Analyse mathématique de modèles de diffusion en milieu poreux élastique

Patrick Saint-Macary

▶ To cite this version:

Patrick Saint-Macary. Analyse mathématique de modèles de diffusion en milieu poreux élastique. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2004. Français. NNT : . tel-00007651v1

HAL Id: tel-00007651
https://theses.hal.science/tel-00007651v1

Submitted on 6 Dec 2004 (v1), last revised 7 Dec 2004 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse mathématique de modèles de diffusion en milieu poreux élastique

Patrick Saint-Macary

26 Novembre 2004

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Etude d'un modèle non linéaire **11**
2.1 Introduction . . . 11
2.2 Résultats préliminaires . . . 12
2.3 Le cas $q \geq 2$: un modèle de consolidation non linéaire . . . 16
2.3.1 Existence . . . 17
2.3.2 Unicité . . . 26
2.4 Le cas $q > 1$ . . . 31
2.4.1 Le modèle quasi-statique . . . 31
2.4.1.1 Existence . . . 32
2.4.1.2 Unicité . . . 36
2.4.2 Un résultat d'existence pour le modèle de consolidation complet 38
2.5 Comparaison des modèles de Biot pour $\rho > 0$ et $\rho = 0$ . . . 39

3 Etude d'un modèle avec contrainte **43**
3.1 Unicité de la solution . . . 45
3.2 Existence . . . 47
3.2.1 Existence pour le problème pénalisé . . . 49
3.2.2 Existence pour le problème avec contrainte régularisé . . . 59
3.2.3 Existence pour le problème avec contrainte initial . . . 63

4 Etude du modèle linéaire multidimensionnel **75**
4.1 Introduction . . . 75
4.2 Le modèle de Biot complet dégénéré . . . 76
4.2.1 Existence d'une solution . . . 78
4.2.2 Unicité de la solution . . . 89
4.3 Le modèle quasi-statique . . . 93
4.3.1 Existence d'une solution . . . 95

4.3.2 Unicité de la solution 100
4.4 Comparaison des modèles 102
4.4.1 Comparaison entre le modèle de Biot complet dégénéré et le modèle thermoélastique 103
4.4.2 Comparaison entre le modèle de Biot complet dégénéré et le modèle quasi-statique 106

5 Comportement asymptotique en temps lorsque $\lambda^* > 0$ 111
5.1 Le modèle non linéaire 111
5.1.1 Estimations *a priori* sur $]0, +\infty[\times\Omega$ 111
5.1.2 Comportement à l'infini en régime transitoire pur 114
5.1.3 Comportement à l'infini en régime semi-transitoire 115
5.2 Le modèle linéaire 121
5.2.1 Etude des estimations *a priori* sur $]0, +\infty[\times\Omega$ 121
5.2.2 Comportement à l'infini sous la condition $\rho = 0$ 123

6 Conclusion et perspectives 127

Chapitre 1

Introduction

La théorie de la poroélasticité linéaire, dont un historique peut se trouver dans un article récent de R. de Boer [34], a été développée de façon rigoureuse par Maurice A. Biot dans les années cinquante, après quelques travaux préliminaires d'avant guerre [15, 16]. Aujourd'hui, elle est au centre de nombreuses applications concernant des domaines très divers. Citons, par exemple, le secteur pétrolier [14, 25, 50], les applications militaires [61] ou le secteur médical [28, 29, 37].
Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de milieux poreux saturés de fluide pouvant être sujets à un phénomène de consolidation [4, 13]. Lorsque l'on considère l'étude des propriétés poroélastiques ou le problème de la propagation des ondes acoustiques dans des milieux poreux saturés (dans le cas de la prospection pétrolière par exemple), deux sortes d'approches sont possibles. La première consiste à s'intéresser aux lois microscopiques (c'est-à-dire aux lois régissant les phénomènes à l'échelle du pore) pour en déduire les lois macroscopiques intervenant à l'échelle du milieu poreux dans son ensemble. C'est là qu'interviennent les techniques d'homogénéisation utilisées notamment dans [5, 26, 46]. Il s'agit de considérer que la structure microscopique se répète de façon périodique ce qui entraîne aussi la périodicité des solutions. La seconde approche, plus ancienne, a été développée par M. A. Biot dans le milieu des années 50. Elle consiste à supposer les principes de la mécanique des milieux continus applicables au niveau macroscopique et à ignorer ainsi ce qui se passe au niveau microscopique de façon délibérée. Cette méthode plus heuristique a été en fait justifiée *a posteriori* par la concordance des résultats avec les méthodes d'homogénéisation développées plus tard. De cette façon, M. A. Biot a montré qu'une théorie de la consolidation peut s'établir en combinant la théorie de l'élasticité avec la loi de Darcy d'écoulement d'un fluide à travers un matériau poreux.

On assimile le milieu poreux dans lequel on étudie le phénomène de diffusion à Ω, domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ de frontière Γ. On suppose que la frontière Γ est au moins lipschitzienne afin de pouvoir définir presque partout une normale unitaire $\mathbf{n}$ extérieure à Ω. Un point de $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathbf{x}$ tandis que $t \in [0, T]$ désigne la variable temporelle avec T strictement positif fixé. On précise que les termes en **gras** représentent des vecteurs tandis que ceux en *italique* désignent des scalaires.
Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ est défini par $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j y_j$ et si $\boldsymbol{\sigma}$ est un tenseur et $\mathbf{v}$ un vecteur, le produit $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}$ désigne le produit de matrices usuel, à savoir : $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v})_j = \sum_{1 \leq l \leq n} \boldsymbol{\sigma}_{jl}\mathbf{v}_l,\ 1 \leq j \leq n$. Les équations étudiées font intervenir des opérateurs différentiels tels que le gradient ∇ ou la divergence div. Comme le déplacement $\mathbf{u}$ est un vecteur, son gradient est un tenseur dont les termes $(\nabla \mathbf{u})_{ij}$ sont donnés par $\partial_j u_i$ avec $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq n$. L'opérateur divergence défini par $div\mathbf{u} = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j u_j$ est quant à lui un scalaire. On définit aussi la divergence d'un tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ comme étant le vecteur de composantes $(div\boldsymbol{\sigma}_{ij})_i$. Pour finir, on introduit la notation $\otimes$ pour désigner le produit de deux tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ dont la résultante est le scalaire $\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$ défini par : $\sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_{ji}$.

Notons ρ la densité du milieu poreux Ω. On suppose que la matrice poreuse (ou squelette poreux) est saturée par un fluide visqueux peu compressible se diffusant à travers elle. On va maintenant énoncer les hypothèses nécessaires à la bonne application de la théorie de Biot.
Tout d'abord, on suppose que l'hypothèse des petits déplacements est vérifiée, tant pour la phase solide que pour la phase liquide. C'est une hypothèse largement vérifiée dans la majorité des applications considérées. Le tenseur des déformations macroscopiques $\boldsymbol{\varepsilon}$ est alors donné par la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \tag{1.1}$$

où $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ est le vecteur déplacement de la matrice solide pour tout point $\mathbf{x}$ de Ω et tout temps $t > 0$ et T désigne la transposée.
On suppose de plus que la phase liquide est continue, c'est-à-dire que l'on considère que les pores occlus (pores saturés mais ne communiquant pas avec le reste du fluide) font partie de la matrice solide. Ainsi, la porosité ϕ que l'on considère dans la suite, c'est-à-dire le volume de la matrice qui peut être occupé par le fluide, est celle des canaux où s'effectue l'écoulement. Par rapport à cette porosité ϕ supposée isotrope et uniforme, le milieu est supposé saturé.

La dernière hypothèse concerne la matrice solide que l'on supposera élastique et isotrope ce qui sous-entend que l'on néglige tous les phénomènes d'origine visqueuse liés à la matrice.

Établissons maintenant les équations régissant les phénomènes intervenant dans un milieu poreux saturé.
On note ρ_s la densité du solide, ρ_f la densité du fluide et $\mathbf{U}$ le déplacement moyen de la phase liquide contenue dans l'élément macroscopique. La vitesse de filtration est alors définie par $\partial_t \mathbf{w}$ où on a posé $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{U} - \mathbf{u})$.
Pour chaque sous-domaine $\mathcal{K}$ de Ω de frontière S, la quantité

$$\int_{\mathcal{K}} ((1-\phi)\rho_s \partial_t \mathbf{u} + \phi \rho_f \partial_t \mathbf{U}) d\mathbf{x}$$

représente le moment de l'ensemble fluide-solide sur $\mathcal{K}$.
Comme $\rho = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s$, il vient

$$\int_{\mathcal{K}} ((1-\phi)\rho_s \partial_t \mathbf{u} + \phi \rho_f \partial_t \mathbf{U}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{K}} (\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho_f \partial_t \mathbf{w}) d\mathbf{x}.$$

De plus, par l'intermédiaire de sa frontière S, $\mathcal{K}$ subit les forces de traction dues à son complémentaire et qui sont données par l'expression :

$$\int_S \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS.$$

Ici, $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes macroscopiques et représente les forces internes agissant sur la surface S de $\mathcal{K}$.
On obtient alors l'équation de conservation des moments suivante :

$$\int_{\mathcal{K}} (\rho \partial_t^2 \mathbf{u} + \rho_f \partial_t^2 \mathbf{w}) d\mathbf{x} = \int_S \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS + \int_{\mathcal{K}} \mathbf{f} d\mathbf{x}$$

où $\mathbf{f}$ représente les forces extérieures agissant sur l'élément macroscopique.
En remarquant que $\int_S \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{K}} div \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{x}$, il vient :

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} + \rho_f \partial_t^2 \mathbf{w} - div \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}. \tag{1.2}$$

Soit $\xi(t, \mathbf{x})$ la quantité de fluide dans le milieu poreux. La masse de fluide dans chaque sous-domaine $\mathcal{K}$ est donnée par :

$$\int_{\mathcal{K}} \xi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Le taux de pénétration du fluide saturant est, quant à lui, fourni par la relation :

$$\int_S \mathbf{q}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}dS$$

où $\mathbf{q}$ est le vecteur flux, c'est-à-dire la quantité de masse de fluide entrant dans la matrice poreuse.
La conservation de la masse s'exprime donc de la façon suivante :

$$\int_{\mathcal{K}} \partial_t\xi(t,\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_S \mathbf{q}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}dS = \int_{\mathcal{K}} \rho_f h(t,\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

où h représente un terme source quelconque.
On obtient finalement que :

$$\partial_t\xi + div\mathbf{q} = \rho_f h. \tag{1.3}$$

D'après les hypothèses formulées précédemment, on peut montrer qu'il existe un potentiel de déformation et contraintes $\mathbb{V}$ ne dépendant que des composantes du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de l'augmentation de teneur en fluide $\zeta = -div\mathbf{w}$. On peut ainsi définir le tenseur de contraintes macroscopiques $\boldsymbol{\sigma}$ et la pression moyenne dans le fluide p par les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\mathbb{V}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \text{ et } p = \frac{\partial\mathbb{V}}{\partial\zeta}.$$

Dans le cas d'un milieu poreux saturé, on montre alors qu'en utilisant la loi d'élasticité de Hooke, le tenseur des contraintes et la quantité de fluide dans le milieu poreux sont donnés par les expressions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{ij} = \lambda(\mathbf{x})\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))\delta_{ij} + 2\mu(\mathbf{x})\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda^*(\mathbf{x})\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\partial_t\mathbf{u})) - \alpha p\delta_{ij} \\ \xi = \rho_f(c_0(\mathbf{x})p + \alpha div\mathbf{u}) \end{array}\right.$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et 1 si $i = j$). Ici, λ est le module de dilatation et μ le module de cisaillement. Ces coefficients strictement positifs sont aussi appelés paramètres de Lamé et interviennent dans l'opérateur d'élasticité [41]. Le réel strictement positif α est la constante de Biot-Willis qui prend en compte les effets de couplage déformation/pression : il s'agit en fait d'une mesure de la quantité de fluide que l'on peut introduire dans la matrice poreuse en augmentant la pression à volume constant. Quant à c_0, il s'agit d'un coefficient positif ou nul qui combine la porosité du milieu et la compressibilité de l'ensemble fluide-solide. Enfin, λ^* est un coefficient positif lié aux effets de consolidations secondaires et pouvant s'annuler. Ces effets ont été négligés dans certaines études [3, 53].

Pourtant, le processus de consolidation comprend normalement deux étapes. Dans la première, les déformations du sol sont liées aux effets de la pression du fluide saturant (représentés par la constante de couplage α dans les équations) tandis que les effets dits secondaires proviennent d'une déformation supplémentaire du squelette due à des perturbations hydromécaniques provenant des premiers effets de consolidation. C'est pourquoi nous avons choisi de considérer le cas $\lambda^* \geq 0$.
On fait l'hypothèse supplémentaire que le flux $\mathbf{q}$ est donné par la loi de Darcy, à savoir :

$$\mathbf{q} = -\rho_f k(\mathbf{x}) \nabla p$$

où $k(\mathbf{x})$ est un coefficient strictement positif qui prend en compte la perméabilité du milieu et la viscosité du fluide puisqu'il s'agit d'une mesure du flux obéissant à la loi de Darcy pour un gradient de pression donné.

Les équations (1.2) et (1.3) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x})\partial_t^2 \mathbf{u} + \rho_f(\mathbf{x})\partial_t^2 \mathbf{w} - \bigtriangledown(\lambda^*(\mathbf{x})\dfrac{\partial}{\partial t} div\ \mathbf{u}) - \bigtriangledown((\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))div\ \mathbf{u}) \\ -div(\mu(\mathbf{x})\bigtriangledown \mathbf{u}) + \alpha \bigtriangledown p = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ c_0(\mathbf{x})\partial_t p + \alpha div \partial_t \mathbf{u} - div(k(\mathbf{x})\nabla p) = h(t, \mathbf{x}). \end{cases} \tag{1.4}$$

On suppose enfin que la vitesse de filtration est négligeable, ce qui nous donne le système couplé de type hyperbolique-parabolique suivant :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x})\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \bigtriangledown(\lambda^*(\mathbf{x})\dfrac{\partial}{\partial t} div\ \mathbf{u}) - \bigtriangledown((\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))div\ \mathbf{u}) \\ -div(\mu(\mathbf{x})\bigtriangledown \mathbf{u}) + \alpha \bigtriangledown p = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ c_0(\mathbf{x})\dfrac{\partial p}{\partial t} + \alpha\ div \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - div(k(\mathbf{x})\bigtriangledown p) = h(t, \mathbf{x}). \end{cases} \tag{1.5}$$

On s'intéressera aussi au cas où les effets de l'inertie sont négligeables. Cette hypothèse d'un état quasi-statique intervient naturellement dans certains aspects de la théorie de consolidation de Biot notamment lorsqu'on veut décrire les lentes déformations dues à la consolidation et aux infiltrations du fluide dans la matrice poreuse. On obtient alors le modèle :

$$\begin{cases} -\bigtriangledown(\lambda^*(\mathbf{x})\dfrac{\partial}{\partial t} div\ \mathbf{u}) - \bigtriangledown((\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))div\ \mathbf{u}) \\ -div(\mu(\mathbf{x})\bigtriangledown \mathbf{u}) + \alpha \bigtriangledown p = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ c_0(\mathbf{x})\dfrac{\partial p}{\partial t} + \alpha\ div \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - div(k(\mathbf{x})\bigtriangledown p) = h(t, \mathbf{x}). \end{cases} \tag{1.6}$$

Enfin, on peut remarquer que lorsque $\lambda^* = 0$, le système (1.5) est formellement équivalent au système thermoélastique couplé [32]. Dans ce cas, p représente la température, c_0 et k sont strictement positifs et désignent respectivement la chaleur du milieu et sa conductivité. Le terme $\alpha\nabla p$ provient alors du stress thermique dans la structure et $\alpha div\partial_t\mathbf{u}$ correspond à la chaleur interne due à la dilatation. Il s'agit du modèle :

$$\left\{\begin{array}{l}\rho(\mathbf{x})\dfrac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - \bigtriangledown((\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))div\ \mathbf{u}) \\ -div(\mu(\mathbf{x})\bigtriangledown\mathbf{u}) + \alpha\bigtriangledown p = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \\ c_0(\mathbf{x})\dfrac{\partial p}{\partial t} + \alpha\ div\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - div(k(\mathbf{x})\bigtriangledown p) = h(t,\mathbf{x}).\end{array}\right. \tag{1.7}$$

Pour finir, on s'intéressera à un autre modèle dérivé du système de consolidation précédent comportant cette fois-ci un terme non linéaire dans la première équation. En effet, suite aux travaux de W. Van der Knapp [60], M. A. Biot a également montré que le comportement du milieu poreux pouvait être non linéaire [24]. Cela est dû à certains effets sur la géométrie locale du milieu tels que des changements brusques dans les zones de contact ou des occlusions de fissures. En effet, si le volume du solide constituant la matrice poreuse dépend linéairement de la pression du fluide saturant et des stress subis, les contraintes dues au stress effectif entraînent des modifications de géométrie locale qui sont essentiellement non linéaires pour des valeurs de contrainte petites. Dans ce cas, l'énergie est alors définie comme le potentiel d'élasticité linéaire perturbé par un potentiel non linéaire. Dans le cas particulier de la dimension un, on obtient ainsi le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\rho\partial_t^2 u - \lambda^*\partial_t\partial_x^2 u - (\lambda + 2\mu)\partial_x^2 u - \mu^*\partial_x\left(|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u\right) + \alpha\partial_x p = f \\ c_0\partial_t p + \alpha\partial_t\partial_x u - k\partial_x^2 p = h\end{array}\right. \tag{1.8}$$

où $\mu^* \geq 0$ et où le potentiel d'élasticité devient non linéaire par l'adjonction du $q-$laplacien.

Remarques sur la littérature - La première théorie sur les milieux poreux et notamment sur le phénomène de consolidation a été établie par Karl Von Terzaghi (1883-1963). Il a défini la consolidation comme étant due à un "processus qui provoque une baisse du volume de fluide contenu dans les pores du milieu sans que ce fluide ne soit ensuite remplacé par de l'air". C'est en fait en s'intéressant tout d'abord à une éponge remplie d'eau puis à une colonne d'argile ou de sable soumise à une charge constante sans possibilité d'échappée latérale qu'il a développé, parfois de façon empirique, les bases de la théorie de la consolidation. Il a ainsi pu constater

les similitudes, dans de nombreux cas, entre le comportement de ce matériau subissant une contrainte et l'évacuation d'un fluide hors d'un milieu poreux élastique [58, 59].
Maurice A. Biot (1905-1985) a ensuite développé de façon considérable les bases de la théorie des milieux poreux qu'avait élaborée K. Terzaghi. Il a notamment étendu les résultats de K. Terzaghi au cas de la dimension trois en établissant des équations valables pour une charge transitoire [15, 16, 17, 18] en utilisant des techniques d'homogénéisation. Il a également développé les équations de la théorie de la consolidation dynamique (c'est-à-dire celles que nous considérons ici) avant de s'intéresser à la description de la propagation d'une onde élastique dans un milieu poreux saturé [19, 20]. A partir de 1956, il a principalement cherché à compléter les théories précédentes et a travaillé sur quelques problèmes encore ouverts. Dans [21, 22], il s'est penché sur la propagation d'une onde acoustique dans un milieu poreux et notamment sur l'influence de l'anisotropie, de la viscoélasticité ou des dissipations intervenant dans la matrice solide. Finalement dans les années 70, il a développé une théorie des déformations finies dans les milieux poreux [23].
Ces travaux, élaborés d'un point de vue plutôt mécanique ont donné suite à de nombreuses extensions mathématiques. Dans le cas du système thermoélastique couplé (1.7), Constantine M. Dafermos [32] a établi l'existence et l'unicité de solutions fortes associées à des conditions aux limites mixtes comme celles que l'on considère dans l'étude du cas linéaire au chapitre 4. Ces résultats ont été également complétés par une étude du comportement en temps long du problème dans laquelle il a montré que le gradient de température et l'entropie associée convergent toujours vers zéro quand les termes sources sont nuls.
Comme on l'a évoqué précédemment, les résultats de Biot, parfois obtenus de façon heuristique, ont été véritablement justifiés *a posteriori* par des techniques d'homogénéisation. Grâce à cette méthode, basée sur l'étude des solutions périodiques par rapport aux variables d'espace, Jean-Louis Auriault et Evariste Sanchez-Palencia ont mené dans [5] une première étude pour le modèle quasi-statique (1.6). Ils ont dérivé une forme non isotropique du système de Biot par homogénéisation, obtenant ainsi une solution unique du problème, avant d'étudier le comportement limite du système lorsqu'une charge soudaine est appliquée. Les méthodes d'homogénéisation ont été également appliquées dans le cas du système thermoélastique (1.7) par Safia Brahim-Otsmane, Gilles A. Francfort et François Murat dans [26] aux débuts des années 1990. Plus récemment dans [47, 48], Marcio Murad et ses co-auteurs ont pris en compte les effets de consolidation secondaire (présence du terme λ^*) souvent négligés en utilisant, là encore, des changements d'échelle. Ils ont également mis en oeuvre des méthodes d'approximation de type éléments finis afin d'obtenir des estimations d'erreur pour le modèle de consolidation avec $\rho = c_0 = 0$ [46] complé-

tant ainsi les résultats déjà établis par Alexander Ženíšek dans [62] où, en plus de résultats d'existence et d'unicité basés sur une méthode de compacité, étaient déjà présentées des estimations d'erreur en dimension deux.
Notons enfin les travaux plus récents de Ralph E. Showalter et de ses co-auteurs qui ont étudié plusieurs problèmes liés à la poroélasticité. Dans [53], R. E. Showalter a développé des résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour le système quasi-statique dégénéré ($\rho = \lambda^* = 0$) en utilisant des techniques de semi-groupes pour les équations d'évolution dégénérées dans un espace de Hilbert. Il a également traité le cas d'un milieu poreux composite qui est régi par un système du même type que (1.5) faisant intervenir néanmoins deux pressions solutions d'équations de diffusion couplées par un terme d'échange, le milieu pouvant être entièrement ou partiellement saturé [55, 56]. De même le cas d'un milieu poreux partiellement saturé a été envisagé dans [54] ainsi que le cas d'un milieu visco-plastique dans [57] toujours en utilisant des techniques de semi-groupes basées sur les propriétés des opérateurs intervenant dans les équations.

Plan du travail - Dans ce manuscrit, nous nous intéressons à l'existence et à l'unicité des solutions des modèles (1.5) à (1.8). Pour des raisons pédagogiques et afin d'éviter des redondances dans le détail des techniques de démonstrations employées, nous avons choisi de développer le cas 1D où les modèles linéaire et non linéaire ont pu être traités avant d'aborder le cas linéaire multidimensionnel. Nous employons dans les deux cas des méthodes variationnelles ce qui signifie que nous considérons *a priori* des solutions faibles des problèmes étudiés. Le chapitre 2 est consacré à l'étude du modèle de Biot non linéaire et au cas quasi-statique non linéaire avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes. On établit d'abord l'existence et l'unicité d'une solution par une méthode de Galerkin avant d'obtenir le même résultat pour le problème quasi-statique sous des hypothèses plus faibles. On analyse ensuite en quelle mesure le problème complet approche le modèle quasi-statique. Les outils d'analyse fonctionnelle employés de manière essentielle dans le mémoire sont utilisées dès ce chapitre et sont rappelés en son début. Le chapitre 3 traite, lui aussi, du modèle non linéaire et concerne plus particulièrement le cas thermoélastique $\lambda^* = 0$. Nous avons choisi de lui consacrer un chapitre à part entière car il est singulier par rapport au cas $\lambda^* > 0$. Lorsque $\lambda^* = 0$, on perd des informations sur la régularité de la solution. On contourne cette difficulté en forçant la régularité perdue : on transforme le modèle en lui ajoutant une contrainte. L'existence d'une solution peut ainsi s'établir *via* des méthodes de régularisation et de pénalisation. Le cas linéaire multidimensionnel est présenté dans le chapitre 4 avec des conditions aux limites plus générales que celles envisagées dans le cas non linéaire. Les résultats d'existence et d'unicité y sont établis pour le modèle complet, le système quasi-statique et le cas thermoélastique.

Les démonstrations d'existence reposent sur une méthode de Galerkin tandis que des fonctions-test de Ladyzenskaja sont utilisées dans les démonstrations d'unicité. On compare ensuite les modèles thermoélastique et quasi-statique au modèle complet en estimant dans chaque cas les taux de convergence des solutions en fonction des paramètres λ^* ou ρ suivant le cas. Enfin, le chapitre 5 traite du comportement en temps long des modèles linéaire et non linéaire dans le cas $\lambda^* > 0$ sous différentes hypothèses sur les termes sources. Mentionnons également que certains de ces travaux ont fait l'objet de prépublications [7, 9, 10], de publications parues ou acceptées [8, 51, 52] ou sont en cours de soumission [11, 12]. Signalons aussi que les publications précédemment citées contiennent des résultats qui ne figurent pas dans ce document. En effet, dans les travaux présentés dans ce mémoire, nous avons systématiquement bâti les méthodes de construction d'une solution sur la théorie d'approximation de Galerkin. Or on peut penser à d'autres moyens comme, par exemple, les méthodes de point fixe ou les techniques de transformation des modèles en systèmes d'équations du premier ordre en temps. La publication [7] donne un résultat d'existence basé sur un théorème de point fixe de Schauder-Tikhonov et les résultats de J. L. Lions [33] sur les problèmes d'évolution du premier et du second ordre en temps. Dans la publication [10], on traite le modèle (1.5) *via* l'étude d'un système du premier ordre en temps. Cependant, si ces deux types de méthodes ont permis de conclure dans le cas linéaire 1D, leur utilisation dans les autres cas a soulevé des difficultés que nous n'avons pas réussi à surmonter à l'heure actuelle. La méthode de Galerkin a donc été plus performante, raison pour laquelle nous n'avons pas inclus dans ce mémoire les travaux de [7, 10] réalisés par les autres techniques mentionnées ci-dessus.

Énoncé informel des résultats obtenus - Dans un souci de clarté, nous terminons cette introduction en indiquant de manière informelle les principaux résultats d'existence et de comportement en temps long établis dans ce mémoire sur les modèles (1.5) et (1.8). Nous les présentons suivant les valeurs prises par les paramètres physiques ρ et λ^* ce qui donne les informations obtenues aussi sur les modèles (1.6) et (1.7). Comme indiqué ci-dessus, ces résultats sont en réalité prouvés pour des problèmes variationnels associés au modèle (1.5) ou (1.8) qui prennent en compte des conditions aux limites et initiales. Le cadre variationnel considéré et les espaces fonctionnels utilisés sont introduits au chapitre 2. Nous nous contentons ici de préciser le type de résultat obtenu en regard de la situation physique considérée.

Modèle linéaire multidimensionnel (1.5) :

Il est prouvé l'existence d'une unique solution $(\mathbf{u}, p)$ lorsque :

a) $\rho(\mathbf{x}) \geq \widehat{\rho} > 0$, $\lambda^*(\mathbf{x}) \geq 0$ sur Ω (ce qui signifie que λ^* peut s'annuler sur tout ou partie de Ω),

b) $\rho(\mathbf{x}) = 0$, $\lambda^*(\mathbf{x}) \geq \widehat{\lambda}^* > 0$ et le déplacement $\mathbf{u}$ à l'état initial vérifie une condition de compatibilité.

De plus, dans le cas b), on montre que le couple $(\mathbf{u}(t,\cdot), p(t,\cdot))$ converge vers un état stationnaire lorsque $t \to +\infty$ dans un sens précisé au chapitre 5.

<u>Modèle non linéaire monodimensionnel (1.8) :</u>

Il est prouvé l'existence d'une solution (u, p) lorsque :

a) $q > 1$, $\rho > 0$ et $\lambda^* > 0$.

Cette solution est de plus unique dans les cas suivants :

b) $q > 1$, $\rho = 0$ et $\lambda^* > 0$,

c) $q \geq 2$, $\rho \geq 0$ et $\lambda^* > 0$,

d) $q > 3$, $\rho > 0$, $\lambda^* = 0$ et la divergence de $\partial_t u$ vérifie à chaque instant t une contrainte imposée.

De plus, dans les cas b) et c), on montre que le couple $(u(t,\cdot), p(t,\cdot))$ converge vers un état stationnaire lorsque $t \to +\infty$ dans un sens précisé au chapitre 5.

Mentionnons enfin que des résultats de comparaison entre les différents modèles sont établis. Leur présentation nécessitant l'introduction de nombreuses notations, nous ne détaillons pas ces résultats ici et renvoyons le lecteur à la fin des chapitres 2 et 4.

Chapitre 2

Etude d'un modèle non linéaire

2.1 Introduction

Comme on l'a vu dans l'introduction, nous nous intéressons d'abord au modèle non linéaire dérivé du système (1.5) en dimension un d'espace :

$$\left\{\begin{array}{l}\rho\partial_t^2 u-\lambda^*\partial_t\partial_x^2 u-(\lambda+2\mu)\partial_x^2 u-\mu^*\partial_x\left(|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u\right)+\alpha\partial_x p=f\\ c_0\partial_t p+\alpha\partial_t\partial_x u-k\partial_x^2 p=h.\end{array}\right. \tag{2.1}$$

Ici q est un réel strictement supérieur à 1 et μ^* est une constante positive si $q \neq 2$ et nulle si $q = 2$. Ainsi le modèle (2.1) contient le modèle linéaire (1.5) en dimension un d'espace. Par ailleurs, les paramètres physiques du système sont supposés être constants et ne dépendent pas de la variable d'espace. Ce système apparaît lorsque l'on considère le cas particulier d'une onde se propageant suivant une seule direction. Dans ce cas, le déplacement dépend d'une seule variable notée x et il en est de même pour la pression. Le scalaire u représente alors la composante suivant la direction Ox, u_x, de $\mathbf{u}$. On pose $\Omega = [a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, Ω représentant le milieu poreux saturé où a lieu la propagation de l'onde tandis que Q désigne le cylindre $[0, T] \times \Omega$.
Lorsque $\rho = 0$, le système précédent se transforme en un système quasi-statique qui est le suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}-\lambda^*\partial_t\partial_x^2 u-(\lambda+2\mu)\partial_x^2 u-\mu^*\partial_x\left(|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u\right)+\alpha\partial_x p=f\\ c_0\partial_t p+\alpha\partial_t\partial_x u-k\partial_x^2 p=h.\end{array}\right. \tag{2.2}$$

On adjoint à ces systèmes les conditions initiales suivantes :

$$(u(0,x), p(0,x)) = (u_0(x), p_0(x)), \tag{2.3}$$

et quand $\rho > 0$

$$\partial_t u(0,x) = u_1(x), \tag{2.4}$$

et des conditions aux limites de Dirichlet homogènes au bord de Ω :

$$u(t,a) = u(t,b) = p(t,a) = p(t,b) = 0. \tag{2.5}$$

On rappelle que les constantes λ, μ, α, c_0 et k sont supposées strictement positives. Dans ce chapitre, on s'intéresse à la situation où les effets de consolidation secondaire sont pris en compte. On considère donc que $\lambda^* > 0$ ici, le cas $\lambda^* = 0$ étant examiné au chapitre 3.
Nous allons établir dans cette partie l'existence et l'unicité de solutions pour le problème de Biot complet et pour le modèle quasi-statique avant d'établir un résultat de comparaison entre ces deux modèles en fonction du paramètre de densité ρ.

2.2 Résultats préliminaires

Commençons tout d'abord par énoncer quelques résultats d'analyse fonctionnelle qui vont être utiles dans les démonstrations développées dans ce chapitre et dans le reste du mémoire. Le rappel de ces résultats appartenant au registre standard de l'analyse des équations aux dérivées partielles aurait pu être omis. Cependant, on a fait le choix de les indiquer dans le but de faciliter la lecture de ce manuscrit. On suppose toutefois connues les notions d'espaces de Banach, de Hilbert, de Lebesgue L^p, $1 \leq p \leq +\infty$ y compris les propriétés de convergence faible et faible * dans ces espaces. On renvoie le lecteur aux ouvrages [27, 31, 33, 43, 44, 45] pour des démonstrations de ces résultats.

Précisons tout d'abord les espaces fonctionnels que nous allons considérer et les notations que nous utiliserons dans le cas général où le domaine d'étude Ω est de dimension quelconque et de frontière Γ régulière.

Définition 2.1. *Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$*
Soient $m \geq 1$ et p un réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ i. e. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ où α_i, $1 \leq i \leq n$, est un entier positif ou nul, on pose $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.
On définit alors :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tels que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$$

où $L^p(\Omega)$ désigne l'espace de Lebesgue réel usuel.
Muni de la norme $||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \displaystyle\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)}$, *$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.*
Dans le cas particulier où $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$.

Nous utiliserons également les espaces classiques de fonctions à valeurs dans un espace de Banach dont nous rappelons les définitions et quelques propriétés.

Définition 2.2.
Soient X un espace de Banach, $]a, b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et dt la mesure de Lebesgue sur $]a, b[$.
• *On désigne par $L^p(a, b, X)$, pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace des fonctions f de $]a, b[$ à valeurs dans X telles que :*

$$\begin{cases} f \textit{ est mesurable pour } dt, \\ ||f||_{L^p(a,b;X)} = \left(\displaystyle\int_a^b ||f(t)||_X^p dt\right)^{1/p} < +\infty. \end{cases}$$

• *On désigne par $L^\infty(a, b; X)$ l'espace des fonctions f de $]a, b[$ dans X telles que :*

$$\begin{cases} f \textit{ est mesurable pour } dt, \\ ||f||_{L^\infty(a,b;X)} = ess\sup ||f(\cdot)||_X < +\infty. \end{cases}$$

Proposition 2.3.
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(a, b; X)$ est un espace de Banach muni de la norme $||\cdot||_{L^p(a,b;X)}$.

Définition 2.4.
Soient X et Y deux espaces de Hilbert séparables tels que X est inclus dans Y, l'injection de X dans Y étant continue et X étant dense dans Y. Soit $]a, b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors l'espace :

$$W(a, b; X, Y) = \{u \in L^2(a, b; X) \textit{ tels que } \partial_t u \in L^2(a, b; Y)\}$$

muni de la norme $||u||_W = (||u||^2_{L^2(a,b;X)} + ||\partial_t u||^2_{L^2(a,b;Y)})^{1/2}$ est un espace de Hilbert. De plus, on a le résultat suivant :

$$W(a, b; X, Y) \subset_> C^0([a, b]; Y).$$

Dans le cas particulier où V est un espace de Hilbert séparable tel que $V \subset L^2(\Omega) \subset V'$ alors :

$$W(a, b; V, V') \subset_> C^0([a, b]; L^2(\Omega)).$$

Lemme 2.5.
Soient B_0, B et B_1 trois espaces de Banach tels que $B_0 \subset B \subset B_1$, B_0 et B_1 réflexifs et l'injection de B_0 dans B est compacte.
On définit l'espace :

$$W = \{v \in L^{p_0}(0,T;B_0) \text{ tels que } \partial_t v \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

où T est fini et $1 < p_0, p_1 < +\infty$.
Muni de la norme $||\cdot||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + ||\cdot||_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$, W est un espace de Banach et l'injection de W dans $L^{p_0}(0,T;B)$ est compacte.

Comme annoncé dans l'introduction, nous allons utiliser dans la démonstration d'existence une méthode d'approximation de Galerkin. Cela revient en fait à approcher un espace de Hilbert V de dimension infinie par une famille d'espaces vectoriels $(V_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ de dimension finie vérifiant les axiomes :
• $V_m \subset V$
• $V_m \to V$ quand $m \to +\infty$ au sens suivant : il existe $\mathcal{V}$ sous-espace dense de V, tel que, pour tout $v \in \mathcal{V}$, on peut trouver une suite $(v_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant pour tout m, $v_m \in V_m$ et $v_m \to v$ dans V lorsque $m \to +\infty$.
Ces espaces d'approximation sont générés à l'aide d'une famille libre $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de V en posant, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $V_m = Vect\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$. Suivant le choix de cette famille, on peut construire des solutions des problèmes (2.1) et (2.2) plus ou moins régulières. C'est pourquoi, afin d'avoir suffisamment de régularité pour le traitement du terme non linéaire, nous allons utiliser la base spéciale de fonctions propres de l'opérateur de Laplace dans $L^2(\Omega)$ qui est définie dans la proposition ci-dessous :

Proposition 2.6.
Il existe une suite $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\begin{cases} \forall j \in \mathbb{N}^*, \ w_j \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ -\Delta w_j = \lambda_j w_j \end{cases} \tag{2.6}$$

avec $\lambda_j \neq 0$.
L'ensemble dénombrable $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ forme alors une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ et l'espace des combinaisons linéaires finies des w_j est dense dans $H_0^1(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Les résultats suivants seront quant à eux utiles pour établir des estimations *a priori*, des résultats de convergence ou d'unicité.

Lemme 2.7. *Inégalité de Poincaré*
Soit $\tilde{\Gamma}$ une partie de Γ d'intérieur non vide.
On introduit l'espace $V = \{v \in H^1(\Omega)$ tels que $v = 0$ sur $\tilde{\Gamma}\}$.
Alors, il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $\forall v \in V$, $||v||_{L^2(\Omega)} \leq \kappa ||\nabla v||_{L^2(\Omega)}$.

Lemme 2.8. *Lemme de Gronwall*
Soient T un réel strictement positif, ϕ une fonction de $L^\infty(0,T)$, $\phi(t) \geq 0$ pour presque tout t de $]0,T[$, μ une fonction de $L^1(0,T)$, $\mu \geq 0$ presque partout sur $]0,T[$.
- *On suppose qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que :*

$$\textit{pour presque tout } s \textit{ dans }]0,T[, \ \phi(s) \leq \kappa + \int_0^s \mu(t)\phi(t)dt. \tag{2.7}$$

Alors, pour presque tout s de $]0,T[$, $\phi(s) \leq \kappa \; exp \left(\int_0^s \mu(t)dt \right)$.

- *Si la relation (2.7) est vérifiée avec $\kappa = 0$, alors $\phi = 0$ presque partout sur $]0,T[$.*

Proposition 2.9.
Soit $V_m = Vect\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ où $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est définie par (2.6).
Soit P_m la projection sur V_m définie sur $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))'$ par

$$P_m(v) = \sum_{i=1}^m < v, w_i > w_i,$$

où $< \, , \, >$ désigne le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et son dual. Alors la restriction de P_m à $L^2(\Omega)$ est la projection de $L^2(\Omega)$ sur V_m et $P_m \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ avec $||P_m||_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} = 1$. De plus, les propriétés suivantes sont vérifiées : $P_m \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $P_m \in \mathcal{L}((H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))')$ et les normes $||P_m||_{\mathcal{L}((H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))')}$ et $||P_m||_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))}$ sont indépendantes de m.

Lemme 2.10.
Soient $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, g_m, $m \in \mathbb{N}$ et g des fonctions de $L^q(\mathcal{O})$, $1 < q < +\infty$, telles que :
- *$\exists C > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $||g_m||_{L^q(\mathcal{O})} \leq C$,*
- *$g_m \to g$ presque partout dans $\mathcal{O}$.*

Alors $g_m \to g$ dans $L^q(\mathcal{O})$ faible.

Enfin, on termine ce paragraphe par une propriété de l'application $v \mapsto |v|^{q-2}v$ dans $L^q(\Omega)$ avec $q \geq 2$ qui interviendra lors de la comparaison des modèles développée au paragraphe 2.5 :

Proposition 2.11.
On suppose que $q \geq 2$. *Il existe une constante* $\gamma > 0$ *telle que pour tout* $(v_1, v_2) \in (L^q(\Omega))^2$,

$$\int_\Omega (|v_1|^{q-2}v_1 - |v_2|^{q-2}v_2)(v_1 - v_2)dx \geq \gamma \int_\Omega |v_1 - v_2|^q dx.$$

2.3 Le cas $q \geq 2$: un modèle de consolidation non linéaire

Dans cette première partie, on s'intéresse au cas où $\rho \geq 0$ et $q \geq 2$. Au modèle de consolidation décrit par $\{(2.1), (2.3), (2.4), (2.5)\}$, on associe la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver } (u,p) \in L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ tel que} \\
u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)), \quad \partial_t u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\
\partial_t p \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \rho\partial_t^2 u \in L^2(0,T;W^{-1,q^*}(\Omega)), \\
\text{vérifiant pour presque tout } t \text{ dans }]0,T[, \ \forall (v,r) \in W_0^{1,q}(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \\
\rho < \partial_t^2 u, v >_{W^{-1,q^*}(\Omega), W_0^{1,q}(\Omega)} + \lambda^* \displaystyle\int_\Omega \partial_t \partial_x u \partial_x v dx - \alpha \int_\Omega p \partial_x v dx \\
+(\lambda + 2\mu) \displaystyle\int_\Omega \partial_x u \partial_x v dx + \mu^* \int_\Omega |\partial_x u|^{q-2} \partial_x u \partial_x v dx = \int_\Omega f v dx, \\
c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p r dx + \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u r dx + k \int_\Omega \partial_x p \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx, \\
(u(0,x), p(0,x)) = (u_0(x), p_0(x)), \ \rho\partial_t u(0,x) = \rho u_1(x)
\end{array}\right. \tag{2.8}$$

où q^* est le réel défini par la relation $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q^*} = 1$. On suppose que les conditions initiales (u_0, p_0) et u_1 (lorsque $\rho > 0$) sont respectivement dans $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. Les termes sources sont eux supposés appartenir à l'espace $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. On appelle donc solution du modèle de consolidation de Biot non linéaire toute solution de la formulation variationnelle (2.8). On va établir dans les sous-sections 2.3.1 et 2.3.2 le :

Théorème 2.12.
Soient q *un réel tel que* $q \geq 2$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $p_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, f *et* $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. *Alors le problème (2.8) admet une solution* (u,p) *unique telle que* $u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$.

2.3.1 Existence

Comme on l'a évoqué à la section 2.2, afin de prouver l'existence d'une solution du problème (2.8), on utilise une méthode d'approximation de Faedo-Galerkin pour l'espace $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. On va donc construire une solution de (2.8) comme étant la limite d'une suite de solutions approchées que l'on note $(u_m, p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$.
Cette suite $(u_m, p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est définie de $]0, T[$ dans $V_m \times V_m$ par :

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} u_{jm}(t) w_j \text{ et } p_m(t) = \sum_{j=1}^{m} p_{jm}(t) w_j, \tag{2.9}$$

où $(w_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est la suite introduite à la proposition 2.6. On fait donc intervenir, pour chaque entier m de $\mathbb{N}^*$, une nouvelle inconnue discrète par le biais de la suite $(u_{jm}(t), p_{jm}(t))_{1 \leq j \leq m}$ que l'on définit en résolvant le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \displaystyle\int_\Omega \partial_t^2 u_m w_j dx + \lambda^* \int_\Omega \partial_t \partial_x u_m \partial_x w_j dx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x u_m \partial_x w_j dx \\ + \mu^* \displaystyle\int_\Omega |\partial_x u_m|^{q-2} \partial_x u_m \partial_x w_j dx - \alpha \int_\Omega p_m \partial_x w_j dx = \int_\Omega f w_j dx, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p_m w_j dx + \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u_m w_j dx + k \int_\Omega \partial_x p_m \partial_x w_j dx = \int_\Omega h w_j dx \end{array} \right. \tag{2.10}$$

pour tout $1 \leq j \leq m$, avec pour conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_m(0), p_m(0)) = (u_{0m}, p_{0m}) \in V_m \times V_m \text{ tel que } u_{0m} \to u_0 \\ \ \text{dans } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ et } p_{0m} \to p_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega); \\ \rho \partial_t u_m(0) = \rho u_{1m} \in V_m \text{ tel que } u_{1m} \to u_1 \text{ dans } L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.11}$$

L'existence des suites $(u_{0m})_{m \in \mathbb{N}^*}$, $(u_{1m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ et $(p_{0m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les propriétés (2.11) est une conséquence de la proposition 2.6.
Le problème $\{(2.10), (2.11)\}$ satisfaisant les conditions de Cauchy-Lipschitz, d'après la théorie sur les équations différentielles non linéaires, $\{(2.10), (2.11)\}$ admet une unique solution maximale $(u_m, p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ dans l'espace $H^1(0, T_m; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H^1(0, T_m; H_0^1(\Omega))$, $T_m > 0$, telle que $\rho u_m \in H^2(0, T_m; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$.
On se propose maintenant de montrer que $(u_m, p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un couple (u, p) dans un sens à définir et que ce couple (u, p) est solution de (2.8). En fait, il suffit de montrer que l'on peut extraire une suite de $(u_m, p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ convergente. C'est pourquoi nous allons nous attacher à établir des estimations *a priori* afin de prouver que la suite $(u_m, p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans des espaces fonctionnels adéquats. De plus, ces estimations vont nous permettre de vérifier que la suite $(u_m, p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ existe en fait pour tout temps t d'après le principe de prolongement des solutions

d'équations différentielles bornées. On peut ainsi conclure que le temps T_m pour lequel les solutions existent est égal au temps T donné initialement.

Lemme 2.13.
La suite $(u_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ des solutions des problèmes {(2.10), (2.11)} vérifie les propriétés suivantes :

- $(\rho\partial_t^2 u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée dans* $L^2(0,T;(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))')$,
- $(\partial_t u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée dans* $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$,
- $(\sqrt{\rho}\partial_t u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée dans* $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$,
- $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée dans* $L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$,
- $(\partial_t p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée dans* $L^2(0,T;L^2(\Omega))$,
- $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée dans* $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Chaque estimation ci-dessus est de plus indépendante du paramètre physique ρ et dépend de (u_0,p_0) et u_1 uniquement par le biais de $||u_0||_{W^{1,q}(\Omega)}$, $||p_0||_{H^1(\Omega)}$ et $||u_1||_{L^2(\Omega)}$.

