HAL open science

Fonctions critiques et équations aux dérivées partielles elliptiques sur les variétés riemanniennes compactes

Stephane Collion

To cite this version:

Stephane Collion. Fonctions critiques et équations aux dérivées partielles elliptiques sur les variétés riemanniennes compactes. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT : . tel-00007685v2

HAL Id: tel-00007685

https://theses.hal.science/tel-00007685v2

Submitted on 26 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Paris VI – Pierre et Marie Curie

Thèse de Doctorat

Spécialité :

MATHÉMATIQUES

Présentée par
Stephane Collion
Pour obtenir le grade de Docteur de L'Université Paris VI

Fonctions critiques et équations aux dérivées partielles elliptiques sur les variétés Riemanniennes compactes

Thèse soutenue le 4 décembre 2004 devant le Jury composé de

Monsieur Xavier Cabré (rapporteur)
Monsieur Emmanuel Hebey
Monsieur Frédéric Hélein
Monsieur Franck Pacard (rapporteur)
Monsieur Henri Skoda
Monsieur Michel Vaugon (directeur)

à Alice,
pour chaque minute que je ne lui ai pas consacrée
à cause de cette thèse ;

à Michel,
pour chaque minute qu'il m'a consacrée
à cause de cette thèse.

Table des matières

1 Définitions et énoncés des résultats. 9

2 Trois outils fondamentaux : le point de concentration, le changement d'échelle, le processus d'itération. Principe des démonstrations 22

2.1 Le point de concentration 22
2.2 Le changement d'échelle 23
2.3 Le processus d'itération 25
2.4 Remarque 26
2.5 Principe de démonstration du théorème 1 : 27

3 Existence de fonctions extrémales, seconde inégalité fondamentale. 29

3.1 Mise en place 30
3.2 Etude du phénomène de concentration 31
3.3 Argument central de la démonstration du théorème 1 44
3.4 Phénomènes de concentration et seconde inégalité fondamentale. 53
3.5 Remarque : Illustration de l'utilisation de la seconde inégalité fondamentale 57
3.6 Remarque finale 60

4 Triplet Critique 1 61

5 Triplet Critique 2 68

6 Triplet Critique 3 77

6.1 Méthode alternative pour conclure la première étape 88

7 La Dimension 3 92

7.1 Démonstration du Théorème 6 93
7.2 Démonstration des théorèmes 7 et 8 98

8 Remarques sur le cas limite et le cas dégénéré. Quelques questions... 103

8.1 Cas limite et cas dégénéré 103
8.2 Quelques questions et perspectives. 106

9 Abridged English Version **108**
9.1 Introduction 108
9.2 Statement of the results 113
9.3 The three main tools 116
9.3.1 The concentration point. 116
9.3.2 Blow-up analysis 117
9.3.3 The iteration process 118
9.4 Proof of theorem 1 120
9.4.1 Setup 120
9.4.2 Concentration phenomena 121
9.4.3 Proof of theorem 1 130
9.4.4 Alternate proof, proof of the fundamental estimate 136
9.5 Critical triple 1 : existence of critical functions 142
9.6 Critical triple 2 147
9.7 Critical triple 3 152
9.8 The case of the dimension 3 ; ending remarks 162
9.8.1 The case of the dimension 3. 162
9.8.2 Degenerate hessian at the point of maximum and fundamental estimate. 163
9.8.3 Further questions. 164

10 Appendice A : démonstrations de quelques propriétés **166**

11 Appendice B : construction d'une fonction de Green **170**
11.0.4 Première étape 171
11.0.5 Deuxième étape : 172
11.0.6 Troisième étape : 174
11.0.7 Quatrième étape : 176

12 Appendice C **178**

13 Appendice D : notations et conventions **183**

14 Bibliographie **186**

Merci...

Au-delà du respect d'une tradition, certes très agréable, j'aimerais que ces quelques lignes soient vues comme l'expression sincère du respect, de l'affection et de la reconnaissance que j'ai pour tous ceux qui m'entourent et me soutiennent dans mes choix et mes passions.

Je tiens tout d'abord à remercier Messieurs Xavier Cabré et Franck Pacard d'avoir accepté d'être les rapporteurs de mon travail de thèse. Je remercie également Messieurs Emmanuel Hebey, Frédéric Hélein et Henri Skoda de faire partie, aujourd'hui de mon jury.

Je remercie tout particulièrement Henri Skoda et Guennadi Henkin qui ont dirigé mes premiers travaux de recherche. Ils ont tous les deux supportés avec beaucoup de gentillesse et de tolérance mes allers-retours entre mes deux passions, les mathématiques et l'aviation, et donc mon inconstance. Je remercie d'ailleurs toute l'équipe d'analyse complexe de Paris 6, Pierre Mazet, Pierre Dolbeault, Andreï Iordan, Pascal Dingoyan et Vincent Michel pour leur accueil toujours bienveillant à mon égard.

Un immense merci à toute ma famille pour la grande ouverture d'esprit qu'ils ont toujours su entretenir chez nous, et pour le soutien constant apporté à chacun d'entre nous dans ses choix et ses passions. Merci à Elodie, Evelyne, David et Jean-Alain pour leur patience lorsque je travaillais à Moislains. J'ai une pensée toute particulière pour ma grand-mère Gaby qui a eu la très mauvaise idée de ne pas pouvoir être présente aujourd'hui.

Un merci particulier à ma mère qui a eu le courage de lire mon manuscrit pour essayer d'y repérer, au milieu de formules sans doute bien obscures pour elle, les fautes d'orthographe. Merci à Pierre Leycuras d'en avoir fait aussi une relecture.

A mes vieux amis Arnaud, César, Eric, Jean-David, Lionel, Romain 1, Romain 2 ; vous avez souvent cru que je n'y arriverais jamais, mais aujourd'hui c'est fait... Merci à vous et à Delphine, Marina, Anna, Aurélie, Loane, ainsi qu'aux amis plus "récents" mais tout aussi précieux, Anne, Camille, Charles, Dominique, Bertrand, Michel, Pascal, Patrice, Pierre, Thierry, Thierry, merci à tous pour votre amitié.

Merci à Mermoz qui est celui qui a passé le plus de temps (couché) sur ma thèse.

Merci à Alice ... pour tout.

Quant à Michel... Je crois lui avoir beaucoup dit ce que je lui devais, sinon je le lui répèterais. Pour qu'il y en ait une petite trace écrite, disons qu'en plus d'enseigner des mathématiques, il apprend à en faire et à y prendre toujours plus de plaisir. Mais, au-delà de ses talents de mathématicien et de professeur, ce pour quoi je lui dois le plus, c'est son amitié.

Introduction

Préambule :

Le propos de cette introduction est de définir l'esprit dans lequel nous avons rédigé cette thèse. Nous avons voulu profiter de l'absence de contraintes de longueur généralement imposées aux articles publiés par les différentes revues pour détailler autant que possible nos démonstrations. Ainsi, avant de nous lancer dans les détails souvent très "techniques" de ces démonstrations, nous avons tenté d'en expliciter les idées, les principes et les difficultés essentielles ; ce que, la plupart du temps, on n'a malheureusement pas la place de faire dans les articles soumis aux revues. Les idées, en particulier à la fin du chapitre 2, sont parfois présentées de manière heuristique. Le lecteur est également invité à se reporter fréquemment au dernier appendice qui reprend nos principales notations et conventions. Nous prions le lecteur de nous excuser de rallonger ainsi le texte, mais notre but est de rendre notre travail aussi clair et lisible que possible.

Nous reprenons également quelques démonstrations qui ne nous appartiennent pas, bien que là encore, notre thèse s'en trouve rallongée. Notre but est triple. Tout d'abord, nous avons voulu éviter au lecteur d'avoir à se reporter trop fréquemment à différents articles pour suivre nos démonstrations et faire en sorte que notre exposé soit aussi "complet" que possible. Ensuite, comme nous venons de le dire, soumises aux contraintes imposées par les revues, ces démonstrations sont souvent présentées avec très peu de détails. Nous avons cherché ici à les présenter de notre point de vue et avec plus de détails, à en expliquer les principes, dans le but de les mettre en valeur. Enfin, bien que peu de modifications soient nécessaires, les résultats que nous utilisons n'apparaissent pas, dans ces articles, dans le même cadre et avec exactement nos hypothèses. Nous n'avons pas voulu utiliser abruptement la formule "ça marche pareil" et risquer ainsi de donner l'impression d'occulter quelques difficultés. Nous nous sommes efforcés d'indiquer clairement quelles étaient ces démonstrations, qui étaient leurs auteurs et quelles modifications avaient été nécessaires à notre travail.

Nous espérons que, rédigée dans cet esprit, notre thèse sera agréable à lire.

Voici, dans le détail, les différents chapitres :

C*hapitre 1* : **Définitions et énoncé des résultats :** Nous donnons les définitions et les théorèmes démontrés dans cette thèse. Ici encore nous avons choisi un mode de présentation un peu particulier. Plutôt que de donner directement la définition la plus générale possible des fonctions critiques, nous montrons comment, au fur et à mesure de l'obtention de nos résultats, nous avons fait évoluer la définition initialement donnée par E. Hebey et M. Vaugon pour l'étude des meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev, vers

celle de "triplet critique" pour mettre en valeur la puissance de ce concept dans l'étude des EDP qui nous intéressent. La présentation de ce chapitre est donc plus chronologique que synthétique.

Chapitre 2 : **Trois outils fondamentaux : le point de concentration, le changement d'echelle, le processus d'itération. Principe des démonstrations.** Ces trois outils sont à la base des méthodes utilisées pour l'étude des phénomènes de concentration (comme le nom du premier l'indique). Leur présentation, dans les articles sur le sujet, est malheureusement souvent noyée au milieu des démonstrations. Nous avons voulu isoler la définition de ces outils maintenant classiques pour les mettre en valeur et pour rendre les démonstrations plus lisibles. Nous présentons également à la fin de ce chapitre le principe des principales démonstrations.

Chapitre 3 : **Existence de Fonctions Extrémales, Seconde Inégalité Fondamentale.** C'est le coeur de notre travail. Dans une première partie, nous exposons les résultats sur les phénomènes de concentration valables pour une famille générale d'EDP. Ils sont issus du travail de plusieurs auteurs, et présentés selon le principe que nous avons exposé en préambule. Vient ensuite une méthode que nous développons pour obtenir la "seconde inégalité fondamentale" et qui permet d'aboutir au principal théorème.

Chapitre 4 : **Triplet Critique 1 :** *Existence de Fonctions Critiques.* Notre travail portant sur les fonctions critiques, il est utile de montrer qu'il en existe !

Chapitre 5 : **Triplet Critique 2 :** Suivant la définition donnée d'un triplet critique, nous regardons ce que l'on peut dire lorsque la métrique varie dans une classe conforme.

Chapitre 6 : **Triplet Critique 3 :** Le dernier problème lié à l'existence des triplets critiques est abordé. C'est une partie trés importante de notre travail, et bien que plus courte, les résultats n'y sont obtenus que grâce à la méthode développée dans le chapitre 3.

Chapitre 7 : **La dimension 3.** Les précédents chapitres portent sur l'étude d'EDP sur des variétés de dimension au moins 4. La dimension 3 est à part, elle est étudiée dans ce chapitre.

Chapitre 8 : **Remarques sur le cas limite et le cas dégénéré.** Quelques remarques (et regrets ?) sont proposées sur le possible affaiblissement des hypothèses faites dans les chapitres précédents. Quelques questions liées à ce travail auxquelles nous aimerions répondre dans l'avenir sont exposées.

Chapitre 9 : **Version Anglaise abrégée.**

Appendice A : **Démonstration des propriétés élémentaires des fonctions critiques citées au chapitre 1.** Reportées ici pour une plus grande lisibilité du premier chapitre.

Appendice B : **Construction d'une fonction de Green.** Nous nous servons de cette notion, mais bien que souvent citée, n'ayant pas pu trouver de références précises, nous en donnons une construction rapide.

Appendice C : **Limite de** $C_t/\int u_t^2$. Il s'agit d'une limite apparaissant au chapitre 3. Son calcul est issu d'un article de Z. Djadli et O. Druet. Conformément à notre principe nous avons voulu l'inclure car, dans l'article de Djadli et Druet, elle n'est pas calculée avec exactement nos hypothèses. Néanmoins le calcul étant assez long, nous l'avons reporté en appendice pour ne pas interrompre le cours de notre démonstration.

Appendice D : **Notations et Conventions**. En espérant que cela aide le lecteur à s'y retrouver.

Chapitre 1

Définitions et énoncés des résultats.

Au commencement était le problème de Yamabe :

Problème de Yamabe *: Etant donnée une variété Riemannienne compacte* $(M, \mathbf{g})$ *de dimension* $n \geq 3$, *existe-t-il une métrique conforme à* $\mathbf{g}$ *dont la courbure scalaire est constante.*

Résoudre ce problème revient à prouver l'existence d'une solution $u > 0$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}.u = \lambda.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où $S_{\mathbf{g}}$ est la courbure scalaire de $\mathbf{g}$. Nous proposons dans cette introduction un aperçu (pas forcément chronologique et subjectivement orienté vers nos problèmes) des développements qui suivirent l'énoncé de ce problème, dans le but de définir la notion de fonction critique introduite par E. Hebey et M. Vaugon [20].

Le problème de Yamabe lança l'étude d'EDP non linéaires sur des variétés Riemanniennes compactes de la forme :

$$(E_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + hu = fu^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où $\Delta_{\mathbf{g}} u = -\nabla^i \nabla_i u$ est le laplacien riemannien de la variété riemannienne compacte $(M, \mathbf{g})$ de dimension $n \geq 3$ et de métrique $\mathbf{g}$, et où $h, f \in C^\infty(M)$ sont des fonctions données, l'inconnue étant u, que l'on cherche en général strictement positive. Par exemple, le cas $h = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}$ correspond aux problèmes de courbure scalaire prescrite : en effet, si $\mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}.\mathbf{g}$ est une métrique conforme à $\mathbf{g}$, les coubures scalaires sont reliées par l'équation :

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}.u = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}'}.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

Chercher une métrique conforme à $\mathbf{g}$ dont f soit la courbure scalaire revient donc à chercher une solution $u > 0$ de $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ avec $h = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}$. Le problème de Yamabe est un cas particulier où f est une constante.

Dans l'étude de ces équations, on utilise bien sûr les espaces de Sobolev, et T.Aubin [2] mit en évidence un lien fondamental entre l'équation $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ et la notion de meilleure constante dans les inclusions de Sobolev. Notons $H_1^2(M)$ l'espace de Sobolev des fonctions $L^2(M)$ dont le gradient est également dans $L^2(M)$. L'inclusion continue de $H_1^2(M)$ dans $L^{2^*}(M)$, où $2^* = \frac{2n}{n-2}$ est l'exposant critique pour les inclusions de $H_1^2(M)$ dans $L^p(M)$ (compacte pour $p < 2^*$ et seulement continue pour $p = 2^*$), se traduit par l'existence de deux constantes A et B telles que pour toute $u \in H_1^2(M)$:

$$\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq A \int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^2\, dv_{\mathbf{g}} + B \int_M u^2 dv_{\mathbf{g}} \tag{1.1}$$

On définit la meilleure première constante comme l'inf. des A telle qu'il existe $B > 0$ avec (1.1) vraie. Sa valeur est connue :

$$A = K(n,2)^2 = \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}$$

où ω_n est le volume de la sphère unité de dimension n, et cet inf. est atteint [19]. On prend alors $B_0(\mathbf{g})$ l'inf. des B tel que (1.1) soit vraie avec cette valeur de A ; on montre que $B_0(\mathbf{g}) < +\infty$ [17] . L'inégalité :

$$\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq K(n,2)^2 \int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^2\, dv_g + B_0(\mathbf{g}) \int_M u^2 dv_{\mathbf{g}} \tag{1.2}$$

est alors optimale en ce sens que les deux constantes ne peuvent plus être diminuées. Si la meilleure première constante A est connue et est indépendante de la variété $(M, \mathbf{g})$, en revanche $B_0(\mathbf{g})$, comme la notation l'indique, dépend de la géométrie et sa recherche est difficile ; cela fait l'objet de plusieurs articles et c'est dans ce but qu'ont été introduites les fonctions critiques par E.Hebey et M.Vaugon [20].(Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, nous noterons ces deux constantes K et B_0.)

L'objectif de notre travail est l'étude de l'existence de solutions strictement positives aux équations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ $\triangle_{\mathbf{g}} u + hu = fu^{\frac{n+2}{n-2}}$ dans les cas limites normalement non résolus par les méthodes variationnelles. Les fonctions critiques (h et f) apparaitront dans notre travail comme provenant de ces cas "limites", et c'est donc ces fonctions que nous étudierons.

Nous allons rappeler les bases de ces méthodes, ce qui mettra en évidence le lien entre l'équation $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ et l'inclusion de Sobolev (1.2), et nous amènera naturellement à la définition des fonctions critiques. Notons que grâce à la compacité de l'inclusion de $H_1^2(M)$ dans $L^p(M)$ pour $p < 2^*$, les méthodes variationnelles et les théories elliptiques donnent rapidement l'existence de solutions $u > 0$ à l'équation $\triangle_{\mathbf{g}} u + hu = fu^{p-1}$; le cas $p = 2^*$ est donc déjà en lui-même un cas limite (trés peu de choses sont connues pour $p > 2^*$ sans hypothèses supplémentaires [20]).

L'étude des équations du type $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ par les méthodes variationnelles amène à considérer la fonctionnelle définie sur $H_1^2(M)$:

$$I_{h,\mathbf{g}}(w) = \int_M |\nabla w|_{\mathbf{g}}^2\, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.w^2 dv_{\mathbf{g}}$$

et le minimum de cette fonctionnelle :

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \inf_{w \in \mathcal{H}_f} I_{h,\mathbf{g}}(w)$$

sur l'ensemble

$$\mathcal{H}_f = \{w \in H_1^2(M) / \int_M f\,|w|^{\frac{2n}{n-2}}\,dv_{\mathbf{g}} = 1\}.$$

En effet, l'équation d'Euler associée au problème de minimisation de cette fonctionnelle à l'aide d'une fonction u telle que

$$I_{h,\mathbf{g}}(u) = \inf_{w \in \mathcal{H}_f} I_{h,\mathbf{g}}(w)$$

est exactement

$$(E_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + hu = \lambda_{h,f,\mathbf{g}}.f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où $\lambda_{h,f,\mathbf{g}}$ apparaît comme une constante de normalisation liée à la condition

$$\int_M f\,|u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dv_{\mathbf{g}} = 1.$$

Il est parfois utile d'utiliser la fonctionnelle

$$J_{h,f,\mathbf{g}}(w) = \frac{\int_M |\nabla w|_{\mathbf{g}}^2\,dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.w^2 dv_{\mathbf{g}}}{\left(\int_M f\,|w|^{\frac{2n}{n-2}}\,dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

et la partie de $H_1^2(M)$ pour laquelle elle est définie

$$\mathcal{H}_f^+ = \{w \in H_1^2(M) / \int_M f\,|w|^{\frac{2n}{n-2}}\,dv_{\mathbf{g}} > 0\}.$$

On considère alors le problème de minimisation par une fonction u telle que

$$J_{h,f,\mathbf{g}}(u) = \inf_{w \in \mathcal{H}_f^+} J_{h,f,\mathbf{g}}(w),$$

l'équation d'Euler associée étant identique, mais sans constante de normalisation. La fonctionnelle J présente (parfois) l'avantage d'être homogène au sens où $J_{h,f,\mathbf{g}}(c.w) = J_{h,f,\mathbf{g}}(w)$ pour toute constante c. On voit donc que

$$\inf_{w \in \mathcal{H}_f} I_{h,\mathbf{g}}(w) = \inf_{w \in \mathcal{H}_f^+} J_{h,f,\mathbf{g}}(w) = \lambda_{h,f,\mathbf{g}}$$

Cette fonctionnelle J a la particularité, lorsque $h = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}$, d'être invariante par changement de métrique conforme ; elle est donc particulièrement utile dans l'étude des problèmes de courbure scalaire prescrite. Nous utiliserons la plupart du temps $I_{h,\mathbf{g}}$ et $\mathcal{H}_f$, mais pour certains problèmes, $J_{h,f,\mathbf{g}}$ s'avèrera commode lorsqu'on voudra s'affranchir de la contrainte $\int_M f\,|u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dv_{\mathbf{g}} = 1$.

Les meilleures constantes des inclusions de Sobolev apparurent lorsque T.Aubin [2] montra dans l'étude du problème de Yamabe, où $h = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}$

et f est une constante, que l'équation admettait une solution $u > 0$, ce qui résolvait le problème, si on avait :

$$\lambda_{\frac{n-2}{4(n-1)}S_{\mathbf{g}},1,\mathbf{g}} < K(n,2)^{-2}$$

Plus précisément, cette condition permet d'éviter d'aboutir par les méthodes variationnelles à une solution identiquement nulle. T. Aubin montra ensuite plus généralement que pour toutes fonctions $h, f \in C^\infty(M)$ on a :

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}} \leq \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

et que, si l'inégalité est stricte, alors il existe une solution $u > 0$ à $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ qui de plus réalise l'inf. de la fonctionnelle $I_{h,f,\mathbf{g}}$ sur $\mathcal{H}_f$. Ceci montre déja l'importance de $K(n,2)$ dans l'étude des équations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$.

Ce résultat de T. Aubin est le point de départ de tout ce qui suit. Il permet à partir des méthodes variationnelles de montrer l'existence de solutions sous l'hypothèse

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}} < K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{n-2}{n}}.$$

Notre travail porte essentiellement sur le problème de l'existence de solutions dans le cas limite :

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{n-2}{n}},$$

problème normalement non résolu par les méthodes variationnelles ; c'est pour cette étude que nous allons introduire les fonctions critiques.

Une question naturelle concernant (1.2) est l'existence de fonctions extrémales u, c'est à dire réalisant l'égalité dans (1.2). On montre alors par les théories elliptiques standard que s'il en existe, u est C^∞ et que $u < 0$ ou $u > 0$; attention, ce cas ne correspond plus au théorème de T. Aubin car ici $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$. Quitte à remplacer u par $-u$ et à une constante multiplicative près on a alors :

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + \frac{B_0(\mathbf{g})}{K(n,2)^2} u = \frac{1}{K(n,2)^2} u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ sur } M, \text{ et } \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} = 1.$$

Ceci montre dans l'autre sens le lien entre (1.2) et $(E_{h,f,\mathbf{g}})$. (Une autre façon d'apercevoir ce lien qui vaut d'être mentionné est de multiplier l'équation ci-dessus par u et d'intégrer sur M, on obtient alors l'égalité dans (1.2)). On notera souvent $2^* = \frac{2n}{n-2}$, remarquons alors que $2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2}$. Cela suggère également que la recherche d'informations sur $B_0(\mathbf{g})$ amène à étudier ces équations.

Ces rappels ont pour but de justifier maintenant l'introduction de la notion de fonction critique. Reprenons d'abord précisément les données intervenant dans l'étude des équations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$:

Données : On considère une variété riemannienne compacte $(M, \mathbf{g})$ de dimension $n \geq 3$. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ *fixée* telle que $\underset{M}{Max}\ f > 0$. Soit

aussi $h \in C^\infty(M)$ avec l'hypothése supplémentaire que l'opérateur $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif si f change de signe sur M. Notons que nous ne cherchons pas ici les hypothèses de régularité minimales pour h et f, la continuité étant généralement suffisante dans la plupart des résultats que nous présentons ; dans tout notre travail nous supposerons que h et f sont C^∞.

On considère l'équation $(E'_{h,f,\mathbf{g}})$: $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$.

Convention : Nous garderons ces "notations" : $\mathbf{g}, \mathbf{g}', \mathbf{g}_t, \widetilde{\mathbf{g}}, etc...$ pour les métriques (en gras $\mathbf{g}$ pour les distinguer plus clairement des fonctions) ; $h, h', h_t, etc...$ pour les fonctions du premier membre définissant l'opérateur $\triangle_{\mathbf{g}} + h$; $f, f', f_t, etc...$ pour celles du second membre ; et u, u_t, etc pour les fonctions inconnues et les solutions de $(E'_{h,f,\mathbf{g}})$.

On s'intéresse aux solutions minimisantes de $E'_{h,f,\mathbf{g}}$: on dira que $u \in H_1^2(M)$ est minimisante (ou extrémale) pour $(E'_{h,f,\mathbf{g}})$ (ou par abus de langage, minimisante pour h) si pour la fonctionnelle

$$I_{h,\mathbf{g}}(w) = I_h(w) = \int_M |\nabla w|_g^2 \, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.w^2 dv_{\mathbf{g}}$$

on a

$$I_{h,\mathbf{g}}(u) = \inf_{w \in \mathcal{H}_f} I_{h,\mathbf{g}}(w) := \lambda_{h,f,\mathbf{g}} := \lambda_h$$

où

$$\mathcal{H}_f = \{w \in H_1^2(M) / \int_M f \, |w|^{\frac{2n}{n-2}} \, dv_{\mathbf{g}} = 1\}.$$

Alors, quitte à la multiplier par une constante, u est C^∞, strictement positive, et est solution de :

$$(E_h) = (E_{h,f}) = (E_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \lambda_h . f.u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ avec en plus } \int_M f u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} = 1.$$

On sait, d'après le théorème de Th. Aubin dont nous avons parlé plus haut, qu'on a toujours

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}} \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} .$$

A partir de ces rappels, nous allons maintenant donner trois définitions équivalentes des fonctions critiques :

Définition 1. *Avec les notations précédentes :*

- *h est faiblement critique pour f et $\mathbf{g}$ si $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$*
- *h est sous-critique pour f et $\mathbf{g}$ si $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} < \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$*
- *h est critique pour f et $\mathbf{g}$ si h est faiblement critique et si pour toute fonction continue $k \leq h$, $k \neq h$, telle que $\triangle_{\mathbf{g}} + k$ est coercif, k est sous-critique.*

Le théorème de Th. Aubin rappelé plus haut permet d'obtenir une définition équivalente : d'après ce théorème, si h est sous-critique, $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ a une solution minimisante. On remarque alors que si h est faiblement critique et a une solution

minimisante u , h est critique. En effet, dans ce cas, puisque $u > 0$, pour toute fonction continue $k \leq h$, $k \neq h$, on a

$$I_{k,\mathbf{g}}(u) < I_{h,\mathbf{g}}(u) = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

donc k est sous-critique. Par conséquent, si h est critique, pour toute fonction $k' \geq h$, $k' \neq h$, $(E_{k'})$ ne peut pas avoir de solution minimisante, sinon k' serait faiblement critique avec une solution minimisante, donc critique et alors h serait sous-critique.

D'où la définition équivalente à la précédente :

Définition 2. *h est une fonction critique pour f et $\mathbf{g}$ si :*
- *pour toute fonction continue $k \leq h$, $k \neq h$, telle que $\triangle_{\mathbf{g}} + k$ est coercif (ce qui est le cas dès que k est assez proche de h dans C^0), (E_k) a une solution minimisante,*
- *pour toute fonction continue $k' \geq h$, $k' \neq h$,$(E_{k'})$ n'a pas de solution minimisante.*

Les fonctions critiques sont donc introduites comme séparant les fonctions donnant une équation qui admet des solutions minimisantes et les fonctions donnant une équation qui ne peut en avoir. L'objectif de ce travail est donc d'utiliser la notion de fonction critique pour étudier l'existence de solutions minimisantes aux équations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$. En particulier, un problème central sera l'existence de solutions minimisantes pour les équations "critiques", c'est-à-dire définies par une fonction critique.

Faisons quelques remarques simples sur les fonctions critiques (voir appendice A) :

L'opérateur $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est forcément coercif pour $h \in C^0(M)$ si $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$ et si $f > 0$ sur M. Indépendamment, si $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif, toute fonction k continue assez proche de h dans $C^0(M)$ est telle que $\triangle_{\mathbf{g}} + k$ est coercif. (voir appendice A).

Si h est critique, nécessairement il existe $x \in M$ tel que $h(x) > 0$ (il suffit de tester la fonction 1).

On doit dire critique pour f *et* pour la métrique $\mathbf{g}$, car $\mathbf{g}$ intervient fondamentalement dans le laplacien $\triangle_{\mathbf{g}}$. Nous sous-entendrons f et/ou $\mathbf{g}$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

On voit sur cette définition que se pose naturellement et fondamentalement le problème de l'existence de solutions minimisantes pour les fonctions critiques ; ce sera l'objet de notre premier théorème.

Enfin, on peut présenter la première définition d'une autre manière :

Définition 3. *On dira que h est critique pour f et $\mathbf{g}$ si on a*

$$\forall u \in H_1^2(M) \ : \ \left(\int_M f\,|u|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}} \left(\int_M |\nabla u|^2_{\mathbf{g}}\, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.u^2 dv_{\mathbf{g}} \right)$$

et si cette proposition n'est plus vraie pour toute fonction continue $k \leq h$, $k \neq h$ mise à la place de h.

C'est cette vision qui conduisit E. Hebey et M. Vaugon à introduire la notion de fonction critique dans l'étude de la meilleure seconde constante ; en effet, d'aprés cette définition, on peut voir les fonctions critiques comme les "meilleures fonctions", au lieu des meilleures constantes, dans l'inégalité ci-dessus. On voit là aussi que la recherche d'information sur $B_0(\mathbf{g})$ amène à étudier les équations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$.

D'ailleurs, $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ est un exemple fondamental. En effet, par définition $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ est toujours une fonction (constante) faiblement critique pour toute fonction f et toute métrique $\mathbf{g}$. Si de plus $f \equiv 1$, si $(M,\mathbf{g})$ n'est pas conformément difféomorphe à la sphère standard et est telle que $S_{\mathbf{g}} = cste$, alors $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ est une fonction critique, c'est la plus petite fonction critique constante ; on le montre simplement (Voir Appendice A), mais en utilisant deux très gros théorèmes, le théorème de Yamabe (!), et le théorème suivant de Z.Djadli et O. Druet, issu d'un article qui sera fondamental pour nous dans la suite [9]. Notons d'abord qu'il est connu [7] que :

$$B_0(\mathbf{g}) \geq \max\left(\frac{n-2}{4(n-1)}K(n,2)^2 \max_M S_{\mathbf{g}}, Vol_{\mathbf{g}}(M)^{-\frac{2}{n}}\right) \tag{1.3}$$

Z.Djadli et O.Druet ont montré alors que l'une des deux assertions suivantes devait être vraie si $\dim M = n \geq 4$:

a/ $B_0(\mathbf{g}) = \frac{n-2}{4(n-1)}K(n,2)^2 \max_M S_{\mathbf{g}}$

b/ (1.2) possède des fonctions extrémales.

D'autres questions se sont alors posées naturellement :

– peut-on avoir a/ sans b/ ?
– peut-on avoir b/ sans a/ ?
– peut-on avoir a/ et b/ simultanément ?

E. Hebey et M. Vaugon [20] ont introduit les fonctions critiques pour répondre à ces questions. Notre but est d'utiliser cette notion, en l'adaptant, pour l'étude des équations $E_{h,f,\mathbf{g}}$.

Il est très important de remarquer la propriété suivante des fonctions critiques : elles se transforment dans les changements de métrique conformes exactement comme la courbure scalaire. En effet, soit $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ et $\mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$ une métrique conforme à $\mathbf{g}$. Un calcul montre que si on pose

$$h' = \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u}{u^{\frac{n+2}{n-2}}} \text{ c'est à dire } \triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = h'.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

on a pour toute fonction $w \in H_1^2(M)$:

$$I_{h,\mathbf{g}}(w) = I_{h',\mathbf{g}'}(u^{-1}.w)$$

et

$$\int_M f\,|w|^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}} = \int_M f\left|\frac{w}{u}\right|^{2^*} dv_{\mathbf{g}'}\,.$$

De plus $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif si, et seulement si, $\triangle_{\mathbf{g}'} + h'$ est coercif. Ceci implique que h est critique pour f et $\mathbf{g}$ si, et seulement si, la fonction

$$h' = \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u}{u^{\frac{n+2}{n-2}}}$$

est critique pour f et $\mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$. Ou d'une autre manière, h' est critique pour f et $\mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$ si et seulement si la fonction

$$h = h'u^{\frac{4}{n-2}} - \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u}{u}$$

est critique pour f et $\mathbf{g}$. Enfin, w est une solution minimisante pour $E_{h,f,\mathbf{g}}$ si, et seulement si, $\frac{w}{u}$ est une solution minimisante pour $E_{h',f,\mathbf{g}'}$. Voir l'Appendice A pour les détails.

Revenons à l'évaluation de $\inf\limits_{w\in\mathcal{H}_f^+} J_h(w) := \lambda_{h,f,\mathbf{g}}$. T. Aubin introduisit dans la fonctionnelle $J_{h,f,\mathbf{g}}$ les fonctions tests ψ_k suivantes :

$$\psi_k(Q) = \begin{cases} (\frac{1}{k}+r^2)^{-\frac{n-2}{2}} - (\frac{1}{k}+\delta^2)^{-\frac{n-2}{2}} & si\, r<\delta \\ 0 \quad si\ \ r\geq\delta \end{cases}$$

où : $\delta < injM$ (le rayon d'injectivité de M), $P \in M$ est un point fixé, $k \in \mathbb{N}^*$, et où l'on note $r = d_{\mathbf{g}}(P,Q)$. Lorsque P est un point où f est maximum sur M, le calcul donne :

Si $n > 4$:

$$J_{h,f,\mathbf{g}}(\psi_k) = \\ \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}\left\{1+\frac{1}{n(n-4)}\left(\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) - S_{\mathbf{g}}(P) + \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}\right)\frac{1}{k}\right\} + o(\tfrac{1}{k})$$

Et si n=4 :

$$J_{h,f,\mathbf{g}}(\psi_k) = \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{1}{2}}}\left\{1+(6h(P)-S_{\mathbf{g}}(P))\frac{\log k}{8k}\right\} + o(\tfrac{1}{k})$$

On en déduit :

Proposition 1 :

si h est faiblement critique (donc en particulier si h est critique) pour f et $\mathbf{g}$, comme $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$, nécessairement, si P est un point où f est maximum sur M, on a :

$$Si\ \ n>4\ :\ \frac{4(n-1)}{n-2}h(P) \geq S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

$$Si\ n=4:\ 6h(P) \geq S_{\mathbf{g}}(P)$$

Remarque : si $f = cste$ cela signifie que sur tout M on a $\frac{4(n-1)}{n-2}h \geq S_{\mathbf{g}}$.

Nous allons maintenant donner les théorèmes prouvés dans notre travail.

Le premier résultat concerne l'existence de solutions minimisantes pour les fonctions critiques ; comme nous l'avons vu dans leur deuxième définition, elles sont en effet "entre" les fonctions qui ont des solutions minimisantes et les fonctions qui n'ont pas de telles solutions. Cette existence arrive comme corollaire d'un résultat plus général qui nous sera extrêmement utile pour la suite, et dont la démonstration est au coeur de notre travail. Les outils, l'idée et les difficultés de cette démonstration seront présentés au chapitre 2, la démonstration elle-même faisant l'objet du chapitre 3. Nous ferons dans les chapitre 3 à 6 une

hypothèse supplémentaire fondamentale sur f et nous considèrerons des variétés $(M, \mathbf{g})$ de dimension supèrieure ou égale à 4.

Hypothèses (H) *: On suppose que le Hessien de la fonction $f : M \to \mathbb{R}$, telle que $\underset{M}{Sup} f > 0$, est non dégénéré en chaque point de maximum de f. En outre, les fonctions h considérées sont telles que $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif et l'on suppose* $\dim M \geq 4$. *On parlera des hypothèses ($\mathbf{H}_f$) pour désigner celles concernant la fonction f.*

Théorème 1' :

Si h est critique pour f et $\mathbf{g}$, (h, f et $\mathbf{g}$ vérifiant **(H)**), *et si en tout point P où f est maximum sur M on a : $\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$ alors il existe une solution minimisante pour h, c'est à dire minimisante pour $(E_{h,f,\mathbf{g}})$.*

autrement dit, pour reprendre la formulation du théorème de Djadli-Druet :

Théorème 1" :

Si h est critique pour f et $\mathbf{g}$, (h, f et $\mathbf{g}$ vérifiant **(H)**), *l'une des deux assertions suivantes est vraie :*

- *il existe un point P où f est maximum sur M tel que $\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) = S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$*
- $(E'_h) = (E'_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ *a une solution minimisante.*

Ce théorème sera en fait une conséquence immédiate du résultat suivant, plus général mais moins parlant. Il suffit de prendre dans ce théorème la suite $h_t = h - t$ pour $t \underset{>}{\to} 0$, ces fonctions étant sous-critiques par définition, pour obtenir le théorème 1' (ou 1").

Théorème 1. *Avec l'hypothèse* ***(H)****, soit h une fonction faiblement critique pour f et $\mathbf{g}$. Si $\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$ en tout point P où f est maximum sur M et s' il existe une famille de fonctions (h_t), $h_t \lneqq h$, h_t sous-critique pour tout t dans un voisinage de $t_0 \in \mathbb{R}$, telle que $h_t \underset{t \to t_0}{\to} h$ dans $C^{0,\alpha}$ alors il existe une solution minimisante pour h (i.e. pour $(E_{h,f,\mathbf{g}})$) et donc h est critique pour f et $\mathbf{g}$.*

E.Hebey et M.Vaugon, dans le cadre de leur étude sur $B_0(\mathbf{g})$, ont montré ce théorème dans le cas où $f \equiv cste = 1$, la condition étant alors que $\frac{4(n-1)}{n-2} h > S_{\mathbf{g}}$ sur toute la variété. La démonstration de notre théorème commence de la même manière et en particulier s'appuie sur l'article de Z. Djadli et O. Druet [9], mais la présence d'une fonction f non constante fait apparaître de nouvelles difficultés dans l'étude de ce qu'on appelle les phénomènes de concentration, présentés au chapitre 2. De plus la méthode développée pour surmonter cette difficulté apporte des éléments nouveaux sur ces phénomènes de concentration et semble pouvoir s'appliquer à d'autres questions similaires : voir Zoé Faget [15]. La démonstration fera l'objet du chapitre 3.

La question suivante, naturelle, consiste bien sûr à savoir s'il existe des fonctions critiques ! La réponse, affirmative, s'obtient comme corollaire du théorème 1 ci-dessus :

Théorème 2. *Etant données la variété* $(M, \mathbf{g})$ *et la fonction* f*, vérifiant* ***(H)****, il existe une infinité de fonctions critiques* h *pour* f *et* $\mathbf{g}$ *, qui vérifient, en tout point* P *où* f *est maximum sur* M*,* $\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$ *. Ces fonctions critiques ont des fonctions extrémales.*

Il sera de plus montré que si $\int_M f dv_{\mathbf{g}} > 0$, il existe des fonctions critiques strictement positives, ce qui aura son importance pour la suite.

Ces théorèmes furent les premiers de notre travail. Ils nous amenèrent à adopter une vision un peu différente des fonctions critiques pour mettre en valeur leur intérêt dans l'étude des équations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$. Tout d'abord, on constate que dans l'équation $(E'_{h,f,\mathbf{g}})$: $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$, il y a trois données fondamentales que l'on peut faire varier : les fonctions h et f, et la métrique $\mathbf{g}$ (dans la classe des métriques qui lui sont conformes) ; remarquons que h et $\mathbf{g}$ définissent l'opérateur $\triangle_{\mathbf{g}} + h$. Notons en effet que si l'on change $\mathbf{g}$ en une métrique $\mathbf{g}'$ qui lui est conforme, par la règle de transformation du laplacien conforme, l'équation se transforme en une autre exactement de même type : $\triangle_{\mathbf{g}'} u + h'.u = f'.u^{\frac{n+2}{n-2}}$. Il sera alors intéressant de parler de triplet critique en adoptant la définition suivante :

$(h, f, \mathbf{g})$ *est un triplet critique si* h *est critique pour* f *et* $\mathbf{g}$.

De manière analogue on parlera de triplet sous-critique ou faiblement critique. On dira par ailleurs que le triplet $(h, f, \mathbf{g})$ a des solutions minimisantes si l'equation $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ a des solutions minimisantes. La question que nous nous poserons sera alors la suivante : étant fixées deux des données du triplet, peut-on trouver la troisième pour obtenir un triplet critique. Nous montrerons que cela est en effet possible, ce qui montrera *a posteriori* que fixer une des trois données et chercher les deux autres pour obtenir un triplet critique est aussi possible, ce qui n'est pas évident à priori. Ainsi par exemple, le problème de l'existence de fonctions critiques revient à se fixer la fonction f et la métrique $\mathbf{g}$ et à chercher h pour que $(h, f, \mathbf{g})$ soit un triplet critique. Nous nous poserons alors les deux autres questions possibles, en fixant d'abord les fonctions h et f et en cherchant la métrique $\mathbf{g}$, puis en fixant la fonction h et la métrique $\mathbf{g}$ et en cherchant la fonction f.

Nous obtenons des réponses complètes, sous la forme des deux théorèmes suivants :

Théorème 3. *Soient données la variété* $(M, \mathbf{g})$ *et deux fonctions* h' *et* f *vérifiant les hypothèses* ***(H)****. Alors il existe une métrique* $\mathbf{g}'$ *conforme à* $\mathbf{g}$ *telle que* $(h', f, \mathbf{g}')$ *soit un triplet critique, ou, pour reprendre la présentation première, il existe une métrique* $\mathbf{g}'$ *conforme à* $\mathbf{g}$ *telle que* h' *soit critique pour* f *et* $\mathbf{g}'$*. De plus* $(h', f, \mathbf{g}')$ *a des solutions minimisantes.*

Ce théorème a été montré par E. Humbert et M. Vaugon dans le cas $f = cste = 1$. Leur démonstration (chapitre 5) passe dans notre cadre plus général une fois prouvé que l'on peut supposer l'existence d'une fonction $h > 0$ critique pour f et $\mathbf{g}$, résultat que nous avons cité plus haut avec l'existence de fonctions critiques et qui sera montré dans le chapitre correspondant.

Enfin, la dernière question nous amène au résultat suivant. Nous avons besoin pour ce théorème d'augmenter un peu la dimension de la variété :

Théorème 4. *Soient données la variété* $(M, \mathbf{g})$*,* $\dim M \geqslant 5$*, et une fonction* h *telle que l'opérateur* $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ *soit coercif. Alors, il existe une fonction* f *(vérifiant* $(\boldsymbol{H}_f)$*) telle que* $(h, f, \mathbf{g})$ *soit critique avec des solutions minimisantes, si et seulement si* $(h, 1, \mathbf{g})$ *est sous-critique (ou* 1 *est la fonction constante* 1*).*

La démonstration, assez difficile et s'appuyant sur le principe développé au chapitre 3, se fait en deux parties et apporte quelques résultats intermédiaires intéressants. En particulier elle nous amena à quelques remarques supplémentaires sur la notion de fonction critique.

Tout d'abord, on voit sur les définitions (en utilisant par exemple la fonctionnelle J) que si h est critique pour une fonction f, h est critique pour $c.f$ pour toute constante $c > 0$. Il en va de même dans le cas où h est sous-critique ou faiblement critique. Il serait donc plus naturel de dire que h est critique pour la "classe" de f, notée $[f]$, où $[f] = \{c.f \,/\, c > 0\}$, et de considérer des triplets $(h, [f], \mathbf{g})$. Ainsi, par exemple, dans toute "classe" on peut choisir un représentant tel que $Supf = 1$; et pour comparer des triplets $(h, f, \mathbf{g})$ et $(h, f', \mathbf{g})$ entre eux, il faut supposer que $Supf = Supf'$. Par ailleurs on remarque que la valeur de $\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$ est constante sur une classe $[f]$.

Dans la démonstration de ce dernier théorème, nous avons été amené à faire "varier" la fonction f du second membre des équations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$. Cela suggéra une autre définition possible des fonctions critiques :

Définition 4. *Soient données la variété* $(M, \mathbf{g})$*,* $\dim M \geqslant 3$*, et une fonction* h *telle que l'opérateur* $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ *soit coercif. On considère une fonction* $f \in C^\infty(M)$*, telle que* $Supf > 0$*. On dira que* f *est critique pour* h *si :*

- *a/ :* $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$
- *b/ : pour toute fonction* f' *telle que* $Supf = Supf'$ *et* $f' \gneqq f$*,* $\lambda_{h,f',\mathbf{g}} < \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f')^{\frac{n-2}{n}}}$
- *Remarque : si* $Supf = Supf'$ *et* $f' \lneqq f$*,* $\lambda_{h,f',\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f')^{\frac{n-2}{n}}}$ *puisque* $J_{h,f',\mathbf{g}}(w) \geqslant J_{h,f,\mathbf{g}}(w)$ *pour toute fonction* w*.*

D'après ce que nous avons dit juste avant, il faut bien comparer dans cette définition des fonctions de même Sup ; ce sont en fait les classes $[f]$ et $[f']$ qui importent, et là aussi on doit dire que c'est $[f]$ qui est critique pour h. Il est alors naturel de poser la question suivante :

f est-elle critique pour h si, et seulement si, h est critique pour f ?

Cette question semble assez difficile. Rappelons que dans les deux cas on a toujours en tout point P où f est maximum sur M : $\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) \geqslant S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$

Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 5. *Soient données la variété* $(M, \mathbf{g})$*,* $\dim M \geqslant 5$*, et une fonction* h *telle que l'opérateur* $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ *soit coercif. On considère une fonction* $f \in C^\infty(M)$*, telle que* $Supf > 0$ *et vérifiant* $(\boldsymbol{H}_f)$*. On suppose de plus qu'en tout point* P *où* f *est maximum sur* M *:* $\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$*. Alors* f *est critique pour* h *si, et seulement si,* h *est critique pour* f *.*

Ce théorème s'obtient comme conséquence rapide de la démonstration du chapitre 6, mais il semble difficile à obtenir sans le travail des chapitres 3 et 6.

Illustrons ces derniers résultats avec quelques exemples.

Une des applications très importante des équations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ est l'étude des courbures scalaires possibles dans une classe conforme : étant données une variété $(M, \mathbf{g})$ et une fonction $f \in C^\infty(M)$, f est-elle la courbure scalaire d'une métrique conforme à $\mathbf{g}$? Les théorèmes de Th. Aubin montrent que si f est sous-critique pour $S_\mathbf{g}$ alors f est une courbure scalaire. Le théorème 4 appliqué à $h = \frac{n-2}{4(n-1)} S_\mathbf{g}$ montre que

Sur une variété $(M, \mathbf{g})$ non conformément difféomorphe à la sphère, il existe des courbures scalaires de métriques conformes à $\mathbf{g}$ qui sont seulement faiblement critiques, puisque critiques.

Il serait intéressant de caractériser ces métriques critiques.

Une des conséquences de l'article de E. Hebey et M. Vaugon [20] est qu'il existe beaucoup de variétés $(M, \mathbf{g})$, $\dim M \geqslant 4$ qui n'ont pas de fonction critique *constante* pour $f = 1$. En appliquant le théorème 4 à toute $h = cste = c < B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ on voit que sur toute variété il existe des fonctions f pour lesquelles c sera critique. Par contre étant données $(M, \mathbf{g})$ *et* f, nous ne savons pas affirmer l'existence de fonctions critiques constantes.

Le chapitre 6 traite de la dimension 3. Il faut en effet remarquer que toute l'étude précédente portait sur des variétés de dimension $\geqslant 4$. De plus la dimension 4 elle-même présente une particularité puisque le terme $\frac{n-4}{2}\frac{\triangle_\mathbf{g} f(P)}{f(P)}$ disparaît. D'ailleurs, bien que les théorèmes restent valables pour $\dim M = 4$, le résultat fondamental que nous obtenons sur les phénomènes de concentration, présenté au chapitre suivant, n'est valable que pour $\dim M \geqslant 5$. Le cas de la dimension 3 est, lui, radicalement différent et sera présenté au chapitre 6. O. Druet [10] a traité le cas $f = cste = 1$. L'introduction d'une fonction non constante n'apporte ici pas de difficultés, nous reprendrons donc rapidement la démonstration d'O. Druet pour obtenir sa généralisation au cas f non constante. Cette dimension fait intervenir de façon fondamentale la fonction de Green de l'opérateur $\triangle_\mathbf{g} + h$. Si cet opérateur est coercif, il existe une unique fonction

$$G_h : M \times M \backslash \{(x,x), x \in M\} \to \mathbb{R}$$

symétrique et strictement positive telle que, au sens des distributions, on a $\forall x \in M$:

$$\triangle_{\mathbf{g},y} G_h(x,y) + h(y) G_h(x,y) = \delta_x.$$

En dimension 3, pour un point $x \in M$, et pour y proche de x, G_h peut se mettre sous la forme :

$$G_h(x,y) = \frac{1}{\omega_2 d_\mathbf{g}(x,y)} + M_h(x) + o(1)$$

où $o(1)$ est à prendre pour $y \to x$. On appelle $M_h(x)$ la masse de la fonction de Green au point x.

On obtient alors facilement à partir de la méthode d'Olivier Druet les trois résultats suivants, analogues au cas $f = cste$ traité dans son article [10] :

Théorème 6. *Soient $(M, \mathbf{g})$ une variété compacte de dimension 3 et une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que $Sup f > 0$ (l'hypothèse $(\boldsymbol{H}_f)$ n'est pas nécessaire).*

Alors pour toute fonction h faiblement critique pour f et $\mathbf{g}$, et pour tout $x \in M$ où f est maximum sur M, on a $M_h(x) \leqslant 0$.

La condition $M_h(x) \leqslant 0$ apparaît comme l'analogue de la condition $\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) \geqslant S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$ que l'on avait en dimension $\geqslant 4$. La particularité de la dimension 3 est alors d'offrir des fonctions critiques de toutes les formes :

Théorème 7. *Soient $(M, \mathbf{g})$ une variété compacte de dimension 3 et une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que $Supf > 0$ (l'hypothèse $(\boldsymbol{H}_f)$ n'est pas nécessaire). Pour toute fonction h, posons $B(h) = \inf\{B/\ h + B$ est $faiblement$ critique pour $f\}$. Alors $h + B(h)$ est une fonction critique pour f.*

Enfin, en ce qui concerne l'existence de fonctions extrémales, on a le théorème suivant :

Théorème 8. *Soient $(M, \mathbf{g})$ une variété compacte de dimension 3 et une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que $Supf > 0$ (l'hypothèse $(\boldsymbol{H}_f)$ n'est pas nécessaire). Soit h une fonction critique pour f et $\mathbf{g}$. Alors au moins l'une des deux conditions suivantes est remplie :*

- *a/ : Il existe $x \in M$ où f est maximum sur M tel que $M_h(x) = 0$.*
- *b/ : $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ a des solutions extrémales.*

Pour finir, le chapitre 8 traite du possible affaiblissement des hypothèses des théorèmes des chapitres 3 à 6, à savoir l'hypothèse $(\mathbf{H}_f)$, et l'exigence d'une inégalité stricte dans la condition $\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$ en tout point P où f est maximum sur M . Malheureusement, seules des réponses partielles sont obtenues. Le chapitre présente également quelques questions qu'il nous semble intéressant de considérer à l'issue de ce travail.

Les appendices qui suivent regroupent quelques démonstrations que nous voulions inclure par souci de complétude mais que nous avons préféré reporter pour ne pas interrompre les raisonnements des chapitres principaux.

Chapitre 2

Trois outils fondamentaux : le point de concentration, le changement d'échelle, le processus d'itération. Principe des démonstrations

Nous voulons isoler ici la présentation de trois "outils" que nous utiliserons constamment dans l'étude des équations $E_{h,f,\mathbf{g}}$. Ces outils ont été développés par plusieurs auteurs depuis M. Vaugon [31] et P.L. Lions [26], en particulier E. Hebey, O. Druet, F. Robert, sur les travaux desquels nous nous appuierons.

2.1 Le point de concentration

Pour prouver l'existence de solutions $u > 0$ à nos équations

$$(E_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \lambda.f.u^{\frac{n+2}{n-2}},$$

le principe consistera le plus souvent à construire une famille d'équations possédant des solutions minimisantes $u_t > 0$:

$$E_t : \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

avec

$$h_t \to h \ \ dans \ \ C^{0,\alpha}(M)$$

et $\lambda_t \to \lambda$ une "suite" convergente de réels, de telle sorte que l'on ait pour une fonction $u \in H_1^2$: $u_t \to u$ fortement dans des espaces L^p , $p < 2^*$, et $u_t \rightharpoonup u$ faiblement dans H_1^2, avec une contrainte de la forme

$$\int_M f.u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1.$$

Pour fixer un peu les choses nous supposerons le plus souvent dans la suite que toutes ces convergences sont à prendre pour $t \to t_0 = 1$; et pour simplifier le vocabulaire nous parlerons de suite (u_t), etc. bien que ces familles soient indexées par des réels. La difficulté sera de prouver que u est non identiquement nulle, car dans ce cas, par le principe du maximum, $u > 0$, et il s'ensuit que u est solution minimisante de $(E_{h,f,\mathbf{g}})$. Nous procèderons par contradiction en supposant $u \equiv 0$. L'idée est alors que, à cause de la contrainte $\int_M f.u_t^{2^*} = 1$, toute la "masse" des fonctions u_t, qui convergent vers 0 dans L^p , $p < 2^*$, se concentre autour d'un point de la variété. On pose ainsi :

Définition 5. *$x_0 \in M$ est un point de concentration de (u_t) si pour tout $\delta > 0$:*

$$\limsup_{t \to t_0} \int_{B(x_0,\delta)} u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} > 0$$

Il est facile de voir que puisque M est compacte et que l'on impose $\int_M f.u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$, il existe forcément un point de concentration. Pour donner une idée plus précise de l'allure du phénomène, disons tout de suite que nous montrerons sous de bonnes hypothèses qu'il n'existe qu'un seul point de concentration, que c'est un point où f est maximum sur M, qu'il existe une suite de points (x_t) convergeant vers x_0 telle que

$$u_t(x_t) = \max_M u_t \to +\infty,$$

et

$$u_t \to 0 \ \textit{dans} \ C^0_{loc}(M - \{x_0\}).$$

En fait, l'idée est que l'on peut faire "comme si" les u_t étaient à support compact dans un voisinage de x_0 lorsque t est proche de t_0.

2.2 Le changement d'échelle

Grâce au point de concentration, on ramène l'étude globale des solutions u_t à ce qui se passe autour de x_0. Un bon moyen d'obtenir des informations (ou des contradictions !) est de faire un changement d'échelle, ou "blow-up" en anglais, autour de x_0. On appellera changement d'échelle de centre x_t, de coefficient de dilatation $k_t \in \mathbb{R}$, la succession de "cartes" et de changements de métriques suivant : On choisit $\delta > 0$ assez petit, et on considère :

$$\begin{array}{ccccc} B(x_t,\delta) & \overset{\exp_{x_t}^{-1}}{\to} & B(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n & \overset{\psi_{k_t}}{\to} & B(0,k_t\delta) \subset \mathbb{R}^n \\ & & x & \mapsto & k_t x \\ \mathbf{g} & \to & \mathbf{g}_t = \exp_{x_t}^* \mathbf{g} & \to & \widetilde{\mathbf{g}}_t = k_t^2 (\psi_{k_t}^{-1})^* \mathbf{g}_t \end{array}$$

où $\exp_{x_t}^{-1}$ est la carte exponentielle en x_t, c'est-à-dire déduite de l'application exponentielle.

Il est important de savoir comment se transforment l'équation (E_t), les intégrales de la forme $\int_{B(x_t,r)} u_t^\alpha dv_{\mathbf{g}}$ et vers quoi tout cela converge quand $t \to t_0$. Notons

$$\overline{u}_t = u_t \circ \exp_{x_t}$$

$$\overline{f_t} = f \circ \exp_{x_t}$$

et

$$\overline{h_t} = h_t \circ \exp_{x_t}$$

On a alors évidemment :

$$\begin{aligned} \triangle_{\mathbf{g}_t} \overline{u}_t + \overline{h}_t.\overline{u}_t &= \lambda_t \overline{f}_t.\overline{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}} \\ \int_{B(0,r)} \overline{u}_t^\alpha dv_{\mathbf{g}_t} &= \int_{B(x_t,r)} u_t^\alpha dv_{\mathbf{g}} \text{ pour tout } \alpha \geq 1 \end{aligned}$$

Mais le plus important est la suite : on note

$$\begin{aligned} m_t &= \underset{M}{Max}\, u_t \\ \widetilde{u}_t &= m_t^{-1} \overline{u}_t \circ \psi_{k_t}^{-1} \\ \widetilde{h}_t &= h_t \circ \psi_{k_t}^{-1} \\ \widetilde{f}_t &= \overline{f}_t \circ \psi_{k_t}^{-1} \\ \widetilde{\mathbf{g}}_t &= k_t^2 (\exp_{x_t} \circ \psi_{k_t}^{-1})^* \mathbf{g}, \end{aligned}$$

ainsi en particulier

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_t(x) &= m_t^{-1} \overline{u}_t(\frac{x}{k_t}) \\ \widetilde{\mathbf{g}}_t(x) &= \exp_{x_t}^* \mathbf{g}(\frac{x}{k_t}). \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} (\widetilde{E}_t) \quad &: \quad \triangle_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \widetilde{u}_t + \frac{1}{k_t^2} \widetilde{h}_t.\widetilde{u}_t = \frac{m_t^{\frac{4}{n-2}}}{k_t^2} \lambda_t \widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}} \\ et \quad &: \quad \int_{B(0,k_t r)} \widetilde{u}_t^\alpha dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} = \frac{k_t^n}{m_t^\alpha} \int_{B(x_t,r)} u_t^\alpha dv_{\mathbf{g}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nous utiliserons très souvent les paramètres suivants : on considère une suite de points (x_t) tels que

$$m_t = \underset{M}{Max}\, u_t = u_t(x_t) := \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}$$

et

$$k_t = \mu_t^{-1}.$$

Nous verrons que μ_t ainsi défini pour simplifier quelques exposants est un paramètre fondamental dans l'étude du phénomène de concentration. En notant (x^i) les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ (nous en aurons besoin dans certains développements limités), on a :

$$\begin{aligned} (\widetilde{E}_t) \quad &: \quad \triangle_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \widetilde{u}_t + \mu_t^2.\widetilde{h}_t.\widetilde{u}_t = \lambda_t \widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}} \\ et \quad &: \quad \int_{B(0,\mu_t^{-1} r)} x^{i_1} ... x^{i_p}.\widetilde{u}_t^\alpha dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} = \mu_t^{-p-n+\alpha\frac{n-2}{2}} \int_{B(0,r)} x^{i_1} ... x^{i_p} \overline{u}_t^\alpha dv_{\mathbf{g}_t} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Un résultat très important (voir par exemple le livre de Th. Aubin [1]) est que, quand $\mu_t \to 0$, donc $k_t \to +\infty$, les composantes de $\widetilde{\mathbf{g}}_t$ convergent dans C^2_{loc} vers celles de la métrique euclidienne, et $(\widetilde{E}_t)$ "converge" vers l'équation :

$$\triangle_e \widetilde{u} = \lambda f(x_0).\widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

au sens où

$$\widetilde{u}_t \to \widetilde{u} \ \ dans \ \ C^2_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Il est connu [6] qu'alors

$$\widetilde{u} = (1 + \frac{\lambda f(x_0)}{n(n-2)} |x|^2)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

2.3 Le processus d'itération

Lorsqu'on multiplie l'équation (E_t) par u_t et qu'on intègre sur M on obtient

$$\int_M |\nabla u_t|^2_{\mathbf{g}} \, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h_t.u_t^2 dv_{\mathbf{g}} = \lambda_t$$

si l'on a posé $\int_M f.u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$. On voit alors que, moyennant quelques hypothèses sur h, on va obtenir des informations sur la norme H_1^2 des u_t. Poussant plus loin cette idée, en multipliant l'équation par u_t^k et en intégrant, on peut espérer obtenir des informations sur les normes L^q avec q de plus en plus grand. C'est l'idée du processus d'itération de Möser. En fait, pour localiser l'étude autour du point de concentration, qui comme nous le verrons est obligatoirement un point où f est maximum, nous allons multiplier l'équation par $\eta^2 u_t^k$ où η est une fonction cut-off égale à 1 (resp.0) sur une boule $B(x_0, r)$ où $f \geq 0$, égale à 0 (resp. 1) sur $M \backslash B(x_0, 2r)$, et où $k \geq 1$, puis intégrer, ce qui permettra de faire des intégrations par parties "localement", qui resteront donc valables par exemple après changement d'échelle. On a ainsi après quelques intégrations par parties, quelques calculs et en utilisant l'équation (E_t) :

$$\frac{4k}{(k+1)^2} \int_M \left| \nabla (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}}) \right|^2 = \lambda_t \int_M f \eta^2 u_t^{\frac{n+2}{n-2}} u_t^k + \int_M (\frac{2}{k+1} |\nabla \eta|^2 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2} \eta \triangle \eta - \eta^2 h_t) u_t^{k+1} \tag{2.3}$$

où les intégrales sont prises par rapport à la mesure $dv_{\mathbf{g}}$ ce que nous sous-entendrons lorsqu'il n'y a pas d'ambiguités. Ensuite en utilisant l'inégalité de Hölder, si $f \geq 0$ sur $Supp\, \eta$ on obtient :

$$\lambda_t \int_M f \eta^2 u_t^{\frac{n+2}{n-2}} u_t^k \leq \lambda_t (\underset{Supp\, \eta}{Sup}\, f)^{\frac{n-2}{n}} . (\int_{Supp\, \eta} f u_t^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}} . (\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}$$

Puis avec l'inégalité de Sobolev :

$$(\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} \leq K(n,2)^2 \int_M \left| \nabla (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}}) \right|^2 + B \int_M \eta u_t^{k+1}$$

avec $B > 0$. D'où :

$$\begin{aligned} \frac{4k}{(k+1)^2} (\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} \leq \ & \lambda_t K(n,2)^2 (\underset{Supp\, \eta}{Sup}\, f)^{\frac{n-2}{n}} . (\int_{Supp\, \eta} f u_t^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}} . (\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} \\ & + \int_M (\tfrac{4k}{(k+1)^2} B \eta + \tfrac{2}{k+1} |\nabla \eta|^2 + \tfrac{2(k-1)}{(k+1)^2} \eta \triangle \eta - \eta^2 h_t) u_t^{k+1} \end{aligned}$$

Alors :

$$Q(t,k,\eta).(\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} \leq (\frac{4k}{(k+1)^2}B+C_0+C_\eta)\int_{Supp\,\eta} u_t^{k+1} \tag{2.4}$$

où

$$Q(t,k,\eta) = \frac{4k}{(k+1)^2} - \lambda_t K(n,2)^2(\underset{Supp\,\eta}{Sup}\, f)^{\frac{n-2}{n}}.(\int_{Supp\,\eta} f.u_t^{2^*})^{\frac{2}{n}}$$

et où l'on rappelle que $2^* = \frac{2n}{n-2}$ et où $C_0\, et\, C_\eta$ sont indépendants de k et t et tels que $\forall k \geq 1, \forall t$:

$$\left\| \frac{2}{k+1}\,|\nabla\eta|^2 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\eta\triangle\eta \right\|_{L^\infty(M)} \leq C_\eta \;\; et \;\; \|h_t\|_{L^\infty(M)} \leq C_0\,.$$

Si f change de signe sur $Supp\,\eta$, on reprend l'inégalité de Hölder :

$$\lambda_t \int_M f\eta^2 u_t^{\frac{n+2}{n-2}} u_t^k \leq \lambda_t(\underset{Supp\,\eta}{Sup}\,|f|).(\int_{Supp\,\eta} u_t^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}}.(\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}$$

et on obtient (2.4) avec :

$$Q(t,k,\eta) = \frac{4k}{(k+1)^2} - \lambda_t K(n,2)^2(\underset{Supp\,\eta}{Sup}\,|f|).(\int_{Supp\,\eta} u_t^{2^*})^{\frac{2}{n}} \tag{2.5}$$

Si nécessaire, on peut aussi remplacer $\underset{Supp\,\eta}{Sup}\,|f|$ par $\underset{M}{Sup} f$.

Le but est de montrer que (ηu_t) est bornée dans $L^{\frac{k+1}{2}2^*}$ et donc qu'on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement dans L^{2^*}.

2.4 Remarque

Ces trois "outils" fonctionnent exactement de la même manière pour des familles d'équations un peu plus générales que l'on peut associer à $(E_{h,f,\mathbf{g}})$: $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \mu_h.f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$. Ainsi au lieu d'équations E_t : $\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$ où seules les fonctions h_t (et λ_t) varient, on peut être amené à associer à $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ une famille

$$E_t : \; \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f_t.u_t^{q_t-1}$$

où $q_t \to 2^*$ et $f_t \to f$ dans un certain espace L^p, avec toujours $h_t \to h$ dans $C^{0,\alpha}(M)$ et $\lambda_t \to \lambda$, et où l'on demande $\int_M f_t u_t^{q_t} dv_{\mathbf{g}} = 1$.

