très bon accord est obtenu entre la solution analytique et les résultats numériques, à la fois pour l'onde de Rayleigh (récepteur  $R_1$ ) et pour les ondes de volume (récepteur  $R_2$ ), ce qui permet de valider l'approche tensorielle pour l'équation des ondes élastiques.

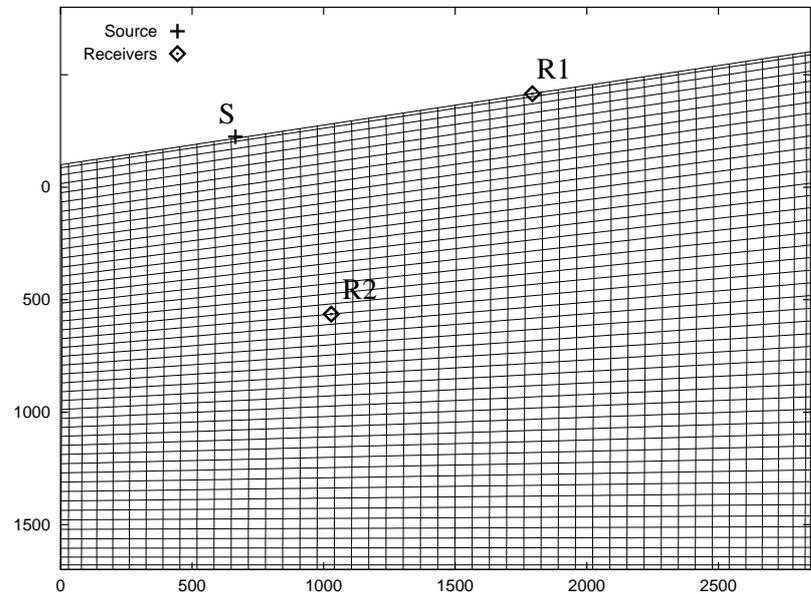


FIG. 2.2 – Grille utilisée pour valider l'approche tensorielle par comparaison à la solution analytique du problème de Lamb incliné. La pente fait un angle de  $10^\circ$  avec l'horizontale. La taille de la grille est de  $187 \times 187$  points. Une ligne de grille sur quatre est dessinée.

## 2.6.2 Simulation en présence d'une topographie de surface

Afin de tester la capacité de l'approche tensorielle à modéliser la propagation des ondes élastiques dans des milieux présentant une topographie, nous avons mené à bien deux simulations dans le modèle présenté sur la figure 2.5. La grille de calcul est composée de  $187 \times 187$  points. Un modèle à deux couches est utilisé, l'interface ayant une forme courbe. Dans la couche supérieure, la densité est prise égale à  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$ , la vitesse des ondes P à  $2800 \text{ m.s}^{-1}$  et la vitesse des ondes S à  $1820 \text{ m.s}^{-1}$ , ce qui conduit à un coefficient de Poisson de  $\sigma = 0.13$ . Dans la couche inférieure, la densité est de  $1500 \text{ kg.m}^{-3}$ , la vitesse des ondes P est de  $3800 \text{ m.s}^{-1}$  et la vitesse des ondes S est de  $2000 \text{ m.s}^{-1}$ , ce qui correspond à un coefficient de Poisson de  $\sigma = 0.30$ . Ainsi, ce modèle à deux couches présente un fort contraste de vitesse et également un fort contraste de coefficient de Poisson, ce qui permet de vérifier le comportement de la méthode pour un modèle géologique présentant des propriétés réalistes. Les caractéristiques de la source restent les mêmes que dans le cas du problème de Lamb incliné exposé précédemment.

La taille des côtés des mailles de la grille curviligne dans le domaine physique varie de  $\Delta x_{min} = 1.4 \text{ m}$  à  $\Delta x_{max} = 18.6 \text{ m}$  le long des lignes « horizontales » de la grille, et de  $\Delta z_{min} = 2.0 \text{ m}$  à  $\Delta z_{max} = 15.6 \text{ m}$  le long des lignes « verticales ». L'angle entre les lignes horizontales et verticales varie de  $\theta_{min} = 51.7^\circ$  à  $\theta_{max} = 126.5^\circ$ .

Comme la grille est curviligne, une ligne droite dans le domaine physique (par exemple une ligne de récepteurs) ne correspond pas en général à une ligne droite dans le domaine de travail  $(\xi, \eta)$ . En conséquence, les récepteurs ne sont en général pas situés en des points de grille et il est nécessaire d'interpoler le champ (par exemple le champ de vitesse) que l'on souhaite enregistrer dans les sismogrammes. Cela est effectué en utilisant une interpolation bilinéaire du champ à partir de ses valeurs qui sont connues aux coins de la maille dans laquelle se situe le récepteur considéré.

Comme précédemment, le calcul numérique a permis de simuler une durée de propagation de  $0.875 \text{ s}$ , c'est-à-dire 2500 pas de temps d'une durée de  $\Delta t = 0.35 \text{ ms}$  chacun. Le nombre minimum de points de grille par longueur d'onde fondamentale (correspondant aux plus grosses mailles) est de 7.5 pour l'onde P, et de 4.9 pour l'onde S au cours de ces deux tests.

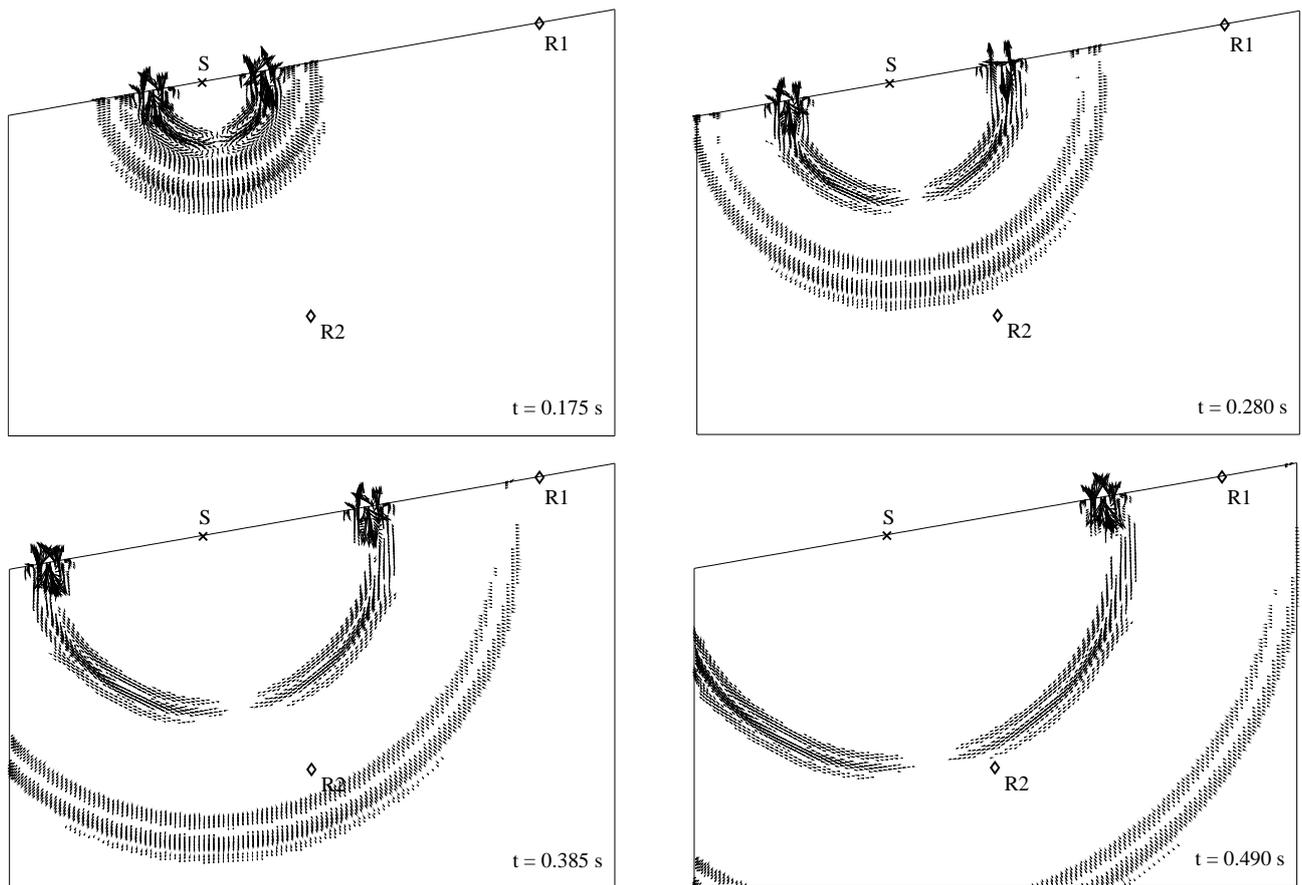


FIG. 2.3 – Instantanés du vecteur vitesse obtenus pour le problème de Lamb incliné avec une pente de  $10^\circ$  (voir figure 2.2). La croix indique la position de la source, les losanges représentent les deux récepteurs. La source est une force normale à la pente, placée juste sous la surface. On peut observer l'onde P directe, l'onde S directe, et la forte onde de Rayleigh qui se propage le long de la pente.

### Ondes réfléchies et réfractées en présence d'une topographie de surface

Dans ce premier test, la source est une force verticale située en  $x_s = 1425$  m à une profondeur de  $z_s = 776.2$  m par rapport à la surface libre. Cinquante récepteurs équidistants sont placés le long d'une ligne horizontale entre  $x_r = 825$  m et  $x_r = 2025$  m à une profondeur de  $z_r = 200$  m.

Des instantanés de la propagation sont présentés sur la figure 2.6, et les sismogrammes sur la figure 2.7. La forme des ondes P et S réfléchies par la surface libre bosselée est complexe, et des triplications se produisent (voir par exemple la réflexion par la petite bosse située sur la droite du modèle). Des conversions de mode (P en S et S en P) se produisent pour les ondes réfléchies à la surface libre, ainsi que pour celles réfléchies et transmises à l'interface entre les deux couches.

Ces résultats illustrent le fait que l'approche tensorielle est capable de modéliser la réflexion et la conversion des ondes P et S dans un modèle présentant une topographie ainsi que des interfaces courbes, y compris dans le cas où le modèle présente de forts contrastes de vitesse et de coefficient de Poisson.

### L'onde de Rayleigh sur une surface courbe

La source en force verticale est maintenant placée en  $x_s = 660.9$  m juste sous la surface libre (à une profondeur de 10 m). Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 2.8, et les sismogrammes sur la figure 2.9. L'onde P et l'onde S directes sont clairement visibles sur ces instantanés, ainsi qu'une forte onde de Rayleigh qui se propage le long de la surface libre avec une vitesse légèrement plus faible que celle de l'onde S.

Sur ces instantanés, nous pouvons également observer une onde qui est interprétée comme une conversion d'onde de Rayleigh en onde de volume dans une région de la surface libre où la topographie présente une forte courbure en raison du petit monticule situé dans la partie gauche du modèle (voir les instantanés aux temps  $t = 0.280$  s et  $t = 0.350$  s). La

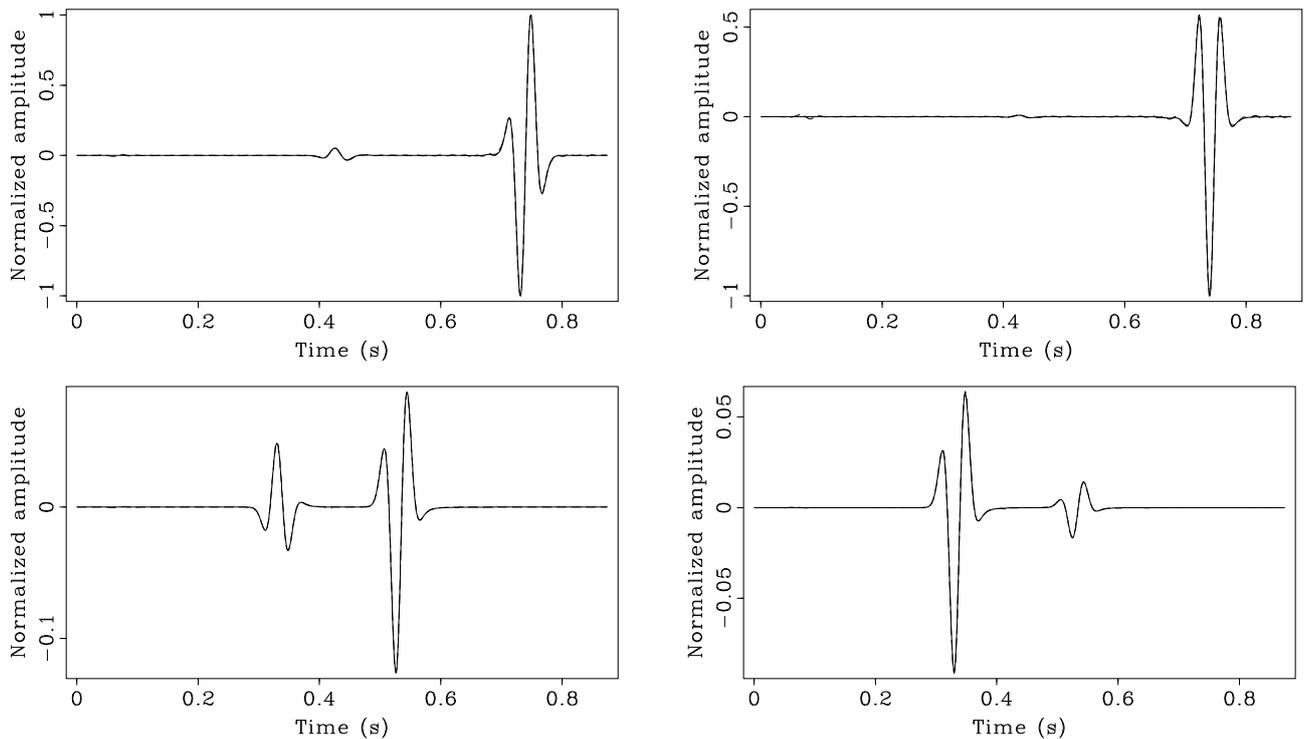


FIG. 2.4 – Sismogrammes de la composante horizontale du vecteur vitesse  $v_x$  (gauche) et de la composante verticale  $v_z$  (droite) pour le problème de Lamb incliné de la figure 2.3. La solution analytique est dessinée en trait plein, et la solution numérique calculée avec la formulation tensorielle, qui lui est pratiquement superposée, en pointillés. Les sismogrammes du haut correspondent au récepteur situé juste sous la surface libre ( $R_1$ ), et ceux du bas au récepteur situé en profondeur ( $R_2$ ). L'accord obtenu est excellent, l'écart maximum entre les deux solutions étant de moins de 1 %.

partie de l'énergie de l'onde de Rayleigh qui a été convertie en onde de volume se présente sous la forme d'une onde de volume qui suit d'assez près l'onde S directe. Il semble que cette onde convertie se soit formée lors du passage de l'onde de Rayleigh dans la partie concave du monticule. Cette onde convertie peut être observée clairement sur la composante horizontale  $v_x$  de la vitesse enregistrée à la surface libre (voir sismogrammes sur la figure 2.9). L'existence d'un tel phénomène de conversion d'onde de Rayleigh en onde de volume est en accord avec les résultats de Jih *et al.* (1988), qui ont observé des effets similaires dans leurs expériences numériques lorsque des ondes de Rayleigh se propagent sur une surface libre présentant de brusques changements de topographie. De plus, l'existence de ce phénomène a été démontrée dans l'étude théorique de Rulf (1969) pour des ondes de Rayleigh se propageant sur des surfaces courbes.

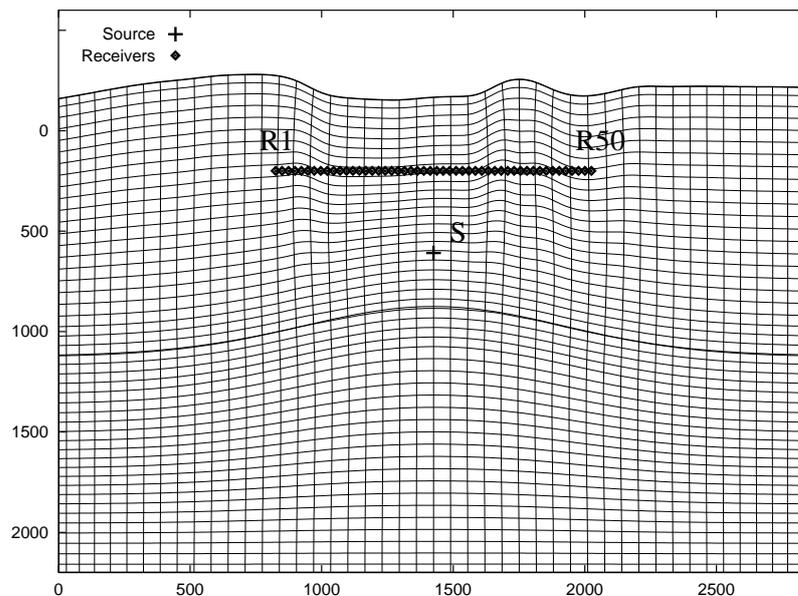
Ces résultats prouvent que la formulation tensorielle de l'équation des ondes permet de modéliser la propagation d'ondes de Rayleigh dans un modèle élastique en présence d'une topographie de surface.

## 2.7 Insuffisance de l'algorithme de Chebyshev pour des modèles réalistes

Nous venons de voir qu'une solution simple de type pseudo-spectral globale peut permettre de résoudre avec précision l'équation des ondes dans un milieu complexe. La formulation tensorielle introduite a permis de réduire significativement le nombre de calculs à effectuer. Néanmoins, au cours de cette étude, plusieurs difficultés sont apparues clairement, et ont montré les limitations intrinsèques dont souffrait l'approche pseudo-spectrale globale fondée sur une écriture différentielle des équations de l'élastodynamique.

- La méthode est coûteuse en nombre d'opérations. Le coût d'un calcul 2D est en  $O(N^3)$ , or  $N$  est toujours grand, typiquement 200 au minimum pour un modèle 2D réaliste. L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre en temps est lui aussi coûteux, puisque quatre modélisations complètes sont nécessaires à chaque pas en temps.
- Pour éviter d'avoir une condition de stabilité trop restrictive dans le schéma explicite de Runge-Kutta en raison du resserrement des points de Gauss-Lobatto-Chebyshev sur les bords du domaine, un « mapping » fortement non-

FIG. 2.5 – Structure utilisée pour tester la capacité de l'approche tensorielle à prendre en compte une topographie à la surface libre. La taille de la grille est de  $187 \times 187$  points. Une ligne de la grille sur quatre est représentée.



linéaire doit être introduit. Il est certain que celui-ci introduit des erreurs de troncature additionnelles dans le schéma et réduit ainsi la précision globale du calcul (même si dans notre travail nous n'avons pas étudié ce point en détail).

- L'algorithme est peu adapté aux architectures des supercalculateurs modernes, à savoir le parallélisme massif avec mémoire distribuée.
- Enfin et surtout, le fait de devoir trouver une transformation de maillage globale suffisamment régulière (lisse) entre le domaine étudié et le carré de référence, impose des restrictions extrêmement fortes sur les types de modèles pouvant être étudiés, et diminue l'intérêt de la méthode pour des cas réellement compliqués. Par exemple, pour une topographie vraiment accidentée, il semble totalement illusoire de chercher une transformation globale qui soit suffisamment régulière. Il est clair que cet argument est encore plus problématique si l'on souhaite envisager le cas tridimensionnel.

Il est donc maintenant nécessaire de chercher à résoudre ces différents problèmes. L'approche que nous avons choisie, et qui sera décrite dans les chapitres suivants, constituant le cœur de notre travail de thèse, est la méthode des éléments spectraux, qui permettra de tirer partie tout à la fois de la souplesse géométrique de l'approche variationnelle d'ordre faible, et de la précision de l'approche spectrale.

## 2.8 Conclusions

Dans le cas où l'on souhaite étudier un modèle géologique complexe, il est avantageux de pouvoir résoudre directement l'équation des ondes dans des grilles déformées dont les lignes coïncident avec les interfaces du modèle ainsi qu'avec la surface libre, qui peut présenter une topographie. Cela conduit à des résultats nettement plus précis que dans le cas où un tel modèle serait maillé avec une grille régulière.

Une formulation tensorielle de l'équation des ondes a été présentée, ce qui permet de résoudre le problème sans avoir besoin d'introduire un système de coordonnées cartésien. Une telle approche est plus naturelle que celle, largement répandue, consistant à résoudre l'équation écrite en coordonnées cartésiennes en faisant appel à la règle de dérivation composée pour calculer les dérivées cartésiennes dans le domaine de calcul curviligne. De plus, cette formulation tensorielle conduit d'un point de vue numérique à calculer moins de dérivées spatiales que dans le cas de la règle de dérivation composée (exactement le même nombre que dans le cas cartésien), ce qui permet de réduire significativement le coût de calcul global de la méthode.

Un algorithme de génération de grille algébrique simple permet de définir un maillage s'adaptant aux différentes interfaces, et que l'on peut raffiner de manière contrôlée au voisinage de ces interfaces et de la surface. Cela permet de se débarrasser des artefacts numériques qui résulteraient de la discrétisation des interfaces en marches d'escalier si un maillage cartésien était utilisé.

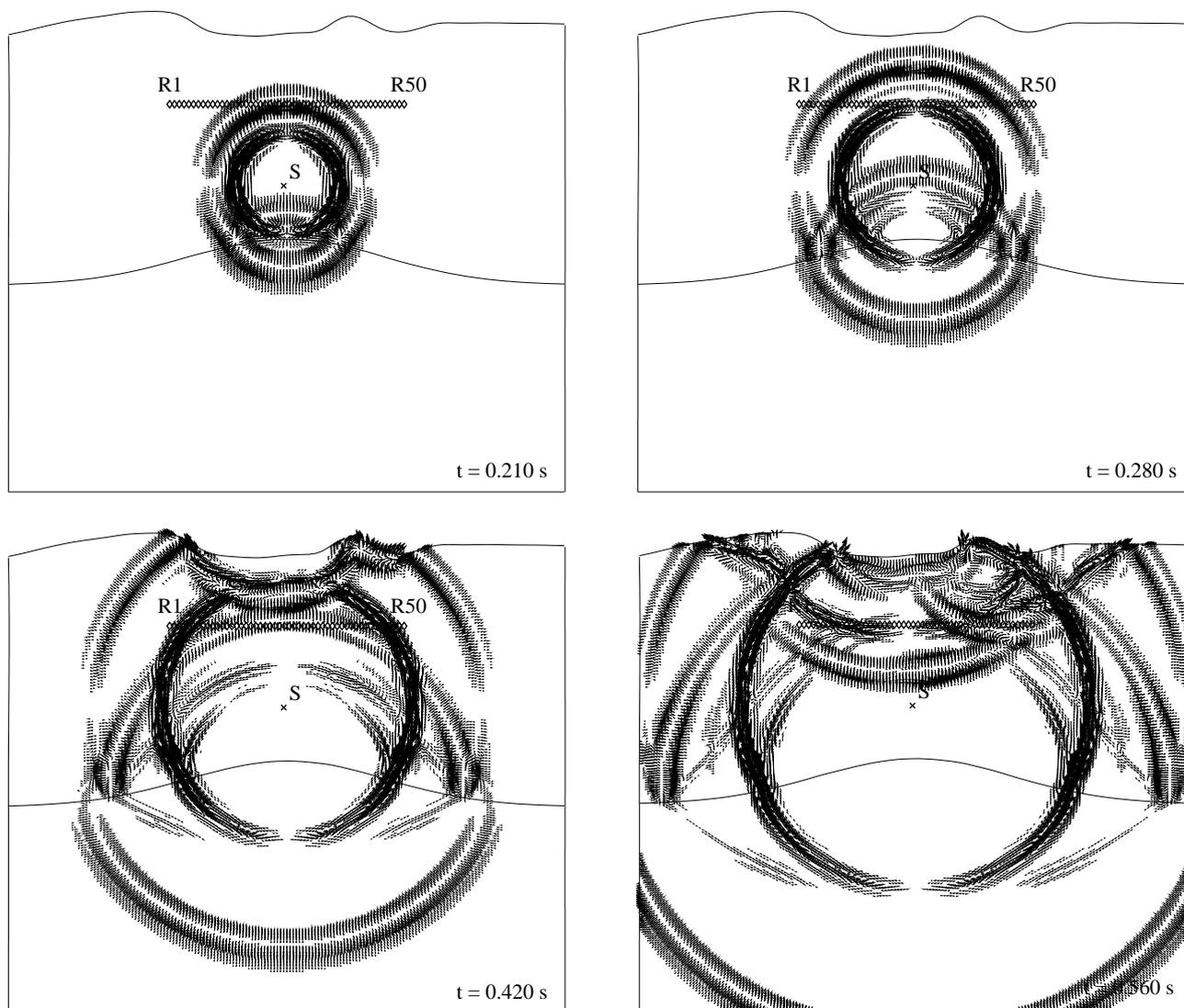


FIG. 2.6 – Instantanés du vecteur vitesse obtenus pour un modèle présentant une topographie à la surface libre (voir figure 2.5). La croix indique la position de la source, les losanges représentent la ligne de récepteurs. La source est une force verticale placée dans le modèle à une profondeur de  $z_s = 776.2$  m. On peut observer la forme complexe des différentes ondes, par exemple les triplications qui se produisent après réflexion sur la bosse la plus à droite. De fortes ondes réfléchies sont également générées à l'interface entre les deux milieux.

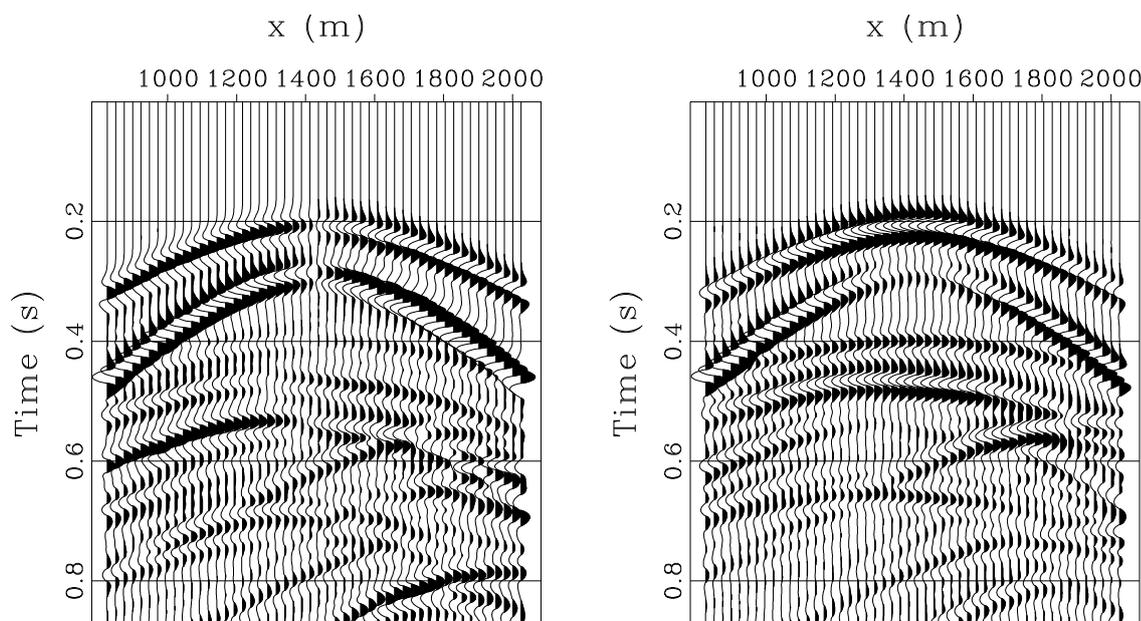


FIG. 2.7 – Sismogrammes de la composante horizontale du vecteur vitesse  $v_x$  (gauche) et de la composante verticale  $v_z$  (droite) pour le modèle présentant une topographie de surface (figure 2.5). La source est une force verticale située dans le modèle à une profondeur de  $z_s = 776.2$  m, et la ligne de récepteurs est située à l'intérieur du milieu.

Des tests numériques effectués à 2D en utilisant un algorithme de Chebyshev ont permis de valider l'approche tensorielle et d'illustrer sa capacité à prendre en compte des interfaces courbes ainsi qu'une topographie de surface. Dans le cas du problème de Lamb incliné, un accord excellent avec la solution analytique est obtenu. Dans le cas d'un modèle présentant une topographie, des formes complexes sont obtenues pour les différentes ondes réfléchies et converties, et des triplications se produisent. De plus, si la source est suffisamment proche de la surface, des conversions de mode d'onde de Rayleigh en onde de volume sont observées quand l'onde de Rayleigh se propage dans une zone de la surface présentant une forte concavité.

D'un point de vue numérique, nous avons expliqué pourquoi l'algorithme présenté était particulièrement adapté aux supercalculateurs de type vectoriel, mais n'était pas optimal pour une architecture parallèle. Nous avons noté que son coût restait élevé à 2D, et probablement prohibitif à 3D pour des maillages de taille réaliste. Nous avons également signalé que, même si l'approche différentielle globale présentée permettait de résoudre de nombreux problèmes, elle souffrait d'une limitation intrinsèque dès lors que la forme des interfaces et de la surface devenait réellement compliquée, et nous en avons déduit la nécessité de faire appel à une technique plus souple, typiquement dérivée d'une formulation variationnelle de type  $h$  ou  $h - p$  du problème, pour pouvoir traiter des cas réalistes.

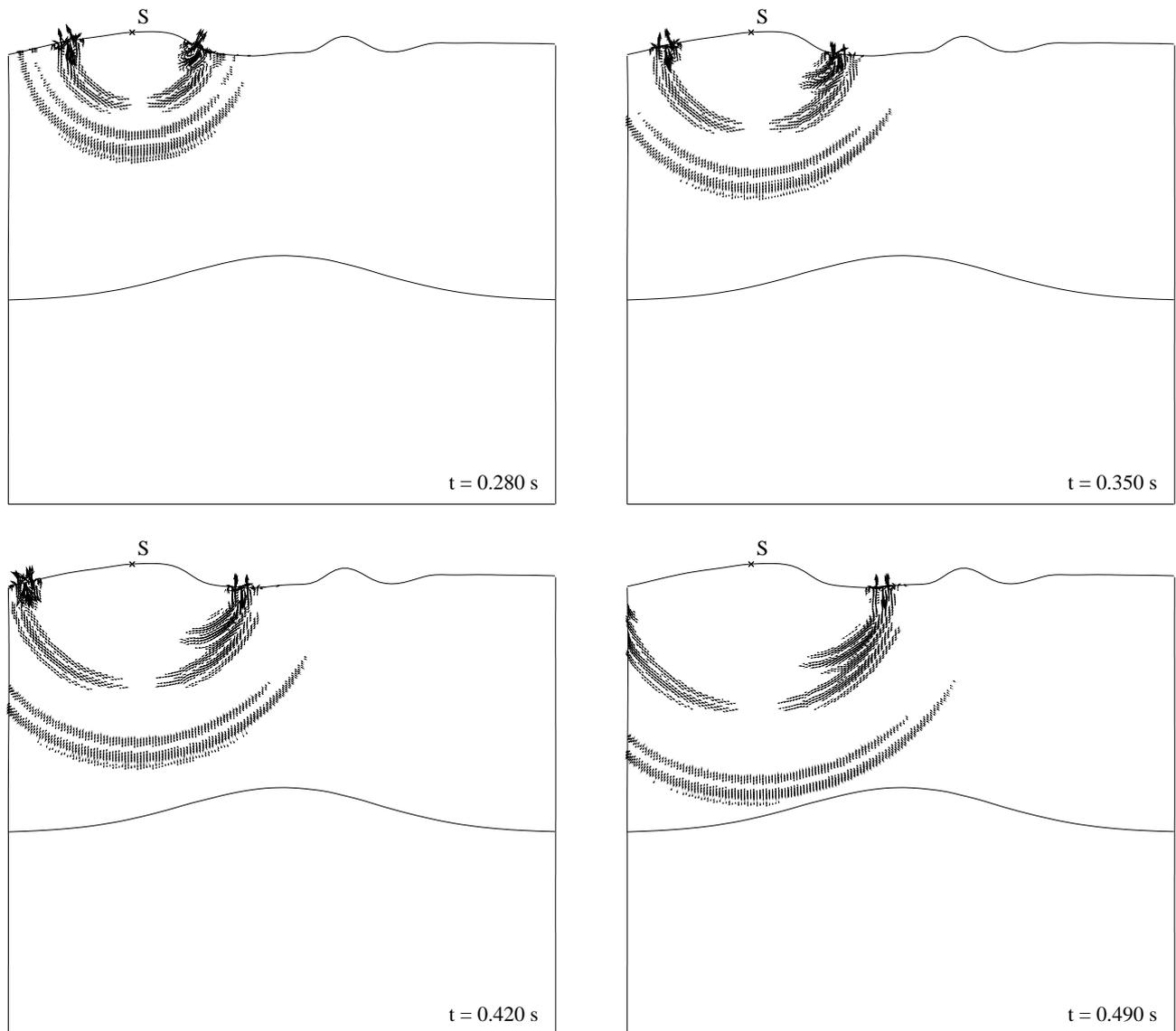


FIG. 2.8 – Instantanés du vecteur vitesse obtenus pour un modèle présentant une topographie de surface (voir figure 2.5). La croix indique la position de la source, qui est une force verticale placée juste sous la surface. On peut observer la propagation d'une forte onde de Rayleigh le long de la surface courbe, ainsi qu'une conversion d'onde de Rayleigh en onde de volume lorsque l'onde de Rayleigh rencontre une zone de la surface libre ayant une forte courbure (bosse la plus à gauche).

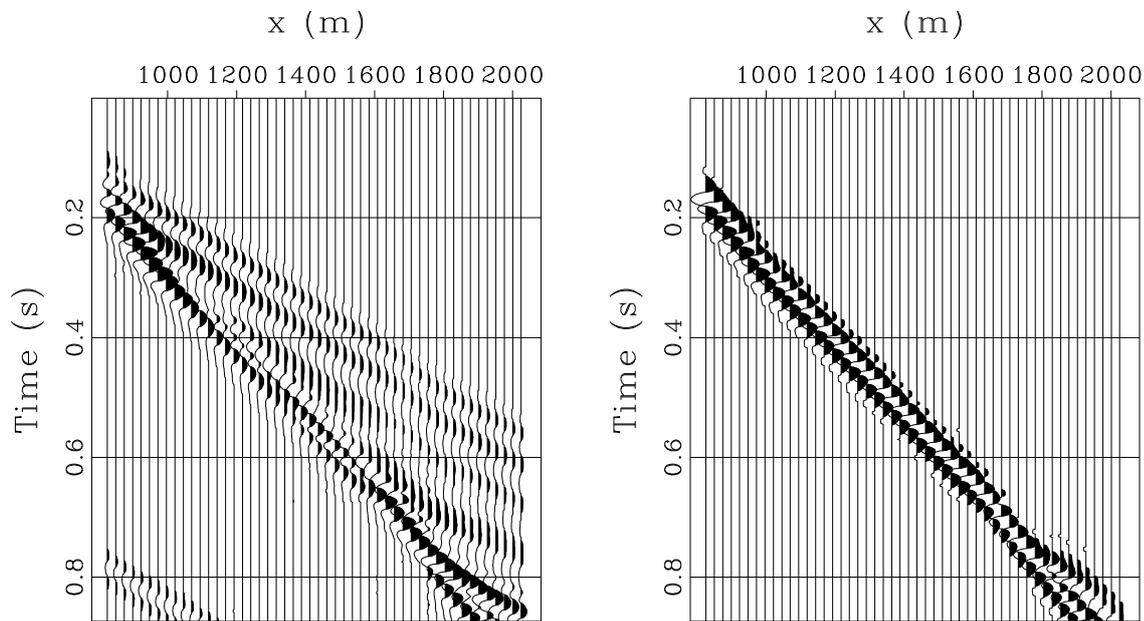


FIG. 2.9 – Sismogrammes de la composante horizontale du vecteur vitesse  $v_x$  (gauche) et de la composante verticale  $v_z$  (droite) pour le modèle présentant une topographie de surface (figure 2.5). La source est une force verticale placée juste sous la surface. La ligne de récepteurs est placée à la surface libre. On peut observer une forte onde de Rayleigh qui se propage le long de la surface, ainsi qu'une forte conversion d'onde de Rayleigh en onde de volume qui apparaît clairement sur la composante horizontale. La phase de faible amplitude arrivant aux alentours de  $t = 0.8$  s et visible notamment sur la composante horizontale est l'onde réfléchiée par l'interface.

## 2.A Annexe : Notions élémentaires sur la formulation tensorielle

Les scalaires et les vecteurs sont des cas particuliers de quantités plus générales, appelées *tenseurs*, qui se transforment suivant une loi linéaire et homogène lors d'un changement de coordonnées entre deux systèmes de coordonnées curvilignes. Supposons que l'on passe de  $\{x^i\}$  à  $\{x'^i\}$  par exemple, alors nous devons utiliser la relation de transformation suivante pour un tenseur d'ordre  $p + q$  (voir par exemple [Spain, 1965](#))

$$A_{j_1 \dots j_q}{}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{l_q}}{\partial x'^{j_q}} \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_p}}{\partial x^{k_p}} A_{l_1 \dots l_q}{}^{k_1 \dots k_p} \quad (2.31)$$

où  $i_1, \dots, i_p$  sont appelés indices *contravariants* et  $j_1, \dots, j_q$  indices *covariants*. Par exemple, la loi de transformation d'un repère cartésien à un repère curviligne pour un tenseur d'ordre un tel que la vitesse, en composantes covariantes, est

$$\begin{aligned} v_\xi &= v_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + v_z \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ v_\eta &= v_x \frac{\partial x}{\partial \eta} + v_z \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.32)$$

et pour un tenseur symétrique d'ordre deux tel que le tenseur des contraintes, en composantes covariantes

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= \sigma_{xx} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \sigma_{zz} \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 + 2\sigma_{xz} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \sigma_{\eta\eta} &= \sigma_{xx} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \sigma_{zz} \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + 2\sigma_{xz} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \sigma_{\xi\eta} = \sigma_{\eta\xi} &= \sigma_{xx} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \sigma_{zz} \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \sigma_{xz} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Pour passer des composantes contravariantes aux composantes covariantes, ou l'inverse, nous pouvons écrire

$$A_{i_1 \dots i_p} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p} A^{j_1 \dots j_p} \quad A^{i_1 \dots i_p} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} A_{j_1 \dots j_p} \quad (2.34)$$

où  $g_{ij}$  est le tenseur métrique en composantes covariantes et  $g^{ij}$  est le tenseur métrique en composantes contravariantes. Le tenseur métrique est symétrique par définition ( $g_{ij} = g_{ji}$ ). Ce tenseur  $g_{ij}$  peut être obtenu à partir des dérivées partielles des transformations directes (supposées connues)  $x_i = x_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$  (voir équation 2.20). Par exemple, à 2D, soit  $x_\xi, x_\eta, z_\xi, z_\eta$  les dérivées partielles de la transformation directe entre les deux systèmes de coordonnées. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_\xi^2 + z_\xi^2 \\ g_{22} &= x_\eta^2 + z_\eta^2 \\ g_{12} &= g_{21} = x_\xi x_\eta + z_\xi z_\eta \end{aligned}$$

Le jacobien de la transformation est défini par

$$J = \frac{1}{x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi} \quad (2.35)$$

Les dérivées partielles de la transformation inverse peuvent être calculées, même si la transformation inverse  $\xi_i = \xi_i(x, z)$  elle-même n'est pas connue analytiquement (mais existe, ce qui revient à dire que le jacobien de la transformation n'est jamais nul), en écrivant

$$\begin{aligned} \xi_x &= J z_\eta & \xi_z &= -J x_\eta \\ \eta_x &= -J z_\xi & \eta_z &= J x_\xi \end{aligned}$$

L'expression du tenseur métrique en composantes contravariantes est alors

$$\begin{aligned} g^{11} &= \xi_x^2 + \xi_z^2 \\ g^{22} &= \eta_x^2 + \eta_z^2 \\ g^{12} &= g^{21} = \xi_x \eta_x + \xi_z \eta_z \end{aligned}$$

Les symboles de Christoffel de deuxième espèce qui apparaissent dans l'expression de la dérivée covariante ne sont *pas* des tenseurs, car ils ne suivent pas la loi de transformation donnée par l'équation (2.31), mais l'on peut tout de même noter qu'ils sont symétriques par rapport aux indices du bas

$$\Gamma_{ij}{}^k = \Gamma_{ji}{}^k \quad (2.36)$$

## 2.B Annexe : Génération de la grille

Si nous considérons deux points  $A$  et  $B$  appartenant respectivement à deux interfaces courbes  $C_A$  et  $C_B$  délimitant une couche géologique donnée, une courbe reliant  $A$  à  $B$  peut être construite avec des vecteurs unitaires tangents donnés  $\vec{\tau}_A$  en  $A$  et  $\vec{\tau}_B$  en  $B$  (voir figure 2.1), sous la forme (Doursat, 1994)

$$\vec{r}(\eta^*) = \alpha_0^0(\eta^*) \vec{r}_A + \alpha_1^0(\eta^*) \vec{r}_B + \alpha_0^1(\eta^*) h_0 \vec{\tau}_A + \alpha_1^1(\eta^*) h_1 \vec{\tau}_B \quad (2.37)$$

où  $\eta^* \in [0, 1]$  et  $\alpha_i^j$  sont les quatre polynômes de Hermite de degré trois (voir figure 2.10) définis par

$$\begin{aligned} \alpha_0^0(\eta^*) &= 1 - 3\eta^{*2} + 2\eta^{*3} \\ \alpha_1^0(\eta^*) &= 3\eta^{*2} - 2\eta^{*3} \\ \alpha_0^1(\eta^*) &= \eta^* - 2\eta^{*2} + \eta^{*3} \\ \alpha_1^1(\eta^*) &= -\eta^{*2} + \eta^{*3} \end{aligned} \quad (2.38)$$

où  $\vec{r}$  représente le vecteur position le long de la courbe. Les deux constantes  $h_0$  et  $h_1$  définissent la longueur des vecteurs tangents et seront utilisées dans la suite pour définir la taille des mailles de la grille au voisinage des frontières.

FIG. 2.10 – Les quatre polynômes de Hermite de degré trois utilisés pour générer une grille curviligne.

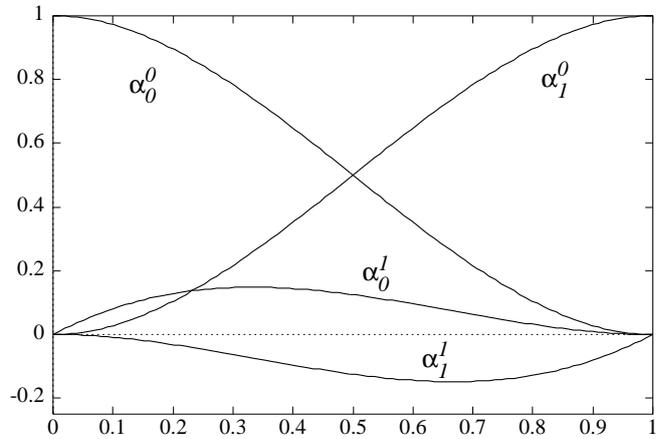
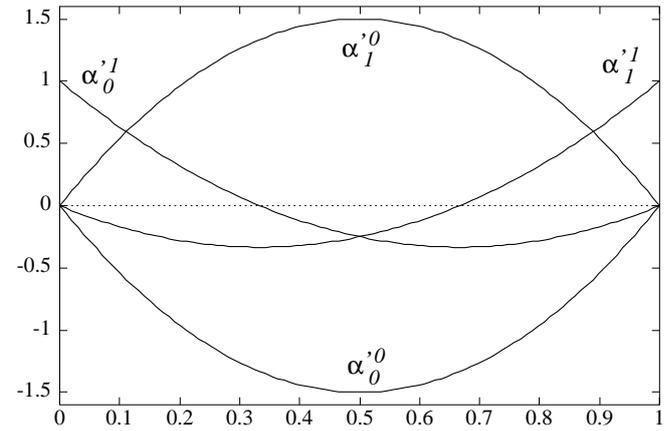


FIG. 2.11 – Dérivée première des quatre polynômes de Hermite de degré trois utilisés pour générer une grille curviligne.



La méthode de maillage algébrique décrite ci-dessus - voir Fletcher (1991) et Doursat (1994) - utilise les propriétés des polynômes de Hermite de degré trois (figure 2.10) et de leur dérivée première (figure 2.11) pour remplir les conditions demandées. Cela est facile à vérifier en calculant la tangente à cette courbe

$$\vec{\tau}(\eta^*) = \frac{\partial \vec{r}(\eta^*)}{\partial \eta^*} = \alpha_0^0(\eta^*) \vec{r}_A + \alpha_1^0(\eta^*) \vec{r}_B + \alpha_0^1(\eta^*) h_0 \vec{\tau}_A + \alpha_1^1(\eta^*) h_1 \vec{\tau}_B \quad (2.39)$$

et en appliquant les équations (2.37) et (2.39) aux points  $A$  et  $B$ , ce qui donne  $\vec{r}(0) = \vec{r}_A$ ,  $\vec{r}(1) = \vec{r}_B$ ,  $\vec{\tau}(0) = h_0 \vec{\tau}_A$  et  $\vec{\tau}(1) = h_1 \vec{\tau}_B$  comme prévu.

Nous pouvons aisément étendre cette méthode pour générer une grille 2D au sein d'une couche définie par deux interfaces courbes (ne se coupant pas). Considérons une grille carrée dans le domaine  $(\xi, \eta)$  avec  $\xi \in [0, 1, \dots, N_\xi]$  et

$\eta \in [0, 1, \dots, N_\eta]$ . La grille curviligne correspondante est définie par

$$\vec{r}(\xi, \eta) = \alpha_0^0(\eta^*) \vec{r}_A(\xi) + \alpha_1^0(\eta^*) \vec{r}_B(\xi) + \alpha_0^1(\eta^*) h_0 \vec{\tau}_A(\xi) + \alpha_1^1(\eta^*) h_1 \vec{\tau}_B(\xi) \quad (2.40)$$

où

$$\eta^* = \frac{\eta}{N_\eta} \quad (2.41)$$

Dans l'équation (2.40),  $\vec{r}_A(\xi)$  et  $\vec{r}_B(\xi)$  permettent de spécifier l'ensemble des points de départ et d'arrivée des lignes du maillage respectivement sur les deux interfaces, et  $\vec{\tau}_A(\xi)$  et  $\vec{\tau}_B(\xi)$  les vecteurs tangents correspondants en ces mêmes points. Cette équation définit une transformation analytique du domaine de travail carré  $(\xi, \eta)$  vers le domaine physique étudié  $\vec{r} = (x, z)$ . Ainsi, elle définit les fonctions de transformation des coordonnées  $x = x(\xi, \eta)$  et  $z = z(\xi, \eta)$ .

La méthode de génération de grille décrite ci-dessus est relativement souple, en effet la grille peut être raffinée ou étirée au voisinage des bords d'une couche donnée en spécifiant des valeurs appropriées des constantes  $h_0$  et  $h_1$  afin de définir la longueur des vecteurs normaux à l'interface. Cela peut être vérifié en développant (2.37) au premier ordre en  $\eta^*$  au voisinage de  $\eta^* = 0$  et de  $\eta^* = 1$ , ce qui donne respectivement  $\|\Delta\vec{r}\| \simeq h_0 \Delta\eta^*$  et  $\|\Delta\vec{r}\| \simeq h_1 \Delta\eta^*$ , où  $\|\Delta\vec{r}\|$  représente le changement de position dans le domaine physique pour un changement donné  $\Delta\eta^*$  dans le domaine de travail. Ainsi, la taille des mailles de la grille au voisinage des frontières inférieure et supérieure est respectivement  $h_0 \Delta\eta^*$  et  $h_1 \Delta\eta^*$ .



**Deuxième partie**

**Éléments spectraux 2D et 3D**



# Chapitre 3

## Méthode des éléments spectraux

Ce chapitre ainsi que les deux suivants ont donné lieu à la publication de trois articles :

- D. Komatitsch and J. P. Vilotte (1998), *The Spectral Element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures*, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **88**, 368–392
- D. Komatitsch, J. P. Vilotte, R. Vai, J. M. Castillo-Covarrubias and F. J. Sánchez-Sesma (1999), *The Spectral Element method for elastic wave equations : application to 2D and 3D seismic problems*, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **45**, 1139–1164
- R. Vai, J. M. Castillo-Covarrubias, F. J. Sánchez-Sesma, D. Komatitsch and J. P. Vilotte (1999), *Elastic wave propagation in an irregularly layered medium*, *Earthqu. Eng. Struct. Dyn. J.*, **18**, 11–18

### 3.1 Introduction

Comme nous l’avons vu dans le chapitre précédent, une première approche permettant de modéliser la propagation des ondes dans des structures compliquées consiste à résoudre l’équation des ondes écrite sous forme différentielle en coordonnées curvilignes, par exemple en utilisant une méthode pseudo-spectrale. Bien que cette approche puisse être utilisée avec succès dans certains cas, elle présente l’inconvénient majeur d’être limitée au cas où une transformation globale de maillage suffisamment lisse peut être trouvée entre le domaine physique étudié et le domaine carré dans lequel sont effectués les calculs, ce qui est rarement le cas lorsque l’on considère des modèles réalistes.

Une approche beaucoup plus naturelle, permettant de résoudre cette difficulté, consiste à utiliser la formulation variationnelle de l’équation des ondes sur un maillage adapté aux contraintes géométriques du modèle. Classiquement, cela conduit à la méthode des éléments finis (Zienkiewicz, 1977 ; Hughes, 1987 ; Dhatt et Touzot, 1984). Quelques tentatives pour utiliser cette méthode en géophysique ont été effectuées (Lysmer et Drake, 1972 ; Drake, 1972) mais, en raison du faible ordre d’approximation qui est utilisé ordinairement afin de réduire le coût de calcul de tels schémas, la précision des résultats s’est souvent révélée décevante (Marfurt, 1984).

Au vu de ces résultats, et dans le but d’augmenter la précision de la modélisation tout en maintenant un coût de calcul raisonnable, nous utilisons dans ce chapitre une méthode d’éléments spectraux (Patera, 1984 ; Bernardi et Maday, 1992 ; Azaiez *et al.*, 1994 ; Priolo *et al.*, 1994 ; Tordjman, 1995 ; Faccioli *et al.*, 1996) qui, au cours de la dernière décennie, a prouvé son efficacité essentiellement dans le domaine de la mécanique des fluides (Patera, 1984 ; Rønquist, 1988 ; Maday et Patera, 1989 ; Fisher, 1990 ; Azaiez *et al.*, 1994 ; Yoon et Chung, 1996). Une telle méthode permet de résoudre l’équation des ondes élastiques dans des milieux compliqués, présentant par exemple une topographie et des interfaces courbes, tout en gardant la grande précision des méthodes pseudo-spectrales. L’équation des ondes est écrite en formulation faible, la grille étant composée de quadrangles courbes à 2D ou d’hexaèdres courbes à 3D. Chaque élément est rapporté individuellement au carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  dans le cas 2D, et au cube  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  dans le cas 3D, sur lequel des produits tensoriels de polynômes de Lagrange associés aux points d’intégration de Gauss-Lobatto-Legendre sont utilisés comme base polynômiale. Une conséquence fondamentale de ce choix particulier est que la matrice de masse du système est purement diagonale par construction, ce qui conduit à un schéma complètement explicite et rend triviale l’inversion de cette matrice. Nous utilisons pour l’intégration en temps un schéma explicite-implicite prédicteur-multicorrecteur de type Newmark basé soit sur une formulation classique en accélération (Hughes, 1987), soit sur une formulation en vitesse écrite sous forme conservative (Simo, 1992). Trois types de conditions aux limites peuvent être utilisées : une condition de surface libre (Neumann), une condition de bord rigide (Dirichlet) ou une condition absorbante permettant de simuler un milieu s’étendant à l’infini. Cette dernière est introduite en résolvant une équation paraxiale du premier ordre en temps sur la frontière.

Dans ce chapitre, la précision de la méthode introduite est démontrée sur deux problèmes classiques (problème de Lamb, problème de Garvin) en comparant la solution calculée en utilisant un faible nombre de points par longueur d’onde

(environ 5) à la solution analytique des problèmes considérés. Un excellent accord est trouvé. La souplesse et la robustesse de la méthode seront ensuite prouvées dans les chapitres suivants en étudiant divers modèles plus réalistes, tant 2D que 3D. Le calcul de structures 3D hétérogènes par une méthode d'éléments spectraux constitue, à notre connaissance, un résultat inédit.

Nous démontrons également la possibilité d'implémenter de manière naturelle la méthode proposée sur un ordinateur parallèle, et nous montrons qu'il est possible d'atteindre des performances très intéressantes.

## 3.2 Discrétisation spatiale et approximation de Galerkin

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, il est possible d'écrire les équations régissant la propagation des ondes élastiques sous forme variationnelle. Les avantages que l'on peut attendre d'une telle approche ont été évoqués (souplesse géométrique permettant de traiter des modèles réellement complexes, écriture naturelle des conditions de bord, notamment la condition de surface libre...). Cependant, afin de pouvoir résoudre numériquement le problème aux limites ainsi formulé, il nous faut maintenant réduire le système dynamique de dimension infinie à un système de dimension finie. Cela est généralement effectué en trois étapes :

1. **Discrétisation spatiale** : Le domaine géométrique  $\bar{\Omega}$  est discrétisé en une famille de sous-domaines ne se recouvrant pas  $\{\bar{\Omega}_e\}$ ,  $e = 1, n_{el}$ . Cela nous permet d'introduire la restriction  $\mathbf{w}^e$  de  $\mathbf{w}$  à  $\Omega^e$ , c'est-à-dire le champ défini sur  $\bar{\Omega}_e$  et qui coïncide avec  $\mathbf{w}$  sur ce support fini.
2. **Approximation de Galerkin** : Le sous-espace des phases de dimension infinie  $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$  est remplacé par un sous-espace de dimension finie via une projection de Galerkin. Cela est effectué en introduisant l'espace des fonctions polynômiales par morceaux, et un opérateur de projection sur la grille de collocation définie par les points d'intégration. Ce problème aux limites avec conditions initiales est maintenant posé sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles linéaires ordinaires résultant de la discrétisation de la forme variationnelle des équations, après introduction de la forme locale des équations constitutives.
3. **Discrétisation en temps** : Le système d'équations différentielles linéaires ordinaires introduit ci-dessus décrit l'évolution en temps des degrés de liberté discrets. Une discrétisation en temps et l'introduction d'un algorithme d'évolution en temps sont alors nécessaires pour pouvoir calculer les champs de déplacement, vitesse et accélération à tout instant de l'intervalle de temps étudié.

### 3.2.1 Discrétisation spatiale

Le domaine physique étudié est tout d'abord discrétisé en éléments ne se recouvrant pas :  $\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \bar{\Omega}_e$ . À 2D, les éléments sont des quadrangles (leurs côtés pouvant être courbes dans le cas général). À 3D, ce sont des hexaèdres. Cette partition du domaine  $\bar{\Omega}$  doit satisfaire la condition classique en éléments finis consistant à s'assurer que pour tout  $e \neq e'$  l'intersection  $\bar{\Omega}_e \cap \bar{\Omega}_{e'}$  doit être soit vide soit composée d'un nœud, d'un côté ou d'une face communs. Pour chaque élément  $\Omega_e$  du domaine, le champ  $\mathbf{w}^e = \mathbf{w}|_{\Omega_e}$  est défini comme la restriction de  $\mathbf{w}$  au support spatial fini  $\Omega_e$ .

Notons  $\square$  le domaine de référence dans l'espace  $\xi$  (par exemple à 2D le carré fermé de  $\mathbf{R}^2$  :  $\square = \Lambda \times \Lambda$ , où  $\Lambda = [-1, 1]$ , et à 3D le cube fermé de  $\mathbf{R}^3$  :  $\square = \Lambda \times \Lambda \times \Lambda$ ). Pour chaque élément  $\Omega_e$ , nous pouvons définir un difféomorphisme régulier  $\mathcal{F}_e : \square \rightarrow \Omega_e$  tel que :

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathcal{F}_e(\xi) \quad (3.1)$$

Une façon classique de construire  $\mathcal{F}_e$ , en suivant [Gordon et Hall \(1972\)](#), consiste à partir de la paramétrisation des quatre côtés courbes  $\Gamma_i^e$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) constituant la frontière  $\partial\Omega_e$  de l'élément  $\Omega_e$ . Soit  $\mathbf{a}_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) les sommets de  $\Omega_e$ , supposons données quatre fonctions régulières  $f_i$  de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbf{R}^2$  vérifiant ([Azaiez et al., 1994](#))

$$\begin{aligned} f_1([-1, 1]) \cap f_2([-1, 1]) &= f_1(-1) = f_2(-1) = \mathbf{a}_2 \\ f_2([-1, 1]) \cap f_3([-1, 1]) &= f_2(1) = f_3(-1) = \mathbf{a}_3 \\ f_3([-1, 1]) \cap f_4([-1, 1]) &= f_3(1) = f_4(1) = \mathbf{a}_4 \\ f_4([-1, 1]) \cap f_1([-1, 1]) &= f_4(-1) = f_1(1) = \mathbf{a}_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Alors l'application  $\mathcal{F}_e$  de  $\Lambda^2$  dans  $\mathbf{R}^2$  peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_e(r, s) &= \frac{1+s}{2} f_3(r) + \frac{1-s}{2} f_1(r) \\ &+ \frac{1+r}{2} \left( f_4(s) - \frac{1+s}{2} f_4(1) - \frac{1-s}{2} f_4(-1) \right) \\ &+ \frac{1-r}{2} \left( f_4(s) - \frac{1+s}{2} f_2(1) - \frac{1-s}{2} f_2(-1) \right)\end{aligned}\quad (3.3)$$

Il convient alors de s'assurer que le jacobien  $J_e$  de la transformation  $\mathcal{F}_e$  ainsi définie est non nul partout. Une autre façon classique de définir une telle transformation (voir figure 3.1) consiste à considérer les polynômes de Lagrange 1D d'ordre  $n$ ,  $l_i^n$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ , définis sur  $\Lambda$  à partir des nœuds géométriques utilisés pour paramétriser le segment. On peut alors définir simplement la transformation géométrique  $\mathcal{F}_e$  en écrivant (par exemple ici dans le cas 2D) :

$$\mathcal{F}_e(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{n_{en}} N_k(\xi, \eta) \mathbf{a}_k \quad (3.4)$$

où les  $\mathbf{a}_k$ ,  $k = 1, \dots, n_{en}$  sont les nœuds géométriques définissant l'élément. Pour une paramétrisation quadratique de chaque côté de l'élément (correspondant à une transformation 2D contrôlée par huit nœuds), les fonctions  $N_k$ , appelées traditionnellement *fonctions de forme* dans le langage des éléments finis, sont, pour les nœuds appartenant aux coins de l'élément :

$$\begin{aligned}N_1(\xi, \eta) &= l_1^2(\xi) l_1^2(\eta) & ; & \quad N_2(\xi, \eta) = l_3^2(\xi) l_1^2(\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= l_3^2(\xi) l_3^2(\eta) & ; & \quad N_4(\xi, \eta) = l_1^2(\xi) l_3^2(\eta)\end{aligned}\quad (3.5)$$

et pour les nœuds appartenant au milieu des côtés :

$$\begin{aligned}N_5(\xi, \eta) &= l_2^2(\xi) l_1^1(\eta) & ; & \quad N_6(\xi, \eta) = l_2^1(\xi) l_2^2(\eta) \\ N_7(\xi, \eta) &= l_2^2(\xi) l_2^1(\eta) & ; & \quad N_8(\xi, \eta) = l_2^2(\xi) l_1^1(\eta)\end{aligned}\quad (3.6)$$

L'expression analytique de ces fonctions de forme 2D huit nœuds est donnée par exemple dans Hughes (1987) et dans Dhatt et Touzot (1984). Le cas d'un élément 3D peut être décrit par des éléments 20 nœuds pour lesquels l'expression analytique des fonctions de forme est un peu plus lourde à écrire (voir Dhatt et Touzot, 1984). Afin de s'assurer de la condition de non recouvrement des éléments du maillage, il est nécessaire de vérifier que le jacobien  $J_e$  de la transformation ainsi définie est partout non nul.

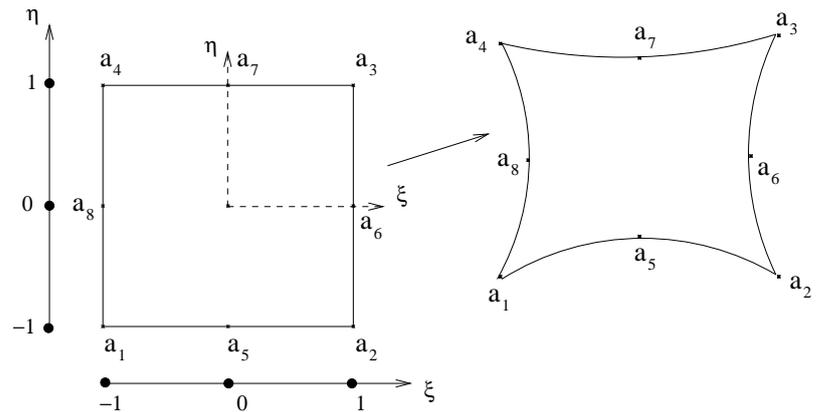


FIG. 3.1 – Exemple d'une transformation géométrique quadratique entre le domaine déformé et le domaine de référence.

### 3.2.2 Approximation de Galerkin

Le sous-espace des phases de dimension infinie  $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$  est remplacé par un sous-espace de dimension finie  $\mathcal{S}_N^h \times \mathcal{V}_N^h$  en utilisant une approximation de Galerkin et un opérateur d'interpolation polynômiale. L'indice  $h$  se rapporte à l'association de  $\mathcal{S}^h$  et de  $\mathcal{V}^h$  avec le maillage, c'est-à-dire la discrétisation spatiale du domaine  $\Omega$ , qui peut être paramétrisé par une échelle de longueur caractéristique  $h$ .

En liaison avec la discrétisation spatiale, considérons, pour  $N \in \mathbf{N}$ , l'approximation de dimension finie de  $\mathcal{S}$  définie comme suit (avec  $n_d$  la dimension de l'espace physique considéré) :

$$\mathcal{S}_N^h = \{ \mathbf{u}^h \in \mathcal{S} : \mathbf{u}^h \in L^2(\Omega)^{n_d} \text{ et } \mathbf{u}^h|_{\Omega_e} \circ \mathcal{F}_e \in [\mathbf{P}_N(\square)]^{n_d} \} \quad (3.7)$$

et pour l'espace des variations admissibles  $\mathcal{V}$  :

$$\mathcal{V}_N^h = \{ \mathbf{w}^h \in \mathcal{V} : \mathbf{w}^h \in L^2(\Omega)^{n_d} \text{ et } \mathbf{w}^h|_{\Omega_e} \circ \mathcal{F}_e \in [\mathbf{P}_N(\square)]^{n_d} \} \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{P}_N(\square)$  est l'espace des polynômes de degré  $\leq N$  défini sur le domaine de référence. Cela définit une approximation polynômiale par morceaux sur chaque  $\Omega_e$ .

L'approximation de Galerkin du problème considéré peut alors se poser comme suit, en utilisant les notations du chapitre 1 :

Étant donné  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\tau$ ,  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$ , trouver  $\mathbf{u}_N^h(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}_{N,t}^h \quad \forall t \in \mathbf{I}$ , tel que  $\forall \mathbf{w}_N^h \in \mathcal{V}_N^h$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_N^h, \rho \dot{\mathbf{v}}_N^h) + a(\mathbf{w}_N^h, \mathbf{u}_N^h) &= (\mathbf{w}_N^h, \mathbf{f}) + (\mathbf{w}_N^h, \tau)_{\Gamma_\tau} + (\mathbf{w}_N^h, \tau(\mathbf{u}_N^h))_{\Gamma_{abs}^{ext}} \\ (\mathbf{w}_N^h, \rho \dot{\mathbf{u}}_N^h) &= (\mathbf{w}_N^h, \rho \mathbf{v}_N^h) \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_N^h, \rho \mathbf{u}_N^h(\cdot, t)|_{t=0}) &= (\mathbf{w}_N^h, \rho \mathbf{u}_0^h) \\ (\mathbf{w}_N^h, \rho \mathbf{v}_N^h(\cdot, t)|_{t=0}) &= (\mathbf{w}_N^h, \rho \mathbf{v}_0^h) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Toutes les intégrations apparaissant dans les formules ci-dessus doivent maintenant être approximées par des intégrations numériques. Grâce à la transformation géométrique  $\mathcal{F}_e$  précédemment définie, nous pouvons transformer chaque intégrale sur un domaine élémentaire dans l'espace physique en une intégrale dans le domaine de référence (soit le carré ou le cube  $\square$  précédemment introduit, suivant que l'on travaille à 2D ou à 3D). Les intégrales peuvent alors être calculées de manière approchée au moyen d'une méthode d'intégration numérique (règle de quadrature) qui peut être définie sur le domaine de référence. La règle de quadrature que nous utilisons est celle de Gauss-Lobatto-Legendre. À 1D, les points d'intégration de Gauss-Lobatto-Legendre  $\xi_j$ ,  $0 \leq j \leq N$ , sont définis comme les zéros du polynôme  $(1 - \xi^2)L_N'$  où  $L_N \in \mathbf{P}_N(\Lambda)$  est le polynôme de Legendre de degré  $N$  défini sur  $\Lambda$ . La règle de quadrature en dimension supérieure (2D ou 3D) est obtenue par simple tensorisation de la règle de quadrature 1D. Nous pouvons détailler cette étape de discrétisation spatiale, par exemple dans le cas 3D. On associe à chaque domaine élémentaire  $\bar{\Omega}_e$  une grille d'intégration  $\Xi_N^e = \{(\xi_i, \eta_j, \gamma_k); 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N, 0 \leq k \leq N\}$  comprenant  $(N + 1)^3$  points qui peuvent être définis dans le domaine de référence  $\square$  (voir figure 3.2), et

$$a_N(\mathbf{w}_N^h, \mathbf{u}_N^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \sigma^h(\xi_i, \eta_j, \gamma_k) : \tilde{\nabla} \mathbf{w}_N^h|_{\Omega_e}(\xi_i, \eta_j, \gamma_k) |J_e(\xi_i, \eta_j, \gamma_k)| \rho_i \rho_j \rho_k \quad (3.11)$$

$$= \sum_{e=1}^{n_{el}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \tilde{\nabla} \mathbf{w}_N^h|_{\Omega_e}(\xi_i, \eta_j, \gamma_k) : \mathbf{c}(\xi_i, \eta_j, \gamma_k) : \tilde{\nabla} \mathbf{u}_N^h|_{\Omega_e}(\xi_i, \eta_j, \gamma_k) |J_e(\xi_i, \eta_j, \gamma_k)| \rho_i \rho_j \rho_k$$

$$(\mathbf{w}_N^h, \mathbf{f})_N = \sum_{e=1}^{n_{el}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \mathbf{w}_N^h|_{\Omega_e}(\xi_i, \eta_j, \gamma_k) \mathbf{f}|_{\Omega_e}(\xi_i, \eta_j, \gamma_k) |J_e(\xi_i, \eta_j, \gamma_k)| \rho_i \rho_j \rho_k \quad (3.12)$$

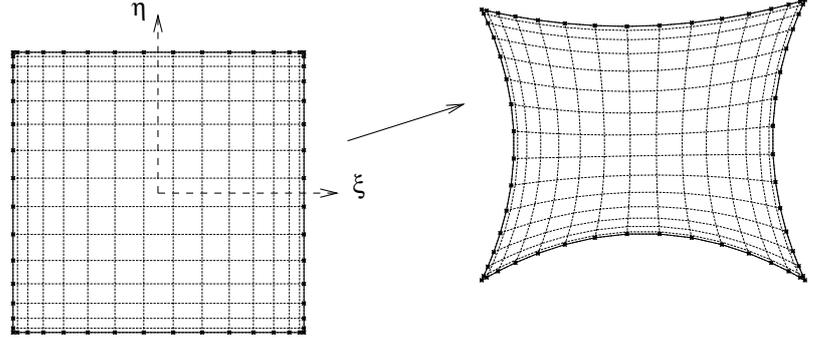
où  $\rho_j > 0$  sont les poids associés à la règle de quadrature et  $\tilde{\nabla}$  l'opérateur gradient dans le domaine de référence  $\square$  :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}_N^h|_{\Omega_e} = \tilde{\nabla} \mathbf{w}_N^h|_{\Omega_e}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{F}_e^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{w}_N^h|_{\Omega_e} \quad (3.13)$$

et où  $\mathbf{F}_e(\boldsymbol{\xi}) = \partial_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{F}_e(\boldsymbol{\xi})$  représente le gradient de la transformation géométrique.

Afin de définir l'approximation polynômiale par morceaux  $\mathbf{w}_N^h$  du champ  $\mathbf{w}$ , nous utilisons la grille d'intégration de Gauss-Lobatto  $\Xi_N^e$ , définie pour chaque domaine élémentaire  $\bar{\Omega}_e$ , ainsi que la transformation géométrique locale  $\mathcal{F}_e$ . Dans le domaine élémentaire  $\bar{\Omega}_e$ , nous introduisons l'opérateur d'interpolation de Lagrange associé à la grille de Gauss-Lobatto définie sur le domaine de référence  $\square$  : pour la restriction  $\mathbf{w}|_{\Omega_e}$ ,  $\mathcal{I}_N(\mathbf{w}|_{\Omega_e}) \circ \mathcal{F}_e$  est l'unique polynôme de  $\mathbf{P}_N(\square)$  qui coïncide avec  $\mathbf{w}|_{\Omega_e}$  aux  $(N + 1)^3$  points de  $\Xi_N^e$ .

FIG. 3.2 – Grille des points de Gauss-Lobatto-Legendre dans le domaine de référence pour le cas 2D, ainsi que dans l'élément courbe correspondant.



Notons  $l_i^N(\xi)$  le polynôme de Lagrange de degré  $N$  associé au point  $i$  de Gauss-Lobatto-Legendre dans la formule de quadrature 1D (voir figure 3.3). Les polynômes de Lagrange  $l_i^N \otimes l_j^N \otimes l_k^N$  définissent une base de  $\mathbf{P}_N(\square)$  et donc :

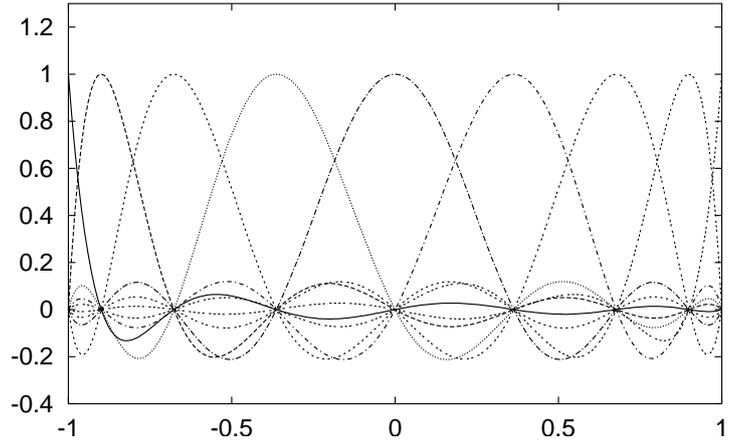
$$\mathbf{u}_N^h|_{\Omega_e}(x, y, z) = \mathcal{I}_N(\mathbf{u}|_{\Omega_e}) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N l_i^N(\xi) l_j^N(\eta) l_k^N(\gamma) u_{ijk}^e \quad (3.14)$$

avec  $\mathbf{x} = \mathcal{F}_e(\boldsymbol{\xi})$  et  $u_{ijk}^e = \mathbf{u}_N^h|_{\Omega_e} \circ \mathcal{F}_e(\xi_i, \eta_j, \gamma_k)$ .

On notera  $\Xi_N$  la grille de collocation globale qui est l'assemblage des grilles de collocation définies sur chaque domaine élémentaire :

$$\Xi_N = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Xi_N^e \quad (3.15)$$

FIG. 3.3 – Polynômes de Lagrange 1D associés aux points de Gauss-Lobatto-Legendre d'ordre  $N = 8$ .



### Forme matricielle du problème aux valeurs initiales semi-discret

La procédure de discrétisation décrite ci-dessus conduit à un système d'équations différentielles linéaires ordinaires couplées écrites sous forme conservative :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(t) &= \mathbf{F}^{ext}(t) - \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}(t)) \\ \dot{\mathbf{d}}(t) &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}(t) \doteq \mathbf{v}(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } t \in \mathbf{I} \quad (3.16)$$

soumis à la condition initiale  $(\mathbf{d}, \mathbf{p})|_{t=0} = (\mathbf{d}_0, \mathbf{p}_0)$ . Si  $n_{node}$  est le nombre total de nœuds de la grille globale de collocation  $\Xi_N$ , notons  $\mathbf{d}$  le vecteur déplacement global ayant  $n_{node}$  degrés de liberté, et  $\mathbf{p}$  le vecteur quantité de mouvement global ayant également  $n_{node}$  degrés de liberté :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}(t) \quad (3.17)$$

En notant  $l^N \otimes l^N \otimes l^N$  la base tensorisée pour le cas 3D, correspondant à la notation usuelle  $l_i^N(\xi) l_j^N(\eta) l_k^N(\gamma)$  dans la grille élémentaire de Gauss-Lobatto-Legendre, l'on peut définir la *matrice de masse*  $\mathbf{M}$  par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e} (l^N \otimes l^N \otimes l^N) \otimes (l^N \otimes l^N \otimes l^N) \rho dV \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} [\cdot]$  est l'opérateur d'assemblage classique (Hughes, 1987), comme dans la méthode des éléments finis par exemple, sur le nombre total d'éléments spectraux  $n_{el}$ . L'utilisation de la règle de quadrature de Gauss-Lobatto, ainsi que la définition même des polynômes de Lagrange, présente l'avantage fondamental de conduire à une matrice de masse qui est *par construction* toujours diagonale (voir annexe 3.A). On a également noté  $\mathbf{F}^{ext}$  le vecteur des forces extérieures (forces nodales imposées) :

$$\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \left[ \int_{\Omega_e} (l^N \otimes l^N \otimes l^N) \mathbf{f} dV + \int_{\Gamma_T} (l^N \otimes l^N \otimes l^N) \tau d\Gamma \right] \quad (3.19)$$

et  $\mathbf{F}^{int}$  le vecteur global des forces intérieures :

$$\mathbf{F}^{int} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \left[ \int_{\Omega_e} \nabla (l^N \otimes l^N \otimes l^N) : \mathbf{c} : \nabla \mathbf{u}_N^h |_{\Omega_e} dV - \int_{\Gamma_{abs}} (l^N \otimes l^N \otimes l^N) \tau(\mathbf{u}_N^h) d\Gamma \right] \quad (3.20)$$

Dans le cas d'une distribution de moments  $m(x, t) = m_0(x) g(t - t_0)$ , nous pouvons écrire :

$$\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \nabla (l^N \otimes l^N \otimes l^N) : m(x, t) dV \quad (3.21)$$

Le cas particulier où  $m = m_0 I$ , avec  $I$  le tenseur identité, correspond à une source explosive classique.

Le calcul détaillé des expressions obtenues pour le cas élastique linéaire isotrope 2D, que ce soit pour la matrice de masse ou pour le calcul des forces extérieures et intérieures, est donné dans l'annexe 3.A.

### 3.3 Algorithmes d'intégration en temps

Nous présentons ici deux schémas que nous avons utilisés pour la discrétisation en temps du problème aux valeurs initiales semi-discret.

#### 3.3.1 La famille classique des schémas de Newmark

L'évolution en temps est définie par l'équation semi-discrete de conservation de la quantité de mouvement devant être vérifiée à l'instant  $t_{n+1}$ , associée aux formules classiques du schéma de Newmark (Hughes, 1987) :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1} &= \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}) \\ \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}_n + \beta \mathbf{a}_{n+1} \right] \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Quelques propriétés intéressantes de cette famille de schémas peuvent être citées (Simo, 1992) :

- Ces schémas sont inconditionnellement stables dans le cas linéaire pour  $\beta \geq \gamma \geq 1/2$ , et conditionnellement stables pour  $\gamma \geq 1/2$  et  $\beta < 1/2$ . Une étude détaillée de la stabilité de tels schémas est disponible dans Hughes (1987).
- Ces schémas sont du second ordre si et seulement si  $\gamma = 1/2$ .
- Le seul membre de cette famille qui assure la conservation du moment angulaire total est la méthode des différences finies centrées explicite ( $\beta = 0$  et  $\gamma = 1/2$ ).
- La règle trapézoïdale associée au schéma de Newmark,  $\gamma = 1/2$  et  $\beta = 1/4$ , ne possède pas cette propriété de conservation du moment angulaire total. Cependant, ce schéma possède de bonnes propriétés assurant la conservation de la quantité de mouvement totale, et définit un algorithme de discrétisation temporelle dépendant de l'accélération. En revanche, le champ d'accélération prédit par cet algorithme est connu pour être bruité.

### 3.3.2 Algorithmes de Newmark en vitesse sous forme conservative

Dans ce cas, l'équation de conservation de la quantité de mouvement totale est écrite sous forme conservative à l'instant  $t_{n+\alpha}$  (Simo, 1992), ce qui donne l'algorithme en vitesse suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) &= \mathbf{F}_{n+\alpha}^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+\alpha}, \mathbf{v}_{n+\alpha}) \\ \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \left[ \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \mathbf{v}_n + \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{v}_{n+1} \right] + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\beta}{\gamma} \right) \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_{n+1} &= \frac{1}{\gamma \Delta t} (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (3.23)$$

où

$$\mathbf{d}_{n+\alpha} \doteq \alpha \mathbf{d}_{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{d}_n \quad (3.24)$$

et

$$\mathbf{F}_{n+\alpha}^{ext} \doteq \alpha \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + (1 - \alpha) \mathbf{F}_n^{ext} \quad (3.25)$$

Nous pouvons mentionner quelques propriétés intéressantes de ce type de schémas (Simo, 1992 ; Simo *et al.*, 1992) :

- La conservation exacte du moment angulaire total est obtenue pour  $\alpha = \beta/\gamma = 1/2$ , ce qui correspond à la règle du point milieu écrite sous forme conservative. Ces valeurs des paramètres définissent un algorithme d'évolution en temps indépendant de l'accélération.
- Une précision du second ordre est obtenue si et seulement si  $\alpha = 1/2$ . Le cas particulier  $\alpha = \beta = 1/2$  et  $\gamma = 1$ , souvent utilisé en pratique, donne la formule *a posteriori*  $\mathbf{a}_{n+1} = (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n)/\Delta t$ .