Démonstration.

• On commence par multiplier la première équation de (2.10) par $u'_{jm}(t)$ et la seconde par $p_{jm}(t)$. Il vient en sommant chaque terme sur j pour j allant de 1 à m :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\displaystyle\int_\Omega \partial_t^2 u_m \partial_t u_m dx + \lambda^*\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2 dx + (\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_m \partial_t\partial_x u_m dx \\ +\mu^*\displaystyle\int_\Omega |\partial_x u_m|^{q-2}\partial_x u_m \partial_t\partial_x u_m dx - \alpha\int_\Omega p_m\partial_t\partial_x u_m dx = \int_\Omega f\partial_t u_m dx, \\ c_0\displaystyle\int_\Omega \partial_t p_m p_m dx + \alpha\int_\Omega \partial_t\partial_x u_m p_m dx + k\int_\Omega |\partial_x p_m|^2 dx = \int_\Omega h p_m dx. \end{array}\right.$$

Soit aussi :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\rho}{2}\dfrac{d}{dt}\left[\displaystyle\int_\Omega |\partial_t u_m|^2 dx\right] + \lambda^*\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2 dx + \dfrac{\lambda+2\mu}{2}\dfrac{d}{dt}\left[\displaystyle\int_\Omega |\partial_x u_m|^2 dx\right] \\ +\dfrac{\mu^*}{q}\dfrac{d}{dt}\left[\displaystyle\int_\Omega |\partial_x u_m|^q dx\right] - \alpha\int_\Omega p_m\partial_t\partial_x u_m dx = \int_\Omega f\partial_t u_m dx, \\ \dfrac{c_0}{2}\dfrac{d}{dt}\left[\displaystyle\int_\Omega |p_m|^2 dx\right] + \alpha\int_\Omega \partial_t\partial_x u_m p_m dx + k\int_\Omega |\partial_x p_m|^2 dx = \int_\Omega h p_m dx. \end{array}\right.$$

En additionnant les deux égalités précédentes, on voit que le choix de telles fonctions-test permet d'éliminer les termes de couplage entre les deux équations de (2.10). On intègre ensuite par rapport au temps sur l'intervalle $[0,s]$ pour tout s tel que

$0 \leq s \leq T$. On obtient ainsi l'égalité d'énergie suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\rho}{2}\displaystyle\int_\Omega |\partial_t u_m|^2(s)dx + \dfrac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x u_m|^2(s)dx + \dfrac{\mu^*}{q}\int_\Omega |\partial_x u_m|^q(s)dx \\ +\dfrac{c_0}{2}\displaystyle\int_\Omega |p_m|^2(s)dx + \lambda^*\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2 dxdt + k\int_0^s\int_\Omega |\partial_x p_m|^2 dxdt \\ = \displaystyle\int_0^s\int_\Omega (f\partial_t u_m + hp_m)dxdt + \dfrac{\rho}{2}||u_{1m}||^2_{L^2(\Omega)} + \dfrac{\lambda+2\mu}{2}||\partial_x u_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} \\ +\dfrac{\mu^*}{q}||\partial_x u_{0m}||^q_{L^q(\Omega)} + \dfrac{c_0}{2}||p_{0m}||^2_{L^2(\Omega)}. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

De plus, par construction, chaque suite $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$, $(u_{1m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ et $(p_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée car convergente dans $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ respectivement d'après (2.11). Ces propriétés et la continuité de l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $W^{1,q}(\Omega)$ entraînent l'existence d'une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$\frac{\lambda+2\mu}{2}||\partial_x u_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\mu^*}{q}||\partial_x u_{0m}||^q_{L^q(\Omega)} + \frac{\rho}{2}||u_{1m}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c_0}{2}||p_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} \leq \kappa.$$

Le second membre de (2.12) peut ainsi se majorer par :

$$\kappa + \int_0^s\int_\Omega (f\partial_t u_m + hp_m)dxdt.$$

Or en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$, il vient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f\partial_t u_m + hp_m)dxdt \leq & \left(\int_\Omega |f|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\partial_t u_m|^2dx\right)^{1/2} \\ & + \left(\int_\Omega |h|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |p_m|^2dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

L'inégalité de Poincaré dans $H_0^1(\Omega)$, rappelée au lemme 2.7, nous permet de majorer $\displaystyle\int_\Omega |p_m|^2dx$ par $\kappa\displaystyle\int_\Omega |\partial_x p_m|^2dx$ et $\displaystyle\int_\Omega |\partial_t u_m|^2dx$ par $\kappa\displaystyle\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2dx$ où $\kappa > 0$ est une constante indépendante de m.
En appliquant enfin l'inégalité de Young à l'expression ainsi obtenue, on obtient

l'inégalité :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t u_m|^2(s)dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x u_m|^2(s)dx + \frac{\mu^*}{q}\int_\Omega |\partial_x u_m|^q(s)dx \\ +\frac{c_0}{2}\int_\Omega |p_m|^2(s)dx + \lambda^*\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2 dxdt + k\int_0^s\int_\Omega |\partial_x p_m|^2 dxdt \\ \leq \kappa + \frac{\kappa^2}{2\lambda^*}\int_0^s\int_\Omega |f|^2 dxdt + \frac{\lambda^*}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2 dxdt + \frac{\kappa^2}{2k}\int_0^s\int_\Omega |h|^2 dxdt \\ +\frac{k}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_x p_m|^2 dxdt\end{array}\right.$$

qui donne grâce aux propriétés des termes sources l'existence d'une nouvelle constante κ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t u_m|^2(s)dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x u_m|^2(s)dx \\ +\frac{\mu^*}{q}\int_\Omega |\partial_x u_m|^q(s)dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega |p_m|^2(s)dx \\ +\frac{\lambda^*}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_x p_m|^2 dxdt \leq \kappa.\end{array}\right. \tag{2.13}$$

• On améliore maintenant les estimations sur la suite $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ en utilisant seulement la seconde équation de (2.10). On la multiplie par $p'_{jm}(t)$, on somme sur j et on intègre par rapport au temps sur $[0,s]$. Il vient :

$$c_0\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_m|^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x p_m|^2(s)dx = \int_0^s\int_\Omega h\partial_t p_m dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x p_{0m}|^2 dx$$
$$-\alpha\int_0^s\int_\Omega \partial_t p_m \partial_t\partial_x u_m dxdt.$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on a :

$$\begin{aligned}&\int_0^s\int_\Omega h\partial_t p_m dxdt \leq \frac{1}{c_0}\int_0^s\int_\Omega |h|^2 dxdt + \frac{c_0}{4}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_m|^2 dxdt \\ &\alpha\int_0^s\int_\Omega \partial_t p_m\partial_t\partial_x u_m dxdt \leq \frac{c_0}{4}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_m|^2 dxdt \\ &\qquad\qquad + \frac{\alpha^2}{c_0}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2 dxdt.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Or d'après l'estimation (2.13), on sait que la suite $(\partial_t \partial_x u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans l'espace $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. D'après les propriétés de la suite $(p_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$, on en déduit alors qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$\frac{c_0}{2}\int_0^s \int_\Omega |\partial_t p_m|^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x p_m|^2(s)dx \leq \kappa. \tag{2.15}$$

• Pour terminer la preuve du lemme 2.13, il reste à obtenir une estimation du terme $\rho\partial_t^2 u_m$ dans $L^2(0,T;(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))')$. Pour cela, on introduit la suite $(\chi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\chi_m = \lambda^*\partial_t\partial_x^2 u_m + (\lambda+2\mu)\partial_x^2 u_m + \mu^*\partial_x(|\partial_x u_m|^{q-2}\partial_x u_m) - \alpha\partial_x p_m + f.$$

La première équation de (2.10) montre que $\rho\partial_t^2 u_m = P_m(\chi_m)$ où le projecteur P_m a été défini à la proposition 2.9. Comme la norme de P_m dans $\mathcal{L}((H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))')$ est indépendante de m, $(\rho\partial_t^2 u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(0,T;(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))')$ d'après l'estimation *a priori* (2.13) qui montre que $(\chi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(0,T;(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))')$. La preuve du lemme 2.13 est ainsi achevée. ■

Remarque 2.14.
En fait, le lemme 2.13 est vrai dès que $q > 1$ et pour tout choix d'approximant de Galerkin.

Notre but est de construire une solution de (2.8) définie comme étant la limite de la suite $(u_m,p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$. Le lemme 2.13 sera pour cela très utile mais reste insuffisant. En effet, l'étude du terme non linéaire $\mu^*\partial_x(|\partial_x u_m|^{q-2}\partial_x u_m)$ engendre une difficulté que nous allons contourner ici en ayant recours à des arguments de compacité. Pour cela, nous allons maintenant obtenir une dernière estimation *a priori* sur la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ en tirant parti du choix de la base $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ des fonctions propres de l'opérateur $(-\Delta)$ dans $L^2(\Omega)$ et de la condition $q \geq 2$.

Lemme 2.15.
Soit $(u_m,p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ la suite des solutions de {(2.10), (2.11)}. Alors,
- *$(\partial_x^2 u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$,*
- *$(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$.*

Démonstration.

On multiplie la première équation de (2.10) par $u_{jm}(t)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\rho \int_\Omega \partial_t^2 u_m u_{jm} w_j dx + \lambda^* \int_\Omega \partial_t \partial_x u_m u_{jm} \partial_x w_j dx \\
&+(\lambda+2\mu) \int_\Omega \partial_x u_m u_{jm} \partial_x w_j dx + \mu^* \int_\Omega |\partial_x u_m|^{q-2} \partial_x u_m u_{jm} \partial_x w_j dx \\
&-\alpha \int_\Omega p_m u_{jm} \partial_x w_j dx = \int_\Omega f u_{jm} \partial_x w_j dx.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

D'après les propriétés de la suite $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ définie à la proposition 2.6, on remplace dans (2.16) w_j par $(-\frac{1}{\lambda_j}\partial_x^2 w_j)$. En sommant alors sur j pour j allant de 1 à m et en utilisant la formule de Green suivante

$$\forall u,\ v \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega u \partial_x v dx = -\int_\Omega \partial_x u v dx,$$

on obtient, puisque la condition $q \geq 2$ autorise l'application de la formule de Green au terme non linéaire :

$$\left\{\begin{aligned}
&-\rho \int_\Omega \partial_t^2 u_m \partial_x^2 u_m dx + \lambda^* \int_\Omega \partial_t \partial_x^2 u_m \partial_x^2 u_m dx \\
&+(\lambda+2\mu) \int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2 dx + \mu^*(q-1) \int_\Omega |\partial_x u_m|^{q-2} (\partial_x^2 u_m)^2 dx \\
&-\alpha \int_\Omega \partial_x p_m \partial_x^2 u_m dx = -\int_\Omega f \partial_x^2 u_m dx.
\end{aligned}\right. \tag{2.17}$$

Soit $s \in]0,T[$. En intégrant la relation (2.17) par rapport au temps sur l'intervalle $[0,s]$, on arrive à :

$$\left\{\begin{aligned}
&-\rho \int_0^s \int_\Omega \partial_t^2 u_m \partial_x^2 u_m dx dt + \frac{\lambda^*}{2} \int_0^s \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2 dx\right) dt \\
&+(\lambda+2\mu) \int_0^s \int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2 dx dt - \alpha \int_0^s \int_\Omega \partial_x p_m \partial_x^2 u_m dx dt \\
&+\mu^*(q-1) \int_0^s \int_\Omega |\partial_x u_m|^{q-2} (\partial_x^2 u_m)^2 dx dt = -\int_0^s \int_\Omega f \partial_x^2 u_m dx dt.
\end{aligned}\right. \tag{2.18}$$

De plus, en utilisant une intégration par parties par rapport au temps et la formule de Green précédente, le premier terme devient :

$$\begin{aligned}
-\rho \int_0^s \int_\Omega \partial_t^2 u_m \partial_x^2 u_m dx dt &= -\rho \int_0^s \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_m|^2 dx dt \\
&\quad - \rho \int_\Omega \partial_t u_m(s) \partial_x^2 u_m(s) dx + \rho \int_\Omega u_{1m} \partial_x^2 u_{0m} dx
\end{aligned}$$

tandis que le second terme nous donne :

$$\frac{\lambda^*}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2 dx\right) dt = \frac{\lambda^*}{2}\int_\Omega |\partial_x^2 u_m(s)|^2 dxdt - \frac{\lambda^*}{2}\int_\Omega |\partial_x^2 u_{0m}|^2 dx.$$

En injectant les deux égalités ainsi obtenues dans (2.18), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda^*}{2}\int_\Omega |\partial_x^2 u_m(s)|^2 dx + (\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2 dxdt \\
&+\mu^*(q-1)\int_0^s\int_\Omega |\partial_x u_m|^{q-2}(\partial_x^2 u_m)^2 dxdt = \rho\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2 dxdt \\
&+\rho\int_\Omega \partial_t u_m(s)\partial_x^2 u_m(s)dx - \rho\int_\Omega u_{1m}\partial_x^2 u_{0m}dx + \frac{\lambda^*}{2}\int_\Omega |\partial_x^2 u_{0m}|^2 dx \\
&+\alpha\int_0^s\int_\Omega \partial_x p_m \partial_x^2 u_m dxdt - \int_0^s\int_\Omega f\partial_x^2 u_m dxdt.
\end{aligned}$$

On procède ensuite comme dans la preuve du lemme 2.13 pour majorer le second membre de la relation précédente que l'on note A. En effet, grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young on obtient que :

$$\begin{aligned}
A \leq\ &\frac{\lambda^*}{4}\int_\Omega |\partial_x^2 u_m(s)|^2 dx + \rho\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2 dxdt + \frac{\rho}{\lambda^*}\int_\Omega \rho|\partial_t u_m(s)|^2 dx \\
&+\rho||u_{1m}||_{L^2(\Omega)}||\partial_x^2 u_{0m}||_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda^*}{2}\int_\Omega |\partial_x^2 u_{0m}|^2 dx + \frac{\alpha^2}{\lambda+2\mu}\int_0^s\int_\Omega |\partial_x p_m|^2 dxdt \\
&+\frac{1}{\lambda+2\mu}\int_0^s\int_\Omega |f|^2 dxdt + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_0^s\int_\Omega (\partial_x^2 u_m)^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Or d'après le lemme 2.13, on sait que les suites $(\partial_t u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sont bornées dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et que la suite $(\sqrt{\rho}\partial_t u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. En tenant compte de (2.11) et des hypothèses sur le terme source f, on a finalement l'estimation : $\forall s \in]0,T[$,

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\lambda^*}{4}\int_\Omega |\partial_x^2 u_m(s)|^2 dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2 dxdt \\
&+\mu^*(q-1)\int_0^s\int_\Omega |\partial_x u_m|^{q-2}(\partial_x^2 u_m)^2 dxdt \leq \kappa
\end{aligned}\right. \tag{2.19}$$

qui achève la preuve du lemme 2.15. ■

Remarque 2.16.
Si on suppose que $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, en reprenant la preuve du lemme 2.15 en multipliant

cette fois l'équation (2.10) par $u'_{jm}(t)$, *on obtient après intégration de* 0 *à* s, $s \in]0,T[$, *l'inégalité :*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\int_\Omega (\partial_t\partial_x u_m(s))^2 dx + \lambda^* \int_0^s \int_\Omega (\partial_t \partial_x^2 u_m)^2 dx dt + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega (\partial_x^2 u_m(s))^2 dx \\
&= \frac{\rho}{2}\int_\Omega (\partial_x u_{1m})^2 dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega (\partial_x^2 u_{0m})^2 dx - \alpha \int_0^s \int_\Omega \partial_x p_m \partial_t \partial_x^2 u_m dx dt \\
&-\mu^*(q-1)\int_0^s \int_\Omega |\partial_x u_m|^{q-2}(\partial_x^2 u_m)(\partial_t\partial_x^2 u_m) dx dt - \int_0^s\int_\Omega f \partial_t \partial_x^2 u_m dx dt.
\end{aligned}
$$

En utilisant les estimations du lemme 2.15 pour majorer à l'aide des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young le terme non linéaire, il vient en suivant les idées de la preuve du lemme 2.15 que $(\partial_t u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée dans* $L^2(0,T;H^2(\Omega))$.

On peut déduire des lemmes précédents la :

Proposition 2.17.
Soit $(u_m,p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *la suite des solutions de* $\{(2.10), (2.11)\}$. *Il existe une sous-suite de* $(u_m,p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *qui converge dans* $L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))\times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ *faible * vers un couple* (u,p). *De plus, le couple* (u,p) *est une solution du problème variationnel (2.8) et* u *appartient à* $L^\infty(0,T,W^{1,\infty}(\Omega))$.

Démonstration.
D'après les lemmes 2.13 et 2.15, il existe une suite extraite de $(u_m,p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ notée encore $(u_m,p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ convergente de la façon suivante :

$$
\left\{
\begin{array}{rll}
u_m & \to u & \text{dans } L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \text{ faible } * \\
 & & \text{et dans } L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \text{ faible } *\,; \\
p_m & \to p & \text{dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible } *\,; \\
|\partial_x u_m|^{q-2}\partial_x u_m & \to \eta & \text{dans } L^\infty(0,T;L^{q^*}(\Omega)) \text{ faible } *\,; \\
\partial_t u_m & \to \partial_t u & \text{dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible}\,; \\
\sqrt{\rho}\partial_t u_m & \to \sqrt{\rho}\partial_t u & \text{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible } *\,; \\
\partial_t p_m & \to \partial_t p & \text{dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible}\,; \\
\rho\partial_t^2 u_m & \to \rho \partial_t^2 u & \text{dans } L^2(0,T;(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))') \text{ faible.}
\end{array}
\right.
\tag{2.20}
$$

D'après (2.20), $(\partial_x u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\partial_x u$ dans $H^1(Q)$ faible. Or l'injection de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$ étant compacte, $(\partial_x u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\partial_x u$ dans $L^2(Q)$ et donc presque partout dans Q, quitte à extraire de nouveau une sous-suite.
Par ailleurs, la continuité de la fonction $\tau \mapsto |\tau|^{q-2}\tau$ implique que $|\partial_x u_m|^{q-2}\partial_x u_m$ converge vers $|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u$ presque partout dans Q.
D'après le lemme 2.10 rappelé au paragraphe 2.2, la suite $(|\partial_x u_m|^{q-2}\partial_x u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers $|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u$ dans $L^\infty(0,T;L^{q^*}(\Omega))$ faible *, ce qui prouve, d'après

(2.20), que $\eta = |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u$.

On peut alors faire tendre m vers l'infini dans (2.10) et on obtient : pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} \rho < \partial_t^2 u, w_j >_{(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))', H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} + \lambda^* \displaystyle\int_\Omega \partial_t\partial_x u \partial_x w_j dx - \alpha \int_\Omega p\partial_x w_j dx \\ +(\lambda+2\mu)\displaystyle\int_\Omega \partial_x u\partial_x w_j dx + \mu^* \int_\Omega |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u \partial_x w_j dx = \int_\Omega f w_j dx, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p w_j dx + \alpha \int_\Omega \partial_t\partial_x u w_j dx + k \int_\Omega \partial_x p \partial_x w_j dx = \int_\Omega h w_j dx. \end{cases}$$

En tenant compte des propriétés de la suite $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ énoncées à la proposition 2.6, la relation précédente s'étend comme suit : $\forall (v,r) \in (H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \rho < \partial_t^2 u, v >_{(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))', H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} + \lambda^* \displaystyle\int_\Omega \partial_t\partial_x u \partial_x v dx \\ +(\lambda+2\mu)\displaystyle\int_\Omega \partial_x u\partial_x v dx + \mu^* \int_\Omega |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u \partial_x v dx - \alpha \int_\Omega p\partial_x v dx = \int_\Omega f v dx, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p r dx + \alpha \int_\Omega \partial_t\partial_x u r dx + k \int_\Omega \partial_x p \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx. \end{cases}$$

Enfin, la première équation de ce système et les propriétés de régularité du couple (u,p) découlant de (2.20) montrent que $\rho\partial_t^2 u$ est bornée dans $L^2(0,T;W^{-1,q^*}(\Omega))$. Les relations précédentes se généralisent ainsi aux fonctions-test dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ et le couple (u,p) vérifie finalement : $\forall (v,r) \in W_0^{1,q}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{cases} \rho < \partial_t^2 u, v >_{W^{-1,q^*}(\Omega), W_0^{1,q}(\Omega)} + \lambda^* \displaystyle\int_\Omega \partial_t\partial_x u \partial_x v dx - \alpha \int_\Omega p\partial_x v dx \\ +(\lambda+2\mu)\displaystyle\int_\Omega \partial_x u\partial_x v dx + \mu^* \int_\Omega |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u \partial_x v dx = \int_\Omega f v dx, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p r dx + \alpha \int_\Omega \partial_t\partial_x u r dx + k \int_\Omega \partial_x p \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx, \end{cases} \tag{2.21}$$

ce qui montre que le couple (u,p) satisfait les propriétés de régularité et les équations variationnelles de (2.8). De plus, $u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ et donc $u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$.

La preuve de la proposition 2.17 est achevée si on vérifie que le couple (u,p) satisfait les conditions initiales imposées.
D'après le lemme 2.13, $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $W(0,T;H_0^1(\Omega),H_0^1(\Omega))$ et $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))$. De plus, ce même lemme montre aussi que

la suite $\rho(\partial_t u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $W(0,T;H_0^1(\Omega),(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))')$.
Or,

$$W(0,T;H_0^1(\Omega),H_0^1(\Omega))\hookrightarrow C^0([0,T];H_0^1(\Omega)),$$

$$W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))\hookrightarrow C^0([0,T];L^2(\Omega)),$$

et

$$W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))')\hookrightarrow C^0([0,T];(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))')$$

comme on l'a vu au paragraphe 2.2.
On a alors pour tout t dans $[0,T]$, quand m tend vers l'infini :
• $u_m(t,\ .)$ converge vers $u(t,\ .)$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible ;
• $p_m(t,\ .)$ converge vers $p(t,\ .)$ dans $L^2(\Omega)$ faible ;
• $\rho\partial_t u_m(t,\ .)$ converge vers $\rho\partial_t u(t,\ .)$ dans $(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))'$ faible.
Ce résultat est en particulier valable pour $t=0$ et montre que $u_m(0)\to u(0)$, $p_m(0)\to p_0$ et $\rho\partial_t u_m(0)\to\rho\partial_t u(0)$ respectivement dans $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))'$ faible. D'un autre côté, on a par définition $u_m(0)=u_{0m}$, $\rho\partial_t u_m(0)=\rho u_{1m}$ et $p_m(0)=p_{0m}$, les suites $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$, $(p_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ et $\rho(u_{1m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ convergeant respectivement vers u_0, p_0 et ρu_1 dans $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))'$ faible. Il vient donc que $u(0)=u_0$, $p(0)=p_0$ et $\rho\partial_t u(0)=\rho u_1$: le couple (u,p) ainsi construit vérifie les conditions initiales de (2.8) et est donc une solution de (2.8). ■

2.3.2 Unicité

Le problème variationnel (2.8) admet donc au moins une solution (u,p) définie par la proposition 2.17, telle que u appartient à $L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$. Il est maintenant naturel de se poser la question de l'unicité d'une telle solution, ce qui est souvent un problème délicat dans l'étude d'équations non linéaires.
On considère deux couples (u,p) et $(\tilde{u},\tilde{p})$ solutions du problème (2.8) avec les mêmes conditions initiales u_0, u_1, p_0 et les mêmes données f et h. On suppose que u et $\tilde{u}$ sont dans $L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$. Notons ν et ψ la différence entre les solutions : $\nu=u-\tilde{u}$ et $\psi=p-\tilde{p}$.

Le couple (ν, ψ) vérifie alors les propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}(\nu,\psi) \in L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\ \nu \in L^2(0,T;H^2(\Omega)), \quad \partial_t\nu \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\\ \partial_t\psi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \rho\partial_t^2\nu \in L^2(0,T;W^{-1,q^*}(\Omega)),\\ \text{pour presque tout } t \text{ dans }]0,T[\ , \forall(v,r) \in W_0^{1,q}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\\ \rho < \partial_t^2\nu, v >_{W^{-1,q^*}(\Omega),W_0^{1,q}(\Omega)} +\lambda^* \displaystyle\int_\Omega \partial_t\partial_x\nu\partial_x v dx - \alpha \int_\Omega \psi\partial_x v dx\\ +\mu^* \displaystyle\int_\Omega \left[|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u - |\partial_x\tilde{u}|^{q-2}\partial_x\tilde{u}\right]\partial_x v dx + (\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x\nu\partial_x v dx = 0\\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t\psi r dx + \alpha\int_\Omega \partial_t\partial_x\nu r dx + k\int_\Omega \partial_x\psi\partial_x r dx = 0,\\ (\nu(0,x),\psi(0,x)) = (0,0), \quad \rho\partial_t\nu(0,x) = 0.\end{array}\right. \tag{2.22}$$

Manifestement, la principale difficulté pour obtenir une égalité d'énergie nous donnant le résultat d'unicité réside ici dans la coexistence du terme hyperbolique du second ordre lorsque $\rho \neq 0$ et du terme non linéaire traduit par un $q-$Laplacien appliqué à u.
Afin de pouvoir traiter ce terme hyperbolique du second ordre et éliminer les termes de couplage liant les deux équations, on est conduit à prendre $v = \partial_t\nu$ comme fonction-test dans la première équation de (2.22) et $r = \psi$ dans la seconde. Cette contrainte liée à la présence du terme dérivée d'ordre deux en temps dans l'équation en u ne permet pas d'utiliser la propriété de monotonie du q-laplacien. C'est la raison pour laquelle nous avons cherché l'existence de solutions (u,p) avec u à valeurs dans $W^{1,\infty}(\Omega)$. On veut donc choisir $v = \partial_t\nu$ dans (2.22). Cependant, $\partial_t\nu(t)$ n'est que dans $H_0^1(\Omega)$ et non dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ ce qui est un obstacle au traitement du terme lié à $\partial_t^2\nu$. C'est pourquoi on va considérer comme fonction-test le quotient différentiel de ν. On prend donc $v = \nu_\tau = \frac{1}{\tau}(\nu(t+\tau) - \nu(t))$ avec $\tau > 0$ et $r = \psi$. On a en sommant les deux relations ainsi obtenues :

$$\begin{array}{l}\rho < \partial_t^2\nu, \nu_\tau >_{W^{-1,q^*}(\Omega),W_0^{1,q}(\Omega)} +(\lambda+2\mu)\displaystyle\int_\Omega \partial_x\nu\partial_x\nu_\tau dx - \alpha\int_\Omega \psi\partial_x\nu_\tau dx\\ +\mu^* \displaystyle\int_\Omega \left[|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u - |\partial_x\tilde{u}|^{q-2}\partial_x\tilde{u}\right]\partial_x\nu_\tau dx + \lambda^*\int_\Omega \partial_t\partial_x\nu\partial_x\nu_\tau dx\\ +c_0\displaystyle\int_\Omega \partial_t\psi\psi dx + \alpha\int_\Omega \partial_t\partial_x\nu\psi dx + k\int_\Omega |\partial_x\psi|^2 dx = 0.\end{array} \tag{2.23}$$

Soit $s \in]0,T[$. En intégrant (2.23) de 0 à s, il vient :

$$\begin{aligned}
&\rho\int_0^s < \partial_t^2\nu, \nu_\tau >_{W^{-1,q^*}(\Omega),W_0^{1,q}(\Omega)} dt + (\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega \partial_x\nu\partial_x\nu_\tau dxdt \\
&-\alpha\int_0^s\int_\Omega \psi\partial_x\nu_\tau dxdt + \mu^*\int_0^s\int_\Omega \left[|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u - |\partial_x\tilde{u}|^{q-2}\partial_x\tilde{u}\right]\partial_x\nu_\tau dxdt \\
&+\lambda^*\int_0^s\int_\Omega \partial_t\partial_x\nu\partial_x\nu_\tau dxdt + \frac{c_0}{2}\int_\Omega |\psi|^2(s)dx \\
&+\alpha\int_0^s\int_\Omega \partial_t\partial_x\nu\psi dxdt + k\int_0^s\int_\Omega |\partial_x\psi|^2 dxdt = 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Comme $\lim_{\tau\to 0}\nu_\tau = \partial_t\nu(t)$ dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ puisque $\partial_t\nu \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, le seul terme qui pose problème lorsqu'on passe à la limite lorsque τ tend vers zéro est le terme hyperbolique du second ordre. En utilisant une intégration par parties par rapport au temps sur ce terme, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\rho\int_0^s < \partial_t^2\nu, \nu_\tau >_{W^{-1,q^*}(\Omega),W_0^{1,q}(\Omega)} dt = &-\frac{\rho}{\tau}\int_0^s\int_\Omega \partial_t\nu(\partial_t\nu(t+\tau)-\partial_t\nu(t))dxdt \\
&+\frac{\rho}{\tau}\int_\Omega \partial_t\nu(s)(\nu(s+t)-\nu(s))dx
\end{aligned} \tag{2.25}$$

puisque $\rho\partial_t\nu(0) = 0$ par définition.
Or on a l'égalité $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, $x(y-x) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2 - (x-y)^2)$. Appliquée au premier terme dans le membre de droite de (2.25), cette relation nous donne que :

$$\begin{aligned}
\rho\int_0^s < \partial_t^2\nu, \nu_\tau >_{W^{-1,q^*}(\Omega),W_0^{1,q}(\Omega)} dt = &-\frac{\rho}{2\tau}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\nu(t+\tau)|^2 dxdt \\
&+\frac{\rho}{2\tau}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\nu(t)|^2 dxdt \\
&+\frac{\rho}{2\tau}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\nu(t)-\partial_t\nu(t+\tau)|^2 dxdt \\
&+\frac{\rho}{\tau}\int_\Omega \partial_t\nu(s)(\nu(s+t)-\nu(s))dx.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Par ailleurs, en effectuant un changement de variables, on a :

$$\begin{aligned}
&-\frac{\rho}{2\tau}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\nu(t+\tau)|^2dxdt + \frac{\rho}{2\tau}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\nu(t)|^2dxdt = \\
&-\frac{\rho}{2\tau}\int_\tau^{s+\tau}\int_\Omega |\partial_t\nu(t)|^2dxdt + \frac{\rho}{2\tau}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\nu(t)|^2dxdt = \\
&-\frac{\rho}{2\tau}\int_s^{s+\tau}\int_\Omega |\partial_t\nu(t)|^2dxdt + \frac{\rho}{2\tau}\int_0^\tau\int_\Omega |\partial_t\nu(t)|^2dxdt.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Mais en utilisant la première formule de la moyenne : $\exists c_1 \in]s, s+\tau[$ et $\exists c_2 \in]0,\tau[$ tels que

$$\begin{aligned}
&-\frac{\rho}{2\tau}\int_s^{s+\tau}\int_\Omega |\partial_t\nu(t)|^2dxdt + \frac{\rho}{2\tau}\int_0^\tau\int_\Omega |\partial_t\nu(t)|^2dxdt = \\
&-\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t\nu(c_1)|^2dx + \frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t\nu(c_2)|^2dx.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Comme de plus le réel $\frac{\rho}{2\tau}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\nu(t)-\partial_t\nu(t+\tau)|^2dxdt$ est positif, (2.26) devient :

$$\begin{aligned}
\rho\int_0^s < \partial_t^2\nu, \nu_\tau >_{W^{-1,q^*}(\Omega), W_0^{1,q}(\Omega)} dt \geq &-\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t\nu(c_1)|^2dx + \frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t\nu(c_2)|^2dx \\
&+\frac{\rho}{\tau}\int_\Omega \partial_t\nu(s)(\nu(s+t)-\nu(s))dx
\end{aligned}$$

et en passant à la limite dans (2.24) lorsque $\tau \to 0$, on obtient alors que pour presque tout s dans $]0,T[$:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t\nu|^2(s)dx + \lambda^*\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x\nu|^2dxdt + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x\nu|^2(s)dx \\
&+\frac{c_0}{2}\int_\Omega |\psi|^2(s)dx + k\int_0^s\int_\Omega |\partial_x\psi|^2dxdt \\
&\leq \mu^*\int_0^s\int_\Omega [|\partial_x\tilde{u}|^{q-2}\partial_x\tilde{u} - |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u]\partial_t\partial_x\nu dxdt.
\end{aligned}\right. \tag{2.29}$$

Comme u et $\tilde{u}$ sont dans $L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$, on peut maintenant définir le réel :

$$m = (q-1)\max\left\{\sup_{x\in Q}|\partial_x u|^{q-2}, \sup_{x\in Q}|\partial_x\tilde{u}|^{q-2}\right\}.$$

Alors, le second membre de (2.29) peut se majorer par :

$$\begin{aligned}\left|\mu^* \int_0^s \int_\Omega [|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u - |\partial_x \tilde{u}|^{q-2}\partial_x \tilde{u}]\partial_t\partial_x \nu dxdt\right| &\leq \mu^* \int_0^s \int_\Omega m|\partial_x \nu||\partial_t\partial_x \nu|dxdt \\ &\leq C \int_0^s \int_\Omega m^2 |\partial_x \nu|^2 dxdt \\ &+ \frac{\lambda^*}{2}\int_0^s \int_\Omega |\partial_t\partial_x \nu|^2 dxdt\end{aligned}$$

et l'on obtient finalement que pour presque tout $s \in]0, T[$,

$$\begin{aligned}&\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t \nu|^2(s)dx + \frac{\lambda^*}{2}\int_0^s \int_\Omega |\partial_t\partial_x \nu|^2 dxdt + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x \nu|^2(s)dx \\ &+\frac{c_0}{2}\int_\Omega |\psi|^2(s)dx + k\int_0^s \int_\Omega |\partial_x \psi|^2 dxdt \leq C\int_0^s \int_\Omega m^2|\partial_x \nu|^2 dxdt.\end{aligned}$$

En particulier, on a pour presque tout $s \in]0, T[$,

$$\frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x \nu|^2(s)dx \leq C\int_0^s \int_\Omega m^2|\partial_x \nu|^2 dxdt$$

et le lemme de Gronwall rappelé au paragraphe 2.2 et appliqué à cette inégalité nous permet d'affirmer que, pour presque tout s dans $]0, T[$, $\displaystyle\int_\Omega |\partial_x \nu|^2(s)dx = 0$.
Ainsi, pour presque tout s dans $]0, T[$, $\partial_x \nu = 0$ dans Ω et on obtient :

$$\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t \nu|^2(s)dx + \frac{\lambda^*}{2}\int_0^s \int_\Omega |\partial_t\partial_x \nu|^2 dxdt + \frac{c_0}{2}\int_\Omega |\psi|^2(s)dx + k\int_0^s \int_\Omega |\partial_x \psi|^2 dxdt \leq 0$$

ce qui implique que $\nu = \psi = 0$ dans $\Omega \times (0, T)$ et termine la preuve de l'unicité de la solution (u, p) du problème (2.8).

Nous avons dans ce paragraphe 2.3 donné un résultat d'existence grâce à des techniques de compacité, valable lorsque $q \geq 2$ et $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Dans ce cas, les solutions obtenues sont très régulières puisque l'on a prouvé que $\partial_x u \in L^\infty(Q)$ ce qui nous a permis de montrer l'unicité de la solution. En fait, on peut donner un résultat d'existence dès que $q > 1$ et $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ en utilisant le lemme 2.13 et une méthode de monotonie. La solution obtenue est alors moins régulière et ce manque de régularité ne nous a pas permis de résoudre le problème de l'unicité. La justification de ce résultat d'existence pour $q > 1$ fait l'objet du sous-paragraphe 2.4.2 de la section suivante car il prend appui sur les techniques développées pour l'étude du modèle quasi-statique $\rho = 0$.

2.4 Le cas $q > 1$

2.4.1 Le modèle quasi-statique

Dans ce paragraphe on s'intéresse au cas où $\rho = 0$. C'est ce que l'on nomme le modèle quasi-statique qui décrit les mouvements dans le milieu poreux quand les effets de l'inertie sont négligeables. Ce modèle prend en compte les lentes déformations dues à la consolidation et aux infiltrations du fluide dans la matrice poreuse. L'étude mathématique développée au paragraphe 2.3 a permis d'établir des résultats d'existence et d'unicité lorsque $q \geq 2$ et $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Ici, on va montrer qu'une étude directe de ce cas permet d'améliorer les résultats déjà obtenus grâce à l'utilisation d'une méthode de monotonie. En effet, on va prouver que le système quasi-statique est bien posé dès que $q > 1$ et $u_0 \in W = H_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ seulement. Remarquons que $W = H_0^1(\Omega)$, $W' = H^{-1}(\Omega)$ si $q \leq 2$ et $W = W_0^{1,q}(\Omega)$, $W' = W^{-1,q^*}(\Omega)$ si $q > 2$.
La formulation variationnelle associée au problème est ici la suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (u,p) \in L^\infty(0,T;W) \times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ tel que} \\ \partial_t u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ \partial_t p \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ \text{vérifiant pour presque tout } t \text{ dans }]0,T[, \forall (v,r) \in W \times H_0^1(\Omega) : \\ \lambda^* \displaystyle\int_\Omega \partial_t \partial_x u \partial_x v dx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x u \partial_x v dx + \mu^* \int_\Omega |\partial_x u|^{q-2} \partial_x u \partial_x v dx \\ -\alpha \displaystyle\int_\Omega p \partial_x v dx = \int_\Omega f v dx, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p r dx + \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u r dx + k \int_\Omega \partial_x p \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx, \\ (u(0,x), p(0,x)) = (u_0(x), p_0(x)) \end{array}\right. \tag{2.30}$$

avec $u_0 \in W$ et $p_0 \in H_0^1(\Omega)$. On va montrer le :

Théorème 2.18.
Soit $q > 1$, $u_0 \in W$, $p_0 \in H_0^1(\Omega)$. Alors, pour tout f et $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, le système variationnel (2.30) admet une unique solution (u,p).

Afin de montrer que (2.30) définit un unique couple (u,p), on procède en deux étapes. La première concerne l'existence d'une solution de (2.30). Sa construction est ici encore basée sur une méthode d'approximation de Galerkin comme au paragraphe 2.3 mais en utilisant cette fois-ci une méthode de monotonie pour le traitement du terme non linéaire. On se pose ensuite la question de l'unicité d'une telle solution. La démonstration fait appel à une certaine classe de fonctions-test, dites de Ladyzenskaja [40, 43], qui permet de tirer parti de la monotonie de l'opérateur non linéaire pour obtenir une inégalité d'énergie.

2.4.1.1 Existence

On considère donc le système différentiel (2.10) dans le cas où $\rho = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda^* \displaystyle\int_\Omega \partial_t \partial_x u_m \partial_x w_j dx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x u_m \partial_x w_j dx \\ +\mu^* \displaystyle\int_\Omega |\partial_x u_m|^{q-2} \partial_x u_m \partial_x w_j dx - \alpha \int_\Omega p_m \partial_x w_j dx = \int_\Omega f w_j dx, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p_m w_j dx + \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u_m w_j dx + k \int_\Omega \partial_x p_m \partial_x w_j dx = \int_\Omega h w_j dx \end{array}\right. \tag{2.31}$$

pour tout $1 \leq j \leq m$, avec pour conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{l}(u_m(0), p_m(0)) = (u_{0m}, p_{0m}) \in V_m \times V_m \text{ telle que} \\ u_{0m} \to u_0 \text{ dans } W \text{ et } p_{0m} \to p_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega).\end{array}\right. \tag{2.32}$$

D'après le paragraphe 2.3, $(u_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ existe et est unique, pour toute valeur de m. De plus, d'après le lemme 2.13 et la remarque 2.14, $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sont respectivement bornées dans les espaces $L^\infty(0,T;W) \cap W(0,T;H_0^1(\Omega),H_0^1(\Omega))$ et $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W(0,T;L^2(\Omega),L^2(\Omega))$. On en déduit donc l'existence d'une suite extraite de $(u_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ que l'on note également $(u_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rll} u_m & \to u & \text{dans } L^\infty(0,T;W) \text{ faible } * \,; \\ |\partial_x u_m|^{q-2}\partial_x u_m & \to \eta & \text{dans } L^\infty(0,T;L^{q^*}(\Omega)) \text{ faible } *\,; \\ \partial_t u_m & \to \partial_t u & \text{dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible}\,; \\ p_m & \to p & \text{dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible } *\,; \\ \partial_t p_m & \to \partial_t p & \text{dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible.} \end{array}\right. \tag{2.33}$$

On en déduit alors que le couple (u,p) défini dans (2.33) comme la limite de $(u_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est solution du problème variationnel : $\forall (v,r) \in W \times H_0^1(\Omega)$

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda^* \displaystyle\int_\Omega \partial_t \partial_x u \partial_x v dx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x u \partial_x v dx + \mu^* \int_\Omega \eta \partial_x v dx \\ -\alpha \displaystyle\int_\Omega p \partial_x v dx = \int_\Omega f v dx, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p r dx + \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u r dx + k \int_\Omega \partial_x p \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx \end{array}\right. \tag{2.34}$$

qui diffère de la formulation initiale (2.30) uniquement par le troisième terme de la première équation, si l'on met de côté pour l'instant la question des conditions initiales.
On s'intéresse maintenant au terme η et on se propose de vérifier que $\eta = |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u$ en utilisant une méthode de monotonie pour laquelle les propriétés de convergence (2.33) sont suffisantes à la différence du paragraphe 2.3 où l'utilisation d'arguments de compacité nécessitait plus de régularité.
Soit $(\eta_m(v))_{m\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $v \in L^2(0,T;W)$ par :

$$\eta_m(v) = \mu^* \int_0^s \int_\Omega \left[|\partial_x v|^{q-2}\partial_x v - |\partial_x u_m|^{q-2}\partial_x u_m\right][\partial_x v - \partial_x u_m]dxdt. \tag{2.35}$$

D'après la monotonie de la fonction $\tau \mapsto |\tau|^{q-2}\tau$, la suite $(\eta_m(v))_{m\in\mathbb{N}^*}$ est positive. La première équation de (2.31) nous donne alors :

$$\left\{\begin{aligned} \mu^* \int_\Omega |\partial_x u_m|^{q-2}\partial_x u_m \partial_x u_m dx &= \int_\Omega f u_m dx - \lambda^* \int_\Omega \partial_t\partial_x u_m \partial_x u_m dx \\ &\quad - (\lambda + 2\mu)\int_\Omega |\partial_x u_m|^2 dx + \alpha \int_\Omega p_m \partial_x u_m dx. \end{aligned}\right. \tag{2.36}$$

En injectant l'égalité (2.36) dans l'expression (2.35) de $\eta_m(v)$, il vient :

$$\left\{\begin{aligned} \eta_m(v) = {}& \underbrace{\mu^* \int_0^s \int_\Omega |\partial_x v|^{q-2}\partial_x v[\partial_x v - \partial_x u_m]dxdt}_{(a)} \\ & - \underbrace{\mu^* \int_0^s \int_\Omega |\partial_x u_m|^{q-2}\partial_x u_m \partial_x v dxdt}_{(b)} + \underbrace{\int_0^s \int_\Omega f u_m dxdt}_{(c)} \\ & + \underbrace{\alpha \int_0^s \int_\Omega p_m \partial_x u_m dxdt}_{(d)} - \underbrace{(\lambda + 2\mu)\int_0^s \int_\Omega |\partial_x u_m|^2 dxdt}_{(e)} \\ & - \underbrace{\lambda^* \int_0^s \int_\Omega \partial_t \partial_x u_m \partial_x u_m dxdt}_{(f)}. \end{aligned}\right. \tag{2.37}$$

On va maintenant utiliser les résultats de convergence (2.33). Les trois premiers termes de (2.37) se traitent très facilement par définition de la convergence faible et faire tendre m vers l'infini revient à remplacer u_m par u dans les intégrales (a) et (c), et $|\partial_x u_m|^{q-2}\partial_x u_m$ par η dans l'intégrale (b). Le quatrième terme (d) peut sembler plus difficile à traiter car il fait intervenir simultanément p_m et $\partial_x u_m$. Cependant,

ce n'est pas une réelle difficulté puisque p_m converge vers p dans $H^1(Q)$ faible, et donc dans $L^2(Q)$ fort d'après l'injection compacte de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$, tandis que $\partial_x u_m$ converge vers $\partial_x u$ dans $L^2(Q)$ faible. Ainsi, le quatrième terme (d) converge quand m tend vers l'infini vers $\int_\Omega p\partial_x u dx$.
Pour le cinquième terme (e), puisque $(\partial_x u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\partial_x u$ dans $L^2(Q)$ faible, on a, par propriété de la convergence faible :

$$\underline{\lim} \int_0^s \int_\Omega |\partial_x u_m|^2 dxdt \geq \int_0^s \int_\Omega |\partial_x u|^2 dxdt. \tag{2.38}$$

Enfin, on a pour tout $s \in]0,T[$,

$$\int_0^s \int_\Omega \partial_t \partial_x u_m \partial_x u_m dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_x u_m|^2(s)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_x u_{0m}|^2 dx.$$

Or, quand m tend vers l'infini, $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$ fort et pour tout s, $(\partial_x u_m(s))_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\partial_x u(s)$ faible dans $L^2(\Omega)$ d'après (2.33). On a alors :

$$\underline{\lim} \int_0^s \int_\Omega \partial_t \partial_x u_m \partial_x u_m dxdt \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_x u|^2(s)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_x u_0|^2 dx.$$

Mais comme une intégration par parties sur $[0,s]$ nous donne la relation :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_x u|^2(s)ds - \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_x u_0|^2 dx = \int_0^s \int_\Omega \partial_t \partial_x u \partial_x u dxdt,$$

on a en fait l'inégalité :

$$\underline{\lim} \int_0^s \int_\Omega \partial_t \partial_x u_m \partial_x u_m dxdt \geq \int_0^s \int_\Omega \partial_t \partial_x u \partial_x u dxdt. \tag{2.39}$$

Les deux inégalités (2.38) et (2.39) nous permettent ainsi de contrôler $\overline{\lim}\ \eta_m(v)$ grâce à (2.37) et d'en déduire que :

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\ \eta_m(v) \leq \mu^* &\int_0^s \int_\Omega |\partial_x v|^{q-2}\partial_x v[\partial_x v - \partial_x u]dxdt - \mu^* \int_0^s \int_\Omega \eta \partial_x v dxdt \\ &+ \int_0^s \Big[\int_\Omega fudx - \lambda^* \int_\Omega \partial_t \partial_x u \partial_x u dx - (\lambda + 2\mu)\int_\Omega |\partial_x u|^2 dx \\ &+\alpha \int_\Omega p\partial_x u dx\Big]\, dt.\end{aligned}$$

Ensuite, en prenant $v = u$ dans la première équation de (2.34), on a l'égalité suivante :

$$\int_\Omega fudx - \lambda^* \int_\Omega \partial_t \partial_x u \partial_x udx - (\lambda + 2\mu) \int_\Omega |\partial_x u|^2 dx + \alpha \int_\Omega p\partial_x udx = \mu^* \int_\Omega \eta \partial_x udx$$

qui nous permet d'arriver à l'inégalité, $\forall v \in L^2(0, T; W)$:

$$\overline{\lim}\ \eta_m(v) \leq \mu^* \int_0^s \int_\Omega \left[|\partial_x v|^{q-2} \partial_x v - \eta\right] [\partial_x v - \partial_x u] dxdt. \tag{2.40}$$

Soit maintenant w donné dans $L^2(0, T; W)$. Pour tout $\gamma > 0$, $v = u + \gamma w$ est aussi dans $L^2(0, T; W)$. De plus, comme $\eta_m(v) \geq 0$, d'après (2.35) et la monotonie de la fonction $\tau \mapsto |\tau|^{q-2}\tau$, on a aussi $\overline{\lim}\ \eta_m \geq 0$ et (2.40) devient : $\forall w \in L^2(0, T; W)$,

$$\int_0^s \int_\Omega \left[|\partial_x u + \gamma \partial_x w|^{q-2} (\partial_x u + \gamma \partial_x w) - \eta\right] \partial_x wdxdt \geq 0$$

ce qui implique lorsque γ tend vers zéro

$$\forall w \in L^2(0, T; W), \ \int_0^s \int_\Omega [|\partial_x u|^{q-2} \partial_x u - \eta] \partial_x wdxdt \geq 0. \tag{2.41}$$

En considérant successivement (2.41) pour w et $-w$, on obtient que :

$$\forall w \in L^2(0, T; W), \ \int_0^s \int_\Omega [|\partial_x u|^{q-2} \partial_x u - \eta] \partial_x wdxdt = 0.$$

Donc, pour tout $w \in W$ et pour presque tout $t \in]0, T[$:

$$\int_\Omega |\partial_x u|^{q-2} \partial_x u \partial_x wdx = \int_\Omega \eta \partial_x wdx.$$

La formulation variationnelle (2.34) devient alors la suivante : le couple (u, p) est solution du problème :
pour tout $(v, r) \in W \times H_0^1(\Omega)$,

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^* \displaystyle\int_\Omega \partial_t \partial_x u \partial_x vdx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x u \partial_x vdx + \mu^* \int_\Omega |\partial_x u|^{q-2} \partial_x u \partial_x vdx \\ -\alpha \displaystyle\int_\Omega p\partial_x vdx = \int_\Omega fvdx, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t prdx + \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x urdx + k \int_\Omega \partial_x p \partial_x rdx = \int_\Omega hrdx. \end{array}\right.$$

Pour prouver le résultat d'existence du théorème 2.18, il suffit de vérifier que la trace du couple (u,p) à $t=0$ est donnée par le couple (u_0,p_0). D'après (2.33), $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $W(0,T;H_0^1(\Omega),H_0^1(\Omega))$ et $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ dans $W(0,T;L^2(\Omega),L^2(\Omega))$.
En utilisant l'injection continue de ces espaces dans l'espace $C^0([0,T];L^2(\Omega))$ comme rappelé au paragraphe 2.2, on peut trouver, pour tout $t\in[0,T]$, une sous-suite $(u_m,p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ telle que $(u_m(t),p_m(t))$ converge vers $(u(t),p(t))$ dans $(L^2(\Omega))^2$ faible quand m tend vers l'infini. En particulier on a donc que $(u_m(0,x),p_m(0,x))$ converge vers $(u(0,x),p(0,x))$ dans $(L^2(\Omega))^2$ faible.
Or par hypothèse, $u_m(0,x)=u_{0m}(x)$ converge vers $u_0(x)$ dans W fort et $p_m(0,x)=p_{0m}(x)$ converge vers $p_0(x)$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort quand m tend vers l'infini. Ainsi, d'après l'unicité de la limite faible, on a $(u(0,x),p(0,x))=(u_0(x),p_0(x))$ dans Ω ce qui achève la preuve de l'existence d'une solution de (2.30).