$x_0 \in M$ sera alors un point de concentration de (u_t) si on a pour tout $\delta > 0$:

$$\limsup_{t\to t_0} \int_{B(x_0,\delta)} u_t^{q_t} > 0$$

Le principe du changement d'échelle est alors analogue, de même que le principe d'itération. Les formules (2.4) et (2.5) deviennent ainsi

$$Q(t,k,\eta).(\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{q_t})^{\frac{2}{q_t}} \leqslant C\int_{Supp\,\eta} u_t^{k+1}$$

où $Q(t,k,\eta) = \dfrac{4k}{(k+1)^2} - \lambda_t (Vol_g(M))^{\frac{q_t}{2^*}-1} K(n,2)^2(\underset{Supp\,\eta}{Sup}\,|f|).(\int_{Supp\,\eta} u_t^{q_t})^{\frac{q_t-2}{q_t}}$

2.5 Principe de démonstration du théorème 1 :

Nous voulons prouver l'existence d'une solution $u > 0$ à l'équation

$$(E_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \lambda.f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

Comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, nous considérons la famille d'équations et de solutions minimisantes associées :

$$E_t : \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

avec

$$h_t \overset{\leqslant}{\underset{\pm}{\to}} h \quad dans \quad C^{0,\alpha}(M)$$

les h_t étant sous-critiques par hypothèse.

L'idée de base est la suivante : il s'agit d'introduire dans l'inégalité de Sobolev l'équation E_t vérifiée par la fonction u_t pour obtenir une contradiction si les u_t convergent vers la solution nulle. Plus précisément :

Supposons que $\mathbf{g}$ est plate au voisinage de x_0 et pour simplifier que $f \equiv 1$. Alors $S_{\mathbf{g}} = 0$ au voisinage de x_0 et notre hypothèse est :

$$h(x_0) > 0 = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0)$$

Donc à partir d'un certain rang : $h_t(x_0) > 0$. Or d'une part, comme u_t est minimisante,

$$\lambda_{h_t,f,\mathbf{g}=} J_{h_t}(u_t) := \lambda_t < K(n,2)^{-2}$$

et donc :

$$\int_M |\nabla u_t|^2 \, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h_t.u_t^2 dv_{\mathbf{g}} = \lambda_t (\int_M u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}})^{\frac{2}{2^*}} = \lambda_t < K(n,2)^{-2} \tag{2.6}$$

car $\int_M u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$; et d'autre part l'identité de Sobolev Euclidienne donne

$$K(n,2)^{-2} (\int_{\mathbb{R}^n} v^{2^*})^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \ . \tag{2.7}$$

Or si $u_t \to 0$, nous montrerons qu'il y a un phénomène de concentration, et, comme nous l'avons dit au premier paragraphe, cela permet de "faire comme si" les u_t étaient à support compact dans un petit voisinage B de x_0 où $h_t > 0$. On aurait donc d'une part d'après (2.6)

$$\int_B |\nabla u_t|^2 < K(n,2)^{-2} (\int_B u_t^{2^*})^{\frac{2}{2^*}} = K(n,2)^{-2}$$

puisque $h_t > 0 = S_{\mathbf{g}}$ sur B ; et d'autre part d'aprés (2.7)

$$\int_B |\nabla u_t|^2 \geq K(n,2)^{-2} (\int_B u_t^{2^*})^{\frac{2}{2^*}} = K(n,2)^{-2}$$

d'où une contradiction.

Pour passer à l'application rigoureuse de cette idée, il faudra multiplier les u_t par des fonctions cut-off et faire des développements limités de la métrique

et de f au voisinage de x_0 , et utiliser les résultats sur les phénomènes de concentration que nous montrerons au début du chapitre 3. Plus précisément, avec la fonction f au second membre, on a

$$\int_M |\nabla u_t|^2_{\mathbf{g}}\, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h_t.u_t^2 dv_{\mathbf{g}} = \lambda_t(\int_M f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}})^{\frac{2}{2^*}}$$

et c'est dans cette expression que nous aurons à faire un développement limité de f pour en faire apparaître le laplacien en x_0, la contradiction s'obtenant par opposition à la condition

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

au point de maximum de f, puisque x_0, comme nous le verrons, est un point de maximum. C'est là qu'intervient une nouvelle difficulté par rapport au cas $f = cste$. En effet, comme nous l'avons laissé entendre au paragraphe sur le changement d'échelle, nous serons amenés à considérer une suite de points (x_t) tels que

$$m_t = \underset{M}{Max}\, u_t = u_t(x_t).$$

Le but de l'étude de la concentration est d'étudier la "forme" des fonctions u_t quand $t \to t_0$ autour de x_t. Comme nous l'avons dit, nous montrerons que

$$u_t \to 0 \ \ dans \ \ C^0_{loc}(M - \{x_0\}).$$

En faisant un changement d'échelle en x_t nous obtiendrons des informations très précises sur l'allure des u_t autour de x_t. La difficulté sera alors de "relier" ces informations en x_t avec celles que nous avons en x_0 sur f puisque c'est en x_0 que f est maximum. Très précisément, il nous faudra obtenir une information sur la "vitesse" de convergence de la suite (x_t) des points de maximum des u_t vers x_0, point de maximum de f et point de concentration. Cette vitesse sera mesurée par rapport à la croissance du maximum des u_t à savoir

$$m_t = \underset{M}{Max}\, u_t = u_t(x_t) := \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}$$

et nous voudrons obtenir la relation

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \leqslant C$$

où C est une constante. Cette relation a été nommée "seconde inégalité fondamentale" par Zoé Faget [14] tant elle est utile dans l'étude des EDP à l'aide des points de concentration ; elle a été étudiée par plusieurs auteurs, en particulier ceux cités au début du chapitre. Elle est en général difficile à obtenir. La définition de $\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} = \underset{M}{Max}\, u_t = u_t(x_t)$ est faite pour simplifier l'exposant dans la relation ci-dessus ; μ_t sera vraiment un paramètre fondamental dans l'étude des phénomènes de concentration.

Chapitre 3

Existence de fonctions extrémales, seconde inégalité fondamentale.

Ce chapitre se divise en cinq parties. Tout d'abord nous rappelons l'objectif principal du chapitre, la démonstration du théorème 1, et nous exposons la mise en place de la démonstration. La deuxième partie, bien que s'incluant dans cette démonstration, s'applique en fait au cas d'une suite quelconque de solutions d'équations

$$E_t : \ \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

développant un phénomène de concentration, et les résultats et méthodes que l'on y trouve seront réutilisés dans les autres chapitres. La troisième partie constitue le coeur de la démonstration, c'est là qu'est développé le principe d'obtention de la "seconde inégalité fondamentale" évoquée au chapitre précédent. La quatrième partie reprend précisément cette inégalité, très importante pour l'étude des phénomènes de concentration, dans le cadre général d'une suite quelconque de solutions d'équations

$$E_t : \ \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Enfin, la cinquième partie illustre l'utilité de cette inégalité pour obtenir une autre démonstration du théorème 1.

Rappelons le théorème que nous voulons montrer :

Données : On considère une variété riemannienne compacte $(M, \mathbf{g})$ de dimension $n \geq 4$. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ *fixée* telle que $\underset{M}{Sup}\ f > 0$. Soit aussi $h \in C^\infty(M)$ avec l'hypothèse supplémentaire que l'opérateur $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif si f change de signe sur M.

On considère l'équation

$$(E'_h) = (E'_{h,f}) = (E'_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Hypothèses (H) *: On suppose que le Hessien de la fonction $f : M \to \mathbb{R}$, telle que $\underset{M}{Sup} f > 0$, est non dégénéré en chaque point de maximum de f. En*

outre, les fonctions h considérées sont telles que $\triangle_{\mathbf{g}}+h$ est coercif et l'on suppose $\dim M \geq 4$. *On parlera des hypothèses ($\mathbf{H}_f$) pour désigner celles concernant la fonction f.*

Notre but est de prouver le résultat suivant :

Théorème 1 :

Avec l'hypothèse **(H)**, *soit h une fonction faiblement critique pour f (et $\mathbf{g}$). Si en tout point P où f est maximum sur M on a : $\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(P)}{f(P)}$ et s'il existe une famille de fonctions (h_t), $h_t \lneqq h$, h_t sous-critique pour tout t dans un voisinage de $t_0 \in \mathbb{R}$, telle que $h_t \underset{t\to t_0}{\to} h$ dans $C^{0,\alpha}$ alors il existe une solution minimisante pour h et donc h est critique.*

3.1 Mise en place

Soit donc h une fonction faiblement critique pour f et $\mathbf{g}$ telle qu'en tout point P où f est maximum sur M on ait :

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{(n-4)}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(P)}{f(P)}$$

ce que l'on peut écrire

$$h(P) > \frac{n-2}{4(n-1)}S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(P)}{f(P)}$$

et telle qu'il existe une suite de fonctions (h_t), $h_t \lneqq h$, h_t sous-critique pour tout t, vérifiant $h_t \underset{t\to t_0}{\to} h$ dans C^0. Pour simplifier on suppose que $t_0 = 1$ et que $t \to 1$ ce qui ne change rien. Alors pour tout t,

$$\lambda_t := \lambda_{h_t,f,\mathbf{g}} < \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup}f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

et il existe une suite de fonctions $u_t > 0$ minimisantes pour h_t qui sont solutions de

$$E_t : \ \triangle_{\mathbf{g}}u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ avec de plus } \int_M f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$$

On voit alors que, puisque $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif, la suite (u_t) est bornée dans H_1^2 (il suffit de multiplier E_t par u_t et d'intégrer sur M). Il existe donc une fonction $u \in H_1^2$, $u \geq 0$ telle que, quitte à extraire une sous-suite,

$$u_t \overset{H_1^2}{\rightharpoonup} u\,,$$
$$u_t \overset{L^2}{\to} u\,,$$
$$u_t \overset{p.p.}{\to} u\,,$$

et on peut supposer que

$$\lambda_t \overset{<}{\to} \lambda \leqslant \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup}f)^{\frac{n-2}{n}}}\ .$$

En particulier

$$u_t \xrightarrow{L^p} u,\ \forall p < 2^* = \frac{2n}{n-2}$$

puisque l'inclusion de H_1^2 dans L^p est compacte $\forall p < 2^*$. Alors u est solution faible de

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \lambda.f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

donc par les théories elliptiques standard u est C^∞. Le principe du maximum nous dit alors que soit $u > 0$ soit $u \equiv 0$.

Si $u > 0$ alors, comme h est faiblement critique, en multipliant l'équation ci-dessus par u et en intégrant sur M on voit que (voir appendice A) :

$$\lambda = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Donc u est solution de

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}.f.u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ et } \int_M f u^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$$

et donc u est une solution minimisante pour h et le théorème est démontré.

Si $u \equiv 0$ on est dans le cas où il y a phénomène de concentration tel que décrit précédemment. Toute l'étude de ce phénomène qui va suivre aura pour but d'aboutir à une contradiction. Nous supposons donc à partir de maintenant que l'on est dans ce cas :

$$u \equiv 0.$$

3.2 Etude du phénomène de concentration

De nombreux résultats sur ce phénomène de concentration, dûs à M. Vaugon, E. Hebey, O. Druet et F. Robert entre autres, sont déja connus, mais ils sont souvent publiés dans le cas où $f \equiv 1$. Nous allons les reprendre dans notre cas sachant que la présence d'une fonction quelconque f au second membre de

$$E_t :\ \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

ne change quasiment rien à de nombreuses parties des démonstrations, mais pose de nouveaux problèmes dans d'autres. De plus, fait très important, elle "fixe" en quelque sorte la position du point de concentration (voir le point a/). Bien que ces résultats fassent partie de la démonstration du théorème 1, l'étude faite dans cette partie s'applique au cadre plus général d'une variété riemannienne compacte $(M, \mathbf{g})$ de dimension $n \geq 3$ sur laquelle on considère une suite (u_t) de solutions $C^{2,\alpha}$ de l'équation

$$\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t u_t = \lambda_t f u_t^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ avec } \int_M f u_t^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} = 1$$

où f est une fonction dont le maximum est strictement positif. On suppose de plus que $h_t \to h$ dans $C^{0,\alpha}$ où h est telle que $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coércif. La suite (u_t) est bornée dans H_1^2, donc $u_t \rightharpoonup u$ faiblement dans H_1^2, et on suppose que $u \equiv 0$;

ainsi $u_t \to 0$ dans tout L^p pour $p < 2^*$. La suite u_t développe alors un phénomène de concentration. Nous faisons une hypothèse dite "d'énergie minimale" (qui est vérifiée dans le cadre du théorème 1) :

$$\lambda_t \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Sous ces hypothèses, cette partie est ainsi indépendante du reste de la démonstration du théorème considéré dans ce chapitre ; elle nous servira aussi dans les chapitres suivants. Cette étude est valable pour $\dim M \geq 3$, sauf la partie d/, qui étudie la concentration L^2, valable pour $\dim M \geq 4$. Dans toute la suite, c, C désignent des constantes strictement positives indépendantes de t et δ.

a/ : Proposition : Il existe, à extraction près d'une sous-famille de (u_t), un unique point de concentration x_0 et c'est un point où f est maximum sur M. De plus

$$\forall \delta > 0, \ \overline{\lim_{t \to 1}} \int_{B(x_0,\delta)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$$

C'est une application du principe d'itération. Tout d'abord comme M est compacte, il existe au moins un point de concentration. Sinon on pourrait recouvrir M par un nombre fini de boules $B(x_i, \delta)$ telles que $\lim_{t \to 1} \int_{B(x_i,\delta)} u_t^{2^*} = 0$, et on aurait $\lim_{t \to 1} \int_M u_t^{2^*} = 0$, ce qui contredirait

$$1 = \int_M f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} \leq Sup\,|f| \int_M u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}}$$

Si f change de signe sur M, montrons que si $f(x) \leq 0$, alors pour δ assez petit

$$\lim_{t \to 1} \int_{B(x,\delta)} u_t^{2^*} = 0,$$

ce qui montre en particulier qu'un tel x n'est pas un point de concentration. Si $f(x) < 0$, on choisit δ assez petit pour que $f < 0$ sur $B(x, \delta)$ et on prend η à support dans $B(x, \delta)$. Comme les u_t sont bornées indépendamment de t dans H_1^2 donc dans L^{2^*}, on a, d'après (2.3) (chapitre précédent, principe d'itération), pour tout k tel que $1 \leq k \leq 2^* - 1$:

$$\frac{4k}{(k+1)^2} \int_M \left| \nabla (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}}) \right|^2 \leq \int_M \left(\frac{2}{k+1} |\nabla \eta|^2 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2} \eta \triangle \eta - \eta^2 h_t \right) u_t^{k+1} \leq C_1$$

où C_1 est indépendant de t. Donc pour tout k tel que $1 \leq k \leq 2^* - 1$ il existe C_2 indépendant de t tel que :

$$\int_M \left| \nabla (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}}) \right|^2 \leq C_2$$

Donc $\eta u_t^{\frac{k+1}{2}}$ est bornée indépendamment de t dans H_1^2 et, en utilisant l'inégalité de Sobolev, $\eta u_t^{\frac{k+1}{2}}$ est bornée dans L^{2^*} pour tout k tel que $1 \leq k \leq 2^* - 1$.

Si $f(x) = 0$, par continuité de f et en choisissant δ assez petit, on a dans (2.5) pour tout k tel que $1 \leq k \leq 2^* - 1$, $Q(t,k,n) \geq Q > 0$. Donc avec (2.4), on obtient là aussi que $\eta u_t^{\frac{k+1}{2}}$ est bornée indépendamment de t dans L^{2^*} pour tout k tel que $1 \leq k \leq 2^* - 1$. Mais par l'inégalité de Hölder :

$$(\int_{B(x,\delta/2)} u_t^{2^*}) \leq (\int_{B(x,\delta/2)} (u_t^{\frac{k+1}{2}})^{2^*})^{\frac{n+2}{n(k+1)}} (\int_{B(x,\delta/2)} u_t^{\frac{n(k+1)}{(nk-2)}})^{\frac{nk-2}{n(k+1)}}$$

et si l'on suppose que $\overline{\lim\limits_{t\to 1}} \int_{B(x,\delta)} u_t^{2^*} > 0$ on obtient, quand $f(x) \leq 0$,

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \int_{B(x,\delta/2)} u_t^{\frac{n(k+1)}{(nk-2)}} > 0$$

alors que $\frac{n(k+1)}{(nk-2)} < 2^*$ si $1 \leq k \leq 2^* - 1$, ce qui contredit le fait que $u_t \overset{L^p}{\to} 0$, $\forall p < 2^*$. Donc pour δ assez petit :

$$\lim_{t\to 1} \int_{B(x,\delta)} u_t^{2^*} = 0,$$

et donc si $f(x) \leq 0$, x ne peut pas être un point de concentration.

Soit alors x un point de concentration : $f(x) > 0$ d'après ce qui précède. Posons, pour $\delta > 0$ assez petit pour que $f \geq 0$ sur $B(x,\delta)$,

$$\limsup_{t\to 1} \int_{B(x,\delta)} f u_t^{2^*} = a_\delta$$

Alors $a_\delta \leq 1$ car $\int_M f u_t^{2^*} = 1$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $a_\delta < 1$. Puisque

$$\lambda_t \underset{\leqslant}{\to} \lambda \leqslant \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

on en déduit

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \lambda_t K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}} a_\delta < 1.$$

Par ailleurs $\frac{4k}{(k+1)^2} \underset{\substack{k\to 1\\ >}}{\to} 1$. Donc pour k fixé assez proche de 1 tel que

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \lambda_t K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}} a_\delta < \frac{4k}{(k+1)^2}$$

on vérifie, en prenant η à support dans $B(x,\delta)$, que dans (2.4) : $Q(t,k,n) \geq Q > 0$ pour tout t, où Q est indépendant de t. On en déduit, toujours avec (2.4), que

$$(\int_{B(x,\delta/2)} u_t^{\frac{k+1}{2} 2^*})^{\frac{2}{2^*}} \leq C \text{ quand } t \to 1 \text{ où } C \text{ est indépendant de } t.$$

Alors, par l'inégalité de Hölder :

$$\int_{B(x,\delta/2)} u_t^{2^*} \leq (\int_{B(x,\delta/2)} u_t^{\frac{k+1}{2} 2^*})^{\frac{2}{2^*}} (\int_M u_t^{2^* - \frac{(k-1)2^*}{2^*-2}})^{\frac{2^*-2}{2^*}}.$$

Or puisque x est un point de concentration

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \int_{B(x,\delta/2)} u_t^{2^*} > 0$$

alors que pour k assez proche de 1 :

$$(\int_M u_t^{2^*-\frac{(k-1)2^*}{2^*-2}})^{\frac{2^*-2}{2^*}} \underset{t\to 1}{\to} 0$$

D'où une contradiction et $a_\delta = 1$, $\forall \delta > 0$. Donc x est l'unique point de concentration que nous noterons désormais x_0. Ce même raisonnement montre que nécessairement

$$\lambda = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ .$$

De la même manière, si $f(x_0) \neq \underset{M}{Sup} f$, $\exists \delta > 0$ tel que $\underset{B(x_0,\delta)}{Sup} f < \underset{M}{Sup} f$. Or $\lambda_t \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$ donc

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \lambda_t K(n,2)^2 (\underset{B(x_0,\delta)}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}} (\int_{B(x_0,\delta)} f u_t^{2^*})^{\frac{2^*-2}{2^*}} < 1 \ .$$

Alors pour k assez proche de 1, en prenant η à support dans $B(x_0,\delta)$, on obtient dans l'inégalité (2.4) : $Q(t,k,n) \geq Q > 0$ pour tout t où Q est indépendant de t. On aboutit ensuite de la même manière à une contradiction. Donc $f(x_0) = \underset{M}{Sup} f > 0$

b/ : Proposition : $u_t \to 0$ **dans** $C^0_{loc}(M - \{x_0\})$

Le processus d'itération prend ici tout son sens.

Première étape : Soit $q > 0$ fixé. On montre qu'il existe pour tout $\delta > 0$, $C = C(\delta, q)$ indépendant de t tel que pour t assez proche de 1 :

$$\|u_t\|_{L^q(M\backslash B(x_0,\delta))} \leq C \|u_t\|_{L^2(M)} \ .$$

Pour appliquer le principe d'itération, on construit $\eta_1, ..., \eta_m$ m fonctions cut-off telles que $\eta_j = 0$ sur $B(x_0,\delta/2)$ et $\eta_j = 1$ sur $M\backslash B(x_0,\delta)$ et de telle sorte que

$$M\backslash B(x_0,\delta) \subset ... \subset \{\eta_{j+1} = 1\} \subset Supp\, \eta_{j+1} \subset \{\eta_j = 1\} \subset ... \subset M\backslash B(x_0,\delta/2)$$

et où m est choisi tel que $2(\frac{2^*}{2})^m > q$, et on pose $q_1 = 2$ et $q_j = (\frac{2^*}{2}) q_{j-1}$. Le processus d'itération (2.4. et 2.5) donne alors

$$Q(t, q_j - 1, \eta_j).(\int_M (\eta_j u_t^{\frac{q_j}{2}})^{2^*})^{\frac{n-2}{n}} \leq (\frac{4(q_j-1)}{{q_j}^2} B + C_0 + C_{\eta_j}) \int_{Supp\, \eta_j} u_t^{q_j} \ .$$

Or pour $j \leq m$ on a $\frac{4(q_j-1)}{{q_j}^2} \geq c > 0$ et d'aprés a/, $\int_{Supp\, \eta_j} u_t^{2^*} \to 0$, donc dans (2.5),

$$Q(t, q_j - 1, \eta_j) \geq c > 0, \forall j.$$

Il existe donc un voisinage V_j de 1 et une constante $C_j > 0$ tels que pour $t \in V_j$:

$$(\int_M (\eta_j u_t^{\frac{q_j}{2}})^{2^*})^{\frac{n-2}{n}} \leq C_j \int_{Supp\,\eta_j} u_t^{q_j} \quad .$$

Alors d'après le choix des η_j on a

$$(\int_{\{\eta_j=1\}} u_t^{q_j \frac{2^*}{2}})^{\frac{n-2}{n}} \leq C_j \int_{\{\eta_{j-1}=1\}} u_t^{q_j}$$

d'où

$$\|u_t\|_{L^q(M\backslash B(x_0,\delta))} \leq C(\prod_{j=1}^{m} C_j) \|u_t\|_{L^2(M)} \quad \forall t \in V_1 \cap ... \cap V_m \, .$$

Deuxième étape : Le théorème (8.25) de Gilbarg-Trudinger [16] nous donne : si u est solution d'une équation de la forme E : $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = F$, où $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif, et si $\omega \subset\subset \omega'$ sont deux ouverts, pour $r > 1$, $q > n/2$:

$$\underset{\omega}{Sup}\, u \leq c \|u\|_{L^r(\omega')} + c' \|F\|_{L^q(\omega')} \quad .$$

La démonstration de ce théorème est en fait une application du principe d'itération, nous l'utilisons ici pour gagner du temps, en l'appliquant à E_t : $\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$ et à $\omega \subset\subset \omega' \subset M\backslash\{x_0\}$.

Alors avec la première étape appliquée à $q\frac{n+2}{n-2}$, en choisissant

$$\omega = M\backslash B(x_0,\delta),\ \omega' = M\backslash B(x_0,\delta/2),\ r = 2,\ q > n/2$$

on obtient

$$\begin{aligned} \underset{M\backslash B(x_0,\delta)}{Sup}\, u_t &\leq c \|u_t\|_{L^2(\omega')} + c'\lambda_t^q \|u_t\|^{\frac{n+2}{n-2}}_{L^{q\frac{n+2}{n-2}}(\omega')} \\ &\leq c \|u_t\|_{L^2(M)} + c'' \|u_t\|^{\frac{n+2}{n-2}}_{L^2(M)} \end{aligned}$$

Or $\|u_t\|_{L^2(M)} \to 0$, d'où la conclusion.

c/ : Estimées ponctuelles faibles

Reprenons les notations du changement d'échelle décrit au chapitre 2 : on considère une suite de points (x_t) tel que

$$m_t = \underset{M}{Max}\, u_t = u_t(x_t) := \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}.$$

D'après ce qui précède $x_t \to x_0$ et $\mu_t \to 0$. Rappelons que $\overline{u}_t, \overline{f}_t, \overline{h}_t, \mathbf{g}_t$ désignent les fonctions et la métrique "lues" dans la carte $\exp_{x_t}^{-1}$, et $\widetilde{u}_t, \widetilde{h}_t, \widetilde{f}_t, \widetilde{\mathbf{g}}_t$ désignent les fonctions et la métrique "lues" après blow-up. *Désormais, tous les changements d'échelle ont pour point de départ des boules $B(x_t,\delta)$ sur lesquelles $f \geq 0$ ce qui est possible puisque $f(x_0) > 0$.*

Proposition 2 :

$\forall R > 0 : \lim_{t\to 1} \int_{B(x_t,R\mu_t)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1 - \varepsilon_R$ où $\varepsilon_R \underset{R\to+\infty}{\to} 0$.

Démonstration : C'est une application directe du changement d'échelle en x_t avec $k_t = \mu_t^{-1}$:

$\widetilde{u}_t \to \widetilde{u} = (1 + \frac{\lambda f(x_0)}{n(n-2)}\,|x|^2)^{-\frac{n-2}{2}} = (1 + \frac{f(x_0)^{\frac{2}{n}}}{K(n,2)^2 n(n-2)}\,|x|^2)^{-\frac{n-2}{2}}$ dans $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Alors :

$$\int_{B(x_t,R\mu_t)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = \int_{B(0,R)} \widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \underset{t\to 1}{\to} f(x_0)(\int_{B(0,R)} \widetilde{u}^{2^*} dx) \underset{R\to\infty}{\to} 1$$

Proposition 3 :

$\exists C > 0$ tel que $\forall x \in M$: $d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq C$.

Démonstration : Posons $w_t(x) = d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x)$. On veut montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\underset{M}{Sup}\, w_t \leq C$. Par contradiction on suppose que (pour une sous-suite) $\underset{M}{Sup}\, w_t \to +\infty$. Soit y_t un point où w_t est maximum. M étant compacte, $d_{\mathbf{g}}(x, x_t)$ est bornée, donc $u_t(y_t) \to \infty$, donc d'après le point b/ $y_t \to x_0$. Par ailleurs la définition de μ_t nous donne :

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)}{\mu_t} \to +\infty\ .$$

On fait un changement d'échelle en y_t de coefficient $k_t = u_t(y_t)^{\frac{2}{n-2}}$ et avec $m_t = u_t(y_t)$. On obtient :

$$\triangle_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \widetilde{u}_t + u_t(y_t)^{-\frac{4}{n-2}}.\widetilde{h}_t.\widetilde{u}_t = \lambda_t \widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}}\ .$$

Si $x \in B(0,2)$:

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{g}}(x_t, \exp_{y_t}(u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}} x) &\geq d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t) - 2u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}} \\ &\geq u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}}(w_t(y_t)^{\frac{2}{n-2}} - 2) \sim d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t) \end{aligned}$$

car $w_t(y_t) \to \infty$ et $u_t(y_t) \to \infty$, donc pour t proche de 1 :

$$d_{\mathbf{g}}(x_t, \exp_{y_t}(u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}} x) \geq \frac{1}{2} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)\ .$$

Par conséquent pour tout $R > 0$ et pour t proche de 1 :

$$B(y_t, 2u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}}) \cap B(x_t, R\mu_t) = \emptyset$$

Alors, d'après la proposition précédente

$$\begin{aligned} \int_{B(0,2)} \widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} = \int_{B(y_t, 2u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}})} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} &\leq \int_{M\setminus B(x_t,R\mu_t)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} \\ &\leq \int_M f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} - \int_{B(x_t,R\mu_t)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} \\ &\underset{t\to 1, R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Mais le principe d'itération donne alors pour $1 \leq k \leq 2^* - 1$:

$$\int_{B(0,1)} \widetilde{u}_t^{\frac{k+1}{2}2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \to 0$$

et par récurrence on obtient $\forall p \geq 1$:

$$\int_{B(0,1)} \widetilde{u}_t^p dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \to 0$$

On en déduit alors que $\|\widetilde{u}_t\|_{L^\infty(B(0,1))} \to 0$ bien que $\widetilde{u}_t(0) = 1$. D'où une contradiction.

Proposition 4 :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ tel que $\forall t$, $\forall x \in M$:

$$d_{\mathbf{g}}(x, x_t) \geq R\mu_t \;\Rightarrow\; d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq \varepsilon.$$

Démonstration : On utilise le même principe, on suppose qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $y_t \in M$ tels que

$$\lim_{t\to 1} \frac{d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)}{\mu_t} = +\infty \text{ et } w_t(y_t) = d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(y_t) \geq \varepsilon_0$$

On fait un changement d'échelle en y_t de coefficient $k_t = u_t(y_t)^{\frac{2}{n-2}}$ et avec $m_t = u_t(y_t)$.

Alors avec ces hypothèses si $x \in B(0, \frac{1}{2}\varepsilon_0^{\frac{2}{n-2}})$:

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{g}}(x_t, \exp_{y_t}(u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}} x) \qquad &\geq d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t) - \frac{1}{2}\varepsilon_0^{\frac{2}{n-2}} u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}} \\ &\geq \frac{1}{2} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t) \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $R > 0$ et pour t proche de 1 :

$$B(y_t, \frac{1}{2}\varepsilon_0^{\frac{2}{n-2}} u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}}) \cap B(x_t, R\mu_t) = \emptyset$$

donc comme précédemment :

$$\int_{B(0, \frac{1}{2}\varepsilon_0^{\frac{2}{n-2}})} \widetilde{f}_t . \widetilde{u}_t^{2^*} \, dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \to 0$$

et on aboutit de la même manière à une contradiction.

d/ : Concentration L^2

Proposition 5 :
Si $\dim M \geq 4$, $\forall \delta > 0$:

$$\lim_{t\to 1} \frac{\int_{B(x_0,\delta)} u_t^2 dv_{\mathbf{g}}}{\int_M u_t^2 dv_{\mathbf{g}}} = 1$$

Cette limite qui décrit un quotient de "normes L^2" justifie la terminologie "concentration L^2".

Démonstration :

On reprend pour commencer les deux "étapes" du point b/ pour montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $c > 0$ tel que :

$$\underset{M\setminus B(x_0,\delta)}{Sup} u_t \leq c \, \|u_t\|_{L^2(M)} \;.$$

Il suffit de reprendre la fin de la deuxième étape de la démonstration du point b/ :

$$\begin{aligned}\underset{M\setminus B(x_0,\delta)}{Sup}\ u_t &\leq c\,\|u_t\|_{L^2(\omega')} + c'\lambda_t^q \left\| u_t^{\frac{n+2}{n-2}} \right\|_{L^q(\omega')} \\ &\leq c\,\|u_t\|_{L^2(M)} + c'\lambda_t^q \underset{\omega'}{Sup}(u_t^{\frac{n+2}{n-2}-1})\,\|u_t\|_{L^q(\omega')} \\ &\leq c''\,\|u_t\|_{L^2(M)}\end{aligned}$$

car on sait maintenant que $\underset{\omega'}{Sup}(u_t^{\frac{n+2}{n-2}-1}) \to 0$ et que, d'autre part, la première étape donne $\|u_t\|_{L^q(\omega')} \leq C\,\|u_t\|_{L^2(M)}$

Troisième étape : Avec ce qui précède :

$$\begin{aligned}\|u_t\|^2_{L^2(M\setminus B(x_0,\delta))} &\leq \underset{M\setminus B(x_0,\delta)}{Sup}\ u_t . \int_{M\setminus B(x_0,\delta)} u_t \\ &\leq c\,\|u_t\|_{L^2(M)}\,\|u_t\|_{L^1(M)} \qquad (3.1)\end{aligned}$$

On veut maintenant montrer que

$$\|u_t\|_{L^1(M)} \leq c\,\|u_t\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}(M)}\ . \qquad (3.2)$$

Si $h > 0$, il suffit pour cela d'intégrer l'équation E_t. Sinon comme $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} > 0$, pour tout $q \in]2, 2^*[$, il existe $\varphi > 0$ solution de $\triangle_{\mathbf{g}}\varphi + h\varphi = \lambda_{h,f,\mathbf{g}}.f.\varphi^{q-1}$. On pose

$$\mathbf{g}' = \varphi^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g} \text{ et } \overline{h_t} = \frac{\triangle_{\mathbf{g}}\varphi + h_t\varphi}{\varphi^{\frac{n+2}{n-2}}}$$

Alors pour t assez proche de 1 :

$$\overline{h_t} = \varphi^{q-2^*} - (h - h_t)\varphi^{2-2^*} \geq \varepsilon_0 > 0$$

Par ailleurs, par invariance conforme et d'après E_t, on a :

$$\triangle_{\mathbf{g}'}\overline{u_t} + \overline{h_t}.\overline{u_t} = \lambda_t f.\overline{u_t}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où $\overline{u_t} = \varphi^{-1}.u_t$. En intégrant, on obtient :

$$\varepsilon_0 \int_M \overline{u_t} dv_{\mathbf{g}'} \leq \lambda_t Sup f \int_M \overline{u_t}^{\frac{n+2}{n-2}} dv_{\mathbf{g}'}$$

et il existe donc $C > 0$ tel que pour t assez proche de 1

$$\|u_t\|_{L^1(M)} \leq C\,\|u_t\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}(M)}$$

où cette fois les normes sont relatives à $dv_{\mathbf{g}}$.

Quatrième étape : On conclut essentiellement avec l'inégalité de Hölder. Si $n = \dim M \geq 6$, on a en effet :

$$\|u_t\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}(M)} \leq \|u_t\|^{\frac{n+2}{n-2}}_{L^2(M)} Vol_{\mathbf{g}}(M)^{\frac{n-6}{2(n-2)}}\ .$$

Avec (3.1) et (3.2), on obtient

$$\lim_{t\to 1}\frac{\|u_t\|^2_{L^2(M\setminus B(x_0,\delta))}}{\|u_t\|^2_{L^2(M)}}=0$$

ce qui prouve le résultat. Si $n=5$, l'inégalité de Hölder nous donne :

$$\|u_t\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}(M)}\leq \|u_t\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(M)}\,\|u_t\|^{\frac{5}{6}}_{L^2(M)}$$

et on conclut de la même manière avec (3.1) et (3.2). Si maintenant $n=4$, on utilise la proposition 4 et le changement d'échelle associé. On a

$$\frac{\|u_t\|^3_{L^3(M)}}{\|u_t\|_{L^2(M)}}\leq \|u_t\|_{L^\infty(M\setminus B(x_0,\delta))}\,\|u_t\|_{L^2(M)}+\frac{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})}\widetilde{u}_t^3dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{(\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})}\widetilde{u}_t^2dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t})^{\frac{1}{2}}}\ .$$

Alors pour tout $R>0$, d'après l'inégalité de Hölder et la proposition 4 on obtient :

$$\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})}\widetilde{u}_t^3dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\leq\int_{B(0,R)}\widetilde{u}_t^3dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}+\varepsilon_R(\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})}\widetilde{u}_t^2dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t})^{\frac{1}{2}}\ .$$

Il s'ensuit pour tout $R,R'>0$,

$$\limsup_{t\to 1}\frac{\|u_t\|^3_{L^3(M)}}{\|u_t\|_{L^2(M)}}\leq\varepsilon_R+\frac{\int_{B(0,R)}\widetilde{u}^3dx}{(\int_{B(0,R')}\widetilde{u}^2dx)^{\frac{1}{2}}}\ .$$

Comme $\widetilde{u}\in L^3(\mathbb{R}^4)$ et $\lim\limits_{R'\to\infty}\int_{B(0,R')}\widetilde{u}^2dx=+\infty$, on a finalement

$$\limsup_{t\to 1}\frac{\|u_t\|^3_{L^3(M)}}{\|u_t\|_{L^2(M)}}=0$$

et on conclut encore une fois avec (3.1) et (3.2).

e/ : Estimées ponctuelles fortes et concentration L^p forte

Proposition 6 :

$\exists C>0$ tel que $\forall x\in M:\ d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^{n-2}\mu_t^{-\frac{n-2}{2}}u_t(x)\leq C$.

Démonstration : Elle nécessite l'utilisation de la fonction de Green, ainsi que les estimées ponctuelles faibles. L'idée est due à O. Druet et à F. Robert [13]. Nous en profitons pour l'exposer avec quelques explications supplémentaires (et avec notre fonction f, ce qui ne change pratiquement rien).

Rappelons les propriétés des fonctions de Green dont nous aurons besoin (voir appendice B).

Si $\triangle_{\mathbf{g}}+h$ est un opérateur coercif, il existe une unique fonction (au moins C^2 dans nos hypothèses)

$$G_h:M\times M\setminus\{(x,x),x\in M\}\to\mathbb{R}$$

symétrique et strictement positive telle que, au sens des distributions, on a : $\forall x\in M$

$$\triangle_{\mathbf{g},y}G_h(x,y)+h(y)G_h(x,y)=\delta_x \tag{3.3}$$

De plus, il existe $c > 0$, $\rho > 0$ tels que $\forall (x, y)$ avec $0 < d_{\mathbf{g}}(x, y) < \rho$:

$$\frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x,y)^{n-2}} \leq G_h(x,y) \leq \frac{c^{-1}}{d_{\mathbf{g}}(x,y)^{n-2}} \tag{3.4}$$

$$\frac{|\nabla_y G_h(x,y)|}{G_h(x,y)} \geq \frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x,y)} \tag{3.5}$$

c et ρ varient continûment avec h

$$G_h(x,y) d_{\mathbf{g}}(x,y)^{n-2} \to \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \text{ quand } d_{\mathbf{g}}(x,y) \to 0 \tag{3.6}$$

Principe de la démonstration de la proposition : pour montrer cette estimée forte il suffit, d'après (3.4), de montrer que $\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq c' G_h(x, x_t)$. On remarque alors que grâce aux estimées faibles, on a déja l'estimée forte dans toute boule $B(x_t, R\mu_t)$ où R est fixé. Il suffit donc de montrer cette estimée dans la variété à bord $M \backslash B(x_t, R\mu_t)$ dont le bord est $b(M \backslash B(x_t, R\mu_t)) = bB(x_t, R\mu_t)$. On applique pour cela le principe du maximum à l'opérateur :

$$L_t \varphi = \triangle_{\mathbf{g}} \varphi + h_t \varphi - \lambda_t f u_t^{2^*-2} \varphi$$

et à $x \longmapsto G_h(x, x_t) - c\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} u_t(x)$. Comme $L_t u_t = 0$ avec $u_t > 0$, L_t vérifie le principe du maximum [5]. Si on montre que

$$\begin{aligned} L_t G_h(x, x_t) &\geq c\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} L_t u_t(x) = 0 \text{ sur } M \backslash B(x_t, R\mu_t) \\ G_h(x, x_t) &\geq c\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} u_t(x) \text{ sur } bB(x_t, R\mu_t) \end{aligned}$$

le principe du maximum nous donnera

$$G_h(x, x_t) \geq c\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} u_t(x) \text{ sur } M \backslash B(x_t, R\mu_t) \ .$$

Pour des raisons techniques, on montre d'abord que pour tout $\nu > 0$ assez petit il existe une constante $C(\nu) > 0$ pour laquelle on a "l'estimée forte intermédiaire"

$$\forall x \in M : \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{n-2-\nu} \mu_t^{-\frac{n-2}{2}+\nu} u_t(x) \leq C(\nu) \tag{3.7}$$

puis on montre ensuite que c'est encore vrai pour $\nu = 0$.

Pour ν assez petit, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que l'opérateur

$$\triangle_{\mathbf{g}} + \frac{h - 2\varepsilon_0}{1 - \nu}$$

soit encore coercif ; soit $\widetilde{G}$ sa fonction de Green. On va appliquer le principe décrit à $\widetilde{G}^{1-\nu}$. Alors on aura (3.7) en prenant $\nu' = (n-2)\nu$. Pour montrer $L_t \widetilde{G}^{1-\nu} \geq 0$ sur $M \backslash B(x_t, R\mu_t)$ on va montrer que

$$\frac{L_t \widetilde{G}^{1-\nu}}{\widetilde{G}^{1-\nu}} \geq 0$$

sur $M \backslash B(x_t, R\mu_t)$. Comme $\widetilde{G}^{1-\nu} > 0$ on aura bien $L_t \widetilde{G}^{1-\nu} \geq 0$.

Un calcul donne en utilisant (3.3) et $\delta_{x_t}(x) = 0$ sur $M\backslash B(x_t, R\mu_t)$ que $\forall x \in M\backslash B(x_t, R\mu_t)$:

$$\frac{L_t\widetilde{G}^{1-\nu}}{\widetilde{G}^{1-\nu}}(x,x_t) = 2\varepsilon_0 + h_t(x) - h(x) - \lambda_t f(x)u_t(x)^{2^*-2} + \nu(1-\nu)\left|\frac{\nabla\widetilde{G}}{\widetilde{G}}\right|^2(x,x_t)$$

Or pour t proche de 1, $h_t - h \geq -\varepsilon_0$ car $h_t \to h$ dans C^0. Donc

$$\frac{L_t\widetilde{G}^{1-\nu}}{\widetilde{G}^{1-\nu}}(x,x_t) \geq \varepsilon_0 - \lambda_t f(x)u_t(x)^{2^*-2} + \nu(1-\nu)\left|\frac{\nabla\widetilde{G}}{\widetilde{G}}\right|^2(x,x_t) \tag{3.8}$$

On sépare maintenant $M\backslash B(x_t, R\mu_t)$ en deux parties avec une boule $B(x_t,\rho)$, où $\rho > 0$ est comme dans (3.4) et (3.5). Pour t assez proche de 1, $\rho > R\mu_t$. $R > 0$ sera fixé plus tard.

1/ : Comme $u_t \to 0$ dans $C^0_{loc}(M\backslash\{x_0\})$, (3.8) donne pour t proche de 1 :

$$\forall x \in M\backslash B(x_t,\rho) : \; L_t\widetilde{G}^{1-\nu}(x,x_t) \geq 0.$$

2/ : D'après les estimées ponctuelles faibles, dans $B(x_t,\rho)\backslash B(x_t, R\mu_t)$:

$$d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^2 u_t(x)^{2^*-2} \leq \varepsilon_R$$

où $\varepsilon_R \underset{R\to\infty}{\to} 0$. Alors avec (3.5) et (3.8), pour R assez grand :

$$\begin{aligned}\frac{L_t\widetilde{G}^{1-\nu}}{\widetilde{G}^{1-\nu}}(x,x_t) &\geq \varepsilon_0 - \lambda_t f(x)u_t(x)^{2^*-2} + \nu(1-\nu)\frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^2}\\ &\geq \varepsilon_0 - \lambda_t(\underset{B(x_t,\rho)}{Sup}\, f).\frac{\varepsilon_R}{d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^2} + \nu(1-\nu)\frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^2}\\ &\geq \varepsilon_0 + \frac{c'}{d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^2} \geq 0\end{aligned}$$

Remarque : Dans 1/, ε_0 sert à compenser $-\lambda_t f {u_t}^{2^*-2}$ dans $M\backslash B(x_t,\rho)$; et dans 2/, $\nu(1-\nu)$ sert à compenser $-\lambda_t f {u_t}^{2^*-2}$ dans $B(x_t,\rho)\backslash B(x_t, R\mu_t)$.

On a donc bien montré que dans $M\backslash B(x_t, R\mu_t)$ et pour toute constante $C_t > 0$ dépendant éventuellement de t :

$$L_t(C_t.\widetilde{G}^{1-\nu}(x,x_t)) = C_t.L_t\widetilde{G}^{1-\nu}(x,x_t) \geq 0 = L_t u_t$$

Enfin sur le bord $b(M\backslash B(x_t, R\mu_t))$, en utilisant (3.4), on obtient :

$$\widetilde{G}^{1-\nu}(x,x_t) \geq \frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^{(n-2)(1-\nu)}} = \frac{c}{(R\mu_t)^{(n-2)(1-\nu)}}\ .$$

Alors si on pose $C_t = c^{-1}R^{(n-2)(1-\nu)}\mu_t^{(n-2)(1-\nu)-\frac{n-2}{2}}$, on a pour $x \in bB(x_t, R\mu_t) = b(M\backslash B(x_t, R\mu_t))$:

$$C_t.\widetilde{G}^{1-\nu}(x,x_t) \geq \mu_t^{-\frac{n-2}{2}} = Sup\, u_t \geq u_t(x)$$

Donc par le principe du maximum

$$C_t.\widetilde{G}^{1-\nu}(x,x_t) \geq u_t(x) \text{ dans } M\backslash B(x_t, R\mu_t)$$

soit

$$\widetilde{G}^{1-\nu}(x,x_t) \geq C_t^{-1} u_t(x) = c\ \mu_t^{\frac{n-2}{2}-(n-2)(1-\nu)} u_t(x)$$

et donc, en utilisant (3.4) :

$$d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^{(n-2)(1-\nu)} \mu_t^{\frac{n-2}{2}-(n-2)(1-\nu)} u_t(x) \leq c$$

ce qui en changeant ν en $(n-2)\nu$ donne bien (3.7) sur M puisque c'est vrai dans $B(x_t, R\mu_t)$ d'après les estimées faibles.

On veut passer maintenant à $\nu = 0$. Soit y_t un point de M où $d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^{n-2} u_t(x_t) u_t(x)$ est maximum. On veut montrer que $d_{\mathbf{g}}(y_t,x_t)^{n-2} u_t(x_t) u_t(y_t)$ est bornée. Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\triangle_{\mathbf{g}} + (h - \varepsilon_0)$ soit coercif et $\widehat{G}$ sa fonction de Green. Pour t assez proche de 1, on a $h_t \geq h - \varepsilon_0$. En utilisant le fait que $\widehat{G} > 0$, $u_t > 0$, $Maxf > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_t(y_t) &= \int_M \widehat{G}(y_t,x)(\triangle_{\mathbf{g}} u_t(x) + (h-\varepsilon_0) u_t(x)) \\
&\leq \int_M \widehat{G}(y_t,x)(\triangle_{\mathbf{g}} u_t(x) + h_t u_t(x)) \\
&= \lambda_t \int_M \widehat{G}(y_t,x) f(x) u_t(x)^{2^*-1} \\
&\leq \lambda_t Maxf \int_M \widehat{G}(y_t,x) u_t(x)^{2^*-1} \\
&\leq C \int_{B(x_t,\delta)} \widehat{G}(y_t,x) u_t(x)^{2^*-1} + C \int_{M\setminus B(x_t,\delta)} \widehat{G}(y_t,x) u_t(x)^{2^*-1}
\end{aligned}$$

L'estimée (3.7) , pour $0 < \nu < \frac{2}{2^*-1}$, nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_{M\setminus B(x_t,\delta)} \widehat{G}(y_t,x) u_t(x)^{2^*-1} &= O(\mu_t^{(\frac{n+2}{2}-\nu)(2^*-1)} \int_{M\setminus B(x_t,\delta)} \widehat{G}(y_t,x) u_t(x)^{2^*-1}) \\
&= O(\mu_t^{\frac{n+2}{2}-\nu(2^*-1)}) \\
&= o(\mu_t^{\frac{n-2}{2}})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Donc

$$u_t(y_t) \leq C \int_{B(x_t,\delta)} \widehat{G}(y_t,x) u_t(x)^{2^*-1} + o(\mu_t^{\frac{n-2}{2}}) \tag{3.10}$$

On distingue alors trois cas :

Premier cas : $y_t \to y_0 \neq x_0$

Soit $\delta > 0$ fixé tel que $d_{\mathbf{g}}(y_0,x_0) \geq 3\delta$. Alors dans $B(x_t,\delta)$, $\widehat{G}(y_t,x)$ est bornée et

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_t,\delta)} \widehat{G}(y_t,x) u_t(x)^{2^*-1} &\leq C \int_{B(x_t,\delta)} u_t(x)^{2^*-1} \\
&\leq C \int_{B(x_t,\mu_t)} u_t(x)^{2^*-1} \\
&+ C\mu_t^{\frac{n+2}{2}-\nu(2^*-1)} \int_{B(x_t,\delta)\setminus B(x_t,\mu_t)} d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^{(2^*-1)(\nu+2-n)} \\
&\leq C\mu_t^{\frac{n-2}{2}}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (3.7) en choisissant $\nu < \frac{2}{2^*-1}$ et les formules du changement d'échelle pour $\int_{B(x_t,\mu_t)} {u_t}^{2^*-1} = \mu_t^{\frac{n-2}{2}} \int_{B(0,1)} .\widetilde{u}_t^{2^*-1} dv_{\widetilde{g}_t} \sim C\mu_t^{\frac{n-2}{2}}$. Comme $d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)$ ne tend pas vers 0 on peut écrire

$$\int_{B(x_t,\delta)} \widehat{G}(y_t, x) u_t(x)^{2^*-1} \leq C\mu_t^{\frac{n-2}{2}} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{2-n}$$

et donc en utilisant (3.10) et puisque $\nu < \frac{2}{2^*-1}$:

$$d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{n-2} u_t(x_t) u_t(y_t) \leq C\,.$$

Deuxième cas : Si, quitte à extraire, on a : $y_t \to x_0$ et $d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t) \leq C\mu_t$.
Alors il est clair que

$$d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{n-2} u_t(x_t) u_t(y_t) \leq C u_t(x_t)^{-1} u_t(y_t) \leq C$$

Troisième cas : Si, quitte à extraire, on a : $y_t \to x_0$ et $r_t = \frac{d_{\mathbf{g}}(y_t,x_t)}{\mu_t} \to \infty$ quand $t \to 1$.

On écrit en utilisant (3.9) et (3.10) que

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{n-2} u_t(x_t) u_t(y_t) \leq \quad & C\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{n-2} \int_{B_t^1} \widehat{G}(y_t, x) u_t(x)^{2^*-1} \\ & + C\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{n-2} \int_{B_t^2} \widehat{G}(y_t, x) u_t(x)^{2^*-1} \\ & + O(\mu_t^{2-\nu(2^*-1)}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

où $B_t^1 = \{x \in B(x_t, \delta) : d_{\mathbf{g}}(y_t, x) \geq \frac{1}{2} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)\}$ et $B_t^2 = B(x_t, \delta) \backslash B_t^1$. On suppose toujours $\nu < \frac{2}{2^*-1}$ et on utilise la propriété (3.4) de la fonction de Green $\widehat{G}$. Alors (3.11) donne

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{n-2} u_t(x_t) u_t(y_t) \leq \quad & C\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} \int_{B_t^1} {u_t}^{2^*-1} + o(1) \\ & + C\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{n-2} \int_{B_t^2} d_{\mathbf{g}}(y_t, x)^{2-n} u_t(x)^{2^*-1} \end{aligned}$$

Comme dans le premier cas, en utilisant (3.7), on obtient :

$$\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} \int_{B_t^1} {u_t}^{2^*-1} \leq C$$

et

$$\begin{aligned} \mu_t^{-\frac{n-2}{2}} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{n-2} \int_{B_t^2} d_{\mathbf{g}}(y_t, x)^{2-n} u_t(x)^{2^*-1} \quad & \leq \frac{1}{r_t^{2-\nu(2^*-1)} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^2} \int_{B_t^2} d_{\mathbf{g}}(y_t, x)^{2-n} \\ & \leq \frac{C}{r_t^{2-\nu(2^*-1)}} = o(1) \end{aligned}$$

dès que $\nu < \frac{2}{2^*-1}$ On déduit donc là encore que $d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{n-2} u_t(x_t) u_t(y_t)$ est borné.

Proposition 7 :
Concentration L^p forte : $\forall R > 0$, $\forall \delta > 0$ et $\forall p > \frac{n}{n-2}$ où $n = \dim M$:

$$\lim_{t\to 1} \frac{\int_{B(x_t,R\mu_t)} u_t^p dv_{\mathbf{g}}}{\int_{B(x_t,\delta)} u_t^p dv_{\mathbf{g}}} = 1 - \varepsilon_R \text{ où } \varepsilon_R \underset{R\to+\infty}{\to} 0$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la proposition précédente dans le changement d'échelle en x_t. Par changement d'échelle

$$\begin{aligned}\int_M u_t^p dv_{\mathbf{g}} &\geq \int_{B(x_t,\mu_t)} u_t^p dv_{\mathbf{g}} = \mu_t^{n-\frac{n-2}{2}p} \int_{B(0,1)} \widetilde{u}_t^p dv_{\widetilde{g}_t} \\ &\geq C\mu_t^{n-\frac{n-2}{2}p}\end{aligned}$$

D'autre part d'après la proposition 6 :

$$\begin{aligned}\int_{M\setminus B(x_t,R\mu_t)} u_t^p dv_{\mathbf{g}} &\leq C\mu_t^{p\frac{n-2}{2}} \int_{M\setminus B(x_t,R\mu_t)} d_{\mathbf{g}}(x_t,x)^{(2-n)p} dv_{\mathbf{g}} \\ &\leq C\mu_t^{n-p\frac{n-2}{2}} R^{n+(2-n)p}\end{aligned}$$

dès que $p > \frac{n}{n-2}$. En quotientant on obtient le corollaire.

3.3 Argument central de la démonstration du théorème 1

Comme exposé au chapitre précédent dans la description de l'idée de la démonstration, on insère dans l'inégalité de Sobolev euclidienne l'équation (E_t) "lue" dans la carte $\exp_{x_t}^{-1}$.

On reprend les notations de 3.2 : $\overline{u}_t, \overline{f}_t, \overline{h}_t, \mathbf{g}_t$ désignent les fonctions et la métrique "lues" dans la carte $\exp_{x_t}^{-1}$, et $\widetilde{u}_t$, $\widetilde{h}_t$, $\widetilde{f}_t, \widetilde{\mathbf{g}}_t$ désignent les fonctions et la métrique "lues" après blow-up de centre x_t et de coefficient $k_t = \mu_t^{-1}$; et on se place sur un voisinage de x_0 où $f \geq 0$. On considère de plus une fonction cut-off η sur $\mathbb{R}^n$ égale à 1 sur la boule euclidienne $B(0,\delta/2)$, égale à 0 sur $\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta)$, $0 \leq \eta \leq 1$ avec $|\nabla\eta| \leq C.\delta^{-1}$ où δ est assez petit pour que, sur les boules $B(x_t,\delta)$, $f \geq 0$. L'identité de Sobolev euclidienne donne d'une part

$$(\int_{B(0,\delta)} (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}} \leq K(n,2)^2 \int_{B(0,\delta)} |\nabla(\eta\overline{u}_t)|_e^2 dx \tag{3.12}$$

où $|.|_e$ est la métrique euclidienne de mesure associée dx.

Par ailleurs, une intégration par parties donne en notant que $|\nabla\eta| = \Delta\eta = 0$ sur $B(0,\delta/2)$:

$$\int_{B(0,\delta)} |\nabla(\eta\overline{u}_t)|_e^2 dx \leq \int_{B(0,\delta)} \eta^2\overline{u}_t \triangle_e \overline{u}_t dx + C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx$$

En notant $\mathbf{g}_t^{ij}$ les composantes de $\mathbf{g}_t$ et $\Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k$ les symboles de Chrisoffel associés, on écrit :

$$\triangle_e\overline{u}_t = \triangle_{\mathbf{g}_t}\overline{u}_t + (\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij})\partial_{ij}\overline{u}_t - \mathbf{g}_t^{ij}\Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k\partial_k\overline{u}_t$$

On obtient alors à partir de cette dernière inégalité (point (2.6) de l'idée décrite à la fin du chapitre 2), en utilisant cette expression du laplacien comparant $\triangle_e$ et $\triangle_{\mathbf{g}_t}$, en utilisant l'équation E_t : $\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$ "lue" dans la carte $\exp_{x_t}^{-1}$, et en utilisant le fait que $|\nabla\eta| = \Delta\eta = 0$ sur $B(0,\delta/2)$ et en faisant quelques intégrations par parties :

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\delta)} |\nabla(\eta\overline{u}_t)|_e^2\, dx \leq \quad & \lambda_t \int_{B(0,\delta)} \eta^2 \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*}\, dx - \int_{B(0,\delta)} \eta^2 \overline{h}_t \overline{u}_t^2 dx \\ & + C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx \\ & - \int_{B(0,\delta)} \eta^2 (\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij}) \partial_i \overline{u}_t \partial_j \overline{u}_t dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{B(0,\delta)} (\partial_k (\mathbf{g}_t^{ij} \Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k + \partial_{ij} \mathbf{g}_t^{ij})(\eta \overline{u}_t^2) dx\,.\end{aligned}$$

On en déduit grâce à l'inégalité de Sobolev (3.12) et en utilisant le fait que $\lambda_t \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$:

$$\int_{B(0,\delta)} \overline{h}_t (\eta\overline{u}_t)^2 dx \leq A_t + B_t + C_t + C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx \tag{3.13}$$

avec :

$B_t = \frac{1}{2} \int_{B(0,\delta)} (\partial_k (\mathbf{g}_t^{ij} \Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k + \partial_{ij} \mathbf{g}_t^{ij})(\eta \overline{u}_t^2) dx$

$C_t = \left| \int_{B(0,\delta)} \eta^2 (\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij}) \partial_i \overline{u}_t \partial_j \overline{u}_t dx \right|$

$A_t = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \eta^2 \overline{u}_t^{2^*} dx - \frac{1}{K(n,2)^2} (\int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}}$

Ces calculs sont détaillés dans l'article de Z. Djadli et O. Druet [9] sur lequel nous nous appuyons. Le but va être d'utiliser la "concentration L^2" étudiée en 3.2.d/, pour obtenir une contradiction ; nous diviserons ainsi (3.13) par $\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx$ et ferons tendre $t \to t_0 = 1$.

La concentration L^2 nous donne déjà :

$$\frac{C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} \underset{t\to 1}{\to} 0\,.$$

Z.Djadli et O.Druet [9] ont montré (voir l'appendice C) que :

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{C_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} \leq \varepsilon_\delta \text{ où } \varepsilon_\delta \to 0 \text{ quand } \delta \to 0\,.$$

De plus, comme $x_t \to x_0$ on a $\lim_{t\to 1} (\partial_k (\mathbf{g}_t^{ij} \Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k + \partial_{ij} \mathbf{g}_t^{ij})(0) = \frac{1}{3} S_{\mathbf{g}}(x_0)$, d'où, d'après la concentration L^2 :

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{B_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} = \frac{1}{6} S_{\mathbf{g}}(x_0) + \varepsilon_\delta\,.$$

C'est l'expression A_t qui va nous donner les termes $\frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{1}{6} S_{\mathbf{g}}(x_0)$ et $\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$.

L'inégalité de Hölder nous donne :

$$\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \eta^2 \overline{u}_t^{2^*} dx \leq (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dx)^{\frac{2}{n}} (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}}$$

D'autre part :

$$dx \leq (1 + \frac{1}{6} Ric(x_t)_{ij} x^i x^j + C\,|x|^3) dv_{\mathbf{g}_t}$$

Un développement limité nous permet alors d'écrire :

$$(\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dx)^{\frac{2}{n}} \leq (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{2}{n}} + \frac{1}{(\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{n-2}{n}}} \frac{2}{n} \{S_t\} + C\{S_t\}^2$$

où

$$\{S_t\} = \frac{1}{6} Ric(x_t)_{ij} \int_{B(0,\delta)} x^i x^j \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} + C \int_{B(0,\delta)} |x|^3 \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \ .$$

On en déduit

$$A_t \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} (A_t^1 + A_t^2)$$

où

$$A_t^1 = (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{2}{n}} (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} - (Sup f. \int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}}$$

et

$$A_t^2 = \frac{2(\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}}}{n(\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{n-2}{n}}} \{\frac{1}{6} Ric(x_t)_{ij} \int_{B(0,\delta)} x^i x^j \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} + C \int_{B(0,\delta)} |x|^3 \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}\} (1 + \varepsilon_\delta)$$

car $\{S_t\} \to 0$ quand $\delta \to 0$ uniformément en t. Ainsi l'expression A_t^2 va donner, par développement limité à l'ordre 2 de la métrique, le terme en $S_{\mathbf{g}}(x_0)$ et l'expression A_t^1 donnera, par développement limité à l'ordre 2 de f, le terme en $-\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$.

Lemme : *Comme* $dx = (1 + \frac{1}{6} Ric(x_t)_{ij} x^i x^j + O(|x|^3)) dv_{\mathbf{g}_t}$ *et puisque* exp : $M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une application de classe* C^∞*, on a pour toute fonction* $\alpha \in H_1^2(B(x_0, 2\delta))$:

$$\lim_{t \to 1} \frac{\int_{B(x_t,\delta)} \alpha dx}{\int_{B(x_t,\delta)} \alpha dv_{\mathbf{g}_t}} = 1 + O(\delta^2) = 1 + \varepsilon_\delta$$

Etudions d'abord l'expression A_t^2 :

1/ : On a $\lim_{t \to 1} \frac{(\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}}}{(\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{n-2}{n}}} = 1 + \varepsilon_\delta$

2/ : D'après les estimées ponctuelles faibles, $|x|^2 \overline{u}_t^{2^*} \leq c \overline{u}_t^2$, on en déduit :

$$\frac{\int_{B(0,\delta)} |x|^3 \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq C.\varepsilon_\delta \ .$$

3/ : D'après les formules de changement d'échelle on écrit : pour tout $R > 0$:

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\delta)} x^i x^j \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} &= \int_{B(0,R\mu_t)} x^i x^j \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} + \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^i x^j \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \\ &= \mu_t^2 \int_{B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} + \mu_t^2 \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\end{aligned}$$

et

$$\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t} = \mu_t^2 \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \ .$$

En utilisant les estimées ponctuelles faibles, on obtient :

$$\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \leq \varepsilon_R . \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}$$

donc :

$$\frac{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} \leq \varepsilon_R$$

où $\varepsilon_R \to 0$ quand $R \to +\infty$. Maintenant, si $i \neq j$:

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{|\int_{B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}|}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} \leq \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{|\int_{B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}|}{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} = 0$$

car

$$\widetilde{u}_t \to \widetilde{u} = (1 + \frac{f(x_0)^{\frac{2}{n}}}{K(n,2)^2 n(n-2)} |x|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \ \ dans \ \ C^0(B(0,R))$$

et $\widetilde{u}$ est radiale (voir le paragraphe changement d'échelle).

Si $i = j$:

$$\frac{\int_{B(0,R)} x^i x^i \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} = \frac{\int_{B(0,R)} (x^i)^2 \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} . \frac{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}$$

Or dès que $n > 4$, en utilisant la convergence L^2 forte (proposition 7), on obtient :

$$\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} = 1$$

donc

$$\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{\int_{B(0,R)} x^i x^i \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} = f(x_0) \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (x^i)^2 . \widetilde{u}^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}^2 dx} = f(x_0)^{\frac{n-2}{n}} K(n,2)^2 \frac{n-4}{4(n-1)}$$

d'où

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{1}{f(x_0)^{\frac{n-2}{n}} K(n,2)^2} \frac{A_t^2}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} = \frac{n-4}{12(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) + \varepsilon_\delta$$

ce qui avec $\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{B_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} = \frac{1}{6} S_{\mathbf{g}}(x_0) + \varepsilon_\delta$ donne

$$\overline{\lim_{t\to 1}} (\frac{1}{f(x_0)^{\frac{n-2}{n}} K(n,2)^2} \frac{A_t^2}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} + \frac{B_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx}) = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) + \varepsilon_\delta$$

Si $n = 4$ on écrit :

$$\lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{\int_{B(0,R)} x^i x^i \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} \leq f(x_0)^{\frac{n-2}{n}} K(n,2)^2 \frac{n-4}{4(n-1)}$$

et on conclut en distinguant deux cas, $S_{\mathbf{g}}(x_0) < 0$ ou $S_{\mathbf{g}}(x_0) \geq 0$, la démonstration est alors terminée car $\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$ n'apparaît pas (voir l'argument à la fin de la démonstration).

Passons à l'étude de l'expression A_t^1. C'est là qu'apparaît la principale difficulté due à la présence d'une fonction f non constante au second membre.

