



**HAL**  
open science

# Modélisation et évaluation de l'efficacité de la maintenance des systèmes réparables

Laurent Doyen

► **To cite this version:**

Laurent Doyen. Modélisation et évaluation de l'efficacité de la maintenance des systèmes réparables. Mathématiques [math]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2004. Français. NNT : . tel-00007722

**HAL Id: tel-00007722**

**<https://theses.hal.science/tel-00007722>**

Submitted on 13 Dec 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N<sup>o</sup> attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INPG**

**Spécialité: "mathématiques appliquées"**

préparée au laboratoire de modélisation et calcul (LMC)  
dans le cadre de l'École Doctorale "mathématiques, sciences et technologie de  
l'information, informatique"

présentée et soutenue publiquement

par

Laurent DOYEN

le 22 novembre 2004

**Titre :**

**Modélisation et évaluation de l'efficacité de la maintenance  
des systèmes réparables**

---

**Directeur de thèse : Olivier GAUDOIN**

---

**JURY**

M.	Gérard GREGOIRE	, Président
Mme.	Christiane COCOZZA-THIVENT	, Rapporteur
M.	Nikolaos LIMNIOS	, Rapporteur
M.	Olivier GAUDOIN	, Directeur de thèse
M.	Gilles CELEUX	, Examineur
M.	André LANNOY	, Examineur



# *Remerciements*

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Olivier Gaudoin, et je vous incite, vous lecteur téméraire de ce manuscrit, à le remercier également. C'est grâce à lui que votre lecture sera plus agréable et moins constellée de fautes d'orthographe, même si inexorablement (telle une malédiction qui me frappe depuis ma plus tendre enfance et mes premiers zéros en dictée) il en restera toujours. Je tiens à te remercier, Olivier (j'arrive maintenant à te tutoyer même par écrit!), non seulement pour tes patientes relectures, mais pour ta disponibilité durant ces trois années. Grâce à toi j'ai découvert non seulement le monde de la recherche, mais aussi la Norvège, Saint-Petersbourg, le Nouveau Mexique, Bourges, le Mont Saint-Michel, Chamonix.

Je remercie Christiane Coccozza-Thivent et Nikolaos Limnios d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Leur relecture et leurs remarques pertinentes ont contribué à améliorer ce manuscrit.

Je remercie tous les autres membres du jury : Gérard Grégoire, président, qui m'a ouvert les yeux, par ses questions, sur de nouvelles perspectives de recherches (j'espère que j'aurai le temps d'y regarder de plus près), Gilles Celleux, examinateur, qui aura contribué à l'introduction du bayésien dans les modèles ARI et ARA, si j'ai (où quelque'un d'autre) un jour le courage de m'atteler à la tâche.

Parmi les membres du jury, je tiens particulièrement à adresser mes remerciements à André Lannoy. Je les lui doit à plus d'un titre. Merci pour votre collaboration en tant qu'ingénieur à EDF. Merci pour votre relecture plus qu'attentive de mon manuscrit. Merci pour l'enthousiasme que vous avez manifesté pour mes travaux. Merci d'avoir essayé de me reclasser après ma thèse. Et merci tout simplement pour votre sympathie.

Parmi les interlocuteurs que nous avons eu à EDF, et qui ont contribué à l'application de mes résultats à des données réelles (et qui, accessoirement, par les financements qu'ils ont accordés, m'ont permis de beaucoup voyager), je tiens à remercier : Sébastien Lacombe, Marie-Agnès Garnéro, Célia Domecq, et nouvellement Emmanuel Remy.

Mes remerciements vont également à tous les membres du laboratoire LMC qui ont contribué à rendre ces trois années agréables et fructueuses. Je remercie également les autres chercheurs que j'ai eu le plaisir de cotoyer, comme Bo Lindqvist pour n'en citer qu'un.

Merci à ceux auprès de qui j'ai eu le plaisir d'enseigner à l'IUP Commerce et Vente et maintenant à l'IUT 2.

Je remercie particulièrement la bande de joyeux thésards sympathiques qui ont agrémenté ces journées de travail parfois trop longues et ces week-end toujours trop courts. Merci pour la corde (d'escalade), j'en testerai la fiabilité.

Merci à ma famille, toujours là pour me soutenir, jusqu'à ma soutenance et après encore. Sans eux et sans ma mère qui me faisait travailler quand j'étais petit, je n'aurai pas écrit ces remerciements aujourd'hui.

Et pour toujours, merci à toi Aude.



---

# *Table des matières*

---

<b>Table des matières</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>Abréviations et Notations</b>	<b>11</b>
<b>1 Introduction à la modélisation stochastique du processus des défaillances</b>	<b>13</b>
<b>I Modélisation et évaluation des effets des maintenances correctives seules</b>	<b>17</b>
<b>2 Les modèles de maintenance corrective</b>	<b>19</b>
2.1 Les modèles de base . . . . .	19
2.1.1 Le modèle de maintenance minimale . . . . .	19
2.1.2 Le modèle de maintenance parfaite . . . . .	20
2.1.3 Nécessité des modèles de maintenance imparfaite . . . . .	21
2.2 Les modèles de Brown-Proschan et Block-Borges-Savits . . . . .	21
2.2.1 Le modèle de Brown-Proschan . . . . .	21
2.2.2 Le modèle de Block-Borges-Savits . . . . .	23
2.3 Les modèles d'âge virtuel . . . . .	23
2.3.1 Construction des modèles d'âge virtuel . . . . .	23
2.3.2 Les modèles de Kijima . . . . .	24
2.3.3 Analyse statistique des modèles d'âge virtuel . . . . .	26
2.4 Le modèle de Chan-Shaw . . . . .	27
2.5 Le modèle de quasi-renouvellement . . . . .	28
2.6 Le modèle de Dorado-Hollander-Sethuraman . . . . .	29
2.7 Autres modèles de réparation imparfaite . . . . .	30
<b>3 Les modèles ARI et ARA</b>	<b>33</b>
3.1 Les modèles à réduction arithmétique de l'âge et de l'intensité . . . . .	33
3.2 Intensité d'usure minimale et maximale . . . . .	35
3.3 Compléments sur la théorie des processus ponctuels . . . . .	38
3.4 Comportement asymptotique du processus des défaillances . . . . .	39
3.4.1 Réécriture de l'intensité de défaillance . . . . .	39
3.4.2 Développement asymptotique au premier ordre de l'intensité de défaillance	40
3.4.3 Développement asymptotique au second ordre de l'intensité de défaillance	43
cumulée . . . . .	43
3.4.4 Modèle $ARI_m$ . . . . .	46
3.4.5 Modèle $ARA_m$ . . . . .	46
3.4.6 Commentaires sur les résultats asymptotiques . . . . .	47
3.5 Modèles à vitesse d'usure comparable . . . . .	48

<b>4</b>	<b>Estimation dans les modèles ARI et ARA</b>	<b>51</b>
4.1	Estimation quand l'intensité initiale est connue . . . . .	51
4.1.1	Estimateurs de maximum de vraisemblance . . . . .	51
4.1.1.1	Critère de convergence pour les estimateurs de maximum de vraisemblance . . . . .	51
4.1.1.2	Modèle $ARI_m$ . . . . .	56
4.1.1.3	Modèle $ARA_m$ . . . . .	57
4.1.2	Estimateurs explicites . . . . .	59
4.1.3	Intervalles de confiance asymptotiques . . . . .	60
4.1.4	Taux de recouvrement des intervalles de confiance asymptotiques . . . . .	61
4.1.5	Peut-on estimer un paramètre d'efficacité de maintenance et un paramètre d'échelle? . . . . .	65
4.2	Estimation conjointe de l'intensité initiale et de l'efficacité de maintenance . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Le modèle de Brown-Proschan</b>	<b>69</b>
5.1	Comportement du processus des défaillances . . . . .	69
5.1.1	Les âges virtuels . . . . .	69
5.1.2	Les durées inter-défaillances . . . . .	72
5.1.3	Influence du passé du processus . . . . .	75
5.2	Estimation dans un modèle BP . . . . .	76
5.2.1	Identifiabilité de l'efficacité de réparation quand l'effet des réparations est inconnu . . . . .	76
5.2.2	Théorème d'innovation et intensité propre . . . . .	78
5.2.3	Vraisemblance propre . . . . .	82
	<b>Conclusion de la première partie</b>	<b>85</b>
<b>II</b>	<b>Modélisation et évaluation des effets conjoints des maintenances préventives et correctives</b>	<b>87</b>
<b>6</b>	<b>Maintenances préventives planifiées</b>	<b>89</b>
6.1	Planification de la maintenance préventive . . . . .	89
6.2	Propriétés du processus des MP et MC . . . . .	90
6.3	Modélisation de l'effet des maintenances sur le processus des défaillances . . . . .	93
6.3.1	Modèle d'âge virtuel généralisé . . . . .	93
6.3.2	Modèles basiques . . . . .	94
6.3.3	Différentes généralisations du modèle $ARA_1$ . . . . .	94
6.3.4	Le modèle de Jack . . . . .	96
6.3.5	MP et MC $ARA_\infty$ . . . . .	97
6.3.6	Autres modèles pour les MP et MC . . . . .	98
6.4	L'efficacité de maintenance dépend de variables externes . . . . .	98
6.4.1	Modèle d'âge virtuel généralisé . . . . .	98
6.4.2	Modèle de Brown-Proschan généralisé . . . . .	99
6.4.3	Lien avec le modèle de Last et Szekli . . . . .	103
6.5	Quelques politiques de maintenances préventives classiques . . . . .	103
6.5.1	MP à date fixée . . . . .	104
6.5.2	MP à âge fixé. . . . .	106
6.5.3	MP à intensité fixée. . . . .	106

---

<b>7</b>	<b>Maintenances préventives conditionnelles</b>	<b>109</b>
7.1	Caractérisation du processus des MP et MC . . . . .	109
7.2	Lien avec l'approche risques concurrents . . . . .	112
7.2.1	L'approche risques concurrents . . . . .	112
7.2.2	Généralisation de l'approche risques concurrents . . . . .	114
7.3	Modèle avec effets de maintenance symétriques sur les processus de risques . . .	118
7.3.1	Modèle d'âge virtuel généralisé . . . . .	118
7.3.2	MP et MC parfaites . . . . .	120
7.3.3	MP et MC minimales . . . . .	120
7.3.4	MP et MC $ARA_1$ . . . . .	121
7.3.5	MP et MC $ARA_\infty$ . . . . .	121
7.3.6	Modèles identifiables de dépendance entre les risques . . . . .	121
7.3.6.1	Modèle avec risques indépendants . . . . .	122
7.3.6.2	Le modèle de Langseth et Lindqvist . . . . .	122
7.3.6.3	Une autre généralisation du modèle de signe aléatoire . . . . .	123
7.4	Effets de maintenance non symétriques sur les processus de risques . . . . .	123
7.5	L'efficacité de maintenance dépend de variables externes . . . . .	125
<b>8</b>	<b>Etude d'un jeu de données EDF</b>	<b>131</b>
8.1	Les données . . . . .	131
8.2	Etude des données . . . . .	131
8.2.1	Prise en compte de l'échantillon complet . . . . .	131
8.2.2	Suppression de la période de jeunesse . . . . .	135
8.3	Conclusion et perspectives de l'étude des données . . . . .	138
	<b>Conclusion de la deuxième partie</b>	<b>141</b>
	<b>Perspectives</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>



---

# *Introduction*

---

Tout au long de leur vie opérationnelle, les systèmes industriels complexes (centrales nucléaires, avions, trains, ...) sont soumis à des opérations de maintenance préventive et corrective afin de les conserver en état de marche, tout en justifiant d'un certain nombre de contraintes de sûreté de fonctionnement.

- Une **maintenance corrective** (MC) regroupe l'ensemble des actions exécutées après détection d'une panne et destinées à remettre un bien dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise [1].
- Une **maintenance préventive** (MP) regroupe l'ensemble des actions exécutées à des intervalles de temps prédéterminés ou selon des critères prescrits et destinées à réduire la probabilité de défaillance ou la dégradation du fonctionnement d'un bien [1].

La sûreté de fonctionnement de ces systèmes dépend naturellement étroitement de l'efficacité de ces opérations de maintenance. Classiquement, on suppose soit que la maintenance est neutre ou inefficace, soit qu'elle remet les matériels à neuf. La première hypothèse est certainement trop pessimiste. La deuxième hypothèse est valide pour les composants défaillants remplacés par des neufs, mais ce n'est plus le cas pour les systèmes constitués de plusieurs composants : le remplacement d'un composant entraîne un rajeunissement du système global mais pas une remise à neuf.

Une gestion efficace des politiques de maintenance nécessite une modélisation réaliste de leurs effets. Il est donc important de construire des modèles des effets des maintenances des systèmes réparables complexes et de développer des méthodes permettant d'évaluer leur efficacité.

Mathématiquement, les dates de maintenance corrective d'un système réparable sont des variables aléatoires. En effet, les défaillances se produisent évidemment à des instants qu'il n'a pas été possible de prévoir parfaitement à l'avance, autrement dit à des instants aléatoires. Les maintenances correctives qui en découlent s'effectuent donc elles aussi à des instants aléatoires.

En revanche, les dates des maintenances préventives sont généralement fixées avant la mise en route du système, et sont donc déterministes. On dit, dans ce cas, que les maintenances préventives sont systématiques. Mais il peut arriver que les instants auxquels elles se produisent n'aient pas été complètement planifiés. C'est le cas par exemple de la maintenance préventive conditionnelle. Celle-ci a lieu si, suite à une surveillance du fonctionnement du système, un état de dégradation avancé est détecté. La dégradation n'étant pas parfaitement prévisible, la maintenance préventive résultante se fera à un instant qui n'avait pas été prévu au départ. Cela peut être aussi le cas des maintenances préventives planifiées. En général, le programme de maintenance préventive initial prévoit des maintenances selon une certaine période. Une réactualisation de l'optimisation de la maintenance par la fiabilité (OMF [36]) peut amener à réduire (ou au contraire à augmenter) la périodicité des maintenances et mettre en place une nouvelle planification des dates de MP. Dans ce cas, même si les nouveaux instants de maintenance préventive sont toujours déterministes et périodiques au moment de la modification du plan de maintenance, on doit les considérer comme aléatoires dans la mesure où cette réduction de périodicité n'avait pas été prévue au départ. Enfin, si on profite de l'arrêt d'un premier système pour maintenir

préventivement un deuxième système, alors la maintenance préventive effectuée sur ce deuxième système est également faite à un instant aléatoire.

Par ailleurs, les effets des deux types de maintenance ne sont pas forcément connus et peuvent être aléatoires. Ils peuvent être liés, par exemple, à l'influence imprévisible de paramètres environnementaux et de facteurs humains.

Les exemples ci-dessus mettent également en évidence la dépendance entre les instants des maintenances préventives et correctives. Dans le cas des maintenances conditionnelles, la MP dépend de l'état de dégradation du système. Les défaillances, et donc les instants de MC, dépendent bien sûr également de cette dégradation. Par conséquent, maintenances préventives et correctives sont dépendantes à travers leur lien avec le processus de dégradation. Dans le cas des maintenances systématiques, il est possible que le changement de périodicité soit le résultat de l'occurrence de défaillances trop nombreuses, auquel cas cela implique encore une dépendance des instants des maintenances préventives et correctives.

Par conséquent, la modélisation de l'occurrence et des effets des maintenances s'effectue à l'aide d'outils probabilistes, et l'évaluation de leur efficacité nécessite des méthodes statistiques.

Quelques modèles d'efficacité de maintenance ont été proposés (voir par exemple la revue bibliographique faite par Pham et Wang [60]). Mais très peu d'entre eux ont fait l'objet d'une étude statistique, surtout en ce qui concerne l'évaluation de l'efficacité des opérations de maintenance. La plupart des modèles, connus sous le nom de modèles de réparation imparfaite, ne considèrent que l'effet des maintenances correctives. D'autres ne considèrent que l'effet des maintenances préventives. Dans les deux cas, les mêmes types d'hypothèses sont faites, et donc les mêmes modèles peuvent être utilisés. Quelques auteurs ont proposé des modèles où les deux effets de maintenance coexistent. Pour simplifier les choses, ils ont pour la plupart considéré que les MP étaient systématiques. Cependant, à notre connaissance, seul Jack [35] a estimé des efficacités de maintenance préventive et corrective dans ce cadre. Last et Szekli [47] ont proposé un modèle permettant de prendre en compte des maintenances imparfaites et des dates de MP planifiées à des instants aléatoires. Personne n'a utilisé, jusqu'à présent, ce modèle à des fins statistiques. Enfin, des approches basées sur les risques concurrents ont été utilisées pour modéliser des MP conditionnelles [7]. Cependant, ce type d'approche ne permet de prendre en compte que des maintenances parfaites, c'est à dire renouvelant à chaque fois le système. Seul un très récent travail de Langseth et Lindqvist [45] propose une méthode pour utiliser les travaux déjà publiés sur les risques concurrents afin d'estimer des efficacités de maintenance préventives et correctives imparfaites.

Ce manuscrit propose donc des modèles stochastiques permettant de prendre en compte des maintenances préventives et correctives imparfaites, c'est à dire moins bonnes que parfaites et meilleures qu'inefficaces. Ces modèles sont capables de prendre en compte l'ensemble des types de MP existant dans la réalité industrielle : MP systématiques, MP planifiées, MP conditionnelles. Ils permettent également d'intégrer la possibilité d'une dépendance entre les instants de MP et de MC. Le but de l'ensemble de ce travail de modélisation est d'évaluer l'efficacité des opérations de maintenance.

Nous ne nous intéresserons qu'à des systèmes monolithiques ou pouvant être considérés comme tels. Autrement dit, la structure du système ne sera pas prise en compte. On s'intéressera donc, soit au fonctionnement d'un composant précis d'un système (par exemple une pompe), indépendamment des autres composants de ce système, soit au fonctionnement d'un système global (par exemple un système de refroidissement). Dans ce dernier cas, même si un seul composant d'un système est maintenu, on ne s'intéressera pas à l'effet de la maintenance sur le composant, mais à l'impact de cette maintenance sur le fonctionnement du système global. En effet, il serait mathématiquement trop complexe de différencier l'effet des maintenances sur chaque composant

et d'agglomérer les résultats au niveau système.

Par ailleurs, ce travail utilisera des méthodes d'estimation fréquentistes : on ne cherchera pas à introduire d'information a priori sur le comportement des systèmes étudiés ou l'efficacité des opérations de maintenance.

Après un premier chapitre d'introduction des objets mathématiques étudiés et du formalisme nécessaire à leur modélisation, le document se scindera en deux parties.

Dans une première partie, on étudiera des systèmes uniquement soumis à un seul type de maintenance. On supposera que ce sont des maintenances correctives, mais on pourrait de la même façon supposer que ce sont des maintenances préventives. Dans ce cadre, on introduira dans le chapitre 2 les différents modèles d'efficacité de maintenance déjà proposés dans la littérature. Généralement ces modèles sont définis à l'aide de la loi conditionnelle des temps inter-défaillances. Cependant, dans un souci de comparaison et dans le but d'une analyse statistique nous pensons, comme Lindqvist [54], qu'il est plus pratique de définir les modèles à l'aide de l'intensité de défaillance d'un processus aléatoire ponctuel. Ainsi, les différents effets envisagés des maintenances seront caractérisés par les changements induits sur l'intensité de défaillance. Dans le chapitre 3, on proposera deux nouvelles classes de modèles appelées modèles à Réduction Arithmétique de l'Age (ARA) et à Réduction Arithmétique de l'Intensité (ARI), où l'efficacité de maintenance est caractérisée par un unique paramètre. On étudiera le comportement asymptotique du processus des défaillances de ces modèles et on prouvera que la plupart d'entre eux correspondent à des systèmes dont l'efficacité de la maintenance ne permet pas de stabiliser l'usure. Enfin on montrera qu'il existe, à l'intérieur de ces deux classes, des modèles équivalents en terme d'usure asymptotique. L'étude statistique des modèles ARA et ARI sera faite dans le chapitre 4. Afin d'obtenir des propriétés théoriques sur les estimateurs de l'efficacité de maintenance, on s'intéressera tout d'abord au cas plus simple où l'usure du système en l'absence de maintenance est connue. On prouvera alors la convergence presque sûre et la normalité asymptotique de l'estimateur de maximum de vraisemblance et d'estimateurs explicites de l'efficacité de maintenance. On en déduira des intervalles de confiance asymptotiques pour le paramètre d'efficacité de maintenance. Dans le cas où on cherche à estimer l'ensemble des paramètres du modèle, on proposera des résultats, uniquement empiriques, sur le comportement des estimateurs. Enfin, dans le chapitre 5, on s'intéressera au modèle dit de Brown-Proschan (BP). Ce modèle, contrairement aux modèles ARI et ARA, possède une efficacité de maintenance aléatoire dont l'effet tend, comme nous le montrerons, à stabiliser l'usure du système. On adaptera la procédure classique d'estimation des paramètres par maximum de vraisemblance au cas d'efficacité de maintenance aléatoires comme celle du modèle BP.

Dans la deuxième partie, on expliquera comment généraliser l'ensemble de ces modèles afin de prendre en compte l'effet des deux types de maintenance. Le chapitre 6 se focalisera sur la modélisation des MP planifiées et le cas particulier des MP à date fixée. On étudiera alors la loi conditionnelle des temps inter-maintenances et on calculera la fonction de vraisemblance permettant d'estimer les paramètres. On fera le lien entre le modèle que nous proposons et celui de Last et Szekli [47]. On retrouvera également comme cas particulier les politiques classiques de MP utilisées dans le cadre de l'optimisation des dates de maintenance pour en réduire les coûts. Dans le chapitre 7, on développera un modèle adapté au cas de MP conditionnelles et basé sur les processus ponctuels bivariés ou colorés. Cette approche généralise celle classiquement utilisée et passant par les risques concurrents [7], et présente l'intérêt de pouvoir prendre en compte des efficacités de maintenance imparfaites. Le modèle proposé par Langseth et Lindqvist [45] est un cas particulier de notre modélisation générale avec des efficacités de maintenance de type BP. Enfin, dans le chapitre 8, on appliquera les modèles précédemment développés et on estimera l'efficacité des maintenances pour un composant d'une unité de production électrique EDF.

Quelques uns des résultats présentés dans ce manuscrit ont déjà fait l'objet de publications [25, 24, 23]. Une revue bibliographique étendue, ainsi que l'étude des données EDF présentée dans le chapitre 8, constitue l'essentiel d'un contrat de collaboration effectué dans le cadre de ce travail entre EDF et le LMC [26].

---

# Abréviations et Notations

---

<b>ABAO</b>	aussi mauvais que vieux (As Bad As Old)
<b>AGAN</b>	aussi bon que neuf (As Good As New)
<b>ARA</b>	modèle à réduction arithmétique de l'âge (Arithmetic Reduction of Age)
<b>ARA<sub>m</sub></b>	modèle à réduction arithmétique de l'âge de mémoire $m$
<b>ARI</b>	modèle à réduction arithmétique de l'intensité (Arithmetic Reduction of Intensity)
<b>ARI<sub>m</sub></b>	modèle à réduction arithmétique de l'intensité de mémoire $m$
<b>BBS</b>	modèle de Block-Borges-Savits
<b>BMS</b>	modèle de Brown-Mahoney-Sivazlian
<b>BP</b>	modèle de Brown-Proschan
<b>CS</b>	modèle de Chan-Shaw
<b>DHS</b>	modèle de Dorado-Hollander-Sethuraman
<b>EE</b>	estimateur explicite
<b>EMV</b>	estimateur de maximum de vraisemblance
<b>EQM</b>	erreur quadratique moyenne
<b>HPP</b>	processus de Poisson homogène (Homogeneous Poisson Process)
<b>ICA</b>	intervalle de confiance asymptotique
<b>KMS</b>	modèle de Kijima-Morimura-Suzuki
<b>MC</b>	maintenance corrective
<b>MP</b>	maintenance préventive
<b>MSI</b>	date de mise en fonctionnement d'un système
<b>NHPP</b>	processus de Poisson non homogène (Non Homogeneous Poisson Process)
<b>OMF</b>	optimisation de la maintenance par la fiabilité
<b>PAR</b>	modèle de Malik (Proportional Age Reduction)
<b>PLP</b>	modèle de Duane (Power Law Process)
<b>QR</b>	modèle de quasi-renouvellement
<b>RC</b>	risques concurrents
<b>TR</b>	taux de recouvrement
<b>VA</b>	(modèle d')âge virtuel (Virtual Age)

Les variables aléatoires (exception faite de celles portant une lettre greque) seront notées avec une lettre majuscule et leur réalisation avec la même lettre minuscule.

$[a]$	partie entière de $a$
$a \wedge b$	minimum de $a$ et $b$
$a \vee b$	maximum de $a$ et $b$
$\mathbf{t}_n$	pour n'importe quelle suite $\{t_i\}_{i \geq 1}$ , représente le vecteur des $n$ premières composantes, $(t_1, \dots, t_n)$

$\mathbf{t}_{j,n}$	pour n'importe quelle suite $\{t_i\}_{i \geq 1}$ , représente le vecteur des composantes entre la $j^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$ , $(t_j, \dots, t_n)$
$\mathbb{1}_A$	fonction indicatrice de l'ensemble $A$
$\delta_a$	fonction Dirac prise en $a$
càd-làg	continue à droite avec une limite à gauche
càg-làd	continue à gauche avec une limite à droite
p.s.	presque sûrement
$A \leq_{st} B$	la variable aléatoire $A$ est stochastiquement inférieure à $B$ , c'est à dire que pour tout $t \geq 0$ , $F_A(x) \geq F_B(x)$ , où $F_A$ et $F_B$ sont respectivement les fonctions de répartition de $A$ et $B$ .
$\xrightarrow{p.s.}$	converge presque sûrement
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	converge en loi
$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	converge en probabilité
$\stackrel{p.s.}{=}$	égal presque sûrement
$\otimes$	produit de convolution
$f^{\otimes k}$	$k$ produits de convolution de la fonction $f$
$N_{t-}$	limite à gauche du processus $N_t$
$N_{t+}$	limite à droite du processus $N_t$
$\mathcal{H}_{t-}$	$\sigma$ -algèbre engendrée par l'ensemble des $\sigma$ -algèbres d'indice strictement plus petit que $t$ , $\cup_{s < t} \mathcal{H}_s$
$\sum_{i=a}^b$	quand $b < a$ , on posera que la somme vaut zéro
$F_X(x)$	fonction de répartition de la variable aléatoire $X$ en $x$
$S_X(x)$	fonction de survie de la variable aléatoire $X$ en $x$
$f_{X Y}(x)$	densité de la loi conditionnelle de $X$ sachant $Y$ , en $x$

Enfin, on dira qu'une fonction  $\lambda(t)$  diverge quand elle tend vers l'infini en l'infini :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = +\infty$ .

# *Introduction à la modélisation stochastique du processus des défaillances*

---

Les hypothèses suivantes sont effectuées.

1. Une réparation ou maintenance corrective est effectuée après chaque défaillance.
2. Les durées de maintenance sont supposées négligeables ou non comptabilisées.
3. Le système étudié commence à fonctionner ou à être observé à l'instant 0.

Ces hypothèses ont pour conséquence directe que les instants des MC sont en fait égaux aux instants de défaillance correspondants.

Les observations sont ainsi constituées de trois processus ponctuels (non nécessairement aléatoires) pour lesquels les notations suivantes sont adoptées.

- Pour le processus des maintenances (MP et MC) :
  - $\{U_i\}_{i \geq 1}$  le processus des indicateurs des types de maintenance:  $U_i = 0$  si la  $i^{\text{ème}}$  maintenance est corrective et  $U_i = 1$  si elle est préventive ;
  - $\{K_t\}_{t \geq 0}$  le processus de comptage des maintenances ;
  - $\{C_i\}_{i \geq 1}$  les instants de maintenance,  $C_i = \min\{t \in \mathbb{R}^+ | K_t = i\}$ . Pour simplifier certaines écritures, on note également  $C_0 = 0$  ;
  - $\{W_i\}_{i \geq 1}$  les durées inter-maintenances  $W_i = C_i - C_{i-1}$ .
  
- Pour le processus des défaillances ou des MC :
  - $\{N_t\}_{t \geq 0}$  le processus de comptage des MC ;
  - $\{T_i\}_{i \geq 1}$  les instants de MC,  $T_i = \min\{t \in \mathbb{R}^+ | N_t = i\}$ , et  $T_0 = 0$  ;
  - $\{X_i\}_{i \geq 1}$  les durées inter-MC,  $X_i = T_i - T_{i-1}$ .
  
- Enfin, pour le processus des MP :
  - $\{M_t\}_{t \geq 0}$  le processus de comptage des MP ;
  - $\{\tau_i\}_{i \geq 1}$  les instants de MP,  $\tau_i = \min\{t \in \mathbb{R}^+ | M_t = i\}$ , et  $\tau_0 = 0$  ;
  - $\{\chi_i\}_{i \geq 1}$  les durées inter-MP,  $\chi_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ .

La figure 1.1 propose un exemple de trajectoire du processus des MP et MC avec les notations correspondantes.

Dans l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  correspondant à nos observations, l'évolution du processus des pannes après l'instant  $t \geq 0$  est supposée dépendre du passé du processus des MP et MC, et de facteurs externes. On choisit de représenter l'effet de ces facteurs externes par des variables aléatoires  $B = \{B_i\}_{i \geq 1}$  que l'on appellera variables (aléatoires) externes. Les variables

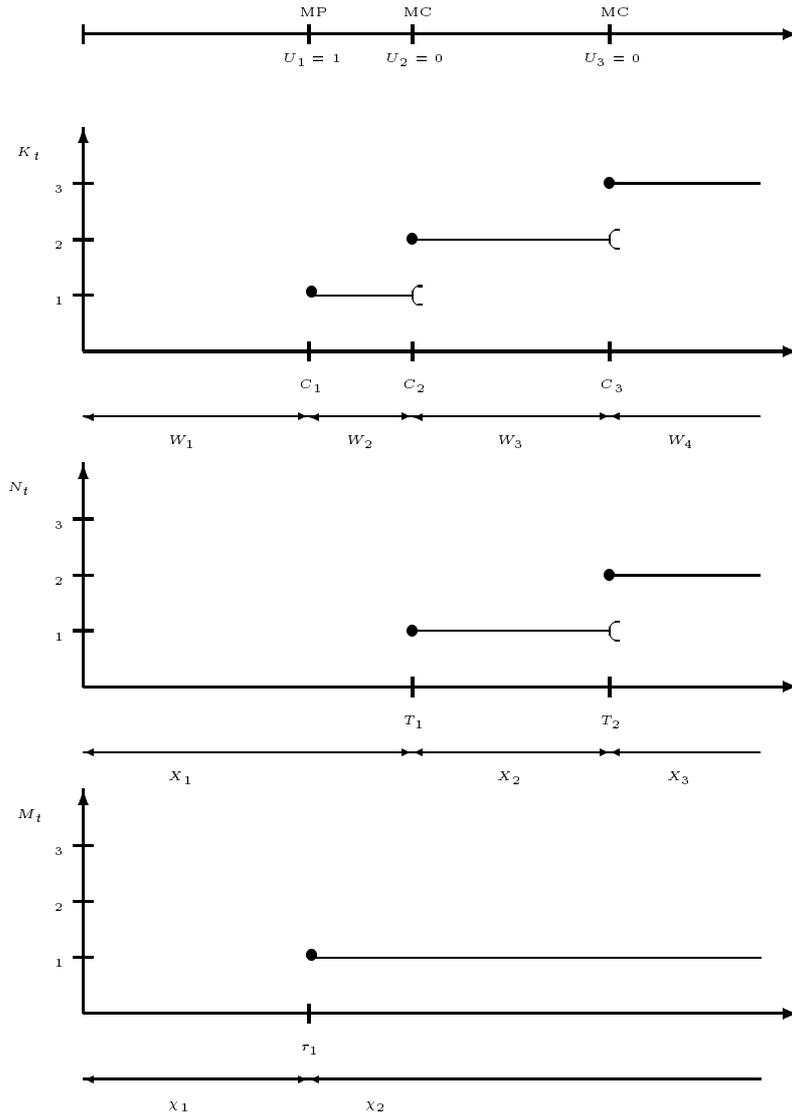


FIG. 1.1 – Observations du processus des MP et MC et notations correspondantes

externes sont supposées mutuellement indépendantes et indépendantes des  $(i - 1)$  premières maintenances. La  $i^{\text{ème}}$  variable externe  $B_i$ , représente la partie aléatoire de l'efficacité de la  $i^{\text{ème}}$  maintenance. Cet aléa peut être dû par exemple à l'influence aléatoire des facteurs humains ou environnementaux. Le processus des variables externes,  $B = \{B_i\}_{i \geq 1}$ , est supposé caché au sens où l'on suppose que la valeur de ces variables n'est pas observée. En effet, même si les facteurs humains ou environnementaux sont connus, on ne sait pas pour autant quel est leur effet exact sur l'efficacité de maintenance.

Le processus des MP et MC peut être modélisé de deux façons différentes. D'une part, il peut être vu comme un processus bivarié, c'est à dire un processus de comptage des MP et un processus de comptage des MC, entre lesquels il peut exister un lien quelconque.

$$\{N_s, M_s\}_{0 \leq s \leq t} = \{N_t, M_t, \mathbf{T}_{N_t}, \boldsymbol{\tau}_{M_t}\} \quad (1.1)$$

D'autre part, il peut être vu comme un processus coloré, c'est à dire qu'une couleur ou une marque est associée à chaque événement du processus des maintenances. Cette marque  $(U_i)$

spécifie si chacune des maintenances est préventive ou corrective.

$$\{K_s, U_{K_s}\}_{0 \leq s \leq t} = \{K_t, \mathbf{W}_{K_t}, \mathbf{U}_{K_t}\} \quad (1.2)$$

Les deux représentations sont strictement équivalentes :

$$\begin{aligned} N_t &= \sum_{i=1}^{K_t} (1 - U_i) \quad \text{et} \quad M_t = \sum_{i=1}^{K_t} U_i \\ K_t &= N_t + M_t \quad \text{et} \quad U_k = M_{C_k} - M_{C_{k-1}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Mais selon les cas, une des deux peut s'avérer plus commode.

Le processus des MC,  $N = \{N_t\}_{t \geq 1}$ , représente le processus des défaillances, il est donc nécessairement aléatoire. Le processus des MP,  $M = \{M_t\}_{t \geq 1}$ , n'est quant à lui pas forcément aléatoire. Il peut être déterministe, par exemple, quand les dates de MP sont déterminées avant la mise en route du système.

L'espace probabilisé est muni d'une filtration  $\mathcal{H}_t$  (c'est à dire une famille croissante et continue à droite de sous  $\sigma$ -algèbres de  $\mathcal{A}$ ) générée par le passé à l'instant  $t$  des processus  $N$  et  $M$  et des variables externes  $B$ .

$$\mathcal{H}_t = \sigma(\{N_s, M_s, B_{N_s+M_s}\}_{0 \leq s \leq t}) = \sigma(\{K_s, U_{K_s}, B_{K_s}\}_{0 \leq s \leq t}) \quad (1.4)$$

$\mathcal{H}_t$  est aussi appelée histoire du processus des maintenances. Le processus des défaillances peut être caractérisé par son intensité de défaillance, définie [3] comme l'unique (à l'indistinguabilité près) fonction càg-làd (continue à gauche avec une limite à droite) qui vérifie :

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda_t^N(N, M, B) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t-} = 1 | \mathcal{H}_{t-}) \quad (1.5)$$

où  $N_{t-}$  est la limite à gauche de  $N_t$ , et  $\mathcal{H}_{t-} = \cup_{s < t} \mathcal{H}_s$  est la  $\sigma$ -algèbre engendrée par le passé du processus des maintenances juste avant l'instant  $t$ . La même intensité de défaillance pourra aussi s'écrire  $\lambda_t^N(K, U, B)$  si pour des raisons pratiques on préfère privilégier la vision processus coloré plutôt que processus bivarié.

Un cas plus simple consiste à supposer que le futur du processus des défaillances ne peut dépendre que de son propre passé,  $\mathcal{H}_t = \sigma(\{N_s\}_{0 \leq s \leq t})$ . Le processus des défaillances est alors un processus ponctuel auto-excité [68]. Son intensité de défaillance à l'instant  $t$  ne dépend plus que de  $t$ , du nombre de défaillances observées et des dates auxquelles ces défaillances ont eu lieu :

$$\lambda_t^N(N) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t-} = 1 | N_{t-}, \mathbf{T}_{N_{t-}}) \quad (1.6)$$

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on note cette intensité de défaillance simplement  $\lambda_t$ . Elle caractérise l'usure du système étudié. On appellera donc vitesse d'usure la pente de l'intensité de défaillance. L'intégrale de l'intensité de défaillance,  $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$ , est appelée intensité de défaillance cumulée ou compensateur de  $N$  [16, 3]. Le compensateur représente la partie prévisible du processus des défaillances au sens où, pour tout  $t \geq 0$ ,  $N_t - \Lambda_t$  est une martingale qui représente uniquement un "bruit", c'est à dire un processus aléatoire càd-làg (continu à droite avec une limite à gauche), adapté et intégrable vérifiant :

$$\forall x \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad E[N_{t+x} - \Lambda_{t+x} | \mathcal{H}_t] = N_t - \Lambda_t \quad (1.7)$$

Avec l'hypothèse (supposée être vérifiée, sauf mention contraire) :

$$P(N_{t+\Delta t} - N_{t-} \geq 2 | \mathcal{H}_{t-}) = o(\Delta t) \quad (1.8)$$

qui signifie qu'on ne peut pas observer simultanément plus d'une défaillance, la loi de probabilité conditionnelle du prochain temps inter-défaillance est donnée par [16] :

$$\forall x \geq 0, \quad P(X_{n+1} > x \mid \mathbf{T}_n) = \exp\left(-\int_{T_n}^{T_n+x} \lambda_u \, du\right) \quad (1.9)$$

Cela signifie que la seule donnée de l'intensité de défaillance caractérise complètement la loi du processus des défaillances.

Dans le cadre d'une approche paramétrique, l'intensité de défaillance est supposée être spécifiée par un paramètre, noté  $\theta_0$ , à valeurs dans un espace noté  $\mathcal{J}_0$ . Les valeurs de l'intensité de défaillance dépendent dans ce cas du paramètre  $\theta_0$ . On notera alors, selon qu'il y a ou non ambiguïté, l'intensité de défaillance de l'une des trois façons suivantes :  $\lambda_t$ ,  $\lambda_t(\theta_0)$  ou  $\lambda_t^N(\theta_0; N)$ . L'estimation de ce paramètre  $\theta_0$  peut être faite à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. Pour une observation du processus des défaillances sur un intervalle de temps  $[0, t]$  (où  $t$  peut être soit un instant de défaillance, soit un réel strictement positif) la fonction de vraisemblance évaluée en une valeur  $\theta \in \mathcal{J}_0$  du paramètre vaut [16] :

$$L_t(\theta) = \left[ \prod_{i=1}^{N_t} \lambda_{T_i}(\theta) \right] \exp(-\Lambda_t(\theta)) \quad (1.10)$$

Et donc la log-vraisemblance peut s'écrire pour une observation du processus des défaillances sur  $[0, t]$  :

$$\mathcal{L}_t(\theta) = \ln(L_t(\theta)) = \int_0^t \ln(\lambda_s(\theta)) \, dN_s - \int_0^t \lambda_s(\theta) \, ds \quad (1.11)$$

Dans cette écriture, l'intégrale stochastique,  $\int_0^t \ln(\lambda_s(\theta)) \, dN_s$ , n'est rien d'autre que la somme des valeurs prises par  $\ln(\lambda_s(\theta))$  aux instants de défaillance,  $\int_0^t \ln(\lambda_s(\theta)) \, dN_s = \sum_{i=1}^{N_t} \ln(\lambda_{T_i}(\theta))$ . L'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV),  $\hat{\theta}_t^{ML}$ , est défini comme la valeur de  $\mathcal{J}_0$  qui maximise la log-vraisemblance.

$$\hat{\theta}_t^{ML} = \underset{\theta \in \mathcal{J}_0}{\operatorname{argmax}} \mathcal{L}_t(\theta) \quad (1.12)$$

Quand la loi des instants de défaillance dépend du processus des MP,  $M$ , et de variables externes,  $B$ , l'intensité de défaillance  $\lambda_t^N(N, M, B)$  n'est pas suffisante pour caractériser complètement le processus des défaillances. En effet, le théorème d'innovation [3] et l'équation (1.9) permettent d'écrire :

$$P(X_{n+1} > x \mid \mathbf{T}_n) = \exp\left(-\int_{T_n}^{T_n+x} E[\lambda_u^N(N, M, B) \mid N_u = n, \mathbf{T}_n] \, du\right) \quad (1.13)$$

Il manque donc des informations sur la loi jointe des processus  $N$ ,  $M$  et des variables externes  $B$ , pour pouvoir complètement caractériser la loi des durées inter-défaillances. Plus précisément, on doit connaître entre  $T_n$  et  $T_n + x$  la loi jointe de  $M$  et  $B$  connaissant le passé du processus  $N$ .

# Première partie

---

## Modélisation et évaluation des effets des maintenances correctives seuls

---

Pour modéliser le processus des maintenances préventives et correctives, il faut être capable de modéliser, d'une part, l'effet des maintenances sur le processus des défaillances, et d'autre part, la façon dont les dates de maintenance préventive sont choisies. Dans cette première partie, on s'intéresse uniquement à la modélisation des seuls effets des maintenances correctives, ou réparations, sur le processus des défaillances en supposant que le système ne subit pas de MP.

Dans le deuxième chapitre on propose une synthèse des différents modèles de réparation imparfaite existant dans la littérature. Cette synthèse est originale car les modèles sont classés à l'aide de leur intensité de défaillance, ce qui permet d'établir des liens encore jamais mis en évidence entre les différents modèles.

Le troisième chapitre s'intéresse à deux nouveaux modèles de réparation imparfaite que nous avons proposés et appelés modèles à Réduction Arithmétique de l'Age (ARA) ou de l'Intensité (ARI). Pour ces modèles, on étudie le comportement, principalement asymptotique, du processus des défaillances.

Dans le chapitre quatre, on établit la convergence presque sûre et la normalité asymptotique d'un certain nombre d'estimateurs (dont celui de maximum de vraisemblance) de l'efficacité de réparation, dans le cas où on connaît les paramètres du processus d'usure en l'absence de réparation. Dans ce chapitre, on présente également les résultats d'une étude, empirique cette fois, des propriétés des estimateurs de l'ensemble des paramètres des modèles ARI et ARA.

Enfin, dans le cinquième chapitre, on démontrera des résultats nouveaux pour un modèle de réparation imparfaite très classique appelé modèle de Brown-Proschan (BP). Contrairement aux modèles ARI et ARA, l'intensité de défaillance du modèle BP dépend de variables externes cachées. Cela rend, comme nous le montrerons, la procédure d'estimation des paramètres plus complexe. On étudiera également le comportement du processus des défaillances du modèle BP et on mettra en évidence ses différences avec les modèles ARI et ARA de mémoire finie.



# *Les modèles de maintenance corrective*

Dans toute cette partie on suppose que le système n'est pas sujet à des maintenances préventives. On a donc un unique processus de comptage,  $N$ . Pour simplifier les formules et puisqu'il n'y a pas de confusion possible entre plusieurs processus de comptage, on note simplement l'intensité de défaillance,  $\lambda_t$  ou  $\lambda_t(N, B)$  selon que celle-ci dépend ou non d'un processus externe. En outre, on fait l'hypothèse qu'avant la première défaillance, l'intensité de défaillance du système est une fonction croissante (car on suppose que le système s'use), non identiquement nulle, càg-làd (puisque c'est une intensité) et déterministe. Nous l'appellerons intensité initiale et la noterons  $\lambda(t)$ . Cette intensité traduit la qualité intrinsèque du système avant la première défaillance. Notons que  $\lambda(t)$  n'est autre que le taux de hasard de la loi de la durée d'attente de la première défaillance  $X_1 = T_1$ . La fonction de répartition de cette loi est  $F(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)}$ , où  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ .

## 2.1 Les modèles de base

### 2.1.1 Le modèle de maintenance minimale

Le modèle de maintenance minimale suppose que l'effet de la maintenance est de remettre le système en fonctionnement dans l'état exact où il était juste avant la défaillance. Cela caractérise un effet de maintenance neutre (n'améliore pas et ne dégrade pas le système). Le système après maintenance est dit aussi mauvais que vieux ou en anglais *As Bad As Old* (ABAO).

L'intensité de défaillance est alors toujours égale à l'intensité initiale et ne dépend donc pas du passé du processus :

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda_t = \lambda(t) \tag{2.1}$$

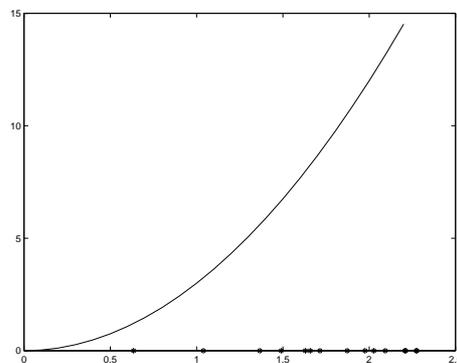


FIG. 2.1 – Intensité de défaillance dans le cas ABAO

La figure 2.1 illustre cette propriété et représente l'intensité de défaillance d'un système pour des maintenances ABAO. Les étoiles sur l'axe des abscisses symbolisent les instants de défaillance.

Le processus aléatoire  $N$  est un Processus de Poisson Non Homogène (NHPP). Les propriétés des NHPP sont détaillées par exemple dans [62].

Le NHPP le plus simple est le processus de Poisson Homogène (HPP) dont l'intensité de défaillance est constante :

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda(t) = \lambda \quad (2.2)$$

Dans ce cas, les durées inter-défaillances  $X_i$  sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , caractérisant l'absence de vieillissement du système.

Un autre cas particulier très utilisé est le modèle de Duane [27] ou Power Law Process (PLP) [62], pour lequel l'intensité est une puissance du temps :

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad \alpha > 0 \quad \beta > 1 \quad (2.3)$$

Ce modèle est aux systèmes réparables ce que la loi de Weibull est aux systèmes non réparables. Le paramètre de forme  $\beta$  caractérise l'usure du système :

- $\beta > 1$  : usure ou vieillissement ;
- $\beta < 1$  : amélioration ou rajeunissement ;
- $\beta = 1$  : stabilité.

Le paramètre  $\alpha$  est analogue à un paramètre d'échelle.

### 2.1.2 Le modèle de maintenance parfaite

Le modèle de maintenance parfaite considère que chaque maintenance remet le système à neuf. Le système après maintenance est donc aussi bon que neuf ou en anglais As Good As New (AGAN). Les durées inter-défaillances, et donc inter-maintenances, sont alors indépendantes et de même loi. On montre facilement que cela implique que l'intensité de défaillance s'écrit [54] :

$$\lambda_t = \lambda(t - T_{N_t^-}) \quad (2.4)$$

La figure 2.2 représente une trajectoire de l'intensité de défaillance d'un système pour des maintenances AGAN. Les instants de défaillance sont les instants de saut de l'intensité. Après une maintenance, l'intensité repart de zéro parallèlement à la courbe d'intensité initiale.

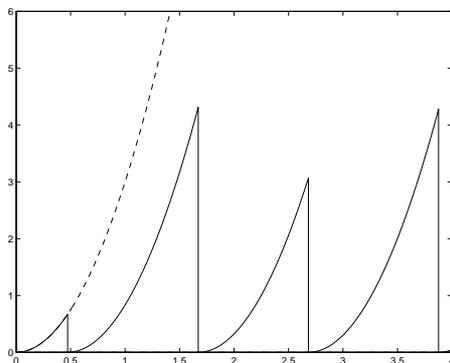


FIG. 2.2 – Intensité de défaillance dans le cas AGAN

Le processus aléatoire correspondant est un Processus de Renouvellement (RP). Le HPP est à la fois un NHPP et un RP. Un système dont le processus des défaillances est un HPP est

donc à la fois ABAO et AGAN. Cela dénote une situation de fiabilité stable, où le système ne vieillit pas et où la maintenance se contente de le remettre en état de marche. Il est possible que le système soit AGAN et que le processus des défaillances ne soit pas un HPP : dans ce cas, les durées inter-défaillances sont indépendantes et de même loi, mais cette loi n'est pas exponentielle.

### 2.1.3 Nécessité des modèles de maintenance imparfaite

La situation As Bad As Old signifie que l'efficacité de la maintenance est minimale et la situation As Good As New qu'elle est maximale. En pratique, on est entre ces deux cas extrêmes. En effet, il est raisonnable de penser que la maintenance a un effet plus que minimal, c'est-à-dire que le système après maintenance est meilleur que vieux ou Better than Old. Pour autant, pour des systèmes industriels importants, il est peu vraisemblable que la maintenance remette le système à neuf. Le système après maintenance est donc moins bon que neuf ou Worse than New. Ces deux situations se retrouvent parfois dans la littérature sous le nom de réparation meilleure que minimale (Better than Minimal Repair) ou plus largement maintenance imparfaite (Imperfect Maintenance).

D'un point de vue mathématique, il s'agit de construire des processus ponctuels qui soient intermédiaires entre les processus de Poisson non homogènes et les processus de renouvellement. La suite de ce chapitre présente une revue des principaux modèles proposés. Quelques auteurs ont déjà tenté de répertorier et de classer ces modèles (Pham-Wang [60] et Rehmert [61]). Mais le problème a rarement été formulé en termes de processus ponctuels et l'intensité de défaillance n'a, pour la plupart de ces modèles, jamais été exprimée. Notre présentation de cette synthèse est donc originale et permet de mettre en évidence un certain nombre de liens entre les différents modèles.

Dans la plupart des modèles, l'efficacité de la maintenance est représentée par un paramètre. Evaluer cette efficacité revient alors à estimer ce paramètre. Cela peut se faire par des méthodes d'estimation fréquentistes (basées uniquement sur le retour d'expérience) ou bayésiennes (utilisant des avis d'experts). On verra qu'il y a en fait très peu de travaux concernant l'estimation de l'efficacité de la maintenance et que la quasi-totalité d'entre eux sont de nature fréquentiste. La plupart des articles publiés sur les modèles de maintenances imparfaites supposent l'ensemble des paramètres des modèles connus et cherchent à optimiser sous contraintes la politique de maintenance.

Toutes les représentations graphiques de l'intensité de défaillance dans cette première partie, y compris les figures 2.1 et 2.2, ont été effectuées en prenant comme intensité initiale celle d'une fonction puissance de paramètres  $\alpha = 1$  et  $\beta = 3$  :  $\lambda(t) = 3t^2$ . Cette intensité initiale est représentée en pointillés sur ces figures.

## 2.2 Les modèles de Brown-Proschan et Block-Borges-Savits

### 2.2.1 Le modèle de Brown-Proschan

Un des premiers modèles de maintenance imparfaite est celui proposé par Brown et Proschan (BP) en 1983 [11]. Ce modèle vérifie les hypothèses suivantes :

1. Les effets des maintenances sont indépendants des instants auxquels elles sont réalisées et sont indépendants les uns des autres.
2. Le système après maintenance est AGAN avec une probabilité  $p$  et ABAO avec une probabilité  $1 - p$ .

Ainsi, l'efficacité de la  $i^{\text{ème}}$  maintenance est représentée par une variable aléatoire  $B_i$  telle que :

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si la maintenance est AGAN} \\ 0 & \text{si la maintenance est ABAO} \end{cases} \quad (2.5)$$

Les  $B_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Le processus aléatoire  $B$  est un processus externe. On peut montrer qu'à l'instant  $t$ , la durée écoulée depuis la dernière maintenance parfaite peut s'exprimer sous la forme :  $t - T_{N_{t-}} + \sum_{j=1}^{N_{t-}} \left[ \prod_{k=j}^{N_{t-}} (1 - B_k) \right] X_j$ . L'intensité de défaillance du modèle BP s'écrit donc par analogie avec les processus de renouvellement :

$$\lambda_t(N, B) = \lambda \left( t - T_{N_{t-}} + \sum_{j=1}^{N_{t-}} \left[ \prod_{k=j}^{N_{t-}} (1 - B_k) \right] X_j \right) \quad (2.6)$$

La figure 2.3 représente une trajectoire de cette intensité de défaillance pour  $p = 0.5$ . Les instants des maintenances AGAN et ABAO sont respectivement représentés sur l'axe des abscisses par des étoiles et des cercles.

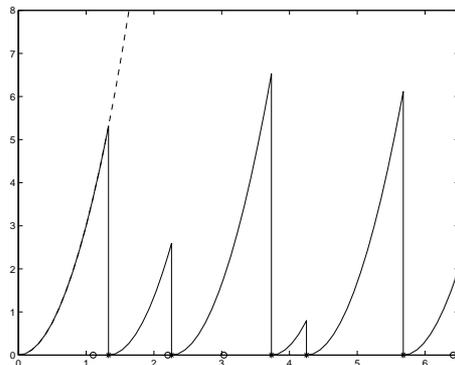


FIG. 2.3 – Intensité de défaillance dans le modèle de Brown-Prochan

Pour  $p = 1$ , tous les  $B_i$  sont égaux à 1 et on retrouve le modèle de maintenance parfaite. Pour  $p = 0$ , tous les  $B_i$  sont égaux à 0 et on retrouve le modèle de maintenance minimale. L'efficacité globale de la maintenance est exprimée par la valeur du paramètre  $p$  : plus celui-ci est proche de 1 et meilleure est la maintenance, et inversement, plus celui-ci est proche de 0 et moins bonne est la maintenance. Ainsi, évaluer l'efficacité de la maintenance dans le modèle BP revient à estimer le paramètre  $p$ . On peut remarquer que ce modèle ne permet pas d'avoir un effet de maintenance nuisible ou meilleur que neuf pour le système : au pire la maintenance n'a pas d'effet, au mieux elle renouvelle le système en le remplaçant par un système neuf identique.

En admettant que les effets des maintenances sont connus, c'est-à-dire que l'on sait si une maintenance a été AGAN ou ABAO, les  $B_i$  sont observées. Donc on peut écrire la vraisemblance à l'aide de l'équation (1.10) et estimer les paramètres du modèle, à savoir  $p$  et les paramètres de  $\lambda$ . Il est facile de voir que l'estimateur de maximum de vraisemblance de  $p$  est le pourcentage de maintenances AGAN parmi toutes les maintenances effectuées, ce qui est parfaitement logique. Whitaker et Samaniego [73] ont, de leur côté, estimé  $\lambda$  (ou plutôt  $F$ ) de façon non paramétrique en utilisant une méthode du type Kaplan-Meier.

Dans la pratique, il est douteux que l'on puisse connaître avec certitude les effets des maintenances. Les variables aléatoires  $B_i$  sont alors des variables cachées. Whitaker et Samaniego [73] ont mis en évidence un problème d'identifiabilité pour  $p$  dans le cas où la durée d'attente de la première défaillance est de loi exponentielle : la loi des durées entre défaillances ne dépend

pas de  $p$  dans ce cas. C'est logique dans la mesure où les maintenances sont inutiles quand le système ne vieillit pas. Dans ce cas, les modèles ABAO et AGAN sont les mêmes. Dans le cas où cette première durée est supposée de loi non exponentielle, ce problème ne se pose pas et on peut donc a priori estimer  $p$  et les autres paramètres du modèle, sans connaître la valeur des variables externes  $B$ . Pour ce faire, il est possible d'utiliser l'algorithme EM, comme l'a fait Lim [52]. Comme nous le verrons par la suite dans le chapitre 5, Langseth et Lindqvist [45] ont proposé une autre méthode d'estimation, mais leur résultat s'avère faux. Enfin, Lim, Lu et Park [51] ont effectué une analyse bayésienne du modèle BP en donnant au paramètre  $p$  une loi a priori de type béta.

### 2.2.2 Le modèle de Block-Borges-Savits

Block, Borges et Savits (BBS) [8] ont proposé une généralisation du modèle BP dans laquelle la probabilité de maintenance parfaite dépend de l'instant auquel est effectuée la maintenance corrective. Conditionnellement aux instants de défaillance  $T_i$ , les efficacités des maintenances sont alors des variables aléatoires  $B_i$  indépendantes et de lois de Bernoulli de paramètres respectifs  $p(T_i)$ .

L'intensité de défaillance du modèle BBS a donc la même expression que celle du modèle BP, seule la loi des  $B_i$  n'est pas la même. Cela confirme que, quand un processus externe intervient, la donnée de l'intensité de défaillance n'est pas suffisante pour définir complètement le processus de défaillances.

Hollander, Presnell et Sethuraman [33], puis Kvam, Singh et Whitaker [43] se sont intéressés à l'estimation non paramétrique de la loi du premier instant de défaillance quand les efficacités des maintenances  $B_i$  sont supposées connues. Dans le même contexte, Agustin et Peña [2] ont proposé un test d'adéquation pour cette loi. Kvam, Singh et Whitaker ont appliqué leur méthode à des données de défaillance de générateurs diesel d'urgence et de motopompes pour des centrales nucléaires américaines.

Quand les efficacités des maintenances ne sont pas supposées connues il paraît difficile d'estimer la fonction  $p(t)$  sans faire d'hypothèses particulières sur sa forme.

## 2.3 Les modèles d'âge virtuel

### 2.3.1 Construction des modèles d'âge virtuel

On trouve l'idée des modèles d'âge virtuel dès 1979 dans Malik [57], mais leur définition mathématique n'a été proposée qu'en 1988 par Kijima, Morimura et Suzuki (KMS) [41].

Un modèle d'âge virtuel (VA) est caractérisé par la donnée d'une suite de variables aléatoires positives  $A = \{A_i\}_{i \geq 0}$ , appelées âges effectifs et telles que  $A_0 = 0$ . Intuitivement, ces modèles sont basés sur l'hypothèse suivante : après la  $i^{\text{ème}}$  maintenance, le système se comporte comme un système neuf qui aurait fonctionné une durée  $A_i$  sans tomber en panne.  $A_i$  peut donc être considéré comme l'âge virtuel du système après la  $i^{\text{ème}}$  maintenance.

Pour traduire mathématiquement cette hypothèse, on considère une variable aléatoire  $Y$  de même loi que le premier instant de défaillance  $T_1 = X_1$  (donc de fonction de répartition  $F$ ) et indépendante des durées inter-défaillances  $\{X_i\}_{i \geq 1}$ . Alors l'hypothèse effectuée revient à écrire :

$$\forall i \geq 0, \forall x \geq 0, \quad P(X_{i+1} > x | A_i, \mathbf{X}_i) = P(Y > A_i + x | Y > A_i, A_i) \quad (2.7)$$

ce qui entraîne que :

$$\forall i \geq 0, \forall x \geq 0, \quad P(X_{i+1} > x | A_i, \mathbf{X}_i) = \frac{1 - F(A_i + x)}{1 - F(A_i)} \quad (2.8)$$

Il est alors facile d'en déduire que l'intensité de défaillance du modèle s'écrit :

$$\lambda_t(N, A) = \lambda(t - T_{N_{t-}} + A_{N_{t-}}) \quad (2.9)$$

On peut comprendre ce modèle en disant que la maintenance rajeunit le système de sorte que l'intensité de défaillance à l'instant  $t$  est égale à l'intensité initiale à l'instant  $t - (T_{N_{t-}} - A_{N_{t-}}) < t$ .  $t$  est l'âge réel du système à l'instant  $t$  et

$$V_t = t - T_{N_{t-}} + A_{N_{t-}} \quad (2.10)$$

est son âge virtuel, du fait des maintenances. Entre deux maintenances, l'âge virtuel varie comme l'âge réel.

La figure 2.4 donne un exemple d'évolution de l'âge virtuel du système au cours du temps et la figure 2.5 représente l'intensité de défaillance correspondante. On peut remarquer qu'à tout instant, l'intensité de défaillance est parallèle horizontalement à l'intensité initiale.

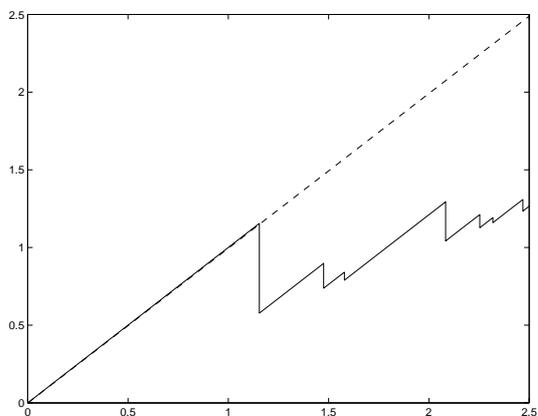


FIG. 2.4 – Age virtuel

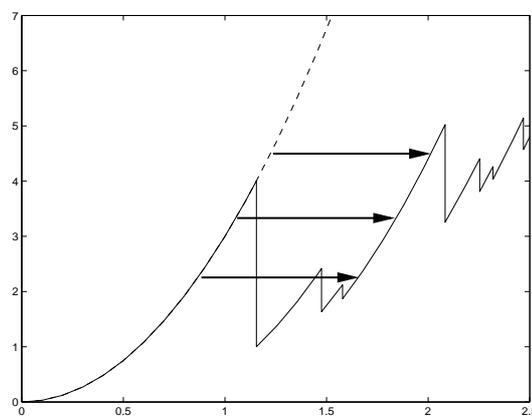


FIG. 2.5 – Intensité dans un modèle d'âge virtuel

Il reste à définir la suite des âges effectifs  $A = \{A_i\}_{i \geq 0}$  pour caractériser l'efficacité des maintenances. On remarque immédiatement que les modèles de base sont des cas particuliers de modèles d'âge virtuel :

- modèle de maintenance minimale (ABAO) :  $\forall i \geq 0, A_i = T_i$ .
- modèle de maintenance parfaite (AGAN) :  $\forall i \geq 0, A_i = 0$ .