2.4.1.2 Unicité

Dans cette partie, on va montrer le résultat d'unicité sous les hypothèses $u_0\in W$ et $q>1$.
Soient (u,p) et $(\tilde{u},\tilde{p})$ deux solutions du problème (2.30) associées au même jeu de conditions initiales. On note encore (ν,ψ) la différence entre les deux solutions : $\nu=u-\tilde{u}$ et $\psi=p-\tilde{p}$. Le couple (ν,ψ) vérifie les propriétés :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(\nu,\psi)\in L^\infty(0,T;W)\times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
\partial_t\nu\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\quad \partial_t\psi\in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
\text{pour presque tout } t \text{ dans }]0,T[,\ \forall(v,r)\in W\times H_0^1(\Omega)\\
\lambda^*\displaystyle\int_\Omega \partial_t\partial_x\nu\partial_x v dx+(\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x\nu\partial_x v dx\\
+\mu^*\displaystyle\int_\Omega \left[|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u-|\partial_x\tilde{u}|^{q-2}\partial_x\tilde{u}\right]\partial_x v dx-\alpha\int_\Omega \psi\partial_x v dx=0\\
c_0\displaystyle\int_\Omega \partial_t\psi r dx+\alpha\int_\Omega \partial_t\partial_x\nu r dx+k\int_\Omega \partial_x\psi\partial_x r dx=0
\end{array}
\right.
\tag{2.42}
$$

avec les conditions initiales homogènes $(\nu(0,x),\psi(0,x))=(0,0)$.
Le traitement du terme non linéaire constitue ici aussi un point délicat. Afin d'exploiter la monotonie du terme non linéaire, on veut choisir $v=\nu$ comme fonction-test dans la première équation. Alors, afin de pouvoir éliminer les termes de couplage entre les deux équations, on utilise pour la deuxième équation une fonction-test de Ladyzenskaya.

Soit φ définie par :

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^s \psi(\sigma,x)d\sigma & \text{si} \quad t \le s, \\ 0 & \text{si} \quad t \ge s. \end{cases}$$

Alors, si on pose $\tilde{\varphi}(t,x) = \displaystyle\int_0^t \psi(\sigma,x)d\sigma$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \varphi(t,x) = \tilde{\varphi}(s,x) - \tilde{\varphi}(t,x) & \varphi(0,x) = \tilde{\varphi}(s,x) & \varphi(s,x) = 0 \\ \partial_t\varphi(t,x) = -\psi(t,x) & \partial_t\varphi(0,x) = 0 & \partial_t\varphi(s,x) = -\psi(s,x). \end{cases} \tag{2.43}$$

On considère le couple (ν,φ) comme fonction-test dans (2.42). Après intégration par rapport au temps sur l'intervalle $[0,s]$, il vient :

$$\begin{cases} \displaystyle\frac{\lambda^*}{2}\int_\Omega |\partial_x\nu|^2(s)dx + (\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega |\partial_x\nu|^2 dxdt + c_0\int_0^s\int_\Omega \partial_t\psi\varphi dxdt \\ \displaystyle +\alpha\int_0^s\int_\Omega [\varphi\partial_t\partial_x\nu - \psi\partial_x\nu]dxdt + k\int_0^s\int_\Omega \partial_x\psi\partial_x\varphi dxdt \\ \displaystyle +\mu^*\int_0^s\int_\Omega \left[|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u - |\partial_x\tilde{u}|^{q-2}\partial_x\tilde{u}\right]\partial_x\nu dxdt = 0. \end{cases} \tag{2.44}$$

Or, en utilisant une intégration par parties et les propriétés (2.43), on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^s\int_\Omega \partial_t\psi\varphi dxdt = -\int_0^s\int_\Omega \psi\partial_t\varphi dxdt = \int_0^s\int_\Omega |\psi|^2 dxdt \ ; \\
&\int_0^s\int_\Omega [\varphi\partial_t\partial_x\nu - \psi\partial_x\nu]dxdt = -\int_0^s\int_\Omega [\partial_t\varphi\partial_x\nu + \psi\partial_x\nu]dxdt = 0 \ ; \\
&\int_0^s\int_\Omega \partial_x\psi\partial_x\varphi dxdt = -\int_0^s\int_\Omega \partial_t\partial_x\varphi\partial_x\varphi dxdt \\
&\qquad\qquad = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_x\varphi|^2(s)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_x\varphi|^2(0)dx \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_x\tilde{\varphi}|^2(s)dx
\end{aligned}$$

et (2.44) entraîne alors en utilisant de plus la monotonie de l'application $\tau \longrightarrow |\tau|^{q-2}\tau$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda^*}{2}\int_\Omega |\partial_x\nu|^2(s)dx + (\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega |\partial_x\nu|^2 dxdt + c_0\int_0^s\int_\Omega |\psi|^2 dxdt \\
&+\frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x\tilde{\varphi}|^2(s)dx \le 0.
\end{aligned}$$

On peut donc en déduire que $\nu(t,x) = \psi(t,x) = 0$, ce qui établit l'unicité de la solution du problème (2.30) et met fin à la preuve du théorème 2.18.

2.4.2 Un résultat d'existence pour le modèle de consolidation complet

La méthode de monotonie développée dans le paragraphe 2.4.1.1 s'adapte lorsque la première équation est hyperbolique du second ordre en temps. Cependant, la démonstration de l'unicité développée sous ces hypothèses n'est plus valable pour le modèle de Biot complet, ce qui nous a amené à faire l'étude du paragraphe 2.3. On peut tout de même énoncer le résultat d'existence du :

Théorème 2.19.
Soit $\rho > 0$, $u_0 \in W$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $p_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $q > 1$. Pour tous $f, h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, le problème (2.8) admet au moins une solution.

Démonstration.
On dispose comme dans le cas quasi-statique des résultats du lemme 2.13 qui entraîne, outre les propriétés de convergence utilisées au paragraphe 2.4.1.1, que :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t^2 u_m \to \partial_t^2 u \text{ dans } L^2(0,T;(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))') \text{ faible}\,; \\ \partial_t u_m \to \partial_t u \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort d'après le lemme 2.5}\,; \\ \text{et pour presque tout } s \in]0,T[\\ \partial_t u_m(s) \to \partial_t u(s) \text{ dans } L^2(\Omega \text{ fort}\,; \\ u_m(s) \to u(s) \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible et } L^2(\Omega) \text{ fort.} \end{array}\right. \tag{2.45}$$

Les compléments à apporter au paragraphe 2.4.1 sont dus au terme du second ordre $\rho\partial_t^2 u$ (respectivement $\rho\partial_t^2 u_m$) présent dans la première équation de (2.8) (respectivement de (2.10)). Il faut ajouter au second membre de (2.35) le terme $-\rho\int_\Omega \partial_t^2 u_m u_m dx$ et au second membre de (2.36) l'intégrale $-\rho\int_0^s\int_\Omega \partial_t^2 u_m u_m dxdt$. Pour passer à la limite en m dans ce terme, on écrit l'égalité :

$$\begin{aligned} -\rho\int_0^s\int_\Omega \partial_t^2 u_m u_m dxdt = \rho\int_0^s\int_\Omega |\partial_t u_m|^2 dxdt - \rho\int_\Omega \partial_t u_m(s) u_m(s) dx \\ + \rho\int_\Omega u_{1m} u_{0m} dx \end{aligned} \tag{2.46}$$

et on utilise les résultats de convergence (2.11) et (2.45). On en déduit :

$$\lim_{m\to+\infty}\left(-\rho\int_0^s\int_\Omega \partial_t^2 u_m u_m dxdt\right) = -\rho\int_0^s < \partial_t^2 u, u >_{W',W} dt.$$

Ce passage à la limite étant effectué, la démonstration se fait en suivant pas à pas la suite de la preuve de l'existence du paragraphe 2.4.1. ∎

2.5 Comparaison des modèles de Biot pour $\rho > 0$ et $\rho = 0$

Dans cette partie, on précise comment le modèle de consolidation de Biot avec $\rho > 0$ approche le modèle quasi-statique pour lequel $\rho = 0$. Afin d'obtenir des estimations pour comparer ces modèles, on utilise les techniques employées au paragraphe 2.4.1.2 pour prouver l'unicité quand $\rho = 0$, ce qui nous autorise à considérer $q > 1$. En effet, comme on l'a vu dans le sous-paragraphe 2.4.2, théorème 2.19, on peut considérer (u_ρ, p_ρ) une solution du modèle de Biot pour $\rho > 0$ avec les conditions initiales $(u_{0,\rho}, u_{1,\rho}, p_{0,\rho}) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et (u, p) la solution pour $\rho = 0$ avec les conditions initiales $(u_0, p_0) \in W \times H_0^1(\Omega)$.
Lorsque $q > 1$, (u_ρ, p_ρ) vérifie la formulation :

$$\left\{\begin{array}{l}
(u_\rho, p_\rho) \in L^\infty(0,T;W) \times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\
\partial_t u_\rho \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ \partial_t p_\rho \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ \rho\partial_t^2 u_\rho \in L^2(0,T;W'), \\
\text{pour presque tout } t \text{ dans }]0,T[,\ \forall (v,r) \in W \times H_0^1(\Omega) \\
\rho < \partial_t^2 u_\rho, v >_{W',W} + \lambda^* \displaystyle\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\rho \partial_x v dx - \alpha \int_\Omega p_\rho \partial_x v dx \\
+(\lambda + 2\mu) \displaystyle\int_\Omega \partial_x u_\rho \partial_x v dx + \mu^* \int_\Omega |\partial_x u_\rho|^{q-2} \partial_x u_\rho \partial_x v dx = \int_\Omega f v dx, \\
c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p_\rho r dx + \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u_\rho r dx + k \int_\Omega \partial_x p_\rho \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx, \\
(u_\rho(0,x), p_\rho(0,x)) = (u_{0,\rho}(x), p_{0,\rho}(x)),\ \rho\partial_t u_\rho(0,x) = \rho u_{1,\rho}(x)
\end{array}\right. \tag{2.47}$$

tandis que (u, p) vérifie (2.30). On désigne par $\nu = u_\rho - u$ et $\psi = p_\rho - p$ les fonctions à estimer. D'après (2.30) et (2.47), on sait que $\nu \in L^\infty(0,T;W)$ et $\psi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$.
On va montrer le résultat suivant :

Théorème 2.20.
On suppose que $(u_{0,\rho}, u_{1,\rho}, p_{0,\rho})_{\rho>0}$ est bornée dans $W \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
Alors, (ν, ψ) vérifie les estimations suivantes :

- $||\nu||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C(\rho^{1/4} + ||\partial_x u_{0,\rho} - \partial_x u_0||_{L^2(\Omega)} + ||p_{0,\rho} - p_0||_{L^2(\Omega)})$,
- $||\psi||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(\rho^{1/4} + ||\partial_x u_{0,\rho} - \partial_x u_0||_{L^2(\Omega)} + ||p_{0,\rho} - p_0||_{L^2(\Omega)})$;

et si $q > 2$,

- $||\nu||_{L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))} \leq C(\rho^{1/2q} + ||\partial_x u_{0,\rho} - \partial_x u_0||_{L^2(\Omega)}^{2/q} + ||p_{0,\rho} - p_0||_{L^2(\Omega)}^{2/q})$.

Si, lorsque ρ tend vers 0, $(u_{0,\rho}, p_{0,\rho})_{\rho>0}$ converge vers (u_0, p_0) dans $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ comme $\rho^{1/4}$, alors la suite $(u_\rho, p_\rho)_{\rho>0}$ converge vers (u, p) dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \times$

$L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et le taux de convergence est en $\mathcal{O}(\rho^{1/4})$. De plus, dans le cas $q>2$, $(u_\rho)_{\rho>0}$ converge vers u dans $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ comme $\rho^{1/2q}$.

Démonstration.
Soit $s\in]0,T[$.
On considère le couple de fonction-tests utilisé dans la démonstration de l'unicité de la solution du problème quasi-statique au paragraphe 2.4.1.2 à savoir (ν,φ) où l'on rappelle que φ est donnée par :

$$\varphi(t,x)=\left\{\begin{array}{lll}\displaystyle\int_t^s\psi(\sigma,x)d\sigma & \text{si} & t\leq s,\\ 0 & \text{si} & t\geq s.\end{array}\right.$$

En utilisant également la notation $\tilde{\varphi}=\displaystyle\int_0^t\psi(\sigma,x)d\sigma$ comme précédemment, on vérifie facilement que φ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll}\varphi(t,x)=\tilde{\varphi}(s,x)-\tilde{\varphi}(t,x) & \varphi(0,x)=\tilde{\varphi}(s,x) & \varphi(s,x)=0\\ \partial_t\varphi(t,x)=-\psi(t,x) & \partial_t\varphi(0,x)=-\psi(0,x) & \partial_t\varphi(s,x)=-\psi(s,x).\end{array}\right. \tag{2.48}$$

D'après les formulations (2.30) et (2.47) et pour le choix de fonctions-test précédent, le couple (ν,ψ) vérifie les relations :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lambda^*\int_\Omega\partial_t\partial_x\nu\partial_x\nu dx+(\lambda+2\mu)\int_\Omega|\partial_x\nu|^2dx-\alpha\int_\Omega\psi\partial_x\nu dx\\ \displaystyle+\mu^*\int_\Omega(|\partial_xu_\rho|^{q-2}\partial_xu_\rho-|\partial_xu|^{q-2}\partial_xu)\partial_x\nu dx=-\rho<\partial_t^2u_\rho,\nu>_{W',W}\end{array}\right. \tag{2.49}$$

et

$$c_0\int_\Omega\partial_t\psi\varphi dx+\alpha\int_\Omega\partial_t\partial_x\nu\varphi dx+k\int_\Omega\partial_x\psi\partial_x\varphi dx=0, \tag{2.50}$$

où l'on rappelle que $W=H_0^1(\Omega)$, $W'=H^{-1}(\Omega)$ si $q\leq 2$ et $W=W_0^{1,q}(\Omega)$, $W'=W^{-1,q^*}(\Omega)$ si $q\geq 2$.
En intégrant les équations (2.49) et (2.50) sur l'intervalle de temps $[0,s]$, on obtient une égalité variationnelle en ajoutant les deux relations obtenues. Une intégration par parties sur $[0,s]$ nous conduit, par le même type de calculs que ceux développés dans le paragraphe 2.4.1.2, à :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\frac{\lambda^*}{2}\int_\Omega(\partial_x\nu)^2(s)dx+(\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega(\partial_x\nu)^2dxdt\\ \displaystyle+\mu^*\int_0^s\int_\Omega(|\partial_xu_\rho|^{q-2}\partial_xu_\rho-|\partial_xu|^{q-2}\partial_xu)\partial_x\nu dxdt\\ \displaystyle+c_0\int_0^s\int_\Omega|\psi|^2dxdt+\frac{k}{2}\int_\Omega(\partial_x\tilde{\varphi})^2(s)dx=A\end{array}\right. \tag{2.51}$$

où

$$A = \frac{\lambda^*}{2}\int_\Omega (\partial_x \nu)^2(0)dx - \alpha \int_\Omega \partial_x \nu(0)\tilde{\varphi}(s)dx - \rho \int_0^s < \partial_t^2 u_\rho, \nu >_{W',W} dt$$
$$- c_0 \int_\Omega \psi(0)\tilde{\varphi}(s)dx.$$

Tous les termes dans le membre de gauche de (2.51) étant positifs, y compris le terme non linéaire du fait de la monotonie de l'opérateur $\tau \mapsto |\tau|^{q-2}\tau$, il ne reste plus qu'à contrôler les quatres termes définissant A.
Une intégration par parties par rapport au temps donne que, pour presque tout $s \in]0, T[$:

$$\rho \int_0^s < \partial_t^2 u_\rho, \nu >_{W',W} dt = \rho \int_\Omega \partial_t u_\rho(s)\nu(s)dx - \rho \int_\Omega \partial_t u_\rho(0)\nu(0)dx$$
$$- \rho \int_0^s \int_\Omega \partial_t u_\rho \partial_t \nu dx dt.$$

D'après la définition de ν, on a $\nu(0) = u_{0,\rho} - u_0$ et $\partial_t \nu = \partial_t(u_\rho - u)$. L'égalité précédente devient donc :

$$\rho \int_0^s < \partial_t^2 u_\rho, \nu >_{W',W} dt = \rho \int_\Omega \partial_t u_\rho(s)\nu(s)dx$$
$$- \rho \int_\Omega u_{1,\rho}(u_{0,\rho} - u_0)dx - \rho \int_0^s \int_\Omega \partial_t u_\rho \partial_t(u_\rho - u)dx dt.$$

De plus en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on montre qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$\begin{cases} \alpha \displaystyle\int_\Omega \partial_x \nu(0)\tilde{\varphi}(s)dx \leq \kappa \int_\Omega |\partial_x \nu|^2(0)dx + \frac{k}{6}\int_\Omega |\partial_x \tilde{\varphi}|^2(s)dx, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \psi(0)\tilde{\varphi}(s)dx \leq \kappa \int_\Omega |\psi|^2(0)dx + \frac{k}{6}\int_\Omega |\partial_x \tilde{\varphi}|^2(s)dx, \\ \rho \displaystyle\int_\Omega \partial_t u_\rho(s)\nu(s)dx \leq \frac{\lambda^*}{4}\int_\Omega |\partial_x \nu|^2(s)dx + \rho\kappa \int_\Omega \rho |\partial_t u_\rho|^2(s)dx \end{cases}$$

où l'on a également utilisé une inégalité de Poincaré afin d'obtenir la dernière relation.
Enfin, une dernière majoration s'obtient en utilisant uniquement l'inégalité de Cauchy-

Schwarz :

$$\begin{aligned}\rho \int_0^s \int_\Omega \partial_t u_\rho \partial_t (u_\rho - u) dx dt &= \rho \int_0^s \int_\Omega |\partial_t u_\rho|^2 dx dt - \rho \int_0^s \int_\Omega \partial_t u_\rho \partial_t u dx dt \\ &\leq \rho \int_0^s \int_\Omega |\partial_t u_\rho|^2 dx dt \\ &+ \sqrt{\rho} ||\sqrt{\rho}\partial_t u_\rho||_{L^2(Q)} ||\partial_t u||_{L^2(Q)}.\end{aligned}$$

Mais le lemme 2.13 assure que la suite $(\partial_t u_\rho)_{\rho>0}$ est bornée dans $L^2(Q)$ indépendamment de ρ et que $(\sqrt{\rho}\partial_t u_\rho)_{\rho>0}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ indépendamment de ρ également. Ces propriétés nous permettent donc de trouver $\kappa > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}A \leq \frac{k}{3} \int_\Omega |\partial_x \tilde{\varphi}|^2(s) dx + \frac{\lambda^*}{4} \int_\Omega |\partial_x \nu|^2(s) dx + \kappa\rho + \kappa\sqrt{\rho} + \kappa ||\partial_x u_{0,\rho} - \partial_x u_0||^2_{L^2(\Omega)} \\ + \kappa ||p_{0,\rho} - p_0||^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

L'égalité (2.51) conduit alors aux estimation suivantes :

$$\begin{aligned}||\nu||_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq C(\rho^{1/4} + ||\partial_x u_{0,\rho} - \partial_x u_0||_{L^2(\Omega)} + ||p_{0,\rho} - p_0||_{L^2(\Omega)}) \\ ||\psi||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(\rho^{1/4} + ||\partial_x u_{0,\rho} - \partial_x u_0||_{L^2(\Omega)} + ||p_{0,\rho} - p_0||_{L^2(\Omega)})\end{aligned}$$

et la proposition 2.11, valable quand $q > 2$, permet d'établir l'inégalité

$$||\nu||_{L^q(0,T;W)} \leq C(\rho^{1/2q} + ||\partial_x u_{0,\rho} - \partial_x u_0||^{2/q}_{L^2(\Omega)} + ||p_{0,\rho} - p_0||^{2/q}_{L^2(\Omega)})$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.20. ■

Conclusion :

L'étude de ce chapitre concerne le modèle de Biot avec effets de consolidation secondaire pour lequel le coefficient λ^* est strictement positif. Dans cette situation, on a vu que pour $q > 1$, $\partial_t u \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))$ et, si $q \geq 2$, $u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ ce qui a entraîné le résultat d'unicité et la propriété $\partial_t u \in L^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ dès que $u_1 \in H^1_0(\Omega)$. Si $\lambda^* = 0$, cette information sur $\partial_t u$ est perdue et la seule propriété découlant du problème est $\partial_t u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ ce qui exclut de traiter le cas $\lambda^* = 0$ par les méthodes exposées ci-dessus. Or la condition $\partial_t u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ semble physiquement acceptable. C'est pourquoi nous avons pris le parti au chapitre suivant de traiter le cas $\lambda^* = 0$ en adjoignant au problème la contrainte $|\partial_x(\partial_t u)| \leq C$ où $C > 0$ est une constante fixée. On transforme donc la formulation variationnelle en une inéquation variationnelle.

Chapitre 3

Etude d'un modèle avec contrainte

Ce chapitre concerne l'étude du modèle non linéaire 1D lorsque les effets de consolidation secondaire ne sont pas pris en compte. Il s'agit du cas $\lambda^* = 0$ dont l'analyse mérite d'être rédigée dans un chapitre à part entière. Le système (1.8) modélise alors le flux de chaleur se propageant dans une structure élastique. En considérant les résultats obtenus au chapitre 2, on constate que le modèle entraîne que le terme de consolidation secondaire ($\lambda^* > 0$) a un effet régularisant sur $\partial_t u$ à savoir $\partial_t u \in L^\infty(0, T, W^{1,\infty}(\Omega))$. Les méthodes utilisées dans ce cas reposent sur cette propriété. Ici, pour $\lambda^* = 0$, sous cette même propriété de régularité, on saurait également construire une solution. Mais en fait, en reprenant les techniques du chapitre 2, on obtient seulement que $\partial_t u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Dans ce chapitre, nous développons l'idée de construire une solution à partir d'un problème avec contrainte. Cela va revenir à modifier le modèle en y incluant la propriété que la variation de la quantité de fluide contenue dans la matrice poreuse au cours du temps est bornée. A cette fin, on va considérer une inéquation variationnelle associée à l'opérateur qui, au couple (u, p), associe le couple $(A_1(u, p), A_2(u, p))$ avec :

$$\begin{cases} A_1(u,p) = \rho\partial_t^2 u - (\lambda + 2\mu)\partial_x^2 u - \mu^* \partial_x \left(|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u\right) + \alpha\partial_x p - f \\ A_2(u,p) = c_0\partial_t p + \alpha\partial_t\partial_x u - k\partial_x^2 p - h \end{cases} \tag{3.1}$$

où les coefficients constants ρ, λ, μ, c_0, α, k sont tous strictement positifs. Nous renvoyons à [43] pour plus de détails
On adjoint à l'opérateur (3.1) les conditions initiales :

$$(u(0, x), p(0, x)) = (u_0(x), p_0(x)), \ \partial_t u(0, x) = u_1(x), \tag{3.2}$$

les conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$u(t, a) = u(t, b) = p(t, a) = p(t, b) = 0, \tag{3.3}$$

et la contrainte sur le champ $\partial_t u$:

$$\partial_t u \in K \text{ où } K = \{v \in H_0^1(\Omega) \text{ tels que } |\partial_x v| \leq C\}. \tag{3.4}$$

On se donne alors $u_0 \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, $u_1 \in K$, $p_0 \in H_0^1(\Omega)$, f et h dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et C une constante réelle positive et on va construire des solutions de ce problème avec contrainte par des méthodes variationnelles.

On associe au problème décrit par {(3.1), (3.2), (3.3), (3.4)} la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver } (u,p) \in L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ tel que} \\
\partial_t u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ et pour presque tout } t \in]0,T[,\ \partial_t u(t) \in K, \\
\partial_t^2 u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ \partial_t p \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\
\text{vérifiant pour presque tout } t \in]0,T[, \forall (v,r) \in K \times H_0^1(\Omega) : \\
\rho \displaystyle\int_\Omega \partial_t^2 u(v - \partial_t u)dx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x u \partial_x (v - \partial_t u)dx \\
+\mu^* \displaystyle\int_\Omega |\partial_x u|^{q-2} \partial_x u \partial_x (v - \partial_t u)dx - \alpha \int_\Omega p \partial_x (v - \partial_t u)dx \\
\geq \displaystyle\int_\Omega f(v - \partial_t u)dx, \\
c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p r dx + \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u r dx + k \int_\Omega \partial_x p \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx, \\
(u(0,x), p(0,x)) = (u_0(x), p_0(x)), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x)
\end{array}\right. \tag{3.5}$$

et on va établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.5) sous l'hypothèse $q > 3$. On rappelle que dans ce cas, la fonction $r \mapsto |r|^{q-2} r$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
En introduisant les notations

$$\Omega_- = \{x \in \Omega \ ; \ |\partial_t \partial_x u(x)| < C\} \text{ et } \Omega_C = \{x \in \Omega \ ; \ |\partial_t \partial_x u(x)| = C\},$$

une interprétation "formelle" de (3.5) conduirait à écrire que la solution (u,p) vérifie le système

$$\left\{\begin{array}{l} A_1(u,p) = 0 \\ A_2(u,p) = 0 \end{array}\right.$$

sur Ω_- et des conditions de raccord sur u, $\partial_t u$ et $\partial_t \partial_x u$ à l'interface de Ω_- et Ω_C (cf. [43]).

3.1 Unicité de la solution

Théorème 3.1.
Sous les hypothèses $q > 3$, $u_0 \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, $u_1 \in K$, $p_0 \in H_0^1(\Omega)$, f et h donnés dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, le problème (3.5) admet au plus une solution.

Démonstration.
Supposons que le problème (3.5) admettent deux solutions (u,p) et $(\tilde{u},\tilde{p})$ associées aux mêmes conditions initiales et aux mêmes termes sources. On pose $\nu = u - \tilde{u}$ et $\psi = p - \tilde{p}$.
En prenant pour fonction-test $(\partial_t\tilde{u},\psi)$ (respectivement $(\partial_t u,\psi)$) dans le problème relatif à (u,p) (respectivement $(\tilde{u},\tilde{p})$), on obtient en soustrayant les relations ainsi obtenues :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho \displaystyle\int_\Omega \partial_t^2\nu\partial_t\nu dx + (\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x\nu\partial_t\partial_x\nu dx - \alpha\int_\Omega \psi\partial_t\partial_x\nu dx \\ +\mu^* \displaystyle\int_\Omega \left[|\partial_x u|^{q-2}\partial_x u - |\partial_x\tilde{u}|^{q-2}\partial_x\tilde{u}\right]\partial_t\partial_x\nu dx \leq 0, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t\psi\psi dx + \alpha\int_\Omega \partial_t\partial_x\nu\psi dx + k\int_\Omega |\partial_x\psi|^2 dx = 0. \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Or si on pose $g(s) = |s|^{q-2}s$, on a, comme g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ dès que $q \geq 2$:

$$\begin{aligned} |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u - |\partial_x\tilde{u}|^{q-2}\partial_x\tilde{u} = g(\partial_x u) - g(\partial_x\tilde{u}) &= \int_{\partial_x\tilde{u}}^{\partial_x u} g'(\tau)d\tau \\ &= (\partial_x u - \partial_x\tilde{u})\int_0^1 g'(\partial_x\tilde{u} + \tau(\partial_x u - \partial_x\tilde{u}))d\tau \\ &= \partial_x\nu\int_0^1 (q-1)|\partial_x\tilde{u} + \tau\partial_x\nu|^{q-2}d\tau. \end{aligned}$$

En sommant les deux relations de (3.6), on élimine les termes de couplage et il vient :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t\nu|^2dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x\nu|^2dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega |\psi|^2dx\right] + k\int_\Omega |\partial_x\psi|^2dx \\ &+\mu^*\int_\Omega\left[(q-1)\int_0^1 |\partial_x\tilde{u} + \tau\partial_x\nu|^{q-2}d\tau\right]\partial_x\nu\partial_t\partial_x\nu dx \leq 0. \end{aligned}$$

Soit $s \in]0,T[$. Cette inéquation devient par intégration par rapport au temps sur l'intervalle $[0,s]$:

$$\begin{aligned}&\frac{\rho}{2}\int_\Omega|\partial_t\nu|^2(s)dx+\frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega|\partial_x\nu|^2(s)dx\\&+\frac{c_0}{2}\int_\Omega|\psi|^2(s)dx+k\int_0^s\int_\Omega|\partial_x\psi|^2dxdt\\&+\mu^*(q-1)\int_0^s\int_\Omega\left[\int_0^1|\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_x\nu|^{q-2}d\tau\right]\frac{d}{dt}\left[\frac{|\partial_x\nu|^2}{2}\right]dxdt\leq 0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Or en utilisant une intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}&\mu^*(q-1)\int_0^s\int_\Omega\left[\int_0^1|\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_x\nu|^{q-2}d\tau\right]\frac{d}{dt}\left[\frac{|\partial_x\nu|^2}{2}\right]dxdt\\&=-\frac{\mu^*(q-1)}{2}\int_0^s\int_\Omega\frac{d}{dt}\left[\int_0^1|\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_x\nu|^{q-2}d\tau\right]|\partial_x\nu|^2dxdt\\&+\frac{\mu^*(q-1)}{2}\int_\Omega\left[\int_0^1|\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_x\nu|^{q-2}(s)d\tau\right]|\partial_x\nu|^2(s)dx\end{aligned}$$

et comme $\frac{\mu^*(q-1)}{2}\int_\Omega\left[\int_0^1|\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_x\nu|^{q-2}(s)d\tau\right]|\partial_x\nu|^2(s)dx\geq 0$, on a ainsi :

$$\begin{aligned}&\mu^*(q-1)\int_0^s\int_\Omega\left[\int_0^1|\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_x\nu|^{q-2}d\tau\right]\frac{d}{dt}\left[\frac{|\partial_x\nu|^2}{2}\right]dxdt\\&\geq-\frac{\mu^*(q-1)(q-2)}{2}\int_0^s\int_\Omega\left[\int_0^1(\partial_t\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_t\partial_x\nu)|\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_x\nu|^{q-4}\right.\\&\qquad\left.(\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_x\nu)d\tau\right]|\partial_x\nu|^2dxdt.\end{aligned}$$

D'où, en injectant cette inégalité dans (3.7), on obtient : $\forall s\in]0,T[$

$$\begin{aligned}&\frac{\rho}{2}\int_\Omega|\partial_t\nu|^2(s)dx+\frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega|\partial_x\nu|^2(s)dx\\&+\frac{c_0}{2}\int_\Omega|\psi|^2(s)dx+k\int_0^s\int_\Omega|\partial_x\psi|^2dxdt\\&\leq\frac{\mu^*(q-1)(q-2)}{2}\int_0^s\int_\Omega\left[\int_0^1(\partial_t\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_t\partial_x\nu)|\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_x\nu|^{q-4}\right.\\&\qquad\left.(\partial_x\tilde{u}+\tau\partial_x\nu)d\tau\right]|\partial_x\nu|^2dxdt.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Or $\partial_t\tilde{u}$ et $\partial_t\nu$ sont supposés demeurer dans K donc $|\partial_t\partial_x\tilde{u}|\leq C$ et $|\partial_t\partial_x\nu|\leq C$. Il vient alors, en intégrant de 0 à t, que pour tout t dans $]0,T[$, $|\partial_x\tilde{u}(t)|\leq Ct+$

$||\partial_x u_0||_{L^\infty(\Omega)} \leq CT + ||u_0||_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ et $|\partial_x \nu(t)| \leq Ct \leq CT$. Comme $u_0 \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, il existe donc une constante positive $M = CT + ||u_0||_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ telle que $|\partial_x \tilde{u}| \leq M$ et $|\partial_x \nu| \leq M$. (3.8) entraîne alors que :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t \nu|^2(s)dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x \nu|^2(s)dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega |\psi|^2(s)dx + k\int_0^s\int_\Omega |\partial_x \psi|^2 dxdt \\
&\leq \frac{\mu^*(q-1)(q-2)CM^{q-3}}{2}\int_0^s\int_\Omega \left[\int_0^1 (1+\tau)^{q-2}d\tau\right] |\partial_x \nu|^2 dxdt \\
&\leq \mu^*(q-2)CM^{q-3}2^{q-1}\int_0^s\int_\Omega |\partial_x \nu|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Le lemme de Gronwall nous permet d'en déduire que $\displaystyle\int_\Omega |\partial_x \nu|^2 dx = 0$ et donc que :

$$
\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t \nu|^2(s)dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x \nu|^2(s)dx + \frac{c_0}{2}\int_\Omega |\psi|^2(s)dx + k\int_0^s\int_\Omega |\partial_x \psi|^2 dxdt \leq 0
$$

ce qui nous permet de conclure que $\nu = \psi = 0$ et d'achever ainsi la démonstration du théorème 3.1.

■

3.2 Existence

On va maintenant s'intéresser à l'existence d'une solution pour le problème (3.5). On va montrer qu'une solution de ce problème peut se construire à l'aide d'un problème régularisé par l'ajout d'un terme de consolidation secondaire lui-même limite d'un problème pénalisé. On renvoie à [43] pour de plus amples détails sur les méthodes de régularisation et de pénalisation. On commence donc par approcher le système (3.5) par le système régularisé suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } (u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ tel que} \\ \partial_t u_\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \text{ et p. p. } t\in]0,T[,\ \partial_t u_\varepsilon(t)\in K, \\ \partial_t^2 u_\varepsilon \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ \partial_t p_\varepsilon \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ \text{vérifiant pour presque tout } t\in]0,T[,\ \forall (v,r)\in K\times H_0^1(\Omega) : \\ \rho \displaystyle\int_\Omega \partial_t^2 u_\varepsilon (v-\partial_t u_\varepsilon)dx + (\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_\varepsilon \partial_x (v-\partial_t u_\varepsilon)dx \\ +\mu^* \displaystyle\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^{q-2}\partial_x u_\varepsilon \partial_x(v-\partial_t u_\varepsilon)dx + \varepsilon\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon \partial_x(v-\partial_t u_\varepsilon)dx \\ -\alpha \displaystyle\int_\Omega p_\varepsilon \partial_x (v-\partial_t u_\varepsilon)dx \geq \int_\Omega f(v-\partial_t u_\varepsilon)dx, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p_\varepsilon r dx + \alpha\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon r dx + k\int_\Omega \partial_x p_\varepsilon \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx, \\ (u_\varepsilon(0,x), p_\varepsilon(0,x)) = (u_{0,\varepsilon}(x), p_0(x)), \quad \partial_t u_\varepsilon(0,x) = u_{1,\varepsilon}(x). \end{array}\right. \tag{3.9}$$

La formulation (3.9) est une régularisation de (3.5) par deux aspects. En effet, on a introduit dans l'inéquation le terme $\varepsilon\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon \partial_x(v-\partial_t u_\varepsilon)dx$ ceci afin d'obtenir sur le problème pénalisé correspondant plus de régularité sur le champ $\partial_t u_\varepsilon$ comme c'était le cas dans le chapitre 2. Pour cela, on a effectué aussi une régularisation des conditions initiales en fonction du paramètre ε. On considère ainsi deux suites $(u_{0,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ dans $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ et $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ dans $H_0^1(\Omega)$ telles que $u_{0,\varepsilon} \to u_0$ dans $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ avec $||u_{0,\varepsilon}||_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq ||u_0||_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ et $u_{1,\varepsilon}\to u_1$ dans $H_0^1(\Omega)$.
On va montrer pour tout $\varepsilon>0$ l'existence d'une solution du problème (3.9) à l'aide de la méthode de pénalisation qui permet d'approcher l'inéquation de (3.9) par une équation. On considère le système pénalisé suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } (u_\eta, p_\eta) \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \text{tel que } \partial_t u_\eta \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \\ \partial_t^2 u_\eta \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ \partial_t p_\eta \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \text{vérifiant pour presque tout } t\in]0,T[, \forall (v,r)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) : \\ \rho \displaystyle\int_\Omega \partial_t^2 u_\eta v dx + (\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_\eta \partial_x v dx + \mu^*\int_\Omega g(\partial_x u_\eta)\partial_x v dx \\ +\varepsilon \displaystyle\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\eta \partial_x v dx - \alpha\int_\Omega p_\eta \partial_x v dx \\ +\dfrac{1}{\eta}\displaystyle\int_\Omega \left(C^2 - |\partial_t\partial_x u_\eta|^2\right)^- \partial_t\partial_x u_\eta \partial_x v dx = \int_\Omega f v dx, \\ c_0 \displaystyle\int_\Omega \partial_t p_\eta r dx + \alpha\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\eta r dx + k\int_\Omega \partial_x p_\eta \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx, \\ (u_\eta(0,x), p_\eta(0,x)) = (u_{0,\varepsilon}(x), p_0(x)), \quad \partial_t u_\eta(0,x) = u_{1,\varepsilon}(x) \end{array}\right. \tag{3.10}$$

où $\eta > 0$ est le paramètre de pénalisation et où g est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, constante sur $]-\infty, -M-1[$ et $]M+1, +\infty[$ telle que :

$$g(s) = |s|^{q-2}s \text{ si } |s| \leq M$$

où M est la constante strictement positive définie au paragraphe 3.1 par $M = CT + ||u_0||_{W^{1,\infty}(\Omega)}$. On a *a priori* tronqué le terme non linéaire $|\partial_x u_\eta|^{q-2}\partial_x u_\eta$ par une fonction bornée puisque $g(\partial_x u_\eta) = |\partial_x u_\eta|^{q-2}\partial_x u_\eta$ uniquement si $|\partial_x u_\eta| \leq M$. Mais on verra dans la suite que cette condition est en fait toujours vérifiée et que l'on ne modifie pas ainsi le terme non linéaire.
On introduit deux notations supplémentaires en désignant par G la primitive de g s'annulant en $\tau = 0$ donnée par l'expression

$$\forall \tau \in \mathbb{R},\ G(\tau) = \int_0^\tau g(s)ds.$$

et par H celle de $(C^2 - s)^- s$ s'annulant aussi en $\tau = 0$ donnée par :

$$\forall \tau \in \mathbb{R},\ H(\tau) = \int_0^\tau (C^2 - s)^- s ds.$$

Les trois fonctions précédentes vérifient les propriétés :

$$\begin{cases} \exists \kappa > 0 \text{ telle que } \forall s \in \mathbb{R},\ |g'(s)| \leq \kappa, \\ \exists \kappa > 0 \text{ telle que } \forall \tau \in \mathbb{R}, |G(\tau)| \leq \kappa|\tau|, \\ \forall \tau \in \mathbb{R},\ G(\tau) \geq 0, \\ \forall \tau \in \mathbb{R},\ H(\tau) \geq 0. \end{cases}$$

3.2.1 Existence pour le problème pénalisé

Soient ε et η fixés. On convient dans la suite de noter κ tout réel strictement positif indépendant des deux paramètres ε, η. De même, $\kappa(\varepsilon)$ désigne tout réel strictement positif indépendant de η pouvant dépendre de ε et $\kappa(\varepsilon, \eta)$ est un réel strictement positif dépendant *a priori* des deux paramètres ε et η.