L'idée est la suivante : nous voudrions reprendre la méthode utilisée ci-dessus pour l'expression A_t^2, où nous avons utilisé un développement limité de la métrique pour obtenir le terme $S_{\mathbf{g}}(x_0)$, en faisant un développement limité de f pour en faire apparaître les dérivées secondes et ainsi obtenir $\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$. Mais la difficulté qui apparaît alors vient du fait que toutes les estimées obtenues dans l'étude du phénomène de concentration sont centrées en x_t. Si l'on développe f en x_t, ce sont les dérivées premières $\partial_i f(x_t)$ qui interviennent et le changement d'échelle nous donnera alors

$$\int_{B(0,\delta)} \partial_i f(x_t) x^i \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} = \mu_t \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \partial_i f(x_t) x^i \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}$$

que l'on doit diviser par

$$\mu_t^2 \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \ .$$

Il est alors nécessaire de contrôler le rapport $\frac{\partial_i f(x_t)}{\mu_t}$, ce qui semble difficile. Si l'on choisit plutôt de développer f au point de maximum x_0, les dérivées premières $\partial_i f(x_0)$ s'annulent, mais il faut alors "transposer" les estimées faites en x_t au point x_0 ce qui impose cette fois l'obtention d'une inégalité de la forme :

$$\frac{d_g(x_t, x_0)}{\mu_t} \leq C \ .$$

Cette inégalité a été étudiée par les auteurs déjà cités, elle est difficile à obtenir, et elle nécessite certaines hypothèses supplémentaires. Elle est baptisée par Zoé Faget "seconde inégalité fondamentale" (la première étant l'estimée ponctuelle faible). Ainsi, dans l'article de O. Druet et F. Robert [13], où $f = cste$, il faut faire des hypothèses sur la "forme" des h_t et sur la géométrie de la variété au point de concentration éventuel pour obtenir le résultat. C'est l'hypothèse disant que les maxima de f sont localement stricts (hessien non dégénéré) qui nous permettra d'obtenir cette inégalité ; intuitivement cette hypothèse "fixe" la position du point de concentration x_0. En fait, la méthode que nous développerons donnera directement le résultat cherché sur $\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$, et donnera cette estimée *a posteriori* ; mais nous aurions pu faire l'inverse.

Notons $x_0(t) = \exp_{x_t}^{-1}(x_0) = (x_0^1(t), ..., x_0^n(t))$, ce qui a un sens dès que t est assez proche de 1 pour un rayon δ fixé. Alors $x_0(t) \to 0$ quand $t \to 1$. Le point $x_0(t)$ est un maximum localement strict de $\overline{f}_t$. Nous ferons tendre δ vers 0 à la fin du raisonnement après avoir pris les limites en t.

Le développement limité de $\overline{f}_t$ en $x_0(t)$ donne :

$$\overline{f}_t(x) \leq f(x_0) + \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t)).(x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t)) + c\,|x - x_0(t)|^3 := f(x_0) + T_t$$

(T_t comme Taylor) où $(\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0))$ est une matrice définie négative (on notera < 0). On notera toujours c, C des constantes indépendantes de t et δ. Rappelons que

$$A_t^1 = (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{2}{n}} (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} - (Supf. \int_{B(0,\delta)} (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} \ .$$

En introduisant le développement limité de $\overline{f}_t$ en $x_0(t)$ on obtient :

$$(\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} \leq (\int_{B(0,\delta)} f(x_0)(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} + \frac{\frac{n-2}{n}}{(\int_{B(0,\delta)} f(x_0)(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{2}{n}}} \{F_t\} + C.\{F_t\}^2$$

où

$$\{F_t\} = \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t)) \int_{B(0,\delta)} (x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx + C \int_{B(0,\delta)} |x - x_0(t)|^3 (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx$$

d'où en rappelant que $\underset{M}{Sup} f = f(x_0)$ et $\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \leq 1$:

$$A_t^1 \leq \frac{n-2}{n} \frac{(\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{2}{n}}}{(\int_{B(0,\delta)} f(x_0)(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{2}{n}}} \{F_t\}(1 + \varepsilon_{\delta,t}) \tag{3.14}$$

car $C\,|F_t| = \varepsilon_{\delta,t} \to 0$ quand $\delta \to 0$ et $t \to 1$. Par ailleurs, on peut écrire

$$\{F_t\} = \int_{B(0,\delta)} T_t.(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx = \int_{B(0,\delta)} T_t.(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \frac{\int_{B(0,\delta)} T_t.(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx}{\int_{B(0,\delta)} T_t.(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}} \ .$$

En faisant de même pour le premier quotient de (3.14), en utilisant le lemme plus haut, la continuité de f en x_0, et en notant $\varepsilon_\delta = \overline{\lim_{t\to 1}} \varepsilon_{\delta,t}$ on obtient :

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq$$

$$\frac{n-2}{n}(1+\varepsilon_\delta)\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0) \int_{B(0,\delta)} (x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} + C \int_{B(0,\delta)} |x - x_0(t)|^3 (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}}$$

où l'on écrit $\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)$ pour $\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t))$. Considérons le développement

$$\overline{f}_t(x) \leq f(x_0) + \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t)).(x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t)) + c\,|x - x_0(t)|^3$$

A priori c dépend de t, mais par la régularité de $\exp_{x_t}^{-1} \circ \exp_{x_0}$ par rapport à toutes les variables, on peut supposer que c est indépendant de t. De plus :

$$\begin{aligned} c\,|x - x_0(t)|^3 \quad &\leq c'\,|x - x_0(t)| \sum_k (x^k - x_0^k(t))^2 \\ &\leq 2\delta c' \sum_k (x^k - x_0^k(t))^2 \end{aligned}$$

où l'on rapelle que δ est le rayon de la boule sur laquelle on intègre. On peut alors écrire :

$$\overline{f}_t(x) \leq f(x_0) + (\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t)) + \delta C_{kl})(x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))$$

où $C_{kl} = c\delta_{kl} = c$ si $k = l$ et $C_{kl} = 0$ si $k \neq l$ (δ_{kl} est ici le symbole de Krönecker) est indépendant de t.

Introduisons une notation de plus :

$$D_{kl}(t,\delta) = \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t)) + \delta C_{kl} \ .$$

Alors :

1/ : $\lim_{\delta\to 0}\lim_{t\to 1} D_{kl}(t,\delta) = \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_1(x_0(1))$ où $\overline{f}_1 = f \circ \exp_{x_0}^{-1}$ et $x_0(1) = 0 = \exp_{x_0}^{-1}(x_0)$.

2/ : pour tout δ assez petit et pour t proche de 1 $D_{kl}(t,\delta)$ est encore (définie) négative.

$D_{kl}(t,\delta)$ est le hessien de f en $x_0(t)$ perturbé sur sa diagonale par les termes d'ordre 3. C'est pour obtenir le point 2/ que nous avons besoin de l'hypothèse de non-dégénérescence du hessien de f en ses points de maximum. Ainsi

$$\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)\int_{B(0,\delta)}(x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}_t} + C\int_{B(0,\delta)}|x - x_0(t)|^3\,(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}_t} \leq$$

$$D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}(x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}_t} \ .$$

Si

$$\{F_t'\} = D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}(x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}_t}$$

$\{F_t'\}$ est analogue à $\{F_t\}$ mais c'est la mesure $dv_{\mathbf{g}_t}$ qui intervient au lieu de dx et on utilise $D_{kl}(t,\delta)$. Alors

$$\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)} v_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq \frac{n-2}{n}\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}(x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}}(1+\varepsilon_\delta)$$

Dans le développement de $D_{kl}(t,\delta)(x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))$, ce qui nous intéresse, c'est le premier terme, i.e $D_{kl}(t,\delta)x^k x^l$ (voir l'obtention de $S_g(x_0)$ dans A_t^2), et l'on espère que les autres vont être négligeables. Le principe va être de réarranger $\{F_t'\}$ et d'utiliser le fait que $D_{kl}(t,\delta)$ est une forme bilinéaire négative :

$$\begin{aligned}\{F_t'\} = \quad & D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)} x^k x^l(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}_t} + D_{kl}(t,\delta)x_0^k(t)x_0^l(t)\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}_t} \\ & -D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}(x^k x_0^l(t) + x^l x_0^k(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}_t} \ .\end{aligned}$$

On refactorise les deux derniers termes (en enlevant quelques δ et t et en sous-entendant $dv_{\mathbf{g}_t}$ pour éclaircir) :

$$D_{kl}.x_0^k x_0^l\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}_t} - D_{kl}\int_{B(0,\delta)}(x^k x_0^l + x^l x_0^k)(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}_t} =$$

$$D_{kl}[x_0^k x_0^l\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*} - x_0^l\int_{B(0,\delta)}x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*} - x_0^k\int_{B(0,\delta)}x^l(\eta\overline{u}_t)^{2^*}] =$$

$$D_{kl}[x_0^k(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}.x_0^l(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}$$

$$-x_0^l(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}\frac{\int_{B(0,\delta)}x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*}}{(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}}-x_0^k(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}\frac{\int_{B(0,\delta)}x^l(\eta\overline{u}_t)^{2^*}}{(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}}] \ .$$

Ainsi, en notant (désolé) :

$$\varepsilon^k(t)=\int_{B(0,\delta)}x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}$$

$$z_t=(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{1}{2}}$$

l'expression ci-dessus devient :

$$D_{kl}.x_0^kx_0^l\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}-D_{kl}\int_{B(0,\delta)}(x^kx_0^l+x^lx_0^k)(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}=$$

$$=D_{kl}[x_0^k(t).z_t.x_0^l(t).z_t-x_0^l(t).z_t.\frac{\varepsilon^k(t)}{z_t}-x_0^k(t).z_t.\frac{\varepsilon^l(t)}{z_t}]$$

$$=D_{kl}[(x_0^k(t).z_t-\frac{\varepsilon^k(t)}{z_t})(x_0^l(t).z_t-\frac{\varepsilon^l(t)}{z_t})-\frac{\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)}{z_t^2}]$$

Par cette méthode de refactorisation du Hessien, on a ainsi obtenu :

$$\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)\int_{B(0,\delta)}(x^k-x_0^k(t))(x^l-x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}+C\int_{B(0,\delta)}|x-x_0(t)|^3(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}\leq$$

$$D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}x^kx^l(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}+D_{kl}(t,\delta)(x_0^k(t).z_t-\frac{\varepsilon^k(t)}{z_t})(x_0^l(t).z_t-\frac{\varepsilon^l(t)}{z_t})-D_{kl}(t,\delta)\frac{\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)}{z_t^2}$$

$$\leq D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}x^kx^l(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}-D_{kl}(t,\delta)\frac{\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)}{z_t^2}$$

car, et c'est là le point fondamental :

$$D_{kl}(t,\delta)\omega^k\omega^l\leq 0\ \ \forall\omega=(\omega^1,...,\omega^n)$$

ce qui permet de supprimer de l'inégalité le terme

$$D_{kl}(t,\delta)(x_0^k(t).z_t-\frac{\varepsilon^k(t)}{z_t})(x_0^l(t).z_t-\frac{\varepsilon^l(t)}{z_t})$$

C'est ce terme en fait qui donne l'estimée $\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t,x_0)}{\mu_t}\leq C$ (voir la partie suivante).

On a donc obtenu :

$$\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t}}\leq\frac{n-2}{n}\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}x^kx^l(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}-D_{kl}(t,\delta)\frac{\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)}{z_t^2}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t}}(1+\varepsilon_\delta)$$

Maintenant, comme pour A_t^2, on écrit :

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} &= f(x_0)^{\frac{-2}{n}} K(n,2)^2 \frac{n-4}{4(n-1)} \text{ si } k=l \\ &= 0 \text{ si } k\neq l\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{K(n,2)^2 f(x_0)^{\frac{n-2}{n}}}\frac{n-2}{n}\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} =$$

$$= \frac{1}{f(x_0)}\frac{(n-2)(n-4)}{4(n-1)}\sum_l (\frac{1}{2}\partial_{ll}\overline{f}_1(0) + c_{ll}\delta)$$

$$= -\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)} + \varepsilon_\delta$$

car $\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0) = -\sum_l \partial_{ll}\overline{f}_1(0)$ dans la carte exponentielle en x_0.

Enfin, montrons que le terme résiduel est négligeable.

$$\left|\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)\right| \leq \frac{1}{2}(\varepsilon^k(t)^2 + \varepsilon^l(t)^2)$$

or

$$\varepsilon^k(t)^2 = (\int_{B(0,\delta)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2$$

$$= (\int_{B(0,R\mu_t)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} + \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2$$

$$\leq 2(\int_{B(0,R\mu_t)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2 + 2(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2$$

Les formules du changement d'échelle nous donnent pour R fixé :

$$\frac{(\int_{B(0,R\mu_t)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq \frac{(\mu_t \int_{B(0,R)} x^k \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t})^2}{\mu_t^2 \int_{B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}.} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \frac{(\int_{B(0,R)} x^k \widetilde{u}^{2^*} dx)^2}{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}^2 dx} = 0$$

car $\widetilde{u}$ est radiale.

Enfin avec les estimées ponctuelles : $d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq \varepsilon$ si $d_{\mathbf{g}}(x,x_t) \geq R\mu_t$, et d'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2 &\leq \varepsilon_R^2 (\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^{2\frac{n-1}{n-2}} dv_{\mathbf{g}_t})^2 \\ &\leq \varepsilon_R^2 (\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t})(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}_t})\end{aligned}$$

donc

$$\frac{(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq \varepsilon_R^2 (\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}_t}) \leq c\varepsilon_R^2$$

où $\varepsilon_R \to 0$ quand $R \to \infty$. En remarquant que puisque x_0 est un point de concentration :

$$z_t^2 = \int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \geq \int_{B(x_0,\delta/4)} u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} \geq c > 0$$

on obtient finalement

$$\frac{\left|\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)\right|}{z_t^2 \int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \underset{t\to 1}{\to} 0$$

La conclusion de tout cela est que si on divise par $\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}$ la relation obtenue à partir de l'inégalité de Sobolev :

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\delta)} \overline{h}_t (\eta \overline{u}_t)^2 dx \leq \quad & \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \eta^2 \overline{u}_t^{2^*} dx \\ & - \frac{1}{K(n,2)^2} \left(\int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ & + C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx + B_t + C_t\end{aligned}$$

et que l'on fait tendre t vers 1, on obtient :

$$h(x_0) + \varepsilon_\delta \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)} + \varepsilon_\delta \ .$$

On fait alors tendre δ vers 0 :

$$h(x_0) \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)} \ .$$

Or on a supposé au contraire que :

$$h(x_0) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$$

si x_0 était un point de maximum de f. Donc il ne peut y avoir phénomène de concentration, et donc la limite u des u_t est strictement positive et c'est une fonction extrémale. La fonction faiblement critique h possède une solution minimisante, elle est donc critique.

Fin de la démonstration.

3.4 Phénomènes de concentration et seconde inégalité fondamentale.

Nous revenons ici sur l'inégalité

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \leq C$$

en nous plaçant dans le cadre de l'étude générale d'une suite présentant un phénomène de concentration, dans le but de montrer cette estimée. Les données sont les suivantes :

On considère sur une variété riemannienne compacte $(M, \mathbf{g})$ de dimension $n \geq 5$ une suite (u_t) de solutions $C^{2,\alpha}$ de l'équation

$$\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t u_t = \lambda_t f u_t^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ avec } \int_M f u_t^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} = 1$$

avec f une fonction dont le maximum est strictement positif, et dont le Hessien est non dégénéré aux points de maximum. On suppose de plus que

$$h_t \to h \ \ dans \ \ C^{0,\alpha}$$

où h est telle que $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif. La suite (u_t) est bornée dans H_1^2, donc (à extraction près) $u_t \rightharpoonup u$ faiblement dans H_1^2, et on suppose que $u \equiv 0$, donc que la suite développe un phénomène de concentration. Nous faisons une hypothèse dite "d'énergie minimale" :

$$\lambda_t \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Alors, si l'on reprend ce que nous avons fait en 3.2/, nous avons (quitte à extraire des sous-suites) :

a/ : Il existe un unique point de concentration x_0 et c'est un point où f est maximum sur M.

$$\forall \delta > 0 \ : \ \limsup_{t \to 1} \int_{B(x_0,\delta)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$$

b/ : $u_t \to 0$ dans $C^0_{loc}(M - \{x_0\})$

c/ : Estimées ponctuelles faibles :

Reprenons les notations du changement d'échelle : on considère une suite de points (x_t) tels que

$$m_t = \underset{M}{Max}\, u_t = u_t(x_t) := \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Alors d'après ce qui précède $x_t \to x_0$ et $\mu_t \to 0$. Rappelons que $\overline{u}_t, \overline{f}_t, \overline{h}_t, \mathbf{g}_t$ désignent les fonctions et la métrique "lues" dans la carte $\exp_{x_t}^{-1}$, et $\widetilde{u}_t$, $\widetilde{h}_t$, $\widetilde{f}_t, \widetilde{\mathbf{g}}_t$ désignent les fonctions et la métrique "lues" après blow-up.

$$\widetilde{u}_t \to \widetilde{u} = (1 + \frac{f(x_0)^{\frac{2}{n}}}{K(n,2)^2} \frac{|x|^2}{n(n-2)})^{-\frac{n-2}{2}} \text{ dans } C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

$$\forall R > 0 \text{ on a :} \lim_{t \to 1} \int_{B(x_t, R\mu_t)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1 - \varepsilon_R \text{ où } \varepsilon_R \underset{R \to +\infty}{\to} 0$$

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall x \in M : \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq C.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 \text{ tel que } \forall t, \forall x \in M : \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t) \geq R\mu_t \ \Rightarrow \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq \varepsilon.$$

d/ : Concentration L^2

$$\forall \delta > 0 \ : \ \lim_{t \to 1} \frac{\int_{B(x_0,\delta)} u_t^2 dv_{\mathbf{g}}}{\int_M u_t^2 dv_{\mathbf{g}}} = 1$$

e/ : Estimées ponctuelles fortes et concentration L^p forte

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall x \in M : \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{n-2} \mu_t^{-\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq C.$$

$\forall R > 0$, $\forall \delta > 0$ et $\forall p > \frac{n}{n-2}$ où $n = \dim M$ on a :

$$\lim_{t \to 1} \frac{\int_{B(x_t, R\mu_t)} u_t^p dv_{\mathbf{g}}}{\int_{B(x_t,\delta)} u_t^p dv_{\mathbf{g}}} = 1 - \varepsilon_R \text{ où } \varepsilon_R \underset{R \to +\infty}{\to} 0$$

Signalons que l'on obtient comme conséquence relativement rapide des estimées fortes la convergence suivante :

$$\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} u_t(x) = u_t(x_t) u_t(x) \to (\frac{4}{\omega_n^{\frac{2}{n}}}) \frac{(n-2)}{\underset{M}{Sup} f} \omega_{n-1} G_h(x_0, x) \text{ dans } C^2_{loc}(M \backslash \{x_0\})$$

où $G_h(x_0, x)$ est la valeur de la fonction de Green en (x_0, x). La démonstration reprend le schéma de la deuxième partie de celle des estimées fortes ; la présence de f ne changeant strictement rien, nous renvoyons à l'article de O. Druet et F. Robert. Nous ne nous servirons de cette relation qu'au chapitre 7.

Seconde inégalité fondamentale :

Le point nouveau obtenu par la présence d'une fonction f non constante et vérifiant $(\mathbf{H}_f)$ au second membre de nos équations est alors exprimé par le résultat suivant, qui lie la vitesse de convergence du point de sup x_t vers le point de concentration x_0 à la valeur du maximum des u_t representée par μ_t :

Théorème 9 :
Il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall t$:

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \leq C$$

En effet, en reprenant les calculs de la démonstration précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} h(x_0) \quad \leq \quad & \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)} + \varepsilon_\delta \\ & + \overline{\lim_{t \to 1}} \frac{n-2}{n} \frac{D_{kl}(t,\delta)(x_0^k(t).z_t - \frac{\varepsilon^k(t)}{z_t})(x_0^l(t).z_t - \frac{\varepsilon^l(t)}{z_t})}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \end{aligned} \tag{3.15}$$

où $D_{kl}(t, \delta)$ est définie négative pour t voisin de 1 et pour tout δ assez petit et où l'on rappelle que $x_0(t) = \exp_{x_t}^{-1}(x_0) = (x_0^1(t), ..., x_0^n(t))$. Il existe donc $\lambda > 0$ tel que $\forall \omega \in \mathbb{R}^n$:

$$D_{kl}(t, \delta) \omega^k \omega^l \leq -\lambda \sum_k \left|\omega^k\right|^2$$

et donc

$$D_{kl}(t,\delta)\frac{(x_0^k(t).z_t-\frac{\varepsilon^k(t)}{z_t})(x_0^l(t).z_t-\frac{\varepsilon^l(t)}{z_t})}{(\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac12}(\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac12}}\leq$$

$$-\lambda\sum_k\left|\frac{x_0^k(t).z_t}{(\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac12}}-\frac{\varepsilon^k(t)}{z_t(\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac12}}\right|^2.$$

Or on a vu que :

$$\frac{\varepsilon^k(t)^2}{z_t^2\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t}}\underset{t\to1}{\to}0$$

et d'autre part $z_t=(\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac12}$, donc puisque x_0 est un point de concentration :

$$0<c\leq\liminf\ z_t\leq\limsup\ z_t\leq c'<+\infty.$$

Donc nécessairement, à cause de (3.15), pour tout k, il existe une constante $C>0$ telle que pour $t\to1$:

$$\frac{x_0^k(t)}{(\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac12}}\leq C$$

Maintenant

$$\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t}=\mu_t^2\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})}\widetilde{u}_t^2dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}.$$

mais les estimées ponctuelles fortes nous donnent que

$$\overline{\lim_{t\to1}}\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})}\widetilde{u}_t^2dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}<+\infty$$

(elles donnent en fait $\widetilde{u}_t\leq C.\widetilde{u}$ sur $B(0,\delta\mu_t^{-1})$) donc

$$\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t}\sim C\mu_t^2$$

d'où

$$\forall k:\ \frac{x_0^k(t)}{\mu_t}\leq C'$$

et donc

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t,x_0)}{\mu_t}\leq C$$

CQFD.

Remarque 1 : Indépendamment, s'il y a concentration, nécessairement :

$$h(x_0)\leq\frac{n-2}{4(n-1)}S_{\mathbf{g}}(x_0)-\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(x_0)}{f(x_0)}$$

Remarque 2 : Si on sait de plus qu'aux points de maximum de f :

$$h(P)=\frac{n-2}{4(n-1)}S_{\mathbf{g}}(P)-\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(P)}{f(P)}$$

alors on voit d'après ce qui précède que plus précisément :

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \to 0$$

Remarque 3 : Intuitivement, les estimées ponctuelles en x_t donnent la "forme" des u_t, le théorème 9 donne la position de leur maximum. Plus précisément, il permet de remplacer dans les estimées fortes ou faibles et dans la concentration L^p forte x_t par x_0.

Remarque 4 : La méthode que nous avons développée pour obtenir cette seconde inégalité fondamentale semble pouvoir s'appliquer à d'autres problèmes similaires. Voir par exemple l'article de Zoé Faget [15].

3.5 Remarque : Illustration de l'utilisation de la seconde inégalité fondamentale

Pour montrer l'importance de l'estimée

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \leq C$$

nous voulons ici indiquer rapidement comment, si l'on suppose qu'on a pu l'obtenir indépendament, cette estimée permet de conclure la démonstration du théorème central de ce chapitre. Il ne s'agit donc pas d'une nouvelle démonstration, mais d'une illustration de l'importance de cette estimée.

On commence de la même manière, et on arrive à l'étude de l'expression A_t^1 :

$$A_t^1 = (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{2}{n}} (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} - (Supf. \int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} .$$

En introduisant le développement limité de f on obtient

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq$$
$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{n-2}{n} \frac{\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0) \int_{B(0,\delta)} (x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} + C\int_{B(0,\delta)} |x - x_0(t)|^3 (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} (1 + \varepsilon_\delta)$$

où l'on écrit $\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)$ pour $\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t))$. En développant

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0) \textstyle\int_{B(0,\delta)} (x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} = \\
&\tfrac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0) \textstyle\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \\
&+\tfrac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0) x_0^k(t) x_0^l(t) \textstyle\int_{B(0,\delta)} (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \\
&+\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0) x_0^l(t) \textstyle\int_{B(0,\delta)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0) \int_{B(0,\delta)} (x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \quad \leq \quad & \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0) \int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \\
& + \partial_{kl}\overline{f}_t(x_0) x_0^l(t) \int_{B(0,\delta)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}
\end{aligned}$$

car

$$\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)x_0^k(t)x_0^l(t) \leq 0$$

puisque x_0 est un point de maximum de f. Quand au reste :

$$\int_{B(0,\delta)} |x - x_0(t)|^3 (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \leq C \sum_{p+q=3} |x_0(t)|^q \int_{B(0,\delta)} |x|^p (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \ .$$

On a déja vu que

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} &= f(x_0)^{\frac{-2}{n}} K(n,2)^2 \frac{n-4}{4(n-1)} \text{ si } k = l \\ &= 0 \text{ si } k \neq l \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{K(n,2)^2 f(x_0)^{\frac{n-2}{n}}} \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{n-2}{n} \frac{\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0) \int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} =$$

$$= \frac{1}{f(x_0)} \frac{(n-2)(n-4)}{4(n-1)} \sum_l (\frac{1}{2}\partial_{ll}\overline{f}_1(0) + c_{ll}\delta)$$

$$= -\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)} + \varepsilon_\delta$$

Par changement d'échelle, on peut maintenant écrire

$$\begin{aligned} \partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)x_0^l(t) \int_{B(0,\delta)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} = \quad & \partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)x_0^l(t)\mu_t \int_{B(0,R)} x^k \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\ & + \partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)x_0^l(t) \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \end{aligned}$$

et

$$\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t} = \mu_t^2 \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \ .$$

Alors

$$\frac{x_0^l(t)\mu_t \int_{B(0,R)} x^k \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} = \frac{x_0^l(t) \int_{B(0,R)} x^k \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\mu_t \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}$$

mais

$$\left| \frac{\int_{B(0,R)} x^k \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} \right| \leq \left| \frac{\int_{B(0,R)} x^k \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} \right| \underset{t\to 1}{\to} \left| \frac{\int_{B(0,R)} x^k \widetilde{u}^{2^*} dx}{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}^2 dx} \right| = 0$$

car $\widetilde{u}$ est radiale et $\frac{|x_0^l(t)|}{\mu_t}$ est bornée par la seconde inégalité fondamentale. Ensuite, par l'inégalité de Hölder et en utilisant les estimées ponctuelles faibles

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^k (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \right| \quad & \leq \varepsilon_R \left| \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^{2\frac{n-1}{n-2}} dv_{\mathbf{g}_t} \right| \\ & \leq \varepsilon_R (\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{1}{2}} (\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{1}{2}} \\ & \leq c\varepsilon_R (\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donc, puisque $\frac{|x_0^l(t)|}{\mu_t}$ est bornée :

$$\left|\frac{x_0^l(t)\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}}\right| \leq \frac{\varepsilon_R.\left|x_0^l(t)\right|\left(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{g_t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\leq \varepsilon_R\frac{\left|x_0^l(t)\right|}{\mu_t\left(\int_{B(0,R)}\widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\right)^{\frac{1}{2}}} \underset{R\to+\infty}{\to} 0$$

Ensuite,

$$\frac{|x_0(t)|^3\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq c\frac{|x_0(t)|^3}{\mu_t^2\left(\int_{B(0,R)}\widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\right)} \underset{t\to 1}{\to} 0\ .$$

car $\frac{|x_0^l(t)|}{\mu_t}$ est bornée et $|x_0(t)|\to 0$.

Comme ci-dessus

$$\frac{|x_0(t)|^2\int_{B(0,\delta)}|x|\,(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq$$

$$\frac{|x_0(t)|^2\,\varepsilon_R\left(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)}\overline{u}_t^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}_t}\right)^{\frac{1}{2}}}{\mu_t^2\left(\int_{B(0,R)}\widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}\right)^{\frac{1}{2}}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Puis, en utilisant les estimées ponctuelles faibles, on obtient

$$\frac{|x_0(t)|\int_{B(0,\delta)}|x|^2\,(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq C\,|x_0(t)|$$

et donc ce quotient tend vers 0 puisque $|x_0(t)|\to 0$.

Enfin,

$$\frac{\int_{B(0,\delta)}|x|^3\,(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq \delta\frac{\int_{B(0,\delta)}|x|^2\,(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq C\delta\ .$$

Avec ces limites, on peut conclure comme dans la partie 3.3 que

$$h(x_0)+\varepsilon_\delta \leq \frac{n-2}{4(n-1)}S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(x_0)}{f(x_0)} + \varepsilon_\delta$$

d'où une contradiction, puis la conclusion.

Ainsi, la seconde inégalité fondamentale des phénomènes de concentration

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t,x_0)}{\mu_t} \leq C$$

permet d'aboutir au même résultat sans utiliser la méthode de refactorisation du Hessien présentée dans la troisième partie de ce chapitre ; mais c'est grâce à cette méthode que nous avons pu montrer cette estimée dans la partie précédente. Néanmoins, il est important de remarquer que si l'on suppose vraie cette inégalité (en imaginant qu'on ait pu l'obtenir indépendamment), on n'a

plus besoin de supposer que le Hessien est non dégénéré au points de maximum de f. En revanche, on peut trouver une suite de solutions (u_t) d'équations de la forme

$$\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où au second membre la fonction f est constante et donc a un Hessien dégénéré (!), telles que (u_t) développe un phénomène de concentration mais ne vérifie pas la seconde inégalité fondamentale. Nous en construirons un exemple au chapitre 8.

3.6 Remarque finale

Une façon "intuitive " de voir les détails techniques des calculs est de considérer que l'on fait un développement limité en fonction de μ_t des deux membres de l'inégalité issue de celle de Sobolev, au sens où, après changement d'échelle, on évalue les intégrales en fonction de ce paramètre fondamental.

Ainsi, en gros

$$\int |x|^p \, \overline{u}_t^{2^*} \, dv_{\mathbf{g}_t} \sim \mu_t^p$$

et

$$\int \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t} \sim \mu_t^2 \ .$$

On obtient ainsi à partir de l'inégalité de Sobolev dans laquelle on introduit l'équation vérifiée par $\overline{u}_t$:

$$h(x_0)\mu_t^2 \leq (\frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)})\mu_t^2 + o(\mu_t^2)$$

On divise alors cette relation par μ_t^2 (c'est à dire qu'on utilise "la concentration L^2") pour obtenir une contradiction avec l'hypothèse

$$h(x_0) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)} \ .$$

C'est cette façon de voir qui nous a guidé dans la mise au point de la méthode de refactorisation du Hessien.

Chapitre 4

Triplet Critique 1

Existence de fonctions critiques.

Nous montrons dans ce chapitre le résultat suivant :

Théorème 2 :

Soit $(M, \mathbf{g})$ une variété de dimension $n \geqslant 4$ et f une fonction vérifiant (H_f). Il existe une infinité de fonctions critiques h pour f et $\mathbf{g}$, qui vérifient $\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$ en tout point P où f est maximum sur M. Ces fonctions critiques ont des fonctions extrémales.

Commençons par montrer ce résultat quand $f > 0$.

L'idée, et c'est une façon de voir les fonctions critiques, est de trouver une fonction h_0 sous-critique et une fonction h_1 faiblement critique (on pourrait dire surcritique) et de passer continûment par un chemin de h_0 à h_1 ; le théorème 1 nous dit que ce chemin doit "rencontrer" l'ensemble des fonctions critiques.

Soit h une fonction C^∞ faiblement critique pour f telle que en tout point P où f est maximum sur M on ait :

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}.$$

Il suffit de prendre $h \geq B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$. Comme f est non constante, il existe une boule ouverte

$$B(y, 2\delta) \subset M \backslash \{x/f(x) = Max f\} \ .$$

Soit alors η une fonction plateau, $\eta = 0 \,\text{sur}\, M \backslash B(y, 2\delta)$, $\eta = 1 \,\text{sur}\, B(y, \delta)$, $0 \leq \eta \leq 1$. Soit

$$c = \left(\int f \right)^{-\frac{1}{2^*}} \ .$$

Alors $\int f c^{2^*} = 1$ et $I_h(c) = \int h c^2$. Pour $t \in \mathbb{R}^+$ on pose

$$h_t = h - t\eta$$

Ainsi : $h_t = h$ sur $M \backslash B(y, \delta) \supset \{x/f(x) = Max f\}$, et

$$I_{h_t}(c) = \int h_t c^2 = \int h c^2 - c^2 t \int_{B(y,2\delta)} \eta \ .$$

Donc en choisissant t assez grand, on obtient

$$I_{h_t}(c) < \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ .$$

Par ailleurs, sur $M \backslash B(y,\delta)$ qui contient $\{x/f(x) = Max f\}$, $h_t = h$. Donc $\forall P \in \{x/f(x) = Max f\}$:

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h_t(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}.$$

On pose

$$t_0 = Inf\{t/\lambda_{h_t,f,\mathbf{g}} < \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}\} \ .$$

Alors

$$\lambda_{h_{t_0},f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

et

$$\lambda_{h_t,f,\mathbf{g}} < \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ \ si \ \ t > t_0 \ .$$

De plus

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h_{t_0}(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} \ \ sur \ \ \{x/f(x) = Max f\} \, .$$

Enfin $h_t \underset{t \to t_0}{\to} h_{t_0}$ dans $C^{0,\alpha}$, et comme h_{t_0} est faiblement critique pour $f > 0$, $\triangle_{\mathbf{g}} + h_{t_0}$ est coercif. Donc d'après le théorème 1, h_{t_0} est critique avec des fonctions extrémales.

Ceci montre le théorème dans le cas où $f > 0$.

La difficulté quand f change de signe est que pour une fonction h, la condition

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

ne suffit pas à garantir que l'opérateur $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ soit coercif, ce que nous avons exigé dans la définition des fonctions critiques. Rappelons que $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ coercif signifie qu'il existe $C > 0$ tel que pour toute $u \in H_1^2$,

$$\int_M (|\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 + hu^2) dv_{\mathbf{g}} \geq C \int_M u^2 dv_{\mathbf{g}} \ .$$

Une bonne façon d'être sûr que cet opérateur est coercif, grâce aux inclusions de Sobolev, est d'avoir $h > 0$. Par ailleurs, nous avons dit que si $f \equiv 1$, que $(M, \mathbf{g})$ n'est pas conformément difféomorphe à la sphère standard, et que $S_{\mathbf{g}}$ est constante, alors $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ est une fonction critique, c'est la plus petite fonction critique constante et en particulier elle est strictement positive. Or quand f est quelconque, il n'est pas évident qu'il existe de telles fonctions critiques. Le résultat intermédiaire suivant a donc son intérêt ; il sera fondamental au chapitre suivant.

Corollaire 1 :

Soit $(M, \mathbf{g})$ une variété de dimension $n \geqslant 4$ et f une fonction vérifiant (H_f). Si $\int_M f dv_{\mathbf{g}} > 0$, il existe une infinité de fonctions h, strictement positives, critiques pour f et $\mathbf{g}$*, qui vérifient $\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$ en tout point P où f est maximum sur M. Ces fonctions critiques ont des fonctions extrémales.*

Démonstration :

Reprenons ce que nous avons fait pour le cas $f > 0$. On part de

$$h = B_0(\mathbf{g}) K(n,2)^{-2} \ .$$

En tout point P où f est maximum sur M, d'après l'hypothèse (H_f) :

$$\frac{4(n-1)}{n-2} B_0(\mathbf{g}) K(n,2)^{-2} > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

car

$$B_0(\mathbf{g}) K(n,2)^{-2} \geq \frac{(n-2)}{4(n-1)} Max S_{\mathbf{g}} \ .$$

Comme f est non constante, il existe une fonction η dont le support est inclus dans $M \setminus \{x / f(x) = Max f\}$ et telle que $0 \leq \eta \leq 1$. Soit

$$c = \left(\int_M f dv_{\mathbf{g}} \right)^{-\frac{n-2}{n}}$$

(c'est là qu'on utilise $\int_M f dv_{\mathbf{g}} > 0$), on a $\int f c^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$ et en rappelant que

$$I_{h,\mathbf{g}}(w) = I_h(w) = \int_M |\nabla w|^2 \, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.w^2 dv_{\mathbf{g}}$$

on obtient, en notant $B_0 K^{-2} = B_0(\mathbf{g}) K(n,2)^{-2}$

$$I_{B_0 K^{-2}}(c) = \int B_0 K^{-2} c^2 dv_{\mathbf{g}} = B_0 K^{-2} c^2 Vol_{\mathbf{g}}(M) \ .$$

Pour $t \in \mathbb{R}^+$ on pose

$$h_t = B_0 K^{-2} - t\eta \ .$$

Alors $h_t = B_0 K^{-2}$ sur $\{x / f(x) = Max f\}$, et

$$I_{h_t}(c) = \int_M B_0 K^{-2} c^2 dv_{\mathbf{g}} - c^2 t \int_M \eta dv_{\mathbf{g}} = \left(\int_M f dv_{\mathbf{g}} \right)^{-\frac{2}{2^*}} (B_0 K^{-2} Vol_{\mathbf{g}}(M) - t \int_M \eta dv_{\mathbf{g}})$$

Donc si t est assez grand,

$$I_{h_t}(c) < \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ .$$

Maintenant, on voudrait aussi que h_t soit strictement positive sur M. Il faut d'après la définition de h_t et puisque $\underset{M}{Sup}\, \eta = 1$ que

$$t < B_0(\mathbf{g}) K(n,2)^{-2} \ . \tag{4.1}$$

Mais pour que

$$I_{h_t}(c) < \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

il faut aussi que

$$t > \frac{1}{\int_M \eta dv_{\mathbf{g}}}(B_0 K^{-2} Vol_{\mathbf{g}}(M) - \frac{\left(\int_M f dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}) \ . \tag{4.2}$$

On peut donc trouver un tel t dès que

$$\frac{1}{\int_M \eta dv_{\mathbf{g}}}(B_0 K^{-2} Vol_{\mathbf{g}}(M) - \frac{\left(\int_M f dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}) < B_0 K^{-2}$$

ce que l'on peut écrire

$$\int_M \eta dv_{\mathbf{g}} > Vol_{\mathbf{g}}(M) - \frac{\left(\int_M f dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}{B_0(\mathbf{g})(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ . \tag{4.3}$$

Rappelons qu'on veut η à support inclus dans $M \setminus \{x/f(x) = Max f\}$ et telle que $0 \leq \eta \leq 1$. Mais l'hypothèse que le Hessien de f est non-dégénéré en ses points de maximum implique que $\{x/f(x) = Max f\}$, l'ensemble des points de maximum de f, est un ensemble de points isolés. On peut donc trouver une telle fonction η telle que de plus $\int_M \eta dv_{\mathbf{g}}$ soit aussi proche que l'on veut de $Vol_{\mathbf{g}}(M)$. Comme

$$\frac{\left(\int_M f dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}{B_0(\mathbf{g})(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} > 0$$

on peut trouver η vérifiant (4.3) et donc un t, noté t_1, vérifiant (4.1) et (4.2).

Sur $\{x/f(x) = Max f\}$, $h_t = B_0 K^{-2}$ donc $\forall P \in \{x/f(x) = Max f\}$:

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h_t(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}.$$

On pose alors :

$$t_0 = Inf\{t \leq t_1 \,/\, \lambda_{h_t} < \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}\} \ .$$

Nécessairement $t_0 < t_1$. On rappelle que

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \lambda_h = \inf_{w \in \mathcal{H}_f} I_h(w)$$

où

$$\mathcal{H}_f = \{w \in H_1^2(M) / \int_M f\,|w|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}} = 1\} \ .$$

Alors

$$\lambda_{h_{t_0}} = \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ \ et \ \ \lambda_{h_t} < \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ \ si \ \ t > t_0.$$

De plus $\forall t$, $t_0 \leq t \leq t_1$, $h_t > 0$ sur M et

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h_{t_0}(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} \ \ pour \ \ P \in \{x/f(x) = Max f\}\,.$$

Enfin $h_t \underset{t \to t_0}{\to} h_{t_0}$ dans C^0, et comme $h_{t_0} > 0$, $\triangle_{\mathbf{g}} + h_{t_0}$ est coercif. Donc d'après le théorème 1, h_{t_0} est critique avec des fonctions extrémales.

Venons-en au cas général, c'est à dire où f peut changer de signe sur M et où l'on ne suppose plus $\int f dv_{\mathbf{g}} > 0$ (mais toujours $Max f > 0$). L'idée est de modifier la fonction faiblement critique pour f, $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ non plus par une fonction plateau η comme dans la démonstration précédente, mais par les fonctions tests décrites au chapitre 1. On peut les présenter de la manière suivante : Pour tout point $x \in M$ et pour tout $\delta > 0$ assez petit, il existe une suite de fonctions (ψ_k) à support inclus dans $B(x,\delta)$ telle que pour toute fonction h :

$$J_{h,1,\mathbf{g}}(\psi_k) = \frac{\int_M |\nabla \psi_k|^2 \, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.{\psi_k}^2 dv_{\mathbf{g}}}{\left(\int_M |\psi_k|^{\frac{2n}{n-2}} \, dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}} \underset{k \to \infty}{\to} \frac{1}{K(n,2)^2}$$

et

$$\int_M \psi_k^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} = 1$$

cette dernière condition étant obtenue en multipliant les fonctions décrites au chapitre 1 par des constantes. Il est ici plus commode d'utiliser la fonctionnelle J car nous aurons

$$\int_M f.\psi_k^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} \neq 1 \ .$$

Soit alors ψ_k une de ces fonctions où k et $B(x,\delta)$ seront fixés plus tard. On considère pour $t > 0$ la famille

$$h_t = B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2} - t.\psi_k^{\frac{4}{n-2}} \ .$$

Tout d'abord, cherchons à quelle condition $\triangle_{\mathbf{g}} + h_t$ est coercif. Toujours en notant $B_0 K^{-2} = B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$, et en sous-entendant que les intégrales sont prises pour la mesure $dv_{\mathbf{g}}$, pour $u \in H_1^2$

$$\begin{aligned} \int_M (|\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 + h_t u^2) \qquad &= \int_M (|\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 + B_0 K^{-2}.u^2) - t \int_M \psi_k^{\frac{4}{n-2}}.u^2 \\ &\geq K(n,2)^{-2} (\int_M u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} - t \int_M \psi_k^{\frac{4}{n-2}}.u^2 \end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Sobolev. Or par l'inégalité de Hölder :

$$\int_M \psi_k^{\frac{4}{n-2}}.u^2 \leq (\int_M \psi_k^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} (\int_M u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}} = (\int_M u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}}$$

car $\int_M \psi_k^{\frac{2n}{n-2}} = 1$. Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder pour dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C \int_M u^2 \leq (\int_M u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}$$

on obtient, dès que $K(n,2)^{-2} - t > 0$

$$\begin{aligned}\int_M (|\nabla u|^2_{\mathbf{g}} + h_t u^2) \qquad &\geq (K(n,2)^{-2} - t)(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} \\ &\geq (K(n,2)^{-2} - t)C \int_M u^2 \ .\end{aligned}$$

Ainsi $\triangle_{\mathbf{g}} + h_t$ est coercif dès que $t < K(n,2)^{-2}$; on fixe alors t_1, $0 < t_1 < K(n,2)^{-2}$. On voudrait maintenant fixer ψ_k pour que h_{t_1} soit sous-critique pour f. Or, si l'on choisit déjà x assez proche d'un point x_0 de maximum de f et δ assez petit pour que $f > 0$ sur $B(x,\delta)$, on obtient :

$$\begin{aligned}J_{h_{t_1},f,\mathbf{g}}(\psi_k) \qquad &= \frac{\int_M |\nabla \psi_k|^2 + \int_M B_0 K^{-2}.{\psi_k}^2 - t_1 \int_M \psi_k^{\frac{2n}{n-2}}}{\left(\int_M f\,|\psi_k|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\ &\leq \frac{J_{B_0K^{-2},1}(\psi_k)}{(\underset{B(x,\delta)}{Inf}\ f)^{\frac{n-2}{n}}} - \frac{t_1}{(\underset{B(x,\delta)}{Sup}\ f)^{\frac{n-2}{n}}} \\ &\leq \frac{J_{B_0K^{-2},1}(\psi_k)}{(\underset{B(x,\delta)}{Inf}\ f)^{\frac{n-2}{n}}} - \frac{t_1}{(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ .\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut, par continuité de f, choisir x assez proche de x_0 et δ assez petit de sorte que $B(x,\delta) \cap \{x/f(x) = Max f\} = \emptyset$ et que

$$\frac{1}{(\underset{B(x,\delta)}{Inf}\ f)^{\frac{n-2}{n}}} \leq \frac{1}{(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} + \varepsilon$$

x et δ étant fixés, on peut maintenant choisir k assez grand pour que

$$J_{B_0K^{-2},1}(\psi_k) \leq K(n,2)^{-2} + \varepsilon \ .$$

Par conséquent, en choisissant ε assez petit, on voit que puisque $\frac{t_1}{(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} > 0$:

$$J_{h_{t_1},f,\mathbf{g}}(\psi_k) < \frac{1}{K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

et donc que h_{t_1} est sous-critique pour f. On conclut alors de la même manière en posant :

$$t_0 = Inf\{t \leq t_1 / \lambda_{h_t} < \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}\} \ .$$

Alors $t_0 \geq 0$, et

$$\lambda_{h_{t_0}} = \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ \ et \ \ \lambda_{h_t} < \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ \ si \ \ t > t_0.$$

De plus $\forall t$, $t_0 \leq t \leq t_1$,

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h_{t_0}(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(P)}{f(P)} pour P \in \{x/f(x) = Maxf\}$$

puisque $B(x,\delta) \cap \{x/f(x) = Maxf\} = \emptyset$. Enfin $h_t \underset{t\to t_0}{\to} h_{t_0}$ dans $C^{0,\alpha}$, et $\triangle_{\mathbf{g}} + h_{t_0}$ est coercif. Donc d'après le théorème 1, h_{t_0} est critique avec des fonctions extrémales.

Remarque 1 : Après la première définition donnée des fonctions critiques (i.e. sous la forme h est critique pour f et g) la question de l'existence de telles fonctions est naturelle ; la notion de triplet critique ne s'impose pas vraiment... Néanmoins, comme nous l'avons fait remarquer au chapitre 1, le problème de l'existence se pose naturellement dans le cadre des questions que nous avons posées au sujet de ces triplets. En effet, savoir s'il existe une fonction critique pour f et $\mathbf{g}$ revient au problème suivant : *On se fixe f et la métrique $\mathbf{g}$ et on cherche une fonction h telle que $(h, f, \mathbf{g})$ soit un triplet critique.* D'où le titre du chapitre...

Remarque 2 : Les démonstrations précédentes montrent également, en remplaçant B_0K^{-2} par h que si $(h, f, \mathbf{g})$ est faiblement critique, et si

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(P)}{f(P)} \text{ pour } P \in \{x/f(x) = Maxf\}$$

alors il existe $h' \leqslant h$ telle que (h', f, g) soit critique.

Si on a seulement

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) \geq S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(P)}{f(P)} \text{ pour } P \in \{x/f(x) = Maxf\}$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $h' \leqslant h + \varepsilon$ telle que (h', f, g) soit critique.

Chapitre 5

Triplet Critique 2

On démontre le théorème 3 que l'on rappelle ici :

Théorème 3 :

Soient données la variété $(M, \mathbf{g})$ *et deux fonctions* h' *et* f *vérifiant les hypothèses* **(H)**. *Alors il existe une métrique* $\mathbf{g}'$ conforme à $\mathbf{g}$ *telle que* $(h', f, \mathbf{g}')$ *soit un triplet critique, ou, pour reprendre la présentation première, il existe une métrique* $\mathbf{g}'$ conforme à $\mathbf{g}$ *telle que* h' *soit critique pour* f *et* $\mathbf{g}'$. *De plus* $(h', f, \mathbf{g}')$ *a des solutions minimisantes.*

Ce théorème repose fondamentalement sur la formule de transformation d'une fonction critique dans un changement de métrique conforme :

$$(h, f, \mathbf{g}) \text{ est critique si et seulement si } (h' = \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u}{u^{\frac{n+2}{n-2}}}, f, \mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}) \text{ est critique.}$$

Ou de façon équivalente

$$(h', f, \mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}) \text{ est critique si et seulement si } (h = h' u^{\frac{4}{n-2}} - \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u}{u}, f, \mathbf{g}) \text{ est critique.}$$

Notons, pour $u \in C^{\infty}_{+}(M) = \{u \in C^{\infty}(M) \,/\, u > 0\}$:

$$F_{h'}(u) = h' u^{\frac{4}{n-2}} - \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u}{u}$$

Alors :

$$(h', f, \mathbf{g}') \text{ est critique si et seulement si } (F_{h'}(u), f, \mathbf{g}) \text{ est critique.}$$

Pour résoudre le problème, il suffit donc de trouver une fonction h telle que :

1/ : $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = h' u^{\frac{n+2}{n-2}}$ ait une solution $u > 0$, et

2/ : $(h, f, \mathbf{g})$ soit critique.

En effet, dans ce cas $h = F_{h'}(u)$ et h' est critique pour f et $\mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$.

Pour trouver cette fonction, une première tentative naturelle est de reprendre la méthode de la démonstration du théorème de Yamabe. D'abord, on sait qu'il existe une fonction h critique pour f et $\mathbf{g}$. On considère alors une suite

$$q_t \to 2^*,\ q_t < 2^*.$$

Pour tout t il existe une fonction $u_t > 0$ solution de

$$\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h.u_t = h' u_t^{q_t - 1}$$

avec

$$\int h' u_t^{q_t} dv_{\mathbf{g}} \leq C \text{ indépendant de } t$$

Après extraction, $u_t \overset{H_1^2}{\rightarrow} u \geqslant 0$. Si $u > 0$, alors u est solution (à une constante multiplicative près) de

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = h' u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

et c'est fini. Mais le problème est encore une fois d'éviter la solution nulle...

E. Humbert et M. Vaugon ont résolu le problème dans le cas $f = cste$ et pour une variété non conformément difféomorphe à la sphère [21]. Leur méthode s'appuie sur le fait que, pour une variété non conformément difféomorphe à la sphère, quitte à faire un premier changement conforme de métrique, $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ est une fonction critique (quand il n'y aura pas d'ambiguïté, nous noterons ces deux constantes K et B_0). En fait, une analyse précise de leur démonstration fait apparaître que l'important, c'est que $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ soit une fonction critique strictement positive, (non qu'elle soit constante). Or nous avons justement montré au chapitre précédent que si f vérifiant $(\mathbf{H}_f)$ est telle que $\int_M f dv_{\mathbf{g}} > 0$, il existe des fonctions critiques strictement positives. Nous avions d'ailleurs établi ce résultat pour montrer le théorème ci-dessus, mais il semblait plus logique de le placer dans le chapitre sur l'existence de fonctions critiques. Notons qu'avec l'hypothèse $(\mathbf{H}_f)$, la démonstration fonctionne également sur la sphère, mais que, évidemment, cette hypothèse ne s'applique pas à une fonction constante !

Voici le principe de la démonstration d'E. Humbert et M. Vaugon. Sans prétendre nous l'approprier, nous la présentons d'une manière un peu différente et en intégrant notre fonction non constante. Leur idée est de partir de la méthode naturelle exposée ci-dessus, mais de prévoir une solution dans le cas où $u_t \overset{H_1^2}{\rightarrow} 0$. On sait qu'il existe une suite (h_t) de fonctions sous-critiques pour f et $\mathbf{g}$ telle que $h_t \overset{C^2}{\rightarrow} h$ où $(h, f, \mathbf{g})$ est critique et telle qu'en tout point P où f est maximum sur M :

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}.$$

Pour une suite $q_t \rightarrow 2^*$, $q_t < 2^*$ on construit une suite $u_t > 0$ de solutions de

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = h' u^{q_t - 1} \ \ avec \ \int h' u_t^{q_t} dv_{\mathbf{g}} \leq C \text{ indépendant de } t$$

telle que $u_t \overset{H_1^2}{\rightarrow} u \geqslant 0$. Ici encore, si $u > 0$, alors u est solution (à une constante multiplicative près) de $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = h' u^{\frac{n+2}{n-2}}$ et c'est fini.

Maintenant, si $u = 0$, nous montrerons que les u_t se concentrent et que grâce à cela on peut trouver t_0 assez proche de 1 (si on a pris $t \rightarrow 1$) et s assez grand de telle sorte que $F_{h'}(u_{t_0})$ soit sous-critique et que $F_{h'}(u_{t_0}^s)$ soit faiblement critique (où $u_{t_0}^s$ est la fonction u_{t_0} élevée à la puissance s), avec en plus

$$\frac{4(n-1)}{n-2} F_{h'}(u_{t_0}^s)(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

en tout point P où f est maximum sur M . Alors, en considérant le chemin $t \to F_{h'}(u_{t_0}^{ts})$, on obtient à l'aide du théorème du chapitre 3 l'existence sur ce chemin d'une fonction critique. L'astuce consiste en ce choix du chemin, plutôt que l'habituel chemin "linéaire". Par ailleurs, c'est pour obtenir les conditions sur $F_{h'}(u_{t_0}^{s})$ qu'intervient fondamentalement l'existence de fonctions critiques positives.

Passons à la démonstration.

Tout d'abord, nous avons expliqué que nous aurons besoin d'une fonction critique positive. Or nous avons établi cette existence sous l'hypothèse $\int_M f dv_{\mathbf{g}} > 0$. Mais $\underset{M}{Sup} f > 0$, donc, quitte à faire un premier changement conforme de métrique, on peut toujours supposer que $\int_M f dv_{\mathbf{g}} > 0$ et donc qu'il existe des fonctions critiques strictement positives pour f et $\mathbf{g}$.

Ensuite, fixons quelques notations (de plus) :

$$J_{h,h',\mathbf{g},q}(w) = \frac{\int_M |\nabla w|^2 \, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.w^2 dv_{\mathbf{g}}}{\left(\int_M h' \, |w|^q \, dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{2}{q}}}$$

$$\inf_{w \in \mathcal{H}^+_{h',q}} J_{h,h',\mathbf{g},q}(w) := \lambda_{h,h',\mathbf{g},q}$$

où

$$\mathcal{H}^+_{h',q} = \{w \in H_1^2(M) \,/\; w > 0 \; et \; \int_M h'.w^q dv_{\mathbf{g}} > 0\}.$$

et

$$\Omega_{h,h',\mathbf{g},q} = \{u \in \mathcal{H}^+_{h',q} / \, J_{h,h',\mathbf{g},q}(u) = \lambda_{h,h',\mathbf{g},q} \; et \; \int_M h'.w^q dv_{\mathbf{g}} = (\lambda_{h,h',\mathbf{g},q}\,)^{\frac{q}{q-2}}\} \; .$$

Soit une suite (h_t) de fonctions sous-critiques pour f et $\mathbf{g}$ telle que $h_t \overset{C^2}{\to} h$ où $(h, f, \mathbf{g})$ est critique, avec $\triangle_{\mathbf{g}} + h_t$ coercif. On sait que l'on peut trouver une telle suite avec $h_t > 0$ et $h > 0$, et en plus

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h_t(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

en tout point P où f est maximum sur M. Mais on peut faire mieux dans le cadre de notre problème, et c'est là qu'intervient fondamentalement l'interêt des fonctions critiques strictement positives. En effet, pour toute constante $c > 0$, si $\mathbf{g}' = c\mathbf{g}$, alors $S_{\mathbf{g}'} = c^{-1} S_{\mathbf{g}}$ et $\triangle_{\mathbf{g}'} = c^{-1} \triangle_{\mathbf{g}}$ et d'après la règle de transformation des fonctions critiques :

h est (sous-, faiblement) critique pour f et $\mathbf{g}$ si et seulement si $c^{-1}h$ est (sous-, faiblement) critique pour f et $\mathbf{g}'$

Donc, quitte à multiplier $\mathbf{g}$ par une constante, on peut, pour toute constante $C > 0$, supposer au départ :

$$\begin{aligned} h_t &> C \; sur M \\ \frac{4(n-1)}{n-2} h_t(P) - S_{\mathbf{g}}(P) + \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} &> C \text{ en tout point de maximum de } f \end{aligned}$$

et $(h, f, \mathbf{g})$ a des solutions minimisantes d'après le chapitre 4.

Une fois ceci posé, on peut suivre le principe exposé plus haut.

Première étape : Il est connu que pour tout $q < 2^*$ et pour tout $u \in \Omega_{h,h',\mathbf{g},q}$, u est solution de $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = h' u^{q-1}$, les méthodes variationnelles classiques fonctionnant sans problème car l'inclusion $H_1^2 \subset L^q$ est compacte. Nous voulons montrer que :

$\forall t, \exists\, q_0 < 2^*$ *tel que* $\forall q \in [q_0, 2^*[$ *et* $\forall u \in \Omega_{h_t,h',\mathbf{g},q}$ *alors* $F_{h'}(u)$ *est sous-critique pour* f *et* $\mathbf{g}$.

En effet, si l'on suppose le contraire alors il existe une suite $q_i \overset{<}{\to} 2^*$ et des fonctions

$$u_i \in \Omega_{h_t,h',\mathbf{g},q_i}$$

telles que $F_{h'}(u_i)$ est faiblement critique pour f et $\mathbf{g}$. La suite (u_i) est bornée dans H_1^2 et il existe $u \in H_1^2$ tel que $u_i \overset{H_1^2}{\to} u$. Les théories elliptiques standard nous donnent alors deux possibilités : soit $u \neq 0$, soit $u \equiv 0$.

Si u est non identiquement nulle, ces même théories nous donnent que $u > 0$ et que $u \in \mathcal{H}^+_{h',2^*}$, puis qu'à extraction près $u_i \overset{C^2}{\to} u$. Alors $F_{h'}(u_i) \overset{C^0}{\to} F_{h'}(u)$ et donc $F_{h'}(u)$ est faiblement critique. Or $u_i \in \Omega_{h_t,h',\mathbf{g},q_i}$ donc

$$\begin{aligned} F_{h'}(u_i) \quad &= h' u_i^{\frac{4}{n-2}} - \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u_i}{u_i} = h' u_i^{\frac{4}{n-2}} + h_t - h' u_i^{q_i-2} \\ &= h_t + h'(u_i^{\frac{4}{n-2}} - u_i^{q_i-2}) \end{aligned}$$

et, par conséquent, quand $i \to +\infty$, $F_{h'}(u_i) \to h_t$, et finalement $F_{h'}(u) = h_t$. Or h_t est sous-critique et $F_{h'}(u)$ est faiblement critique, d'où une contradiction.

Si maintenant on suppose que $u \equiv 0$, h_t étant sous-critique, il existe une fonction $\phi \in C^\infty(M)$ telle que

$$J_{h_t,f,\mathbf{g},2^*}(\phi) < \frac{1}{K(n,2)^2 (Sup\, f)^{\frac{n-2}{n}}} \ .$$

Alors

$$J_{F_{h'}(u_i),f,\mathbf{g},2^*}(\phi) = J_{h_t,f,\mathbf{g},2^*}(\phi) + \frac{\int h'(u_i^{\frac{4}{n-2}} - u_i^{q_i-2})\phi^2 dv_{\mathbf{g}}}{(\int f\phi^{2^*} dv_{\mathbf{g}})^{\frac{2}{2^*}}} \ .$$

Or $u_i \overset{L^{\frac{4}{n-2}}}{\to} 0$ et $q_i \leqslant 2^*$ donc

$$J_{F_{h'}(u_i),f,\mathbf{g},2^*}(\phi) \to J_{h_t,f,\mathbf{g},2^*}(\phi) < \frac{1}{K(n,2)^2 (Sup\, f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

ce qui contredit le fait que $(F_{h'}(u_i), f, \mathbf{g})$ est faiblement critique. On peut réécrire le résultat de cette étape sous la forme suivante :

Il existe des suites $(q_i), (t_i)$, telles que

$$\begin{aligned} 2 \quad &< \quad q_i < 2^* \\ q_i \quad &\to \quad 2^* \\ t_i \quad &\to \quad 1 \\ h_{t_i} \quad &\to \quad h \end{aligned}$$

et une suite $(v_i) \in \Omega_{h_{t_i},h',\mathbf{g},q_i}$ telle que $(F_{h'}(v_i), f, \mathbf{g})$ soit sous-critique. Notons

$$J_i = J_{h_{t_i},h',\mathbf{g},q_i}$$

et

$$\lambda_i = \lambda_{h_{t_i},h',\mathbf{g},q_i} \ .$$

Alors

$$J_i(v_i) = \lambda_i \ \ et \ \int h' v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} = \lambda_i^{\frac{q_i}{q_i-2}}$$

et v_i est solution strictement positive de

$$\triangle_{\mathbf{g}} v_i + h_{t_i}.v_i = h' v_i^{q_i-1}.$$

La suite (v_i) est bornée dans H_1^2 et donc il existe $v \in H_1^2$ tel que

$$v_i \overset{H_1^2}{\rightharpoonup} v, \ v_i \overset{L^2}{\to} v \ \ et \ \ v_i \overset{L^{2^*-2}}{\to} v.$$

Ici encore se présentent deux possibilités : $v \equiv 0$ ou $v > 0$.

Deuxiéme étape :

Si $v > 0$, comme nous l'avons expliqué dans le principe de la démonstration, c'est terminé : à extraction près, $v_i \overset{C^2}{\to} v$ et donc d'une part $F_{h'}(v_i) \to F_{h'}(v)$, et d'autre part

$$F_{h'}(v_i) = h_{t_i} + h'(v_i^{\frac{4}{n-2}} - v_i^{q_i-2}) \to h$$

soit $F_{h'}(v) = h$ qui est critique pour f et $\mathbf{g}$ avec des solutions minimisantes. Donc h' est critique pour f et $\mathbf{g}' = v^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$, avec des solutions minimisantes.

Toute la suite de la démonstration traite donc du cas où $v \equiv 0$.

Troisième étape : On montre qu'il y a un phénomène de concentration.

a/ : Montrons que :

$$0 < c \leqslant \overline{\lim}\, \lambda_i \leqslant K^{-2}(Sup_M\, h')^{-\frac{n-2}{n}} \ .$$

Tout d'abord

$$\lambda_i = J_i(v_i) = \frac{\int_M |\nabla v_i|^2 dv_{\mathbf{g}} + \int_M h_{t_i}.{v_i}^2 dv_{\mathbf{g}}}{\left(\int_M h' v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{2}{q_i}}} \geqslant \frac{\int_M |\nabla v_i|^2 dv_{\mathbf{g}} + \int_M h_{t_i}.{v_i}^2 dv_{\mathbf{g}}}{(Sup\, h')^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_M v_i^{2^*} dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{2}{2^*}} (Vol_g(M))^{1-\frac{q_i}{2^*}}}$$

Or $h_{t_i} \overset{C^2}{\to} h$ avec $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ coercif. Donc, en utilisant l'inégalité de Sobolev, il existe $c, c' > 0$ indépendants de i tels que

$$\int_M |\nabla v_i|^2 dv_{\mathbf{g}} + \int_M h_{t_i}.{v_i}^2 dv_{\mathbf{g}} \geqslant c. \|v_i\|_{H_1^2}^2 \geqslant c'. \left(\int_M v_i^{2^*} dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{2}{2^*}} \ .$$

D'où

$$\overline{\lim}\, \lambda_i \geqslant c'' > 0.$$

Par ailleurs, $\forall \varepsilon > 0$, il existe une fonction $\phi > 0$ telle que

$$J_{h,h',\mathbf{g},2^*}(\phi) \leqslant K^{-2}(Sup\, h')^{-\frac{2}{2^*}} + \varepsilon \ .$$

Or $\lim J_i(\phi) = J_{h,h',\mathbf{g},2^*}(\phi)$, donc

$$\overline{\lim}\,\lambda_i \leqslant K^{-2}(Sup_M\, h')^{-\frac{n-2}{n}}$$

On peut donc, quitte à extraire, supposer que $\lambda_i \to \lambda > 0$. Alors

$$\lambda \leqslant K^{-2}(Sup_M\, h')^{-\frac{n-2}{n}}$$

qui est une hypothèse "d'Energie Minimale" (voir chapitre 3).

b/ : Montrons que

$$0 < \lambda^{\frac{n}{2}}(Sup_M\, h')^{-1} \leqslant \overline{\lim} \int_M v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} \leqslant K^{2^*}\lambda^{\frac{n2^*}{4}} \leqslant K^{-n}(Sup_M\, h')^{-\frac{n}{2}}$$

On a $\int h' v_i^{q_i} = \lambda_i^{\frac{q_i}{q_i-2}}$, donc

$$J_i(v_i) = \lambda_i = \frac{\int_M |\nabla v_i|^2\, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h_{t_i}.{v_i}^2 dv_{\mathbf{g}}}{\left(\lambda_i^{\frac{q_i}{q_i-2}}\right)^{\frac{2}{q_i}}}$$

d'où

$$\int_M |\nabla v_i|^2\, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h_{t_i}.{v_i}^2 dv_{\mathbf{g}} = \lambda_i^{1+\frac{2}{q_i-2}} = \lambda_i^{\frac{q_i}{q_i-2}} \to \lambda^{\frac{n}{2}}$$

et puisque $\int_M h_{t_i}.{v_i}^2 dv_{\mathbf{g}} \to 0$,

$$\int_M |\nabla v_i|^2\, dv_{\mathbf{g}} \to \lambda^{\frac{n}{2}}\ .$$

On écrit alors (les intégrales étant prises pour la mesure $dv_{\mathbf{g}}$) :

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla v_i|^2 + \int_M h_{t_i}.v_i^2 \quad &\leqslant \lambda_i(Sup_M\, h')^{\frac{2}{q_i}}(\int_M v_i^{q_i})^{\frac{2}{q_i}} \\ &\leqslant \lambda_i(Sup_M\, h')^{\frac{2}{q_i}}(Vol_g(M))^{1-\frac{q_i}{2^*}}(K^2\int_M |\nabla v_i|^2 + B_0\int_M {v_i}^2)\end{aligned}$$

d'où quand $i \to +\infty$:

$$\lambda^{\frac{n}{2}} \leqslant \mu(Sup_M\, h')^{\frac{2}{2^*}}(\overline{\lim}\int_M v_i^{q_i})^{\frac{2}{2^*}} \leqslant \lambda(Sup_M\, h')^{\frac{2}{2^*}}K^2\lambda^{\frac{n}{2}}$$

soit

$$0 < \lambda^{\frac{n}{2}}(Sup_M\, h')^{-1} \leqslant \overline{\lim} \int_M v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} \leqslant K^{2^*}\lambda^{\frac{n2^*}{4}} \leqslant K^{-n}(Sup_M\, h')^{-\frac{n}{2}}\ .$$

Remarque : $K^{2^*}\lambda^{\frac{n2^*}{4}} \leqslant K^{-n}(Sup_M\, h')^{-\frac{n}{2}}$ et si $f = cste > 0$ alors $\lambda = K^{-2}(Sup_M\, h')^{-\frac{n-2}{n}}$.

c/ : On dira que $x \in M$ est un point de concentration si

$$\forall r > 0 : \overline{\lim} \int_{B(x,r)} v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} > 0.$$

Reprenons rapidement les méthodes des chapitres 2 et 3 pour l'étude du phénomène de concentration.