En effet, dans le cas ABAO, le système après maintenance est aussi mauvais que vieux, donc son âge virtuel est égal à son âge réel, et dans le cas AGAN, le système après maintenance est comme neuf, donc son âge virtuel est nul.

### 2.3.2 Les modèles de Kijima

Kijima, Morimura et Suzuki [41] ont défini un premier modèle d'âge virtuel en supposant que l'effet de la  $i^{\text{ème}}$  maintenance est de réduire l'âge virtuel juste avant défaillance,  $A_{i-1} + X_i$ , d'une quantité proportionnelle à la durée écoulée depuis la maintenance précédente  $B_i X_i$ , avec  $B_i \in [0, 1]$ . Autrement dit,  $A_i = A_{i-1} + (1 - B_i) X_i$ .

En 1989, Kijima [40] a repris cette idée, en supposant que la réduction d'âge due à la maintenance est proportionnelle non pas au temps passé depuis la dernière maintenance, mais à l'âge virtuel lui-même, ce qui signifie que la réduction est de la forme  $B_i (A_{i-1} + X_i)$ .

Au bout du compte, Kijima a défini deux classes de modèles d'âges virtuels, connus depuis sous le nom de modèles de Kijima de type I et II :

- Modèle de Kijima de type I :  $\forall i \geq 0, A_i = A_{i-1} + (1 - B_i) X_i$ .

- Modèle de Kijima de type II :  $\forall i \geq 0, A_i = (1 - B_i)(A_{i-1} + X_i)$ .

Il est facile de montrer que les âges effectifs vérifient, pour un modèle de type I :  $A_i = \sum_{j=1}^i (1 - B_j) X_j$ , et pour un modèle de type II :  $A_i = \sum_{j=1}^i \left[ \prod_{k=j}^i (1 - B_k) \right] X_j$ . En utilisant l'équation (2.9) on obtient alors que les intensités de défaillance de ces modèles sont :

$$\text{Modèle de Kijima de type I : } \lambda_t(N, B) = \lambda \left( t - T_{N_t^-} + \sum_{j=1}^{N_t^-} (1 - B_j) X_j \right) \quad (2.11)$$

$$\text{Modèle de Kijima de type II : } \lambda_t(N, B) = \lambda \left( t - T_{N_t^-} + \sum_{j=1}^{N_t^-} \left[ \prod_{k=j}^{N_t^-} (1 - B_k) \right] X_j \right) \quad (2.12)$$

Les  $B_i$  sont des variables aléatoires à valeurs dans  $[0, 1]$  représentant l'efficacité des maintenances successives. On remarque pour le modèle de type II que  $B_i = 1$  implique  $A_i = 0$ , donc la  $i^{\text{ème}}$  maintenance est AGAN, et  $B_i = 0$  implique  $A_i = A_{i-1} + X_i$ , donc la  $i^{\text{ème}}$  maintenance est ABAO. Par conséquent, quand les  $B_i$  sont indépendants et de lois de Bernoulli, on retrouve les modèles de Brown-Proschan et Block, Borges et Savits. Cela est confirmé par le fait que les intensités (2.6) et (2.12) sont identiques. Cependant, le modèle de Kijima de type II est bien plus général que les modèles BP et BBS car les  $B_i$  ne sont pas forcément égaux à 0 ou 1 et ne sont pas forcément aléatoires. On peut même autoriser les  $B_i$  à être négatifs et on modélise ainsi des effets de maintenance nuisibles.

Implicitement, Kijima a supposé que les  $B_i$  étaient indépendants. Stadje et Zuckerman [69] ont étudié le cas où les  $B_i$  dépendent du passé du processus. Enfin, Last et Szekli [46, 47] ont reformulé les hypothèses de Kijima pour englober sous une seule écriture les modèles de type I et II, ainsi que les modèles de Stadje et Zuckerman et de Baxter, Kijima et Tortorella [5].

Les modèles de Kijima les plus simples sont obtenus en supposant que les efficacités des maintenances sont déterministes et constantes :  $\forall i \geq 1, B_i = \rho$ . C'est ce qu'ont proposé Kijima, Morimura et Suzuki [41] pour le modèle de type I, et il s'avère que c'est équivalent à l'idée qu'avait eu Malik [57]. Le modèle de Malik est souvent appelé modèle à réduction proportionnelle de l'âge (Proportional Age Reduction - PAR) et le paramètre  $\rho$  est souvent désigné sous le nom de facteur d'amélioration (improvement factor).

Remarquons que, quand les  $B_i$  ne sont pas aléatoires, il n'y a pas de raison de considérer qu'ils forment un processus externe. Le processus des défaillances est alors simplement un processus ponctuel auto-excité et son intensité se notera simplement  $\lambda_t$ . L'intensité de défaillance du modèle PAR ou KMS a une forme très simple :

$$\lambda_t = \lambda(t - \rho T_{N_t^-}) \quad (2.13)$$

Cette écriture permet de retrouver immédiatement les situations AGAN et ABAO comme cas particuliers :

- $\rho = 1$  : la maintenance est parfaite (AGAN) ;
- $\rho \in ]0, 1[$  : la maintenance est efficace ;
- $\rho = 0$  : la maintenance est minimale (ABAO) ;
- $\rho < 0$  : la maintenance est nuisible.

Dans ce modèle, évaluer l'efficacité de la maintenance revient à estimer le paramètre  $\rho$ .

Quand on suppose que les efficacités des maintenances sont déterministes et constantes dans le modèle de Kijima de type II, on retrouve une idée proposée par Brown, Mahoney et Sivazlian (BMS) [10] et on obtient comme intensité de défaillance :

$$\lambda_t = \lambda \left( t - \rho \sum_{j=0}^{N_t^- - 1} (1 - \rho)^j T_{N_t^- - j} \right) \quad (2.14)$$

Dans ce modèle le paramètre  $\rho$  a la même interprétation en terme d'efficacité de maintenance que dans le modèle PAR.

Une variante intéressante a été récemment proposée par Gasmi, Love et Kahle [31], permettant de prendre en compte trois effets possibles de maintenance :

$$A_i = \xi_{1i}\xi_{2i}(A_{i-1} + X_i) \quad (2.15)$$

avec :

- $\xi_{1i} = 1, \xi_{2i} = 1$  : maintenance minimale (ABAO)
- $\xi_{1i} = \xi_1, \xi_{2i} = 1$  : maintenance mineure
- $\xi_{1i} = \xi_1, \xi_{2i} = \xi_2$  : maintenance majeure

Les auteurs ne donnent pas de précisions sur ce qu'ils entendent par maintenance "mineure" et "majeure".

Enfin, le principe de réduction d'âge a également été utilisé par Clarotti et al [15], mais avec une présentation bien différente : les maintenances concernées sont les maintenances préventives, on s'intéresse à la loi de l'instant de la première défaillance, les réductions d'âge sont aléatoires et on effectue un traitement bayésien. Dans cette approche, l'efficacité de la maintenance n'est pas caractérisée simplement par un paramètre, mais par des caractéristiques du système (complexité, accessibilité,...) et de la tâche de maintenance (complexité, environnement de travail, qualification du personnel de maintenance,...).

### 2.3.3 Analyse statistique des modèles d'âge virtuel

A part les travaux déjà évoqués sur les modèles BP et BBS, il n'existe pas de travaux théoriques sur l'estimation des paramètres des modèles d'âge virtuel. En revanche, Shin, Lim et Lie [66] et Kaminskiy et Krivtsov [38] ont tenté de montrer, à l'aide de simulations, l'effet de la taille de l'échantillon (c'est-à-dire du nombre de défaillances observées) sur la qualité des estimations des paramètres du modèle PAR. Gasmi et Kahle [30] ont explicité la fonction de vraisemblance dans le modèle de Last-Szekli (qui généralise à la fois les modèles de Kijima de type I et II) pour plusieurs formes de l'intensité initiale : PLP, log-linéaire et Pareto.

L'application de ces modèles à des données réelles a été effectuée dans les articles suivants :

- Shin, Lim et Lie [66] ont estimé les paramètres du modèle PAR pour le "système de refroidissement" d'une centrale nucléaire (Korean Atomic Energy Research Institute). Les données sont issues de relevés quotidiens de 1989 à 1994. Il s'agit visiblement d'un système de sauvegarde puisqu'en 5 ans il ne fonctionne que 612 jours soit 28% du temps. La véracité de cette remarque est renforcée par le nombre important de défaillances, 15, et de remplacements, 3, que subit le système compte tenu de sa criticité et du faible nombre de jours de fonctionnement. L'intensité initiale est supposée du type PLP. Le paramètre de forme  $\beta$  est estimé à 1.41, reflétant la vitesse d'usure du système. Le facteur d'amélioration  $\rho$  est estimé à 0.77, ce qui dénote une bonne efficacité de maintenance.
- Kaminskiy et Krivtsov [38] ont utilisé exactement les mêmes hypothèses que Shin, Lim et Lie dans le secteur automobile (Ford Motor Company). Pour des raisons de confidentialité, les données ne sont ni fournies ni décrites.  $\beta$  et  $\rho$  sont respectivement estimés à 1.8 et 0.7.
- Yanez, Joglar et Modarres [74] ont estimé les paramètres du modèle PAR, avec une intensité initiale de type PLP, sur deux jeux de données réelles. Le premier est issu de l'observation sur un peu moins de trois ans d'un compresseur. Il comprend 24 défaillances. Le paramètre de forme  $\beta$  est estimé à 1.62 et le paramètre d'efficacité de réparation  $\rho$  est estimé à 0.3, ce qui dénote une maintenance pas très efficace. D'un autre côté, le système ne s'use pas beaucoup. Le deuxième jeu de données, très connu, est extrait du livre de Asher et Feingold

[4] et provient de l'étude du moteur de propulsion du sous-marin USS Halfbeak No. 3.  $\beta$  y est estimé à 2.02, et  $\rho$  à 0.86, ce qui correspond à une maintenance efficace.

- Gasmi, Love et Kahle [31] ont estimé les paramètres de leur propre modèle pour des turbines hydro-électriques (B.C. Hydro Power system). Les données, relevées tout au long de l'année 1977, comprennent 142 maintenances correctives suite à défaillances, et 148 maintenances préventives, considérées comme des instants de censure du processus des défaillances.  $\beta$  est estimé à 1.212,  $\xi_1$  à 1.0002 et  $\xi_2$  à 0.5457. L'estimation de  $\xi_1$  pratiquement égale à 1 signifie que les maintenances mineures peuvent être assimilées à des maintenances minimales.
- Clarotti et al [15] ont utilisé leur modèle pour estimer la fiabilité de matériels mécaniques, électriques et électromécaniques (robinets du système de contrôle volumétrique et chimique RCV, stator et rotor de l'alternateur, ...) en prenant en compte le rajeunissement induit par la maintenance.

## 2.4 Le modèle de Chan-Shaw

Chan et Shaw [14] ont proposé un modèle pour lequel l'effet de la maintenance est de réduire l'intensité de défaillance d'une quantité dépendant du passé du processus des défaillances:

$$\lambda_t = \lambda(t) - S(N_{t-}; \mathbf{T}_{N_{t-}}) \quad (2.16)$$

Les sauts de l'intensité dus à l'effet de la maintenance sont supposés proportionnels à la valeur de l'intensité juste avant la défaillance :

$$\lambda_{T_i^+} = \lambda_{T_i^-} - \rho \lambda_{T_i^-} \quad (2.17)$$

L'intensité de défaillance du modèle de Chan-Shaw (CS) est de la forme :

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{N_{t-}-1} (1-\rho)^j \lambda(T_{N_{t-}-j}) \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) se démontre par récurrence sur le nombre de défaillances observées. Elle est vraie pour  $N_t = 0$  :  $\lambda_t = \lambda(t)$ . Supposons qu'elle soit vraie pour  $t < T_{i+1}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \lambda_{T_{i+1}^+} &= (1-\rho)\lambda_{T_{i+1}^-} = (1-\rho)\lambda(T_i) - \rho \sum_{j=0}^{i-1} (1-\rho)^{j+1} \lambda(T_{i-j}) \\ &= \lambda(T_{i+1}) - \rho \sum_{j=0}^i (1-\rho)^j \lambda(T_{i+1-j}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

L'équation (2.18) est alors vérifiée pour  $T_{i+1} \leq t < T_{i+2}$ , grâce à l'hypothèse exprimée par (2.16).

Le principe de construction de ce modèle est manifestement similaire à celui du modèle BMS : la réduction proportionnelle porte sur l'intensité au lieu de porter sur l'âge. La figure 2.6 représente l'intensité d'un modèle de CS. Comme pour les modèles d'âge virtuel, à tout instant l'intensité de défaillance est parallèle à l'intensité initiale, mais cette fois le parallélisme n'est plus horizontal mais vertical.

Comme pour les modèles PAR ou BMS, l'efficacité de la maintenance est représentée par la valeur du paramètre  $\rho$ , donc évaluer l'efficacité de la maintenance revient à estimer  $\rho$  :

- $\rho = 1$  : la maintenance est optimale (mais pas parfaite, donc pas AGAN) ;

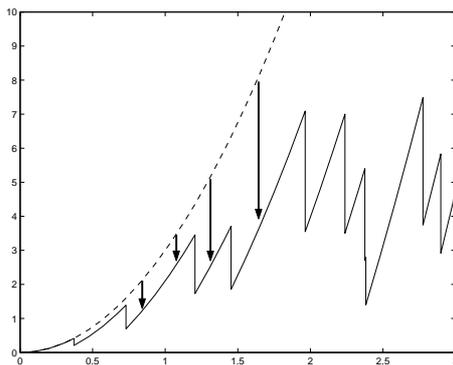


FIG. 2.6 – Intensité de défaillance dans un modèle CS

- $\rho \in ]0, 1[$  : la maintenance est efficace ;
- $\rho = 0$  : la maintenance est minimale (ABAO) ;
- $\rho < 0$  : la maintenance est nuisible.

A notre connaissance, aucune étude statistique n'a été faite sur ce modèle.

## 2.5 Le modèle de quasi-renouvellement

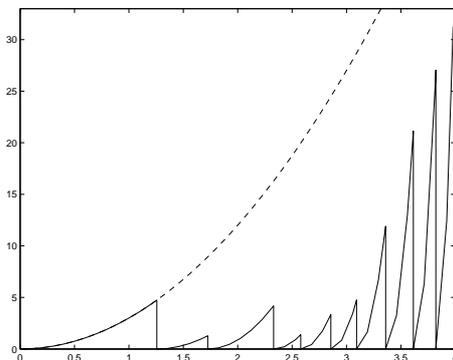
Wang et Pham, dans deux articles de 1996 [72, 71], ont construit un modèle reposant sur l'hypothèse suivante. Si  $\{Y_i\}_{i \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires de même loi, et indépendantes l'une de l'autre et du processus des défaillances, alors les durées inter-défaillances sont définies par :

$$\forall i \geq 1, X_i = \alpha^{i-1} Y_i \quad (2.20)$$

où  $\alpha$  est un paramètre réel strictement positif.

L'intensité de défaillance de ce modèle, dont une trajectoire est représentée dans la figure 2.7, est :

$$\lambda_t = \frac{1}{\alpha^{N_{t-}}} \lambda \left( \frac{t - T_{N_{t-}}}{\alpha^{N_{t-}}} \right) \quad (2.21)$$

FIG. 2.7 – Intensité de défaillance dans un modèle de quasi renouvellement ( $0 < \alpha < 1$ )

En effet, l'équation (1.9) peut être réécrite en :  $\lambda_t = -\frac{d}{dt} \ln (P (X_{N_{t-}+1} > t - T_{N_{t-}} | \mathbf{T}_{N_{t-}}))$ , et donc, en utilisant les hypothèses faites sur les temps inter-défaillances, on obtient l'expression

de l'intensité de défaillance :

$$\lambda_t = -\frac{d}{dt} \ln \left( P \left( Y_{N_{t-}+1} > \frac{t - T_{N_{t-}}}{\alpha^{N_{t-}}} \right) \right) = \frac{d}{dt} \Lambda \left( \frac{t - T_{N_{t-}}}{\alpha^{N_{t-}}} \right) = \frac{1}{\alpha^{N_{t-}}} \lambda \left( \frac{t - T_{N_{t-}}}{\alpha^{N_{t-}}} \right) \quad (2.22)$$

L'efficacité de la maintenance dépend ici du paramètre  $\alpha$  au sens où, selon la valeur prise par  $\alpha$ , les durées inter-défaillances seront (stochastiquement  $>_{st}$  [16]) de plus en plus grandes, de plus en plus petites ou de même loi :

- $\alpha > 1$  : la maintenance est plus que parfaite au sens où le système après maintenance est meilleur que neuf ( $X_{i+1} >_{st} X_i$ ). C'est ce qui arrive par exemple quand on remplace des composants usagés par des composants neufs issus d'une nouvelle technologie plus performante. Dans ce cas, la fiabilité du système croît.
- $\alpha = 1$  : la maintenance est parfaite (AGAN).
- $\alpha \in ]0, 1[$  : les  $X_i$  sont stochastiquement de plus en plus petits, donc la fiabilité du système décroît ; on sait simplement que l'efficacité de la maintenance est moins bonne que dans le cas AGAN, mais on ne peut pas distinguer le cas où la maintenance est nuisible du cas où elle n'est pas suffisamment efficace pour contrecarrer le vieillissement.

Ce modèle a été appelé par ses auteurs modèle de quasi-renouvellement. Plus généralement, le processus des défaillances est un **processus de quasi-renouvellement** (QR) si les durées inter-défaillances sont indépendantes, mais pas de même loi.

Dans ce cas, l'intensité de défaillance ne dépend que du temps écoulé depuis la dernière maintenance et du nombre de maintenances observées :

$$\lambda_t = h(t - T_{N_{t-}}, N_{t-}) \quad (2.23)$$

On retrouve parmi ceux-ci certains modèles fameux de fiabilité des logiciels comme ceux de Schick-Wolverton [63] :

$$\lambda_t = \Phi(N - N_{t-})(t - T_{N_{t-}}) \quad (2.24)$$

et Littlewood-Verral [56] :

$$\lambda_t = \frac{\alpha}{\beta_1 + (N_{t-} + 1)\beta_2 + t - T_{N_{t-}}} \quad (2.25)$$

ainsi qu'un modèle construit spécifiquement pour des maintenances préventives par Nakagawa [58, 59], dont la forme la plus simple dans le contexte de cette première partie serait :

$$\lambda_t = a^{N_{t-}} \lambda(t - T_{N_{t-}}) \quad (2.26)$$

Dans ces modèles, l'efficacité de la maintenance est caractérisée par le changement de loi de probabilité de  $X_i$  à  $X_{i+1}$ . Toutes les formes possibles sont envisageables.

Lin, Zuo et Yam [53] ont défini un modèle dont la forme la plus simple peut être vue comme un mélange des modèles de Nakagawa et PAR, dont l'intensité est :

$$\lambda_t = a^{N_{t-}} \lambda(t - \rho T_{N_{t-}}) \quad (2.27)$$

## 2.6 Le modèle de Dorado-Hollander-Sethuraman

Un modèle très général, et permettant de prendre en compte un grand nombre d'effets de maintenance variés, a été développé par Dorado, Hollander et Sethuraman (DHS) en 1997 [22].

Le modèle est caractérisé par la donnée de deux suites de variables aléatoires  $A = \{A_i\}_{i \geq 0}$  et  $\Theta = \{\Theta_i\}_{i \geq 0}$  quantifiant l'effet des différentes maintenances. Les  $A_i$  sont appelées âges effectifs et les  $\Theta_i$  suppléments d'âge. Ces variables aléatoires doivent vérifier :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad \Theta_0 = 1 \\ \forall i \geq 1, \quad A_i &\geq 0, \quad \Theta_i \geq 0 \end{aligned}$$

Le principe de ce modèle est de généraliser les modèles d'âge virtuel en supposant non seulement qu'après la  $i^{\text{ème}}$  maintenance, le système se comporte comme un système neuf qui aurait fonctionné pendant une durée  $A_i$  sans tomber en panne, mais aussi que la vitesse d'usure après la  $i^{\text{ème}}$  maintenance est pondérée par un facteur  $\Theta_i$ . Ainsi,  $\Theta_i > 1$  (resp.  $\Theta_i < 1$ ) a pour conséquence que le temps s'écoule plus (resp. moins) vite pour le système après la  $i^{\text{ème}}$  maintenance que pour un système neuf.

Alors, les lois conditionnelles des durées inter-défaillances sont données par :

$$\forall i \geq 0, \forall x \geq 0, P(X_{i+1} > x | A_i, \Theta_i, X_1, \dots, X_i) = \frac{1 - F(\Theta_i x + A_i)}{1 - F(A_i)} \quad (2.28)$$

Un calcul similaire à celui fait pour les modèles QR permet de montrer que l'intensité de défaillance du modèle DHS s'écrit :

$$\lambda_t^N(N, A, \Theta) = \Theta_{N_t-} \lambda(A_{N_t-} + \Theta_{N_t-} [t - T_{N_t-}]) \quad (2.29)$$

Le modèle DHS est le plus général des modèles existant considérant un seul type de maintenance. Il englobe bon nombre de modèles en adoptant des formes particulières pour les processus  $A$  et  $\Theta$  :

- $\Theta_i = 1$  : modèles d'âge virtuel,
- $A_i = 0, \Theta_i = 1$  : AGAN,
- $A_i = T_i, \Theta_i = 1$  : ABAO,
- $A_i = 0$  : modèles de quasi-renouvellement,
- $A_i = 0, \Theta_i = \frac{1}{\alpha^i}$  : modèle de Wang-Pham [72].
- $A_i = 0, \Theta_i = \sqrt{1 - i/n}$  : modèle de Schick-Wolverton [63].

Dorado, Hollander et Sethuraman ont construit un estimateur non paramétrique de  $F$ , quand on connaît les séries des âges effectifs  $A_i$  et des suppléments d'âge  $\Theta_i$ . Ils ont démontré un certain nombre de propriétés de convergence de cet estimateur. Cependant, jamais en pratique on ne connaît les valeurs des  $A_i$  et  $\Theta_i$ .

## 2.7 Autres modèles de réparation imparfaite

Lindqvist, Elvebakk et Heggland [55] sont partis de la propriété qui dit que si le processus de défaillance est un NHPP d'intensité  $\lambda(t)$ , alors le processus dont les instants d'occurrence sont les  $\Lambda(T_i) = \int_0^{T_i} \lambda(u) du$  est un processus de Poisson homogène d'intensité 1. Il ont alors eu l'idée de construire un processus plus général en considérant que les  $\Lambda(T_i)$  sont les instants d'occurrence d'un processus de renouvellement quelconque, de loi générique de fonction de répartition  $G$ , de taux de hasard  $z$  et d'espérance 1. Le processus ainsi défini a une intensité de défaillance égale à :

$$\lambda_t = z (\Lambda(t) - \Lambda(T_{N_t})) \lambda(t) \quad (2.30)$$

En prenant  $G(t) = 1 - e^{-t}$  on a  $z(t) = 1$ , donc le processus de défaillance est un NHPP d'intensité  $\lambda(t)$ , qui correspond au modèle de maintenance minimale. En prenant  $\lambda(t) = c$  constant, on a une intensité de défaillance égale à  $\lambda_t = c z(c [t - T_{N_t}])$ , et on est donc dans le cas du modèle de maintenance parfaite. Ce modèle peut donc prendre en compte à la fois les processus de renouvellement et les processus présentant une tendance comme les NHPP, d'où son nom de modèle de tendance-renouvellement (trend-renewal process).

Du fait de la double influence de  $\lambda$  et  $z$ , il n'est pas facile de caractériser l'effet de la maintenance dans ce modèle. En fait, ce modèle a surtout été élaboré pour faire des tests

de tendance, mais pas pour modéliser l'efficacité de la maintenance. Par ailleurs, ce modèle est construit sur des hypothèses purement mathématiques et n'a pas d'interprétation physique.

D'autres modèles ont été développés dans la même optique comme par exemple celui de Lawless et Thiagarajah [48], dont l'intensité est :

$$\lambda_t = \exp(\alpha + \beta t + \gamma(t - T_{N_t})) \quad (2.31)$$

Bien que présentant des analogies avec le modèle de Cox, ce modèle n'a pas non plus d'interprétation physique.

Les modèles de choc [42] et modèles shot-noise [49], même s'ils permettent eux aussi de modéliser des maintenances imparfaites, sont construits à partir d'hypothèses totalement différentes de celles proposées ici.

Enfin, tous les modèles basés sur des diagrammes d'influence ou des évaluations a priori de l'efficacité de maintenance, comme Clarotti et al. [15], ne rentrent pas dans le cadre de cette étude qui a pour but d'évaluer de façon fréquentiste l'efficacité de maintenance.



# Les modèles ARI et ARA

Dans ce chapitre et le suivant, l'intensité initiale,  $\lambda$ , est toujours supposée être une fonction déterministe, croissante, non identiquement nulle et càg-làd. Ces hypothèses ont pour conséquence immédiate que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda(t) = +\infty$ .

Nous allons proposer deux nouvelles classes de modèles de réparation imparfaite, appelées modèles à réduction arithmétique de l'âge ou de l'intensité, et étudier quelques propriétés du processus des défaillances de ces modèles.

## 3.1 Les modèles à réduction arithmétique de l'âge et de l'intensité

On appelle modèle à Réduction Arithmétique de l'Age (ARA) l'ensemble des modèles d'âge virtuel pour lesquels l'effet de la réparation est de réduire arithmétiquement l'âge virtuel,  $V_t$  (défini par l'équation (2.10)), d'une quantité dépendant de l'histoire du processus des défaillances :  $V_{T_n^+} = V_{T_n^-} - a_n(\mathbf{T}_n)$  où  $\mathbf{T}_n$  représente le vecteur des  $n$  premiers instants de défaillance  $(T_1, \dots, T_n)$  et  $a_n$  est une fonction déterministe de ces instants de défaillance. Comme  $V_t = t$  pour  $t \leq T_1$ , on remarque que l'âge virtuel peut se réécrire  $V_t = t - s_{N_{t^-}}(\mathbf{T}_{N_{t^-}})$  où, pour tout  $k \geq 1$ ,  $s_k$  une fonction déterministe. Ainsi l'intensité de défaillance d'un modèle ARA vérifie :

$$\lambda_t = \lambda(t - s_{N_{t^-}}(\mathbf{T}_{N_{t^-}})) \tag{3.1}$$

Le modèle PAR a une intensité de défaillance qui vaut  $\lambda_t = \lambda(t - \rho T_{N_{t^-}})$ . C'est donc un modèle ARA. Le modèle BMS a une intensité de défaillance qui vaut  $\lambda_t = \lambda(t - \rho \sum_{j=0}^{N_{t^-}-1} (1 - \rho)^j T_{N_{t^-}-j})$ . C'est donc également un modèle ARA.

De plus, le modèle PAR peut être considéré comme une simplification du modèle BMS au sens où l'effet de la maintenance porte seulement sur l'instant de la dernière défaillance, et pas sur tous les instants des défaillances précédentes. On peut alors imaginer que cet effet porte sur plusieurs instants de défaillance précédents. On construit ainsi les modèles que nous avons appelés à Réduction Arithmétique de l'Age de mémoire  $m$ .

**DEFINITION 3.1.1.**

*Un modèle à Réduction Arithmétique de l'Age de mémoire  $m$  (ARA <sub>$m$</sub> ) est défini par son intensité de défaillance :*

$$\lambda_t = \lambda \left( t - \rho \sum_{j=0}^{\text{Min}(m-1, N_{t^-}-1)} (1 - \rho)^j T_{N_{t^-}-j} \right) \tag{3.2}$$

□

La mémoire  $m$  reflète une propriété markovienne : c'est le nombre maximal d'instants de défaillance précédents qui peuvent influencer l'intensité de défaillance. Le modèle PAR peut donc être considéré comme un modèle ARA<sub>1</sub> et le modèle BMS comme un modèle ARA <sub>$\infty$</sub> .

Dans le chapitre précédent on a déjà souligné la grande similarité entre le principe de construction des modèles CS et BMS : l'effet de la réparation est le même mais dans les modèles

CS au lieu de réduire l'âge virtuel, il réduit l'intensité de défaillance. La similitude est également frappante sur l'expression de l'intensité de défaillance.

Partant de ce principe on peut donc définir, par analogie avec les modèles ARA, les modèles à Réduction Arithmétique de l'Intensité (ARI). Dans un modèle ARI l'effet de la maintenance est de réduire arithmétiquement l'intensité de défaillance d'une quantité dépendant de l'histoire du processus des défaillances :

$$\lambda_t = \lambda(t) - s_{N_{t-}}(\mathbf{T}_{N_{t-}}) \quad (3.3)$$

où les fonctions  $s_k$  sont toujours supposées déterministes. Le modèle CS, dont l'intensité de défaillance vérifie :  $\lambda_t = \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{N_{t-}-1} (1-\rho)^j \lambda(T_{N_{t-}-j})$ , est donc un modèle ARI.

Avec le même principe, on peut construire un modèle analogue au modèle PAR, pour lequel l'effet de la maintenance est de réduire non pas l'intensité de défaillance mais son accroissement depuis la dernière maintenance :

$$\lambda_{T_i^+} = \lambda_{T_i^-} - \rho[\lambda_{T_i^-} - \lambda_{T_{i-1}^+}] \quad (3.4)$$

Par analogie avec l'effet des maintenances sur l'âge virtuel dans le modèle PAR, on trouve que l'intensité de défaillance de ce nouveau modèle est de la forme :

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho \lambda(T_{N_{t-}}) \quad (3.5)$$

Puis, par analogie avec les modèles  $ARA_m$ , on définit les modèles à Réduction Arithmétique de l'Intensité de mémoire  $m$ .

**DEFINITION 3.1.2.**

*Un modèle à Réduction Arithmétique de l'Intensité de mémoire  $m$  ( $ARI_m$ ) est défini par son intensité de défaillance :*

$$\lambda_t = \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{Min(m-1, N_{t-}-1)} (1-\rho)^j \lambda(T_{N_{t-}-j}) \quad (3.6) \quad \square$$

Le modèle CS peut donc être considéré comme un modèle  $ARI_\infty$  et le modèle défini par (3.5) comme un modèle  $ARI_1$ .

Dans les modèles  $ARA_m$  et  $ARI_m$ , l'efficacité de la maintenance est représentée par la valeur du paramètre  $\rho$ , donc évaluer l'efficacité de la maintenance revient à estimer  $\rho$  :

- $\rho = 1$  : la maintenance est optimale (elle n'est parfaite, et donc AGAN, que pour les modèles  $ARA_m$ ) ;
- $\rho \in ]0, 1[$  : la maintenance est efficace ;
- $\rho = 0$  : la maintenance est minimale (ABAO) ;
- $\rho < 0$  : la maintenance est nuisible.

Dans un modèle  $ARI_m$ , l'effet de la réparation ne modifie pas la pente de l'intensité de défaillance qui continue à varier comme avant la défaillance. Si la réparation était parfaite, la pente de l'intensité de défaillance devrait être la même que celle d'un système neuf. Or cela ne peut pas être le cas pour les modèles  $ARI_m$ . C'est pourquoi, pour un modèle  $ARI_m$  la réparation ne peut jamais être AGAN.

Pour les modèles  $ARI_m$ ,  $\rho$  ne peut pas être supérieur à 1 car sinon l'intensité de défaillance peut devenir négative. Pour les modèles  $ARA_m$ , le cas  $\rho > 1$  est possible et correspondrait à des réparations plus que parfaites, mais nécessiterait de définir l'intensité initiale pour des valeurs négatives.

Les modèles  $ARI_m$  sont construits sur un principe similaire aux modèles  $ARA_m$ , mais sont mathématiquement plus simples à manipuler.

On peut remarquer que les modèles  $ARA_1$  et  $ARI_1$  ont une intensité qui n'est fonction que de l'instant présent  $t$  et de l'instant de la dernière défaillance  $T_{N_t-}$  :

$$\lambda_t = h(t, T_{N_t-}) \quad (3.7)$$

C'est en fait une caractéristique des modèles pour lesquels le processus  $\{T_i\}_{i \geq 1}$  est markovien.

Comme tout modèle d'âge virtuel, les modèles  $ARA_m$  ont une intensité de défaillance parallèle horizontalement à l'intensité initiale. Comme le modèle CS, les modèles  $ARI_m$  ont une intensité de défaillance parallèle verticalement à l'intensité initiale.

### 3.2 Intensité d'usure minimale et maximale

On remarque que les modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$  ont une propriété intéressante. Il possèdent ce que nous appellerons une intensité d'usure minimale.

**DEFINITION 3.2.1 (Intensité d'usure minimale).**

Pour un modèle d'intensité de défaillance  $\lambda_t$ , l'intensité d'usure minimale est, si elle existe, la fonction déterministe  $\lambda_{min}(t)$  vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda_t \geq \lambda_{min}(t) \quad (p.s.) \quad (3.8)$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad P(\lambda_t \leq \lambda_{min}(t) + \epsilon) > 0 \quad (3.9)$$

□

Dans cette définition il faut démontrer le fait que l'intensité d'usure minimale est unique. Imaginons que ce ne soit pas le cas, alors il existe deux intensités d'usure minimale  $\lambda_{min}(t)$  et  $\widetilde{\lambda}_{min}(t)$ , telles qu'il existe  $t_0 \geq 0$  où les deux fonctions ont des valeurs différentes :

$$\exists \eta > 0, \quad \lambda_{min}(t_0) \geq \widetilde{\lambda}_{min}(t_0) + \eta \quad (3.10)$$

Alors, l'équation (3.8) et l'équation précédente impliquent que :

$$\lambda_{t_0} \geq \widetilde{\lambda}_{min}(t_0) + \eta \quad (p.s.) \quad (3.11)$$

En prenant  $\epsilon = \eta/2$ , on en déduit que :

$$P(\lambda_{t_0} \leq \widetilde{\lambda}_{min}(t_0) + \epsilon) = 0 \quad (3.12)$$

$\widetilde{\lambda}_{min}(t)$  ne vérifie donc pas l'équation (3.9), ce qui contredit le fait qu'elle soit une intensité d'usure minimale.

L'intensité d'usure minimale est donc une fonction déterministe inférieure à l'intensité de défaillance, et pouvant être aussi proche que l'on veut de l'intensité de défaillance : c'est une borne inférieure maximale pour l'intensité de défaillance. Cela signifie que quelles que soient les dates de réparation le système s'use plus vite qu'un système d'intensité de défaillance  $\lambda_{min}(t)$ .

**PROPRIETE 3.2.1 :**

Pour un modèle  $ARI_m$ , si  $\lambda(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ , l'intensité d'usure minimale vérifie :

$$\lambda_{min}(t) = \begin{cases} (1 - \rho)^m \lambda(t) & \text{pour } 0 \leq \rho \leq 1 \\ \lambda(t) & \text{pour } \rho \leq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

□

**Démonstration :**

Dans le cas où  $\rho \leq 0$ , il est trivial de démontrer que l'équation (3.8) est vérifiée. Pour montrer que (3.9) est également vérifiée il suffit de remarquer que :

$$P(\lambda_t \leq \lambda_{min}(t) + \epsilon) \geq P(\lambda_t = \lambda(t)) = P(N_t = 0) = \exp(-\Lambda(t)) > 0 \quad (3.14)$$

Pour le cas  $0 \leq \rho \leq 1$ , l'équation (3.8) se démontre simplement en utilisant le fait que  $\lambda(t)$  est croissante et que  $(1 - \rho)^m = 1 - \rho \sum_{j=0}^{m-1} (1 - \rho)^j$  :

$$\lambda_t \geq \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{m-1} (1 - \rho)^j \lambda(t) = (1 - \rho)^m \lambda(t) \quad (3.15)$$

Pour prouver que l'équation (3.9) est aussi vérifiée, l'idée est de démontrer qu'à tout instant  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , l'intensité de défaillance est très proche de l'intensité d'usure minimale si il y a eu  $m$  défaillances entre  $t - \eta$  et  $t$ , pour  $\eta > 0$  suffisamment petit.

$$\begin{aligned} & P(\lambda_t \leq \lambda(t) - (1 - (1 - \rho)^m) \lambda(t - \eta)) \\ &= P\left(\sum_{j=0}^{\text{Min}(m-1, N_{t-\eta})} (1 - \rho)^j \lambda(T_{N_{t-\eta}-j}) \geq \sum_{j=0}^{m-1} (1 - \rho)^j \lambda(t - \eta)\right) \\ &\geq P\left(\left[\sum_{j=0}^{m-1} (1 - \rho)^j \lambda(T_{N_{t-\eta}-j}) \geq \sum_{j=0}^{m-1} (1 - \rho)^j \lambda(t - \eta)\right] \cap [N_{t-\eta} \geq m]\right) \\ &\geq P([T_{N_{t-\eta}} \geq \dots \geq T_{N_{t-\eta}-m+1} \geq t - \eta] \cap [N_{t-\eta} \geq m]) \\ &\geq P(N_{t-\eta} - N_{t-\eta} = m) > 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour finir la démonstration, on utilise l'hypothèse faite que  $\lambda(t)$  est continue à gauche donc :

$$\forall \epsilon' \in \mathbb{R}_+^*, \exists \mu \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in [0, \mu], \quad \lambda(t) - \lambda(t - \eta) \leq \epsilon' \quad (3.17)$$

Donc,  $\lambda(t) - (1 - (1 - \rho)^m) \lambda(t - \eta) \leq \lambda(t) - (1 - (1 - \rho)^m) (\lambda(t) - \epsilon')$ , et la propriété est prouvée en prenant  $\epsilon = (1 - (1 - \rho)^m) \epsilon'$ . ■

Dans la démonstration, on a montré pour des modèles  $ARI_m$  et dans le cas de maintenances efficaces, que l'intensité de défaillance est très proche de l'intensité d'usure minimale si il vient d'y avoir  $m$  défaillances dans un petit laps de temps. En fait, on peut même démontrer la réciproque de cette propriété et donc intensité de défaillance et intensité d'usure minimale sont très proches si et seulement si il vient d'y avoir  $m$  défaillances dans un petit laps de temps. En particulier, pour un modèle de mémoire 1, juste après une défaillance, intensité d'usure minimale et de défaillance sont égales. Ces remarques restent vraies pour des modèles  $ARA_m$ .

L'analogie de la propriété 3.2.1 est vraie pour les modèles  $ARA_m$  :

**PROPRIETE 3.2.2 :**

Pour un modèle  $ARA_m$ , si  $\lambda(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ , l'intensité d'usure minimale vérifie :

$$\lambda_{min}(t) = \begin{cases} \lambda((1 - \rho)^m t) & \text{pour } 0 \leq \rho \leq 1 \\ \lambda(t) & \text{pour } \rho \leq 0 \end{cases} \quad (3.18) \quad \square$$

Par analogie avec l'intensité d'usure minimale on peut également définir l'intensité d'usure maximale, qui est donc une borne supérieure minimale pour l'intensité de défaillance.

**DEFINITION 3.2.2 (Intensité d'usure maximale).**

Pour un modèle d'intensité de défaillance  $\lambda_t$ , l'intensité d'usure maximale est, si elle existe, la fonction déterministe  $\lambda_{max}(t)$  vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda_t \leq \lambda_{max}(t) \quad (p.s.) \tag{3.19}$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad P(\lambda_t \geq \lambda_{max}(t) - \epsilon) > 0 \tag{3.20}$$

□

Toujours de la même façon, on prouve que les modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$  ont une intensité d'usure maximale.

**PROPRIETE 3.2.3 :**

Pour les modèles  $ARI_m$ , si  $\lambda(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ , l'intensité d'usure maximale vérifie :

$$\lambda_{max}(t) = \begin{cases} \lambda(t) & \text{pour } 0 \leq \rho \leq 1 \\ (1 - \rho)^m \lambda(t) & \text{pour } \rho \leq 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Et sous la même condition, pour les modèles  $ARA_m$  on a :

$$\lambda_{max}(t) = \begin{cases} \lambda(t) & \text{pour } 0 \leq \rho \leq 1 \\ \lambda((1 - \rho)^m t) & \text{pour } \rho \leq 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

□

Les modèles de mémoire infinie sont donc très différents des autres, car leur intensité d'usure minimale est nulle pour des maintenances efficaces, et leur intensité d'usure maximale est infinie pour des maintenances nuisibles. Ainsi, comme l'illustre la figure 3.1, dans le cadre de maintenances efficaces (qui est a priori celui qui nous intéresse le plus pour modéliser des systèmes réels), les modèles de mémoire infinie peuvent avoir une vitesse d'usure globalement constante : l'effet de la maintenance peut arriver à stabiliser le phénomène d'usure.

Sur les représentations graphiques l'intensité initiale vaut toujours  $\lambda(t) = 3t^2$ . La figure 3.2 représente l'intensité de défaillance d'un modèle  $ARA_1$  pour des maintenances efficaces ( $\rho = 0.75$ ) et la figure 3.3 représente celle d'un modèle  $ARI_3$  ( $\rho = 0.6$ ). Les points-pointillés représentent les intensités d'usure minimale et les pointillés les intensités d'usure maximale. La figure 3.4 représente l'intensité de défaillance d'un modèle  $ARI_3$  pour des maintenances nuisibles ( $\rho = -0.4$ ).

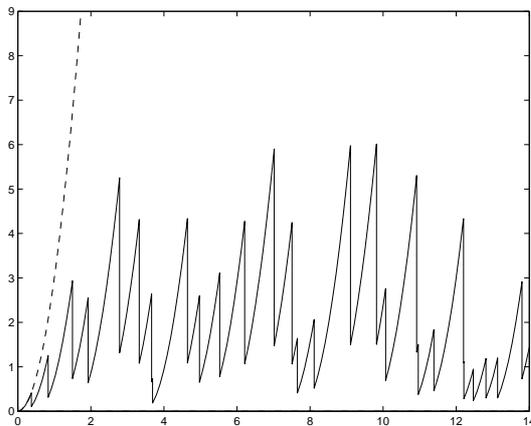


FIG. 3.1 –  $ARA_\infty$

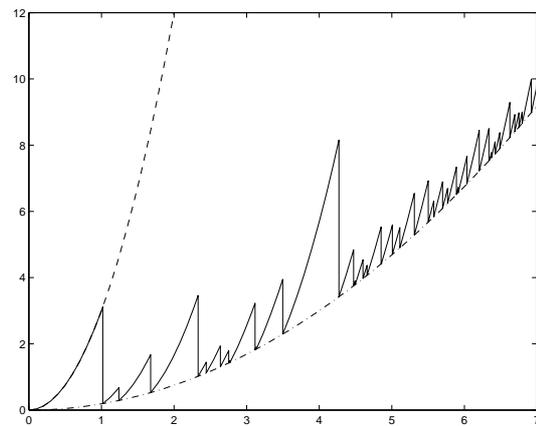
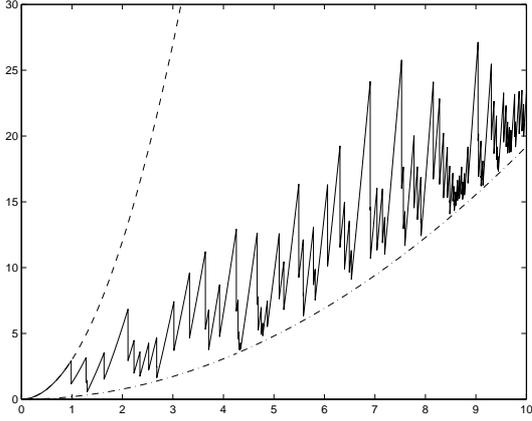
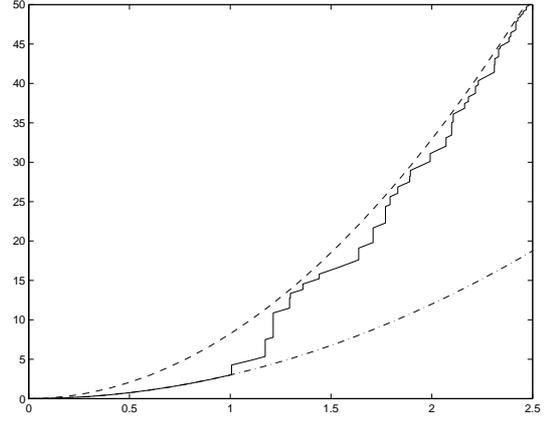


FIG. 3.2 –  $ARA_1$

Au vu de ces graphiques, il semble, pour des maintenances efficaces, que la différence entre l'intensité d'usure minimale et l'intensité de défaillance n'augmente pas trop. Pour des maintenances nuisibles, la même propriété semble être vérifiée mais pour l'intensité d'usure maximale.

FIG. 3.3 –  $ARI_3$  (maintenances efficaces)FIG. 3.4 –  $ARI_3$  (maintenances nuisibles)

Pour les modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$ , on définit donc l'intensité asymptotique, notée  $\lambda_\infty$ , comme étant l'intensité d'usure minimale quand les maintenances sont efficaces et l'intensité d'usure maximale quand les maintenances sont nuisibles. Ainsi,

**DEFINITION 3.2.3.**

Pour les modèles  $ARI_m$ , l'intensité asymptotique est la fonction :  $\lambda_\infty(t) = (1 - \rho)^m \lambda(t)$ . Pour les modèles  $ARA_m$ , elle vaut :  $\lambda_\infty(t) = \lambda((1 - \rho)^m t)$ .  $\square$

On va prouver que l'intensité de défaillance et l'intensité asymptotique ont le même comportement asymptotique. Mais pour ce faire on a besoin de théorèmes supplémentaires sur l'intégration stochastique et le comportement asymptotique des processus ponctuels.

### 3.3 Compléments sur la théorie des processus ponctuels

Dans cette première partie, comme il ne peut pas y avoir de confusion avec le processus des MP, on adoptera la notation classique  $M_t$  pour la martingale  $N_t - \Lambda_t$ .

Tout d'abord introduisons deux définitions et notations. On dit que la martingale  $M$  est locale si  $M_{t \wedge T_n}$  est une martingale pour tout  $t \geq 0$  et  $n \geq 0$ . On appelle processus croissant, et on note  $\langle M \rangle$ , le compensateur associé à  $M^2$ . De plus, on note  $\langle M \rangle_{+\infty}$  sa limite à l'infini dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :  $\langle M \rangle_{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle M \rangle_t$ .

Le théorème 3.3.1 est une version faible du théorème classique sur l'intégration stochastique [3].

**THEOREME 3.3.1 (Intégration stochastique).**

Soit un processus de comptage  $N$  et un processus prévisible  $Z = \{Z_t\}_{t \geq 0}$  tel que  $\int_0^t Z_s^2 d\Lambda_s$  soit fini pour tout  $t \geq 0$  (ce qui est automatiquement vérifié si  $Z_s$  et  $\lambda_s$  sont bornés sur  $[0, t]$ ). Alors,  $\int_0^t Z_s dM_s$  est une martingale locale de carré intégrable et son processus croissant est :

$$\left\langle \int_0^t Z_s dM_s \right\rangle_t = \int_0^t Z_s^2 d\Lambda_s \quad (3.23) \quad \square$$

Les théorèmes 3.3.2 [19] et 3.3.3 (voir par exemple [16]) donnent deux résultats de convergence, le premier issu de la loi des grands nombres et le second du théorème central limite.

**THEOREME 3.3.2 (Loi des grands nombres).**

Soit  $M$  une martingale locale.

- Pour  $\{\langle M \rangle_{+\infty} < +\infty\}$ ,  $M_t$  converge presque sûrement vers une variable aléatoire finie quand  $t$  tend vers l'infini.

– Pour  $\{\langle M \rangle_{+\infty} = +\infty\}$ , et pour tout  $\epsilon > 0$  on a :

$$\frac{M_t}{\langle M \rangle_t^{0.5+\epsilon}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} 0 \quad (3.24)$$

□

**THEOREME 3.3.3 (Central limite).**

Soit  $N$  un processus de comptage d'intensité de défaillance  $\lambda_t$ , et  $Z$  un processus prévisible localement borné. Alors sous les conditions suivantes :

- il existe  $c_t > 0$  et  $\sigma > 0$  tels que :

$$\frac{1}{c_t^2} \int_0^t Z_s^2 \lambda_s ds \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{P} \sigma^2 \quad (3.25)$$

- pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\frac{1}{c_t^2} \int_0^t Z_s^2 \mathbb{1}_{\{|Z_s| > \delta c_t\}} \lambda_s ds \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{P} 0 \quad (3.26)$$

(ce qui est automatiquement vérifié si  $Z_t$  est fini presque sûrement et  $c_t$  diverge)

la variable aléatoire :  $\int_0^t Z_s dM_s / c_t$  converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée d'écart type  $\sigma$ . □

En particulier, si il existe une fonction  $\Lambda_\infty$  positive, croissante et divergente telle que  $\Lambda_t \stackrel{p.s.}{=} \Lambda_\infty(t) + o(\Lambda_\infty(t))$ , alors,  $\Lambda_t$  est elle aussi divergente. Le théorème 3.3.2 implique donc que :

$$M_t = o(\langle M \rangle_t^{0.5+\epsilon}) = o(\Lambda_t^{0.5+\epsilon}) = o(\Lambda_t) = o(\Lambda_\infty(t)) \quad (p.s.) \quad (3.27)$$

De plus, en appliquant le théorème 3.3.3 avec  $Z_t = 1$  et  $c_t = \sqrt{\Lambda_\infty(t)}$ , on obtient que  $M_t / \sqrt{\Lambda_\infty(t)}$  converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

**COROLLAIRE 3.3.1. :**

Soit  $N$  un processus de comptage d'intensité de défaillance  $\lambda_t$ . Si il existe une fonction positive, croissante et divergente,  $\Lambda_\infty(t)$  telle que l'intensité de défaillance cumulée vérifie :

$$\Lambda_t \stackrel{p.s.}{=} \Lambda_\infty(t) + o(\Lambda_\infty(t)) \quad (3.28)$$

alors pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$M_t \stackrel{p.s.}{=} o(\Lambda_\infty(t)^{0.5+\epsilon}) \quad (3.29)$$

$$\frac{M_t}{\sqrt{\Lambda_\infty(t)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.30)$$

□

## 3.4 Comportement asymptotique du processus des défaillances

### 3.4.1 Réécriture de l'intensité de défaillance

Tous les résultats asymptotiques de ce chapitre, pour les modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$ , sont basés sur une réécriture de l'intensité de défaillance qui est uniquement vérifiée par des modèles de mémoire finie. Grâce au fait que  $\rho \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j = 1 - (1-\rho)^m$ , l'intensité de défaillance d'un modèle  $ARI_m$  se réécrit pour  $t \geq T_m$  :

$$\lambda_t = (1-\rho)^m \lambda(t) + \rho \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j (\lambda(t) - \lambda(T_{N_{t-j}})) \quad (3.31)$$

En identifiant l'intensité asymptotique dans la formule précédente on obtient donc :

$$\lambda_t = \lambda_\infty(t) + \rho \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j (\lambda(t) - \lambda(T_{N_{t-}-j})) \quad (3.32)$$

D'où

$$\lambda_t = \lambda_\infty(t) + \rho \sum_{j=1}^m (1-\rho)^{-j} (\lambda_\infty(t) - \lambda_\infty(T_{N_{t-}-m+j})) \quad (3.33)$$

Et comme l'intensité initiale est supposée croissante,  $\lambda_\infty$  l'est aussi. On peut donc minorer, dans la formule précédente,  $\lambda_\infty(T_{N_{t-}-m+j})$  par  $\lambda_\infty(T_{N_{t-}-m+1})$ , et on obtient que :

$$|\lambda_t - \lambda_\infty(t)| \leq |\rho| \left( \sum_{j=1}^m (1-\rho)^{-j} \right) |\lambda_\infty(t) - \lambda_\infty(T_{N_{t-}-m+1})| \quad (3.34)$$

De la même façon que pour les modèles  $\text{ARI}_m$  on a, pour un modèle  $\text{ARA}_m$  avec  $t \geq T_m$  :

$$\lambda_t = \lambda \left( (1-\rho)^m t + \rho \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j (t - T_{N_{t-}-j}) \right) \quad (3.35)$$

D'où

$$\lambda_t = \lambda_\infty \left( t + \rho \sum_{j=1}^m (1-\rho)^{-j} (t - T_{N_{t-}-m+j}) \right) \quad (3.36)$$

Si  $\rho \geq 0$ , comme  $\lambda_\infty$  est croissante,

$$|\lambda_t - \lambda_\infty(t)| \leq \lambda_\infty \left( t + |\rho| \left( \sum_{j=1}^m (1-\rho)^{-j} \right) (t - T_{N_{t-}-m+1}) \right) - \lambda_\infty(t) \quad (3.37)$$

Si  $\rho < 0$ , toujours grâce à la croissance de  $\lambda_\infty$ ,

$$|\lambda_t - \lambda_\infty(t)| \leq \lambda_\infty(t) - \lambda_\infty \left( t - |\rho| \left( \sum_{j=1}^m (1-\rho)^{-j} \right) (t - T_{N_{t-}-m+1}) \right) \quad (3.38)$$

Donc,

$$|\lambda_t - \lambda_\infty(t)| \leq \left| \lambda_\infty(t) - \lambda_\infty \left( t + \rho \left( \sum_{j=1}^m (1-\rho)^{-j} \right) (t - T_{N_{t-}-m+1}) \right) \right| \quad (3.39)$$

Donc l'intensité de défaillance des modèles  $\text{ARI}_m$  et  $\text{ARA}_m$  vérifie :

$$\lambda_t - \lambda_\infty(t) = O(\lambda_\infty(t) - \lambda_\infty(t + O(t - T_{N_{t-}-m+1}))) \quad (3.40)$$

### 3.4.2 Développement asymptotique au premier ordre de l'intensité de défaillance

Nous allons utiliser la réécriture précédente de l'intensité pour montrer que l'intensité de défaillance et l'intensité asymptotique des modèles  $\text{ARI}_m$  et  $\text{ARA}_m$  de mémoire finie ont le même comportement asymptotique (propriété 3.4.1 ci-dessous). Mais ce résultat n'est valable que si les maintenances ne sont pas parfaites :

- **A1:**  $\rho < 1$ ,

l'intensité initiale des modèles  $ARA_m$  est une fonction puissance croissante :

- **A0:**  $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 1$ ,

et l'intensité initiale des modèles  $ARI_m$  est une fonction à variations régulières croissante [39] :

- **A2:**  $\exists \beta \in \mathbb{R}_+$ ,  $\forall x > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(xt)}{\lambda(t)} = x^\beta$ ,

Les fonctions à variations régulières avec un indice  $\beta$  nul sont les fonctions dites à variations lentes. Les fonctions logarithmes ( $\lambda(t) = \alpha\beta(\ln(1+t))^{\beta-1}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 1$ ) et les fonctions constantes ( $\lambda(t) = \alpha$ ,  $\alpha > 0$ ) sont des fonctions à variations lentes. Les fonctions puissances croissantes ( $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 1$ ) ne sont pas des fonctions à variations lentes mais sont des fonctions à variations régulières. Il existe cependant des fonctions qui ne sont pas à variations régulières. Ces fonctions ont alors, dans le cadre de nos hypothèses, une divergence rapide, comme par exemple :  $\lambda(t) = e^{t^\beta}$  avec  $\beta > 0$ . Des intensités initiales n'étant pas à variations régulières sont peu réalistes pour des systèmes industriels fiables (ils tomberaient en panne trop souvent). L'hypothèse A2 n'est donc pas trop contraignante. La seule hypothèse qui peut être embêtante pour des modèles  $ARI_m$  est A1. En effet, elle nous interdit de considérer des systèmes pour lesquels la réparation est parfaite. Dans le cas des modèles  $ARA_m$  la propriété est beaucoup moins générale : on ne considère que des fonctions puissances pour l'intensité initiale.

Pour pouvoir démontrer la propriété on a besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.4.1 :** *Soit  $N$  un processus de comptage d'intensité de défaillance  $\lambda_t$ . Si il existe une fonction  $\lambda_{min}$ , croissante et non identiquement nulle vérifiant pour tout  $t \geq 0$  :  $\lambda_t \geq \lambda_{min}(t)$ , alors pour tout  $j \geq 0$  on a :*

$$t - T_{N_t--j} = o(t) \quad (p.s.) \quad (3.41)$$

□

### Démonstration :

Comme  $\lambda_{min}$  est croissante et non identiquement nulle on a :

$$\exists C > 0, \exists t_0 > 0, \forall t \geq t_0, \quad \lambda_{min}(t) \geq C \quad (3.42)$$

Les hypothèses impliquent que  $\Lambda_t$  diverge presque sûrement. D'après Brémaud [9], cela implique que  $N_t$  diverge presque sûrement. Ainsi, comme tout processus de comptage est non explosif ( $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n \stackrel{p.s.}{=} \infty$ ),  $T_{N_t}$  diverge presque sûrement, et donc :

$$\exists t_1 > 0, \forall t \geq t_1, \quad T_{N_t--j} \geq t_0 \quad (p.s.) \quad (3.43)$$

En utilisant la forme différentielle de l'écriture martingale de  $N$ , on a ainsi presque sûrement pour tout  $t \geq t_1$  :

$$t - T_{N_t--j} = \int_{T_{N_t--j}}^t \frac{1}{\lambda_s} d\Lambda_s = \int_{T_{N_t--j}}^t \frac{1}{\lambda_s} dN_s - \int_{T_{N_t--j}}^t \frac{1}{\lambda_s} dM_s \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} t - T_{N_t--j} &\leq \frac{1}{C} \int_{T_{N_t--j}}^t dN_s - \int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda_s} dM_s + \int_{t_0}^{T_{N_t--j}} \frac{1}{\lambda_s} dM_s \\ &\leq \frac{j+1}{C} + 2 \max \left( \left| \int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda_s} dM_s \right|, \left| \int_{t_0}^{T_{N_t--j}} \frac{1}{\lambda_s} dM_s \right| \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Or pour tout  $t \geq t_0$ ,

$$\int_{t_0}^t \left(\frac{1}{\lambda_s}\right)^2 d\Lambda_s = \int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda_s} ds \leq \frac{t-t_0}{C} \quad (3.46)$$

donc d'après le théorème 3.3.1,  $\int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda_s} dM_s$  est une martingale locale de carré intégrable et son processus croissant est  $\int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda_s} ds$ . De deux choses l'une. Soit ce processus est divergent et le théorème 3.3.2 implique que :

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda_s} dM_s = o\left(\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda_s} ds\right)^{0.5+\epsilon}\right) = o\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda_s} ds\right) = o\left(\frac{t-t_0}{C}\right) = o(t) \quad (p.s.) \quad (3.47)$$

Soit il ne diverge pas et le même théorème 3.3.2 implique que :

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda_s} dM_s = O(1) = o(t) \quad (p.s.) \quad (3.48)$$

Ainsi,  $\int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda_s} dM_s \stackrel{p.s.}{=} o(t)$ , on en déduit donc également :

$$\int_{t_0}^{T_{N_t--j}} \frac{1}{\lambda_s} dM_s \stackrel{p.s.}{=} o(T_{N_t--j}) = o(t) \quad (3.49)$$

Donc, en utilisant ces deux résultats dans l'équation (3.45) on obtient que :

$$t - T_{N_t--j} = O(1) + o(t) = o(t) \quad (p.s.) \quad (3.50) \quad \blacksquare$$

#### PROPRIETE 3.4.1 :

Pour un modèle  $ARI_m$  de mémoire finie et sous les hypothèses A1 et A2, ou pour un modèle  $ARA_m$  de mémoire finie et sous les hypothèses A0 et A1, l'intensité de défaillance est asymptotiquement équivalente à l'intensité asymptotique :  $\lambda_t \stackrel{p.s.}{=} \lambda_\infty(t) + o(\lambda_\infty(t))$ .  $\square$

#### Démonstration :

Comme  $\lambda_\infty$  est croissante, l'équation (3.40) implique qu'il existe  $C_1, C_2$  et  $M_1$  strictement positives telles que pour tout  $t \geq M_1$  :

$$|\lambda_t - \lambda_\infty(t)| \leq C_1 \max_{u \in \{-1,1\}} |\lambda_\infty(t) - \lambda_\infty(t + u C_2 (t - T_{N_t--m+1}))| \quad (3.51)$$

Or d'après le résultat du lemme 3.4.1 on a :

$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists M_2 > 0, \forall t \geq M_2, \quad t - T_{N_t--m+1} \leq \epsilon_1 t \quad (p.s.) \quad (3.52)$$

Donc,

$$|\lambda_t - \lambda_\infty(t)| \leq C_1 \max_{u \in \{-1,1\}} |\lambda_\infty(t) - \lambda_\infty((1 + u C_2 \epsilon_1)t)| \quad (p.s.) \quad (3.53)$$

Or comme l'intensité initiale est une fonction à variation régulière on a également :

$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists M_3 > 0, \forall t \geq M_3, \quad \left| \frac{\lambda((1 + u C_2 \epsilon_1)t)}{\lambda(t)} - (1 + u C_2 \epsilon_1)^\beta \right| \leq \epsilon_2 \quad (3.54)$$

Ce qui, pour des modèles  $ARA_m$  sous l'hypothèse A0, ou pour des modèles  $ARI_m$  sous aucune hypothèse supplémentaire, est équivalent à :

$$\left| \frac{\lambda_\infty((1 + u C_2 \epsilon_1)t)}{\lambda_\infty(t)} - (1 + u C_2 \epsilon_1)^\beta \right| \leq \epsilon_2 \quad (3.55)$$

En utilisant ce résultat dans l'équation (3.53) on obtient que :

$$\begin{aligned}
 |\lambda_t - \lambda_\infty(t)| &\leq C_1 \max_{u \in \{-1,1\}} |\lambda_\infty(t) - (1 + u C_2 \epsilon_1)^\beta \lambda_\infty(t)| \\
 &\quad + C_1 \max_{u \in \{-1,1\}} |\lambda_\infty((1 + u C_2 \epsilon_1)t) - (1 + u C_2 \epsilon_1)^\beta \lambda_\infty(t)| \quad (p.s.) \\
 &\leq C_1 \left( \max_{u \in \{-1,1\}} |1 - (1 + u C_2 \epsilon_1)^\beta| + \epsilon_2 \right) \lambda_\infty(t) \quad (p.s.) \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

Donc pour tout  $\epsilon > 0$ , en prenant  $\epsilon_1$  tel que  $\max_{u \in \{-1,1\}} |1 - (1 + u C_2 \epsilon_1)^\beta| \leq \epsilon/(2C_1)$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon/(2C_1)$  et  $M = \max(M_1, M_2, M_3)$  on a pour tout  $t \geq M$  :

$$|\lambda_t - \lambda_\infty(t)| \leq \epsilon \lambda_\infty(t) \quad (p.s.) \quad (3.57) \quad \blacksquare$$

### 3.4.3 Développement asymptotique au second ordre de l'intensité de défaillance cumulée

On a donc démontré que les intensités de défaillance et asymptotique avaient le même comportement asymptotique comme on avait pu le remarquer sur les figures 3.2, 3.3 et 3.4. On peut aller plus loin et exprimer la différence asymptotique entre les intensités de défaillance cumulée et asymptotique cumulée. Soit,  $u(t) = \lambda(t)$ ,  $h(t) = 1$  et  $\Lambda_\infty(t) = \int_0^t \lambda_\infty(s) ds$ . Alors, en prenant  $T_j = 0$  pour  $j \leq 0$ , l'intensité de défaillance cumulée des modèles  $\text{ARI}_m$  s'écrit :

$$\Lambda_t = \Lambda_\infty(t) + \rho \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j \int_0^t (u(s) - u(T_{N_s--j})) h(s) ds \quad (3.58)$$

Une forme équivalente peut être trouvée pour les modèles  $\text{ARA}_m$ . A l'aide d'un développement de Taylor de l'équation (3.35), on montre que l'intensité de défaillance d'un modèle  $\text{ARA}_m$  vérifie :

$$\lambda_t = \lambda_\infty(t) + \rho \left( \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j (t - T_{N_t--j}) \right) \lambda'((1-\rho)^m t) + r_t \quad (3.59)$$

où  $r_t$  est un reste dont l'intégrale sur  $[0, t]$ ,  $R_t$ , peut être contrôlée sous des hypothèses que nous développerons ultérieurement dans la propriété 3.4.4. En intégrant l'équation précédente on obtient donc que l'intensité de défaillance cumulée d'un modèle  $\text{ARA}_m$  de mémoire finie s'écrit :

$$\Lambda_t = \Lambda_\infty(t) + \rho \left( \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j \int_0^t (u(s) - u(T_{N_s--j})) h(s) ds \right) + R_t \quad (3.60)$$

où  $u(t) = t$  et  $h(t) = \lambda'((1-\rho)^m t)$ . La propriété 3.4.2 ci-dessous donne l'équivalence asymptotique des grosses sommes des équations (3.58) et (3.60) avec un logarithme. Ce résultat n'est pas uniquement vrai pour des modèles  $\text{ARI}_m$  et  $\text{ARA}_m$ , mais pour tous les modèles vérifiant les hypothèses suivantes :

- **A'1**: Il existe une fonction croissante, positive, et non identiquement nulle,  $\lambda_{min}$ , vérifiant pour tout  $t \geq 0$  :  $\lambda_{min}(t) \leq \lambda_t$ .
- **A'2**:  $u$  est une fonction croissante, positive, non identiquement nulle et telle que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $U_t^j = (u(t) - u(T_{N_t--j}))/u(t)$  converge presque sûrement vers zéro.