La stabilité de ces schémas est étudiée dans Hughes (1987) et Simo (1992).

### 3.3.3 Algorithmes de type prédicteur-multicorrecteur

Les deux schémas présentés peuvent être réécrits sous la forme d'un algorithme itératif de type prédicteur-multicorrecteur qui peut permettre d'améliorer leurs propriétés dans certains cas. Une implémentation classique de ce type est donnée ci-dessous pour la famille des schémas de Newmark posés en accélération :

$$i = 0 \quad (\text{indice d'itération})$$

Phase de prédiction

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1}^{(i=0)} &= \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1}^{(i=0)} &= \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} \\ \mathbf{a}_{n+1}^{(i=0)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Phase de résolution

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}_{n+1}^{(i)} &= \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{v}_{n+1}^{(i)}) - \mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} \\ \mathbf{M} \Delta \mathbf{a} &= \Delta \mathbf{F}_{n+1}^{(i)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Phase de correction

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} &= \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} + \Delta a \\ \mathbf{v}_{n+1}^{(i+1)} &= \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \Delta t \gamma \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} \\ \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} &= \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} + \Delta t^2 \beta \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

où les prédicteurs sont définis par :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{d}}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}_n \\ \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \Delta t (1 - \gamma) \mathbf{a}_n\end{aligned}\quad (3.29)$$

Pour un schéma posé en vitesse sous forme conservative, nous pouvons écrire :

$$i = 0 \quad (\text{indice d'itération})$$

Phase de prédiction

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{n+1}^{(i=0)} &= \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1}^{(i=0)} &= 0 \\ \mathbf{a}_{n+1}^{(i=0)} &= \tilde{\mathbf{a}}_{n+1}\end{aligned}\quad (3.30)$$

Phase de résolution

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \Delta \mathbf{v}^{(i)} = \Delta \mathbf{F}_{n+\alpha}^{ext} - \mathbf{F}^{int} \left( \mathbf{d}_{n+\alpha}^{(i)} \right) - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \left( \mathbf{v}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{v}_n \right)$$

Phase de correction

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{n+1}^{(i+1)} &= \mathbf{v}_{n+1}^{(i)} + \Delta v^{(i)} \\ \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} &= \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} + \Delta t \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{v}_{n+1}^{(i+1)} \\ \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} &= \tilde{\mathbf{a}}_{n+1} + \frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{v}_{n+1}^{(i+1)}\end{aligned}\quad (3.31)$$

où les prédicteurs sont définis par :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{d}}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \left( 1 - \frac{\beta}{\gamma} \right) \mathbf{v}_n + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\beta}{\gamma} \right) \mathbf{a}_n \\ \tilde{\mathbf{a}}_{n+1} &= -\frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{v}_n + \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \mathbf{a}_n\end{aligned}\quad (3.32)$$

avec par définition

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{n+\alpha}^{(i)} &= (1 - \alpha) \mathbf{d}_n + \alpha \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} \\ \mathbf{v}_{n+\alpha}^{(i)} &= (1 - \alpha) \mathbf{v}_n \\ \mathbf{F}_{n+\alpha}^{ext} &= (1 - \alpha) \mathbf{F}_n^{ext} + \alpha \mathbf{F}_{n+1}^{ext}\end{aligned}$$

### 3.4 Implémentation et parallélisation naturelle de l'algorithme

Après discrétisation spatiale et temporelle, nous venons de voir que nous sommes conduits à résoudre à chaque pas de temps un système du type (3.16). Notons immédiatement que les expressions 2D et 3D diffèrent certes par leur nombre de termes, mais pas par leur structure en raison de l'utilisation d'une base tensorisée au niveau élémentaire, de ce fait le raisonnement que nous allons tenir ici est valable dans les deux cas. D'un point de vue algorithmique, nous pouvons décrire les phases essentielles du calcul (dans l'ordre dans lequel il est nécessaire d'effectuer ces opérations à chaque pas de temps) :

1. Calcul des forces intérieures au niveau de chaque élément.

2. Assemblage des contributions des forces intérieures au niveau des frontières des éléments voisins.
3. Calcul des forces extérieures au niveau global.
4. Inversion du système linéaire (3.16) pour obtenir au niveau global le champ de vitesse ou d'accélération à partir de la somme des forces calculée, et de la matrice de masse.
5. Mise à jour des champs de vitesse et de déplacement grâce au champ d'accélération calculé, en utilisant les relations (3.22) par exemple.

Comme nous le montrons dans l'annexe 3.A, pour le cas 2D, le calcul des forces intérieures au niveau local peut se faire par multiplication du champ de déplacement par des matrices de dérivation locales (calcul du gradient), puis intégration numérique des quantités mises en jeu, à nouveau par un simple produit de matrice au niveau local. Nous montrons également que le calcul des forces extérieures est trivial, et que la matrice de masse est rigoureusement diagonale en raison du choix de la base. De ces propriétés très importantes de la formulation proposée, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- Le calcul des forces intérieures au niveau local, correspondant à une suite de produits par des matrices de coefficients calculés une fois pour toutes, a un coût en  $O(N^3)$  dans le cas 2D, et en  $O(N^4)$  dans le cas 3D,  $N$  étant le nombre de points de Gauss-Lobatto utilisés dans chaque direction au sein de l'élément de référence, ce qui correspond à un degré polynômial de  $N - 1$ . Ce coût est donc modéré, notamment à 3D, l'ordre de grandeur du nombre de points  $N$  étant de 10.
- La sommation des contributions entre éléments voisins, pour le calcul global des forces intérieures, fait intervenir les sommets, arêtes et faces communs à plusieurs éléments, mais pas les points intérieurs à chaque élément. De ce fait, la quantité d'informations à échanger reste limitée aux seules frontières des éléments voisins, et demeure donc faible dans le cadre de la décomposition de domaine.
- Le calcul des forces extérieures est d'un coût négligeable.
- Enfin, la matrice de masse étant exactement diagonale, nous avons une méthode réellement explicite car l'inversion de cette matrice est immédiate, ce qui est une propriété très forte par rapport à une méthode classique d'éléments finis par exemple.

De ces différentes conclusions, qui avaient déjà été établies dans le domaine de la mécanique des fluides il y a quelques années (Fisher, 1990 ; Fisher *et al.*, 1988), on peut établir que dans le cas des équations de l'élastodynamique linéaire, le coût de calcul total de la méthode sera essentiellement gouverné par le coût de calcul des forces intérieures. Ce coût est faible au niveau local, pour passer au niveau global il faut sommer les contributions entre bords des éléments voisins (phase « d'assemblage » dans le langage des éléments finis, ou phase de « send-get » ou encore de « gather-scatter » dans le langage du calcul parallèle). Le coût de cette opération d'assemblage est difficilement chiffrable, car il dépend fortement de la structure du calculateur utilisé. Cependant, sur un calculateur parallèle et dans le cadre de l'utilisation d'un algorithme de décomposition de domaine (Farhat, 1987), permettant de répartir les données sur les différents processeurs en assurant un équilibre de leur charge, et permettant de minimiser les temps de communication en favorisant la localité des données, cette opération est naturelle pour un maillage composé d'hexaèdres. Elle nécessite quatre communications à 2D et six communications à 3D, comme cela est expliqué sur la figure 3.4. Le nombre d'informations à sommer restant limité aux frontières des éléments voisins, typiquement, sur un calculateur parallèle, cette phase comprendra principalement des communications de données, mais nécessitera très peu de temps CPU. Sur la Connection Machine, en utilisant le modèle de programmation *Data Parallel*, il n'est pas nécessaire de faire appel explicitement à une phase de décomposition de domaine pour répartir les données sur les différents processeurs, en effet cette organisation est prise en charge par le compilateur et des routines de « send-get » optimisées sont fournies par le constructeur (bibliothèque CMSSL).

À l'inverse, un tel algorithme se prêtera relativement mal à une implémentation sur un supercalculateur de type vectoriel, en effet, l'ordre polynômial restant toujours peu élevé au sein d'un élément (typiquement 10), toutes les opérations vectorielles au niveau local s'appliqueront à des vecteurs de très faible longueur, ce qui est toujours pénalisant pour ce type d'architectures. De ce fait, l'algorithme fonctionnera mais son efficacité sur ce genre d'architecture sera assez moyenne.

L'algorithme a été implémenté dans le cas élastique linéaire isotrope sur le supercalculateur massivement parallèle à mémoire distribuée CM-5 128 nœuds du Centre National de Calcul Parallèle en Sciences de la Terre (CNCPT), tant dans le cas 2D que dans le cas 3D. L'approche de programmation utilisée est de type *Data Parallel*. Nous pouvons donner ici à titre indicatif un ordre d'idée des performances obtenues :

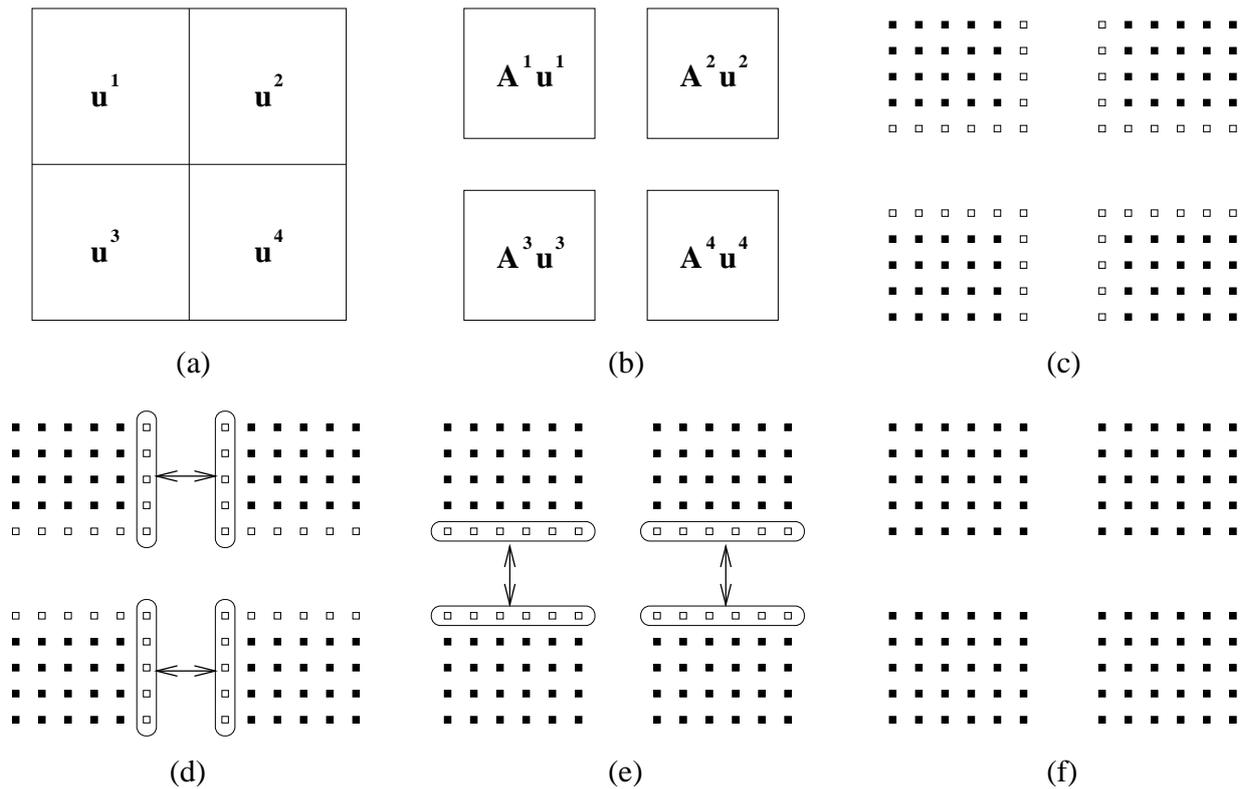


FIG. 3.4 – Sur un ordinateur parallèle, dans le cadre de l'utilisation d'un algorithme de décomposition de domaine, l'assemblage des contributions calculées indépendamment sur chaque élément est naturelle. En (a), nous représentons un bloc de quatre éléments. En (b), le calcul des forces intérieures est effectué en parallèle sur tous les éléments. En (c), les contributions à sommer entre voisins sont notées par des petits carrés blancs. En (d), les contributions des arêtes sont sommées en parallèle dans la direction horizontale. En (e), la sommation se poursuit dans la direction verticale. En (f), enfin, toutes les contributions ont été assemblées. D'après Fisher (1990).

1. Le temps CPU typique pour une simulation 2D de taille moyenne, dans le cas d'un maillage comportant 100 000 points, et pour une simulation nécessitant 2000 pas de temps, est de l'ordre de 5 minutes sur 64 nœuds de la CM5.
2. Pour une simulation 3D hétérogène de taille importante, dans le cas d'un maillage curviligne comportant 5 millions de points, et en propageant pendant 2000 pas de temps, le temps CPU total est de l'ordre de 2 heures sur les 128 nœuds de la CM5. La simulation utilise environ 3 Gigaoctets de mémoire.
3. Pour une simulation 3D de taille très importante, en se restreignant au cas d'un maillage cartésien pour un milieu homogène dans le but d'économiser de la mémoire, le maillage comportant 9 millions de points, et en propageant pendant 2000 pas de temps, le temps CPU total est de l'ordre de 3 heures sur les 128 nœuds de la CM5. La simulation utilise environ 3.5 Gigaoctets de mémoire (ce qui correspond au maximum de mémoire disponible sur la CM5 sur laquelle nous avons travaillé).

Dans les trois cas, un schéma de type Newmark explicite a été utilisé. Le degré polynômial choisi pour chaque élément était de 8. Typiquement, pour ces simulations, 50 % du temps de calcul total a été utilisé par les différentes phases de calcul parallèle, et 50 % dans la phase d'assemblage pour le calcul des forces intérieures globales (phase de « send-get »). Même si les temps de calcul donnés ici ne sont qu'indicatifs, ils permettent de voir que nous avons pu obtenir un bon degré de parallélisation de notre code, et que les temps de calcul totaux restent très raisonnables, y compris dans le cas 3D.

### 3.5 Validation pour le problème de Lamb 2D

Le problème de Lamb (Lamb, 1904) est un test classique qui est souvent utilisé pour mesurer la précision d'une méthode de modélisation de la propagation des ondes élastiques. On considère un demi-espace homogène élastique, avec une force

source placée dans le milieu, ou à la surface de celui-ci. Il existe une solution analytique à ce problème (Lamb, 1904 ; Pilant, 1979). Le problème de Lamb permet donc de valider l'algorithme pour une source de type force extérieure colloquée en un point de la grille. Si la source est placée dans le volume, une onde P directe et une onde S directe vont se propager, et des réflexions et des conversions de mode vont se produire à la surface libre. Si la source est placée juste sous la surface, ou bien exactement à la surface, l'événement principal sera une forte onde de Rayleigh (Rayleigh, 1887) qui se propagera le long de la surface. Dans ce cas, l'onde de Rayleigh est non dispersive, car le milieu est homogène et sa surface est plane. Ainsi, le problème de Lamb constitue un excellent test de la précision d'une technique de modélisation numérique, puisque les trois types d'ondes élastiques principaux (onde P, onde S et onde de Rayleigh) doivent être correctement modélisés. Une analyse numérique détaillée de ce problème est disponible dans Khun (1985). Afin de tester la validité de notre méthode dans le cas d'une géométrie non rectangulaire, nous simulons la propagation des ondes dans un modèle ayant une surface libre inclinée. Dans ce cas, comme le maillage n'est pas rectangulaire, les termes non diagonaux du jacobien de transformation sont non nuls. La direction de la force source est tournée du même angle que la pente de la surface libre, ainsi la force est perpendiculaire à la surface du modèle, et la solution analytique du problème reste valable. Dans les solutions analytiques qui serviront de référence ci-après, les fonctions de Green sont calculées en utilisant la méthode de Cagniard-de Hoop (de Hoop, 1960) avec un code qui nous a été fourni par P. Berg et F. If. Les fonctions de Green sont ensuite convoluées numériquement avec la fonction temporelle de la source.

### 3.5.1 Source à l'intérieur du modèle

Dans ce premier exemple, la source est placée à l'intérieur du modèle, la pente de la surface libre est de  $10^\circ$ , le milieu a une vitesse P de  $3200 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1847.5 \text{ m.s}^{-1}$  et une densité de  $2200 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le modèle physique étudié a une largeur de 4000 m et une hauteur de 2000 m dans sa partie gauche. Des conditions absorbantes sont utilisées sur les bords gauche et droit du modèle ainsi que sur sa frontière inférieure afin de simuler un milieu semi-infini. Le maillage est composé de  $50 \times 30$  éléments, et l'on utilise un degré polynômial de 8 dans chaque direction d'un élément. Cette valeur de 8 a été choisie car elle est proche de l'optimum pour une méthode de type éléments spectraux (Seriani et Priolo, 1994). En effet, si l'on utilise un ordre polynômial plus élevé, en raison de la densification des points de Gauss-Lobatto sur les bords de l'élément, l'on ne gagne pas beaucoup en précision alors que le coût de calcul croît significativement au niveau élémentaire. Si l'on prend en revanche un ordre polynômial plus faible, l'on tend vers une méthode d'éléments finis classique, et la précision du schéma se dégrade rapidement.

Le maillage que nous utilisons est donc composé de 96 641 points. Afin de disposer de résultats très précis dans cette expérience numérique dont le but est de comparer les résultats calculés à la solution exacte du problème, un pas de temps délibérément petit de  $\Delta t = 0.25 \text{ ms}$  est utilisé. Si nous définissons le nombre de Courant par

$$n_0 = \left( \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right)_{max} \quad (3.33)$$

un tel pas de temps correspond pour la plus petite maille de la grille à un nombre de Courant de 0.25, soit environ 40 % de la limite de stabilité qui correspond à un nombre de Courant de 0.60 environ (cette valeur étant déterminée empiriquement). Notons ici que cette valeur de 0.60 sera utilisée dans la suite de cette thèse comme une valeur limite de référence pour la stabilité numérique dans les différents tests qui seront présentés.

Le schéma en temps est l'algorithme prédicteur-correcteur de type Newmark exposé précédemment, que nous choisissons purement explicite ( $\beta = 0$  et  $\gamma = 1/2$ ), schéma qui sera utilisé, sauf indication contraire, dans tous les tests numériques présentés dans la suite. Le nombre total de pas de temps est de 6000. La position de la source est  $(x, z) = (2000, 1400) \text{ m}$  et la ligne de récepteurs va de  $(600, 1700)$  à  $(3400, 2200) \text{ m}$ . La source est une force colloquée, sa dépendance temporelle étant un Ricker (dérivée seconde de gaussienne) ayant une fréquence centrale de 14.5 Hz. Une telle fréquence correspond, pour le maillage utilisé, à un échantillonnage d'environ 5 points par plus petite longueur d'onde S dans le modèle, en moyenne sur un élément spectral.

Rappelons ici que, pour un Ricker de fréquence centrale  $f_0$ , si nous définissons la fréquence « maximale »  $f_{max}$  de ce Ricker comme la fréquence pour laquelle l'amplitude du spectre vaut 5 % de sa valeur maximale, alors nous avons

$$f_{max} \simeq 2.5 f_0 \quad (3.34)$$

La plus petite longueur d'onde S dans le modèle hétérogène est alors

$$\lambda_{smin} = \left( \frac{c_s}{f_{max}} \right)_{min} \quad (3.35)$$

et l'on se placera toujours, dans la suite de cette thèse, et sauf indication contraire, dans une situation telle que cette plus petite longueur d'onde soit échantillonnée par environ 5 points au sein d'un élément spectral, ce qui, après essai, semble être la limite d'échantillonnage en deçà de laquelle des problèmes numériques peuvent apparaître avec la méthode proposée, comme nous l'illustrerons plus loin (voir section 3.5.4).

Les instantanés de propagation correspondant au problème de Lamb sont présentés sur la figure 3.5. Comme dans toute la suite de cette thèse, sur les instantanés la source est représentée par une petite croix, et la ligne de récepteurs par deux losanges reliés par une ligne pointillée. On peut observer les ondes P et S directes, ainsi que les ondes converties et réfléchies à la surface libre. Les sismogrammes enregistrés par la ligne de récepteurs placée dans le modèle sont montrés sur la figure 3.6, et la comparaison avec la solution analytique pour les récepteurs 75 et 100 est montrée sur la figure 3.7. Comme dans toute la suite de cette thèse, les sismogrammes sont enregistrés par des récepteurs situés exactement en des points de la grille. Ces points (points de Gauss-Lobatto) n'étant pas équidistants, les sismogrammes auront souvent un aspect « irrégulier » du à cet écartement non constant des différents récepteurs. Sur la figure montrant la comparaison avec la solution analytique, la solution numérique a été dessinée ainsi que les résidus par rapport à la solution analytique, représentés à la même échelle après multiplication par un facteur 10. Les amplitudes réelles ont été comparées (sans normalisation). Nous obtenons un très bon accord, l'erreur relative maximum étant de moins de 1 %. Cette valeur est proche de la limite de résolution du code analytique, en effet la solution analytique est obtenue après convolution numérique avec la fonction temporelle de la source, ce qui introduit de fait une légère erreur numérique dans la solution de référence (il serait donc préférable de parler de solution *semi*-analytique). Il est intéressant de noter que, comme ce sera souvent le cas dans les tests numériques que nous présenterons dans la suite, la principale source d'erreur numérique provient des réflexions parasites sur les bords absorbants, en raison du fait que pour simuler ces frontières absorbantes, une approximation paraxiale a été utilisée, cette approximation étant exacte pour une onde incidente suivant la normale à la frontière, et son efficacité se dégradant au fur et à mesure que l'angle d'incidence de l'onde s'écarte de la normale.

### 3.5.2 Source en surface

Dans ce deuxième exemple, le modèle et la source sont les mêmes que précédemment, mais la source est maintenant placée exactement sur la surface libre, en  $x_s = 1720$  m, ainsi que la ligne de récepteurs. De ce fait, ceux-ci vont enregistrer principalement une forte onde de Rayleigh non dispersive. Une telle simulation constitue un excellent test de la précision de la condition de surface libre numérique. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 3.8, où la forte onde de Rayleigh peut être clairement observée, avec sa polarisation elliptique caractéristique. L'onde réfractée à la surface (« head wave ») apparaît également clairement. Un schéma des différents fronts d'onde apparaissant dans un tel cas est présenté sur la figure 3.10. Les sismogrammes enregistrés par les récepteurs sont montrés sur la figure 3.9 et la comparaison avec la solution analytique pour les récepteurs 75 et 100 est représentée sur la figure 3.11. Les amplitudes réelles ont été comparées (sans normalisation). De nouveau, nous trouvons un très bon accord avec la solution de référence, l'erreur relative maximum étant de l'ordre de 1 %. Notons que pour cette simulation, la distance de la source au récepteur 100 correspond à environ 20 longueurs d'onde de Rayleigh fondamentales, et 50 longueurs d'onde de Rayleigh minimales. On observe peu d'artefacts numériques, ce qui constitue un avantage important lié à l'emploi d'une formulation variationnelle, dans laquelle la condition de surface libre est introduite de façon naturelle, pour résoudre le problème - l'introduction de la condition de surface libre numérique étant un point difficile dans certaines méthodes de résolution numérique classiques, par exemple si des différences finies d'ordre élevé ou des méthodes pseudo-spectrales différentielles sont utilisées (Kosloff *et al.*, 1984 ; Carcione, 1994 ; Rodrigues, 1993) - . Sur les traces présentées sur la figure 3.11, nous pouvons observer que l'amplitude de l'onde de Rayleigh reste constante au fur et à mesure de sa propagation le long de la surface, comme le prévoient les calculs théoriques dans le cas d'une simulation en déformations planes (correspondant à une ligne source infinie dans la troisième direction, voir par exemple Garvin, 1956).

### 3.5.3 Comportement sur un maillage aléatoire

Dans cet exemple, nous montrons que la méthode numérique proposée reste très précise même dans le cas où le maillage employé est très perturbé. Le modèle physique que nous considérons est le même que dans le cas précédent lorsque la source était placée dans le volume, mais à présent nous employons un maillage aléatoire pour résoudre le problème. La perturbation de la position des points de grille par rapport à leur position d'origine (voir figure 3.5), dans laquelle la taille des mailles était de l'ordre de 80 m, est tirée aléatoirement entre 0 et  $\pm 22$  m le long de l'axe  $x$ , et entre 0 et  $\pm 20$  m le long de l'axe  $y$ , ce qui représente des perturbations maximales importantes par rapport à la taille d'origine des mailles. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 3.12, et la comparaison avec la solution analytique pour les récepteurs 75 et 100 sur la figure 3.13. De nouveau, nous obtenons un très bon accord avec la solution analytique, ce

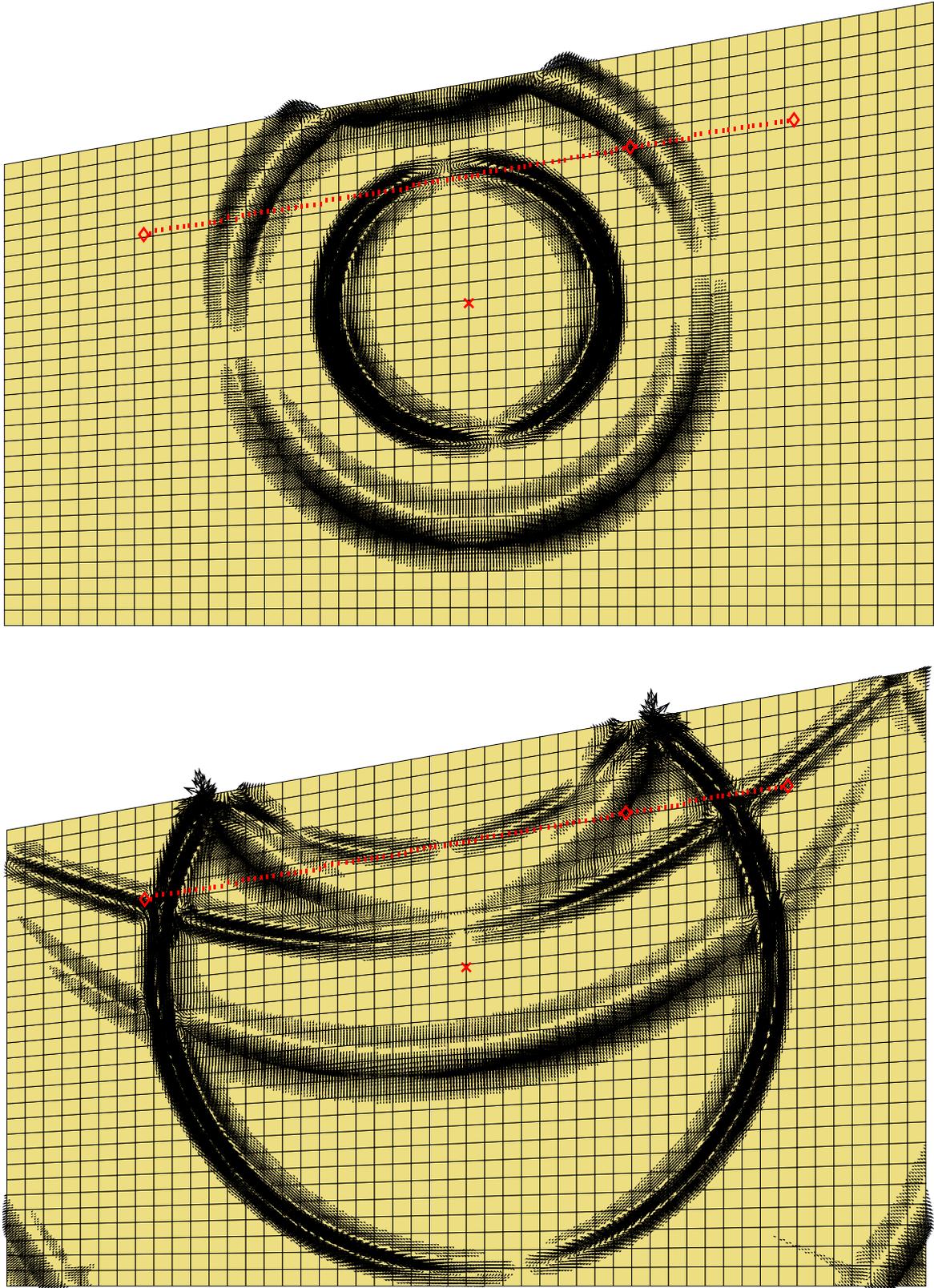


FIG. 3.5 – Instantanés obtenus pour le problème de Lamb incliné avec une force source placée à l'intérieur du modèle. On peut observer les ondes P et S directes, ainsi que les réflexions et les conversions de mode qui se produisent à la surface libre. La croix indique la position de la source. Une faible réflexion parasite provenant du bord absorbant est également visible sur le bord inférieur du modèle.

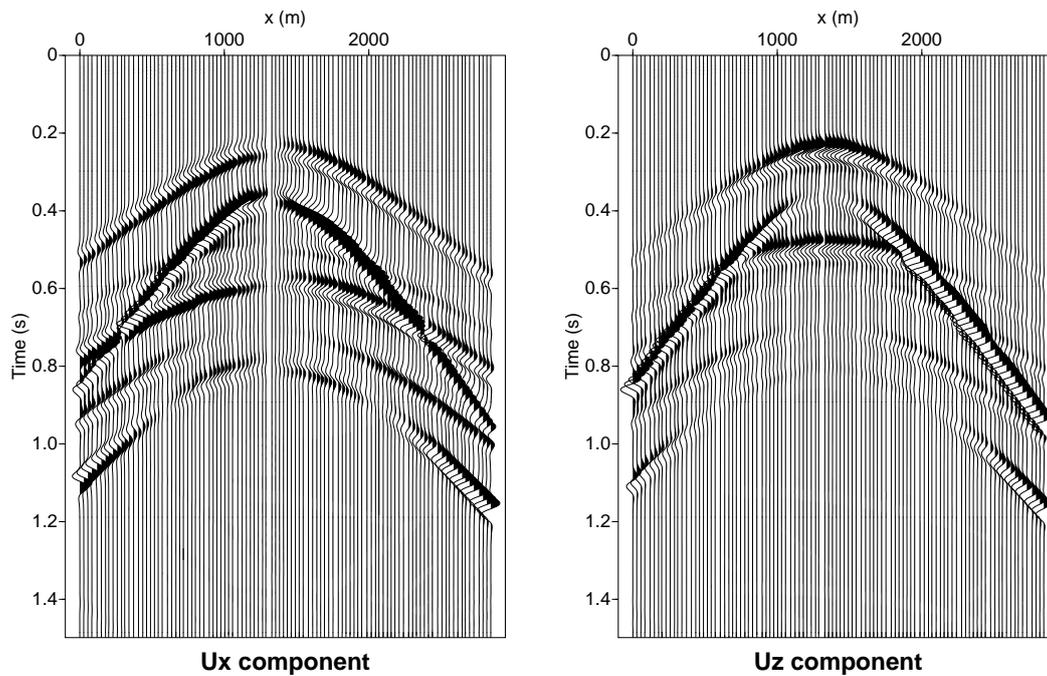


FIG. 3.6 – Sismogrammes obtenus pour le problème de Lamb incliné avec une force source placée dans le modèle. L'onde P directe, l'onde S directe, ainsi que les ondes réfléchies et converties à la surface libre peuvent être observées.

qui prouve que la méthode de calcul reste très précise même lorsqu'un maillage très perturbé est utilisé. L'erreur relative maximum est de nouveau de l'ordre de 1 %.

### 3.5.4 Effet d'un sous-échantillonnage spatial

Il est intéressant de vérifier le comportement numérique lorsqu'un nombre insuffisant de points de grille par longueur d'onde du signal propagé est utilisé. Ce sous-échantillonnage spatial se traduira par une représentation incorrecte des plus petites longueurs d'onde des signaux se propageant dans le modèle. Ainsi, les ondes de Rayleigh seront particulièrement affectées par ce sous-échantillonnage spatial, puisqu'elles ont des longueurs d'onde plus courtes que les ondes P et que les ondes S, leur vitesse de propagation étant de l'ordre de  $c_r = 0.92 c_s$ , où  $c_s$  est la vitesse de l'onde S, dans la plupart des milieux élastiques (voir paragraphe 1.4.2). Ce phénomène apparaît clairement sur la figure 3.14, où le même modèle que celui étudié précédemment, avec cette fois-ci une surface plane, a été volontairement discrétisé avec une grille trop grossière par rapport aux fréquences caractéristiques de la source. Contrairement à l'ensemble des simulations présentées dans cette thèse, pour lesquelles nous nous plaçons toujours dans des conditions telles que la plus petite longueur d'onde S dans le modèle soit échantillonnée en moyenne par un minimum de 5 points, nous avons ici échantillonné la plus petite longueur d'onde S par seulement 3.5 points, donc la plus petite longueur d'onde de Rayleigh, dont la vitesse, dans un milieu élastique de coefficient de Poisson égal à 0.25, est d'environ 0.92 fois la vitesse S, par seulement 3.2 points. Le pas de temps utilisé correspond pour la plus petite maille de la grille à un nombre de Courant de 0.30, soit la moitié de la limite de stabilité empirique. Les traces correspondantes enregistrées par les récepteurs 50 et 75 sont présentées sur la figure 3.15. Elles montrent clairement de fortes oscillations numériques qui suivent l'onde de Rayleigh, qui dans le cas présent est le signal qui présente la plus forte amplitude, la source étant placée à proximité de la surface libre.

## 3.6 Stabilité et dispersion du schéma numérique

### 3.6.1 Vérification numérique de la stabilité des schémas

Il est fondamental maintenant de se faire une idée des propriétés de stabilité et de dispersion de l'algorithme proposé. Notons tout de suite qu'une telle étude, dans le cas général d'un milieu élastique maillé par une grille non régulière, est extrêmement difficile à mener (les techniques classiques d'analyse de stabilité par exemple, supposant un maillage

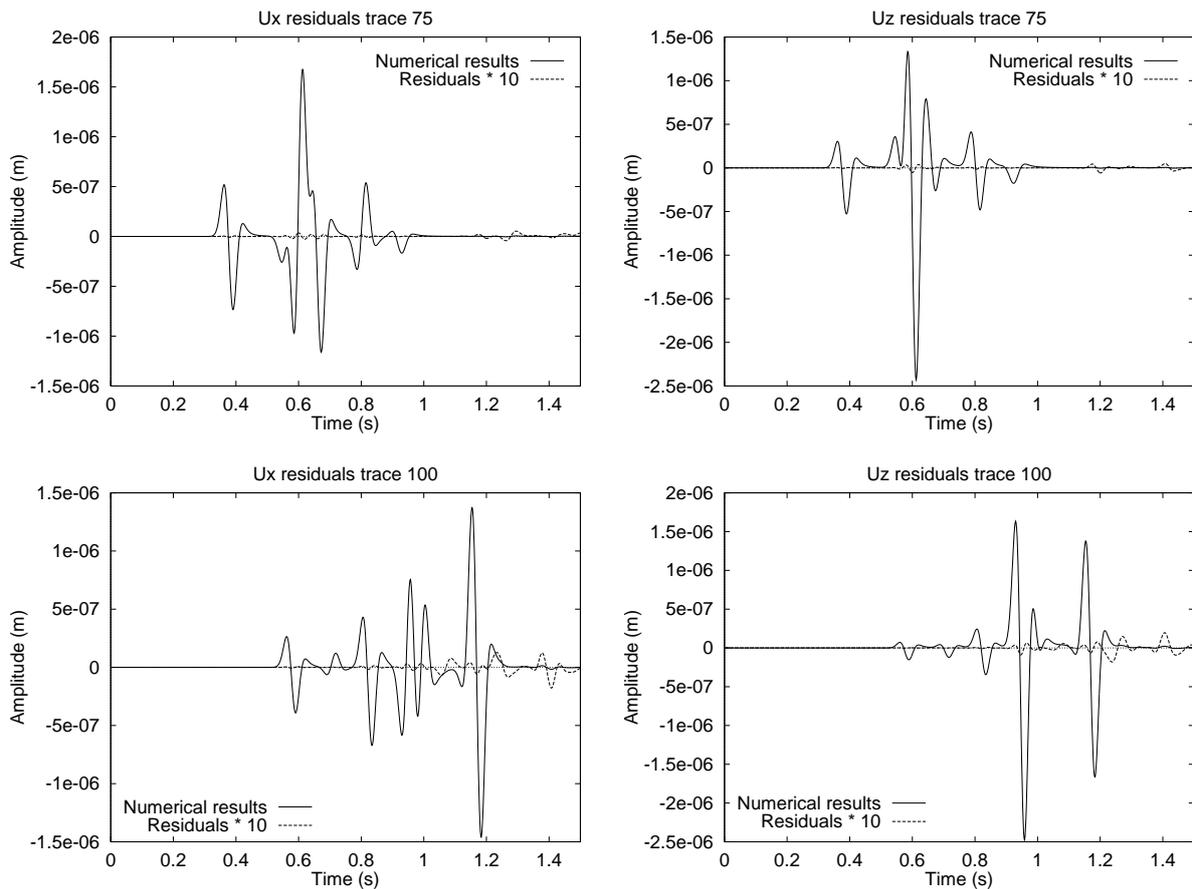


FIG. 3.7 – Traces enregistrées par les récepteurs 75 et 100 pour le problème de Lamb incliné avec une force source placée à l’intérieur du modèle. Les résidus par rapport à la solution analytique, dessinés à la même échelle après multiplication par un facteur 10, sont également représentés. Un très bon accord est obtenu, l’erreur relative maximale étant de moins de 1 %. Les petits artefacts à droite sont des réflexions parasites provenant des frontières absorbantes.

cartésien régulier). Ainsi, nous avons été contraints de nous limiter à étudier la stabilité du schéma à l’aide d’une série d’expériences numériques.

La première expérience a été menée pour le problème de Lamb exposé précédemment, en utilisant un schéma de Newmark explicite en temps ( $\beta = 0$  et  $\gamma = 1/2$ ). Tous les autres paramètres sont identiques aux cas utilisés ci-dessus lors des comparaisons à la solution analytique du problème. Cependant, afin de conserver exactement d’un point de vue physique l’énergie totale contenue dans le système dynamique considéré, nous utilisons des bords libres sur les quatre côtes de la grille de calcul utilisée, et non des bords absorbants. Nous testons numériquement la stabilité du schéma en calculant l’énergie cinétique totale à chaque pas de temps, l’énergie potentielle totale (voir section 1.3.8), et leur somme, qui est l’énergie totale présente dans le milieu. Si le schéma numérique est stable, l’énergie totale doit rester constante au cours de la simulation. Le schéma de Newmark explicite étant conditionnellement stable (Hughes, 1987), nous effectuons la même simulation pour plusieurs valeurs du pas de temps ( $\Delta t = 0.50$  ms,  $\Delta t = 0.75$  ms,  $\Delta t = 0.80$  ms et  $\Delta t = 0.81$  ms). La valeur  $\Delta t = 0.50$  ms correspond, pour la plus petite maille, à un nombre de Courant maximal d’environ 0.38, et la valeur  $\Delta t = 0.81$  ms à un nombre de Courant maximal légèrement supérieur à 0.60. Les résultats obtenus (voir figure 3.16) sont identiques pour les trois premières valeurs du pas de temps, et l’énergie totale reste constante au cours des 3000 pas de temps de la simulation, ce qui signifie que le schéma est stable. La valeur  $\Delta t = 0.81$  ms est très légèrement au-delà de la limite de stabilité, car nous constatons numériquement qu’après un certain nombre de pas de temps, le schéma devient instable, il « explose ». Le nombre de Courant maximal correspondant à la limite de stabilité est donc d’environ 0.60 dans ce cas.

La deuxième expérience numérique a été menée pour le même modèle que précédemment (seule la position de la source étant légèrement différente), mais maintenant en utilisant successivement les trois schémas numériques de discrétisation temporelle que nous avons à notre disposition, à savoir :

1. Schéma de Newmark explicite en temps ( $\beta = 0$  et  $\gamma = 1/2$ ). Ce schéma, équivalent à un schéma de différences finies centré d’ordre deux, est conditionnellement stable (Hughes, 1987).

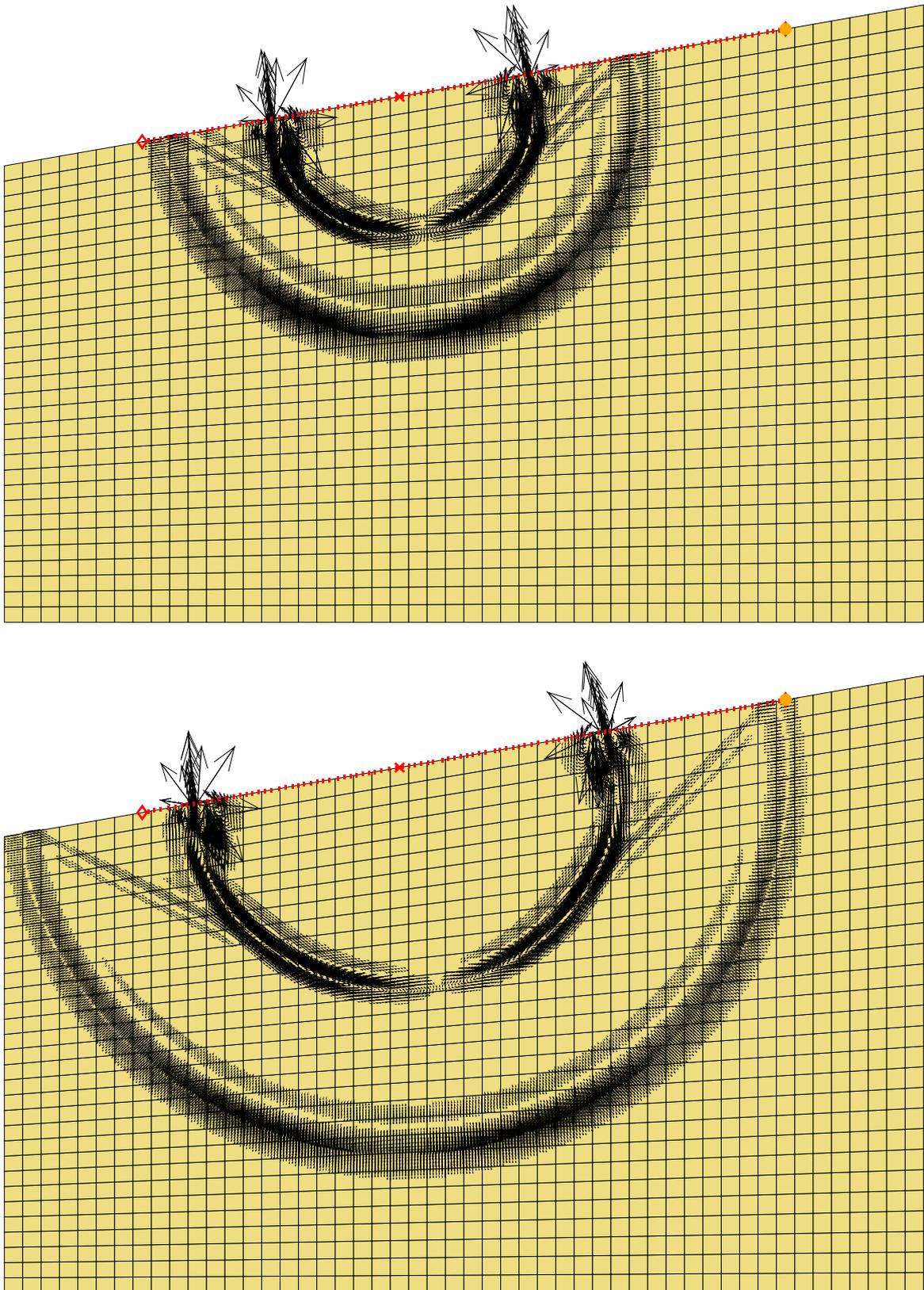


FIG. 3.8 – Instantanés obtenus pour le problème de Lamb incliné avec une force source placée exactement à la surface libre. La phase principale est une forte onde de Rayleigh non dispersive qui se propage le long de la pente, avec une polarisation elliptique caractéristique. La « head wave » est également clairement reconnaissable, comme expliqué sur le schéma de la figure 3.10.

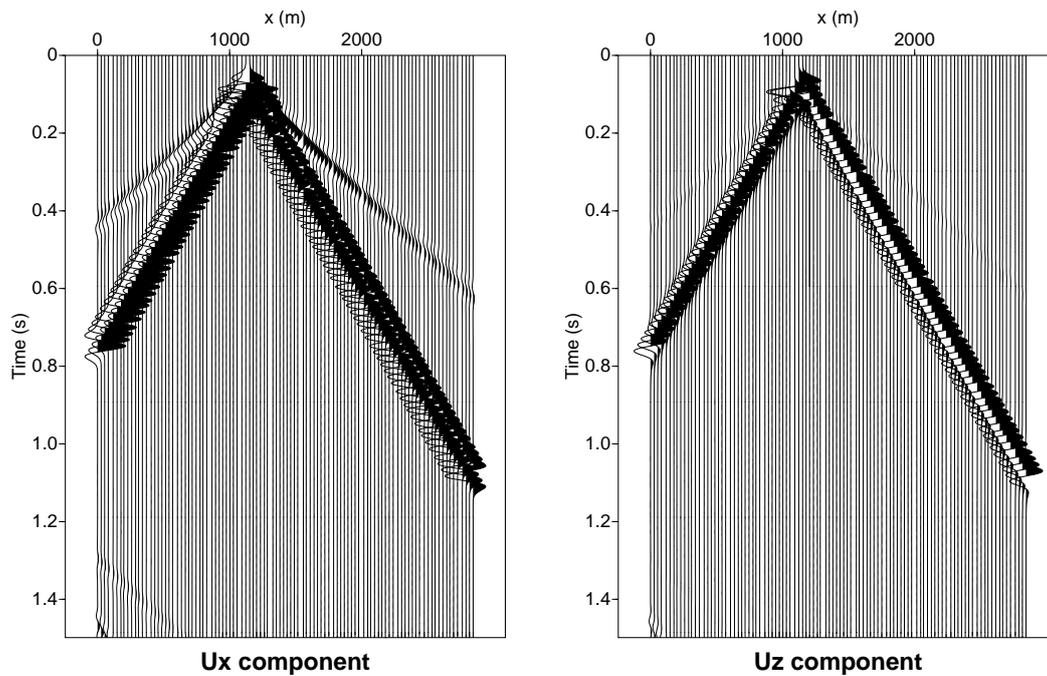
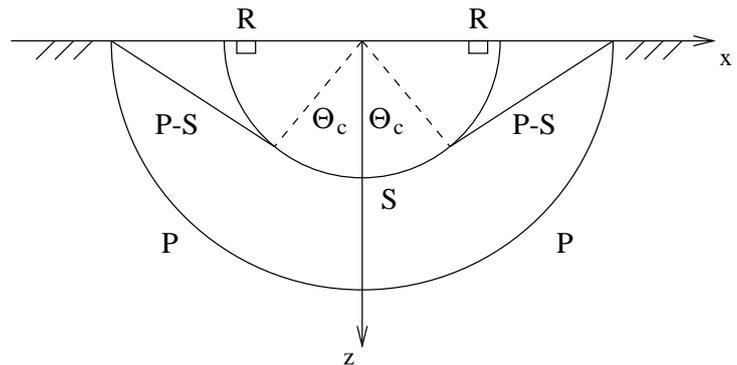


FIG. 3.9 – Sismogrammes enregistrés pour le problème de Lamb incliné avec une force source placée exactement à la surface libre. La phase principale est une forte onde de Rayleigh non dispersive qui se propage le long de la surface.

FIG. 3.10 – Schéma montrant les différentes ondes apparaissant dans le problème de Lamb lorsque la source est placée exactement sur la surface libre. On peut distinguer l'onde P directe, l'onde S directe, l'onde de Rayleigh (R) et la « head wave » (P-S).  $\Theta_c$  est l'angle critique. D'après Pilant (1979).



2. Schéma de Newmark implicite-explicite ( $\beta = 1/4$  et  $\gamma = 1/2$  dans les équations 3.22), écrit sous forme predictor/multicorrector (voir équations 3.29). Ce schéma itératif est également conditionnellement stable (Hughes, 1987).
3. Algorithme écrit en vitesse sous forme conservative ( $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 1/2$  et  $\gamma = 1$  dans les équations 3.23), avec un schéma de type predictor/multicorrector. Ce schéma est conditionnellement stable (Simo, 1992).

Le même calcul effectué avec ces trois méthodes, en propageant durant 3000 pas de temps, et pour un pas de temps de  $\Delta t = 0.5$  ms (correspondant à un nombre de Courant maximal d'environ 0.38), est présenté sur la figure 3.17. Nous constatons que les trois schémas sont stables pour cette valeur du pas de temps, l'énergie totale restant constante au cours de la simulation, et que les résultats donnés par les trois algorithmes sont virtuellement identiques dans le cas que nous avons considéré (milieu élastique linéaire homogène isotrope). L'intérêt des schémas sophistiqués (algorithme conservatif en vitesse par exemple) par rapport à un schéma plus élémentaire (différences finies centrées) apparaîtrait probablement si l'on considérait un cas plus difficile, par exemple un modèle très hétérogène, ou encore un matériau ayant un comportement non linéaire. Cependant, dans le cas que nous avons considéré, de telles différences de comportement numérique des différents schémas ne sont pas perceptibles.

Afin de vérifier maintenant la stabilité à très long terme du schéma numérique, nous avons également effectué une simulation avec l'algorithme de Newmark explicite en propageant pendant un très grand nombre de pas de temps. En effet, comme nous l'avons vu sur la figure 3.16, si l'on se trouve très près de la limite de stabilité, il est possible d'avoir pendant un certain nombre de pas de temps l'illusion que le système est stable, avant que celui-ci n'explose. Ainsi, pour vérifier si l'algorithme est réellement stable à long terme, nous propageons maintenant le signal durant 100 000 pas de temps avec

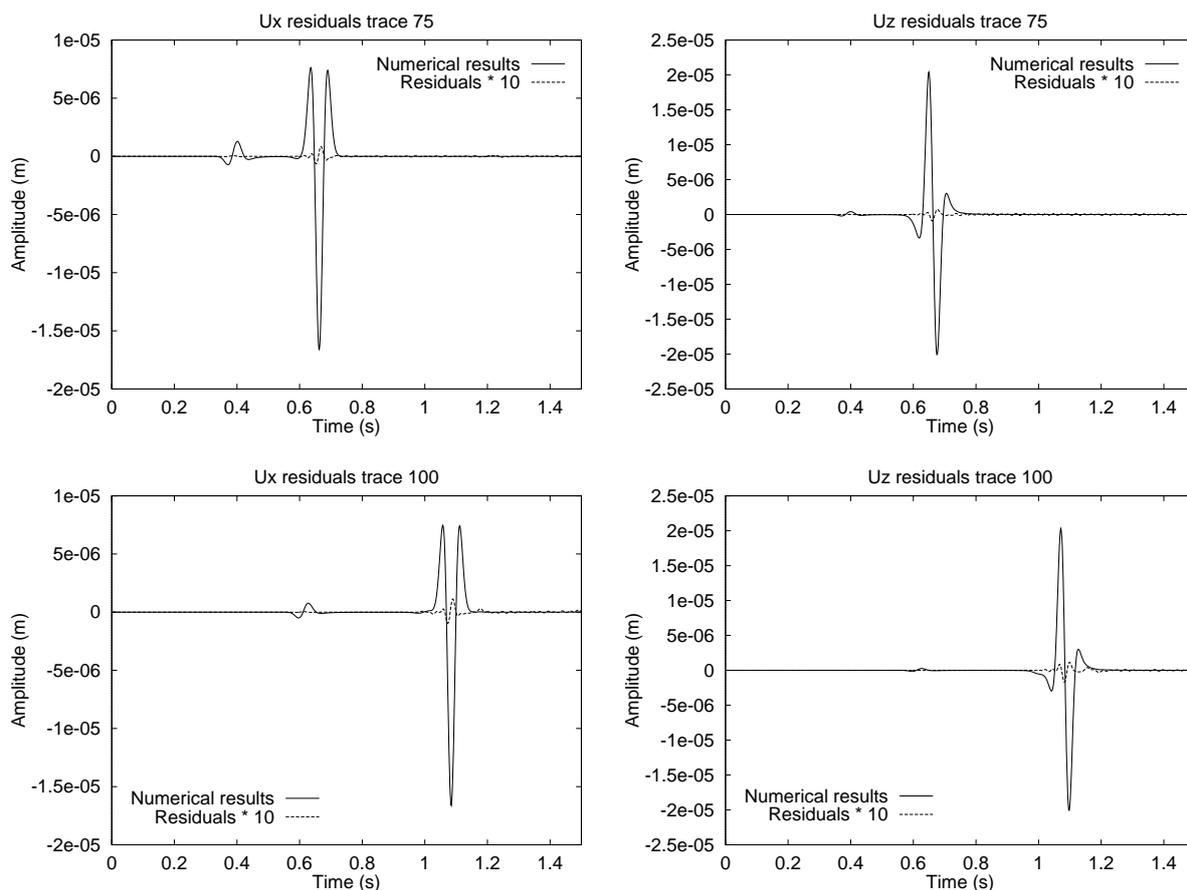


FIG. 3.11 – Traces enregistrées par les récepteurs 75 et 100 pour le problème de Lamb lorsque la force source est placée exactement à la surface libre. Les résidus par rapport à la solution analytique du problème sont également dessinés à la même échelle, après multiplication par un facteur 10. L'accord est excellent, presque aucune dispersion numérique n'est observée, l'erreur relative maximale étant de l'ordre de 1 %. L'amplitude de l'onde de Rayleigh reste constante au cours de la propagation de celle-ci le long de la pente, ce qui est correct dans le cas d'un calcul en déformations planes.

le schéma explicite de Newmark, en prenant un pas de temps de  $\Delta t = 0.40$  ms (voir figure 3.18). Comme nous pouvons le vérifier sur cette figure, même après 100 000 pas de temps, l'énergie totale contenue dans le système reste parfaitement constante, ce qui signifie que le schéma numérique considéré est parfaitement stable.

### 3.6.2 Dispersion numérique de la méthode

Dès que l'on s'intéresse à un schéma numérique permettant de résoudre le problème de la propagation des ondes élastiques dans un milieu, il est important de s'interroger sur les propriétés de dispersion du schéma proposé. Les méthodes d'éléments spectraux présentent une dispersion numérique très faible. L'étude analytique de cette dispersion numérique est délicate dans le cas général (maillage déformé). Pour des maillages réguliers, la non-uniformité des points de collocation de Gauss-Lobatto rend l'analyse assez lourde. Dans le cas d'un maillage uniforme et en se limitant à un degré polynomial  $N = 3$ , les points de collocation, dans chacune des directions de l'espace, se répartissent en plusieurs types de nœuds se répétant périodiquement, avec pour périodicité  $h$ , la taille de l'élément : le nœud extrémité d'un segment et les deux nœuds intérieurs. Une analyse de Fourier de l'approximation conduit donc à un système de trois équations à 1D et de 9 équations à 2D. La solution de ce système comparée à la transformée de Fourier de la solution du système continu fournit une estimation de l'erreur de l'approximation spatiale et de la dispersion numérique. Ce problème a été récemment analysé dans le cas de l'équation acoustique par [Cohen et al. \(1993\)](#) et [Tordjman \(1995\)](#). L'analyse est assez longue et technique. Les principaux résultats, pour une approximation spectrale d'ordre  $N = 3$ , sont que

- l'erreur de l'approximation spatiale est d'ordre  $O(h^6)$  pour les nœuds extrémité et d'ordre  $O(h^5)$  pour les nœuds intérieurs, ce qui indique des propriétés de superconvergence (on s'attendrait intuitivement à une erreur en  $O(h^4)$ );
- la dispersion est contrôlée par la valeur propre maximale de la matrice dynamique discrète.

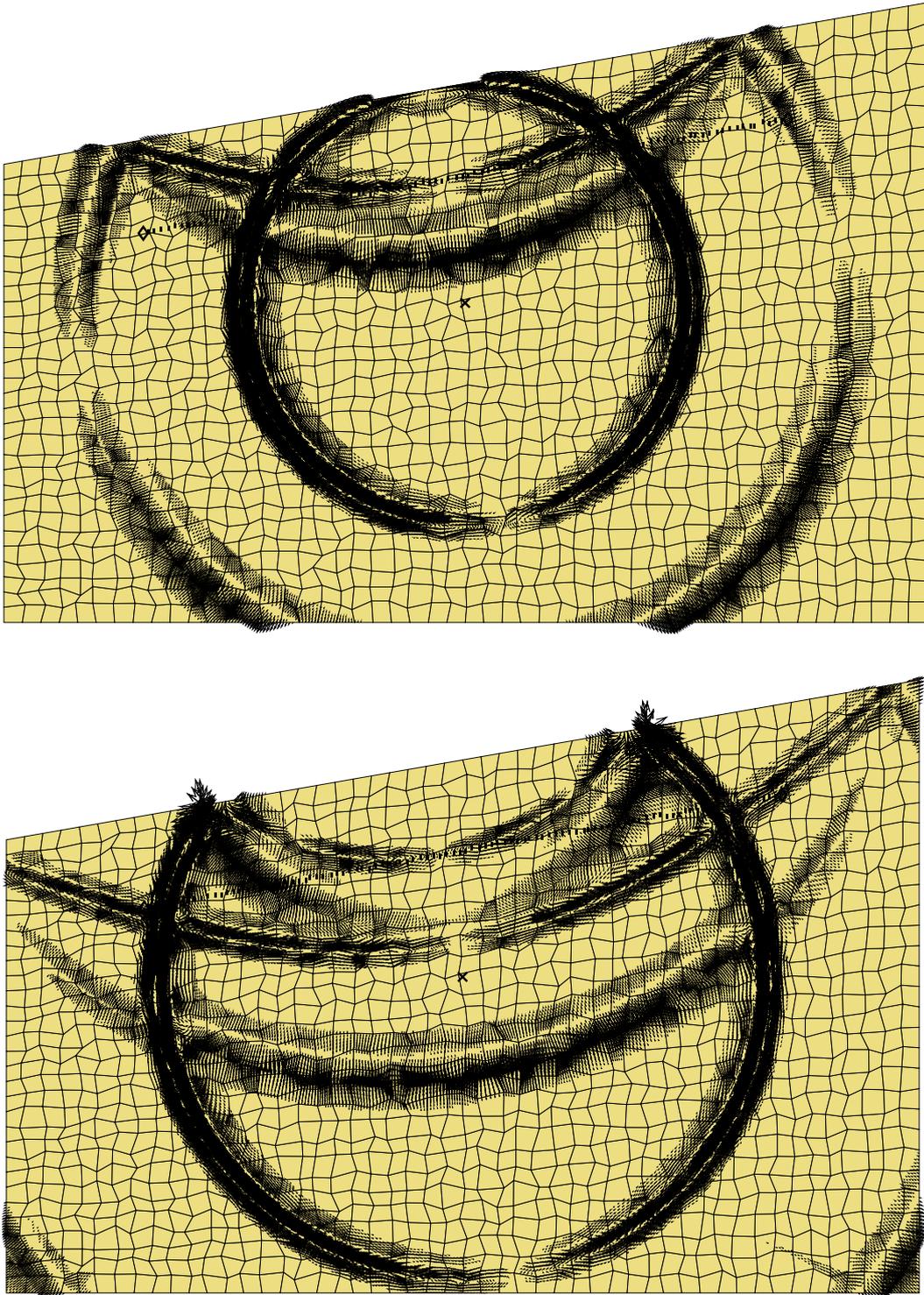


FIG. 3.12 – Instantanés obtenus pour le problème de Lamb incliné en utilisant un maillage aléatoire, avec une source placée à l'intérieur du modèle. Malgré l'utilisation de ce maillage fortement perturbé, nous observons les mêmes phénomènes que sur la figure 3.5. Une faible réflexion parasite provenant du bord absorbant est également visible sur le bord inférieur du modèle.

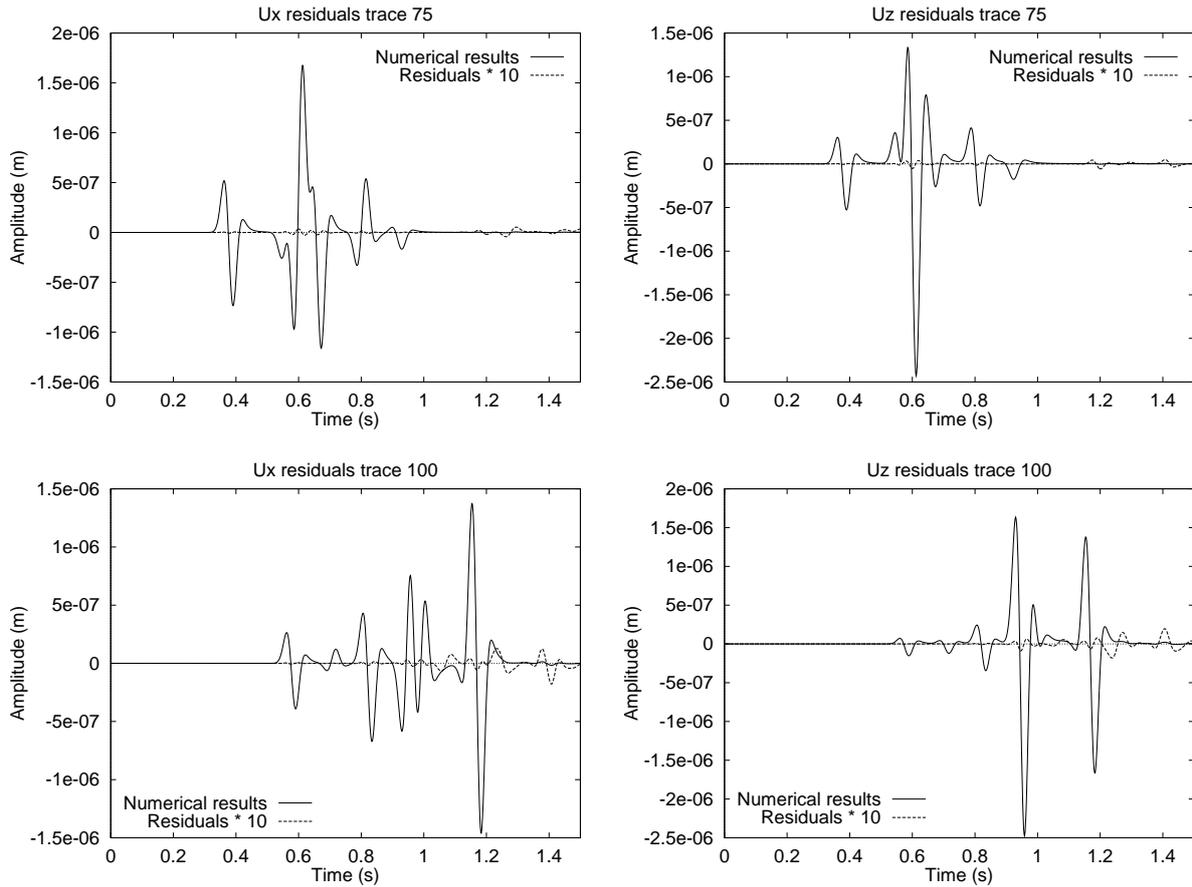


FIG. 3.13 – Traces enregistrées par les récepteurs 75 et 100 pour le problème de Lamb incliné en utilisant un maillage aléatoire, la source étant placée à l'intérieur du modèle. Les résidus par rapport à la solution analytique du problème sont également dessinés à la même échelle après multiplication par un facteur 10. Un très bon accord est obtenu même en utilisant ce maillage fortement perturbé, l'erreur relative maximale étant de l'ordre de 1 %. Les faibles artefacts sur la droite sont des réflexions parasites provenant des bords absorbants.

Pour des éléments spectraux d'ordre 2, cette valeur propre est donnée par ( $k$  étant le nombre d'onde)

$$\lambda^1(k) = h^2 k^2 \left( 1 - \frac{h^4 k^4}{1440} + O(h^6 k^6) \right) \quad (3.36)$$

et pour des éléments spectraux d'ordre 3 par

$$\lambda^1(k) = h^2 k^2 \left( 1 - \frac{h^6 k^6}{302400} + O(h^8 k^8) \right) \quad (3.37)$$

On peut en déduire que la dispersion numérique pour le problème semi-discret, pour des solutions particulières de la forme

$$u(x, y, t) = \exp i(k_1 x + k_2 y - \omega t) \quad k_1, k_2 \in \mathbf{R} \quad \omega \geq 0 \quad (3.38)$$

est donnée par

$$q_h(K, \phi) = \frac{\omega_h}{\omega} = \frac{\sqrt{\lambda^1(K \cos(\phi)) + \lambda^1(K \sin(\phi))}}{2\pi K} \quad (3.39)$$

où  $q_h(K, \phi)$  est la vitesse de phase adimensionnelle, avec  $\omega_h$  la pulsation numérique et  $\omega$  la pulsation physique,  $K = \frac{hk}{2\pi} = \frac{1}{N}$  où  $N$  correspond au nombre d'éléments par longueur d'onde, et  $\phi$  l'angle entre l'axe des  $x$  et la direction de propagation.

Les courbes de dispersion correspondantes sont données sur la figure 3.19 pour des éléments spectraux d'ordre deux et d'ordre trois. Il est clair d'après les courbes présentées que, même pour des ordres polynômiaux peu élevés, la méthode des éléments spectraux possède une dispersion numérique très faible en comparaison à des méthodes de type différences finies d'ordre 2 ou d'ordre 4 (voir l'analyse de dispersion pour de telles méthodes par exemple dans [Rodrigues, 1993](#)).

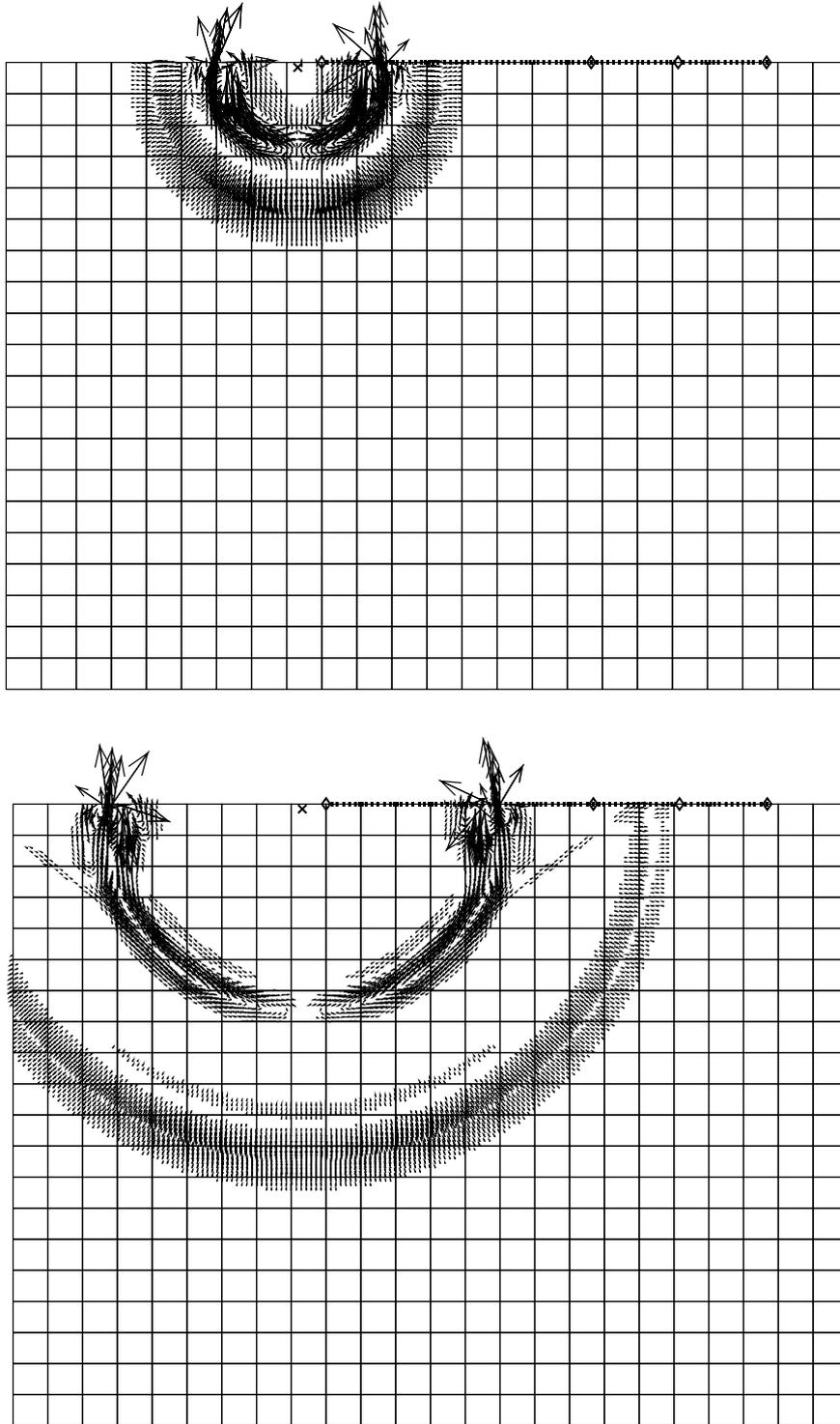


FIG. 3.14 – Instantanés obtenus pour le problème de Lamb avec un sous-échantillonnage spatial. Le sous-échantillonnage a pour conséquence l'apparition d'oscillations numériques qui sont enregistrées par les récepteurs (voir figure 3.15).

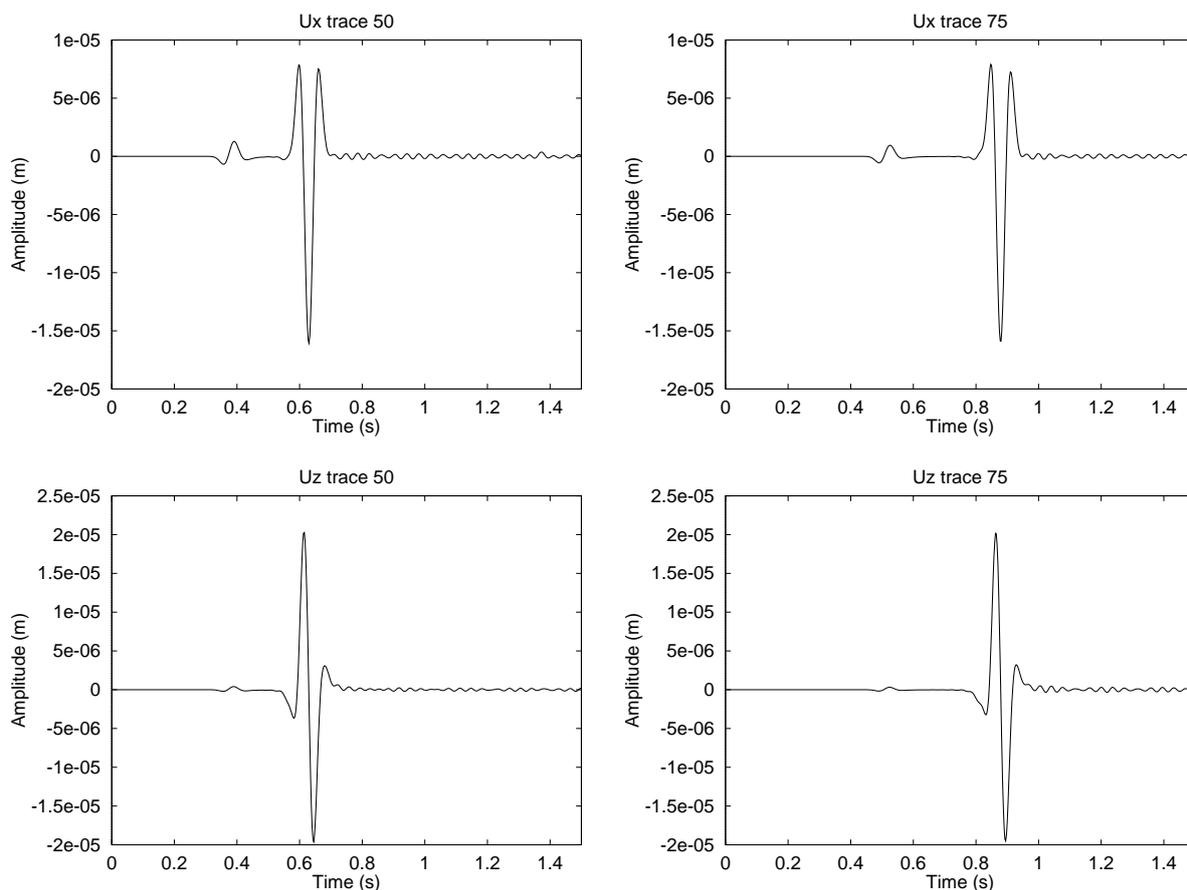


FIG. 3.15 – Traces enregistrées par les récepteurs 50 et 75 pour le problème de Lamb avec sous-échantillonnage spatial. On peut remarquer que le sous-échantillonnage a pour conséquence l'apparition d'oscillations numériques d'amplitude relativement forte qui suivent immédiatement le passage de l'onde de Rayleigh (qui possède la longueur d'onde la plus courte, donc qui est la plus mal échantillonnée lorsque le maillage est grossier).

Ces propriétés ne peuvent être que meilleures pour des ordres polynômiaux plus élevés ( $N > 3$ ). L'étude complète dans le cas élastodynamique est en cours, et devrait confirmer les résultats précédents obtenus dans le cas acoustique.

### 3.7 Efficacité des bords absorbants

Nous avons vu dans les simulations du problème de Lamb (voir section 3.5) qu'il était nécessaire d'introduire sur trois des côtés de la grille des bords absorbants afin de pouvoir simuler un milieu semi-infini. L'implémentation de tels bords absorbants fait appel à des conditions paraxiales posées sous forme faible. Les équations utilisées n'étant exactes que pour une onde incidente suivant la normale au bord considéré, il n'est pas inutile de s'interroger sur l'efficacité de ces conditions. Pour cela, nous considérons à nouveau le cas du problème de Lamb étudié précédemment, mais nous posons à présent des bords absorbants sur les quatre côtés de la grille de calcul, afin de simuler un milieu homogène infini. Ainsi, si les conditions absorbantes avaient une efficacité parfaite, nous devrions voir l'énergie totale contenue dans le système décroître au fur et à mesure que les ondes émises par la source ponctuelle atteindraient les bords du domaine de calcul. La courbe obtenue en pratique pour l'énergie totale est donnée sur la figure 3.20, la deuxième courbe étant un zoom effectué sur une zone intéressante de la première courbe. Même si l'allure générale de la courbe est correcte, et montre comme attendu une décroissance rapide de l'énergie totale contenue dans notre système numérique, un zoom effectué sur la partie finale de la courbe montre qu'il demeure un résidu non nul d'énergie même lorsque toutes les ondes devraient avoir quitté le domaine de calcul. Cette énergie résiduelle correspond à des réflexions parasites sur les bords absorbants, pour des ondes émises par le point source et dont l'incidence n'est pas normale au bord considéré. Même si cette énergie résiduelle ne correspond qu'à quelques dix-millièmes de l'énergie totale, en déplacement, cela peut correspondre à des ondes parasites dont l'amplitude est de l'ordre de quelques pourcents de l'onde directe. Ces ondes parasites se superposent à la solution calculée dans le modèle, et peuvent conduire à des erreurs significatives sur le signal calculé.