Tout d'abord, M étant compact, il existe au moins un point de concentration $x \in M$.

Soit η une fonction cut-off à support dans $B(x,r)$ pour un $r > 0$. Le principe d'itération vu au chapitre 2 nous donne :

$$Q(i,k,\eta).(\int_M (\eta v_i^{\frac{k+1}{2}})^{q_i})^{\frac{2}{q_i}} \leqslant C \int_{B(x,r)} v_i^{k+1}$$

où

$$Q(i,k,\eta) = \frac{4k}{(k+1)^2} - (Vol_g(M))^{\frac{q_i}{2^*}-1} K^2 (\underset{B(x,r)}{Sup} |h'|).(\int_{B(x,r)} v_i^{q_i})^{\frac{q_i-2}{q_i}}$$

Si $\overline{\lim} \int_{B(x,r)} v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} < K^{-n}(Sup_M h')^{-\frac{n}{2}}$ alors pour k assez proche de 1 et i assez grand $Q(i,k,\eta) > Q > 0$, par conséquent :

$$(\int_M (\eta v_i^{\frac{k+1}{2}})^{q_i})^{\frac{2}{q_i}} \leq C' \int_{B(x,r)} v_i^{k+1}$$

et $\int_{B(x,r)} v_i^{k+1} \to 0$, donc

$$\int_M (\eta v_i^{\frac{k+1}{2}})^{q_i} \to 0.$$

Or par l'inégalité de Hölder :

$$\int_{B(x,r/2)} v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} \leqslant C \int_{B(x,r/2)} v_i^{q_i \frac{k+1}{2}} dv_{\mathbf{g}} \ .$$

Mais si x est un point de concentration, $\overline{\lim} \int_{B(x,r/2)} v_i^{q_i} > 0$, d'où une contradiction, et donc

$$\overline{\lim} \int_{B(x,r)} v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} \geqslant K^{-n}(Sup_M h')^{-\frac{n}{2}}.$$

d/ : Par conséquent, en reprenant les mêmes méthodes qu'au début du chapitre 3 :

1/ : $\overline{\lim} \int_{B(x,r)} v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} = K^{-n}(Sup_M h')^{-\frac{n}{2}}$, $\forall r > 0$

2/ : x est l'unique point de concentration, noté x_0

3/ : $\lambda = K^{-2}(Sup_M h')^{-\frac{n-2}{n}}$

4/ : x_0 est un point de maximum de h'

5/ : $v_i \to 0$ dans $C^2_{loc}(M - \{x_0\})$

Remarque : jusqu'à présent, nous avons seulement utilisé le fait que $h_t \to h$ avec $(h_t, f, \mathbf{g})$ sous-critique et $(h, f, \mathbf{g})$ critique.

Quatrième étape :

On sait donc que la suite (v_i) se concentre en x_0 et que pour tout i $F'_{h'}(v_i)$ est sous-critique pour f et $\mathbf{g}$. On voudrait trouver un v_{i_0} , une fonction $v > 0$ et un chemin continu de v_{i_0} à v tel que $F_{h'}(v)$ soit faiblement critique pour f et $\mathbf{g}$ et tel que

$$\frac{4(n-1)}{n-2} F_{h'}(v)(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

en tout point P où f est maximum sur M . Alors le théorème 1 nous dira que sur le chemin u_t de v_{i_0} à v il existe un u_t tel que $F_{h'}(u_t)$ est critique pour f et $\mathbf{g}$.

C'est maintenant que nous allons utiliser l'existence de fonctions critiques strictement positives. Ainsi, comme nous l'avons dit au début de la démonstration, on peut supposer que les fonctions h et h_t sont strictement positives.

Soit $s \geqslant 1$ et soit v une fonction strictement positive. Alors

$$\triangle_{\mathbf{g}}(v^s) = sv^{s-1} \triangle_{\mathbf{g}} v - s(s-1)v^{s-2} \left|\nabla v\right|^2_{\mathbf{g}} \ .$$

D'où

$$F_{h'}(v_i^s) = h' v_i^{s\frac{4}{n-2}} + sh_{t_i} - sh' v_i^{q_i-2} + s(s-1)\frac{\left|\nabla v\right|^2_{\mathbf{g}}}{v_i^2}$$

et donc

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant sh_{t_i} + h'(v_i^{s\frac{4}{n-2}} - sv_i^{q_i-2}) \ .$$

Maintenant :

Sur $\{x \in M \,/\, h'(x) \leqslant 0\}$:

$v_i \to 0$ uniformément car x_0 est un point où h' est maximum sur M, donc $h'(x_0) > 0$ car par hypothèse $\triangle_{\mathbf{g}} + h'$ est coercif. De plus si $s \geqslant 1$ alors $s\frac{4}{n-2} \geqslant q_i - 2$. Par conséquent, pour i assez grand

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant sh_{t_i} \text{ sur } \{x \in M \,/\, h'(x) \leqslant 0\}$$

Sur $\{x \in M \,/\, h'(x) > 0\}$:

considérons la fonction d'une variable réelle définie pour $x \geqslant 0$ par

$$\beta_{i,s}(x) = x^{s\frac{4}{n-2}} - sx^{q_i-2} = x^{q_i-2}(x^{s\frac{4}{n-2}-q_i+2} - s).$$

Une simple étude de cette fonction montre que

$$pour \ \ x \geqslant 0 : \beta_{i,s}(x) \geqslant -s.$$

Or

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant sh_{t_i} + h'\beta_{i,s}(v_i)$$

donc

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant sh_{t_i} - sh' \ \text{ sur } \ \{x \in M \,/\, h'(x) > 0\}.$$

On peut donc écrire :

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant s(h_{t_i} - \underset{M}{Sup}\, h') \text{ sur } \{x \in M \,/\, h'(x) > 0\}.$$

Maintenant on peut utiliser le travail effectué au début de la démonstration, à savoir que, pour toute constante $C > 0$, on peut supposer au départ :

$$h_t > C \ sur M$$

et

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h_t(P) - S_{\mathbf{g}}(P) + \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} > C \text{ en tout point de maximum de } f \ .$$

Alors, premièrement, si on suppose déjà que $h > \underset{M}{Sup}\, h'$ sur tout M, on voit que pour i et s assez grand :

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2} \tag{5.1}$$

et donc $F_{h'}(v_i^s)$ est faiblement critique pour f et $\mathbf{g}$. De plus pour tout $t \in [1,s]$ on a de même

$$F_{h'}(v_i^t) \geqslant t(h_{t_i} - \underset{M}{Sup}\, h') \ \geqslant h_{t_i} - \underset{M}{Sup}\, h' > 0$$

donc $\triangle_{\mathbf{g}} + F_{h'}(v_i^t)$ est coercif.

Ensuite si l'on suppose en plus que

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h_t(P) - S_{\mathbf{g}}(P) + \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} > \frac{4(n-1)}{n-2}\underset{M}{Sup}\, h' \text{ en tout point de maximum de } f$$

alors pour tout $t \in [1,s]$:

$$\frac{4(n-1)}{n-2}F_{h'}(v_i^t)(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} \text{ en tout point de maximum de } f \tag{5.2}$$

dès que i est assez grand.

On fixe alors un i et un s assez grands pour avoir (5.1) et (5.2) et on considère

$$s_0 = \inf\{t > 1 \,/\, F_{h'}(v_i^t) \text{ est faiblement critique}\}$$

On applique alors le théorème 1 au chemin $t \in [1,s_0] \mapsto F_{h'}(v_i^t)$ pour obtenir le fait que $F_{h'}(v_i^{s_0})$ est critique pour f et $\mathbf{g}$, avec des solutions minimisantes. Donc h' est critique pour f et $\mathbf{g}' = (v_i^{s_0})^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$ avec des solutions minimisantes.

Ceci termine la démonstration.

Remarque : C'est à l'issue de cette démonstration que nous avons introduit le concept de triplet critique pour étendre celui de fonction critique. M. Vaugon et E. Hebey avaient en effet introduit la notion de fonction critique pour l'étude de certaines questions liées à la meilleure seconde constante $B_0(\mathbf{g})$, questions liées comme nous l'avons vu au chapitre 1 aux équations du type $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$. Il était donc naturel pour eux de parler de fonction critique "tout court", une fois une métrique fixée. Notre première généralisation pour l'étude d'équations du type $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ nous amenait donc naturellement à parler de fonction h critique pour f. Mais à l'issue du problème traité dans ce chapitre, où la métrique varie dans une classe conforme, et notre but étant l'étude de l'existence de solution à ces équations, il nous a paru intéressant pour mettre en valeur cette notion d'introduire la notion de triplet critique.

Chapitre 6

Triplet Critique 3

Soit $(M, \mathbf{g})$ une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$. Soit h une fonction C^∞ fixée telle que $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ soit coercif. La question est : *peut-on trouver f telle que $(h, f, \mathbf{g})$ soit critique ?*

Faisons d'abord quelques remarques. Si $h \geqslant B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$, h est faiblement critique pour toute fonction f, et donc il ne peut exister de fonction f telle que $(h, f, \mathbf{g})$ soit sous-critique. Mais plus important est la remarque suivante :

Si il existe une fonction f non constante telle que $(h, f, \mathbf{g})$ soit critique avec une solution minimisante u alors $(h, 1, \mathbf{g})$ est sous-critique.

En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 1 dans les définitions, on peut supposer que $Sup\, f = 1$. Alors puisque $u > 0$

$$J_{h,1}(u) < J_{h,f}(u) = \frac{1}{K(n,2)^2 (Sup\, f)^{\frac{2}{2^*}}} = \frac{1}{K(n,2)^2}$$

et donc h est sous-critique pour 1. Notons que d'après le chapitre 3, si $(h, f, \mathbf{g})$ est critique et si

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

en tout point P où f est maximum sur M, f vérifiant $(\mathbf{H}_f)$, alors $(h, f, \mathbf{g})$ a des solutions minimisantes.

Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 4 :

Soient données la variété $(M, \mathbf{g})$, $\dim M \geqslant 5$, et une fonction h telle que l'opérateur $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ soit coercif. Alors, il existe une fonction f (vérifiant $(\mathbf{H}_f)$) telle que $(h, f, \mathbf{g})$ soit critique avec des solutions minimisantes, si et seulement si $(h, 1, \mathbf{g})$ est sous-critique (où 1 est la fonction constante 1).

Nous venons de voir une des deux implications. Nous supposons donc maintenant que $(h, 1, \mathbf{g})$ *est sous-critique.*

La démonstration se fera en deux étapes :

Premièrement : on montre qu'il existe une fonction $f \in C^\infty(M)$ vérifiant $(\mathbf{H}_f)$, avec $\underset{M}{Sup} f = 1$, et avec de plus $\triangle_{\mathbf{g}} f$ aussi grand que l'on veut aux points de maximum de f, telle que $(h, f, \mathbf{g})$ est faiblement critique.

Deuxièmement : étant donnée cette fonction f, on montre qu'il existe sur le chemin

$$t \to f_t = t.1 + (1-t)f$$

une fonction pour laquelle h est critique ; autrement dit, il existe une constante c telle que $(h, f+c, \mathbf{g})$ soit critique.

Première étape :

On procède par contradiction. Supposons que pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ vérifiant $\underset{M}{Sup} f > 0$, $(h, f, \mathbf{g})$ soit sous-critique. Alors, pour toutes ces fonctions il existe une solution strictement positive u à l'équation

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \lambda.f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où

$$\lambda = \inf_{w \in \mathcal{H}_f} I_{h,\mathbf{g}}(w) \ \ et \ \int_M f.u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} = 1\,.$$

On rappelle que

$$I_{h,\mathbf{g}}(w) = \int_M |\nabla w|^2 \, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.w^2 dv_{\mathbf{g}}$$

et

$$\mathcal{H}_f = \{w \in H_1^2 \,/\, \int_M f.w^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} = 1\}$$

La métrique $\mathbf{g}$ étant fixée, on sous-entendra $dv_{\mathbf{g}}$ dans les intégrales.

L'idée est de construire une famille particulière de fonction f_t dont le laplacien tend vers l'infini aux points de maximum pour obtenir une contradiction. L'une de ces fonctions devra donc donner un triplet $(h, f_t, \mathbf{g})$ faiblement critique. De plus le raisonnement qui suit étant valable pour n'importe quelle sous-partie de la famille que nous allons construire, cette fonction aura un laplacien aussi grand que l'on veut en ses points de maximum.

Dans $\mathbb{R}^n$, on construit pour $t \to 0$ une famille (P_t) de fonctions C^∞, analogue à une suite régularisante, telles que

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant & P_t \leqslant 1 \\ P_t(x) & = & P_t(|x|) \\ P_t(0) & = & 1 \\ \|\nabla P_t\| & \sim & \dfrac{c_1}{t} \ \ sur \ \ B(0,t) \\ |\triangle P_t(0)| & \sim & \dfrac{c_2}{t^2} \\ Supp P_t & = & B(0,t). \end{array}$$

Soit maintenant x_0 un point de M tel que $h(x_0) > 0$; ce point existe car $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif. On pose

$$f_t = P_t \circ \exp_{x_0}^{-1}$$

On suppose donc que pour tout t : $(h, f_t, \mathbf{g})$ est sous-critique et on cherche une contradiction. Pour tout t on a une solution $u_t > 0$ de

$$(E_t) : \ \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h.u_t = \lambda_t.f_t.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

avec $\int f_t u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$ et

$$\lambda_t < K^{-2} (\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}} = K^{-2}.$$

Alors, (u_t) est bornée dans $H_1^2(M)$ quand $t \to 0$. Donc (u_t) est bornée dans L^{2^*} et $(u_t^{2^*-1})$ est bornée dans $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}$. Après extraction, si $f_t \overset{L^2}{\to} f$ et $u_t \overset{L^2}{\to} u$, alors

$$f_t u_t^{2^*-1} \rightharpoonup f u^{2^*-1}.$$

Or ici, $f_t \overset{L^p}{\to} 0$, donc l'équation (E_t) "converge" vers

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = 0$$

au sens où u est solution de cette équation. Mais $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif, donc $u = 0$, i.e. $u_t \to 0$ dans L^p pour $p < 2^*$.

La suite (u_t) développe donc un phénomène de concentration tel qu'exposé au chapitre 3. Au chapitre 3, la fonction f du second membre ne variait pas et c'était au premier membre que nous avions une suite de fonctions (h_t) ; ici c'est l'inverse. Néanmoins, les résultats obtenus restent valables, seul le changement d'échelle nécessaire pour les estimées faibles demande une attention particulière. Nous allons reprendre rapidement les étapes de cette étude, ne nous arrêtant que sur les points nouveaux.

a/ : Il existe, à extraction près d'une sous-famille de (u_t), un unique point de concentration et c'est le point x_0 où les f_t sont maximums sur M. De plus

$$\forall \delta > 0, \overline{\lim_{t \to 1}} \int_{B(x_0,\delta)} f_t u_t^{2^*} = 1\,.$$

Il suffit de reprendre exactement la méthode utilisée au chapitre 2, basée sur le principe d'itération. Notons que plus précisément, puisque le support $Supp\, f_t = B(x_0, t)$, on a pour tout $\delta > 0$ et dès que $t < \delta$:

$$\int_{B(x_0,\delta)} f_t u_t^{2^*} = 1.$$

Par ailleurs, on peut supposer que

$$\lambda_t \to \lambda = K^{-2}(\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}} = K^{-2}.$$

b/ : $u_t \to 0$ dans $C^0_{loc}(M - \{x_0\})$

On peut reprendre exactement la démonstration du chapitre 3

c/ : Estimées ponctuelles faibles

Reprenons les notations du changement d'échelle : on considère une suite de points (x_t) telle que $m_t = \underset{M}{Max}\, u_t = u_t(x_t) := \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}$.

D'après ce qui précède $x_t \to x_0$ et $\mu_t \to 0$. Rappelons que $\overline{u}_t, \overline{f}_t, \overline{h}_t, \mathbf{g}_t$ désignent les fonctions et la métrique "lues" dans la carte $\exp_{x_t}^{-1}$, et $\widetilde{u}_t$, $\widetilde{h}_t$, $\widetilde{f}_t, \widetilde{\mathbf{g}}_t$ désignent les fonctions et la métrique "lues" après blow-up de centre x_t et de coefficient $k_t = \mu_t^{-1}$.

En regardant attentivement la démonstration des estimées ponctuelles faibles, on constate qu'elle fonctionnera dans la situation de ce chapitre dès qu'on aura obtenu :

$$\forall R > 0 \ : \lim_{t \to 0} \int_{B(x_t, R\mu_t)} f_t u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1 - \varepsilon_R \ \ où \ \ \varepsilon_R \underset{R \to +\infty}{\to} 0\,.$$

Cette relation s'obtient elle-même à partir du changement d'échelle (blow-up) une fois que l'on a montré que $\widetilde{u}_t \overset{C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\to} \widetilde{u}$ où $\widetilde{u}$ est solution de

$$\triangle_e \widetilde{u} = K^{-2}\widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

C'est là que se présente une difficulté due au fait que l'on a une famille de fonctions (f_t). En effet, dans le changement d'échelle, l'équation

$$(E_t) : \ \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h.u_t = \lambda_t.f_t.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

devient

$$(\widetilde{E}_t) \ : \triangle_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \widetilde{u}_t + \mu_t^2.\widetilde{h}_t.\widetilde{u}_t = \lambda_t \widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

et pour obtenir que cette dernière équation "converge" vers

$$\triangle_e \widetilde{u} = K^{-2}\widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

il suffit de montrer que $\widetilde{f}_t$ converge simplement vers 1 (ce qui est évident lorsqu'on a une fonction constante f au second membre de $(E_{h,f,\mathbf{g}})$). Comme la suite $(\widetilde{f}_t)$ est uniformément bornée par 1 sur $\mathbb{R}^n$ (on admet qu'on prolonge les $\widetilde{f}_t$ par 0 sur $\mathbb{R}^n \backslash B(0, \delta\mu_t^{-1})$), on sait déjà par le théorème 8.25 de Gilbard-Trudinger [16] et par le théorème d'Ascoli qu'il existe une fonction $\widetilde{u} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ telle que, à extraction près, $\widetilde{u}_t \overset{C^0_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\to} \widetilde{u}$, avec bien sûr $\widetilde{u}(0) = 1$.

Nous allons montrer que $\widetilde{f}_t \overset{p.p}{\to} 1$ sur $\mathbb{R}^n$ en deux étapes (nous allons même montrer un peu plus) :

1/ : Il existe $\widetilde{f} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widetilde{f}_t \overset{p.p}{\to} \widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}^n$

2/ : $\widetilde{f} = 1$ p.p sur $\mathbb{R}^n$

On rappelle qu'on prolonge les $\widetilde{f}_t$,définies *a priori* sur $B(0, \delta\mu_t^{-1})$, par 0 sur $\mathbb{R}^n \backslash B(0, \delta\mu_t^{-1})$.

Premièrement :

On a $\widetilde{f}_t(x) = \overline{f}_t(\mu_t x)$ et $\left|\nabla \overline{f}_t\right| \leq \frac{c}{t}$. Donc

$$\left|\nabla \widetilde{f}_t\right| \leq c.\frac{\mu_t}{t}.$$

On distingue alors deux cas

a/ : Si $(\frac{\mu_t}{t})$ est bornée : Alors pour tout compact $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, $(\widetilde{f}_t)$ est bornée dans $H_1^{n+1}(K)$ (où $n = \dim M$). Donc, par compacité de l'inclusion $H_1^{n+1}(K) \subset C^{0,\alpha}(K)$ pour un $\alpha > 0$, après extraction, il existe $\widetilde{f}_K \in C^{0,\alpha}(K)$ telle que

$$\widetilde{f}_t \overset{C^{0,\alpha}(K)}{\to} \widetilde{f}_K$$

Par extraction diagonale, on construit alors $\widetilde{f} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\widetilde{f}_t \overset{C^{0,\alpha}(K')}{\to} \widetilde{f}$$

pour tout compact K' de $\mathbb{R}^n$, et de plus $\widetilde{f} \in H^{n+1}_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$. En particulier $\widetilde{f}_t \overset{p.p}{\to} \widetilde{f}$ *sur* $\mathbb{R}^n$.

b/ : Si $\frac{\mu_t}{t} \to +\infty$: le support de $\widetilde{f}_t$ est

$$Supp\widetilde{f}_t = B(\frac{x_0(t)}{\mu_t}, \frac{t}{\mu_t}),$$

où $x_0(t) = \exp_{x_t}^{-1}(x_0)$.

Si $(\frac{|x_0(t)|}{\mu_t})$ est bornée, on peut extraire une sous-suite pour que

$$\frac{x_0(t)}{\mu_t} \to P \in \mathbb{R}^n;$$

et alors

$$\widetilde{f}_t \overset{C^0_{loc}(\mathbb{R}^n - \{P\})}{\to} 0$$

Si $\frac{|x_0(t)|}{\mu_t} \to \infty$, alors

$$\widetilde{f}_t \overset{C^0_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\to} 0$$

Dans les deux cas, $\widetilde{f}_t \overset{p.p}{\to} 0 \ \ sur \ \ \mathbb{R}^n$.

Dans le cas a/, $\widetilde{u}$ est solution faible de

$$\triangle_e \widetilde{u} = K^{-2} \widetilde{f} \widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

avec $\widetilde{f} \geq 0$ puisque $\widetilde{f}_t \geq 0$, et $\widetilde{f} \in H^{n+1}_{1,loc}(\mathbb{R}^n) \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Dans le cas b/, $\widetilde{u}$ est solution faible de

$$\triangle_e \widetilde{u} = 0.$$

Dans les deux cas les théories elliptiques et les théorèmes de régularité standard nous donnent la régularité C^2 de $\widetilde{u}$, et donc $\triangle_e \widetilde{u} \geq 0$. Le principe du maximum nous dit alors que soit $\widetilde{u} \equiv 0$ soit $\widetilde{u} > 0$. Or $\widetilde{u}(0) = 1$ donc $\widetilde{u} > 0$. (Rappelons que par convention $\triangle_e = -\sum_i \partial^2_{ii}$).

Deuxièmement :

On commence par utiliser le principe d'itération : pour une fonction cut-off η valant 1 autour de x_0, on multiplie (E_t) par $\eta^2 u_t$, on intègre et on utilise l'inégalité de Sobolev pour obtenir, en se souvenant que $\lambda_t < K^{-2}(\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}}$ et que $Sup\, f = 1$:

$$(\int_M (\eta u_t)^{2^*})^{\frac{2}{2^*}} \leq \lambda_t K^2 \int_M \eta^2 f_t u_t^{2^*} + c \int_{Supp\, \eta} u_t^2 \ .$$

On prend $\eta = 1$ sur $B(x_0, \frac{3}{2}\delta)$ et $\eta = 0$ sur $M \backslash B(x_0, 2\delta)$. Alors pour t proche de 0

$$Supp\, f_t \subset B(x_0, t) \subset B(x_t, \delta) \subset B(x_0, \frac{3}{2}\delta)$$

D'où

$$(\int_{B(x_t,\delta)} {u_t}^{2^*})^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{B(x_t,\delta)} f_t u_t^{2^*} + c \int_M u_t^2$$

et après changement d'échelle

$$(\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^{2^*})^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} + c \int_M u_t^2 = 1 + c \int_M u_t^2 \ .$$

Or $\int_M u_t^2 \to 0$ donc

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^{2^*} \leq 1 \ .$$

Par ailleurs, on sait que $\widetilde{f}_t \overset{p.p}{\to} \widetilde{f}$ avec $\widetilde{f} \leq 1$ et $\widetilde{u}_t(0) = 1$. Supposons alors qu'il existe $A \subset \mathbb{R}^n$ avec $mes(A) > 0$ telle que $\widetilde{f} < 1$ sur A et écrivons $\mathbb{R}^n = A \cup B$ avec $\widetilde{f} = 1$ p.p sur B. Alors comme $\widetilde{f}_t \geq 0$ et comme $\widetilde{u}_t \overset{C^2}{\to} \widetilde{u} > 0$:

$$\begin{aligned} 1 = \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} \quad &\leqslant \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\cap A} \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} + \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\cap B} \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} \\ &< \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\cap A} \widetilde{u}_t^{2^*} + \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\cap B} \widetilde{u}_t^{2^*} \\ &= \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^{2^*} \end{aligned}$$

soit

$$1 < \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^{2^*}$$

d'où une contradiction, et finalement $\widetilde{f}_t \overset{p.p}{\to} 1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, comme nous l'avons dit

$$(\widetilde{E}_t) \ : \ \triangle_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \widetilde{u}_t + \mu_t^2 . \widetilde{h}_t . \widetilde{u}_t = \lambda_t \widetilde{f}_t . \widetilde{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

"converge" vers

$$\triangle_e \widetilde{u} = K^{-2} \widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

au sens où

$$\widetilde{u}_t \overset{C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\to} \widetilde{u}$$

où $\widetilde{u}$ est solution de $\triangle_e \widetilde{u} = K^{-2} \widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}$. Comme $\widetilde{u}(0) = 1$,

$$\widetilde{u}(x) = (1 + \frac{K^{-2}}{n(n-2)} |x|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \ .$$

Remarque : D'après ce que nous avons vu plus haut, $\widetilde{f}_t \overset{p.p}{\to} 1$ sur $\mathbb{R}^n$ entraîne que $\frac{\mu_t}{t} \to 0$. Cela peut s'interpréter "intuitivement" en disant que les fonctions u_t se concentrent plus vite que les fonctions f_t.

A partir de là, on peut reprendre exactement les démonstrations du chapitre 3 : ainsi

$$\forall R > 0 : \lim_{t\to 0} \int_{B(x_t, R\mu_t)} f_t u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1 - \varepsilon_R \ \ où \ \ \varepsilon_R \underset{R\to+\infty}{\to} 0$$

puis

$$\exists C > 0 \ \ tel \ \ que \ \ \forall x \in M : \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq C.$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 \ \ tel \ \ que \ \ \forall t, \forall x \in M : \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t) \geq R\mu_t \ \Rightarrow \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq \varepsilon.$$

d/ : On obtient sans changement ce que l'on appelle la concentration L^2 :
Si $\dim M \geq 4$,

$$\forall \delta > 0 \ : \ \lim_{t \to 0} \frac{\int_{B(x_0,\delta)} u_t^2 dv_{\mathbf{g}}}{\int_M u_t^2 dv_{\mathbf{g}}} = 1$$

e/ : Il n'y a pas non plus de changements pour les estimées fortes :

$$\exists C > 0 \ \ tel \ \ que \ \ \forall x \in M : \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{n-2} \mu_t^{-\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq C,$$

ni pour la concentration L^p forte :
$\forall R > 0$, $\forall \delta > 0$ et $\forall p > \frac{n}{n-2}$ où $n = \dim M$ on a :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\int_{B(x_t, R\mu_t)} u_t^p dv_{\mathbf{g}}}{\int_{B(x_t,\delta)} u_t^p dv_{\mathbf{g}}} = 1 - \varepsilon_R \ \ où \ \ \varepsilon_R \underset{R \to +\infty}{\to} 0$$

Venons-en alors à l'argument central, qui repose sur la méthode développée au chapitre 3 :

On insère dans l'inégalité de Sobolev euclidienne l'équation (E_t) lue dans la carte $\exp_{x_t}^{-1}$. Reprenant les calculs de ce chapitre (nous invitons le lecteur à s'y reporter pour revoir les détails) :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\delta)} \overline{h}_t (\eta \overline{u}_t)^2 dx \leq \quad & \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \eta^2 \overline{u}_t^{2^*} dx \\ & - \frac{1}{K(n,2)^2} \Big(\int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx \Big)^{\frac{2}{2^*}} \\ & + C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta) \setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx + B_t + C_t \end{aligned}$$

avec :
$B_t = \frac{1}{2} \int_{B(0,\delta)} (\partial_k (\mathbf{g}_t^{ij} \Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k + \partial_{ij} \mathbf{g}_t^{ij})(\eta \overline{u}_t^2) dx$
$C_t = \Big| \int_{B(0,\delta)} \eta^2 (\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij}) \partial_i \overline{u}_t \partial_j \overline{u}_t dx \Big|$
$A_t = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \eta^2 \overline{u}_t^{2^*} dx - \frac{1}{K(n,2)^2} \big(\int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx \big)^{\frac{2}{2^*}}$
On peut écrire

$$A_t \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f_t)^{\frac{n-2}{n}}} (A_t^1 + A_t^2)$$

où $A_t^1 = \big(\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx \big)^{\frac{n-2}{n}} - \big(Sup f_t . \int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx \big)^{\frac{n-2}{n}}$.
D'après les calculs du chapitre 3,

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}} A_t^2 + C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta) \setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx + B_t + C_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) + \varepsilon_\delta$$

où $\varepsilon_\delta \to 0$ quand $\delta \to 0$.
Reste à traiter :

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx}$$

Par construction, la suite f_t est décroissante quand $t \to 0$ au sens où :

$$si \;\; t \leq t' \;\; alors \;\; f_t \leq f_{t'} \; .$$

Fixons un t_0. Alors pour tout $t \leq t_0$

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx &= \int_{B(x_t,\delta)} f_t.(\eta \circ \exp_{x_t}^{-1})^{2^*}.u_t^{2^*}.(\exp_{x_t}^{-1})^* dx \\ &\leq \int_{B(x_t,\delta)} f_{t_0}.(\eta \circ \exp_{x_t}^{-1})^{2^*}.u_t^{2^*}.(\exp_{x_t}^{-1})^* dx \\ &= \int_{B(0,\delta)} (f_{t_0} \circ \exp_{x_t})(\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx \, .\end{aligned}$$

Notons :

$$\overline{f}_{t_0,t} = f_{t_0} \circ \exp_{x_t}$$

et

$$\widetilde{f}_{t_0,t} = \overline{f}_{t_0,t} \circ \psi_{\mu_t^{-1}}^{-1} \, .$$

Alors :

$$\begin{aligned} A_t^1 &\leq (\textstyle\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_{t_0,t} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} - (Sup f_t . \textstyle\int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\leq (\textstyle\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_{t_0,t} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} - (Sup f_{t_0} . \textstyle\int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} \end{aligned}$$

puisque $Sup f_t = Sup f_{t_0} = 1 = f_{t_0}(x_0)$ pour tout t.

On obtient alors par la même méthode qu'au chapitre 3

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq -\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)} + \varepsilon_\delta$$

et après avoir fait tendre δ vers 0 :

$$h(x_0) \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)}$$

Or

$$\triangle_{\mathbf{g}} f_t(x_0) \sim + \frac{c}{t^2} \underset{t \to 0}{\to} +\infty$$

donc en prenant t_0 assez proche de 0 on obtient une contradiction.

En conséquence, on peut trouver dans la famille (f_t) des fonctions avec un laplacien en x_0 : $\triangle_{\mathbf{g}} f_t(x_0)$ aussi grand que l'on veut telles que les équations : $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f_t.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ n'aient pas de solutions minimisantes et donc telles que h soit faiblement critique pour f_t et $\mathbf{g}$.

Remarque : cela s'applique à $h = cste < B_0 K^{-2}$ ou à $h = S_{\mathbf{g}}$ si M n'est pas la sphère. (voir le chapitre 1)

Deuxième étape :

Pour notre fonction h telle que $(h, 1, \mathbf{g})$ soit sous-critique, nous savons maintenant qu' il existe une fonction f, au laplacien aussi grand que l'on veut en ses points de maximum, telle que $(h, f, \mathbf{g})$ soit faiblement critique. Plus précisément, on a donc trouvé une fonction f telle que :

1/ : $(h, f, \mathbf{g})$ est faiblement critique,
2/ : $h(x_0) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$ où
a/ : $h(x_0) > 0$
b/ : $\{x_0\} = \{x \,/\, f(x) = \underset{M}{Sup} f\}$ et $f(x_0) = 1$, $0 \leq f \leq 1$, $Supp\, f = B(x_0, r)$
c/ : $\nabla^2 f(x_0) < 0$.
On considère alors le chemin

$$t \to f_t = (1-t).1 + t.f.$$

Notons que pour tout t : $\triangle_{\mathbf{g}} f_t = t \triangle_{\mathbf{g}} f$ et $f_t(x_0) = 1 = \underset{M}{Sup}\, f_t$. Posons

$$\lambda_t = Inf\, J_{h, f_t, \mathbf{g}}.$$

Alors

$$\lambda_0 < K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f_0)^{-\frac{n-2}{n}}$$

car $(h, 1, \mathbf{g})$ est sous-critique et

$$\lambda_1 = K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f_1)^{-\frac{n-2}{n}}$$

car $(h, f, \mathbf{g})$ est faiblement critique. Remarquons que $\underset{M}{Sup}\, f_t$ est toujours égal à 1.

Soit

$$t_0 = Sup\{t \,/\, \lambda_t < K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}}\}$$

Alors $0 < t_0 \leq 1$ et

$$\lambda_{t_0} = K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f_{t_0})^{-\frac{n-2}{n}}$$

Avant de pouvoir appliquer la méthode du chapitre 3, il faut prendre une précaution : f_{t_0} étant faiblement critique, on sait seulement que, au point de maximum x_0 on a

$$h(x_0) \geq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)}$$

car $\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)} = t_0 \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$ avec $t_0 \leq 1$, or nous avons besoin d'une inégalité stricte.

On considère alors la suite, baptisée (f_n), que l'on peut construire à partir de la première étape : on peut trouver une suite de fonctions (f_n), toutes telles que $(h, f_n, \mathbf{g})$ soit faiblement critique, avec

$$f_n(x_0) = 1 = Sup f_n \;\; et \;\; \triangle_{\mathbf{g}}\, f_n(x_0) \to +\infty.$$

Pour chaque f_n, on note t_n le "t_0" construit ci-dessus. Donc pour tout n :

$$h \text{ est faiblement critique pour } (1-t_n).1 + t_n.f_n \text{ et } \mathbf{g}.$$

Supposons que liminf $t_n = 0$, ou, quitte à extraire, que $t_n \to 0$. Alors,

$$(1-t_n).1 + t_n.f_n \to 1$$

uniformément sur M car $0 \leq f_n \leq 1$. Or $(h, 1, \mathbf{g})$ est sous-critique, donc il existe $u \in H_1^2(M)$ tel que

$$\frac{\int |\nabla u|^2 + \int hu^2}{(\int u^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}} < K(n,2)^{-2}\,.$$

Mais alors

$$\frac{\int |\nabla u|^2 + \int hu^2}{(\int ((1-t_n).1 + t_n.f_n)u^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}} \to \frac{\int |\nabla u|^2 + \int hu^2}{(\int u^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}} < K(n,2)^{-2}$$

tandis que

$$K(n,2)^{-2} = K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup}((1-t_n).1 + t_n.f_n))^{-\frac{n-2}{n}}$$

ce qui contredit le fait que $(h, (1-t_n).1 + t_n.f_n, \mathbf{g})$ soit faiblement critique.

Donc, quitte à extraire $t_n \to t_1 > 0$

Comme $\triangle_{\mathbf{g}} f_n(x_0) \to +\infty$, on peut trouver n assez grand tel que

$$\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} t_n \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_n(x_0)}{f_n(x_0)} > \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x_0) - h(x_0)\,.$$

Si on baptise f cette dernière fonction f_n et t_0 ce t_n, on a alors un chemin

$$t \to f_t = (1-t).1 + t.f$$

tel que :

a/ : $\forall t < t_0$: $(h, f_t, \mathbf{g})$ est sous-critique,

b/ : $(h, f_{t_0}, \mathbf{g})$ est faiblement critique avec de plus :

b1/ : $\{x_0\} = \{x \,/\, f_t(x) = \underset{M}{Sup} f_t\}$ et $f_t(x_0) = 1$ pour tout t

b2/ : $h(x_0) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)}$

b3/ : $\nabla^2 f_{t_0}(x_0) < 0$

Pour tout $t < t_0$ il existe une solution minimisante u_t de l'équation

$$\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h.u_t = \lambda_t.f_t.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

avec $\int f_t u_t^{2^*} = 1$. La suite (u_t) est bornée dans H_1^2 donc

$$u_t \underset{t \to t_0}{\overset{H_1^2}{\rightharpoonup}} u$$

et on se retrouve dans le schéma classique :

- soit $u > 0$ et alors u est solution de $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \lambda_{t_0} f_{t_0}.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ et est une solution minimisante, donc $(h, f_{t_0}, \mathbf{g})$ est critique.

- soit $u \equiv 0$ et comme d'habitude la suite (u_t) se concentre. Dans ce cas, l'étude du phénomène de concentration est néanmoins plus simple qu'à la première étape car le chemin f_t est constitué de fonctions convergeant uniformément vers f quand $t \to t_0$ avec $Supp\, f_t = B(x_0, r)$. On peut trouver $\delta < r$ tel que $f > 0$ sur $B(x_0, \delta)$. Alors il existe $c > 0$ tel que pour tout t on ait :

$$0 < c \leq f_t \leq 1 \text{ sur } B(x_0, \delta),$$

De plus, les f_t atteignent toutes leur maximum en x_0, ce maximum valant toujours 1. On peut alors reprendre toutes les étapes du chapitre 3 (ou de la première étape), le fait de considérer une suite f_t au second membre n'introduisant cette fois-ci aucun changement. On aboutit à

$$h(x_0) \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)}$$

d'où une contradiction.

Par conséquent $(h, f_{t_0}, \mathbf{g})$ est critique et a une solution minimisante.

Cette démonstration montre en fait le résultat suivant, plus fort mais moins "parlant" :

Théorème 4' :

Si h est faiblement critique pour une fonction f et une métrique $\mathbf{g}$, ces données vérifiant :

1/ : $h(x) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x)}{f(x)}$ *au points de maximum de f*

2/ : $\nabla^2 f(x) < 0$ *au points de maximum de f*

3/ : il existe une suite $f_t \underset{t \to t_0}{\overset{C^2}{\to}} f$ *avec* $\underset{M}{Sup} f_t = \underset{M}{Sup} f$ *telle que* $(h, f_t, \mathbf{g})$ *soit sous-critique pour* $t < t_0$

alors $(h, f, \mathbf{g})$ *est critique et a des solutions minimisantes.*

Comme nous l'avons dit au chapitre 1, cette démonstration nous a suggéré une autre définition possible pour les fonctions critiques :

Définition 4 :

Soient données la variété $(M, \mathbf{g})$, $\dim M \geqslant 3$, *et une fonction h telle que l'opérateur* $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ *soit coercif. On considère une fonction* $f \in C^\infty(M)$, telle que $Supf > 0$. *On dira que f est critique pour h (et $\mathbf{g}$) si :*

a/ : $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$

b/ : pour toute fonction f' telle que $Supf = Supf'$ *et* $f' \gneqq f$, $\lambda_{h,f',\mathbf{g}} < \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f')^{\frac{n-2}{n}}}$.

Remarque : si $Supf = Supf'$ *et* $f' \lneqq f$, $\lambda_{h,f',\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f')^{\frac{n-2}{n}}}$ *puisque* $J_{h,f',\mathbf{g}}(w) \geqslant J_{h,f,\mathbf{g}}(w)$ *pour toute fonction w.*

Rappelons qu'il faut bien comparer dans cette définition des fonctions de même Sup ; ce sont en fait les classes $[f]$ et $[f']$ qui importent, et on devrait en fait dire que c'est $[f]$ qui est critique pour h, (voir le chapitre 1). Il est alors naturel de se demander si les deux définitions sont équivalentes, autrement dit :

f est-elle critique pour h si et seulement si h est critique pour f ?

Il est à noter que dans les deux cas on a toujours en tout point P où f est maximum sur M : $\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) \geqslant S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$

Cette question semble difficile. Nous obtenons l'équivalence moyennant quelques hypothèses supplémentaires :

Théorème 5 :
Soient données la variété $(M, \mathbf{g})$, $\dim M \geqslant 5$, *et une fonction* h *telle que l'opérateur* $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ *soit coercif. On considère une fonction* $f \in C^\infty(M)$, telle que $Supf > 0$ *et vérifiant* $(\mathbf{H}_f)$. *On suppose de plus qu'en tout point* P *où* f *est maximum sur* M *:*

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} \ .$$

Alors f *est critique pour* h *si et seulement si* h *est critique pour* f *.*

La démonstration de ce théorème passe par la remarque suivante : on sait que si h est faiblement critique pour f et $\mathbf{g}$ et que $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ a une solution minimisante, alors h est critique pour f et $\mathbf{g}$. De même, si f est faiblement critique pour h (au sens où $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{n-2}{n}}$) et que $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ a une solution minimisante $u > 0$, alors f est critique pour h. En effet, si f' est une fonction telle que $Supf = Supf'$ et $f' \gneqq f$, on a

$$\int f' u^{2^*} > \int f u^{2^*}$$

car $u > 0$. Donc

$$J_{h,f',\mathbf{g}}(u) < J_{h,f,\mathbf{g}}(u) = K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{n-2}{n}} = K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup} f')^{-\frac{n-2}{n}} \ .$$

A partir du travail que nous avons fait au chapitre 3 et dans ce chapitre, la démonstration devient alors rapide :

-Si h est critique pour f, on applique le théorème du chapitre 3 : $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ a une solution minimisante, et donc f est critique pour h.

-Si f est critique pour h, ces deux fonctions (et la métrique) vérifiant les hypothèses du théorème : on a $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{n-2}{n}}$, donc h est faiblement critique pour f. On considère alors pour $t \overset{<}{\to} 1$ la suite

$$t \to f_t = (1-t).Supf + t.f \ .$$

On a pour tout t : $Supf_t = Supf$ et si $t < 1$ alors $f_t \gneqq f$. Donc puisque f est critique pour h, par définition :

$$\lambda_{h,f_t,\mathbf{g}} < K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}} \ .$$

On applique alors le théorème 4' donné ci-dessus pour obtenir que h est critique pour f avec des solutions minimisantes.

6.1 Méthode alternative pour conclure la première étape

Nous proposons très rapidement et schématiquement une méthode reprenant la refactorisation du Hessien et ne nécessitant plus que la suite (f_t) soit

décroissante, et mettant en évidence quelques "estimées " pouvant être utiles dans un autre cadre.

1/ : Comme

$$Supp\widetilde{f}_t = B(\frac{x_0(t)}{\mu_t}, \frac{t}{\mu_t})$$

et comme $\widetilde{f}_t \overset{p.p}{\to} 1$, nécessairement

$$\frac{\mu_t}{t} \to 0\,.$$

2/ : Supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\frac{|x_0(t)|}{t} \geq \varepsilon_0 > 0\,.$$

Alors $d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0) \geq c_0 t$ avec $c_0 > 0$, et par construction des fonctions f_t :

$$\forall t:\ f_t(x_t) \leq 1 - \varepsilon_1$$

avec $\varepsilon_1 > 0$. Donc à extraction près,

$$\widetilde{f}_t(0) = f_t(x_t) \to 1 - \varepsilon_2$$

avec $\varepsilon_2 > 0$. Or

$$\triangle_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\widetilde{u}_t + \mu_t^2.\widetilde{h}_t.\widetilde{u}_t = \lambda_t\widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}}\,.$$

En écrivant cette équation en 0 et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\triangle_{\mathbf{e}}\widetilde{u}(0) = \frac{1-\varepsilon_2}{K^2}\widetilde{u}(0)^{\frac{n+2}{n-2}}$$

avec

$$\widetilde{u}(x) = (1 + \frac{K^{-2}}{n(n-2)}\,|x|^2)^{-\frac{n-2}{2}}$$

d'où

$$K^{-2} = K^{-2}(1-\varepsilon_2)$$

et donc une contradiction. Par conséquent

$$\frac{|x_0(t)|}{t} \to 0\,.$$

3/ : On rappelle que grâce aux estimées fortes

$$\frac{\int_{B(0,\delta)} |x|^p\,(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \sim c\mu_t^{p-2}$$

et

$$\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t} \sim c\mu_t^2\,.$$

4/ : On reprend alors les calculs du chapitre 3 en ce qui concerne l'expression A_t^1 :

$$A_t^1 = (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dx)^{\frac{n-2}{n}} - (Supf_t.\int_{B(0,\delta)} (\eta\overline{u}_t)^{2^*}\,dx)^{\frac{n-2}{n}}$$

et

$$\overline{f}_t(x) \leq f(x_0) + \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t)).(x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t)) + \frac{c}{t^3}\left|x - x_0(t)\right|^3 \ .$$

On a alors comme dans ce chapitre

$$A_t^1 \leq c\frac{n-2}{n}\{F_t\} + C\{F_t\}^2$$

où

$$\{F_t\} = \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t))\int_{B(0,\delta)}(x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx + \frac{c}{t^3}\int_{B(0,\delta)}\left|x - x_0(t)\right|^3(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx\,.$$

En reprenant la refactorisation du Hessien mais sans absorber les termes d'ordre 3, on obtient

$$\begin{aligned}\{F_t\} &= \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t))\left\{\int_{B(0,\delta)}x^kx^l(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx + (x_0^k(t)z_t - \frac{\varepsilon_t^k}{z_t})(x_0^l(t)z_t - \frac{\varepsilon_t^l}{z_t}) - \frac{\varepsilon_t^k\varepsilon_t^l}{z_t^2}\right\}\\ &\quad + \frac{c}{t^3}\int_{B(0,\delta)}\left|x - x_0(t)\right|^3(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx\end{aligned}$$

où

$$\varepsilon_t^k = \int_{B(0,\delta)}x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx$$

$$z_t = (\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx)^{\frac{1}{2}}$$

Par ailleurs

$$\frac{c}{t^3}\int_{B(0,\delta)}\left|x - x_0(t)\right|^3(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx \leq \frac{c'}{t^3}\int_{B(0,\delta)}\{\left|x\right|^3 + \left|x_0(t)\right|\left|x\right|^2 + \left|x_0(t)\right|^2\left|x\right| + \left|x_0(t)\right|^3\}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx$$

On utilise alors

$$\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t))w^kw^l \leq -\frac{c}{t^2}\left|w\right|^2$$

et

$$\frac{\left|\varepsilon_t^k\varepsilon_t^l\right|}{z_t^2\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t}} \to 0$$

pour obtenir que

$$\begin{aligned}\{F_t\} &\leq -\frac{c\mu_t^2}{t^2} - \frac{c\left|x_0(t)\right|^2}{t^2} + o(\frac{\mu_t^2}{t^2})\\ &\quad + c\{\frac{\mu_t^3}{t^3} + \frac{\mu_t^2\left|x_0(t)\right|}{t^3} + \frac{\mu_t\left|x_0(t)\right|^2}{t^3} + \frac{\left|x_0(t)\right|^3}{t^3}\}\,.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\{F_t\}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t}} &\leq -\frac{c_1}{t^2} - \frac{c_2\left|x_0(t)\right|^2}{\mu_t^2t^2} + o(\frac{1}{t^2})\\ &\quad + c_3\{\frac{\mu_t}{t^3} + \frac{\left|x_0(t)\right|}{t^3} + \frac{\left|x_0(t)\right|^2}{\mu_tt^3} + \frac{\left|x_0(t)\right|^3}{\mu_t^2t^3}\}\end{aligned}$$

et

$$\frac{\{F_t\}^2}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq c_4\{\frac{\mu_t^2}{t^4}+\frac{|x_0(t)|^4}{\mu_t^2 t^4}+o(\frac{\mu_t^2}{t^4})+\frac{\mu_t^4}{t^6}+\frac{\mu_t^2\,|x_0(t)|^2}{t^6}+\frac{|x_0(t)|^4}{t^6}+\frac{|x_0(t)|^6}{\mu_t^2 t^6}\}\,.$$

On constate alors en utilisant

$$\frac{|x_0(t)|}{t} \to 0$$

et

$$\frac{\mu_t}{t} \to 0$$

que tout les termes strictement positifs sont négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ ou $\frac{|x_0(t)|^2}{\mu_t^2 t^2}$ et par conséquent

$$\frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \to -\infty$$

d'où à partir de

$$h(x_0) \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) + \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}}$$

une contradiction, et l'on récupère bien le théorème 4'.

Chapitre 7

La Dimension 3

Ce chapitre traite de la dimension 3. Il faut en effet remarquer que toute l'étude des chapitres précédents portait sur des variétés de dimension $\geqslant 4$. De plus la dimension 4 elle-même présente une particularité puisque le terme

$$\frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

disparaît. D'ailleurs, bien que les théorèmes restent valables pour $\dim M = 4$, le résultat fondamental que nous obtenons sur les phénomènes de concentration, présenté au chapitre 3, n'est valable que pour $\dim M \geqslant 5$. Le cas de la dimension 3 est lui radicalement différent. O. Druet [10] a traité ce cas lorsque $f = cste = 1$. L'introduction d'une fonction non constante n'apporte pas ici de réelles difficultés, nous reprendrons donc rapidement la démonstration d'Olivier Druet pour obtenir sa généralisation au cas f non constante. Cette dimension fait intervenir de façon fondamentale la fonction de Green de l'opérateur $\triangle_{\mathbf{g}} + h$. Si cet opérateur est coercif, il existe une unique fonction de classe C^2

$$G_h : M \times M \backslash \{(x,x), x \in M\} \to \mathbb{R}$$

symétrique et strictement positive telle que, au sens des distributions, on ait $\forall x \in M$:

$$\triangle_{\mathbf{g},y} G_h(x,y) + h(y) G_h(x,y) = \delta_x \, .$$

En dimension 3, pour un point $x \in M$, et pour y proche de x, G_h peut se mettre sous la forme :

$$G_h(x,y) = \frac{1}{\omega_2 d_{\mathbf{g}}(x,y)} + M_h(x) + o(1)$$

où $o(1)$ est à prendre pour $y \to x$. On appelle $M_h(x)$ la masse de la fonction de Green au point x.

On obtient une généralisation rapide des résultats d'Olivier Druet traitant le cas $f = cste$:

Théorème 6 :

Soient $(M, \mathbf{g})$ une variété compacte de dimension 3 et une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que $Sup f > 0$ (l'hypothèse $(\mathbf{H}_f)$ n'est pas nécessaire). Alors pour toute fonction h faiblement critique pour f et $\mathbf{g}$, et pour tout $x \in M$ où f est maximum sur M, on a $M_h(x) \leqslant 0$.

La condition

$$M_h(x) \leqslant 0$$

apparait comme l'analogue de la condition

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) \geqslant S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

que l'on avait en dimension $\geqslant 4$. Dans le cas $f = cste$, cette condition doit être valable sur tout M. La particularité de la dimension 3 est alors d'offrir des fonctions critiques de toutes les formes :

Théorème 7 :

Soient $(M, \mathbf{g})$ une variété compacte de dimension 3 et une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que $Supf > 0$ (l'hypothèse $(\mathbf{H}_f)$ n'est pas nécessaire). Pour toute fonction $h \in C^\infty(M)$, posons $B(h) = \inf\{B/\ h + B$ est faiblement critique pour $f\}$. Alors $h + B(h)$ est une fonction critique pour f.

Enfin, en ce qui concerne l'existence de fonctions extrémales, on a le théorème suivant :

Théorème 8 :

Soient $(M, \mathbf{g})$ une variété compacte de dimension 3 et une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que $Supf > 0$ (l'hypothèse $(\mathbf{H}_f)$ n'est pas nécessaire). Soit h une fonction critique pour f et $\mathbf{g}$. Alors au moins l'une des deux conditions suivantes est remplie :

a/ : Il existe $x \in M$ où f est maximum sur M tel que $M_h(x) = 0$.

b/ : $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ a des solutions extrémales.

Nous allons reprendre le schéma des démonstrations de l'article d'O. Druet, l'introduction d'une fonction f non constante n'apportant pas de changements notables ; essentiellement, la seule différence est qu'il faut se placer en un point de maximum de f.

Notons qu'en dimension 3, l'exposant critique vaut $2^* = \frac{2n}{n-2} = 6$.

Par ailleurs, en ce qui concerne la fonction de Green, le principe du maximum montre que si l'on a deux fonctions h, h' telles que

$$h \lneqq h',$$

alors pour tout $x \in M$:

$$M_h(x) > M_{h'}(x).$$

7.1 Démonstration du Théorème 6

Elle est basée sur l'utilisation de fonctions tests particulières. Soient donc $f \in C^\infty(M)$ telle que $Supf > 0$ (l'hypothèse (H_f) n'est pas nécessaire) et h une fonction faiblement critique pour f et $\mathbf{g}$. Par définition on a $\forall u \in H_1^2(M)$:

$$\left(\int_M f\,|u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}} \left(\int_M |\nabla u|^2\,dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.u^2 dv_{\mathbf{g}}\right) \tag{7.1}$$

Soit x_0 un point de maximum de f sur$M$.

Il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$, $\varphi > 0$ avec $\varphi(x_0) = 1$ et $\nabla\varphi(x_0) = 0$, telle que la métrique $\mathbf{g}_\varphi = \varphi^{-4}\mathbf{g}$ vérifie

$$S_{\mathbf{g}_\varphi}(x_0) = 0$$

et

$$\det \mathbf{g}_\varphi = 1 + O(d_{\mathbf{g}_\varphi}(x_0, x)^5) \tag{7.2}$$

en coordonnées normales autour de x_0 (pour l'existence de cette fonction φ on pourra voir l'article de Lee et Parker [25]) . Soit alors h_φ la fonction obtenue par la loi de transformation des fonctions critiques dans un changement de métrique conforme :

$$h_\varphi = \varphi^{-5}(\triangle_{\mathbf{g}}\varphi + h\varphi)\,.$$

Alors h_φ est une fonction faiblement critique pour f et $\mathbf{g}_\varphi$. Par la loi de transformation du Laplacien conforme, on vérifie que

$$G_{h_\varphi}(x_0, x) = \varphi(x_0)\varphi(x)G_h(x_0, x)$$

où G_{h_φ} et G_h sont les fonctions de Green associées respectivement à $\triangle_{\mathbf{g}_\varphi} + h_\varphi$ et à $\triangle_{\mathbf{g}} + h$. Alors comme $\varphi(x_0) = 1$ et $\nabla\varphi(x_0) = 0$, on a

$$M_h(x_0) = M_{h_\varphi}(x_0)\,.$$

Grâce à ces relations, il suffit donc de prouver le théorème 6 pour h_φ , f et $\mathbf{g}_\varphi$. On peut donc supposer sans perdre en généralité que $\varphi \equiv 1$ et supprimer l'indice φ dans la suite.

Fixons maintenant une fonction cut-off $\eta \in C_c^\infty(B(x_0, 2\delta))$, $\eta \equiv 1$ sur $B(x_0, \delta)$ avec $\delta > 0$ assez petit. On peut écrire la fonction de Green G_h sous la forme :

$$\omega_2 G_h(x_0, x) = \frac{\eta(x)}{d_{\mathbf{g}}(x, y)} + \beta(x)$$

où $\beta \in C^\infty_{loc}(M\backslash\{x_0\})$. Dans $M\backslash B(x_0, \delta)$, β vérifie

$$\triangle_{\mathbf{g}}\beta + h\beta = -\triangle_{\mathbf{g}}\left(\frac{\eta(x)}{d_{\mathbf{g}}(x_0, x)}\right) - h\frac{\eta(x)}{d_{\mathbf{g}}(x_0, x)}\,. \tag{7.3}$$

Et dans $B(x_0, \delta)$, β vérifie en coordonnées normales

$$\triangle_{\mathbf{g}}\beta + h\beta = -\frac{1}{2d_{\mathbf{g}}(x_0, x)^2}\partial_r(\ln(\det \mathbf{g})) - \frac{h(x)}{d_{\mathbf{g}}(x_0, x)}\,. \tag{7.4}$$

On pourra se reporter à l'appendice B pour quelques indications sur ces propriétés de la fonction de Green. Par les théories elliptiques standard, on sait que $\beta \in C^0(M) \cap H_1^2(M)$ et on a par ailleurs $\beta(x_0) = \omega_2 M_h(x_0)$. Le but est maintenant d'introduire des fonctions tests dérivées de celles présentées au premier chapitre dans la relation (7.1). Pour $\varepsilon > 0$ on définit

$$v_\varepsilon(x) = (\varepsilon^2 + d_{\mathbf{g}}(x_0, x)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$u_\varepsilon(x) = \eta(x)v_\varepsilon(x) + \beta(x)\,.$$

Comme $(h, f, \mathbf{g})$ est faiblement critique, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$ d'après (7.1)

$$K^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{1}{3}} \left(\int_M f \left| u_\varepsilon \right|^6 dv_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{3}} \leq \int_M |\nabla u_\varepsilon|^2_{\mathbf{g}} \, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.u_\varepsilon^2 dv_{\mathbf{g}} \tag{7.5}$$

où l'on note $K^{-2} = K(3,2)^{-2}$. Nous allons calculer les développements en ε des deux membres de cette inégalité. On prend déjà δ assez petit pour que $f > 0$ sur $B(x_0, \delta)$, on rappelle que x_0 est un point où f est maximum sur M. Nous aurons besoin d'évaluer les intégrales de la forme

$$\int_{B(x_0,\delta)} r^p v_\varepsilon^q dv_{\mathbf{g}}$$

en fonction de ε, où $r = d_{\mathbf{g}}(x_0, x)$. Pour cela on utilise le choix de métrique que nous avons fait, à savoir la relation (7.2), qui permet d'écrire

$$\int_{B(x_0,\delta)} r^p v_\varepsilon^q dv_{\mathbf{g}} = \int_{B(0,\delta)} r^p v_\varepsilon^q dx + \int_{B(0,\delta)} O(r^{p+5}) v_\varepsilon^q dx$$

où les intégrales du second membre sont à comprendre comme étant lues dans une carte munie de la métrique euclidienne. A partir de là, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\delta)} r^p v_\varepsilon^q dx &= \int_{B(0,\delta)} r^p \frac{1}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{q}{2}}} dx \\ &= \omega_2 \int_0^\delta r^p \frac{1}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{q}{2}}} r^2 dr \\ &= \omega_2 . \varepsilon^{p-q+3} \int_0^{\delta/\varepsilon} \frac{s^{p+2}}{(1+s^2)^{\frac{q}{2}}} ds \, . \end{aligned}$$

Alors, en écrivant $\int_0^{\delta/\varepsilon} = \int_0^{+\infty} + \int_{+\infty}^{\delta/\varepsilon}$ on obtient :

Si $q - p > 3$:

$$\int_{B(0,\delta)} r^p v_\varepsilon^q dx = \omega_2 I_{p,q} . \varepsilon^{p-q+3} + O(1) \tag{7.6}$$

Si $q - p \leq 3$:

$$\int_{B(0,\delta)} r^p v_\varepsilon^q dx \sim \omega_2 . \varepsilon^{p-q+3} (c\varepsilon^{q-p-3} + c') \tag{7.7}$$

où $I_{p,q} = \int_0^{+\infty} \frac{s^{p+2}}{(1+s^2)^{\frac{q}{2}}} ds$.

Notons à propos de ces intégrales que

$$\omega_2 \int_0^{+\infty} (1+s^2)^{-3} s^2 ds = \frac{\omega_3}{8}$$

et que

$$\omega_2 \int_0^{+\infty} (1+s^2)^{-2} s^2 ds = \frac{\omega_3}{2}$$

où l'on rappelle que ω_n est le volume de la sphère S^n.

Le calcul du développement du membre de droite de (7.5). ne présente strictement aucune différence avec l'article d'O. Druet puisque notre fonction f n'intervient pas. Le calcul donne :

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla u_\varepsilon|^2 dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.u_\varepsilon^2 dv_{\mathbf{g}} &= 3\varepsilon^{-1}\omega_2 \int_0^{+\infty} (1+s^2)^{-3} s^2 ds + \omega_2 \beta(x_0) \\ &\quad -h(x_0)\omega_2 (\int_0^{+\infty} (1+s^2)^{-1} ds)\varepsilon \\ &\quad +2h(x_0)\omega_2 [\int_0^{+\infty} (1+s^2)^{-\frac{1}{2}} (s+(1+s^2)^{\frac{1}{2}}) ds]\varepsilon + o(\varepsilon)\end{aligned} \tag{7.8}$$

Venons-en au calcul du membre de gauche, en indiquant les différences introduites dans les calculs par la présence de f.

$$\begin{aligned}\int_M f u_\varepsilon^6 dv_{\mathbf{g}} &= \int_M f(\eta v_\varepsilon + \beta)^6 dv_{\mathbf{g}} \\ &= \int_{B(x_0,\delta)} f v_\varepsilon^6 dv_{\mathbf{g}} + 6\int_{B(x_0,\delta)} f v_\varepsilon^5 \beta dv_{\mathbf{g}} + 15\int_{B(x_0,\delta)} f v_\varepsilon^4 \beta^2 dv_{\mathbf{g}} + \int_M f\beta^6 dv_{\mathbf{g}} + o(\varepsilon^{-1})\end{aligned}$$

- Comme $\beta \in C^0(M)$, $\int_M f\beta^6 = O(1) = o(\varepsilon^{-1})$. Il en va de même pour toutes les intégrales bornées indépendamment de ε comme par exemple celles du type $\int_{B(x_0,2\delta)\setminus B(x_0,\delta)} f\eta^p v_\varepsilon^q \beta^r$, d'où le $o(\varepsilon^{-1})$ à la fin du développement ci-dessus.