- **A'3**:  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = +\infty$
- **A'4**: Il existe une fonction croissante, positive, et non identiquement nulle,  $\lambda_\infty$ , vérifiant :  $\lambda_t \stackrel{p.s.}{=} \lambda_\infty(t) + o(\lambda_\infty(t))$ .
- **A'5**:  $h$  est une fonction positive, telle que  $u(t) h(t)/\lambda_\infty(t)$  converge vers une constante  $c$  positive.

**PROPRIETE 3.4.2 :**

Soient  $N$  un processus de comptage d'intensité de défaillance  $\lambda_t$ , et  $u$  et  $h$  deux fonctions vérifiant les hypothèses A'1 à A'5. On pose :  $Z_s^j = (u(s) - u(T_{N_s^-} - j))h(s)$ . Alors le processus aléatoire prévisible  $\{Z_s^j\}_{s \geq 0}$  vérifie :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \int_0^t Z_s^j ds = c(j+1)\ln(u(t)) + o(\ln(u(t))) \quad (p.s.) \quad (3.61)$$

□

**Démonstration :**

Il existe forcément un réel  $t_0$  positif, non nul, fini presque sûrement et tel que  $\lambda_{min}$ ,  $\lambda_\infty$  et  $u$  soient non nulles pour  $t \geq t_0$  et  $N_{t_0} > j$ . En utilisant l'écriture martingale du processus de comptage  $N$ , l'intensité de défaillance vérifie pour tout  $s \geq t_0$ :  $ds = dN_s/\lambda_s - dM_s/\lambda_s$ . D'où,

$$\int_0^t Z_s^j ds = \int_0^{t_0} Z_s^j ds + \int_{t_0}^t \frac{Z_s^j}{\lambda_s} dN_s - \int_{t_0}^t \frac{Z_s^j}{\lambda_s} dM_s \quad (3.62)$$

Puisque  $|Z_s^j| \leq u(s) h(s)$ , le premier terme de l'équation précédente vérifie :  $\int_0^{t_0} Z_s^j ds = O(1)$ . En utilisant les résultats des lemmes 3.4.2 et 3.4.3 ci-dessous dans cette même équation, et le fait que  $o(\ln(u(t))) + O(1) = o(\ln(u(t)))$ , on obtient :

$$\int_0^t Z_s^j ds + o\left(\int_0^t Z_s^j ds\right) = c(j+1)\ln(u(t)) + o(\ln(u(t))) \quad (p.s.) \quad (3.63)$$

■

**Lemme 3.4.2 :** Soit  $N$  un processus de comptage d'intensité de défaillance  $\lambda_t$ . Alors avec les notations de la propriété 3.4.2, et sous les hypothèses A'1 à A'5, le processus des défaillances vérifie :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \int_{t_0}^t \frac{Z_s^j}{\lambda_s} dN_s = c(j+1)\ln(u(t)) + o(\ln(u(t))) \quad (p.s.) \quad (3.64)$$

□

**Démonstration :**

Grâce aux hypothèses A'4 et A'5, le processus des défaillances vérifie :

$$\frac{Z_s^j}{\lambda_s} = (1 + o(1)) \frac{Z_s^j}{\lambda_\infty(s)} = (1 + o(1))(c + o(1))U_s^j = (c + o(1))U_s^j \quad (p.s.) \quad (3.65)$$

De plus,

$$\ln\left(\frac{u(T_{N_s^-} - j)}{u(s)}\right) = \ln(1 - U_s^j) \stackrel{p.s.}{=} U_s^j(-1 + o(1)) \quad (3.66)$$

Donc,

$$\frac{Z_s^j}{\lambda_s} = c \ln\left(\frac{u(s)}{u(T_{N_s^-} - j)}\right) + o\left(\frac{Z_s^j}{\lambda_s}\right) \quad (p.s.) \quad (3.67)$$

Et ainsi,

$$\int_{t_0}^t \frac{Z_s^j}{\lambda_s} dN_s = c \int_{t_0}^t \ln \left( \frac{u(s)}{u(T_{N_s^-} - j)} \right) dN_s + o \left( \int_{t_0}^t \frac{Z_s^j}{\lambda_s} dN_s \right) + O(1) \quad (p.s.) \quad (3.68)$$

Finalement, comme  $T_n$  est fini presque sûrement pour tout  $n \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \ln \left( \frac{u(s)}{u(T_{N_s^-} - j)} \right) dN_s &= \sum_{i=0}^j \ln \left( \frac{u(T_{N_{t^-} - i})}{u(T_{N_{t_0^-} - i})} \right) \\ &\stackrel{p.s.}{=} (j+1) \ln(u(t)) + \sum_{i=0}^j \ln(1 - U_t^i) + O(1) \stackrel{p.s.}{=} (j+1) \ln(u(t)) + O(1) \end{aligned} \quad (3.69) \quad \blacksquare$$

**Lemme 3.4.3 :** Soit  $N$  un processus de comptage d'intensité de défaillance  $\lambda_t$ . Alors avec les notations de la propriété 3.4.2, et sous les hypothèses A'1, A'2, A'4 et A'5, le processus des défaillances vérifie :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \int_{t_0}^t \frac{Z_s^j}{\lambda_s} dM_s = o \left( \int_{t_0}^t Z_s^j ds \right) + O(1) \quad (p.s.) \quad (3.70)$$

où  $M$  est la martingale associée à  $N$ . □

**Démonstration :**

Tout d'abord, on a pour tout  $t_0 \leq s \leq t$  :

$$\frac{(Z_s^j)^2}{\lambda_s} \leq \frac{(u(t) \max_{t_0 \leq s \leq t} h(s))^2}{\lambda_{\min}(t_0)} < +\infty \quad (3.71)$$

Donc, on peut appliquer le théorème 3.3.1 et  $\int_{t_0}^t Z_s^j / \lambda_s dM_s$  est une martingale locale de carré intégrable dont le processus croissant est  $\int_{t_0}^t (Z_s^j)^2 / \lambda_s ds$ . Mais,

$$\frac{(Z_s^j)^2}{\lambda_s} = (c + o(1)) U_s^j Z_s^j = o(Z_s^j) \quad (p.s.) \quad (3.72)$$

Ainsi de deux choses l'une. Soit le processus croissant défini précédemment diverge et le théorème 3.3.2 implique que :

$$\int_{t_0}^t \frac{Z_s^j}{\lambda_s} dM_s = o \left( \left\langle \int_{t_0}^t \frac{Z_s^j}{\lambda_s} dM_s \right\rangle_t^{0.5+\epsilon} \right) = o \left( \int_{t_0}^t o(Z_s^j) ds \right) = o \left( \int_{t_0}^t Z_s^j ds \right) + O(1) \quad (p.s.) \quad (3.73)$$

car pour toute fonction  $f$ , positive, on a :

$$\int_0^t o(f(s)) ds = o \left( \int_0^t f(s) ds \right) + O(1) \quad (3.74)$$

Soit il ne diverge pas et le même théorème 3.3.2 implique également que :

$$\int_{t_0}^t \frac{Z_s^j}{\lambda_s} dM_s = O(1) \quad (p.s.) \quad (3.75) \quad \blacksquare$$

### 3.4.4 Modèle $ARI_m$

Pour les modèles  $ARI_m$ , on a posé  $\lambda_\infty(t) = (1 - \rho)^m \lambda(t)$ ,  $u(t) = \lambda(t)$  et  $h(t) = 1$ . La propriété précédente peut directement être appliquée aux modèles  $ARI_m$ . La seule hypothèse supplémentaire par rapport à la propriété 3.4.1 est que l'intensité initiale est divergente :

- **A3:**  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$ .

On a  $c = 1/(1 - \rho)^m$  et donc la propriété 3.4.2 implique que :

$$\int_0^t (\lambda(s) - \lambda(T_{N_s^-} - j)) ds = \frac{j+1}{(1-\rho)^m} \ln(\lambda(t)) + o(\ln(\lambda(t))) \quad (\text{p.s.}) \quad (3.76)$$

Ainsi, grâce à la réécriture (3.58) de l'intensité de défaillance cumulée d'un modèle  $ARI_m$  et le fait que :

$$\frac{\rho}{(1-\rho)^m} \left( \sum_{j=0}^{m-1} (j+1)(1-\rho)^j \right) = \frac{1 - (1+m\rho)(1-\rho)^m}{\rho(1-\rho)^m} \quad (3.77)$$

la propriété suivante est directement vérifiée.

**PROPRIETE 3.4.3 :**

Pour un modèle  $ARI_m$  de mémoire finie et sous les hypothèses A1 à A3, l'intensité de défaillance cumulée vérifie :

$$\Lambda_t = \Lambda_\infty(t) + \frac{1 - (1+m\rho)(1-\rho)^m}{\rho(1-\rho)^m} \ln(\lambda(t)) + o(\ln(\lambda(t))) \quad (\text{p.s.}) \quad (3.78) \quad \square$$

### 3.4.5 Modèle $ARA_m$

En appliquant la propriété 3.4.2 aux modèles  $ARA_m$  on obtient le développement asymptotique au second ordre de l'intensité de défaillance cumulée de ces modèles.

**PROPRIETE 3.4.4 :**

Pour un modèle  $ARA_m$  de mémoire finie et sous les hypothèses A0 et A1 l'intensité de défaillance cumulée vérifie :

$$\Lambda_t = \Lambda_\infty(t) + \frac{(\beta-1)}{(1-\rho)^m} \frac{1 - (1+m\rho)(1-\rho)^m}{\rho} \ln(t) + o(\ln(t)) \quad (\text{p.s.}) \quad (3.79) \quad \square$$

**Démonstration :**

Notons,  $I_t = [(1 \wedge (1 - \rho)^m)t, (1 \vee (1 - \rho)^m)t]$ . Tout d'abord on remarque que tout nombre compris entre  $(1 - \rho)^m t$  et  $(1 - \rho)^m t + \rho \sum_{j=0}^{m-1} (1 - \rho)^j (t - T_{N_t^-} - j)$  est dans  $I_t$ . Donc en utilisant un développement de Taylor-Lagrange au second ordre de l'équation (3.35) en  $(1 - \rho)^m t$ , on obtient presque sûrement pour tout  $t \geq 0$  :

$$\begin{aligned} & \left| \lambda_t - \lambda((1 - \rho)^m t) - \left[ \rho \sum_{j=0}^{m-1} (1 - \rho)^j (t - T_{N_t^-} - j) \right] \lambda'((1 - \rho)^m t) \right| \\ & \leq \left[ \rho \sum_{j=0}^{m-1} (1 - \rho)^j (t - T_{N_t^-} - j) \right]^2 \max_{s \in I_t} |\lambda''(s)| \end{aligned} \quad (3.80)$$

On note  $\lambda_\infty(t) = \lambda((1 - \rho)^m t)$ ,  $u(t) = t$  et  $h(t) = \lambda'((1 - \rho)^m t)$ . Comme l'intensité initiale est supposée être une fonction puissance et  $\rho$  est supposé être non nul, on a :

$$\max_{s \in I_t} |\lambda''(s)| = O(\lambda''(t)) = O(\lambda'(s)/t) = O(h(t)/u(t)) \quad (3.81)$$

De plus, d'après le lemme 3.4.1,  $U_t^j = (t - T_{N_t - j})/t$  converge vers zéro presque sûrement. Ainsi, l'équation (3.80) se réécrit :

$$\begin{aligned} \lambda_t - \lambda_\infty(t) - \rho \left[ \sum_{j=0}^{m-1} (1 - \rho)^j (u(t) - u(T_{N_t - m + 1}))h(t) \right] \\ = O(U_t^j (u(t) - u(T_{N_t - j}))h(t)) \stackrel{p.s.}{=} o((u(t) - u(T_{N_t - m + 1}))h(t)) \end{aligned} \quad (3.82)$$

En intégrant cette équation et en utilisant la notation précédente  $Z_t^j = (u(t) - u(T_{N_t - j}))h(t)$ , on a :

$$\Lambda_t = \Lambda_\infty(t) + \rho \left[ \sum_{j=0}^{m-1} (1 - \rho)^j \int_0^t Z_s^j ds \right] + o\left(\int_0^t Z_s^j ds\right) + O(1) \quad (p.s.) \quad (3.83)$$

Etant donné que  $\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}$ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)h(t)}{\lambda_\infty(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t\lambda'((1 - \rho)^m t)}{\lambda((1 - \rho)^m t)} = \frac{(\beta - 1)}{(1 - \rho)^m} \quad (3.84)$$

Ainsi, en appliquant la propriété 3.4.2 on obtient :

$$\int_0^t Z_s^j ds = \frac{(j + 1)(\beta - 1)}{(1 - \rho)^m} \ln(t) + o(\ln(t)) \quad (p.s.) \quad (3.85)$$

En injectant ce résultat dans l'équation (3.83) et en utilisant l'égalité (3.77) on prouve la propriété. ■

### 3.4.6 Commentaires sur les résultats asymptotiques

Pour les modèles  $ARI_m$ , avec une fonction puissance pour l'intensité initiale, le résultat de la propriété 3.4.3 est le même que pour les modèles  $ARA_m$ , c'est-à-dire l'équation (3.79). Mais, selon le modèle, l'intensité cumulée asymptotique sera différente: pour un modèle  $ARI_m$   $\Lambda_\infty(t) = \alpha(1 - \rho)^m t^\beta$ , et pour un modèle  $ARA_m$   $\Lambda_\infty(t) = \alpha(1 - \rho)^{m(\beta-1)} t^\beta$ .

Les propriétés 3.4.3 et 3.4.4 nous renseignent sur le comportement asymptotique du processus des défaillances des modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$ .

#### COROLLAIRE 3.4.1. :

Soit  $N_t$  le processus de comptage d'un modèle  $ARI_m$  (resp.  $ARA_m$ ) de mémoire finie et vérifiant les hypothèses A1 à A3 (resp. A0 et A1). Alors,

$$\frac{N_t}{\Lambda_\infty(t)} \xrightarrow{p.s.} 1 \quad \text{et} \quad \frac{N_t - \Lambda_\infty(t)}{\sqrt{\Lambda_\infty(t)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.86) \quad \square$$

Ce corollaire est une application directe du corollaire 3.3.1. Il signifie que le comportement asymptotique du processus des défaillances d'un modèle  $ARI_m$  ou  $ARA_m$  de mémoire finie (avec une fonction puissance pour l'intensité initiale) est globalement le même que celui d'un processus de Poisson non homogène d'intensité  $\lambda_\infty$ .

Pour les modèles de mémoire infinie, on ne sait pas prouver cette similitude avec un NHPP d'intensité de défaillance divergente. Cela est dû au fait que, dans le cas d'une réparation efficace,

ces modèles ne possèdent pas une intensité d'usure minimale divergente qui pousse le système à s'user de plus en plus. A fortiori, il semble que, dans le cas de réparation efficace, les modèles  $ARA_\infty$  ressemblent beaucoup à des processus de renouvellement. Pour les modèles  $ARI_\infty$ , il semble qu'il y ait, au fil du temps, une certaine dérive de l'intensité de défaillance (quand l'intensité initiale est une fonction puissance, cette dérive pourrait être proportionnelle à un logarithme). Mais tout ceci n'est encore pour l'instant que des conjectures.

### 3.5 Modèles à vitesse d'usure comparable

Les modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$  sont construits sous des hypothèses similaires: la maintenance réduit de la même façon soit l'intensité soit l'âge virtuel. De plus dans les deux modèles l'efficacité de réparation est caractérisée par le même paramètre  $\rho$ . Pourtant ce paramètre n'a pas la même signification en terme d'efficacité de réparation dans les deux modèles.

**PROPRIETE 3.5.1 :**

*Pour des modèles de mémoire finie, si  $\lambda(t)$  est convexe (resp. concave), pour le même paramètre  $\rho \in [0, 1]$ , l'intensité d'usure asymptotique du modèle  $ARI_m$  est plus grande (resp. plus petite) que celle du modèle  $ARA_m$ .  $\square$*

La figure 3.5 illustre cette propriété dont la démonstration est très facile. La propriété n'en demeure pas moins importante. En effet, d'après le corollaire 3.4.1, des modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$  avec des intensités asymptotiques ayant des comportements asymptotiques différents sont similaires à des NHPP avec des intensités de défaillances différentes. Ainsi, des modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$  avec les mêmes paramètres ne sont pas comparables car ils ont des vitesses d'usure très différentes. Néanmoins on peut trouver dans le cas où l'intensité initiale est une fonction puissance, des valeurs des paramètres d'efficacité de réparation telles que les modèles soient comparables.

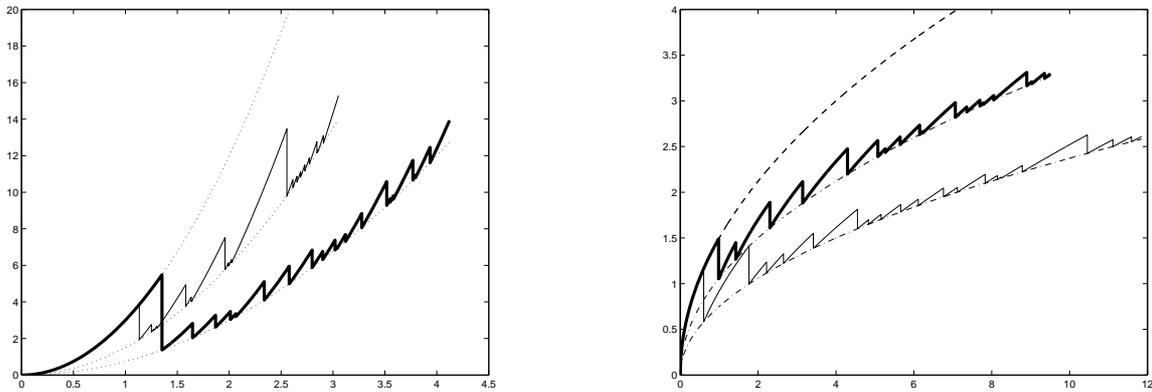


FIG. 3.5 – Trait fin:  $ARI_1$ , trait gras:  $ARA_1$ ,  $\rho = 0.5$  et à gauche  $\beta = 3$ , à droite  $\beta = 1.5$

**PROPRIETE 3.5.2 :**

*Pour des modèles de mémoire finie avec des intensités initiales de type puissance ( $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ ), il existe des valeurs des paramètres  $\rho_I$  et  $\rho_A$  telles que le modèle  $ARI_m$  de paramètres  $(\alpha, \beta, \rho_I)$  et le modèle  $ARA_m$  de paramètres  $(\alpha, \beta, \rho_A)$  aient les mêmes intensités asymptotiques :*

$$\rho_I = 1 - (1 - \rho_A)^{\beta-1} \quad (3.87)$$

$\square$

Pour prouver cette propriété il suffit de comparer les intensités asymptotiques des modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$ . En utilisant le développement au second ordre des intensités cumulées, on

peut également comparer les vitesses d'usures de modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$  de même intensité asymptotique.

**PROPRIETE 3.5.3 :**

Pour les modèles de la propriété 3.5.2, si les réparations sont efficaces ( $\rho_I \in ]0, 1]$  et  $\rho_A \in ]0, 1]$ ) et l'intensité initiale est convexe (resp. concave), alors l'intensité de défaillance cumulée du modèle  $ARI_m$  est asymptotiquement supérieure (resp. inférieure) à celle du modèle  $ARA_m$ .  $\square$

**Démonstration :**

Grâce aux propriétés 3.4.3 et 3.4.4, la différence entre les intensités cumulées de défaillance et asymptotique est la même pour des modèles  $ARI_m$  ou  $ARA_m$  :

$$\Lambda_t - \Lambda_\infty(t) = \frac{(\beta - 1)}{(1 - \rho)^m} \frac{1 - (1 + m\rho)(1 - \rho)^m}{\rho} \ln(t) + o(\ln(t)) \quad (p.s.) \quad (3.88)$$

Or,

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{(\beta - 1)}{(1 - \rho)^m} \frac{1 - (1 + m\rho)(1 - \rho)^m}{\rho} \right) = (\beta - 1) \frac{-1 + (m + 1)\rho + (1 - \rho)^{m+1}}{\rho^2(1 - \rho)^{m+1}} > 0 \quad (3.89)$$

Ainsi, la différence asymptotique entre les deux intensités cumulées augmente avec  $\rho$ . La propriété est donc prouvée car si l'intensité initiale est convexe (resp. concave) on a  $\rho_I > \rho_A$  (resp.  $\rho_I < \rho_A$ ).  $\blacksquare$

Ainsi, dans le cas de maintenances efficaces et pour des modèles de même intensité asymptotique, si l'intensité initiale est convexe (resp. concave) la vitesse d'usure des modèles  $ARI_m$  est supérieure (resp. inférieure) à celle des modèles  $ARA_m$  (voir figure 3.6). On aurait également pu expliquer cette propriété par le fait que dans les modèles ARI l'intensité de défaillance est verticalement parallèle à l'intensité initiale alors que dans les modèles ARA elle est horizontalement parallèle. Malgré tout, la différence entre les vitesses d'usure des modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$  de même intensité asymptotique reste faible comparativement à leur propre vitesse d'usure : cette différence est asymptotiquement équivalente à un logarithme, avec une fonction puissance strictement croissante pour l'intensité asymptotique. On peut donc a priori sans problème comparer des modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$  ayant la même intensité asymptotique.

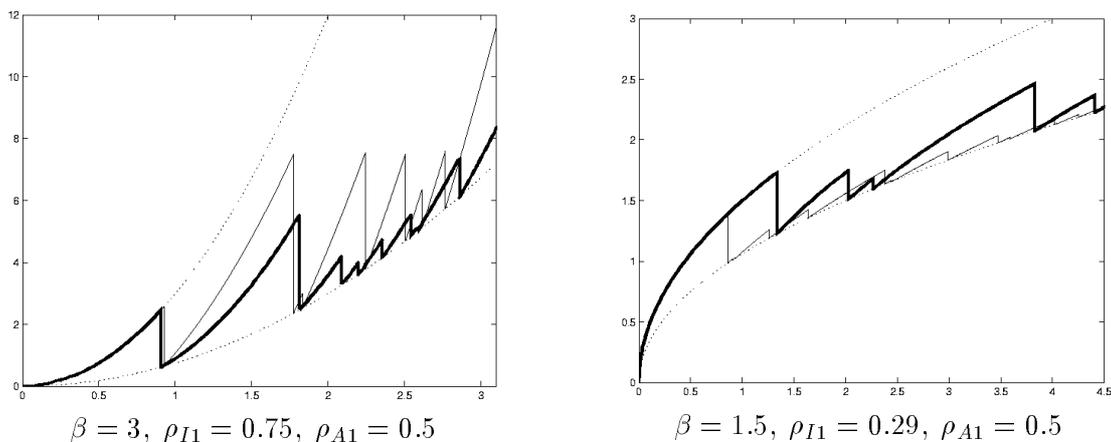


FIG. 3.6 – Trait fin:  $ARI_1$  trait gras:  $ARA_1$

On peut faire des comparaisons du même type pour des modèles ARI (ou ARA) de mémoires différentes mais finies. Tout d'abord il est trivial de montrer que, dans le cas de maintenances efficaces, plus la mémoire est importante et plus l'intensité asymptotique est petite, et donc la

vitesse d'usure est elle aussi petite. On peut également trouver des valeurs des paramètres telles que des modèles de mémoires différentes aient des vitesses d'usure comparables.

**PROPRIETE 3.5.4 :**

Pour des modèles de mémoire finie avec des intensités initiales de type puissance ( $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ ), il existe des valeurs des paramètres  $\rho_{m_1}$  et  $\rho_{m_2}$  telles que le modèle  $ARI_{m_1}$  (resp.  $ARA_{m_1}$ ) de paramètres  $(\alpha, \beta, \rho_{m_1})$  et le modèle  $ARI_{m_2}$  (resp.  $ARA_{m_2}$ ) de paramètres  $(\alpha, \beta, \rho_{m_2})$  aient les mêmes intensités asymptotiques :

$$\rho_{m_1} = 1 - (1 - \rho_{m_2})^{\frac{m_2}{m_1}} \quad (3.90)$$

□

Dans la propriété précédente, la différence entre la vitesse d'usure du modèle de mémoire  $m_1$  et celle du modèle de mémoire  $m_2$  est encore une fois asymptotiquement équivalente à un logarithme, donc les deux modèles sont comparables en terme de vitesse d'usure comme l'illustrent les figures 3.7 et 3.8.

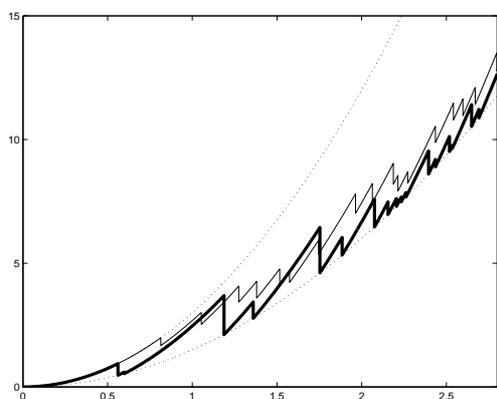


FIG. 3.7 – *Trait fin*:  $ARI_4$   
*trait gras*:  $ARI_1$   
avec  $\beta = 3$ ,  $\rho_{I1} = 0.5$ ,  $\rho_{I4} = 0.29$

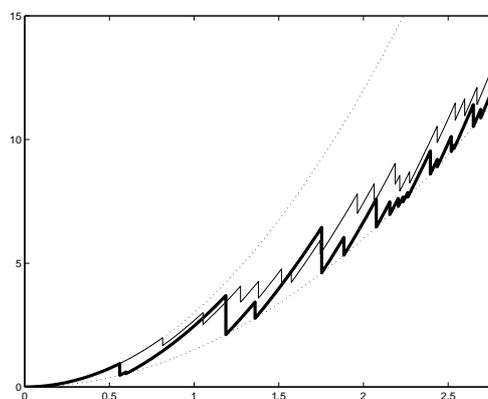


FIG. 3.8 – *Trait fin*:  $ARA_4$   
*trait gras*:  $ARA_1$   
avec  $\beta = 3$ ,  $\rho_{A1} = 0.5$ ,  $\rho_{A4} = 0.16$

En conclusion, pour une même intensité initiale, le paramètre d'efficacité de réparation  $\rho$  n'a pas la même signification, en terme d'échelle de grandeur, selon le modèle  $ARI_m$  ou  $ARA_m$  considéré. Il faut donc être prudent lors de la comparaison des différents modèles.

# *Estimation dans les modèles ARI et ARA*

Quelques auteurs ont étudié le problème d'estimation dans des modèles de maintenance imparfaite. En général peu d'entre eux se sont intéressés à l'estimation de l'efficacité de maintenance, souvent supposée connue. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, tous les travaux existants ne proposent que des résultats numériques. L'idée de ce chapitre est donc de développer des résultats théoriques dans le cas plus simple (et jamais encore étudié), où l'on estime l'efficacité de maintenance quand l'intensité initiale est connue. On s'intéressera ensuite à l'estimation de l'ensemble des paramètres dans les modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$  pour une intensité initiale de type fonction puissance. Les résultats seront, comme toujours dans ce cas complexe, uniquement numériques.

## 4.1 Estimation quand l'intensité initiale est connue

Le but de cette section est d'étudier quelques estimateurs de l'efficacité de maintenance dans le cas où l'intensité initiale est connue, c'est-à-dire que le comportement du système en l'absence de maintenance est connu. L'intensité de défaillance dépend alors d'un unique paramètre  $\rho \in \mathcal{J}$ , on la notera  $\lambda_t(\rho)$ . La vraie valeur de ce paramètre est alors notée  $\rho_0$ . Dans un premier temps on s'intéressera aux propriétés de l'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV), puis on introduira des estimateurs explicites (EE). Tous les résultats proposés sont basés sur les développements asymptotiques de l'intensité de défaillance cumulée des propriétés 3.4.3 et 3.4.4. Ils ne s'appliquent donc qu'à des modèles de mémoire finie.

### 4.1.1 Estimateurs de maximum de vraisemblance

#### 4.1.1.1 Critère de convergence pour les estimateurs de maximum de vraisemblance

La démonstration de la convergence presque sûre et de la normalité asymptotique des EMV de l'efficacité de maintenance est quasiment la même pour des modèles  $ARI_m$  ou  $ARA_m$ . C'est pourquoi nous proposons un théorème général incluant le cas des modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$ . A priori, nous ne connaissons pas d'autres modèles susceptibles de vérifier les hypothèses de ce théorème :

- **A"1** : On connaît un compact  $\mathcal{J}_0 = [\rho_1, \rho_2]$  de  $\mathbb{R}$ , inclus dans l'intérieur de  $\mathcal{J}$  et tel que  $\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$  (l'EMV est alors la valeur du paramètre  $\rho$  de  $\mathcal{J}_0$  qui maximise la log-vraisemblance).
- **A"2** : L'intensité de défaillance est dérivable par rapport à  $\rho$ , on note  $\lambda'_t(\rho)$  cette dérivée. Il existe deux fonctions,  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$ , croissantes et strictement positives (sauf en zéro), et une constante  $d$  telles que :

$$\forall \rho \in \mathcal{J}, \quad \forall t \geq 0, \quad \lambda_{min}(t) \leq \lambda_t(\rho) \leq \lambda_{max}(t) \quad | \lambda'_t(\rho) | \leq d \lambda_{min}(t) \quad (4.1)$$

- **A”3** : Il existe une constante  $m$ , une fonction,  $u$ , croissante, positive et non identiquement nulle et une fonction  $h$  positive telles que, pour tout  $\rho$  de  $\mathcal{J}_0$ , on peut trouver une fonction,  $\lambda_{\infty,\rho}$ , croissante, positive et non identiquement nulle vérifiant :

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} |\lambda_t(\rho) - \lambda_{\infty,\rho}(t)| = O((u(t) - u(T_{N_{t-}-m+1}))h(t)) \quad (4.2)$$

- **A”4** : Pour tout  $\rho \in \mathcal{J}_0$  il existe une constante  $C_\rho$  telle que, les constantes  $C_\rho$  soient toutes positives ou toutes négatives et :

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} |\lambda'_t(\rho) - C_\rho \lambda_{\infty,\rho}(t)| = O((u(t) - u(T_{N_{t-}-m+1}))h(t)) \quad (4.3)$$

$$\exists a > 0, \exists b > 0, \forall \rho \in \mathcal{J}_0, \quad a \leq |C_\rho| \leq b \quad (4.4)$$

- **A”5** :  $U_t^{m-1} = \frac{u(t) - u(T_{N_{t-}-m+1})}{u(t)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$
- **A”6** :  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty$
- **A”7** : Il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t) h(t)}{\inf_{\rho \in \mathcal{J}_0} \lambda_{\infty,\rho}(t)} = c \quad (4.5)$$

- **A”8** : Il existe une constante  $c_0 > 0$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t) h(t)}{\lambda_{\infty,\rho_0}(t)} = c_0 \quad (4.6)$$

- **A”9** :  $\ln(u(t)) = o(\inf_{\rho \in \mathcal{J}_0} \Lambda_{\infty,\rho}(t)^{0.5})$ , avec  $\Lambda_{\infty,\rho}(t) = \int_0^t \lambda_{\infty,\rho}(s) ds$
- **A”10** : Pour tout  $t \geq 0$  et  $\rho \in \mathcal{J}_0$ ,  $\Lambda_{\infty,\rho}(t)$  est strictement croissante en  $\rho$  si les constantes  $C_\rho$  sont positives, et strictement décroissante si les constantes  $C_\rho$  sont négatives.
- **A”11** :  $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \rho \in \mathcal{J}_0 \setminus \{\rho_0\}, \quad \Lambda_{\infty,\rho_0}(t)^{0.5+\epsilon_0} = O(\Lambda_{\infty,\rho_0}(t) - \Lambda_{\infty,\rho}(t))$

Comme nous le montrerons par la suite, ces hypothèses sont vérifiées par les modèles  $\text{ARI}_m$  et  $\text{ARA}_m$  sous des hypothèses pratiquement identiques à celles des propriétés 3.4.3 et 3.4.4. A”1 est une hypothèse classique quand on fait de l'estimation par maximum de vraisemblance. Elle suppose que la maximisation de la log-vraisemblance est faite sur un intervalle fermé borné contenant la vraie valeur du paramètre. En effet, le comportement de la log-vraisemblance pourrait être très irrégulier en dehors de cet intervalle. L'hypothèse A”2 est relativement forte mais nécessaire. En particulier, elle assure, pour tout  $t \geq 0$ , l'existence de la dérivée partielle par rapport à  $\rho$  de la log-vraisemblance dans l'intérieur de  $\mathcal{J}$ . Etant donné que la log-vraisemblance est donnée par l'équation (1.11), sa dérivée en  $\rho$  vaudra :

$$\mathcal{L}'_t(\rho) = \int_0^t \frac{\lambda'_s(\rho)}{\lambda_s(\rho)} dN_s - \int_0^t \lambda'_s(\rho) ds \quad (4.7)$$

Enfin, grâce à la propriété 3.4.2, les hypothèses A”2 à A”7 impliquent que l'intensité de défaillance cumulée et sa dérivée par rapport à  $\rho$  ont le même comportement asymptotique respectivement que  $\Lambda_{\infty,\rho}(t)$  et  $C_\rho \Lambda_{\infty,\rho}(t)$ . Les autres hypothèses n'ont d'autre justification que le fait d'apparaître naturellement et de façon incontournable dans la démonstration.

#### PROPRIETE 4.1.1 :

Soit  $\mathcal{J}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide. Considérons le processus de comptage d'intensité de défaillance  $\lambda_t(\rho_0)$  définie pour tout  $\rho_0 \in \mathcal{J}$  et telle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\lambda_t(\rho_0)$

est continue, différentiable (par rapport à  $\rho_0$ ) avec une dérivée continue en  $\rho_0$  pour tout  $\rho_0 \in \mathcal{J}$ . Alors sous les hypothèses A"1 à A"11 et pour une unique observation du processus des défaillances sur  $[0, t]$ , l'EMV,  $\hat{\rho}_t^{ML}$ , de  $\rho_0$  vérifie :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \frac{\Lambda_{\infty, \rho_0}(t) - \Lambda_{\infty, \hat{\rho}_t^{ML}}(t)}{\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)^{0.5+\epsilon}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\Lambda_{\infty, \rho_0}(t) - \Lambda_{\infty, \hat{\rho}_t^{ML}}(t)}{\sqrt{\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.9) \quad \square$$

Pour démontrer cette propriété on utilise deux lemmes. Le premier donne l'équivalence asymptotique de la dérivée de la log-vraisemblance avec une combinaison linéaire du processus de comptage et de l'intensité asymptotique cumulée. Cette réécriture équivalente est beaucoup plus simple à traiter que l'équation (4.7). Le second lemme prouve que, sous certaines conditions dont il reste à démontrer qu'elles sont bel et bien vérifiées, le maximum de la vraisemblance dans  $\mathcal{J}_0$  est atteint pour une valeur de  $\rho$  qui annule la dérivée de la log-vraisemblance (c'est-à-dire qui n'est pas sur les bords de  $\mathcal{J}_0$ ).

**Lemme 4.1.1 :** Soit  $N$  un processus de comptage d'intensité de défaillance  $\lambda_t(\rho)$  définie pour tout  $\rho \in \mathcal{J}_0$ . Alors sous les hypothèses A"2 à A"8, on a :

$$\sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} |\mathcal{L}'_t(\rho) - C_\rho(N_t - \Lambda_{\infty, \rho}(t))| = O(\ln(u(t))) \quad (p.s.) \quad (4.10) \quad \square$$

### Démonstration :

Etant donné que la dérivée de la log-vraisemblance est donnée par l'équation (4.7), on en déduit que :

$$\begin{aligned} \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} |\mathcal{L}'_t(\rho) - C_\rho(N_t - \Lambda_{\infty, \rho}(t))| &= \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} \left| \int_0^t \left[ \frac{\lambda'_s(\rho)}{\lambda_s(\rho)} - C_\rho \right] dN_s - \int_0^t [\lambda'_s(\rho) - C_\rho \lambda_{\infty, \rho}(s)] ds \right| \\ &\leq \int_0^t \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} \left| \frac{\lambda'_s(\rho)}{\lambda_s(\rho)} - C_\rho \right| dN_s + \int_0^t \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} |\lambda'_s(\rho) - C_\rho \lambda_{\infty, \rho}(s)| ds \\ &= \int_0^t Y_s dN_s + \int_0^t O(Z_s^{m-1}) ds = \int_0^t Y_s dN_s + O\left(\int_0^t Z_s^{m-1} ds\right) + O(1) \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec  $Y_s = \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} \left| \frac{\lambda'_s(\rho)}{\lambda_s(\rho)} - C_\rho \right|$  et  $Z_s^{m-1} = (u(s) - u(T_{N_s - m+1}))h(s)$ . Grâce aux hypothèses A"2, A"3, A"5, A"6 et A"8, on peut appliquer la propriété 3.4.2 et :  $\int_0^t Z_s^{m-1} ds = O(\ln(u(t)))$ . De plus,

$$\begin{aligned} Y_s &\leq \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} \left| \frac{\lambda'_s(\rho)}{\lambda_{\infty, \rho}(s)} - C_\rho \right| + \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} \left| \lambda'_s(\rho) \left( \frac{1}{\lambda_s(\rho)} - \frac{1}{\lambda_{\infty, \rho}(s)} \right) \right| \\ &\leq \frac{\sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} |\lambda'_s(\rho) - C_\rho \lambda_{\infty, \rho}(s)| + \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} \left| \frac{\lambda'_s(\rho)}{\lambda_s(\rho)} \right| \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} |\lambda_s(\rho) - \lambda_{\infty, \rho}(s)|}{\inf_{\rho \in \mathcal{J}_0} \lambda_{\infty, \rho}(s)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Or d'après A"7,  $u(s)h(s)/\inf_{\rho \in \mathcal{J}_0} \lambda_{\infty, \rho}(s) = O(1)$  et d'après A"2,  $\sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} |\lambda'_s(\rho)/\lambda_s(\rho)| \leq d$ , donc en substituant ces deux résultats dans l'équation (4.12), et en utilisant les hypothèses A"3 et A"4, on obtient :

$$Y_s \stackrel{p.s.}{=} O\left(\frac{u(s) - u(T_{N_s - m+1})}{u(s)}\right) \stackrel{p.s.}{=} O(U_s^{m-1}) \quad (4.13)$$

Donc, en utilisant la version différentielle de l'écriture martingale de  $N$  on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t Y_s dN_s &= O\left(\int_0^t U_s^{m-1} dN_s\right) + O(1) = O\left(\int_0^t U_s^{m-1} d\Lambda_s(\rho_0) + \int_0^t U_s^{m-1} dM_s\right) \\ &= O\left(\int_0^t U_s^{m-1} \lambda_s(\rho_0) ds\right) + O\left(\int_0^t U_s^{m-1} dM_s\right) + O(1) \quad (p.s.) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Tout d'abord, d'après A"3:  $\lambda_s(\rho_0) - \lambda_{\infty, \rho_0}(s) = O((u(s) - u(T_{N_s} - m + 1))h(s)) = O(Z_s^{m-1})$ , donc, comme  $U_s^{m-1} \stackrel{p.s.}{=} o(1)$ , on obtient que :

$$\int_0^t U_s^{m-1} \lambda_s(\rho_0) ds - \int_0^t U_s^{m-1} \lambda_{\infty, \rho_0}(s) ds = \int_0^t o(Z_s^{m-1}) ds = o\left(\int_0^t Z_s^{m-1} ds\right) + O(1) \quad (p.s.) \quad (4.15)$$

Or d'après A"8 on a également :

$$\int_0^t U_s^{m-1} \lambda_{\infty, \rho_0}(s) ds = \int_0^t Z_s^{m-1} \frac{\lambda_{\infty, \rho_0}(s)}{u(s)h(s)} ds = \int_0^t O(Z_s^{m-1}) ds = O\left(\int_0^t Z_s^{m-1} ds\right) + O(1) \quad (4.16)$$

D'où

$$\int_0^t U_s^{m-1} \lambda_s(\rho_0) ds = O\left(\int_0^t Z_s^{m-1} ds\right) + O(1) \quad (p.s.) \quad (4.17)$$

Et finalement comme  $\int_0^t Z_s^j ds \stackrel{p.s.}{=} O(\ln(u(t)))$ . On en déduit que :

$$\int_0^t U_s^{m-1} \lambda_s(\rho_0) ds = O(\ln(u(t))) \quad (p.s.) \quad (4.18)$$

Ensuite on applique le théorème 3.3.1. Comme  $|U_s^{m-1}| \leq 1$  on obtient que  $\int_0^t U_s^{m-1} dM_s$  est une martingale locale de processus croissant :

$$\begin{aligned} &\int_0^t (U_s^{m-1})^2 \lambda_s(\rho_0) ds \stackrel{p.s.}{=} \int_0^t (U_s^{m-1})^2 \lambda_{\infty, \rho_0}(s) ds + \int_0^t (U_s^{m-1})^2 O(Z_s^{m-1}) ds \\ &\stackrel{p.s.}{=} \int_0^t o(U_s^{m-1} \lambda_{\infty, \rho_0}(s)) ds + \int_0^t o(Z_s^{m-1}) ds \\ &\stackrel{p.s.}{=} o\left(\int_0^t U_s^{m-1} \lambda_{\infty, \rho_0}(s) ds\right) + o\left(\int_0^t Z_s^{m-1} ds\right) + O(1) \stackrel{p.s.}{=} o(\ln(u(t))) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si ce processus croissant diverge, le théorème 3.3.2 implique :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \int_0^t U_s^{m-1} dM_s \stackrel{p.s.}{=} o((\ln(u(t)))^{0.5+\epsilon}) = o(\ln(u(t))) \quad (4.20)$$

Si le processus croissant ne diverge pas le même théorème 3.3.2 implique également l'équation (4.20), puisque  $\ln(u(t))$  est divergent par hypothèse. Le lemme est donc démontré. ■

**Lemme 4.1.2 :** Soit  $N$  un processus de comptage d'intensité de défaillance  $\lambda_t(\rho)$  pour  $\rho \in \mathcal{J}_0$ . On suppose que  $\mathcal{L}'_t(\rho)$  vérifie :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \sup_{\rho \in \mathcal{J}_0} |\mathcal{L}'_t(\rho) - C_\rho(\Lambda_{\infty, \rho_0}(t) - \Lambda_{\infty, \rho}(t))| \stackrel{p.s.}{=} o((\Lambda_{\infty, \rho_0}(t))^{0.5+\epsilon}) \quad (4.21)$$

Alors sous les hypothèses A"1, A"10 et A"11, il existe  $T > 0$  tel que pour tout  $t \geq T$  :

$$\mathcal{L}'_t(\rho_1) > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}'_t(\rho_2) < 0 \quad (p.s.) \quad (4.22)$$

□

**Démonstration :**

L'hypothèse A"11 implique que :

$$\exists \alpha > 0, \exists T' > 0, \forall t \geq T', \quad \Lambda_{\infty, \rho_0}(t)^{0.5+\epsilon_0} \leq \alpha | \Lambda_{\infty, \rho_0}(t) - \Lambda_{\infty, \rho_1}(t) | \quad (4.23)$$

L'équation (4.21) implique que presque sûrement :

$$\forall \eta > 0, \exists T'' > 0, \forall t \geq T'', \quad | \mathcal{L}'_t(\rho_1) - C_{\rho_1}(\Lambda_{\infty, \rho_0}(t) - \Lambda_{\infty, \rho_1}(t)) | \leq \eta \Lambda_{\infty, \rho_0}(t)^{0.5+\epsilon_0} \quad (4.24)$$

Mais en raison de l'hypothèse A"10,  $C_{\rho_1}(\Lambda_{\infty, \rho_0}(t) - \Lambda_{\infty, \rho_1}(t))$  est positif. Donc, si on suppose que  $\mathcal{L}'_t(\rho_1)$  est négatif, on aura également :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_t(\rho_1) &\geq | C_{\rho_1} | | \Lambda_{\infty, \rho_0}(t) - \Lambda_{\infty, \rho_1}(t) | - \eta \Lambda_{\infty, \rho_0}(t)^{0.5+\epsilon_0} \\ &\geq (a - \eta\alpha) | \Lambda_{\infty, \rho_0}(t) - \Lambda_{\infty, \rho_1}(t) | \quad (p.s.) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Si  $\eta < a/\alpha$ , on obtient que  $\mathcal{L}'_t(\rho_1)$  est nécessairement strictement positif pour tout  $t \geq \max(T', T'')$ , ce qui contredit l'hypothèse effectuée. Donc la première partie de l'équation (4.22) est démontrée en prenant  $T = \max(T', T'')$ . La deuxième partie se démontre de façon similaire. ■

**Démonstration (Propriété 4.1.1) :**

Grâce aux hypothèses A"2, A"3, A"5, A"6 et A"8, la propriété 3.4.2 peut être appliquée en  $\rho_0$  et :

$$\int_0^t Z_j^{m-1} ds = O(\ln(u(t))) \quad (p.s.) \quad (4.26)$$

Or d'après l'hypothèse A"3, on a également  $\lambda_t(\rho_0) - \lambda_{\infty, \rho_0}(t) = O(Z_t^{m-1})$ , et donc :

$$\Lambda_t(\rho_0) - \Lambda_{\infty, \rho_0}(t) = \int_0^t O(Z_s^{m-1}) ds = O\left(\int_0^t Z_s^{m-1} ds\right) + O(1) \stackrel{p.s.}{=} O(\ln(u(t))) \quad (4.27)$$

De plus, comme  $\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)$  diverge, le corollaire 3.3.1 implique pour tout  $\epsilon > 0$  que  $M_t \stackrel{p.s.}{=} o(\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)^{0.5+\epsilon})$ . En utilisant ces deux résultats dans l'écriture martingale de  $N$ , on obtient que  $N_t \stackrel{p.s.}{=} \Lambda_{\infty, \rho_0}(t) + o(\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)^{0.5+\epsilon}) + O(\ln(u(t)))$ . Or, d'après l'hypothèse A"9,  $O(\ln(u(t))) \leq o(\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)^{0.5})$ , donc on a finalement :

$$N_t = \Lambda_{\infty, \rho_0}(t) + o(\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)^{0.5+\epsilon}) \quad (p.s.) \quad (4.28)$$

En substituant ce résultat dans celui du lemme 4.1.1, on prouve toujours grâce à l'hypothèse A"9 que l'équation (4.21) est vérifiée. On peut donc appliquer le lemme 4.1.2. Or, en utilisant la propriété de continuité de l'intégrale de Lebesgue (qui est vérifiée grâce à l'hypothèse A"2), on prouve que pour tout  $t \geq 0$ , la log-vraisemblance et sa dérivée par rapport à  $\rho$  sont continues en  $\rho$  pour  $\rho \in \mathcal{J}_0$ . Ainsi, pour  $t \geq T$ , la dérivée de la log-vraisemblance s'annule au moins une fois entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , et l'estimateur de maximum de vraisemblance vérifie donc :  $\mathcal{L}'_t(\hat{\rho}_t^{ML}) \stackrel{a.s.}{=} 0$ . En utilisant ce résultat dans l'équation (4.21) on obtient :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \Lambda_{\infty, \rho_0}(t) - \Lambda_{\infty, \hat{\rho}_t^{ML}}(t) \stackrel{p.s.}{=} o(\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)^{0.5+\epsilon}) \quad (4.29)$$

Le premier résultat de la propriété est donc démontré.

De plus, le lemme 4.1.1 implique que pour tout  $\rho \in \mathcal{J}_0$  on a :

$$\frac{\mathcal{L}'_t(\rho)}{C_\rho} = N_t - \Lambda_{\infty, \rho}(t) + O(\ln(u(t))) \quad (p.s.) \quad (4.30)$$

Donc,

$$\frac{\mathcal{L}'_t(\rho_0)}{C_{\rho_0}} - \frac{\mathcal{L}'_t(\hat{\rho}_t^{ML})}{C_{\hat{\rho}_t^{ML}}} = \Lambda_{\infty, \hat{\rho}_t^{ML}}(t) - \Lambda_{\infty, \rho_0}(t) + O(\ln(u(t))) \quad (p.s.) \quad (4.31)$$

Comme l'estimateur de maximum de vraisemblance annule la dérivée de la log-vraisemblance, le même lemme 4.1.1 implique aussi que :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}'_t(\rho_0)}{C_{\rho_0}} - \frac{\mathcal{L}'_t(\hat{\rho}_t^{ML})}{C_{\hat{\rho}_t^{ML}}} &= \frac{\mathcal{L}'_t(\rho_0)}{C_{\rho_0}} \stackrel{p.s.}{=} N_t - \Lambda_{\infty, \rho_0}(t) + O(\ln(u(t))) = M_t + \Lambda_t(\rho_0) - \Lambda_{\infty, \rho_0}(t) + O(\ln(u(t))) \\ &\stackrel{p.s.}{=} M_t + O(\ln(u(t))) = \sqrt{\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)} \left( \frac{M_t}{\sqrt{\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)}} + O\left(\frac{\ln(u(t))}{\sqrt{\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)}}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

D'après A"9,  $\ln(u(t))/\sqrt{\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)} \leq o(1)$ , donc en utilisant les équations (4.31) et (4.33), on a :

$$\frac{\Lambda_{\infty, \hat{\rho}_t^{ML}}(t) - \Lambda_{\infty, \rho_0}(t)}{\sqrt{\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)}} = \frac{M_t}{\sqrt{\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)}} + o(1) \quad (p.s.) \quad (4.34)$$

Enfin, en appliquant le corollaire 3.3.1 on a :  $M_t/\sqrt{\Lambda_{\infty, \rho_0}(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ . Le deuxième résultat de la propriété est ainsi démontré, puisque une convergence presque sûre implique une convergence en loi. ■

#### 4.1.1.2 Modèle $\text{ARI}_m$

Comme nous le montrerons un peu plus loin, quand on applique la propriété 4.1.1 aux modèles  $\text{ARI}_m$  et  $\text{ARA}_m$ , les hypothèses A"2 à A"11 sont vérifiées avec les mêmes hypothèses que pour les propriétés 3.4.3 et 3.4.4.

Ainsi pour appliquer la propriété 4.1.1 seule l'hypothèse A"1 impose une condition plus forte :

- $\tilde{\text{A}}1$  : On connaît un intervalle  $[\rho_1, \rho_2]$ , dans lequel on recherche l'EMV, et tel que  $-\infty < \rho_1 < \rho_0 < \rho_2 < \infty$ .

Comme on le verra dans la section suivante, il semble, qu'en pratique, la log-vraisemblance soit suffisamment régulière pour qu'on puisse la maximiser sur la totalité de l'intervalle  $]-\infty, 1]$ , afin de trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance. c'est-à-dire, qu'en pratique, pour des modèles  $\text{ARI}_m$  et  $\text{ARA}_m$ , il semble qu'on n'ait pas à se soucier de l'hypothèse  $\tilde{\text{A}}1$ , mais on ne sait pas prouver pourquoi.

#### PROPRIETE 4.1.2 :

Pour des modèles  $\text{ARI}_m$  de mémoire finie et sous les hypothèses  $\tilde{\text{A}}1$ , A2 et A3, l'EMV de l'efficacité de maintenance vérifie pour une unique observation de processus des défaillances sur  $[0, t]$  :

$$\forall \epsilon > 0, \quad |\rho_0 - \hat{\rho}_t^{ML}| \Lambda(t)^{0.5-\epsilon} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} 0 \quad (4.35)$$

$$\sqrt{\frac{\Lambda(t)}{(1-\rho_0)^m}} [(1-\rho_0)^m - (1-\hat{\rho}_t^{ML})^m] \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.36) \quad \square$$

#### Démonstration :

L'hypothèse  $\tilde{\text{A}}1$  implique que l'on connaît deux constantes  $\rho_1 < 1$  et  $\rho_2 < 1$  telles que  $\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$ . Soit,  $R1 = \rho_1 - 1$ ,  $R2 = \frac{\rho_2 + 1}{2}$ ,  $m_1 = (1 - R1)^m \vee 1$ ,  $m_2 = (1 - R2)^m \wedge 1$  et

$M = (1 + m(1 \vee |R1|)) \left( (1 - R2)^{-1} + \sum_{j=1}^{m-1} (1 - R1)^{j-1} \right)$ . On applique la propriété 4.1.1 avec :  $\mathcal{J} = [R1, R2]$ ,  $\mathcal{J}_0 = [\rho_1, \rho_2]$ ,  $\lambda_{\min}(t) = m_2 \lambda(t)$ ,  $\lambda_{\max}(t) = m_1 \lambda(t)$ ,  $d = \frac{M}{m_2}$ ,  $\lambda_{\infty, \rho}(t) = (1 -$

$$\rho)^m \lambda(t), u(t) = \lambda(t), h(t) = 1, C_\rho = \frac{-m}{1-\rho}, a = \frac{m}{1-\rho_1}, b = \frac{m}{1-\rho_2}, c = \frac{1}{(1-\rho_1)^m \wedge (1-\rho_2)^m},$$

$$c_0 = \frac{1}{(1-\rho_0)^m}.$$

L'hypothèse A"1 est vérifiée puisque  $\rho_0 \in \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ . Les intensités d'usure minimale et maximale  $\lambda_{\min,\rho}(t)$  et  $\lambda_{\max,\rho}(t)$  vérifient  $\lambda_{\min,\rho}(t) \leq \lambda_t(\rho) \leq \lambda_{\max,\rho}(t)$ , donc  $\lambda_{\min}(t) \leq \lambda_t(\rho) \leq \lambda_{\max}(t)$ . De plus, la dérivée de l'intensité de défaillance par rapport à  $\rho$  est :

$$\lambda'_t(\rho) = \sum_{j=0}^{m \wedge N_{t-} - 1} (1-\rho)^{j-1} (\rho(j+1) - 1) \lambda(T_{N_{t-}-j}) \quad (4.37)$$

L'hypothèse A"2 est donc vérifiée grâce à la majoration suivante vraie pour tout  $\rho \in \mathcal{J}$  :

$$\sum_{j=0}^{m-1} |(1-\rho)^{j-1} (\rho(j+1) - 1)| \leq M \quad (4.38)$$

En utilisant l'équation (3.32) et le fait que  $|\rho| \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j \leq 1 + m_1$  on prouve facilement que l'hypothèse A"3 est vérifiée. En utilisant le fait que  $\sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^{j-1} (\rho(j+1) - 1) = -m(1-\rho)^{m-1}$  on a :

$$\begin{aligned} |\lambda'_t(\rho) + m(1-\rho)^{m-1} \lambda(t)| &\leq \sum_{j=0}^{m-1} |(1-\rho)^{j-1} (\rho(j+1) - 1) \lambda(t) - \lambda(T_{N_{t-}-j})| \\ &\leq \frac{M}{(1-\rho)^m} (u(t) - u(T_{N_{t-}-m+1})) h(t) \end{aligned} \quad (4.39)$$

avec toujours  $T_j = 0$  pour  $j \leq 0$ . A"4 est donc vérifiée. A"5 est vérifiée grâce à la propriété 3.4.1. Le théorème de Karamata [28] prouve l'équivalence asymptotique suivante pour les fonctions à variations régulières avec  $\beta > -1$  :

$$\Lambda(t) \sim (\beta + 1)^{-1} t \lambda(t) \quad (4.40)$$

Ainsi,  $\lambda(t) = o(\Lambda(t))$ , et l'hypothèse A"9 est donc vérifiée. Enfin, il est trivial de démontrer que les hypothèses A"6 à A"8 et A"10, A"11 sont vérifiées.