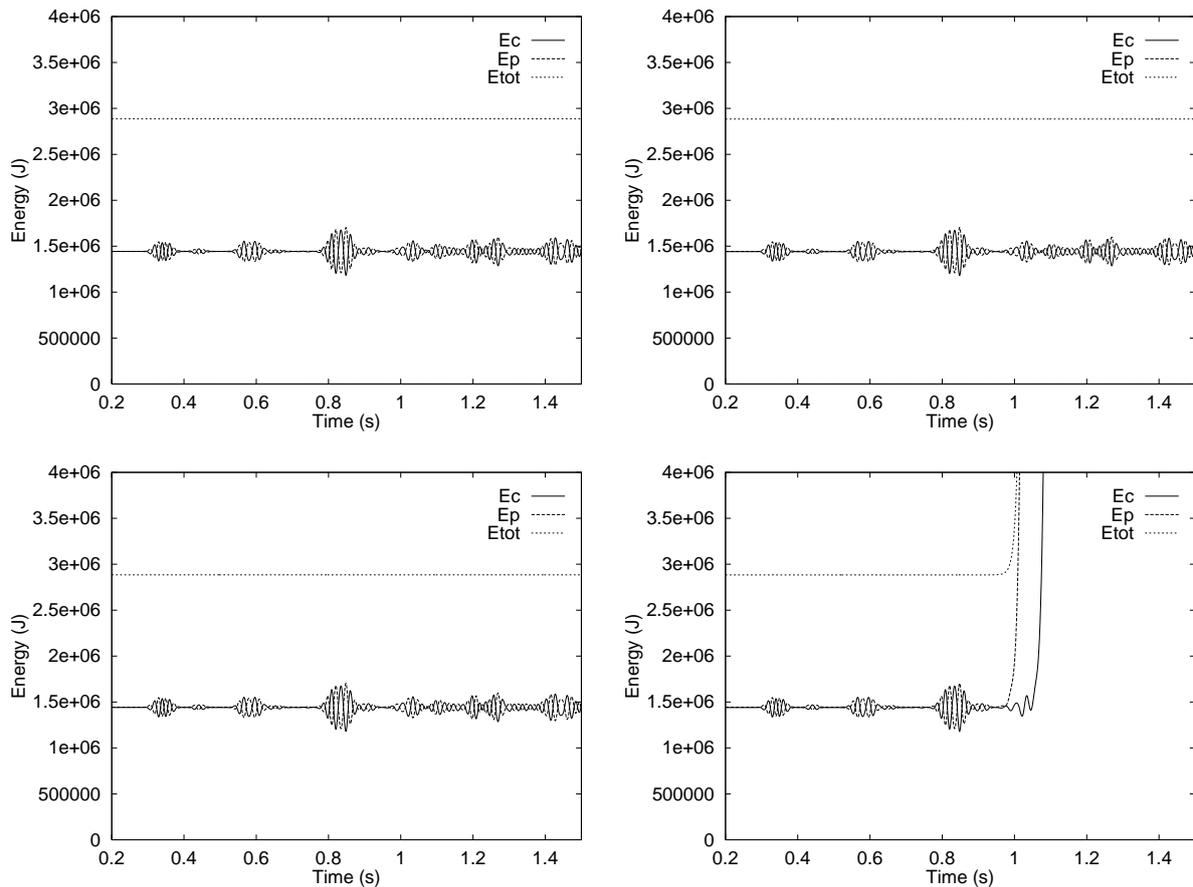


FIG. 3.16 – Stabilité du schéma de Newmark explicite pour le cas du problème de Lamb. Les quatre tests correspondent à une valeur du pas de temps respectivement (de gauche à droite et de haut en bas) de  $\Delta t = 0.50, 0.75, 0.80$  et  $0.81$  ms. L'énergie totale reste constante au cours des 3000 pas de temps, prouvant la stabilité du schéma, sauf pour  $\Delta t = 0.81$  ms, pour lequel le schéma explose car la limite de stabilité a été dépassée.

Comme nous l'avons déjà signalé précédemment, les réflexions parasites en provenance des bords absorbants constitueront souvent, dans les simulations présentées au cours de cette thèse, la principale source de bruit numérique, et il conviendrait dans le futur d'améliorer l'efficacité de ces conditions absorbantes, par l'une des approches suggérées au paragraphe 1.3.5. Un autre problème qu'il conviendrait d'aborder est l'incohérence entre condition absorbante et condition de surface libre dans les coins supérieurs du modèle, lorsqu'un demi-espace est considéré. En effet, dans ce cas, le bord supérieur est une surface libre, imposant une traction nulle dans les coins supérieurs de la grille de calcul, condition qui est incompatible avec le fait que ces coins appartiennent aussi aux bords absorbants latéraux, et qu'en conséquence ils doivent vérifier une équation de type (1.41). Dans l'approche actuelle, ce problème n'ayant pas été résolu, les deux coins diffractent de l'énergie parasite qui vient polluer la solution numérique calculée dans le modèle.

### 3.8 Validation pour le problème de Garvin 2D

Le problème de Garvin (Garvin, 1956) est un autre test classique permettant de vérifier la précision d'un code de modélisation de la propagation des ondes élastiques. On considère à nouveau un demi-espace élastique homogène, mais la source est maintenant une explosion. Il existe une solution analytique à ce problème. Si la source est placée à l'intérieur du milieu, seule une onde P directe se propage, et une réflexion P ainsi qu'une conversion P-S se produisent à la surface libre. Si la source est placée juste sous la surface, l'événement principal sera la propagation d'une forte onde de Rayleigh le long de celle-ci. L'onde de Rayleigh est dans ce cas non dispersive, car le milieu est homogène et sa surface est plane. Nous simulons la propagation des ondes en utilisant un maillage dont la surface est inclinée (la matrice jacobienne est donc non diagonale). Les récepteurs enregistrent les composantes normales et tangentielles (par rapport à la surface) du champ de déplacement, de ce fait la solution analytique donnée par Garvin peut être utilisée. Les solutions analytiques du problème de Garvin utilisées dans la suite sont calculées en utilisant un code fourni par F. J. Sánchez-Sesma, dans lequel

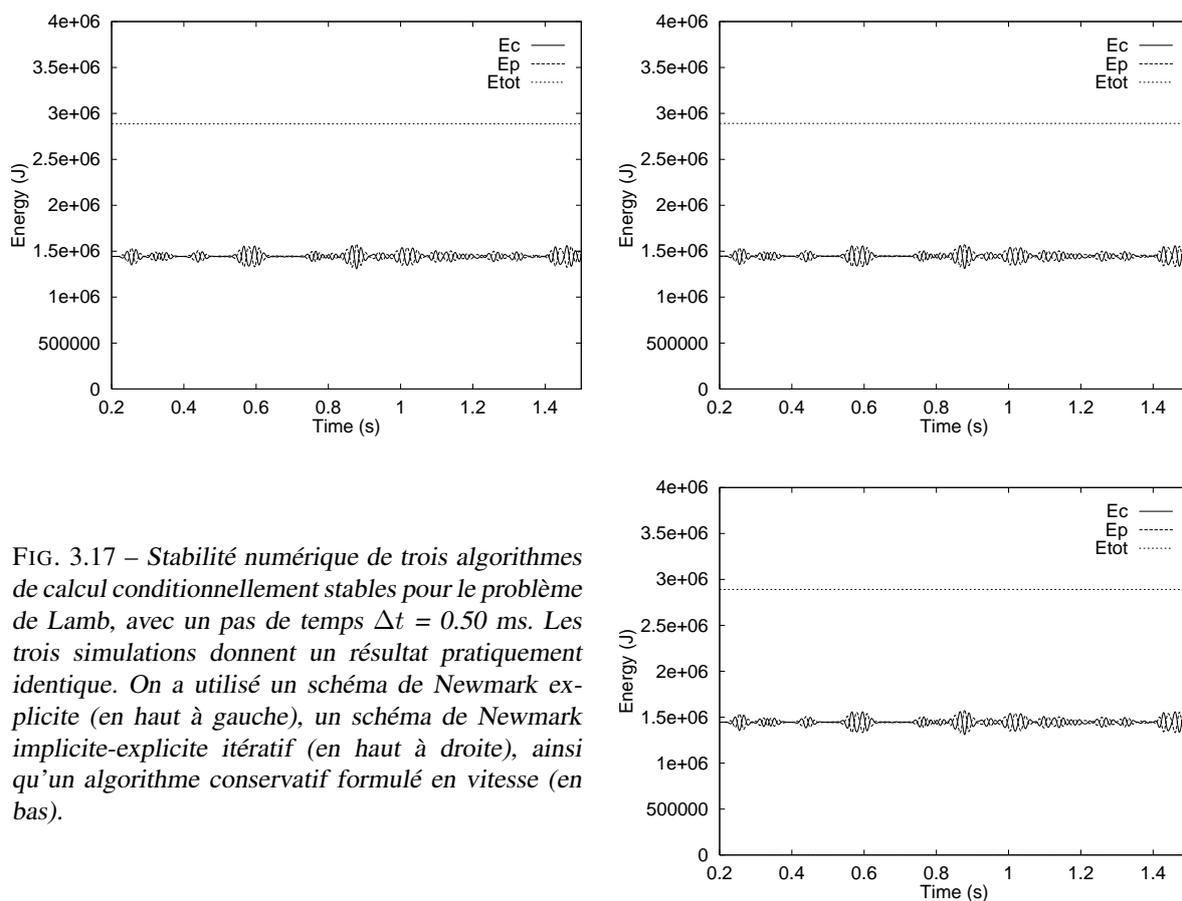


FIG. 3.17 – Stabilité numérique de trois algorithmes de calcul conditionnellement stables pour le problème de Lamb, avec un pas de temps  $\Delta t = 0.50$  ms. Les trois simulations donnent un résultat pratiquement identique. On a utilisé un schéma de Newmark explicite (en haut à gauche), un schéma de Newmark implicite-explicite itératif (en haut à droite), ainsi qu'un algorithme conservatif formulé en vitesse (en bas).

la fonction de Green est calculée analytiquement et ensuite convoluée numériquement avec la fonction temporelle de la source.

### 3.8.1 Source à l'intérieur du modèle

Dans ce premier exemple, l'inclinaison de la surface libre est de  $-10^\circ$ , le milieu a une vitesse P de  $3200 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1847.5 \text{ m.s}^{-1}$  et une densité de  $2200 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le modèle physique étudié a une largeur de  $4000 \text{ m}$  et une hauteur de  $2000 \text{ m}$  sur son bord droit. Des conditions absorbantes sont utilisées sur tous les bords du modèle à l'exception de la surface libre, afin de simuler un milieu semi-infini. Le maillage est composé de  $50 \times 30$  éléments, un degré polynômial de 8 étant utilisé dans chaque direction d'un élément. Le nombre total de points du maillage est de  $96\,641$ . Le pas de temps utilisé est de nouveau de  $\Delta t = 0.25$  ms (correspondant à un nombre de Courant de 0.25) afin d'obtenir des résultats très précis dans cette simulation dont le but est de comparer la solution calculée à la solution exacte du problème. Le nombre total de pas de temps est de 6000. La position de la source est  $(x, z) = (1850, 1380) \text{ m}$  et la ligne de récepteurs s'étend de  $(600, 2200)$  à  $(3400, 1700) \text{ m}$ . La source est un Ricker ayant une fréquence centrale de  $14.5 \text{ Hz}$ . Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 3.21, et les sismogrammes sur la figure 3.22. Nous pouvons observer l'onde P directe, l'onde P réfléchi ainsi que l'onde convertie P-S. La comparaison à la solution analytique pour les récepteurs 55 et 80 est montrée sur la figure 3.23. Nous trouvons un très bon accord entre les deux solutions, l'erreur relative maximum étant de l'ordre de 1 %, ce qui est l'ordre de grandeur de la précision de la solution analytique, dans laquelle la convolution numérique avec le signal source introduit un léger bruit numérique. De nouveau, les réflexions parasites provenant des bords absorbants constituent la principale source d'erreur numérique.

FIG. 3.18 – Stabilité à long terme pour le problème de Lamb, en propageant pendant 100 000 pas de temps avec une valeur du pas de temps de  $\Delta t = 0.40$  ms pour le schéma de Newmark explicite. L'énergie totale reste parfaitement constante et prouve la stabilité numérique du schéma considéré.

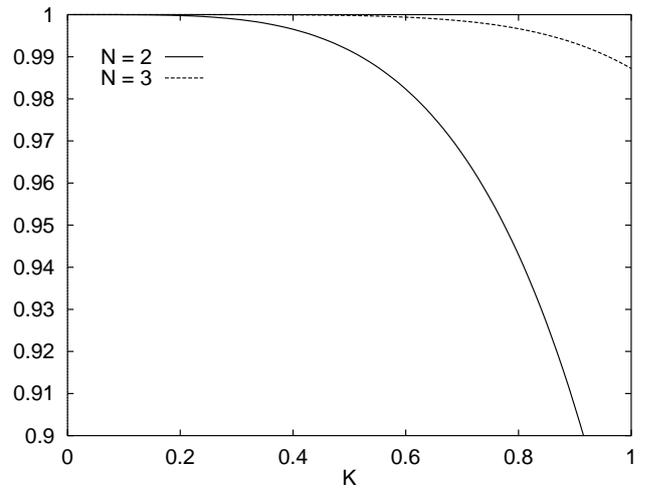
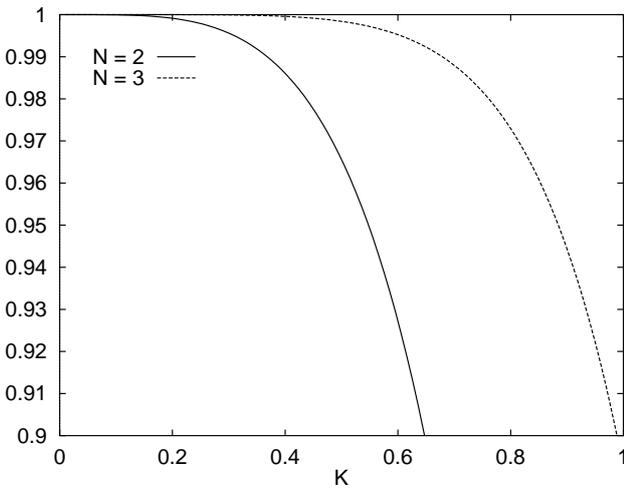
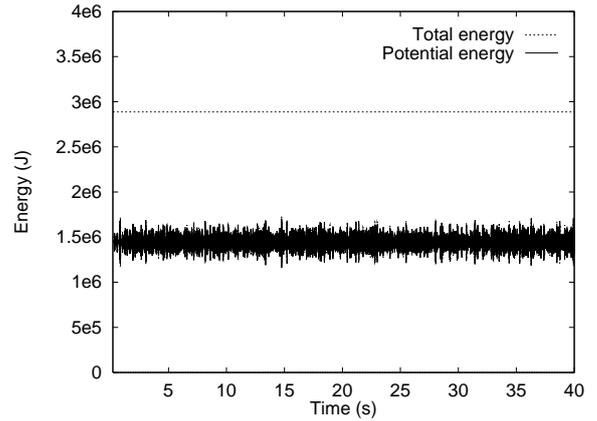


FIG. 3.19 – Vitesse de phase adimensionnelle  $q_h$  en fonction de l'inverse du nombre d'éléments par longueur d'onde  $K$  pour le cas des éléments spectraux d'ordre deux et trois. Les courbes de gauche correspondent à  $\phi = 0^\circ$ , les courbes de droite à  $\phi = 45^\circ$ . D'après Tordjman (1995).

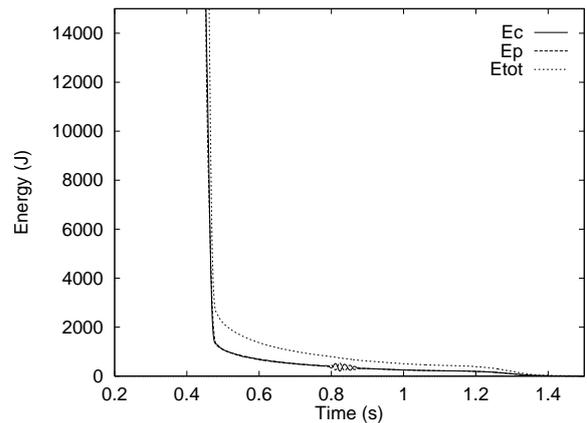
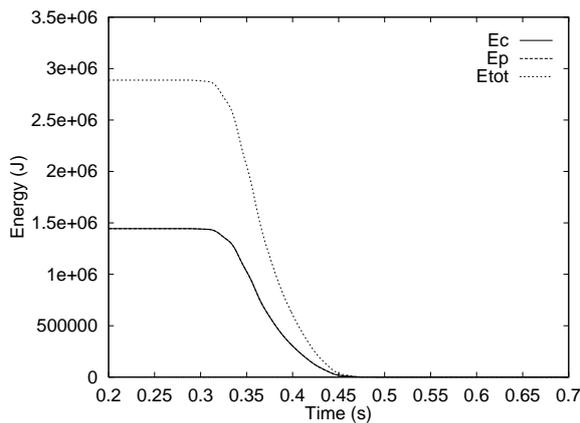


FIG. 3.20 – Résidu d'énergie dans le cas d'un milieu homogène muni de quatre bords absorbants. La valeur non nulle du résidu (particulièrement claire sur le zoom présenté sur la figure de droite) traduit le fait que, pour une incidence non normale des ondes sur les bords du modèle, des réflexions parasites se sont formées. Ces réflexions parasites provoquent une conversion entre énergie cinétique et énergie potentielle sur le bord du modèle (voir par exemple à  $t = 0.8$  s sur la figure de droite). Les réflexions parasites sont elles-mêmes absorbées après s'être propagées dans la grille (aux environs de  $t = 1.3$  s). Le calcul a été effectué avec l'algorithme de Newmark itératif en choisissant  $\beta = 0.25$  et un pas de temps de  $\Delta t = 0.50$  ms.

### 3.8.2 Source en surface

La source explosive est maintenant placée exactement sur la surface libre. Dans ce cas, l'événement principal est une forte onde de Rayleigh non dispersive qui se propage le long de la surface, son amplitude restant constante dans une simulation en déformations planes. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 3.24, et les sismogrammes sur la figure 3.25, les récepteurs étant placés à la surface. Nous pouvons observer l'onde P directe, la forte onde de Rayleigh avec sa polarisation elliptique typique, et l'onde réfractée (« head wave »). La comparaison avec la solution analytique pour les récepteurs 75 et 100 est représentée sur la figure 3.26. L'accord obtenu est très bon, l'erreur relative maximum étant à nouveau de l'ordre de 1 %. Nous pouvons remarquer sur les instantanés que presque aucune énergie n'est émise sous forme d'onde P dans la direction normale à la pente dans ce cas, la source étant placée exactement à la surface. Il peut donc se révéler préférable dans certains cas de placer la source explosive plus en profondeur afin d'illuminer tout le milieu, l'inconvénient principal dans ce cas étant la présence d'une forte onde réfléchie à la surface libre (onde appelée « onde fantôme » ou « ghost wave » dans l'industrie pétrolière) qui vient se superposer, avec un léger décalage, à l'onde directe.

### 3.8.3 Onde fantôme

L'importance de la profondeur du point de tir par rapport à l'énergie émise dans la direction normale à la pente est démontrée maintenant en plaçant la source à une profondeur de 60 m. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 3.27. Si nous comparons ces instantanés à ceux de la figure 3.24, pour lesquels la source explosive était placée exactement à la surface, nous pouvons vérifier que l'amplitude de l'onde de Rayleigh est maintenant significativement plus faible, et qu'une partie significative de l'énergie est émise sous forme d'onde P dans la direction normale à la pente. La profondeur du point de tir joue donc un rôle très important par rapport à la fraction de l'énergie émise sous forme d'onde P, et également par rapport à « l'isotropie » de l'onde P émise dans le demi-espace. Plus le tir est profond, plus l'onde P réfléchie à la surface (« onde fantôme » ou « ghost wave ») est forte et se superpose à l'onde P directe avec un léger décalage, ce qui constitue l'inconvénient principal de l'augmentation de la profondeur du point de tir.

## 3.9 Conclusions

Dans de nombreux cas d'intérêt géophysique, il est important de pouvoir simuler la propagation des ondes élastiques dans des modèles contenant des interfaces courbes et/ou une topographie. L'utilisation d'une formulation variationnelle de l'équation des ondes permet de prendre naturellement en compte ces géométries complexes.

Nous avons montré qu'il était possible d'utiliser une méthode d'éléments spectraux afin de résoudre l'équation des ondes dans de tels milieux complexes, tant 2D que 3D. La précision de la méthode a été démontrée en résolvant deux problèmes 2D classiques (problème de Lamb, problème de Garvin) et en comparant la solution calculée en utilisant un faible nombre de points par longueur d'onde (de l'ordre de 5) à des solutions analytiques. Un excellent accord a été trouvé, ce qui a permis de valider la méthode numérique introduite.

La stabilité de la méthode proposée a été vérifiée numériquement, et l'efficacité des conditions de bord absorbant a été discutée. Nous avons noté également que la méthode des éléments spectraux était très adaptée aux architectures modernes des supercalculateurs (parallélisme massif), et que des performances très intéressantes pouvaient être obtenues d'un point de vue informatique, contrairement à une idée assez largement répandue. Dans le chapitre suivant, nous allons démontrer la souplesse de la méthode en simulant la propagation des ondes dans des modèles 2D ayant une structure plus réaliste.

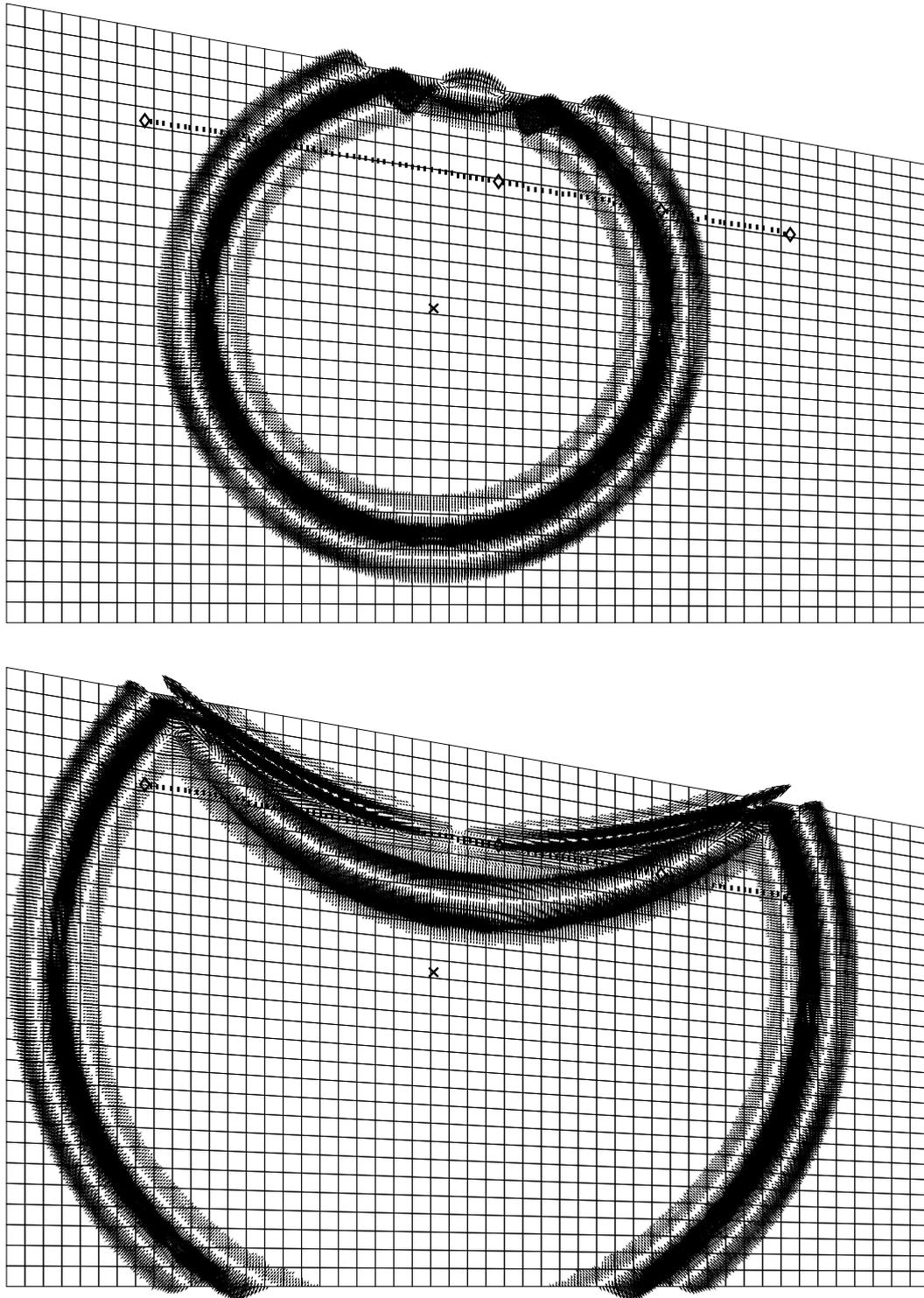


FIG. 3.21 – Instantanés obtenus pour le problème de Garvin incliné avec une source compressive (explosion) placée à l'intérieur du modèle. L'onde P directe, l'onde réfléchie P ainsi que l'onde convertie P-S peuvent être observées.

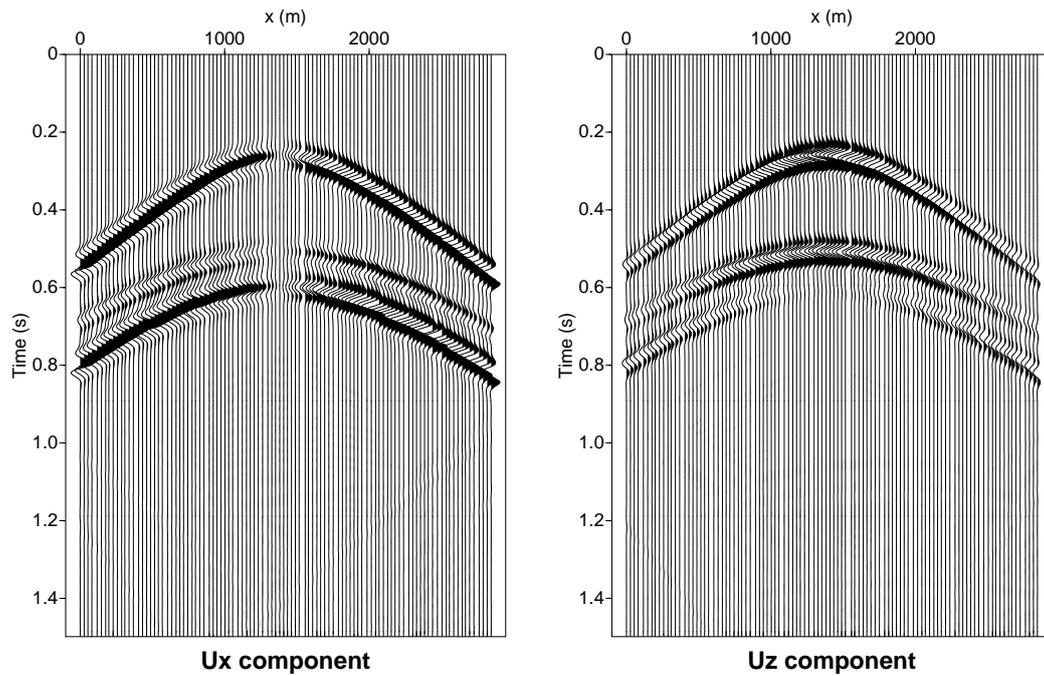


FIG. 3.22 – Sismogrammes enregistrés pour le problème de Garvin incliné lorsque la source explosive est placée à l'intérieur du modèle. L'onde P directe, l'onde réfléchie P ainsi que l'onde convertie P-S peuvent être observées.

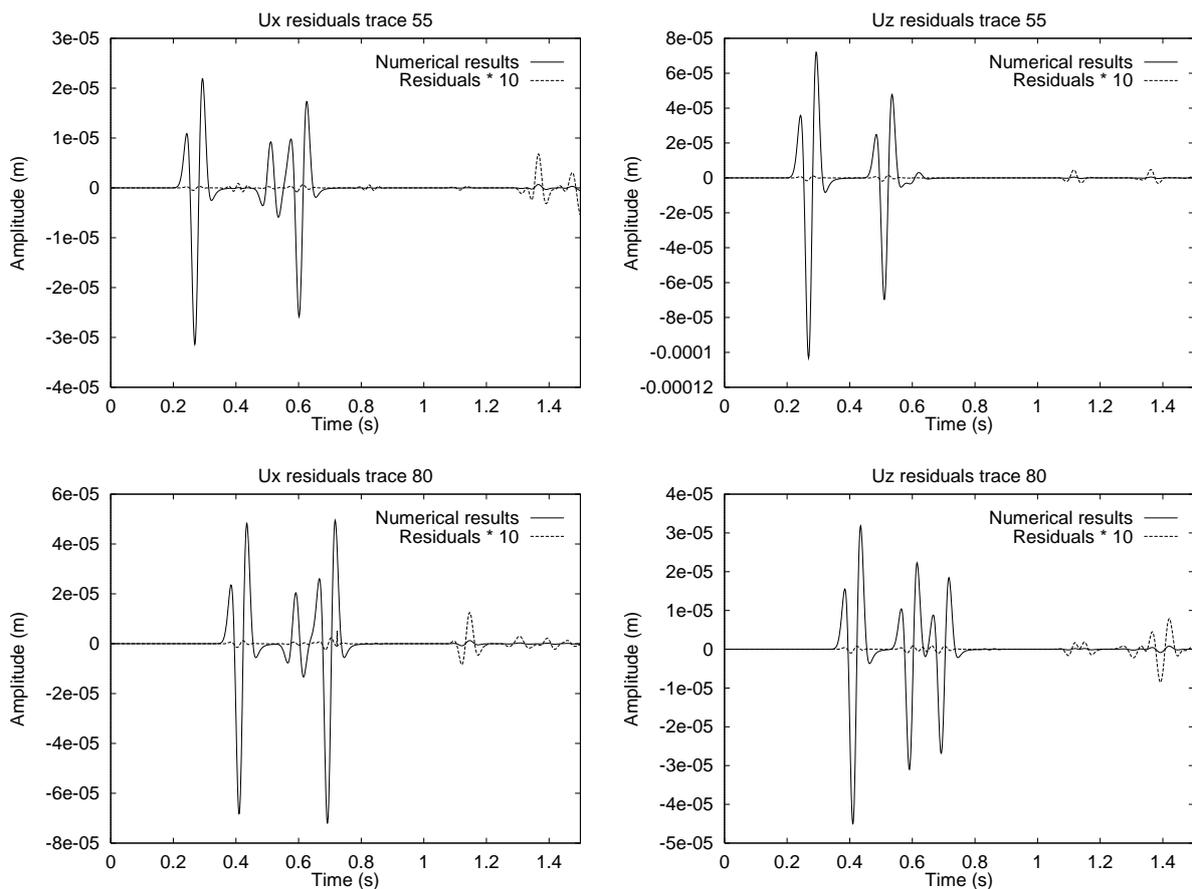


FIG. 3.23 – Traces enregistrées par les récepteurs 55 et 80 pour le problème de Garvin lorsque la source explosive est placée à l'intérieur du modèle. La solution numérique est représentée, ainsi que les résidus par rapport à la solution analytique du problème, dessinés à la même échelle après multiplication par un facteur 10. L'accord obtenu est très bon, l'erreur relative maximale étant de l'ordre de 1 %. Les faibles artefacts sur la droite sont des réflexions parasites provenant des bords absorbants.

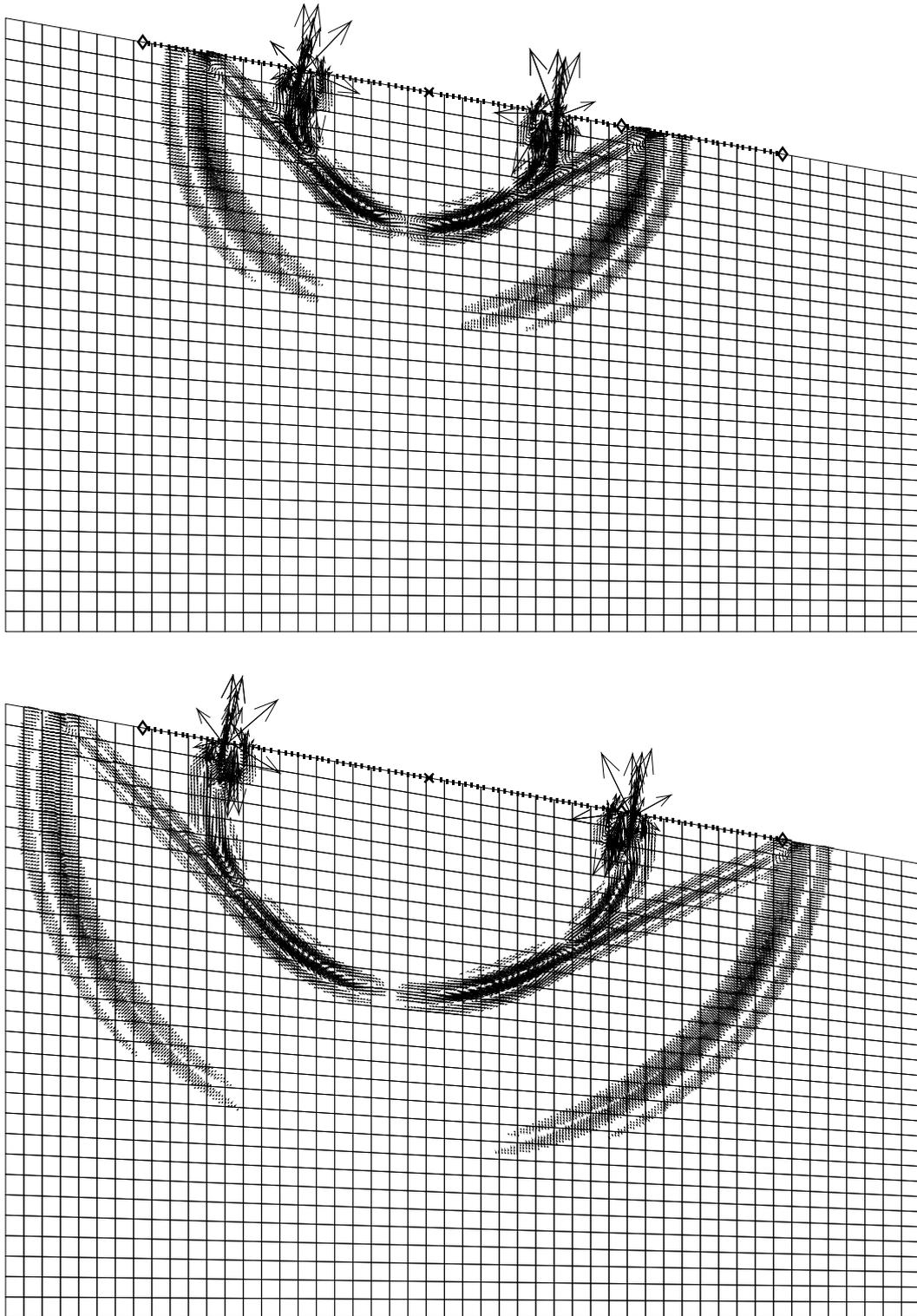


FIG. 3.24 – Instantanés obtenus pour le problème de Garvin incliné lorsque la source explosive est placée exactement à la surface libre. La forte onde de Rayleigh, avec sa polarisation elliptique typique, est clairement reconnaissable, ainsi que la « head wave ». Dans ce cas, presque aucune énergie n'est émise sous forme d'onde P dans la direction perpendiculaire à la pente.

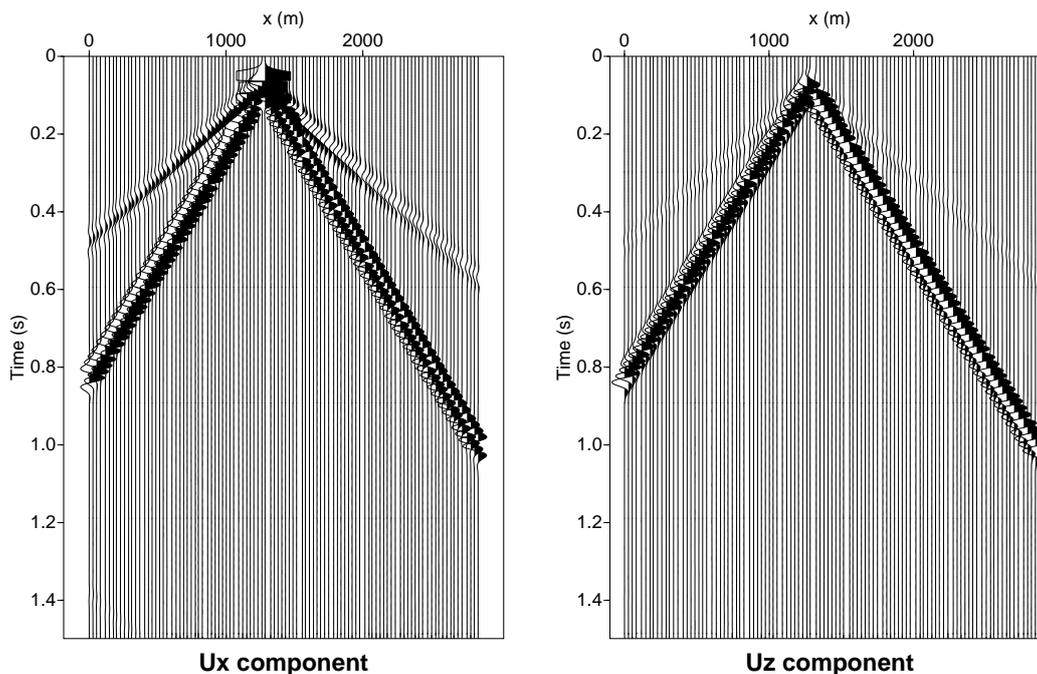


FIG. 3.25 – Sismogrammes enregistrés pour le problème de Garvin incliné lorsque la source explosive est placée exactement à la surface libre. La phase principale est une forte onde de Rayleigh non dispersive.

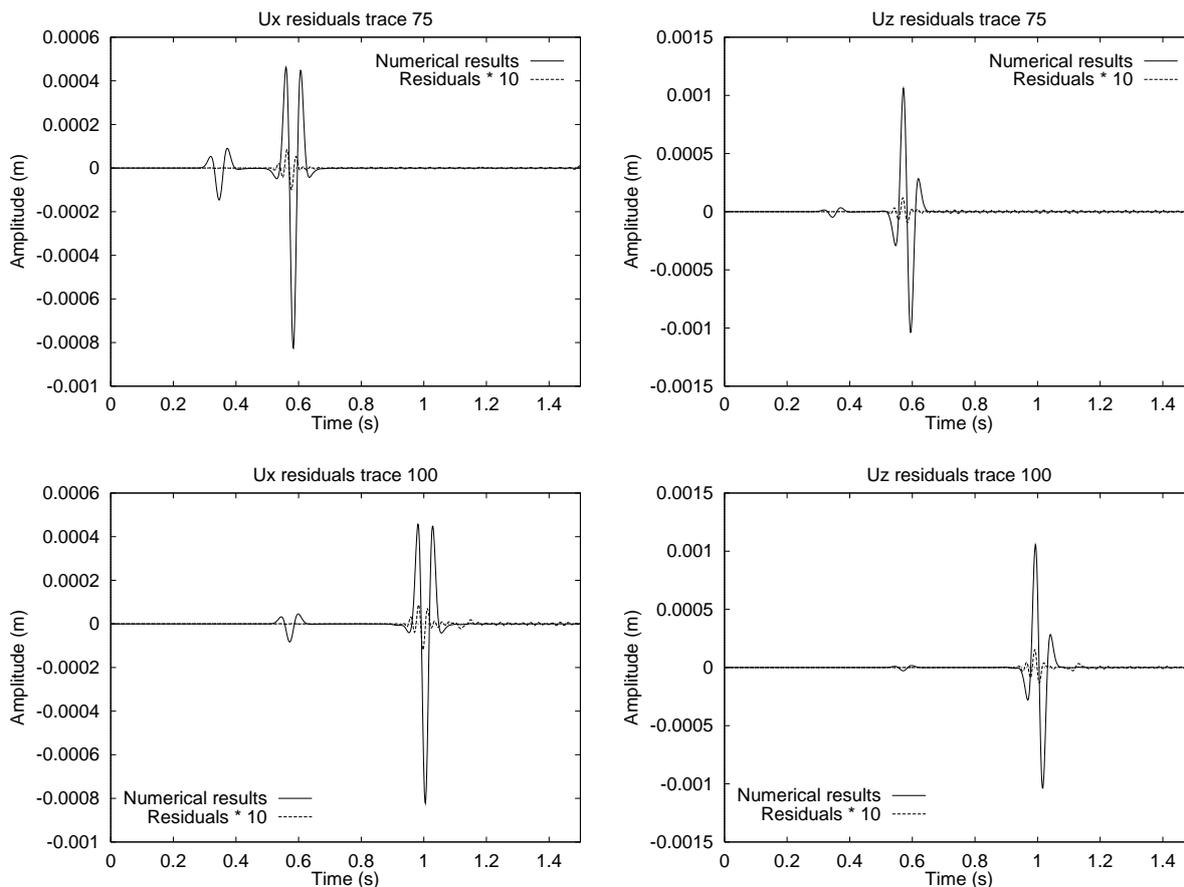


FIG. 3.26 – Traces enregistrées par les récepteurs 75 et 100 pour le problème de Garvin incliné lorsque la source explosive est placée exactement à la surface libre. La solution numérique est représentée, ainsi que les résidus par rapport à la solution analytique, dessinés à la même échelle après multiplication par un facteur 10. L'accord obtenu est très bon, l'erreur relative maximale étant de l'ordre de 1 %.

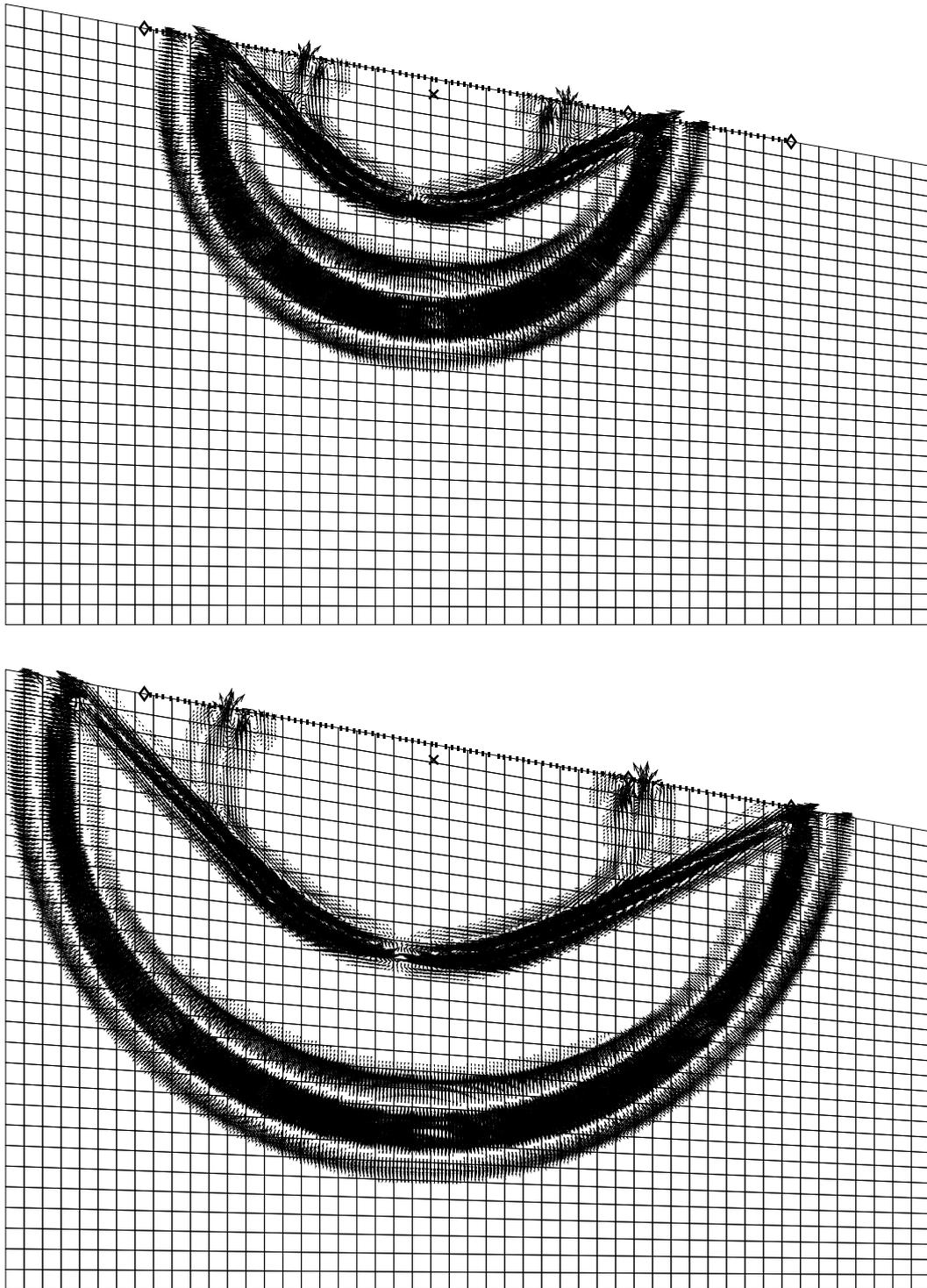


FIG. 3.27 – Instantanés obtenus pour le problème de Garvin incliné dans le cas où la source explosive est placée sous la surface à une distance significative. L'amplitude de l'onde de Rayleigh est clairement plus faible que dans le cas où la source était placée exactement à la surface (voir figure 3.24). Dans ce cas, une partie significative de l'énergie est émise sous forme d'onde P dans la direction normale à la pente, mais une onde P réfléchie à la surface libre (parfois appelée « onde fantôme » ou « ghost wave ») vient se superposer à l'onde directe.

### 3.A Annexe : Écriture détaillée du système algébrique dans le cas 2D

Détaillons ici les calculs devant être effectués dans le cas élastique linéaire isotrope 2D si l'on utilise la méthode des éléments spectraux. L'extension au cas 3D ne posant aucun problème particulier, mais comportant un nombre de termes beaucoup plus grand, nous ne la détaillerons pas ici. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, la formulation variationnelle des équations de l'élastodynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} (w, \rho \ddot{u})_{\Omega} + a(w, u)_{\Omega} &= (w, f)_{\Omega} \\ (w, \rho \ddot{u})_{\Omega} &= \int_{\Omega} \rho w^T \ddot{u} d\Omega \\ (w, f)_{\Omega} &= \int_{\Omega} w^T f d\Omega \end{aligned} \quad (3.40)$$

où  $u = (u_x, u_y)^T$  et  $w = (w_x, w_y)^T$  soit

$$\begin{aligned} (w, \rho \ddot{u}) &= \int_{\Omega} \rho (\ddot{u}_x w_x + \ddot{u}_y w_y) d\Omega \\ (w, f) &= \int_{\Omega} (f_x w_x + f_y w_y) d\Omega \end{aligned} \quad (3.41)$$

avec

$$\begin{aligned} a(w, u)_{\Omega} &= \int_{\Omega} [\partial_x w_x ((\lambda + 2\mu) \partial_x u_x + \lambda \partial_y u_y) + \partial_y w_y (\lambda \partial_x u_x + (\lambda + 2\mu) \partial_y u_y) + \\ &\quad \mu (\partial_y u_x + \partial_x u_y) (\partial_y w_x + \partial_x w_y)] d\Omega \end{aligned} \quad (3.42)$$

Pour pouvoir passer à un système matriciel du type

$$MA = F^{ext} - F^{int}$$

au niveau global, il faut assembler les contributions élémentaires calculées localement sur chaque élément. Voyons comment s'écrivent les différents calculs au niveau local, et comment le fait d'avoir utilisé une base tensorisée permet de réduire de façon drastique la taille du système, et par suite le nombre de calculs à effectuer

Rappelons que le domaine physique a été découpé en petits sous-domaines appelés éléments spectraux, constitués de quadrilatères curvilignes  $\Omega_k$  ne se recouvrant pas. Chaque élément possède *a priori* des bords courbes afin de pouvoir s'adapter aux bords non plans d'un modèle présentant une géométrie déformée. Comme nous avons utilisé une approche variationnelle du problème, nous serons en permanence amenés à intégrer des grandeurs physiques sur chaque élément. Il est évident que de tels calculs seraient très complexes dans le repère du domaine physique déformé (local à chaque élément), qui n'est pas un repère orthonormé. Il est plus facile de rapporter chaque élément individuellement à un élément fondamental sur lequel seront effectués tous les calculs, par exemple le carré  $\Lambda^2$ , où  $\Lambda$  désigne l'intervalle  $[-1, 1]$ . Ainsi, toute grandeur physique pourra être développée en une somme de fonctions polynômiales orthogonales exprimées dans le carré  $\Lambda^2$ . Il nous faudra donc une transformation, locale à chaque élément, permettant de passer du domaine de travail (le carré  $\Lambda^2$ ) au domaine physique étudié, dans lequel l'élément est déformé. Nous faisons appel à une transformation subparamétrique, comme cela est classique en éléments finis, pour exprimer ce changement de coordonnées

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^{n_g} N_a(\xi, \eta) x_a^e \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^{n_g} N_a(\xi, \eta) y_a^e \end{aligned} \quad (3.43)$$

Les fonctions  $N_a(\xi, \eta)$  sont appelées *fonctions de forme*. On peut par exemple utiliser des fonctions d'interpolation définies par les polynômes de Lagrange de second ordre, pour une description parabolique des bords de l'élément. Les valeurs  $x_a^e$  et  $y_a^e$  sont les coordonnées associées, dans le domaine physique, aux différents points de contrôle ( $a = 1, \dots, n_g$ ) permettant de définir l'élément.

La discrétisation spatiale au sein de l'élément fondamental  $\Lambda^2$  fait intervenir dans les deux directions  $\xi$  et  $\eta$  les  $N$  points de collocation de Gauss-Lobatto-Legendre, qui sont les zéros, tous distincts, du polynôme  $(1 - x^2) \cdot \mathcal{L}'_N(x)$ , où  $\mathcal{L}'_N(x)$  est

le polynôme de Legendre de degré  $N$ . Nous les noterons  $\xi_0, \dots, \xi_N$  avec  $\xi_0 = -1$  et  $\xi_N = 1$ , et supposons de plus la suite ordonnée, soit  $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{N-1} < \xi_N$ .

Une fonction scalaire  $u(\xi, \eta)$ , définie sur  $\Lambda^2$ , peut maintenant être écrite à partir des valeurs du champ sur la grille de collocation de Gauss-Lobatto-Legendre, en faisant appel à l'interpolateur de Lagrange, noté  $h_i(\xi)$ , qui est l'unique polynôme de degré  $N$  qui vaut 1 au point de Gauss-Lobatto  $\xi_i$  et 0 en tous les autres points de Gauss-Lobatto. On a donc la propriété fondamentale suivante

$$h_i(\xi_j) = \delta_{ij} \quad (3.44)$$

L'écriture du champ à l'aide de la base interpolante donne alors au niveau élémentaire

$$u_e(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u_{ij}^e h_i(\xi) h_j(\eta) \quad (3.45)$$

où  $u_{ij}^e$  sont les valeurs de  $u$  aux différents points de collocation au sein de l'élément considéré. Nous pouvons écrire  $w$  au niveau élémentaire en utilisant la même base

$$w_e(\xi, \eta) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N w_{rs}^e h_r(\xi) h_s(\eta)$$

L'intégration numérique au niveau élémentaire fait appel à la formule de quadrature basée sur les points de collocation de Gauss-Lobatto-Legendre. Soit à 1D l'intervalle  $\Lambda = [-1, 1]$ , pour tout  $N \in \mathcal{N}$ , il existe des poids  $\rho_j > 0$ ,  $j = 0, \dots, N$ , tels que pour tout polynôme  $\varphi \in \mathcal{P}_{2N-1}(\Lambda)$  on ait la formule exacte

$$\int_{\Lambda} \varphi(x) dx = \sum_{j=0}^N \varphi(\xi_j) \rho_j \quad (3.46)$$

La formule équivalente à deux dimensions est, pour tout  $\varphi \in \mathcal{P}_{2N-1}(\Lambda^2)$

$$\iint_{\Lambda^2} \varphi(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi(\xi_i, \eta_j) \rho_i \rho_j \quad (3.47)$$

L'avantage de cette règle de quadrature réside dans le fait que l'intégration numérique, qui est exacte pour un domaine non déformé, reste très précise pour des éléments déformés (Maday et Rønquist, 1990). L'erreur introduite dans l'algorithme, due à la phase d'intégration numérique, va donc demeurer très faible. En pratique, lorsque l'élément est déformé, l'intégration numérique nécessite l'utilisation du jacobien lié à la transformation de coordonnées (3.43)

$$\int_{\Omega_e} u d\Omega = \iint_{\Lambda^2} u(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \rightarrow \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u(\xi_i, \eta_j) |J(\xi_i, \eta_j)| \rho_i \rho_j$$

Celui-ci peut être calculé en dérivant directement les expressions (3.43), ce qui donne

$$\begin{aligned} x_{\xi} &= \sum_{a=1}^{n_g} \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_a^e & ; & & x_{\eta} &= \sum_{a=1}^{n_g} \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_a^e \\ y_{\xi} &= \sum_{a=1}^{n_g} \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_a^e & ; & & y_{\eta} &= \sum_{a=1}^{n_g} \frac{\partial N_a(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_a^e \end{aligned}$$

On en déduit le jacobien de la transformation  $J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}$ , et l'expression numérique de la matrice de changement de coordonnées inverse

$$\xi_x = \frac{y_{\eta}}{J} \quad \xi_y = -\frac{x_{\eta}}{J} \quad \eta_x = -\frac{y_{\xi}}{J} \quad \eta_y = \frac{x_{\xi}}{J}$$

Nous disposons maintenant de tous les éléments pour écrire l'expression des forces intérieures au niveau élémentaire. D'après l'expression (3.42), nous voyons qu'il suffit de savoir calculer l'intégrale sur  $\Lambda^2$  d'un terme du type  $\partial_a u_b \cdot \partial_c v_d$ ,

avec  $(a, b, c, d) \in \{x, y\}$ , pour pouvoir calculer les forces intérieures au niveau élémentaire, qui ne sont qu'une somme de produits de termes de ce type par les paramètres élastiques du matériau. Or

$$\begin{aligned} \partial_a u_b \cdot \partial_c v_d &= \left( \frac{\partial u_b}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial u_b}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \left( \frac{\partial v_d}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial v_d}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial c} \right) \\ &= \xi_a \xi_c \frac{\partial u_b}{\partial \xi} \frac{\partial v_d}{\partial \xi} + \xi_a \eta_c \frac{\partial u_b}{\partial \xi} \frac{\partial v_d}{\partial \eta} + \eta_a \xi_c \frac{\partial u_b}{\partial \eta} \frac{\partial v_d}{\partial \xi} + \eta_a \eta_c \frac{\partial u_b}{\partial \eta} \frac{\partial v_d}{\partial \eta} \\ &= a_{11} \frac{\partial u_b}{\partial \xi} \frac{\partial v_d}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial u_b}{\partial \xi} \frac{\partial v_d}{\partial \eta} + a_{21} \frac{\partial u_b}{\partial \eta} \frac{\partial v_d}{\partial \xi} + a_{22} \frac{\partial u_b}{\partial \eta} \frac{\partial v_d}{\partial \eta} \end{aligned}$$

en ayant posé  $a_{11} = \xi_a \xi_c$ ,  $a_{12} = \xi_a \eta_c$ ,  $a_{21} = \eta_a \xi_c$  et  $a_{22} = \eta_a \eta_c$ . Comme nous l'avons vu, les champs considérés s'écrivent

$$u_b(\xi, \eta) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N u_{pq}^b h_p(\xi) h_q(\eta) \quad (3.48)$$

et

$$v_d(\xi, \eta) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N v_{rs}^d h_r(\xi) h_s(\eta)$$

Ce qui par dérivation donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_b(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N u_{pq}^b h'_p(\xi) h_q(\eta) & \frac{\partial u_b(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N u_{pq}^b h_p(\xi) h'_q(\eta) \\ \frac{\partial v_d(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N v_{rs}^d h'_r(\xi) h_s(\eta) & \frac{\partial v_d(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N v_{rs}^d h_r(\xi) h'_s(\eta) \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration numérique (3.47) pour calculer l'intégrale sur le domaine élémentaire, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \partial_a u_b \cdot \partial_c v_d d\Omega &= \sum_r \sum_s v_{rs}^d \sum_i \sum_j J_e \rho_i \rho_j \sum_p \sum_q u_{pq}^b [ a_{11}(\xi_i, \eta_j) h'_p(\xi_i) h_q(\eta_j) h'_r(\xi_i) h_s(\eta_j) \\ &\quad + a_{12}(\xi_i, \eta_j) h'_p(\xi_i) h_q(\eta_j) h_r(\xi_i) h'_s(\eta_j) \\ &\quad + a_{21}(\xi_i, \eta_j) h_p(\xi_i) h'_q(\eta_j) h'_r(\xi_i) h_s(\eta_j) \\ &\quad + a_{22}(\xi_i, \eta_j) h_p(\xi_i) h_q(\eta_j) h_r(\xi_i) h'_s(\eta_j) ] \end{aligned} \quad (3.49)$$

L'intérêt fondamental de disposer de la formule  $h_i(\xi_j) = \delta_{ij}$  apparaît ici, en effet, en l'introduisant dans (3.49), nous pouvons réduire très sensiblement le nombre de calculs à effectuer. Après simplification, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \partial_a u_b \cdot \partial_c v_d d\Omega &= \sum_r \sum_s \rho_s \left( \sum_i \rho_i J_e(\xi_i, \eta_s) h'_r(\xi_i) [\xi_a \xi_c(\xi_i, \eta_s) \alpha_{is}^b + \eta_a \xi_c(\xi_i, \eta_s) \beta_{si}^b] \right) v_{rs}^d \\ &\quad + \sum_r \sum_s \rho_r \left( \sum_j \rho_j J_e(\xi_r, \eta_j) h'_s(\eta_j) [\xi_a \eta_c(\xi_r, \eta_j) \alpha_{rj}^b + \eta_a \eta_c(\xi_r, \eta_j) \beta_{jr}^b] \right) v_{rs}^d \end{aligned} \quad (3.50)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{is}^b &= \sum_{p=0}^N h'_p(\xi_i) u_{ps}^b & \alpha_{rj}^b &= \sum_{p=0}^N h'_p(\xi_r) u_{pj}^b \\ \beta_{si}^b &= \sum_{q=0}^N h'_q(\eta_s) u_{iq}^b & \beta_{jr}^b &= \sum_{q=0}^N h'_q(\eta_j) u_{rj}^b \end{aligned} \quad (3.51)$$

Cela permet de voir que le calcul des forces intérieures au niveau élémentaire peut être effectué à l'aide de produits du champ par des matrices données une fois pour toutes, dans une première étape pour calculer les composantes du gradient (termes  $\alpha$  et  $\beta$  ci-dessus, équation 3.51), et dans une deuxième étape pour intégrer numériquement les composantes à

l'aide de l'expression (3.50). Cela justifie les considérations sur le parallélisme et le coût calcul présentées dans la section 3.4.

Le calcul du terme des *forces extérieures* (forces de volume) est direct. En effet, en utilisant la propriété fondamentale (3.44), il vient

$$\begin{aligned}
 (f, v)_{\Omega_e} &= \int_{\Omega_e} f \cdot v \, d\Omega \\
 &= \sum_i \sum_j J_e \rho_i \rho_j f_x(\xi_i, \eta_j) \sum_r \sum_s v_{rs}^x h_r(\xi_i) h_s(\eta_j) \\
 &\quad + \sum_i \sum_j J_e \rho_i \rho_j f_y(\xi_i, \eta_j) \sum_r \sum_s v_{rs}^y h_r(\xi_i) h_s(\eta_j) \\
 &= \sum_r \sum_s J_e \rho_r \rho_s f_x(\xi_r, \eta_s) v_{rs}^x + \sum_r \sum_s J_e \rho_r \rho_s f_y(\xi_r, \eta_s) v_{rs}^y
 \end{aligned}$$

Si la source est colloquée exactement en un point  $(\xi_{r_0}, \eta_{s_0})$  (en d'autres termes, si son support est un vrai dirac spatial), alors l'intégration numérique n'apparaît pas, et l'on a directement

$$(f, v)_{\Omega_e} = f_x(\xi_{r_0}, \eta_{s_0}) v_{r_0 s_0}^x + f_y(\xi_{r_0}, \eta_{s_0}) v_{r_0 s_0}^y$$

Pour introduire un tenseur de moment sismique  $m = m_0 I$  correspondant à une source explosive, nous écrivons

$$\begin{aligned}
 (f, v)_{\Omega_e} &= \int_{\Omega_e} (\partial_x v_x + \partial_y v_y) \sigma_0(x, y) \, d\Omega \\
 &= \int_{\Lambda^2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial v_y}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} \eta_y \right) \sigma_0(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| \, d\xi d\eta \\
 &= \sum_r \sum_s \sum_i \rho_i \rho_s J(\xi_i, \eta_s) \sigma_0(\xi_i, \eta_s) \frac{\partial \xi}{\partial x}(\xi_i, \eta_s) h'_r(\xi_i) \\
 &\quad + \sum_r \sum_s \sum_j \rho_r \rho_j J(\xi_r, \eta_j) \sigma_0(\xi_r, \eta_j) \frac{\partial \eta}{\partial x}(\xi_r, \eta_j) h'_s(\eta_j) \\
 &\quad + \sum_r \sum_s \sum_i \rho_i \rho_s J(\xi_i, \eta_s) \sigma_0(\xi_i, \eta_s) \frac{\partial \xi}{\partial y}(\xi_i, \eta_s) h'_r(\xi_i) \\
 &\quad + \sum_r \sum_s \sum_j \rho_r \rho_j J(\xi_r, \eta_j) \sigma_0(\xi_r, \eta_j) \frac{\partial \eta}{\partial y}(\xi_r, \eta_j) h'_s(\eta_j)
 \end{aligned}$$

En suivant exactement le même raisonnement, nous trouvons l'expression de la matrice de masse au niveau élémentaire en écrivant

$$(\rho_M \ddot{u}, v)_{\Omega_e} = \sum_r \sum_s J_e \rho_r \rho_s \rho_M \ddot{u}_x(\xi_r, \eta_s) v_{rs}^x + \sum_r \sum_s J_e \rho_r \rho_s \rho_M \ddot{u}_y(\xi_r, \eta_s) v_{rs}^y$$

où  $\rho_M$  représente la densité de masse du milieu considéré, qui ne devra pas être confondue avec les poids  $\rho_i$  de la formule de quadrature. L'expression (3.44) est donc essentielle dans toute la méthode des éléments spectraux, car elle permet de prouver que la matrice de masse du système est *exactement diagonale*, ce qui rend triviale l'inversion du système linéaire (3.16) et allège par suite les calculs de manière considérable.

Comme nous l'avons signalé plus haut, après avoir calculé ces contributions élémentaires, il faut *assembler* le système pour passer au niveau global. Pour cela, les contributions élémentaires doivent être sommées sur les frontières communes à plusieurs éléments du maillage (assemblage du système au sens des éléments finis). La matrice de masse, qui est constante, est assemblée une fois pour toutes au début de l'algorithme, avant la boucle d'évolution en temps. Les forces intérieures sont recalculées au niveau élémentaire et assemblées à chaque pas de temps.



## Chapitre 4

# Étude de milieux 2D réalistes par la méthode des éléments spectraux

### 4.1 Introduction

Dans le présent chapitre, nous démontrons la souplesse de la méthode des éléments spectraux en simulant la propagation des ondes dans des modèles 2D ayant une structure plus réaliste que ceux utilisés dans le chapitre précédent (milieux hétérogènes, milieux présentant une topographie de surface ou une discontinuité de la surface libre, ou encore types d'ondes réputés difficiles à modéliser en utilisant des méthodes numériques plus traditionnelles, comme les ondes réfractées ou les ondes de Stoneley). De tels modèles se rencontrent souvent dans la pratique. Par exemple lorsqu'une campagne sismique est effectuée dans une zone présentant une topographie, des discontinuités de la surface libre, ou si des failles ou des interfaces franches existent dans le milieu, des phénomènes tels que la propagation d'ondes d'interface, ou la conversion d'ondes de surface en ondes de volume peuvent avoir lieu. Dans le présent chapitre, nous analysons donc les résultats fournis par la méthode des éléments spectraux sur un certain nombre de modèles compliqués correspondant à de telles situations. Nous terminons cette étude à 2D en calculant des effets de site dans des structures relativement simples, mais pour lesquelles existent des solutions de référence.

### 4.2 Modélisation des ondes réfractées

Le calcul correct des ondes réfractées sur une interface dans un milieu hétérogène est fondamental dans toutes les expériences de sismique réfraction par exemple. Pour modéliser ce phénomène, nous considérons un milieu composé de deux demi-espaces élastiques de propriétés différentes en contact, une source explosive étant placée dans l'un des deux. Une onde P directe va se propager, et sera en partie réfléchi et en partie transmise à l'interface. Une onde convertie P-S sera également générée dans chaque demi-espace. Mais les phases les plus intéressantes, et les plus difficiles à modéliser, sont certainement les ondes réfractées qui vont se propager le long de l'interface, et qui seront enregistrées par les récepteurs placés plus loin que l'angle critique. Un schéma des différents fronts d'ondes dans un tel modèle est représenté sur la figure 4.3 (dans le cas acoustique, qui est plus simple donc probablement plus clair pour un schéma cherchant à illustrer le phénomène). Il existe une solution exacte à ce problème (Aki et Richards, 1980). Dans les solutions analytiques que nous utiliserons ci-après, les fonctions de Green sont calculées en utilisant la méthode de Cagniard-de Hoop (de Hoop, 1960) à l'aide d'un code qui nous a été fourni par P. Berg et F. If. Les fonctions de Green sont ensuite convoluées numériquement avec la fonction temporelle de la source.

Le maillage est divisé horizontalement en deux parties ayant des propriétés élastiques différentes. Des conditions absorbantes sont utilisées sur tous les bords de la grille. Le milieu inférieur a une vitesse P de  $3400 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1963 \text{ m.s}^{-1}$  et une densité de  $2600 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le milieu supérieur a une vitesse P de  $2500 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1558 \text{ m.s}^{-1}$  et une densité de  $1500 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le modèle physique que nous étudions a une largeur de 4000 m et une hauteur de 3000 m. Le maillage est composé de  $40 \times 30$  éléments, un degré polynômial de 8 étant utilisé dans chaque direction d'un élément. Ainsi, le nombre total de points du maillage est de 77361. Le pas de temps utilisé est de nouveau de  $\Delta t = 0.25$  ms (correspondant à un nombre de Courant maximal de 0.25), et le nombre total de pas de temps est de 6000. La position de la source est  $(x, z) = (1042, 1570)$  m et la ligne de récepteurs s'étend de  $(500, 1920)$  à  $(3900, 1920)$  m. La source

est une explosion, sa dépendance temporelle est un Ricker de fréquence centrale 14 Hz. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 4.1. Nous pouvons observer l'onde P directe, les ondes réfléchies et converties à l'interface, ainsi que différents types d'ondes réfractées, comme le montre le diagramme de la figure 4.3 dans le cas acoustique. Les sismogrammes enregistrés par la ligne de récepteurs sont présentés sur la figure 4.2, et la comparaison avec la solution analytique pour les récepteurs 60 à 90 est montrée sur la figure 4.4. Sur cette figure, la solution numérique a été tracée avec également les résidus par rapport à la solution analytique, dessinés à la même échelle après multiplication par un facteur de 10. Nous trouvons pour tous les types d'ondes un très bon accord, l'erreur relative maximum étant de l'ordre de 1 %. Les réflexions parasites venant des frontières absorbantes constituent à nouveau la plus forte source d'erreur numérique, en particulier les diffractions parasites provenant des coins supérieurs du modèle.

### 4.3 Cas d'une onde de Rayleigh dispersive

Dans le cas d'une fine couche de faible vitesse (par exemple, sur le terrain, dans la zone superficielle de quelques mètres d'épaisseur soumise aux intempéries, ou « weathered zone ») située sur un demi-espace élastique homogène, l'onde de Rayleigh doit être fortement dispersive (« ground roll »). Un tel phénomène est observé fréquemment en sismique terrestre active, les tirs étant effectués à faible profondeur, et émettant donc beaucoup d'énergie dans cette couche superficielle altérée. Considérons un demi-espace élastique homogène ayant une vitesse P de  $3000 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1500 \text{ m.s}^{-1}$  et une densité de  $2000 \text{ kg.m}^{-3}$ , recouvert d'une fine couche élastique, d'une épaisseur de 63.2 m, ayant une vitesse P de  $2000 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1200 \text{ m.s}^{-1}$  et une densité de  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Il n'existe pas de solution analytique à ce problème, mais un certain nombre d'études numériques sont disponibles (Priolo *et al.*, 1994). Le modèle physique considéré a une largeur de 3200 m et une hauteur de 2400 m. Le maillage est composé de  $50 \times 38$  éléments, un degré polynomial de 8 étant utilisé dans chaque direction d'un élément. Le nombre total de points du maillage est de 122 305. Le pas de temps utilisé est de  $\Delta t = 0.4 \text{ ms}$ , et le nombre total de pas de temps est de 3800. La position de la source est  $(x, z) = (1100, 2383) \text{ m}$  et la ligne de récepteurs est placée à la surface libre entre  $x = 1200$  et  $x = 2900 \text{ m}$ . La source est une explosion, sa dépendance temporelle est un Ricker de fréquence centrale 13 Hz. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 4.5. L'événement dominant est une onde de Rayleigh dispersive, accompagnée de l'onde P directe ainsi que des ondes réfléchies et converties dans la zone à faible vitesse. Les sismogrammes enregistrés par la ligne de récepteurs sont présentés sur la figure 4.6, où nous pouvons identifier des multiples de l'onde P directe, générés dans la zone de faible vitesse, ainsi que l'onde de Rayleigh dispersive.

### 4.4 Modèle des deux quarts d'espace

Étudions à présent la propagation des ondes d'interface, (ondes de Stoneley) dans le cas d'une interface élastique-élastique en contact avec une surface libre. Bien que de telles ondes soit rarement observées dans la pratique, les récepteurs étant la plupart du temps situés en surface, une telle modélisation peut permettre de comprendre ce qui se passe lors d'un tir proche de la surface (excitant donc une forte onde de Rayleigh) dans une zone présentant des couches géologiques fortement inclinées et affleurant en surface (discontinuités franches de propriétés élastiques le long de la surface libre). Le comportement de ces ondes est également assez proche de celui des ondes de puits (« ondes de tube ») observées en sismique pétrolière. Le modèle étudié est formé de deux quarts d'espace élastiques, de propriétés différentes, en contact. Une force source est placée dans le quart d'espace de gauche juste sous la surface. Elle va exciter une forte onde de Rayleigh qui va se propager le long de la surface, frapper l'interface élastique sur laquelle elle sera en partie réfléchi et en partie transmise. Le point intéressant à noter ici est que, en fonction des propriétés élastiques des deux milieux, l'onde de Rayleigh excitera, ou n'excitera pas, à son tour une onde d'interface qui se propagera vers le bas le long de l'interface élastique (Pilant, 1979). Il n'existe pas de solution analytique à ce problème complexe, mais une étude numérique détaillée est disponible dans la littérature (Ottaviani, 1971). Des conditions absorbantes sont utilisées sur tous les côtés du modèle numérique, à l'exception de la surface libre. Le modèle physique étudié a une largeur de 3200 m, et une hauteur de 2400 m. Le maillage est composé de  $50 \times 38$  éléments, un degré polynomial de 8 étant utilisé dans chaque direction d'un élément. Le nombre total de points du maillage est de 122 305. Le pas de temps utilisé est de  $\Delta t = 0.40 \text{ ms}$  (correspondant à un nombre de Courant maximal de 0.50), et le nombre total de pas de temps est de 3800. Des résultats précis concernant ce problème ont déjà été obtenus en utilisant une méthode d'éléments spectraux différente, basée sur des polynômes de Chebyshev (Priolo *et al.*, 1994), et seront utilisés à titre de comparaison.

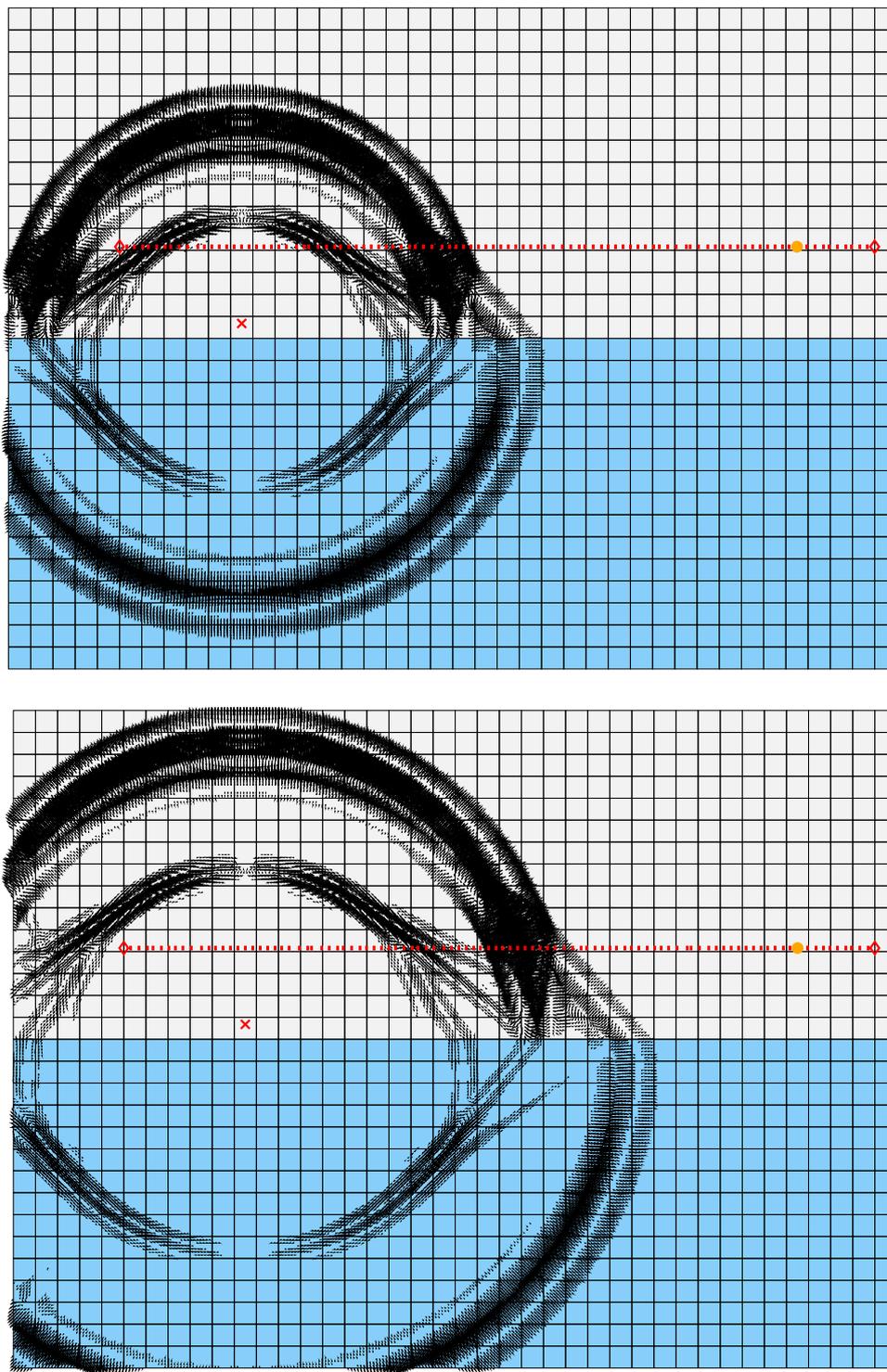


FIG. 4.1 – Instantanés obtenus dans le cas de deux demi-espaces élastiques en contact. On peut observer l'onde  $P$  directe, les ondes réfléchies et converties à l'interface, ainsi que différents types d'ondes réfractées qui se propagent le long de l'interface, comme expliqué sur le schéma de la figure 4.3.

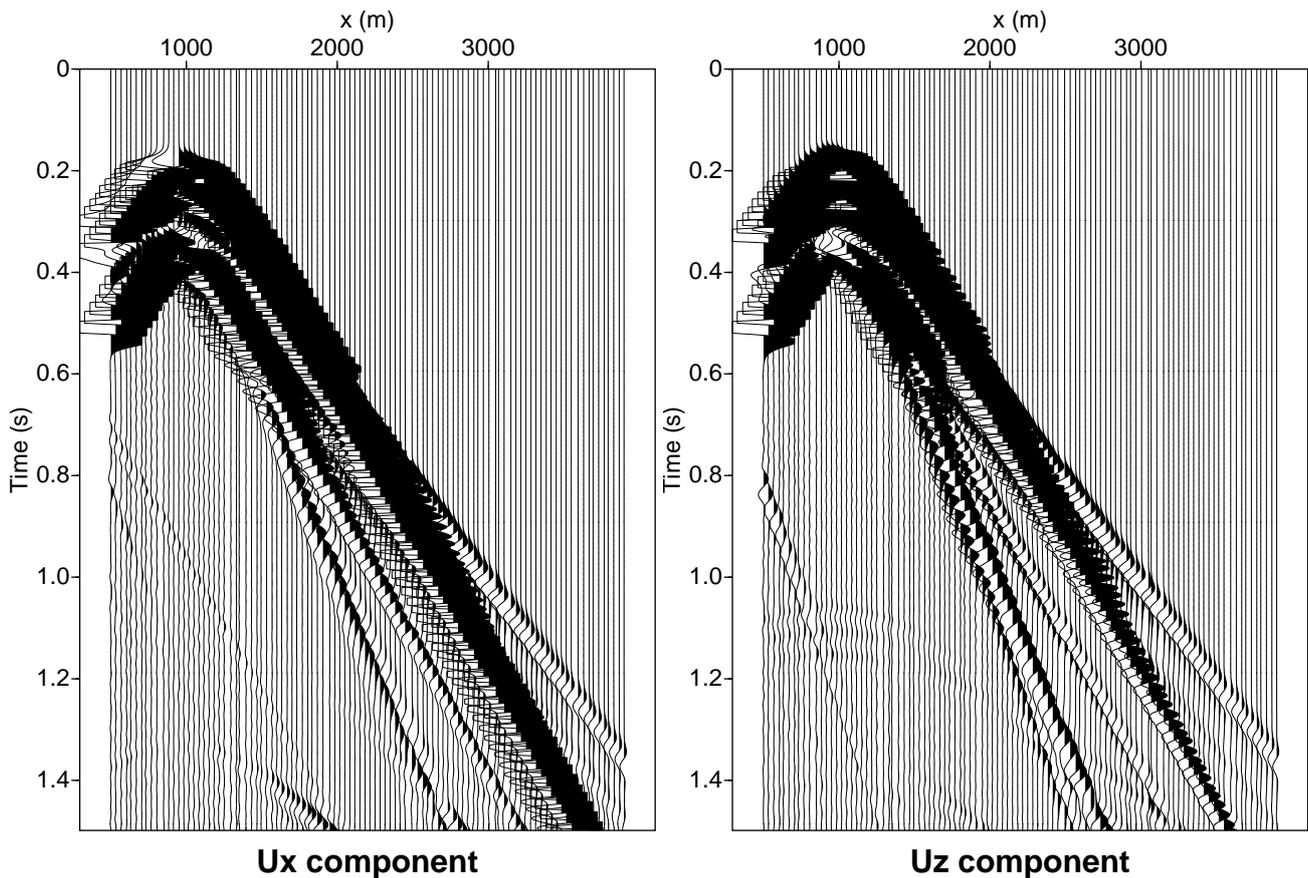


FIG. 4.2 – Sismogrammes enregistrés dans le cas de deux demi-espaces élastiques en contact. On peut observer l'onde  $P$  directe, les ondes réfléchies et converties à l'interface, ainsi que différents types d'ondes réfractées. En raison de la faible amplitude des ondes réfractées par rapport à l'onde directe, les amplitudes ont été représentées avec une forte saturation, ce qui fait apparaître un peu de bruit numérique et des réflexions parasites provenant des bords du modèle.