Théorème 3.2.
Pour tout couple $(\varepsilon, \eta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, le problème (3.10) admet une solution (u_η, p_η). De plus, il existe une constante $\kappa > 0$ telle que : pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\eta > 0$

$$\sqrt{\varepsilon}||\partial_t u_\eta||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||\partial_t u_\eta||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||u_\eta||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||p_\eta||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$$
$$+||p_\eta||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \frac{1}{\sqrt{\eta}}||\sqrt{(C^2 - |\partial_t\partial_x u_\eta|^2)^-}\partial_t\partial_x u_\eta||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \kappa,$$

une constante $\kappa(\varepsilon)$ telle que : pour tout $\eta > 0$

$$||\partial_t^2 u_\eta||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||\partial_t u_\eta||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||\partial_t u_\eta||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + ||\partial_t p_\eta||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$
$$+||u_\eta||_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} + ||p_\eta||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \frac{1}{\sqrt{\eta}}||\sqrt{(C^2 - |\partial_t\partial_x u_\eta|^2)^-}\partial_t\partial_x^2 u_\eta||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$
$$\leq \kappa(\varepsilon)$$

et une constante $\kappa(\varepsilon, \eta)$ telle que :

$$||\partial_t\partial_x u_\eta||_{L^4(Q)} \leq \kappa(\varepsilon, \eta).$$

Démonstration.
On utilise de nouveau la méthode d'approximation de Faedo-Galerkin pour l'espace $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ en choisissant la base $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ définie à la proposition 2.6 du paragraphe 2.2 du chapitre 2. On note $V_m = Vect\{w_1, \ldots, w_m\}$, $m \in \mathbb{N}^*$ et on cherche u_m et p_m définies de $]0, T[$ dans V_m et s'écrivant sous la forme suivante :

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} u_{jm}(t)w_j \text{ et } p_m(t) = \sum_{j=1}^{m} p_{jm}(t)w_j, \tag{3.11}$$

les coefficients u_{jm} et p_{jm} étant donnés par les solutions du système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\displaystyle\int_\Omega \partial_t^2 u_m w_j dx + \varepsilon\int_\Omega \partial_t\partial_x u_m\partial_x w_j dx + (\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_m\partial_x w_j dx \\ +\mu^*\displaystyle\int_\Omega g(\partial_x u_m)\partial_x w_j dx - \alpha\int_\Omega p_m\partial_x w_j dx \\ +\displaystyle\frac{1}{\eta}\int_\Omega \left(C^2 - |\partial_t\partial_x u_m|^2\right)^- \partial_t\partial_x u_m\partial_x w_j dx = \int_\Omega f w_j dx, \\ c_0\displaystyle\int_\Omega \partial_t p_m w_j dx + \alpha\int_\Omega \partial_t\partial_x u_m w_j dx + k\int_\Omega \partial_x p_m\partial_x w_j dx = \int_\Omega h w_j dx \end{array}\right. \tag{3.12}$$

pour tout $1 \leq j \leq m$, avec pour conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{l} (u_m(0), p_m(0)) = (u_{0m}, p_{0m}) \in V_m \times V_m \text{ tel que} \\ (u_{0m}, p_{0m}) \to (u_{0,\varepsilon}, p_0) \text{ dans } (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \ ; \\ \partial_t u_m(0) = u_{1m} \in V_m \text{ tel que } u_{1m} \to u_{1,\varepsilon} \text{ dans } H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.13}$$

D'après les résultats sur les équations différentielles non linéaires, on est assuré de l'existence et de l'unicité du couple (u_{jm}, p_{jm}) solution maximale de $\{(3.12), (3.13)\}$

dans $H^2(0, T_M; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H^1(0, T_M; H_0^1(\Omega))$, les estimations *a priori* qui suivent permettant de justifier *a posteriori* que $T_M = T$.

Remarque 3.3.
Dans toute la suite de la démonstration, les constantes notées κ, $\kappa(\varepsilon)$ ou $\kappa(\varepsilon, \eta)$ selon la convention indiquée en début de paragraphe sont toutes indépendantes du paramètre $m \in \mathbb{N}^*$.

• On commence tout d'abord, comme dans le lemme 2.13 du chapitre 2 par multiplier la première et la seconde équation de (3.12) respectivement par u'_{jm} et p_{jm}, on somme sur j et on ajoute les relations obtenues. On a :

$$\begin{aligned}
&\rho \int_\Omega \partial_t^2 u_m \partial_t u_m dx + \varepsilon \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_m|^2 dx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x u_m \partial_t \partial_x u_m dx \\
&+\mu^* \int_\Omega g(\partial_x u_m) \partial_t \partial_x u_m dx - \alpha \int_\Omega p_m \partial_t \partial_x u_m dx + \frac{1}{\eta} \int_\Omega \left(C^2 - |\partial_t \partial_x u_m|^2\right)^- |\partial_t \partial_x u_m|^2 dx \\
&+c_0 \int_\Omega \partial_t p_m p_m dx + \alpha \int_\Omega p_m \partial_t \partial_x u_m dx + k \int_\Omega |\partial_x p_m|^2 dx = \int_\Omega f \partial_t u_m dx + \int_\Omega h p_m dx.
\end{aligned}$$

Après simplification, il vient :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{\rho}{2} \int_\Omega |\partial_t u_m|^2 dx + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \int_\Omega |\partial_x u_m|^2 dx + \mu^* \int_\Omega G(\partial_x u_m) dx + \frac{c_0}{2} \int_\Omega |p_m|^2 dx\right] \\
&+\varepsilon \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_m|^2 dx + k \int_\Omega |\partial_x p_m|^2 dx + \frac{1}{\eta} \int_\Omega \left(C^2 - |\partial_t \partial_x u_m|^2\right)^- |\partial_t \partial_x u_m|^2 dx \\
&= \int_\Omega (f \partial_t u_m + h p_m) dx
\end{aligned}$$

et en intégrant de 0 à s l'égalité précédente, on obtient l'égalité :

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2} \int_\Omega |\partial_t u_m|^2(s) dx + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \int_\Omega |\partial_x u_m|^2(s) dx + \mu^* \int_\Omega G(\partial_x u_m(s)) dx \\
&+\frac{c_0}{2} \int_\Omega |p_m|^2(s) dx + \varepsilon \int_0^s \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_m|^2 dx dt + k \int_0^s \int_\Omega |\partial_x p_m|^2 dx dt \\
&+\frac{1}{\eta} \int_0^s \int_\Omega \left(C^2 - |\partial_t \partial_x u_m|^2\right)^- |\partial_t \partial_x u_m|^2 dx dt = \int_0^s \int_\Omega (f \partial_t u_m + h p_m) dx dt \\
&+\frac{\rho}{2} ||u_{1m}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda + 2\mu}{2} ||\partial_x u_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} + \mu^* ||G(\partial_x u_{0m})||_{L^1(\Omega)} + \frac{c_0}{2} ||p_{0m}||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Or, on a vu qu'il existe une constante κ telle que $|G(\partial_x u_{0m})| \leq \kappa |\partial_x u_{0m}|$. De plus, d'après (3.13) les suites $(u_{0m})_{m \in \mathbb{N}^*}$, $(p_{0m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{1m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ sont bornées dans

$H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ pour la première et $H_0^1(\Omega)$ pour les deux autres car convergentes dans ces espaces. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t u_m|^2(s)dx+\frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x u_m|^2(s)dx+\mu^*\int_\Omega G(\partial_x u_m(s))dx\\
&+\frac{c_0}{2}\int_\Omega |p_m|^2(s)dx+\varepsilon\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2dxdt\\
&+\frac{1}{\eta}\int_0^s\int_\Omega \left(C^2-|\partial_t\partial_x u_m|^2\right)^-|\partial_t\partial_x u_m|^2dxdt+k\int_0^s\int_\Omega |\partial_x p_m|^2dxdt\\
&\leq \kappa+\int_0^s\int_\Omega (f\partial_t u_m+hp_m)dxdt.
\end{aligned}\tag{3.14}$$

De plus, puisque f et $h\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young nous fournissent la majoration :

$$\begin{aligned}
\int_0^s\int_\Omega (f\partial_t u_m+hp_m)dxdt\leq{}&\frac{1}{2\rho}||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+\frac{1}{2c_0}||h||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\
&+\frac{\rho}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t u_m|^2dxdt+\frac{c_0}{2}\int_0^s\int_\Omega |p_m|^2dxdt.
\end{aligned}\tag{3.15}$$

En reportant (3.15) dans (3.14) et en regroupant les normes de f et h sous le terme générique κ, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t u_m|^2(s)dx+\frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x u_m|^2(s)dx+\mu^*\int_\Omega G(\partial_x u_m(s))dx\\
&+\frac{c_0}{2}\int_\Omega |p_m|^2(s)dx+\varepsilon\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2dxdt+k\int_0^s\int_\Omega |\partial_x p_m|^2dxdt\\
&+\frac{1}{\eta}\int_0^s\int_\Omega \left(C^2-|\partial_t\partial_x u_m|^2\right)^-|\partial_t\partial_x u_m|^2dxdt\leq\kappa+\frac{\rho}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t u_m|^2dxdt\\
&+\frac{c_0}{2}\int_0^s\int_\Omega |p_m|^2dxdt.
\end{aligned}\tag{3.16}$$

Finalement, au moyen du lemme de Gronwall, on obtient l'estimation :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t u_m|^2(s)dx+\frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x u_m|^2(s)dx+\mu^*\int_\Omega G(\partial_x u_m(s))dx\\
&+\frac{c_0}{2}\int_\Omega |p_m|^2(s)dx+\varepsilon\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2dxdt+k\int_0^s\int_\Omega |\partial_x p_m|^2dxdt\\
&+\frac{1}{\eta}\int_0^s\int_\Omega \left(C^2-|\partial_t\partial_x u_m|^2\right)^-|\partial_t\partial_x u_m|^2dxdt\leq\kappa.
\end{aligned}\right.\tag{3.17}$$

• Afin de compléter les estimations sur u_m, on utilise maintenant les idées du lemme 2.15 du chapitre 2. On multiplie la première équation de (3.12) par $u'_{jm}(t)$. Il vient :

$$\begin{cases} \rho \displaystyle\int_\Omega \partial_t^2 u_m u'_{jm} w_j dx + \varepsilon \int_\Omega \partial_t \partial_x u_m u'_{jm} \partial_x w_j dx \\ +(\lambda + 2\mu) \displaystyle\int_\Omega \partial_x u_m u'_{jm} \partial_x w_j dx + \mu^* \int_\Omega g(\partial_x u_m) u'_{jm} \partial_x w_j dx \\ -\alpha \displaystyle\int_\Omega p_m u'_{jm} \partial_x w_j dx + \frac{1}{\eta} \int_\Omega \left(C^2 - |\partial_t \partial_x u_m|^2\right)^- \partial_t \partial_x u_m u'_{jm} \partial_x w_j dx \\ = \displaystyle\int_\Omega f u'_{jm} w_j dx. \end{cases} \tag{3.18}$$

En utilisant les propriétés de la suite $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ et notamment l'égalité $w_j = -\frac{1}{\lambda_j}\partial_x^2 w_j$, on obtient en multipliant (3.18) par λ_j, en utilisant la formule de Green et en sommant sur j :

$$\begin{aligned} &\rho \int_\Omega \partial_t^2 \partial_x u_m \partial_t \partial_x u_m dx + \varepsilon \int_\Omega |\partial_t \partial_x^2 u_m|^2 dx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_t \partial_x^2 u_m \partial_x^2 u_m dx \\ &+\mu^* \int_\Omega \partial_x (g(\partial_x u_m)) \partial_t \partial_x^2 u_m dx - \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x^2 u_m \partial_x p_m dx \\ &+\frac{1}{\eta} \int_\Omega \partial_x \left[(C^2 - |\partial_t \partial_x u_m|^2)^- \partial_t \partial_x u_m\right] \partial_t \partial_x^2 u_m dx = -\int_\Omega f \partial_t \partial_x^2 u_m dx. \end{aligned}$$

Après regroupement des termes de même nature et en explicitant l'expression de la dérivée du terme de pénalisation, l'égalité se transforme en :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t \partial_x u_m|^2 dx + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2 dx\right] + \varepsilon \int_\Omega |\partial_t \partial_x^2 u_m|^2 dx \\ &+\mu^* \int_\Omega g'(\partial_x u_m) \partial_x^2 u_m \partial_t \partial_x^2 u_m dx - \alpha \int_\Omega \partial_x p_m \partial_t \partial_x^2 u_m dx \\ &+\frac{1}{\eta} \int_\Omega (C^2 - |\partial_t \partial_x u_m|^2)^- (\partial_t \partial_x^2 u_m)^2 dx + \frac{2}{\eta} \int_{\Omega^-(t)} (\partial_t \partial_x u_m)^2 (\partial_t \partial_x^2 u_m)^2 dx \\ &= -\int_\Omega f \partial_t \partial_x^2 u_m dx \end{aligned}$$

où l'on a posé $\Omega^-(t) = \{x \in \Omega \text{ tels que } |\partial_t \partial_x u_m(t,x)| > C\}$.

En intégrant sur l'intervalle de temps $[0, s]$, il vient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2(s)dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2(s)dx \\
&+\varepsilon\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x^2 u_m|^2 dxdt + \frac{2}{\eta}\int_0^s\int_{\Omega^-(t)} (\partial_t\partial_x u_m)^2(\partial_t\partial_x^2 u_m)^2 dxdt \\
&+\frac{1}{\eta}\int_0^s\int_\Omega (C^2 - |\partial_t\partial_x u_m|^2)^-(\partial_t\partial_x^2 u_m)^2 dxdt = -\int_0^s\int_\Omega f\partial_t\partial_x^2 u_m dxdt \\
&+\alpha\int_0^s\int_\Omega \partial_x p_m\partial_t\partial_x^2 u_m dxdt + \frac{\rho}{2}||\partial_x u_{1m}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda+2\mu}{2}||\partial_x^2 u_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} \\
&-\mu^*\int_0^s\int_\Omega g'(\partial_x u_m)\partial_x^2 u_m\partial_t\partial_x^2 u_m dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

En se servant maintenant du fait que la dérivée de la fonction g est bornée par une constante $\kappa > 0$ et en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, le second membre de (3.19) peut se majorer par :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}||\partial_x u_{1m}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda+2\mu}{2}||\partial_x^2 u_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}||f||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&+\frac{\varepsilon}{4}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x^2 u_m|^2 dxdt + \frac{\mu^{*2}\kappa^2}{\varepsilon}\int_0^s\int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{4}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x^2 u_m|^2 dxdt \\
&+\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\int_0^s\int_\Omega |\partial_x p_m|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{4}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x^2 u_m|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Il résulte alors de (3.19), d'après l'estimation sur $(\partial_x p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ donnée dans (3.17), les propriétés de convergence des suites $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$, $(u_{1m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ et les hypothèses sur f, qu'il existe une constante $\kappa(\varepsilon) > 0$ telle que :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2(s)dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2(s)dx \\
&+\frac{\varepsilon}{4}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x^2 u_m|^2 dxdt + \frac{2}{\eta}\int_0^s\int_{\Omega^-(t)} (\partial_t\partial_x u_m)^2(\partial_t\partial_x^2 u_m)^2 dxdt \\
&+\frac{1}{\eta}\int_0^s\int_\Omega (C^2 - |\partial_t\partial_x u_m|^2)^-(\partial_t\partial_x^2 u_m)^2 dxdt \\
&\leq \kappa(\varepsilon) + \frac{\mu^{*2}\kappa^2}{\varepsilon}\int_0^s\int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2 dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on montre qu'il existe une constante $\kappa(\varepsilon) > 0$ telle que :

$$
\frac{\mu^{*2}\kappa^2}{\varepsilon}\int_0^s\int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2 dxdt \leq \kappa(\varepsilon)
$$

et on obtient ainsi l'estimation :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle \frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_m|^2(s)dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x^2 u_m|^2(s)dx \\ \displaystyle +\frac{\varepsilon}{4}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x^2 u_m|^2 dxdt + \frac{2}{\eta}\int_0^s\int_{\Omega^-(t)} (\partial_t\partial_x u_m)^2(\partial_t\partial_x^2 u_m)^2 dxdt \\ \displaystyle +\frac{1}{\eta}\int_0^s\int_\Omega (C^2-|\partial_t\partial_x u_m|^2)^-(\partial_t\partial_x^2 u_m)^2 dxdt \le \kappa(\varepsilon).\end{array}\right. \tag{3.21}$$

• On améliore maintenant les estimations sur $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ en multipliant la seconde équation de (3.12) par p'_{jm} et en sommant sur j. On a :

$$c_0\int_\Omega |\partial_t p_m|^2 dx + \alpha\int_\Omega \partial_t p_m \partial_t\partial_x u_m dx + k\int_\Omega \partial_x p_m \partial_t\partial_x p_m = \int_\Omega h\partial_t p_m dx.$$

En intégrant sur l'intervalle de temps $[0,s]$, cette relation devient :

$$\begin{array}{l}\displaystyle c_0\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_m|^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x p_m|^2(s)dx = \int_0^s\int_\Omega h\partial_t p_m dxdt \\ \displaystyle -\alpha\int_0^s\int_\Omega \partial_t p_m\partial_t\partial_x u_m dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x p_{0m}|^2 dx.\end{array}$$

De même que pour la première estimation *a priori* (3.16), on majore le second membre par :

$$\frac{1}{c_0}||h||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{c_0}{2}||\partial_t p_m||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{\alpha^2}{c_0}||\partial_t\partial_x u_m||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x p_{0m}|^2 dx.$$

Grâce aux propriétés de convergence de la suite $(p_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ et à l'estimation (3.16) qui nous assure que $||\partial_t\partial_x u_m||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ est bornée, il existe une constante $\kappa(\varepsilon)>0$ telle que

$$c_0\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_m|^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x p_m|^2(s)dx \le \kappa(\varepsilon) + \frac{c_0}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_m|^2 dxdt$$

ce qui nous conduit à l'estimation :

$$\frac{c_0}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_m|^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x p_m|^2(s)dx \le \kappa(\varepsilon). \tag{3.22}$$

• Pour finir, on multiplie la première équation de (3.12) par u''_{jm} et on somme sur j pour j allant de 1 à m pour obtenir :

$$\begin{aligned}
&\rho\int_\Omega|\partial_t^2 u_m|^2dx+\varepsilon\int_\Omega\partial_t\partial_x u_m\partial_t^2\partial_x u_m dx+(\lambda+2\mu)\int_\Omega\partial_x u_m\partial_t^2\partial_x u_m dx\\
&+\mu^*\int_\Omega g(\partial_x u_m)\partial_t^2\partial_x u_m dx-\alpha\int_\Omega p_m\partial_t^2\partial_x u_m dx\\
&+\frac{1}{\eta}\int_\Omega(C^2-|\partial_t\partial_x u_m|^2)^-\partial_t\partial_x u_m\partial_t^2\partial_x u_m dx=\int_\Omega f\partial_t^2 u_m dx.
\end{aligned}\tag{3.23}$$

En utilisant la notation H introduite en début de paragraphe, (3.23) peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}
&\rho\int_\Omega|\partial_t^2 u_m|^2dx+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega|\partial_t\partial_x u_m|^2dx\right)+\frac{1}{\eta}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega H(\partial_t\partial_x u_m)dx\right)\\
&=-(\lambda+2\mu)\int_\Omega\partial_x u_m\partial_t^2\partial_x u_m dx-\mu^*\int_\Omega g(\partial_x u_m)\partial_t^2\partial_x u_m dx\\
&+\alpha\int_\Omega p_m\partial_t^2\partial_x u_m dx+\int_\Omega f\partial_t^2 u_m dx.
\end{aligned}\tag{3.24}$$

En intégrant sur l'intervalle $[0,s]$ et en utilisant une intégration par parties par rapport au temps sur les trois premiers termes du second membre, (3.24) devient :

$$\begin{aligned}
&\rho\int_0^s\int_\Omega|\partial_t^2 u_m|^2dxdt+\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega|\partial_t\partial_x u_m|^2(s)dx+\frac{1}{\eta}\int_\Omega H(\partial_t\partial_x u_m(s))dx\\
&=\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega|\partial_x u_{1m}|^2dx+\frac{1}{\eta}\int_\Omega H(\partial_x u_{1m})dx+(\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega|\partial_t\partial_x u_m|^2dxdt\\
&-(\lambda+2\mu)\int_\Omega\partial_x u_m(s)\partial_t\partial_x u_m(s)dx+(\lambda+2\mu)\int_\Omega\partial_x u_{0m}\partial_x u_{1m}dx\\
&+\mu^*\int_0^s\int_\Omega g'(\partial_x u_m)|\partial_t\partial_x u_m|^2dxdt-\mu^*\int_\Omega g(\partial_x u_m)(s)\partial_t\partial_x u_m(s)dx\\
&+\mu^*\int_\Omega g(\partial_x u_{0m})\partial_x u_{1m}dx-\alpha\int_0^s\int_\Omega\partial_t p_m\partial_t\partial_x u_m dxdt\\
&+\alpha\int_\Omega p_m(s)\partial_t\partial_x u_m(s)dx-\alpha\int_\Omega p_{0m}\partial_x u_{1m}dx+\int_0^s\int_\Omega f\partial_t^2 u_m dxdt.
\end{aligned}\tag{3.25}$$

On utilise ensuite les inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young et les hypothèses de convergence des suites $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$, $(u_{1m})_{m\in\mathbb{N}^*}$, $(p_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$. De plus, les estimations *a priori* (3.17), (3.21), (3.22) nous assurent que les suites $(\partial_x u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$, $(\partial_t\partial_x u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$, $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et $(\partial_t p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sont respectivement bornées dans les espaces $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $L^2(0,T;L^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Il existe donc une constante $\kappa(\varepsilon) > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}
&\rho \int_0^s \int_\Omega |\partial_t^2 u_m|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_m|^2(s) dx + \frac{1}{\eta} \int_\Omega H(\partial_t \partial_x u_m(s)) dx \\
&\leq \kappa(\varepsilon) + \frac{1}{2\rho} \int_0^s \int_\Omega |f|^2 dxdt + \frac{\rho}{2} \int_0^s \int_\Omega |\partial_t^2 u_m|^2 dxdt + \frac{1}{\eta} \int_\Omega H(\partial_x u_{1m}) dx
\end{aligned}$$

ce qui nous donne, en intégrant la norme de f dans la constante, l'estimation :

$$\left\{ \begin{aligned}
&\frac{\rho}{2} \int_0^s \int_\Omega |\partial_t^2 u_m|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_m|^2(s) dx + \frac{1}{\eta} \int_\Omega H(\partial_t \partial_x u_m(s)) dx \\
&\leq \kappa(\varepsilon) + \frac{1}{\eta} \int_\Omega H(\partial_x u_{1m}) dx.
\end{aligned} \right. \tag{3.26}$$

Maintenant, grâce à ces estimations *a priori*, on va chercher à passer à la limite dans (3.12) lorsque m tend vers l'infini et définir ainsi une solution du problème (3.10). D'après les estimations *a priori* (3.17), (3.21), (3.22), (3.26), on peut extraire de la suite $(u_m, p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ une sous-suite encore notée $(u_m, p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ et définir un couple (u_η, p_η) tels que, lorsque m tend vers l'infini :

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_m \to u_\eta \text{ dans } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \text{ et } L^\infty(0,T; H^2(\Omega)) \text{ faible } * \,; \\
\partial_t u_m \to \partial_t u_\eta \text{ dans } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible } * \text{ et } L^2(0,T; H^2(\Omega)) \text{ faible}\,; \\
\partial_t^2 u_m \to \partial_t^2 u_\eta \text{ dans } L^2(0,T; L^2(\Omega)) \text{ faible}\,; \\
g(\partial_x u_m) \to \psi \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ faible } * \,; \\
(C^2 - |\partial_t \partial_x u_m|^2)^- \partial_t \partial_x u_m \to \varphi \text{ dans } L^{4/3}(Q) \text{ faible}\,; \\
p_m \to p_\eta \text{ dans } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible } * \,; \\
\partial_t p_m \to \partial_t p_\eta \text{ dans } L^2(0,T; L^2(\Omega)) \text{ faible.}
\end{array} \right. \tag{3.27}$$

Le couple (u_η, p_η) a bien les propriétés de régularité énoncées dans (3.10). De plus, on déduit de (3.27), par passage à la limite lorsque $m \to +\infty$ dans (3.12), que : pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, pour presque tout t dans $]0, T[$,

$$\left\{ \begin{aligned}
&\rho \int_\Omega \partial_t^2 u_\eta w_j dx + \varepsilon \int_\Omega \partial_t \partial_x u_\eta \partial_x w_j dx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x u_\eta \partial_x w_j dx \\
&+\mu^* \int_\Omega \psi \partial_x w_j dx - \alpha \int_\Omega p_\eta \partial_x w_j dx + \frac{1}{\eta} \int_\Omega \varphi \partial_x w_j dx = \int_\Omega f w_j dx, \\
&c_0 \int_\Omega \partial_t p_\eta w_j dx + \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u_\eta w_j dx + k \int_\Omega \partial_x p_\eta \partial_x w_j dx = \int_\Omega h w_j dx.
\end{aligned} \right. \tag{3.28}$$

A ce stade, on va travailler maintenant sur les intégrales faisant intervenir ψ et φ. Considérons tout d'abord l'intégrale en ψ associée à $g(\partial_x u_m)$. Si l'on reprend les résultats de convergence réunis en (3.27), on observe que la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $W_1 = \{v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ tels que $\partial_t v \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\}$. Mais comme l'injection de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ est compacte, d'après le lemme 2.5 celle de W_1 dans $L^p(0,T;H_0^1(\Omega)$ l'est aussi pour tout $p \in]1,+\infty[$. Ainsi, pour $p=2$, on a en particulier :

$$\partial_x u_m \to \partial_x u_\eta \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort.} \tag{3.29}$$

De (3.29), on déduit, quitte à extraire à nouveau une sous-suite, que $\partial_x u_m \to \partial_x u_\eta$ presque partout dans Q, ce qui entraîne, par continuité de l'application g, que

$$g(\partial_x u_m) \to g(\partial_x u_\eta) \text{ presque partout dans } Q.$$

De plus, $(g(\partial_x u_m))_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée dans $]0,T[\times\Omega$ par définition de g. D'après le théorème de convergence dominée, on obtient alors que

$$g(\partial_x u_m) \to g(\partial_x u_\eta) \text{ dans } L^p(Q) \text{ pour tout } p \geq 1. \tag{3.30}$$

D'après (3.27) et (3.30) et l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(Q)$, on en déduit que

$$\psi = g(\partial_x u_\eta). \tag{3.31}$$

Considérons maintenant le terme en φ. Toujours d'après (3.27), on sait que la suite $(\partial_t u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $W_2 = \{v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ tels que $\partial_t v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$ et en utilisant encore l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\partial_t\partial_x u_m \to \partial_t\partial_x u_\eta \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort et presque partout dans } Q \tag{3.32}$$

quitte à extraire une sous-suite. On peut donc appliquer le lemme 2.10 et on a

$$(C^2 - |\partial_t\partial_x u_m|^2)^-\partial_t\partial_x u_m \to (C^2 - |\partial_t\partial_x u_\eta|^2)^-\partial_t\partial_x u_\eta \text{ dans } L^{4/3}(Q) \text{ faible}$$

ce qui entraîne d'après (3.27) et par unicité de la limite dans $L^{4/3}(Q)$ faible que :

$$\varphi = (C^2 - |\partial_t\partial_x u_\eta|^2)^-\partial_t\partial_x u_\eta. \tag{3.33}$$

D'après (3.31) et (3.33), les égalités (3.28) entraînent : pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, pour presque tout t dans $]0,T[$,

$$\begin{aligned}
&\rho\int_\Omega \partial_t^2 u_\eta w_j dx + \varepsilon\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\eta \partial_x w_j dx + (\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_\eta \partial_x w_j dx\\
&+\mu^*\int_\Omega g(\partial_x u_\eta)\partial_x w_j dx - \alpha\int_\Omega p_\eta \partial_x w_j dx\\
&+\frac{1}{\eta}\int_\Omega (C^2 - |\partial_t\partial_x u_\eta|^2)^-\partial_t\partial_x u_\eta \partial_x w_j dx = \int_\Omega f w_j dx,\\
&c_0\int_\Omega \partial_t p_\eta w_j dx + \alpha\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\eta w_j dx + k\int_\Omega \partial_x p_\eta \partial_x w_j dx = \int_\Omega h w_j dx.
\end{aligned}$$

En revenant à la définition de la suite $(w_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ (cf. proposition 2.6, paragraphe 2.2, chapitre 2) on en déduit que le couple (u_η, p_η) vérifie les équations du système (3.10) $\forall (v,r) \in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$,

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\displaystyle\int_\Omega \partial_t^2 u_\eta v dx + \varepsilon\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\eta \partial_x v dx + (\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_\eta\partial_x v dx + \mu^*\int_\Omega g(\partial_x u_\eta)\partial_x v dx \\ -\alpha\displaystyle\int_\Omega p_\eta\partial_x v dx + \frac{1}{\eta}\int_\Omega (C^2 - |\partial_t\partial_x u_\eta|^2)^-\partial_t\partial_x u_\eta\partial_x v dx = \int_\Omega f v dx \\ c_0\displaystyle\int_\Omega \partial_t p_\eta r dx + \alpha\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\eta r dx + k\int_\Omega \partial_x p_\eta \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx. \end{array}\right.$$

De plus, les estimations (3.17) à (3.26) et les propriétés de convergence (3.27) entraînent que u_η et p_η vérifient les estimations énoncées au théorème 3.2 en observant dans (3.26) que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\eta}\int_\Omega H(\partial_x u_{1m})dx = 0$ puisque $u_1\in K$.
Enfin, on termine la démonstration de l'existence d'une solution du problème (3.10), en vérifiant que le couple (u_η, p_η) vérifie les conditions initiales à savoir

$$(u_\eta(0,x), p_\eta(0,x)) = (u_{0,\varepsilon}(x), p_0(x)) \text{ et } \partial_t u_\eta(0,x) = u_{1,\varepsilon}(x).$$

En effet, d'après les estimations *a priori* résumées au théorème 3.2, les suites $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$, $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et $(\partial_t u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sont respectivement bornées dans les espaces $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$, $W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))$ et $W(0,T;H^2(\Omega),L^2(\Omega))$.
D'après l'injection des espaces $W(0,T;X,Y)$ dans l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans Y, on a alors $\forall t\in[0,T]$, $u_m(t,x)\to u_\eta(t,x)$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible et $p_m(t,x)\to p_\eta(t,x)$, $\partial_t u_m(t,x)\to\partial_t u_\eta(t,x)$ dans $L^2(\Omega)$ faible. Or par (3.13), $u_m(0,x) = u_{0m}(x)\to u_{0,\varepsilon}(x)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $p_m(0,x) = p_{0m}(x)\to p_0(x)$, $\partial_t u_m(0,x) = u_{1m}(x)\to u_{1,\varepsilon}(x)$ dans $L^2(\Omega)$.
Par unicité de la limite, il vient $u_\eta(0,x) = u_{0,\varepsilon}(x)$, $p_\eta(0,x) = p_0(x)$ et $\partial_t u_\eta(0,x) = u_{1,\varepsilon}(x)$, ce qui achève la démonstration du théorème 3.2. ■

3.2.2 Existence pour le problème avec contrainte régularisé

Soit $\varepsilon>0$ fixé. On va maintenant montrer qu'une solution du problème (3.9) peut être construite en étudiant la limite quand le paramètre η tend vers zéro d'une suite $(u_\eta,p_\eta)_{\eta>0}$ de solutions du problème (3.10) dont l'existence est assurée par le théorème 3.2. On va ainsi établir le :

Théorème 3.4.
Pour tout $\varepsilon>0$, le problème (3.9) admet une solution telle que $u_\varepsilon\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ et $\partial_t u_\varepsilon\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$. De plus, il existe une constante $\kappa>0$ telle que : pour

tout $\varepsilon > 0$
$\sqrt{\varepsilon}||\partial_t u_\varepsilon||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||\partial_t u_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||p_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
$+ ||p_\varepsilon||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \kappa$
et une constante $\kappa(\varepsilon)$ *telle que :*
$||\partial_t^2 u_\varepsilon||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||\partial_t u_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||\partial_t u_\varepsilon||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}$
$+ ||\partial_t p_\varepsilon||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||p_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \kappa(\varepsilon).$

Démonstration.
On considère une suite de solutions du problème (3.10) $(u_\eta, p_\eta)_{\eta>0}$. D'après les propriétés énoncées au théorème 3.2 et la définition de la fonction g, il existe une sous-suite de $(u_\eta, p_\eta)_{\eta>0}$ notée encore $(u_\eta, p_\eta)_{\eta>0}$ telle que :

$$\begin{cases} u_\eta \to u_\varepsilon \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ et } L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \text{ faible * ;} \\ \partial_t u_\eta \to \partial_t u_\varepsilon \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible * et } L^2(0,T;H^2(\Omega)) \text{ faible ;} \\ \partial_t^2 u_\eta \to \partial_t^2 u_\varepsilon \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible ;} \\ g(\partial_x u_\eta) \to g(\partial_x u_\varepsilon) \text{ dans } L^\infty(0,T;L^{4/3}(\Omega)) \text{ faible * ;} \\ p_\eta \to p_\varepsilon \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible * ;} \\ \partial_t p_\eta \to \partial_t p_\varepsilon \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible.} \end{cases} \tag{3.34}$$

Par ailleurs de la première équation du système (3.10) on déduit que : $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(C^2 - |\partial_t\partial_x u_\eta|^2\right)^- \partial_t\partial_x u_\eta \partial_x v dx = \eta \left[\int_\Omega f v dx - \rho \int_\Omega \partial_t^2 u_\eta v dx\right. \\ &-(\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_\eta \partial_x v dx - \mu^* \int_\Omega g(\partial_x u_\eta)\partial_x v dx - \varepsilon \int_\Omega \partial_t\partial_x u_\eta \partial_x v dx \\ &\left. +\alpha \int_\Omega p_\eta \partial_x v dx\right] \end{aligned} \tag{3.35}$$

et il vient d'après (3.34) que, lorsque $\eta \to 0$,

$$\partial_x \left[(C^2 - |\partial_t\partial_x u_\eta|^2)^- \partial_t\partial_x u_\eta\right] \to 0 \text{ dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ faible.} \tag{3.36}$$

Posons $\beta(u) = \partial_x\left[(C^2 - |\partial_t\partial_x u|^2)^- \partial_t\partial_x u\right]$.
D'après la monotonie de l'opérateur de pénalisation β, on a : pour presque tout $s \in]0,T[$ et pour presque tout $\tau \in]0,T[$,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_s^\tau (\beta(u_\eta(t)) - \beta(v), u_\eta(t) - v)dt \geq 0. \tag{3.37}$$

Or d'après (3.34), $u_\eta \to u_\varepsilon$ dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ fort. En passant à la limite dans (3.37) et en utilisant (3.36), il vient pour presque tout $s \in]0,T[$, pour presque tout $\tau \in]0,T[$,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_s^\tau (0 - \beta(v), u_\varepsilon(t) - v)dt \geq 0.$$

D'où, pour presque tout $s \in]0,T[$, on a :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\ (0-\beta(v), u_\varepsilon(s)-v) \geq 0. \tag{3.38}$$

Pour tout $\lambda > 0$ et tout $w \in H_0^1(\Omega)$, on choisit $v = u_\varepsilon(s) - \lambda w$ dans (3.38). Il vient :

$$\text{pour presque tout } s \in]0,T[,\ \forall w \in H_0^1(\Omega),\ (\beta(u_\varepsilon(s)-\lambda w), w) \leq 0. \tag{3.39}$$

On passe alors à la limite dans (3.39) lorsque $\lambda \to 0$ et on obtient grâce à l'hémi-continuité de β :

$$\text{pour presque tout } s \in]0,T[,\ \forall w \in H_0^1(\Omega),\ (\beta(u_\varepsilon(s)), w) \leq 0. \tag{3.40}$$

En prenant ensuite $-w$ dans (3.40), on obtient que pour presque tout $s \in]0,T[$, $\forall w \in H_0^1(\Omega)$, $(\beta(u_\varepsilon(s)), w) = 0$ et donc $\beta(u_\varepsilon(s)) = 0$ *i.e.* pour presque tout s dans $]0,T[$, $\partial_t u_\varepsilon(s) \in K$.

Soit maintenant $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tel que $v(t) \in K$. Alors, on a, par définition, $(C^2 - |\partial_x v|^2)^- = 0$.
Si on prend $v - \partial_t u_\eta$ comme fonction-test dans la première équation de (3.10), on a :

$$\begin{aligned}
&\rho \int_\Omega \partial_t^2 u_\eta (v - \partial_t u_\eta) dx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x u_\eta \partial_x (v - \partial_t u_\eta) dx \\
&+\mu^* \int_\Omega g(\partial_x u_\eta) \partial_x (v - \partial_t u_\eta) dx + \varepsilon \int_\Omega \partial_t \partial_x u_\eta \partial_x (v - \partial_t u_\eta) dx \\
&-\alpha \int_\Omega p_\eta \partial_x (v - \partial_t u_\eta) dx - \int_\Omega f (v - \partial_t u_\eta) dx \\
&= \frac{1}{\eta} \int_\Omega \left[(C^2 - |\partial_x v|^2)^- \partial_x v - (C^2 - |\partial_t \partial_x u_\eta|^2)^- \partial_t \partial_x u_\eta \right] \partial_x (v - \partial_t u_\eta) dx.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Or comme l'opérateur de pénalisation est monotone, le second membre de (3.41) est positif et (3.41) entraîne :

$$\begin{aligned}
&\rho \int_\Omega \partial_t^2 u_\eta (v - \partial_t u_\eta) dx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x u_\eta \partial_x (v - \partial_t u_\eta) dx \\
&+\mu^* \int_\Omega g(\partial_x u_\eta) \partial_x (v - \partial_t u_\eta) dx + \varepsilon \int_\Omega \partial_t \partial_x u_\eta \partial_x v dx \\
&-\alpha \int_\Omega p_\eta \partial_x (v - \partial_t u_\eta) dx - \int_\Omega f (v - \partial_t u_\eta) dx \geq \varepsilon \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_\eta|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Soit $(s,\tau)\in]0,T[$, tel que $s\leq\tau$. En intégrant (3.42) sur l'intervalle de temps $[s,\tau]$, il vient :

$$\begin{aligned}
&\rho\int_s^\tau\int_\Omega \partial_t^2 u_\eta(v-\partial_t u_\eta)dxdt+(\lambda+2\mu)\int_s^\tau\int_\Omega \partial_x u_\eta\partial_x(v-\partial_t u_\eta)dxdt\\
&+\mu^*\int_s^\tau\int_\Omega g(\partial_x u_\eta)\partial_x(v-\partial_t u_\eta)dxdt+\varepsilon\int_s^\tau\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\eta\partial_x v dxdt\\
&-\alpha\int_s^\tau\int_\Omega p_\eta\partial_x(v-\partial_t u_\eta)dxdt-\int_s^\tau\int_\Omega f(v-\partial_t u_\eta)dxdt\\
&\geq\varepsilon\int_s^\tau\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\eta|^2dxdt.
\end{aligned}\tag{3.43}$$

D'après (3.34) les suites $(\partial_t u_\eta)_{\eta>0}$, $(\partial_x u_\eta)_{\eta>0}$, $(g(\partial_x u_\eta))_{\eta>0}$, $(p_\eta)_{\eta>0}$ sont bornées dans $H^1(Q)$. D'après la compacité de l'injection de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$ il existe donc une suite extraite de $(u_\eta,p_\eta)_{\eta>0}$ encore notée $(u_\eta,p_\eta)_{\eta>0}$ telle que les suites $(\partial_t u_\eta)_{\eta>0}$, $(\partial_x u_\eta)_{\eta>0}$, $(g(\partial_x u_\eta))_{\eta>0}$, $(p_\eta)_{\eta>0}$ convergent fortement dans $L^2(Q)$. De plus, puisque $(\partial_t\partial_x u_\eta)_{\eta>0}$ converge vers $\partial_t\partial_x u_\varepsilon$ dans $L^2(Q)$ faible, il vient :

$$\underline{\lim}\int_s^\tau\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\eta|^2dxdt\geq\int_s^\tau\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2dxdt.\tag{3.44}$$

En passant à la limite inférieure lorsque $\eta\to 0$ dans l'inégalité (3.43) et en tenant compte de (3.44), il vient :

$$\begin{aligned}
&\rho\int_s^\tau\int_\Omega \partial_t^2 u_\varepsilon(v-\partial_t u_\varepsilon)dxdt+(\lambda+2\mu)\int_s^\tau\int_\Omega \partial_x u_\varepsilon\partial_x(v-\partial_t u_\varepsilon)dxdt\\
&+\mu^*\int_s^\tau\int_\Omega g(\partial_x u_\varepsilon)\partial_x(v-\partial_t u_\varepsilon)dxdt+\varepsilon\int_s^\tau\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon\partial_x v dxdt\\
&-\alpha\int_s^\tau\int_\Omega p\partial_x(v-\partial_t u_\varepsilon)dxdt-\int_s^\tau\int_\Omega f(v-\partial_t u_\varepsilon)dxdt\geq\varepsilon\int_s^\tau\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2dxdt
\end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}
&\rho\int_\Omega \partial_t^2 u_\varepsilon(v-\partial_t u_\varepsilon)dx+(\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_\varepsilon\partial_x(v-\partial_t u_\varepsilon)dx\\
&+\mu^*\int_\Omega g(\partial_x u_\varepsilon)\partial_x(v-\partial_t u_\varepsilon)dx+\varepsilon\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon\partial_x(v-\partial_t u_\varepsilon)dx\\
&-\alpha\int_\Omega p_\varepsilon\partial_x(v-\partial_t u_\varepsilon)dx\geq\int_\Omega f(v-\partial_t u_\varepsilon)dx.
\end{aligned}$$

De plus, puisque $\partial_t u_\varepsilon\in K$, on a $|\partial_t\partial_x u_\varepsilon|\leq C$ soit $-C\leq\partial_t\partial_x u_\varepsilon\leq C$.
En intégrant cet encadrement sur l'intervalle de temps $[0,t]$, on obtient que $-Ct+$

$\partial_x u_{0,\varepsilon} \leq \partial_x u_\varepsilon(t) \leq Ct + \partial_x u_{0,\varepsilon}$. Il vient ainsi $|\partial_x u_\varepsilon| \leq CT + ||u_{0,\varepsilon}||_{W^{1,\infty}(\Omega)}$.
Or par hypothèse, on a $||u_{0,\varepsilon}||_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq ||u_0||_{W^{1,\infty}(\Omega)}$, ce qui donne $|\partial_x u_\varepsilon| \leq CT + ||u_0||_{W^{1,\infty}(\Omega)}$. Or $CT + ||u_0||_{W^{1,\infty}(\Omega)} = M$ où M est la constante intervenant dans la définition de la fonction g. Ainsi, on a $|\partial_x u_\varepsilon(t)| \leq M$ et, par construction de g, pour tout $|s| \leq M$, il vient $g(s) = |s|^{q-2}s$. On a donc que $g(\partial_x u_\varepsilon) = |\partial_x u_\varepsilon|^{q-2}\partial_x u_\varepsilon$ et le couple $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ vérifie la première équation de (3.9).
De la même façon, en utilisant les résultats donnés par (3.34) et en passant à la limite lorsque $\eta \to 0$ dans la seconde équation de (3.10), il vient :

$$c_0 \int_\Omega \partial_t p_\varepsilon r dx + \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u_\varepsilon r dx + k \int_\Omega \partial_x p_\varepsilon \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx$$

ce qui prouve que $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ vérifie la seconde équation de (3.9).
On termine la démonstration du théorème 3.4 en vérifiant, comme dans la preuve du théorème 3.2, que le couple $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$, limite de la suite $(u_\eta, p_\eta)_{\eta>0}$ solution des équations de (3.9), vérifie $(u_\varepsilon(0,x), p_\varepsilon(0,x)) = (u_{0,\varepsilon}(x), p_0(x))$ et $\partial_t u_\varepsilon(0,x) = u_{1,\varepsilon}(x)$.
Enfin, les estimations *a priori* du théorème 3.4 découlent de celles du théorème 3.2. ■

3.2.3 Existence pour le problème avec contrainte initial

On établit maintenant le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 3.5.
Sous les hypothèses $q > 3$, $u_0 \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, $u_1 \in K$, $p_0 \in H_0^1(\Omega)$, f, h dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, le problème (3.5) admet au moins une solution.

Pour cela, on s'intéresse au comportement lorsque ε tends vers zéro d'une suite de solutions du système régularisé (3.9). On considère donc une suite $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ donnée par le théorème 3.4 et on va montrer qu'en passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ on obtient une solution de (3.5).
On établit en premier lieu au lemme 3.6 des estimations *a priori* sur $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ indépendantes de ε qui vont être utiles lors du passage à la limite en ε.