La propriété 4.1.1 prouve la convergence en loi de  $(1-\rho_0)^m - (1-\hat{\rho}_t^{ML})^m$  vers une variable aléatoire gaussienne centrée avec l'écart type voulu. Cette propriété implique également :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \Lambda(t)^{0.5-\epsilon} \frac{(1-\rho_0)^m - (1-\hat{\rho}_t^{ML})^m}{(1-\rho_0)^{m(0.5+\epsilon)}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} 0 \quad (4.41)$$

Donc,  $(1-\hat{\rho}_t^{ML})^m = (1-\rho_0)^m + o(\Lambda(t)^{-0.5+\epsilon})$  et le premier résultat de la propriété peut être facilement déduit de cette égalité à l'aide d'un développement asymptotique. ■

#### 4.1.1.3 Modèle ARA<sub>m</sub>

##### PROPRIETE 4.1.3 :

Pour les modèles ARA<sub>m</sub> de mémoire finie et sous les hypothèses  $\tilde{A}1$  et A4, l'EMV de l'efficacité de maintenance vérifie pour une unique observation du processus des défaillances sur  $[0, t]$  :

$$\forall \epsilon > 0, \quad |\rho_0 - \hat{\rho}_t^{ML}| t^{\frac{\beta}{2}-\epsilon} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} 0 \quad (4.42)$$

$$\sqrt{\frac{\alpha t^\beta}{(1-\rho_0)^{m(\beta-1)}}} \left[ (1-\rho_0)^{m(\beta-1)} - (1-\hat{\rho}_t^{ML})^{m(\beta-1)} \right] \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.43)$$

□

**Démonstration :**

L'hypothèse A1 est vérifiée, on peut donc définir  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $R1$ ,  $R2$ ,  $M$ ,  $m_1$  et  $m_2$  comme dans la démonstration de la propriété 4.1.2. On applique la propriété 4.1.1 avec :  $\mathcal{J} = [R1, R2]$ ,  $\mathcal{J}_0 =$

$$[\rho_1, \rho_2], \lambda_{\min}(t) = \lambda(m_2 t), \lambda_{\max}(t) = \lambda(m_1 t), d = M \frac{m_1^{\beta-2} \vee m_2^{\beta-2}}{m_2^{\beta-1}}, \lambda_{\infty, \rho}(t) = \lambda((1-\rho)^m t),$$

$$u(t) = t, h(t) = \lambda'(t), C_\rho = \frac{-m(\beta-1)}{1-\rho}, a = m \frac{\beta-1}{1-\rho_1}, b = m \frac{\beta-1}{1-\rho_2}, c_0 = \frac{\beta-1}{(1-\rho_0)^{m(\beta-1)}},$$

$$c = \frac{\beta-1}{(1-\rho_1)^{m(\beta-1)} \wedge (1-\rho_2)^{m(\beta-1)}}.$$

On démontre que l'hypothèse A"1 est vérifiée de la même manière que pour la propriété 4.1.2. Soit  $m_t = m \wedge N_{t-} - 1$ . La dérivée par rapport à  $\rho$  de l'intensité de défaillance est donc égale à :

$$\lambda'_t(\rho) = \sum_{j=0}^{m_t} (1-\rho)^{j-1} (\rho(j+1) - 1) T_{N_{t-}-j} \lambda' \left( (1-\rho)^m t + \rho \sum_{j=0}^{m_t} (1-\rho)^j (t - T_{N_{t-}-j}) \right) \quad (4.44)$$

En utilisant la majoration (4.38), on montre que cette dérivée vérifie pour tout  $\rho \in \mathcal{J}$  :

$$|\lambda'_t(\rho)| \leq M t (\lambda'(m_1 t) \vee \lambda'(m_2 t)) \quad (4.45)$$

Il est alors facile de prouver que l'hypothèse A"2 est vérifiée.

Avec une technique similaire à celle avec laquelle on a obtenu (3.80), on a, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout  $\rho \in \mathcal{J}_0$  :

$$|\lambda_t(\rho) - \lambda_{\infty, \rho}(t)| \leq \left( \max_{s \in I_t(\rho)} \lambda'(s) \right) |\rho| \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j (t - T_{N_{t-}-j}) \quad (4.46)$$

avec  $I_t(\rho) = [(1 \wedge (1 - R2)^m)t, (1 \vee (1 - R1)^m)t]$ . Or, comme  $\lambda$  est une fonction puissance,  $\lambda'$  est aussi une fonction puissance, ainsi comme  $R1$  et  $R2$  sont strictement positives, on a  $\max_{s \in I_t(\rho)} \lambda'(s) = O(\lambda'(t))$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} |\lambda_t(\rho) - \lambda_{\infty, \rho}(t)| &\leq |\rho| \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j (t - T_{N_{t-}-m+1}) O(\lambda'(t)) \\ &\leq (1+m_1) O((t - T_{N_{t-}-m+1}) \lambda'(t)) = O((t - T_{N_{t-}-m+1}) \lambda'(t)) \end{aligned} \quad (4.47)$$

L'hypothèse A"3 est donc vérifiée.

Comme  $\sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^{j-1} (\rho(j+1) - 1) = m(1-\rho)^{m-1}$ , et en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a pour tout  $\rho \in \mathcal{J}_0$  :

$$\begin{aligned} &|\lambda'_t(\rho) - C_\rho \lambda_{\infty, \rho}(t)| = |\lambda'_t(\rho) + m(1-\rho)^{m-1} t \lambda'((1-\rho)^m t)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} |(1-\rho)^{j-1} (\rho(j+1) - 1)| \left[ (t - T_{N_{t-}-j}) |\lambda'((1-\rho)^m t)| + T_{N_{t-}-j} \right. \\ &\quad \left. \left| \lambda'((1-\rho)^m t) - \lambda' \left( (1-\rho)^m t + \rho \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j (t - T_{N_{t-}-j}) \right) \right| \right] \\ &\leq M \left[ \left( m_1^{m(\beta-1)} \vee m_2^{m(\beta-1)} \right) \lambda'(t) (t - T_{N_{t-}-m+1}) + t |\rho| \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=0}^{m-1} (1-\rho)^j (t - T_{N_{t-}-m+1}) (|\lambda''(m_1 t)| \vee |\lambda''(m_2 t)|) \right] \\ &\leq O((t - T_{N_{t-}-m+1}) \lambda'(t)) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Donc l'hypothèse A"4 est vérifiée. Grâce à la propriété 3.4.4, l'hypothèse A"5 est vérifiée. Enfin il est trivial de montrer que les hypothèses A"6 à A"11 sont vérifiées. On peut donc appliquer la propriété 4.1.1 et finir la démonstration de façon similaire à ce qui a été fait pour la propriété 4.1.2. ■

#### 4.1.2 Estimateurs explicites

Comme cela a été vu dans la section précédente, on ne sait pas prouver que l'EMV est convergent quand on maximise la log-vraisemblance sur  $] -\infty, 1]$ . En effet, l'EMV doit être recherché dans un compact de  $] -\infty, 1]$  contenant la vraie valeur  $\rho_0$  de l'efficacité de maintenance. Mais on peut trouver des estimateurs explicites (EE) qui n'ont pas ce problème. Ces estimateurs sont basés sur le fait que l'intensité de défaillance cumulée vérifie :  $\Lambda_t \stackrel{p.s.}{=} \Lambda_\infty(t) + O(\ln(u(t)))$ . Dans cette section, on reprend les notations plus simples  $\lambda_t = \lambda_t(\rho_0)$  et  $\lambda_{\infty, \rho_0}(t) = \lambda_\infty(t)$ .

##### PROPRIETE 4.1.4 :

Pour des modèles  $ARI_m$  de mémoire finie et sous les hypothèses A1 à A3, pour une unique observation du processus des défaillances sur  $[0, t]$ , l'EE :

$$\hat{\rho}_t^E = 1 - \left( \frac{N_t}{\Lambda(t)} \right)^{1/m} \quad (4.49)$$

vérifie les mêmes propriétés asymptotiques que l'EMV de la propriété 4.1.2. □

##### Démonstration :

La propriété 3.4.3 est vérifiée, donc  $\Lambda_t \stackrel{p.s.}{=} (1 - \rho_0)^m \Lambda(t) + O(\ln(\lambda(t)))$ . De plus grâce à l'équation (4.40) on a pour tout  $\epsilon > 0$  :  $\ln(\lambda(t))/\Lambda(t)^{0.5+\epsilon} = o(1)$ . Donc, en se servant de ces deux résultats dans l'écriture martingale de  $N$ , on prouve, pour tout  $\epsilon > 0$ , que :

$$\begin{aligned} \frac{M_t}{\Lambda(t)^{0.5+\epsilon}} &= \frac{N_t - (1 - \rho_0)^m \Lambda(t) + O(\ln(\lambda(t)))}{\Lambda(t)^{0.5+\epsilon}} \stackrel{p.s.}{=} \Lambda(t)^{0.5-\epsilon} \left( \frac{N_t}{\Lambda(t)} - (1 - \rho_0)^m \right) + o(1) \\ &\stackrel{p.s.}{=} \Lambda(t)^{0.5-\epsilon} \left( (1 - \hat{\rho}_t^E)^m - (1 - \rho_0)^m \right) + o(1) \end{aligned} \quad (4.50)$$

On a également,  $\Lambda_t \stackrel{p.s.}{=} (1 - \rho_0)^m \Lambda(t) + o(\Lambda(t))$ . Le corollaire 3.3.1 implique donc que  $M_t/((1 - \rho_0)^m \Lambda(t))^{0.5+\epsilon}$  converge presque sûrement vers zéro pour tout  $\epsilon > 0$ , et converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite pour  $\epsilon = 0$ . En utilisant ces deux résultats dans l'équation précédente, la propriété est démontrée. ■

Le même type d'EE peut être trouvé pour des modèles  $ARA_m$  de mémoire finie et avec une fonction puissance pour l'intensité initiale.

##### PROPRIETE 4.1.5 :

Pour des modèles  $ARA_m$  de mémoire finie et sous les hypothèses A1 et A4, pour une unique observation du processus des défaillances sur  $[0, t]$ , l'EE :

$$\hat{\rho}_t^E = 1 - \left( \frac{N_t}{\alpha t^\beta} \right)^{\frac{1}{m(\beta-1)}} \quad (4.51)$$

vérifie les mêmes propriétés asymptotiques que l'EMV de la propriété 4.1.3. □

Pour construire les EE précédents on a remplacé, dans l'écriture martingale de  $N$ , l'intensité de défaillance cumulée par son développement asymptotique. De ce développement asymptotique on a utilisé la valeur du premier terme, (c'est-à-dire l'intensité asymptotique cumulée) et le fait que l'erreur commise est alors proportionnelle à un logarithme. Dans le cas des modèles  $ARI_1$ ,

en raison de la forme très simple de l'intensité de défaillance, il existe un estimateur explicite construit à partir de la vraie valeur de l'intensité de défaillance. Ce nouvel EE a les mêmes propriétés asymptotiques que les autres estimateurs. Mais, comme il tient compte de la vraie valeur de l'intensité de défaillance cumulée (et pas de son développement asymptotique) on espère que cet estimateur convergera plus vite (par exemple en terme de taux de recouvrement de l'intervalle de confiance asymptotique) que les autres estimateurs.

**PROPRIETE 4.1.6 :**

Pour le modèle  $ARI_1$  et sous les hypothèses A1 à A3, pour une unique observation du processus des défaillances sur  $[0, t]$ , l'EE :

$$\hat{\rho}_t^{E2} = \frac{\Lambda(t) - N_t}{\int_0^t \lambda(T_{N_s-}) ds} \quad (4.52)$$

vérifie les mêmes propriétés asymptotiques que l'EMV de la propriété 4.1.2 avec  $m = 1$ .  $\square$

**Démonstration :**

L'intensité de défaillance d'un modèle  $ARI_1$  vérifie :  $\lambda_t = \lambda(t) - \rho_0 \lambda(T_{N_t-})$ . L'écriture martingale du processus  $N$  pour un modèle  $ARI_1$  implique donc que :

$$\frac{N_t - \Lambda(t)}{\int_0^t \lambda(T_{N_s-}) ds} + \rho_0 = \frac{M_t}{\int_0^t \lambda(T_{N_s-}) ds} \quad (4.53)$$

Grâce au lemme 3.4.1 et à l'hypothèse A3, on a :

$$\int_0^t \lambda(T_{N_s}) ds = \Lambda(t) - \int_0^t [\lambda(s) - \lambda(T_{N_s-})] ds = \Lambda(t) + \int_0^t o(\lambda(s)) ds = \Lambda(t) + o(\Lambda(t)) \quad (4.54)$$

Donc

$$\rho_0 - \hat{\rho}_t^{E2} = \frac{M_t}{\Lambda(t)} + o\left(\frac{M_t}{\Lambda(t)}\right) \quad (4.55)$$

Et la propriété est encore une fois prouvée en appliquant le corollaire 3.3.1.  $\blacksquare$

### 4.1.3 Intervalles de confiance asymptotiques

Grâce à la normalité asymptotique de l'ensemble des estimateurs précédents, on peut trouver des Intervalles de Confiance Asymptotiques (ICA). Etant donné que pour un même modèle les EMV et les EE vérifient les même propriétés, ils définissent les mêmes ICA.

**COROLLAIRE 4.1.1. :**

Pour un modèle  $ARI_m$  de mémoire finie et sous les hypothèses  $\tilde{A}1$ , A2 et A3 pour les EMV et A1 à A3 pour les EE un ICA pour  $(1 - \rho_0)^m$  de niveau  $\eta$  est :

$$\left[ (1 - \hat{\rho})^m + \frac{u_\eta^2 - \sqrt{\Delta}}{2\Lambda(t)}, (1 - \hat{\rho})^m + \frac{u_\eta^2 + \sqrt{\Delta}}{2\Lambda(t)} \right] \quad (4.56)$$

où  $u_\eta$  est le  $1 - \frac{\eta}{2}$  quantile de la loi normale centrée réduite,  $\hat{\rho}$  est l'EMV ou l'EE et  $\Delta = u_\eta^2 [4\Lambda(t)(1 - \hat{\rho})^m + u_\eta^2]$ .  $\square$

**Démonstration :**

Soit  $U$  une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.  $u_\eta$  est défini par :  $P(|U| \leq u_\eta) = 1 - \eta$ . Les propriétés 4.1.2, 4.1.4 et 4.1.6 montrent que la probabilité suivante converge vers  $1 - \eta$  quand  $n$  diverge :

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{\Lambda(t)}{(1 - \rho_0)^m} ((1 - \hat{\rho})^m - (1 - \rho_0)^m)^2 - u_\eta^2 \leq 0\right) \\ &= P\left((1 - \hat{\rho})^m + \frac{u_\eta^2 - \sqrt{\Delta}}{2\Lambda(t)} \leq (1 - \rho_0)^m \leq (1 - \hat{\rho})^m + \frac{u_\eta^2 + \sqrt{\Delta}}{2\Lambda(t)}\right) \end{aligned} \quad (4.57) \quad \blacksquare$$

Par analogie, on trouve des intervalles similaires pour les modèles  $ARA_m$ .

**COROLLAIRE 4.1.2. :**

Pour un modèle  $ARA_m$  de mémoire finie et sous les hypothèses  $\tilde{A}1$  et  $A4$  pour les EMV et  $A1$  et  $A4$  pour les EE un ICA pour  $(1 - \rho_0)^m$  de niveau  $\eta$  est :

$$\left[ (1 - \hat{\rho})^{m(\beta-1)} + \frac{u_\eta^2 - \sqrt{\Delta}}{2\alpha t^\beta}, (1 - \hat{\rho})^{m(\beta-1)} + \frac{u_\eta^2 + \sqrt{\Delta}}{2\alpha t^\beta} \right] \quad (4.58)$$

où  $\Delta = u_\eta^2 [4\alpha t^\beta (1 - \hat{\rho})^{m(\beta-1)} + u_\eta^2]$ . □

**4.1.4 Taux de recouvrement des intervalles de confiance asymptotiques**

Sur un jeu de simulations d'un même modèle et pour un intervalle de confiance asymptotique donné, on définit le Taux de Recouvrement (TR) comme étant la proportion de simulations pour lesquelles la vraie valeur du paramètre est dans l'intervalle. Si le nombre de simulations est suffisamment important, le TR est un bon estimateur de la probabilité que la vraie valeur du paramètre soit dans l'intervalle de confiance. Le TR devrait converger, quand on augmente le nombre de défaillances observées, vers  $1 - \eta$ , où  $\eta$  est le seuil de l'intervalle de l'ICA. Le TR est ici un bon indicateur pour comparer les différents estimateurs. En effet, comme nous l'avons déjà fait remarquer, pour un même modèle les estimateurs explicites et de maximum de vraisemblance définissent les mêmes ICA. La proximité du TR de sa valeur limite est donc uniquement fonction de la qualité de l'estimateur utilisé pour calculer l'ICA. C'est pourquoi nous avons choisi ici de comparer les estimateurs à l'aide du TR plutôt qu'avec l'erreur quadratique moyenne classique.

On a estimé (sur 10000 simulations et avec une fonction puissance pour l'intensité initiale  $\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}$ ) le TR des ICA de niveau 95% pour  $m \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\alpha \in \{1, 10\}$ ,  $\beta \in \{1.5, 2, 3\}$ ,  $\rho \in \{-1, -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$  et  $n \in \{5, 10, 20, 40, 60, 80, 100\}$ .

Les figures utilisent les notations suivantes :

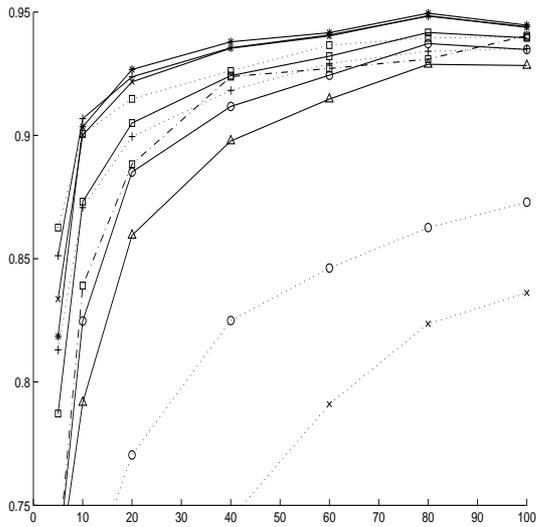
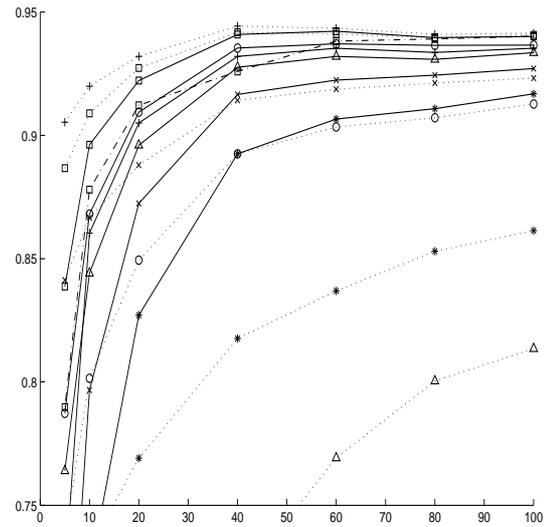
— EMV	□ ARI <sub>1</sub>	+ ARA <sub>1</sub>
- - - EE	○ ARI <sub>2</sub>	× ARA <sub>2</sub>
. . . EE2	△ ARI <sub>3</sub>	* ARA <sub>3</sub>

Quand la valeur d'un TR ne peut pas être lue sur un graphique c'est qu'elle est trop mauvaise, c'est-à-dire trop petite.

Comme c'est souvent le cas lors de l'étude de modèles basés sur des processus puissance, le paramètre d'échelle,  $\alpha$ , semble ne pas avoir d'influence sur la valeur du TR. Les graphiques sont donc les mêmes pour  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = 10$ .

Les figures 4.1 et 4.2 représentent le TR des estimateurs en fonction du nombre  $n$  de défaillances simulées, pour 6 de nos modèles. On remarque que le TR semble effectivement converger vers sa valeur limite de 0.95, quand le nombre de défaillances tend vers l'infini (ce qui est équivalent au fait que la date de fin d'observation diverge). Pour certains EE (ceux dont le TR n'apparaît pas sur les graphiques) la vitesse de convergence est, pour certaines valeurs des paramètres, vraiment très lente.

Pour les EMV, dans le cas où l'intensité initiale est convexe (resp. concave), le TR des modèles  $ARA_m$  (resp.  $ARI_m$ ) converge plus vite que celui des modèles  $ARI_m$  (resp.  $ARA_m$ ), comme cela est illustré par la figure 4.1 (resp. 4.2). On peut expliquer ce phénomène. D'après la propriété 3.5.1, quand l'intensité initiale est convexe, pour la même valeur des paramètres  $\alpha, \beta, \rho$ , les modèles  $ARI_m$  correspondent à des systèmes qui s'usent plus vite que pour les modèles  $ARA_m$ . Donc pour un même nombre de défaillances observées, on aura tendance à faire fonctionner le

FIG. 4.1 – TR *fact. n*,  $\beta = 3$ ,  $\rho = 0.4$ FIG. 4.2 – TR *fact. n*,  $\beta = 1.5$ ,  $\rho = 0.4$ 

système suivant un modèle  $ARA_m$  plus longtemps que celui suivant un modèle  $ARI_m$ . On aura donc plus d'information sur le modèle  $ARA_m$  afin d'estimer son efficacité de maintenance.

Pour les EE, la propriété semble s'inverser : quand l'intensité initiale est convexe (resp. concave), le TR des modèles  $ARI_m$  (resp.  $ARA_m$ ) converge plus vite que celui des modèles  $ARA_m$  (resp.  $ARI_m$ ). Cela semble contredire l'explication donnée pour les EMV. En fait, dans le cas des EE, un autre phénomène intervient. Les EE sont construits en approchant l'intensité de défaillance cumulée par l'intensité asymptotique cumulée. Donc, plus les deux intensités sont proches et meilleur est l'EE. Il faut ajouter à cela que, dans le cas de maintenances efficaces et comme cela a déjà été utilisé dans le cadre de la démonstration de la propriété 3.2.1, plus un système tombe en panne souvent et plus proches seront les intensités cumulées de défaillance et asymptotique. A la limite, si le système était quasiment tout le temps en panne elles seraient presque identiques. Donc comme le modèle  $ARI_m$  correspond à un système qui s'use plus vite que pour le modèle  $ARA_m$ , ces intensités cumulées de défaillance et asymptotique sont plus proches, et du même coup l'EE converge plus vite.

La figure 4.3 représente le TR en fonction de la valeur du paramètre d'efficacité de maintenance. On constate que le TR dépend fortement de la valeur de  $\rho$ . Quand  $\rho$  est trop proche de un ou trop petit, le TR converge beaucoup moins vite (figure 4.3). Pour une part, cela est dû au fait que les propriétés de normalité asymptotique, utilisées pour construire les ICA, sont fondées sur la convergence du processus des défaillances vers un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda_\infty(t)$ . Plus  $\rho$  est proche de un et plus cette convergence est lente. En effet, la différence entre les intensités cumulées de défaillance et asymptotique est équivalente au terme du second ordre du développement asymptotique de l'intensité de défaillance cumulée. D'après les propriétés 3.4.3 et 3.4.4 ce terme vaut :

$$\frac{(\beta - 1)}{(1 - \rho)^m} \frac{1 - (1 + m\rho)(1 - \rho)^m}{\rho} \ln(t) \quad (4.59)$$

Or pour  $t$  donné, quand  $\rho$  tend vers 1 par valeurs inférieures, la quantité ci-dessus diverge. Donc le processus des défaillances s'éloigne de son processus de Poisson équivalent. D'autre part, quand l'efficacité de maintenance se dégrade et devient de plus en plus nuisible, l'intensité asymptotique cumulée augmente, et sa différence avec l'intensité de défaillance cumulée tend à devenir constante (pour  $t$  fixé, quand  $\rho$  tend vers  $-\infty$  la quantité (4.59) tend vers  $m(\beta - 1)$ ). Donc l'intensité de défaillance cumulée augmente et le système s'use de plus en plus vite. Pour un

nombre de défaillances observées constant, on observe de moins en moins longtemps le système et on a donc moins d'information pour estimer son efficacité de maintenance.

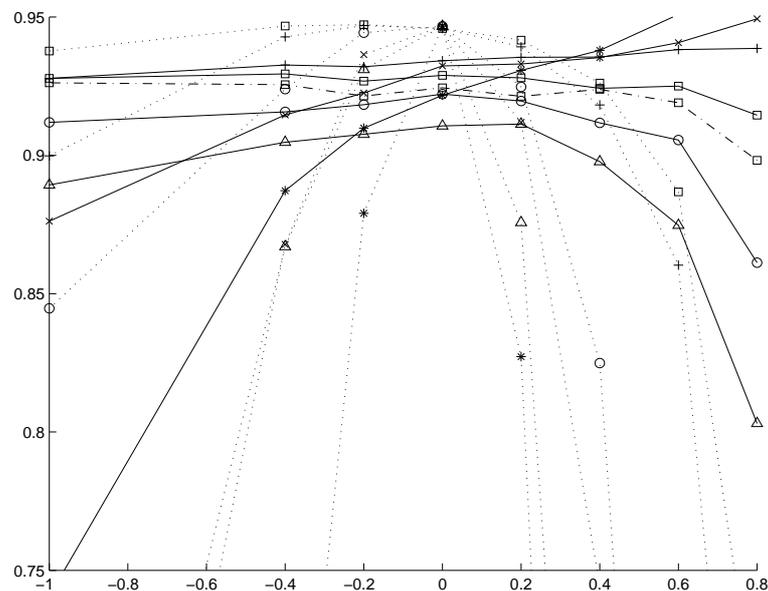


FIG. 4.3 – TR fct.  $\rho$  pour  $\beta = 3$  et  $n = 40$ .

Comparer les TR selon l'estimateur pour un même modèle (comme cela est fait dans le dernier paragraphe) a, en pratique, un sens. Par contre, comparer pour un même estimateur les TR pour des modèles différents avec les mêmes paramètres (comme cela est fait dans les autres paragraphes) n'est pas forcément très judicieux. En effet, on compare alors des ICA de largeurs très différentes et, qui plus est, correspondent à des modèles ayant des vitesses d'usure incomparables (cf propriété 3.5.1). Il vaudrait mieux, pour comparer les vitesses de convergence des TR utiliser des modèles ayant la même intensité asymptotique. Ainsi les processus ponctuels correspondants auraient des vitesses d'usure comparables et, en plus, on pourrait s'attendre à avoir des ICA de même largeur. Pour trouver des modèles avec la même intensité asymptotique on utilise les propriétés 3.5.3 et 3.5.4

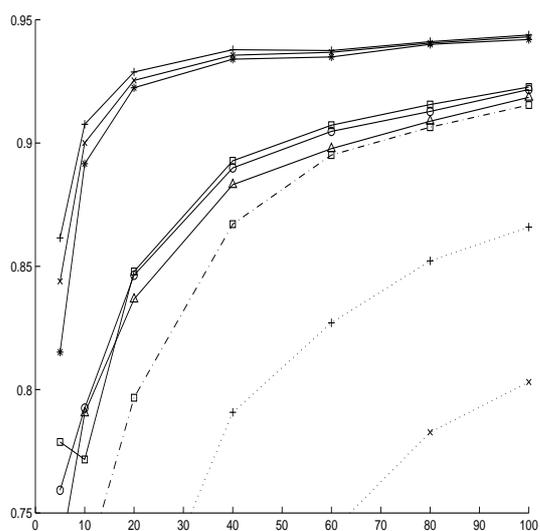
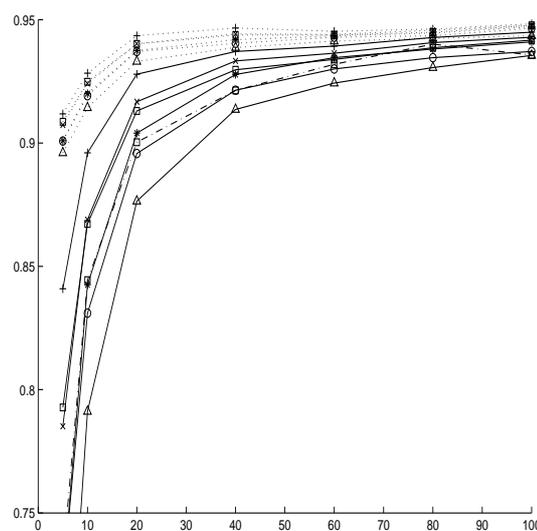
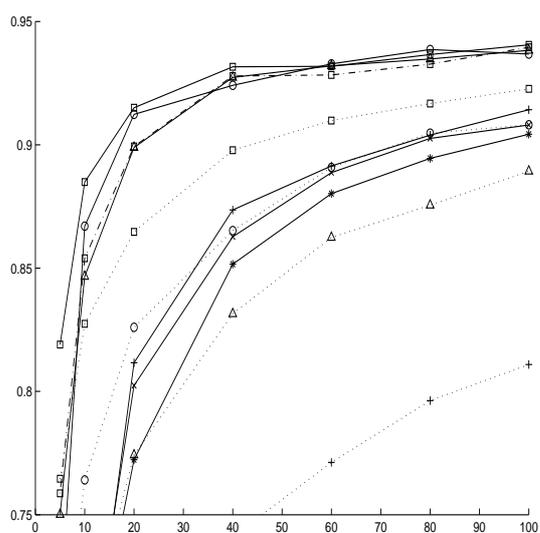
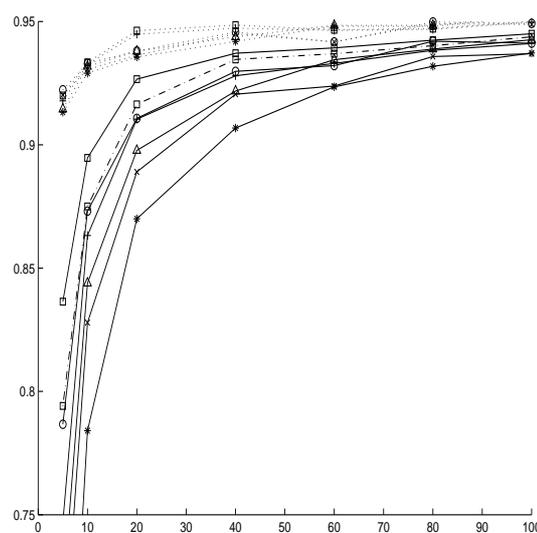
On compare les TR dans les cas suivants:

- **Cas 1** : la figure 4.4 représente les TR pour des modèles avec une vitesse d'usure croissante :  $\lambda(t) = 3t^2$ , et une même intensité asymptotique correspondant à une bonne efficacité de maintenance :  $\lambda_\infty(t) = 0.3t^2$ .
- **Cas 2** : la figure 4.5 représente les TR pour des modèles avec une vitesse d'usure croissante :  $\lambda(t) = 3t^2$ , et une plus mauvaise efficacité de maintenance :  $\lambda_\infty(t) = 2.43t^2$ .
- **Cas 3** : la figure 4.6 est similaire au cas 1 mais pour une vitesse d'usure décroissante :  $\lambda(t) = 1.5\sqrt{t}$  et  $\lambda_\infty(t) = 0.474\sqrt{t}$ .
- **Cas 4** : la figure 4.7 est similaire au cas 2 mais pour une vitesse d'usure décroissante :  $\lambda(t) = 1.5\sqrt{t}$  et  $\lambda_\infty(t) = 1.35\sqrt{t}$ .

Les valeurs correspondantes pour le paramètre d'efficacité de maintenance sont données dans la table 4.1.

Tout d'abord on remarque que, quand le TR ne converge pas trop lentement (c'est-à-dire pas pour des EE quand la maintenance est efficace), la mémoire n'a pas une influence trop importante sur la valeur du TR. Pour des maintenances efficaces et quand la vitesse d'usure est croissante, les EMV dans les modèles  $ARA_m$  fournissent les ICA dont le TR converge largement le plus vite. Pour des maintenances efficaces et quand la vitesse d'usure est décroissante, les

	$ARI_1$	$ARI_2$	$ARI_3$	$ARA_1$	$ARA_2$	$ARA_3$
Cas 1	0.9	0.684	0.536	0.684	0.438	0.319
Cas 2	0.19	0.1	0.068	0.1	0.051	0.035
Cas 3	0.684	0.438	0.319	0.9	0.684	0.536
Cas 4	0.1	0.051	0.035	0.19	0.1	0.068

TAB. 4.1 – Valeurs de  $\rho$  dans les cas 1 à 4FIG. 4.4 – TR fct.  $n$  dans le cas 1FIG. 4.5 – TR fct.  $n$  dans le cas 2FIG. 4.6 – TR fct.  $n$  dans le cas 3FIG. 4.7 – TR fct.  $n$  dans le cas 4

EMV des modèles  $ARI_m$  fournissent les meilleurs ICA. Enfin quand l'effet de la maintenance se rapproche du cas ABAO, les ICA calculés à l'aide des EE sont recommandés.

#### 4.1.5 Peut-on estimer un paramètre d'efficacité de maintenance et un paramètre d'échelle?

Dans cette première section on a étudié les propriétés asymptotiques de l'estimateur du paramètre d'efficacité de réparation quand l'intensité initiale est connue. En fait, grâce à la convergence de l'intensité de défaillance vers l'intensité asymptotique, l'estimation de ce paramètre ressemble à l'estimation d'un paramètre d'échelle dans un PLP. Dans le cas où l'intensité initiale est une fonction puissance, comme nous le développerons juste après, il paraît difficile d'obtenir des propriétés théoriques quand on estime simultanément l'ensemble des paramètres du modèle. Généraliser les résultats de convergence au cas où on estime simultanément le paramètre d'efficacité de réparation et le paramètre de forme (quand le paramètre d'échelle est connu) ne devrait pas poser trop de problèmes. La démonstration devrait ressembler à celle faite pour l'estimation des paramètres d'un PLP, où le paramètre d'efficacité de réparation serait l'analogie du paramètre d'échelle du PLP. Par contre, il devrait être beaucoup plus difficile d'étendre les résultats de convergence au cas où on estime à la fois un paramètre d'efficacité de maintenance et un paramètre d'échelle (pour un paramètre de forme connu). Ces deux paramètres ne sont pas identifiables à l'aide de l'intensité asymptotique. Il faut donc se servir du développement au second ordre de l'intensité de défaillance cumulée. Mais le terme du second ordre a une croissance logarithmique alors que la martingale a elle une croissance proportionnelle à une fonction puissance. Le bruit a donc des chances de cacher le terme du second ordre. Une façon de faire serait d'utiliser un lissage sur l'ensemble de la période d'observation afin de rendre le terme du second ordre prépondérant sur le terme de bruit. Or il semble que quelle que soit la fonction de lissage le bruit reste prépondérant sur le terme du second ordre. On peut alors se demander si les estimateurs simultanés des paramètres d'échelle et d'efficacité de réparation sont à variance nulle en l'infini? Une étude par simulation, qui n'a pas encore pu être réalisée, pourrait peut-être apporter un début de réponse à ce problème.

## 4.2 Estimation conjointe de l'intensité initiale et de l'efficacité de maintenance

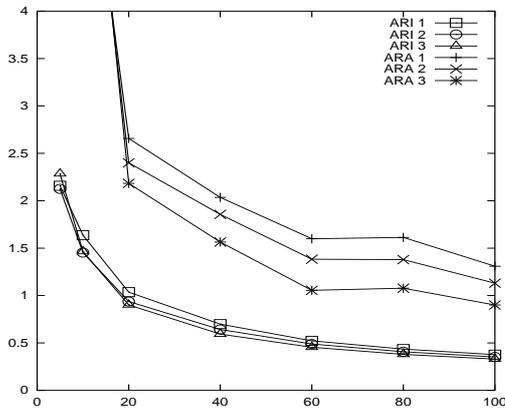
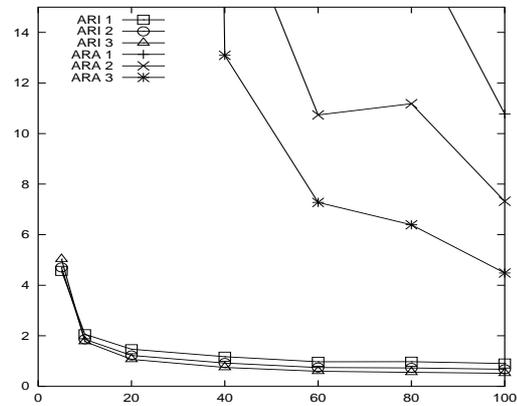
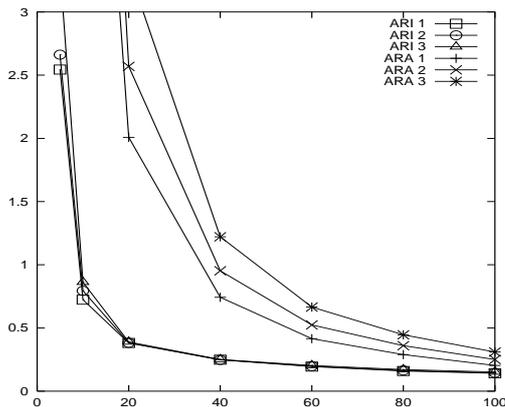
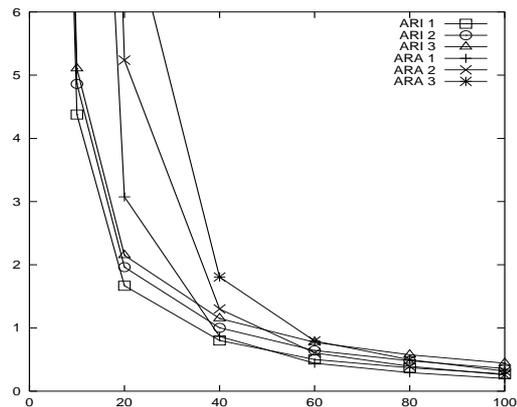
Comme cela a été dit au début de ce chapitre, peu de travaux se sont intéressés à l'estimation paramétrique de l'efficacité de maintenance. Cette faible quantité de publications est sans doute due à la complexité de la fonction de vraisemblance. Une étude théorique des propriétés des estimateurs paraît donc difficile dans le cas général où on estime simultanément les paramètres de l'intensité initiale et de l'efficacité de maintenance. C'est pourquoi nous nous contenterons ici d'une étude empirique de ces propriétés.

On a estimé, sur 5000 simulations du processus des défaillances, la moyenne et la variance des estimateurs de maximum de vraisemblance,  $\hat{\alpha}_n$ ,  $\hat{\beta}_n$ ,  $\hat{\rho}_n$ , pour des modèles de mémoire  $m \in \{1, 2, 3, \infty\}$  et d'intensité initiale de type puissance avec  $\alpha = 1$ ,  $\beta \in \{2, 3\}$ . Pour chaque simulation les estimateurs  $\hat{\alpha}_n$ ,  $\hat{\beta}_n$  et  $\hat{\rho}_n$  sont obtenus en maximisant numériquement la vraisemblance à l'aide d'une méthode de gradient. Comme dans le cadre de cette section on ne possède pas d'intervalle de confiance asymptotique, on évalue la qualité d'un estimateur  $\hat{\theta}_n$  pour  $\theta \in \{\alpha, \beta, \rho\}$  à l'aide de l'Erreur Quadratique Moyenne empirique (EQM), définie par :

$$EQM(\hat{\theta}_n) = s_{\hat{\theta}_n}^2 + (m_{\hat{\theta}_n} - \theta)^2 \quad (4.60)$$

où  $m_{\hat{\theta}_n}$  représente la moyenne empirique de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  et  $s_{\hat{\theta}_n}^2$  sa variance empirique sur les 5000 simulations. Pour chaque valeur des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\rho$ , pour évaluer la qualité

de l'estimation on doit contrôler trois paramètres (les EQM de chacun des estimateurs). C'est pourquoi, dans cette section et contrairement à la précédente, nous avons limité le nombre de cas, en particulier en n'étudiant que des maintenances efficaces et des intensités initiales convexes (qui sont les cas les plus fréquents en pratique). L'ensemble des graphiques de cette section sont faits avec  $\beta = 3$ .

FIG. 4.8 – Cas 1 :  $EQM(\hat{\alpha}_n)$  fct.  $n$ FIG. 4.9 – Cas 2 :  $EQM(\hat{\alpha}_n)$  fct.  $n$ FIG. 4.10 – Cas 1 :  $EQM(\hat{\beta}_n)$  fct.  $n$ FIG. 4.11 – Cas 2 :  $EQM(\hat{\beta}_n)$  fct.  $n$ 

Les figures 4.8 à 4.13 représentent les EQM des estimateurs pour des modèles de même intensité asymptotique dans les cas 1 et 2 définis dans la section 4.1.4. On remarque que pour des maintenances efficaces, les estimateurs des paramètres de l'intensité initiale sont clairement meilleurs pour les modèles  $ARI_m$  que pour les modèles  $ARA_m$ . Pour un petit nombre de défaillances observées, ces estimateurs sont vraiment mauvais dans le cas des modèles  $ARA_m$ . L'effet de la mémoire sur la qualité des estimateurs de l'intensité initiale ne semble être significatif que pour les modèles  $ARA_m$ . En ce qui concerne l'estimation du paramètre d'efficacité de maintenance, on peut dire que les modèles  $ARI_1$  et  $ARA_1$  fournissent des estimateurs bien plus mauvais que les autres modèles. Dans les cas 1 et 2, le meilleur estimateur est celui du modèle  $ARA_3$ . Enfin, pour tous les modèles et tous les paramètres estimés, il est clair que l'estimation est meilleure dans le cas 1 que dans le cas 2, c'est-à-dire quand la maintenance est la plus efficace. En conséquence, d'un point de vue statistique, dans le cas de maintenances efficaces, les modèles  $ARI_m$  sont plus intéressants que les modèles  $ARA_m$ , et les modèles de mémoire un sont plus mauvais que les autres. Ainsi, si on prend en compte le fait que plus la mémoire est importante plus les intensités de défaillance sont complexes, on peut dire que les modèles  $ARI_2$  ou  $ARI_3$

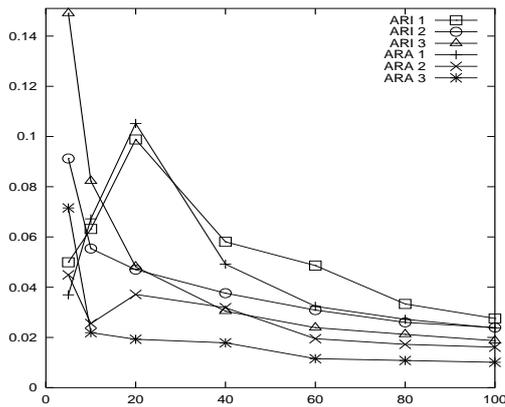


FIG. 4.12 – Cas 1 :  $EQM(\hat{\rho}_n)$  fct.  $n$

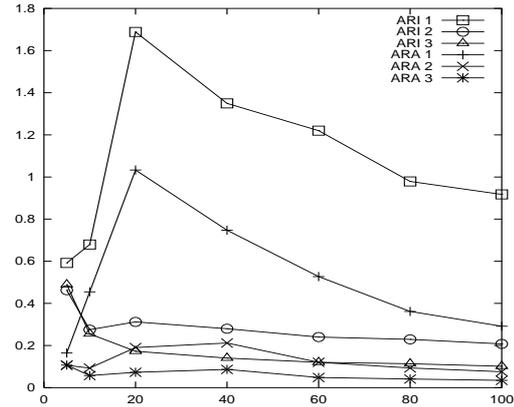


FIG. 4.13 – Case 2 :  $EQM(\hat{\rho}_n)$  fct.  $n$

sont les meilleurs en ce qui concerne leurs propriétés statistiques.

Qui plus est, il est difficile de comparer les modèles de mémoire infinie avec les autres. En effet dans le cas de maintenance efficace, ces modèles ont une intensité d'usure minimale nulle et on ne connaît pas leur intensité asymptotique. Ils ont donc, comme cela a déjà été souligné, a priori un comportement très différent des autres modèles. Tout ce qu'on peut faire est alors de comparer les modèles pour les mêmes valeurs des paramètres, comme cela est fait sur les figures 4.14 à 4.16. On remarque que le modèle  $ARI_\infty$  semble fournir les meilleurs estimateurs, mais cela est peut être du au fait que les vitesses d'usure des modèles sont totalement différentes.

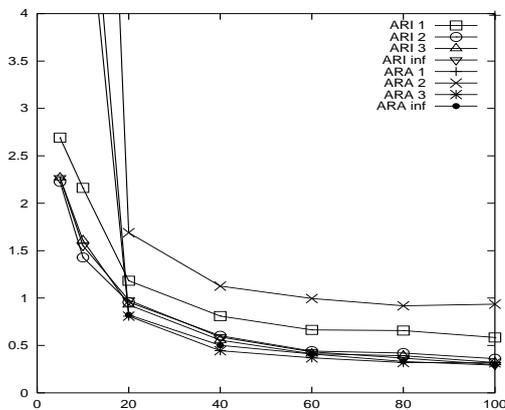


FIG. 4.14 –  $EQM(\hat{\alpha}_n)$  fct.  $n$ ,  $\rho = 0.5$

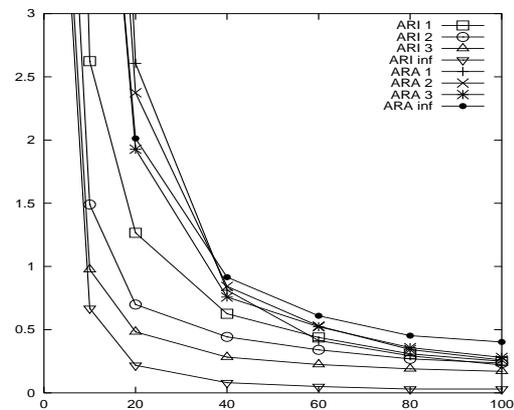


FIG. 4.15 –  $EQM(\hat{\beta}_n)$  fct.  $n$ ,  $\rho = 0.5$

Pour montrer l'influence du paramètre  $\rho$  sur la qualité des estimateurs, on a tracé les figures 4.17 à 4.19, qui représentent pour un modèle  $ARI_2$  les EQM des estimateurs des paramètres en fonction de l'efficacité de maintenance. Les graphiques sont similaires pour des modèles  $ARI_m$  ou  $ARA_m$ . On remarque que plus la maintenance est efficace, meilleurs sont les estimateurs de  $\beta$  et  $\rho$ . Pour une efficacité de maintenance presque parfaite, la légère augmentation de l'EQM de  $\hat{\rho}_m$  est sans nul doute un effet de bord dû au fait que  $\rho$  est nécessairement plus petit que 1. Enfin, la valeur de  $\rho$  ne semble pas réellement influencer la qualité de l'estimation de  $\alpha$ .

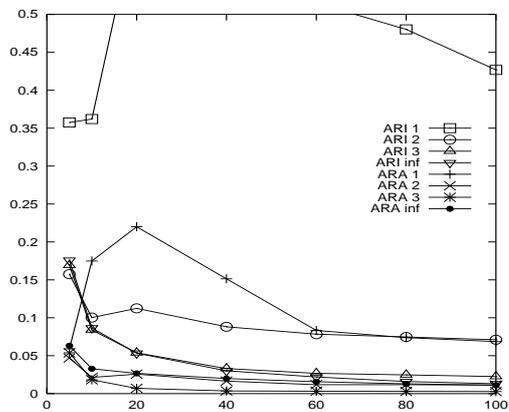


FIG. 4.16 –  $EQM(\hat{\rho}_n)$  fct.  $n$ ,  $\rho = 0.5$

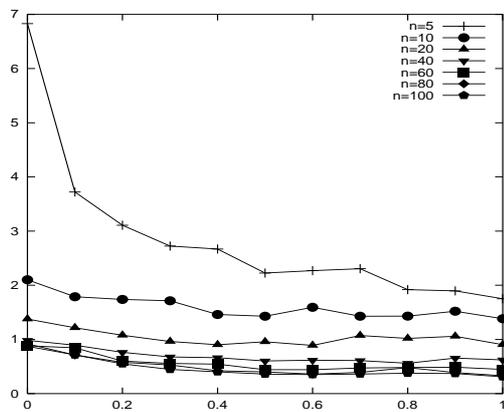


FIG. 4.17 –  $ARI_2: EQM(\hat{\alpha}_n)$  fct.  $\rho$

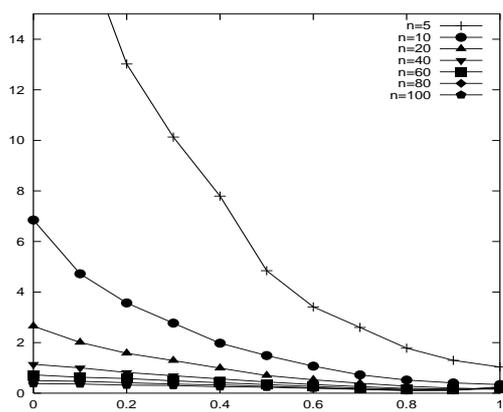


FIG. 4.18 –  $ARI_2: EQM(\hat{\beta}_n)$  fct.  $\rho$

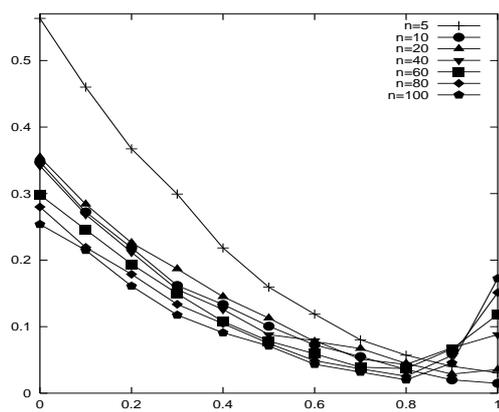


FIG. 4.19 –  $ARI_2: EQM(\hat{\rho}_n)$  fct.  $\rho$

# Le modèle de Brown-Proschan

Dans ce chapitre on va développer de nouveaux résultats sur le modèle de Brown-Proschan. On rappelle que le processus des défaillances d'un modèle BP est excité par une suite de variables aléatoires externes  $B = \{B_i\}_{i \geq 1}$ , indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .  $B_i$  représente l'efficacité de la  $i^{\text{ème}}$  réparation :

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si la maintenance est AGAN} \\ 0 & \text{si la maintenance est ABAO} \end{cases}$$

L'intensité de défaillance du modèle vérifie alors :

$$\lambda_t(N, B) = \lambda(t - T_{N_{t-}} + A_{N_{t-}}) \quad \text{avec } A_0 = 0 \text{ et } A_n = \sum_{j=1}^n \left[ \prod_{k=j}^n (1 - B_k) \right] X_j \text{ pour } n \geq 1$$

où la variable  $X_j$  représente la  $j^{\text{ème}}$  durée inter-défaillances. On va dans un premier temps étudier le comportement du processus des défaillances. Puis on va développer une méthode permettant d'estimer les paramètres du modèle quand on ne connaît pas la valeur des variables aléatoires externes  $B$ .

## 5.1 Comportement du processus des défaillances

Last et Szekli [46] ont prouvé que le processus des défaillances d'une généralisation du modèle de Kijima II (dont le modèle BP fait partie) avait, sous certaines conditions, tendance à se stabiliser. En particulier, pour un modèle BP et à condition que le taux de défaillance soit monotone, la suite des âges effectifs, la suite des âges juste avant maintenance, et la suite des durées d'attente entre deux défaillances convergent en loi vers une limite raisonnable. En utilisant des techniques mathématiques totalement différentes, nous allons pousser un peu plus loin ces résultats et pour les mêmes suites de variables aléatoires nous allons non seulement expliciter les lois limites, mais aussi les lois non asymptotiques, ce que Last et Szekli n'ont pas fait. De plus, dans ce chapitre on suppose uniquement que l'intensité initiale a une primitive  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$  qui est divergente, mais l'intensité initiale peut, entre autres, ne plus être croissante.

### 5.1.1 Les âges virtuels

La propriété suivante donne la loi de l'âge virtuel juste après maintenance ou âge effectif, dans un modèle BP. C'est la base de l'ensemble des résultats de cette section.

#### PROPRIETE 5.1.1 :

Pour un modèle de Brown-Proschan, l'âge virtuel du système juste après la  $n^{\text{ème}}$  maintenance,  $A_n$ , a pour fonction de répartition :

$$F_{A_n}(x) = 1 - (1 - p) \exp(-\Lambda(x)) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (1 - p)^k \frac{\Lambda^k(x)}{k!} \right] \quad (5.3)$$

□

**Démonstration :**

La démonstration de ce résultat est un peu calculatoire et se fait par récurrence. Il est trivial de démontrer que (5.3) est vraie pour  $n = 1$ . Supposons maintenant qu'elle soit vraie au rang  $n$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_{A_n}(x) &= (1-p) \exp(-\Lambda(x)) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^k \lambda(x) \left( \frac{\Lambda^k(x)}{k!} - \frac{\Lambda^{k-1}(x)}{(k-1)!} \right) \right] \\ &= (1-p) \lambda(x) \exp(-\Lambda(x)) \left[ (1-p)^{n-1} \frac{\Lambda^{n-1}(x)}{(n-1)!} + p \sum_{k=0}^{n-2} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(x)}{k!} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

On remarque de plus que  $F_{A_n}(0) = p$ , donc la distribution possède un atome de masse  $p$  en 0. En notant  $\delta_0$  la mesure de Dirac prise en 0, on a donc :

$$dF_{A_n} = p\delta_0 + (1-p) \lambda \exp(-\Lambda) \left[ (1-p)^{n-1} \frac{\Lambda^{n-1}}{(n-1)!} + p \sum_{k=0}^{n-2} (1-p)^k \frac{\Lambda^k}{k!} \right] dx \quad (5.5)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} F_{A_{n+1}}(x) &= p + (1-p) P(X_{n+1} + A_n \leq x | B_{n+1} = 0) \\ &= p + (1-p) \int_0^x [1 - \exp(-\Lambda(x) + \Lambda(v))] dF_{A_n}(v) \\ &= p + p(1-p)(1 - \exp(-\Lambda(x))) + (1-p)^2 \\ &\quad \int_0^x \lambda(v) \left[ (1-p)^{n-1} \frac{\Lambda^{n-1}(v)}{(n-1)!} + p \sum_{k=0}^{n-2} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(v)}{k!} \right] (\exp(-\Lambda(v)) - \exp(-\Lambda(x))) dv \\ &= p + p(1-p)(1 - \exp(-\Lambda(x))) + (1-p)^{n+1}(u_n - v_n) + p \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k+1}(u_k - v_k) \end{aligned} \quad (5.6)$$

avec  $v_k = \exp(-\Lambda(x)) \int_0^x \lambda(v) \frac{\Lambda^{k-1}(v)}{(k-1)!} dv = \frac{\Lambda^k(x)}{k!} \exp(-\Lambda(x))$  pour  $k \geq 1$  et

$$\begin{aligned} u_k &= \int_0^x \lambda(v) \exp(-\Lambda(v)) \frac{\Lambda^{k-1}(v)}{(k-1)!} dv \\ &= \begin{cases} -\frac{\Lambda^{k-1}(x)}{(k-1)!} \exp(-\Lambda(x)) + u_{k-1} = -v_{k-1} + u_{k-1} & \text{pour } k > 1 \\ 1 - \exp(-\Lambda(x)) & \text{pour } k = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Enfin, et à nouveau par récurrence sur  $n$ , on prouve que :

$$(1-p)^{n-1}(u_n - v_n) + p \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}(u_k - v_k) = 1 - \exp(-\Lambda(x)) \left( 1 + \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1} \frac{\Lambda^k(x)}{k!} \right) \quad (5.8)$$

L'équation précédente est vérifiée pour  $n = 1$  :

$$u_1 - v_1 = 1 - \exp(-\Lambda(x)) (1 + \Lambda(x)) \quad (5.9)$$

Supposons que l'équation (5.8) soit vérifiée au rang  $n$ . On a alors :

$$\begin{aligned} &(1-p)^n(u_{n+1} - v_{n+1}) + p \sum_{k=1}^n (1-p)^k(u_k - v_k) \\ &= -(1-p)^n v_{n+1} + (1-p)^{n-1}(u_n - v_n) + p \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^k(u_k - v_k) \end{aligned}$$

$$= 1 - \exp(-\Lambda(x)) \left( 1 + \sum_{k=1}^{n+1} (1-p)^{k-1} \frac{\Lambda^k(x)}{k!} \right) \quad (5.10)$$

En identifiant le résultat de l'équation (5.8) dans l'équation (5.6) on démontre la propriété. ■

La première conséquence évidente de cette propriété est que, si les maintenances ne sont pas toujours ABAO, la suite des âges effectifs converge en loi vers une limite connue.

**COROLLAIRE 5.1.1. :**

Pour un modèle BP, si  $p > 0$ , la suite des âges effectifs  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $A$  de fonction de répartition :

$$F_A(x) = 1 - (1-p) \exp(-p\Lambda(x)) \quad (5.11)$$

□

On peut également déduire très facilement de la propriété précédente la loi et la loi limite des âges virtuels juste avant maintenance.

**COROLLAIRE 5.1.2. :**

Pour un modèle BP, l'âge virtuel juste avant la  $n^{\text{ème}}$  maintenance :

$$A_n^- = A_{n-1} + X_n = X_n + \sum_{j=1}^{n-1} \left[ \prod_{k=j}^{n-1} (1-B_k) \right] X_j \quad (5.12)$$

a pour fonction de répartition :

$$F_{A_n^-}(x) = 1 - \exp(-\Lambda(x)) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(x)}{k!} \right] \quad (5.13)$$

et converge en loi vers une variable aléatoire  $A^-$  de taux de défaillance  $p\lambda(x)$ , si  $p > 0$ . □

**Démonstration :**

Pour démontrer ce corollaire, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} F_{A_n}(x) &= p P(A_n \leq x | B_n = 1) + (1-p) P(A_n \leq x | B_n = 0) \\ &= p + (1-p) P(A_n^- \leq x) = p + (1-p) F_{A_n^-}(x) \end{aligned} \quad (5.14)$$

■

Brown et Proschan [11] ont démontré que le temps d'attente entre deux maintenances parfaites suit une loi ayant pour taux de défaillance  $p\lambda(x)$ . De plus, à tout instant, l'âge virtuel est égal au temps écoulé depuis la dernière maintenance parfaite. On a donc le résultat surprenant que la loi limite des âges virtuels juste avant maintenance est la même que si cette maintenance était parfaite.

Last et Szekli ont démontré d'autres critères de stabilité pour les modèles d'âge virtuel qu'ils ont étudiés. Parmi ces critères il y a la convergence de la suite des espérances des âges virtuels juste avant ou juste après maintenance et la convergence des espérances des durées inter-maintenances. Dans le cadre du modèle BP, on peut justement, grâce à la propriété 5.1.1 et aux corollaires 5.1.1 et 5.1.2, calculer ces espérances et démontrer leur convergence vers une limite connue.

**COROLLAIRE 5.1.3. :**

Pour un modèle BP, si il existe  $\epsilon > 0$  tel que :  $x^{1+\epsilon} \exp(-\Lambda(x)) = o(1)$ , alors :

$$E[A_n^-] = \frac{E[A_n]}{1-p} = \int_0^{+\infty} \exp(-\Lambda(x)) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(x)}{k!} \right] dx \quad (5.15)$$

Et si, en plus,  $p > 0$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[A_n^-] = \int_0^{+\infty} \exp(-p\Lambda(x)) dx \quad (5.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[A_n] = (1-p) \int_0^{+\infty} \exp(-p\Lambda(x)) dx \quad (5.17)$$

□

### Démonstration :

Tout d'abord, on a :  $dF_{A_n} = p\delta_0 + (1-p)dF_{A_n^-}$ . Donc,  $E[A_n^-] = E[A_n]/(1-p)$ .

A l'aide d'une intégration par parties on prouve que l'espérance de  $A_n^-$  existe et est égale à la quantité ci dessous si cette quantité est finie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -x \exp(-\Lambda(x)) \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(x)}{k!} \right]_0^t + \int_0^t \exp(-\Lambda(x)) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(x)}{k!} \right] dx \quad (5.18)$$

Donc l'équation (5.15) est vérifiée si, pour tout  $k \geq 0$ ,  $x\Lambda^k(x)\exp(-\Lambda(x))$  tend vers 0 et est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Cela est vérifié sous l'hypothèse qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que :  $x^{1+\epsilon}\exp(-\Lambda(x)) = o(1)$ . En effet,  $\Lambda(t)$  est alors une fonction croissante divergente et donc :

$$\begin{aligned} x\Lambda^k(x)\exp(-\Lambda(x)) &= x\Lambda^k(x) \exp\left(-\frac{1}{1+\epsilon}\Lambda(x) - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\Lambda(x)\right) \\ &= (x^{1+\epsilon}\exp(-\Lambda(x)))^{\frac{1}{1+\epsilon}} \left(\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\right)^k \left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\Lambda(x)\right)^k \exp\left(-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\Lambda(x)\right) = o(1) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Sous cette même condition et quand  $p > 0$ , on prouve avec la même technique et en utilisant les fonctions de répartition de  $A$  et  $A^-$  que les équations (5.16) et (5.17) sont bien vérifiées. ■

### 5.1.2 Les durées inter-défaillances

Toujours grâce à la propriété 5.1.1, on peut étudier la loi de chacune des durées inter-défaillances en calculant sa fonction de répartition. On retrouve ainsi un autre résultat de Last et Szekli : la convergence en loi et la convergence des espérances des durées inter-défaillances.