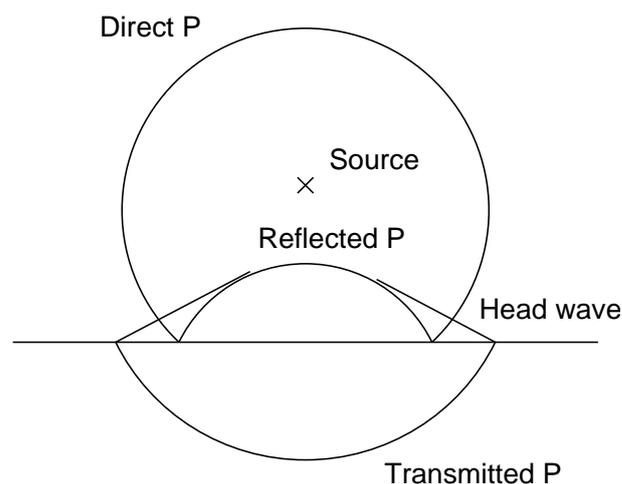
#### 4.4.1 Onde d'interface réelle

Dans ce premier calcul, les paramètres élastiques dans les deux milieux sont choisis tels que la solution théorique inclue une onde d'interface (Pilant, 1979). Le milieu de gauche a une vitesse  $P$  de  $2000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , une vitesse  $S$  de  $1200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et une densité de  $1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , ce qui correspond à un coefficient de Poisson de 0.22. Le milieu de droite a une vitesse  $P$  de  $3000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , une vitesse  $S$  de  $1500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et une densité de  $2000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , ce qui correspond à un coefficient de Poisson de 0.33. La source est placée dans le milieu de gauche juste sous la surface, en  $(x, z) = (1100, 2350) \text{ m}$  et la ligne de récepteurs longe le milieu de gauche à la surface, puis descend le long de l'interface (voir figure 4.7). La source est une force verticale, sa dépendance temporelle est un Ricker ayant une fréquence centrale de 13 Hz. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 4.7. En plus des ondes  $P$  et  $S$  directes et des ondes converties, nous observons les ondes de Rayleigh réfléchie et transmise par l'interface en son point de contact avec la surface, ainsi qu'une onde d'interface qui se propage en descendant le long de l'interface (voir en particulier le deuxième instantané). Les sismogrammes enregistrés par la ligne de récepteurs sont représentés sur la figure 4.8, où nous observons l'onde d'interface sous la forme du fort signal lent qui est généré au point de contact entre les deux milieux et la surface libre. La trace enregistrée par le récepteur 90, et représentée sur la figure 4.9, montre clairement cette onde d'interface sous la forme de l'arrivée tardive aux environs du temps  $t = 1.4 \text{ s}$ . Ces résultats sont en accord avec ceux de Priolo *et al.* (1994).

#### 4.4.2 Onde d'interface cachée

Dans ce second test, nous choisissons un jeu de paramètres élastiques pour les deux milieux tel que la solution théorique n'inclue pas d'onde d'interface réelle (Pilant, 1979). Le milieu de droite a maintenant une vitesse  $P$  de  $3000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , une vitesse  $S$  de  $1300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et une densité de  $1100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , ce qui correspond à un coefficient de Poisson de 0.38. Les propriétés du milieu de gauche demeurent inchangées. Tous les autres paramètres de la simulation restent identiques au cas précédent. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 4.10. À la différence du calcul précédent, nous

FIG. 4.3 – Schéma représentant les différentes ondes existant dans le cas de deux milieux acoustiques en contact, avec une source explosive placée dans l'un deux. On reconnaît en particulier l'onde réfractée. Dans le cas plus complexe de deux milieux élastiques en contact, plusieurs types d'ondes réfractées existent. D'après Pilant (1979).



pouvons constater qu'aucune onde d'interface significative n'est maintenant générée au point de contact entre les deux milieux et la surface. Les sismogrammes enregistrés par la ligne de récepteurs sont présentés sur la figure 4.11. Ceux-ci montrent clairement l'absence d'onde d'interface significative, ce que l'on peut également vérifier sur la trace enregistrée comme précédemment par le récepteur 90 (voir figure 4.12). Ces résultats sont de nouveau en accord avec ceux de Priolo *et al.* (1994).

## 4.5 Discontinuité de la surface libre

Dans cet exemple, nous étudions le comportement d'une onde de Rayleigh rencontrant une discontinuité de la surface libre, par exemple une discontinuité en forme de marche d'escalier (« problème du coin »). Ce problème a fait l'objet d'une étude théorique (Lapwood, 1961) et d'une étude expérimentale (de Bremaecker, 1958). Il est représentatif d'un modèle géologique dont la surface présente une discontinuité franche, comme une falaise ou une cassure par exemple. Nous étudions ainsi le cas d'un quart d'espace élastique homogène. La source est une force verticale placée juste sous la surface libre supérieure. Afin de simuler un quart d'espace, des conditions absorbantes sont utilisées sur le bord gauche et sur le bord inférieur de la grille. Le milieu a une vitesse P de  $3200 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1847.5 \text{ m.s}^{-1}$  et une densité de  $2200 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le modèle physique étudié a une largeur de 4000 m, et une hauteur de 2400 m. Le maillage est composé de  $50 \times 30$  éléments, un degré polynômial de 8 étant utilisé dans chaque direction d'un élément. Le nombre total de points du maillage est de 96 641. Le pas de temps utilisé est de  $\Delta t = 0.50 \text{ ms}$  (correspondant à un nombre de Courant maximal de 0.50), et le nombre total de pas de temps de 5000. La position de la source est  $(x, z) = (2440, 2340) \text{ m}$  et la ligne de récepteurs est placée sur la surface libre de part et d'autre du coin. Les composantes normales et tangentielles du déplacement sont enregistrées par les récepteurs sur les deux surfaces. La source est une force colloquée, sa dépendance temporelle étant un Ricker ayant une fréquence centrale de 14.5 Hz. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 4.13. Nous pouvons observer une forte onde de Rayleigh qui se propage le long du bord supérieur du modèle, et qui est partiellement réfléchiée et partiellement transmise par le coin. On peut observer l'onde de Rayleigh transmise descendant le long du bord droit du modèle. Le coin se comporte comme un point diffractant, et donne naissance à des ondes P et S sphériques qui peuvent être clairement observées sur le deuxième instantané. Les sismogrammes enregistrés par la ligne de récepteurs placée de part et d'autre du coin sont montrés sur la figure 4.14.

## 4.6 Topographie de surface et interfaces courbes

La méthode proposée permet de modéliser correctement la propagation des ondes en présence d'interfaces courbes et/ou d'une topographie de surface. Il est clair que de tels modèles se rencontrent très fréquemment dans la pratique, dès lors que la structure géologique n'est pas constituée de simples couches planes. Nous considérons un modèle à deux couches, ayant à la fois une interface courbe et une topographie non plane. Une source explosive est placée dans la couche supérieure. Des conditions absorbantes sont utilisées sur tous les côtés de la grille, à l'exception de la surface libre. La couche inférieure a une vitesse P de  $2800 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1473 \text{ m.s}^{-1}$  et une densité de  $1500 \text{ kg.m}^{-3}$ . La couche supérieure a une vitesse P de  $2000 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1300 \text{ m.s}^{-1}$  et une densité de  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Ainsi, ce modèle présente un fort contraste de vitesse et également un fort contraste de coefficient de Poisson (0.13 pour la couche inférieure, 0.38 pour la couche supérieure). Le modèle étudié a une largeur de 2500 m, et sa hauteur est égale à 1700 m. Le maillage est composé

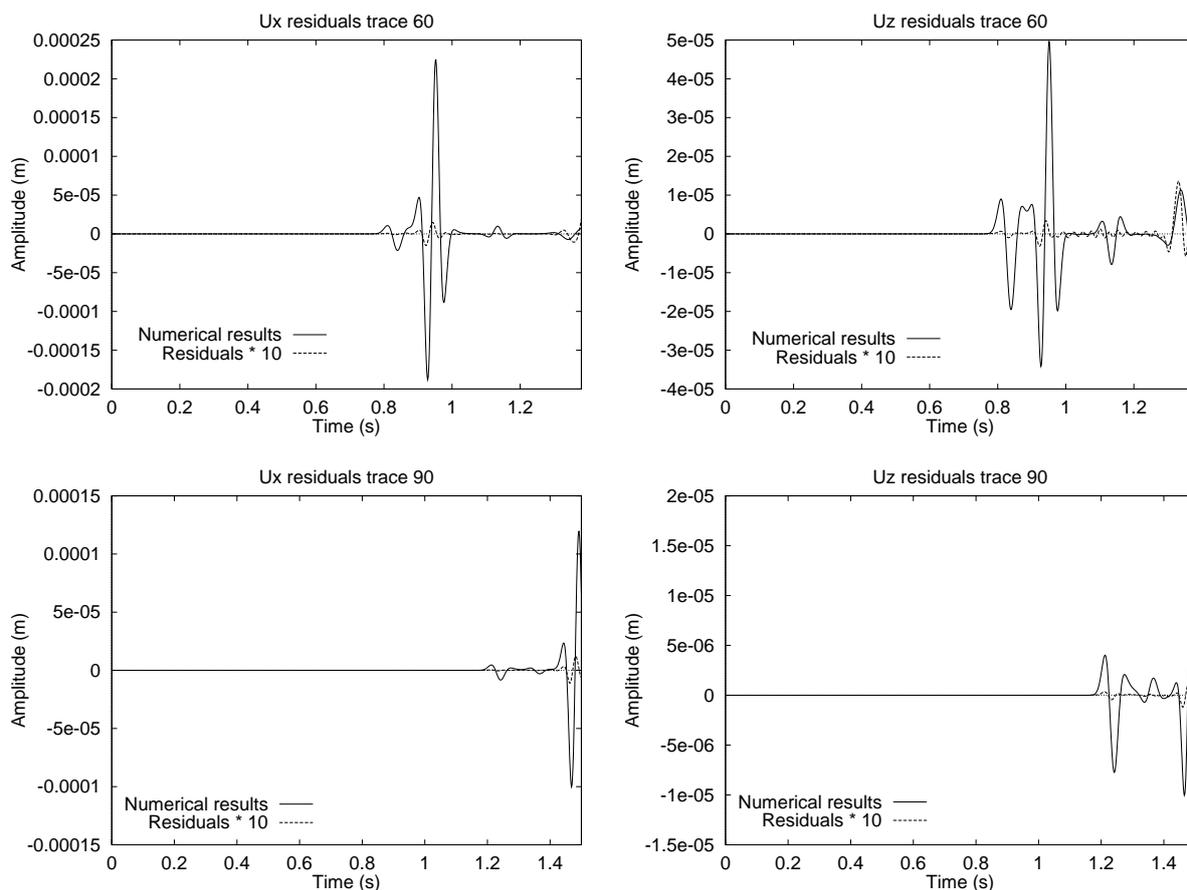


FIG. 4.4 – Traces enregistrées par les récepteurs 60 et 90 dans le cas de deux demi-espaces élastiques en contact. La solution numérique est représentée, ainsi que les résidus par rapport à la solution analytique, dessinés à la même échelle après multiplication par un facteur 10. L'accord obtenu est bon, y compris pour les ondes réfractées (par exemple la première arrivée), l'erreur relative maximale étant de l'ordre de 1 %. Les artefacts sur la droite sont dus à des réflexions parasites provenant des bords absorbants, en particulier des coins supérieurs du maillage, qui relie les frontières absorbantes à la surface libre.

de  $48 \times 40$  éléments, un degré polynômial de 8 étant utilisé dans chaque direction d'un élément. Le nombre total de points du maillage est de 123 585. Le pas de temps utilisé vaut  $\Delta t = 0.30$  ms, et le nombre total de pas de temps est de 5000.

#### 4.6.1 Source à l'intérieur du modèle

Dans ce premier exemple, la source est placée à l'intérieur du modèle dans la couche supérieure. La position de la source est  $(x, z) = (1250, 1150)$  m et la ligne de récepteurs s'étend de  $(400, 1400)$  à  $(2100, 1400)$  m. La source est une explosion, sa dépendance temporelle est un Ricker de fréquence centrale 15 Hz. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 4.15. Nous pouvons observer la forme complexe des différents fronts d'onde, en particulier les ondes réfléchies et converties à la fois à la surface et à l'interface, avec des triplications qui se forment après réflexion sur les petits monticules situés à la surface du modèle. Les sismogrammes enregistrés par la ligne de récepteurs placée dans le modèle sont représentés sur la figure 4.16. Les résultats obtenus sont en bon accord qualitatif avec ceux calculés en utilisant l'approche différentielle globale du chapitre précédent pour un modèle relativement semblable (voir paragraphe 2.6.2). Pour illustrer plus clairement encore le phénomène, un film de la propagation des différentes phases dans le modèle est représenté sur la figure 4.17. Nous avons dessiné séparément la divergence du déplacement (correspondant aux ondes de compression au sein de chaque couche homogène) en bleu-vert sur l'image de gauche, et l'unique composante non nulle du rotationnel (correspondant aux ondes de cisaillement au sein de chaque couche homogène) en rouge-orange sur l'image de droite. Une telle représentation permet de suivre pas à pas la formation des différentes phases et d'en saisir la complexité.

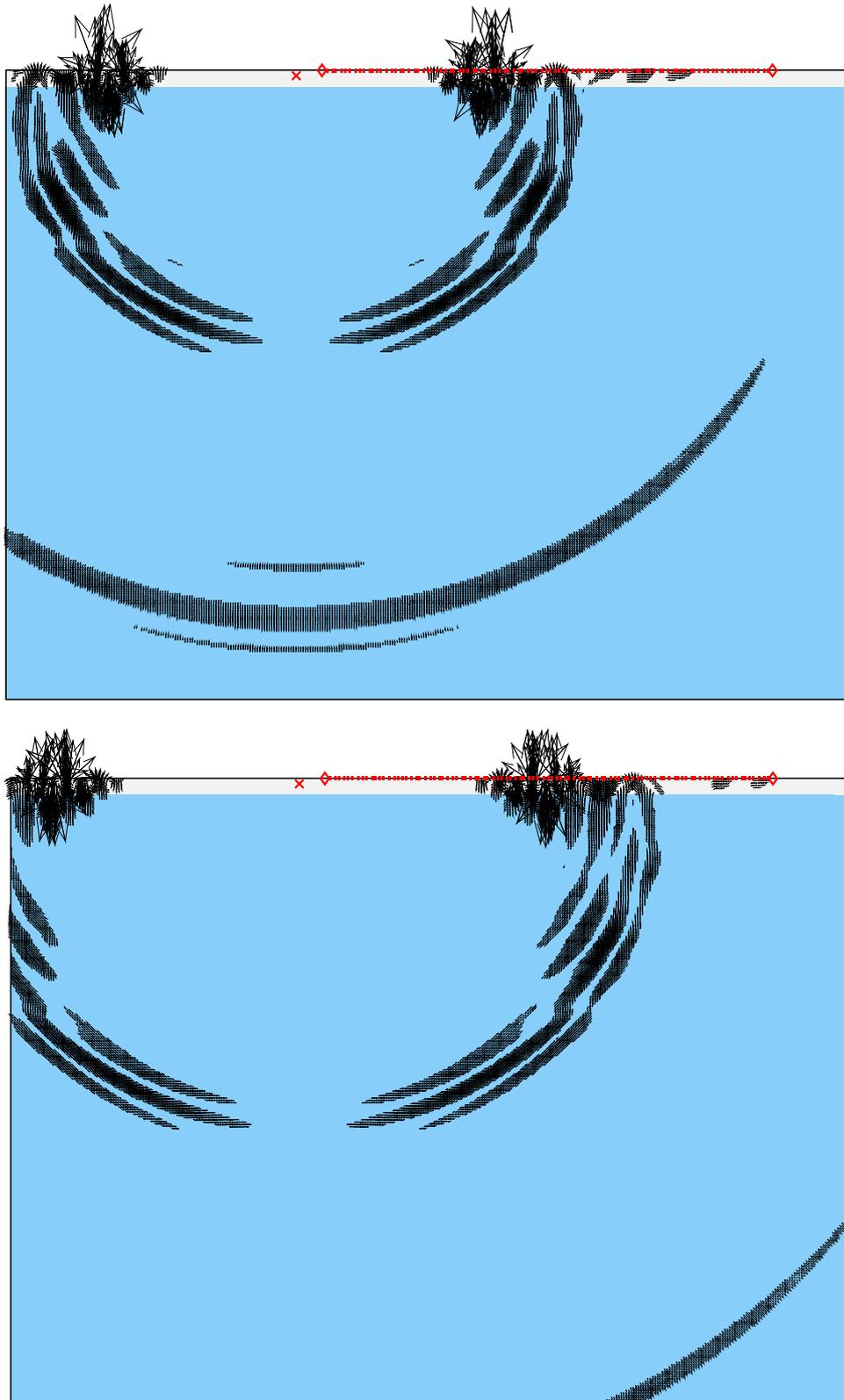


FIG. 4.5 – Instantanés obtenus pour le cas de l'onde de Rayleigh dispersive dans un bicouche élastique. On peut observer la phase dominante qui est l'onde de Rayleigh dispersive, ainsi que l'onde P directe et les multiples (ondes réfléchies et converties dans la zone à faible vitesse).

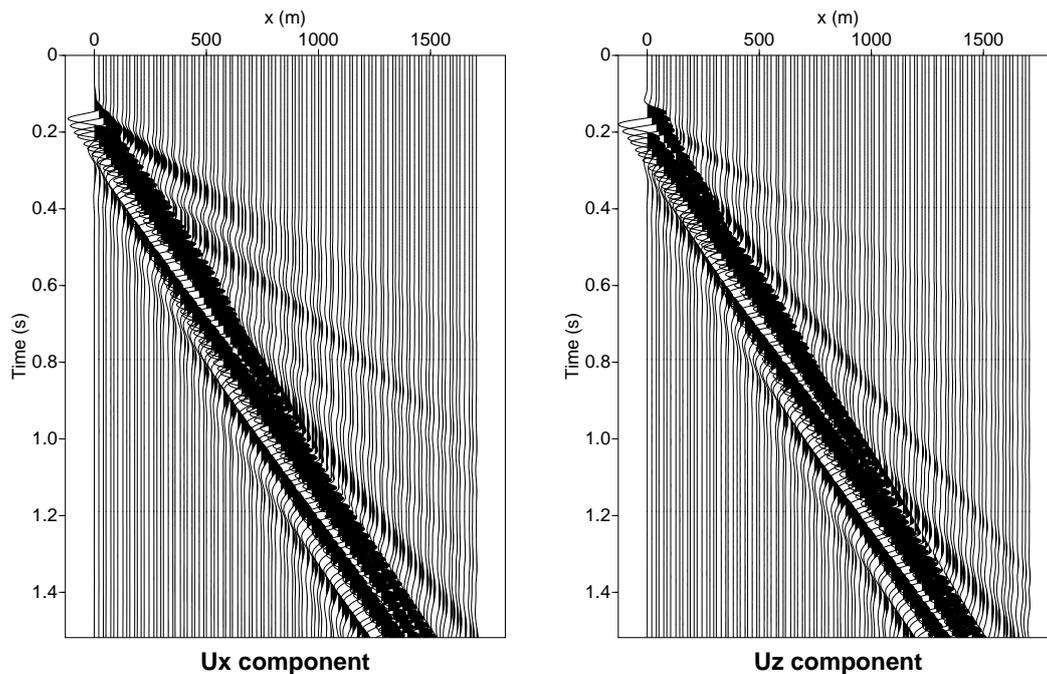


FIG. 4.6 – Sismogrammes obtenus pour le cas de l'onde de Rayleigh dispersive dans un bicouche élastique. On peut identifier des multiples de l'onde P directe, générés dans la zone de faible vitesse, ainsi que l'onde de Rayleigh dispersive.

#### 4.6.2 Source en surface

La source est maintenant placée dans la couche supérieure juste sous la surface. Une forte onde de Rayleigh est excitée et se propage le long de la surface courbe. La position de la source est  $(x, z) = (620, 1853)$  m et la ligne de récepteurs est placée entre  $x = 700$  m et  $x = 2100$  m à une hauteur de  $z = 1380$  m. Tous les autres paramètres de la simulation restent identiques à ceux de l'exemple précédent. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 4.18, et les sismogrammes sur la figure 4.19. On observe clairement l'onde de Rayleigh qui se propage le long de la topographie, ainsi qu'une conversion de mode d'onde de Rayleigh en onde de volume lorsque l'onde de Rayleigh rencontre un changement brusque de courbure de la surface libre (concavité prononcée). L'une de ces conversions de mode est particulièrement claire derrière l'onde S convertie à la surface libre sur le second instantané. Ces conversions de mode sont en accord avec les études théoriques publiées (Rulf, 1969 ; Martel et Gupta, 1969). Des effets similaires ont également été observés numériquement (Jih *et al.*, 1988). Nous retrouvons de plus qualitativement les mêmes phénomènes que ceux calculés avec l'approche différentielle du chapitre précédent pour un modèle relativement semblable (voir paragraphe 2.6.2).

### 4.7 Modèle réaliste dans les Andes péruviennes

Nous nous intéressons maintenant à la modélisation de la propagation des ondes dans une structure réaliste provenant des Andes péruviennes (ce modèle nous ayant été fourni par la société Elf-Aquitaine dans le cadre d'une collaboration). Dans cette région montagneuse (zone de « foothills »), un fort effet de diffraction lié à la topographie est à attendre. La structure géologique du modèle est représentée sur la figure 4.20, sans exagération verticale, ce qui permet de se rendre compte de l'importance des variations de topographie dans la structure. La largeur du modèle est de 5500 m, et sa hauteur « moyenne » typique est de l'ordre de 1300 m. Le maillage qui a été utilisé pour étudier cette structure est représenté sur la figure 4.21. Il est composé de  $60 \times 12$  éléments, un degré polynômial de 8 étant utilisé dans chaque direction d'un élément. Le nombre total de points du maillage est de 46 657. La source est une explosion, le point de tir se trouvant dans le milieu à la position  $(x, z) = (1000, 670)$  m. La dépendance temporelle de la source est un Ricker dont la fréquence centrale est de 12 Hz. La ligne de récepteurs est placée en surface entre  $x = 900$  et  $x = 5000$ , et enregistre les composantes horizontales et verticales du déplacement.

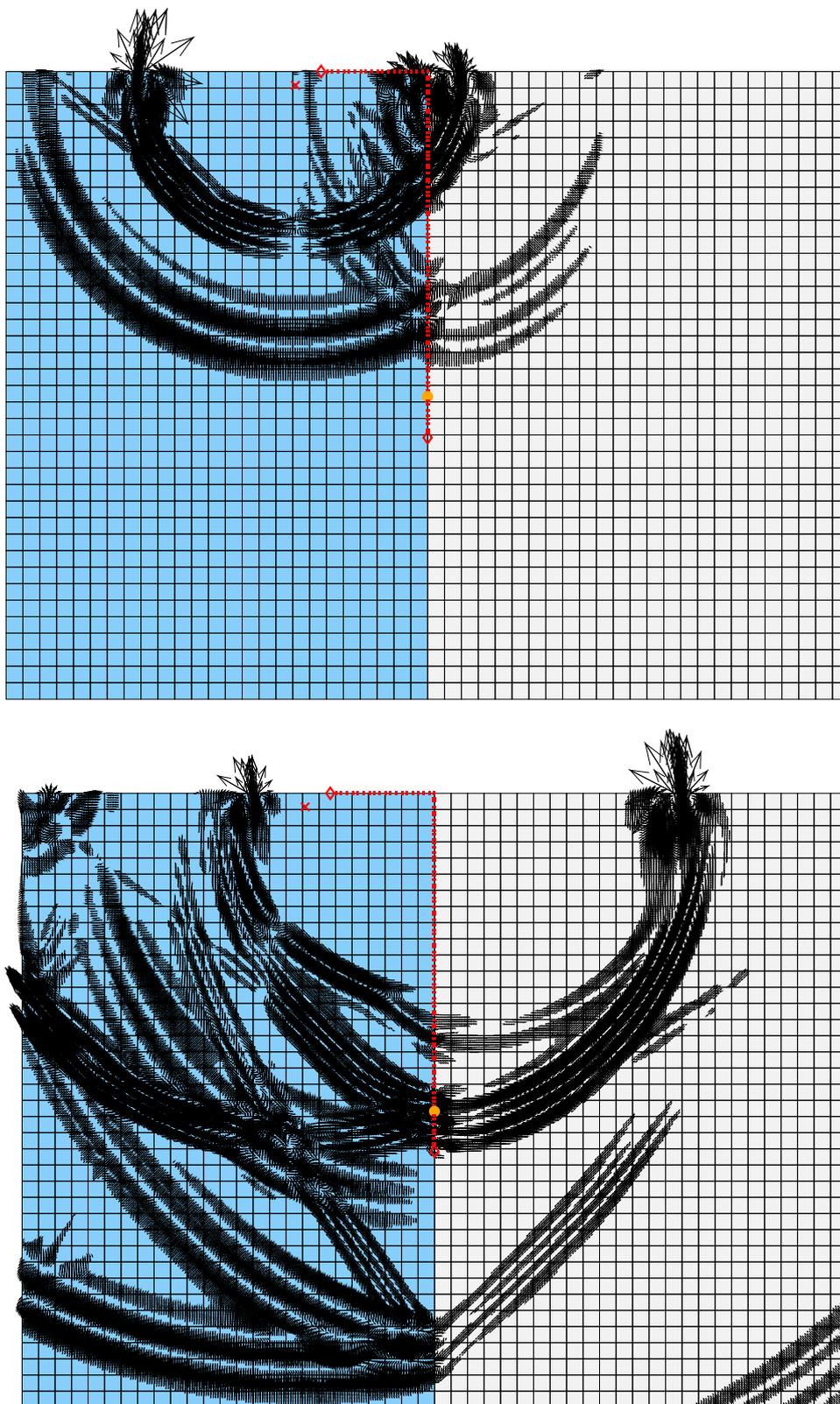


FIG. 4.7 – Instantanés obtenus dans le cas de deux quarts-d'espace élastiques en contact ayant des propriétés telles qu'une onde d'interface existe. En plus des ondes  $P$  et  $S$  directe et convertie, on peut observer des ondes de Rayleigh transmises et réfléchies se propageant le long de la surface libre, ainsi que l'onde d'interface qui se propage en descendant le long de l'interface (particulièrement visible sur le second instantané).

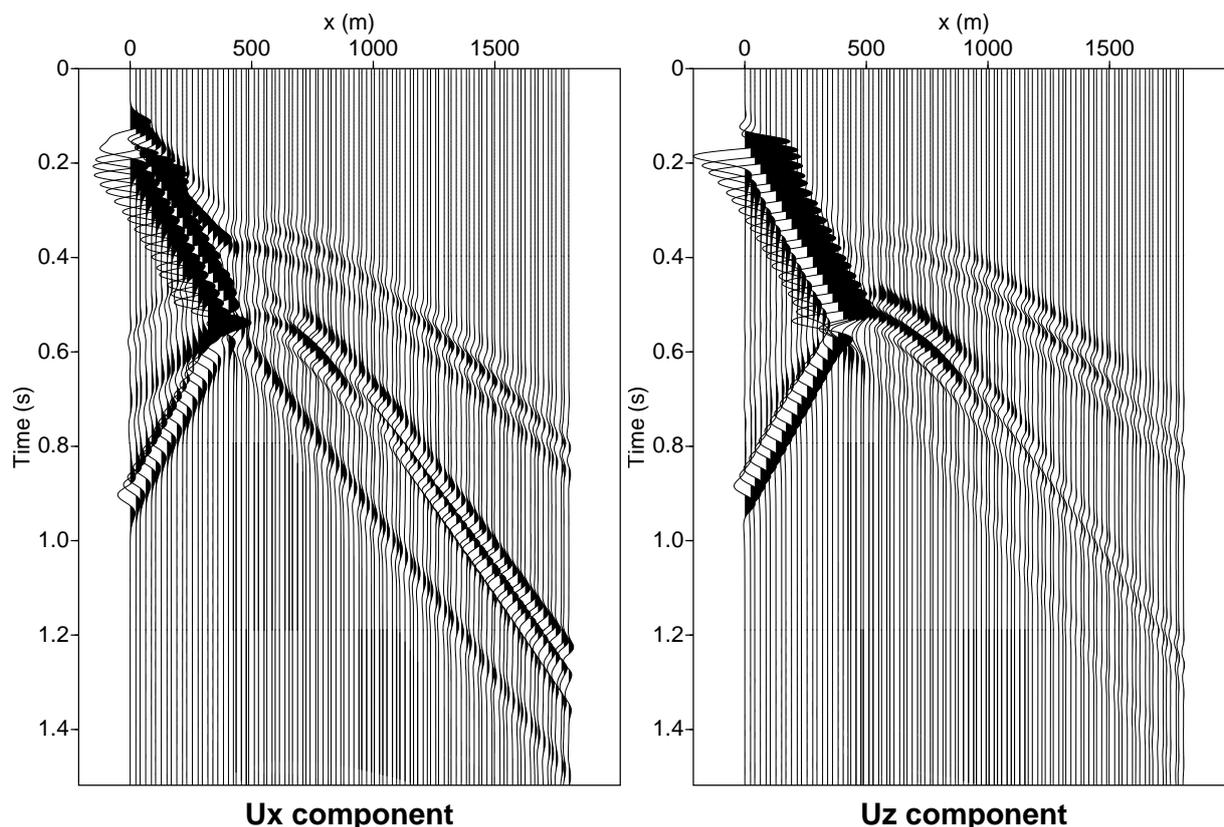


FIG. 4.8 – Sismogrammes enregistrés pour le cas de deux quarts-d’espace élastiques en contact ayant des propriétés telles qu’une onde d’interface existe. En plus des ondes P et S directe et convertie, on peut observer les ondes de Rayleigh transmises et réfléchies à la surface libre par l’interface, ainsi que l’onde d’interface qui se propage en descendant le long de l’interface (qui apparaît sous la forme de la phase lente générée aux alentours de  $t = 0.6$  s, particulièrement visible sur la composante  $u_x$ ).

#### 4.7.1 Modèle homogène

Afin d’estimer l’effet de cette topographie particulièrement accidentée sur les différents fronts d’onde, nous simulons dans un premier temps la propagation des ondes dans le modèle considéré comme homogène tant pour le modèle de vitesse que pour le modèle de densité. Le milieu homogène a une vitesse P de  $3200 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1847.5 \text{ m.s}^{-1}$  et une densité de  $2200 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le pas de temps utilisé est de  $\Delta t = 0.30 \text{ ms}$  (correspondant à un nombre de Courant maximal de 0.45), et le nombre total de pas de temps est de 5000. Les instantanés correspondants sont présentés sur la figure 4.22, et les sismogrammes sur la figure 4.23. Nous pouvons vérifier, comme nous nous y attendions, que même dans le cas où l’on considère le milieu comme homogène, l’effet de topographie est extrêmement important, et génère de fortes phases diffractées qui viennent se superposer aux ondes directes et réfléchies. L’effet de diffraction lié à la présence d’une forte topographie est particulièrement clair sur les sismogrammes.

#### 4.7.2 Modèle hétérogène plus réaliste

Pour finir, nous simulons à présent la propagation dans le modèle géologique « réel » estimé pour la structure considérée à partir d’une étude géologique réalisée sur le terrain (dont les résultats nous ont été fournis par la société Elf-Aquitaine). La vitesse P dans le milieu varie entre  $c_p = 2700$  et  $c_p = 3700 \text{ m.s}^{-1}$ , et la densité varie entre  $\rho = 2200$  et  $\rho = 2800 \text{ kg.m}^{-3}$ . Une valeur de coefficient de Poisson de 0.25 est utilisée dans l’ensemble du modèle pour estimer le modèle de vitesse S dans la structure. Notons au passage que, durant ce travail de thèse, nous nous sommes bornés à utiliser une technique de maillage par interpolation bord à bord relativement élémentaire. De ce fait, pour cette structure complexe, nous utilisons le maillage défini pour le cas homogène (voir figure 4.21), ce qui signifie que maintenant les paramètres élastiques ne sont plus constants au sein de chaque élément spectral. En d’autres termes, le maillage utilisé ne « suit » pas les différentes interfaces du modèle, qui est donc maillé en « marches d’escalier », et nous devons nous attendre à obtenir un peu de diffraction parasite dans notre simulation numérique. Les instantanés correspondant à cette simulation

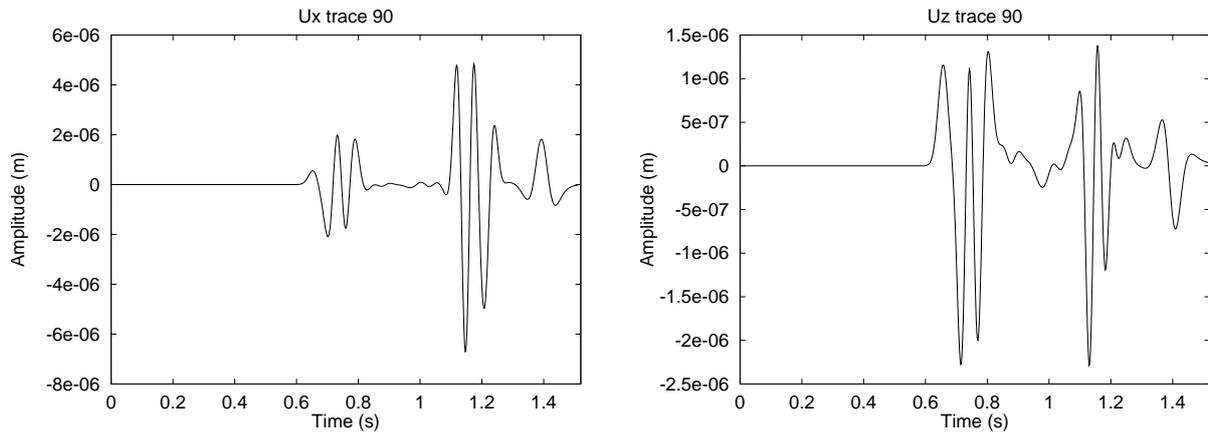


FIG. 4.9 – Trace enregistrée par le récepteur 90 dans le cas où une onde d'interface existe. Celle-ci apparaît comme l'arrivée tardive aux alentours de  $t = 1.4$  s.

sont présentés sur la figure 4.24, où l'on a également représenté en arrière-plan le modèle de vitesse P à l'aide de niveaux de gris. Les sismogrammes enregistrés par la ligne de récepteurs sont représentés sur la figure 4.25. Sur les instantanés, la divergence (vert/bleu) et l'unique composante non nulle du rotationnel (jaune/rouge) du vecteur déplacement ont été représentés séparément pour plus de clarté. Le rotationnel du vecteur déplacement ne possède dans ce cas qu'une composante non nulle car nous travaillons ici dans le cadre de déformations planes pour lesquelles la propagation s'effectue purement dans un plan. La forme très complexe des signaux qui se propagent se remarque clairement sur ces instantanés, notamment des nombreuses réflexions et conversions d'ondes se produisant sur les diverses interfaces du modèle, et qui se superposent avec le fort effet de diffraction lié à la topographie et que nous avons clairement mis en évidence dans le test précédent. Tous ces phénomènes apparaissent du reste de manière particulièrement claire sur les sismogrammes enregistrés en surface.

## 4.8 Modélisation de quelques effets de site 2D

### 4.8.1 Résonance basse fréquence dans un bassin sédimentaire

Il est fréquent de constater sur le terrain qu'une couche ou un bassin sédimentaire situés sur une couche plus rapide amplifient les déplacements et accélérations mesurés en surface. Les exemples les plus connus de ce type d'effets de site, tels que le bassin de Mexico ou la région de Kobe, ont conduit durant ces dernières années à des effets destructeurs. Les études de ce type de phénomènes ne manquent pas dans la littérature (Kawase et Aki, 1989 ; Horike *et al.*, 1990 ; Ohori *et al.*, 1992 ; Pitarka et Irikura, 1996). Dans le cas d'un bassin sédimentaire de forme non plane, en présence ou non d'une topographie de surface, nous souhaitons donc pouvoir modéliser des effets d'amplification à basse fréquence dans la couche sédimentaire. Pour cela, nous considérons un modèle qui nous a été suggéré par F. J. Sánchez-Sesma dans le cadre d'une collaboration, et qui est formé de deux couches. La couche la plus profonde, de vitesse rapide, a une vitesse P de  $3000 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1500 \text{ m.s}^{-1}$  (ce qui correspond à un coefficient de Poisson de 0.33), et une densité de  $2000 \text{ kg.m}^{-3}$ . La couche superficielle, plus lente, a une vitesse P de  $1000 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $500 \text{ m.s}^{-1}$  (ce qui correspond encore à un coefficient de Poisson de 0.33), et une densité de  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$ .

#### Bassin sédimentaire avec surface plane

Dans le premier exemple, dérivé du cas classique étudié par Aki et Larner (1970), la surface libre est plane ( $z = 0$ ), mais l'interface entre les deux couches a la forme analytique suivante (l'axe  $z$  étant gradué en profondeur, donc orienté vers le bas)

$$s(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)^2 \quad (4.1)$$

pour  $x$  exprimé en kilomètres, et variant entre  $-1$  et  $+1$ . Ainsi, l'épaisseur de la couche varie de  $1 \text{ km}$  en  $x = -1$  à  $1.5 \text{ km}$  en  $x = 0$  (voir figure 4.27). Nous plaçons en  $x_s = -1 \text{ km}$ ,  $z_s = 3 \text{ km}$ , c'est-à-dire en profondeur dans la couche rapide, une source explosive basse fréquence, dont la dépendance temporelle est un Ricker de fréquence centrale égale à  $0.75 \text{ Hz}$ .

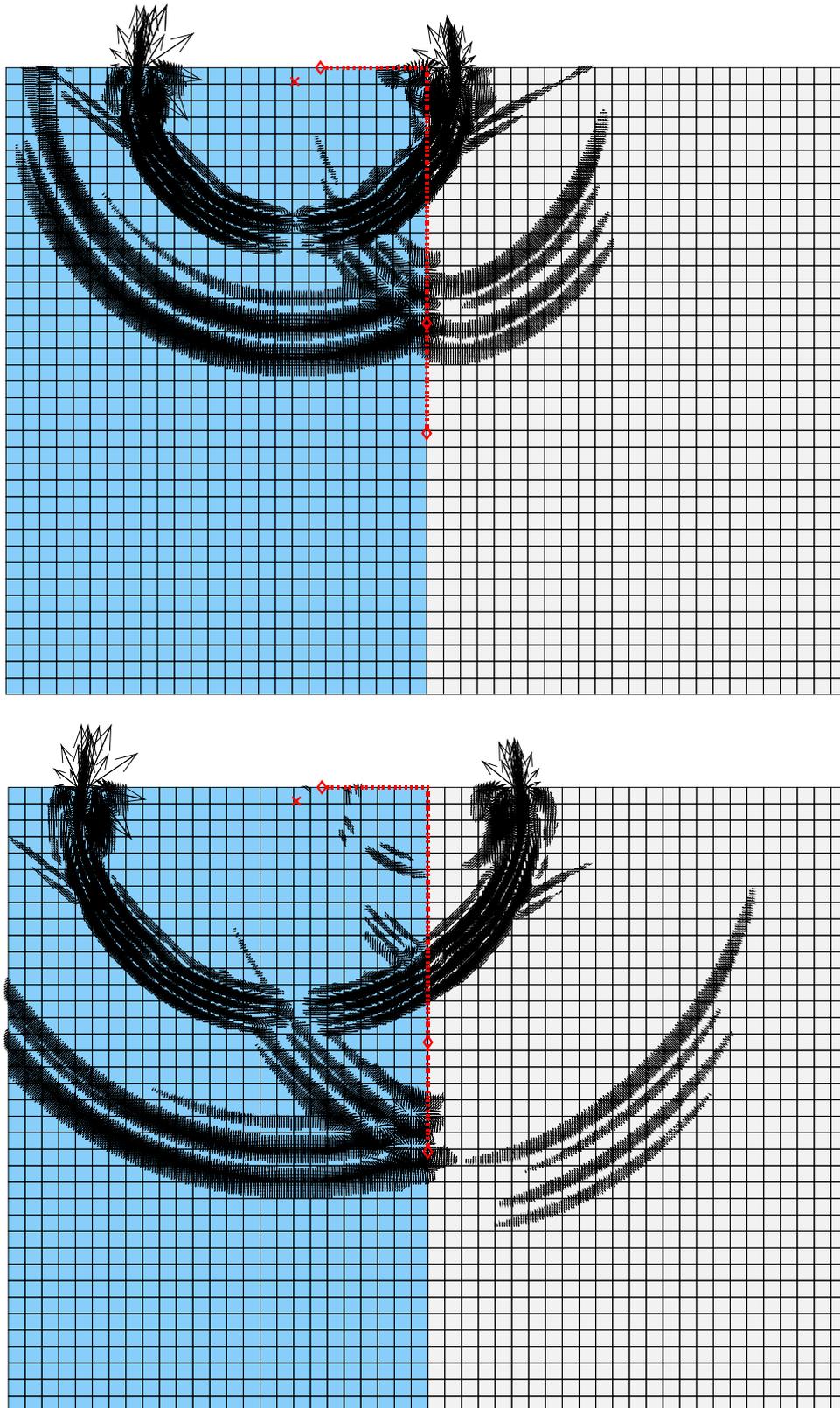


FIG. 4.10 – Instantanés obtenus dans le cas de deux quarts-d'espace élastiques en contact ayant des propriétés telles que l'onde d'interface soit cachée. On peut vérifier que, dans ce cas, aucune onde d'interface n'est excitée au contact élastique entre les deux milieux.

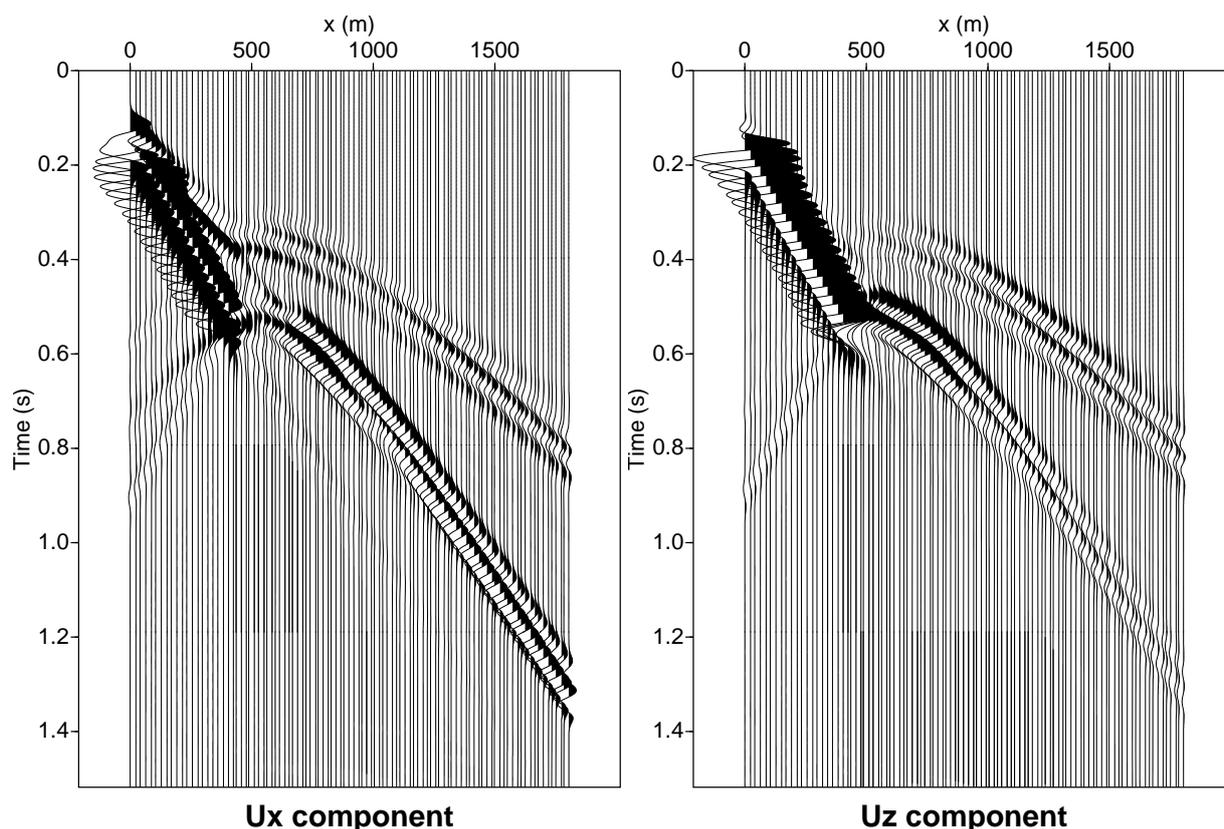


FIG. 4.11 – Sismogrammes obtenus dans le cas de deux quarts-d’espace élastiques en contact ayant des propriétés telles que l’onde d’interface soit cachée. On peut vérifier que, dans ce cas, aucune onde d’interface d’amplitude significative n’est excitée au contact élastique entre les deux milieux, à l’inverse de ce que l’on avait obtenu dans le cas de la figure 4.8.

Le spectre de la source est représenté sur la figure 4.26. Nous enregistrons le déplacement en surface pendant 25 secondes en 51 récepteurs équidistants situés entre  $x_r = -2$  km et  $x_r = 2$  km. Les points de grille (points de Gauss-Lobatto) n’ayant pas un espacement régulier, nous avons utilisé un opérateur d’interpolation à chaque pas de temps pour pouvoir enregistrer le champ sur les récepteurs régulièrement espacés, et qui ne coïncident donc pas *a priori* avec des points de grille. Les instantanés de propagation sont représentés sur la figure 4.28, et les sismogrammes enregistrés en surface sur la figure 4.29. Notons que, pour une fréquence de source aussi basse, en raison des conditions absorbantes placées sur tous les bords de la grille de calcul à l’exception de la surface libre, nous sommes obligés de prendre un maillage assez significativement plus grand que le modèle physique qui nous intéresse (sur la figure 4.28, la taille du modèle étudié est représentée par la ligne pointillée des récepteurs en surface) afin d’éviter les effets de bord dans notre simulation numérique, et la pollution éventuelle du signal calculé par des réflexions parasites provenant de ces bords. Il est clair que, pour de telles simulations, il serait souhaitable de disposer de conditions absorbantes plus efficaces, de manière à ne pas être contraint d’augmenter autant la taille de la grille par rapport à la taille physique du modèle.

Sur les sismogrammes, nous voyons un effet dû à la forme du bassin sédimentaire, dans lequel se forment de nombreux multiples de l’onde directe. Cet effet peut être plus clairement estimé à partir des périodogrammes représentés en fréquence sur la figure 4.30.

Un test de validation a également été mené entre notre code de calcul et une méthode intégrale indirecte (IBEM) afin de comparer les résultats obtenus par deux méthodes totalement indépendantes sur ce cas représentatif d’un effet de site à basse fréquence. Les calculs par la méthode intégrale ont été effectués par Rossana Vai, José-Manuel Castillo-Covarrubias et Francisco-José Sánchez-Sesma, de l’Université de Mexico. Les résultats calculés aux récepteurs 1, 26 et 50 sont montrés sur la figure 4.31. L’accord obtenu entre les deux simulations est généralement correct, hormis quelques problèmes d’amplitude affectant les phases tardives, et qui peuvent être attribués à des effets de bord résultant de la difficulté à disposer de conditions absorbantes correctes pour des fréquences aussi basses, pour lesquelles les longueurs d’onde caractéristiques dans le modèle sont du même ordre que la taille de la grille de calcul utilisée. Ainsi, nous avons pu faire une validation croisée des deux méthodes pour un effet de site typique à basse fréquence dans un bassin sédimentaire.

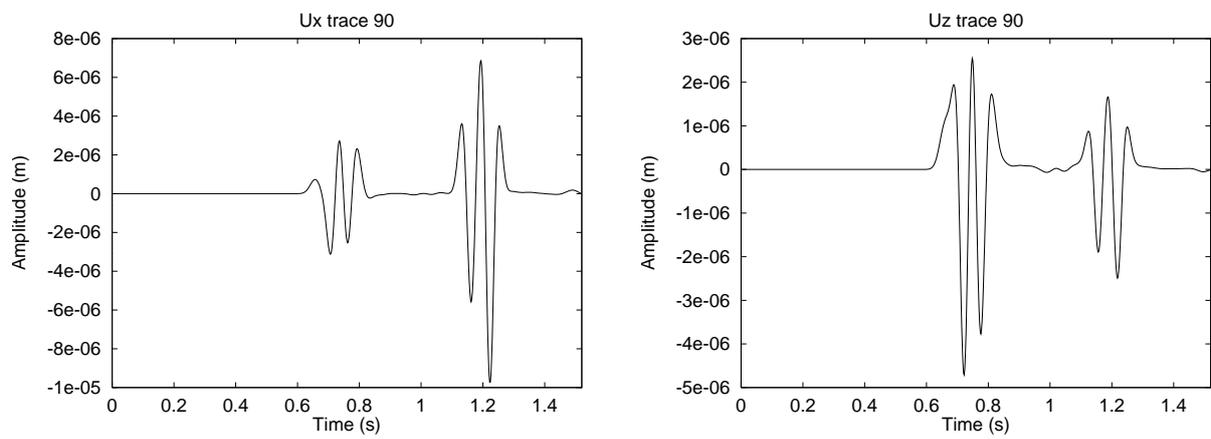


FIG. 4.12 – Trace enregistrée par le récepteur 90 dans le cas où l'onde d'interface est cachée. À la différence de la figure 4.9, l'onde d'interface a maintenant pratiquement disparu.

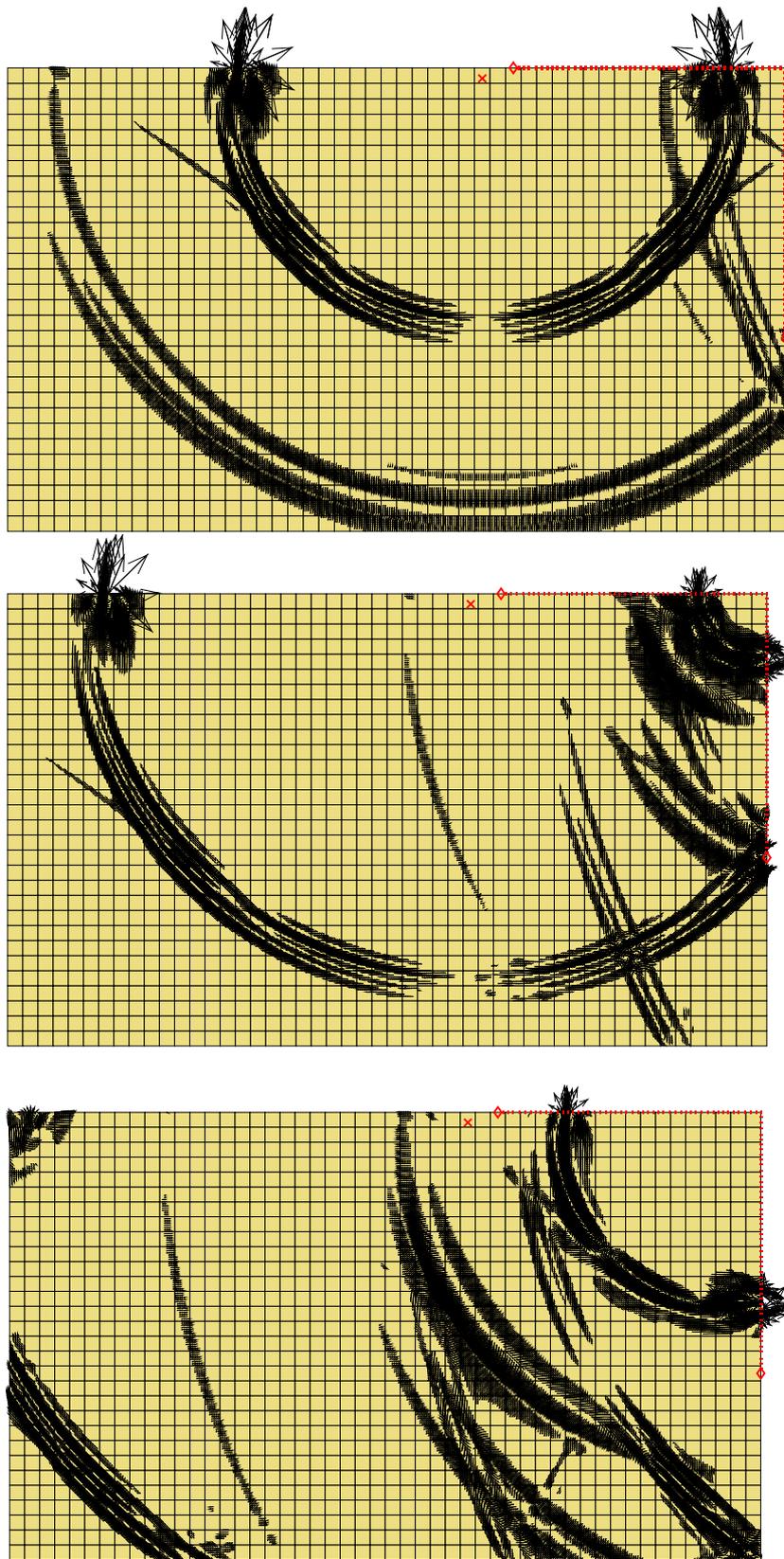


FIG. 4.13 – Instantanés du vecteur déplacement pour un quart d'espace dans lequel le coin est touché par une onde de Rayleigh. On peut observer une forte onde de Rayleigh qui se propage le long de la frontière supérieure du modèle, et qui est en partie réfléchi et en partie transmise par le coin. On peut observer l'onde de Rayleigh transmise se propageant en descendant le long du bord droit du modèle. Le coin agit comme un point diffractant, et donne naissance à des ondes P et S sphériques.

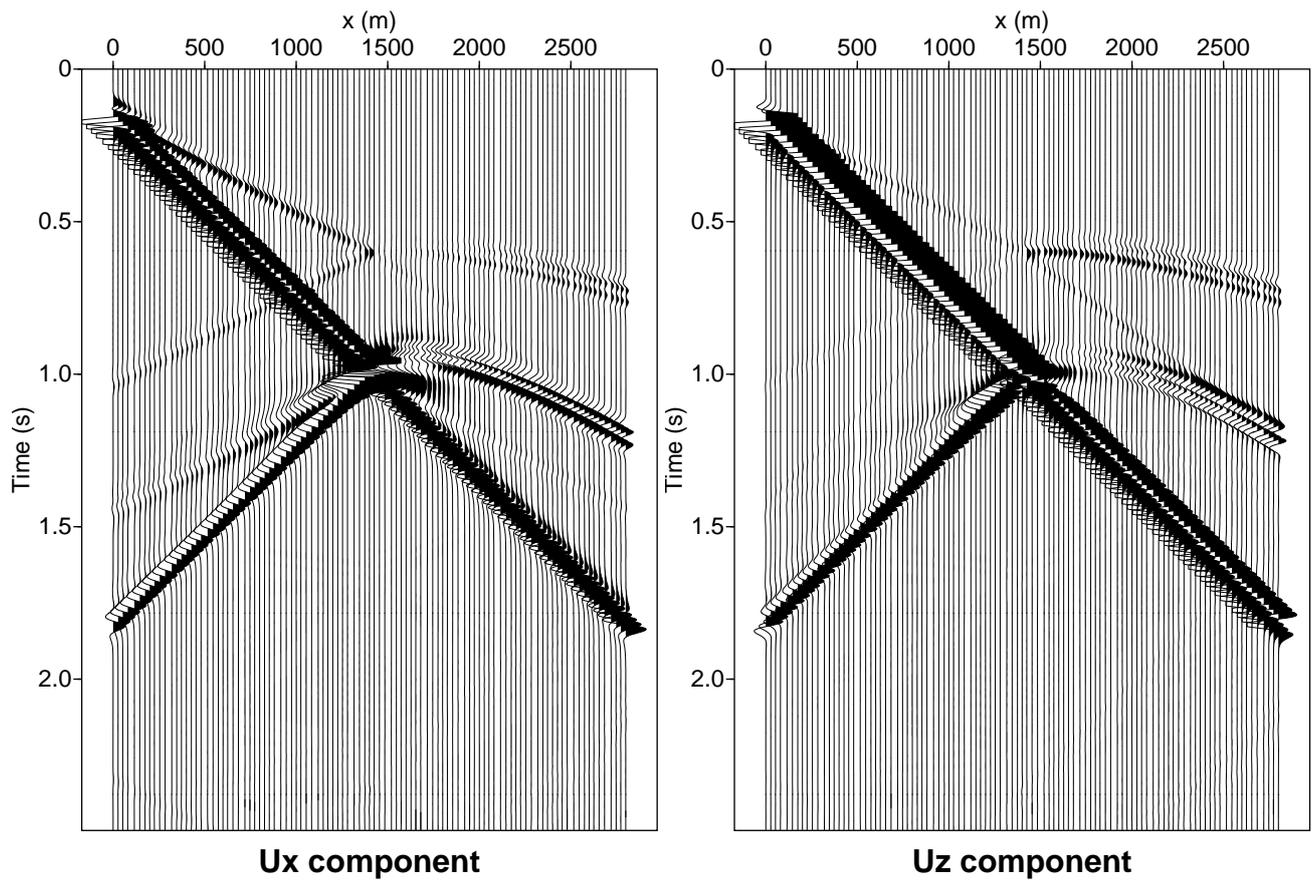


FIG. 4.14 – Sismogrammes enregistrés pour le cas d'un quart d'espace dans lequel le coin du modèle est touché par une onde de Rayleigh. On peut observer une forte onde de Rayleigh qui se propage le long de la surface supérieure, et qui est en partie réfléchiée et en partie transmise par le coin. Le coin agit comme un point diffractant, et donne naissance à des ondes P et S sphériques.

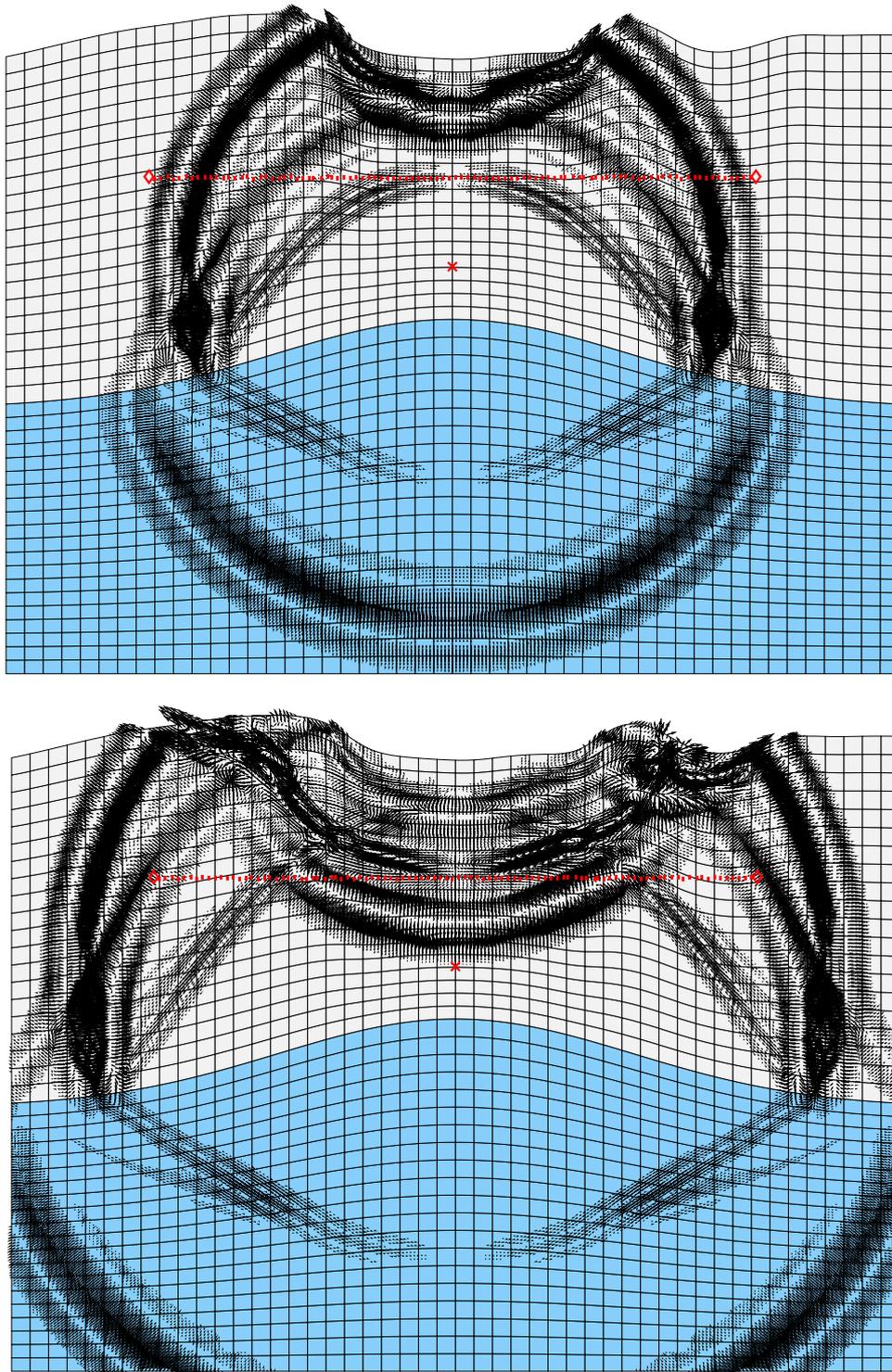


FIG. 4.15 – Instantanés obtenus pour un modèle présentant une topographie à la surface libre, ainsi qu'une interface courbe, dans le cas où la source est placée à l'intérieur du modèle dans la couche supérieure. On peut observer la forme complexe des différentes phases, en particulier les ondes réfléchies et converties tant à la surface qu'à l'interface, avec notamment des triplications qui se produisent après réflexion sur les petites collines présentes à la surface libre.

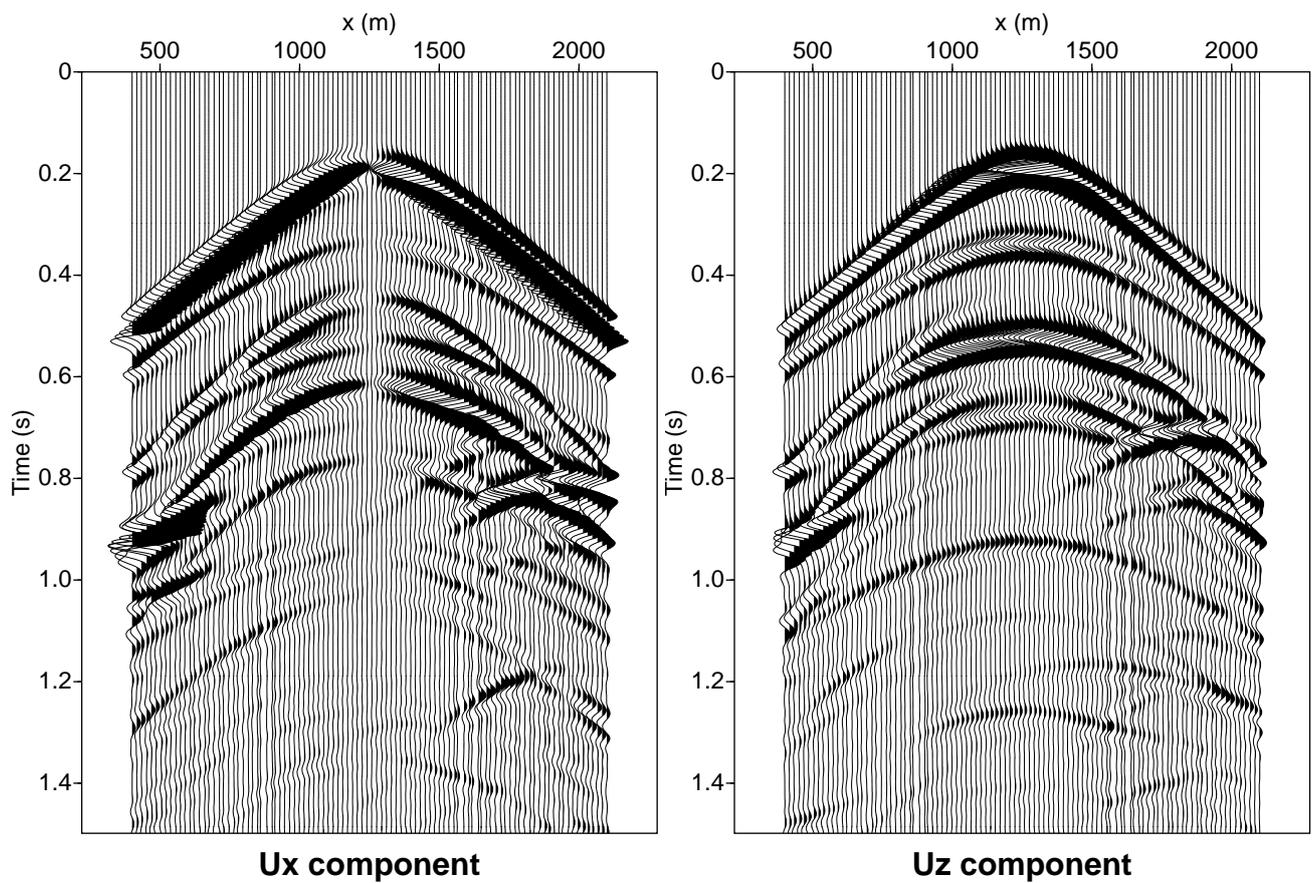


FIG. 4.16 – Sismogrammes obtenus pour le modèle à deux couches présentant une topographie à la surface libre ainsi qu'une interface courbe, dans le cas où la source est placée à l'intérieur du modèle dans la couche supérieure.

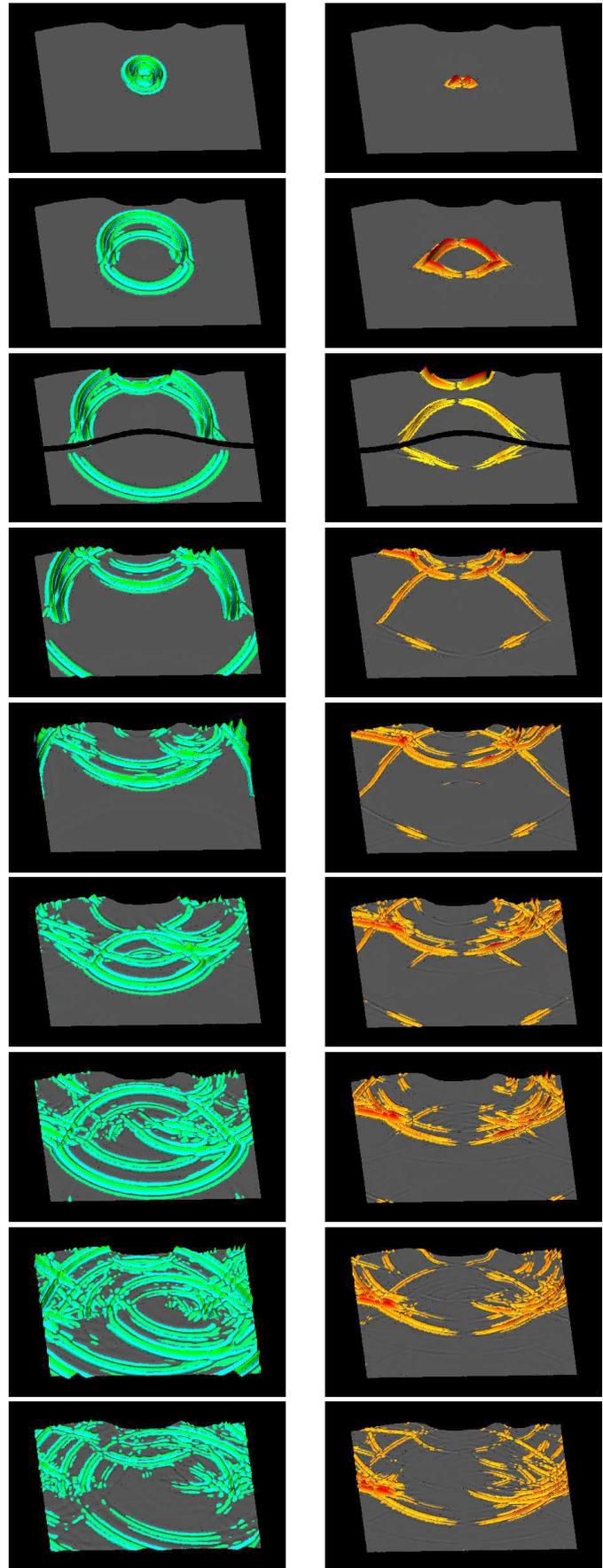


FIG. 4.17 – Film de la propagation des ondes dans le modèle à deux couches présentant à la fois une topographie de surface et une interface courbe, dans le cas où la source est placée à l'intérieur du modèle dans la couche supérieure. Pour plus de clarté, nous avons dessiné la divergence du déplacement (correspondant aux ondes de compression au sein de chaque couche homogène) en bleu-vert sur l'image de gauche, et l'unique composante non nulle du rotationnel (correspondant aux ondes de cisaillement au sein de chaque couche homogène) en rouge-orange sur l'image de droite. Une telle représentation permet de suivre pas à pas la formation des différentes phases et d'en saisir la complexité.

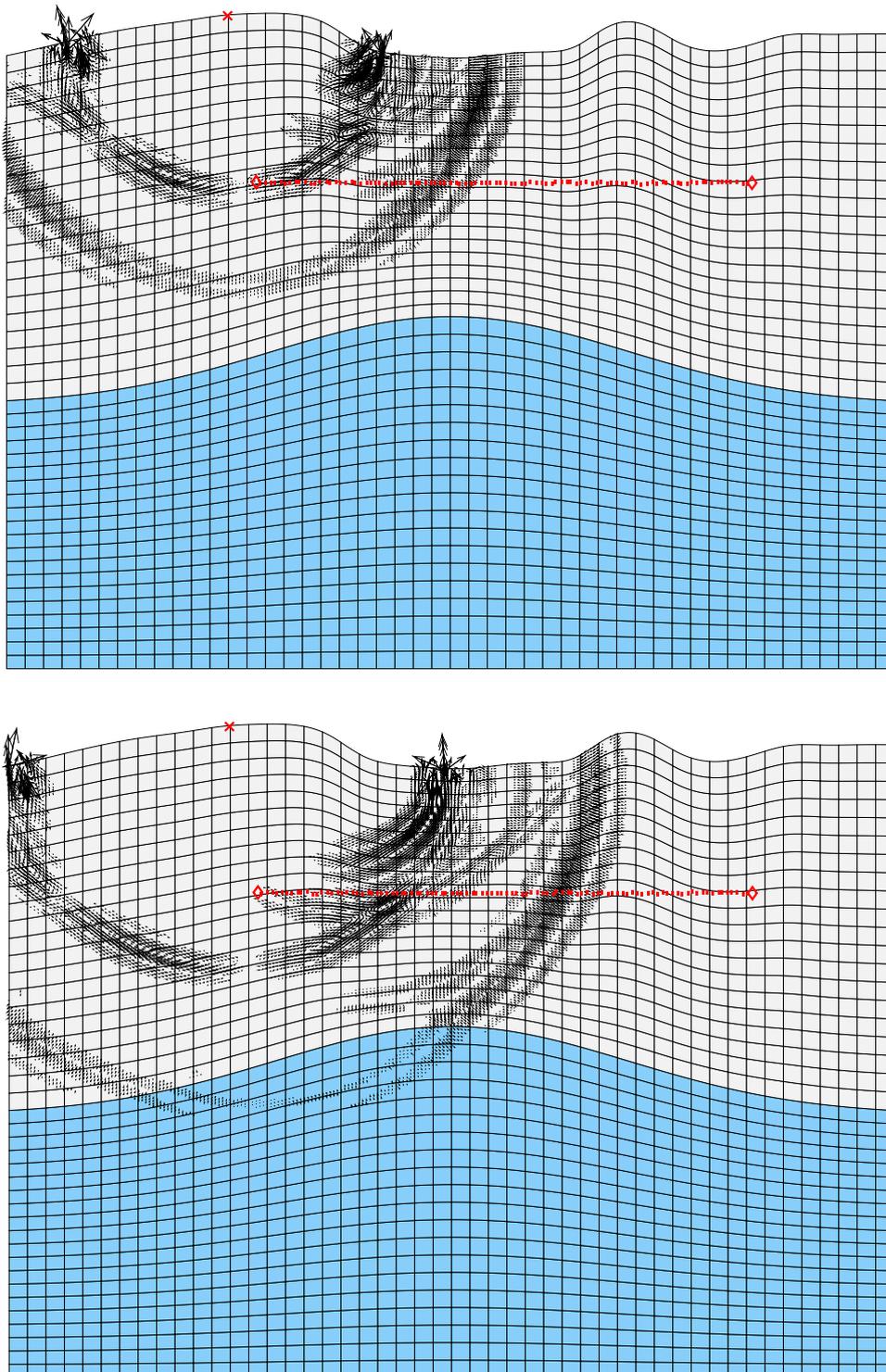


FIG. 4.18 – Instantanés obtenus pour le modèle à deux couches présentant à la fois une topographie de surface et une interface courbe, dans le cas où la source est placée juste sous la surface libre. Une onde de Rayleigh se propage le long de la surface courbe, et une forte conversion d'onde de Rayleigh en onde de volume se produit lorsque l'onde de Rayleigh rencontre une zone de la topographie présentant localement une forte courbure. Cette phase convertie suit de près l'onde  $S$  convertie à la surface libre.

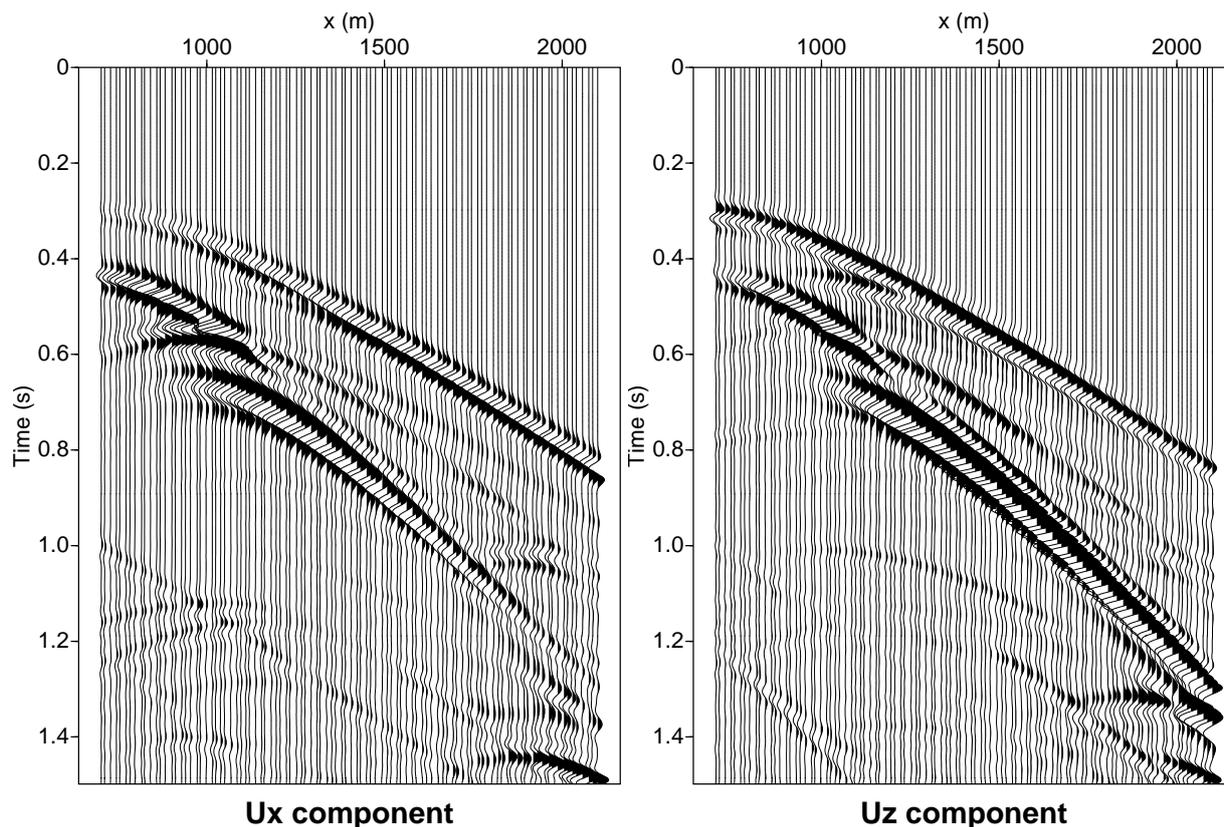


FIG. 4.19 – Sismogrammes enregistrés pour le modèle à deux couches présentant à la fois une topographie de surface et une interface courbe, dans le cas où la source est placée juste sous la surface libre. La forte phase se propageant à la vitesse  $S$  correspond à une conversion de mode d’onde de Rayleigh en onde de volume lorsque l’onde de Rayleigh rencontre une zone de la topographie présentant localement une forte courbure. Les arrivées tardives aux alentours de  $t = 1.2$  s sont des réflexions provenant de l’interface courbe.