Lemme 3.6.
Il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$:
$||\partial_t^2 u_\varepsilon||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||\partial_t u_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}||\partial_t u_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))}$
$+ ||p_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||p_\varepsilon||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||\partial_t p_\varepsilon||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \kappa.$

Démonstration.
• Prenons tout d'abord le couple $(0, p_\varepsilon)$ comme fonction-test dans (3.9).
Il vient en sommant les deux relations :

$$\begin{aligned}
&\rho \int_\Omega \partial_t^2 u_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon dx + (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x u_\varepsilon \partial_t \partial_x u_\varepsilon dx - \alpha \int_\Omega p_\varepsilon \partial_t \partial_x u_\varepsilon dx \\
&+\mu^* \int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^{q-2} \partial_x u_\varepsilon \partial_t \partial_x u_\varepsilon dx + \varepsilon \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_\varepsilon|^2 dx + c_0 \int_\Omega \partial_t p_\varepsilon p_\varepsilon dx \\
&+\alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u_\varepsilon p_\varepsilon dx + k \int_\Omega |\partial_x p_\varepsilon|^2 dx \leq \int_\Omega f \partial_t u_\varepsilon dx + \int_\Omega h p_\varepsilon dx.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Après réarrangement, (3.45) s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t u_\varepsilon|^2 dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^2 dx + \frac{\mu^*}{q}\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^q dx \right.\\
&\left.+\frac{c_0}{2}\int_\Omega |p_\varepsilon|^2 dx\right] + \varepsilon \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_\varepsilon|^2 dx + k\int_\Omega |\partial_x p_\varepsilon|^2 dx \\
&\leq \int_\Omega f\partial_t u_\varepsilon dx + \int_\Omega h p_\varepsilon dx.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

En intégrant (3.46) sur l'intervalle de temps $[0, s]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t u_\varepsilon|^2(s) dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^2(s) dx + \frac{\mu^*}{q}\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^q(s) dx \\
&+\frac{c_0}{2}\int_\Omega |p_\varepsilon|^2(s) dx + \varepsilon \int_0^s \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_\varepsilon|^2 dxdt + k\int_0^s \int_\Omega |\partial_x p_\varepsilon|^2 dxdt \\
&\leq \int_0^s \int_\Omega (f\partial_t u_\varepsilon + h p_\varepsilon) dxdt + \frac{\rho}{2}||u_{1,\varepsilon}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda+2\mu}{2}||\partial_x u_{0,\varepsilon}||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\frac{\mu^*}{q}||\partial_x u_{0,\varepsilon}||^q_{L^q(\Omega)} + \frac{c_0}{2}||p_0||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

En utilisant les propriétés de convergence des suites $(u_{0,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, $(u_{1,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young ainsi que le lemme de Gronwall, on déduit de (3.47) l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\int_\Omega |\partial_t u_\varepsilon|^2(s) dx + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^2(s) dx + \frac{\mu^*}{q}\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^q(s) dx \\
&+\frac{c_0}{2}\int_\Omega |p_\varepsilon|^2(s) dx + \varepsilon \int_0^s \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_\varepsilon|^2 dxdt + k\int_0^s \int_\Omega |\partial_x p_\varepsilon|^2 dxdt \leq \kappa.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

• Prenons maintenant $\partial_t p_\varepsilon$ pour fonction-test dans la seconde équation du système (3.9).
On a :

$$c_0 \int_\Omega |\partial_t p_\varepsilon|^2 dx + \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\partial_x p_\varepsilon|^2 dx = \int_\Omega h\partial_t p_\varepsilon dx - \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u_\varepsilon \partial_t p_\varepsilon dx. \tag{3.49}$$

En intégrant (3.49) de 0 à s, il vient :

$$\begin{aligned} &c_0\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_\varepsilon|^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x p_\varepsilon|^2(s)dx = \int_0^s\int_\Omega h\partial_t p_\varepsilon dxdt \\ &-\alpha\int_0^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon \partial_t p_\varepsilon dxdt + \frac{k}{2}||\partial_x p_0||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, le second membre de (3.50) se majore par :

$$\begin{aligned} &\kappa + \frac{1}{c_0}\int_0^s\int_\Omega h^2 dxdt + \frac{c_0}{4}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_\varepsilon|^2 dxdt + \frac{\alpha^2}{c_0}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2 dxdt \\ &+\frac{c_0}{4}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_\varepsilon|^2 dxdt, \end{aligned} \tag{3.51}$$

ce qui nous conduit, en intégrant la norme de h dans la constante κ et en utilisant le fait que $\partial_t u_\varepsilon \in K$, à la relation :

$$c_0\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_\varepsilon|^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x p_\varepsilon|^2(s)dx \le \kappa + \frac{\alpha^2 C^2 T}{c_0} + \frac{c_0}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_\varepsilon|^2 dxdt.$$

On obtient finalement l'estimation :

$$\frac{c_0}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t p_\varepsilon|^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\partial_x p_\varepsilon|^2(s)dx \le \kappa. \tag{3.52}$$

• Soient $\delta > 0$ et $t > \delta$.
Pour toute fonction r, on pose $r_\delta(t,x) = \dfrac{r(t,x) - r(t-\delta,x)}{\delta}$.
On a $r_\delta \to \partial_t r$ lorsque $\delta \to 0^+$.
Prenons $v = \partial_t u_\varepsilon(t-\delta)$ comme fonction-test dans la première équation de (3.9) et divisons par $-\delta$. La relation obtenue devient, en intégrant de δ à s :

$$\begin{aligned} &\rho\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t^2 u_\varepsilon(\partial_t u_\varepsilon)_\delta dxdt + (\lambda+2\mu)\int_\delta^s\int_\Omega \partial_x u_\varepsilon(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt \\ &+\mu^*\int_\delta^s\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^{q-2}\partial_x u_\varepsilon(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt + \varepsilon\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt \\ &-\alpha\int_\delta^s\int_\Omega p_\varepsilon(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt \le \int_0^s\int_\Omega f(\partial_t u_\varepsilon)_\delta dxdt \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$
\begin{aligned}
&\rho\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t^2 u_\varepsilon(\partial_t u_\varepsilon)_\delta dxdt+\varepsilon\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt\\
&\leq \int_\delta^s\int_\Omega f(\partial_t u_\varepsilon)_\delta dxdt-(\lambda+2\mu)\int_\delta^s\int_\Omega \partial_x u_\varepsilon(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt\\
&-\mu^*\int_\delta^s\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^{q-2}\partial_x u_\varepsilon(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt+\alpha\int_\delta^s\int_\Omega p_\varepsilon(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

En utilisant une intégration par parties par rapport au temps sur les trois derniers termes du second membre de (3.53), ce qui est loisible dès que $q \geq 2$, il vient :

$$
\begin{aligned}
&\rho\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t^2 u_\varepsilon(\partial_t u_\varepsilon)_\delta dxdt+\varepsilon\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt\leq\int_\delta^s\int_\Omega f(\partial_t u_\varepsilon)_\delta dxdt\\
&+(\lambda+2\mu)\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon(\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt-(\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_\varepsilon(s)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(s)dx\\
&+(\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_\varepsilon(\delta)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(\delta)dx+\mu^*\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\left[|\partial_x u_\varepsilon|^{q-2}\partial_x u_\varepsilon\right](\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt\\
&-\mu^*\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^{q-2}(s)\partial_x u_\varepsilon(s)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(s)dx+\mu^*\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon(\delta)|^{q-2}\partial_x u_\varepsilon(\delta)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(\delta)dx\\
&-\alpha\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t p_\varepsilon(\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt+\alpha\int_\Omega p_\varepsilon(s)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(s)dx-\alpha\int_\Omega p_\varepsilon(\delta)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(\delta)dx.
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Par ailleurs, on a par définition de $(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta$:

$$
\begin{aligned}
\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt=\frac{1}{\delta}\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon(t)\,[\partial_t\partial_x u_\varepsilon(t)\\
-\partial_t\partial_x u_\varepsilon(t-\delta)]\,dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

Mais, en utilisant l'égalité $x(x-y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2+(y-x)^2)$, (3.55) s'écrit aussi :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon(\partial_t\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt=&\frac{\varepsilon}{2\delta}\int_\delta^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2(t)dxdt\\
&-\frac{\varepsilon}{2\delta}\int_\delta^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2(t-\delta)dxdt\\
&+\frac{\varepsilon}{2\delta}\int_\delta^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon(t-\delta)-\partial_t\partial_x u_\varepsilon(t)|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Un changement de variables nous donne la relation :

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon \partial_t\partial_x u_\delta dxdt &= \frac{\varepsilon}{2\delta}\int_\delta^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2(t)dxdt\\ &-\frac{\varepsilon}{2\delta}\int_0^{s-\delta}\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2(t)dxdt\\ &+\frac{\varepsilon}{2\delta}\int_\delta^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon(t)-\partial_t\partial_x u_\varepsilon(t-\delta)|^2dxdt\end{aligned}$$

ce qui entraîne l'inégalité :

$$\varepsilon\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon \partial_t\partial_x u_\delta dxdt \geq \frac{\varepsilon}{2\delta}\int_{s-\delta}^s\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2dxdt - \frac{\varepsilon}{2\delta}\int_0^\delta\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2dxdt.$$

D'après la première formule de la moyenne, il existe alors des constantes $c_1 \in]s-\delta, s[$ et $c_2 \in]0,\delta[$ telles que :

$$\varepsilon\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon \partial_t\partial_x u_\delta dxdt \geq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2(c_1)dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2(c_2)dx. \tag{3.56}$$

En utilisant alors la minoration (3.56) dans (3.54), on obtient :

$$\begin{aligned}&\rho\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t^2 u_\varepsilon(\partial_t u_\varepsilon)_\delta dxdt + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2(c_1)dx \leq \int_\delta^s\int_\Omega f(\partial_t u_\varepsilon)_\delta dxdt\\ &+(\lambda+2\mu)\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon(\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt - (\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_\varepsilon(s)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(s)dx\\ &+(\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x u_\varepsilon(\delta)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(\delta)dx + \mu^*\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t\left[|\partial_x u_\varepsilon|^{q-2}\partial_x u_\varepsilon\right](\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt\\ &-\mu^*\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^{q-2}(s)\partial_x u_\varepsilon(s)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(s)dx + \mu^*\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon(\delta)|^{q-2}\partial_x u_\varepsilon(\delta)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(\delta)dx\\ &-\alpha\int_\delta^s\int_\Omega \partial_t p_\varepsilon(\partial_x u_\varepsilon)_\delta dxdt + \alpha\int_\Omega p_\varepsilon(s)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(s)dx - \alpha\int_\Omega p_\varepsilon(\delta)(\partial_x u_\varepsilon)_\delta(\delta)dx\\ &+\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\partial_t\partial_x u_\varepsilon|^2(c_2)dx.\end{aligned} \tag{3.57}$$

On peut maintenant passer à la limite lorsque δ tend vers 0^+ dans (3.57) et on obtient, grâce à la continuité de $\partial_x u_\varepsilon$ et de $\partial_t \partial_x u_\varepsilon$ de $[0,T]$ dans $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
&\rho \int_0^s \int_\Omega |\partial_t^2 u_\varepsilon|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_\varepsilon|^2(s) dx \leq \int_0^s \int_\Omega f \partial_t^2 u_\varepsilon dxdt \\
&+(\lambda+2\mu) \int_0^s \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_\varepsilon|^2 dxdt - (\lambda+2\mu) \int_\Omega \partial_x u_\varepsilon(s) \partial_t \partial_x u_\varepsilon(s) dx \\
&+(\lambda+2\mu) \int_\Omega \partial_x u_{0,\varepsilon} \partial_x u_{1,\varepsilon} dx + \mu^* \int_0^s \int_\Omega \partial_t(|\partial_x u_\varepsilon|^{q-2} \partial_x u_\varepsilon) \partial_t \partial_x u_\varepsilon dxdt \\
&-\mu^* \int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^{q-2}(s) \partial_x u_\varepsilon(s) \partial_t \partial_x u_\varepsilon(s) dx + \mu^* \int_\Omega |\partial_x u_{0,\varepsilon}|^{q-2} \partial_x u_{0,\varepsilon} \partial_x u_{1,\varepsilon} dx \\
&-\alpha \int_0^s \int_\Omega \partial_t p_\varepsilon \partial_t \partial_x u_\varepsilon dxdt + \alpha \int_\Omega p_\varepsilon(s) \partial_t \partial_x u_\varepsilon(s) dx - \alpha \int_\Omega p_0 \partial_x u_{1,\varepsilon} dx \\
&+\frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\partial_x u_{1,\varepsilon}|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

On utilise comme auparavant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young. De plus, d'après les estimations *a priori* (3.48) et (3.52), les suites $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\partial_t p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont bornées respectivement dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Enfin, comme la suite $(\partial_t u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ demeure dans K, elle est bornée dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$. Il existe donc une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$\rho \int_0^s \int_\Omega |\partial_t^2 u_\varepsilon|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_\varepsilon|^2(s) dx \leq \kappa + \frac{\rho}{2} \int_0^s \int_\Omega |\partial_t^2 u_\varepsilon|^2 dxdt$$

ce qui conduit à l'estimation :

$$\frac{\rho}{2} \int_0^s \int_\Omega |\partial_t^2 u_\varepsilon|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_\varepsilon|^2(s) dx \leq \kappa \tag{3.59}$$

et clôt la démonstration du lemme 3.6. ■

Montrons maintenant le :

Lemme 3.7.
La suite $(\partial_x u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est de Cauchy dans $C^0([0,T];L^2(\Omega))$.

Démonstration.
Il suffit en fait d'utiliser les calculs développés dans la méthode d'unicité au paragraphe 3.1. On considère cette fois-ci deux solutions du problème (3.9) $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ et $(u_{\tilde\varepsilon}, p_{\tilde\varepsilon})$. On suit les calculs du paragraphe 3.1 en ayant posé $\nu_{\varepsilon,\tilde\varepsilon} = u_\varepsilon - u_{\tilde\varepsilon}$. On obtient alors des majorations avec des constantes indépendantes de ε et $\tilde\varepsilon$ car $\partial_t \partial_x u_\varepsilon$ et

$\partial_t \partial_x u_{\tilde{\varepsilon}}$ sont dans le convexe K ce qui entraîne que les suites $(\partial_t \partial_x u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(\partial_t \partial_x u_{\tilde{\varepsilon}})_{\tilde{\varepsilon}>0}$, $(\partial_x u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\partial_x u_{\tilde{\varepsilon}})_{\tilde{\varepsilon}>0}$ sont bornées indépendamment de ε et $\tilde{\varepsilon}$. On aboutit alors à :

$$\int_\Omega |\partial_x \nu_{\varepsilon,\tilde{\varepsilon}}|^2(s)dx \leq \kappa(\varepsilon+\tilde{\varepsilon}) + \kappa \int_0^s \int_\Omega |\partial_x \nu_{\varepsilon,\tilde{\varepsilon}}|^2 dxdt$$

ce qui nous donne, grâce au lemme de Gronwall :

$$\int_\Omega |\partial_x \nu_{\varepsilon,\tilde{\varepsilon}}|^2(s)dx \leq \kappa(\varepsilon+\tilde{\varepsilon})e^{\kappa s}$$

d'où la propriété de Cauchy.

Le lemme 3.7 est important car il permet d'affirmer que la suite $(\partial_x u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement dans $C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Le passage à la limite dans le terme non linéaire ne pose donc aucune difficulté. ■

Grâce à ces deux lemmes, on montre la :

Proposition 3.8.
*Il existe une suite extraite de la suite $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergeant dans $L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ faible * vers un couple (u,p) solution de (3.5).*

Démonstration.
D'après les lemmes 3.6 et 3.7 et le fait que pour presque tout t dans $]0,T[$, $\partial_t u_\varepsilon(t) \in K$, il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ encore notée $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \to u \text{ dans } L^\infty(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \text{ faible } *\,; \\ |\partial_x u_\varepsilon|^{q-2}\partial_x u_\varepsilon \to |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort}\,; \\ \partial_t u_\varepsilon \to \partial_t u \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible } * \text{ et } L^2(Q) \text{ fort}\,; \\ \partial_t^2 u_\varepsilon \to \partial_t^2 u \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible } *\,; \\ p_\varepsilon \to p \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible } * \text{ et } L^2(Q) \text{ fort}\,; \\ \partial_t p_\varepsilon \to \partial_t p \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible.} \end{cases} \tag{3.60}$$

On insiste encore une fois sur le fait que la propriété de Cauchy du lemme 3.7 sur la suite $(\partial_x u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ permet de passer à la limite dans le terme non linéaire sans encombre.
Commençons par établir que le couple (u,p) vérifie les conditions initiales imposées dans (3.5). D'une part, d'après (3.60), les suites $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(\partial_t u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont respectivement bornées dans $W(0,T;W_0^{1,q}(\Omega),H_0^1(\Omega))$, $W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))$, $W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))$ et on peut affirmer que $\forall t \in [0,T]$, $u_\varepsilon(t,x) \to u(t,x)$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible, $p_\varepsilon(t,x) \to p(t,x)$ et $\partial_t u_\varepsilon(t,x) \rightharpoonup \partial_t u(t,x)$ dans $L^2(\Omega)$ faible. Comme d'autre part on a par construction $u_\varepsilon(0,x) = u_{0,\varepsilon}(x) \to u_0(x)$ dans $W_0^{1,\infty}(\Omega)$,

$p_\varepsilon(0,x) = p_0(x)$ et $\partial_t u_\varepsilon(0,x) = u_{1,\varepsilon}(x) \to u_1(x)$ dans $H_0^1(\Omega)$ par hypothèse, on obtient que $u(0,x) = u_0(x)$, $p(0,x) = p_0(x)$ et $\partial_t u(0,x) = u_1(x)$.

Considérons maintenant l'inéquation de (3.9) vérifiée par chaque terme de $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfaisant (3.60). En l'intégrant sur l'intervalle de temps $[0,s]$, on obtient $\forall v \in K$:

$$\begin{aligned}
&\rho \int_0^s \int_\Omega \partial_t^2 u_\varepsilon (v - \partial_t u_\varepsilon) dxdt + (\lambda + 2\mu) \int_0^s \int_\Omega \partial_x u_\varepsilon \partial_x v dxdt \\
&+\mu^* \int_0^s \int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^{q-2} \partial_x u_\varepsilon \partial_x v dxdt + \varepsilon \int_0^s \int_\Omega \partial_t \partial_x u_\varepsilon \partial_x v dxdt - \\
&\alpha \int_0^s \int_\Omega p_\varepsilon \partial_x (v - \partial_t u_\varepsilon) dxdt \geq \int_0^s \int_\Omega f(v - \partial_t u_\varepsilon) dxdt \\
&+\frac{\lambda + 2\mu}{2} \int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^2(s) dx - \frac{\lambda + 2\mu}{2} ||\partial_x u_{0,\varepsilon}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\mu^*}{q} \int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^q(s) dx \\
&-\frac{\mu^*}{q} ||\partial_x u_{0,\varepsilon}||^q_{L^q(\Omega)} + \varepsilon \int_0^s \int_\Omega |\partial_t \partial_x u_\varepsilon|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Comme le dernier terme de (3.61) est positif, le second membre de (3.61) se minore par :

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \int_\Omega f(v - \partial_t u_\varepsilon) dxdt + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^2(s) dx - \frac{\lambda + 2\mu}{2} ||\partial_x u_{0,\varepsilon}||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\frac{\mu^*}{q} \int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^q(s) dx - \frac{\mu^*}{q} ||\partial_x u_{0,\varepsilon}||^q_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Or, d'après les propriétés énoncées dans (3.60), on peut affirmer que : pour presque tout $s \in]0,T[$,

$$\begin{aligned}
&\underline{\lim} \Bigg(\int_0^s \int_\Omega f(v - \partial_t u_\varepsilon) dxdt + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^2(s) dx \\
&-\frac{\lambda + 2\mu}{2} ||\partial_x u_{0,\varepsilon}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\mu^*}{q} \int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^q(s) dx - \frac{\mu^*}{q} ||\partial_x u_{0,\varepsilon}||^q_{L^q(\Omega)} \Bigg) \\
&\geq \int_0^s \int_\Omega f(v - \partial_t u) dxdt + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \int_\Omega |\partial_x u|^2(s) dx - \frac{\lambda + 2\mu}{2} ||\partial_x u_0||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\frac{\mu^*}{q} \int_\Omega |\partial_x u|^q(s) dx - \frac{\mu^*}{q} ||\partial_x u_0||^q_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

De plus, toujours d'après (3.60), on a :

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\rho\int_0^s\int_\Omega \partial_t^2 u_\varepsilon(v-\partial_t u_\varepsilon)dxdt+(\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega \partial_x u_\varepsilon\partial_x v dxdt\\
&+\mu^*\int_0^s\int_\Omega |\partial_x u_\varepsilon|^{q-2}\partial_x u_\varepsilon\partial_x v dxdt+\varepsilon\int_0^s\int_\Omega \partial_t\partial_x u_\varepsilon\partial_x v dxdt\\
&-\alpha\int_0^s\int_\Omega p_\varepsilon\partial_x(v-\partial_t u_\varepsilon)dxdt\Big)=\rho\int_0^s\int_\Omega \partial_t^2 u(v-\partial_t u)dxdt \qquad (3.63)\\
&+(\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega \partial_x u\partial_x v dxdt+\mu^*\int_0^s\int_\Omega |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u\partial_x v dxdt\\
&-\alpha\int_0^s\int_\Omega p\partial_x(v-\partial_t u)dxdt.
\end{aligned}$$

On obtient donc à partir de (3.62) et (3.63) que pour presque tout $s\in]0,T[$:

$$\begin{aligned}
&\rho\int_0^s\int_\Omega \partial_t^2 u(v-\partial_t u)dxdt+(\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega \partial_x u\partial_x v dxdt\\
&+\mu^*\int_0^s\int_\Omega |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u\partial_x v dxdt-\alpha\int_0^s\int_\Omega p\partial_x(v-\partial_t u)dxdt\\
&\geq\int_0^s\int_\Omega f(v-\partial_t u)dxdt+\frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\Omega |\partial_x u|^2(s)dx\\
&-\frac{\lambda+2\mu}{2}||\partial_x u_0||^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\mu^*}{q}\int_\Omega |\partial_x u|^q(s)dx-\frac{\mu^*}{q}||\partial_x u_0||^q_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
&\rho\int_0^s\int_\Omega \partial_t^2 u(v-\partial_t u)dxdt+(\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega \partial_x u\partial_x v dxdt\\
&+\mu^*\int_0^s\int_\Omega |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u\partial_x v dxdt-\alpha\int_0^s\int_\Omega p\partial_x(v-\partial_t u)dxdt\\
&\geq\int_0^s\int_\Omega f(v-\partial_t u)dxdt+(\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega \partial_x u\partial_t\partial_x u dxdt\\
&+\mu^*\int_0^s\int_\Omega |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u\partial_t\partial_x u dxdt,
\end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
&\rho\int_0^s\int_\Omega \partial_t^2 u(v-\partial_t u)dxdt+(\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega \partial_x u\partial_x(v-\partial_t u)dxdt\\
&+\mu^*\int_0^s\int_\Omega |\partial_x u|^{q-2}\partial_x u\partial_x(v-\partial_t u)dxdt-\alpha\int_0^s\int_\Omega p\partial_x(v-\partial_t u)dxdt\\
&\geq\int_0^s\int_\Omega f(v-\partial_t u)dxdt.
\end{aligned}$$

Enfin, toujours grâce aux propriétés énoncées dans (3.60), on peut passer à la limite dans la seconde équation de (3.9) lorsque $\varepsilon \to 0$ et obtenir ainsi la seconde équation de (3.5) :

$$c_0 \int_\Omega \partial_t p r dx + \alpha \int_\Omega \partial_t \partial_x u r dx + k \int_\Omega \partial_x p \partial_x r dx = \int_\Omega h r dx.$$

L'existence d'une solution du problème (3.5) est donc établie ■

L'étude précédente se résume de la façon suivante :

Théorème 3.9.
Sous les hypothèses $q > 3$, $u_0 \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, $u_1 \in K$, $p_0 \in H_0^1(\Omega)$, f et h donnés dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, le problème (3.5) admet une unique solution.

Remarque 3.10.
En utilisant les techniques développées dans la preuve de l'unicité au paragraphe 3.1, on peut également établir une estimation de $u_\varepsilon - u$ dans $C^0([0,T];L^2(\Omega))$, $\partial_t(u_\varepsilon - u)$ dans $C^0([0,T],L^2(\Omega))$, $p_\varepsilon - p$ dans $C^0([0,T],L^2(\Omega))$ et dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Nous ne développons pas les calculs car ils sont, à peu de choses près, identiques à ceux présentés dans la démonstration de l'unicité.

<u>Conclusion :</u>
Nous avons donc obtenu un résultat d'existence et d'unicité dans le cas $\lambda^* = 0$ en introduisant dans le modèle physique initial une contrainte sur la variation de la quantité de fluide contenue dans la matrice poreuse au cours du temps. Notre motivation était la suivante. Les techniques utilisées dans le cas $\lambda^* > 0$ reposaient sur cette propriété qui découle directement du modèle initial mais qui n'est plus contenue dans le modèle si $\lambda^* = 0$. On peut alors distinguer deux situations. Si le modèle initial avec $\lambda^* = 0$ a effectivement une unique solution (v, q) telle que $\partial_t v \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$, alors en choisissant la constante C de telle façon que $C > \operatorname{ess\,sup} |\partial_t \partial_x u|$, la solution (u, p) de (3.5) n'est autre que la solution (v, q) elle-même. Dans le cas contraire, l'intérêt de cette étude est de décrire l'évolution de u tant que $\partial_t \partial_x u$ reste borné, ce qui nous semble être une contrainte raisonnable car elle signifie que la variation de la quantité de fluide contenue dans la matrice poreuse au cours du temps reste bornée. Lorsque le modèle décrit le problème thermoélastique où p désigne alors une température, cela revient à considérer que le flux de chaleur interne dû à la dilatation reste borné. Pour compléter l'étude, il faudrait peut être alors envisager de reconsidérer les lois de comportement utilisées pour obtenir le système d'équation

$$\begin{cases} A_1(u, p) = 0 \\ A_2(u, p) = 0 \end{cases}$$

lorsque $|\partial_t \partial_x u|$ dépasse un certain seuil.

Avec ce chapitre se termine donc la présentation des résultats obtenus sur le modèle non linéaire. Une nouvelle étude est à envisager si l'on veut traiter le même type de problème dans un domaine de dimension quelconque. En effet, même lorsque $\lambda^* > 0$, l'équation en u ne peut plus apporter les propriétés de régularité obtenues sur $\partial_t u$ en dimension un puisque cette équation contient seulement des informations sur $div \partial_t u$ (et non sur $\nabla \partial_t u$). C'est pourquoi, nous nous limitons dans le chapitre suivant au cas du modèle linéaire multidimensionnel car son étude exige moins de régularité. Nous renvoyons à la conclusion générale de ce mémoire pour un exposé des orientations nouvelles que l'on envisage pour traiter le cas du comportement non linéaire dans un domaine multidimensionnel.

Chapitre 4

Etude du modèle linéaire multidimensionnel

4.1 Introduction

Dans cette partie on étudie le modèle linéaire multidimensionnel. On rappelle qu'il s'agit d'un système d'équations d'évolution couplées qui, dans le cas d'un milieu isotrope et de paramètres physiques variables, est donné par :

$$\left\{\begin{array}{l}\rho(\mathbf{x})\dfrac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}-\bigtriangledown(\lambda^*(\mathbf{x})\dfrac{\partial}{\partial t}div\ \mathbf{u})-\bigtriangledown((\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))div\ \mathbf{u})\\ -div(\mu(\mathbf{x})\bigtriangledown\mathbf{u})+\alpha\bigtriangledown p=\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\\ c_0(\mathbf{x})\dfrac{\partial p}{\partial t}+\alpha\ div\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}-div(k(\mathbf{x})\bigtriangledown p)=h(t,\mathbf{x}).\end{array}\right. \tag{4.1}$$

Ce modèle linéaire traduit l'évolution du vecteur $\mathbf{u}$ représentant le déplacement de la structure solide et du champ scalaire p, pression du fluide, en fonction du temps. Il intervient notamment lorsque l'on modélise la propagation d'ondes dans un milieu poreux saturé de fluide. On rappelle également que la nature de la première équation (hyperbolique ou parabolique) dépend des deux paramètres physiques que sont la densité du milieu poreux ρ et le paramètre de consolidation secondaire λ^*.
Lorsque $\lambda^*=0$ sur Ω tout entier, le modèle de Biot correspond au système ther-

moélastique linéaire qui décrit aussi le flux de chaleur dans un milieu élastique :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x})\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \bigtriangledown((\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))div\ \mathbf{u}) - div(\mu(\mathbf{x})\bigtriangledown\mathbf{u}) \\ +\alpha\bigtriangledown p = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \\ c_0(\mathbf{x})\dfrac{\partial p}{\partial t} + \alpha\ div\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - div(k(\mathbf{x})\bigtriangledown p) = h(t,\mathbf{x}). \end{cases} \tag{4.2}$$

On considère également que le paramètre de densité peut s'annuler dans certaines régions de Ω, ce qui entraîne une dégénérescence du système dans le sens où il n'est plus hyperbolique. Dans le cas où ρ s'annule sur tout Ω, le modèle de Biot correspond au système quasi-statique :

$$\begin{cases} -\bigtriangledown(\lambda^*(\mathbf{x})\dfrac{\partial}{\partial t}div\ \mathbf{u}) - \bigtriangledown((\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))div\ \mathbf{u}) - div(\mu(\mathbf{x})\bigtriangledown\mathbf{u}) \\ +\alpha\bigtriangledown p = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \\ c_0(\mathbf{x})\dfrac{\partial p}{\partial t} + \alpha\ div\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - div(k(\mathbf{x})\bigtriangledown p) = h(t,\mathbf{x}). \end{cases} \tag{4.3}$$

Dans la suite, on va qualifier le système (4.1) de modèle complet dégénéré où complet signifie que l'on prend en compte les effets de l'inertie et de consolidation secondaire tandis que dégénéré indique que l'on pourra considérer les effets de consolidation secondaire inexistants dans certaines régions du milieu poreux.
On suppose que chaque paramètre physique du système (4.1) est dans $L^\infty(\Omega)$. De plus, on suppose que les fonctions λ, μ, c_0 et k sont positives et respectivement minorées par une constante strictement positive $\widehat{\lambda}$, $\widehat{\mu}$, $\widehat{c_0}$ et $\widehat{k}$. Enfin, on impose aux termes sources $\mathbf{f}$ et h d'être respectivement dans $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

4.2 Le modèle de Biot complet dégénéré

Dans ce paragraphe, on considère le modèle de consolidation complet dégénéré dans le domaine borné Ω, ce qui correspond au cas où $\rho(\mathbf{x}) \geq \widehat{\rho} > 0$ et $\lambda^*(\mathbf{x}) \geq 0$ sur Ω. Dans ce cas, la première équation de (4.1) peut dégénérer dans les régions de Ω où λ^* s'annule ce qui revient à s'intéresser aux équations (4.2). On considère sur la frontière de Ω les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{u}=0 \text{ sur } \Gamma_1\times[0,T]\\ \lambda^*\partial_t div\mathbf{u}\ n_i+(\lambda+\mu)div\mathbf{u}\ n_i+\mu\nabla u_i\cdot\mathbf{n}\\ -\alpha p n_i+\displaystyle\sum_{j=1}^n A_{ij}u_j=0 \text{ sur } \Gamma_1^c\times[0,T]\\ p=0 \text{ sur } \Gamma_2\times[0,T]\\ k\nabla p\cdot\mathbf{n}+Bp=0 \text{ sur } \Gamma_2^c\times[0,T].\end{array}\right. \tag{4.4}$$

Pour $j=1,\ 2$, $\{\Gamma_j,\Gamma_j^c\}$ est une partition de Γ avec $\Gamma_j\neq\emptyset$ et $\Gamma_j^c=\emptyset$ éventuellement. D'un point de vue physique, (4.4) traduit le fait que la matrice solide est fixée rigidement sur $\Gamma_1\times[0,T]$, qu'il n'y a pas de pression due au fluide sur $\Gamma_2\times[0,T]$ tandis que la matrice se déplace de façon élastique sur $\Gamma_1^c\times[0,T]$ et subit une pression sur $\Gamma_2^c\times[0,T]$. La matrice $A=(A_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ représente le module d'élasticité et est symétrique semi-définie positive. La constante B représente quant à elle le module de pression et c'est donc un scalaire positif.
Le modèle complet est ainsi constitué des équations (4.1), des conditions aux limites (4.4) et des conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{u}(0,\mathbf{x})=\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\in\mathbf{V},\ \partial_t\mathbf{u}(0,\mathbf{x})=\mathbf{u}_1(\mathbf{x})\in\mathbf{L}^2(\Omega) \text{ et } p(0,\mathbf{x})=p_0(\mathbf{x})\in L^2(\Omega)$$

où $\mathbf{V}$ est le sous-espace de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ défini par :

$$\mathbf{V}=\{\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega) \text{ tel que } \mathbf{v}=\mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

L'espace $\mathbf{V}$ coïncide avec $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ quand $\Gamma_1^c=\emptyset$ et, dans les deux cas, on le munit de la norme usuelle de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Cependant, si $\Gamma_1^c\neq\emptyset$, on peut munir $\mathbf{V}$ de la norme équivalente : $\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}$,

$$||\mathbf{v}||_{\mathbf{V}}=\left(\int_\Omega\mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{v}|^2dx+\int_{\Gamma_1^c}A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}dx\right)^{1/2}.$$

Dans la suite, on notera $(\cdot\ ,\ \cdot)_{\mathbf{V}}$ le produit scalaire associé à cette norme.
On définit également l'espace :

$$V=\{q\in H^1(\Omega) \text{ tel que } q=0 \text{ sur } \Gamma_2\}$$

que l'on munit également de la norme usuelle sur $H_0^1(\Omega)$.
On se propose maintenant d'étudier le système complet dégénéré au moyen d'une

méthode variationnelle. Formellement, on associe au modèle la formulation variationnelle suivante :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\mathbf{u},p) \in L^\infty(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;V) \text{ tel que} \\
\partial_t \mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)),\ \sqrt{\lambda^*} div \partial_t \mathbf{u} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\
\partial_t^2 \mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{V}'),\ \partial_t(c_0(\mathbf{x})p + \alpha div \mathbf{u}) \in L^2(0,T;V'), \\
\text{vérifiant pour presque tout } t \in]0,T[,\ \forall(\mathbf{v},q) \in \mathbf{V} \times V : \\
< \rho(\mathbf{x})\partial_t^2 \mathbf{u}, \mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} + \displaystyle\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \partial_t \mathbf{u}\ div \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} \\
+ \displaystyle\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) div \mathbf{u}\ div \mathbf{v}\, d\mathbf{x} - \alpha \int_\Omega p\ div \mathbf{v} d\mathbf{x} \\
+ \displaystyle\int_{\Gamma_1^c} A \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\sigma = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \\
< \partial_t(c_0(\mathbf{x})p + \alpha div \mathbf{u}), q >_{V',V} + \displaystyle\int_\Omega k(\mathbf{x}) \nabla p \cdot \nabla q d\mathbf{x} \\
+ B \displaystyle\int_{\Gamma_2^c} pq d\sigma = \int_\Omega hq d\mathbf{x}, \\
(\mathbf{u}(0,\mathbf{x}), p(0,\mathbf{x})) = (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), p_0(\mathbf{x})), \quad \partial_t \mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}).
\end{array}
\right.
\tag{4.5}
$$

4.2.1 Existence d'une solution

Afin de prouver que (4.5) admet une solution, on utilise comme dans le cas non linéaire monodimensionnel une méthode d'approximation de Galerkin : on construit une solution de (4.5) comme la limite d'une suite de fonctions régulières. Ces fonctions, notées $(\mathbf{u}_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$, vérifient une formulation discrète issue de (4.5).
On approche comme au chapitre 2 les espaces $\mathbf{V}$ et V respectivement par les espaces de dimension finie $\mathbf{V}_m$ et V_m. L'espace $\mathbf{V}_m$ (respectivement V_m) est défini par $\mathbf{V}_m = Vect\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$, $m \in \mathbb{N}^*$ (respectivement $V_m = Vect\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m\}$), la suite $(\mathbf{w}_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ (respectivement $(\chi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$) formant une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (respectivement $L^2(\Omega)$) telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{w}_j \in \mathbf{V}$ (respectivement $\chi_j \in V$). On suppose que l'espace des combinaisons linéaires finies des $\mathbf{w}_j$ (respectivement χ_j) est dense dans $\mathbf{V}$ (respectivement V).
On définit alors le couple $(\mathbf{u}_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ de $[0,T]$ dans $\mathbf{V}_m \times V_m$ par : $\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$
\mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^m u_{jm}(t) \mathbf{w}_j \text{ et } p_m(t) = \sum_{j=1}^m p_{jm}(t) \chi_j, \tag{4.6}
$$

vérifiant pour presque tout $t \in]0,T[$, pour tout $1 \leq j \leq m$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t^2\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{w}_j d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div\partial_t\mathbf{u}_m div\mathbf{w}_j d\mathbf{x} \\ \displaystyle + \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) div\mathbf{u}_m div\mathbf{w}_j d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}_m \otimes \nabla\mathbf{w}_j d\mathbf{x} \\ \displaystyle -\alpha \int_\Omega p_m div\mathbf{w}_j d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{w}_j d\sigma = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_j d\mathbf{x}, \\ \displaystyle\int_\Omega c_0(\mathbf{x})\partial_t p_m \chi_j d\mathbf{x} + \alpha \int_\Omega \chi_j div\partial_t\mathbf{u}_m d\mathbf{x} + \int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla p_m \cdot \nabla\chi_j d\mathbf{x} \\ \displaystyle +B \int_{\Gamma_2^c} p_m \chi_j d\sigma = \int_\Omega h\chi_j d\mathbf{x}, \end{cases} \tag{4.7}$$

et en $t = 0$:

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_m(0), p_m(0)) = (\mathbf{u}_{0m}, p_{0m}) \in \mathbf{V}_m \times V_m \text{ tel que } \mathbf{u}_{0m} \to \mathbf{u}_0 \text{ dans } \mathbf{V} \\ \text{et } p_{0m} \to p_0 \text{ dans } L^2(\Omega); \\ \partial_t\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{1m} \in \mathbf{V}_m \text{ tel que } \mathbf{u}_{1m} \to \mathbf{u}_1 \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega). \end{cases} \tag{4.8}$$

D'après la théorie sur les équations différentielles linéaires, on est assuré de l'existence et de l'unicité de la solution $(\mathbf{u}_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ du problème linéaire $\{(4.7), (4.8)\}$ dans $H^2(0,T;\mathbf{V}) \times H^1(0,T;V)$.
On va maintenant prouver que $(\mathbf{u}_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un couple $(\mathbf{u}, p)$ dans un sens à définir et que ce couple $(\mathbf{u}, p)$ est solution de la formulation variationnelle (4.5). Dans ce but, on va établir des estimations *a priori* afin de prouver que la suite $(\mathbf{u}_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans un cadre fonctionnel à préciser. On pourra ainsi extraire une sous-suite de $(\mathbf{u}_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers $(\mathbf{u}, p)$.

Lemme 4.1.
La suite $(\mathbf{u}_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ des solutions de $\{(4.7), (4.8)\}$ satisfait les propriétés suivantes :
- $(\partial_t\mathbf{u}_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée dans* $L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$;
- $(\sqrt{\lambda^*} div\partial_t\mathbf{u}_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée dans* $L^2(0,T;L^2(\Omega))$;
- $(\mathbf{u}_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée dans* $L^\infty(0,T;\mathbf{V})$;
- $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *est bornée dans* $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V)$.

Démonstration.
On multiplie la première équation de (4.7) par $u'_{jm}(t)$ et la seconde par $p_{jm}(t)$. On ajoute alors les deux égalités obtenues et en sommant sur j pour j allant de 1 à m

on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t^2\mathbf{u}_m\cdot\partial_t\mathbf{u}_m d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\partial_t\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}_m\otimes\nabla\partial_t\mathbf{u}_m d\mathbf{x}\\
&+\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))div\mathbf{u}_m div\partial_t\mathbf{u}_m d\mathbf{x} - \alpha\int_\Omega p_m div\partial_t\mathbf{u}_m d\mathbf{x}\\
&+\int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_m\cdot\partial_t\mathbf{u}_m d\sigma + \int_\Omega c_0(\mathbf{x})\partial_t p_m p_m d\mathbf{x} + \alpha\int_\Omega p_m div\partial_t\mathbf{u}_m d\mathbf{x}\\
&+\int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla p_m|^2 d\mathbf{x} + B\int_{\Gamma_2^c}|p_m|^2 d\sigma = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_m d\mathbf{x} + \int_\Omega h p_m d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

ce qui peut également s'écrire :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}\right.\\
&\left.+\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_m\cdot\mathbf{u}_m d\sigma + \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2 d\mathbf{x}\right]\\
&+\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\partial_t\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla p_m|^2 d\mathbf{x} + B\int_{\Gamma_2^c}|p_m|^2 d\sigma\\
&= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_m d\mathbf{x} + \int_\Omega h p_m d\mathbf{x}.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

On peut noter qu'un tel choix de fonctions-test nous a permis d'éliminer les termes de couplage dont la présence pouvait engendrer une difficulté supplémentaire.
En intégrant alors l'équation (4.9) sur $[0,s]$ pour tout s dans $]0,T[$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t\mathbf{u}_m|^2(s) d\mathbf{x} + \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\mathbf{u}_m|^2(s) d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_m|^2(s) d\mathbf{x}\right.\\
&\left.+\int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_m(s)\cdot\mathbf{u}_m(s) d\sigma + \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2(s) d\mathbf{x}\right] + \int_0^s\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\partial_t\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^s\int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla p_m|^2 d\mathbf{x}dt + B\int_0^s\int_{\Gamma_2^c}|p_m|^2 d\sigma dt = \int_0^s\int_\Omega (\mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_m + h p_m)\, d\mathbf{x}dt\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\mathbf{u}_{1m}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\mathbf{u}_{0m}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_{0m}|^2 d\mathbf{x}\\
&+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_{0m}\cdot\mathbf{u}_{0m} d\sigma + \frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_{0m}|^2 d\mathbf{x}.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Notons SM le second membre de (4.10). Tout d'abord, comme chaque paramètre physique intervenant dans le système est supposé dans $L^\infty(\Omega)$, on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\mathbf{u}_{1m}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))|div\mathbf{u}_{0m}|^2 d\mathbf{x}\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_{0m}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_{0m}\cdot\mathbf{u}_{0m} d\sigma\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_{0m}|^2 d\mathbf{x} \leq \frac{||\rho||_{L^\infty(\Omega)}}{2}||\mathbf{u}_{1m}||^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \qquad (4.11)\\
&+\frac{||\lambda||_{L^\infty(\Omega)} + ||\mu||_{L^\infty(\Omega)}}{2}||div\mathbf{u}_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{||\mu||_{L^\infty(\Omega)}}{2}||\nabla\mathbf{u}_{0m}||^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\
&+\frac{||c_0||_{L^\infty(\Omega)}}{2}||p_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_{0m}\cdot\mathbf{u}_{0m} d\sigma.
\end{aligned}$$

De plus, les suites $(\mathbf{u}_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$, $(\mathbf{u}_{1m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ et $(p_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ étant convergentes respectivement dans $\mathbf{V}$, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, elles sont aussi bornées dans ces espaces. Il existe donc une constante κ strictement positive telle que (4.11) entraîne :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\mathbf{u}_{1m}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))|div\mathbf{u}_{0m}|^2 d\mathbf{x}\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_{0m}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_{0m}\cdot\mathbf{u}_{0m} d\sigma \qquad (4.12)\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_{0m}|^2 d\mathbf{x} \leq \kappa.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne l'intégrale $\displaystyle\int_\Omega (\mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_m + hp_m)\, d\mathbf{x}$, on utilise d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_m + hp_m)\, d\mathbf{x} \leq &\left(\int_\Omega \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}|\mathbf{f}|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2}\\
&+\left(\int_\Omega \frac{1}{c_0(\mathbf{x})}|h|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2 dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

puis celle de Young :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_m + hp_m)\, d\mathbf{x} \leq &\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}|\mathbf{f}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{c_0(\mathbf{x})}|h|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2 dx.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la majoration du second membre de (4.10) :

$$SM \leq \kappa + \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega \frac{1}{\rho(\mathbf{x})}|\mathbf{f}|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t \mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega \frac{1}{c_0(\mathbf{x})}|h|^2 d\mathbf{x}dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2 d\mathbf{x}dt.$$

Comme ρ et c_0 sont respectivement minorés par $\widehat{\rho}$ et $\widehat{c_0}$, la majoration précédente devient :

$$SM \leq \kappa + \frac{1}{2\widehat{\rho}}\int_0^s \int_\Omega |\mathbf{f}|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t \mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{1}{2\widehat{c_0}}\int_0^s \int_\Omega |h|^2 d\mathbf{x}dt$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2 d\mathbf{x}dt$$

qui peut se simplifier en :

$$SM \leq \kappa + \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t \mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2 d\mathbf{x}dt \tag{4.13}$$

en intégrant les normes des termes sources dans la constante κ.
On a ainsi :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t \mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x} + \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))|div\ \mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x}\right.\\
&\left. + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla \mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_m(s)\cdot \mathbf{u}_m(s)d\sigma + \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2(s)d\mathbf{x}\right]\\
&+ \int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\partial_t \mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla p_m|^2 d\mathbf{x}dt\\
&+B\int_0^s \int_{\Gamma_2^c} |p_m|^2 d\sigma dt \leq \kappa + \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t \mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2 d\mathbf{x}dt,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

soit en particulier :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t \mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2(s)d\mathbf{x} \leq \kappa &+ \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t \mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt\\
&+ \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2 d\mathbf{x}dt.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t \mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2(s)d\mathbf{x} \leq \kappa \exp(\frac{s}{2}).$$

En injectant cette inégalité dans (4.14), on obtient qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$\frac{1}{2}\left[\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\partial_t \mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x} + \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\ \mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla \mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x}\right.$$
$$\left. + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_m(s)\cdot \mathbf{u}_m(s)d\sigma + \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_m|^2(s)d\mathbf{x}\right] + \int_0^s\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\partial_t\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^s\int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla p_m|^2 d\mathbf{x}dt + B\int_0^s\int_{\Gamma_2^c}|p_m|^2 d\sigma dt \leq \kappa,$$

ce qui conduit, en utilisant le fait que les paramètres physiques sont bornés inférieurement, à l'estimation *a priori* :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\widehat{\rho}\int_\Omega |\partial_t\mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x} + (\widehat{\lambda}+\widehat{\mu})\int_\Omega |div\ \mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x}\right.\\
&\left.+\widehat{\mu}\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_m(s)\cdot\mathbf{u}_m(s)d\sigma + \widehat{c_0}\int_\Omega |p_m|^2(s)d\mathbf{x}\right]\\
&+\int_0^s\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\partial_t\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{\widehat{k}}{2}\int_0^s\int_\Omega |\nabla p_m|^2 d\mathbf{x}dt\\
&+B\int_0^s\int_{\Gamma_2^c}|p_m|^2 d\sigma dt \leq \kappa,
\end{aligned}\tag{4.15}$$

et achève la démonstration du lemme 4.1. ■

Le lemme 4.1 précédent fournit les informations nécessaires pour obtenir le résultat principal de ce paragraphe qui est résumé dans le théorème suivant :