#### COROLLAIRE 5.1.4. :

Dans un modèle BP, les durées inter-défaillances, pour  $n \geq 2$ , ont pour fonction de survie :

$$\begin{aligned} S_{X_n}(x) &= (1-p) \int_0^{+\infty} \lambda(v) \exp(-\Lambda(x+v)) \left[ (1-p)^{n-2} \frac{\Lambda^{n-2}(v)}{(n-2)!} + p \sum_{k=0}^{n-3} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(v)}{k!} \right] dv \\ &\quad + p \exp(-\Lambda(x)) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Si, de plus  $p > 0$  et  $\exp(-\Lambda(x)) = o(1)$ , alors elles convergent en loi vers une variable aléatoire  $X$  de fonction de survie :

$$S_X(x) = p \int_0^{+\infty} \lambda(x+v) \exp(-\Lambda(x+v) + (1-p)\Lambda(v)) dv \quad (5.21)$$

□

**Démonstration :**

La première partie de la propriété est très facile à démontrer, il suffit juste de faire un conditionnement par rapport à  $A_n$  et d'utiliser l'équation (5.4). Reste à prouver la convergence.

$$\begin{aligned} & \left| S_{X_n}(x) - p \exp(-\Lambda(x)) - p(1-p) \int_0^{+\infty} \lambda(v) \exp(-\Lambda(x+v) + (1-p)\Lambda(v)) dv \right| \\ &= (1-p) \int_0^{+\infty} \lambda(v) \exp(-\Lambda(x+v)) \left[ \frac{(1-p)^{n-2} \Lambda^{n-2}(v)}{p (n-2)!} + p \sum_{k=n-2}^{+\infty} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(v)}{k!} \right] dv \end{aligned} \quad (5.22)$$

Or, d'une part, comme  $\Lambda$  est croissante et positive,

$$\int_0^{+\infty} \lambda(v) \frac{\Lambda^n(v)}{n!} \exp(-\Lambda(x+v)) dv \leq \int_0^{+\infty} \lambda(v) \frac{\Lambda^n(v)}{n!} \exp(-\Lambda(v)) dv = 1 \quad (5.23)$$

Et d'autre part, grâce au théorème de convergence monotone on a également :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \lambda(v) \exp(-\Lambda(x+v)) \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(v)}{k!} dv \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^k \int_0^{+\infty} \lambda(v) \exp(-\Lambda(x+v)) \frac{\Lambda^k(v)}{k!} dv \\ &\leq \frac{(1-p)^n}{p} \end{aligned} \quad (5.24)$$

En utilisant ces deux résultats dans la première équation de la démonstration on obtient que les durées inter-défaillances convergent en loi vers  $X$  de fonction de survie :

$$S_X(x) = p \exp(-\Lambda(x)) + p(1-p) \int_0^{+\infty} \lambda(v) \exp(-\Lambda(x+v) + (1-p)\Lambda(v)) dv \quad (5.25)$$

A l'aide d'une intégration par parties, on en déduit :

$$\begin{aligned} S_X(x) &= \lim_{v \rightarrow +\infty} \exp(-\Lambda(x+v) + (1-p)\Lambda(v)) \\ &\quad + p \int_0^{+\infty} \lambda(x+v) \exp(-\Lambda(x+v) + (1-p)\Lambda(v)) dv \end{aligned} \quad (5.26)$$

Or, comme  $\Lambda$  est croissante et grâce aux hypothèses, on a :

$$\exp(-\Lambda(x+v) + (1-p)\Lambda(v)) \leq \exp(-p\Lambda(v)) = o(1) \quad (5.27)$$

D'où le résultat. ■

**COROLLAIRE 5.1.5. :**

Dans un modèle BP, si il existe  $\epsilon > 0$  tel que :  $x^{1+\epsilon} \exp(-\Lambda(x)) = o(1)$ , alors l'espérance de la durée moyenne d'attente de la prochaine défaillance vérifie :

$$E[X_n] = \int_0^{+\infty} \exp(-\Lambda(x)) \left[ (1-p)^{n-1} \frac{\Lambda^{n-1}(x)}{(n-1)!} + p \sum_{k=0}^{n-2} (1-p)^k \frac{\Lambda^k(x)}{(k)!} \right] dx \quad (5.28)$$

et si, en plus  $p > 0$ , alors la suite de ces espérances converge vers :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[X_n] = p \int_0^{+\infty} \exp(-p\Lambda(x)) dx \quad (5.29)$$

□

**Démonstration :**

Pour démontrer ce corollaire il suffit de remarquer que :

$$E[X_n] = E[A_n^- - A_{n-1}] = E[A_n^-] - E[A_{n-1}] \quad (5.30) \quad \blacksquare$$

Le résultat le plus intéressant de cette section est sans doute le corollaire 5.1.4 qui donne les lois marginales des durées inter-défaillances successives. La figure 5.1 représente les taux de hasard de ces durées inter-défaillances pour une intensité initiale convexe ( $\lambda(t) = 3t^2$ ) et une efficacité de réparation  $p = 0.3$ . On remarque qu'après une réparation le taux de défaillance de la prochaine durée inter-défaillances a une forme en baignoire. La croissance en  $n$  de la valeur initiale de ce taux de défaillance est due au fait que l'on ne sait pas quel est l'effet de cette réparation sur le système : peut-être est-elle AGAN, peut-être est-elle ABAO. En d'autres termes, juste après une réparation, le système a plus tendance à tomber en panne car on ne sait pas si la réparation a été efficace ou non. Si le système survit suffisamment longtemps après avoir été réparé, il y a de grandes chances que cette dernière réparation ait été parfaite, et le taux de défaillance a donc alors une valeur pratiquement identique à l'intensité initiale. Pour des systèmes industriels importants, on s'attend à observer le même genre d'effet de la réparation.

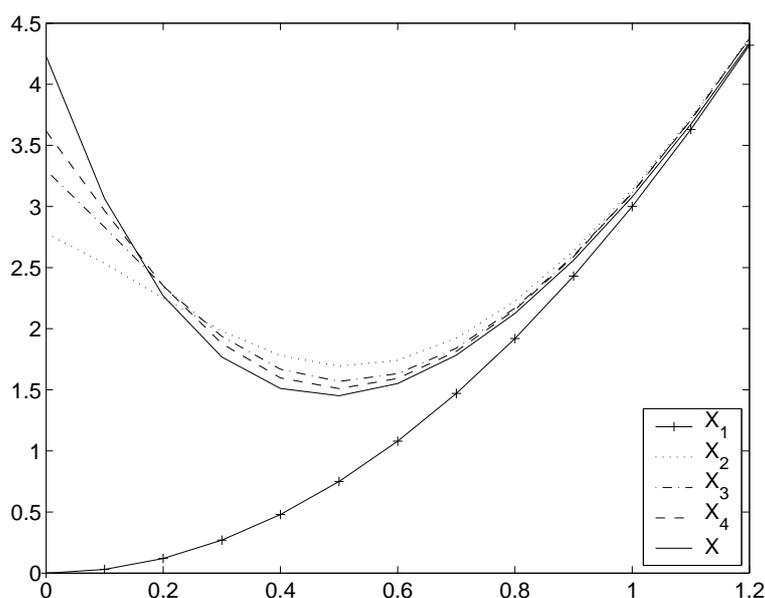


FIG. 5.1 – Taux de hasard des durées inter-défaillances successives dans un modèle BP.

La figure 5.2 montre l'effet du paramètre d'efficacité de réparation  $p$  sur la forme du taux de défaillance asymptotique des durées inter-défaillances (c'est-à-dire sur la forme du taux de défaillance associé à la variable  $X$  définie dans le corollaire 5.1.4). L'effet de la réparation est d'augmenter la valeur initiale de ce taux de défaillance par rapport au taux de défaillance de l'intensité initiale. Cette augmentation est d'autant plus importante que  $p$  est petit. En effet, plus  $p$  est petit et plus on a de chance que la réparation soit ABAO. Cependant on peut remarquer que dans le cas d'intensité initiale concave, cet effet de la réparation n'est pas forcément suffisant pour inverser la convexité de la courbe. Les taux de hasard des durées inter-défaillances n'ont alors pas une forme en baignoire.

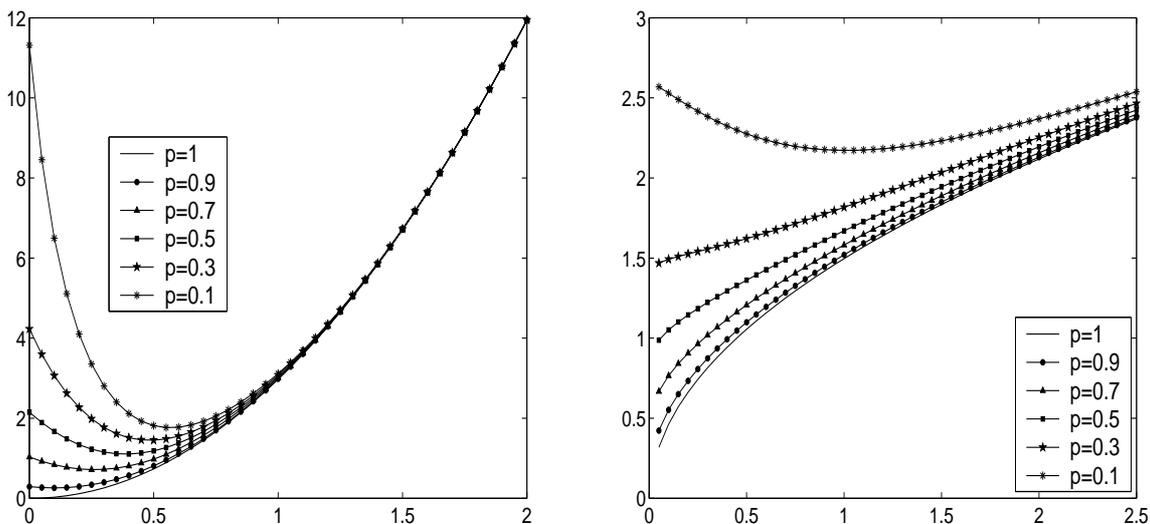


FIG. 5.2 – Influence de  $p$  sur le taux de hasard de  $X$  dans un modèle BP, pour une intensité initiale: à gauche  $\lambda(t) = 3t^2$ , à droite  $\lambda(t) = 1.5\sqrt{t}$ .

### 5.1.3 Influence du passé du processus

En pratique on a généralement déjà observé le système pendant un certain nombre  $i$  de défaillances et réparations. On va maintenant voir quelles sont les conséquences des résultats précédents quand on conditionne par rapport à ce passé.

#### PROPRIETE 5.1.2 :

Pour un modèle BP, où  $\mathcal{H}_i$  représente l'histoire du système jusqu'à l'instant de la  $i^{\text{ème}}$  défaillance (cette histoire peut inclure ou non les  $i - 1$  premiers effets de maintenance), on a pour tout  $n \geq 1$ :

$$\sup_{x \geq 0} |P(V_{i+n} \geq x | \mathcal{H}_i) - P(V_n \geq x)| \leq (1 - p)^n \quad (5.31)$$

avec  $V$  qui peut être remplacé soit par  $X$ , soit par  $A$ , soit par  $A^-$ . □

#### Démonstration :

On note  $\mathbf{R}_{n,i} = \cup_{k=i}^{i+n-1} \{B_k = 1\}$ , c'est-à-dire le fait que le système se renouvelle entre le  $i^{\text{ème}}$  et le  $(i + n)^{\text{ème}}$  instant de défaillance. On a tout d'abord que :

$$P(\mathbf{R}_{n,i}) = 1 - P(\cap_{k=i}^{i+n-1} B_k = 0) = 1 - (1 - p)^n \quad (5.32)$$

Et donc,

$$\begin{aligned} P(V_{i+n} \geq x | \mathcal{H}_i) &= P(V_{i+n} \geq x | \mathcal{H}_i, \mathbf{R}_{n,i}) P(\mathbf{R}_{n,i}) + P(V_{i+n} \geq x | \mathcal{H}_i, \overline{\mathbf{R}_{n,i}}) P(\overline{\mathbf{R}_{n,i}}) \\ &= P(V_{i+n} \geq x | \mathcal{H}_i, \mathbf{R}_{n,i}) + (1 - p)^n [P(V_{i+n} \geq x | \mathcal{H}_i, \overline{\mathbf{R}_{n,i}}) - P(V_{i+n} \geq x | \mathcal{H}_i, \mathbf{R}_{n,i})] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Or,

$$|P(V_{i+n} \geq x | \mathcal{H}_i, \overline{\mathbf{R}_{n,i}}) - P(V_{i+n} \geq x | \mathcal{H}_i, \mathbf{R}_{n,i})| \leq 1 \quad (5.34)$$

Après une maintenance AGAN, le système oublie le passé du processus des défaillances donc :

$$P(V_{i+n} \geq x | \mathcal{H}_i, \mathbf{R}_{n,i}) = P(V_{i+n} \geq x | \mathbf{R}_{n,i}) \quad (5.35)$$

et son comportement est similaire à celui d'un système neuf, donc :

$$P(V_{i+n} \geq x | \mathbf{R}_{n,i}) = P(V_n \geq x | \mathbf{R}_{n,0}) = P(V_n \geq x) \quad (5.36)$$

D'où le résultat. ■

**PROPRIETE 5.1.3 :**

Pour un modèle BP, si l'intensité initiale est croissante et qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que :  
 $x^{1+\epsilon} \exp(-\Lambda(x)) = o(1)$ , alors avec les mêmes notations que la propriété 5.1.2, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad E[X_{i+n}|\mathcal{H}_i] = E[X_n] + O((1-p)^n) \quad (5.37)$$

□

**Démonstration :**

Le théorème de Fubini pour des fonctions positives nous permet d'écrire :

$$E[X_{i+n}|\mathcal{H}_i] = \int_0^\infty S_{X_{i+n}|\mathcal{H}_i}(x) dx \quad (5.38)$$

Et en utilisant les résultats de la démonstration de la propriété 5.1.2, on a :

$$E[X_{i+n}|\mathcal{H}_i] - E[X_n] = (1-p)^n \left[ \int_0^\infty P(X_{i+n} > x | \mathcal{H}_i, \overline{\mathbf{R}_{n,i}}) dx - \int_0^\infty P(X_n > x) dx \right] \quad (5.39)$$

Or, comme l'intensité initiale est croissante on a pour tout  $x \geq 0$  :

$$S_{X_n}(x) \leq S_{X_n|B_{n-1}=1}(x) = S_{X_1}(x) = \exp(-\Lambda(x)) \quad (5.40)$$

De plus, pour tout  $x \geq 0$  on a :

$$S_{X_{i+n}|\mathcal{H}_i, \overline{\mathbf{R}_{n,i}}}(x) \leq S_{X_{i+n}|B_{i+n-1}=1}(x) = S_{X_1}(x) \quad (5.41)$$

On démontre la propriété car  $E[X_1] = O(1)$ . ■

Les comportements des processus des défaillances d'un modèle de Brown-Proshan et d'un modèle  $ARI_m$  ou  $ARA_m$  de mémoire finie sont donc complètement différents. Les modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$  de mémoire finie, malgré l'effet des maintenances correctives, correspondent à des systèmes qui s'usent, puisque l'intensité de défaillance est toujours supérieure à l'intensité d'usure minimale. Alors que le modèle de Brown-Proshan a tendance à s'apparenter asymptotiquement à un processus de renouvellement : l'effet des maintenances tend à stabiliser l'usure du système. Pour autant l'effet des maintenances ne tend pas à être AGAN. En effet, d'une part, la loi asymptotique des temps inter-défaillances n'est pas la même que celle du système à l'état neuf. D'autre part, le passé immédiat du processus des défaillances semble toujours pouvoir influencer de façon significative la probabilité de défaillance (propriété 5.1.2).

## 5.2 Estimation dans un modèle BP

### 5.2.1 Identifiabilité de l'efficacité de réparation quand l'effet des réparations est inconnu

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, la plupart des travaux d'estimation dans les modèles de maintenance imparfaite supposent que l'efficacité de maintenance est connue. Dans le cas BP, cela signifie que les valeurs des variables externes  $B$  sont connues et donc que l'on sait quelle maintenance est parfaite et quelle maintenance est minimale. Il ne reste alors plus à estimer que les paramètres de l'intensité initiale c'est-à-dire de la loi du premier instant de défaillance. Or, dans la pratique il est douteux que l'on puisse connaître avec certitude les effets des maintenances. Les variables aléatoires  $B$  sont donc des variables cachées.

Le fait que peu d'auteurs se soient intéressés au problème d'estimation quand les variables  $B$  sont cachées, est sans doute lié à l'article de Whitaker et Samaniego [73]. Dans ce tout

premier article publié sur les méthodes d'estimation dans le modèle BP, les auteurs ont mis en évidence un problème d'identifiabilité pour  $p$  dans le cas où les variables  $B$  sont cachées et la durée d'attente de la première défaillance est de loi exponentielle. Comme nous l'avons déjà souligné, cela est logique en raison de l'absence de mémoire de la loi exponentielle. Si l'on omet ce cas pathologique, le paramètre d'efficacité de réparation est, comme nous allons le montrer, parfaitement identifiable, même pour des variables  $B$  cachées.

Tout d'abord, l'intensité initiale est identifiable puisqu'elle correspond au taux de hasard du premier instant de défaillance  $T_1$ . Pour prouver que  $p$  est lui aussi identifiable on calcule la densité jointe des deux premières durées inter-défaillances. On note  $f_{X|Y=y}(x)$  la densité conditionnelle de  $X$  sachant  $Y = y : \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1/\Delta x P(x < X \leq x + \Delta x | Y = y)$ .

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= p f_{X_1, X_2|B_1=1}(x_1, x_2) + (1-p) f_{X_1, X_2|B_1=0}(x_1, x_2) \\ &= p f_{X_2|B_1=1}(x_2) f_{X_1}(x_1) + (1-p) f_{X_2|B_1=0, X_1=x_1}(x_2) f_{X_1}(x_1) \end{aligned}$$

Or,

$$f_{X_2|B_1=1}(x_2) = f_{X_1}(x_2) = \lambda(x_2) \exp(-\Lambda(x_2)) \quad (5.42)$$

Et,

$$f_{X_2|B_1=0, X_1=x_1}(x_2) = \lambda(x_2 + x_1) \exp(-\Lambda(x_2 + x_1) - \Lambda(x_1)) \quad (5.43)$$

Donc

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \lambda(x_1)\lambda(x_1 + x_2) \exp(-\Lambda(x_1 + x_2)) \\ &\quad + p\lambda(x_1)[\lambda(x_2) \exp(-\Lambda(x_1) - \Lambda(x_2)) - \lambda(x_1 + x_2) \exp(-\Lambda(x_1 + x_2))] \end{aligned} \quad (5.44)$$

Ainsi,  $p$  n'est pas identifiable si et seulement si, pour tout  $x_1 \geq 0$  et  $x_2 \geq 0$ ,

$$\lambda(x_2) \exp(-\Lambda(x_1) - \Lambda(x_2)) = \lambda(x_1 + x_2) \exp(-\Lambda(x_1 + x_2))$$

En prenant la primitive par rapport à  $x_2$  des deux membres de cette équation, on prouve donc que  $p$  n'est pas identifiable si et seulement si, pour tout  $x_1 \geq 0$  et  $x_2 \geq 0$ ,

$$\Lambda(x_1) + \Lambda(x_2) = \Lambda(x_1 + x_2) \quad (5.46)$$

Donc, si la première durée inter-défaillances est supposée de loi non exponentielle, le paramètre d'efficacité de réparation est identifiable.

En pratique on peut considérer que les systèmes en l'absence de maintenances s'usent. L'intensité initiale ne peut donc pas correspondre à une loi exponentielle et le problème d'identifiabilité n'a pas lieu d'être. Dans un cadre paramétrique, on peut donc alors s'intéresser à l'estimation des paramètres de l'intensité initiale et d'efficacité de réparation dans le cas où les variables  $B$  sont cachées.

Une idée proposée par Lim [52] est d'utiliser l'algorithme EM spécialement conçu pour faire de l'estimation dans des modèles dépendants de variables cachées. Lim, Lu et Park [51] ont proposé une autre méthode, basée sur l'analyse bayésienne, et qui consiste à donner au paramètre  $p$  d'efficacité de maintenance une loi a priori de type bêta.

Nous proposons une autre approche qui consiste à calculer une caractérisation du modèle ne faisant pas intervenir les valeurs des variables externes  $B$ . Langseth et Lindqvist [45] se sont intéressés à une méthode similaire mais se sont trompés dans le calcul de la vraisemblance du modèle. Cette nouvelle approche, contrairement à la méthode proposée par Lim, présente l'avantage de pouvoir être généralisée, au moins d'un point de vue théorique, au cas d'autres modèles pour lesquels le processus des défaillances dépend aussi de variables externes. Elle permet, de plus, le calcul de la loi conditionnelle des temps inter-défaillances. Cette loi, plus complexe à étudier que celle de la section précédente, a néanmoins l'avantage de nous renseigner sur la dépendance existant entre les différentes durées inter-défaillances.

### 5.2.2 Théorème d'innovation et intensité propre

L'idée de cette section est donc de proposer une méthode permettant d'estimer les paramètres d'un modèle de maintenance imparfaite pour lequel le processus des défaillances dépend de variables aléatoires externes dont on ne connaît pas les valeurs. En fait, même quand des variables externes  $B$  influencent le processus des défaillances, celui-ci peut malgré tout être vu comme un processus ponctuel auto-excité. Le lien entre les intensités de défaillance :

$$\lambda_t(N, B) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t-} = 1 | N_{t-}, \mathbf{T}_{N_{t-}}, \mathbf{B}_{N_{t-}})$$

et

$$\lambda_t(N) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t-} = 1 | N_{t-}, \mathbf{T}_{N_{t-}})$$

aussi notée plus simplement  $\lambda_t = \lambda_t(N)$ , est fait grâce au théorème d'innovation [3].

**THEOREME 5.2.1 (Théorème d'innovation).**

Soient  $\mathcal{H}_t^1$  et  $\mathcal{H}_t^2$  deux filtrations telles que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{H}_t^2 \subseteq \mathcal{H}_t^1$ . Soit  $N$  un processus de comptage d'intensité de défaillance  $\lambda_t(\mathcal{H}^1)$  par rapport à la plus large des deux filtrations. Alors,  $N$  possède une intensité de défaillance  $\lambda_t(\mathcal{H}^2)$ , par rapport à la plus petite des filtrations, et elle vérifie :

$$\lambda_t(\mathcal{H}^2) = E [\lambda_t(\mathcal{H}^1) | \mathcal{H}_{t-}^2] \quad (5.47)$$

où  $\mathcal{H}_{t-}^2 = \bigcup_{s < t} \mathcal{H}_s^2$ . □

Dans le cas d'un modèle de maintenance imparfaite, influencé par des variables aléatoires externes, comme le modèle BP, on a ainsi :

$$\lambda_t = E [\lambda_t(N, B) | \sigma(\{N_s\}_{0 \leq s < t})] \quad (5.48)$$

$\lambda_t$  est l'intensité de défaillance du processus ponctuel auto-excité. On peut rajouter, pour éviter les confusions, le qualificatif d'intensité de défaillance propre pour  $\lambda_t$ , par opposition à l'intensité que l'on qualifiera de relative (au processus externe) qu'est  $\lambda_t(N, B)$ . Le processus des défaillances peut donc être considéré comme un processus ponctuel auto-excité d'intensité de défaillance  $\lambda_t$ . On peut lui appliquer tous les résultats connus sur ce type de processus. En particulier, dans le cadre d'une approche paramétrique, on peut faire de l'estimation grâce à la fonction de log-vraisemblance de l'équation (1.11).

Comme le montre la propriété suivante, l'intensité de défaillance propre se calcule de façon récursive en fonction des valeurs de l'intensité et de l'intensité cumulée de défaillance aux instants de maintenance précédents. Pourtant, dans l'équation ci-dessous, d'un point de vue complexité de calcul, c'est plus le produit à l'intérieur de la somme, que le caractère récursif du calcul qui pose problème.

**PROPRIETE 5.2.1 :**

L'intensité de défaillance propre d'un modèle BP vérifie :

$$\lambda_t = \frac{-d}{dt} \left[ \ln \left( \sum_{j=0}^{N_{t-}} p^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}} (1-p)^{N_{t-}-j} \left[ \prod_{i=j+1}^{N_{t-}} \frac{\lambda(T_i - T_j)}{\lambda_{T_i}} \right] \exp(-\Lambda(t - T_j) - \Lambda_{T_j}) \right) \right] \quad (5.49)$$

□

**Démonstration :**

Par convention on note  $B_0 = 1$ . L'idée de la démonstration est de conditionner le calcul par rapport à l'instant de la dernière maintenance parfaite. On note donc  $\mathbf{B}_{k,j}$ , pour  $k \leq j$ , l'événement :

la  $j^{\text{ème}}$  maintenance est parfaite et les suivantes, jusqu'à la  $k^{\text{ème}}$  comprise, sont minimales :  $\mathbf{B}_{k,j} = \{\{B_j = 1\}, \{B_i = 0\}_{\{j < i \leq k\}}\}$ . Le théorème d'innovation implique que :

$$\begin{aligned} \lambda_t &= E[\lambda_t(N, B) | N_{t-}, \mathbf{T}_{N_{t-}}] \\ &= \sum_{j=0}^{N_{t-}} E[\lambda_t(N, B) | \mathbf{B}_{N_{t-},j}, N_{t-}, \mathbf{T}_{N_{t-}}] P(\mathbf{B}_{N_{t-},j} | N_{t-}, \mathbf{T}_{N_{t-}}) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Langseth et Lindqvist n'ont pas utilisé le théorème d'innovation, mais leur erreur a été de considérer que pour  $N_{t-} \geq j$ ,  $P(\mathbf{B}_{N_{t-},j} | N_{t-}, \mathbf{T}_{N_{t-}}) = p^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}}(1-p)^{N_{t-}-j}$ , c'est-à-dire que l'efficacité de la  $i^{\text{ème}}$  maintenance,  $B_i$ , et l'instant de la  $j^{\text{ème}}$  maintenance,  $T_j$  sont indépendants pour  $j > i$ . En effet,  $B_i$  et  $T_j$  sont indépendants, mais uniquement pour  $j \leq i$  : l'effet aléatoire de la maintenance dans un modèle BP est indépendant de l'histoire du processus des défaillances mais uniquement jusqu'à l'instant de la maintenance considérée.

Par définition de  $B_{k,j}$  le temps écoulé à l'instant  $t$  depuis la dernière maintenance parfaite est  $t - T_j$ , donc  $E[\lambda_t(N, B) | \mathbf{B}_{N_{t-},j}, N_{t-}, \mathbf{T}_{N_{t-}}] = \lambda(t - T_j)$ .

Pour  $N_{t-} = 0$  il est trivial de montrer que la propriété 5.2.1 est vérifiée. Pour  $N_{t-} \geq 1$  et  $N_{t-} \geq j$ , on utilise la formule de Bayes pour sortir du conditionnement  $N_{t-}$  dans  $P(\mathbf{B}_{N_{t-},j} | N_{t-}, \mathbf{T}_{N_{t-}})$ . Pour ce faire il faut néanmoins passer d'un conditionnement par rapport à la variable aléatoire  $N_{t-}$  à un conditionnement par rapport à l'événement  $N_{t-} = n$ , avec  $n \geq 1$  et  $n \geq j$ . En remarquant que cet événement  $N_{t-} = n$  est le même que  $T_{n+1} \geq t$ , on obtient donc :

$$P(\mathbf{B}_{n,j} | N_{t-} = n, \mathbf{T}_n) = P(\mathbf{B}_{n,j} | \mathbf{T}_n) \frac{P(T_{n+1} \geq t | \mathbf{T}_n, \mathbf{B}_{n,j})}{P(T_{n+1} \geq t | \mathbf{T}_n)} \quad (5.51)$$

Or, d'après les considérations précédentes,  $B_n$  et  $\mathbf{T}_n$  sont indépendants. Donc, en notant  $\widetilde{p}_{k,j} = P(B_k = \mathbb{1}_{\{j=k\}}) = p^{\mathbb{1}_{\{j=k\}}}(1-p)^{\mathbb{1}_{\{j \neq k\}}}$ , on a :

$$P(\mathbf{B}_{n,j} | \mathbf{T}_n) = \widetilde{p}_{n,j} [P(\mathbf{B}_{n-1,j} | \mathbf{T}_n)]^{\mathbb{1}_{\{n>j\}}} \quad (5.52)$$

De plus, il est bien connu que pour un processus ponctuel auto-excité la fonction de survie vérifie :

$$P(T_{n+1} \geq t | \mathbf{T}_n) = \exp\left(-\int_{T_n}^t \lambda_s ds\right) \quad (5.53)$$

Cette formule se généralise simplement au cas d'un processus excité par un processus externe :

$$P(T_{n+1} \geq t | \mathbf{T}_n, \mathbf{B}_{n,j}) = \exp\left(-\int_{T_n}^t \lambda_s(N, B) ds\right) \quad (5.54)$$

Ce qui implique, compte-tenu de la signification de  $B_{n,k}$ ,

$$P(T_{n+1} \geq t | \mathbf{T}_n, \mathbf{B}_{n,j}) = \exp\left(-\int_{T_n}^t \lambda(s - T_j) ds\right) \quad (5.55)$$

Finalement, en injectant ces résultats dans l'équation (5.51) on obtient en repassant à un conditionnement par rapport à la variable aléatoire  $N_{t-}$  :

$$P(\mathbf{B}_{N_{t-},j} | N_{t-}, \mathbf{T}_{N_{t-}}) = \widetilde{p}_{N_{t-},j} [P(\mathbf{B}_{N_{t-}-1,j} | \mathbf{T}_{N_{t-}})]^{\mathbb{1}_{\{N_{t-}>j\}}} \frac{\exp\left(-\int_{T_{N_{t-}}}^t \lambda(s - T_j) ds\right)}{\exp\left(-\int_{T_{N_{t-}}}^t \lambda_s ds\right)} \quad (5.56)$$

Pour  $k \geq 2$  et  $k \geq j$  on a :

$$P(\mathbf{B}_{k,j} | \mathbf{T}_{k+1}) = P(\mathbf{B}_{k,j} | \mathbf{T}_k) \frac{f_{T_{k+1}|\mathbf{T}_k, \mathbf{B}_{k,j}}(T_{k+1})}{f_{T_{k+1}|\mathbf{T}_k}(T_{k+1})} \quad (5.57)$$

Des formules (5.53) et (5.54) on déduit très simplement que :

$$f_{T_{k+1}|\mathbf{T}_k}(T_{k+1}) = \lambda_{T_{k+1}} \exp\left(-\int_{T_k}^{T_{k+1}} \lambda_s ds\right) \quad (5.58)$$

$$f_{T_{k+1}|\mathbf{T}_k, \mathbf{B}_{k,j}}(T_{k+1}) = \lambda_{T_{k+1}}(N, B) \exp\left(-\int_{T_k}^{T_{k+1}} \lambda_s(N, B) ds\right) \quad (5.59)$$

Avec la même méthode que précédemment on a donc :

$$P(\mathbf{B}_{k,j} | \mathbf{T}_{k+1}) = \widetilde{p}_{k,j} [P(\mathbf{B}_{k-1,j} | \mathbf{T}_k)]^{\mathbf{1}_{\{k>j\}}} \frac{\lambda(T_{k+1} - T_j) \exp\left(-\int_{T_k}^{T_{k+1}} \lambda(s - T_j) ds\right)}{\lambda_{T_{k+1}} \exp\left(-\int_{T_k}^{T_{k+1}} \lambda_s ds\right)} \quad (5.60)$$

A l'aide des équations (5.56) et (5.60) on obtient donc récursivement que :

$$P(\mathbf{B}_{N_{t-},j} | N_{t-}, \mathbf{T}_{N_{t-}}) = p^{\mathbf{1}_{\{j>0\}}} (1-p)^{N_{t-}-j} \prod_{i=j+1}^{N_{t-}} \left[ \frac{\lambda(T_i - T_j)}{\lambda_{T_i}} \right] \exp(-\Lambda(t - T_j) + \Lambda_t - \Lambda_{T_j}) \quad (5.61)$$

En injectant ce résultat dans l'équation (5.50) on obtient que l'intensité de défaillance propre vérifie :

$$\lambda_t = \sum_{j=0}^{N_{t-}} p^{\mathbf{1}_{\{j>0\}}} (1-p)^{N_{t-}-j} \lambda(t - T_j) \prod_{i=j+1}^{N_{t-}} \left[ \frac{\lambda(T_i - T_j)}{\lambda_{T_i}} \right] \exp(-\Lambda(t - T_j) + \Lambda_t - \Lambda_{T_j}) \quad (5.62)$$

Mais cette formule n'est pas satisfaisante car  $\lambda_t$  s'exprime à l'aide de  $\Lambda_t$ . Il faut donc la réécrire. Pour cela, on remarque, en notant,

$$S_{n,j} = p^{\mathbf{1}_{\{j>0\}}} (1-p)^{n-j} \prod_{i=j+1}^n \left[ \frac{\lambda(T_i - T_j)}{\lambda_{T_i}} \right] \exp(-\Lambda_{T_j}) \quad (5.63)$$

que :

$$\lambda_t \exp(-\Lambda_t) = \sum_{j=0}^{N_{t-}} \lambda(t - T_j) \exp(-\Lambda(t - T_j)) S_{N_{t-},j} \quad (5.64)$$

En intégrant l'équation précédente entre  $T_{N_{t-}}$  et  $t$ , et en remarquant que  $N_{s-} = N_{t-}$  pour  $T_{N_{t-}} < s < t$ , on obtient :

$$\exp(-\Lambda_t) - \exp(-\Lambda_{T_{N_{t-}}}) = \sum_{j=0}^{N_{t-}} S_{N_{t-},j} [\exp(-\Lambda(t - T_j)) - \exp(-\Lambda(T_{N_{t-}} - T_j))] \quad (5.65)$$

Or, en évaluant l'équation (5.64) en  $t = T_{N_{t-}}$  et en remarquant que  $N_{T_{N_{t-}}-} = N_{t-} - 1$ , on obtient également :

$$\exp(-\Lambda_{T_{N_{t-}}}) = \sum_{j=0}^{N_{t-}-1} \frac{\lambda(T_{N_{t-}} - T_j)}{\lambda_{T_{N_{t-}}}} \exp(-\Lambda(T_{N_{t-}} - T_j)) S_{N_{t-}-1,j} \quad (5.66)$$

Mais,

$$\frac{S_{N_{t-},j}}{1-p} = \frac{\lambda(T_{N_{t-}} - T_j)}{\lambda_{T_{N_{t-}}}} S_{N_{t-}-1,j} \quad (5.67)$$

Donc

$$\exp(-\Lambda_{T_{N_{t^-}}}) = \frac{1}{1-p} \sum_{j=0}^{N_{t^-}-1} S_{N_{t^-},j} \exp(-\Lambda(T_{N_{t^-}} - T_j)) \quad (5.68)$$

Et en additionnant et soustrayant dans le membre de droite de l'équation précédente le terme :

$$\frac{1}{1-p} S_{N_{t^-},N_{t^-}} \exp(-\Lambda(T_{N_{t^-}} - T_{N_{t^-}})) = \frac{p}{1-p} \exp(-\Lambda_{T_{N_{t^-}}}) \quad (5.69)$$

on obtient :

$$\exp(-\Lambda_{T_{N_{t^-}}}) = \frac{1}{1-p} \left[ \sum_{j=0}^{N_{t^-}} S_{N_{t^-},j} \exp(-\Lambda(T_{N_{t^-}} - T_j)) \right] - \frac{p}{1-p} \exp(-\Lambda_{T_{N_{t^-}}}) \quad (5.70)$$

On en déduit que :

$$\exp(-\Lambda_{T_{N_{t^-}}}) = \sum_{j=0}^{N_{t^-}} S_{N_{t^-},j} \exp(-\Lambda(T_{N_{t^-}} - T_j)) \quad (5.71)$$

Et en utilisant ce résultat dans l'équation (5.65) on obtient que :

$$\exp(-\Lambda_t) = \sum_{j=0}^{N_{t^-}} S_{N_{t^-},j} \exp(-\Lambda(t - T_j)) \quad (5.72)$$

Enfinement la propriété est prouvée en prenant le logarithme et en dérivant l'équation ci dessus. ■

Il est également très facile de déduire de l'équation (5.72) et de (1.13) la loi des temps inter-défaillances, connaissant l'histoire propre du processus des défaillances.

#### **COROLLAIRE 5.2.1. :**

Pour un modèle BP, le processus des défaillances vérifie :

$$P(X_{n+1} > x | \mathbf{T}_n) = \sum_{j=0}^n p^{\mathbf{1}_{\{x>0\}}} (1-p)^{n-j} \prod_{i=j+1}^n \left[ \frac{\lambda(T_i - T_j)}{\lambda_{T_i}} \right] \exp(-\Lambda(x + T_n - T_j) + \Lambda_{T_n} - \Lambda_{T_j}) \quad (5.73)$$

□

Les résultats des corollaires 5.1.4 et 5.2.1 sont très différents. Le corollaire 5.1.4 donnait la loi marginale des durées inter-défaillances successives. Cela nous a permis, simplement, de mieux comprendre l'évolution du processus des défaillances. Le corollaire précédent donne, lui, la loi conditionnelle des durées inter-défaillances successives. Ces lois définissent complètement le processus des défaillances mais sont beaucoup plus complexes à étudier.

La figure 5.3 représente, pour un modèle BP d'intensité initiale  $\lambda(t) = 3t^2$  et de paramètre  $p = 0.5$ , en pointillés l'intensité de défaillance relative,  $\lambda_t(N, B)$ , et en trait plein l'intensité de défaillance propre,  $\lambda_t$ . Les instants de maintenance minimale sont symbolisés par des cercles et ceux de maintenance parfaite par des étoiles. Après une réparation, l'intensité de défaillance propre semble avoir une forme en baignoire (comme le taux de défaillance des durées inter-défaillances). Si le temps écoulé depuis la précédente réparation est suffisamment long, l'intensité de défaillance propre est égale à l'intensité initiale à l'instant  $t - T_{N_{t^-}}$ . Après une réparation, la forme de l'intensité de défaillance propre durant la période que l'on pourrait qualifier de jeunesse dépend des instants de défaillance précédents. Ainsi, si la durée inter-défaillances précédente est suffisamment importante, la longueur de la période de jeunesse semble être moins importante.

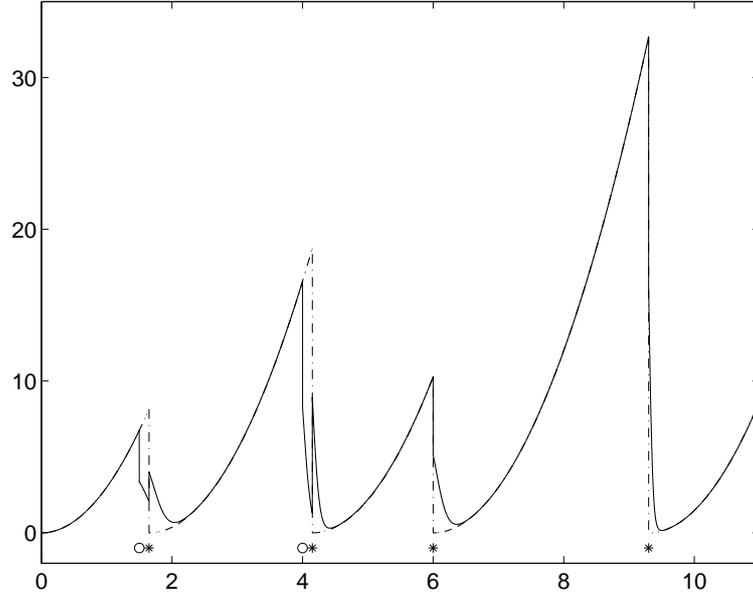


FIG. 5.3 – Intensité de défaillance propre et relative d'un modèle BP.

### 5.2.3 Vraisemblance propre

Grâce à cette intensité de défaillance propre, on peut avoir accès à la fonction de vraisemblance associée à l'observation des instants de maintenance sans supposer connus leurs effets. On qualifiera également cette vraisemblance de vraisemblance propre.

#### PROPRIETE 5.2.2 :

Dans un modèle BP, la fonction de vraisemblance associée à une unique observation du processus des défaillances sur  $[0, t[$  vérifie :

$$L_t(\theta) = (1-p)^{N_t-} \left[ \prod_{i=1}^{N_t-} \lambda(T_i) \right] \lambda(t)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} \exp(-\Lambda(t)) + p \left[ \sum_{j=1}^{N_t-} (1-p)^{N_t-j} \left[ \prod_{i=j+1}^{N_t-} \lambda(T_i - T_j) \right] \lambda(t - T_j)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} \exp(-\Lambda(t - T_j)) L_{T_j}(\theta) \right] \quad (5.74)$$

où  $\theta$  représente les paramètres à estimer, c'est-à-dire  $p$  et les paramètres de l'intensité initiale,  $\lambda$ .  $\square$

**Démonstration :**

$$L_t(\theta) = \left[ \prod_{i=1}^{N_t} \lambda_{T_i} \right] \exp(-\Lambda_t) = \left[ \prod_{i=1}^{N_t-} \lambda_{T_i} \right] \lambda_t^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} \exp(-\Lambda_t) \quad (5.75)$$

Si  $t = T_{N_t}$ , on remplace dans l'expression précédente  $\lambda_t \exp(-\Lambda_t)$  par sa valeur dans l'équation (5.64). Sinon, on remplace  $\exp(-\Lambda_t)$  par sa valeur dans l'équation (5.72). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
L_t(\theta) &= \sum_{j=0}^{N_t-} p^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}} \lambda(t - T_j)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} \exp(-\Lambda(t - T_j)) \\
&\quad (1-p)^{N_t-j} \left[ \prod_{i=j+1}^{N_t-} \lambda(T_i - T_j) \right] \left[ \prod_{i=1}^j \lambda_{T_i} \right] \exp(-\Lambda_{T_j}) \\
&= \lambda(t)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} \exp(-\Lambda(t)) (1-p)^{N_t-} \left[ \prod_{i=1}^{N_t-} \lambda(t - T_j) \right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_t-} p \lambda(t - T_j)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} \exp(-\Lambda(t - T_j)) \\
&\quad (1-p)^{N_t-j} \left[ \prod_{i=j+1}^{N_t-} \lambda(T_i - T_j) \right] \left[ \prod_{i=1}^j \lambda_{T_i} \right] \exp(-\Lambda_{T_j}) \tag{5.76}
\end{aligned}$$

Et la propriété est démontrée du fait que :  $L_{T_j}(\theta) = \left[ \prod_{i=1}^j \lambda_{T_i} \right] \exp(-\Lambda_{T_j})$ . ■

Contrairement à ce qu'on observe sur beaucoup de modèles, le fait de prendre la log-vraisemblance ne simplifie pas du tout les choses dans le cas BP. Pour autant on peut malgré tout calculer la valeur des dérivées partielles de la vraisemblance, comme le montre le corollaire suivant. Ce calcul reste itératif.

**COROLLAIRE 5.2.2. :**

Dans un modèle BP, les dérivées partielles de la vraisemblance par rapport au paramètre  $p$  d'efficacité de maintenance et aux paramètres  $\theta_i$  (pour  $1 \leq i \leq q-1$ ), de l'intensité initiale, vérifient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_t(\theta)}{\partial p} &= -N_{t-} (1-p)^{N_t-1} \left[ \prod_{i=1}^{N_t-} \lambda(T_i) \right] \lambda(t)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} \exp(-\Lambda(t)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_t-} (1-p)^{N_t-j-1} \left[ \prod_{i=j+1}^{N_t-} \lambda(T_i - T_j) \right] \lambda(t - T_j)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} \exp(-\Lambda(t - T_j)) \\
&\quad \left[ (1 - (N_{t-} - j + 1)p) L_{T_j}(\theta) + p(1-p) \frac{\partial L_{T_j}(\theta)}{\partial p} \right] \tag{5.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_t(\theta)}{\partial \theta_i} &= -(1-p)^{N_t-} P_{t,0} + p \sum_{j=1}^{N_t-} (1-p)^{N_t-j} \left( P_{t,j} L_{T_j}(\theta) \right. \\
&\quad \left. + \left[ \prod_{i=j+1}^{N_t-} \lambda(T_i - T_j) \right] \lambda(t - T_j)^{\mathbb{1}_{\{t=T_{N_t}\}}} \exp(-\Lambda(t - T_j)) \frac{\partial L_{T_j}(\theta)}{\partial \theta_i} \right) \tag{5.78}
\end{aligned}$$

avec

$$P_{t,j} = \left[ \sum_{k=j+1}^{N_{t-}} \frac{\prod_{i=j+1}^{N_{t-}} \lambda(T_i - T_j)}{\lambda(T_k - T_j)} \frac{\partial \lambda(T_k - T_j)}{\partial \theta_i} + \left( \frac{\partial \lambda(t - T_j)}{\partial \theta_i} - \lambda(t - T_j)^2 \right) \left[ \prod_{i=j+1}^{N_{t-}} \lambda(T_i - T_j) \right] \right] \exp(-\Lambda(t - T_j)) \quad (5.79) \quad \square$$

On peut montrer que le calcul de la vraisemblance et de ces dérivées partielles a (en le programmant efficacement) une complexité en  $O(n^2)$ . La méthode proposée par Lim et basée sur l'algorithme EM a elle aussi une complexité en  $O(n^2)$  (si l'on ne tient pas compte du nombre d'itérations nécessaires aux maximisations des paramètres). L'estimateur trouvé à l'aide de la méthode EM doit converger (sous certaines conditions dont Lim n'a pas prouvé qu'elles étaient vérifiées dans le cas du modèle BP) vers l'estimateur de maximum de vraisemblance. En un certain sens, la méthode de Lim peut donc être comprise comme un algorithme asymptotique de maximisation de notre vraisemblance propre. Connaissant la vraisemblance propre on peut imaginer d'autres méthodes de calcul des estimateurs de maximum de vraisemblance, comme une méthode de Newton ou tout simplement en calculant toutes les valeurs de la vraisemblance propre sur une grille.

---

# *Conclusion de la première partie*

---

Dans cette première partie, nous avons proposé deux nouvelles classes de modèles de réparation imparfaite : les modèles à réduction arithmétique de l'âge (ARA) ou de l'intensité (ARI) de mémoire  $m$ . Les modèles  $ARI_m$  et  $ARA_m$  englobent des modèles déjà existant comme ceux de Malik, de Brown-Mahoney-Silvazlian et de Chan-Shaw, et en proposent de nouveaux. La mémoire reflète une propriété markovienne des modèles : c'est le nombre maximal d'instant de défaillance précédents qui peuvent influencer l'intensité de défaillance. On a démontré que des mémoires finies correspondent à des systèmes dont la maintenance n'est pas suffisante pour stabiliser l'usure. En effet, asymptotiquement leur intensité de défaillance est équivalente à celle d'un processus de Poisson non homogène d'intensité croissante. Pour des modèles ARI et ARA de mémoire finie, on a proposé des estimateurs explicites pour le paramètre d'efficacité de réparation. Pour la première fois, on a démontré des résultats statistiques théoriques sur l'estimation de l'efficacité de la maintenance. Ainsi, on a prouvé que, dans le cas où l'usure du système en l'absence de maintenance est connue, nos estimateurs explicites ainsi que les estimateurs de maximum de vraisemblance correspondants convergeaient presque sûrement vers la vraie valeur du paramètre d'efficacité de maintenance et étaient asymptotiquement normales. On a ainsi pu en déduire des intervalles de confiance asymptotiques pour le paramètre d'efficacité de réparation. Les hypothèses faites pour obtenir ces résultats sont moins contraignantes dans le cas des modèles  $ARI_m$  que dans le cas des modèles  $ARA_m$ , restreints à des fonctions puissances croissantes pour l'intensité initiale. Une perspective envisageable de ce travail serait l'étude théorique de l'estimation conjointe d'un paramètre d'échelle et d'un paramètre d'efficacité de maintenance dans le cas où l'intensité initiale est une fonction puissance. L'étude théorique de l'estimation conjointe de l'ensemble des paramètres ne semble en effet pas réaliste.

Nous avons donné de nouveaux résultats sur le modèle de Brown-Proshchan (BP). Il a été prouvé que ce modèle correspond à des systèmes pour lesquels l'efficacité de la maintenance permet de contenir ou de stabiliser l'usure. Ce modèle diffère également des modèles ARI et ARA car il a une intensité de défaillance excitée par un processus externe. Cela nous a permis d'introduire le théorème d'innovation qui permet de traiter notre modèle général d'efficacité de maintenance incluant des variables externes cachées, de façon similaire à un processus ponctuel auto-excité. On peut ainsi, pour ce modèle général, calculer une intensité de défaillance dite propre et une fonction de vraisemblance propre, toutes deux associées à la seule observation des instants de défaillance. Dans le cadre du modèle de BP, cette intensité de défaillance et cette vraisemblance propre sont complexes et doivent être calculées récursivement. Toujours pour le modèle BP, des simulations ont montré que l'intensité de défaillance propre, après une MC, avait une forme en baignoire. De plus, malgré la complexité de la fonction de vraisemblance propre, on a montré qu'il était possible de calculer ses dérivées partielles et donc de la maximiser par des méthodes numériques.

Il nous faut maintenant généraliser ces modèles et ces méthodes d'estimation afin de pouvoir prendre en compte à la fois l'effet des maintenances correctives et celui des maintenances préventives.



## Deuxième partie

---

# Modélisation et évaluation des effets des maintenances préventives et correctives

---

Les modèles présentés jusqu'à maintenant ne prennent en compte qu'un seul type de maintenance. Mais, même si ils ont été introduits pour des maintenances uniquement correctives, on peut également les utiliser pour des maintenances uniquement préventives. Naturellement dans la réalité industrielle les deux types de maintenances coexistent. L'apparition des défaillances, et donc des maintenances correctives, est retardée par la mise en place de maintenances préventives. Pour des systèmes critiques, à haut niveau de fiabilité, les défaillances sont souvent très rares, on observe donc beaucoup plus de maintenances préventives que de correctives. Il est donc nécessaire d'inclure l'effet des maintenances préventives dans la modélisation du processus des défaillances de la première partie. Il faut également être capable d'intégrer le fait que l'efficacité des actions de maintenance préventive, souvent planifiées longtemps à l'avance, est en général bien supérieure à celle des actions de maintenance corrective, réalisées dans l'urgence.

Un autre problème se pose. Le théorème d'innovation a pour conséquence immédiate que pour définir la loi conditionnelle des temps inter-défaillances (1.13), il faut connaître la loi conditionnelle des dates de MP sachant le passé du processus des défaillances. En termes plus simples il faut savoir comment les instants de MP sont choisis. Sont-ils déterministes, sont-ils aléatoires, dépendent-ils des instants de défaillance précédents?

Dans le chapitre six, on s'intéressera au cas de MP planifiées dont les dates sont déterminées en fonction des instants de maintenance déjà observés. Les MP à dates fixées sont un cas particulier de MP planifiées, où les instants de MP sont totalement définis à la mise en route du système. Le processus des MP et des MC sera caractérisé à l'aide de l'intensité de défaillance et de la politique de MP, c'est-à-dire la façon de choisir les dates de MP. Nous généraliserons le modèle d'âge virtuel afin de prendre en compte l'effet des maintenances préventives et correctives sur le processus des défaillances. Le théorème d'innovation permettra de transposer les résultats obtenus au cas où un processus aléatoire externe vient influencer l'efficacité des maintenances. Enfin, nous donnerons les principales politiques de MP existant dans la littérature, c'est-à-dire quelles sont les façons classiques de planifier les MP.

Dans le chapitre sept, on s'intéressera au cas des MP conditionnelles. Cela correspond à des MP non planifiées, dont les dates dépendent d'une surveillance d'indicateurs caractéristiques du fonctionnement et de la dégradation du système. Le modèle que nous proposons est alors basé sur la définition de deux intensités correspondant respectivement au processus des MP et des MC. Il généralise les récents travaux déjà publiés, basés sur les risques concurrents, et ouvre de nouvelles perspectives prometteuses.

Enfin dans le chapitre huit, on propose une application des modèles étudiés à un jeu de données provenant de l'analyse de dix-sept matériels identiques faisant partie d'unités de production électrique d'EDF.

# Maintenances préventives planifiées

Les dates de maintenance préventive ne sont pas nécessairement entièrement connues à la mise en route du système : les MP peuvent être faites à des instants aléatoires. Qualifier l'instant de maintenance préventive d'aléatoire peut choquer les exploitants des systèmes industriels. Il faut donc bien en clarifier la signification : est dit aléatoire tout ce qui n'a pas été prévu avec certitude à la mise en route du système.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas des maintenances préventives à dates planifiées. Ce type de MP peut aussi bien correspondre à des MP à dates déterministes qu'à des MP à dates aléatoires. Après avoir caractérisé mathématiquement ce qu'est une MP planifiée, nous donnerons les propriétés correspondantes du processus des MP et MC. Dans un premier temps, nous supposerons qu'aucun processus externe ne vient influencer l'efficacité des maintenances. Avant de généraliser le modèle pour prendre en compte le processus externe, nous proposerons des modèles d'efficacité de maintenance basés sur la notion d'âge virtuel. Nous ferons le lien entre notre modèle général et le modèle proposé par Last et Szekli, et nous conclurons ce chapitre en donnant les principales politiques de MP utilisées dans la littérature.

## 6.1 Planification de la maintenance préventive

Une confusion est souvent faite entre les termes planifié et à dates fixées : mathématiquement ce n'est pas parce que quelque chose est planifié qu'il est nécessairement déterministe. Par exemple, on peut planifier la date de la prochaine MP en fonction des instants de défaillance précédents. Ces instants de défaillance étant nécessairement aléatoires, la date de la prochaine MP le sera aussi. Cela est aussi le cas des MP dont la périodicité a été réduite suite à une réactualisation de "l'optimisation de la maintenance par la fiabilité" (OMF). En effet, des études de fiabilité, menées au cours de la vie opérationnelle d'un système, peuvent démontrer que celui-ci n'est pas assez fiable. L'exploitant est alors amené à modifier le calendrier des MP fixé à la mise en route du système. Dans ce cas, même si les nouveaux instants de maintenance préventive sont toujours périodiques, on doit les considérer comme aléatoires dans la mesure où cette modification de la périodicité n'avait pas été prévue au départ.

On dira donc qu'une MP est *planifiée* si et seulement si, à tout instant  $t \geq 0$ , la date prévue de la prochaine MP est une fonction déterministe du passé du processus des MP et MC :

$$U_{K_{t-}+1} = 1 \Rightarrow \tau_{M_{t-}+1} = C_{K_{t-}} + h_{K_{t-}}(\mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}) \quad (6.1)$$

où, pour tout  $k \geq 0$ ,  $h_k(\cdot)$  est une fonction déterministe. On appelle *politique ou plan de maintenance préventive* une règle permettant de fixer les dates des MP ultérieures en fonction de toutes les informations disponibles à l'instant de la dernière maintenance. Mathématiquement, la politique de MP correspond à l'ensemble des fonctions  $h_k(\cdot)$  pour tout  $k \geq 0$ .

La prochaine MP planifiée n'aura pas lieu à la date prévue si une défaillance et donc une MC survient avant :

$$W_{K_{t-}+1} = \min(T_{N_{t-}+1} - C_{K_{t-}}, h_{K_{t-}}(\mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})) \quad (6.2)$$

$$U_{K_{t-}+1} = \mathbb{1}_{\{W_{K_{t-}+1} = h_{K_{t-}}(\mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})\}} \quad (6.3)$$

Cependant, le plan de maintenance préventive doit toujours être respecté. Il faut donc s'assurer que les équations (6.2) et (6.3) sont bien vérifiées, c'est-à-dire que le processus des MP et MC respecte pour tout  $k \geq 1$  la contrainte :  $(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \in \mathcal{I}_k$ , avec :

$$\mathcal{I}_k = \left\{ (\mathbf{w}_k, \mathbf{u}_k) \in \mathbb{R}_+^n \times \{0, 1\}^n \mid \prod_{i=1}^k (\mathbb{1}_{\{w_i < h_{i-1}(\mathbf{w}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-1})\}})^{1-u_i} (\mathbb{1}_{\{w_i = h_{i-1}(\mathbf{w}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-1})\}})^{u_i} = 1 \right\}$$

Cela est supposé être vérifié dans la suite de ce chapitre. On n'aura donc pas à écrire des indicatrices dans toutes les formules.

Le cas basique des MP à dates fixées (à la mise en route du système) est un exemple de MP planifiées. Les instants de MP  $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$  et le processus des MP  $\{m_t\}_{t \geq 0}$  sont alors déterministes. La politique de MP est déterminée par :

$$\forall k \geq 1, \quad h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \tau_{m_{C_k}+1} - C_k \quad (6.5)$$

Comme nous le verrons dans la cinquième section de ce chapitre il existe d'autres politiques de MP correspondant à des instants de MP aléatoires : MP à âge fixé, MP à intensité fixée.

## 6.2 Propriétés du processus des MP et MC

L'instant prévu de la prochaine MP est caractérisé par le plan de MP. Le processus des MC, ou processus des défaillances est quant à lui toujours caractérisé par son intensité de défaillance. Pour simplifier les choses, on suppose dans un premier temps que l'efficacité de maintenance ne dépend pas de variables aléatoires externes. L'intensité de défaillance sera alors naturellement définie en fonction de l'histoire du processus des MP et MC :

$$\mathcal{H}_t = \sigma(\{N_s, M_s\}_{0 \leq s \leq t}) = \sigma(\{K_s, U_{K_s}\}_{0 \leq s \leq t}) \quad (6.6)$$

Or, grâce aux équations (6.2) et (6.3), le processus des MP et des MC est entièrement défini par le processus des MC et la politique de MP. L'histoire du processus des MP et MC n'est ainsi rien d'autre que l'histoire du processus des défaillances :  $\mathcal{H}_t = \sigma(\{N_s\}_{0 \leq s \leq t})$ . Et le processus des MC est donc un processus ponctuel auto-excité. Son intensité de défaillance peut s'écrire de façon indifférenciée sous les formes  $\lambda_s^N(K, U) = \lambda_s^N(N, M) = \lambda_s^N(N)$ . Comme nous le verrons dans la section suivante, l'histoire naturelle pour écrire l'intensité de défaillance est celle du processus des MP et MC, l'intensité de défaillance apparaît donc naturellement sous la forme  $\lambda_s^N(N, M)$ . Néanmoins, la vision processus ponctuel auto-excité présente l'avantage de permettre l'utilisation de l'ensemble de la théorie existant sur ce type de processus. En particulier, comme cela a déjà été rappelé dans le chapitre 1, la fonction de survie conditionnelle des durées inter-défaillances s'écrit sous la forme :

$$P(X_{n+1} > x \mid \mathbf{T}_n) = \exp\left(-\int_{T_n}^{T_n+x} \lambda_s^N(N) ds\right) \quad (6.7)$$

Le passage de la vision processus bivarié ou coloré à la vision processus auto-excité (ou vice-versa) n'est pas évident et peut énormément complexifier les formules. En effet les écritures  $\lambda_s^N(K, U)$  ou  $\lambda_s^N(N)$  sont très elliptiques et cachent une partie du problème. C'est pourquoi, pour préciser les choses, il nous arrivera dans ce chapitre de préférer écrire ces intensités sous les formes  $\lambda_s^N(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)$  ou  $\lambda_s^N(n, \mathbf{T}_n)$  quand  $K_s = k$  et  $N_s = n$ . En terme de processus bivarié ou

coloré, l'équation (6.7) se réécrit de la façon suivante, en mettant en évidence les MP survenues entre  $T_n$  et  $T_n + x$  :

$$P(X_{n+1} > x | \mathbf{W}_{K_{T_n}}, \mathbf{U}_{K_{T_n}}) = \exp \left( - \sum_{j=K_{T_n}}^{K_{T_n+x}-1} \int_{C_j}^{C_{j+1}} \lambda_s^N(j, \mathbf{W}_j, \mathbf{U}_j) ds - \int_{C_{K_{T_n+x}}}^{T_n+x} \lambda_s^N(K_{T_n+x}, \mathbf{W}_{K_{T_n+x}}, \mathbf{U}_{K_{T_n+x}}) ds \right) \quad (6.8)$$

avec pour tout  $j \in \{K_{T_n} + 1, \dots, K_{T_n+x}\}$ ,  $C_j = T_n + \sum_{i=K_{T_n}}^{j-1} h_i(\mathbf{W}_i, \mathbf{U}_i)$  et  $U_j = 1$ .

Dans l'équation précédente, comme dans l'équation (6.7), on s'intéresse à la durée inter-défaillance quand on connaît le passé du processus des MP et MC au moment de la dernière défaillance. La propriété suivante généralise cette formule au cas où on connaît le passé du processus des MP et MC au moment de la dernière maintenance. Pour avoir une écriture de la propriété plus simple, on ne s'intéresse plus à la durée inter-défaillance mais à l'instant de la prochaine défaillance, ce qui est équivalent.

**PROPRIETE 6.2.1 :**

$$P(T_{N_{C_k}+1} > t | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < C_k \\ \exp \left( - \int_{C_k}^t \lambda_s^N(K, U) ds \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.9) \quad \square$$

**Démonstration :**

La propriété est triviale pour  $t < C_k$ . Si  $U_k = 0$ ,  $T_{N_{C_k}} = C_k$ , donc l'histoire du processus des MP et MC en  $C_k$  n'est rien d'autre que l'ensemble des  $N_{C_k}$  premiers instants de défaillance. Ainsi, pour tout  $t \geq C_k$ , on a :

$$\begin{aligned} P(T_{N_{C_k}+1} > t | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) &= P(T_{N_{C_k}+1} > t | \mathbf{T}_{N_{C_k}}) = \exp \left( - \int_{C_k}^t \lambda_s^N(N) ds \right) \\ &= \exp \left( - \int_{C_k}^t \lambda_s^N(K, U) ds \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Si  $U_k = 1$ ,  $T_{N_{C_k}} < C_k$  et  $T_{N_{C_k}+1} > C_k$ , donc l'histoire du processus des MP et MC en  $C_k$  correspond à l'ensemble des  $N_{C_k}$  premiers instants de défaillance et le fait que  $T_{N_{C_k}+1} > C_k$ .  $C_k$  n'est alors qu'une fonction déterministe des MC déjà observées :  $\mathbf{T}_{N_{C_k}}$ . Ainsi, pour  $t \geq C_k$ ,

$$\begin{aligned} P(T_{N_{C_k}+1} > t | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) &= P(T_{N_{C_k}+1} > t | \mathbf{T}_{N_{C_k}}, T_{N_{C_k}+1} > C_k) \\ &= \frac{P(T_{N_{C_k}+1} > t \cap T_{N_{C_k}+1} > C_k | \mathbf{T}_{N_{C_k}})}{P(T_{N_{C_k}+1} > C_k | \mathbf{T}_{N_{C_k}})} = \frac{P(T_{N_{C_k}+1} > t | \mathbf{T}_{N_{C_k}})}{P(T_{N_{C_k}+1} > C_k | \mathbf{T}_{N_{C_k}})} \\ &= \frac{\exp \left( - \int_{T_{N_{C_k}}}^t \lambda_s^N(N) ds \right)}{\exp \left( - \int_{T_{N_{C_k}}}^{C_k} \lambda_s^N(N) ds \right)} = \exp \left( - \int_{C_k}^t \lambda_s^N(N) ds \right) \\ &= \exp \left( - \int_{C_k}^t \lambda_s^N(K, U) ds \right) \end{aligned} \quad (6.11) \quad \blacksquare$$

Dans la propriété précédente, on peut comme on l'a fait dans l'équation (6.8) expliciter ce que représente  $\int_{C_k}^t \lambda_s^N(K, U) ds$ , en mettant en évidence les MP survenues entre  $T_n$  et  $T_n + x$ . Cette propriété montre que l'on peut interpréter la dernière MP observée comme une censure

à gauche déterministe du processus des défaillances. Enfin, on peut en déduire également la propriété suivante, qui caractérise la loi conditionnelle des types de maintenances et durées inter-maintenances connaissant le passé du processus des MP et MC.