- Ensuite, comme $\beta \in C^0(M) \cap H_1^2(M)$, il existe un $0 < \alpha < 1$ tel que $\beta \in C^{0,\alpha}(M)$. Nous pourrons donc écrire

$$\beta(x) = \beta(x_0) + O(r^\alpha)$$

Nous utiliserons également deux développements de f en x_0 où f est maximum

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{2}\partial_{ij} f(x_0) x^i x^j + O(r^3) \\ f(x) &= f(x_0) + O(r^2)\,.\end{aligned}$$

En introduisant ces développements et en utilisant (7.2), (7.6) et (7.7), on obtient

- premièrement

$$15\int_{B(x_0,\delta)} f v_\varepsilon^4 \beta^2 dv_{\mathbf{g}} = 15 f(x_0)\beta^2(x_0)\omega_2 I_{0,4}\varepsilon^{-1} + o(\varepsilon^{-1})$$

- deuxièmement

$$\begin{aligned}6\int_{B(x_0,\delta)} f v_\varepsilon^5 \beta dv_{\mathbf{g}} &= 6f(x_0)\int_{B(x_0,\delta)} v_\varepsilon^5 \beta dv_{\mathbf{g}} + 6\int_{B(x_0,\delta)} O(r^2) v_\varepsilon^5 \beta dv_{\mathbf{g}} \\ &= 6f(x_0)\int_{B(x_0,\delta)} v_\varepsilon^5 \beta dv_{\mathbf{g}} + o(\varepsilon^{-1})\,.\end{aligned}$$

En utilisant les équations (7.3) et (7.4) vérifiées par β et le fait que

$$\triangle_e v_\varepsilon = 3\varepsilon^2 v_\varepsilon^5$$

les calculs de l'article d'O. Druet donnent alors

$$6\int_{B(x_0,\delta)} f v_\varepsilon^5 \beta dv_{\mathbf{g}} = \quad 2\omega_2\varepsilon^{-2} f(x_0)\beta(x_0)$$
$$+2f(x_0)h(x_0)\omega_2[\int_0^{+\infty}(1+s^2)^{-\frac{1}{2}}(s+(1+s^2)^{\frac{1}{2}})ds]\varepsilon^{-1}+o(\varepsilon^{-1})\,.$$

- Enfin

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,\delta)} f v_\varepsilon^6 dv_{\mathbf{g}} &= f(x_0)\int_{B(x_0,\delta)} v_\varepsilon^6 + \frac{1}{2}\partial_{ij}f(x_0)\int_{B(x_0,\delta)} x^i x^j v_\varepsilon^6 + \int_{B(x_0,\delta)} O(r^3)v_\varepsilon^6 \\ &= f(x_0)\omega_2 I_{0,6}\varepsilon^{-3} - \triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)\omega_2 I_{2,6}\varepsilon^{-1} + o(\varepsilon^{-1})\,.\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\int_M f u_\varepsilon^6 dv_{\mathbf{g}} &= f(x_0)\omega_2 I_{0,6}\varepsilon^{-3} - \triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)\omega_2 I_{2,6}\varepsilon^{-1} + 15 f(x_0)\beta^2(x_0)\omega_2 I_{0,4}\varepsilon^{-1} \\ &\quad +2\omega_2\varepsilon^{-2} f(x_0)\beta(x_0) + 2f(x_0)h(x_0)\omega_2[\int_0^{+\infty}(1+s^2)^{-\frac{1}{2}}(s+(1+s^2)^{\frac{1}{2}})ds]\varepsilon^{-1} \\ &\quad +o(\varepsilon^{-1})\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left(\int_M f\,|u_\varepsilon|^6\,dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{1}{3}} &= f(x_0)^{\frac{1}{3}}\frac{\omega_3^{\frac{1}{3}}}{2}[\varepsilon^{-1} - \tfrac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}\tfrac{8\omega_2}{3\omega_3}I_{2,6}\varepsilon + 20\beta^2(x_0)\varepsilon + \tfrac{16\omega_2}{3\omega_3}\beta(x_0) \\ &\quad +\tfrac{16}{3\omega_3}h(x_0)\omega_2[\textstyle\int_0^{+\infty}(1+s^2)^{-\frac{1}{2}}(s+(1+s^2)^{\frac{1}{2}})ds]\varepsilon + o(\varepsilon)]\,.\end{aligned}$$

En notant que

$$K^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{1}{3}} = K^{-2} f(x_0)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\omega_3^{\frac{2}{3}} f(x_0)^{-\frac{1}{3}}$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned}K^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{1}{3}}\left(\int_M f\,|u_\varepsilon|^6\,dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{1}{3}} &= \frac{3}{8}\omega_3\varepsilon^{-1} + 2\omega_2\beta(x_0) + \frac{15}{2}\omega_3\beta^2(x_0)\varepsilon - \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}I_{2,6}\varepsilon \\ &\quad +2h(x_0)\omega_2[\int_0^{+\infty}(1+s^2)^{-\frac{1}{2}}(s+(1+s^2)^{\frac{1}{2}})ds]\varepsilon \\ &\quad +o(\varepsilon)\,. \qquad (7.9)\end{aligned}$$

Maintenant on écrit que $(h, f, \mathbf{g})$ est faiblement critique, à savoir que

$$K^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{1}{3}}\left(\int_M f\,|u_\varepsilon|^6\,dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{1}{3}} \le \int_M |\nabla u_\varepsilon|^2\,dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.u_\varepsilon^2 dv_{\mathbf{g}} \qquad (7.10)$$

d'où avec (7.8) et (7.9)

$$\omega_2\beta(x_0)+h(x_0)\omega_2(\int_0^{+\infty}(1+s^2)^{-1}ds)\varepsilon+\frac{15}{2}\omega_3\beta^2(x_0)\varepsilon-\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}I_{2,6}\varepsilon+o(\varepsilon)\le 0\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\omega_2\beta(x_0) \le 0$$

et donc

$$M_h(x_0) \leq 0 \text{ si } x_0 \text{ est un point de maximum de } f$$

Il est intéressant (et un peu surprenant) de noter que $\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$ apparaît en dimension 3 à un ordre tel qu'il n'intervient pas dans la condition $M_h(x_0) \leq 0$.

7.2 Démonstration des théorèmes 7 et 8

Soit $h \in C^\infty(M)$. D'après les définitions, il existe $B > 0$ tel que $h + B$ est faiblement critique ; il suffit que $h + B \geq B_0 K^{-2}$. Si l'on pose

$$B(h) = \inf\{B/h + B \textit{ est faiblement critique pour } f\},$$

alors, quitte à changer h en $h + B(h)$, on peut supposer que $B(h) = 0$.

Pour $t \geq 0$ posons

$$\lambda_t = \inf_{u \in H_1^2, \int u^{2^*} = 1} \left(\int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 \, dv_{\mathbf{g}} + \int_M (h - t) u^2 dv_{\mathbf{g}} \right).$$

Alors par définition de $B(h)$, pour tout $t > 0$:

$$\lambda_t < K^{-1} (\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{1}{3}}$$

et pour $t = 0$

$$\lambda_1 = K^{-1} (\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{1}{3}}$$

Il existe donc pour tout $t > 0$ une fonction $u_t > 0$ solution de

$$\triangle_{\mathbf{g}} u_t + (h - t) u_t = \lambda_t f u_t^5$$

avec

$$\int_M f u_t^{2^*} = \int_M f u_t^6 = 1$$

Clairement, (u_t) est bornée dans H_1^2 et donc quitte à extraire, $u_t \rightharpoonup u_0$ faiblement dans H_1^2. Si $u_0 \neq 0$, u_0 est minimisante pour $(h + B(h), f, \mathbf{g})$ et donc $h + B(h)$ est critique.

Supposons donc maintenant que $u_0 \equiv 0$. La suite développe un phénomène de concentration. Comme au chapitre 3, on sait qu'il existe une suite de points $(x_t)_{t>0}$ convergeant vers un point de concentration $x_0 \in M$, qui est nécessairement un point où f est maximum sur M, tels que

$$u_t(x_t) = Sup_M u_t := \mu_t^{-\frac{1}{2}}.$$

De plus, nous avons les estimées fortes

$$\mu_t^{-\frac{1}{2}} d_{\mathbf{g}}(x, x_t) u_t(x) \leq C \tag{7.11}$$

et par un résultat d'O. Druet et F. Robert que nous avons cité à la fin du chapitre 3 :

$$\mu_t^{-\frac{1}{2}} u_t \to 2 \frac{\omega_2}{\omega_3 f(x_0)} G_h(x_0, .) \tag{7.12}$$

dans $C^2_{loc}(M\backslash\{x_0\})$ quand $t \to 0$ et où l'on rappelle que $f(x_0) = \underset{M}{Sup} f$. Enfin, à partir des estimées fortes, on peut obtenir une estimée sur le gradient par les méthodes elliptiques standard ; ce genre de méthode sera présentée à l'appendice B lors de la construction de la fonction de Green.

$$\mu_t^{-\frac{1}{2}} d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^2 \left|\nabla u_t(x)\right|_{\mathbf{g}} \leq C \tag{7.13}$$

Maintenant, pour $\delta > 0$ on se place dans des cartes exponentielles autour des x_t en posant

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_t &= \exp^*_{x_t} \mathbf{g} \\ \overline{u}_t(x) &= u_t(\exp_{x_t}(x)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{f}_t(x) &= f(\exp_{x_t}(x)) \\ \overline{h}_t &= h(\exp_{x_t}(x)) \,. \end{aligned}$$

A la différence des dimensions ≥ 4, il faut utiliser l'identité de Pohozaev plutôt que l'inégalité de Sobolev pour obtenir le résultat :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\delta)} (x^k \partial_k \overline{u}_t + \frac{1}{2}\overline{u}_t) \triangle_e \overline{u}_t dx = \quad & \delta \int_{\partial B(0,\delta)} [\frac{1}{2} \left|\nabla \overline{u}_t\right|_e^2 - (\nabla \overline{u}_t, \nu)_e^2] d\sigma_e \\ & -\frac{1}{2} \int_{\partial B(0,\delta)} \overline{u}_t (\nabla \overline{u}_t, \nu)_e d\sigma_e \end{aligned} \tag{7.14}$$

où ν est le vecteur normal unitaire extérieur. Avec (7.13) et (7.14), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0)^2}{4\omega_3^{-\frac{2}{3}}\omega_3^2} \lim_{t\to 0} \mu_t^{-1} \int_{B(0,\delta)} (x^k \partial_k \overline{u}_t + \frac{1}{2}\overline{u}_t) \triangle_e \overline{u}_t dx \quad = \quad & \delta \int_{\partial B(0,\delta)} [\frac{1}{2} \left|\nabla \widetilde{G}\right|_e^2 - (\nabla \widetilde{G}, \nu)_e^2] d\sigma_e \\ & -\frac{1}{2} \int_{\partial B(0,\delta)} \widetilde{G} (\nabla \widetilde{G}, \nu)_e d\sigma_e \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{G}(x) = G_h((x_0, \exp_{x_0}(x)) \,.$$

On veut calculer la limite du membre de gauche. On commence par développer le laplacien :

$$\triangle_e \overline{u}_t = \triangle_{\mathbf{g}_t} \overline{u}_t + (\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij}) \partial_{ij} \overline{u}_t - \mathbf{g}_t^{ij} \Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^m \partial_m \overline{u}_t$$

et on écrit

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\delta)} (x^k \partial_k \overline{u}_t + \frac{1}{2}\overline{u}_t) \triangle_e \overline{u}_t dx = \quad & \int_{B(0,\delta)} (x^k \partial_k \overline{u}_t + \frac{1}{2}\overline{u}_t) \triangle_{\mathbf{g}_t} \overline{u}_t dx \\ & + \int_{B(0,\delta)} (x^k \partial_k \overline{u}_t + \frac{1}{2}\overline{u}_t)(\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij}) \partial_{ij} \overline{u}_t dx \\ & - \int_{B(0,\delta)} (x^k \partial_k \overline{u}_t + \frac{1}{2}\overline{u}_t) \mathbf{g}_t^{ij} \Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^m \partial_m \overline{u}_t dx \,. \end{aligned}$$

Alors, avec l'équation vérifiée par les $\overline{u}_t$ et quelques intégrations par parties, cette expression devient

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\delta)} (x^k\partial_k\overline{u}_t + \frac{1}{2}\overline{u}_t) \triangle_e \overline{u}_t dx &= \int_{B(0,\delta)} ((\overline{h}_t - t) + \frac{1}{2}x^k\partial_k\overline{h}_t)\overline{u}_t^2 dx - \frac{\lambda_t}{6}\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^6 x^k\partial_k\overline{f}_t dx \\
&- \int_{B(0,\delta)} (x^k\partial_k\overline{u}_t + \frac{1}{2}\overline{u}_t)\partial_j \mathbf{g}_t^{ij}\partial_i\overline{u}_t dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{B(0,\delta)} x^k\partial_k\mathbf{g}_t^{ij}\partial_i\overline{u}_t\partial_j\overline{u}_t dx \\
&- \int_{B(0,\delta)} (x^k\partial_k\overline{u}_t + \frac{1}{2}\overline{u}_t)\mathbf{g}_t^{ij}\Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^m\partial_m\overline{u}_t dx \\
&- \frac{\delta}{2}\int_{\partial B(0,\delta)} (\overline{h}_t - t)\overline{u}_t^2 d\sigma_e + \frac{\lambda_t}{6}\delta\int_{\partial B(0,\delta)} \overline{f}_t\overline{u}_t^6 d\sigma_e \\
&+ \int_{\partial B(0,\delta)} (x^k\partial_k\overline{u}_t + \frac{1}{2}\overline{u}_t)(\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij})\nu_j\partial_i\overline{u}_t d\sigma_e \\
&- \frac{\delta}{2}\int_{\partial B(0,\delta)} (\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij})\partial_i\overline{u}_t\partial_j\overline{u}_t d\sigma_e\,.
\end{aligned}$$

La principale différence avec le cas $f = cste$ traité par O. Druet est le terme

$$\frac{\lambda_t}{6}\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^6 x^k\partial_k\overline{f}_t dx\,.$$

Maintenant, grâce aux estimées fortes (7.11) à (7.13), on peut calculer la limite que l'on cherchait, en notant que

$$\begin{aligned}
\left|\partial_k\mathbf{g}_t^{ij}\right| &\leq C\,|x| \\
\text{et } \left|\mathbf{g}_t^{ij}\Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^m\right| &\leq C\,|x|
\end{aligned}$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue, pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,\delta)} (\widetilde{h} + \frac{1}{2}x^k\partial_k\widetilde{h})\widetilde{G}^2 dx - \int_{B(0,\delta)} (x^k\partial_k\widetilde{G} + \frac{1}{2}\widetilde{G})\partial_j\mathbf{g}_t^{ij}\partial_i\widetilde{G} dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{B(0,\delta)} x^k\partial_k\mathbf{g}_t^{ij}\partial_i\widetilde{G}\partial_j\widetilde{G} dx - \int_{B(0,\delta)} (x^k\partial_k\widetilde{G} + \frac{1}{2}\widetilde{G})\mathbf{g}_t^{ij}\Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^m\partial_m\widetilde{G} dx \\
&- \lim_{t\to 0}[\frac{f(x_0)^2}{4\omega_3^{-\frac{2}{3}}\omega_3^2}\frac{\lambda_t}{6}\mu_t^{-1}\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^6 x^k\partial_k\overline{f}_t dx] \\
= \;& \delta\int_{\partial B(0,\delta)} [\frac{1}{2}\left|\nabla\widetilde{G}\right|_e^2 - (\nabla\widetilde{G},\nu)_e(\nabla\widetilde{G},\nu)_{\widetilde{\mathbf{g}}}] d\sigma_e \\
&- \frac{1}{2}\int_{\partial B(0,\delta)} \widetilde{G}(\nabla\widetilde{G},\nu)_{\widetilde{\mathbf{g}}} d\sigma_e + \frac{\delta}{2}\int_{\partial B(0,\delta)} \widetilde{h}\widetilde{G}^2 d\sigma_e
\end{aligned}$$

où $\widetilde{h} = h \circ \exp_{x_0}$ et $\widetilde{\mathbf{g}} = \exp_{x_0}^* \mathbf{g}$.

La différence par rapport au travail d'O. Druet est donc la présence de la limite

$$\lim_{t\to 0}[\mu_t^{-1}\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^6 x^k\partial_k\overline{f}_t dx]$$

Mais par changement d'échelle

$$\mu_t^{-1}\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^6 x^k\partial_k\overline{f}_t dx \sim \int_{B(0,R)}\widetilde{u}_t^6 x^k\partial_k\widetilde{f}_t dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}+\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)}\widetilde{u}_t^6 x^k\partial_k\widetilde{f}_t dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\,.$$

Or

$$\partial_k\widetilde{f}_t \overset{C^0_{loc}}{\to} \partial_k\widetilde{f}(0)$$

et

$$\widetilde{u}_t \overset{C^0_{loc}}{\to} \widetilde{u}$$

où $\widetilde{u}$ est radiale, telle que $\widetilde{u}_t \leq c\widetilde{u}$ et $\int_{\mathbb{R}^n} x^k\widetilde{u} < +\infty$. Par conséquent

$$\int_{B(0,R)}\widetilde{u}_t^6 x^k\partial_k\widetilde{f}_t dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \underset{t\to 0}{\to} 0$$

à R fixé car $\widetilde{u}$ est radiale, et

$$\lim_{R\to+\infty}(\lim_{t\to 0}\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)}\widetilde{u}_t^6 x^k\partial_k\widetilde{f}_t dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}) = 0$$

car $\int_{\mathbb{R}^n} x^k\widetilde{u} < +\infty$ et $\mu_t^{-1}\to+\infty$.

On a donc en fait

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,\delta)}(\widetilde{h}+\frac{1}{2}x^k\partial_k\widetilde{h})\widetilde{G}^2dx - \int_{B(0,\delta)}(x^k\partial_k\widetilde{G}+\frac{1}{2}\widetilde{G})\partial_j\mathbf{g}_t^{ij}\partial_i\widetilde{G}dx\\
&+\frac{1}{2}\int_{B(0,\delta)}x^k\partial_k\mathbf{g}_t^{ij}\partial_i\widetilde{G}\partial_j\widetilde{G}dx - \int_{B(0,\delta)}(x^k\partial_k\widetilde{G}+\frac{1}{2}\widetilde{G})\mathbf{g}_t^{ij}\Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^m\partial_m\widetilde{G}dx\\
=\;& \delta\int_{\partial B(0,\delta)}[\frac{1}{2}\left|\nabla\widetilde{G}\right|_e^2-(\nabla\widetilde{G},\nu)_e(\nabla\widetilde{G},\nu)_{\widetilde{\mathbf{g}}}]d\sigma_e\\
&-\frac{1}{2}\int_{\partial B(0,\delta)}\widetilde{G}(\nabla\widetilde{G},\nu)_{\widetilde{\mathbf{g}}}d\sigma_e+\frac{\delta}{2}\int_{\partial B(0,\delta)}\widetilde{h}\widetilde{G}^2d\sigma_e
\end{aligned}$$

c'est à dire exactement la même égalité que dans le cas $f = cste$. Le principe est alors de calculer un développement de chaque terme quand $\delta\to 0$ pour trouver

$$\frac{\omega_2}{2}M_h(x_0) = O(\delta)$$

c'est à dire

$$\frac{\omega_2}{2}M_h(x_0) = 0$$

La fonction f n'intervenant plus, il n'y a aucun changement, à partir de là, avec l'article d'O. Druet (rappelons quand même qu'il faut se placer aux points de maximum de f). Néanmoins celui-ci ne présentant que peu de détails, et dans un souci de lisibilité de cette thèse, nous indiquons rapidement ces développements sous l'hypothèse que la métrique $\mathbf{g}$ est plate au voisinage de x_0 ; le cas général est identique, seulement un peu plus long.

Il reste de l'égalité ci-dessus

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\delta)}(\widetilde{h}+\frac{1}{2}x^k\partial_k\widetilde{h})\widetilde{G}^2dx \;=\;& \delta\int_{\partial B(0,\delta)}[\frac{1}{2}\left|\nabla\widetilde{G}\right|_e^2-(\nabla\widetilde{G},\nu)_e^2]d\sigma_e\\
&-\frac{1}{2}\int_{\partial B(0,\delta)}\widetilde{G}(\nabla\widetilde{G},\nu)_e d\sigma_e+\frac{\delta}{2}\int_{\partial B(0,\delta)}\widetilde{h}\widetilde{G}^2d\sigma_e\,.
\end{aligned}$$

On rappelle alors que, en notant $r = |x|$,

$$\omega_2 \widetilde{G} = \frac{1}{r} + M_h(x_0) + \alpha(x)$$

où $\alpha(0) = 0$ et $\alpha \in C^{0,\eta}(B(0,\delta))$ pour tout $0 < \eta < 1$, $\alpha \in C^\infty(B(0,\delta)\backslash\{0\})$. On a $\nu = \nabla r$, et on développera $\widetilde{h}$ sous la forme

$$\widetilde{h} = \widetilde{h}(0) + x^k \partial_k \widetilde{h}(0) + o(r) = \widetilde{h}(0) + O(r)\,.$$

On utilise alors pour k entier relatif différent de -3

$$\int_{B(0,\delta)} r^k = c\delta^{k+3}$$

et pour k entier relatif

$$\int_{\partial B(0,\delta)} r^k d\sigma_e = \omega_2 \delta^{k+2}\,.$$

Ainsi

$$\frac{\delta}{2} \int_{\partial B(0,\delta)} \widetilde{h} \widetilde{G}^2 d\sigma_e = c_1 \delta + o(\delta) = O(\delta)\,.$$

Comme $(\widetilde{h} + \frac{1}{2} x^k \partial_k \widetilde{h}) \widetilde{G}^2$ est continue en 0

$$\int_{B(0,\delta)} (\widetilde{h} + \frac{1}{2} x^k \partial_k \widetilde{h}) \widetilde{G}^2 dx = O(\delta)\,.$$

On montre que $(\nabla r, \nabla \alpha) = O(r^{\eta-1})$ et cela permet d'obtenir

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial B(0,\delta)} \widetilde{G} (\nabla \widetilde{G}, \nu)_e d\sigma_e = \frac{\omega_2}{2} M_h(x_0) + \frac{\omega_2}{2} \delta^{-1} + O(\delta)$$

et

$$\delta \int_{\partial B(0,\delta)} [\frac{1}{2} \left| \nabla \widetilde{G} \right|_e^2 - (\nabla \widetilde{G}, \nu)_e^2] d\sigma_e = -\frac{\omega_2}{2} \delta^{-1} + O(\delta)\,.$$

En ajoutant ces quatre développements, on trouve

$$\frac{\omega_2}{2} M_h(x_0) + O(\delta) = 0$$

et donc en faisant tendre δ vers 0

$$M_h(x_0) = 0$$

Autrement dit, si les u_t se concentrent en un point x_0, nécessairement $M_h(x_0) = 0$. Mais dans ce cas, pour toute fonction $h' \leq h$, $h' \neq h$, on a par le principe du maximum

$$M_{h'}(x_0) > 0$$

et donc, par le premier théorème (théorème 6), h' ne peut être faiblement critique pour f et $\mathbf{g}$; donc $(h', f, \mathbf{g})$ est sous-critique. Par définition $(h, f, \mathbf{g})$ est donc critique.

Le théorème 8 découle immédiatement de cette démonstration.

Chapitre 8

Remarques sur le cas limite et le cas dégénéré. Quelques questions...

8.1 Cas limite et cas dégénéré

Dans le théorème 1 démontré au chapitre 3, et dans la plupart des théorèmes qui en découlent, nous faisons deux hypothèses importantes :

(H1) : en rappelant que si $(h, f, \mathbf{g})$ est un triplet faiblement critique, nécessairement, au points de maximum de f, $h(P) \geq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$, nous avons fait dans nos théorèmes l'hypothèse que cette inégalité était *stricte :*

$$h(P) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

(H2) ou (H_f) : Nous avons supposé que le Hessien de la fonction f était non dégénéré en ses points de maximum.

Nous avons évidemment essayé de nous passer de ces hypothèses, sans succés... Nous voulons proposer quelques remarques et explications concernant ces deux hypothèses.

Tout d'abord, en gardant l'hypothèse (H1), nos théorèmes 1, 1' et 1" restent valables si l'on suppose que $\triangle_{\mathbf{g}} f(P) = 0$ au points de maximum, ce qui implique évidemment que le Hessien est dégénéré (il suffit de remarquer qu'avec les notations du chapitre 3, partie 3.3, $A_t^1 \leq 0$). Nous sommes donc dans la situation où les théorèmes fonctionnent dans deux cas extrèmes, Hessien non dégénéré et Laplacien nul.

En ce qui concerne (H1), E. Hebey et M. Vaugon [20] ont montré dans le cadre de leur étude sur $B_0(\mathbf{g})$, qui correspond pour nous au cas $f = cste$, le résultat suivant :

Supposons que la variété $(M, \mathbf{g})$ est de dimension ≥ 7, et soit h une fonction ctirique (pour $\mathbf{g}$ et 1). Notons $T = \{x \in M / \, h(x) = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x)\}$. Rappelons que dans ce cadre on a toujours $h \geq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}$ sur tout M et que l'hypothèse (H1) devient $h > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}$. On suppose alors que pour tout point x de T :

1 : le tenseur de Weyl est nul sur un voisinage de x, et

2 : $\nabla^2(h - \frac{n-2}{4(n-1)}S_{\mathbf{g}})$ est non dégénéré en x

Alors h a des fonctions extrémales.

On remarque alors que l'on immédiatement à partir de leur démonstration le résultat, un peu artificiel, suivant :

Supposons que la variété $(M, \mathbf{g})$ est de dimension ≥ 7, et soit $(h, f, \mathbf{g})$ un triplet critique. Notons $T_f = \{x \in M / f(x) = Max f$ et $h(x) = \frac{n-2}{4(n-1)}S_{\mathbf{g}}(x) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}\}$. On suppose alors que T_f n'est pas dense dans M et que pour tout point x de T_f :

1 : le tenseur de Weyl est nul sur un voisinage de x,

2 : $\nabla^2(h - \frac{n-2}{4(n-1)}S_{\mathbf{g}})$ est non dégénéré en x,

3 : $\triangle_{\mathbf{g}} f(x) = 0$ si $x \in T_f$, et on suppose de plus que le hessien de f est non dégénéré aux points de maximum qui ne sont pas dans T_f.

Alors $(h, f, \mathbf{g})$ a des fonctions extrémales.

L'intérêt de ce résultat est de montrer qu'il existe des triplet critique $(h, f, \mathbf{g})$, avec f non constante, qui ne vérifie pas (H1) et qui ont des fonctions extrémales. Indiquons très rapidement le schéma de leur démonstration.

On choisit une fonction plateau θ dont le support est disjoint de l'ensemble des points de maximum de f. Soit $h_t = h - t\theta$; h_t est sous-critique pour tout t tendant vers 0. On a alors une suite de solutions minimisantes u_t associées aux équations $\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t u_t = f u_t^{2^*-1}$. Là encore la suite u_t converge dans H_1^2 vers une fonction u. Si $u > 0$ on a une solution minimisante. Si $u = 0$, toute l'étude sur les phénomènes de concentration du chapitre 3 est valable. Le point nouveau utilisé par E. Hebey et M. Vaugon est une sorte d'amélioration de la concentration L^2. Notons qu'il n'existe qu'un seul point de concentration, noté x_0, et que c'est un point de maximum de f. E. Hebey et M. Vaugon montrent que si $\dim M \geq 7$ alors pour tout rayon $\delta > 0$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\int_{M \setminus B(x_0,\delta)} d_{\mathbf{g}}(x, x_0)^2 u_t^2 dv_{\mathbf{g}}}{\int_{B(x_0,\delta)} d_{\mathbf{g}}(x, x_0)^2 u_t^2 dv_{\mathbf{g}}} = 0 \tag{8.1}$$

Si le Hessien de f est non dégénéré en x_0, on reprend la démonstration du chapitre 3 pour aboutir à une contradiction. On peut donc supposer que $x_0 \in T_f$. Par l'hypothèse 1, on peut identifier $B(x_0, \delta)$ munie de la métrique $\mathbf{g}$ à la boule euclidienne $B(0, \delta)$ en identifiant x_0 à 0. Mais alors en reprenant les calculs du chapitre 3, partie 3.3, c'est à dire l'inégalité de Sobolev euclidienne dans laquelle on "injecte" l'équation vérifiée par u_t, on obtient

$$\int_{B(x_0,\delta)} h_t(\eta u_t)^2 \leq A_t + \frac{c}{\delta^2}\int_{B(x_0,\delta)\setminus B(x_0,\delta/2)} u_t^2 \leq \frac{c}{\delta^2}\int_{B(x_0,\delta)\setminus B(x_0,\delta/2)} u_t^2$$

car $B_t = C_t = 0$ puisque la métrique est plate au voisinage de x_0, et puisque, c'est là le seul point à remarquer si f est non constante, $A_t \leq 0$. L'hypothèse 2 signifie que h_t, qui est égale à h sur $B(x_0, \delta)$ si on choisit δ assez petit, a un minimum strict en x_0 et que ce minimum vaut $0 = S_{\mathbf{g}}$. Un développement limité de h_t en x_0 montre que

$$\int_{B(x_0,\delta)} h_t(\eta u_t)^2 \geq \lambda \int_{B(x_0,\delta)} |x|^2 \, {u_t}^2$$

pour un réel $\lambda > 0$. Mais alors

$$\lambda \int_{B(x_0,\delta)} |x|^2 \, {u_t}^2 \leq \frac{c}{\delta^2} \int_{B(x_0,\delta)\setminus B(x_0,\delta/2)} u_t^2 \leq \frac{c}{\delta^4} \int_{B(x_0,\delta)\setminus B(x_0,\delta/2)} |x|^2 \, u_t^2$$

ce qui contredit (8.1).

Notre sentiment est alors le suivant. Reprenons la remarque finale du chapitre 3 : le principe est de faire un développement limité en fonction de μ_t des deux membres de l'inégalité issue de celle de Sobolev, au sens où, après changement d'échelle, on évalue les intégrales en fonction de ce paramètre fondamental. On obtient ainsi à partir de l'inégalité de Sobolev dans laquelle on introduit l'équation vérifiée par $\overline{u}_t$:

$$h(x_0)\mu_t^2 \leq (\frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)})\mu_t^2 + o(\mu_t^2)$$

Or en reprenant le détails des calculs fait au chapitre 3, on constate que dans les développements limités effectués, les coefficients des termes d'ordre 2 en μ_t sont les seuls qui soient intrinsèques, c'est à dire invariants dans les changements de cartes ($\exp_{x_t}^{-1}$). En effet, au premier membre où l'on développe h, on obtient (après $h(x_0)$) les dérivées premières $\partial_i h(x_0)$, tandis qu'au second membre (après $\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)$) ce sont les dérivées d'ordre 3 qui apparaissent ; on peut faire le même constat pour le développement de la métrique. Maintenant, si l'on regarde les hypothèses du résultat d'E. Hebey et de M. Vaugon, on constate qu'elles reviennent à assurer la nullité des termes d'ordre 2 en μ_t et à faire porter le poids du développement sur les termes d'ordre 4 (la situation technique du résultat permet de ne pas faire apparaitre de termes d'ordre 3), la contradiction s'obtenant grâce à la condition de non dégénérécence de $\nabla^2(h - \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}})$, condition intrinsèque, et portant sur les termes d'ordre 4. Ces remarques étant faites, on peut alors constater en ce qui concerne l'hypothèse (H2), bien que cela soit moins évident, que d'après la théorie de Morse élémentaire, seuls les points critiques non dégénérés ont un sens intrinsèque. Il semble donc, si l'on veut se passer de H1 ou H2, qu'il faille soit trouver un autre paramètre intrinsèque à faire apparaitre, soit trouver une méthode radicalement différente pour prouver, ou infirmer, les théorèmes établis dans notre travail. Remarquons que l'on pourrait être tenté d'utiliser l'identité de Pohozahev comme en dimension 3 pour résoudre le problème, mais en fait on tombe sur la même difficulté. En effet, si l'on insère l'équation dont est solution u_t dans cette identité, on obtient après quelques calculs, et, pour simplifier, en supposant que la métrique est plate au voisinage de x_0 :

$$\int_{B(0,\delta)} \eta^2 (2\overline{h}_t + x^k \partial_k h_t) \overline{u}_t^2 dx + \int_{B(0,\delta)} \alpha(\eta) \overline{u}_t^2 dx + \lambda_t \int_{B(0,\delta)} \beta(\eta) \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dx \leq 0$$

et l'on voit que les développements limités de h ou f vont faire apparaitre les mêmes termes au mêmes ordres.

Mais l'on peut dire plus en ce qui concerne l'hypothèse sur le Hessien de f aux points de maximum. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, cette hypothèse et la démonstration du théorème 1 sont étroitement liées à la "seconde inégalité fondamentale"

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \leq C$$

que l'on peut obtenir pour une suite (u_t) de solutions d'équations $\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$ se concentrant. Or, on peut construire une suite de fonctions solutions d'équation de ce type vérifiant tous les phénomènes de concentration, mais ne vérifiant pas cette estimée. Considérons en effet la sphère S^n munie de métrique standard $\mathbf{s}$. Si l'on reformule les résultats connus (c.f. par exemple [17]), il existe une unique fonction critique pour 1 et $\mathbf{s}$, à savoir

$$h = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{s}} = \frac{n-2}{4(n-1)}$$

et cette fonction critique possède comme fonctions extrémales d'une part les constantes, et d'autre part les fonctions de la forme

$$u = a(b - \cos r)^{-\frac{n-2}{2}}$$

où $a \neq 0$, $b > 1$, et r est la distance géodésique à un point fixé de S^n. Considérons alors sur S^n une suite de points x_t convergeant vers un point x_0, et posons

$$u_t = \mu_t^{\frac{n-2}{2}} (\mu_t^2 + 1 - \cos r_t)^{-\frac{n-2}{2}}$$

où $r_t(x) = d_{\mathbf{s}}(x, x_t)$ et μ_t est une suite de réels convergeant vers 0. Alors

$$\int_M u_t^{2^*} dv_{\mathbf{s}} = 1$$

et on obtient ainsi une suite de solutions de l'équation

$$\triangle_{\mathbf{s}} u_t + \frac{n-2}{4(n-1)}.u_t = K(n,2)^{-2} u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où le second membre ne vérifie pas (H_f), avec

$$Sup_M u_t = u_t(x_t) = \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Cette suite se concentre et vérifie toutes les propriétés a/ à d/ exposées dans la quatrième partie du chapitre 3, ceci quelque soit le choix de la suite $x_t \to x_0$ et de la suite $\mu_t \to 0$. Par symétrie sphérique, on peut facilement trouver deux suites (x_t) et (μ_t) telles que

$$\frac{d_{\mathbf{s}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \to +\infty$$

en prenant par exemple $\mu_t = d_{\mathbf{s}}(x_t, x_0)^2$.

Encore une fois, il semble que l'hypothèse faite sur f "fixe" la position du point de concentration, et ainsi "impose" une vitesse de convergence à la suite (x_t).

8.2 Quelques questions et perspectives.

Nous avons vu que l'étude des équations $\triangle_{\mathbf{g}} u + hu = fu^{2^*-1}$ était liée à celle des meilleures constantes dans les inclusions de Sobolev de H_1^2 dans $L^{\frac{2n}{n-2}}$. De la

même manière, l'étude des inclusions de Sobolev de H_1^p dans $L^{\frac{pn}{n-p}}$, où $\frac{pn}{n-p}$ est l'exposant critique, et des meilleures constantes associées, passe par l'étude des équations de la forme

$$\triangle_p u + hu = fu^{\frac{pn}{n-p}-1}$$

où $\triangle_p u = -\nabla(|\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2}\nabla u)$ est le p-laplacien ; voir par exemple O. Druet, E. Hebey [11] et Z. Faget [14]. Là aussi les méthodes variationnelles sont à la base de l'étude : la fonctionnelle considérée est

$$I(u) = \int |\nabla u|_{\mathbf{g}}^p + \int hu^p$$

d'où le lien avec l'inclusion de Sobolev

$$(\int u^{\frac{pn}{n-p}})^{\frac{n-p}{n}} \leq K(n,p)\int |\nabla u|_{\mathbf{g}}^p + B\int u^p$$

où $K(n,p)$ est la meilleure constante associée. Le résultat de départ est encore le suivant : Si

$$\underset{\int u^{\frac{pn}{n-p}}=1}{Inf} \quad I(u) < K(n,p)^{-1}(Supf)^{-\frac{n-p}{n}}$$

alors l'équation a une solution minimisante $u > 0$ (sachant que l'inégalité large est toujours vraie). On voit donc qu'il est facile d'étendre la définition des fonctions critiques à cette situation. Il serait alors intéressant de savoir si l'on peut trouver des résultats analogues à ceux de notre travail dans ce cadre.

Rappelons également une question que nous avons soulevée à l'issue du chapitre 6 :

f étant donnée, existe-t-il des fonctions critiques constantes ?

Cela donnerait en quelque sorte une "seconde meilleure constante $B_0(\mathbf{g}, f)$" liée à f.

Terminons sur une question qui s'impose à l'issue de ce travail :

-Pour une fonction h quelconque sur M, existe-t-il des solutions (non minimisantes) à $\triangle_{\mathbf{g}} u + hu = fu^{2^*-1}$?

Nous avons en effet vu que cette équation avait des solutions (minimisantes) si h est sous-critique et si h est critique avec les hypothèses (H1) et (H2). Par contre, les théories variationnelles ne donnent aucune réponse si h est supérieure (et différente) à une fonction critique, ou si $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ n'est pas coercif. Dans ce cas, si des solutions existent, elles ne peuvent être minimisantes. Il faut donc employer d'autres méthodes pour étudier ces cas. Voir A. Bahri [4] qui traite le cas $f = cste$ et $3 \leq dimM \leq 6$.

Chapitre 9

Abridged English Version

9.1 Introduction

In the beginning was the Yamabe problem :

Yamabe problem *: Given a compact Riemannian manifold* $(M, \mathbf{g})$ *of dimension* $n \geq 3$*, does there exist a metric* $\mathbf{g'}$ *conformal to* $\mathbf{g}$ *having constant scalar curvature ?*

If we write $\mathbf{g'} = u^{\frac{4}{n-2}}.\mathbf{g}$ where $u > 0$ is a smooth function on M, the scalar curvatures are linked by the partial differential equation :

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}.u = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g'}}.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

where $S_{\mathbf{g}}$ is the scalar curvature of $\mathbf{g}$ and where $\triangle_{\mathbf{g}} = -\nabla^i \nabla_i$ is the Riemannian laplacian of $\mathbf{g}$.

To solve the Yamabe problem, one therefore has to prove the existence of a solution $u > 0$ to this partial differential equation when $S_{\mathbf{g'}}$ is a constant. More generaly, the prescribed curvature problems, which consist in deciding, given a smooth function f on M, if f is the scalar curvature of a metric conformal to $\mathbf{g}$, come down to prove the existence of a positive smooth solution u to the above equation when $S_{\mathbf{g}'}$ is replaced by f.

These problems launched the study of elliptic PDE on compact Riemannian manifolds of the form

$$(E_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

In all this paper M will be a compact Riemannian manifold of dimension $n \geqslant 3$, we will use the letter $\mathbf{g}$ or $\mathbf{g}'$ to denote a Riemannian metric on M ; h and f will always be smooth functions on M. We will always suppose the functions to be smooth, however in the definitions and in most of the theorems, continuity is in general sufficient. Beside, we will keep these notations, letter $\mathbf{g}$ for the metrics, letter h for the function on the left of equation $E_{h,f,\mathbf{g}}$, (defining the opperator $\triangle_{\mathbf{g}} + h$) ; and letter f for the function on the right of the equation ; the unknown function will be designated by u.

One of the possible methods to study these equation is the use of variational methods, which have the advantage of giving minimizing solutions, or solution of minimal energy. If one multiply equation $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ by u and integrate over M, one gets

$$\int_M |\nabla u|^2_{\mathbf{g}}\, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.u^2 dv_{\mathbf{g}} = \int_M f\,|u|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}}$$

The variational methods therefore lead to consider the functional

$$I_{h,\mathbf{g}}(w) = \int_M |\nabla w|^2_{\mathbf{g}}\, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.w^2 dv_{\mathbf{g}}$$

defined for $w \in H^2_1(M)$, the Sobolev space of L^2 functions whose gradient is also in L^2, and the minimum of this functional

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \inf_{w\in\mathcal{H}_f} I_{h,\mathbf{g}}(w)$$

on the set

$$\mathcal{H}_f = \{w \in H^2_1(M)/ \int_M f\,|w|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}} = 1\}.$$

The Euler equation associated with the minimization problem of this functional by a function u such that

$$I_{h,\mathbf{g}}(u) = \inf_{w\in\mathcal{H}_f} I_{h,\mathbf{g}}(w)$$

is indeed exactly

$$(E_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + hu = \lambda_{h,f,\mathbf{g}}.f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

where $\lambda_{h,f,\mathbf{g}}$ appears as a normalizing constant due to the condition

$$\int_M f\,|u|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}} = 1.$$

It is sometimes usefull to consider the functional

$$J_{h,f,\mathbf{g}}(w) = \frac{\int_M |\nabla w|^2_{\mathbf{g}}\, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.w^2 dv_{\mathbf{g}}}{\left(\int_M f\,|w|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

and the subset of $H^2_1(M)$ where it is defined

$$\mathcal{H}^+_f = \{w \in H^2_1(M)/ \int_M f\,|w|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}} > 0\}.$$

One then consider the minimisation problem by a function u such that

$$J_{h,f,\mathbf{g}}(u) = \inf_{w\in\mathcal{H}^+_f} J_{h,f,\mathbf{g}}(w),$$

the Euler equation being identical but without the normalizing constant. This functional sometimes present the advantage of being homogeneous in the sense that $J_{h,f,\mathbf{g}}(c.w) = J_{h,f,\mathbf{g}}(w)$ for any constant c. One therefore see that

$$\inf_{w\in\mathcal{H}_f} I_{h,\mathbf{g}}(w) = \inf_{w\in\mathcal{H}^+_f} J_{h,f,\mathbf{g}}(w) = \lambda_{h,f,\mathbf{g}}$$

This functional J also has the particularity, when $h = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}$, of being invariant by conformal changes of metrics ; it is therefore especially usefull when studying problems of prescribed scalar curvatures. We shall mostly use $I_{h,\mathbf{g}}$ and $\mathcal{H}_f$, but for some problems $J_{h,f,\mathbf{g}}$ will prove to be more convenient when we shall want to avoid the constraint $\int_M f\,|u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dv_{\mathbf{g}} = 1$.

We will say that a function $u \in H_1^2(M)$ is a solution of minimal energy, or a minimizing solution, if either $I_{h,\mathbf{g}}(u) = \lambda_{h,f,\mathbf{g}}$ with $\int_M f u^{\frac{2n}{n-2}} = 1$, or $J_{h,f,\mathbf{g}}(u) = \lambda_{h,f,\mathbf{g}}$. Then, up to multiplying it by a constant, u is stricly positive and smooth, and it is a solution of

$$(E_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + hu = \lambda_{h,f,\mathbf{g}}.f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

with or without the normalizing constant which can always be supressed just by multipliying again u by a constant. Please, note that we will use these notations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ and $\lambda_{h,f,\mathbf{g}}$ throughout all this article.

Th. Aubin discoverded a very important relation between equation $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ and the notion of best constant in the Sobolev imbedding theorems. Remember that the inclusion of $H_1^2(M)$ in $L^p(M)$ is compact for $p < \frac{2n}{n-2}$ and only continuous for $p = \frac{2n}{n-2}$ which is called the critical exponant for the Sobolev imbeddings and will be noted $2^* = \frac{2n}{n-2}$. The continuous imbedding $H_1^2(M) \subset L^{2^*}(M)$ is expressed by the existence of two positive constants A and B such that :

$$\forall u \in H_1^2(M) : \left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq A \int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^2\,dv_{\mathbf{g}} + B \int_M u^2 dv_{\mathbf{g}} \qquad (9.1)$$

The best first constant is the minimum A that one can put in (1) such that there exist B with (1) still true. It was proved by E. Hebey and M. Vaugon [19] that this minimum is attained, and its value is known to be the same as for the sharp euclidean Sobolev inequality,

$$A_{min} = K(n,2)^2 = \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}$$

where ω_n is the volume of the unit sphere of dimension n. One then take $B_0(\mathbf{g})$ to be the minimum B such that (1) remains true with A_{min} ; it is proved that $B_0(\mathbf{g}) < +\infty$ [**?**]. The inequality : $\forall u \in H_1^2(M)$

$$\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq K(n,2)^2 \int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^2\,dv_{\mathbf{g}} + B_0(\mathbf{g}) \int_M u^2 dv_{\mathbf{g}} \qquad (9.2)$$

is then sharp with respect to both the first and second constants, in the sense that none of them can be lowered. If the value of the best constant $A_{min} = K(n,2)^2$ is known and independent of the manifold $(M,\mathbf{g})$, on the other hand, $B_0(\mathbf{g})$, as the notation indicates, depends on the geometry and its study is difficult ; it is for this purpose that "critical functions" were introduced by E.Hebey and M.Vaugon [20]. When there shall be no risk of confusion, these constants will be denoted by K et B_0.

As a remark, note that because of the compacity of the inclusion $H_1^2(M) \subset L^p(M)$ for $p < 2^*$, standard variational methods and elliptic theory give rapidly existence of minimizing solutions of the equation $\triangle_{\mathbf{g}} u + hu = f.u^{p-1}$ when

$\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is a coercive operator. The case $p = 2^*$ is therefore already a limit case. (Very little is known for $p > 2^*$ without additional hypothesis, like e.g. invariance by symetry, see [15].)

The best constants in the Sobolev embedding appeared in the study of equations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ when Th. Aubin proved the following theorem :

Theorem (Aubin)**.** *For any Riemannian manifold $(M, \mathbf{g})$ of dimension $n \geqslant 3$, any function h such that $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is a coercive operator, and any function f such that $\underset{M}{Sup} f > 0$, one always has*

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}} \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Furthermore, if this inequality is strict, then there exists a minimizing solution for $(E_{h,f,\mathbf{g}})$.

This theorem is the starting point of all this work. It proves the existence of minimizing solutions to equation $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ under the hypothesis :

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}} < \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Our work is essentially concerned with the problem of the existence of minimizing solutions to these equations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ in the "critical case" where

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}},$$

problem which is normally not solved by variational methods. It is for the study of this problem that we are now going to define the "critical functions".

Let us first review the datas :

Datas : Throughout this article, $(M, \mathbf{g})$ will be a compact Riemannian manifold of dimension $n \geqslant 3$. We let $f : M \to \mathbb{R}$ be a fixed smooth function such that $\underset{M}{Sup} f > 0$. Let also $h : M \to \mathbb{R}$ be a smooth function with the additional hypothesis that the operator $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive if f is not positive on all of M. (Remember that continuity of h and f is sufficient in the definitions and in most of the theorems. Also, if $f \leqslant 0$ on M, classical variational methods already give a lot of results for the existence of solutions ; therefore $Sup f > 0$ is the most interesting case.)

Definition 1. *With these datas, and with the above notations, we say that :*

- *h is weakly critical for f and $\mathbf{g}$ if $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$*
- *h is subcritical for f and $\mathbf{g}$ if $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} < \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$*
- *h is **critical** for f and $\mathbf{g}$ if h is weakly critical and if for any function $k \leq h$, $k \neq h$ such that $\triangle_{\mathbf{g}} + k$ is coercive, k is subcritical.*

Using the theorem of Th.Aubin, we can give an equivalent definition of critical functions. Indeed, using this theorem, it is easy to see that if h is weakly critical and $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ has a minimizing solution u, then h is a critical function; just note that for $k \leq h$, $k \neq h$, $I_{k,\mathbf{g}}(u) < I_{h,\mathbf{g}}(u)$. Therefore, we can give the following equivalent definition :

Definition 2. *A function h is critical for f and $\mathbf{g}$ if :*
- *for any continuous function $k \leq h$, $k \neq h$ such that $\triangle_{\mathbf{g}} + k$ is coercive, (which is the case as soon as k is close enough to h in C^0), $(E_{k,f,\mathbf{g}})$ has a minimizing solution,*
- *for any continuous function $k' \geq h$, $k' \neq h$, $(E_{k',f,\mathbf{g}})$ has **no** minimizing solution.*

Remark : if h is weakly critical for a positive function f, necessarily, $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive; just use the Sobolev inequality.

Critical functions are thus introduced as "separating" functions giving rise to an equation having minimizing solutions, and functions giving rise to an equation that cannot have any such solution. We therefore have transformed the problem of the existence of minimizing solutions when $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$ to the problem of existence of minimizing solutions to $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ when h is a critical function.

Before passing to the theorems proved in this work, we have to give two very important properties of critical functions.

First, they transform in conformal changes of metric exactly like scalar curvature : indeed, let $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ and $\mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$ a metric conformal to $\mathbf{g}$. Let also h be a smooth function. We set

$$h' = \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u}{u^{\frac{n+2}{n-2}}}.$$

Then, some computations show that h is critical for f and $\mathbf{g}$ iff h' is critical for f and $\mathbf{g}'$.

Second, we come back to the evaluation of $\lambda_{h,f,\mathbf{g}}$. Th. Aubin introduced, in the functional $J_{h,f,\mathbf{g}}$ the following test functions :

$$\psi_k(Q) = \begin{cases} (\frac{1}{k} + r^2)^{-\frac{n-2}{2}} - (\frac{1}{k} + \delta^2)^{-\frac{n-2}{2}} & if\, r < \delta \\ 0 \quad if \;\; r \geq \delta \end{cases}$$

where : $\delta < injM$ (the injectivity radius of M), $P \in M$ is a fixed point, $k \in \mathbb{N}^*$, and where $r = d_{\mathbf{g}}(P, Q)$. When $dimM = n \geqslant 4$, we get, if P is a point where f is maximum on M :

$$J_{h,f,\mathbf{g}}(\psi_k) = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \left\{ 1 + \frac{1}{n(n-4)} \left(\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) - S_{\mathbf{g}}(P) + \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} \right) \frac{1}{k} \right\} + o(\frac{1}{k})$$

We therefore get the following important proposition :

Proposition 1. *If $dimM \geq 4$ and if h is weakly critical for f and $\mathbf{g}$ (thus in particular if it is critical), as $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$, necessarily, if P is a*

point of maximum of f :

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) \geq S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

Remark : if f is constant on M, this means that $\frac{4(n-1)}{n-2}h \geq S_{\mathbf{g}}$ on all of M. Note also that in dimension 4, the term $\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$ disappears.

9.2 Statement of the results

In all what follows, we will make the following hypothesis :

Hypothesis (H) : We now suppose that $dimM = n \geqslant 4$. We suppose that all our functions h are such that $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive. Also, f will always be a smooth function such that $\underset{M}{Sup} f > 0$. We will denote $Max\, f = \{x \in M / f(x) = \underset{M}{Sup} f\}$.

Our first theorem concerns the existence of minimizing solutions to $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ when h is critical.

Theorem. *If h is a critical function for f and $\mathbf{g}$, ($h, f, \mathbf{g}$ verifying **H**), and if for all point P where f is maximum on M, we have*

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)},$$

then there exist a minimizing solution for $(E_{h,f,\mathbf{g}})$.

This theorem is an immediate consequence of the following result, more general but more technical in its statement. (Just take $h_t = h - t$ to get the theorem above.)

Theorem 1. *Let h be a weakly critical function for f and $\mathbf{g}$, (assuming hypothesis **H**). If, for all point P where f is maximum, we have*

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)},$$

and if there exists a family of functions (h_t), $h_t \lneqq h$, h_t being sub-critical for all t in a neighbourhood of a real $t_0 \in \mathbb{R}$, and such that $h_t \underset{t \to t_0}{\to} h$ in $C^{0,\alpha}$, then there exists a minimizing solution for $(E_{h,f,\mathbf{g}})$, and therefore, h is critical for f and $\mathbf{g}$.

E. Hebey and M. Vaugon, in the context of their study of $B_0(\mathbf{g})$, proved this theorem in the case where f is constant, and as them, we base our computations on the article of Djadli and Druet [9]. The presence of a non-constant function f on the right of equation $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ introduces new difficulties in the proof, and requires the use of very powerfull estimates concerning concentration phenomena's, called $C^0 - theory$, due to Druet and Robert [13] ; the use of $C^0 - theory$ was kindly suggested to us by E. Hebey. Also, an alternate proof, not using $C^0 - theory$, thus in some sense more elementary, but requiring the additional hypothesis that the hessian of f is non-degenerate at its points of maximum on

M, will, as a "byproduct", prove another very important estimate concerning these concentration phenomena's, not available without heavy hypothesis in the case when f is a constant function ; this estimate concerns the speed of convergence to a concentration point, (see subsection 4.2), is of independent interest, and was obtained in the author's PHD thesis to prove theorem 1.

The next natural question is of course to know if there exist critical functions. The answer, positive, will appear to be a consequence of theorem 1. We will say that a set $E \subset M$ is *thin* if $M - E$ contains a dense open subset.

Theorem 2. *Being given the manifold $(M, \mathbf{g})$ and a non constant function f, there exist infinitely many functions h critical for f and $\mathbf{g}$, which satisfy, in each point P of maximum of f,*

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} \quad (*)$$

By theorem 1, these critical functions are such that $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ have minimizing solutions. Also, if the set of maximum points of f is thin and if $\int_M f > 0$, there exist strictly positive such critical functions h, i.e. satisfying (*).

These first theorems lead us to modify slightly our vision of critical functions. Note that in equation $(E_{h,f,\mathbf{g}})$, there are three datas that one can modify : the functions h and f, of course, but also the metric $\mathbf{g}$ in a conformal class, as, by the conformal laplacian transformation formula, the equation is changed in a similar one if we change $\mathbf{g}$ in $\mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}.\mathbf{g}$. This lead us to the following definition :

$(h, f, \mathbf{g})$ *is a critical triple if h is a critical function for f and $\mathbf{g}$.*

We shall say that the triple $(h, f, \mathbf{g})$ has minimizing solutions if $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ has ; we can also speak of weakly critical or sub-critical triples.We then asked ourselves the following question :

Being given two of the three datas of a triple, can one find the third to obtain a critical triple ?

For example, the problem of the existence of critical functions can be formulated in the following manner : we are given the function f and the metric $\mathbf{g}$, can we complete the triple $(., f, \mathbf{g})$ by a function h to obtain a critical triple $(h, f, \mathbf{g})$?

We adress the two other questions, first fixing h and f and seeking a conformal metric $\mathbf{g}'$, and then fixing the function h and the metric $\mathbf{g}$ and seeking a function f. We obtain answers expressed by the following two theorems :

Theorem 3. *On the manifold $(M, \mathbf{g})$, let be given a function h and a function f, satisfying (**H**). We suppose that the set of maximum points of f is thin. Then, there exist a metric $\mathbf{g}'$ conformal to $\mathbf{g}$ such that $(h, f, \mathbf{g}')$ is a critical triple. Moreover, we can find $\mathbf{g}'$ such that $(h, f, \mathbf{g}')$ has minimizing solutions.*

This theorem was proved by E. Humbert and M. Vaugon in the case $f = cst = 1$ and M not conformally diffeomorphic to the sphere,[21]. Their method works in the case of a non constant function f and an arbitrary manifold once it is proved that we can suppose the existence of positive critical functions satisfying the strict inequality (*) in theorem 2, result we included in this theorem (note that, as $Supf > 0$, we can always find a metric **g'** conformal

to $\mathbf{g}$ such that $\int_M f dv_{\mathbf{g}'} > 0$). In fact, when M is not conformally diffeomorphic to the sphere and $S_{\mathbf{g}}$ is constant, it can be proved that $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ is a critical (constant) function for 1 and $\mathbf{g}$, and it is obviously positive. We will discuss weaker hypothesis for this theorem, as well as the problem of existence of positive critical functions in section 6.

The last question brings us to the following answer when the dimension of M is greater than 5, requirement which is linked to the fact that $\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$ dissapears in dimension 4 in the inequality of Proposition 1.

Theorem 4. *Let be given the manifold $(M, \mathbf{g})$ of dimension $n \geq 5$, and a function h such that $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive. Then, there exists a non constant function f such that $(h, f, \mathbf{g})$ is critical with minimizing solutions if, and only if, $(h, 1, \mathbf{g})$ is a sub-critical triple (where 1 is the constant function 1).*

Note that if $(h, 1, \mathbf{g})$ is weakly critical, then either this triple has minimizing solutions in which case it is a critical triple, or there is no non-constant function f such that $(h, f, \mathbf{g})$ is critical with minimizing solutions (see the proof and what follows). The proof of this theorem is quite difficult, and make use of the method developped for the proof of theorem 1. Also, this proof brought us to make some more remarks about critical functions. First, it is easily seen, by using the functional J, that if $(h, f, \mathbf{g})$ is a critical triple, then, for any constant $c > 0$, $(h, c.f, \mathbf{g})$ is also a critical triple. It would therefore be more appropriate to speak of triple $(h, [f], \mathbf{g})$ where $[f] = \{c.f\ /c > 0\}$ could be called the "class" of f. Note for example that we can always suppose that $Supf = 1$; also, to compare two triples $(h, f, \mathbf{g})$ and $(h, f', \mathbf{g})$, one has to suppose that $Supf = Supf'$. Note also that on $[f]$, the quotient $\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f}{f}$ is constant. Second, in the proof of theorem 4, we had to approximate the function f by a family (f_t), unlike theorem 1 where we used a family (h_t) approaching h. This suggested another possible definition of critical functions, dual to the first one in the sense that we exchange the role of h and f.

Definition 3. *Let $(M, \mathbf{g})$ be of dimension $n \geq 3$ and h be such that $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive. We shall say that a smooth function f such that $\underset{M}{Sup} f > 0$ is critical for h and $\mathbf{g}$ if :*

- *a/ :* $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$
- *b/ : for any smooth function f' such that $Supf = Supf'$ and $f' \gneqq f$,*

  $\lambda_{h,f',\mathbf{g}} < \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f')^{\frac{n-2}{n}}}$
- *Remark : if $Supf = Supf'$ and $f' \lneqq f$, then* $\lambda_{h,f',\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f')^{\frac{n-2}{n}}}$

  as $J_{h,f',\mathbf{g}}(w) \geqslant J_{h,f,\mathbf{g}}(w)$for any function w.

It is then natural to ask if the two definitions are equivalent ($\mathbf{g}$ being fixed) :

Is f critical for h if, and only if, h is critical for f ?

This question seems quite difficult. A positive answer would justify the concept of critical triple. Remember that, because of proposition 1, we have in both cases, when P is a point where f is maximum on M :

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) \geqslant S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}.$$

We obtain the following theorem :

Theorem 5. *Let $(M, \mathbf{g})$ be a compact manifold of dimension $n \geq 5$, and let h be a function such that $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive. Let f be a smooth function such that $\underset{M}{Sup} f > 0$. We suppose that for any point P where f is maximum on M :*

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}.$$

Then, f is critical for h if, and only if, h is critical for f.

Remark : if 1 is critical for h, then every non constant function f, such that $Supf = 1$, is weakly critical for h with *no* minimizing solutions. Indeed, here again if a function f is weakly critical for h with a minimizing solution, then f is critical.

There is an interesting consequence of theorems 4 and 5. We said in the introduction that an important application of equations $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ was the study of prescribed scalar curvature : being given a smooth function f on the manifold $(M, \mathbf{g})$, is f the scalar curvature of a metric conformal to $\mathbf{g}$? The theorem of Th. Aubin shows that if f is sub-critical for $S_{\mathbf{g}}$, then f is a scalar curvature. Theorem 4 applied to $h = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}$ shows that :

On a compact manifold $(M, \mathbf{g})$ not conformaly diffeomorphic to the sphere, there exist scalar curvatures of metric conformal to $\mathbf{g}$ that are only weakly critical, (more precisely critical).

Another application, remarked by E. Hebey, is the study of *Sobolev inequality in the presence of a twist.*

The previous theorems all deal with manifolds of dimension at least 4, or even 5. We will give results concerning the dimension 3 in the last section. They are very interesting, but they are rapid generalisations of results obtained by O. Druet in the case $f = constant$ [10], the introduction of a non constant f introducing this time no real difficulties.

9.3 The three main tools

We want to present here the three main tools used in the proof of our various theorems. These tools were developed by several persons since M. Vaugon and P.L. Lions, essentially E. Hebey, O. Druet F. Robert, M. Struwe, E. Humbert and Z. Faget, among others.

9.3.1 The concentration point.

To prove the existence of a solution $u > 0$ to our equation

$$(E_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \lambda.f.u^{\frac{n+2}{n-2}},$$

the idea will often be to associate a family of equations having minimizing solutions $u_t > 0$:

$$E_t : \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

with

$$h_t \to h \ \ in \ \ C^{0,\alpha}(M)$$

and $\lambda_t \to \lambda$ a converging sequence of real numbers, in such a way that for some $u \in H_1^2 : u_t \to u$ strongly in L^p , $p < 2^*$, and $u_t \rightharpoonup u$ weakly in H_1^2 with a constraint

$$\int_M f.u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1.$$

To simplify, we will suppose that all convergences are for $t \to t_0 = 1$. The difficulty will be to prove that u is not the trivial zero solution, as then, by the maximum principle, we have $u > 0$. We will proceed by contradiction, and suppose $u \equiv 0$. The idea is then that, because of the condition $\int_M f.u_t^{2^*} = 1$, all the "mass" of the functions u_t, which converge to 0 in L^p , $p < 2^*$, concentrates around a point of the manifold. We thus define :

Definition 4. *$x_0 \in M$ is a point of concentration of the sequence (u_t) if for any $\delta > 0$:*

$$\limsup_{t \to t_0} \int_{B(x_0,\delta)} u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} > 0$$

It is easy to see that because M is compact and we require $\int_M f.u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$, there exist at least one point of concentration. We will show that there exists only one point of concentration, that it is a point where f is maximum, and that there exist a sequence of points x_t converging to a point $x_0 \in M$ such that

$$u_t(x_t) = \max_M u_t \to +\infty,$$

and

$$u_t \to 0 \ \ in \ \ C^0_{loc}(M - \{x_0\}).$$

In fact the idea is that one can do "as if" the functions u_t have compact support in a small neigbourhood of x_0 when t is close to t_0.