Théorème 4.2.
Le modèle de Biot complet dégénéré admet au moins une solution faible $(\mathbf{u}, p)$ *vérifiant (4.5).*

Démonstration.
Soit $(\mathbf{u}_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ la suite des solutions de $\{(4.7),\ (4.8)\}$. Le lemme 4.1 permet d'assurer l'existence d'une suite extraite de $(\mathbf{u}_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ notée encore $(\mathbf{u}_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\begin{array}{rll}
\mathbf{u}_m & \rightarrow \mathbf{u} & \text{dans } L^\infty(0,T;\mathbf{V}) \text{ faible } * \ ;\\
p_m & \rightarrow p & \text{dans } L^2(0,T;V) \text{ faible et } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible } * \ ;\\
\partial_t\mathbf{u}_m & \rightarrow \partial_t\mathbf{u} & \text{dans } L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ faible } * \ ;\\
\sqrt{\lambda^*}div\partial_t\mathbf{u}_m & \rightarrow \sqrt{\lambda^*}div\partial_t\mathbf{u} & \text{dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible.}
\end{array}$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ dans (4.7), on obtient : pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_j d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div\partial_t\mathbf{u}\; div\mathbf{w}_j d\mathbf{x}\\
&+\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))div\mathbf{u}\; div\mathbf{w}_j\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}\otimes\nabla\mathbf{w}_j d\mathbf{x}\\
&-\alpha\int_\Omega p\; div\mathbf{w}_j d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_j d\sigma = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{w}_j d\mathbf{x},\\
&\frac{d}{dt}\int_\Omega (c_0(\mathbf{x})p+\alpha div\mathbf{u})\,\chi_j d\mathbf{x} + \int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla p\cdot\nabla\chi_j d\mathbf{x} + B\int_{\Gamma_2^c} p\chi_j d\sigma = \int_\Omega h\chi_j d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

qui s'étend à tout couple $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}\times V$ d'après les propriétés des suites $(\mathbf{w}_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ et $(\chi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$. On a donc pour presque tout t dans $]0,T[$, $\forall(\mathbf{v},q)\in\mathbf{V}\times V$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div\partial_t\mathbf{u}\; div\mathbf{v}d\mathbf{x}\\
&+\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))div\mathbf{u}\; div\mathbf{v}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}\otimes\nabla\mathbf{v}d\mathbf{x}\\
&-\alpha\int_\Omega p\; div\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\sigma = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x},\\
&\frac{d}{dt}\int_\Omega (c_0(\mathbf{x})p+\alpha div\mathbf{u})q d\mathbf{x} + \int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla p\cdot\nabla q d\mathbf{x} + B\int_{\Gamma_2^c} pq d\sigma = \int_\Omega hq d\mathbf{x}.
\end{aligned}\tag{4.16}$$

On va maintenant prouver que, pour presque tout t dans $]0,T[$, $\partial_t^2\mathbf{u} \in \mathbf{V}'$ et $\partial_t(c_0(\mathbf{x})p+\alpha div\mathbf{u}) \in V'$.
En effet, notons $\mathbf{g}$ l'élément de $L^2(0,T;\mathbf{V}')$ défini par : $\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, pour presque tout $t\in]0,T[$,

$$\begin{aligned}
<\mathbf{g}(t),\mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} = &\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} - \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div\partial_t\mathbf{u}\; div\mathbf{v}d\mathbf{x}\\
&-\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))div\mathbf{u}\; div\mathbf{v}\, d\mathbf{x} - \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}\otimes\nabla\mathbf{v}d\mathbf{x}\\
&+\alpha\int_\Omega p\; div\mathbf{v}d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\sigma.
\end{aligned}$$

Soit $\varphi\in\mathcal{D}(]0,T[)$. En multipliant la première équation de (4.16) par φ et en intégrant de 0 à T, on obtient :

$$\int_0^T \frac{d}{dt} < \rho(\mathbf{x})\partial_t\mathbf{u}, \mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} \varphi(t)dt = \int_0^T < \mathbf{g}(t),\mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} \varphi(t)dt$$

soit aussi :

$$-\int_0^T <\rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} \varphi'(t)dt = \int_0^T <\mathbf{g}(t), \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} \varphi(t)dt. \tag{4.17}$$

Montrons maintenant que : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$,

$$-\int_0^T \rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}\varphi'(t)dt = \int_0^T \mathbf{g}(t)\varphi(t)dt \text{ dans } \mathbf{V}' \tag{4.18}$$

ce qui revient à prouver que : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[),\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$,

$$<-\int_0^T \rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}\varphi'(t)dt, \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} = <\int_0^T \mathbf{g}(t)\varphi(t)dt, \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} .$$

On sait que $\rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}\varphi' \in L^1(0,T,\mathbf{V}')$. Or, d'après le :

Théorème 4.3.
Si $u \in L^1(]a,b[,X)$ et $f \in X'$, on a :

$$\int_a^b <f, u(t)> dt = <f, \int_a^b u(t)dt>,$$

dont on trouvera une démonstration dans [33], on a :

$$\begin{aligned} <-\int_0^T \rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}\varphi'(t)dt, \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} &= -\int_0^T <\rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}\varphi'(t), \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} dt \\ &= -\int_0^T <\rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} \varphi'(t)dt. \end{aligned} \tag{4.19}$$

De même, puisque $\mathbf{g}\varphi \in L^1(0,T;\mathbf{V}')$, on a, toujours d'après le théorème 4.3 :

$$\begin{aligned} <\int_0^T \mathbf{g}(t)\varphi(t)dt, \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} &= \int_0^T <\mathbf{g}(t)\varphi(t), \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} dt \\ &= \int_0^T <\mathbf{g}(t), \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} \varphi(t)dt. \end{aligned} \tag{4.20}$$

D'après (4.17), (4.19) et (4.20), on a donc : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[),\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$<-\int_0^T \rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}\varphi'(t)dt, \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} = <\int_0^T \mathbf{g}(t)\varphi(t)dt, \mathbf{v}>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}}$$

c'est-à-dire (4.18). Ceci prouve bien que $\partial_t^2 \mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{V}')$. On effectue le même type de raisonnement pour montrer que $\partial_t(c_0(\mathbf{x})p + \alpha div\mathbf{u}) \in V'$ et on a alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} =< \rho(\mathbf{x})\partial_t^2\mathbf{u},\mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega (c_0(\mathbf{x})p + \alpha div\mathbf{u})qd\mathbf{x} =< \partial_t(c_0(\mathbf{x})p + \alpha div\mathbf{u}), q >_{V',V}\ . \end{cases} \tag{4.21}$$

On obtient que le couple $(\mathbf{u},p)$ vérifie : pour tout $(\mathbf{v},q) \in \mathbf{V}\times V$, pour presque tout t dans $]0,T[$,

$$\begin{cases} < \rho(\mathbf{x})\partial_t^2\mathbf{u},\mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} + \displaystyle\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})div\partial_t\mathbf{u}\ div\mathbf{v}d\mathbf{x} \\ + \displaystyle\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))div\mathbf{u}\ div\mathbf{v}\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}\otimes\nabla\mathbf{v}d\mathbf{x} \\ -\alpha\displaystyle\int_\Omega p\ div\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\sigma = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}, \\ < \partial_t(c_0(\mathbf{x})p + \alpha div\mathbf{u}), q >_{V',V} + \displaystyle\int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla p\cdot\nabla qd\mathbf{x} \\ +B\displaystyle\int_{\Gamma_2^c} pqd\sigma = \int_\Omega hqd\mathbf{x}, \end{cases} \tag{4.22}$$

ce qui prouve que le couple limite $(\mathbf{u},p)$ vérifie les équations dans (4.5).

On achève la preuve du théorème 4.2 en vérifiant que le couple $(\mathbf{u},p)$ satisfait les conditions initiales écrites dans la formulation variationnelle (4.5).
D'après la démonstration du lemme 4.1, on sait que la suite $(\mathbf{u}_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $W(0,T;\mathbf{V};\mathbf{L}^2(\Omega))$. Mais d'après les propriétés des espaces $W(0,T;X,Y)$ rappelées au paragraphe 2.2, on a : $W(0,T;\mathbf{V};\mathbf{L}^2(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$.
On sait alors que pour tout t dans $[0,T]$, $\mathbf{u}_m(t,.) \to \mathbf{u}(t,.)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ faible quand m tend vers l'infini. Ceci est en particulier vrai pour $t=0$. On a donc $\mathbf{u}_m(0,.) \to \mathbf{u}(0,.)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ faible. Or, par construction, $\mathbf{u}_m(0,.) = \mathbf{u}_{0m}(.)$ et $\mathbf{u}_{0m}(.)$ converge vers $\mathbf{u}_0(.)$ dans $\mathbf{V}$. Il vient finalement que $\mathbf{u}(0,.) = \mathbf{u}_0(.)$.

Établissons maintenant l'égalité $\partial_t\mathbf{u}(0,.) = \mathbf{u}_1(.)$
Soient $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ et ϕ une fonction telle que :

$$\begin{cases} \phi \in C^1([0,T]), \\ \phi(0) \neq 0 \\ \phi(T) = 0. \end{cases} \tag{4.23}$$

On définit alors φ_m et φ par les relations suivantes :

$$\varphi_m = \phi \mathbf{v}_m \text{ et } \varphi = \phi \mathbf{v}$$

où les fonctions $\mathbf{v}_m \in \mathbf{V}_m$ sont telles que $\mathbf{v}_m \to \mathbf{v}$ dans $\mathbf{V}$ quand m tend vers l'infini.

Comme, pour chaque $t \in [0,T]$, $\varphi_m(t,\cdot) \in \mathbf{V}_m$, la première équation de (4.7) donne, après intégration de 0 à T d'une part et intégration par parties par rapport au temps du premier terme d'autre part :

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}_m \cdot \partial_t \varphi_m d\mathbf{x}dt + \int_0^T \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \partial_t \mathbf{u}_m \; div \varphi_m d\mathbf{x}dt \\
&+\int_0^T \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) div \mathbf{u}_m \; div \varphi_m d\mathbf{x}dt + \int_0^T \int_\Omega \mu(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u}_m \otimes \nabla \varphi_m d\mathbf{x}dt \\
&-\alpha \int_0^T \int_\Omega p_m \; div \varphi_m d\mathbf{x}dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_m \cdot \varphi_m d\sigma dt = \int_0^T \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \varphi_m d\mathbf{x}dt \\
&+\int_\Omega \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{1m} \cdot \varphi_m(0) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

En utilisant le lemme 4.1 et la définition de $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$, on peut faire tendre m vers l'infini dans (4.24), ce qui donne l'égalité :

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u} \cdot \partial_t \varphi d\mathbf{x}dt + \int_0^T \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \partial_t \mathbf{u} \; div \varphi d\mathbf{x}dt \\
&+\int_0^T \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) div \mathbf{u} \; div \varphi d\mathbf{x}dt + \int_0^T \int_\Omega \mu(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \varphi d\mathbf{x}dt \\
&-\alpha \int_0^T \int_\Omega p \; div \varphi d\mathbf{x}dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u} \cdot \varphi d\sigma dt = \int_0^T \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \varphi d\mathbf{x}dt \\
&+\int_\Omega \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}_1 \cdot \varphi(0) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

D'après le lemme 4.1, on a $\rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et, d'après (4.22), $\rho(\mathbf{x})\partial_t^2 \mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{V}')$. On en déduit donc que $\rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u} \in C^0([0,T];\mathbf{V}') \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ ce qui entraîne que $\rho(\mathbf{x})\partial_t u$ est faiblement continue de $[0,T]$ dans $L^2(\Omega)$ et nous permet de justifier l'existence de la trace de $\rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}$ en 0. En procédant de la même façon que précédemment pour la première équation de (4.22), c'est-à-dire en l'intégrant de 0 à T et en utilisant une intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t\mathbf{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi}d\mathbf{x}dt+\int_0^T\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})div\partial_t\mathbf{u}\; div\boldsymbol{\varphi}d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^T\int_\Omega(\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))div\mathbf{u}\; div\boldsymbol{\varphi}d\mathbf{x}dt+\int_0^T\int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}\otimes\nabla\boldsymbol{\varphi}d\mathbf{x}dt\\
&-\alpha\int_0^T\int_\Omega p\; div\boldsymbol{\varphi}d\mathbf{x}dt+\int_0^T\int_{\Gamma_1^c}A\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}d\sigma dt=\int_0^T\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}d\mathbf{x}dt\\
&+\int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t\mathbf{u}(0)\cdot\boldsymbol{\varphi}(0)d\mathbf{x}.
\end{aligned}\tag{4.26}$$

On peut ainsi conclure en comparant (4.25) et (4.26) que $\partial_t\mathbf{u}(0,\mathbf{x})=\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

De la même façon, pour prouver l'égalité $p(0,\cdot)=p_0(\cdot)$, on considère une fonction $q\in V_m$ et une fonction ϕ définie comme en (4.23). On définit φ_m et φ telles que $\varphi_m=\phi q_m$, $\varphi=\phi q$ avec $q_m\in V_m$ telle que $q_m\to q$ dans V quand m tend vers l'infini.
On prend pour chaque $t\in[0,T]$, $q_m(t,\cdot)$ comme fonction-test dans la seconde équation de (4.7) que l'on intègre sur $[0,T]$. En utilisant une intégration par parties sur le premier terme et en passant à la limite lorsque m tend vers l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega c_0(\mathbf{x})p\partial_t\varphi d\mathbf{x}dt+\alpha\int_0^T\int_\Omega \varphi div\partial_t\mathbf{u}d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^T\int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla p\cdot\nabla\varphi d\mathbf{x}dt+B\int_0^T\int_{\Gamma_2^c}p\varphi d\mathbf{x}dt\\
&=\int_0^T\int_\Omega h\varphi d\mathbf{x}dt+\int_\Omega c_0(\mathbf{x})p_0\varphi(0)d\mathbf{x}
\end{aligned}\tag{4.27}$$

d'après la définition de $(q_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et le lemme 4.1.
En procédant de même pour la seconde équation de (4.22), on obtient grâce à la faible continuité de c_0p de $[0,T]$ dans $L^2(\Omega)$ que :

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega c_0(\mathbf{x})p\partial_t\varphi d\mathbf{x}dt+\alpha\int_0^T\int_\Omega \varphi div\partial_t\mathbf{u}d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^T\int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla p\cdot\nabla\varphi d\mathbf{x}dt+B\int_0^T\int_{\Gamma_2^c}p\varphi d\mathbf{x}dt\\
&=\int_0^T\int_\Omega h\varphi d\mathbf{x}dt+\int_\Omega c_0(\mathbf{x})p(0)\varphi(0)d\mathbf{x}
\end{aligned}\tag{4.28}$$

ce qui nous montre que $p(0,\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x})$ dans $L^2(\Omega)$ et ce qui achève la démonstration du théorème 4.2. ■

Remarque 4.4.
La fonction λ^* peut s'annuler dans Ω. Dans le cas où λ^* s'annule sur le domaine Ω tout entier, on perd l'estimation sur $div\partial_t\mathbf{u}$ que l'on a au lemme 4.1. Le champ $\partial_t\mathbf{u}$ est alors moins régulier mais cela ne constitue pas une difficulté supplémentaire lorsqu'on passe à la limite sur les solutions approchées quand m tend vers l'infini. Ainsi, le comportement de la solution en tant que fonction du paramètre physique de consolidation λ^* est très stable. Néanmoins, la situation est différente lorsqu'on considère le paramètre physique de densité du milieu poreux ρ. En effet, dans le lemme 4.1, le comportement de $\partial_t\mathbf{u}_m$ est lié à ce paramètre et les propriétés établies concernent la fonction $\sqrt{\rho(\mathbf{x})}\partial_t\mathbf{u}_m$. La dépendance en $\rho(\mathbf{x})$ que l'on exprime dans ce cas-là a été éliminée en supposant que $\rho(\mathbf{x}) \geq \widehat{\rho} > 0$. Aussi, l'étude précédente ne s'applique-t-elle pas directement au cas quasi-statique comme on a pu le faire avec le modèle thermoélastique.

4.2.2 Unicité de la solution

On considère deux solutions $(\mathbf{u}, p)$ et $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ du problème (4.5) avec les mêmes conditions initiales $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, p_0)$ et les mêmes termes sources $\mathbf{f}$ et h. On note v et ψ la différence entre les solutions : $\mathsf{v} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$ et $\psi = p - \tilde{p}$. Le couple (v, ψ) vérifie alors les propriétés ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{l}
(\mathsf{v},\psi) \in L^\infty(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;V),\ \partial_t\mathsf{v} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)),\\
\sqrt{\lambda^*} div\partial_t\mathsf{v} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ \partial_t^2\mathsf{v} \in L^2(0,T;\mathbf{V}'),\\
\partial_t(c_0(\mathbf{x})\psi + \alpha div\mathsf{v}) \in L^2(0,T;V'),\\
\text{et pour presque tout } t \text{ dans }]0,T[,\ \forall(\mathbf{v},q) \in \mathbf{V}\times V :\\
< \rho(\mathbf{x})\partial_t^2\mathsf{v}, \mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} + \displaystyle\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div\partial_t\mathsf{v}\ div\mathbf{v} d\mathbf{x}\\
+ \displaystyle\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) div\mathsf{v}\ div\mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathsf{v}\otimes\nabla\mathbf{v} d\mathbf{x}\\
-\alpha \displaystyle\int_\Omega \psi\ div\mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathsf{v}\cdot\mathbf{v} d\sigma = 0,\\
< \partial_t(c_0(\mathbf{x})\psi + \alpha div\mathsf{v}), q >_{V',V} + \displaystyle\int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla\psi\cdot\nabla q d\mathbf{x} + B\int_{\Gamma_2^c} \psi q d\sigma = 0,\\
(\mathsf{v}(0,\mathbf{x}), \psi(0,\mathbf{x})) = (\mathbf{0}, 0), \quad \partial_t\mathsf{v}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{0}.
\end{array}\right. \tag{4.29}$$

La première équation comprenant un opérateur hyperbolique du second ordre, on envisage naturellement de prendre la fonction $\mathbf{v} = \partial_t \mathrm{v}$ comme fonction-test dans la première équation. Cependant ici, du fait du manque de régularité, il nous est impossible d'utiliser le couple de fonctions-test "naturel" qu'est $(\partial_t \mathrm{v}, \psi)$. On entend par "naturel" le fait que le choix de ce couple permettrait d'éliminer les termes de couplage où intervient la constante de Biot-Willis α et d'obtenir une égalité d'énergie classique pour prouver l'unicité de la solution dans ce genre de problème. Pour pallier cette difficulté, on considère plutôt des fonctions-test dites de Ladyzenskaja [40] qui nous permettent de compenser ce manque de régularité et d'obtenir une égalité d'énergie exploitable.
Les fonctions-test que l'on considère sont définies de la façon suivante. Pour s dans $]0, T[$, (φ_1, φ_2) sont données par les relations :

$$\varphi_1(t,\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{c} -\displaystyle\int_t^s \mathrm{v}(\sigma,\mathbf{x})d\sigma \\ \mathbf{0} \end{array}\right. , \ \varphi_2(t,\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{cl} -\displaystyle\int_t^s \left(\int_0^\tau \psi(\sigma,\mathbf{x})d\sigma\right) d\tau & \text{si} \quad t \le s, \\ 0 & \text{si} \quad t \ge s. \end{array}\right.$$

On pose $\tilde{\varphi}_1(t,\mathbf{x}) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{v}(\sigma,\mathbf{x})d\sigma$ et $\tilde{\varphi}_2(t,\mathbf{x}) = \displaystyle\int_0^t \left(\int_0^\tau \psi(\sigma,\mathbf{x})d\sigma\right) d\tau$.
Les fonctions φ_1 et $\tilde{\varphi}_2$ vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lll} \varphi_1(t,\mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_1(t,\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}_1(s,\mathbf{x}) & \varphi_1(0,\mathbf{x}) = -\tilde{\varphi}_1(s,\mathbf{x}) & \varphi_1(s,\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \partial_t\varphi_1(t,\mathbf{x}) = \mathrm{v}(t,\mathbf{x}) & \partial_t\varphi_1(0,\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \partial_t\varphi_1(s,\mathbf{x}) = \mathrm{v}(s,\mathbf{x}) \end{array} \tag{4.30}$$

et :

$$\begin{array}{lll} \varphi_2(t,\mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_2(t,\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}_2(s,\mathbf{x}) & \varphi_2(0,\mathbf{x}) = -\tilde{\varphi}_2(s,\mathbf{x}) & \varphi_2(s,\mathbf{x}) = 0 \\ \partial_t\varphi_2(t,\mathbf{x}) = \displaystyle\int_0^t \psi(\sigma,\mathbf{x})d\sigma & \partial_t\varphi_2(0,\mathbf{x}) = 0 & \partial_t\varphi_2(s,\mathbf{x}) = \displaystyle\int_0^s \psi(\sigma,\mathbf{x})d\sigma \\ \partial_t^2\varphi_2(t,\mathbf{x}) = \psi(t,\mathbf{x}) & \partial_t^2\varphi_2(0,\mathbf{x}) = 0 & \partial_t^2\varphi_2(s,\mathbf{x}) = \psi(s,\mathbf{x}). \end{array} \tag{4.31}$$

On considère alors (φ_1, φ_2) comme couple de fonctions-test dans (4.29).
Soit $s \in]0, T[$. Après intégration par rapport au temps sur $[0, s]$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_0^s < \rho(\mathbf{x})\partial_t^2 \mathrm{v},\ \varphi_1 >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} dt + \int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div\partial_t \mathrm{v}\ div\varphi_1 d\mathbf{x}dt \\ &+ \int_0^s \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) div\mathrm{v}\ div\varphi_1 d\mathbf{x}dt + \int_0^s \int_\Omega \mu(\mathbf{x}) \nabla \mathrm{v} \otimes \nabla \varphi_1 d\mathbf{x}dt \\ &-\alpha \int_0^s \int_\Omega \psi\ div\varphi_1 d\mathbf{x}dt + \int_0^s \int_{\Gamma_1^c} A\mathrm{v} \cdot \varphi_1 d\sigma dt + \int_0^s \int_\Omega k(\mathbf{x}) \nabla\psi \cdot \nabla\varphi_2 d\mathbf{x}dt \\ &+ \int_0^s < \partial_t(c_0(\mathbf{x})\psi + \alpha div\mathrm{v}), \varphi_2 >_{V',V} dt + B \int_0^s \int_{\Gamma_2^c} \psi\ \varphi_2 d\sigma dt = 0. \end{aligned} \tag{4.32}$$

En utilisant des intégrations par parties par rapport au temps, les conditions initiales vérifiées par v, ψ et les propriétés (4.30) et (4.31), on établit la série d'égalités suivantes :

- $$\begin{aligned}\int_0^s < \rho(\mathbf{x})\partial_t^2 \mathsf{v},\ \varphi_1 >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} dt &= -\int_0^s < \rho(\mathbf{x})\partial_t \mathsf{v},\ \partial_t \varphi_1 >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} dt \\ &= -\int_0^s \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t \mathsf{v}\mathsf{v} d\mathbf{x}dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\mathsf{v}|^2(s)d\mathbf{x} \ ;\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div\partial_t \mathsf{v} div\varphi_1 d\mathbf{x}dt &= -\int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div\mathsf{v} div\partial_t\varphi_1 d\mathbf{x}dt \\ &= -\int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\mathsf{v}|^2 d\mathbf{x}dt \ ;\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_0^s \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) div\mathsf{v} div\varphi_1 d\mathbf{x}dt &= \int_0^s \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) div\partial_t\varphi_1 div\varphi_1 d\mathbf{x}dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))|div\tilde{\varphi}_1|^2(s)d\mathbf{x} \ ;\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_0^s \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathsf{v}\otimes\nabla\varphi_1 d\mathbf{x}dt &= \int_0^s \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\partial_t\varphi_1 \otimes\nabla\varphi_1 d\mathbf{x}dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\tilde{\varphi}_1|^2(s)d\mathbf{x} \ ;\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_0^s \int_{\Gamma_1^c} A\mathsf{v}\cdot\varphi_1 d\sigma dt &= \int_0^s \int_{\Gamma_1^c} A\partial_t\varphi_1\cdot\varphi_1 d\sigma dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c} A\tilde{\varphi}_1(s)\cdot\tilde{\varphi}_1(s)d\sigma \ ;\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}&\int_0^s < \partial_t(c_0(\mathbf{x})\psi + \alpha div\mathsf{v}), \varphi_2 >_{V',V} dt - \alpha\int_0^s\int_\Omega \psi div\varphi_1 d\mathbf{x}dt = \\ &-\int_0^s\int_\Omega c_0(\mathbf{x})\psi\partial_t\varphi_2 d\mathbf{x}dt - \alpha\int_0^s\int_\Omega div\mathsf{v}\partial_t\varphi_2 d\mathbf{x}dt - \alpha\int_0^s\int_\Omega \psi div\varphi_1 d\mathbf{x}dt = \\ &-\int_0^s\int_\Omega c_0(\mathbf{x})\partial_t^2\varphi_2\partial_t\varphi_2 d\mathbf{x}dt - \alpha\int_0^s\int_\Omega div\partial_t\varphi_1\partial_t\varphi_2 d\mathbf{x}dt - \alpha\int_0^s\int_\Omega \partial_t^2\varphi_2 div\varphi_1 d\mathbf{x}dt = \\ &-\frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|\partial_t\varphi_2|^2(s)d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|\partial_t\varphi_2|^2(0)d\mathbf{x} - \alpha\int_\Omega div\varphi_1(s)\partial_t\varphi_2(s)d\mathbf{x} \\ &+\alpha\int_\Omega div\varphi_1(0)\partial_t\varphi_2(0)d\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|\partial_t\varphi_2|^2(s)d\mathbf{x} \ ;\end{aligned}$$

$$\bullet \int_0^s \int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla\psi \cdot \nabla\varphi_2 d\mathbf{x}dt = \int_0^s \int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla\partial_t^2\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_2 d\mathbf{x}dt$$
$$= -\int_0^s \int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla\partial_t\varphi_2|^2 d\mathbf{x}dt \ ;$$
$$\bullet B \int_0^s \int_{\Gamma_2^c} \psi\varphi_2 d\sigma dt = B \int_0^s \int_{\Gamma_2^c} \partial_t^2\varphi_2\varphi_2 d\sigma dt$$
$$= -B \int_0^s \int_{\Gamma_2^c} |\partial_t\varphi_2|^2 d\sigma dt.$$

En injectant chacun des résultats obtenus dans (4.32), on obtient l'égalité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\int_\Omega \rho(\mathbf{x})|\mathsf{v}|^2(s)d\mathbf{x} + \int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\mathsf{v}|^2 d\mathbf{x}dt \\ +\frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s)d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s)d\mathbf{x} \\ +\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c} A\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)d\sigma + \frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|\partial_t\varphi_2|^2(s)d\mathbf{x} \\ +\int_0^s \int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla\partial_t\varphi_2|^2 d\mathbf{x}dt + B\int_0^s \int_{\Gamma_2^c} |\partial_t\varphi_2|^2 d\sigma dt = 0 \end{array} \right. \tag{4.33}$$

et en utilisant le fait que les paramètres physiques ρ, λ, μ, c_0 et k sont minorés par une constante strictement positive, (4.33) se transforme en l'inégalité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\widehat{\rho}}{2}||\mathsf{v}(s)||^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\mathsf{v}|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{\widehat{\lambda+\mu}}{2}||div\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)||^2_{L^2(\Omega)} \\ +\frac{\widehat{\mu}}{2}||\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)||^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\widehat{c_0}}{2}||\partial_t\varphi_2(s)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c} A\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)d\sigma \\ +\widehat{k}\int_0^s \int_\Omega |\nabla\partial_t\varphi_2|^2 d\mathbf{x}dt + B\int_0^s \int_{\Gamma_2^c} |\partial_t\varphi_2|^2 d\sigma dt \leq 0 \end{array} \right. \tag{4.34}$$

qui nous permet de conclure que $\mathsf{v}(t,\mathbf{x}) = \psi(t,\mathbf{x}) = 0$ et d'énoncer le :

Théorème 4.5.
Sous les hypothèses $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$, $p_0 \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, le problème (4.5) admet une solution $(\mathbf{u},p)$ unique.

Comme il a été précisé à la fin du paragraphe 4.2.1 dans la remarque 4.4, l'étude que nous avons développée ici s'applique au modèle de Biot complet même dans le cas où le paramètre de consolidation secondaire peut éventuellement s'annuler, c'est-à-dire au cas du modèle thermoélastique. En effet, le terme de consolidation secondaire ne joue pas de rôle fondamental dans notre travail : la fonction λ^* peut s'annuler dans certaines régions de Ω sans que cela ne perturbe l'étude mathématique. Dans ce cas, le champ $\partial_t \mathbf{u}$ est moins régulier que dans le cas $\lambda^* > 0$ (où $\partial_t \mathbf{u} \in H(div, \Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n$ tels que $div\mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}$) mais l'est suffisamment pour avoir des estimations *a priori* exploitables pour les résultats d'existence et d'unicité développés. Ce n'est pas le cas pour le modèle quasi-statique ($\rho = 0$) que l'on va étudier de manière indépendante dans la section ci-dessous.

4.3 Le modèle quasi-statique

On considère dans cette section le cas $\rho(\mathbf{x}) = 0$ et $\lambda^*(\mathbf{x}) \geq \widehat{\lambda^*} > 0$. La formulation correspondante, donnée par (4.3), intervient lorsque les effets de l'inertie sont négligeables et décrit les lentes déformations du milieu poreux liées au phénomène de consolidation et aux infiltrations du fluide.
On s'intéresse aux solutions faibles du problème définies comme celles vérifiant la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver le couple } (\mathbf{u}, p) \in L^\infty(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;V) \text{ tel que} \\
div\partial_t\mathbf{u} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \partial_t p \in L^2(0,T;V'), \\
\text{vérifiant pour presque tout } t \text{ dans }]0,T[,\ \forall(\mathbf{v},q) \in \mathbf{V} \times V : \\
\displaystyle\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div\partial_t\mathbf{u}\ div\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))div\mathbf{u}\ div\mathbf{v}d\mathbf{x} \\
\displaystyle + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u} \otimes \nabla\mathbf{v}d\mathbf{x} - \alpha\int_\Omega p\ div\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\sigma = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}, \\
\displaystyle < c_0(\mathbf{x})\partial_t p, q >_{V',V} + \alpha\int_\Omega q\ div\partial_t\mathbf{u}d\mathbf{x} + \int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla p\cdot\nabla q d\mathbf{x} \\
\displaystyle + B\int_{\Gamma_2^c} pqd\sigma = \int_\Omega hqd\mathbf{x}, \\
(\mathbf{u}(0,\mathbf{x}), p(0,\mathbf{x})) = (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), p_0(\mathbf{x})).
\end{array}\right. \tag{4.35}$$

On va montrer que le système quasi-statique est un état limite du modèle de Biot complet non dégénéré. C'est pourquoi la démonstration de l'existence d'une solution du système quasi-statique est basée sur l'analyse de la convergence d'une suite de solutions du modèle de Biot complet.
Dans la suite, on introduit l'espace $\mathbf{H}$ défini comme étant le sous-espace de $\mathbf{V}$ des éléments de $\mathbf{V}$ à divergence nulle,

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ tels que } div\mathbf{v} = 0\}.$$

Comme $\mathbf{H} \subset \mathbf{V}$, toute solution faible du problème vérifie (4.35) pour le choix particulier de fonctions-test $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H} \times \mathbf{V}$. La première équation de (4.35) devient donc : $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}$,

$$\int_\Omega \mu(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\sigma = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

Cette relation va s'avérer intéressante pour obtenir l'existence d'une solution. Elle mérite donc d'apparaître sous la forme d'une propriété dans laquelle on utilise la notation $(\cdot,\ \cdot)_\mathbf{V}$ introduite au début du paragraphe 4.2 :

Propriété 4.6.
Pour presque tout t dans $]0, T]$, le déplacement $\mathbf{u}$ défini par (4.35) vérifie :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, (\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_\mathbf{V} = \int_\Omega \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

On peut remarquer que si $\mathbf{f}$ est dans l'orthogonal de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, toute solution faible du problème vérifie $(\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_\mathbf{V} = 0$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Cela signifie donc qu'il suffit d'avoir $div\mathbf{u}(t) = 0$ pour que $\mathbf{u}(t) = 0$ pour tout $t > 0$. Néanmoins, cette propriété n'est pas vérifiée à l'instant $t = 0$. C'est pourquoi on va considérer des données initiales pour lesquelles le déplacement initial vérifie la même propriété que le déplacement à $t > 0$.
Dans ce but, on suppose que $\mathbf{f} \in W(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega))$ et on pose :

$$\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ tels que } \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}, (\mathbf{v},\ \mathbf{w})_\mathbf{V} = \int_\Omega \mathbf{f}(0) \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} \right\}.$$

L'espace $\mathbf{K}$ est non vide. En effet, considérons φ quelconque dans $H^1(\Omega)$ telle que $\varphi = 0$ sur Γ_1^c et posons $\mathbf{h} = \nabla\varphi \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Comme $\mathbf{f}(0) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, le problème mixte

$$\begin{cases} -div(\mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{v}) = \mathbf{f}(0) + \mathbf{h} \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1, \\ \mu(x)\nabla\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + A\mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1^c, \end{cases}$$

admet une unique solution $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ par application du théorème de Lax-Milgram et cette solution appartient à $\mathbf{K}$.
On peut alors établir le :

Théorème 4.7.
Soit $(\mathbf{u}_0, p_0)$ donné dans $\mathbf{K} \times L^2(\Omega)$. Alors, pour tout $\mathbf{f} \in W(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega))$ et $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, le problème (4.35) a une unique solution.

4.3.1 Existence d'une solution

Soit $\varepsilon > 0$ un paramètre destiné à tendre vers zéro et soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite dans $L^\infty(\Omega)$ telle que $||\rho_\varepsilon||_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$ et ess $\inf \rho_\varepsilon > 0$.
On s'intéresse alors à la suite de formulations variationnelles :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver un couple } (\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \in L^\infty(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;V) \text{ tel que} \\ \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon \in L^2(0,T;H(div,\Omega)),\ \partial_t^2 \mathbf{u}_\varepsilon \in L^2(0,T;\mathbf{V}'),\ \partial_t p_\varepsilon \in L^2(0,T;V'), \\ \text{vérifiant pour presque tout } t \text{ dans }]0,T[,\ \forall(\mathbf{v},q) \in \mathbf{V}\times V : \\ < \rho_\varepsilon \partial_t^2 \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} + \displaystyle\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon\ div \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ + \displaystyle\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) div \mathbf{u}_\varepsilon\ div \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ -\alpha \displaystyle\int_\Omega p_\varepsilon\ div \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{v} d\sigma = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \\ < c_0(\mathbf{x})\partial_t p_\varepsilon, q >_{V',V} + \alpha \displaystyle\int_\Omega q\ div \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon d\mathbf{x} + \int_\Omega k(\mathbf{x}) \nabla p_\varepsilon \cdot \nabla q d\mathbf{x} \\ +B \displaystyle\int_{\Gamma_2^c} p_\varepsilon q d\sigma = \int_\Omega h q d\mathbf{x}, \\ (\mathbf{u}_\varepsilon(0,\mathbf{x}), p_\varepsilon(0,\mathbf{x})) = (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), p_0(\mathbf{x})),\ \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon(0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \end{array}\right. \tag{4.36}$$

où $\mathbf{u}_1$ est une fonction de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ choisie arbitrairement. D'après les résultats établis au paragraphe 4.2, on sait que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un unique couple solution $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ du problème (4.36). Afin de prouver que la suite $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ converge vers un couple (u,p) solution du problème (4.35), on suit la démarche du paragraphe 4.2.1 en établissant les estimations *a priori* résumées dans le lemme suivant.

Lemme 4.8.
Soit $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ la suite des solutions de (4.36). Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on a :

- $(\rho_\varepsilon \partial_t^2 \mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *bornée dans* $L^2(0,T;\mathbf{V}')$;
- $(\sqrt{\rho_\varepsilon}\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *bornée dans* $L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$;
- $(div \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *bornée dans* $L^2(0,T;L^2(\Omega))$;
- $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *bornée dans* $L^\infty(0,T;\mathbf{V})$;
- $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *bornée dans* $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V)$;
- $(\partial_t p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *bornée dans* $L^2(0,T;V')$.

Démonstration.
Comme dans le cas non linéaire monodimensionnel, les solutions ne sont pas assez

régulières pour autoriser le choix de $(\mathbf{v},q) = (\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ comme fonction-test dans (4.36) pour obtenir une première estimation. Le manque de régularité provient du terme $\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon$, et pour contourner cette difficulté, on approche ce terme par le quotient différentiel $\mathbf{v} = \frac{1}{\tau}(\mathbf{u}_\varepsilon(t+\tau) - \mathbf{u}_\varepsilon(t))$ pour tout $\tau > 0$. Ce terme a la régularité suffisante pour être considéré comme fonction-test dans (4.36) et nous permettre de traiter à la fois le terme d'évolution d'ordre deux de la première équation et les termes de couplage. On effectue alors une intégration sur $[0,t]$ et une intégration par parties dans la première équation. En faisant des calculs analogues à ceux du paragraphe 2.3.2 du chapitre 2 et en faisant tendre τ vers zéro, on obtient l'égalité : $\forall s \in]0,T[$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Bigg[\int_\Omega \rho_\varepsilon|\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x} + \int_\Omega(\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x}\\
&+\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x} + \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_\varepsilon(s)\cdot\mathbf{u}_\varepsilon(s)d\sigma\Bigg]\\
&+\int_0^s\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon|^2d\mathbf{x}dt + \int_0^s\int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla p_\varepsilon|^2d\mathbf{x}dt\\
&+B\int_0^s\int_{\Gamma_2^c}|p_\varepsilon|^2d\sigma dt = \int_0^s\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon d\mathbf{x}dt\\
&+\int_0^s\int_\Omega hp_\varepsilon d\mathbf{x}dt + \frac{1}{2}\int_\Omega\rho_\varepsilon|\mathbf{u}_1|^2d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega(\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\mathbf{u}_0|^2d\mathbf{x}\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega\mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_0|^2d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_0|^2d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c}A\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{u}_0d\sigma.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

De plus, comme $\mathbf{f}\in W(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega),\mathbf{L}^2(\Omega))$, on peut écrire à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^s\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon d\mathbf{x}dt = -\int_0^s\int_\Omega\partial_t\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_\varepsilon d\mathbf{x}dt + \int_\Omega\mathbf{f}(s)\cdot\mathbf{u}_\varepsilon(s)d\mathbf{x} - \int_\Omega\mathbf{f}(0)\cdot\mathbf{u}_0d\mathbf{x}.$$

Or, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^s\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon d\mathbf{x}dt \le \int_0^s &\left(||\partial_t\mathbf{f}||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}||\mathbf{u}_\varepsilon||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)dt\\
&+||\mathbf{f}(s)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}||\mathbf{u}_\varepsilon(s)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + ||\mathbf{f}(0)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}||\mathbf{u}_0||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

L'inégalité (4.38) devient, en utilisant d'abord l'inégalité de Poincaré :

$$\begin{aligned}
\int_0^s\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon d\mathbf{x}dt \le C\int_0^s &\left(||\partial_t\mathbf{f}||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}||\nabla\mathbf{u}_\varepsilon||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)dt + C||\mathbf{f}(s)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}||\nabla\mathbf{u}_\varepsilon(s)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\
&+||\mathbf{f}(0)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}||\mathbf{u}_0||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

puis celle de Young :

$$\begin{aligned}\int_0^s\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon d\mathbf{x}dt \leq \frac{C^2}{\widehat{\mu}}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\mathbf{f}|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{\widehat{\mu}}{4}\int_0^s\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2 d\mathbf{x}dt \\ + \frac{C^2}{\widehat{\mu}}\int_\Omega |\mathbf{f}(s)|^2 d\mathbf{x} + \frac{\widehat{\mu}}{4}\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}_\varepsilon(s)|^2 d\mathbf{x} \\ + ||\mathbf{f}(0)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}||\mathbf{u}_0||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{4.39}$$

Mais, puisque $\mu(\mathbf{x}) > \widehat{\mu}$, on a finalement :

$$\begin{aligned}\int_0^s\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon d\mathbf{x}dt \leq \frac{C^2}{\widehat{\mu}}\int_0^s\int_\Omega |\partial_t\mathbf{f}|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{1}{4}\int_0^s\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2 d\mathbf{x}dt \\ + \frac{C^2}{\widehat{\mu}}\int_\Omega |\mathbf{f}(s)|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{4}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_\varepsilon(s)|^2 d\mathbf{x} \\ + ||\mathbf{f}(0)||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}||\mathbf{u}_0||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{4.40}$$

On montre par un raisonnement analogue que :

$$\int_0^s\int_\Omega hp_\varepsilon d\mathbf{x}dt \leq \frac{1}{2\widehat{c_0}}\int_0^s\int_\Omega |h|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{1}{2}\int_0^s\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_\varepsilon|^2 d\mathbf{x}dt.\tag{4.41}$$

Enfin, en utilisant les hypothèses sur $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$ et p_0 et le fait que les paramètres physiques soient dans $L^\infty(\Omega)$, on obtient qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon|\mathbf{u}_1|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\mathbf{u}_0|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_0|^2 d\mathbf{x} \\ +\frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_0|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{u}_0 d\sigma \leq \kappa.\end{aligned}\tag{4.42}$$

En tenant compte de (4.40), (4.41), (4.42), l'égalité (4.37) entraîne l'inégalité :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\int_\Omega \rho_\varepsilon|\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x} + \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x}\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x} + \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_\varepsilon(s)\cdot\mathbf{u}_\varepsilon(s)d\sigma\right] \\ &+\int_0^s\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon|^2 d\mathbf{x}dt + \int_0^s\int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla p_\varepsilon|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+B\int_0^s\int_{\Gamma_2^c} |p_\varepsilon|^2 d\sigma dt \leq \kappa + \frac{1}{4}\int_0^s\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+\frac{1}{2}\int_0^s\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_\varepsilon|^2 d\mathbf{x}dt.\end{aligned}\tag{4.43}$$

En appliquant finalement le lemme de Gronwall à (4.43), on peut affirmer qu'il existe une constante positive κ dépendant uniquement des données du problème telle que :

$$\frac{1}{2}\left[\int_\Omega \rho_\varepsilon|\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x} + \int_\Omega(\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x}\right.$$
$$\left. + \int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_\varepsilon(s)\cdot\mathbf{u}_\varepsilon(s)d\sigma + \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|p_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x}\right] + \int_0^s\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon|^2 d\mathbf{x}dt$$
$$+\int_0^s\int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla p_\varepsilon|^2 d\mathbf{x}dt + B\int_0^s\int_{\Gamma_2^c}|p_\varepsilon|^2 d\sigma dt \leq \kappa,$$

et les paramètres physiques étant bornés inférieurement, on aboutit finalement à l'estimation *a priori* :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\frac{1}{2}\left[\int_\Omega \rho_\varepsilon|\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x} + (\widehat{\lambda}+\widehat{\mu})\int_\Omega |div\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x} + \frac{\widehat{\mu}}{2}\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x}\right.\\ \displaystyle\left.+\int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_\varepsilon(s)\cdot\mathbf{u}_\varepsilon(s)d\sigma + \widehat{c_0}\int_\Omega|p_\varepsilon|^2(s)d\mathbf{x}\right] + \widehat{\lambda^*}\int_0^s\int_\Omega|div\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon|^2d\mathbf{x}dt\\ \displaystyle+\widehat{k}\int_0^s\int_\Omega|\nabla p_\varepsilon|^2 d\mathbf{x}dt + B\int_0^s\int_{\Gamma_2^c}|p_\varepsilon|^2d\sigma dt \leq \kappa.\end{array}\right. \tag{4.44}$$

En considérant (4.44), on voit qu'il ne reste plus qu'à prouver que $\rho_\varepsilon\partial_t^2\mathbf{u}_\varepsilon$ et $\partial_t p_\varepsilon$ sont respectivement bornées dans $L^2(0,T;\mathbf{V}')$ et $L^2(0,T;V')$. Ces propriétés s'obtiennent sans difficulté en exprimant $\rho_\varepsilon\partial_t^2\mathbf{u}_\varepsilon$ et $\partial_t p_\varepsilon$ à partir des équations variationnelles de (4.36) et en tenant compte de (4.44). ∎

Les propriétés du lemme 4.8 sont suffisantes pour étudier la convergence de la suite $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ lorsque ε tend vers 0. En effet, on peut affirmer qu'il existe une suite extraite de $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ notée également $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que :

$$\begin{array}{rll} \mathbf{u}_\varepsilon & \to \mathbf{u} & \text{dans } L^\infty(0,T;\mathbf{V}) \text{ faible } * \,;\\ div\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon & \to div\partial_t\mathbf{u} & \text{dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible };\\ \rho_\varepsilon\partial_t^2\mathbf{u}_\varepsilon & \to 0 & \text{dans } L^2(0,T;\mathbf{V}') \text{ faible };\\ p_\varepsilon & \to p & \text{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible * et } L^2(0,T;V) \text{ faible };\\ \partial_t p_\varepsilon & \to \partial_t p & \text{dans } L^2(0,T;V') \text{ faible.}\end{array} \tag{4.45}$$

En passant à la limite dans (4.36) lorsque ε tend vers zéro, on obtient que le couple $(\mathbf{u}, p)$ est une solution du système variationnel suivant : pour presque tout t dans

$]0,T[$, $\forall(\mathbf{v},q)\in\mathbf{V}\times V$,

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})div\partial_t\mathbf{u}\; div\mathbf{v}d\mathbf{x}+\int_\Omega(\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))div\mathbf{u}\; div\mathbf{v}d\mathbf{x}\\ \displaystyle+\int_\Omega\mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}\otimes\nabla\mathbf{v}d\mathbf{x}-\alpha\int_\Omega p\; div\mathbf{v}d\mathbf{x}+\int_{\Gamma_1^c}A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}d\sigma=\int_\Omega\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x},\\ \displaystyle< c_0(\mathbf{x})\partial_t p,q >_{V',V}+\alpha\int_\Omega q\; div\partial_t\mathbf{u}d\mathbf{x}+\int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla p\cdot\nabla q d\mathbf{x}\\ \displaystyle+B\int_{\Gamma_2^c}pqd\sigma=\int_\Omega hqd\mathbf{x}.\end{array}\right. \tag{4.46}$$

Reste alors, pour achever la preuve de l'existence d'une solution de (4.35) à vérifier que le couple $(\mathbf{u},p)$ satisfait les conditions à $t=0$.
Comme $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $W(0,T;V,V')$ et $W(0,T;V,V')\subset_> C^0([0,T],L^2(\Omega))$, on a pour tout t dans $[0,T]$, $p_\varepsilon(t,\cdot)\to p(t,\cdot)$ dans $L^2(\Omega)$ faible lorsque $\varepsilon\to 0$. Ceci est en particulier vrai pour $t=0$ et comme $p_\varepsilon(0,\cdot)=p_0(\cdot)$ par définition, on a que $p(0,.)=p_0(.)$.
De même, puisque la suite $(div\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans l'espace $W(0,T;L^2(\Omega),L^2(\Omega))$ et que $W(0,T;L^2(\Omega),L^2(\Omega))\subset_> C^0([0,T];L^2(\Omega))$, on obtient en particulier que $(div\mathbf{u}_\varepsilon)(0,\cdot)\to(div\mathbf{u})(0,\cdot)$ dans $L^2(\Omega)$ faible. Or, comme $(div\mathbf{u}_\varepsilon)(0,\cdot)=div\mathbf{u}_0(\cdot)$, il vient que $(div\mathbf{u})(0,\cdot)=div\mathbf{u}_0$ dans Ω.
Mais, comme $\mathbf{u}\in L^\infty(0,T;\mathbf{V})$, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{u}^*\in\mathbf{V}$ tels que $t_n\to 0$ et $\mathbf{u}(t_n,.)\to\mathbf{u}^*$ dans $\mathbf{V}$ faible et dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ fort. D'après la propriété 4.6, toute solution de (4.46) vérifie : $\forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}$, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\int_\Omega\mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}(t_n)\otimes\nabla\mathbf{v}d\mathbf{x}+\int_{\Gamma_1^c}A\mathbf{u}(t_n)\cdot\mathbf{v}d\sigma=\int_\Omega\mathbf{f}(t_n)\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}. \tag{4.47}$$

De plus, comme $\mathbf{u}_0\in\mathbf{K}$, on a aussi : $\forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}$,

$$\int_\Omega\mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}_0\otimes\nabla\mathbf{v}d\mathbf{x}+\int_{\Gamma_1^c}A\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{v}d\sigma=\int_\Omega\mathbf{f}(0)\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}.$$

En soustrayant cette relation à (4.47), on obtient que : $\forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}$, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\int_\Omega\mu(\mathbf{x})\nabla(\mathbf{u}(t_n)-\mathbf{u}_0)\otimes\nabla\mathbf{v}d\mathbf{x}+\int_{\Gamma_1^c}A(\mathbf{u}(t_n)-\mathbf{u}_0)\cdot\mathbf{v}d\sigma=\int_\Omega(\mathbf{f}(t_n)-\mathbf{f}(0))\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x}. \tag{4.48}$$

Si à présent on fait tendre n vers l'infini dans (4.48), on obtient par continuité de $\mathbf{f}$ de $[0,T]$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega\mu(\mathbf{x})\nabla(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}_0)\otimes\nabla\mathbf{v}d\mathbf{x}+\int_{\Gamma_1^c}A(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}_0)\cdot\mathbf{v}d\sigma=0,$$

soit
$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H},\ (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0, \mathbf{v})_{\mathbf{V}} = 0 \tag{4.49}$$
ce qui signifie que $\mathbf{u}^* - u_0$ est dans l'orthogonal de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{V}$.
Comme $\mathbf{u}(t_n, \cdot) \to \mathbf{u}^*$ dans $\mathbf{V}$ faible, on a $div\mathbf{u}(t_n, \cdot) \to div\mathbf{u}^*$ dans $L^2(\Omega)$ faible. Or, par continuité de $div\mathbf{u}$ de $[0,T]$ dans $L^2(\Omega)$, on a $div\mathbf{u}(t_n, \cdot) \to div\mathbf{u}(0, \cdot)$ dans $L^2(\Omega)$ fort. Il vient donc $div\mathbf{u}^* = div\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0$ est ainsi élément de $\mathbf{H}$ ce qui implique $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0$ compte tenu de (4.49) qui est donc vérifiée pour $\mathbf{v} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0$. Ainsi, $\lim\limits_{t \to 0^+} \mathbf{u}(t, .)$ existe et $\mathbf{u}_0 = \lim\limits_{t \to 0^+} \mathbf{u}(t, .)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. On a donc bien $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ ce qui met fin à la démonstration de l'existence d'une solution de (4.35).