**PROPRIETE 6.2.2 :**

$$P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 1 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } w \geq h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ \exp\left(-\int_0^{h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)} \lambda_{C_k+s}^N(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds\right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.12)$$

$$P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 0 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } w \geq h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ \exp\left(-\int_0^w \lambda_{C_k+s}^N(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds\right) - \\ \exp\left(-\int_0^{h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)} \lambda_{C_k+s}^N(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds\right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.13)$$

□

**Démonstration :**

Si  $w \geq h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)$  l'équation (6.12) est évidente. Pour  $w < h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)$ , il suffit d'appliquer la propriété 6.2.1 après avoir remarqué que :

$$P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 1 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(T_{N_{C_k+1}} > C_k + h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \quad (6.14)$$

Pour  $w \geq h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)$  l'équation (6.13) est elle aussi évidente. Pour  $w < h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)$ , il suffit de remarquer que :

$$P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 0 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(C_k + w < T_{N_{C_k+1}} \leq C_k + h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \quad (6.15)$$

■

On en déduit très facilement l'expression des lois marginales conditionnelles des durées inter-maintenances et types de maintenance.

**COROLLAIRE 6.2.1. :**

$$P(W_{k+1} > w | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } w \geq h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ \exp\left(-\int_0^w \lambda_{C_k+s}^N(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds\right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.16)$$

$$P(U_{k+1} = 1 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \exp\left(-\int_0^{h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)} \lambda_{C_k+s}^N(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds\right) \quad (6.17)$$

□

**Démonstration :**

On obtient le premier résultat du corollaire en utilisant les équations (6.12) et (6.13) dans l'équation ci-dessous :

$$P(W_{k+1} > w | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 1 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) + P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 0 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \quad (6.18)$$

Le deuxième résultat du corollaire n'est rien d'autre qu'une conséquence directe de l'équation (6.12). ■

La vraisemblance d'un processus ponctuel auto-excité est donnée par l'équation (1.10). Dans une vision processus bivarié ou coloré cela se réécrit sous la forme donnée dans la propriété suivante.

**PROPRIETE 6.2.3 :**

La fonction de vraisemblance associée à une unique observation du processus des MP et MC sur  $[0, t[$  vérifie :

$$L_t(\theta) = \left[ \prod_{i=1}^{K_t} \lambda_{C_i}^N(i-1, \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-1})^{1-U_i} \right] \exp \left( - \sum_{j=1}^{K_t-+1} \int_{C_{j-1}}^{C_j} \lambda_s^N(j-1, \mathbf{W}_{j-1}, \mathbf{U}_{j-1}) ds \right) \quad (6.19)$$

en notant par convention  $C_{K_t-+1} = t$ .  $\square$

Dans cette écriture on remarque que les instants de MP ont en fait le même effet que des censures à droite déterministes.

## 6.3 Modélisation de l'effet des maintenances sur le processus des défaillances

### 6.3.1 Modèle d'âge virtuel généralisé

Dans le but de modéliser l'effet des maintenances sur le processus des défaillances, on propose de généraliser le modèle d'âge virtuel pour inclure l'effet des MP et des MC. On suppose qu'en l'absence de MP le système neuf a une durée de vie  $Y$  de taux de défaillance  $\lambda(t)$ , pour tout  $t \geq 0$ . Alors,

$$\forall w < h_0, \quad P(W_1 \leq w) = P(Y \leq w) \quad (6.20)$$

L'effet de la  $k^{\text{ème}}$  maintenance est alors que, jusqu'à sa prochaine MP, le système est équivalent à un système neuf (et non maintenu préventivement) ayant déjà fonctionné un temps  $A_k(K, U) = a_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)$  sans tomber en panne, où  $a_k(\cdot)$  est une fonction déterministe et  $a_0 = 0$  :

$$P(W_{k+1} > w | A_k(K, U), \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(Y > A_k(K, U) + w | Y > A_k(K, U), A_k(K, U)) \quad (6.21)$$

pour tout  $w \leq h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)$ . Ainsi, d'après l'équation (6.16), l'intensité de défaillance du modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} \lambda_t^N(K, U) &= - \frac{d}{dt} \ln \left( \frac{P(Y > t - C_{K_t-} + A_k(K, U) | A_k(K, U))}{P(Y > A_k(K, U) | A_k(K, U))} \right) \\ &= - \frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\exp \left( - \int_0^{t - C_{K_t-} + A_k(K, U)} \lambda(s) ds \right)}{\exp \left( - \int_0^{A_k(K, U)} \lambda(s) ds \right)} \right) \\ \lambda_t^N(K, U) &= \lambda(t - C_{K_t-} + A_{K_t-}(K, U)) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Par analogie avec les modèles d'âge virtuel du chapitre 2, on appellera  $A_{K_t-}(K, U)$  l'âge effectif et  $t - C_{K_t-} + A_{K_t-}(K, U)$  l'âge virtuel à l'instant  $t$ . L'âge effectif représente donc toujours l'âge virtuel du système juste après la dernière maintenance. La plupart des hypothèses basiques sur l'efficacité des MP et des MC peuvent être exprimées par des formes particulières de l'âge effectif.

### 6.3.2 Modèles basiques

**MP ABAO, MC ABAO.** Cela revient à supposer que les effets des deux types de maintenance sont minimaux. Après n'importe quelle maintenance, le système est dans le même état qu'avant. Les âges effectifs sont donc égaux aux instants de la dernière maintenance,  $A_k(K, U) = C_k$ , pour tout  $k \geq 1$ . L'intensité de défaillance est donc simplement une fonction du temps et le processus des défaillances est un NHPP :

$$\lambda_t^N = \lambda(t) \quad (6.23)$$

**MP ABAO, MC AGAN.** La MP est minimale et la MC remet le système à neuf. L'âge effectif du système est donc égal au temps écoulé entre la dernière maintenance et la dernière maintenance parfaite,  $A_k(K, U) = C_k - T_{N_{C_k}}$ . Donc tout se passe comme s'il n'y avait pas de MP pour des MC AGAN. Le processus des défaillances est donc un processus de renouvellement et son intensité est :

$$\lambda_t^N(N) = \lambda(t - T_{N_{t-}}) \quad (6.24)$$

**MP ABAO et MC quelconque:** Cela revient à supposer que les MP sont minimales, c'est à dire n'ont aucun effet sur le système. L'âge effectif est donc égal à l'âge effectif au moment de la dernière MC plus le temps écoulé depuis cette MC,  $A_k(K, U) = C_k - T_{N_{C_k}} + A_{K_{T_{N_{C_k}}}}(K, U)$ . Récursivement on montre donc que l'intensité de défaillance ne dépend alors plus que du processus des défaillances. La politique de MP n'a pas d'effet :

$$\lambda_t^N(N) = \lambda\left(t - T_{N_{t-}} + A_{K_{T_{N_{t-}}}}(N)\right) \quad (6.25)$$

Même si cette hypothèse n'est absolument pas réaliste pour des systèmes industriels, elle a l'avantage de donner des modèles pour lesquels le processus des défaillances est équivalent à ceux de la première partie.

**MP AGAN, MC AGAN:** Chaque maintenance remet le système à neuf. Les âges effectifs du système sont nuls,  $A_k(K, U) = 0$ , pour tout  $k \geq 1$ . L'intensité de défaillance du modèle est donc :

$$\lambda_t^N(K) = \lambda(t - C_{K_{t-}}) \quad (6.26)$$

On remarque que le processus des défaillances n'est pas un processus de renouvellement puisque son intensité n'est pas de la forme  $\lambda(t - T_{N_{t-}})$ .

**MP AGAN, MC ABAO:** La MC est minimale et la MP remet le système à neuf. C'est la situation duale de la précédente. L'âge effectif vaut donc :  $A_k(K, U) = C_k - \tau_{MC_k}$  et l'intensité est :

$$\lambda_t^N(M) = \lambda(t - \tau_{M_{t-}}) \quad (6.27)$$

### 6.3.3 Différentes généralisations du modèle ARA<sub>1</sub>

Dans le cas où MP et MC ont le même paramètre d'efficacité de maintenance  $\rho$ , on calcule l'âge effectif correspondant à un modèle ARA<sub>1</sub> en écrivant que l'effet de la maintenance est de réduire l'âge virtuel du système d'une quantité proportionnelle à la valeur du supplément d'âge accumulé depuis la dernière maintenance :

$$A_{k+1}(K, U) = A_k(K, U) + (1 - \rho)(C_{k+1} - C_k) \quad (6.28)$$

Récursivement on trouve donc :  $A_{k+1}(K, U) = (1 - \rho)C_{k+1}$ . Et l'intensité de défaillance vaut :

$$\lambda_t^N(K) = \lambda(t - \rho C_{K_{t-}}) \quad (6.29)$$

La façon la plus intuitive de généraliser ce modèle au cas où MP et MC n'ont pas la même efficacité de maintenance est de supposer que l'effet des MP est de réduire l'âge virtuel de  $\rho_p$  fois le supplément d'âge accumulé depuis la dernière maintenance, et l'effet des MC est similaire mais avec un facteur différent  $\rho_c$  :

$$A_{k+1}(K, U) = \begin{cases} A_k(K, U) + (1 - \rho_p)W_{k+1} & \text{si } U_{k+1} = 1 \\ A_k(K, U) + (1 - \rho_c)W_{k+1} & \text{si } U_{k+1} = 0 \end{cases} \quad (6.30)$$

Ce qui implique des âges effectifs de la forme

$$\begin{aligned} A_{k+1}(K, U) &= A_k(K, U) + (1 - \rho_p)^{U_{k+1}}(1 - \rho_c)^{1-U_{k+1}}W_{k+1} \\ &= \sum_{i=0}^k (1 - \rho_p)^{U_{i+1}}(1 - \rho_c)^{1-U_{i+1}}W_{i+1} = C_{k+1} - \sum_{i=0}^k \rho_p^{U_{i+1}}\rho_c^{1-U_{i+1}}W_{i+1} \end{aligned} \quad (6.31)$$

L'intensité de défaillance s'écrit alors :

$$\lambda_t^N(K, U) = \lambda \left( t - \sum_{i=0}^{K_t-} \rho_p^{U_{i+1}}\rho_c^{1-U_{i+1}}W_{i+1} \right) \quad (6.32)$$

En prenant  $\rho_p = \rho_c = \rho$  on retrouve (6.29), donc ce modèle est bien une généralisation du modèle ARA<sub>1</sub>. Par contre, contrairement au cas de maintenances uniquement correctives, en prenant  $\rho_c = 1$  dans l'équation (6.31) on se rend compte qu'on ne retrouve pas le cas de MC AGAN. En effet, dans ce cas la MC ne remet pas le système à neuf mais le remet dans l'état où il était après la précédente MP. On a un résultat symétrique pour  $\rho_p = 1$ .  $\rho_c = 0$  et  $\rho_p = 0$  correspondent respectivement à des MC ABAO et des MP ABAO, comme on s'en rend compte dans l'équation (6.30).

On peut proposer d'autres hypothèses qui aboutissent aussi à une généralisation du modèle ARA<sub>1</sub>, mais où l'intensité de défaillance est beaucoup plus simple. L'âge effectif après une MP est supposé être égal à l'âge effectif juste après la précédente MP augmenté de  $(1 - \rho_p)$  fois le temps écoulé entre ces deux MP. L'effet des MC reste le même que pour le modèle précédent. L'âge effectif vérifie alors :

$$A_{k+1}(K, U) = \begin{cases} (1 - \rho_c)W_{k+1} + A_k(K, U) & \text{si } U_{k+1} = 0 \\ (1 - \rho_p)\chi_{M_{C_{k+1}}} + A_{K_{\tau_{M_{C_{k+1}}}-1}}(K, U) & \text{si } U_{k+1} = 1 \end{cases} \quad (6.33)$$

Si  $U_{k+1} = 1$ , on obtient récursivement que :

$$A_{k+1}(K, U) = (1 - \rho_p)C_{k+1} \quad (6.34)$$

Si  $U_{k+1} = 0$ , toujours récursivement on prouve que :

$$A_{k+1}(K, U) = (1 - \rho_c)[C_{k+1} - \tau_{M_{C_{k+1}}}] + A_{K_{\tau_{M_{C_{k+1}}}}} (K, U) \quad (6.35)$$

Les deux équations précédentes impliquent que pour n'importe quelle valeur de  $U_{k+1}$ , l'âge effectif peut s'écrire :

$$A_{k+1}(K, U) = (1 - \rho_c)[C_{k+1} - \tau_{M_{C_{k+1}}}] + (1 - \rho_p)\tau_{M_{C_{k+1}}} \quad (6.36)$$

Et l'intensité de défaillance vérifie :

$$\lambda_t^N(K, U) = \lambda (t - \rho_c(C_{K_t-} - \tau_{M_t-}) - \rho_p\tau_{M_t-}) \quad (6.37)$$

Dans ce modèle, l'effet des MC est donc beaucoup moins important que celui des MP puisque de toute façon il n'affecte l'intensité de défaillance (et donc la probabilité de panne) que jusqu'à la prochaine MP. En prenant  $\rho_p = \rho_c = \rho$  dans (6.37) on retrouve (6.29), donc ce modèle est également une généralisation du modèle ARA<sub>1</sub>. En remplaçant  $\rho_c$  par 1 dans l'équation (6.36), on prouve que le cas  $\rho_c = 1$  ne correspond toujours pas à des MC parfaites. Par contre, en utilisant l'équation (6.34), on trouve que le cas  $\rho_p = 1$  correspond bien à des MP AGAN. Enfin, grâce à l'équation (6.33), on montre que  $\rho_c = 0$  correspond bien à des MC ABAO, mais que  $\rho_p = 0$  ne signifie pas que les MP sont ABAO.

### 6.3.4 Le modèle de Jack

Jack [35] a proposé d'autres hypothèses qui ressemblent beaucoup à celles du modèle précédent, mais qui n'aboutissent pas à une généralisation du modèle ARA<sub>1</sub>. L'âge effectif après une MP est supposé être égal à l'âge effectif juste après la précédente MP plus  $(1 - \rho_p)$  fois (non plus le temps écoulé, mais) l'âge virtuel accumulé entre ces deux MP. L'effet des MC reste encore une fois le même. Si  $C_{k+1}$  est une MP, l'âge virtuel accumulé depuis la précédente MP vaut :  $W_{k+1} + A_k(K, U) - A_{K\tau_{MC_{k+1}-1}}(K, U)$ . L'âge effectif vérifie donc :

$$A_{k+1}(K, U) = \begin{cases} (1 - \rho_c)W_{k+1} + A_k(K, U) & \text{si } U_{k+1} = 0 \\ (1 - \rho_p)[W_{k+1} + A_k(K, U) - A_{K\tau_{MC_{k+1}-1}}(K, U)] + A_{K\tau_{MC_{k+1}-1}}(K, U) & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.38)$$

L'effet des MC est le même que pour le modèle précédent. L'équation (6.35) reste donc vraie pour  $U_{k+1} = 0$ . On remarque qu'elle est aussi vérifiée pour  $U_{k+1} = 1$ . De plus, la deuxième équation de (6.38) peut se réécrire :

$$A_{K\tau_k}(K, U) = (1 - \rho_p)[\tau_k - C_{K\tau_k-1} + A_{K\tau_k-1}(K, U) - A_{K\tau_k-1}(K, U)] + A_{K\tau_k-1}(K, U) \quad (6.39)$$

Or, en utilisant (6.35) on a :

$$A_{K\tau_k-1}(K, U) = (1 - \rho_c)[C_{K\tau_k-1} - \tau_{MC_{K\tau_k-1}}] + A_{K\tau_{MC_{K\tau_k-1}}}(K, U) \quad (6.40)$$

Mais,  $\tau_{MC_{K\tau_k-1}}$  n'est en fait rien d'autre que  $\tau_{k-1}$ , donc,

$$A_{K\tau_k}(K, U) = (1 - \rho_p)\tau_k - (1 - \rho_p)\rho_c C_{K\tau_k-1} - (1 - \rho_p)(1 - \rho_c)\tau_{k-1} + A_{K\tau_k-1}(K, U) \quad (6.41)$$

Récurivement, on obtient que :

$$A_{K\tau_k}(K, U) = (1 - \rho_p)\tau_k - (1 - \rho_p)\rho_c \sum_{j=0}^{k-1} [C_{K\tau_{j+1}-1} - \tau_j] \quad (6.42)$$

Finalement, en utilisant cette équation et (6.38) on trouve la valeur de l'âge effectif dans le modèle de Jack :

$$A_{k+1}(K, U) = (1 - \rho_c)C_{k+1} + (\rho_c - \rho_p)\tau_{MC_{k+1}} - (1 - \rho_p)\rho_c \sum_{j=0}^{MC_{k+1}-1} [C_{K\tau_{j+1}-1} - \tau_j] \quad (6.43)$$

Et l'intensité de défaillance vérifie :

$$\lambda_t^N(K, U) = \lambda \left( t - \rho_c C_{Kt-} + (\rho_c - \rho_p)\tau_{MC_{Kt-}} - (1 - \rho_p)\rho_c \sum_{j=0}^{MC_{Kt-}-1} [C_{K\tau_{j+1}-1} - \tau_j] \right) \quad (6.44)$$

En prenant  $\rho_c = \rho_p = \rho$  on ne retrouve pas l'équation (6.29), donc ce modèle n'est pas une généralisation du modèle  $ARA_1$ . L'effet des MC étant le même que dans le modèle précédent, le cas  $\rho_c = 1$  ne correspond pas à des MC AGAN. Par contre, comme le montre l'équation (6.42),  $\rho_p = 1$  correspond bien à des MP AGAN. Enfin, l'équation (6.38) permet de se rendre compte que  $\rho_c = 0$  et  $\rho_p = 0$  signifient respectivement que les MC sont ABAO et les MP sont ABAO.

### 6.3.5 MP et MC $ARA_\infty$

Dans le cas où MP et MC ont le même paramètre d'efficacité de maintenance  $\rho$ , on calcule l'âge effectif correspondant à un modèle  $ARA_\infty$  en écrivant que l'effet de la maintenance est de réduire l'âge virtuel du système d'une quantité proportionnelle à sa valeur :

$$A_{k+1}(K, U) = (1 - \rho)[W_{k+1} + A_k(K, U)] \quad (6.45)$$

Par analogie avec les modèles de maintenances uniquement correctives on trouve donc que l'intensité de défaillance vaut :

$$\lambda_t^N(K) = \lambda \left( t - \rho \sum_{j=0}^{K_{t-}-1} (1 - \rho)^j C_{K_{t-}-j} \right) \quad (6.46)$$

Pour généraliser ce modèle au cas où MP et MC n'ont pas la même efficacité de maintenance il suffit de supposer qu'on a deux facteurs de proportionnalité différents selon le type de la maintenance :

$$A_{k+1}(K, U) = (1 - \rho_p)^{U_{k+1}} (1 - \rho_c)^{1-U_{k+1}} [W_{k+1} + A_k(K, U)] \quad (6.47)$$

Donc, à l'instant  $t$ , le supplément d'âge correspondant à la  $k^{\text{ème}}$  durée inter-maintenances (pour  $1 \leq k \leq K_{t-}$ ) a été réduit par  $M_{t-} - M_{C_{k-1}}$  MP et  $N_{t-} - N_{C_{k-1}}$  MC. Il n'augmente donc plus le  $(M_{t-})^{\text{ème}}$  âge effectif que d'une quantité :

$$(1 - \rho_p)^{M_{t-} - M_{C_{k-1}}} (1 - \rho_c)^{N_{t-} - N_{C_{k-1}}} W_k \quad (6.48)$$

Ainsi l'âge effectif vaut :

$$A_{K_{t-}}(K, U) = \sum_{j=1}^{K_{t-}} (1 - \rho_p)^{M_{t-} - M_{C_{j-1}}} (1 - \rho_c)^{N_{t-} - N_{C_{j-1}}} W_j \quad (6.49)$$

Et l'intensité de défaillance vérifie donc :

$$\lambda_t^N(K, U) = \lambda \left( t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}} (1 - \rho_p)^{M_{t-} - M_{C_{j-1}}} (1 - \rho_c)^{N_{t-} - N_{C_{j-1}}} W_j \right) \quad (6.50)$$

En prenant  $\rho_p = \rho_c = \rho$  dans l'équation (6.47) on obtient l'équation (6.45), donc ce modèle est bien une généralisation du modèle  $ARA_\infty$ . En prenant  $\rho_c = 1$  et  $\rho_p = 1$  dans cette même équation (6.47) on obtient des effets de maintenance AGAN respectivement sur les MC et les MP. Et en prenant  $\rho_c = 0$  et  $\rho_p = 0$  on obtient respectivement des MC ABAO et des MP ABAO.

### 6.3.6 Autres modèles pour les MP et MC

Dans le cas où MP et MC ont le même facteur d'efficacité de maintenance  $\rho$ , on peut facilement généraliser le modèle  $ARA_m$  en prenant une intensité de défaillance de la forme :

$$\lambda_t^N(K) = \lambda \left( t - \rho \sum_{j=0}^{Min(m-1, K_{t-}-1)} (1 - \rho)^j C_{K_{t-}-j} \right) \quad (6.51)$$

Quand les efficacités de MP et de MC ne sont plus les mêmes, il y a plusieurs façons de généraliser les hypothèses du modèle  $ARA_m$ , comme cela a été fait sur les modèles  $ARA_1$ .

On peut définir encore beaucoup d'autres modèles correspondant à des modèles d'âge virtuel généralisés : soit en prenant des modèles différents pour les MP et les MC, soit encore en généralisant d'une façon ou d'une autre les modèles à mémoire finie. Par contre, les modèles  $ARI$  ne peuvent pas, quant à eux, être obtenus par des formes particulières de l'âge effectif, car ce ne sont pas des modèles d'âge virtuel. On peut malgré tout les construire très simplement par analogie avec les modèles  $ARA$ . Ainsi, l'intensité de défaillance, pour un modèle avec un effet  $ARI_1$  sur les MP et les MC, analogue à celui de l'équation (6.37), a une intensité de défaillance qui est :

$$\lambda_t^N(K, U) = \lambda(t) - \rho_c[\lambda(C_{K_{t-}}) - \lambda(\tau_{M_{t-}})] - \rho_p \lambda(\tau_{M_{t-}}) \quad (6.52)$$

De façon très générale, l'intensité de défaillance d'un modèle à réduction arithmétique de l'intensité s'écrit alors :

$$\lambda_t^N(K, U) = \lambda(t) - S_k(K, U) \quad (6.53)$$

avec  $S_k(K, U) = s_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)$  où les fonctions  $s_k$  sont déterministes.

## 6.4 L'efficacité de maintenance dépend de variables externes

### 6.4.1 Modèle d'âge virtuel généralisé

Comme nous l'avons vu précédemment les variables aléatoires externes sont, dans le cas qui nous intéressent, a priori, des variables aléatoires cachées. Il paraît donc logique, que l'instant de la prochaine MP ne puisse pas être planifié en fonction des  $B_i$ , variables dont les exploitants du système ne connaissent pas les valeurs. c'est-à-dire que, dans le cas de MP planifiée, et qu'il y ait ou non des variables aléatoires externes, on suppose que l'instant de la prochaine MP, si il n'y a pas de corrective avant, est entièrement spécifié par les variables aléatoires déjà observées, c'est-à-dire le passé du processus des MP et MC. Les équations (6.2) et (6.3) caractérisent donc des MP planifiées même quand des variables externes influencent le processus des MP et MC. La seule différence sera que l'intensité de défaillance sera naturellement définie comme étant relative aux variables externes :

$$\lambda_t^N(K, U, B) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t-} = 1 | K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}, \mathbf{B}_{K_{t-}}) \quad (6.54)$$

Le théorème d'innovation 5.2.1 permet alors de calculer une intensité de défaillance relative au seul processus des MP et MC :

$$\lambda_t^N(K, U) = E[\lambda_t^N(K, U, B) | K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}] \quad (6.55)$$

Avec cette intensité, on est alors ramené à un modèle tout à fait similaire à celui de la section 6.2. Tous les résultats déjà obtenus dans cette section peuvent donc être appliqués. En particulier cette intensité relative au processus des MP et MC est en fait l'intensité de défaillance d'un

processus ponctuel auto-excité:  $\lambda_t^N(K, U) = \lambda_t^N$ . Les durées inter-défaillances vérifient alors:  $P(X_{n+1} > x | \mathbf{T}_n) = \exp(-\int_{T_n}^{T_n+x} \lambda_u^N(N) du)$ . On peut remplacer dans l'équation précédente  $\lambda_u^N(N)$  par  $E[\lambda_u^N(N, M, B) | N_u = n, \mathbf{T}_n]$ , et grâce à l'équivalence entre l'histoire du processus des MP et MC et l'histoire du processus auto-excité des défaillances, on obtient que l'équation (1.13) est vérifiée dans le cas de MP planifiées.

Le modèle d'âge virtuel défini par l'équation (6.22) peut très simplement être généralisé. Il suffit de supposer que le  $k^{\text{ème}}$  âge effectif peut être influencé par la valeur des  $k$  premières variables externes :

$$A_k(K, U, B) = a_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k, \mathbf{B}_k) \quad (6.56)$$

où  $a_k(\cdot)$  est toujours une fonction déterministe et  $a_0 = 0$ . L'expression de l'intensité de défaillance du modèle reste la même :

$$\lambda_t^N(K, U, B) = \lambda(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}(K, U, B)) \quad (6.57)$$

### 6.4.2 Modèle de Brown-Proschan généralisé

Avec ce modèle il est facile de généraliser le modèle BP (et par là même le modèle BBS) afin d'inclure l'effet des MP et des MC. Le processus externe permet toujours de caractériser l'efficacité des maintenances:  $B_i = 1$  si la  $i^{\text{ème}}$  maintenance est parfaite et  $B_i = 0$  si elle est minimale. L'âge effectif est égal au temps écoulé entre la dernière maintenance et la dernière maintenance parfaite,  $A_k(K, U, B) = \sum_{j=1}^k \left[ \prod_{i=j}^k (1 - B_i) \right] W_j$ . L'intensité de défaillance vaut donc :

$$\lambda_t^N(K, U, B) = \lambda \left( t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}} \left[ \prod_{i=j}^{K_{t-}} (1 - B_i) \right] W_j \right) \quad (6.58)$$

La  $i^{\text{ème}}$  variable aléatoire externe,  $B_i$ , est supposée indépendante des précédentes et indépendante du processus des MP et MC jusqu'à l'instant  $C_i$  (non inclus). Selon la loi conditionnelle de  $B_i$  sachant l'instant et le type de la dernière maintenance, on trouve différents modèles :

- $P(B_i = 1 | C_i, U_i) = p$ : MP et MC suivent un modèle BP de même efficacité de maintenance  $p$ .
- $P(B_i = 1 | C_i, U_i) = p_p^{U_i} p_c^{1-U_i}$ : MP et MC suivent un modèle BP avec pour efficacité de MP  $p_p$  et pour efficacité de MC  $p_c$ .
- $P(B_i = 1 | C_i, U_i) = p(C_i, U_i)$ : MP et MC sont supposées suivre un modèle BBS.

La propriété suivante donne l'intensité de défaillance relative au processus des MP et MC (qui est la même que l'intensité propre) pour un modèle BP. Comme dans le cas de maintenances uniquement correctives, on ne connaît pas la forme explicite de cette intensité: on a uniquement une équation récursive.

#### PROPRIETE 6.4.1 :

Dans le cas de MP planifiées, et pour un effet de maintenance de type BP d'efficacité  $p_p$  pour les MP et  $p_c$  pour les MC, l'intensité de défaillance propre vérifie :

$$\lambda_t^N(N) = \lambda_t^N(K, U) = -\frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \sum_{j=0}^{K_{t-}} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}} \left[ \prod_{i=j+1}^{K_{t-}} (1 - p_{U_i}) \left[ \frac{\lambda(C_i - C_j)}{\lambda_{C_i}^N(K, U)} \right]^{1-U_i} \right] \right) \right] \exp \left( -\Lambda(t - C_j) - \Lambda_{C_j}^N(K, U) \right) \quad (6.59)$$

où  $p_{u_i}$  est la probabilité que la  $i^{\text{ème}}$  maintenance soit parfaite sachant si elle est préventive ou corrective :  $p_{u_i} = p_p^{u_i} p_c^{1-u_i}$ .  $\square$

### Démonstration :

La démonstration est une généralisation de celle faite pour la propriété 5.2.1. On retrouve les mêmes étapes de calcul et on garde les mêmes notations. Le théorème d'innovation implique que :

$$\lambda_t^N(K, U) = \sum_{j=0}^{K_{t-}} E[\lambda_t^N(K, U, B) | \mathbf{B}_{K_{t-}, j}, K_{t-}, \mathbf{C}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}] P(\mathbf{B}_{K_{t-}, j} | K_{t-}, \mathbf{C}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}) \quad (6.60)$$

Tout d'abord, en raison de la signification de  $B_{k,j}$  :

$$E[\lambda_t^N(K, U, B) | \mathbf{B}_{K_{t-}, j}, K_{t-}, \mathbf{C}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}] = \lambda(t - C_j) \quad (6.61)$$

Pour  $K_{t-} = 0$  il est trivial de montrer que la propriété 6.4.1 est vérifiée. Pour  $K_{t-} \geq 1$  et  $K_{t-} \geq j$ , on obtient de la même façon que pour (5.56) :

$$P(\mathbf{B}_{K_{t-}, j} | K_{t-}, \mathbf{C}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}) = \widetilde{p_{K_{t-}, j}} [P(\mathbf{B}_{K_{t-}-1, j} | \mathbf{C}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})]^{\mathbb{1}_{\{K_{t-} > j\}}} \frac{\exp(-\int_{C_{K_{t-}}}^t \lambda(s - C_j) ds)}{\exp(-\int_{C_{K_{t-}}}^t \lambda_s^N(K, U) ds)} \quad (6.62)$$

avec  $\widetilde{p_{k,j}} = P(B_k = \mathbb{1}_{\{j=k\}}) = p_{U_k}^{\mathbb{1}_{\{j=k\}}} (1 - p_{U_k})^{\mathbb{1}_{\{j \neq k\}}}$ . Pour  $k \geq 2$  et  $k \geq j$ , on va calculer  $P(\mathbf{B}_{k,j} | \mathbf{C}_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1})$ , comme dans la propriété 5.2.1, en sortant du conditionnement  $C_{k+1}$ ,  $U_{k+1}$ . Cependant, on doit distinguer les cas  $U_{k+1} = 0$  et  $U_{k+1} = 1$ . Si  $U_{k+1} = 1$ ,  $C_{k+1}$  est nécessairement égal à l'instant planifié de MP. Si  $U_{k+1} = 0$ ,  $C_{k+1}$  a une distribution continue, on notera alors pour n'importe quelle variable aléatoire  $H$  :

$$f_{C_{k+1}, U_{k+1}=0|H}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} P(x < C_{k+1} \leq x + \Delta x, U_{k+1} = 0 | H) \quad (6.63)$$

On aura alors :

$$P(\mathbf{B}_{k,j} | \mathbf{C}_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1}) = P(\mathbf{B}_{k,j} | \mathbf{C}_k, \mathbf{U}_k) \left( \frac{P(U_{k+1} = 1 | \mathbf{B}_{k,j}, \mathbf{C}_k, \mathbf{U}_k)}{P(U_{k+1} = 1 | \mathbf{C}_k, \mathbf{U}_k)} \right)^{U_{k+1}} \left( \frac{f_{C_{k+1}, U_{k+1}=0|C_k, U_k, B_{k,j}}(C_{k+1})}{f_{C_{k+1}, U_{k+1}=0|C_k, U_k}(C_{k+1})} \right)^{1-U_{k+1}} = \widetilde{p_{k,j}} [P(\mathbf{B}_{k-1,j} | \mathbf{C}_k, \mathbf{U}_k)]^{\mathbb{1}_{\{k > j\}}} \frac{\lambda(C_{k+1} - C_j)^{1-U_{k+1}} \exp(-\int_{C_k}^{C_{k+1}} \lambda(s - C_j) ds)}{(\lambda_{C_{k+1}}^N(K, U))^{1-U_{k+1}} \exp(-\int_{C_k}^{C_{k+1}} \lambda_s^N(K, U) ds)} \quad (6.64)$$

Donc, l'intensité de défaillance propre vérifie :

$$\lambda_t^N(K, U) = \sum_{j=0}^{K_{t-}} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j > 0\}}} \frac{\lambda(t - C_j) \exp(-\Lambda(t - C_j))}{\exp(-\Lambda_t^N(K, U) + \Lambda_{C_j}^N(K, U))} \prod_{i=j+1}^{K_{t-}} (1 - p_{U_i}) \left[ \frac{\lambda(C_i - C_j)}{\lambda_{C_i}^N(K, U)} \right]^{1-U_i} \quad (6.65)$$

Et en notant,  $S_{k,j} = p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j > 0\}}} \exp(-\Lambda_{C_j}^N(K, U)) \prod_{i=j+1}^k (1 - p_{U_i}) \left[ \frac{\lambda(C_i - C_j)}{\lambda_{C_i}^N(K, U)} \right]^{1-U_i}$ , on a donc :

$$\lambda_t^N(K, U) \exp(-\Lambda_t^N(K, U)) = \sum_{j=0}^{K_{t-}} \lambda(t - C_j) \exp(-\Lambda(t - C_j)) S_{K_{t-}, j} \quad (6.66)$$

En intégrant l'équation précédente entre  $C_{K_{t^-}}$  et  $t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \exp(-\Lambda_t^N(K, U)) - \exp(-\Lambda_{C_{K_{t^-}}}^N(K, U)) \\ &= \sum_{j=0}^{K_{t^-}} S_{K_{t^-}, j} [\exp(-\Lambda(t - C_j)) - \exp(-\Lambda(C_{K_{t^-}} - C_j))] \end{aligned} \quad (6.67)$$

Or, d'une part, en évaluant l'équation (6.66) en  $t = C_{k+1}$  on a si  $U_{k+1} = 0$  :

$$\begin{aligned} \exp(-\Lambda_{C_{k+1}}^N(K, U)) &= \sum_{j=0}^k \frac{\lambda(C_{k+1} - C_j)}{\lambda_{C_{k+1}}^N(K, U)} \exp(-\Lambda(C_{k+1} - C_j)) S_{k, j} \\ &= \frac{1}{1 - p_{U_{k+1}}} \sum_{j=0}^k S_{k+1, j} \exp(-\Lambda(C_{k+1} - C_j)) \\ &= \frac{1}{1 - p_{U_{k+1}}} \left[ \sum_{j=0}^{k+1} S_{k+1, j} \exp(-\Lambda(C_{k+1} - C_j)) \right] - \frac{p_{U_{k+1}}}{1 - p_{U_{k+1}}} \exp(-\Lambda_{C_{k+1}}^N(K, U)) \end{aligned}$$

D'où

$$\exp(-\Lambda_{C_{k+1}}^N(K, U)) = \sum_{j=0}^{k+1} S_{k+1, j} \exp(-\Lambda(C_{k+1} - C_j)) \quad (6.68)$$

D'autre part, en évaluant l'équation (6.67) en  $t = C_{k+1}$  on a si  $U_{k+1} = 1$  :

$$\begin{aligned} \exp(-\Lambda_{C_{k+1}}^N(K, U)) &= \exp(-\Lambda_{C_k}^N(K, U)) \\ &\quad + \sum_{j=0}^k S_{k, j} [\exp(-\Lambda(C_{k+1} - C_j)) - \exp(-\Lambda(C_k - C_j))] \\ &= \exp(-\Lambda_{C_k}^N(K, U)) \\ &\quad + \left[ \sum_{j=0}^k \frac{S_{k+1, j}}{1 - p_{U_{k+1}}} \exp(-\Lambda(C_{k+1} - C_j)) - S_{k, j} \exp(-\Lambda(C_k - C_j)) \right] \end{aligned} \quad (6.69)$$

Or  $S_{k+1, k+1} = p_{U_{k+1}} \exp(-\Lambda_{C_{k+1}}^N(K, U))$ , donc en multipliant les deux membres de l'équation ci-dessus par  $(1 - p_{U_{k+1}})$  et en leur ajoutant  $S_{k+1, k+1}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \exp(-\Lambda_{C_{k+1}}^N(K, U)) &= \sum_{j=0}^{k+1} S_{k+1, j} \exp(-\Lambda(C_{k+1} - C_j)) \\ &\quad + (1 - p_{U_{k+1}}) \left[ \exp(-\Lambda_{C_k}^N(K, U)) - \sum_{j=0}^k S_{k, j} \exp(-\Lambda(C_k - C_j)) \right] \end{aligned} \quad (6.70)$$

Des équations (6.70) et (6.68) on déduit, par une petite récurrence, que quelle que soit la valeur de  $U_{K_{t^-}}$  on a :

$$\exp(-\Lambda_{C_{K_{t^-}}}^N(K, U)) = \sum_{j=0}^{K_{t^-}} S_{K_{t^-}, j} \exp(-\Lambda(C_{K_{t^-}} - C_j)) \quad (6.71)$$

En utilisant ce résultat dans l'équation (6.67) on obtient que :

$$\exp(-\Lambda_t^N(K, U)) = \sum_{j=0}^{K_{t-}} S_{K_{t-}, j} \exp(-\Lambda(t - C_j)) \quad (6.72)$$

Finallement la propriété est prouvée en prenant le logarithme et en dérivant l'équation ci dessus. ■

Grâce à cette intensité de défaillance propre, on peut calculer, en utilisant la propriété 6.2.3, une fonction de vraisemblance correspondant à l'observation du processus des MP et MC sans supposer connus les  $\{B_i\}_{i \geq 1}$ . Cette vraisemblance est appelée également vraisemblance propre.

**PROPRIETE 6.4.2 :**

Pour des effets de maintenance de type BP, la vraisemblance associée à une unique observation du processus des MP et MC sur  $[0, t]$  s'écrit :

$$\begin{aligned} L_t(\theta) = & \left[ \prod_{i=1}^{K_{t-}} (1 - p_{U_i}) \lambda(C_i)^{1-U_i} \right] \lambda(t)^{(1-U_{K_t}) \mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}} \exp(-\Lambda(t)) \\ & + \left[ \sum_{j=1}^{K_{t-}} p_{U_j} \left[ \prod_{i=j+1}^{K_{t-}} (1 - p_{U_i}) \lambda(C_i - C_j)^{1-U_i} \right] \right. \\ & \left. \lambda(t - C_j)^{(1-U_{K_t}) \mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}} \exp(-\Lambda(t - C_j)) L_{C_j}(\theta) \right] \quad (6.73) \end{aligned}$$

où  $\theta$  représente les paramètres à estimer, c'est-à-dire  $p_p$ ,  $p_c$  et les paramètres de l'intensité initiale,  $\lambda$ . □

**Démonstration :**

D'après la propriété 6.2.3 on a :

$$\begin{aligned} L_t(\theta) &= \left[ \prod_{i=1}^{K_t} \lambda_{C_i}^N(i-1, \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-1})^{1-U_i} \right] \exp(-\Lambda_t^N(K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})) \\ &= \left[ \prod_{i=1}^{K_{t-}} \lambda_{C_i}^N(i-1, \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-1})^{1-U_i} \right] \\ & \quad \lambda_t^N(K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})^{(1-U_{K_t}) \mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}} \exp(-\Lambda_t^N(K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})) \quad (6.74) \end{aligned}$$

En utilisant l'équation précédente et l'équation (6.66) si  $t = C_{K_t}$  ou l'équation (6.72) sinon, on obtient :

$$\begin{aligned} L_t(\theta) &= \sum_{j=0}^{K_{t-}} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}} \lambda(t - C_j)^{(1-U_{K_t}) \mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}} \left[ \prod_{i=j+1}^{K_{t-}} (1 - p_{U_i}) \lambda(C_i - C_j)^{1-U_i} \right] \\ & \quad \exp(-\Lambda(t - C_j)) \left[ \prod_{i=1}^j \lambda_{C_i}^N(i-1, \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-1})^{1-U_i} \right] \exp(-\Lambda_{C_j}^N(j-1, \mathbf{W}_{j-1}, \mathbf{U}_{j-1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_t(\theta) = & \left[ \prod_{i=1}^{K_{t-}} (1 - p_{U_i}) \lambda(C_i)^{1-U_i} \right] \lambda(t)^{(1-U_{K_t})} \mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}} \exp(-\Lambda(t)) \\
 & + \sum_{j=1}^{K_{t-}} p_{U_j} \lambda(t - C_j)^{(1-U_{K_t})} \mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}} \exp(-\Lambda(t - C_j)) \left[ \prod_{i=j+1}^{K_{t-}} (1 - p_{U_i}) \lambda(C_i - C_j)^{1-U_i} \right] \\
 & \left[ \prod_{i=1}^j \lambda_{C_i}^N(i-1, \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-1})^{1-U_i} \right] \exp\left(-\Lambda_{C_j}^N(j-1, \mathbf{W}_{j-1}, \mathbf{U}_{j-1})\right) \quad (6.75)
 \end{aligned}$$

$$\text{Et, } L_{C_j}(\theta) = \left[ \prod_{i=1}^j \lambda_{C_i}^N(i-1, \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-1})^{1-U_i} \right] \exp\left(-\Lambda_{C_j}^N(j-1, \mathbf{W}_{j-1}, \mathbf{U}_{j-1})\right). \quad \blacksquare$$

Comme dans le cas du modèle BP pour des maintenances uniquement correctives, prendre le logarithme de la vraisemblance ne simplifie pas les équations. Cependant, on reste malgré tout capable de calculer les dérivées partielles de cette vraisemblance et donc de rechercher les estimateurs de maximum de vraisemblance avec une méthode numérique comme celle de Newton. Le calcul de la vraisemblance et de ces dérivées partielles est itératif et, de façon similaire au cas de maintenances uniquement correctives, a une complexité théorique en  $O(k^2)$ , où  $k$  est le nombre total de maintenances observées.

### 6.4.3 Lien avec le modèle de Last et Szekli

Last et Szekli [47] ont proposé un modèle qui peut être vu comme une généralisation du modèle de maintenances préventives planifiées que nous proposons. Pour eux la politique de maintenance préventive dépend des variables aléatoires externes :

$$U_{K_{t-}+1} = 1 \Rightarrow \tau_{M_{t-}+1} = C_{K_{t-}} + h_{K_{t-}}(\mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}, \mathbf{B}_{K_{t-}}) \quad (6.76)$$

Et les durées inter-maintenances et types de maintenances vérifient donc :

$$W_{K_{t-}+1} = \min(T_{N_{t-}+1} - C_{K_{t-}}, h_{K_{t-}}(\mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}, \mathbf{B}_{K_{t-}})) \quad (6.77)$$

$$U_{K_{t-}+1} = \mathbb{1}_{\{W_{K_{t-}+1} = h_{K_{t-}}(\mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}, \mathbf{B}_{K_{t-}})\}} \quad (6.78)$$

L'effet des maintenances sur le processus des défaillances est supposé du type Kijima II :

$$\lambda_t^N(K, U, B) = \lambda(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}(K, U, B)) \quad (6.79)$$

avec pour tout  $k \geq 0$  :  $A_{k+1}(K, U, B) = (1 - B_{k+1})[A_k(K, U, B) + W_{k+1}]$ .

Last et Szekli ont introduit ce modèle et se sont intéressés aux propriétés de stationnarité du processus des maintenances, ainsi qu'à la comparaison de différentes politiques de maintenance par des méthodes de couplage, mais ils n'ont jamais cherché à estimer l'efficacité des maintenances.

## 6.5 Quelques politiques de maintenances préventives classiques

Dans quelques articles on retrouve des cas particuliers du modèle de maintenances préventives planifiées que nous proposons ici. La quasi-totalité de ces articles (excepté quelques uns sur les MP à date fixée) ne s'intéressent pas à l'estimation de l'efficacité de la maintenance dans ces modèles. Mais, pour des paramètres du modèle donnés, ils comparent l'effet des différentes politiques de maintenance sur le processus des défaillances. Ou, dans une grande majorité des cas, ils essaient d'optimiser une fonction de coût. L'optimisation de la politique de maintenance

dépendra alors de la capacité du personnel de maintenance à tenir compte du passé du processus des maintenances pour fixer les dates de MP futures, c'est-à-dire pour déterminer les fonctions  $h_i$ . Pham et Wang [60] ont effectué une revue très complète des différentes politiques de MP proposées.

### 6.5.1 MP à date fixée

Comme on l'a expliqué précédemment, l'idée la plus simple est de considérer que les MP ont lieu à des instants déterministes  $\tau_k$ , pour  $k \geq 1$ . La politique de maintenance préventive consiste alors à effectuer la MP dès que l'on arrive à cette date fixée préalablement. En notant  $m = \{m_t\}_{t \geq 0}$  le processus déterministe des MP cela s'écrit :

$$\forall k \geq 0, \quad h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \tau_{m_{C_k}+1} - C_k \quad (6.80)$$

Les maintenances correctives, effectuées suite à des défaillances, sont souvent faites dans l'urgence en ayant uniquement pour but de remettre le système en état de marche. Par conséquent, il est raisonnable de proposer des modèles où toutes les maintenances correctives sont minimales. Au contraire, des maintenances préventives soigneusement préparées peuvent améliorer significativement l'état du système. Il est d'ailleurs admis dans la pratique que les maintenances qui augmentent le plus la durée de vie du système sont les maintenances préventives. Dans ce cas, il est facile de voir que l'intensité de défaillance est déterministe, ce qui implique que le processus des défaillances est un NHPP. L'expression de l'intensité de ce processus est obtenue en remplaçant, dans l'expression de l'intensité des modèles de la première partie,  $(T_i, N_i)$  par  $(\tau_i, m_i)$ . Par exemple, si l'efficacité des MP est supposée du type  $ARA_1$ , l'intensité de défaillance est de la forme :

$$\lambda_t = \lambda(t - \rho\tau_{m_t-}) \quad (6.81)$$

Et si l'efficacité des MP est supposée du type  $ARA_\infty$ , elle est de la forme :

$$\lambda_t = \lambda \left( t - \rho \sum_{j=0}^{m_t-1} (1-\rho)^j \tau_{m_t-j} \right) \quad (6.82)$$

Il s'avère que ce modèle a déjà été proposé par Yun et Choung [75] dans un article où ils ont expérimenté, sur des données simulées, la méthode d'estimation des paramètres de ce modèle par maximum de vraisemblance. Le fait que le processus des défaillances soit un NHPP simplifie grandement les choses : dans les formules de la section 6.2 les lois des types de maintenance, des durées inter-maintenances et inter-défaillances ne sont plus, dans ce cas, conditionnelles, et l'intensité de défaillance est alors une fonction déterministe beaucoup plus simple à intégrer.

Le modèle proposé par Canfield [13] en 1986 fait une hypothèse sur les maintenances préventives qui ne rentre pas dans le cadre des modèles vus précédemment. En effet, les hypothèses de ce modèle sont :

- Les maintenances correctives sont minimales (ABAO).
- Les maintenances préventives sont déterministes et périodiques, de période  $\Delta t$ .
- L'intensité de défaillance est continue.
- Après la  $k^{\text{ème}}$  MP, l'intensité de défaillance croît comme celle d'un système d'âge  $t - ks$ . L'efficacité de la maintenance est représentée par la durée  $s$ , qui doit être inférieure à la période  $\Delta t$ .

L'intensité de défaillance est une fonction continue. L'efficacité de la maintenance ne se traduit donc pas par un rajeunissement du système, mais par une modification de la pente de l'intensité

de défaillance après une MP, c'est à dire une variation de la vitesse d'usure du système. On peut le voir sur la figure 6.1, tracée pour  $\Delta t = 1.5$  et  $s = 1$ . Dans cette figure et la suivante, les instants des MP et des MC sont respectivement représentés par des carrés et des cercles sur l'axe des abscisses.

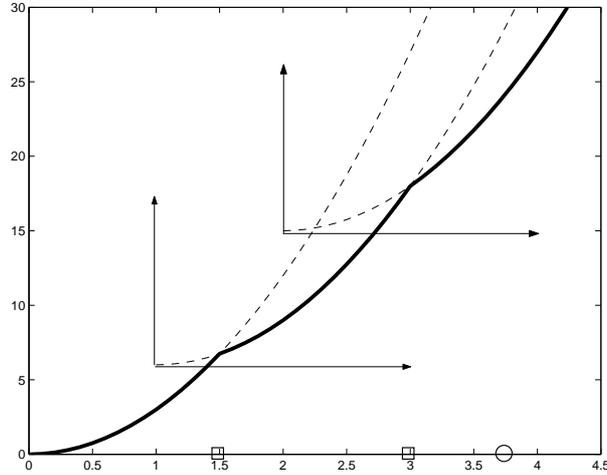


FIG. 6.1 – Intensité de défaillance du modèle de Canfield

La forme générale de l'intensité de défaillance dans le modèle de Canfield est :

$$\lambda_t = \lambda(t - \lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor s) + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor} [\lambda(i(\Delta t - s) + s) - \lambda(i(\Delta t - s))] \quad (6.83)$$

Ce modèle se généralise facilement à des MP déterministes non périodiques :

$$\lambda_t = \lambda(t - sm_t) + \sum_{i=1}^{m_t} [\lambda(\tau_i - (i - 1)s) - \lambda(\tau_i - is)] \quad (6.84)$$

Quelques auteurs, dont Nakagawa [59], Chan et Shaw [14], Wang et Pham [72], se sont intéressés aux modèles d'efficacité de maintenance pour des MP à date fixée, mais dans le but d'optimiser des coûts de maintenance. Très peu ont cherché à estimer les paramètres de leurs modèles. Canfield [13] a estimé les paramètres de son modèle dans le cas particulier où  $s = \Delta t$ . Cela revient à fixer l'efficacité de la maintenance et à estimer seulement les paramètres de l'intensité initiale, ce qui n'est pas pertinent pour notre étude.

Jack [34] a effectué une étude statistique dans le cas où les MP sont déterministes et périodiques avec des effets  $ARA_1$  ou  $ARA_\infty$ , et les MC minimales. L'intensité initiale est supposée être une fonction puissance. Le jeu de données réelles étudié est constitué des instants de maintenances de 9 systèmes d'équipement médical (syringe driver infusion pumps) identiques. Il comprend au total 80 MC et 30 MP. Pour le modèle  $ARA_1$ , le paramètre de forme de l'intensité initiale,  $\beta$ , est estimé à 2.71 et  $\rho$  à 0.488. Pour le modèle  $ARA_\infty$ ,  $\beta$  est estimé à 2.48 et  $\rho$  à 0.211. Il semble donc qu'il y ait sur ces matériels une usure forte et une maintenance relativement peu efficace.

Dans un autre papier [35], Jack a analysé les mêmes données pour des MP et MC suivant le modèle de la section 6.3.4 et pour des MP et MC  $ARA_\infty$  correspondant à (6.50). Dans les deux cas, la vraisemblance est maximale pour  $\rho_c = 0$ , ce qui fait que les estimations des autres paramètres sont exactement les mêmes que sous l'hypothèse de MC minimales. Selon Jack, ces résultats confirment, pour ces données, la validité de l'hypothèse MC minimale. En fait, il est

possible que  $\rho_c$  soit négatif, c'est-à-dire que la maintenance corrective soit nuisible, mais Jack n'a pas pris en compte cette possibilité.

### 6.5.2 MP à âge fixé.

Cette politique de MP n'existe que pour des modèles pour lesquels l'effet des maintenances suit un modèle d'âge virtuel. Elle consiste à effectuer une MP dès que l'âge virtuel du système,  $t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}$ , atteint ou dépasse un certain seuil fixé  $a_{K_{t-}}$  :

$$\forall k \geq 0, \quad h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = a_k - A_k(K, U) \quad (6.85)$$

Par exemple, on peut supposer que le seuil est constant et égal à  $a$  et que l'effet des maintenances sur le processus des défaillances est AGAN. Les MP ayant lieu entre  $T_i$  et  $T_{i+1}$  se font alors à tous les instants de la forme  $T_i + ka$  où  $k$  est un entier tel que  $T_i + ka < T_{i+1}$ . L'intensité de défaillance s'écrit alors :

$$\lambda_t^N(N, M) = \lambda_t = \lambda \left( t - T_{N_{t-}} - \left\lfloor \frac{t - T_{N_{t-}}}{a} \right\rfloor a \right) \quad (6.86)$$

Le processus des défaillances est dans ce cas un processus de renouvellement, auquel Shaked et Szekli [64] se sont intéressés. On retrouve par exemple ce type de politique de MP à âge fixé dans Brown, Mahoney et Sivazlian [10], Dagpunar et Jack [20], et Lin, Zuo et Yam [53]. Une forme généralisée de ce type de politique de MP est souvent associée à des effets de maintenance de type BP (comme dans Fontenot et Proschan [29]) ou BBS (comme dans Sheu, Kuo et Nakagawa [65]). Pour ce faire, ces auteurs considèrent que la MP a lieu dès que l'âge relatif (aux variables externes) du système atteint un certain seuil. Notre modèle ne permet pas de modéliser une telle politique, mais celui de Last et Szekli le permet.

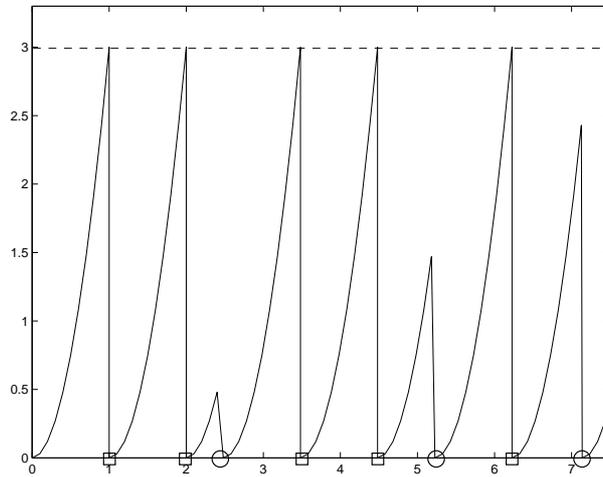


FIG. 6.2 – Politique de maintenance préventive à âge ou intensité fixée, cas AGAN

### 6.5.3 MP à intensité fixée.

La MP a lieu dès que l'intensité de défaillance du système,  $\lambda_t^N(K, U)$ , dépasse un certain seuil fixé,  $b_{K_{t-}}$ . Pour un modèle d'âge virtuel les fonctions  $h_k$  vérifient alors :

$$\forall k \geq 0, \quad h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \lambda^{-1}(b_k) - A_k(K, U) \quad (6.87)$$

où  $\lambda^{-1}(\cdot)$  est l'inverse de la fonction  $\lambda(\cdot)$ . Si on suppose que le seuil est constant et égal à  $b$ , et que les effets des MP et des MC sont AGAN, on retrouve le même modèle que (6.86), avec  $b = \lambda(a)$ . La figure 6.2 présente une trajectoire de l'intensité de défaillance dans ce cas pour  $a = 1$  ou  $b = 3$  et une intensité initiale toujours égale à  $\lambda(t) = 3t^2$ .

Si les effets des MP et MC ne sont pas du type AGAN, la politique de MP à intensité fixée n'est pas équivalente à la politique de MP à âge fixé. On trouve ce type de politique de maintenance dans Lie et Chun [50], Jayabalan et Chaudhuri [37], et Lin, Zuo et Yam [53].

On pourrait également imaginer cette politique de MP avec des modèles à réduction de l'intensité :  $\lambda_t^N(K, U) = \lambda(t) - S_k(K, U)$ . Les fonctions  $h_k$  vérifieraient alors :

$$\forall k \geq 0, \quad h_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \lambda^{-1}(b_k + S_k(K, U)) \quad (6.88)$$



# *Maintenances préventives conditionnelles*

---

Dans la pratique la maintenance préventive n'est pas forcément complètement planifiée. Certaines MP peuvent avoir lieu en fonction d'une surveillance du système. Si celui ci montre, par exemple, un état de dégradation avancé, une perte de performance notable, une sortie des conditions standards de fonctionnement, ..., il est maintenu préventivement. C'est ce qui est appelé maintenance (préventive) conditionnelle. Le but de ce type de maintenance est de minimiser les coûts d'entretien, en surveillant le système pour effectuer les MP en fonction de l'état de dégradation. L'idéal serait de réaliser la MP juste avant la défaillance. La dégradation du système n'étant pas parfaitement prévisible, la MP conditionnelle qui en découle se fait à un instant qui n'avait pas été prévu au départ, donc aléatoire. De plus, étant donné que les instants de défaillance sont bien entendu eux aussi liés à l'état de dégradation du système, les instants de MC et les instants de MP ne sont pas indépendants.

Dans un premier temps nous nous intéresserons au cas où l'efficacité de maintenance ne dépend pas de variables externes. Nous caractériserons le processus des MC et MP conditionnelles à l'aide de deux intensités : une pour le processus des MC et une pour le processus des MP. Nous ferons le lien entre ce modèle général et le modèle de risques concurrents. Nous définirons un premier modèle d'âge virtuel généralisé dont nous étudierons les cas particuliers. Puis, nous élargirons cette classe de modèles afin de définir un modèle d'âge virtuel encore plus général. Enfin, nous nous intéresserons au cas où des variables aléatoires externes influencent le processus des défaillances.

## 7.1 Caractérisation du processus des MP et MC

Dans un premier temps on considère qu'aucune variable externe n'influence le processus des défaillances. Pour modéliser des MP conditionnelles, il suffit de considérer les MP et les MC sur le même plan, comme deux processus ponctuels aléatoires pouvant interagir et ayant chacun une intensité. De la même façon, on définira alors également une troisième intensité pour le processus des maintenances globales,  $K$ . Ces trois intensités, en l'absence d'effets aléatoires externes, seront naturellement définies en fonction de l'histoire complète du processus des MP et MC. c'est-à-dire, de façon équivalente selon qu'on adopte la vision processus bivarié ou coloré :

$$\mathcal{H}_t = \sigma(\{N_s, M_s\}_{0 \leq s \leq t}) = \sigma(\{K_s, U_{K_s}\}_{0 \leq s \leq t}) \quad (7.1)$$

Dans la suite on ne fait aucune hypothèse quant aux liens qui peuvent exister entre les deux processus  $N$  et  $M$ . On fait uniquement les hypothèses suivantes :

- On ne peut pas avoir deux maintenances simultanées :

$$\forall t \geq 0, \quad \forall \Delta t > 0, \quad P(K_{t+\Delta t} - K_t > 1 | K_t, \mathbf{W}_{K_t}, U_{K_t}) = o(\Delta t) \quad (7.2)$$

- Une même maintenance ne peut pas être à la fois préventive et corrective, c'est-à-dire que les processus  $M$  et  $N$  n'ont pas de saut commun :

$$\forall t \geq C_1, \quad T_{N_t} \neq \tau_{M_t} \quad (\text{p.s.}) \quad (7.3)$$

**DEFINITION 7.1.1.**

– *Intensité de MC :*

$$\lambda_t^N(K, U) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t-} = 1 | K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}) \quad (7.4)$$

– *Intensité de MP :*

$$\lambda_t^M(K, U) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(M_{t+\Delta t} - M_{t-} = 1 | K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}) \quad (7.5)$$

– *Intensité de maintenance (globale) :*

$$\lambda_t^K(K, U) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(K_{t+\Delta t} - K_{t-} = 1 | K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}) \quad (7.6)$$

□

En fait, on n'a pas besoin de définir ces trois intensités. Les intensités de MP et de MC suffisent puisque les valeurs de l'intensité de maintenance globale se déduisent de ces deux dernières comme le montre la propriété suivante, démontrée dans [3] (page 74).

**PROPRIETE 7.1.1 :**

$$\forall t \geq 0, \quad \lambda_t^K(K, U) = \lambda_t^N(K, U) + \lambda_t^M(K, U) \quad (7.7)$$

□

Les intensités ainsi définies permettent de caractériser la loi du processus des MP et MC en déterminant les lois conditionnelles des durées inter-maintenances et types de maintenances données par les formules de Jacod [3].