9.3.2 Blow-up analysis

Thanks to the concentration point, one brings back the study of the family u_t converging to 0, to what happens around x_0. The idea of *blow-up analysis* is to do a "change of scale" around x_0 : we will call *blow-up* of center x_t and coefficient k_t the following sequence of charts and changes of metrics. We consider, for δ small enough :

$$\begin{array}{ccccc} B(x_t,\delta) & \overset{\exp_{x_t}^{-1}}{\to} & B(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n & \overset{\psi_{k_t}}{\to} & B(0,k_t\delta) \subset \mathbb{R}^n \\ & & x & \mapsto & k_t x \\ \mathbf{g} & \to & \mathbf{g}_t = \exp_{x_t}^* \mathbf{g} & \to & \widetilde{\mathbf{g}}_t = k_t^2 (\psi_{k_t}^{-1})^* \mathbf{g}_t \end{array}$$

where $\exp_{x_t}^{-1}$ is the chart deduced from the exponential map in x_t. We set

$$\overline{u}_t = u_t \circ \exp_{x_t} ; \overline{f_t} = f \circ \exp_{x_t} ; \overline{h_t} = h_t \circ \exp_{x_t}$$

We have

$$\begin{array}{rcl} \triangle_{\mathbf{g}_t} \overline{u}_t + \overline{h}_t.\overline{u}_t & = & \lambda_t \overline{f_t}.\overline{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}} \\ \displaystyle\int_{B(0,r)} \overline{u}_t^\alpha dv_{\mathbf{g}_t} & = & \displaystyle\int_{B(x_t,r)} u_t^\alpha dv_{\mathbf{g}} \text{ for all } \alpha \geq 1 \end{array}$$

We then set

$$m_t = \underset{M}{Max}\, u_t\,;\ \widetilde{u}_t = m_t^{-1}\overline{u}_t\circ\psi_{k_t}^{-1}\,;\ \widetilde{h}_t = \overline{h}_t\circ\psi_{k_t}^{-1}\,;\ \widetilde{f}_t = \overline{f}_t\circ\psi_{k_t}^{-1}\,;\ \widetilde{\mathbf{g}}_t = k_t^2(\exp_{x_t}\circ\psi_{k_t}^{-1})^*\mathbf{g},$$

so in particular $\widetilde{u}_t(x) = m_t^{-1}\overline{u}_t(\frac{x}{k_t})$ *and* $\widetilde{\mathbf{g}}_t(x) = \exp_{x_t}^*\mathbf{g}(\frac{x}{k_t})$. Then :

$$\begin{aligned}(\widetilde{E}_t) \quad &: \quad \triangle_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\widetilde{u}_t + \frac{1}{k_t^2}\widetilde{h}_t.\widetilde{u}_t = \frac{m_t^{\frac{4}{n-2}}}{k_t^2}\lambda_t\widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}} \\ \textit{and} \quad &: \quad \int_{B(0,k_t r)}\widetilde{u}_t^\alpha dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} = \frac{k_t^n}{m_t^\alpha}\int_{B(x_t,r)}u_t^\alpha dv_{\mathbf{g}}\end{aligned} \tag{9.3}$$

We will mostly use the following parameters : we consider a sequence of points (x_t) such that :

$$m_t = \underset{M}{Max}\, u_t = u_t(x_t) := \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}$$

and

$$k_t = \mu_t^{-1}.$$

μ_t will appear to be a fundamental parameter in the study of concentration phenomena's. Noting (x^i) the coordinates in $\mathbb{R}^n$, one has :

$$\begin{aligned}(\widetilde{E}_t) \quad &: \quad \triangle_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\widetilde{u}_t + \mu_t^2.\widetilde{h}_t.\widetilde{u}_t = \lambda_t\widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}} \\ \textit{and} \quad &: \quad \int_{B(0,\mu_t^{-1}r)}x^{i_1}...x^{i_p}.\widetilde{u}_t^\alpha dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} = \mu_t^{-p-n+\alpha\frac{n-2}{2}}\int_{B(0,r)}x^{i_1}...x^{i_p}\overline{u}_t^\alpha dv_{\mathbf{g}_t}\end{aligned} \tag{9.4}$$

A very important result is that when $\mu_t \to 0$ and therefore $k_t \to +\infty$, the components of $\widetilde{\mathbf{g}}_t$ converge in C^2_{loc} to those of the euclidean metric, and $(\widetilde{E}_t)$"converges" to the equation :

$$\triangle_e\widetilde{u} = \lambda f(x_0).\widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

in the sense that

$$\widetilde{u}_t \to \widetilde{u} \ \ in \ \ C^2_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

It is known, then, that

$$\widetilde{u} = (1 + \frac{\lambda f(x_0)}{n(n-2)}\,|x|^2)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

9.3.3 The iteration process

The idea of the Möser iteration process is to multiply the equations (E_t) by succesive powers u_t^k of the functions u_t and to integrate over M to obtain bounds on increasing L^p-norms of the u_t. To localize the study around the concentration point x_0, which is a maximum point for f, we shall in fact multiply the equations by $\eta^2 u_t^k$ where η is a cut-off function equal to 1 (resp.0) on a ball $B(x_0,r)$ where $f \geq 0$, and equal to 0 (resp. 1) on $M\backslash B(x_0,2r)$, and where $k \geq 1$, then integrate by part. We will therefore be able to study blow-up around x_0 using this method. We get after some integrations by parts, and using equation (E_t) :

$$\frac{4k}{(k+1)^2}\int_M\left|\nabla(\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})\right|^2 = \lambda_t\int_M f\eta^2 u_t^{\frac{n+2}{n-2}}u_t^k + \int_M(\frac{2}{k+1}\,|\nabla\eta|^2 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\eta\triangle\eta - \eta^2 h_t)u_t^{k+1} \tag{9.5}$$

where the integrals are taken with the measure $dv_{\mathbf{g}}$. Then using Hölder inequality, if $f \geq 0$ on $Supp\,\eta$ we obtain :

$$\lambda_t \int_M f\eta^2 u_t^{\frac{n+2}{n-2}} u_t^k \leq \lambda_t (\underset{Supp\,\eta}{Sup}\, f)^{\frac{n-2}{n}}.(\int_{Supp\,\eta} f u_t^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}}.(\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}$$

Then using Sobolev inequality :

$$(\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} \leq K(n,2)^2 \int_M \left|\nabla(\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})\right|^2 + B\int_M \eta u_t^{k+1}$$

with $B > 0$. Therefore :

$$\begin{aligned}\frac{4k}{(k+1)^2}(\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} \leq \quad & \lambda_t K(n,2)^2 (\underset{Supp\,\eta}{Sup}\, f)^{\frac{n-2}{n}}.(\textstyle\int_{Supp\,\eta} f u_t^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}}.(\textstyle\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} \\ & + \textstyle\int_M (\frac{4k}{(k+1)^2} B\eta + \frac{2}{k+1}|\nabla\eta|^2 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\eta\triangle\eta - \eta^2 h_t) u_t^{k+1}\end{aligned}$$

Then :

$$Q(t,k,\eta).(\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} \leq (\frac{4k}{(k+1)^2}B + C_0 + C_\eta)\int_{Supp\,\eta} u_t^{k+1} \tag{9.6}$$

where

$$Q(t,k,\eta) = \frac{4k}{(k+1)^2} - \lambda_t K(n,2)^2 (\underset{Supp\,\eta}{Sup}\, f)^{\frac{n-2}{n}}.(\int_{Supp\,\eta} f.u_t^{2^*})^{\frac{2}{n}}$$

where we remind that $2^* = \frac{2n}{n-2}$ and where $C_0\, et\, C_\eta$ are constants independant of k and t and such that $\forall k \geq 1, \forall t$:

$$\left\|\frac{2}{k+1}|\nabla\eta|^2 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\eta\triangle\eta\right\|_{L^\infty(M)} \leq C_\eta \;\; and \;\; \|h_t\|_{L^\infty(M)} \leq C_0\,.$$

If the sign of f changes on $Supp\,\eta$, we go back to Hölder's inequality :

$$\lambda_t \int_M f\eta^2 u_t^{\frac{n+2}{n-2}} u_t^k \leq \lambda_t (\underset{Supp\,\eta}{Sup}\, |f|).(\int_{Supp\,\eta} u_t^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}}.(\int_M (\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}$$

to obtain (6) with :

$$Q(t,k,\eta) = \frac{4k}{(k+1)^2} - \lambda_t K(n,2)^2 (\underset{Supp\,\eta}{Sup}\, |f|).(\int_{Supp\,\eta} u_t^{2^*})^{\frac{2}{n}} \tag{9.7}$$

One can also replace $\underset{Supp\,\eta}{Sup}\, |f|$ by $\underset{M}{Sup} f$.

The goal is to show that (ηu_t) is bounded in $L^{\frac{k+1}{2}2^*}$ and therefore that we can extract a sub-sequence converging strongly in L^{2^*}.

Remark Those three tools also work for more general equations that we can associate to $(E_{h,f,\mathbf{g}})$: $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \mu_h.f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$. like e.g. E_t : $\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f_t.u_t^{q_t-1}$ where $q_t \to 2^*$ and $f_t \to f$ in some L^p, still with $h_t \to h$ in $C^{0,\alpha}(M)$ and $\lambda_t \to \lambda$.

9.4 Proof of theorem 1

9.4.1 Setup

Let h be a weakly critical function for f and $\mathbf{g}$ such that for any $P \in M$ where f is maximum on M we have :

$$h(P) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

and such that there exist a family (h_t), $h_t \lneqq h$, h_t sub-critical for every t, and satisfying $h_t \underset{t \to t_0}{\to} h$ in $C^{0,\alpha}$. To simplify, we suppose that $t_0 = 1$ and that $t \to 1$. Then for every t :

$$\lambda_t := \lambda_{h_t, f, \mathbf{g}} < \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

and there exist a family u_t of minimizing solutions of the equations

$$E_t : \ \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t . u_t = \lambda_t . f . u_t^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ with } \int_M f u_t^{2^*} \, dv_{\mathbf{g}} = 1$$

We then see, as $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive, that the sequence (u_t) is bounded in H_1^2 (just multiply E_t by u_t and integrate on M). Thus, there exist a function $u \in H_1^2$, $u \geq 0$ such that, after extracting a subsequence,

$$u_t \overset{H_1^2}{\to} u \, ,$$
$$u_t \overset{L^2}{\to} u \, ,$$
$$u_t \overset{p.p.}{\to} u \, ,$$

and we can suppose

$$\lambda_t \overset{<}{\to} \lambda \leqslant \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ .$$

In particular

$$u_t \overset{L^p}{\to} u, \ \forall p < 2^* = \frac{2n}{n-2}$$

as the inclusion of H_1^2 in L^p is compact $\forall p < 2^*$. Therefore u is a weak solution of

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h . u = \lambda . f . u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

and by standard elliptic theory, u is C^∞. The maximum principle then gives us that either $u > 0$ or $u \equiv 0$.

If $u > 0$ then, using elliptic theory and iteration process, and the fact that h is weakly critical, one can prove that :

$$\lambda = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

and then that u is a minimizing positive solution of

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} . f.u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ with } \int_M f u^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$$

and the theorem is proved.

If $u \equiv 0$, we will show that there is a concentration phenomena. All the study that follows will aim at finding a contradiction. From now, we suppose that we are in this case :

$$u \equiv 0.$$

9.4.2 Concentration phenomena

In this section we study the behavior of a family of $C^{2,\alpha}$ solutions (u_t) of

$$\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t u_t = \lambda_t f u_t^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ with } \int_M f u_t^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} = 1$$

where f is a smooth function such that $\underset{M}{Sup} f > 0$. We also suppose that $h_t \to h$ in $C^{0,\alpha}$ where h is such that $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive. The sequence (u_t) is bounded in H_1^2, therefore,up to a subsequence, $u_t \rightharpoonup u$ weakly in H_1^2, and we supose that $u \equiv 0$; that is $u_t \to 0$ in any L^p for $p < 2^*$. We also make the following "minimal energy" hypothesis :

$$\lambda_t \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

and we can suppose that $\lambda_t \to \lambda$. All this hypothesis are satisfied by the u_t of the preceding section. The results of this section are valid for $dim M = 3$, exept L^2-concentration, valid for $\dim M \geq 4$. In all this text, c, C are constants independant of t and δ.

Proposition 2. *There exist, after extraction of a subsequence, exactly one concentration point x_0, and it is a point where f is maximum on M. Moreover*

$$\forall \delta > 0, \ \overline{\lim_{t \to 1}} \int_{B(x_0,\delta)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$$

Proof : We apply the iteration process. First, as M is compact, there exist at least one point of concentration. Otherwise, we could cover M by a finite number of balls $B(x_i, \delta)$ such that $\lim_{t \to 1} \int_{B(x_i,\delta)} u_t^{2^*} = 0$, and we would have $\lim_{t \to 1} \int_M u_t^{2^*} = 0$, which would contradict

$$1 = \int_M f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} \leq Sup\,|f| \int_M u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}}$$

The principle of iteration process is the following : if we find, for a point x, a cut-off function η equal to 1 around x such that $Q(t,k,\eta) \geq Q > 0$, we get, using formula (6) or (7), that $(\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})$ is bounded in L^{2^*}, and therefore we can extract a subsequence such that (ηu_t) converges strongly to 0 in L^{2^*} ; thus x cannot be a concentration point.

Let us prove now that we can do this for a point x such that $f(x) \leq 0$. If $f(x) < 0$, we choose δ small enough such that $f < 0$ on $B(x,\delta)$ and we choose η with support in $B(x,\delta)$. As (u_t) is bounded in H_1^2 and thus in L^{2^*}, we get using formula (5), that for any k such that $1 \leq k \leq 2^* - 1$:

$$\frac{4k}{(k+1)^2}\int_M \left|\nabla(\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})\right|^2 \leq \int_M (\frac{2}{k+1}\left|\nabla\eta\right|^2 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\eta\triangle\eta - \eta^2 h_t)u_t^{k+1} \leq C_1$$

where C_1 is independent of t. Therefore for any k such that $1 \leq k \leq 2^* - 1$ there exist C_2 independent of t such that :

$$\int_M \left|\nabla(\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})\right|^2 \leq C_2$$

Therefore $(\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})$ is bounded in H_1^2 and, using Sobolev inequality, $(\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})$ is bounded in L^{2^*} for any k such that $1 \leq k \leq 2^* - 1$.

If $f(x) = 0$, by continuity of f and choosing δ small enough, we get in (7) that for any k such that $1 \leq k \leq 2^* - 1$, $Q(t,k,\eta) \geq Q > 0$. Therefore, as we said, here again $(\eta u_t^{\frac{k+1}{2}})$ is bounded in L^{2^*}, and therefore we can extract a subsequence such that (ηu_t) converges strongly to 0 in L^{2^*}. Thus, when $f(x) \leq 0$, x cannot be a concentration point.

Now, let x be a concentration point : $f(x) > 0$ as we just saw. For $\delta > 0$ such that $f \geq 0$ on $B(x,\delta)$, set

$$\limsup_{t\to 1}\int_{B(x,\delta)} f u_t^{2^*} = a_\delta$$

Then as $\int_M f u_t^{2^*} = 1$ and as $\overline{lim}\int_B f u_t^{2^*} = 0$ if $f \leqslant 0$ on B from what we saw above, necessarily, $a_\delta \leq 1$. Suppose that there exist $\delta > 0$ such that $a_\delta < 1$. Because

$$\lambda_t \underset{\leqslant}{\to} \lambda \leqslant \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

we get

$$\overline{\lim_{t\to 1}}\, \lambda_t K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}} a_\delta < 1.$$

Beside, $\frac{4k}{(k+1)^2} \underset{k\to 1}{\underset{>}{\to}} 1$. Therefore, for k close to 1 such that

$$\overline{\lim_{t\to 1}}\, \lambda_t K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}} a_\delta < \frac{4k}{(k+1)^2}$$

we get, taking η with support in $B(x,\delta)$, that in formula (6) : $Q(t,k,\eta) \geq Q > 0$ for all t, where Q is independent of t. So, as before, x cannot be a concentration point, and we have a contradiction. Thus $a_\delta = 1$, $\forall\delta > 0$. Therefore x is the only concentration point, that we will now denote x_0. The same reasonning shows that, necessarilly,

$$\lambda = \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}\ .$$

In the same way, if $f(x_0) \neq \underset{M}{Sup} f$, there exist $\delta > 0$ such that $\underset{B(x_0,\delta)}{Sup} f < \underset{M}{Sup} f$. But $\lambda_t \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$, so

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \lambda_t K(n,2)^2 (\underset{B(x_0,\delta)}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}} (\int_{B(x_0,\delta)} f u_t^{2^*})^{\frac{2^*-2}{2^*}} < 1 \ .$$

Then for k close enough to 1, taking η with support in $B(x_0,\delta)$, we get in (6) : $Q(t,k,n) \geq Q > 0$ for all t ; and once again we have a contradiction. Therefore $f(x_0) = \underset{M}{Sup} f > 0$.

Note that this is the main particularity introduced by the function f on the right of equation $(E_{h,f,\mathbf{g}})$. It gives a precise location for the concentration point.

The next propositions concerning the concentration phenomenom are now quite standard, even though they are mostly published in the case $f = constant$ and often with few details. We shall therefore give possible proofs, refering to the books [**?**] and [**?**] for more information, the presence of a function f introducing only slight modifications that we will indicate when necessary.

Proposition 3. *$u_t \to 0$ in $C^0_{loc}(M - \{x_0\})$.*

Proof : It is a typical aplication of the iteration process in standard elliptic theory. First step : Let $q > 0$ be fixed. We prove that for any $\delta > 0$, there exists $C = C(\delta, q)$ independent of t such that for t close enough to 1 :

$$\|u_t\|_{L^q(M\backslash B(x_0,\delta))} \leq C \|u_t\|_{L^2(M)} \ . \tag{9.8}$$

To apply the iteration process, we build a sequence $\eta_1, ..., \eta_m$ of m cut-off functions such that $\eta_j = 0$ on $B(x_0, \delta/2)$ and $\eta_j = 1$ on $M\backslash B(x_0,\delta)$ and such that

$$M\backslash B(x_0,\delta) \subset ... \subset \{\eta_{j+1} = 1\} \subset Supp\, \eta_{j+1} \subset \{\eta_j = 1\} \subset ... \subset M\backslash B(x_0, \delta/2)$$

and where m is chosen such that $2(\frac{2^*}{2})^m > q$. We set $q_1 = 2$ and $q_j = (\frac{2^*}{2}) q_{j-1}$. The iteration process (6), (7), gives that

$$Q(t, q_j - 1, \eta_j).(\int_M (\eta_j u_t^{\frac{q_j}{2}})^{2^*})^{\frac{n-2}{n}} \leq (\frac{4(q_j-1)}{{q_j}^2} B + C_0 + C_{\eta_j}) \int_{Supp\, \eta_j} u_t^{q_j} \ .$$

But for $j \leq m$ we have $\frac{4(q_j-1)}{{q_j}^2} \geq c > 0$ and from proposition 2, $\int_{Supp\, \eta_j} u_t^{2^*} \to 0$, therefore in (7),

$$Q(t, q_j - 1, \eta_j) \geq c > 0, \forall j.$$

Thus there exists a neighborhood V_j of 1 and a constant $C_j > 0$ such that for $t \in V_j$:

$$(\int_M (\eta_j u_t^{\frac{q_j}{2}})^{2^*})^{\frac{n-2}{n}} \leq C_j \int_{Supp\, \eta_j} u_t^{q_j} \ .$$

Then by construction of the η_j we have

$$(\int_{\{\eta_j = 1\}} u_t^{q_j \frac{2^*}{2}})^{\frac{n-2}{n}} \leq C_j \int_{\{\eta_{j-1} = 1\}} u_t^{q_j}$$

and thus

$$\|u_t\|_{L^q(M\backslash B(x_0,\delta))} \leq C(\prod_{j=1}^{m} C_j)\, \|u_t\|_{L^2(M)} \ \ \forall t \in V_1 \cap ... \cap V_m\,.$$

Second step : By Gilbarg-Trudinger theorem (8.25) [**?**], we have : if u is solution of an equation E : $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = F$, where $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive, and if $\omega \subset\subset \omega'$ are two open set, for $r > 1$, $q > n/2$:

$$\underset{\omega}{Sup}\, u \leq c\, \|u\|_{L^r(\omega')} + c'\, \|F\|_{L^q(\omega')}\ . \tag{9.9}$$

This theorem is also an application of the iteration process. We apply it to E_t : $\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$ and to $\omega \subset\subset \omega' \subset M\backslash\{x_0\}$.

Then with the first step applied to $q\frac{n+2}{n-2}$, and chosing

$$\omega = M\backslash B(x_0,\delta),\ \omega' = M\backslash B(x_0,\delta/2),\ r = 2,\ q > n/2$$

we obtain

$$\begin{aligned} \underset{M\backslash B(x_0,\delta)}{Sup}\ u_t &\leq c\, \|u_t\|_{L^2(\omega')} + c'\lambda_t\, \|u_t\|^{\frac{n+2}{n-2}}_{L^{q\frac{n+2}{n-2}}(\omega')} \\ &\leq c\, \|u_t\|_{L^2(M)} + c''\, \|u_t\|^{\frac{n+2}{n-2}}_{L^2(M)} \end{aligned}$$

But $\|u_t\|_{L^2(M)} \to 0$, thus the result.

We recall now the notations of subsection (3.2) : we consider a sequence of points (x_t) such that

$$m_t = \underset{M}{Max}\, u_t = u_t(x_t) := \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}.$$

From proposition 3, $x_t \to x_0$ and $\mu_t \to 0$. Remember that $\overline{u}_t, \overline{f}_t, \overline{h}_t$, $\mathbf{g}_t$ are the functions and the metric "viewed" in the chart $\exp_{x_t}^{-1}$, and $\widetilde{u}_t$, $\widetilde{h}_t$, $\widetilde{f}_t$, $\widetilde{\mathbf{g}}_t$ are the functions and the metric after blow-up. From now, all the blow-up's will be made on balls $B(x_t,\delta)$ where $f \geq 0$, which is possible as $f(x_0) > 0$.

Proposition 4. *$\forall R > 0$: $\lim\limits_{t\to 1} \int_{B(x_t,R\mu_t)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1 - \varepsilon_R$ where $\varepsilon_R \underset{R\to+\infty}{\to} 0$.*

Proof : This is a direct application of blow-up analysis in x_t with $k_t = \mu_t^{-1}$:

$$\widetilde{u}_t \to \widetilde{u} = (1 + \tfrac{\lambda f(x_0)}{n(n-2)}\, |x|^2)^{-\frac{n-2}{2}} = (1 + \tfrac{f(x_0)^{\frac{2}{n}}}{K(n,2)^2 n(n-2)}\, |x|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \text{ in } C^2_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Then :

$$\int_{B(x_t,R\mu_t)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = \int_{B(0,R)} \widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \underset{t\to 1}{\to} f(x_0)(\int_{B(0,R)} \widetilde{u}^{2^*} dx) \underset{R\to\infty}{\to} 1$$

Proposition 5. ***Weak estimates, first part.***
$\exists C > 0$ such that $\forall x \in M$: $d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq C$.

Proof : Define $w_t(x) = d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x)$. We want to prove that there exists $C > 0$ such that $\underset{M}{Sup}\, w_t \leq C$. By contradiction, we suppose that (for a

subsequence) $\underset{M}{Sup}\, w_t \to +\infty$. Let y_t be a point where w_t is maximum. M being compact, $d_{\mathbf{g}}(x, x_t)$ is bounded, therefore $u_t(y_t) \to \infty$, and thus from proposition 3, $y_t \to x_0$. Besides, the definition of μ_t gives : $d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)\mu_t^{-1} \to +\infty$.

We do a *blow-up* of center y_t and coefficient $k_t = u_t(y_t)^{\frac{2}{n-2}}$. If $x \in B(0,2)$: $d_{\mathbf{g}}(x_t, \exp_{y_t}(u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}}x) \geq d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t) - 2u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}} \geq u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}}(w_t(y_t)^{\frac{2}{n-2}} - 2) \sim d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)$ as $w_t(y_t) \to \infty$ and $u_t(y_t) \to \infty$. Therefore, for t close to 1 : $d_{\mathbf{g}}(x_t, \exp_{y_t}(u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}}x) \geq \frac{1}{2}d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)$.

By consequence, for any $R > 0$ and t close to 1 : $B(y_t, 2u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}}) \cap B(x_t, R\mu_t) = \emptyset$ Thus, by proposition 4,

$$\begin{aligned}\int_{B(0,2)} \widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} &= \int_{B(y_t, 2u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}})} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} \leq \int_{M\setminus B(x_t, R\mu_t)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} \\ &\leq \int_M f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} - \int_{B(x_t, R\mu_t)} f u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} \\ &\underset{t\to 1, R\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

But the iteration process then gives that for $1 \leq k \leq 2^* - 1$:

$$\int_{B(0,1)} \widetilde{u}_t^{\frac{k+1}{2}2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \to 0$$

and by iteration we obtain that $\forall p \geq 1$:

$$\int_{B(0,1)} \widetilde{u}_t^p dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \to 0$$

We deduce that $\|\widetilde{u}_t\|_{L^\infty(B(0,1))} \to 0$ whereas $\widetilde{u}_t(0) = 1$. Thus a contradiction.

Proposition 6. ***Weak estimates, second part.***
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ *such that* $\forall t$, $\forall x \in M$:

$$d_{\mathbf{g}}(x, x_t) \geq R\mu_t \;\Rightarrow\; d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq \varepsilon.$$

Proof : We use the same method, supposing the existence of a $\varepsilon_0 > 0$ and $y_t \in M$ such that $\lim\limits_{t\to 1} d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)\mu_t^{-1} = +\infty$ and $w_t(y_t) = d_{\mathbf{g}}(y_t, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(y_t) \geq \varepsilon_0$. We do a blow-up of center y_t and coefficient $k_t = u_t(y_t)^{\frac{2}{n-2}}$ and with $m_t = u_t(y_t)$. Then, as in proposition 5, for any $R > 0$ and t close to 1 : $B(y_t, \frac{1}{2}\varepsilon_0^{\frac{2}{n-2}} u_t(y_t)^{-\frac{2}{n-2}}) \cap B(x_t, R\mu_t) = \emptyset$. Therefore, as previously : $\int_{B(0, \frac{1}{2}\varepsilon_0^{\frac{2}{n-2}})} \widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \to 0$ and we obtain in the same way a contradiction.

Proposition 7. ***L^2-concentration.***
If $\dim M \geq 4$, $\forall \delta > 0$:

$$\lim_{t\to 1} \frac{\int_{B(x_0,\delta)} u_t^2 dv_{\mathbf{g}}}{\int_M u_t^2 dv_{\mathbf{g}}} = 1$$

Proof : We first use the two first step of the proof of proposition 3 to show that there exists $c > 0$ such that :

$$\underset{M\setminus B(x_0,\delta)}{Sup}\, u_t \leq c\, \|u_t\|_{L^2(M)} \ .$$

Indeed, going over what we did there, :

$$\begin{aligned}\underset{M\setminus B(x_0,\delta)}{Sup}\ u_t &\leq c\left\|u_t\right\|_{L^2(\omega')} + c'\lambda_t\left\|u_t^{\frac{n+2}{n-2}}\right\|_{L^q(\omega')}\\ &\leq c\left\|u_t\right\|_{L^2(M)} + c'\lambda_t^q \underset{\omega'}{Sup}(u_t^{\frac{n+2}{n-2}-1})\left\|u_t\right\|_{L^q(\omega')}\\ &\leq c''\left\|u_t\right\|_{L^2(M)}\end{aligned}$$

as we know now that $\underset{\omega'}{Sup}(u_t^{\frac{n+2}{n-2}-1}) \to 0$ and that, on the other hand, the first step of the proof of proposition 3 gives $\left\|u_t\right\|_{L^q(\omega')} \leq C\left\|u_t\right\|_{L^2(M)}$

Third step : Using this :

$$\begin{aligned}\left\|u_t\right\|^2_{L^2(M\setminus B(x_0,\delta))} &\leq \underset{M\setminus B(x_0,\delta)}{Sup}\ u_t.\int_{M\setminus B(x_0,\delta)} u_t\\ &\leq c\left\|u_t\right\|_{L^2(M)}\left\|u_t\right\|_{L^1(M)}\end{aligned} \tag{9.10}$$

We now want to prove that

$$\left\|u_t\right\|_{L^1(M)} \leq c\left\|u_t\right\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}(M)}\ . \tag{9.11}$$

If $h > 0$, we get the result by integrating equation E_t. Otherwise, for any $q \in]2, 2^*[$, there exists $\varphi > 0$ solution of $\triangle_{\mathbf{g}}\varphi + h\varphi = \lambda_{h,f,\mathbf{g}}.f.\varphi^{q-1}$. We set

$$\mathbf{g}' = \varphi^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g} \text{ and } \overline{h_t} = \frac{\triangle_{\mathbf{g}}\varphi + h_t\varphi}{\varphi^{\frac{n+2}{n-2}}}$$

Then for t close to 1

$$\overline{h_t} = \varphi^{q-2^*} - (h - h_t)\varphi^{2-2^*} \geq \varepsilon_0 > 0$$

Besides, by conformal invariance, and using E_t, we have :

$$\triangle_{\mathbf{g}'}\overline{u_t} + \overline{h_t}.\overline{u_t} = \lambda_t f.\overline{u_t}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

where $\overline{u_t} = \varphi^{-1}.u_t$. Integrating, we obtain :

$$\varepsilon_0\int_M \overline{u_t}dv_{\mathbf{g}'} \leq \lambda_t Supf\int_M \overline{u_t}^{\frac{n+2}{n-2}}dv_{\mathbf{g}'}$$

and thus there exists $C > 0$ such that for t close to 1

$$\left\|u_t\right\|_{L^1(M)} \leq C\left\|u_t\right\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}(M)}$$

where the norms are now relative to $dv_{\mathbf{g}}$.

Fourth step : We conclude using Hölder's inequality. If $n = \dim M \geq 6$:

$$\left\|u_t\right\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}(M)} \leq \left\|u_t\right\|^{\frac{n+2}{n-2}}_{L^2(M)} Vol_{\mathbf{g}}(M)^{\frac{n-6}{2(n-2)}}\ .$$

With (10) and (11), we obtain :

$$\lim_{t\to 1}\frac{\left\|u_t\right\|^2_{L^2(M\setminus B(x_0,\delta))}}{\left\|u_t\right\|^2_{L^2(M)}} = 0$$

which proves the result. If $n = 5$, Hölder's inequality gives :

$$\|u_t\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}(M)} \leq \|u_t\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(M)} \|u_t\|^{\frac{5}{6}}_{L^{2^*}(M)}$$

and we also conclude using (10) and (11). If now $n = 4$, we have to use proposition 6 and the associated blow-up.

Proposition 8. ***Strong estimates.***
For any ν, $0 < \nu < n-2$, there exists a constant $C(\nu) > 0$ such that

$$\forall x \in M : d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{n-2-\nu} \mu_t^{-\frac{n-2}{2}+\nu} u_t(x) \leq C(\nu)$$

Proof : The proof requires the use of the Green function and of the weak estimates. The idea is due to O. Druet and F. Robert and can be found in [13]. We recall first the property of the Green function. If $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is a coercive operator, there exists a unique function (at least C^2 with our hypothesis) G_h : $M \times M \backslash \{(x,x), x \in M\} \to \mathbb{R}$ symetric and positive, such that in the sense of distributions, we have : $\forall x \in M$

$$\triangle_{\mathbf{g},y} G_h(x,y) + h(y) G_h(x,y) = \delta_x \tag{9.12}$$

Furthermore, there exists $c > 0$, $\rho > 0$ such that $\forall (x,y)$ with $0 < d_{\mathbf{g}}(x,y) < \rho$:

$$\frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x,y)^{n-2}} \leq G_h(x,y) \leq \frac{c^{-1}}{d_{\mathbf{g}}(x,y)^{n-2}} \tag{9.13}$$

$$\frac{|\nabla_y G_h(x,y)|}{G_h(x,y)} \geq \frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x,y)} \tag{9.14}$$

c and ρ vary continuously with h

$$G_h(x,y) d_{\mathbf{g}}(x,y)^{n-2} \to \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \text{ when } d_{\mathbf{g}}(x,y) \to 0 \tag{9.15}$$

To prove these strong estimates, it is sufficient, considering (13), to prove that $\mu_t^{\frac{n-2}{2}-(n-2)(1-\nu)} u_t(x) \leq c' G_h^{1-\nu}(x, x_t)$, (just change ν by $(n-2)\nu$). First, notice that, using for example the weak estimates, the strong estimates are true in any ball $B(x_t, R\mu_t)$ where R is fixed. We therefore have to prove the estimates in the manifold with boundary $M \backslash B(x_t, R\mu_t)$ whose boundary is $b(M \backslash B(x_t, R\mu_t)) = bB(x_t, R\mu_t)$. For ν small, there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that he operator

$$\triangle_{\mathbf{g}} + \frac{h - 2\varepsilon_0}{1-\nu}$$

is still coercive; let $\widetilde{G}$ be its Green function. To prove our esimate, we apply the maximum principle to : $L_t \varphi = \triangle_{\mathbf{g}} \varphi + h_t \varphi - \lambda_t f u_t^{2^*-2} \varphi$ and to $x \longmapsto \widetilde{G}^{1-\nu}(x, x_t) - c\mu_t^{\frac{n-2}{2}-(n-2)(1-\nu)} u_t(x)$. As $L_t u_t = 0$ with $u_t > 0$, L_t satisfies the maximum principle (see [13]). Using (12), the fact that $\delta_{x_t}(x) = 0$ on $M \backslash B(x_t, R\mu_t)$ and the fact that for t close to 1, $h_t - h \geq -\varepsilon_0$ (as $h_t \to h$ in C^0), some computations give that $\forall x \in M \backslash B(x_t, R\mu_t)$:

$$\frac{L_t \widetilde{G}^{1-\nu}}{\widetilde{G}^{1-\nu}}(x, x_t) \geq \varepsilon_0 - \lambda_t f(x) u_t(x)^{2^*-2} + \nu(1-\nu) \left| \frac{\nabla \widetilde{G}}{\widetilde{G}} \right|^2 (x, x_t) \tag{9.16}$$

We now separate $M\backslash B(x_t, R\mu_t)$ in two parts using a ball $B(x_t, \rho)$ where $\rho > 0$ is as in (13) and (14). For t close to 1, $\rho > R\mu_t$. $R > 0$ will be fixed later.

1/ :As $u_t \to 0$ in $C^0_{loc}(M\backslash\{x_0\})$, (16) gives for t close to 1 :

$$\forall x \in M\backslash B(x_t, \rho) : \; L_t\widetilde{G}^{1-\nu}(x, x_t) \geq 0.$$

2/ : Using the weak estimates (second part), in $B(x_t, \rho)\backslash B(x_t, R\mu_t)$:

$$d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^2 u_t(x)^{2^*-2} \leq \varepsilon_R$$

where $\varepsilon_R \underset{R\to\infty}{\to} 0$. Then, with (14) et (16), for R big enough :

$$\begin{aligned}
\frac{L_t\widetilde{G}^{1-\nu}}{\widetilde{G}^{1-\nu}}(x, x_t) \qquad &\geq \varepsilon_0 - \lambda_t f(x) u_t(x)^{2^*-2} + \nu(1-\nu)\frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^2} \\
&\geq \varepsilon_0 - \lambda_t(\underset{B(x_t,\rho)}{Sup} f).\frac{\varepsilon_R}{d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^2} + \nu(1-\nu)\frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^2} \\
&\geq \varepsilon_0 + \frac{c'}{d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^2} \geq 0
\end{aligned}$$

We have proved that in $M\backslash B(x_t, R\mu_t)$ and for any constant $C_t > 0$ which can depend of t :

$$L_t(C_t.\widetilde{G}^{1-\nu}(x, x_t)) = C_t.L_t\widetilde{G}^{1-\nu}(x, x_t) \geq 0 = L_t u_t$$

At last, on the boundary $b(M\backslash B(x_t, R\mu_t))$, using (13), we obtain :

$$\widetilde{G}^{1-\nu}(x, x_t) \geq \frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{(n-2)(1-\nu)}} = \frac{c}{(R\mu_t)^{(n-2)(1-\nu)}} \; .$$

So, if we let $C_t = c^{-1}R^{(n-2)(1-\nu)}\mu_t^{(n-2)(1-\nu)-\frac{n-2}{2}}$, we have for $x \in bB(x_t, R\mu_t) = b(M\backslash B(x_t, R\mu_t))$:

$$C_t.\widetilde{G}^{1-\nu}(x, x_t) \geq \mu_t^{-\frac{n-2}{2}} = Sup\, u_t \geq u_t(x)$$

Therefore, by the maximum principle :

$$C_t.\widetilde{G}^{1-\nu}(x, x_t) \geq u_t(x) \text{ in } M\backslash B(x_t, R\mu_t)$$

which can be rewriten

$$\widetilde{G}^{1-\nu}(x, x_t) \geq C_t^{-1}u_t(x) = c\; \mu_t^{\frac{n-2}{2}-(n-2)(1-\nu)}u_t(x)$$

and therefore, using (13) :

$$d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{(n-2)(1-\nu)}\mu_t^{\frac{n-2}{2}-(n-2)(1-\nu)}u_t(x) \leq c$$

which gives the strong estimates by changing ν in $(n-2)\nu$.

Proposition 9. ***Corollary : Strong L^p-concentration.***
$\forall R > 0$, $\forall \delta > 0$ *and* $\forall p > \frac{n}{n-2}$

$$\lim_{t\to 1}\frac{\int_{B(x_t,R\mu_t)} u_t^p dv_{\mathbf{g}}}{\int_{B(x_t,\delta)} u_t^p dv_{\mathbf{g}}} = 1 - \varepsilon_R \;\; \textit{where } \varepsilon_R \underset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Proof : Just apply the strong estimates to a blow-up in x_t. By blow-up formulae

$$\begin{aligned}\int_M u_t^p dv_{\mathbf{g}} &\geq \int_{B(x_t,\mu_t)} u_t^p dv_{\mathbf{g}} = \mu_t^{n-\frac{n-2}{2}p} \int_{B(0,1)} \widetilde{u}_t^p dv_{\widetilde{g}_t} \\ &\geq C\mu_t^{n-\frac{n-2}{2}p}\end{aligned}$$

On the other hand, by the strong estimates :

$$\begin{aligned}\int_{M\setminus B(x_t,R\mu_t)} u_t^p dv_{\mathbf{g}} &\leq C\mu_t^{p\frac{n-2}{2}} \int_{M\setminus B(x_t,R\mu_t)} d_{\mathbf{g}}(y_t,x)^{(2-n)p} dv_{\mathbf{g}} \\ &\leq C\mu_t^{n-p\frac{n-2}{2}} R^{n+(2-n)p}\end{aligned}$$

as soon as $p > \frac{n}{n-2}$. Dividing, we obtain the corollary.

At this point, to carry on the proof of theorem 1, we need a powerfull extension of the strong estimates, called $C^0 - theory$, which is in fact a complete control of the sequence $d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^{n-2}\mu_t^{-\frac{n-2}{2}} u_t(x)$; it is expressed by the next theorem of Druet and Robert, and proved in arbitrary energy in [O. Druet, E. Hebey, and F. Robert, "Blow-up Theory for Elliptic PDEs in Riemannian Geometry", Mathematical notes, Princeton University Press, vol. 45, 2004.]

Another approach, also accessible at this point and originally used in the author's PHD thesis, is to prove another very important estimate concerning the "speed" of convergence of (x_t) to x_0, but it requires the additional hypothesis that the Hessian of f is non-degenerate at the points of maximum of f ; it will be our theorem 6, whose proof is independent of the theorem of Druet-Robert, only requiring the results up to proposition 9, and appears as a byproduct of an alternative proof of theorem 1. It is however of independent interest, as it is a very important estimate concerning concentration phenomena's which has been studied by various authors.

We now state the theorem of Druet and Robert and refer for its proof to the reference cited above, the function f introducing no difficulties. It says first that one can take $\nu = 0$ in the strong estimates, but also that one has somehow the reverse estimate.

Theorem (Druet, Robert)**.** *For any $\varepsilon > 0$, there exist $\delta_\varepsilon > 0$ such that, up to a subsequence, for any t and any $x \in B(x_0,\delta_\varepsilon)$:*

$$(1-\varepsilon)B_t(x) \leq u_t(x) \leq (1+\varepsilon)B_t(x)$$

where

$$B_t(x) = \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}\Big(1 + \frac{\lambda f(x_0)}{n(n-2)}\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t,x)^2}{\mu_t^2}\Big)^{-\frac{n-2}{2}}$$

is the "standard bubble".

Note that in the proof of theorem 1, we will need the minoration : $(1-\varepsilon)B_t(x) \leq u_t(x)$, which is a stronger result than $u_t(x) \leq (1+\varepsilon)B_t(x)$ which must first be proved to get the minoration.

Finally, we come to our main result concerning the concentration phenomenom, which is the "missing link" between the sequence (x_t) and x_0.

Theorem 6. ***"Second fundamental estimate".*** *Suppose that $dimM \geq 5$ and that the hessian of the function f is non-degenerate at each of its points of maximum. Then, there exist a constant C such that for all t :*

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \leq C.$$

Moreover, if for each point P of maximum of f we have

$$h(P) = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)},$$

then more precisely

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \to 0.$$

To understand the significance of this theorem, note that the weak and strong estimates, the strong L^p-concentration and the estimates in the theorem of Druet-Robert, are "centered" in x_t. Theorem 6 allows one to "translate" these estimates in x_0 in the sense that one can now replace x_t by x_0. This estimate, called by Zoé Faget "second fundamental estimate", (the "first one" being the strong estimate), joined with the estimates of $C^0 - theory$ presented in the theorem of Druet and Robert above, gives a complete description of the behavior of a sequence of solutions of equations $\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t u_t = \lambda_t f u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$ in the spirit of the study of Palais-Smale sequences associated to these equations. It has been studied, for example, by Druet and Robert in the case $f = constant = 1$ in [13] where they require strong hypothesis on the shape of the functions h_t and on the geometry of the manifold near the concentration point, or by Hebey in the euclidean setting. Intuitively, it seems that our hypothesis on f "fixes" the position of the concentration point, and so we get a control on the distance between x_t and x_0. Also, our method seems to be applicable to other settings, see e.g. [15].

9.4.3 Proof of theorem 1

Remember that $\overline{u}_t, \overline{f}_t, \overline{h}_t, \mathbf{g}_t$ are the functions and the metric "viewed" in the chart $\exp_{x_t}^{-1}$, and $\widetilde{u}_t$, $\widetilde{h}_t$, $\widetilde{f}_t$, $\widetilde{\mathbf{g}}_t$ are the functions and the metric after blow-up with center x_t and coefficient $k_t = \mu_t^{-1}$. From now, all the blow-up's will be made on balls $B(x_t, \delta)$ where $f \geq 0$, which is possible as $f(x_0) > 0$.

Let also η be a cut-off function on $\mathbb{R}^n$ equal to 1 on the euclidean ball $B(0, \delta/2)$, and equal to 0 on $\mathbb{R}^n \backslash B(0, \delta)$, $0 \leq \eta \leq 1$ with $|\nabla \eta| \leq C.\delta^{-1}$ where δ is chosen small enough to have $f \geq 0$ on the balls $B(x_t, \delta)$. The Sobolev inequality gives on the one hand

$$(\int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}} \leq K(n,2)^2 \int_{B(0,\delta)} |\nabla(\eta \overline{u}_t)|_e^2 \, dx \tag{9.17}$$

where $|.|_e$ is the euclidean metric of associated measure dx.

On the other hand, integration by part gives, noting that $|\nabla \eta| = \Delta \eta = 0$ on $B(0, \delta/2)$:

$$\int_{B(0,\delta)} |\nabla(\eta \overline{u}_t)|_e^2 \, dx \leq \int_{B(0,\delta)} \eta^2 \overline{u}_t \triangle_e \overline{u}_t dx + C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta) \backslash B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx$$

Noting $\mathbf{g}_t^{ij}$ the components of $\mathbf{g}_t$ and $\Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k$ the associated Christoffel symbols, we write :

$$\triangle_e \overline{u}_t = \triangle_{\mathbf{g}_t} \overline{u}_t + (\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij})\partial_{ij}\overline{u}_t - \mathbf{g}_t^{ij}\Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k \partial_k \overline{u}_t$$

We get from this inequallity, using using this expression of the laplacian, equation E_t : $\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t.f.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$ "viewed" in the chart $\exp_{x_t}^{-1}$, and using the fact that $|\nabla\eta| = \Delta\eta = 0$ on $B(0,\delta/2)$ and with some integration by parts :

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\delta)} |\nabla(\eta\overline{u}_t)|_e^2\, dx \leq \quad & \lambda_t \int_{B(0,\delta)} \eta^2 \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*}\, dx - \int_{B(0,\delta)} \eta^2 \overline{h}_t \overline{u}_t^2 dx \\ & + C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx \\ & - \int_{B(0,\delta)} \eta^2 (\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij})\partial_i \overline{u}_t \partial_j \overline{u}_t dx \\ & + \frac{1}{2}\int_{B(0,\delta)} (\partial_k(\mathbf{g}_t^{ij}\Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k + \partial_{ij}\mathbf{g}_t^{ij})(\eta\overline{u}_t^2) dx\,.\end{aligned}$$

Using the Sobolev inequality (17) and the fact that $\lambda_t \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$, we obtain at last :

$$\int_{B(0,\delta)} \overline{h}_t (\eta\overline{u}_t)^2 dx \leq A_t + B_t + C_t + C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx \tag{9.18}$$

where :

$B_t = \frac{1}{2}\int_{B(0,\delta)} (\partial_k(\mathbf{g}_t^{ij}\Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k + \partial_{ij}\mathbf{g}_t^{ij})(\eta\overline{u}_t^2) dx$

$C_t = \left|\int_{B(0,\delta)} \eta^2 (\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij})\partial_i \overline{u}_t \partial_j \overline{u}_t dx\right|$

$A_t = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \eta^2 \overline{u}_t^{2^*} dx - \frac{1}{K(n,2)^2} (\int_{B(0,\delta)} (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}}$

These computations were developed in the article of Djadli and Druet [**?**]. Our goal is to use L^2-concentration (proposition 7) to obtain a contradiction ; we shall divide (18) by $\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx$ and take the limit when $t \to t_0 = 1$.

L^2-concentration first gives :

$$\frac{C.\delta^{-2}\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} \underset{t\to 1}{\to} 0\ .$$

Z.Djadli and O.Druet [**?**] showed (see also [10] for full details) :

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{C_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} \leq \varepsilon_\delta \text{ where } \varepsilon_\delta \to 0 \text{ when } \delta \to 0\ .$$

Furthermore, as $x_t \to x_0$ we have $\lim_{t\to 1}(\partial_k(\mathbf{g}_t^{ij}\Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k + \partial_{ij}\mathbf{g}_t^{ij})(0) = \frac{1}{3}S_{\mathbf{g}}(x_0)$, therefore, using L^2-concentration :

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{B_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} = \frac{1}{6}S_{\mathbf{g}}(x_0) + \varepsilon_\delta\ .$$

It is the expression A_t which will give $\frac{n-2}{4(n-1)}S_{\mathbf{g}}(x_0)$ $-\frac{1}{6}S_{\mathbf{g}}(x_0)$ and $\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(x_0)}{f(x_0)}$.

By Hölder's inequality :

$$\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\eta^2\overline{u}_t^{2^*}dx \leq (\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dx)^{\frac{2}{n}}(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx)^{\frac{n-2}{n}}$$

Beside :

$$dx \leq (1+\frac{1}{6}Ric(x_t)_{ij}x^ix^j + C\left|x\right|^3)dv_{\mathbf{g}_t}$$

Using this development and $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$ for $0<\alpha\leq 1$:

$$(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dx)^{\frac{2}{n}} \leq (\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{2}{n}} + \frac{1}{(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{n-2}{n}}}\frac{2}{n}\{S_t\}+C\{S_t\}^2$$

where

$$\{S_t\} = \frac{1}{6}Ric(x_t)_{ij}\int_{B(0,\delta)}x^ix^j\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t} + C\int_{B(0,\delta)}\left|x\right|^3\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}\ .$$

We deduce

$$A_t \leq \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup}f)^{\frac{n-2}{n}}}(A_t^1+A_t^2)$$

where

$$A_t^1 = (\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{2}{n}}(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx)^{\frac{n-2}{n}} - (Supf.\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx)^{\frac{n-2}{n}}$$

and

$$A_t^2 = \frac{2(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx)^{\frac{n-2}{n}}}{n(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{n-2}{n}}}\{\frac{1}{6}Ric(x_t)_{ij}\int_{B(0,\delta)}x^ix^j\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}+C\int_{B(0,\delta)}\left|x\right|^3\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}\}(1+\varepsilon_\delta)$$

as $\{S_t\}\to 0$ when $\delta\to 0$ uniformly in t. A_t^2 will give, by developing the metric, $S_{\mathbf{g}}(x_0)$ while A_t^1 will give, by developing f, $-\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(x_0)}{f(x_0)}$.

Note that for any $\alpha\in H_1^2(B(x_0,2\delta))$:

$$\lim_{t\to 1}\frac{\int_{B(x_t,\delta)}\alpha dx}{\int_{B(x_t,\delta)}\alpha dv_{\mathbf{g}_t}} = 1+O(\delta^2) = 1+\varepsilon_\delta$$

We start by studying A_t^2 :

1/ : We have $\lim_{t\to 1}\frac{(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx)^{\frac{n-2}{n}}}{(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{n-2}{n}}} = 1+\varepsilon_\delta$

2/ : Using the weak estimates (proposition 5), $\left|x\right|^2\overline{u}_t^{2^*}\leq c\overline{u}_t^2$, from where we get :

$$\frac{\int_{B(0,\delta)}\left|x\right|^3\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t}} \leq C.\varepsilon_\delta\ .$$

3/ : Using the blow-up formula's we write : for all $R > 0$:

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\delta)} x^i x^j \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} &= \int_{B(0,R\mu_t)} x^i x^j \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} + \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^i x^j \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \\ &= \mu_t^2 \int_{B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} + \mu_t^2 \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\end{aligned}$$

and

$$\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t} = \mu_t^2 \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \ .$$

Using the weak estimates again, we get :

$$\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \leq \varepsilon_R . \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}$$

thus :

$$\frac{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} \leq \varepsilon_R$$

where $\varepsilon_R \to 0$ when $R \to +\infty$. Now, if $i \neq j$:

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{|\int_{B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}|}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} \leq \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{|\int_{B(0,R)} x^i x^j \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}|}{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} = 0$$

because

$$\widetilde{u}_t \to \widetilde{u} = (1 + \frac{f(x_0)^{\frac{2}{n}}}{K(n,2)^2 n(n-2)} |x|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \ \ in \ \ C^0(B(0,R))$$

and $\widetilde{u}$ is radial (see subsection 3.2).

If $i = j$:

$$\frac{\int_{B(0,R)} x^i x^i \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} = \frac{\int_{B(0,R)} (x^i)^2 \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} . \frac{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}$$

But as soon as $n > 4$, using strong L^2-concentration (proposition 9), we obtain :

$$\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} = 1$$

therefore

$$\lim_{R\to\infty} \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{\int_{B(0,R)} x^i x^i \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} = f(x_0) \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (x^i)^2 . \widetilde{u}^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}^2 dx} = f(x_0)^{\frac{n-2}{n}} K(n,2)^2 \frac{n(n-4)}{4(n-1)}$$

and thus

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{1}{f(x_0)^{\frac{n-2}{n}} K(n,2)^2} \frac{A_t^2}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} = \frac{n-4}{12(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) + \varepsilon_\delta$$

which, with $\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{B_t}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dx} = \frac{1}{6}S_{\mathbf{g}}(x_0)+\varepsilon_\delta$ gives

$$\overline{\lim_{t\to 1}}\Big(\frac{1}{f(x_0)^{\frac{n-2}{n}}K(n,2)^2}\frac{A_t^2}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}}+\frac{B_t}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dx}\Big)=\frac{n-2}{4(n-1)}S_{\mathbf{g}}(x_0)+\varepsilon_\delta$$

If $n=4$ we write :

$$\lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{\int_{B(0,R)}x^ix^i\widetilde{f}_t\widetilde{u}_t^{2^*}dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})}\widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}\le f(x_0)^{\frac{n-2}{n}}K(n,2)^2\frac{n-4}{4(n-1)}$$

and we get the conclusion by distinguishing two cases, $S_{\mathbf{g}}(x_0)<0$ or $S_{\mathbf{g}}(x_0)\ge 0$, the proof being finished as $\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(x_0)}{f(x_0)}$ does not appear in dimension 4 (see the end of the proof).

Let us now consider A_t^1.

$$A_t^1=\Big(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}\Big)^{\frac{2}{n}}\Big(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx\Big)^{\frac{n-2}{n}}-\Big(Supf.\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx\Big)^{\frac{n-2}{n}}\ .$$

We write $f_t=f(x_0)+g_t$. Remembering that $f(x_0)=Supf$, we have $g_t(x_0)=0$ and $g_t\le 0$. Using $(1+x)^\alpha\le 1+\alpha x$ for $0<\alpha\le 1$:

$$\Big(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx\Big)^{\frac{n-2}{n}}\le\Big(\int_{B(0,\delta)}f(x_0)(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx\Big)^{\frac{n-2}{n}}+\frac{n-2}{n}\frac{\int_{B(0,\delta)}\overline{g}_t(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx}{\big(\int_{B(0,\delta)}f(x_0)(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx\big)^{\frac{2}{n}}}$$

where $\overline{g}_t$ is g_t in the exponential chart in x_t. We now use the theorem of Druet and Robert to write in $B(0,\delta)$:

$$\overline{u}_t\ge(1-\varepsilon_\delta)\overline{B}_t,$$

where $\overline{B}_t$ is B_t in the exponential chart in x_t. Because $g_t\le 0$, we have :

$$\int_{B(0,\delta)}\overline{g}_t(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx\le(1-\varepsilon_\delta)\int_{B(0,\delta)}\overline{g}_t(\eta\overline{B}_t)^{2^*}dx.$$

Combining this with the expansion above and the fact that $\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}\le 1$, we obtain :

$$A_t^1\le(1-\varepsilon_\delta)\frac{n-2}{n}\frac{\int_{B(0,\delta)}\overline{g}_t(\eta\overline{B}_t)^{2^*}dx}{\big(\int_{B(0,\delta)}f(x_0)(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx\big)^{\frac{2}{n}}}$$

We now expand g_t noting that $\partial_i\overline{g}_t=\partial_i\overline{f}_t$ and $\partial_{ij}^2\overline{g}_t=\partial_{ij}^2\overline{f}_t$.

$$\overline{g}_t(x)\le g_t(x_t)+x^i\partial_i\overline{f}_t(x_t)+\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_t).x^kx^l+c\,|x|^3$$

Thus

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\delta)}\overline{g}_t(\eta\overline{B}_t)^{2^*}dx\le\quad & g_t(x_t)\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{B}_t)^{2^*}dx\\ &+\partial_i\overline{f}_t(x_t)\int_{B(0,\delta)}x^i(\eta\overline{B}_t)^{2^*}dx\\ &+\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_t)\int_{B(0,\delta)}x^kx^l(\eta\overline{B}_t)^{2^*}dx\\ &+C\int_{B(0,\delta)}|x|^3(\eta\overline{B}_t)^{2^*}dx\end{aligned}$$

Now, first $g_t(x_t) \leq 0$, and second, and this is the main point for which we need the theorem of Druet and Robert (see the reason at the beginning of the next section), as $\overline{B}_t$ is radial, we have

$$\partial_i \overline{f}_t(x_t) \int_{B(0,\delta)} x^i (\eta \overline{B}_t)^{2^*} dx = 0.$$

Therefore, introducing all this in the last inequality for A_t^1, we have

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq$$

$$\frac{n-2}{n}(1-\varepsilon_\delta)\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_t)\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{B}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} + C\int_{B(0,\delta)} |x|^3 (\eta\overline{B}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}}$$

where we have replaced dx by $dv_{\mathbf{g}_t}$ using the remark made at the beginning of the study of A_t^2.

Now, as for A_t^2, we write :

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{B}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} &= f(x_0)^{\frac{-2}{n}} K(n,2)^2 \frac{n-4}{4(n-1)} \text{ if } k=l \\ &= 0 \text{ if } k \neq l \end{aligned}$$

and therefore

$$\frac{1}{K(n,2)^2 f(x_0)^{\frac{n-2}{n}}} \frac{n-2}{n} \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_t)\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{B}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} =$$

$$= \frac{1}{f(x_0)} \frac{(n-2)(n-4)}{4(n-1)} \sum_l \frac{1}{2}\partial_{ll}\overline{f}_1(0)$$

$$= -\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$$

as $\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0) = -\sum_l \partial_{ll}\overline{f}_1(0)$ in the exponential chart in x_0. Also

$$\frac{\int_{B(0,\delta)} |x|^3 \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq C.\varepsilon_\delta \ .$$

Thus, we have proved that dividing inequality (18) by $\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}$ and letting t go to 1, we get

$$h(x_0) + \varepsilon_\delta \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)} + \varepsilon_\delta \ .$$

Letting δ tend to 0 :

$$h(x_0) \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$$

which contradict our hypothesis :

$$h(x_0) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$$

when x_0 is a point of maximum of f. This prove that $u \not\equiv 0$, and therefore $u_t \to u > 0$, a minimizing solution for $(E_{h,f,\mathbf{g}})$, and thus the weakly critical function h is in fact critical.

9.4.4 Alternate proof, proof of the fundamental estimate

As we saw in the last part of the proof, the difficulty introduced by the presence of the function f is to control the first derivatives of f, $\partial_i f(x_t)$, as blow-up gives

$$\int_{B(0,\delta)} \partial_i f(x_t) x^i \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} = \mu_t \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \partial_i f(x_t) x^i \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}$$

to be divided by

$$\mu_t^2 \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \ ,$$

and it would be necessary to control $\frac{\partial_i f(x_t)}{\mu_t}$, which seems to be difficult. But thanks to the theorem of Druet and Robert, we can replace $u(t)$ by $B(t)$ near x_t, and after blow-up

$$\mu_t \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \partial_i f(x_t) x^i \widetilde{B}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} = 0$$

as $\widetilde{B}_t$ is radial. Of course, the proof is then short, but the proof of the theorem of Druet and Robert is quite involved, even though the strong estimates (proposition 8) is the first step.

The other way to get over the problem of the first derivatives of f is to expand f in x_0 as then $\partial_i f(x_0) = 0$ because x_0 is a point of maximum of f. But then, one has to transpose the weak and strong estimates from x_t to x_0, which, as we said in the section about concentration phenomenom, requires to prove the following estimate :

$$\frac{d_g(x_t, x_0)}{\mu_t} \leq C \ .$$

As we said, this estimate is important and of independent interest, as it gives a complete description of the sequence (u_t). This is why we give this alternate proof of theorem 1, even though it requires an additional hypothesis. This proof, which gives at the same time the proof of theorem 1 and of the estimate, is, we think, interesting, and is available directly after proposition 9, i.e it does not require the theorem of Druet and Robert.

We now make the hypothesis that the hessian of f is nondegenerate at its points of maximum. We also suppose now that $dimM \geq 5$, even though our proof gives theorem 1 in dimension 4.

Let us note $x_0(t) = \exp_{x_t}^{-1}(x_0) = (x_0^1(t), ..., x_0^n(t))$, which is possible as soon as t is close enough to 1 for a fixed radius δ. Then $x_0(t) \to 0$ when $t \to 1$. The point $x_0(t)$ is a locally strict maximum of $\overline{f}_t$. We will let δ go to 0 at the end of the reasoning, after having taken the limit when $t \to 1$.

The expansion of $\overline{f}_t$ in $x_0(t)$ gives :

$$\overline{f}_t(x) \leq f(x_0) + \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t)).(x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t)) + c\,|x - x_0(t)|^3 := f(x_0) + T_t$$

(T_t like Taylor) where $(\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0))$ is a negative definite matrix (we shall write < 0). c, C will always be constants independent of t and δ. Remember that

$$A_t^1 = (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{2}{n}} (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} - (Supf. \int_{B(0,\delta)} (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} \ .$$

Introducing the expansion of $\overline{f}_t$ in $x_0(t)$, and using again the fact that $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$ for $0<\alpha\leq 1$, we get :

$$(\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx)^{\frac{n-2}{n}} \leq (\int_{B(0,\delta)} f(x_0)(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx)^{\frac{n-2}{n}} + \frac{\frac{n-2}{n}}{(\int_{B(0,\delta)} f(x_0)(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx)^{\frac{2}{n}}}\{F_t\}$$

where

$$\{F_t\} = \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t))\int_{B(0,\delta)}(x^k-x_0^k(t))(x^l-x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx + C\int_{B(0,\delta)}|x-x_0(t)|^3(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx$$

from where, remembering that $\underset{M}{Sup} f = f(x_0)$ and that $\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t} \leq 1$:

$$A_t^1 \leq \frac{n-2}{n}\frac{(\int_{B(0,\delta)}\overline{f}_t\overline{u}_t^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{2}{n}}}{(\int_{B(0,\delta)} f(x_0)(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dx)^{\frac{2}{n}}}\{F_t\} \tag{9.19}$$

Therefore, we obtain :

$$\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq$$

$$\frac{n-2}{n}(1+\varepsilon_\delta)\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)\int_{B(0,\delta)}(x^k-x_0^k(t))(x^l-x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}+C\int_{B(0,\delta)}|x-x_0(t)|^3(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}}$$

where we write $\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)$ for $\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t))$. Considering the expansion

$$\overline{f}_t(x) \leq f(x_0) + \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t)).(x^k-x_0^k(t))(x^l-x_0^l(t)) + c\,|x-x_0(t)|^3\,,$$

note that by the regularity of $\exp_{x_t}^{-1}\circ\exp_{x_0}$ with respect to all the variables, we can suppose that c is independent of t. Moreover :

$$\begin{aligned} c\,|x-x_0(t)|^3 &\leq c'\,|x-x_0(t)|\sum_k(x^k-x_0^k(t))^2 \\ &\leq 2\delta c'\sum_k(x^k-x_0^k(t))^2 \end{aligned}$$

where we remind that δ is the radius of the ball of integration. We can then write :

$$\overline{f}_t(x) \leq f(x_0) + (\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t)) + \delta C_{kl})(x^k-x_0^k(t))(x^l-x_0^l(t))$$

where $C_{kl} = c\delta_{kl} = c$ if $k=l$ and $C_{kl}=0$ if $k\neq l$ (δ_{kl} is the Krönecker symbol) is independent of t.

We introduce one more notation :

$$D_{kl}(t,\delta) = \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0(t)) + \delta C_{kl}\ .$$

Then :

1/ : $\lim_{\delta\to 0}\lim_{t\to 1} D_{kl}(t,\delta) = \frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_1(x_0(1))$ where $\overline{f}_1 = f\circ\exp_{x_0}^{-1}$ and $x_0(1) = 0 = \exp_{x_0}^{-1}(x_0)$.

2/ : for any δ small enough and for all t close to 1, $D_{kl}(t,\delta)$ is still negative definite.

$D_{kl}(t,\delta)$ is the hessian of f in $x_0(t)$ perturbated on its diagonal by the third order terms. It is for the second point that we need the hypothesis that the hessian of f is non degenerate. Thus

$$\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)\int_{B(0,\delta)}(x^k-x_0^k(t))(x^l-x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}+C\int_{B(0,\delta)}|x-x_0(t)|^3(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}\leq$$

$$D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}(x^k-x_0^k(t))(x^l-x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}\ .$$

Let

$$\{F_t'\}=D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}(x^k-x_0^k(t))(x^l-x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}$$

We have

$$\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)}v_t^2dv_{\mathbf{g}_t}}\leq\frac{n-2}{n}\overline{\lim_{t\to 1}}\frac{D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}(x^k-x_0^k(t))(x^l-x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)}\overline{u}_t^2dv_{\mathbf{g}_t}}(1+\varepsilon_\delta)$$

In the expansion of $D_{kl}(t,\delta)(x^k-x_0^k(t))(x^l-x_0^l(t))$, we are interested by the first term, i.e $D_{kl}(t,\delta)x^kx^l$ (look back how we obtained $S_g(x_0)$ in A_t^2), and we are going to show that the other terms can be neglected. The idea is to reorganize the expansion of $\{F_t'\}$ and to use the fact $D_{kl}(t,\delta)$ is a negative bilinear form :

$$\begin{aligned}\{F_t'\}=\quad & D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}x^kx^l(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}+D_{kl}(t,\delta)x_0^k(t)x_0^l(t)\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}\\ & -D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)}(x^kx_0^l(t)+x^lx_0^k(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}\ .\end{aligned}$$

We rewrite the two last terms (suppressing some δ et t and all integral being taken with respect to $dv_{\mathbf{g}_t}$) :

$$D_{kl}.x_0^kx_0^l\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}-D_{kl}\int_{B(0,\delta)}(x^kx_0^l+x^lx_0^k)(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}=$$

$$D_{kl}\Big[x_0^kx_0^l\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}-x_0^l\int_{B(0,\delta)}x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*}-x_0^k\int_{B(0,\delta)}x^l(\eta\overline{u}_t)^{2^*}\Big]=$$

$$D_{kl}\Big[x_0^k(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}.x_0^l(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}$$

$$-x_0^l(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}\frac{\int_{B(0,\delta)}x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*}}{(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}}-x_0^k(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}\frac{\int_{B(0,\delta)}x^l(\eta\overline{u}_t)^{2^*}}{(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*})^{\frac{1}{2}}}\Big]\ .$$

Thus, setting (sorry) :

$$\varepsilon^k(t)=\int_{B(0,\delta)}x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t}$$

$$z_t=(\int_{B(0,\delta)}(\eta\overline{u}_t)^{2^*}dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{1}{2}}$$

the expression above becomes :

$$D_{kl}.x_0^k x_0^l \int_{B(0,\delta)} (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} - D_{kl} \int_{B(0,\delta)} (x^k x_0^l + x^l x_0^k)(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} =$$

$$= D_{kl}\Big[x_0^k(t).z_t.x_0^l(t).z_t - x_0^l(t).z_t.\frac{\varepsilon^k(t)}{z_t} - x_0^k(t).z_t.\frac{\varepsilon^l(t)}{z_t}\Big]$$

$$= D_{kl}\Big[(x_0^k(t).z_t - \frac{\varepsilon^k(t)}{z_t})(x_0^l(t).z_t - \frac{\varepsilon^l(t)}{z_t}) - \frac{\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)}{z_t^2}\Big]$$

By this method of reorganization of the hessian, we have obtained :

$$\frac{1}{2}\partial_{kl}\overline{f}_t(x_0)\int_{B(0,\delta)} (x^k - x_0^k(t))(x^l - x_0^l(t))(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} + C\int_{B(0,\delta)} |x - x_0(t)|^3 (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \leq$$

$$D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} + D_{kl}(t,\delta)(x_0^k(t).z_t - \frac{\varepsilon^k(t)}{z_t})(x_0^l(t).z_t - \frac{\varepsilon^l(t)}{z_t}) - D_{kl}(t,\delta)\frac{\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)}{z_t^2}$$

$$\leq D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} - D_{kl}(t,\delta)\frac{\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)}{z_t^2}$$

because, and that is the fundamental point :

$$D_{kl}(t,\delta)\omega^k\omega^l \leq 0 \ \ \forall \omega = (\omega^1, ..., \omega^n)$$

which allows to suppress from the inequality

$$D_{kl}(t,\delta)(x_0^k(t).z_t - \frac{\varepsilon^k(t)}{z_t})(x_0^l(t).z_t - \frac{\varepsilon^l(t)}{z_t})$$

It is this term that will give us the estimate $\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t,x_0)}{\mu_t} \leq C$ (see below).

We have therefore obtained :

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq \frac{n-2}{n}\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} - D_{kl}(t,\delta)\frac{\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)}{z_t^2}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}}(1+\varepsilon_\delta)$$

Now, as for A_t^2, we write :

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} &= f(x_0)^{\frac{-2}{n}} K(n,2)^2 \frac{n-4}{4(n-1)} \text{ if } k = l \\ &= 0 \text{ if } k \neq l \end{aligned}$$

and therefore

$$\frac{1}{K(n,2)^2 f(x_0)^{\frac{n-2}{n}}} \frac{n-2}{n}\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{D_{kl}(t,\delta)\int_{B(0,\delta)} x^k x^l (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t}}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} =$$

$$= \frac{1}{f(x_0)} \frac{(n-2)(n-4)}{4(n-1)} \sum_l (\frac{1}{2}\partial_{ll}\overline{f}_1(0) + c_{ll}\delta)$$

$$= -\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)} + \varepsilon_\delta$$

as $\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0) = -\sum_l \partial_{ll}\overline{f}_1(0)$ in the exponential chart in x_0.