Remarque 4.9.
Si on ne suppose pas que $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{K}$*, on obtint seulement que* $div\mathbf{u}^*(0) = div\mathbf{u}_0$*. Cette condition ne suffit plus pour conclure que* $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$*. En supposant que* Ω *est borné connexe et si* Γ *n'a qu'une seule composante connexe, on obtient que* $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{rot}\boldsymbol{\varphi}_0$ *avec* $\boldsymbol{\varphi}_0$ *quelconque dans* $\mathbf{H}^1(\Omega)$ *[33].*

4.3.2 Unicité de la solution

On considère deux solutions $(\mathbf{u}, p)$ et $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ du problème (4.35) avec les mêmes conditions initiales $(\mathbf{u}_0, p_0)$ et les mêmes termes sources $\mathbf{f}$ et h. Si on désigne par $\boldsymbol{\nu}$ et ψ les différences entre les solutions comme au paragraphe 4.2.2, le couple $(\boldsymbol{\nu}, \psi)$ possède les propriétés suivantes :
$$\left\{\begin{array}{l}
(\boldsymbol{\nu}, \psi) \in L^\infty(0,T;\mathbf{V}) \times L^2(0,T;V), \\
div\partial_t\boldsymbol{\nu} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ \partial_t\psi \in L^2(0,T;V'), \\
\text{et pour presque tout } t \text{ dans }]0,T[,\ \forall(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times V : \\
\displaystyle\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div\partial_t\boldsymbol{\nu}\ div\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))div\boldsymbol{\nu}\ div\mathbf{v}d\mathbf{x} \\
\displaystyle+ \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\boldsymbol{\nu} \otimes \nabla\mathbf{v}d\mathbf{x} - \alpha\int_\Omega \psi\ div\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{v}d\sigma = 0, \\
\displaystyle< c_0(\mathbf{x})\partial_t\psi, q >_{V',V} + \alpha\int_\Omega q\ div\partial_t\boldsymbol{\nu}d\mathbf{x} + \int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla\psi\cdot\nabla q d\mathbf{x} \\
\displaystyle+B\int_{\Gamma_2^c} \psi q d\sigma = 0, \\
(\boldsymbol{\nu}(0,\mathbf{x}), \psi(0,\mathbf{x})) = (\mathbf{0}, 0).
\end{array}\right. \tag{4.50}$$
Pour démontrer que (ν, ψ) est la solution nulle, deux choix de couples de fonctions-test semblent intéressants : $(\boldsymbol{\nu}, \psi)$ ou $(\partial_t\boldsymbol{\nu}, \psi)$. Cependant, le choix du premier couple

ne nous permet pas d'éliminer les termes de couplages tandis que le second n'est pas bien adapté par manque de régularité comme au paragraphe 4.2.2. Voilà pourquoi nous allons construire un couple (v, φ) suffisamment régulier et nous permettant d'éliminer les termes de couplage. Dans ce but, φ est définie pour s dans $]0, T[$ par :

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^s \psi(\sigma, \mathbf{x}) d\sigma & \text{si} \quad t \leq s, \\ 0 & \text{si} \quad t \geq s. \end{cases}$$

Si on pose $\tilde{\varphi}(t, \mathbf{x}) = \displaystyle\int_0^s \psi(\sigma, \mathbf{x}) d\sigma$, les propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \varphi(t, \mathbf{x}) = \tilde{\varphi}(s, \mathbf{x}) - \tilde{\varphi}(t, \mathbf{x}) & \varphi(0, \mathbf{x}) = \tilde{\varphi}(s, \mathbf{x}) & \varphi(s, \mathbf{x}) = 0 \\ \partial_t \varphi(t, \mathbf{x}) = -\psi(t, \mathbf{x}) & \partial_t \varphi(0, \mathbf{x}) = 0 & \partial_t \varphi(s, \mathbf{x}) = -\psi(s, \mathbf{x}). \end{cases} \tag{4.51}$$

On considère alors le couple (v, φ) comme fonction-test dans (4.50) :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \partial_t \mathsf{v} \; div \mathsf{v} d\mathbf{x} + \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) div |\mathsf{v}|^2 d\mathbf{x} \\ \displaystyle + \int_\Omega \mu(\mathbf{x}) |\nabla \mathsf{v}|^2 d\mathbf{x} - \alpha \int_\Omega \psi \; div \mathsf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathsf{v} \cdot \mathsf{v} d\sigma = 0, \\ \displaystyle < c_0(\mathbf{x}) \partial_t \psi, \varphi >_{V', V} + \alpha \int_\Omega \varphi \; div \partial_t \mathsf{v} d\mathbf{x} + \int_\Omega k(\mathbf{x}) \nabla \psi \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} \\ \displaystyle + B \int_{\Gamma_2^c} \psi \varphi d\sigma = 0. \end{cases} \tag{4.52}$$

On somme les deux relations de (4.52) et après intégration par rapport au temps sur l'intervalle $[0, s]$, il vient :

$$\begin{cases} \displaystyle\frac{1}{2} \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) |div \mathsf{v}|^2(s) d\mathbf{x} + \int_0^s \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) |div \mathsf{v}|^2 d\mathbf{x} dt \\ \displaystyle + \int_0^s \int_\Omega \mu(\mathbf{x}) |\nabla \mathsf{v}|^2 d\mathbf{x} dt + \int_0^s \int_{\Gamma_1^c} A\mathsf{v} \cdot \mathsf{v} d\sigma dt \\ \displaystyle + \alpha \int_0^s \int_\Omega [\varphi div \partial_t \mathsf{v} - \psi div \mathsf{v}] d\mathbf{x} dt + \int_0^s < c_0(\mathbf{x}) \partial_t \psi, \varphi >_{V', V} dt \\ \displaystyle + \int_0^s \int_\Omega k(\mathbf{x}) \nabla \psi \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} dt + B \int_0^s \int_{\Gamma_2^c} \psi \varphi d\sigma dt = 0. \end{cases} \tag{4.53}$$

En utilisant des intégrations par parties et les propriétés (4.51), on montre les relations suivantes :

$$\int_0^s \int_\Omega [\varphi div \partial_t \mathrm{v} - \psi div \mathrm{v}] d\mathbf{x} = \int_0^s \int_\Omega [\varphi div \partial_t \mathrm{v} + \partial_t \varphi div \mathrm{v}] d\mathbf{x}$$
$$= \int_\Omega \varphi(s) div \mathrm{v}(s) d\mathbf{x} - \int_\Omega \varphi(0) div \mathrm{v}(0) d\mathbf{x} = 0,$$
$$\int_0^s < c_0(\mathbf{x}) \partial_t \psi, \varphi >_{V',V} dt = -\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) \psi \partial_t \varphi d\mathbf{x} dt = \int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\psi|^2 d\mathbf{x} dt,$$
$$\int_0^s \int_\Omega k(\mathbf{x}) \nabla \psi \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} dt = -\int_0^s \int_\Omega k(\mathbf{x}) \nabla \partial_t \varphi \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} dt = \frac{1}{2} \int_\Omega k(\mathbf{x}) |\nabla \tilde{\varphi}|^2(s) d\mathbf{x},$$
$$\int_0^s \int_{\Gamma_2^c} \psi \varphi d\sigma dt = -\int_0^s \int_{\Gamma_2^c} \partial_t \varphi \varphi d\sigma dt = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2^c} |\tilde{\varphi}|^2(s) d\sigma.$$

On déduit alors de (4.53) l'égalité :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) |div \mathrm{v}|^2(s) d\mathbf{x} + \int_0^s \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) |div \mathrm{v}|^2 d\mathbf{x} dt \\ + \displaystyle\int_0^s \int_\Omega \mu(\mathbf{x}) |\nabla \mathrm{v}|^2 d\mathbf{x} dt + \int_0^s \int_{\Gamma_1^c} A \mathrm{v} \cdot \mathrm{v} d\sigma dt \\ + \displaystyle\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\psi|^2 d\mathbf{x} dt + \frac{1}{2} \int_\Omega k(\mathbf{x}) |\nabla \tilde{\varphi}|^2(s) d\mathbf{x} + \frac{B}{2} \int_{\Gamma_2^c} |\tilde{\varphi}|^2(s) d\sigma = 0 \end{cases}$$

ce qui nous conduit à l'estimation :

$$\begin{cases} \dfrac{\widehat{\lambda^*}}{2} \displaystyle\int_\Omega |div \mathrm{v}|^2(s) d\mathbf{x} + (\widehat{\lambda} + \widehat{\mu}) \int_0^s \int_\Omega |div \mathrm{v}|^2 d\mathbf{x} dt \\ + \widehat{\mu} \displaystyle\int_0^s \int_\Omega |\nabla \mathrm{v}|^2 d\mathbf{x} dt + \int_0^s \int_{\Gamma_1^c} A \mathrm{v} \cdot \mathrm{v} d\sigma dt \\ + \widehat{c_0} \displaystyle\int_0^s \int_\Omega |\psi|^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\widehat{k}}{2} \int_\Omega |\nabla \tilde{\varphi}|^2(s) d\mathbf{x} + \frac{B}{2} \int_{\Gamma_2^c} |\tilde{\varphi}|^2(s) d\sigma \leq 0 \end{cases}$$

en utilisant le fait que les paramètres physiques sont bornées inférieurement. On peut alors conclure que $\mathrm{v}(t, \mathbf{x}) = \psi(t, \mathbf{x}) = 0$ ce qui établit l'unicité de la solution du problème (4.35) et met un terme à la démonstration du théorème 4.7.

4.4 Comparaison des modèles

On a prouvé au paragraphe 4.3 l'existence d'une solution du modèle quasi-statique. La construction de la solution repose sur une technique de régularisation s'appuyant sur les résultats déjà obtenus sur le modèle de Biot complet. Le modèle quasi-statique est donc limite du modèle de Biot complet quand ρ tend vers zéro. On aurait pu de la même façon construire la solution du modèle thermoélastique et en déduire que ce modèle est aussi un état limite du modèle de Biot complet mais cette fois-ci lorsque le paramètre de consolidation secondaire λ^* converge uniformément vers zéro. La méthode que nous avons choisie a permis d'étudier le cas plus général où λ^* peut s'annuler dans certaines régions de Ω. Dans ce paragraphe, nous allons préciser comment les modèles thermoélastique et quasi-statique approchent le modèle complet en estimant dans chaque cas les taux de convergence des solutions en fonction des paramètres λ^* ou ρ suivant le cas étudié.

4.4.1 Comparaison entre le modèle de Biot complet dégénéré et le modèle thermoélastique

Dans cette partie, nous comparons le modèle de Biot complet dégénéré (où $\lambda^*(\mathbf{x}) \geq 0$) et le modèle thermoélastique (où $\lambda^*(\mathbf{x}) = 0$), le coefficient ρ étant tel que $\rho(\mathbf{x}) \geq \widehat{\rho} > 0$ sur Ω.
On note $\varepsilon > 0$ le sup essentiel de la fonction $\lambda^*(\mathbf{x})$: $\varepsilon = \text{ess} \sup_{\mathbf{x}\in\Omega} \lambda^*(\mathbf{x})$.
On note $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ la solution du modèle complet avec comme conditions initiales $(\mathbf{u}_{0,\varepsilon}, \mathbf{u}_{1,\varepsilon}, p_{0,\varepsilon}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Le couple $(\mathbf{u}, p)$ désigne la solution du modèle thermoélastique associée aux conditions initiales $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, p_0) \in \mathbf{V} \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
Dans la suite, on note $\mathbf{v}$ la différence entre les vecteurs déplacement ($\mathbf{v} = \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}$) et ψ la différence entre les pressions ($\psi = p_\varepsilon - p$). On suppose enfin que les termes sources $\mathbf{f}$ et h sont les mêmes pour les deux problèmes.
Nous allons étudier le comportement du modèle complet lorsque λ^* converge uniformément dans Ω vers zéro c'est-à-dire lorsque ε tend vers zéro. Pour cela, nous allons estimer le taux de convergence et l'exprimer en tant que puissance de ε.

Théorème 4.10.
Il existe une constante $\kappa > 0$ qui dépend uniquement des données telle que :

$$||\mathbf{v}||_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq \kappa(\varepsilon^{1/2} + ||\mathbf{u}_{0,\varepsilon} - \mathbf{u}_0||_{H(div,\Omega)} + ||\mathbf{u}_{1,\varepsilon} - \mathbf{u}_1||_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + ||p_{0,\varepsilon} - p_0||_{L^2(\Omega)}).$$

De plus si, quand ε tend vers zéro, $(\mathbf{u}_{0,\varepsilon}, \mathbf{u}_{1,\varepsilon}, p_{0,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est une approximation de $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, p_0)$ dans l'espace produit $H(div,\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ en $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$, le taux de convergence de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vers $\mathbf{u}$ dans $L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ est en $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$.

Démonstration.
On reprend les techniques des preuves des résultats d'unicité afin d'obtenir l'estimation souhaitée sur le résidu $\mathbf{v}$.

Pour cela, soit $s \in]0,T[$. Puisque $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ et $(\mathbf{u}, p)$ sont les solutions respectives des modèles de Biot complet et thermoélastique, on a, $\forall(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times V$, pour presque tout t dans $]0,s[$:

$$\begin{aligned} &< \rho(\mathbf{x})\partial_t^2 \mathsf{v}, \mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} + \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) div\mathsf{v} div\mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x}) \nabla \mathsf{v} \otimes \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ &-\alpha \int_\Omega \psi div\mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1^c} A\mathsf{v} \cdot \mathbf{v} d\sigma = - \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon div\mathbf{v} d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{4.54}$$

et

$$\begin{aligned} &< \partial_t (c_0(\mathbf{x})\psi - \alpha div\mathbf{u}), q >_{V',V} + \alpha \int_\Omega q \ div \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon d\mathbf{x} + \int_\Omega k(\mathbf{x}) \nabla\psi \cdot \nabla q d\mathbf{x} \\ &+ B \int_{\Gamma_2^c} \psi q d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \tag{4.55}$$

On considère alors le couple $(\boldsymbol{\varphi}_1, \varphi_2)$ construit à partir du couple (v, ψ) comme au paragraphe 4.2.2. On prend ce couple pour fonction-test dans (4.54) et (4.55). Il vérifie ici les propriétés (légèrement différentes de celle du paragraphe 4.2.2 du fait que les conditions initiales ne sont plus nulles) :

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{\varphi}_1(t,\mathbf{x}) = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(t,\mathbf{x}) - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s,\mathbf{x}) & \boldsymbol{\varphi}_1(0,\mathbf{x}) = -\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s,\mathbf{x}) & \boldsymbol{\varphi}_1(s,\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \partial_t \boldsymbol{\varphi}_1(t,\mathbf{x}) = \mathsf{v}(t,\mathbf{x}) & \partial_t \boldsymbol{\varphi}_1(0,\mathbf{x}) = \mathsf{v}(0,\mathbf{x}) & \partial_t \boldsymbol{\varphi}_1(s,\mathbf{x}) = \mathsf{v}(s,\mathbf{x}) \end{array} \tag{4.56}$$

et :

$$\begin{array}{lll} \varphi_2(t,\mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_2(t,\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}_2(s,\mathbf{x}) & \varphi_2(0,\mathbf{x}) = -\tilde{\varphi}_2(s,\mathbf{x}) & \varphi_2(s,\mathbf{x}) = 0 \\ \partial_t \varphi_2(t,\mathbf{x}) = \int_0^t \psi(\sigma,\mathbf{x}) d\sigma & \partial_t \varphi_2(0,\mathbf{x}) = 0 & \partial_t \varphi_2(s,\mathbf{x}) = \int_0^s \psi(\sigma,\mathbf{x}) d\sigma \\ \partial_t^2 \varphi_2(t,\mathbf{x}) = \psi(t,\mathbf{x}) & \partial_t^2 \varphi_2(0,\mathbf{x}) = \psi(0,\mathbf{x}) & \partial_t^2 \varphi_2(s,\mathbf{x}) = \psi(s,\mathbf{x}). \end{array} \tag{4.57}$$

On intègre les équations (4.54) et (4.55) sur l'intervalle de temps $[0,s]$ et on ajoute les deux relations obtenues. En utilisant une intégration par parties et les propriétés (4.56)-(4.57), on obtient par le même type de calculs qu'au paragraphe 4.2.2 :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_\Omega \rho(\mathbf{x}) |\mathsf{v}|^2(s) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) |div \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega \mu(\mathbf{x}) |\nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s) d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1^c} A \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s) \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s) d\sigma + \frac{1}{2} \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\partial_t \varphi_2|^2(s) d\mathbf{x} + \int_0^s \int_\Omega k(\mathbf{x}) |\nabla \partial_t \varphi_2|^2 d\mathbf{x} dt \\ &+ B \int_0^s \int_{\Gamma_2^c} |\partial_t \varphi_2|^2 d\sigma dt = \int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon div \boldsymbol{\varphi}_1 d\mathbf{x} dt + \frac{1}{2} \int_\Omega \rho(\mathbf{x}) |\mathsf{v}|^2(0) d\mathbf{x} \\ &+ \int_\Omega \rho(\mathbf{x}) \partial_t \mathsf{v}(0) \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s) d\mathbf{x} + \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) \psi(0) \tilde{\varphi}_2(s) d\mathbf{x} + \alpha \int_\Omega div \mathsf{v}(0) \tilde{\varphi}_2(s) d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

De plus, on a d'après (4.56) :

$$\begin{aligned}\int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon div \boldsymbol{\varphi}_1 d\mathbf{x}dt &= \int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon div \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(t) d\mathbf{x}dt \\ &- \int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon div \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s) d\mathbf{x}dt,\end{aligned}$$

Alors par définition de ε (sup essentiel de la fonction λ^*) et par utilisation des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on obtient la majoration :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon div \boldsymbol{\varphi}_1 d\mathbf{x}dt\right| &\leq \frac{\varepsilon(1+T)}{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}} \int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) |div \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^s \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) |div \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+ \frac{1}{4} \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x})) |div \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s) d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

De même, on peut montrer grâce à (4.57) et à l'inégalité de Young que :

$$\begin{aligned}\int_\Omega c_0(\mathbf{x}) \psi(0) \tilde{\varphi}_2(s) d\mathbf{x} &= \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) \psi(0) \left(\int_0^s \partial_t \varphi_2(t) dt\right) d\mathbf{x} \\ &\leq \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\psi(0)| \sqrt{s} \left(\int_0^s |\partial_t \varphi_2(t)|^2 dt\right)^{1/2} d\mathbf{x} \\ &\leq \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) s |\psi(0)|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{4} \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) \int_0^s |\partial_t \varphi_2(t)|^2 dt d\mathbf{x} \\ &\leq \kappa ||p_{0,\varepsilon} - p_0||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4} \int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\partial_t \varphi_2(t)|^2 d\mathbf{x}dt.\end{aligned}$$

Enfin, on montre par les mêmes techniques et en utilisant en plus l'inégalité de Poincaré qu'il existe aussi une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_\Omega \rho(\mathbf{x}) \partial_t \boldsymbol{\nu}(0) \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s) d\mathbf{x} \leq \kappa ||\mathbf{u}_{1,\varepsilon} - \mathbf{u}_1||^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{4} \int_\Omega \mu(\mathbf{x}) |\nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s) d\mathbf{x}, \\ \displaystyle\alpha \int_\Omega div \boldsymbol{\nu}(0) \tilde{\varphi}_2(s) d\mathbf{x} \leq \kappa ||div \mathbf{u}_{0,\varepsilon} - div \mathbf{u}_0||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4} \int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\partial_t \varphi_2(t)|^2 d\mathbf{x}dt.\end{array}\right.$$

En reportant les inégalités précédentes dans (4.58), on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho(\mathbf{x})|\mathbf{v}|^2(s)d\mathbf{x}+\frac{1}{4}\int_{\Omega}(\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s)d\mathbf{x}\\ \displaystyle+\frac{1}{4}\int_{\Omega}\mu(\mathbf{x})|\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s)d\mathbf{x}+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c}A\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)d\sigma\\ \displaystyle+\frac{1}{2}\int_{\Omega}c_0(\mathbf{x})|\partial_t\varphi_2|^2(s)d\mathbf{x}+\int_0^s\int_{\Omega}k(\mathbf{x})|\nabla\partial_t\varphi_2|^2d\mathbf{x}dt\\ \displaystyle+B\int_0^s\int_{\Gamma_2^c}|\partial_t\varphi_2|^2d\sigma dt\leq\frac{\varepsilon(1+T)}{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}\int_0^s\int_{\Omega}\lambda^*(\mathbf{x})|div\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon|^2d\mathbf{x}dt\\ +\kappa||\mathbf{u}_{0,\varepsilon}-\mathbf{u}_0||^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\kappa||div\mathbf{u}_{0,\varepsilon}-div\mathbf{u}_0||^2_{L^2(\Omega)}\\ +\kappa||\mathbf{u}_{1,\varepsilon}-\mathbf{u}_1||^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\kappa||p_{0,\varepsilon}-p_0||^2_{L^2(\Omega)}\\ \displaystyle+\frac{1}{4}\int_0^s\int_{\Omega}(\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2d\mathbf{x}dt+\frac{1}{2}\int_0^s\int_{\Omega}c_0(\mathbf{x})|\partial_t\varphi_2|^2(t)d\mathbf{x}dt.\end{array}\right. \tag{4.59}$$

Mais d'après le lemme 4.1, on sait que la suite $(\sqrt{\lambda^*}div\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Ainsi, en utilisant une fois encore le lemme de Gronwall, on peut conclure que l'estimation suivante a lieu :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\frac{\widehat{\rho}}{2}\int_{\Omega}|\mathbf{v}|^2(s)d\mathbf{x}+\frac{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}{4}\int_{\Omega}|div\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s)d\mathbf{x}+\frac{\widehat{\mu}}{4}\int_{\Omega}|\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s)d\mathbf{x}\\ \displaystyle+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c}A\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)d\sigma+\frac{\widehat{c_0}}{2}\int_{\Omega}|\partial_t\varphi_2|^2(s)d\mathbf{x}+\widehat{k}\int_0^s\int_{\Omega}|\nabla\partial_t\varphi_2|^2d\mathbf{x}dt\\ \displaystyle+B\int_0^s\int_{\Gamma_2^c}|\partial_t\varphi_2|^2d\sigma dt\leq\kappa\Big(\varepsilon+||\mathbf{u}_{0,\varepsilon}-\mathbf{u}_0||^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\ +||div\mathbf{u}_{0,\varepsilon}-div\mathbf{u}_0||^2_{L^2(\Omega)}+||\mathbf{u}_{1,\varepsilon}-\mathbf{u}_1||^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+||p_{0,\varepsilon}-p_0||^2_{L^2(\Omega)}\Big).\end{array}\right. \tag{4.60}$$

La preuve du théorème 4.10 est ainsi achevée. ■

Remarque 4.11.
On notera que, du fait des fonctions-test considérées, on n'a pas obtenu d'estimation hilbertienne sur ψ mais uniquement sur ses primitives.

4.4.2 Comparaison entre le modèle de Biot complet dégénéré et le modèle quasi-statique

Dans ce paragraphe, on suppose que $\lambda^*(\mathbf{x}) > \widehat{\lambda^*} > 0$ et $\varepsilon > 0$ désigne maintenant le sup essentiel de la fonction $\rho(\mathbf{x})$: $\varepsilon = \operatorname{ess}\sup_{\mathbf{x}\in\Omega}\rho(\mathbf{x})$. On suppose de plus que ess inf $\rho(\mathbf{x}) > 0$. On note encore $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ la solution du modèle de Biot complet dégénéré avec les conditions initiales $(\mathbf{u}_{0,\varepsilon}, p_{0,\varepsilon}, \mathbf{u}_1) \in \mathbf{V} \times L^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $(\mathbf{u}, p)$ la solution du modèle quasi-statique ($\rho(\mathbf{x}) = 0$) cette fois-ci avec les conditions initiales $(\mathbf{u}_0, p_0) \in \mathbf{K} \times L^2(\Omega)$. Là encore, on note $\mathsf{v} = \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}$ et $\psi = p_\varepsilon - p$ et les termes sources $\mathbf{f}$ et h sont les mêmes pour les deux problèmes. On peut alors montrer le :

Théorème 4.12.
Il existe une constante $\kappa > 0$ qui dépend uniquement des données telle que :
$||div\mathbf{u}_\varepsilon - div\mathbf{u}||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \kappa(\varepsilon^{1/4} + ||div\mathbf{u}_{0,\varepsilon} - div\mathbf{u}_0||_{L^2(\Omega)} + ||p_{0,\varepsilon} - p_0||_{L^2(\Omega)})$
et
$||p_\varepsilon - p||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \kappa(\varepsilon^{1/4} + ||div\mathbf{u}_{0,\varepsilon} - div\mathbf{u}_0||_{L^2(\Omega)} + ||p_{0,\varepsilon} - p_0||_{L^2(\Omega)})$.
Si de plus, quand ε tend vers zéro, la suite $(div\mathbf{u}_{0,\varepsilon}, p_{0,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est une approximation de $(div\mathbf{u}_0, p_0)$ dans $(L^2(\Omega))^2$ en $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/4})$, alors le taux de convergence de $(div\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vers $(div\mathbf{u}, p)$ dans $L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \times L^2(0,T; L^2(\Omega))$ est en $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/4})$.

Démonstration.
• Puisque $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ et $(\mathbf{u}, p)$ sont les solutions respectives du modèle complet et du modèle quasi-statique, on a, d'après les formulations variationnelles (4.5) et (4.35) :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div\partial_t\mathsf{v} div\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))div\mathsf{v} div\mathbf{v}d\mathbf{x} \\ \displaystyle + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathsf{v} \otimes \nabla\mathbf{v}d\mathbf{x} - \alpha\int_\Omega \psi div\mathbf{v}d\mathbf{x} \\ \displaystyle + \int_{\Gamma_1^c} A\mathsf{v}\cdot\mathbf{v}d\sigma = - < \rho(\mathbf{x})\partial_t^2\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}}, \end{array}\right. \tag{4.61}$$

et

$$< c_0(\mathbf{x})\partial_t\psi, q >_{V',V} + \alpha\int_\Omega q\, div\partial_t\mathsf{v}d\mathbf{x} + \int_\Omega k(\mathbf{x})\nabla\psi\cdot\nabla q d\mathbf{x} + B\int_{\Gamma_2^c} \psi q d\sigma = 0. \tag{4.62}$$

Soit $s \in]0, T[$. On prend $(\mathbf{v}, q) = (\boldsymbol{\varphi}_1, \varphi_2)$ où le couple $(\boldsymbol{\varphi}_1, \varphi_2)$ est construit à partir de (v, ψ) comme au paragraphe 4.4.1 et satisfait les propriétés (4.56)-(4.57). En utilisant les mêmes techniques qu'au paragraphe 4.4.1, on arrive à la relation :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^s\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{1}{2}\int_\Omega(\lambda(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}))|div\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s)d\mathbf{x}\\ \displaystyle+\frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s)d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c} A\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)d\sigma\\ \displaystyle+\frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x})|\partial_t\varphi_2|^2(s)d\mathbf{x} + \int_0^s\int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla\partial_t\varphi_2|^2 d\mathbf{x}dt\\ \displaystyle+B\int_0^s\int_{\Gamma_2^c}|\partial_t\varphi_2|^2 d\sigma dt = \int_0^s <\rho(\mathbf{x})\partial_t^2\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\varphi}_1>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} dt\\ \displaystyle+\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})div\mathbf{v}(0)div\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)d\mathbf{x} + \alpha\int_\Omega \tilde{\varphi}_2(s)div\mathbf{v}(0)d\mathbf{x}\\ \displaystyle+\int_\Omega c_0(\mathbf{x})\psi(0)\tilde{\varphi}_2(s)d\mathbf{x}.\end{array}\right. \tag{4.63}$$

Par ailleurs, puisque :

$$\begin{aligned}\int_0^s <\rho(\mathbf{x})\partial_t^2\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\varphi}_1>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} dt &= -\int_0^s\int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon\partial_t\boldsymbol{\varphi}_1 d\mathbf{x}dt\\ &\quad+\int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon(s)\boldsymbol{\varphi}_1(s)d\mathbf{x}\\ &\quad-\int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon(0)\boldsymbol{\varphi}_1(0)d\mathbf{x}\\ &= -\int_0^s\int_\Omega \rho(\mathbf{x})\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon\mathbf{v}d\mathbf{x}dt + \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_1\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s)d\mathbf{x},\end{aligned}$$

l'utilisation des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young donne :

$$\begin{aligned}\int_0^s <\rho(\mathbf{x})\partial_t^2\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\varphi}_1>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} dt &\leq \sqrt{\varepsilon}||\sqrt{\rho(\mathbf{x})}\partial_t\mathbf{u}_\varepsilon||_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}||\mathbf{v}||_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\\ &\quad+\frac{1}{4}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s)d\mathbf{x} + \frac{C^2\varepsilon^2}{\widehat{\mu}}\int_\Omega |\mathbf{u}_1|^2 d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

En tenant compte des propriétés de la suite $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ énoncées au lemme 4.8, on montre qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$\int_0^s <\rho(\mathbf{x})\partial_t^2\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\varphi}_1>_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} dt \leq \kappa(\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon^2) + \frac{1}{4}\int_\Omega \mu(\mathbf{x})|\nabla\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s)d\mathbf{x}. \tag{4.64}$$

De plus, en utilisant encore une fois les arguments développés au paragraphe 4.4.1, on prouve qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) div \mathbf{v}(0) div \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s) d\mathbf{x} \leq \kappa ||div \mathbf{u}_{0,\varepsilon} - \mathbf{u}_0||^2_{L^2(\Omega)} \\ \qquad\qquad\qquad + \displaystyle\frac{1}{4}\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))|div \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s) d\mathbf{x}, \\ \alpha \displaystyle\int_\Omega div \mathbf{v}(0) \tilde{\varphi}_2(s) d\mathbf{x} \leq \kappa ||div \mathbf{u}_{0,\varepsilon} - div \mathbf{u}_0||^2_{L^2(\Omega)} \\ \qquad\qquad\qquad + \displaystyle\frac{1}{4}\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\partial_t \varphi_2(t)|^2 d\mathbf{x} dt \\ \displaystyle\int_\Omega c_0(\mathbf{x}) \psi(0) \tilde{\varphi}_2(s) d\mathbf{x} \leq \kappa ||p_{0,\varepsilon} - p_0||^2_{L^2(\Omega)} \\ \qquad\qquad\qquad + \displaystyle\frac{1}{4}\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\partial_t \varphi_2(t)|^2 d\mathbf{x} dt, \end{cases} \tag{4.65}$$

et en tenant compte de (4.64) et (4.65) dans (4.63) puis en utilisant le lemme de Gronwall, on obtient que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^s \int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x}) |div \mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} dt + \frac{1}{4}\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))|div \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s) d\mathbf{x} \\ + \displaystyle\frac{1}{4}\int_\Omega \mu(\mathbf{x}) |\nabla \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1|^2(s) d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^c} A \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s) \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(s) d\sigma \\ + \displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\partial_t \varphi_2|^2(s) d\mathbf{x} + \int_0^s \int_\Omega k(\mathbf{x}) |\nabla \partial_t \varphi_2|^2 d\mathbf{x} dt \\ + B \displaystyle\int_0^s \int_{\Gamma_2^c} |\partial_t \varphi_2|^2 d\sigma dt \leq \kappa(\sqrt{\varepsilon} + ||div \mathbf{u}_{0,\varepsilon} - div \mathbf{u}_0||^2_{L^2(\Omega)} \\ + ||p_{0,\varepsilon} - p_0||^2_{L^2(\Omega)}). \end{cases} \tag{4.66}$$

• Pour terminer la démonstration, on prend $q = \varphi$ dans (4.62) où φ a été définie au paragraphe 4.3.2 et vérifie les propriétés (4.51). On intègre alors sur $[0, s]$ et on obtient :

$$\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\psi|^2 d\mathbf{x} dt + \frac{1}{2}\int_\Omega k(\mathbf{x}) |\nabla \tilde{\varphi}|^2(s) d\mathbf{x} + \frac{B}{2}\int_\Omega |\tilde{\varphi}|^2(s) d\sigma = -\alpha \int_0^s \int_\Omega div \mathbf{v} \psi d\mathbf{x} dt.$$

Mais, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young ainsi que l'estimation (4.66), on peut majorer le second membre de l'égalité précédente par :

$$\kappa(\sqrt{\varepsilon} + ||div \mathbf{u}_{0,\varepsilon} - div \mathbf{u}_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||p_{0,\varepsilon} - p_0||^2_{L^2(\Omega)}) + \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\psi|^2 d\mathbf{x} dt,$$

qui nous donne l'estimation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x})|\psi|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{1}{2}\int_\Omega k(\mathbf{x})|\nabla\tilde{\varphi}|^2(s)d\mathbf{x} + \frac{B}{2}\int_\Omega |\tilde{\varphi}|^2(s)d\sigma \\ \leq \kappa(\sqrt{\varepsilon} + ||div\mathbf{u}_{0,\varepsilon} - div\mathbf{u}_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||p_{0,\varepsilon} - p_0||^2_{L^2(\Omega)}) \end{array} \right. \tag{4.67}$$

qui met fin à la preuve du théorème 4.12. ■

Chapitre 5

Comportement asymptotique en temps lorsque $\lambda^* > 0$

Dans ce chapitre, on établit quelques résultats concernant le comportement en temps long de la solution des modèles de Biot étudiés jusqu'ici. Nous restreignons notre étude au cas où λ^* est strictement positif. Dans ce cas, nous avons des informations suffisantes sur $\partial_t u$ et on peut ainsi, au prix de quelques estimations complémentaires, exploiter les techniques développées aux chapitres 2 et 4 pour décrire le comportement asymptotique du déplacement et de la pression. Cette étude est faite en imposant aux données initiales et aux coefficients les hypothèses de régularité prises aux chapitres 2 et 4. Elle décrit l'état limite en fonction des conditions satisfaites par les termes source f et h sur $]0, +\infty[\times\Omega$. C'est pourquoi, dans ce qui suit, on précise uniquement les hypothèses vérifiées par f et h.

5.1 Le modèle non linéaire

On considère en premier lieu le modèle non linéaire. Dans ce cas, on rappelle que $n = 1$, $\rho \geq 0$, $q > 1$ si $\rho = 0$, $q \geq 2$ si $\rho > 0$ et on pose $W = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

5.1.1 Estimations *a priori* sur $]0, +\infty[\times\Omega$

Théorème 5.1.
• *Sous la condition f et h dans $L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$, le couple (u, p) solution de (2.8) (ou (2.30) lorsque $\rho = 0$) vérifie :*

$$u \in L^\infty(0, +\infty; W) \cap L^2(0, +\infty; W),\ \partial_t u \in L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega)),$$
$$p \in L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega)),\ \partial_t p \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)),$$

• *sous la condition $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in L^2(0, +\infty, L^2(\Omega))$, $f_2(t, x) \equiv f_2(x) \in L^2(\Omega)$ et $h \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))$, le couple (u, p) solution de (2.8) (ou (2.30) lorsque $\rho = 0$) vérifie :*

$$u \in L^\infty(0, +\infty; W),\ \ \partial_t u \in L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega)),$$
$$p \in L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega)),\ \ \partial_t p \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)).$$

Démonstration.
Il suffit de revenir à la preuve du lemme 2.13 au chapitre 2 valable pour $\rho \geq 0$ et $q > 1$ afin de contrôler le rôle de T dans les calculs relatifs aux premières estimations *a priori* (2.13) et (2.15).

1°) <u>Sous la condition $f = f_1 \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$ et $h \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$:</u>

• La constante κ de (2.13) est par définition un majorant, indépendant de m, de la quantité :

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2}||\partial_x u_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\mu^*}{q}||\partial_x u_{0m}||^q_{L^q(\Omega)} + \frac{\rho}{2}||u_{1m}||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c_0}{2}||p_{0m}||^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\frac{\kappa^2}{2\lambda^*}\int_0^T\int_\Omega |f_1|^2 dxdt + \frac{\kappa^2}{2k}\int_0^T\int_\Omega |h|^2 dxdt.$$

Comme f_1 et h sont dans $L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$, il résulte de (2.13) que :

Propriété 5.2.
La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(0, +\infty; W)$,
la suite $(\partial_t u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$,
la suite $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$.

• En utilisant dans (2.14) que $h \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$ et l'estimation précédente de $(\partial_t u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ dans $L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$, il résulte de (2.15) que :

Propriété 5.3.
La suite $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$,
la suite $(\partial_t p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$.

• En multipliant la première équation de (2.10) par $u_{jm}(t)$ et en sommant les m égalités obtenues pour j variant de 1 à m, il vient après intégration de 0 à

s, avec s fixé dans $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda^*}{2}\int_\Omega |\partial_x u_m|^2(s)dx + (\lambda+2\mu)\int_0^s\int_\Omega |\partial_x u_m|^2 dxdt\\&+\mu^*\int_0^s\int_\Omega |\partial_x u_m|^q dxdt = \frac{\lambda^*}{2}\int_\Omega |\partial_x u_{0m}|^2 dx + \rho\int_\Omega u_{1m}u_{0m}dx + A(s)\end{aligned} \tag{5.1}$$

où

$$\begin{aligned}A(s) = \rho\int_\Omega \partial_t u_m(s)u_m(s)dx + \rho\int_0^s\int_\Omega |\partial_t u_m|^2 dxdt + \alpha\int_0^s\int_\Omega p_m\partial_x u_m dxdt\\ + \int_0^s\int_\Omega f_1 u_m dxdt.\end{aligned}$$

Les estimations déjà obtenues et l'inégalité de Poincaré entraînent que $\exists\kappa>0$ telle que $\forall s\in]0,+\infty[$,

$$A(s)\le \kappa + \frac{\lambda+2\mu}{2}\int_0^s\int_\Omega |\partial_x u_m|^2 dxdt.$$

Finalement, on obtient à partir de (5.1) que :

$$\text{la suite } (u_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^2(0,+\infty;W). \tag{5.2}$$

D'où le résultat dans ce premier cas.

2°) <u>Sous la condition $f(t,x)=f_2(x)\in L^2(\Omega)$ et $h\in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$:</u>

• Dans l'étude de (2.12), on complète le raisonnement par l'étude du terme $\displaystyle\int_0^s\int_\Omega f_2\partial_t u_m dxdt$ en écrivant :

$$\int_0^s\int_\Omega f_2\partial_t u_m dxdt = \int_\Omega f_2(x)u_m(s,x)dx - \int_\Omega f_2(x)u_{0m}(x)dx.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^s\int_\Omega f_2\partial_t u_m dxdt\right| \le \frac{\kappa^2}{\lambda+2\mu}||f_2||_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda+2\mu}{4}\int_\Omega |\partial_x u_m|^2(s)dx\\ + ||f_2||_{L^2(\Omega)}||u_{0m}||_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

et on obtient à nouveau la propriété 5.2.

• Comme dans la situation du point 1, puisque $h\in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$, on a aussi la propriété 5.3. D'où le résultat sur (u,p) dans ce second cas.