**PROPRIETE 7.1.2 :**

$$P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 0 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \int_w^{+\infty} \lambda_{C_k+u}^N(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) P(W_{k+1} > u | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) du \quad (7.8)$$

$$P(W_{k+1} > w, U_{k+1} = 1 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \int_w^{+\infty} \lambda_{C_k+u}^M(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) P(W_{k+1} > u | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) du \quad (7.9)$$

$$P(W_{k+1} > w | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \exp \left( - \int_0^w \lambda_{C_k+s}^K(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds \right) \quad (7.10)$$

$$P(U_{k+1} = 1 | W_{k+1} = w, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \frac{\lambda_{C_k+w}^M(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)}{\lambda_{C_k+w}^K(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)} \quad (7.11)$$

□

**COROLLAIRE 7.1.1. :**

$$P(U_{k+1} = 1 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \int_0^{+\infty} \lambda_{C_k+u}^M(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) P(W_{k+1} > u | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) du \quad (7.12)$$

□

Les formules de Jacod ont pour conséquence que les intensités de MP et de MC définissent complètement la loi jointe des observations. De plus, on se rend bien compte que le cas des maintenances préventives planifiées n'est pas un cas particulier de ce modèle. En effet, on a ici, conditionnellement au passé des observations, une distribution continue pour le temps d'attente jusqu'à la prochaine date possible de MP, si il n'y a pas de MC avant. Cette distribution continue ne permet pas de modéliser des événements déterministes conditionnellement aux observations passées, donc des MP planifiées. Par contre, cette distribution continue nous permet de définir des densités conditionnelles.

**DEFINITION 7.1.2.**

Pour  $u = \{0, 1\}$ , on note pour tout  $k \geq 0$  :

$$f_{W_{k+1}, U_{k+1}=u | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k}(w) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta w} P(w < W_{k+1} \leq w + \Delta w, U_{k+1} = u | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \quad (7.13) \quad \square$$

Les expressions de ces densités sont obtenues à l'aide de la propriété 7.1.2.

**COROLLAIRE 7.1.2. :**

$$f_{W_{k+1}, U_{k+1}=0 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k}(w) = \lambda_{C_{k+w}}^N(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \exp\left(-\int_0^w \lambda_{C_{k+s}}^K(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds\right) \quad (7.14)$$

$$f_{W_{k+1}, U_{k+1}=1 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k}(w) = \lambda_{C_{k+w}}^M(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \exp\left(-\int_0^w \lambda_{C_{k+s}}^K(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds\right) \quad (7.15) \quad \square$$

Pour des MP conditionnelles, dans le cas général, il n'y a pas de formule simple pour la date de la prochaine défaillance sachant les MP et les MC déjà observées. Pour simplifier un tant soit peu la formule et sa démonstration, on utilisera exceptionnellement des conditionnements par rapport à des événements, par exemple  $[\mathbf{W}_k = \mathbf{w}_k]$ , et non des variables aléatoires,  $\mathbf{W}_k$ .

**PROPRIETE 7.1.3 :**

$$P(T_{N_{c_k+1}} > c_k + x | \mathbf{W}_k = \mathbf{w}_k, \mathbf{U}_k = \mathbf{u}_k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{s_j \leq x} \prod_{1 \leq i \leq j} \lambda_{c_{k+i}}^M(k+i-1, \mathbf{w}_{k+i-1}, \mathbf{u}_{k+i-1}) \exp\left(-\sum_{1 \leq i \leq j} \int_0^{w_{k+i}} \lambda_{c_{k+i-1}+s}^K(k+i-1, \mathbf{w}_{k+i-1}, \mathbf{u}_{k+i-1}) ds - \int_0^{x-s_j} \lambda_{c_{k+j}+s}^K(k+j, \mathbf{w}_{k+j}, \mathbf{u}_{k+j}) ds\right) dw_{k+1} \dots dw_{k+j} \quad (7.16)$$

avec  $\mathbf{u}_{k+j} = (u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1)$ , où les  $u_i \in \{0, 1\}$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ . □

**Démonstration :**

Le principe de la démonstration est d'utiliser une formule des probabilités totales sur le système d'événements complet  $\{M_{C_k+x} - M_{C_k} = j\}_{j \geq 0}$ .

$$P(T_{N_{c_k+1}} > c_k + x | \mathbf{W}_k = \mathbf{w}_k, \mathbf{U}_k = \mathbf{u}_k) = \sum_{j=0}^{\infty} P(T_{N_{c_k+1}} > c_k + x, M_{c_k+x} - M_{c_k} = j | \mathbf{W}_k = \mathbf{w}_k, \mathbf{U}_k = \mathbf{u}_k) \quad (7.17)$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} & P(T_{N_{c_k+1}} > c_k + x, M_{c_k+x} - M_{c_k} = j + 1 | \mathbf{W}_k = \mathbf{w}_k, \mathbf{U}_k = \mathbf{u}_k) \\ &= \int_0^x P(T_{N_{c_k+1}} > c_k + x, M_{c_k+x} - M_{c_{k+1}} = j | \mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{u}_{k+1}) \\ & \quad f_{W_{k+1}, U_{k+1}=1 | \mathbf{W}_k = \mathbf{w}_k, \mathbf{U}_k = \mathbf{u}_k}(w_{k+1}) dw_{k+1} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Récursivement on obtient donc que :

$$\begin{aligned} & P(T_{N_{c_k+1}} > c_k + x, M_{c_k+x} - M_{c_k} = j | \mathbf{W}_k = \mathbf{w}_k, \mathbf{U}_k = \mathbf{u}_k) \\ &= \int_{s_j \leq x} P(T_{N_{c_k+1}} > c_k + x, M_{c_k+x} - M_{c_{k+j}} = 0 | \mathbf{W}_{k+j} = \mathbf{w}_{k+j}, \mathbf{U}_{k+j} = \mathbf{u}_{k+j}) \\ & \quad \prod_{1 \leq i \leq j} f_{W_{k+i}, U_{k+i}=1 | \mathbf{W}_{k+i-1} = \mathbf{w}_{k+i-1}, \mathbf{U}_{k+i-1} = \mathbf{u}_{k+i-1}}(w_{k+i}) dw_{k+1} \dots dw_{k+j} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Et

$$P(T_{N_{c_k+1}} > c_k + x, M_{c_k+x} - M_{c_k} = 0 | \mathbf{W}_k = \mathbf{w}_k, \mathbf{U}_k = \mathbf{u}_k) = P(W_{k+1} > x | \mathbf{W}_k = \mathbf{w}_k, \mathbf{U}_k = \mathbf{u}_k) \quad (7.20)$$

D'où le résultat. ■

Enfin dans le cadre d'une approche paramétrique, on peut estimer les paramètres des intensités de MP et MC à l'aide de la fonction de vraisemblance donnée par la propriété suivante, extraite de [3] (page 102).

**PROPRIETE 7.1.4 :**

La fonction de vraisemblance associée à une unique observation du processus des PM et CM sur  $[0, t]$  vérifie :

$$\begin{aligned} L_t(\theta) &= \left[ \prod_{i=1}^{K_t} \lambda_{C_i}^N(i-1, \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-1})^{1-U_i} \lambda_{C_i}^M(i-1, \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-1})^{U_i} \right] \\ & \quad \exp \left( - \sum_{j=1}^{K_t+1} \int_{C_{j-1}}^{C_j} \lambda_s^K(j-1, \mathbf{W}_{j-1}, \mathbf{U}_{j-1}) ds \right) \end{aligned} \quad (7.21) \quad \square$$

Grâce à la propriété 7.1.1, la vraisemblance précédente peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} L_t(\theta) &= \left[ \prod_{j=1}^{M_t} \lambda_{\tau_j}^M(K_{\tau_j} - 1, \mathbf{W}_{K_{\tau_j}-1}, \mathbf{U}_{K_{\tau_j}-1}) \right] \exp \left( - \sum_{j=1}^{K_t+1} \int_{C_{j-1}}^{C_j} \lambda_s^M(j-1, \mathbf{W}_{j-1}, \mathbf{U}_{j-1}) ds \right) \\ & \quad \left[ \prod_{i=1}^{N_t} \lambda_{T_i}^N(K_{T_i} - 1, \mathbf{W}_{K_{T_i}-1}, \mathbf{U}_{K_{T_i}-1}) \right] \exp \left( - \sum_{j=1}^{K_t+1} \int_{C_{j-1}}^{C_j} \lambda_s^N(j-1, \mathbf{W}_{j-1}, \mathbf{U}_{j-1}) ds \right) \end{aligned} \quad (7.22)$$

Ainsi, il y a dans la vraisemblance un terme multiplicatif supplémentaire par rapport au cas de MP planifiées. Ce terme correspond à l'aléa existant sur la date de la prochaine MP.

## 7.2 Lien avec l'approche risques concurrents

### 7.2.1 L'approche risques concurrents

En 2000, Bedford et Mesina [7] ont proposé de modéliser la dépendance entre maintenances préventives et correctives par la méthode des risques concurrents (RC). Le principe

est le suivant. Au moment où on remet en fonctionnement un système, après une maintenance, on ne sait pas si la prochaine défaillance surviendra avant ou après la prochaine maintenance préventive. Autrement dit, on ne sait pas si la prochaine maintenance sera préventive ou corrective. Mathématiquement, après la  $(i - 1)^{\text{ème}}$  maintenance, on peut considérer qu'il existe deux variables aléatoires fictives  $Y_i$  et  $Z_i$ , appelées variables de risques, où  $Y_i$  représente la durée d'attente de la prochaine MP si une MC ne survient pas avant, et  $Z_i$  la durée d'attente de la prochaine MC si une MP ne survient pas avant. La prochaine maintenance véritablement observée est celle qui se produira la première, au bout d'une durée

$$W_i = \min(Y_i, Z_i) \quad (7.23)$$

La nature de cette prochaine maintenance, préventive ou corrective, est déterminée par :

$$U_i = \mathbb{1}_{\{Y_i \leq Z_i\}} = \begin{cases} 1 & \text{si la maintenance est préventive} \\ 0 & \text{si la maintenance est corrective} \end{cases} \quad (7.24)$$

La figure 7.1 illustre le principe de construction des modèles de RC.

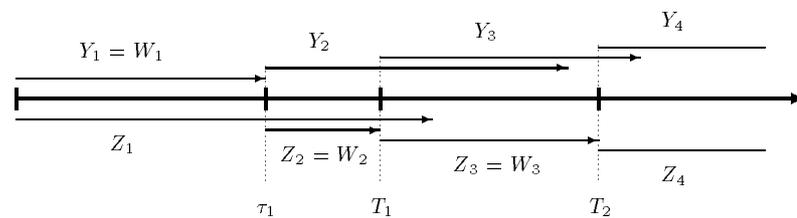


FIG. 7.1 – Principe des risques concurrents

Dans un modèle de risques concurrents, on suppose en plus que les  $Y_i$  sont indépendants et de même loi, et les  $Z_i$  sont indépendants et de même loi. Par contre,  $Y_i$  et  $Z_i$  peuvent être dépendants. Cela revient à dire que les effets des MP et des MC sont AGAN : après chaque maintenance, le système est remis à neuf. Le processus global des maintenances est alors un processus de renouvellement, mais le processus des MP ou celui des MC eux n'en sont pas.

La dépendance entre les deux types de maintenance est exprimée par la loi de probabilité conjointe du couple  $(Y, Z)$ , caractérisée par la fonction de survie bidimensionnelle :

$$\forall y \geq 0, \forall z \geq 0, \quad S(y, z) = P(Y > y, Z > z) \quad (7.25)$$

La politique de maintenance idéale consisterait à effectuer la maintenance préventive juste avant la défaillance, ce qui se produit quand  $Y = Z - \epsilon$ , avec  $\epsilon$  petit. Si les  $Y_i$  sont nettement plus petits que les  $Z_i$ , on n'observe pas de défaillance, mais on fait les MP trop tôt, donc à un coût trop élevé. Enfin, la pire politique serait celle où on n'observe que des défaillances, ce qui arrive pour  $Y_i > Z_i$ , pour tout  $i \geq 1$ .

Cooke et Bedford [18] ont classé les principaux modèles de risques concurrents, parmi lesquels on distingue :

- **Modèle à risques indépendants** : C'est le cas où  $Y$  et  $Z$  sont indépendants. Le modèle est alors complètement défini par les lois marginales de  $Y$  et  $Z$ .
- **Modèle à risques conditionnellement indépendants** :  $Y = A + C$  et  $Z = B + C$ , où  $A, B$  et  $C$  sont mutuellement indépendantes [32].  $Y$  et  $Z$  sont donc dépendantes par l'intermédiaire de  $C$  et indépendantes conditionnellement à  $C$ .

- **Modèle à signe aléatoire :** (aussi appelé modèle à censure dépendant de l'âge dans [17]) Il consiste simplement à supposer que le signe de  $Y - Z$  est indépendant de  $Z$ . Il est équivalent de dire que  $U$  et  $Z$  sont indépendantes. En clair, la nature de la prochaine maintenance ne dépend pas de la durée théorique d'attente de la prochaine MC. Pour définir complètement le modèle, la loi conjointe de  $(Y, Z)$  doit être précisée.

Dans la mesure où les effets des MP et MC sont supposés AGAN, le problème d'évaluation de l'efficacité de la maintenance ne se pose pas dans les modèles de risques concurrents. Les travaux consacrés à ces modèles s'intéressent essentiellement à la comparaison de modèles et à l'estimation des lois de  $Y$  et  $Z$ . Pour ce dernier point, la difficulté est que les  $Y_i$  et  $Z_i$  ne sont pas observées, seules les  $W_i$  et  $U_i$  le sont. Dans le modèle à risques indépendants, les lois de  $Y$  et  $Z$  peuvent être estimées au vu des  $W_i$  et  $U_i$  par une méthode de type Kaplan-Meier [44]. Mais quand les risques ne sont pas indépendants, il s'avère qu'on ne peut pas estimer ces lois, à cause d'un problème d'identifiabilité. En effet il a été prouvé que, quelle que soit la loi conjointe de  $(Y, Z)$ , il existe toujours un couple de variables aléatoires indépendantes  $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ , qui fournissent la même loi que  $(Y, Z)$  pour  $(W, U)$  [70]. On ne peut en fait estimer que les fonctions de sous-survie :

$$S_Y^*(y) = P(Y > y, Y \leq Z) = P(W > y, U = 1) \quad (7.26)$$

$$S_Z^*(z) = P(Z > z, Z < Y) = P(W > z, U = 0) \quad (7.27)$$

Pour illustrer ce problème, considérons un exemple, inspiré de Bedford et Mesina [7].

- **Modèle 1 :**  $W$  et  $U$  sont indépendants,  $W$  a pour fonction de survie  $S_W$ ,  $U$  est de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .  $Y$  et  $Z$  sont définis par  $Y = W + (1 - U)A$  et  $Z = W + UA$ , où  $A$  est une variable aléatoire positive quelconque.
- **Modèle 2 :**  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes et de fonctions de survie respectives  $S_Y(y) = [S_W(y)]^p$  et  $S_Z(z) = [S_W(z)]^{(1-p)}$ .

On montre que ces deux modèles ont les mêmes fonctions de sous-survie :  $S_Y^*(y) = pS_W(y)$  et  $S_Z^*(z) = (1 - p)S_W(z)$ . Par conséquent, il est impossible de reconstituer la loi de  $(Y, Z)$  au vu de l'observation de  $(W, U)$ . Le premier modèle suppose une dépendance forte entre MP et MC potentielles alors que le deuxième modèle suppose qu'elles sont indépendantes. Bedford, associé à Mesina [7] et Bunea [12] a cherché à mesurer l'impact de ces incertitudes sur le problème d'optimisation de la maintenance.

## 7.2.2 Généralisation de l'approche risques concurrents

On propose ici de généraliser l'approche risques concurrents au cas d'effets de maintenance quelconques. Pour ceci, on doit caractériser la loi jointe des variables de risques,  $Y_i$  et  $Z_i$ , conditionnellement aux observations déjà réalisées, afin de pouvoir exprimer l'effet de la  $(i - 1)^{\text{ème}}$  maintenance sur la loi du couple  $(Y_i, Z_i)$ .

### DEFINITION 7.2.1.

Pour un processus de MP et MC on définit la loi jointe des risques conditionnellement au passé du processus des MP et MC par la fonction de survie :

$$\forall k \geq 0, \quad S_{k+1}(y, z; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(Y_{k+1} > y, Z_{k+1} > z | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \quad (7.28)$$

□

De la même façon, on généralise la notion de fonction de sous-survie en les conditionnant par rapport au passé du processus des MP et MC.

**DEFINITION 7.2.2.**

Pour un processus de MP et MC on définit les fonctions de sous-survie (généralisées) comme étant :

$$\forall k \geq 0, \quad S_{Z_{k+1}}^*(t; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(Z_{k+1} > t, Z_{k+1} < Y_{k+1} \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \quad (7.29)$$

$$S_{Y_{k+1}}^*(t; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(Y_{k+1} > t, Y_{k+1} \leq Z_{k+1} \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \quad (7.30)$$

□

Si on suppose, comme nous le ferons à partir de maintenant, que les dérivées partielles de la fonction de survie jointe des risques,  $\frac{\partial S_{k+1}}{\partial y}(y, z; \dots)$ ,  $\frac{\partial S_{k+1}}{\partial z}(y, z; \dots)$  et  $\frac{\partial^2 S_{k+1}}{\partial y \partial z}(y, z; \dots)$ , existent et sont continues, le lien entre les fonctions de sous-survie et la fonction de survie jointe des risques est fait par la propriété suivante.

**PROPRIETE 7.2.1 :**

$$S_{Y_{k+1}}^*(y, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \int_y^{+\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial y} S_{k+1}(y, z; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \right]_{(s,s)} ds \quad (7.31)$$

$$S_{Z_{k+1}}^*(z, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \int_z^{+\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial z} S_{k+1}(y, z; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \right]_{(s,s)} ds \quad (7.32)$$

□

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dy} S_{Y_{k+1}}^*(y, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} P(y < Y_{k+1} \leq y + \Delta y, Y_{k+1} \leq Z_{k+1} \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} P(y < Y_{k+1} \leq y + \Delta y, y + \Delta y \leq Z_{k+1} \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ &\quad + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} P(y < Y_{k+1} \leq y + \Delta y, Y_{k+1} \leq Z_{k+1} \leq y + \Delta y \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \end{aligned} \quad (7.33)$$

Or,

$$\begin{aligned} &P(y < Y_{k+1} \leq y + \Delta y, Y_{k+1} \leq Z_{k+1} \leq y + \Delta y \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ &\leq P(y < Y_{k+1} \leq y + \Delta y, y < Z_{k+1} \leq y + \Delta y \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ &= P(y < Y_{k+1} \leq y + \Delta y, Z_{k+1} > y \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ &\quad - P(y < Y_{k+1} \leq y + \Delta y, Z_{k+1} > y + \Delta y \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ &= [S_{k+1}(y, y; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) - S_{k+1}(y + \Delta y, y; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)] \\ &\quad - [S_{k+1}(y, y + \Delta y; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) - S_{k+1}(y + \Delta y, y + \Delta y; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)] \\ &= \left[ -\left[ \frac{\partial}{\partial y} S_{k+1}(y, z; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \right]_{(y,y)} + \left[ \frac{\partial}{\partial y} S_{k+1}(y, z; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \right]_{(y,y+\Delta y)} \right] \Delta y + O(\Delta y^2) \\ &= \left[ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} S_{k+1}(y, z; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \right]_{(y,y)} \Delta y^2 + O(\Delta y^2) = O(\Delta y^2) \end{aligned} \quad (7.34)$$

Et,

$$\begin{aligned} &P(y < Y_{k+1} \leq y + \Delta y, Z_{k+1} > y + \Delta y \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ &= S_{k+1}(y, y + \Delta y; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) - S_{k+1}(y + \Delta y, y + \Delta y; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ &= -\left[ \frac{\partial}{\partial y} S_{k+1}(y, z; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \right]_{(y,y+\Delta y)} \Delta y + O(\Delta y^2) \end{aligned} \quad (7.35)$$

En utilisant les équations (7.33), (7.34) et (7.35), puis en intégrant, on obtient (7.31). (7.32) se démontre de la même façon. ■

La propriété suivante donne le lien évident existant entre les approches risques concurrents et processus bivariés ou colorés.

**PROPRIETE 7.2.2 :**

$$S_{k+1}(t, t; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(W_{k+1} > t | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \quad (7.36)$$

$$S_{Z_{k+1}}^*(t; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(W_{k+1} > t, U_{k+1} = 0 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \quad (7.37)$$

$$S_{Y_{k+1}}^*(t; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(W_{k+1} > t, U_{k+1} = 1 | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \quad (7.38)$$

□

**COROLLAIRE 7.2.1. :**

$$S_{k+1}(t, t; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_{C_k+s}^K(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds\right) \quad (7.39)$$

$$S_{Z_{k+1}}^*(t; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \int_t^{+\infty} \lambda_{C_k+v}^N(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \exp\left(-\int_0^v \lambda_{C_k+s}^K(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds\right) dv \quad (7.40)$$

$$S_{Y_{k+1}}^*(t; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \int_t^{+\infty} \lambda_{C_k+v}^M(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \exp\left(-\int_0^v \lambda_{C_k+s}^K(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds\right) dv \quad (7.41)$$

□

**COROLLAIRE 7.2.2. :**

$$\lambda_t^K(K_{t-}; \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}) = -\frac{d}{dt} [\ln(S_{K_{t-}+1}(t - C_{K_{t-}}, t - C_{K_{t-}}; \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}))] \quad (7.42)$$

$$\lambda_t^N(K_{t-}; \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}) = \frac{\left[-\frac{\partial}{\partial z} S_{K_{t-}+1}(y, z; \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})\right]_{(t-C_{K_{t-}}, t-C_{K_{t-}})}}{S_{K_{t-}+1}(t - C_{K_{t-}}, t - C_{K_{t-}}; \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})} \quad (7.43)$$

$$\lambda_t^M(K_{t-}; \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}) = \frac{\left[-\frac{\partial}{\partial y} S_{K_{t-}+1}(y, z; \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})\right]_{(t-C_{K_{t-}}, t-C_{K_{t-}})}}{S_{K_{t-}+1}(t - C_{K_{t-}}, t - C_{K_{t-}}; \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})} \quad (7.44)$$

□

**Démonstration :**

L'équation (7.42) est une conséquence directe de (7.39). Le corollaire 7.2.1 a pour conséquence que :

$$\lambda_t^N(k, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \frac{-\frac{d}{dt} S_{Z_{k+1}}^*(t - C_k; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)}{\exp\left(-\int_0^t \lambda_{C_k+s}^K(k; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) ds\right)} \quad (7.45)$$

Et on obtient l'équation (7.43) en utilisant le résultat des équations (7.32) et (7.39) dans l'équation précédente. De façon similaire on démontre l'équation (7.44). ■

Le corollaire 7.2.2 met en évidence le problème d'identifiabilité des modèles de risques concurrents, dont on a déjà parlé. En effet, on a montré avec la propriété 7.1.2 que les intensités de MP et de MC caractérisaient complètement la loi des observations. Or, ces intensités ne dépendent que des valeurs que prend la loi jointe des risques au voisinage de la première diagonale. La majeure partie de la loi jointe des risques n'a donc aucun impact sur la loi des observations et n'est par conséquent pas identifiable. Pour expliquer ce phénomène on définit la notion de risques conditionnellement indépendants.

**DEFINITION 7.2.3.**

Des variables de risques  $\{(Y_i, Z_i)\}_{i \geq 1}$  sont dites avoir des risques indépendants conditionnellement au passé du processus des MP et MC, ou plus simplement, des risques conditionnellement indépendants si :

$$\forall k \geq 1, \forall y, z \geq 0, \\ S_{k+1}(y, z; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(Y_{k+1} > y | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) P(Z_{k+1} > z | \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \quad (7.46)$$

□

Pour tout modèle de risques concurrents généralisés, on montre alors qu'il existe toujours un modèle avec risques conditionnellement indépendants qui a la même loi des observations.

**PROPRIETE 7.2.3 :**

Pour n'importe quelles variables de risques  $\{(Y_i, Z_i)\}_{i \geq 1}$ , il existe une unique série de variables de risques  $\{(\tilde{Y}_i, \tilde{Z}_i)\}_{i \geq 1}$  avec les mêmes intensités de MP et MC, et des risques conditionnellement indépendants. □

**Démonstration :**

Soit  $\{\tilde{Y}_i\}_{i \geq 1}$  et  $\{\tilde{Z}_i\}_{i \geq 1}$  des variables de risques conditionnellement indépendantes, c'est-à-dire vérifiant l'équation (7.46). On note,

$$S_{\tilde{Y}_{k+1}}(y; \tilde{\mathbf{W}}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k) = P(\tilde{Y}_{k+1} > y | \tilde{\mathbf{W}}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k) \quad (7.47)$$

$$S_{\tilde{Z}_{k+1}}(z; \tilde{\mathbf{W}}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k) = P(\tilde{Z}_{k+1} > z | \tilde{\mathbf{W}}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k) \quad (7.48)$$

Le corollaire 7.2.2 implique que :

$$\lambda_t^{\tilde{N}}(K_{t-}; \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}) = \frac{-\frac{d}{dt} S_{\tilde{Z}_{K_{t-}+1}}(t - C_{K_{t-}}; \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})}{S_{\tilde{Z}_{K_{t-}+1}}(t - C_{K_{t-}}; \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}})} \quad (7.49)$$

Donc,

$$S_{\tilde{Z}_{k+1}}(z; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \exp\left(-\int_0^z \lambda_{C_k+v}^{\tilde{N}}(k; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) dv\right) \quad (7.50)$$

Ainsi, si on choisit des variables avec risques conditionnellement indépendants telles que,

$$S_{\tilde{Z}_{k+1}}(z; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \exp\left(-\int_0^z \lambda_{C_k+v}^N(k; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) dv\right) \quad (7.51)$$

$$S_{\tilde{Y}_{k+1}}(y; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \exp\left(-\int_0^y \lambda_{C_k+v}^M(k; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) dv\right) \quad (7.52)$$

leurs intensités de MC et MP seront  $\lambda_t^{\tilde{N}} = \lambda_t^N$  et  $\lambda_t^{\tilde{M}} = \lambda_t^M$ . ■

Enfin, dans le cadre d'une approche paramétrique et même si la loi jointe des variables de risques n'est pas totalement identifiable, on peut, en utilisant les résultats de la propriété 7.1.4 et du corollaire 7.2.2, calculer la fonction de vraisemblance en fonction de cette loi jointe des risques. On remarque, bien entendu, que seules les valeurs de cette loi jointe au voisinage de la première diagonale rentrent en compte dans cette vraisemblance.

**COROLLAIRE 7.2.3. :**

$$L_t(\theta) = \left[ \prod_{i=1}^{K_t} \left[ -\frac{\partial}{\partial y} S_i(y, z; \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-1}) \right]_{(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_i)}^{U_i} \left[ -\frac{\partial}{\partial z} S_i(y, z; \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{U}_{i-1}) \right]_{(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_i)}^{1-U_i} \right]_{S_{K_t-+1}(t - C_{K_t-}, t - C_{K_t-}; \mathbf{W}_{K_t-}, \mathbf{U}_{K_t-})} \quad (7.53)$$

□

### 7.3 Modèle avec effets de maintenance symétriques sur les processus de risques

A notre connaissance, seuls Langseth et Lindqvist [45] se sont intéressés à la généralisation des modèles de maintenance imparfaite pour des politiques de MP conditionnelle. Leur modèle suppose implicitement que les effets des maintenances sur les processus de risques  $\{Y_i\}_{i \geq 1}$  et  $\{Z_i\}_{i \geq 1}$  sont symétriques. Cela ne veut pas dire que MP et MC ont la même efficacité, mais que les maintenances ont le même effet sur les deux variables de risque : c'est-à-dire qu'elles modifient leur loi jointe de la même façon.

#### 7.3.1 Modèle d'âge virtuel généralisé

Sous cette hypothèse d'un effet symétrique des maintenances sur les deux processus de risques, on peut proposer un modèle d'âge virtuel généralisé au cas de MP conditionnelles. On se sert de l'approche risques concurrents, et on suppose que, avant la première maintenance, les dates possibles de MP et de MC sont deux variables aléatoires couplées, notées respectivement  $Y_1$  et  $Z_1$ , de fonction de survie jointe  $S(y, z) = P(Y_1 > y, Z_1 > z)$ . On observera alors la première de ces deux maintenances qui se produira à l'instant  $W_1 = \min(Y_1, Z_1)$ . L'effet de cette maintenance est alors que les nouvelles variables de risques  $Y_2$  et  $Z_2$  auront le même comportement que celles du système neuf (et vierge de maintenance) qui aurait déjà fonctionné un temps  $A_1(K, U) = a_1(W_1, U_1)$  sans tomber en panne. Et ainsi de suite pour les maintenances suivantes. Les hypothèses se traduisent alors mathématiquement par l'équation :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 0, \quad \forall y, z \geq 0, \quad & P(Y_{k+1} > y, Z_{k+1} > z | A_k(K, U), \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ & = P(Y_1 > A_k(K, U) + y, Z_1 > A_k(K, U) + z \\ & \quad | Y_1 > A_k(K, U), Z_1 > A_k(K, U), A_k(K, U)) \end{aligned} \quad (7.54)$$

où  $A_k(K, U) = a_k(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)$  avec  $a_k(\cdot)$  une fonction déterministe. On dit ici que l'effet des maintenances est symétrique sur les variables de risque, car la même variable aléatoire  $A_k(K, U)$  influe sur les deux risques  $Y$  et  $Z$ . En reprenant les notations de la section précédente, on a :

$$S_{k+1}(y, z; \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \frac{S(y + A_k(K, U), z + A_k(K, U))}{S(A_k(K, U), A_k(K, U))} \quad (7.55)$$

On remarque que, en prenant  $y = z = w$ , dans l'équation précédente on obtient :

$$P(W_{k+1} > w | A_k(K, U), \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = P(W_1 > w + A_k(K, U) | W_1 > A_k(K, U), A_k(K, U)) \quad (7.56)$$

Ainsi, ce modèle est un modèle d'âge virtuel généralisé au même sens que cela avait été défini pour les MP planifiées (6.21).

Notons pour tout  $t \geq 0$ ,  $S(t) = S_1(t, t)$ ,  $S'(t) = \frac{d}{dt}S_1(t, t)$ ,  $S_Y^*(y) = \frac{d}{dy}S_{Y_1}^*(y)$  et  $S_Z^*(z) = \frac{d}{dz}S_{Z_1}^*(z)$ . Remarquons que, d'après la propriété 7.2.1, ces dérivées des fonctions initiales de sous survie peuvent également être définies par :  $S_Y^*(y) = \left[ \frac{\partial}{\partial y}S_1(y, z) \right]_{(t,t)}$  et  $S_Z^*(z) = \left[ \frac{\partial}{\partial z}S_1(y, z) \right]_{(t,t)}$ . Et, dans une vision processus bivarié ou coloré, elles peuvent être définies par :  $S_Y^*(y) = f_{W_1, U_1=1}(y)$  et  $S_Z^*(z) = f_{W_1, U_1=0}(z)$ . Notons également :

$$\forall x \geq 0, \quad \lambda_c(x) = \frac{-S_Z^*(x)}{S(x)}, \quad \lambda_p(x) = \frac{-S_Y^*(x)}{S(x)}, \quad \lambda(x) = \frac{-S'(x)}{S(x)} \quad (7.57)$$

$\lambda$  représente le taux de défaillance de la première date de maintenance qu'elle soit préventive ou corrective.  $\lambda_c$  et  $\lambda_p$  représentent respectivement les taux de défaillance des premières variables de risques de MC,  $\tilde{Z}_1$ , et MP,  $\tilde{Y}_1$ , pour le modèle équivalent avec risques conditionnellement indépendants.

En appliquant la propriété 7.31 et le corollaire 7.2.2 on a alors :

$$\lambda_t^N(K, U) = \lambda_c(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}(K, U)) \quad (7.58)$$

$$\lambda_t^M(K, U) = \lambda_p(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}(K, U)) \quad (7.59)$$

$$\lambda_t^K(K, U) = \lambda(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}(K, U)) \quad (7.60)$$

$$S_{Y_{k+1}}^*(y, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \int_y^{+\infty} \lambda_p(s + A_{K_{t-}}(K, U)) ds \quad (7.61)$$

$$S_{Z_{k+1}}^*(z, \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \int_z^{+\infty} \lambda_c(s + A_{K_{t-}}(K, U)) ds \quad (7.62)$$

Tout d'abord, si l'effet des MP et des MC est supposé identique, l'âge effectif ne dépendra pas du type de la maintenance :  $A_k(K, U) = A_k(K)$ , pour tout  $k \geq 0$ . L'équation (7.60) s'écrit alors :

$$\lambda_t^K(K) = \lambda(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}(K)) \quad (7.63)$$

Ainsi, le processus des maintenances,  $K$ , suit dans ce cas un modèle d'âge virtuel identique à celui de la première partie.

Les équations précédentes impliquent également que la loi des observations est entièrement caractérisée par la donnée de  $\lambda_c$ ,  $\lambda_p$  et de la suite des effets de maintenance  $\{a_k(\cdot)\}_{k \geq 1}$ . La loi des observations ne dépend donc de la loi jointe des risques qu'à travers  $S(t)$ ,  $S_Y^*(t)$  et  $S_Z^*(t)$ . On retrouve donc ici le même problème que pour l'approche traditionnelle des risques concurrents : seule la partie de la loi jointe des risques au voisinage de la première diagonale (c'est-à-dire la fonction de survie jointe évaluée en la première diagonale et les deux dérivées partielles elles aussi évaluées en la première diagonale) est identifiable et donc potentiellement estimable.

Quand on applique le corollaire 7.2.3, et qu'on calcule la fonction de vraisemblance associée aux observations d'une unique version du processus des MP et MC, on trouve donc, bien entendu, que celle-ci ne dépend elle aussi que de  $S(t)$ ,  $S_Y^*(t)$ ,  $S_Z^*(t)$  et des fonctions  $a_k(\cdot)$  :

$$L_t(\theta) = S(t - C_{K_t} + A_{K_t}(K, U)) \left[ \prod_{i=1}^{K_t} \frac{-[S_Y^*(W_i + A_{i-1}(K, U))]^{U_i} [S_Z^*(W_i + A_{i-1}(K, U))]^{1-U_i}}{S(A_i(K, U))} \right] \quad (7.64)$$

Grâce aux variables aléatoires  $A_k(K, U)$ , que l'on appellera âges effectifs (comme pour les modèles d'âge virtuel portant sur des maintenances uniquement correctives), on peut généraliser bon nombre de modèles classiques de maintenance imparfaite. Nous proposons ici quatre exemples, très loin d'être exhaustifs.

### 7.3.2 MP et MC parfaites

En prenant des âges effectifs tous égaux à zéro,  $A_k(K, U) = 0$ , pour tout  $k \geq 1$ , on trouve le cas de maintenances préventives et correctives parfaites ou AGAN. Cela correspond à l'approche classique des risques concurrents utilisée par exemple par Bedford et Mesina [7] et plus récemment par Bedford et Cooke [18]. Les intensités de MP et MC vérifient alors :

$$\lambda_t^N(K) = \lambda_c(t - C_{K_t-}) \quad \text{et} \quad \lambda_t^M(K) = \lambda_p(t - C_{K_t-}) \quad (7.65)$$

L'intensité de maintenance globale est donc :  $\lambda_t^K = \lambda(t - C_{K_t-})$ . Le processus des maintenances globales est, dans ce cas, un processus ponctuel auto-excité, et plus particulièrement, comme nous l'avons déjà fait remarquer, un processus de renouvellement. La loi des temps inter-défaillances s'écrit alors :

$$P(T_{N_{C_k+1}} > C_k + x \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \left[ S \otimes \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j S_{Y'}^{*\otimes j} \right] (x) \quad (7.66)$$

où  $\otimes$  dénote le produit de convolution et  $S_{Y'}^{*\otimes k}$  correspond à  $k$  produits de convolution de la fonction  $S_{Y'}$ . On peut démontrer l'équation précédente en appliquant la propriété 7.1.3. Plus simplement, on peut également l'obtenir en utilisant une formule des probabilités totales sur le système d'événements complet  $\{M_{C_k+x} - M_{C_k} = j\}_{j \geq 0}$  et le fait que les durées inter-maintenances sont dans ce cas des variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Enfin la vraisemblance s'écrit :

$$L_t(\theta) = S(t - C_{K_t}) \prod_{j=1}^{K_t} (S_{Y'}^*(W_j))^{U_j} (S_Z^*(W_j))^{1-U_j} \quad (7.67)$$

### 7.3.3 MP et MC minimales

En prenant des âges effectifs tous égaux à l'instant de la dernière maintenance,  $A_k(K, U) = C_k$ , pour tout  $k \geq 1$ , on obtient des effets de maintenance minimaux ou ABAO. Les intensités de MP et MC vérifient alors :

$$\lambda_t^N = \lambda_c(t) \quad \text{et} \quad \lambda_t^M = \lambda_p(t) \quad (7.68)$$

Les intensités de MP et MC sont deux fonctions déterministes du temps. Le processus des MP et celui des MC sont donc deux NHPP. On peut montrer péniblement que le résultat de la propriété 7.1.3 peut être simplifié, et que, la fonction de survie conditionnelle de la date de la prochaine défaillance est celle d'un NHPP censuré à gauche par le dernier instant de maintenance :

$$P(T_{N_{C_k+1}} > C_k + x \mid \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) = \exp\left(-\int_x^{+\infty} \lambda_{C_k+s}^N ds\right) = \exp\left(-\int_x^{+\infty} \lambda_c(C_k + s) ds\right) \quad (7.69)$$

En effet, le processus des défaillances est, indépendamment du processus des MP, un NHPP. L'histoire des observations jusqu'à la  $k^{\text{ème}}$  maintenance nous apprend donc uniquement que  $T_{N_{C_k+1}} > C_k$ , d'où la formule précédente.

Enfin la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L_t(\theta) = S(t) \prod_{j=1}^{K_t} \frac{-(S_{Y'}^*(C_j))^{U_j} (S_Z^*(C_j))^{1-U_j}}{S(C_j)} \quad (7.70)$$

Cette vraisemblance n'est pas simplement celle de deux NHPP quelconques évoluant séparément. En effet, même si le processus des MP et celui des MC sont bel et bien deux NHPP indépendants, les intensités de ces NHPP peuvent avoir des paramètres communs.

### 7.3.4 MP et MC ARA<sub>1</sub>

Par analogie avec les résultats du chapitre 6, on peut définir des effets de maintenance ARA<sub>1</sub>. En adoptant la première généralisation du modèle ARA<sub>1</sub> que nous proposons, et qui consiste à supposer que l'effet des maintenances est de réduire l'âge virtuel proportionnellement au supplément d'âge accumulé depuis la dernière maintenance (préventive ou corrective), on obtient des intensités de MP et MC qui vérifient :

$$\lambda_t^N(K, U) = \lambda_c \left( t - \sum_{i=0}^{K_{t-}} \rho_p^{U_{i+1}} \rho_c^{1-U_{i+1}} W_{i+1} \right) \quad (7.71)$$

$$\lambda_t^M(K, U) = \lambda_p \left( t - \sum_{i=0}^{K_{t-}} \rho_p^{U_{i+1}} \rho_c^{1-U_{i+1}} W_{i+1} \right) \quad (7.72)$$

En prenant  $\rho_p = \rho_c = \rho$ , MP et MC ont la même efficacité. Le processus des maintenances  $K$  a alors pour intensité :  $\lambda_t^K(K) = \lambda(t - \rho C_{K_{t-}})$ . Il s'agit donc d'un modèle ARA<sub>1</sub> identique à ceux proposés dans la première partie. On aurait pu s'en rendre compte directement compte tenu des remarques faites sur le modèle d'âge virtuel général. Comme dans le chapitre 6, les cas  $\rho_p = 1$  et  $\rho_c = 1$  ne correspondent pas à des MP AGAN ou des MC AGAN. Par contre, les cas  $\rho_p = 0$  et  $\rho_c = 0$  correspondent bien respectivement à des MP ABAO et des MC ABAO. Cependant, dans ces deux cas, aucun des processus  $M$ ,  $N$  ou  $K$  ne sont des NHPP.

### 7.3.5 MP et MC ARA<sub>∞</sub>

Par analogie avec les résultats du chapitre 6, les intensités de MP et de MC, pour un effet de maintenance ARA<sub>∞</sub>, d'efficacité  $\rho_p$  pour les préventives et  $\rho_c$  pour les correctives, vérifient :

$$\lambda_t^N(K, U) = \lambda_c \left( t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}} (1 - \rho_p)^{M_t - M_{C_{j-1}}} (1 - \rho_c)^{N_t - N_{C_{j-1}}} W_j \right) \quad (7.73)$$

$$\lambda_t^M(K, U) = \lambda_p \left( t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}} (1 - \rho_p)^{M_t - M_{C_{j-1}}} (1 - \rho_c)^{N_t - N_{C_{j-1}}} W_j \right) \quad (7.74)$$

On s'aperçoit que les formules deviennent vite très volumineuses et donc complexes. Comme dans le chapitre 6, les cas  $\rho_p = 1$ ,  $\rho_c = 1$ ,  $\rho_p = 0$  et  $\rho_c = 0$  correspondent respectivement à des MP AGAN, des MC AGAN, des MP ABAO et des MC ABAO. Cependant, pour des MP ou des MC AGAN aucun des processus  $N$ ,  $M$  ou  $K$  n'est un processus de renouvellement, de même pour des MP ou des MC ABAO, aucun de ces processus n'est un NHPP.

### 7.3.6 Modèles identifiables de dépendance entre les risques

En adoptant une approche processus bivariable ou coloré, pour définir complètement un modèle de MC et MP conditionnelles, il faut choisir deux effets de maintenance, préventive et corrective, et deux intensités initiales,  $\lambda_c(t)$  et  $\lambda_p(t)$ . Dans la section précédente, nous avons proposé des modèles pour les effets de maintenance. Dans cette section, nous allons proposer des modèles pour les intensités initiales. Pour ce faire, nous allons nous servir de l'approche issue de la généralisation des risques concurrents. En effet, même si les modèles issus de cette approche souffrent d'un problème d'identifiabilité de la loi jointe des risques, ils sont malgré tout intéressants et permettent, en durcissant les hypothèses, de définir des intensités initiales de MP et MC réalistes et avec des paramètres identifiables et en nombre limité.

### 7.3.6.1 Modèle avec risques indépendants

Le modèle le plus basique consiste à supposer que les risques de MP et de MC sont conditionnellement indépendants. On doit alors spécifier une forme paramétrique pour le taux de défaillance de  $Z_1$ , par exemple une fonction puissance,  $\lambda_c(t) = \alpha_c \beta_c t^{\beta_c - 1}$  avec  $\alpha_c > 0$  et  $\beta_c \geq 1$ , et une forme paramétrique pour le taux de défaillance de  $Y_1$ , par exemple une autre fonction puissance,  $\lambda_p(t) = \alpha_p \beta_p t^{\beta_p - 1}$  avec  $\alpha_p > 0$  et  $\beta_p \geq 1$ . Etant donné que  $\lambda_c$  (resp.  $\lambda_p$ ) est le taux de défaillance de la date de la première maintenance quand celle-ci est corrective (resp. préventive), on se rend compte que les paramètres du modèle ainsi défini sont identifiables. Cependant, un tel modèle n'est pas réaliste, au sens où, comme nous l'avons déjà fait remarquer, la date d'une MP conditionnelle est choisie en fonction d'une surveillance d'indicateurs de l'état du système. Ainsi, à moins que les indicateurs choisis soient indépendants de l'usure du système, l'hypothèse d'indépendance des risques n'est absolument pas réaliste.

### 7.3.6.2 Le modèle de Langseth et Lindqvist

L'idée proposée par Langseth et Lindqvist [45] est de supposer que les hypothèses du modèle de signe aléatoire sont vérifiées par  $Y_1$  et  $Z_1$ , et que la loi marginale de  $Z_1$  a un taux de défaillance  $\lambda_Z(t)$  pour  $t \geq 0$ . Ce taux de défaillance caractérise le temps d'attente jusqu'à la défaillance en l'absence de MP. On peut adopter n'importe quelle forme paramétrique usuelle de durée de vie pour ce temps d'attente, comme par exemple un modèle de Weibull :  $\lambda_Z(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1}$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 1$ . Ces hypothèses n'étant pas suffisantes pour modéliser complètement la loi jointe des risques, ils ont donc également supposé que la loi conditionnelle du temps d'attente jusqu'à la première maintenance sachant que, cette maintenance est préventive, et que le système devrait tomber en panne à l'instant  $z \geq 0$  si il n'est pas maintenu avant, vérifie :

$$P(Y_1 \leq y | Z_1 = z, Y_1 < Z_1) = \frac{\Lambda_Z(y)}{\Lambda_Z(z)} \quad (7.75)$$

Cette hypothèse rend peu probable la possibilité de MP trop précoce par rapport à la date où le système est susceptible de tomber en panne. Dans leur article, Langseth et Lindqvist ont associé ce modèle à un effet de maintenance de type BP que nous définirons et étudierons dans la section 5 de ce chapitre. Ils ont démontré que les paramètres des intensités initiales ainsi définies étaient identifiables.

Avec nos notations, Langseth et Lindqvist ont également démontré que :

$$S_Z^*(t) = (1 - q) \lambda_Z(t) \exp(-\Lambda_Z(t)) \quad (7.76)$$

$$S_Y^*(t) = q \lambda_Z(t) Ie(\Lambda_Z(t)) \quad (7.77)$$

où  $q = P(U_1 = 1)$ ,  $\Lambda_Z(t) = \int_0^t \lambda_Z(s) ds$  et  $Ie(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-s)}{s} ds$ . Un calcul simple montre alors que :

$$S(t) = S_Y^*(t) + S_Z^*(t) = \exp(-\Lambda_Z(t)) - q \Lambda_Z(t) Ie(\exp(-\Lambda_Z(t))) \quad (7.78)$$

Et donc,

$$\lambda_c(t) = \frac{(1 - q) \lambda_Z(t) \exp(-\Lambda_Z(t))}{\exp(-\Lambda_Z(t)) - q \Lambda_Z(t) Ie(\Lambda_Z(t))} \quad (7.79)$$

$$\lambda_p(t) = \frac{q \lambda_Z(t) Ie(\Lambda_Z(t))}{\exp(-\Lambda_Z(t)) - q \Lambda_Z(t) Ie(\Lambda_Z(t))} \quad (7.80)$$

Sur ce modèle, on remarque que l'intensité initiale de défaillance en l'absence de MP,  $\lambda_Z$ , est très différente de l'intensité initiale de MC, et cela à cause de la dépendance existant entre les variables de risques. Cela met en évidence le fait qu'il est difficile de choisir une forme

paramétrique réaliste pour les intensités initiales de MP et MC quand on ne sait rien sur la dépendance existant entre les processus de risque. En effet, en pratique, l'intensité initiale de MC en l'absence de MP reflète le comportement d'un processus d'usure. Il est alors usuel de choisir un modèle tel que celui de Weibull. Par contre, la forme des intensités initiales de MP et de MC est liée à la dépendance existant entre les risques, c'est-à-dire à la capacité de l'équipe de maintenance à anticiper les défaillances. Le deuxième intérêt de ce modèle d'intensité initiale est de limiter le nombre de paramètres à estimer. Contrairement à l'approche précédente qui oblige à estimer 4 paramètres, on a avec ce modèle à estimer, en comparaison, un paramètre de moins.

### 7.3.6.3 Une autre généralisation du modèle de signe aléatoire

Une autre façon d'utiliser le modèle de signe aléatoire pour construire des intensités initiales de MP et MC, consiste, comme nous le proposons, à supposer une certaine forme pour l'intensité initiale,  $\lambda_W(t)$ , du processus de maintenance globale. Ce processus de maintenance global est un processus ponctuel auto-excité classique pour lequel il est donc naturel de choisir un modèle classique tel que celui de Weibull. Ces hypothèses n'étant pas suffisantes pour définir complètement la loi jointe des risques, on suppose, en plus de l'hypothèse du modèle de signe aléatoire, que  $\{Y_1 \leq Z_1\}$  est indépendant de  $Y_1$ . C'est à dire que finalement l'instant de la première maintenance,  $W_1$ , et le type de maintenance,  $U_1$ , sont indépendants. En notant toujours  $q = P(U_1 = 1)$ , on a :

$$S_Y^*(y) = P(W_1 > y, Y_1 \leq Z_1) = q S(y) \quad (7.81)$$

De la même façon, on a également :

$$S_Z^*(z) = (1 - q) S(y) \quad (7.82)$$

Ainsi, les intensités initiales de MP et de MC vérifient :

$$\lambda_c(t) = (1 - q)\lambda(t) \quad (7.83)$$

$$\lambda_p(t) = q\lambda(t) \quad (7.84)$$

Ces intensités initiales sont beaucoup plus simples que celles découlant du modèle proposé par Langseth et Lindqvist, et ont avec des formes paramétriques semblables le même nombre de paramètres à estimer. Il est évident que ces intensités initiales sont identifiables :  $\lambda(t)$  est le taux de défaillance du premier instant de maintenance et  $q$  est la probabilité que cette maintenance soit préventive.

## 7.4 Effets de maintenance non symétriques sur les processus de risques

Jusqu'à présent nous avons supposé que l'effet des maintenances était le même sur les deux processus de risque, mais on peut très bien imaginer un modèle où ces effets soient différents. Avec un modèle de type âge virtuel on aurait de façon très générale :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 0, \quad \forall y, z \geq 0, \quad & P(Y_{k+1} > y, Z_{k+1} > z \mid A_k^p(K, U), A_k^c(K, U), \mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k) \\ & = P(Y_1 > A_k^p(K, U) + y, Z_1 > A_k^c(K, U) + z \\ & \quad \mid Y_1 > A_k^p(K, U), Z_1 > A_k^c(K, U), A_k^p(K, U), A_k^c(K, U)) \end{aligned} \quad (7.85)$$

où  $A_k^p(K, U) = a_k^p(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)$  et  $A_k^c(K, U) = a_k^c(\mathbf{W}_k, \mathbf{U}_k)$  avec  $a_k^p(\cdot)$  et  $a_k^c(\cdot)$  des fonctions déterministes.

En prenant  $y = z = w$  dans l'équation précédente on obtient pas une équation similaire à (6.21). Donc, ce modèle n'est pas une généralisation du modèle d'âge virtuel défini pour les MP planifiées. Par contre, en prenant des effets de MP et de MC identiques entre eux et identiques sur les deux processus de risques,  $A_k^p(K, U) = A_k^c(K, U) = A_k(K)$ , pour tout  $k \geq 0$ , on trouve que le processus  $K$  suit un modèle d'âge virtuel au sens défini dans la première partie.

En notant toujours  $S(y, z)$  la fonction de survie jointe des premiers risques  $(Y_1, Z_1)$ , on a alors des intensités de MP et MC qui vérifient :

$$\lambda_t^N(K, U) = \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial y} S(y - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^p(K, U), z - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^c(K, U)) \right]_{(t,t)}}{S(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^p(K, U), t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^c(K, U))} \quad (7.86)$$

$$\lambda_t^M(K, U) = \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial z} S(y - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^p(K, U), z - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^c(K, U)) \right]_{(t,t)}}{S(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^p(K, U), t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^c(K, U))} \quad (7.87)$$

$$\lambda_t^K(K, U) = \frac{\frac{d}{dt} S(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^p(K, U), t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^c(K, U))}{S(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^p(K, U), t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^c(K, U))} \quad (7.88)$$

Au vu de ces intensités, et comme  $t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^p(K, U)$  n'est pas forcément égal à  $t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^c(K, U)$ , il ne semble pas vain d'espérer que dans ce cadre général, et sous certaines conditions, la fonction de survie conjointe des risques puisse être identifiable, et donc potentiellement estimable, pas seulement au voisinage de la première diagonale, mais peut-être sur  $\mathbb{R}_+^2$  tout entier. Cela n'est pas contradictoire avec le résultat de la propriété 7.2.3. Dans cette propriété, on démontre que le fait qu'il y ait indépendance conditionnelle ou non n'est pas identifiable. Ce qui se passe ici, c'est qu'en raison de l'effet particulier de la maintenance, la loi jointe des premières variables de risque semble pouvoir être identifiable au vu de l'ensemble des instants de maintenance.

Dans un autre contexte que la modélisation d'un système soumis à des MP et des MC, Bedford et Lindqvist [6] ont proposé un modèle pouvant être vu comme un cas particulier du modèle très général que nous venons de présenter. Leur idée est équivalente à dire que chaque maintenance va renouveler son propre processus de risque et va laisser dans l'état le processus de risque correspondant à l'autre type de maintenance. c'est-à-dire que chaque maintenance a un effet AGAN sur sa propre variable de risque et ABAO sur la variable de risque correspondant à l'autre effet de maintenance. Les intensités de MP et de MC correspondantes vérifient alors :

$$\lambda_t^N(K, U) = \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial y} S(y - T_{N_{t-}}, z - \tau_{M_{t-}}) \right]_{(t,t)}}{S(t - T_{N_{t-}}, t - \tau_{M_{t-}})} \quad (7.89)$$

$$\lambda_t^M(K, U) = \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial z} S(y - T_{N_{t-}}, z - \tau_{M_{t-}}) \right]_{(t,t)}}{S(t - T_{N_{t-}}, t - \tau_{M_{t-}})} \quad (7.90)$$

Bedford et Lindqvist ont démontré dans leur article que, sous certaines conditions, la loi jointe des risques était identifiable. L'idée est de prouver qu'au fil du temps le couple  $(t - T_{N_{t-}}, t - \tau_{M_{t-}})$  peut avec une probabilité non nulle parcourir  $\mathbb{R}_+^2$  tout entier. Ainsi, la loi des observations (caractérisée ici par les intensités de MP et de MC) va dépendre des valeurs de la fonction de survie jointe  $S(y, z)$  sur  $\mathbb{R}_+^2$  tout entier, et non plus seulement sur sa première diagonale, comme cela était le cas pour des effets de maintenance symétriques.

Ces modèles, jamais encore étudiés dans le cadre de la modélisation de MP conditionnelles, offrent des perspectives nouvelles. Cependant ils sont très complexes et le risque est d'aboutir à des hypothèses sur l'efficacité des MP et MC n'ayant plus aucun sens pratique.

## 7.5 L'efficacité de maintenance dépend de variables externes

Dans le cadre de notre modélisation générale, l'efficacité de la  $i^{\text{ème}}$  maintenance peut dépendre d'une variable aléatoire externe,  $B_i$ , indépendante du passé des observations du processus des MP et MC et des autres variables aléatoires externes. Les intensités de MP, de MC et de maintenance globale sont donc, dans leur forme générale, relatives au processus externe.

### DEFINITION 7.5.1.

– Intensité relative de MC :

$$\lambda_t^N(K, U, B) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t-} = 1 | K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}, \mathbf{B}_{K_{t-}}) \quad (7.91)$$

– Intensité relative de MP :

$$\lambda_t^M(K, U, B) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(M_{t+\Delta t} - M_{t-} = 1 | K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}, \mathbf{B}_{K_{t-}}) \quad (7.92)$$

– Intensité relative de maintenance (globale) :

$$\lambda_t^K(K, U, B) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(K_{t+\Delta t} - K_{t-} = 1 | K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}, \mathbf{B}_{K_{t-}}) \quad (7.93)$$

□

La technique est alors toujours la même. On utilise le théorème d'innovation 5.2.1 pour calculer des intensités que l'on appellera par opposition aux intensités relatives, intensités propres :

$$\lambda_t^N(K, U) = E [\lambda_t^N(K, U, B) | K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}] \quad (7.94)$$

$$\lambda_t^M(K, U) = E [\lambda_t^M(K, U, B) | K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}] \quad (7.95)$$

$$\lambda_t^K(K, U) = E [\lambda_t^K(K, U, B) | K_{t-}, \mathbf{W}_{K_{t-}}, \mathbf{U}_{K_{t-}}] \quad (7.96)$$

L'ensemble des résultats obtenus dans le chapitre précédent sont alors vérifiés en utilisant pour intensité de MP, de MC ou de maintenance globale, les intensités propres correspondantes.

Pour un modèle de Brown-Proschan, avec un effet symétrique des maintenances sur les variables de risques et des efficacités de MP  $p_p$  et de MC  $p_c$ , les intensités relatives de MP et MC vérifient :

$$\lambda_t^N(K, U, B) = \lambda_c \left( t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}} \sum_{k=j}^{K_{t-}} (1 - B_k) W_k \right) \quad (7.97)$$

$$\lambda_t^M(K, U, B) = \lambda_p \left( t - C_{K_{t-}} + \sum_{j=1}^{K_{t-}} \sum_{k=j}^{K_{t-}} (1 - B_k) W_k \right) \quad (7.98)$$

où  $B_i$  est une variable aléatoire indépendante de  $W_i$  et  $\{W_j, U_j, B_j\}_{1 \leq j < i}$  et conditionnellement à  $U_i$  de loi de Bernoulli de paramètre  $p_{U_i} = p_p^{U_i} p_c^{1-U_i}$ .

Langseth et Lindqvist [45] ont montré que, en prenant les intensités initiales de MP et de MC issues de leur généralisation du modèle de signe aléatoire (7.79) et (7.80), et avec notamment un taux de défaillance  $\lambda_Z(\cdot)$  de type fonction puissance, le modèle BP ainsi défini était identifiable au vu de la seule observation du processus des MP et MC. Par contre leur tentative de fournir une fonction de vraisemblance pour le modèle ainsi défini est un échec, car ils ont considéré à tort que la  $i^{\text{ème}}$  variable aléatoire externe était indépendante de  $W_j$  pour  $j > i$ . Par contre, en utilisant la méthode que nous proposons basée sur le théorème d'innovation, on peut calculer des intensités propres et en déduire une vraisemblance propre associée à la seule observation du processus des MP et MC.

**PROPRIETE 7.5.1 :**

Dans le cas de MP conditionnelles, pour un effet de maintenance symétrique sur les processus de risques et de type BP d'efficacité  $p_p$  pour les MP et  $p_c$  pour les MC, les intensités propres vérifient :

$$\lambda_t^K(K, U) = -\frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \sum_{j=0}^{K_t^-} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}} \Psi_{j+1, K_t^-} \exp \left( -\Lambda_K(t - C_j) - \Lambda_{C_j}^K(K, U) \right) \right) \right] \quad (7.99)$$

$$\lambda_t^N(K, U) = \sum_{j=0}^{K_t^-} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}} \frac{\lambda_c(t - C_j) \exp(-\Lambda_K(t - C_j))}{\exp \left( -\Lambda_t^K(K, U) + \Lambda_{C_j}^K(K, U) \right)} \Psi_{j+1, K_t^-} \quad (7.100)$$

$$\lambda_t^M(K, U) = \sum_{j=0}^{K_t^-} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j>0\}}} \frac{\lambda_p(t - C_j) \exp(-\Lambda_K(t - C_j))}{\exp \left( -\Lambda_t^K(K, U) + \Lambda_{C_j}^K(K, U) \right)} \Psi_{j+1, K_t^-} \quad (7.101)$$

avec  $\Psi_{j,k} = \left[ \prod_{i=j}^k (1 - p_{U_i}) \left[ \frac{\lambda_p(C_i - C_j)}{\lambda_{C_i}^M(K, U)} \right]^{U_i} \left[ \frac{\lambda_c(C_i - C_j)}{\lambda_{C_i}^N(K, U)} \right]^{1-U_i} \right]$  et où  $p_{U_i} = p_p^{U_i} p_c^{1-U_i}$  est la

probabilité que la  $i^{\text{ème}}$  maintenance soit parfaite sachant si elle est préventive ou corrective,  $\Lambda_c(t) = \int_0^t \lambda_c(s) ds$  et  $\Lambda_p(t) = \int_0^t \lambda_p(s) ds$  sont respectivement les intensités initiales cumulées de MP et MC, et  $\Lambda_K(t) = \Lambda_c(t) + \Lambda_p(t)$  est l'intensité initiale cumulée de maintenance globale. On en déduit que la vraisemblance associée à une unique observation du processus des MP et MC sur  $[0, t]$  s'écrit de manière récursive :

$$\begin{aligned} L_t(\theta) = & \left[ \prod_{i=1}^{K_t^-} (1 - p_{U_i}) \lambda_p(C_i)^{U_i} \lambda_c(C_i)^{1-U_i} \right] \left[ \lambda_p(t)^{U_{K_t}} \lambda_c(t)^{1-U_{K_t}} \right]^{\mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}} \exp(-\Lambda_K(t)) \\ & + \left[ \sum_{j=1}^{K_t^-} p_{U_j} \left[ \prod_{i=j+1}^{K_t^-} (1 - p_{U_i}) \lambda_p(C_i - C_j)^{U_i} \lambda_c(C_i - C_j)^{1-U_i} \right] \right. \\ & \left. \left[ \lambda_p(t - C_j)^{U_{K_t}} \lambda_c(t - C_j)^{1-U_{K_t}} \right]^{\mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}}} \exp(-\Lambda_K(t - C_j)) L_{C_j}(\theta) \right] \quad (7.102) \quad \square \end{aligned}$$

**Démonstration :**

La démonstration de cette propriété ressemble beaucoup à celles faites dans le cas de MP planifiées (propriétés 6.4.1 et 6.4.2). Les notations sont donc similaires et nous ne referons pas ici tous les calculs. Pour ne pas récrire les mêmes résultats pour chacune des intensités on notera  $\lambda_t^D$  l'intensité de MP ( $D = M$ ), ou de MC ( $D = N$ ), ou de maintenance globale ( $D = K$ ). Tout d'abord, le théorème d'innovation implique :

$$\lambda_t^D(K, U) = \sum_{j=0}^{K_t^-} E[\lambda_t^D(K, U, B) | \mathbf{B}_{K_t^-, j}, K_t^-, \mathbf{C}_{K_t^-}, \mathbf{U}_{K_t^-}] P(\mathbf{B}_{K_t^-, j} | K_t^-, \mathbf{C}_{K_t^-}, \mathbf{U}_{K_t^-}) \quad (7.103)$$

En notant  $d = p$  quand  $D = M$ ,  $d = c$  quand  $D = N$  et  $d = K$  quand  $D = K$ , on a tout naturellement :

$$E[\lambda_t^D(K, U, B) | \mathbf{B}_{K_t^-, j}, K_t^-, \mathbf{C}_{K_t^-}, \mathbf{U}_{K_t^-}] = \lambda_d(t - C_j) \quad (7.104)$$

Ensuite, en adaptant la démonstration faite dans le cas de MP planifiées, on a pour  $K_{t^-} > 1$  et  $K_{t^-} \geq j$  :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{B}_{K_{t^-},j} | K_{t^-}, \mathbf{C}_{K_{t^-}}, \mathbf{U}_{K_{t^-}}) \\ = \widetilde{p_{K_{t^-},j}} [P(\mathbf{B}_{K_{t^-}-1,j} | \mathbf{C}_{K_{t^-}}, \mathbf{U}_{K_{t^-}})]^{\mathbb{1}_{\{K_{t^-} > j\}}} \frac{\exp(-\int_{C_{K_{t^-}}}^t \lambda_K(s - C_j) ds)}{\exp(-\int_{C_{K_{t^-}}}^t \lambda_s^K(K, U) ds)} \end{aligned} \quad (7.105)$$

De la même façon on prouve, pour  $k \geq 2$  et  $k \geq j$ , que :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{B}_{k,j} | \mathbf{C}_{k+1}, \mathbf{U}_{k+1}) = \widetilde{p_{k,j}} [P(\mathbf{B}_{k-1,j} | \mathbf{C}_k, \mathbf{U}_k)]^{\mathbb{1}_{\{k > j\}}} \\ \frac{\lambda_p(C_{k+1} - C_j)^{U_{k+1}} \lambda_c(C_{k+1} - C_j)^{1-U_{k+1}} \exp(-\int_{C_k}^{C_{k+1}} \lambda_K(s - C_j) ds)}{(\lambda_{C_{k+1}}^M(K, U))^{U_{k+1}} (\lambda_{C_{k+1}}^N(K, U))^{1-U_{k+1}} \exp(-\int_{C_k}^{C_{k+1}} \lambda_s^K(K, U) ds)} \end{aligned} \quad (7.106)$$

Ainsi, en utilisant ces différents résultats dans (7.103), on prouve que les intensités propres vérifient :

$$\begin{aligned} \lambda_t^D(K, U) = \sum_{j=0}^{K_{t^-}} p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j > 0\}}} \frac{\lambda_d(t - C_j) \exp(-\Lambda_K(t - C_j))}{\exp(-\Lambda_t^K(K, U) + \Lambda_{C_j}^K(K, U))} \\ \left[ \prod_{i=j+1}^{K_{t^-}} (1 - p_{U_i}) \left[ \frac{\lambda_p(C_i - C_j)}{\lambda_{C_i}^M(K, U)} \right]^{U_i} \left[ \frac{\lambda_c(C_i - C_j)}{\lambda_{C_i}^N(K, U)} \right]^{1-U_i} \right] \end{aligned} \quad (7.107)$$

Les équations (7.100) et (7.101) sont donc vérifiées en prenant  $D = N$  et  $D = M$ .