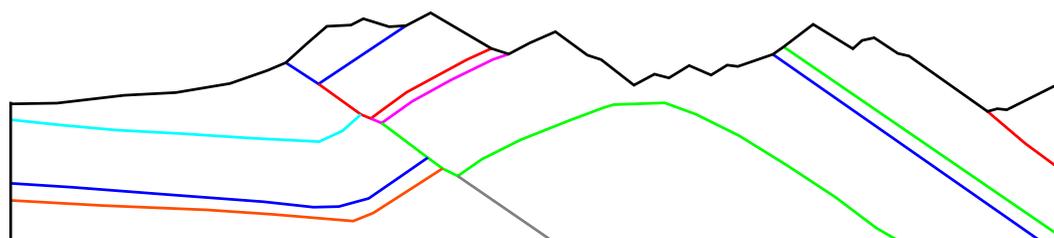


FIG. 4.20 – Structure géologique réaliste étudiée dans les Andes péruviennes (données Elf-Aquitaine). La largeur totale du modèle est de 5500 m.

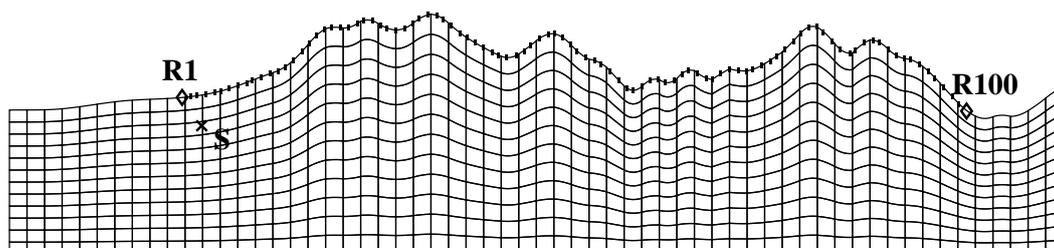


FIG. 4.21 – Maillage utilisé pour simuler la propagation des ondes dans la structure réaliste présentée sur la figure 4.20. La largeur totale du modèle est de 5500 m.

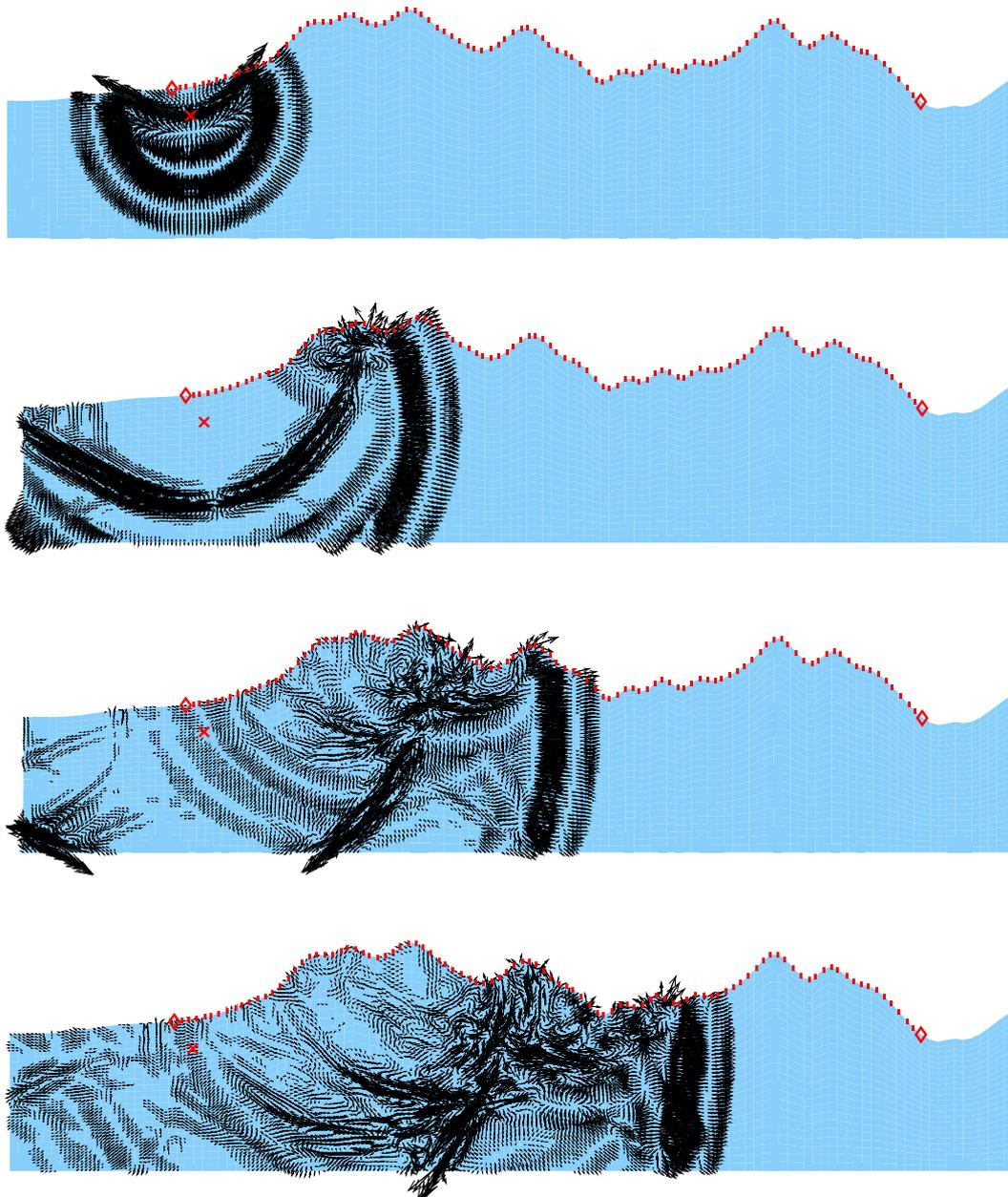


FIG. 4.22 – Instantanés obtenus pour le modèle considéré au Pérou en utilisant un modèle de vitesse et de densité homogène. Il est clair que la diffraction liée à la forte topographie joue un rôle primordial dans ce cas. En l'absence de topographie, en effet, seule l'onde P directe et l'onde convertie P-S à la surface devraient être présentes.

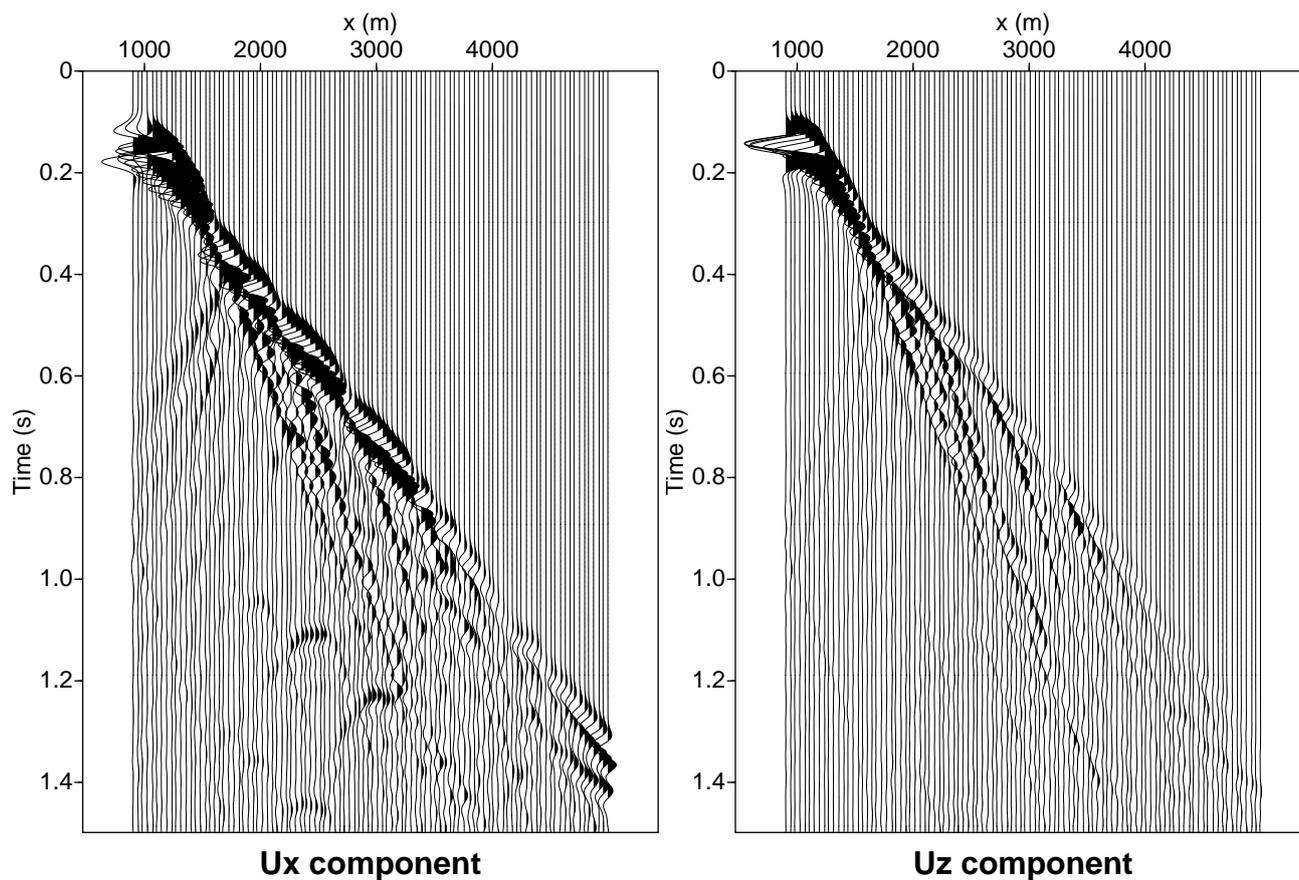


FIG. 4.23 – Sismogrammes enregistrés pour le modèle considéré au Pérou en utilisant un modèle de vitesse et de densité homogène. La diffraction liée à la forte topographie est particulièrement claire sur les deux composantes du déplacement. En l'absence de topographie, en effet, le sismogramme devrait comporter une arrivée unique correspondant à l'onde directe enregistrée en surface.

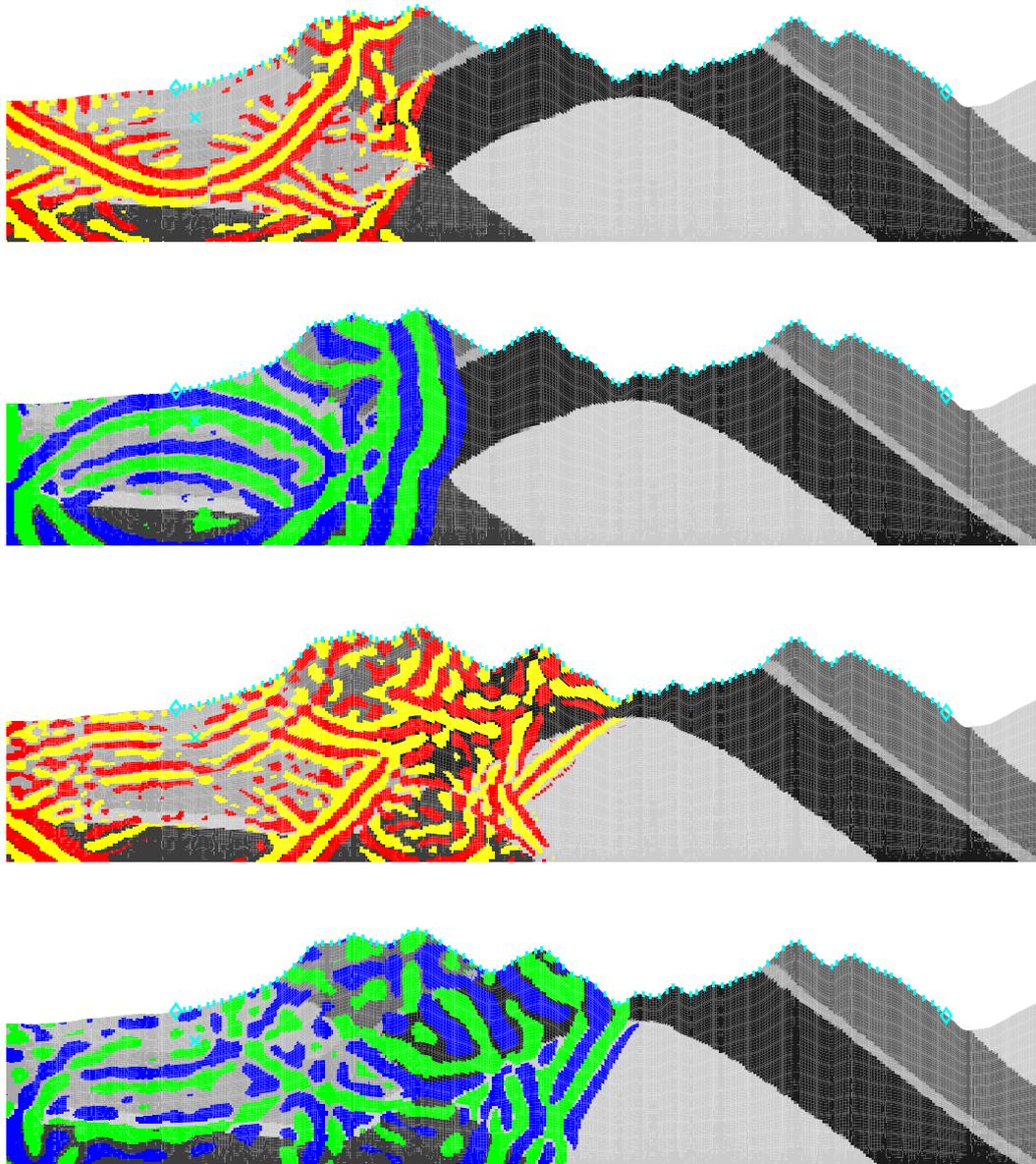


FIG. 4.24 – Instantanés obtenus pour la structure réaliste considérée au Pérou en utilisant le modèle de densité et de vitesse « réel » estimé d'après les études géologiques. La divergence (bleu/vert) et le rotationnel (rouge/jaune) du vecteur déplacement ont été dessinés séparément pour plus de clarté. La forme très complexe du signal peut être estimée à partir de cette représentation, en particulier les nombreuses réflexions et conversions se produisant aux différentes interfaces courbes à l'intérieur du modèle.

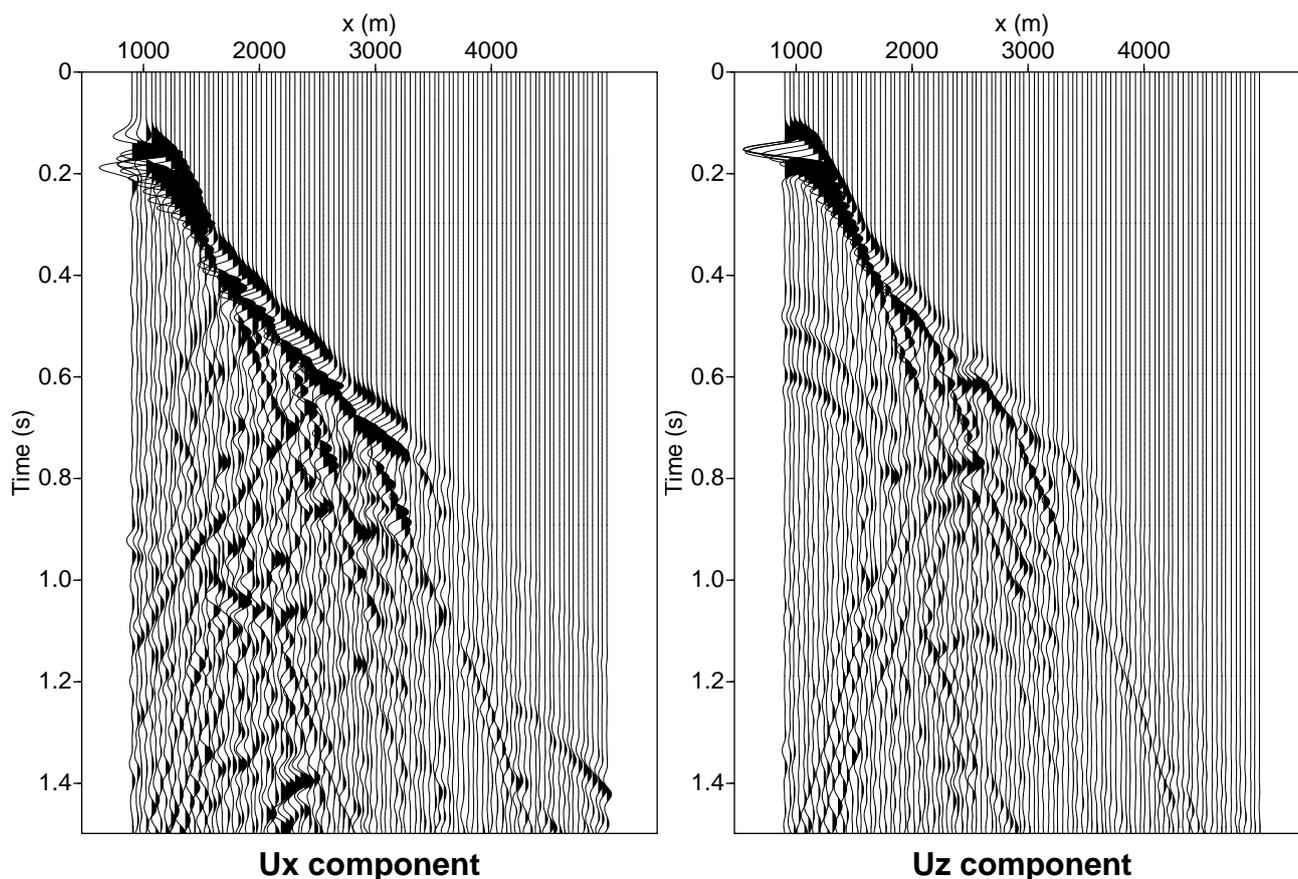
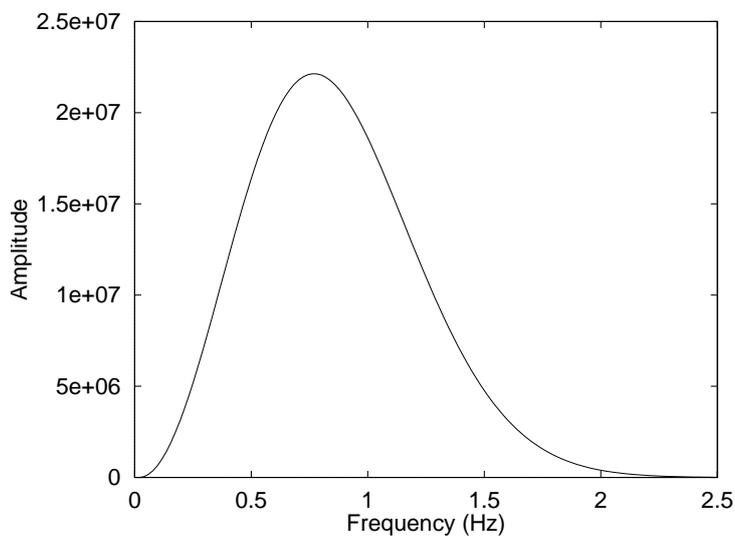


FIG. 4.25 – Sismogrammes enregistrés pour la structure réaliste considérée au Pérou en utilisant le modèle de densité et de vitesse « réel » estimé d’après les études géologiques. La diffraction provenant de la topographie, qui avait été observée pour la même topographie en considérant un milieu homogène, est toujours présente de façon très claire. À celle-ci se superposent les nombreuses réflexions et conversions se formant sur les différentes interfaces du modèle géologique.

FIG. 4.26 – Spectre de la source utilisée dans les tests de résonance d’un bassin sédimentaire à basse fréquence. La source est une explosion, sa dépendance temporelle étant un Ricker de fréquence centrale 0.75 Hz.



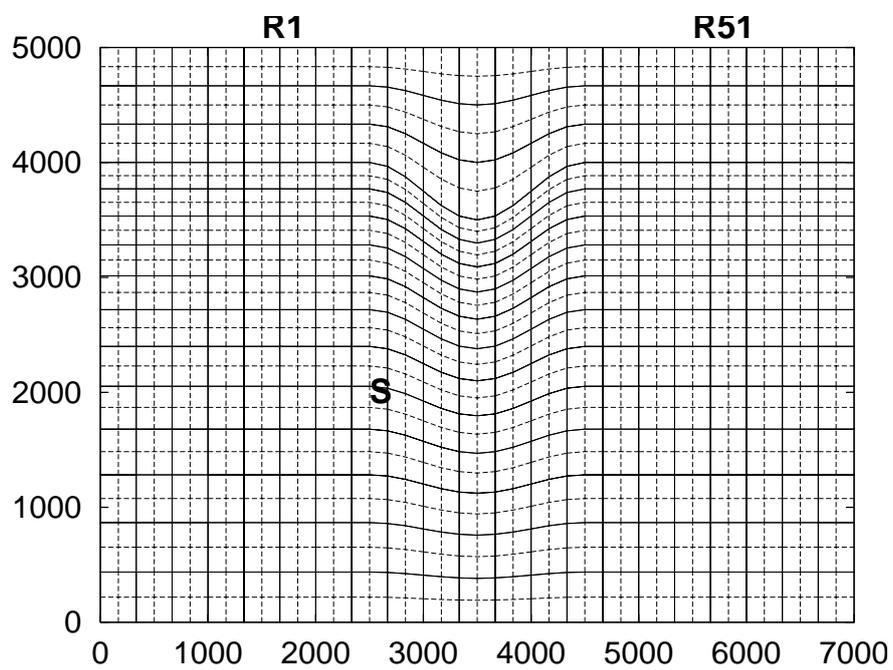


FIG. 4.27 – Modèle utilisé pour l'étude de la résonance d'un bassin sédimentaire à basse fréquence en l'absence de topographie. La position de la source placée en profondeur dans la couche rapide ( $S$ ) et des deux extrémités de la ligne de récepteurs ( $R_1$  et  $R_{51}$ ) est également indiquée.

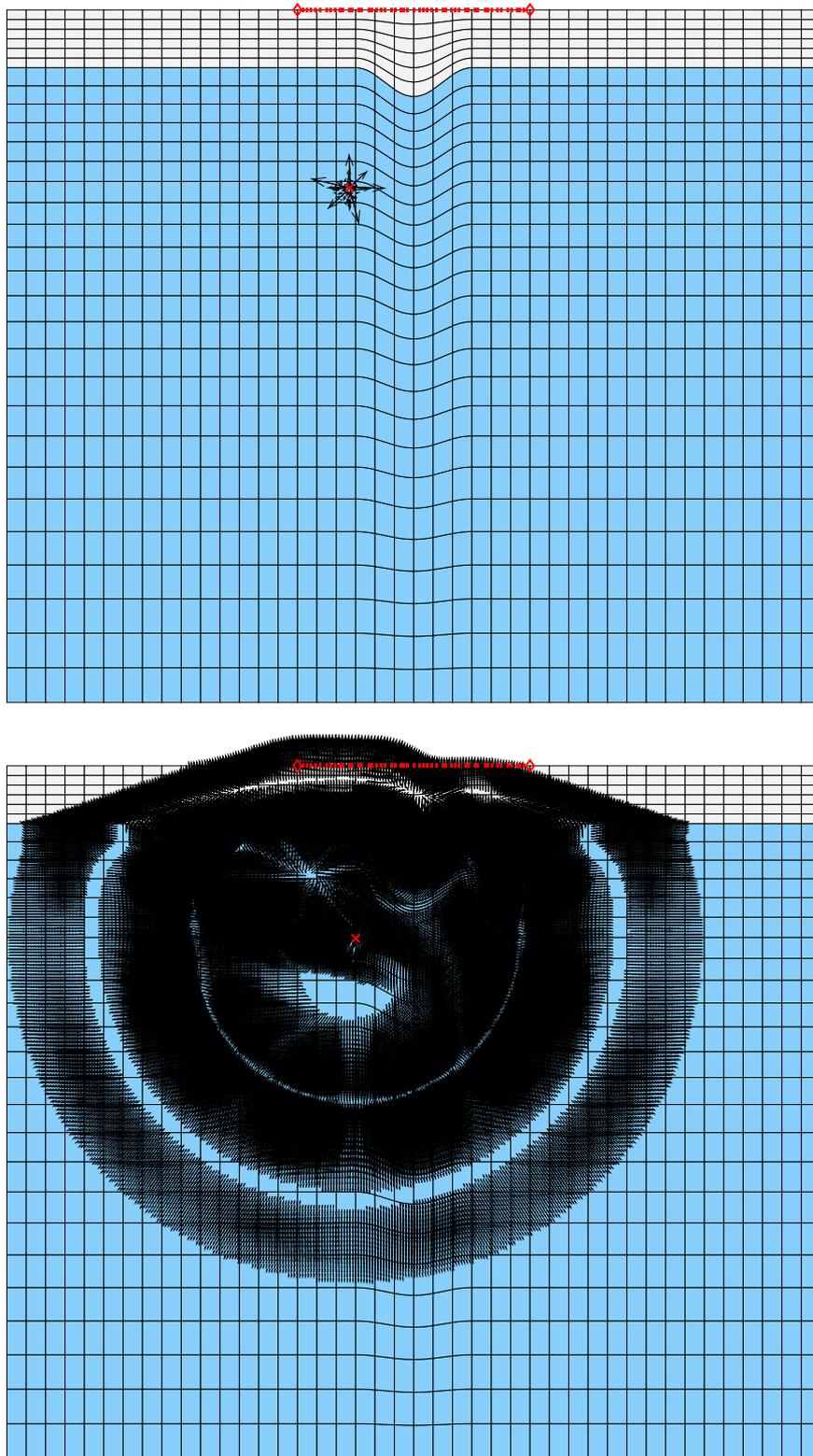


FIG. 4.28 – Instantanés de propagation obtenus à basse fréquence dans le cas d'un bassin sédimentaire présentant une interface courbe, mais une surface libre plane. La source, dont la position est indiquée par la croix, est située en profondeur dans la couche rapide. Le bassin sédimentaire piège une partie de l'énergie émise par la source.

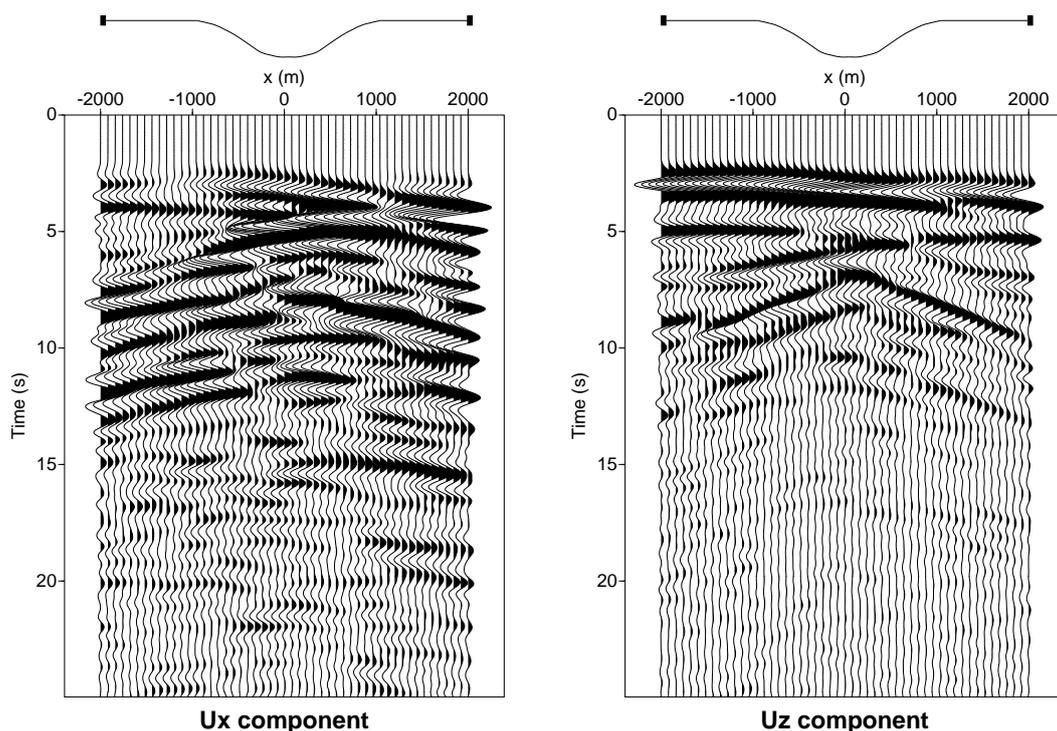


FIG. 4.29 – Sismogrammes enregistrés en surface dans le cas d'une source explosive basse fréquence située en profondeur dans la couche rapide, pour le modèle présentant une interface courbe, mais une surface libre plane. La forme du bassin sédimentaire est indiquée le long de la ligne de récepteurs. De nombreux multiples se forment dans la couche sédimentaire.

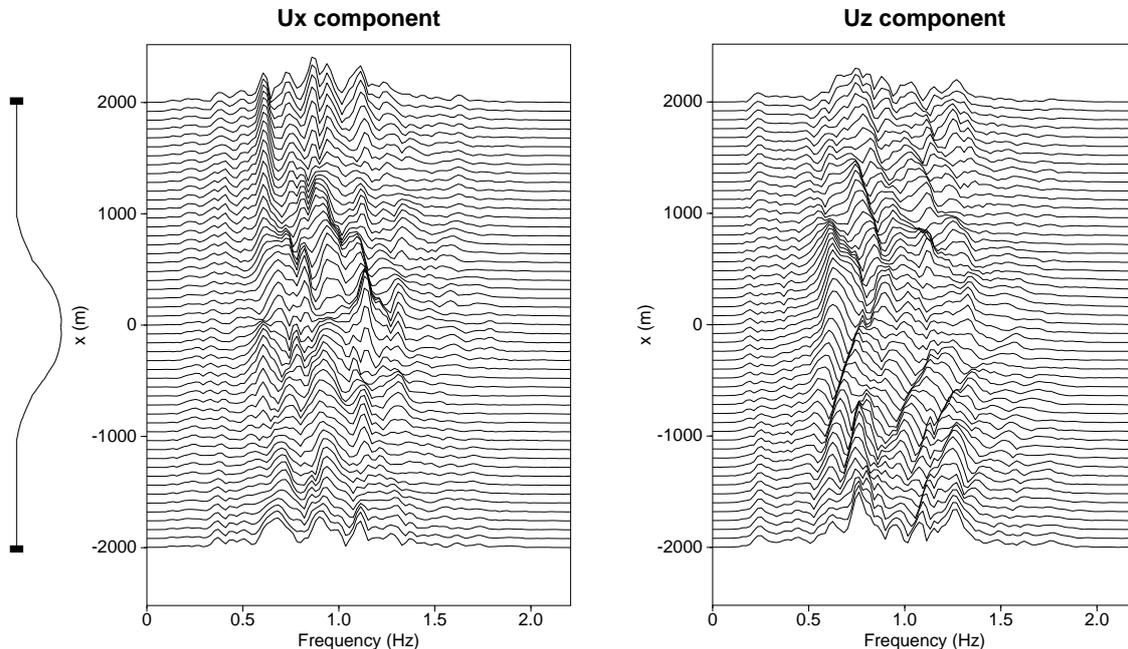


FIG. 4.30 – Périodogrammes enregistrés en surface dans le cas d'une source explosive basse fréquence située en profondeur dans la couche rapide, pour le modèle présentant une interface courbe, mais une surface libre plane. Les enregistrements sont représentés en fréquence. La source est un Ricker de fréquence centrale 0.75 Hz, dont le spectre est représenté sur la figure 4.26. La forme du bassin sédimentaire est indiquée le long de la ligne de récepteurs, et permet de mieux estimer l'effet de celui-ci sur la propagation des ondes dans la structure.

### Bassin sédimentaire avec topographie de surface

Dans le second test, l'interface entre les deux couches garde la même forme que précédemment, mais la surface libre présente maintenant une topographie, donnée par

$$t(x) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)^2 \quad (4.2)$$

toujours pour  $x$  exprimé en kilomètres, et variant entre  $-1$  et  $+1$ , l'axe  $z$  étant orienté vers le bas. Ainsi, l'épaisseur de la couche lente varie de 1 km en  $x = -1$  à 2 km en  $x = 0$  (voir figure 4.32). La source explosive basse fréquence, identique à celle du cas précédent, est maintenant placée dans la couche sédimentaire en  $x_s = -1$  km,  $z_s = 0.5$  km. Les 51 récepteurs sont toujours placés en surface, entre  $x_r = -2$  km et  $x_r = 2$  km. Les instantanés de propagation sont représentés sur la figure 4.33, et les sismogrammes enregistrés en surface sur la figure 4.34. Le maillage est de nouveau significativement plus grand que le modèle étudié, afin de se prémunir de réflexions parasites indésirables pouvant provenir des bords absorbants. Sur les sismogrammes, nous voyons un fort effet de piégeage d'énergie dans la couche sédimentaire, lié à la fois à la forme de l'interface et à la forme de la surface libre. Cet effet important peut être estimé de manière plus directe à partir des périodogrammes représentés en fréquence sur la figure 4.35.

## 4.8.2 Amplification des ondes planes P et SV par une topographie

Gaffet et Bouchon (1989) ont publié des résultats très intéressants, calculés par une méthode intégrale en nombre d'onde discret, concernant l'amplification d'ondes planes de type P ou de type SV par des topographies relativement lisses. Leur étude paramétrique en fonction de la longueur d'onde incidente par rapport à la taille caractéristique de la topographie a permis de mettre en évidence des effets importants d'amplification du signal incident par la topographie, et une assez forte dépendance de cette amplification par rapport à la longueur d'onde du signal source, ainsi que par rapport à la polarisation de l'onde incidente. Comme nous le rappelons dans le chapitre suivant consacré aux effets de site 3D, la modélisation précise de tels effets d'amplification par une topographie présente un grand intérêt, car ces effets sont souvent observés sur le terrain, typiquement dans des vallées ou lorsque des capteurs sont situés au sommet de collines ou encore dans des zones où le relief est accidenté. Cela fut par exemple le cas pour la colline de Tarzana durant le tremblement de terre de Northridge (Californie) en 1994. Un accéléromètre situé au sommet de cette petite colline a enregistré des valeurs extrêmement fortes (de l'ordre de 1.8  $g$ ) liées probablement à un effet conjoint de la topographie de la colline et de sa structure géologique (Spudich *et al.*, 1996 ; Catchings et Lee, 1996 ; Rial, 1996 ; Bouchon et Barker, 1996). Un autre exemple connu est celui de la vallée de la Roya (France) qui a été étudié par Pedersen (1994).

Dans cette section, nous modélisons par la méthode des éléments spectraux la propagation des ondes dans les mêmes modèles que ceux de Gaffet et Bouchon (1989), et nous obtenons un bon accord qualitatif avec leurs résultats, ce qui permet de montrer que cette méthode est bien adaptée au calcul des effets de site.

### Cas d'une onde incidente de type SV

Dans tous les exemples étudiés, nous reprenons la topographie et les notations de Gaffet et Bouchon (1989). La topographie est donnée par

$$s(x) = h(1-a) \exp(-3a) \quad (4.3)$$

avec  $a = (x/l)^2$ , où  $h$  et  $l$  représentent respectivement la hauteur et la largeur à mi-hauteur de la colline. Dans cette première étude, la source est une onde plane de type SV, incidente verticalement dans le modèle, sa dépendance temporelle étant un Ricker de fréquence centrale  $f_0$  et donc de période caractéristique  $t_0 = 1/f_0$ . Afin de réaliser une étude paramétrique des effets de site en fonction de la courbure de la topographie et de la période caractéristique du signal source, nous définissons deux nombres sans dimension

$$\eta_l = \frac{2l}{ct_0} \quad (4.4)$$

et

$$\eta_h = \frac{h}{ct_0} \quad (4.5)$$

représentant respectivement le rapport de la largeur et de la hauteur de la colline par rapport à la longueur d'onde incidente ( $c$  étant la vitesse de l'onde plane dans le milieu).

Nous pouvons alors étudier la réponse de la structure, enregistrée en surface comme dans l'article de Gaffet et Bouchon (1989), comme une fonction des deux rapports  $\eta_h$  et  $\eta_l$ , ou encore, ce qui est équivalent, des deux rapports  $\eta_h$  et  $h/l$ .

Numériquement, pour pouvoir définir une onde plane (qui suppose un milieu infini perpendiculairement à la direction de propagation), nous posons des conditions aux limites de type périodique sur les bords latéraux de notre grille de calcul.

Pour le cas d'une onde incidente de type SV, nous fixons  $\eta_h = 1.0$ , ce qui signifie que nous éclairons la topographie avec un Ricker dont la longueur d'onde typique est égale à la hauteur de la colline, et nous enregistrons les composantes horizontale  $u_x$  et verticale  $u_z$  du déplacement en surface pour trois valeurs du rapport  $h/l$ , à savoir 0.375, 0.50 et 0.75. Les instantanés de propagation correspondant au cas  $h/l = 0.50$  à différents instants sont donnés sur la figure 4.36. La topographie produit une amplification du vecteur déplacement au sommet de la colline, de plus la présence de la colline donne naissance à une onde de Rayleigh ainsi qu'à une onde P diffractée (« surface P wave »). La figure 4.37 représente l'onde SV incidente au même instant sur trois topographies de courbure différente, correspondant à  $h/l = 0.375, 0.50$  et 0.75. D'après cette représentation, l'amplification observée au sommet dépend du rapport  $h/l$ , ce qui est encore plus clair sur les sismogrammes enregistrés en surface dans les trois cas (figure 4.38). Le champ enregistré se compose de trois phases d'amplitudes différentes : tout d'abord l'onde SV directe, puis l'onde P de surface, puis l'onde de Rayleigh.

Un bon accord qualitatif est obtenu avec les résultats de Gaffet en ce qui concerne les différentes phases observées lors de cette simulation. L'amplification mesurée en surface (définie comme le rapport de l'amplitude crête à crête maximale enregistrée au cours du temps par le récepteur situé au sommet, divisée par l'amplitude crête à crête du signal source, et qui sera enregistrée comme onde directe par un récepteur de référence situé en plaine loin de la topographie) est cependant moins forte que celle calculée par Gaffet. Les amplifications données dans l'article original sont très fortes, de l'ordre de 2.7 pour  $h/l = 0.375$ , de l'ordre de 3.1 pour  $h/l = 0.50$ , et l'ordre de 2.4 pour  $h/l = 0.75$ . Nous obtenons des amplifications plus faibles, à savoir de l'ordre de 2.2 pour  $h/l = 0.375$ , de l'ordre de 2.1 pour  $h/l = 0.50$ , et l'ordre de 0.8 pour  $h/l = 0.75$ , ce qui correspond à une déamplification au sommet dans ce dernier cas. En revanche, nous constatons bien comme Gaffet que l'onde P de surface générée par la présence de la colline a une amplitude maximale dans le cas  $h/l = 0.375$ . L'explication des différences dans les facteurs d'amplification entre nos deux calculs tient probablement au fait que l'amplitude mesurée au sommet est numériquement très sensible aux interférences constructives ou destructives ainsi qu'aux résonances de la topographie induites par le passage de l'onde. Un léger déphasage parasite dans la modélisation numérique peut changer de manière drastique l'amplitude mesurée au sommet, ce qui est moins le cas pour les autres récepteurs. Nos résultats vérifient les points suivants :

- Le déplacement  $u_z$  mesuré au sommet est bien nul (du niveau du bruit numérique), comme attendu pour un récepteur placé exactement sur l'axe de symétrie du modèle.
- Les amplifications que nous mesurons au sommet (de l'ordre de 2 au maximum, avec des effets de déamplification pouvant apparaître pour certaines longueurs d'onde incidentes) sont du même ordre de grandeur que les résultats donnés par nos propres calculs 3D (voir paragraphe 5.3.1) ainsi que par les calculs 3D de Bouchon *et al.* (1996).
- Il semble physiquement raisonnable d'attendre, pour le cas de la topographie la plus pentue ( $h/l = 0.75$ ), une légère déamplification plutôt qu'une amplification au sommet, en effet pour une topographie aussi « pointue » il est probable qu'une partie de l'énergie incidente excite des modes de vibration latérale de la structure, au détriment de l'amplitude des vibrations mesurées au sommet.

### Cas d'une onde incidente de type P

Pour le cas d'une onde incidente de type P, nous fixons maintenant  $\eta_h = 0.5$ , ce qui signifie que nous éclairons la topographie avec un Ricker dont la longueur d'onde typique est égale à deux fois la hauteur de la colline, et nous enregistrons les composantes horizontale  $u_x$  et verticale  $u_z$  du déplacement en surface pour trois valeurs du rapport  $h/l$ , à savoir 0.375, 0.50 et 0.75. Les instantanés de propagation correspondant au cas  $h/l = 0.75$  à différents instants sont donnés sur la figure 4.39. La topographie peut produire une légère amplification du vecteur déplacement au sommet de la colline, et la présence de celle-ci donne naissance à une onde de Rayleigh ainsi qu'à une onde P de surface. Le phénomène est donc qualitativement proche de celui observé pour une onde incidente de type SV, mais son amplitude est différente. La figure 4.40 représente l'onde P incidente au même instant sur trois topographies de courbure différente, correspondant à  $h/l = 0.375, 0.50$  et 0.75. L'amplification observée au sommet dépend de ce rapport  $h/l$ , ce phénomène sur les sismogrammes enregistrés en surface dans les trois cas (figure 4.41). Le champ enregistré se compose toujours des trois phases présentes dans le cas SV : tout d'abord l'onde P directe, puis l'onde P de surface, puis l'onde de Rayleigh. Si nous mesurons l'amplification en surface, avec la même définition que dans le cas précédent, nos calculs donnent de nouveau un résultat assez significativement inférieur aux valeurs données par Gaffet. Les amplifications données dans l'article original sont de l'ordre de 1.1 pour  $h/l = 0.375$ , de l'ordre de 1.4 pour  $h/l = 0.50$  et l'ordre de 2.0 pour  $h/l = 0.75$ . Nos calculs donnent une amplification de l'ordre de 1.0 pour  $h/l = 0.375$ , de l'ordre de 1.1 pour  $h/l = 0.50$  et l'ordre de 1.3 pour

$h/l = 0.75$ . La tendance générale que nous observons est donc la même pour une onde incidente de type P (augmentation de l'amplification avec le rapport  $h/l$ ), mais avec des valeurs numériques assez largement inférieures. Cependant, nous arrivons également à la conclusion que l'effet d'amplification au sommet de la colline est généralement moins important dans le cas d'une onde incidente P que dans le cas d'une onde incidente SV.

## 4.9 Conclusions

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit et validé la méthode des éléments spectraux pour résoudre la propagation des ondes élastiques sur quelques modèles classiques possédant une solution analytique pouvant servir de référence. Dans le présent chapitre, nous avons montré que la méthode pouvait s'appliquer à de nombreux cas réalistes 2D (dont certains réputés difficiles). Nous avons en particulier montré que la méthode permettait de propager avec précision des ondes réfractées le long d'une interface élastique, permettait de modéliser la propagation des ondes de Stoneley, et permettait également de prendre en compte une topographie de surface non plane, voire présentant une discontinuité. De plus, nous avons été en mesure d'étudier quelques effets de site à 2D, pour lesquels nous avons retrouvé les effets attendus décrits dans la littérature. Il semble maintenant naturel d'essayer d'étendre ce raisonnement à des modèles tridimensionnels pour l'étude des effets de site, ce que nous allons tâcher de faire dans le prochain chapitre.

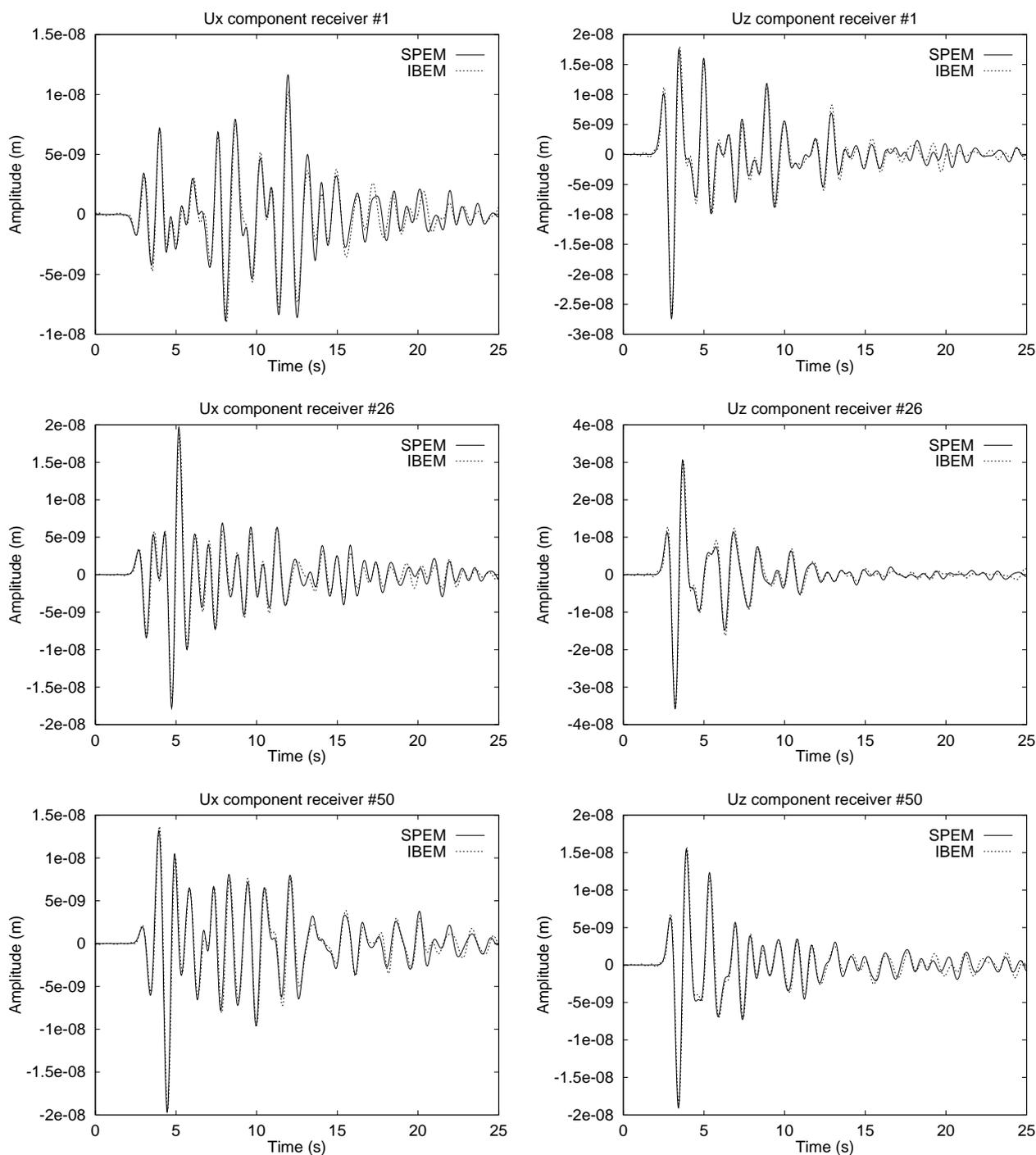


FIG. 4.31 – Comparaison entre les résultats calculés par la méthode des éléments spectraux et par une méthode intégrale pour le problème de la résonance d'un bassin sédimentaire présenté sur la figure 4.28. Les résultats obtenus par la méthode des éléments spectraux (SPEM) sont représentés en traits pleins, et ceux calculés par la méthode intégrale (IBEM) en pointillés. Le déplacement horizontal  $u_x$  (gauche) et vertical  $u_z$  (droite) est représenté, pour les récepteurs 1 (haut), 26 (milieu) et 50 (bas). L'accord obtenu est correct et permet de valider les deux méthodes pour ce cas-test. Les désaccords observés sur les phases tardives sont attribués aux ondes parasites provenant des bords absorbants dans ce calcul à très basse fréquence. On notera également une faible oscillation non causale dans les résultats obtenus par la méthode intégrale.

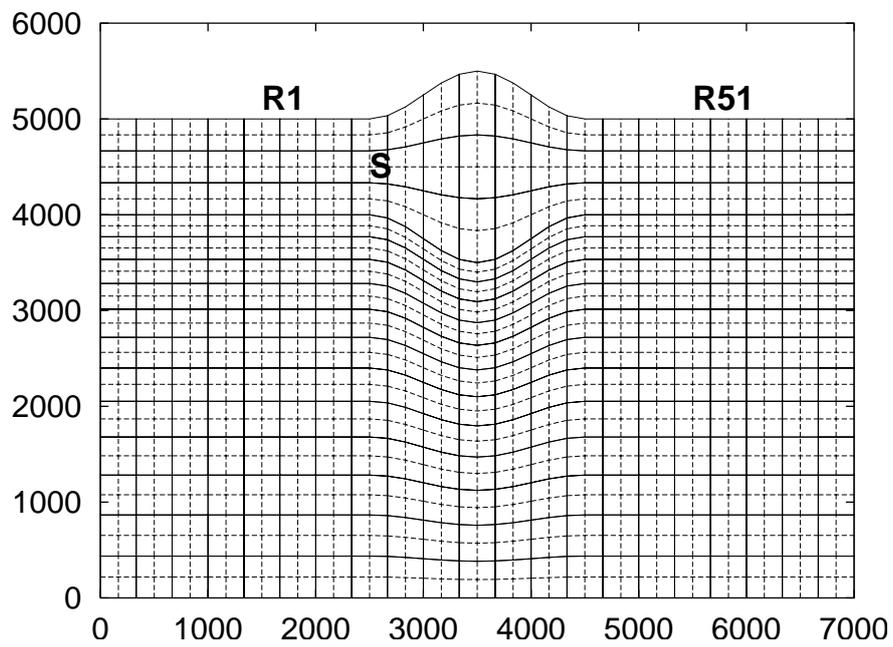


FIG. 4.32 – Modèle utilisé pour l'étude de la résonance d'un bassin sédimentaire à basse fréquence en présence d'une topographie de surface. La position de la source placée près de la surface dans la couche lente ( $S$ ) et des deux extrémités de la ligne de récepteurs ( $R_1$  et  $R_{51}$ ) est également indiquée.

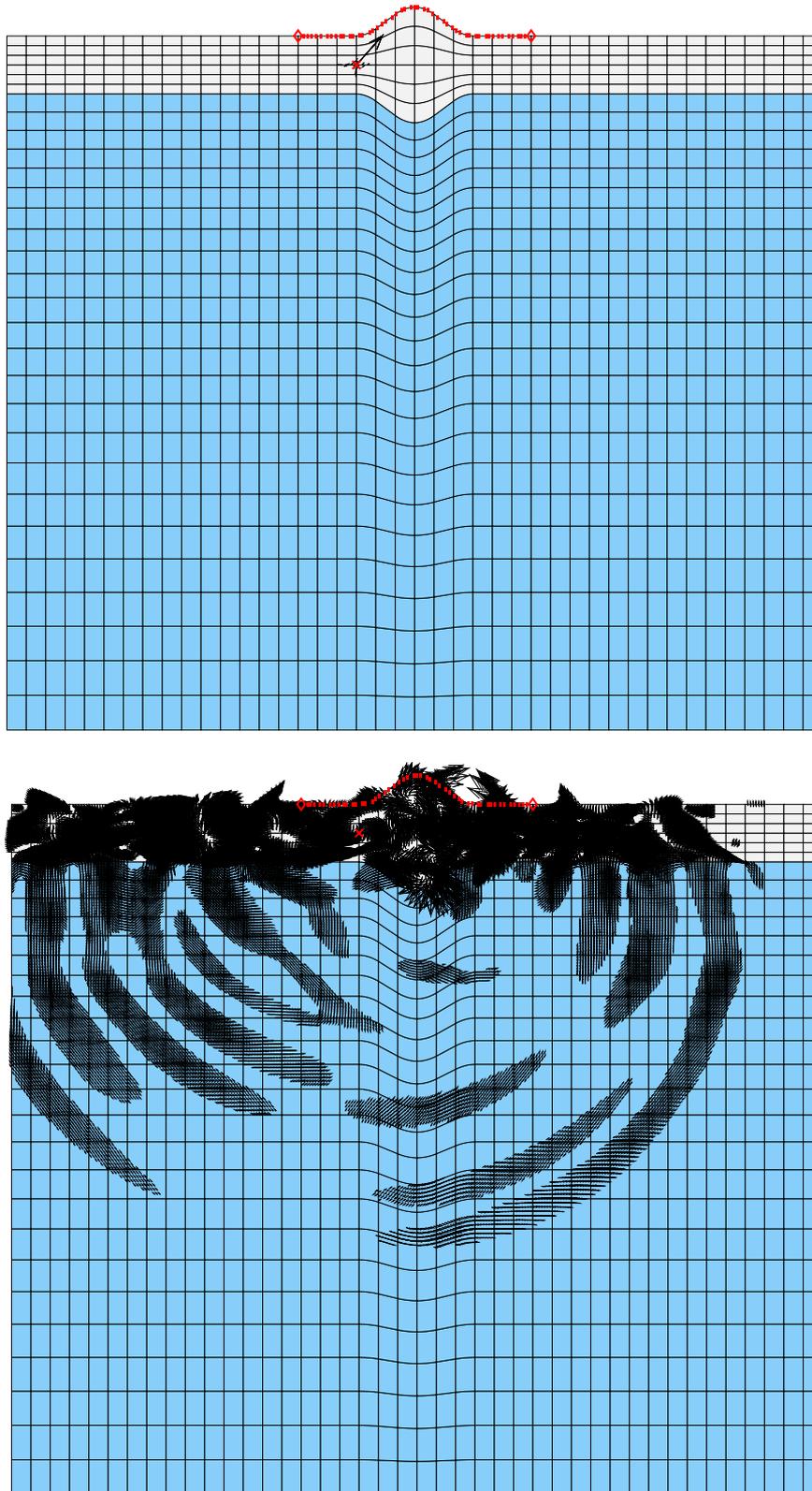


FIG. 4.33 – Instantanés de propagation obtenus à basse fréquence dans le cas d'un bassin sédimentaire présentant une interface courbe ainsi qu'une topographie de la surface libre. La source, dont la position est indiquée par la croix, est située près de la surface dans la couche sédimentaire. Un effet de piégeage d'énergie apparaît clairement dans la couche lente.

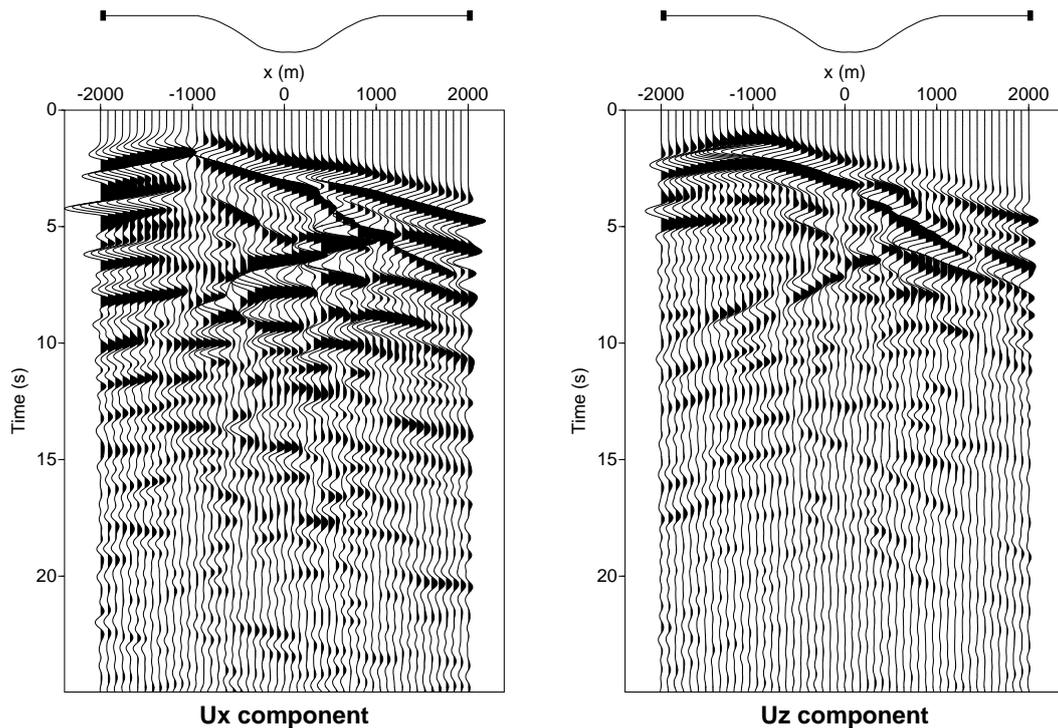


FIG. 4.34 – Sismogrammes enregistrés en surface dans le cas d’une source explosive basse fréquence située près de la surface dans la couche sédimentaire, pour le modèle présentant une interface courbe ainsi qu’une topographie de la surface libre. La forme du bassin sédimentaire est indiquée le long de la ligne de récepteurs. Un effet de piégeage d’énergie dans la couche lente est particulièrement clair sur les deux composantes.

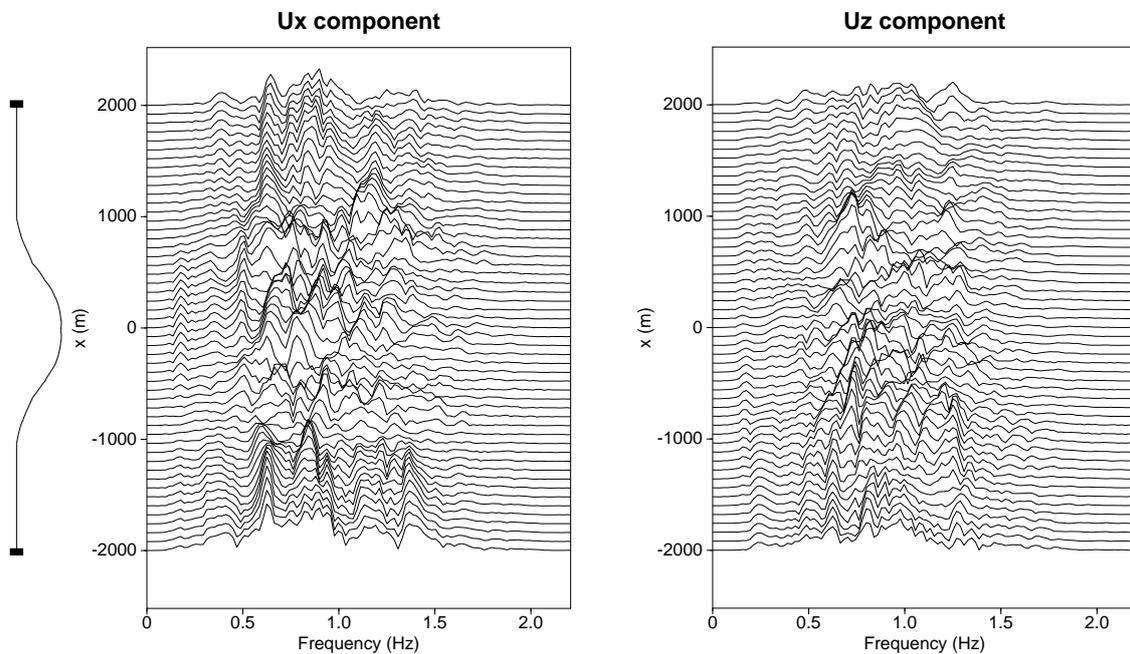


FIG. 4.35 – Périodogrammes enregistrés en surface dans le cas d’une source explosive basse fréquence située près de la surface dans la couche sédimentaire, pour le modèle présentant une interface courbe ainsi qu’une topographie de la surface libre. Les enregistrements sont représentés en fréquence. La source est un Ricker de fréquence centrale 0.75 Hz, dont le spectre est représenté sur la figure 4.26. La forme du bassin sédimentaire est indiquée le long de la ligne de récepteurs. Un fort effet lié à la forme de celui-ci apparaît de manière très claire.

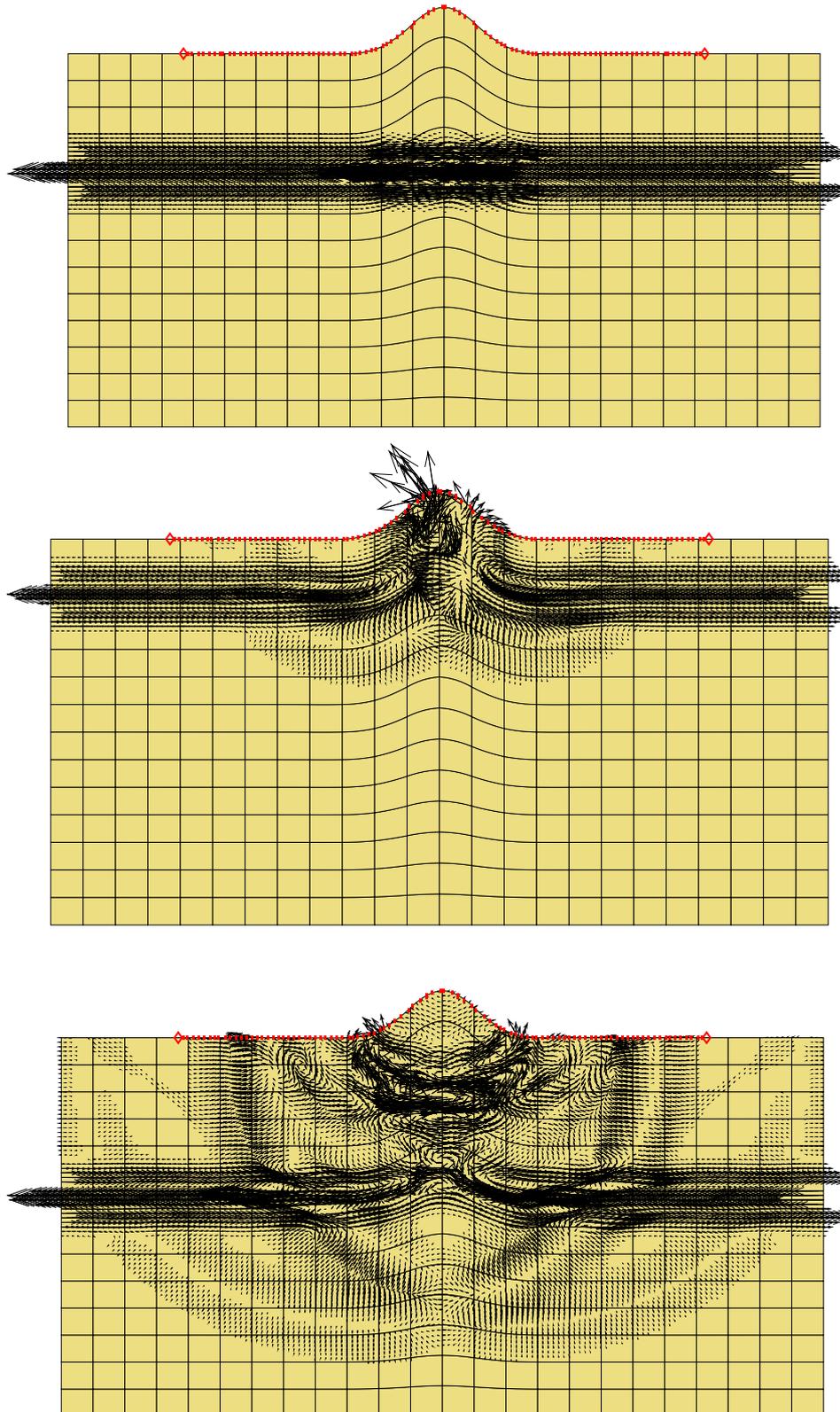


FIG. 4.36 – Instantanés de propagation obtenus dans le cas d'une onde incidente SV, à différents instants, pour un rapport  $h/l = 0.5$ . Une amplification apparaît au sommet de la colline, et celle-ci génère une onde P de surface diffractée ainsi qu'une onde de Rayleigh.

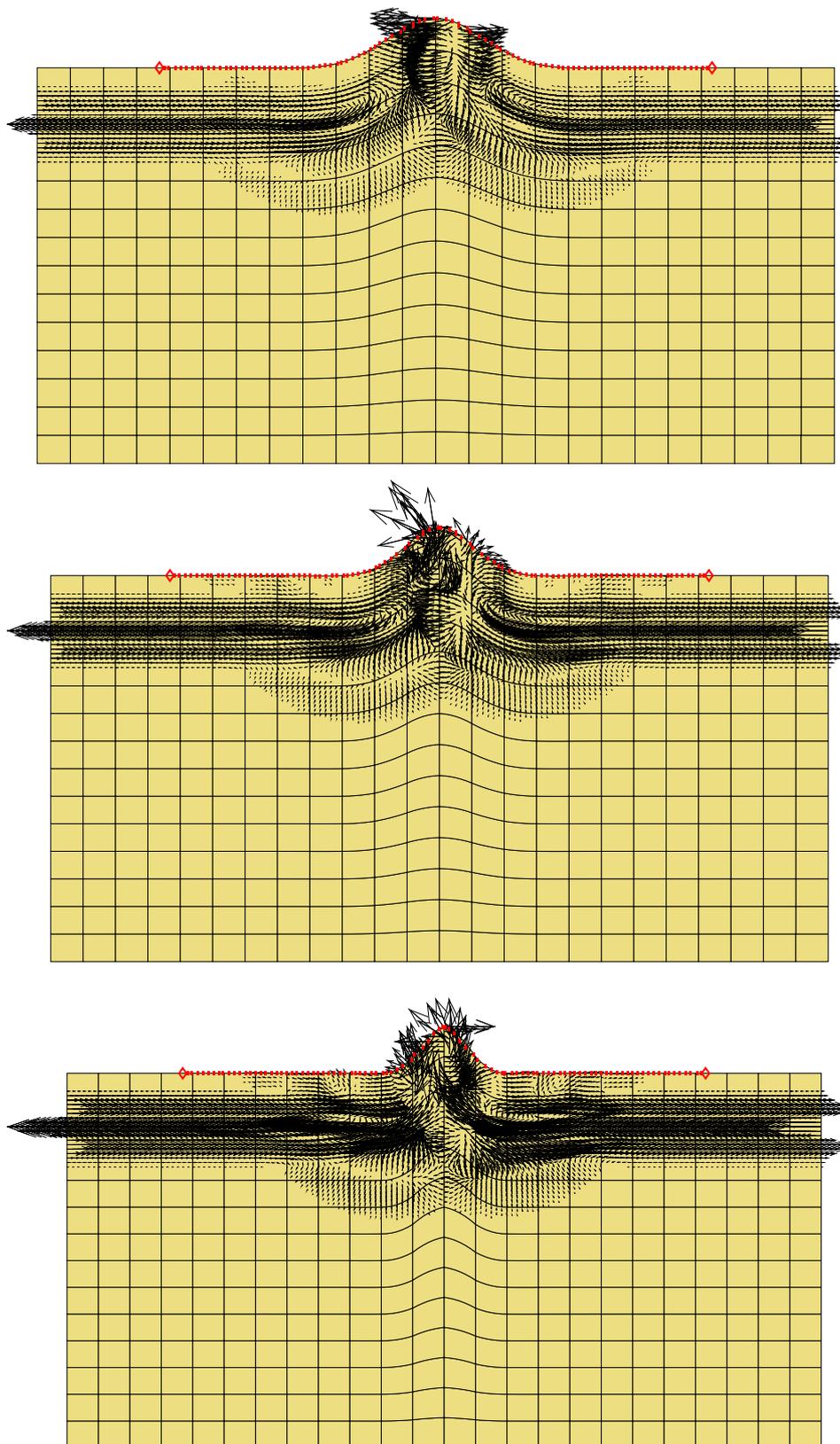


FIG. 4.37 – Instantanés de propagation obtenus dans le cas d'une onde incidente SV, au même instant, pour un rapport  $h/l$  valant 0.375 (haut), 0.50 (milieu), et 0.75 (bas). L'amplification mesurée au sommet dépend de cette valeur du rapport  $h/l$ .

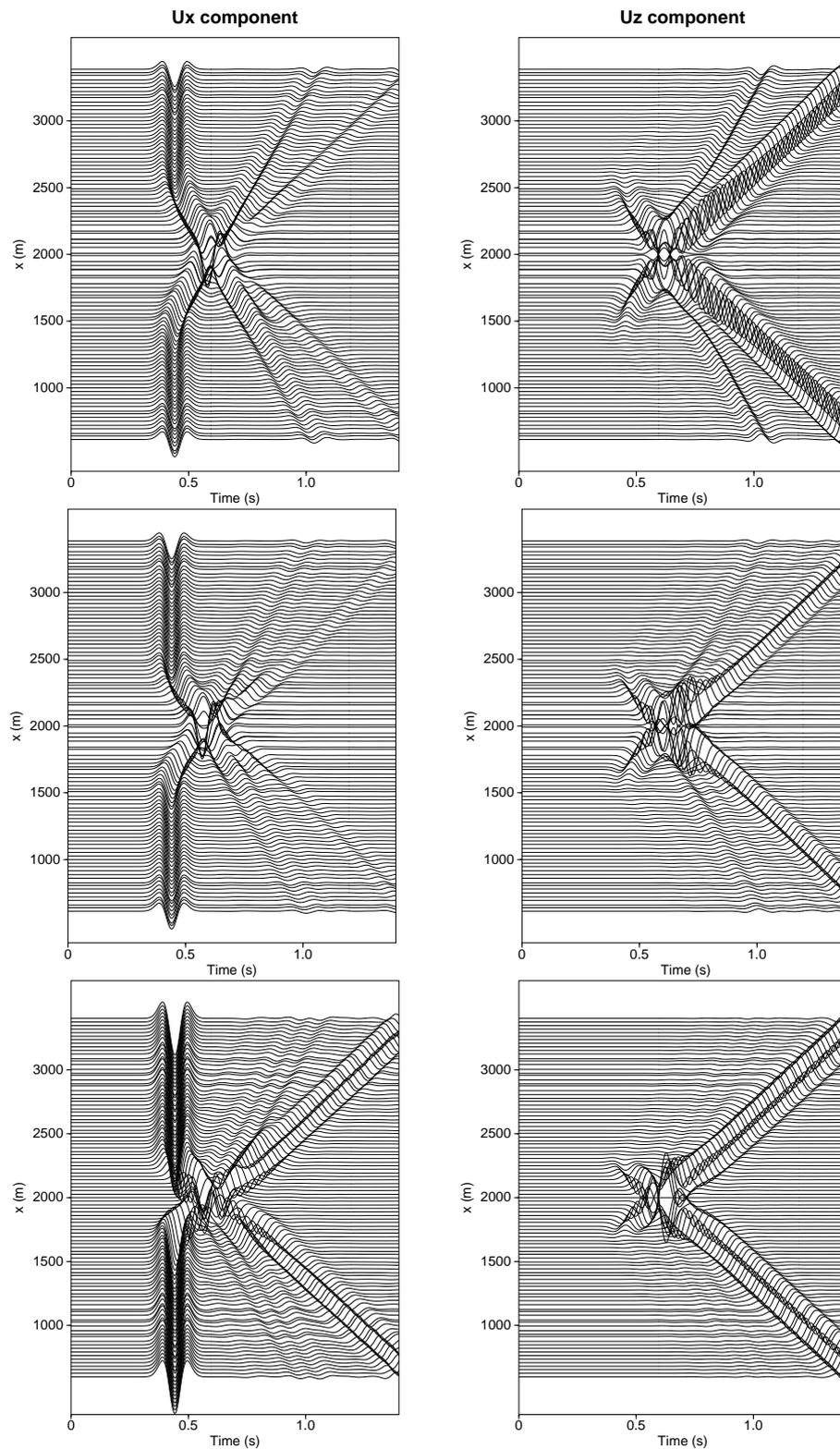


FIG. 4.38 – Sismogrammes enregistrés en surface, le long de la topographie, dans le cas d'une onde incidente SV, pour un rapport  $h/l$  valant 0.375 (haut), 0.50 (milieu), et 0.75 (bas). L'onde S directe apparaît clairement sur la composante horizontale du déplacement (gauche), suivie par l'onde P de surface puis par l'onde de Rayleigh. Il est clair que l'amplification mesurée au sommet est fonction du rapport  $h/l$ .

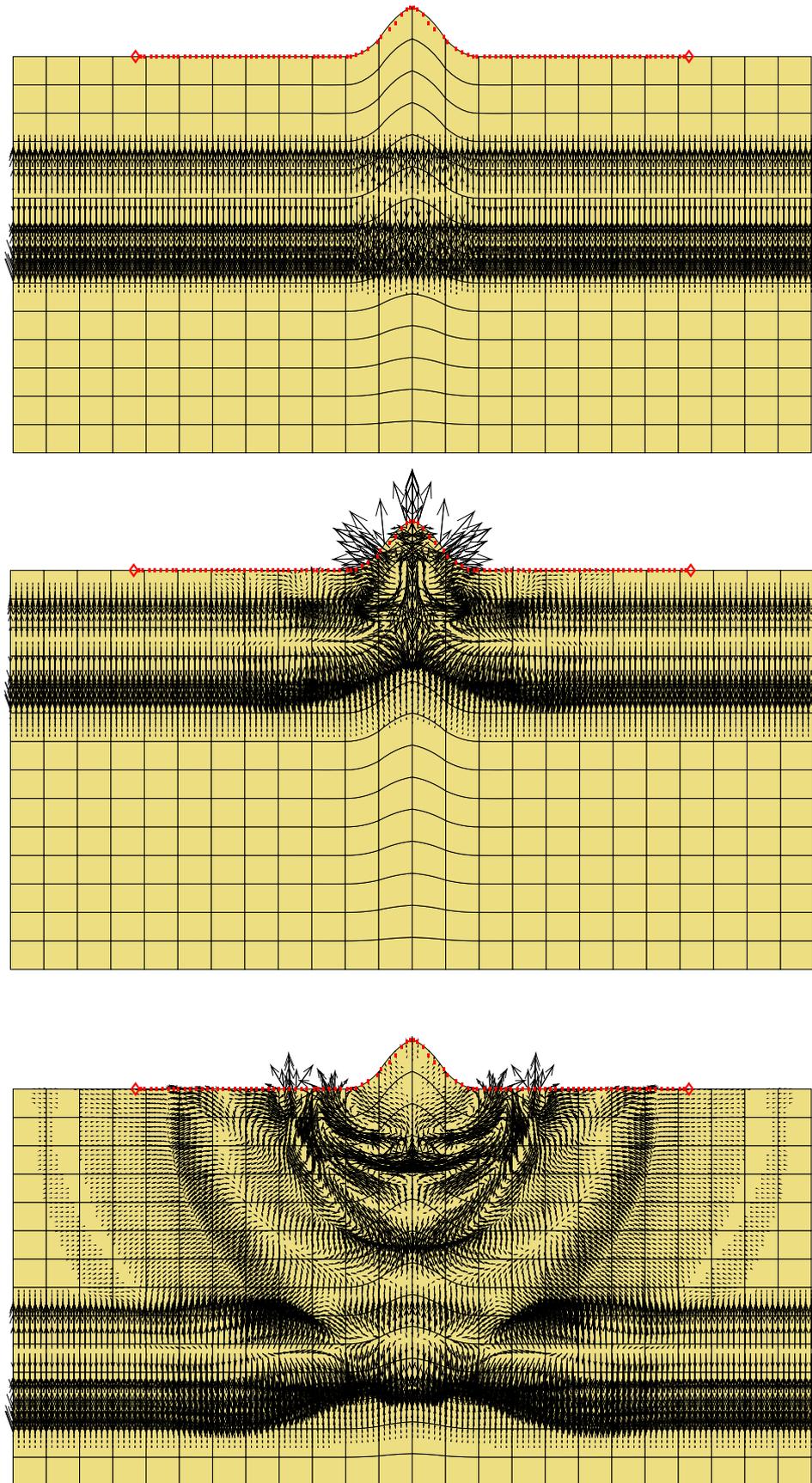


FIG. 4.39 – Instantanés de propagation obtenus dans le cas d'une onde incidente  $P$ , à différents instants, pour un rapport  $h/l = 0.75$ . Une amplification apparaît au sommet de la colline, cette colline générant une onde  $P$  de surface diffractée ainsi qu'une onde de Rayleigh.