■

5.1.2 Comportement à l'infini en régime transitoire pur

Dans ce paragraphe, on débute par l'étude du cas désigné par "régime transitoire pur" c'est à-dire que l'on se place dans la situation où les termes source f et h dépendent du temps et sont dans $L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$. On prouve dans ce cas qu'il y a convergence vers zéro de la solution lorsque t tend vers l'infini ce qui fait l'objet du :

Théorème 5.4.
Si f et h sont dans $L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$, le couple $(u(t,\cdot),p(t,\cdot))$ converge quand $t\to+\infty$ vers $(0,0)$ au sens suivant :

$$\begin{array}{l} u(t,\cdot)\to 0 \textit{ dans } W \textit{ faible et } L^2(\Omega) \textit{ fort,}\\ p(t,\cdot)\to 0 \textit{ dans } H_0^1(\Omega) \textit{ faible et } L^2(\Omega) \textit{ fort.}\end{array}$$

Démonstration.
Comme $u\in L^\infty(0,+\infty;W)$ et $p\in L^\infty(0,+\infty;H_0^1(\Omega))$, il existe au moins une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels supérieurs à 1, $t_n\to+\infty$, et un couple (w,π) de $W\times H_0^1(\Omega)$ tels que :

$$\begin{array}{l} u(t_n,\cdot)\to w \text{ dans } W \text{ faible (et donc } L^2(\Omega) \text{ fort),}\\ p(t_n,\cdot)\to \pi \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible (et donc } L^2(\Omega) \text{ fort).}\end{array} \tag{5.3}$$

Selon les idées de [42], soit $(U_n,P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $]-1,1[\times\Omega$ par : $\forall n\in\mathbb{N}$, pour presque tout $(s,x)\in]-1,1[\times\Omega$

$$U_n(s,x)=u(t_n+s,x),\ \ P_n(t,x)=p(t_n+s,x). \tag{5.4}$$

• D'une part, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 dans $L^2(]-1,1[;H_0^1(\Omega))$. En effet, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^{1}\int_\Omega U_n^2(s,x)dxds=\int_{-1}^{1}\int_\Omega u^2(t_n+s,x)dxds=\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega u^2(\tau,x)dxd\tau.$$

Or $u\in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=+\infty$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega u^2(\tau,x)dxd\tau=0 \tag{5.5}$$

soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}\to 0$ dans $L^2(]-1,1[;L^2(\Omega))$.
De même, $(\partial_x U_n)_{n\in\mathbb{N}}\to 0$ dans $L^2(]-1,1[;L^2(\Omega))$ puisque $\partial_x u\in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$ et, par les mêmes arguments, on obtient que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}\to 0$ dans $L^2(]-1,1[;H_0^1(\Omega))$ puisque $p\in L^2(0,+\infty;H_0^1(\Omega))$.

• D'autre part, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converge vers w (respectivement π) dans $L^\infty(]-1,1[;H_0^1(\Omega))$ faible * (respectivement dans $L^\infty(]-1,1[;L^2(\Omega))$ faible *). En effet, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\int_\Omega (U_n(s,x)-u(t_n,x))^2dx = \int_\Omega (u(t_n+s,x)-u(t_n,x))^2dx.$$

Comme $\partial_t u\in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$, il vient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (U_n(s,x)-u(t_n,x))^2dx &= \int_\Omega \left(\int_{t_n}^{t_n+s}\partial_t u(\tau,x)d\tau\right)^2 dx\\ &\le \int_\Omega |s|\int_{t_n-1}^{t_n+1}|\partial_t u(\tau,x)|^2 d\tau dx\\ &\le \int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega |\partial_t u(\tau,x)|^2 d\tau dx.\end{aligned}$$

Ici encore, on utilise le fait que $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ et $\partial_t u\in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{s\in]-1,1[}||U_n(s,\cdot)-u(t_n,\cdot)||_{L^2(\Omega)} = 0.$$

On peut reprendre le même raisonnement pour $(\partial_x U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car les fonctions $\partial_t\partial_x u$ et $\partial_t p$ sont dans $L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$. On obtient donc que $(U_n(s,\cdot)-u(t_n,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n(s,\cdot)-p(t_n,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers 0 dans $C^0([-1,1];H_0^1(\Omega))$ et $C^0([-1,1];L^2(\Omega))$. Il résulte alors de (5.3) que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converge vers w (respectivement π) dans $L^\infty(]-1,1[;H_0^1(\Omega))$ faible * (respectivement $L^\infty(]-1,1[;L^2(\Omega))$ faible *).

• La comparaison des deux études de convergence faites sur $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prouve que les éléments w et π de (5.3) sont nuls ce qui achève la preuve du théorème 5.4. ■

5.1.3 Comportement à l'infini en régime semi-transitoire

• Avant d'aborder la situation où les termes source f et h contiennent un terme stationnaire quelconque, nous nous plaçons sous l'hypothèse $f=f_1+f_2$ avec $f_1\in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$, $f_2(t,x)=f_2(x)$ où $f_2\in L^2(\Omega)$ et $h\in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$. On montre alors le :

Lemme 5.5.
Le couple (u,p) converge quand $t\to+\infty$ vers le couple $(w,0)$ dans $W\times H_0^1(\Omega)$ faible

(et $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ fort) où w est l'unique solution dans W de l'équation variationnelle :

$$\forall v \in W, (\lambda + 2\mu) \int_\Omega \partial_x w \partial_x v dx + \mu^* \int_\Omega |\partial_x w|^{q-2} \partial_x w \partial_x v dx = \int_\Omega f_2 v dx. \tag{5.6}$$

Démonstration.
Dans ce cas, on perd la propriété $u \in L^2(0, +\infty; W)$ dont on disposait au paragraphe 5.1.2 sous la condition instationnaire $f \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$. En revanche, la fonction p a les mêmes propriétés, les conditions sur h étant inchangées. On peut donc à nouveau conclure que :

$$p(t, \cdot) \to 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible et } L^2(\Omega) \text{ fort quand } t \to +\infty. \tag{5.7}$$

Pour u, on peut encore affirmer les propriétés suivantes : $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]1, +\infty[$, $t_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, $\exists w \in W$ tels que $u(t_n, \cdot) \to w$ dans W faible et la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $]-1, 1[\times\Omega$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ pour presque tout } (s, x) \in]-1, 1[\times\Omega,\ U_n(s, x) = u(t_n + s, x) \tag{5.8}$$

converge vers w dans $L^\infty(]-1, 1[; H_0^1(\Omega))$ faible *.
Pour caractériser w, on va maintenant étudier la convergence de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en considérant, pour n fixé, la première égalité de (2.8) à l'instant $t = t_n + s$, $s \in]-1, 1[$. On multiplie cette égalité par $\xi(s)$ où $\xi \in \mathcal{D}(]-1, 1[)$ et on l'intègre par rapport à s de -1 à 1. Il vient, en effectuant des intégrations par parties : $\forall v \in W$,

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 \int_\Omega \rho U_n(s, x) v(x) \xi''(s) dx ds - \lambda^* \int_{-1}^1 \int_\Omega \partial_x U_n(s, x) \partial_x v(x) \xi'(s) dx ds \\
&+(\lambda + 2\mu) \int_{-1}^1 \int_\Omega \partial_x U_n(s, x) \partial_x v(x) \xi(s) dx ds \\
&-\alpha \int_{-1}^1 \int_\Omega p(t_n + s, x) \partial_x v(x) \xi(s) dx ds \\
&+\mu^* \int_{-1}^1 \int_\Omega |\partial_x U_n(s, x)|^{q-2} \partial_x U_n(s, x) \partial_x v(x) \xi(s) dx ds \\
&= \int_{-1}^1 \int_\Omega f(t_n + s, x) v(x) \xi(s) dx ds.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

On sait que $U_n \to w$ dans $L^\infty(]-1, 1[; H_0^1(\Omega))$ faible *. De plus, il résulte du théorème 5.1 que $u \in L^\infty(0, +\infty; W)$. D'après la définition de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par (5.8), cette suite est donc telle que $(|\partial_x U_n|^{q-2} \partial_x U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(]-1, 1[; L^{q^*}(\Omega))$.

D'où l'existence d'une nouvelle sous-suite et de $\chi \in L^\infty(]-1,1[;L^{q^*}(\Omega))$ tels que $|\partial_x U_n|^{q-2}\partial_x U_n \to \chi$ dans $L^\infty(]-1,1[;L^{q^*}(\Omega))$ faible *.
On passe à la limite en n dans (5.9). On utilise que w ne dépend que de x, que $\xi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$, que $p(t_n+\cdot,\cdot) \to 0$ dans $L^2(]-1,1[\times\Omega)$ fort grâce à (5.7). Enfin, on observe que $f(t_n+\cdot,\cdot)$ converge vers f_2 dans $L^2(]-1,1[\times\Omega)$ fort d'après (5.5) car $f-f_2=f_1 \in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$. On en déduit : $\forall v \in W$, $\forall \xi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$,

$$\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)\int_\Omega \partial_x w \partial_x v dx \int_{-1}^{1}\xi(s)ds + \mu^* \int_{-1}^{1}\int_\Omega \chi(s,x)\partial_x v(x)\xi(s)dxds \\ &= \int_\Omega f_2(x)v(x)dx\int_{-1}^{1}\xi(s)ds.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Il reste à prouver que : $\forall v \in W$, $\exists \xi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\xi(s)ds = 1$, tel que

$$\int_{-1}^{1}\int_\Omega \chi(s,x)\partial_x v(x)\xi(s)dxds = \left(\int_\Omega |\partial_x w|^{q-2}\partial_x w \partial_x v dx\right)\int_{-1}^{1}\xi(s)ds.$$

Pour cela, on utilise de nouveau la méthode de monotonie. Soient $z \in W$, $\xi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$, $\xi \geq 0$ et la suite $(\eta_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\eta_n(z) = \mu^* \int_{-1}^{1}\int_\Omega \left[|\partial_x z|^{q-2}\partial_x z - |\partial_x U_n(s)|^{q-2}\partial_x U_n(s)\right][\partial_x z - \partial_x U_n(s)]\xi(s)dxds.$$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\eta_n(z) \geq 0$ et d'après (5.9), il vient :

$$\begin{aligned}
\eta_n(z) = \mu^* &\int_{-1}^{1}\int_\Omega |\partial_x z|^{q-2}\partial_x z[\partial_x z - \partial_x U_n(s)]\xi(s)dxds \\
&- \mu^* \int_{-1}^{1}\int_\Omega |\partial_x U_n(s)|^{q-2}\partial_x U_n(s)\partial_x z\xi(s)dxds \\
&+ \int_{-1}^{1}\int_\Omega f_2(x)U_n(s,x)\xi(s)dxds \\
&+ \alpha \int_{-1}^{1}\int_\Omega p(t_n+s,x)\partial_x U_n(s,x)dxds \\
&- (\lambda+2\mu)\int_{-1}^{1}\int_\Omega |\partial_x U_n(s,x)|^2\xi(s)dxds \\
&+ \lambda^* \int_{-1}^{1}\int_\Omega |\partial_x U_n(s,x)|^2\xi'(s)dxds \\
&+ \int_{-1}^{1}\int_\Omega f_1(t_n+s,x)U_n(s,x)\xi(s)dxds \\
&- \int_{-1}^{1}\int_\Omega \rho U_n^2(s,x)\xi"(s)dxds.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Or, en utilisant l'égalité :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_\Omega |\partial_t\partial_x U_n|^2(s,x)dxds &= \int_{-1}^{1}\int_\Omega |\partial_t\partial_x u(t_n+s,x)|^2 dxds \\
&= \int_{t_n-1}^{t_n+1}\int_\Omega |\partial_t\partial_x u|^2(\tau,x)dxd\tau
\end{aligned}$$

il vient $\partial_t\partial_x U_n \to 0$ dans $L^2(]-1,1[;L^2(\Omega))$ fort.
D'où en écrivant les relations :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^{1}\int_\Omega |\partial_x U_n(s,x)|^2\xi'(s)dxds\right| &= \left|\int_{-1}^{1}\int_\Omega 2\partial_x U_n\partial_t\partial_x U_n\xi(s)dxds\right| \\
&\leq 2||\partial_x U_n||_{L^2(]-1,1[;L^2(\Omega))}||\partial_t\partial_x U_n||_{L^2(]-1,1[;L^2(\Omega))} \\
&\quad ||\xi||_{L^\infty(]-1,1[)}
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}\int_\Omega |\partial_x U_n(s,x)|^2\xi'(s)dxds = 0 \tag{5.12}$$

car $(\partial_x U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]-1,1[;L^2(\Omega))$ puisque $\partial_x u \in L^\infty(0,+\infty;L^2(\Omega))$ d'après le théorème 5.1.
Par ailleurs, toujours d'après le théorème 5.1, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(]-1,1[\times\Omega)$ donc elle admet une suite extraite convergeant fortement dans $L^2(]-1,1[\times\Omega)$ vers l'élément w.
Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}\int_\Omega \rho U_n^2(s,x)\xi"(s)dxds = \int_\Omega \rho w^2(x)dx\int_{-1}^{1}\xi"(s)ds = 0 \tag{5.13}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}\int_\Omega f_1(t_n+s,x)U_n(s,x)\xi(s)dxds = 0 \tag{5.14}$$

car $f_1(t_n+\cdot,\cdot)\to 0$ dans $L^2(]-1,1[\times\Omega)$ fort.
Enfin

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}\int_\Omega p(t_n+s,x)\partial_x U_n(s,x)\xi(s)dxds = 0 \tag{5.15}$$

car $\partial_x U_n \to \partial_x w$ dans $L^2(]-1,1[\times\Omega)$ faible et $p(t_n+\cdot,\cdot)\to 0$ dans $L^2(]-1,1[\times\Omega)$ fort.
Il découle de (5.11), grâce à (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), à la convergence faible de $(\partial_x U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(]-1,1[\times\Omega)$ et au fait que $\xi\geq 0$, la propriété :

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\ \eta_n(z) \leq \mu^*&\int_{-1}^{1}\int_\Omega |\partial_x z|^{q-2}\partial_x z[\partial_x z-\partial_x w]\xi(s)dxds\\ &-\mu^*\int_{-1}^{1}\int_\Omega \chi(s,x)\partial_x z\xi(s)dxds\\ &+\int_\Omega f_2(x)w(s,x)dx\int_{-1}^{1}\xi(s)ds-(\lambda+2\mu)\int_\Omega|\partial_x w|^2dx\int_{-1}^{1}\xi(s)ds.\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (5.10) avec $v=w$, on a :

$$\overline{\lim}\ \eta_n(z)\leq \mu^*\int_{-1}^{1}\int_\Omega \left[|\partial_x z|^{q-2}\partial_x z-\chi(s,x)\right][\partial_x z-\partial_x w]\xi(s)dxds.$$

Donc, comme pour tout $z\in W$, $\eta_n(z)\geq 0$, on a : $\forall z\in W,\ \forall\xi\in\mathcal{D}(]-1,1[),\xi\geq 0$,

$$\int_{-1}^{1}\int_\Omega \left[|\partial_x z|^{q-2}\partial_x z-\chi(s,x)\right][\partial_x z-\partial_x w]\xi(s)dxds\geq 0.$$

Soit $v \in W$. En choisissant $z = w + \gamma v$, puis en faisant tendre γ vers 0_+, on obtient finalement, de la même façon qu'au paragraphe 2.4.1 que :
$\forall z \in W,\ \forall \xi \in \mathcal{D}(]-1,1[), \xi \geq 0,$

$$\int_{-1}^{1}\int_{\Omega}\left[|\partial_x z|^{q-2}\partial_x z - \chi(s,x)\right][\partial_x z - \partial_x w]\xi(s)dxds = 0$$

qui prouve en revenant à (5.10) que w est solution de (5.6). De plus, de par la monotonie de l'application $\tau \to |\tau|^{q-2}\tau$, (5.6) a une seule solution ce qui entraîne que $u(t,\cdot) \to w$ dans W faible (et donc dans $L^2(\Omega)$ fort). ■

- Nous sommes maintenant en mesure de traiter le cas général. On montre le :

Théorème 5.6.
Si f et h sont telles que $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in L^2(0,+\infty; L^2(\Omega))$, $f_2(t,x) \equiv f_2(x)$, $f_2 \in L^2(\Omega)$ et $h = h_1 + h_2$, $h_1 \in L^2(0,+\infty; L^2(\Omega))$, $h_2(t,x) \equiv h_2(x)$, $h_2 \in L^2(\Omega)$, le couple (u,p) vérifie lorsque $t \to +\infty$:

$$u(t,\cdot) \to w \textit{ dans } W \textit{ faible et } L^2(\Omega) \textit{ fort},$$
$$p(t,\cdot) \to \pi \textit{ dans } H_0^1(\Omega) \textit{ faible et } L^2(\Omega) \textit{ fort},$$

où π est l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ de $-k\Delta\pi = h_2$ et w est l'unique solution dans W de l'équation variationnelle :

$$\forall v \in W,\ (\lambda + 2\mu)\int_{\Omega}\partial_x w \partial_x v dx + \mu^*\int_{\Omega}|\partial_x w|^{q-2}\partial_x w \partial_x v dx = \int_{\Omega}\chi v dx$$

où $\chi \in L^2(\Omega)$ est défini par $\chi = f_2 - \alpha\partial_x\pi$.

Démonstration.
Soit $\widehat{p}(t,x)$ défini sur $]0,+\infty[\times\Omega$ par : pour presque tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times\Omega$

$$\widehat{p}(t,x) = p(t,x) - \pi(x).$$

On vérifie sans difficulté que si (u,p) est solution de (2.8) avec pour terme source (f,h), $(u,\widehat{p})$ est aussi solution de (2.8) avec pour terme source $(f - \alpha\nabla\pi, h_1)$, la condition initiale sur $\widehat{p}$ étant $p_0 - \pi$. On peut donc appliquer le lemme 5.5 à $(u,\widehat{p})$ et on obtient le théorème 5.6. ■

5.2 Le modèle linéaire

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement asymptotique du modèle linéaire étudié au chapitre 4. On rappelle que dans ce cas $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que la fonction ρ est telle que $\rho \geq 0$.

5.2.1 Etude des estimations *a priori* sur $]0, +\infty[\times\Omega$

Théorème 5.7.
Sous les conditions $h \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$ et $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ avec :

1- $\exists g \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$ tel que, pour presque tout $t \in]0, +\infty[$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$,

$$\int_\Omega \mathbf{f}_1(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = -\int_\Omega g(t) div \mathbf{v} d\mathbf{x},$$

2- $\mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{f}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$,
le couple $(\mathbf{u}, p)$ solution de (4.5) (ou (4.35) lorsque $\rho = 0$) vérifie :

$$\begin{array}{l} \mathbf{u} \in L^\infty(0, +\infty, \mathbf{V}),\ \sqrt{\rho}\partial_t \mathbf{u} \in L^\infty(0, +\infty; \mathbf{L}^2(\Omega)),\ \partial_t div \mathbf{u} \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)), \\ p \in L^\infty(0, +\infty; V) \cap L^2(0, +\infty, V),\ \partial_t p \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)). \end{array}$$

Démonstration.
On revient à l'étude de la suite approchée $(\mathbf{u}_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ faite au lemme 4.1 en utilisant qu'ici $\rho \geq 0$ et $\lambda^* > 0$ (à l'inverse de la situation choisie au lemme 4.1 où $\rho > 0$ et $\lambda^* \geq 0$). On modifie donc le traitement des majorations des "seconds membres" en reprenant les idées de la preuve du théorème 5.1.
• A partir de l'égalité (4.10), la modification à apporter sur la majoration de SM (cf. notation de la preuve du lemme 4.1, chapitre 4, paragraphe 4.2.1) est dans le traitement de l'intégrale $\displaystyle\int_0^s \int_\Omega (\mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u}_m + hp_m) d\mathbf{x}dt$. Pour cela, on utilise comme pour le théorème 5.1 les inégalités de Cauchy-Schwarz et Poincaré. On a :

$$\int_0^s \int_\Omega hp_m d\mathbf{x}dt \leq \frac{\kappa^2}{2\widehat{k}} \int_0^{+\infty} \int_\Omega hd\mathbf{x}dt + \frac{\widehat{k}}{2} \int_0^s \int_\Omega |\nabla p_m|^2 d\mathbf{x}dt.$$

De plus, comme il existe $g \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$ tel que, pour presque tout $t \in]0, +\infty[$,

$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\displaystyle\int_\Omega \mathbf{f}_1(t) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = -\int_\Omega g(t) div \mathbf{v} d\mathbf{x}$, il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^s \int_\Omega \mathbf{f}_1(t) \cdot \partial_t \mathbf{u}_m d\mathbf{x}dt &= -\int_0^s \int_\Omega g(t) \partial_t div \mathbf{u}_m d\mathbf{x}dt \\ &\leq \frac{1}{2\widehat{\lambda}} \int_0^{+\infty} \int_\Omega |g|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{\widehat{\lambda}}{2} \int_0^s \int_\Omega |\partial_t div \mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt.\end{aligned}$$

Enfin, comme $\mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{f}_2 \in L^2(\Omega)$, on peut écrire, comme au deuxième point de la preuve du théorème 5.1, que :

$$\begin{aligned}\int_0^s \int_\Omega \mathbf{f}_2 \cdot \partial_t \mathbf{u}_m d\mathbf{x}dt &= \int_\Omega \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_m(s, \mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_{0m}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{\widehat{\mu}}{2} \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}_m|^2(s) d\mathbf{x} + \frac{\kappa^2}{2\widehat{\mu}} \int_\Omega |\mathbf{f}_2(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + ||\mathbf{f}_2||_{\mathbf{L}^2(\Omega)} ||\mathbf{u}_{0m}||_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Grâce à ces relations, on déduit de la majoration de SM que :

$$\begin{cases} \text{la suite } (\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^\infty(0, +\infty; \mathbf{V}), \\ \text{la suite } (\partial_t \mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^\infty(0, +\infty; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ \text{la suite } (\partial_t div \mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)), \\ \text{la suite } (p_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, +\infty, V). \end{cases} \tag{5.16}$$

• Pour améliorer les propriétés sur p, il suffit de procéder comme dans la preuve du théorème 5.1, c'est-à-dire de multiplier dans (4.7) les équations en p_m pour $1 \leq j \leq m$, par $p'_{jm}(t)$, de les intégrer de 0 à s, $s \in]0, +\infty[$ et de les ajouter. Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}&\int_0^s \int_\Omega c_0(\mathbf{x}) |\partial_t p_m|^2 d\mathbf{x}dt + \frac{1}{2} \int_\Omega k(\mathbf{x}) |\nabla p_m|^2(s) d\mathbf{x} + \frac{B}{2} \int_{\Gamma_2^c} |p_m|^2(s) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega k(\mathbf{x}) |\nabla p_{0m}|^2 d\mathbf{x} + \frac{B}{2} \int_{\Gamma_2^c} |p_{0m}|^2(s) d\sigma + \alpha \int_0^s \int_\Omega div \partial_t \mathbf{u}_m \partial_t p_m d\mathbf{x}dt \\ &+ \int_0^s \int_\Omega h \partial_t p_m d\mathbf{x}dt.\end{aligned}$$

Il en résulte, grâce à la propriété sur la suite $(\partial_t div \mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ donnée par (5.16) et au fait que $h \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$, que :

$$\begin{cases} \text{la suite } (p_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^\infty(0, +\infty; V), \\ \text{la suite } (\partial_t p_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{5.17}$$

ce qui met fin à la démonstration du théorème 5.7. ■

Théorème 5.8.
Sous les conditions $\rho = 0$, $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $\exists g \in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$ telle que, pour presque tout $t \in]0,+\infty[$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\int_\Omega \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} = -\int_\Omega g(t) div\mathbf{v}d\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ vérifie :

$$\mathbf{u} \in L^2(0,+\infty;\mathbf{V}).$$

Démonstration.
Comme dans la première partie de la preuve du théorème 5.1, on multiplie dans (4.35) les équations en $\mathbf{u}_m$ pour $1 \leq j \leq m$ par $u_{jm}(t)$. On obtient pour tout $s \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}&\frac{\widehat{\lambda}^*}{2}\int_\Omega |div\mathbf{u}_m|^2(s)d\mathbf{x} + (\widehat{\lambda}+\widehat{\mu})\int_0^s\int_\Omega |div\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt + \widehat{\mu}\int_0^s\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt\\ &+\int_0^s\int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{u}_m\cdot\mathbf{u}_m d\sigma dt = -\int_0^s\int_\Omega g(t)div\mathbf{u}_m d\mathbf{x}dt + \alpha\int_0^s\int_\Omega p_m div\mathbf{u}_m d\mathbf{x}dt\\ &+\frac{1}{2}\int_\Omega \lambda^*(\mathbf{x})|div\mathbf{u}_{0m}|^2 d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

On utilise alors la majoration :

$$\begin{aligned}&\left|-\int_0^s\int_\Omega g(t)div\mathbf{u}_m d\mathbf{x}dt + \alpha\int_0^s\int_\Omega p_m div\mathbf{u}_m d\mathbf{x}dt\right| \leq \frac{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}{2}\int_0^s\int_\Omega |div\mathbf{u}_m|^2 d\mathbf{x}dt\\ &+\frac{1}{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}||g||^2_{L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))} + \frac{\alpha^2}{\widehat{\lambda}+\widehat{\mu}}\int_0^s\int_\Omega |p_m|^2 d\mathbf{x}dt\end{aligned}$$

pour obtenir le résultat. ■

5.2.2 Comportement à l'infini sous la condition $\rho = 0$

Lemme 5.9.
Sous les conditions du théorème 5.8, le couple $(\mathbf{u}(t,\cdot), p(t,\cdot))$ vérifie lorsque $t \to +\infty$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}(t,\cdot) \to \mathbf{0} \text{ dans } \mathbf{V} \text{ faible et } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ fort},\\ &p(t,\cdot) \to 0 \text{ dans } V \text{ faible et } L^2(\Omega) \text{ fort}.\end{aligned}$$

Démonstration.
• Les propriétés $p \in L^\infty(0,+\infty;V)$, $p \in L^2(0,+\infty;V)$ et $\partial_t p \in L^2(0,+\infty;L^2(\Omega))$ permettent de prouver comme dans la démonstration du théorème 5.4 que $p(t,\cdot) \to 0$ dans V faible (et donc dans $L^2(\Omega)$ fort).
• La propriété $\mathbf{u} \in L^\infty(0,+\infty,\mathbf{V})$ permet de considérer une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant

vers $+\infty$ et $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ tels que $\mathbf{u}(t_n, \cdot) \to \mathbf{w}$ dans $\mathbf{V}$ faible.
La propriété $\mathbf{u} \in L^2(0, +\infty; \mathbf{V})$ permet de montrer que la suite $(\mathbf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la même façon qu'en (5.4) converge vers $\mathbf{0}$ dans $L^2(]-1, 1[; \mathbf{V})$ (cf. preuve du théorème 5.4).
La propriété $\partial_t div\mathbf{u} \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega))$ permet de montrer que $(div\mathbf{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $div\mathbf{w}$ dans $L^\infty(]-1, 1[; L^2(\Omega))$ faible * (cf. preuve du théorème 5.4).
On en conclut que $div\mathbf{w} = 0$. Or, d'après la propriété 4.6, comme pour chaque $n \in \mathbb{N}$, (4.35) est vérifiée pour $t = t_n$, on a :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ tels que } div\mathbf{v} = 0\},\ \forall n \in \mathbb{N},\ < \mathbf{u}(t_n), \mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} = \int_\Omega \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} = 0.$$

Donc lorsque $n \to +\infty$, on obtient $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}$, $< \mathbf{w}, \mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} = 0$. Comme $\mathbf{w} \in \mathbf{H}$, il vient $\mathbf{w} = 0$. En conséquence, quand $t \to +\infty$, $\mathbf{u}(t, \cdot) \to 0$ dans $\mathbf{V}$ faible et $\mathbf{L}^2(\Omega)$ fort. ■

On peut déduire du lemme 5.9 le comportement asymptotique de $(\mathbf{u}, p)$ lorsque h peut s'écrire de façon plus générale :

$$h = h_1 + h_2,\ h_1 \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)) \text{ et } h_2(t, \mathbf{x}) \equiv h_2(\mathbf{x}),\ h_2 \in L^2(\Omega). \tag{5.18}$$

et lorsque $\mathbf{f}$ vérifie l'hypothèse du théorème 5.7.

Théorème 5.10.
Sous la condition $\rho = 0$, l'hypothèse du théorème 5.7 sur $\mathbf{f}$ et la condition (5.18) sur h, le couple $(\mathbf{u}, p)$ vérifie lorsque $t \to +\infty$,

$$\begin{array}{l} \mathbf{u}(t, \cdot) \to \mathbf{w} \text{ dans } \mathbf{V} \text{ faible et } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ fort,} \\ p(t, \cdot) \to \pi \text{ dans } V \text{ faible et } L^2(\Omega) \text{ fort} \end{array}$$

où π est l'unique solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi \in V \\ \forall q \in V,\ \displaystyle\int_\Omega k(x)\nabla\pi \cdot \nabla q d\mathbf{x} + B\int_{\Gamma_2^c} \pi q d\sigma = \int_\Omega h_2 q d\mathbf{x} \end{array} \right. \tag{5.19}$$

et $\mathbf{w}$ est l'unique solution de l'équation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} \in \mathbf{V} \\ \forall v \in \mathbf{V},\ \displaystyle\int_\Omega (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))div\mathbf{w}div\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int_\Omega \mu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{w} \otimes \nabla\mathbf{v}d\mathbf{x} \\ + \displaystyle\int_{\Gamma_1^c} A\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}d\sigma = < \chi, \mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} \end{array} \right. \tag{5.20}$$

où $\chi \in \mathbf{V}'$ est défini par : $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$,

$$< \chi, \mathbf{v} >_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} = \int_\Omega \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \alpha \int_\Omega \pi div \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

(En particulier, si $h_2 \equiv 0$, $\pi = 0$ et si $(\mathbf{f}_2, h_2) \equiv (\mathbf{0}, 0)$, $(\mathbf{w}, \pi) = (\mathbf{0}, 0)$.)

Démonstration.
L'existence et l'unicité de π solution de (5.19) ou de $\mathbf{w}$ solution de (5.20) est assurée par le lemme de Lax-Milgram.
On considère le couple $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p})$ défini pour presque tout $s \in]0, +\infty[\times \Omega$ par :

$$\widehat{\mathbf{u}}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(s, \mathbf{x}) - \mathbf{w}(\mathbf{x}) \text{ et } \widehat{p}(s, \mathbf{x}) = p(s, \mathbf{x}) - \pi(\mathbf{x}).$$

Le couple $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p})$ est solution sur $]0, +\infty[\times \Omega$ du système (4.35) où le couple de termes sources est $(\mathbf{f}_1, h_1)$ et le couple de conditions initiales est $(\mathbf{u}_0 - \mathbf{w}, p_0 - \pi)$. Les termes sources et les données initiales vérifient les hypothèses du lemme 5.9. Le couple $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p})$ converge donc vers le couple $(\mathbf{0}, 0)$ au sens défini dans le lemme, ce qui prouve le théorème 5.10. ■

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux aspects théoriques concernant un modèle de Biot dans lequel la vitesse de filtration est négligeable. Le phénomène est alors régi par un système d'équations hyperbolique-parabolique couplées dans lequel l'équation hyperbolique peut être non linéaire. En utilisant des techniques variationnelles, nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité sous des hypothèses qui varient en fonction des valeurs prises par les paramètres physiques. Le modèle non linéaire n'a été étudié qu'en dimension un d'espace tandis que le modèle linéaire est analysé en multiD. Ces résultats ont été complétés par une étude du comportement en temps long des solutions. Dans le cas non linéaire, la pression tend toujours vers zéro tandis que le déplacement peut converger vers un état stationnaire que l'on explicite en fonction des données. Dans le cas linéaire, on obtient le même type de résultats à ceci près qu'on ne considère pas le système complet. Il s'avère que les techniques que nous utilisons ne permettent pas de conclure dans le cas du système complet. Nous avons envisagé d'utiliser la méthode des semi-groupes mais nous nous sommes confrontés à un manque de régularité sur la pression qui complique considérablement l'approche. On pourrait introduire la loi de Cattaneo à la place de la loi de Darcy, comme cela est suggéré dans [49]. Mais le modèle n'est alors physiquement admissible que dans le cas où $\lambda^* = 0$. Le cas complet n'est donc pas résolu. Après réflexion, il nous semble opportun d'étudier le modèle complet dans une formulation en divergence et rotationnel. Ce genre de formulation pourrait être plus riche en informations, à l'instar des résultats connus pour le problème de Stokes [1]. Cette idée est à rapprocher d'une autre piste qui consiste à changer d'inconnue dans le solide. A la place du déplacement $\mathbf{u}$, on peut considérer sa composante longitudinale $\phi = div\mathbf{u}$ et sa composante transversale $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\mathbf{u}$. Ces nouvelles inconnues apparaissent naturellement en appliquant les opérateurs divergence et rotationnel aux équations. Le champ $\boldsymbol{\omega}$ est solution d'une équation d'ondes

tandis que le couple (ϕ, p) vérifie un système couplé où la première équation est de type Sobolev-Galpern [39]. Ce genre de formulation est, peut-être, mieux adapté pour l'étude en temps long. Toutefois, il reste à comprendre comment, connaissant $div\mathbf{u}$ et $\mathbf{rotu}$, on peut reconstruire l'inconnue $\mathbf{u}$.
Une suite de ce travail pourrait concerner la justification des conditions aux limites utilisées. En effet, ces conditions sont liées à l'opérateur d'élasticité consolidé au sens où elles conduisent à une formulation variationnelle standard (symétrique et coercitive). Pour l'instant de façon formelle (toujours par manque de régularité), on peut associer au système une fonctionnelle d'énergie qui est décroissante au cours du temps. On retrouve donc une propriété qui a été analysée pour un système voisin du modèle de Biot, le système de Maxwell [6]. Les conditions utilisées seraient-elles, en fait, du type absorbant pour le modèle de Biot ?
Un autre point à développer serait de généraliser l'étude du modèle non linéaire au cas multiD. Nous nous sommes, pour l'instant, heurtés à un manque de régularité. Il serait aussi très intéressant d'utiliser la théorie de Biot pour la propagation des ondes dans un milieu poreux saturé. Cette théorie prédit l'existence de trois ondes dans un solide perméable et poreux rempli de fluide : une onde de compression rapide correspondant au mouvement fluide/solide en phase, une onde de compression lente correspondant au mouvement fluide/solide déphasé et une onde de cisaillement [19, 20, 25, 30, 38, 50]. Les ondes de compression étant irrotationnelles et l'onde de cisaillement étant à divergence nulle, on s'orienterait vers une formulation en divergence/rotationnel dans laquelle on ne négligerait plus la vitesse de filtration. On obtiendrait ainsi deux équations hyperboliques couplées.
Enfin, il nous semble nécessaire de compléter ce travail par une étude numérique. Citons les travaux de F. Gaspar *et al.* qui considèrent le système quasi-statique dégénéré étudié dans [53] en dimension un [35] puis dans le cas radial [36]. En ce qui nous concerne, nous envisageons d'utiliser le schéma développé par D. Aregba-Driollet *et al.* qui s'applique au modèle complet non linéaire [2].

Bibliographie

[1] M. Amara, H. Barucq, M. Duloué : *A Mixed Convergent Formulation for the Three-Dimensional Stokes Equations*, Calcolo, **41**, (2004), pp. 37–64

[2] D. Aregba-Driollet, R. Natalini, S. Tang : *Explicit Diffusive Kinetic Schemes for Nonlinear Degenerate Parabolic Systems*, Math. Comp. **73**, (2004), pp. 63–94

[3] G. Askar Altay, M. Cengiz Dökmeci : *A Uniqueness Theorem in Biot's Poroelasticity Theory*, Z. Angew. Math. Phys. **49**, 5, (1998), pp. 838–846

[4] J. L. Auriault : *Sur la Rhéologie d'un Milieu Poreux Saturé Consolidant*, Archive of Mechanics **27**, 2, (1975), pp. 363–370

[5] J. L. Auriault, E. Sanchez-Palencia : *Etude du Comportement Macroscopique d'un Milieu Poreux Saturé Déformable*, J. de Mech. **16**, (1977), pp. 575–603

[6] H. Barucq, B. Hanouzet : *Asymptotic behavior of solutions to Maxwell's system in bounded domains with absorbing Silver-Müller's condition on the exterior boundary*, Asymptotic Anal. **15**, 1, (1997), pp. 25–40

[7] H. Barucq, M. Madaune-Tort, P. Saint-Macary : *Modèles Monodimensionnels de Consolidation de Biot : Aspects Théoriques dans les Cas Linéaires et Non-Linéaires*, Publication Interne du LMA de l'Université de Pau, **02/19**, (2002), http ://lma.univ-pau.fr/publis/publis_pre.php

[8] H. Barucq, M. Madaune-Tort, P. Saint-Macary : *Mathematical Analysis of Diffusion Models in Poro-Elastic Media*, Proceedings of The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Springer-Verlag, Berlin 2003), pp. 873–878

[9] H. Barucq, M. Madaune-Tort, P. Saint-Macary : *Asymptotic Behavior of Some Multidimensional Consolidation Models*, Publication Interne du LMA de l'Université de Pau, **03/17**, (2003), http ://lma.univ-pau.fr/publis/publis_pre.php

[10] H. Barucq, M. Madaune-Tort, P. Saint-Macary : *Formulation d'un modèle de Biot en vitesse-pression dans $H(div,\Omega)\cap H(rot,\Omega)$; le cas de la 1D*, Publication Interne du LMA de l'Université de Pau, **04/22**, (2004), http ://lma.univ-pau.fr/publis/publis_pre.php

[11] H. Barucq, M. Madaune-Tort, P. Saint-Macary : *Some Existence-Uniqueness Results for a Class of One-Dimensional Nonlinear Biot Models*, Soumis, (2004)

[12] H. Barucq, M. Madaune-Tort, P. Saint-Macary : *Asymptotic Biot's Models in Porous Media*, Soumis, (2004)

[13] J. Bear, Y. Bachmat : *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media*, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991)

[14] E. Bémer, M. Boutéca, O. Vincké, N. Hoteit, O. Ozaman : *Poromechanics : From Linear to Nonlinear Poroelasticity and Poroviscoelasticity*, Oil and Gas Science and Technology, Rev. IFP, **56**, 6, (2001), pp. 531–544

[15] M. A. Biot : *Le Problème de la Consolidation de Matières Argileuses sous une Charge*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles **B55**, (1935), pp. 110–113

[16] M. A. Biot : *General Theory of Three-Dimensional Consolidation*, J. Appl. Phys. **12**, (1941), pp. 155–164

[17] M. A. Biot : *Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid*, J. Appl. Phys. **26**, (1955), pp. 182–185

[18] M. A. Biot : *Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid*, J. Appl. Phys. **27**, 7, (1956), pp. 459–467

[19] M. A. Biot : *Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid Saturated Porous Solid. I- Low Frequency Range*, J.A.S.A. **28**, 2, (1956), pp. 168–178

[20] M. A. Biot : *Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid Saturated Porous Solid. II- Higher Frequency Range*, J.A.S.A. **28**, 2, (1956), pp. 179–191

[21] M. A. Biot : *Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media*, J. Appl. Phys. **33**, 4, (1962), pp. 1482–1498

[22] M. A. Biot : *Generalized Theory of Acoustic Propagation in Porous Dissipative Media*, J. Acoust. Soc. Am. **34**, 9, (1962), pp. 1254–1264

[23] M. A. Biot : *Theory of Finite Deformations of Porous Solids*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), pp. 597–620

[24] M. A. Biot : *Nonlinear and Semilinear Rheology of Porous Solids*, J. Geoph. Res. **78**, 23, (1973), pp. 4924–4937

[25] T. Bourbié, O. Coussy, B. Zinszner : *Acoustique des Milieux Poreux*, Publications de l'Institut Français du Pétrole, Collection "Science et Technique du Pétrole" **27**, (Technip, Paris, 1986)

[26] S. Brahim-Otsmane, G. A. Francfort, F. Murat : *Homogenization in Thermoelasticity*, Random Media and Composites, Proceedings SIAM Workshop 1988, (1989) , pp 13–45

[27] H. Brezis : *Analyse Fonctionnelle*, (Masson, Paris, 1983)

[28] S. Čanić, A. Mikelić : *Effective Equations Modeling the Flow of a Viscous Incompressible Fluid through a Long Elastic Tube Arising in the Study of Blood Flow through Small Arteries*, SIAM J. Appl. Dynam. Syst. **2**, 3, (2003), pp 431–463

[29] S. Čanić, D. Lamponi, A. Mikelić : *Self-Consistent Effective Equations Modeling Blood Flow in Medium-to-Large Compliant Arteries*, Preprint, 40 pages

[30] M. Chapman, S. V. Zatsepin, S. Crampin : *Derivation of a Microstructural Poroelastic Model*, Geophys. J. Int. **151**, (2002), pp. 427–451

[31] J. Chazarain, A. Piriou : *Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations*, Studies in Mathematics and its Applications **14**, (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982)

[32] C. M. Dafermos : *On the Existence and Asymptotic Stability of Solutions to the Equations of Linear Thermoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **29**, (1968), pp. 241–271

[33] R. Dautray, J. L. Lions : *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, (Masson, Paris, 1988)

[34] R. De Boer : *Highlights in the Historical Development of the Porous Media Theory : Toward a Consistent Macroscopic Theory*, Appl. Mech. Rev. **49**, 4, (1996), pp. 201–262

[35] F. J. Gaspar, F. J. Lisbona, P. N. Vabishchevich : *A Finite Difference Analysis of Biot's Consolidation Model*, Appl. Num. Math. **44**, (2003), pp. 487–506

[36] F. J. Gaspar, F. J. Lisbona, P. N. Vabishchevich : *A Numerical Model for Radial Flow through Porous and Deformable Shells*, Comput. Methods Appl. Math. **4**, 1, (2004), pp. 34–47

[37] A. Hosokawa, T. Otani : *Ultrasonic Wave Propagation in Bovine Cancellous Bone*, J. A. S. A. **101**, 1, (1997), pp. 558–562

[38] K. K. Imomnazarov : *Some Remarks on the Biot System of Equations Describing Wave Propagation in a Porous Medium*, Appl. Math. Letters **13**, 3, (2000), pp. 33– 35

[39] G. Karch : *Asymptotic Behavior of Solutions to Some Pseudoparabolic Equations*, Math. Methods Appl. Sci. **20**, 3, (1997), pp 271–289

[40] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva : *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, **23** (American Mathematical Society, Providence, 1968)

[41] L. Landau, E. Lifchitz : *Théorie de l'Elasticité*, Physique Théorique 7, Seconde édition révisée et complétée, (Mir, Moscou, 1990)

[42] M. Langlais, D. Phillips : *Stabilization of Solutions of Nonlinear and Degenerate Evolution Equations*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. **9**, 4, (1985), pp. 321–333

[43] J. L. Lions : *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, (Dunod, Paris, 1969)

[44] J. L. Lions *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*, Lectures Notes in Mathematics **323**, (Springer-Verlag, Berlin, 1973)

[45] J. L. Lions , E. Magenes : *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications Vol. 2*, (Dunod, Paris, 1968)

[46] M. A. Murad, V. Thomée, A. F. D. Loula : *Asymptotic Behavior of Semidiscrete Finite-Element Approximations of Biot's Consolidation Problem*, SIAM J. Numer. Anal. **33**, 3, (1996), pp 1065–1083

[47] M. A. Murad, J. H. Cushman : *Multiscale Flow and Deformation in Hydrophilic Swelling Porous Media*, Int. J. Eng. Sci. **34**, 3, (1996), pp. 313–338

[48] M. A. Murad, J. N. Guerreiro, A. F. D. Loula : *Micromechanical Computational Modeling of Secondary Consolidation and Hereditary Creep in Soils*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **190**, 15-17, (2001), pp 1985–2016

[49] R. Racke : *Thermoelasticity with Second Sound - Exponential Stability in Linear and Nonlinear 1-D*, Math. Methods Appl. Sci. **25**, 5, (2002), pp 409–441

[50] P. Rasolofosaon : *Propagation des Ondes Acoustiques dans les Milieux Poreux - Effets d'Interface (Théorie et Expériences)*, Thèse, Université de Paris VII, (1987)

[51] P. Saint-Macary : *Uso del q-Laplaciano en Modelos de Consolidación de Biot Monodimesionales*, Proceedings du Congrès NoLineal 2004, Tolede, (2004), ISBN 84-688-7462-0

[52] P. Saint-Macary : *On nonlinear Biot's Consolidation Models*, Proceedings of Word Congress of Nonlinear Analysists, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., A paraître (2004)

[53] R. E. Showalter : *Diffusion in Poro-Elastic Media*, Jour. Math. Anal. Appl. **251**, 1, (2000), pp. 310–340

[54] R. E. Showalter, N. Su : *Partially Saturated Flow in a Poroelastic Medium*, Disc. Cont. Dynam. Syst. Series B **1**, 4, (2001), pp 403–420

[55] R. E. Showalter, B. Momken : *Single-Phase Flow in Composite Poro-Elastic Media*, Math. Methods Appl. Sci. **25**, 2, (2002), pp 115–139

[56] R. E. Showalter, N. Su : *Partially Saturated Flow in a Composite Poroelastic Medium*, Proceedings Poromechanics II 2002, (Auriault *et al.* ed., Balkema, Lisse 2002), pp. 549–554

[57] R. E. Showalter, U. Stefanelli : *Diffusion in Poro-Plastic Media*, Math. Methods Appl. Sci. A paraître

[58] K. Terzaghi : *Erdbaumechanik auf Bodenphysikalisher Grundlage*, Leipzig F. Deuticke, (1925)

[59] K. Terzaghi : *Theoretical Soil Mechanics*, (John Wiley and Sons Inc., New-York, 1943)

[60] W. Van Der Knapp : *Nonlinear Behavior of Elastic Porous Media*, Pet. Trans. AIME 216 , (1959), pp. 179–187

[61] Y. Q. Zeng, Q. H. Liu : *Acoustic Detection of Buried Objects in 3-D Fluid Saturated Porous Media : Numerical Modeling*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, **39**, 6, (2001), pp. 1165–1173

[62] A. Ženíšek : *The Existence and Uniqueness Theorem in Biot's Consolidation Theory*, Aplikace Matematiky **29** (1984), pp. 194–211