At last, let us show that the residual term can be neglected.

$$\left|\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)\right| \leq \frac{1}{2}(\varepsilon^k(t)^2 + \varepsilon^l(t)^2)$$

But

$$\varepsilon^k(t)^2 = (\int_{B(0,\delta)} x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2$$

$$= (\int_{B(0,R\mu_t)} x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} + \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2$$

$$\leq 2(\int_{B(0,R\mu_t)} x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2 + 2(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2$$

The blow-up formula's give, for a fixed R :

$$\frac{(\int_{B(0,R\mu_t)} x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq \frac{(\mu_t \int_{B(0,R)} x^k \widetilde{u}_t^{2^*} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t})^2}{\mu_t^2 \int_{B(0,R)} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}.} \underset{t\to 1}{\to} \frac{(\int_{B(0,R)} x^k \widetilde{u}^{2^*} dx)^2}{\int_{B(0,R)} \widetilde{u}^2 dx} = 0$$

because $\widetilde{u}$ is radial.

At last, using the weak estimates : $d_{\mathbf{g}}(x,x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq \varepsilon$ if $d_{\mathbf{g}}(x,x_t) \geq R\mu_t$, and using the Hölder's inequality :

$$\begin{aligned}(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2 &\leq \varepsilon_R^2(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^{2\frac{n-1}{n-2}} dv_{\mathbf{g}_t})^2 \\ &\leq \varepsilon_R^2(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t})(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}_t})\end{aligned}$$

therefore

$$\frac{(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} x^k(\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^2}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq \varepsilon_R^2(\int_{B(0,\delta)\setminus B(0,R\mu_t)} \overline{u}_t^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}_t}) \leq c\varepsilon_R^2$$

where $\varepsilon_R \to 0$ when $R \to \infty$. Remarking that because x_0 is a concentration point :

$$z_t^2 = \int_{B(0,\delta)} (\eta\overline{u}_t)^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t} \geq \int_{B(x_0,\delta/4)} u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} \geq c > 0$$

we have obtained

$$\frac{\left|\varepsilon^k(t)\varepsilon^l(t)\right|}{z_t^2 \int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \underset{t\to 1}{\to} 0$$

We have therefore obtained once again that

$$h(x_0) + \varepsilon_\delta \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)} + \varepsilon_\delta \ .$$

Letting δ tend to 0 :

$$h(x_0) \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$$

which contradict our hypothesis :

$$h(x_0) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$$

when x_0 is a point of maximum of f. This prove that $u_t \to u > 0$, a minimizing solution for $(E_{h,f,\mathbf{g}})$, and therefore the weakly critical function h is in fact critical.

We now prove the estimate

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \leq C$$

Going back to the computations above, we have obtained :

$$\begin{aligned} h(x_0) \quad \leq \quad & \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)} + \varepsilon_\delta \\ & + \overline{\lim_{t \to 1}} \frac{n-2}{n} \frac{D_{kl}(t,\delta)(x_0^k(t).z_t - \frac{\varepsilon^k(t)}{z_t})(x_0^l(t).z_t - \frac{\varepsilon^l(t)}{z_t})}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \end{aligned} \tag{9.20}$$

where $D_{kl}(t,\delta)$ is negative definite for t close to 1 and for all δ small enough, and where we remind that $x_0(t) = \exp_{x_t}^{-1}(x_0) = (x_0^1(t), ..., x_0^n(t))$. So, there exists a $\lambda > 0$ such that $\forall \omega \in \mathbb{R}^n$:

$$D_{kl}(t,\delta)\omega^k \omega^l \leq -\lambda \sum_k \left|\omega^k\right|^2$$

and so

$$D_{kl}(t,\delta) \frac{(x_0^k(t).z_t - \frac{\varepsilon^k(t)}{z_t})(x_0^l(t).z_t - \frac{\varepsilon^l(t)}{z_t})}{(\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{1}{2}} (\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{1}{2}}} \leq$$

$$-\lambda \sum_k \left| \frac{x_0^k(t).z_t}{(\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varepsilon^k(t)}{z_t (\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{1}{2}}} \right|^2 .$$

Moreover, we already proved that :

$$\frac{\varepsilon^k(t)^2}{z_t^2 \int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \underset{t \to 1}{\to} 0$$

as we also have $z_t = (\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{1}{2}}$, and therefore as x_0 is a concentration point :

$$0 < c \leq \liminf\ z_t \leq \limsup\ z_t \leq c' < +\infty.$$

Therefore, necessarilly, because of (20), for all k, there exists a constant $C > 0$ such that for $t \to 1$:

$$\frac{x_0^k(t)}{(\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t})^{\frac{1}{2}}} \leq C$$

Now

$$\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t} = \mu_t^2 \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}.$$

But the strong estimates give that

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} < +\infty$$

therefore

$$\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t} \sim C\mu_t^2$$

from where we have

$$\forall k : \frac{x_0^k(t)}{\mu_t} \leq C'$$

and so

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \leq C$$

If we have furthermore that at the points of maximum of f :

$$h(P) = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

then we have more precisely that

$$\frac{d_{\mathbf{g}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \to 0$$

Remark : Note that when concentration occurs we have :

$$h(x_0) \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$$

9.5 Critical triple 1 : existence of critical functions

The idea to prove the existence of critical functions (theorem 2), is to find, being given the manifold $(M, \mathbf{g})$ and the function f, a subcritical function h_0 and a weakly critical function h_1 and then to join these two functions by a continuous path ; theorem 1 then shows that this path must "cross" the set of critical functions.

Note first that, by the sharp Sobolev inequality (2), $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ is a weakly critical function for any manifold $(M, \mathbf{g})$ and any function f. Also, it is known that

$$B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2} \geq \frac{n-2}{4(n-1)} \underset{M}{Sup}\, S_{\mathbf{g}}$$

Therefore, for any $\alpha > 0$, and for any point P where f is maximum on M, we have

$$B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2} + \alpha \geq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}.$$

Now, we are going to modify the weakly critical function $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}+\alpha$ by the test functions presented in the introduction. They can be seen under the following form : for any $x \in M$ and any $\delta > 0$ small enough, there exists a

sequence of functions (ψ_k) with compact support in $B(x,\delta)$ such that for any function h :

$$J_{h,1,\mathbf{g}}(\psi_k) = \frac{\int_M |\nabla\psi_k|^2\, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.{\psi_k}^2 dv_{\mathbf{g}}}{\left(\int_M |\psi_k|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{K(n,2)^2}$$

and

$$\int_M \psi_k^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} = 1$$

this last condition being obtained by multiplying the functions in the introduction by suitable constants. We will use the functional J here, as

$$\int_M f.\psi_k^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} \neq 1\ .$$

Let then ψ_k be one of these functions, where k and $B(x,\delta)$ will be fixed later. We consider, for $t>0$ the sequence

$$h_t = B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2} + \alpha - t.\psi_k^{\frac{4}{n-2}}\ .$$

First, we seek a condition for $\triangle_{\mathbf{g}} + h_t$ to be coercive. Noting $B_0K^{-2} = B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$, and taking all integrals for the measure $dv_{\mathbf{g}}$, we have for $u \in H_1^2$

$$\begin{aligned}\int_M (|\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 + h_t u^2) \quad &= \int_M (|\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 + B_0K^{-2}.u^2) - (t-\alpha)\int_M \psi_k^{\frac{4}{n-2}}.u^2 \\ &\geq K(n,2)^{-2}(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} - (t-\alpha)\int_M \psi_k^{\frac{4}{n-2}}.u^2\end{aligned}$$

by Sobolev inequality. But using Hölder's inequality :

$$\int_M \psi_k^{\frac{4}{n-2}}.u^2 \leq (\int_M \psi_k^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}} = (\int_M u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}}$$

as $\int_M \psi_k^{\frac{2n}{n-2}} = 1$. Thus, using Hölder's inequality again to get the existence of a constant $C>0$ such that

$$C\int_M u^2 \leq (\int_M u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}}$$

we have as soon as $K(n,2)^{-2} - (t-\alpha) > 0$

$$\begin{aligned}\int_M (|\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 + h_t u^2) \quad &\geq (K(n,2)^{-2} - (t-\alpha))(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{n-2}{n}} \\ &\geq (K(n,2)^{-2} - (t-\alpha))C\int_M u^2\ .\end{aligned}$$

So $\triangle_{\mathbf{g}} + h_t$ is coercive as soon as $t-\alpha < K(n,2)^{-2}$; we then fix t_1 such that $\alpha < t_1 < K(n,2)^{-2} + \alpha$.

We now want to fix ψ_k so that h_{t_1} is subcritical for f. We pick first x close enough to a point x_0 of maximum of f and δ small enough such that $f>0$ on

$B(x,\delta)$, to obtain :

$$\begin{aligned} J_{h_{t_1},f,\mathbf{g}}(\psi_k) &= \frac{\int_M |\nabla\psi_k|^2 + \int_M B_0 K^{-2}.{\psi_k}^2 - (t_1-\alpha)\int_M \psi_k^{\frac{2n}{n-2}}}{\left(\int_M f\,|\psi_k|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\ &\leq \frac{J_{B_0K^{-2},1}(\psi_k)}{(\underset{B(x,\delta)}{Inf}\ f)^{\frac{n-2}{n}}} - \frac{t_1-\alpha}{(\underset{B(x,\delta)}{Sup}\ f)^{\frac{n-2}{n}}} \\ &\leq \frac{J_{B_0K^{-2},1}(\psi_k)}{(\underset{B(x,\delta)}{Inf}\ f)^{\frac{n-2}{n}}} - \frac{t_1-\alpha}{(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ . \end{aligned}$$

For any $\varepsilon > 0$, by continuity of f, we can choose x close enough to a point of maximum x_0 and δ small enough such that $B(x,\delta)\cap\{x/f(x) = Max f\} = \emptyset$ and

$$\frac{1}{(\underset{B(x,\delta)}{Inf}\ f)^{\frac{n-2}{n}}} \leq \frac{1}{(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} + \varepsilon$$

x and δ being fixed, we can now choose k large enough to have

$$J_{B_0K^{-2},1}(\psi_k) \leq K(n,2)^{-2} + \varepsilon \ .$$

Therfore, choosing ε small enough, we see that because $\frac{t_1-\alpha}{(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} > 0$:

$$J_{h_{t_1},f,\mathbf{g}}(\psi_k) < \frac{1}{K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

and therefore h_{t_1} is subcritical for f. We now set :

$$t_0 = Inf\{t \leq t_1/\lambda_{h_t} < \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}\} \ .$$

Then $t_0 \geq 0$, and

$$\lambda_{h_{t_0}} = \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ \ and \ \ \lambda_{h_t} < \frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ \ if \ \ t > t_0.$$

Furthermore $\forall t$, $t_0 \leq t \leq t_1$,

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h_{t_0}(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} \ for\, P \in \{x/f(x) = Max f\}$$

because $B(x,\delta)\cap\{x/f(x) = Max f\} = \emptyset$. At last, $h_t \underset{t\to t_0}{\to} h_{t_0}$ in $C^{0,\alpha}$, and $\triangle_{\mathbf{g}} + h_{t_0}$ is coercive. Therefore by theorem 1, h_{t_0} is critical and $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ has minimizing solutions.

Now, we prove that if $\{x/f(x) = Max f\}$ is thin and if $\int_M f > 0$, there exist positive critical functions. We start again with $h = B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2} + \alpha$, with $\alpha > 0$. For all P where f is maximum on M :

$$\frac{4(n-1)}{n-2} B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2} + \alpha > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

as

$$B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2} \geq \frac{(n-2)}{4(n-1)} Max S_{\mathbf{g}} \ .$$

As f is not constant, there exist η with support in $M \setminus \{x/f(x) = Max f\}$ and such that $0 \leq \eta \leq 1$. Let

$$c = \left(\int_M f dv_{\mathbf{g}} \right)^{-\frac{n-2}{n}}$$

That's where we need $\int_M f dv_{\mathbf{g}} > 0$. We have $\int f c^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$. For $t \in \mathbb{R}^+$ we set

$$h_t = B_0 K^{-2} + \alpha - t\eta \ .$$

Then $h_t = B_0 K^{-2} + \alpha$ on $\{x/f(x) = Max f\}$, and

$$I_{h_t}(c) = \int_M (B_0 K^{-2} + \alpha) c^2 dv_{\mathbf{g}} - c^2 t \int_M \eta dv_{\mathbf{g}} = \left(\int_M f dv_{\mathbf{g}} \right)^{-\frac{2}{2^*}} ((B_0 K^{-2} + \alpha) Vol_{\mathbf{g}}(M) - t \int_M \eta dv_{\mathbf{g}})$$

So, if t is large enough,

$$I_{h_t}(c) < \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ .$$

We also want h_t to be positive on M. By the definition of h_t and because $\underset{M}{Sup}\, \eta = 1$, it is the case if

$$t < B_0(\mathbf{g}) K(n,2)^{-2} + \alpha. \tag{9.21}$$

But we also want that

$$I_{h_t}(c) < \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$$

which requires

$$t > \frac{1}{\int_M \eta dv_{\mathbf{g}}} \left((B_0 K^{-2} + \alpha) Vol_{\mathbf{g}}(M) - \frac{\left(\int_M f dv_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{n-2}{n}}}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \right) \ . \tag{9.22}$$

We can find such a t if :

$$\frac{1}{\int_M \eta dv_{\mathbf{g}}} \left((B_0 K^{-2} + \alpha) Vol_{\mathbf{g}}(M) - \frac{\left(\int_M f dv_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{n-2}{n}}}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \right) < B_0 K^{-2} + \alpha$$

which can be writen

$$\int_M \eta dv_{\mathbf{g}} > Vol_{\mathbf{g}}(M) - \frac{K^{-2} \left(\int_M f dv_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{n-2}{n}}}{(B_0 K^{-2} + \alpha)(\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \ . \tag{9.23}$$

Remember that we want η to have support in $M\setminus\{x/f(x)=Maxf\}$ with $0\leq\eta\leq 1$. But we made the hypothesis that $\{x/f(x)=Maxf\}$, the set of maximum points of f, is a thin set. We can therefore find such a function η with $\int_M \eta dv_{\mathbf{g}}$ as close as we want to $Vol_{\mathbf{g}}(M)$. As

$$\frac{\left(\int_M f dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}{B_0(\mathbf{g})(\underset{M}{Sup}f)^{\frac{n-2}{n}}}>0$$

we can find η satisfying (23) and a real t, denoted t_1, satisfying (21) and (22).

On the set $\{x/f(x)=Maxf\}$, $h_t=B_0K^{-2}+\alpha$, so $\forall P\in\{x/f(x)=Maxf\}$:

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h_t(P)>S_{\mathbf{g}}(P)-\frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(P)}{f(P)}.$$

We then set :

$$t_0=Inf\{t\leq t_1\,/\,\lambda_{h_t}<\frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup}f)^{\frac{n-2}{n}}}\}\ .$$

Necessarilly, $t_0<t_1$. We remind that (see section 1) :

$$\lambda_{h,f,\mathbf{g}}=\lambda_h=\inf_{w\in\mathcal{H}_f}I_h(w)$$

Therefore

$$\lambda_{h_{t_0}}=\frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup}f)^{\frac{n-2}{n}}}\ \ and\ \ \lambda_{h_t}<\frac{1}{K(n,2)^2(\underset{M}{Sup}f)^{\frac{n-2}{n}}}\ \ if\ \ t>t_0.$$

Furthermore $\forall t$, $t_0\leq t\leq t_1$, $h_t>0$ on M and

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h_{t_0}(P)>S_{\mathbf{g}}(P)-\frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(P)}{f(P)}\ \ for\ \ P\in\{x/f(x)=Maxf\}\,.$$

At last $h_t\underset{t\to t_0}{\to}h_{t_0}$ in C^0, and as $h_{t_0}>0$, $\triangle_{\mathbf{g}}+h_{t_0}$ is coercive. Therefore by theorem 1, h_{t_0} is critical and $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ has minimizing solutions.

Remark : The precceding proofs also show, by replacing B_0K^{-2} by h, that if $(h,f,\mathbf{g})$ is weakly critical, and if

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P)>S_{\mathbf{g}}(P)-\frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(P)}{f(P)}\ \text{ for }\ P\in\{x/f(x)=Maxf\}$$

then there exists $h'\leqslant h$ such that(h',f,g) is critical.

If we only have

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P)\geq S_{\mathbf{g}}(P)-\frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}}f(P)}{f(P)}\ \text{ for }\ P\in\{x/f(x)=Maxf\}$$

then for any $\varepsilon>0$ there exists $h'\leq h+\varepsilon$ such that (h',f,g) is critical.

Weaker hypothesis are sufficient to prove the existence of positive critical functions : for example, it suffices that the *boundary* of the set $Maxf$ is a set of null measure ; see [**?**] for full details.

9.6 Critical triple 2

We want to prove here theorem 3. This theorem lies on the transformation formula for a critical function in a conformal change of metric (seen at the end of the introduction) :

$(h', f, \mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g})$ *is critical if and only if* $(h = h'u^{\frac{4}{n-2}} - \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u}{u}, f, \mathbf{g})$ *is critical.*

We set, for $u \in C^{\infty}_{+}(M) = \{u \in C^{\infty}(M) \,/\, u > 0\}$:

$$F_{h'}(u) = h'u^{\frac{4}{n-2}} - \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u}{u}$$

Then :

$$(h', f, \mathbf{g}') \text{ is critical if and only if } (F_{h'}(u), f, \mathbf{g}) \text{ is critical.}$$

To prove the theorem, we therefore have to prove the existence of a function h such that :

1/ : $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = h'u^{\frac{n+2}{n-2}}$ has a solution $u > 0$, and

2/ : $(h, f, \mathbf{g})$ is critical.

Indeed, in this case $h = F_{h'}(u)$ and h' is critical for f and $\mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$.

E. Humbert et M. Vaugon proved this theorem in the case $f = cste$ and for a manifold not conformaly diffeomorphic to the sphere [21]. Their method lies on the fact that for such a manifold , after a first conformal change of metric, $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ is a critical function, (we will denote these two constants K et B_0). In fact, a careful study of their proof shows that what is needed is in fact that B_0K^{-2} is positive. But we proved in the previous section the existence of positive critical functions under a geometric hypothesis concerning f. Remark that our proof will work on the sphere, but only for a non-constant function f.

The principle of the proof of E. Humbert and M. Vaugon is the following. We know that there exists a sequence (h_t) of sub-critical functions for f and $\mathbf{g}$ such that $h_t \overset{C^2}{\to} h$ where $(h, f, \mathbf{g})$ is critical and such that for any point P where f is maximum on M

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}.$$

For a sequence $q_t \to 2^*$, $q_t < 2^*$ we build a sequence $u_t > 0$ of solutions of

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = h'u^{q_t - 1} \;\; with \;\; \int h'u_t^{q_t} dv_{\mathbf{g}} \leq C \text{ independant of } t$$

such that $u_t \overset{H_1^2}{\to} u \geqslant 0$. Here again, if $u > 0$, then u is solution (up to a multiplicative constant) of $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = h'u^{\frac{n+2}{n-2}}$ and we are done.

Now, if $u = 0$, one shows that the u_t concentrate and that using this phenomenom, one can find a t_0 close to 1 (if e.g. $t \to 1$) and a real s large, such that $F_{h'}(u_{t_0})$ is sub-critical and $F_{h'}(u_{t_0}^s)$ is weaklly critical, with furthermore

$$\frac{4(n-1)}{n-2}F_{h'}(u_{t_0}^s)(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

at any point P where f is maximum. Then, considering the path $t \to F_{h'}(u_{t_0}^{ts})$ and using theorem 1, we get the existence of a critical function on this path. It is to obtain the conditions on $F_{h'}(u_{t_0}^{s})$ at the maximum points of f that we need the existence of positive critical functions.

We will now give the scheme of the proof, refering for complete details to the article of E. Humbert and M. Vaugon or to our PHD thesis available online, and we will only indicate the modifications due to our function f and the necessity of positive critical functions.

First, we said that we will need positive critical functions. Their existence was proved under the hypothesis that $Maxf$ is thin and that $\int_M f dv_{\mathbf{g}} > 0$. But $\underset{M}{Sup} f > 0$, so, after making if necessary a first conformal change of metric, we can suppose that $\int_M f dv_{\mathbf{g}} > 0$, and we supposed in the hypothesis of theorem 3 that $Maxf$ is thin, and therefore we can suppose that we have positive critical function for f and $\mathbf{g}$.

Then, we fix some (more) notations :

$$J_{h,h',\mathbf{g},q}(w) = \frac{\int_M |\nabla w|^2 \, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.w^2 dv_{\mathbf{g}}}{\left(\int_M h' \, |w|^q \, dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{2}{q}}}$$

$$\inf_{w \in \mathcal{H}^+_{h',q}} J_{h,h',\mathbf{g},q}(w) := \lambda_{h,h',\mathbf{g},q}$$

where

$$\mathcal{H}^+_{h',q} = \{w \in H_1^2(M) \,/\; w > 0 \; and \; \int_M h'.w^q dv_{\mathbf{g}} > 0\}.$$

and

$$\Omega_{h,h',\mathbf{g},q} = \{u \in \mathcal{H}^+_{h',q} / \, J_{h,h',\mathbf{g},q}(u) = \lambda_{h,h',\mathbf{g},q} \; and \; \int_M h'.w^q dv_{\mathbf{g}} = (\lambda_{h,h',\mathbf{g},q}\,)^{\frac{q}{q-2}}\} \; .$$

Let (h_t) be a sequence of sub-critical functions for f and $\mathbf{g}$ such that $h_t \overset{C^2}{\to} h$ where $(h, f, \mathbf{g})$ is critical, with $\triangle_{\mathbf{g}} + h_t$ coercive. We know that we can find such a sequence with $h_t > 0$ et $h > 0$, and also

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h_t(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

for all $P \in Maxf$. But here, we can say more, and that is where the existence of positive critical functions is crucial. Indeed, for any constant $c > 0$, if $\mathbf{g}' = c\mathbf{g}$, then $S_{\mathbf{g}'} = c^{-1} S_{\mathbf{g}}$ and $\triangle_{\mathbf{g}'} = c^{-1} \triangle_{\mathbf{g}}$ and by the transformation formula for critical functions :

h is (sub-, weakly) critical for f and $\mathbf{g}$ if and onlu if $c^{-1}h$ is (sub-, weakly) critical for f and $\mathbf{g}'$.

Therefore, up to multiplying $\mathbf{g}$ by a constant, we can, for any constant $C > 0$, suppose :

$$\begin{aligned} h_t &> C \quad on\, M \\ \frac{4(n-1)}{n-2} h_t(P) - S_{\mathbf{g}}(P) + \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} &> C \quad \forall P \in Maxf \end{aligned}$$

and $(h, f, \mathbf{g})$ has minimizing solutions.

We can now follow the method exposed above; we only give the scheme of the proof.

First step : Thanks to the compacity of the inclusion $H_1^2 \subset L^q$, it is known that $\forall q < 2^*$ and $\forall u \in \Omega_{h,h',\mathbf{g},q}$, u is solution of $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = h' u^{q-1}$. Using this fact, in the first step, one proves the following :

There exist sequences $(q_i), (t_i)$, such that

$$\begin{array}{rcl} 2 & < & q_i < 2^* \\ q_i & \to & 2^* \\ t_i & \to & 1 \\ h_{t_i} & \to & h \end{array}$$

and a sequence $(v_i) \in \Omega_{h_{t_i},h',\mathbf{g},q_i}$ such that $(F_{h'}(v_i), f, \mathbf{g})$ is sub-critical.

We note

$$J_i = J_{h_{t_i},h',\mathbf{g},q_i}$$

and

$$\lambda_i = \lambda_{h_{t_i},h',\mathbf{g},q_i} \ .$$

Then

$$J_i(v_i) = \lambda_i \ \ and \ \int h' v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} = \lambda_i^{\frac{q_i}{q_i-2}}$$

and v_i is a positive solution of

$$\triangle_{\mathbf{g}} v_i + h_{t_i}.v_i = h' v_i^{q_i-1}.$$

The sequence (v_i) is bounded in H_1^2 and thus there exists $v \in H_1^2$ such that

$$v_i \overset{H_1^2}{\rightharpoonup} v, \ v_i \overset{L^2}{\to} v \ \ et \ \ v_i \overset{L^{2^*-2}}{\to} v.$$

Once again, we have two possibilities : $v \equiv 0$ or $v > 0$.

Second step :

If $v > 0$, as we said above, the proof is over : up to a subsequence, $v_i \overset{C^2}{\to} v$ and so on one hand $F_{h'}(v_i) \to F_{h'}(v)$, and on the other hand

$$F_{h'}(v_i) = h_{t_i} + h'(v_i^{\frac{4}{n-2}} - v_i^{q_i-2}) \to h \, ,$$

that is, $F_{h'}(v) = h$ which is critical for f and $\mathbf{g}$ with minimizing solutions. Thus h' is critical for f and $\mathbf{g}' = v^{\frac{4}{n-2}} \mathbf{g}$, with minimizing solutions.

The rest of the proof is therefore concerned with the case $v \equiv 0$.

Third step : One proves that there is a concentration phenomenom :

a/ : One first shows that :

$$0 < c \leqslant \overline{\lim} \, \lambda_i \leqslant K^{-2} (Sup_M \, h')^{-\frac{n-2}{n}} \ .$$

b/ : Second, one shows that :

$$0 < \lambda^{\frac{n}{2}} (Sup_M \, h')^{-1} \leqslant \overline{\lim} \int_M v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} \leqslant K^{2^*} \lambda^{\frac{n2^*}{4}} \leqslant K^{-n} (Sup_M \, h')^{-\frac{n}{2}}$$

where $\lambda > 0$ is such that, after extraction, $\lambda_i \to \lambda$.

c/ : We say that $x \in M$ is a concentration point if

$$\forall r > 0 : \overline{\lim} \int_{B(x,r)} v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} > 0.$$

Using a/ and b/, and method analogous to section 4.2, one gets the following : First, as M is compact, there exists at least one concentration point $x \in M$. Then, using the iteration process, one shows that

$$\overline{\lim} \int_{B(x,r)} v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} \geqslant K^{-n} (Sup_M\, h')^{-\frac{n}{2}}.$$

d/ : Therefore using the method of section 4.2, we get :
1/ : $\overline{\lim} \int_{B(x,r)} v_i^{q_i} dv_{\mathbf{g}} = K^{-n} (Sup_M\, h')^{-\frac{n}{2}}$, $\forall r > 0$
2/ : x is the only concentration point, denoted x_0
3/ : $\lambda = K^{-2} (Sup_M\, h')^{-\frac{n-2}{n}}$
4/ : x_0 is a point of maximum of h'
5/ : $v_i \to 0$ in $C^2_{loc}(M - \{x_0\})$

Fourth step :

We know now that the sequence (v_i) concentrates in x_0 and that for any i $F'_{h'}(v_i)$ is sub-critical for f and $\mathbf{g}$. We would like to find a v_{i_0} , a function $v > 0$ and a continuous path from v_{i_0} to v such that $F_{h'}(v)$ is weakly critical for f and $\mathbf{g}$ and such that

$$\frac{4(n-1)}{n-2} F_{h'}(v)(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

for all $P \in Max f$. Then, the theorem 1 will tell us that on the path u_t from v_{i_0} to v there exists a u_t such that $F_{h'}(u_t)$ is critical for f and $\mathbf{g}$.

That is where we are going to use the existence of positive critical functions.

Let $s \geqslant 1$ and let v be a positive function. Then

$$\triangle_{\mathbf{g}}(v^s) = s v^{s-1} \triangle_{\mathbf{g}} v - s(s-1) v^{s-2} |\nabla v|^2_{\mathbf{g}} \ .$$

Thus

$$F_{h'}(v_i^s) = h' v_i^{s\frac{4}{n-2}} + s h_{t_i} - s h' v_i^{q_i - 2} + s(s-1) \frac{|\nabla v|^2_{\mathbf{g}}}{v_i^2}$$

and therefore

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant s h_{t_i} + h' (v_i^{s\frac{4}{n-2}} - s v_i^{q_i - 2}) \ .$$

Now :

On $\{x \in M \,/\, h'(x) \leqslant 0\}$:

$v_i \to 0$ uniformly because $x_0 \in Max\, h'$ and $h'(x_0) > 0$ as we have supposed that $\triangle_{\mathbf{g}} + h'$ is coercive. Furthermore if $s \geqslant 1$ then $s\frac{4}{n-2} \geqslant q_i - 2$. Thus, for i large enough

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant s h_{t_i} \text{ on } \{x \in M \,/\, h'(x) \leqslant 0\}$$

On $\{x \in M \,/\, h'(x) > 0\}$:

We consider the function of a real variable defined for $x \geqslant 0$ by

$$\beta_{i,s}(x) = x^{s\frac{4}{n-2}} - s x^{q_i - 2} = x^{q_i - 2} (x^{s\frac{4}{n-2} - q_i + 2} - s).$$

An easy study of this function shows that

$$for\ \ x \geqslant 0 : \beta_{i,s}(x) \geqslant -s.$$

But

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant s h_{t_i} + h' \beta_{i,s}(v_i)$$

therefore

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant s h_{t_i} - s h' \ \text{ on } \ \{x \in M \,/\, h'(x) > 0\}.$$

We can therefore write :

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant s(h_{t_i} - \underset{M}{Sup}\, h') \text{ on } \{x \in M \,/\, h'(x) > 0\}.$$

We now use our work from the beginning of the proof, that is that, for any $C > 0$, we can suppose that :

$$h_t > C \ on\, M$$

and

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h_t(P) - S_{\mathbf{g}}(P) + \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} > C, \quad \forall P \in Max f\,.$$

Then, first, if we suppose that $h > \underset{M}{Sup}\, h'$ on M, we see that for i and s large enough :

$$F_{h'}(v_i^s) \geqslant B_0(\mathbf{g}) K(n,2)^{-2} \tag{9.24}$$

and therefore $F_{h'}(v_i^s)$ is weakly critical for f and $\mathbf{g}$. Beside, for all $t \in [1, s]$ we also have

$$F_{h'}(v_i^t) \geqslant t(h_{t_i} - \underset{M}{Sup}\, h') \ \geqslant h_{t_i} - \underset{M}{Sup}\, h' > 0$$

so $\triangle_{\mathbf{g}} + F_{h'}(v_i^t)$ is coercive.

Secondly, if we also suppose that

$$\frac{4(n-1)}{n-2} h_t(P) - S_{\mathbf{g}}(P) + \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} > \frac{4(n-1)}{n-2} \underset{M}{Sup}\ h' \quad \forall P \in Max f$$

we have for all $t \in [1, s]$:

$$\frac{4(n-1)}{n-2} F_{h'}(v_i^t)(P) > S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)} \quad \forall P \in Max f \tag{9.25}$$

as soon as i is large enough.

We therefore fix i and s large enough to have (24) et (25) and we consider

$$s_0 = \inf\{t > 1 \,/\, F_{h'}(v_i^t) \text{ is weakly critical}\}$$

We then apply theorem 1 to the path $t \in [1, s_0] \mapsto F_{h'}(v_i^t)$ to obtain that $F_{h'}(v_i^{s_0})$ is critical for f and $\mathbf{g}$, with minimizing solutions. Therefore h' is critical for f and $\mathbf{g}' = (v_i^{s_0})^{\frac{4}{n-2}} \mathbf{g}$ with minimizing solutions.

This ends the proof.

9.7 Critical triple 3

Let $(M, \mathbf{g})$ be a compact riemannian manifold of dimension $n \geqslant 3$. Let h be a fixed C^∞ function such that $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive. The problem we want to study is the following : *can we find a function f such that $(h, f, \mathbf{g})$ is a critical triple ?*

We first make a remark. If $h \geqslant B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$, then h is weakly critical for any function f, and there cannot exist a function f such that $(h, f, \mathbf{g})$ is subcritical. But more important is the next observation :

If there exist a non constant function f such that $(h, f, \mathbf{g})$ is critical with a minimizing solution u, then $(h, 1, \mathbf{g})$ is sub-critical.

Indeed, as we saw in section 1, we can suppose that $Sup\, f = 1$. Then, as $u > 0$

$$J_{h,1}(u) < J_{h,f}(u) = \frac{1}{K(n,2)^2 (Sup\, f)^{\frac{2}{2^*}}} = \frac{1}{K(n,2)^2}$$

and therefore h is subcritical for 1.

We want to prove that, at least if $dimM \geq 5$, this necessary condition is sufficient, i.e we want to prove theorem 4. We thus suppose now that $(h, 1, \mathbf{g})$ *is sub-critical.*

The proof will proceed in two steps :

First step : we prove that there exist a function $f \in C^\infty(M)$ such that $\underset{M}{Sup} f = 1$, with $\triangle_{\mathbf{g}} f$ being as large as we want in its maximum points, and such that $(h, f, \mathbf{g})$ is weakly critical.

Second step : being given this function f, we prove that there exists on the path

$$t \to f_t = t.1 + (1-t)f$$

a function for which h is critical.

First step :

We proceed by contradiction. We suppose that for any $f \in C^\infty(M)$ such that $\underset{M}{Sup} f > 0$, $(h, f, \mathbf{g})$ is sub-critical. Then, for all such function, there exit positive solution u to the equation

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \lambda.f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

where

$$\lambda = \inf_{w \in \mathcal{H}_f} I_{h,\mathbf{g}}(w) \ \ and \ \ \int_M f.u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} = 1\,.$$

The metric $\mathbf{g}$ being fixed, we will not write $dv_{\mathbf{g}}$ in the integrals.

The idea is to build a familly of functions f_t whose laplacians tend to infinity at the maximum points. One of these function will then give a weakly critical triple $(h, f_t, \mathbf{g})$. Furthermore, our proof holding for any subsequence of this familly. this function will have a laplacian as large as we want in its point of maximum.

In $\mathbb{R}^n$, we build for $t \to 0$ a familly (P_t) of C^∞ functions, similar to a

regularizing sequence, such that

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant & P_t \leqslant 1 \\ P_t(x) & = & P_t(|x|) \\ P_t(0) & = & 1 \\ \|\nabla P_t\| & \sim & \dfrac{c_1}{t} \ \ on \ \ B(0,t) \\ |\triangle P_t(0)| & \sim & \dfrac{c_2}{t^2} \\ SuppP_t & = & B(0,t). \end{array}$$

Let now x_0 be a point of M such that $h(x_0) > 0$; this point exists because $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive. We define

$$f_t = P_t \circ \exp_{x_0}^{-1}$$

We are therefore supposing that, for all t, $(h, f_t, \mathbf{g})$ is sub-critical and we are looking for a contradiction. For all t we have a solution $u_t > 0$ of

$$(E_t): \ \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h.u_t = \lambda_t.f_t.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

with $\int f_t u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$ and

$$\lambda_t < K^{-2}(\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}} = K^{-2}.$$

Then, (u_t) is bounded in $H_1^2(M)$ when $t \to 0$. So (u_t) is bounded in L^{2^*} and $(u_t^{2^*-1})$ is bounded in $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}$. After extraction of a subsequence, if $f_t \overset{L^2}{\to} f$ and $u_t \overset{L^2}{\to} u$, then

$$f_t u_t^{2^*-1} \rightharpoonup f u^{2^*-1}.$$

But here, $f_t \overset{L^p}{\to} 0$, therefore the equation (E_t) "converge" to

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = 0$$

in the sense that u is solution of this equation. But $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is coercive, therefore $u = 0$, i.e. $u_t \to 0$ in L^p for $p < 2^*$.

The sequence (u_t) therefore concentrates in the sense we saw in subsection 4.2. But in subsection 4.2, the function f on the right handside of the equation was constant and it was on the left handside that we had a sequence (h_t). However the results we saw there remain true, only the blow-up necessary for the weak estimates requires a new treatment. We will go over these results, only detailing the new difficulties.

a/ : There exists, up to a subsequence of (u_t), exactly one concentration point and it is the point x_0 where the f_t are maximum on M. Moreover

$$\forall \delta > 0, \ \overline{\lim_{t \to 1}} \int_{B(x_0,\delta)} f_t u_t^{2^*} = 1\,.$$

The method of subsection 4.2 works here. More precisely, as $Supp\, f_t = B(x_0, t)$, we have for all $\delta > 0$ and as soon as $t < \delta$:

$$\int_{B(x_0,\delta)} f_t u_t^{2^*} = 1.$$

We can also suppose that

$$\lambda_t \to \lambda = K^{-2}(\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}} = K^{-2}.$$

b/ : $u_t \to 0$ in $C^0_{loc}(M - \{x_0\})$
Same proof as in subsection 4.2.
c/ : weak estimates
We consider a sequence of points (x_t) such that

$$m_t = \underset{M}{Max}\, u_t = u_t(x_t) := \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}.$$

From the previous point, $x_t \to x_0$ and $\mu_t \to 0$. Remember that $\overline{u}_t, \overline{f}_t, \overline{h}_t, \mathbf{g}_t$ are the functions and the metric seen in the chart $\exp_{x_t}^{-1}$, and $\widetilde{u}_t$, $\widetilde{h}_t$, $\widetilde{f}_t, \widetilde{\mathbf{g}}_t$ are the functions after blow-up of center x_t and coefficient $k_t = \mu_t^{-1}$.

Reviewing the proof of the weak estimates in section 4.2, we see that it will work here if we obtain :

$$\forall R > 0 \ : \lim_{t\to 0} \int_{B(x_t, R\mu_t)} f_t u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1 - \varepsilon_R \ \ where \ \ \varepsilon_R \underset{R\to+\infty}{\to} 0\,.$$

This relation is itself proved using blow-up theory once it is proved that $\widetilde{u}_t \overset{C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\to} \widetilde{u}$ where $\widetilde{u}$ is solution of :

$$\triangle_e \widetilde{u} = K^{-2} \widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

This is where we have the main difficulty due to the presence of a familly (f_t). Indeed, after blow-up, the equation

$$(E_t) : \ \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h.u_t = \lambda_t.f_t.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

becomes

$$(\widetilde{E}_t) \ : \triangle_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \widetilde{u}_t + \mu_t^2.\widetilde{h}_t.\widetilde{u}_t = \lambda_t \widetilde{f}_t.\widetilde{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

and to obtain that this equation "converges" to

$$\triangle_e \widetilde{u} = K^{-2} \widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

we need to show that $(\widetilde{f}_t)$ is simply convergent to 1 (which is obvious when we have a constant function f on the right handside of $(E_{h,f,\mathbf{g}})$). As the sequence $(\widetilde{f}_t)$ is uniformly bounded by 1 on $\mathbb{R}^n$ (considering we have extended $\widetilde{f}_t$ by 0 on $\mathbb{R}^n \backslash B(0, \delta\mu_t^{-1})$), we have, using e.g. theorem 8.25 of Gilbard-Trudinger [**?**] and Ascoli's theorem, the existence of a function $\widetilde{u} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ such that, after extraction, $\widetilde{u}_t \overset{C^0_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\to} \widetilde{u}$, with $\widetilde{u}(0) = 1$.

We are going to prove that $\widetilde{f}_t \overset{a.e.}{\to} 1$ on $\mathbb{R}^n$ in two steps (we will prove a little bit more) :

1/ : There exists $\widetilde{f} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ such that $\widetilde{f}_t \overset{a.e.}{\to} \widetilde{f}$ on $\mathbb{R}^n$

2/ : $\widetilde{f} = 1$ a.e. on $\mathbb{R}^n$

First step :

We have $\widetilde{f}_t(x) = \overline{f}_t(\mu_t x)$ and $\left|\nabla \overline{f}_t\right| \leq \frac{c}{t}$. Therefore

$$\left|\nabla \widetilde{f}_t\right| \leq c.\frac{\mu_t}{t}\,.$$

We consider two cases :

a/ : If $(\frac{\mu_t}{t})$ is bounded : Then for any compact set $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, $(\widetilde{f}_t)$ is bounded in $H_1^{n+1}(K)$ (where $n = \dim M$). Thus, by compacity of the inclusion $H_1^{n+1}(K) \subset C^{0,\alpha}(K)$ for some $\alpha > 0$, up to a subsequence, there exists $\widetilde{f}_K \in C^{0,\alpha}(K)$ such that

$$\widetilde{f}_t \overset{C^{0,\alpha}(K)}{\to} \widetilde{f}_K$$

By diagonal extraction, we constuct $\widetilde{f} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ such that

$$\widetilde{f}_t \overset{C^{0,\alpha}(K')}{\to} \widetilde{f}$$

for any compact set K' of $\mathbb{R}^n$, and moreover $\widetilde{f} \in H_{1,loc}^{n+1}(\mathbb{R}^n)$. So $\widetilde{f}_t \overset{a.e.}{\to} \widetilde{f}$ *on* $\mathbb{R}^n$.

b/ : If $\frac{\mu_t}{t} \to +\infty$: the support of $\widetilde{f}_t$ is

$$Supp\widetilde{f}_t = B(\frac{x_0(t)}{\mu_t}, \frac{t}{\mu_t}),$$

where $x_0(t) = \exp_{x_t}^{-1}(x_0)$.

If $(\frac{|x_0(t)|}{\mu_t})$ is bounded, there is after extraction a subsequence

$$\frac{x_0(t)}{\mu_t} \to P \in \mathbb{R}^n;$$

and therefore

$$\widetilde{f}_t \overset{C^0_{loc}(\mathbb{R}^n - \{P\})}{\to} 0$$

If $\frac{|x_0(t)|}{\mu_t} \to \infty$, then

$$\widetilde{f}_t \overset{C^0_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\to} 0$$

In both cases, $\widetilde{f}_t \overset{p.p}{\to} 0$ *on* $\mathbb{R}^n$.

In case a/, $\widetilde{u}$ is a weak solution of

$$\triangle_e \widetilde{u} = K^{-2} \widetilde{f} \widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

with $\widetilde{f} \geq 0$ as $\widetilde{f}_t \geq 0$, and $\widetilde{f} \in H_{1,loc}^{n+1}(\mathbb{R}^n) \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

In case b/, $\widetilde{u}$ is a weak solution of

$$\triangle_e \widetilde{u} = 0.$$

In both cases, elliptic thory and standard regularity thorems gives the C^2 regularity of $\widetilde{u}$, and therefore $\triangle_e \widetilde{u} \geq 0$. The maximum principle then shows that either $\widetilde{u} \equiv 0$ or $\widetilde{u} > 0$. But $\widetilde{u}(0) = 1$ thus $\widetilde{u} > 0$.

Second step :

We start using the iteration process : for some cut-off function η equal to 1 near x_0, we multiply (E_t) by $\eta^2 u_t$, integrate and use the Sobolev inequality to obtain, remembering that $\lambda_t < K^{-2}(\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}}$ and that $Sup\, f_t = 1$:

$$(\int_M (\eta u_t)^{2^*})^{\frac{2}{2^*}} \leq \lambda_t K^2 \int_M \eta^2 f_t u_t^{2^*} + c \int_{Supp\,\eta} u_t^2 \ .$$

We take $\eta = 1$ on $B(x_0, \frac{3}{2}\delta)$ and $\eta = 0$ on $M \backslash B(x_0, 2\delta)$. Then for t close to 0

$$Supp\, f_t \subset B(x_0, t) \subset B(x_t, \delta) \subset B(x_0, \frac{3}{2}\delta)$$

So

$$(\int_{B(x_t,\delta)} {u_t}^{2^*})^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{B(x_t,\delta)} f_t u_t^{2^*} + c \int_M u_t^2$$

and after blow-up

$$(\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^{2^*})^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} + c \int_M u_t^2 = 1 + c \int_M u_t^2 \ .$$

But $\int_M u_t^2 \to 0$ therefore

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^{2^*} \leq 1 \ .$$

Beside, we know that $\widetilde{f}_t \overset{a.e.}{\to} \widetilde{f}$ with $\widetilde{f} \leq 1$ and $\widetilde{u}_t(0) = 1$. Let suppose that there exists a set $A \subset \mathbb{R}^n$ with $mes(A) > 0$ such that $\widetilde{f} < 1$ on A and write $\mathbb{R}^n = A \cup B$ with $\widetilde{f} = 1$ a.e. on B. Then, as $\widetilde{f}_t \geq 0$ and as $\widetilde{u}_t \overset{C^2}{\to} \widetilde{u} > 0$:

$$\begin{aligned} 1 = \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} \quad &\leqslant \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\cap A} \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} + \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\cap B} \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} \\ &< \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\cap A} \widetilde{u}_t^{2^*} + \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\cap B} \widetilde{u}_t^{2^*} \\ &= \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^{2^*} \end{aligned}$$

so

$$1 < \overline{\lim_{t\to 0}} \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^{2^*}$$

which is a contradiction, and therefore $\widetilde{f}_t \overset{a.e.}{\to} 1$ on $\mathbb{R}^n$.

Thus, as we said

$$(\widetilde{E}_t) \ : \ \triangle_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \widetilde{u}_t + \mu_t^2 . \widetilde{h}_t . \widetilde{u}_t = \lambda_t \widetilde{f}_t . \widetilde{u}_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

"converges" to

$$\triangle_e \widetilde{u} = K^{-2} \widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

in the sense that

$$\widetilde{u}_t \overset{C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)}{\to} \widetilde{u}$$

where $\widetilde{u}$ is a solution of $\triangle_e \widetilde{u} = K^{-2}\widetilde{u}^{\frac{n+2}{n-2}}$. As $\widetilde{u}(0) = 1$,

$$\widetilde{u}(x) = (1 + \frac{K^{-2}}{n(n-2)}\,|x|^2)^{-\frac{n-2}{2}}\ .$$

Now, we can proceed exactly as in subsection 4.2.. We have :

$$\forall R > 0 : \lim_{t\to 0} \int_{B(x_t, R\mu_t)} f_t u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1 - \varepsilon_R \ \ where\ \ \varepsilon_R \underset{R\to+\infty}{\to} 0$$

then

$$\exists C > 0 \ \ such\ \ that\ \ \forall x \in M : \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq C.$$

and

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 \ \ such\ \ that\ \ \forall t, \forall x \in M : \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t) \geq R\mu_t \ \Rightarrow\ d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{\frac{n-2}{2}} u_t(x) \leq \varepsilon.$$

d/ : We have here again the L^2-concentration :
If $\dim M \geq 4$,

$$\forall \delta > 0 \ : \ \lim_{t\to 0} \frac{\int_{B(x_0,\delta)} u_t^2 dv_{\mathbf{g}}}{\int_M u_t^2 dv_{\mathbf{g}}} = 1$$

e/ : We also have the strong estimates : For $0 < \nu < \frac{n-2}{2}$

$$\exists C(\nu) > 0 \ \ such\ \ that\ \ \forall x \in M : \ d_{\mathbf{g}}(x, x_t)^{n-2-\nu} \mu_t^{-\frac{n-2}{2}+\nu} u_t(x) \leq C,$$

and therefore the strong L^p-concentration :
$\forall R > 0$, $\forall \delta > 0$ and $\forall p > \frac{n}{n-2}$ where $n = \dim M$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\int_{B(x_t, R\mu_t)} u_t^p dv_{\mathbf{g}}}{\int_{B(x_t,\delta)} u_t^p dv_{\mathbf{g}}} = 1 - \varepsilon_R \ \ where\ \ \varepsilon_R \underset{R\to+\infty}{\to} 0$$

We can now proceed with the central part of the proof of theorem 4 :
We consider the euclidean Sobolev inequality and equation (E_t) viewed in the chart $\exp_{x_t}^{-1}$. Using the same computations as in subsection 4.3, we get :

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\delta)} \overline{h}_t (\eta \overline{u}_t)^2 dx \leq \quad & \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \eta^2 \overline{u}_t^{2^*} dx \\ & - \frac{1}{K(n,2)^2} (\int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}} \\ & + C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx + B_t + C_t\end{aligned}$$

with
$B_t = \frac{1}{2} \int_{B(0,\delta)} (\partial_k (\mathbf{g}_t^{ij} \Gamma(\mathbf{g}_t)_{ij}^k + \partial_{ij} \mathbf{g}_t^{ij})(\eta \overline{u}_t^2) dx$
$C_t = \left| \int_{B(0,\delta)} \eta^2 (\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij}) \partial_i \overline{u}_t \partial_j \overline{u}_t dx \right|$
$A_t = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}} \int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t \eta^2 \overline{u}_t^{2^*} dx - \frac{1}{K(n,2)^2} (\int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}}$

We can write

$$A_t \leq \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f_t)^{\frac{n-2}{n}}} (A_t^1 + A_t^2)$$

where $A_t^1 = (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} - (Sup f_t . \int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}}$.

from the computation of subsection 4.3,

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}} A_t^2 + C.\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\delta/2)} \overline{u}_t^2 dx + B_t + C_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) + \varepsilon_\delta$$

where $\varepsilon_\delta \to 0$ when $\delta \to 0$.

We now consider :

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx}$$

We remark that from its definition, f_t is decreasing when $t \to 0$ in the sense that :

$$if \;\; t \leq t' \;\; then \;\; f_t \leq f_{t'} \; .$$

We fix a t_0. Then, for any $t \leq t_0$

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\delta)} \overline{f}_t (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx &= \int_{B(x_t,\delta)} f_t . (\eta \circ \exp_{x_t}^{-1})^{2^*} . u_t^{2^*} . (\exp_{x_t}^{-1})^* dx \\ &\leq \int_{B(x_t,\delta)} f_{t_0} . (\eta \circ \exp_{x_t}^{-1})^{2^*} . u_t^{2^*} . (\exp_{x_t}^{-1})^* dx \\ &= \int_{B(0,\delta)} (f_{t_0} \circ \exp_{x_t}) (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx \, . \end{aligned}$$

We note :

$$\overline{f}_{t_0,t} = f_{t_0} \circ \exp_{x_t}$$

and

$$\widetilde{f}_{t_0,t} = \overline{f}_{t_0,t} \circ \psi_{\mu_t^{-1}}^{-1} \, .$$

Then :

$$\begin{aligned} A_t^1 &\leq (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_{t_0,t} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} - (Sup f_t . \int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\leq (\int_{B(0,\delta)} \overline{f}_{t_0,t} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} - (Sup f_{t_0} . \int_{B(0,\delta)} (\eta \overline{u}_t)^{2^*} dx)^{\frac{n-2}{n}} \end{aligned}$$

as $Sup f_t = Sup f_{t_0} = 1 = f_{t_0}(x_0)$ for all t.

We therefore obtain by the same method than that of section 4.3 :

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{A_t^1}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t}} \leq -\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)} + \varepsilon_\delta$$

and thus, after letting δ tend to 0, we obtain :

$$h(x_0) \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)}$$

But

$$\triangle_{\mathbf{g}} f_t(x_0) \sim + \frac{c}{t^2} \underset{t\to 0}{\to} +\infty$$

so taking t_0 close to 0 we obtain a contradiction.

This proves that we can find in the sequence (f_t) functions whith laplacian in x_0, $\triangle_{\mathbf{g}} f_t(x_0)$, as large as we want such that the equations : $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f_t.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ do *not* have minimizing solutions and therefore such that h is weakly critical for f_t and $\mathbf{g}$.

Remark 1 : We also have in this setting the analog of theorem 6 on the speed of convergence of (x_t) to x_0.

Remark 2 : this can be apply to $h = cste < B_0 K^{-2}$ or to $h = S_{\mathbf{g}}$ if M is not the sphere.

Second step :

For our function h such that $(h, 1, \mathbf{g})$ is subcritical, we know now that there exists a function f, with a laplacian as large as we want at its maximum points, such that $(h, f, \mathbf{g})$ is weakly critical. More precisely, we found a function f such that :

1/ : $(h, f, \mathbf{g})$ is weakly critical,

2/ : $h(x_0) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$ where

a/ : $h(x_0) > 0$

b/ : $\{x_0\} = \{x \,/\, f(x) = \underset{M}{Sup} f\}$ and $f(x_0) = 1$, $0 \leq f \leq 1$, $Supp\, f = B(x_0, r)$

c/ : $\nabla^2 f(x_0) < 0$.

We now consider the path

$$t \to f_t = (1-t).1 + t.f.$$

Remark that for all t : $\triangle_{\mathbf{g}} f_t = t \triangle_{\mathbf{g}} f$ and $f_t(x_0) = 1 = \underset{M}{Sup}\, f_t$. We set

$$\lambda_t = Inf\, J_{h, f_t, \mathbf{g}}.$$

Then

$$\lambda_0 < K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f_0)^{-\frac{n-2}{n}}$$

because $(h, 1, \mathbf{g})$ is sub-critical and

$$\lambda_1 = K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f_1)^{-\frac{n-2}{n}}$$

as $(h, f, \mathbf{g})$ is weakly critical. Remark that $\underset{M}{Sup}\, f_t$ is always equal to 1.

Let

$$t_0 = Sup\{t \,/\, \lambda_t < K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}}\}$$

Then $0 < t_0 \leq 1$ and

$$\lambda_{t_0} = K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f_{t_0})^{-\frac{n-2}{n}}$$

Before applying the method of section 4.3, we need to prove one more thing : as h is weakly critical for f_{t_0}, we know that at the maximum point x_0 we have

$$h(x_0) \geq \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)}$$

because $\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)} = t_0 \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x_0)}{f(x_0)}$ with $t_0 \leq 1$, but we need a strict inequality.

We consider the sequence (f_i), that we can construct using the first step : f_i is such that $(h, f_i, \mathbf{g})$ is weakly critical with

$$f_i(x_0) = 1 = Sup f_i \ \ et \ \ \triangle_{\mathbf{g}} f_i(x_0) \to +\infty.$$

For each f_i, we note t_i the "t_0" built above. Therefore for any i :

$$h \text{ is weakly critical for } (1-t_i).1 + t_i.f_i \text{ and } \mathbf{g}.$$

Suppose that liminf $t_i = 0$, or, after extracting, that $t_i \to 0$. Then,

$$(1-t_i).1 + t_i.f_i \to 1$$

uniformly on M as $0 \leq f_i \leq 1$. But $(h, 1, \mathbf{g})$ is sub-critical, thus there exists $u \in H_1^2(M)$ such that

$$\frac{\int |\nabla u|^2 + \int hu^2}{(\int u^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}} < K(n,2)^{-2}\,.$$

But then

$$\frac{\int |\nabla u|^2 + \int hu^2}{(\int ((1-t_i).1 + t_i.f_i) u^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}} \to \frac{\int |\nabla u|^2 + \int hu^2}{(\int u^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}} < K(n,2)^{-2}$$

whereas

$$K(n,2)^{-2} = K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup}((1-t_i).1 + t_i.f_i))^{-\frac{n-2}{n}}$$

which contradict the fact that $(h, (1-t_i).1 + t_i.f_i, \mathbf{g})$ is weakly critical.

Therefore, up to extraction, $t_i \to t_1 > 0$

As $\triangle_{\mathbf{g}} f_i(x_0) \to +\infty$, we can find i large enough so that

$$\frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} t_i \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_i(x_0)}{f_i(x_0)} > \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x_0) - h(x_0)\,.$$

If we now denote f this last function f_i and t_0 this t_i, we get a path

$$t \to f_t = (1-t).1 + t.f$$

such that :

a/ : $\forall t < t_0$: $(h, f_t, \mathbf{g})$ is sub-critical,

b/ : $(h, f_{t_0}, \mathbf{g})$ is weakly critical with :

b1/ : $\{x_0\} = \{x \,/\, f_t(x) = \underset{M}{Sup} f_t\}$ and $f_t(x_0) = 1$ for all t

b2/ : $h(x_0) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)}$

b3/ : $\nabla^2 f_{t_0}(x_0) < 0$

For any $t < t_0$ there exists a minimizing solution u_t of the equation

$$\triangle_{\mathbf{g}} u_t + h.u_t = \lambda_t.f_t.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

with $\int f_t u_t^{2^*} = 1$. The sequence (u_t) is bounded in H_1^2 therefore

$$u_t \underset{t \to t_0}{\overset{H_1^2}{\rightharpoonup}} u$$

and we are once again in the situation where :

- either $u > 0$ and then u is a minimizing solution of $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \lambda_{t_0} f_{t_0}.u^{\frac{n+2}{n-2}}$, and therefore $(h, f_{t_0}, \mathbf{g})$ is critical.

- either $u \equiv 0$ and once again the sequence (u_t) concentrates. In this case, the sudy of the concentration phenomenom is easier than in the first step as the family (f_t) tend uniformly to f when $t \to t_0$ with $Supp\, f_t = B(x_0, r)$. We can find $\delta < r$ such that $f > 0$ on $B(x_0, \delta)$. Then there exists $c > 0$ such that for any t we have :

$$0 < c \leq f_t \leq 1 \text{ on } B(x_0, \delta),$$

Furthermore, the f_t all reach their maximum at x_0, this maximum being always 1. We can then go over all the results and methods of section 4.3, the functions f_t bringing this time no changes. We finally obtain

$$h(x_0) \leq \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(x_0) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f_{t_0}(x_0)}{f_{t_0}(x_0)}$$

thus a contradiction. Therefore $(h, f_{t_0}, \mathbf{g})$ is critical with a minimizing solution.

This proof in fact shows the following result :

Theorem 4' :

If h is weakly critical for a function f and a metric $\mathbf{g}$, these datas satisfying :

1/ : $h(x) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(x)}{f(x)}$ at the maximum points of f

2/ :$\nabla^2 f(x) < 0$ at the maximum points of f

3/ : there exists a sequence $f_t \underset{t \to t_0}{\overset{C^2}{\to}} f$ with $\underset{M}{Sup} f_t = \underset{M}{Sup} f$ such that $(h, f_t, \mathbf{g})$ is subcritical for $t < t_0$

then $(h, f, \mathbf{g})$ is critical and has minimizing solutions.

As we said in the introduction, this leads to another, dual, definition of critical functions, that is definition 3. The natural question is then

Is f critical for h if and only if h is critical for f ?

Remark that in both cases, if P is a point where f is maximum on M : $\frac{4(n-1)}{n-2} h(P) \geqslant S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$

This problem seeems difficult. We prove here the result we obtain, theorem 5.

The proof starts with the following remark : We have seen that if h is weakly critical for f and $\mathbf{g}$ and that $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ has a minimizing solution, then h is critical for f and $\mathbf{g}$. In the same way, if f is weakly critical for h (in the sense that $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{n-2}{n}}$) and if $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ has a minimizing solution $u > 0$, then f is critical for h. Indeed, if f' is a function such that $Supf = Supf'$ and $f' \gneqq f$, we have

$$\int f' u^{2^*} > \int f u^{2^*}$$

because $u > 0$. Therefore

$$J_{h,f',\mathbf{g}}(u) < J_{h,f,\mathbf{g}}(u) = K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{n-2}{n}} = K(n,2)^{-2} (\underset{M}{Sup} f')^{-\frac{n-2}{n}} .$$

Using our work of section 4.3 and of this section, the proof is now short :

-If h is critical for f, we apply theorem 1 : $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ has a minimizing solution, and therefore f is critical for h.

-If f is critical for h, these two functions (and the metric) satisfying the hypothesis of the theorem, we have $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup} f)^{-\frac{n-2}{n}}$, so h is weakly critical for f. We then consider, for $t \overset{<}{\to} 1$, the sequence

$$t \to f_t = (1-t).Supf + t.f\,.$$

For allt t : we have $Supf_t = Supf$ and if $t < 1$ then $f_t \gneqq f$. Therefore as f is critical for h, by definition :

$$\lambda_{h,f_t,\mathbf{g}} < K(n,2)^{-2}(\underset{M}{Sup} f_t)^{-\frac{n-2}{n}}\,.$$

We then apply theorem 4' above to obtain that h is critical for f with minimizing solutions.

9.8 The case of the dimension 3 ; ending remarks

9.8.1 The case of the dimension 3.

We just state the results in the case of dimension 3, as they are immediate generalisations of results of O. Druet proved in the case where f is a constant ; we refer to his article for the proofs [10]. The dimension 3 requires fondamentaly the use of the Green function. We refer to the proof of proposition 8 in section 4.2 for the definition and the property of the Green function. In dimension 3, for any point $x \in M$, and for y close to x, G_h can be writen in the following way :

$$G_h(x,y) = \frac{1}{\omega_2 d_{\mathbf{g}}(x,y)} + M_h(x) + o(1)$$

where $o(1)$ is to be taken for $y \to x$. We call $M_h(x)$ the mass of the Green function at x.

The generalisation of the results of O. Druet to the case of an arbitrary function f in $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ gives the following :

Let $(M,\mathbf{g})$ be a compact manifold of dimension 3, and let $f \in C^\infty(M)$ be such that $Supf > 0$. We have the following results :

- For any function h weakly critical for f and $\mathbf{g}$, and for any $x \in Maxf$, we have $M_h(x) \leq 0$.
- For any $h \in C^\infty(M)$, let $B(h) = \inf\{B/\ h + B \textit{ is weakly critical for } f\}$. Then $h + B(h)$is a critical function for f.
- Let h be a critical function for f and $\mathbf{g}$. Then one of the following condition is true :
  1. There exists $x \in Maxf$ such that $M_h(x) = 0$.
  2. $((E_{h,f,\mathbf{g}}))$ has minimizing solutions.

Remarks :

-The condition

$$M_h(x) \leqslant 0$$

appears as the analog of the condition

$$\frac{4(n-1)}{n-2}h(P) \geqslant S_{\mathbf{g}}(P) - \frac{n-4}{2}\frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}$$

we had in dimension $\geqslant 4$. In the case $f = cst$, this condition must be satisfied on all of M.

-The particularity of dimension 3 is to offer critical functions of any shape, that is the meaning of the second point.

-The main difference with the case $f = cst$ studied by O. Druet is that the conditions on the mass of the Green function are to be considered only at the point of maximum of f.

9.8.2 Degenerate hessian at the point of maximum and fundamental estimate.

In theorem 6, we made the hypothesis that the hessian of f is non degenerate at each of its points of maximum. We give here a conterexample to show that this hypothesis is necessary. Consider the n-dimensional sphere S^n with its standard metric $\mathbf{s}$. Rewriting known results (c.f. for example [17]), there exists a unique critical function for 1 et $\mathbf{s}$, which is

$$h = \frac{n-2}{4(n-1)}S_{\mathbf{s}} = \frac{n-2}{4(n-1)}$$

and this critical function has only two type of extremal functions, the constants and the functions of the form

$$u = a(b - \cos r)^{-\frac{n-2}{2}}$$

where $a \neq 0$, $b > 1$, and r is the geodesic distance to some fixed point of S^n. Consider now on S^n a sequence of points x_t converging to a poit x_0, and let

$$u_t = \mu_t^{\frac{n-2}{2}}(\mu_t^2 + 1 - \cos r_t)^{-\frac{n-2}{2}}$$

where $r_t(x) = d_{\mathbf{s}}(x, x_t)$ and μ_t is a sequence of real converging to 0. Then

$$\int_M u_t^{2^*} dv_{\mathbf{s}} = 1$$

and we obtain in this way a sequence of solutions of the equation

$$\triangle_{\mathbf{s}} u_t + \frac{n-2}{4(n-1)}.u_t = K(n,2)^{-2}u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

where obviously the function $f = K(n,2)^{-2}$ has degenerate hessian at its maximum points! Furthermore

$$Sup_M u_t = u_t(x_t) = \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}.$$

This sequence concentrates and satisfies all the propositions 2 to 9 seen in section 4.2, whatever the choice of the sequence $x_t \to x_0$ and of the sequence $\mu_t \to 0$. By spherical symetry, we can easily find two sequences (x_t) and (μ_t) such that

$$\frac{d_{\mathbf{s}}(x_t, x_0)}{\mu_t} \to +\infty$$

by taking for example $\mu_t = d_{\mathbf{s}}(x_t, x_0)^2$.

Once again, it seems that the hypothesis on the hessian of f "fixes" the position of the concentration point, and so imposes a speed of convergence of the sequence (x_t).

9.8.3 Further questions.

First a remark concerning the requirement of a strict inequality at the point of maximum of f in theorem 1. An easy but somewhat artificial extension of a result of hebey and Vaugon is the following :

Suppose that the manifold $(M, \mathbf{g})$ is of dimension ≥ 7, and let $(h, f, \mathbf{g})$ be a critical triple. Let $T_f = \{x \in M / f(x) = Max f$ and $h(x) = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}(x) - \frac{(n-2)(n-4)}{8(n-1)} \frac{\triangle_{\mathbf{g}} f(P)}{f(P)}\}$. We suppose that T_f is not dense in M and that for any point x of T_f :

1 :The Weyl tensor vanishes on a neihbourhood of x,

2 : $\nabla^2(h - \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}})$ is not degenerate in x,

3 : $\triangle_{\mathbf{g}} f(x) = 0$ if $x \in T_f$, and we suppose that f is non degeneraye at the points of maximum which are not in T_f.