On note,  $S_{k,j} = p_{U_j}^{\mathbb{1}_{\{j > 0\}}} \exp(-\Lambda_{C_j}^K(K, U)) \Psi_{j+1,k}$ . L'équation précédente se réécrit alors pour l'intensité de maintenance globale :

$$\lambda_t^K(K, U) \exp(-\Lambda_t^K(K, U)) = \sum_{j=0}^{K_{t^-}} \lambda_K(t - C_j) \exp(-\Lambda_K(t - C_j)) S_{K_{t^-},j} \quad (7.108)$$

En intégrant cette équation entre  $t$  et  $C_{K_{t^-}}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \exp(-\Lambda_t^K(K, U)) - \exp(-\Lambda_{C_{K_{t^-}}}^K(K, U)) \\ = \sum_{j=0}^{K_{t^-}} S_{K_{t^-},j} [\exp(-\Lambda_K(t - C_j)) - \exp(-\Lambda_K(C_{K_{t^-}} - C_j))] \end{aligned} \quad (7.109)$$

Or, en évaluant l'équation (7.107) en  $t = C_{k+1}$  on a :

$$\begin{aligned} \exp(-\Lambda_{C_{k+1}}^K(K, U)) &= \sum_{j=0}^k \frac{\lambda_d(C_{k+1} - C_j)}{\lambda_{C_{k+1}}^D(K, U)} \exp(-\Lambda_K(C_{k+1} - C_j)) S_{k,j} \\ &= \sum_{j=0}^k \left[ \frac{\lambda_p(C_{k+1} - C_j)}{\lambda_{C_{k+1}}^M(K, U)} \right]^{U_{k+1}} \left[ \frac{\lambda_c(C_{k+1} - C_j)}{\lambda_{C_{k+1}}^N(K, U)} \right]^{1-U_{k+1}} \exp(-\Lambda_K(C_{k+1} - C_j)) S_{k,j} \\ &= \frac{1}{1 - p_{U_{k+1}}} \sum_{j=0}^k S_{k+1,j} \exp(-\Lambda_K(C_{k+1} - C_j)) \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} S_{k+1,j} \exp(-\Lambda_K(C_{k+1} - C_j)) \end{aligned} \quad (7.110)$$

En utilisant ce résultat et l'équation (7.109) on obtient que l'intensité propre de maintenance globale vérifie :

$$\exp(-\Lambda_t^K(K, U)) = \sum_{j=0}^{K_{t-}} S_{K_{t-},j} \exp(-\Lambda_K(t - C_j)) \quad (7.111)$$

En prenant le logarithme et en dérivant l'équation ci dessus, on trouve l'équation (7.99).

Enfin, en utilisant le résultat de la propriété 7.1.4, et les équations (7.107) et (7.111), on obtient que la vraisemblance propre vérifie :

$$\begin{aligned} L_t(\theta) &= \left[ \prod_{i=1}^{K_t} \lambda_{C_i}^N(K, U)^{1-U_i} \lambda_{C_i}^M(K, U)^{U_i} \right] \exp(-\Lambda_t^K(K, U)) \\ &= \left[ \prod_{i=1}^{K_{t-}} \lambda_{C_i}^N(K, U)^{1-U_i} \lambda_{C_i}^M(K, U)^{U_i} \right] [\lambda_t^N(K, U)^{1-U_{K_t}} \lambda_t^M(K, U)^{U_{K_t}}] \mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}} \exp(-\Lambda_t^K(K, U)) \\ &= \sum_{j=0}^{K_{t-}} p_{U_j} \mathbb{1}_{\{j>0\}} \left[ \lambda_p(t - C_j)^{U_{K_t}} \lambda_c(t - C_j)^{1-U_{K_t}} \right] \mathbb{1}_{\{t=C_{K_t}\}} \exp(-\Lambda_K(t - C_j)) \\ &\quad \left[ \prod_{i=j+1}^{K_{t-}} (1 - p_{U_i}) \lambda_p(C_i - C_j)^{U_i} \lambda_c(C_i - C_j)^{1-U_i} \right] \\ &\quad \left[ \prod_{i=1}^j \lambda_{C_i}^M(K, U)^{U_i} \lambda_{C_i}^N(K, U)^{1-U_i} \right] \exp(-\Lambda_{C_j}^K(K, U)) \end{aligned} \quad (7.112)$$

Enfin comme pour la démonstration faite pour des MP planifiées, on obtient la forme voulue de la vraisemblance en isolant le premier terme de la somme, et en reconnaissant les termes correspondant à la valeur de la fonction de vraisemblance en un instant de maintenance,

$$L_{C_j}(\theta) = \left[ \prod_{i=1}^j \lambda_{C_i}^M(K, U)^{U_i} \lambda_{C_i}^N(K, U)^{1-U_i} \right] \exp(-\Lambda_{C_j}^K(K, U)) \quad \blacksquare$$

On peut appliquer la propriété précédente en prenant pour intensité initiale de MP et MC celle des équations (7.79) et (7.80), ou (7.83) et (7.84), avec une fonction de type puissance pour le taux de défaillance de  $Z$  ou de  $W$ . On obtient ainsi la vraisemblance associée à la seule observation du processus des MP et MC. On peut calculer les dérivées partielles de cette vraisemblance même si elles sont alors données par des formules récursives. Le calcul de la vraisemblance et de ces dérivées partielles a comme précédemment une complexité théorique en  $O(k^2)$ , où  $k$  est le nombre total de maintenances observées. Grâce aux valeurs de la vraisemblance et de ces dérivées partielles il est possible, par une méthode numérique, de trouver les estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres du modèle. Cependant, la loi jointe des risques reste non identifiable et donc non estimable.

Une piste intéressante, qu'il reste à explorer, est alors d'étudier l'identifiabilité et le problème d'estimation dans un modèle de Brown-Proschan avec des effets non symétriques sur les variables de risques. Ce modèle aurait alors des intensités relatives de MP et MC vérifiant :

$$\lambda_t^N(K, U, B) = \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial y} S(y - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^p(K, U, B), z - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^c(K, U, B)) \right]_{(t,t)}}{S(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^p(K, U, B), t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^c(K, U, B))} \quad (7.113)$$

$$\lambda_t^M(K, U, B) = \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial z} S(y - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^p(K, U, B), z - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^c(K, U, B)) \right]_{(t,t)}}{S(t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^p(K, U, B), t - C_{K_{t-}} + A_{K_{t-}}^c(K, U, B))} \quad (7.114)$$

avec  $A_{K_{t-}}^p(K, U, B) = \sum_{j=1}^{K_{t-}} \sum_{k=j}^{K_{t-}} (1 - B_k^p) W_k$  et  $A_{K_{t-}}^c(K, U, B) = \sum_{j=1}^{K_{t-}} \sum_{k=j}^{K_{t-}} (1 - B_k^c) W_k$ , où  $B_k^p$  et  $B_k^c$  sont deux variables aléatoires externes indiquant si la  $k^{\text{ème}}$  maintenance a un effet AGAN (la variable vaut 1) ou ABAO (la variable vaut 0) respectivement sur le processus de risque de MP,  $Y$ , ou de risque de MC,  $Z$ . On supposera alors que  $B_k^p$  et  $B_k^c$  sont indépendantes de  $W_k$  et  $\{W_j, U_j, B_j\}_{1 \leq j < k}$  et conditionnellement à  $U_k$  ont une loi de Bernoulli. On peut même imaginer un modèle avec une dépendance entre  $B_k^p$  et  $B_k^c$ . Cette dépendance caractériserait la capacité de l'équipe de maintenance à évaluer l'efficacité de leurs opérations de maintenance. A la limite en prenant  $B_k^p = B_k^c$  pour tout  $k \geq 1$  on retrouve le modèle précédent. Au vu des résultats de Bedford et Lindqvist [6], et Langseth et Lindqvist [45], il y a tout lieu d'espérer que, sous certaines conditions à déterminer, le modèle soit identifiable, y compris en ce qui concerne la dépendance entre les variables de risques, c'est à dire la fonction  $S(., .)$ .



---

# *Etude d'un jeu de données EDF*

---

Nous avons eu l'occasion de tester les modèles du chapitre 6 sur des données réelles provenant d'un composant d'une unité de production électrique sensé être maintenu préventivement à des instants déterministes. Cette étude, accompagnée d'une analyse bibliographique des modèles d'efficacité de maintenance [26], fait partie d'un contrat de collaboration réalisé dans le cadre de cette thèse entre EDF et le LMC.

## 8.1 Les données

La base de données du système étudié contient, pour 17 unités, les informations suivantes :

- La date de mise en fonctionnement
- Les dates des maintenances effectuées
- Le type de ces maintenances (MP ou MC)
- Les actions effectuées sur le système

En accord avec EDF, deux hypothèses ont été faites sur ces données afin de pouvoir les analyser :

- La date de fin d'observation correspond à une date de censure à droite pour chaque unité.
- Les processus de défaillance et maintenance des 17 unités sont supposés indépendants et de même loi.

On a donc en tout 28 maintenances, 16 préventives et 12 correctives. Les données se présentent sous la forme du tableau 8.1. Les durées sont mesurées en jours à partir de la date de mise en fonctionnement. Elles ont été analysées et validées dans le cadre de la démarche OMF.

## 8.2 Etude des données

### 8.2.1 Prise en compte de l'échantillon complet

Dans un premier temps nous avons considéré le modèle le plus simple permettant de prendre en compte des effets de MP et MC :

- L'intensité initiale est une fonction puissance de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  :  $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ . Cela signifie que le vieillissement intrinsèque du système en l'absence de maintenance est de type Weibull.
- Les maintenances correctives sont As Bad As Old : on ne fait que remettre le système en état de marche après une défaillance.
- Les maintenances préventives sont du type  $ARA_1$ , avec un facteur d'efficacité  $\rho$ .

UNITE 1	2145 MP	4582 Censure			
UNITE 2	853 MP	4368 Censure			
UNITE 3	158 MC	1942 MP	5009 Censure		
UNITE 4	311 MP	3273 Censure			
UNITE 5	4120 MC	5040 Censure			
UNITE 6	2689 MP	4643 Censure			
UNITE 7	4394 MP	5739 Censure			
UNITE 8	2602 MC	5130 Censure			
UNITE 9	1462 MP	2259 MC	5040 Censure		
UNITE 10	1667 MC	2073 MP	3607 Censure		
UNITE 11	788 MP	1090 MC	1207 MC	1705 MP	2483 Censure
UNITE 12	82 MC	2921 MP	4454 MC	4703 Censure	
UNITE 13	3011 MC	3559 MP	4248 Censure		
UNITE 14	3528 MP	5433 Censure			
UNITE 15	201 MP	298 MP	2008 MC	2968 Censure	
UNITE 16	321 MC	5344 Censure			
UNITE 17	742 MP	6348 Censure			

TAB. 8.1 – *Données initiales.*

L'intensité de défaillance du système est alors donnée par (6.81) et la vraisemblance associée à un unique système peut être calculée à l'aide de la propriété 6.2.3 avec une politique de MP à dates fixées (6.80). Puisque les différentes unités sont supposées indépendantes, la vraisemblance globale est obtenue en multipliant les vraisemblances associées à chacune des 17 unités. En maximisant cette vraisemblance on obtient comme estimations des paramètres :

$$\hat{\alpha} = 0.0018, \quad \hat{\beta} = 0.7013, \quad \hat{\rho} = 0.5683 \quad (8.1)$$

L'estimation de  $\beta$  est inférieure à 1. Or une valeur de  $\beta$  inférieure à 1 signifie que l'intensité de défaillance initiale est décroissante, donc que le système a tendance à s'améliorer au cours du temps, même en l'absence de maintenance ! Dans ces conditions, il faut reconsidérer l'interprétation de la valeur de  $\rho$  en terme d'efficacité de maintenance, car le modèle avait été construit sous l'hypothèse d'une intensité de défaillance initiale croissante. Quand l'intensité initiale est décroissante, on peut montrer que l'on a :

- $0 \leq \rho \leq 1$  : maintenance nuisible, le système s'use plus vite que juste avant la défaillance,
- $\rho = 0$  : maintenance minimale (ABAO), l'usure est la même que juste avant la maintenance,
- $\rho < 0$  : maintenance plus que parfaite, le système est meilleur que neuf, son intensité de défaillance est plus faible que juste avant la maintenance.

La figure 8.1 représente une trajectoire simulée de l'intensité de défaillance d'un modèle  $ARA_1$  avec comme paramètres les valeurs estimées en (8.1). L'effet de la maintenance préventive est donc bien considéré comme nuisible.

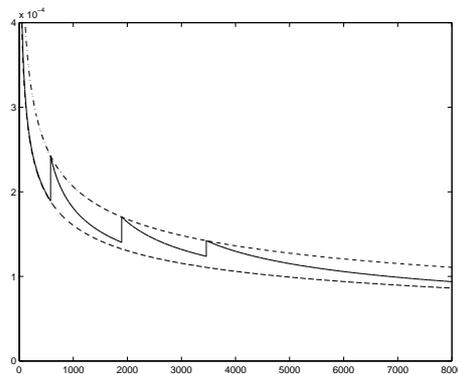


FIG. 8.1 – Intensité dans un modèle  $ARA_1$  avec  $\beta < 1$  et  $0 < \rho < 1$

Pour confirmer le fait que  $\beta$  est inférieur à 1, nous avons analysé pour chaque unité uniquement la durée jusqu'à la première maintenance. Ce devrait être, au vu des hypothèses, un échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Weibull de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , puisque  $\rho$  n'intervient pas tant que la première maintenance n'est pas effectuée. Quand la maintenance est corrective, la donnée est observée. Quand elle est préventive, la donnée est censurée. Les dates de censure sont déterministes puisque les instants de MP sont supposés déterministes. On obtient ainsi 7 durées de bon fonctionnement avant défaillance :

158, 4120, 2602, 1667, 82, 3011, 321

et 10 durées de bon fonctionnement censurées :

2145, 853, 311, 2689, 4394, 1462, 788, 3528, 201, 742

Les estimations de maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Weibull sont alors :

$$\hat{\alpha} = 0.0004, \quad \hat{\beta} = 0.93 \quad (8.2)$$

Il est logique de trouver des valeurs différentes des précédentes car on a supprimé une bonne partie des données. Le point important est de trouver une valeur de  $\beta$  inférieure à 1.

On peut encore le vérifier en traçant pour ces données un graphe de Weibull (test d'adéquation graphique à la loi de Weibull, figure 8.2). On rappelle que la loi de Weibull peut être considérée comme un modèle adéquat si les points de ce graphique sont approximativement alignés. L'équation de la droite fournit des estimations graphiques de  $\alpha$  et  $\beta$ .

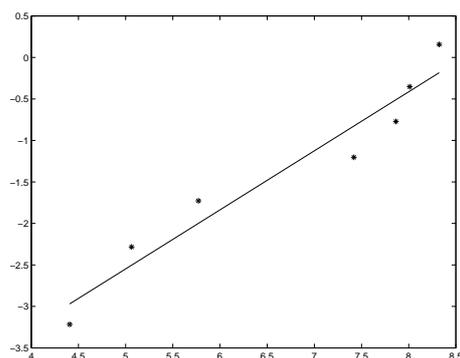


FIG. 8.2 – Graphe de Weibull pour les premiers instants de maintenance

Les points ne sont pas suffisamment alignés pour qu'on puisse avoir une forte confiance dans le fait que les données sont de loi de Weibull. Les estimations graphiques sont :

$$\tilde{\alpha} = 0.0022, \quad \tilde{\beta} = 0.71 \quad (8.3)$$

Là encore, l'estimation du paramètre de forme est inférieure à 1.

Des modèles plus élaborés donnent les résultats suivants :

- Les MC sont ABAO et les MP sont  $ARA_{\infty}$  (l'intensité de défaillance est donnée par l'équation (6.82)). On trouve :

$$\hat{\alpha} = 0.0018, \quad \hat{\beta} = 0.7038, \quad \hat{\rho} = 0.5351 \quad (8.4)$$

Ce sont pratiquement les mêmes valeurs que pour le modèle précédent. C'est qu'on a très peu de MP sur une même unité, donc tous les modèles  $ARA_m$  donneront en fait le même résultat quel que soit  $m$ .

- Les MC sont  $ARA_{\infty}$  et les MP sont  $ARA_{\infty}$  avec des facteurs d'efficacité de maintenance différents  $\rho_p$  et  $\rho_c$ . La forme de l'intensité de défaillance (équation (6.50)) est complexe et donc la vraisemblance l'est encore plus. De fait, la maximisation de cette vraisemblance pose problème car il existe des maxima locaux. Les estimations trouvées sont :

$$\hat{\alpha} = 0.0012, \quad \hat{\beta} = 0.776, \quad \hat{\rho}_c = -366, \quad \hat{\rho}_p = 0.8 \quad (8.5)$$

De telles valeurs des paramètres conduisent à des intensités de défaillance similaires aux figures 8.3, obtenues par simulations. Dans la première de ces deux figures, le système subit d'abord une MP puis une MC. Dans la deuxième c'est l'inverse.

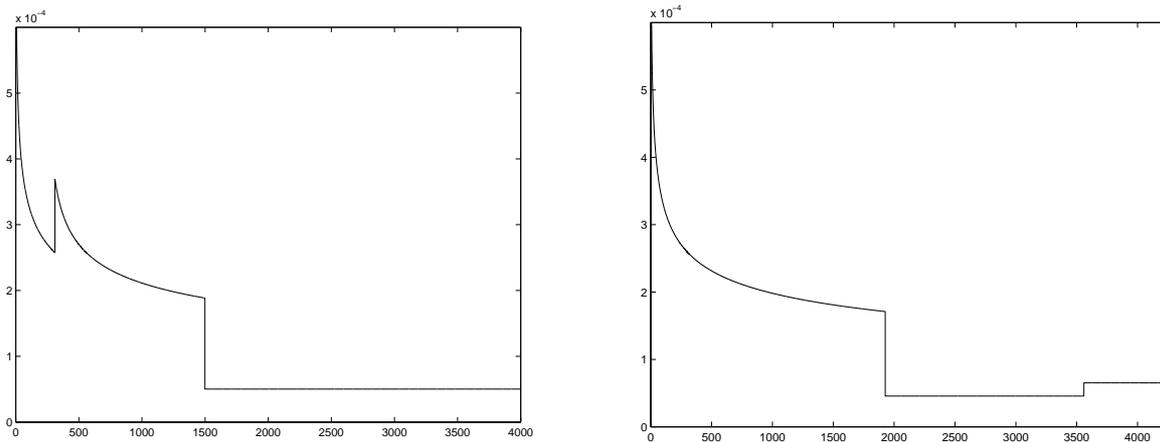


FIG. 8.3 – Intensité de défaillance pour un modèle  $ARA_{\infty}$  sur les MP et les MC

Sur ces courbes on remarque que les MP diminuent la fiabilité du système, alors que les MC l'augmentent et rendent le système meilleur que neuf. De plus, à cause de la valeur très fortement négative de  $\rho_c$ , l'intensité devient pratiquement constante après la première MC. Ces résultats sont vraiment contraires à l'intuition.

Cette première partie de l'étude sur l'ensemble des données aboutit donc à la conclusion que l'intensité de défaillance initiale est décroissante et que l'effet des premières maintenances correctives est de rendre le système meilleur que neuf. Ce comportement est caractéristique de la période de jeunesse (ou rodage, déverminage) du système. Des fautes de conception provoquent des défaillances précoces du système, la correction de ces défauts rend le système meilleur que neuf et sa fiabilité augmente.

En regardant les données, on se rend compte qu'il est vraisemblable que l'on soit dans ce cas. Par exemple, pour les unités 3, 12 et 17, on a des défaillances très précoces suivies de longues périodes sans problèmes. De plus, le graphe de Weibull des premiers instants de maintenance (figure 8.2) tend à confirmer cette hypothèse. Sur celui-ci, on distingue nettement deux populations : une constituée des trois premières défaillances (qui correspondent aux trois défaillances précoces, survenues dans les 400 premiers jours de fonctionnement) et une autre constituée des 4 dernières défaillances (qui ont toutes lieu au delà du millièmme jour de fonctionnement).

### 8.2.2 Suppression de la période de jeunesse

L'expert EDF a confirmé l'existence d'une période de jeunesse du système. Pour éliminer l'effet perturbateur de la période de jeunesse, il nous a conseillé de supprimer de l'analyse toutes les maintenances ayant eu lieu avant le millièmme jour de fonctionnement, tout en conservant l'origine des temps à la mise en route du système. En effet, les maintenances effectuées pendant le déverminage ont normalement pour effet d'éliminer de façon localisée les défauts de jeunesse sans changer le niveau global d'usure du système. Les données résultantes sont présentées dans le tableau 8.2. Il ne reste plus que 19 maintenances, 10 préventives et 9 correctives.

Sur ce nouveau jeu de données, nous avons dans un premier temps vérifié que l'intensité initiale était bien croissante. Comme cela a été expliqué précédemment, on analyse d'abord les durées jusqu'à la première maintenance. Les estimations de maximum de vraisemblance des paramètres de la loi de Weibull sont maintenant :

$$\hat{\alpha} = 2 \cdot 10^{-7}, \quad \hat{\beta} = 1.77 \quad (8.6)$$

L'estimation de  $\beta$  est supérieure à 1, ce qui confirme qu'après la période de jeunesse, le

UNITE 1	2145 MP	4582 Censure		
UNITE 2	4368 Censure			
UNITE 3	1942 MP	5009 Censure		
UNITE 4	3273 Censure			
UNITE 5	4120 MC	5040 Censure		
UNITE 6	2689 MP	4643 Censure		
UNITE 7	4394 MP	5739 Censure		
UNITE 8	2602 MC	5130 Censure		
UNITE 9	1462 MP	2259 MC	5040 Censure	
UNITE 10	1667 MC	2073 MP	3607 Censure	
UNITE 11	1090 MC	1207 MC	1705 MP	2483 Censure
UNITE 12	2921 MP	4454 MC	4703 Censure	
UNITE 13	3011 MC	3559 MP	4248 Censure	
UNITE 14	3528 MP	5433 Censure		
UNITE 15	2008 MC	2968 Censure		
UNITE 16	5344 Censure			
UNITE 17	6348 Censure			

TAB. 8.2 – Données sans les maintenances de la période de jeunesse.

système s'use bien. L'estimation de  $\alpha$  a elle aussi été fortement modifiée puisqu'on est passé de  $4 \cdot 10^{-4}$  à  $2 \cdot 10^{-7}$ .

En traçant le graphe de Weibull (figure 8.4) correspondant, on constate que les points sont maintenant bien mieux alignés. L'hypothèse que l'intensité initiale soit une fonction puissance semble donc bien adaptée. Les estimations graphiques des paramètres sont :

$$\hat{\alpha} = 2.6 \cdot 10^{-8}, \quad \hat{\beta} = 2.05 \quad (8.7)$$

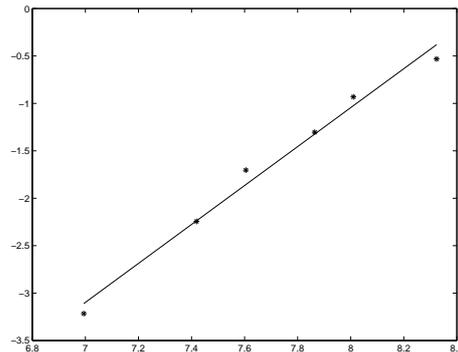


FIG. 8.4 – Graphe de Weibull pour les premiers instants de maintenance sans la période de jeunesse

En ayant éliminé la période de jeunesse, on retombe bien sur une intensité de défaillance initiale croissante. On se retrouve alors dans le cadre de modélisation étudié dans ce rapport et on peut utiliser correctement les modèles présentés sur l'ensemble des données du tableau 8.2.

Nous avons considéré plusieurs modèles :

- Les MC sont ABAO et les MP  $ARA_m$ . Etant donné qu'on n'observe jamais plus de deux MP sur le même système, les modèles ARA pour les MP sont tous équivalents quelle que soit la mémoire. On obtient comme estimations de maximum de vraisemblance :

$$\hat{\alpha} = 3.5 \cdot 10^{-6}, \quad \hat{\beta} = 1.43, \quad \hat{\rho} = 1 \quad (8.8)$$

Dans ce modèle, la maintenance préventive est estimée parfaite. En fait, les modèles  $ARA_m$  ne permettent pas de modéliser des maintenances plus que parfaites, c'est-à-dire rendant le système meilleur que neuf (excepté, on l'a vu, quand  $\beta < 1$ , ce qui n'est pas le cas ici). Or la forme de la vraisemblance (figure 8.5) laisse supposer qu'elle pourrait être maximale pour une valeur de  $\rho$  supérieure à 1.

Pour savoir si la maintenance est "simplement" parfaite ou bien si elle est plus que parfaite, il serait intéressant de modéliser l'effet des MP avec un modèle permettant ce type d'hypothèse. C'est le cas des modèles de Quasi-Renouvellement. De plus, on pourrait prendre en compte des intensités initiales avec des périodes de jeunesse (courbe en baignoire pour l'intensité initiale). L'inconvénient des modèles QR est, comme nous l'avons déjà souligné, que leur interprétation est moins évidente que les modèles d'âge virtuel. C'est pourquoi ils n'ont pas été choisis dans le cadre de cette étude.

- Les MC et les MP sont  $ARA_1$  avec le même facteur d'efficacité de maintenance. On obtient :

$$\hat{\alpha} = 4.16 \cdot 10^{-6}, \quad \hat{\beta} = 1.40, \quad \hat{\rho} = 0.56 \quad (8.9)$$

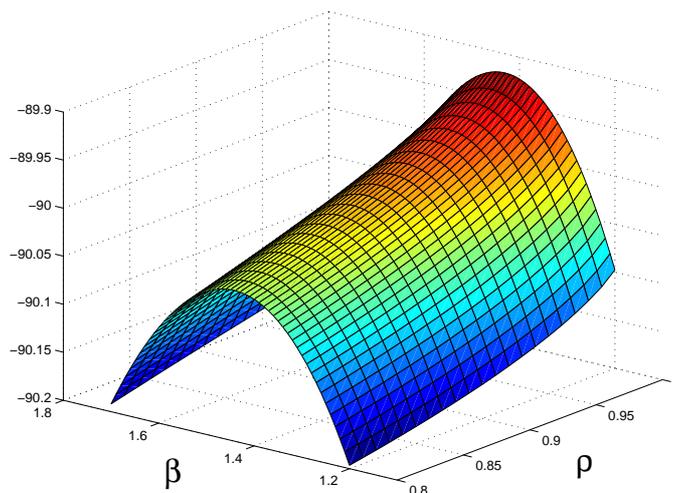


FIG. 8.5 – Log-vraisemblance avec des MP  $ARA_m$  et des MC ABAO, pour les données du tableau 8.2

On estime donc que les maintenances, qu'elles soient préventives ou correctives, ont pour effet de réduire approximativement de 50% le supplément d'âge accumulé depuis la dernière maintenance.

- Les MC et les MP sont  $ARA_\infty$  avec des facteurs d'efficacité de maintenance différents  $\rho_p$  et  $\rho_c$ . Les estimations trouvées sont :

$$\hat{\alpha} = 3.24 \cdot 10^{-6}, \quad \hat{\beta} = 1.44, \quad \hat{\rho}_c = 0.16, \quad \hat{\rho}_p = 1 \quad (8.10)$$

La maintenance préventive est estimée parfaite (comme précédemment, elle est peut-être plus que parfaite, mais le modèle ne permet pas de s'en rendre compte), et la maintenance corrective semble n'avoir que peu d'effet sur le système en réduisant simplement l'âge virtuel global de 16%. On n'est pas loin de considérer que les maintenances correctives sont minimales. Ce résultat semble cohérent avec ce qu'on s'attend à observer.

Les intensités de défaillance avec les paramètres estimés sont semblables aux figures 8.6, obtenues par simulation. Dans la première de ces deux figures, le système subit d'abord une MP puis une MC. Dans la deuxième c'est l'inverse.

Pour tous ces derniers modèles, les estimations de  $\alpha$  et  $\beta$  sont du même ordre, ce qui signifie qu'on peut avoir une bonne confiance dans ces valeurs. On constate que l'estimation de  $\beta$  est comprise entre 1 et 2, ce qui signifie que l'intensité initiale est concave, comme on peut le voir sur les figures 8.6. Cela signifie qu'indépendamment des maintenances, le système s'use, mais s'use de moins en moins vite. Ce phénomène, bien que surprenant, est fréquemment rencontré dans la pratique [67], par exemple dans les phénomènes de fatigue.

Quand on a supposé que les effets des MC et des MP étaient les mêmes,  $\rho$  a été estimé à 0.56. En fait cette valeur est une sorte de moyenne entre les valeurs 0.16 et (plus grand que) 1 trouvées dans le cas suivant.

### 8.3 Conclusion et perspectives de l'étude des données

L'analyse des données a tout d'abord mis en évidence l'existence d'une période de jeunesse pour le système. Les modèles sur lesquels a porté notre étude font l'hypothèse d'une intensité

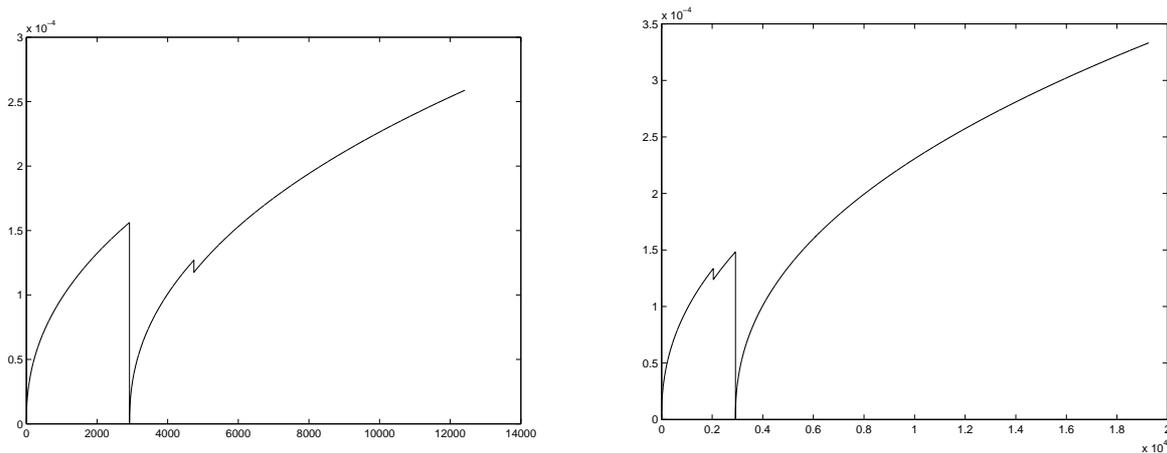


FIG. 8.6 – Intensité de défaillance pour un modèle  $ARA_{\infty}$  sur les MP et les MC, sans la période de jeunesse

de défaillance initiale croissante, donc ils ne peuvent pas prendre en compte le déverminage. Par conséquent, il serait intéressant de construire des modèles adaptés à cette situation, par exemple avec une intensité initiale en forme de baignoire.

Si on élimine la période de jeunesse, on a montré que la loi de Weibull semble bien adaptée pour l'intensité initiale. Le paramètre de forme est de l'ordre de 1.4. Le paramètre d'échelle est de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-6}$ . Les maintenances préventives sont jugées parfaites, voire plus que parfaites. Les maintenances correctives sont jugées un peu meilleures que minimales. Ces valeurs numériques sont en accord avec l'intuition et peuvent être utilisées pour réactualiser l'OMF, en particulier pour sélectionner les tâches de maintenance et leur périodicité.

L'hypothèse que les maintenances préventives ont été effectuées à des instants déterministes semble douteuse. En effet, au vu des données, on a plutôt l'impression que ces maintenances sont faites à des instants aléatoires. Malgré tout, les résultats de l'analyse effectuée semblent cohérents avec l'intuition. Peut-être est ce dû au fait que les MP sont en fait planifiées. En effet, on a montré que la vraisemblance et la loi des observations avaient la même expression dans les deux cas. L'unique différence est que l'on doit normalement s'assurer dans le cadre de MP planifiées que le plan de MP est bien respecté.

L'étude de ces données à l'aide des modèles de maintenance imparfaite a été poursuivie par Yann Dijoux, dans le cadre d'un stage de DEA [21]. Il s'est principalement intéressé aux modèles de MP conditionnelles. Fort de la constatation qu'il était peu vraisemblable que les MP soient faites à des instants déterministes, il a supposé que les données suivaient un modèle bivarié avec des effets de maintenance de type  $ARA_1$ , dont les intensités sont données par les équations (7.71) et (7.72). Il a pris pour intensités initiales celles issues des hypothèses proposées par Langseth et Lindqvist (7.79) et (7.80), avec une fonction puissance pour le taux de défaillance de  $\lambda_Z$ . La fonction de vraisemblance est alors donnée par la propriété 7.1.4. Dans ces conditions, les estimateurs de maximum de vraisemblance pour les données sans la période de jeunesse sont :

$$\hat{\alpha} = 5 \cdot 10^{-7}, \quad \hat{\beta} = 1.70, \quad \hat{\rho}_c = 0.03, \quad \hat{\rho}_p = 0.99, \quad \hat{q} = 0.47 \quad (8.11)$$

On constate qu'on obtient les mêmes ordres de grandeur pour  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\rho}_c$  et  $\hat{\rho}_p$  qu'avec les hypothèses précédemment faites de MP à dates fixées. En fait, dans les deux cas,  $\alpha$  et  $\beta$  ont la même signification : ils représentent les paramètres du taux de défaillance du système en l'absence de maintenance. Par contre la structure de dépendance entre les dates possibles de MP et de MC n'est pas du tout la même selon le type de MP, c'est pourquoi il est étonnant d'obtenir des valeurs comparables. Quand à  $\hat{q}$ , il représente la probabilité qu'une maintenance soit préventive plutôt

que corrective, c'est-à-dire plus ou moins la proportion de maintenances préventives par rapport au nombre total de maintenances. Pour continuer l'étude de ce jeu de données, on peut envisager entre autres de mettre en œuvre des méthodes numériques permettant d'estimer, à l'aide de la vraisemblance (7.102), les paramètres d'un modèle bivarié avec des effets de maintenance de type BP.

---

## *Conclusion de la deuxième partie*

---

Dans cette deuxième partie on a tout d'abord généralisé les modèles de réparation imparfaite au cas de systèmes soumis à des maintenances correctives et préventives. On a, de plus, étudié l'ensemble des types de maintenances préventives auquel on peut être confronté : MP planifiées, et conditionnelles.

Dans le cas de MP planifiées, on a déterminé la loi du processus des MP et MC, la loi des temps inter-défaillances et la fonction de vraisemblance. On a ainsi prouvé que, dans ce cas, la date planifiée de MP s'apparentait à un instant de censure à droite déterministe du processus des défaillances. L'ensemble des résultats et remarques faits dans le cas de MP planifiées se généralisent au cas où un processus externe aléatoire influence l'efficacité des maintenances, et cela grâce au théorème d'innovation. Dans le cas d'effets de maintenances de type BP, on a ainsi pu calculer les valeurs de l'intensité de défaillance propre et de la vraisemblance propre associées cette fois à la seule observation du processus des MP et MC. La forme de cette intensité et de cette vraisemblance est encore une fois récursive. Enfin on a expliqué le lien entre notre modélisation des MP planifiées et le modèle proposé par Last et Szekli. On a par là même montré comment notre modèle pouvait intégrer les politiques de MP classiques : à dates fixées, à âge fixé et à intensité fixée.

Dans le cas de MP conditionnelles, on a proposé une modélisation basée sur les processus bivariés ou colorés. On a montré que cette approche généralise celle basée sur les risques concurrents. Contrairement aux risques concurrents, les processus bivariés ou colorés permettent de prendre en compte à la fois des effets de maintenance et des dépendances entre les instants possibles de MP et MC. Le modèle récemment proposé par Langseth et Lindqvist est lui aussi un cas particulier de notre modélisation avec des effets de maintenance de type BP. Pour ce modèle, et encore une fois grâce au théorème d'innovation, on a pu calculer les intensités propres et la vraisemblance propre correspondant à la seule observation du processus des MP et MC. Dans le cas d'effets symétriques des maintenances sur les dates possibles de MP et de MC, on a démontré que, comme pour les risques concurrents, le fait qu'il y ait indépendance ou non entre les variables de risques de MP et de MC n'était pas identifiable. Pour répondre à ce problème deux solutions ont été envisagées. La première consiste à faire des hypothèses plus strictes sur la dépendance entre les variables de risques, afin d'avoir un modèle identifiable. La deuxième solution consisterait à construire un modèle dans lequel l'effet des maintenances sur les variables de risques ne soit pas symétrique.

Enfin, l'application des modèles aux données EDF a mis en évidence la nécessité de modèles prenant en compte des MP à instants aléatoires. Pour le système étudié, les dates de MP semblent aléatoires alors qu'elles sont considérées comme déterministes par l'exploitant. L'analyse faite du jeu de données a également mis en évidence la nécessité de modèles pouvant prendre en compte des taux de défaillance en l'absence de maintenance décroissants, voire mieux encore, en forme de baignoire. Enfin, l'homogénéité des résultats trouvés avec des hypothèses totalement différentes sur les MP a mis en évidence la nécessité de pousser plus loin l'étude afin de mieux comprendre la notion de dépendance entre les instants possibles de la prochaine MP et de la prochaine MC.



---

# *Perspectives*

---

Ce travail constitue une contribution à la fois théorique et pratique des mathématiques appliquées au domaine de la fiabilité des systèmes. Il porte sur la modélisation du processus des défaillances de systèmes réparables soumis à des maintenances correctives et préventives, dans le but d'estimer l'impact de ces actions sur la durée de vie.

Fort de la constatation que peu de travaux se sont intéressés à l'évaluation de l'efficacité des maintenances, nous avons développé des modèles généraux permettant d'estimer cette efficacité pour l'ensemble des types de MP rencontrées en pratique : MP planifiées et MP conditionnelles. Ces modèles permettent également de prendre en compte une dépendance entre les instants possibles de MP et de MC.

Les principaux résultats développés dans chacune des deux parties de ce document ouvrent la voie à de nouvelles investigations.

Tout d'abord, en ce qui concerne la modélisation de systèmes soumis à des maintenances uniquement correctives, on a introduit deux classes de modèles, ARI et ARA, et étudié quelques estimateurs de l'efficacité de réparation quand l'usure du système en l'absence de maintenance était connue. Pour un comportement du système en l'absence de maintenance de type Weibull, il faudrait maintenant s'intéresser aux propriétés des estimateurs simultanés des paramètres d'efficacité de réparation et d'échelle, quand le paramètre de forme de la loi de Weibull est connu. De plus les résultats de convergence développés ne concernent jusqu'à présent que les modèles de mémoire finie. Il serait intéressant d'étudier ce qui se passe pour des modèles de mémoire infinie.

Pour les modèles de réparation imparfaite de type BP, on a développé une méthode, basée sur le théorème d'innovation, permettant d'estimer les paramètres du modèle sans connaître a priori l'effet des maintenances. Il faudrait mettre en œuvre cette méthode et comparer ces performances avec celle proposée par Lim [52]. Toujours pour le modèle BP, on a trouvé un certain nombre de résultats basés sur la loi des âges effectifs et démontrant que dans un modèle BP la maintenance avait tendance à stabiliser l'usure du système. Une perspective intéressante consisterait à appliquer ces résultats au cas de systèmes soumis également à des maintenances préventives.

Ensuite, en ce qui concerne la modélisation de système soumis à des maintenances préventives et correctives, on a introduit un cadre de modélisation pour les MP planifiées. Dans ce cadre on a spécifié la fonction de vraisemblance pour des modèles dont l'efficacité de maintenance dépend ou non d'une variable aléatoire externe. On s'est intéressé en particulier au cas du modèle BP. Il faudrait maintenant mettre en œuvre cette méthode d'estimation sur des cas pratiques. On a également mis en évidence le lien existant entre notre modélisation et celle proposée par Last et Szekli [47]. Par contre, nous n'avons pas étudié quelles sont les modifications induites sur la loi des observations et sur les procédures d'estimation par le passage de notre modèle au cas plus général de celui de Last et Szekli. Il serait également intéressant d'étudier comment les

propriétés statistiques asymptotiques développées pour les modèles ARI et ARA, dans le cadre de maintenances uniquement correctives, se généralisent au cas de MP planifiées.

Enfin on a introduit un dernier modèle général correspondant au cas de MP conditionnelles. Pour ce modèle, on a caractérisé la loi des observations et calculé la fonction de vraisemblance, y compris pour le cas des modèles BP. L'étape suivante est bien entendu de mettre en œuvre cette procédure d'estimation, devenue complexe dans le cas des modèles BP. Le lien que nous avons fait avec les modèles de risques concurrents a mis en évidence un problème d'identifiabilité sur le fait qu'il y ait indépendance ou non entre les risques de MP et de MC. Deux pistes sont à creuser pour répondre à ce problème. D'abord, mieux comprendre la signification de cette dépendance et proposer des hypothèses réalistes permettant de construire des modèles de dépendance identifiables. Ensuite, construire et étudier un nouveau type de modèles dans lequel l'effet des maintenances sur la loi des dates de chacun des types de maintenance ne soit pas le même. Enfin, comme pour les MP planifiées, il faudrait s'intéresser à la généralisation des propriétés statistiques asymptotiques des modèles ARI et ARA.

L'application faites sur les données fournies par EDF a elle aussi fait naître de nouvelles pistes de recherche. Tout d'abord, il semble intéressant de proposer de nouveaux modèles, ou d'adapter des modèles existants, afin de pouvoir prendre en compte des taux de défaillance du système en l'absence de maintenance, en forme de baignoire, c'est à dire intégrant une période de jeunesse. Ensuite, cette application, par ses résultats, stimule d'autant plus notre intérêt pour une meilleure compréhension des phénomènes de dépendance entre les dates possibles de MP et MC. Enfin, suite aux discussions avec nos partenaires d'EDF, il semblerait intéressant de pouvoir modéliser des systèmes soumis à des inspections. En pratique, de nombreux systèmes sont inspectés à des dates quasiment périodiques. Selon l'état de dégradation constaté lors de cette visite, l'équipe de maintenance décide ou non d'intervenir. Notre modélisation ne permet pas, dans sa forme actuelle, d'intégrer l'information contenue dans l'état de dégradation constaté et le fait que l'inspection aboutisse ou pas à une intervention. Des modèles pouvant prendre en compte ce type d'inspection permettraient sans doute de mieux estimer l'efficacité des maintenances.

---

# Bibliographie

---

1. AFNOR 2001. « *Terminologie de la maintenance (NF EN 13306)* », Juin 2001. Norme européenne.
2. M.Z.N. AGUSTIN et E.A. PEÑA. « Order statistics properties, random generation, and goodness-of-fit testing for a minimal repair model ». *Journal of the American Statistical Association*, 94(445):266–272, 1999.
3. P.K. ANDERSEN, O. BORGAN, R.D. GILL, et N. KEIDING. *Statistical models based on counting processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, 1993.
4. H. ASHER et H. FEINGOLD. *Repairable system reliability - modeling, inference, misconceptions and their causes*. Marcel Dekker, 1984.
5. L. BAXTER, M. KIJIMA, et M. TORTORELLA. « A point process model for the reliability of a maintained system subject to general repair ». *Communications in Statistics*, 12(1):37–65, 1996.
6. T. BEDFORD et B.H. LINDQVIST. « The identifiability problem for repairable systems subject to competing risks ». *Advances in Applied Probability*, 2004. A paraître (<http://www.math.ntnu.no/~bo/forskning/Bedford.Lindqvist.pdf>).
7. T. BEDFORD et C. MESINA. « The impact of modeling assumptions on maintenance optimization ». Dans *Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability (MMR 2000)*, Bordeaux, pages 171–174, 2000.
8. H.W. BLOCK, W.S. BORGES, et T.H. SAVITS. « Age-dependent minimal repair ». *Journal of Applied Probability*, 22:370–385, 1985.
9. P. BRÉMAUD. *Point processes and queues: Martingale Dynamics*. Springer-Verlag, 1981.
10. J.F. BROWN, J.F. MAHONEY, et B.D. SIVALZIAN. « Hysteresis repair in discounted replacement problems ». *IIE Transactions*, 15(2):156–165, 1983.
11. M. BROWN et F. PROSCHAN. « Imperfect repair ». *Journal of Applied Probability*, 20:851–859, 1983.
12. C. BUNEA et T. BEDFORD. « The effect of model uncertainty on maintenance optimization ». *IEEE Transactions on Reliability*, 51(4):486–493, 2002.
13. R.V. CANFIELD. « Cost optimisation of periodic preventive maintenance ». *IEEE Transactions on Reliability*, 35(1):78–81, 1986.
14. J.K. CHAN et L. SHAW. « Modeling repairable systems with failure rates that depend on age and maintenance ». *IEEE Transactions on Reliability*, 42(4):566–571, 1993.

15. C.A. CLAROTTI, A. LANNOY, H. PROCACCIA, et B. VILLAIN. « ARCS - Outil logiciel pour la qualification de l'effet de la maintenance sur la durée de vie ». Dans *Proceedings Conf. European Safety and reliability conference ( $\lambda\mu 9$ )*, La Baule, pages 610–618, 1994.
16. C. COCOZZA-THIVENT. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*. Springer, 1997.
17. R. COOKE. « The design of reliability data bases, Part I and II ». *Reliability Engineering and System Safety*, 51:137–146 and 209–223, 1996.
18. R. COOKE et T. BEDFORD. « Reliability databases in perspective ». *IEEE Transactions on Reliability*, 51(3):294–310, 2002.
19. D. DACUNHA-CASTELLE et M. DUFLO. *Probabilités et statistiques, 2. Problèmes à temps mobile*. Masson, 1993. Deuxième édition.
20. J.S. DAGPUNAR et N. JACK. « Preventative maintenance strategy for equipment under warranty ». *Microelectronics and Reliability*, 34(6):1089–1093, 1994.
21. Y. DIJOUX. « Evaluation simultanée des efficacités des maintenances préventives et correctives de systèmes réparables ». Rapport de DEA, Université Joseph Fourier, 2004.
22. C. DORADO, M. HOLLANDER, et J. SETHURAMAN. « Nonparametric estimation for a general repair model ». *The Annals of Statistics*, 25(3):1140–1160, 1997.
23. L. DOYEN. « Estimation of Maintenance Efficiency in Imperfect Repair Models ». Dans *Mathematical Methods in Reliability (MMR 2004)*, Santa Fe, 2004.
24. L. DOYEN et O. GAUDOIN. Stochastic modelling of the joint effect of preventive and corrective maintenance on repairable systems reliability. Dans K. DOKSUM et B.H. LINDQVIST, éditeurs, *Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Quality, Reliability and Engineering Statistics*, pages 371–385. World Scientific Publishing Co, 2003.
25. L. DOYEN et O. GAUDOIN. « Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age ». *Reliability Engineering and System Safety*, 84(1):45–56, 2004.
26. L. DOYEN et O. GAUDOIN. « Modélisation de l'efficacité de la maintenance des systèmes réparables - Synthèse bibliographique ». Rapport du contrat T50L47/F00555/0 entre EDF et le LMC, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004. (<http://www-lmc.imag.fr/SMS/ftp/DoyGau04a.pdf>).
27. J.T. DUANE. « Learning curve approach to reliability monitoring ». *IEEE Transactions on Aerospace*, 2(2):563–566, 1964.
28. P. EMBRECHTS, C. KLÜPPELBERG, et T. MIKOSCH. *Modelling extremal events*. Springer, 1997.
29. R.A. FONTENOT et F. PROSCHAN. Some imperfect maintenance models. Dans Abdel-Hameed M. et AL, éditeur, *Reliability Theory and Models*, pages 83–101. Academic Press, 1984.
30. S. GASMI et W. KAHLE. Parameter estimation in renewal processes with imperfect repair. Dans W. KAHLE, E.V. COLLANI, J. FRANZ, et U. JENSEN, éditeurs, *Advances in Stochastic Models for Reliability, Quality and Safety*, pages 53–66. Birkhauser, 1998.

31. S. GASMI, C.E. LOVE, et W. KAHLE. « A general repair, proportional-hazards, framework to model complex repairable systems ». *IEEE Transactions on Reliability*, 52(1):26–32, 2003.
32. P. HOKSTAD et R. JENSEN. « Predicting the failure rate for components that go through a degradation state ». *Reliability Engineering and System Safety*, 53:389–396, 1998.
33. M. HOLLANDER, P. PRESNELL, et J. SETHURAMAN. « Nonparametric methods for imperfect repair models ». *The Annals of Statistics*, 20(2):879–896, 1992.
34. N. JACK. « Analysing event data from repairable machine subject to imperfect preventive maintenance ». *Quality and Reliability Engineering International*, 13:183–186, 1997.
35. N. JACK. « Age-reduction models for imperfect maintenance ». *IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry*, 9:347–354, 1998.
36. J.P. JACQUOT, A. DUBREUIL-CHAMBARDEL, A. LANNOY, et A. VILLEMEUR. « Optimisation de la maintenance par la fiabilité ». *Epure (revue publiée par EDF R&D)*, 44:23–31, 1994.
37. V. JAYABALAN et D. CHAUDHURI. « Optimal maintenance and replacement policy for a deteriorating system with increased mean downtime ». *Naval Research Logistics*, 39:67–78, 1992.
38. M.P. KAMINSKIY et V.V. KRIVTSOV. « G-renewal process as a model for statistical warranty claim prediction ». Dans *46<sup>ème</sup> Annual Reliability and Maintainability Symposium, Los Angeles*, pages 276–280, 2000.
39. J. KARAMATA. « Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. ». *Bulletin de la société mathématique de France*, 61:55–62, 1933.
40. M. KIJIMA. « Some results for repairable systems with general repair ». *Journal of Applied Probability*, 26:89–102, 1989.
41. M. KIJIMA, H. MORIMURA, et Y. SUZUKI. « Periodical replacement problem without assuming minimal repair ». *European Journal of Operational Research*, 37:194–203, 1988.
42. M. KIJIMA et T. NAKAGAWA. « A cumulative damage shock model with imperfect preventive maintenance ». *Naval Research Logistics*, 38:145–156, 1991.
43. P.H. KVAM, H. SINGH, et L.R. WHITAKER. « Estimating distributions with increasing failure rate in an imperfect repair model ». *Lifetime Data Analysis*, 8:53–67, 2002.
44. N. LANGBERG, F. PROSCHAN, et A.J. QUINZI. « Estimating dependent life lengths with applications to the theory of competing risks ». *The Annals of Statistics*, 9(1):157–167, 1981.
45. H. LANGSETH et B.H. LINDQVIST. A maintenance model for components exposed to several failure mechanisms and imperfect repair. Dans K. DOKSUM et B.H. LINDQVIST, éditeurs, *Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Quality, Reliability and Engineering Statistics*, pages 415–430. World Scientific Publishing Co, 2003.
46. G. LAST et R. SZEKLI. « Asymptotic and monotonicity properties of some repairable systems ». *Advances in Applied Probability*, 30:1089–1110, 1998.
47. G. LAST et R. SZEKLI. « Stochastic comparison of repairable systems by coupling ». *Journal of Applied Probability*, 35:348–370, 1998.

48. J.F. LAWLESS et K. THIAGARAJAH. « A point-process model incorporating renewals and time trends, with application to repairable systems ». *Technometrics*, 38(2):131–138, 1996.
49. J. LEMOINE et M. WENOCUR. « A note on shot-noise and reliability modeling ». *Operations Research*, 34(2):320–323, 1986.
50. C.H. LIE et Y.H. CHUN. « An algorithm for preventive maintenance policy ». *IEEE Transactions on Reliability*, 35(1):71–75, 1986.
51. J.H. LIM, K.L. LU, et D.H. PARK. « Bayesian imperfect repair model ». *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 27(4):965–984, 1998.
52. T.J. LIM. « Estimating system reliability with fully masked data under Brown-Proschan imperfect repair model ». *Reliability Engineering and System Safety*, 59:277–289, 1998.
53. D. LIN, M.J. ZUO, et R.C.M. YAM. « General sequential imperfect preventive maintenance models ». *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 7(3):253–266, 2000.
54. B. LINDQVIST. Statistical modeling and analysis of repairable systems. Dans D.C. IONESCU et N. LIMNIOS, éditeurs, *Statistical and probabilistic models in reliability*, pages 3–25. Birkhauser, 1999.
55. B.H. LINDQVIST, G. ELVEBAKK, et K. HEGGLAND. « The trend-renewal process for statistical analysis of repairable systems ». *Technometrics*, 45(1):31–44, 2003.
56. B. LITTLEWOOD et J. VERRAL. « A bayesian reliability growth model for computer software ». *Journal of the Royal Statistical Society - Series C*, 22:332–336, 1973.
57. M.A.K. MALIK. « Reliable preventive maintenance scheduling ». *AIIE Transactions*, 11(3):221–228, 1979.
58. T. NAKAGAWA. « Periodic and sequential preventive maintenance policies ». *Journal of Applied Probability*, 23:536–542, 1986.
59. T. NAKAGAWA. « Sequential imperfect preventive maintenance policies ». *IEEE Transactions on Reliability*, 37(3):295–298, 1988.
60. H. PHAM et H. WANG. « Imperfect maintenance ». *European Journal of Operational Research*, 94:452–438, 1996.
61. I.J. REHMERT. « *Availability analysis for the quasi-renewal process* ». PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2000.
62. S.E. RIGDON et A.P. BASU. *Statistical methods for the reliability of repairable systems*. Wiley, 2000.
63. G.J. SCHICK et R.W. WOLVERTON. « Assessment of software reliability ». Dans *Proceeding Operation Research*, pages 395–422, 1973.
64. M. SHAKED et R. SZEKLI. « Comparison of replacement policies via point processes ». *Advances in Applied Probability*, 27:1079–1103, 1995.

65. S.H. SHEU, C.M. KUO, et T. NAKAGAWA. « Extended optimal age replacement policy with minimal repair ». *RAIRO Recherche Opérationnelle*, 27(3):337–351, 1993.
66. I. SHIN, T.J. LIM, et C.H. LIE. « Estimating parameters of intensity function and maintenance effect for repairable unit ». *Reliability Engineering and System Safety*, 54:1–10, 1996.
67. J.P. SIGNORET. « La loi de Weibull aurait elle une face cachée? ». *Phoebus: La revue de la sûreté de fonctionnement*, 5:38–41, 1998.
68. D.L. SNYDER et M.I. MILLER. *Random point processes in time and space*. Springer, 1991.
69. W. STADJE et D. ZUCKERMAN. « Optimal maintenance strategies for repairable systems with general degree of repair ». *Journal of Applied Probability*, 28:384–396, 1991.
70. A. TSIATIS. « A non-identifiability aspect in the problem of competing risks ». *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 72:20–22, 1975.
71. H. WANG et H. PHAM. « Optimal maintenance policies for several imperfect repair models ». *International Journal of Systems Science*, 27(6):543–549, 1996.
72. H. WANG et H. PHAM. « A quasi renewal process and its application in imperfect maintenance ». *International Journal of Systems Science*, 27(10):1055–1062, 1996.
73. L.R. WHITAKER et F.J. SAMANIEGO. « Estimating the reliability of systems subject to imperfect repair ». *Journal of the American Statistical Association*, 84(405):301–309, 1989.
74. M. YAÑEZ, F. JOGLAR, et M. MODARRES. « Generalized renewal process for analysis of repairable systems with limited failure experience ». *Reliability Engineering and System Safety*, 77:167–180, 2002.
75. W.Y. YUN et S.J. CHOUNG. « Estimating maintenance effect and parameters of intensity function for improvement maintenance model ». Dans *5th. ISSAT Int. conf. reliability and quality in design, Las Vegas*, pages 164–166, 1999.





**Résumé :** Ce travail porte sur la modélisation stochastique et l'estimation paramétrique de l'efficacité des opérations de maintenance corrective et préventive des systèmes réparables complexes.

Dans une première partie, les modèles de réparation imparfaite sont classés à l'aide de l'intensité de défaillance d'un processus ponctuel. Cette revue regroupe les modèles existants et en propose de nouveaux. L'étude se focalise ensuite sur les modèles dits à réduction arithmétique de l'âge et de l'intensité, et sur le modèle de Brown-Prochan. Des résultats probabilistes originaux permettent de comprendre le comportement du processus des défaillances de ces modèles et de développer des méthodes statistiques d'estimation de leurs paramètres.

Dans une deuxième partie, deux cadres de modélisation sont proposés et étudiés, afin de généraliser ces modèles au cas des différents types de maintenances préventives existants dans la réalité industrielle : maintenances préventives systématiques, planifiées ou conditionnelles. Les modèles généraux proposés permettent d'intégrer la possibilité d'une dépendance entre les instants de maintenance préventive et corrective. Enfin une méthode d'évaluation de l'efficacité globale des différentes opérations de maintenance est développée et illustrée sur un exemple réel issu de l'industrie.

**Mots clés :** fiabilité, statistique, probabilités appliquées, processus aléatoires ponctuels, modélisation stochastique, maintenance imparfaite, réparation imparfaite.

**Abstract :** This work deals with stochastic modeling and parametric estimation of preventive and corrective maintenance efficiency for complex repairable systems.

In the first part, imperfect repair models are classified using the failure intensity of a random point process. This classification includes existing models and proposes new ones. Then, the work focuses on models called arithmetic reduction of age and intensity and on the Brown-Prochan model. New probabilistic results are proposed in order to better understand the behaviour of the failure process of these models and to develop statistical methods for parameters estimation.

In the second part, two modeling frameworks are proposed and studied in order to generalize these models to the various types of preventive maintenances existing in the industrial context: systematic, planned or conditional preventive maintenances. The general models proposed allow to include a possible dependency between preventive and corrective maintenance times. Finally, a method for assessing both global preventive and corrective maintenance efficiency is developed and illustrated on a realistic example issued from the industry.

**Keywords :** reliability, statistics, applied probability, random point processes, stochastic modelling, imperfect maintenance, imperfect repair.