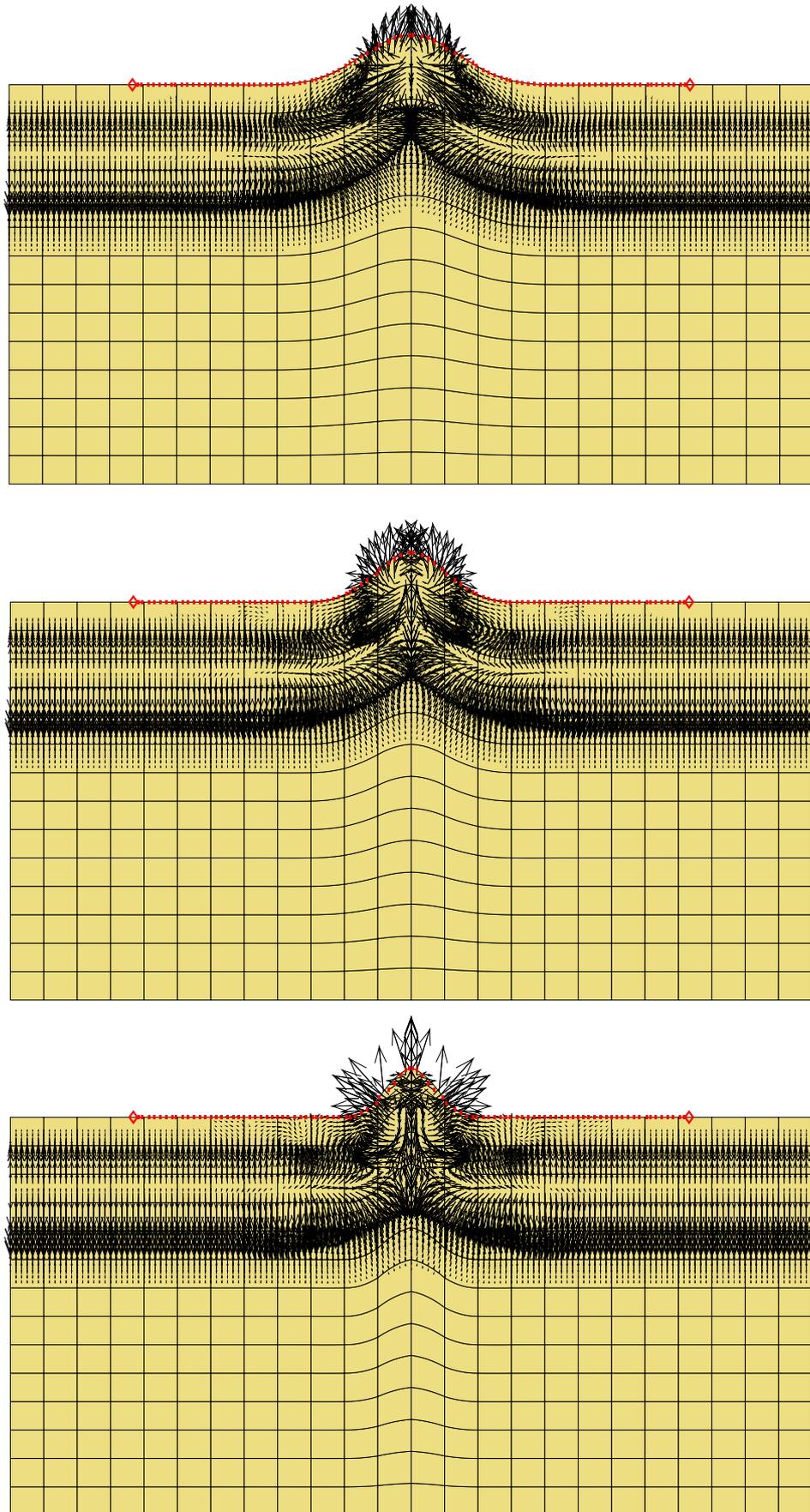


FIG. 4.40 – Instantanés de propagation obtenus dans le cas d'une onde incidente  $P$ , au même instant, pour un rapport  $h/l$  valant 0.375 (haut), 0.50 (milieu), et 0.75 (bas). L'amplification mesurée au sommet dépend de cette valeur du rapport  $h/l$ .

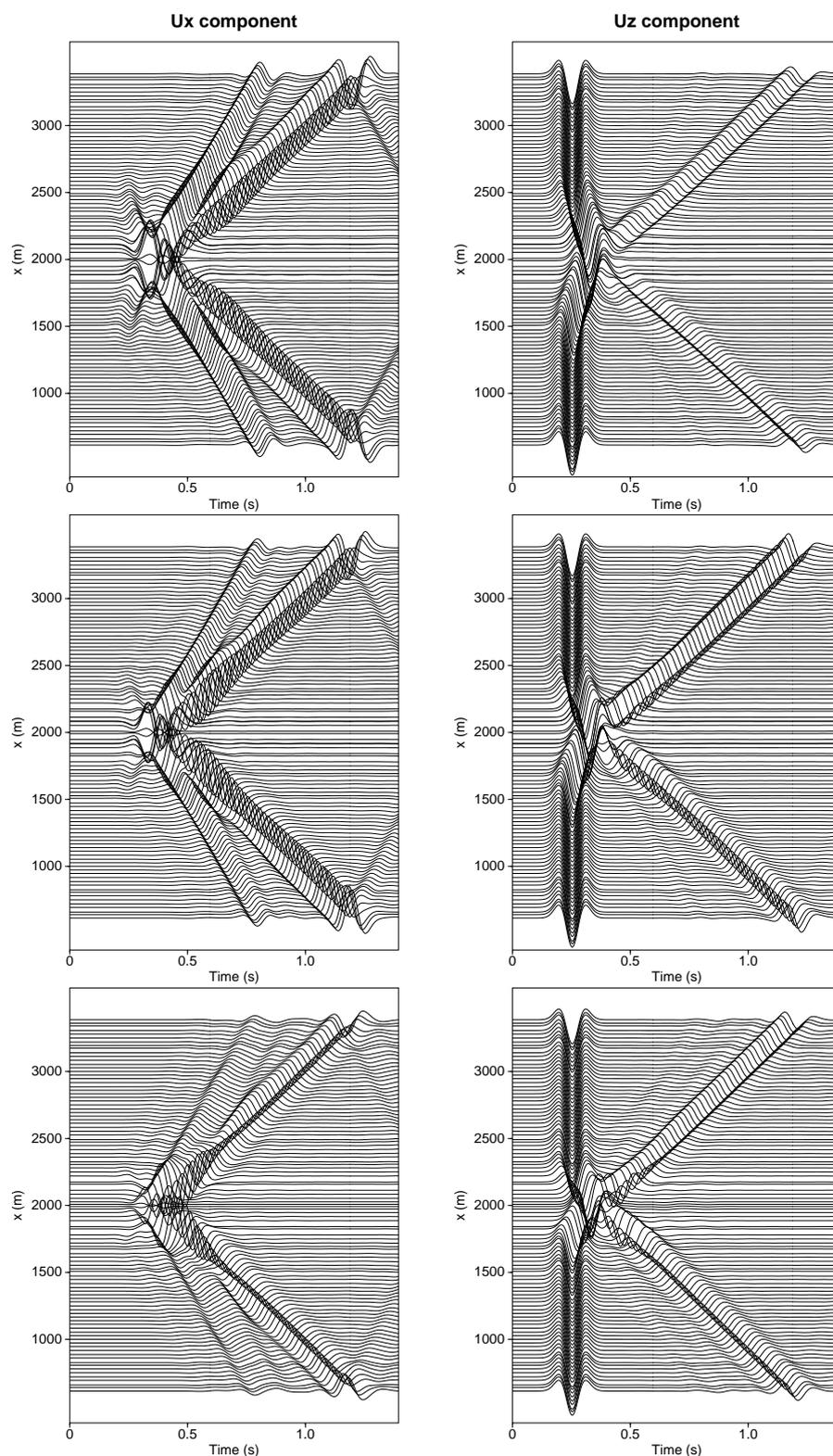


FIG. 4.41 – Sismogrammes enregistrés en surface, le long de la topographie, dans le cas d'une onde incidente  $P$ , pour un rapport  $h/l$  valant 0.375 (haut), 0.50 (milieu), et 0.75 (bas). L'onde  $P$  directe apparaît clairement sur la composante verticale du déplacement (droite), suivie par l'onde  $P$  de surface puis par l'onde de Rayleigh. Il est clair que l'amplification mesurée au sommet est fonction du rapport  $h/l$ . Les réflexions artificielles que l'on peut observer en provenance des bords du modèle sont dues à l'introduction de conditions périodiques dans la direction horizontale afin de pouvoir simuler la propagation d'une onde plane.



## Chapitre 5

# Étude des effets de site 3D par la méthode des éléments spectraux

### 5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la méthode des éléments spectraux pouvait s'appliquer à de nombreux cas réalistes 2D. En particulier, nous avons pu propager avec précision différents types d'ondes importants (ondes réfractées, ondes de Stoneley). Nous avons également pu étudier des modèles présentant une topographie de surface (onde de Rayleigh sur une surface courbe ou sur une discontinuité de la surface, effets de site 2D). Dans le présent chapitre, nous étendons de manière naturelle ce travail au cas tridimensionnel. Dans un premier temps, nous validons le code 3D sur un modèle simple, puis nous abordons l'étude des effets de site pour des structures réellement 3D, d'abord dans le cas homogène, puis dans le cas hétérogène.

Dans de nombreux cas rencontrés dans la pratique, dès que des enregistrements sismiques sont effectués dans des zones où la topographie est accidentée, il est primordial de comprendre l'effet d'une topographie 3D sur la propagation des ondes sismiques. [Bouchon \*et al.\* \(1996\)](#) et [Sánchez-Sesma \*et al.\* \(1996\)](#) ont dressé récemment un bilan des principaux effets d'une telle structure. Ils rappellent qu'une telle étude est motivée par l'observation sur le terrain de deux types de phénomènes. Le premier est l'enregistrement d'arrivées secondaires (décrites depuis longtemps dans la littérature, voir par exemple [Gilbert et Knopoff, 1960](#) et [Hudson, 1967](#)), par des sismomètres situés dans des régions présentant de fortes topographies de surface, ou situés à proximité de telles régions. Cette énergie secondaire est interprétée comme des phases diffractées par le relief, et composées essentiellement d'ondes de Rayleigh. Des études plus récentes ([Boore \*et al.\*, 1981](#) ; [Clouser et Langston, 1995](#)) ont confirmé cette interprétation et ont montré que la diffraction par une topographie peut être une source importante de coda sismique. La deuxième observation est l'enregistrement d'accélération extrêmement fortes dans des régions où les récepteurs étaient situés sur des reliefs topographiques, ou dans leur voisinage. L'un des premiers cas mettant en relief ce type de phénomènes et ayant été étudié en détail est celui du tremblement de terre de San Fernando (Californie) de 1971, pour lequel certains récepteurs avaient enregistré des accélérations qui étaient parmi les plus élevées jamais observées à cette époque. Des simulations numériques menées pour ce site ont montré que les accélérations enregistrées avaient été fortement amplifiées par la topographie ([Boore, 1972b](#) ; [Bouchon, 1973](#)). À la suite de cet exemple, la communauté sismologique s'est intéressée au problème, et des expériences ont été menées sur le terrain ([Davis et West, 1973](#) ; [Griffiths et Bollinger, 1979](#) ; [Pedersen, 1994](#)). Ces expériences ont confirmé que des amplifications parfois très fortes se produisent au sommet des collines, ou au voisinage du sommet, ainsi que le long des crêtes dans une zone montagneuse.

Des observations directes sur le terrain, dans des zones ayant subi un fort tremblement de terre, ont également montré de fortes perturbations dans l'arrangement des blocs des pierres et des rochers au voisinage du sommet des reliefs dans des zones de forte topographie ([Clark, 1972](#) ; [Bolt et Hansen, 1977](#)), ce qui confirme encore que, lors d'un événement sismique important, de telles zones sont soumises à un tremblement très intense. L'intérêt pour ces phénomènes d'amplification liés à la topographie a été encore renforcé par l'observation des zones ayant subi de forts dommages dans des tremblements de terre récents, par exemple Whittier Narrows (Californie) en 1987 ([Kawase et Aki, 1990](#)) et Loma Prieta (Robinwood ridge) en 1989 ([Ponti et Wells, 1991](#) ; [Hartzell \*et al.\*, 1994](#)).

Depuis trois ans, la recherche dans ce domaine est devenue encore plus active. En effet, dans le cas récent du tremblement de terre de Northridge (Californie) de 1994, des accélérations très importantes (1.8 *g* au maximum) ont été enregistrées

au sommet de la colline de Tarzana, située à 6 km au sud de l'épicentre du séisme principal (Spudich *et al.*, 1996), ce qui constitue l'une des accélérations les plus élevées jamais enregistrée lors d'un séisme. Un tel effet anormal a été enregistré en dépit du fait que la topographie du site n'est pas très accidentée, la colline mesurant seulement 15 m de haut pour une longueur de 500 m et une largeur de 130 m. Des amplifications de l'ordre de 2 à 4 ont été mesurées pour certaines fréquences entre les stations situées au sommet de la colline et celles situées à la base et servant de référence. L'effet d'amplification mesuré présente de plus une très forte variation latérale le long de la colline (Rial, 1996). Même si l'effet lié à la topographie a probablement été renforcé de manière significative par une zone de faible vitesse S située sous le sommet de la colline (Catchings et Lee, 1996), voire par un léger glissement de la structure déclenché par le choc principal (Rial, 1996), cet effet de topographie seul produit une amplification forte, de l'ordre de 30 % à 100 %, au voisinage du sommet, comme l'ont montré les modélisations numériques de Bouchon et Barker (1996).

Suite à ces différentes observations sur le terrain, et en raison du besoin existant de prévoir à l'avance de tels effets, notamment dans les zones fortement peuplées, afin de tenir compte de tels effets d'amplification dans l'établissement des cartes de risque sismique et des normes de construction des bâtiments, de très nombreuses études théoriques et numériques ont été menées sur la diffraction des ondes sismiques par des topographies plus ou moins compliquées (Trifunac, 1973 ; Sánchez-Sesma et Rosenblueth, 1979 ; Bard, 1982 ; Wong, 1982 ; Sánchez-Sesma, 1983 ; Bouchon, 1985 ; Géli *et al.*, 1988 ; Kawase, 1988 ; Gaffet et Bouchon, 1989 ; Sánchez-Sesma et Campillo, 1991 ; Pedersen, 1994). Même si l'utilisation de telles méthodes pour des cas réalistes tridimensionnels pose encore quelques problèmes en raison du coût informatique important de ces simulations, il est probable que dans un futur proche de telles limitations seront de moins en moins gênantes en raison de l'augmentation spectaculaire et rapide de la puissance des moyens de calcul disponibles. Il ne fait pas de doute que, d'ici quelques années, le calcul direct des effets de site pour des structures 3D sera plutôt limité par la difficulté à connaître avec précision les caractéristiques géologiques d'un site, les lois de comportement du sol dans une telle zone, ainsi que les caractéristiques de la source sismique, que par la difficulté du calcul numérique proprement dit. Même si le défi majeur consistant par exemple à analyser les effets de site à l'échelle d'une région pour des fréquences allant jusqu'à quelques Hertz reste pour le moment inaccessible aux moyens de calcul dont nous disposons, des tentatives intéressantes ont été menées récemment. Citons par exemple les résultats de Olsen *et al.* (1995) et Olsen et Archuleta (1996) qui ont pu aborder, en utilisant une technique de différences finies, l'étude numérique du comportement du bassin de Los Angeles dans le cas d'un tremblement de terre se produisant sur la faille de San Andreas, pour des fréquences allant jusqu'à 0.4 Hz.

Les calculs que l'on peut effectuer dans de tels modèles sont très sensibles à notre connaissance des caractéristiques du milieu étudié, ce qui constitue une source de difficulté dans toute tentative de prédiction des effets de site. Les résultats théoriques et numériques obtenus pour des topographies telles que la crête d'une chaîne de montagne prédisent qualitativement une amplification au sommet, ou aux environs du sommet, ce qui est cohérent avec les enregistrements effectués sur le terrain. Le niveau de cette amplification calculée est en revanche presque systématiquement sous-évalué par rapport à ce qui est mesuré sur le terrain. Plusieurs hypothèses ont été avancées pour expliquer cette sous-évaluation. L'une des explications les plus fréquemment invoquées est le caractère 2D de la plupart des cas étudiés, tant théoriquement que numériquement, dans la littérature. Il est clair que dans des modèles présentant une topographie compliquée, les effets 3D doivent avoir une grande importance. Les simulations numériques effectuées dans ce domaine ont montré des effets directionnels d'une grande importance dans les structures 3D (Bouchon *et al.*, 1996 ; Bouchon et Barker, 1996), ce qui a confirmé les effets 3D observés sur le terrain. Une autre explication avancée concerne des propriétés particulières du sous-sol dans de telles zones, par exemple une très faible vitesse S dans les sédiments formant le sommet de la structure (Catchings et Lee, 1996 ; Spudich *et al.*, 1996), ou encore un comportement non-linéaire du sol pouvant conduire aux amplifications extrêmement fortes observées (Joyner et Chen, 1975). Si l'on se trouve en présence d'un bassin sédimentaire notamment, on peut s'attendre à de forts effets d'amplification, surtout si les sédiments sont mal consolidés et présentent donc de très faibles vitesses S. Le cas du bassin de Mexico, ainsi que la région de Kobe, constituent des exemples tristement célèbres. Il est intéressant de constater qu'en général, aucun de ces effets ne suffit à lui seul à expliquer l'amplitude des phénomènes enregistrés, et dans la réalité il ne fait pas de doute que celle-ci résulte de la superposition des contributions de ces différents effets.

Clairement, l'étude des effets de site pour des modèles tridimensionnels réalistes est une voie qui s'ouvre pour le futur, mais qui nécessitera une compréhension plus détaillée de chacun des phénomènes que nous venons de mentionner. Dans ce but, nous allons tâcher dans le présent chapitre d'utiliser la méthode des éléments spectraux pour étudier les effets d'amplification liés à la topographie pour des modèles 3D, tant dans le cas homogène que dans le cas hétérogène qui est rarement abordé dans la littérature existante. Il nous paraît donc intéressant de montrer ici, sur un modèle simple représentant une colline, en présence ou non d'un bassin sédimentaire, que l'on peut retrouver des amplifications fortes et des résonances dans une telle structure, comme cela est observé sur le terrain. Une telle étude constitue un premier pas vers l'analyse des effets de site pour des structures 3D réalistes.

## 5.2 Validation du code 3D sur un maillage aléatoire

Afin, dans un premier temps, de valider le code de modélisation par éléments spectraux 3D, nous propageons une onde plane P ou S dans un maillage aléatoire, celui-ci définissant une matrice jacobienne locale dont tous les éléments sont non nuls, ce qui permet de tester l'ensemble des termes dans notre code de calcul. Le modèle est un cube homogène, sa taille étant de  $2080 \times 2080 \times 1050$  m. Le maillage est composé de  $26 \times 26 \times 14$  éléments, un degré polynômial de  $N = 8$  étant utilisé dans chaque direction d'un élément, ce qui correspond à un nombre total de points de 4 935 953. Des conditions périodiques sont implémentées sur tous les bords latéraux de la grille, et une condition de surface libre est présente sur la surface du modèle. Le milieu a une vitesse P de  $3200 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1847.5 \text{ m.s}^{-1}$ , et une densité de  $2200 \text{ m.s}^{-1}$ . La source est une onde plane P ou S incidente suivant la direction verticale. Afin de tester également les coefficients de la matrice jacobienne, nous déformons aléatoirement le maillage. Pour des raisons purement informatiques, la taille mémoire disponible sur le calculateur massivement parallèle utilisé étant limitée, nous ne déformons aléatoirement que les positions verticales des points du maillage, et non les positions horizontales. De ce fait,  $x$  ne dépend que de  $\xi$  et  $y$  ne dépend que de  $\eta$ , ce qui permet d'éviter de stocker certaines composantes de la matrice jacobienne qui sont identiquement nulles.

Notons ici au passage que les simulations 3D présentées dans ce chapitre ont nécessité l'utilisation de l'ensemble de la mémoire disponible sur la Connection Machine CM5 du CNCPST, soit 3.5 Gigaoctets. Cette taille mémoire importante est en grande partie due à l'utilisation des bibliothèques de calcul et de communication fournies par le constructeur (bibliothèques CMSSL), dont la philosophie est clairement de privilégier la diminution du temps de calcul au détriment de l'occupation mémoire. La capacité mémoire réellement utilisée par nos données est seulement de l'ordre de 1.5 Gigaoctets dans la plupart des simulations qui vont être présentées, ce qui est beaucoup plus raisonnable. L'écriture du code avec une approche de type *message passing*, que nous envisageons, devrait permettre de se rapprocher de cette taille mémoire « utile » et donc de traiter des cas significativement plus gros.

Les récepteurs sont placés dans un plan horizontal situé à cinq couches de mailles sous la surface, ce plan n'étant pas déformé aléatoirement, afin que les récepteurs soient tous coplanaires. L'instant initial de la simulation est représenté par une coupe verticale dans le modèle sur la figure 5.1, à la fois dans le cas d'une onde S incidente, et dans le cas d'une onde P incidente. La dépendance temporelle de l'onde plane est un Ricker de fréquence centrale  $f_0 = 17.8$  Hz dans le cas de l'onde P, et  $f_0 = 10.3$  Hz dans le cas de l'onde S. Le signal est propagé pendant 0.8 s avec un pas de temps de  $\Delta t = 0.5$  ms. Si le code de calcul fonctionne correctement, tous les récepteurs enregistreront en même temps un premier passage de l'onde plane ascendante, puis un deuxième passage de la même onde plane après réflexion totale sur la surface libre sous incidence normale (donc sans conversion de mode et sans changement d'amplitude). C'est ce que nous observons, tant pour l'onde S incidente que pour l'onde P, sur les sismogrammes de la figure 5.2. Les temps d'arrivée de l'onde directe et de l'onde réfléchie, donnés analytiquement car le milieu est homogène, sont corrects dans les deux cas, et l'amplitude de l'onde réfléchie est exactement la même que celle de l'onde directe, ce qui permet de valider le code de modélisation 3D.

## 5.3 Effet d'amplification dans une structure tridimensionnelle

Après avoir validé le code de calcul 3D, il est maintenant intéressant de tenter de modéliser les effets de site dans une structure réellement tridimensionnelle. Des résultats numériques pour un milieu homogène ont été publiés par [Bouchon et al. \(1996\)](#), et ont montré de forts effets d'amplification liés à la présence d'une topographie. De tels effets ont également été observés sur le terrain pour des récepteurs placés sur des topographies, comme nous l'avons signalé dans l'introduction. Nous allons essayer de retrouver qualitativement et quantitativement ce genre d'effets.

Pour cela, nous considérons un modèle 3D dans lequel une colline est présente à la surface libre. La taille du modèle est de  $2080 \times 2080 \times 1050$  m. La colline a une forme gaussienne (voir figure 5.3), donnée analytiquement par

$$z = 1050 + h \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp\left(-\frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (5.1)$$

avec  $x_0 = 1040$  m,  $y_0 = 1040$  m,  $\sigma_x = 250$  m,  $\sigma_y = 125$  m et une hauteur  $h = 180$  m. Le maillage est composé de  $26 \times 26 \times 14$  éléments, un degré polynômial de  $N = 8$  étant utilisé dans chaque direction d'un élément, ce qui correspond à un nombre total de points de 4 935 953. Suivant les cas, en profondeur, le milieu est homogène, ou bien il possède une interface plane, ou bien encore il contient un bassin sédimentaire à structure asymétrique.

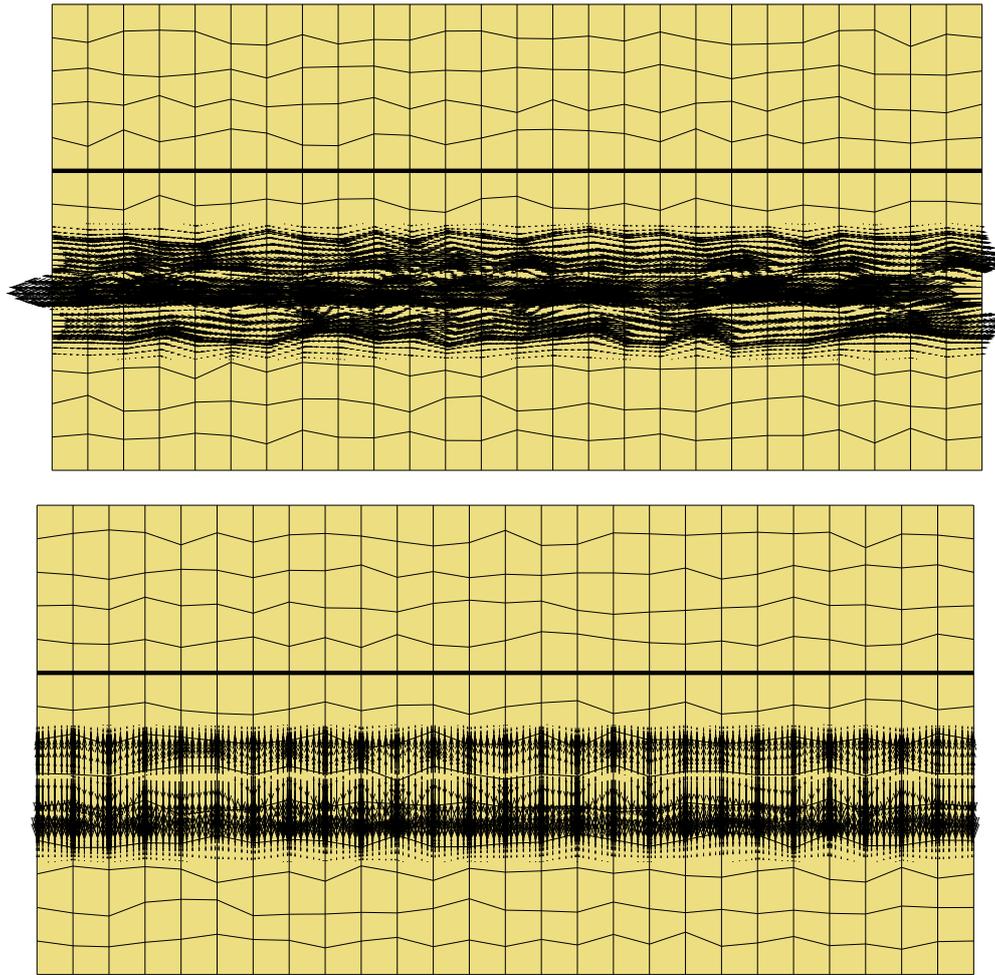


FIG. 5.1 – Coupe verticale dans le maillage aléatoire 3D, à l’instant initial de la simulation, à la fois pour une onde plane S incidente (haut) et pour une onde plane P incidente (bas). Les récepteurs sont situés dans le plan non déformé visible en coupe à cinq couches de mailles sous la surface (ligne épaisse). L’onde plane est incidente suivant la verticale.

### 5.3.1 Cas d’un milieu homogène

Dans cette première simulation, le milieu est homogène, et a une vitesse P de  $3200 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1847.5 \text{ m.s}^{-1}$ , et une densité de  $2200 \text{ kg.m}^{-3}$ . Ce modèle homogène est très similaire au cas étudié par [Bouchon et al. \(1996\)](#). Nous effectuons une étude paramétrique de la réponse de la structure pour une onde S polarisée soit suivant le petit axe de la topographie, soit suivant le grand axe. L’onde S est incidente verticalement dans la structure, et possède suivant les cas une longueur d’onde  $\lambda_s = h, 2h$  ou  $3h$ , où  $h$  est la hauteur de la colline. Les fréquences fondamentales correspondantes du Ricker sont  $f_h = 10.2 \text{ Hz}$ ,  $f_{2h} = 5.1 \text{ Hz}$  et  $f_{3h} = 3.4 \text{ Hz}$ . La durée de la simulation est de  $0.8 \text{ s}$ , avec un pas de temps de  $\Delta t = 0.5 \text{ ms}$ .

Sur la figure 5.4, nous montrons en coupe les instantanés de propagation pour une onde S de longueur d’onde  $\lambda_s = h$  polarisée suivant le petit axe de la topographie. La topographie génère essentiellement une forte onde P diffractée ainsi qu’une onde de Rayleigh qui descend de manière privilégiée suivant le petit axe. Les différentes phases produites dans cette simulation peuvent être étudiées plus en détail sur les sismogrammes de la figure 5.7, enregistrés suivant le petit axe de la topographie. Loin de la topographie, les traces enregistrées se composent (dans l’ordre d’arrivée) de l’onde plane directe (Ricker d’amplitude double par rapport à l’onde plane introduite en raison de la réflexion à la surface libre), de l’onde P diffractée, puis de l’onde de Rayleigh. On notera que les sismogrammes ont été correctement calculés, c’est-à-dire qu’ils ne présentent pas d’artefacts ou d’oscillations numériques particulières. La vue de dessus de la figure 5.5 pour le même cas montre clairement un effet 3D dans la structure, l’onde de Rayleigh et l’onde P diffractée partant préférentiellement suivant le petit axe de la topographie, dont la base elliptique a été dessinée sur la figure. Cet effet 3D est encore plus frappant sur l’enregistrement de la même composante  $u_y$  le long du petit axe et le long du grand axe (figure 5.8). Nous constatons bien, comme cela est observé sur le terrain, qu’il existe deux échelles différentes auxquels

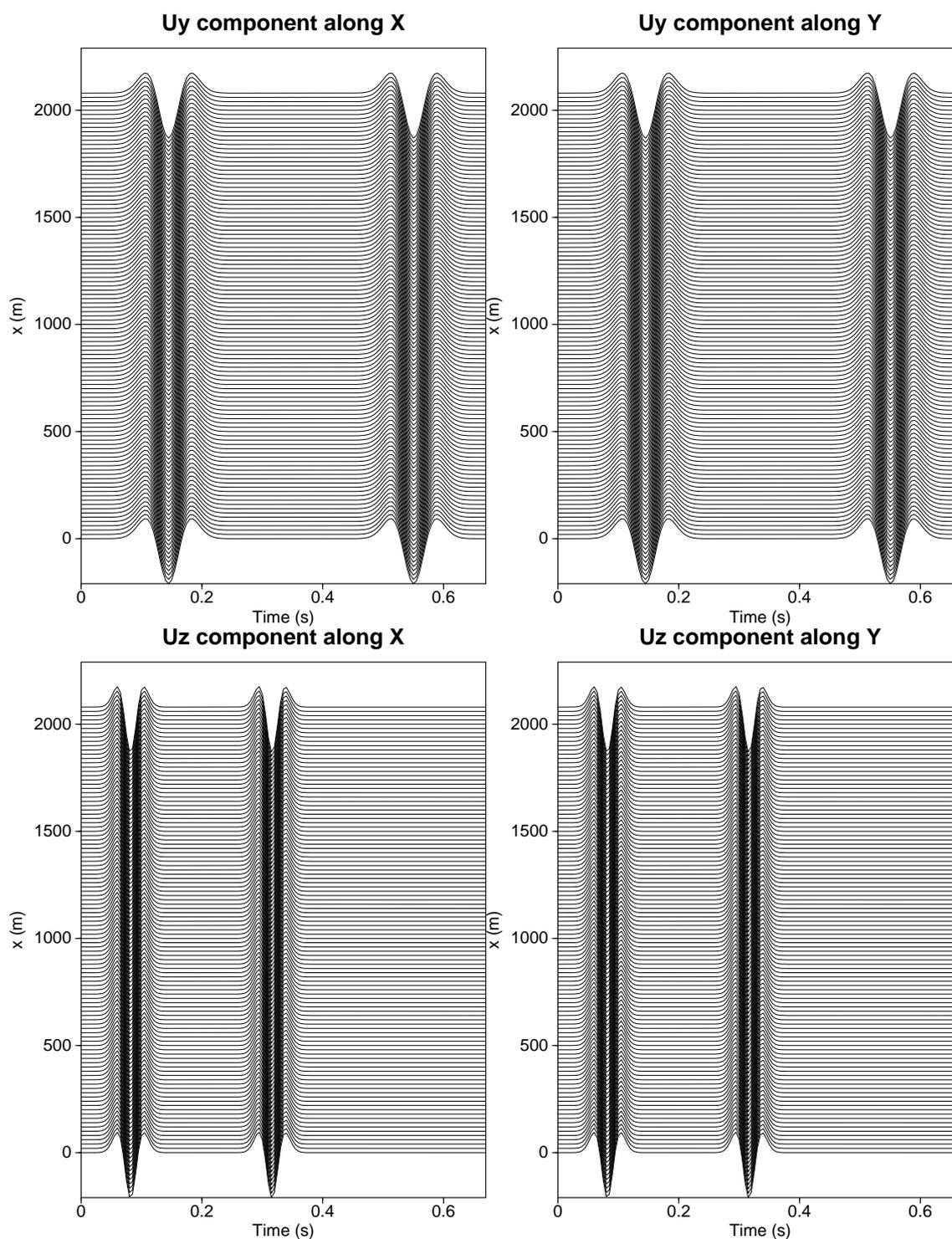


FIG. 5.2 – Sismogrammes enregistrés dans un plan horizontal situé à cinq couches de mailles sous la surface, dans le test de validation sur un maillage aléatoire, pour une onde plane S incidente (haut) et pour une onde plane P incidente (bas). L'enregistrement est effectué dans ce plan suivant une ligne parallèle à l'axe  $x$  (gauche) ou parallèle à l'axe  $y$  (droite). Le déplacement horizontal  $u_y$  est représenté pour l'onde S, et le déplacement vertical  $u_z$  pour l'onde P. Les temps d'arrivée et l'amplitude de l'onde directe et de l'onde réfléchie sont corrects dans les deux cas, ce qui permet de valider le code de modélisation 3D.

se manifestent les effets liés à la présence d'une topographie : à petite échelle, c'est-à-dire sur la topographie elle-même, l'effet principal est une forte amplification des déplacements mesurés en surface ; en revanche, à grande échelle, loin de la topographie, la présence de celle-ci se fait sentir essentiellement par l'apparition d'ondes diffractées et d'ondes de Rayleigh, avec un fort effet directionnel dans le cas tridimensionnel.

Dans le cadre de notre étude paramétrique en fonction de la longueur d'onde incidente, nous montrons une coupe du champ de déplacement dans la structure pour une onde S de longueur d'onde  $\lambda_s = 3h$  polarisée le long du grand axe de la topographie (figure 5.6). En raison de la grande longueur d'onde incidente par rapport à la taille caractéristique de la structure, les phénomènes apparaissent de manière moins distincte que dans le cas  $\lambda_s = h$ . Cependant, l'on peut tout de même remarquer qu'une forte onde P diffractée se forme.

Les différences de comportement dans la structure dans les cas  $\lambda_s = h$ ,  $2h$  et  $3h$  pour une onde S polarisée suivant le petit axe ou le grand axe de la topographie sont montrées sur les figures 5.10 et 5.11. Sur ces figures, l'amplitude de la projection du vecteur déplacement dans le plan horizontal a été dessinée, normalisée par rapport à l'amplitude maximale du signal direct (le Ricker de l'onde plane incidente) enregistrée dans la plaine par une station de référence. Ainsi, ces figures représentent une cartographie au cours du temps de l'amplitude relative enregistrée en surface pour différentes plages de longueurs d'onde incidentes. Chaque image de la séquence porte un numéro, et à deux numéros consécutifs correspond un intervalle de temps de 20 ms. Sur la figure 5.10, nous comparons (de gauche à droite) le cas  $\lambda_s = h$  pour une onde S polarisée suivant le petit axe,  $\lambda_s = h$  pour une onde S polarisée suivant le grand axe, puis de même pour  $\lambda_s = 3h$ .

Comme dans l'article de Bouchon *et al.* (1996), nous retrouvons un fort effet 3D dans tous les cas, et une forte dépendance de l'amplitude maximale enregistrée avec la longueur d'onde incidente et la polarisation. L'amplification maximale est enregistrée au sommet pour le cas  $\lambda_s = h$  polarisé suivant le petit axe, dans ce cas l'amplification atteint presque 100 % (image 15). On retrouve également la génération de l'onde P diffractée et de l'onde de Rayleigh de manière privilégiée suivant le petit axe (images 26 et 27). Dans le même cas, mais pour une onde polarisée suivant le grand axe, l'amplification est très faible (environ 1.1, voir image 15) et, si l'onde de Rayleigh part toujours principalement suivant le petit axe, l'onde P diffractée part maintenant essentiellement suivant le grand axe (images 26 et 27). Dans le cas  $\lambda_s = 3h$  pour une onde polarisée suivant le grand axe, l'on retrouve, en accord avec Bouchon *et al.* (1996), une très forte amplitude au sommet (amplification de 1.7 environ). En raison de la grande longueur d'onde, l'onde P diffractée se distingue moins clairement (image 26). En revanche (images 19 à 25), nous observons un effet spectaculaire dans la structure 3D. Aux environs de l'image 20, une très forte amplification existe au sommet, puis s'atténue et disparaît (images 21 à 24), pour réapparaître ensuite (images 25 et 26). Un tel phénomène est interprété comme dû au temps de résidence des différentes ondes dans la structure, ainsi qu'au temps nécessaire à l'établissement des interférences constructives et destructives entre les différentes phases.

Notons que, dans les différents cas, l'amplification mesurée sur la topographie présente une forte variabilité spatiale. Parfois, l'amplification maximale se produit dans une zone concentrée au voisinage du sommet (tel est le cas pour l'onde S de longueur d'onde  $\lambda_s = 3h$  polarisée suivant le grand axe par exemple), parfois elle peut avoir lieu à mi-pente alors que le sommet présente une déamplification (cas de l'onde S de longueur d'onde  $\lambda_s = 3h$  polarisée suivant le petit axe par exemple). Une même zone peut du reste subir plusieurs fois des amplifications fortes, comme cela est observé pour le cas de l'onde S de longueur d'onde  $\lambda_s = 3h$  polarisée suivant le grand axe. Il est intéressant de remarquer que, lorsque de tels effets sont observés sur le terrain, un comportement non linéaire du sol est souvent invoqué pour expliquer le phénomène. Nous montrons ici que, dans le cadre d'un simple comportement élastique linéaire, la présence de la topographie peut provoquer des effets similaires.

Les cas  $\lambda_s = 2h$  sont présentés sur la figure 5.11, et montrent des effets intermédiaires par rapport à ceux présentés sur la figure 5.10. Le cas  $\lambda_s = h$  pour le petit axe a été inclus de nouveau afin de servir de référence commune aux deux planches de résultats. De plus, nous présentons sur la colonne de droite le cas d'une onde P de longueur d'onde  $\lambda_p = 2h$  incidente verticalement dans la structure. Dans ce cas, l'amplitude du déplacement vertical a été représentée. Comme cela est attendu (Gaffet et Bouchon, 1989 ; Bouchon *et al.*, 1996), l'effet d'amplification est beaucoup plus faible pour une onde P que pour une onde S dans un tel cas. Ceci est confirmé par les sismogrammes de la figure 5.9 où, même si nous retrouvons la génération d'une onde de Rayleigh de manière privilégiée le long du petit axe, l'amplification au sommet est quasiment inexistante.

Afin d'analyser la dépendance en fréquence de l'amplification observée dans la structure pour ces différents cas, nous avons choisi de représenter les rapports spectraux pour la composante du déplacement colinéaire à la polarisation de l'onde incidente. Dans le cas étudié, ces rapports ont été calculés à partir du résultat obtenu en prenant comme source un Ricker de longueur d'onde fondamentale  $\lambda_s = h$ . Ainsi, le résultat obtenu est valable dans la plage de fréquence pour laquelle le Ricker utilisé contient une énergie significative, dans le cas présent nous pouvons estimer que cette plage se situe entre 1.5 et 30 Hz environ. Les rapports spectraux obtenus sont représentés sur la figure 5.12, tant dans le cas d'une

onde incidente S polarisée le long du petit axe de la topographie, que dans le cas d'une onde polarisée le long du grand axe de la topographie. L'on a enregistré ces rapports spectraux également suivant le grand axe et suivant le petit axe de la topographie.

Pour une polarisation suivant le petit axe, l'on note une forte amplification à haute fréquence (de 10 à 30 Hz) au voisinage du sommet, et une forte déamplification à basse fréquence (vers 5 Hz) dans la même zone. Pour une polarisation suivant le grand axe, il se produit plutôt une amplification au sommet dans la gamme de fréquences allant jusqu'à 15 Hz, et une légère déamplification pour des fréquences plus élevées. Les franges de modulation observées sur la plupart des figures sont dues aux ondes de surface qui descendent le long des axes de la topographie.

Nous pouvons également vérifier la précision de ces rapports spectraux, et celle du calcul direct effectué dans le cas d'une source de longueur d'onde  $\lambda_S = 3h$ , et pour lequel nous voulons quantifier les effets de bords numériques liés à la taille finie de notre modèle 3D et à la présence de conditions périodiques. Pour cela, nous effectuons une comparaison entre le résultat d'un calcul direct pour une onde incidente de longueur d'onde  $\lambda_S = 3h$  et la convolution de la réponse spectrale de la figure 5.12, déterminée pour une source de longueur d'onde  $\lambda_S = h$ , par le Ricker source de longueur d'onde fondamentale  $\lambda_S = 3h$ . Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 5.13. Le calcul direct se termine au temps  $t = 0.8$  s. L'accord obtenu est très bon, ce qui montre que les effets de taille finie du modèle restent faibles même pour le cas  $\lambda_S = 3h$ .

Afin de mieux comprendre les caractéristiques des différentes ondes enregistrées à la surface du modèle, nous représentons également sur la figure 5.14 les diagrammes de polarisation enregistrés dans le cas d'une onde S de longueur d'onde  $\lambda_S = h$  polarisée le long du petit axe de la topographie, pour différents récepteurs situés à la surface du modèle, le long du petit axe ou du grand axe, régulièrement espacés entre le sommet de la colline et la plaine. La polarisation représentée est celle de la projection du vecteur déplacement dans le plan défini par la direction de polarisation de l'onde plane source et par l'axe vertical. On voit qu'une forte amplification existe au sommet, et qu'une onde P diffractée, ainsi qu'une onde de Rayleigh aisément reconnaissable à sa polarisation elliptique rétrograde, sont générées préférentiellement le long du petit axe. La même représentation, pour le cas d'une onde S de longueur d'onde  $\lambda_S = h$  polarisée le long du grand axe de la topographie (figure 5.15), montre que l'amplification enregistrée au sommet est moins forte que dans le cas d'une onde S polarisée le long du petit axe. Une forte onde de surface est générée le long du petit axe, alors que le long du grand axe on enregistre seulement une faible onde P diffractée.

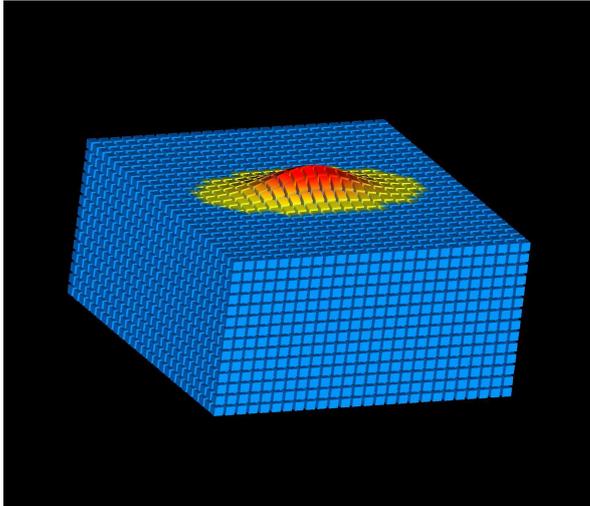
Notons un phénomène intéressant d'un point de vue numérique lorsque l'on s'intéresse à des effets liés à la topographie : la présence de celle-ci induit des amplifications à des hautes fréquences pour lesquelles le signal source présente peu d'énergie, comme cela vient d'être observé sur les différences d'amplitudes spectrales qui ont été présentées. Or, la plupart du temps en modélisation numérique, on est habitué à régler les paramètres de la simulation au plus juste en fonction des caractéristiques du signal source devant être propagé, surtout pour un calcul 3D. Dans le cas où des amplifications se produisent pour des fréquences plus élevées que celles du signal source, cela peut conduire à ce que ces phases primordiales soient sous-échantillonnées, et donc mal modélisées. Dans le cadre de l'étude des effets de site, il faudra donc veiller à ne pas utiliser des paramètres de simulation trop restrictifs, sous peine de rendre peu fiables les résultats numériques obtenus. Il n'est en effet pas impossible que l'on obtienne des simulations qui soient correctes à grande échelle (pour les ondes diffractées par la topographie et pour les ondes de Rayleigh) mais pas à petite échelle, pour les valeurs numériques des amplifications enregistrées au sommet, ou au voisinage du sommet, qui seront les plus sensibles à tout problème dans la méthode numérique employée pour résoudre les équations de propagation. Ceci pourrait par exemple expliquer les problèmes d'amplitude observés au paragraphe 4.8.2.

### 5.3.2 Cas d'une couche plane ou d'un bassin sédimentaire asymétrique en présence de topographie

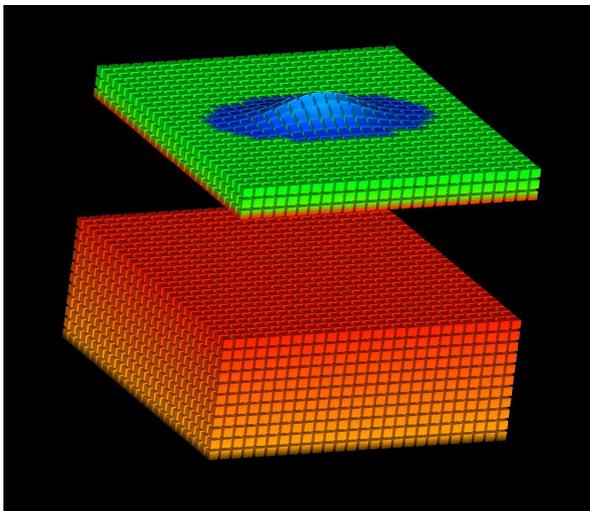
Dans ce deuxième exemple, le milieu est hétérogène. Il est formé de deux couches homogènes, la couche inférieure ayant une vitesse P de  $3200 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1847.5 \text{ m.s}^{-1}$ , et une densité de  $2200 \text{ kg.m}^{-3}$  comme dans le cas homogène étudié précédemment, et la couche supérieure ayant une vitesse P de  $2000 \text{ m.s}^{-1}$ , une vitesse S de  $1155 \text{ m.s}^{-1}$ , et une densité de  $1500 \text{ kg.m}^{-3}$ . La topographie de surface ainsi que la taille totale du modèle sont identiques au cas homogène précédent. Parmi les deux cas étudiés (voir figure 5.3), le premier présente une interface plane située à l'altitude  $z = 825$  m, et dans le deuxième cas nous considérons un bassin sédimentaire de structure asymétrique donné par

$$z = 825 - 200 \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp\left(-\frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (5.2)$$

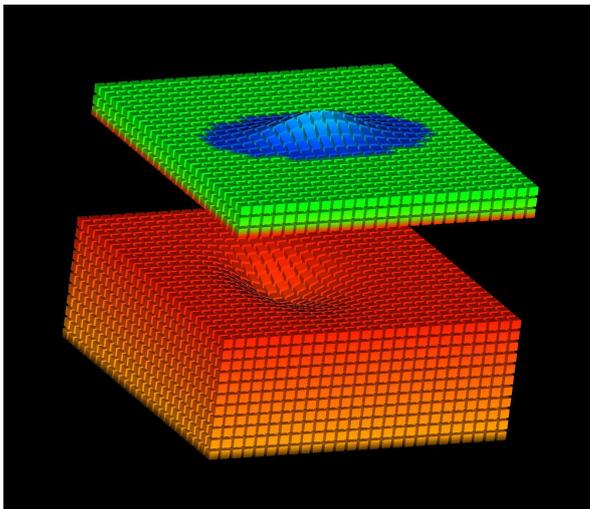
avec  $x_0 = 900$  m,  $y_0 = 1040$  m et  $\sigma_x = 246$  m si  $x \leq x_0$ ,  $\sigma_x = 237$  m si  $x > x_0$ ,  $\sigma_y = 320$  m si  $y \leq y_0$  et  $\sigma_y = 246$  m si  $y > y_0$ . Ainsi, le bassin est dans le deuxième cas décentré par rapport au centre de la topographie de surface, et les bords



*Milieu homogène  
avec topographie*



*Bicouche élastique plan  
avec topographie*



*Bassin sédimentaire  
avec topographie*

FIG. 5.3 – Nous considérons un modèle 3D dans lequel une colline est présente à la surface libre. La colline a une forme gaussienne, avec une hauteur  $h = 180$  m, un écart-type de 250 m le long de l'axe  $x$  et de 125 m le long de l'axe  $y$ . La taille du modèle est de  $2080 \times 2080 \times 1050$  m. Le maillage est composé de  $26 \times 26 \times 14$  éléments, un degré polynômial de  $N = 8$  étant utilisé dans chaque direction d'un élément, ce qui correspond à un nombre total de points de 4 935 953. Suivant les cas, en profondeur, le milieu est homogène, ou bien il possède une interface plane, ou bien encore il contient un bassin sédimentaire à structure asymétrique.

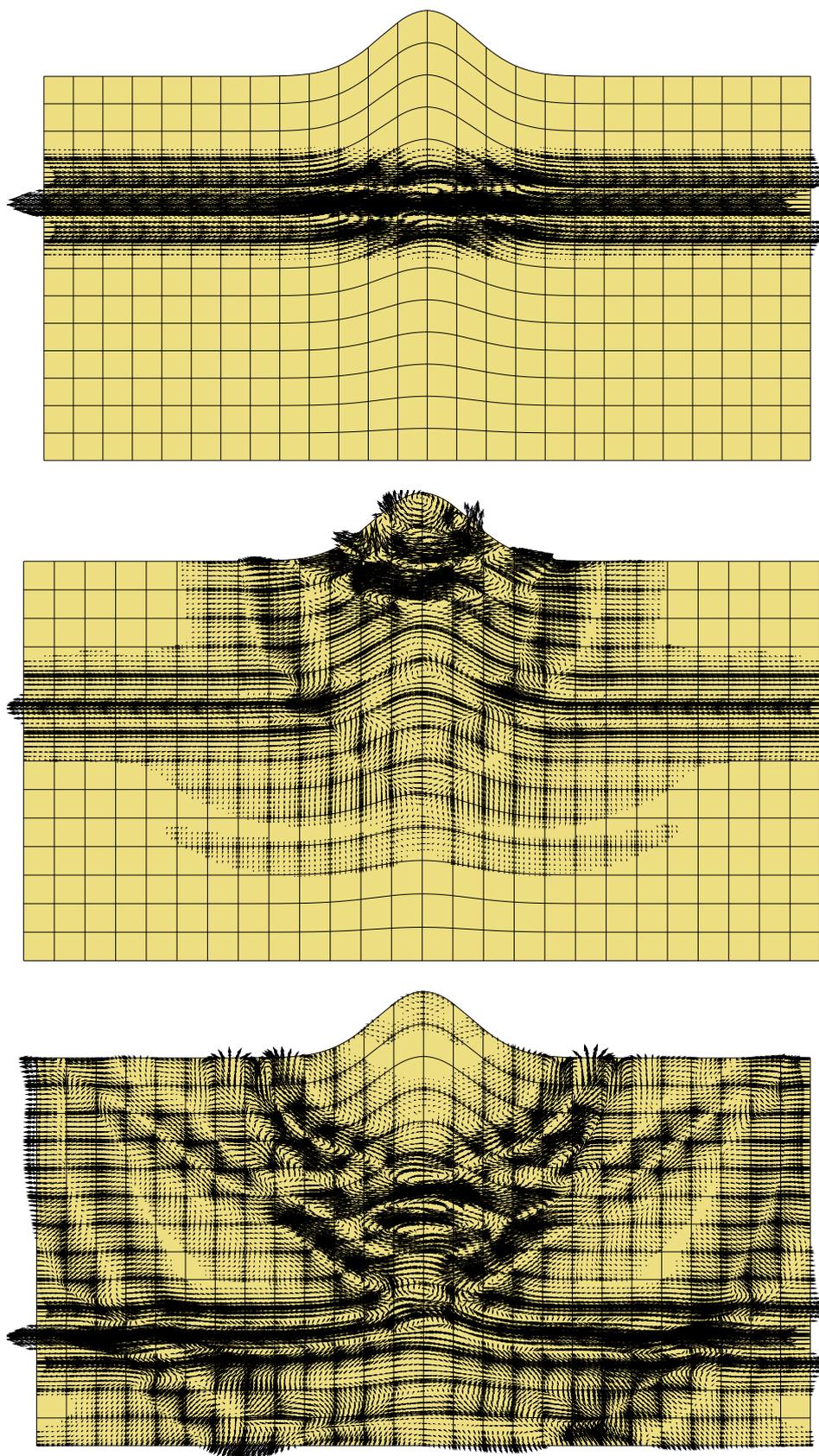


FIG. 5.4 – Instantanés de propagation pour une onde  $S$  de longueur d'onde  $\lambda_s = h$  polarisée suivant le petit axe de la topographie. La coupe a été réalisée verticalement dans le modèle suivant le petit axe de la topographie. On remarque que la topographie génère une onde  $P$  diffractée ainsi qu'une onde de Rayleigh.

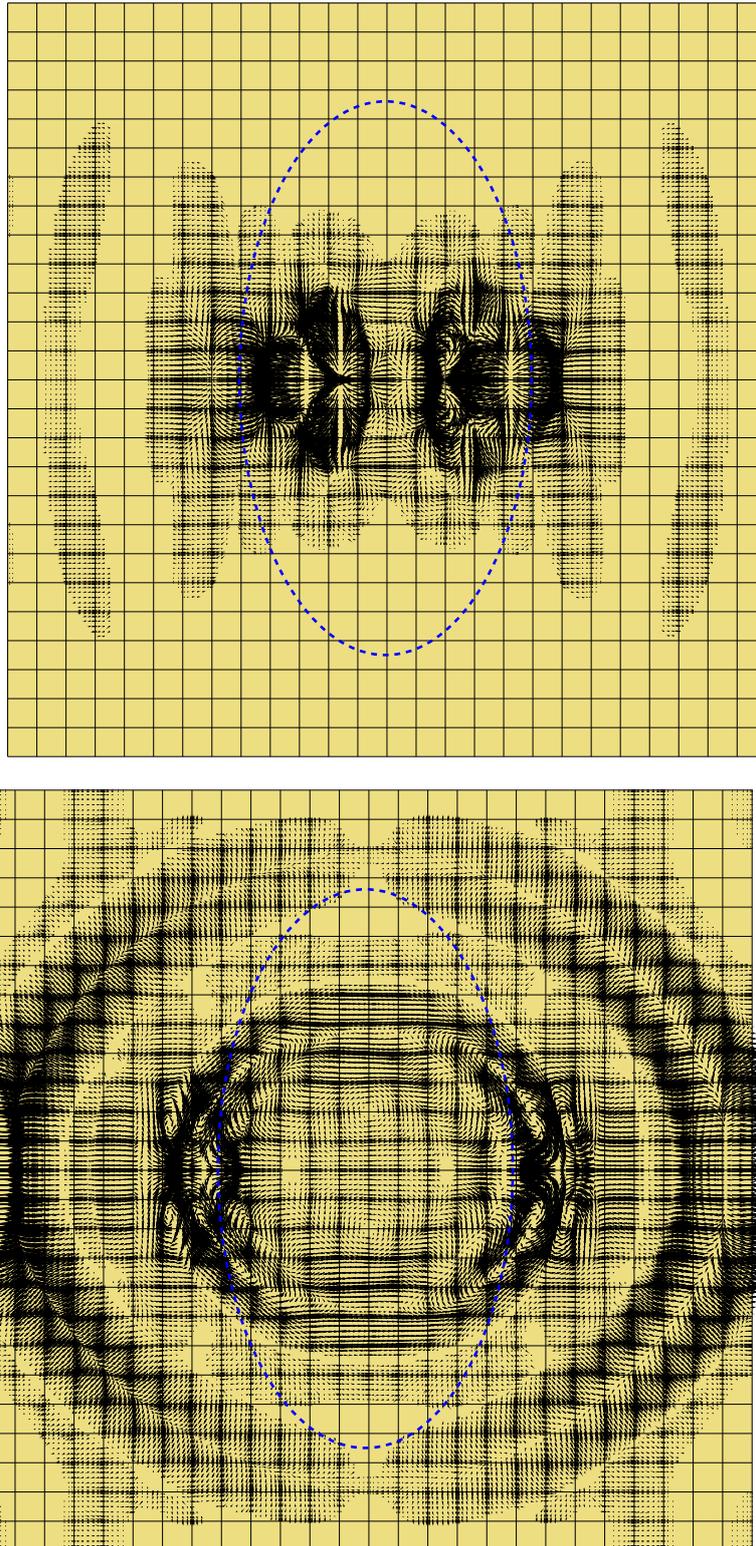


FIG. 5.5 – Instantanés de propagation (vue de dessus) pour une onde  $S$  de longueur d'onde  $\lambda_s = h$  polarisée suivant le petit axe de la topographie. La projection du vecteur déplacement dans le plan horizontal est représentée. L'onde de Rayleigh et l'onde  $P$  diffractée sont clairement visibles. On note un fort effet 3D dans cette simulation : l'onde  $P$  diffractée et l'onde de Rayleigh partent très nettement de manière préférentielle suivant le petit axe de la topographie, dont la base elliptique a été dessinée.

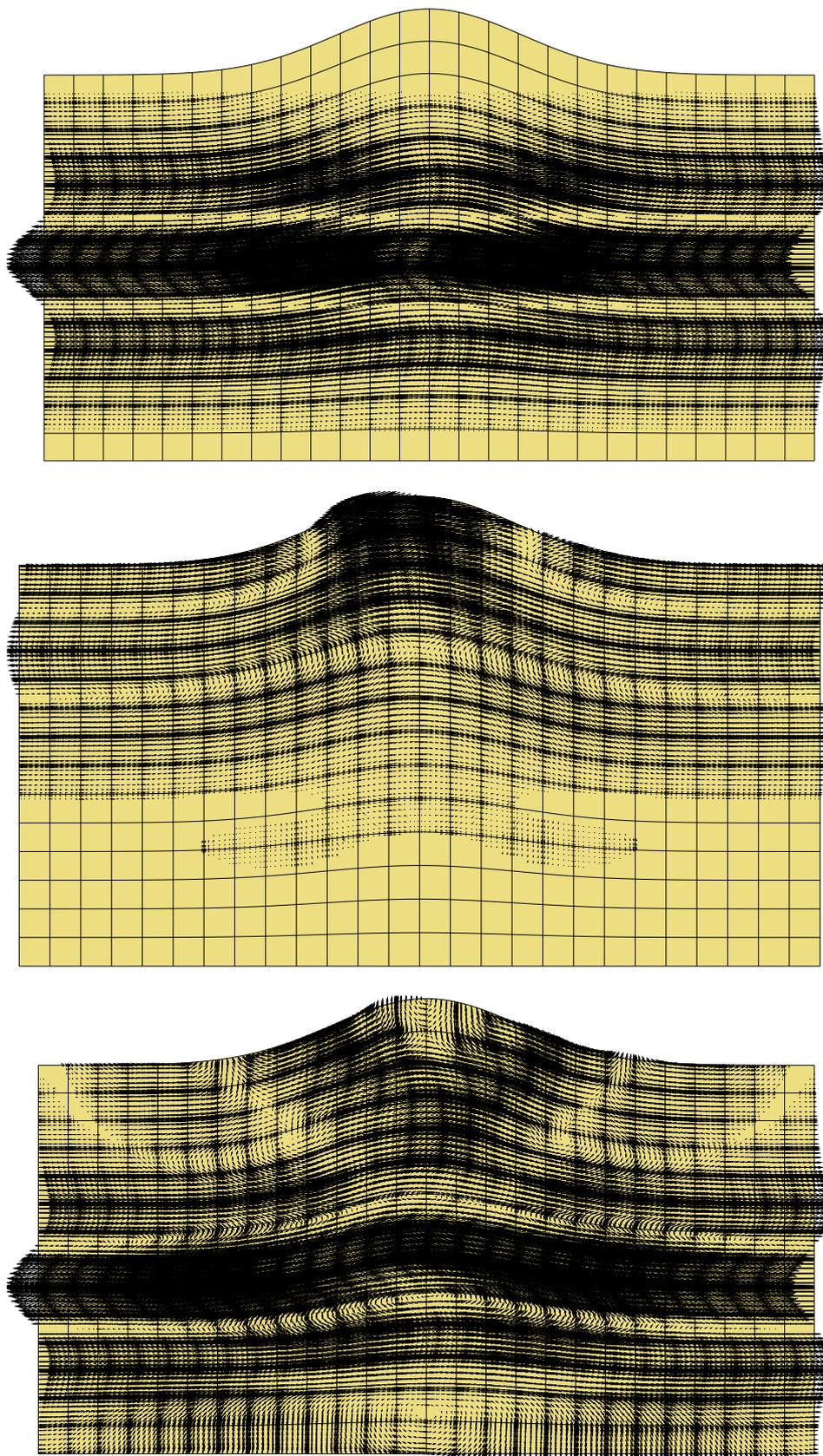


FIG. 5.6 – Instantanés de propagation pour une onde  $S$  de longueur d'onde  $\lambda_s = 3h$  polarisée suivant le grand axe de la topographie. La coupe a été réalisée verticalement dans le modèle suivant le grand axe de la topographie. Malgré le fait que la longueur d'onde est grande devant la taille caractéristique de la structure, et qu'en conséquence les phénomènes apparaissent moins distinctement que dans le cas  $\lambda_s = h$ , on peut remarquer que la topographie génère une forte onde  $P$  diffractée.

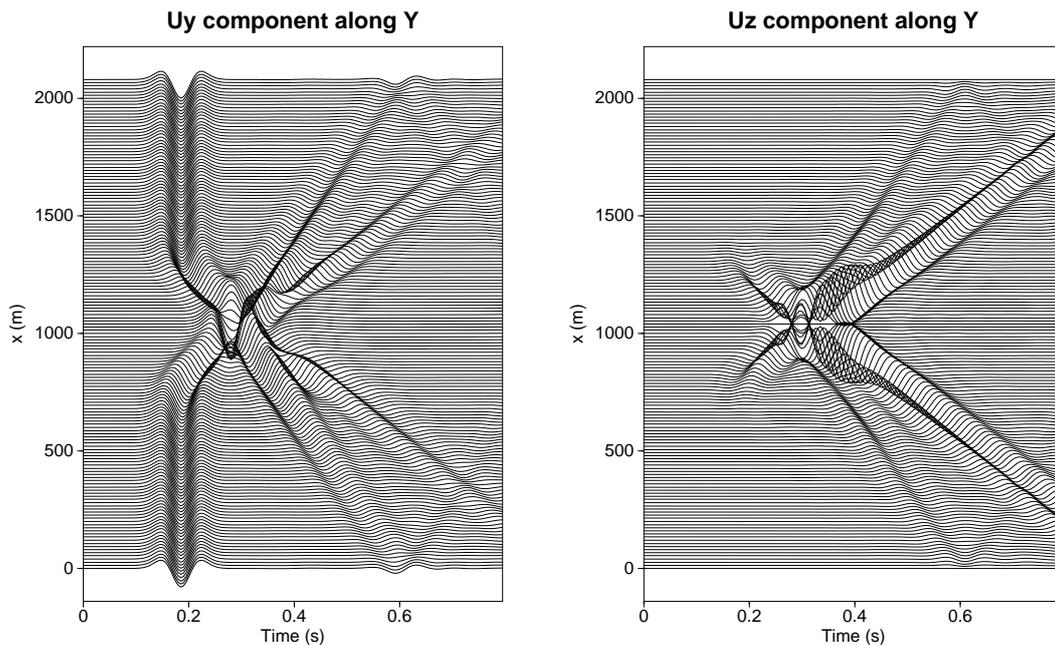


FIG. 5.7 – Sismogrammes enregistrés en surface pour une onde  $S$  de longueur d'onde  $\lambda_s = h$  polarisée suivant le petit axe de la topographie. Les déplacements horizontal  $u_y$  (gauche) et vertical  $u_z$  (droite) ont été enregistrés par des récepteurs placés le long du petit axe. L'onde  $S$  directe est clairement visible sur la composante  $u_y$ , suivie par l'onde  $P$  diffractée puis par une forte onde de Rayleigh. Les réflexions artificielles sur les bords du modèle sont dues aux conditions périodiques utilisées sur les côtés de la grille.

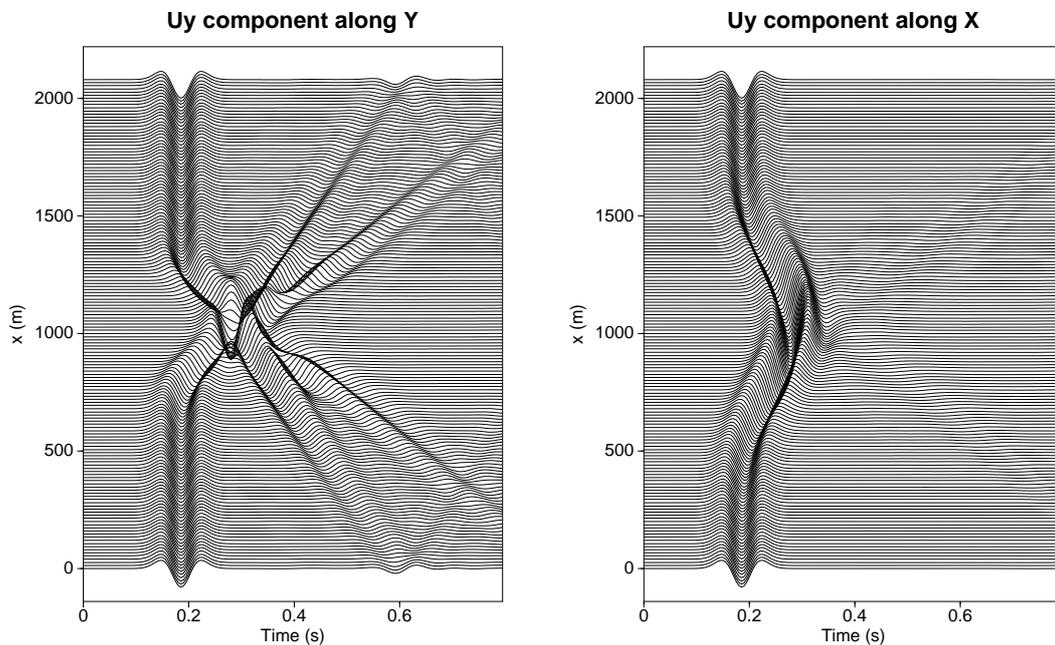


FIG. 5.8 – Sismogrammes enregistrés en surface pour une onde  $S$  de longueur d'onde  $\lambda_s = h$  polarisée suivant le petit axe de la topographie. Le déplacement horizontal  $u_y$  a été enregistré le long du petit axe (gauche) et le long du grand axe (droite). L'onde  $S$  directe est clairement visible sur les deux composantes, mais l'onde  $P$  diffractée ainsi que l'onde de Rayleigh apparaissent principalement sur l'enregistrement effectué le long du petit axe, mettant en évidence un fort effet 3D dans la structure. Les réflexions artificielles sur les bords du modèle sont dues aux conditions périodiques utilisées sur les côtés de la grille.

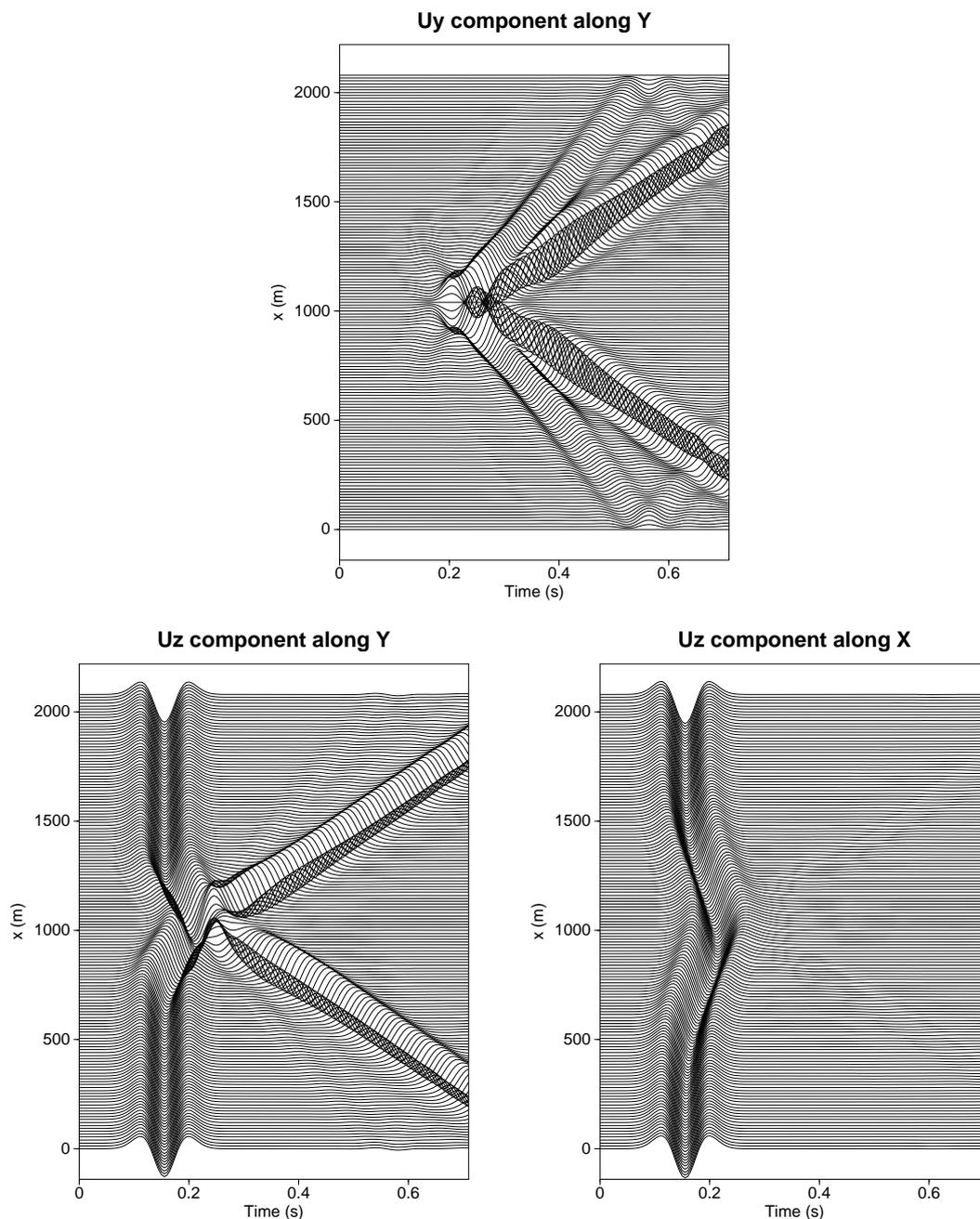


FIG. 5.9 – Sismogrammes enregistrés en surface pour une onde  $P$  de longueur d'onde  $\lambda_p = 2h$  polarisée suivant l'axe vertical. Le déplacement horizontal  $u_y$  a été enregistré le long du petit axe (haut). Le déplacement vertical  $u_z$  a été également enregistré le long du petit axe (en bas à gauche) et le long du grand axe (en bas à droite). L'onde  $P$  directe est clairement visible sur la composante verticale, mais la faible onde  $P$  diffractée ainsi que l'onde de Rayleigh apparaissent principalement sur l'enregistrement effectué le long du petit axe (sur les deux composantes  $u_y$  et  $u_z$  en raison de la polarisation elliptique de l'onde de Rayleigh), mettant en évidence un fort effet 3D dans la structure. Les réflexions artificielles sur les bords du modèle sont dues aux conditions périodiques utilisées sur les côtés de la grille.

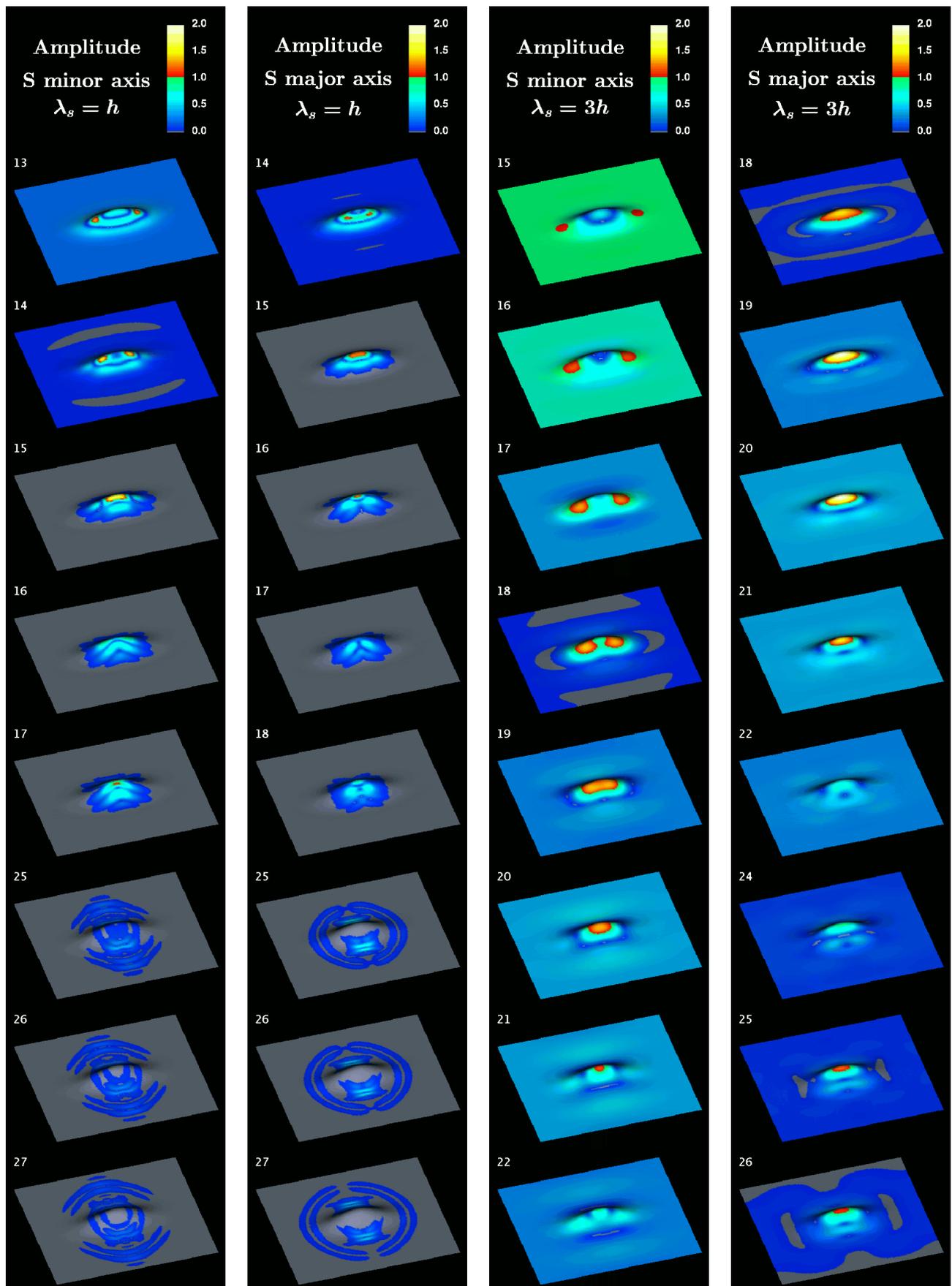


FIG. 5.10 – Film représentant l'amplitude normalisée pour une onde S polarisée soit suivant le petit axe, soit suivant le grand axe de la topographie, et ayant une longueur d'onde  $\lambda_s = h$  ou  $\lambda_s = 3h$  (voir page 132).