Then $(h, f, \mathbf{g})$ has minimizing solutions.

The main interest of this result is that we can expect existence of solutions in this case. Looking to our method, it seems that one need to find some other intrinsec parameters, i.e. invariant by the exponential charts exp_{x_t}. See our thesis for more precision.

Another question is the following : We saw that the study of equations $\triangle_{\mathbf{g}} u + hu = fu^{2^*-1}$ is linked to the study of the best constants in the Sobolev inclusions of H_1^2 in $L^{\frac{2n}{n-2}}$. In the same way, the study of the Sobolev inclusions of H_1^p in $L^{\frac{pn}{n-p}}$, where $\frac{pn}{n-p}$ is the critical exponent, and of the associated best constants, goes through the study of equations of the form

$$\triangle_p u + hu = fu^{\frac{pn}{n-p}-1}$$

where $\triangle_p u = -\nabla(|\nabla u|_{\mathbf{g}}^{p-2} \nabla u)$ is the p-laplacian ; see for example O. Druet, E. Hebey and Z. Faget [F2]. Here also variational methods are used : the functional used is :

$$I(u) = \int |\nabla u|_{\mathbf{g}}^p + \int hu^p$$

from where we see the link with the Sobolev inclusion

$$(\int u^{\frac{pn}{n-p}})^{\frac{n-p}{n}} \leq K(n,p) \int |\nabla u|_{\mathbf{g}}^p + B \int u^p$$

where $K(n,p)$ is the associated best constant. The starting point is again the following : If

$$\underset{\int u^{\frac{pn}{n-p}}=1}{Inf} \quad I(u) < K(n,p)^{-1} (Sup f)^{-\frac{n-p}{n}}$$

then the equation has a minimizing solution $u > 0$ (knowing that the large inequality is always true). We therefore see that it is easy to extend the definition of critical functions to this case. It would therefore be interesting to know if our results can be extended to this setting.

Another question that can be asked after our work is the following :

f being given, is there constant critical functions ?

This would give some kind of "best second constant $B_0(\mathbf{g}, f)$" linked to f.
At last, there is a question which emerges from our work :

For a given arbitrary function h on M, does there exist solutions (not minimizing) to the equation $\triangle_{\mathbf{g}} u + hu = fu^{2^*-1}$?

Indeed, we saw that this equation has (minimizing) solutions when h is sub-critical and when h is critical with some hypothesis. However, variational methods do not give any answer is h larger and different than some critical function, or if $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ is not coercive. In this cases, if solutions exist, they cannot be minimizing. One therefore needs other methods for these cases. See [4] who study the case $f = cst$ and $3 \leq dimM \leq 6$.

Chapitre 10

Appendice A : démonstrations de quelques propriétés

Nous donnons ici quelques démonstrations des propriétés élémentaires des fonctions critiques que nous avons exposées au chapitre 1. Nous les avons reportées ici pour rendre plus lisible ce premier chapitre, et parce qu'elles sont très simples (bien qu'importantes).

L'opérateur $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ *est forcément coercif pour* $h \in C^0(M)$ *si* $\lambda_{h,f,\mathbf{g}} = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$ *et si* $f > 0$ *sur* M.

En effet, par définition

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}}^2 \, dv_g + \int_M h.u^2 dv_{\mathbf{g}} \qquad & \geq \lambda_{h,f,\mathbf{g}} \left(\int_M f \, |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dv_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
& \geq \lambda_{h,f,\mathbf{g}}.\underset{M}{Inf} f. \left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dv_{\mathbf{g}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
& \geq \lambda_{h,f,\mathbf{g}}.\underset{M}{Inf} f.c. \left(\int_M |u|^2 \, dv_{\mathbf{g}} \right)
\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue par l'inégalité de Hölder.

Si $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ *est coercif, toute fonction* k *continue assez proche de* h *dans* $C^0(M)$ *est telle que* $\triangle_{\mathbf{g}} + k$ *est coercif.*

Simplement par continuité de l'intégrale.

Si h *est critique, nécessairement il existe* $x \in M$ *tel que* $h(x) > 0$.

Cela découle de l'exigence que nous avons faite que $\Delta_{\mathbf{g}} + h$ soit coercif. Il

suffit d'appliquer la coercivité à la fonction 1 :

$$\int_M h dv_{\mathbf{g}} = \int_M |\nabla 1|^2_{\mathbf{g}} dv_g + \int_M h.1^2 dv_{\mathbf{g}} \qquad \begin{array}{l} \geq \int_M 1^2 dv_{\mathbf{g}} \\ > 0 \end{array}$$

Par définition $B_0(g)K(n,2)^{-2}$ est toujours une fonction (constante) faiblement critique pour toute fonction f et toute métrique $\mathbf{g}$. Si de plus $f \equiv 1$, que $(M, \mathbf{g})$ n'est pas conformément difféomorphe à la sphère standard et est telle que $S_{\mathbf{g}} = cste$, $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ est une fonction critique, c'est la plus petite fonction critique constante.

D'après la résolution du problème de Yamabe, on a avec ces hypothèses :

$$\lambda_{\mathbf{g}} := \underset{H_1^2 - \{0\}}{Inf} \frac{\int_M |\nabla u|^2_{\mathbf{g}} dv_g + \int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}.u^2 dv_{\mathbf{g}}}{\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}} < K(n,2)^{-2}$$

($\lambda_{\mathbf{g}}$ est "l'invariant de Yamabe"). Donc il existe $u > 0$ solution de

$$\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \lambda_{\mathbf{g}}.u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ avec } \int_M u^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} 1 = (\int_M u^{2^*} dv_{\mathbf{g}})^{\frac{2}{2^*}} &\leq K(n,2)^2 \int_M |\nabla u|^2_{\mathbf{g}} dv_g + B_0(\mathbf{g}) \int_M u^2 dv_{\mathbf{g}} \\ &\leq K(n,2)^2 (\int_M |\nabla u|^2_{\mathbf{g}} dv_g + \int_M \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}.u^2 dv_{\mathbf{g}}) \\ &\quad + (B_0(\mathbf{g}) - \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}.K(n,2)^2) \int_M u^2 dv_{\mathbf{g}} \\ &\leq K(n,2)^2 \lambda_{\mathbf{g}} + (B_0(\mathbf{g}) - \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}.K(n,2)^2) \int_M u^2 dv_{\mathbf{g}}\,. \end{aligned}$$

Or

$$1 - K(n,2)^2 \lambda_{\mathbf{g}} > 0$$

donc

$$B_0(\mathbf{g}) > \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\mathbf{g}}.K(n,2)^2$$

et donc d'après le théorème de Z. Djadli et O. Druet cité au chapitre 1, (1.2) a des fonctions extrémales. Mais cela signifie exactement que la fonction faiblement critique $B_0(\mathbf{g})K(n,2)^{-2}$ a des solutions minimisantes, elle est donc critique.

Les fonctions critiques se transforment dans les changements de métrique conformes exactement comme la courbure scalaire.

En effet, soit $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ et $\mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$ une métrique conforme à $\mathbf{g}$. Posons

$$h' = \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u}{u^{\frac{n+2}{n-2}}} \text{ c'est à dire } \triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = h'.u^{\frac{n+2}{n-2}} .$$

Pour montrer que pour toute fonction $w \in H_1^2(M) - \{0\}$:

$$J_{h,f,\mathbf{g}}(w) = J_{h',f,\mathbf{g}'}(u^{-1}.w)$$

il suffit de remarquer que :

$$dv_{\mathbf{g}'} = u^{\frac{2n}{n-2}}.dv_{\mathbf{g}} = u^{2^*}.dv_{\mathbf{g}}$$

et

$$|\nabla w|^2_{\mathbf{g}'} = u^{-\frac{4}{n-2}} |\nabla w|^2_{\mathbf{g}} .$$

Car alors

$$\int_M f\,|w|^{2^*}\,dv_{\mathbf{g}} = \int_M f\,|w|^{2^*}\,u^{-2^*}\,dv_{\mathbf{g}'} = \int_M f\left|\frac{w}{u}\right|^{2^*} dv_{\mathbf{g}'}$$

et

$$\int_M h'(\frac{w}{u})^2 dv_{\mathbf{g}'} = \int_M h' w^2 u^{2^*-2} dv_{\mathbf{g}} = \int_M h' w^2 u^{\frac{4}{n-2}} dv_{\mathbf{g}} .$$

Enfin, par intégration par parties

$$\int_M \left|\nabla(\frac{w}{u})\right|^2_{\mathbf{g}'} dv_{\mathbf{g}'} = \int_M |\nabla w|^2_{\mathbf{g}}\,dv_{\mathbf{g}} - \int_M \Delta_{\mathbf{g}} u.w^2.u^{-1} dv_{\mathbf{g}} .$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_{h',\mathbf{g}'}(\frac{w}{u}) \quad &:= \int_M \left|\nabla(\frac{w}{u})\right|^2_{\mathbf{g}'} dv_{\mathbf{g}'} + \int_M h'(\frac{w}{u})^2 dv_{\mathbf{g}'} \\ &= \int_M |\nabla w|^2_{\mathbf{g}}\,dv_{\mathbf{g}} + \int_M (h' u^{\frac{4}{n-2}} - \frac{\Delta_{\mathbf{g}} u}{u}).w^2 dv_{\mathbf{g}} \\ &= I_{h,\mathbf{g}}(w) \end{aligned}$$

avec

$$h = h' u^{\frac{4}{n-2}} - \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u}{u}$$

et donc

$$J_{h,f,\mathbf{g}}(w) = J_{h',f,\mathbf{g}'}(u^{-1}.w) .$$

De plus si $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif $\forall w \in H_1^2(M)$

$$\int_M |\nabla w|^2_{\mathbf{g}}\,dv_{\mathbf{g}} + \int_M h w^2 dv_{\mathbf{g}} \geq c \int_M w^2 dv_{\mathbf{g}}$$

et alors $\forall w \in H_1^2(M)$

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla w|^2_{\mathbf{g}'}\,dv_{\mathbf{g}'} + \int_M h' w^2 dv_{\mathbf{g}'} = I_{h,\mathbf{g}}(uw) \quad &\geq c \int_M u^2 w^2 dv_{\mathbf{g}} \\ &\geq \frac{c}{\underset{M}{Sup}\, u^{2^*-2}} \int_M w^2.u^{2^*} dv_{\mathbf{g}} \\ &\geq \frac{c}{\underset{M}{Sup}\, u^{2^*-2}} \int_M w^2 dv_{\mathbf{g}'} \end{aligned}$$

et donc $\triangle_{\mathbf{g}'} + h'$ est coercif. En échangeant h et $\mathbf{g}$ avec h' et $\mathbf{g}'$, on voit que $\triangle_{\mathbf{g}'} + h'$ est coercif si et seulement si $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif.

Ceci implique que h est critique pour f et $\mathbf{g}$ si et seulement si

$$h' = \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u}{u^{\frac{n+2}{n-2}}}$$

est critique pour f et $\mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$. Ou d'une autre manière, h' est critique pour f et $\mathbf{g}' = u^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$ si et seulement si

$$h = h' u^{\frac{4}{n-2}} - \frac{\triangle_{\mathbf{g}} u}{u}$$

est critique pour f et $\mathbf{g}$. (Ceci est aussi valable pour les fonctions sous-critiques et faiblement critiques). De plus, w est une solution minimisante pour $(h, f, \mathbf{g})$ si et seulement si $\frac{w}{u}$ est une solution minimisante pour $(h', f, \mathbf{g}')$.

Dans le chapitre 3 §3.2 (mise en place), nous avons affirmé que si $u_t \rightharpoonup u > 0$, alors u est une solution minimisante. On montre en fait que $u_t \to u$ dans $L^{2^*}(M)$. On utilise pour cela le principe d'itération 2.3 et une définition légérement modifiée mais équivalente du point de concentration : x est un point de concentration si $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0 \limsup_{t \to 1} \int_{B(x,\delta)} u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} \geqslant \varepsilon$. Remarquons que si $u_t \to u$ dans L^{2^*} sur un voisinage de x alors x ne peut être un point de concentration. On utilise alors la formule (2.5) de la manière suivante : si pour η valant 1 au voisinage de x on a $limsup\, \lambda_t K(n,2)^2 (\underset{Supp\,\eta}{Sup} |f|).(\int_{Supp\,\eta} u_t^{2^*})^{\frac{2}{n}} < 1$ alors, pour k et t assez proche de 1, $Q(t,k,\eta) > 0$ et donc, avec (2.4), (ηu_t) est bornée dans $L^{\frac{k+1}{2}2^*}$ et on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement dans L^{2^*}, donc $u_t \to u$ dans L^{2^*} sur un voisinage de x. Le principe si $u_t \rightharpoonup u > 0$ est alors le suivant. S'il n'existe pas de point de concentration, on voit avec cette méthode que pour tout x, il existe une petite boule $B(x,\delta)$ sur laquelle $u_t \to u$ dans L^{2^*}. Mais alors, on recouvre M par un nombre fini de telles boules, et, par exemple en utilisant une partition de l'unité, on obtient que $u_t \to u$ dans $L^{2^*}(M)$. S'il existe au moins un point de concentration x, on commence par montrer, toujours en utilisant (2.3),(2.4) et (2.5), que si $f(x) \leqslant 0$, $u_t \to u$ dans L^{2^*} au voisinage de x, donc que x n'est pas un point de concentration. On montre alors de même que si x est un point de concentration, nécessairement, $\forall \delta > 0$, $limsup \int_{B(x,\delta)} f.u_t^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$, et donc qu'il n'existe qu'un seul point de concentration x_0. Mais alors on voit que $u_t \to 0$ dans $L^{2^*}_{loc}(M - \{x_0\})$ ce qui contredit le fait que $u_t \rightharpoonup u > 0$ dans $L^{2^*}(M)$. Par conséquent $u_t \to u > 0$ dans $L^{2^*}(M)$ et $\int_M f.u^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$. On utilise ensuite le fait que h est faiblement critique pour montrer que $\lambda = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}$ et donc que u est solution de $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \frac{1}{K(n,2)^2 (\underset{M}{Sup} f)^{\frac{n-2}{n}}}.f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$ et $\int_M f u^{2^*} dv_{\mathbf{g}} = 1$, ce qui montre que u est bien une solution minimisante. Cette méthode marche aussi bien sûr, quand, comme au chapitre 6, on a une suite $f_t \to f$.

Chapitre 11

Appendice B : construction d'une fonction de Green

Considérons une variété $(M, \mathbf{g})$ compacte, sans bord, de dimension $n \geq 3$. Soit $h \in C^\infty(M)$ telle que l'opérateur

$$\triangle_{\mathbf{g}} + h$$

soit coercif. On cherche à construire une fonction C^2

$$G_h : M \times M \backslash \{(x,x), x \in M\} \to \mathbb{R}$$

strictement positive telle que, au sens des distributions, on ait $\forall x \in M$:

$$\triangle_{\mathbf{g},y} G_h(x,y) + h(y) G_h(x,y) = \delta_x \,. \tag{11.1}$$

De plus, G_h vérifiera les estimées suivantes : il existe $c > 0$, $\rho > 0$ tels que $\forall (x,y)$ avec $0 < d_{\mathbf{g}}(x,y) < \rho$:

$$\frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x,y)^{n-2}} \leq G_h(x,y) \leq \frac{c^{-1}}{d_{\mathbf{g}}(x,y)^{n-2}} \tag{11.2}$$

$$\frac{|\nabla_y G_h(x,y)|}{G_h(x,y)} \geq \frac{c}{d_{\mathbf{g}}(x,y)} \tag{11.3}$$

c et ρ varient continuement avec h

$$G_h(x,y) d_{\mathbf{g}}(x,y)^{n-2} \to \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \text{ quand } d_{\mathbf{g}}(x,y) \to 0 \tag{11.4}$$

Beaucoup d'articles utilisent l'existence et les propriétés d'une telle fonction de Green, mais nous n'avons pas trouvé de référence qui en donnent une démonstration prècise. Nous proposons donc ici un schéma rapide de construction de G_h, ce qui est trés classique, mais surtout l'obtention des estimées (10.2) et (10.3) en utilisant des méthodes proches de celles intervenant dans notre travail.

11.0.4 Première étape

On montre :

Soit $\Gamma \in L^p(M)$, $1 < p < \infty$. Alors il existe une solution $\beta \in H_2^p(M)$ de l'équation $\Delta_g \beta + h\beta = \Gamma$.

Si $p \geq 2$, il suffit d'appliquer les méthodes variationnelles classiques ; il faut faire un peu plus attention si $p < 2$. Pour cela, on commence par utiliser une estimée bien connue :

Si u est solution faible de $\triangle_{\mathbf{g}} u = \Gamma$, $\Gamma \in L^p(M)$, $1 < p < \infty$, alors $u \in H_2^p(M)$ et

$$\|u\|_{H_2^p} \leq c \|\Gamma\|_{L^p} + c \|u\|_{L^p} \ .$$

Or, si u est solution de $\Delta_{\mathbf{g}} u + hu = \Gamma$, on sait que $u \in H_2^p$ et par conséquent

$$\|u\|_{H_2^p} \leq c \|\Delta_{\mathbf{g}} u + hu\|_{L^p} + c \|u\|_{L^p} \ . \tag{11.5}$$

En fait $+c \|u\|_{L^p}$ est là pour tenir compte du fait que $\Delta_{\mathbf{g}} c = 0$ pour toute constante c. Mais quand $\Delta_{\mathbf{g}} + h$ est coercif, on peut obtenir mieux :

Si u est solution faible de $\triangle_{\mathbf{g}} u + hu = \Gamma$, $\Gamma \in L^p(M)$, $1 < p < \infty$, et si $\Delta_{\mathbf{g}} + h$ est coercif, alors $u \in H_2^p$ et

$$\|u\|_{H_2^p} \leq c \|\Delta_{\mathbf{g}} u + hu\|_{L^p}$$

On montre en fait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in H_2^p$:

$$\|u\|_{H_2^p} \leq C \|\Delta_{\mathbf{g}} u + hu\|_{L^p} \ . \tag{11.6}$$

En effet, si une telle constante C n'existe pas, sur $H_2^p - \{0\}$

$$\frac{\|\Delta_{\mathbf{g}} u + hu\|_{L^p}}{\|u\|_{H_2^p}}$$

n'est pas minoré par une contante $c > 0$. Il existe donc une suite $(v_m) \in H_2^p$, $v_m \neq 0$ telle que

$$\frac{\|\Delta_{\mathbf{g}} v_m + hv_m\|_{L^p}}{\|v_m\|_{H_2^p}} \to 0 \, .$$

En prenant $\frac{v_m}{\|v_m\|_{L^p}}$, on peut supposer que $\|v_m\|_{L^p} = 1$. Alors $\|v_m\|_{H_2^p} \geq 1$, donc

$$\|\Delta_{\mathbf{g}} v_m + hv_m\|_{L^p} \to 0$$

et par (10.5), $\|v_m\|_{H_2^p}$ est bornée. Par reflexivité, il existe $v \in H_2^p$ telle que

$$v_m \overset{H_2^p}{\to} v \, .$$

Or l'inclusion $L^p \subset H_2^p$ est compacte, donc

$$v_m \overset{L^p}{\to} v$$

et $\|v\|_{L^p} = 1$. De plus comme $v_m \overset{H_2^p}{\to} v$, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(M)$

$$\int v_m (\Delta_{\mathbf{g}} \phi + h\phi) \to \int v (\Delta_{\mathbf{g}} \phi + h\phi) \, .$$

Or $\|\Delta_g v_m + hv_m\|_{L^p} \to 0$, donc pour tout $\phi \in L^{p'}$ (p' conjugué de p)

$$\int \phi(\Delta_{\mathbf{g}} v_m + hv_m) \to 0$$

Donc $\forall \phi \in \mathcal{D}(M) : \int \phi(\Delta_{\mathbf{g}} v + hv) = 0$ et donc $\Delta_{\mathbf{g}} v + hv = 0$ faiblement et donc fortement. Mais comme $\Delta_{\mathbf{g}} + h$ est coercif,

$$\int v(\Delta_{\mathbf{g}} v + hv) = \int (\left|\nabla v^2\right| + hv^2) = 0 \Rightarrow v = 0$$

ce qui contredit $\|v\|_{L^p} = 1$.

Montrons donc maintenant le résultat annoncé :

Soit $\Gamma \in L^p(M)$, $1 < p < \infty$. Alors il existe une solution $\beta \in H_2^p(M)$ de l'équation $\Delta_{\mathbf{g}}\beta + h\beta = \Gamma$.

Il existe $(\Gamma_k) \in C^\infty(M)$ telle que $\Gamma_k \overset{L^p}{\to} \Gamma$. Comme $\Gamma_k \in L^2$, les méthodes variationnelles classiques donnent l'existence de solutions $\beta_k \in C^\infty$ de

$$\Delta_{\mathbf{g}}\beta_k + h\beta_k = \Gamma_k$$

Comme $\|\Gamma_k\|_{L^p}$ est bornée, par l'estimée (10.6) la suite (β_k) est bornée dans H_2^p. Il existe donc $\beta \in H_2^p$ telle que

$$\beta_k \overset{H_2^p}{\to} \beta\,.$$

Alors $\forall \phi \in \mathcal{D}(M)$:

$$\int \beta_k(\Delta_{\mathbf{g}}\phi + h\phi) \to \int \beta(\Delta_{\mathbf{g}}\phi + h\phi)\,.$$

Mais comme $\beta_k \in C^\infty$

$$\int \beta_k(\Delta_{\mathbf{g}}\phi + h\phi) = \int \phi(\Delta_{\mathbf{g}}\beta_k + h\beta_k) = \int \phi\Gamma_k \to \int \phi\Gamma$$

et donc $\forall \phi \in \mathcal{D}(M)$:

$$\int \beta(\Delta_{\mathbf{g}}\phi + h\phi) = \int \phi\Gamma\,.$$

Ainsi β est solution faible de $\Delta_g\beta + h\beta = \Gamma$.

11.0.5 Deuxième étape :

Soit $y \in M$ fixé. On pose $r := r_y := d_{\mathbf{g}}(x, y)$. Soit également une fonction cut-off $\eta_y = \eta$ valant 1 dans $B(y, \delta)$ et valant 0 dans $M \backslash B(0, 2\delta)$ pour $\delta > 0$ assez petit. On pose alors

$$\Gamma_y := \Gamma = -\Delta_{\mathbf{g}}(\frac{\eta}{r^{n-2}}) - h\frac{\eta}{r^{n-2}}\,.$$

Notons que

$$\left|\Delta_{\mathbf{g}}\frac{1}{r^{n-2}}\right| = \left|\frac{n-2}{r^{n-1}}\partial_r(\ln\sqrt{\det \mathbf{g}})\right| \leq \frac{c}{r^{n-2}}$$

où cette expression est à "lire" dans une carte exponentielle. Donc $\Gamma_y \in L^p(M)$ pour tout $p < \frac{n}{n-2}$.

Soit enfin $\beta_y := \beta$ une solution faible de $\Delta_{\mathbf{g}}\beta_y + h\beta_y = \Gamma_y$

On construit alors la *fonction de Green de l'opérateur* $\Delta_{\mathbf{g}} + h$ en posant

$$G_y := \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}(\beta_y + \frac{\eta_y}{r_y^{n-2}})$$

G_y est C^∞ sur $M\backslash\{y\}$ et est solution sur M, au sens des distribution, de

$$\triangle_{\mathbf{g}} G_y + hG_y = \delta_y$$

La démonstration de cette dernière identité est classique et tout à fait analogue au cas du laplacien dans $\mathbb{R}^n$; nous serons donc rapide.

Il faut utiliser la formule de Green

$$-\int_B v\Delta_{\mathbf{g}} u + \int_B (\nabla u, \nabla v)_{\mathbf{g}} = \int_{\partial B} v\frac{\partial u}{\partial \nu}$$

où ν est la normale extérieure au domaine B.

Soit $u \in C^\infty(M)$ et soit $\varepsilon > 0$ petit. On note ν^- la normale intérieure à la boule $B_\varepsilon := B(y, \varepsilon)$. Alors

$$\int_M G_y(\Delta_{\mathbf{g}} u + hu) = \int_{M\backslash B_\varepsilon} G_y(\Delta_{\mathbf{g}} u + hu) + \int_{B_\varepsilon} G_y(\Delta_{\mathbf{g}} u + hu)\,.$$

Sur $M\backslash B_\varepsilon$, G_y est C^∞ donc

$$\int_{M\backslash B_\varepsilon} G_y(\Delta_{\mathbf{g}} u + hu) = \int_{M\backslash B_\varepsilon} u(\Delta_{\mathbf{g}} G_y + hG_y) + \int_{\partial(M\backslash B_\varepsilon)} (u\frac{\partial G_y}{\partial \nu^-} - G_y\frac{\partial u}{\partial \nu^-})\,.$$

Or par définition de G_y, sur $M\backslash B_\varepsilon$: $\Delta_{\mathbf{g}} G_y + hG_y = 0$. D'où

$$\int_M G_y(\Delta_{\mathbf{g}} u + hu) = \int_{B_\varepsilon} G_y(\Delta_{\mathbf{g}} u + hu) + \int_{\partial B_\varepsilon} (G_y\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial G_y}{\partial \nu})\,.$$

- Comme $G_y \in L^1(M)$ et que $u \in C^\infty(M)$

$$\int_{B_\varepsilon} G_y(\Delta_{\mathbf{g}} u + hu) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

- Ensuite

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\varepsilon} (G_y\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial G_y}{\partial \nu}) = \quad & \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon} (\beta\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \beta}{\partial \nu}) \\ & + \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon} u\frac{\partial r^{-(n-2)}}{\partial \nu}\end{aligned}$$

Comme $\beta \in H_2^p$ pour $p > 1$, $\beta\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \beta}{\partial \nu} \in L^1(M)$ et donc

$$\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon} (\beta\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \beta}{\partial \nu}) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0\,.$$

On a également

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \leq \underset{M}{Sup}\,|\nabla u| \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{r^{n-2}} \leq c\underset{M}{Sup}\,|\nabla u|\,.\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

- Enfin

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\textstyle\int_{\partial B_\varepsilon} u\frac{\partial r^{-(n-2)}}{\partial \nu} &= \tfrac{1}{\omega_{n-1}}\textstyle\int_{\partial B_\varepsilon} u\frac{1}{r^{n-1}} \\ &= \tfrac{1}{\omega_{n-1}}.\tfrac{1}{\varepsilon^{n-1}}\textstyle\int_{\partial B_\varepsilon} u \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\to} u(y) \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\int_M G_y(\Delta_{\mathbf{g}} u + hu) = u(y)$$

11.0.6 Troisième étape :

C'est la partie qui intéresse le plus directement notre travail puisqu'elle concerne les estimées sur la fonction de Green. Nous allons montrer par récurrence que pour tout $\varepsilon > 0$

$$|\beta_y| \leq \frac{c}{r^{n-3+\varepsilon}} \;\; et \;\; |\nabla\beta_y| \leq \frac{c}{r^{n-2+\varepsilon}}\,.$$

Pour cela on montre que $r^{n-3+\varepsilon}\beta_y$ et $|\nabla\beta_y|\,r^{n-2+\varepsilon}$ sont dans $C^0(M)$. Le principe est d'étudier l'équation vérifiée par $\Delta(r^p\beta)$ et d'en déduire avec les théorèmes de régularité classiques à quels H^p_k appartiennent $r^p\beta$ et $\nabla(r^p\beta)$. Ces estimées entrainent la propriété (10.2).

Nous traiterons le cas où la dimension $n \geq 4$, le cas de la dimension 3 étant analogue mais plus facile. Pour alléger l'écriture nous noterons $u \in (H^p_k)^-$ pour dire que $u \in (H^q_k)$ pour tout $q < p$ aussi proche que l'on veut. Ainsi

$$\frac{1}{r^{n-2}} \in (L^{\frac{n}{n-2}})^-$$

et donc

$$\beta_y \in (H_2^{\frac{n}{n-2}})^-\;.$$

Rappelons que :
-si $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} - \frac{k-m}{n} > 0$ alors $H^q_k(M) \subset H^p_m(M)$
-si $\frac{1}{q} < \frac{k-m}{n}$ alors $H^q_k(M) \subset C^m(M)$
-si pour $0 < \alpha < 1$: $\frac{1}{q} < \frac{1-\alpha}{n}$ alors $H^q_1(M) \subset C^{0,\alpha}(M)$
Ainsi

$$\beta_y \in (H_2^{\frac{n}{n-2}})^- \subset (H_1^{\frac{n}{n-3}})^- \subset (L^{\frac{n}{n-4}})^-$$

et donc $|\nabla\beta_y| \in (L^{\frac{n}{n-3}})^-$.

Soit p un réel $1 < p \leq 2$. On a en utilisant l'équation

$$\Delta_{\mathbf{g}}\beta_y + h\beta_y = -\Delta_{\mathbf{g}}(\frac{\eta}{r^{n-2}}) - h\frac{\eta}{r^{n-2}}$$

vérifiée par β_y :

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{g}}(r^p\beta) &= r^p\Delta_{\mathbf{g}}\beta + \beta\Delta_{\mathbf{g}}r^p - 2(\nabla r^p, \nabla\beta)_{\mathbf{g}} \\ &= -hr^p\beta - r^p(\Delta_{\mathbf{g}}(\tfrac{\eta}{r^{n-2}}) + h\tfrac{\eta}{r^{n-2}}) + \beta\Delta_{\mathbf{g}}r^p - 2pr^{p-1}(\nabla r, \nabla\beta)_{\mathbf{g}}\,. \end{aligned}$$

Or :

i/ : $hr^p\beta \in (L^{\frac{n}{n-4}})^-$ car $\beta_y \in (L^{\frac{n}{n-4}})^-$

ii/ : $\left|r^p(\Delta_{\mathbf{g}}(\frac{\eta}{r^{n-2}}) + h\frac{\eta}{r^{n-2}})\right| \leq \frac{c}{r^{n-2-p}} \in (L^{\frac{n}{n-(p+2)}})^-$

iii/ : $|\beta\Delta_{\mathbf{g}} r^p| \leq cr^{p-2}\,|\beta| \in (L^{\frac{n}{n-4}})^-$

iv/ : $\left|r^{p-1}(\nabla r, \nabla\beta)_{\mathbf{g}}\right| \leq r^{p-1}\,|\nabla\beta_y| \in (L^{\frac{n}{n-3}})^-$.

Si $1 < p \leq 2$

$$L^{\frac{n}{n-4}} \subset L^{\frac{n}{n-(p+2)}} \subset L^{\frac{n}{n-3}} \subset L^{\frac{n}{n-(p+1)}}$$

Donc

$$Si\ \ 1 < p \leq 2 :\ \ r^p\beta \in (H_2^{\frac{n}{n-(p+1)}})^-$$

et on peut commencer la récurrence à un tel p.

Prenons donc comme hypothèse de récurrence que si $p < n-4$:

$$r^p\beta \in (H_2^{\frac{n}{n-(p+1)}})^- .$$

Alors tant que $p < n-3$:

$$r^p\beta \in (H_2^{\frac{n}{n-(p+1)}})^- \subset (H_1^{\frac{n}{n-(p+2)}})^- \subset (L^{\frac{n}{n-(p+3)}})^-$$

et

$$\Delta_{\mathbf{g}}(r^{p+1}\beta) = -hr^{p+1}\beta - r^{p+1}(\Delta_{\mathbf{g}}(\frac{\eta}{r^{n-2}}) + h\frac{\eta}{r^{n-2}}) + \beta\Delta_{\mathbf{g}} r^{p+1} - 2(p+1)r^p(\nabla r, \nabla\beta)_{\mathbf{g}} .$$

On a comme ci-dessus :

i/ : $hr^{p+1}\beta = hr(r^p\beta) \in (L^{\frac{n}{n-(p+3)}})^-$ par hypothèse de récurrence.

ii/ : $\left|r^{p+1}(\Delta_{\mathbf{g}}(\frac{\eta}{r^{n-2}}) + h\frac{\eta}{r^{n-2}})\right| \leq \frac{c}{r^{n-3-p}} \in (L^{\frac{n}{n-(p+3)}})^-$

iii/ : $\left|\beta\Delta_{\mathbf{g}} r^{p+1}\right| \leq cr^{p-1}\,|\beta| \in (L^{\frac{n}{n-(p+2)}})^-$ par hypothèse de récurrence.

iv/ : $|r^p(\nabla r, \nabla\beta)_{\mathbf{g}}| \leq |r^p\nabla\beta|$. Or

$$r^p\nabla\beta = \nabla(r^p\beta) - \beta\nabla r^p = \nabla(r^p\beta) - p(r^{p-1}\beta)\nabla r$$

or par hypothèse de récurrence, $\nabla(r^p\beta) \in (L^{\frac{n}{n-(p+2)}})^-$ et $\left|(r^{p-1}\beta)\nabla r\right| = \left|r^{p-1}\beta\right| \in (L^{\frac{n}{n-(p+2)}})^-$.

Comme

$$L^{\frac{n}{n-(p+3)}} \subset L^{\frac{n}{n-(p+2)}}$$

on a finalement que $\Delta_{\mathbf{g}}(r^{p+1}\beta) \in (L^{\frac{n}{n-(p+2)}})^-$ et donc $r^{p+1}\beta \in (H_2^{\frac{n}{n-(p+2)}})^-$ d'où le fonctionnement de la récurrence.

Ainsi pour tout réel $1 < p < n-3$: $r^p\beta \in (H_2^{\frac{n}{n-(p+1)}})^-$

Maintenant pour $0 < \varepsilon < 1$

$$\Delta_{\mathbf{g}}(r^{n-3+\varepsilon}\beta) = -hr^{n-3+\varepsilon}\beta - r^{n-3+\varepsilon}(\Delta_{\mathbf{g}}(\frac{\eta}{r^{n-2}}) + h\frac{\eta}{r^{n-2}}) + \beta\Delta_{\mathbf{g}} r^{n-3+\varepsilon} - cr^{n-4+\varepsilon}(\nabla r, \nabla\beta)_{\mathbf{g}}$$

i/ : $hr^{n-3+\varepsilon}\beta = hr^2(r^{n-5+\varepsilon}\beta) \in (L^{\frac{n}{2-\varepsilon}})^-$

ii/ : $\left|r^{n-3+\varepsilon}(\Delta_{\mathbf{g}}(\frac{\eta}{r^{n-2}}) + h\frac{\eta}{r^{n-2}})\right| \leq \frac{c}{r^{1-\varepsilon}} \in (L^{\frac{n}{1-\varepsilon}})^- \subset (L^{\frac{n}{2-\varepsilon}})^-$

iii/ : $\left|\beta\Delta_{\mathbf{g}} r^{n-3+\varepsilon}\right| \leq cr^{n-5+\varepsilon}\,|\beta| \in (L^{\frac{n}{2-\varepsilon}})^-$

iv/ : $\left|r^{n-4+\varepsilon}(\nabla r, \nabla\beta)_{\mathbf{g}}\right| \leq \left|r^{n-4+\varepsilon}\nabla\beta\right| \leq \left|\nabla(r^{n-4+\varepsilon}\beta)\right| + c\left|r^{n-5+\varepsilon}\beta\right| \in (L^{\frac{n}{2-\varepsilon}})^-$

Donc $\Delta_{\mathbf{g}}(r^{n-3+\varepsilon}\beta) \in (L^{\frac{n}{2-\varepsilon}})^-$ et donc $r^{n-3+\varepsilon}\beta \in (H_2^{\frac{n}{2-\varepsilon}})^-$. Autrement dit, pour tout $0 < \varepsilon' << \varepsilon$

$$r^{n-3+\varepsilon}\beta \in H_2^{\frac{n}{2-\varepsilon+\varepsilon'}}$$

donc

$$r^{n-3+\varepsilon}\beta \in H_2^{\frac{n}{2-\varepsilon+\varepsilon'}} \subset H_1^{\frac{n}{1-(\varepsilon-\varepsilon')}} \subset C^{0,(\varepsilon-\varepsilon')}$$

et donc $r^{n-3+\varepsilon}\beta$ est bornée sur M.

Enfin

$$\Delta_{\mathbf{g}}(r^{n-2+\varepsilon}\beta) = -hr^{n-2+\varepsilon}\beta - r^{n-2+\varepsilon}(\Delta_{\mathbf{g}}(\frac{\eta}{r^{n-2}}) + h\frac{\eta}{r^{n-2}}) + \beta\Delta_{\mathbf{g}}r^{n-2+\varepsilon} - cr^{n-3+\varepsilon}(\nabla r, \nabla\beta)_{\mathbf{g}}$$

i/ : $hr^{n-2+\varepsilon}\beta = hr(r^{n-3+\varepsilon}\beta) \in C^0$ d'après ce qui précède

ii/ : $\left|r^{n-2+\varepsilon}(\Delta_{\mathbf{g}}(\frac{\eta}{r^{n-2}}) + h\frac{\eta}{r^{n-2}})\right| \leq cr^{\varepsilon} \in C^0$

iii/ : $\left|\beta\Delta_{\mathbf{g}}r^{n-2+\varepsilon}\right| \leq cr^{n-4+\varepsilon}\left|\beta\right| \in (L^{\frac{n}{1-\varepsilon}})^-$

iv/ : $\left|r^{n-3+\varepsilon}(\nabla r, \nabla\beta)_{\mathbf{g}}\right| \leq \left|r^{n-4+\varepsilon}\nabla\beta\right| \leq \left|\nabla(r^{n-3+\varepsilon}\beta)\right| + c\left|r^{n-4+\varepsilon}\beta\right| \in (L^{\frac{n}{1-\varepsilon}})^-$

donc $r^{n-2+\varepsilon}\beta \in (H_2^{\frac{n}{1-\varepsilon}})^-$. Or $(H_2^{\frac{n}{1-\varepsilon}})^- \subset C^1$, donc $\nabla(r^{n-2+\varepsilon}\beta) \in C^0$. Mais

$$\nabla(r^{n-2+\varepsilon}\beta) = cr^{n-3+\varepsilon}\beta + r^{n-2+\varepsilon}\nabla\beta$$

donc $\left|r^{n-2+\varepsilon}\nabla\beta\right| \in C^0$.

11.0.7 Quatrième étape :

Il nous reste à montrer que $G_y > 0$ et l'estimée (10.3). Il s'agit en fait essentiellement d'appliquer le principe du maximum. (Rappelons que notre Laplacien $\Delta_{\mathbf{g}}$ est le laplacien des géomètres, c'est-à-dire avec la convention "du signe moins" : $\Delta_{\mathbf{g}} = -\nabla^i\nabla_i$; le principe du maximum devient donc un principe du minimum !)

Sur $M\backslash\{y\}$: $\Delta_{\mathbf{g}}G_y + hG_y = 0$, donc G_y est C^∞ sur $M\backslash\{y\}$.

Notons $U_t = M\backslash B(y,t)$ pour t petit. Le principe du maximum appliqué à G_y sur U_t nous dit que si G_y atteint un minimum négatif ou nul à l'intérieur de U_t alors $G_y = cste$. Sinon G_y atteint son minimum sur le bord ∂U_t. Mais dans $B(y,t)$

$$|\beta_y| \leq \frac{c}{r^{n-3+\varepsilon}} = r^{1-\varepsilon}\frac{c}{r^{n-2}}$$

donc dans $B(y,t)$ si $t < \delta$

$$G_y(x) \sim \frac{c}{r^{n-2}} \underset{x\to y}{\to} +\infty\,.$$

En prenant t assez petit, ceci prouve que d'une part G_y n'est pas constante, et d'autre part que $G_y > 0$.

Enfin, sur M

$$|\nabla\beta_y| \leq \frac{c}{r^{n-2+\varepsilon}} = r^{1-\varepsilon}\frac{c}{r^{n-1}}$$

et

$$\left|\nabla\frac{\eta}{r^{n-2}}\right| \leq \frac{c}{r^{n-1}}\,.$$

Donc sur M

$$|\nabla G_y| \leq \frac{c}{r^{n-1}}$$

Sur $B(y,\delta)$

$$\left|\nabla \frac{\eta}{r^{n-2}}\right| = \frac{n-2}{r^{n-1}}$$

et donc sur $B(y,\delta)$

$$\frac{c^{-1}}{r^{n-1}} \leq |\nabla G_y| \leq \frac{c}{r^{n-1}}$$

et cette estimée est donc vraie sur tout M.

Comme par ailleurs $G_y > 0$ sur M, on a aussi sur tout M :

$$\frac{c^{-1}}{r^{n-2}} \leq |G_y| \leq \frac{c}{r^{n-2}}\,.$$

On en déduit (10.3).

Chapitre 12

Appendice C

Dans la partie centrale du chapitre 3, nous avons affirmé que

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{C_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} \leq \varepsilon_\delta$$

où $\varepsilon_\delta \to 0$ quand $\delta \to 0$ et où

$$C_t = \left| \int_{B(0,\delta)} \eta^2 (\mathbf{g}_t^{ij} - \delta^{ij}) \partial_i \overline{u}_t \partial_j \overline{u}_t dx \right|$$

Ceci est montré dans l'article de Z. Djadli et O. Druet [9], sur lequel nous nous appuyons, dans le cas $f = cste$, et il n'y a pas de changements pour une fonction f non constante. C'est pourquoi pour rendre plus lisible la démonstration du chapitre 3 nous avons préféré reporter le calcul de cette limite. Néanmoins, la démonstration de Z. Djadli et O. Druet se faisant dans un but et dans un cadre différents, et avec $f = cste$, pour que notre travail soit "complet", nous reprenons rapidement pour le lecteur intéressé la démonstration dans cet appendice.

Le développement de Cartan de la métrique $\mathbf{g}$ autour de x_t, nous donne

$$\begin{aligned} C_t &\leq C \int_{B(0,\delta)} \eta^2 \left| Rm_{\mathbf{g}}(x_t)(\nabla \overline{u}_t, x, \nabla \overline{u}_t, x) \right| dv_{\mathbf{g}_t} \\ &\quad + \varepsilon_\delta \int_{B(0,\delta)} \eta^2 \left| \nabla \overline{u}_t \right|^2_{\mathbf{g}_t} dv_{\mathbf{g}_t} . \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en utilisant l'équation vérifiée par les fonctions $\overline{u}_t$ et l'estimée faible $\left| x^2 \overline{u}_t^{2^*} \right| \leq c\overline{u}_t^2$ on obtient

$$\int_{B(0,\delta)} \eta^2 \left| \nabla \overline{u}_t \right|^2_{\mathbf{g}_t} dv_{\mathbf{g}_t} \leq C \int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t} .$$

Ensuite le changement d'échelle faisant passer de $\overline{u}_t$ à $\widetilde{u}_t$ nous donne

$$\nabla \widetilde{u}_t = \nabla(\mu_t^{\frac{n-2}{2}} \overline{u}_t(\mu_t x)) = \mu_t^{\frac{n}{2}} (\nabla \overline{u}_t)(\mu_t x)$$

et par conséquent

$$\int_{B(0,\delta)} \eta^2 \left|Rm_{\mathbf{g}}(x_t)(\nabla \overline{u}_t, x, \nabla \overline{u}_t, x)\right| dv_{\mathbf{g}_t} = \mu_t^2 \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \eta^2(\mu_t x) \left|Rm_{\mathbf{g}}(x_t)(\nabla \widetilde{u}_t, x, \nabla \widetilde{u}_t, x)\right| dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} .$$

On coupe l'intégrale de droite en deux

$$\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} = \int_{B(0,R)} + \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} .$$

Or sur $B(0,R)$: $\widetilde{u}_t \underset{t\to t_0}{\overset{C^0}{\to}} \widetilde{u}$ qui est radiale, donc puisque x et $\nabla\widetilde{u}$ sont colinéaires

$$\int_{B(0,R)} \eta^2(\mu_t x) \left|Rm_{\mathbf{g}}(x_t)(\nabla \widetilde{u}_t, x, \nabla \widetilde{u}_t, x)\right| dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \underset{t\to t_0}{\to} 0 .$$

En rappelant que

$$\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dv_{\mathbf{g}_t} = \mu_t^2 \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}$$

on voit que

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{C_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} \leq C \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x) \left|Rm_{\mathbf{g}}(x_t)(\nabla \widetilde{u}_t, x, \nabla \widetilde{u}_t, x)\right| dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} + \varepsilon_\delta .$$

Maintenant, pour des vecteurs x, y, par définition,

$$Rm_{\mathbf{g}}(P)(x,y,x,y) = K(P)(|x|_{\mathbf{g}} |y|_{\mathbf{g}} - (x,y)_{\mathbf{g}}^2)$$

où $K(P)$ est la courbure sectionnelle au point P.

Donc en majorant $K(P)$ dans un voisinage de x_0

$$\left|Rm_{\mathbf{g}}(x_t)(\nabla \widetilde{u}_t, x, \nabla \widetilde{u}_t, x)\right| \leq C[|\nabla(|x|\, \widetilde{u}_t)|_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}^2 - (\nabla(|x|\, \widetilde{u}_t), \nu)_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}^2]$$

où $\nu = \frac{x}{|x|}$. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)[|\nabla(|x|\, \widetilde{u}_t)|_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}^2 - (\nabla(|x|\, \widetilde{u}_t), \nu)_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}^2] dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
\leq\ & C \int_{\partial B(0,R)} \left|\nabla(|x|^2\, \widetilde{u}_t^2)\right|_e d\sigma_e \\
& + \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x) \Delta_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}(|x|\, \widetilde{u}_t)\, |x|\, \widetilde{u}_t dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
& - \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)(\nabla(|x|\, \widetilde{u}_t), \nu)_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
& + C \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,\frac{\delta}{2}\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé entre autres que

$$\begin{aligned}
|\nabla\eta| &\leq c/\delta \\
|\Delta\eta| &\leq c/\delta^2 \\
\Delta(\eta^2(\mu_t x)) &= \mu_t^2 (\Delta\eta^2)(\mu_t x)
\end{aligned}$$

et que $\mu_t^2 |x|^2 \leq \delta^2$ sur $B(0, \delta\mu_t^{-1})$.

De plus $\eta^2(\mu_t x) \to 1$ uniformément sur $\partial B(0,R)$, donc en développant l'inégalité ci-dessus, pour t assez proche de t_0 :

$$\begin{aligned}
& \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)[|\nabla(|x|\,\widetilde{u}_t)|^2_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} - (\nabla(|x|\,\widetilde{u}_t),\nu)^2_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}]dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
\leq\ & C\int_{\partial B(0,R)} \left|\nabla(|x|^2\,\widetilde{u}_t^2)\right|_e d\sigma_e \\
& + \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\,|x|^2\,\widetilde{u}_t\Delta_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\widetilde{u}_t\,|x|\,\widetilde{u}_t dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
& + \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\,|x|\,\Delta_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}(|x|)\widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
& + C\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,\frac{\delta}{2}\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
& - 2\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\widetilde{u}_t(\nabla\widetilde{u}_t,x)^2_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
& - \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\left[(\nabla\widetilde{u}_t,x)_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} + \widetilde{u}_t\right]^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\ .
\end{aligned}$$

On utilise maintenant la relation suivante :

$$|x|\,\Delta_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}(|x|) \leq |x|\,\Delta_e(|x|) + c\mu_t^2\,|x|^2 \leq -(n-1) + c\mu_t^2\,|x|^2$$

et l'équation vérifiée par $\widetilde{u}_t$

$$\widetilde{u}_t\Delta_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}\widetilde{u}_t = \lambda_t\widetilde{f}_t\widetilde{u}_t^{2^*} - \mu_t^2\widetilde{h}_t\widetilde{u}_t^2$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)[|\nabla(|x|\,\widetilde{u}_t)|^2_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} - (\nabla(|x|\,\widetilde{u}_t),\nu)^2_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}]dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
\leq\ & C\int_{\partial B(0,R)} \left|\nabla(|x|^2\,\widetilde{u}_t^2)\right|_e d\sigma_e + C\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,\frac{\delta}{2}\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
& + \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\lambda_t\widetilde{f}_t\widetilde{u}_t^{2^*}\,|x|^2\,dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} - \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\mu_t^2\widetilde{h}_t\widetilde{u}_t^2\,|x|^2\,dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
& -(n-1)\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} + C\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\mu_t^2\widetilde{u}_t^2\,|x|^2\,dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
& - \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\left[(\nabla\widetilde{u}_t,x)_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} + \widetilde{u}_t\right]^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\
& -2\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\widetilde{u}_t(\nabla\widetilde{u}_t,x)^2_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}
\end{aligned}$$

Or puisque $n \geq 4$

$$-(n-1)\widetilde{u}_t^2 - 2\widetilde{u}_t(\nabla\widetilde{u}_t,x)^2_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} - \left[(\nabla\widetilde{u}_t,x)_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} + \widetilde{u}_t\right]^2 = -(n-4)\widetilde{u}_t^2 - \left[(\nabla\widetilde{u}_t,x)_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} + 2\widetilde{u}_t\right]^2 \leq 0\ .$$

De plus avec l'estimée

$$\left|x^2\widetilde{u}_t^{2^*}\right| \leq \varepsilon_R\widetilde{u}_t^2$$

on obtient

$$\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\lambda_t \widetilde{f}_t \widetilde{u}_t^{2^*} |x|^2 \, dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \leq \varepsilon_R \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{g}_t}$$

et enfin

$$\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)\mu_t^2(C-\widetilde{h}_t)\widetilde{u}_t^2 |x|^2 \, dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \leq C\delta^2 \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} = \varepsilon_\delta \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}$$

où $\varepsilon_R \underset{R\to+\infty}{\to} 0$ et $\varepsilon_\delta \underset{\delta\to 0}{\to} 0$.

D'où finalement

$$\begin{aligned} & \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,R)} \eta^2(\mu_t x)[|\nabla(|x|\,\widetilde{u}_t)|^2_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} - (\nabla(|x|\,\widetilde{u}_t),\nu)^2_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}] dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\ \leq \; & C\int_{\partial B(0,R)} \left|\nabla(|x|^2\,\widetilde{u}_t^2)\right|_e d\sigma_e + C\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})\setminus B(0,\frac{\delta}{2}\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \\ & + \varepsilon_R \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} + \varepsilon_\delta \int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t} \; . \end{aligned}$$

Mais maintenant, à R fixé

$$\widetilde{u}_t \underset{t\to t_0}{\overset{C^1}{\to}} \widetilde{u} = (1 + \frac{\lambda f(x_0)}{n(n-2)}\,|x|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \text{ sur } \partial B(0,R)$$

donc

$$\nabla(|x|^2\,\widetilde{u}_t^2)\nabla(|x|^2\,\widetilde{u}^2) = |x|^2\,\nabla(\widetilde{u}^2) + \widetilde{u}^2\nabla(|x|^2) \; .$$

Or

$$\int_{\partial B(0,R)} \left|\nabla(|x|^2\,\widetilde{u}^2)\right|_e d\sigma_e \sim C.R^{-(n-4)}$$

et de plus

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{1}{\int_{B(0,\delta\mu_t^{-1})} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} \leq \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{1}{\int_{B(0,R')} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}} \sim \frac{1}{\int_{B(0,R')} \widetilde{u}^2 dx}$$

pour tout R' fixé, avec si $n = 4$ $\int_{B(0,R')} \widetilde{u}^2 dx \to +\infty$ lorsque $R' \to +\infty$.

En utilisant la concentration L^2 (point d/ de l'étude du phénomène de concentration du chapitre 3), on obtient donc en fin de compte

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{C_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} \leq \varepsilon_R + \varepsilon_\delta + C.R^{-(n-4)} \overline{\lim_{t\to 1}} \frac{1}{\int_{B(0,R')} \widetilde{u}_t^2 dv_{\widetilde{\mathbf{g}}_t}}$$

d'où en faisant tendre R vers l'infini

$$\overline{\lim_{t\to 1}} \frac{C_t}{\int_{B(0,\delta)} \overline{u}_t^2 dx} \leq \varepsilon_\delta$$

où $\varepsilon_\delta \to 0$ quand $\delta \to 0$.

Comme on le voit, la présence d'une fonction f au second membre de l'équation $E_{h,f,\mathbf{g}}$ ne pose pas de difficulté dans l'obtention de cette limite, car on peut toujours majorer f par son Sup dans les intégrales. De plus, aucune

dérivée de f n'apparaissant, ces calculs restent valables dans le cas d'une famille d'équations du type

$$\Delta_{\mathbf{g}} u_t + h_t u_t = f_t u_t$$

où l'on a une famille de fonctions (f_t) au second membre, tant que les f_t sont uniformément bornées. Nous nous servons de cela au chapitre 6.

Chapitre 13

Appendice D : notations et conventions

Nous nous sommes efforcés de garder les notations et les conventions suivantes dans notre travail.

Données : On considère une variété riemannienne compacte $(M, \mathbf{g})$ de dimension $n \geq 3$. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ *fixée* telle que $\underset{M}{Max}\ f > 0$. Soit aussi $h \in C^\infty(M)$ avec l'hypothèse supplémentaire que l'opérateur $\triangle_{\mathbf{g}} + h$ est coercif si f change de signe sur M.

On considère l'équation

$$(E'_h) = (E'_{h,f}) = (E'_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

On note souvent $2^* = \frac{2n}{n-2}$, remarquons alors que $2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2}$.

Convention : Nous utilisons toujours ces "notations" : $\mathbf{g}, \mathbf{g}', \mathbf{g}_t, etc$ pour les métriques (en gras $\mathbf{g}$ pour les distinguer plus clairement des fonctions) ; h, h', h_t, etc pour les fonctions du premier membre définissant l'opérateur $\triangle_{\mathbf{g}} + h$; et enfin f, f', f_t, etc pour celles du deuxième membre ; de plus u, u_t, etc désignent les fonctions inconnues ou les solutions de $\triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$.

On s'intéresse aux solutions minimisantes de $E'_{h,f,\mathbf{g}}$: on dit que $u \in H_1^2(M)$ est minimisante pour $(E'_{h,f,\mathbf{g}})$ (ou par abus de langage, minimisante pour h) si pour

$$I_{h,\mathbf{g}}(w) = \int_M |\nabla w|^2_{\mathbf{g}}\, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.w^2 dv_{\mathbf{g}}$$

on a

$$I_{h,\mathbf{g}}(u) = \inf_{w \in \mathcal{H}_f} I_{h,\mathbf{g}}(w) := \lambda_{h,f,\mathbf{g}}$$

où

$$\mathcal{H}_f = \{w \in H_1^2(M) / \int_M f\, |w|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}} = 1\}.$$

On utilise aussi la fonctionnelle

$$J_{h,f,\mathbf{g}}(w) = J_h(w) = \frac{\int_M |\nabla w|^2_{\mathbf{g}}\, dv_{\mathbf{g}} + \int_M h.w^2 dv_{\mathbf{g}}}{\left(\int_M f\, |w|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_{\mathbf{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

et la partie de $H_1^2(M)$ pour laquelle elle est définie

$$\mathcal{H}_f^+ = \{w \in H_1^2(M)/ \int_M f\,|w|^{\frac{2n}{n-2}}\,dv_{\mathbf{g}} > 0\}.$$

Alors

$$\inf_{w\in\mathcal{H}_f} I_{h,\mathbf{g}}(w) = \inf_{w\in\mathcal{H}_f^+} J_{h,f,\mathbf{g}}(w) = \lambda_{h,f,\mathbf{g}}$$

L'équation d'Euler associée au problème de minimisation de $I_{h,\mathbf{g}}(w)$ sur $\mathcal{H}_f$ est

$$(E_h) = (E_{h,f}) = (E_{h,f,\mathbf{g}}) : \triangle_{\mathbf{g}} u + h.u = \lambda_{h,f,\mathbf{g}} f.u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où $\lambda_{h,f,\mathbf{g}}$ apparait comme une constante de normalisation liée à la condition

$$\int_M f\,|w|^{\frac{2n}{n-2}}\,dv_{\mathbf{g}} = 1$$

L'équation d'Euler associée à $J_{h,f,\mathbf{g}}(w)$ et $\mathcal{H}_f^+$ est identique, mais sans cette constante.

Pour étudier ces équations, nous utilisons des équations associées

$$(E_t) : \triangle_{\mathbf{g}} u_t + h_t.u_t = \lambda_t f_t.u_t^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où en général $\lambda_t = \lambda_{h_t,f_t,\mathbf{g}}$ et dans certains cas $\lambda_t \leq \lambda_{h_t,f_t,\mathbf{g}}$.

Les théorèmes des chapitres 3 à 6 utilisent l'hypothèse suivante :

Hypothèses (H) *: On suppose que le Hessien de la fonction $f : M \to \mathbb{R}$, telle que $\underset{M}{Sup} f > 0$, est non dégénéré en chaque point de maximum de f. En outre, les fonctions h considérées sont telles que $\triangle_{\mathbf{g}}+h$ est coercif et l'on suppose* $\dim M \geq 4$. *On parle des hypothèses ($\mathbf{H}_f$) pour désigner celles concernant la fonction f.*

En ce qui concerne les notations les plus générales :

Nous notons

$$L^p(M) = L^p$$

l'ensemble des fonctions de puissance p-ième intégrable ; l'espace M considéré étant sous-entendu s'il n'y a pas d'ambiguité.

$$\|.\|_{L^p(M)} = \|.\|_{L^p} = \|.\|_p$$

est la norme associée.

$$H_k^p(M) = H_k^p$$

désigne l'espace de Sobolev des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'odre k sont dans L^p et

$$\|.\|_{H_k^p(M)} = \|.\|_{H_k^p}$$

les normes correspondantes. En ce qui concerne les convergences, la flèche $\rightharpoonup$ désigne une convergence faible, et la flèche $\to$ désigne une convergence forte.

Pour la variété Riemannienne $(M, \mathbf{g})$

$$dv_{\mathbf{g}}$$

désigne l'élément de volume riemannien associé à $\mathbf{g}$. Le laplacien riemannien associé à $\mathbf{g}$ est noté

$$\Delta_{\mathbf{g}} = -\nabla^i \nabla_i$$

(attention au signe moins)

$$|\nabla u|_{\mathbf{g}}$$

est la norme de ∇u pour la métrique $\mathbf{g}$. Lorsqu'il n'y a pas de doute sur la métrique considérée, $\mathbf{g}$ est sous-entendue ; ainsi

$$\int_M |\nabla u| = \int_M |\nabla u|_{\mathbf{g}} \, dv_{\mathbf{g}} \ .$$

Par ailleurs, nous utilisons la métrique euclidienne ξ, les notations correspondantes étant

$$\Delta_e = -\sum_i \partial_{ii}^2 \, , \ |\nabla u|_{\mathbf{e}} \, , \ dx, \ d\sigma_e$$

où dx est la mesure de Lebesgue et $d\sigma_e$ la mesure induite sur la sphère de dimension $n-1$.

Enfin, les meilleures constantes $K(n,2)$ et $B_0(\mathbf{g})$ sont parfois notées K et B pour simplifier quelques expressions. Le principe général est d'ailleurs que, pour alléger certaines expressions assez longues apparaissant dans ce travail, certains indices sont omis lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté :

$$\begin{aligned} \lambda_{h,f,\mathbf{g}} &= \lambda_h \\ J_{h,f,\mathbf{g}} &= J_h \end{aligned}$$

et ainsi de suite...

Dans le détail :

- $B(x,\delta)$ est la boule de centre x et de rayon δ pour la distance géodésique.
- x_0 est toujours l'(unique) point de concentration de la suite u_t.
- x_t est un point de maximum de u_t, et, à extraction près, $x_t \to x_0$
- μ_t paramètre fondamental est défini par

$$\underset{M}{Max}\, u_t = u_t(x_t) := \mu_t^{-\frac{n-2}{2}}$$

- δ désigne toujours le rayon d'une petite boule autour de x_t ou de x_0.
- η désigne toujours une fonction cut-off.
- les familles associées à l'équation $(E_{h,f,\mathbf{g}})$ par les équations (E_t) sont indexées par un paramètre $t \to t_0$ où nous prenons souvent $t_0 = 1$.
- c, C, c', C' désignent toujours des constantes indépendantes des paramètres variables tels que t ou δ ou R.
- $\varepsilon_\delta \underset{\delta\to 0}{\to} 0$, $\varepsilon_R \underset{R\to+\infty}{\to} 0$, $\varepsilon_{\delta,t} \underset{\delta\to 0, t\to 1}{\longrightarrow} 0$

Pour les équations numérotées (a.b), a est le numéro du chapitre et b est le numéro de l'équation dans le chapitre.

Chapitre 14

Bibliographie

[1] : T. AUBIN : Some nonlinear problems in Riemannian geometry, Springer monograph in mathematics, 1998

[2] : T. AUBIN : Equation différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures Appl., 55, 1976.

[3] : T. AUBIN : Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, J. of Diff. Geometry, 11, 1976.

[4] : T. AUBIN : Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire, Journal of Functional Analysis, 32, 1979.

[4] : A. BAHRI : C. R. Acad. Sci. de Paris, 307, (1998), n°11.

[5] : H. BERESTYCKI, L. NIRENBERG, S. VARADHAN : The principal eigenvalue and maximum principle for second order elliptic operators in general domains, Comm. Pure Appl. Math., 47, 1994.

[6] : L.A. CAFFARELLI, B. GIDAS, J. SPRUCK : Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with Sobolev growth, Comm. in Pure and Applied Math., 42, 1989.

[7] : S. COLLION : Fonction critique et EDP elliptiques sur les variétés riemanniennes compactes, prépublication de l'institut Elie Cartan, 2003, n° 28.

[8] : S. COLLION : Transformation d'Abel et formes différentielles algébriques, C.R. Académie des Sciences de Paris, t.323, 1996.

[9] : Z. DJADLI-O. DRUET : Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds, Calc. Var., 12, 59-84, 2001

[10] : O. DRUET : Optimal Sobolev inequalities and extremal functions. The three dimensional case. Indiana Univ. Math. J., to appear.

[11] : O. DRUET, E ; HEBEY : The AB program in geometric analysis : sharp Sobolev inequalities and related problems, Memoirs of the AMS, 761.

[12] : O. DRUET, E ; HEBEY, M. VAUGON, Pohozahev type obstructions and solutions of bounded energy for quasilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. The conformally flat case. Université de Cergy-Pontoise, n°13, avril 2000.

[13] : O. DRUET-F. ROBERT : Asymptotic profile and blow-up estimates on compact Riemannian manifolds, preprint, disponible dans Memoirs of the AMS, 761 : The AB program in geometric analysis : sharp Sobolev inequalities and related problems, par E. HEBEY et O. DRUET

[14] : Z. FAGET : Optimal constants in critical Sobolev inequalities on riemannian manifolds in the presence of symmetries, Annals of Global Analysis and Geometry, 24 : 161-200, 2003.

[15] : Z. FAGET : Second best constant and extremal functions in Sobolev inequalities in the presence of symmetries, preprint, à paraître.

[16] : GILBARG-TRUDINGER : Elliptic partial differential equations of second order, Springer 1985.

[17] : E. HEBEY : Sobolev spaces on riemannian manifolds, Lecture notes in Mathematics, 1635, Springer, 1996.

[18] : E. HEBEY : Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, Diderot, 1997

[19] : E. HEBEY- M. VAUGON : The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete riemannian manifolds, Duke math. Journal, vol 79, July 1995.

[20] : E. HEBEY- M. VAUGON : From best constants to Critical functions, Math. Z., 237, 737-767,2001.

[21] : E. HUMBERT-M. VAUGON : The problem of prescribed critical functions, Preprint de l'institut Elie Cartan, 2003

[22] : J. JOST : Partial differential equations, Springer 2002.

[23] : J. M. LEE : Riemannian Manifolds, Springer Verlag, 2002.

[24] : J. M. LEE : Introduction to smooth manifolds, Springer Verlag, 2002.

[25] : J. M. LEE - T. H. PARKER : The Yamabe Problem, Bulletin of the AMS, 17, n°1, 1987.

[26] : P.L. LIONS : The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Part I, Annales de l'institut Henri Poincaré, 1, 1984.

[27] : S. POHOZAEV : Eigenfunctions of the equations $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet. Math. Dokl., vol 6, 1965.

[28] : M. STRUWE : Variational Methods. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 34, Springer-Verlag, 1996.

[29] : G. TALENTI : Best constant in Sobolev inequality, Annali di Matematica pura ed Applicata, 110, 1976.

[30] : M. VAUGON : Equations différentielles non linéaires sur les variétés riemanniennes compactes, Bull. des Sciences Mathématiques, 106, 1982.

[31] : M. VAUGON : Transformation conforme de la courbure scalaire sur la sphère, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol 3, 1986, p55-65

[32] : M. VAUGON : Transformation conforme de la courbure scalaire sur une variété Riemannienne compacte, Journal of Functional Analysis, Vol 71, March 1987.