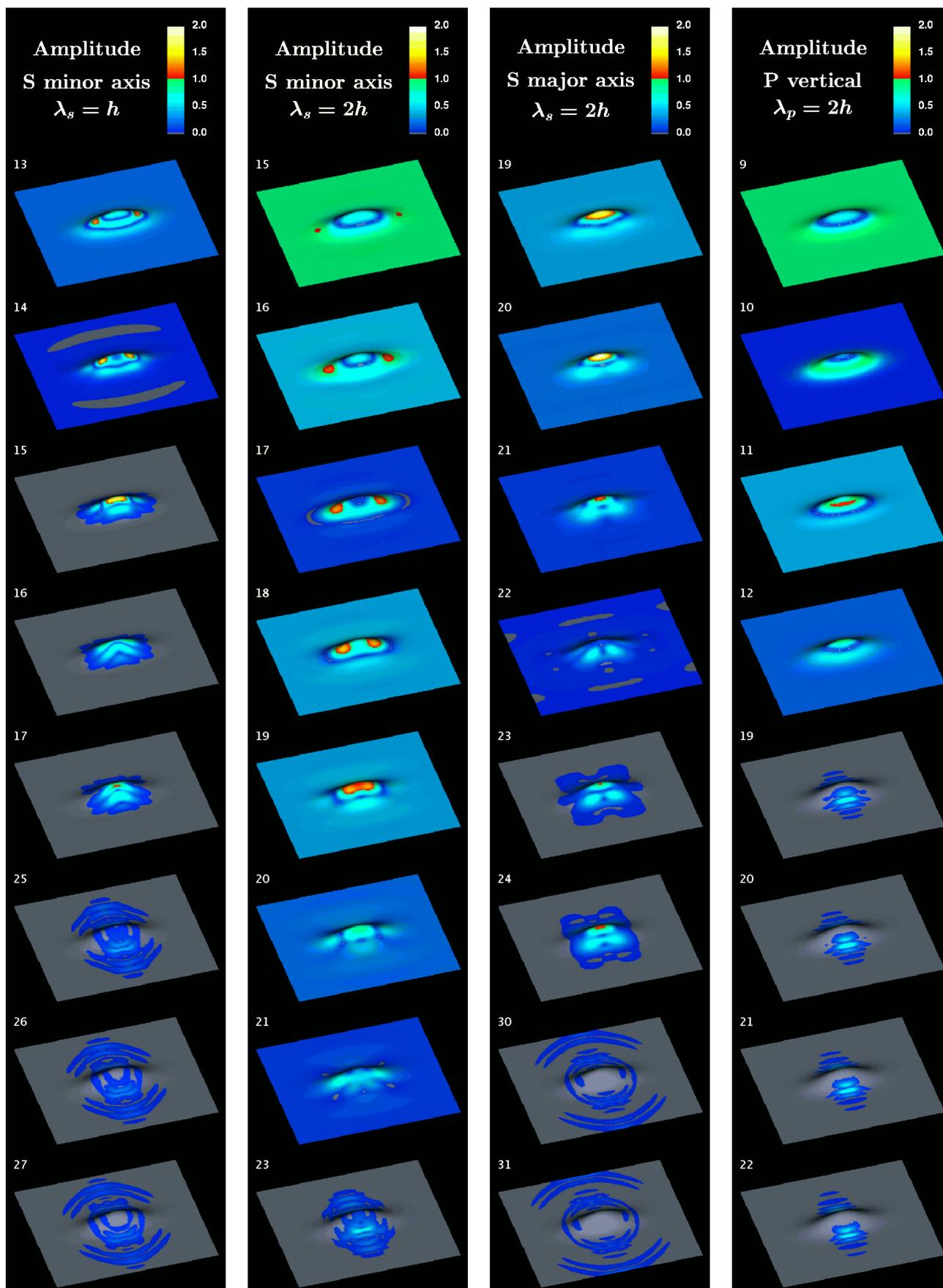
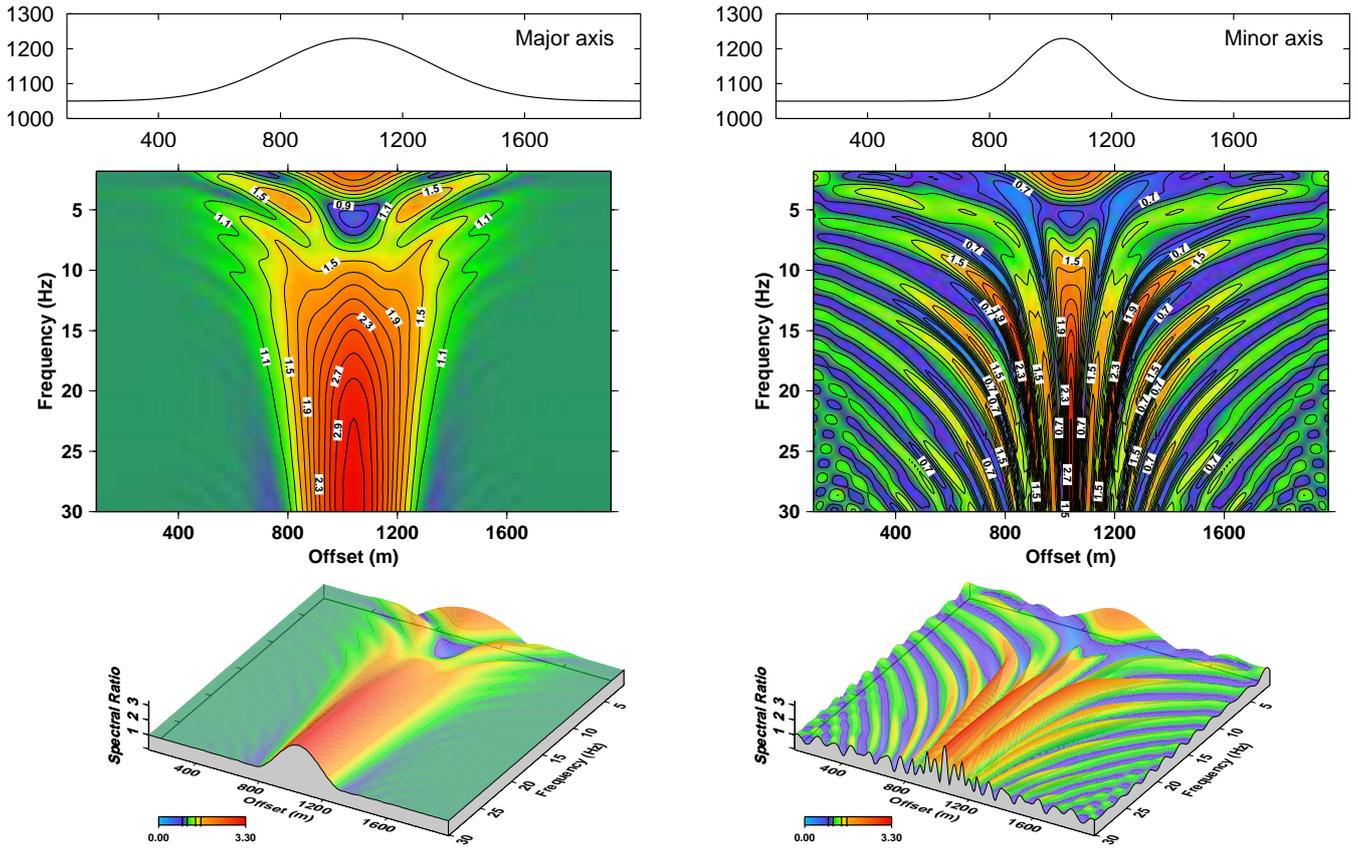
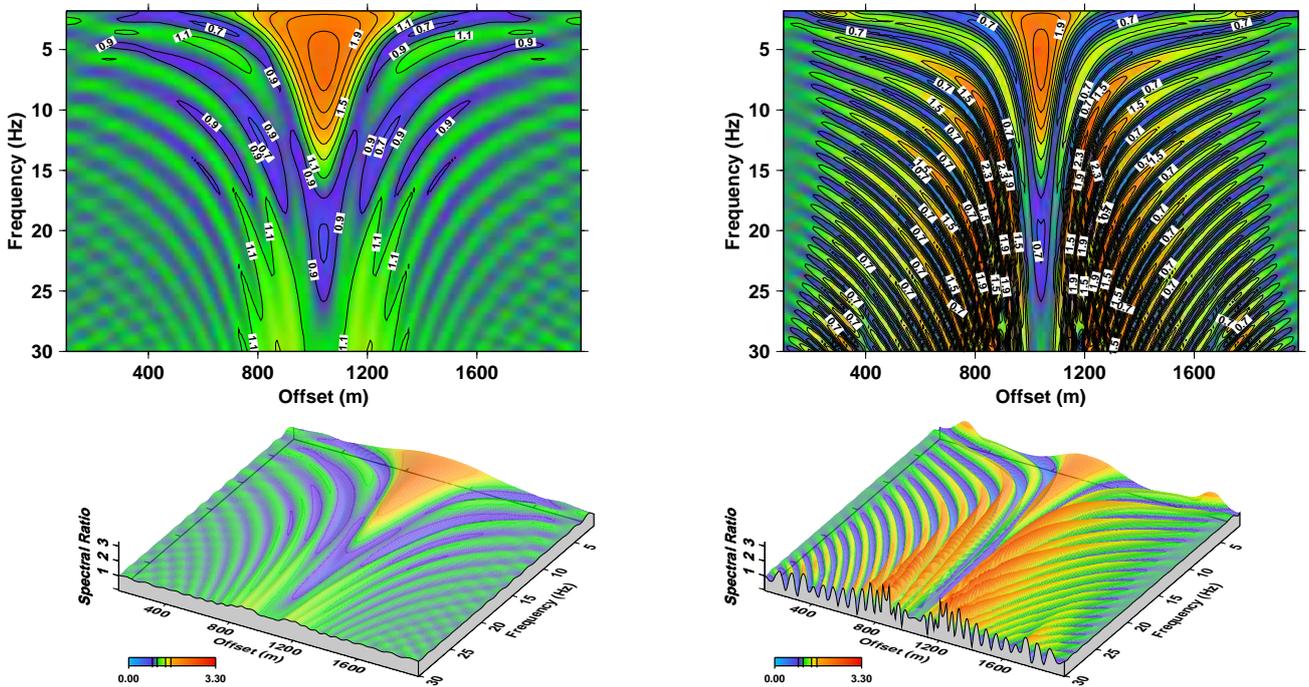


FIG. 5.11 – Film représentant l’amplitude normalisée pour une onde S polarisée soit suivant le petit axe, soit suivant le grand axe de la topographie, de longueur d’onde  $\lambda_s = h$  ou  $\lambda_s = 2h$ , avec une comparaison au cas d’une onde P incidente verticalement et de longueur d’onde  $\lambda_p = 2h$  (voir page 132).



(a) Onde *S* polarisée suivant le petit axe



(b) Onde *S* polarisée suivant le grand axe

FIG. 5.12 – Rapports spectraux enregistrés par les récepteurs placés le long du grand axe (gauche) et le long du petit axe (droite) de la topographie. On notera de forts effets d’amplification ou de déamplification liés à la structure 3D du modèle. Pour plus de clarté, nous avons représenté en haut de chaque colonne des coupes de la topographie effectuées le long des axes d’enregistrement.

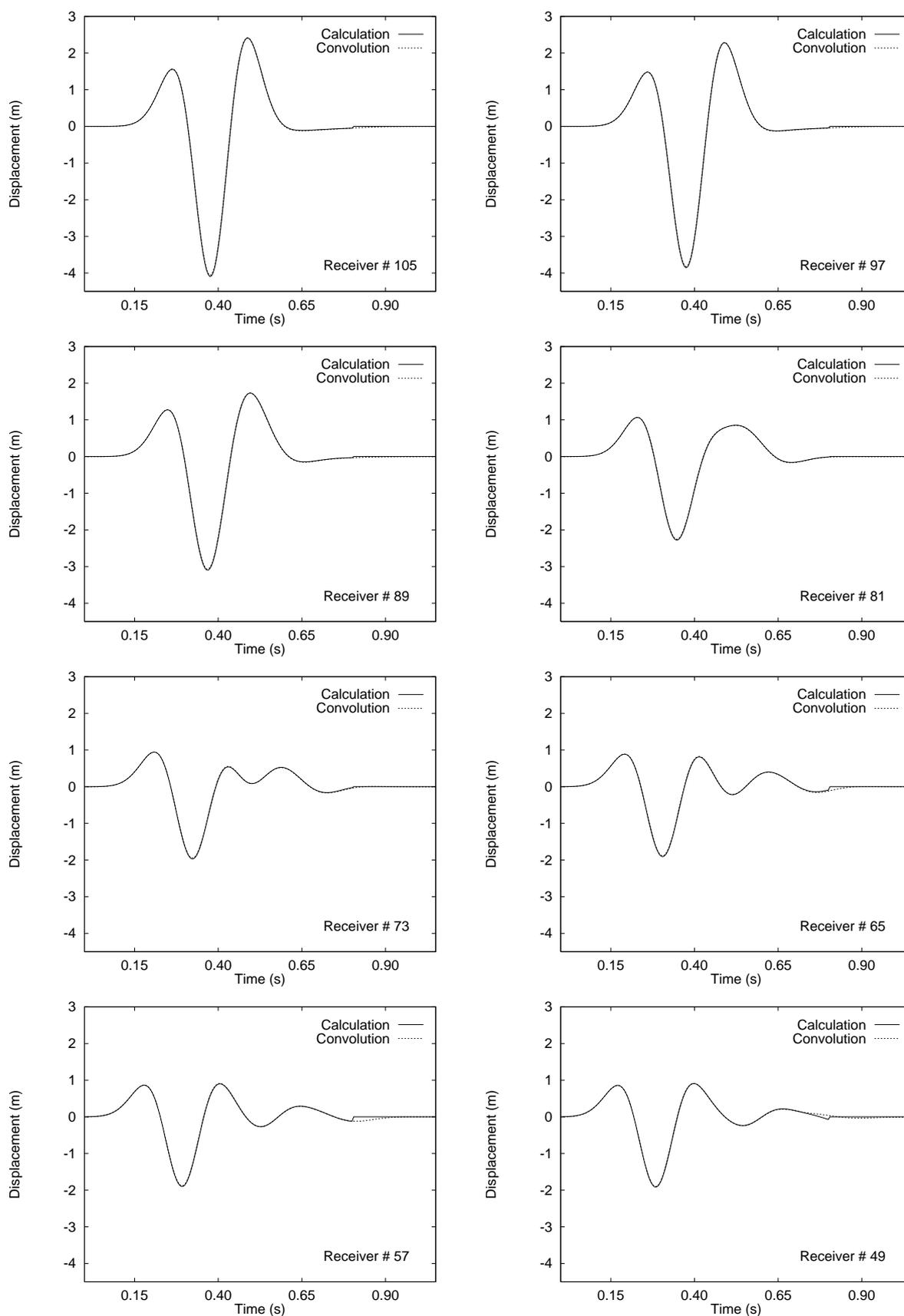


FIG. 5.13 – Comparaison entre le résultat d'un calcul direct pour une onde incidente de longueur d'onde  $\lambda_S = 3h$  (en traits pleins) et la convolution (en traits pointillés) de la réponse spectrale de la figure 5.12, déterminée pour une source de longueur d'onde  $\lambda_S = h$ , par le Ricker source de longueur d'onde fondamentale  $\lambda_S = 3h$ . Le calcul direct se termine au temps  $t = 0.8$  s. L'accord obtenu est très bon, ce qui montre que les effets de taille finie du modèle restent faibles même pour le cas  $\lambda_S = 3h$ .

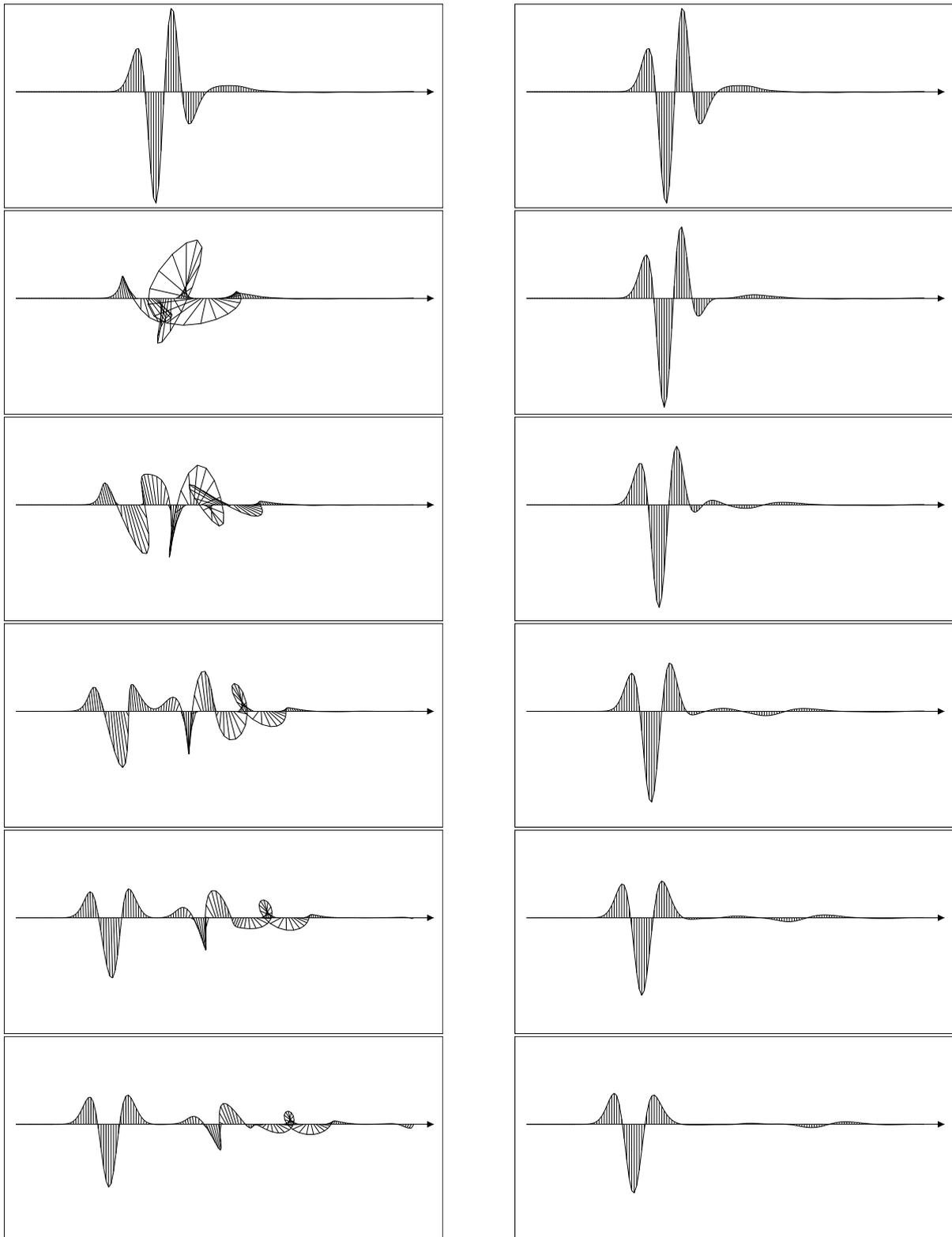


FIG. 5.14 – Diagrammes de polarisation enregistrés dans le cas d'une onde S de longueur d'onde  $\lambda_S = h$  polarisée le long du petit axe de la topographie, pour différents récepteurs situés à la surface du modèle, le long du petit axe (gauche) ou du grand axe (droite), régulièrement espacés entre le sommet de la colline (haut) et la plaine (bas). La polarisation représentée est celle de la projection du vecteur déplacement dans le plan défini par la direction de polarisation de l'onde plane source et par l'axe vertical. On voit qu'une forte amplification existe au sommet, et qu'une onde P diffractée, ainsi qu'une onde de Rayleigh aisément reconnaissable à sa polarisation elliptique rétrograde, sont générées préférentiellement le long du petit axe.

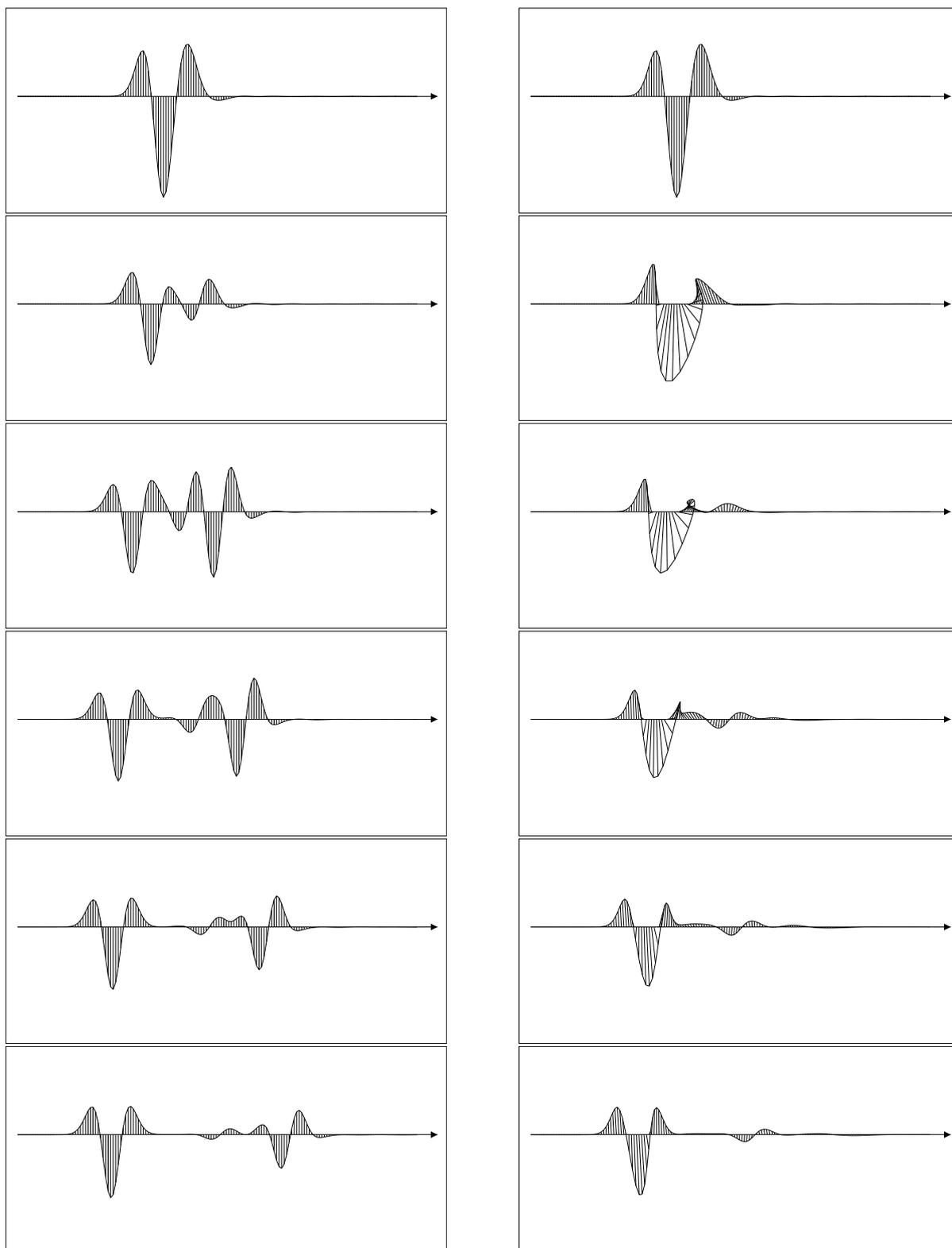


FIG. 5.15 – Diagrammes de polarisation enregistrés dans le cas d'une onde S de longueur d'onde  $\lambda_S = h$  polarisée le long du grand axe de la topographie, pour différents récepteurs situés à la surface du modèle, le long du petit axe (gauche) ou du grand axe (droite), régulièrement espacés entre le sommet de la colline (haut) et la plaine (bas). La polarisation représentée est celle de la projection du vecteur déplacement dans le plan défini par la direction de polarisation de l'onde plane source et par l'axe vertical. On voit que l'amplification enregistrée au sommet est moins forte que dans le cas d'une onde S polarisée le long du petit axe. Une forte onde de surface est générée le long du petit axe, alors que le long du grand axe on enregistre seulement une faible onde P diffractée.

de ce bassin sont eux-mêmes asymétriques. La couche de surface étant plus lente que dans le modèle homogène, la durée totale de la simulation est portée à 1.1 s. Les autres paramètres du calcul sont inchangés.

La simulation est effectuée pour une onde plane incidente  $S$  de longueur d'onde  $\lambda_s = 2h$ , polarisée soit suivant le petit axe, soit suivant le grand axe de la topographie, afin de pouvoir comparer les résultats à ceux de la simulation dans le cas homogène que nous avons présenté. L'instant initial de la simulation est montré sur les coupes de la figure 5.16 et de la figure 5.17, où la structure du bassin peut être observée de manière plus claire. Les sismogrammes enregistrés en surface le long du petit axe et le long du grand axe de la topographie sont montrés sur la figure 5.18 dans le cas de l'onde  $S$  polarisée suivant le petit axe de la topographie, et sur la figure 5.19 pour la même onde  $S$  polarisée suivant le grand axe. Dans les tableaux de sismogrammes présentés sur la figure 5.18, la première ligne correspond au déplacement horizontal  $u_y$  enregistré suivant le grand axe, la deuxième ligne correspond au déplacement horizontal  $u_y$  enregistré suivant le petit axe, et la dernière ligne au déplacement vertical  $u_z$  enregistré suivant le petit axe. Dans ceux de la figure 5.19, la première ligne correspond au déplacement horizontal  $u_x$  enregistré suivant le grand axe, la deuxième ligne correspond au déplacement horizontal  $u_x$  enregistré suivant le petit axe, et la dernière ligne au déplacement vertical  $u_z$  enregistré suivant le grand axe. Dans les deux cas, la première colonne correspond au cas d'un milieu homogène présenté précédemment, la deuxième colonne au cas hétérogène pour le bassin à fond plat, et la troisième au cas du bassin à structure asymétrique. À l'analyse de ces différents enregistrements, et par comparaison au cas homogène, nous constatons que la présence du bassin complexifie quelque peu les sismogrammes obtenus en surface, mais qu'en raison de la présence d'une seule couche sédimentaire d'épaisseur relativement forte par rapport à la longueur d'onde du signal source, les effets demeurent relativement limités. L'étude d'un cas plus compliqué est envisageable avec la méthode proposée, comme nous l'avons montré à 2D de manière détaillée dans le chapitre précédent, mais nous avons dû nous limiter à ces deux modèles simples en raison des contraintes informatiques (principalement la taille mémoire) de la machine sur laquelle nous avons effectué les calculs.

Les enregistrements que nous avons obtenus montrent donc les phénomènes classiques attendus pour ce genre de structure (vitesse de l'onde de Rayleigh plus faible dans la couche lente du cas hétérogène que pour le cas homogène, présence d'un multiple de l'onde  $S$  directe formé par réflexion sur l'interface élastique, et présentant un changement de signe sur la composante  $u_x$  ou  $u_y$  par rapport à l'onde directe, sensibilité de la forme de l'onde directe et de ce multiple à la forme du bassin, suivant que celui-ci possède un fond plat ou une structure asymétrique...). Les temps de parcours du multiple dans la couche sédimentaire sont corrects (ce temps est connu exactement à partir de la hauteur de la couche et de la vitesse  $S$  pour un récepteur situé suffisamment loin de la topographie). On notera également qu'une faible onde convertie  $S$ - $P$  directe se forme dans le cas du bassin sédimentaire à fond non plat. Même si les phénomènes observés sont ici très simples (les périodogrammes ont été tracés, mais n'ont pas été reproduits ici car ils n'apportaient pas d'information véritablement nouvelle par rapport au cas homogène), ils ont été correctement modélisés par notre code de calcul, et nous avons donc démontré la possibilité d'un calcul sur des structures 3D hétérogènes. Il conviendra maintenant de s'affranchir des limitations informatiques liées à la taille mémoire du calculateur dont nous disposons pour pouvoir envisager l'étude de modèles plus réalistes.

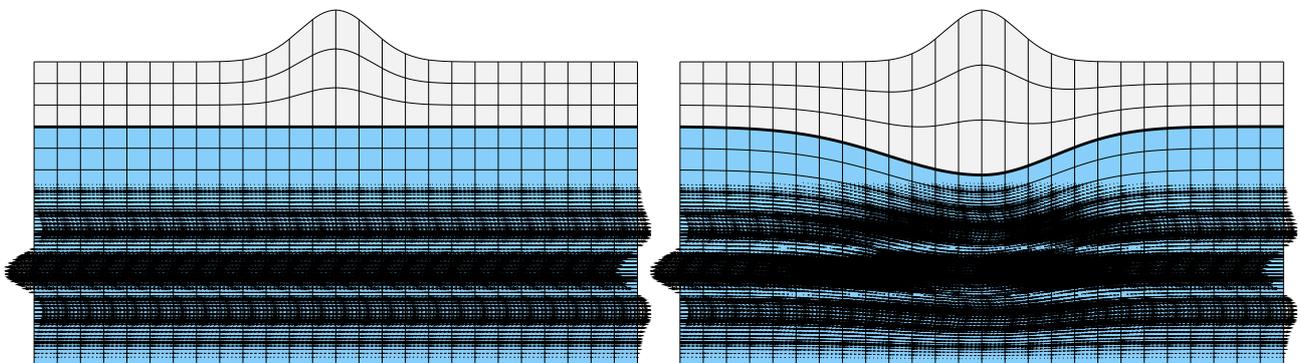


FIG. 5.16 – Coupe verticale dans le maillage pour le cas hétérogène, à l'instant initial de la simulation, à la fois pour une couche sédimentaire à fond plat (gauche) et pour un bassin sédimentaire à structure asymétrique (droite), dans le cas d'une onde plane polarisée suivant le petit axe de la topographie de surface. La coupe a été faite suivant cet axe de polarisation.

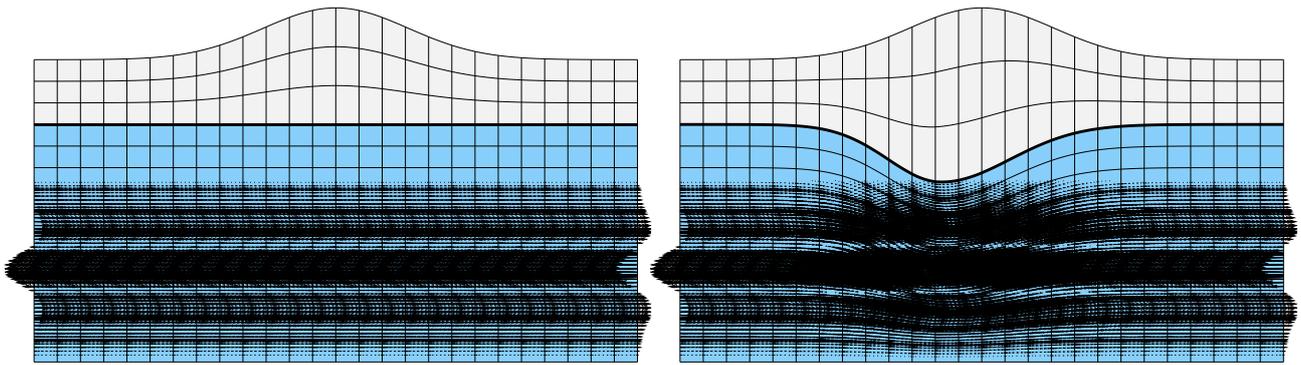


FIG. 5.17 – Coupe verticale dans le maillage pour le cas hétérogène, à l’instant initial de la simulation, à la fois pour une couche sédimentaire à fond plat (gauche) et pour un bassin sédimentaire à structure asymétrique (droite), dans le cas d’une onde plane polarisée suivant le grand axe de la topographie de surface. La coupe a été faite suivant cet axe de polarisation.

## 5.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étendu la méthode des éléments spectraux au cas 3D de manière naturelle. Dans un premier temps, nous avons modélisé un effet de site dans un milieu homogène présentant une topographie elliptique à sa surface. Des effets spectaculaires d’amplification et de déamplification sur la topographie ont été observés, en accord avec les résultats disponibles dans la littérature (Bouchon *et al.*, 1996). Dans un deuxième temps, nous avons abordé le difficile problème du calcul dans une structure 3D hétérogène, par exemple un bassin sédimentaire à structure symétrique ou asymétrique, toujours en présence d’une topographie de surface, ce qui, à notre connaissance, constitue un résultat original. Des effets tridimensionnels ont été mis en évidence, confirmant ainsi l’importance fondamentale que peuvent jouer ce type de structures dans les mesures faites sur le terrain, qui présentent parfois des amplifications très élevées.

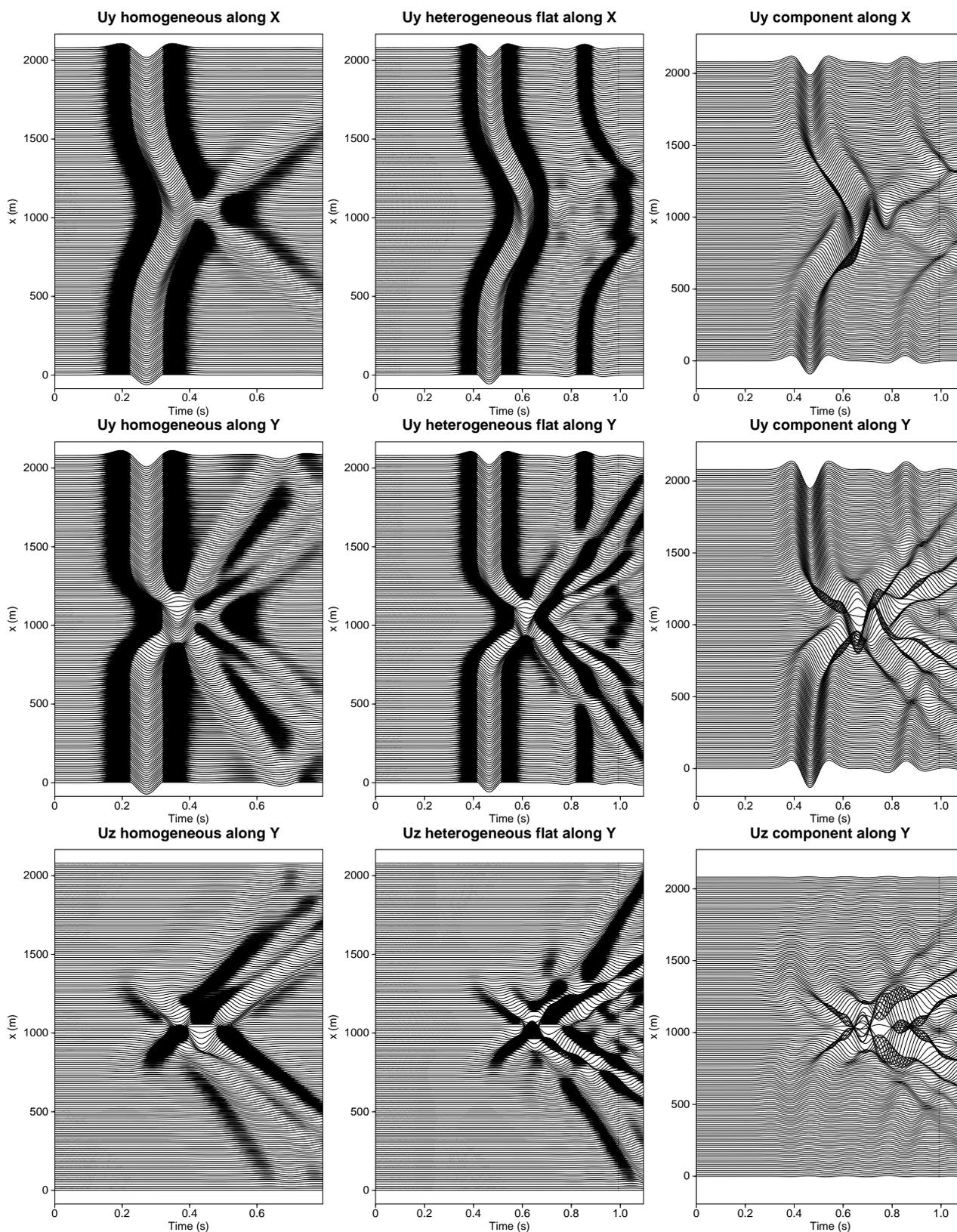


FIG. 5.18 – Sismogrammes enregistrés en surface pour une onde  $S$  de longueur d'onde  $\lambda_s = 2h$  polarisée suivant le petit axe de la topographie. Le déplacement horizontal  $u_y$  a été enregistré le long du grand axe (haut) et du petit axe (milieu). Le déplacement vertical  $u_z$  a également été enregistré le long du petit axe (bas). La colonne de droite correspond au cas homogène, celle du milieu au cas hétérogène à fond plat, et celle de droite au bassin sédimentaire asymétrique. Une comparaison entre les différents enregistrements permet de se rendre compte du rôle joué par le bassin.

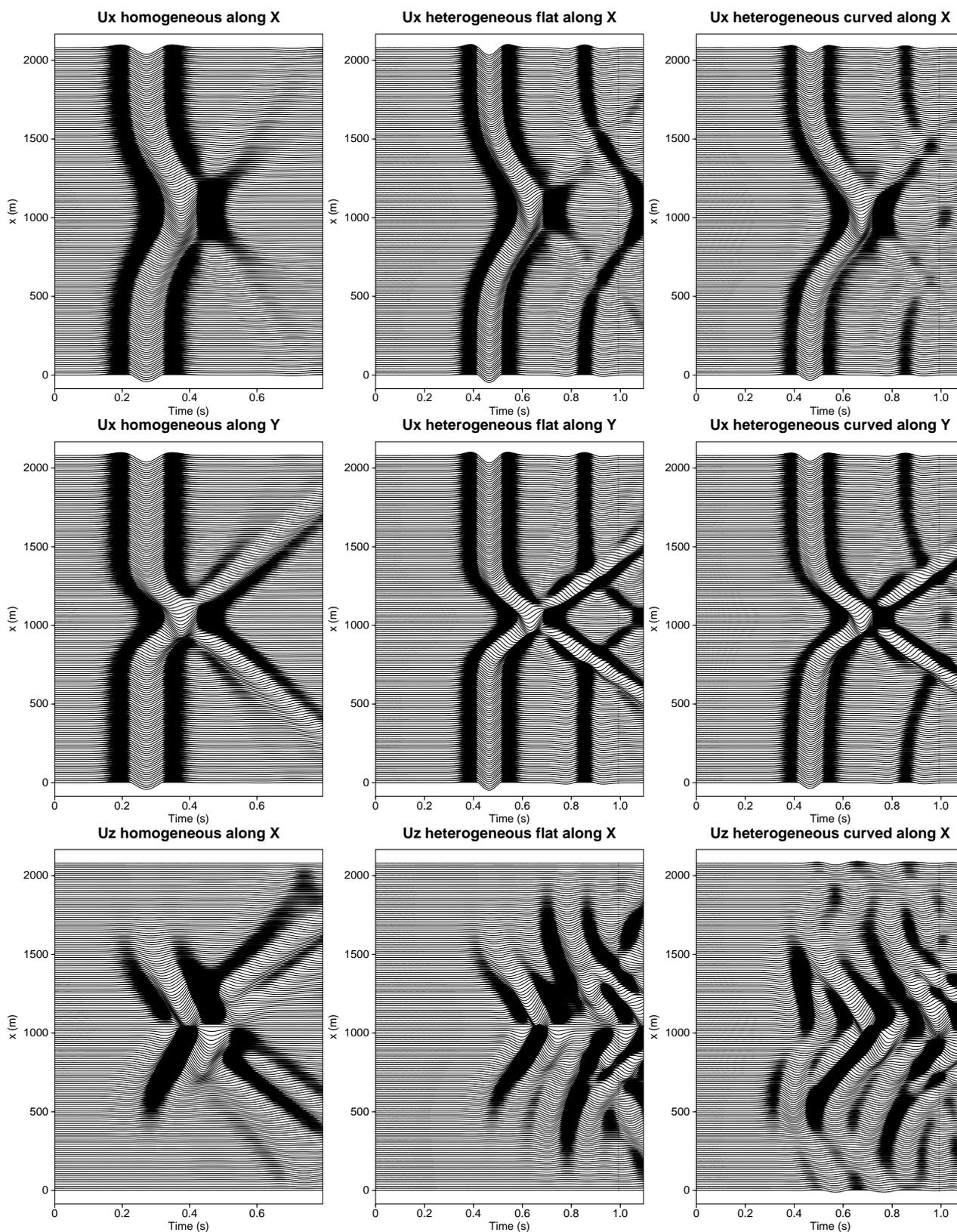


FIG. 5.19 – Sismogrammes enregistrés en surface pour une onde  $S$  de longueur d'onde  $\lambda_s = 2h$  polarisée suivant le grand axe de la topographie. Le déplacement horizontal  $u_x$  a été enregistré le long du grand axe (haut) et du petit axe (milieu). Le déplacement vertical  $u_z$  a également été enregistré le long du grand axe (bas). La colonne de droite correspond au cas homogène, celle du milieu au cas hétérogène à fond plat, et celle de droite au bassin sédimentaire asymétrique. Une comparaison entre les différents enregistrements permet de se rendre compte du rôle joué par le bassin.



**Troisième partie**

**Méthodes exotiques à 1D**



## Chapitre 6

# Résolution de l'équation des ondes 1D par approximation sur base d'ondelettes

Ce chapitre a été publié sous la référence : P. Joly, D. Komatitsch and J. P. Vilotte, *The solution of the wave equation by wavelets basis approximation*, Proceedings of the Enumath'95 conference, Paris, October 1995.

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une étude que nous avons effectuée concernant la possibilité d'utiliser une base d'ondelettes pour la résolution de l'équation des ondes à 1D pour un milieu hétérogène. L'approximation par ondelettes a souvent été utilisée ces dernières années en traitement du signal et en traitement d'images. Plus récemment, le cadre de l'analyse multi-échelles a été utilisé pour la résolution d'équations différentielles : voir par exemple Liandrat *et al.*, 1992 ; Perrier et Basdevant, 1989 ; Glowinski *et al.*, 1990 ; Amaratunga et Williams, 1994 ; Williams et Amaratunga, 1994 ; Joly *et al.*, 1994 ; Joly, 1995. Dans le cas de la modélisation de la propagation d'ondes élastiques, si l'on fait appel aux méthodes classiques telles que celles exposées dans les chapitres précédents, un nombre important de points de maillage doit être utilisé pour échantillonner correctement les différents fronts d'onde, et donc le coût de calcul à 2D et plus encore à 3D peut être une limite à l'application de ces méthodes de modélisation pour des problèmes sismologiques réalistes. L'intérêt de faire appel à une base d'ondelettes dans un schéma de modélisation apparaît clairement ici : comme certaines des ondelettes de la base ont un support fin en espace, nous espérons que les coefficients associés à ces ondelettes seront les plus significatifs, et que nous pourrons donc ignorer la contribution des autres sans dégrader significativement l'information contenue dans le signal. En conséquence ce processus de sélection pourrait nous permettre de représenter le signal à l'aide d'un petit nombre de coefficients seulement, et ainsi de réduire de manière très significative le coût de calcul. Même si le cas 1D n'est pas celui pour lequel on peut attendre la réduction la plus significative, il permet de valider la méthode.

La première partie de ce chapitre constitue un rappel des bases théoriques nécessaires, à savoir l'analyse multi-échelles. Dans une deuxième partie, nous introduisons les algorithmes associés, et dans la dernière partie, nous présentons les résultats numériques obtenus pour l'équation des ondes.

Ce travail est le résultat d'une collaboration avec Pascal Joly du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), et avec Laurent Belluz dans le cadre d'un stage de DEA au sein du groupe GTG, que nous remercions tous deux. La voie présentée ici à 1D n'a pas été poursuivie dans le cadre de cette thèse, en raison du fort potentiel présenté par la méthode des éléments spectraux exposée dans un chapitre précédent, et sur laquelle a été axé notre travail.

### 6.2 Analyse multi-échelles

Le cadre de l'analyse multi-échelles pour des espaces variationnels tels que  $L^2(\mathbb{R})$  a été développé récemment par I. Daubechies (Daubechies, 1988), S. Mallat (Mallat, 1988 ; Mallat, 1989) et Y. Meyer (Meyer, 1987 ; Meyer, 1990).

Une analyse multi-échelles de  $L^2(\mathbb{R})$  est, par définition, une suite croissante  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous espaces fermés ayant les propriétés suivantes :

- (1)  $V_j \subset V_{j+1}$
- (2)  $f \in V_j \Leftrightarrow f^1 \in V_{j+1}$
- (3)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- (4)  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$
- (5) il existe une fonction  $g$  appartenant à  $V_0$ , telle que  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base de Riesz de  $V_0$

où par définition

$$\begin{aligned} \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} f^k(x) &= 2^{k/2} f(2^k x) \\ \forall g \in L^2(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} g_k(x) &= g(x - k) \end{aligned}$$

### 6.2.1 La fonction d'échelle

Soit  $\varphi$  la fonction définie par

$$\hat{\varphi}(\omega) = \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\omega + 2l\pi)|^2 \right)^{-1/2} \hat{g}(\omega) \quad (6.1)$$

cette fonction satisfait (voir [Cohen, 1992](#))

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2l\pi)|^2 = 1 \quad (6.2)$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \int \varphi(x) \times \overline{\varphi(x - k)} dx = \delta_{0,k}$$

et donc  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée pour le sous-espace  $V_0$ .  $\varphi$  est appelée fonction d'échelle, et est utilisée pour définir les sous-espaces  $V_j$  : on définit d'abord les fonctions  $\varphi_k^j$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall j, k \in \mathbb{Z} \quad \varphi_k^j(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$$

Pour un  $j \in \mathbb{Z}$  donné, chaque famille orthonormée  $\{\varphi_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$  génère un sous-espace  $V_j$ , et la suite  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est alors une analyse multi-échelles de  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 6.2.2 La fonction ondelette de base

Maintenant, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , soit  $W_j$  le complémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  :  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ , alors il existe une fonction  $\psi$  telle que  $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base orthonormée de  $W_0$ . De plus, définissons les fonctions  $\psi_k^j$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall j, k \in \mathbb{Z} \quad \psi_k^j(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

chaque famille  $\{\psi_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est alors une base orthonormée de  $W_j$ , et  $\psi$  est appelée fonction ondelette de base.

### 6.2.3 Cas du domaine borné

Une analyse multi-échelles est possible dans le cas d'un domaine borné (voir par exemple [Meyer, 1992](#) et [Auscher, 1993](#)). Nous nous intéressons au cas périodique sur un intervalle. [Meyer \(1987\)](#) a introduit l'analyse multi-échelles périodique :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1] \quad j \geq 0, \quad 0 \leq k < 2^j & \quad \varphi_k^j(x) = 2^{j/2} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \varphi(2^j(x + z - k)) \\ \forall x \in [0, 1] \quad j \geq 0, \quad 0 \leq k < 2^j & \quad \psi_k^j(x) = 2^{j/2} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \psi(2^j(x + z - k)) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Les fonctions  $\varphi_k^j$  et  $\psi_k^j$  génèrent les sous-espaces  $V_j$  et  $W_j$  et définissent une analyse multi-échelles de  $L^2(T)$ , où  $T$  est le tore  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , et  $L^2(T)$  est un ensemble de fonctions 1-périodiques. Nous utiliserons cette approche dans ce qui suit ; on pourra aussi se référer à [Perrier et Basdevant \(1989\)](#) pour une utilisation pratique de ces ondelettes.

Pour nos expériences numériques, nous considérons un entier donné  $p$ , la dimension du sous-espace correspondant  $V_p$  est  $2^p$ , avec l'égalité suivante

$$V_p = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \dots \oplus W_{p-1} \tag{6.4}$$

### 6.2.4 Exemples de fonctions ondelettes

Le but de ce travail n'est pas de dresser une liste exhaustive des fonctions ondelettes existantes, mais nous pouvons tout de même rappeler les plus connues : l'ondelette de Haar ([Haar, 1909](#)) est certainement l'exemple le plus ancien ; on peut citer également l'ondelette à décroissance rapide de Meyer ([Meyer, 1987](#)), les ondelettes à support compact de Daubechies ([Daubechies, 1988](#)) et les ondelettes de Battle-Lemarié à décroissance exponentielle ([Battle, 1987](#) ; [Lemarié, 1988](#)).

Dans le cas des ondelettes de Battle et Lemarié, les deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont définies par leur transformée de Fourier (voir aussi [de Boor, 1978](#))

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\omega) &= \frac{1}{(\pi\omega)^m} \frac{\sin^m(\pi\omega)}{[P_{m-1}(\sin^2(\pi\omega))]^{1/2}} \\ \hat{\psi}(\omega) &= \frac{e^{-i\omega\pi}}{(\pi\omega/2)^m} \left[ \frac{P_{m-1}(\cos^2(\pi\omega/2))}{P_{m-1}(\sin^2(\pi\omega/2))P_{m-1}(\sin^2(\pi\omega))} \right]^{1/2} \sin^{2m}(\pi\omega/2) \end{aligned} \tag{6.5}$$

avec

$$P_{m-1}(\sin^2(z)) = (\sin(z))^{2m} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{(z + l\pi)} \right)^{2m} \tag{6.6}$$

La figure 6.1 montre la fonction  $\psi_0^0$ , qui est utilisée pour définir toutes les fonctions ondelettes (niveau  $p = 9$ ). C'est la seule fonction de base du sous-espace  $W_0$ . Les deux fonctions de base de  $W_1$ ,  $\psi_0^1$  et  $\psi_1^1$ , sont également représentées (notons que l'amplitude réelle des courbes a été normalisée). Il est de plus clair, d'après la figure 6.1, que la largeur du support des fonctions de base de  $W_j$  décroît lorsque  $j$  croît. Notons aussi que les  $2^j$  fonctions de base de  $W_j$  sont obtenues à partir de  $\psi_0^j$  par des translations suivant  $x$  de longueur  $k \times 2^{-j}$ .

## 6.3 Algorithmes utilisés

### 6.3.1 Introduction

Nous présentons dans cette section quelques algorithmes qui nous seront utiles à différentes étapes des calculs. L'étape la plus importante est la détermination des coefficients d'ondelette, c'est-à-dire les composantes d'une fonction  $f \in L^2$  donnée dans les sous-espaces  $W_j$ , avec  $0 \leq j < p$ , pour une analyse multi-échelles avec  $p$  niveaux. Bien qu'une telle décomposition puisse être effectuée dans le cas général, nous donnons les formules dans le cas de conditions périodiques sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

La première étape consiste à définir un échantillonnage régulier de la fonction  $f$ , c'est-à-dire les  $2^p$  valeurs  $f_k = f(k/2^p)$  ( $0 \leq k < 2^p$ ) ; puis une étape d'interpolation doit être effectuée, c'est-à-dire trouver un élément  $\tilde{f}_p \in V_p \subset L^2$  tel que

$$\forall k, 0 \leq k < 2^p \quad \tilde{f}_p(k/2^p) = f(k/2^p)$$

### 6.3.2 Interpolation

Nous cherchons les  $2^p$  coefficients  $c_k^p$  tels que  $\tilde{f}_p = \sum_{k=0}^{2^p-1} c_k^p \varphi_k^p$ .

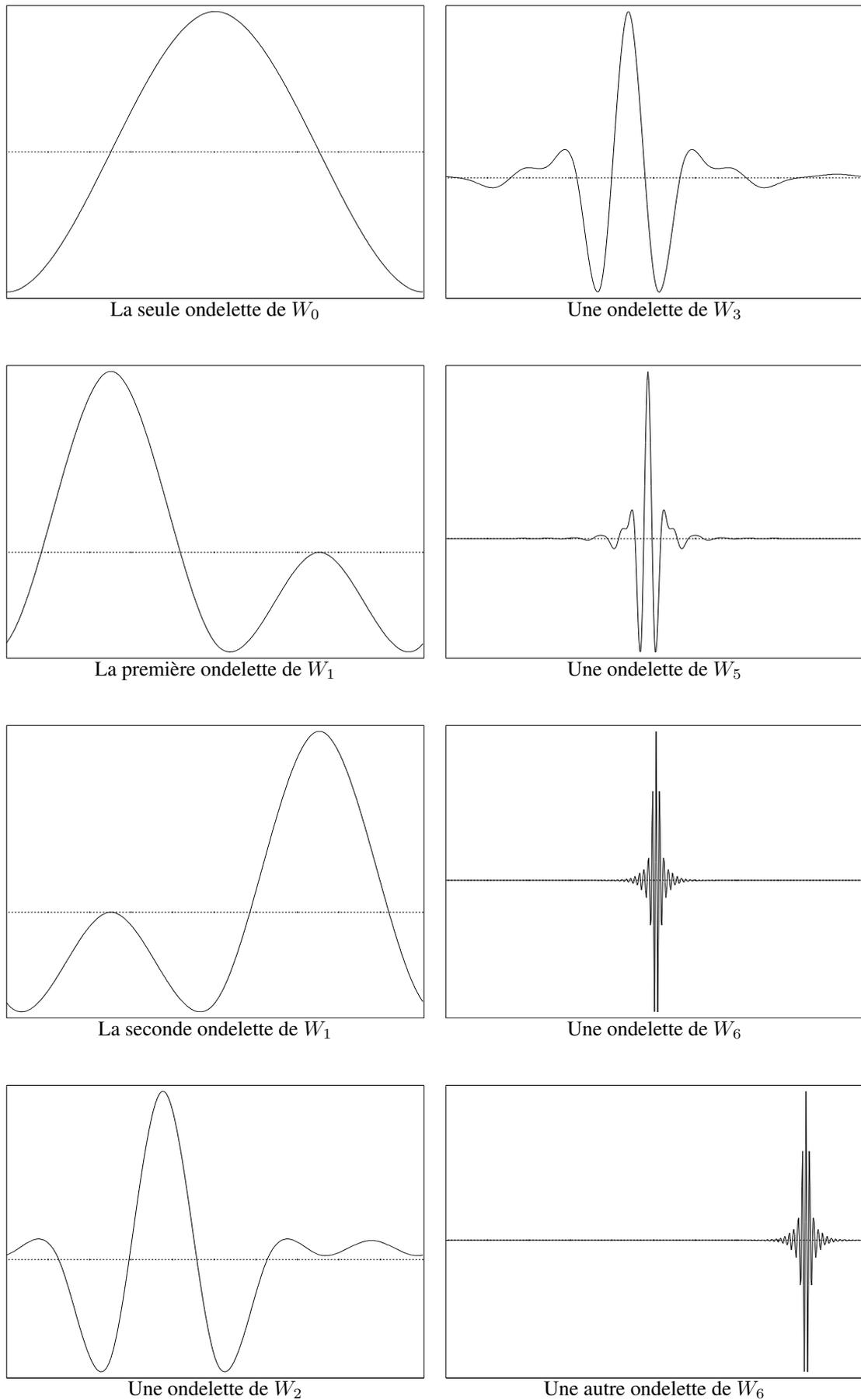


FIG. 6.1 – Représentation normalisée de différentes ondelettes de la base, montrant le principe de l'analyse multi-échelles.

Dans le cas de l'ondelette de Battle-Lemarié, il existe une fonction  $S \in V_p$  qui satisfait,  $\forall k, 0 \leq k < 2^p$

$$\tilde{S}(k/2^p) = \delta_{0,k} \quad (6.7)$$

de sorte que les coefficients sont donnés,  $\forall k, 0 \leq k < 2^p$ , par (voir [Perrier et Basdevant, 1989](#))

$$c_k^p = \sum_{l=0}^{2^p-1} f_l L_p(k-l) \quad (6.8)$$

où

$$L_p(k) = \int_0^1 S(x) \varphi_k^p(x) dx \quad (6.9)$$

### 6.3.3 Décomposition

Maintenant nous disposons des  $2^p$  coefficients  $c_k^p$  définissant un élément  $f_p \in V_p$ ; l'étape suivante est d'obtenir des coefficients similaires  $c_k^j$  dans chaque sous-espace  $V_j$  ( $0 \leq j < p$ ). C'est l'étape de décomposition, pour laquelle nous utilisons la transformée de Mallat (voir [Mallat, 1988](#)). D'après la relation

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \quad (6.10)$$

nous pouvons déduire, pour tout  $j$  ( $0 < j < p$ )

$$\tilde{f}_j = \tilde{f}_{j-1} + \tilde{g}_{j-1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{f}_{j-1} \in V_{j-1} \\ \tilde{g}_{j-1} \in W_{j-1} \end{cases} \quad (6.11)$$

Les  $2^j$  coefficients  $c_k^{j-1}$  et  $d_k^{j-1}$  satisfont

$$\tilde{f}_{j-1} = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} c_k^{j-1} \varphi_k^{j-1} \quad (6.12)$$

et

$$\tilde{g}_{j-1} = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} d_k^{j-1} \psi_k^{j-1} \quad (6.13)$$

les  $d_k^{j-1}$  sont appelés coefficients d'ondelette de niveau  $j-1$ . Si nous définissons deux filtres discrets  $2^j$ -périodiques  $(G_j(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(H_j(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  par

$$0 \leq j < 2^p \quad G_j(k) = \int_0^1 \varphi_k^j(x) \psi_0^{j-1}(x) dx \quad (6.14)$$

et

$$H_j(k) = \int_0^1 \varphi_k^j(x) \varphi_0^{j-1}(x) dx \quad (6.15)$$

alors (voir [Perrier et Basdevant, 1989](#))

$$0 \leq k < 2^{j-1} \quad c_k^{j-1} = \sum_{l=0}^{2^j-1} c_l^j H_j(l-2k) \quad (6.16)$$

et

$$d_k^{j-1} = \sum_{l=0}^{2^j-1} c_l^j G_j(l-2k) \quad (6.17)$$

Pour résumer, la décomposition d'une fonction  $f$  quelconque sur une base d'ondelettes peut être obtenue comme suit :

- interpoler  $f$  sur  $2^p$  points à l'aide du filtre  $(L_p(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ ; cela donne un élément  $\tilde{f}_p \in V_p$ ,
- procéder à  $p$  étapes de décomposition, c'est-à-dire calculer les coefficients  $c_k^{j-1}$  et  $d_k^{j-1}$  à partir des  $2^j$  coefficients  $c_k^j$  ( $0 \leq k < 2^j$ ).

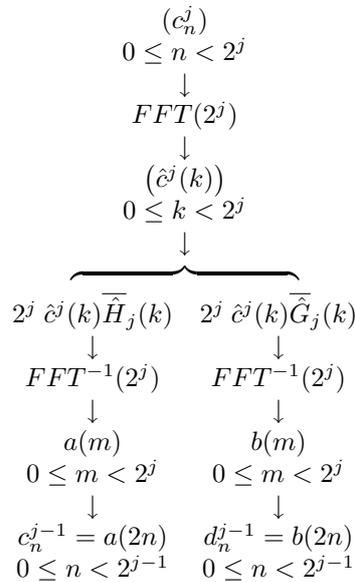
À l'issue de la  $p$ -ième étape, nous avons calculé

- $2^p - 1$  coefficients d'ondelettes  $d_k^j$  pour  $0 \leq j < p$  et  $0 \leq k < 2^j$ ,
- la valeur moyenne  $c_0^0 = \int_0^1 \tilde{f}_p(x) dx$ .

Il est important de préciser que l'étape de décomposition est *réversible*, c'est-à-dire qu'il est possible de retrouver les  $2^p$  valeurs de  $\tilde{f}_p$  à partir de  $c_0^0$  et des  $2^p - 1$  coefficients d'ondelette.

### 6.3.4 Coût de calcul

La plupart des calculs nécessaires à la transformée de Mallat font appel à des produits de convolution, qui sont calculés à l'aide d'une transformée de Fourier, comme expliqué dans l'algorithme suivant correspondant à l'étape de décomposition



Le coût de calcul de la  $j$ -ième étape est ainsi égal à 3 FFT de longueur  $2^j$ , c'est-à-dire  $O(j 2^j)$  opérations. Le coût total de la décomposition en ondelettes, pour un niveau  $p$  fixé, est donc

$$3 \times (1 + 2 \cdot 2^2 + \dots + j \cdot 2^j + \dots + p \cdot 2^p) \quad (6.18)$$

c'est-à-dire  $O(p 2^p)$  opérations. L'algorithme de recombinaison utilise les mêmes étapes dans l'ordre inverse, son coût est donc identique.

### 6.3.5 Visualisation du signal

Nous présentons sur la figure 6.2 un diagramme espace-fréquence, qui est une représentation commode pour comprendre comment fonctionne la décomposition. À chaque fonction de base  $\psi_n^i$  est associé un rectangle qui représente son support : l'axe horizontal représente l'axe  $x$ , et l'axe vertical les fréquences spatiales. Alors chaque ensemble horizontal de rectangles correspond à l'ensemble du sous-espace  $W_j$  : les  $2^j$  rectangles de l'ensemble ont la même largeur  $2^{-j}$  et la même hauteur  $2^j$ . Cela est dû au fait que le sous-espace  $W_j$  échantillonne une bande de fréquence spécifique  $[2^j - 2^{j-1}, 2^j + 2^{j-1}]$ , et aussi au fait que chaque fonction de base a un support de largeur  $2^{-j}$  en espace.

La partie supérieure de la figure 6.2 montre un exemple de signal sismique, avec le diagramme espace-fréquence correspondant dans la partie inférieure. Comme chaque rectangle correspond à une fonction de base, il est coloré en gris si la composante correspondante du signal est plus grande en amplitude qu'un certain seuil (ici  $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ ); sinon il reste blanc. Pour cette analyse multi-échelles à 9 niveaux, seulement 129 des 512 coefficients sont représentés en gris. Il est important de mentionner que nous obtenons le même nombre de coefficients (129) pour une analyse multi-échelles de niveau 11 avec 2048 éléments.

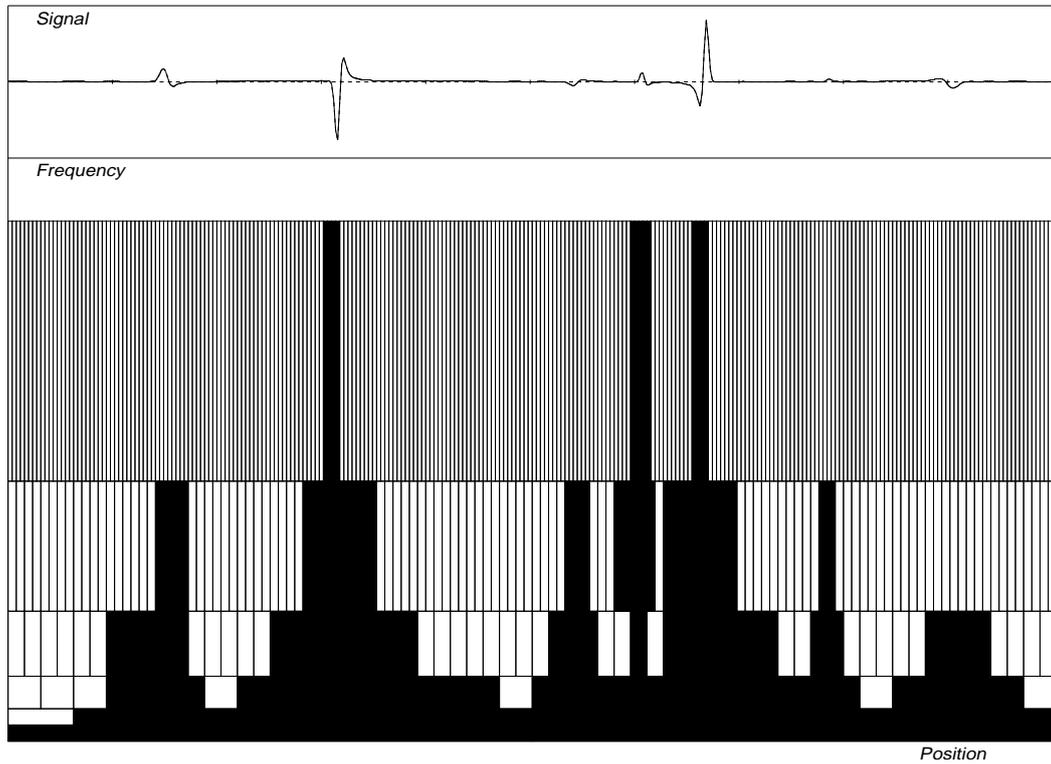


FIG. 6.2 – Diagramme espace-fréquence montrant les différents coefficients significatifs de la représentation d'un signal sismique donné sur la base d'ondelettes choisie.

## 6.4 Simulation numérique

### 6.4.1 Cas-test monodimensionnel

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution de l'équation d'onde monodimensionnelle hétérogène :

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (6.19)$$

Le paramètre  $\lambda$ , appelé coefficient de Lamé, est relié à la densité du milieu  $\rho$  et à la vitesse des ondes de compression dans le milieu  $c_p$  par

$$\lambda = \rho c_p^2 \quad (6.20)$$

Comme la décomposition sur base d'ondelettes utilisée est basée sur l'intervalle  $[0, 1]$  avec des conditions aux limites périodiques, i.e.

$$\forall t \in [0, T] \quad u(0, t) = u(1, t) \quad (6.21)$$

nous utilisons les transformations suivantes pour les longueurs et les vitesses afin de transformer le domaine physique  $[0, x_{\max}]$  en  $[0, 1]$ , puisque l'équation est linéaire par rapport à ces paramètres

$$x' = \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad c_p' = \frac{c_p}{L} \quad (6.22)$$

où  $L$  est la longueur totale de la barre élastique. Les conditions initiales sont introduites en spécifiant la valeur du déplacement aux deux premiers instants, i.e.

$$\forall x \in [0, 1] \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad u(x, \Delta t) = u_1(x) \quad (6.23)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps utilisé dans le schéma numérique. La solution obtenue avec l'algorithme utilisant une base d'ondelettes est validée en la comparant à une solution analytique dans le cas d'un milieu homogène, et à une solution calculée par différences finies dans le cas d'un milieu hétérogène.

### 6.4.2 Algorithme de résolution

Nous utilisons un schéma de différences finies explicite du second ordre pour l'extrapolation en temps :

$$u(x, t + \Delta t) = 2u(x, t) - u(x, t - \Delta t) + \Delta t^2 w(x, t) \quad (6.24)$$

où

$$w(x, t) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \quad (6.25)$$

et le schéma d'évolution se compose des étapes suivantes : supposons que  $u(x, t)$  et  $u(x, t - \Delta t)$  soient connus, alors  $u(x, t + \Delta t)$  peut être calculé par ( $u$  est le signal réel, alors que  $\tilde{u}$  représente sa transcription sur la base d'ondelettes)

$$\begin{array}{ccc}
 u(x, t) & \longrightarrow & \tilde{u}(\xi, t) \\
 & & \downarrow \\
 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) & \longleftarrow & D \times \tilde{u}(\xi, t) \\
 \downarrow & & \\
 \omega(x, t) = \lambda(x) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) & \longrightarrow & \tilde{\omega}(\xi, t) \\
 & & \downarrow \\
 \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) & \longleftarrow & D \times \tilde{\omega}(\xi, t) \\
 \downarrow & & \\
 w(x, t) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) & \longrightarrow & \tilde{w}(\xi, t) \\
 & & \downarrow \\
 u(x, t + \Delta t) & \longleftarrow & \tilde{u}(\xi, t + \Delta t) = 2\tilde{u}(\xi, t) - \tilde{u}(\xi, t - \Delta t) + \Delta t^2 \tilde{w}(\xi, t)
 \end{array}$$

Deux transformées de Mallat directes et deux transformées inverses, ainsi que deux produits matrice-vecteur doivent être calculés à chaque pas de temps.

### 6.4.3 Matrice de dérivation

La matrice de dérivation  $D$  est calculée dans la base  $\varphi_k^p$  du sous-espace  $V_p$  :

$$\begin{aligned}
 [D]_{ij} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i^p}{\partial x}(x) \varphi_j^p(x) dx = \int_0^1 \frac{\partial \varphi^p}{\partial x}(x - i/2^p) \varphi^p(x - j/2^p) dx \\
 &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi^p}{\partial x}(x - (i - j)/2^p) \varphi^p(x) dx = d(i - j)
 \end{aligned} \quad (6.26)$$

avec

$$d(i) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi^p}{\partial x}(x - i/2^p) \varphi^p(x) dx \quad \text{et} \quad \varphi^p(x) = 2^{p/2} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \varphi(2^p(x + z)) \quad (6.27)$$

L'obtention des  $(2^p)^2$  coefficients de la matrice initiale  $\mathcal{D}$  met en jeu le calcul de seulement  $2^p$  éléments  $d(k)$ ; ensuite nous effectuons la transformée de Mallat des  $2^p$  lignes de la matrice  $D$ , et la transformée des  $2^p$  colonnes de la matrice résultante, afin d'obtenir l'expression de la matrice  $D$  dans la base  $\psi_k^j$ .

Cette étape de l'algorithme de simulation est coûteuse en temps de calcul, mais nous pouvons calculer et stocker cette matrice de dérivation une fois pour toutes, car elle ne dépend pas du problème particulier que nous souhaitons résoudre. Ainsi, il est possible de créer une bibliothèque de matrices de dérivation (dérivation première et seconde) correspondant à différents niveaux d'analyse multi-échelles, afin de pouvoir résoudre n'importe quel problème physique posé en termes d'équation différentielle.

### 6.4.4 Résultats numériques

Les deux problèmes-test que nous étudions correspondent aux valeurs initiales

$$u(x, 0) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{(x - x_c)^2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp \left( \frac{-(x - x_c)^2}{2\sigma^2} \right)$$

et

$$\begin{aligned} u(x, \Delta t) &= \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{(x - x_c - c_p \Delta t)^2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp \left( \frac{-(x - x_c - c_p \Delta t)^2}{2\sigma^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{(x - x_c + c_p \Delta t)^2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp \left( \frac{-(x - x_c + c_p \Delta t)^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

avec  $\sigma = 90$  m et  $x_c = 400$  m,  $c_p$  étant la vitesse des ondes de compression dans le milieu. Le processus d'évolution requiert 1320 pas de temps  $\Delta t$  d'une durée de 1.5 ms afin de satisfaire une condition de stabilité classique de type Courant-Friedrichs-Lewy. Le niveau de l'analyse multi-échelles est  $p = 10$ , ainsi le nombre d'inconnues est de  $2^{10} = 1024$ .

Le premier problème-test correspond à un milieu homogène, la densité  $\rho$  est prise égale à  $2000 \text{ kg.m}^{-3}$  et la vitesse  $c_p$  est prise égale à  $1800 \text{ m.s}^{-1}$ . Les figures 6.3 et 6.4 montrent la solution calculée aux instants initial et final. La figure 6.5 montre la solution analytique, ainsi que les résidus entre la solution calculée et la solution exacte, dessinée à la même échelle. Un bon accord est obtenu. Notons que seulement 51 parmi les 1024 coefficients sont nécessaires pour représenter l'onde initiale (et 55 pour l'onde finale), ce qui signifie que le taux de compression obtenu est élevé.

Le second problème-test correspond à un milieu hétérogène, la densité  $\rho$  est prise égale à  $2500 \text{ kg.m}^{-3}$  entre 1000 et 2000 m et égale à  $2000 \text{ kg.m}^{-3}$  dans le reste du domaine ; la vitesse  $c_p$  est respectivement égale à  $1800 \text{ m.s}^{-1}$  et  $2200 \text{ m.s}^{-1}$ .

Les figures 6.6 et 6.7 montrent la solution calculée aux pas de temps 600 et 1320 (instant final). La figure 6.8 montre la solution obtenue en utilisant une méthode de différences finies, ainsi que le résidu entre les deux solutions dessiné à la même échelle. Un bon accord est obtenu entre les résultats donnés par les deux méthodes.

## 6.5 Conclusions

Les premiers résultats de cette étude de propagation d'ondes en utilisant une base d'ondelettes sont prometteurs, puisqu'un bon accord est obtenu avec une solution analytique ou avec une solution calculée par une méthode de différences finies à 1D pour deux problèmes-test (milieu homogène et milieu hétérogène). La méthode devrait pouvoir être étendue aux dimensions supérieures sans modification fondamentale du schéma d'approximation de base. L'un des points clés dans les problèmes de propagation d'ondes en sismologie est que la plus grande partie de l'énergie contenue dans le signal est localisée près des différents fronts d'ondes. Puisque dans les simulations 1D présentées ci-dessus nous avons obtenu un bon taux de compression grâce à la localisation spatiale précise de certaines ondelettes de la base, nous pensons que cela pourrait être encore plus significatif dans des problèmes 2D et 3D, pour lesquels le nombre de coefficients significatifs et le coût de calcul deviennent cruciaux.

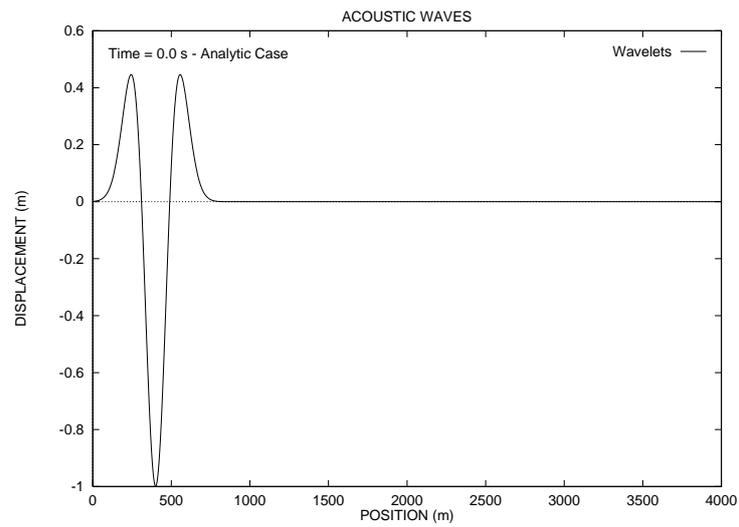


FIG. 6.3 – Solution numérique à l'instant initial dans le cas homogène

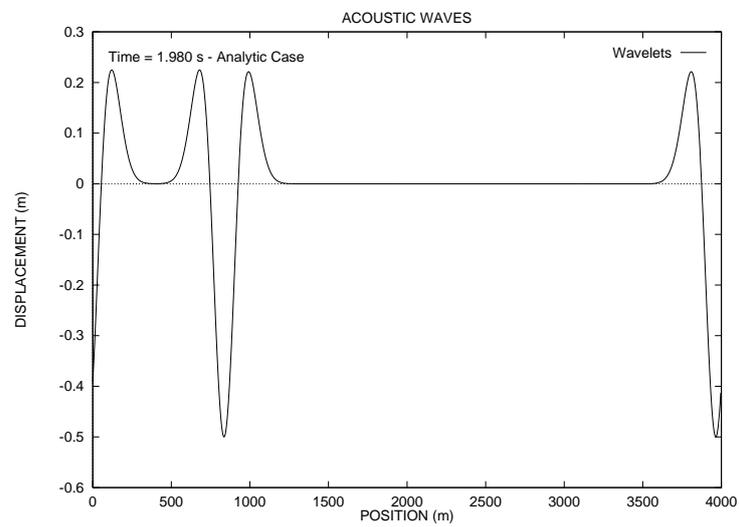


FIG. 6.4 – Solution numérique au temps  $t = 1.98$  s

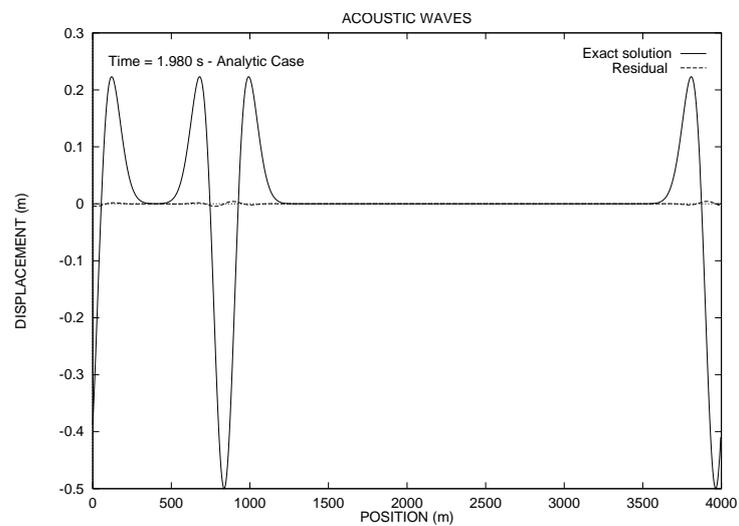


FIG. 6.5 – Solution exacte et résidus à la même échelle au temps  $t = 1.98$  s

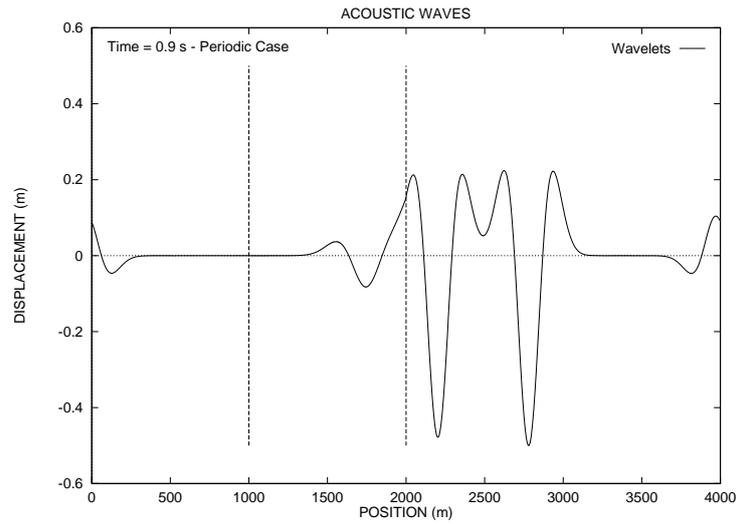


FIG. 6.6 – Solution numérique au temps  $t = 0.9$  s dans le cas hétérogène

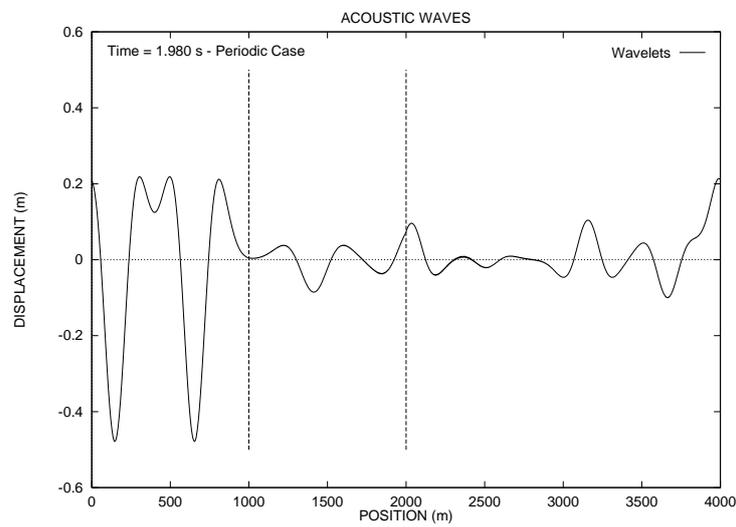


FIG. 6.7 – Solution numérique au temps  $t = 1.98$  s

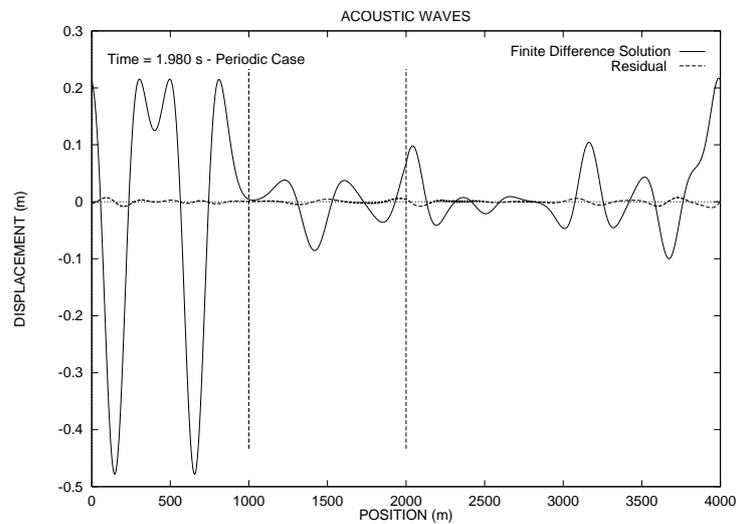


FIG. 6.8 – Solution par différences finies et résidus à la même échelle au temps  $t = 1.98$  s



## Chapitre 7

# Volumes finis : une implémentation directe des équations de conservation à 1D

Ce chapitre est issu d'une collaboration avec Albert Tarantola, publiée dans le rapport GTG #24 sous le titre : *The Finite Volume Method, a Direct Implementation of Conservation Equations* (1994).

### 7.1 Introduction

Dans ce chapitre, qui est le résultat d'un travail effectué avec Albert Tarantola au début de cette thèse, nous présentons une étude menée à 1D pour tester une approche de type volumes finis pour l'équation des ondes. L'idée de départ est que de nombreuses méthodes numériques utilisées pour modéliser la dynamique des milieux continus font appel à la forme différentielle des équations de conservation. Dans les méthodes de différences finies, ou dans les méthodes pseudo-spectrales par exemple, les dérivées spatiales apparaissant dans les équations différentielles sont discrétisées en utilisant des opérateurs de différentiation discrets, et ensuite les équations sont intégrées en temps, par exemple en utilisant une méthode à pas multiples (Virieux, 1986 ; Tessmer *et al.*, 1992). Il est bien connu qu'en utilisant de telles méthodes, il est souvent difficile d'introduire des conditions aux limites correctes, particulièrement en ce qui concerne la condition de surface libre. La plupart du temps, on est conduit à approximer ces conditions aux limites pour pouvoir les introduire dans le schéma numérique. Cela est souvent fait en résolvant des équations paraxiales à la frontière (Carcione, 1994), ou en introduisant localement une antisymétrie du champ de contrainte à la frontière (Rodrigues et Mora, 1993).

Si nous partons, à l'inverse, de la forme globale de ces équations de conservation, nous pouvons utiliser une méthode appelée *méthode des volumes finis*. Le milieu continu à étudier est divisé en volumes arbitraires, et, à un instant  $t$  donné, le champ de densité de masse  $\rho(\mathbf{x}, t)$  et le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  sont supposés connus. Une intégration sur chaque volume élémentaire donne la masse totale  $M(t)$ , le taux de création de masse total  $K(t)$ , la quantité de mouvement totale  $\mathbf{P}(t)$ , et la force extérieure totale  $\mathbf{F}_{\text{ext}}(t)$ . Si la traction exercée sur la surface d'un volume élémentaire est donnée par une loi constitutive dictée par la rhéologie du milieu, alors une intégration sur la surface du volume permet aussi de définir la force intérieure totale agissant sur le volume  $\mathbf{F}_{\text{int}}(t)$ . La position des nouveaux volumes au pas de temps suivant peut alors être extrapolée à l'aide du champ de vitesse, et la masse totale et la quantité de mouvement totale peuvent être extrapolées au pas de temps suivant en utilisant les relations  $\frac{dM}{dt}(t) = K(t)$  et  $\frac{d\mathbf{P}}{dt}(t) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) + \mathbf{F}_{\text{int}}(t)$ .

Dormy et Tarantola (1995) ont déjà utilisé une méthode de volumes finis pour simuler la propagation des ondes élastiques. Ils partent de la formulation différentielle des équations et utilisent le théorème de la divergence sur chaque volume élémentaire de la grille (cette grille étant définie une fois pour toutes) afin de pouvoir estimer le gradient des champs apparaissant dans l'équation des ondes. Pour une grille régulière, cette formulation est strictement équivalente à un schéma de différences finies centrées classique. Nous proposons ici une approche différente utilisant directement la forme globale des équations de conservation et remplaçons l'estimation directe du gradient des champs par un procédé d'ajustement qui est classique en théorie de l'inversion. La résolution du problème inverse consistant à trouver le champ de densité de masse et le champ de vitesse, suffisamment lisses au sens d'un critère donné, tels que, lorsqu'on les intègre sur les nouveaux volumes, ces champs redonnent les valeurs correctes de la masse et de la quantité de mouvement totale, permet alors d'extrapoler les nouvelles positions des volumes et de passer au pas de temps suivant. De plus, une telle approche permet d'assurer de façon exacte la conservation de la masse et de la quantité de mouvement totales à chaque pas de temps, ce qui est essentiel. De plus, en utilisant la définition fondamentale de la déformation à 1D, il apparaît que des conditions aux

limites exactes des trois types usuels dans le cas élastique (surface libre, frontière rigide, ou interface élastique) peuvent être introduites. La méthode est validée à 1D en comparant les résultats obtenus à la solution analytique dans le cas homogène, et à la solution calculée par différences finies dans le cas hétérogène.

La voie présentée ici à 1D n'a pas été poursuivie dans le cadre de cette thèse, nos efforts ayant principalement porté sur le développement de la méthode des éléments spectraux qui a été décrite à 2D et à 3D dans les chapitres précédents, et qui présentait un fort potentiel.

## 7.2 Équations locales

Dans ce qui suit, notons  $\rho(\mathbf{x}, t)$  le champ de densité de masse, et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  le champ de vitesse. Les équations différentielles gouvernant la dynamique des milieux continus sont, en coordonnées eulériennes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v^i) = \kappa \quad (7.1)$$

et

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho v_i v^j - \sigma_i^j) = f_i \quad (7.2)$$

Les termes  $\kappa$  et  $f_i$  correspondent à des sources extérieures, respectivement de création de masse et de force, qui doivent être données *a priori*. Le tenseur des contraintes  $\sigma_i^j$  définit la *rhéologie* du milieu (plastique, élastique, fluide...). Sa valeur en tout point de l'espace et à tout instant,  $\sigma_i^j(\mathbf{x}, t)$ , doit être définie en fonction de l'histoire du milieu par des *équations constitutives* que l'on se donne. Ces équations locales sont celles qui sont utilisées par exemple dans les méthodes de différences finies ou les méthodes pseudo-spectrales.

## 7.3 Équations globales

Considérons un volume arbitraire  $\mathcal{V}(t)$  à l'intérieur du milieu, notons  $\mathcal{S}(t)$  sa surface, nous pouvons alors calculer la masse totale par

$$M(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} dV(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) \quad (7.3)$$

et la quantité de mouvement totale par

$$\mathbf{P}(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} dV(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (7.4)$$

nous avons alors, si nous considérons la surface du volume attachée au milieu considéré

$$\frac{dM}{dt}(t) = K(t) \quad (7.5)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}(t) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) + \mathbf{F}_{\text{int}}(t) \quad (7.6)$$

où le taux de création de masse total est

$$K(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} dV(\mathbf{x}) \kappa(\mathbf{x}, t) \quad (7.7)$$

la force extérieure totale est

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} dV(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (7.8)$$

et où, si l'on définit la *traction* par

$$\tau_i(\mathbf{x}, t) = \sigma_i^j(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x}, t) \quad (7.9)$$

la force intérieure totale est

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(t) = \int_{S(t)} dS(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) \quad (7.10)$$

Si les équations locales (7.1) et (7.2) sont vérifiées en tout point de l'espace, alors les équations globales (7.5) et (7.6) doivent être vérifiées pour tout volume  $\mathcal{V}$ . Réciproquement, si les équations globales (7.5) et (7.6) sont vérifiées pour tout volume  $\mathcal{V}$ , alors les équations locales (7.1) et (7.2) doivent être vérifiées en tout point de l'espace. Voyons comment ces équations globales peuvent être utilisées en pratique pour calculer l'évolution d'un milieu donné au cours du temps.

## 7.4 La méthode des volumes finis

Un milieu continu donné peut être, pour les besoins d'un calcul numérique, partitionné en *volumes finis*. Ici, nous supposons que la densité de taux de création de masse  $\kappa(\mathbf{x}, t)$  (zéro en général) et la densité de force extérieure  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  sont connus à tout instant (puisque ce sont les termes sources qui gouvernent l'évolution du système). De plus, nous supposons qu'une *loi constitutive* nous permet, à tout instant, de définir les tractions  $\tau_i(\mathbf{x}, t)$  en tout point de la surface des volumes, si nous connaissons le tenseur des déformations (ce qui signifie que la *rhéologie* du milieu est donnée). Alors, la méthode des volumes finis peut être décomposée en plusieurs étapes :

- Donnons-nous, à l'instant initial  $t_0$ , les deux fonctions  $\rho(\mathbf{x}, t_0)$  et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0)$ .
- Définissons des volumes arbitraires pavant l'espace, suffisamment petits pour que les différents champs qui nous intéressent aient des variations faibles à l'intérieur de chacun d'eux.
- Évaluons, pour tous les volumes, en utilisant une méthode d'intégration numérique quelconque, les quantités initiales  $M(t_0)$  (équation 7.3),  $K(t_0)$  (équation 7.7),  $\mathbf{P}(t_0)$  (équation 7.4),  $\mathbf{F}_{\text{ext}}(t_0)$  (équation 7.8), et  $\mathbf{F}_{\text{int}}(t_0)$  (équation 7.10).
- Extrapolons au pas de temps suivant ( $t_0 \rightarrow t_0 + \Delta t$ ) les frontières des nouveaux volumes en utilisant, par exemple, une approximation du premier ordre pour les déplacements,

$$\Delta x^i = v^i \Delta t \quad (7.11)$$

De plus, pour chaque volume, extrapolons la masse en utilisant, par exemple, l'approximation du premier ordre :

$$M(t_0 + \Delta t) = M(t_0) + \frac{dM}{dt}(t_0) \Delta t = M(t_0) + K(t_0) \Delta t \quad (7.12)$$

et extrapolons la quantité de mouvement en utilisant, par exemple, l'approximation du premier ordre :

$$\mathbf{P}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{P}(t_0) + \frac{d\mathbf{P}}{dt}(t_0) \Delta t = \mathbf{P}(t_0) + \left( \mathbf{F}_{\text{ext}}(t_0) + \mathbf{F}_{\text{int}}(t_0) \right) \Delta t \quad (7.13)$$

- Choisissons, parmi l'infinité de champs continus  $\rho(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t)$  et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t)$  qui, lorsqu'on les intègre sur les nouveaux volumes, donnent les bonnes valeurs de la masse  $M(t_0 + \Delta t)$  et de la quantité de mouvement  $\mathbf{P}(t_0 + \Delta t)$  pour tous les volumes, les plus lisses par rapport à un certain critère (ce problème classique de la théorie de l'inversion peut être résolu exactement, voir annexe 7.A).

Nous avons commencé nos calculs en connaissant  $\rho(\mathbf{x}, t_0)$  et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0)$ , et nous avons maintenant calculé  $\rho(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t)$  et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0 + \Delta t)$ . En répétant cette procédure, nous pouvons donc calculer ces champs à tout instant  $t$  donné.

Voyons maintenant comment les déformations et les contraintes peuvent être obtenues à partir de la position des volumes connue à chaque pas de temps.

## 7.5 Contraintes élastiques

### 7.5.1 Définition du champ de déformation

Soit, dans un espace monodimensionnel, un objet de longueur  $l$  qui, lors d'une déformation homogène, subit un allongement  $dl$ . L'«*incrément de déformation*» est alors défini comme l'élongation relative :

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l} \quad (7.14)$$

L'intégration  $\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l}$  permet alors de définir la *déformation* (Lemaitre et Chaboche, 1985, p. 52) :

$$\varepsilon = \log \frac{l}{l_0} \quad (7.15)$$

Plus généralement, une déformation inhomogène dans un milieu 1D peut être décrite, par exemple, en donnant la fonction  $s(s_0)$  définissant la distance  $s$  par rapport à un point de référence, après déformation, du point matériel dont la distance au même point de référence était  $s_0$  avant la déformation. Ces points sont des «*points matériels*», c'est-à-dire des points attachés au milieu subissant la déformation. Lorsqu'on l'applique à cette situation, la formule (7.15) donne

$$\varepsilon = \log \left( \lim_{\Delta s_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta s_0} \right) \quad (7.16)$$

soit

$$\varepsilon(s_0) = \log \left( \frac{ds}{ds_0}(s_0) \right) \quad (7.17)$$

qui peut être considéré comme la définition de la déformation à 1D.

### 7.5.2 Évaluation numérique du champ de déformation

Voyons comment l'équation (7.17) peut être utilisée directement pour estimer le champ de déformation à partir de la connaissance de la position des volumes. Pour illustrer ce point à 1D, considérons un solide élastique au repos, et le même solide dans un état déformé (voir figure 7.1). Soit  $Z_0, \dots, Z_N$  les positions des frontières des volumes dans le solide au repos, et  $z_0, \dots, z_N$  les positions dans l'état déformé. Comme pour chaque position  $Z_i$  nous connaissons la nouvelle position  $z_i$ , nous pouvons interpoler les valeurs  $z_i(Z_i)$ , par exemple en utilisant des splines, pour obtenir la courbe  $z(Z)$  (voir figure 7.2). Comme nous l'avons vu ci-dessus, cette courbe permet à 1D de calculer la déformation, qui peut être évaluée en utilisant la relation :

$$\varepsilon(Z) = \log \left( \frac{dz}{dZ}(Z) \right) \quad (7.18)$$

Le point intéressant à noter ici est que les trois types de conditions aux limites habituels dans le cas d'un milieu élastique borné (surface libre, frontière rigide ou interface élastique) peuvent être introduits de façon exacte lors de l'évaluation de  $\varepsilon$ . Considérons par exemple la condition de surface libre : à 1D elle est équivalente à  $\sigma = 0$ , donc  $\varepsilon = \log \left( \frac{dz}{dZ} \right) = 0$ , ce qui implique  $\frac{dz}{dZ} = 1$ . Donc lorsque l'on interpole la courbe  $z(Z)$  par exemple en utilisant des splines, il suffit d'imposer une valeur de 1 pour la tangente à cette courbe afin d'imposer une condition de surface libre en ce point.

Si nous voulons introduire une condition de bord rigide sur la frontière gauche de la barre par exemple, il suffit d'imposer  $z_0 = Z_0$  à tout instant. Cela implique aussi que la dérivée seconde de la courbe  $z(Z)$  soit égale à zéro en ce point, condition qui est introduite dans le processus d'interpolation par splines en utilisant sur ce bord un spline appelé «*spline naturel*» (Press *et al.*, 1994).

Pour une condition d'interface élastique, tout ce que nous savons est que, dans le cas 1D,  $\sigma = (\lambda + 2\mu)\varepsilon$  est continu à travers l'interface. Ainsi, nous avons la relation suivante entre les valeurs à gauche et à droite de l'interface :

$$(\lambda_l + 2\mu_l) \log \left( \frac{dz}{dZ} \right)_l = (\lambda_r + 2\mu_r) \log \left( \frac{dz}{dZ} \right)_r \quad (7.19)$$

donc

$$\left( \frac{dz}{dZ} \right)_l = \left( \frac{dz}{dZ} \right)_r^\alpha \quad (7.20)$$

où

$$\alpha = \frac{\lambda_r + 2\mu_r}{\lambda_l + 2\mu_l} \quad (7.21)$$

Cela est donc la condition qui doit être introduite dans le processus d'interpolation par spline pour une interface élastique dans le cas 1D. On notera au passage que l'extension de ces idées aux cas 2D et 3D, qui n'a pas été étudiée dans le présent travail, ne semble pas triviale.

## 7.6 Validation de la méthode : cas d'un milieu élastique 1D

### 7.6.1 Problème physique étudié

Considérons le solide élastique représenté sur la figure 7.1. À l'instant initial  $t_0$  quand le solide est au repos, la propagation d'une onde élastique est initiée en imposant un champ de déplacement  $u(x, t_0)$  et un champ de vitesse  $v(x, t_0)$  donnés. La partie inférieure du schéma représente l'état du solide élastique déformé à un instant arbitraire  $t > t_0$ . La figure 7.1 illustre aussi le choix que nous avons fait pour les volumes finis, c'est-à-dire de petits prismes rectangulaires.

Dans ce qui suit, nous choisissons un système de coordonnées cartésien. Bien qu'une « colonne » seulement du milieu soit représentée sur la figure, nous supposons le milieu infini suivant les deux directions horizontales. Ainsi, dans cet exemple 1D, seuls  $\varepsilon_{zz}$  et  $\sigma_{zz}$  sont différents de zéro. La condition posée sur le bord gauche du modèle est celle d'un bord rigide (déplacement nul en ce point). La condition posée sur le bord droit du modèle est celle d'une surface libre (traction nulle en ce point).

### 7.6.2 Algorithme utilisé à 1D

Supposons connus, à un instant  $t$  donné, les deux champs  $\rho(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . La masse à l'intérieur du volume  $V_n$  est

$$M_n = L^2 \int_{z_{n-1}}^{z_n} \rho(z, t) dz \quad (7.22)$$

la quantité de mouvement est

$$P_n = L^2 \int_{z_{n-1}}^{z_n} \rho(z, t) v(z, t) dz \quad (7.23)$$

Afin de pouvoir calculer les forces intérieures élastiques, nous avons besoin d'évaluer la déformation et la contrainte. Comme nous connaissons le champ de vitesse à l'instant  $t$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , nous pouvons extrapoler les positions des frontières des volumes au pas de temps suivant :

$$z_i(t + \Delta t) = z_i(t) + \Delta t v(z_i(t), t) \quad (7.24)$$

Comme nous connaissons également les positions  $z_i$  à la fois à l'instant  $t$  et à l'instant  $t + \Delta t$ , nous pouvons estimer les positions moyennes

$$z_i(t + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{z_i(t + \Delta t) + z_i(t)}{2} \quad (7.25)$$

Ainsi nous pouvons déterminer la déformation et donc la contrainte à l'instant  $t + \frac{\Delta t}{2}$  en interpolant la courbe  $z(Z)$  et en utilisant la formule (7.18), tout en imposant les conditions aux limites correctes, comme cela a été décrit précédemment. Nous utilisons des splines cubiques pour interpoler la courbe principalement en raison de leur simplicité, puisque dans

ce cas les coefficients des splines peuvent être déterminés très aisément en résolvant un système linéaire (Press *et al.*, 1994). Cependant, la condition qui doit être introduite à une interface élastique (voir équation 7.20) est non linéaire, de ce fait dans le cas général où des déplacements arbitraires seraient considérés, il faudrait résoudre un système d'équations non linéaires pour trouver les coefficients du spline. Cela peut être mené à bien en utilisant des méthodes classiques, par exemple la méthode de Newton-Raphson, mais dans le cas de petits déplacements il est plus simple de considérer une approximation linéaire. Posons  $z = Z + \Delta z$ , où le déplacement  $\Delta z$  est petit, et nous obtenons :

$$1 + \left(\frac{d\Delta z}{dZ}\right)_l = \left[1 + \left(\frac{d\Delta z}{dZ}\right)_r\right]^\alpha \simeq 1 + \alpha \left(\frac{d\Delta z}{dZ}\right)_r \tag{7.26}$$

Ainsi

$$\left(\frac{d\Delta z}{dZ}\right)_l = \alpha \left(\frac{d\Delta z}{dZ}\right)_r \tag{7.27}$$

ce qui signifie que les tangentes à gauche et à droite de la discontinuité sont proportionnelles, ce qui est une condition linéaire qui peut être prise en compte très facilement lors de la résolution du système permettant d'obtenir les coefficients du spline.

Ainsi, si l'on considère seulement les forces intérieures (et que l'on ignore donc, par exemple, le champ de gravité externe), la force élastique est donnée par

$$F_n = L^2 (\sigma_n - \sigma_{n-1}) \tag{7.28}$$

L'extrapolation de la masse donne

$$M_n(t + \Delta t) = M_n(t) \tag{7.29}$$

tandis que l'extrapolation de la quantité de mouvement donne

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) + \Delta t F_n \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \tag{7.30}$$

Comme nous connaissons les positions  $z_i(t + \Delta t)$ , nous pouvons maintenant utiliser  $M_n(t + \Delta t)$  et  $P_n(t + \Delta t)$  afin d'obtenir, en faisant appel à la théorie de l'inversion,  $\rho(z, t + \Delta t)$  et  $v(z, t + \Delta t)$  (voir annexe 7.A). Ainsi nous pouvons répéter cet algorithme et propager l'onde jusqu'à tout instant donné  $t$ .

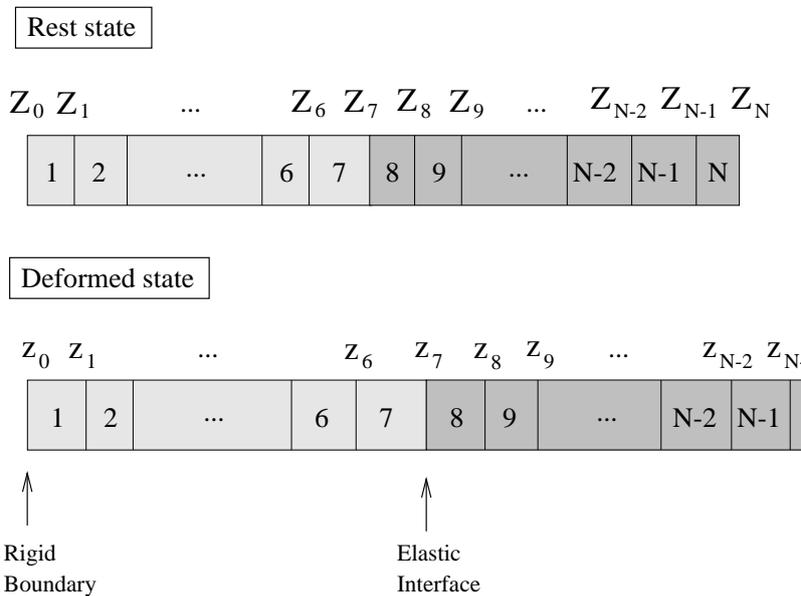


FIG. 7.1 – La méthode de volumes finis proposée est validée à 1D en étudiant la propagation d'une onde élastique (état déformé) dans une barre qui était initialement au repos. Les trois types de conditions aux limites sont introduits (bord rigide à gauche, surface libre à droite et interface élastique entre les deux milieux).

### 7.6.3 Résultats numériques

Afin de valider la méthode à 1D, nous calculons la solution du problème de la barre élastique exposé ci-dessus à la fois dans le cas homogène et dans le cas hétérogène. La frontière gauche du modèle est un bord rigide, et la frontière droite une surface libre (voir figure 7.1).

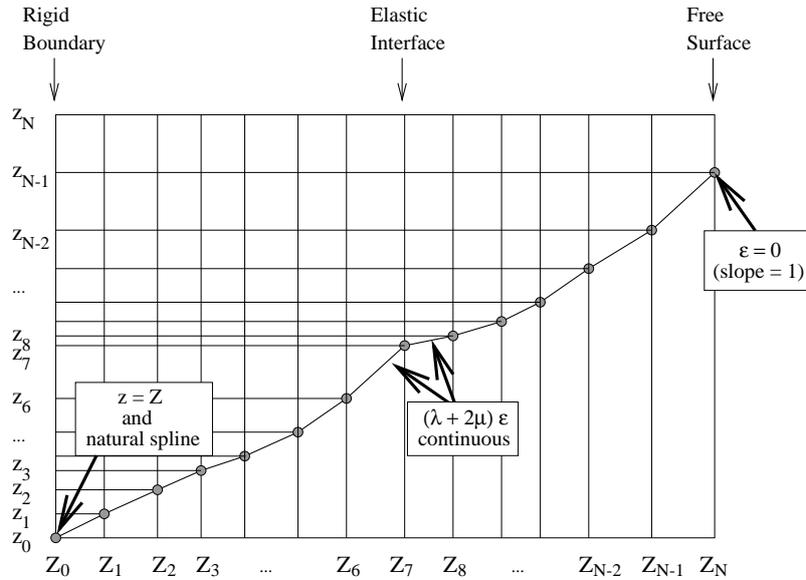


FIG. 7.2 – Il est possible de trouver la déformation à 1D en interpolant simplement la courbe obtenue en traçant les positions actuelles  $z_i$  des frontières des volumes en fonction de leurs positions initiales  $Z_i$ . L'interpolation peut être effectuée par exemple à l'aide de splines cubiques. Les trois types de conditions aux limites (bord rigide, surface libre et interface élastique) peuvent être introduits de façon exacte dans ce processus d'interpolation.

### Cas homogène

Dans ce premier exemple, la barre est homogène. Sa longueur totale est de 3000 m, la vitesse des ondes de compression est prise égale à  $3000 \text{ m.s}^{-1}$ , et la densité du milieu est prise égale à  $2000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le nombre de volumes élémentaires utilisés lors de cette simulation est de 200 et la valeur du pas de temps est  $\Delta t = 1 \text{ ms}$ , afin que le schéma d'extrapolation en temps vérifie une condition de stabilité classique de type Courant-Friedrichs-Lewy, la taille de chaque volume élémentaire étant de 15 m. Le nombre total de pas de temps utilisés est de 2000, ce qui correspond à une durée totale de la simulation de 2 s.

Le schéma est initialisé à l'instant  $t = 0$  en imposant un déplacement gaussien

$$u(x, 0) = \exp\left(\frac{-(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7.31)$$

et une vitesse initiale

$$v(x, 0) = \frac{c}{\sigma^2} (x - x_0) u(x, 0) \quad (7.32)$$

correspondant à la solution analytique

$$u(x, t) = \exp\left(\frac{-(x - x_0 - ct)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7.33)$$

dans le cas d'un milieu infini. Les valeurs utilisées ici sont  $x_0 = 2340 \text{ m}$  et  $\sigma = 100 \text{ m}$ . Dans notre étude, le milieu est limité à gauche par un bord rigide et à droite par un bord libre. La solution théorique est alors simplement l'onde donnée par l'équation (7.33) subissant une réflexion totale aux deux bords, son amplitude gardant le même signe lorsque l'onde se réfléchit sur le bord libre, et changeant de signe lorsqu'elle se réfléchit sur le bord rigide.

La figure 7.3 présente les résultats numériques que nous avons obtenus à différents pas de temps, avec également les résidus entre la solution calculée par la méthode des volumes finis et la solution analytique, dessinés à la même échelle. On peut vérifier que l'accord est excellent et que le résidu reste très petit même après 1400 pas de temps (au temps  $t = 1.4 \text{ s}$ ). En ce qui concerne les conditions de bord, nous pouvons vérifier que lorsque l'onde se réfléchit sur la surface libre (aux temps  $t = 0 \text{ s}$ ,  $t = 0.15 \text{ s}$  et  $t = 0.45 \text{ s}$ ) elle est réfléchie avec la même amplitude, alors que quand elle se réfléchit sur le bord rigide (aux temps  $t = 1.1 \text{ s}$ ,  $t = 1.2 \text{ s}$  et  $t = 1.4 \text{ s}$ ) elle est réfléchie avec une amplitude opposée, en accord avec la théorie.

### Cas hétérogène

Dans ce second exemple, la barre est hétérogène, elle est composée de deux milieux homogènes en contact. Tous les paramètres restent les mêmes que dans le cas homogène présenté ci-dessus, excepté le fait que la partie gauche de la barre a maintenant une densité de  $1700 \text{ kg.m}^{-3}$  et une vitesse des ondes de compression de  $2000 \text{ m.s}^{-1}$ . La valeur absolue du coefficient de réflexion entre les deux milieux est donc de 0.27.

La figure 7.4 présente les résultats numériques que nous avons obtenus à différents pas de temps, ainsi que les résidus entre la solution calculée par la méthode des volumes finis et la solution calculée par une méthode de différences finies, dessinés à la même échelle. Comme précédemment dans le cas homogène, un très bon accord est obtenu, ce qui permet de valider la méthode dans le cas hétérogène. Le comportement détaillé de l'onde à l'interface élastique (séparation en une onde réfléchie et une onde transmise) peut être observé aux temps  $t = 0.65 \text{ s}$ ,  $t = 0.75 \text{ s}$  et  $t = 0.85 \text{ s}$ . De nouveau, l'amplitude de l'onde transmise se trouve inversée lors de la réflexion sur l'interface rigide, comme cela peut être observé aux temps  $t = 1.45 \text{ s}$  et  $t = 1.5 \text{ s}$ .

## 7.7 Conclusions

La méthode présentée ici semble correspondre à une discrétisation naturelle des équations de conservation. En partant de la forme globale de ces équations, et en partitionnant le milieu continu étudié en volumes arbitraires, nous pouvons définir un algorithme de volumes finis permettant de résoudre l'équation des ondes monodimensionnelle, tout en introduisant de façon naturelle les trois conditions aux limites usuelles dans le cas élastique (surface libre, bord rigide et interface élastique). Une comparaison de la solution obtenue à la solution analytique pour un cas-test homogène, et à la solution calculée par différences finies pour un cas-test hétérogène, a permis de démontrer la validité de la méthode dans le cas 1D. Il est à noter que l'extension de ces idées à 2D et à 3D ne semble pas triviale, en particulier en ce qui concerne le calcul du tenseur des contraintes et l'introduction des conditions aux limites, qui sont pourtant des points cruciaux pour toute méthode de résolution de l'équation des ondes élastiques.

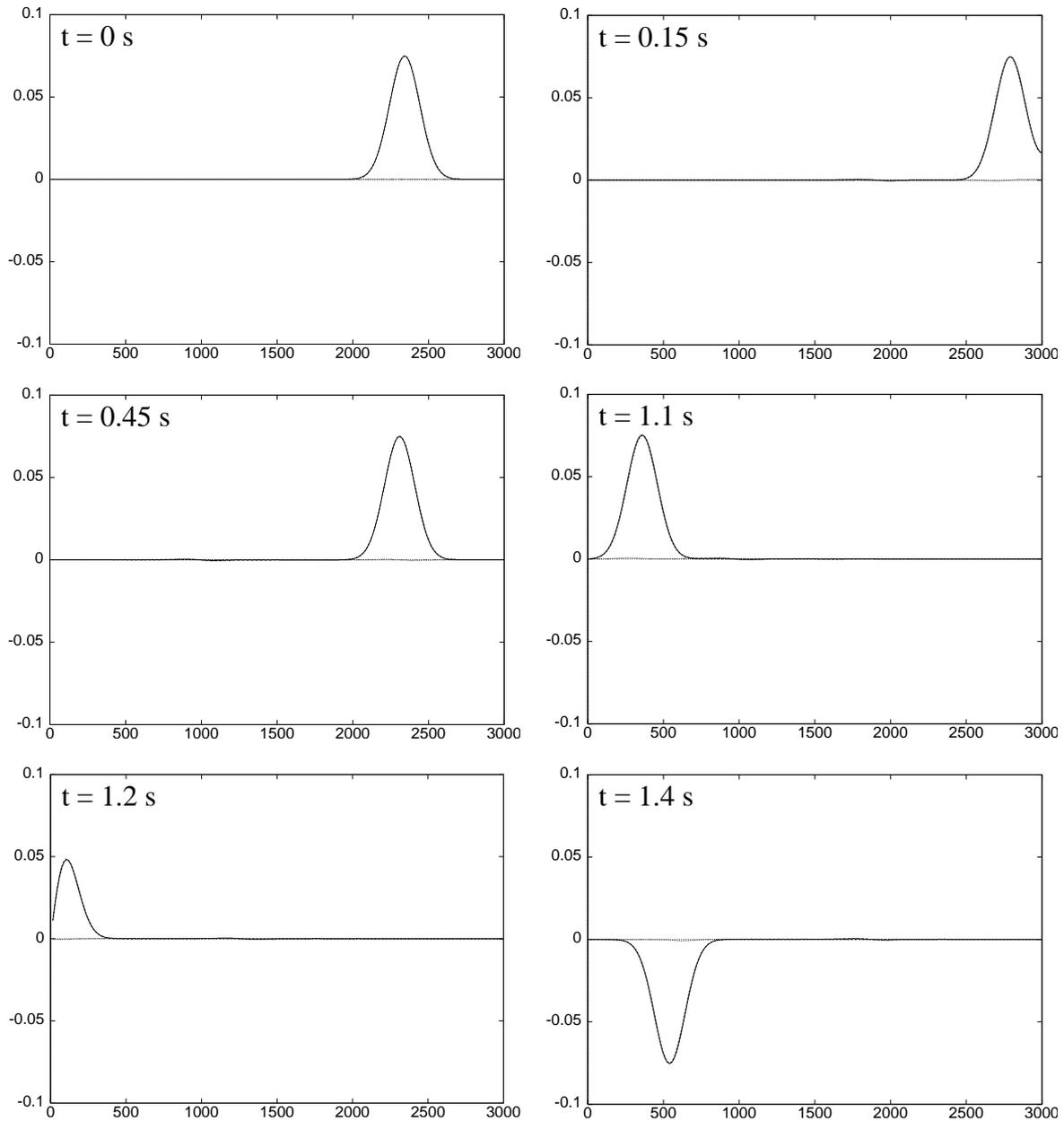


FIG. 7.3 – La méthode de volumes finis proposée est validée à 1D en propageant une onde dans un milieu homogène limité à gauche par un bord rigide et à droite par une surface libre. Le déplacement (mesuré en mètres) est représenté le long de la barre dont la longueur totale est de 3000 m. La solution calculée est comparée à la solution analytique en représentant les résidus entre les deux solutions, dessinés à la même échelle. Un très bon accord est trouvé, l'erreur maximum étant de moins de 1 % après 1400 pas de temps.

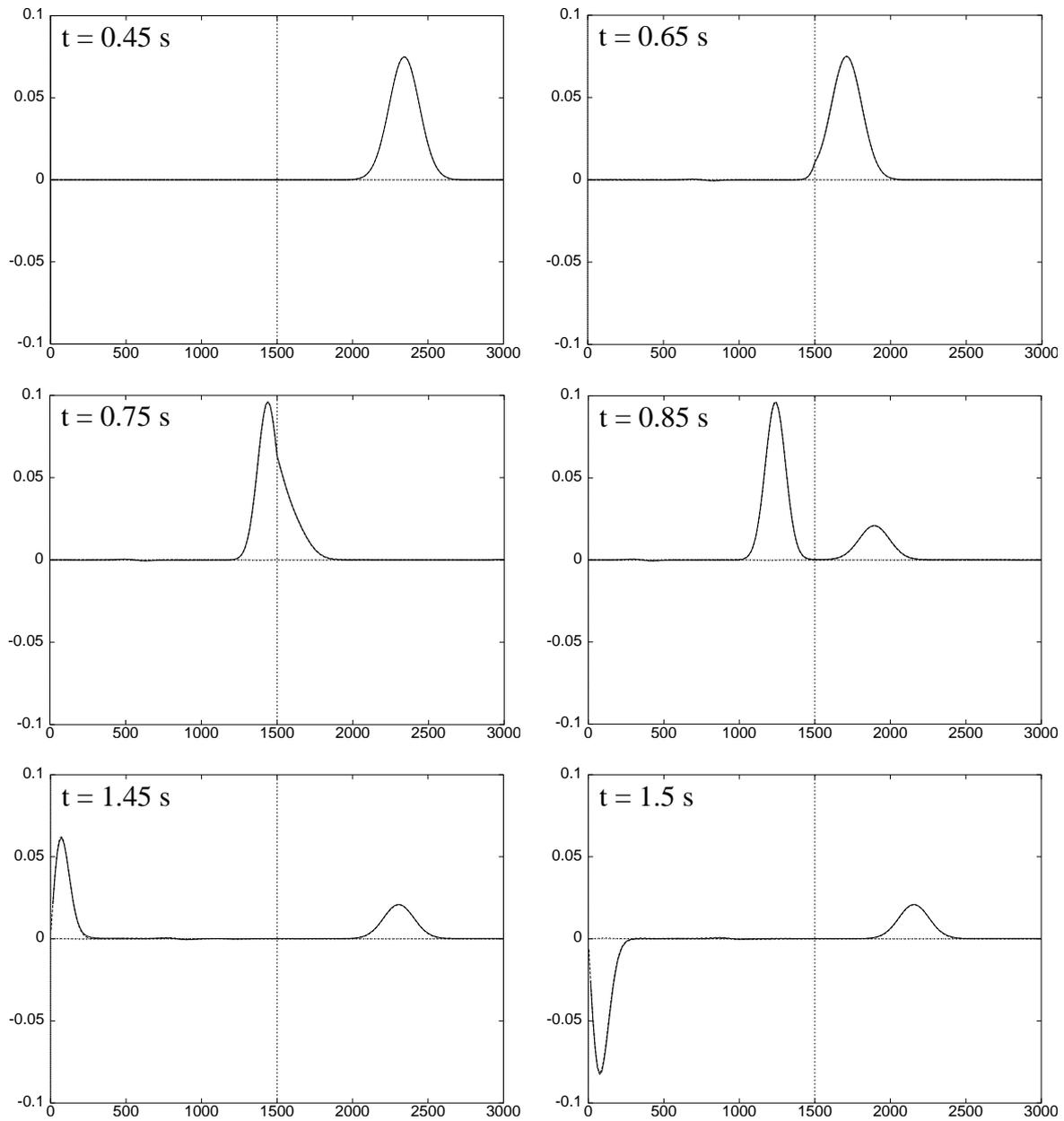


FIG. 7.4 – Les trois types de conditions aux limites sont validés à 1D en propageant une onde dans un milieu homogène limité à gauche par un bord rigide et à droite par une surface libre. La ligne verticale indique la position de l'interface élastique située en  $x_0 = 1500$  m. Le déplacement (mesuré en mètres) est représenté le long de la barre dont la longueur totale est de 3000 m. La solution calculée par la méthode des volumes finis est comparée à la solution calculée par différences finies en représentant le résidu entre les deux solutions, dessiné à la même échelle. Un très bon accord est obtenu, l'erreur maximum étant de l'ordre de 1 % après 1500 pas de temps.

## 7.A Annexe : Interpolation de la masse et de la quantité de mouvement

Supposons connues la masse totale  $M_i$  et la quantité de mouvement totale  $P_i$  sur chaque volume élémentaire  $\mathcal{V}_i$ , nous cherchons à trouver des champs continus  $\rho(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  correspondants, afin de pouvoir extrapoler les nouvelles positions des frontières des volumes et pouvoir en déduire les nouvelles quantités globales  $M_i$  et  $P_i$  au pas de temps suivant. Ce problème peut être résolu de manière simple en faisant appel à la théorie de l'inversion (Tarantola et Valette, 1982a ; Tarantola et Valette, 1982b). Nous illustrons ci-dessous le procédé permettant par exemple de trouver le champ de densité (le même processus pouvant évidemment être utilisé ensuite pour trouver le champ de quantité de mouvement).

Supposons que nous ayons partitionné l'espace en volumes élémentaires  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ . Cherchons alors un champ de densité de masse lisse  $\rho(\mathbf{x})$  qui, lorsqu'on l'intègre sur chaque volume élémentaire, donne comme demandé les masses  $M_1, M_2, \dots, M_n$  :

$$M_i = \int_{\mathcal{V}_i} dV(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \quad (7.34)$$

Dans le cadre de la théorie de l'inversion, nous pouvons même généraliser un peu ce problème, et chercher une distribution de densité de masse qui, lorsqu'on l'intègre sur chaque volume élémentaire, redonne les masses  $M_1, M_2, \dots, M_n$  seulement *de manière approchée*. Plus précisément, soit  $D_{ij}$  une matrice de covariance décrivant les incertitudes (pouvant être corrélées) que nous avons sur les « données »  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Supposons que nous cherchions un champ de densité de masse qui ne soit « pas trop éloigné » d'une fonction *a priori*  $\rho_0(\mathbf{x})$ , la signification de l'expression « pas trop éloigné » étant que la différence  $\rho(\mathbf{x}) - \rho_0(\mathbf{x})$  soit petite lorsqu'on la mesure avec la norme ( $L_2$ ) associée à une fonction de covariance  $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . L'algorithme suivant permet de résoudre le problème :

1. Définissons les fonctions

$$q_i(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}_i} dV(\mathbf{x}') C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (7.35)$$

Ces fonctions sont juste des versions « étalées » des volumes considérés :  $q_i(\mathbf{x})$  vaut zéro partout dans l'espace, sauf dans et au voisinage du volume  $\mathcal{V}_i$ .

2. Calculons la matrice

$$S_{ij} = \int_{\mathcal{V}_i} dV(\mathbf{x}) q_j(\mathbf{x}) + D_{ij} \quad (7.36)$$

Le premier terme mesure le recouvrement du volume  $\mathcal{V}_i$  par la fonction « étalée »  $q_j(\mathbf{x})$ . Le second terme est la matrice de covariance introduite ci-dessus, et qui décrit les incertitudes sur les « données ».

3. Soit  $\delta M_i$  la différence entre la masse contenue dans le volume  $\mathcal{V}_i$  et la masse prédite par le modèle *a priori*,

$$\delta M_i = M_i - \int_{\mathcal{V}_i} dV(\mathbf{x}) \rho_0(\mathbf{x}) \quad (7.37)$$

calculons les « résidus pondérés »

$$p_i = \sum_j (\mathbf{S}^{-1})_{ij} \delta M_j \quad (7.38)$$

4. La solution du problème est alors

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x}) + \sum_i p_i q_i(\mathbf{x}) \quad (7.39)$$

Implicitement, nous avons résolu le problème suivant, posé au sens des moindres carrés : soit  $\mathbf{M} = \{M_i\}$  un ensemble de données discrètes, et  $\rho_0 = \{\rho_0(\mathbf{x})\}$  une fonction *a priori*, nous cherchons une fonction  $\rho = \{\rho(\mathbf{x})\}$  pour laquelle la fonction écart

$$S(\rho) = \|\mathbf{M}(\rho) - \mathbf{M}\|^2 + \|\rho - \rho_0\|^2 \quad (7.40)$$

prend sa valeur minimum, où  $\mathbf{M}(\rho) = \{M_i(\rho)\}$  représente les données calculées à partir de la fonction  $\rho$ , et où les deux normes sont celles associées aux opérateurs de covariance dont les noyaux sont respectivement la matrice  $D_{ij}$  et la fonction  $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . Rappelons ici que, dans un espace discret, la norme associée à une matrice de covariance  $\mathbf{D} = \{D_{ij}\}$  est  $\|\delta \mathbf{M}\| = (\delta \mathbf{M}^t \mathbf{D}^{-1} \delta \mathbf{M})^{1/2}$ , alors que dans un espace fonctionnel, la norme associée à une fonction de covariance  $\mathbf{C} = \{C(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\}$  est  $\|\delta \rho\| = \langle \mathbf{C}^{-1} \delta \rho, \delta \rho \rangle^{1/2}$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit de dualité.

À titre d'exemple, si nous choisissons une fonction de covariance exponentielle,

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma_\rho^2 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{L}\right) \quad (7.41)$$

alors (Tarantola, 1987) :

$$\|\delta\rho\|^2 = \frac{1}{8\pi\sigma_\rho^2} \left( \frac{1}{L^3} \int dV(\mathbf{x}) (\delta\rho(\mathbf{x}))^2 + \frac{2}{L} \int dV(\mathbf{x}) (\mathbf{grad}\delta\rho(\mathbf{x}))^2 + L \int dV(\mathbf{x}) (\nabla\delta\rho(\mathbf{x}))^2 \right) \quad (7.42)$$

Cette norme, dans le cadre de l'équation (7.40), donnera une fonction  $\rho(\mathbf{x})$  telle que la différence  $\rho(\mathbf{x}) - \rho_0(\mathbf{x})$  sera petite, le gradient de la différence sera petit, et le laplacien de la différence sera petit. Cela signifie que nous obtiendrons une fonction  $\rho(\mathbf{x})$  ayant une différence avec la fonction *a priori*  $\rho_0(\mathbf{x})$  qui sera petite et lisse. Il est de plus possible de montrer que, si nous prenons  $D_{ij} = 0$ , alors la fonction  $\rho(\mathbf{x})$ , lorsqu'on l'intègre sur un volume quelconque  $\mathcal{V}_i$ , redonne exactement la masse  $M_i$ .

# Conclusions et perspectives

Au cours de ce travail de thèse, nous avons présenté un développement d'ordre essentiellement méthodologique concernant la propagation d'ondes élastiques dans des structures complexes, tant bidimensionnelles que tridimensionnelles.

Dans un premier temps, nous avons utilisé une approche différentielle 2D classique, basée sur une décomposition des champs sur une base de polynômes de Chebyshev, modifiée par un développement original faisant appel au formalisme tensoriel et permettant de réduire significativement le volume des calculs nécessaires dans le cas d'un maillage curviligne, pour résoudre les équations de l'élastodynamique en présence d'interfaces courbes et d'une topographie de surface. Même si les résultats obtenus se sont avérés corrects, et que la méthode de calcul utilisée est bien adaptée aux supercalculateurs de type vectoriel, nous avons montré les limitations intrinsèques de ce type d'approche pour des modèles réalistes, et nous en avons déduit la nécessité d'une approche plus fine, faisant par exemple appel à une formulation variationnelle, pour traiter ce type de problèmes.

Nous avons alors introduit en élastodynamique une formulation de type éléments spectraux, utilisée précédemment en analyse numérique essentiellement pour des problèmes de mécanique des fluides, qui nous a permis de reproduire la même qualité de résultats que ceux précédemment publiés par d'autres équipes en utilisant une approche de type éléments spectraux légèrement différente, mais avec un coût de calcul très largement inférieur. La souplesse de la méthode a été démontrée en modélisant correctement des cas 2D difficiles, incluant des ondes réfractées, des ondes de Rayleigh et des ondes de Stoneley, y compris en présence d'une forte topographie de surface. Des schémas temporels originaux, de type prédicteur-multicorrecteur, ont également été utilisés.

La méthode a ensuite été étendue de manière naturelle à 3D, tant pour le cas homogène que pour le cas hétérogène, ce qui, à notre connaissance, constitue un résultat original dans le domaine de la propagation d'ondes. Une validation a été effectuée sur des cas simples, et pour des modèles plus réalistes, de forts effets d'amplification liés à des topographies 3D ont été mis en évidence, et ont montré un bon accord avec des résultats obtenus par méthode intégrale et publiés précédemment.

La possibilité d'implémenter efficacement ce type de méthodes sur un ordinateur parallèle a été démontrée, et les temps de calcul obtenus se sont avérés très raisonnables, ce qui semble faire de la méthode présentée un bon candidat pour l'étude des effets de site, pour lesquels les effets 3D sont souvent importants à prendre en compte.

Parmi les perspectives envisagées pour cette étude, nous citerons la possibilité d'utiliser des mailleurs plus sophistiqués pour le maillage de modèles réalistes 2D par des quadrangles ou 3D par des hexaèdres, ce qui est un problème complexe, particulièrement à 3D. La souplesse que pourrait apporter l'utilisation de maillages non structurés serait appréciable. Il serait également souhaitable de pouvoir utiliser des éléments de degrés polynomiaux différents dans différentes zones du maillage, afin de pouvoir mailler plus finement certaines zones difficiles du modèle. Les bases théoriques existent (par exemple les éléments de type mortar, voir [Bernardi \*et al.\*, 1994](#)) mais n'ont pas été abordées durant cette thèse. Il existe également quelques publications ([Sherwin et Karniadakis, 1996](#)) concernant la possibilité d'utiliser un maillage comportant des tétraèdres tout en gardant la tensorisation de la base au niveau élémentaire, qui est l'un des fondements de la méthode. La possibilité d'utiliser quelques tétraèdres dans la phase de maillage faciliterait grandement l'étude de modèles tridimensionnels réalistes. Dans le même esprit, l'utilisation de schémas en temps d'ordre plus élevé (d'ordre quatre par exemple) permettrait de s'affranchir quelque peu des contraintes de stabilité drastiques des schémas explicites d'ordre deux dans les zones difficiles du maillage. Enfin, il est clair que, si le travail présenté a été délibérément d'ordre essentiellement méthodologique, s'ouvre maintenant la possibilité d'utiliser l'outil développé pour la modélisation de cas réels et la comparaison aux données enregistrées sur le terrain : effets de site, bassins, ..., le champ d'exploration possible est très large.

À titre plus anecdotique, l'analyse de la propagation d'ondes dans un modèle 1D par deux méthodes originales (ondelettes et volumes finis), étudiées durant cette thèse, a également été présentée.



# Liste de publications

Le travail de thèse présenté a donné lieu à la publication de cinq articles :

D. Komatitsch, J. P. Vilotte, R. Vai, J. M. Castillo-Covarrubias and F. J. Sánchez-Sesma (1999). The Spectral Element method for elastic wave equations : application to 2D and 3D seismic problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **45**, 1139–1164.

R. Vai, J. M. Castillo-Covarrubias, F. J. Sánchez-Sesma, D. Komatitsch and J. P. Vilotte (1999). Elastic wave propagation in an irregularly layered medium. *Earthqu. Eng. Struct. Dyn. J.*, **18**, 11–18.

D. Komatitsch and J. P. Vilotte (1998). The Spectral Element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bull. Seis. Soc. Am.*, **88**, 368–392.

D. Komatitsch, F. Coutel and P. Mora (1996). Tensorial formulation of the wave equation for modelling curved interfaces. *Geophysical Journal International* **127**, 156–168.

P. Joly, D. Komatitsch and J. P. Vilotte (1995). The solution of the wave equation by wavelets basis approximation. *Proceedings of the Enumath'95 conference*, Paris, October 1995.



# Références

- Achenbach, J. D. (1984). *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam : Elsevier Science Publishers.
- Aki, K. et K. L. Larner (1970). Surface motion of a layered medium having an irregular interface, due to incident plane *SH* waves. *J. Geophys. Res.* 75, 933–954.
- Aki, K. et P. G. Richards (1980). *Quantitative seismology, theory and methods*. San Francisco : W. H. Freeman.
- Alford, R., K. Kelly, et D. Boore (1974). Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics* 39, 834–842.
- Amaratunga, K. et J. R. Williams (1994). Wavelet-Galerkin solutions for one-dimensional partial differential equations. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 37.
- Aubry, D., D. Chouvet, H. Modaressi, et P. Mouroux (1985). Local amplification of a seismic incident field through an elastoplastic sedimentary valley. Dans *Numerical methods in geomechanics*, pp. 421–428. Balkema : T. Kawamoto and Y. Ichikawa editors.
- Auscher, P. (1993). Ondelettes à support compact et conditions aux limites. *J. Funct. Anal.* 111.
- Azaiez, M., M. Dauge, et Y. Maday (1994). Méthodes spectrales et des éléments spectraux. Rapport technique, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Université de Rennes I.
- Babuška, I. et M. R. Dorr (1981). Error estimates for the combined *h* and *p* version of the finite element method. *Numer. Math.* 37, 257–277.
- Babuška, I., B. A. Szabó, et I. N. Katz (1981). The *p* version of the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.* 18, 512–545.
- Backer, G. A. (1976). Error estimates for the finite element method for second order hyperbolic equations. *SIAM J. Num. Anal.* 13, 564–575.
- Bard, P. Y. (1982). Diffracted waves and displacement field over two dimensional topographies. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* 71, 731–760.
- Battle, G. (1987). A block spin construction of wavelets, part 1 : Lemarié functions. *Communications in Mathematical Physics* 110.
- Bayliss, A., K. E. Jordan, B. J. LeMesurier, et E. Turkel (1986). A fourth-order accurate finite-difference scheme for the computation of elastic waves. *Bull. Seis. Soc. Am.* 76, 1115–1132.
- Bayliss, A. et E. Turkel (1980). Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 33, 707–725.
- Belytschko, T. et R. Mullen (1978). On dispersive properties of finite element solutions. Dans *Modern problems in elastic wave propagation*, Volume 67. John Wiley and Sons, New-York : J. Miklowitz and J. D. Achenbach editors.
- Ben-Menahem, A. et S. J. Singh (1981). *Seismic waves and sources*. New York : Springer-Verlag.
- Bernardi, C. et Y. Maday (1992). *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*. Paris : Springer-Verlag.
- Bernardi, C., Y. Maday, et A. T. Patera (1994). A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. Dans *Nonlinear partial differential equations and their applications*. Séminaires du Collège de France, Paris : H. Brezis and J. L. Lions editors.
- Bolt, B. A. et R. A. Hansen (1977). The upthrow of objects in earthquakes. *Bull. Seis. Soc. Am.* 67, 1415–1427.
- Bonnet, M. (1995). *Équations intégrales et éléments de frontière*. Paris : CNRS Éditions, Eyrolles.
- Boore, D. M. (1972a). Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials. Dans *Methods in Computational Physics*, Volume 11. New York : Academic Press.

- Boore, D. M. (1972b). A note on the effect of simple topography on seismic *SH* waves. *Bull. Seis. Soc. Am.* 62, 275–284.
- Boore, D. M., S. C. Harmsen, et S. T. Harding (1981). Wave scattering from a steep change in surface topography. *Bull. Seis. Soc. Am.* 71, 117–125.
- Bouchon, M. (1973). Effect of topography on surface motion. *Bull. Seis. Soc. Am.* 63, 615–632.
- Bouchon, M. (1979). Discrete wavenumber representation of elastic wave fields in three space dimensions. *J. Geophys. Res.* 84, 3609–3614.
- Bouchon, M. (1985). A simple complete numerical solution of the problem of diffraction of *SH* waves by an irregular surface. *J. Acoust. Soc. Am.* 77, 1–5.
- Bouchon, M. et K. Aki (1977). Discrete wavenumber representation of seismic-source wave fields. *Bull. Seis. Soc. Am.* 67, 259–277.
- Bouchon, M. et J. S. Barker (1996). Seismic response of a hill : the example of Tarzana, California. *Bull. Seis. Soc. Am.* 86(1A), 66–72.
- Bouchon, M., C. A. Schultz, et M. N. Töksoz (1996). Effect of three-dimensional topography on seismic motion. *J. Geophys. Res.* 101, 5835–5846.
- Brillouin, L. (1964). *Tensors in Mechanics and Elasticity* (3rd ed.). New York : Academic Press.
- Campillo, M. et M. Bouchon (1985). Synthetic *SH* seismograms in laterally varying medium by discrete wavenumber method. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* 83, 307–317.
- Canuto, C., M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, et T. A. Zang (1988). *Spectral methods in fluid dynamics*. New York : Springer-Verlag.
- Canuto, C. et A. Quarteroni (1982). Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces. *Math. Comp.* 38, 67–86.
- Carcione, J. M. (1994). The wave equation in generalized coordinates. *Geophysics* 59, 1911–1919.
- Carcione, J. M. et P. J. Wang (1993). A Chebyshev collocation method for the wave equation in generalized coordinates. *Comp. Fluid Dyn. J.* 2, 269–290.
- Catchings, R. D. et W. H. K. Lee (1996). Shallow velocity structure and Poisson's ratio at the Tarzana, California, strong-motion accelerometer site. *Bull. Seis. Soc. Am.* 86, 1704–1713.
- Clark, M. N. (1972). Intensity of shaking estimated from displaced stones. *U.S. Geol. Surv. Prof. Pap.* 787, 175–182.
- Clayton, R. et B. Engquist (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bull. Seis. Soc. Am.* 67, 1529–1540.
- Clouser, R. H. et C. A. Langston (1995). Modeling observed *P-R<sub>g</sub>* conversions from isolated topographic features near the NORESS array. *Bull. Seis. Soc. Am.* 85, 859–873.
- Cohen, A. (1992). *Ondelettes et traitement numérique du signal*. Paris : Masson.
- Cohen, G. (1988). Schemes fourth-order in time and space for 2D elastodynamics equations. Dans *Expanded abstracts of the Soc. Expl. Geophys.*, pp. 1288–1291. 58th international meeting of the SEG.
- Cohen, G. et P. Joly (1990). Fourth-order schemes for the heterogeneous acoustics equation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 80, 397–407.
- Cohen, G., P. Joly, et N. Tordjman (1993). Construction and analysis of higher order finite elements with mass lumping for the wave equation. Dans *Proceedings of the SIAM conference*, pp. 152–160. Delaware, June 1993.
- Dablain, M. A. (1986). The application of high-order differencing to the scalar wave equation. *Geophysics* 51(1), 54–66.
- Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of supported wavelets. *Communications in Pure and Applied Mathematics* 41(7).
- Davis, L. L. et L. R. West (1973). Observed effects of topography on ground motion. *Bull. Seis. Soc. Am.* 63, 283–298.
- de Boor, C. (1978). *A practical guide to splines*, Volume 27 of *Applied Mathematical Sciences*. New York : Springer-Verlag.
- de Bremaecker, J. C. (1958). Transmission and reflection of Rayleigh waves at corners. *Geophysics* 23, 253–266.
- de Hoop, A. T. (1960). A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems. *Applied Science Research B8*, 349–356.
- Dhatt, G. et G. Touzot (1984). *The finite element method displayed*. New York : John Wiley and sons.

- Dormy, E. et A. Tarantola (1995). Numerical simulation of elastic wave propagation using a finite volume method. *J. Geophys. Res.* 100, 2123–2133.
- Doursat, C. (1994). *Qualités, défauts et améliorations des maillages algébriques et elliptiques*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI Jussieu, Paris.
- Drake, L. A. (1972). Love and Rayleigh waves in nonhorizontally layered media. *Bull. Seis. Soc. Am.* 62(5), 1241–1258.
- Dravinski, M. et T. K. Mossessian (1987). Scattering of plane harmonic  $P$ ,  $SV$  and Rayleigh waves by dipping layers of arbitrary shape. *Bull. Seis. Soc. Am.* 77, 212–235.
- Dupond, T. (1973). A  $L^2$  estimate of Galerkin methods for second order hyperbolic equations. *SIAM J. Num. Anal.* 10, 880–891.
- Duvaut, G. (1990). *Mécanique des milieux continus*. Paris : Masson.
- Engquist, B. et A. Majda (1977). Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.* 31, 629–651.
- Faccioli, E., F. Maggio, A. Quarteroni, et A. Tagliani (1996). Spectral-domain decomposition methods for the solution of acoustic and elastic wave equations. *Geophysics* 61(4), 1160–1174.
- Farhat, C. H. (1987). A simple and efficient automatic FEM domain decomposer. Rapport technique, University of Colorado, Boulder, Colorado.
- Fisher, P. (1990). Analysis and application of a parallel spectral element method for the solution of the Navier-Stokes equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 80, 483–491.
- Fisher, P., L. W. Ho, G. E. Karniadakis, E. M. Rønquist, et A. T. Patera (1988). Recent advances in parallel spectral element simulation of unsteady incompressible flows. *Computers and Structures* 30, 217–231.
- Fletcher, C. A. J. (1991). *Computational Fluid Dynamics*. New York : Springer-Verlag.
- Fornberg, B. (1988). The pseudospectral method : accurate representation of interfaces in elastic wave calculations. *Geophysics* 53, 625–637.
- Frankel, A. (1993). Three-dimensional simulations of ground motions in the San Bernardino valley, California, for hypothetical earthquakes on the San Andreas fault. *Bull. Seis. Soc. Am.* 83, 1020–1041.
- Frankel, A. et J. Vidale (1992). A three-dimensional simulation of seismic waves in the Santa-Clara valley, California, from the Loma Prieta aftershock. *Bull. Seis. Soc. Am.* 82, 2045–2074.
- Gaffet, S. et M. Bouchon (1989). Effects of two-dimensional topographies using the discrete wavenumber-boundary integral equation method in  $P$ - $SV$  cases. *J. Acoust. Soc. Am.* 85, 2277–2283.
- Garvin, W. W. (1956). Exact transient solution of the buried line source problem. *Proc. R. Soc. London Ser. A* 234, 528–541.
- Gazdag, J. (1981). Modeling of the acoustic wave equation with transform methods. *Geophysics* 46, 854–859.
- Géli, L., P. Y. Bard, et B. Julien (1988). The effect of topography on earthquake ground motion : a review and new results. *Bull. Seis. Soc. Am.* 78, 42–63.
- Germain, P. et P. Muller (1994). *Introduction à la mécanique des milieux continus* (2nd ed.). Paris : Masson.
- Gilbert, F. et L. Knopoff (1960). Seismic scattering from topographic irregularities. *J. Geophys. Res.* 65, 3437–3444.
- Givoli, D. (1991). Non-reflecting boundary conditions : review article. *J. Comput. Phys.* 94, 1–29.
- Givoli, D. et J. B. Keller (1990). Non-reflecting boundary conditions for elastic waves. *Wave motion* 12, 261–279.
- Givoli, D. et J. B. Keller (1994). Non-reflecting finite elements. Dans *The mathematics of finite elements and applications*. New York : John Wiley and sons.
- Givoli, D. et S. Vidbergauz (1993). Artificial boundary conditions for 2D problems in geophysics. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 110, 87–101.
- Glowinski, R., W. Lawton, M. Ravachol, et E. Tenebaum (1990). Wavelet solution of linear and nonlinear elliptic, parabolic and hyperbolic problems in one space dimension. Dans *Proceedings of the 9th International Conference on Numerical Methods in Applied Sciences and Engineering*, SIAM, Philadelphia.
- Gordon, W. J. et C. A. Hall (1972). Dans *Geometric aspects of the finite element method, with applications to partial differential equations*, pp. 769–784. Academic Press. A. K. Aziz editor.
- Gottlieb, D. (1981). The stability of pseudospectral Chebyshev methods. *Math. Comp.* 36, 107–118.

- Griffiths, D. W. et G. A. Bollinger (1979). The effect of Appalachian mountain topography on seismic waves. *Bull. Seis. Soc. Am.* 69, 1081–1105.
- Gui, W. et I. Babuška (1986). The  $h$ ,  $p$  and  $h$ - $p$  versions of the finite element method in one dimension. *Numer. Math.* 49, 577–683.
- Guo, B. et I. Babuška (1986). The  $h$ - $p$  version of the finite element method. *Comput. Mech.* 1, 21–41.
- Haar, A. (1909). Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. Göttingen.
- Harker, A. H. (1988). *Elastic waves in solids, with application to non destructive testing of pipelines*. Bristol : British Gas Editions.
- Hartzell, S. H., D. L. Carver, et K. W. King (1994). Initial investigation of site and topographic effects at Robinwood ridge, California. *Bull. Seis. Soc. Am.* 84, 1336–1349.
- Hestholm, S. et B. Ruud (1994). 2D finite-difference elastic wave modelling including surface topography. *Geophys. Prosp.* 42, 371–390.
- Higdon, R. L. (1991). Absorbing boundary conditions for elastic waves. *Geophysics* 56, 231–241.
- Holberg, O. (1987). Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena. *Geophys. Prosp.* 35, 629–655.
- Horike, M., H. Uebayashi, et T. Takeuchi (1990). Seismic response in three dimensional sedimentary basin due to plane  $S$  wave incidence. *J. Phys. Earth* 38, 261–284.
- Hudson, J. A. (1967). Scattered surface waves from a surface obstacle. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* 13, 441–458.
- Hughes, T. J. R. (1987). *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall International.
- Hughes, T. J. R. et G. M. Hulbert (1988). Space-time finite element methods for elastodynamics, formulation and error estimates. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 66, 339–363.
- Hughes, T. J. R. et J. E. Marsden (1978). Classical elastodynamics as a linear symmetric hyperbolic system. *Journal of Elasticity* 8(1), 97–110.
- Hulbert, G. M. et T. J. R. Hughes (1990). Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 84, 327–348.
- Jastram, C. et A. Behle (1992). Acoustic modeling on a grid of vertically varying spacing. *Geophys. Prosp.* 40, 157–169.
- Jih, R. S., K. L. McLaughlin, et Z. A. Der (1988). Free-boundary conditions of arbitrary polygonal topography in a two-dimensional explicit elastic finite-difference scheme. *Geophysics* 53, 1045–1055.
- Joly, P. (1995). Résolution de l'équation de Burgers par paquets d'ondelettes. Rapport technique, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- Joly, P., Y. Maday, et V. Perrier (1994). Towards a method for solving partial differential equations by using wavelet packet bases. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 116.
- Joyner, W. B. et T. F. Chen (1975). Calculation of nonlinear ground response on earthquakes. *Bull. Seis. Soc. Am.* 65, 1315–1336.
- Kamel, A., P. Sguazzero, et M. Kindelan (1995). Cost-effective staggered schemes for the numerical simulation of wave propagation. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 38, 755–773.
- Kawase, H. (1988). Time-domain response of a semi-circular canyon for incident  $SV$ ,  $P$  and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method. *Bull. Seis. Soc. Am.* 78, 1415–1437.
- Kawase, H. et K. Aki (1989). A study on the response of a soft sedimentary basin for incident  $S$ ,  $P$  and Rayleigh waves, with special reference to the long duration observed in Mexico City. *Bull. Seis. Soc. Am.* 79, 1361–1382.
- Kawase, H. et K. Aki (1990). Topography effect at the critical  $SV$  wave incidence : possible explanation of damage pattern by the Whittier Narrows, California, earthquake of 1 October 1987. *Bull. Seis. Soc. Am.* 80, 1–22.
- Kelly, K. R., R. W. Ward, S. Treitel, et R. M. Alford (1976). Synthetic seismograms : a finite difference approach. *Geophysics* 41, 2–27.
- Khun, M. J. (1985). A numerical study of Lamb's problem. *Geophys. Prosp.* 33, 1103–1137.
- Kim, J. et A. Papageorgiou (1993). Discrete wavenumber boundary element method for 3D scattering problems. *J. Eng. Mech. ASCE* 119, 603–624.
- Kobayashi, S. (1987). *Elastodynamics in boundary element methods in mechanics*. Amsterdam : North-Holland.

- Komatitsch, D., F. Coutel, et P. Mora (1996). Tensorial formulation of the wave equation for modelling curved interfaces. *Geophys. J. Int.* 127, 156–168.
- Komatitsch, D. et J. P. Vilotte (1998). The spectral-element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bull. Seis. Soc. Am.* 88(2), 368–392.
- Komatitsch, D., J. P. Vilotte, R. Vai, J. M. Castillo-Covarrubias, et F. J. Sánchez-Sesma (1999). The Spectral Element method for elastic wave equations : application to 2D and 3D seismic problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 45, 1139–1164.
- Kosloff, D. et E. Baysal (1982). Forward modeling by the Fourier method. *Geophysics* 47, 1402–1412.
- Kosloff, D., D. Kessler, A. Q. Filho, E. Tessmer, A. Behle, et R. Strahilevitz (1990). Solution of the equations of dynamics elasticity by a Chebyshev spectral method. *Geophysics* 55, 748–754.
- Kosloff, D., M. Reshef, et D. Loewenthal (1984). Elastic wave calculations by the Fourier method. *Bull. Seis. Soc. Am.* 74, 875–891.
- Kummer, B. et A. Behle (1988). Fast modeling of seismic waves in laterally inhomogeneous media. Dans *Expanded abstracts of the Soc. Expl. Geophys.*, pp. 1175–1177. 58th international meeting of the SEG.
- Lamb, H. (1904). On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. R. Soc. London. Ser. A* 203, 1–42.
- Lamé, G. (1852). *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Paris : Gauthier-Villars.
- Landau, L. et E. Lifchitz (1953). *Théorie de l'élasticité* (2nd ed.). Moscou : Editions Mir.
- Lapwood, E. R. (1961). The transmission of a Rayleigh pulse round a corner. *Geophys. J.* 4, 174–196.
- Lemaitre, J. et J. L. Chaboche (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Paris : Dunod.
- Lemarié, P. (1988). Ondelettes à localisation exponentielle. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 67.
- Levander, A. R. (1988). Fourth-order finite-difference *P-SV* seismograms. *Geophysics* 53, 1425–1436.
- Li, X., J. Bielak, et O. Ghattas (1992). Three-dimensional earthquake response on a CM2. Dans *Proc. 10th World Conf. Earthquake Eng.*, pp. 959–964. Madrid, Spain.
- Liandrat, J., V. Perrier, et P. Tchamitchian (1992). Numerical resolution of nonlinear partial differential equations using the wavelet approach. Dans *Wavelets and their Applications*. New York : Edited by Ruskai, Jones and Barlett.
- Love, A. E. H. (1911). *Some problems of geodynamics*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Lubliner, J. (1990). *Plasticity theory*. New York : Macmillan Publishing Company.
- Luco, J. E. et F. C. P. de Barros (1995). Three-dimensional response of a layered valley embedded in a layered half-space. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 24, 109–125.
- Lysmer, J. et L. A. Drake (1972). A finite element method for seismology. Dans *Methods in Computational Physics*, Volume 11. New York : Academic Press.
- Lysmer, J. et R. L. Kuhlemeyer (1969). Finite dynamic model for infinite media. *J. Eng. Mech. Div. ASCE* 95 EM 4, 859–877.
- Madariaga, R. (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bull. Seis. Soc. Am.* 65, 163–182.
- Maday, Y. et A. T. Patera (1989). Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations. Dans *State of the art survey in computational mechanics*, pp. 71–143. A. K. Noor and J. T. Oden editors.
- Maday, Y. et A. Quarteroni (1982). Approximation of Burgers equation by pseudospectral methods. *RAIRO Anal. Numer.* 16, 375–404.
- Maday, Y. et E. M. Rønquist (1990). Optimal error analysis of spectral methods with emphasis on non-constant coefficients and deformed geometries. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 80, 91–115.
- Magnier, S. A., P. Mora, et A. Tarantola (1994). Finite differences on minimal grids. *Geophysics* 59, 1435–1443.
- Mallat, S. (1988). A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *Communications in Pure and Applied Mathematics* 41.
- Mallat, S. (1989). Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$ . *Transactions of the AMS* 135.
- Manolis, G. et D. E. Beskos (1988). *Boundary element methods in elastodynamics*. London : Umwin Hyman.
- Marfurt, K. J. (1984). Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar wave equations. *Geophysics* 49, 533–549.

- Martel, L. et S. K. Gupta (1969). À propos des ondes de Rayleigh sur une surface courbe. *Ann. Géophys.* 25(4), 973–979.
- McConnell, A. J. (1957). *Applications of tensor analysis*. New York : Dover Publications.
- Meyer, Y. (1987). Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées. Rapport technique, Ceremade 8703, Université Paris Dauphine.
- Meyer, Y. (1990). *Ondelettes et opérateurs*. Paris : Hermann.
- Meyer, Y. (1992). Ondelettes sur l'intervalle. *Rev. Math. Iberoamericana* 7.
- Modaresi, H. et I. Benzenati (1994). Paraxial approximation for poroelastic media. *Soil Dyn. Earthqu. Eng.* 13, 117–129.
- Muir, F., J. Dellinger, J. Etgen, et D. Nichols (1992). Modelling elastic fields across irregular boundaries. *Geophysics* 57(9), 1189–1193.
- Nielsen, P., F. If, P. Berg, et O. Skovgaard (1994). Using the pseudospectral technique on curved grids for 2D acoustic forward modelling. *Geophys. Prosp.* 42, 321–341.
- Nielsen, P. et O. Skovgaard (1990). The effect of using non-orthogonal boundary-fitted grids for solving the shallow water equations. *Int. J. Num. Meth. Fluids* 11, 177–188.
- Ohminato, T. et B. A. Chouet (1997). A free-surface boundary condition for including 3D topography in the finite difference method. *Bull. Seis. Soc. Am.* (in press).
- Ohori, M., K. Koketsu, et T. Minomi (1992). Seismic response of three dimensional sediment filled valleys due to incident plane waves. *J. Phys. Earthquake* 40, 209–222.
- Olsen, K. B. et R. J. Archuleta (1996). 3-D simulation of earthquakes on the Los Angeles fault system. *Bull. Seis. Soc. Am.* 86(3), 575–596.
- Olsen, K. B., J. C. Pechmann, et G. T. Schuster (1995). Simulation of 3-D elastic wave propagation in the Salt Lake basin. *Bull. Seis. Soc. Am.* 85, 1688–1710.
- Orszag, S. A. (1980). Spectral methods for problems in complex geometries. *J. Comput. Phys.* 37, 70–92.
- Ottaviani, M. (1971). Elastic wave propagation in two evenly-welded quarter-spaces. *Bull. Seis. Soc. Am.* 61(5), 1119–1152.
- Patera, A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.* 54, 468–488.
- Pedersen, H. A. (1994). *Étude de la diffraction tridimensionnelle des ondes sismiques dans des structures à géométrie bidimensionnelle, développement théorique et applications*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Pelz, R. B. (1990). Pseudospectral methods on massively parallel computers. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 80, 493–503.
- Perrier, V. et C. Basdevant (1989). La décomposition en ondelettes périodiques, un outil pour l'analyse de champs inhomogènes. *La Recherche Aérospatiale* 3.
- Pilant, W. L. (1979). *Elastic waves in the Earth*. Amsterdam : Elsevier Scientific Publishing Company.
- Pitarka, A. et K. Irikura (1996). Basin structure effects on long period strong motions in the San Fernando valley and the Los Angeles basin from the 1994 Northridge earthquake and aftershocks. *Bull. Seis. Soc. Am.* 86(1B), S126–S137.
- Ponti, D. J. et R. E. Wells (1991). Off-fault ground ruptures in the Santa-Cruz mountains, California : ridge-top spreading versus tectonic extension during the 1989 Loma Prieta earthquake. *Bull. Seis. Soc. Am.* 81, 1480–1510.
- Press, W., S. Teukolsky, W. Vetterling, et B. Flannery (1994). *Numerical recipes : the art of scientific computing*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Priolo, E., J. M. Carcione, et G. Seriani (1994). Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques. *J. Acoust. Soc. Am.* 95(2), 681–693.
- Rayleigh, L. J. W. S. (1887). On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proc. London Math. Soc.* 17, 4–11.
- Reshef, M., D. Kosloff, M. Edwards, et C. Hsiung (1988). Three dimensional acoustic modeling by the Fourier method. *Geophysics* 53, 1175–1183.
- Rial, J. A. (1996). The anomalous seismic response of the ground at the Tarzana Hill site during the Northridge 1994 Southern California earthquake : a resonant, sliding block ? *Bull. Seis. Soc. Am.* 86, 1714–1723.

- Richter, G. R. (1994). An explicit finite element method for the wave equation. *Appl. Num. Math.* 16, 65–80.
- Rodrigues, D. (1993). *Simulation de la propagation d'ondes sismiques sur machine massivement parallèle*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Paris, Paris.
- Rodrigues, D. et P. Mora (1993). Implementation of the free surface boundary condition in 2-D and 3-D elastic cases. Dans *Expanded abstracts of the Soc. Expl. Geophys.*, pp. 215–217. 63rd international meeting of the SEG.
- Rønquist, E. M. (1988). *Optimal spectral element methods for the unsteady three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations*. Thèse de Doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts.
- Rulf, B. (1969). Rayleigh waves on curved surfaces. *J. Acoust. Soc. Am.* 45, 493–499.
- Ryskin, G. et L. Leal (1983). Orthogonal mapping. *J. Comput. Phys.* 50, 71–100.
- Sánchez-Sesma, F. J. (1983). Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities. *Bull. Seis. Soc. Am.* 73(6), 1621–1636.
- Sánchez-Sesma, F. J., R. Benites, et J. Bielak (1996). The assessment of strong ground motion : what lies ahead ? Dans *Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering*, pp. 1–19. Acapulco, Mexico, June 1996.
- Sánchez-Sesma, F. J. et M. Campillo (1991). Diffraction of *P*, *SV* and Rayleigh waves by topographic features : a boundary integral formulation. *Bull. Seis. Soc. Am.* 81, 2234–2253.
- Sánchez-Sesma, F. J. et M. Campillo (1993). Topographic effects for incident *P*, *SV* and Rayleigh waves. *Tectonophysics* 218, 113–125.
- Sánchez-Sesma, F. J. et E. Rosenblueth (1979). Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident *SH* waves. *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 7, 441–450.
- Seriani, G. et E. Priolo (1994). Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. *Finite Elements in Analysis and Design* 16, 337–348.
- Sherwin, S. J. et G. E. Karniadakis (1996). Tetrahedral *hp* finite elements : algorithms and flow simulations. *J. Comput. Phys.* 124, 14–45.
- Simo, J. C. (1992). Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 99, 61–112.
- Simo, J. C., N. Tarnow, et K. K. Wong (1992). Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 100, 63–116.
- Spain, B. (1965). *Tensor Calculus*. New York : John Wiley and sons.
- Spudich, P., M. Hellweg, et W. H. K. Lee (1996). Directional topographic site response at Tarzana observed in aftershocks of the 1994 Northridge, California, earthquake : implications for mainshock motions. *Bull. Seis. Soc. Am.* 86(1B), S193–S208.
- Stacey, R. (1988). Improved transparent boundary formulations for the elastic wave equation. *Bull. Seis. Soc. Am.* 78(6), 2089–2097.
- Stoneley, R. (1924). Elastic waves at the surface of separation of two solids. *Proc. R. Soc. London Ser. A* 106, 416–428.
- Tarantola, A. (1987). *Inverse problem theory : methods for data fitting and model parameter estimation*. Amsterdam : Elsevier Science Publishers.
- Tarantola, A. et B. Valette (1982a). Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Rev. Geophys. Space Phys.* 20, 219–232.
- Tarantola, A. et B. Valette (1982b). Inverse problem = quest for information. *J. Geophysics* 50, 159–170.
- Tessmer, E. et D. Kosloff (1994). 3-D elastic modeling with surface topography by a Chebyshev spectral method. *Geophysics* 59(3), 464–473.
- Tessmer, E., D. Kosloff, et A. Behle (1992). Elastic wave propagation simulation in the presence of surface topography. *Geophys. J. Int.* 108, 621–632.
- Thompson, J. F., Z. Warsi, et C. Mastin (1985). *Numerical Grid Generation - Foundations and Applications*. New York : North-Holland Publishing Co.
- Tordjman, N. (1995). *Éléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*. Thèse de Doctorat, Université Paris IX Dauphine, Paris.
- Toshinawa, T. et T. Ohmachi (1992). Love wave propagation in three-dimensional sedimentary basin. *Bull. Seis. Soc. Am.* 82, 1661–1667.
- Trifunac, M. D. (1973). Scattering of plane *SH* waves by a semi-cylindrical canyon. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 1, 267–281.

- Vai, R., J. M. Castillo-Covarrubias, F. J. Sánchez-Sesma, D. Komatitsch, et J. P. Vilotte (1999). Elastic wave propagation in an irregularly layered medium. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 18(1), 11–18.
- Viktorov, I. A. (1967). *Rayleigh and Lamb waves : physical theory and applications*. New-York : Plenum Press.
- Virieux, J. (1984). *SH wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method*. *Geophysics* 49, 1933–1942.
- Virieux, J. (1986). *P-SV wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method*. *Geophysics* 51, 889–901.
- Wilcox, C. H. (1966). Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 22, 37–78.
- Williams, J. et K. Amaratunga (1994). Introduction to wavelets in engineering. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 34.
- Wong, H. L. (1982). Effect of surface topography on the diffraction of *P*, *SV* and Rayleigh waves. *Bull. Seis. Soc. Am.* 72, 1167–1183.
- Yoon, K. T. et T. J. Chung (1996). Three-dimensional mixed explicit-implicit generalized Galerkin spectral element methods for high-speed turbulent compressible flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 135, 343–367.
- Zahradník, J., P. Moczo, et F. Hron (1993). Testing four elastic finite-difference schemes for behavior at discontinuities. *Bull. Seis. Soc. Am.* 83, 107–129.
- Zahradník, J., P. O’Leary, et J. Sochacki (1994). Finite-difference schemes for elastic waves based on the integration approach. *Geophysics* 59, 928–937.
- Zhang, L. et A. K. Chopra (1991). Three-dimensional analysis of spatially varying ground motions around a uniform canyon in a homogeneous half-space. *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 20, 911–926.
- Zienkiewicz, O. C. (1977). *The finite element method in engineering science* (3rd ed.). New York : McGraw-Hill.